

MARIANA ROSAS RIBEIRO

**Epsilon Teoria de
Pontos Fixos e Coincidências**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2021

MARIANA ROSAS RIBEIRO

Epsilon Teoria de Pontos Fixos e Coincidências

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille.

UBERLÂNDIA - MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R484
2021

Ribeiro, Mariana Rosas, 1995-
Epsilon Teoria de Pontos Fixos e Coincidências
[recurso eletrônico] / Mariana Rosas Ribeiro. - 2021.

Orientador: Marcio Colombo Fenille.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.37>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Fenille, Marcio Colombo, 1983-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgsamat@famat.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 92, PPGMAT				
Data:	19 de fevereiro de 2021	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	10:30
Matrícula do Discente:	11912MAT008				
Nome do Discente:	Mariana Rosas Ribeiro				
Título do Trabalho:	Epsilon Teoria de Pontos Fixos e Coincidências				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Sobrejeções fortes de complexos CW no plano projetivo				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Comissão Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Prof. Dr. Northon Canevari Leme Penteadó - IFE/UFCA, Profa. Dra. Lígia Laís Fêmina - FAMAT/UFU e Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille - FAMAT/UFU, este último o orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu a palavra à discente para a exposição de seu trabalho. A apresentação se deu no tempo previsto nas normas do Programa.

A seguir, o presidente concedeu a palavra aos membros da Comissão Examinadora (iniciando pelo membro externo), que então arguiram a candidata sobre sua dissertação e apresentação, nos termos regimentais.

Ultimada a arguição, a Comissão Examinadora reuniu-se em sessão secreta e decidiu, por resultado final, considerar a candidata:

APROVADA.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar, o presidente encerrou a sessão. Para constar, foi lavrada esta ata que, após lida e achada conforme, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **NORTHON CANEVARI LEME PENTEADO, Usuário Externo**, em 19/02/2021, às 10:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ligia Lais Femina, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/02/2021, às 10:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Colombo Fenille, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/02/2021, às 10:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2512374** e o código CRC **E811B7EE**.

Agradecimentos

Não sou só. Minha história acontece a partir de oportunidades ofertadas por adversidades mas, sobretudo, por pessoas que escolheram me apoiar. A elas agradeço.

À minha família primeira, mãe e irmão. Agradeço-te, Marineide, pelo amor incondicional; nossa história transcende as palavras. À você, Netto, minha eterna gratidão por tantos sacrifícios e pelo apoio na realização dessa etapa tão sonhada.

Foram muitas as pessoas que investiram nos meus estudos e elas têm minha gratidão. Eu certamente esqueceria algum nome caso fosse listá-las. Mas escolhi uma pessoa para dar nome a esse agradecimento, representando todas elas. Agradeço a você, meu tio Kleisson (*in memoriam*). Eu gostaria que você estivesse aqui para celebrarmos esse passo na minha trajetória.

Agradeço a meus colegas e amigos de mestrado Giovanny, Walteir, Wendy e Billy. Vocês me aconselharam, enxugaram minhas lágrimas, levaram-me pra sair, acompanharam-me nos estudos. Esses dois anos teriam sido muito tristes sem vocês.

Em Uberlândia eu conheci o mundo. Amo vocês, minhas amigadas latino americanas. Agradeço pelas risadas, pelo compartilhamento de saberes e pelo carinho. Vocês são pessoas fantásticas.

Eu não poderia deixar de agradecer ao meu amor Lorena. Ela em Itabuna, eu em Uberlândia, mas ela conseguiu ser companheira, ser presente. Você me ensina para além da lógica cartesiana. Muito obrigada por tanta fé na minha matemática e pelo seu apoio.

Ao professor e meu orientador Fenille, obrigada. Tenho orgulho de estar sua orientanda, agradeço por ter aceitado o convite, pelas aulas encantadoras e pela dedicação para com este trabalho.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

RIBEIRO, M. R. **Epsilon Teoria de Pontos Fixos e Coincidências**. 2021. xi+51 p. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG, Brasil.

Resumo

Esta dissertação é um estudo das assim chamadas epsilon teorias de pontos fixos e coincidências, desenvolvidas a partir de 2006. Com propostas de investigações próprias da teoria de Nielsen para pontos fixos e coincidências, as epsilon teorias se originam com a imposição de restrição quanto ao tipo de deformação por homotopia a que as funções podem estar sujeitas. A restrição consiste em se considerar um real positivo ε dado *a priori* e, então, permitir apenas deformações por ε -homotopias, isto é, homotopias cuja deformação em cada ponto seja menor que ε . Num cenário próprio que permite esse tipo de abordagem, são definidos os assim chamados ε -números mínimos de pontos fixos e coincidências, os ε -números de Nielsen para pontos fixos e coincidências – limitantes inferiores para os primeiros – e a propriedade de Wecken é discutida neste contexto.

Palavras-chave: Ponto fixo; coincidência; epsilon-homotopia; número de Nielsen; propriedade de Wecken.

RIBEIRO, M. R. **Epsilon Fixed Point and Coincidence Theory**. 2021. xi+51 p.
M.Sc. Dissertation (Master Degree in Mathematics), Federal University of Uberlândia,
Uberlândia MG, Brazil.

Abstract

This dissertation is a study of the so-called epsilon theories of fixed points and coincidences, developed since 2006. With the same research proposals as the Nielsen theory for fixed points and coincidences, epsilon theories originate with the imposition of a restriction to the type of deformation by homotopy to which functions may be subjected. The restriction consists of considering a positive real number ε given *a priori* and then allow only deformations by ε -homotopies, that is, homotopies whose deformation at each point is less than ε . In a specific scenario that allows this type of approach, the so-called ε -minimum numbers of fixed points and coincidences and ε -Nielsen numbers for fixed points and coincidences – lower limits for the first – are defined, and the Wecken property is discussed in this context.

Keywords: Fixed point; coincidence; epsilon-homotopy; Nielsen number, Wecken property.

Conteúdo

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xi
Introdução	1
1 Pontos Fixos e Coincidências	3
1.1 Pontos Fixos	3
1.1.1 O número mínimo de pontos fixos	3
1.1.2 Índices de pontos fixos	4
1.1.3 Índices de pontos fixos isolados em dimensão um	6
1.1.4 Número de Nielsen para pontos fixos	8
1.2 Coincidências	10
1.2.1 O número mínimo de coincidências	10
1.2.2 Índices de coincidências	11
1.2.3 Número de Nielsen para coincidências	14
2 Epsilon Teoria de Pontos Fixos	17
2.1 Exemplo inicial	17
2.2 Epsilon número mínimo de pontos fixos	18
2.3 Cenário apropriado à epsilon teoria	20
2.4 Epsilon número de Nielsen para pontos fixos	23
2.5 Realização do epsilon número de Nielsen	29
2.6 Cálculo do epsilon número de Nielsen	34
3 Epsilon Teoria de Coincidências	38
3.1 Epsilon número mínimo de coincidências	38
3.2 Epsilon número de Nielsen para coincidências	41

3.3	Inconsistências em suposto teorema de realização	45
3.4	Divergência em epsilon teorias de coincidências	48
	Bibliografia	50

Lista de Figuras

1.1	Autofunção de I com cinco pontos fixos isolados.	7
1.2	Autofunção de S^1 com quatro pontos fixos isolados.	8
1.3	Relação de equivalência em $\text{Fix}(f)$.	8
1.4	Relação de equivalência em $\text{Coin}(f, g)$.	14
2.1	Função $g : I \rightarrow I$ com ponto fixo em $(1/3, 2/3)$.	18
2.2	Gráficos de funções $f, g, h : I \rightarrow I$.	20
2.3	Relação de ε -equivalência em $\text{Fix}(f)$.	24
2.4	Funções f e g do Exemplo 2.17.	27
2.5	Função f do Exemplo 2.18.	28
2.6	Superfície do exemplo de B. Jiang.	33
2.7	ε -classes essenciais da função $f : I \rightarrow I$.	36
2.8	ε -classes essenciais da função $f : S^1 \rightarrow S^1$.	37
3.1	Exemplo em que $\text{MC}[f, g] = 0$ e $\text{MC}^\varepsilon(f, g) = 1$.	40
3.2	Exemplo em que $\text{MC}[f, g] = 1$ e $\text{MC}^\varepsilon(f, g) = 3$.	40
3.3	Relação de ε -equivalência em $\text{Coin}(f, g)$.	41
3.4	Minimizando $\text{Coin}(f, g)$ deformando uma só função.	46
3.5	Exemplo em que $\text{MC}_2^\varepsilon(f, g) < N^\varepsilon(f, g) = \text{MC}^\varepsilon(f, g)$.	49

Introdução

São das primeiras décadas do século XX os célebres teoremas que inauguraram a teoria de pontos fixos e coincidências como um ramo próprio da Topologia Algébrica. Referimo-nos ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (1909), o Teorema de Borsuk-Ulam (1933) e os Teoremas de Pontos Fixos e de Coincidências de Lefschetz (1923 e 1927). Todos estes são resultados que, sob certas condições sobre espaços topológicos e funções contínuas entre eles, garantem a *existência* de pontos fixos ou coincidências para as funções.

Questionamentos não apenas sobre a existência de pontos fixos ou coincidências, mas quanto a sua *quantidade* e *persistência* sob deformações homotópicas das funções começaram a frutificar a partir da década de 1940, especialmente com os trabalhos de J. Nielsen, F. Wecken e H. Schirmer.

Para uma função contínua $f : X \rightarrow X$, de um poliedro (compacto e conexo) em si próprio, dois números são bem conhecidos da teoria topológica clássica de pontos fixos, o *número mínimo de pontos fixos* $\text{MF}[f]$, definido como sendo o menor número de pontos fixos das funções homotópicas a f , e o assim chamado *número de Nielsen* $N(f)$, que consiste de uma cota inferior para $\text{MF}[f]$, ou seja, $N(f) \leq \text{MF}[f]$, o que significa que qualquer função homotópica a f possui pelo menos $N(f)$ pontos fixos. A discussão quanto à validade da identidade $N(f) = \text{MF}[f]$ é conhecida como problema ou *propriedade de Wecken*, sendo este um dos problemas centrais da teoria.

Em 2006, R. Brown apresentou em [2] o que chamou *epsilon teoria de Nielsen para pontos fixos*. Trata-se de um novo ponto de vista para a teoria de pontos fixos, em que são consideradas autofunções contínuas de uma variedade riemanniana compacta e conexa e uma restrição é imposta sobre as deformações homotópicas que as funções podem sofrer. A restrição consiste em se considerar um real $\varepsilon > 0$ dado *a priori* e, então, permitir apenas deformações por ε -homotopias, isto é, homotopias cuja deformação em cada ponto (distância percorrida por cada ponto) seja menor que ε . Neste cenário, dada uma função contínua $f : X \rightarrow X$, definiu-se o chamado ε -número mínimo de pontos fixos de f , denotado por $\text{MF}^\varepsilon(f)$, como sendo o número mínimo de pontos fixos das funções ε -homotópicas a f . Além disso, definiu-se o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f)$ e provou-se, em semelhança ao que se tem na teoria clássica, a desigualdade $N^\varepsilon(f) \leq \text{MF}^\varepsilon(f)$. O mais

surpreendente na epsilon teoria de Nielsen para pontos fixos é a prova de que é sempre válida a propriedade de Wecken, isto é, tem-se sempre a identidade $N^\varepsilon(f) = MF^\varepsilon(f)$.

Quase uma década mais tarde, em 2014, a epsilon teoria de Nielsen ganhou sua versão para coincidências, a partir da publicação de [5]. Desta vez para pares de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre variedades riemannianas de mesma dimensão, fechadas, conexas e orientáveis, definiu-se o conceito de ε -homotopia de pares e, com isso, o ε -número mínimo de coincidências $MC^\varepsilon(f, g)$, como sendo o número mínimo de coincidências dos pares (f', g') que são ε -homotópicos a (f, g) . Seguindo as ideias da teoria clássica de coincidências e da epsilon teoria de pontos fixos, definiu-se o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ e provou-se a esperada desigualdade $N^\varepsilon(f, g) \leq MC^\varepsilon(f, g)$.

Em 2019, aparentemente desconhecendo [5], um grupo de quatro autores publicaram o artigo [13] que, entre outras coisas, reinterpreta as construções básicas da epsilon teoria de coincidências originalmente introduzidas em [5]. No entanto, há uma divergência importante em um dos conceitos. Trata-se do conceito de ε -homotopia de pares que, em [13], é mais permissivo que o conceito original de [5], de tal forma que o ε -número mínimo de coincidências definido em [13], que aqui denotamos $MC_2^\varepsilon(f, g)$, não tem, em geral, o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ como um limitante inferior para si, ou seja, há exemplos em que $MC_2^\varepsilon(f, g) < N^\varepsilon(f, g)$, o que demonstra um equívoco na definição de $MC_2^\varepsilon(f, g)$.

Tanto [5] quanto [13] deixam em aberto o questionamento sobre a propriedade de Wecken no contexto da epsilon teoria de coincidências. Em 2020, em [15], um conjunto de quatro autores (sendo um deles autor também de [13]) propuseram uma prova para propriedade. No entanto, há algumas inconsistências, que discutiremos nas Seções 3.3 e 3.4 desta dissertação, que nos levam a afirmar que o problema de Wecken permanece em aberto no contexto da epsilon teoria de coincidências.

A dissertação está organizada como segue. O Capítulo 1 é uma revisão da teoria clássica de pontos fixos e coincidências, que traz ideias fundamentais para o desenvolvimento das epsilon teorias, como os conceitos de classes e índices de pontos fixos e coincidências, além dos números de Nielsen clássicos. No Capítulo 2, apresentamos a epsilon teoria de pontos fixos originalmente publicada em [2], trazendo o cenário apropriado para sua construção, as definições do ε -número mínimo de pontos fixos e do ε -número de Nielsen, uma série de exemplos, a prova da propriedade de Wecken e, finalmente, algoritmos para o cálculo do ε -número de Nielsen para autofunções de variedades riemannianas compactas e conexas de dimensão um. No Capítulo 3, apresentamos as construções básicas da epsilon teoria de coincidências, conforme apresentadas em [5], acompanhadas de exemplos elucidativos. Nas seções finais do capítulo, discutimos as já mencionadas divergências nos conceitos apresentados em [5] e [13], além das inconsistências detectadas no estudo da propriedade de Wecken publicado em [15].

Capítulo 1

Pontos Fixos e Coincidências

O objetivo deste capítulo inicial é apresentar, de forma breve, alguns conceitos e resultados gerais sobre a teoria clássica de pontos fixos e coincidências que serão utilizados, nos capítulos seguintes, no desenvolvimento da assim chamada *epsilon teoria de pontos fixos e coincidências*, tema central deste trabalho.

Com a compreensão de ser este um capítulo preliminar, não apresentamos detalhes e demonstrações; em vez disso, indicamos referências bibliográficas que os contenham.

1.1 Pontos Fixos

Um *ponto fixo* de uma função $f : X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Uma função que não possui ponto fixo é dita ser *livre de ponto fixo*.

Um dos mais conhecidos teoremas de toda a Matemática é o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer [18, Corolário 1.18, p. 25] que afirma que *toda função contínua de um disco n -dimensional em si próprio possui ponto fixo*.

1.1.1 O número mínimo de pontos fixos

Resultado mais geral que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz [3, Teorema 1, p. 26] que, em uma versão aqui suficiente, afirma:

Teorema 1.1 (Ponto Fixo de Lefschetz). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma autofunção contínua de um poliedro. Se o número de Lefschetz $L(f) \neq 0$, então toda função homotópica a f possui ponto fixo.*

Por um *poliedro* entendemos um espaço topológico compacto X que é homeomorfo à realização geométrica $|K|$ (também chamado um *complexo geométrico*) de um *complexo simplicial* finito K . Por exemplo, toda variedade compacta, com ou sem bordo, é triangulável e, portanto, é um poliedro. Estamos utilizando a terminologia de [3].

O número de Lefschetz $L(f)$ da função $f : X \rightarrow X$ é definido por

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{tr}(f_*^i),$$

onde $f_*^i : H^i(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Q})$ é o homomorfismo induzido por f no i -ésimo grupo de homologia com coeficientes racionais.

O Teorema de Lefschetz é mais geral que o Teorema de Brouwer, pois sendo o disco n -dimensional D^n contrátil, para toda função contínua $f : D^n \rightarrow D^n$, todos os homomorfismos f_*^i são nulos, exceto f_*^0 que é o isomorfismo identidade do corpo \mathbb{Q} . Logo, o número de Lefschetz $L(f) = 1$, o que implica que f possui ponto fixo.

O fato da conclusão do Teorema de Lefschetz ser não apenas sobre a função $f : X \rightarrow X$, mas sobre qualquer função f' homotópica a f , faz surgir naturalmente a questão de qual seria o menor número possível de pontos fixos quando variamos as funções na classe de homotopia de uma dada função f . Ou seja, o problema seria determinar o número

$$\text{MF}[f] = \min\{\#\text{Fix}(f') : f' \text{ é homotópica a } f\},$$

onde $\text{Fix}(f')$ é o conjunto de pontos fixos de f' e o símbolo $\#$ indica cardinalidade.

Sendo o espaço X um poliedro, $\text{MF}[f]$ é de fato um número; com efeito, por [3, Teorema 2, p. 118], existe uma função f' homotópica a f tal que $\text{Fix}(f')$ é finito.

1.1.2 Índices de pontos fixos

Outra questão natural é quanto à recíproca do Teorema de Lefschetz ou, dito de outra forma, o que ocorre quando uma dada função $f : X \rightarrow X$ tem número de Lefschetz $L(f) = 0$. Esta é uma questão bastante complicada, em geral, que inspirou conceitos como os de classes de pontos fixos, índices de pontos fixos e a chamada teoria de Nielsen para pontos fixos. Tudo isso será mencionado a seguir, de forma bastante breve.

A definição/construção do que chamamos *índice de pontos fixos* é bastante técnica e, num certo sentido, não é essencial para a compreensão do conceito, uma vez que existe uma axiomatização que é o bastante para o desenvolvimento dos resultados.

Seja X um poliedro. Dada uma função contínua $f : X \rightarrow X$ e um aberto $U \subset X$, diz-se que o par (f, U) é *admissível* se f não possui pontos fixos na fronteira de U .

Observamos que os pares (f, X) e (f, \emptyset) são admissíveis, qualquer que seja a função contínua $f : X \rightarrow X$. O símbolo \emptyset denota o conjunto vazio.

Um *índice de pontos fixos* é uma função $\text{ind}(\cdot, \cdot)$ que associa a cada par admissível (f, U) um número racional $\text{ind}(f, U)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

- LOCALIZAÇÃO: Se (f, U) é admissível e $f' : X \rightarrow X$ é uma função contínua que coincide com f no fecho de U , então $\text{ind}(f', U) = \text{ind}(f, U)$.

- **HOMOTOPIA:** Para uma homotopia $H : X \times I \rightarrow X$, defina $f_t : X \rightarrow X$ por $f_t(x) = H(x, t)$. Se (f_t, U) é admissível para todo $t \in I$, então $\text{ind}(f_0, U) = \text{ind}(f_1, U)$.
- **ADITIVIDADE:** Se o par (f, U) é admissível e $U_1, \dots, U_k \subset U$ são abertos mutuamente disjuntos tais que f não possui ponto fixo em $U - \bigcup_{i=1}^k U_i$, então

$$\text{ind}(f, U) = \sum_{i=1}^k \text{ind}(f, U_i).$$

- **NORMALIZAÇÃO:** Para $f : X \rightarrow X$ contínua, $\text{ind}(f, X) = L(f)$.
- **COMUTATIVIDADE:** Se Y também é um poliedro e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são funções contínuas tais que o par $(g \circ f, U)$ é admissível, então o par $(f \circ g, g^{-1}(U))$ é admissível e $\text{ind}(g \circ f, U) = \text{ind}(f \circ g, g^{-1}(U))$.

