

**MARCELO ARAÚJO DELGADO FILHO**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS  
AEROELÁSTICOS EMPREGANDO ELEMENTOS  
FINITOS ESTOCÁSTICOS E O MÉTODO DOUBLET  
LATTICE**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
2021**

**MARCELO ARAÚJO DELGADO FILHO**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS AEROELÁSTICOS  
EMPREGANDO ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS E O  
MÉTODO DOUBLET LATTICE**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

**UBERLÂNDIA – MG  
2021**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU com  
dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

D352 2021	<p>Delgado Filho, Marcelo Araújo, 1996- Análise de estabilidade de sistemas aeroelásticos empregando elementos finitos estocásticos e o método doublet lattice [recurso eletrônico] / Marcelo Araújo Delgado Filho. - 2021.</p> <p>Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.27">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.27</a> Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, 1971-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p> <p>CDU: 621</p>
--------------	---

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**
**Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 579, COPEM				
Data:	12/02/2021	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	11:00
Matrícula do Discente:	11922EMC007				
Nome do Discente:	Marcelo Araújo Delgado Filho				
Título do Trabalho:	Análise de Estabilidade de Sistemas Aeroelásticos Empregando Elementos Finitos Estocásticos e o Método Doublet Lattice				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Projeto de Pesquisa PQ				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Marcus Antonio Viana Duarte - FEMEC/UFU; Flávio Donizeti Marques - USP/São Carlos; e Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, Marcus Antonio Viana Duarte e o Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Flávio Donizeti Marques desde a cidade de São Carlos/SP, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 12/02/2021, às 11:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Viana Duarte, Professor(a) do Magistério Superior**, em 12/02/2021, às 11:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flávio Donizeti Marques, Usuário Externo**, em 12/02/2021, às 11:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2543461** e o código CRC **43C059D0**.

*Ao meu Deus, minha família, amigos e colegas de trabalho.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a oportunidade de fazer o curso de mestrado na UFU e me capacitado a realizá-lo, por ter cuidado de mim e me abençoado em todos os aspectos, especialmente durante minha estadia em Uberlândia.

À minha família pelo total apoio e pela compreensão das horas que de convivência que tive que abrir mão para a realização deste trabalho. Especialmente, sou grato aos meus pais, pelo suporte, e meus irmãos, pelos momentos de descontração durante o *home office*.

Ao meu orientador, Prof. Antônio Marcos, pela confiança depositada, disponibilidade, dedicação e paciência. Agradeço também a Denner Borges, pela ajuda com a parte de aeronáutica e entendimento da programação.

Gostaria de agradecer também aos meus colegas do LMest, Gutemberg Diniz, Erivaldo Nunes, Ely Queiroz, Fernanda Rossi, João Sena, Arrais Neto, Bárbara Nara, Gabriella Garcia e Fernanda Beatriz, pelos momentos de descontração e auxílio tanto com o trabalho quanto com as disciplinas.

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica, pela oportunidade, e a todos os professores e colaboradores que contribuíram para a realização desse trabalho e para a minha formação pessoal. Por fim, ressalto que não seria possível desenvolver o presente estudo sem o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*“Por isso não tema, pois estou com você; não tenha medo, pois sou o seu Deus. Eu o fortalecerei e o ajudarei; Eu o segurarei com a minha mão direita vitoriosa.”*

*Isaías 41:10*



DELGADO FILHO, M. A. **Análise de estabilidade de sistemas aeroelásticos empregando elementos finitos estocásticos e o método doublet lattice**. 2021. 67 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## RESUMO

O *flutter* é uma instabilidade aeroelástica crítica, cuja consideração é fundamental para o projeto de qualquer aeronave. Apesar de existirem, na literatura aberta, metodologias bastante consolidadas para a quantificação do fenômeno de *flutter* subsônico, na prática, o sistema está frequentemente submetido a variações de seus parâmetros que, mesmo variando pouco, podem influenciar consideravelmente a sua resposta aeroelástica. Assim, visando prever de maneira mais realista e confiável as instabilidades em regime subsônico, faz-se necessário desenvolver metodologias que incorporem essas fontes de incertezas. Diante disso, esse trabalho objetivou avaliar o efeito da variação na geometria de uma asa sobre o seu comportamento estrutural e aeroelástico. A asa é representada por uma placa fina, segundo o método dos elementos finitos estocásticos, com a variação espacial da espessura sendo representada pela expansão de Karhunen-Loève e as incertezas introduzidas segundo o método de Monte Carlo. Por sua vez, o carregamento aerodinâmico não estacionário é estabelecido pelo método *doublet lattice*, por códigos próprios desenvolvidos em ambiente de programação MATLAB. Em seguida, a partir da equação do sistema aeroelástico estocástico, pôde-se formular um problema de autovalores cuja solução permitiu realizar a análise de estabilidade pretendida. Os resultados obtidos permitem avaliar não somente a potencialidade da metodologia proposta para tratar as incertezas em sistemas aeroelásticos em regime subsônico, mas também o seu grau de influência na velocidade de flutter do sistema. Fica evidente que a consideração das incertezas em modelos aeroelásticos é de fundamental importância para o projeto mais realístico de uma superfície sustentadora.

**Palavras-chave:** aeroelasticidade, quantificação de incerteza, *flutter*, método dos elementos finitos estocásticos, incerteza paramétrica.

DELGADO FILHO, M. A. **Stability analysis of aeroelastic systems using stochastic finite elements and doublet lattice methods.** 2021. 67 s. Master thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

## **ABSTRACT**

Flutter is a critical aeroelastic instability, whose consideration is fundamental during the design of any aircraft. Although there are well-established methodologies in the open literature for dealing with the flutter phenomenon, in practice, aeroelastic systems are frequently subjected to parameters variations that, even though vary little, may influence its aeroelastic response considerably. Thus, to make the flutter prediction more realistic and reliably, it is necessary to propose methodologies for dealing with the uncertain parameters. Therefore, this work aimed to evaluate the effect of geometric uncertainty of a wing on its structural and aeroelastic behavior. In this contribution, the wing is modelled as a thin plate by using the so-called stochastic finite element method, in which the spatial variation of the thickness is modelled through the Karhunen-Loève expansion and the uncertainties are introduced on the model by the Monte Carlo simulation. In turn, the non-stationary aerodynamic loads are given according to the doublet lattice method. Then, from the equation of motion of the stochastic aeroelastic system, it was possible to formulate an eigenvalue problem to be solved in order to predict the flutter boundary. The results demonstrated the applicability of the proposed methodology for dealing with parametric uncertainties on aeroelastic systems and their degree of influence on the flutter boundary. It is evident the importance of considering them on aeroelastic systems for dealing with more realistic situations.

