

HEYSEN BILLY DUEÑES CHÁVEZ

**Coincidências de funções de complexos
uni e bidimensionais em grafos**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2021**

HEYSEN BILLY DUEÑES CHÁVEZ

Coincidências de funções de complexos uni e bidimensionais em grafos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille.

UBERLÂNDIA - MG
2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C513 Chávez, Heyssen Billy Dueñes, 1994-
2021 Coincidências de funções de complexos uni e
bidimensionais em grafos [recurso eletrônico] / Heyssen
Billy Dueñes Chávez. - 2021.

Orientador: Marcio Colombo Fenille .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.38>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. , Marcio Colombo Fenille,1983-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática			
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 91, PPGMAT			
Data:	18 de fevereiro de 2021	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:
Matrícula do Discente:	11912MAT004			
Nome do Discente:	Heyssen Billy Dueñes Chávez			
Título do Trabalho:	Coincidências de funções de complexos uni e bidimensionais em grafos			
Área de concentração:	Matemática			
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia			
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Sobrejeções fortes de complexos CW no plano projetivo			

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Profa. Dra. Patrícia Elaine Desideri - CCENS/UFES, Prof. Dr. Gustavo de Lima Prado - FAMAT/UFU e Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille - FAMAT/UFU, este último o orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu a palavra ao discente para a exposição de seu trabalho. A apresentação se deu no tempo previsto nas normas do Programa.

A seguir, o presidente concedeu a palavra aos membros da Comissão Examinadora (iniciando pelo membro externo), que então arguiram o candidato sobre sua dissertação e apresentação, nos termos regimentais.

Ultimada a arguição, a Comissão Examinadora reuniu-se em sessão secreta e decidiu, por resultado final, considerar o candidato:

APROVADO.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar, o presidente encerrou a sessão. Para constar, foi lavrada esta ata que, após lida e achada conforme, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Patrícia Elaine Desideri, Usuário Externo**, em 18/02/2021, às 15:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo de Lima Prado, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/02/2021, às 15:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Colombo Fenille, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/02/2021, às 15:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site
https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2507703** e o código CRC **BDC1FF17**.

*Dedicado à memória de Marina Tolentino,
sua lembrança é a motivação constante em
cada passo percorrido.*

Agradecimentos

Aos meus pais Lelis e Máximo, pelo apoio incondicional, pelo valor do seu exemplo como educadores. Aos meus irmãos, Nery, Richard, Lizbeth e Darien, seu amor fraternal é uma fonte de inspiração e apoio na minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcio Colombo Fenille, pela sua paciência e disponibilidade em esclarecer minhas dúvidas da pesquisa, pelo acompanhamento contínuo ao longo do mestrado, pelos seus conselhos e críticas construtivas.

Aos membros da banca examinadores, Profa. Dra. Patrícia Elaine Desideri e Prof. Dr. Gustavo de Lima Prado, pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia pela boa recepção e os recursos fornecidos. À Faculdade de Matemática, pelos seus préstimos no desenvolvimento do mestrado. Aos meus professores, que tiveram importante contribuição na minha formação acadêmica. Aos meus colegas e amigos, por fazer do mestrado uma experiência inolvidável.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

CHÁVEZ, H. B. D. **Coincidências de funções de complexos uni e bidimensionais em grafos.** 2021. xv+65 p. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG, Brasil.

RESUMO

A teoria topológica de coincidências concentrou-se, nas últimas décadas, principalmente no problema de eliminar ou minimizar as coincidências de pares de funções, por meio de deformações por homotopia, com foco em funções entre variedades compactas sem bordo. Há pouco na literatura sobre coincidências de funções entre espaços mais gerais. Neste trabalho, estudamos contribuições recentes para a área, que lidam com o problema de coincidências de funções de complexos *CW* uni e bidimensionais em grafos.

Palavras-chave: Complexos *CW*; grafos; superfícies fechadas; teoria de coincidência; equações em grupos livres.

CHÁVEZ, H. B. D. **Coincidence of maps from one- and two-dimensional complexes into graphs.** 2021. xv+65 p. M.Sc. Dissertation (Master Degree in Mathematics), Federal University of Uberlândia, Uberlândia MG, Brazil.

ABSTRACT

The topological coincidence theory has been concentrated, in the last decades, mainly in the problem of eliminating or minimizing the coincidences of pairs of functions, via homotopy deformations, focusing on functions between compact manifolds without boundary. There is little in the literature about coincidence of functions between more general spaces. In this work, we study recent contributions to the area, which deal with the coincidence problem of functions from one- and two-dimensional *CW* complexes into graphs.

Keywords: *CW* complexes; graphs; closed surfaces; coincidence theory; equations in free groups.

Conteúdo

Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xii
Lista de Símbolos	xiv
Introdução	1
1 Prolegômenos	3
1.1 Grupos livres e apresentação de grupos	3
1.2 Construção de complexos CW	8
1.3 Grupo fundamental de um complexo CW	10
1.4 Complexo modelo de uma apresentação	11
1.5 Grafos	13
1.6 Superfícies fechadas	15
2 Coincidências de funções de complexos em grafos	20
2.1 Conceitos e objetivos gerais	20
2.2 Funções entre grafos	21
2.3 Funções de 2-complexos em grafos	29
2.4 Releituras do Teorema 2.4	32
2.5 Funções na circunferência	34
2.6 Funções de um grafo no grafo-balão	38
3 Funções de superfícies no grafo-balão	42
3.1 Funções definidas na esfera e no plano projetivo	43
3.2 Funções definidas no toro	43
3.3 Funções definidas na garrafa de Klein	46
3.4 Funções definidas em somas conexas	47

3.5	Funções definidas em superfícies orientáveis	50
3.6	Funções definidas em superfícies não-orientáveis	55
Referências Bibliográficas		61
Índice Remissivo		64

Listas de Figuras

1.1	Um complexo CW que não é simplicial.	9
1.2	Laços geradores do grupo fundamental	10
1.3	Definindo relatores para o grupo fundamental	11
1.4	O 1-esqueleto de um 2-complexo modelo	12
1.5	Decomposição simplicial de um grafo	13
1.6	Grafo com dois vértices intermediários (e_1^0 e e_2^0) e um vértice final (e_3^0)	13
1.7	Representação gráfica de $f : X \rightarrow Y$ sobre a aresta σ de X .	14
1.8	Exemplo de triangulação da esfera S^2 .	15
1.9	A esfera obtida por identificação.	16
1.10	O plano projetivo obtido por identificação.	16
1.11	O toro obtido por identificação.	16
1.12	A garrafa de Klein obtida por identificação.	17
1.13	Soma conexa de dois planos projetivos.	17
1.14	Soma conexa de dois toros.	18
2.1	Remoção de coincidência em vértice final.	22
2.2	Deslocamento de coincidência em vértice intermediário.	23
2.3	Comportamento de f e g em $U \subset \sigma$.	24
2.4	Comportamento de f' e g' em $U \subset \sigma$.	25
2.5	Comportamento das funções f e g em $U \subset \sigma$.	25
2.6	Funções f' e g' em $U \subset \sigma$.	26
2.7	Comportamento de f e g em $U \subset \sigma$.	26
2.8	Comportamento de f' e g' em $U \subset \sigma$.	27
2.9	A retração de $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$ sobre $(S^1)^\Delta \cong S^1$.	35
2.10	Gerador de $\pi_1((S^1)_*^\Delta, (y_0, y_0)) \approx \mathbb{Z}$	35
2.11	O grafo-balão $\mathcal{W} = S^1 \vee I$.	38
2.12	A retração de $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \Delta$ sobre \mathcal{W}^Δ .	38
2.13	O grafo \mathcal{W}_*^Δ .	39

3.1	Função Σ -homotopicamente-nula do bitoro em \mathcal{W} .	48
-----	--	----

Listas de Símbolos

$W(\mathcal{A})$	Semigrupo gerado pelo alfabeto \mathcal{A} .
$1\!\!1$	Elemento neutro de um grupo livre, palavra vazia.
$F(\mathcal{A})$	Grupo livre no alfabeto \mathcal{A} .
\mathbb{Z}	Grupo dos inteiros.
\mathcal{P}, \mathcal{Q}	Apresentações de grupos.
\mathbf{x}, \mathbf{y}	Conjuntos dos geradores.
\mathbf{r}	Conjuntos dos relatores ou relações.
$F(\mathbf{x})$	Grupo livre no alfabeto \mathbf{x} .
$N(\mathbf{r})$	Menor subgrupo normal de $F(\mathbf{x})$ contendo \mathbf{r} .
Π, Ξ	Grupos apresentados por \mathcal{P}, \mathcal{Q} .
$\text{hom}(\cdot, \cdot)$	Grupo de homomorfismos.
e_i^n	Célula n -dimensional.
D^n	Disco n -dimensional.
B^n	Bola aberta n -dimensional.
$\pi_1(\cdot)$	Grupo fundamental.
$K_{\mathcal{P}}$	Complexo modelo induzido pela apresentação \mathcal{P} .
$K_{\mathcal{P}}^n$	n -esqueleto de $K_{\mathcal{P}}$.
K	Complexo CW uni ou bidimensional.
K^n	n -esqueleto de K .
$\overset{\circ}{X}$	Interior de X .
\overline{X}	Fecho de X .
∂X	Fronteira ou bordo de X .
$\#(\cdot)$	Cardinal de um conjunto.
$\chi(\cdot)$	Característica de Euler.
$H_n(\cdot)$	n -ésimo grupo de homologia com coeficientes inteiros.
$\deg(f)$	Grau de f .
S^2	A esfera.
\mathbb{RP}^2	O plano projetivo.

\mathbb{T}	O toro bidimensional.
\mathbb{K}	A garrafa de Klein.
$X_1 \# X_2$	Soma conexa de duas superfícies fechadas X_1 e X_2 .
\mathbb{T}_k	A superfície fechada orientável de gênero $k \geq 1$.
\mathbb{U}_k	A superfície fechada não-orientável de gênero $k \geq 1$.
$\text{Coin}(f, g)$	Conjunto das coincidências entre f e g .
$\text{MC}[f, g]$	Número mínimo de coincidências.
$\text{Fix}(f)$	Conjunto dos pontos fixos de f .
$\text{MF}[f]$	Número mínimo de pontos fixos.
$\text{MR}[f]$	Número mínimo de raízes.
f_*	Homomorfismo induzido por f em homologia.
$f_\#$	Homomorfismo induzido por f no grupo fundamental.
$H^2(\cdot; G)$	Segundo grupo de cohomologia com coeficientes em G .
$\beta_1(\cdot)$	Primeiro número de Betti.
\mathcal{W}	Grafo-balão, o buquê $S^1 \vee I$.
$\text{bideg}(f)$	Bigrau de f .
$\text{multdeg}(f)$	Multigrau de f .

Introdução

Nas primeiras décadas do século xx, a teoria topológica de pontos fixos e coincidências produziu alguns de seus mais célebres resultados, destacando-se o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (1909), o Teorema de Borsuk-Ulam (1933) e os Teoremas de Pontos Fixos e de Coincidências de Lefschetz (1923, 1927), estes últimos considerados marcos de inauguração da teoria de pontos fixos e coincidências como ramo próprio da Topologia Algébrica.

A partir da década de 1940, especialmente com os trabalhos de J. Nielsen, F. Wecken e H. Schirmer, um novo ponto de vista passou a ser considerado: ao invés da busca por resultados que garantissem a existência de pontos fixos ou coincidências, iniciou-se a busca por condições para que pontos fixos ou coincidências pudesse ser eliminados, por meio de deformações homotópicas da função ou das funções envolvidas, então obtendo-se um conjunto minimal de pontos fixos ou coincidências.

Desde então, até os dias atuais, a teoria topológica de coincidências (deixamos aqui de mencionar pontos fixos) concentra-se principalmente no estudo de funções entre variedades compactas sem bordo, cenário em que uma série de conceitos, ferramentas e teorias auxiliares se adaptam bem. Há pouco na literatura sobre coincidências de funções entre espaços mais gerais. Neste trabalho, fugimos a esta regra e estudamos contribuições recentes (2011–2020) para a área, que lidam com o problema de coincidências de funções de complexos CW uni e bidimensionais em grafos.

Passamos a descrever os principais problemas e contribuições estudados neste trabalho.

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Chama-se *coincidentia* entre f e g um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Ao conjunto de todas as coincidências entre f e g denotamos:

$$\text{Coin}(f, g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

A teoria topológica de coincidências estuda o conjunto $\text{Coin}(f, g)$ e, numa de suas vertentes, como mencionamos acima, a possibilidade de minimizá-lo deformando-se as funções f e g por meio de homotopias.

Sob certas condições sobre os espaços X e Y , prova-se que existem funções f' e g' homotópicas a f e g , respectivamente, o que simplificamos escrevendo $(f', g') \simeq (f, g)$, tais

que o conjunto de coincidências $\text{Coin}(f', g')$ é finito. Este é o caso, por exemplo, quando X e Y são grafos. Neste caso, faz sentido definir o assim chamado *número mínimo de coincidências* do par (f, g) , a saber,

$$\text{MC}[f, g] = \min\{\#\text{Coin}(f', g') : (f', g') \simeq (f, g)\}.$$

O cálculo do número $\text{MC}[f, g]$ é bastante difícil, em geral, e não existe procedimento que se aplique a uma boa generalidade de casos.

Neste trabalho, estudamos condições sob as quais $\text{MC}[f, g] = 0$, no caso em que este número esteja definido, ou, mais geralmente, condições para que, dadas funções contínuas $f, g: X \rightarrow Y$, existam funções $f', g': X \rightarrow Y$ tais que $(f', g') \simeq (f, g)$ e $\text{Coin}(f', g') = \emptyset$. Neste caso, diz-se que o par (f', g') é *livre de coincidência* e que o par (f, g) é *deformável a livre de coincidência*.

Primeiramente, consideramos funções contínuas entre grafos (complexos CW unidimensionais finitos e conexos) e, neste cenário, apresentamos, na Seção 2.2, o resultado principal de [18] que afirma que *todo par de funções contínuas entre grafos, cujo contradomínio não é homeomorfo à circunferência, é deformável a livre de coincidência*.

Em seguida, nas Seções 2.3 e 2.4, considerando funções contínuas de complexos CW uni ou bidimensionais, finitos e conexos, em grafos, apresentamos o resultado principal de [6] e algumas releituras que fornecem condições necessárias e suficientes para que um par de tais funções seja deformável a livre de coincidência. O resultado se aplica, em particular, para funções entre grafos, inclusive quando o contradomínio é a circunferência, o caso não contemplado em [18].

Finalmente, no Capítulo 3 estudamos as aplicações do resultado principal de [6] desenvolvidas em [5] com o intuito de resolver o problema de coincidências para pares de funções de uma superfície fechada num grafo, com particular interesse num grafo simples, porém especial, que chamamos o *grafo-balão*, aquele obtido colando-se uma “cauda” à circunferência. O estudo passa pela prova do teorema principal de [5], que fornece uma condição suficiente, mas não necessária, para que um par de funções de uma soma conexa de duas superfícies em um grafo seja deformável a livre de coincidência.

O problema de coincidências para funções com contradomínio o grafo-balão é particularmente interessante pelas seguintes razões: (i) o problema foi resolvido em [6] para funções na circunferência; (ii) toda função no grafo-balão é homotópica a uma função cuja imagem está contida na circunferência que compõe o grafo-balão. Por isso, estudar o problema de coincidências de funções no grafo-balão significa estudar a possibilidade de eliminação de coincidências de funções na circunferência, após a composição das funções com um mergulho da circunferência no grafo-balão (o grafo “mais simples”, além da circunferência, em que a circunferência mergulha).

Capítulo 1

Prolegômenos

O objetivo deste capítulo inicial é apresentar, de forma breve, alguns conceitos, construções e resultados gerais que serão utilizados nos capítulos seguintes, onde, de fato, apresentamos o tema e os resultados centrais do texto.

Com a compreensão de ser este um capítulo preliminar, não apresentamos detalhes e demonstrações; em vez disso, indicamos referências bibliográficas que os contenham.

1.1 Grupos livres e apresentação de grupos

Os conceitos e resultados que apresentamos nesta seção foram extraídos de [4, 15, 17] e trazidos para uma linguagem mais adequada aos propósitos deste texto.

Seja \mathcal{A} um conjunto de cardinalidade a . Os elementos de \mathcal{A} podem ser símbolos abstratos ou objetos derivados de algum contexto matemático. Chamamos o conjunto \mathcal{A} de *alfabeto* e seus elementos de *letras*. Por *sílaba* entendemos um símbolo a^n , onde a é uma letra do alfabeto \mathcal{A} e o exponente n é um inteiro. Por *palavra* entendemos uma sequência ordenada finita de sílabas.

Em uma palavra, as sílabas são escritas uma após a outra na forma de um produto formal. Cada sílaba é uma palavra em si mesma (uma palavra de uma só sílaba). Uma sílaba pode ser repetida ou seguida por outra sílaba formada a partir da mesma letra. Existe uma única palavra que não possui sílabas, ela é chamada *palavra vazia* e denotada pelo símbolo $\mathbb{1}$. As sílabas de uma palavra devem ser contadas a partir da esquerda. Para abreviar, uma sílaba da forma a^1 é escrita simplesmente como a .

No conjunto $W(\mathcal{A})$ de todas as palavras formadas a partir do alfabeto \mathcal{A} , definimos uma multiplicação natural: o produto de duas palavras corresponde, simplesmente, à palavra obtida escrevendo-se uma palavra após a outra (justaposição de palavras). Essa multiplicação é associativa e a palavra vazia $\mathbb{1}$ é uma identidade tanto à esquerda quanto à direita. Portanto, munido desta estrutura de produto, $W(\mathcal{A})$ é um semigrupo.

Contudo, $W(\mathcal{A})$ não é um grupo. Na verdade, o único elemento de $W(\mathcal{A})$ que possui inverso é a palavra vazia $\mathbb{1}$. Para formar um grupo, reunimos as palavras em classes de equivalência, usando o processo descrito a seguir:

- Se uma palavra u é da forma $w_1a^0w_2$, onde w_1 e w_2 são palavras, dizemos que a palavra $v = w_1w_2$ é obtida de u por uma *contração elementar do tipo I* ou que u é obtida de v por uma *expansão elementar do tipo I*. Se a^0 é a n -ésima sílaba da palavra u , a contração ocorre na n -ésima sílaba.
- Se uma palavra u é da forma $w_1a^p a^q w_2$, onde w_1 e w_2 são palavras, dizemos que a palavra $v = w_1a^{p+q}w_2$ é obtida de u por uma *contração elementar do tipo II* ou que u é obtida de v por uma *expansão elementar do tipo II*.

Palavras u e v são chamadas de equivalentes (a relação é escrita $u \sim v$), se uma pode ser obtida da outra por meio de uma sequência de contrações ou expansões elementares. Esta relação é uma relação de equivalência; $W(\mathcal{A})$ é então particionado em classes de equivalência. Denotamos por $[u]$ a classe de equivalência que contém a palavra u . Denotamos por $F(\mathcal{A})$ o conjunto das classes de equivalência das palavras de $W(\mathcal{A})$.

Tem-se que: se $u \sim u'$ e $v \sim v'$, então $uv \sim u'v'$. Isto significa que $F(\mathcal{A})$ herda a multiplicação de $W(\mathcal{A})$, ficando então definida em $F(\mathcal{A})$ a multiplicação: $[u][v] = [uv]$.

A associatividade da multiplicação em $F(\mathcal{A})$ segue imediatamente da associatividade da multiplicação em $W(\mathcal{A})$. A classe de equivalência $[\mathbb{1}]$ é a identidade tanto pela esquerda como pela direita. Assim, $F(\mathcal{A})$ herda de $W(\mathcal{A})$ a estrutura de semigrupo. A novidade é que em $F(\mathcal{A})$ todo elemento possui inverso: o inverso $[u]^{-1}$ da classe $[u]$ é representado pela palavra \bar{u} que é obtida de u invertendo a ordem das suas sílabas e mudando o sinal do exponente de cada sílaba.

O grupo $F(\mathcal{A})$ é chamado *grupo livre no alfabeto \mathcal{A}* .

Quando \mathcal{A} for um conjunto finito cujos elementos estão listados, digamos $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$, por vezes escrevemos $F(a_1, \dots, a_n)$ ao invés de $F(\mathcal{A})$.

Observe-se que permitimos o alfabeto vazio; o grupo livre resultante é o grupo trivial.

O grupo livre em um alfabeto de apenas uma letra é um grupo cíclico infinito.

O grupo livre em um alfabeto com mais do que uma letra é não abeliano; de fato, se a e b são duas letras no alfabeto \mathcal{A} , então $[a]$ e $[b]$ pertencem a $F(\mathcal{A})$ e não comutam, pois as palavras ab e ba não são equivalentes.

Uma palavra $w \in W(\mathcal{A})$ é chamada de *reduzida* se não for possível aplicar qualquer contração elementar a ela, ou seja, se nenhuma sílaba de w tiver o exponente 0 e não houver duas sílabas consecutivas na mesma letra. Como toda contração elementar sempre reduz o número de sílabas, segue que cada classe de equivalência de palavras contém pelo menos uma palavra reduzida, na verdade existe apenas uma.

Através deste conceito, apresentamos uma descrição alternativa do grupo $F(\mathcal{A})$: ao invés de considerar os elementos de $F(\mathcal{A})$ como sendo as classes de palavras de $W(\mathcal{A})$, escolhemos para representar cada classe a única palavra reduzida que a ela pertence. Então, consideramos $F(\mathcal{A})$ como sendo o conjunto das palavras reduzidas de $W(\mathcal{A})$. A justaposição de duas palavras reduzidas não é necessariamente uma palavra reduzida, pois a primeira palavra pode terminar com uma sílaba na mesma letra da sílaba inicial da segunda palavra. No entanto, a palavra justaposta se reduz de modo único a uma palavra reduzida. Então, definimos o produto de duas palavras reduzidas u e v como sendo a palavra reduzida obtida da justaposição de u com v .

Seja G um grupo arbitrário (que consideramos sob a forma multiplicativa) e seja B um subconjunto de G . A coleção dos subgrupos de G que contém B é não vazia, pois o próprio G pertence a ela. Logo, a interseção desta coleção é também um subgrupo de G que contém B ; ele é chamado de *subgrupo gerado por B* . Se $B \neq \emptyset$, então o subgrupo gerado por B é formado por todos os elementos de G da forma $b_1^{n_1} b_2^{n_2} \dots b_l^{n_l}$, com $b_1, b_2, \dots, b_l \in B$ e $n_1, n_2, \dots, n_l \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, o subgrupo de G gerado pelo conjunto vazio é o subgrupo trivial. Se o grupo gerado por B é o próprio G , então B é chamado uma *conjunto gerador*; alternativamente, diz-se que B *gera* G .

Definição 1.1. Sejam G um grupo e B um conjunto gerador de G . Diz-se que B é uma *base livre* para G se, dado qualquer grupo H , toda função $\phi': B \rightarrow H$ pode ser estendida (de modo único) a um homomorfismo $\phi: G \rightarrow H$. Um grupo que possui base livre é chamado *grupo livre*.

Os seguintes resultados sobre grupos livres podem ser encontrados em [4]:

Proposição 1.2. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Um grupo é livre se, e somente se, é isomorfo a $F[\mathcal{A}]$ para algum \mathcal{A} .*
2. *Todo subgrupo de um grupo livre é livre.*

Como consequência da primeira afirmação da Proposição 1.2 tem-se que a cardinalidade de uma base B de um grupo livre G é igual à cardinalidade α do alfabeto \mathcal{A} tal que G é isomorfo a $F(\mathcal{A})$. Assim, grupos livres G e G' são isomorfos se têm bases B e B' , respectivamente, de mesma cardinalidade. Reciprocamente, se os grupos livres G e G' têm bases B e B' de cardinalidades diferentes, então eles não são isomorfos. Segue-se que a cada grupo livre G corresponde um cardinal que representa a quantidade de elementos de qualquer base livre de G . Quando este cardinal é um número inteiro, isto é, existe uma base livre para G com um número finito de elementos, este número chama-se o *posto* do grupo livre G .

A segunda afirmação da Proposição 1.2 é conhecida como Teorema de Nielsen. Dela segue o resultado abaixo que oportunamente utilizaremos:

Corolário 1.3. *Se dois elementos de um grupo livre comutam, então eles são potências de um elemento comum.*

O resultado do Corolário 1.3 é enunciado em [4] como o Exercício 6 do Capítulo III. Como a ideia da prova será utilizada na demonstração de resultados posteriores, apresentamos brevemente o argumento: suponha que a e b sejam elementos de um grupo livre G que comutam; então o subgrupo $\langle a, b \rangle$ gerado por a e b é um subgrupo livre abeliano de G que, portanto, deve ter posto 1, o que significa que $\langle a, b \rangle$ é cíclico, ou seja, existe $c \in G$ tal que $\langle a, b \rangle = \langle c \rangle$, o que implica que a e b são potências de c .

O resultado a seguir revela, como comentaremos na sequência, como os grupos livres desempenham um papel importante na teoria de grupos.

Proposição 1.4. *Para todo grupo G , existe um grupo livre F e um homomorfismo sobrejetor de F em G .*

Segue da Proposição 1.4 e do Teorema do Isomorfismo que todo grupo G é isomorfo ao quociente de um grupo livre F , ou seja, todo grupo G se apresenta sob a forma

$$G \approx F/N \text{ com } F \text{ livre e } N \triangleleft F.$$

Isto significa que, pensando em grupos livres como “sistemas de coordenadas”, qualquer grupo pode ser descrito ou apresentado num tal sistema, por meio de equações ou relações. Isso conduz ao conceito de *apresentação de grupos* que ora introduzimos.

Uma *apresentação* $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$ consiste de um conjunto $\mathbf{x} = \{x_j\}_j$ de elementos chamados *geradores*, junto com um conjunto indexado $\mathbf{r} = \{r_i\}_i$ de elementos chamados *relatores* ou *relações* que são palavras (não necessariamente reduzidas) no semigrupo $W(\mathbf{x})$ das palavras no alfabeto \mathbf{x} . Seja $F(\mathbf{x})$ o grupo livre no alfabeto \mathbf{x} . Seja $N(\mathbf{r})$ o menor subgrupo normal de $F(\mathbf{x})$ contendo todas as palavras relatoras $r_i \in \mathbf{r}$ (isto é, a interseção de todos os subgrupos normais de $F(\mathbf{x})$ que contêm o conjunto \mathbf{r}). O grupo quociente $\Pi = F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$ é chamado o *grupo apresentado por $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$* .

Pela Proposição 1.4, todo grupo possui uma apresentação. Por exemplo: (i) o grupo livre $F(\mathbf{x})$ é apresentado por $\langle \mathbf{x} | \cdot \rangle$; (ii) o grupo cíclico de ordem n é apresentado por $\langle x | x^n \rangle$; (iii) o *grupo abeliano livre* de posto n , isto é, um grupo isomorfo ao produto cartesiano $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ (n vezes) é apresentado por $\langle x_1, \dots, x_n | \mathbf{r} \rangle$, onde \mathbf{r} é o conjunto de todos os *comutadores* $[x_i, x_j] = x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$, com $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Seja $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$ uma apresentação para o grupo Π e seja

$$\Omega: F(\mathbf{x}) \rightarrow \Pi = F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$$

o homomorfismo quociente correspondente. Dado um grupo G e um homomorfismo $\alpha: \Pi \rightarrow G$, a composição de α com Ω resulta num homomorfismo $\alpha' = \alpha \circ \Omega: F(\mathbf{x}) \rightarrow G$.

