



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

ESTUDO COMPARATIVO DE PACOTES
COMPUTACIONAIS EMPREGADOS NA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
CONTROLE ÓTIMO

ARTHUR HENRIQUE IASBECK

UBERLÂNDIA, MG

2021

ARTHUR HENRIQUE IASBECK

ESTUDO COMPARATIVO DE PACOTES COMPUTACIONAIS
EMPREGADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
CONTROLE ÓTIMO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Linha de Pesquisa: Projetos de Sistemas Mecânicos.

Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Fran Sérgio Lobato

Uberlândia, MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

111
2021

lasbeck, Arthur Henrique, 1996-
Estudo comparativo de pacotes computacionais
empregados na resolução de problemas de Controle Ótimo
[recurso eletrônico] / Arthur Henrique lasbeck. - 2021.

Orientador: Fran Sérgio Lobato.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.98>
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Lobato, Fran Sérgio ,1976-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 581, COPEM				
Data:	08/02/2021	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:00
Matrícula do Discente:	11912EMC002				
Nome do Discente:	Arthur Henrique lasbeck				
Título do Trabalho:	Estudo Comparativo de Pacotes Computacionais Empregados na Resolução de Problemas de Controle Ótimo				
	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Projetos de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	-				

Reuniu-se por meio de webconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU; Gustavo Mendes Platt - FURG; e Fran Sérgio Lobato - FEQUI/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Fran Sérgio Lobato; Prof. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior e o Discente participaram da defesa por meio de webconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Gustavo Mendes Platt desde a cidade de Porto Alegre/RS, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Fran Sérgio Lobato, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 08/02/2021, às 10:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 08/02/2021, às 10:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Mendes Platt, Usuário Externo**, em 08/02/2021, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2539999** e o código CRC **61B2B847**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a oportunidade de vir a esse mundo mais uma vez para aprender. Agradeço à minha mãe, Renata, por sempre ter me guiado e me amparado, em todos os sentidos, para que eu chegasse onde cheguei. Agradeço à Ana Paula, minha noiva e meu grande amor, por ter me amparado, me compreendido, e me incentivado mesmo nos momentos mais difíceis. Agradeço ao meu orientador, professor Fran Sérgio, e ao meu coorientador, professor Pedro, por terem guiado o desenvolvimento da minha pesquisa, à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia por ter me acolhido, e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por ter financiado o desenvolvimento desse trabalho.

“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos, um oceano”.

Isaac Newton

RESUMO

O Problema de Controle Ótimo (PCO) consiste na determinação do vetor de variáveis de controle para a minimização de uma função objetivo sujeito à restrições algébrico-diferenciais. De forma geral, este problema pode ser resolvido considerando dois tipos de abordagens, a saber, a Direta e a Indireta. A primeira consiste na transformação do problema original em um equivalente de programação não linear. Já a abordagem Indireta consiste na aplicação das condições de otimalidade, transformando o problema original em um equivalente de valor no contorno algébrico-diferencial. Devido à dificuldade inerente em se resolver o problema de valor no contorno, a comunidade científica tem utilizado, preferencialmente, os Métodos Diretos para a resolução de PCOs. Neste contexto, na literatura especializada podem ser encontrados vários pacotes numéricos que se fundamentam na abordagem Direta para a resolução de PCOs. Apesar da ampla variedade de pacotes disponíveis, poucos são aqueles que podem ser facilmente utilizados por usuários pouco experientes na resolução computacional de PCOs, e igualmente poucos são os trabalhos que avaliam a eficiência e as características destes pacotes de forma comparativa. Neste contexto, este trabalho tem por objetivo desenvolver o pacote *COPILOTS* (*Basic Optimal Control Solver*), que implementa os Métodos de Colocação Trapezoidal e de Hermite-Simpson como abordagens de discretização para a resolução de PCOs. Um estudo comparativo envolvendo este pacote, o FALCON e o PSOPT foi desenvolvido e os resultados obtidos demonstram que o *COPILOTS* foi capaz de obter bons resultados em comparação com os demais pacotes avaliados. Finalmente, é importante ressaltar que o *COPILOTS* é um pacote desenvolvido para usuários com pouca experiência em controle ótimo, de fácil implementação e uso.

Palavras-chave: Controle Ótimo, COPILOTS, PSOPT, FALCON, Otimização.

ABSTRACT

The Optimal Control Problem (OCP) consists of the control vector determination for the objective function minimization, subject to algebraic-differential constraints. In general, this problem can be solved considering two types of approaches, Direct and Indirect. The first consists in transforming the original problem into a non-linear programming equivalent. The Indirect approach consists of the application of optimality conditions, transforming the original problem into an equivalent in the algebraic-differential contour. Due to the inherent difficulty in solving the problem of the contour, the scientific community has used, preferably, the Direct Methods for the resolution of OCPs. In this context, several numerical packages that are based on the Direct approach to the resolution of PCOs can be found in specialized literature. Despite the wide variety of packages available, few are those that can be easily used by inexperienced users in the computational resolution of PCOs, and also few are the works that evaluate the efficiency and characteristics of these packages comparatively. In this context, this work aims to develop the COPILOTS (Basic **O**ptimal **C**ontrol **S**olver) package, which implements the trapezoidal and Hermite-Simpson collocations as discretization approaches for solving OCPs. A comparative study involving this package, FALCON and PSOPT was developed and the results obtained demonstrate that COPILOTS was able to obtain good results in comparison with the other evaluated packages. Finally, it is important to note that COPILOTS is a package designed for users with little experience in optimal control, easy to implement and use.

Keywords: Optimal Control, PSOPT, FALCON, COPILOTS, Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de controle em malha fechada	25
Figura 2 – Trajetória ótima a ser percorrida por uma aeronave para que um determinado ponto de chegada seja atingido	26
Figura 3 – Giroscópios da ISS	27
Figura 4 – Mapa que mostra o número de indivíduos infectados pela COVID-19 em várias regiões do mundo	28
Figura 5 – Representação do problema da braquistócrona	31
Figura 6 – Representação do processo de discretização em Métodos Diretos	37
Figura 7 – Representação da trajetória considerando que os controles são lineares	40
Figura 8 – Representação da trajetória do controle com quatro nós de colocação	41
Figura 9 – Representação da trajetória do estado considerando uma aproximação de terceiro grau	42
Figura 10 – Representação da trajetória do estado considerando quatro nós de colocação	44
Figura 11 – Representação da trajetória do controle considerando aproximações quadráticas	47
Figura 12 – Representação da trajetória do controle considerando quatro nós de colocação	48
Figura 13 – Representação dos nós LGL	50
Figura 14 – Etapas do processo de implementação de um PCO no <i>COPILOTS</i>	58
Figura 15 – Relação entre N e os J^* atribuídos a dois pacotes quaisquer A e B	66
Figura 16 – Representação do processo de normalização de J^* e da definição de ϵ_m	66
Figura 17 – Representação esquemática do problema do bloco	70
Figura 18 – Influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo para o problema da desaceleração de um bloco	71
Figura 19 – Variável de estado $d(t)$ para o problema da desaceleração de um bloco	74
Figura 20 – Variável de estado $v(t)$ para o problema da desaceleração de um bloco	75
Figura 21 – Variável de controle $F(t)$ para o problema da desaceleração de um bloco	76
Figura 22 – Relação entre o tempo de processamento e o número de nós de colocação para o problema da desaceleração de um bloco	77
Figura 23 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo e o número de nós de colocação para o problema da desaceleração de um bloco	78
Figura 24 – Solução do problema singular 1 reportada na literatura	79
Figura 25 – Solução do problema singular 2 reportada na literatura	79
Figura 26 – Influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo para o problema singular 1	81
Figura 27 – Variável de estado $x_1(t)$ para o problema singular 1	83
Figura 28 – Variável de estado $x_2(t)$ para o problema singular 1	84
Figura 29 – Variável de estado $x_3(t)$ para o problema singular 1	85

Figura 30 – Variável de estado $u(t)$ para o problema singular 1	86
Figura 31 – Relação entre o tempo de processamento e o número de nós de colocação para o problema singular 1	87
Figura 32 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo e o número de nós de colocação para o problema singular 1	88
Figura 33 – Influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo para o problema singular 2	89
Figura 34 – Variável de estado $x_1(t)$ para o problema singular 2	92
Figura 35 – Variável de estado $x_2(t)$ para o problema singular 2	93
Figura 36 – Variável de estado $x_3(t)$ para o problema singular 2	94
Figura 37 – Variável de controle $u(t)$ para o problema singular 2	95
Figura 38 – Relação entre o tempo de processamento e o número de nós de colocação para o problema singular 2	96
Figura 39 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo e o número de nós de colocação para o problema singular 2	97
Figura 40 – Representação esquemática de um pêndulo invertido	98
Figura 41 – Posições inicial e final definidas pra o problema do pêndulo invertido	99
Figura 42 – Influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo para o problema do pêndulo invertido	101
Figura 43 – Variável de estado $d(t)$ para o problema do pêndulo	103
Figura 44 – Variável de estado $\theta(t)$ para o problema do pêndulo	104
Figura 45 – Variável de estado $v(t)$ para o problema do pêndulo	105
Figura 46 – Variável de estado $\omega(t)$ para o problema do pêndulo	106
Figura 47 – Variável de controle $F(t)$ para o problema do pêndulo	107
Figura 48 – Algumas posições do pêndulo invertido durante a execução da manobra de <i>swing-up</i>	108
Figura 49 – Relação entre o tempo de processamento e o número de nós de colocação para o problema do pêndulo invertido	109
Figura 50 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo e o número de nós de colocação para o problema do pêndulo invertido	110
Figura 51 – Aproximações lineares para a avaliação de integrais via quadratura trapezoidal ($N = 7$) no <i>FALCON</i>	111
Figura 52 – Aproximações lineares para a avaliação de integrais via quadratura trapezoidal ($N = 9$) no <i>FALCON</i>	111
Figura 53 – Aproximações lineares para a avaliação de integrais via quadratura trapezoidal ($N = 11$) no <i>FALCON</i>	112
Figura 54 – Relação entre o valor atribuído à função objetivo via quadratura trapezoidal em função do número de nós de colocação	112

Figura 55 – Função objetivo via quadratura de Simpson para o problema do pêndulo invertido ($N=7$)	113
Figura 56 – Função objetivo via quadratura de Simpson para o problema do pêndulo invertido ($N=9$)	113
Figura 57 – Função objetivo via quadratura de Simpson para o problema do pêndulo invertido ($N=11$)	113
Figura 58 – Relação entre o valor da função objetivo via quadratura de Simpson e o número de nós de colocação para o problema do pêndulo invertido	114
Figura 59 – Representação esquemática do problema do estacionamento	115
Figura 60 – Posições inicial e final do automóvel e dimensões da via e da vaga	115
Figura 61 – Trajetórias de controle para o problema do estacionamento reportadas pela literatura	116
Figura 62 – Situação em que o veículo se choca com os limites da vaga	118
Figura 63 – Representação geométrica adotada para a representação dos limites da vaga	119
Figura 64 – Representação geométrica das funções usadas para a aproximação da função módulo	120
Figura 65 – Representação geométrica das funções $h(z)$ e $h'(z)$ usadas para evitar o choque entre o veículo e a vaga	121
Figura 66 – Influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo para o problema do estacionamento	122
Figura 67 – Variável de estado $d_x(t)$ para o problema do estacionamento	124
Figura 68 – Variável de estado $d_y(t)$ para o problema do estacionamento	125
Figura 69 – Variável de estado $v(t)$ para o problema do estacionamento	126
Figura 70 – Variável de estado $a(t)$ para o problema do estacionamento	127
Figura 71 – Variável de estado $\theta(t)$ para o problema do estacionamento	128
Figura 72 – Variável de estado $\phi(t)$ para o problema do estacionamento	129
Figura 73 – Variável de controle $j(t)$ para o problema do estacionamento	130
Figura 74 – Variável de controle $\omega(t)$ para o problema do estacionamento	131
Figura 75 – Posições do veículo durante a execução da manobra de estacionamento	132
Figura 76 – Relação entre o tempo de processamento e o número de nós de colocação no problema do estacionamento	133
Figura 77 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo e o número de nós de colocação no problema do estacionamento	134
Figura 78 – Representação esquemática do problema da otimização da trajetória de um UAV	135
Figura 79 – Campo de vento ao qual o UAV está submetido no problema da otimização da trajetória	136
Figura 80 – Representação das variáveis utilizadas na definição da favorabilidade	136

Figura 81 – Velocidades e favorabilidades associadas ao campo de vento para o problema da otimização da trajetória de um UAV	138
Figura 82 – Influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo para o problema da otimização da trajetória de um UAV	140
Figura 83 – Trajetória do ângulo associado à projeção da força de sustentação no eixo xy obtida utilizando-se 23 nós de colocação	141
Figura 84 – Trajetória do ângulo associado à projeção da força de sustentação no eixo xy obtida utilizando-se 41 nós de colocação	142
Figura 85 – Variável de estado $d_x(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV	143
Figura 86 – Variável de estado $d_y(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV	144
Figura 87 – Variável de estado $v_x(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV	145
Figura 88 – Variável de estado $v_y(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV	146
Figura 89 – Variável de controle $\phi(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV	147
Figura 90 – Variável de controle $\theta(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV	148
Figura 91 – Vista superior da trajetória do UAV e do campo de vento que atua sob o mesmo	149
Figura 92 – Relação entre o tempo de processamento e o número de nós de colocação para o problema da otimização da trajetória de um UAV	150
Figura 93 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo e o número de nós de colocação para o problema da otimização da trajetória de um UAV	151
Figura 94 – Representação esquemática do problema do lançamento de um foguete	153
Figura 95 – Sistema de coordenadas inercial centrado na Terra	153
Figura 96 – Posicionamento de um ponto qualquer na superfície terrestre com base em sua latitude e longitude	155
Figura 97 – Representação dos elementos orbitais	157
Figura 98 – Influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo para o problema do lançamento de um foguete	160
Figura 99 – Perfil da altitude para o problema do lançamento de um foguete	162
Figura 100–Perfil do estado $m(t)$ para o problema do lançamento de um foguete	163
Figura 101–Perfil da velocidade absoluta para o problema do lançamento de um foguete	164
Figura 102–Variável de controle $u_x(t)$ para o problema do lançamento de um foguete	165
Figura 103–Variável de controle $u_y(t)$ para o problema do lançamento de um foguete	166
Figura 104–Variável de controle $u_z(t)$ para o problema do lançamento de um foguete	167
Figura 105–Trajetória percorrida pelo Delta III	168

Figura 106–Relação entre o tempo de processamento e o número de nós de colocação para o problema do lançamento de um foguete	169
Figura 107–Relação entre o número de avaliações da função objetivo e o número de nós de colocação para o problema do lançamento de um foguete	170
Figura 108–Avaliação dos valores de N_m relacionados ao $PSOPT_t$, $PSOPT_h$ e $PSOPT_l$	172
Figura 109–Avaliação dos tempos de processamento requeridos pelo $PSOPT_t$, $PSOPT_h$ e $PSOPT_l$	173
Figura 110–Análise dos valores de n_{aval} relacionados ao $PSOPT_t$, ao $PSOPT_h$ e ao $PSOPT_l$	174
Figura 111–Avaliação dos valores de N_m ao $COPILOTS_t$ e ao $COPILOTS_h$	174
Figura 112–Avaliação do número de nós de colocação relacionados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$	175
Figura 113–Avaliação dos tempos de processamento relacionados aos pacotes avaliados	176
Figura 114–Análise do número de avaliações da função objetivo relacionados aos pacotes avaliados	177
Figura 115–Avaliação dos tempos de processamento relacionados ao $PSOPT_t$ e ao $FALCON$ para o problema do pêndulo invertido	178
Figura 116–Análise do número de avaliações da função objetivo requeridas pelo $PSOPT_t$ e pelo $FALCON$ para o problema do pêndulo invertido	178
Figura 117–Análise dos valores de J^* associados aos pacotes avaliados	179
Figura 118–Trajetórias de controle obtidas considerando o $PSOPT_t$ para o problema do estacionamento	186
Figura 119–Suavização das trajetórias de controle obtidas considerando o $PSOPT_t$ para o problema do estacionamento	186
Figura 120–Suavização das trajetórias de controle obtidas via $PSOPT_t$ na resolução do problema singular 2	187
Figura 121–Representação da aproximação utilizada na suavização da função degrau	206

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de linhas de código utilizadas na implementação do problema do estacionamento	57
Tabela 2 – Métricas obtidas para o problema da desaceleração de um bloco	72
Tabela 3 – Métricas obtidas para o problema singular 1	81
Tabela 4 – Métricas obtidas para o problema singular 2	90
Tabela 5 – Métricas obtidas para o problema do pêndulo invertido	102
Tabela 6 – Métricas obtidas para o problema do estacionamento	123
Tabela 7 – Métricas obtidas para o problema da otimização da trajetória de um UAV	142
Tabela 8 – Métricas obtidas para o problema do lançamento de um foguete	161
Tabela 9 – Valores de função objetivo encontrados por cada método	171

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1	UMA BREVE HISTÓRIA DO CONTROLE ÓTIMO	31
2.2	O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO	33
2.3	CONCEITOS GERAIS	34
2.4	MÉTODOS DIRETOS	36
2.4.1	COLOCAÇÃO TRAPEZOIDAL	38
2.4.2	COLOCAÇÃO HERMITE-SIMPSON	45
2.4.3	COLOCAÇÃO PSEUDO-ESPECTRAL	49
2.5	PACOTES AVALIADOS	55
2.5.1	<i>PSOPT</i>	55
2.5.2	<i>FALCON</i>	56
2.5.3	<i>COPILOTS</i>	57
2.6	MÉTRICAS PARA A AVALIAÇÃO DE PACOTES COMPUTACIONAIS	58
3	METODOLOGIA	63
3.1	ESTUDOS DE CASO	63
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	69
4.1	MINIMIZAÇÃO DO ESFORÇO DURANTE A DESACELERAÇÃO DE UM BLOCO	69
4.2	PROBLEMAS SINGULARES	78
4.2.1	CASO 1	79
4.2.2	CASO 2	88
4.3	MINIMIZAÇÃO DO ESFORÇO DURANTE O <i>swing-up</i> DE UM PÊN- DULO INVERTIDO	97
4.4	MINIMIZAÇÃO DO TEMPO DURANTE UMA MANOBRA DE ESTA- CIONAMENTO	114
4.5	OTIMIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE UM UAV	135
4.6	LANÇAMENTO DO FOGUETE DELTA III	152
4.7	CONSOLIDAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS	170
4.7.1	SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS	170
4.7.2	ANÁLISE GERAL DOS PACOTES AVALIADOS	179
4.7.3	QUALIDADES E DEFICIÊNCIAS DE CADA UM DOS PACOTES AVALIADOS	181

4.7.3.1	PSOPT: PRINCIPAIS QUALIDADES	181
4.7.3.2	PSOPT: PRINCIPAIS DEFICIÊNCIAS	182
4.7.3.3	FALCON: PRINCIPAIS QUALIDADES	183
4.7.3.4	FALCON: PRINCIPAIS DEFICIÊNCIAS	183
4.7.3.5	COPILOTS: PRINCIPAIS QUALIDADES	184
4.7.3.6	COPILOTS: PRINCIPAIS DEFICIÊNCIAS	185
4.7.4	SUAVIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS	185
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	189
5.1	CONCLUSÕES	189
5.2	TRABALHOS FUTUROS	190
	REFERÊNCIAS	193
	APÊNDICES	199
	APÊNDICE A – PARÂMETROS DO PROBLEMA DO LANÇAMENTO DE UM FOGUETE	201
	APÊNDICE B – ELEMENTOS ORBITAIS	205

1 INTRODUÇÃO

A Teoria de Controle Clássico pode ser resumidamente descrita como um conjunto de métodos que viabiliza o projeto de controladores que possibilitam a computação da entrada à qual um dado processo deve ser submetido de forma que a saída associada ao mesmo evolua da maneira desejada (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013). O projeto de um controlador em malha fechada, como são chamados os controladores baseados na realimentação da saída, é realizado por meio de um procedimento iterativo no qual são determinados os ganhos associados a uma dada lei de controle, conforme pode ser observado na Figura 1. Assim, os controladores são ajustados enquanto o desempenho do processo é verificado a partir de critérios definidos no domínio do tempo, como o máximo sobressinal, o tempo de acomodação, e o tempo de subida, ou no domínio da frequência, como a margem de fase, a margem de ganho, e a largura de banda (KIRK, 2004).

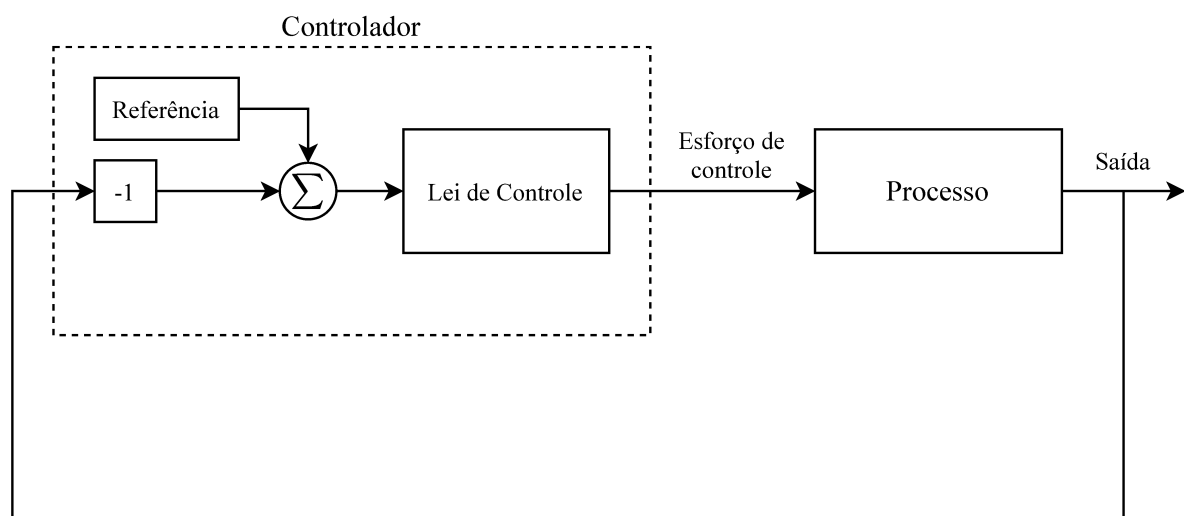


Figura 1 – Sistema de controle em malha fechada.

No entanto, outros critérios devem ser considerados no controle de sistemas de dinâmica complexa, que possuem múltiplas entradas e saídas e que estejam sujeitos a limitações operacionais. Por exemplo, considerando-se a determinação da força resultante $F(t)$ a ser imposta sob uma aeronave para que um dado ponto de chegada seja atingido, de forma que sejam evitadas zonas proibitivas, ao mesmo tempo em que minimiza-se o gasto de combustível da aeronave, conforme observado na Figura 2. Vale ressaltar que, nesse caso, os perfis de aceleração $a(t)$, de velocidade $v(t)$, e de posição $P(x(t), y(t))$ da aeronave devem ser também determinados. O Controle Ótimo (CO) é uma das ferramentas que possibilita a resolução de problemas desse tipo.

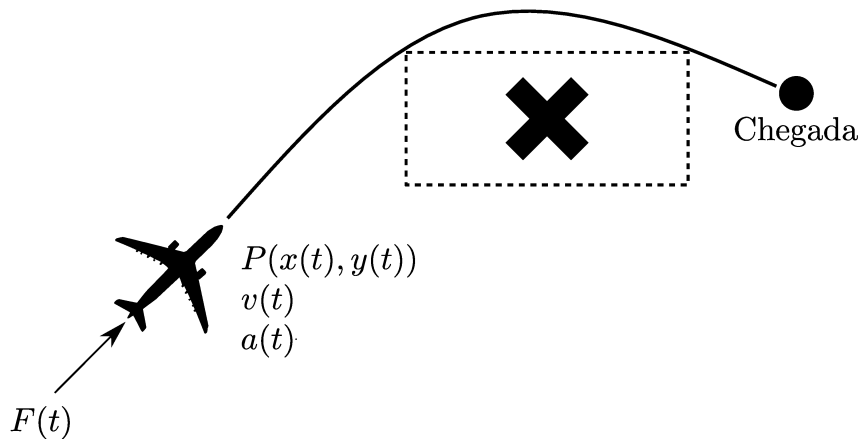


Figura 2 – Trajetória a ser percorrida por uma aeronave para que um determinado ponto de chegada seja atingido, de forma que seja evitada uma dada zona proibitiva, nesse caso assinalada com um \times , ao mesmo tempo em que minimiza-se o gasto de combustível da aeronave. O estabelecimento desta trajetória depende da determinação dos perfis de aceleração $a(t)$, de velocidade $v(t)$, e de posição $P(x(t), y(t))$ da aeronave.

O CO consiste em um conjunto de métodos que possibilita a determinação dos perfis de controle que conduzem à minimização (ou maximização) de um dado índice de desempenho, garantindo, simultaneamente, que restrições operacionais e dinâmicas sejam satisfeitas (KIRK, 2004; BECERRA, 2008; KELLY, 2017).

As origens do CO remontam ao começo do século XVII, porém foi a partir da década de 50, com o advento do computador digital, que o CO passou a ser utilizado no campo da engenharia (BRYSON, 1996). Desde então, o CO têm sido empregue na resolução de problemas associados ao controle de processos industriais, à bioengenharia, à economia, à gestão, à robótica, e à engenharia aeroespacial (BECERRA, 2008).

Um exemplo que mostra o quão vantajoso pode ser o emprego do CO é apresentado em Kang e Bedrossian (2007), que relata o sucesso de uma manobra performada pela Estação Espacial Internacional (*International Space Station* ou ISS) no dia 3 de março de 2007. Combinando-se um controlador clássico e um gerador de trajetórias baseado nas teorias de CO, foi possível que a ISS realizasse um giro de 180° sem que qualquer combustível fosse gasto. Para realização de manobras desse tipo a ISS dispõe de propulsores movidos à combustível e de giroscópios que consomem a energia elétrica fornecida pelos painéis solares da estação espacial (ver a Figura 3). O uso exclusivo dos giroscópios na reorientação da ISS possibilitou uma economia de, aproximadamente, 1 milhão de dólares em combustível.

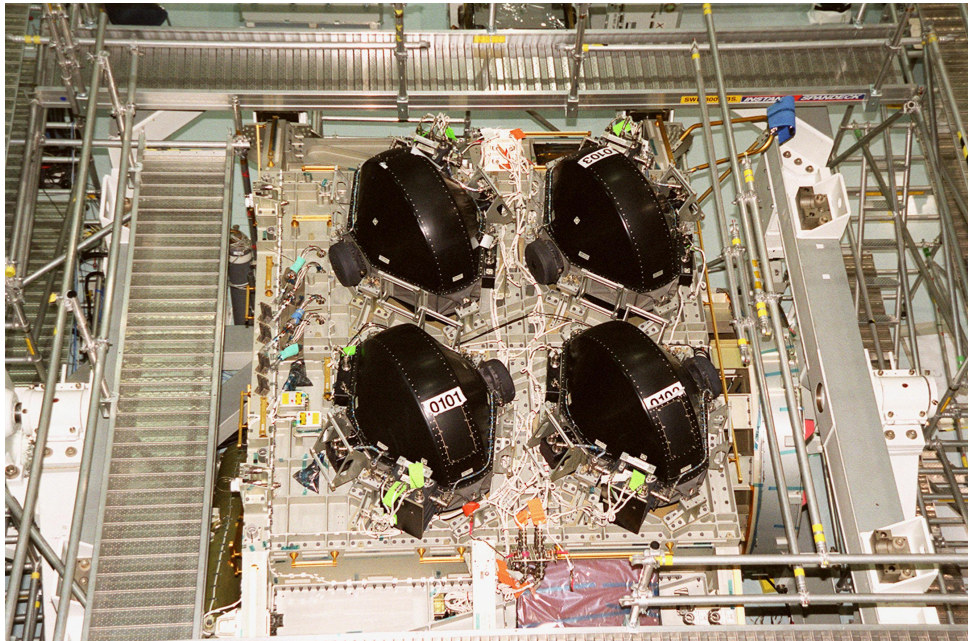


Figura 3 – Giroscópios da ISS (Fonte: <<https://cutt.ly/djEW0PD>>).

O CO pode ser empregado até mesmo no tratamento de questões que envolvem a gestão da saúde pública, como mostrado em [Libotte et al. \(2020\)](#). Em novembro de 2019, uma nova doença chamada COVID-19 (*Coronavirus Disease 2019*), emergiu da China e rapidamente se espalhou pelo mundo conforme observado na Figura 4 ([LIBOTTE et al., 2020](#)). Até janeiro de 2020 o vírus infectou mais de 90 milhões de pessoas pelo mundo e fez 2 milhões de vítimas, 200 mil delas no Brasil ([DONG; DU; GARDNER, 2020](#)). Apesar das medidas de distanciamento social serem uma forma efetiva de reduzir o espalhamento da COVID-19, somente uma campanha de vacinação seria capaz de frear a disseminação da doença. Nesse contexto, uma estratégia de vacinação formulada a partir do emprego de técnicas de CO e Otimização Heurística é proposta em [Libotte et al. \(2020\)](#). A estratégia em questão visa não só a minimização do número de indivíduos infectados, mas também do número de doses utilizadas. Os autores demonstraram que o emprego dessa estratégia levaria a uma diminuição de aproximadamente 10 vezes no número de indivíduos infectados.

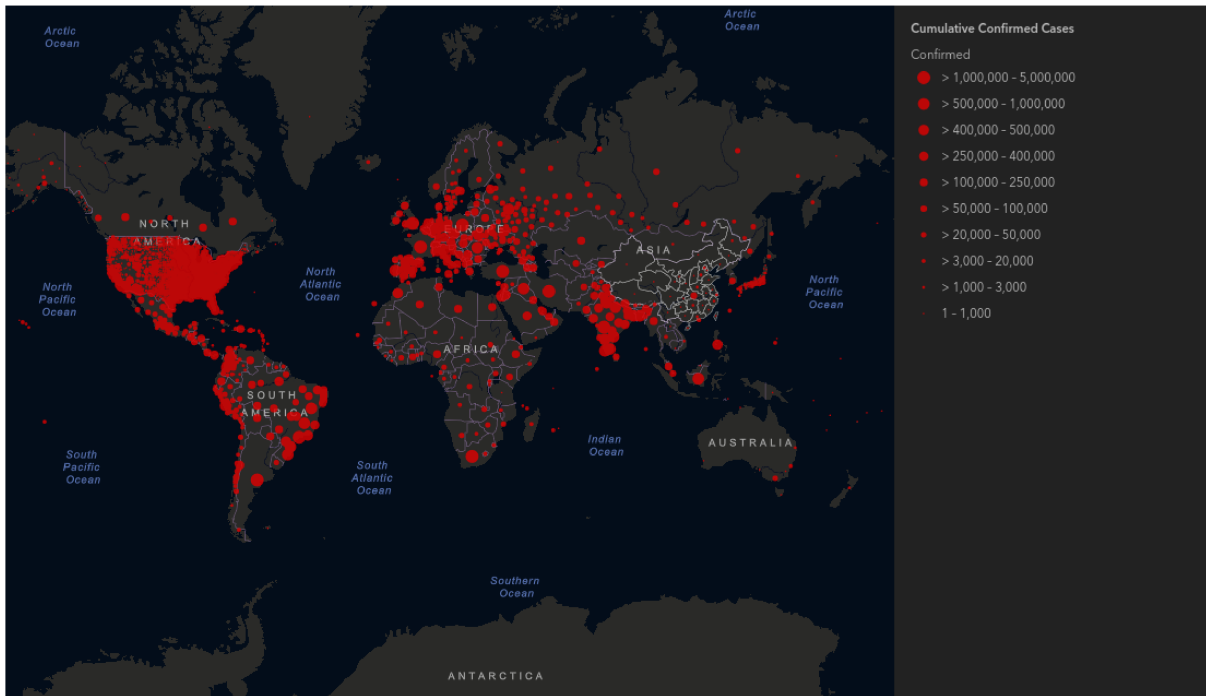


Figura 4 – Mapa que mostra o número de indivíduos infectados pela COVID-19 em várias regiões do mundo (Fonte: <<https://cutt.ly/2jT37VO>>).

Como mencionado anteriormente, a teoria do CO passou a ser aplicada no campo da engenharia a partir da década de 50, com o advento do computador digital (BRYSON, 1996). Desde então, PCOs cada vez mais complexos e práticos vêm sendo abordados graças ao desenvolvimento da teoria de CO, à implementação de ferramentas de otimização mais eficientes e robustas, e ao aumento do poder computacional dos computadores pessoais (BIRAL; BERTOLAZZI; BOSETTI, 2016). Nesse contexto, diversos pacotes foram propostos para solução de PCOs, como o BOCOP (SACLAY, 2017), o FALCON (RIECK et al., 2020), o GEKKO (BEAL et al., 2018), o HamPath (CAILLAU; COTS; GERGAUD, 2012), o OpenOCL (KOENEMANN et al., 2017), o OptminTraj (KELLY, 2018), o OpenGoddard (INC., 2017), o Beluga (LABORATORY, 2018), o ICLOCS (FALUGI; KERRIGAN; WYK, 2018), e o PSOPT (BECERRA, 2019), apenas para citar alguns exemplos.

A escolha de um pacote, portanto, não é uma tarefa trivial diante de tantas possibilidades. Até mesmo a escolha das métricas a serem utilizadas na elaboração de um estudo comparativo entre os pacotes disponíveis consiste em um desafio, inclusive para usuários experientes (BONGARTZ et al., 1997). Além disso, não é somente com base no desempenho computacional que um dado pacote deve ser selecionado. É bastante importante que critérios referentes, à usabilidade, à documentação, às licenças, e ao suporte associados aos pacotes em análise sejam também considerados (PAREJO et al., 2012).

Diante desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo central a elaboração do *COPILOTS (Basic Optimal Control Solver)*, um novo pacote computacional para a resolução

de PCOs baseado em uma sintaxe simples e desenvolvido para usuários com pouca ou nenhuma experiência na resolução computacional de PCOs. Como objetivos específicos ressaltam-se:

- Realizar um estudo comparativo envolvendo tanto o *COPILOTS* quanto outros pacotes computacionais apresentados na literatura, de forma que verifique-se a qualidade das soluções atribuídas ao pacote proposto;
- Avaliar a aplicabilidade dos pacotes considerados a um conjunto de estudos de caso que apresentem diferentes níveis de complexidade, bem como discutir aspectos gerais no que tange as métricas de desempenho e usabilidade relacionadas às aplicações consideradas;
- Definir qual dos métodos/pacotes avaliados é mais apropriado para resolução de cada tipo de PCO levando-se em conta a forma do índice de desempenho, a presença ou não de restrições nos estados e controles, a presença de arcos singulares, e o número de fases empregadas na formulação de cada PCO;
- Discutir aspectos relacionados a cada um dos pacotes de forma que esta dissertação sirva de guia para novos usuários.

O restante do texto se encontra organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2 são estabelecidos alguns conceitos fundamentais acerca do CO, dos pacotes avaliados, e dos métodos numéricos nos quais os mesmos se baseiam. No Capítulo 3 são apresentados os estudos de caso e as métricas de desempenho utilizados na implementação do estudo comparativo introduzido no presente trabalho. No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos considerando os estudos de caso selecionados. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões advindas do desenvolvimento desse trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesse capítulo são apresentados os conceitos que servem de base para o desenvolvimento do presente trabalho. Inicialmente será brevemente abordada a história do Controle Ótimo para que, em seguida, o problema de Controle Ótimo seja definido. Então, apresenta-se uma visão geral sobre os Métodos Diretos, empregados nos pacotes avaliados no presente trabalho, e, por fim, tais pacotes são brevemente introduzidos.

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO CONTROLE ÓTIMO

O Controle Ótimo (CO) é um conjunto de métodos que possibilita a determinação das trajetórias dos controles associados a um dado sistema dinâmico, de forma que o emprego de tais trajetórias garanta que as restrições operacionais associadas a esse sistema sejam satisfeitas, ao mesmo tempo em que um dado índice de desempenho é minimizado (ou maximizado) (KIRK, 2004; BECERRA, 2008; KELLY, 2017). As origens do CO remontam ao ano de 1697, quando Johann Bernoulli, professor de matemática da Universidade de Groningen, no norte da Holanda, publicou a solução do problema da braquistócrona (SUSSMANN; WILLEMS, 1997), proposto por Galileo Galilei 59 anos antes (BRYSON, 1996). Em 1696, Johann Bernoulli desafiou seus contemporâneos a resolver esse problema, que consiste na determinação da trajetória a ser percorrida por uma esfera que deve se mover entre dois pontos A e B, apenas sob a ação da gravidade, no menor tempo possível, conforme ilustrado na Figura 5. Soluções para o problema da braquistócrona foram propostas por Johan Bernoulli, Newton, Leibniz, l'Hopital e Jakob Bernoulli, irmão de Johan (BRYSON, 1996).

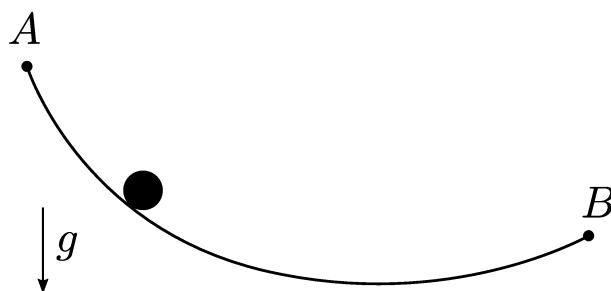


Figura 5 – Representação do problema da braquistócrona.

Pode-se dizer que o CO é uma extensão do Cálculo de Variações (CV), desenvolvido por Isaac Newton em 1685, que buscava, na época, determinar o formato da ponta de um projétil que levasse à minimização do arrasto aerodinâmico. Em 1744, Leonard Euler publicou um livro intitulado *The Method of Finding Curves that Show Some Property of Maximum or Minimum*, no qual são apresentadas as bases para o desenvolvimento teórico do CV. Euler e Jean Louis

Lagrange trocaram cartas a respeito desse livro e juntos desenvolveram a equação de Euler-Lagrange. Esta descreve a condição necessária de primeira ordem associada à solução de um problema de CV (BRYSON, 1996).

Em 1836, Willian Rowan Hamilton publicou um trabalho aplicando o CV ao projeto de sistemas mecânicos a partir da minimização da força exercida pelos mesmos. As soluções obtidas por Hamilton foram baseadas na resolução de duas equações diferenciais, e por esse motivo, o autor foi criticado, em 1838, por Karl Gustav Jacob Jacobi, que afirmou que apenas uma equação bastaria. A partir do trabalho desses dois autores desenvolveu-se a equação de Hamilton-Jacobi, que serviu de base para que Richard Bellman propusesse a programação dinâmica mais de 100 anos depois (BRYSON, 1996).

Com base no trabalho desenvolvido por Karl Wilhelm Theodor Weierstrass no final do século XIX, Oskar Bolza e Gilbert A. Bliss associaram ao CV o rigor matemático que o acompanha até os dias atuais. A partir do trabalho atribuído a Bolza e Bliss, McShane desenvolveu, em 1939, um método para resolução de problemas de CV, que seria estendido por Pontryagin anos depois dando origem ao princípio do mínimo de Pontryagin. Em 1957, Placido Cicala escreveu uma monografia a respeito do emprego do CV no desenvolvimento de projetos de engenharia e, em 1963, Derek Lawden foi o primeiro a empregar o CV na determinação de trajetórias para veículos espaciais (BRYSON, 1996).

No entanto, é importante salientar que o Controle Clássico também serviu de base para o desenvolvimento do CO. O Controle Clássico consiste num conjunto de metodologias normalmente baseadas em procedimentos a partir dos quais determinam-se os ganhos de um controlador para que a implementação do mesmo leve a uma resposta em malha fechada satisfatória (BRYSON, 1996).

Durante e após a Segunda Guerra Mundial, diversos métodos baseados nas transformadas de Laplace e Fourier, e nas variáveis complexas, foram desenvolvidos para que o desempenho e a estabilidade de sistemas de controle em malha fechada fossem previstos. Com o surgimento dessas técnicas, critérios quantitativos passaram a ser definidos no domínio da frequência, como os ganhos de margem e de fase, e no domínio do tempo, como o tempo de acomodação e o máximo sobressinal (ou *overshoot*) associados à resposta do sistema a uma entrada do tipo degrau (BRYSON, 1996).

A utilização da integral do quadrado do erro (ISE) na sintonização de um controlador em malha fechada foi proposta pela primeira vez por Newton, Gould e Kaiser em 1957. Já em 1961, Chang propôs o projeto de um controlador com base em restrições associadas à integral do quadrado da ação de controle. Em 1960, Kalman estabeleceu os conceitos de variáveis de estado e controle, que são largamente utilizadas no CO, assim como um índice de desempenho integral computado a partir das magnitudes dos controles e erros. Kalman mostrou, empregando o CV, que os controles poderiam ser determinados a partir de uma realimentação linear das variáveis de estado. Posteriormente, o controlador proposto por Kalman seria chamado de Regulador Linear

Quadrático (LQR) (BRYSON, 1996).

Por fim, é preciso ressaltar que o CO possui também origens na Programação Não Linear (PNL), desenvolvida logo após a Segunda Guerra Mundial. Esta consiste na otimização de uma dada função objetivo a partir da determinação de parâmetros (ou variáveis de projeto), sujeitos a restrições de igualdade e desigualdade. Caso o perfil de controle seja aproximado por um conjunto finito de pontos no tempo, é possível que a PNL seja empregada na determinação do valor assumido pelo esforço de controle em cada um desses pontos, de forma que o problema de CO inicialmente proposto seja resolvido de forma numérica (BRYSON, 1996). Essa abordagem será discutida em detalhes mais adiante uma vez que serve de base para o desenvolvimento do presente trabalho.

2.2 O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

O problema de Controle Ótimo (PCO) é definido de acordo com a formulação de Bolza (BECERRA, 2008):

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J = \varphi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.1a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1b)$$

sendo $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$, respectivamente, os vetores de estados e controles do sistema, t a variável temporal, t_0 e t_f os tempos inicial e final, respectivamente, J o funcional a ser minimizado, também chamado índice de desempenho ou função objetivo, φ a função de custo terminal, também conhecida como função de Mayer, L a função de custo de caminho, também intitulada função de Lagrange, \mathbf{f} o conjunto de equações que descreve a dinâmica do sistema no espaço de estados, e \mathbf{x}_0 a condição inicial atribuída a $\mathbf{x}(t)$. Considera-se que n estados e m controles estão associados à formulação de \mathbf{f} , de forma que:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) & x^{(2)}(t) & \dots & x^{(n)}(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u^{(1)}(t) & u^{(2)}(t) & \dots & u^{(m)}(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.2b)$$

Vale ressaltar que caso t_0 e t_f não sejam previamente estabelecidos, devem ser determinados por meio da resolução do PCO, e nesse caso, restrições associadas aos limites de t_0 e t_f devem ser consideradas. Além disso, uma vez determinado $\mathbf{u}(t)$, é possível que, de posse de \mathbf{x}_0 , determinem-se as trajetórias dos estados com base na computação de $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$.

A formulação de um PCO pode incluir restrições associadas às amplitudes dos estados e/ou controles, que serão referenciadas ao longo do texto como restrições laterais:

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_U \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_U \quad (2.3b)$$

sendo os índices L e U utilizados na representação dos limites inferiores e superiores dos estados e controles. Além disso, podem-se considerar restrições de caminho, associadas à evolução temporal dos estados e/ou controles,

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0} \quad (2.4)$$

e restrições terminais, relacionadas aos valores assumidos pelos estados ao fim da trajetória,

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \leq \mathbf{0} \quad (2.5)$$

sendo \mathbf{c} e $\boldsymbol{\psi}$ funções quaisquer.

Um PCO pode ser formulado, por exemplo, para que os perfis de velocidade $x_2(t)$ e posição $x_1(t)$ de um carro que corre sobre um trilho sejam determinadas. Nesse caso, é necessário que seja também computado o perfil da força $u(t)$ exercida sobre o carro, representado nesse caso como um ponto de massa. Pode-se considerar ainda que o tempo despendido na transposição de 10 m de trilho, e a força empregada na realização desse movimento devam ser minimizados. Supondo que, devido aos materiais utilizados na construção do aparato em questão, e ao motor que movimenta o carro, haja limitações na velocidade e na potência associadas à movimentação do mesmo, pode-se determinar $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$ e t_f a partir da resolução do seguinte PCO:

$$\min_{\mathbf{u}(t), t_f} J = t_f + \int_0^{t_f} u^2(t) dt \quad (2.6a)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0 \text{ m} \quad (2.6b)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = 0 \text{ m/s} \quad (2.6c)$$

$$-2 \text{ m/s} \leq x_2(t) \leq 2 \text{ m/s} \quad (2.6d)$$

$$-10 \text{ N} \leq u(t) \leq 10 \text{ N} \quad (2.6e)$$

$$-15 \text{ W} \leq u(t)x_2(t) \leq 15 \text{ W} \quad (2.6f)$$

$$x_1(t_f) = 10 \text{ m} \quad (2.6g)$$

Tal formulação contempla uma restrição de caminho vinculada à potência empregue na movimentação do carro, uma restrição terminal relacionada à posição final do mesmo, e restrições associadas a limitações na velocidade $x_2(t)$ do carro e na força $u(t)$ que atua sob o mesmo.

2.3 CONCEITOS GERAIS

A presente seção tem por objetivo apresentar uma série de conceitos importantes para o estudo do PCO. Neste caso, são avaliadas características que abrangem uma equação algébrico-diferencial - EAD (resultante da aplicação de otimalidade para o PCO), bem como aspectos relacionados à presença de restrições (BRYSON, 1996; LOBATO, 2004).

- Arcos Singulares: arcos onde a matriz de derivadas segundas da função Hamiltoniano com relação às variáveis de controle é singular. Neste contexto, alguns PCOs são definidos a partir de domínios nos quais podem ser observadas regiões em que a condição estacionária $\mathbf{H}_u = \partial H / \partial u$ é satisfeita ao mesmo tempo em que a matriz Hessiana $\mathbf{H}_{uu} = \partial^2 H / \partial u^2$ associada ao Hamiltoniano H é singular. Essas regiões são chamadas arcos singulares, e nelas, $u(t)$ não pode ser unicamente definido pela condição estacionária, sendo necessário impor que as derivadas temporais de \mathbf{H}_u sejam nulas ao longo do arco. Adversidades numéricas podem ser enfrentadas caso métodos computacionais sejam empregados na resolução de PCOs que possuam arcos singulares (PRACTICAL... ; BECERRA, 2008).

Como exemplos de PCOs que apresentam arcos singulares pode-se citar:

- Determinação de trajetórias ótimas para foguetes de sondagem, que realizam voos suborbitais para coleta de dados utilizados em estudos meteorológicos e astronômicos (NASA, 2004);
 - Estabelecimento do curso de uma aeronave que realiza voos periódicos para minimização do gasto de combustível (SPEYER, 1996);
 - Estudo da influência do fenômeno meteorológico *wind shear*, que consiste na variação brusca da direção e/ou velocidade do vento, no pouso de uma aeronave (ANAC, 2018).
- Condição de Canto: ponto onde ocorre uma descontinuidade no perfil de controle ou na inclinação das trajetórias das variáveis de estado.
 - EAD com Índice Superior e Redução de Índice: são as equações com índice maior do que 1. O índice diferencial é o número mínimo de vezes que o sistema de equações algébrico-diferenciais ou parte dele deve ser diferenciado com relação ao tempo para transformá-lo em um puramente diferencial. Este conceito representa uma medida da dificuldade de solução de sistema de EADs, decorrente de mau condicionamento, instabilidade, singularidade e má convergência. Do ponto de vista da solução numérica é desejável que o índice das EADs seja o menor possível devido à dificuldade associada à solução deste em comparação com a solução de equações diferenciais ordinárias com rigidez numérica. Entretanto, esta redução obtida através da simples diferenciação das restrições pode não satisfazer as restrições originais de maneira exata, com sérias implicações quando elas envolvem propriedades físicas importantes. Portanto, devem ser consideradas formas de reintroduzir restrições perdidas no sistema, chamadas invariantes.
 - Eventos: pontos de junção entre os arcos sujeitos a restrições e os arcos sem restrições.
 - Funções Identificadoras de Fase: relação matemática obtida a partir da aplicação da condição de otimalidade a um PCO e que tem por finalidade indicar a ativação ou não de uma restrição. Um caso particular, e de grande interesse, é quando a variável de controle aparece linearmente na função Hamiltoniano.

2.4 MÉTODOS DIRETOS

Os métodos empregados na resolução de PCOs podem ser divididos em duas principais categorias: os Métodos Indiretos e os Métodos Diretos. Os Métodos Indiretos se baseiam na resolução das condições necessárias de otimalidade associadas ao PCO. A formulação dessas condições depende da definição do Hamiltoniano $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)$:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.7)$$

em que $\boldsymbol{\lambda}(t)$ são os multiplicadores de Lagrange, também conhecidos como co-estados ou variáveis adjuntas. Assim sendo, as condições de otimalidade, ou equações de Euler-Lagrange, são dadas por (BECERRA, 2008):

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) = - \frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \quad (2.8a)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{t=t_f} \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{0} \quad (2.8c)$$

Apesar das soluções obtidas por meio dos Métodos Indiretos serem comumente bastante acuradas, pode ser consideravelmente difícil, a depender do PCO em análise, formular as condições necessárias de otimalidade, algo que um usuário com pouco conhecimento da teoria do CO dificilmente seria capaz de fazer. Além disso, o sucesso dos métodos numéricos empregados na resolução do sistema descrito pela Eqs. (2.8a)-(2.8c) depende fortemente das estimativas iniciais atribuídas a $\boldsymbol{\lambda}(t)$, que não podem ser determinados de forma intuitiva (PRACTICAL...).

Já os Métodos Diretos são baseados na discretização das variáveis de estado e controle, de forma que a resolução do PCO se dê a partir da determinação dos valores atribuídos a essas variáveis em pontos específicos da trajetória, denominados nós (ou pontos) de colocação, conforme observado na Figura 6. Mais de 90% dos pacotes computacionais desenvolvidos para a resolução de PCOs são baseados nos Métodos Diretos. Essa popularidade se deve à existência de inúmeros pacotes robustos e bem estabelecidos para solução de problemas de programação não linear (PPNLs), capazes de lidar de forma simples e direta com restrições de igualdade e desigualdade, e que não requerem que as equações associadas aos co-estados sejam fornecidas pelo usuário (BIRAL; BERTOLAZZI; BOSETTI, 2016).

Uma vez que os estados, os controles, a função objetivo e as restrições associadas à dinâmica do PCO, tenham sido discretizados de forma que:

$$t \rightarrow t_0, \dots, t_k, \dots, t_M \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_M \quad (2.9b)$$

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_M \quad (2.9c)$$

sendo ξ_k o valor atribuído à variável ξ no nó de colocação k , é possível que o PCO em análise seja tratado como um problema de otimização clássica, mais especificamente um PPNL. Cabe ressaltar que M é o índice atribuído ao último nó de colocação, localizado em $t = t_f$, e que, assumindo N como sendo o número de nós de colocação, tem-se $M = N - 1$. O processo de conversão de um PCO em um PPNL é conhecido como transcrição (KELLY, 2017).

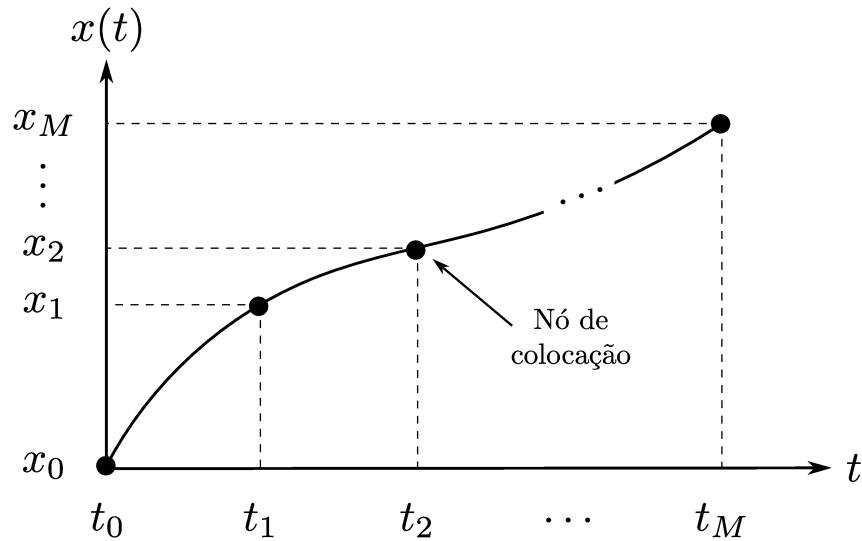


Figura 6 – Representação do processo de discretização em Métodos Diretos.

Os PPNLs são tipicamente formulados da seguinte maneira (KELLY, 2017),

$$\min_{\mathbf{z}} F(\mathbf{z}) \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (2.10b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0} \quad (2.10c)$$

$$\mathbf{z}_L \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_U \quad (2.10d)$$

em que F é o funcional a ser minimizado, enquanto \mathbf{H} e \mathbf{G} são os vetores de restrições de igualdade e desigualdade. Os limites inferior e superior associados ao vetor de variáveis de projeto (também chamadas variáveis de decisão ou variáveis de busca) \mathbf{z} , são denotados por \mathbf{z}_L e \mathbf{z}_U respectivamente.

Uma vez que o PPNL tenha sido resolvido e os valores atribuídos a $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ nos nós de colocação, denotados respectivamente por \mathbf{x}_k e \mathbf{u}_k , tenham sido determinados, é possível que os perfis dos estados e controles sejam construídos a partir da interpolação de \mathbf{x}_k e \mathbf{u}_k . A forma como se dá essa interpolação depende da metodologia empregada no processo de transcrição. As trajetórias dos controles, por exemplo, podem ser determinadas a partir da interpolação linear ou quadrática dos valores atribuídos a \mathbf{u}_k , ao passo que as trajetórias dos estados podem ser especificadas com base na interpolação cúbica dos valores atribuídos a \mathbf{x}_k (KELLY, 2017). É

possível ainda que as trajetórias de cada controle e estado sejam representadas por um único polinômio que percorra todos os nós de colocação (BECERRA, 2019).

A implementação da maioria dos métodos de transcrição é baseada nos cinco passos listados a seguir:

1. Discretização da integral associada à função objetivo;
2. Discretização das restrições dinâmicas;
3. Discretização das restrições de caminho, terminais e laterais;
4. Solução do PPNL obtido a partir do processo de transcrição;
5. Elaboração das trajetórias de estados e controles com base em \mathbf{x}_k e \mathbf{u}_k assumindo-se $k = 0, 1, \dots, M$.

A forma como cada uma dessas etapas será executada depende do método de transcrição adotado. Assim sendo, serão apresentados nas próximas seções alguns dos métodos mais comumente empregados na transcrição de PCOs, e que servem de base para a implementação dos pacotes computacionais avaliados no presente trabalho.

2.4.1 COLOCAÇÃO TRAPEZOIDAL

A colocação trapezoidal é baseada na quadratura trapezoidal, empregada tanto na computação do integrando L associado à função objetivo, quanto na discretização das restrições dinâmicas. Desta forma, assumindo-se $h_k = t_{k+1} - t_k$, determina-se a integral de L conforme a seguinte relação (KELLY, 2017):

$$\int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \approx \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2} h_k (L_k + L_{k+1}) \quad (2.11)$$

sendo $L_k = L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)$.

Uma vez que os estados tenham sido discretizados é possível que as restrições diferenciais associadas à dinâmica do PCO sejam representadas por um conjunto de restrições algébricas. Para tanto, é necessário que as restrições dinâmicas sejam reescritas na forma integral e que a quadratura trapezoidal seja empregada (KELLY, 2017):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.12a)$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \approx \frac{1}{2} h_k (\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_{k+1}) \quad (2.12c)$$

Assim sendo, M restrições de igualdade algébricas são formuladas a partir da equação anterior:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} h_k (\mathbf{f}_{k+1} + \mathbf{f}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M - 1 \quad (2.13)$$

sendo $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)$. Vale ressaltar que \mathbf{x}_k é uma variável de projeto, enquanto \mathbf{f}_k é obtido via avaliação do k -ésimo nó de colocação (KELLY, 2017).

As restrições laterais, terminais e de caminho são incorporadas à formulação do PPNL a partir do momento em que são transformadas em restrições de igualdade e desigualdade. Infelizmente, uma vez que a resolução do PPNL depende apenas dos valores atribuídos aos estados e controles nos nós de colocação, somente nesses nós é possível garantir que as restrições serão de fato satisfeitas (KELLY, 2017). Assim sendo, as restrições associadas ao PCO podem ser transcritas da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_U \rightarrow \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}_k \leq \mathbf{x}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_U \rightarrow \mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.14b)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \leq \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.14c)$$

$$\psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) \leq \mathbf{0} \rightarrow \psi(\mathbf{x}_M, t_M) \leq \mathbf{0} \quad (2.14d)$$

em que a condição inicial \mathbf{x}_0 para o vetor de variáveis de estado é representada da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0, \quad k = 0 \quad (2.15)$$

Por fim, o emprego da colocação trapezoidal na avaliação do PCO descrito resulta no seguinte PPNL:

$$\min_{\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k} J = \varphi(\mathbf{x}_M, t_M) + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2} h_k (L_k + L_{k+1}) \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} h_k (\mathbf{f}_{k+1} + \mathbf{f}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M - 1 \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.16c)$$

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}_k \leq \mathbf{x}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.16d)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.16e)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \leq \mathbf{0} \quad k = 0, \dots, M \quad (2.16f)$$

$$\psi(\mathbf{x}_M, t_M) \leq \mathbf{0} \quad (2.16g)$$

em que t_0 e t_f são conhecidos. Não sendo esse o caso, t_0 e t_f devem ser determinadas de forma que as seguintes restrições sejam respeitadas:

$$t_{0L} \leq t_0 \leq t_{0U} \quad (2.17a)$$

$$t_{fL} \leq t_f \leq t_{fU} \quad (2.17b)$$

sendo os limites inferiores de t_0 e t_f denotados por t_{0L} e t_{fL} e os superiores por t_{0U} e t_{fU} , respectivamente.

Uma vez que o PPNL tenha sido resolvido e que tanto \mathbf{x}_k quanto \mathbf{u}_k tenham sido determinados para $k = 0, 1, \dots, M$, é possível que as trajetórias dos estados e controles sejam elaboradas. A colocação trapezoidal é baseada na suposição de que os perfis de controle evoluem linearmente entre os nós de colocação e que podem, portanto, ser aproximados pela concatenação de polinômios (ou *splines*) de primeira ordem, conforme ilustrado na Figura 7 (KELLY, 2017).

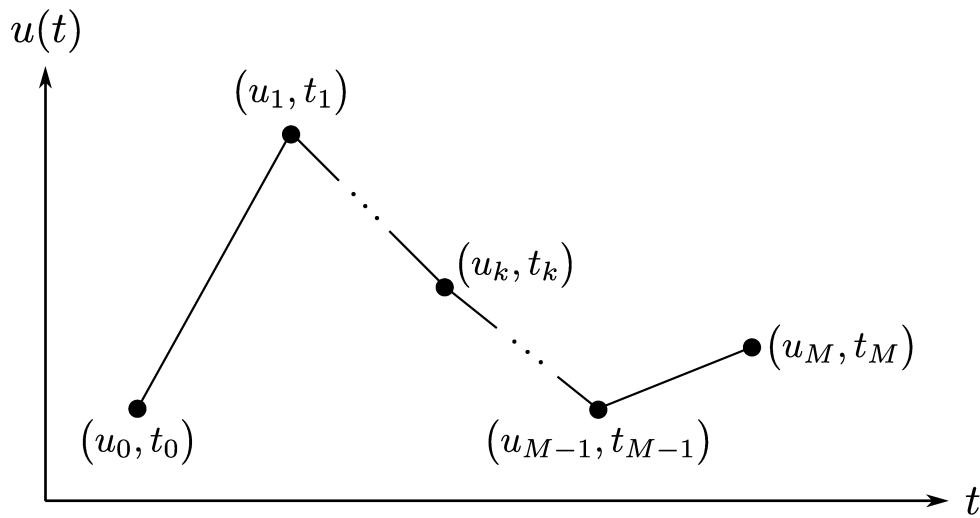


Figura 7 – Representação da trajetória de controle $u(t)$ via concatenação de polinômios de primeira ordem.

Supondo que exista apenas uma variável de controle ($\mathbf{u}(t) = u(t)$), pode-se determiná-la considerando uma aproximação linear por partes:

$$u(t) = \begin{cases} a_1 t + b_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 t + b_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \\ a_k t + b_k, & \text{se } t_{k-1} < t \leq t_k \\ \vdots & \\ a_M t + b_M, & \text{se } t_{M-1} < t \leq t_M \end{cases} \quad (2.18)$$

Verifica-se que a k -ésima *spline* tem como extremos os pontos (t_{k-1}, u_{k-1}) e (t_k, u_k) . Logo, os coeficientes a_k e b_k devem satisfazer:

$$a_k t_{k-1} + b_k = u_{k-1} \quad (2.19a)$$

$$a_k t_k + b_k = u_k \quad (2.19b)$$

Nota-se que a cada *spline* estão associadas duas equações de forma que um sistema com $2M$ equações pode ser definido para que os coeficientes a_k e b_k sejam determinados para $k = 1, 2, \dots, M$.

Considerando, por exemplo, $M = 3$ tem-se a seguinte estratégia de controle, conforme ilustrado na Figura 8:

$$u(t) = \begin{cases} a_1 t + b_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 t + b_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_2 \\ a_3 t + b_3, & \text{se } t_2 < t \leq t_3 \end{cases} \quad (2.20)$$

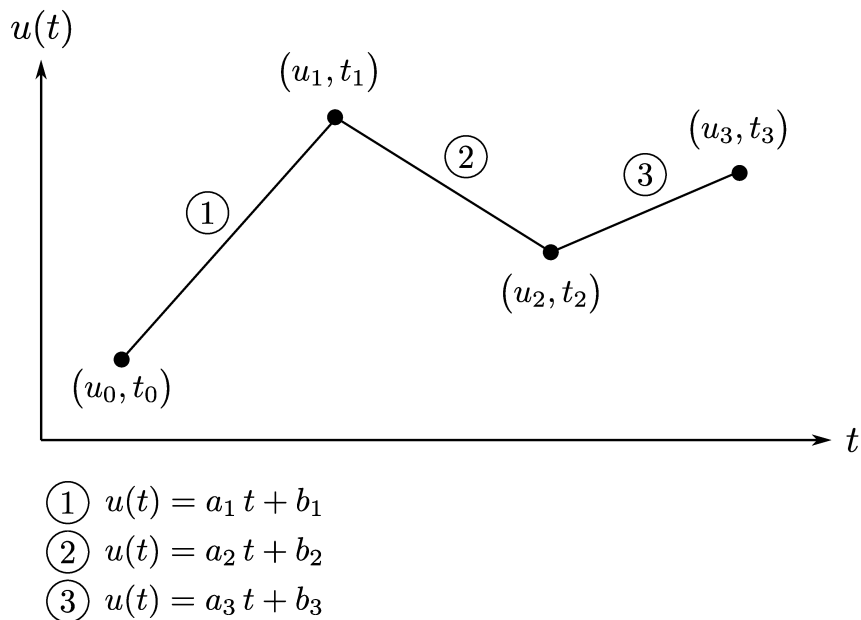


Figura 8 – Representação da trajetória do controle $u(t)$ considerando-se $M = 3$.

Uma vez que as extremidades de cada *spline* se encontram previamente estabelecidas, é possível que os coeficientes a_k e b_k sejam determinados por meio da solução do sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} u_0 = a_1 t_0 + b_1 \\ u_1 = a_1 t_1 + b_1 \\ u_1 = a_2 t_1 + b_2 \\ u_2 = a_2 t_2 + b_2 \\ u_2 = a_3 t_2 + b_3 \\ u_3 = a_3 t_3 + b_3 \end{cases} \quad (2.21)$$

que pode ser matricialmente representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} t_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e cuja solução é:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{u_0}{t_0 - t_1} - \frac{u_1}{t_0 - t_1} \\ b_1 &= \frac{t_0 u_1}{t_0 - t_1} - \frac{t_1 u_0}{t_0 - t_1} \\ a_2 &= \frac{u_1}{t_1 - t_2} - \frac{u_2}{t_1 - t_2} \\ b_2 &= \frac{t_1 u_2}{t_1 - t_2} - \frac{t_2 u_1}{t_1 - t_2} \\ a_3 &= \frac{u_2}{t_2 - t_3} - \frac{u_3}{t_2 - t_3} \\ b_3 &= \frac{t_2 u_3}{t_2 - t_3} - \frac{t_3 u_2}{t_2 - t_3} \end{aligned} \quad (2.23)$$

As trajetórias referentes ao vetor de variáveis de estado são aproximadas considerando *splines* cúbicas, conforme ilustrado na Figura 9.

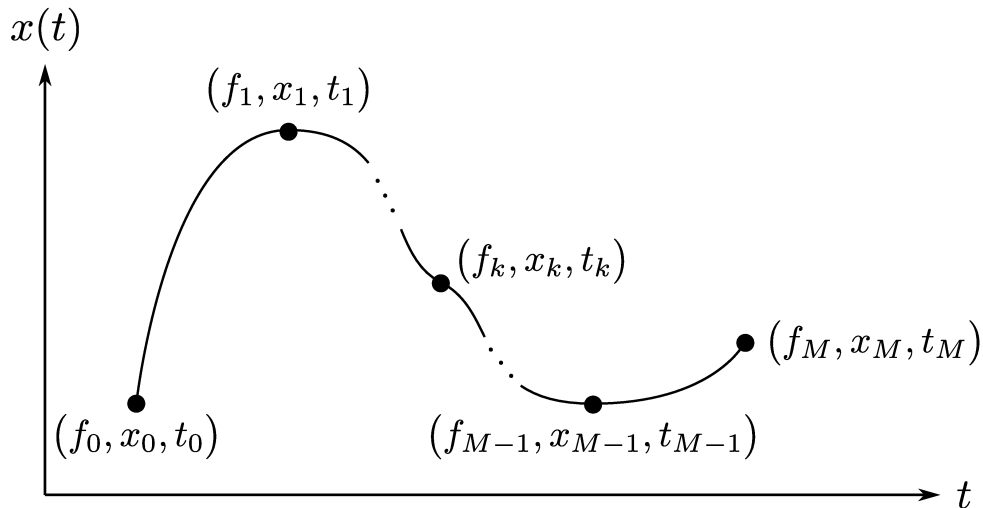


Figura 9 – Representação da trajetória do estado $x(t)$ considerando uma aproximação de terceiro grau.

Para fins de aplicação, considera-se apenas a variável de estado $x(t)$, que pode ser

aproximada como segue:

$$x(t) = \begin{cases} a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \\ a_k t^3 + b_k t^2 + c_k t + d_k, & \text{se } t_{k-1} < t \leq t_k \\ \vdots & \\ a_M t^3 + b_M t^2 + c_M t + d_M, & \text{se } t_{M-1} < t \leq t_M \end{cases} \quad (2.24)$$

enquanto a derivada de $x(t)$ (denotada por $f(t)$) é definida da seguinte forma:

$$f(t) = \begin{cases} 3 a_1 t^2 + 2 b_1 t + c_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 3 a_2 t^2 + 2 b_2 t + c_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \\ 3 a_k t^2 + 2 b_k t + c_k, & \text{se } t_{k-1} < t \leq t_k \\ \vdots & \\ 3 a_M t^2 + 2 b_M t + c_M, & \text{se } t_{M-1} < t \leq t_M \end{cases} \quad (2.25)$$

Verifica-se que a k -ésima *spline* tem como extremos os pontos (t_{k-1}, x_{k-1}) e (t_k, x_k) e que as derivadas de $x(t)$ nesses pontos são dadas por f_{k-1} e f_k respectivamente. Logo, os coeficientes a_k , b_k , c_k e d_k devem satisfazer (2.26).

$$\begin{aligned} a_k t_{k-1}^3 + b_k t_{k-1}^2 + c_k t_{k-1} + d_k &= x_{k-1} \\ a_k t_k^3 + b_k t_k^2 + c_k t_k + d_k &= x_k \\ 3 a_k t_{k-1}^2 + 2 b_k t_{k-1} + c_k &= f_{k-1} \\ 3 a_k t_k^2 + 2 b_k t_k + c_k &= f_k \end{aligned} \quad (2.26)$$

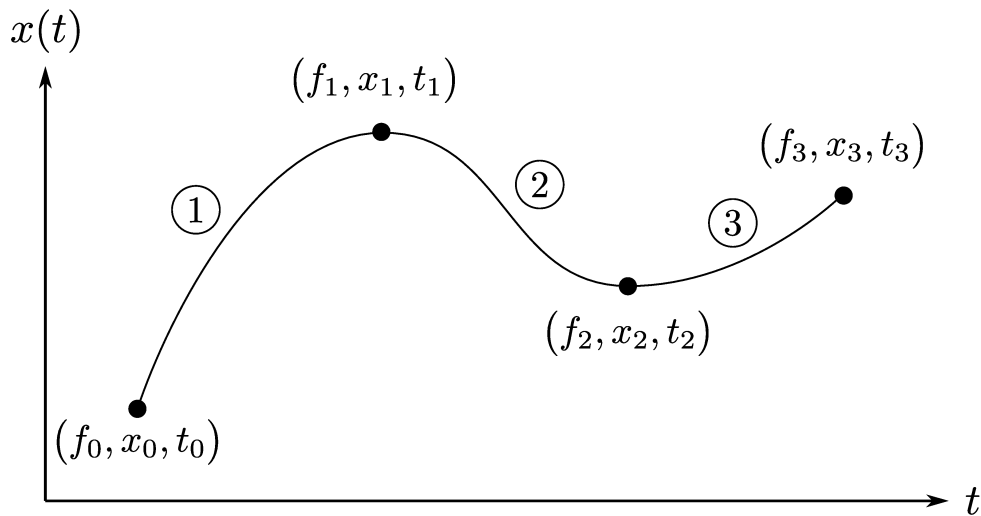
Nota-se que a cada *spline* estão associadas quatro equações, de forma que um sistema com $4M$ equações pode ser construído para que os coeficientes a_k , b_k , c_k e d_k sejam determinados para $k = 1, 2, \dots, M$.

Considerando, por exemplo, que $M = 3$, formula-se $x(t)$ da seguinte forma (ver a Figura 10):

$$x(t) = \begin{cases} a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_2 \\ a_3 t^3 + b_3 t^2 + c_3 t + d_3, & \text{se } t_2 < t \leq t_3 \end{cases} \quad (2.27)$$

ao passo que $f(t)$ é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 3 a_1 t^2 + 2 b_1 t + c_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 3 a_2 t^2 + 2 b_2 t + c_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_2 \\ 3 a_3 t^2 + 2 b_3 t + c_3, & \text{se } t_2 < t \leq t_3 \end{cases} \quad (2.28)$$



- ① $x(t) = a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1$
- ② $x(t) = a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2$
- ③ $x(t) = a_3 t^3 + b_3 t^2 + c_3 t + d_3$

Figura 10 – Representação da trajetória do estado $x(t)$ considerando $M = 3$.