**Keywords:** aeroelasticity, uncertainty quantification, flutter, stochastic finite element method, parametric uncertainty.

# Lista de Símbolos

## Sistema de coordenadas

$x, y, z$	Sistema de coordenadas global
$x_e, y_e, z_e$	Sistema de coordenadas do elemento finito
$\kappa, \eta, \zeta$	Sistema de coordenadas local do painel aerodinâmico
$K, l$	Coordenadas tangenciais do painel

## Símbolos latinos

$t$	Tempo
$C(t_1, t_2)$	Função de covariância do processo estocástico
$d$	Ordem do truncamento da expansão de Karhunen-Loève
$D$	Domínio do processo estocástico
$L_x$	Comprimento de correlação na direção $x$
$L_y$	Comprimento de correlação na direção $y$
$\tilde{w}$	Deslocamento transversal aproximado
$N(x, y)$	Funções de forma
$U_i$	Energia de deformação elementar
$E$	Módulo de Young
$S$	Área
$h$	Espessura da placa ou função que descreve a superfície sustentadora
$a_{jm}$	Constantes do polinômio de aproximação dos deslocamentos modais
$n_x, n_y$	Ordem dos polinômios de aproximação das formas modais
$n$	Número de estados de atraso aerodinâmico
$X, Y$	Coordenadas dos nós da malha de elementos finitos
$X_a, Y_a$	Coordenadas dos pontos de controle da malha aerodinâmica
$q_\infty$	Pressão dinâmica
$R$	Raio hiperbólico
$i$	Unidade imaginária
$A_\psi$	Intensidade do dipolo
$w_N$	Componente normal do campo de velocidade
$K$	Função <i>kernel</i> , ou termo planar da função <i>kernel</i>
$K_0$	Termo estacionário do <i>kernel</i>
$r$	Raio cilíndrico
$k$	Frequência reduzida
$k_j$	Número da iteração do método pk

$c$	Corda do painel
$e$	Envergadura do painel
$U_{\infty}$	Velocidade do escoamento livre
$M_{\infty}$	Número de Mach do escoamento livre
$a_{\infty}$	Velocidade do som do escoamento livre
$\bar{w}_N$	<i>normalwash</i> normalizado pelo escoamento livre
$\Delta c_p$	Coefficiente de pressão
$\Delta p$	Diferencial de pressão
$P(\bar{\eta})$	Polinômio de aproximação quadrática do kernel
$f$	Integral (Eq. B.21)
$h_m$	Deformação no plano médio
$h_t$	Limite do envelope de espessura
$w$	Grau de liberdade de deslocamento transversal
$q$	Coordenada modal
$b$	Semicorda
$p$	Autovalor associado ao método pk
$g$	Amortecimento associado ao método pk
$V$	Velocidade
$tol$	tolerância usada no método pk
$T_i$	Potencial de energia cinética elementar
$k_1$	Frequência reduzida modificada
$u$	Componente x do campo de velocidade
$u_1$	Variável de integração

## Símbolos Gregos

$\chi$	Processo estocástico
$\theta_i$	Ponto-amostra do processo estocástico
$\Omega$	Espaço amostral
$\Upsilon$	Conjunto dos parâmetros $t$
$\xi$	Variáveis ortogonais aleatórias de média nula
$\bar{\chi}(t)$	Média do processo estocástico
$f_k(t), f_i(x), f_j(y)$	Autofunções para um processo monodimensional
$f_k(x, y)$	Autofunções para um processo bidimensional
$\lambda_k(t)$	Autovalores associados à integral de Fredholm
$\alpha(t, \theta)$	Processo estocástico de média nula
$\tau_x, \tau_y$	Limites de $D$
$L_x, L_y$	Comprimentos de correlação nas direções $x$ e $y$
$\omega_i, \omega_j$	Soluções das equações transcendentais
$\theta_x, \theta_y$	Graus de liberdade de rotação nos eixos $x$ e $y$

$\varepsilon$	Vetor de deformação
$\delta$	Deslocamentos nodais no domínio do tempo
$\sigma$	Tensão
$\forall$	Volume
$\nu$	Coefficiente de poisson
$\phi$	Potencial de velocidade
$\Psi$	Potencial de aceleração de Prandtl
$\gamma$	Variável de integração na direção da corda
$\beta$	Fator de Prandtl-Glauert
$\omega$	Frequência de oscilação
$\Gamma_r, \Gamma_s$	Ângulos de diedro no ponto de recebimento e envio
$\Lambda_s$	Ângulo de enflechamento do painel emissor
$\rho$	Densidade do material
$\rho_\infty$	Densidade do ar

## Vetores e Matrizes

$[\Phi]$	Matriz modal
$[AIC]$	Matriz dos coeficientes aerodinâmicos
$[D]$	Matriz de fatores de <i>downwash</i>
$[D_E]$	Contribuição estacionária da Matriz de fatores de <i>downwash</i>
$[D_{NE}]$	Contribuição não estacionária da matriz de fatores de <i>downwash</i>
$[D_R], [D_I]$	Matriz de diferenciação
$[M_i]$	Matriz de massa elementar
$[K_i]$	Matriz de rigidez da elementar
$[\bar{M}_i]$	Contribuição determinística da matriz de massa elementar
$[\bar{K}_i]$	Contribuição determinística da matriz de rigidez elementar
$[M_{i,\alpha}]$	Contribuição estocástica da matriz de massa elementar
$[K_{i,\alpha}]$	Contribuição estocástica da matriz de rigidez elementar
$[Q_j]$	Matriz de esforços aerodinâmicos generalizada
$[M]$	Matriz de massa global
$[K]$	Matriz de rigidez global
$[M_q]$	Matriz de massa modal
$[K_q]$	Matriz de rigidez modal

$\{F\}$	Vetor de esforços no domínio do tempo
$\vec{N}_s$	Vetor entre a fonte e o sumidouro de um dipolo
$\vec{N}_r$	Vetor normal à superfície
$\vec{V}$	Vetor velocidade
$[T_{as}]$	Matriz de interpolação dos deslocamentos no ponto de controle
$[I]$	Matriz de identidade
$\{C\}$	Vetor com os coeficientes da aproximação de Roger

## Lista de Abreviações

AIC	Coeficientes de influência aerodinâmicos ( <i>Aerodynamic Influence Coefficients</i> )
CFD	Dinâmica de fluidos computacional ( <i>Computational Fluid Dynamics</i> )
COV	Coeficiente de Variação
DLM	Método Doublet Lattice ( <i>Doublet Lattice Method</i> )
FRF	Função de Resposta em Frequência
GAM	Matriz de esforços aerodinâmicos generalizada ( <i>Generalized Aerodynamics Matrix</i> )
KL	Karhunen-Loève
LMEst	Laboratório de Mecânica de Estruturas
MC	Monte Carlo
MEF	Método dos Elementos Finitos
SVD	Decomposição de Valor Singular ( <i>Singular Value Decomposition</i> )
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
VLM	Método Vortex Lattice ( <i>Vortex Lattice Method</i> )