Reciprocamente, suponha que seja $\alpha': F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ um homomorfismo satisfazendo $\alpha'(r) = \mathbb{1}_G$ (o elemento neutro de G), para todo $r \in \mathbf{r}$. Então o núcleo de α' contém o subgrupo normal $N(\mathbf{r})$, o que implica que α' induz, por passagem ao quociente $F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$, um homomorfismo $\alpha: \Pi \rightarrow G$ tal que $\alpha' = \alpha \circ \Omega$. A construção de α' a partir de α e de α a partir de α' se resume no diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & & \\ \downarrow \Omega & \searrow \alpha' & \\ \Pi = F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r}) & \xrightarrow{\alpha} & G \end{array}$$

Portanto, os homomorfismos $\alpha: \Pi \rightarrow G$ estão em relação um-a-um com os homomorfismos $\alpha': F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ que satisfazem $\alpha'(\mathbf{r}) = \{\mathbb{1}_G\}$. Resumimos isso escrevendo:

$$\text{hom}(\Pi, G) \equiv \{\alpha' \in \text{hom}(F(\mathbf{x}), G) : \alpha'(\mathbf{r}) = \{\mathbb{1}_G\}\}.$$

Esta correspondência será utilizada inúmeras vezes, sem preocupação com citação explícita, ao longo de todo o texto.

Para finalizar esta seção, apresentamos um importante resultado sobre solubilidade de um certo tipo de equação sobre grupos livres, que será utilizado na Seção 3.6. Trata-se de equações do tipo

$$x^m y^n z^p = \mathbb{1}, \text{ com } m, n, p \geq 2. \quad (1.1)$$

Uma solução para a Equação (1.1) sobre um grupo G é um terno (g_1, g_2, g_3) de elementos de G tal que $g_1^m g_2^n g_3^p = \mathbb{1}_G$ (o elemento neutro de G). Alternativamente, uma solução para a Equação (1.1) sobre um grupo G é um homomorfismo $\phi: F(x, y, z) \rightarrow G$ tal que

$$\phi(x)^m \phi(y)^n \phi(z)^p = \mathbb{1}_G.$$

O teorema a seguir é um importante resultado de R. C. Lyndon e M. P. Schützenberger, publicado em 1962 como o resultado principal de [13]. Ele descreve a forma geral das soluções da Equação (1.1) sobre um grupo livre.

Teorema 1.5. *Se $x^m y^n z^p = \mathbb{1}$ em um grupo livre, com m, n e p inteiros maiores ou iguais a 2, então x, y e z são potências de um elemento comum.*

Como caso particular do Teorema 1.5, tem-se o mesmo resultado para equações com apenas duas incógnitas, isto é, se $x^m y^n = \mathbb{1}$ em um grupo livre, com $m, n \geq 2$, então x e y são potências de um elemento comum.

Por outro lado, o resultado do Teorema 1.5 não se estende para equações com quatro incógnitas. Por exemplo: a equação $x^2 y^2 z^2 w^2 = \mathbb{1}$ sobre o grupo livre $F(a, b)$ possui, como uma solução, a quádrupla (a, b, b^{-1}, a^{-1}) .

1.2 Construção de complexos CW

Conforme mencionado em [8, Seção 2.1], como releitura de [10], um instrumento fundamental para lidar com problemas teóricos em geometria e homotopia é a decomposição de certos espaços como uniões disjuntas de *células* e_i^n de várias dimensões, cada célula (aberta) e_i^n como um subespaço homeomorfo à bola aberta $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Ao fazê-lo, diz-se que o espaço topológico possui uma estrutura de *complexo celular*.

As várias noções de decomposição celular diferem pelas condições que são impostas sobre o fecho \bar{e}_i de uma célula e_i ou sobre o bordo $\partial e_i = \bar{e}_i \setminus e_i$. Estas condições também regulam como as células são “coladas” no processo de construção do complexo celular.

Neste texto, nos concentramos nos chamados *complexos CW*, conceito introduzido em 1949 por J.H.C. Whitehead e que será brevemente apresentado a seguir, seguindo os textos [10, Seção 1.1] e, mais especificamente, a releitura resumida apresentada em [8, Seção 2.1].

Definição 1.6. Um *complexo CW* K é um espaço topológico $|K|$ com uma decomposição celular, cujos *esqueletos* são construídos induutivamente como segue:

- (a) O 0-esqueleto K^0 é um espaço discreto, cada ponto sendo uma 0-célula.
- (b) O n -esqueleto K^n é obtido de K^{n-1} pela colagem de uma coleção disjunta $\{D_i^n\}_i$ de n -discos fechados via funções contínuas $\varphi_i: \partial D_i^n \rightarrow K^{n-1}$, ou seja, tome a soma topológica $K^{n-1} + \coprod_i D_i^n$ e passe ao espaço quociente pelas identificações $x \sim \varphi_i(x)$, $x \in \partial D_i^n$. Cada D_i^n projeta homeomorficamente uma n -célula e_i^n . Cada φ_i é chamada uma função de colagem para e_i^n .
- (c) A $|K| = \bigcup_{n=0}^{\infty} |K^n|$ é atribuída a *topologia fraca* com respeito às células fechadas \bar{e}_i^n , isto é, um subespaço de $|K|$ é fechado se e somente se sua interseção com cada \bar{e}_i^n é fechado em \bar{e}_i^n .

Mais geralmente, um complexo celular é chamado um complexo CW se ele é isomorfo a um obtido pela construção precedente.

Se n é a maior dimensão de célula presente na decomposição celular de K , diz-se que o complexo tem dimensão n e, para resumir, diz-se que K é um n -complexo CW .

Em contraste à situação de complexos simpliciais, em um complexo CW uma célula fechada \bar{e}_i^n não é necessariamente uma união de células. A Figura 1.1 mostra um complexo CW em que ∂e^2 é um ponto de e^1 , mas não é uma 0-célula.

Cada célula e_i^n em um complexo CW possui uma *função característica* $\chi_i: D_i^n \rightarrow K$ que estende a função de colagem φ_i e é um homeomorfismo do interior de D_i^n sobre e_i^n . A saber, podemos tomar χ_i como sendo a composição $D_i^n \rightarrow K^{n-1} + \coprod_i D_i^n \rightarrow K^n \hookrightarrow K$, onde a função do meio é a função quociente definindo K^n .

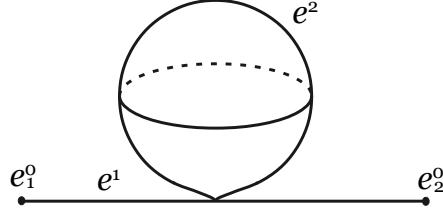


Figura 1.1: Um complexo CW que não é simplicial.

Um *subcomplexo* de um complexo CW K é um subespaço fechado $L \subset K$ que é uma união de células de K . Como L é fechado, a função característica de cada célula em L tem imagem contida em L e, em particular, a imagem da função de colagem de cada célula em L está contida em L . Assim, L é um complexo CW. Resumindo, um *subcomplexo* de K é um subespaço fechado de K que é, ele próprio, um complexo CW. Um par (K, L) consistindo de um complexo CW K e um subcomplexo L será chamado um *par CW*.

Uma *subdivisão* de um complexo CW K é um complexo CW K' com $|K| = |K'|$ e a propriedade que cada célula $e \in K$ é a união de certas células $e'_i \in K'$.

Os seguintes fatos sobre complexos CW podem ser encontrados em [10]:

- Um complexo CW K é finito (isto é, possui um número finito de células) se, e somente se, $|K|$ é compacto.
- Um espaço de recobrimento de um complexo CW K pode ser decomposto (unicamente) como um complexo CW \tilde{K} tal que a função projeção $p : \tilde{K} \rightarrow K$ aplica cada célula $\tilde{e} \in \tilde{K}$ homeomorficamente sobre uma célula $e \in K$. (Note que a afirmação correspondente para células fechadas é falsa, em geral, como mostra o espaço de recobrimento universal da esfera $S^1 = e^0 \cup e^1$). Uma função de colagem para \tilde{e}^n é obtida por um apropriado levantamento da função de colagem $\varphi : \partial D^n \rightarrow K^{n-1}$ de e^n para $\tilde{K}^{n-1} = p^{-1}(K^{n-1})$.

Acrescente-se que:

- Se K e L são dois complexos CW, então o espaço produto $|K| \times |L|$ possui uma decomposição celular natural herdada das estruturas K e L . Para cada par de células $e^n \in K$ e $c^m \in L$, o produto $e^n \times c^m$ correspondente a uma $(n+m)$ -célula na decomposição de $|K| \times |L|$.

A noção de continuidade de funções entre complexos CW é exatamente aquela de funções entre espaços topológicos abstratos. No entanto, temos um importante conceito adicional à definir:

Definição 1.7. Uma função contínua $f : K \rightarrow L$ entre complexos CW é dita ser *celular* se aplica cada n -esqueleto de K no n -esqueleto de L , ou seja, $f(K^n) \subset L^n$ para cada n .

Dada uma função contínua $f: K \rightarrow L$ entre complexos CW , uma função celular $f_{cel}: K \rightarrow L$ homotópica a f é chamada uma *aproximação celular de f* . Em 1949, J. H. C. Whitehead provou o notável resultado que agora enunciamos:

Teorema 1.8 (Teorema da Aproximação Celular). *Toda função contínua entre complexos CW possui uma aproximação celular.*

Antes de seguirmos, informamos que, a menos que seja essencial para a compreensão, economizaremos as barras laterais em $|K|$ para designar o espaço topológico correspondente ao complexo K , designando-o simplesmente por K . Deste modo, K denotará tanto o espaço topológico quanto sua decomposição celular. Para designar a decomposição celular de um n -complexo K finito, por vezes escrevemos

$$K = K^0 \cup \cdots \cup K^n = (e_1^0 \cup \cdots \cup e_{\alpha_0}^0) \cup \cdots \cup (e_1^n \cup \cdots \cup e_{\alpha_n}^n).$$

1.3 Grupo fundamental de um complexo CW

Seja K um complexo CW . Vamos deduzir uma maneira de se determinar uma apresentação para o grupo fundamental $\pi_1(K)$. O que apresentamos a seguir pode ser visto em detalhes em [10, Seção 1.3] e mais resumidamente, como aqui, em [8, Seção 2.3]

Se K^1 é conexo, selecione um vértice e^0 para ser o ponto base e uma árvore geradora, isto é, uma árvore consistindo de algumas arestas e todos os vértices. Cada aresta remanescente e_j^1 , junto com uma orientação, determina um laço em e^0 como na figura abaixo (conectando os vértices inicial e final de e_j^1 com e^0 na árvore). Os elementos x_j de $\pi_1(K^1, e^0)$ dados por estes caminhos constituem uma base livre para o grupo $\pi_1(K^1, e^0)$, isto é, $\pi_1(K^1, e^0)$ é o grupo livre $F(\mathbf{x})$. Veja a Figura 1.2.

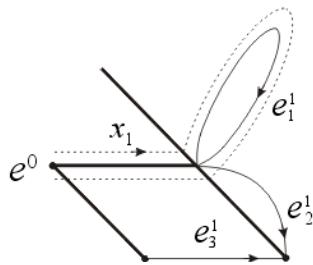


Figura 1.2: Laços geradores do grupo fundamental

Se K^2 é conexo, selecione um ponto base, uma árvore geradora e caminhos x_j no 1-esqueleto, como acima. Para cada 2-célula e_i^2 , uma função de colagem $\varphi_i: \partial D_i^2 \rightarrow K^1$, junto com um ponto base $*$, uma orientação de ∂D^2 e um arco conector u de e^0 a $\varphi_i(*)$ (como na Figura 1.3) definem um elemento $r_i \in \pi_1(K^1, e^0)$ - uma palavra r_i nas letras

$x_j^{\pm 1}$ - que é trivial em $\pi_1(K^2, e^0)$. Além disso, $\pi_1(K^1, e^0) \rightarrow \pi_1(K^2, e^0)$ é sobrejetor, tendo como núcleo o fecho normal $N(\mathbf{r})$, onde \mathbf{r} é o conjunto dos elementos r_i .

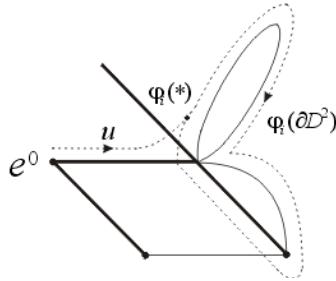


Figura 1.3: Definindo relatores para o grupo fundamental

Assim, $\pi_1(K^2, e^0)$ tem a apresentação $\mathcal{P} = \langle x_1, x_2, \dots | r_1, r_2, \dots \rangle$, isto é, o grupo fundamental $\pi_1(K^2, e^0)$ é dado como o quociente $F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{x} = \{x_j\}_j$ e $\mathbf{r} = \{r_i\}_i$.

Se K tem K^2 como o seu 2-esqueleto, então a função natural $\pi_1(K^2, e^0) \rightarrow \pi_1(K, e^0)$ é um isomorfismo.

Um ponto crucial que não podemos deixar de destacar é que, com este processo que acabamos de descrever, um 2-complexo conexo e finito não determina somente um grupo fundamental, mas uma certa classe de apresentações que não contém todas as possíveis apresentações de tal grupo fundamental. Muitos invariantes de homotopia podem ser derivados de qualquer elemento desta classe de apresentações. O primeiro que mencionamos é a característica de Euler $\chi(K) = 1 - \#(\mathbf{x}) + \#(\mathbf{r})$.

Como um exemplo, note que para um 2-complexo K finito, conexo e simplesmente conexo, as seguintes afirmações são equivalentes: (a) K é contrátil; (b) $\chi(K) = 1$; (c) $H_2(K) = 0$; (d) as apresentações que podem ser obtidas para $\pi_1(K)$ através do processo descrito acima são *balanceadas*, isto é, possuem o mesmo número de geradores e relatores.

1.4 Complexo modelo de uma apresentação

O que apresentamos nesta seção pode ser encontrado em detalhes em [16, Seções 1.1 e 2.1] e resumidamente, como aqui, em [8, Seção 2.4].

Para a construção de um 2-complexo K a partir de um 1-complexo K^1 , considere cada laço de K^1 equipado com uma estrutura linear, cada ∂D^2 subdividido como um polígono e cada $\varphi_i: \partial D_i^2 \rightarrow K^1$ aplicando cada aresta linear e sobrejetivamente sobre um laço de K^1 ou sobre um vértice. Assim, φ_i define um laço em K^1 . Um complexo assim construído é chamado um *complexo de Reidemeister*.

Como um processo inverso ao da seção anterior, podemos associar a uma apresentação finita $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ um *complexo de Reidemeister* $K_{\mathcal{P}}$ com um vértice,

também chamado o *complexo modelo* da apresentação \mathcal{P} (ou induzido pela apresentação \mathcal{P}). Seu 1-esqueleto $K_{\mathcal{P}}^1$ é um buquê de circunferências, cada uma correspondendo a um dos geradores x_1, \dots, x_n , com decomposição celular minimal, isto é,

$$K_{\mathcal{P}}^1 = e^0 \cup e_1^1 \cup \dots \cup e_n^1.$$

As 2-células e_1^2, \dots, e_m^2 de $K_{\mathcal{P}}$ correspondem aos relatores r_1, \dots, r_m e são coladas no 1-esqueleto $K_{\mathcal{P}}^1$ de tal modo que a função de colagem da 2-célula e_i^2 “soletra” sobre as 1-células e_1^1, \dots, e_m^1 a palavra correspondente a r_i sobre as letras x_1, \dots, x_n .

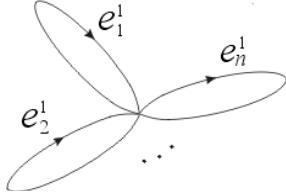


Figura 1.4: O 1-esqueleto de um 2-complexo modelo

Note que a seqüência r_1, \dots, r_m pode conter repetições e/ou a palavra trivial $r_i = \mathbb{1} \in F(\mathbf{x})$. Estas palavras, todavia, não podem ser omitidas quando se constrói o complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$, que pode assim conter diferentes 2-células com o mesmo bordo e/ou 2-células fechadas que são 2-esferas. Não existe regra geral para dizer se as palavras r_i devam ser reduzidas ou possam conter letras inversas adjacentes x_j, x_j^{-1} . Reduzindo tais eventos em φ_i não se afeta o tipo de homotopia simples de $K_{\mathcal{P}}$.

A seguir, dois dos mais importantes resultados que apresentamos neste capítulo preliminar. São eles, respectivamente, o Teorema 1.9 e o Teorema 2.3 de [16, p. 61 e 65].

Teorema 1.9. *O par esqueleto (K, K^1) de um 2-complexo finito e conexo K é homotopicamente equivalente ao par esqueleto $(K_{\mathcal{P}}, K_{\mathcal{P}}^1)$ de um 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ de uma apresentação finita $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$.*

Na passagem do par (K, K^1) para o par $(K_{\mathcal{P}}, K_{\mathcal{P}}^1)$, o 1-esqueleto K^1 é reduzido a um buquê de circunferências, por meio do processo que colapsa uma árvore (um subcomplexo contrátil maximal) em K^1 a um ponto.

Teorema 1.10. *Seja $(K_{\mathcal{P}}, K_{\mathcal{P}}^1)$ o par esqueleto de um 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ de uma apresentação finita $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$. Então, o homomorfismo $l_{\#}: \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(K_{\mathcal{P}})$ induzido pela inclusão natural corresponde ao homomorfismo quociente $F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$.*

Este resultado é particularmente interessante quando consideramos as superfícies fechadas como complexos modelo induzidos por apresentações com um único relator e número de geradores dependendo do gênero da superfície. Isto é tratado na Seção 1.6.

1.5 Grafos

Por um *grafo* entendemos um 1-complexo *CW* conexo e finito¹.

Um grafo pode conter laços e mais que uma 1-célula ligando duas 0-células. Contudo, por meio de uma subdivisão de 1-células e introdução de novas 0-células, é possível dar a cada grafo uma decomposição simplicial. Exemplo na Figura 1.5.



Figura 1.5: Decomposição simplicial de um grafo

Algumas vezes pode ser conveniente considerar a estrutura simplicial, e noutras vezes pode ser mais importante adotar a decomposição celular minimal.

Independentemente de termos uma decomposição simplicial ou não, as 0-células de um grafo são chamadas *vértices* e as 1-células são chamadas *arestas*.

Para um grafo X , denotaremos por X^0 o seu 0-esqueleto, isto é, o subespaço formado por seus vértices.

Um vértice que possui uma vizinhança básica homeomorfa a um intervalo semiaberto $[a, b)$ é chamado um vértice *final*; os demais são chamados vértices *intermediários*.

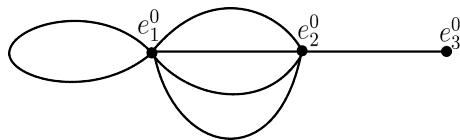


Figura 1.6: Grafo com dois vértices intermediários (e_1^0 e e_2^0) e um vértice final (e_3^0).

Uma vizinhança básica de um vértice intermediário é homeomorfa a um buquê de intervalos semiabertos, $\bigvee_{i=1}^k [a_i, b_i)$, em que a_1, \dots, a_k são identificados com o vértice.

A seguir, apresentamos uma forma conveniente, posteriormente utilizada na Seção 2.2, para ilustrar graficamente funções entre grafos.

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua entre grafos. A ilustração gráfica de f é feita considerando-se sua restrição a cada aresta de X .

Seja σ uma aresta do grafo X . Então, σ pode ser identificada com sua função característica $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$, conforme definido na Seção 1.2. A restrição de f à aresta σ é uma função cuja imagem percorre parte ou a totalidade de uma ou mais arestas de Y , que, da mesma forma, também podem ser identificadas com suas funções características. Para

¹Nas definições de *grafo* não se pede, em geral, a conexidade e a finitude, mas estas hipóteses serão exigidas neste texto, sem prejuízo à generalidade dos resultados, como ficará claro.

cada aresta $\rho: [0, 1] \rightarrow Y$ que contém pontos da imagem de $f|_\sigma$, podemos representar graficamente, identificando-a no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, a porção do gráfico de f contida em $\sigma \times \rho$.

Esta possibilidade de representação gráfica está ilustrada na Figura 1.7, onde consideramos uma função $f: X \rightarrow Y$ que, quando restrita a uma aresta σ de X , tem sua imagem percorrendo três arestas de Y indicadas por ρ , γ e λ . As porções do gráfico de f em $\sigma \times \rho$, $\sigma \times \gamma$ e $\sigma \times \lambda$ são apresentadas todas na mesma figura.

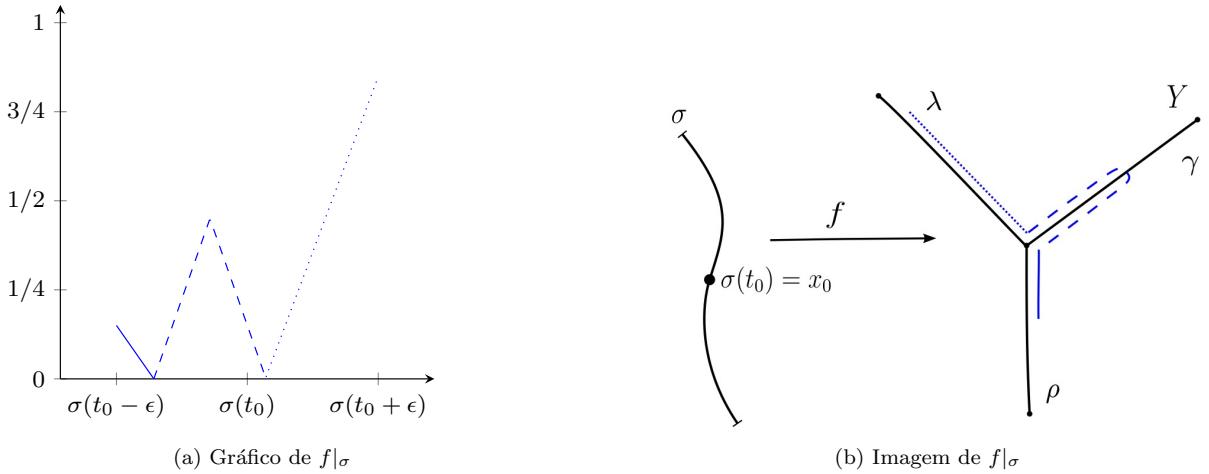


Figura 1.7: Representação gráfica de $f: X \rightarrow Y$ sobre a aresta σ de X . Em (a), linhas sólidas indicam os valores em ρ , linhas tracejadas indicam valores em γ e linhas pontilhadas indicam valores em λ .

Não por acaso escolhemos ilustrar a representação gráfica de uma função linear por partes, isto é, uma função $f: X \rightarrow Y$ cuja representação gráfica em cada produto $\sigma \times \rho$, para arestas σ em X e ρ em Y , consiste de segmentos de reta, o que significa que, a menos das identificações via funções características, a porção da f que aplica σ em ρ corresponde a uma função linear por partes de $[0, 1]$ em $[0, 1]$. Escolhemos isso porque toda função contínua entre grafos é homotópica a uma função com tais características. Este fato é bastante intuitivo, considerando-se que toda função contínua de $[0, 1]$ em $[0, 1]$, uma vez fixados finitos pontos $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k) \in [0, 1] \times [0, 1]$, é homotópica a uma função linear por partes cujo gráfico contém os pontos $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$. Também auxilia a intuição considerar uma função contínua $f: S^1 \rightarrow S^1$ que, como sabemos, é homotópica à função $f_d: S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f_d(z) = z^d$, onde $d = \deg(f)$ e S^1 é vista como subespaço do plano complexo. Quando identificamos S^1 com o espaço obtido do intervalo $[0, 1]$ por meio da identificação de seus extremos, a função correspondente $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que passa a quociente a f , é linear por partes.

Mais detalhes sobre o processo de regularização de funções entre grafos, via homotopia, podem ser vistos em [19, Seção 3].

1.6 Superfícies fechadas

No Capítulo 3, estudaremos coincidências de funções de superfícies fechadas em grafos. Para tanto, é imprescindível não apenas o conhecimento da classificação das superfícies fechadas, mas sobretudo a expressão de cada superfície como um complexo modelo induzido por uma apresentação de seu grupo fundamental. Para dar conta disso, introduzimos esta seção preliminar em que lembramos os principais conceitos e resultados envolvidos na demonstração do Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas.

À exceção do que apresentamos após o Teorema 1.16, todo o conteúdo desta seção está fundamentado em [14, Seções 1.5 e 1.6].

Com o termo *superfície fechada* designamos uma superfície (variedade bidimensional) compacta, conexa e sem bordo.

Iniciamos com o conceito de triangulação, o que, grosso modo, pode ser entendido como uma subdivisão do espaço em triângulos que se encaixam perfeitamente.

Definição 1.11. Uma *triangulação* de uma superfície fechada X consiste de uma família T_1, \dots, T_n de subconjuntos fechados que cobrem X (chamados de *triângulos* de X), cada um dos quais é homeomorfo a um triângulo do plano, satisfazendo: cada par de triângulos ou são disjuntos ou possuem em comum um vértice ou uma aresta.

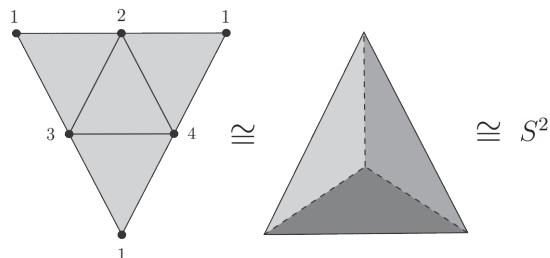


Figura 1.8: Exemplo de triangulação da esfera S^2 .

A exemplo da esfera S^2 , para a qual uma triangulação é ilustrada na Figura 1.8, toda superfície fechada admite uma triangulação; é o que garante o seguinte resultado de 1925.

Teorema 1.12 (Teorema de Radó). *Toda superfície fechada admite uma triangulação.*

Podemos considerar uma superfície triangulada como construída colando-se vários triângulos de uma certa maneira, da mesma forma que montamos um quebra-cabeça ou construímos uma parede de tijolos. Como dois triângulos diferentes não podem ter os mesmos vértices, podemos especificar uma triangulação completa de uma superfície numerando os vértices e listando quais triplas de vértices são vértices de um triângulo, como na Figura 1.8. Essa lista de triângulos determina completamente a superfície junto com a triangulação, a menos de homeomorfismo.

De posse de uma triangulação para uma dada superfície fechada X , por meio de adequado processo de “recorte e colagem”, realiza-se X como um espaço de colagem (espaço quociente) obtido de uma região poligonal plana, de tal sorte que a colagem se dá por identificação de pares de arestas do polígono.

Teorema 1.13. *Toda superfície fechada é homeomorfa ao espaço obtido por identificações, aos pares, dos lados de uma região poligonal do plano.*

Segue-se que classificar as superfícies fechadas equivale a classificar os espaços de colagem obtidos conforme o Teorema 1.13. A classificação de tais espaços é feita por meio da associação de uma *palavra* a cada um deles, palavra esta que descreve a maneira como os lados da região poligonal são colados. A seguir, descrevemos o procedimento de associação de palavra à esfera, ao plano projetivo, ao toro e à garrafa de Klein.