Uma vez que as extremidades de cada *spline*, assim como as derivadas de $x(t)$ associadas às mesmas, se encontram definidas, é possível que os coeficientes a_k , b_k , c_k , e d_k sejam determinados por meio da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = a_1 t_0^3 + b_1 t_0^2 + c_1 t_0 + d_1 \\ x_1 = a_1 t_1^3 + b_1 t_1^2 + c_1 t_1 + d_1 \\ x_1 = a_2 t_1^3 + b_2 t_1^2 + c_2 t_1 + d_2 \\ x_2 = a_2 t_2^3 + b_2 t_2^2 + c_2 t_2 + d_2 \\ x_2 = a_3 t_2^3 + b_3 t_2^2 + c_3 t_2 + d_3 \\ x_3 = a_3 t_3^3 + b_3 t_3^2 + c_3 t_3 + d_3 \\ f_0 = 3 a_1 t_0^2 + 2 b_1 t_0 + c_1 \\ f_1 = 3 a_1 t_1^2 + 2 b_1 t_1 + c_1 \\ f_1 = 3 a_2 t_1^2 + 2 b_2 t_1 + c_2 \\ f_2 = 3 a_2 t_2^2 + 2 b_2 t_2 + c_2 \\ f_2 = 3 a_3 t_2^2 + 2 b_3 t_2 + c_3 \\ f_3 = 3 a_3 t_3^2 + 2 b_3 t_3 + c_3 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Finalmente, é importante enfatizar que, se um vetor de variáveis de estado e/ou um vetor de variáveis de controle estiverem associados ao problema em questão, pode-se estender facilmente, para esse caso, a metodologia proposta.

2.4.2 COLOCAÇÃO HERMITE-SIMPSON

A colocação Hermite-Simpson é baseada na quadratura de Simpson, empregada tanto na computação do integrando L associado à função objetivo, quanto na discretização das restrições dinâmicas. Para que a quadratura de Simpson seja implementada é necessário que nós de colocação intermediários, posicionados entre os nós de colocação originais, sejam definidos (KELLY, 2017). As grandezas associadas aos nós intermediários são representadas utilizando-se uma barra. Por exemplo, os valores assumidos pelos controles nos nós intermediários são denotados por $\bar{\mathbf{u}}_k$, $k = 0, 2, \dots, M - 1$.

Mais especificamente, o valor atribuído ao controle $u(t)$ no nó de colocação intermediário posicionado entre os nós k e $k + 1$ é denotado por \bar{u}_k . Assumindo-se $h_k = t_{k+1} - t_k$, computa-se a integral de L da seguinte forma:

$$\int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \approx \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{6} h_k (L_k + 4\bar{L}_k + L_{k+1}) \quad (2.30)$$

sendo $L_k = L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)$ e $\bar{L}_k = L(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{t}_k)$ (KELLY, 2017).

Enquanto $\bar{\mathbf{x}}_k$ pode ser computado a partir dos valores atribuídos a \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_{k+1} , como será mostrado adiante, e $\bar{t}_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$, $\bar{\mathbf{u}}_k$ deve ser uma variável de projeto assim como \mathbf{u}_k e \mathbf{x}_k (KELLY, 2017). Nota-se, portanto, que o PPNL formulado com base na colocação Hermite-Simpson possui mais variáveis de projeto que aquele obtido por meio da colocação trapezoidal, considerando-se que o mesmo número de nós de colocação seja utilizado em ambos os casos.

Após a discretização do vetor de variáveis de estados é possível que as restrições diferenciais associadas à dinâmica do PCO sejam representadas por um conjunto de restrições algébricas. Para tanto, é necessário que as restrições dinâmicas sejam reescritas na forma integral e que a quadratura de Simpson seja empregada (KELLY, 2017):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.31a)$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.31b)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \approx \frac{1}{6} h_k (\mathbf{f}_k + 4\bar{\mathbf{f}}_k + \mathbf{f}_{k+1}) \quad (2.31c)$$

Assim sendo, M restrições de igualdade algébricas são formuladas com base nesta aproximação, isto é:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k - \frac{1}{6} h_k (\mathbf{f}_k + 4\bar{\mathbf{f}}_k + \mathbf{f}_{k+1}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M - 1 \quad (2.32)$$

sendo $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)$ e $\bar{\mathbf{f}}_k = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{t}_k)$ obtidos a partir da computação da dinâmica do sistema.

Para que $\bar{\mathbf{f}}_k$ possa ser computado é necessário antes que $\bar{\mathbf{x}}_k$ seja determinado empregando-se a interpolação de Hermite:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k+1}) + \frac{h_k}{8}(\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_{k+1}) \quad (2.33)$$

Assim sendo é possível que $\bar{\mathbf{x}}_k$ seja computado diretamente, ou que $\bar{\mathbf{x}}_k$ seja considerado uma variável de projeto. Nesse último caso, é necessário que outras M restrições de igualdade algébricas, definidas a partir de (2.33), sejam acrescentadas ao PPNL:

$$\bar{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k+1}) - \frac{h_k}{8}(\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_{k+1}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.34)$$

Analogamente ao que foi desenvolvido para a colocação trapezoidal, as restrições associadas ao PCO podem ser transcritas da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_U \rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}_k \leq \mathbf{x}_U, & k = 0, \dots, M \\ \mathbf{x}_L \leq \bar{\mathbf{x}}_k \leq \mathbf{x}_U, & k = 0, \dots, M-1 \end{cases} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_U \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_U, & k = 0, \dots, M \\ \mathbf{u}_L \leq \bar{\mathbf{u}}_k \leq \mathbf{u}_U, & k = 0, \dots, M-1 \end{cases} \quad (2.35b)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \leq \mathbf{0}, & k = 0, \dots, M \\ \mathbf{c}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{t}_k) \leq \mathbf{0}, & k = 0, \dots, M-1 \end{cases} \quad (2.35c)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \leq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_M, t_M) \leq \mathbf{0} \quad (2.35d)$$

em que a condição inicial é dada por:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0, \quad k = 0 \quad (2.36)$$

Para a colocação Hermite-Simpson, o PCO é dado como:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k} J = \varphi(\mathbf{x}_M, t_M) + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{6} h_k (L_k + 4\bar{L}_k + L_{k+1}) \quad (2.37a)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k - \frac{1}{6} h_k (\mathbf{f}_k + 4\bar{\mathbf{f}}_k + \mathbf{f}_{k+1}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.37b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.37c)$$

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}_k \leq \mathbf{x}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.37d)$$

$$\mathbf{x}_L \leq \bar{\mathbf{x}}_k \leq \mathbf{x}_U, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.37e)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.37f)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \bar{\mathbf{u}}_k \leq \mathbf{u}_U, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.37g)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \leq \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.37h)$$

$$\mathbf{c}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{t}_k) \leq \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.37i)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_M, t_M) \leq \mathbf{0} \quad (2.37j)$$

para t_0 e t_f conhecidos. Não sendo esse o caso, devem-se adotar t_0 e t_f como variáveis de projeto, e as restrições:

$$t_{0L} \leq t_0 \leq t_{0U} \quad (2.38a)$$

$$t_{fL} \leq t_f \leq t_{fU} \quad (2.38b)$$

em que t_{0L} e t_{fL} representam os limites inferiores e t_{0U} e t_{fU} os limites superiores.

Uma vez que o PPNL tenha sido resolvido e que tanto \mathbf{x}_k quanto \mathbf{u}_k tenham sido determinados para $k = 0, 1, \dots, M$, é possível que as trajetórias de estados e controles sejam obtidas. A colocação Hermite-Simpson é baseada na suposição de que os perfis de controle evoluem quadraticamente entre os nós de colocação e que podem, portanto, ser aproximados pela concatenação de polinômios (ou *splines*) de segunda ordem, conforme ilustrado na Figura 11 (KELLY, 2017).

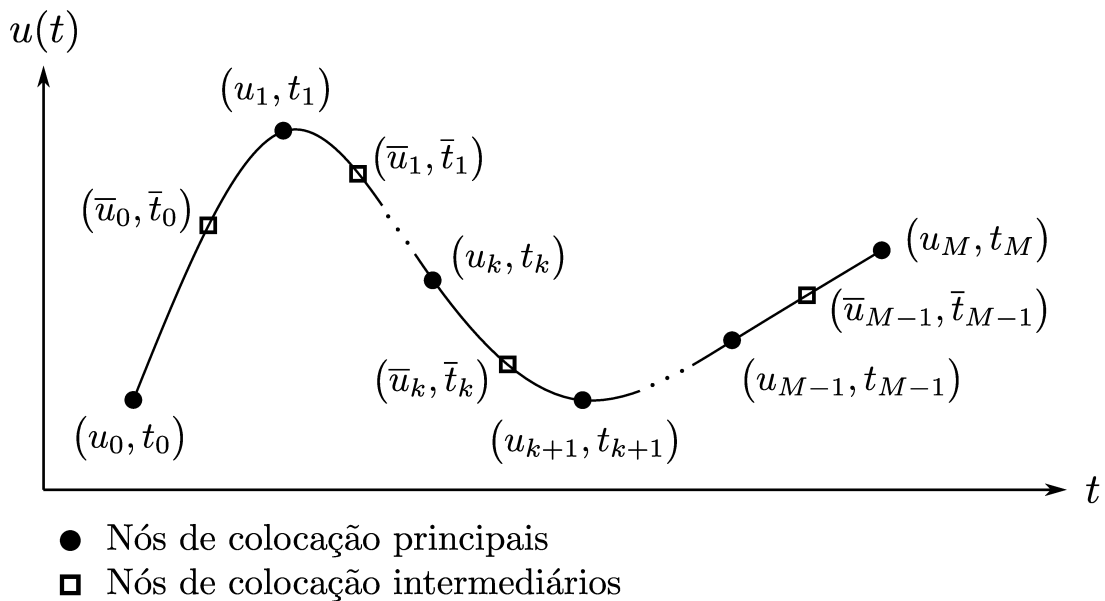


Figura 11 – Representação da trajetória de controle $u(t)$ via concatenação de polinômios de segunda ordem.

Supondo que exista apenas um controle $u(t)$, pode-se determiná-lo por meio da seguinte relação:

$$u(t) = \begin{cases} a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2, & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots & \\ a_k t^2 + b_k t + c_k, & \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k \\ \vdots & \\ a_M t^2 + b_M t + c_M, & \text{se } t_{M-1} \leq t \leq t_M \end{cases} \quad (2.39)$$

Nesta equação observa-se que a k -ésima *spline* tem como extremos os pontos (t_{k-1}, u_{k-1}) e (t_k, u_k) , e como ponto médio $(\bar{t}_{k-1}, \bar{u}_{k-1})$. Logo, os coeficientes a_k , b_k e c_k devem satisfazer a seguinte relação:

$$a_k t_{k-1}^2 + b_k t_{k-1} + c_k = u_{k-1} \quad (2.40a)$$

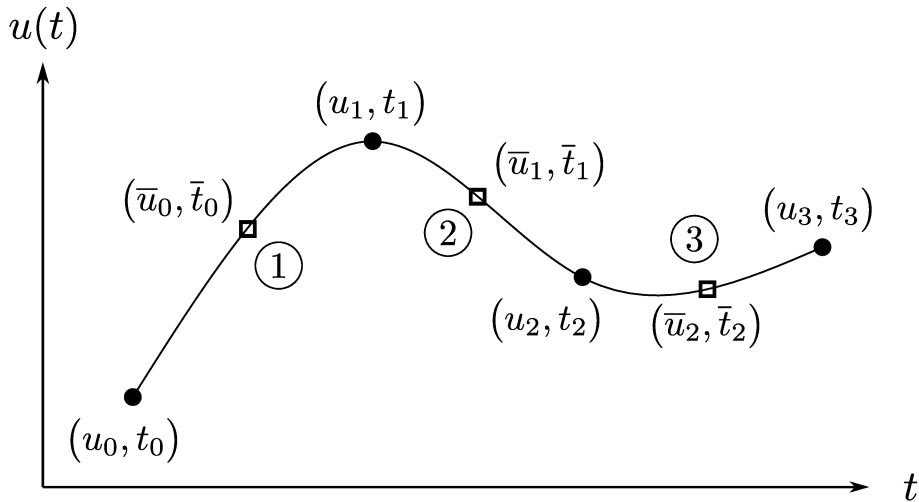
$$a_k \bar{t}_{k-1}^2 + b_k \bar{t}_{k-1} + c_k = \bar{u}_{k-1} \quad (2.40b)$$

$$a_k t_k^2 + b_k t_k + c_k = u_k \quad (2.40c)$$

Nota-se que a cada *spline* estão associadas três equações, de forma que um sistema com $3M$ equações pode ser construído para que os coeficientes a_k , b_k e c_k sejam determinados para $k = 1, 2, \dots, M$.

Para $M = 3$, tem-se a seguinte estratégia de controle (ver a Figura 12):

$$u(t) = \begin{cases} a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_2 \\ a_3 t^2 + b_3 t + c_3, & \text{se } t_2 < t \leq t_3 \end{cases} \quad (2.41)$$



$$\textcircled{1} \quad u(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1$$

$$\textcircled{2} \quad u(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$$

$$\textcircled{3} \quad u(t) = a_3 t^2 + b_3 t + c_3$$

Figura 12 – Representação da trajetória do controle $u(t)$ considerando $M = 3$.

Neste caso, é possível determinar os coeficientes a_k , b_k e c_k via solução do seguinte

sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a_1 t_0^2 + b_1 t_0 + c_1 \\ u_1 = a_1 t_1^2 + b_1 t_1 + c_1 \\ u_1 = a_2 t_1^2 + b_2 t_1 + c_2 \\ u_2 = a_2 t_2^2 + b_2 t_2 + c_2 \\ u_2 = a_3 t_2^2 + b_3 t_2 + c_3 \\ u_3 = a_3 t_3^2 + b_3 t_3 + c_3 \\ \bar{u}_0 = a_1 \bar{t}_0^2 + b_1 \bar{t}_0 + c_1 \\ \bar{u}_1 = a_2 \bar{t}_1^2 + b_2 \bar{t}_0 + c_2 \\ \bar{u}_2 = a_3 \bar{t}_2^2 + b_3 \bar{t}_0 + c_3 \end{array} \right. \quad (2.42)$$

É importante ressaltar que o procedimento apresentado pode ser facilmente adaptado para um vetor de variáveis de controle. A trajetória dos estados entre os nós de colocação, por sua vez, é aproximada utilizando-se *splines* cúbicas, conforme apresentado na Seção 2.4.1.

2.4.3 COLOCAÇÃO PSEUDO-ESPECTRAL

Os métodos pseudo-espectrais foram inicialmente propostos para solução de equações diferenciais, com grande aplicabilidade em fluidodinâmica computacional. Desde 1995, esses métodos vem sendo empregados na solução de PCOs. Diferentemente dos métodos baseados em diferenças finitas, que fazem uso de informações locais, os métodos pseudo-espectrais utilizam amostras de todo o domínio na determinação dos valores assumidos pela derivada de uma dada função (BECERRA; GALVÃO, 2010).

A colocação pseudo-espectral baseia-se na aproximação do vetor de variáveis de estado e controle por uma somatória de polinômios suaves, como os de Legendre ou Chebyshev, no intervalo $[-1, 1]$. Nesse caso, cada estado associado a $\mathbf{x}(t)$ é aproximado por um único polinômio de alta ordem, assim como cada controle associado a $\mathbf{u}(t)$ (BECERRA, 2019). Vale ressaltar que essa abordagem é distinta daquelas nas quais se baseiam os métodos apresentados nas Seções 2.4.1 e 2.4.2, em que os estados e controles são aproximados por uma concatenação de vários polinômios de baixa ordem. Os métodos pseudo-espectrais apresentam taxa de convergência exponencial, o que possibilita a obtenção de resultados bastante satisfatórios mesmo quando utilizam-se malhas grosseiras. Além disso, esses métodos viabilizam a computação de derivadas e integrais de forma simples, direta, e precisa, o que pode ser bastante útil na resolução de PCOs, cuja formulação depende diretamente dessas operações (BECERRA; GALVÃO, 2010).

Os resultados advindos do emprego da colocação pseudo-espectral apresentados no presente trabalho foram obtidos com base na utilização dos polinômios de Legendre. Um

polinômio de Legendre de ordem M pode ser computado segundo a seguinte expressão:

$$L_M(\tau) = \frac{1}{2^M M!} \frac{d^M}{d\tau^M} (\tau^2 - 1)^M \quad (2.43)$$

Alguns exemplos de polinômios de Legendre são descritos a seguir:

$$\begin{aligned} L_0(\tau) &= 1 \\ L_1(\tau) &= \tau \\ L_2(\tau) &= \frac{1}{2}(3\tau^2 - 1) \\ L_3(\tau) &= \frac{1}{2}(5\tau^3 - 3\tau) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os nós de colocação associados à essa abordagem devem ser distribuídos de acordo com os nós de Legendre-Gauss-Lobato (LGL):

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{LGL}} = [\tau_0 \quad \dots \quad \tau_k \quad \dots \quad \tau_M] \quad (2.45)$$

Estes são definidos de forma que $\tau_0 = -1$, $\tau_M = 1$, e τ_k , para $k = 1, \dots, M - 1$, são as raízes do polinômio $\frac{dL_M(\tau)}{d\tau}$ (BECERRA; GALVÃO, 2010).

Se, por exemplo, $M = 5$, tem-se:

$$L_5(\tau) = \frac{63}{8}\tau^5 - \frac{35}{4}\tau^3 + \frac{15}{8}\tau \quad (2.46)$$

sendo que a respectiva derivada é dada como:

$$\frac{dL_5(\tau)}{d\tau} = \frac{315}{8}\tau^4 - \frac{105}{4}\tau^2 + \frac{15}{8} \quad (2.47)$$

As raízes dessa última equação são iguais a $\pm 0,7651$ e $\pm 0,2852$, respectivamente. Assim sendo, os nós LGL para $M = 5$ (ver a Figura 13) são dados por:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{LGL}} = [-1 \quad -0,7651 \quad -0,2851 \quad 0,2852 \quad 0,7651 \quad 1] \quad (2.48)$$

Nós LGL

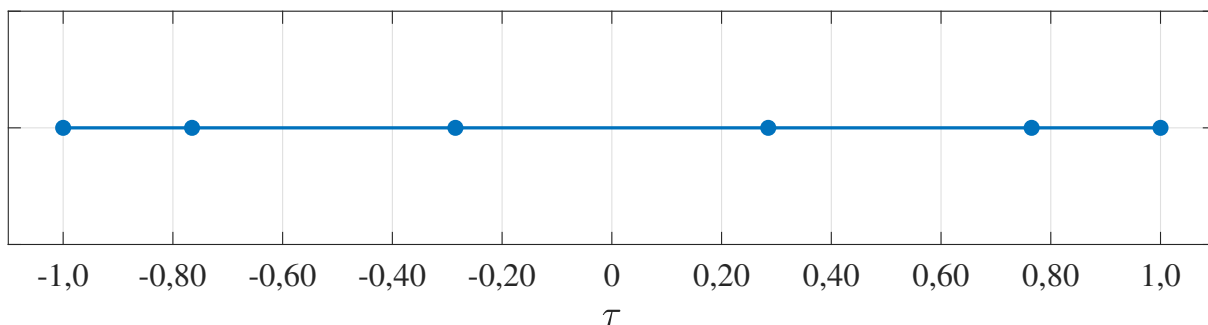


Figura 13 – Nós LGL para $M = 5$.

Cabe ressaltar que a adoção dos nós LGL possibilita que os estados e controles sejam aproximados com maior precisão e que as operações de derivação e integração associadas a essas variáveis sejam computadas de forma mais acurada. Se outro tipo de polinômio fosse empregado na interpolação dos estados e controles, como por exemplo o polinômio de Chebyshev, uma metodologia distinta seria adotada na determinação dos nós de colocação (BECERRA; GALVÃO, 2010).

Como dito anteriormente, os estados e controles são aproximados pelo somatório de polinômios de Legendre no intervalo $\tau \in [-1, 1]$. Além disso, é nesse mesmo intervalo que os nós LGL são definidos. No entanto, tanto os estados quanto os controles devem assumir valores em $t \in [t_0, t_f]$. Assim sendo, conclui-se que a implementação da colocação pseudo-espectral depende da mudança de domínio descrito pela seguinte relação (BECERRA; GALVÃO, 2010):

$$\tau \leftarrow \frac{2}{t_f - t_0}t - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (2.49)$$

Considerando esta abordagem pode-se reformular o PCO como segue (BECERRA, 2019):

$$\min_{\mathbf{u}(\tau)} J = \varphi(\mathbf{x}(1), 1) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 L(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (2.50a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau), \quad \mathbf{x}(-1) = \mathbf{x}_0 \quad (2.50b)$$

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}(\tau) \leq \mathbf{x}_U \quad (2.50c)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}(\tau) \leq \mathbf{u}_U \quad (2.50d)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) \leq \mathbf{0} \quad (2.50e)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(1), 1) \leq \mathbf{0} \quad (2.50f)$$

Então, para que a colocação pseudo-espectral de Legendre seja implementada, cada estado $x(t)$ associado a $\mathbf{x}(t)$ e cada controle $u(t)$ associado a $\mathbf{u}(t)$ devem ser aproximados segundo as seguintes relações:

$$x(\tau) \approx \sum_{k=0}^M x(\tau_k) \phi_k(\tau) \quad (2.51a)$$

$$u(\tau) \approx \sum_{k=0}^M u(\tau_k) \phi_k(\tau) \quad (2.51b)$$

sendo τ_k o k -ésimo nó LGL e $\phi_k(\tau)$ o k -ésimo polinômio interpolador de Lagrange (BECERRA; GALVÃO, 2010):

$$\phi_k(\tau) = \frac{1}{M(M+1)L_M(\tau_k)} \frac{(\tau^2 - 1)\dot{L}_M(\tau)}{\tau - \tau_k} \quad (2.52)$$

A integral de L é computada empregando-se a quadratura de Gauss:

$$\int_{-1}^1 L(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \approx \sum_{k=0}^M L(\tau_k) w_k \quad (2.53)$$

sendo w_k um peso definido como (BECERRA; GALVÃO, 2010):

$$w_k = \frac{2}{M(M+1)} \frac{1}{L_N^2(\tau_k)} \quad (2.54)$$

Vale ressaltar que L_M e L representam, respectivamente, o polinômio de Legendre de ordem M e o integrando associado ao termo de Lagrange da função objetivo J . Dada a semelhança entre as notações atribuídas a essas grandezas, é preciso cuidado para que não haja confusões.

A computação das derivadas dos estados nos nós de colocação é baseada na definição da matriz de diferenciação D :

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{L_M(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i)L_M(\tau_i)} & \text{se } k \neq i \\ -\frac{M(M+1)}{4} & \text{se } k = i = 0 \\ \frac{M(M+1)}{4} & \text{se } k = i = N \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (2.55)$$

e depende dos valores atribuídos aos estados em cada nó de colocação de forma que:

$$\dot{x}(\tau_k) \approx \sum_{i=0}^M D_{ki} x(\tau_k) \quad (2.56)$$

É possível ainda que a relação acima seja reescrita na forma matricial (BECERRA; GALVÃO, 2010):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\tau_0) \\ \dot{x}(\tau_1) \\ \vdots \\ \dot{x}(\tau_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{00} & D_{01} & \cdots & D_{0M} \\ D_{10} & D_{11} & \cdots & D_{1M} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ D_{M0} & D_{M1} & \cdots & D_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ x(\tau_1) \\ \vdots \\ x(\tau_M) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Assim sendo, M restrições de igualdade algébricas são formuladas como segue:

$$\dot{x}(\tau_k) - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_k), \mathbf{u}(\tau_k), \tau_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.58)$$

em que a derivada pode ser computada pela Equação (2.56).

Assim como foi apresentado anteriormente, as restrições laterais, terminais, e de caminho podem ser reescritas como (BECERRA, 2019):

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_U \rightarrow \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}(\tau_k) \leq \mathbf{x}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.59a)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_U \rightarrow \mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}(\tau_k) \leq \mathbf{u}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.59b)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{c}(\mathbf{x}(\tau_k), \mathbf{u}(\tau_k), \tau_k) \leq \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.59c)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \leq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(1), 1) \leq \mathbf{0} \quad (2.59d)$$

em que a condição inicial é dada por:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0, \quad k = 0 \quad (2.60)$$

Em resumo, empregando-se esta abordagem, descreve-se o PCO da seguinte forma:

$$\min_{\mathbf{u}(\tau_k), \mathbf{x}(\tau_k)} J = \varphi(\mathbf{x}(1), 1) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=0}^M L(\tau_k) w_k \quad (2.61a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_k), \mathbf{u}(\tau_k), \tau_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.61b)$$

$$\mathbf{x}(-1) = \mathbf{x}_0 \quad (2.61c)$$

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x}(\tau_k) \leq \mathbf{x}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.61d)$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}(\tau_k) \leq \mathbf{u}_U, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.61e)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(\tau_k), \mathbf{u}(\tau_k), \tau_k) \leq \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, M \quad (2.61f)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(1), 1) \leq \mathbf{0} \quad (2.61g)$$

considerando que t_0 e t_f sejam conhecidos. Não sendo esse o caso, devem-se adotar t_0 e t_f como variáveis de projeto, e as restrições:

$$t_{0L} \leq t_0 \leq t_{0U} \quad (2.62a)$$

$$t_{fL} \leq t_f \leq t_{fU} \quad (2.62b)$$

devem ser incorporadas ao PPNL, sendo os limites inferiores de t_0 e t_f denotados por t_{0L} e t_{fL} e os superiores por t_{0U} e t_{fU} , respectivamente.

Considerando-se apenas um estado e um controle, e adotando-se $M = 2$ tem-se:

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^2 x(\tau_k) \phi_k(\tau) = x(\tau_0) \phi_0(\tau) + x(\tau_1) \phi_1(\tau) + x(\tau_2) \phi_2(\tau) \quad (2.63a)$$

$$u(\tau) = \sum_{k=0}^2 u(\tau_k) \phi_k(\tau) = u(\tau_0) \phi_0(\tau) + u(\tau_1) \phi_1(\tau) + u(\tau_2) \phi_2(\tau) \quad (2.63b)$$

Uma vez que $M = 2$, se que:

$$L_2(\tau) = \frac{3}{2} \tau^2 - \frac{1}{2} \quad (2.64a)$$

$$\frac{L_2(\tau)}{d\tau} = 3\tau \quad (2.64b)$$

Nesse caso, os nós de colocação LGL são dados por

$$\tau_0 = -1 \quad (2.65a)$$

$$\tau_1 = 0 \quad (2.65b)$$

$$\tau_2 = 1 \quad (2.65c)$$

enquanto os polinômios interpoladores de Lagrange são definidos como:

$$\phi_0(\tau) = \frac{1}{2}(\tau^2 - \tau) \quad (2.66a)$$

$$\phi_1(\tau) = 1 - \tau^2 \quad (2.66b)$$

$$\phi_2(\tau) = \frac{1}{2}(\tau^2 + \tau) \quad (2.66c)$$

Desta forma, segue que:

$$x(\tau) = a_x \tau^2 + b_x \tau + c_x \quad (2.67a)$$

$$u(\tau) = a_u \tau^2 + b_u \tau + c_u \quad (2.67b)$$

em que:

$$a_x = \frac{x(\tau_0)}{2} - x(\tau_1) + \frac{x(\tau_2)}{2} \quad (2.68a)$$

$$b_x = \frac{x(\tau_2)}{2} - \frac{x(\tau_0)}{2} \quad (2.68b)$$

$$c_x = x(\tau_1) \quad (2.68c)$$

Analogamente:

$$a_u = \frac{u(\tau_0)}{2} - u(\tau_1) + \frac{u(\tau_2)}{2} \quad (2.69a)$$

$$b_u = \frac{u(\tau_2)}{2} - \frac{u(\tau_0)}{2} \quad (2.69b)$$

$$c_u = u(\tau_1) \quad (2.69c)$$

Apesar das expressões que descrevem $x(t)$ e $u(t)$ não terem sido formuladas, é possível que os valores atribuídos a essas grandezas para um dado $t = t'$ sejam computados com base na determinação do $\tau = \tau'$ correspondente, sendo que:

$$\tau' = \frac{2}{t_f - t_0} t' - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (2.70)$$

Alternativamente, é possível que as expressões que descrevem $x(t)$ e $u(t)$ sejam de fato determinadas. Neste caso, segue que:

$$x(t) = a'_x t^2 + b'_x t + c'_x \quad (2.71a)$$

$$u(t) = a'_u t^2 + b'_u t + c'_u \quad (2.71b)$$

sendo:

$$a'_x = \frac{4}{(t_f - t_0)^2} a_x \quad (2.72a)$$

$$b'_x = \frac{2}{t_f - t_0} b_x - 4 \frac{t_f + t_0}{(t_f - t_0)^2} a_x \quad (2.72b)$$

$$c'_x = c_x - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} b_x + \frac{(t_f + t_0)^2}{(t_f - t_0)^2} a_x \quad (2.72c)$$

Analogamente:

$$a'_u = \frac{4}{(t_f - t_0)^2} a_u \quad (2.73a)$$

$$b'_u = \frac{2}{t_f - t_0} b_u - 4 \frac{t_f + t_0}{(t_f - t_0)^2} a_u \quad (2.73b)$$

$$c'_u = c_u - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} b_u + \frac{(t_f + t_0)^2}{(t_f - t_0)^2} a_u \quad (2.73c)$$

Independente da abordagem utilizada, fica evidente que computar $x(t)$ e $u(t)$ com base nos resultados advindos do emprego da colocação pseudo-espectral não é uma tarefa trivial. De fato, a elaboração das trajetórias de estados e controles a partir dos resultados provenientes da implementação das colocações trapezoidal ou Hermite-Simpson é baseada em um procedimento consideravelmente mais simples e direto. No entanto, uma vez que um único polinômio é utilizado na interpolação de cada um dos estados e controles, as trajetórias associadas à colocação pseudo-espectral tendem a ser bastante suaves.

2.5 PACOTES AVALIADOS

O estudo comparativo apresentado no presente trabalho baseia-se no emprego dos pacotes *PSOPT*, *FALCON* e *COPILOTS*. Vale ressaltar que a utilização desses não depende do pagamento de qualquer licença, e que tanto o *PSOPT* quanto o *COPILOTS* são pacotes de código aberto. Cada um dos pacotes avaliados é sucintamente descrito a seguir.

2.5.1 *PSOPT*

O *PSOPT* (*Pseudospectral Optimal Control Solver*) é um pacote desenvolvido para solução de PCOs a partir do emprego de métodos pseudo-espectrais, mas que possibilita a utilização de métodos de discretização local, como a colocação trapezoidal e a colocação Hermite-Simpson (BECERRA, 2019). Escrito em C++, apresenta um desempenho bastante satisfatório em comparação com outros pacotes baseados no Matlab® (BECERRA, 2010). Vale ressaltar que o *PSOPT* é um pacote gratuito e de código aberto que só utiliza ferramentas igualmente gratuitas e abertas como, por exemplo, o IPOPT, pacote que implementa o Método de Ponto Interior, empregado pelo *PSOPT* para resolução de PPNLs (WÄCHTER; BIEGLER, 2006). O *PSOPT* tem sido largamente empregado pela comunidade científica e foi uma das ferramentas utilizadas no planejamento da primeira missão espacial brasileira rumo ao espaço profundo, em direção ao sistema de asteroides 2001-SN263 (BECERRA, 2010).

O *PSOPT* dispõe de ferramentas que possibilitam desde o uso de operações matemáticas como o produto vetorial, o produto escalar e o produto matricial, até a geração automática de estimativas iniciais para as variáveis de controle e estado. Caso estimativas iniciais para estas variáveis não tenham sido fornecidas pelo usuário, assume-se que os estados e controles são constantes e iguais à média dos seus limites (BECERRA, 2019). Por exemplo, se uma variável de estado ($x(t)$) está sujeita à restrição $-5 \leq x(t) \leq 15$, utiliza-se por *default* a estimativa inicial $x_g(t) = 5$. Se um dos limites da variável em questão for igual a $-\infty$ ou ∞ , assume-se como estimativa inicial o outro limite, e caso ambos os limites sejam iguais a $-\infty$ e ∞ , adota-se $x_g(t) = 0$.

Por fim, vale ressaltar que o código fonte do *PSOPT* conta com inúmeros exemplos e um guia do usuário bastante completo, que traz instruções referentes à utilização do pacote e introduz conceitos fundamentais acerca da colocação pseudo-espectral. O desenvolvimento do presente trabalho baseia-se na versão 4.0 do *PSOPT* cujo código fonte, que só pode ser compilado em sistemas Linux ou Mac, pode ser acessado em <<https://cutt.ly/OjYG7hD>>.

2.5.2 *FALCON*

O *FALCON* (*FSD Optimal Control Toolbox for Matlab*[®]) é um pacote desenvolvido para a solução de PCOs a partir do uso de métodos de colocação direta como a colocação trapezoidal e o método de Euler. Esse pacote faz uso de ferramentas de cálculo simbólico na obtenção das derivadas analíticas da função objetivo e das restrições, o que proporciona um desempenho bastante satisfatório em termos do tempo de processamento. Além disso, o *FALCON*, assim como o *PSOPT*, emprega o IPOPT na resolução de PPNLs (WÄCHTER; BIEGLER, 2006). Apesar do *FALCON* ser um pacote de código fechado que possui uma versão paga, vale ressaltar que, empregando-se a versão gratuita, que serviu de base para o desenvolvimento deste trabalho, já é possível resolver uma ampla gama de PCOs.

Pelo fato do *FALCON* ser um pacote de código fechado, seu guia do usuário oculta algumas informações a respeito de seu funcionamento. Por exemplo, fica claro no guia do usuário que o *FALCON* gera, por *default*, estimativas iniciais para as variáveis de estado e controle caso o usuário não as forneça. No entanto, a maneira como essas estimativas são geradas não é informada. De qualquer forma, o guia do usuário do *FALCON* é completo o suficiente para que um usuário iniciante conheça o pacote e comece a utilizá-lo.

Aqueles que desejarem utilizar o *FALCON* devem criar uma conta em <<https://cutt.ly/6jYBzce>> e enviar aos desenvolvedores uma mensagem solicitando o acesso ao código fonte. O guia do usuário do *FALCON*, em contrapartida, pode ser acessado em <<https://cutt.ly/RjYBEee>> por qualquer um que se interesse em utilizar o pacote (RIECK et al., 2020).

2.5.3 *COPILOTS*

O *COPILOTS* (*Basic Optimal Control Solver*) é um pacote desenvolvido neste trabalho para resolução de PCOs a partir da implementação de Métodos de Colocação Direta, mais especificamente da colocação trapezoidal e da colocação Hermite-Simpson. Esse pacote, escrito para o Matlab[®], foi elaborado para ser utilizado por usuários com pouca ou nenhuma experiência na resolução computacional de PCOs. Para isso, o *COPILOTS* possibilita que, por meio da execução de um único comando, sejam criados, e já parcialmente preenchidos, os *scripts* a serem utilizados na estruturação do PCO, guiando o usuário iniciante.

Para facilitar a implementação do PCO, o *COPILOTS* pode gerar estimativas iniciais para as variáveis de estado e controle, caso o usuário não as forneça. Assim sendo, assume-se, por *default*, que os estados evoluem linearmente de seu valor inicial até seu valor final, considerando que esses tenham sido pré-definidos pelo usuário. Se não for esse o caso, assume-se que os estados são constantes e iguais à média dos seus limites, sendo esta estratégia também empregada na determinação das estimativas iniciais das variáveis de controle. Quando um dos limites for igual a $-\infty$ ou ∞ , assume-se como estimativa inicial o outro limite, e caso ambos os limites sejam iguais a $-\infty$ e ∞ , considera-se uma estimativa inicial nula.

Além disso, a sintaxe algébrica do *COPILOTS* é próxima à da formulação de Bolza, o que simplifica a implementação do PCO (FEBBO et al., 2020). O PPNL resultante da discretização é resolvido via utilização da função `fmincon`, nativa do Matlab[®], mais especificamente do algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*) (VANDERPLAATS, 1984).

Em termos comparativos, considerando uma das métricas propostas em Febbo et al. (2020) (o número de linhas de código), a implementação do estudo de caso apresentado na Seção 4.4, por exemplo, é mais simples no *COPILOTS* do que em outros pacotes similares, conforme observado na Tabela 1. Apesar dos programas baseados no Matlab[®] serem comumente menores que aqueles escritos em C++ ou Fortran, cabe ressaltar que a comparação introduzida na Tabela 1 ainda é válida considerando-se que o número de linhas associado ao *PSOPT*, que é baseado em C++, é menor do que aquele atribuído ao *ICLOCS* (*Imperial College London Optimal Control Software*) (FALUGI; KERRIGAN; WYK, 2018), um pacote desenvolvido para o Matlab[®].

Tabela 1 – Número de linhas de código utilizadas na implementação do problema do estacionamento (ver a Seção 4.4).

<i>COPILOTS</i>	149
<i>FALCON</i>	165
<i>PSOPT</i>	311
<i>ICLOCS</i>	362

O código fonte do *COPILOTS* pode ser visualizado e alterado caso necessário. Além disso, o pacote encontra-se estruturado em módulos e foi desenvolvido com base no paradigma da Programação Orientada a Objetos, o que facilita a compreensão do seu código fonte e a

implementação de atualizações (PAREJO et al., 2012).

O processo de instalação do *COPILOTS* é composto por duas etapas. Primeiramente, faz-se o *download* do código fonte em <<https://cutt.ly/wjYNIik>> e adiciona-se ao *path* do Matlab® (MATHWORKS, 2020a) a pasta em que o *COPILOTS* tenha sido armazenado. Em seguida, executa-se no Matlab® o comando `copilotsSetup`.

A resolução de um PCO no *COPILOTS* também é um processo constituído de duas etapas. Primeiramente executa-se o comando `copilotsNew` para criação da pasta *new*, que contém os *scripts* a serem preenchidos para implementação do PCO. Uma vez realizado esse preenchimento, executa-se o comando `copilots` dentro da pasta *new* para que se inicie o processo de obtenção da solução. Ao fim da execução a pasta *results* será criada para armazenamento dos resultados obtidos, como as trajetórias ótimas dos estados e controles, e os parâmetros associados à resolução do PPNL. A interpolação dos estados e controles é realizada de forma automática e a representação gráfica das trajetórias ótimas é, por padrão, apresentada ao fim da execução. O fluxograma da Figura 14 descreve as etapas do processo de implementação de um PCO no *COPILOTS*.

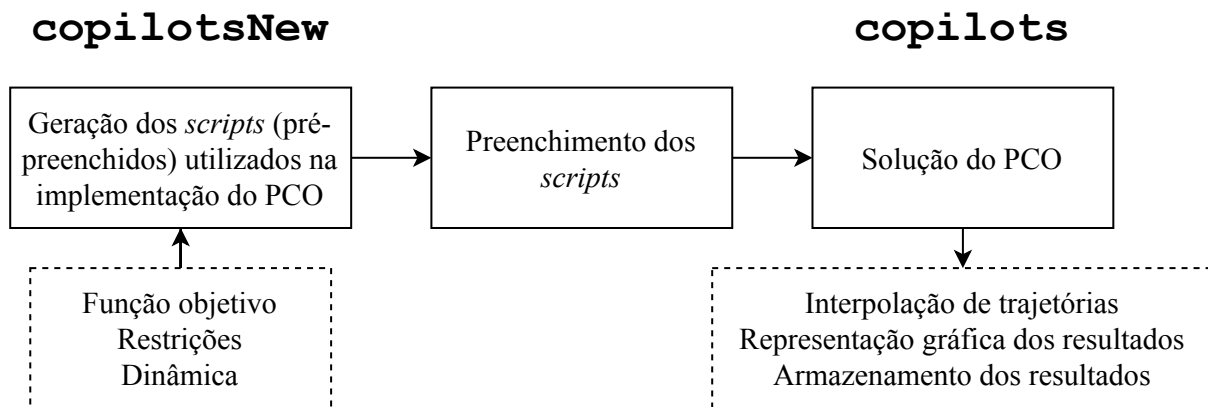


Figura 14 – Etapas do processo de implementação de um PCO no *COPILOTS*

Por fim vale ressaltar que tanto o código fonte do *COPILOTS* quanto os arquivos gerados após a execução do comando `copilotsNew` estão repletos de comentários que orientam o usuário iniciante. Mais ainda, acompanham o código fonte uma série de exemplos que podem ser utilizadas como base para implementação de novos estudos de caso.

2.6 MÉTRICAS PARA A AVALIAÇÃO DE PACOTES COMPUTACIONAIS

A realização de um estudo comparativo (ou *benchmarking*) de pacotes computacionais é normalmente motivada pela necessidade de verificarem-se as deficiências associadas a cada

pacote, de forma que os devidos aprimoramentos possam ser implementados (DOLAN; MORÉ, 2002). Além disso, os dados advindos de um estudo desse tipo podem ser bastante úteis aos usuários, que passam a ter uma noção mais acertada das capacidades de cada pacote (BONGARTZ et al., 1997; PAREJO et al., 2012).

No geral, um estudo comparativo de pacotes computacionais desenvolvidos para solução de problemas de otimização (POs) é baseado em dois principais critérios: desempenho e robustez (BENSON; SHANNO; VANDERBEI, 2000). O primeiro deles diz respeito à qualidade da solução atribuída a um dado pacote, avaliada a partir do valor ótimo da função objetivo, da máxima violação das restrições, ou do atendimento das condições de otimalidade. Estão ainda associados ao desempenho, parâmetros relacionados ao processo de obtenção da solução, como o número de avaliações da função objetivo, o número de nós de colocação, o tempo de processamento, ou o número de iterações (BONGARTZ et al., 1997; MITTELMANN, 1998; DOLAN; MORÉ; MUNSON, 2004; DARBY; HAGER; RAO, 2011; GRUNING; RAUH; ASCHEMANN, 2012; WANG et al., 2013; RAMOS, 2014; GARCÍA-HERAS; SOLER; SÁEZ, 2014; BÖCK; PLAINER; KUGI, 2016; BAINES et al., 2019; FOROOZANDEH et al., 2019; HOWELL; JACKSON; MANCHESTER, 2019). Já a robustez, no contexto deste trabalho, diz respeito à probabilidade de um dado pacote resolver um PO qualquer, independentemente da qualidade da solução. A robustez pode ser medida, por exemplo, pela razão entre o número de execuções bem sucedidas e o número total de execuções, sendo cada execução empregada na resolução de um PO distinto (BETTS; ELDERVELD; HUFFMAN, 1993; BONGARTZ et al., 1997).

Cabe ressaltar que métricas mais sofisticadas podem ser propostas. Um exemplo são os chamados perfis de desempenho, propostos em Dolan e MorÉ (2002), que são funções de distribuição que possibilitam a determinação da probabilidade de um dado pacote resolver um estudo de caso até então não avaliado, ou da probabilidade desse mesmo pacote se sair melhor do que outros no tocante a uma determinada métrica. Além disso, utilizando apenas a representação gráfica dos perfis de desempenho, é possível comparar diferentes pacotes de forma simples e direta. No entanto, não é recomendado que os perfis de desempenho sejam empregados na comparação de poucos pacotes ou na avaliação de um pequeno número de estudos de caso. Em Dolan e MorÉ (2002), por exemplo, é utilizado um conjunto contendo 70 estudos de caso.

Pode-se ainda empregar a métrica proposta em Benson, Shanno e Vanderbei (2000), que possibilita que pacotes sejam comparados aos pares. Considerando, por exemplo, a comparação entre os pacotes A e B, e assumindo t_{pA} e t_{pB} como sendo os tempos de processamento associados a esses pacotes, respectivamente, define-se $r = t_{pA}/t_{pB}$. Em seguida, computa-se o r associado a cada um dos n_p estudos de caso em análise e, por fim, determina-se $r_s = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} r$. Caso $r_s < 1$, pode-se dizer que, em média, os tempos de processamento associados ao pacote A são menores que aqueles atribuídos ao pacote B. O problema dessa abordagem é que ela possibilita apenas que os pacotes sejam comparados aos pares, de forma que fica difícil empregá-la quando há um número muito grande de pacotes sendo avaliados. Além disso, recomenda-se que n_p

seja consideravelmente alto. Em [Benson, Shanno e Vanderbei \(2000\)](#), por exemplo, adota-se $n_p = 889$.

Uma outra alternativa, no caso dos métodos diretos, seria comparar a solução obtida à solução analítica ([DARBY; HAGER; RAO, 2011](#)). No entanto, obter a solução analítica de um PCO pode ser uma tarefa bastante difícil, e algumas vezes até impossível, principalmente se a formulação desse PCO incluir muitas restrições, dinâmicas complexas, ou múltiplas fases.

Há ainda métricas que não estão associadas diretamente às soluções obtidas, que não podem ser quantificadas, ou que tem caráter subjetivo. Algumas dessas métricas podem ser representadas pelas seguintes questões ([PAREJO et al., 2012](#)):

- O pacote é de fácil utilização?
- O pacote exige uma licença paga?
- Quais plataformas (Windows[®], Linux, Mac[®]) suportam o pacote?
- O código-fonte do pacote segue as boas práticas de programação?
- O pacote é amplamente utilizado pelos membros da comunidade científica?
- Com que frequência o pacote recebe atualizações?
- A documentação associada ao pacote é completa?
- O pacote possui uma comunidade de usuários ativa?
- Como é o suporte fornecido pelos desenvolvedores do pacote?

Diante do que foi apresentado, fica evidente que determinar as métricas a serem avaliadas em um estudo comparativo não é uma tarefa trivial. Ainda assim, as conclusões advindas da computação dos dados obtidos por meio de um estudo comparativo depende fortemente das métricas utilizadas. Uma vez que há vários tipos de métricas, é difícil afirmar que uma seja melhor do que a outra, bem como é complicado dizer quais métricas devem ser empregadas ([BONGARTZ et al., 1997](#)). Além do mais, essa escolha pode ter uma relação direta com a aplicação à qual está vinculada a solução do PCO em análise. Pode ser, por exemplo, que uma aplicação *online* requira baixos tempos de processamento, de forma que essa métrica se torne uma das mais importantes no contexto em questão ([FEBBO et al., 2020](#)).

Além disso, há outros fatores que tornam a implementação de um estudo comparativo uma tarefa bastante complexa. Primeiramente, como já foi mencionado, é necessário que um conjunto de estudos de caso extenso e heterogêneo seja considerado, o que faz com que a representação dos dados obtidos se torne um desafio. Dada a extensão do conjunto de estudos de caso, pode ser necessário que os dados advindos do estudo comparativo sejam tratados

estatisticamente, porém, uma vez que há várias formas de fazê-lo, a interpretação desses dados é fonte de discordância (DOLAN; MORÉ, 2002; BONGARTZ et al., 1997).

3 METODOLOGIA

O presente capítulo tem como objetivo introduzir os estudos de caso e as métricas de desempenho que serviram de base para a implementação do estudo comparativo realizado.

3.1 ESTUDOS DE CASO

A escolha dos estudos de caso para fins de aplicação não é uma tarefa trivial. Em linhas gerais pode-se dizer que o conjunto de aplicações deve ser extenso, heterogêneo (BONGARTZ et al., 1997) e composto por problemas complexos e interessantes (DOLAN; MORÉ, 2002). De fato, a complexidade de um PCO pode ser inferida com base no número de estados, controles, e restrições (DOLAN; MORÉ, 2002), ou ainda na não linearidade da função objetivo e das restrições (BONGARTZ et al., 1997). Porém, apenas com base em uma análise subjetiva é possível dizer se um problema é interessante ou não. Assim, não há um consenso a respeito de quais estudos de caso devem ser empregados na elaboração de um estudo comparativo (DOLAN; MORÉ, 2002).

Nesse contexto, os estudos de caso abordados no presente trabalho foram escolhidos segundo os critérios de complexidade destacados anteriormente, e são descritos como:

1. Minimização do esforço durante a desaceleração de um bloco (BECERRA, 2008);
2. Problemas singulares: Caso 1 e Caso 2 (JACOBSON; GERSHWIN; LELE, 1970);
3. Minimização do esforço durante o *swing-up* de um pêndulo invertido (KELLY, 2017);
4. Minimização do tempo durante uma manobra de estacionamento (LI; WANG; SHAO, 2016);
5. Otimização da trajetória de um UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*) (AZEVEDO et al., 2018);
6. Lançamento do foguete Delta III (BENSON, 2005).

O estudo de caso (ou problema) 1 possui uma dinâmica bastante simples e poucas restrições, sendo o ponto de partida ideal para um usuário iniciante. Já os problemas singulares são de implementação simples, porém de solução complexa, dadas as propriedades numéricas atribuídas aos mesmos. O problema 3 tem os estados iniciais e finais previamente estabelecidos, enquanto o problema 4 possui um número consideravelmente elevado de restrições e é bastante sensível aos palpites iniciais atribuídos aos estados e controles. A dinâmica do problema 5 é descontínua, uma vez que depende da interpolação linear dos dados de uma tabela, e o problema 6 consiste em um PCO de múltiplas fases.

Vale ressaltar que, enquanto os índices de desempenho associados aos estudos de caso 1, 3 e 5 dependem apenas do termo de Lagrange, que contabiliza a evolução temporal dos estados e/ou controles, os índices de desempenho associados aos estudos de caso 2, 4 e 6 dependem somente do termo de Mayer, computado com base nos valores finais dos estados e/ou do tempo gasto na execução da trajetória. Assim sendo, conclui-se que o conjunto dos estudos de caso selecionados é consideravelmente heterogêneo.

Conforme comentado no capítulo anterior, várias métricas de comparação podem ser empregadas para avaliar pacotes computacionais. No presente trabalho serão utilizadas as seguintes:

1. Valor ótimo da função objetivo - J^*

Consiste no melhor valor obtido para a função objetivo J .

2. Tempo de processamento - t_p

Equivale ao tempo despendido na resolução do PCO. Uma vez que o sistema operacional empregado na geração dos resultados apresentados no presente trabalho não é um sistema de tempo real, é necessário que se tenha em mente que a cada execução atribui-se um t_p distinto. Desta forma, para que o t_p associado à resolução de um dado PCO seja determinado é preciso resolvê-lo várias vezes de forma que a média dos tempos atribuídos a cada execução possa ser computada. Logo, o tempo de execução associado a cada uma das soluções apresentadas no Capítulo 4 advém da média dos tempos atribuídos a cinco execuções distintas.

3. Número de avaliações da função objetivo - n_{aval}

Corresponde ao número de vezes em que a função objetivo foi computada durante a resolução do PCO.

4. Máxima violação das restrições - Δc_{max}

Uma vez que o PCO tenha sido resolvido e uma solução tenha sido obtida é necessário confirmar se tal solução de fato satisfaz todas as restrições associadas ao PCO. Uma vez que a resolução do mesmo consiste em um processo numérico, é inevitável que as restrições sejam levemente violadas. Uma vez computadas as violações associadas a cada restrição, pode-se determinar a violação máxima, utilizada nesse caso para que o atendimento das restrições seja verificado. Considerando que a solução obtida deve satisfazer todas as restrições, espera-se que Δc_{max} seja muito próximo de zero.

5. Número de nós de colocação mínimo - N_m

Com o aumento do número de nós (pontos) de colocação N , normalmente verifica-se a diminuição de J^* . No entanto, a partir de um dado N , denominado número de nós de

colocação mínimo, verifica-se que J^* se mantém praticamente inalterado à medida que N cresce. Essa métrica será abordada em detalhes mais adiante.

6. Número de execuções bem sucedidas - N_s

Para que a robustez de cada pacote avaliado possa ser verificada, propõe-se que cada estudo de caso seja resolvido considerando-se 30 valores de N distintos. A cada execução, um N diferente deve ser adotado, de forma que o número de execuções bem sucedidas indique o quão robusto um dado pacote pode ser. Vale ressaltar que o PPNL advindo do processo de transcrição do PCO depende do número de nós de colocação considerado. No presente trabalho considera-se $N \in [5, N_{max}]$, sendo N_{max} determinado a partir de um processo de experimentação numérica.

7. Número relativo de execuções bem sucedidas - $N_s\%$

Consiste na razão entre o número de execuções bem sucedidas e o número total de execuções. Nesse caso $N_s\% = \frac{N_s}{30}$.

Observa-se que as métricas 1, 2, 3 e 4 dependem fortemente do número de nós de colocação (N) empregado na obtenção de cada solução. Assim sendo, é necessário que um critério para a escolha deste parâmetro seja estabelecido. Não seria justo atribuir a todos os métodos o mesmo N , dadas as distintas propriedades numéricas de cada método. Por exemplo, os J^* associados às soluções obtidas por meio da colocação Hermite-Simpson, costumam ser bem menores que aqueles atribuídos às soluções advindas do emprego da colocação trapezoidal, supondo que o mesmo N seja utilizado nesses dois casos. De fato, a colocação Hermite-Simpson depende da implementação de nós intermediários, o que melhora a qualidade da solução obtida. Assim sendo, é pode-se dizer que há métodos que possibilitam a obtenção de melhores resultados a partir de N menores, capacidade que dificilmente seria avaliada atribuindo-se a todos os métodos o mesmo N .

Verifica-se que quanto maior o número de nós de colocação empregado na resolução de um PCO, menor tende a ser o J^* atribuído à solução obtida. No entanto, chega o momento em que o aumento de N não mais produz reduções significativas em J^* . O número mínimo de nós de colocação é definido de forma que, para $N > N_m$, não é possível verificar reduções relevantes em J^* .

Na Figura 15 é apresentada a relação entre N e os J^* atribuídos a dois pacotes quaisquer A e B, sendo J_{min}^* o valor para o qual converge J^* quando N é suficientemente grande. Avaliando-se N_{mA} e N_{mB} conclui-se que empregando o pacote B, é possível alcançar J_{min}^* utilizando um número menor de nós de colocação. Essa característica pode ser considerada uma vantagem do pacote B, dado que normalmente baixos N estão associados a baixos tempos de processamento (KELLY, 2017). Além disso, conclui-se que utilizar o pacote B adotando-se $N = N_\infty$ consiste em um desperdício de recursos computacionais.

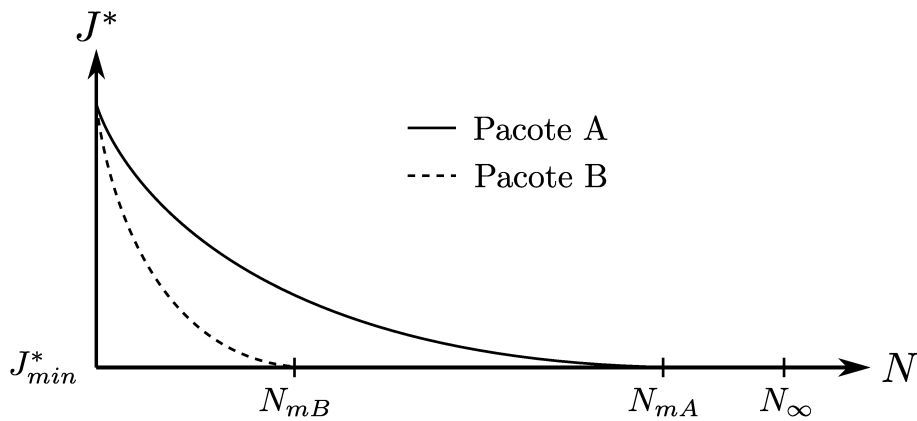


Figura 15 – Relação entre N e os J^* atribuídos a dois pacotes quaisquer A e B.

Para que N_m seja definido é necessário, primeiramente, que o PCO em análise seja resolvido n_m vezes, considerando-se, a cada execução, um N distinto. Em seguida, computa-se \bar{J}^* a partir da normalização de J^* :

$$\bar{J}^* = \frac{J^* - J_{min}^*}{J_{max}^* - J_{min}^*} \quad (3.1)$$

em que J_{min}^* e J_{max}^* são o menor e o maior valor atribuídos a J^* , de forma que $0 \leq \bar{J}^* \leq 1$. Por fim, defini-se N_m como sendo o menor N a partir do qual $\bar{J} < \epsilon_m$, sendo ϵ_m um número próximo de zero. No presente trabalho supõe-se $n_m = 30$ e $\epsilon_m = 0,01$. O processo de normalização de J^* e a definição de ϵ_m , que servem de base para a definição de N_m , são representados na Figura 16.

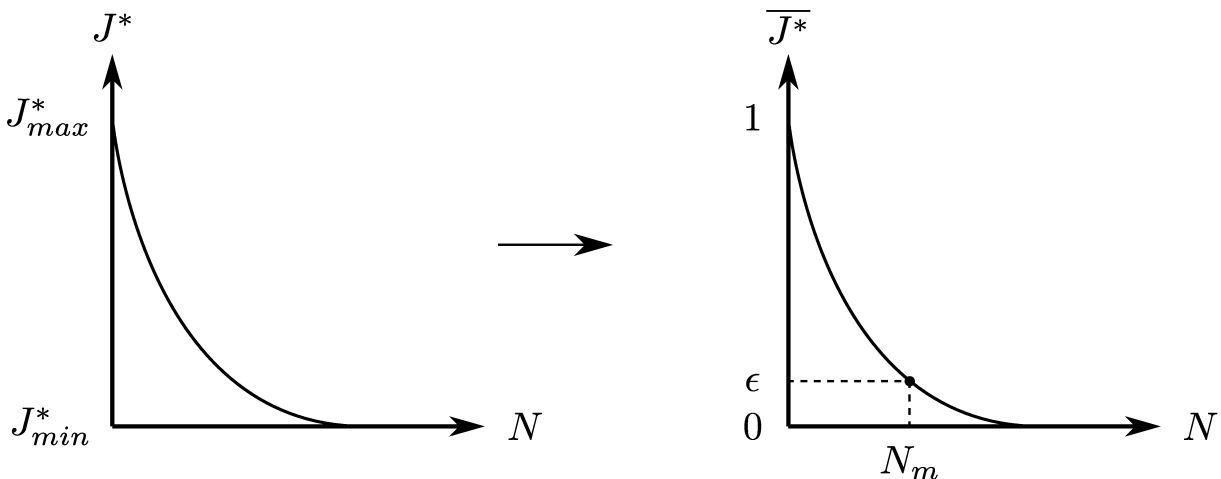


Figura 16 – Representação do processo de normalização de J^* e da definição de ϵ_m , que servem de base para a determinação de N_m .

Os estudos de caso que servem de base para a elaboração do estudo comparativo apresentado no presente trabalho são detalhados nas seções do Capítulo 4. Cada seção se encontra organizada da seguinte maneira:

- Considerações gerais acerca do estudo de caso em análise;

- Formulação da função objetivo, da dinâmica e das restrições associadas ao estudo de caso em análise;
- Apresentação dos dados que servem de base para a determinação de N_m ;
- Análise dos resultados obtidos por meio do emprego de cada um dos pacotes avaliados, considerando-se $N = N_m$;
- Apresentação das trajetórias de estados e controles obtidas a partir da resolução do estudo de caso em análise;
- Análise da sensibilidade de t_p e n_{aval} ao aumento de N para cada um dos pacotes avaliados.

Como já foi mencionado anteriormente, o estudo comparativo realizado no presente trabalho é baseado na avaliação de três pacotes: o *PSOPT*, o *FALCON* e o *COPILOTS*. Uma vez que o *PSOPT* e o *COPILOTS* possibilitam a utilização de mais de um tipo de colocação, adotam-se os índices t , h e l para indicar qual método foi empregado na obtenção de uma dada solução. Esses índices fazem referência à colocação trapezoidal, à colocação Hermite-Simpson, e à colocação pseudo-espectral respectivamente. Para indicar, por exemplo, que uma determinada solução foi obtida empregando-se o *PSOPT* e a colocação trapezoidal, atribui-se o rótulo $PSOPT_t$ à mesma.

Por fim, ressalta-se que há diversos parâmetros de ajuste associados a cada um dos pacotes avaliados. Assim sendo, seria uma tarefa praticamente impossível verificar a influência de cada um desses parâmetros e ajustá-los de forma que cada execução levasse à melhor solução possível. Logo, recomenda-se que um estudo comparativo se baseie nos valores *default* atribuídos a cada parâmetro (MITTELMANN, 1998), e, de fato, são esses os valores adotados na obtenção dos resultados apresentados neste trabalho.

As configurações do computador utilizado na aquisição e processamento dos dados apresentados neste trabalho se encontram listadas a seguir.

- **Modelo:** Laptop Aspire A515-51G;
- **Processador:** Intel® Core i7-7500U - Frequência máxima de 3,5 GHz - Topologia Dual Core e tecnologia Hyper-Threading Intel® (2 núcleos e 4 *threads*);
- **Memória RAM:** 8 GB (duas placas de 4 GB) DDR4 - Frequência máxima de 2133 MHz;
- **Placa gráfica:** NVIDIA GeForce 940MX;
- **Sistema operacional:** Linux 64 bits - Kernel 5.8.0-7630 x86_64;
- **Distribuições:** Pop!_OS 20.04 LTS (*FALCON* e *COPILOTS*) e Linux Mint 19.3 LTS (*PSOPT*).

Considerando apenas a execução dos processos essenciais ao funcionamento de cada uma das distribuições utilizadas, verifica-se que o Pop!_OS 20.04 LTS consome, no mínimo, cerca de 900 MB de memória RAM, enquanto o Linux Mint 19.3 LTS utiliza, ao menos, por volta de 400 MB. Uma vez que o computador utilizado possui uma memória RAM de 8 GB, considera-se que essa pequena diferença no consumo mínimo atribuído a cada uma das distribuições utilizadas não tem impacto significativo nos tempos de processamento associados a cada um dos pacotes avaliados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo, os pacotes *COPILOTS*, *PSOPT* e *FALCON* serão avaliados considerando os seguintes estudos de caso:

- Minimização do esforço durante a desaceleração de um bloco (BECERRA, 2008);
- Problemas singulares: Caso 1 e Caso 2 (JACOBSON; GERSHWIN; LELE, 1970);
- Minimização do esforço durante o *swing-up* de um pêndulo invertido (KELLY, 2017);
- Minimização do tempo durante uma manobra de estacionamento (LI; WANG; SHAO, 2016);
- Otimização da trajetória de um UAV (AZEVEDO et al., 2018);
- Lançamento do foguete Delta III (BENSON, 2005).

Cabe ressaltar que, conforme discutido anteriormente, esses foram escolhidos por apresentarem diferentes níveis de complexidade. Sendo assim, pode-se dizer que reúnem boas características para a validação da metodologia proposta neste trabalho, bem como para avaliar os outros pacotes considerados.

No decorrer deste capítulo cada um dos estudos de caso são apresentados e formulados matematicamente. Em seguida, as respectivas soluções obtidas são apresentadas e a comparação entre os pacotes é realizada. Ao término do capítulo é apresentado um consolidado dos resultados obtidos.

4.1 MINIMIZAÇÃO DO ESFORÇO DURANTE A DESACELERAÇÃO DE UM BLOCO

Nesta aplicação considera-se a minimização da força $F(t)$ empregada durante a desaceleração de um bloco com massa m . Partindo de um ponto de origem a uma dada velocidade, o bloco deve se parado, após t_f segundos, quando alcançar a posição final d_f , conforme apresentado na Figura 17 (BECERRA, 2008).

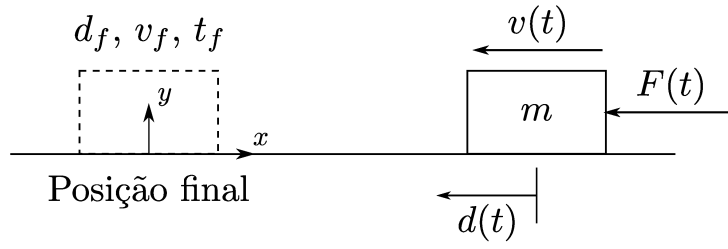


Figura 17 – Representação esquemática do problema da desaceleração de um bloco ($d(t)$ e $v(t)$ representam, respectivamente, a posição e a velocidade).

A função objetivo (J) a ser minimizada é definida como:

$$J = \int_0^{t_f} F^2(t) dt \quad (4.1)$$

A dinâmica do bloco é descrita pelo sistema de equações diferenciais:

$$\dot{d}(t) = v(t), \quad d(0) = 1 \text{ m} \quad (4.2a)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad v(0) = 1 \text{ m/s} \quad (4.2b)$$

em que $\mathbf{x}(t) = [d(t) \quad v(t)]^T$ são as variáveis de estados do sistema e $F(t)$ é a variável de controle. Para esta aplicação são considerados os seguintes parâmetros (BECERRA, 2008): massa do bloco ($m = 1 \text{ kg}$), posição final do bloco ($d_f = 0 \text{ m}$), velocidade final do bloco ($v_f = 0 \text{ m/s}$), e o tempo final ($t_f = 1 \text{ s}$).

A inicialização dos estados e controles foi deixada a cargo dos pacotes utilizados, sendo que cada um desses implementa essa inicialização de uma forma distinta, conforme discutido anteriormente.

Na Figura 18 são apresentados os resultados obtidos considerando a influência do número de nós de colocação (N), e o número mínimo de nós (N_m). Além disso, cabe ressaltar que no *PSOPT* foram utilizadas as seguintes discretizações: pseudo-espectral (*PSOPT_l*), trapezoidal (*PSOPT_t*) e Hermite-Simpson (*PSOPT_h*). No *FALCON* foi utilizado a discretização trapezoidal (*FALCON*). Finalmente, no *COPILOTS* foram utilizadas as discretizações trapezoidal (*COPILOTS_t*) e Hermite-Simpson (*COPILOTS_h*).

Para realizar esta análise foi considerado um vetor com trinta valores distintos e igualmente espaçados para N , sendo que os limites inferior e superior adotados foram 5 e 63, respectivamente. Neste cenário, objetiva-se avaliar a influência do número de nós de colocação N no valor de J^* .

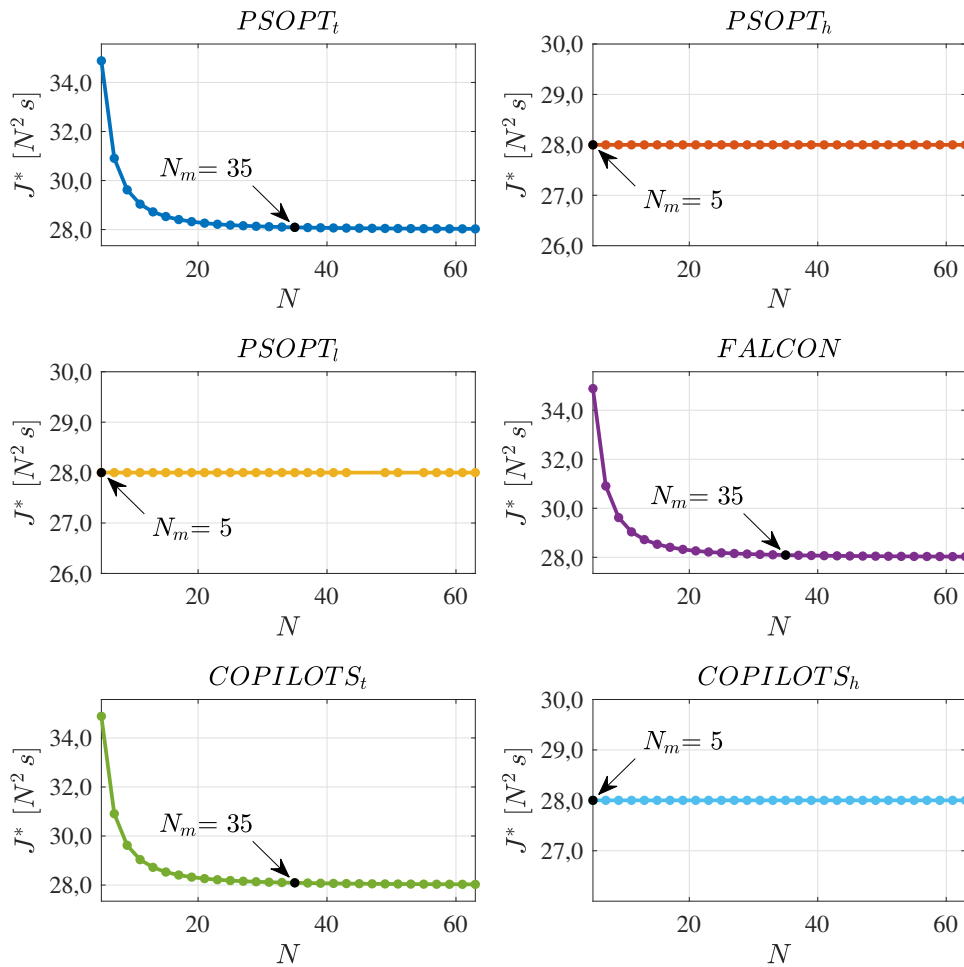


Figura 18 – Influência do número de nós de colocação N no valor ótimo da função objetivo J^* para o problema da desaceleração de um bloco.

Nessas figuras pode-se observar que, para o $PSOPT_t$, o $FALCON$, e o $COPILOTS_t$ (colocação trapezoidal), o valor de J^* decresce à medida que N aumenta e se aproxima da solução analítica conhecida ($J^* = 28$). Já para o $PSOPT_h$, para o $COPILOTS_h$ (colocação Hermite-Simpson) e para o $PSOPT_l$ (pseudo-espectral) observa-se que a solução analítica é encontrada para $N = 5$. É importante ressaltar que, para a aplicação do método pseudo-espectral, não foi possível encontrar soluções para N iguais a 45, 47 e 53. Provavelmente, isto se deve a forma como foram inicializados os perfis das variáveis de estado e controle.

Os resultados obtidos para esta aplicação são apresentados na Tabela 2 para $N = N_m$. Nesta tabela, t_p é o tempo de processamento médio, s_t é o desvio padrão atribuído a t_p , n_{aval} é o número de avaliações da função objetivo, $\Delta_{c_{max}}$ é a máxima violação atribuída às restrições, N_s é o número de execuções bem sucedidas, e $N_s\%$ é a relação entre N_s e o número total de execuções.

Nesta tabela observa-se que foi necessário um maior valor para N para os pacotes que fazem uso da colocação trapezoidal ($PSOPT_t$, $FALCON$ e $COPILOTS_t$) em comparação

Tabela 2 – Métricas obtidas para o problema da desaceleração de um bloco. Os melhores valores para N_m , J^* , t_p , n_{aval} e $N_s\%$ encontram-se destacados.