## Lista de Figuras

Figura 1.1 – Diagrama de Collar (extraído de Yuting e Chao, 2014). .....	1
Figura 1.2 – Falha estrutural da ponte Tacoma Narrows (extraído de Rao, 2010). .....	2
Figura 2.1 – Elemento finito de placa.....	10
Figura 3.1 – Representação de uma superfície sustentadora pelo DLM (adaptado de Kotikalpudi; Pfifer; Balas, 2015).....	21
Figura 4.1 – Malha estrutural e malha aerodinâmica de um elemento de placa.....	30
Figura 4.2 – Diagrama vg para análise de estabilidade (extraído de Garrick e Reed, 1981). ..	32
Figura 4.3 – Fluxograma do método pk (adaptado de Borges, 2019). .....	34
Figura 5.1 – Fluxograma da rotina <i>Stochastic Plate</i> . .....	38
Figura 5.2 – Fluxograma da rotina <i>Aerosolver</i> . .....	39
Figura 6.1 – Dimensões nominais da asa em milímetros. ....	41
Figura 6.2 – Convergência da velocidade de <i>flutter</i> do sistema nominal com o refinamento de malha. ....	42
Figura 6.3 – Convergência da velocidade de <i>flutter</i> com o número de amostras.....	43
Figura 6.4 – Convergência da velocidade de <i>flutter</i> do sistema nominal com o número de modos. ....	44
Figura 6.5 – Cinco primeiros autovalores da expansão de Karhunen-Loève.....	45
Figura 6.6 – Diagrama vg para os modos 1 e 2. ....	46
Figura 6.7 – Diagrama vg para os demais modos.....	46
Figura 6.8 – Primeiro e segundo modos de vibrar.....	47
Figura 6.9 – Terceiro e quarto modos de vibrar. ....	47
Figura 6.10 – Quinto e sexto modos de vibrar. ....	48
Figura 6.11 – Diagrama vf para os modos 1 e 2.....	48
Figura 6.12 – Diagrama vf para os demais modos. ....	49
Figura 6.13 – Envelope de FRF para o caso estocástico. ....	50
Figura 6.14 – Histogramas para a variação das quatro primeiras frequências naturais.....	51
Figura 6.15 – Envelope vg para os modos 1 e 2.....	52
Figura 6.16 – Envelope vg para os modos 3 e 4.....	53
Figura 6.17 – Envelope vg para os modos 5 e 6.....	53
Figura 6.18 – Envelope vf para os modos 1 e 2. ....	54
Figura 6.19 – Envelope vf para os modos 3, 4, 5 e 6. ....	54
Figura 6.20 – Histograma da velocidade de <i>flutter</i> . ....	55



## Lista de Tabelas

Tabela 6.1 – Propriedades físicas do alumínio aeronáutico 6061-T6.....	41
Tabela 6.2 – Propriedades do regime de escoamento.....	41
Tabela 6.3 – Autovalores para uma expansão Karhunen-Loève de quinta ordem. ....	45
Tabela 6.4 – Primeiros momentos estatísticos e valores nominais das quatro primeiras frequências naturais .....	51

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica .....	3
1.3 Objetivo .....	7
1.4 Organização do Trabalho .....	7
<b>CAPÍTULO 2 - MODELAGEM ESTRUTURAL .....</b>	<b>9</b>
2.1 Método dos Elementos Finitos Estocástico .....	9
2.1.1 Matriz de rigidez elementar .....	11
2.1.2 Matriz de massa elementar .....	12
2.2 Representação da Incerteza pela Expansão de Karhunen-Loève.....	13
2.2.1 Solução do problema de autovalor – processo bidimensional.....	15
2.2.2 Matriz de rigidez elementar estocástica.....	17
2.2.3 Matriz de massa elementar estocástica.....	18
2.3 Equação de Movimento .....	18
<b>CAPÍTULO 3 - MODELAGEM AERODINÂMICA .....</b>	<b>20</b>
3.1 Método DLM .....	20
3.1.1 Potencial aerodinâmico linearizado.....	21
3.1.2 Solução do potencial aerodinâmico .....	21
3.1.3 Diferencial de pressão .....	23
3.1.4 Cálculo da matriz [AIC] .....	25
3.1.5 Cálculo da velocidade normal induzida .....	26
3.1.6 Esforços aerodinâmicos.....	28
<b>CAPÍTULO 4 - MODELAGEM AEROELÁSTICA .....</b>	<b>29</b>
4.1 Acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico .....	29
4.2 Análise de Estabilidade: Cálculo do <i>flutter</i> .....	32
4.2.1 Método pk.....	33
4.2.2 Aproximação de Roger.....	35
<b>CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....</b>	<b>37</b>

5.1	Análise Estrutural com Incerteza .....	37
5.2	Análise Aeroelástica .....	38
<b>CAPÍTULO 6 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>		<b>40</b>
6.1	Parâmetros de Simulação .....	40
6.1.1	Estrutura Analisada.....	40
6.1.2	Escoamento.....	41
6.1.3	Refinamento de malha .....	42
6.1.4	Número de amostras .....	42
6.1.5	Número de modos.....	43
6.1.6	Ordem da expansão de Karhunen-Loève.....	44
6.2	Análise de Estabilidade do Sistema Nominal .....	46
6.3	Análise de Estabilidade do Sistema Estocástico .....	49
6.3.1	Efeito da Incerteza sobre o Comportamento Estrutural.....	50
6.3.2	Efeito da Incerteza sobre o Comportamento Aeroelástico .....	52
<b>CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES GERAIS E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>		<b>56</b>
<b>Referências .....</b>		<b>59</b>
<b>Apêndice A .....</b>		<b>63</b>
<b>Apêndice B .....</b>		<b>65</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Contextualização

A aeroelasticidade é um campo interdisciplinar abrangendo os conceitos de aerodinâmica, elasticidade e dinâmica (Fig. 1.1). Fenômenos aeroelásticos envolvem uma significativa interação entre essas áreas e não estão associados somente à ciência aeronáutica, com aplicações nas engenharias mecânica, civil e nuclear (DOWELL, 2015). De fato, a falha catastrófica da ponte Tacoma Narrows em 1940 (Fig. 1.2), devido a esses fenômenos, é o um dos maiores exemplos da relevância e abrangência dessa área.