À *esfera* S^2 está associada a palavra aa^{-1} , conforme ilustrado na Figura 1.9.

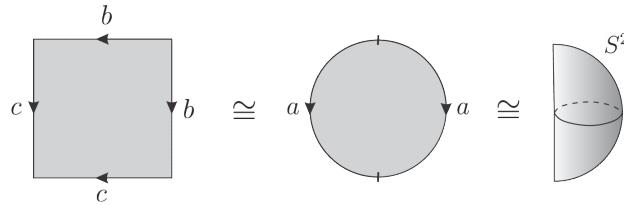


Figura 1.9: A esfera obtida por identificação.

Ao *plano projetivo* \mathbb{RP}^2 está associada a palavra a^2 , conforme Figura 1.10.

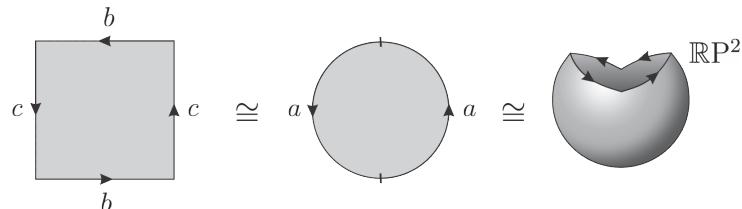


Figura 1.10: O plano projetivo obtido por identificação.

Ao *toro* \mathbb{T} está associada a palavra $aba^{-1}b^{-1}$, conforme ilustrado na Figura 1.11.

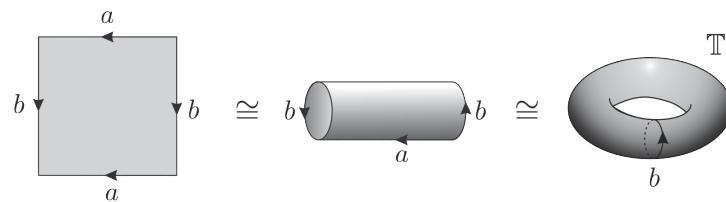


Figura 1.11: O toro obtido por identificação.

À garrafa de Klein \mathbb{K} está associada a palavra $aca^{-1}c$ ou, equivalentemente, a palavra a^2b^2 , como mostra a Figura 1.12.

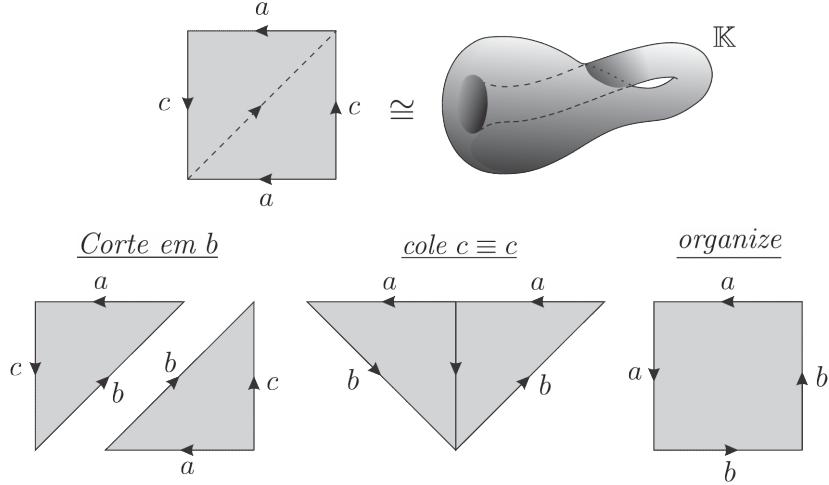


Figura 1.12: A garrafa de Klein obtida por identificação.

Toda superfície fechada que não seja a esfera, o toro e o plano projetivo, pode ser obtida por meio da *soma conexa* de dois ou mais toros ou planos projetivos.

Definição 1.14. Sejam X_1 e X_2 superfícies fechadas e $D_1 \subset X_1$ e $D_2 \subset X_2$ discos bidimensionais. Seja $f: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ um homeomorfismo. O espaço de colagem de $X_1 \setminus \text{int}(D_1)$ e $X_2 \setminus \text{int}(D_2)$ via f chama-se a *soma conexa* de X_1 e X_2 e se denota $X_1 \# X_2$.

A esfera não foi mencionada como possível parcela de uma soma conexa porque ela desempenha o papel de elemento neutro na soma conexa, isto é, para qualquer superfície fechada X , tem-se $X \cong X \# S^2$.

A Figura 1.13 ilustra a decomposição da garrafa de Klein como soma conexa de dois planos projetivos.

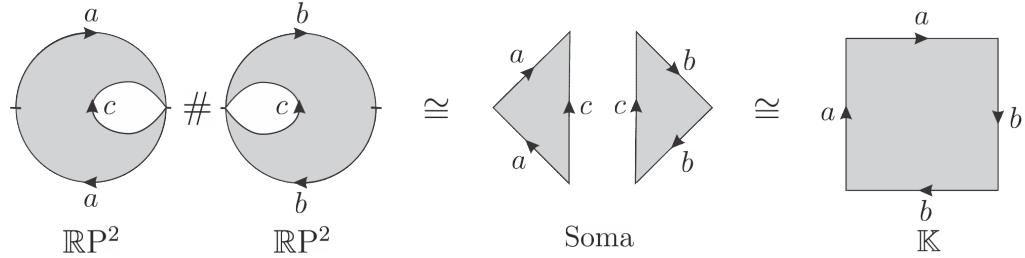


Figura 1.13: Soma conexa de dois planos projetivos.

Observe-se que, como vimos acima, ao plano projetivo está associada a palavra a^2 e à garrafa de Klein está associada a palavra a^2b^2 , o que está em perfeita harmonia com a

Figura 1.13. Isto se estende de tal modo que, à soma conexa $\mathbb{U}_k = \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$ de k cópias do plano projetivo está associada a palavra

$$a_1^2 a_2^2 \cdots a_k^2.$$

Na notação que acabamos de introduzir, \mathbb{U}_1 é o plano projetivo e \mathbb{U}_2 é a garrafa de Klein. Esta notação será utilizada no Capítulo 3.

A soma conexa de dois toros é o que chamamos o *bitoro* (toro com dois buracos). Como mostra a Figura 1.14, ao bitoro está associada a palavra $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

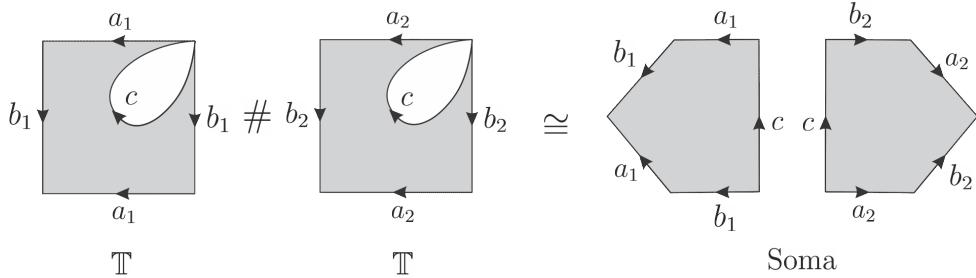


Figura 1.14: Soma conexa de dois toros.

De modo geral, à soma conexa \mathbb{T}_k de k toros está associada a palavra

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}.$$

Esta palavra pode ser expressa utilizando-se a notação de comutador $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, de tal forma que ela então passa a ser escrita como

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k].$$

Claro está que se X_1 e X_2 são superfícies fechadas às quais estão associadas palavras r_1 e r_2 , respectivamente, que podemos supor com letras distintas entre si, então à soma conexa $X_1 \# X_2$ está associada a palavra justaposta $r_1 r_2$. Então, de posse do que temos visto, resta saber no que resulta a justaposição da palavra $[a, b]$ com a palavra c^2 , ou seja, no que resulta a soma conexa de um toro com um plano projetivo. A resposta a isto é um dos pontos centrais da prova do Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas. Para referência futura, enunciamos a resposta sob a forma de um lema, assim como em [14], onde este resultado corresponde ao Lema 7.1 do Capítulo I.

Lema 1.15. *A soma conexa de um toro com um plano projetivo é homeomorfa à soma conexa de três planos projetivos.*

Resulta que, para obter todas as superfícies fechadas, não é preciso somar toros com planos projetivos, basta somar toros com toros e planos projetivos com planos projetivos. Chegamos assim no célebre Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas.

Teorema 1.16 (Classificação das Superfícies Fechadas). *Seja X uma superfície fechada. Então X é homeomorfa a uma das superfícies abaixo:*

1. A esfera S^2 , associada à palavra aa^{-1} .
2. A soma conexa \mathbb{T}_k de k toros, associada à palavra $[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k]$.
3. A soma conexa \mathbb{U}_k de k planos projetivos, associada à palavra $a_1^2 a_2^2 \cdots a_k^2$.

Tanto em \mathbb{T}_k quanto em \mathbb{U}_k , o número de parcelas $k \geq 1$ chama-se o *gênero* da superfície. A esfera S^2 é dita ter gênero zero.

A esfera S^2 e as superfícies \mathbb{T}_k são *orientáveis*; elas não contém uma faixa de Möbius. Já as superfícies \mathbb{U}_k contém uma faixa de Möbius e, por isso, são *não-orientáveis*.

A realização de uma superfície fechada X (diferente da esfera S^2 , por enquanto) como o espaço de colagem de uma região poligonal associado a uma palavra r automaticamente realiza X como o complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid r \rangle$, em que \mathbf{x} é o conjunto das letras utilizadas para designar os lados da região poligonal e r é a própria palavra associada à X . Portanto:

- A superfície orientável \mathbb{T}_k é o complexo modelo induzido pela apresentação

$$\mathcal{P}_k = \langle x_1, y_1, \dots, x_k, y_k \mid [x_1, y_1] \cdots [x_k, y_k] \rangle.$$

- A superfície não-orientável \mathbb{U}_k é o complexo modelo induzido pela apresentação

$$\mathcal{Q}_k = \langle x_1 \dots, x_k \mid x_1^2 \cdots x_k^2 \rangle.$$

Por conseguinte, \mathcal{P}_k e \mathcal{Q}_k são apresentações para os grupos fundamentais $\pi_1(\mathbb{T}_k, x_0)$ e $\pi_1(\mathbb{U}_k, x_0)$. Por conveniência, o ponto base x_0 é a única 0-célula do complexo modelo correspondente. Omitiremos o ponto base quando sua indicação for desnecessária.

Quanto à esfera S^2 , sua decomposição celular $S^2 = e^0 \cup e^2$ correspondente ao complexo modelo induzido pela apresentação $\langle \cdot \mid 1 \rangle$ (em que não há geradores), e sua decomposição $S^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$ corresponde ao complexo modelo induzido por $\langle x \mid x, x \rangle$.

Capítulo 2

Coincidências de funções de complexos em grafos

Este capítulo é dedicado ao estudo do problema de (eliminação de) coincidências entre funções de complexos CW (conexos e finitos) de dimensão 1 e 2 em grafos.

Para funções entre grafos, o resultado principal foi originalmente publicado em [18]. Ele afirma que qualquer par de funções contínuas entre grafos, cujo contradomínio não é homeomorfo a circunferência, pode ser deformado a um par livre de coincidência.

Para funções de um complexo bidimensional (conexo e finito) em um grafo, o resultado principal, publicado em [6], fornece uma condição necessária e suficiente para que um par de funções possa ser deformado a um par livre de coincidência. A condição envolve um problema de levantamento em um diagrama de grupos fundamentais e homomorfismos. O resultado se aplica, em particular, para funções entre grafos, inclusive quando o contradomínio é a circunferência, caso deixado de fora em [18].

2.1 Conceitos e objetivos gerais

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Chama-se *coincidentia* entre f e g um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Ao conjunto de todas as coincidências entre f e g denotamos $\text{Coin}(f, g)$. Assim,

$$\text{Coin}(f, g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

A teoria topológica de coincidências estuda o conjunto $\text{Coin}(f, g)$ e a possibilidade de minimizá-lo deformando-se as funções f e g por meio de homotopias.

Sob certas condições sobre os planos X e Y , é possível demonstrar que existem funções $f' \simeq f$ e $g' \simeq g$, o que simplificamos escrevendo $(f', g') \simeq (f, g)$, tais que o conjunto de coincidências $\text{Coin}(f', g')$ é finito. Este é o caso, por exemplo, quando X e Y são grafos;

ver [9, Proposição 2.11, p.8]. Neste caso, faz sentido definir o assim chamado *número mínimo de coincidências* do par (f, g) , a saber,

$$\text{MC}[f, g] = \min\{\#\text{Coin}(f', g') : (f', g') \simeq (f, g)\}.$$

O cálculo do número $\text{MC}[f, g]$ é bastante difícil, em geral, e não existe procedimento que se aplique a uma boa generalidade de casos.

Neste texto, dedicamo-nos ao estudo de condições sob as quais $\text{MC}[f, g] = 0$, ou seja, condições para que, dadas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, existam funções $f', g' : X \rightarrow Y$ tais que $(f', g') \simeq (f, g)$ e $\text{Coin}(f', g') = \emptyset$. Neste caso, diz-se que o par (f', g') é *livre de coincidência* e que o par (f, g) é *deformável a livre de coincidência*.

Em nosso estudo, o plano Y é sempre um grafo, conforme definido na Seção 1.5, e o espaço X é ou um grafo ou um complexo CW bidimensional conexo e finito.

2.2 Funções entre grafos

Nesta seção, estudamos o problema de eliminar coincidências de um par de funções entre grafos. O que apresentamos é um detalhamento dos resultados de [18].

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre grafos. A estratégia de remover as coincidências entre f e g pode ser descrita de modo muito intuitivo por meio de uma analogia com o tráfego rodoviário. Por meio de parametrizações de cada aresta do grafo X , com domínio no intervalo de tempo $[0, 1]$, as funções f e g podem ser pensadas como um par de pontos que, ao longo do tempo, percorrem o plano Y . Vamos imaginar que esses pontos representem veículos viajando em uma rede de estradas de pista única (os veículos não podem passar entre si) e um ponto de coincidência das funções representa uma colisão dos veículos. A remoção de um ponto de coincidência por homotopia consiste em uma estratégia para possibilitar que os dois veículos possam atingir seu destino sem colidirem.

É possível evitar uma colisão, desde que haja uma bifurcação, de tal modo que, quando os dois veículos estiverem prestes a colidir, um deles inverta a direção (dê marcha a ré) até que a bifurcação seja alcançada. Neste ponto, o veículo que vinha de marcha a ré entra na bifurcação da estrada e permite que o outro veículo passe. Os veículos então podem retornar ao ponto de encontro original, desta vez com suas posições invertidas. Repetir este procedimento antes de cada colisão iminente permite aos veículos completarem suas viagens sem colidirem.

Essa estratégia é formalizada no Teorema 2.3, com a ajuda de duas proposições que passamos a demonstrar.

Proposição 2.1. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre grafos. Então existe um par $(f', g') \simeq (f, g)$, com um número finito de coincidências, tal que $\text{Coin}(f', g') \subset X \setminus X^0$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.11 de [9], o par (f, g) é homotópico a um par de funções com um número finito de coincidências. Logo, podemos assumir que o próprio par (f, g) possua um número finito de coincidências. A prova consiste em demonstrar que coincidências do par (f, g) que correspondam a vértices de X podem ser removidas ou “deslocadas” para o interior de arestas. Utilizamos as aspas porque o processo de deformação que descrevemos a seguir não resulta necessariamente em um simples deslocamento de um ponto de coincidência para outro lugar; em alguns casos, o processo substituirá um ponto de coincidência (que, a princípio, é um vértice) por um ou mais (mas sempre em número finito) pontos de coincidência no interior de arestas. Embora esse processo possa resultar num aumento do número de coincidências, ele é necessário para a aplicação do procedimento de remoção de coincidências apresentado na Proposição 2.2.

Suponha que a coincidência $x_0 \in \text{Coin}(f, g)$ seja um vértice. A prova é dividida em dois casos, a saber, quando x_0 é um vértice *final* do grafo X e quando x_0 é um vértice *intermediário*, conforme definido na Seção 1.5.

CASO 1. A coincidência x_0 é um vértice final do grafo X .

Seja σ a aresta que contém x_0 e seja $V \subset \sigma$ uma vizinhança básica de x_0 em X , homeomorfa a um intervalo semiaberto, tal que $\text{Coin}(f, g) \cap V = \{x_0\}$. Escolha uma vizinhança fechada $U \subset V$ de x_0 em X , homeomorfa a um intervalo fechado $[0, 1]$, com x_0 correspondente a 0. Seja x'_0 um ponto interior de U , precisamente, o ponto correspondente a $1/2$, e seja $h: U \rightarrow U$ a função ilustrada na Figura 2.1, com $h(x_0) = x'_0$. A menos do homeomorfismo $U \cong [0, 1]$, a função h pode ser escrita como $h(x) = (x + 1)/2$. Note que o ponto de U correspondente a 1 é fixado pela função h .

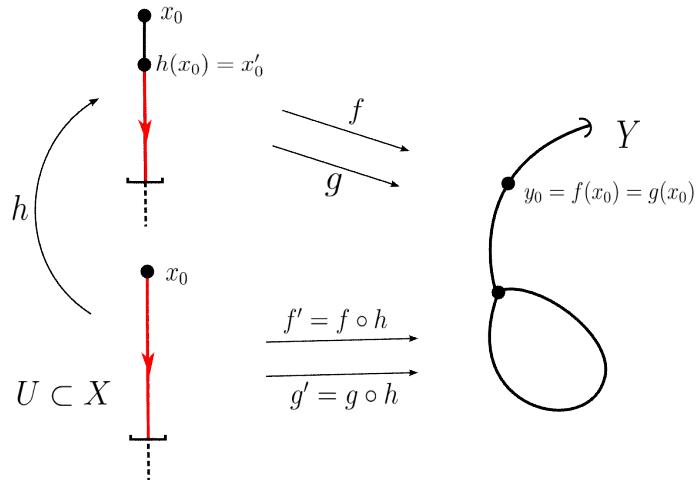


Figura 2.1: Remoção de coincidência em vértice final.

Seja $f': X \rightarrow Y$ a função que coincide com f em $X \setminus U$ e, em U , é dada pela composição $f' = f \circ h$. Analogamente, defina $g': X \rightarrow Y$ por $g' = g$ em $X \setminus U$ e $g' = g \circ h$ em U .

Então f' e g' são contínuas e homotópicas a f e g , respectivamente.

Além disso, para $x \in U$, temos

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(h(x)) = g(h(x)) \Leftrightarrow h(x) = x_0.$$

Como $x_0 \notin \text{im}(h)$, isso mostra que $\text{Coin}(f', g') \cap V = \emptyset \subset X \setminus X^0$.

Portanto, qualquer coincidência x_0 que seja um vértice final pode ser removida por meio de deformações das funções f e g numa vizinhança de x_0 .

CASO 2. A coincidência $x_0 \in \text{Coin}(f, g)$ é um vértice intermediário do grafo X .

Seja V uma vizinhança básica de x_0 em X , homeomorfa a um buquê de intervalos semiabertos, tal que $\text{Coin}(f, g) \cap V = \{x_0\}$. Escolha uma vizinhança fechada $U \subset V$ de x_0 , a qual, certamente, é homeomorfa a um buquê de $n + 1$ intervalos fechados, $n \geq 1$.

Seja $h: U \rightarrow U$ a função representada na Figura 2.2. Note que $h(x_0) = x'_0$, um ponto interior a uma das arestas que incide em x_0 , enquanto que $h^{-1}(x_0) = \{x_1, \dots, x_n\}$, sendo cada x_i , para $1 \leq i \leq n$, um ponto do interior de uma aresta que incide em x_0 .

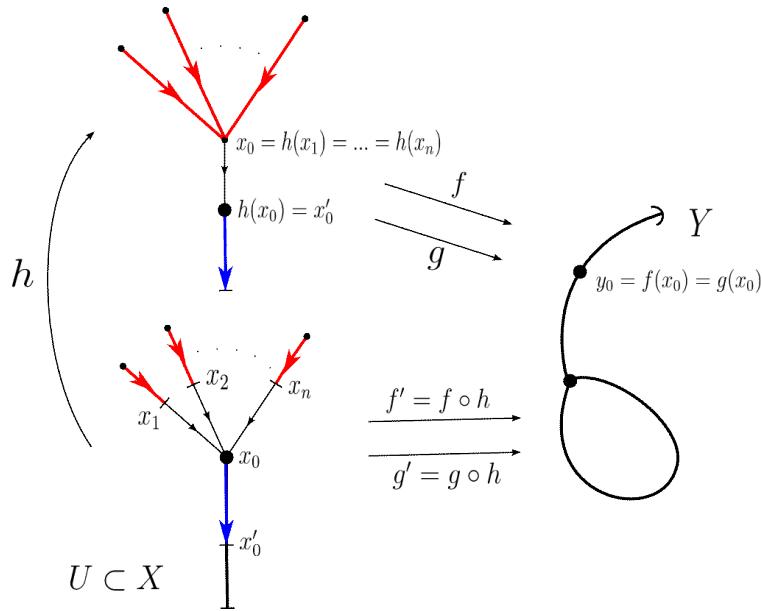


Figura 2.2: Deslocamento de coincidência em vértice intermediário.

Defina $f', g': X \rightarrow Y$ como antes, isto é, $f' = f$ e $g' = g$ em $X \setminus U$, e $f' = f \circ h$ e $g' = g \circ h$ em U . Então f' e g' são contínuas e homotópicas a f e g , respectivamente.

Além disso, para $x \in U$, temos

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(h(x)) = g(h(x)) \Leftrightarrow h(x) = x_0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Isso mostra que $\text{Coin}(f', g') \cap V = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \setminus X^0$.

Portanto, qualquer coincidência x_0 que seja um vértice intermediário pode ser substituída por um número finito de coincidências correspondentes a pontos interiores de arestas que incidem em x_0 , deformando-se f e g apenas numa vizinhança de x_0 .

A prova da Proposição está completa. \square

Proposição 2.2. *Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ funções contínuas entre grafos munidos de decomposição celular minimal, com Y não homeomorfo à circunferência. Se o par (f, g) tem uma coincidência isolada $x_0 \in X \setminus X^0$, então existe uma vizinhança fechada U de x_0 e um par $(f', g') \simeq (f, g)$, que coincide com (f, g) fora de U , tal que $\text{Coin}(f', g') \cap U = \emptyset$.*

Demonstração. Seja σ a aresta de X que contém x_0 , identificada com sua função característica $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$. Seja $t_0 \in (0, 1)$ tal que $x_0 = \sigma(t_0)$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset (0, 1)$ e, ainda, a vizinhança fechada $U = \sigma([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon])$ de x_0 em X satisfaça $\text{Coin}(f, g) \cap U = \{x_0\}$.

Seja $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. A prova é dividida em três casos, a saber, quando y_0 é um vértice final do grafo Y , quando y_0 é um vértice intermediário e quando y_0 é um ponto interior de uma aresta.

CASO 1. O ponto y_0 é um vértice final do grafo Y .

Seja ρ a aresta de Y que incide em y_0 , com sua função de colagem $\rho: [0, 1] \rightarrow Y$ escolhida de tal modo que $y_0 = \rho(1)$.

Na vizinhança fechada $U \subset \sigma$, as funções f e g se comportam de modo semelhante ao ilustrado na Figura 2.3. Lembre-se que, como vimos na Seção 1.5, as funções podem ser assumidas, a menos de homotopia, linear por partes.

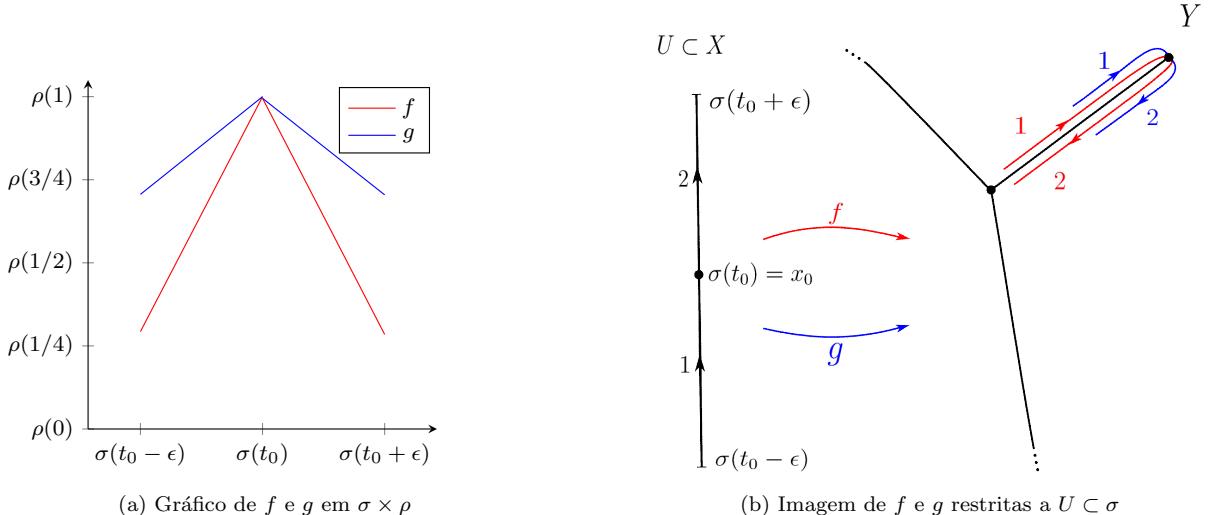


Figura 2.3: Comportamento de f e g em $U \subset \sigma$.

Deformamos f e g por homotopia, de acordo com a Figura 2.4.

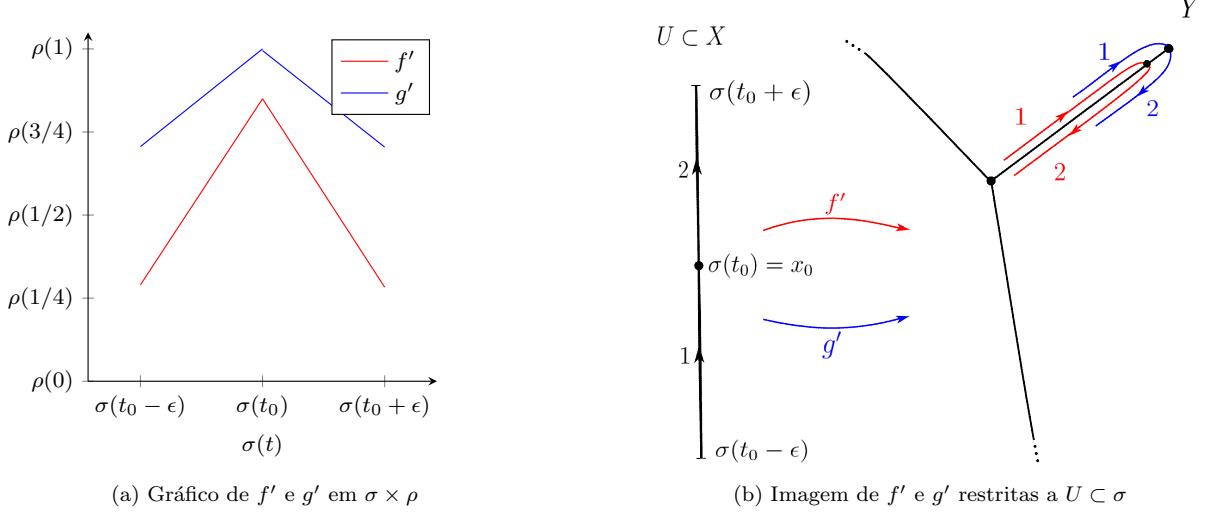


Figura 2.4: Comportamento de f' e g' em $U \subset \sigma$.