Método	N_m	J^*	t_p [s]	s_t [s]	n_{aval}	Δc_{max}	N_s	$N_s\%$
$PSOPT_t$	35	28,09170	0,31331	0,00625	8	6,41e-15	30	100,00%
$PSOPT_h$	5	28,00000	0,05395	0,00747	15	4,44e-16	30	100,00%
$PSOPT_l$	5	28,00000	0,03791	0,00977	5	7,77e-16	27	90,00%
$FALCON$	35	28,09167	0,03663	0,00279	6	2,08e-16	30	100,00%
$COPILOTS_t$	35	28,09167	0,52875	0,01817	1404	1,57e-13	30	100,00%
$COPILOTS_h$	5	28,00000	0,18729	0,01770	600	3,05e-13	30	100,00%

com os outros tipos de abordagens. Essa diferença se deve às características numéricas inerentes a cada método. Além disso, observa-se que os valores de J^* atribuídos às soluções obtidas por meio da colocação trapezoidal são bastante próximos uns dos outros.

Os maiores tempos de processamento foram atribuídos às soluções obtidas por meio do $PSOPT_t$ e do $COPILOTS_t$, uma vez que nesses casos foi utilizada uma quantidade maior de nós de colocação. Em contrapartida, o menor t_p foi encontrado pelo $FALCON$. Esse comportamento se deve à capacidade que esse pacote possui de empregar ferramentas simbólicas na geração de derivadas analíticas, tanto para a função objetivo quanto para as restrições, o que leva a uma diminuição na quantidade de iterações despendida na obtenção da solução do problema em análise. A essa diminuição, está associada uma redução no tempo de processamento, mesmo quando utilizados muitos nós de colocação. Os tempos de processamento associados ao $PSOPT_h$, ao $PSOPT_l$, e ao $FALCON$ foram bastante próximos e, consideravelmente, menores que aqueles requeridos pelo $PSOPT_t$, $COPILOTS_t$, e $COPILOTS_h$. Vale ressaltar que, às soluções obtidas pelo $COPILOTS$, normalmente estão associados altos tempos de processamento, uma vez que este pacote faz uso do SQP e, mais especificamente, da função `fmincon()` para resolução de PPNLs. A utilização desta função, nativa do Matlab®, é fortemente desaconselhada pelos desenvolvedores de outros pacotes, dados os altos tempos de processamento e a alta chance de falha atribuídos à mesma (FALUGI; KERRIGAN; WYK, 2018).

Os valores de n_{aval} associados ao $COPILOTS$, independentemente do tipo de colocação considerado, foram bem maiores que aqueles observados nos demais métodos avaliados, uma vez que o pacote faz uso do SQP. Observou-se também que nem sempre t_p está diretamente relacionado a n_{aval} . Por exemplo, o tempo de processamento associado ao $PSOPT_t$ é maior que aquele requerido pelo $PSOPT_h$. Todavia, é o $PSOPT_h$ que está associado ao maior n_{aval} . Observa-se o mesmo comportamento quando são comparados os resultados obtidos pelo $COPILOTS_t$ e pelo $COPILOTS_h$.

Nota-se que os valores de n_{aval} associados ao $COPILOTS_t$ e ao $PSOPT_t$ são bastante diferentes um do outro, sendo o primeiro cerca de 175 vezes maior que o segundo. No entanto, essa grande diferença não é observada nos tempos de processamento atribuídos a estes pacotes,

iguais a 0,52 e 0,31 segundos, respectivamente. Esse comportamento se deve tanto à simplicidade da função objetivo e da dinâmica associadas ao PCO, quanto à ausência de quaisquer outras restrições além da restrição dinâmica. Desta forma basta que a cada iteração sejam computados os valores associados à função objetivo e à restrição dinâmica, o que leva um tempo consideravelmente curto. Logo, um aumento bastante expressivo no número de avaliações não causa grandes impactos no tempo de processamento.

Por fim, ressalta-se que, utilizando qualquer um dos métodos, é possível obter soluções que satisfaçam as restrições do problema para quase todo N . De fato, a $N_s\%$ foram atribuídos valores iguais ou bem próximos a 100%, enquanto $\Delta_{c_{max}}$ foi igual a zero em todas estas execuções. Esse resultado se deve à simplicidade do problema, que não possui restrições terminais ou de caminho.

As trajetórias de estados considerando $N = N_m$ são apresentadas nas Figuras 19 e 20, e as trajetórias de controle na Figura 21. A partir destes resultados constata-se que as trajetórias obtidas por cada um dos pacotes avaliados se mostraram similares.

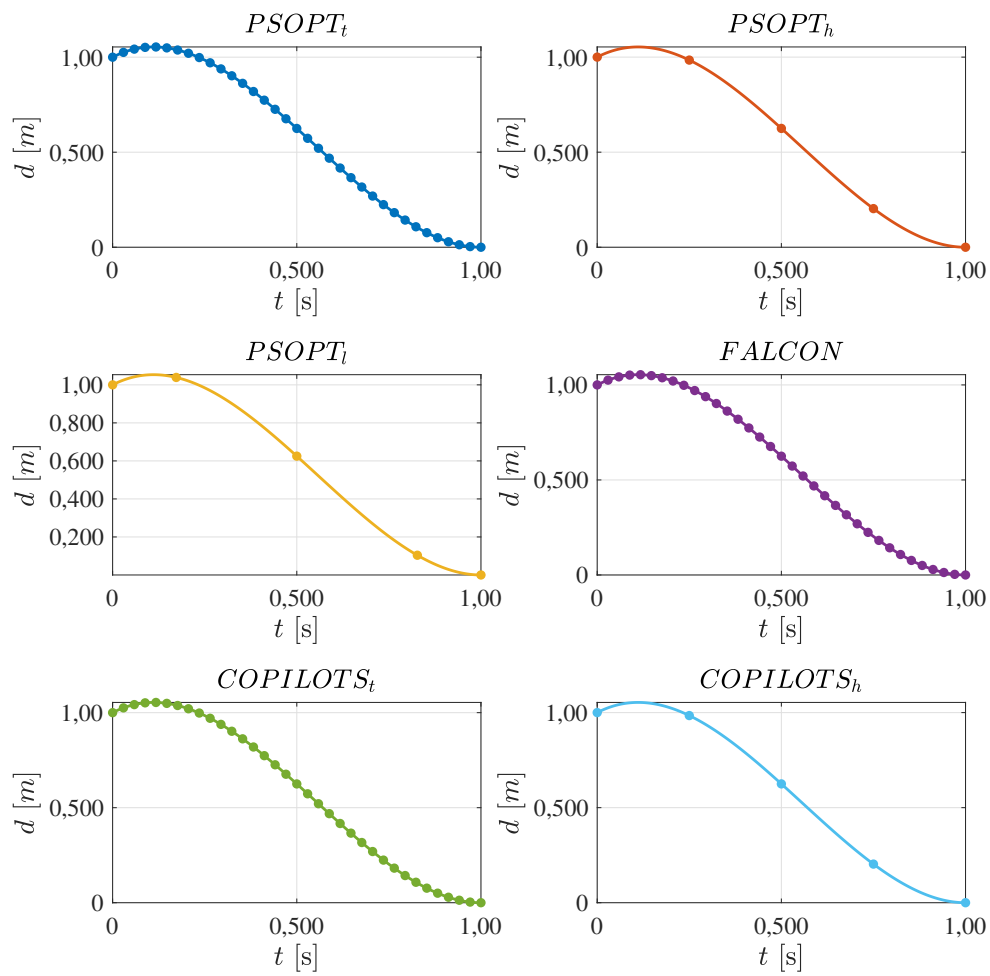


Figura 19 – Variável de estado $d(t)$ para o problema da desaceleração de um bloco. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

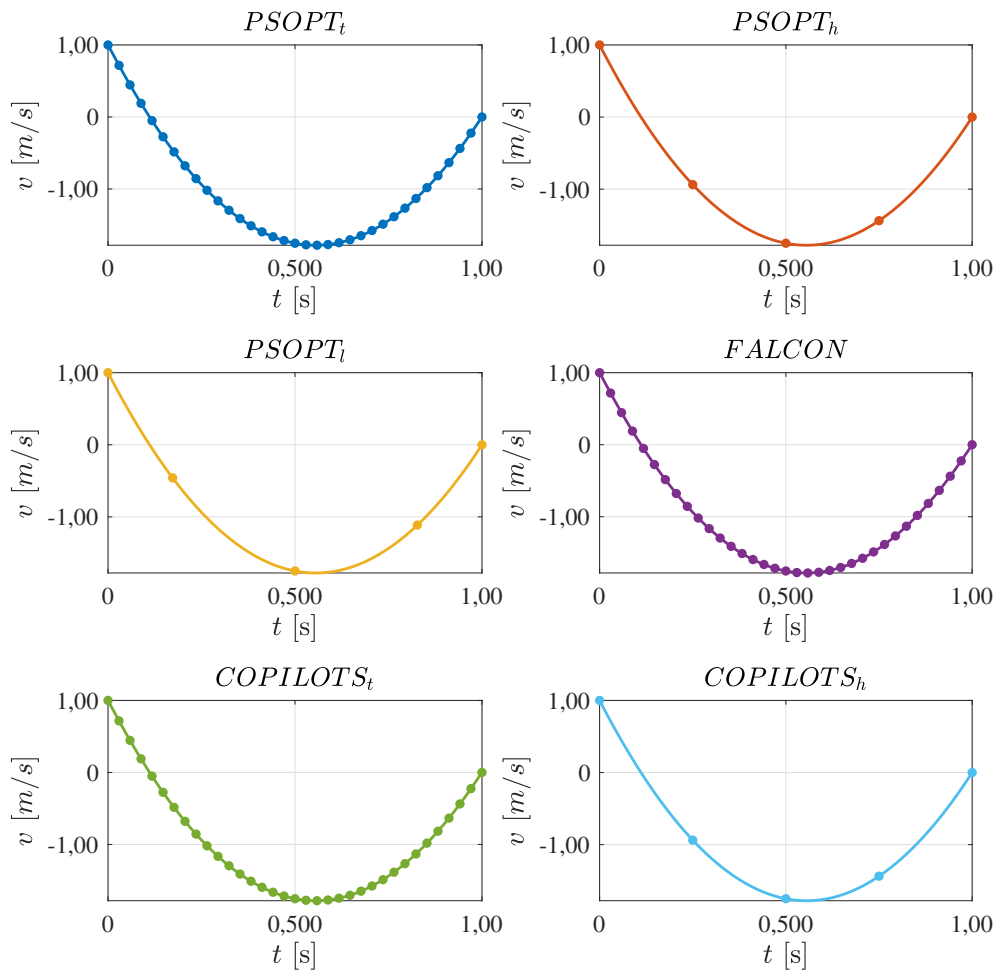


Figura 20 – Variável de estado $v(t)$ para o problema da desaceleração de um bloco. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

A influência do aumento do número de nós de colocação no tempo de processamento e no número de avaliações da função objetivo é apresentada nas Figuras 22 e 23, respectivamente. Acima de cada um dos gráficos são representadas as diferenças entre os valores máximo e mínimo associados à métrica em questão (t_p ou n_{aval}), isto é: $\Delta t_p = \max\{t_p\} - \min\{t_p\}$ e $\Delta n_{aval} = \max\{n_{aval}\} - \min\{n_{aval}\}$. Os pontos nos gráficos representam os valores obtidos para t_p (e n_{aval}) em cada nó de colocação, enquanto as linhas contínuas representam curvas de tendência, obtidas por meio de regressões lineares, sendo a sua concordância avaliada de acordo com o coeficiente de determinação (R^2). Os valores de N empregados na geração desses dados são iguais àqueles considerados na computação da relação entre J^* e N .

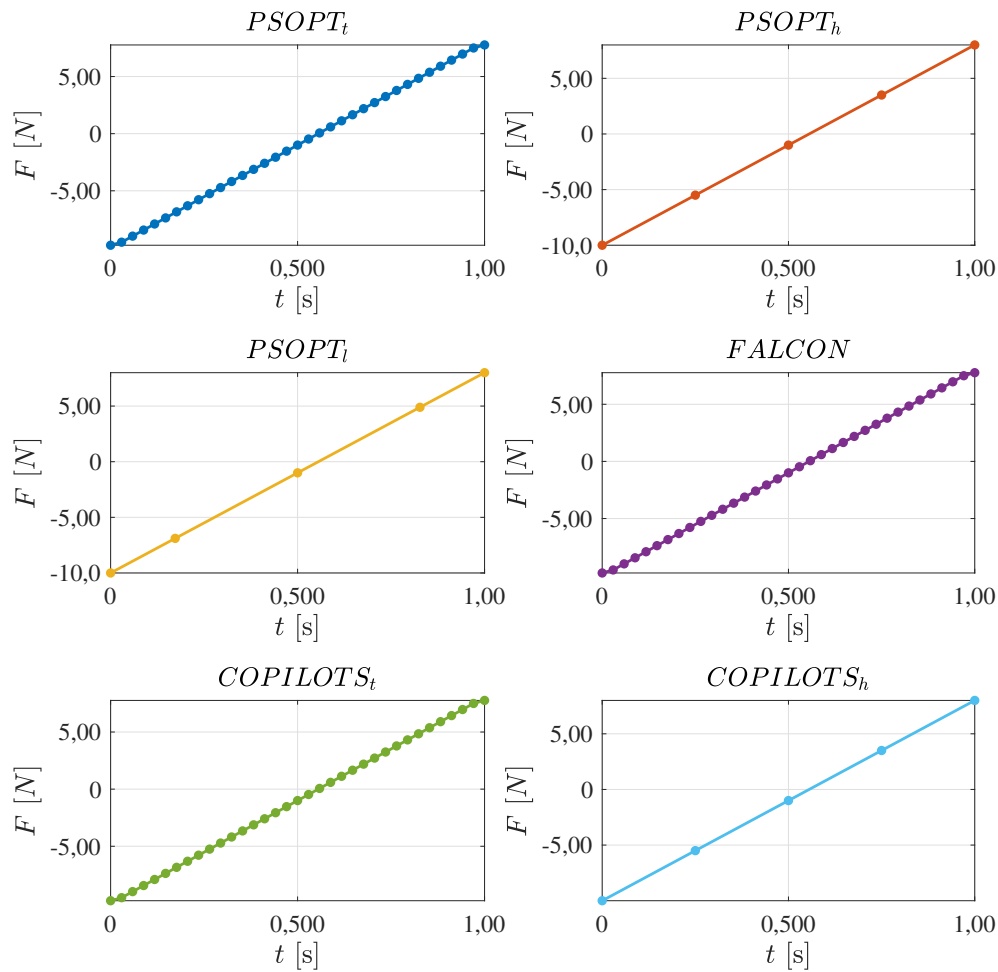


Figura 21 – Variável de controle $F(t)$ para o problema da desaceleração de um bloco. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

De forma geral nesta figura observa-se que o aumento do número de nós de colocação implica, como esperado, no aumento do tempo de processamento. Em relação ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$, estes apresentam tempos de processamento similares e bem inferiores em relação ao $PSOPT_l$. Já para o $COPILOTS_t$ observam-se, em média, tempos de processamentos bem distintos em relação ao $COPILOTS_h$ e aos outros pacotes. Este maior tempo de processamento está relacionado à solução do PPNL resultante da etapa de discretização. Já para o $FALCON$ observa-se que este pacote se mostrou muito pouco sensível ao aumento de N . Tal fato pode ser justificado ao uso de ferramentas simbólicas na obtenção de derivadas analíticas. De forma geral, apesar das diferenças entre os tempos de processamentos médios observados, considera-se que ambos os pacotes foram eficientes na resolução do problema em questão, visto que a magnitude dos tempos médios requeridos é condizente com o esperado.

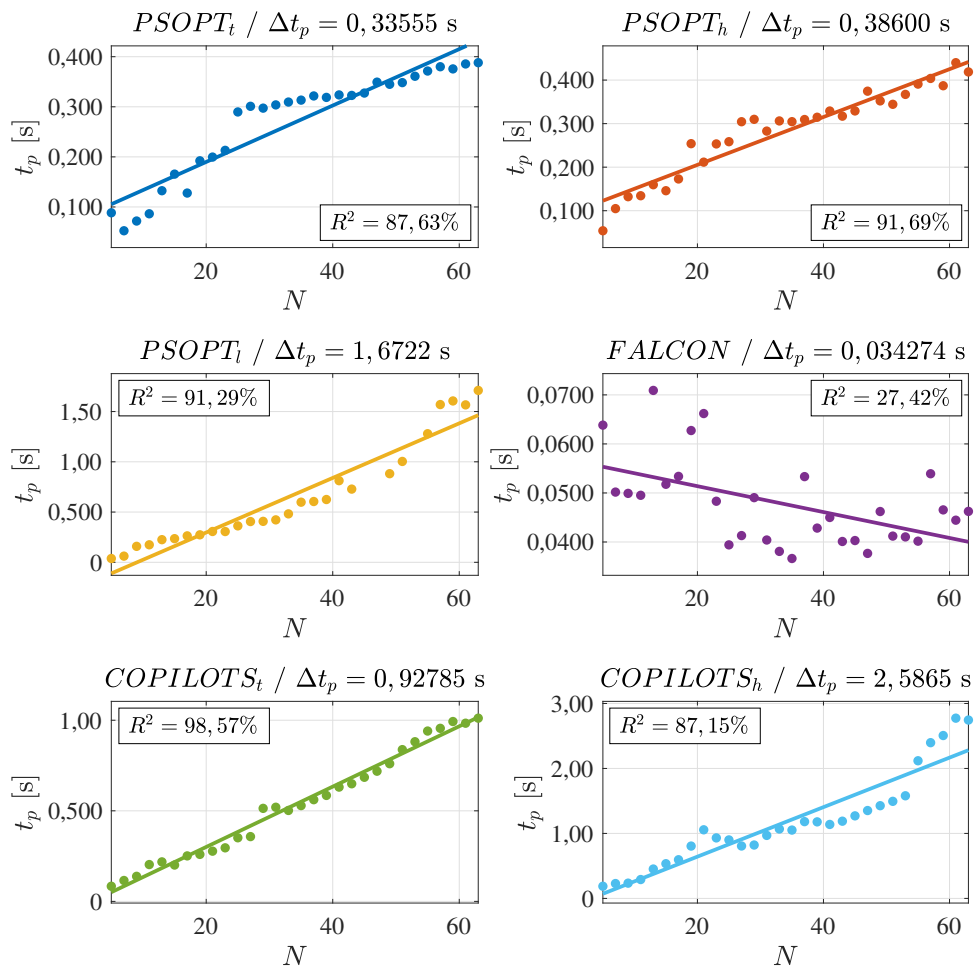


Figura 22 – Relação entre o tempo de processamento t_p e o número de nós de colocação N para o problema da desaceleração de um bloco.

Com relação ao número de avaliações da função objetivo (n_{aval}), a variação observada para este parâmetro foi praticamente a mesma para o $PSOPT_t$, $PSOPT_h$ e $FALCON$. Já observa-se um aumento significativo para o $PSOPT_l$ em relação a estes. Os maiores valores para estas variações são observados para as duas configurações do $COPILOTS$. Este incremento no valor deste parâmetro está associado à solução do PPNL, conforme destacado anteriormente para a análise do tempo de processamento. Naturalmente, com o aumento no número de nós tem-se o aumento do parâmetro n_{aval} , conforme pode ser observado para o $PSOPT_l$, $COPILOTS_t$ e $COPILOTS_h$. Todavia, para os pacotes $PSOPT_t$, $PSOPT_h$ e $FALCON$, é possível observar uma pequena flutuação no valor de n_{aval} quando N aumenta. Isto não quer dizer que, para estas variantes, o aumento na discretização do método numérico implique na redução do número de avaliações requeridas, mas apenas que existe uma flutuação neste valor que é função das condições iniciais associadas, bem como da estratégia implementada para a resolução do PCO.

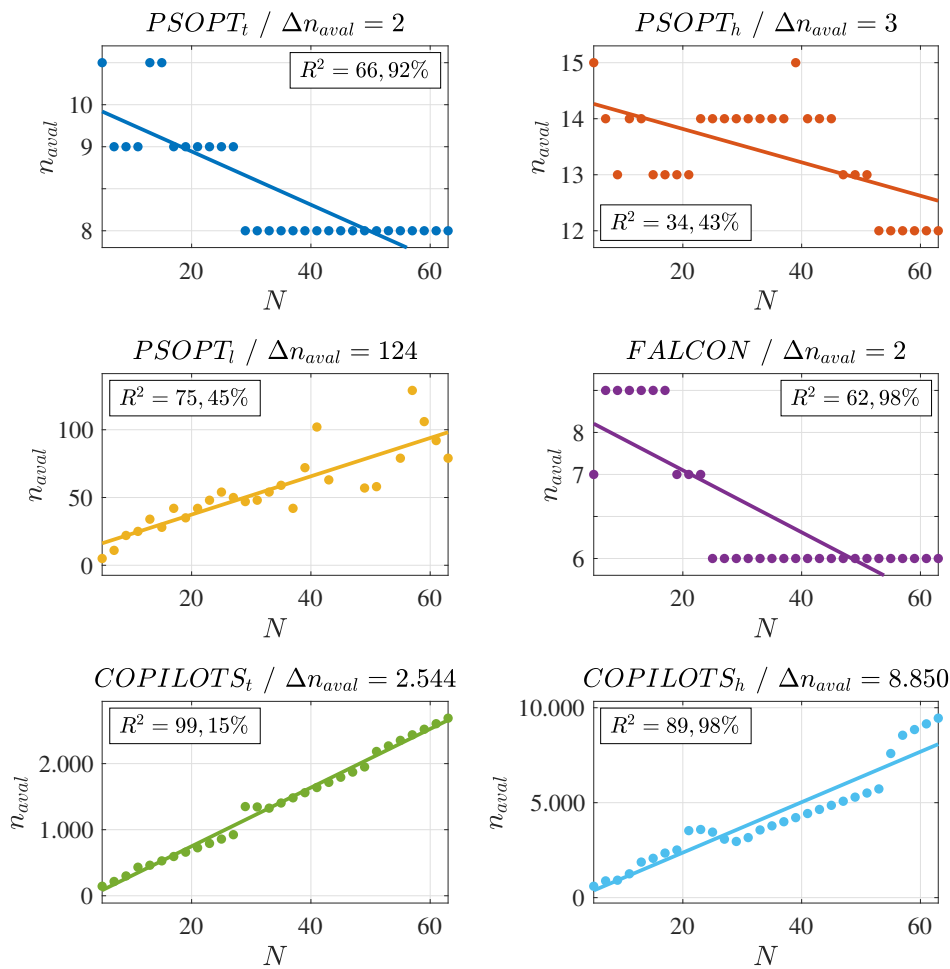


Figura 23 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo n_{aval} e o número de nós de colocação N para o problema da desaceleração de um bloco.

4.2 PROBLEMAS SINGULARES

Os estudos de caso singulares (casos 1 e 2) avaliados nessa seção foram propostos por [Jacobson, Gershwin e Lele \(1970\)](#) e utilizados na validação de um método proposto pelo autor para solução de PCOs singulares. Desde então, vários outros autores ([NASCENTES; MURATA; LOBATO, 2012](#); [IASBECK; LOBATO, 2020](#)) os têm empregado com essa mesma finalidade.

Verifica-se por meio da análise das soluções reportadas por [Jacobson, Gershwin e Lele \(1970\)](#), apresentadas nas Figuras 24 e 25, que os perfis de controle associados às soluções de cada um dos estudos de caso são descontínuos em $t \approx 1,5$ s. Assim, espera-se que a presença desta descontinuidade dificulte a resolução desses problemas, principalmente ao se aplicar a colocação pseudo-espectral, uma vez que desaconselha-se o emprego desse tipo de abordagem para a determinação de trajetórias não suaves ([BECERRA; GALVÃO, 2010](#)).

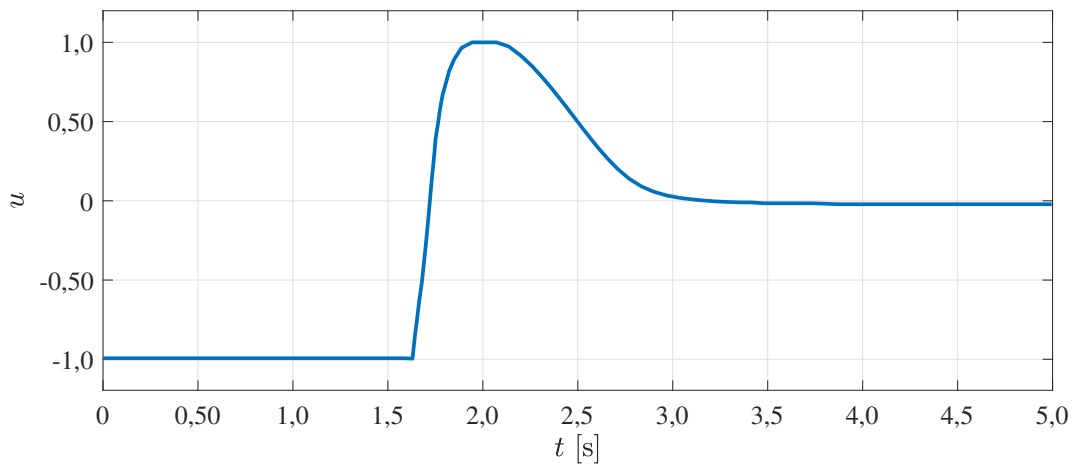


Figura 24 – Resultado reportado por Jacobson, Gershwin e Lele (1970) para o estudo de caso descrito na Seção 4.2.1.

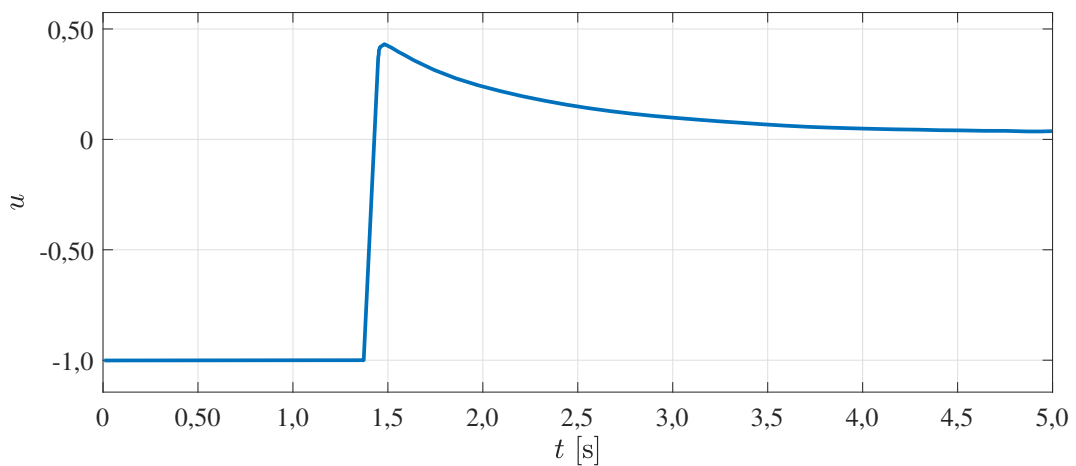


Figura 25 – Resultado reportado por Jacobson, Gershwin e Lele (1970) para o estudo de caso descrito na Seção 4.2.2.

4.2.1 CASO 1

Considera-se a minimização da seguinte função objetivo:

$$J = x_3(t_f) \quad (4.3)$$

sujeito ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias, bem como uma restrição para o controle:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= 1 \\ \dot{x}_3(t) &= x_1^2(t), & x_3(0) &= 0 \\ & & -1 &\leq |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que t é o tempo (t_f é o tempo final), $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ é o vetor de variáveis de estado, e $u(t)$ é a variável de controle.

Conforme comentado para o primeiro estudo de caso, a estimativa inicial para os perfis de estado e controle foi inicializada de forma *default* por cada um dos pacotes.

Na Figura 26 é apresentada a influência do melhor valor da função objetivo encontrado (J^*) em relação ao número de nós utilizados. Também foi determinado o número mínimo de nós de colocação (N_m) necessário para a convergência do valor de J^* . Cabe ressaltar que foram escolhidos 30 valores de N igualmente espaçados dentro do intervalo [5 150].

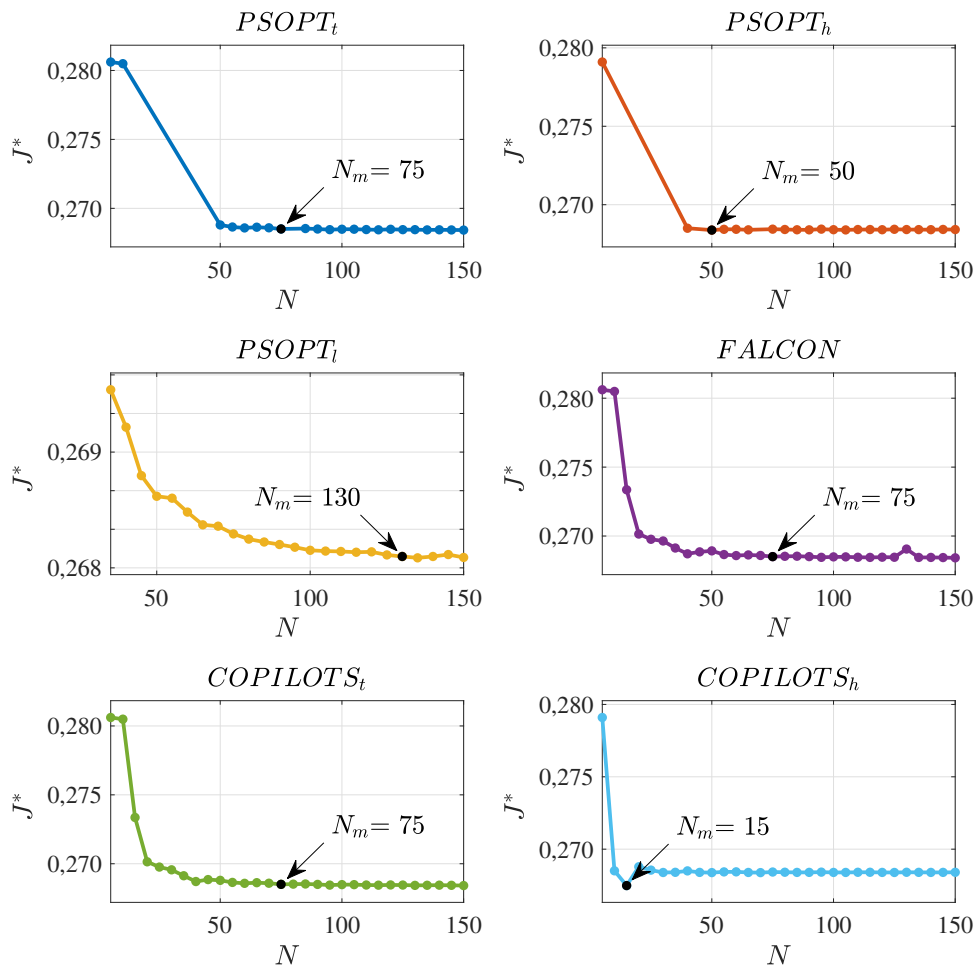
De forma geral observa-se que, para cada um dos pacotes analisados, sempre foi possível encontrar a solução reportada na literatura, a saber, $J^* = 0,2771$ (JACOBSON; GERSHWIN; LELE, 1970). Ressalta-se que, empregando os métodos $PSOPT_t$ ou $PSOPT_h$, não foi possível determinar a solução para pequenos valores de N (entre 5 e 50, aproximadamente). Além disso, destaca-se que, no caso do $COPILOTS_h$, optou-se por atribuir a N_m o N associado ao menor valor de J^* , uma vez que, após atingir esse valor, o custo ótimo passou a crescer antes de alcançar a convergência.

Os valores de J^* associados aos resultados obtidos via $COPILOTS_h$ convergiram rapidamente, o que se deve ao SQP e às características numéricas inerentes à colocação Hermite-Simpson, isto é; maior precisão. Em contrapartida, os valores de J^* associados ao $PSOPT_t$ apresentaram uma convergência mais lenta do que aquela observada nos demais métodos. Esse comportamento pode ser justificado pelas propriedades numéricas da colocação pseudo-espectral, cujo emprego na resolução de PCOs que apresentam descontinuidades nos controles não é recomendado (BECERRA; GALVÃO, 2010).

Os resultados obtidos pelo $FALCON$ e pelo $COPILOTS_t$ se mostraram bem próximos, uma vez que ambos utilizam a colocação trapezoidal. Cabe ressaltar que, nesses casos, foi possível solucionar o PCO mesmo para valores de N pequenos, o que não pôde ser feito utilizando-se o $PSOPT_t$, que também emprega a colocação trapezoidal.

Tabela 3 – Métricas obtidas para o problema singular 1. Os melhores valores para N_m , J^* , t_p , n_{aval} e $N_s\%$ encontram-se destacados.

Método	N_m	J^*	t_p [s]	s_t [s]	n_{aval}	Δc_{max}	N_s	$N_s\%$
$PSOPT_t$	75	0,26850	16,30566	0,26206	6140	4,44e-12	22	73,33%
$PSOPT_h$	50	0,26838	3,28051	0,18163	951	1,99e-07	22	73,33%
$PSOPT_l$	130	0,26846	29,17814	1,97563	429	3,77e-08	24	80,00%
$FALCON$	75	0,26851	0,23411	0,04632	49	5,62e-08	30	100,00%
$COPILOTS_t$	75	0,26850	22,39840	0,50176	61812	1,02e-09	30	100,00%
$COPILOTS_h$	15	0,26749	3,43669	0,05187	16303	3,82e-13	30	100,00%

Figura 26 – Influência do número de nós de colocação N no valor da função objetivo J^* para o problema singular 1.

A Tabela 3 apresenta as métricas obtidas por cada um dos pacotes considerando $N = N_m$. Como destacado no primeiro estudo de caso, J^* é o valor da função objetivo, t_p é o tempo de processamento médio, s_t é o desvio padrão com relação a t_p , n_{aval} é o número de avaliações da função objetivo, Δc_{max} é a máxima violação das restrições, e N_s é o número de execuções bem sucedidas.

Primeiramente, nota-se nesta tabela que foi necessário um número maior de nós de colocação utilizando-se métodos que fazem uso da colocação trapezoidal ($PSOPT_t$, $FALCON$ e $COPILOTS_t$) em comparação com aqueles que utilizam a colocação Hermite-Simpson ($PSOPT_h$ e $COPILOTS_h$). Essa diferença se deve às características numéricas inerentes a cada método. Além disso, observa-se que os valores de J^* relacionados às soluções obtidas empregando a colocação trapezoidal são bastante próximos uns dos outros, enquanto os valores de N_m a elas associados são iguais.

O maior valor de N_m está associado ao $PSOPT_l$, sendo esse outro indício de que a colocação pseudo-espectral não deve ser empregada na solução de problemas singulares. Aos métodos que utilizam a colocação Hermite-Simpson associam-se os menores valores de N_m , devido às características numéricas inerentes a esse tipo de colocação. O menor valor de N_m está associado ao $COPILOTS_h$, provavelmente, por conta do uso que o pacote faz do SQP. Ainda assim, apesar do baixo número de nós de colocação associado ao resultado obtido por meio desse pacote, é a ele que se atribui o menor J^* .

Ao $FALCON$ estão associados o menor t_p e o menor n_{aval} , apesar do N_m a ele atribuído ter sido maior do que os associados ao $PSOPT_t$ e ao $COPILOTS_h$. Esse comportamento se deve, mais uma vez, ao uso que o $FALCON$ faz de ferramentas simbólicas na obtenção de derivadas analíticas. Os maiores t_p foram obtidos pelo $PSOPT_l$ devido ao elevado valor do parâmetro N_m associado a esse pacote, e ao $COPILOTS_t$ devido ao uso que o $COPILOTS$ faz do SQP e às características numéricas inerentes à colocação trapezoidal. Pelas mesmas razões, a utilização do $COPILOTS$, independentemente do tipo de colocação considerado, está associada a valores de n_{aval} consideravelmente altos, em comparação com os demais métodos avaliados. Observa-se que nem sempre há uma relação direta entre t_p e n_{aval} . Por exemplo, o tempo de processamento associado ao $PSOPT_t$ é menor que o atribuído ao $PSOPT_l$. O mesmo pode ser observado em relação ao N_m e ao n_{aval} . Ressalta-se ainda que o $COPILOTS$ e o $FALCON$ possibilitaram a resolução do problema analisado para qualquer um dos valores de N adotados.

Os perfis referente às variáveis de estado e controle, considerando $N = N_m$, são apresentados nas Figuras 27-30. De forma geral, constata-se que os perfis obtidos por cada um dos pacotes é similar, apesar das leves oscilações observadas nas trajetórias de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ obtidas via $PSOPT_l$.

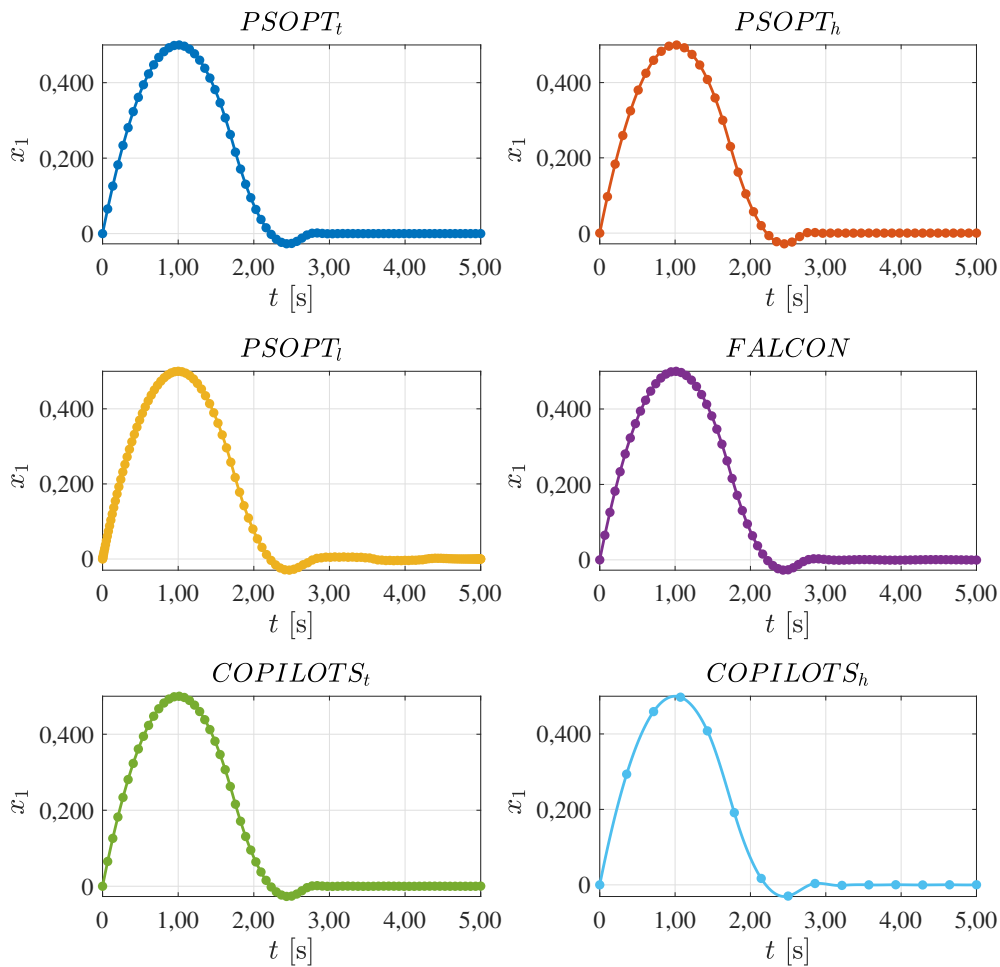


Figura 27 – Variável de estado $x_1(t)$ para o problema singular 1. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

Pode-se observar que as trajetórias de controle apresentam a mesma tendência, apesar das diferenças em cada um dos pacotes utilizados. Primeiramente, verificam-se descontinuidades nos controles, em $t \approx 1,75$ s e $t \approx 2,5$ s, que são inerentes à solução do estudo de caso em análise. Além disso, nota-se que a presença dessas descontinuidades leva ao aparecimento de oscilações nos controles. Dentre as trajetórias de controle obtidas, a mais oscilatória é aquela advinda do emprego do $PSOPT_t$, o que se deve ao alto N_m utilizado e às limitações numéricas inerentes à colocação pseudo-espectral. De fato, leves oscilações podem ser verificadas em todas as trajetórias, principalmente naquelas associadas ao $PSOPT_t$ e ao $COPILOTS_t$. Porém, apesar de também empregar a colocação trapezoidal, o $FALCON$ foi o pacote que possibilitou a obtenção da trajetória mais suave. Tal comportamento pode ser justificado pela precisão dos resultados ao se empregar ferramentas simbólicas na obtenção de derivadas.

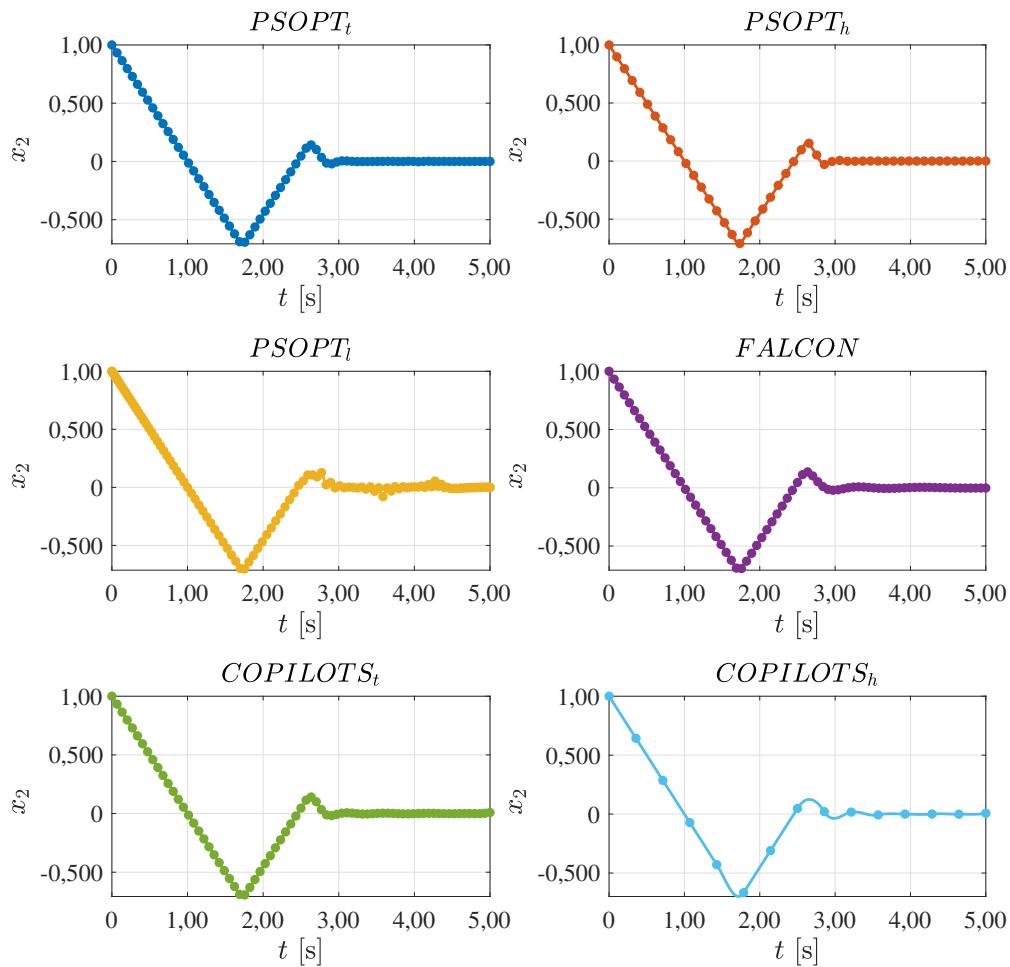


Figura 28 – Variável de estado $x_2(t)$ para o problema singular 1. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

Por fim, ressalta-se que as trajetórias de controle interpoladas considerando o $COPILOTS_h$ e o $PSOPT_l$ desrespeitam, em alguns pontos, a restrição de caminho associada ao estudo de caso em análise, que impõe que $-1 \leq u(t) \leq 1$. Além disso, nota-se o aparecimento de discontinuidades na trajetória atribuída ao $COPILOTS_h$, em $t = 2,85$ s e $t = 3,57$ s. Esse comportamento se deve ao tipo de interpolação associada à colocação Hermite-Simpson.

Foi também verificada a influência que o aumento no número de nós de colocação tem no tempo de processamento e no número de avaliações da função objetivo, conforme as Figuras 31 e 32. Nesses gráficos são apresentadas as variações: $\Delta t_p = \max\{t_p\} - \min\{t_p\}$ e $\Delta n_{aval} = \max\{n_{aval}\} - \min\{n_{aval}\}$. Os pontos nos gráficos representam os valores atribuídos a t_p (e a n_{aval}) para cada um dos N considerados, enquanto as linhas contínuas representam curvas de tendência, obtidas por meio de regressões lineares, em que R^2 é o coeficiente de determinação. Os valores de N empregados na geração desses resultados são iguais àqueles considerados na computação da relação entre J^* e N .

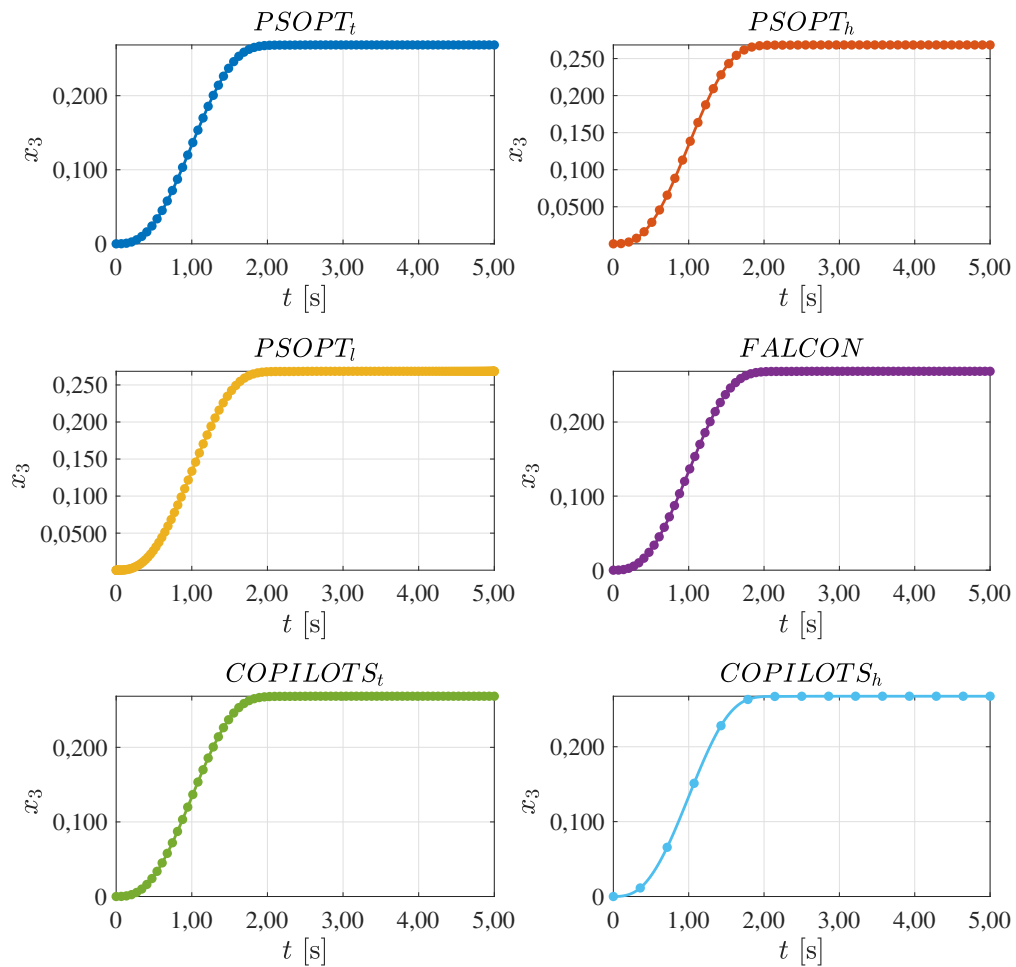


Figura 29 – Variável de estado $x_3(t)$ para o problema singular 1. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

Primeiramente, avaliando os resultados obtidos pelo *COPILOTS* verifica-se uma relação quadrática entre t_p e N , e entre n_{aval} e N . Neste caso, os elevados valores de n_{aval} e t_p podem ser justificados pela metodologia empregada para resolver o PPNL. Por outro lado, os resultados indicam que o *FALCON* é o método menos sensível a variações em N , uma vez que, a partir do seu emprego, verificaram-se os menores valores de Δt_p e Δn_{aval} em comparação com os demais métodos em análise. Observa-se ainda que os t_p associados ao $PSOPT_l$ são mais sensíveis ao aumento de N que aqueles atribuídos ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$, considerando-se o alto Δt_p associado ao $PSOPT_l$. No entanto, observou-se que o inverso é válido quando analisada a sensibilidade de n_{aval} , tendo em vista o baixo Δn_{aval} atribuído ao $PSOPT_l$ em comparação com aqueles associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$.

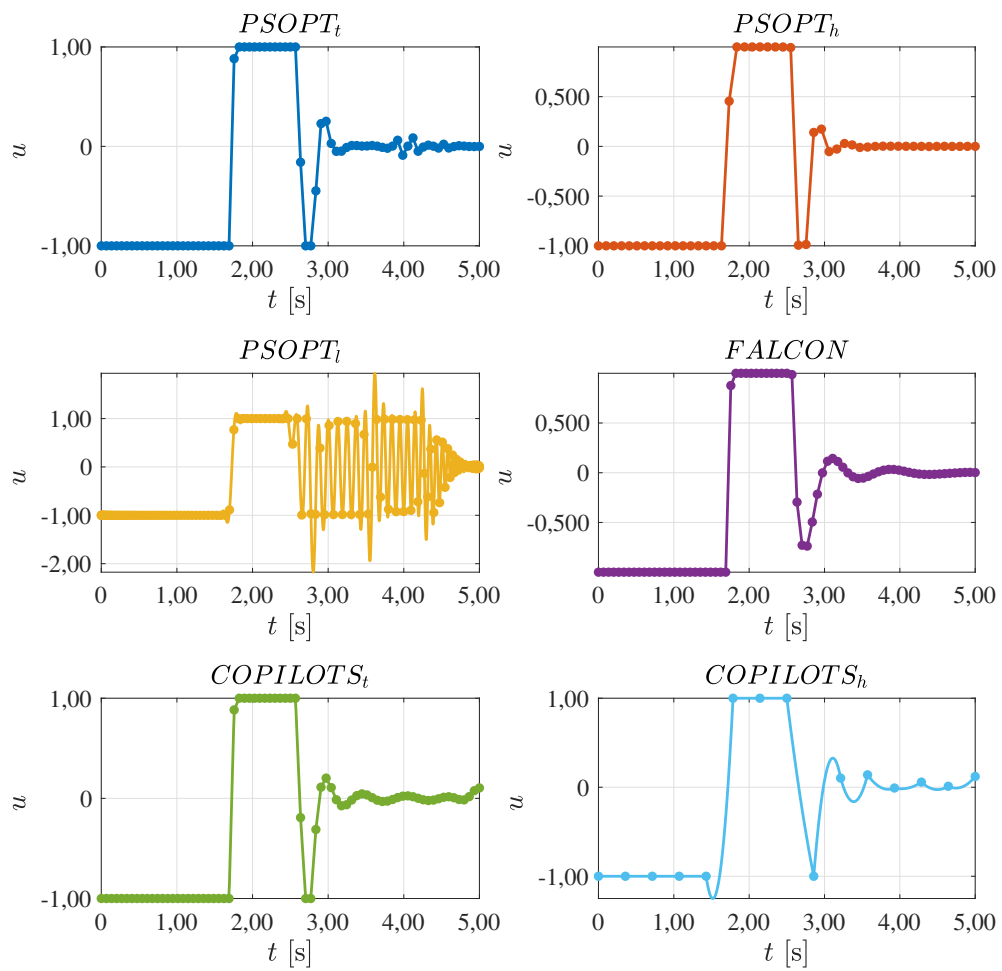


Figura 30 – Variável de estado $u(t)$ para o problema singular 1. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

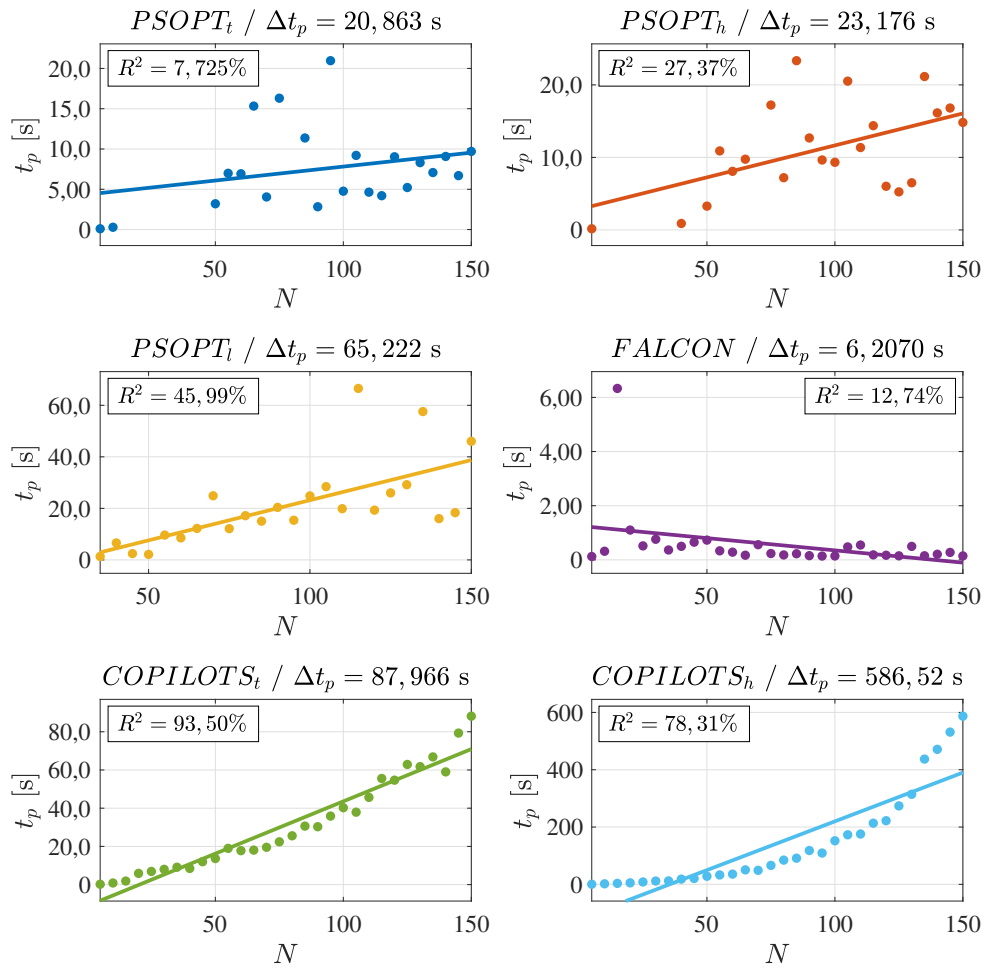


Figura 31 – Relação entre o tempo de processamento t_p e o número de nós de colocação N , considerando cada um dos métodos em análise.

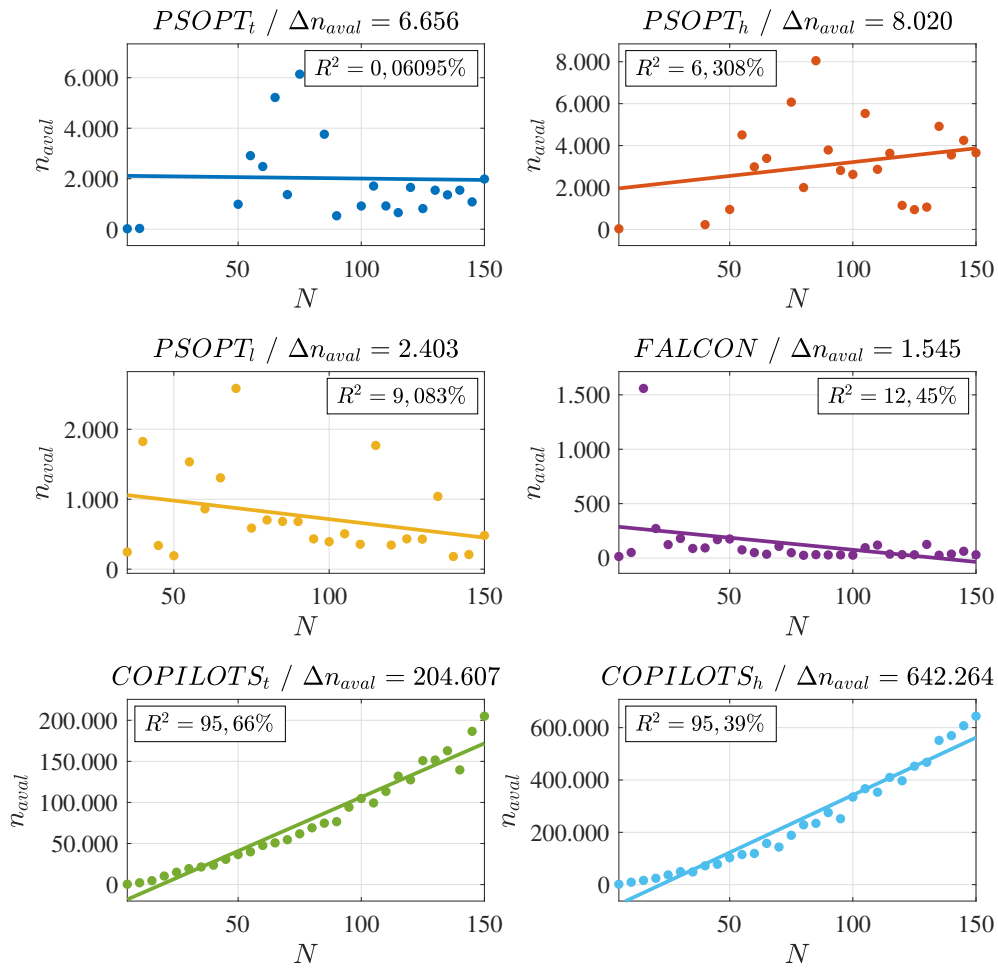


Figura 32 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo n_{aval} e o número de nós de colocação N , considerando cada um dos métodos em análise.

4.2.2 CASO 2

Seja a seguinte função objetivo:

$$J = x_3(t_f) \quad (4.5)$$

sujeito ao conjunto de equações diferenciais e restrição no controle:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= 1 \\ \dot{x}_3(t) &= x_1^2(t) + x_2^2(t), & x_3(0) &= 0 \\ -1 &\leq |u(t)| \leq 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que t é o tempo (t_f é o tempo final), $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ é o vetor de variáveis de estado, e $u(t)$ é a variável de controle.

Conforme o primeiro estudo de caso singular, as estimativas iniciais para os estados e para o controle foram determinadas por cada pacote.

É apresentada na Figura 33 a influência do número de nós de colocação no valor da função objetivo (melhor solução encontrada). A faixa considerada nesta análise é a mesma empregada para o problema singular 1 (30 pontos igualmente espaçados no intervalo [5 150]).

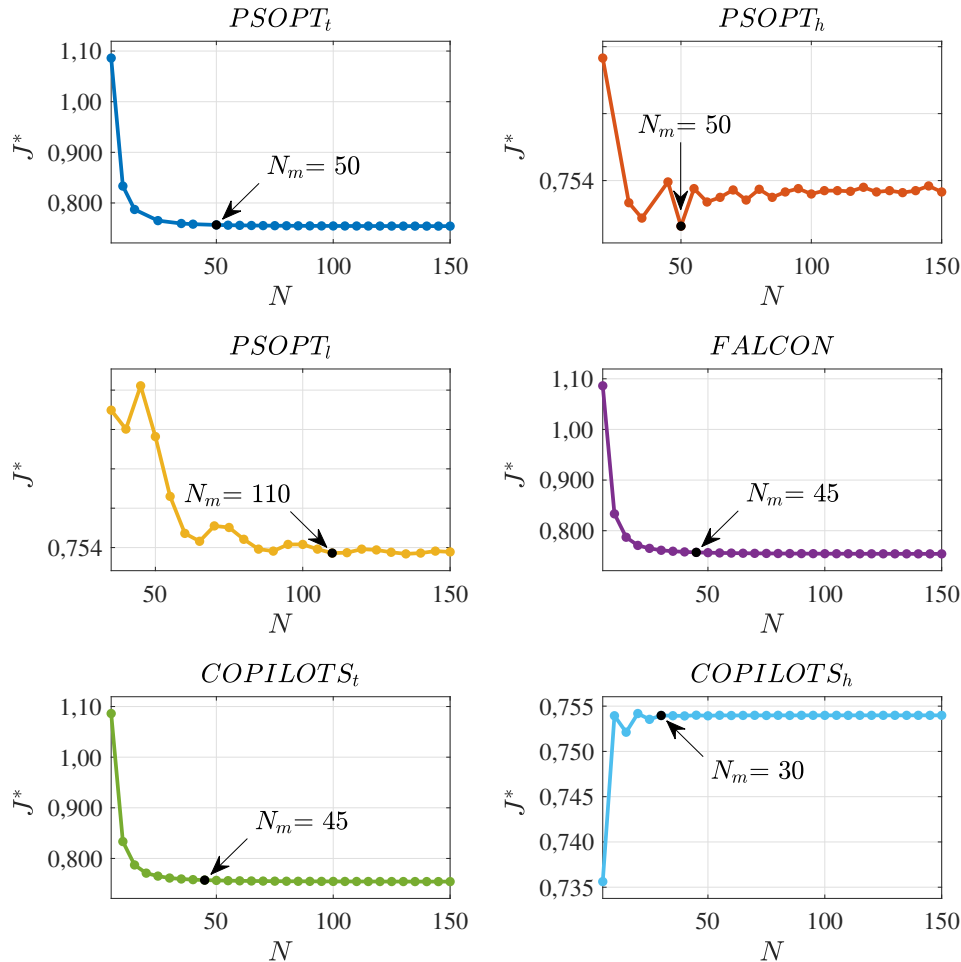


Figura 33 – Influência do número de nós de colocação N no valor da função objetivo J^* para o problema singular 2.

De forma geral observa-se que a maioria dos pacotes utilizados conseguiu convergir para uma solução próxima daquela reportada por [Jacobson, Gershwin e Lele \(1970\)](#), a saber, $J^* = 0,8285$. O único caso em que não foi observada uma tendência de convergência ao se aumentar o valor de N foi o $PSOPT_h$. Para este observa-se um comportamento oscilatório. Assim, o valor de N_m para esta configuração foi definido como sendo aquele com o menor valor em termos de J^* . Já para o $COPILOTS_h$ verifica-se um comportamento inesperado, isto é; tanto J^* quanto N crescem simultaneamente até que a convergência seja atingida. Tal comportamento pode ser justificado pelo não atendimento das restrições para um número de pontos inferior a, aproximadamente, 30 nós de colocação. Neste caso, por não atender as restrições não considera-se, para N menor que 30, que a solução do problema tenha sido obtida. Este resultado inesperado justifica a necessidade de sempre realizar a análise de sensibilidade do problema, bem como avaliar o atendimento das restrições que constituem o mesmo.

Além disso, pode ser observada uma boa concordância entre os resultados obtidos por quase todas as abordagens que fazem uso da colocação trapezoidal (o $PSOPT_t$, o $FALCON$ e o $COPILOTS_t$). No entanto, observa-se que, empregando o $PSOPT_t$, não foi possível solucionar o estudo de caso em análise para $N = 20$, $N = 30$ e $N = 45$. Também é possível observar que o valor de J^* encontrado pelo $PSOPT_t$ diminui lentamente com o aumento de N e oscila algumas vezes antes de atingir a convergência. Tal comportamento pode estar associado às propriedades numéricas inerentes à colocação pseudo-espectral, sendo que esta não é a abordagem mais empregada para a resolução de PCOs com descontinuidades nos controles e/ou estados (BECERRA; GALVÃO, 2010).

Por fim destaca-se que o valor de J^* referente ao $PSOPT_h$ se mostrou pouco sensível a variações em N , sendo $\min(J^*) = 0,753932$ e $\max(J^*) = 0,754183$. O mesmo pode ser observado para o $PSOPT_l$, sendo nesse caso $\min(J^*) = 0,753984$ e $\max(J^*) = 0,754411$.

A Tabela 4 apresenta um resumo das métricas obtidas por cada pacote. Neste destacam-se o valor da função objetivo (J^*), o tempo de processamento médio (t_p), o desvio padrão atribuído (s_t), a máxima violação das restrições (Δc_{max}) e o número de execuções bem sucedidas (N_s).

Tabela 4 – Métricas obtidas para o problema singular 2. Os melhores N_m , J^* , t_p , n_{aval} e $N_s\%$ se encontram destacados.

Método	N_m	J^*	t_p [s]	s_t [s]	n_{aval}	Δc_{max}	N_s	$N_s\%$
$PSOPT_t$	50	0,75663	3,20295	0,08123	924	3,12e-11	27	90,00%
$PSOPT_h$	50	0,75393	3,50511	0,08317	1060	4,16e-09	25	83,33%
$PSOPT_l$	110	0,75399	15,91228	0,16007	214	1,16e-07	24	80,00%
$FALCON$	45	0,75720	0,37631	0,04386	76	2,36e-09	30	100,00%
$COPILOTS_t$	45	0,75720	17,77565	0,37422	37149	3,32e-12	30	100,00%
$COPILOTS_h$	30	0,75397	34,27460	0,41814	105399	1,63e-12	30	100,00%

Nesta tabela, os valores de J^* associados ao $PSOPT_h$ e ao $COPILOTS_h$ se mostram bastante próximos, sendo o J^* atribuído ao $PSOPT_h$ o menor dentre os obtidos. Em relação ao $FALCON$ e ao $COPILOTS$, associam-se os menores N_m . Além disso, observa-se no $COPILOTS_h$ o menor valor em termos de N_m . Em geral, os N_m associados aos métodos que fazem uso da colocação trapezoidal são maiores que os requeridos pelos que empregam a colocação de Hermite-Simson. De fato, essa tendência é observada quando comparam-se os valores de N_m do $COPILOTS_t$ e do $COPILOTS_h$. No entanto, não se verifica esse mesmo comportamento quando avaliam-se os N_m associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$. Esse resultado pode estar relacionado ao tipo de otimizador considerado pelo $PSOPT$, isto é: o Método de Ponto Interior (WÄCHTER; BIEGLER, 2006).

Ao se empregar o $FALCON$ observam-se os menores valores para t_p e n_{aval} . Em contrapartida, ao $COPILOTS$ estão associados os maiores t_p e n_{aval} . Provavelmente, esta diferença se deve às características de cada pacote, bem como ao uso de informações analíticas empregadas pelo $FALCON$. Foi somente empregando o $COPILOTS$ e o $FALCON$ que este

estudo de caso foi resolvido para todos os valores de N adotados. Por outro lado, o menor valor de $N\%$ e o maior valor de N_m foram obtidos pelo $PSOPT_l$. Esses resultados indicam que a colocação pseudo-espectral não deve ser empregada na resolução de PCOs aos quais estejam associadas descontinuidades nos controles e/ou estados (BECERRA; GALVÃO, 2010).

É importante ressaltar que em relação ao $PSOPT$, o maior valor de t_p foi encontrado para a configuração pseudo-espectral. Esse resultado indica que nem sempre há uma relação direta entre t_p e n_{aval} , e que a associação entre essas variáveis depende do método empregado na resolução do estudo de caso em análise.

As trajetórias obtidas para os vetores de variáveis de estado e controle são apresentadas nas Figuras 34-37 considerando N igual a N_m . Ao se analisar os resultados pode-se perceber a similaridade entre todos os perfis referentes às variáveis de estado. Em relação ao controle, observa-se uma mesma tendência, todavia notam-se oscilações na maioria dos pacotes. As trajetórias de controle associadas ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$ se mostraram oscilatórias, o que pode ser devido ao otimizador considerado. Já aquelas atribuídas aos demais métodos apresentaram apenas leves oscilações após a primeira variação abrupta de $u(t)$, que ocorre em $t \approx 1,3$ s. No caso do $PSOPT_l$ foram observadas leves oscilações ao fim da trajetória, o que se deve ao alto valor de N_m empregado. Em contrapartida, o *FALCON* apresenta uma trajetória mais suave em relação às outras abordagens empregadas.

A influência do número de nós de colocação no tempo de processamento e no número de avaliações da função objetivo é apresentada nas Figuras 38 e 39. Nestas são introduzidas as variações: $\Delta t_p = \max\{t_p\} - \min\{t_p\}$ e $\Delta n_{aval} = \max\{n_{aval}\} - \min\{n_{aval}\}$. Os pontos nos gráficos representam os valores atribuídos a t_p (e a n_{aval}) para cada um dos N considerados, enquanto as linhas contínuas representam curvas de tendência, obtidas por meio de regressões lineares, em que R^2 é o coeficiente de determinação. Os valores de N empregados na geração desses resultados são iguais àqueles considerados na computação da relação entre J^* e N .