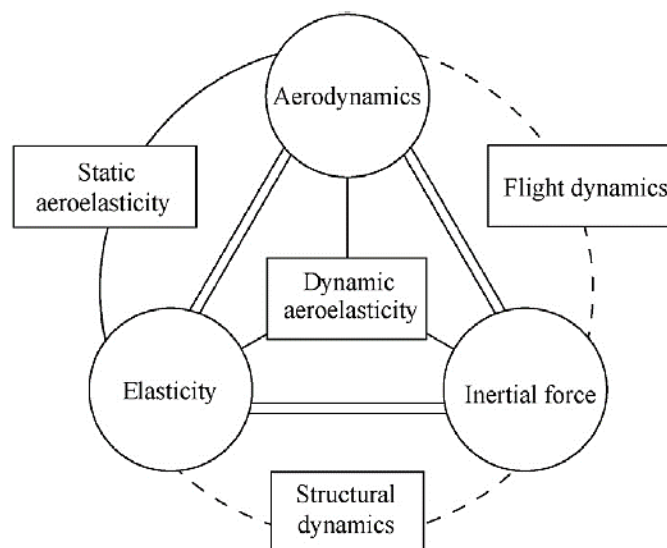


Figura 1.1 – Diagrama de Collar (extraído de Yuting e Chao, 2014).



Figura 1.2 – Falha estrutural da ponte Tacoma Narrows (extraído de Rao, 2010).

Já solucionados pela natureza, no voo de insetos e aves, problemas aeroelásticos não são novos. Séculos atrás, bem antes da aviação, eles foram constatados em moinhos de vento e resolvidos empiricamente (GARRICK e REED, 1981). Todavia, foi somente cerca de uma década e meia após a Segunda Guerra Mundial, que a interação entre cargas aerodinâmicas e deformações estruturais ganhou uma importância considerável, sobretudo com o desenvolvimento de aeronaves com asas cada vez mais afiladas e, conseqüente, mais flexíveis (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 1975). Atualmente, considerando um projeto moderno de uma aeronave, a demanda por estruturas extremamente leves exige o estudo dos fenômenos aeroelásticos, uma vez que podem não somente afetar consideravelmente o desempenho da aeronave, mas também se traduzir em instabilidades catastróficas (HODGES; PIERCE, 2011), como mencionado.

Entre os fenômenos estudados pela aeroelasticidade está o *flutter*, possivelmente um dos mais importantes e mais difíceis de se prever com exatidão (WRIGHT e COOPER, 2015). Essa instabilidade dinâmica se manifesta em uma velocidade específica, após uma rápida redução do amortecimento, criando uma oscilação auto sustentada, a qual pode, com um pequeno aumento na velocidade do escoamento, e, dada uma pequena perturbação acidental, resultar em uma vibração de elevada amplitude (FUNG, 1993).

Nesse contexto, um modelo aeroelástico pode ser obtido através do acoplamento do método dos elementos finitos (MEF), representante do comportamento estrutural, com um método dos painéis para modelar o carregamento aerodinâmico não estacionário, como o método *doublet lattice* (DLM) (BERAN; STANFORD; SCHROCK, 2017). Esse método se baseia na linearização do potencial aerodinâmico do escoamento e apresenta a vantagem de ter um menor custo computacional comparado a métodos de dinâmica de fluidos

computacional (CFD), sendo ideal para análises aeroelásticas preliminares, nas quais a geometria da aeronave não foi completamente definida (BORGES, 2019).

A partir da equação aeroelástica do sistema, pode-se formular um problema de autovalor, cuja solução iterativa, permite determinar o comportamento do amortecimento e frequências naturais do sistema modo a modo e, assim, identificar a velocidade na qual esse torna-se instável.

A metodologia para aferição da velocidade crítica na qual o *flutter* ocorre, é bem consolidada. Todavia, na prática, várias fontes de incerteza se fazem presentes em sistemas aeroelásticos, provenientes de imprecisões nos processos de fabricação e montagem; de oscilações nos parâmetros do modelo matemático e do próprio modelo; bem como do caráter numérico dos métodos computacionais utilizados na análise (SAVIN; HANTRAIS-GERVOIS, 2020). Todas essas variações podem influenciar bastante o comportamento de instabilidades como o *flutter* (BERAN; STANFORD; SCHROCK, 2017), devendo ser adequadamente analisadas.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Uma abordagem estocástica de problemas aeroelásticos é fundamental para a concepção de sistemas robustos, mais eficientes e seguros. Todavia, como constatado por Beran; Stanford; Schrock (2017), a literatura que trata da quantificação de incerteza em aeroelasticidade é relativamente escassa. Mesmo assim, estudos foram e têm sido feitos no sentido de avaliar o impacto de incertezas sobre instabilidades como o *flutter*. Nesse sentido, faz-se uma distinção entre os modelos aeroelásticos baseados em dinâmica de fluidos computacional (CFD) e os demais, denominados tradicionais, do qual faz parte o modelo proposto nesta dissertação.

A principal vantagem inerente aos modelos tradicionais é apresentarem um custo computacional inferior aos métodos de CFD, que, através das equações de Navier-Stokes, utilizam uma abordagem mais representativa fisicamente. Justamente por esse motivo, as abordagens tradicionais foram as primeiras a serem propostas, apresentando uma maior quantidade de trabalhos na literatura. De forma geral, tendo em vista que estruturas aeronáuticas reais podem estar sujeitas a um elevado número variáveis incertas, sobretudo no caso de materiais compósitos, uma parcela considerável dos trabalhos estuda predominantemente as incertezas paramétricas.

Um desses trabalhos é o de Liaw e Yang (1991) que estudaram a partir da teoria do pistão quase-estacionário o fenômeno de *flutter* em regime supersônico de uma casca laminada, considerando incertezas associadas à espessura, orientações de fibra, módulo de elasticidade e densidade do material. Apesar do considerável número de fontes de incertezas analisado, ressalta-se que o amortecimento aerodinâmico, um importante efeito, foi desprezado. Pode-se contornar essa limitação através de uma modelagem aerodinâmica mais realista. Uma opção, é o uso de métodos dos painéis não estacionários, como o *doublet lattice method* (DLM).

Utilizando essa metodologia, Kuttenukeuler e Ringertz (1998) investigaram o design ótimo de asas de compósito sujeitas a incertezas nas propriedades de material. Nesse sentido, é considerada a soma mínima de massas concentradas, dispostas no bordo de ataque e de fuga, capaz de elevar a velocidade de *flutter* a um determinado valor. Considerando as incertezas tanto em relação à variação da espessura quanto à variação da rigidez para uma determinada espessura, uma margem de estabilidade é obtida a partir da máxima mudança possível de autovalor e incorporada no problema de otimização. Conclui-se que a condição de projeto só pôde ser alcançada experimentalmente com a incorporação da margem de estabilidade proposta, isto é, através da consideração de incertezas, ilustrando a relevância da abordagem.