Obtemos assim funções $f' \simeq f$ e $g' \simeq g$ que coincidem com f e g , respectivamente, fora de U , e são livres de coincidência em U .

CASO 2. O ponto y_0 é um vértice intermediário do grafo Y .

Os seguintes três fatos (i) que Y não é homeomorfo à circunferência, (ii) que Y está considerado (no enunciado da Proposição) com decomposição celular minimal e (iii) que y_0 é um vértice intermediário de Y , permitem concluir que as vizinhanças básicas de y_0 em Y são homeomorfas a buquês de pelo menos três intervalos semiabertos. Assim, refinando a decomposição celular de Y , se necessário, existem pelo menos três arestas, digamos ρ , γ e λ , que incidem em y_0 . Consideraremos as funções características correspondentes $\rho, \gamma, \lambda : [0, 1] \rightarrow Y$ de tal modo que $y_0 = \rho(0) = \gamma(0) = \lambda(0)$.

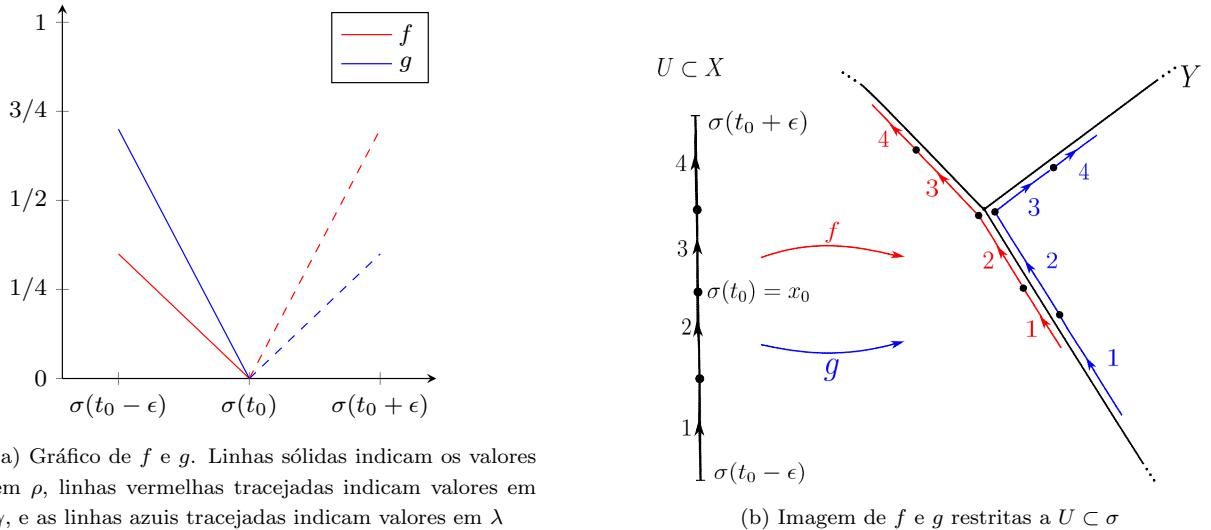
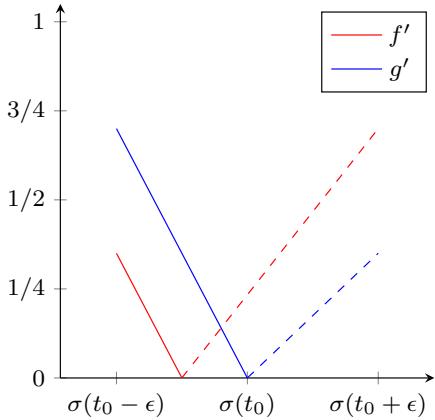


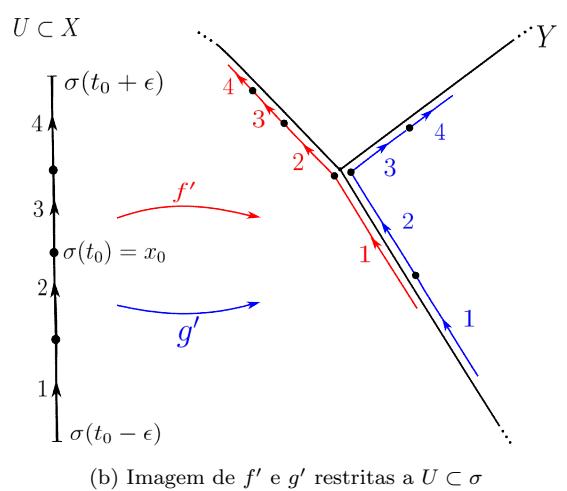
Figura 2.5: Comportamento das funções f e g em $U \subset \sigma$.

Na vizinhança fechada $U \subset \sigma$, as funções f e g se comportam de modo semelhante ao ilustrado na Figura 2.5.

Deformamos f e g por homotopia, apenas em U , de acordo com a Figura 2.6, assim obtendo funções f' e g' .



(a) Gráfico de f' e g' . Linhas sólidas indicam os valores em ρ , linhas vermelhas tracejadas indicam valores em γ , e as linhas azuis tracejadas indicam valores em λ



(b) Imagem de f' e g' restritas a $U \subset \sigma$

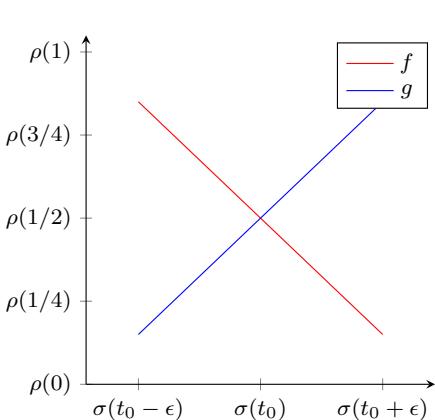
Figura 2.6: Funções f' e g' em $U \subset \sigma$.

As funções f' e g' são livres de coincidência em U e $(f', g') \simeq (f, g)$.

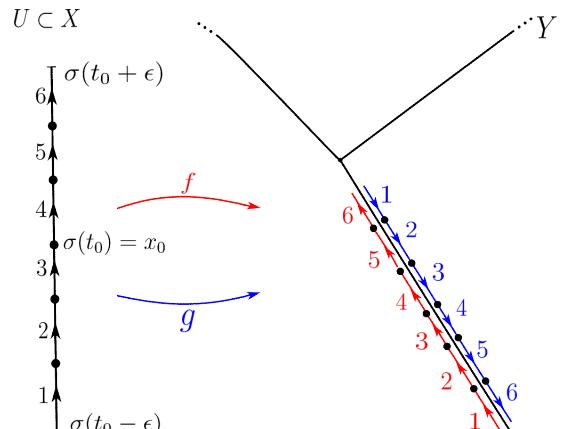
CASO 3. O ponto y_0 é interior a uma aresta de Y .

Seja ρ , com função característica $\rho: [0, 1] \rightarrow Y$, a aresta de Y contendo y_0 em seu interior, digamos $y_0 = \rho(1/2)$.

Na vizinhança fechada $U \subset \sigma$, as funções f e g se comportam de acordo com o gráfico da Figura 2.7 (com possível inversão dos papéis de f e g).



(a) Gráfico de f e g em $\sigma \times \rho$

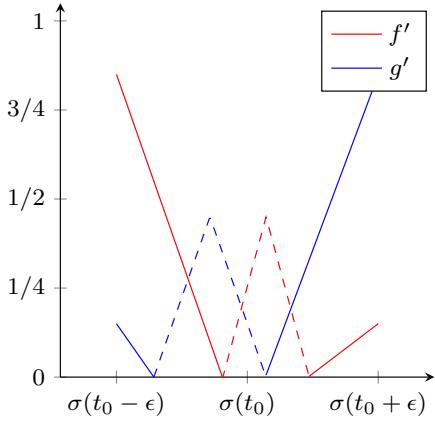


(b) Imagem de f e g em $U \subset \sigma$

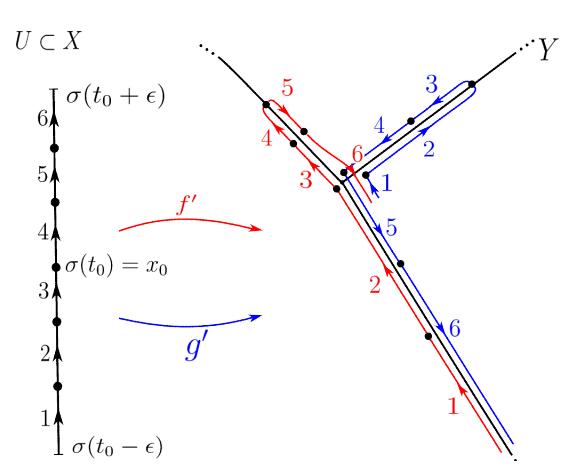
Figura 2.7: Comportamento de f e g em $U \subset \sigma$

A suposição de que Y não é homeomorfo à circunferência implica que podemos escolher a decomposição celular do complexo Y de tal modo que o vértice $\rho(0)$ encontre duas arestas além de ρ , digamos $\gamma, \lambda: [0, 1] \rightarrow Y$, com $\gamma(0) = \lambda(0) = \rho(0)$. Este vértice é a “bifurcação na estrada” que precisamos para evitar a “colisão” de f e g .

Deformamos f e g por meio de uma homotopia em U , assim obtendo funções f' e g' , de acordo com a Figura 2.8.



(a) Gráfico f' e g' . Linhas sólidas indicam valores em ρ , linhas vermelhas tracejadas indicam valores em γ , e as linhas azuis tracejadas indicam valores em λ



(b) Imagem de f' e g' restritas a U

Figura 2.8: Comportamento de f' e g' em $U \subset \sigma$.

Intuitivamente, as funções f e g retrocedem até o vértice intermediário $\rho(0)$, utilizam as arestas λ e γ para manobrarem e inverterem suas posição sem colidirem e, então, retornam às suas posições originais no tempo $t_0 + \epsilon$.

As funções f' e g' são livres de coincidência em U e $(f', g') \simeq (f, g)$. □

A seguir, o teorema principal da seção, cuja prova resulta das duas proposições já demonstradas.

Teorema 2.3. *Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ funções contínuas entre grafos, com Y não homeomorfo à circunferência. Então o par (f, g) é deformável a livre de coincidência.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1, podemos assumir, a menos de homotopia, que as funções f e g sejam tais que $\text{Coin}(f, g)$ é um subconjunto finito de $X \setminus X^0$, ou seja, todas as coincidências são isoladas e são pontos interiores de arestas do grafo X .

Então, a Proposição 2.2 se aplica para cada ponto de $\text{Coin}(f, g)$, o que significa que cada coincidência pode ser eliminada por homotopias que deformam as funções apenas em suas vizinhanças que as isolam das demais coincidências. □

O Teorema 2.3 evidencia um fato muito importante sobre a relação das teorias de coincidências, pontos fixos e raízes. Para entendermos isso, revisitamos alguns conceitos.

Relação com pontos fixos: Um *ponto fixo* de uma função $f: X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Ao conjunto de pontos fixos de f denotamos $\text{Fix}(f)$.

Se X é um poliedro compacto e conexo, então toda função contínua $f: X \rightarrow X$ é homotópica a uma função $f': X \rightarrow X$ cujo conjunto de pontos fixos $\text{Fix}(f')$ é finito; ver [1, Teorema 2, p. 118]. Sendo assim, fica bem definido o assim chamado *número mínimo de pontos fixos* de funções ao longo da classe de homotopia $[f]$, a saber,

$$\text{MF}[f] = \min\{\#\text{Fix}(f') : f' \simeq f\}.$$

É óbvio que um ponto fixo de uma dada função $f: X \rightarrow X$ é uma coincidência entre f e a função identidade $\text{id}: X \rightarrow X$, ou seja, $\text{Fix}(f) = \text{Coin}(f, \text{id})$.

Para funções $f, g: X \rightarrow Y$ cujo contradomínio é uma variedade (sem bordo), R. Brooks demonstrou em [2, Teorema 1] que o número mínimo de coincidências $\text{MC}[f, g]$ pode ser obtido deformando-se apenas uma, ao invés de ambas as funções, isto é, $\text{MC}[f, g] = \min\{\#\text{Coin}(f', g) : f' \simeq f\}$. Segue-se que, se X é uma variedade compacta (sem bordo) e $f: X \rightarrow X$ é uma função contínua, então $\text{MF}[f] = \text{MC}[f, \text{id}]$.

O Teorema 2.3, aliado ao exemplo de B. Jiang publicado em [12, § 4], também disponível em [11, Exemplo 10.7, p. 641], mostra que a hipótese de ser X uma variedade é essencial para a conclusão acima. De fato, o citado exemplo fornece uma função contínua $f: S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ tal que $\text{MF}[f] = 2$ (a função f aplica a primeira S^1 em si própria com grau -1 , e a segunda S^1 em si própria com grau 2). Por outro lado, pelo Teorema 2.3, o par (f, id) pode ser deformado a um par livre de coincidência, ou seja, $\text{MC}[f, \text{id}] = 0$.

Relação com raízes: Dados uma função $f: X \rightarrow Y$ e um ponto $y_0 \in Y$, uma *raiz* de f relativa a y_0 é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = y_0$. O conjunto de todas as raízes de f com relação a y_0 é a pré-imagem $f^{-1}(y_0)$.

Sob certas condições sobre X e Y (por exemplo, se X e Y são variedades compactas (sem bordo) de mesma dimensão; ver [3, Seção 5]), para cada função contínua $f: X \rightarrow Y$ existe $f': X \rightarrow Y$ homotópica a f tal que $f'^{-1}(y_0)$ é um conjunto finito. Neste caso, faz sentido definir o *número mínimo de raízes* ao longo da classe de homotopia $[f]$, a saber,

$$\text{MR}[f] = \min\{\#f'^{-1}(y_0) : f' \simeq f\}.$$

Claro que uma raiz de f com relação a y_0 é uma coincidência entre f e a função $\kappa_0: X \rightarrow Y$ constante em y_0 , ou seja, $f^{-1}(y_0) = \text{Coin}(f, \kappa_0)$. Se X e Y são variedades compactas (sem bordo), segue mais uma vez de [2, Teorema 1] que $\text{MR}[f] = \text{MC}[f, \kappa_0]$.

O Teorema 2.3 pode ser usado para mostrar que a última identidade não é verdadeira, em geral, sem a hipótese de que Y seja uma variedade. Seja $E = S^1 \vee S^1$ o buquê de duas circunferências e seja $y_0 \in E$ o ponto de união das circunferências. Seja $f: E \rightarrow E$ a função identidade. Temos que $f^{-1}(y_0) = \{y_0\}$, donde $\text{MR}[f] \leq 1$. Afirmamos que para

toda função f' homotópica a f , tem-se $y_0 \in \text{im}(f')$. De fato, sendo f' homotópica a f , temos que $f'_*: H_1(E) \rightarrow H_1(E)$ é o isomorfismo identidade, onde $H_1(E) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é o primeiro grupo de homologia de E . Mas se $y_0 \notin \text{im}(f')$, então f' se fatora via $E - \{y_0\}$, o que implica que $f'_*: H_1(E) \rightarrow H_1(E)$ é o homomorfismo nulo, pois $H_1(E - \{y_0\}) = 0$. Desta contradição segue o que afirmamos e, por consequência, que $\text{MR}[f] = 1$. Por outro lado, segue do Teorema 2.3 que o par (f, κ_0) pode ser deformado a um par livre de coincidência, ou seja, $\text{MC}[f, \kappa_0] = 0$.

2.3 Funções de 2-complexos em grafos

Em toda esta seção, K é um 2-complexo e Y é um grafo não contrátil, ambos conexos e finitos. Dadas funções contínuas $f, g: K \rightarrow Y$, consideramos a função

$$h = (f, g): K \rightarrow Y \times Y \quad \text{dada por} \quad h(x) = (f(x), g(x)).$$

Escolhemos uma 0-célula $x_0 \in K$ para ser o ponto base de K e tomamos $y_1 = f(x_0)$ e $y_2 = g(x_0)$. Então, as funções f e g induzem homomorfismos $f_{\#}: \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$ e $g_{\#}: \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_2)$, e a função h induz o homomorfismo

$$\begin{aligned} h_{\#} : \pi_1(K, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y \times Y, (y_1, y_2)) \approx \pi_1(Y, y_1) \times \pi_1(Y, y_2) \\ \sigma &\longmapsto h_{\#}(\sigma) = (f_{\#}(\sigma), g_{\#}(\sigma)) \end{aligned}$$

A menos de sutil deformação (por homotopia) de uma das funções, f ou g , ao redor do ponto x_0 , podemos assumir $y_1 \neq y_2$ e, assim, $(y_1, y_2) \in Y \times Y \setminus \Delta$, onde Δ é a diagonal em $Y \times Y$, ou seja, $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$.

Temos que $\text{Coin}(f, g) = \emptyset$ se, e somente se, a imagem de h não encontra a diagonal Δ , o que significa que existe uma fatoração de h através de $Y \times Y \setminus \Delta$, ou seja, uma função $\tilde{h}: K \rightarrow Y \times Y \setminus \Delta$ tal que $h = l \circ \tilde{h}$, onde $l: Y \times Y \setminus \Delta \hookrightarrow Y \times Y$ é a inclusão natural. Em particular, $l \circ \tilde{h}(x_0) = (y_1, y_2)$, donde $\tilde{h}(x_0) = (y_1, y_2)$. Segue-se que o seguinte diagrama de grupos fundamentais e homomorfismos induzidos é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y \times Y \setminus \Delta, (y_1, y_2)) & \\ \tilde{h}_{\#} \nearrow & & \downarrow l_{\#} \\ \pi_1(K, x_0) & \xrightarrow{h_{\#}} & \pi_1(Y \times Y, (y_1, y_2)) \end{array}$$

Isto prova a parte “somente se” do Teorema 2.4 que enunciamos a seguir. A prova da parte “se” será feita logo adiante.

Teorema 2.4. Sejam $f, g: K \rightarrow Y$ funções contínuas como acima. O par (f, g) é deformável a livre de coincidência se, e somente se, existe um homomorfismo $\Phi: \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(Y \times Y \setminus \Delta, (y_1, y_2))$ que torna comutativo o digrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y \times Y \setminus \Delta, (y_1, y_2)) \\ & \nearrow \Phi & \downarrow l_\# \\ \pi_1(K, x_0) & \xrightarrow{h_\#} & \pi_1(Y \times Y, (y_1, y_2)) \end{array}$$

Observamos que o Teorema 2.4 não é verdadeiro se Y , ao invés de ser um grafo, é um 2-complexo, assim como K . De fato, considere funções $f, g: S^2 \rightarrow S^2$ com $\deg(f) \neq -\deg(g)$. Pela Proposição 1.23 de [20], $\text{Coin}(f, g)$ contém pelo menos um ponto, e o mesmo ocorre com $\text{Coin}(f', g')$, quaisquer que sejam $f' \simeq f$ e $g' \simeq g$, uma vez que funções homotópicas têm o mesmo grau. Por outro lado, como a esfera S^2 é simplesmente conexa, os homomorfismos $h_\#$ e $l_\#$ são ambos nulos e, assim, $h_\#$ levanta através de $l_\#$.

Na prova da parte “se” do Teorema 2.4, usamos os seguintes lemas:

Lema 2.5. Se $f, g: (K, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ são funções contínuas que induzem o mesmo homomorfismo em grupos fundamentais, então f e g são homotópicas.

Demonstração. Sejam f e g conforme enunciado e ponha $\alpha = f_\# = g_\#: \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$. O grupo $\Pi = \pi_1(K, x_0)$ atua no segundo grupo de homotopia $\pi_2(Y)$, via α , tornando este último um Π -módulo, de modo que fica definido o grupo de cohomologia com coeficientes locais $H^2(K; \alpha \pi_2(Y))$. Como $\pi_2(Y) = 0$, também $H^2(K; \alpha \pi_2(Y)) = 0$. O resultado segue do Teorema 4.12 de [16, p. 95]. \square

O seguinte resultado é um caso particular do Lema 2.5 de [7].

Lema 2.6. Sejam $\Pi = \pi_1(K, x_0)$ e $\Xi = \pi_1(Y, y_0)$. Para todo homomorfismo $\alpha: \Pi \rightarrow \Xi$ existe uma função celular $f: (K, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f_\# = \alpha$.

Demonstração. Sejam $\varphi: (K, K^1) \rightarrow (K_{\mathcal{P}}, K_{\mathcal{P}}^1)$ e $\psi: Y_{\mathcal{Q}} \rightarrow Y$ equivalências de homotopia celulares, conforme o Teorema 1.9, onde $K_{\mathcal{P}}$ e $Y_{\mathcal{Q}}$ são os complexos modelo das apresentações $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ e $\mathcal{Q} = \langle y_1, \dots, y_u \mid \cdot \rangle$, respectivamente. Então, o 1-esqueleto de $K_{\mathcal{P}}$ e o próprio $Y_{\mathcal{Q}}$ são, respectivamente, os buquês

$$K_{\mathcal{P}}^1 = \bigvee_{i=1}^n S^1 = e_K^0 \cup e_{x_1}^1 \cup \dots \cup e_{x_n}^1 \quad \text{e} \quad Y_{\mathcal{Q}} = Y_{\mathcal{Q}}^1 = \bigvee_{i=1}^u S^1 = e_Y^0 \cup e_{y_1}^1 \cup \dots \cup e_{y_u}^1.$$

Sejam $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_u\}$ e considere os grupos livres $F(\mathbf{x})$ e $F(\mathbf{y})$ gerados por \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente. Seja $N(\mathbf{r})$ o subgrupo normal de $F(\mathbf{x})$ gerado pelas

palavras r_1, \dots, r_m . Finalmente, seja $\Omega_\Pi: F(\mathbf{x}) \longrightarrow G_{\mathcal{P}} = F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$ o homomorfismo quociente que, pelo Teorema 1.10, corresponde ao homomorfismo induzido pela inclusão natural $\iota: K_{\mathcal{P}}^1 \hookrightarrow K_{\mathcal{P}}$.

Considere o isomorfismo $h: \text{hom}(G_{\mathcal{P}}, F(\mathbf{y})) \rightarrow \text{hom}(\Pi, \Xi)$ dado por $h(\beta) = \psi_{\#} \circ \beta \circ \varphi_{\#}$. Escolha $\beta \in \text{hom}(G_{\mathcal{P}}, F(\mathbf{y}))$ tal que $h(\beta) = \alpha$. Para cada $1 \leq j \leq n$, escolha $\omega_j \in F(\mathbf{y})$ tal que $(\beta \circ \Omega_\Pi)(\mathbf{x}_j) = \omega_j$. Seja $\beta^1: F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{y})$ o homomorfismo tal que $\beta^1(\mathbf{x}_j) = \omega_j$. Então $\beta \circ \Omega_\Pi = \beta^1$, isto é, o triângulo do seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\Omega_\Pi} & G_{\mathcal{P}} \\ & & \beta^1 \downarrow & \swarrow \beta & \downarrow \alpha \\ & & F(\mathbf{y}) & \xrightarrow{\psi_{\#}} & \Xi \end{array}$$

Seja $f^1: K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow Y_{\mathcal{Q}}^1 = Y_{\mathcal{Q}}$ a função definida de modo que sua imagem em cada $e_{x_j}^1$ é o laço que percorre $Y_{\mathcal{Q}}^1$ exatamente como o homomorfismo β^1 soletra $\beta^1(x_j)$ como uma palavra em $F(\mathbf{y})$. É óbvio que existe uma identificação natural

$$\beta^1 = f_{\#}^1: F(\mathbf{x}) \equiv \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y_{\mathcal{Q}}, y_0) \equiv F(\mathbf{y})$$

Agora, cada relator r_i é uma palavra em $F(\mathbf{x})$ tal que $(\beta \circ \Omega_\Pi)(r_i) = 0$ em $F(\mathbf{y})$, pois $\Omega_\Pi(r_i) = 0$. Além disso, o 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ tem m células bidimensionais, digamos e_1^2, \dots, e_m^2 , indexadas de forma que a 2-célula e_i^2 seja colada em $K_{\mathcal{P}}^1$ de acordo com a palavra do relator r_i . Então, $f_{\#}^1(r_i) = \beta^1(r_i) = (\beta \circ \Omega_\Pi)(r_i) = 0$, para cada $1 \leq i \leq m$.

Logo, a função f^1 estende-se a cada célula bidimensional e_i^2 , definindo uma função celular $f': K_{\mathcal{P}} \rightarrow Y_{\mathcal{Q}}$ a qual satisfaz, para cada $1 \leq j \leq n$, $(f'_{\#} \circ \Omega_\Pi)(x_j) = f_{\#}^1(x_j) = \beta^1(x_j) = (\beta \circ \Omega_\Pi)(x_j)$. Isto prova que $f'_{\#} = \beta$.

Para finalizar, definimos $f = \psi \circ f' \circ \varphi: K \rightarrow L$. Segue que $f_{\#} = \psi_{\#} \circ f'_{\#} \circ \varphi_{\#} = \psi_{\#} \circ \beta \circ \varphi_{\#} = h(\beta) = \alpha$. \square

Daqui em diante, consideramos $Y \times Y$ com sua decomposição celular herdada da decomposição de Y como 1-complexo (com decomposição minimal).

Para uma apropriada subdivisão celular de $Y \times Y$, o subespaço aberto $Y \times Y \setminus \Delta$ se deforma fortemente a um subcomplexo Y^Δ de $Y \times Y$, contendo o ponto (y_1, y_2) . Denotamos a retração correspondente à deformação por R_Y^Δ e a inclusão de Y^Δ em $Y \times Y \setminus \Delta$ por i_Y^Δ . Assim, temos equivalências de homotopia inversas

$$R_Y^\Delta: Y \times Y \setminus \Delta \rightarrow Y^\Delta \quad \text{e} \quad i_Y^\Delta: Y^\Delta \hookrightarrow Y \times Y \setminus \Delta.$$

Demonstração do Teorema 2.4. Conforme já destacado, a parte “somente se” foi demonstrada antes do enunciado do Teorema. Para provar a parte “se”, suponha que seja $\Phi: \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(Y \times Y \setminus \Delta, (y_1, y_2))$ um homomorfismo satisfazendo $h_\# = l_\# \circ \Phi$.

Considere a retração $R_Y^\Delta: Y \times Y \setminus \Delta \rightarrow Y^\Delta$ e a inclusão $i_Y^\Delta: Y^\Delta \hookrightarrow Y \times Y \setminus \Delta$ descritas acima. Então os homomorfismos induzidos $(R_Y^\Delta)_\#$ e $(i_Y^\Delta)_\#$ são isomorfismos inversos (um do outro) entre os grupos $\pi_1(Y \times Y \setminus \Delta, (y_1, y_2))$ e $\pi_1(Y^\Delta, (y_1, y_2))$.