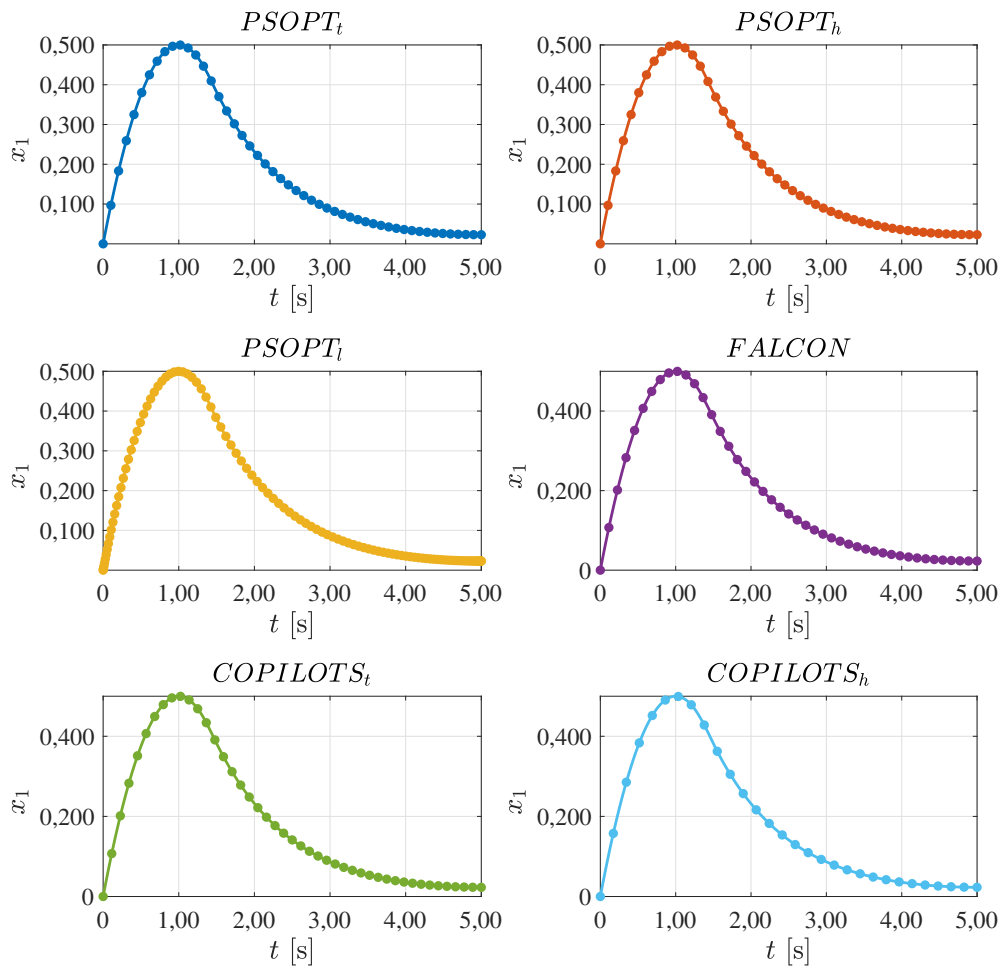


Figura 34 – Variável de estado $x_1(t)$ para o problema singular 2. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

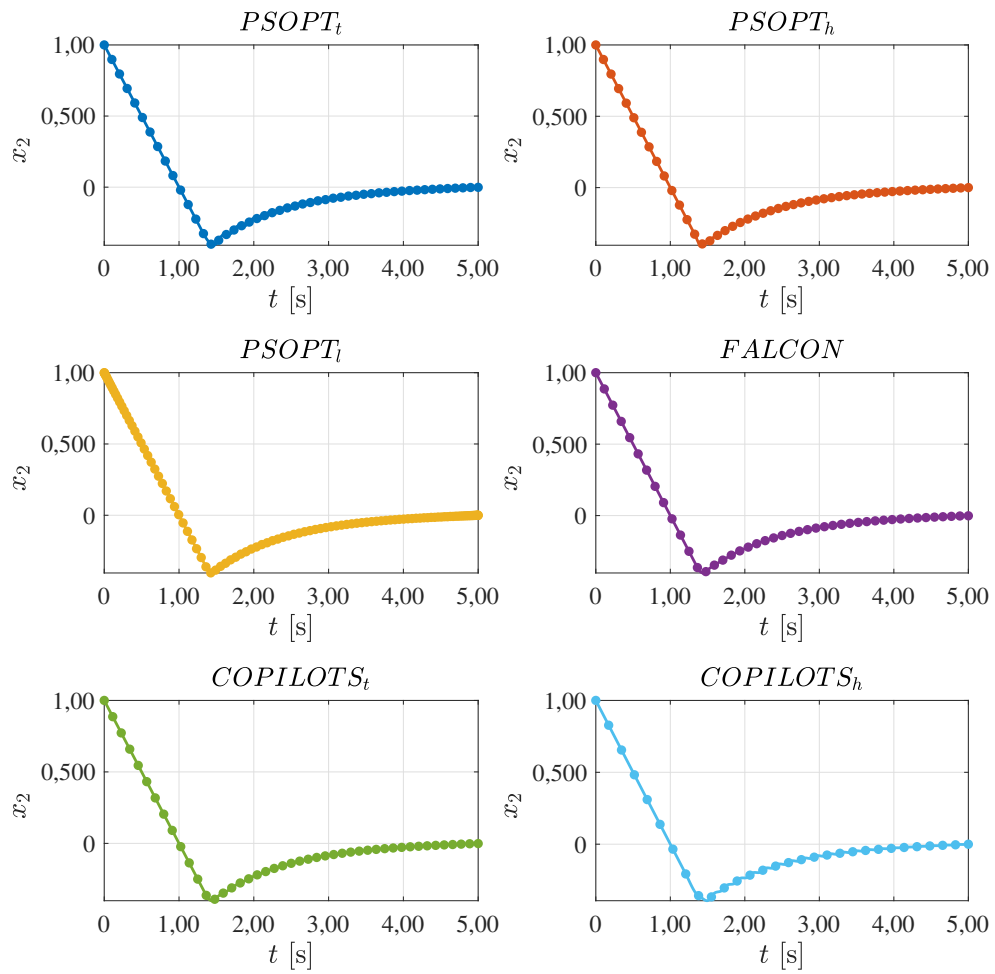


Figura 35 – Variável de estado $x_2(t)$ para o problema singular 2. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

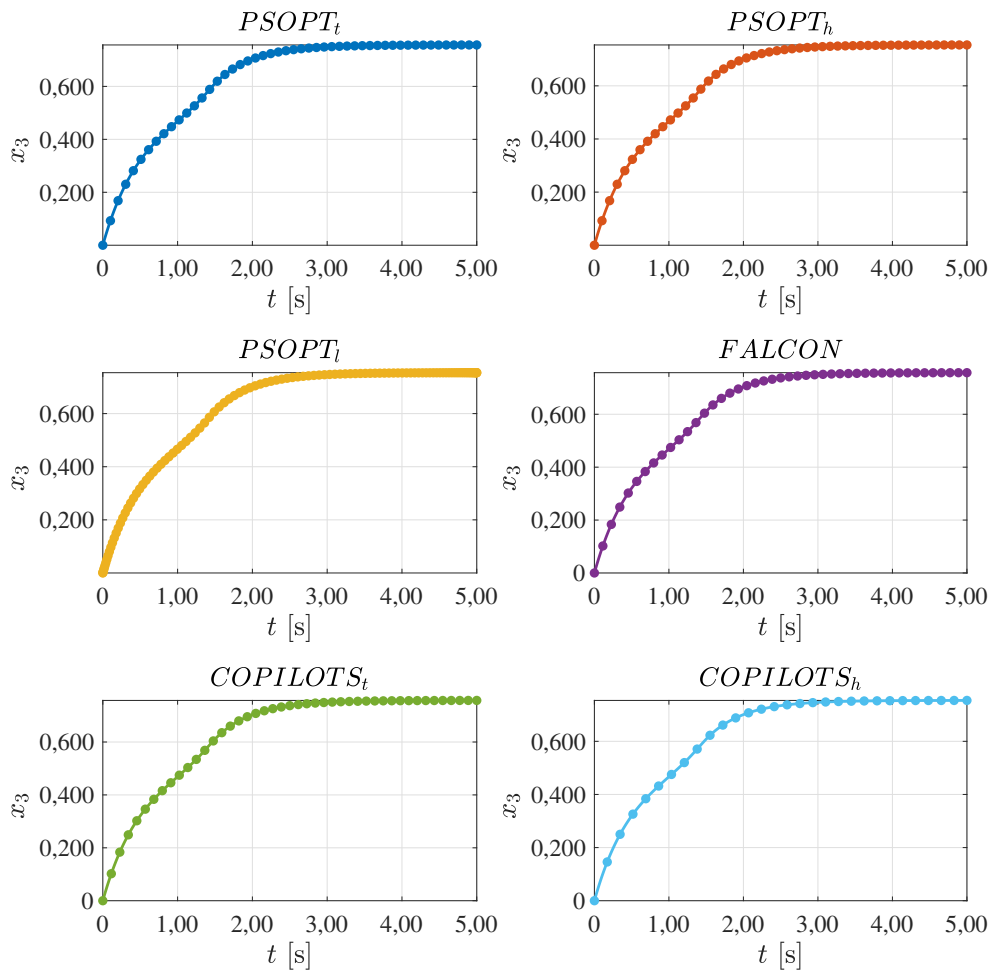


Figura 36 – Variável de estado $x_3(t)$ para o problema singular 2. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

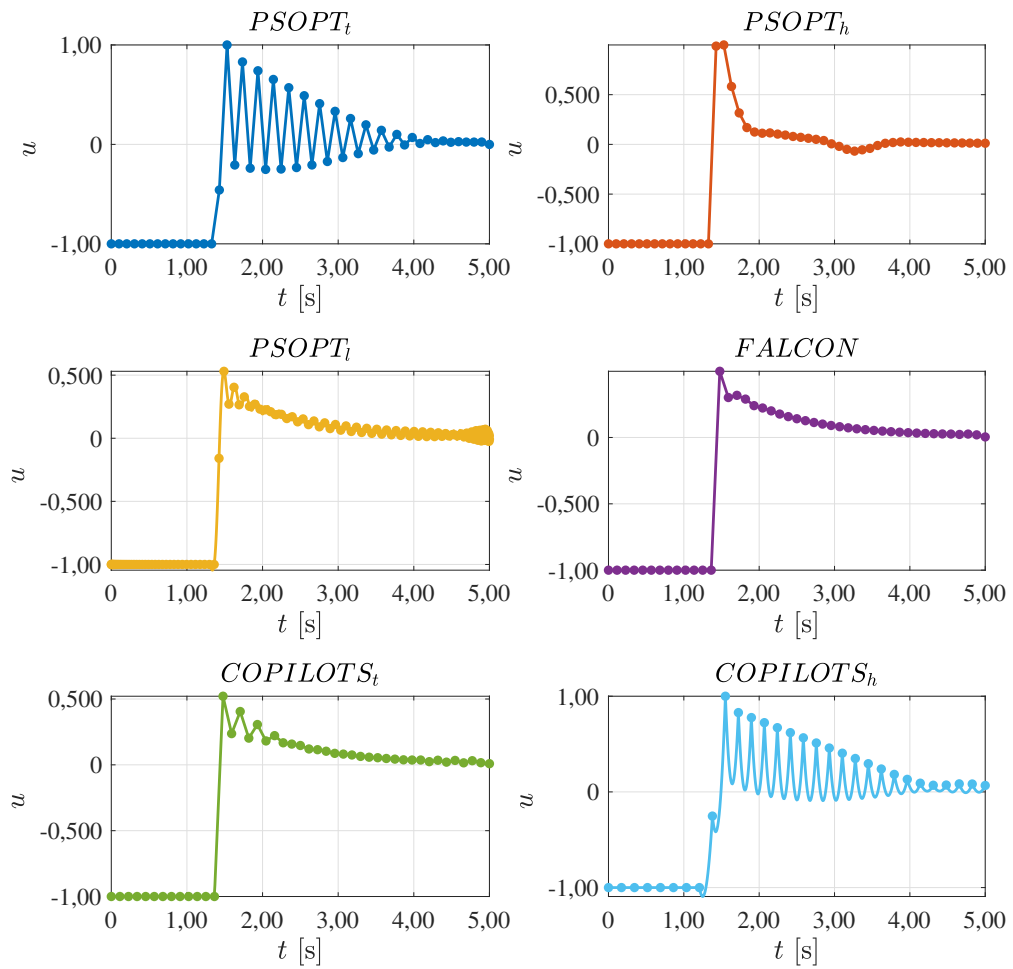


Figura 37 – Variável de controle $u(t)$ para o problema singular 2. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

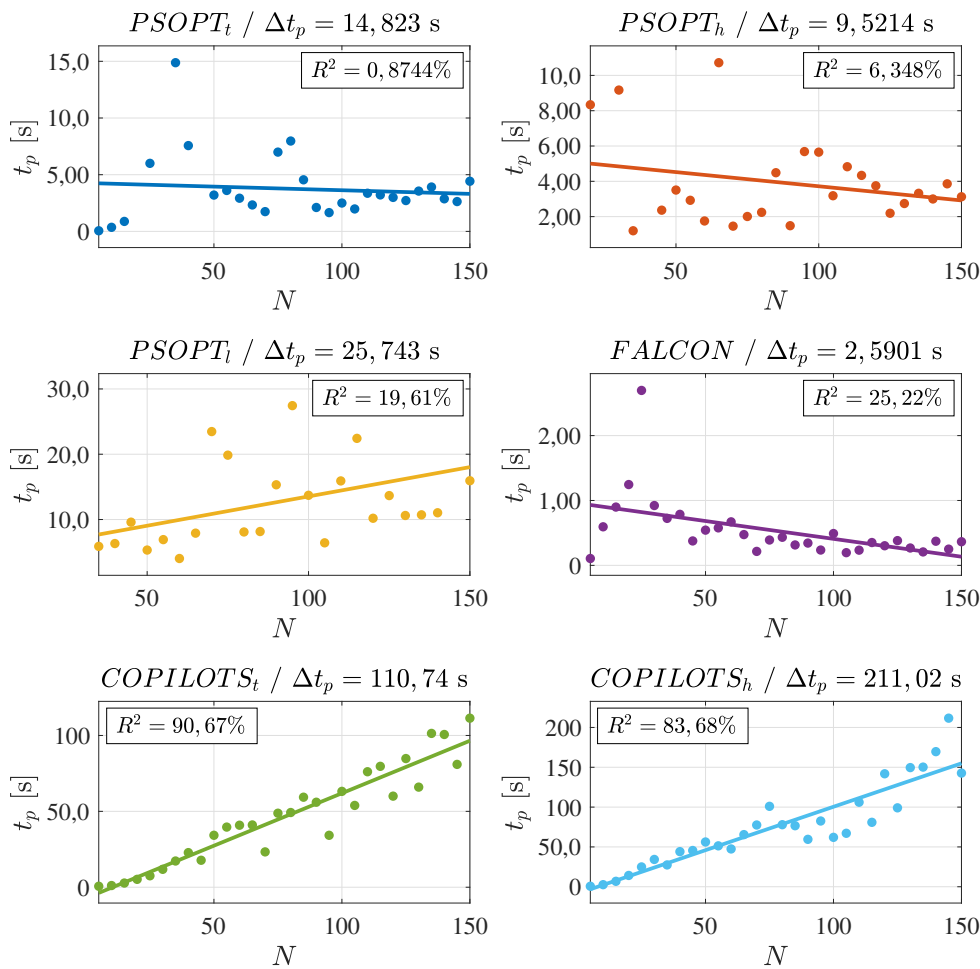


Figura 38 – Relação entre o tempo de processamento t_p e o número de nós de colocação N , considerando cada um dos métodos em análise.

Nas Figuras 38 e 39 observa-se que os valores de t_p e n_{aval} associados ao *FALCON* se mostraram pouco sensíveis a variações em N , dados os baixos Δt_p e Δn_{aval} associados a esse pacote. Em relação ao *PSOPT*, a configuração pseudo-espectral foi a que resultou em um maior tempo de processamento. Esse comportamento se deve às características numéricas inerentes à colocação pseudo-espectral, que não deve ser empregada na solução de PCOs aos quais estejam associadas descontinuidades nos controles (BECERRA; GALVÃO, 2010). Em contrapartida, o n_{aval} vinculado ao *PSOPT_l* se mostrou menos sensível a variações em N que aqueles associados ao *PSOPT_t* e ao *PSOPT_h*.

Os métodos associados ao *COPILOTS* se mostraram bastante sensíveis a variações em N , com Δt_p e Δn_{aval} consideravelmente mais altos que os atribuídos aos demais métodos. Esse comportamento se deve ao uso que o pacote faz do SQP. Com o aumento de N , os valores de t_p e de n_{aval} associados ao *PSOPT_t*, ao *PSOPT_h*, e ao *FALCON*, e os valores de n_{aval} requeridos pelo *PSOPT_l* tendem a convergir. Além disso, nota-se que os valores de t_p e n_{aval} diminuem à medida que alcançam essa convergência para algumas configurações utilizadas, comportamento oposto àquele que espera-se observar nesses casos. A presença de picos nos t_p e n_{aval} observados

em cada um desses métodos ajuda a explicar este comportamento anômalo. Em resumo, devido à presença de alguns picos existe uma falsa impressão que o aumento no valor de N implica na redução do tempo de processamento (ver a Figura 38). Este mesmo comportamento pode ser observado na Figura 39 para todas as configurações do *PSOPT* e do *FALCON*. Neste caso, menores valores de N podem resultar em um menor número de avaliações da função objetivo, porém, a convergência acontece para um valor que não é a solução do problema, conforme observado na Figura 33. Já para todas as configurações do *COPILOTS* são observados perfis mais próximos aos esperados para t_p e n_{aval} , isto é; o aumento no valor de N implica no aumento destes dois parâmetros, conforme observado nas Figuras 38 e 39.

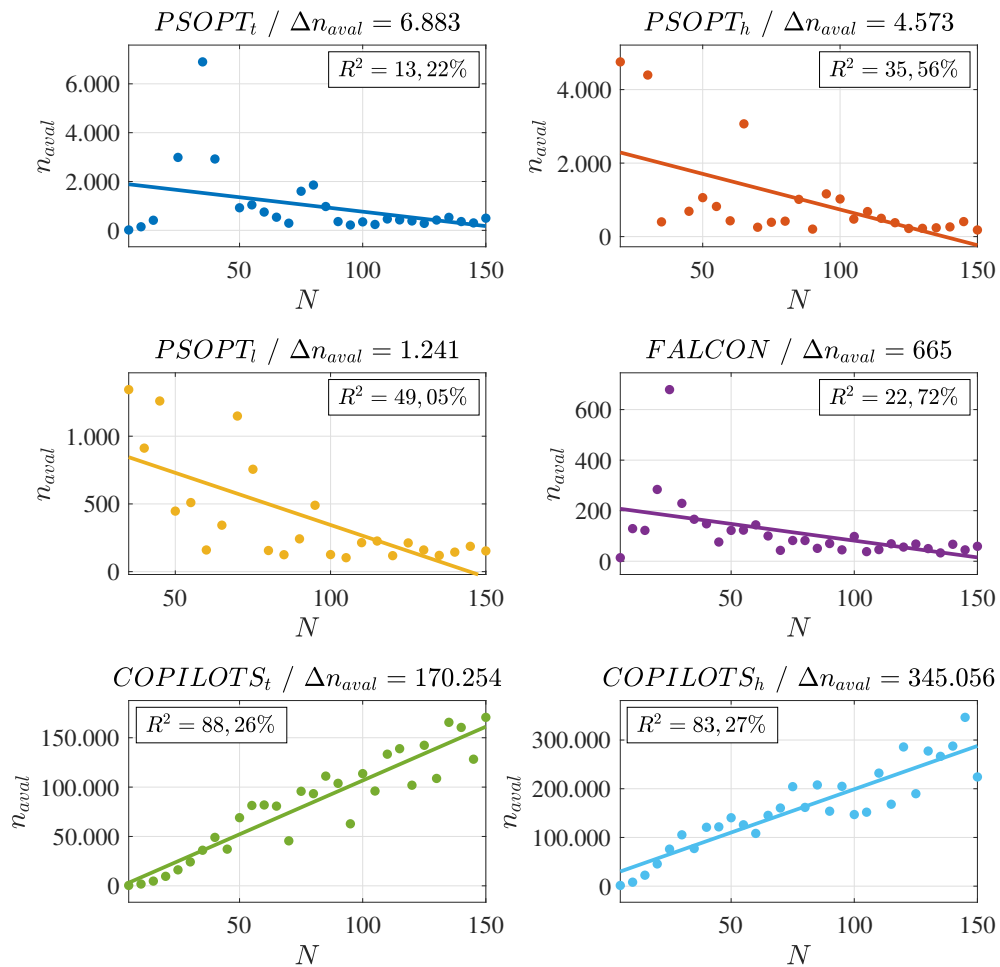


Figura 39 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo n_{aval} e o número de nós de colocação N , considerando cada um dos métodos em análise.

4.3 MINIMIZAÇÃO DO ESFORÇO DURANTE O *swing-up* DE UM PÊNDULO INVERTIDO

O pêndulo invertido é um sistema comumente empregado no ensino da teoria do Controle de Sistemas (KELLY, 2017). No entanto, a dinâmica associada ao pêndulo invertido pode ser

empregada na modelagem da caminhada de robôs humanoides (VENÂNCIO, 2018), no estudo da dinâmica de foguetes durante o lançamento (PELTROCHE; ZAMBRANA, 2019), e no controle de veículos do tipo *Segway*[®] (YOUNIS et al., 2009).

Para fins de aplicação considere o pêndulo invertido apresentado na Figura 40. Este é composto por um carro que, impulsionado por um motor, se move ao longo de um trilho, e por um pêndulo que pende livremente desse carro. O ângulo entre o pêndulo e a vertical é dado por $\theta(t)$, enquanto $\omega(t)$ e l são a velocidade angular do pêndulo e o comprimento de sua haste. A distância entre o carro e o centro do trilho é dada por $d(t)$, enquanto $v(t)$ é a velocidade do carro, $F(t)$ é a força que o impulsiona, m_1 e m_2 são as massas do carro e do pêndulo, respectivamente, e g é a aceleração da gravidade (KELLY, 2017).

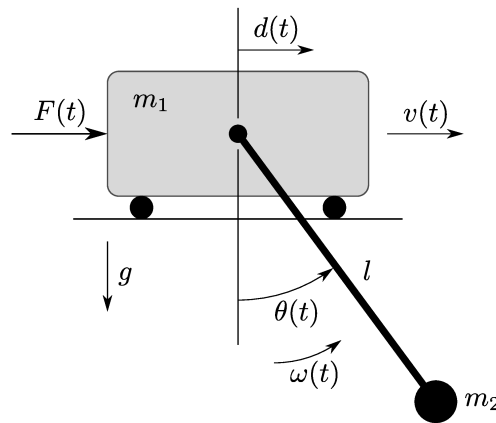


Figura 40 – Representação esquemática de um pêndulo invertido e das variáveis utilizadas na descrição da dinâmica desse sistema.

Neste estudo deseja-se determinar a trajetória a ser percorrida por um pêndulo invertido para que o mesmo realize uma manobra de balanço ascendente (*swing-up*), empregando o mínimo esforço. Inicialmente em repouso, o carro deve partir do centro do trilho, com a haste do pêndulo pendendo na vertical, e se movimentar de forma que a posição d_f seja atingida t_f segundos após o início da manobra, ao mesmo tempo em que a haste do pêndulo, apontando agora para cima, atinge a posição vertical, conforme ilustrado na Figura 41 (KELLY, 2017).

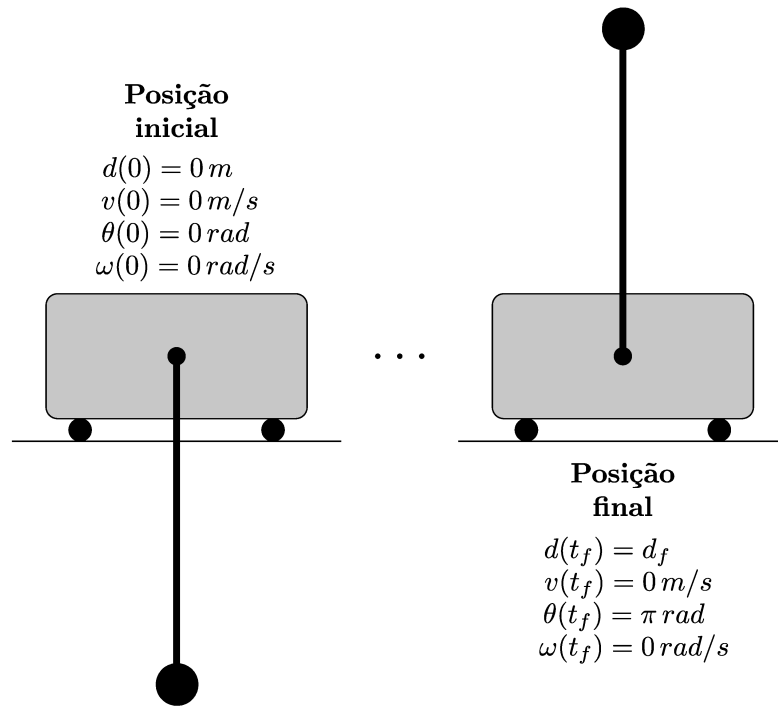


Figura 41 – Posições inicial e final definidas para o problema do pêndulo invertido durante a execução da manobra de *swing-up*.

Para este estudo de caso deseja-se minimizar a função objetivo descrita como (KELLY, 2017):

$$J = \int_0^{t_f} F^2(t) dt \quad (4.7)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{d}(t) = v(t), \quad d(0) = 0 \text{ m} \quad (4.8a)$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t), \quad \theta(0) = 0 \text{ rad} \quad (4.8b)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{l m_2 \omega^2(t) \sin \theta(t) + F(t) + m_2 g \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{m_1 + m_2 [1 - \cos^2 \theta(t)]}, \quad v(0) = 0 \text{ m/s} \quad (4.8c)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{l m_2 \omega^2(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) + F(t) \cos \theta(t) + (m_1 + m_2) g \sin \theta(t)}{l m_1 + l m_2 [1 - \cos^2 \theta(t)]}, \quad (4.8d)$$

$$\omega(0) = 0 \text{ rad/s}$$

em que $\mathbf{x}(t) = [d(t) \quad \theta(t) \quad v(t) \quad \omega(t)]^T$ é o vetor de variáveis de estado e $F(t)$ é a variável de controle.

Uma vez que o trilho sobre o qual o carro se movimenta é finito e levando em conta que há um limite associado à força que o motor pode impor sobre o carro, devem-se considerar as restrições:

$$-d_{max} \leq d(t) \leq d_{max} \quad (4.9a)$$

$$-F_{max} \leq F(t) \leq F_{max} \quad (4.9b)$$

sendo d_{max} a metade da extensão do trilho e F_{max} a máxima força que pode ser imposta pelo motor.

São também consideradas restrições terminais, definidas como segue:

$$d(t_f) = d_f \text{ m} \quad (4.10a)$$

$$\theta(t_f) = \theta_f \text{ rad} \quad (4.10b)$$

$$v(t_f) = 0 \text{ m/s} \quad (4.10c)$$

$$\omega(t_f) = 0 \text{ rad/s} \quad (4.10d)$$

Os parâmetros empregados neste estudo de caso são (KELLY, 2017): aceleração da gravidade ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$), massa do carro ($m_1 = 1 \text{ kg}$), massa do pêndulo ($m_2 = 0,3 \text{ kg}$), comprimento da haste do pêndulo ($l = 0,5 \text{ m}$), tempo final ($t_f = 2 \text{ s}$), distância percorrida pelo carro ao longo da execução da manobra ($d_f = 1 \text{ m}$), posição angular final do pêndulo ($\theta_f = \pi \text{ rad}$), máxima força que pode ser imposta pelo motor que impulsiona o carro ($F_{max} = 20 \text{ N}$), e metade do comprimento do trilho sobre o qual o carro se movimenta ($d_{max} = 2 \text{ m}$).

Para que as trajetórias das variáveis de estado e de controle obtidas pela metodologia proposta se assemelhem àquelas reportadas em Kelly (2017), assume-se, *a priori*, que os estados do sistema evoluem linearmente ao longo da execução da manobra de *swing-up* e que $F(t)$ permanece nulo para $t \in [0, t_f]$. Assim sendo, para resolução do estudo de caso em análise por meio do *COPILOTS* adotaram-se as seguintes estimativas iniciais (KELLY, 2017):

$$x_p(t) = \frac{t}{t_f} \begin{bmatrix} d_f & \pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.11a)$$

$$u_p(t) = 0 \quad (4.11b)$$

sendo $x_p(t)$ e $u_p(t)$ as estimativas associadas aos perfis de estado e controle, respectivamente.

São apresentados na Figura 42 a influência do número de nós de colocação N no valor da função objetivo (melhor solução obtida), bem como o número de pontos mínimo N_m encontrados por cada abordagem. Para essa análise foram escolhidos 30 valores igualmente espaçados e pertencentes ao intervalo [5 92].

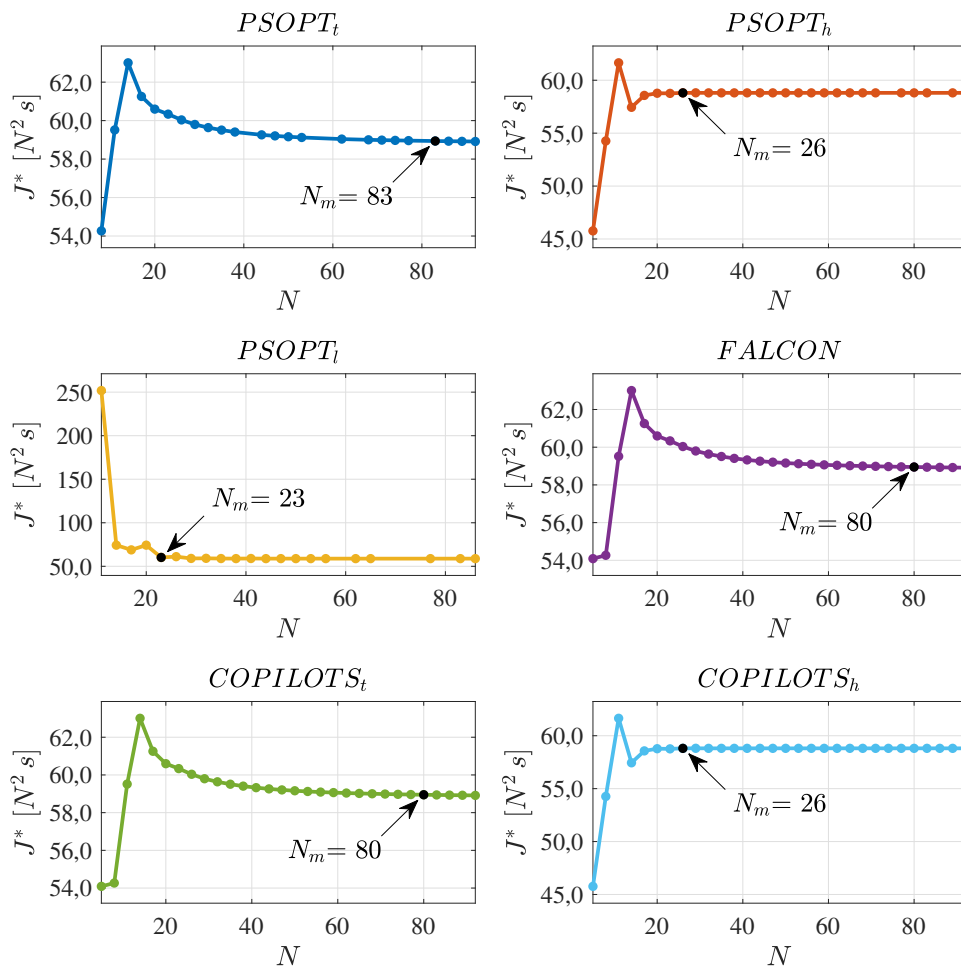


Figura 42 – Influência do número de nós de colocação N no valor da função objetivo J^* para o problema do pêndulo invertido.

Nesta figura observa-se que, após um determinado valor de N_m , todos os pacotes convergiram para soluções semelhantes. Todavia, deve ser mencionado que não foi possível, empregando o $PSOPT_t$, o $PSOPT_h$ e o $PSOPT_l$, obter soluções para todos os N considerados. Em contrapartida, o valor de J^* para o $PSOPT_l$ convergiu mais rapidamente que aqueles requeridos pelas outras abordagens. Os valores de J^* e N associados a cada um dos métodos que fazem uso da colocação trapezoidal ($FALCON$, o $PSOPT_t$ e $COPILOTS_t$) foram semelhantes entre si. Esta concordância pode ser verificada quando comparam-se os resultados obtidos pelo $PSOPT_h$ e pelo $COPILOTS_h$, ambos métodos que empregam a colocação Hermite-Simpson. Além disso, observa-se que os valores de J^* referentes aos métodos que empregam a colocação trapezoidal aumentam até atingir seu valor máximo e depois voltam a cair até alcançar a convergência, estando o pico de J^* associado a $N = 14$. Nesse caso, escolheu-se N_m utilizando a métrica proposta originalmente, porém, desconsiderando-se os J^* obtidos para $N < 14$. De forma análoga, observa-se que os J^* associados aos métodos que fazem uso da colocação Hermite-Simpson crescem até $N = 11$, depois sofrem uma queda brusca em $N = 14$, para em seguida voltarem a crescer lentamente até atingir a convergência. Para estes casos considera-se que esse aumento no

valor da função objetivo se deve ao pequeno número de nós de colocação, associado a violações nas restrições. Assim como observado para o problema anterior, ressalta-se a importância da realização de uma análise de sensibilidade no que tange o número de nós de colocação, bem como da análise do atendimento das restrições do estudo em questão.

As métricas calculadas por cada um dos pacotes são apresentadas Tabela 5 considerando $N = N_m$. Nesta tabela tem-se o valor da função objetivo (J^*), o tempo de processamento médio (t_p), o desvio padrão associado a t_p (s_t), a máxima violação das restrições (Δc_{max}) e o número de execuções bem sucedidas (N_s).

Tabela 5 – Métricas obtidas para o problema do pêndulo invertido. Os melhores N_m , J^* , t_p , n_{aval} e $N_s\%$ se encontram destacados.

Método	N_m	J^*	t_p [s]	s_t [s]	n_{aval}	Δc_{max}	N_s	$N_s\%$
$PSOPT_t$	83	58,93880	1,86743	0,18145	542	4,32e-14	24	80,00%
$PSOPT_h$	26	58,80540	0,59690	0,04756	221	2,78e-14	28	93,33%
$PSOPT_l$	23	60,16670	0,43817	0,01904	47	6,64e-14	21	70,00%
$FALCON$	80	58,94871	0,18535	0,03597	34	9,32e-11	30	100,00%
$COPILOTS_t$	80	58,94871	16,46423	0,08403	27044	1,55e-15	30	100,00%
$COPILOTS_h$	26	58,80543	17,42163	0,63533	34017	2,28e-15	30	100,00%

Nesta tabela é possível observar que os valores de N_m relacionados aos métodos que fazem uso da colocação trapezoidal ($FALCON$, $PSOPT_t$ e $COPILOTS_t$) se mostraram bem próximos uns dos outros e bem maiores que os computados pelos demais métodos. O $PSOPT_l$ foi o que resultou no menor valor para N_m . Já o maior valor de função objetivo foi encontrado pelo $PSOPT_l$. Apesar do elevado valor de N_m requerido pelo $FALCON$, verifica-se que a esse não estão diretamente associados os menores valores de t_p e de n_{aval} . Os valores de t_p e de n_{aval} associados ao $COPILOTS$, independentemente do tipo de colocação considerado, são bem maiores que os requeridos pelos demais pacotes. Em contrapartida, verifica-se que o $COPILOTS_h$ e o $PSOPT_h$ convergiram para valores de função objetivo próximos ao melhor encontrado. O parâmetro N_m requerido pelo $COPILOTS_h$ é cerca de três vezes menor que o associado ao $COPILOTS_t$. Ainda assim, o $COPILOTS_h$ requereu um valor de n_{aval} menor com relação ao $COPILOTS_t$. Finalmente, ressalta-se que somente o $FALCON$ e o $COPILOTS$ foram capazes de encontrar a solução para todos os valores de N considerados.

Os perfis referentes as variáveis de estado e controle considerando $N = N_m$ são apresentadas nas Figuras 43-47. Nestas figuras é possível observar boa concordância entre todos os perfis, bem como entre os mesmos e aqueles reportados por Kelly (2017). A única trajetória de controle um pouco discrepante foi obtida pelo $PSOPT_l$, em que são observadas pequenas oscilações no início e no fim da trajetória. Esse comportamento pode estar relacionado a como é realizada a interpolação da trajetória de controle neste caso.

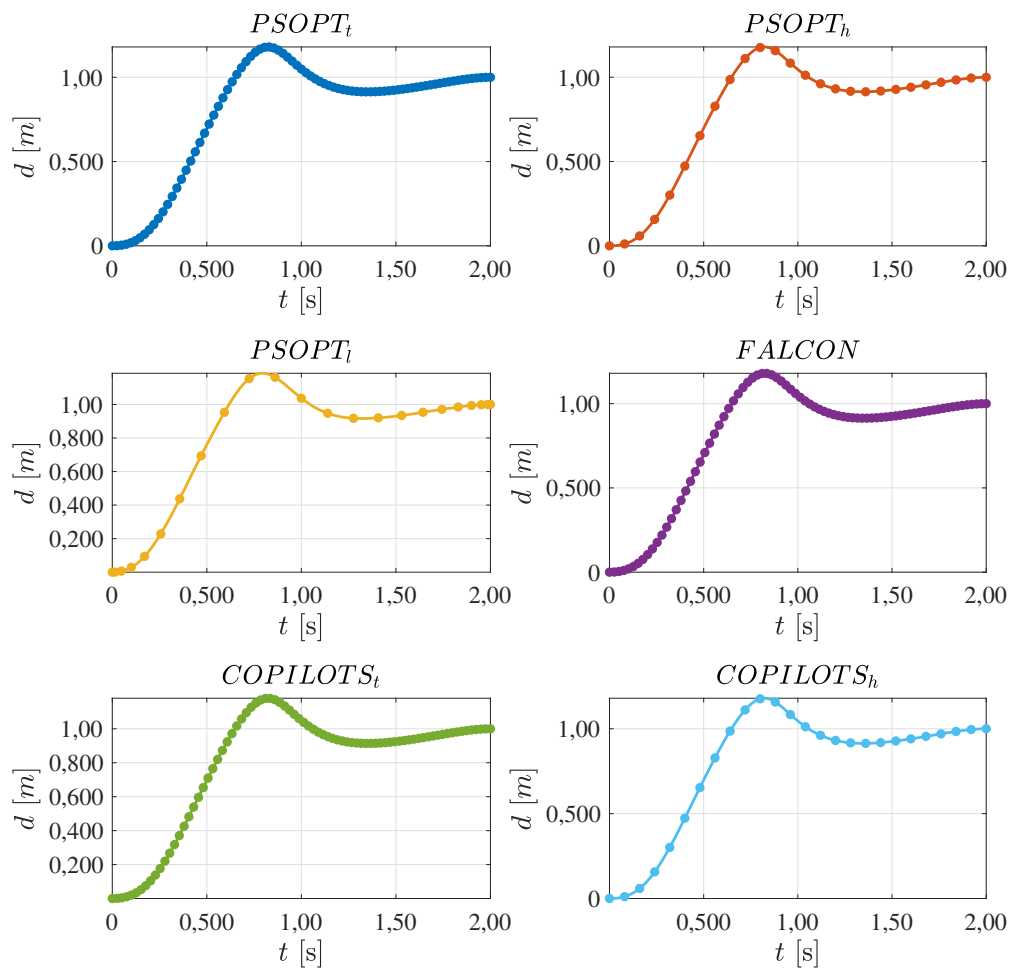


Figura 43 – Variável de estado $d(t)$ para o problema do pêndulo. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

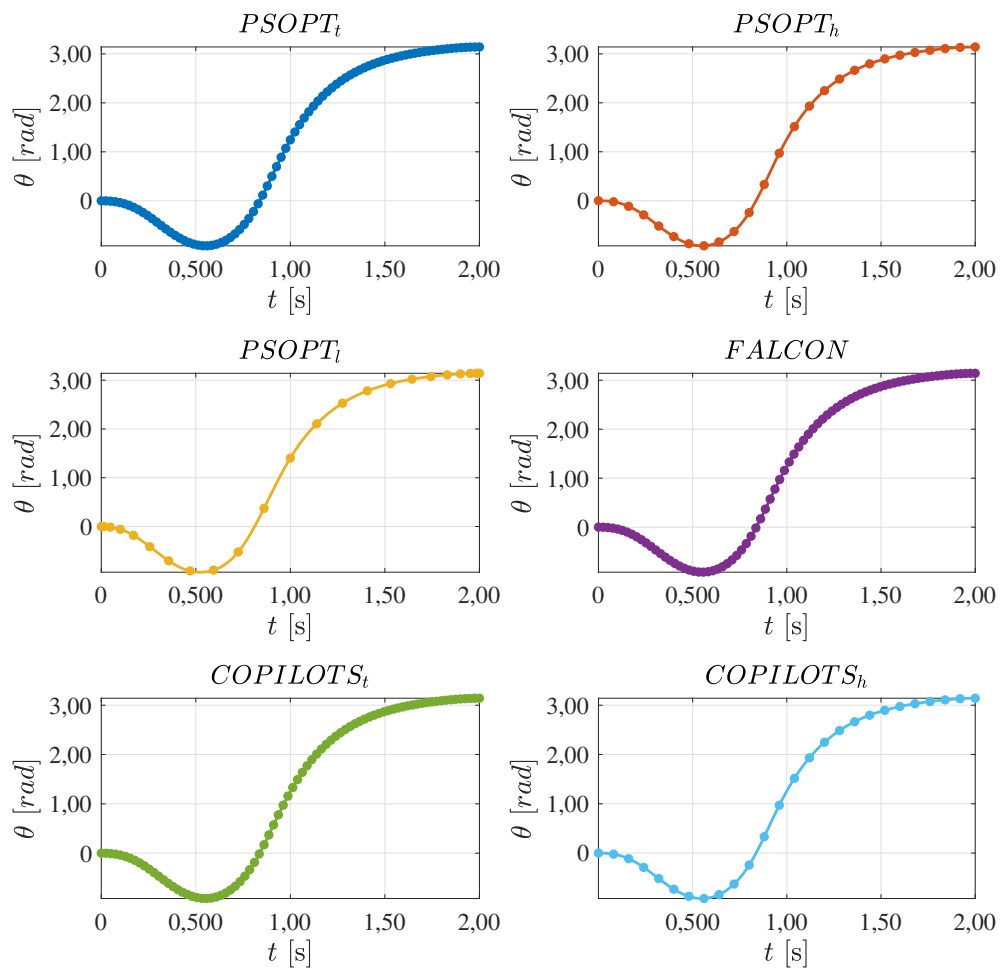


Figura 44 – Variável de estado $\theta(t)$ para o problema do pêndulo. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

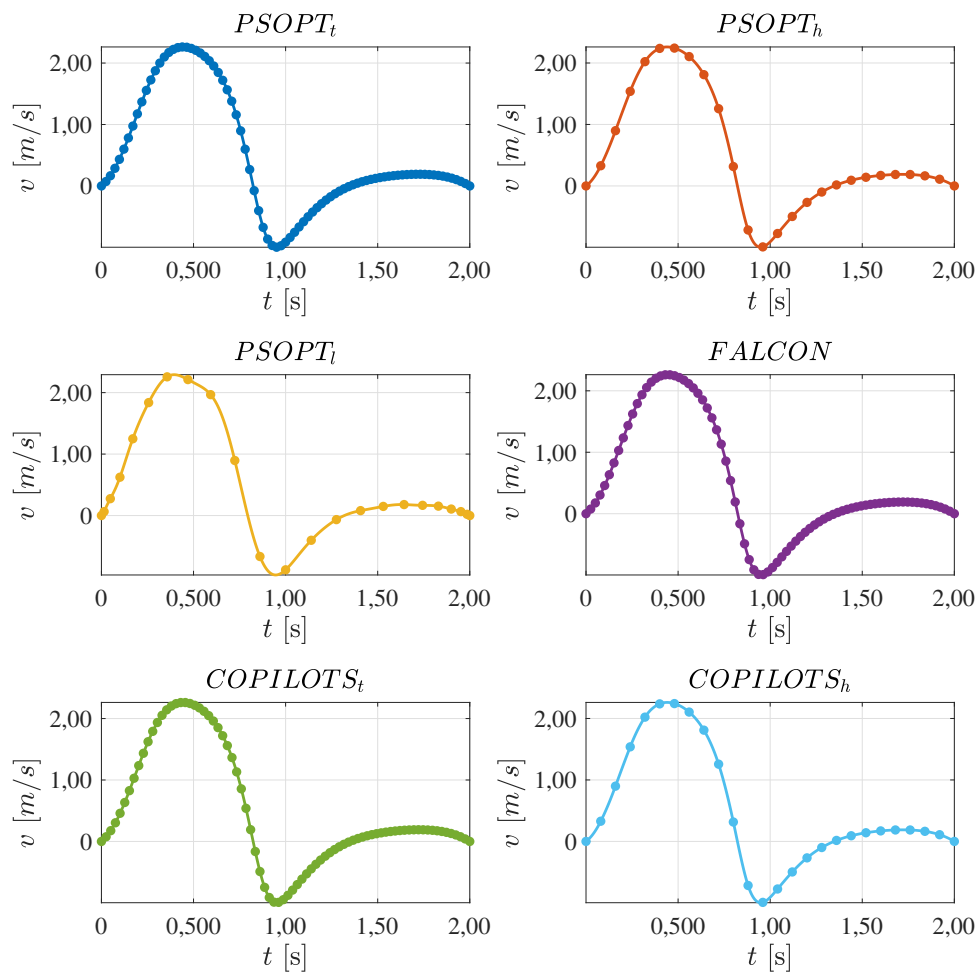


Figura 45 – Variável de estado $v(t)$ para o problema do pêndulo. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

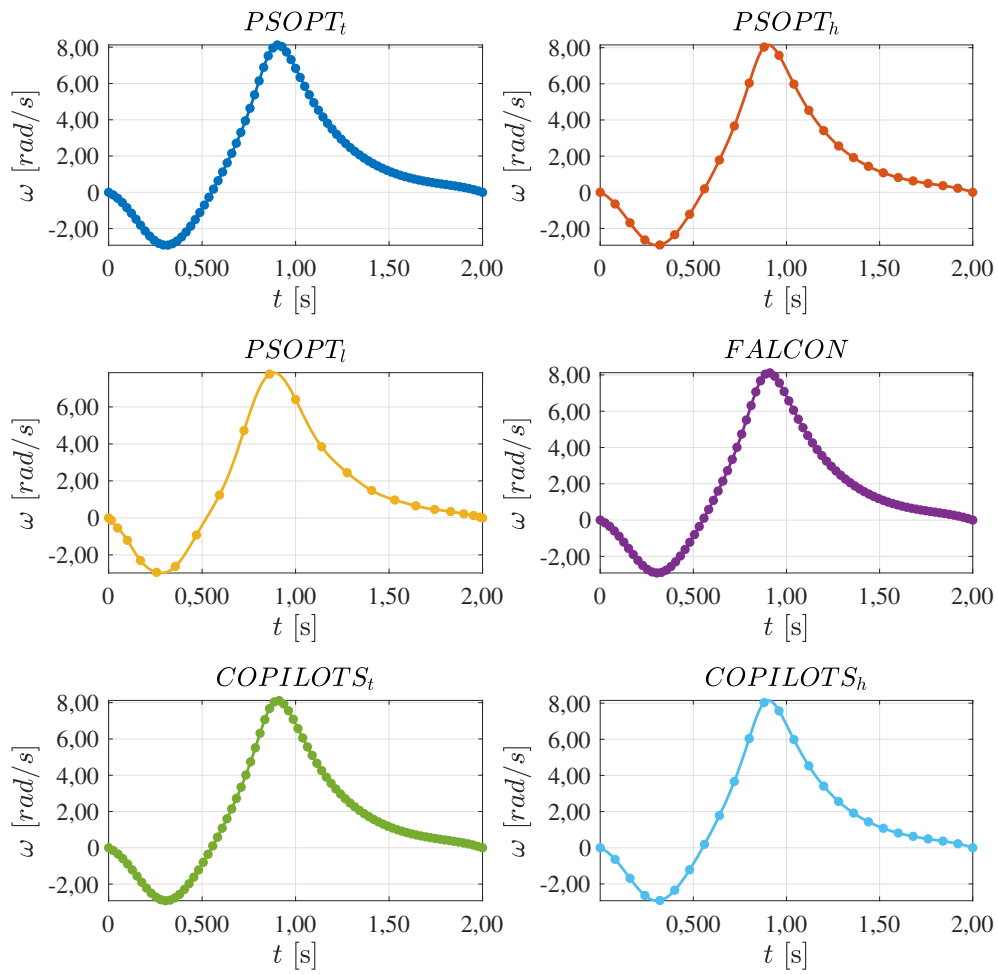


Figura 46 – Variável de estado $\omega(t)$ para o problema do pêndulo. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

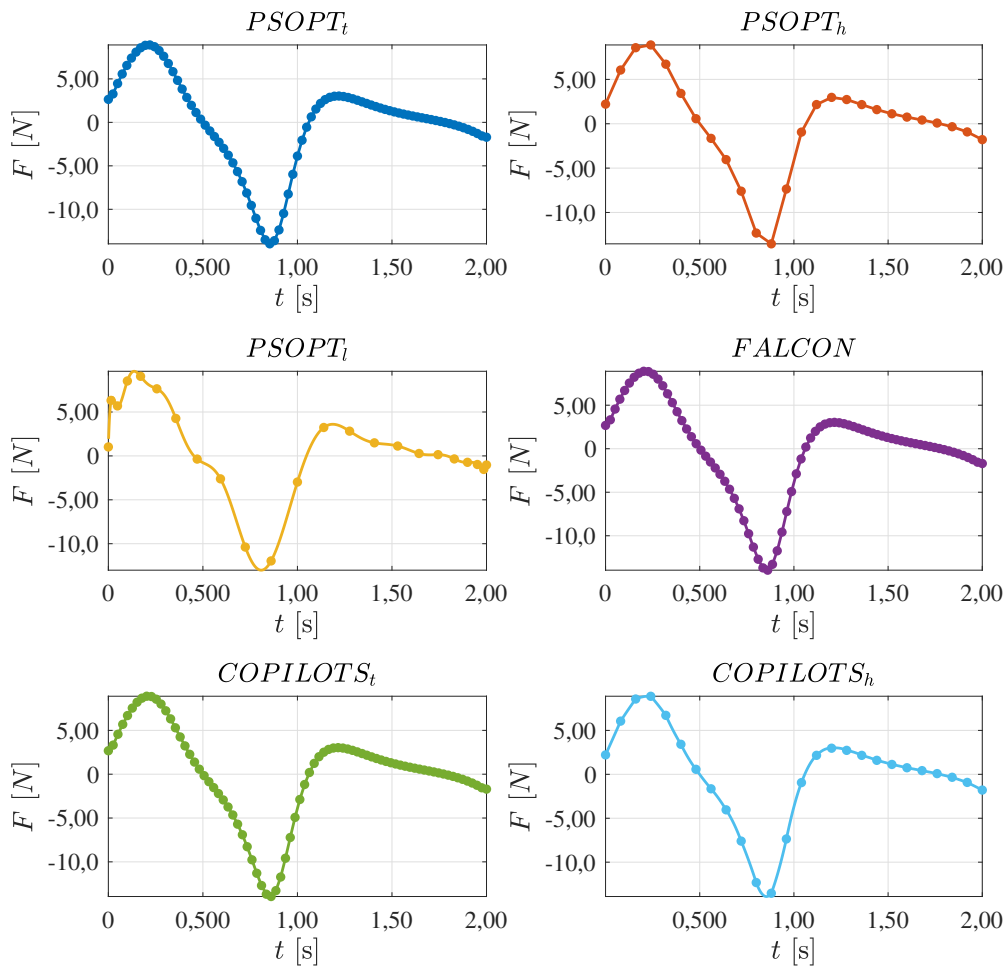


Figura 47 – Variável de controle $F(t)$ para o problema do pêndulo. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

Já a Figura 48 apresenta a vista lateral do pêndulo invertido, na qual são representadas algumas das posições durante a execução da manobra de *swing-up*. A construção desse gráfico foi baseada nos resultados obtidos pelo $COPILOTS_h$, o qual está associado ao menor valor de J^* . Vale ressaltar que a posição da extremidade do pêndulo $(x_e(t), y_e(t))$ pode ser determinada com base nas relações $x_e(t) = d(t) + l \sin(\theta(t))$ e $y_e(t) = l \cos(\theta(t))$. Assim sendo, os pontos nesta figura representam os $(x_e(t), y_e(t))$ obtidos a partir dos valores de $d(t)$ e $\theta(t)$ nos nós de colocação, enquanto a linha contínua que conecta esses pontos representa a trajetória computada com base nas trajetórias apresentadas nas Figuras 43 e 44.

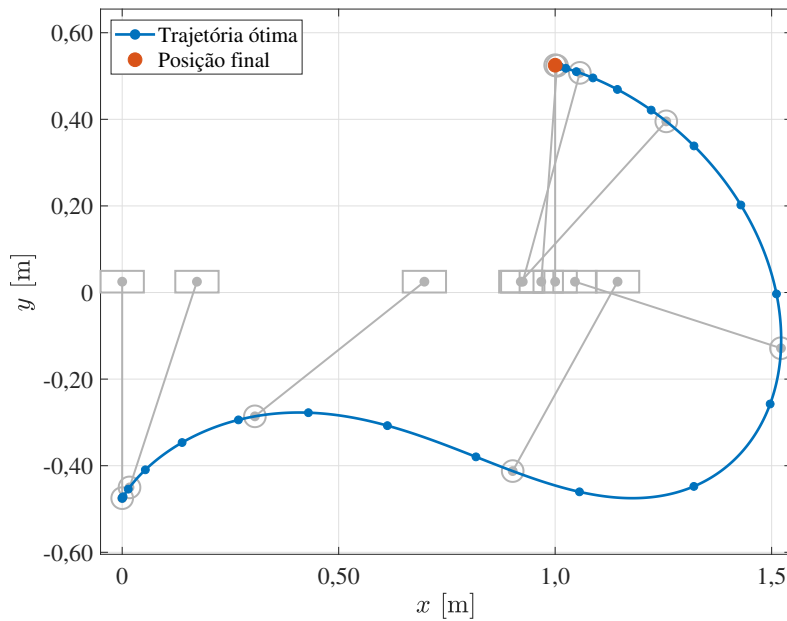


Figura 48 – Algumas posições do pêndulo invertido durante a execução da manobra de *swing-up*.

A influência do número de nós de colocação no tempo de processamento e no número de avaliações da função objetivo é apresentada nas Figuras 49 e 50. Nestes gráficos são introduzidas as variações: $\Delta t_p = \max\{t_p\} - \min\{t_p\}$ e $\Delta n_{aval} = \max\{n_{aval}\} - \min\{n_{aval}\}$. Os pontos nos gráficos representam os valores atribuídos a t_p (e a n_{aval}) para cada um dos N considerados, enquanto as linhas contínuas representam curvas de tendência, obtidas por meio de regressões lineares, em que R^2 é o coeficiente de determinação. Os valores de N empregados na geração desses resultados são iguais àqueles considerados na computação da relação entre J^* e N .

Nestas figuras é possível verificar que, de forma geral, ambos os valores de t_p e de n_{aval} aumentam com o incremento no valor do número de nós de colocação, conforme esperado. Além disso, em todas as configurações analisadas, os resultados obtidos pelo *FALCON* se mostram pouco sensíveis ao aumento de N em relação ao tempo e ao número de avaliações da função objetivo, conforme observado para Δt_p e Δn_{aval} . Tal comportamento pode ser justificado pelo uso de informações simbólicas, o que na prática, facilita o cômputo de gradientes, necessários para a resolução do PPNL correspondente. Por outro lado, os valores de t_p e de n_{aval} associados ao *COPILOTS* se mostraram consideravelmente mais sensíveis ao aumento de N com relação às outras abordagens, conforme constatado avaliando-se Δt_p e Δn_{aval} . Para este caso, imagina-se que estes valores elevados com relação às outras abordagens estejam relacionados à metodologia empregada para a resolução do PPNL associado.

Já o tempo de processamento associado ao $PSOPT_l$ se mostrou mais sensível ao aumento de N em relação ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$. No entanto, os valores de n_{aval} associados ao $PSOPT_t$, ao $PSOPT_h$ e ao $PSOPT_l$ se mostraram igualmente sensíveis ao aumento de N , conforme pode ser observado ao se comparar os valores de Δn_{aval} para cada um. Para alguns dos N considerados, é possível verificar picos nos n_{aval} associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$, o

que justifica os baixos R^2 atribuídos a esses métodos. A presença desses picos pode ser justificada pela forma como cada pacote realiza a sua inicialização. Além disso, picos bastante similares podem ser observados nos valores de t_p e de n_{aval} associados ao $COPILOTS_t$.

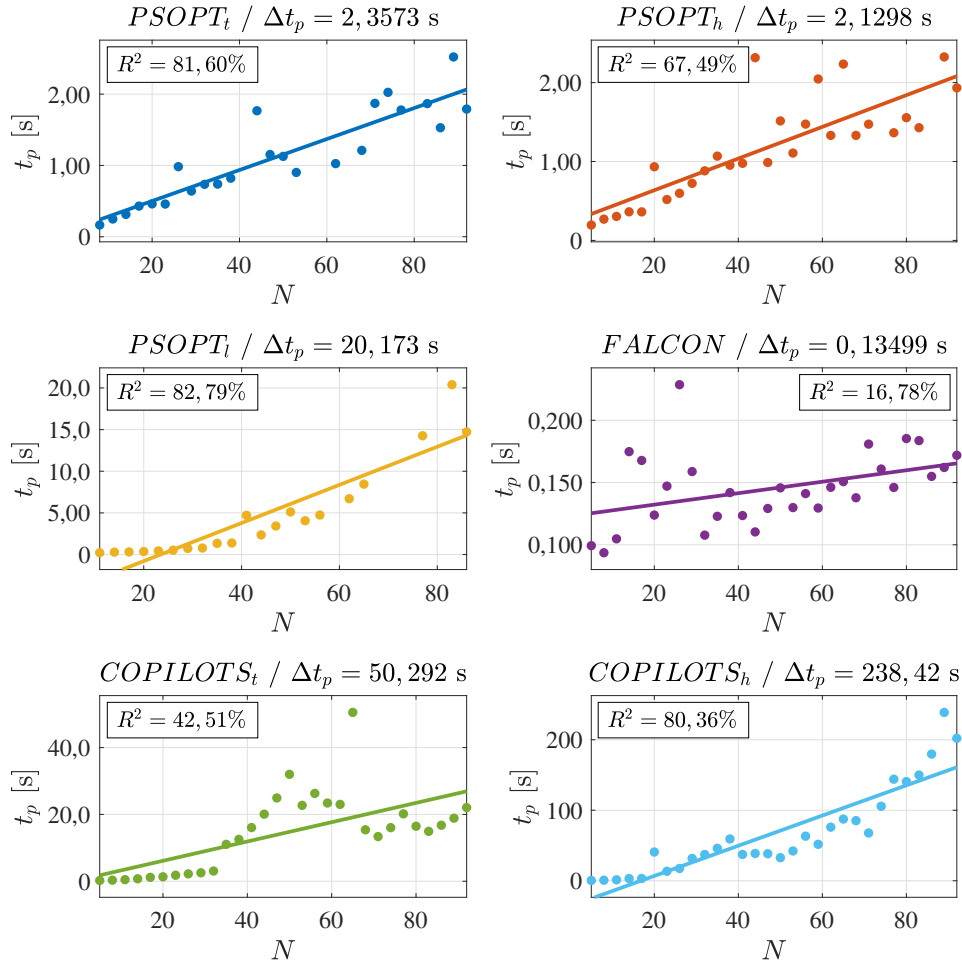


Figura 49 – Relação entre o tempo de processamento t_p e o número de nós de colocação N para o problema do pêndulo invertido.

A Figura 42 apresenta um comportamento diferente do esperado, isto é: espera-se que J^* diminua com o crescimento de N , no entanto, para $N < 14$, verifica-se que ocorre o oposto. Anteriormente foi apresentada uma justificativa que leva em consideração o número de nós de colocação bem como o atendimento das restrições. Para explicar tal comportamento do ponto de vista matemático, serão avaliadas estratégias para a integração da função objetivo J .

Como a solução analítica do estudo de caso não é conhecida (KELLY, 2017), será considerada como referência a solução obtida via utilização do *FALCON* para $N = 2000$. Este pacote foi escolhido devido aos baixos tempos de processamento a ele associados, mesmo para altos valores de N . De posse deste perfil, pode-se determinar o valor do referido objetivo.

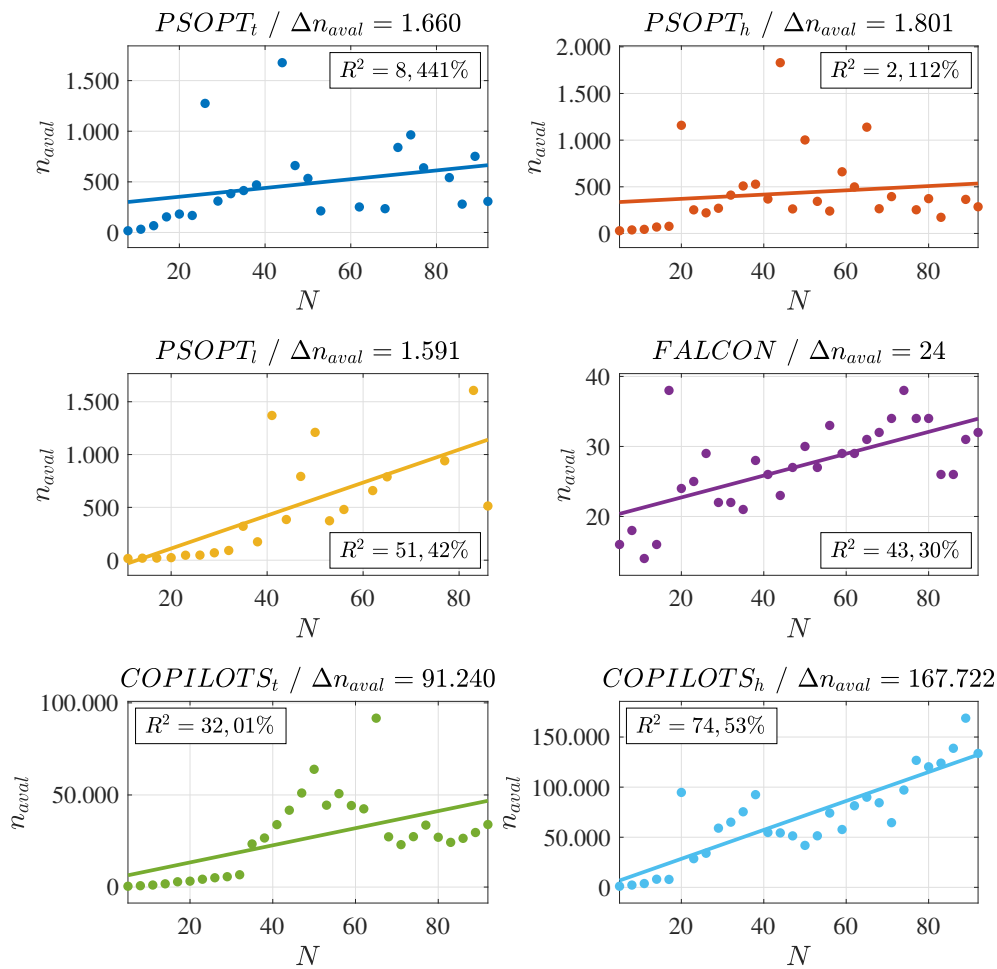


Figura 50 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo n_{aval} e o número de nós de colocação N para o problema do pêndulo invertido.

Ao se aplicar a colocação trapezoidal, o cálculo da integral associada ao custo é realizada via uso da quadratura trapezoidal. As Figuras 51, 52 e 53 apresentam as aproximações lineares nas quais se baseia a computação de $\int_0^{t_f} F^2(t)dt$ considerando $N = 7$, $N = 9$ e $N = 11$, respectivamente. Nota-se que o maior pico de $F^2(t)$, que ocorre em $t = 0,85$ s, não é capturado para pequenos valores de N . Desta forma, o valor atribuído a $\int_0^{t_f} F^2(t)dt$ via quadratura trapezoidal acaba sendo bem menor que o valor verdadeiro, o que justifica os baixos J^* observados para $N < 14$, conforme ilustrado na Figura 42.

Já na Figura 54 é apresentada a relação entre o valor atribuído a $\int_0^{t_f} F^2(t)dt$ via quadratura trapezoidal e o número de nós de colocação N . Como esperado, nota-se que o valor de J tende a estabilizar e convergir para a solução ótima à medida que N cresce. Além disso, observa-se que tal convergência ocorre para $N > 12$, o que justifica os resultados apresentados na Figura 42.

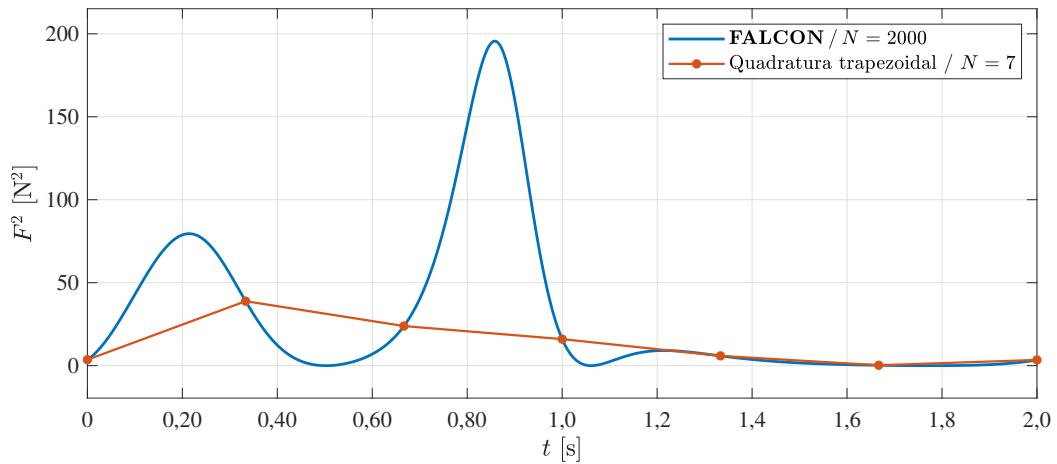


Figura 51 – Aproximações lineares para a avaliação de integrais via quadratura trapezoidal ($N = 7$).

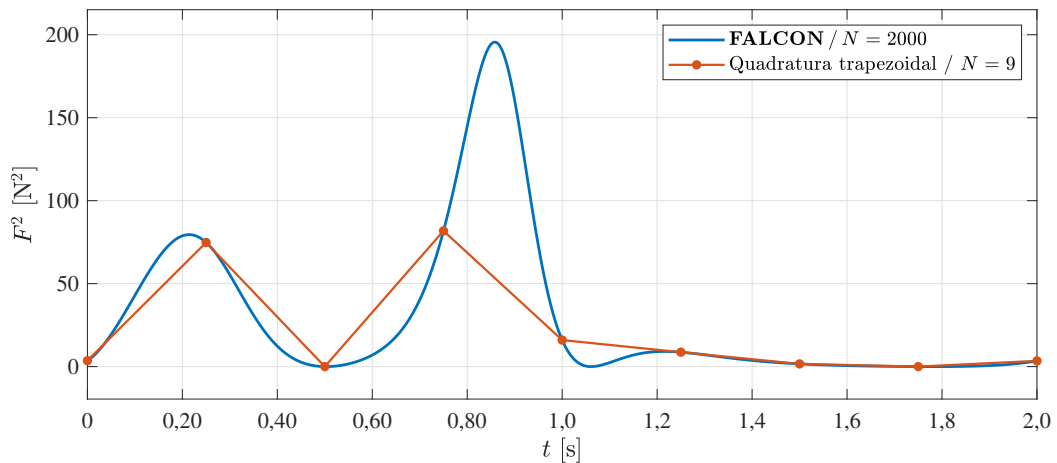


Figura 52 – Aproximações lineares para a avaliação de integrais via quadratura trapezoidal ($N = 9$).

Analogamente, é possível analisar os resultados obtidos considerando a colocação Hermite-Simpson. Para essa finalidade, nas Figuras 55, 56 e 57 são representadas as aproximações quadráticas nas quais se baseia o cálculo de $\int_0^{t_f} F^2(t)dt$ via quadratura de Simpson considerando $N = 7$, $N = 9$ e $N = 11$, respectivamente. Nestas figuras, observa-se que o maior pico de $F^2(t)$ não é satisfatoriamente representado na estimativa da integral em questão para N pequenos, o que pode justificar os menores valores de J em relação à solução reportada na literatura.

Na Figura 58 é apresentada a relação entre o valor da $\int_0^{t_f} F^2(t)dt$ via quadratura de Simpson e o parâmetro N . Como esperado, o aumento no valor deste parâmetro implica na melhor aproximação da integral, o que na prática implica em uma melhor precisão. Neste caso, observa-se que a convergência de $\int_0^{t_f} F^2(t)dt$ ocorre para $N > 16$, o que justifica os resultados verificados quando avalia-se a relação entre N e J^* apresentada na Figura 42.

Em resumo, a qualidade da solução encontrada em qualquer procedimento numérico

sempre é função dos parâmetros que caracterizam a metodologia, bem como do nível de sofisticação da abordagem numérica empregada. No PCO não é diferente, isto é; a qualidade da solução também é função do nível de discretização informado pelo usuário (ou computado pela rotina considerada). Neste caso, sempre é importante realizar a análise de sensibilidade no que tange o efeito do número de nós ou pontos de colocação empregados.

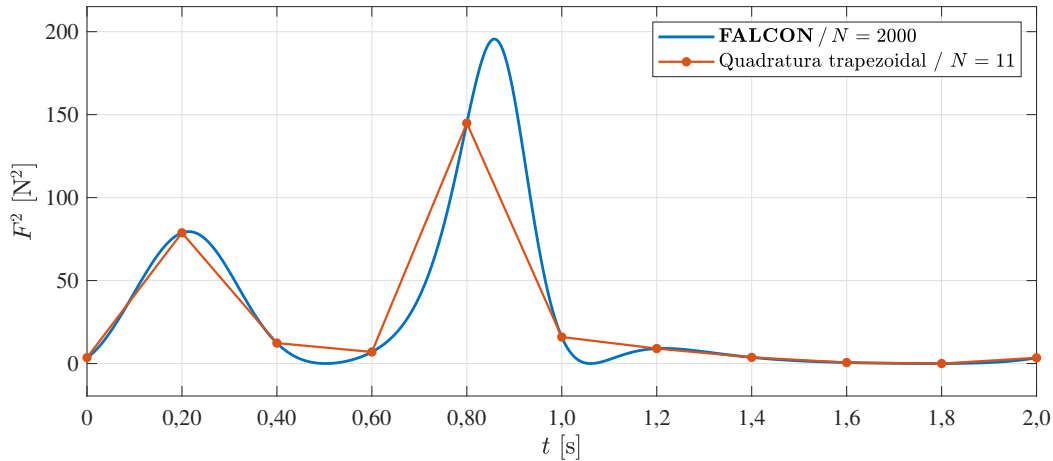


Figura 53 – Aproximações lineares para a avaliação de integrais via quadratura trapezoidal ($N = 11$).