Kurdi; Lindsley; Beran (2007), estudaram os efeitos de variações na geometria de uma asa tipo *Goland* considerando uma massa não estrutural na ponta. Após a realização de uma análise de sensibilidade, constatou-se uma elevada dependência da velocidade de *flutter* com relação às dimensões de espessura. Semelhantemente, Khodaparast; Mottershead; Badcock (2010) também analisam o comportamento aeroelástico de uma asa *Goland*, identificando os parâmetros mais relevantes através de uma análise de sensibilidade da geometria. Utilizando-se três métodos diferentes de propagação de incerteza: análise de intervalo, lógica *fuzzy* e perturbação; mostra-se, mais uma vez, que fenômeno de *flutter* é sensível a variações na espessura. Destaca-se que, como observado pelos autores, o efeito dessa variação é mais influente para menores números de Mach, em regime subsônico. Outro ponto analisado no estudo é a influência da incerteza associada ao amortecimento estrutural, modelado por amortecedores distribuídos ao longo da asa, cujos coeficientes seguiam uma distribuição gaussiana. Observa-se que, apesar da sua inclusão elevar um pouco a velocidade crítica do sistema nominal, como é esperado, não há efeito significativo causado pela variação do amortecimento sobre os envelopes de *flutter*.

A mesma conclusão quanto à influência do amortecimento é obtida no trabalho de Georgiou; Manan; Cooper (2012), que empregaram o caos polinomial para a avaliação das incertezas de uma asa de compósito. Ademais, os autores também concluem que incertezas no módulo de elasticidade do material influenciam significativamente o comportamento aleatório do *flutter*.

Por sua vez, ressalta-se que é importante não somente identificar os parâmetros do sistema cuja variação pode impactar o *flutter* de maneira mais expressiva, mas também representar adequadamente o comportamento estocástico desses parâmetros. Nesse sentido, alguns trabalhos empregam a expansão de Karhunen-Loève. Castravete e Ibrahim (2008) foram os pioneiros na aplicação dessa metodologia na quantificação de incertezas de estruturas aeroelásticas, quando consideraram variações nos parâmetros de rigidez à torção e à flexão. Em seu trabalho, os referidos autores representaram a asa por uma viga e consideraram os campos aleatórios como monodimensionais. O mesmo procedimento foi adotado por Verhoosel et al., (2009) para estudar a influência da variação no módulo de elasticidade, segundo uma distribuição log-normal, sobre o *flutter*. Foi observada uma notável sensibilidade, com a incerteza reduzindo o número de Mach crítico em relação ao caso nominal, o que sugere que a abordagem determinística fornece uma estimativa menos conservadora da margem de estabilidade.

Vale salientar que apesar da maioria dos trabalhos possuírem aviões como objetos de estudo, há também aqueles voltados para análise de asas rotativas. Por exemplo, Murugan et al., (2012), avalia o efeito de variações na rigidez de uma pá de rotor de helicóptero, feita de material compósito. Semelhantemente aos trabalhos supracitados, a incerteza é representada pela expansão de Karhunen-Loève. Se conclui que a variação espacial da rigidez, ao longo da envergadura da pá, influencia bastante o carregamento do rotor da aeronave.

Ainda em relação às incertezas paramétricas, ressalta-se que podem interferir não somente na magnitude da velocidade crítica, mas também em qual mecanismo de instabilidade encontrado pois, como apontado por Beran; Stanford; Schrock (2017), variações paramétricas podem levar ao reordenamento dos mecanismos de instabilidades. Isso é constatado por Scarth et al., (2014), que perceberam que a incerteza no ângulo de camada de uma asa de compósito laminado conduziu a um *flutter* variável com características bimodais.

Além das variações nos parâmetros de um modelo matemático, o próprio modelo em si constitui uma fonte de incerteza, pois é uma aproximação da realidade. Em uma tentativa de estudar esse tipo de aleatoriedade, Bansal e Pitt (2013) consideram os valores dos coeficientes



de influência aerodinâmicos (AICs), obtidos pelo DLM, como incertos. Assim, os autores propõem corrigir os valores numéricos dos AICs a partir de resultados experimentais e tratar os fatores de correção como variáveis aleatórias uniformemente distribuídas. Para esse estudo, os resultados mostram que, em relação à velocidade de *flutter*, as variações nos coeficientes AICs são menos importantes do que as variações nos parâmetros estruturais.

Outro trabalho que também leva em consideração fontes de incerteza relacionadas ao modelo matemático é o de Nitschke et al., (2017). Em seu estudo, calibração bayesiana é empregada para atingir um melhor nível de confiança na previsão da velocidade crítica de um sistema aeroelástico simples, composto por uma seção crítica com dois graus de liberdade, sendo um de deslocamento e o outro de inclinação. Nesse contexto, as incertezas estariam relacionadas às aproximações da função de sustentação de Theodorsen, cujos coeficientes incertos são calibrados a partir de valores experimentais para a velocidade de *flutter*. Os resultados mostram reduções substanciais nas incertezas relacionadas a essa velocidade em comparação com os casos não calibrados, nos quais a abordagem padrão foi utilizada.

No projeto de aeronaves, um aspecto importante é o efeito que componentes anexos como tanques de combustível externos, cargas, mísseis, entre outros, podem ter sobre o comportamento aeroelástico da estrutura. Levando isso em consideração, Tartaruga et al., (2017) empregam abordagens probabilísticas e não probabilísticas para avaliar o efeito de variações da massa estrutural sobre a pressão dinâmica de *flutter* de um modelo de transporte supersônico. Foi assumida uma distribuição normal para os grupos de massas estruturais alocados ao longo da estrutura. Ademais, como geralmente feito, o modelo determinístico empregado é um conjunto MEF-DLM. Após realizar a propagação de incerteza por SVD (*Singular Value Decomposition*), expansão por caos polinomial e lógica *fuzzy*, os autores concluem que todos os métodos são adequados para quantificar os efeitos da incerteza estrutural sobre o comportamento aeroelástico, sendo obtida uma elevada precisão juntamente com uma redução significativa do custo computacional, em comparação com a abordagem Monte Carlo.