Uma consequência imediata do axioma da aditividade é o seguinte resultado, correspondente ao Corolário 1 de [3, Capítulo IV, p. 53].

Teorema 1.2. *Sejam X um poliedro e $f : X \rightarrow X$ uma função contínua. Se (f, U) é um par admissível tal que $\text{ind}(f, U) \neq 0$, então f possui ponto fixo em U .*

Vamos destacar um fato importante, que utilizaremos oportunamente, sobre pontos fixos isolados. Em função de nossos interesses futuros, consideramos o caso em que X é uma variedade compacta com ou sem bordo. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função contínua e suponha que x_0 seja um ponto interior de X que é um ponto fixo isolado de f . Então existe uma vizinhança U de x_0 tal que o par (f, U) é admissível e $U \cap \text{Fix}(f) = \{x_0\}$. Pelo axioma da aditividade, o índice $\text{ind}(f, U)$ independe da vizinhança U satisfazendo estas condições. Logo, é possível definir o *índice de f em x_0* por

$$\text{ind}(f, x_0) = \text{ind}(f, U).$$

O resultado a seguir corresponde, no contexto aqui apresentado, ao Teorema 4 de [3, Capítulo VIII, p. 123].

Teorema 1.3. *Sejam X uma variedade compacta e conexa e $f : X \rightarrow X$ uma função contínua. Se x_0 é um ponto fixo isolado de f no interior de X com $\text{ind}(f, x_0) = 0$, então existe uma função f' arbitrariamente próxima de f (e, portanto, homotópica a f) que coincide com f fora de uma vizinhança U de x_0 e que é livre de ponto fixo no fecho de U .*

Este resultado nos diz que um ponto fixo isolado com índice zero pode ser eliminado por uma pequena deformação da função numa vizinhança do ponto, o que significa, num certo sentido, que aquele ponto fixo não era *essencial*.

Isto nos leva aos conceitos de classes de pontos fixos e sua classificação quanto a serem essenciais ou inessenciais. Apresentamos e exploramos estes conceitos na Subseção 1.1.4, com base na referência [3, Capítulo VI].

1.1.3 Índices de pontos fixos isolados em dimensão um

Definir explicitamente o índice de pontos fixos isolados, ao menos em algum cenário particular que permita seu cálculo de modo prático, é essencial para a construção de exemplos e a compreensão do conceito em situações mais gerais.

Em [9, Capítulo I, Seção 4] o índice $\text{ind}(f, x_0)$ de um ponto fixo isolado $x_0 \in \text{Fix}(f)$ é definido no caso em que f é uma autofunção contínua da reta real ou da circunferência S^1 . A definição para o caso da reta pode ser adaptada para autofunções do intervalo fechado $I = [0, 1]$, apenas acrescentando as definições dos índices nos casos em que os extremos do intervalos sejam pontos fixos.

Passamos às definições com uma linguagem intuitiva, livre de excessiva notação.

Definição 1.4. Seja $f : I \rightarrow I$ uma função contínua e suponha que x_0 seja um ponto fixo isolado para f . Definimos o índice $\text{ind}(f, x_0)$ como segue:

- Se x_0 é um ponto interior de I , então ou o gráfico $\mathcal{G}(f)$ de f cruza a diagonal $\Delta \subset I \times I$ no ponto (x_0, x_0) ou ele apenas toca a diagonal neste ponto e não a cruza. No caso em que o gráfico de f cruza a diagonal, o cruzamento pode ser de baixo para cima ou de cima para baixo. Definimos:

$$\text{ind}(f, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{G}(f) \text{ não cruza } \Delta \text{ em } (x_0, x_0) \\ 1 & \text{se } \mathcal{G}(f) \text{ cruza } \Delta \text{ de baixo para cima em } (x_0, x_0) \\ -1 & \text{se } \mathcal{G}(f) \text{ cruza } \Delta \text{ de cima para baixo em } (x_0, x_0) \end{cases}.$$

- Se $x_0 = 0$ é ponto fixo isolado, então existe $\delta_0 > 0$ tal que: ou $f(x) < x$ para $x \in (0, \delta_0)$ (isto é, o gráfico de f parte de $(0, 0)$ abaixo da diagonal) ou $f(x) > x$ para $x \in (0, \delta_0)$ (isto é, o gráfico de f parte de $(0, 0)$ acima da diagonal). Definimos:

$$\text{ind}(f, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > x \text{ em } (0, \delta_0) \\ -1 & \text{se } f(x) < x \text{ em } (0, \delta_0) \end{cases}.$$

- Se $x_0 = 1$ é ponto fixo isolado, então existe $\delta_1 \in (0, 1)$ tal que: ou $f(x) < x$ para $x \in (\delta_1, 1)$ (isto é, o gráfico de f chega em $(1, 1)$ abaixo da diagonal) ou $f(x) > x$ para $x \in (\delta_1, 1)$ (isto é, o gráfico de f chega em $(1, 1)$ acima da diagonal). Definimos:

$$\text{ind}(f, 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) < x \text{ em } (\delta_1, 1) \\ 1 & \text{se } f(x) > x \text{ em } (\delta_1, 1) \end{cases}.$$

A Figura 1.1 mostra o gráfico de uma função contínua $f : I \rightarrow I$ que possui cinco pontos fixos isolados, dentre eles o 0 e o 1.

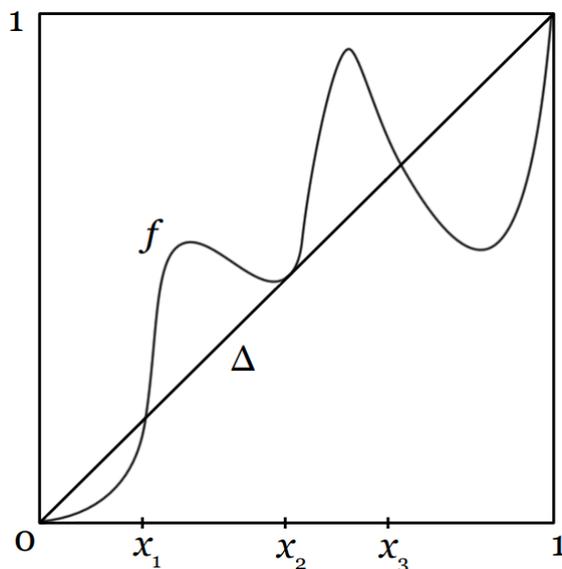


Figura 1.1: Autofunção de I com cinco pontos fixos isolados.

De acordo com a Definição 1.4:

$$\text{ind}(f, 0) = \text{ind}(f, x_3) = -1, \quad \text{ind}(f, x_1) = 1, \quad \text{ind}(f, x_2) = \text{ind}(f, 1) = 0.$$

Definição 1.5. Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ uma função contínua e suponha que seja x_0 um ponto fixo isolado para f . Considerando o sentido positivo de S^1 como o antihorário, ocorre uma e apenas uma das situações (bem definidas) a seguir:

- (i) $f(x)$ ultrapassa x em x_0 ;
- (ii) $f(x)$ se deixa ultrapassar por x em x_0 ;
- (iii) $f(x)$ encontra x em x_0 , mas não é ultrapassado nem se deixa ultrapassar por x .

Quando pensamos em S^1 como o espaço obtido do intervalo I , por meio da identificação $0 \sim 1$, podemos esboçar o gráfico de f em $I \times I$ e, então, as noções aqui descritas correspondem àquelas sobre cruzar, de um modo ou outro, ou não cruzar a diagonal, conforme descrito na Definição 1.4. Por fim, definimos:

$$\text{ind}(f, x_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \text{ ultrapassa } x \text{ em } x_0 \\ -1 & \text{se } f(x) \text{ se deixa ultrapassar por } x \text{ em } x_0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 1.2 mostra o gráfico de uma função contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$ (como S^1 vista como o espaço obtido de I identificando $0 \sim 1$) que possui quatro pontos fixos isolados.

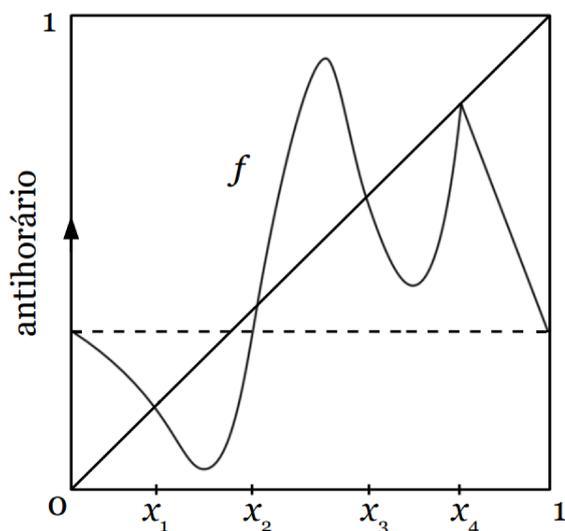


Figura 1.2: Autofunção de S^1 com quatro pontos fixos isolados.

De acordo com a Definição 1.5:

$$\text{ind}(f, x_1) = \text{ind}(f, x_3) = -1, \quad \text{ind}(f, x_2) = 1, \quad \text{ind}(f, x_4) = 0.$$

1.1.4 Número de Nielsen para pontos fixos

Daqui em diante, X é um poliedro conexo e, portanto, um espaço Hausdorff compacto.

Seja $f : X \rightarrow X$ uma função contínua e considere seu conjunto de pontos fixos $\text{Fix}(f)$, o qual é fechado em X , uma vez que X é Hausdorff.

Diz-se que dois pontos fixos $x_0, x_1 \in \text{Fix}(f)$ são *f-equivalentes* se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$, de x_0 para x_1 , tal que γ e $f \circ \gamma$ são homotópicos como caminhos, isto é, homotópicos com pontos finais fixados.

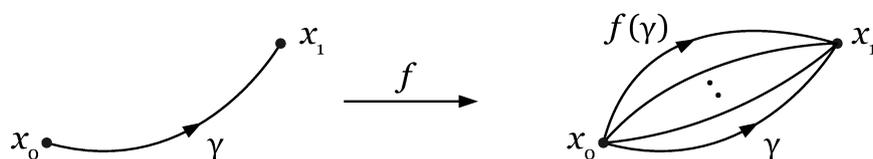


Figura 1.3: Relação de equivalência em $\text{Fix}(f)$.

A *f-equivalência* é uma relação de equivalência sobre o conjunto $\text{Fix}(f)$ e, por isso, produz uma partição de $\text{Fix}(f)$ em classes de equivalência que são chamadas as *classes de pontos fixos de f*.

Cada classe de pontos fixos de f é um conjunto aberto no subespaço $\text{Fix}(f)$. Como este último é compacto, por ser um subespaço fechado do compacto X , segue-se que existe um número finito de classes de pontos fixos de f , digamos, F_1, \dots, F_k . Além disso, para cada classe F_i existe um aberto $U_i \subset X$ satisfazendo as condições $F_i \subset U_i$ e $\text{Fix}(f) \cap \overline{U_i} = F_i$. Assim, o par (f, U_i) é admissível e temos definido o índice $\text{ind}(f, U_i)$. Este índice independe da escolha do aberto U_i satisfazendo as condições requeridas e, portanto, faz sentido definir o *índice da classe* F_i por $\text{ind}(F_i) = \text{ind}(f, U_i)$, onde U_i é qualquer aberto satisfazendo as condições acima.

Uma classe de pontos fixos F da função contínua $f : X \rightarrow X$ é dita ser *essencial* se $\text{ind}(F) \neq 0$; caso contrário, diz-se que a classe é *inessencial*. O número de classes essenciais de f é chamado o *número de Nielsen de f* e denotado por $N(f)$.

Como consequência imediata do Teorema [1.2](#) tem-se:

Teorema 1.6. *Uma função contínua $f : X \rightarrow X$ sobre um poliedro possui pelo menos $N(f)$ pontos fixos.*

Em símbolos, este resultado diz que $N(f) \leq \#\text{Fix}(f)$. Mas, de fato, tem-se muito mais do que isso: não fica óbvio em sua definição, mas pode ser demonstrado, que o número de Nielsen é um invariante homotópico, isto é, se f' é homotópica a f , então $N(f') = N(f)$.

Por isso, o número de Nielsen $N(f)$ é um limitante inferior não apenas para o número de pontos fixos de f , mas para o número de pontos fixos de qualquer função homotópica a f , o que significa que

$$N(f) \leq \text{MF}[f].$$

Um dos problemas centrais da teoria de pontos fixos, conhecido como *problema de Wecken*, é determinar condições sob as quais vale a igualdade $N(f) = \text{MF}[f]$. No caso em que vale, diz-se que o número de Nielsen é realizável.

A igualdade $N(f) = \text{MF}[f]$ significa que a função f pode ser deformada por homotopia de tal modo que cada classe de pontos fixos essencial é combinada em um único ponto fixo e cada classe inessencial é removida.

Exemplo 1.7. Um exemplo simples do que acabamos de mencionar é obtido considerando-se uma função contínua $f : D^n \rightarrow D^n$ sobre o disco n -dimensional, $n \geq 1$, que sabemos ter ponto fixo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Sendo D^n contrátil, existe uma única classe de pontos fixos para f , a saber, o próprio conjunto $\text{Fix}(f)$. Além disso, pelo axioma da normalização,

$$\text{ind}(\text{Fix}(f)) = \text{ind}(f, D^n) = L(f) = 1.$$

Portanto, toda função contínua $f : D^n \rightarrow D^n$ tem número de Nielsen $N(f) = 1$ e este número é realizado, como o número mínimo de pontos fixos, pela função constante.

Exemplo 1.8. Outro exemplo importante, que será oportunamente lembrado, é o de autofunções da circunferência. Dada uma função contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$, sua classe de homotopia é determinada pelo grau $\deg(f)$, isto é, uma função contínua $f' : S^1 \rightarrow S^1$ é homotópica a f se, e somente se, $\deg(f') = \deg(f)$. O número de Nielsen, neste caso, é realizável. De fato, por [9, Proposição 8.4, p. 23] tem-se

$$N(f) = \text{MF}[f] = |\deg(f) - 1|.$$

O primeiro resultado geral de realização do número de Nielsen, que enunciamos a seguir, é devido à F. Wecken (por isso o problema de realização leva seu nome). Detalhes sobre este resultado e outros similares podem ser visto em [7, Seção 10].

Teorema 1.9. *Seja X uma variedade compacta, com ou sem bordo, de dimensão maior ou igual a 3. Para toda função contínua $f : X \rightarrow X$, tem-se $N(f) = \text{MF}[f]$.*

O resultado não é verdadeiro em dimensão 2. De fato, existe um exemplo clássico, devido a B. Jiang, de uma função contínua $f : P \rightarrow P$, com P um superfície compacta com bordo, tal que $N(f) = 0$ e $\text{MF}[f] = 2$. Detalhes em [7, Exemplo 10.7, p. 641].

Em dimensão 1 o resultado é verdadeiro e se resume aos exemplos apresentados acima para autofunções do intervalo fechado I e da circunferência S^1 .

1.2 Coincidências

Uma *coincidência* entre duas funções $f, g : X \rightarrow Y$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Ao conjunto de coincidências de f e g denotamos $\text{Coin}(f, g)$, ou seja,

$$\text{Coin}(f, g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

Se $\text{Coin}(f, g) = \emptyset$, dizemos que f e g são *livres de coincidências*.

1.2.1 O número mínimo de coincidências

Quando duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ não são livres de coincidências, interessa estudar condições que garantam que f e g possam ser deformadas por homotopia a funções f' e g' , respectivamente, que sejam livres de coincidência ou, mais geralmente, que tenham o “menor número” possível de coincidências.

Uma ferramenta importante para detectar quando um par de funções não pode ser deformado para ser livre de coincidência é a assim chamada fórmula do traço de Lefschetz-Hopf. Trazemos aqui tal fórmula para pares de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre variedades fechadas, orientáveis e de mesma dimensão n . Seja

$$\Theta_i : H_i(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Q})$$

o homomorfismo dado pela composição $D_X \circ g^* \circ D_Y^{-1} \circ f_*$, onde $D_X : H^{n-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Q})$ é o homomorfismo da dualidade de Poincaré e f_* e g^* são os homomorfismos induzidos por f e g em homologia e cohomologia, respectivamente, nas dimensões apropriadas à composição; ver [18, Teorema 6.18, p.165]. O *número de Lefschetz* $L(f, g)$ é definido pela fórmula do traço de Lefschetz-Hopf

$$L(f, g) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{tr}(\Theta_i).$$

A seguir, enunciamos o Teorema de Coincidência de Lefschetz, numa versão suficiente para a compreensão deste trabalho.

Teorema 1.10 (Coincidência de Lefschetz). *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre variedades fechadas, orientáveis e de mesma dimensão. Se $L(f, g) \neq 0$, então todo par (f', g') , onde f' é homotópica a f e g' é homotópica a g , tem coincidência.*

Como o número $L(f, g)$ é invariante por homotopias de f e de g (pois os homomorfismos induzidos f_* e g_* são invariantes), quando ocorre $L(f, g) \neq 0$, tem-se que para quaisquer funções $f' \simeq f$ e $g' \simeq g$, o par (f, g) possui coincidência. Torna-se, então, natural perguntar o quanto é possível minimizar, via homotopia, a quantidade de coincidências. Ou seja, computar

$$\text{MC}[f, g] = \min\{\#\text{Coin}(f', g') : f' \simeq f \text{ e } g' \simeq g\}.$$

1.2.2 Índices de coincidências

Conjuntamente ao problema de minimização de coincidências, também é natural questionar o que acontece se $L(f, g) = 0$. Essa investigação é tema de grande parte da teoria contemporânea de coincidência. Para essas duas questões, a teoria de Nielsen para coincidências – que une teoria de índice e classes de coincidência – oferece algumas respostas. Primeiramente, vejamos a axiomatização do *índice de coincidências*.

Na teoria de coincidência, os espaços envolvidos requerem mais restrições do que na teoria de ponto fixo, que considera espaços bem gerais: os poliedros. Por isso, faremos um recorte para funções entre variedades n -dimensionais fechadas e orientáveis, como em [6, Subseção 5.1].

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre variedades n -dimensionais fechadas e orientáveis. Dado um aberto U de X , diz-se que a tripla (f, g, U) é admissível se $\text{Coin}(f, g) \cap U$ é compacto em X . Observamos que, dado que $\text{Coin}(f, g)$ é compacto, para qualquer aberto $U \supset \text{Coin}(f, g)$, a tripla (f, g, U) é admissível. Em particular, (f, g, X) é admissível.

Um *índice de coincidências* é uma função $\text{ind}(\cdot, \cdot, \cdot)$ que associa a cada tripla admissível (f, g, U) um número inteiro $\text{ind}(f, g, U)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

- LOCALIZAÇÃO: Se (f, g, U) é admissível e $U' \subset U$ é um aberto contendo a interseção $\text{Coin}(f, g) \cap U$, então (f, g, U') é admissível e $\text{ind}(f, g, U) = \text{ind}(f, g, U')$.
- HOMOTOPIA: Se $f_t, g_t : X \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, são homotopias e $U \subset X$ é um aberto, tais que $K = \{x \in U : \text{existe } t \in [0, 1] \text{ com } f_t(x) = g_t(x)\}$ é compacto, então $\text{ind}(f_0, g_0, U) = \text{ind}(f_1, g_1, U)$.
- ADITIVIDADE: Se a tripla (f, g, U) é admissível, U é uma união finita de abertos U_1, \dots, U_k e $\text{Coin}(f, g) \cap U$ é a união disjunta de compactos C_i , com $C_i \subset U_i$, então

$$\text{ind}(f, g, U) = \sum_{i=1}^k \text{ind}(f, g, U_i).$$

- NORMALIZAÇÃO: Para $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas, $\text{ind}(f, g, X) = L(f, g)$.

A propriedade de comutatividade, que acontece no índice de ponto fixo, não ocorre para índice de coincidência.