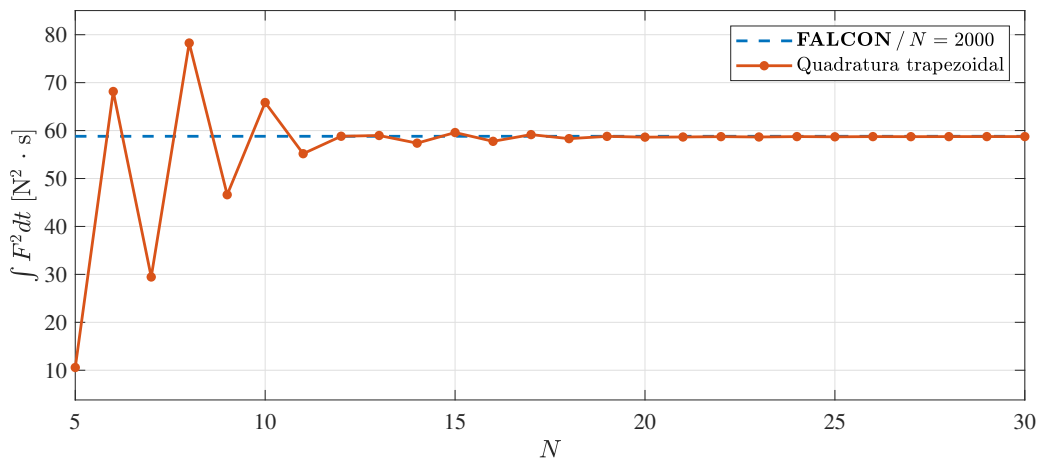
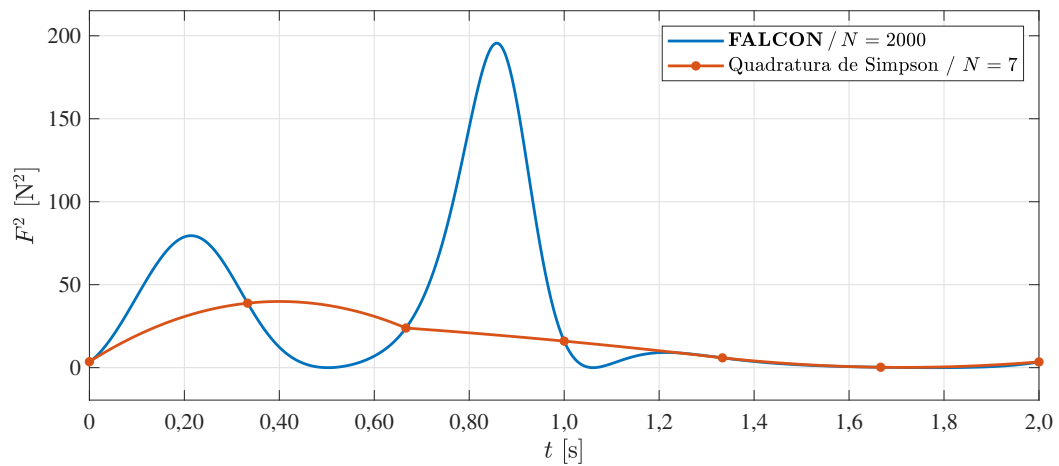
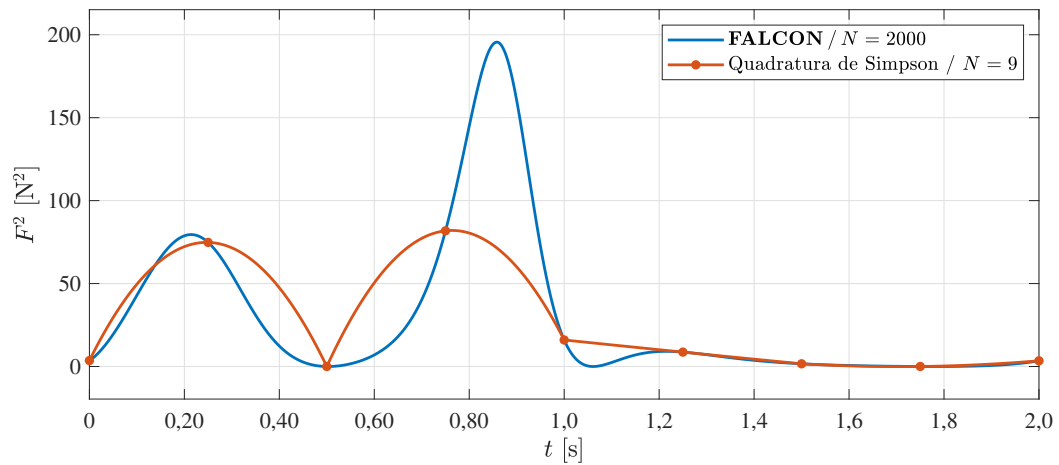
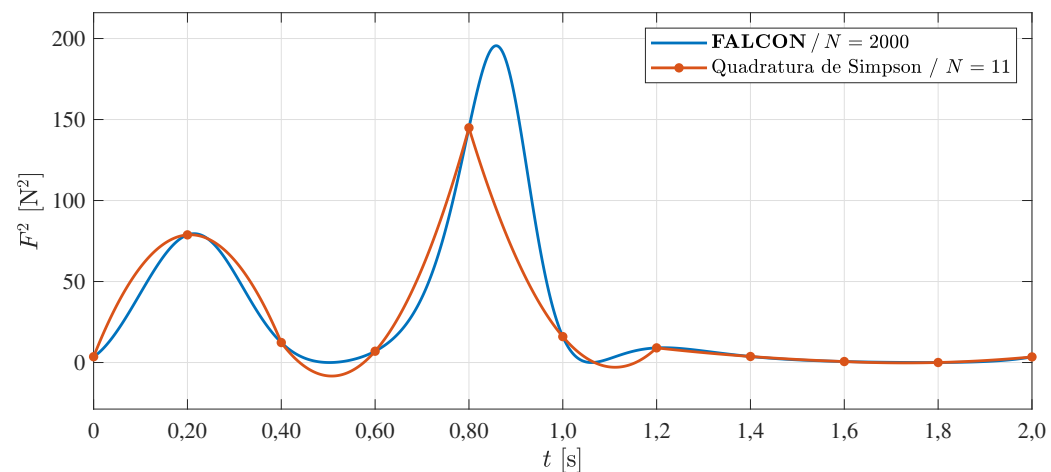


Figura 54 – Relação entre o valor atribuído à função objetivo via quadratura trapezoidal em função do número de nós de colocação.

Figura 55 – Função objetivo via quadratura de Simpson para o problema do pêndulo invertido ($N=7$).Figura 56 – Função objetivo via quadratura de Simpson para o problema do pêndulo invertido ($N=9$).Figura 57 – Função objetivo via quadratura de Simpson para o problema do pêndulo invertido ($N=11$).

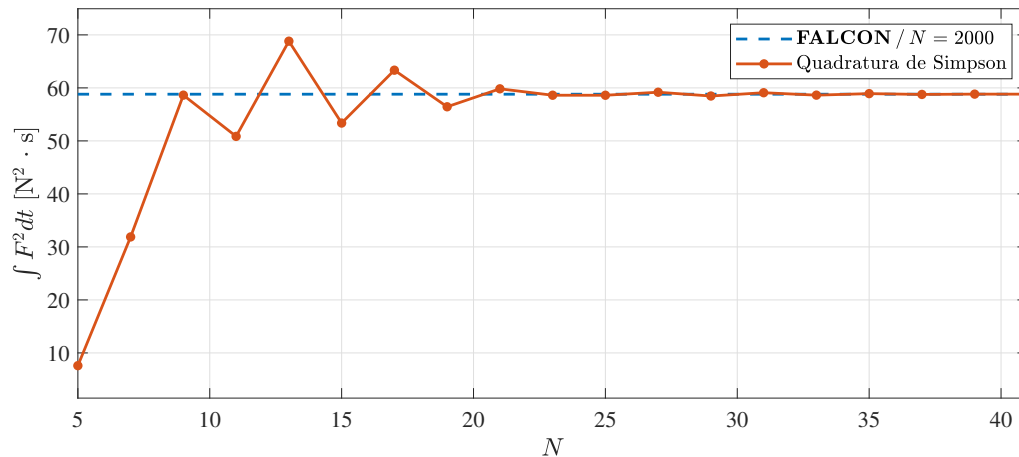


Figura 58 – Relação entre o valor da função objetivo via quadratura de Simpson e o número de nós de colocação para o problema do pêndulo invertido.

4.4 MINIMIZAÇÃO DO TEMPO DURANTE UMA MANOBRA DE ESTACIONAMENTO

O problema do estacionamento paralelo consiste na determinação da trajetória a ser percorrida por um veículo durante a realização de uma manobra de baliza, a partir da qual objetiva-se o posicionamento do automóvel em uma vaga paralela à via (PAROMTCHIK; LAUGIER, 1996). Neste procedimento, é necessário que sejam impostas limitações à velocidade e à aceleração do automóvel de forma a garantir o conforto dos passageiros e evitar o choque com outros veículos já estacionados ou com os limites da via (LI; WANG; SHAO, 2016). Assim, pretende-se determinar a trajetória a ser percorrida por um veículo para que a referida manobra seja realizada no menor tempo possível (LI; WANG; SHAO, 2016). As variáveis empregadas na formulação do problema, bem como as posições inicial e final do automóvel são representadas nas Figuras 59 e 60, respectivamente.

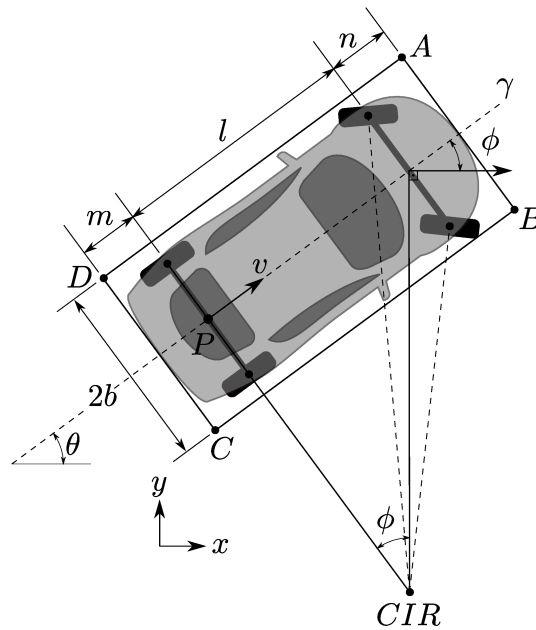


Figura 59 – Representação esquemática do problema do estacionamento.

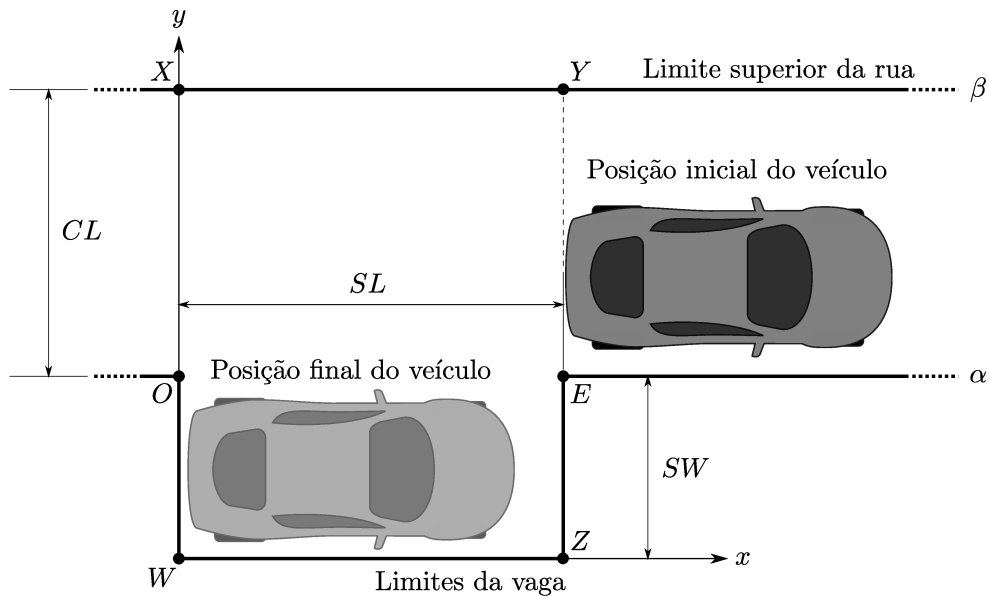


Figura 60 – Posições inicial e final do automóvel e dimensões da via e da vaga.

Nestas figuras tem-se que l é a distância entre os eixos do veículo, m e n são os afastamentos entre as extremidades do automóvel e os eixos traseiro e dianteiro, respectivamente, enquanto que b é metade da largura do mesmo. A velocidade e aceleração do ponto médio $P(d_x, d_y)$ referente ao eixo traseiro são representadas por $v(t)$ e $a(t)$, respectivamente. Os pontos $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ são as extremidades do retângulo que delimita o veículo. O ângulo entre a velocidade do ponto médio do eixo dianteiro e a reta γ é dado por $\phi(t)$. A inclinação de γ em relação ao eixo x é dada por $\theta(t)$. O *jerk* (ou sobre-aceleração) e a velocidade angular referente

à $\phi(t)$ são denotados respectivamente por $j(t)$ e $\omega(t)$. A vaga na qual o veículo deve estacionar possui comprimento SL e largura SW , enquanto a via na qual se encontra possui largura CL . O centro instantâneo de rotação é representado pelo ponto CIR .

As trajetórias de controle reportadas por [Li, Wang e Shao \(2016\)](#) são apresentadas na Figura 61. Tais trajetórias apresentam oscilações de alta frequência sempre que verificam-se variações bruscas em $j(t)$ ou em $\omega(t)$. Logo, espera-se que tais oscilações apareçam nos resultados associados aos métodos aqui avaliados, o que representa um desafio para qualquer *solver* de Controle Ótimo.

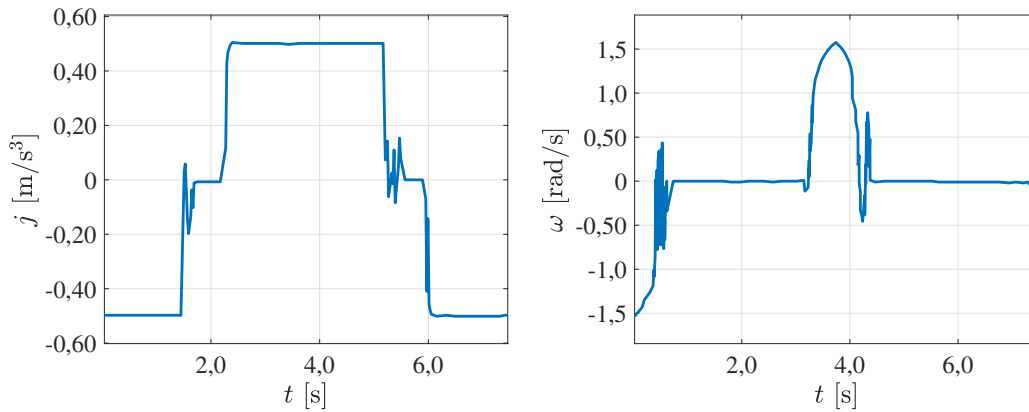


Figura 61 – Trajetórias de controle para o problema do estacionamento reportadas por [Li, Wang e Shao \(2016\)](#).

A função objetivo a ser minimizada nesta aplicação é dada como ([LI; WANG; SHAO, 2016](#)):

$$J = t_f \quad (4.12)$$

sujeito ao seguinte conjunto de restrições:

$$\dot{d}_x(t) = v(t) \cos(\theta(t)), \quad d_x(0) = SL \text{ m} \quad (4.13a)$$

$$\dot{d}_y(t) = v(t) \sin(\theta(t)), \quad d_y(0) = d_{y0} \text{ m} \quad (4.13b)$$

$$\dot{v}(t) = a(t), \quad v(0) = 0 \text{ m/s} \quad (4.13c)$$

$$\dot{a}(t) = j(t), \quad a(0) = 0 \text{ m/s}^2 \quad (4.13d)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v(t) \tan(\phi(t))}{l}, \quad \theta(0) = 0 \text{ rad} \quad (4.13e)$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t), \quad \phi(0) = 0 \text{ rad} \quad (4.13f)$$

em que t é o tempo (t_f é o tempo final), $\mathbf{x}(t) = [d_x(t) \quad d_y(t) \quad v(t) \quad a(t) \quad \theta(t) \quad \phi(t)]^T$ é o vetor de variáveis de estados, e $\mathbf{u}(t) = [j(t) \quad \omega(t)]^T$ é o vetor de variáveis de controle.

Visando garantir o conforto dos passageiros e reduzir o estresse sobre os atuadores, são impostas as restrições:

$$|a(t)| \leq 0,75 \text{ m/s}^2 \quad (4.14a)$$

$$|v(t)| \leq 2 \text{ m/s} \quad (4.14b)$$

$$|\phi(t)| \leq 0,58 \text{ rad} \quad (4.14c)$$

$$|\kappa'(t)| \leq 0,6 \text{ 1/(m} \cdot \text{s)} \quad (4.14d)$$

$$|j(t)| \leq 0,5 \text{ m/s}^3 \quad (4.14e)$$

em que $\kappa'(t) = \omega(t)/(l \cos^2(\phi(t)))$ é a derivada referente à curvatura instantânea ($\kappa(t)$). Observe-se que, restringindo-se $\kappa'(t)$ restringe-se automaticamente $\omega(t)$.

Assume-se que ao fim da execução da manobra o veículo deve estar parado, paralelo à via e posicionado no interior da vaga. Para tanto, devem ser satisfeitas as restrições terminais:

$$m \leq d_x(t_f) \leq SL - (l + n) \quad (4.15a)$$

$$-(SW - b) \leq d_y(t_f) \leq -b \quad (4.15b)$$

$$v(t_f) = 0 \text{ m/s} \quad (4.15c)$$

$$a(t_f) = 0 \text{ m/s}^2 \quad (4.15d)$$

$$\theta(t_f) = 0 \text{ rad} \quad (4.15e)$$

Todas as posições do veículo durante a execução da manobra devem estar contidas na região delimitada pelas curvas $\alpha(x) = (U_s(x - SL) - U_s(x)) SW$ e $\beta(x) = CL$, sendo $U_s(x)$ a função degrau unitário. Dadas as relações entre a posição do veículo e os pontos A , B , C e D ,

$$A = (A_x, A_y) = (d_x + (l + n) \cos(\theta) - b \sin(\theta), d_y + (l + n) \sin(\theta) + b \cos(\theta)) \quad (4.16a)$$

$$B = (B_x, B_y) = (d_x + (l + n) \cos(\theta) + b \sin(\theta), d_y + (l + n) \sin(\theta) - b \cos(\theta)) \quad (4.16b)$$

$$C = (C_x, C_y) = (d_x - m \cos(\theta) + b \sin(\theta), d_y - m \sin(\theta) - b \cos(\theta)) \quad (4.16c)$$

$$D = (D_x, D_y) = (d_x - m \cos(\theta) - b \sin(\theta), d_y - m \sin(\theta) + b \cos(\theta)) \quad (4.16d)$$

é possível formular as seguintes restrições para garantir que o veículo não se choque com os limites da via ou da vaga:

$$A_y(t) \leq \beta(A_x) \quad (4.17a)$$

$$B_y(t) \leq \beta(B_x) \quad (4.17b)$$

$$C_y(t) \leq \beta(C_x) \quad (4.17c)$$

$$D_y(t) \leq \beta(D_x) \quad (4.17d)$$

$$A_y(t) \geq \alpha(A_x) \quad (4.17e)$$

$$B_y(t) \geq \alpha(B_x) \quad (4.17f)$$

$$C_y(t) \geq \alpha(C_x) \quad (4.17g)$$

$$D_y(t) \geq \alpha(D_x) \quad (4.17h)$$

Como indicado na Figura 62, é possível que ocorram colisões mesmo que tais restrições sejam respeitadas.

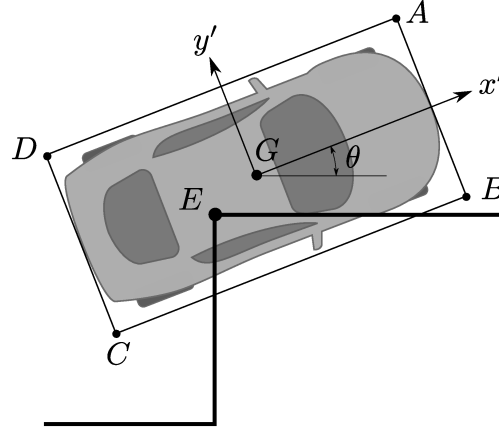


Figura 62 – Situação em que as restrições são satisfeitas e o veículo ainda assim se choca com os limites da vaga.

Neste caso, considerando um novo sistema de coordenadas $x'Gy'$ partindo do centro do veículo, redefinem-se os pontos O e E da seguinte forma:

$$O_{x'Gy'} = (O'_x, O'_y) = (-d_x \cos(\theta) - d_y \sin(\theta) - \frac{l+n-m}{2}, d_x \sin(\theta) - d_y \cos(\theta)) \quad (4.18a)$$

$$E_{x'Gy'} = (E'_x, E'_y) = (-d_x \cos(\theta) - d_y \sin(\theta) - \frac{l+n-m}{2} + SL \cos(\theta), d_x \sin(\theta) - d_y \cos(\theta) - SL \sin(\theta)) \quad (4.18b)$$

Logo, para garantir que as laterais do automóvel não se choquem com os pontos O e E durante a execução da manobra, deve-se admitir que:

$$|O'_x| \geq \frac{l+m+n}{2} \quad \text{quando } |O'_y| \leq b \quad (4.19a)$$

$$|E'_x| \geq \frac{l+m+n}{2} \quad \text{quando } |E'_y| \leq b \quad (4.19b)$$

A seguir estão listados os parâmetros utilizados para a resolução deste estudo de caso (LI; WANG; SHAO, 2016): posição inicial do ponto médio do eixo traseiro na direção y ($d_{y0} = 1,5$), distância entre os eixos do veículo ($l = 2,588$ m), distância entre o eixo dianteiro e a dianteira do veículo ($n = 0,839$ m), distância entre o eixo traseiro e a traseira do veículo ($m = 0,657$ m), metade da largura do automóvel ($b = 0,8855$ m), comprimento da vaga ($SL = 6$ m), largura da vaga ($SW = 2$ m) e largura da via ($CL = 3,5$ m).

A resolução do estudo de caso em análise pode ainda ser dificultada pela representação matemática dos limites da vaga, que possui descontinuidades em $x = 0$ e $x = SL$. Para evitar a

divergência do processo de otimização, os limites da vaga são aqui representados pela soma de funções sigmóides, conforme a Figura 63.

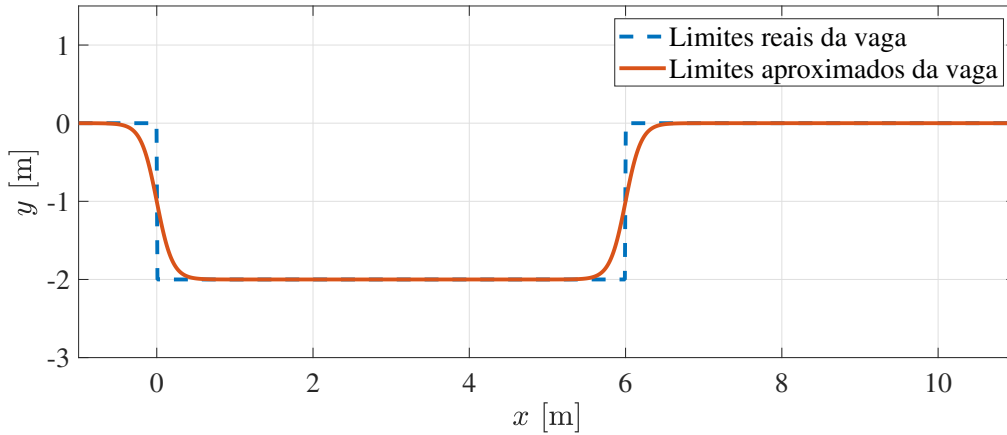


Figura 63 – Representação geométrica adotada para a representação dos limites da vaga.

Neste caso, considera-se:

$$\alpha(x) = (-\text{sigm}(x, 0) + \text{sigm}(x, SL)) SW \quad (4.20)$$

em que $\text{sigm}(x, c)$ é a função sigmoide, dada como:

$$\text{sigm}(x, c) = \frac{1}{1 + e^{-10(x-c)}} \quad (4.21)$$

tendo sido o parâmetro -10 , que multiplica o expoente no denominador, escolhido via experimentação numérica.

De forma análoga, destacam-se descontinuidades associadas às Equações (4.19a) e (4.19b), uma vez que a definição das mesmas depende da função módulo e de uma condição de ativação, sendo a primeira válida apenas para $|O'_y| \leq b$ e a segunda somente quando $|E'_y| \leq b$.

Para tratar as descontinuidades atribuídas à presença da função módulo, basta que a mesma seja reescrita da seguinte forma:

$$|z| \equiv z g(z) \quad (4.22)$$

sendo:

$$g(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \geq 0 \\ -1, & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Deve-se então aproximar $g(z)$ por meio da função tangente hiperbólica $\tanh(z)$, conforme ilustrado na Figura 64.

$$|z| \approx z \tanh(z) \quad (4.24)$$

em que:

$$\tanh(z) = \frac{e^{10z} - 1}{e^{10z} + 1} \quad (4.25)$$

tendo sido o parâmetro -10 , que multiplica os expoentes do numerador e denominador, escolhido via experimentação numérica.

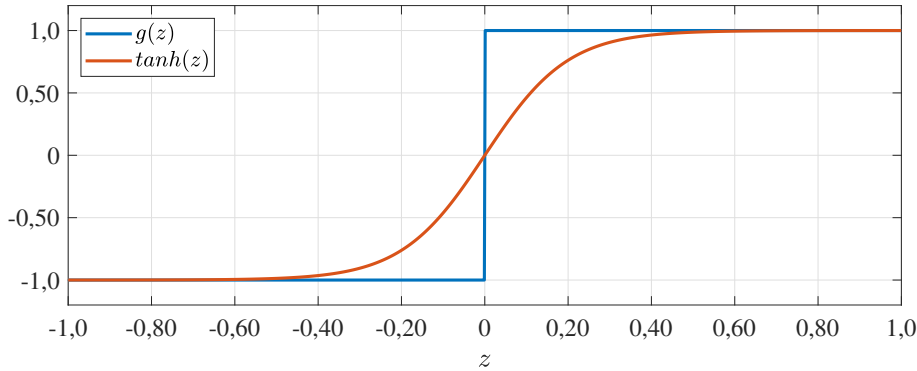


Figura 64 – Representação geométrica das funções $g(z)$ e $\tanh(z)$ usadas para a aproximação da função módulo.

Resta agora tratar as descontinuidades atribuídas às condições de ativação associadas às Equações (4.19a) e (4.19b). Para essa finalidade, deve-se reescrever a primeira restrição levando-se em conta a aproximação apresentada na Equação (4.24):

$$|O'_x| \geq \frac{l+m+n}{2}, \quad \text{quando } |O'_y| \leq b \quad (4.26)$$

$$O'_x \tanh(O'_x) \geq \frac{l+m+n}{2}, \quad \text{quando } -b \leq O'_y \leq b \quad (4.27)$$

Propõe-se então que a condição de ativação associada à restrição em questão seja representada por uma função $h(z)$ da forma:

$$h(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } z < -b \\ 1, & \text{se } -b \leq z \leq b \\ \infty, & \text{se } z > b \end{cases} \quad (4.28)$$

em que:

$$O'_x \tanh(O'_x) \geq \frac{l+m+n}{2}, \quad \text{quando } -b \leq O'_y \leq b \quad (4.29)$$

$$O'_x \tanh(O'_x) h(O'_y) \geq \frac{l+m+n}{2} \quad (4.30)$$

Observe que caso $O'_y < -b$ ou $O'_y > b$, a Equação (4.30) se reduz a $\infty \geq \frac{l+m+n}{2}$, que claramente é satisfeita para qualquer O'_x . Caso contrário, tal restrição se reduz a $O'_x \tanh(O'_x) \geq (l+m+n)/2$. Logo, conclui-se que as Equações (4.19a) e (4.30) são equivalentes.

Basta agora que a função $h(z)$ seja aproximada por um somatório de sigmóides, conforme ilustrado na Figura 65:

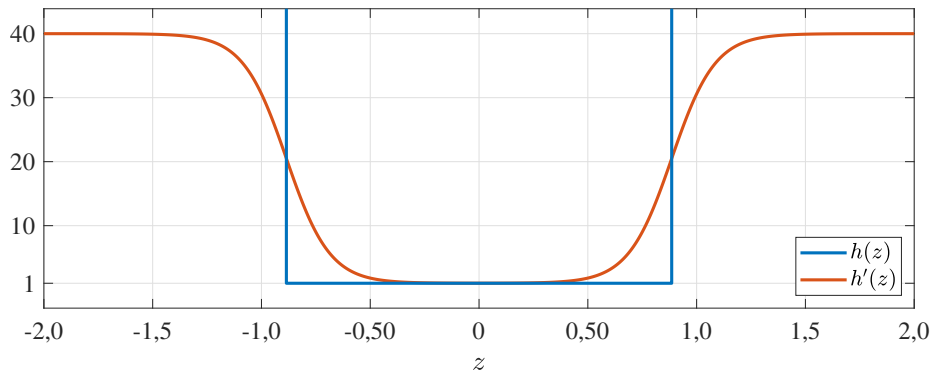


Figura 65 – Representação geométrica das funções utilizadas na reformulação das Equações (4.19a) e (4.19b).

Neste caso tem-se (LI; WANG; SHAO, 2016):

$$h(z) \approx h'(z) = 1 + 39(1 + \text{sigm}(x, b) - \text{sigm}(x, -b)) \quad (4.31)$$

Vale ressaltar que, uma vez que não é possível fazer $h(z) = \infty$ para $z < -b$ ou $z > b$, adotou-se, após um processo de experimentação numérica, $h'(z) = 40$ nesses intervalos.

Analogamente, para a restrição associada à E'_x tem-se:

$$|E'_x| \geq \frac{l + m + n}{2} \quad \text{quando } |E'_y| \leq b \quad (4.32)$$

$$E'_x \tanh(E'_x) h(E'_y) \geq \frac{l + m + n}{2} \quad (4.33)$$

Para a obtenção de uma trajetória factível, propõe-se em Li, Wang e Shao (2016) a inclusão de uma região crítica, delimitada pelos pontos X , Y , Z e W , conforme apresentado na Figura 60, e a resolução de uma série de N_{fe} PCOs semelhantes ao original. Na formulação do N_x -ésimo PCO consideram-se restrições que garantem que veículo esteja contido na região crítica para $t \in [h N_x, t_f]$, sendo $h = t_f/N_{fe}$ e $N_x = 1, \dots, N_{fe}$. Então, a solução do primeiro PCO é utilizada como estimativa inicial para resolução do segundo, e assim sucessivamente, até que o PCO original seja resolvido para $N_x = N_{fe}$.

Visando minimizar o esforço computacional envolvido na inicialização do PPNL, uma abordagem distinta foi aqui proposta. Cada uma das soluções apresentadas foi obtida a partir de duas execuções. Na primeira, desconsideram-se as restrições introduzidas nas Equações (4.19a) e (4.19b), uma vez que estas não são convexas e dificultam a obtenção de trajetórias viáveis. Então, na segunda execução, as restrições inicialmente desconsideradas são reinseridas no problema e a solução obtida anteriormente é utilizada na inicialização dos vetores de variáveis de estado e de controle. O tempo de processamento t_p e o número de avaliações da função objetivo n_{aval} atribuídos a cada solução foram computados a partir da soma dos parâmetros associados a estas duas etapas. Vale ressaltar que, para que uma solução seja determinada, ambas as execuções devem ser bem sucedidas.

São apresentados na Figura 66 os resultados obtidos considerando a influência de N no valor da função objetivo (melhor solução encontrada para cada valor de N), bem como o número mínimo de nós de colocação N_m . Neste caso também foram utilizados trinta valores distintos para N , linearmente espaçados entre 5 e 150. O valor da função objetivo reportado por Li, Wang e Shao (2016) para este problema é de 7,521 segundos.

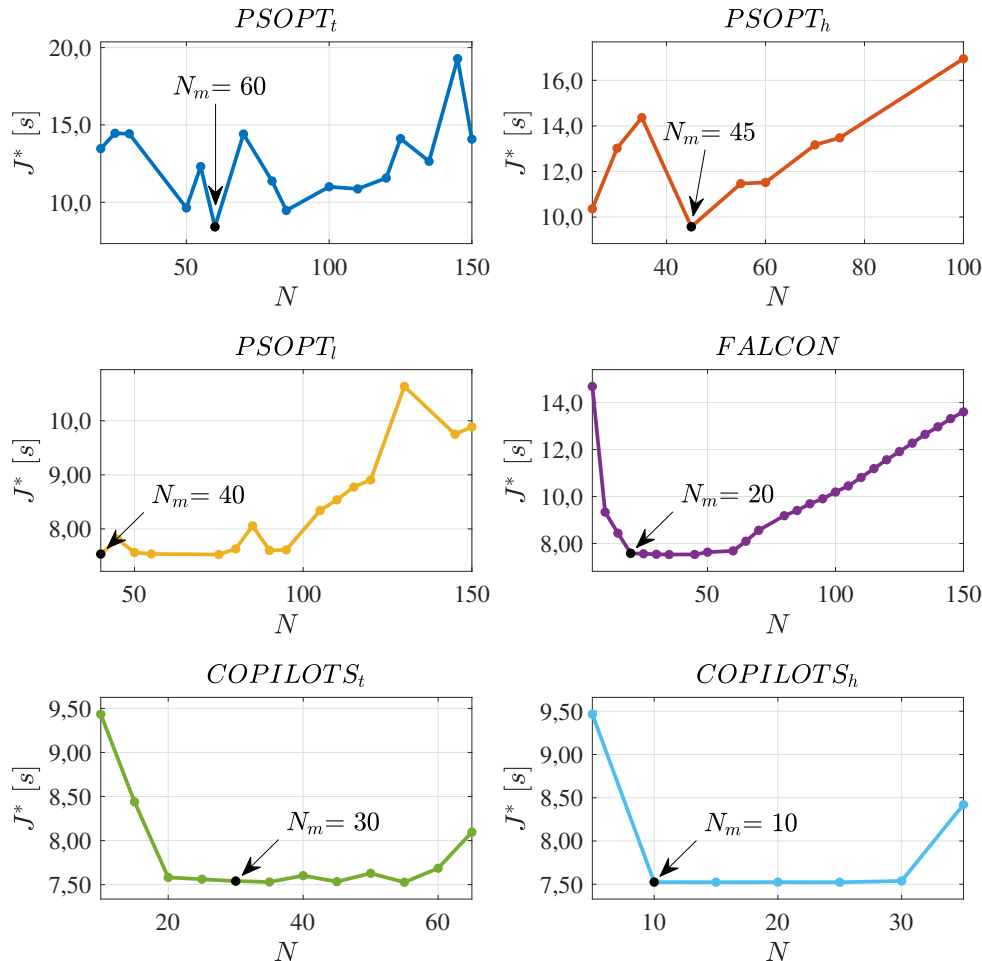


Figura 66 – Influência do número de nós de colocação N no valor da função objetivo J^* para o problema do estacionamento.

Nesta figura percebe-se a dificuldade inerente existente neste estudo de caso, isto é; nenhum dos pacotes considerados consegue, para todos os valores de N utilizados, obter a solução deste problema. À medida que o valor de N aumenta, verifica-se que o valor de J^* diminui a princípio para, em seguida, voltar a aumentar. Verifica-se esse comportamento nos resultados associados a todos os métodos, com exceção do $PSOPT_l$. Uma vez que aumenta-se N , a inicialização dos pacotes se torna mais crítica, dificultando a inicialização do PCO. O crescimento simultâneo de J^* e N indica que o estudo de caso em análise é consideravelmente sensível às estimativas iniciais, provavelmente por conta do alto número de restrições associadas ao mesmo. Uma vez que J^* não converge com o aumento de N , atribuiu-se a N_m o N associado ao menor J^* .

Cabe ressaltar que não foi possível resolver o problema via $PSOPT_l$ para $N < 40$. No caso desse tipo de colocação, quanto maior o N , maior será o polinômio empregado na representação dos estados e controles. A complexidade das trajetórias envolvidas, assim como o alto número de estados e controles, provavelmente, impossibilita que o mesmo seja resolvido por meio do emprego de polinômios de baixa ordem.

Somente empregando o $FALCON$, o $COPILOTS_h$ e o $COPILOTS_t$ foi possível resolver o problema para menores valores de N , sendo os menores valores iguais a 5, 5 e 10, respectivamente. Em contrapartida, os valores mínimos para N associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$ são iguais a 20 e 25, respectivamente, sendo maiores que aqueles requeridos pelo $FALCON$ e pelo $COPILOTS$. Tal diferença, pode ser justificada pela dificuldade encontrada pelo otimizador empregado pelo $PSOPT$ (Método de Ponto Interior). O comportamento errático dos perfis $N \times J^*$ associados ao $PSOPT$ pode ser igualmente justificado pela utilização do Método de Ponto Interior.

O máximo valor de N associado ao $PSOPT_h$ (100) é menor que aquele requerido pelo $PSOPT_t$ (150). O mesmo pode ser observado no que tange os máximos valores de N associados ao $COPILOTS_t$ (65) e ao $COPILOTS_h$ (35). As diferenças entre os valores máximos de N para os métodos que usam as colocações trapezoidal e Hermite-Simpson, se deve às propriedades numéricas inerentes a cada tipo de colocação. Vale ressaltar que a implementação da colocação Hermite-Simpson depende da determinação de pontos médios entre os nós de colocação, o que aumenta o número de variáveis a serem inicializadas e determinadas no processo de otimização. Cabe ressaltar que os máximos valores de N requeridos pelo $COPILOTS_t$ e pelo $COPILOTS_h$ são bem menores que aqueles associados aos demais métodos.

As métricas calculadas por cada um dos pacotes são apresentadas Tabela 6 considerando $N = N_m$. Nesta tabela tem-se o valor da função objetivo (J^*), o tempo de processamento médio (t_p), o desvio padrão atribuído ao mesmo (s_t), a máxima violação das restrições (Δc_{max}) e o número de execuções bem sucedidas (N_s).

Tabela 6 – Métricas obtidas para o problema do estacionamento. Os melhores N_m , J^* , t_p , n_{aval} e $N_s\%$ se encontram destacados.

Método	N_m	J^*	t_p [s]	s_t [s]	n_{aval}	Δc_{max}	N_s	$N_s\%$
$PSOPT_t$	60	8,41355	11,41652	0,12859	1293	1,19e-11	16	53,33%
$PSOPT_h$	45	9,57334	8,80915	0,09271	775	6,11e-12	9	30,00%
$PSOPT_l$	40	7,53479	10,46420	0,21091	413	1,62e-14	16	53,33%
$FALCON$	20	7,58130	1,03363	0,02386	214	1,72e-10	27	90,00%
$COPILOTS_t$	30	7,53996	26,18497	1,52493	24786	2,00e-15	12	40,00%
$COPILOTS_h$	10	7,52486	6,74175	0,09554	11936	5,37e-12	7	23,33%

Nesta tabela observa-se que, apesar do menor valor de N_m não ter sido obtido pelo $FALCON$, estão associados a esse pacote os menores valores de t_p e de n_{aval} , bem como o maior valor de N_s . Apesar do menor valor de N_m ter sido encontrado pelo $COPILOTS_h$, está

também associado a esse pacote o menor valor de J^* . Em contrapartida, usando esse pacote com esta configuração foi possível resolver o problema para apenas 7 dos 30 valores de N considerados, sendo esse o pior N_s dentre os obtidos. Por fim, ressalta-se que o N_m atribuído ao $PSOPT_t$ é consideravelmente maior que os relacionados ao $FALCON$ e ao $COPILOTS_h$, apesar de todos esses métodos empregarem a colocação trapezoidal. Além disso, nota-se que os valores de J^* obtidos pelo $PSOPT_t$ e pelo $PSOPT_h$ são os maiores dentre os observados, estando associados a eles e ao $PSOPT_l$ os maiores valores de N_m .

Os perfis para as variáveis de estado e controle considerando $N = N_m$ são apresentados nas Figuras 67-74.

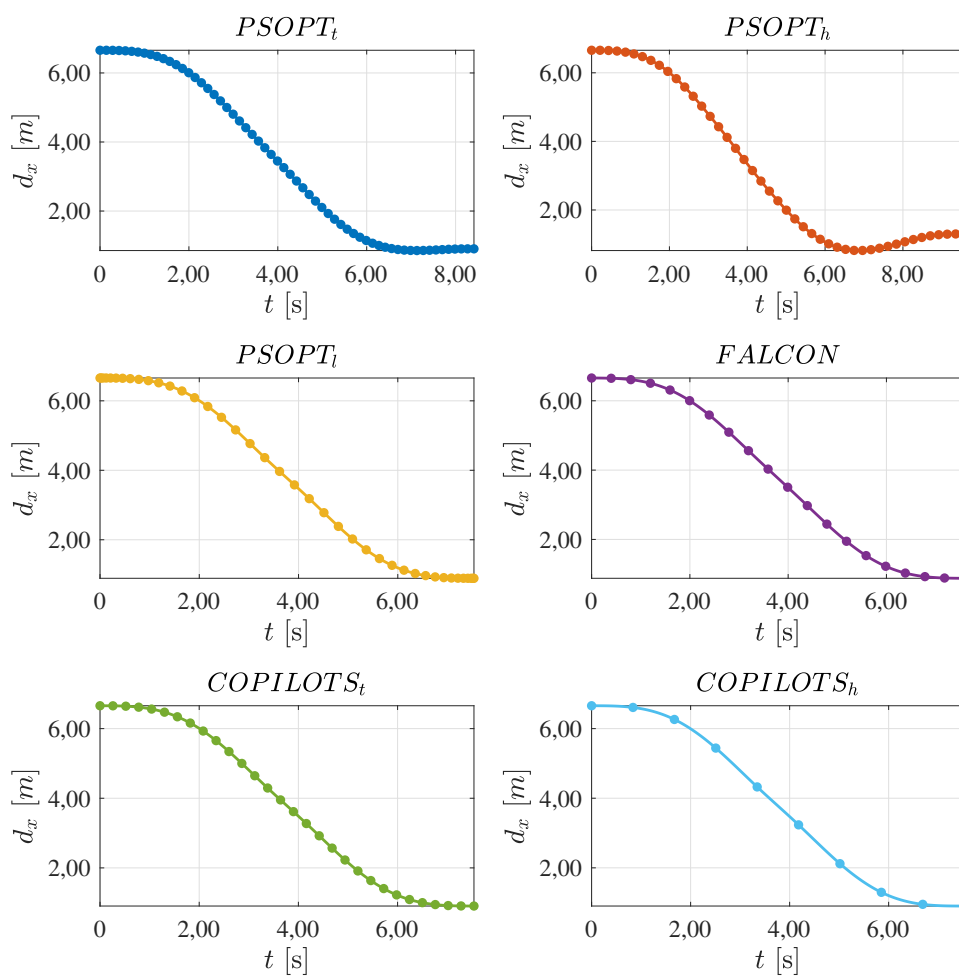


Figura 67 – Variável de estado $d_x(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

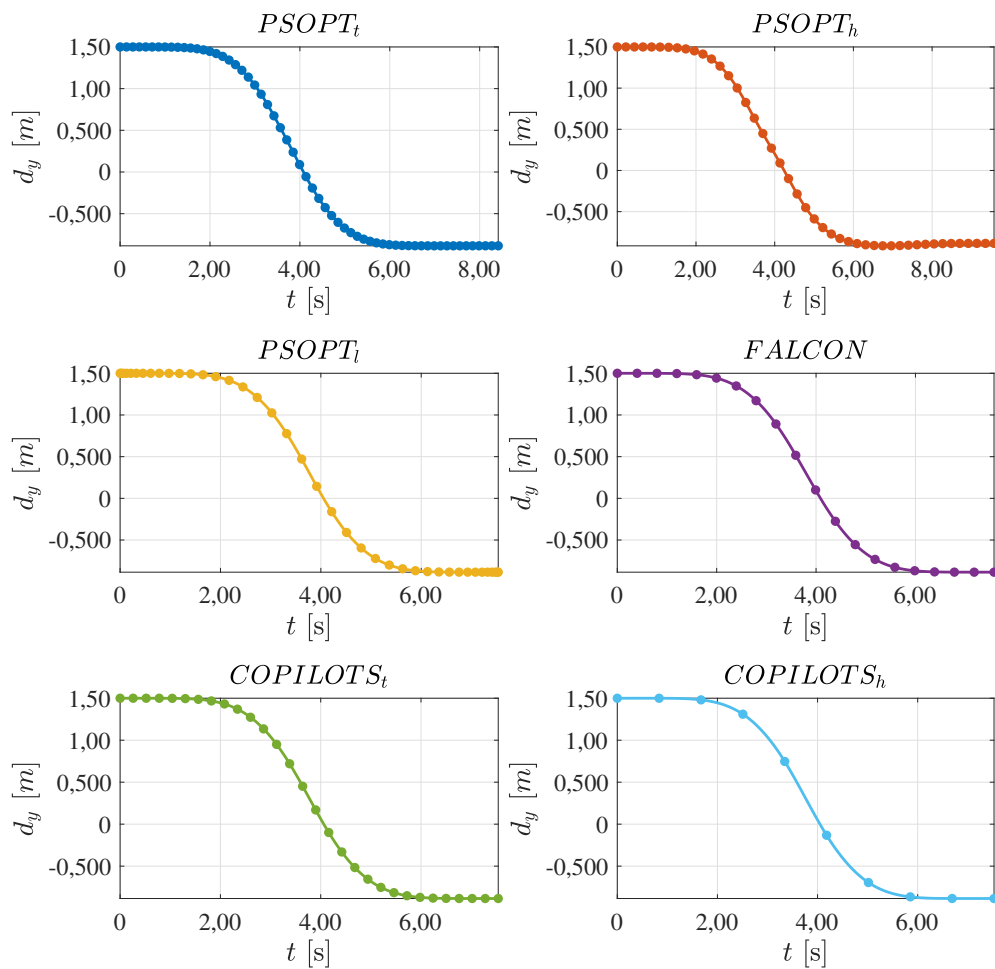


Figura 68 – Variável de estado $d_y(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

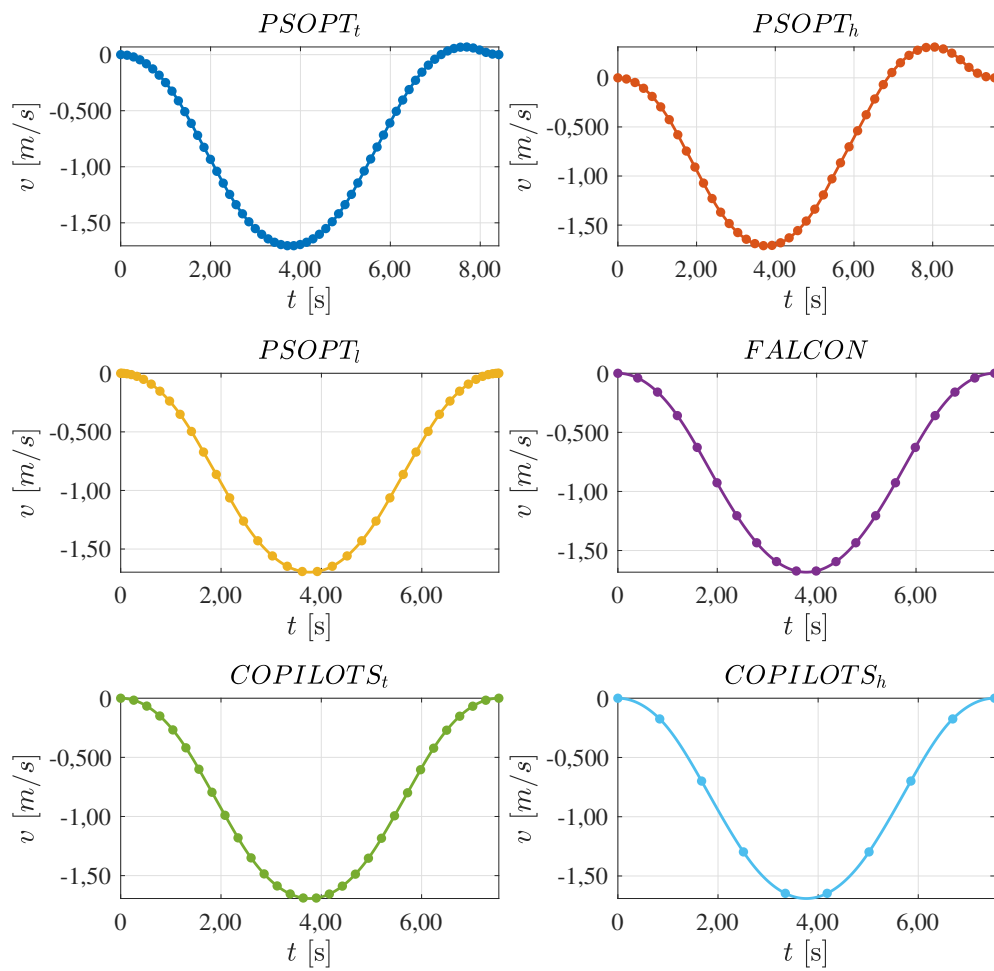


Figura 69 – Variável de estado $v(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

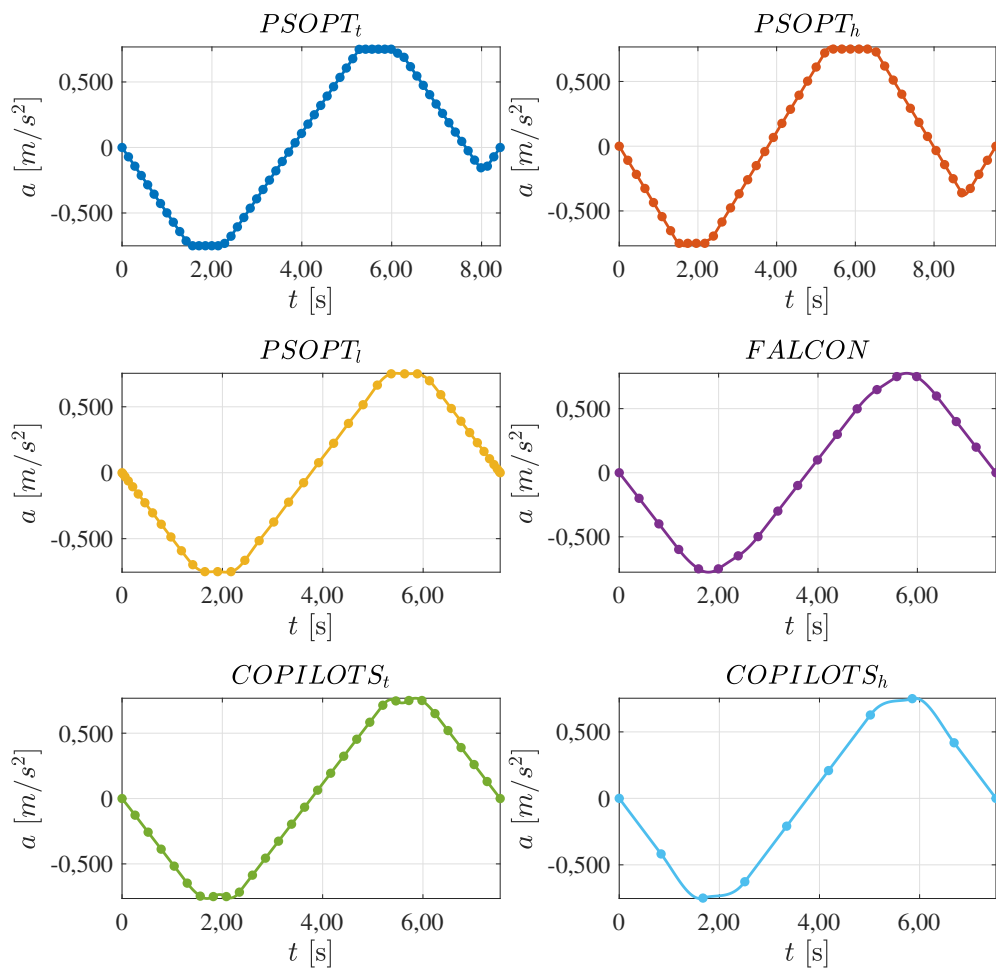


Figura 70 – Variável de estado $a(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

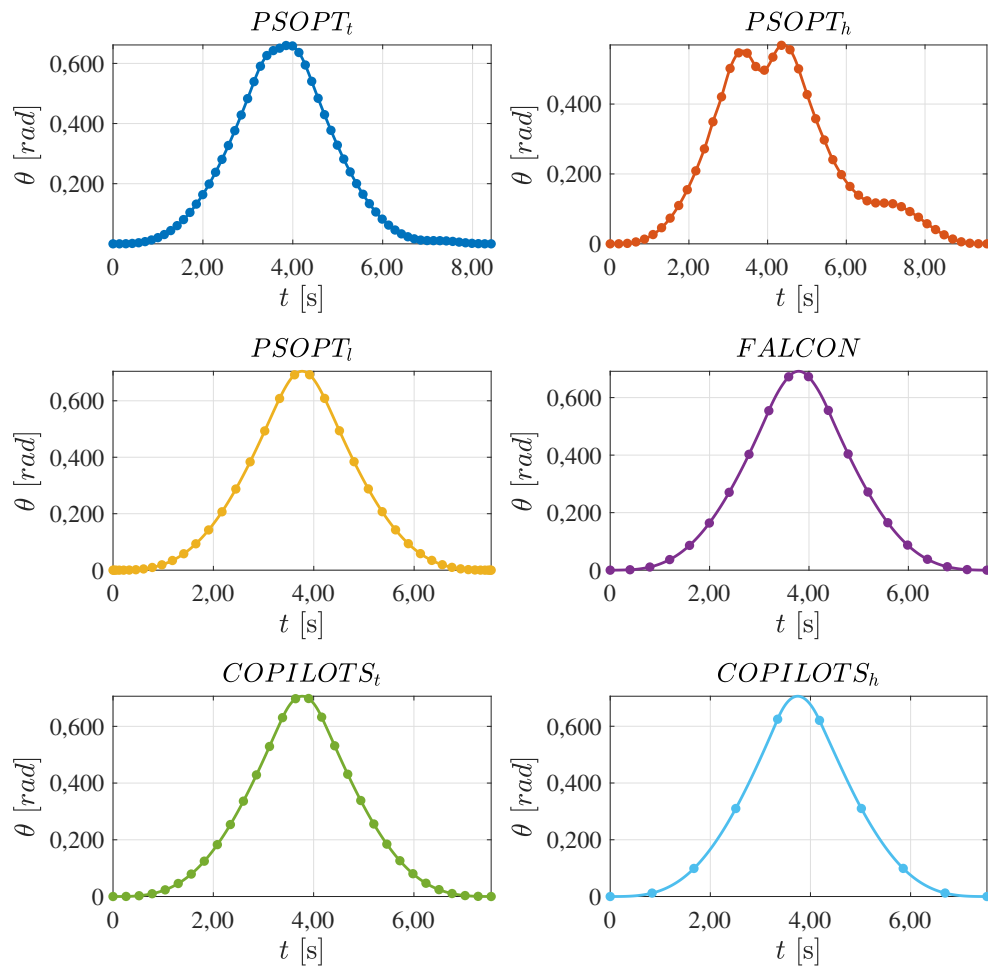


Figura 71 – Variável de estado $\theta(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

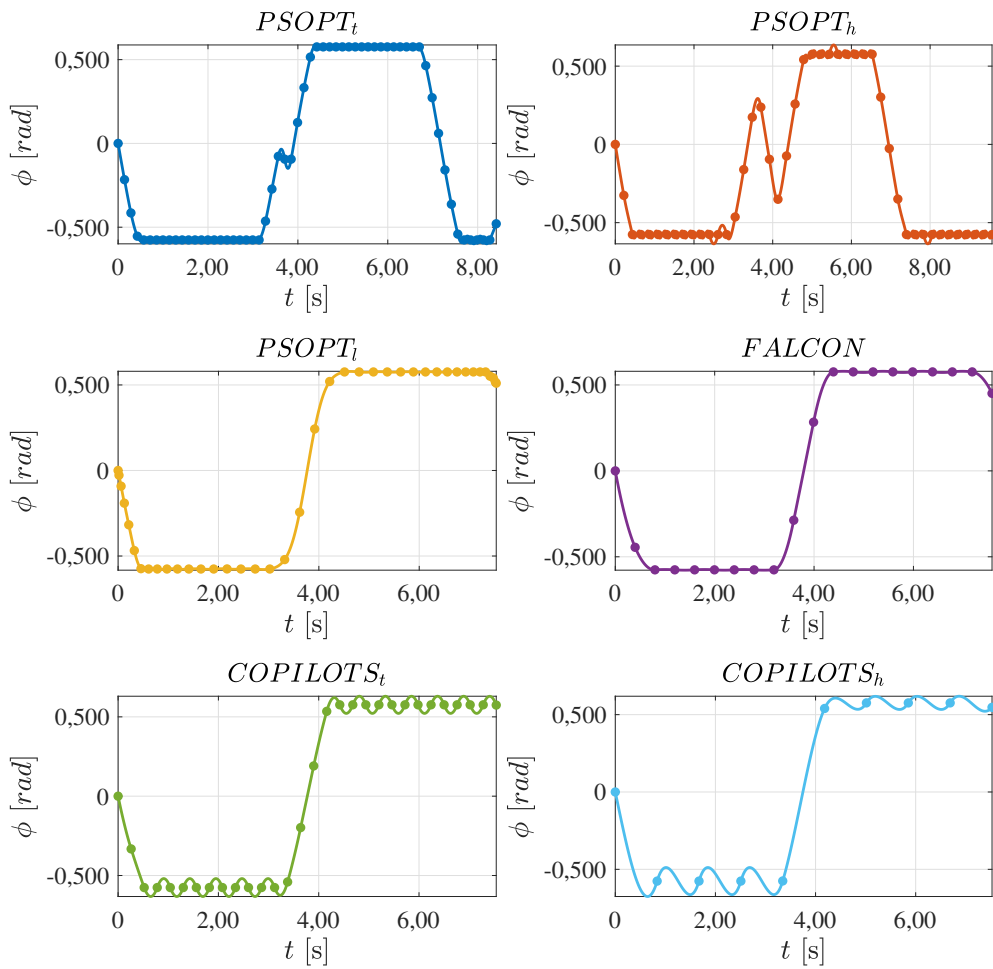


Figura 72 – Variável de estado $\phi(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

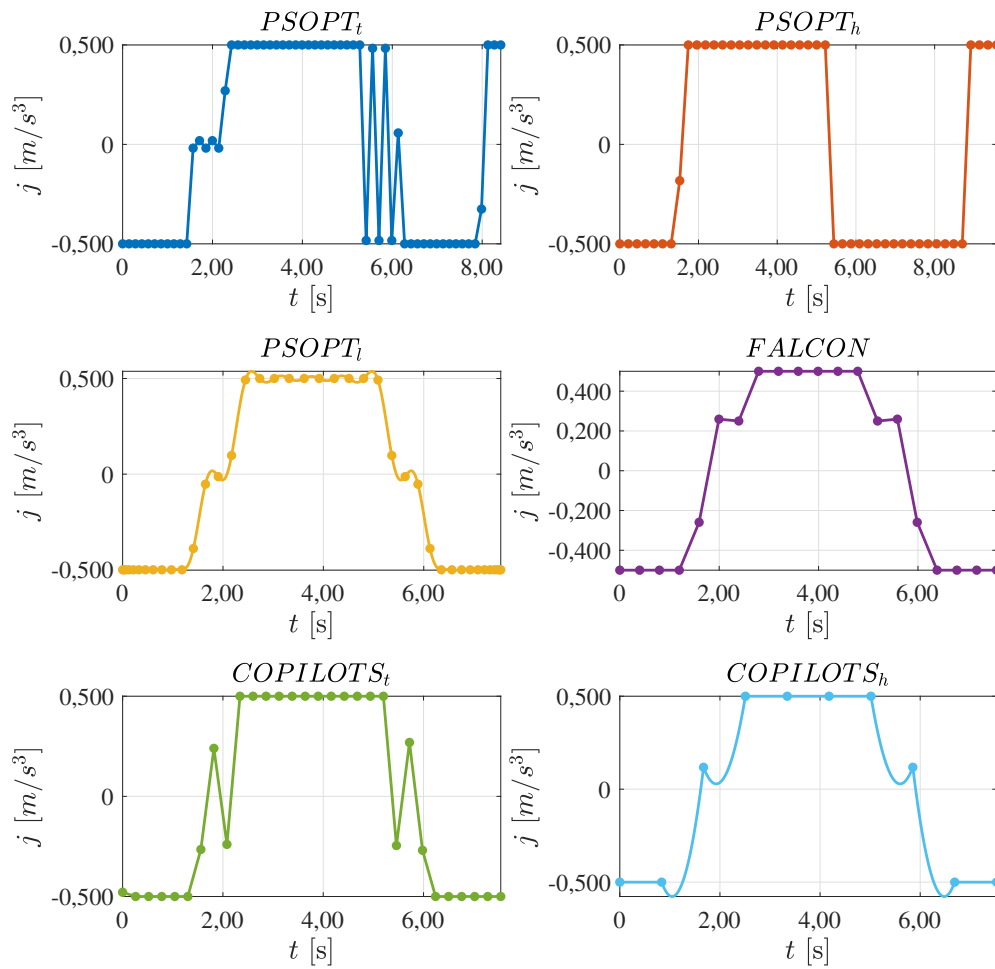


Figura 73 – Variável de controle $j(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas

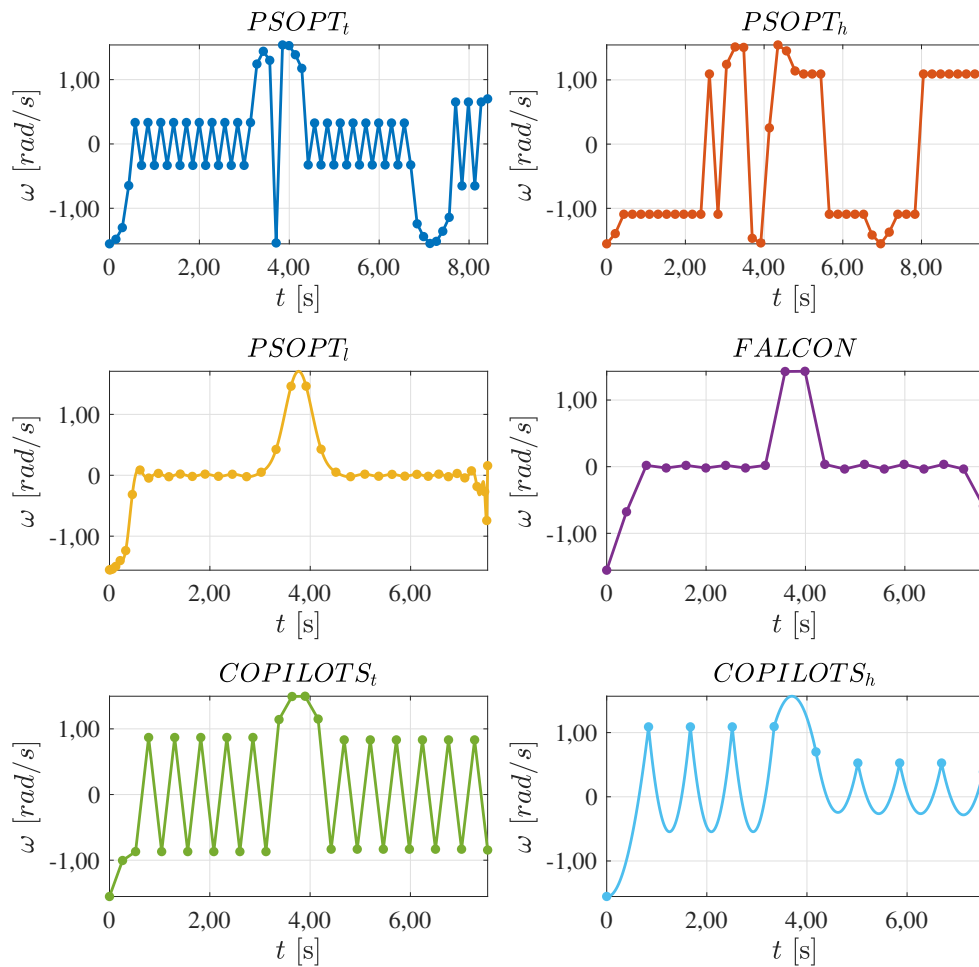


Figura 74 – Variável de controle $\omega(t)$ para o problema do estacionamento. Os pontos representam os valores discretizados e as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

Em linhas gerais, percebe-se que todos os perfis apresentam similaridades, isto é; têm a mesma tendência de comportamento. As trajetórias referentes às variáveis de estado associadas ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$ não são perfeitamente simétricas, diferentemente das atribuídas aos demais métodos. Esse comportamento indica que mais tempo é gasto ajustando-se o veículo no interior da vaga, o que justifica os altos t_f atribuídos ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$. Já as trajetórias de $\omega(t)$ associadas a quase todos os métodos, com exceção do $PSOPT_l$ e do $FALCON$, se mostraram bastante oscilatórias, o que pode estar relacionado com as propriedades numéricas associadas às colocações trapezoidal e Hermite-Simpson. Verifica-se, inclusive uma variação bastante brusca nos $\omega(t)$ associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$ em $t = 3,7$ s, o que provavelmente se deve ao uso do otimizador utilizado por este pacote. A suavidade das trajetórias encontradas pelo $PSOPT_l$ e pelo $FALCON$ se deve, provavelmente, às características numéricas inerentes à colocação pseudo-espectral e, ao emprego, por parte do $FALCON$, de ferramentas simbólicas na obtenção de derivadas analíticas. Vale ressaltar que as trajetórias de controle atribuídas a esses pacotes não apresentam oscilações de alta frequência semelhantes às verificadas nas trajetórias reportadas em Li, Wang e Shao (2016). Oscilações nas trajetórias de $\omega(t)$ levam a oscilações

nas trajetórias de $\phi(t)$, uma vez que $\dot{\phi}(t) = \omega(t)$. Assim, observa-se que a amplitude das oscilações associadas à $\phi(t)$ é particularmente alta nas trajetórias associadas ao $COPILOTS_t$ e ao $COPILOTS_h$, o que provavelmente se deve ao baixo N_m atribuído a esses pacotes. No geral, as trajetórias referentes às variáveis de estado e controle obtidas pelo $PSOPT_t$ são mais suaves que aquelas determinadas pelos demais métodos.

Finalmente, ressalta-se que tanto os resultados aqui apresentados como aqueles reportados em Li, Wang e Shao (2016) indicam a presença de variações bruscas em $j(t)$, que ocorrem para $t \approx 1,2$ s e $t \approx 6$ s. Apesar de tais variações serem inerentes à solução do estudo de caso em análise, nota-se que são especialmente acentuadas no caso do $PSOPT_h$. Além disso, verificam-se oscilações de alta frequência para $t \approx 6$ s no $j(t)$ associado ao $PSOPT_t$, o que deve estar relacionado ao otimizador, bem como às propriedades numéricas inerentes à colocação trapezoidal, uma vez que oscilações semelhantes, porém menos acentuadas, podem ser verificadas na trajetória atribuída ao $COPILOTS_t$. Vale ressaltar que a trajetória de $j(t)$ associada ao $FALCON$ é consideravelmente suave, mesmo que esse pacote empregue a colocação trapezoidal, o que se deve à utilização de derivadas analíticas.

Na Figura 75 é apresentada a vista superior do veículo, na qual são representadas algumas das posições assumidas pelo mesmo durante a execução da manobra de estacionamento. Nesta mesma figura também é apresentada a trajetória do ponto $P(d_x, d_y)$. A elaboração da mesma foi baseada nos resultados obtidos pelo $COPILOTS_h$, pacote ao qual associa-se o menor valor de J^* . Nesta figura estão representadas algumas posições do veículo, bem como a trajetória ótima computada (as linhas tracejadas representam os limites da via e da vaga).

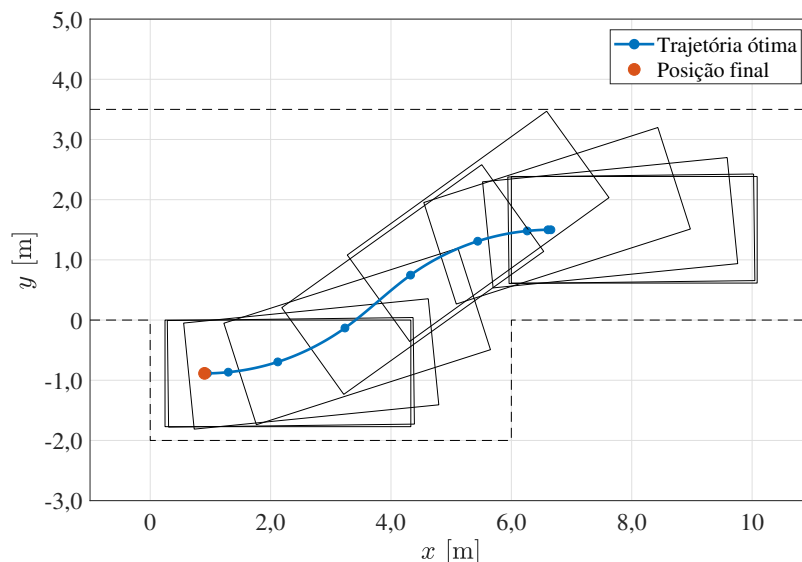


Figura 75 – Posições do veículo durante a execução da manobra de estacionamento.

A influência do número de nós de colocação no tempo de processamento e no número de avaliações da função objetivo é apresentada nas Figuras 76 e 77. Nestes gráficos são introduzidas

as variações: $\Delta t_p = \max\{t_p\} - \min\{t_p\}$ e $\Delta n_{aval} = \max\{n_{aval}\} - \min\{n_{aval}\}$. Os pontos nos gráficos representam os valores atribuídos a t_p (e a n_{aval}) para cada um dos N considerados, enquanto as linhas contínuas representam curvas de tendência, obtidas por meio de regressões lineares, em que R^2 é o coeficiente de determinação. Os valores de N empregados na geração desses resultados são iguais àqueles considerados na computação da relação entre J^* e N .

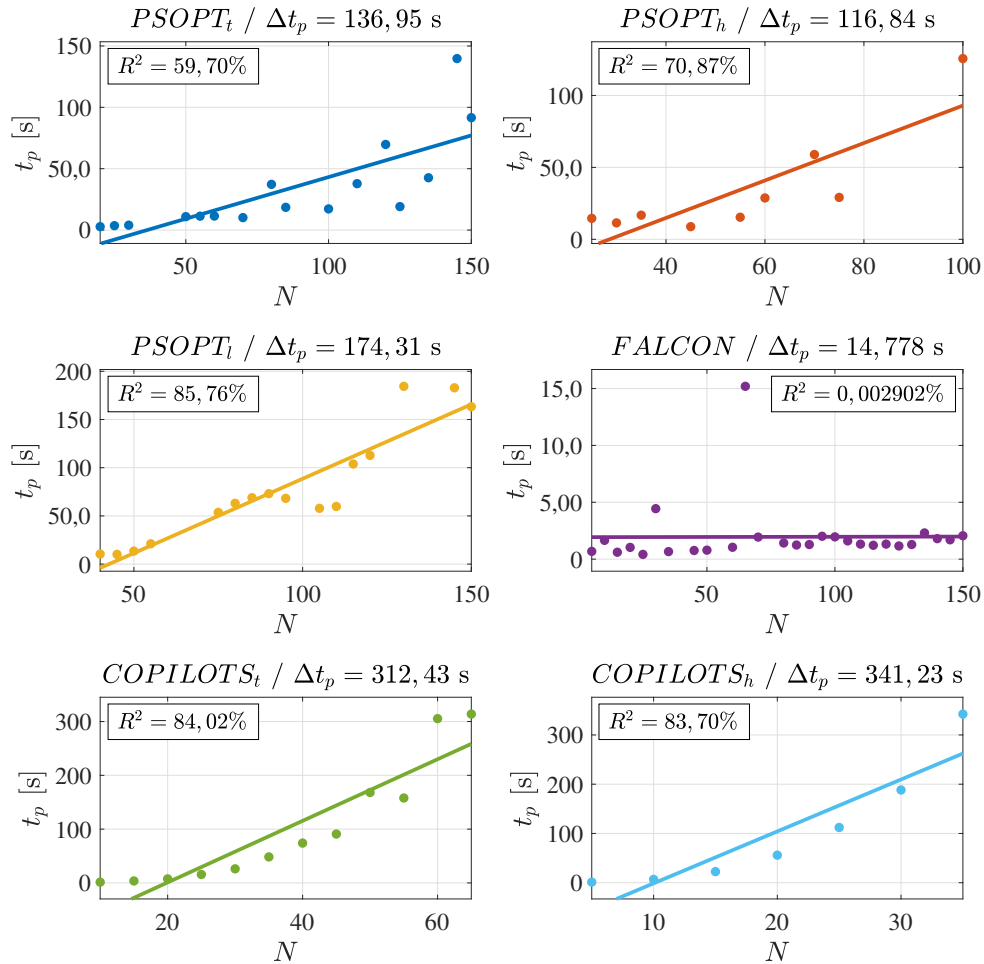


Figura 76 – Relação entre o tempo de processamento t_p e o número de nós de colocação N no problema do estacionamento.