De maneira geral, segundo a revisão realizada, percebe-se a importância da quantificação de incerteza em problemas aeroelásticos, exemplificada pela notável sensibilidade dos envelopes de *flutter* em relação às fontes de incertezas consideradas, principalmente para um regime de escoamento subsônico. Como constatado pelo uso de diferentes métodos, entre as variáveis aleatórias mais importantes estão as relacionadas à espessura e às propriedades dos materiais, excetuando-se o amortecimento estrutural. Além

disso, apesar da maioria dos trabalhos tratarem de incertezas paramétricas, existe bastante espaço para contribuições nessa área. Nesse sentido, nota-se que a modelagem da superfície sustentadora como uma viga e a representação do parâmetro estocástico por uma expansão de Karhunen-Loève unidimensional se perpetua em trabalhos recentes, como o de Kumar; Onkar; Maligappa (2019). Todavia, considerando que a geometria de uma asa é uma forma predominantemente descrita por duas dimensões, uma abordagem mais realista seria tratar a asa como uma placa e assumir uma distribuição bidimensional para a variável estocástica. Isso é proposto pelo presente trabalho.

### 1.3 Objetivo

Diante do apresentado, a dissertação proposta tem por objetivo realizar uma análise de estabilidade de um sistema aeroelástico em regime subsônico, considerando incerteza na sua geometria, utilizando, para esse fim, uma abordagem probabilística. Mais especificamente, procura-se quantificar o efeito da espessura, assumida variável, sobre a velocidade crítica de *flutter* de uma placa fina representativa de uma superfície sustentadora. A avaliação do impacto da incerteza sobre o comportamento estrutural também é um objetivo.

Ressalta-se que o trabalho pretendido representa uma contribuição no contexto das pesquisas desenvolvidas no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), na medida em que se propõe a inserir quantificação de incerteza em um problema de aeroelasticidade através de elementos finitos estocásticos. Com esse propósito, algoritmos próprios devem ser concebidos e adaptados para interagir com os códigos de análise aerodinâmica existentes no laboratório.

### 1.4 Organização do Trabalho

Esta seção sumariza os conteúdos de cada capítulo, os quais foram divididos de maneira a possibilitar uma melhor compreensão do trabalho.

No Capítulo 1, é discutida a contextualização do trabalho quanto à quantificação de incerteza em análises de estabilidade, com destaque para o fenômeno de *flutter*. Além disso, são apresentados os objetivos e contribuições do trabalho bem como uma revisão bibliográfica acerca do tema.

No Capítulo 2, discute-se a modelagem do comportamento estrutural segundo o método dos elementos finitos estocásticos, sendo apresentada a metodologia de discretização

do campo aleatório e de inserção da espessura incerta nas matrizes elementares de massa e rigidez do sistema.

No Capítulo 3, trata-se da modelagem aerodinâmica. É apresentada aqui, de maneira resumida, a formulação do DLM, a partir do potencial de velocidade linearizado.

No Capítulo 4, é realizado o acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico de maneira se obter, no domínio modal, a equação aeroelástica do sistema. Em seguida, é mostrado como essa expressão pode ser usada para o cálculo da velocidade crítica de *flutter* via método pk. Discute-se ainda como as matrizes aerodinâmicas generalizadas necessárias podem ser aproximadas, reduzindo consideravelmente o custo computacional da análise pretendida.

No Capítulo 5, a implementação computacional da metodologia abordada nos capítulos anteriores é apresentada, visando proporcionar uma visão geral. Nesse sentido, divide-se o procedimento numérico em duas partes principais: o *Aerosolver*, responsável pela modelagem aeroelástica e o *Stochastic Plate*, responsável pela modelagem estrutural com incerteza.

No Capítulo 6, apresenta-se a metodologia utilizada para definição dos parâmetros de simulação, os quais são: nível de refinamento de malha, o número de amostras, a ordem da redução modal e ordem da expansão de Karhunen-Loève. São apresentados também os resultados referentes ao sistema nominal e ao sistema com incerteza, sendo analisado o efeito dessa sobre o comportamento estrutural e aeroelástico.

No Capítulo 7, faz-se uma breve retomada do trabalho realizado, resumizando a sua motivação e procedimento de simulação. Além disso, são apresentadas as conclusões, e sugestões para trabalhos futuros, bem como melhoramentos sugeridos na metodologia computacional utilizada.

## CAPÍTULO II

### MODELAGEM ESTRUTURAL

Neste trabalho, a dinâmica estrutural da superfície sustentadora é modelada pelo método dos elementos finitos (MEF) a fim de se obter as características de inércia e de rigidez da estrutura. Incertezas podem ser incorporadas no MEF através de várias formas. Uma delas consiste em representar os parâmetros aleatórios, também chamados de processos estocásticos, por uma expansão em série, denominada expansão de Karhunen-Loève. De acordo com essa metodologia, as matrizes elementares passam a depender de um número aleatório, obtido com base na amostragem de uma determinada distribuição estatística. Desta forma, uma vez obtidas as matrizes elementares aleatórias, a incerteza pode ser propagada pelo método Monte Carlo, a partir das amostras.

#### 2.1 Método dos Elementos Finitos Estocástico

O comportamento dinâmico estrutural considerando a incerteza associada à variação da espessura é modelado pelo MEF estocástico. Isso é feito a partir da formulação tradicional determinística, na qual a asa é tratada como uma placa fina segundo a abordagem de Kirchhoff-Love, descrita em Reddy (2006). De posse das matrizes elementares pode-se representar a espessura aleatória pela expansão de KL, de forma a se caracterizar o comportamento estocástico do sistema.

Para a obtenção das matrizes elementares determinísticas prossegue-se à discretização da asa em elementos retangulares de dimensões  $a \times b$ . Como mostrado na Fig. 2.1, tem-se um elemento com quatro nós ( $k, l, m, n$ ) e três graus de liberdade (gdl's) por nó, sendo dois de rotação ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ) e um de deslocamento na direção  $z_e$  ( $w$ ). Vale salientar que o sistema de

referência  $(x_e, y_e, z_e)$  apresentado na Fig. 2.1 é o sistema elementar e que, a fim de se obter uma notação mais compacta, o subscrito  $e$  será suprimido nesta seção.