Apenas como observação, mencionamos que o índice $\text{ind}(f, g, U)$ pode ser definido explicitamente, como em [6, Subseção 5.1], como a imagem da classe fundamental ζ_X da n -variedade X (isto é, um gerador preferido $\zeta_X \in H_n(X)$) pela composição

$$H_n(X) \rightarrow H_n(X, X \setminus V) \rightarrow H_n(U, U \setminus V) \rightarrow H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta_Y) \approx \mathbb{Z},$$

onde Δ_Y é a diagonal em $Y \times Y$, o segundo homomorfismo é induzido pela excisão, o terceiro é induzido pela função $x \mapsto (f(x), g(x))$, e V é um aberto satisfazendo $\text{Coin}(f, g) \cap U \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Uma construção detalhada está em [18, Capítulo 7].

Uma consequência imediata do axioma da aditividade é o seguinte resultado, correspondente ao Corolário 7.3 de [18, p. 191].

Teorema 1.11. *Sejam X e Y variedades fechadas e orientáveis de mesma dimensão e sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Se (f, g, U) é uma tripla admissível tal que $\text{ind}(f, g, U) \neq 0$, então f e g têm coincidência em U .*

Como fizemos para pontos fixos na seção anterior, queremos aqui destacar o cenário em que as funções $f, g : X \rightarrow Y$ possuem uma coincidência isolada, digamos $x_0 \in X$. Neste caso, existe um aberto U de X tal que $\text{Coin}(f, g) \cap U = \{x_0\}$. Assim, a tripla (f, g, U) é admissível e tem-se definido o índice $\text{ind}(f, g, U)$. Além disso, segue da propriedade de localização do índice que, para qualquer outro aberto U' que isole x_0 em $\text{Coin}(f, g)$, tem-se $\text{ind}(f, g, U') = \text{ind}(f, g, U)$. Portanto, podemos definir, sem risco de ambiguidade,

$$\text{ind}(f, g, x_0) = \text{ind}(f, g, U).$$

Neste contexto, tem-se resultado análogo ao Teorema 1.3. Acreditamos que tal resultado deva-se originalmente a H. Schirmer [16], mas aqui enunciamos uma versão em linguagem mais simples, que reúne o Lema 3.2 e a Observação 3.1 de [15].

Teorema 1.12. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre n -variedades fechadas e orientáveis. Suponha que x_0 seja uma coincidência isolada de f e g e que $\text{ind}(f, g, x_0) = 0$. Então existe uma função f' arbitrariamente próxima de f (e, portanto, homotópica a f) que coincide com f fora de uma vizinhança U de x_0 e que não possui coincidência com g no fecho de U .*

O Teorema 1.12 diz que coincidências isoladas com índice zero podem ser eliminadas por deformações locais e arbitrariamente pequenas de uma (basta uma) das funções, sem o surgimento de novas coincidências.

Isto sugere que o número mínimo de coincidências $\text{MC}[f, g]$ possa ser realizado por meio da deformação de apenas uma das funções, f ou g , ao invés de ambas. A prova deste fato é um marco na teoria de coincidências, que faz dela, num certo sentido, uma extensão da teoria de pontos fixos. Explicamos após enunciar o Teorema de R. Brooks, originalmente publicado em [1], que pode ser visto também em [6], Proposição 2.12, p. 8].

Teorema 1.13 (Teorema de Brooks). *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas de um espaço topológico X numa variedade Y (sem bordo, não necessariamente compacta). Para quaisquer funções f_1 e g_1 homotópicas a f e g , respectivamente, existe uma função f' homotópica a f tal que $\text{Coin}(f', g) = \text{Coin}(f_1, g_1)$. Consequentemente,*

$$\text{MC}[f, g] = \min\{\#\text{Coin}(f', g) : f' \simeq f\}.$$

Agora, explicamos o que dissemos antes do enunciado do Teorema de Brooks. É óbvio que um ponto fixo de uma função $f : X \rightarrow X$ é uma coincidência entre f e a função identidade $id : X \rightarrow X$, ou seja, $\text{Fix}(f) = \text{Coin}(f, id)$. Sendo X uma variedade sem bordo e f contínua, segue do Teorema de Brooks que

$$\text{MF}[f] = \text{MC}[f, id].$$

A hipótese de ser X uma variedade sem bordo é essencial para a conclusão do Teorema de Brooks. De fato, o famoso exemplo de B. Jiang publicado em [8, § 4], também disponível em [7, Exemplo 10.7, p. 641], fornece uma autofunção contínua $f : S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$, do buquê de duas circunferências, tal que $\text{MF}[f] = 2$ (a função f aplica a primeira S^1 em si própria com grau -1 , e a segunda S^1 em si própria com grau 3). Por outro lado, pelo Teorema 2.3 de [17], o par (f, id) pode ser deformado a um par livre de coincidência, ou seja, $\text{MC}[f, id] = 0$. Temos, portanto, um exemplo em que $\text{MF}[f] \neq \text{MC}[f, id]$.

1.2.3 Número de Nielsen para coincidências

Passamos agora à introdução dos conceitos de classes de coincidências e sua classificação quanto a serem essenciais ou inessenciais.

Desde já, permanecemos considerando funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre n -variedades fechadas e orientáveis, embora alguns conceitos que apresentamos possam ser levados a um contexto mais geral.

Diz-se que dois pontos $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ são (f, g) -equivalentes se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$, de x_0 para x_1 , tal que $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$ são homotópicos como caminhos, isto é, homotópicos com pontos finais fixados.

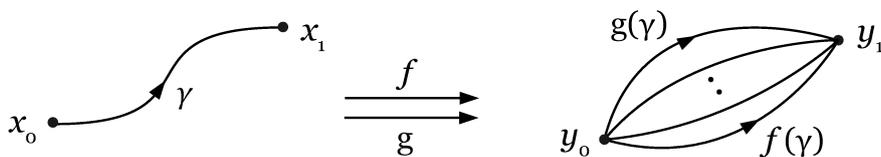


Figura 1.4: Relação de equivalência em $\text{Coin}(f, g)$.

A (f, g) -equivalência é uma relação de equivalência sobre o conjunto $\text{Coin}(f, g)$ e, por isso, produz uma partição de $\text{Coin}(f, g)$ em classes de equivalência que são chamadas as *classes de coincidência* de f e g .

Para os espaços com os quais estamos tratando, cada classe de coincidências é um conjunto aberto e fechado de $\text{Coin}(f, g)$. Como este último é compacto, por ser um subespaço fechado do compacto X , segue-se que existe um número finito de classes, digamos, C_1, \dots, C_k , cada uma compacta em X . Além disso, para cada classe C_i existe um aberto $U_i \subset X$ satisfazendo as condições $C_i \subset U_i$ e $\text{Coin}(f, g) \cap U_i$ é um subconjunto compacto de X . Assim, cada tripla (f, g, U_i) é admissível e temos definido o índice $\text{ind}(f, g, U_i)$. Este índice independe da escolha do aberto U_i satisfazendo as condições requeridas e, portanto, faz sentido definir o *índice da classe* C_i por $\text{ind}(C_i) = \text{ind}(f, g, U_i)$, onde U_i é qualquer aberto satisfazendo as condições acima.

Uma classe de coincidências C é dita ser *essencial* se $\text{ind}(C) \neq 0$; caso contrário, diz-se que a classe é *inessencial*. O número de classes de coincidências essenciais de f e g é chamado o *número de Nielsen do par* (f, g) e denotado por $N(f, g)$.

Como consequência imediata do Teorema [1.11](#) tem-se:

Teorema 1.14. *Todo par de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre n -variedades fechadas e orientáveis possui pelo menos $N(f, g)$ pontos de coincidência.*

Em símbolos, este resultado diz que $N(f, g) \leq \#\text{Coin}(f, g)$. Mas, de fato, tem-se muito mais do que isso, uma vez que, assim como no caso de pontos fixos, também aqui

o número de Nielsen é um invariante homotópico, isto é, se f' é homotópica a f e g' é homotópica a g , então $N(f', g') = N(f, g)$.

Por isso, o número de Nielsen $N(f, g)$ é um limitante inferior não apenas para o número de coincidências do par (f, g) , mas para o número de coincidências de qualquer par (f', g') em que $f' \simeq f$ e $g' \simeq g$, o que significa que

$$N(f, g) \leq \text{MC}[f, g].$$

Apresentamos um exemplo importante e muito ilustrativo em que tanto o número mínimo de coincidências $\text{MC}[f, g]$ quanto o número de Nielsen $N(f, g)$ são completamente determinados.

Exemplo 1.15. Para autofunções contínuas da circunferência S^1 e da esfera S^2 tem-se, por [I2, Exemplo 2.34]:

- Para funções contínuas $f, g : S^1 \rightarrow S^1$,

$$N(f, g) = |\deg(f) - \deg(g)| = |L(f, g)| = \text{MC}[f, g].$$

- Dadas funções contínuas $f, g : S^2 \rightarrow S^2$, como a esfera S^2 é simplesmente conexa, f e g possuem apenas uma classe de coincidência $C = \text{Coin}(f, g)$ e, assim, o índice $\text{ind}(f, g, C) = \text{ind}(f, g, S^2) = L(f, g)$. Consequentemente, o número de Nielsen

$$N(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{se } L(f, g) = 0 \\ 1, & \text{se } L(f, g) \neq 0. \end{cases}$$

Ademais, $L(f, g) = \deg(f) + \deg(g)$ e, pela Proposição 6.7 de [6], também

$$\text{MC}[f, g] = \begin{cases} 0, & \text{se } L(f, g) = 0 \\ 1, & \text{se } L(f, g) \neq 0. \end{cases}$$

Observação 1.16. Para funções contínuas $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ com pontos de coincidência isolados, o índice $\text{ind}(f, g, x_0)$ de cada $x_0 \in \text{Coin}(f, g)$ pode ser definido, de modo prático e intuitivo, em semelhança à Definição 1.5. Basta para tanto convencionar qual das funções, f ou g , fará o papel de função identidade naquela definição. Escolhendo a função g para este papel, podemos definir:

$$\text{ind}(f, g, x_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \text{ ultrapassa } g(x) \text{ em } x_0 \\ -1 & \text{se } g(x) \text{ ultrapassa } f(x) \text{ em } x_0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O *problema de Wecken* no contexto de coincidências consiste em determinar condições sob as quais se tenha $MC[f, g] = N(f, g)$.

No Exemplo [1.15](#) vimos que a propriedade de Wecken é válida para autofunções da circunferência e da esfera. Contudo, esta é uma questão ainda em aberto para funções entre superfícies mais gerais, assim como no caso de pontos fixos.

Para dimensões maiores ou iguais a 3, o problema foi resolvido (para variedades orientáveis) em 1955 por H. Schirmer em [\[16\]](#); ver também [\[6\]](#), Teorema 5.11].

Teorema 1.17. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre variedades fechadas e orientáveis de mesma dimensão maior ou igual a 3. Então $MC[f, g] = N(f, g)$.*

Para funções entre superfícies fechadas (ou seja, dimensão 2), alguns resultados parciais podem ser vistos nas Seções 6.2 e 6.3 de [\[6\]](#).

Intuitivamente, a dificuldade em lidar com os problemas de coincidência em dimensão 2 deve-se ao fato de não haver “espaço” suficiente para remover pontos de coincidência.

Capítulo 2

Epsilon Teoria de Pontos Fixos

Neste capítulo, apresentamos a epsilon teoria de pontos fixos desenvolvida por R. Brown e publicada em 2006 em [2]. Trata-se de uma teoria que se propõe a realizar as investigações próprias da teoria de Nielsen para pontos fixos, brevemente apresentada na Seção 1.1, mas impondo restrições quanto ao tipo de deformação por homotopia que pode ser realizado sobre uma dada função a fim de minimizar seus pontos fixos.

Neste contexto, são definidos novos conceitos de número mínimo de pontos fixos e um número do tipo Nielsen.

O resultado central da epsilon teoria de pontos fixos, que a faz diferir da teoria clássica de um modo especialmente interessante, é o fato de que, neste novo contexto, a propriedade de Wecken é válida independentemente da dimensão da variedade, ao contrário do que foi destacado ao final da Subseção 1.1.4.

2.1 Exemplo inicial

Como vimos no Exemplo 1.7, toda autofunção f do intervalo fechado $I = [0, 1]$ tem número de Nielsen $N(f) = 1$, o qual é realizável, isto é, existe uma função g homotópica a f com exatamente um ponto fixo (por exemplo, uma função constante). Contudo, pode ocorrer que a função g , ou qualquer outra homotópica a f e que tenha apenas um ponto fixo, esteja, num certo sentido analítico, “distante” de f . Vejamos o Exemplo 2.1.

Exemplo 2.1. Seja $f : I \rightarrow I$ uma função contínua que satisfaz

$$f(0) = f(2/3) = 1 \quad \text{e} \quad f(1/3) = f(1) = 0.$$

Conforme lembramos acima, o número de Nielsen $N(f) = 1$ e existe uma função g homotópica a f com exatamente um ponto fixo. Então, deve existir $t_1 \in I$ tal que

$$|f(t_1) - g(t_1)| > 1/3.$$

De fato, isto resulta dos cálculos abaixo, em que t_0 é o único ponto fixo da função $g : I \rightarrow I$.

- Se $t_0 \in [0, 1/3]$ então, $g(t) < t$ para todo $t > t_0$ e, assim, para $t_1 = 2/3$ tem-se $|f(t_1) - g(t_1)| > 1/3$.
- Se $t_0 \in (1/3, 2/3)$, então $g(t) > t$ para $t < t_0$ e $g(t) < t$ para $t > t_0$. Assim, para $t_1 = 1/3$ e $2/3$ tem-se $|f(t_1) - g(t_1)| > 1/3$.
- Se $t_0 \in [2/3, 1]$ então, $g(t) > t$ para todo $t < t_0$ e, assim, para $t_1 = 1/3$ tem-se $|f(t_1) - g(t_1)| > 1/3$.

A Figura [2.1](#) mostra o gráfico de uma função $g : I \rightarrow I$ cujo único ponto fixo t_0 pertence ao intervalo $(1/3, 2/3)$, o que força as distâncias entre $f(1/3)$ e $g(1/3)$ e entre $f(2/3)$ e $g(2/3)$ a serem maiores do que $1/3$.

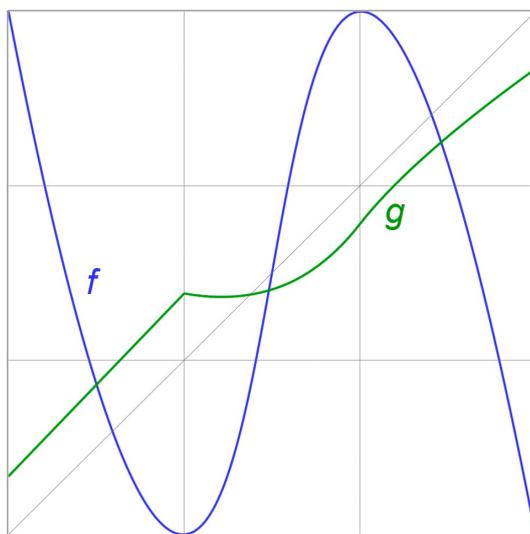


Figura 2.1: Função $g : I \rightarrow I$ com ponto fixo em $(1/3, 2/3)$.

Portanto, se limitarmos a deformação de f a uma faixa de largura $2/3$ (centrada do gráfico de f), então não conseguimos realizar $N(f)$ como o número de pontos fixos de uma função cujo gráfico esteja contido em tal faixa.

2.2 Epsilon número mínimo de pontos fixos

O Exemplo [2.1](#) sugere que, ao controlarmos as possíveis deformações por homotopia de uma dada função $f : X \rightarrow X$, obtém-se uma teoria de pontos fixos diferente da teoria clássica que apresentamos na Seção [1.1](#).

Vários tipos de controle podem, eventualmente, ser impostos à homotopia, mas o controle que o Exemplo [2.1](#) inspira é aquele em que se mede a distância de cada ponto

$f(x)$ a cada ponto correspondente $f_t(x)$, de uma dada homotopia $\{f_t\}$ que inicia em f , e impõe-se que tal distância deve ser menor que um valor $\varepsilon > 0$ previamente fixado.

Para que isso seja possível, é claro, X precisa, no mínimo, ser um espaço métrico. É o que consideramos, a partir daqui, nesta seção. A partir da Seção 2.4 exigiremos um pouco mais, pediremos que X seja uma variedade riemanniana.

Antes de definirmos o conceito de *epsilon homotopia* (o controle imposto sobre a homotopia), lembramos que, dadas funções $f, g : Z \rightarrow X$ de um espaço topológico compacto Z num espaço métrico (X, d) , a distância (usual) entre f e g é definida por

$$d(f, g) = \max\{d(f(z), g(z)) : z \in Z\}.$$

Definição 2.2. Sejam Z um espaço topológico compacto, X um espaço métrico com função distância d e $\varepsilon > 0$ um real dado. Uma homotopia $\{h_t\}_t : Z \rightarrow X$ é chamada uma *epsilon homotopia* se

$$d(h_t, h_{t'}) < \varepsilon \text{ para quaisquer } t, t' \in I.$$

Neste caso, as funções $f = h_0$ e $g = h_1$ (ou quaisquer h_t e $h_{t'}$) são ditas *epsilon homotópicas* e, para encurtar, escrevemos $f \simeq_\varepsilon g$.

Definido o controle sobre as homotopias que poderão ser consideradas, passamos ao processo de buscar minimizar o número de pontos fixos de uma dada função por meio de tais homotopias. Definimos:

Definição 2.3. Seja X um espaço métrico compacto, $f : X \rightarrow X$ uma função contínua e $\varepsilon > 0$ um real dado. Definimos o *ε-número mínimo de pontos fixos* de f por

$$MF^\varepsilon(f) = \min\{\#(\text{Fix}(g)) : g \simeq_\varepsilon f\}.$$

Aqui, notemos a diferença, para além do “ ε ”, entre as notações $MF[f]$ e $MF^\varepsilon(f)$. A mudança de $[f]$ para (f) se deve ao fato de, ao contrário da homotopia entre funções, a epsilon homotopia não ser uma relação de equivalência. Para constatação desse fato, considere o Exemplo 2.4 que passamos a apresentar.

Exemplo 2.4. Seja $f : I \rightarrow I$ a função que satisfaz as condições do Exemplo 2.1 e que é afim nos intervalos $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ e $[2/3, 1]$. Adicionalmente, sejam $g, h : I \rightarrow I$ as funções definidas como segue: h é a função constante igual a $2/3$ e g é a função afim nos intervalos $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ e $[2/3, 1]$ e que satisfaz $g(0) = g(2/3) = 2/3$, $g(1/3) = g(1) = 1/3$. Os gráficos de f , g e h estão ilustrados na Figura 2.2.

Como o intervalo I é convexo (e, portanto, quaisquer autofunções de I são homotópicas via a homotopia por segmentos de reta), segue-se que:

- f é 1/2-homotópica a g , pois $d(f, g) \leq 1/3 < 1/2$;

- g é $1/2$ -homotópica a h , pois $d(g, h) \leq 1/3 < 1/2$;
- contudo, f não é $1/2$ -homotópica a h , pois $d(f(1/3), h(1/3)) = 2/3$.

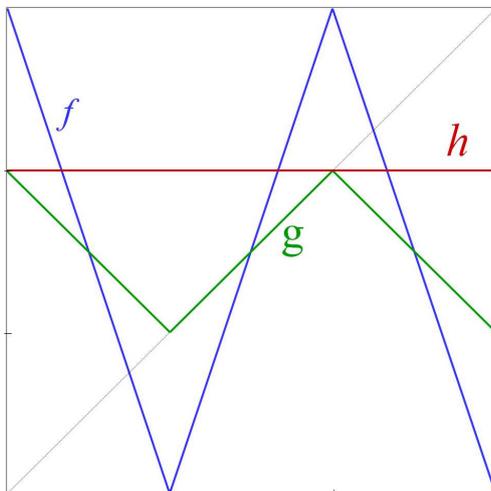


Figura 2.2: Gráficos de funções $f, g, h : I \rightarrow I$.