Considere a composição $(R_Y^\Delta)_\# \circ \Phi: \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(Y^\Delta, (y_1, y_2))$. Pelo Lema 2.6, existe uma função celular $\varphi: (K, x_0) \rightarrow (Y^\Delta, (y_1, y_2))$ tal que $\varphi_\# = (R_Y^\Delta)_\# \circ \Phi$. Seja $h': K \rightarrow Y \times Y$ a função definida pela composição $h' = l \circ i_L^\Delta \circ \varphi$. Então

$$h'_\# = l_\# \circ (i_Y^\Delta)_\# \circ \varphi_\# = l_\# \circ (i_Y^\Delta)_\# \circ (R_Y^\Delta)_\# \circ \Phi = l_\# \circ \Phi = h_\#.$$

Defina $f' = p_1 \circ h': K \rightarrow Y$ e $g' = p_2 \circ h': K \rightarrow Y$, onde $p_i: Y \times Y \rightarrow Y$ é a projeção na i -ésima coordenada. Como $f = p_1 \circ h$ e $g = p_2 \circ h$, segue da identidade acima que $f'_\# = f_\#$ e $g'_\# = g_\#$. Então, pelo Lema 2.5, f' e g' são homotópicas a f e g , respectivamente. Como $h' = (f', g')$ e sua imagem não encontra Δ , temos que $\text{Coin}(f', g') = \emptyset$. \square

Nas Seções 2.5 e 2.6, aplicamos o Teorema 2.4 em duas situações particulares para o grafo Y : primeiro consideramos $Y = S^1$ (a circunferência) e depois $Y = S^1 \vee I$ (o buquê da circunferência com um intervalo). Antes disso, porém, apresentamos algumas releituras do Teorema 2.4 que serão úteis nas próximas seções e também no próximo capítulo.

2.4 Releituras do Teorema 2.4

Apresentamos nesta seção algumas releituras do Teorema 2.4. A primeira é pensada no sentido de se evitar a preocupação com a possibilidade das funções f e g coincidirem no ponto base x_0 , preocupação com a qual bem lidamos no início da Seção 2.3. Tratemos disso, agora, de uma maneira diferente: substituindo $Y \times Y \setminus \Delta$ por um complexo $Y_*^\Delta \subset Y \times Y$, construído a partir do subcomplexo Y^Δ considerado na prova do Teorema 2.4.

Suponha que as funções contínuas $f, g: K \rightarrow Y$ coincidam no ponto base x_0 , digamos $f(x_0) = g(x_0) = y_0$, e sejam $y_1 \neq y_2$ pontos próximos de y_0 (numa vizinhança contrátil de y_0). Como vimos no parágrafo anterior à prova do Teorema 2.4, o espaço $Y \times Y \setminus \Delta$ se deforma por retração forte a um subcomplexo Y^Δ de $Y \times Y$ (com uma subdivisão celular apropriada) contendo (y_1, y_2) . Consideramos em $Y \times Y$ um arco γ de (y_0, y_0) para (y_1, y_2) , com a propriedade que γ intercepta Y^Δ apenas no ponto (y_1, y_2) , e γ intercepta Δ apenas no ponto (y_0, y_0) . Então, Y^Δ é um retrato por deformação forte do complexo $Y_*^\Delta = Y^\Delta \cup \gamma$, o qual está contido em $(Y \times Y \setminus \Delta) \cup \{(y_0, y_0)\}$. O ponto (y_0, y_0) pertence a Y_*^Δ e a inclusão natural $l: Y_*^\Delta \rightarrow Y \times Y$ induz o homomorfismo $l_\#: \pi_1(Y_*^\Delta, y_0^2) \rightarrow \pi_1(Y \times Y, (y_0, y_0))$. É fácil ver que o resultado enunciado no Teorema 2.4 adapta-se a este cenário, e temos:

Teorema 2.7. Sejam $f, g: (K, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ funções contínuas e seja $l: Y_*^\Delta \hookrightarrow Y \times Y$ a inclusão natural. O par (f, g) é deformável a livre de coincidência se, e somente se, existe um homomorfismo Φ que torna comutativo o digrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y_*^\Delta, (y_0, y_0)) \\ & \nearrow \Phi & \downarrow l_\# \\ \pi_1(K, x_0) & \xrightarrow{(f,g)_\#} & \pi_1(Y \times Y, (y_0, y_0)) \end{array}$$

A construção de Y_*^Δ a partir de Y^Δ será feita nas situações concretas apresentadas nas Seções 2.5 e 2.6, quando então o procedimento aqui apresentado ficará mais claro.

A próxima releitura que apresentamos expressa o resultado do Teorema 2.4 em termos de equações em grupos livres, no caso em que $K = K_{\mathcal{P}}$ é um 2-complexo modelo induzido por uma apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, com $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$, donde o grupo fundamental $\pi_1(K_{\mathcal{P}}, x_0)$ é isomorfo ao grupo Π apresentado por \mathcal{P} . Aqui, x_0 é a (única) 0-célula de $K_{\mathcal{P}}$. Denotamos por $\iota: K_{\mathcal{P}}^1 \hookrightarrow K_{\mathcal{P}}$ a inclusão natural. Então, o homomorfismo $\iota_\#: \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1, x_0) \rightarrow \pi_1(K_{\mathcal{P}}, x_0)$ corresponde à projeção $\Omega: F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r}) = \Pi$. A fim de simplificar e unificar a notação, consideramos definitivamente a identificação de $\pi_1(K_{\mathcal{P}}, x_0)$ com Π e escrevemos, para cada $1 \leq j \leq m$,

$$\bar{x}_j = \Omega(x_j) = \iota_\#(x_j).$$

Dada uma função contínua $f: (K_{\mathcal{P}}, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, sua restrição $f^1 = f|_{K_{\mathcal{P}}^1}: K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow Y$ induz um homomorfismo em grupos fundamentais, a saber,

$$f_\#^1: F(\mathbf{x}) \approx \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0),$$

o qual é definido pelos valores $f_\#^1(x_j)$, para $x_j \in \mathbf{x}$, e satisfaz a relação $f_\#^1(r_i) = \mathbb{1}$ para cada $r_i \in \mathbf{r}$, pois $f_\#^1 = f_\# \circ \Omega$, uma vez que $f^1 = f \circ \iota$. Reciprocamente, dado um homomorfismo $\varphi^1: F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ satisfazendo $\varphi^1(r_i) = \mathbb{1}$ para todo $r_i \in \mathbf{r}$, ele passa a quociente a um homomorfismo $\varphi: \pi_1(K_{\mathcal{P}}, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ e, pelo Lema 2.6, existe uma função celular $f: (K_{\mathcal{P}}, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f_\#^1 = \varphi^1$ e $f_\# = \varphi$.

Dadas duas funções contínuas $f, g: (K_{\mathcal{P}}, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência se, e somente se, $(f, g)_\#$ se levanta através de $l_\#$ no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & \pi_1(Y_*^\Delta, (y_0, y_0)) \\ \Omega \downarrow & \nearrow \Phi & \downarrow l_\# \\ \Pi & \xrightarrow{(f,g)_\#} & \pi_1(Y \times Y, (y_0, y_0)) \end{array}$$

Temos que: os levantamentos Φ de $(f, g)_{\#}$ através de $l_{\#}$ estão em correspondência um-a-um com os levantamentos ϕ de $(f, g)_{\#} \circ \Omega$ através de $l_{\#}$ que satisfazem $\phi(r_i) = \mathbb{1}$ para todo $r_i \in \mathbf{r}$.

Como um homomorfismo $F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_1(Y_*^{\Delta}, (y_0, y_0))$ é definido por seus valores nos geradores $x_j \in \mathbf{x}$, temos a seguinte versão dos Teoremas 2.4 e 2.7:

Teorema 2.8. *Um par de funções contínuas $f, g: K_{\mathcal{P}} \rightarrow Y$ é deformável a livre de coincidência se, e somente se, existe um homomorfismo $\phi: F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_1(Y_*^{\Delta}, (y_0, y_0))$ satisfazendo $l_{\#} \circ \phi(x_j) = (f, g)_{\#}(\bar{x}_j)$, para todo $x_j \in \mathbf{x}$, e $\phi(r_i) = \mathbb{1}$, para todo $r_i \in \mathbf{r}$.*

O Teorema 2.8 pode ser reformulado em termos de equações ou sistemas de equações em grupos. Explicamos: como cada relator $r \in \mathbf{r}$ é uma palavra $r = r(x_1, \dots, x_n)$ no alfabeto \mathbf{x} , a relação $r = \mathbb{1}$ pode ser vista como uma equação “sem coeficientes” nas variáveis x_1, \dots, x_n . Um homomorfismo $\phi: F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ satisfazendo $\phi(r) = \mathbb{1}_G$ (= o elemento neutro em G) é uma *solução* para a equação $r = \mathbb{1}$ no grupo G . Agora, dados homomorfismos $\mu: \Pi = F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r}) \rightarrow H$ e $\nu: G \rightarrow H$, dizemos que uma solução $\phi: F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ para a equação $r = \mathbb{1}$ é uma (μ, ν) -*solução* se $\nu \circ \phi(x_j) = \mu(\bar{x}_j)$ para todo $x_j \in \mathbf{x}$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\phi} & G \\ \Omega \downarrow & & \downarrow \nu \\ \Pi & \xrightarrow{\mu} & H \end{array}$$

Com esta terminologia, o Teorema 2.8 pode ser reescrito como segue:

Teorema 2.9. *Um par de funções contínuas $f, g: K_{\mathcal{P}} \rightarrow Y$ é deformável a livre de coincidência se, e somente se, todas as equações $r_i = \mathbb{1}$, para $r_i \in \mathbf{r}$, têm uma $((f, g)_{\#}, l_{\#})$ -solução comum.*

Note que já não nos preocupamos em mencionar o comportamento de f e g sobre o ponto base, uma vez conhecidos os Teoremas 2.4 e 2.7 que, um ou outro, contempla o que quer que ocorra.

2.5 Funções na circunferência

Nesta seção, estudaremos o problema de eliminar coincidências de um par de funções de um 2-complexo K , conexo e finito, na circunferência S^1 .

Para que fiquemos despreocupados com supostas necessidades de mudanças de pontos bases, vamos aplicar o procedimento descrito na Seção 2.4.

Iniciamos com a circunferência S^1 vista como o espaço obtido do intervalo fechado $[0, 1]$ pela identificação dos pontos finais. Então $S^1 \times S^1$ é o toro obtido com as identificações dos lados opostos do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Assim, $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$ corresponde ao espaço obtido com as mesmas identificações de lados opostos, após excluir do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ os quatro vértices e a diagonal.

Conforme a Figura 2.9, o subespaço $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$ se deforma sobre uma circunferência que, para manter as notações do Teorema 2.4, denotamos por $(S^1)^\Delta$.

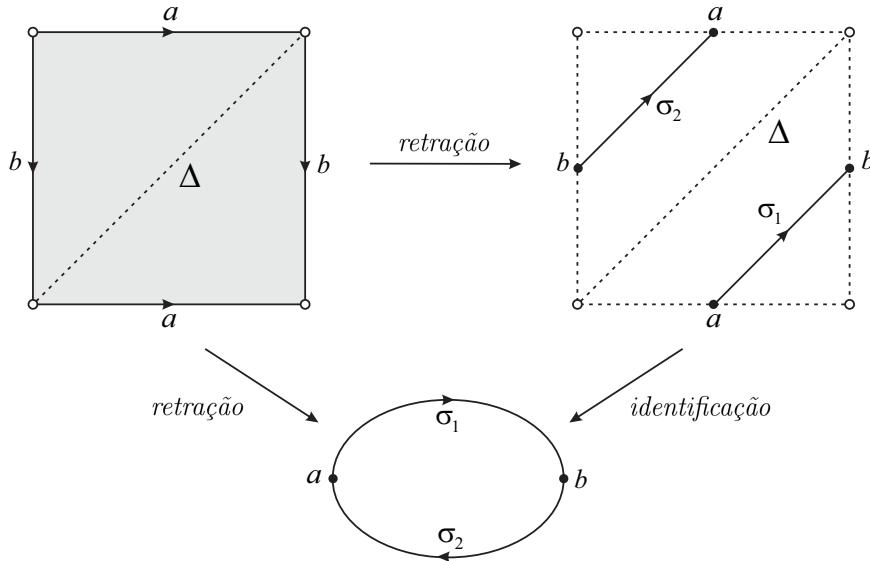


Figura 2.9: A retração de $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$ sobre $(S^1)^\Delta \cong S^1$.

Suponhamos que sejam $f, g: K \rightarrow S^1$ funções celulares. Então $f(x_0) = g(x_0) = y_0$, onde x_0 é uma 0-célula de K e y_0 é a única 0-célula da decomposição celular minimal de S^1 . Lembramos que, pelo Teorema da Aproximação Celular, qualquer função dada pode ser assumida, a menos de homotopia, como sendo celular.

Após deformarmos $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$ sobre $(S^1)^\Delta$, colamos um arco γ iniciando no ponto (y_0, y_0) e terminando no ponto b , correspondente ao segmento vertical ligando o vértice (y_0, y_0) ao ponto $(0, b)$ do quadrado da direita na Figura 2.9, o qual está inteiramente contido em $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$, exceto pelo seu ponto inicial (y_0, y_0) . O espaço assim obtido se deforma de volta a $(S^1)^\Delta$ e o denotamos por $(S^1)_*^\Delta$. Ele está ilustrado na Figura 2.10.

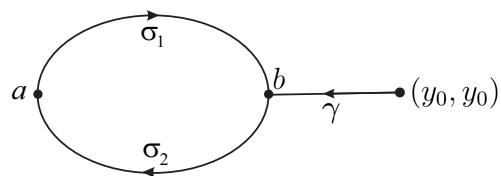


Figura 2.10: Gerador de $\pi_1((S^1)_*^\Delta, (y_0, y_0)) \approx \mathbb{Z}$

Seja $l: (S^1)_*^\Delta \hookrightarrow S^1 \times S^1$ a inclusão natural e considere o homomorfismo induzido

$$l_\# : \pi_1((S^1)_*^\Delta, (y_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^1, (y_0, y_0)).$$

Pelo Teorema 2.7, o par (f, g) pode ser deformado a um par livre de coincidência se, e somente se, o homomorfismo $h_\# = (f, g)_\# : \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^1, (y_0, y_0))$ se levanta ao longo de $l_\#$.

Vamos agora descrever o homomorfismo $l_\#$. O grupo $\pi_1((S^1)_*^\Delta, (y_0, y_0)) \approx \mathbb{Z}$ é gerado pela classe $[\sigma]$ do laço $\sigma = \gamma\sigma_2\sigma_1\bar{\gamma}$, onde $\bar{\gamma}$ é o caminho reverso de γ . Em $S^1 \times S^1$, o laço σ é homotópico ao laço que descreve uma volta longitudinal e uma volta latitudinal no toro, ou seja, $l(\sigma) \simeq ab$, conforme identificação dos laços a e b no quadrado da esquerda da Figura 2.9. Logo, $l_\#$ é dado por $l_\#([\sigma]) = [ab]$. Agora, através do isomorfismo canônico

$$\pi_1(S^1 \times S^1, (y_0, y_0)) \approx F(a, b)/N(aba^{-1}b^{-1}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

temos $[ab]$ correspondente a $(1, 1)$. Portanto, considerando também a identificação $[\sigma] \equiv 1 \in \mathbb{Z} \approx \pi_1((S^1)_*^\Delta, (y_0, y_0))$, temos que $l_\#$ pode ser descrito como o homomorfismo

$$l_\# : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \text{dado por} \quad l_\#(1) = (1, 1). \quad (2.1)$$

Teorema 2.10. *Para funções contínuas $f, g: K \rightarrow S^1$, o par (f, g) pode ser deformado por homotopia a um par livre de coincidência se, e somente se, f e g são homotópicas.*

Demonstração. A menos de homotopia, podemos supor que f e g sejam funções celulares. Logo $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ e, assim, f e g podem ser vistas como funções com ponto base, $f, g: (K, x_0) \rightarrow (S^1, y_0)$. Então, a construção acima se aplica e mostra que o par (f, g) pode ser deformado por homotopia a um par livre de coincidência se, e somente se, existe um levantamento Φ para $h_\# = (f_\#, g_\#)$ ao longo de $l_\#$.

Suponha que Φ exista. Então, como $l_\#(1) = (1, 1)$, temos que as duas componentes de $h_\# = l_\# \circ \Phi$ são iguais, ou seja, $f_\# = g_\#$. Segue do Lema 2.5 que f e g são homotópicas.

Reciprocamente, suponha que f e g sejam homotópicas. Então ambas induzem o mesmo homomorfismo $\alpha: \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1, y_0)$ e, assim sendo, $h_\# = (\alpha, \alpha)$. A menos das identificações $\pi_1((S^1)_*^\Delta, (y_0, y_0)) \approx \mathbb{Z} \approx \pi_1(S^1, y_0)$, podemos definir $\Phi = \alpha$, assim obtendo um levantamento para $h_\#$ ao longo de $l_\#$, o que conclui a prova. \square

Corolário 2.11. (1) *Um par (f, g) de autofunções contínuas da circunferência S^1 é deformável a livre de coincidência se, e somente se, $\deg(f) = \deg(g)$.* (2) *Toda função contínua $f: S^1 \rightarrow S^1$ é homotópica a uma função f' tal que $\text{Coin}(f, f') = \emptyset$.*

Demonstração. A afirmação (1) segue do Teorema 2.10 e do fato muito bem conhecido de que duas funções $f, g: S^1 \rightarrow S^1$ são homotópicas se, e somente se, possuem o mesmo grau. A afirmação (2) segue imediatamente de (1) tomando $f = g$. \square

A afirmação (2) do Corolário 2.11 é realmente trivial. Dada $f: S^1 \rightarrow S^1$, a composição de f com uma pequena rotação de S^1 resulta numa função f' que é homotópica a f e não possui coincidências com f . Também a afirmação (1) é bem conhecida. Apresentamos ambas aqui como ilustração da aplicabilidade do Teorema 2.4.

Em vistas do Teorema 2.10, é importante e conveniente (para exemplos futuros) descrever para quais 2-complexos K existem funções contínuas $f, g: K \rightarrow S^1$ que não são homotópicas, isto é, quando o conjunto de classes de homotopia $[K, S^1]$ tem mais que um elemento. Pelo Lema 2.5, se $f_\# = g_\#$, então $f \simeq g$. Além disso, pelo Lema 2.6, se $\Pi = \pi_1(K, x_0)$, então todo homomorfismo $\alpha: \Pi \rightarrow \mathbb{Z}$ é realizável como o homomorfismo induzido em grupos fundamentais por uma função contínua $f: K \rightarrow S^1$. Portanto, para que $[K, S^1]$ tenha mais que um elemento, é necessário e suficiente que o grupo de homomorfismos $\text{hom}(\Pi, \mathbb{Z})$ seja não trivial. A abelianização $\Pi/[\Pi, \Pi]$ do grupo fundamental Π é o primeiro grupo de homologia $H_1(K)$. Seja $\rho: \Pi \rightarrow H_1(K)$ o homomorfismo abelianização. Como \mathbb{Z} é abeliano, todo homomorfismo $\alpha: \Pi \rightarrow \mathbb{Z}$ passa a quociente por ρ a um homomorfismo $\bar{\alpha}: H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}$. Por outro lado, a composição com ρ de cada homomorfismo $\beta: H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ resulta num homomorfismo $\rho \circ \beta: \Pi \rightarrow \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z} \\ \rho \downarrow & \nearrow \bar{\alpha}=\beta & \\ H_1(K) & & \end{array}$$

Claramente, a função $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ fornece um isomorfismo $\text{hom}(\Pi, \mathbb{Z}) \approx \text{hom}(H_1(K), \mathbb{Z})$.

Quanto ao grupo de homologia $H_1(K)$, tem-se $H_1(K) \approx \mathbb{Z}^{\beta_1} \oplus \mathcal{T}$, onde $\beta_1 = \beta_1(K)$ é o primeiro número de Betti de K e \mathcal{T} é um grupo finito. Como \mathbb{Z} não possui subgrupo finito, todo homomorfismo de $H_1(K)$ em \mathbb{Z} aplica \mathcal{T} no subgrupo trivial. Segue-se que

$$\text{hom}(\Pi, \mathbb{Z}) \approx \text{hom}(H_1(K), \mathbb{Z}) \approx \text{hom}(\mathbb{Z}^{\beta_1}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{\beta_1}.$$

Portanto, temos provado que:

Corolário 2.12. *Dado um 2-complexo K , existe um par de funções contínuas $f, g: K \rightarrow S^1$ que não pode ser deformado a um par livre de coincidência se, e somente se, o primeiro número de Betti $\beta_1(K) \neq 0$.*

Além do resultado do Corolário 2.12, os argumentos acima provam que se $\beta_1(K) \neq 0$, então existe não apenas um par, mas infinitas funções contínuas $f_0, f_1, \dots: K \rightarrow S^1$, duas a duas não homotópicas e, portanto, tais que cada par (f_0, f_i) , para $i = 1, 2, \dots$, não pode ser deformado a um par livre de coincidência.

2.6 Funções de um grafo no grafo-balão

Nesta seção, ilustramos a aplicabilidade do Teorema 2.7 apresentando uma prova alternativa para o resultado principal de [18], para o caso particular de funções de um grafo no buquê $S^1 \vee I$, onde I é o intervalo fechado $[0, 1]$.

Funções com contradomínio em $S^1 \vee I$ são estudadas daqui até o final deste texto. Por isso, fixamos terminologia e notação: o grafo $S^1 \vee I$ será chamado *grafo-balão* (devido ao seu formato sugestivo) e denotado por \mathcal{W} . Ele será visto como o espaço quociente obtido do intervalo fechado $[0, 2]$, por meio da identificação $0 \sim 1$, conforme a Figura 2.11.

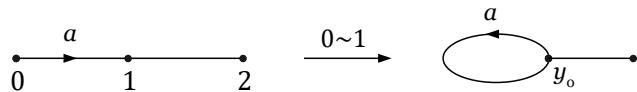


Figura 2.11: O grafo-balão $\mathcal{W} = S^1 \vee I$.

Como \mathcal{W} tem o tipo de homotopia da circunferência S^1 , o produto $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ tem o tipo de homotopia do toro $S^1 \times S^1$; de fato, $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ se deforma fortemente em $S^1 \times S^1$. Porém, $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \Delta$ não tem o tipo de homotopia de $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$. Com efeito, vimos na Seção 2.5 que $S^1 \times S^1 \setminus \Delta$ se deforma sobre uma circunferência S^1 ; por outro lado, vemos pela Figura 2.12 que $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \Delta$ se deforma sobre um espaço homotopicamente equivalente ao buquê de três circunferências.

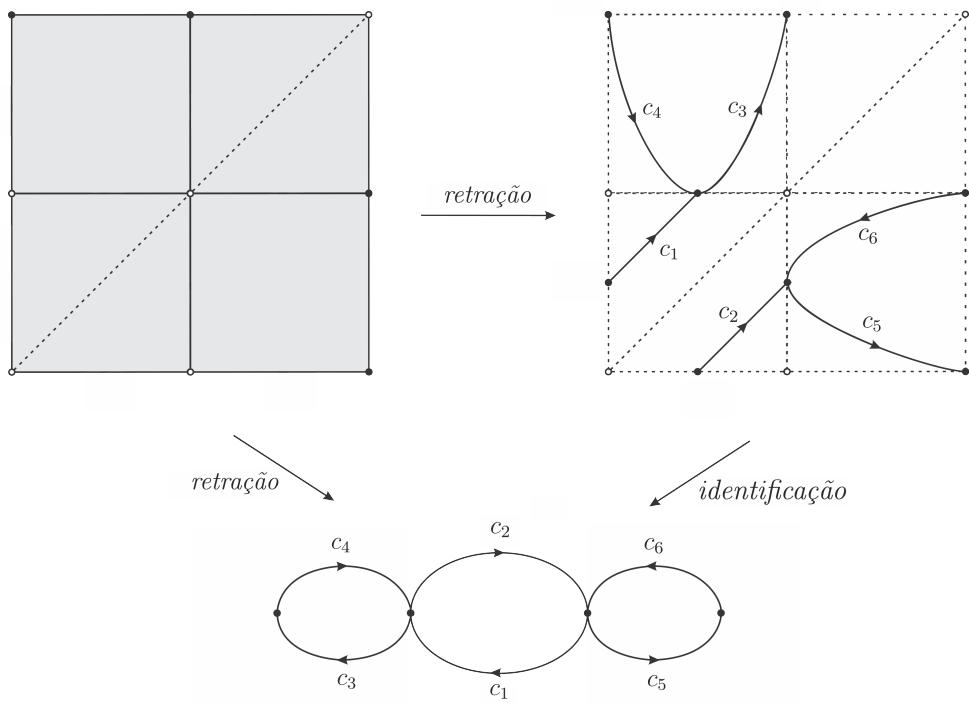


Figura 2.12: A retração de $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \Delta$ sobre \mathcal{W}^Δ .

Na Figura 2.12, $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ é visto como o espaço quociente obtido do quadrado $[0, 2] \times [0, 2]$ por meio das identificações $(x, 0) \sim (x, 1)$, para cada $x \in [0, 2]$, e $(0, y) \sim (1, y)$, para cada $y \in [0, 2]$. Assim, $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \Delta$ corresponde ao espaço obtido, pelas mesmas identificações, desta vez tomadas sobre o quadrado $[0, 2] \times [0, 2]$ após serem excluídos sua diagonal e os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Assim como na Seção 2.5, aplicamos o procedimento para evitarmos a preocupação com os pontos base, no caso em que $(f(x_0), g(x_0)) \in \Delta$.

Após deformarmos $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \Delta$ sobre \mathcal{W}^Δ , colamos um arco γ iniciando no ponto (y_0, y_0) , correspondente à classe do ponto $(0, 0)$, e terminando no ponto correspondente à classe do ponto $(0, 1/2)$, segundo as identificações sobre o quadrado $[0, 2] \times [0, 2]$. Assim obtemos o grafo \mathcal{W}_*^Δ , para o qual consideramos o ponto base (y_0, y_0) .

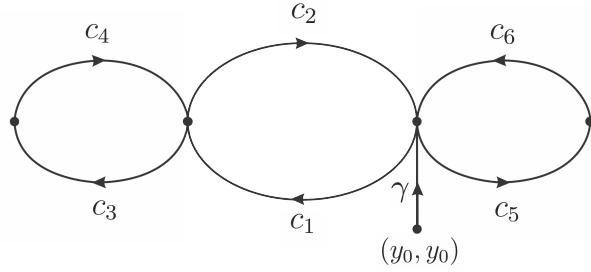


Figura 2.13: O grafo \mathcal{W}_*^Δ .

Considere os laços $w_1 = \gamma c_1 c_3 c_4 \bar{c}_1 \bar{\gamma}$, $w_2 = \gamma c_5 c_6 \bar{\gamma}$ e $w_3 = \gamma c_1 c_2 \bar{\gamma}$, com as notações da Figura 2.13, onde \bar{c}_1 e $\bar{\gamma}$ são os caminhos reversos de c_1 e γ , respectivamente. Claramente, $\pi_1(\mathcal{W}_*^\Delta, (y_0, y_0))$ corresponde ao grupo livre $F(w_1, w_2, w_3)$ gerado pelas letras w_1 , w_2 e w_3 .

Vamos agora descrever o homomorfismo

$$l_\# : F(w_1, w_2, w_3) \rightarrow \pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W}, (y_0, y_0)) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

induzido em grupos fundamentais pela inclusão natural $l : \mathcal{W}_*^\Delta \hookrightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$.