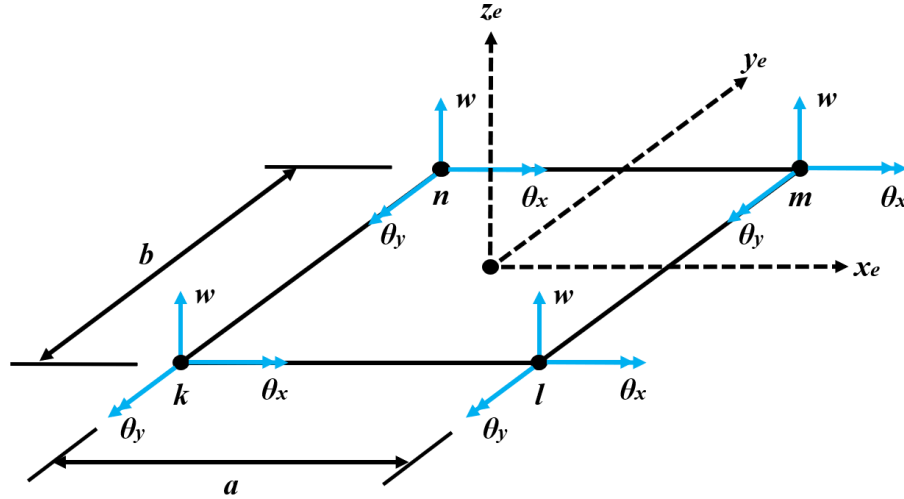


Figura 2.1 – Elemento finito de placa.

Tendo em vista que o elemento de placa fina se encontra no estado plano de tensão, o campo de deformação será devido aos efeitos de flexão e dado pela Eq. (2.1):

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

na qual  $\tilde{w}$  representa deslocamento transversal aproximado, que será doravante denotado simplesmente por  $w$ . Nesse sentido, polinômios bidimensionais de terceira ordem são empregados para a aproximação.

A partir das funções de forma  $N(x, y)$ , cuja obtenção é detalhada no Apêndice A, o deslocamento transversal aproximado  $w$  pode ser descrito pela Eq.(2.2), em função dos gld's do elemento  $i$ ,  $\{\delta_i\}$ :

$$w(x, y) = N(x, y) \{\delta_i\} \quad (2.2)$$

Substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.1), escreve-se a deformação como:

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{\delta_i\} \quad (2.3)$$

Em uma forma mais compacta, a Eq. (2.3) converte-se em:

$$\{\varepsilon\} = -z[B]\{\delta_i\} \quad (2.4)$$

As Eq. (2.2) e Eq. (2.4) podem ser empregadas para obter as matrizes determinísticas de massa e de rigidez do elemento finito de placa. Uma vez que tenham sido calculadas as matrizes elementares de massa e rigidez, incertezas paramétricas podem ser incorporadas pela expansão de KL seguindo a abordagem de Ghanem e Spanos (1991), como será mostrado posteriormente na seção 2.2.

### 2.1.1 Matriz de rigidez elementar

A energia de deformação de um elemento finito de placa é dada pela Eq. (2.5):

$$U_i = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T \sigma dV \quad (2.5)$$

em que, no estado plano de tensão e no regime linear elástico a tensão é escrita como:

$$\sigma = E[A]\{\varepsilon\} \quad (2.6)$$

e a matriz  $[A]$  é definida pela Eq. (2.7):

$$[A] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Substituindo a Eq. (2.6) na Eq. (2.5), pode-se obter:

$$U_i = \frac{1}{2} \iiint_V E \{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\} dV \quad (2.8)$$

Substituindo-se o vetor de deformação  $\{\varepsilon\}$ , Eq. (2.4), na Eq. (2.8) escreve-se a energia de deformação em função dos gdl's e das funções de forma, implícitas na matriz  $[B]$ :

$$U_i = \frac{1}{2} \iint_S \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E [B]^T \{\delta_i\}^T [A] [B] \{\delta_i\} dz dS \quad (2.9)$$

Integrando a Eq. (2.9) em  $z$  e tendo em vista que o vetor de gdl's é constante, é possível reescrevê-la na forma da Eq. (2.10):

$$U_i = \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T \iint_A \frac{h^3}{12} E [B]^T [A] [B] dS \{\delta_i\} \quad (2.10)$$

Agrupando-se os termos na Eq. (2.10), chega-se à Eq. (2.11):

$$U_i = \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T [K_i] \{\delta_i\} \quad (2.11)$$

na qual a matriz de rigidez elementar  $[K_i]$  é escrita segundo a Eq. (2.12):

$$[K_i] = \iint_S \frac{h^3}{12} E [B]^T [A] [B] dS \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Matriz de massa elementar

A matriz de massa elementar pode ser obtida a partir da Eq.(2.13), que representa a energia cinética do elemento finito de placa:

$$T_i = \frac{1}{2} \iiint_{\forall} \rho \dot{w}^2 d\forall \quad (2.13)$$

sendo a velocidade  $\dot{w}$  obtida pela derivação no tempo da Eq. (2.2):

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = N(x, y) \{\dot{\delta}_i\} \quad (2.14)$$

Desenvolvendo a Eq.(2.14) e decompondo  $d\forall$  em  $d\forall = dz \cdot dS$ , escreve-se a energia cinética como:

$$T_i = \frac{1}{2} \iint_S \int_{-h/2}^{h/2} \rho \{\dot{\delta}_i\}^T N(x, y)^T N(x, y) \{\dot{\delta}_i\} dz dS \quad (2.15)$$

Efetuando-se a integração em  $dz$  e tendo em vista que os gdl's  $\{\delta_i\}$  são constantes, a expressão para a energia cinética converte-se em:

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_i\}^T \iint_S \rho h N(x, y)^T N(x, y) dS \{\dot{\delta}_i\} \quad (2.16)$$

A partir da Eq. (2.16), explicita-se na Eq. (2.17) a matriz de massa elementar  $[M_i]$ :

$$T_i = \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T [M_i] \{\delta_i\} \quad (2.17)$$

de maneira que  $[M_i]$  é dada pela Eq. (2.18):

$$[M_i] = \iint_S \rho h N(x, y)^T N(x, y) dS \quad (2.18)$$

## 2.2 Representação da Incerteza pela Expansão de Karhunen-Loève

As matrizes de massa e de rigidez elementares obtidas na seção anterior são determinísticas. No entanto, pretende-se tratar a espessura como um parâmetro variável segundo uma distribuição gaussiana. Em outras palavras, a espessura consiste em um processo estocástico.

Um processo estocástico é uma função de duas variáveis que associa um número  $\chi(t, \theta)$  a um ponto amostra  $\theta$  e a um tempo  $t$ , pertencentes, respectivamente, ao espaço de amostras  $\Omega$  e a um conjunto  $Y$  (SAMPAIO; LIMA, 2012). De acordo com essa definição, fixado um ponto amostra  $\theta_i$ , obtém-se uma função  $\chi(t, \theta_i)$  exclusivamente de  $t$ , a qual representa uma realização do fenômeno aleatório considerado. Assim, um processo estocástico também poderia ser descrito como o conjunto de todos os históricos que podem ser produzidos pelo fenômeno (BENDAT; PIERSOL, 2010).