Além de mostrar que a epsilon homotopia não é uma relação de equivalência (pois f é epsilon homotópica a g e g é epsilon homotópica a h , mas f não é epsilon homotópica a h), este exemplo mostra também que, ao contrário do número mínimo de pontos fixos $\text{MF}[f]$, o ε -número mínimo de pontos fixos $\text{MF}^\varepsilon(f)$ não é um invariante homotópico (e por isso usamos (f) ao invés de $[f]$, já que o símbolo $[f]$ remete à classe de homotopia de f). De fato, como vimos no Exemplo 2.1, para $\varepsilon \leq 1/3$ tem-se $\text{MF}^\varepsilon(f) > 1$, ao passo que, para a função h , que é homotópica a f , é fácil ver que $\text{MF}^\varepsilon(h) = 1$ qualquer que seja o real $\varepsilon > 0$.

2.3 Cenário apropriado à epsilon teoria

Seja $f : X \rightarrow X$ uma função contínua entre espaços métricos compactos. Na seção anterior, definimos o ε -número mínimo de pontos fixos de f por

$$\text{MF}^\varepsilon(f) = \min\{\#(\text{Fix}(g)) : g \simeq_\varepsilon f\}.$$

Na Seção 1.1 vimos que na teoria clássica de pontos fixos há um contexto próprio em que o número mínimo de pontos fixos $\text{MF}[f]$ possui um limitante inferior $N(f)$, chamado o número de Nielsen de f . Para que tal número esteja definido, pede-se apenas que X seja um poliedro. No entanto, os questionamentos e resultados mais importantes da teoria surgem no cenário em que X é uma variedade.

Nossa intenção é também construir uma espécie de número de Nielsen que seja um limitante inferior para o ε -número mínimo de pontos fixos $\text{MF}^\varepsilon(f)$. Isso será feito exigindo-se que X seja uma variedade. No entanto, como é preciso que, além disso, X seja um espaço métrico, o natural é considerar que X seja uma variedade riemanniana.

Passamos então a relembrar alguns conceitos básicos sobre variedades riemannianas. Não seremos demasiado formais ou detalhistas; apresentaremos apenas as noções importantes para o desenvolvimento do trabalho. Detalhes em [4] e [10].

Por uma *variedade riemanniana* entendemos uma variedade diferenciável X munida de uma *métrica riemanniana*, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto $p \in X$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p X$, que varia diferenciavelmente com p .

Importa destacar que toda variedade diferenciável (Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica riemanniana; ver [4, Proposição 2.10, p. 47].

Uma maneira de ter diferenciabilidade sobre vetores tangentes de uma variedade riemanniana é com as chamadas *conexões afins*, cuja definição não é necessária para este trabalho. Com as conexões afins é possível falar em velocidade e aceleração de uma curva na variedade. Qualquer variedade de dimensão positiva tem infinitas conexões afins.

Uma *geodésica* numa variedade riemanniana X é uma curva em X que tem aceleração constante igual a zero, isto é, um caminho parametrizado

$$\gamma : I \rightarrow X \quad \text{tal que} \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

Se γ é uma geodésica em X , então o comprimento $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$ do vetor velocidade é constante ao longo de γ . Definimos a função *comprimento do arco* γ por

$$t \mapsto s(t) = \int \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt.$$

Segue-se que o comprimento do arco de uma geodésica γ varia segundo uma função linear do parâmetro t .

O comprimento de arco está definido não apenas para geodésicas, mas para qualquer caminho suave $\omega : I \rightarrow X$.

Definimos a *distância* entre dois pontos $p, q \in X$ como sendo o ínfimo dos comprimentos de todos os caminhos suaves que unem p e q . Isto é, sendo $\mathcal{C}(p, q)$ o conjunto de todos os caminhos suaves $\omega : I \rightarrow X$ iniciando em p e terminando em q , definimos

$$d(p, q) = \inf \left\{ \int_I \left| \frac{d\omega}{dt} \right| dt \quad \text{tal que} \quad \omega \in \mathcal{C}(p, q) \right\}.$$

Alguns questionamentos surgem naturalmente a respeito das geodésicas e da função distância: Dados uma variedade riemanniana X e pontos $p, q \in X$, existe uma geodésica conectando esses pontos? Se existir, a geodésica é única? Existe um caminho

ou, mais precisamente, uma geodésica em X conectando p e q de tal modo que seu comprimento seja exatamente $d(p, q)$? No caso afirmativo, um tal caminho/geodésica é chamado *minimizante*.

Respostas de alcance bastante geral para estas questões podem ser vistas em [4] e [10]. Aqui focaremos naquilo que é essencial aos nossos propósitos.

Apresentamos a seguinte proposição, correspondente ao Corolário 10.7 de [10, p. 61]:

Corolário 2.5. *Seja X uma variedade riemanniana. Se um caminho suave $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outro caminho suave que inicia em $\omega(0)$ e termina em $\omega(1)$, então ω é uma geodésica.*

Ou seja, um caminho minimizante em comprimento é uma geodésica. Para um resultado mais global de minimização a respeito das geodésicas, considere o que segue.

Definição 2.6. Uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ é dita ser *minimal* se seu comprimento é menor ou igual ao comprimento de qualquer outro caminho suave conectando seus pontos finais. Ou seja, se $\int_I \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt \leq d(\gamma(0), \gamma(1))$.

O Teorema 10.4 de [10, p. 59] assevera que geodésicas suficientemente pequenas são minimizantes, o que não é verdadeiro para geodésica de comprimento grande, em geral.

Além disso, tem-se o seguinte resultado correspondente ao Corolário 10.8 de [10, p. 62]:

Proposição 2.7. *Seja X uma variedade riemanniana e seja $K \subset X$ compacto. Existe um número real $\delta > 0$ tal que quaisquer dois pontos de K que distam menos do que δ são conectados por uma única geodésica de comprimento menor do que δ . Além disso, essa geodésica é minimizante e varia diferencialmente com os pontos p e q .*

Na última afirmação da Proposição [2.7], considera-se sobre o conjunto de todos os caminhos em X a topologia compacto-aberta.

Da Proposição [2.7] vislumbramos o cenário ideal para a construção da epsilon teoria de pontos fixos (e, mais adiante, epsilon teoria de coincidências). Explicamos:

Cenário 2.8 (da construção das epsilon teorias). Seja X uma variedade riemanniana conexa e compacta. Pela Proposição [2.7], existe um número real $\delta > 0$ com a propriedade que: para quaisquer pontos $p, q \in X$ que distam menos do que δ , existe uma única geodésica c_{pq} em X , que inicia em p e termina em q , cujo comprimento é igual a $d(p, q)$. Além disso, c_{pq} varia continuamente com p e q . Para o desenvolvimento das epsilon teorias, escolhamos e pré-fixamos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \delta$.

Para ilustrar, considere esfera S^2 como sua estrutura riemanniana usual, de tal modo que as geodésicas em S^2 são arcos de circunferências máximas. Sejam p e q os polos norte

e sul, respectivamente, de S^2 . Então $d(p, q) = \pi$ e existem infinitas geodésicas de p para q cujo comprimento é igual a π ; de fato, qualquer semi-meridiano é uma geodésica entre p e q com comprimento π . Agora, ao invés de q , consideremos qualquer outro ponto $q' \in S^2$, diferente também de p . Então $d(p, q') < \pi$ e existe uma única geodésica de p para q' com comprimento igual a $d(p, q')$. Tal geodésica corresponde ao menor dos arcos da (única) circunferência máxima $S \subset S^2$ que passa por p e q' . O arco complementar é também uma geodésica conectando p e q' , mas seu comprimento é igual a $2\pi - d(p, q') > d(p, q')$.

2.4 Epsilon número de Nielsen para pontos fixos

Ao longo desta seção, X é uma variedade riemanniana compacta e conexa, com função distância associada d , conforme apresentado na Seção 2.3. Fixemos, de uma vez por todas, um número real $\varepsilon > 0$, conforme descrito no Cenário 2.8. Então, para quaisquer pontos $p, q \in X$ que distam $d(p, q) < \varepsilon$, existe uma única geodésica c_{pq} conectando p e q ; além disso, a geodésica c_{pq} é minimizante e varia continuamente com p e q .

Sejam $f, g : X \rightarrow X$ funções contínuas com $d(f, g) < \varepsilon$. Então, para cada $x \in X$, tem-se que $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ e, portanto, temos definida uma geodésica minimizante $c_{f(x)g(x)}$ que inicia em $f(x)$ e $g(x)$. Por variar continuamente com o ponto x , uma vez que f e g são contínuas, a coleção de funções $\{h_t\} : X \rightarrow X$ dadas por $h_t(x) = c_{f(x)g(x)}(t)$ é uma epsilon homotopia que inicia em f e termina em g .

Segue-se que duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow X$ são epsilon homotópicas se, e somente se, $d(f, g) < \varepsilon$.

Temos, portanto, uma definição alternativa para o ε -número mínimo de pontos fixos de uma dada função contínua $f : X \rightarrow X$, a saber,

$$\text{MF}^\varepsilon(f) = \min\{\#(\text{Fix}(g)) : d(f, g) < \varepsilon\}.$$

A partir de agora, iniciamos o procedimento que levará à definição do assim chamado ε -número de Nielsen para pontos fixos de uma dada função contínua $f : X \rightarrow X$.

Primeiramente, fixamos um conjunto um pouco maior que $\text{Fix}(f)$, mas que é formado por pontos “quase” fixos, isto é, pontos cuja imagem via f difere da identidade menos do que ε . Denotaremos tal conjunto por $\Delta^\varepsilon(f)$ e veremos que suas componentes conexas farão o papel dos conjuntos abertos U_i que na teoria clássica de Nielsen tornam admissíveis os pares (f, U_i) . Precisamente, definimos

$$\Delta^\varepsilon(f) = \{x \in X : d(x, f(x)) < \varepsilon\}.$$

Proposição 2.9. *O conjunto $\Delta^\varepsilon(f)$ é aberto em X .*

Demonstração. Basta notar que $\Delta^\varepsilon(f) = D_f^{-1}([0, \varepsilon))$, onde $D_f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a função contínua definida por $D_f(x) = d(x, f(x))$, e o intervalo $[0, \varepsilon)$ é aberto em \mathbb{R}^+ . \square

Agora, vamos definir uma relação de equivalência em $\text{Fix}(f)$, de modo a mesclar o conceito da teoria clássica com o erro ε a ser considerado.

Definição 2.10. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função contínua e $x_0, x_1 \in \text{Fix}(f)$ pontos fixos de f . Dizemos que x_0, x_1 são ε -equivalentes se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$, de x_0 para x_1 , tal que $d(\gamma, f \circ \gamma) < \varepsilon$. Esta é de fato uma relação de equivalência e as classes induzidas por esta relação são chamadas as ε -classes de pontos fixos de f .

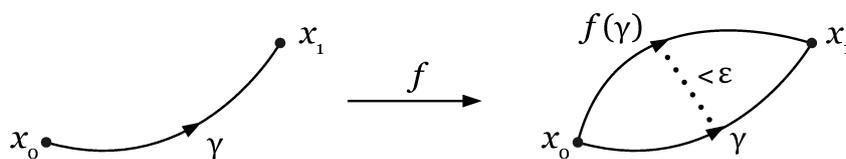


Figura 2.3: Relação de ε -equivalência em $\text{Fix}(f)$.

O teorema a seguir traz uma equivalência que mostra a importância do conjunto $\Delta^\varepsilon(f)$ para caracterizar as ε -classes de pontos fixos de f .

Teorema 2.11. Pontos fixos x_0 e x_1 de uma função contínua $f : X \rightarrow X$ são ε -equivalentes se, e somente se, pertencem à mesma componente conexa de $\Delta^\varepsilon(f)$.

Demonstração. Suponha que $x_0, x_1 \in \text{Fix}(f)$ são ε -equivalentes e seja γ um caminho em X de x_0 a x_1 tal que $d(\gamma, f \circ \gamma) < \varepsilon$. Ou seja, $d(\gamma(s), f(\gamma(s))) < \varepsilon$ para todo $s \in I$. Logo, $\gamma(I) \subset \Delta^\varepsilon(f)$. Como $\gamma(I)$ é conexo, ele está contido numa mesma componente conexa de $\Delta^\varepsilon(f)$. Assim, segue que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$ estão na mesma componente. Reciprocamente, suponha que $x_0, x_1 \in \text{Fix}(f)$ estão na mesma componente de $\Delta^\varepsilon(f)$. Como X é localmente conexo por caminho (por ser uma variedade) e $\Delta^\varepsilon(f) \subset X$ é aberto (Proposição 2.9), segue que as componentes conexas e as componentes conexas por caminho de $\Delta^\varepsilon(f)$ são as mesmas; ver [11, Teorema 25.5, p. 161]. Então, existe um caminho γ de x_0 até x_1 . Como γ está em $\Delta^\varepsilon(f)$, temos que $d(\gamma, f \circ \gamma) < \varepsilon$. Logo, x_0 e x_1 são ε -equivalentes. \square

Corolário 2.12. As ε -classes de pontos fixos de uma função contínua $f : X \rightarrow X$ são abertas em $\text{Fix}(f)$.

Demonstração. Como X é localmente conexo por caminho e $\Delta^\varepsilon(f)$ é aberto em X (Proposição 2.9), cada componente de $\Delta^\varepsilon(f)$ é aberta em X [11, Teorema 25.3, p. 161]. Além disso, segue do Teorema 2.11 que cada ε -classe de pontos fixos é igual à intersecção de uma

componente de $\Delta^\varepsilon(f)$ com $\text{Fix}(f)$. Assim, as ε -classes de pontos fixos de f são abertas em $\text{Fix}(f)$. \square

Pelo Corolário 2.12, as ε -classes de pontos fixos de f constituem uma cobertura aberta para $\text{Fix}(f)$. Como $\text{Fix}(f)$ é compacto (por ser fechado na variedade compacta X) e as ε -classes de pontos fixos são duas a duas disjuntas (afinal, são classes de equivalência), segue que existe uma quantidade finita de ε -classes de pontos fixos, digamos, $F_1^\varepsilon, \dots, F_k^\varepsilon$.

Denotamos a componente de $\Delta^\varepsilon(f)$ que contém F_i^ε por $\Delta_i^\varepsilon(f)$.

Proposição 2.13. *Os pares $(f, \Delta_i^\varepsilon(f))$ são admissíveis para todo $1 \leq i \leq k$.*

Demonstração. De acordo com a definição de par admissível que apresentamos na Subseção 1.1.2, precisamos provar que a função f não possui ponto fixo na fronteira $\partial\Delta_i^\varepsilon(f)$ de cada aberto $\Delta_i^\varepsilon(f)$, para $1 \leq i \leq k$.

Suponha o contrário, ou seja, que exista $x \in \partial\Delta_i^\varepsilon(f) \cap \text{Fix}(f)$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Então $x \notin \Delta_i^\varepsilon(f)$, pois o conjunto $\Delta_i^\varepsilon(f)$ é aberto. Logo, existe $j \neq i$ tal que $x \in \Delta_j^\varepsilon(f)$, o que implica que $x \in \partial\Delta_i^\varepsilon(f) \cap \Delta_j^\varepsilon(f)$.

Do fato de x pertencer ao aberto $\Delta_j^\varepsilon(f)$ segue-se que existe uma bola aberta B , centrada em x , inteiramente contida em $\Delta_j^\varepsilon(f)$. Do fato de x pertencer à fronteira $\partial\Delta_i^\varepsilon(f)$ segue-se que a bola B intercepta $\Delta_i^\varepsilon(f)$. Resulta que algum ponto da bola B pertence a ambos, a $\Delta_j^\varepsilon(f)$ e a $\Delta_i^\varepsilon(f)$, ou seja, $\Delta_i^\varepsilon(f) \cap \Delta_j^\varepsilon(f) \neq \emptyset$, o que está em contradição com o fato de $\Delta_i^\varepsilon(f)$ e $\Delta_j^\varepsilon(f)$ serem componentes distintas de $\Delta^\varepsilon(f)$.

Desse modo, concluímos que não há ponto fixo de f na fronteira de cada componente de $\Delta^\varepsilon(f)$ e, portanto, são admissíveis os pares $(f, \Delta_i^\varepsilon(f))$. \square

Segue da Proposição 2.13 que, para cada par $(f, \Delta_i^\varepsilon(f))$, está definido, conforme apresentação na Subseção 1.1.2, um índice $\text{ind}(f, \Delta_i^\varepsilon(f))$.

Dizemos que uma ε -classe de pontos fixos de f , digamos $F_i^\varepsilon = \text{Fix}(f) \cap \Delta_i^\varepsilon(f)$, é *essencial* se $\text{ind}(f, \Delta_i^\varepsilon(f)) \neq 0$. Caso contrário, dizemos que a classe é *inessencial*.

Não havendo risco de confusão, escrevemos

$$\text{ind}(F_i^\varepsilon) = \text{ind}(f, \Delta_i^\varepsilon(f)),$$

e chamamos este número de o *índice* de ponto fixo da ε -classe de pontos fixos F_i^ε .

Definição 2.14. O ε -número de Nielsen de pontos fixos de uma função contínua $f : X \rightarrow X$, denotado por $N^\varepsilon(f)$, é o número de suas ε -classes de pontos fixos essenciais.

O teorema a seguir estabelece uma relação entre o ε -número de Nielsen e o número de Nielsen (clássico) de pontos fixos de uma função.

Teorema 2.15. *Se pontos fixos x_0 e x_1 de uma função contínua $f : X \rightarrow X$ são ε -equivalentes, então x_0 e x_1 estão na mesma classe de pontos fixos de f (no sentido clássico apresentado na Subseção 1.1.4). Além disso, cada classe de pontos fixos é uma reunião de ε -classes de pontos fixos e*

$$N^\varepsilon(f) \geq N(f).$$

Demonstração. Se x_0 e x_1 são pontos fixos ε -equivalentes, existe um caminho γ entre eles tal que $d(\gamma, f \circ \gamma) < \varepsilon$. Então, $h_t(s) = c_{\gamma(s)f(\gamma(s))}(t)$ define uma homotopia de caminhos entre γ e $f \circ \gamma$ e, portanto, x_0 e x_1 estão na mesma classe de ponto fixo. Assim, cada classe F_i é uma união de ε -classes de pontos fixos.

Agora, suponha que $F_j = \bigcup_{j=1}^p F_j^\varepsilon$ seja uma classe de pontos fixos, escrita como uma reunião de ε -classes de pontos fixos. Então podemos calcular o índice da classe F_j usando o par admissível $(f, \bigcup_{j=1}^p \Delta_j^\varepsilon(f))$. Pela propriedade de aditividade do índice de pontos fixos,

$$\text{ind}(F_j) = \text{ind}\left(f, \bigcup_{j=1}^p \Delta_j^\varepsilon(f)\right) = \sum_{j=1}^p \text{ind}(f, \Delta_j^\varepsilon(f)) = \sum_{j=1}^p \text{ind}(F_j^\varepsilon).$$

Se a classe F_j é essencial, isto é, $\text{ind}(F_j) \neq 0$, então, no somatório da direita na identidade acima, pelo menos uma das parcelas $\text{ind}(F_j^\varepsilon)$ deve ser não nula, o que significa que a correspondente ε -classe de pontos fixos F_j^ε é essencial. Portanto, $N^\varepsilon(f) \geq N(f)$. \square

O próximo resultado fornece uma cota inferior para o ε -número mínimo de pontos fixos $\text{MF}^\varepsilon(f)$ de uma dada função contínua $f : X \rightarrow X$, de modo semelhante à limitação inferior obtida na Subseção 1.1.4 para a cardinalidade de pontos fixos entre todas as funções homotópicas a dada função f . Noutras palavras, o resultado mostra que o número $N^\varepsilon(f)$ apresentado acima é realmente digno de ser chamado um número de Nielsen.

Teorema 2.16. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma função contínua. Então $N^\varepsilon(f) \leq \text{MF}^\varepsilon(f)$.*

Demonstração. Sejam $g : X \rightarrow X$ uma função epsilon homotópica a f e $\{h_t\} : X \rightarrow X$ a epsilon homotopia que inicia em f e termina em g definida por $h_t(x) = c_{f(x)g(x)}(t)$.