Para ajudar na identificação de geradores do grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W}, (y_0, y_0)) \approx \pi_1(\mathcal{W}, y_0) \times \pi_1(\mathcal{W}, y_0) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, consideramos cada cópia do grupo \mathbb{Z} escrito sob a forma multiplicativa como o grupo livre $F(a)$ gerado pela letra a , correspondente ao laço mostrado na Figura 2.11. Finalmente, escrevemos

$$\pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W}, (y_0, y_0)) \approx F(a) \times F(a).$$

Olhando para a Figura 2.13 e fazendo projeções dos caminhos sobre os eixos das abscissas e das ordenadas, vemos que:

- Em $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$, o laço $w_1 = \gamma c_1 c_3 c_4 \bar{c}_1 \bar{\gamma}$ é homotópico a um laço que descreve uma volta longitudinal em $S^1 \times S^1$ e não descreve volta meridional alguma, o que significa que $l_\#(w_1) = (a, 1)$.

- Em $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$, o laço $w_2 = \gamma c_5 c_6 \bar{\gamma}$ é homotópico a um laço que descreve uma volta meridional em $S^1 \times S^1$ e não descreve volta longitudinal alguma, o que significa que $l_{\#}(w_2) = (\mathbb{1}, a)$.
- Em $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$, o laço $w_3 = \gamma c_1 c_2 \bar{\gamma}$ descreve uma volta longitudinal e uma volta meridional em $S^1 \times S^1$, o que implica $l_{\#}(w_3) = (a, a)$.

Portanto, temos provado o seguinte lema:

Lema 2.13. *A inclusão natural $l: \mathcal{W}_*^\Delta \hookrightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ induz o homomorfismo*

$$l_{\#}: F(w_1, w_2, w_3) \rightarrow F(a) \times F(a) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

dado por $l_{\#}(w_1) = (a, \mathbb{1}) \approx (1, 0)$, $l_{\#}(w_2) = (\mathbb{1}, a) \approx (0, 1)$ e $l_{\#}(w_3) = (a, a) \approx (1, 1)$.

Esta descrição do homomorfismo $l_{\#}$ será utilizada na proposição a seguir e em vários outros resultados do texto apresentados a partir deste ponto.

Como prometido no início da seção, provamos agora um caso particular do teorema principal de [18], correspondente, neste texto, ao Teorema 2.3.

Proposição 2.14. *Todo par de funções contínuas de um grafo no grafo-balão \mathcal{W} é deformável a livre de coincidência.*

Demonstração. Sejam $f, g: K^1 \rightarrow \mathcal{W}$ duas funções de um grafo no grafo-balão \mathcal{W} e considere, como antes, a função $h = (f, g): K^1 \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$. Certamente, K^1 é homotopicamente equivalente a um buquê de circunferências, digamos $n \geq 0$ circunferências, e então seu grupo fundamental $\pi_1(K^1)$ é o grupo livre $F(x_1, \dots, x_n)$ de posto n . Pelo Teorema 2.7, precisamos provar que existe um homomorfismo $\Phi: F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ que torna comutativo o diagrama abaixo, onde $l_{\#}: F(w_1, w_2, w_3) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é o homomorfismo descrito no Lema 2.13.

$$\begin{array}{ccc} & & F(w_1, w_2, w_3) \\ & \nearrow \Phi & \downarrow l_{\#} \\ F(x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{h_{\#}} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array}$$

Para cada $1 \leq i \leq n$, $h_{\#}(x_i)$ é da forma $h_{\#}(x_i) = (c_i, d_i)$ para certos inteiros c_i e d_i . Definimos $\Phi: F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ como sendo o (único) homomorfismo tal que $\Phi(x_i) = w_1^{c_i} w_2^{d_i}$. Então $(l_{\#} \circ \Phi)(x_i) = l_{\#}(w_1^{c_i} w_2^{d_i}) = c_i(1, 0) + d_i(0, 1) = (c_i, d_i) = h_{\#}(x_i)$, para cada $1 \leq i \leq n$. Portanto, Φ satisfaz $l_{\#} \circ \Phi = h_{\#}$, o que prova a proposição. \square

O Teorema 2.10 e a Proposição 2.14 juntos mostram que existem pares de funções de um grafo não-contrátil na circunferência S^1 que não são deformáveis a livre de coincidência, mas se colamos uma “cauda” na circunferência S^1 , e assim consideramos funções do grafo no buquê $\mathcal{W} = S^1 \vee I$, então cada par de funções é deformável a livre de coincidência.

No próximo capítulo, estudamos este problema para funções de 2-complexos na circunferência, isto é, estudamos a possibilidade de eliminar, através de deformações por homotopia, todas as coincidências de um par de funções de um 2-complexo na circunferência, após a colagem de uma “cauda” na circunferência. Estudamos os casos concretos em que os domínios das funções são superfícies fechadas.

Capítulo 3

Funções de superfícies no grafo-balão

Pelo Teorema 2.10, um par de funções contínuas de um 2-complexo K (conexo e finito) na circunferência S^1 pode ser deformado por homotopia a um par livre de coincidência se, e somente se, as funções são homotópicas. Assim, se $f, g: K \rightarrow S^1$ são funções contínuas não homotópicas, então o par (f, g) tem ao menos uma coincidência essencial, isto é, uma coincidência que não pode ser eliminada por homotopia. Perguntamo-nos se uma tal coincidência pode ser removida após colarmos uma “cauda” na circunferência S^1 , isto é, depois de compor as funções f e g com a inclusão natural $\iota: S^1 \hookrightarrow \mathcal{W}$, onde $\mathcal{W} = S^1 \vee I$ é o grafo-balão apresentado na Seção 2.6.

Esta é a questão central deste capítulo, discutida no caso especial em que o 2-complexo K é uma superfície fechada.

O problema foi resolvido inicialmente para o toro e para a garrafa de Klein em [6]. No primeiro caso, provou-se resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para que um par de funções do toro no grafo-balão possa ser deformado a um par livre de coincidência. No segundo caso, provou-se que todo par de funções da garrafa de Klein no grafo-balão pode ser deformado a um par livre de coincidência. Estes resultados são apresentados neste texto, nas Seções 3.2 e 3.3, respectivamente.

A tentativa de estender estes resultados para funções contínuas de superfícies fechadas de gêneros maiores em grafos (não necessariamente o grafo-balão) esbarra na dificuldade de resolver problemas de levantamento ou equações em grupos livres.

Em [5] buscou-se reduzir o problema através de um procedimento de decomposição da superfície em uma soma conexa de duas superfícies de gêneros menores. Apresentamos o resultado principal de [5] na Seção 3.4.

Ao longo deste capítulo, X_1 e X_2 são superfícies fechadas e Y é um grafo, todos munidos de sua decomposição celular minimal. Todas as funções dadas *a priori* serão consideradas contínuas e, assim sendo, todas elas podem ser consideradas, a menos de homotopia, celulares.

3.1 Funções definidas na esfera e no plano projetivo

Todo grafo Y (conexo e finito, conforme definido na Seção 1.5) possui recobrimento universal \tilde{Y} , o qual é um complexo CW unidimensional. Se Y é contrátil, então \tilde{Y} é o próprio grafo Y ; caso contrário, $\pi_1(Y)$ é um grupo livre (portanto infinito) e \tilde{Y} é um complexo infinito, ainda contrátil. Em qualquer dos casos, \tilde{Y} é contrátil.

Segue-se que se $f: K \rightarrow Y$ é uma função contínua, de um complexo K em um grafo Y , que induz homomorfismo nulo em grupos fundamentais, então f é homotopicamente nula, pois levanta-se ao longo do recobrimento universal $\tilde{Y} \rightarrow Y$. Este é o caso, por exemplo, quando K é a esfera S^2 ou o plano projetivo \mathbb{RP}^2 , pois nestes casos tem-se que $\pi_1(K)$ é finito e, como $\pi_1(Y)$ não possui subgrupo finito além do trivial, toda função contínua $f: K \rightarrow Y$ induz homomorfismo nulo em grupos fundamentais.

Portanto, se K é a esfera S^2 ou o plano projetivo \mathbb{RP}^2 , então todo par de funções contínuas de K em um grafo Y é deformável a livre de coincidência; com efeito, cada função do par pode ser deformada a uma função constante diferente.

3.2 Funções definidas no toro

Como aplicação do Teorema 2.7, respondemos nesta seção quando um par de funções contínuas do toro bidimensional $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ no grafo-balão $\mathcal{W} = S^1 \vee I$ pode ser deformado por homotopia a um par livre de coincidência. Se considerarmos funções de \mathbb{T} na circunferência S^1 , este problema está completamente resolvido pelo Teorema 2.10. De fato, por aquele teorema, um par de funções contínuas (f, g) de \mathbb{T} em S^1 é deformável a livre de coincidência se, e somente se, f e g são homotópicas.

Observe-se que, como \mathcal{W} se retrai por deformação forte sobre a circunferência S^1 , toda função contínua com contradomínio \mathcal{W} é homotópica a uma função cuja imagem está contida em S^1 . Assim, o estudo de coincidências de funções em \mathcal{W} é, de fato, o estudo da possibilidade de eliminação de coincidências de funções em S^1 por meio da colagem de uma “cauda” em S^1 , ou seja, via a composição com a inclusão natural $\iota: S^1 \hookrightarrow \mathcal{W}$.

Provaremos que para funções de \mathbb{T} em \mathcal{W} tem-se mais flexibilidade do que para funções de \mathbb{T} em S^1 , isto é, se (f, g) é um par de funções contínuas de \mathbb{T} em \mathcal{W} , a condição “ f é homotópica a g ” é suficiente para $MC[f, g] = 0$, mas esta condição não é necessária. De fato, provaremos que $MC[f, g] = 0$ se, e somente se, f e g são *algebricamente-pseudo-homotópicas* (Definição 3.1, com tradução literal da terminologia introduzida em [6, Definition 5.1]).

Seja $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{W}$ uma função contínua do toro \mathbb{T} no grafo-balão \mathcal{W} . A menos de homotopia, podemos assumir que f aplica o ponto base $x_0 \in \mathbb{T}$ (a única 0-célula de \mathbb{T}) ao ponto base y_0 de \mathcal{W} .

Por simplicidade, daqui em diante assumiremos que todas as funções contínuas dadas *a priori* são baseadas e, para aliviar a notação, omitiremos os pontos base.

O homomorfismo induzido por $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{W}$ em grupos fundamentais, a saber,

$$f_{\#}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \pi_1(\mathbb{T}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{W}) \approx \mathbb{Z}$$

está completamente definido por seus valores nos geradores canônicos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ do grupo abeliano livre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sendo estes valores $f_{\#}(1, 0) = c$ e $f_{\#}(0, 1) = d$, o par $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é chamado de *bigrau* da função f e é denotado por $\text{bideg}(f)$.

Se f e g são duas funções contínuas do todo \mathbb{T} em \mathcal{W} , segue-se do Lema 2.5 que

$$f \simeq g \Leftrightarrow f_{\#} = g_{\#} \Leftrightarrow \text{bideg}(f) = \text{bideg}(g).$$

É interessante para nós o caso em que $\text{bideg}(f)$ e $\text{bideg}(g)$ não são necessariamente iguais, mas satisfazem uma relação específica que descrevemos na seguinte definição.

Definição 3.1. Diz-se que duas funções contínuas $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{W}$ são *algebricamente-pseudo-homotópicas* se existem inteiros n_1 e n_2 e um par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{bideg}(f) = n_1(p, q) \quad \text{e} \quad \text{bideg}(g) = n_2(p, q).$$

É óbvio que se f e g são homotópicas, então f e g também são algebricamente-pseudo-homotópicas, mas a recíproca não é verdade.

Teorema 3.2. Um par de funções contínuas (f, g) do toro \mathbb{T} no grafo-balão \mathcal{W} é deformável a livre de coincidência se, e somente se, f e g são algebricamente-pseudo-homotópicas.

Demonstração. Sejam $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{W}$ funções contínuas com bigraus

$$\text{bideg}(f) = (\delta_{11}, \delta_{12}) \quad \text{e} \quad \text{bideg}(g) = (\delta_{21}, \delta_{22}).$$

Então os homomorfismos $f_{\#}$ e $g_{\#}$ de $\pi_1(\mathbb{T}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\pi_1(\mathcal{W}) \approx \mathbb{Z}$ são dados por

$$f_{\#}(1, 0) = \delta_{11}, \quad f_{\#}(0, 1) = \delta_{12} \quad \text{e} \quad g_{\#}(1, 0) = \delta_{21}, \quad g_{\#}(0, 1) = \delta_{22}.$$

Consideremos a função $h = (f, g): \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$. Então o homomorfismo induzido

$$h_{\#}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \pi_1(\mathbb{T}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W}) \approx \pi_1(\mathcal{W}) \times \pi_1(\mathcal{W}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

é dado por $h_{\#} = (f_{\#}, g_{\#})$, logo é completamente definido por seus valores

$$h_{\#}(1, 0) = (\delta_{11}, \delta_{21}) \quad \text{e} \quad h_{\#}(0, 1) = (\delta_{12}, \delta_{22}).$$

Pelo Teorema 2.7, (f, g) é deformável a livre de coincidência se, e somente se, existe um homomorfismo $\Phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ que torna comutativo o diagrama abaixo, onde $l_{\#}$ é como no Lema 2.13, isto é, $l_{\#}(w_1) = (1, 0)$, $l_{\#}(w_2) = (0, 1)$ e $l_{\#}(w_3) = (1, 1)$.

$$\begin{array}{ccc} & F(w_1, w_2, w_3) & \\ \Phi \swarrow & & \downarrow l_{\#} \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{h_{\#}} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array}$$

A fim de provar a parte “se” do teorema, suponhamos que f e g são algebraicamente-pseudo-homotópicas, ou seja, existem inteiros n_1 e n_2 e um par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que

$$(\delta_{11}, \delta_{12}) = n_1(p, q) \quad \text{e} \quad (\delta_{21}, \delta_{22}) = n_2(p, q).$$

Segue que

$$h_{\#}(1, 0) = p(n_1, n_2) \quad \text{e} \quad h_{\#}(0, 1) = q(n_1, n_2).$$

Defina $\Phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ por $\Phi(a, b) = (w_1^{n_1} w_2^{n_2})^{ap+bq}$ para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. De fato Φ é um homomorfismo bem definido e temos que

$$\Phi(1, 0) = (w_1^{n_1} w_2^{n_2})^p \quad \text{e} \quad \Phi(0, 1) = (w_1^{n_1} w_2^{n_2})^q.$$

Já que $l_{\#}(w_1) = (1, 0)$ e $l_{\#}(w_2) = (0, 1)$, segue que

$$\begin{aligned} l_{\#} \circ \Phi(1, 0) &= l_{\#}((w_1^{n_1} w_2^{n_2})^p) = p(l_{\#}(w_1^{n_1} w_2^{n_2})) = p(l_{\#}(w_1^{n_1}) + l_{\#}(w_2^{n_2})) \\ &= p(n_1 l_{\#}(w_1) + n_2 l_{\#}(w_2)) = p(n_1(1, 0) + n_2(0, 1)) = p(n_1, n_2) = h_{\#}(1, 0); \\ l_{\#} \circ \Phi(0, 1) &= l_{\#}((w_1^{n_1} w_2^{n_2})^q) = q(l_{\#}(w_1^{n_1} w_2^{n_2})) = q(l_{\#}(w_1^{n_1}) + l_{\#}(w_2^{n_2})) \\ &= q(n_1 l_{\#}(w_1) + n_2 l_{\#}(w_2)) = q(n_1(1, 0) + n_2(0, 1)) = q(n_1, n_2) = h_{\#}(0, 1), \end{aligned}$$

Isto mostra que Φ é um homomorfismo que torna comutativo o diagrama acima e, então, pelo Teorema 2.7, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência.

Para provar a parte “somente se” do teorema, suponha que $\Phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ seja um homomorfismo que torna comutativo o diagrama acima, isto é, $l_{\#} \circ \Phi = h_{\#}$. Denotamos $\phi_1 = \Phi(1, 0)$ e $\phi_2 = \Phi(0, 1)$. Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é abeliano, a imagem de Φ é um subgrupo abeliano do grupo livre $F(w_1, w_2, w_3)$. Portanto, ϕ_1 e ϕ_2 comutam. Pelo Corolário 1.3, ϕ_1 e ϕ_2 são potências de um mesmo elemento, isto é, existe $\phi \in F(w_1, w_2, w_3)$ e inteiros p e q tal que $\phi_1 = \phi^p$ e $\phi_2 = \phi^q$. Seja $(n_1, n_2) = l_{\#}(\phi)$. Então

$$l_{\#}(\phi_1) = p(n_1, n_2) \quad \text{e} \quad l_{\#}(\phi_2) = q(n_1, n_2).$$

Segue da identidade $l_{\#} \circ \Phi = h_{\#}$ que $h_{\#}(1, 0) = p(n_1, n_2)$ e $h_{\#}(0, 1) = q(n_1, n_2)$ donde

$$\text{bideg}(f) = n_1(p, q) \quad \text{e} \quad \text{bideg}(g) = n_2(p, q).$$

Portanto, f e g são algebraicamente-pseudo-homotópicas. \square

3.3 Funções definidas na garrafa de Klein

Nesta seção mostraremos que pares de funções da garrafa de Klein em S^1 ou no grafo-balão \mathcal{W} se comportam, de certa forma, como pares de funções de um grafo em S^1 ou \mathcal{W} , isto é, existem pares de funções da garrafa de Klein em S^1 que não são deformáveis a livre de coincidência, mas todo par de funções da garrafa de Klein no grafo-balão \mathcal{W} é deformável a livre de coincidência.

A garrafa de Klein \mathbb{K} corresponde ao 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x_1, x_2 \mid x_1^2 x_2^2 \rangle$, e seu grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{K})$ é o grupo apresentado por \mathcal{P} , ou seja,

$$\pi_1(\mathbb{K}) \approx \frac{F(x_1, x_2)}{N(x_1^2 x_2^2)}.$$

Seja $\Omega: F(x_1, x_2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{K})$ o homomorfismo quociente natural. Então, dado um grupo G , todo homomorfismo $\beta: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow G$ corresponde a um homomorfismo $\alpha: F(x_1, x_2) \rightarrow G$ tal que $\beta \circ \Omega = \alpha$ e $\alpha(x_1^2 x_2^2) = \mathbb{1}_G$ (o elemento neutro de G).

Proposição 3.3. *Existe um par de funções contínuas da garrafa de Klein na circunferência que não é deformável a livre de coincidência.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \alpha_2: F(x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{Z}$ homomorfismos dados por $\alpha_1(x_1) = 1$, $\alpha_1(x_2) = -1$, $\alpha_2(x_1) = 2$ e $\alpha_2(x_2) = -2$. Como $\alpha_1(x_1^2 x_2^2) = 0$ e $\alpha_2(x_1^2 x_2^2) = 0$, existem homomorfismos $\beta_1, \beta_2: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que $\beta_1 \circ \Omega = \alpha_1$ e $\beta_2 \circ \Omega = \alpha_2$. Pelo Lema 2.6, existem funções contínuas $f, g: \mathbb{K} \rightarrow S^1$ tais que $\beta_1 = f_{\#}: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow \pi_1(S^1)$ e $\beta_2 = g_{\#}: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow \pi_1(S^1)$. Já que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, também $f_{\#} \neq g_{\#}$, o que implica que f e g não são homotópicas. Pelo Teorema 2.10, o par (f, g) não é deformável a livre de coincidência. \square

Para funções da garrafa de Klein no grafo-balão, temos:

Teorema 3.4. *Todo par de funções da garrafa de Klein no grafo-balão \mathcal{W} é deformável a livre de coincidência.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.7, basta provar que todo homomorfismo $\beta: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ levanta a um homomorfismo $\Phi: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ ao longo de $l_{\#}$, onde $l_{\#}: F(w_1, w_2, w_3) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é como no Lema 2.13:, ou seja, $l_{\#}(w_1) = (1, 0)$, $l_{\#}(w_2) = (0, 1)$ e $l_{\#}(w_3) = (1, 1)$.

Dado um tal homomorfismo $\beta: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, consideramos o homomorfismo $\alpha = \beta \circ \Omega: F(x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, onde $\Omega: F(x_1, x_2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{K})$ é como acima. Denotamos $\alpha(x_1) = (a_1, b_1)$ e $\alpha(x_2) = (a_2, b_2)$. Como Ω é o homomorfismo correspondente ao quociente de $F(x_1, x_2)$ por seu subgrupo normal gerado pela palavra $x_1^2 x_2^2$, temos

$$(0, 0) = \alpha(x_1^2 x_2^2) = 2(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \Rightarrow (a_2, b_2) = -(a_1, b_1).$$

Portanto, podemos considerar simplesmente $\alpha(x_1) = (a, b)$ e $\alpha(x_2) = -(a, b)$.

Seja $\phi: F(x_1, x_2) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ o (único) homomorfismo definido por $\phi(x_1) = w_1^a w_2^b$ e $\phi(x_2) = w_2^{-b} w_1^{-a}$. Então

$$\begin{aligned} l_{\#} \circ \phi(x_1) &= l_{\#}(w_1^a w_2^b) = l_{\#}(w_1^a) + l_{\#}(w_2^b) = al_{\#}(w_1) + bl_{\#}(w_2) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b) = \alpha(x_1); \\ l_{\#} \circ \phi(x_2) &= l_{\#}(w_2^{-b} w_1^{-a}) = l_{\#}(w_2^{-b}) + l_{\#}(w_1^{-a}) = -bl_{\#}(w_2) - al_{\#}(w_1) \\ &= (0, -b) + (-a, 0) = -(a, b) = \alpha(x_2). \end{aligned}$$

Os cálculos acima mostram que $l_{\#} \circ \phi = \alpha$. Agora, como

$$\phi(x_1^2 x_2^2) = w_1^a w_2^b w_1^a w_2^b w_2^{-b} w_1^{-a} w_2^{-b} w_1^{-a} = \mathbb{1},$$

segue que existe um homomorfismo $\Phi: \pi_1(\mathbb{K}) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ satisfazendo $\Phi \circ \Omega = \phi$. Obviamente, $\pi_1(\mathbb{K})$ é gerado por $\Omega(x_1)$ e $\Omega(x_2)$. Além disso, segue das identidades $l_{\#} \circ \phi = \alpha$ e $\Phi \circ \Omega = \phi$ que o digrama abaixo é comutativo, pois

$$l_{\#} \circ \Phi(\Omega(x_i)) = l_{\#} \circ \phi(x_i) = \alpha(x_i) = \beta(\Omega(x_i)) \text{ para } i = 1, 2.$$

$$\begin{array}{ccc} F(x_1, x_2) & \xrightarrow{\phi} & F(w_1, w_2, w_3) \\ \Omega \downarrow & \nearrow \Phi & \downarrow l_{\#} \\ \pi_1(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array}$$

Isso mostra que $l_{\#} \circ \Phi = \beta$, isto é, o homomorfismo Φ é um levantamento de β ao longo de $l_{\#}$, como queríamos provar. \square

3.4 Funções definidas em somas conexas

Seja $X = X_1 \# X_2$ a soma conexa de duas superfícies fechadas X_1 e X_2 , e sejam $f, g: X \rightarrow Y$ duas funções contínuas de X em um grafo Y . Consideramos a seguinte questão: é possível encontrar pares de funções contínuas $f_1, g_1: X_1 \rightarrow Y$ e $f_2, g_2: X_2 \rightarrow Y$ de tal modo que a possibilidade de deformar (f, g) a um par livre de coincidência possa ser traduzida na possibilidade de deformar (f_1, g_1) e (f_2, g_2) a pares livres de coincidência?

Em primeiro lugar, precisamos de condições sob as quais uma dada função contínua $f: X_1 \# X_2 \rightarrow Y$ induza funções contínuas $f_i: X_i \rightarrow Y$, para $i \in \{1, 2\}$, de forma que cada f_i coincida com f , a menos de homotopia, na porção de X_i que permanece na soma conexa $X = X_1 \# X_2$. Para isso, é necessário e suficiente que o laço $f(\Sigma)$ seja homotopicamente nulo em Y , onde $\Sigma \subset X$ é a circunferência sobre a qual se dá a soma conexa $X_1 \# X_2$.

Supondo isso, existe uma função $f': X \rightarrow Y$ homotópica a f tal que $f'(\Sigma)$ é o laço constante na 0-célula em Y designada para ser o ponto base.

Então, f' induz uma função $\bar{f}: X_1 \vee X_2 \rightarrow Y$, do espaço quociente $X/\Sigma = X_1 \vee X_2$ em Y , tornando comutativo o diagrama abaixo, no qual \mathbf{q} é a função quociente que colapsa Σ a um ponto:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \# X_2 & \xrightarrow{f'} & Y \\ \mathbf{q} \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X_1 \vee X_2 & & \end{array}$$

Para $i \in \{1, 2\}$, definimos $f_i = \bar{f} \circ l_i: X_i \rightarrow Y$, no qual $l_i: X_i \hookrightarrow X_1 \vee X_2$ é a inclusão natural. Em outras palavras, f_i é a restrição de \bar{f} a X_i .

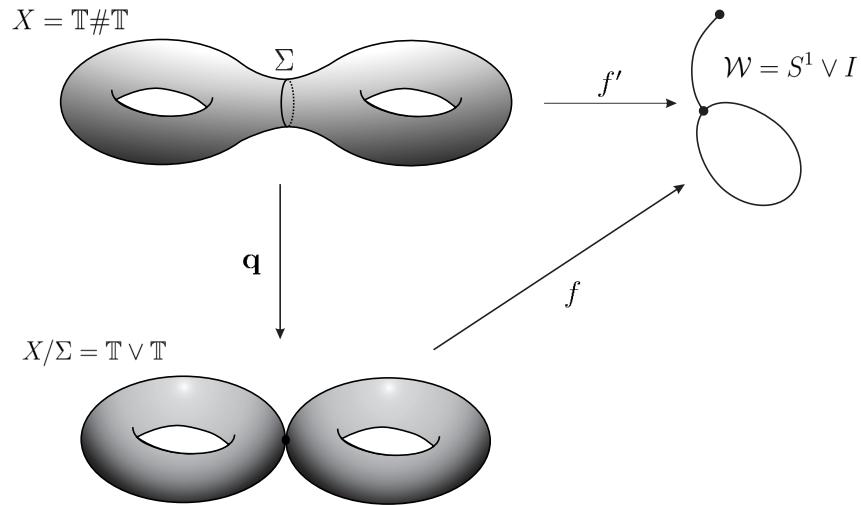


Figura 3.1: Função Σ -homotopicamente-nula do bitoro em \mathcal{W} .

Ressaltamos que esta construção é viável se, e somente se, o laço $f(\Sigma)$ é homotopicamente trivial. Para simplificar a terminologia, definimos:

Definição 3.5. Seja $X = X_1 \# X_2$ uma soma conexa de duas superfícies fechadas e seja $\Sigma \subset X$ a circunferência sobre a qual se dá a soma conexa. Uma função contínua $f: X \rightarrow Y$ é dita ser Σ -homotopicamente-nula se o laço $f(\Sigma)$ é homotopicamente trivial em Y .

O próximo resultado é o teorema principal desta seção; ele corresponde ao Teorema 1.2 [5]. Como antes, X_1 e X_2 são superfícies fechadas e Y é um grafo.