Primeiramente nota-se que o t_p obtido pelo *FALCON* é o menos sensível ao aumento de N , dado o baixo valor de Δt_p associado a esse pacote. Em contrapartida, o *PSOPT_l* foi o que resultou no menor valor de Δn_{aval} . Em relação aos valores de t_p e de n_{aval} associados ao *FALCON*, observam-se R^2 especialmente baixos, uma vez que para $N = 65$, verificou-se um aumento repentino em n_{aval} e, conseqüentemente, em t_p . De forma análoga, atribui-se um R^2 consideravelmente baixo ao n_{aval} associado ao *PSOPT_l*, uma vez que, nesse caso, verifica-se uma variação considerável em n_{aval} à medida que N cresce, sem que seja possível perceber qualquer tendência.

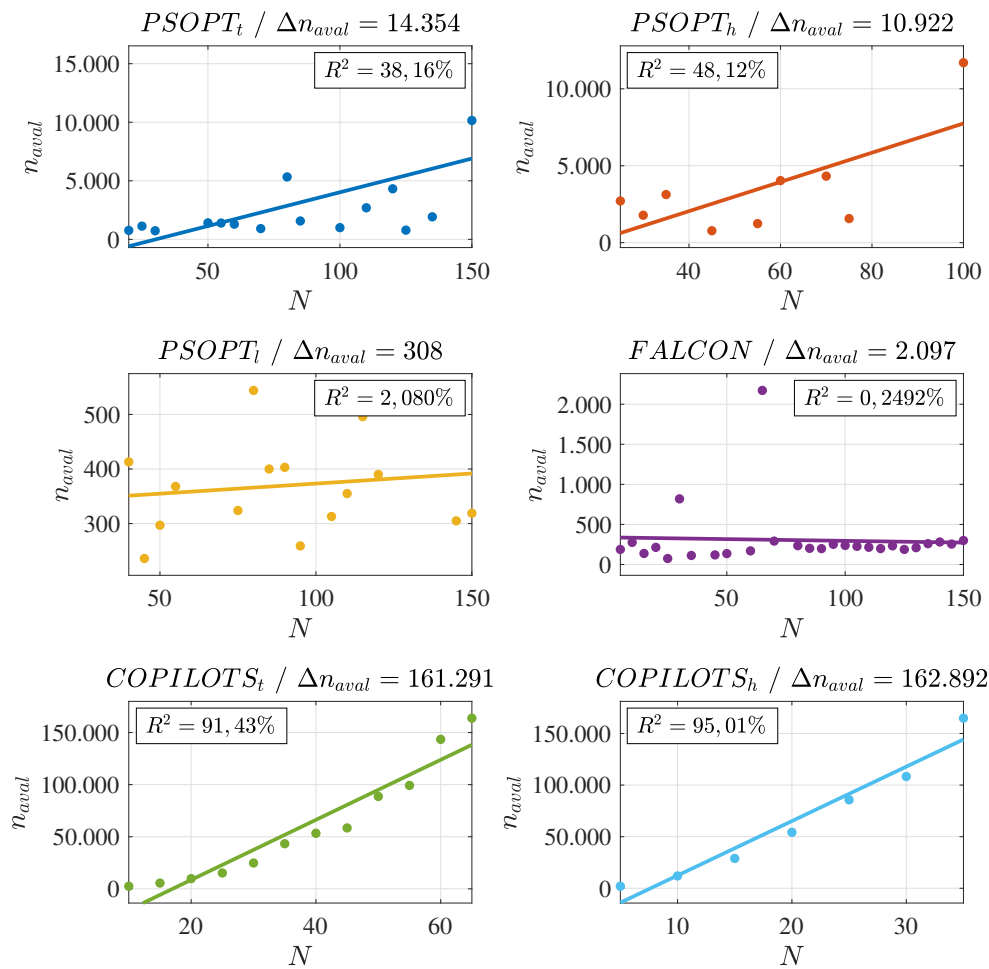


Figura 77 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo n_{aval} e o número de nós de colocação N no problema do estacionamento.

Vale ressaltar que os valores de Δt_p associados ao $PSOPT_t$, ao $PSOPT_h$ e ao $PSOPT_l$ se mostraram bastante próximos. No entanto, o mesmo não pode ser dito com relação aos valores de Δn_{aval} associados a esses métodos. O Δn_{aval} obtido pelo $PSOPT_l$ é cerca de 45 vezes menor que o requerido pelo $PSOPT_t$. Ainda assim, é preciso ter cuidado ao comparar-se os resultados obtidos pelo $PSOPT_h$ e pelo $PSOPT_l$, uma vez que não foi possível, empregando-se o primeiro método, resolver o estudo de caso em análise para $N > 100$. Apesar dos altos valores de R^2 relacionados aos parâmetros t_p e n_{aval} encontrados pelas configurações $COPILOTS_t$ e $COPILOTS_h$, é difícil dizer se há, nesse caso, uma relação linear entre N e t_p ou entre N e n_{aval} . Tal afirmação seria equivocada considerando-se a pequena quantidade de pontos na qual foram baseadas as regressões lineares associadas a esses pacotes (12 no caso do $COPILOTS_t$ e 7 no do $COPILOTS_h$). Finalmente, é preciso ter cuidado ao se comparar as sensibilidades dos parâmetros t_p e n_{aval} relacionados ao $COPILOTS_t$ e ao $COPILOTS_h$ com base nos valores de Δt_p e Δn_{aval} associados a cada um destes métodos, uma vez que os valores de N_s encontrados são bastante baixos (iguais a 12 e 7, respectivamente). Porém, é possível dizer com segurança que os valores de n_{aval} e de t_p associados ao $COPILOTS$, independentemente do

tipo de colocação considerada, são muito maiores que aqueles atribuídos aos demais métodos, o que se deve, provavelmente, ao uso que o pacote faz do SQP.

4.5 OTIMIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE UM UAV

O uso de Veículos Aéreos Não Tripulados - do inglês *Unmanned Aerial Vehicles* - UAVs - nos setores civil e militar têm crescido no últimos anos, uma vez que aeronaves desse tipo vêm sendo utilizadas na realização de missões de vigilância, reconhecimento e inspeção. Algumas das vantagens dos UAVs em relação às aeronaves tripuladas são a redução dos custos operacionais e dos riscos associados à presença de uma tripulação (AZEVEDO et al., 2018).

Missões de voo são comumente especificadas a partir da determinação de pontos que devem ser sequencialmente percorridos pela aeronave, os chamados *waypoints*. Considerando-se que não existam obstáculos entre os *waypoints* e que forças externas não atuem sobre a aeronave, o caminho mais rápido entre dois *waypoints* é uma linha reta. No entanto, caso a aeronave esteja sujeita a um campo de vento, a determinação da trajetória se torna um problema de otimização complexo (AZEVEDO et al., 2018).

Nesta aplicação pretende-se determinar a trajetória a ser percorrida por um UAV para que o mesmo vá de um *waypoint* inicial até um *waypoint* final, consumindo a menor quantidade de bateria possível, enquanto atua sobre ele um campo de vento conhecido (AZEVEDO et al., 2018). As variáveis empregadas na formulação das equações de movimento do UAV são representadas na Figura 78:

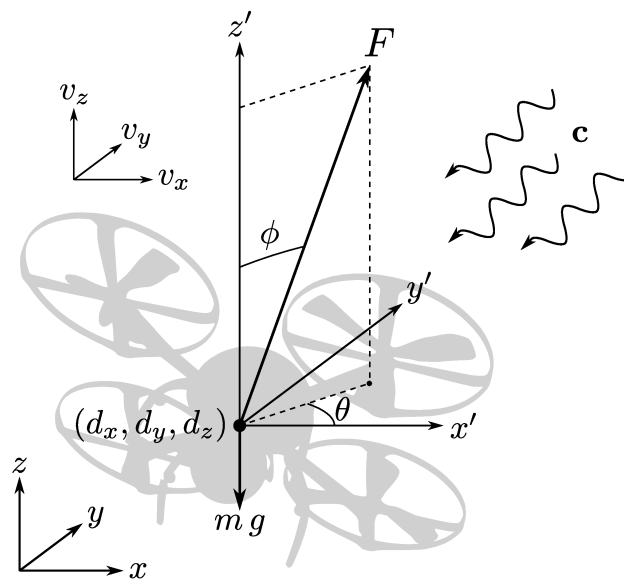


Figura 78 – Representação esquemática do problema da otimização da trajetória de um UAV.

Nesta figura, o UVA é modelado como um ponto com massa m , com posição $(d_x(t), d_y(t), d_z(t))$ e velocidade $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. O veículo se encontra submetido a ventos de velocidade

$\mathbf{c}(t) = [c_x(t) \ c_y(t) \ c_z(t)]$ enquanto é impulsionado por uma força $F(t)$. Os ângulos de atitude e de proa (*heading*) são denotados, respectivamente, por $\phi(t)$ e $\theta(t)$. Por fim, c_d é o coeficiente de arrasto do ar e g a aceleração da gravidade. Tanto os *waypoints* inicial (P_0) e final (P_f), quanto o campo de vento ao qual está submetido o UAV são apresentados na Figura 79.

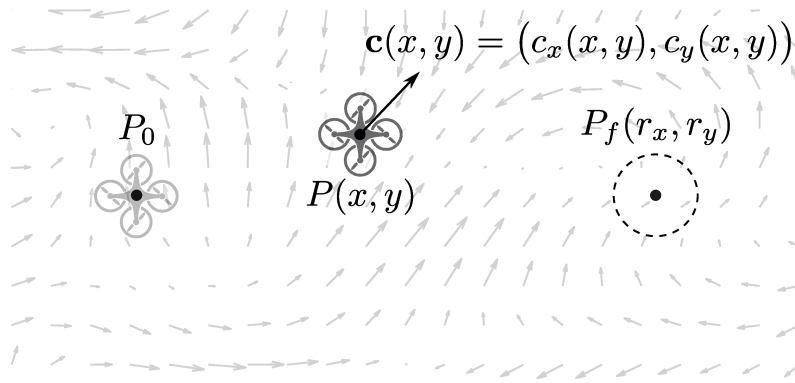


Figura 79 – Campo de vento ao qual o UAV está submetido no problema da otimização da trajetória.

Neste estudo de caso assume-se que o UAV se mantém a uma altitude constante, logo, considera-se que o campo de vento atua somente no plano xy . Nesse caso, para que a trajetória obtida seja devidamente avaliada, é interessante determinar, para cada ponto da trajetória, se o campo de vento é favorável ou desfavorável ao movimento do UAV (MUPPIRALA; FENELON, 2020). Para tanto, considera-se que o vento com velocidade c atua em um determinado ponto $P(x, y)$, conforme ilustrado na Figura 80.

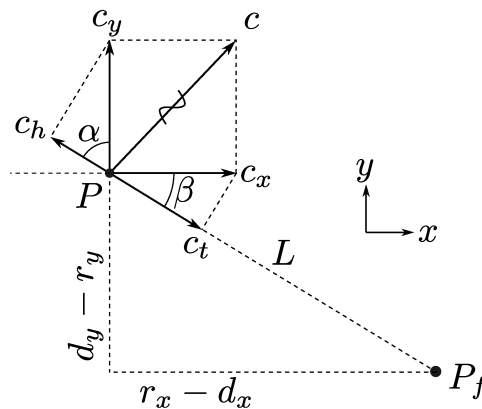


Figura 80 – Representação das variáveis utilizadas na definição da favorabilidade $f(x, y)$.

Seja L a distância entre $P(x, y)$ e $P_f(r_x, r_y)$ definida como:

$$L(x, y) = \sqrt{(y - r_y)^2 + (r_x - x)^2} \quad (4.34)$$

têm-se que:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{y - r_y}{L} \quad (4.35a)$$

$$\cos(\beta) = \frac{x - r_x}{L} \quad (4.35b)$$

Como $\alpha + \beta = \pi/2$ rad, implica que $\cos(\alpha) = \sin(\beta)$. Portanto, as projeções de $c_x(x,y)$ e $c_y(x,y)$ na direção $\overline{PP_f}$ podem ser determinadas da seguinte forma:

$$c_h(x,y) = c_y(x,y) \cos(\alpha) = c_y(x,y) \sin(\beta) \quad (4.36a)$$

$$c_t(x,y) = c_x(x,y) \cos(\beta) \quad (4.36b)$$

Neste caso, define-se $f(x,y)$ como sendo a favorabilidade do campo de vento no ponto $P(x,y)$, dada por $f(x,y) = c_t(x,y) - c_h(x,y) = c_x(x,y) \cos(\beta) - c_y(x,y) \sin(\beta)$. De posse da definição de $L(x,y)$ é possível reescrever $f(x,y)$ da seguinte maneira:

$$f(x,y) = \frac{(r_x - x)c_x(x,y) + (r_y - y)c_y(x,y)}{\sqrt{(r_x - x)^2 + (r_y - y)^2}} \quad (4.37)$$

O campo de vento é gerado atribuindo-se $c_x(x,y)$ e $c_y(x,y)$ aleatórios a pontos igualmente espaçados em x e y . Desta forma, duas grades (matrizes) com 21 linhas e 11 colunas devem ser geradas, cada uma associada a uma componente de $\mathbf{c}(x,y)$. As velocidades associadas aos pontos fora das grades são obtidas por meio de uma interpolação linear bidimensional. As matrizes contendo os valores de $c_x(x,y)$ e $c_y(x,y)$ empregadas na obtenção dos resultados aqui apresentados podem ser consultadas em <https://cutt.ly/PjJZiTS> e <https://cutt.ly/5jJZpXF>.

Na Figura 81 são representadas as velocidades e as favorabilidades associadas ao campo de vento em cada ponto (x,y) . As zonas na cor verde são aquelas em que $f(x,y) > 0$ e nas quais o vento sopra na direção do *waypoint* final $P_f(r_x, r_y)$. Em contrapartida, as zonas representadas pela cor vermelha devem ser evitadas pelo UAV, isto é: são aquelas em que $f(x,y) < 0$ e o vento sopra para longe de $P_f(r_x, r_y)$. As zonas na cor branca são aquelas em que $f(x,y) \approx 0$. As setas no gráfico representam os vetores de velocidade do vento $(c_x(x,y), c_y(x,y))$. Vale ressaltar que $f(x,y)$ é dado em m/s, já que é definido como a soma das projeções das velocidades $c_x(x,y)$ e $c_y(x,y)$.

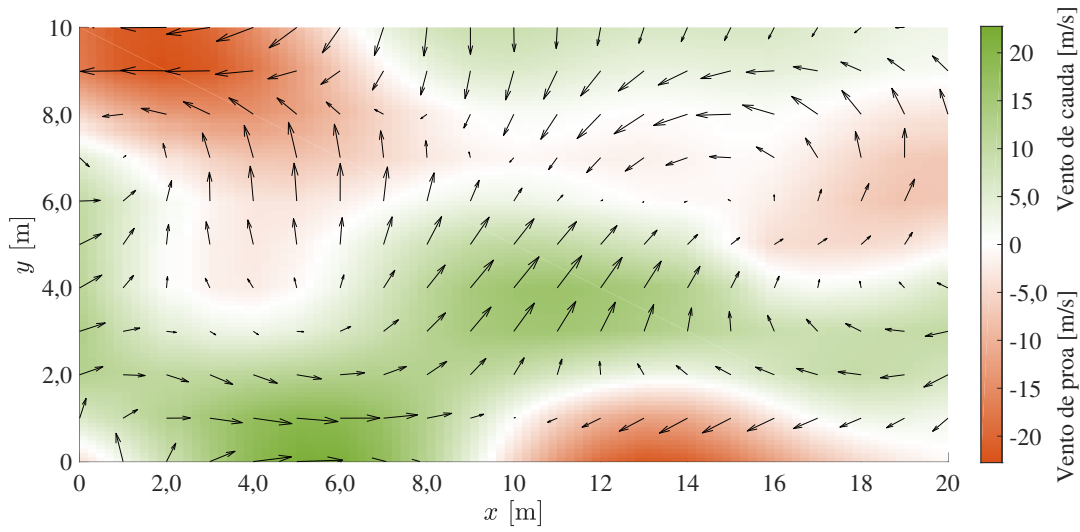


Figura 81 – Velocidades e favorabilidades associadas ao campo de vento para o problema da otimização da trajetória de um UAV.

A dinâmica do UAV no plano xy é descrita como segue (AZEVEDO et al., 2018):

$$\dot{d}_x(t) = v_x(t), \quad d_x(0) = r_{0x} \text{ m} \quad (4.38a)$$

$$\dot{d}_y(t) = v_y(t), \quad d_y(0) = r_{0y} \text{ m} \quad (4.38b)$$

$$\dot{v}_x(t) = g \tan(\phi(t)) \cos(\theta(t)) - \frac{c_d}{m} [v_x(t) - c_x(d_x(t), d_y(t))], \quad v_x(0) = 0 \text{ m/s} \quad (4.38c)$$

$$\dot{v}_y(t) = g \tan(\phi(t)) \sin(\theta(t)) - \frac{c_d}{m} [v_y(t) - c_y(d_x(t), d_y(t))], \quad v_y(0) = 0 \text{ m/s} \quad (4.38d)$$

em que t é o tempo, $\mathbf{x}(t) = [d_x(t) \quad d_y(t) \quad v_x(t) \quad v_y(t)]^T$ é o vetor de variáveis de estado e $\mathbf{u}(t) = [\phi(t) \quad \theta(t)]^T$ é o vetor de variáveis de controle.

Uma vez que deseja-se minimizar o consumo de bateria, propõe-se a minimização de $J = \int_0^{t_f} I(t) dt$, sendo t_f o tempo final e $I(t)$ a corrente que circula pelos terminais da bateria. Considerando-se que $I(t)$ seja proporcional a $F(t)$, de forma que $I(t) = K_i F(t)$, e levando-se em conta que $m g = F(t) \cos(\phi(t))$ para que a altitude do UAV se mantenha constante, é possível reescrever J da seguinte forma:

$$J = K_i m g \int_0^{t_f} \frac{1}{\cos \phi(t)} dt \quad (4.39)$$

As restrições associadas à posição do UAV e aos controles $\phi(t)$ e $\theta(t)$ são definidas como segue:

$$0 \leq d_x(t) \leq D_x \quad (4.40a)$$

$$0 \leq d_y(t) \leq D_y \quad (4.40b)$$

$$0 \leq \phi(t) \leq \Phi \quad (4.40c)$$

$$-\pi \leq \theta(t) \leq \pi \quad (4.40d)$$

Ao fim da trajetória, o UAV deve estar posicionado a, no máximo, r m do *waypoint* $P_f(r_x, r_y)$. Tal condição é representada pela restrição terminal dada por:

$$(d_x(t_f) - r_x)^2 + (d_y(t_f) - r_y)^2 \leq r^2 \quad (4.41)$$

A seguir estão listados os parâmetros utilizados neste estudo de caso (AZEVEDO et al., 2018): massa do UAV ($m = 0,5$ m), aceleração da gravidade ($g = 0,81$ m), coeficiente de arrasto do ar ($c_d = 0,2$ Ns/m), coordenada x do *waypoint* final ($r_x = 15$ m), coordenada y do *waypoint* final ($r_y = 5$ m), coordenada x do *waypoint* inicial ($r_{0x} = 1$ m), coordenada y do *waypoint* inicial ($r_{0y} = 5$ m), coeficiente de relação entre a força $F(t)$ e a corrente elétrica $I(t)$ ($K_i = 5,08$ A/N), limite superior para a posição do UAV na direção x ($D_x = 20$ m), limite superior para a posição do UAV na direção y ($D_y = 10$ m), limite superior para o ângulo de atitude ($\Phi = \pi/6$ rad) e máxima distância entre a posição final do UAV e o *waypoint* final ($r = 1$ m).

Cada resultado que será apresentado a seguir foi obtido a partir de duas execuções, sendo as informações sobre o campo de vento desconsiderados na primeira delas. Nesse caso, a solução obtida é uma linha reta que conecta os *waypoints* P_0 e P_f . Então, na segunda execução, o campo de vento é reinserido nas equações de movimento do UAV e a solução obtida na primeira execução é utilizada para a inicialização dos estados e controles. O tempo de processamento t_p e o número de avaliações da função objetivo n_{aval} requeridos por cada pacote foram computados a partir da soma dos t_p e n_{aval} em cada uma das duas execuções. Sem esta estratégia, não é possível resolver o estudo de caso em análise via *PSOPT*. Além disso, verifica-se que é possível, utilizando o *COPILOTS*, determinar uma trajetória factível para o UAV sem que qualquer estimativa inicial seja fornecida. No entanto, obtém-se nesse caso valores de t_p e n_{aval} mais elevados do que aqueles atribuídos às soluções obtidas via abordagem de inicialização aqui proposta. Empregando o *FALCON* é possível obter soluções consideravelmente satisfatórias sem que o usuário tenha que fornecer estimativas iniciais. Assim sendo, com o intuito de minimizar os valores de t_p e n_{aval} atribuídos ao *FALCON*, optou-se por deixar a inicialização dos estados e controles a cargo desse pacote e solucionar o estudo de caso em análise empregando-se uma única execução.

São apresentados na Figura 82 os resultados referentes à influência do número de nós de colocação no melhor valor da função objetivo encontrado, bem como está identificada nestas figuras o número mínimo de nós de colocação N_m . Para essa finalidade foram considerados trinta valores igualmente espaçados 5 e 179.

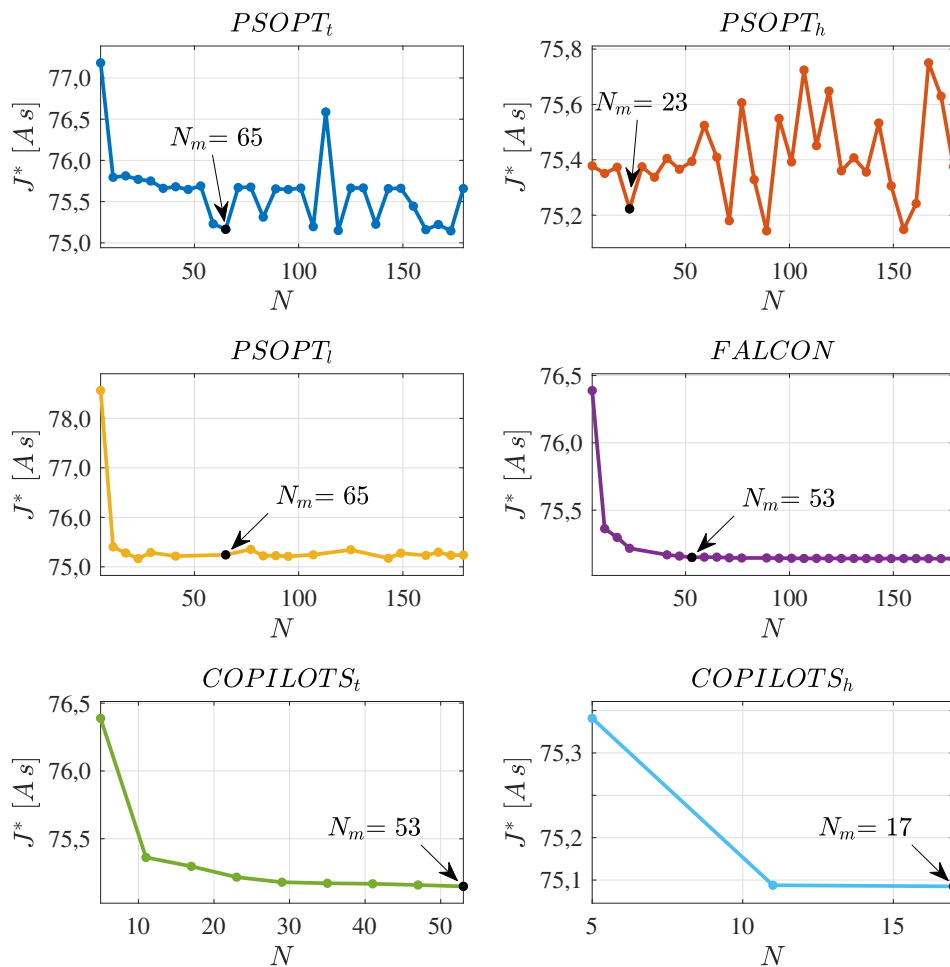


Figura 82 – Influência do número de nós de colocação N no valor da função objetivo J^* para o problema da otimização da trajetória de um UAV.

Nesta figura observa-se que os valores de J^* referentes ao $COPILOTS_t$ e ao $COPILOTS_h$ não chegaram a convergir, uma vez que foram obtidas apenas 9 soluções empregando-se o primeiro, e 3 utilizando-se o segundo. O valor de J^* obtido pelo $PSOPT_h$ diverge com o aumento de N , uma vez que, no caso da colocação Hermite-Simpson, é necessário fornecer estimativas iniciais não só para os valores assumidos pelos estados e controles nos nós de colocação, mas também para aqueles assumidos pelos controles nos nós intermediários, o que dificulta a inicialização do PPNL. Já o J^* associado ao $PSOPT_t$ não diverge com o aumento de N , porém oscila em torno de um patamar para $N > 65$. Em contrapartida, o valor de J^* computado pelo $PSOPT_i$ converge rapidamente, apresentando apenas leves oscilações à medida que N cresce. De fato, oscilações podem ser verificadas em todos os resultados atribuídos ao $PSOPT$. Esse comportamento, provavelmente, está relacionado ao otimizador considerado neste pacote. Vale ressaltar que os valores de J^* obtidos pelo $FALCON$ convergiram suavemente, e sem que fossem verificadas quaisquer oscilações. Uma vez que não é possível verificar a convergência dos valores de J^* para o $COPILOTS_t$ e para o $COPILOTS_h$, assume-se $N_m = \max\{N\}$. No caso do $PSOPT_t$, atribui-se a N_m o menor N em que se verifica um

valor de J^* próximo a $\min\{J^*\}$. Por fim, considerando-se as bruscas variações observadas no $PSOPT_h$, deve-se escolher N_m de forma subjetiva, buscando associar a essa métrica o menor valor possível.

Considerando os critérios de convergência originalmente adotados para a determinação de N_m , deveria ser atribuído $N_m = 23$ ao $PSOPT_l$. No entanto, a trajetória de $\theta(t)$ obtida quando $N = 23$ (ver a Figura 83), apresenta em $t = 2,63$ s um ponto consideravelmente distante dos demais, o que provavelmente se deve a alguma adversidade numérica no processo de otimização. Uma vez que a trajetória obtida via colocação pseudo-espectral é construída globalmente, utilizando-se somente um polinômio, distorções em um único nó de colocação podem fazer com que trajetórias consideravelmente oscilatórias sejam produzidas, como é o caso. Assim sendo, deve-se aumentar N_m até que o comportamento oscilatório seja eliminado. Na Figura 84 é apresentada a trajetória de $\theta(t)$ obtida para $N = 41$, na qual verifica-se a redução das oscilações observadas inicialmente. Com base nesse novo critério, atribui-se ao $PSOPT_l$ $N_m = 65$.

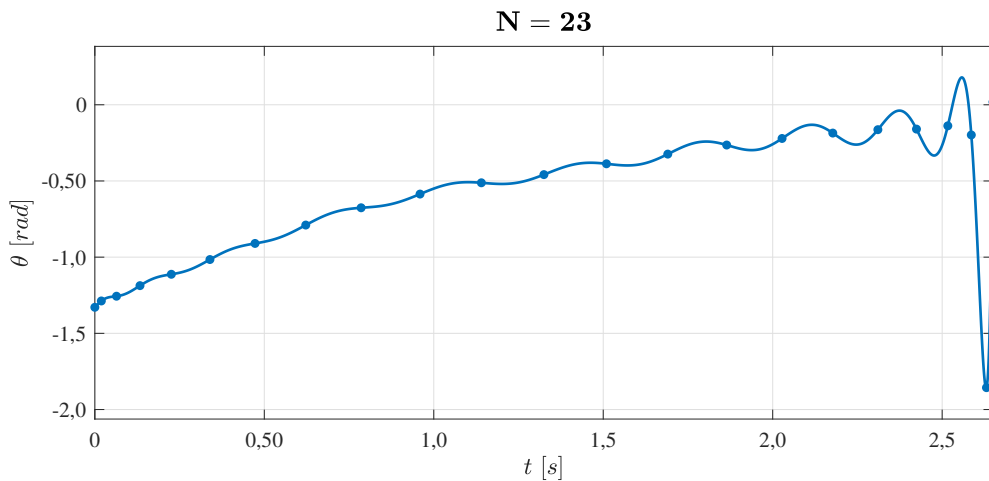


Figura 83 – Trajetória de $\theta(t)$ obtida para $N = 23$.

Vale ressaltar que oscilações na trajetória de $\theta(t)$ semelhantes às retratadas nas Figuras 83 e 84 foram reportadas por [Azevedo et al. \(2018\)](#). Tais oscilações ocorrem porque, ao fim da trajetória, $\phi(t)$ aproxima-se de zero, o que faz com que a projeção horizontal de $F(t)$ seja drasticamente reduzida. Assim sendo, quanto menor for $\phi(t)$, menor será a influência de $\theta(t)$ na trajetória do UAV. As oscilações atribuídas à trajetória de $\theta(t)$ reportada em [Azevedo et al. \(2018\)](#) são quase imperceptíveis, já que nesse caso adotou-se $N = 80$.

A Tabela 7 apresenta um resumo das métricas obtidas por cada pacote. Nesta destacam-se o valor da função objetivo (J^*), o tempo de processamento médio (t_p), o desvio padrão atribuído ao mesmo (s_t), a máxima violação das restrições (Δc_{max}) e o número de execuções bem sucedidas (N_s).

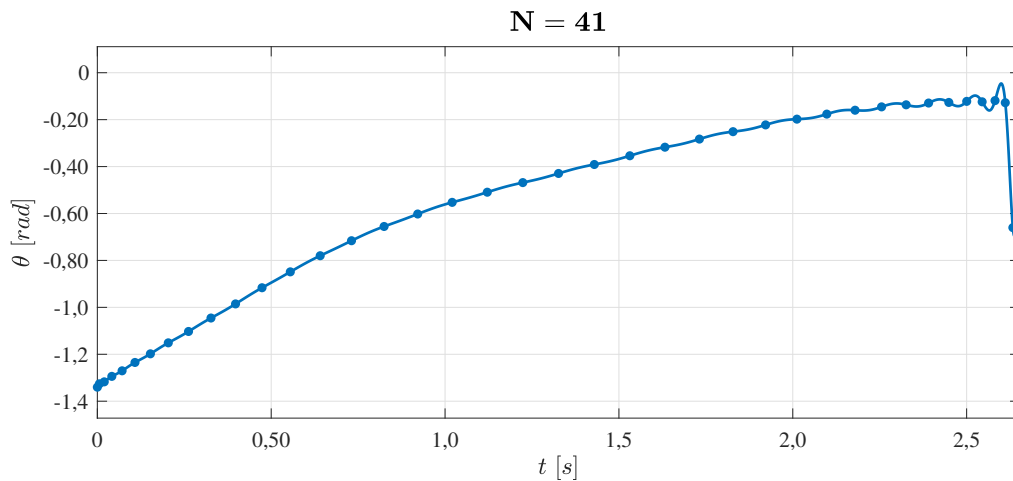


Figura 84 – Trajetória de $\theta(t)$ obtida para $N = 41$.

Tabela 7 – Métricas obtidas para o problema da otimização da trajetória de um UAV. Os melhores valores assumidos pelas métricas N_m , J^* , t_p , n_{aval} e $N_s\%$ estão em destaque.

Método	N_m	J^*	t_p [s]	s_t [s]	n_{aval}	Δc_{max}	N_s	$N_s\%$
$PSOPT_t$	65	75,16400	2,20747	0,23441	167	6,97e-08	30	100,00%
$PSOPT_h$	23	75,22300	1,16775	0,03329	360	7,63e-07	30	100,00%
$PSOPT_l$	65	75,24280	15,66657	0,25870	800	4,08e-07	19	63,33%
$FALCON$	53	75,14907	1,76303	0,03821	357	1,94e-10	27	90,00%
$COPILOTS_t$	53	75,14907	587,37797	0,71652	30821	9,00e-09	9	30,00%
$COPILOTS_h$	17	75,14254	238,48976	0,58730	11860	1,52e-10	3	10,00%

Nesta tabela nota-se que os valores de N_m associados aos métodos baseados na colocação trapezoidal são maiores que aqueles atribuídos aos que fazem uso da colocação Hermite-Simpson. Já o valor de N_m encontrado pelo $PSOPT_l$ ficou tão grande quanto o atribuído ao $PSOPT_t$. Isto se deve à adversidade numérica discutida anteriormente e representada nas Figuras 83 e 84. Já o $COPILOTS_h$ foi o que obteve os menores valores de N_m e de J^* , respectivamente, enquanto ao $COPILOTS_t$ e ao $COPILOTS_h$ estão relacionados os maiores valores de t_p e de n_{aval} .

Diferentemente do que foi observado nos resultados da maior parte dos outros estudos de caso já analisados nesta dissertação, não atribuem-se ao $FALCON$ os menores valores de t_p e de n_{aval} , apesar das métricas associadas a esse pacote assumirem valores bastante satisfatórios. Uma vez que a dinâmica associada ao estudo de caso depende da interpolação linear dos dados de uma tabela, o que atribui descontinuidades ao estudo de caso em análise (**PRACTICAL...**), não é possível que o $FALCON$ compute as derivadas analíticas da dinâmica do UAV, pelo menos não daquela associada aos estados $p_x(t)$ e $p_y(t)$, o que prejudica o desempenho desse pacote. Os baixos valores de t_p e de n_{aval} relacionados ao $FALCON$, apesar das descontinuidades, se devem ao fato desse pacote ter sido capaz de resolver o estudo de caso empregando apenas uma execução, sem que fosse necessária uma estimativa inicial para os estados e controles. Ainda

assim, somente considerando o *FALCON*, o $PSOPT_t$ e o $PSOPT_h$, foi possível obter $N_s\%$ satisfatórios (maiores que 90%).

O valor de t_p associado ao $PSOPT_t$ é maior que aquele atribuído ao $PSOPT_h$, provavelmente por que o N_m empregado pelo primeiro é consideravelmente maior que aquele utilizado pelo segundo. No entanto, o maior valor de n_{aval} foi obtido pelo $PSOPT_h$. Por fim, vale ressaltar que os valores de t_p e de n_{aval} referentes ao $PSOPT_l$ são bem maiores que os associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$, mesmo que os N_m relacionados ao $PSOPT_l$ e ao $PSOPT_t$ sejam iguais.

As trajetórias referentes às variáveis de estado e controle, considerando-se $N = N_m$, são apresentadas nas Figuras 85-90.

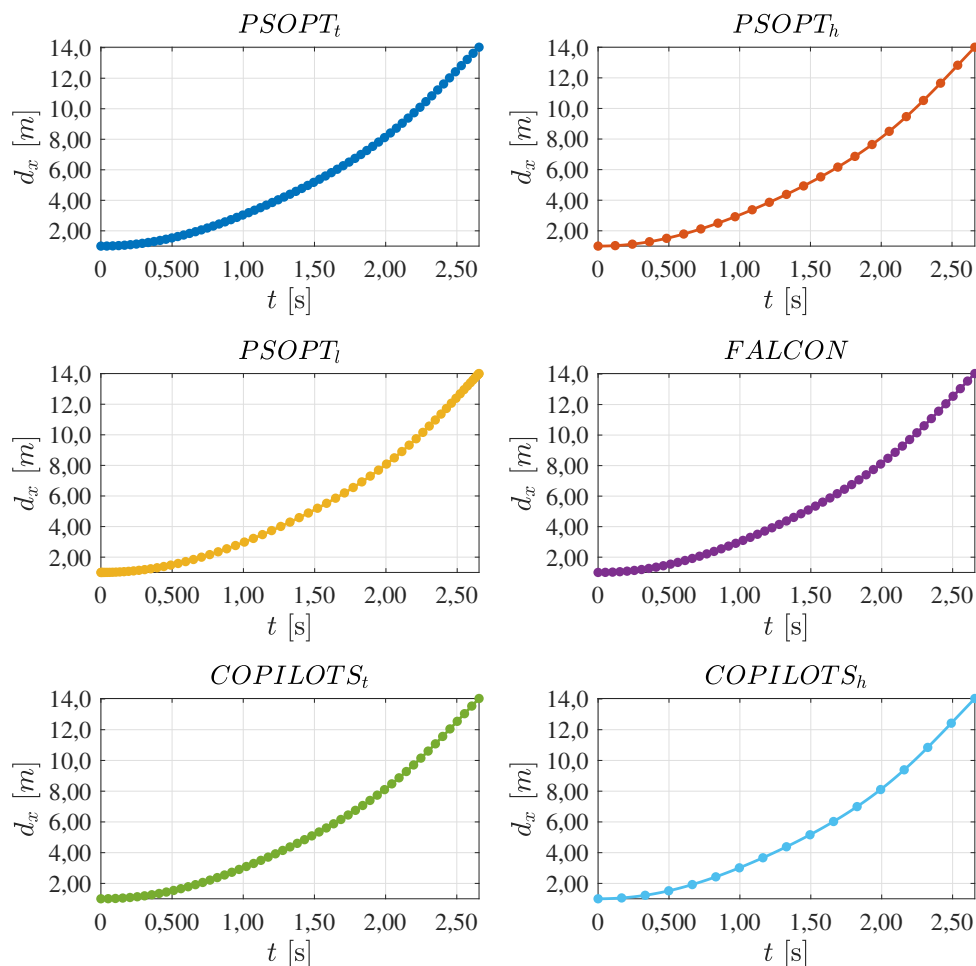


Figura 85 – Variável de estado $d_x(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

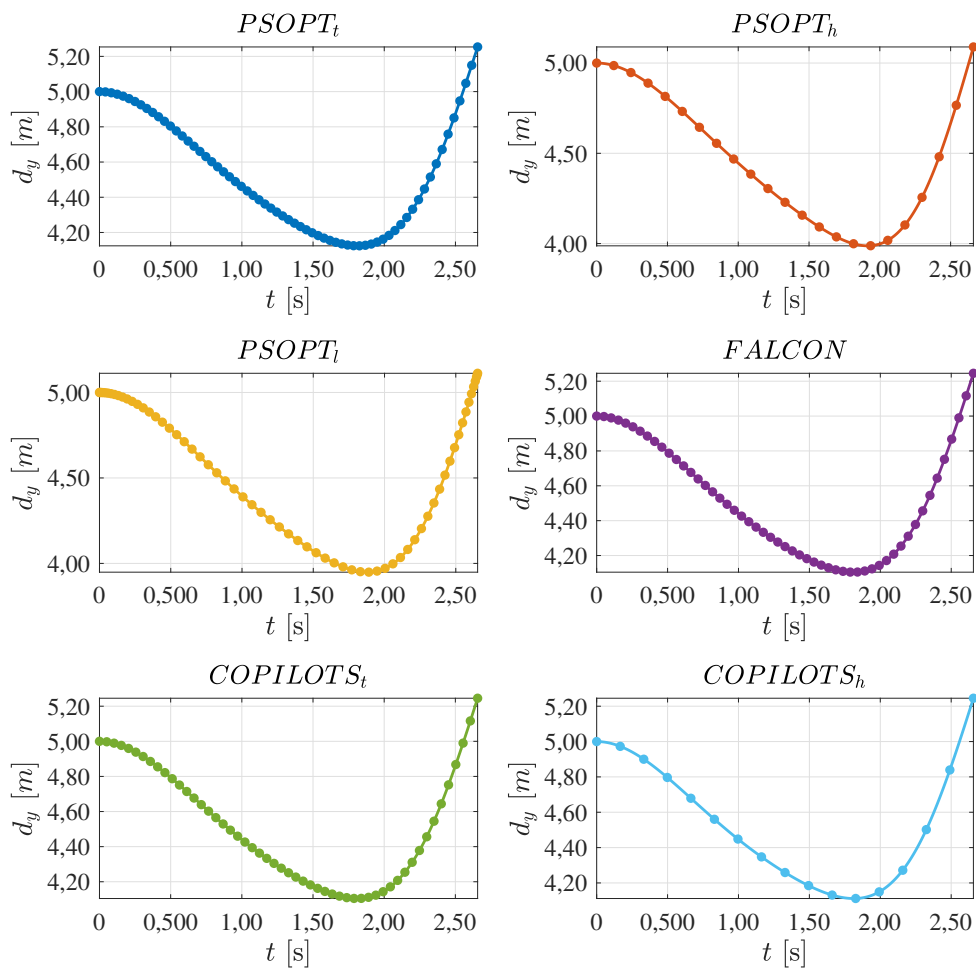


Figura 86 – Variável de estado $d_y(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

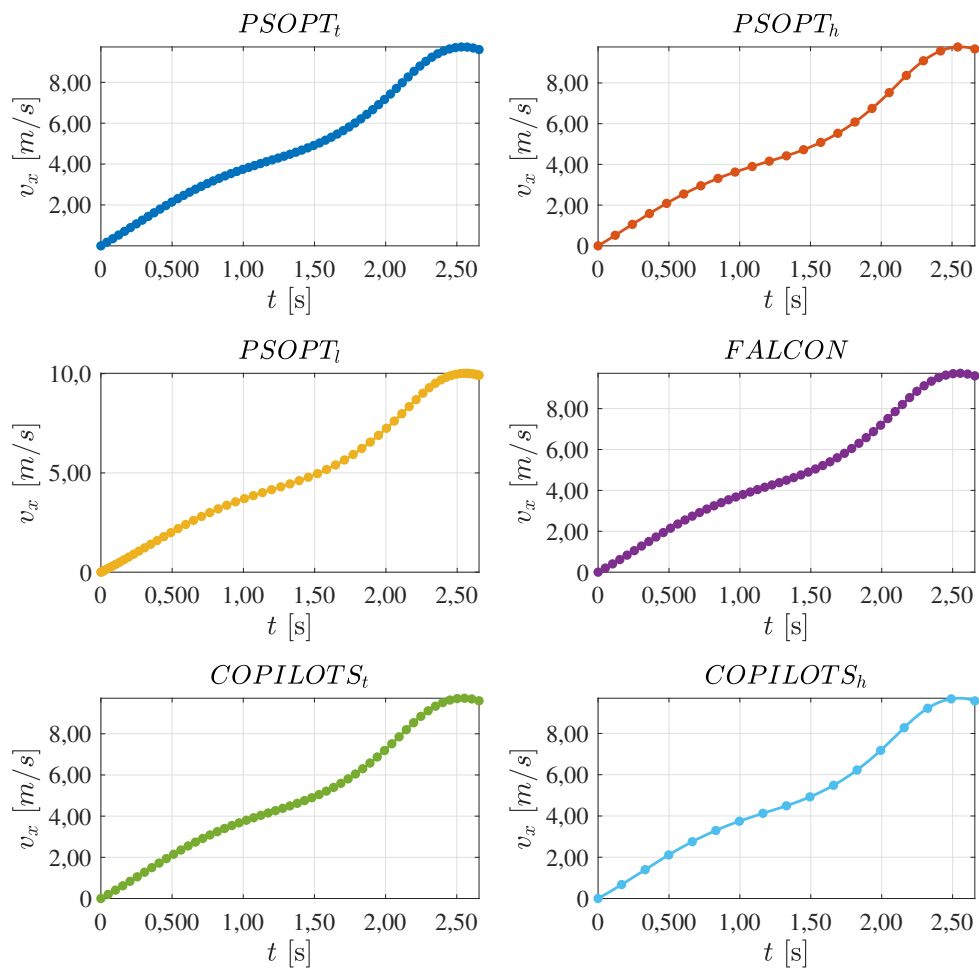


Figura 87 – Variável de estado $v_x(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

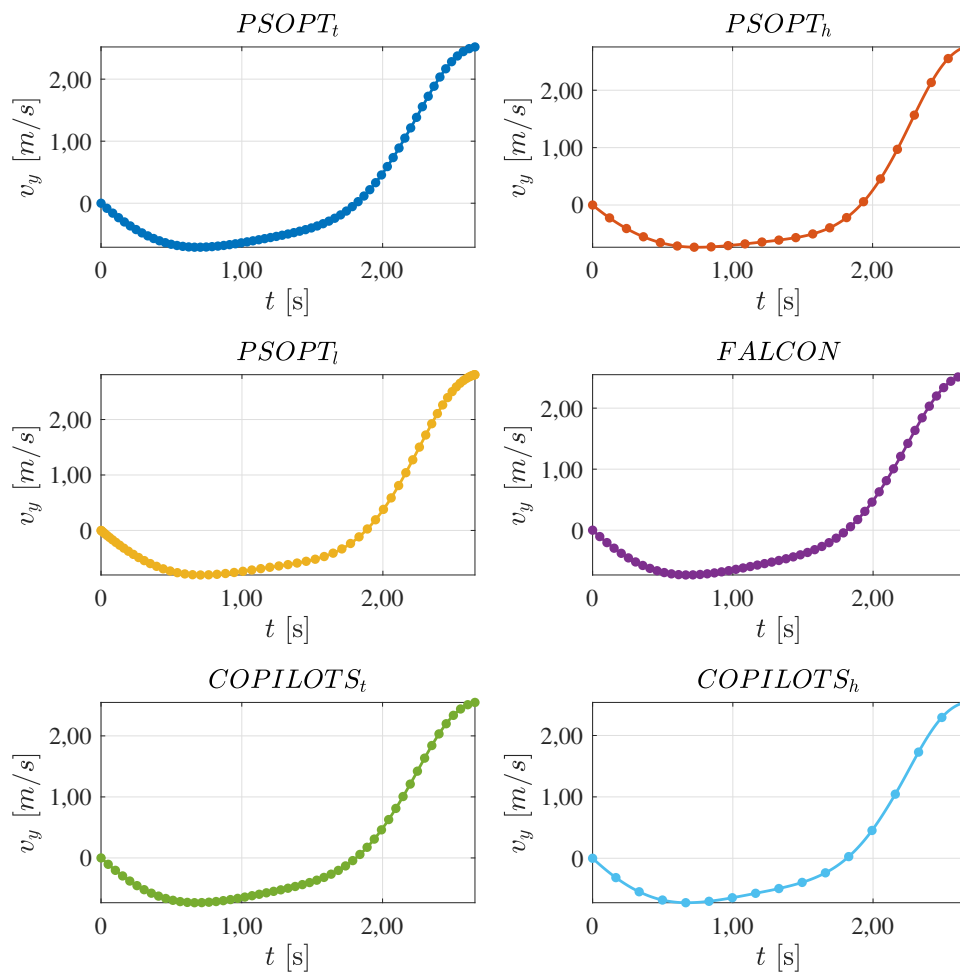


Figura 88 – Variável de estado $v_y(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

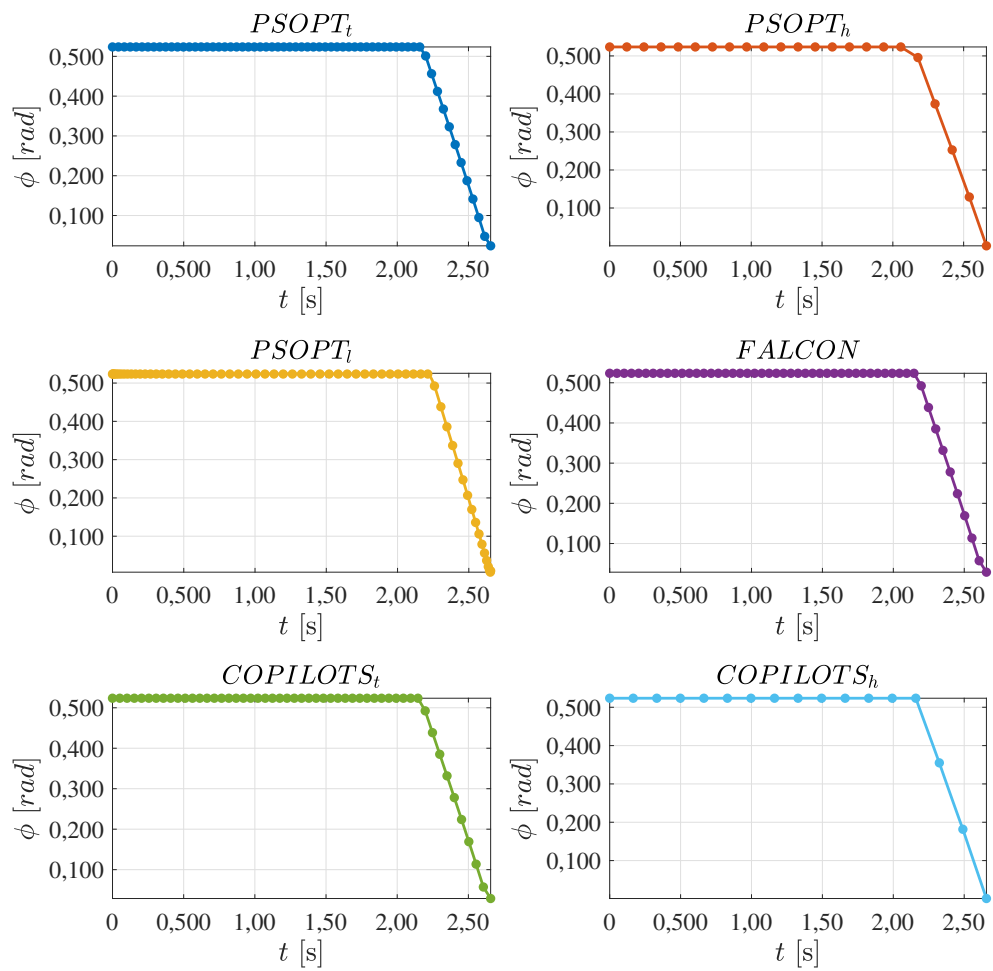


Figura 89 – Variável de controle $\phi(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

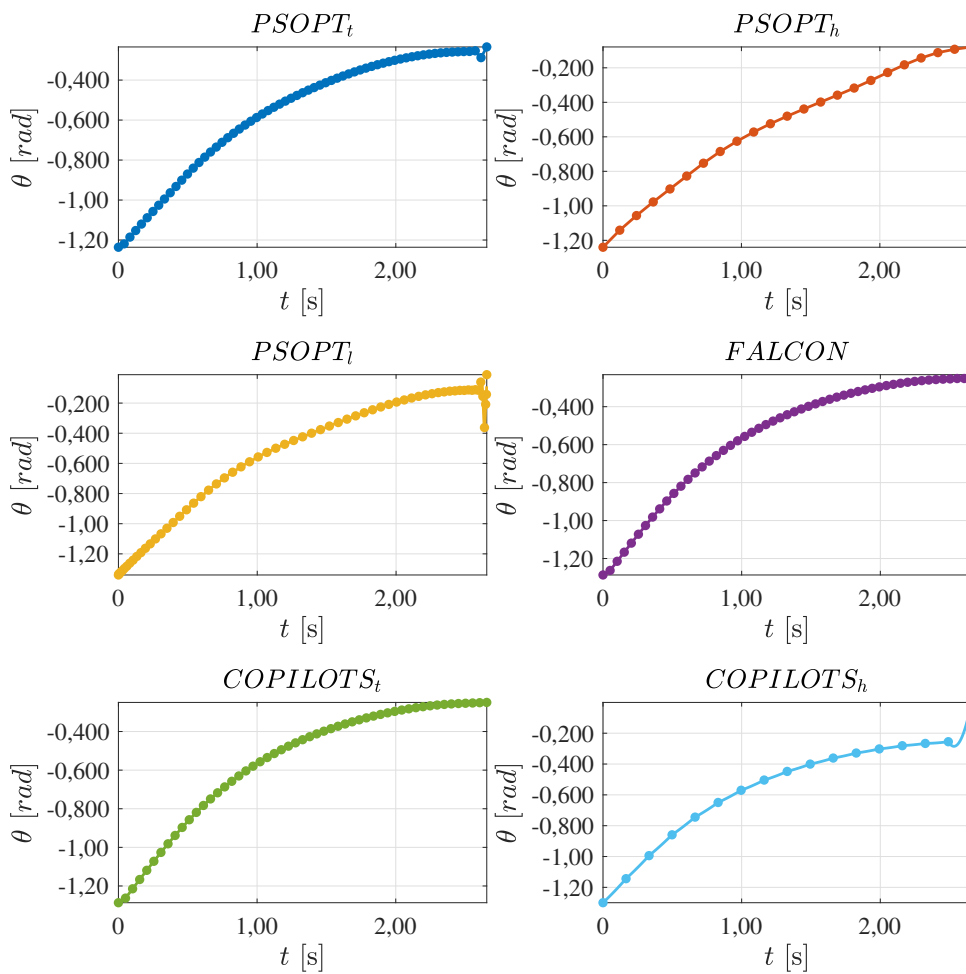


Figura 90 – Variável de controle $\theta(t)$ para o problema da otimização da trajetória de um UAV. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

De forma geral, pode-se observar que as trajetórias de $d_x(t)$, $d_y(t)$, $v_x(t)$, e $v_y(t)$ obtidas via cada um dos métodos se mostraram muito semelhantes umas às outras, valendo ressaltar que são também condizentes com aquelas reportadas por [Azevedo et al. \(2018\)](#). Verifica-se o mesmo com as trajetórias do controle $\phi(t)$. As oscilações na trajetória do controle $\theta(t)$ associada ao $PSOPT_l$ já foram discutidas e se encontram representadas nas Figura 83 e 84. No entanto, a partir da análise dos resultados ilustrados na Figura 90, é possível verificar que tais oscilações aparecem também nas trajetórias associadas ao $PSOPT_t$, ao $FALCON$ e ao $COPILOTS_h$. Mesmo que tenha sido atribuído a esse último pacote um baixo N_m , é possível verificar que a trajetória associada ao mesmo não foi globalmente afetada pela presença de oscilações. Esse resultado se deve à forma como a trajetória é interpolada a partir dos nós de colocação quando empregada a colocação Hermite-Simpson. Nesse caso, vários polinômios distintos compõem a trajetória, sendo cada um deles responsável pelos valores atribuídos à mesma entre dois nós de colocação específicos. Conclui-se que, apesar de proporcionar a geração de trajetórias mais suaves, a interpolação global empregada no caso da colocação pseudo-espectral possui a

desvantagem de ser globalmente afetada por perturbações em qualquer um dos nós de colocação.

Na Figura 91 está representada a vista superior da trajetória do UAV e o campo de vento que atua sob o mesmo. Este gráfico foi elaborado a partir dos resultados obtidos via $COPILOTS_h$, pacote ao qual associa-se o menor J^* . Os pontos destacados em azul no gráfico representam os valores assumidos por $d_x(t)$ e $d_y(t)$ nos nós de colocação, enquanto a linha contínua que conecta esses pontos representa a trajetória computada com base nas trajetórias descritas nas Figuras 85 e 86.

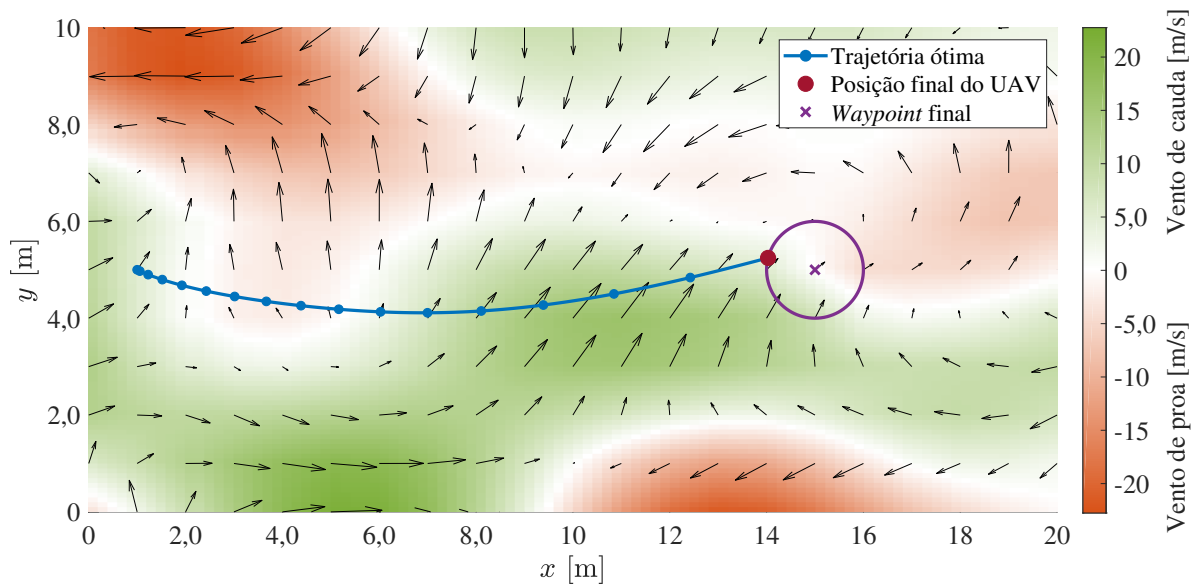


Figura 91 – Vista superior da trajetória do UAV e do campo de vento que atua sob o mesmo.

A influência do número de nós de colocação no tempo de processamento e no número de avaliações da função objetivo é apresentada nas Figuras 92 e 93. Nestes gráficos são introduzidas as variações: $\Delta t_p = \max\{t_p\} - \min\{t_p\}$ e $\Delta n_{aval} = \max\{n_{aval}\} - \min\{n_{aval}\}$. Os pontos nos gráficos representam os valores atribuídos a t_p (e a n_{aval}) para cada um dos N considerados, enquanto as linhas contínuas representam curvas de tendência, obtidas por meio de regressões lineares, em que R^2 é o coeficiente de determinação. Os valores de N empregados na geração desses resultados são iguais àqueles considerados na computação da relação entre J^* e N .

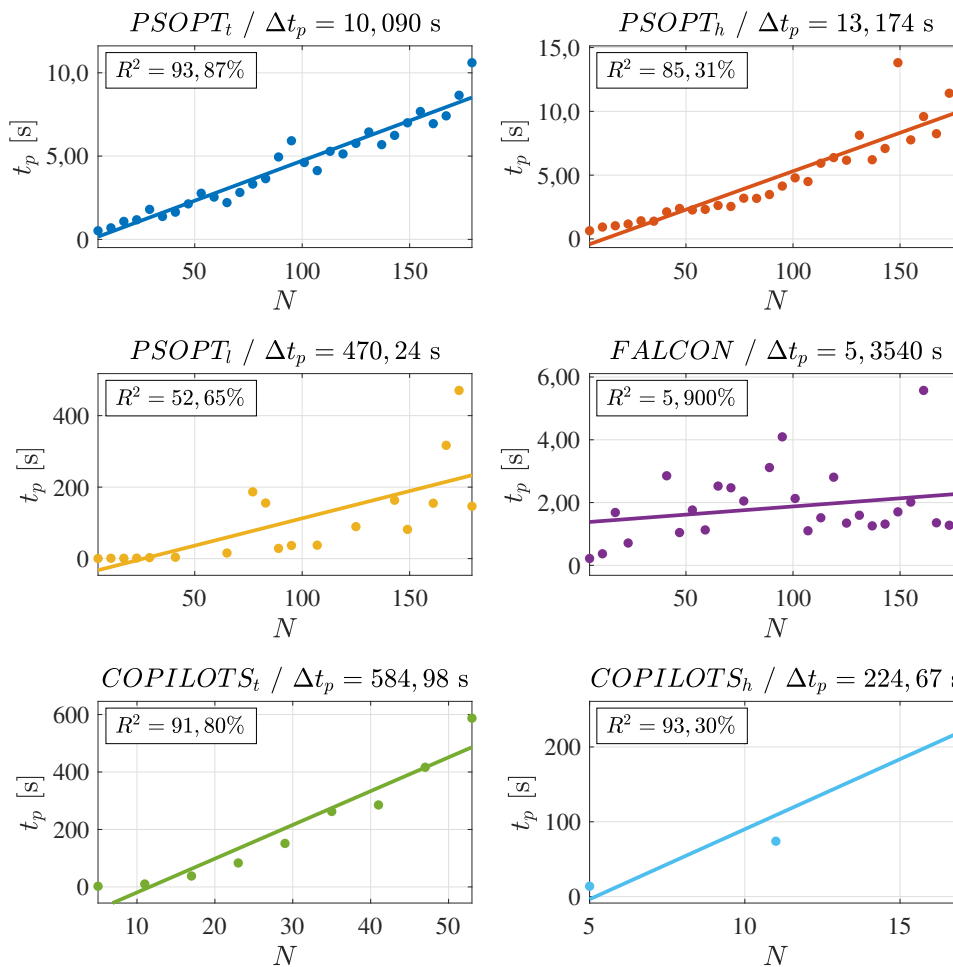


Figura 92 – Relação entre o tempo de processamento t_p e o número de nós de colocação N para o problema da otimização da trajetória de um UAV.

Nestes gráficos observa-se que há uma relação quase linear entre os N e t_p associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$. No entanto, não é possível dizer o mesmo da relação entre os N e n_{aval} para os valores encontrados pelo $PSOPT_l$. Já no caso do $FALCON$ não foi possível verificar qualquer relação direta entre N e t_p ou entre N e n_{aval} . Tais alegações podem ser verificadas a partir da análise dos respectivos valores de R^2 . Vale ressaltar ainda que os coeficientes de determinação associados ao $COPILOTS_t$ e ao $COPILOTS_h$ não são representativos, uma vez que as regressões referentes a esses pacotes foram baseadas em um número muito pequeno de pontos.

Os valores de t_p associados ao $FALCON$ são consideravelmente menos sensíveis ao aumento de N que aqueles atribuídos ao $PSOPT_t$, ao $PSOPT_h$ e ao $PSOPT_l$. De fato, o Δt_p associado ao $FALCON$ é cerca de 90 vezes maior que o atribuído ao $PSOPT_l$ por exemplo. No entanto, o n_{aval} associado ao $FALCON$ é tão alto quanto àquele atribuído ao $PSOPT_h$, mesmo que os resultados obtidos por meio do $FALCON$ tenham sido determinados em uma única execução, e apesar dos métodos que empregam a colocação Hermite-Simpson normalmente estarem vinculados a n_{aval} maiores que aqueles que fazem uso da colocação trapezoidal. De fato,

o valor de n_{aval} associado ao $PSOPT_t$, por exemplo, é quase duas vezes menor que o atribuído ao $PSOPT_h$. O fraco desempenho do $FALCON$ pode ser justificado pela impossibilidade de determinarem-se as derivadas analíticas das equações de movimento do UAV, que dependem da interpolação linear dos dados de uma tabela.

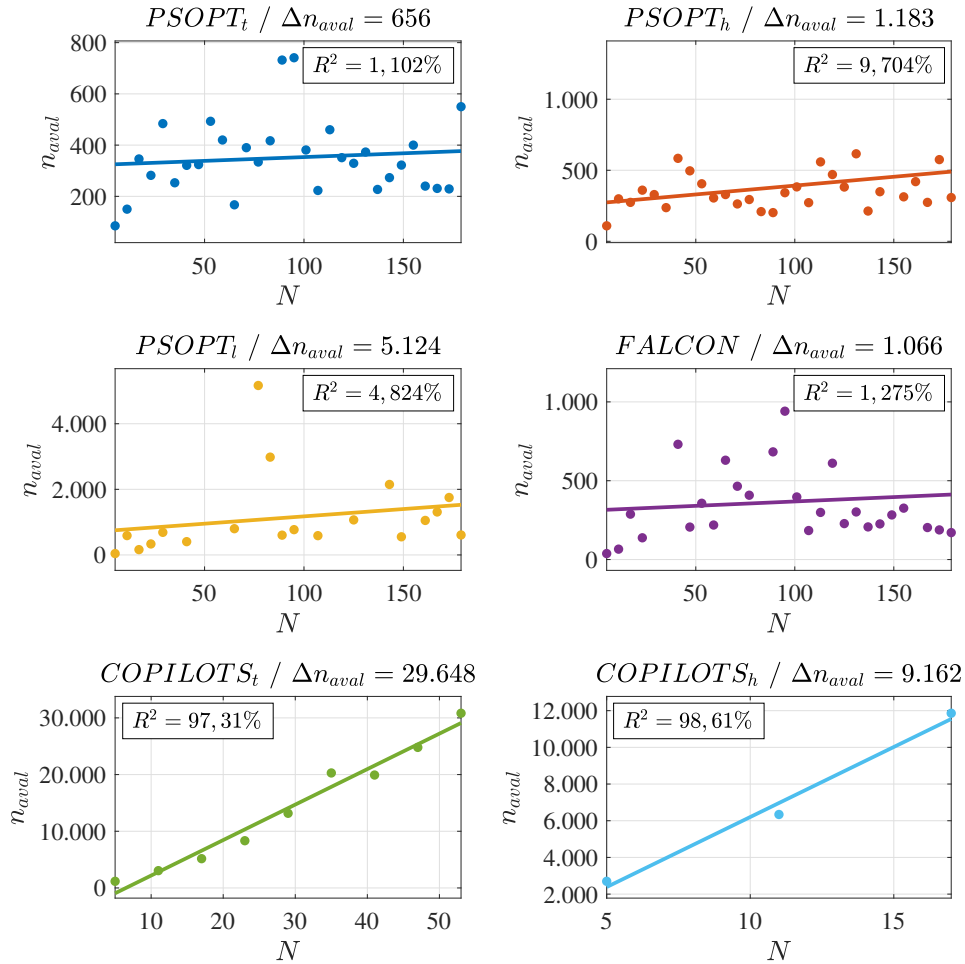


Figura 93 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo n_{aval} e o número de nós de colocação N para o problema da otimização da trajetória de um UAV.

Os valores de Δt_p e de Δn_{aval} referentes ao $PSOPT_l$ são consideravelmente maiores que aqueles atribuídos ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$, o que indica que as métricas associadas a esse pacote são mais sensíveis ao aumento de N . Já o valor de Δn_{aval} associado ao $COPILOTS_t$ é muito maior do que aqueles reportados pelos demais métodos, mesmo que o máximo valor de N seja consideravelmente baixo (igual a 53). De forma análoga, o maior Δt_p encontra-se vinculado ao $COPILOTS_t$.

Por fim, vale ressaltar que não devem-se comparar os valores de Δn_{aval} e de Δt_p associados ao $COPILOTS_h$ com aqueles atribuídos aos demais pacotes, uma vez que somente três soluções distintas foram obtidas por meio do $COPILOTS_h$ e que o máximo N associado a esse pacote é igual a 17. Por exemplo, não seria correto concluir, apenas por meio da análise

do valor de Δt_p , que o t_p associado ao $COPILOTS_h$ é menos sensível ao aumento de N que aquele atribuído ao $PSOPT_l$.

4.6 LANÇAMENTO DO FOGUETE DELTA III

Nesta aplicação considera-se a determinação da trajetória a ser percorrida por um foguete (Delta III) para que o mesmo atinja uma determinada órbita. Para essa finalidade deseja-se maximizar a quantidade de combustível disponível ao fim do voo. Vale ressaltar que quanto menor for a quantidade de combustível necessária para fazer com que o foguete chegue até a órbita alvo, mais propelente poderá ser empregado na rejeição de perturbações (BENSON, 2005).

O Delta III possui dois estágios e nove propulsores de propelente sólido (PPS). A trajetória percorrida pelo mesmo pode ser dividida em quatro fases. Na primeira fase, seis dos nove PPS queimam ao mesmo tempo que o propulsor do primeiro estágio, sendo os PPS descartados assim que o combustível neles armazenado tenha se esgotado. Se inicia então a segunda fase, na qual os três PPS restantes queimam ao mesmo tempo que o propulsor do primeiro estágio. Mais uma vez, os PPS são descartados assim que o combustível neles armazenado se esgota. Tem início a terceira fase, na qual ocorre apenas a queima do propulsor do primeiro estágio. Uma vez que o propelente armazenado nesse estágio chega ao fim, descarta-se o mesmo e dá-se início à quarta e última fase, na qual queima apenas o propulsor do segundo estágio. Ao fim da quarta fase, o Delta III deve ter alcançado a órbita alvo, e a carga útil nele armazenada deve ser liberada.

Nota-se que o problema do lançamento de um foguete é um PCO com múltiplas fases. O processo de discretização de PCOs desse tipo é semelhante ao de PCOs monofásicos, sendo a função objetivo determinada a partir da somatória das funções objetivo associadas a cada fase. Além disso, podem-se estabelecer novas restrições para garantir que não haja descontinuidades nos estados ou controles nos pontos em que as fases se conectam (BECERRA, 2019).

A representação esquemática do problema do lançamento de um foguete é apresentada na Figura 94 (BECERRA; GALVÃO, 2010). Nesta, T é a força de empuxo gerada pela queima dos propulsores, $\mathbf{u}(t)$ é o vetor unitário que indica a direção de T , $\mathbf{r}(t)$ é a posição do foguete em relação ao centro da Terra, e $\mathbf{v}(t)$ sua velocidade. A massa, a área de referência e o coeficiente de arrasto do foguete são denotados, respectivamente, por m , A_{ref} e c_d . O impulso específico associado aos propulsores e o arrasto aerodinâmico são denotados, respectivamente, por I e D . O raio, a taxa de rotação, e o parâmetro gravitacional da Terra são dados por R_e , ω_e e μ , respectivamente. Por fim, g_0 e ρ_0 são a aceleração da gravidade e a densidade do ar atmosférico ao nível do mar.

As equações que caracterizam o movimento do foguete Delta III são formuladas com base no sistema de coordenadas inercial centrado na Terra - do inglês *Earth Centered Inertial* - ECI, conforme ilustrado na Figura 95. No ECI o plano xy coincide com o plano equatorial,

enquanto o eixo z aponta na direção do polo norte. Esse sistema de coordenadas é fixo com relação às estrelas e não acompanha o movimento de rotação da Terra.