Primeiramente, verificaremos que os pares $(g, \Delta_i^\varepsilon(f))$ são admissíveis.

Note que a Proposição 2.9 garante que $d(x, f(x)) \geq \varepsilon$ para todo $x \in \partial\Delta_i^\varepsilon(f)$. Então, para $x \in \partial\Delta_i^\varepsilon(f)$ e $t \in I$, temos

$$d(x, h_t(x)) + d(h_t(x), f(x)) \geq d(x, f(x)) \geq \varepsilon.$$

Mas como $\{h_t\}$ é uma epsilon homotopia, $d(h_t(x), f(x)) = d(h_t(x), h_0(x)) < \varepsilon$ e, assim, $d(x, h_t(x)) > 0$. Ou seja, h_t não tem ponto fixo na fronteira de $\Delta_i^\varepsilon(f)$, qualquer que seja o momento da homotopia. Em particular, $(h_1, \Delta_i^\varepsilon(f)) = (g, \Delta_i^\varepsilon(f))$ é admissível.

Além disso, pela propriedade de invariância por homotopia do índice de ponto fixo,

$$\text{ind}(f, \Delta_i^\varepsilon(f)) = \text{ind}(g, \Delta_i^\varepsilon(f)).$$

Consequentemente, se F_i^ε é uma ε -classe de pontos fixos essencial da função f , então $\text{ind}(g, \Delta_i^\varepsilon) \neq 0$ e, pelo Teorema 1.2, a função g possui ponto fixo em $\Delta_i^\varepsilon(f)$. Portanto, g tem pelo menos $N^\varepsilon(f)$ pontos fixos. \square

Uma consequência óbvia do Teorema 2.16 é que, para toda função contínua $f : X \rightarrow X$, tem-se $N^\varepsilon(f) \leq \#\text{Fix}(f)$, tal como o Teorema 1.6.

Contudo, apesar do ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f)$ ser um limitante inferior para o número de pontos fixos de todas as funções g que são epsilon homotópicas a f , o número $N^\varepsilon(f)$ não é, ele próprio, invariante com relação às epsilon homotopias, especialmente quando consideramos ζ -homotopias para $\zeta > 0$ arbitrariamente pequeno. Exemplos desse fato são apresentados a seguir. Os detalhes dos cálculos foram deixados para a Seção 2.6.

Exemplo 2.17. Seja $f : I \rightarrow I$ a autofunção contínua do intervalo $I = [0, 1]$, cujo gráfico está apresentado na Figura 2.4. Seja $g : I \rightarrow I$ a função contínua definida como sendo igual a f , exceto no intervalo $[p, q]$, onde o gráfico de g é um segmento de reta conectando $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$. O valor de $\varepsilon > 0$ está representado na Figura 2.4.

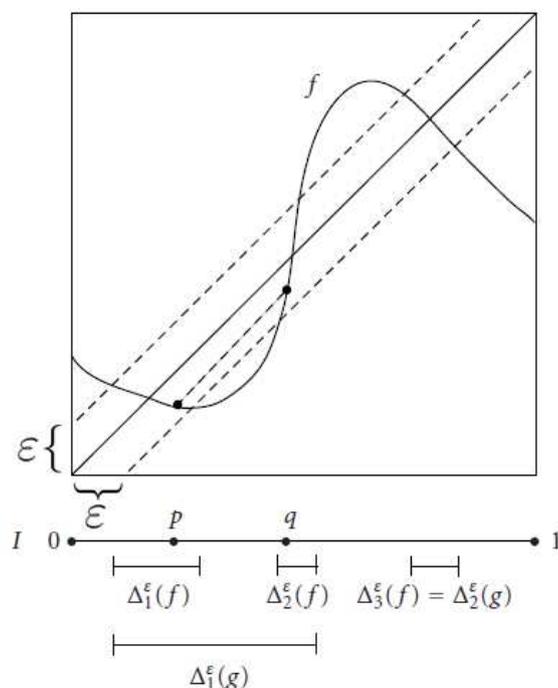


Figura 2.4: Funções f e g do Exemplo 2.17.

Dado um real $\zeta > 0$, podemos ajustar f no intervalo $[p, q]$ de tal modo que a homotopia $\{h_t\} : X \rightarrow X$ dada por

$$h_t(x) = \begin{cases} tg(x) + (1-t)f(x) & \text{se } x \in [p, q] \\ f(x) = g(x) & \text{se } x \in I \setminus [p, q] \end{cases},$$

seja uma ζ -homotopia entre f e g . Contudo, o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f) = 3$, enquanto que $N^\varepsilon(g) = 1$, conforme mostraremos detalhadamente na Seção 2.6.

Uma vez que o número de Nielsen $N(f) = 1$ para toda autofunção contínua do intervalo I (conforme Exemplo 1.7), o Exemplo 2.17 também mostra uma situação na qual $N^\varepsilon(f) > N(f)$. No exemplo a seguir, a desigualdade estrita $N^\varepsilon(f) > N(f)$ também se verifica, desta vez sem que se tenha $N(f) = 1$.

Exemplo 2.18. Considere a circunferência S^1 como o espaço quociente obtido do intervalo $I = [0, 1]$ pela identificação $0 \sim 1$. Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ a função contínua cujo gráfico está ilustrado na Figura 2.5. Claramente, a função f tem grau $\deg(f) = -3$ (pois o faço $f(S^1)$ dá três voltas líquida da circunferência S^1 , no sentido antihorário). Segue do Exemplo 1.8 que f tem número de Nielsen

$$N(f) = |-3 - 1| = 4.$$

Por outro lado, f tem 10 pontos fixos dispostos num total de 7 ε -classes de pontos fixos, das quais 5 são formadas por apenas 1 elemento e a primeira e a última classes são formadas por 3 e 2 pontos fixos, respectivamente.

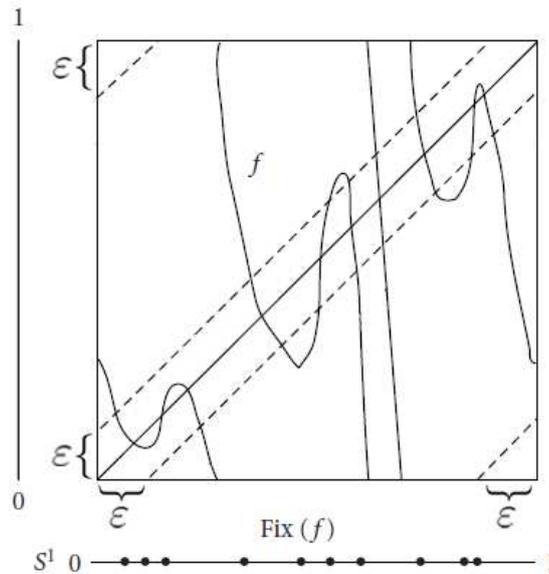


Figura 2.5: Função f do Exemplo 2.18.

É fácil ver que a classe formada por 2 elementos é a única que não é essencial (ela pode ser eliminada deformando-se f ligeiramente, menos do que ε , “para baixo”, com relação à figura). Por isso, o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f) = 6$.

Um procedimento para o cálculo efetivo de $N^\varepsilon(f)$, para f uma autofunção contínua do intervalo I ou da circunferência S^1 , é apresentado na Seção [2.6](#).

2.5 Realização do epsilon número de Nielsen

Esta seção apresenta o principal teorema do capítulo, que é também o teorema principal de [\[2\]](#). Trata-se da prova da validade da propriedade de Wecken no contexto da epsilon teoria de pontos fixos, isto é, a prova de que o ε -número de Nielsen de pontos fixos $N^\varepsilon(f)$ de uma função contínua $f : X \rightarrow X$ não é apenas uma cota inferior para o ε -número mínimo de pontos fixos $\text{MF}^\varepsilon(f)$, mas que tal cota é sempre atingida, ou seja, que

$$\text{MF}^\varepsilon(f) = N^\varepsilon(f).$$

Destacamos que o resultado independe da dimensão da variedade X , o que difere, de modo muito interessante, a epsilon teoria da teoria clássica de pontos fixos, onde, como vimos na Subseção [1.1.4](#), a propriedade de Wecken não é válida em dimensão 2.

A demonstração do Teorema [2.20](#) envolve a chamada construção de Hopf que, por sua vez, depende de técnicas simpliciais para as quais indicamos [\[3\]](#) e [\[14\]](#).

Antes do resultado central, apresentamos um lema.

Lema 2.19. *Seja F um subconjunto fechado de uma variedade compacta X e seja U um subconjunto aberto e conexo de X que contém F . Nessas condições, existe $V \subset X$ aberto e conexo que contém F e cujo fecho está contido em U*

Demonstração. Como X é compacta e Hausdorff (logo, normal), por [\[11\]](#), Lema 31.1, p. 196] existe um conjunto aberto W contendo F cujo fecho está contido em U . Como F é fechado no Hausdorff X , ele também é compacto. Logo, existe uma quantidade finita de componentes W_1, \dots, W_r de W cuja união cobre F . Como U é aberto e conexo na variedade localmente conexa por caminhos X , segue-se que U é também conexo por caminhos. Seja a_i um caminho em U de $x_i \in W_i \cap F$ até $x_{i+1} \in W_{i+1} \cap F$ e seja A_i um subconjunto aberto de U contendo a_i tal que o fecho de A_i está em U (considere $1 \leq i \leq r$ e $r + 1 = 1$). Como a_i é conexo, podemos assumir A_i também conexo. Denotando

$$V = W_1 \cup A_1 \cup W_2 \cup A_2 \cup \dots \cup W_r \cup A_r,$$

temos que V é conexo. Como os fechos de cada W_i e A_i estão em U , o fecho de V também está em U e o lema está demonstrado. \square

Seja $F_i^\varepsilon = \text{Fix}(f) \cap \Delta_i^\varepsilon(f)$ uma ε -classe de pontos fixos de uma dada função contínua $f : X \rightarrow X$. Pelo Lema [2.19](#), existe um subconjunto $V_i \subset \Delta_i^\varepsilon(f)$ conexo e aberto, contendo F_i^ε , cujo fecho \overline{V}_i ainda está em $\Delta_i^\varepsilon(f)$.

Para a função $D_f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $D_f(x) = d(x, f(x))$ temos que $D_f(\overline{V}_i) = [0, \delta_i]$ onde $\delta_i < \varepsilon$.

Escolha $\alpha_i > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta_i + 2\alpha_i < \varepsilon$.

Teorema 2.20. *Para cada função contínua $f : X \rightarrow X$, existe uma função contínua $f_1 : X \rightarrow X$ que é epsilon homotópica a f e possui $N^\varepsilon(f)$ pontos fixos.*

Demonstração. Vamos definir f_1 fora de $\Delta^\varepsilon(f)$ através de aproximação simplicial de tal modo que $d(f, f_1) < \alpha$, onde $\alpha = \min\{\alpha_i\}$. A prova então consiste em descrever f_1 em cada componente $\Delta_i^\varepsilon(f)$ de $\Delta^\varepsilon(f)$. Para simplificar a notação, construiremos a f_1 assumindo, inicialmente, que $\Delta^\varepsilon(f)$ seja conexo e assim omitiremos os índices i .

Primeiramente, triangularizamos a variedade X e tomamos uma subdivisão simplicial suficientemente fina de tal modo que: se u é aproximação simplicial de f com respeito a essa triangulação/subdivisão, então $d(u, f) < \alpha/2$ e, para σ um simplexo que intersecta $X \setminus \text{int}(V)$, tem-se $u(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$.

Pela construção de Hopf, podemos modificar u , movendo cada ponto não mais do que $\alpha/2$, a fim de obtermos uma quantidade finita de pontos fixos, todos eles em um simplexo maximal em V e portanto, no interior da variedade X (confira em [\[3\]](#) Teorema 2, p. 118]). Para poupar notação, ainda chamaremos de u essa função modificada, e então a função definitiva $u : X \rightarrow X$ é tal que o conjunto $\text{Fix}(u)$ é finito e a distância $d(u, f) < \alpha$.

Agora refinamos a triangulação de X de tal modo que os pontos fixos de u sejam vértices. Como V é uma variedade conexa n -dimensional, podemos conectar os pontos fixos de u por caminhos em V ; seja P a reunião desses caminhos. Com relação a uma subdivisão suficientemente fina da triangulação de X , a vizinhança estrelar $S(P)$ de P , que é um poliedro conexo finito, tem a propriedade que a vizinhança derivada de $S(P)$ está em V . Seja T uma árvore geradora do grafo conexo e finito correspondente ao 1-esqueleto de $S(P)$; então T contém $\text{Fix}(u)$. Seja $R(T)$ uma vizinhança regular de T em $V \cap \text{int}(X)$. Então, como T é colapsável, segue de [\[14\]](#) Corolário 3.27, p. 41] que $R(T)$ é uma bola n -dimensional.

Portanto, temos construído um subconjunto $W = \text{int}(R(T))$ de V , contendo $\text{Fix}(u)$, para o qual existe um homeomorfismo $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como $\text{Fix}(u)$ é finito, podemos assumir que $\phi(\text{Fix}(u)) \subset \text{int}(B_1)$, onde B_1 é a bola unitária fechada em \mathbb{R}^n . Denotaremos

$$B_1^* = \phi^{-1}(B_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{0}^* = \phi^{-1}(0).$$

Para cada $x \in B_1^* \subset W \subset V$ temos

$$d(x, u(x)) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), u(x)) < \delta + \alpha < \varepsilon.$$

Assim, existe uma única geodésica $c_{xu(x)}$ em X conectando x e $u(x)$.

Considere a função (que sabemos ser contínua, pela Seção 2.3) $H : B_1^* \times I \rightarrow X$ definida por $H(x, t) = c_{xu(x)}(t)$. Então $H^{-1}(W)$ é um subconjunto aberto de $B_1^* \times I$ contendo $B_1^* \times \{0\}$. Logo, existe $t_0 > 0$ tal que $H(B_1^* \times [0, t_0]) \subset W$.

Defina a retração $\rho : B_1^* - \mathbf{0}^* \rightarrow \partial B_1^*$ de $B_1^* - \mathbf{0}^*$ sobre a fronteira de B_1^* por

$$\rho(x) = \phi^{-1} \left(\frac{1}{|\phi(x)|} \phi(x) \right).$$

Para $x \in B_1^* - \mathbf{0}^*$ e $t \in [0, t_0]$, temos $\rho(x) \in \partial B_1^* \subset B_1^*$ e, então, $H(\rho(x), t) \in W$. Este fato torna bem definida a função $K : B_1^* \times [0, t_0] \rightarrow W$ dada por

$$K(x, t) = \begin{cases} \mathbf{0}^* & \text{se } x = \mathbf{0}^* \\ \phi^{-1}(|\phi(x)|\phi(H(\rho(x), t))) & \text{se } x \in B_1^* - \mathbf{0}^*. \end{cases}$$

Além disso, o fato de $\phi(H(\partial B_1^* \times I))$ ser um subconjunto limitado do \mathbb{R}^n implica que a função K é contínua. De fato: quando $x \rightarrow \mathbf{0}^*$, a imagem $\phi(x) \rightarrow 0$ e, pela limitação de H já observada, o produto $|\phi(x)|\phi(H(\rho(x), t)) \rightarrow 0$ e, conseqüentemente,

$$K(x, t) = \phi^{-1}(|\phi(x)|\phi(H(\rho(x), t))) \rightarrow \phi^{-1}(0) = \mathbf{0}^*.$$

Agora considere a função $D_K : B_1^* \times [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$D_K(x, t) = d(x, K(x, t)).$$

Pela continuidade de D_K e tendo em vista que $K(x, 0) = x$, temos que $D_K^{-1}([0, \eta])$ é um subconjunto aberto de $B_1^* \times [0, t_0]$ contendo $B_1^* \times \{0\}$.

Assim, tomando $\eta = \alpha$, existe $t_1 \in (0, t_0)$ tal que $D_K(B_1^* \times [0, t_1]) \subset [0, \alpha]$, ou seja, $d(x, K(x, t)) < \alpha$ para todo $t \in [0, t_1]$.

Defina $v : B_1^* \rightarrow X$ por $v(x) = K(x, t_1)$.

O próximo passo é estender v para o conjunto $B_2^* = \{x \in W : 0 \leq |\phi(x)| \leq 2\}$.

Definimos

$$v(x) = c_{xu(x)}((1 - t_1)|\phi(x)| + 2t_1 - 1), \text{ quando } 1 \leq |\phi(x)| \leq 2.$$

Então $v : B_2^* \rightarrow X$ é contínua, já que, para todo $x \in \partial B_1^*$, tem-se $\rho(x) = x$ e $|\phi(x)| = 1$. Também note que $v(x) = u(x)$ se $|\phi(x)| = 2$, logo uma extensão de v para todo X pode ser definida tomando-se simplesmente $v = u$ fora de B_2^* .

Desse modo, a função v tem apenas um ponto fixo, que é ponto $\mathbf{0}^*$. De fato:

Se houvesse um ponto fixo x_0 de v fora de B_2^* , então, como v coincide com u fora de B_2^* , ele também seria um ponto fixo para u , o que está em contradição com $\text{Fix}(u) \subset B_1^*$.

Se houvesse $x_0 \in \text{Fix}(v) \cap (B_2^* - B_1^*)$, então teríamos

$$v(x_0) = c_{x_0 u(x_0)}((1 - t_1)|\phi(x_0)| + 2t_1 - 1) = x_0.$$

Como $c_{x_0 u(x_0)}$ é geodésica minimizante iniciando em x_0 , segue $(1 - t_1)|\phi(x_0)| + 2t_1 - 1 = 0$, donde $|\phi(x_0)| = \frac{1 - 2t_1}{1 - t_1} < 1$, contradizendo o fato de $x_0 \in B_2^* - B_1^*$.

Enfim, se houvesse $x_0 \in \text{Fix}(v) \cap (B_1^* - \mathbf{0}^*)$, então, pela definição de v em B_1^* , tem-se

$$x_0 = v(x_0) = \phi^{-1}(|\phi(x_0)|\phi(H(\rho(x_0), t_1))), \quad \text{donde} \quad \phi(x_0) = |\phi(x_0)|\phi(H(\rho(x_0), t_1)).$$

Sendo $x_0 \neq \mathbf{0}^*$, segue-se que

$$\frac{\phi(x_0)}{|\phi(x_0)|} = \phi(H(\rho(x_0), t_1)).$$

Compondo com ϕ^{-1} de ambos os lados e usando as definições de ρ e de H , obtemos

$$\rho(x_0) = H(\rho(x_0), t_1) = c_{\rho(x_0) u(\rho(x_0))}(t_1).$$

Como $t_1 > 0$, segue-se que $u(\rho(x_0)) = \rho(x_0)$, ou seja, $\rho(x_0)$ é um ponto fixo para u e, assim sendo, $\phi(\rho(x_0)) \in \phi(\text{Fix}(u)) \cap \partial B_1$, o que está em contradição com o fato $\phi(\text{Fix}(u)) \subset \text{int}(B_1)$.

Temos assim demonstrado que, de fato, a função v satisfaz $\text{Fix}(v) = \{\mathbf{0}^*\}$.

Finalmente, defina uma função contínua $f_1 : X \rightarrow X$ como segue: Se o índice $\text{ind}(f, \Delta^\varepsilon(f)) \neq 0$, considere $f_1 = v : X \rightarrow X$. Se o índice $\text{ind}(f, \Delta^\varepsilon(f)) = 0$, pelo Teorema [1.3](#), existe uma função contínua $f_1 : X \rightarrow X$ que é idêntica a v fora de B_1^* , que não tem ponto fixo em B_1^* e, ainda, $d(f_1, v) < \alpha$.

Afirmamos que $d(f_1, f) < \varepsilon$. De fato:

Se $x \notin B_2^*$, então $f_1(x) = v(x) = u(x)$, com $d(u, f) < \alpha < \varepsilon$.