Teorema 3.6. *Sejam $f, g: X_1 \# X_2 \rightarrow Y$ funções contínuas Σ -homotopicamente-nulas, de modo que as funções $f_1, g_1: X_1 \rightarrow Y$ e $f_2, g_2: X_2 \rightarrow Y$ são definidas. Se os pares (f_1, g_1) e (f_2, g_2) são deformáveis a livre de coincidência, então o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. A recíproca não é verdadeira.*

Demonstração. Sejam X_1 e X_2 superfícies fechadas. Então $X_1 = K_{\mathcal{P}_1}$ e $X_2 = K_{\mathcal{P}_2}$ para apresentações de grupos com um único relator, digamos

$$\mathcal{P}_1 = \langle \mathbf{x}_1 \mid r_1 \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \langle \mathbf{x}_2 \mid r_2 \rangle.$$

Escolhemos as letras geradoras de forma que os alfabetos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 são disjuntos. Assim, a soma conexa $X = X_1 \# X_2$ satisfaçõa:

$$X = K_{\mathcal{P}} \quad \text{com} \quad \mathcal{P} = \langle \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2 \mid r_1 r_2 \rangle.$$

Aqui, consideramos a 0-célula de X pertencente à circunferência Σ . Além disso, na soma conexa, as 0-células de X_1 e X_2 são coladas para obter a 0-célula de X .

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ funções Σ -homotopicamente-nulas e consideremos a função

$$h = (f, g): X \rightarrow Y \times Y.$$

Por hipótese, estão definidos dois pares de funções contínuas, a saber, $f_1, g_1: X_1 \rightarrow Y$ e $f_2, g_2: X_2 \rightarrow Y$. Consideramos as funções correspondentes

$$h_1 = (f_1, g_1): X_1 \rightarrow Y \times Y \quad \text{e} \quad h_2 = (f_2, g_2): X_2 \rightarrow Y \times Y.$$

Seja X^1 o 1-esqueleto de X . Então, a inclusão esqueleto $\iota: X^1 \hookrightarrow X$ induz o homomorfismo quociente

$$\iota_{\#}: F(\mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2) \approx \pi_1(X^1) \longrightarrow \pi_1(X) \approx F(\mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2)/N(r_1 r_2).$$

Como na Seção 2.3, para cada $x \in \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2$, denotamos $\bar{x} = \iota_{\#}(x)$.

Temos que $X^1 = X_1^1 \vee X_2^1$ e, assim, a inclusão natural $\iota: X^1 \hookrightarrow X$ se restringe a

$$\iota_1 = \iota|_{X_1^1}: X_1^1 \hookrightarrow X_1 \quad \text{e} \quad \iota_2 = \iota|_{X_2^1}: X_2^1 \hookrightarrow X_2.$$

Além disso, $h_1 \circ \iota_1 = h \circ \iota|_{X_1^1}$ e $h_2 \circ \iota_2 = h \circ \iota|_{X_2^1}$. Segue que:

$$\begin{aligned} h_1 \circ \iota_1(x) &= h_{\#}(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbf{x}_1 \\ h_2 \circ \iota_2(x) &= h_{\#}(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad . \quad (3.1)$$

Suponhamos que os pares (f_1, g_1) e (f_2, g_2) sejam deformáveis a livre de coincidência. Então, pelo Teorema 2.8 e as identidades (3.1), existem homomorfismos $\phi_1: F(\mathbf{x}_1) \rightarrow \pi_1(Y_*^\Delta)$ e $\phi_2: F(\mathbf{x}_2) \rightarrow \pi_1(Y_*^\Delta)$ satisfaçõa

$$\begin{aligned} \phi_1(r_1) &= \mathbb{1} \quad \text{e} \quad l_{\#} \circ \phi_1(x) = h_{\#}(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbf{x}_1 \\ \phi_2(r_2) &= \mathbb{1} \quad \text{e} \quad l_{\#} \circ \phi_2(x) = h_{\#}(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad . \quad (3.2)$$

Seja $\phi: F(\mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2) \rightarrow \pi_1(Y_*^\Delta)$ o (único) homomorfismo tal que $\phi|_{\mathbf{x}_1} = \phi_1$ e $\phi|_{\mathbf{x}_2} = \phi_2$. Então

$$\phi(r_1 r_2) = 1 \quad \text{e} \quad l_\# \circ \phi(x) = h_\#(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2.$$

Pelo Teorema 2.8, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência.

Que a recíproca não é verdadeira segue do Exemplo 3.8, para superfícies orientáveis, e do Exemplo 3.11, para superfícies não orientáveis. \square

De acordo com o Teorema 2.9, o resultado do Teorema 3.6 e sua própria prova têm a seguinte interpretação em termos de equações em grupos: *se a equação $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$ têm $((f, g)_\#, l_\#)$ -soluções, então a equação $r_1 r_2 = 1$ também tem uma $((f, g)_\#, l_\#)$ -solução.* Isso é verdade porque as variáveis da equação $r_1 = 1$ não aparecem na equação $r_2 = 1$ e vice-versa.

3.5 Funções definidas em superfícies orientáveis

Nesta Seção, esclarecemos que a hipótese de f e g serem Σ -homotopicamente-nulas não é uma limitação se X_1 ou X_2 é orientável e Y é um grafo com apenas um ciclo (o que equivale a dizer que $\pi_1(Y)$ é cíclico), por exemplo, o grafo-balão \mathcal{W} . De fato, o Lema 3.7 mostra que se for este o caso, então toda função contínua $f: X_1 \# X_2 \rightarrow Y$ é Σ -homotopicamente-nula e, assim, o Teorema 3.6 funciona para qualquer par de funções contínuas de $X_1 \# X_2$ em Y . Esta informação é útil não apenas para o estudo de funções definidas em superfícies fechadas orientáveis, mas também para funções definidas em superfícies fechadas não-orientáveis de gênero maior ou igual a três. Dizemos isso porque se \mathbb{U}_k denota a superfície fechada não-orientável de gênero k e \mathbb{T}_1 é o toro, então,

$$\mathbb{U}_n = \mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_{n-2} \text{ para cada } n \geq 3.$$

Também nesta seção, apresentamos uma caracterização parcial dos pares de funções contínuas de superfícies fechadas orientáveis no grafo-balão \mathcal{W} que podem ser deformados por homotopia a pares livres de coincidência. Fazemos o mesmo na Seção 3.6 para funções definidas em superfícies fechadas não-orientáveis.

Doravante, \mathbb{T}_k é a superfície fechada de gênero $k \geq 1$, a qual consideramos como o 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ induzido pela apresentação

$$\mathcal{P} = \langle x_1, y_1 \dots, x_k, y_k \mid [x_1, y_1] \cdots [x_k, y_k] \rangle.$$

Como antes, \mathcal{W} é o grafo-balão, isto é, o buquê $S^1 \vee I$.

Dadas funções contínuas $f, g: \mathbb{T}_k \rightarrow \mathcal{W}$, consideramos a função $(f, g): \mathbb{T}_k \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ e o homomorfismo induzido

$$(f, g)_\#: \pi_1(\mathbb{T}_k) \rightarrow \pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Como antes, consideramos a inclusão natural $\iota: \mathbb{T}_k^1 \hookrightarrow \mathbb{T}_k$ do 1-esqueleto, e denotamos $\bar{x}_i = \iota_{\#}(x_i)$ e $\bar{y}_i = \iota_{\#}(y_i)$, para $1 \leq i \leq k$, de modo que $\pi_1(\mathbb{T}_k)$ é gerado por $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_k$, e o homomorfismo $(f, g)_{\#}$ é definido pelos seus valores nestes geradores.

Como temos dito, agora provamos, se a superfície X é decomposta como uma soma conexa $X = X_1 \# X_2$ na qual uma das parcelas é orientável, então toda função de X no grafo-balão \mathcal{W} é Σ -homotopicamente-nula.

Lema 3.7. *Se uma das superfícies X_1 ou X_2 é orientável, então toda função contínua $f: X_1 \# X_2 \rightarrow \mathcal{W}$ é Σ -homotopicamente-nula.*

Demonastração. Suponhamos que $X_1 = \mathbb{T}_k = K_{\mathcal{P}}$, com $\mathcal{P} = \langle x_1, y_1, \dots, x_k, y_k \mid r \rangle$, no qual $r = [x_1, y_1] \cdots [x_k, y_k]$. A circunferência de colagem $\Sigma \subset X = X_1 \# X_2$ da soma conexa é homotópica em X ao laço r , ao longo do qual a fronteira da 2-célula de X_1 é colada no 1-esqueleto X_1^1 . Seja $f: X \rightarrow \mathcal{W}$ uma função contínua de X no grafo-balão \mathcal{W} . O laço $f(\Sigma)$ é homotópico ao laço $f(r)$ que, por sua vez, é homotopicamente nulo, pois r é um produto de comutadores e $\pi_1(\mathcal{W})$ é abeliano. O resultado segue. \square

Considerando o Lema 3.7, assumimos daqui em diante, nesta seção, que todas as funções dadas *a priori* são Σ -homotopicamente-nulas e, portanto, que as hipóteses do Teorema 3.6 estão satisfeitas.

No Teorema 3.2, presentamos uma caracterização completa dos pares de funções contínuas do toro \mathbb{T}_1 em \mathcal{W} que podem ser deformados a pares livres de coincidência. A seguir, estudamos o problema para funções de \mathbb{T}_k em \mathcal{W} . Começamos com um exemplo para $k = 2$, que logo estendemos para valores maiores de k no Teorema 3.9.

Exemplo 3.8. Sejam \mathbb{T}_1 o toro $S^1 \times S^1$ e $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_1 \# \mathbb{T}_1$ o bitoro. Consideramos a primeira e a segunda cópias de \mathbb{T}_1 como os 2-complexos modelo $X_1 = K_{\mathcal{P}_1}$ e $X_2 = K_{\mathcal{P}_2}$ induzidos pelas apresentações

$$\mathcal{P}_1 = \langle x_1, y_1 \mid [x_1, y_1] \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \langle x_2, y_2 \mid [x_2, y_2] \rangle,$$

de modo que o bitoro \mathbb{T}_2 é o 2-complexo modelo induzido pela apresentação

$$\mathcal{P} = \langle x_1, y_1, x_2, y_2 \mid [x_1, y_1][x_2, y_2] \rangle.$$

Dada uma função contínua $f: \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathcal{W}$, consideramos sua restrição $f^1 = f|_{\mathbb{T}_2^1}: \mathbb{T}_2^1 \rightarrow \mathcal{W}$ no 1-esqueleto $\mathbb{T}_2^1 \subset \mathbb{T}_2$, e o homomorfismo induzido

$$f_{\#}^1: \pi_1(\mathbb{T}_2^1) \approx F(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \mathbb{Z} \approx \pi_1(\mathcal{W}).$$

Chamamos de *multigrau* de f ao seguinte vetor de quatro coordenadas inteiras:

$$\text{multdeg}(f) = (f_{\#}^1(x_1), f_{\#}^1(y_1), f_{\#}^1(x_2), f_{\#}^1(y_2)).$$

Sejam $f_1: X_1 \rightarrow \mathcal{W}$ e $f_2: X_2 \rightarrow \mathcal{W}$ as funções contínuas induzidas por f (como antes), e consideremos suas restrições $f_1^1: X_1^1 \rightarrow \mathcal{W}$ e $f_2^1: X_2^1 \rightarrow \mathcal{W}$. Segundo a Seção 3.2, consideramos o *bigrau* de f_1 e o *bigrau* de f_2 dados por

$$\text{bideg}(f_1) = (f_{1\#}^1(x_1), f_{1\#}^1(y_1)) \quad \text{e} \quad \text{bideg}(f_2) = (f_{2\#}^1(x_2), f_{2\#}^1(y_2)).$$

Pela construção de f_1 e f_2 a partir de f , temos

$$\text{bideg}(f_1) = (f_\#^1(x_1), f_\#^1(y_1)) \quad \text{e} \quad \text{bideg}(f_2) = (f_\#^1(x_2), f_\#^1(y_2)).$$

Portanto, desconsiderando os parênteses supérfluos, temos a identidade

$$\text{multdeg}(f) = (\text{bideg}(f_1), \text{bideg}(f_2)).$$

Dada outra função contínua $g: \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathcal{W}$, de maneira análoga consideramos seu multigrau e os bigraus das funções $g_1: X_1 \rightarrow \mathcal{W}$ e $g_2: X_2 \rightarrow \mathcal{W}$, de modo que

$$\text{multdeg}(g) = (\text{bideg}(g_1), \text{bideg}(g_2)).$$

Pelo Teorema 3.2, para $i \in \{1, 2\}$, o par (f_i, g_i) é deformável a livre de coincidência se, e somente se, existem $s_i, t_i \in \mathbb{Z}$ e $(p_i, q_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais que

$$\text{bideg}(f_i) = s_i(p_i, q_i) \quad \text{e} \quad \text{bideg}(g_i) = t_i(p_i, q_i).$$

Portanto, os pares (f_1, g_1) e (f_2, g_2) são deformáveis a livre de coincidência se, e somente se, os multigraus de f e g são da forma

$$\begin{aligned} \text{multdeg}(f) &= (s_1(p_1, q_1), s_2(p_2, q_2)), \\ \text{multdeg}(g) &= (t_1(p_1, q_1), t_2(p_2, q_2)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pelo Teorema 3.6, se as identidades (3.3) são válidas, então o par (f, g) é deformável a livre de coincidência.

Mostraremos que a recíproca não é verdadeira.

Em primeiro lugar, observamos que, como o relator em \mathcal{P} é um produto de comutadores, existem funções de \mathbb{T}_2 em \mathcal{W} com multigrau arbitrário. De fato, dado um vetor $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, consideramos

$$\varphi^1: \mathbb{T}_2^1 = S_{x_1}^1 \vee S_{y_2}^1 \vee S_{x_2}^1 \vee S_{y_2}^1 \rightarrow S^1 \hookrightarrow \mathcal{W}$$

como a função celular baseada que aplica cada uma das quatro circunferências de \mathbb{T}_2^1 em $S^1 \subset \mathcal{W}$ descrevendo, respectivamente, a, b, c e d voltas. Como o laço $\varphi^1([x_1, y_1][x_2, y_2])$ é homotopicamente nulo em \mathcal{W} , a função φ^1 se estende a uma função contínua $\varphi: \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathcal{W}$ cujo multigrau é o vetor (a, b, c, d) .

Considere funções contínuas $f, g: \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathcal{W}$ com multigraus

$$\text{multdeg}(f) = (a, b, b, a) \quad \text{e} \quad \text{multdeg}(g) = (c, d, d, c),$$

sendo os inteiros a, b, c e d escolhidos de tal forma que as identidades de (3.3) não se cumprem; por exemplo, considere $a = d = 1$ e $b = c = 0$. Então, os pares (f_1, g_1) e (f_2, g_2) não são deformáveis a livre de coincidência. Contudo, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. De fato, considere a função $h = (f, g): \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ e a inclusão natural $\iota: \mathbb{T}_2^1 \hookrightarrow \mathbb{T}_2$. Defina o homomorfismo $\phi: F(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ por

$$\phi(x_1) = \phi(y_2) = w_1^a w_2^c \quad \text{e} \quad \phi(y_1) = \phi(x_2) = w_1^b w_2^d.$$

Então $\phi([x_1, y_1][x_2, y_2]) = \mathbf{1}\mathbf{l}$ e $l_{\#} \circ \phi = h_{\#} \circ \iota_{\#}$, pois

$$\begin{aligned} l_{\#} \circ \phi(x_1) &= l_{\#}(w_1^a w_2^c) = l_{\#}(w_1^a) + l_{\#}(w_2^c) = al_{\#}(w_1) + cl_{\#}(w_2) = (a, 0) + (0, c) \\ &= (a, c) = (f_{\#}^1(x_1), g_{\#}^1(x_1)) = (f_{\#}(\iota_{\#}(x_1)), g_{\#}(\iota_{\#}(x_1))) = h_{\#} \circ \iota_{\#}(x_1); \\ l_{\#} \circ \phi(y_1) &= l_{\#}(w_1^b w_2^d) = l_{\#}(w_1^b) + l_{\#}(w_2^d) = bl_{\#}(w_1) + dl_{\#}(w_2) = (b, 0) + (0, d) \\ &= (b, d) = (f_{\#}^1(y_1), g_{\#}^1(y_1)) = (f_{\#}(\iota_{\#}(y_1)), g_{\#}(\iota_{\#}(y_1))) = h_{\#} \circ \iota_{\#}(y_1); \\ l_{\#} \circ \phi(x_2) &= l_{\#}(w_1^b w_2^d) = l_{\#}(w_1^b) + l_{\#}(w_2^d) = bl_{\#}(w_1) + dl_{\#}(w_2) = (b, 0) + (0, d) \\ &= (b, d) = (f_{\#}^1(x_2), g_{\#}^1(x_2)) = (f_{\#}(\iota_{\#}(x_2)), g_{\#}(\iota_{\#}(x_2))) = h_{\#} \circ \iota_{\#}(x_2); \\ l_{\#} \circ \phi(y_2) &= l_{\#}(w_1^a w_2^c) = l_{\#}(w_1^a) + l_{\#}(w_2^c) = al_{\#}(w_1) + cl_{\#}(w_2) = (a, 0) + (0, c) \\ &= (a, c) = (f_{\#}^1(y_2), g_{\#}^1(y_2)) = (f_{\#}(\iota_{\#}(y_2)), g_{\#}(\iota_{\#}(y_2))) = h_{\#} \circ \iota_{\#}(y_2). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.8, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. \square

Observamos que a última parte do Exemplo 3.8 fornece uma série de exemplos de pares de funções do bitoro \mathbb{T}_2 no grafo-balão \mathcal{W} para os quais a recíproca do Teorema 3.6 não é válida.

O Teorema 3.2 pode ser reformulado como segue: *um par de funções contínuas f, g de \mathbb{T}_1 em \mathcal{W} é deformável a livre de coincidência se, e somente se, o grupo $\text{im}(f, g)_{\#}$ é cíclico.* Essa é a afirmação do seguinte teorema para $k = 1$. Mesmo assim, provaremos o teorema em detalhes também para $k = 1$.

Teorema 3.9. *Sejam $f, g: \mathbb{T}_k \rightarrow \mathcal{W}$ funções contínuas. Se o grupo $\text{im}(f, g)_{\#}$ é cíclico, então o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. A recíproca é verdadeira para $k = 1$, mas não o é para cada $k \geq 2$.*

Demonstração. A fim de provar a primeira parte do teorema, suponhamos que $\text{im}(f, g)_{\#}$ seja cíclico, ou seja, que exista um par $(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, para $1 \leq i \leq k$, tais que

$(f, g)_\#(\bar{x}_i) = p_i(s, t)$ e $(f, g)_\#(\bar{y}_i) = q_i(s, t)$. Escolha uma palavra $w \in F(w_1, w_2, w_3)$ tal que $l_\#(w) = (s, t)$, (por exemplo $w = w_1^s w_2^t$). Defina o homomorfismo

$$\phi: F(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$$

por $\phi(x_i) = w^{p_i}$ e $\phi(y_i) = w^{q_i}$. Então $\phi([x_1, y_1] \cdots [x_k, y_k]) = \mathbb{1}$ e $l_\# \circ \phi = (f, g)_\# \circ \iota_\#$, pois

$$\begin{aligned} l_\# \circ \phi(x_i) &= l_\#(w^{p_i}) = p_i l_\#(w) = p_i(s, t) = (f, g)_\#(\bar{x}_i) = (f, g)_\# \circ \iota_\#(x_i); \\ l_\# \circ \phi(y_i) &= l_\#(w^{q_i}) = q_i l_\#(w) = q_i(s, t) = (f, g)_\#(\bar{y}_i) = (f, g)_\# \circ \iota_\#(y_i). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.8, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência.

A fim de provar a recíproca para $k = 1$, suponhamos que $f, g: \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathcal{W}$ constituam um par de funções contínuas deformável a livre de coincidência. Pelo Teorema 3.2, os bigraus de f e g são da forma

$$\text{bideg}(f) = s(p, q) \quad \text{e} \quad \text{bideg}(g) = t(p, q).$$

Segue-se que $(f, g)_\#(\bar{x}_1) = p(s, t)$ e $(f, g)_\#(\bar{y}_1) = q(s, t)$. Portanto, $\text{im}(f, g)_\#$ é um subgrupo do grupo cíclico gerado por (s, t) , o que implica que $\text{im}(f, g)_\#$ é cíclico.

Resta provar que a recíproca da primeira afirmação do teorema não é válida para $k \geq 2$. Mais do que isso, provaremos que: *para cada $k \geq 2$, existe um par de funções contínuas $f, g: \mathbb{T}_k \rightarrow \mathcal{W}$ que é livre de coincidência, para o qual $(f, g)_\#$ é sobrejetor.*

Sejam $f_1, g_1: \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathcal{W}$ funções contínuas com multigraus

$$\text{multdeg}(f_1) = (1, 0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \text{multdeg}(g_1) = (0, 1, 1, 0).$$

Pelo Exemplo 3.8, o par (f_1, g_1) é deformável a livre de coincidência. Além disso, a imagem de $h_{1\#} = (f_1, g_1)_\#$ é gerada pelos pares de inteiros

$$h_{1\#}(\bar{x}_1) = h_{1\#}(\bar{y}_2) = (1, 0) \quad \text{e} \quad h_{1\#}(\bar{y}_1) = h_{1\#}(\bar{x}_2) = (0, 1),$$

o que implica que $h_{1\#}$ é sobrejetor. Isso mostra o resultado para $k = 2$.

Para $k \geq 3$, consideramos a decomposição $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}_2 \# \mathbb{T}_{k-2}$. Seja $D \subset \mathbb{T}_2$ o disco fechado cujo interior é removido no processo de realização da soma conexa $\mathbb{T}_2 \# \mathbb{T}_{k-2}$. Então, a menos de homotopia, supomos que f_1 e g_1 aplicam D na 0-célula y_0 de \mathcal{W} . Consideramos $f_2 = g_2: \mathbb{T}_{k-2} \rightarrow \mathcal{W}$ como a função constante em y_0 . Então, os pares (f_1, g_1) e (f_2, g_2) juntos dão origem a um par de funções contínuas $f, g: \mathbb{T}_k \rightarrow \mathcal{W}$ tal que a imagem do homomorfismo $(f, g)_\#$ coincide com a imagem de $(f_1, g_1)_\#$. Portanto, $(f, g)_\#$ é sobrejetor e, pelo Teorema 3.6, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. \square

3.6 Funções definidas em superfícies não-orientáveis

Em toda esta seção, \mathbb{U}_k é a superfície não-orientável de gênero $k \geq 1$, a qual consideramos como o 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ induzido pela apresentação

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_k \mid x_1^2 \cdots x_k^2 \rangle.$$

Como antes, \mathcal{W} é o grafo-balão, isto é, o buquê $S^1 \vee I$.

Dado um par de funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_k \rightarrow \mathcal{W}$, consideramos a função $h = (f, g): \mathbb{U}_k \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ e o homomorfismo induzido

$$h_{\#} = (f, g)_{\#}: \pi_1(\mathbb{U}_k) \rightarrow \pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Como antes, consideramos a inclusão natural $\iota: \mathbb{U}_k^1 \hookrightarrow \mathbb{U}_k$ do 1-esqueleto e denotamos $\bar{x}_i = \iota_{\#}(x_i)$, para $1 \leq i \leq k$, de modo que $\pi_1(\mathbb{U}_k)$ é gerado por $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ e o homomorfismo $(f, g)_{\#}$ é definido pelos valores $h_{\#}(\bar{x}_1), \dots, h_{\#}(\bar{x}_k)$.

Como vimos na Seção 3.1, cada par de funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_1 \rightarrow \mathcal{W}$ é deformável a livre de coincidência. Além disso, pelo Teorema 3.4, a mesma conclusão é válida para cada par de funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}$ da garrafa de Klein em \mathcal{W} .

O Teorema 3.10 fornece uma caracterização completa dos pares de funções de \mathbb{U}_3 em \mathcal{W} que são deformáveis a livre de coincidência. Para $k \geq 4$, o teorema fornece uma condição suficiente.

Teorema 3.10. *Sejam $f, g: \mathbb{U}_k \rightarrow \mathcal{W}$ funções contínuas, com $k \geq 3$. Se o grupo $\text{im}(f, g)_{\#}$ é cíclico, então o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. A recíproca é verdadeira para $k = 3$, mas não o é para cada $k \geq 4$.*

Demonstração. A fim de simplificar, colocamos $h = (f, g)$ e $h_{\#} = (f, g)_{\#}$.

Suponhamos que $\text{im}(h_{\#})$ seja cíclico, digamos, gerado pelo elemento $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W})$. Então, existe $t_i \in \mathbb{Z}$ tal que $h_{\#}(\bar{x}_i) = t_i(a, b)$ para $1 \leq i \leq k$. Como $h_{\#}(\bar{x}_1^2 \cdots \bar{x}_k^2) = (0, 0)$, temos necessariamente que $t_k = -(t_1 + \cdots + t_{k-1})$. Considere o homomorfismo $\phi: F(x_1, \dots, x_k) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ definido por $\phi(x_i) = (w_1^a w_2^b)^{t_i}$, para $1 \leq i \leq k$. Então $\phi(x_1^2 \cdots x_k^2) = \mathbf{1}$ e $l_{\#} \circ \phi(x_i) = h_{\#}(\bar{x}_i)$ para $1 \leq i \leq k$. Pelo Teorema 2.8, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência.

A fim de provar a recíproca para $k = 3$, suponhamos que o par de funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_3 \rightarrow \mathcal{W}$ seja deformável a livre de coincidência. Pelo Teorema 2.8, existe um homomorfismo $\phi: F(x_1, x_2, x_3) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ tal que $\phi(x_1^2 x_2^2 x_3^2) = \mathbf{1}$ e $l_{\#} \circ \phi(x_i) = h_{\#}(\bar{x}_i)$ para $1 \leq i \leq 3$, de modo que ϕ é uma solução para a equação $x^2 y^2 z^2 = \mathbf{1}$ sobre o grupo livre $F(w_1, w_2, w_3)$. Pelo Teorema 1.5, os elementos $\phi(x_1)$, $\phi(x_2)$ e $\phi(x_3)$ são potências de um mesmo elemento, isto é, existe $w \in F(w_1, w_2, w_3)$ e $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$, tais

que $\phi(x_i) = w^{s_i}$ para $1 \leq i \leq 3$. Portanto, $h_{\#}(\bar{x}_i) = s_i l_{\#}(w)$, para $1 \leq i \leq 3$, e assim $h_{\#}(\bar{x}_1)$, $h_{\#}(\bar{x}_2)$ e $h_{\#}(\bar{x}_3)$ pertencem ao subgrupo cíclico $\pi_1(\mathcal{W} \times \mathcal{W})$ gerado por $l_{\#}(w)$. Portanto, $\text{im}(h_{\#})$ é cíclico.