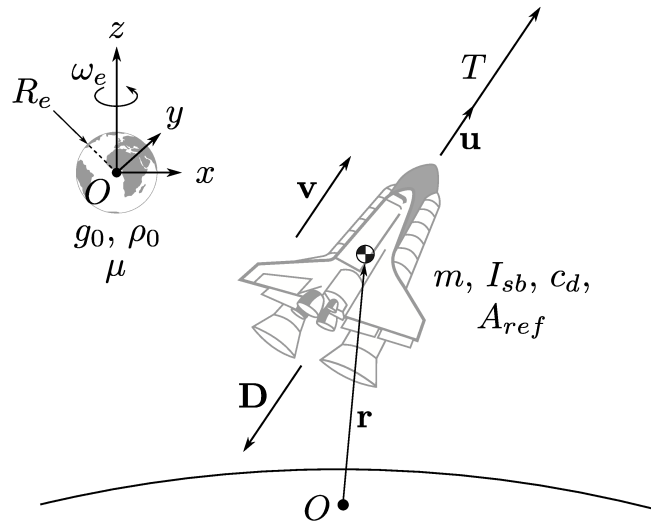


Figura 94 – Representação esquemática do problema do lançamento de um foguete.

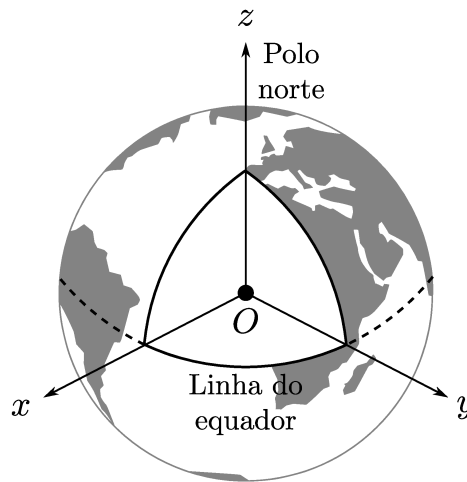


Figura 95 – Sistema de coordenadas inercial centrado na Terra.

Matematicamente, o modelo que representa a dinâmica do foguete Delta III é dado como segue (BECERRA, 2019):

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \quad (4.42a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}(t)|^3} \mathbf{r}(t) + \frac{T(t)}{m(t)} \mathbf{u}(t) + \frac{\mathbf{D}(t)}{m(t)}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (4.42b)$$

$$\dot{m}(t) = dm(t), \quad m(0) = m_0 \quad (4.42c)$$

em que as variáveis de controle do sistema são denotadas por $\mathbf{u}(t) = [u_x(t) \quad u_y(t) \quad u_z(t)]^T$ e as de estado por $\mathbf{x}(t) = [r_x(t) \quad r_y(t) \quad r_z(t) \quad v_x(t) \quad v_y(t) \quad v_z(t) \quad m(t)]^T$.

O arrasto aerodinâmico $\mathbf{D}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{D}(t) = -\frac{1}{2} c_d A_{ref} \rho(t) |\mathbf{v}_{ref}(t)| \mathbf{v}_{ref}(t) \quad (4.43)$$

em que $\mathbf{v}_{ref}(t)$ é a velocidade do foguete em relação à atmosfera. Considerando que o ar atmosférico se move com a Terra, e que $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_e \end{bmatrix}$ tem-se:

$$\mathbf{v}_{ref}(t) = \mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) \quad (4.44)$$

A densidade $\rho(t)$ do ar atmosférico a uma altitude específica ($h(t)$) é dada por:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-h(t)/h_0} \quad (4.45)$$

sendo h_0 um fator de ponderação e a altitude formulada como segue:

$$h(t) = |\mathbf{r}(t)| - R_e \quad (4.46)$$

As equações de movimento valem para qualquer uma das fases do voo, devendo-se levar em conta o empuxo ($T(t)$) e a taxa de variação de massa ($dm(t)$) correspondentes a cada fase, que são definidos como segue:

$$T^{(1)} = 6 T_{sb} + T_{s1} \quad (4.47a)$$

$$T^{(2)} = 3 T_{sb} + T_{s1} \quad (4.47b)$$

$$T^{(3)} = T_{s1} \quad (4.47c)$$

$$T^{(4)} = T_{s2} dm^{(1)} = -6 dm_{sb} - dm_{s1} \quad (4.47d)$$

$$dm^{(2)} = -3 dm_{sb} - dm_{s1} \quad (4.47e)$$

$$dm^{(3)} = -dm_{s1} \quad (4.47f)$$

$$dm^{(4)} = -dm_{s2} \quad (4.47g)$$

em que T_{sb} , T_{s1} e T_{s2} são os empuxos gerados por um dos PPS e pelos propulsores do primeiro e segundo estágios, respectivamente (BECERRA, 2019). De forma análoga, as taxas de variação de massa referentes a cada um dos propulsores do Delta III são denotadas por dm_{sb} , dm_{s1} e dm_{s2} . A cada $T(t)$ e $dm(t)$ é atribuído um sobrescrito que indica o número da fase.

As variações de massa dm_{sb} , dm_{s1} e dm_{s2} são definidas como segue:

$$dm_{sb} = \frac{T_{sb}}{g_0 I_{sb}} \quad (4.48a)$$

$$dm_{s1} = \frac{T_{s1}}{g_0 I_{s1}} \quad (4.48b)$$

$$dm_{s2} = \frac{T_{s2}}{g_0 I_{s2}} \quad (4.48c)$$

sendo I_{sb} , I_{s1} , e I_{s2} definidos a partir da massa de combustível e do tempo de queima de cada propulsor. Por exemplo, no caso dos PPS tem-se:

$$I_{sb} = \frac{1}{g_0} \frac{T_{sb}}{m_{sb}/t_{sb}} \quad (4.49)$$

sendo t_{sb} o tempo de queima de um dos propulsores e m_{sb} a massa do propelente nele armazenado. De forma análoga, considerando-se a massa do combustível armazenado no primeiro e segundo estágios (m_{s1} e m_{s2} respectivamente) e os tempos de queima destes estágios (t_{s1} e t_{s1} , respectivamente), obtém-se I_{s1} e I_{s2} (BECERRA, 2019).

Uma vez que a posição de qualquer ponto P na superfície da Terra pode ser determinada com base na sua latitude, longitude e altitude, como indicado na Figura 96, e considerando que a latitude do local de lançamento (Cabo Canaveral, Flórida) é igual a l_{cc} , o valor r_0 é dado como (BECERRA, 2019):

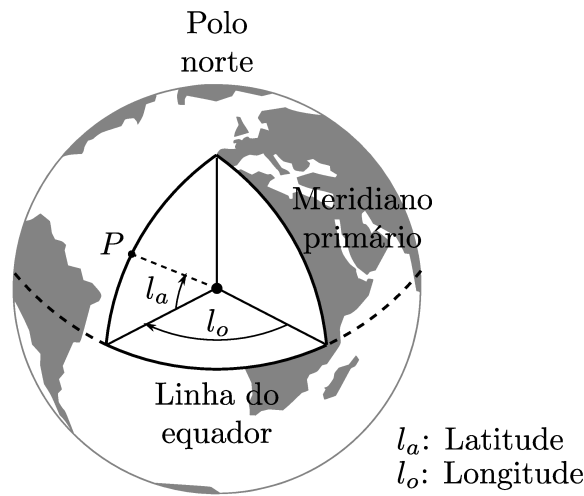


Figura 96 – Posicionamento de um ponto qualquer na superfície terrestre com base em sua latitude e longitude. Nesse caso, considera-se a altitude do ponto P nula.

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \\ r_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e \cos l_{cc} \\ 0 \text{ m} \\ R_e \sin l_{cc} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

A velocidade \mathbf{v}_0 é determinada com base na relação $\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$ (BECERRA, 2019). Assim sendo:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{0y} \omega_e \\ r_{0x} \omega_e \\ 0 \text{ m/s} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Por fim, considerando-se a massa total de um dos PPS (M_{sb}), as massas totais do primeiro e segundo estágios (M_{s1} e M_{s2} , respectivamente), e a massa da carga útil (m_{pl}), determina-se a massa inicial (m_0) do Delta III (BECERRA, 2019):

$$m_0 = 9 M_{sb} + M_{s1} + M_{s2} + m_{pl} \quad (4.52)$$

Conforme apresentado anteriormente, a função objetivo (J) nesta aplicação consiste na maximização da massa de combustível que sobra no fim do voo. Neste caso, pode-se escrever

este funcional na forma de um problema de minimização, definido como:

$$J = -m(t_f^{(4)}) \quad (4.53)$$

sendo $t_f^{(4)}$ o tempo final da última fase. Cabe ressaltar que o sinal negativo é empregado para transformar o problema de maximização em um equivalente de minimização.

As posições e velocidades do foguete Delta III estão sujeitas às seguintes restrições (BECERRA, 2019):

$$0 \leq r_x(t) \leq 2 R_e \quad (4.54a)$$

$$0 \leq r_y(t) \leq 2 R_e \quad (4.54b)$$

$$0 \leq r_z(t) \leq 2 R_e \quad (4.54c)$$

$$-20000 \leq v_x(t) \leq 20000 \quad (4.54d)$$

$$-20000 \leq v_y(t) \leq 20000 \quad (4.54e)$$

$$-20000 \leq v_z(t) \leq 20000 \quad (4.54f)$$

Para que as restrições referentes a $m(t)$ sejam determinadas, calcula-se a massa total do foguete no início e no fim de cada uma das fases. Considerando que o propelente de todos os propulsores queima de forma contínua segue que:

$$m^{(1)}(t_0^{(1)}) = m_0 \quad (4.55a)$$

$$m^{(1)}(t_f^{(1)}) = m^{(1)}(t_0^{(1)}) - \left(6 \frac{m_{sb}}{t_{sb}} + \frac{m_{s1}}{t_{s1}}\right) t_f^{(1)} \quad (4.55b)$$

$$m^{(2)}(t_0^{(2)}) = m^{(1)}(t_f^{(1)}) - 6 (M_{sb} - m_{sb}) \quad (4.55c)$$

$$m^{(2)}(t_f^{(2)}) = m^{(2)}(t_0^{(2)}) - \left(3 \frac{m_{sb}}{t_{sb}} + \frac{m_{s1}}{t_{s1}}\right) (t_f^{(2)} - t_f^{(1)}) \quad (4.55d)$$

$$m^{(3)}(t_0^{(3)}) = m^{(2)}(t_f^{(2)}) - 3 (M_{sb} - m_{sb}) \quad (4.55e)$$

$$m^{(3)}(t_f^{(3)}) = m^{(3)}(t_0^{(3)}) - \left(\frac{m_{s1}}{t_{s1}}\right) (t_f^{(3)} - t_f^{(2)}) \quad (4.55f)$$

$$m^{(4)}(t_0^{(4)}) = m^{(3)}(t_f^{(3)}) - (M_{s1} - m_{s1}) \quad (4.55g)$$

sendo $t_0^{(i)}$ e $t_f^{(i)}$ os tempos inicial e final da i -ésima fase.

Assim sendo, a massa do Delta III está sujeita às seguintes restrições (BECERRA, 2019):

$$m^{(1)}(t_0^{(1)}) \leq m^{(1)}(t) \leq m^{(1)}(t_f^{(1)}) \quad (4.56a)$$

$$m^{(2)}(t_0^{(2)}) \leq m^{(2)}(t) \leq m^{(2)}(t_f^{(2)}) \quad (4.56b)$$

$$m^{(3)}(t_0^{(3)}) \leq m^{(3)}(t) \leq m^{(3)}(t_f^{(3)}) \quad (4.56c)$$

$$m^{(4)}(t_0^{(4)}) \leq m^{(4)}(t) \leq m^{(4)}(t_f^{(4)}) \quad (4.56d)$$

Os tempos inicial e final de cada fase se dão em função do tempo de queima de cada propulsor:

$$t_0^{(1)} = 0 \quad (4.57a)$$

$$t_f^{(1)} = t_0^{(2)} = t_{sb} \quad (4.57b)$$

$$t_f^{(2)} = t_0^{(3)} = 2t_{sb} \quad (4.57c)$$

$$t_f^{(3)} = t_0^{(4)} = t_{s1} \quad (4.57d)$$

Vale ressaltar que os valores de $t_f^{(4)}$ e $m^{(4)}(t_f^{(4)})$ são determinados via resolução do PCO.

A órbita alvo é especificada por meio dos elementos orbitais:

$$a(t_f^{(4)}) = a_f \quad (4.58a)$$

$$e(t_f^{(4)}) = e_f \quad (4.58b)$$

$$i(t_f^{(4)}) = i_f \quad (4.58c)$$

$$\Omega(t_f^{(4)}) = \Omega_f \quad (4.58d)$$

$$\omega(t_f^{(4)}) = \omega_f \quad (4.58e)$$

sendo $a(t)$ o semi-eixo maior, $e(t)$ a excentricidade, $i(t)$ a inclinação, $\Omega(t)$ a longitude do nó ascendente, e $\omega(t)$ o argumento do periapsis. Essas grandezas podem ser determinadas a partir de $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ com base nas equações introduzidas no Apêndice B. Na Figura 97 são apresentados alguns dos elementos orbitais. Uma vez que não há restrição ao valor da anomalia verdadeira $\nu(t)$, não há uma posição específica na órbita que o foguete deve atingir. As coordenadas $a(t)$ e $e(t)$ não foram representadas na Figura 97 pois denotam a excentricidade e o semi-eixo maior da elipse associada à órbita na qual o foguete se encontra.

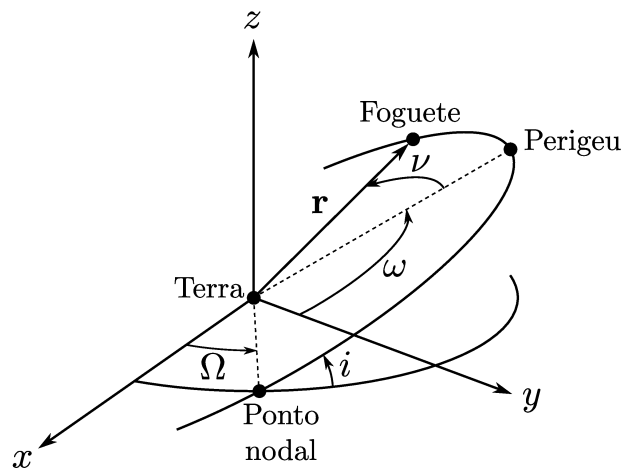


Figura 97 – Representação dos elementos orbitais.

O vetor de variáveis de controle $\mathbf{u}(t)$ está sujeito à seguinte restrição:

$$|\mathbf{u}(t)| = 1 \quad (4.59)$$

Para garantir que as trajetórias obtidas não transpassem a Terra é necessário que se imponha a seguinte restrição à posição do foguete:

$$|\mathbf{r}(t)| \geq R_e \quad (4.60)$$

Finalmente, é necessário garantir que não existam descontinuidades nas posições e velocidades do foguete que, portanto, devem estar sujeitas às seguintes restrições:

$$\mathbf{r}^{(2)}(t_0^{(2)}) = \mathbf{r}^{(1)}(t_f^{(1)}) \quad (4.61a)$$

$$\mathbf{r}^{(3)}(t_0^{(3)}) = \mathbf{r}^{(2)}(t_f^{(2)}) \quad (4.61b)$$

$$\mathbf{r}^{(4)}(t_0^{(4)}) = \mathbf{r}^{(3)}(t_f^{(3)}) \quad (4.61c)$$

$$\mathbf{v}^{(2)}(t_0^{(2)}) = \mathbf{v}^{(1)}(t_f^{(1)}) \quad (4.61d)$$

$$\mathbf{v}^{(3)}(t_0^{(3)}) = \mathbf{v}^{(2)}(t_f^{(2)}) \quad (4.61e)$$

$$\mathbf{v}^{(4)}(t_0^{(4)}) = \mathbf{v}^{(3)}(t_f^{(3)}) \quad (4.61f)$$

Ao passo que para que as variações de massa ocasionadas pelo descarte dos PPS e do primeiro estágio sejam consideradas, devem ser impostas à massa do foguete as seguintes restrições:

$$m^{(2)}(t_0^{(2)}) = m^{(1)}(t_f^{(1)}) - \Delta m^{(1)} \quad (4.62a)$$

$$m^{(3)}(t_0^{(3)}) = m^{(2)}(t_f^{(2)}) - \Delta m^{(2)} \quad (4.62b)$$

$$m^{(4)}(t_0^{(4)}) = m^{(3)}(t_f^{(3)}) - \Delta m^{(3)} \quad (4.62c)$$

sendo $\Delta m^{(1)}$, $\Delta m^{(2)}$ e $\Delta m^{(3)}$ as massas descartadas em cada uma das fases, determinadas da seguinte forma:

$$\Delta m^{(1)} = 6(M_{sb} - m_{sb}) \quad (4.63a)$$

$$\Delta m^{(2)} = 3(M_{sb} - m_{sb}) \quad (4.63b)$$

$$\Delta m^{(3)} = M_{s1} - m_{s1} \quad (4.63c)$$

Já as estimativas iniciais associadas à posição do foguete Delta III são dadas por:

$$\mathbf{r}_p^{(1)}(t) = \mathbf{r}_0 \quad (4.64a)$$

$$\mathbf{r}_p^{(2)}(t) = \mathbf{r}_0 \quad (4.64b)$$

$$\mathbf{r}_p^{(3)}(t) = \mathbf{r}_f \quad (4.64c)$$

$$\mathbf{r}_p^{(4)}(t) = \mathbf{r}_f \quad (4.64d)$$

enquanto aquelas associadas à velocidade, definidas como:

$$\mathbf{v}_p^{(1)}(t) = \mathbf{v}_0 \quad (4.65a)$$

$$\mathbf{v}_p^{(2)}(t) = \mathbf{v}_0 \quad (4.65b)$$

$$\mathbf{v}_p^{(3)}(t) = \mathbf{v}_f \quad (4.65c)$$

$$\mathbf{v}_p^{(4)}(t) = \mathbf{v}_f \quad (4.65d)$$

sendo $\mathbf{r}_f = [r_{fx} \ r_{fy} \ r_{fz}]$ e $\mathbf{v}_f = [v_{fx} \ v_{fy} \ v_{fz}]$ posições e velocidades que atendam às condições terminais. Uma vez que o Delta III deve alcançar uma órbita pré-determinada, e não uma posição específica, há várias combinações de $\mathbf{r}(t_f)$ e $\mathbf{v}(t_f)$ que satisfazem as condições terminais. A combinação aqui adotada é obtida considerando-se $\nu = 0$ (BECERRA, 2019).

As estimativas iniciais atribuídas às variáveis de controle são dadas por:

$$\mathbf{u}_p^{(1)}(t) = \mathbf{u}_0 \quad (4.66a)$$

$$\mathbf{u}_p^{(2)}(t) = \mathbf{u}_0 \quad (4.66b)$$

$$\mathbf{u}_p^{(3)}(t) = \mathbf{u}_f \quad (4.66c)$$

$$\mathbf{u}_p^{(4)}(t) = \mathbf{u}_f \quad (4.66d)$$

sendo $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0 \ 0]$ e $\mathbf{u}_f = [0 \ 0 \ 1]$, conforme sugerido em Becerra (2019).

Finalmente, as estimativas iniciais associadas à massa do foguete Delta III são definidas como:

$$m_p^{(1)}(t) = m^{(1)}(t_0^{(1)}) \quad (4.67a)$$

$$m_p^{(2)}(t) = m^{(2)}(t_0^{(2)}) \quad (4.67b)$$

$$m_p^{(3)}(t) = m^{(3)}(t_0^{(3)}) \quad (4.67c)$$

$$m_p^{(4)}(t) = m^{(4)}(t_0^{(4)}) \quad (4.67d)$$

Os parâmetros empregados nesse estudo de caso são apresentados no Apêndice A.

Vale ressaltar que algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas na formulação deste estudo de caso. Primeiramente, é atribuído a cada motor o empuxo produzido no vácuo, sem que seja considerada qualquer influência da pressão atmosférica. Além disso, supõe-se que a área de referência e o coeficiente de arrasto (A_{ref} e c_d , respectivamente) não dependem do ângulo de ataque do foguete ou do seu número de Mach, e que o arrasto atua sempre na direção da velocidade, sem que existam forças de sustentação. Finalmente, para que a altitude ($h(t)$) do foguete Delta III, assim como sua posição inicial (\mathbf{r}_0) sejam determinadas, e para que o modelo gravitacional de massa pontual seja satisfeito, assume-se que a Terra é esférica (BENSON, 2005).

Na Figura 98 são apresentados os resultados obtidos considerando a influência do número de nós de colocação (N) de cada fase, e o número de nós de colocação mínimo (N_m). Além

disso, cabe ressaltar que no *PSOPT* foram utilizadas as seguintes discretizações: pseudo-espectral ($PSOPT_l$), trapezoidal ($PSOPT_t$) e Hermite-Simpson ($PSOPT_h$). Nota-se que são apresentados apenas os resultados obtidos por meio do *PSOPT*, uma vez que o *COPILOTS* não possui suporte para resolução de PCOs multifásicos, e que não foi possível resolver o problema do lançamento de um foguete utilizando o *FALCON*, que não convergiu para uma solução.

Para realizar esta análise foi considerado um vetor com trinta valores distintos e igualmente espaçados para N , sendo que os limites inferior e superior adotados foram 5 e 34, respectivamente. Neste cenário, objetiva-se avaliar a influência do número de nós de colocação N no valor de J^* . O valor da função objetivo reportado por [Becerra e Galvão \(2010\)](#) para este problema é de -7529,7 quilogramas.

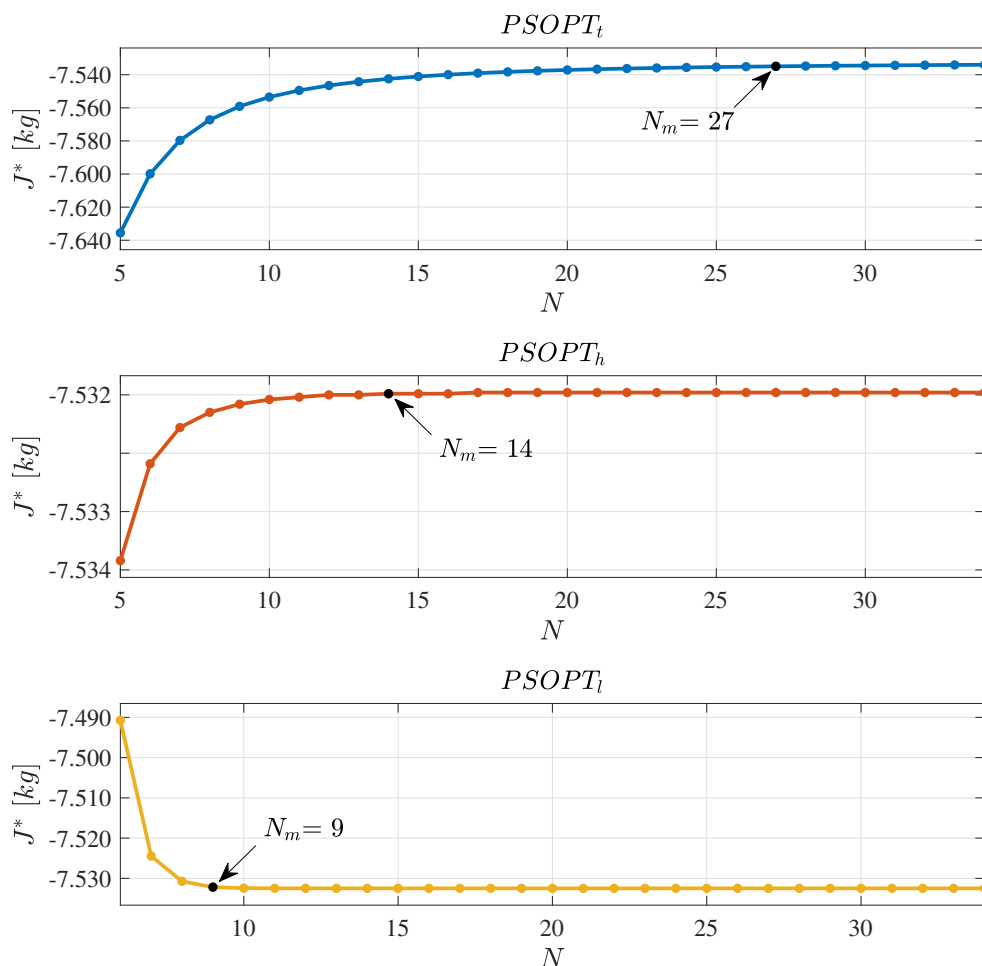


Figura 98 – Influência do número de nós de colocação N no valor da função objetivo J^* para o problema do lançamento de um foguete.

Nesta figura pode-se observar que os valores de J^* convergiram com o aumento de N . Para o $PSOPT_t$ e o $PSOPT_h$, os valores de J^* cresceram com o aumento de N , enquanto que para o $PSOPT_l$ verificou-se o comportamento oposto. Para os dois primeiros gráficos, esta deterioração no valor de J^* provavelmente está relacionada com a baixa precisão ao se usar

menores valores para N . Assim, com o aumento de N o J^* associado ao pacote se estabiliza em torno do melhor valor reportado por [Becerra e Galvão \(2010\)](#).

Os resultados obtidos para esta aplicação são apresentados na Tabela 8 considerando $N = N_m$. Nesta, t_p é o tempo de processamento médio, s_t é o desvio padrão atribuído a t_p , n_{aval} é o número de avaliações da função objetivo, Δc_{max} é a máxima violação atribuída às restrições, N_s é o número de execuções bem sucedidas, e $N_s\%$ é a relação entre N_s e o número total de execuções. Verifica-se que o menor valor de N_m foi encontrado pelo $PSOPT_l$ e o maior pelo $PSOPT_t$. Além disso, ressalta-se que o menor valor de n_{aval} foi encontrado pelo $PSOPT_t$.

Tabela 8 – Métricas obtidas para o problema do lançamento de um foguete. Os melhores N_m , J^* , t_p , n_{aval} e $N_s\%$ se encontram destacados.

Método	N_m	J^*	t_p [s]	s_t [s]	n_{aval}	Δc_{max}	N_s	$N_s\%$
$PSOPT_t$	27	-7534,94000	4,82663	0,14216	331	1,35e-08	30	100,00%
$PSOPT_h$	14	-7532,49000	2,34095	0,12260	364	1,35e-08	30	100,00%
$PSOPT_l$	9	-7532,18000	1,88649	0,14480	475	2,55e-10	29	96,67%
<i>FALCON</i>	-	-	-	-	-	-	-	-
$COPILOTS_t$	-	-	-	-	-	-	-	-
$COPILOTS_h$	-	-	-	-	-	-	-	-

Observa-se com o aumento dos tempos de processamento a redução dos respectivos valores de n_{aval} . Esse resultado indica uma relação direta entre N_m e o tempo de processamento, de forma que este cresce com o aumento de N_m . Em contrapartida, apesar de existir uma relação entre N_m e os valores de n_{aval} , nota-se que este último depende mais do tipo de colocação empregado do que de N_m . De fato, os valores de n_{aval} associados à colocação trapezoidal tendem a ser menores que os atribuídos à colocação Hermite-Simpson, que faz uso de nós de colocação intermediários para determinação das variáveis de controle. Finalmente, vale ressaltar que, empregando qualquer um dos métodos, é possível obter um alto $N_s\%$, igual ou consideravelmente próximo a 100%.

Os perfis da altitude h , da massa m , e da velocidade absoluta v , obtidas considerando $N = N_m$ são apresentadas nas Figuras 99-101, enquanto as trajetórias referentes aos controles $u_x(t)$, $u_y(t)$ e $u_z(t)$ são apresentadas nas Figuras 102-104. A partir destes resultados constata-se que as trajetórias obtidas por cada um dos pacotes avaliados se mostraram similares entre si e condizentes com aquelas reportadas por [Becerra e Galvão \(2010\)](#).

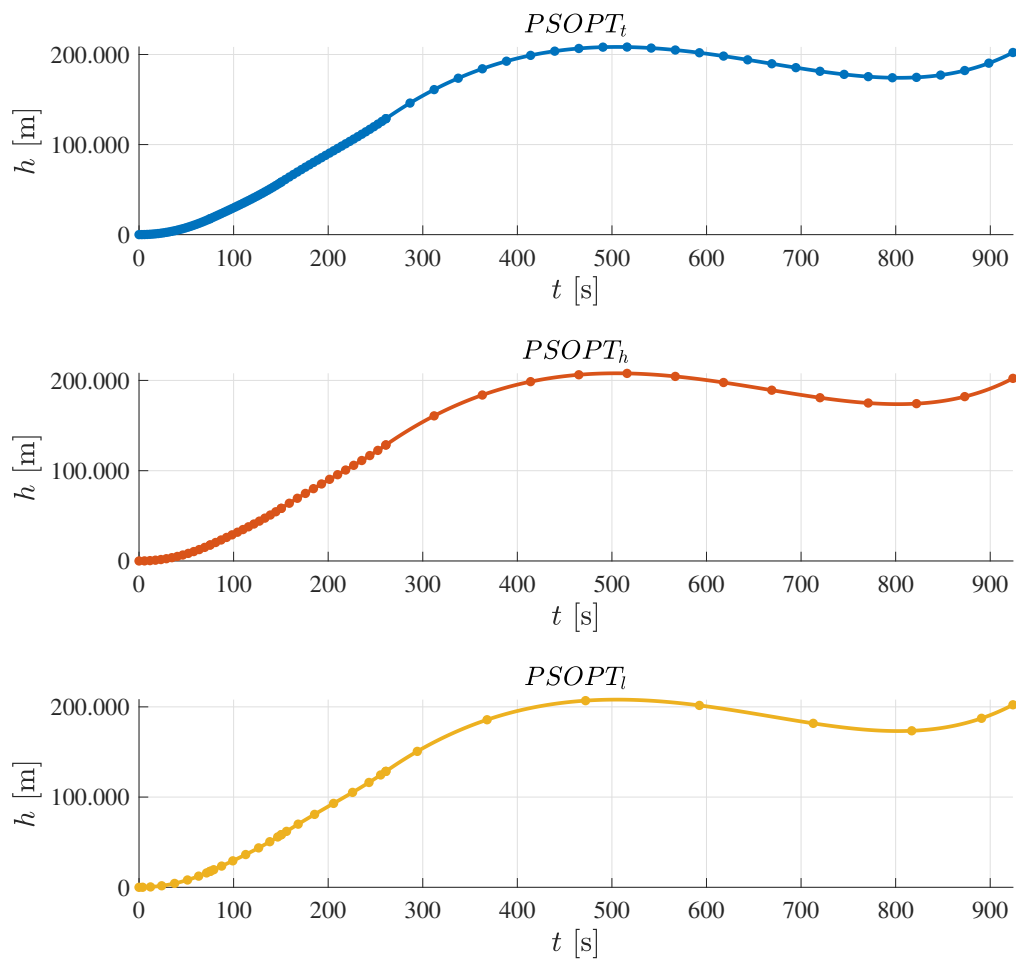


Figura 99 – Perfil da altitude ($h(t)$) para o problema do lançamento de um foguete. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

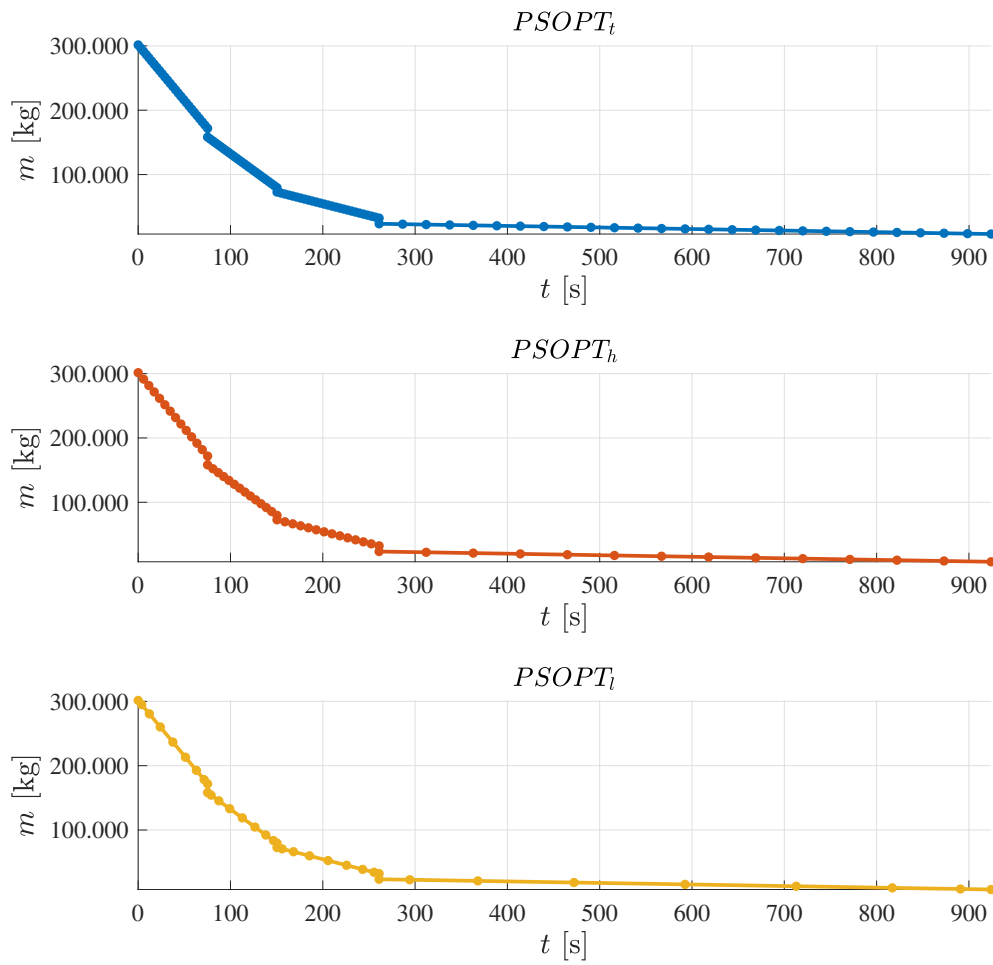


Figura 100 – Perfil do estado $m(t)$ para o problema do lançamento de um foguete. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

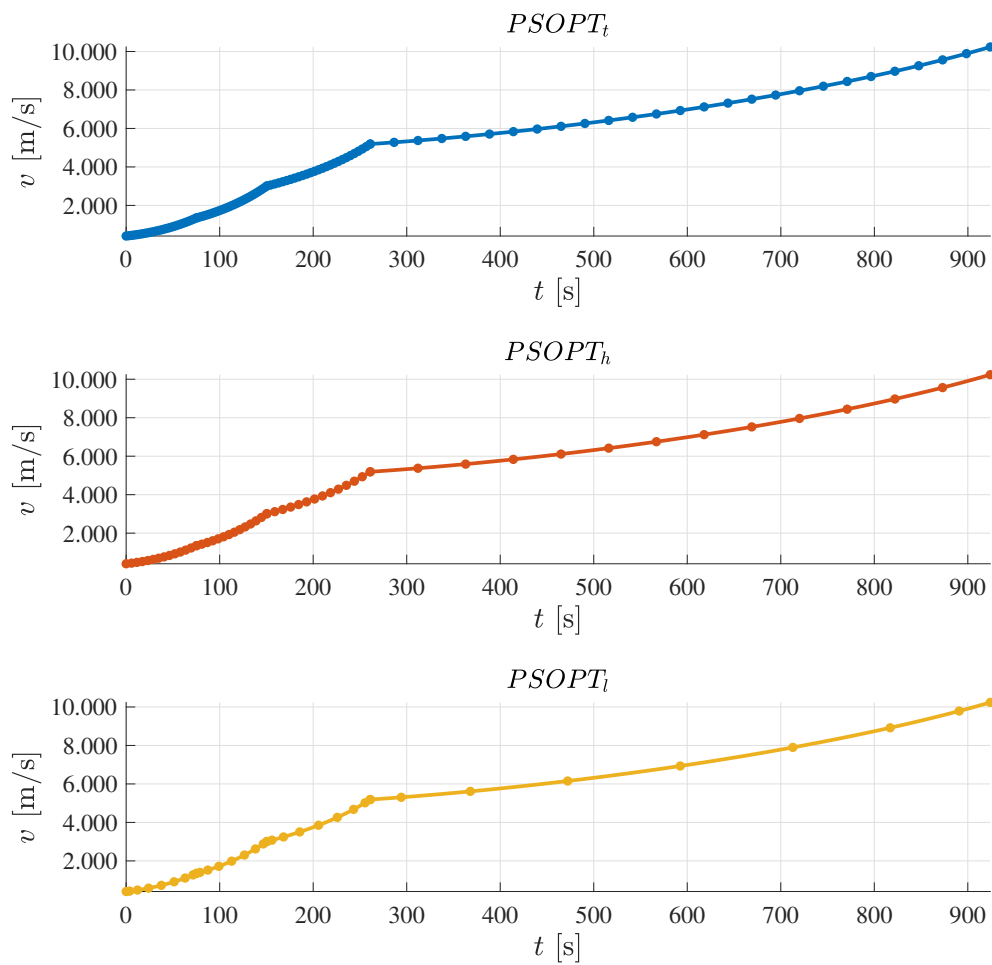


Figura 101 – Perfil da velocidade absoluta ($v(t)$) para o problema do lançamento de um foguete. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

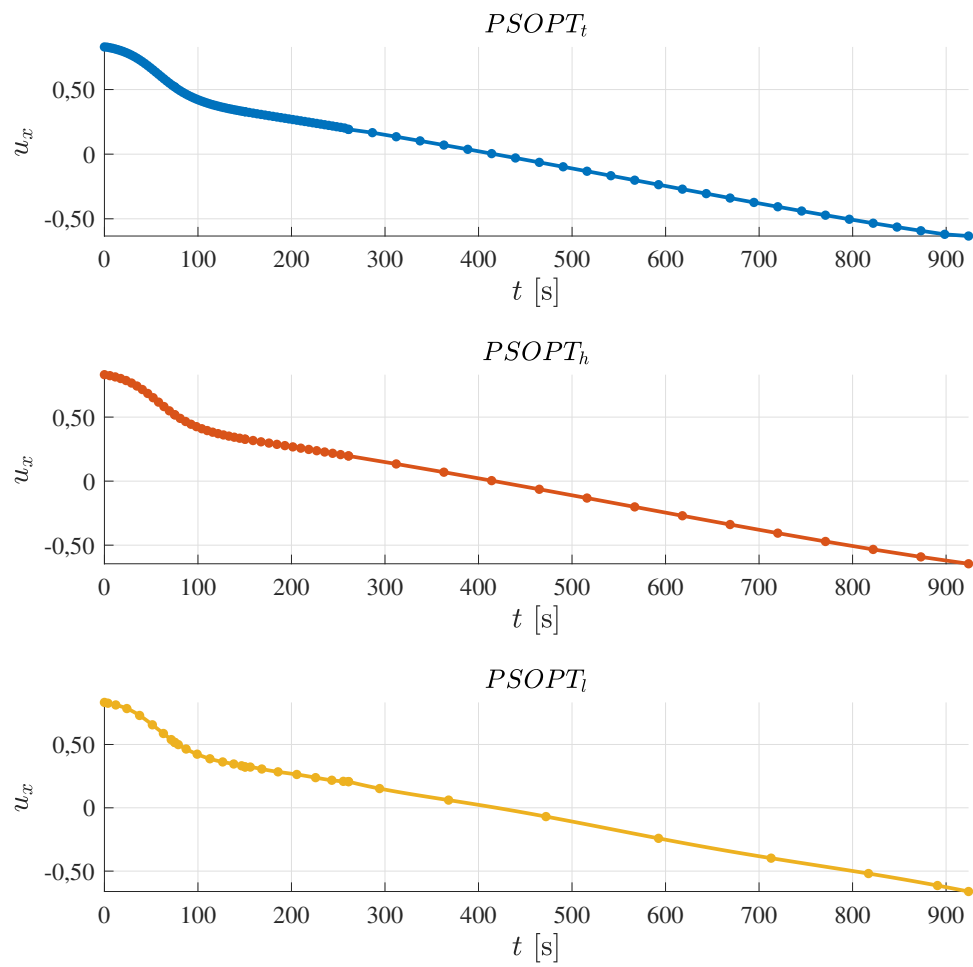


Figura 102 – Variável de controle $u_x(t)$ para o problema do lançamento de um foguete. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

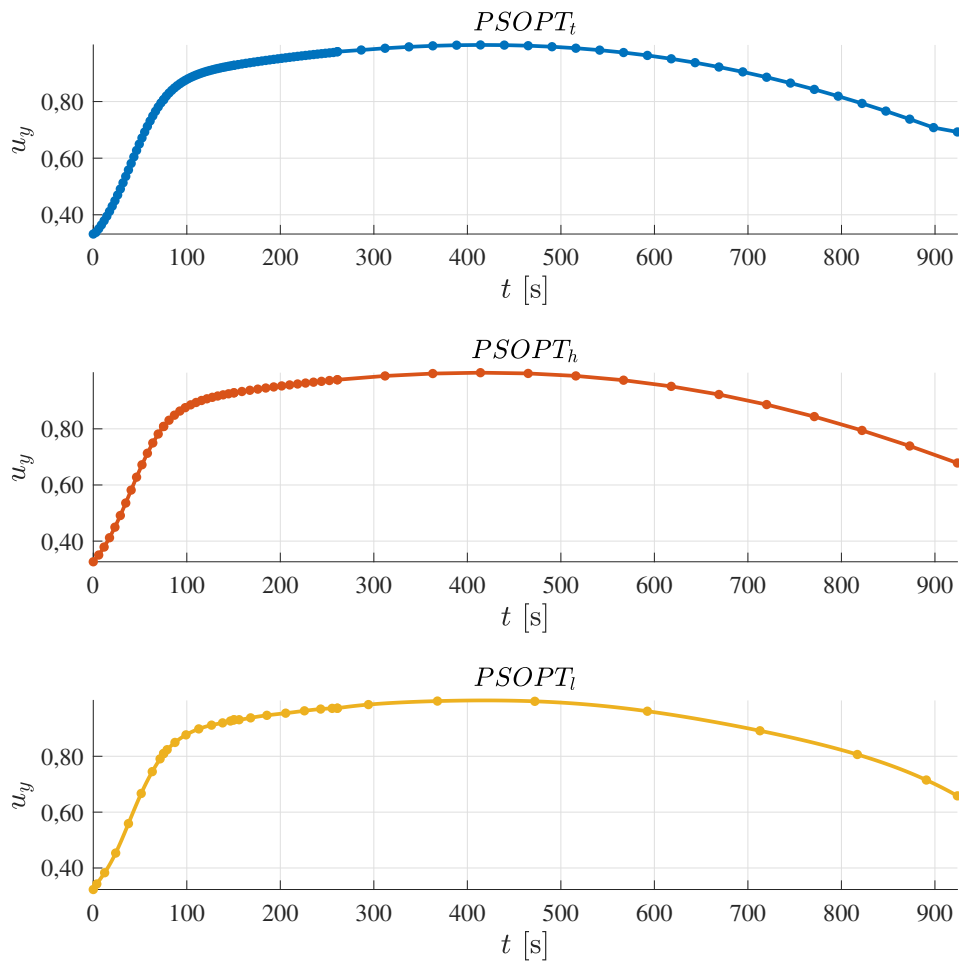


Figura 103 – Variável de controle $u_y(t)$ para o problema do lançamento de um foguete. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

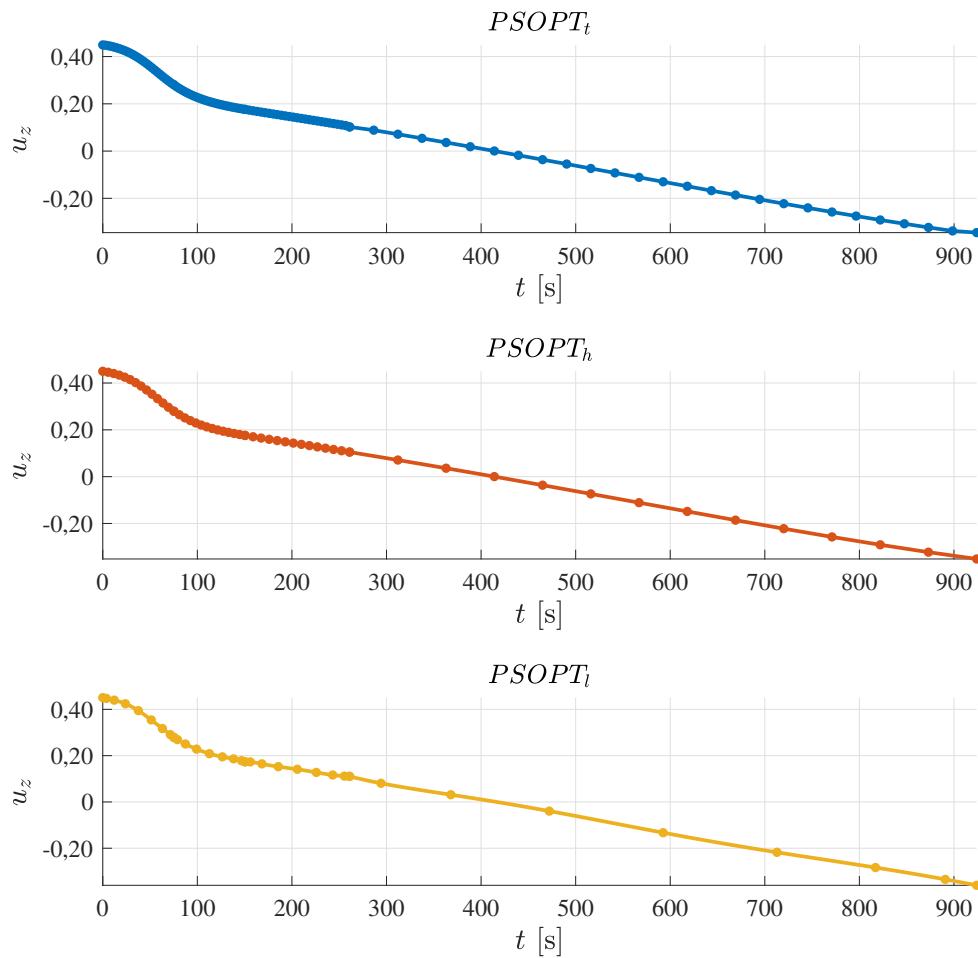


Figura 104 – Variável de controle $u_z(t)$ para o problema do lançamento de um foguete. Os pontos em cada um dos gráficos representam os valores discretizados, enquanto as linhas contínuas representam as trajetórias interpoladas.

De modo geral, observa-se que as trajetórias referentes à altitude e à velocidade absoluta, diretamente relacionadas a $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, são de fato contínuas, o que indica o atendimento das restrições definidas nas Equações (4.61a)-(4.61f). Em contrapartida, são claras as descontinuidades presentes nas trajetórias de massa em $t = 75,2$ s, $t = 150,4$ s e $t = 261$ s, ocasionadas pelo descarte de propulsores ou estágios cujo combustível já tenha se esgotado.

Na Figura 105 está representada a trajetória (latitude e longitude) percorrida pelo foguete considerando o sistema de coordenadas descrito na Figura 96. Esta está fundamentada nos resultados obtidos pelo $PSOPT_t$, que encontrou o menor J^* . A determinação dos pontos no gráfico depende dos valores de $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ nos nós de colocação, enquanto a linha contínua que conecta estes pontos representa a trajetória interpolada com base nestes valores. Vale ressaltar que o método no qual se baseia esta interpolação depende do tipo de colocação empregado.

Uma vez que o sistema de coordenadas (baseado na latitude e na longitude) move-se juntamente com a Terra, é necessário que uma data e um horário sejam especificados para que a conversão $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) \rightarrow (\text{latitude}, \text{longitude})$ seja realizada via Matlab[®] pela função

`eci211a()` (MATHWORKS, 2020b). Nesse caso considera-se que o foguete é lançado no dia 26 de agosto de 1998 (data do lançamento do primeiro Delta III) às 7:05 AM.

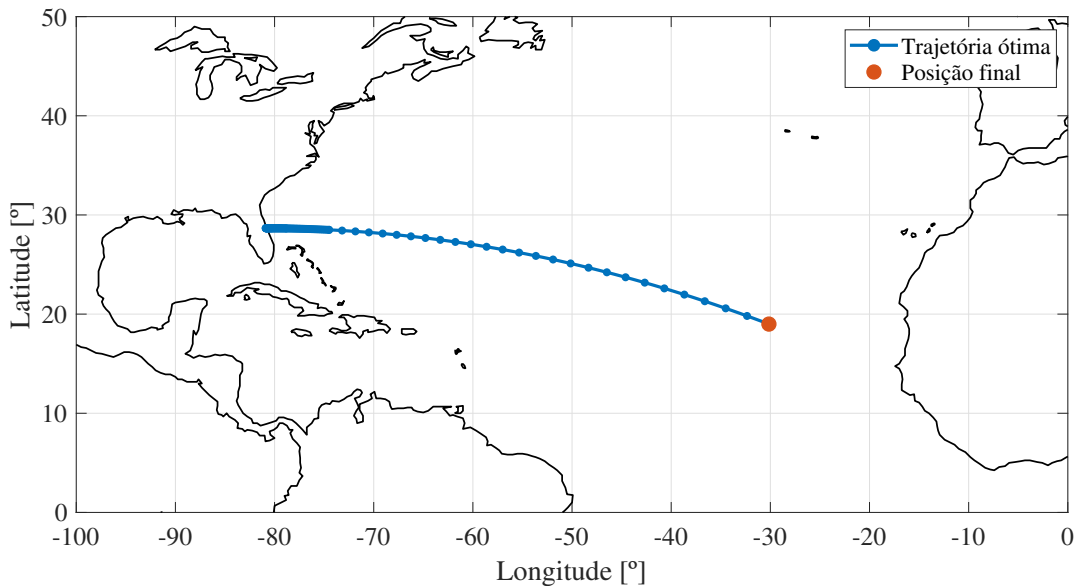


Figura 105 – Trajetória percorrida pelo Delta III.

Para avaliar a influência do número de nós de colocação no tempo de processamento e no número de avaliações da função objetivo são apresentadas as Figuras 106 e 107. Nestes gráficos são introduzidas as variações: $\Delta t_p = \max\{t_p\} - \min\{t_p\}$ e $\Delta n_{aval} = \max\{n_{aval}\} - \min\{n_{aval}\}$. Os pontos nos gráficos representam os valores atribuídos a t_p (e a n_{aval}) para cada um dos N considerados, enquanto as linhas contínuas representam curvas de tendência, obtidas por meio de regressões lineares, em que R^2 é o coeficiente de determinação. Os valores de N empregados na geração desses resultados são iguais àqueles considerados na computação da relação entre J^* e N .

De modo geral, os valores de t_p e n_{aval} associados ao $PSOPT_t$ foram menos sensíveis ao aumento de N que os atribuídos aos demais métodos, observados os respectivos valores de Δt_p e Δn_{aval} . Tal resultado se deve às propriedades numéricas inerentes à colocação trapezoidal. Verifica-se uma relação quase linear entre N e os tempos de processamento encontrados pelo $PSOPT_t$ e pelo $PSOPT_l$, dados os respectivos R^2 , bem próximos a 100%. No caso do $PSOPT_h$, não foi possível verificar tal relação, uma vez que o t_p associado a esse método apresenta picos para $N > 25$. Além disso, também não foi possível estabelecer uma relação linear entre o número de nós de colocação e o número de avaliações da função objetivo associados a nenhum dos métodos, dados os respectivos R^2 , que são consideravelmente baixos. A dificuldade em estabelecer uma relação linear entre N e n_{aval} , nesse caso, se deve ao aparecimento de picos nos valores de n_{aval} , que provavelmente estão relacionados ao método empregado na inicialização dos estados e controles. Vale ressaltar que a posição e velocidade finais \mathbf{r}_f e \mathbf{v}_f , utilizadas na inicialização das variáveis de estado das últimas duas fases, foram obtidas considerando-se

$\nu = 0$. No entanto, essa não é a anomalia verdadeira atribuída à solução obtida. Além disso, é possível que assumir uma estimativa inicial em que os estados e controles se mantenham constantes ao longo de cada fase não seja a melhor abordagem.

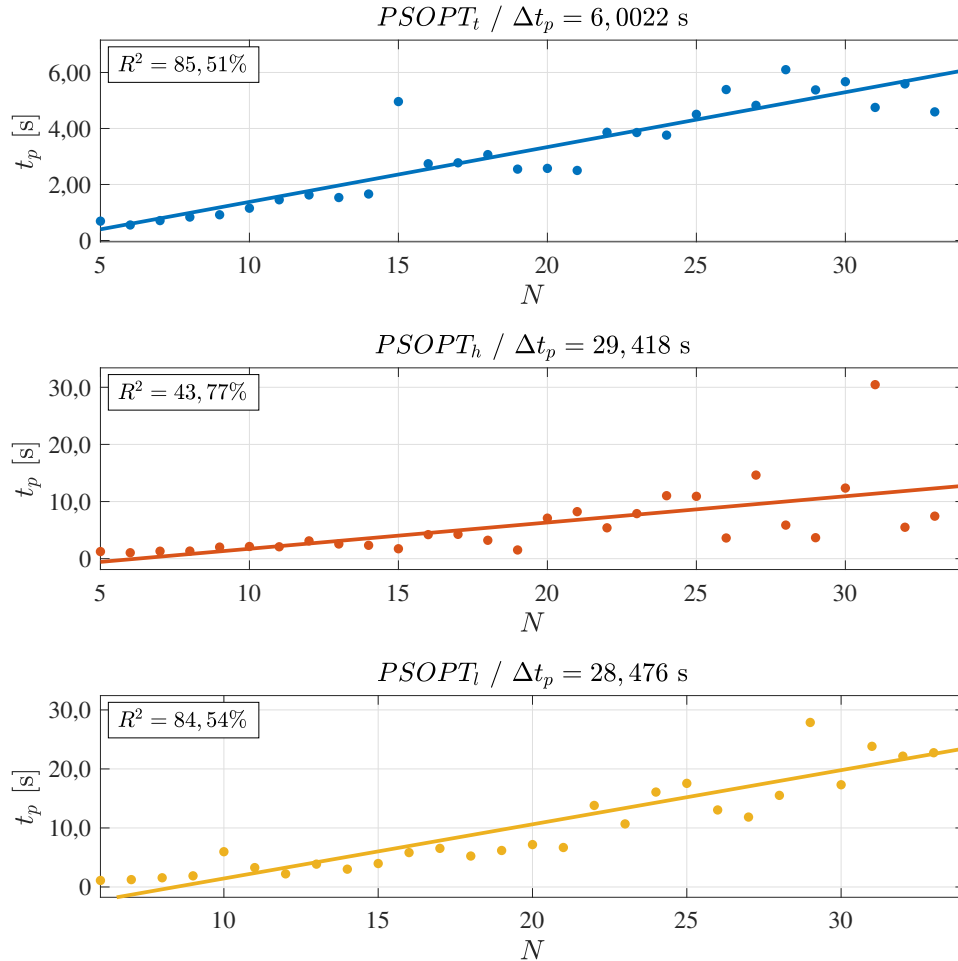


Figura 106 – Relação entre o tempo de processamento t_p e o número de nós de colocação N para o problema do lançamento de um foguete.

Nota-se que os valores de n_{aval} associados ao $PSOPT_h$ são mais sensíveis ao aumento de N que os atribuídos aos demais métodos, o que pode ser verificado pela análise do valor de Δn_{aval} . Tal comportamento se deve às propriedades numéricas inerentes à colocação Hermite-Simpson, que depende do estabelecimento de nós de colocação intermediários para a determinação dos controles, o que aumenta consideravelmente o número de variáveis de projeto do PPNL. Por fim, destaca-se que, como esperado, picos no número de avaliações da função objetivo ocasionam picos nos tempos de processamento. Tal relação entre os picos pode ser verificada em $N = 15$, no caso do $PSOPT_t$, em $N = 31$ no caso do $PSOPT_h$, e em $N = 29$ no caso do $PSOPT_l$. De fato, uma vez que leva-se um determinado tempo para que a avaliação da função objetivo seja realizada, o aumento de n_{aval} é um dos fatores associados ao crescimento de t_p .

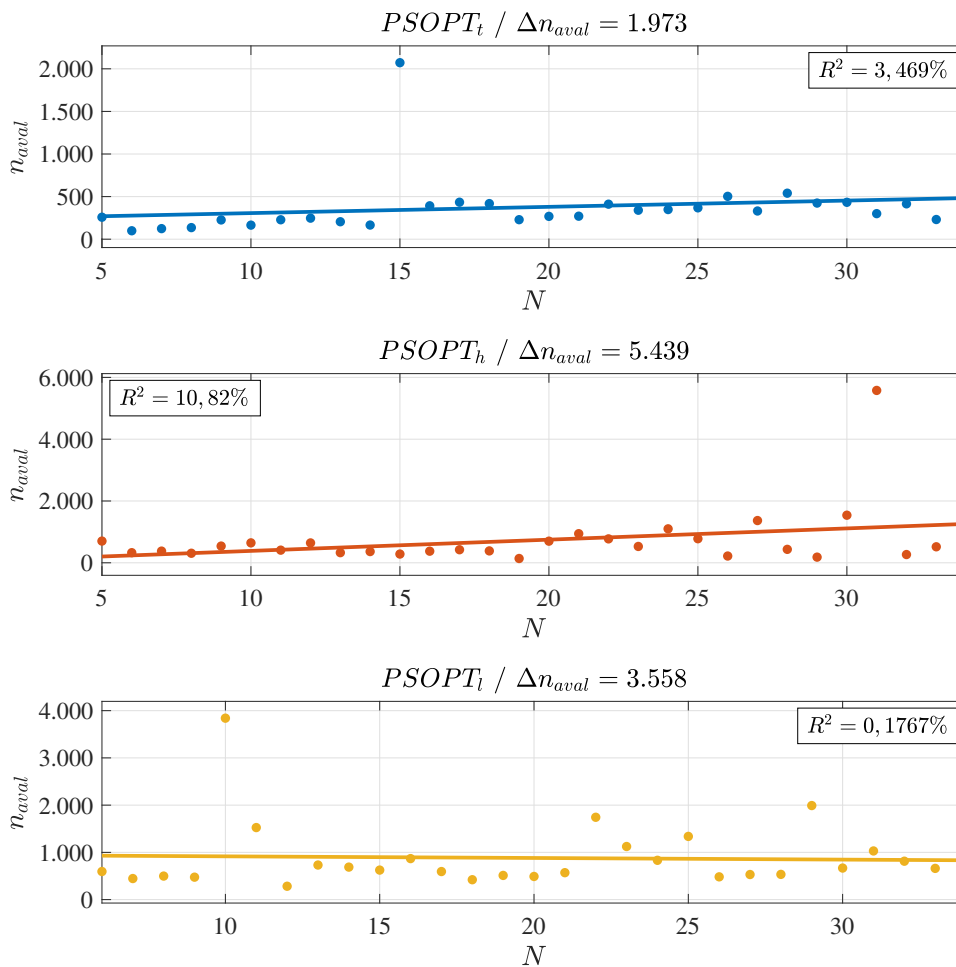


Figura 107 – Relação entre o número de avaliações da função objetivo n_{aval} e o número de nós de colocação N para o problema do lançamento de um foguete.

4.7 CONSOLIDAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Esta seção apresenta um consolidado de todos resultados obtidos, bem como uma avaliação geral dos pacotes analisados, na qual são ressaltados os pontos positivos e negativos de cada um. Por fim, é apresentada uma metodologia que possibilita a suavização das trajetórias de controle associadas a um estudo de caso qualquer.

4.7.1 SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS

A Tabela 9 apresenta o consolidado dos melhores resultados obtidos por cada um dos pacotes, considerando $N = N_m$, para cada um dos estudos de caso avaliados. Nesta tabela observa-se que todos os pacotes analisados foram, na maioria das vezes, capazes de encontrar boas aproximações para a solução dos problemas em análise, exceto para o problema do lançamento de um foguete, onde apenas as três configurações avaliadas do pacote $PSOPT$ foram capazes de resolver este estudo de caso. Todavia, ressalta-se que as configurações do

$PSOPT_t$ e do $PSOPT_h$ não foram capazes de obter uma boa estimativa do valor da função objetivo para o problema do estacionamento. Este resultado ressalta a importância de estudos que visam a análise destes pacotes, de forma a auxiliar o usuário na escolha da melhor opção para uma dada finalidade.

Tabela 9 – Valores de função objetivo encontrados por cada método.

Métodos	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
PSOPT_t	28,09170	0,2685	0,7566	58,939	8,414	75,1640	-7534,9
PSOPT_h	28,00000	0,2684	0,7539	58,805	9,573	75,2230	-7532,5
PSOPT_l	28,00000	0,2685	0,7540	60,167	7,535	75,2428	-7532,2
FALCON	28,09167	0,2685	0,7572	58,949	7,581	75,1491	- ‡
COPILOTS_t	28,09167	0,2685	0,7572	58,949	7,540	75,1491	- ‡
COPILOTS_h	28,00000	0,2675	0,7540	58,805	7,525	75,1425	- ‡
Referência	28,00000	0,2771	0,8285	- †	7,521	- †	-7529,7

P1 - Problema da desaceleração de um bloco

P2 - Problema singular 1

P3 - Problema singular 2

P4 - Problema do pêndulo invertido

P5 - Problema do estacionamento

P6 - Problema da otimização da trajetória de um UAV

P7 - Problema do lançamento de um foguete

† - Informação não fornecida

‡ - Método não convergiu para uma solução

A partir dos resultados obtidos e apresentados no decorrer desse capítulo, foi possível observar que nem sempre verifica-se uma relação direta entre os valores de t_p e de n_{aval} . Neste caso, valores de t_p mais baixos podem estar associados aos valores de n_{aval} mais altos, por mais que isso pareça ser contraintuitivo. Esse comportamento pode ser verificado quando avaliam-se os resultados apresentados nas Tabelas 2-8, principalmente aqueles associados ao $PSOPT$. De fato, o aumento de n_{aval} promove o crescimento de t_p , no entanto, verifica-se que t_p é mais sensível ao aumento de N do que ao valor de n_{aval} .

Além disso, sabe-se que o valor de n_{aval} depende fortemente do tipo de colocação utilizado, conforme discutido em Kelly (2017). Diante disso, é possível que um alto valor de N possa estar associado a um baixo valor de n_{aval} , ou vice-versa, como ocorre nas Tabelas 4, 5, 7 e 8. Esses resultados indicam que é preciso cautela na comparação de métodos baseados em diferentes tipos de colocação.

Quando comparam-se os resultados obtidos considerando o $PSOPT_t$, o $PSOPT_h$ e o $PSOPT_l$, verifica-se que são comumente atribuídos à versão pseudo-espectral, os menores valores de N_m em comparação com aqueles associados aos demais métodos. São exceções os estudos de caso apresentados na Seção 4.1, uma vez que o $PSOPT$ não apresentou um bom desempenho na resolução de problemas singulares, e na Seção 4.5, considerando-se que, nesse caso, foi necessário aumentar drasticamente o valor de N_m relacionado ao $PSOPT_l$ devido ao aparecimento de um distúrbio numérico em uma das variáveis de controle.

Tais observações podem ser verificadas ao se analisar a Figura 108. Para essa finalidade, foram atribuídos pontos a cada um dos métodos em análise com base nos valores de N_m associados aos mesmos. Um ponto é atribuído a um dado método quando associa-se ao mesmo o menor dos valores de N_m obtidos na resolução de um dado estudo de caso. Acima de cada barra é apresentado o somatório dos pontos atribuídos a cada método, enquanto na legenda são listados os estudos de caso a partir dos quais esses pontos foram obtidos. Caso N_m iguais estejam associados a métodos diferentes, ocorre um empate, e nesse caso, um ponto é concedido a cada método. Caso ocorra um empate, é possível que um dado estudo de caso seja listado duas vezes na legenda. Vale ressaltar que outros gráficos semelhantes àquele introduzido na Figura 108 são apresentados no decorrer dessa seção. Tais gráficos seguem a mesma lógica de atribuição de pontos, mas têm como base a análise de outras métricas, como o tempo de execução ou o número de avaliações da função objetivo. No título de cada gráfico é indicada a métrica na qual baseia-se a construção do mesmo.

De fato, avaliando-se o gráfico apresentado na Figura 108 é possível comprovar que os menores valores de N_m são comumente atribuídos à configuração $PSOPT_l$, com exceção dos estudos de caso apresentados nas Seções 4.1 e 4.5, respectivamente.

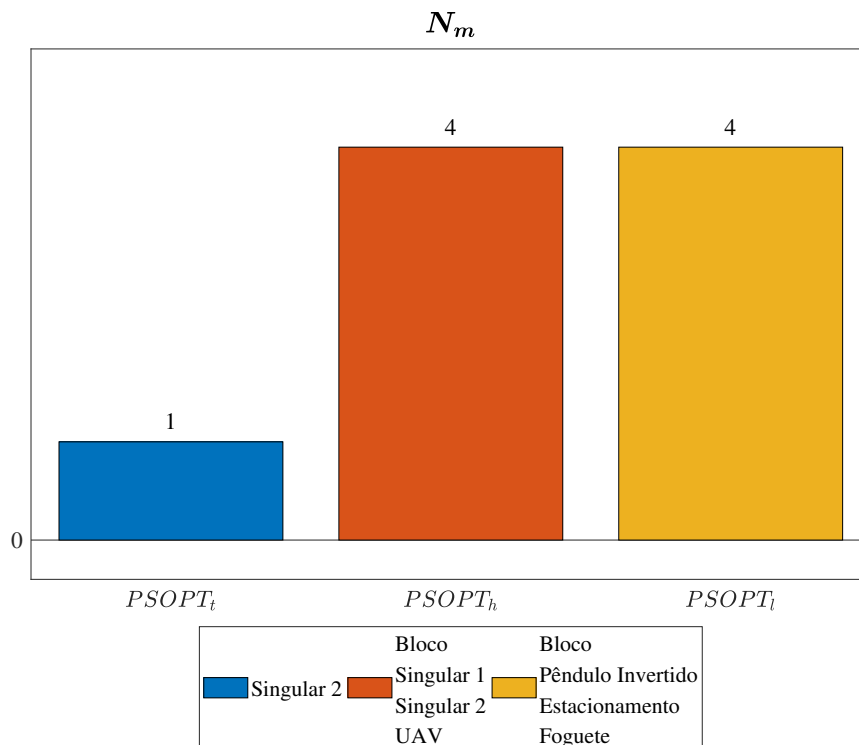


Figura 108 – Avaliação dos valores de N_m relacionados ao $PSOPT_t$, $PSOPT_h$ e $PSOPT_l$.

Como consequência das diferenças entre os valores de N_m associados a cada tipo de colocação, verifica-se que, no geral, associam-se ao $PSOPT_l$ e ao $PSOPT_h$ os menores valores de t_p em relação ao $PSOPT_t$, como indicado na Figura 109.

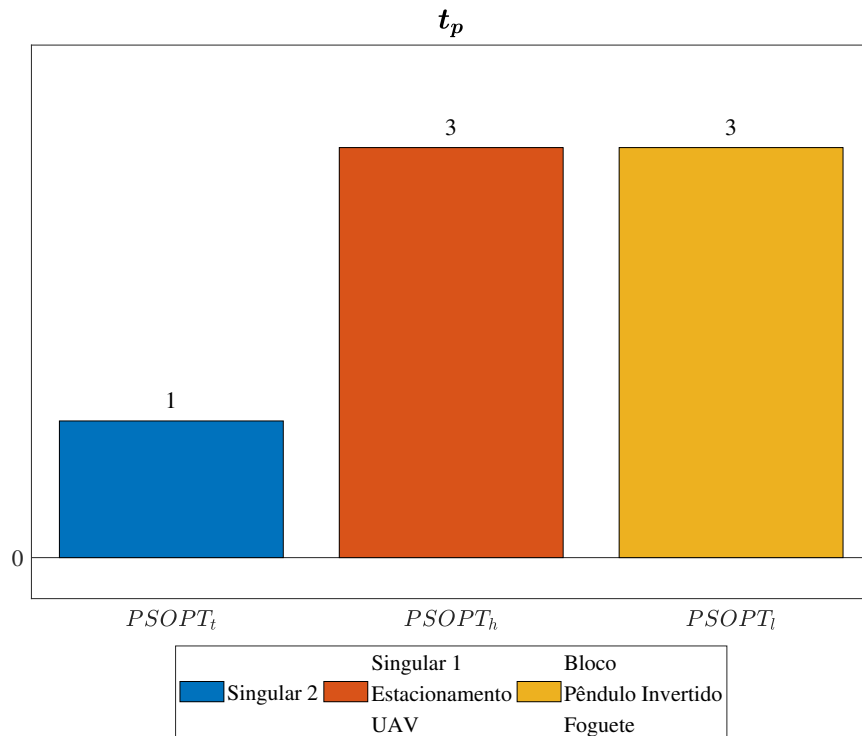


Figura 109 – Avaliação dos tempos de processamento requeridos pelo $PSOPT_t$, $PSOPT_h$ e $PSOPT_l$.

Além disso, estão associados ao $PSOPT_l$ menores valores de n_{aval} do que os requeridos pelo $PSOPT_t$ e pelo $PSOPT_h$, como indicado na Figura 110. Essa máxima vale para a maioria dos estudos de caso monofásicos, com exceção daquele apresentado na Seção 4.5, no qual verificou-se uma dificuldade numérica. Vale ressaltar que, avaliando-se os resultados apresentados na Seção 4.1, verifica-se que é atribuído ao $PSOPT_l$ um valor de n_{aval} menor que os associados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$, ainda que os valores de N_m requeridos sejam consideravelmente menores com relação ao associado ao $PSOPT_l$. Comparando-se ainda as soluções obtidos via $PSOPT_t$, $PSOPT_h$, $COPILOTS_t$, e $COPILOTS_h$, observa-se que os valores de N_m associados à colocação de Hermite-Simpson são tipicamente menores do que aqueles atribuídos à colocação trapezoidal, como indicam as Figuras 111 e 112.