Se $x \in B_2^* - B_1^*$, então $f_1(x) = v(x) \in c_{xu(x)}$, donde $d(v(x), u(x)) \leq d(x, u(x))$. Daí,

$$\begin{aligned} d(f_1(x), f(x)) &= d(v(x), f(x)) \\ &\leq d(v(x), u(x)) + d(u(x), f(x)) \\ &\leq d(x, u(x)) + d(u(x), f(x)) \\ &\leq (d(x, f(x)) + d(f(x), u(x))) + d(u(x), f(x)) \\ &< \delta + 2\alpha \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $x \in B_1^*$ e $\text{ind}(f, \Delta^\varepsilon(f)) \neq 0$, então $f_1(x) = v(x) = K(x, t_1)$. Daí,

$$\begin{aligned} d(f_1(x), f(x)) &= d(K(x, t_1), f(x)) \\ &\leq d(K(x, t_1), x) + d(x, f(x)) \\ &< \alpha + \delta \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $x \in B_1^*$ e $\text{ind}(f, \Delta^\varepsilon(f)) = 0$, então

$$\begin{aligned} d(f_1(x), f(x)) &\leq d(f_1(x), v(x)) + d(v(x), f(x)) \\ &= d(f_1(x), v(x)) + d(K(x, t_1), f(x)) \\ &\leq \alpha + (\alpha + \delta) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso conclui a prova de que $d(f_1, f) < \varepsilon$ no caso em que $\Delta^\varepsilon(f)$ é conexo.

Retornando ao caso geral em que $\Delta^\varepsilon(f)$ pode não ser conexo, aplicamos em cada componente $\Delta_i^\varepsilon(f)$ a construção acima, obtendo funções $f_{1i} : X \rightarrow X$ que coincidem com v fora de $\Delta_i^\varepsilon(f)$. Essas funções podem ser “justapostas” de modo a definir uma função contínua $f_1 : X \rightarrow X$ que coincide com v fora de $\Delta^\varepsilon(f)$ e com f_{1i} em cada componente $\Delta_i^\varepsilon(f)$ correspondente. Assim, para $x \notin \Delta^\varepsilon(f)$, temos $d(f(x), f_1(x)) < \alpha < \varepsilon$ e, para $x \in \Delta_i^\varepsilon(f)$, temos $d(f(x), f_1(x)) \leq 2\alpha_i + \delta_i < \varepsilon$, já que o $\alpha = \min_i \{\alpha_i\}$.

Portanto, $d(f, f_1) < \varepsilon$ e f_1 possui exatamente $N^\varepsilon(f)$ pontos fixos, pois f_1 , além de reduzir cada classe de ponto fixo a um único ponto fixo representante, elimina tal representante se a classe a qual ele representa é inessencial. \square

Além de ser um resultado muito importante, o Teorema 2.20 traz uma luz acerca do que acontece, na teoria clássica, para a propriedade de Wecken falhar em dimensão 2.

Analisemos, brevemente, o clássico exemplo de B. Jiang apresentado em [8], disponível também em [7, p.641]. Seja P o espaço correspondente a um disco bidimensional com dois buracos. A Figura 2.6 ilustra P e seu retrato por deformação $P_0 = C_1 \cup C_2$, um buquê de duas circunferências.

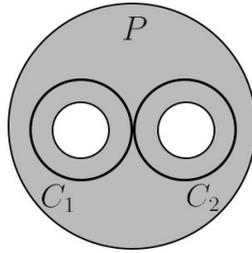


Figura 2.6: Superfície do exemplo de B. Jiang.

Sejam $r : P \rightarrow P_0$ uma retração e $\psi : P_0 \rightarrow P_0$ uma função que faz C_1 dar uma volta nela mesma no sentido contrário ao sentido nela fixado (grau -1) e faz C_2 dar três voltas nela mesma com sentido igual ao nela fixado (grau 3). Defina $f : P \rightarrow P$ pela composição $f = \ell \circ \psi \circ r$, onde $\ell : P_0 \hookrightarrow P$ é a inclusão natural. A função f é contínua e tem como seus pontos fixos: o ponto p_0 da interseção $C_1 \cap C_2$, o ponto $p_1 \in C_1$ antípoda de p_0 , e o ponto $p_2 \in C_2$ antípoda de p_0 , com respectivos índices

$$\text{ind}(f, p_0) = 0, \quad \text{ind}(f, p_1) = 1, \quad \text{ind}(f, p_2) = -1.$$

Em [8], B. Jiang descreveu um caminho β em X , de p_1 para p_2 , tal que β e $f \circ \beta$ são homotópicos relativo aos pontos finais. Isto significa que os pontos p_1 e p_2 constituem uma classe de pontos fixos de f e, pela aditividade do índice, $\text{ind}(f, \{p_1, p_2\}) = 0$. O ponto p_0 constitui, ele próprio, a outra classe de pontos fixos de f que, como vimos, tem índice zero. Portanto, f não possui classe de pontos fixos essencial, donde, $N(f) = 0$.

Contudo, ainda em [8, §4] provou-se que $\text{MF}[f] = 2$.

Para entender o que se passa no contexto da epsilon teoria de pontos fixos, seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para satisfazer a propriedade de que pontos na superfície P (com bordo) que distam menos do que ε sejam conectados por uma única geodésica. Se houvesse um caminho γ de p_1 para p_2 tal que γ fosse ε -homotópico a $f \circ \gamma$, então $N^\varepsilon(f)$ seria igual a 0 e, pelo Teorema 2.20, existiria uma função epsilon homotópica a f livre de ponto fixo. Como B. Jiang provou que nenhuma função homotópica a f é livre de ponto fixo, concluímos que um tal caminho γ não existe. Em outras palavras, qualquer caminho γ de p_1 a p_2 homotópico a $f \circ \gamma$, relativo aos pontos finais, é levado para longe, em comparação com ε , através da f , isto é, satisfaz $d(\gamma, f \circ \gamma) \geq \varepsilon$.

2.6 Cálculo do epsilon número de Nielsen

Como vimos nos Exemplos 1.7 e 1.8, o número de Nielsen de autofunções de uma variedade compacta unidimensional (com ou sem bordo) são conhecidos.

Vale observar que, em algumas situações, a epsilon teoria de Nielsen não difere da teoria clássica. Se uma função $f : X \rightarrow X$ tem apenas um ponto fixo, então existe somente uma ε -classe de pontos fixos. Da mesma forma para a função identidade $id : X \rightarrow X$, tem-se uma única ε -classe de pontos fixos, haja vista que $\Delta^\varepsilon(id) = X$, que é conexo. Em ambos os casos, segue do Teorema 2.15 que $N^\varepsilon(f) = N(f)$ e $N^\varepsilon(id) = N(id)$.

Contudo, devemos esperar, em geral, que se tenha $N^\varepsilon(f) > N(f)$. Note que a função do Exemplo 2.17 pode ser ajustada para que a diferença $N^\varepsilon(f) - N(f)$ seja tão grande quanto se queira, já que, nesse caso, $N(f) = 1$ está fixado (Exemplo 1.7) e podemos construir a função f com qualquer número de oscilações de amplitude maior do que ε (para ε suficientemente pequeno) ao redor da identidade.

Entretanto, para autofunções de espaços mais gerais, o problema de calcular o ε -número de Nielsen parece ser ainda mais difícil do que o cálculo do número de Nielsen usual, em razão de não dispormos das ferramentas típicas da Topologia Algébrica, já que, como vimos, o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(\cdot)$ não é um invariante homotópico.

A seguir, apresentamos algoritmos para o cálculo do ε -número de Nielsen de funções $f : X \rightarrow X$, onde X é uma variedade unidimensional compacta, ou seja X é o intervalo I ou a circunferência S^1 .

Primeiramente, considere $X = I$. Definimos:

$$A^\varepsilon = \{x \in I : f(x) = x + \varepsilon\}, \quad B^\varepsilon = \{x \in I : f(x) = x - \varepsilon\}, \quad Q^\varepsilon = I \setminus (A^\varepsilon \cup B^\varepsilon).$$

Note que A^ε e B^ε são fechados em X e, logo, compactos. Além disso, Q^ε é uma união de intervalos abertos em I . Chamaremos de *intervalos essenciais* aqueles de Q^ε que possuírem uma extremidade em A^ε e a outra em B^ε e também os intervalos da forma $[0, x]$ se $x \in B^\varepsilon$ e $(x, 1]$ se $x \in A^\varepsilon$. Denote, ainda, por A_0^ε o subconjunto de A^ε formado apenas por extremidades de intervalos essenciais.

Afirmção 1: A cada três pontos sucessivos $a_1 < a_2 < a_3$ em A_0^ε existe pelo menos um $b \in B^\varepsilon$ entre a_1 e a_3 . Caso contrário, a_2 não seria extremidade de intervalo essencial.

Afirmção 2: Mesmo que Q^ε tenha infinitos intervalos, apenas uma quantidade finita deles pode ser essencial. Caso contrário, pela compacidade de A^ε , existiria uma sequência $(a_j)_j \subset A_0^\varepsilon$ tal que $a_j \rightarrow a \in A^\varepsilon$. Associada a essa sequência, podemos construir, a partir da Afirmção 1, uma sequência $(b_j)_j \subset B^\varepsilon$ e então $b_j \rightarrow a$. Pela continuidade de f , $a - \varepsilon = f(b_j) \rightarrow f(a) = a + \varepsilon$, o que é um absurdo, dado que $\varepsilon > 0$.

Feita essa construção, podemos estabelecer uma relação entre intervalos essenciais e ε -classes de pontos fixos essenciais.

Antes, percebamos que $\Delta^\varepsilon(f)$ é uma união de intervalos de Q^ε . Assim, uma componente $\Delta_j^\varepsilon(f)$ de $\Delta^\varepsilon(f)$ é um intervalo de Q^ε .

Veremos que os intervalos essenciais $J = (j_0, j_1)$ são os únicos intervalos de Q^ε tais que $\text{ind}(f, J) \neq 0$ e, logo, $N^\varepsilon(f)$ é igual ao número de intervalos essenciais.

De fato, se J é um intervalo essencial, então um dos pontos $(j_0, f(j_0))$ e $(j_1, f(j_1))$ deve estar abaixo da diagonal e o outro acima. Logo, existe uma homotopia $\{h_t\}_t$ entre f e \bar{f} tal que $h_t(x) = f(x)$ se $x \in I \setminus (j_0, j_1)$ e o gráfico de h_1 restrito a J é o segmento de reta que conecta $(j_0, f(j_0))$ e $(j_1, f(j_1))$. Como consequência, $\bar{f} = h_1$ tem um ponto fixo isolado x_0 em J . Pela Definição [1.4](#) e pela propriedade de homotopia do índice de ponto fixo (ou mesmo pela propriedade de localização), segue que

$$\text{ind}(f, J) = \text{ind}(f, x_0) = \text{ind}(\bar{f}, x_0) = \text{ind}(\bar{f}, J) = \pm 1 \neq 0.$$

Agora, seja $K = (k_0, k_1)$ um intervalo que Q^ε que não é essencial. Então, ou ambos os pontos $(k_0, f(k_0))$ e $(k_1, f(k_1))$ estão acima ou ambos estão abaixo da diagonal. Daí, usando a mesma ideia de homotopia feita no caso anterior (para intervalo essencial J), a restrição do gráfico de f ao intervalo K pode ser deformado continuamente, mantendo os pontos $(k_0, f(k_0))$ e $(k_1, f(k_1))$ fixados, para o segmento de reta que os conecta. Como as componentes da diagonal em $I \times I$ são convexas, esse segmento não intersecta a diagonal e segue do Teorema [1.2](#) que $\text{ind}(f, K) = 0$. Portanto, os intervalos essenciais são exatamente as componentes Δ_j^ε que contém ε -classes de pontos fixos essenciais.

Desta forma, para calcular o $N^\varepsilon(f)$ de autofunções de espaços unidimensionais, basta observar a quantidade de intervalos essenciais.

Para ilustrar esse procedimento, considere novamente o Exemplo 2.17. Na Figura 2.7, que contém o gráfico de $f : I \rightarrow I$, os pontos de I que estão em A^ε e B^ε foram marcados de rosa e azul, respectivamente. Assim, Q^ε é formado por 7 intervalos, mas apenas 3 deles são essenciais e estão sinalizados por chaves abaixo de I . Ou seja, f – que tem 3 pontos fixos – tem também $N^\varepsilon(f) = 3$. Isso significa que todas as ε -classes de pontos fixos de f (que se resumem, cada uma, num conjunto unitário) são essenciais e, portanto, não podem ser eliminadas através de epsilon homotopia.

Para a função $g : I \rightarrow I$ do Exemplo 2.17, os dois primeiros intervalos essenciais de f deixam de ser essenciais em relação a g , restando apenas $N^\varepsilon(g) = 1$ intervalo essencial.

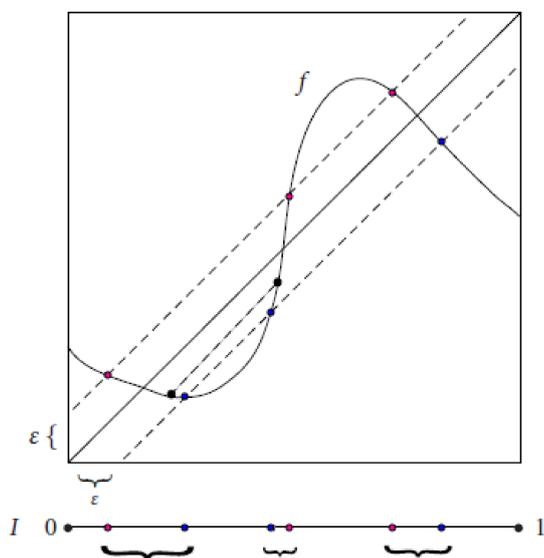


Figura 2.7: ε -classes essenciais da função $f : I \rightarrow I$.

Para $X = S^1$ e, portanto, para funções contínuas $f : S^1 \rightarrow S^1$, será feita uma modificação no procedimento apresentado. Nesse caso, o conjunto dos pontos $(x, y) \in S^1 \times S^1$ tais que $d(x, y) = \varepsilon$ é a união de duas curvas fechadas simples disjuntas, às quais chamaremos Γ_A e Γ_B , no toro. Assim, denotaremos

$$A^\varepsilon = \{x \in S^1 : (x, f(x)) \in \Gamma_A\} \quad \text{e} \quad B^\varepsilon = \{x \in S^1 : (x, f(x)) \in \Gamma_B\}.$$

Como o complemento da diagonal em $S^1 \times S^1$ é conexo, se considerarmos um intervalo em $S^1 \setminus (A^\varepsilon \cup B^\varepsilon)$ que tem um extremo em A^ε e o outro em B^ε , então não necessariamente esse intervalo contém um ponto fixo de f . Para contornar esse fato, a fim de contabilizar intervalos que contém ponto fixo, consideramos o conjunto de pontos $(x, y) \in S^1 \times S^1$ tais que $d(x, y) = 2\varepsilon$. Esse conjunto é a união de duas curvas fechadas simples e disjuntas e

escolhemos arbitrariamente uma delas para chamar de Γ_C . Denote:

$$C^\varepsilon = \{x \in S^1 : (x, f(x)) \in \Gamma_C\} \quad \text{e} \quad Q^\varepsilon = S^1 \setminus (A^\varepsilon \cup B^\varepsilon \cup C^\varepsilon).$$

Assim, Q^ε é uma união de subconjuntos abertos e conexos da S^1 e a eles chamaremos de intervalos abertos na S^1 . Note que a curva Γ_C serve como um sinalizador do comportamento da f após “passar” por A^ε (ou B^ε , a depender da escolha da curva para chamar de Γ_C), apontando se o percurso que o gráfico de f faz para passar de A^ε para B^ε (ou vice-versa) é escapando da diagonal em $S^1 \times S^1$ ou encontrando-a.

Desse modo, um *intervalo essencial* da S^1 é um intervalo aberto de Q^ε que tem um dos extremos em A^ε e o outro em B^ε . Aqui, as Afirmações 1 e 2 continuam válidas e, assim, há uma quantidade finita de intervalos essenciais na S^1 e esse valor é igual ao $N^\varepsilon(f)$. A justificativa para isso é similar àquela apresentada para o caso de autofunções do intervalo. Se J é um intervalo essencial em S^1 , então ele contém ponto fixo. Fazendo uma homotopia que não move os pontos de $S^1 \setminus J$ e, ao final, deixa apenas um ponto fixo em J , pela propriedade de homotopia do índice de ponto fixo e pela Definição [1.5](#), tem-se $\text{ind}(f, J) = \pm 1$. Para um intervalo inessencial K em S^1 , pelo menos um de seus pontos extremos está em C^ε ou ambos os extremos estão em A^ε ou B^ε . Assim, é possível fazer uma homotopia que preserva f fora de K e que, ao final da homotopia, não resta ponto fixo em K e, portanto, $\text{ind}(f, K) = 0$.

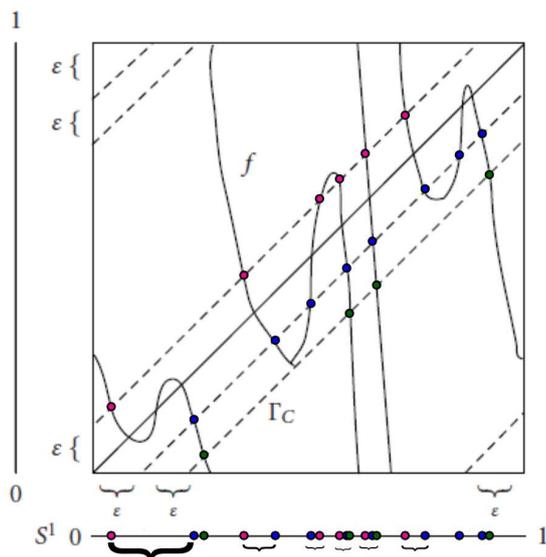


Figura 2.8: ε -classes essenciais da função $f : S^1 \rightarrow S^1$.

Na Figura [2.8](#), referente ao Exemplo [2.18](#), estão sinalizados em rosa os pontos de A^ε , em azul os pontos de B^ε e em verde os de C^ε . Como podemos ver, há um total de 18 intervalos na S^1 e $N^\varepsilon(f) = 6$ deles são essenciais.

Capítulo 3

Epsilon Teoria de Coincidências

Assim como a teoria clássica de Nielsen passou de pontos fixos para o estudo de coincidências de funções, também a epsilon teoria de pontos fixos, proposta por R. Brown em 2006, avançou, a partir de 2014 e até recentemente, para o que foi chamado em [5] e [13] de *epsilon teoria de Nielsen para coincidências*.

Embora se apresentem com mesmo título, quando comparamos os trabalhos mencionados, notam-se diferenças significativas em conceitos básicos. O principal ponto de distinção está na definição da chamada *epsilon homotopia de pares*, o que faz com que o epsilon número de Nielsen para coincidências definido igualmente em ambos, em [5] e em [13], seja um limitante inferior para o ε -número mínimo de coincidências definido em [5], mas não para seu similar definido em [13]. Em virtude disso, utilizamos a definição fornecida por [5], que apresentamos na Seção 3.1 e utilizamos nas seções seguintes. No final do capítulo, na Seção 3.4, analisamos as implicações desta divergência conceitual.

3.1 Epsilon número mínimo de coincidências

Para esta seção, X é um espaço Hausdorff compacto, conexo e localmente conexo por caminho, e Y é uma variedade riemanniana compacta e conexa, com função distância associada d . Seja $\varepsilon > 0$ um real nas condições estabelecidas no Cenário 2.8, desta vez para a variedade Y , o que significa que quaisquer pontos $p, q \in Y$, com $d(p, q) < \varepsilon$, podem ser conectados por uma única geodésica minimizante c_{pq} em Y , que varia continuamente com os pontos p e q .