Resta provar que a recíproca da primeira afirmação do teorema não é válida para $k \geq 4$. Mais que isso, provamos que: *para cada $k \geq 4$, existe um par de funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_k \rightarrow \mathcal{W}$ que é livre de coincidência, tal que $(f, g)_{\#}$ é sobrejetor.*

Começando com $k = 4$, consideramos as funções contínuas $f^1, g^1: \mathbb{U}_4^1 = \bigvee_{i=1}^4 S_{x_i}^1 \rightarrow \mathcal{W}$ cujos homomorfismos correspondentes

$$f_{\#}^1, g_{\#}^1: F(x_1, x_2, x_3, x_4) \approx \pi_1(\mathbb{U}_4^1) \rightarrow \pi_1(W) \approx \mathbb{Z}$$

são dados por $f_{\#}^1(x_1) = 1$, $f_{\#}^1(x_2) = -1$, $f_{\#}^1(x_3) = f_{\#}^1(x_4) = 0$ e $g_{\#}^1(x_1) = g_{\#}^1(x_2) = 0$, $g_{\#}^1(x_3) = 1$, $g_{\#}^1(x_4) = -1$. Temos que

$$f_{\#}^1(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2) = 0 \quad \text{e} \quad g_{\#}^1(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2) = 0.$$

Logo, existem funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_4 \rightarrow \mathcal{W}$ tais que $f^1 = f|_{\mathbb{U}_4^1}$ e $g^1 = g|_{\mathbb{U}_4^1}$. Assim, $f_{\#}(\bar{x}_i) = f_{\#}^1(x_i)$ e $g_{\#}(\bar{x}_i) = g_{\#}^1(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq 4$.

Considere a função $h = (f, g): \mathbb{U}_4 \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$. Então, $\text{im}(h_{\#})$ é gerado por

$$h_{\#}(\bar{x}_1) = (1, 0), \quad h_{\#}(\bar{x}_2) = (-1, 0), \quad h_{\#}(\bar{x}_3) = (0, 1), \quad h_{\#}(\bar{x}_4) = (0, -1),$$

o que implica que $h_{\#}$ é sobrejetor. Por outro lado, o homomorfismo $\phi: F(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ definido por

$$\phi(x_1) = w_1, \quad \phi(x_2) = w_1^{-1}, \quad \phi(x_3) = w_2, \quad \phi(x_4) = w_2^{-1}$$

é uma solução para a equação $x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = \mathbb{1}$ satisfazendo $l_{\#} \circ \phi(x_i) = h_{\#}(\bar{x}_i)$ para todo $1 \leq i \leq 4$. Pelo Teorema 3.6, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. Isto conclui o requerido para a prova, para $k = 4$.

Finalmente, consideramos $k \geq 5$ e a decomposição $\mathbb{U}_k = \mathbb{U}_4 \# \mathbb{U}_{k-4}$. Pelo passo prévio da prova, existe uma par de funções contínuas $f_1, g_1: \mathbb{U}_4 \rightarrow \mathcal{W}$ que é livre de coincidência e tal que $(f_1, g_1)_{\#}$ é sobrejetor. Seja $D \subset \mathbb{U}_4$ o disco fechado cujo interior é removido no processo de realização da soma conexa $\mathbb{U}_4 \# \mathbb{U}_{k-4}$. Então, a menos de homotopia, podemos supor que as funções f_1 e g_1 aplicam o disco D na 0-célula y_0 de \mathcal{W} . Considere $f_2 = g_2: \mathbb{U}_{k-4} \rightarrow \mathcal{W}$ como sendo a função constante em y_0 . Então, os pares (f_1, g_1) e (f_2, g_2) dão origem a um par de funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_k \rightarrow \mathcal{W}$, com a propriedade que $\text{im}(f, g)_{\#} = \text{im}(f_1, g_1)_{\#}$. Portanto, $(f, g)_{\#}$ é sobrejetor e, pelo Teorema 3.6, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. \square

Observamos que a última parte da prova do Teorema 3.10 pode ser feita usando o Teorema 3.9. Para isso, basta lembrar uma etapa essencial da prova do Teorema da Classificação das Superfícies, já mencionada no início desta seção. Referimo-nos ao fato de que na soma conexa $\mathbb{U}_1 \# \mathbb{U}_1 \# \mathbb{U}_1$ de três planos projetivos, dois deles podem ser substituídos por um toro \mathbb{T}_1 , isto é, $\mathbb{U}_3 = \mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_1$; ver o Lema 1.15. Indutivamente, para cada $k \geq 1$,

$$\mathbb{U}_{2k+1} = \mathbb{T}_k \# \mathbb{U}_1 \quad \text{e} \quad \mathbb{U}_{2k+2} = \mathbb{T}_k \# \mathbb{U}_2.$$

Portanto, para $k \geq 5$, podemos considerar $\mathbb{U}_k = \mathbb{T}_2 \# \mathbb{U}_{k-4}$. Agora, pelo Teorema 3.9, existe um par de funções contínuas $f_1, g_1: \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathcal{W}$ que é livre de coincidência e tal que $(f_1, g_1)_\#$ é sobrejetor. Então, como na última parte da prova do Teorema 3.10, podemos estender f_1 e f_2 para funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_k \rightarrow \mathcal{W}$ tal que o par (f, g) é deformável a livre de coincidência e $(f, g)_\#$ é sobrejetor.

Em certo sentido, esta abordagem também permite substituir funções definidas em superfícies fechadas não-orientáveis por funções definidas em superfícies fechadas orientáveis. Explicamos: como temos visto, para cada $k \geq 3$, podemos considerar uma decomposição de \mathbb{U}_k da forma $\mathbb{U}_k = \mathbb{T}_p \# \mathbb{U}_q$, com $q = 1$ ou 2 . Para tal decomposição, o Lema 3.7 implica que cada função contínua $f: \mathbb{U}_k \rightarrow \mathcal{W}$ é Σ -homotopicamente-nula, de modo que o Teorema 3.6 se aplica. Portanto, como todos os pares de funções de \mathbb{U}_1 ou \mathbb{U}_2 em \mathcal{W} são deformáveis a livre de coincidência, a condição suficiente para que um par de funções contínuas de \mathbb{T}_k em \mathcal{W} seja deformável a livre de coincidência é também uma condição suficiente para que qualquer par de funções contínuas $f, g: \mathbb{U}_{2k+1} \rightarrow \mathcal{W}$ ou $f, g: \mathbb{U}_{2k+2} \rightarrow \mathcal{W}$ seja deformável a livre de coincidência.

Assim como no Exemplo 3.8, o próximo exemplo mostra que a recíproca do Teorema 3.6 não é válida, desta vez para funções definidas numa superfície não-orientável.

Exemplo 3.11. Considere a superfície fechada não-orientável \mathbb{U}_6 decomposta como a soma conexa $\mathbb{U}_6 = \mathbb{U}_3 \# \mathbb{U}_3$. Consideramos a primeira e a segunda cópia de \mathbb{U}_3 como os 2-complexos modelo $X_1 = K_{\mathcal{P}_1}$ e $X_2 = K_{\mathcal{P}_2}$ induzidos pelas apresentações

$$\mathcal{P}_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 x_2^2 x_3^2 \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \langle x_4, x_5, x_6 \mid x_4^2 x_5^2 x_6^2 \rangle.$$

Por sua vez, $X = \mathbb{U}_6$ é o 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ induzido pela apresentação

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_6 \mid x_1^2 \cdots x_6^2 \rangle.$$

A fim de simplificar, escrevemos $r_1 = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ e $r_2 = x_4^2 x_5^2 x_6^2$. Assim, a palavra relatora em \mathcal{P} é simplesmente $r = r_1 r_2$.

O 1-esqueleto $X^1 = X_1^1 \vee X_2^1$ tem grupo fundamental $\pi_1(X^1) \approx F(x_1, \dots, x_6)$. Considere funções contínuas $f^1, g^1: X^1 \rightarrow \mathcal{W}$ cujos homomorfismos induzidos em grupos

fundamentais são dados por

$$\begin{aligned} f_{\#}^1(x_1) &= 1, \quad f_{\#}^1(x_2) = 0, \quad f_{\#}^1(x_3) = -1, \\ f_{\#}^1(x_4) &= 1, \quad f_{\#}^1(x_5) = 0, \quad f_{\#}^1(x_6) = -1, \\ g_{\#}^1(x_1) &= 0, \quad g_{\#}^1(x_2) = 1, \quad g_{\#}^1(x_3) = -1, \\ g_{\#}^1(x_4) &= 1, \quad g_{\#}^1(x_5) = -1, \quad g_{\#}^1(x_6) = 0. \end{aligned}$$

Como $f_{\#}^1(r) = 0$ e $g_{\#}^1(r) = 0$, existem funções contínuas $f, g: X \rightarrow \mathcal{W}$ tais que $f^1 = f|_{X^1}$ e $g^1 = g|_{X_1}$.

A circunferência $\Sigma \subset X$ é homotópica aos laços r_1 e r_2 . Uma vez que $f_{\#}^1(r_1) = f_{\#}^1(r_2) = 0$ e $g_{\#}^1(r_1) = g_{\#}^1(r_2) = 0$, segue-se que f e g são Σ -homotopicamente-nulas e, então, temos definidos os pares de funções $f_1, g_1: X_1 \rightarrow \mathcal{W}$ e $f_2, g_2: X_2 \rightarrow \mathcal{W}$.

Considere as funções $h = (f, g)$, $h_1 = (f_1, g_1)$ e $h_2 = (f_2, g_2)$.

Então $h_{1\#}(\bar{x}_1) = (1, 0)$, $h_{1\#}(\bar{x}_2) = (0, 1)$ e $h_{1\#}(\bar{x}_3) = (-1, -1)$, o que mostra que $\text{im}(h_{\#})$ não é cíclico. Analogamente, $h_{2\#}(\bar{x}_4) = (1, 1)$, $h_{2\#}(\bar{x}_5) = (0, -1)$ e $h_{2\#}(\bar{x}_6) = (-1, 0)$, e também $\text{im}(h_{2\#})$ não é cíclico. Pelo Teorema 3.10, os pares (f_1, g_1) e (f_2, g_2) não são deformáveis a livre de coincidência.

Contudo, o homomorfismo $\phi: F(x_1, \dots, x_6) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ dado por

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= w_1, \quad \phi(x_2) = w_2, \quad \phi(x_3) = w_3^{-1}, \\ \phi(x_4) &= w_3, \quad \phi(x_5) = w_2^{-1}, \quad \phi(x_6) = w_1^{-1}, \end{aligned}$$

satisfaz as identidades $\phi(r_1 r_2) = \mathbb{1}$ e $l_{\#} \circ \phi(x_i) = h_{\#}(\bar{x}_i)$ para todo $1 \leq i \leq 6$. Pelo Teorema 2.8, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. \triangleleft

Concluímos o capítulo com um exemplo em que o Teorema 3.6 não se aplica para qualquer decomposição de \mathbb{U}_4 que envolva apenas superfícies não-orientáveis, mas se aplica quando consideramos \mathbb{U}_4 decomposta como a soma conexa $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_2$.

Exemplo 3.12. Sejam $f, g: \mathbb{U}_4 \rightarrow \mathcal{W}$ funções contínuas cujos homomorfismos induzidos $f_{\#}, g_{\#}: \pi_1(\mathbb{U}_4) \rightarrow \pi_1(\mathcal{W}) \approx \mathbb{Z}$ são dados por

$$\begin{aligned} f_{\#}(\bar{x}_1) &= 0, \quad f_{\#}(\bar{x}_2) = 1, \quad f_{\#}(\bar{x}_3) = -1, \quad f_{\#}(\bar{x}_4) = 0 \\ g_{\#}(\bar{x}_1) &= 1, \quad g_{\#}(\bar{x}_2) = 0, \quad g_{\#}(\bar{x}_3) = -2, \quad g_{\#}(\bar{x}_4) = 1. \end{aligned}$$

Tais funções existem, uma vez que os homomorfismos definidos desta forma satisfazem

$$f_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2) = 0 \quad \text{e} \quad g_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2) = 0.$$

A seguir, mostramos que não há decomposição de \mathbb{U}_4 como $\mathbb{U}_p \# \mathbb{U}_q$ com relação a qual f e g sejam ambas Σ -homotopicamente-nulas. De fato, \mathbb{U}_4 é o 2-complexo modelo induzido

da apresentação $\mathcal{P} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 \rangle$ e temos as seguintes possibilidades de decomposição de \mathbb{U}_4 como soma conexa de duas superfícies não-orientáveis:

- \mathbb{U}_4 decomposta como $\mathbb{U}_2 \# \mathbb{U}_2$, com a primeira e a segunda cópias de \mathbb{U}_2 vistas como os 2-complexos modelos induzidos, respectivamente, pelas apresentações:
 - $\langle x_1, x_2 \mid x_1^2 x_2^2 \rangle$ e $\langle x_3, x_4 \mid x_3^2 x_4^2 \rangle$. Então, na primeira cópia de \mathbb{U}_2 tem-se $\Sigma \simeq x_1^2 x_2^2$. Como $f_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2) = 2 = g_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2)$, resulta que ambas f e g não são Σ -homotopicamente-nulas.
 - $\langle x_1, x_3 \mid x_1^2 x_3^2 \rangle$ e $\langle x_2, x_4 \mid x_2^2 x_4^2 \rangle$. Então, na primeira cópia de \mathbb{U}_2 tem-se $\Sigma \simeq x_1^2 x_3^2$. Como $f_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_3^2) = -2 = g_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_3^2)$, resulta que ambas f e g não são Σ -homotopicamente-nulas.
 - $\langle x_1, x_4 \mid x_1^2 x_4^2 \rangle$ e $\langle x_2, x_3 \mid x_2^2 x_3^2 \rangle$. Então, na primeira cópia de \mathbb{U}_2 tem-se $\Sigma \simeq x_1^2 x_4^2$. Como $g_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_4^2) = 4$, resulta que g não é Σ -homotopicamente-nula. Observe que, neste caso, f é Σ -homotopicamente nula, pois $f_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_4^2) = 0 = f_{\#}(\bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2)$.
- \mathbb{U}_4 decomposta como $\mathbb{U}_3 \# \mathbb{U}_1$, com \mathbb{U}_3 e \mathbb{U}_1 vistas como os 2-complexos modelos induzidos, respectivamente, pelas apresentações:
 - $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 x_2^2 x_3^2 \rangle$ e $\langle x_4 \mid x_4^2 \rangle$. Então, em \mathbb{U}_1 tem-se $\Sigma \simeq x_4^2$. Como $g_{\#}(\bar{x}_4^2) = 2$, resulta que g não é Σ -homotopicamente-nula. Observe que, neste caso, f é Σ -homotopicamente-nula, pois $f_{\#}(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2) = 0 = f_{\#}(\bar{x}_4^2)$.
 - $\langle x_1, x_2, x_4 \mid x_1^2 x_2^2 x_4^2 \rangle$ e $\langle x_3 \mid x_3^2 \rangle$. Então, em \mathbb{U}_1 tem-se $\Sigma \simeq x_3^2$. Como $f_{\#}(\bar{x}_3^2) = -2$ e $g_{\#}(\bar{x}_3^2) = -4$, resulta que ambas f e g não são Σ -homotopicamente-nulas.
 - $\langle x_1, x_3, x_4 \mid x_1^2 x_3^2 x_4^2 \rangle$ e $\langle x_2 \mid x_2^2 \rangle$. Então, em \mathbb{U}_1 tem-se $\Sigma \simeq x_2^2$. Como $f_{\#}(\bar{x}_2^2) = 2$, resulta que f não é Σ -homotopicamente-nula. Observe que, neste caso, g é Σ -homotopicamente nula, pois $g_{\#}(\bar{x}_1^3 \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2) = 0 = g_{\#}(\bar{x}_2^2)$.
 - $\langle x_2, x_3, x_4 \mid x_2^2 x_3^2 x_4^2 \rangle$ e $\langle x_1 \mid x_1^2 \rangle$. Então, em \mathbb{U}_1 tem-se $\Sigma \simeq x_1^2$. Como $g_{\#}(\bar{x}_1^2) = 2$, resulta que g não é Σ -homotopicamente-nula. Observe que, neste caso, f é Σ -homotopicamente-nula, pois $f_{\#}(\bar{x}_1^2) = 0 = f_{\#}(\bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2)$.

Portanto, o Teorema 3.6 não se aplica para o par (f, g) , para uma decomposição do tipo $\mathbb{U}_4 = \mathbb{U}_p \# \mathbb{U}_q$.

Contudo, também é possível decompor \mathbb{U}_4 como a soma conexa $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_2$, com \mathbb{T}_1 e \mathbb{U}_2 vistas como os 2-complexos modelos induzidos, respectivamente, pelas apresentações $\langle y_1, y_2 \mid [y_1, y_2] \rangle$ e $\langle y_3, y_4 \mid y_3^2 y_4^2 \rangle$, de tal modo que \mathbb{U}_4 passa a ser considerada como o 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{Q} = \langle y_1, y_2, y_3, y_4 \mid [y_1, y_2] y_3^2 y_4^2 \rangle$.

O homeomorfismo $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_1 \cong \mathbb{U}_1 \# \mathbb{U}_1 \# \mathbb{U}_1$ a que se refere o Lema 1.15 é tal que, com relação às respectivas apresentações naturais do grupo fundamental de \mathbb{U}_3 , corresponde

à transformação de apresentações $\tau_1: \langle y_1, y_2, y_3 \mid [y_1, y_2]y_3^2 \rangle \rightarrow \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2x_2^2x_3^2 \rangle$ dada por $\tau_1(y_1) = x_3x_1^2x_2$, $\tau_1(y_2) = x_1^{-1}x_3^{-1}$ e $\tau_1(y_3) = x_1x_2x_3$. Note que $\tau_1([y_1, y_2]y_3^2) = x_3(x_1^2x_2^2x_3^2)x_3^{-1} \in N(x_1^2x_2^2x_3^2)$, ou seja, $\tau_1([y_1, y_2]y_3^2)$ é uma *consequência* da relação $x_1^2x_2^2x_3^2$. Ver [4, Capítulo 2] para detalhes sobre transformações de apresentações.

A transformação τ_1 se estende para a transformação de apresentações $\tau: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ dada por $\tau(y_1) = x_3x_1^2x_2$, $\tau(y_2) = x_1^{-1}x_3^{-1}$, $\tau(y_3) = x_1x_2x_3$ e $\tau(y_4) = x_4$.

Pelo Lema 3.7, as funções f e g são ambas Σ -homotopicamente-nulas com relação a decomposição $\mathbb{U}_4 = \mathbb{T}_1 \# \mathbb{U}_2$ e, assim, estão definidos os pares de funções $f_1, g_1 : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathcal{W}$ e $f_2, g_2 : \mathbb{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}$, conforme as hipóteses do Teorema 3.6.

Pelo Teorema 3.4, o par (f_2, g_2) é deformável a livre de coincidência.

Conforme terminologia da Seção 3.2, os bigraus das funções f_1 e g_1 são dados por:

$$\begin{aligned}\text{bideg}(f_1) &= (f_{1\#}(\bar{y}_1), f_{1\#}(\bar{y}_2)) = (\overline{f_\#(\tau(y_1))}, \overline{f_\#(\tau(y_2))}) = (0, 1); \\ \text{bideg}(g_1) &= (g_{1\#}(\bar{y}_1), g_{1\#}(\bar{y}_2)) = (\overline{g_\#(\tau(y_1))}, \overline{g_\#(\tau(y_2))}) = (0, 1).\end{aligned}$$

Segue do Lema 2.5 que f_1 e g_1 são homotópicas e, então, pelo Teorema 3.2, o par (f_1, g_1) é deformável a livre de coincidência.

Portanto, pelo Teorema 3.6, o par (f, g) é deformável a livre de coincidência.

Também é possível chegar a esta conclusão simplesmente observando-se que o homomorfismo $\phi: F(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow F(w_1, w_2, w_3)$ definido por

$$\phi(x_1) = w_1w_2w_1^{-1}, \quad \phi(x_2) = w_1, \quad \phi(x_3) = w_1^{-1}w_2^{-2}, \quad \phi(x_4) = w_2$$

é uma $((f, g)_\#, l_\#)$ -solução para a equação $x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = \mathbb{1}$, do que segue, pelo Teorema 2.9, que o par (f, g) é deformável a livre de coincidência. \triangleleft

Referências Bibliográficas

- [1] BROWN, R. F. **The Lefschetz Fixed Point Theorem**. Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971. vi+186 p.
- [2] BROOKS, R. On removing coincidences of two maps when only one, rather than both, of them may be deformed by a homotopy. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 40, p. 45–52, 1972. <https://projecteuclid.ez34.periodicos.capes.gov.br/euclid.pjm/1102968819>.
- [3] BROOKS, R. Nielsen root theory. In: BROWN, R. F.; FURI, M; GÓRNIEWICZ, L.; JIANG, B. (eds.). **Handbook of Topological Fixed Point Theory**. Dordrecht: Springer, 2005. p. 375–432. doi-org.ez34.periodicos.capes.gov.br/10.1007/1-4020-3222-6-1.
- [4] CROWELL, R. H.; FOX, R. H. **Introduction to Knot Theory**. Mineola, New Yourk: Dover Publication, Inc., 1963. x+182 p.
- [5] FENILLE, M. C. Coincidence of maps from connected sums of closed surfaces into graphs. **Journal of Fixed Point Theory and Applications** (to appear).
- [6] FENILLE, M. C. Coincidence of maps from two-complexes into graphs. **Topological Methods Nonlinear Analisys**, v. 42, n. 1, p. 193–206, 2013. <https://projecteuclid.org/euclid.tmna/1461247300>.
- [7] FENILLE, M. C.; NETO, O. M. Root problem for convenient maps. **Topological Methods in Nonlinear Analisys** v. 36, n. 2, p. 327–352, 2010. <https://projecteuclid.org/euclid.tmna/1461251093>.
- [8] FENILLE, M. C. **Raízes de aplicações de complexos 2-dimensionais em superfícies fechadas**. 2010. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010. [doi: 10.11606/T.55.2010.tde-08042010-102954](https://doi.org/10.11606/T.55.2010.tde-08042010-102954).

- [9] GONÇALVES, D. L. Coincidence Theory. In: BROWN, R. F.; FURI, M.; GÓRNIEWICZ, L.; JIANG, B. (eds.). **Handbook of Topological Fixed Point Theory**. Dordrecht: Springer, 2005. p. 3–42. doi: [10.1007/1-4020-3222-6-1](https://doi.org/10.1007/1-4020-3222-6-1),
- [10] HOG-ANGELONI, C.; METZLER, W. Geometric aspects of two-dimensional complexes. In: HOG-ANGELONI, C.; METZLER, W.; SIERADSKI, A. J. (eds.). **Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory**. Cambridge University Press, 1993, p. 1–50. doi: [10.1017/CBO9780511629358.003](https://doi.org/10.1017/CBO9780511629358.003).
- [11] JIANG, B. A primer of Nielsen fixed point theory. In: BROWN, R. F.; FURI, M.; GÓRNIEWICZ, L.; JIANG, B. (eds.). **Handbook of Topological Fixed Point Theory**. Dordrecht: Springer, 2005. p. 617–646. doi: [10.1007/1-4020-3222-6-16](https://doi.org/10.1007/1-4020-3222-6-16).
- [12] JIANG, B. Fixed points and braids. *Inventiones Mathematicae*, v. 75, p. 69–74, 1984. doi: [10.1007/BF01450569](https://doi.org/10.1007/BF01450569).
- [13] LYNDON, R. C.; SCHÜTZENBERGER, M. P. The equation $a^m = b^n c^p$ in a free group. *Michigan Mathematical Journal*, v. 9, p. 289–298, 1962. doi: [10.1307/mmj/1028998766](https://doi.org/10.1307/mmj/1028998766).
- [14] MASSEY, W. S. **Algebraic topology: an introduction**. New York: Springer, 1967. xxi+261p. (Graduate texts in mathematics, 56). ISBN 0387902716.
- [15] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000. xvi+537 p. ISBN 0131816292.
- [16] SIERADSKI, A. J. Algebraic topology for two-dimensional complexes. In: HOG-ANGELONI, C.; METZLER, W.; SIERADSKI, A. J. (eds.). **Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory**. Cambridge University Press, 1993, p. 51–96. doi: [10.1017/CBO9780511629358.004](https://doi.org/10.1017/CBO9780511629358.004).
- [17] SILVA, L. L. **Grupos livres e apresentação de grupos**. 2012. Trabalho Final de Graduação (Licenciatura em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.
- [18] STAECCKER, P. C. Maps on graphs can be deformed to be coincidence free. **Topological Methods in Nonlinear Analysis** v. 37, n. 2, p. 377–381, 2011. <https://apcz.umk.pl/czasopisma/index.php/TMNA/article/view/TMNA.2011.019>.
- [19] STAECCKER, P. C. A formula for the coincidence Reidemeister trace of selfmaps on bouquet of circles. **Topological Methods in Nonlinear Analysis** v. 33, n. 1, p. 41-50, 2009. <https://apcz.umk.pl/czasopisma/index.php/TMNA/article/view/TMNA.2009.004>.

- [20] VICK, J. W. **Homology Theory**: An introduction to algebraic topology. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994. xiv+242 p. (Graduate Texts in Mathematics, 145). ISBN: 0-387-94126-6.
- [21] WHITEHEAD, G. W. **Elements of Homotopy Theory**. New York: Springer-Verlag, 1978. xxi+744 p. (Graduate Texts in Mathematics, 61). ISBN: 0-387-90336-4.

Índice Remissivo

- (μ, ν)-solução, 34
- Abelianização, 37
- Alfabeto, 3
- Apresentação
 - de grupo, 6
 - do grupo abeliano livre de posto n , 6
 - do grupo cíclico de ordem n , 6
 - do grupo fundamental, 10
 - do grupo livre $F(\mathbf{x})$, 6
- Aproximação Celular, 10
- Arestas, 13
- Base livre, 5
- Bigrau, 44
- Característica de Euler, 11
- Coincidência, 20
- Complexo
 - celular, 8
 - CW, 8
 - de Reidemeister, 11
 - modelo, 12
- Conjunto
 - de pontos fixos, 28
 - de todas as raízes, 28
 - gerador, 5
- Célula, 8
- Esfera, 16
- Esqueleto, 8
- Função(ões)
 - Σ -homotopicamente nula, 48
 - alg. pseudo-homotópicas, 44
 - característica, 8
 - celular, 9
 - de colagem, 8
- Garrafa de Klein, 17
- Geradores, 6
- Grafo, 13
- Grafo-balão, 38
- Grupo livre, 5
 - no alfabeto \mathcal{A} , 4
- Gênero de uma superfície, 19
- Letras, 3
- Multigrau, 51
- Número
 - de Betti, 37
 - mínimo de coincidências, 21
 - mínimo de pontos fixos, 28
 - mínimo de raízes, 28
- Palavra, 3
 - reduzida, 4
 - vazia, 3
- Par CW, 9
- Par de funções
 - deformável a livre de coincidência, 21
 - livre de coincidência, 21

Plano projetivo, 16
Ponto fixo, 28
Posto de um grupo livre, 5

Raiz relativa a y_0 , 28
Relatores, 6
Relações, 6

Soma conexa, 17
 de k planos projetivos, 18
 de k toros, 18
 de um toro e um plano projetivo, 18

Subcomplexo, 9
Subdivisão, 9
Subgrupo gerado por B , 5
Superfícies fechadas
 não-orientáveis, 19
 orientáveis, 19
Sílaba, 3

Teorema
 da Aproximação Celular, 10
 da Classif. das Superfícies Fechadas, 19
 de Nielsen, 5
 de Radó, 15

Toro, 16
Triangulação, 15
Triângulos, 15

Vértice, 13
 final, 13
 Intermediário, 13

Árvore geradora, 10