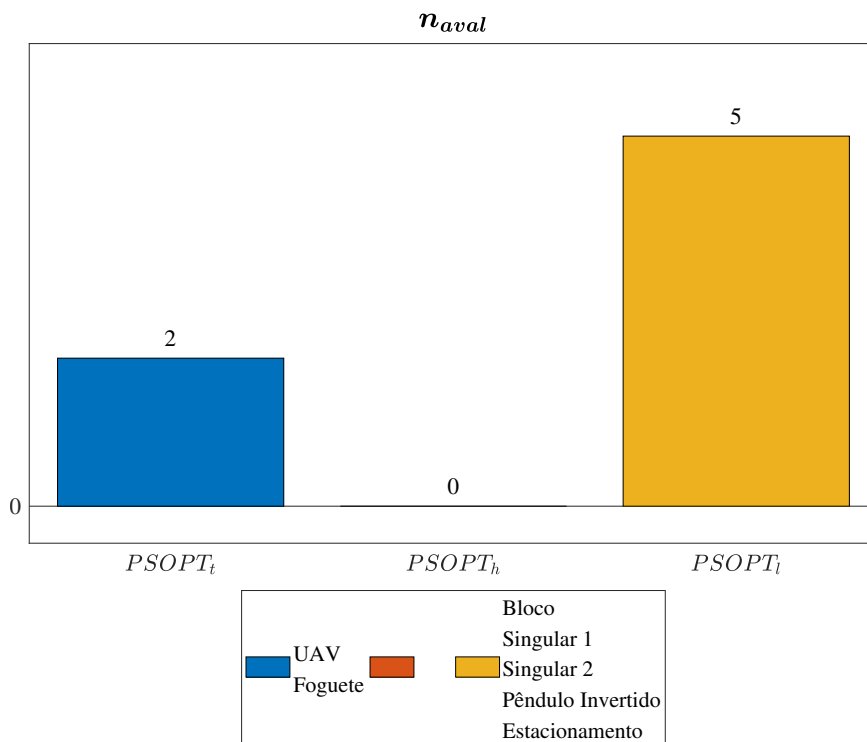


Figura 110 – Análise dos valores de n_{aval} relacionados ao $PSOPT_t$, ao $PSOPT_h$ e ao $PSOPT_l$.

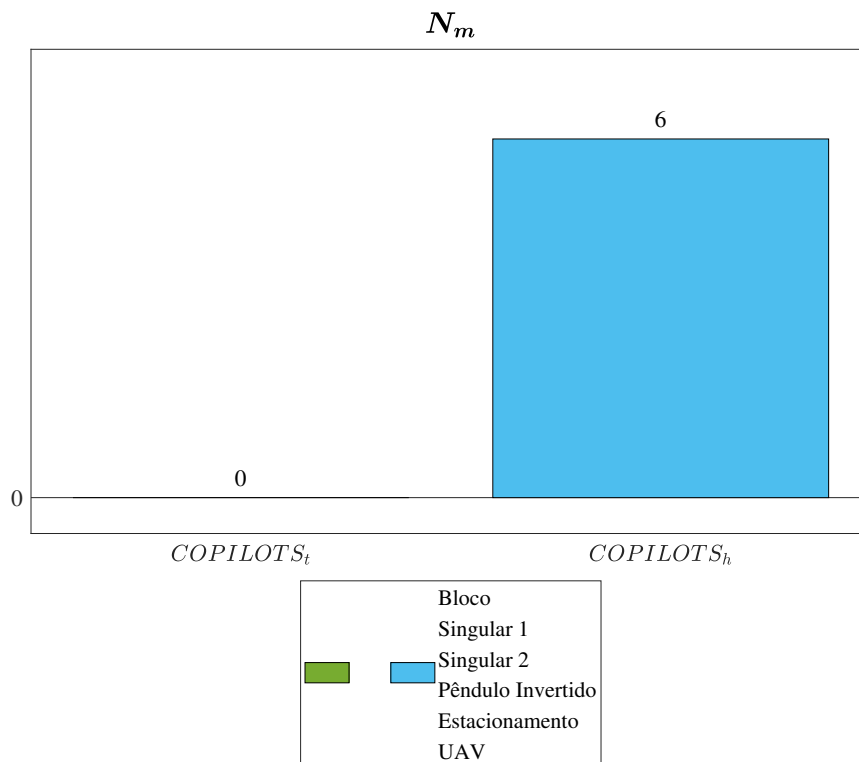


Figura 111 – Avaliação dos valores de N_m relacionados ao $COPILOTS_t$ e ao $COPILOTS_h$.

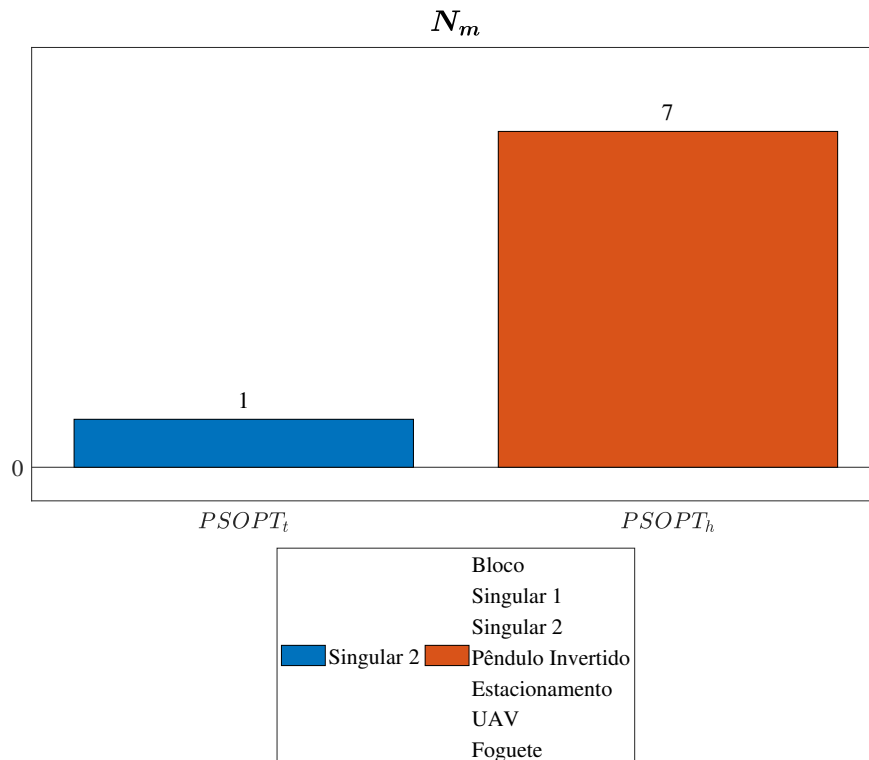


Figura 112 – Avaliação dos valores de N_m relacionados ao $PSOPT_t$ e ao $PSOPT_h$.

Como esperado, verifica-se que o emprego da colocação pseudo-espectral na solução de PCOs singulares não traz resultados satisfatórios, conforme destacado em [Becerra e Galvão \(2010\)](#). De fato, nas soluções obtidas pelo $PSOPT_t$ e apresentadas na Seção 4.1, observam-se valores de N_m altos e trajetórias de controle consideravelmente oscilatórias. Resultados mais aceitáveis poderiam ser obtidos caso os PCOs singulares fossem formulados empregando-se múltiplas fases, conforme sugerido por [Nascentes, Murata e Lobato \(2012\)](#). Uma outra alternativa seria empregar a abordagem introduzida na Seção 4.7.4, que possibilita a obtenção de trajetórias mais suaves.

É importante ressaltar que o Método de Ponto Interior ([WÄCHTER; BIEGLER, 2006](#)), no qual se baseia o otimizador utilizado pelo $PSOPT$, não apresenta um bom desempenho quando empregado na resolução de PCOs que contenham muitas restrições em sua formulação. De fato, avaliando-se os resultados apresentados na Tabela 6, nota-se que, no caso do problema do estacionamento, estão relacionados ao $PSOPT$ valores de $N_s\%$ consideravelmente baixos.

Verifica-se que as trajetórias obtidas com base nos resultados advindos da colocação pseudo-espectral são consideravelmente mais suaves que aquelas encontradas via uso de outros tipos de colocação. Esse comportamento se deve ao fato das trajetórias associadas à colocação pseudo-espectral serem interpoladas globalmente, empregando-se um único polinômio de alta ordem ([BECERRA, 2019](#)).

É essencial frisar que os dados fornecidos pelo $PSOPT_h$, após a resolução de um estudo

de caso qualquer, são insuficientes para que construam-se as trajetórias de controle. Isso porque a interpolação de trajetórias na qual se baseia a colocação Hermite-Simpson depende não só dos valores de $u(t)$ nos nós de colocação, mas também nos nós intermediários, que não são fornecidos pelo *PSOPT*.

Observa-se que na maioria dos casos estão relacionados ao *FALCON* os menores valores de t_p e de n_{aval} , como indicado nas Figuras 113 e 114. Além disso, normalmente estão associados a esse pacote $N_s\%$ bem próximos a 100%. Esses resultados podem ser justificados por dois principais fatores. Primeiro, ao uso que o *FALCON* faz de ferramentas simbólicas na obtenção das derivadas analíticas da função objetivo e das restrições, e segundo, à geração e ao emprego de arquivos de extensão `.mex`, que convertem, de forma automática, os códigos em Matlab[®] utilizados na formulação do PCO em rotinas baseadas em linguagens de baixo nível como C/C++ e Fortran. De fato, é sabido que o emprego de derivadas analíticas acarreta uma diminuição no número de avaliações da função objetivo e, conseqüentemente, no tempo de processamento (*PRACTICAL...*). Além disso, o emprego de linguagens de baixo nível pré-compiladas proporciona uma redução ainda maior no tempo de processamento (*FEBBO et al., 2020*).

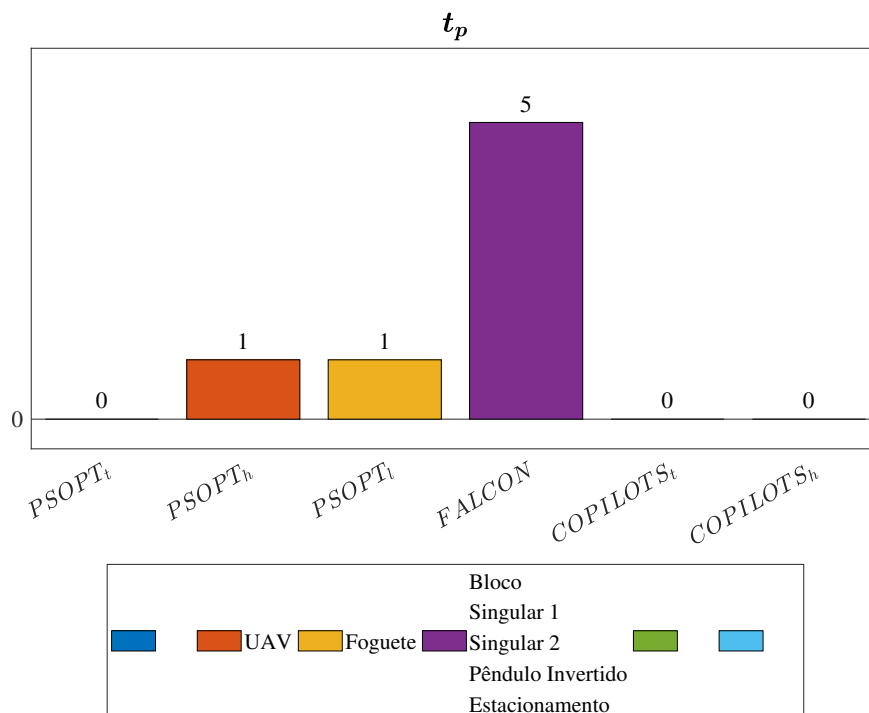


Figura 113 – Avaliação dos tempos de processamento relacionados aos pacotes avaliados.

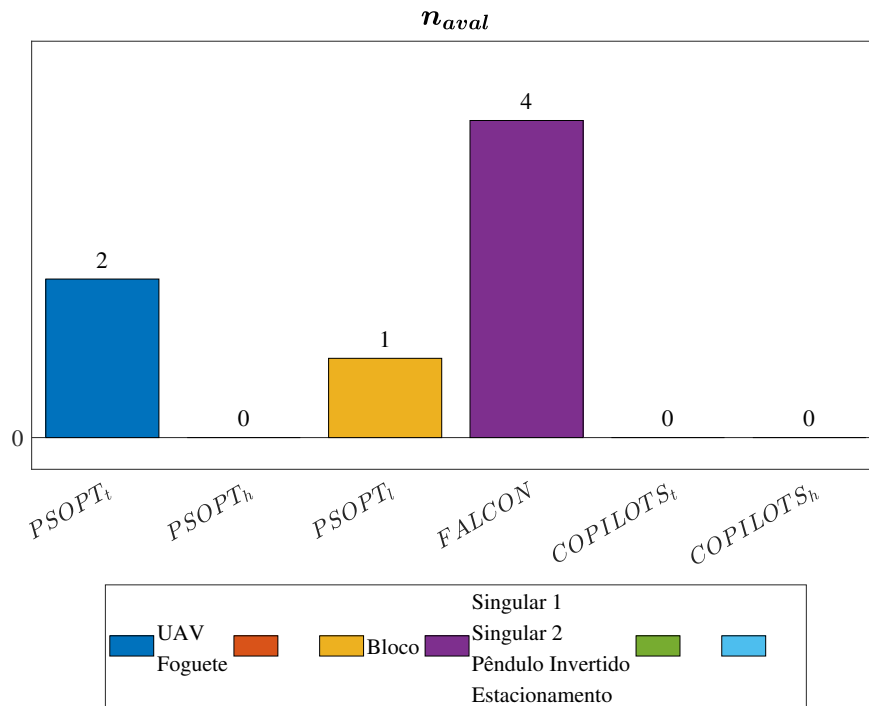


Figura 114 – Análise do número de avaliações da função objetivo relacionados aos pacotes avaliados.

Destaca-se que o único estudo de caso formulado com base em uma única fase no qual não está relacionado ao *FALCON* o menor t_p é o problema do UAV. Esse resultado indica que este pacote tem, de fato, como principal vantagem a computação de derivadas analíticas, recurso que não pôde ser empregado no estudo de caso em questão, uma vez que a dinâmica associada ao mesmo depende da interpolação linear dos dados de uma tabela.

Além do mais, verifica-se que os valores de t_p e de n_{aval} associados ao *FALCON* são praticamente insensíveis ao aumento de N . Nas Figuras 115 e 116, que têm o eixo das abcissas em escala logarítmica, são comparados os valores de t_p e de n_{aval} relacionados à resolução do problema do pêndulo invertido empregando-se o *PSOPT_t* e o *FALCON* e considerando valores de N razoavelmente altos. Ao se analisar tais resultados é possível verificar primeiramente que, para valores de N pequenos, o *FALCON* executa tão rapidamente quando o *PSOPT_t*, que é baseado em C/C++, e que os valores de t_p associados ao primeiro, diferentemente daqueles atribuídos ao segundo, são muito pouco sensíveis ao aumento de N . Vale ressaltar que, no entanto, essa diferença nos valores de t_p associados ao *FALCON* e ao *PSOPT* se deve principalmente ao cálculo do erro de discretização das equações diferenciais associadas à dinâmica do PCO, computado pelo *PSOPT* mas não pelo *FALCON*. O tempo gasto no processamento desse erro aumenta consideravelmente à medida que N cresce, enquanto o tempo despendido de fato na solução do PPNL não apresenta um crescimento considerável à medida que N aumenta.

Além disso, foi possível verificar que os valores de n_{aval} associados ao *FALCON* são significativamente menores que os atribuídos ao *PSOPT_t* e, praticamente, insensíveis ao aumento de N . Mais uma vez ressalta-se que este resultado, provavelmente, se deve ao uso que

o *FALCON* faz das derivadas analíticas.

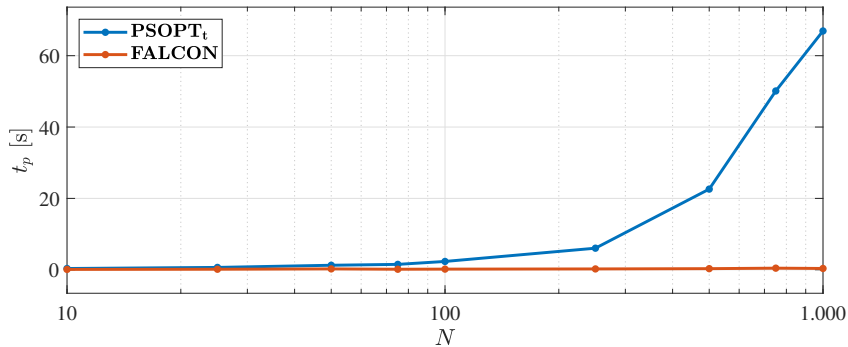


Figura 115 – Avaliação dos tempos de processamento relacionados ao *PSOPT_t* e ao *FALCON* para o problema do pêndulo invertido.

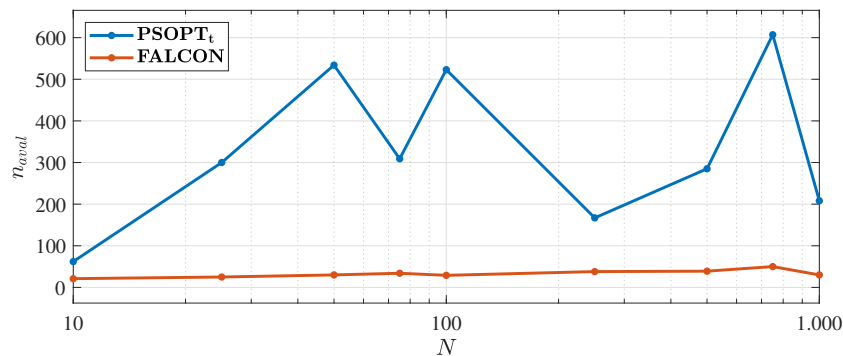


Figura 116 – Análise do número de avaliações da função objetivo requeridas pelo *PSOPT_t* e pelo *FALCON* para o problema do pêndulo invertido

Apesar dos bons resultados obtidos via utilização do *FALCON*, é preciso ressaltar que o problema do foguete não pôde ser resolvido pelo emprego desse pacote, já que, nesse caso, o processo de otimização atinge um mínimo local que não atende às restrições do problema e ali permanece. O PCO associado a esse estudo de caso possui múltiplas fases e, apesar do *FALCON* ser capaz de resolver problemas desse tipo, não consta na documentação deste pacote qualquer exemplo de problema multifásico que tenha dinâmicas distintas associadas a cada fase, como é o caso do PCO em questão.

Observa-se que ao *COPILOTS* estão comumente relacionados os menores valores de J^* , como indicado na Figura 117, e os maiores valores de $N_s\%$. Provalmente, a qualidade observada nos resultados destas duas métricas está relacionada ao otimizador considerado por este pacote, a saber, o algoritmo SQP. Todavia, também a esse pacote estão associados os maiores valores de t_p e de n_{aval} . Isto está, provalmente, relacionado ao uso do SQP e da função `fmincon()` para a resolução de PPNLs. A utilização desta função, nativa do Matlab®, é fortemente desaconselhada pelos desenvolvedores de outros pacotes, dados os altos tempos de processamento e a alta chance de falha atribuídos à mesma (FALUGI; KERRIGAN; WYK,

2018). O uso da função `fmincon()` pode, inclusive, explicar os baixíssimos valores de $N_s\%$ associados ao *COPILOTS* para a resolução do problema do estacionamento, que apresenta um número consideravelmente alto de restrições, e do problema do UAV, que possui uma dinâmica descontínua. Além disso, verifica-se que os menores valores de J^* estão associados aos métodos que fazem uso da colocação Hermite-Simpson, o que, provavelmente, está relacionado com as propriedades numéricas deste tipo de colocação (faz uso de nós intermediários na interpolação dos estados e controles para aumentar a precisão da solução estimada).

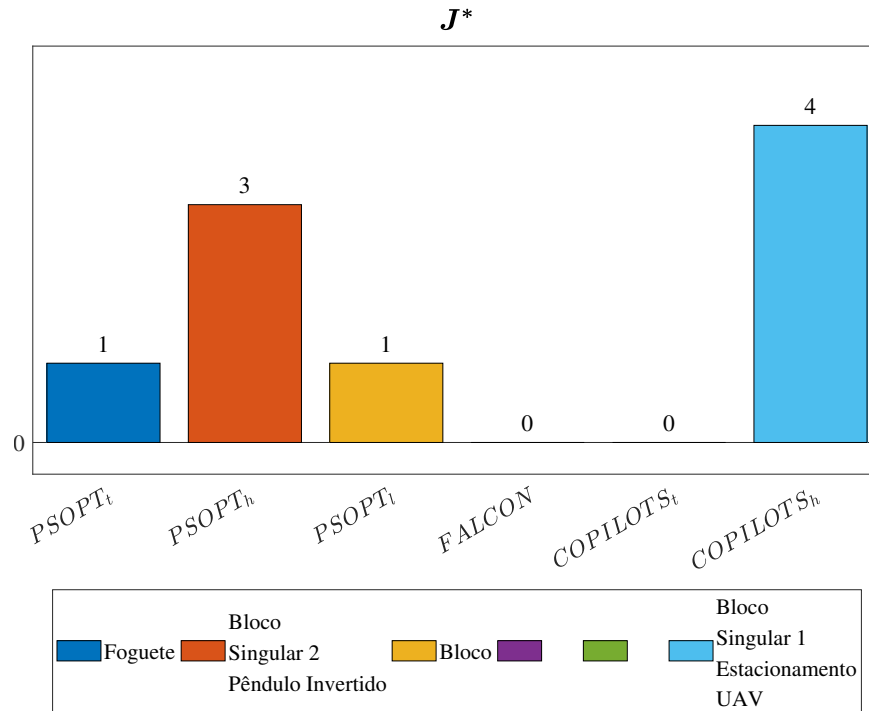


Figura 117 – Análise dos valores de J^* associados aos pacotes avaliados.

4.7.2 ANÁLISE GERAL DOS PACOTES AVALIADOS

Nessa seção são apresentadas algumas questões que devem ser respondidas pelo usuário que pretende escolher o pacote mais adequado para a resolução de um dado PCO. Alguns comentários acerca dos métodos avaliados no presente trabalho são elaborados, porém, é necessário que se tenha em mente que as questões aqui apresentadas podem servir de base para comparação de pacotes que não foram aqui avaliados, ou mesmo que não tenham sido desenvolvidos para resolução de PCOs (PAREJO et al., 2012).

- **O pacote exige uma licença paga?**

Nenhum dos pacotes avaliados exige a compra de uma licença. Vale ressaltar que, apesar do *FALCON* possuir uma versão paga, foi aqui avaliada a versão gratuita desse pacote, que deve ser solicitada aos desenvolvedores.

- **O pacote possui código fonte aberto?**

Tanto o *COPILOTS* quanto o *PSOPT* possuem seu código fonte aberto, enquanto o *FALCON* não.

- **O pacote executa em quais plataformas (Linux, Windows®, Mac®, etc...)?**

O *PSOPT* executa apenas no Linux e no Mac®. Já o *COPILOTS* e o *FALCON* são baseados no Matlab®, o que significa que podem ser executados em qualquer plataforma.

- **Quantos exemplos acompanham o código fonte do pacote?**

O *PSOPT*, o *FALCON* e o *COPILOTS* trazem em sua documentação 45, 11 e 7 exemplos, respectivamente.

- **A documentação do pacote é completa e fornece as informações necessárias para que o usuário resolva os estudos de caso que lhe interessam? A documentação do pacote fornece a base teórica necessária ao entendimento dos métodos no qual o pacote se baseia?**

Nesse quesito, o *PSOPT* é o pacote que mais se destaca, tendo em sua documentação uma introdução bastante completa acerca da colocação pseudo-espectral. Já a documentação do *FALCON* traz instruções que possibilitam a sua utilização sem grandes dificuldades, mas carece de explicações mais detalhadas sobre muitos dos recursos de que o pacote dispõe. Já o *COPILOTS* ainda não possui documentação.

- **Quantos trabalhos foram desenvolvidos empregando-se o pacote?**

O *PSOPT* se destaca mais uma vez nesse quesito, uma vez que no site oficial desse pacote estão listados 60 trabalhos que empregaram o *PSOPT* de alguma forma, desde artigos em periódicos e conferências, até livros e teses. São citados no site do *FALCON* poucos trabalhos que fazem uso do pacote, porém, é possível encontrar na literatura especializada cerca de 30 trabalhos que empregam o *FALCON* de alguma forma. Já o *COPILOTS* serviu de base para o desenvolvimento de apenas 2 trabalhos (até o momento da publicação desta dissertação), já que é um pacote novo proposto neste trabalho.

- **O pacote possui uma comunidade ativa de usuários?**

Apenas o *PSOPT* possui uma comunidade ativa de usuários que se comunica por meio do *Google Groups*.

- **O pacote possui suporte por parte dos desenvolvedores?**

Nesse quesito, o *FALCON* se destaca, já que é um pacote pago e conta com suporte técnico. Neste caso, é possível que o usuário tenha suas dúvidas sanadas muito brevemente, em alguns casos em questão de horas.

- **Com que frequência o código fonte do pacote recebe atualizações?**

O *PSOPT* recebe atualizações esporádicas, tendo sido a versão 5.0 lançada cerca de um ano e meio após o lançamento da versão 4.0. Nem o site do *FALCON* nem a documentação associada ao mesmo indicam quanto tempo se passou desde o lançamento da última versão do pacote. Já o *COPILOTS* nunca foi atualizado (por se tratar de um pacote recentemente proposto).

Vale ressaltar que é possível que uma determinada aplicação se torne obsoleta muito rapidamente em um destes pacotes, dependendo de quão profundas forem as modificações apresentadas nas atualizações. Assim sendo, recomenda-se o uso de pacotes que já tenham se estabelecido perante a comunidade acadêmica e que já sejam amplamente utilizados.

- **O pacote é de fácil utilização?**

Vale aqui ressaltar que a resposta a essa pergunta depende diretamente dos anseios e objetivos do usuário. Neste caso, familiaridades com relação à linguagem de programação utilizada, bem como a qualidade da documentação (com a apresentação da metodologia utilizada e com estudos de caso resolvidos) podem direcionar a escolha por um ou por outro pacote.

- **É possível obter bons resultados empregando-se o pacote?**

Essa pergunta é extremamente complicada visto que a complexidade do problema é um fator determinante para se avaliar a qualidade da solução obtida. Por esta razão, análises semelhantes às que foram apresentadas neste capítulo são importantes para auxiliar o usuário a escolher a ferramenta mais adequada para a resolução de um determinado estudo de caso.

4.7.3 QUALIDADES E DEFICIÊNCIAS DE CADA UM DOS PACOTES AVALIADOS

Nessa seção são listadas algumas das principais qualidades e deficiências atribuídas a cada um dos pacotes avaliados. Os atributos listados a seguir foram verificados no desenvolvimento do presente trabalho e vale ressaltar que alguns deles são subjetivos e não podem ser devidamente quantificados.

4.7.3.1 PSOPT: PRINCIPAIS QUALIDADES

- O *PSOPT* dispõe de uma série de funções auxiliares bastante úteis para implementação de interpolações em 1D e 2D, computação dos perfis de estados e controles a partir dos valores assumidos por essas variáveis nos nós de colocação, e operações matemáticas como o produto escalar e o produto vetorial;

- O *PSOPT* é desenvolvido com base na orientação a objetos e concentra em um único objeto todos os dados referentes à última execução;
- Uma boa quantidade de aplicações pode ser encontrado no código fonte do *PSOPT* e na documentação associada ao mesmo;
- Tanto o *PSOPT* quanto as ferramentas empregadas pelo mesmo são gratuitas e de código aberto.

4.7.3.2 *PSOPT*: PRINCIPAIS DEFICIÊNCIAS

- A implementação de um estudo de caso depende da definição de diversas variáveis e funções que são definidas em um único arquivo. Desta forma, pode ser necessário escrever arquivos consideravelmente extensos, o que muitas vezes torna a edição e depuração dos códigos contidos nesses arquivos uma tarefa complexa;
- Para que uma análise de sensibilidade seja realizada é necessário que um mesmo estudo de caso seja resolvido inúmeras vezes, o que nem sempre pode ser feito manualmente. Assim sendo, costuma-se modificar os códigos empregando laços que possibilitam a realização desta tarefa. No entanto, não é possível empregar essa estratégia no caso do *PSOPT*, uma vez que funções de configuração presentes na função principal (`psopt_level1_setup` e `psopt_level2_setup`) podem ser chamadas uma única vez. Assim sendo, para que uma análise de sensibilidade possa ser realizada no *PSOPT* é necessário empregar *shell scripts*;
- O manual do usuário não informa como acessar o número de avaliações associado a uma dada solução. Para acessar essa informação, é necessário buscar no código fonte pela estrutura na qual a mesma é armazenada. Essa estrutura chama-se `solution.mesh_stats[0].n_obj_evals`, e encontrá-la não é uma tarefa fácil;
- O usuário não pode escolher onde serão salvos os resultados da última execução, sendo todos salvos na pasta onde o arquivo principal é executado;
- O valor referente à violação das restrições não é disponibilizado ao usuário em nenhuma das estruturas do *PSOPT*. Esse é apresentado na tela após a execução do otimizador, porém não pode ser acessado ou armazenado em um arquivo, o que dificulta a implementação de análises de sensibilidade automáticas;
- Quando um PCO é resolvido empregando-se a colocação Hermite-Simpson não são disponibilizados ao usuário os valores atribuídos ao vetor de variáveis de controle nos nós intermediários. A função `get_interpolated_control` que, aparentemente serviria para computação das trajetórias de controle, é apenas citada na documentação, sem que qualquer exemplo seja fornecido;

- Não é implementado no *PSOPT* qualquer tipo de verificação das entradas do usuário, o que pode levar a erros de falha de segmentação de origem indeterminada.

4.7.3.3 FALCON: PRINCIPAIS QUALIDADES

- O *FALCON* computa as derivadas analíticas da função objetivo e das restrições por meio do pacote *Symbolic Math* do Matlab[®], e as converte em arquivos `.mex` baseados em C/C++, o que possibilita um aumento considerável no desempenho do pacote;
- O *FALCON* cria e pré-preenche de forma automática as funções que servem de base à implementação do PCO caso as mesmas ainda não tenham sido criadas. Essas funções possibilitam, por exemplo, a definição da função objetivo, da dinâmica do sistema, e das restrições associadas às variáveis de estado e controle;
- Os desenvolvedores do *FALCON* prestam um suporte bastante satisfatório aos usuários do pacote, sanando as dúvidas enviadas pelos mesmos em questão de horas;
- O *FALCON* é escrito em Matlab[®], o que possibilita que o usuário faça uso das diversas ferramentas disponibilizadas nativamente nesse ambiente para implementação de interpolações bidimensionais, leitura e escrita de arquivos, criação de gráficos e operações com matrizes;
- O *FALCON* possibilita que restrições pontuais (que devam ser satisfeitas em um único nó de colocação) sejam definidas.

4.7.3.4 FALCON: PRINCIPAIS DEFICIÊNCIAS

- O *FALCON* é um pacote de código fechado, o que impossibilita muitas vezes que o usuário depure alguns tipos específicos de erros ou que modifique o código fonte, se necessário;
- O guia do usuário do *FALCON* não traz quaisquer instruções acerca da definição de uma função custo genérica. Existem métodos chamados `addNewLagrangeCost` e `addNewMayerCost` desenvolvidos para esse fim, mas o guia do usuário não traz instruções de como utilizá-los. Também não são apresentadas instruções acerca da definição das estimativas iniciais requeridas em cada estudo de caso. Além disso, o guia do usuário do *FALCON* não traz quaisquer esclarecimentos acerca da implementação de problemas multifásicos que tenham dinâmicas distintas associadas a cada fase, ou sobre como o usuário deve proceder para implementar PCOs que possuam um comportamento dinâmico descrito por equações que não podem ser derivadas, como é o caso do problema do UAV.
- Há muitas situações em que o Matlab[®] fecha durante a execução do *FALCON*. Provavelmente, isto se deve a algum erro no processo de otimização ocasionado, por exemplo,

- pela presença de descontinuidades na dinâmica do sistema ou nas restrições. No entanto, o pacote não possui meios de informar o usuário a respeito do erro que ocasionou o encerramento da execução, o que o obriga a iniciar um processo de depuração demorado e, muitas vezes, tedioso;
- O *FALCON* não possui uma comunidade ativa que se comunica por meio de fóruns ou grupos. Logo, quando algum erro inesperado é verificado pelo usuário, faz-se necessário entrar em contato com os desenvolvedores do pacote;
 - Já foi dito que a computação da dinâmica e das restrições é baseada na implementação de arquivos de extensão `.mex`. Estes são gerados com base em funções escritas em arquivos Matlab[®] de extensão `.m`. Esse comportamento dificulta consideravelmente a depuração dos códigos escritos para computação das dinâmicas e restrições, uma vez que as funções `.m` de fato escritas pelo usuário não são executadas, a não ser que o pacote *Coder*, que o Matlab[®] emprega na geração dos arquivos `.mex`, seja desabilitado;
 - Para que o *FALCON* seja empregado na resolução de um problema multifásico é necessário que o usuário defina uma função distinta para representar a dinâmica associada a cada fase, a não ser que a dinâmica se mantenha inalterada ao longo do tempo. De forma geral, à medida que o número de fases cresce o número de funções a serem declaradas aumenta consideravelmente;
 - A definição das restrições entre as fases de um PCO multifásico é um processo consideravelmente complexo;
 - Não é possível interromper manualmente o processo de otimização sem que o Matlab[®] seja encerrado.

4.7.3.5 COPILOTS: PRINCIPAIS QUALIDADES

- A utilização do *COPILOTS* não exige a compra de nenhuma licença e seu código fonte pode ser acessado e modificado livremente por qualquer usuário;
- O *COPILOTS* possui sintaxe intuitiva e foi desenvolvido para usuários com pouca ou nenhuma experiência na implementação computacional de PCOs. Este possibilita que, via execução de um único comando, sejam criados, e já parcialmente preenchidos, os *scripts* a serem utilizados na estruturação do PCO, guiando o usuário iniciante;
- Este pacote apresenta uma sintaxe algébrica próxima à da formulação de Bolza, o que simplifica a implementação do PCO (PAREJO et al., 2012);
- O *COPILOTS* possibilita que PCOs sejam implementados e resolvidos empregando-se poucas linhas de código, bem como proporciona que as trajetórias de estados e controles

sejam computadas de forma automática a partir dos valores obtidos em cada nó de colocação. Também é possível que representações gráficas dessas trajetórias sejam apresentadas ao usuário ao fim da execução;

- Todas as informações referentes à execução e à resolução de um dado PCO são salvas de forma automática e organizadas em uma única pasta;
- O *COPILOTS* possibilita que o usuário defina um tempo máximo de execução.

4.7.3.6 COPILOTS: PRINCIPAIS DEFICIÊNCIAS

- O *COPILOTS* faz uso da função `fmincon` para resolução de PPNLs, o que pode resultar em problemas de convergência durante a resolução de um dado estudo de caso;
- O aumento do número de nós de colocação ocasiona um crescimento vertiginoso nos tempos de execução e no número de avaliações da função objetivo associados ao *COPILOTS*;
- O *COPILOTS* não possibilita a inserção de parâmetros genéricos na formulação do PCO, o que significa que esse pacote não pode ser empregado na estimação de modelos para sistemas dinâmicos;
- Não é possível, até o presente momento, resolver PCOs multifásicos empregando-se o *COPILOTS*.

4.7.4 SUAVIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

Vale ressaltar que algumas das trajetórias apresentadas no decorrer desse capítulo demonstram um comportamento oscilatório bastante acentuado em alguns dos pacotes considerados. Esse é o caso, por exemplo, das trajetórias de controle associadas ao problema do estacionamento obtidas via *PSOPT_t*, apresentadas na Figura 118.

Trajетórias de controle demasiadamente oscilatórias são indesejáveis, uma vez que trajetórias suaves são mais facilmente representadas por polinômios de primeira e segunda ordem, o que reduz o tempo despendido na resolução do PCO, e são, tipicamente, mais fáceis de estabilizar em sistemas reais empregando-se controladores tradicionais (KELLY, 2017). Além disso, trajetórias de controle oscilatórias podem ocasionar a vibração e o desgaste dos atuadores diminuindo a vida útil associada aos mesmos (LIVNE, 2010).

Para a obtenção de trajetórias de controle mais suaves propõe-se a minimização de uma nova função objetivo J' , a saber:

$$J' = J + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (4.68)$$

em que t_0 e t_f são os tempos inicial e final, e \mathbf{R} é uma matriz de pesos, preferencialmente diagonal.

Na Figura 118 são apresentadas as trajetórias de controle associadas ao problema do estacionamento obtidas via $PSOPT_t$. Já na Figura 119 são representadas as trajetórias advindas da resolução desse mesmo estudo de caso, também via $PSOPT_t$, porém considerando-se a definição de uma nova função objetivo J' , de acordo com a Equação (4.68). Nesse caso adota-se R como sendo à matriz identidade. Comparando-se as trajetórias apresentadas nas Figuras 118 e 119, fica claro que a definição de uma nova função objetivo J' de fato pode proporcionar a obtenção de trajetórias mais suaves.

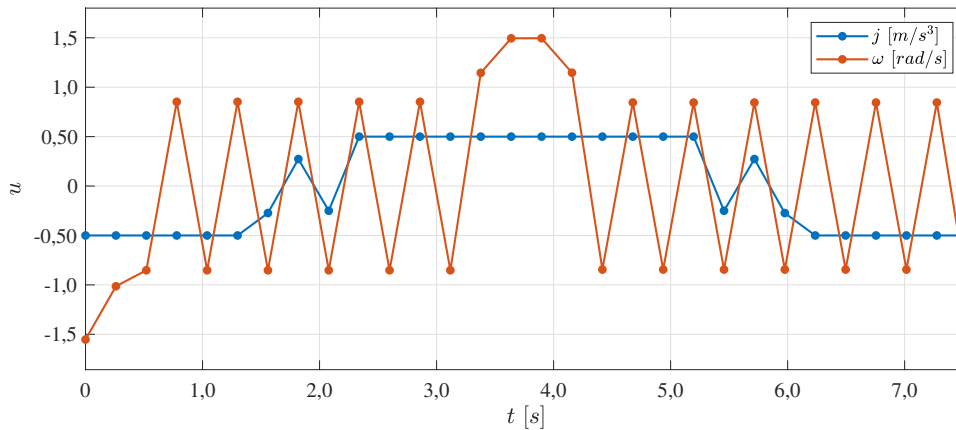


Figura 118 – Trajetórias de controle obtidas considerando o $PSOPT_t$ para o problema do estacionamento.

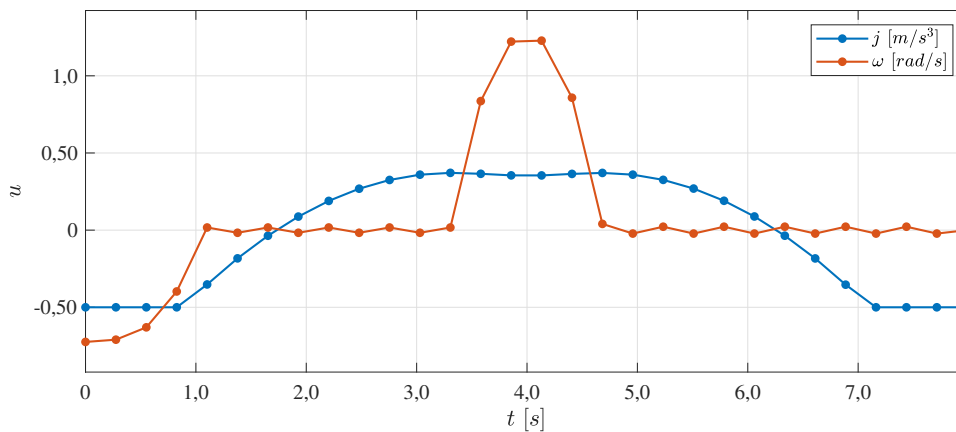


Figura 119 – Suavização das trajetórias de controle obtidas considerando o $PSOPT_t$ para o problema do estacionamento.

Na Figura 120 são apresentadas as trajetórias de controle obtidas via $COPILOTS_t$ na resolução do problema singular 2 para $N = 30$. A trajetória representada na cor azul é obtida considerando a função objetivo original, enquanto aquela na cor vermelha é baseada na definição de uma nova função objetivo J' , definida de acordo com a Equação (4.68). Ao se comparar estas trajetórias fica evidente que a definição de um novo formato para a função objetivo (J') pode proporcionar a obtenção de trajetórias mais suaves.

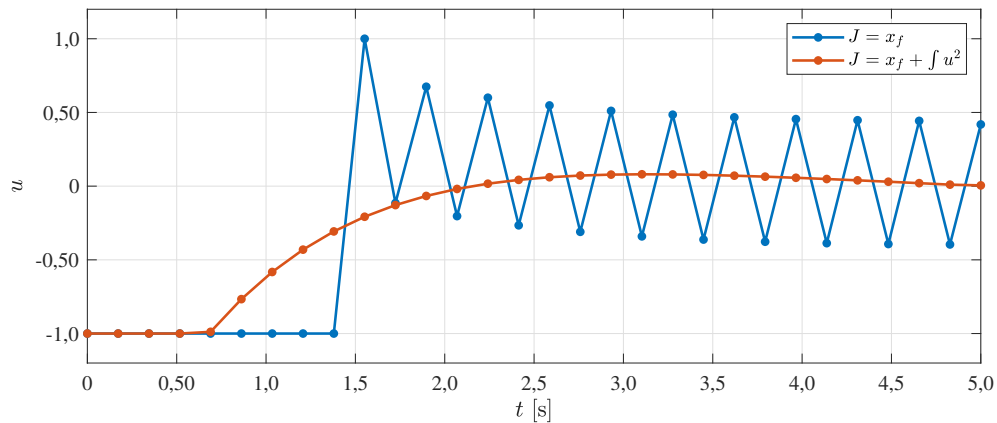


Figura 120 – Comparação entre a trajetória de controle obtida via $PSOPT_t$ na resolução do problema singular 2, e aquela advinda da resolução desse mesmo problema definindo-se uma nova função objetivo (J') de acordo com a Equação (4.68).

É importante ressaltar que a definição de uma nova função objetivo pode ser considerada inclusive na resolução de PCOs singulares, uma vez que, mesmo quando o PCO ao qual atribui-se J é singular, o PCO formulado a partir da definição de J' não o será, conforme discutido em [Jacobson, Gershwin e Lele \(1970\)](#). No entanto, é preciso ressaltar que essa mudança pode ocasionar a deterioração da solução obtida. Por exemplo, no caso do problema do estacionamento, conforme as Figuras 118 e 119, obtém-se $t_f = 7,35$ s considerando-se a função objetivo original, enquanto que adotando-se J' , tem-se $t_f = 7,98$ s. Assim, conclui-se que a aplicabilidade deste tipo de abordagem deve ser sempre avaliada para cada estudo de caso em particular.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo propor uma nova ferramenta, a saber, o pacote *COPILOTS* (*Basic Optimal Control Solver*), para a resolução de PCOs. Além disso, também objetivou-se realizar um estudo comparativo entre a abordagem proposta e os pacotes *PSOPT* e *FALCON* considerando diferentes configurações para cada um destes. Para esta finalidade, discutiram-se aspectos relacionados aos estudos de caso analisados, bem como sobre as métricas de comparação utilizadas.

Em linhas gerais, os resultados obtidos pelo pacote *COPILOTS*, considerando os dois tipos de técnicas de colocação implementados, foram considerados satisfatórios para seis dos sete estudos de caso analisados. Cabe ressaltar que a dificuldade observada na resolução do sétimo estudo de caso não foi exclusividade do *COPILOTS*, já que o *FALCON* também não foi capaz de resolvê-lo. Por este motivo considera-se que, de forma geral, o *COPILOTS* foi capaz de obter boas estimativas para os perfis de controle, bem como uma boa aproximação para os valores das respectivas funções objetivo. No que tange o valor da função objetivo, os resultados obtidos pelo *COPILOTS* foram condizentes com os obtidos pelo *PSOPT* e pelo *FALCON*, o que demonstra a capacidade da metodologia proposta. Em relação ao tempo de processamento, quanto mais complexo o estudo em análise, maiores foram os valores requeridos pelo pacote *COPILOTS*. Isto, provavelmente, está relacionado com o otimizador considerado, a saber, o SQP, bem como aspectos relacionados ao uso de aproximações numéricas para as derivadas, o que naturalmente pode ocasionar um crescimento no tempo total de processamento.

A partir do estudo comparativo realizado neste trabalho, as seguintes conclusões são apresentadas:

- Recomenda-se o uso do *PSOPT* para a resolução de PCOs multifásicos;
- Não é recomendado que a colocação pseudo-espectral seja empregada para a resolução de PCOs singulares;
- Nos casos em que o tempo de execução e o número de avaliações da função objetivo não sejam critérios decisivos, recomenda-se que o *COPILOTS* e a colocação Hermite-Simpson sejam utilizados;
- Caso o usuário tenha pouca ou nenhuma experiência com a implementação computacional de PCOs, ou caso tenha o intuito empregar um pacote computacional para fins didáticos,

recomenda-se a utilização do *COPILLOTS*;

- Caso seja necessário resolver um PCO empregando o mínimo de avaliações da função objetivo no menor tempo possível, recomenda-se o uso do *FALCON*;
- Não é recomendada a utilização do *FALCON* na resolução PCOs multifásicos.

Finalmente, ressalta-se que a escolha por um dado pacote é uma questão muito particular e deve ser observada de acordo com os critérios adotados pelo usuário, tais como familiaridades com relação à linguagem de programação utilizada, bem como o tempo de processamento e a documentação.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Em trabalhos futuros pretende-se propor a utilização de métricas alternativas às utilizadas no presente trabalho como, por exemplo, o erro de transcrição. A avaliação deste parâmetro é baseada nas trajetórias contínuas associadas ao vetor de variáveis de estado e nas restrições dinâmicas (KELLY, 2017). Além disso, propõe-se a análise de mais estudos de caso definidos por múltiplas fases, bem como o estudo e a caracterização do índice diferencial (parâmetro que, implicitamente, está relacionado com a dificuldade em integrar sistemas algébrico-diferenciais). Por fim, sugere-se a avaliação de outros métodos de colocação no *COPILLOTS* (como por exemplo a pseudo-espectral de Legendre), e a elaboração de um documento com a apresentação detalhada deste pacote no que tange a sua instalação, o seu uso, e uma ampla gama de estudos de caso para auxiliar futuros usuários. Neste contexto, ainda pretende-se:

- implementar no *COPILLOTS* uma interface gráfica que facilite a estruturação dos PCOs de interesse;
- considerar a opção do uso de malhas não uniformes, com nós de colocação que não estejam igualmente espaçados no domínio do tempo;
- escalonar, automaticamente, as variáveis analisadas, assim como é realizado no *PSOPT*;
- definir uma estrutura para a entrada de parâmetros genéricos empregados na formulação dos PCOs, possibilitando que o *COPILLOTS* seja empregado na resolução de problemas inversos (TARANTOLA, 2005);
- implementar uma rotina para o refinamento automático da malha, baseado na verificação do erro de transcrição $\epsilon(t)$;
- avaliar o uso de outros otimizadores, como por exemplo o IPOPT (WÄCHTER; BIEGLER, 2006) (utilizado pelo *PSOPT* e pelo *FALCON*), visto que a utilização da função

`fmincon` é desencorajada pelos desenvolvedores de alguns pacotes como o ICLOCS (FALUGI; KERRIGAN; WYK, 2018);

- converter, automaticamente, as funções Matlab[®] utilizadas na definição das restrições e da função objetivo em arquivos `.mex`, como é feito no caso do *FALCON*, para que o desempenho do *COPILOTS* possa ser aperfeiçoado;
- utilizar o pacote *Symbolic Math* (MATHWORKS, 2016) para a computação das derivadas analíticas da função objetivo e das restrições, como é realizado pelo *FALCON*, para que os PPNLs possam ser resolvidos mais rapidamente e com um menor número de avaliações da função objetivo (PRACTICAL...).

REFERÊNCIAS

- ANAC. *Wind Shear*. 2018. Disponível em: <<https://www.anac.gov.br/en/safety/aeronautical-meteorology/conditions/wind-shear>>. Citado na página 35.
- AZEVEDO, G. T. D. et al. Pseudospectral Optimisation of UAV Trajectories for Minimal Battery Consumption in the Presence of a Wind Field. 2018. p. 272–276. <https://doi.org/10.1109/CONTROL.2018.8516807>. Citado 7 vezes nas páginas 63, 69, 135, 138, 139, 141 e 148.
- BAINES, A. et al. A Benchmark Comparison of Optimal Control Software: GPOPS-II versus OpenSim Moco. 2019. XVII International Symposium on Computer Simulation in Biomechanics. Citado na página 59.
- BÖCK, M.; PLAINER, M.; KUGI, A. Evaluation of Efficiently Generating Fast Robot Trajectories Under Geometric and System Constraints. *IFAC-PapersOnLine*, v. 49, p. 395–402, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.586>. Citado na página 59.
- BEAL, L. et al. GEKKO Optimization Suite. *Processes*, v. 6, p. 106, jul. 2018. <https://doi.org/10.3390/pr6080106>. Citado na página 28.
- BECERRA, V. M. Optimal control. *ia*, v. 3, n. 1, p. 5354, 2008. ISSN 1941-6016. Citado 8 vezes nas páginas 26, 31, 33, 35, 36, 63, 69 e 70.
- BECERRA, V. M. *PSOPT Project*. 2010. Disponível em: <<http://www.psopt.org/>>. Citado na página 55.
- BECERRA, V. M. *PSOPT Optimal Control Solver User Manual*. p. 437, 2019. Citado 14 vezes nas páginas 28, 38, 49, 51, 52, 55, 56, 152, 153, 154, 155, 156, 159 e 175.
- BECERRA, V. M.; GALVÃO, R. K. H. Um Tutorial Sobre Métodos Pseudo-Espectrais para Controle Ótimo Computacional. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 21, p. 224–244, jun. 2010. <https://doi.org/10.1590/S0103-17592010000300002>. Citado 13 vezes nas páginas 49, 50, 51, 52, 78, 80, 90, 91, 96, 152, 160, 161 e 175.
- BENSON, D. *A Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control*. Tese (Doutorado), 2005. Massachusetts Institute of Technology. Citado 5 vezes nas páginas 63, 69, 152, 159 e 201.
- BENSON, H. Y.; SHANNO, D. F.; VANDERBEI, R. J. Interior-Point Methods for Nonconvex Nonlinear Programming: Jamming and Comparative Numerical Testing. *Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, ORFE-00-02*, 2000. <https://doi.org/10.1007/s10107-003-0418-2>. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- BETTS, J.; ELDERSVELD, S.; HUFFMAN, W. A Performance Comparison of Nonlinear Programming Algorithms for Large Sparse Problems. *Guidance, Navigation and Control Conference*. 1993. <https://doi.org/10.2514/6.1993-3751>. Citado na página 59.
- BIRAL, F.; BERTOLAZZI, E.; BOSETTI, P. Notes on Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems. *IEEJ Journal of Industry Applications*, v. 5, p. 154–166, 2016. <https://doi.org/10.1541/ieejia.5.154>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 36.

- BONGARTZ, I. et al. *A Numerical Comparison Between the LANCELOT and MINOS Packages for Large-Scale Constrained Optimization*. 1997. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2003.00142>>. Citado 5 vezes nas páginas 28, 59, 60, 61 e 63.
- BRYSON, A. Optimal Control - 1950 to 1985. *IEEE Control Systems*, v. 16, p. 26–33, jun. 1996. <https://doi.org/10.1109/37.506395>. Citado 6 vezes nas páginas 26, 28, 31, 32, 33 e 34.
- CAILLAU, J.-B.; COTS, O.; GERGAUD, J. Differential continuation for regular optimal control problems. *Optimization Methods and Software*, v. 27, p. 177–196, 2012. Publisher: Taylor & Francis. Citado na página 28.
- DARBY, C. L.; HAGER, W. W.; RAO, A. V. An hp-adaptive Pseudospectral Method for Solving Optimal Control Problems. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 32, p. 476–502, jul. 2011. <https://doi.org/10.1002/oca.957>. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking Optimization Software With Performance Profiles. *Mathematical Programming*, v. 91, p. 201–213, jan. 2002. <https://doi.org/10.1007/s101070100263>. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 63.
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J.; MUNSON, T. S. *Benchmarking Optimization Software With COPS 3.0*. 2004. <https://doi.org/10.2172/834714>. Citado na página 59.
- DONG, E.; DU, H.; GARDNER, L. An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time. *The Lancet Infectious Diseases*, v. 20, p. 533–534, maio 2020. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30120-1](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30120-1). Citado na página 27.
- FALUGI, P.; KERRIGAN, E.; WYK, E. van. *ICLOCS2: A MATLAB Toolbox for Optimization Based Control - Downloads*. 2018. Disponível em: <<http://www.ee.ic.ac.uk/ICLOCS/Downloads.html>>. Citado 5 vezes nas páginas 28, 57, 72, 179 e 191.
- FEBBO, H. et al. NLOptControl: A Modeling Language for Solving Optimal Control Problems. abr. 2020. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2003.00142>>. Citado 3 vezes nas páginas 57, 60 e 176.
- FOROOZANDEH, Z. et al. On Numerical Methods for Singular Optimal Control Problems: An Application to an AUV Problem. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, v. 24, p. 2219–2235, 2019. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019092>. Citado na página 59.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*. 6. ed. 2013. Citado na página 25.
- GARCÍA-HERAS, J.; SOLER, M.; SÁEZ, F. J. A Comparison of Optimal Control Methods for Minimum Fuel Cruise at Constant Altitude and Course with Fixed Arrival Time. *Procedia Engineering*, v. 80, p. 231–244, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.09.083>. Citado na página 59.
- GRUNING, T.; RAUH, A.; ASCHEMANN, H. Feedforward Control Design for a Four-Rotor UAV Using Direct and Indirect Methods. *2012 17th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR)*. 2012. p. 439–444. <https://doi.org/10.1109/MMAR.2012.6347849>. Citado na página 59.

- HOWELL, T. A.; JACKSON, B. E.; MANCHESTER, Z. ALTRO: A Fast Solver for Constrained Trajectory Optimization. *2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Macau, China: IEEE, 2019. p. 7674–7679. <https://doi.org/10.1109/IROS40897.2019.8967788>. Citado na página 59.
- IASBECK, A. H.; LOBATO, F. S. Resolução de problemas de Controle Ótimo utilizando Algoritmos Genéticos. *A Aplicação do Conhecimento Científico na Engenharia Mecânica 2*. 1. ed. 2020. p. 128–138. ISBN 9786557063767. <https://doi.org/10.22533/at.ed.76720110913>. Citado na página 78.
- INC., I. T. *OpenGoddard*. Interstellar Technologies Inc., 2017. Disponível em: <<https://github.com/istellartech/OpenGoddard>>. Citado na página 28.
- JACOBSON, D.; GERSHWIN, S.; LELE, M. Computation of Optimal Singular Controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 15, p. 67–73, fev. 1970. ISSN 0018-9286. <https://doi.org/10.1109/TAC.1970.1099360>. Citado 7 vezes nas páginas 63, 69, 78, 79, 80, 89 e 187.
- KANG, W.; BEDROSSIAN, N. Pseudospectral Optimal Control Theory Makes Debut Flight, Saves NASA \$1M in Under Three Hours. v. 40, 2007. Disponível em: <<https://archive.siam.org/pdf/news/1196.pdf>>. Citado na página 26.
- KELLY, M. An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation. *SIAM Review*, v. 59, p. 849–904, jan. 2017. <https://doi.org/10.1137/16M1062569>. Citado 21 vezes nas páginas 26, 31, 37, 38, 39, 40, 45, 47, 63, 65, 69, 97, 98, 99, 100, 102, 109, 171, 185, 190 e 206.
- KELLY, M. *OptimTraj Users Guide*. 2018. Disponível em: <https://github.com/MatthewPeterKelly/OptimTraj/blob/master/docs/UsersGuide/OptimTraj_UsersGuide.pdf>. Citado na página 28.
- KIRK, D. E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. 2004. <https://doi.org/10.1002/aic.690170452>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 31.
- KOENEMANN, J. et al. OpenOCL–Open Optimal Control Library. 2017. Disponível em: <<https://openocl.github.io/>>. Citado na página 28.
- LABORATORY, R. D. of S. *Beluga*. Rapid-Design-of-Systems-Laboratory, 2018. Disponível em: <<https://github.com/Rapid-Design-of-Systems-Laboratory/beluga>>. Citado na página 28.
- LI, B.; WANG, K.; SHAO, Z. Time-Optimal Maneuver Planning in Automatic Parallel Parking Using a Simultaneous Dynamic Optimization Approach. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, v. 17, p. 3263–3274, nov. 2016. <https://doi.org/10.1109/TITS.2016.2546386>. Citado 9 vezes nas páginas 63, 69, 114, 116, 118, 121, 122, 131 e 132.
- LIBOTTE, G. B. et al. Determination of an Optimal Control Strategy for Vaccine Administration in COVID-19 Pandemic Treatment. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, v. 196, nov. 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105664>. Citado na página 27.
- LIVNE, E. *The Effects of Damage and Uncertainty on the Aeroelastic / Aeroservoelastic Behavior and Safety of Composite Aircraft*. 2010. Universidade de Washington. Disponível em: <https://depts.washington.edu/amtas/events/jams_10/21.Livne.pdf>. Citado na página 185.

- LOBATO, F. S. *Abordagem Mista Para Problemas de Otimização Dinâmica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, set. 2004. Citado na página 34.
- MATHWORKS. *Symbolic Math Toolbox*. 2016. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/products/symbolic.html>>. Citado na página 191.
- MATHWORKS. *Change Folders on the Search Path - MATLAB & Simulink*. 2020. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab_env/add-remove-or-reorder-folders-on-the-search-path.html>. Citado na página 58.
- MATHWORKS. *Convert Earth-Centered Inertial (ECI) Coordinates to Latitude, Longitude, Altitude (LLA) Geodetic Coordinates*. 2020. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/aerotbx/ug/eci2lla.html>>. Citado na página 168.
- MITTELMANN, H. D. Benchmarking Interior Point LPIQP Solvers. v. 17, p. 1–6, 1998. <https://doi.org/10.1080/1071441950170102>. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 67.
- MUPPIRALA, M.; FENELON. *Finding an Optimal Path*. 2020. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/36321-finding-an-optimal-path>>. Citado na página 136.
- NASA. *What is a Sounding Rocket?* 2004. Disponível em: <https://www.nasa.gov/missions/research/f_sounding.html>. Citado na página 35.
- NASCENTES, C. L.; MURATA, V. V.; LOBATO, F. S. Resolução de Problema de Controle Ótimo Singulares com Índice Superior Usando o Algoritmo de Evolução Diferencial. Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia, MG, Brasil.: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas – ABCM, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 175.
- PAREJO, J. A. et al. Metaheuristic optimization frameworks: a survey and benchmarking. *Soft Computing*, v. 16, p. 527–561, mar. 2012. <https://doi.org/10.1007/s00500-011-0754-8>. Citado 6 vezes nas páginas 28, 58, 59, 60, 179 e 184.
- PAROMTCHIK, I. E.; LAUGIER, C. Autonomous parallel parking of a nonholonomic vehicle. 1996. p. 13–18. <https://doi.org/10.1109/IVS.1996.566343>. Citado na página 114.
- PELTROCHE, J.; ZAMBRANA, A. E. M. Advanced Mathematics for Control System Design: Guidance, Navigation, and Control (GN&C) Studies. 2019. Número da patente: KSC-E-DAA-TN67783. Citado na página 98.
- PRACTICAL Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming. 1. ed. (Advances in Design and Control). Citado 5 vezes nas páginas 35, 36, 142, 176 e 191.
- RAMOS, P. Luís Tiago de F. *Numerical Methods for Optimal Control and Model Predictive Control*. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2014. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/77537/2/33613.pdf>>. Citado na página 59.
- RIECK, M. et al. *FALCON.m User Guide*. 2020. Disponível em: <<https://www.fsd.lrg.tum.de/software/wp-content/uploads/UserGuideMain.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 56.
- SACLAY, I. *BOCOP: an Open Source Toolbox for Optimal Control*. 2017. Disponível em: <<http://bocop.org>>. Citado na página 28.

- SCHWARZ, R. *Cartesian State Vectors to Keplerian Orbit Elements*. 2017. Disponível em: <https://downloads.rene-schwarz.com/download/M002-Cartesian_State_Vectors_to_Keplerian_Orbit_Elements.pdf>. Citado na página 205.
- SPEYER, J. L. Periodic Optimal Flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 19, p. 745–755, jul. 1996. <https://doi.org/10.2514/3.21695>. Citado na página 35.
- SUSSMANN, H.; WILLEMS, J. 300 Years of Optimal Control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 17, p. 32–44, jun. 1997. <https://doi.org/10.1109/37.588098>. Citado na página 31.
- TARANTOLA, A. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. 2005. <https://doi.org/10.1137/1.9780898717921>. Citado na página 190.
- VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. New York, NY, USA: McGraw Kill, Inc., 1984. Citado na página 57.
- VENÂNCIO, M. *Desenvolvimento de Técnicas de Estabilização de Caminhada para Robô Humanoide com Detecção de Diferentes Tipos de Terrenos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, set. 2018. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2018.857>. Citado na página 98.
- WANG, Y. et al. Optimal Trajectory Planning for Trains – A Pseudospectral Method and a Mixed Integer Linear Programming Approach. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, v. 29, p. 97–114, abr. 2013. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2013.01.007>. Citado na página 59.
- WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the Implementation of an Interior-Point Filter Line-Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. *Mathematical Programming*, v. 106, p. 25–57, 2006. <https://doi.org/10.1007/s10107-004-0559-y>. Citado 5 vezes nas páginas 55, 56, 90, 175 e 190.
- YOUNIS, W. et al. Design and Implementation of an Experimental Segway Model. *AIP Conference Proceedings*. Zarzis (Tunisia): AIP, 2009. p. 350–354. <https://doi.org/10.1063/1.3106501>. Citado na página 98.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PARÂMETROS DO PROBLEMA DO LANÇAMENTO DE UM FOGUETE

Os parâmetros empregados no problema do lançamento de um foguete são (BENSON, 2005):

- Raio da Terra: $R_e = 6378145$ m
- Taxa de rotação da Terra em torno do eixo z : $w_e = 7,29211585 \times 10^{-5}$ rad/s
- Aceleração da gravidade ao nível do mar: $g_0 = 9,80665$ m/s²
- Densidade do ar atmosférico ao nível do mar: $\rho_0 = 1,225$ kg/m³
- Parâmetro gravitacional: $\mu = 3,986012 \times 10^{14}$ m³/s²
- Coeficiente de arrasto aerodinâmico associado ao Delta III: $c_d = 0,5$
- Área de referência do Delta III: $A_{ref} = 4\pi$ m²
- Fator de ponderação da altitude: $h_0 = 7200$ m
- Massa da carga útil: $m_{pl} = 4164$ kg
- Latitude do Cabo Canaveral (plataforma de lançamento): $l_{cc} = 28,5^\circ$
- Empuxo de um PPS: $T_{sb} = 628500$ N
- Empuxo do propulsor do primeiro estágio: $T_{s1} = 1083100$ N
- Empuxo do propulsor do segundo estágio: $T_{s2} = 110094$ N
- Tempo de queima de um PPS: $t_{sb} = 75,2$ s
- Tempo de queima do propulsor do primeiro estágio: $t_{s1} = 261$ s
- Tempo de queima do propulsor do segundo estágio: $t_{s2} = 700$ s
- Massa total de um PPS: $M_{sb} = 19290$ kg
- Massa total do primeiro estágio: $M_{s1} = 104380$ kg
- Massa total do segundo estágio: $M_{s2} = 19300$ kg

- Massa do combustível armazenado em um PPS: $m_{sb} = 17010$ kg
- Massa do combustível armazenado no primeiro estágio: $m_{s1} = 95550$ kg
- Massa do combustível armazenado no segundo estágio: $m_{s2} = 16820$ kg
- Componente em x da posição inicial do Delta III: $r_{0x} = 5605222$ m
- Componente em y da posição inicial do Delta III: $r_{0y} = 0$ m
- Componente em z da posição inicial do Delta III: $r_{0z} = 3043387$ m
- Componente em x da velocidade inicial do Delta III: $v_{0x} = 0$ m/s
- Componente em y da velocidade inicial do Delta III: $v_{0y} = 409$ m/s
- Componente em z da velocidade inicial do Delta III: $v_{0z} = 0$ m/s
- Componente em x de uma das possíveis posições finais do Delta III: $r_{fx} = 4397287$ m
- Componente em y de uma das possíveis posições finais do Delta III: $r_{fy} = 4243769$ m
- Componente em z de uma das possíveis posições finais do Delta III: $r_{fz} = 2379474$ m
- Componente em x de uma das possíveis velocidades finais do Delta III: $v_{fx} = -5826$ m/s
- Componente em y de uma das possíveis velocidades finais do Delta III: $v_{fy} = 7819$ m/s
- Componente em z de uma das possíveis velocidades finais do Delta III: $v_{fz} = -3178$ m/s
- Massa total do Delta III no início da 1ª fase: $m^{(1)}(t_0^{(1)}) = 301454$ kg
- Massa total do Delta III ao fim da 1ª fase: $m^{(1)}(t_f^{(1)}) = 171864$ kg
- Massa total do Delta III no início da 2ª fase: $m^{(2)}(t_0^{(2)}) = 158184$ kg
- Massa total do Delta III ao fim da 2ª fase: $m^{(2)}(t_f^{(2)}) = 79624$ kg
- Massa total do Delta III no início da 3ª fase: $m^{(3)}(t_0^{(3)}) = 72784$ kg
- Massa total do Delta III ao fim da 3ª fase: $m^{(3)}(t_f^{(3)}) = 32294$ kg
- Massa total do Delta III no início da 4ª fase: $m^{(4)}(t_0^{(4)}) = 23464$ kg
- Semi-eixo maior associado à órbita final do Delta III: $a_f = 24361140$ m
- Excentricidade associada à órbita final do Delta III: $e_f = 0,7308$
- Inclinação associada à órbita final do Delta III: $i_f = 28,5^\circ$

- Longitude do nó ascendente associada à órbita final do Delta III: $\Omega_f = 269,8^\circ$
- Argumento do periapsis associado à órbita final do Delta III: $\omega_f = 130,5^\circ$

APÊNDICE B – ELEMENTOS ORBITAIS

No caso do problema do lançamento de um foguete, a órbita a ser atingida é definida com base nos elementos orbitais $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\Omega(t)$, e $\omega(t)$, que devem ser formulados com base em $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ (SCHWARZ, 2017). Para tanto, obtém-se primeiramente $a(t)$ como segue:

$$a(t) = \frac{1}{\frac{2}{|\mathbf{r}(t)|} - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{\mu}} \quad (\text{B.1})$$

Em seguida, definem-se $\boldsymbol{\eta}(t)$ e $\mathbf{e}'(t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t) &= \left[\eta_x(t) \quad \eta_y(t) \quad \eta_z(t) \right]^T = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}'(t) &= \left[e'_x(t) \quad e'_y(t) \quad e'_z(t) \right]^T = \frac{\mathbf{v}(t) \times \boldsymbol{\eta}(t)}{\mu} - \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

de forma que $e(t)$ e $i(t)$ sejam determinados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e(t) &= |\mathbf{e}'(t)| \\ i(t) &= \cos^{-1} \left(\frac{\eta_z(t)}{|\boldsymbol{\eta}(t)|} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Finalmente, considerando $\mathbf{n}(t)$ definido como:

$$\mathbf{n}(t) = \left[n_x(t) \quad n_y(t) \quad n_z(t) \right]^T = \left[-\eta_y(t) \quad \eta_x(t) \quad 0 \right]^T \quad (\text{B.4})$$

determinam-se $\Omega(t)$ e $\omega(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{n_x(t)}{|\mathbf{n}(t)|} \right) & \text{se } n_y(t) \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{n_x(t)}{|\mathbf{n}(t)|} \right) & \text{se } n_y(t) < 0 \end{cases} \\ \omega(t) &= \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{e}'(t)}{|\mathbf{n}(t)| |\mathbf{e}'(t)|} \right) & \text{se } e'_z(t) \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{e}'(t)}{|\mathbf{n}(t)| |\mathbf{e}'(t)|} \right) & \text{se } e'_z(t) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ressalta-se que as discontinuidades associadas às definições de $\Omega(t)$ e $\omega(t)$ podem impossibilitar a resolução do problema do lançamento de um foguete. Assim sendo, reformula-se

a Equação (B.5) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= U_s(n_y(t)) \cos^{-1} \left(\frac{n_x(t)}{|\mathbf{n}(t)|} \right) + \\ &\quad U_s(-n_y(t)) \left(2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{n_x(t)}{|\mathbf{n}(t)|} \right) \right) \\ \omega(t) &= U_s(e'_z(t)) \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{e}'(t)}{|\mathbf{n}(t)||\mathbf{e}'(t)|} \right) + \\ &\quad U_s(-e'_z(t)) \left(2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{e}'(t)}{|\mathbf{n}(t)||\mathbf{e}'(t)|} \right) \right)\end{aligned}\tag{B.6}$$

sendo $U_s(x)$ a função degrau. Em seguida, tratam-se as descontinuidades associadas a $\Omega(t)$ e $\omega(t)$ substituindo-se $U_s(x)$ por uma aproximação suave $U'_s(x)$, como aquela apresentada na Figura 121 (KELLY, 2017). Nesse caso adota-se:

$$U'_s(x) = 0,5 \left(1 + \tanh \left(\frac{x}{0,1} \right) \right)\tag{B.7}$$

tendo sido o parâmetro 0,1, que divide x , escolhido por meio de um processo de experimentação numérica.

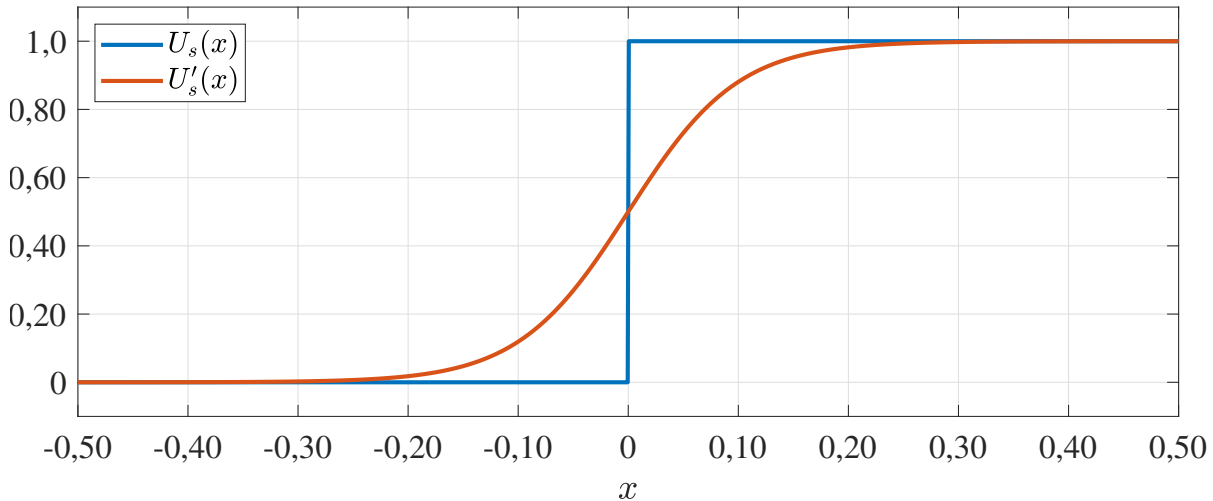


Figura 121 – Comparação entre a função degrau $U_s(x)$ e a aproximação suave $U'_s(x)$, introduzida em (B.7).