Definição 3.1. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas e $\varepsilon > 0$ um número real dado. Dizemos que o par (f, g) é ε -homotópico ao par (f', g') , e denotamos $(f, g) \simeq_\varepsilon (f', g')$, se existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, com $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$, tais que $f \simeq_{\varepsilon_1} f'$ e $g \simeq_{\varepsilon_2} g'$, conforme Definição 2.2.

Note que não é exigido que ε_1 e ε_2 sejam ambos positivos, ou seja, pode-se executar uma epsilon homotopia de pares mantendo fixa uma das funções. Com esta definição, podemos definir o ε -número mínimo de coincidências do par (f, g) :

$$\text{MC}^\varepsilon(f, g) = \min\{\#\text{Coin}(f', g') : (f, g) \simeq_\varepsilon (f', g')\}.$$

A proposição a seguir fornece uma definição equivalente para $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$, em termos da distância entre funções, a saber:

$$\text{MC}^\varepsilon(f, g) = \min\{\#\text{Coin}(f', g') : d(f, f') + d(g, g') < \varepsilon\}.$$

Proposição 3.2. *Tem-se $(f, g) \simeq_\varepsilon (f', g')$ se, e somente se, $d(f, f') + d(g, g') < \varepsilon$.*

Demonstração. A parte “somente se” é trivial, tendo em vista a definição de epsilon homotopia do par. Para provar a parte “se”, suponha $d(f, f') + d(g, g') < \varepsilon$ e ponha $\varepsilon_1 = d(f, f')$ e $\varepsilon_2 = d(g, g')$. Defina homotopias $\{h_t^f\} : X \rightarrow Y$ e $\{h_t^g\} : X \rightarrow Y$ por

$$h_t^f(x) = c_{f(x)f'(x)}(t) \quad \text{e} \quad h_t^g(x) = c_{g(x)g'(x)}(t).$$

Então $\{h_t^f\}$ é uma ε_1 -homotopia entre f e f' e $\{h_t^g\}$ é uma ε_2 -homotopia entre g e g' , donde segue que $(f, g) \simeq_\varepsilon (f', g')$. □

Como acontece com o análogo para pontos fixos, aqui se tem

$$\text{MC}^\varepsilon(f, g) \geq \text{MC}[f, g],$$

pois o conjunto dos pares (f', g') que são ε -homotópicos a (f, g) está contido no conjunto dos pares que são homotópicos a (f, g) . Ou seja, na epsilon teoria dispomos (em geral) de menos funções para eliminar coincidências. O seguinte exemplo ilustra esta situação.

Exemplo 3.3. Sejam $f, g : I \rightarrow I$ as funções contínuas cujos gráficos são mostrados na Figura [3.1](#). Como podemos ver, $\text{Coin}(f, g) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, mas apenas o ponto de coincidência c_3 é ε -essencial (f e g foram construídas de tal modo que esse ponto de coincidência não pode ser eliminado através de epsilon homotopia que inicia em (f, g)). Então, $\text{MC}^\varepsilon(f, g) = 1$ enquanto que $\text{MC}[f, g] = 0$.

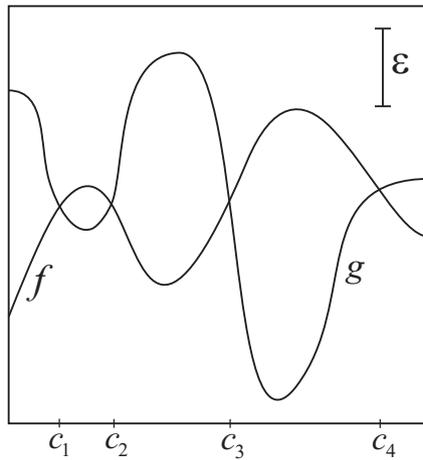


Figura 3.1: Exemplo em que $MC[f, g] = 0$ e $MC^\varepsilon(f, g) = 1$.

Para um exemplo no qual $MC[f, g] \neq 0$, considere o seguinte.

Exemplo 3.4. Sejam $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ as funções contínuas cujos gráficos estão ilustrados na Figura 3.2, onde considera-se $S^1 = I/\{0, 1\}$. Aqui, $\text{Coin}(f, g) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, mas apenas as coincidências c_1, c_4 e c_5 são ε -essenciais e, então, $MC^\varepsilon(f, g) = 3$. Por outro lado, f tem grau 1 e g tem grau 0, do que resulta, pelo Exemplo 1.15, que $MC[f, g] = 1$.

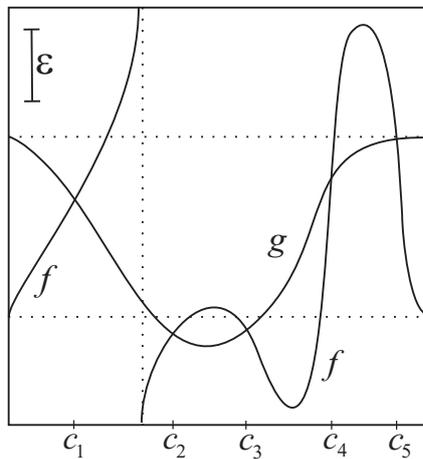


Figura 3.2: Exemplo em que $MC[f, g] = 1$ e $MC^\varepsilon(f, g) = 3$.

É fácil ver que, modificando-se continuamente a função f , ampliando suas oscilações e o número de suas oscilações ao redor da função g , é possível obter uma função contínua $f' : S^1 \rightarrow S^1$, ainda de grau 1, de tal modo que ainda se tenha $MC[f', g] = 1$, mas $MC^\varepsilon(f', g)$ seja tão grande quanto se queira.

3.2 Epsilon número de Nielsen para coincidências

Nesta seção introduzimos o epsilon número de Nielsen para coincidência $N^\varepsilon(f, g)$ para pares de funções (f, g) entre variedades riemannianas fechadas e orientáveis de mesma dimensão. E, seguindo [5], alcançamos a versão para coincidência do Teorema 2.16.

Por enquanto, considere X ainda um espaço Hausdorff, compacto, conexo e localmente conexo por caminho e seja Y uma variedade riemanniana compacta e conexa com função distância d . Bem como na epsilon teoria de pontos fixos, cada $\varepsilon > 0$ considerado *a priori* é assumido sob as condições estabelecidas no Cenário 2.8, desta vez para a variedade Y . Isto significa que quaisquer pontos $p, q \in Y$, com $d(p, q) < \varepsilon$, podem ser conectados por uma única geodésica minimizando c_{pq} em Y , que varia continuamente com p e q .

Dadas duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, denotamos por $\Delta^\varepsilon(f, g)$ o conjunto das “quase” (em relação a ε) coincidências, isto é,

$$\Delta^\varepsilon(f, g) = \{x \in X : d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}.$$

Proposição 3.5. *O conjunto $\Delta^\varepsilon(f, g)$ é aberto em X .*

Demonstração. Basta notar que $\Delta^\varepsilon(f, g) = D_{f,g}^{-1}([0, \varepsilon))$, onde $D_{f,g} : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dada por $D_{f,g}(x) = d(f(x), g(x))$ e $[0, \varepsilon)$ é aberto em \mathbb{R}^+ . \square

Definição 3.6. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas e $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$. Dizemos que x_0, x_1 são ε -equivalentes se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$ de x_0 a x_1 tal que $f \circ \gamma$ é ε -homotópico, como caminho, a $g \circ \gamma$. Esta é de fato uma relação de equivalência em $\text{Coin}(f, g)$, e as classes dessa relação são chamadas ε -classes de coincidências de f e g .

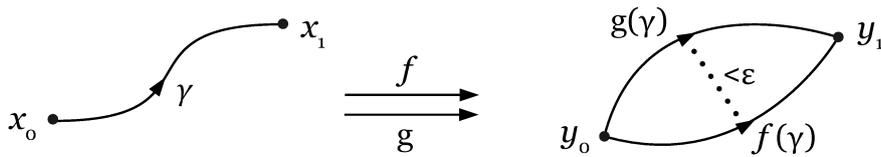


Figura 3.3: Relação de ε -equivalência em $\text{Coin}(f, g)$.

Proposição 3.7. *Dois pontos de coincidência $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ são ε -equivalentes se, e somente se, existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$ de x_0 para x_1 tal que $d(f(\gamma), g(\gamma)) < \varepsilon$.*

Demonstração. A parte “somente se” é trivial. Para provar a parte “se”, suponha que $\gamma : I \rightarrow X$ seja um caminho com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$ tal que $d(f(\gamma), g(\gamma)) < \varepsilon$. Então $\{h_t\} : I \rightarrow Y$ definida por $h_t(s) = c_{f(\gamma(s))g(\gamma(s))}(t)$ é uma homotopia entre $f(\gamma)$ and $g(\gamma)$. Resta provar que essa homotopia é de fato uma homotopia de caminho, ou

seja, que os pontos finais são mantidos fixos durante toda a homotopia. Para isso, seja $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$ e $y_1 = f(x_1) = g(x_1)$. Então, para todo $t \in I$, temos $h_t(0) = c_{f(\gamma(0))g(\gamma(0))}(t) = c_{y_0 y_0}(t) = y_0$ e $h_t(1) = c_{f(\gamma(1))g(\gamma(1))}(t) = c_{y_1 y_1}(t) = y_1$. Isso prova que $\{h_t\}$ é uma homotopia de caminhos começando em $f \circ \gamma$ e terminando em $g \circ \gamma$. \square

Consonante ao Teorema 2.11, procede a caracterização subsequente.

Teorema 3.8. *Dois pontos de coincidência $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ são ε -equivalentes se, e somente se, pertencem à mesma componente conexa de $\Delta^\varepsilon(f, g)$.*

Demonstração. Suponha que $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ sejam ε -equivalentes e seja $\gamma : I \rightarrow X$ um caminho de x_0 a x_1 tal que $d(f(\gamma), g(\gamma)) < \varepsilon$. Logo, para cada $s \in I$, temos $d(f(\gamma(s)), g(\gamma(s))) < \varepsilon$ e, então, $\gamma(I) \subset \Delta^\varepsilon(f, g)$. Como $\gamma(I)$ é conexo, $\gamma(I)$ está contido em alguma componente de $\Delta^\varepsilon(f, g)$. Reciprocamente, suponha que $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ estejam na mesma componente de $\Delta^\varepsilon(f, g)$. Como X é conexo e localmente conexo por caminho, as componentes de $\Delta^\varepsilon(f, g)$ são também componentes por caminho (ver [11, Teorema 25.5, p. 161]) e, assim, existe um caminho γ em $\Delta^\varepsilon(f, g)$ de x_0 para x_1 . Segue-se que $d(f(\gamma), g(\gamma)) < \varepsilon$ e, pela Proposição 3.7, x_0 and x_1 são ε -equivalentes. \square

Corolário 3.9. *As ε -classes de coincidências de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são abertas em $\text{Coin}(f, g)$.*

Demonstração. Como X é localmente conexo por caminho e $\Delta^\varepsilon(f, g)$ é aberto em X (Proposição 3.5), cada componente de $\Delta^\varepsilon(f, g)$ é aberta em X ; ver [11, Teorema 25.3, p. 161]. Além disso, segue do Teorema 3.8 que cada ε -classe de coincidências é a intersecção de uma componente de $\Delta^\varepsilon(f, g)$ com $\text{Coin}(f, g)$. Assim, as ε -classes de coincidências são abertas em $\text{Coin}(f, g)$. \square

Segue do Corolário 3.9 que a coleção das ε -classes de coincidências de um par de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ é uma cobertura aberta do subespaço $\text{Coin}(f, g)$ de X . Como $\text{Coin}(f, g)$ é compacto (por ser fechado no compacto X) e as ε -classes de coincidências são disjuntas, segue que existe uma quantidade finita de ε -classes de coincidências, digamos, $C_1^\varepsilon, \dots, C_k^\varepsilon$. Denotamos a componente de $\Delta^\varepsilon(f, g)$ que contém a ε -classe C_i^ε por $\Delta_i^\varepsilon(f, g)$.

Proposição 3.10. *As triplas $(f, g, \Delta_i^\varepsilon(f, g))$ são admissíveis para todo $1 \leq i \leq k$.*

Demonstração. Como $\Delta_i^\varepsilon(f, g)$ é aberto de X , resta provar que $\text{Coin}(f, g) \cap \Delta_i^\varepsilon(f, g) = C_i^\varepsilon$ é um subconjunto compacto de X . Dado que $\text{Coin}(f, g)$ é compacto em X , é suficiente mostrar que C_i^ε é um subconjunto fechado de $\text{Coin}(f, g)$. Para isso, considere $x \in \text{Coin}(f, g)$ tal que $x \notin C_i^\varepsilon$. Então existe uma classe C_j^ε , com $j \neq i$, tal que $x \in C_j^\varepsilon$. Pelo Corolário 3.9, C_j^ε é uma vizinhança aberta de x em $\text{Coin}(f, g)$, obviamente disjunta de C_i^ε e, portanto, contida no complemento de C_i^ε em $\text{Coin}(f, g)$. O resultado segue. \square

A partir deste ponto, e até o fim do capítulo, assumimos que X e Y sejam variedades riemannianas de mesma dimensão, fechadas e orientáveis.

Em conformidade com a Subseção [1.2.2](#), dadas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, com ε -classes de coincidências $C_1^\varepsilon, \dots, C_k^\varepsilon$, está bem definido o índice de coincidências da tripla admissível $(f, g, \Delta_i^\varepsilon(f, g))$ e, pela propriedade de localização do índice, não há ambiguidade em se definir o índice de coincidências de cada ε -classe C_i^ε por

$$\text{ind}(f, g, C_i^\varepsilon) = \text{ind}(f, g, \Delta_i^\varepsilon(f, g)).$$

A ε -classe de coincidências C_i^ε é dita ser *essencial* se $\text{ind}(f, g, C_i^\varepsilon) \neq 0$; caso contrário, diz-se que ela é *inessencial*.

Definição 3.11. O ε -número de Nielsen de coincidências de um par de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, denotado por $N^\varepsilon(f, g)$, é o número de ε -classes de coincidências essenciais.

Teorema 3.12. Se os pontos de coincidência x_0 e x_1 de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são ε -equivalentes, então eles estão na mesma classe de Nielsen de coincidências de f e g (no sentido clássico apresentado na Subseção [1.2.3](#)). Além disso, cada classe de Nielsen de coincidências é uma reunião de ε -classes de coincidências e

$$N^\varepsilon(f, g) \geq N(f, g).$$

Demonstração. Se x_0 e x_1 são pontos de coincidência ε -equivalentes, então existe um caminho γ em X , de x_0 para x_1 , tal que $f(\gamma) \simeq_\varepsilon g(\gamma)$ relativo aos pontos finais. Desse modo, $h_t(s) = c_{f \circ \gamma(s), g \circ \gamma(s)}(t)$ define uma homotopia de caminho entre $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$ e, portanto, x_0 e x_1 estão na mesma classe de Nielsen de coincidências (no sentido clássico). Assim, cada classe de coincidências C_i é uma união de ε -classes de coincidências, digamos $C_i = \bigcup_{j=1}^p C_j^\varepsilon$.

Então podemos calcular o índice da classe C_i usando a tripla $(f, g, \bigcup_{j=1}^p \Delta_j^\varepsilon(f, g))$. Pela propriedade de aditividade do índice de coincidências,

$$\text{ind}(C_i) = \text{ind}\left(f, g, \bigcup_{j=1}^p \Delta_j^\varepsilon(f, g)\right) = \sum_{j=1}^p \text{ind}(f, g, \Delta_j^\varepsilon(f, g)) = \sum_{j=1}^p \text{ind}(C_j^\varepsilon).$$

Se a classe C_i é essencial, então pelo menos uma dentre as ε -classes C_j^ε , com $1 \leq j \leq p$, é essencial. Portanto, $N^\varepsilon(f, g) \geq N(f, g)$. \square

Antes de mostrarmos que o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ é uma cota inferior para o ε -número mínimo de coincidências $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$, apresentamos dois lemas.

Lema 3.13. Se $(f, g) \simeq_\varepsilon (f', g')$, então $\text{Coin}(f', g') \subset \Delta^\varepsilon(f, g)$.

Demonstração. Suponha que $(f, g) \simeq_\varepsilon (f', g')$ e seja $x \in X$ tal que $x \notin \Delta^\varepsilon(f, g)$. Então

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d(f(x), g(x)) \\ &\leq d(f(x), f'(x)) + d(f'(x), g'(x)) + d(g'(x), g(x)) \\ &< \varepsilon + d(f'(x), g'(x)). \end{aligned}$$

Consequentemente, $d(f'(x), g'(x)) > 0$, o que mostra que $x \notin \text{Coin}(f', g')$. \square

Lema 3.14. *Sejam $\{h_t^f\} : X \rightarrow Y$ uma ε_1 -homotopia iniciando em f e $\{h_t^g\} : X \rightarrow Y$ uma ε_2 -homotopia iniciando em g , com $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$. Para cada $t \in I$, defina $K_t = \text{Coin}(h_t^f, h_t^g)$. Então $K = \bigcup_{t \in I} K_t$ é um subconjunto compacto de X contido em $\Delta^\varepsilon(f, g)$.*

Demonstração. Sejam $F : X \times I \rightarrow Y$ e $G : X \times I \rightarrow Y$ as homotopias $\{h_t^f\}$ e $\{h_t^g\}$, respectivamente, isto é, $F(x, t) = h_t^f(x)$ e $G(x, t) = h_t^g(x)$. Denote $\tilde{K} = \text{Coin}(F, G)$ e seja $\pi : X \times I \rightarrow X$ a função projeção $\pi(x, t) = x$. Então $K = \pi(\tilde{K})$, pois $x \in K_t$ se, e somente se, $(x, t) \in \tilde{K}$. Como $\tilde{K} = D_{F,G}^{-1}(0)$, onde $D_{F,G} : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua dada por $D_{F,G}(x, t) = d(F(x, t), G(x, t))$, segue que \tilde{K} é fechado em $X \times I$. Como $X \times I$ é um espaço Hausdorff compacto, temos que \tilde{K} é um subconjunto compacto de $X \times I$. Finalmente, como π é contínua e $K = \pi(\tilde{K})$, concluímos que K é compacto.

Para provar que K está contido em $\Delta^\varepsilon(f, g)$, note que, para cada $t \in I$, temos que $(f, g) \simeq_\varepsilon (h_t^f, h_t^g)$. Assim, pelo Lema 3.13, cada K_t está contido em $\Delta^\varepsilon(f, g)$ e, portanto, K está contido em $\Delta^\varepsilon(f, g)$. \square

Teorema 3.15. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre variedades riemannianas fechadas e orientáveis de mesma dimensão. Então $N^\varepsilon(f, g) \leq \text{MC}^\varepsilon(f, g)$.*

Demonstração. Sejam $f', g' : X \rightarrow Y$ funções contínuas satisfazendo $d(f, f') = \varepsilon_1$ e $d(g, g') = \varepsilon_2$, com $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$. Sejam $\{h_t^f\} : X \rightarrow Y$ a ε_1 -homotopia dada por $h_t^f(x) = c_{f(x)f'(x)}(t)$, com $h_0^f = f$ e $h_1^f = f'$, e $\{h_t^g\} : X \rightarrow Y$ a ε_2 -homotopia dada por $h_t^g(x) = c_{g(x)g'(x)}(t)$, com $h_0^g = g$ e $h_1^g = g'$. A Proposição 3.5 implica que $d(f(x), g(x)) \geq \varepsilon$ para todo x na fronteira de $\Delta_j^\varepsilon(f, g)$. Assim, para x na fronteira de $\Delta_j^\varepsilon(f, g)$ e $t \in I$, temos que

$$d(f(x), h_t^f(x)) + d(h_t^f(x), h_t^g(x)) + d(h_t^g(x), g(x)) \geq d(f(x), g(x)) \geq \varepsilon.$$

Como $\{h_t^f\}$ é uma ε_1 -homotopia e $\{h_t^g\}$ é uma ε_2 -homotopia, temos $d(f(x), h_t^f(x)) < \varepsilon_1$ e $d(h_t^g(x), g(x)) < \varepsilon_2$. Como, além disso, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$, segue da desigualdade acima que $d(h_t^f(x), h_t^g(x)) > 0$, ou seja, h_t^f e h_t^g não tem ponto de coincidência na fronteira de $\Delta_j^\varepsilon(f, g)$.

Logo, a intersecção $\Delta_j^\varepsilon(f, g) \cap \text{Coin}(h_t^f, h_t^g)$ é exatamente uma ε -classe de coincidência das funções h_t^f e h_t^g . Pelo Lema 3.14, o conjunto $\bigcup_{t \in I} \text{Coin}(h_t^f, h_t^g)$ é compacto em X . Pela propriedade de homotopia do índice de coincidência,

$$\text{ind}(f, g, \Delta_j^\varepsilon(f, g)) = \text{ind}(f', g', \Delta_j^\varepsilon(f, g)).$$

Consequentemente, se $C_j^\varepsilon = \text{Coin}(f, g) \cap \Delta_j^\varepsilon(f, g)$ é uma ε -classe de coincidência essencial, então o índice $\text{ind}(f', g', \Delta_j^\varepsilon(f, g)) \neq 0$ e, pelo Teorema [1.11](#), f' e g' tem coincidência em $\Delta_j^\varepsilon(f, g)$. Portanto, f' e g' tem pelo menos $N^\varepsilon(f, g)$ pontos de coincidência. \square

Uma consequência óbvia do Teorema [3.15](#) é que $N^\varepsilon(f, g) \leq \#\text{Coin}(f, g)$. Contudo, apesar do ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ ser um limitante inferior para o número mínimo de coincidências de todos os pares (f', g') que são ε -homotópicos a (f, g) , o número $N^\varepsilon(f, g)$ não é invariante com relação a ε -homotopias de pares, assim como o ε -número de Nielsen para pontos fixos $N^\varepsilon(f)$ não é invariante com relação a ε -homotopias, conforme destacamos no Exemplo [2.17](#).

3.3 Inconsistências em suposto teorema de realização

A propriedade de Wecken para coincidências no contexto da epsilon teoria corresponde à realização do ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ como o ε -número mínimo de coincidências $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$. Sua veracidade significa(ria) que, para funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre variedades riemannianas de igual dimensão, fechadas e orientáveis, $N^\varepsilon(f, g)$ é não apenas uma cota inferior para $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$, mas que tal cota é de fato atingida, isto é, que

$$\text{MC}^\varepsilon(f, g) = N^\varepsilon(f, g).$$

Como vimos na Seção [2.5](#), a propriedade de Wecken é verdadeira no contexto da epsilon teoria de pontos fixos, o que foi provado por meio do teorema de realização publicado por R. Brown em [2](#), que apresentamos neste texto sob a forma do Teorema [2.20](#).

No recente artigo [15](#), publicado em 2020, os autores apresentam um *suposto* teorema de realização do ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ como o ε -número mínimo de coincidências $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$. Utilizamos o adjetivo “suposto” porque entendemos que há inconsistências sérias no enunciado e na demonstração do resultado.

A seguir, enunciamos o então chamado Teorema 3.4 de [15](#), mas não sob a forma de teorema; chamaremos simplesmente de *enunciado* e, para melhor designá-lo, utilizaremos as iniciais dos sobrenomes do três autores do artigo.

Enunciado R.A.L. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre variedades riemannianas compactas, conexas, orientáveis e de mesma dimensão, com ou sem bordo. Então existe uma função contínua $f' : X \rightarrow Y$ tal que $d(f, f') < \varepsilon$ e o par (f', g) possui $N^\varepsilon(f, g)$ pontos de coincidência.*

Notamos que a condição $d(f, f') < \varepsilon$ implica $(f', g) \simeq_\varepsilon (f, g)$. Portanto, de fato, o Enunciado R.A.L. seria um teorema de realização no ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ como o ε -número mínimo de coincidências $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$.

Passamos à análise das inconsistências do Enunciado R.A.L. e de sua “demonstração” proposta em [15]. Eventual e oportunamente, esta análise poderá ser reportada aos autores do artigo ou ao corpo editorial do periódico em que ele fora publicado.

O Enunciado R.A.L. afirma que o ε -número mínimo de coincidências $MC^\varepsilon(f, g)$ pode ser realizado deformando-se apenas uma das funções, f ou g , ao invés de ambas, o que configura(ria) um fato importante e interessante, por propiciar uma versão do Teorema de Books (Teorema [1.13]) para deformações por ε -homotopia.

No entanto, o mesmo fato evidencia e permite exemplificar concretamente a inconsistência do Enunciado R.A.L. Trata-se do fato do Enunciado R.A.L. incluir a possibilidade de que as variedades X e Y tenham bordo. Neste caso, surgem dois problemas:

(i) Sequer há uma teoria de índices de coincidências (Subseção [1.2.2]) para funções entre variedades com bordo e, portanto, não há definição para o que seria, em tal contexto, o número $N^\varepsilon(f, g)$, não fazendo sentido, por conseguinte, falar na realização de $N^\varepsilon(f, g)$.

(ii) O ε -número mínimo de coincidências $MC^\varepsilon(f, g)$, este sim bem definido mesmo no caso de variedades com bordo, não pode, em geral, no caso em que a variedade do contradomínio tenha bordo, ser realizado deformando-se apenas uma das funções. Para confirmar isso, considere as funções contínuas $f, g : I \rightarrow I$ cujos gráficos estão ilustrados na Figura 3.4. É fácil ver que $MC^\varepsilon(f, g) = 0$, bastando mover g para baixo ao redor de $x = 1/3$, mover f para cima ao redor de $x = 2/3$ e mover g para baixo numa vizinhança de $x = 1$. Contudo, se exigimos que g permaneça fixa e nos permitimos mover apenas f , então o número de coincidências pode ser reduzido para 2, mas não para menos do que isso. Por outro lado, se fixamos f e movemos apenas g , então chegamos ao número mínimo de 1 coincidência. Este exemplo faz parte da prova da Proposição 4.7 de [5].

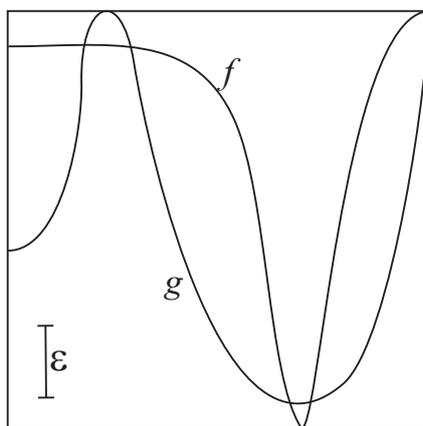


Figura 3.4: Minimizando $\text{Coin}(f, g)$ deformando uma só função.

Dito isto, claro está que o Enunciado R.A.L. torna-se falso ao incluir a possibilidade

de que as variedades possam ter bordo. Mais do que isso, é inconsistente, por mencionar um ente, o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$, que sequer está definido em tal situação.

Perguntamo-nos então se seria apenas esta a inconsistência do Enunciado R.A.L., ou seja, se a exclusão da possibilidade das variedades terem bordo tornaria o Enunciado R.A.L. verdadeiro. Para tentar responder este questionamento, passamos ao estudo da demonstração proposta em [15] e, mais uma vez, encontramos uma inconsistência, mesmo considerando que X e Y sejam ambas variedades riemannianas fechadas.

A suposta demonstração procura ser uma adaptação muito simples da prova do teorema de realização correspondente (publicada por R. Brown) no contexto da epsilon teoria de pontos fixos (Teorema 2.20 desta dissertação). No entanto, acreditamos que uma eventual adaptação para o caso geral de coincidências não possa ser tão simples quanto o proposto em [15]. Mais do que dizer que acreditamos nisso ou naquilo, apontamos a seguir uma falha na suposta demonstração apresentada em [15].

Um passo importante da prova do Teorema 2.20 (reprise do original Teorema 3.2 de [2]) é a construção da função $K : B_1^* \times [0, t_0] \rightarrow W$ definida por

$$K(x, t) = \begin{cases} \mathbf{0}^* & \text{se } x = \mathbf{0}^* \\ \phi^{-1}(|\phi(x)|\phi(H(\rho(x), t))) & \text{se } x \in B_1^* - \mathbf{0}^*. \end{cases}$$

Até o ponto da suposta demonstração apresentada em [15] em que uma similar função K é construída, todos os passos são baseados na simples adaptação de substituir a função identidade $id : X \rightarrow X$ pela função $g : X \rightarrow Y$. Ocorre que, na definição da correspondente função K , a adaptação proposta não é viável. De fato, os autores afirmam definir a *função contínua* $K : B_1^* \times [0, t_0] \rightarrow W$ por

$$K(x, t) = \begin{cases} x & \text{se } x = \mathbf{0}^* \\ \phi^{-1}(|\phi(x)|\phi(g^{-1} \circ H(\rho(x), t))) & \text{se } x \in B_1^* - \mathbf{0}^*. \end{cases}$$

No entanto, note que o uso do símbolo g^{-1} não é para indicar a imagem inversa de um ponto ou conjunto pela função g , pois isso faria de $g^{-1} \circ H(\rho(x), t)$ (ignorando a notação inconsistente e considerando $g^{-1}(H(\rho(x), t))$ um conjunto e, então, o produto $|\phi(x)|\phi(g^{-1} \circ H(\rho(x), t))$ não estaria definido (e, ainda que estivesse, isto tornaria K uma função a multivalores). A conclusão então não pode ser outra senão que, ao escrever g^{-1} , os autores queriam mesmo indicar a *função inversa* de g , o que, por óbvio, só faz sentido se g for invertível ou, mais do que isso, uma vez que se quer a continuidade de K , seria necessário que a função g fosse um homeomorfismo.

Concluimos assim que, ao contrário do que se afirma em [15], tal artigo não apresenta uma demonstração para o que seria o teorema de realização do ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$ como o ε -número mínimo de coincidências $MC^\varepsilon(f, g)$. Portanto, permanece em

aberto o questionamento sobre a validade da propriedade de Wecken no contexto geral da epsilon teoria de coincidências.

3.4 Divergência em epsilon teorias de coincidências

Como antecipamos no preâmbulo deste Capítulo [3], ambos os artigos [5] e [13] propõem as construções básicas da epsilon teoria de coincidências, mas apresentam uma divergência entre si no que se refere ao que entendem por *epsilon homotopia de pares*, o que faz com que o ε -número de Nielsen para coincidências, definido igualmente em ambos, seja um limitante inferior para o ε -número mínimo de coincidências definido em [5], como vimos no Teorema [3.15] desta dissertação, mas não para seu similar definido em [13]. Nesta seção, analisamos e ilustramos, com um exemplo concreto, esta divergência de definições.

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas de um espaço Hausdorff, compacto, conexo e localmente conexo por caminho X em uma variedade riemanniana compacta e conexa Y , com função distância associada d . Considere $\varepsilon > 0$ sob as condições estabelecidas no Cenário [2.8], para a variedade Y .

Lembramos que, na Seção [3.1], utilizamos as definições de [5] e vimos que, dadas funções contínuas $f', g' : X \rightarrow Y$, os pares (f, g) e (f', g') são ε -homotópicos se, e somente se, $d(f, f') + d(g, g') < \varepsilon$. E então definimos

$$\text{MC}^\varepsilon(f', g') = \{\#\text{Coin}(f, g) : d(f, f') + d(g, g') < \varepsilon\}.$$

O artigo [13] não chega a utilizar a terminologia *pares ε -homotópicos*, mas depreende-se de sua Definição 2.5 que os pares (f, g) e (f', g') são considerados ε -homotópicos se ambas as distâncias $d(f, f') < \varepsilon$ e $d(g, g') < \varepsilon$. E então, os autores definem o que chamam ε -número mínimo de coincidências por

$$\text{MC}_2^\varepsilon(f, g) = \{\#\text{Coin}(f', g') : d(f, f') < \varepsilon \text{ e } d(g, g') < \varepsilon\}.$$

Os autores de [13] utilizam, para designar esse número, o inconveniente símbolo $\text{MF}^\varepsilon(f, g)$, que remete a pontos fixos. Por isso, e para melhor evidenciar a diferença com o similar $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$, preferimos denotar o número definido em [13] por $\text{MC}_2^\varepsilon(f, g)$.

É óbvio que se $d(f, f') + d(g, g') < \varepsilon$, então ambas $d(f, f') < \varepsilon$ e $d(g, g') < \varepsilon$. Assim, o conjunto de pares (f', g') utilizados para o cálculo de $\text{MC}^\varepsilon(f, g)$ está contido no conjunto de pares (f', g') utilizados no cálculo de $\text{MC}_2^\varepsilon(f, g)$. Segue que

$$\text{MC}_2^\varepsilon(f, g) \leq \text{MC}^\varepsilon(f, g).$$

A seguir, apresentamos um exemplo em que a desigualdade é estrita. Mais do que isso, o exemplo que apresentamos mostra que o ε -número de Nielsen $N^\varepsilon(f, g)$, quando definido,

não é, em geral, uma cota inferior para $MC_2^\varepsilon(f, g)$, o que faz com que $MC_2^\varepsilon(f, g)$ não seja um bom número para ser chamado de ε -número mínimo de coincidências no âmbito de uma teoria que pretende ser uma *epsilon teoria de Nielsen para coincidências*.

Exemplo 3.16. Sejam $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ as funções contínuas cujos gráficos estão ilustrados na Figura 3.5, onde a circunferência S^1 é vista como o espaço quociente $S^1 = I/\{0, 1\}$.

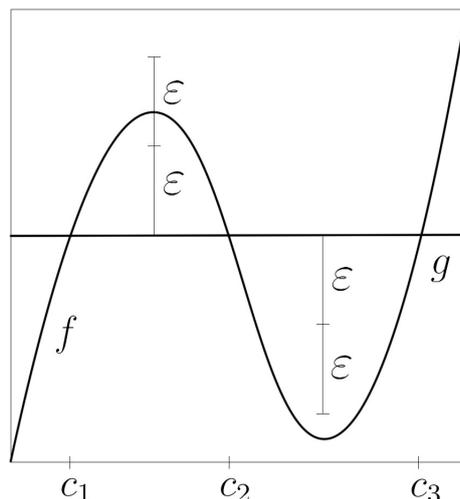


Figura 3.5: Exemplo em que $MC_2^\varepsilon(f, g) < N^\varepsilon(f, g) = MC^\varepsilon(f, g)$.

A função g é constante e a função f tem grau 1. Segue do Exemplo 1.15 que os números advindos da teoria clássica de coincidências são: $N(f, g) = MC[f, g] = 1$.

Temos que $\text{Coin}(f, g) = \{c_1, c_2, c_3\}$ e, claramente, cada coincidência está em uma componente de $\Delta^\varepsilon(f, g)$, ou seja, cada conjunto unitário $\{c_i\}$, para $1 \leq i \leq 3$, é uma ε -classe de coincidências. Além disso, pela Observação 1.16, temos

$$\text{ind}(f, g, c_1) = \text{ind}(f, g, c_3) = 1 \quad \text{e} \quad \text{ind}(f, g, c_2) = -1.$$

Logo, as três ε -classes de coincidências são essenciais e, assim, $N^\varepsilon(f, g) = 3$.

Quanto aos números $MC^\varepsilon(f, g)$ e $MC_2^\varepsilon(f, g)$ temos: Para se chegar a $MC^\varepsilon(f, g)$, a soma das deformações de f e g , em cada ponto $x \in S^1$, não pode atingir ε . Então, é fácil ver que nenhuma das coincidências pode ser eliminada e, portanto $MC^\varepsilon(f, g) = 3$. Por outro lado, para realizar $MC_2^\varepsilon(f, g)$, cada função pode ser deformada a uma nova função que diste da original menos do que ε . Então, a coincidência c_3 não pode ser eliminada (pode apenas ser movimentada), mas as coincidências c_1 e c_2 podem ser eliminadas movendo-se a função f para baixo e a função g para cima num intervalo (b_1, b_2) contendo $[c_1, c_2]$.

Portanto, temos um exemplo em que

$$MC_2^\varepsilon(f, g) < N^\varepsilon(f, g) = MC^\varepsilon(f, g).$$

Bibliografia

- [1] BROOKS, R. On removing coincidences of two maps when only one, rather than both, of them may be deformed by a homotopy. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 40, p. 45–52, 1972. <https://projecteuclid.ez34.periodicos.capes.gov.br/euclid.pjm/1102968819>.
- [2] BROWN, R. F. Epsilon Nielsen fixed point theory, **Fixed Point Theory its Applications**, v. 2006, Article ID 29470, 2006. [doi.org/ 10.1155/FPTA/2006/29470](https://doi.org/10.1155/FPTA/2006/29470).
- [3] BROWN, R. F. **The Lefschetz Fixed Point Theorem**. Glenview, Illinois: Scott, Foresman and Company, 1971. vi+186 p.
- [4] CARMO, M. P. Geometria Riemanniana. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. ix+332 p. ISBN: 978-85-244-0036-0.
- [5] FENILLE, M. C. Epsilon Nielsen coincidence theory. *Central European Journal of Mathematics*, v. 12, n. 9, p. 1337–1348, 2014. doi.org/10.2478/s11533-014-0412-3.
- [6] GONÇALVES, D. L. Coincidence Theory. In: BROWN, R. F.; FURI, M.; GÓRNIOWICZ, L.; JIANG, B. (eds.). **Handbook of Topological Fixed Point Theory**. Dordrecht: Springer, 2005. p. 3–42. [doi: 10.1007/1-4020-3222-6-16](https://doi.org/10.1007/1-4020-3222-6-16).
- [7] JIANG, B. A primer of Nielsen fixed point theory. In: BROWN, R. F.; FURI, M.; GÓRNIOWICZ, L.; JIANG, B. (eds.). **Handbook of Topological Fixed Point Theory**. Dordrecht: Springer, 2005, p. 617–646. [doi: 10.1007/1-4020-3222-6-16](https://doi.org/10.1007/1-4020-3222-6-16).
- [8] JIANG, B. Fixed points and braids. **Inventiones Mathematicae**, v. 75, p. 69–74, 1984. [doi: 10.1007/BF01450569](https://doi.org/10.1007/BF01450569).
- [9] KIANG, T. **The theory of fixed point classes**. Berlin: Springer-Verlag, 1989. xi+174 p. ISBN: 3-540-10819-X.
- [10] MILNOR, J. **Morse Theory**. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Princeton N.J.: Princeton University Press, 1963. vi+153 p. (Annals of Mathematics Studies, 51).

- [11] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, Inc., 2000. xvi+537 p. ISBN: 0-13-181629-2.
- [12] OLIVEIRA, E. **Teoria de Nielsen para coincidência e algumas aplicações**. 1986. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.
- [13] PAEK, Y.; KANG, C.; MUN, G. RYU, T. Epsilon Nielsen coincidence theory. **Topology and its Applications**, v.258, p.439–450, 2019. doi.org/10.1016/j.topol.2019.03.004.
- [14] ROURKE, C. P.; SANDERSON, B. J. **Introduction to Piecewise-Linear Topology**. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1972. viii+123 p. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 69).
- [15] RYU, T.; AN, U.; LI, S. A minimum theorem for epsilon Nielsen coincidences. **Topology and its Applications**, v.282, p.1–7, 2020. doi.org/10.1016/j.topol.2020.107332.
- [16] SCHIRMER, H. Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v.1955, n.194, p.21–39, 1955. [doi-org.ez34.periodicos.capes.gov.br/10.1515/crll.1955.194.21](https://doi.org.ez34.periodicos.capes.gov.br/10.1515/crll.1955.194.21).
- [17] STAECKER, P. C. Maps on graphs can be deformed to be coincidence free. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v.37, n.2, p.377–381, 2011. <https://apcz.umk.pl/czasopisma/index.php/TMNA/article/view/TMNA.2011.019>.
- [18] VICK, J. W. **Homology Theory: An introduction to Algebraic Topology**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994. xiv+242 p. (Graduate Texts in Mathematics, 145). ISBN: 0-387-94126-6.