Com base na definição anterior, um processo estocástico é um campo aleatório. Dessa forma, ele é formado por infinitos conjuntos de variáveis aleatórias correlacionadas, o que é intratável computacionalmente (SUDRET, 2007). Portanto, fica evidente a necessidade de discretizar o processo a fim de utilizá-lo em aplicações numéricas, como o método dos elementos finitos. Uma alternativa mais eficiente do que os métodos de discretização pontual e de discretização média, que precisam de um elevado número de variáveis aleatórias para a gerar uma aproximação adequada, é o conjunto de métodos baseados na expansão em séries,



nos quais o processo estocástico é representado por uma série truncada que envolve variáveis aleatórias e funções espaciais determinísticas (GHANEM; SPANOS, 1991; SUDRET, 2007).

A abordagem de Karhunen-Loève (KL) pertence ao referido conjunto. Segundo essa metodologia, o processo aleatório pode ser descrito pela Eq.(2.19):

$$\chi(t, \theta) = \bar{\chi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} f_k(t) \xi_k(\theta) \quad (2.19)$$

na qual  $\bar{\chi}(t)$  representa a média do processo em função de  $t$  e  $\xi_k(\theta)$  designam variáveis ortogonais de média zero, obtidas a partir da amostragem de uma determinada distribuição estatística. Por sua vez,  $f_k(t)$  e  $\lambda_k(t)$  são, respectivamente, as autofunções e os autovalores correspondentes ao problema descrito na Eq.(2.20):

$$\int_Y C(t_1, t_2) f_k(t_2) dt_2 = \lambda_k f_k(t_1) \quad (2.20)$$

sendo o *kernel*  $C(t_1, t_2)$  é a função de covariância do processo. Salienta-se que, como  $C(t_1, t_2)$  é limitada, simétrica e positivo-definida, as autofunções  $f_k(t)$  formam uma base ortogonal (SUDRET, 2007).

Como mencionado, realiza-se um truncamento da série a fim de viabilizar a sua aplicação. Assim, limita-se o somatório da Eq.(2.19) a um número  $d$  de termos, o que resulta na Eq. (2.21):

$$\chi(t, \theta) = \bar{\chi}(t) + \sum_{k=1}^d \sqrt{\lambda_k} f_k(t) \xi_k(\theta) \quad (2.21)$$

Desta forma, a expansão de Karhunen-Loève, pode ser considerada uma discretização abstrata do processo estocástico na medida em que o descreve como uma curva no espaço Hilbertiano, gerado pelo conjunto  $\xi_k(\theta)$ , de maneira que o processo é expresso como uma soma direta de projeções ortogonais nesse espaço, com sucessivos vetores base sendo proporcionais aos autovalores correspondentes da função de covariância do processo (GHANEM; SPANOS, 1991).

Pode-se escrever a Eq. (2.21) de uma maneira mais compacta, na forma:

$$\chi(t, \theta) = \bar{\chi}(t) + \alpha(t, \theta) \quad (2.22)$$

Sendo:

$$\alpha(t, \theta) = \sum_{k=1}^d \sqrt{\lambda_k} f_k(t) \xi_k(\theta) \quad (2.23)$$

De acordo com essa notação, o primeiro termo da Eq. (2.22),  $\bar{\chi}(t)$ , representa a média do processo estocástico, a qual torna-se independente de  $t$ , isto é, uma constante, se o processo for estacionário (BENDAT; PIERSOL, 2010). Por sua vez, o segundo termo,  $\alpha(t, \theta)$ , é um processo estocástico de média nula e mesma covariância de  $\chi(t, \theta)$ . Quanto ao parâmetro  $t$ , apesar de descrever, em geral, o tempo, pode representar uma variável de espaço. No caso de um processo bidimensional, tem-se uma dependência em relação a duas variáveis espaciais.

### 2.2.1 Solução do problema de autovalor – processo bidimensional

A Eq. (2.20) contendo a função de covariância do processo é uma integral de Fredholm. Como exposto, é necessário resolvê-la para se determinar os autovalores e autofunções do processo estocástico e, assim, realizar a sua discretização pelo método de Karhunen-Loève.

No caso de um processo estocástico bidimensional com uma função de densidade espectral racional, definido por  $\chi(x, y, \theta)$  sobre um intervalo finito  $D = [-\tau_x, \tau_x] \cdot [-\tau_y, \tau_y]$ , foi mostrado por Ghanem e Spanos (1991) que a função de covariância pode ser dada na forma exponencial por:

$$C(x_1, x_2, y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad (2.24)$$

na qual  $L_x$  e  $L_y$  denotam os comprimentos de correlação nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Dessa maneira, a resolução da integral de Fredholm corresponde à função de correlação da Eq. (2.24) e é obtida, segundo os autores supracitados, por separação de variáveis, apresentando a seguinte forma:

$$\lambda_k = \lambda_i \lambda_j \quad (2.25)$$

$$f_k(x, y) = f_i(x) f_j(y) \quad (2.26)$$

sendo  $\lambda_i$ ,  $\lambda_j$ ,  $f_i(x)$  e  $f_j(y)$  as soluções do problema monodimensional que variam se o contador  $k$  de um termo da expansão for par ou ímpar. Caso  $k$  seja ímpar as autofunções são dadas por:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{\cos(\omega_i x)}{\sqrt{\tau_x + \frac{\text{sen}(2\omega_i \tau_x)}{2\omega_i}}} \\ f_j(y) &= \frac{\cos(\omega_j y)}{\sqrt{\tau_y + \frac{\text{sen}(2\omega_j \tau_y)}{2\omega_j}}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que  $\omega_i$  e  $\omega_j$  são as soluções das equações transcendentais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_x} - \omega_i \tan(\omega_i \tau_x) &= 0 \\ \frac{1}{L_y} - \omega_j \tan(\omega_j \tau_y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Se  $k$  for par, as autofunções são calculadas por:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{\text{sen}(\omega_i x)}{\sqrt{\tau_x - \frac{\text{sen}(2\omega_i \tau_x)}{2\omega_i}}} \\ f_j(y) &= \frac{\text{sen}(\omega_j y)}{\sqrt{\tau_y - \frac{\text{sen}(2\omega_j \tau_y)}{2\omega_j}}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

sendo as soluções das equações transcendentais obtidas segundo:

$$\begin{aligned} \omega_i + \frac{1}{L_x} \tan(\omega_i \tau_x) &= 0 \\ \omega_j + \frac{1}{L_y} \tan(\omega_j \tau_y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Em ambos os casos se tem as mesmas equações para os autovalores  $\lambda_i$ ,  $\lambda_j$ , os quais são dados por:

$$\lambda_i = \frac{2}{\left( \omega_i^2 + \left( \frac{1}{L_x} \right)^2 \right) L_x}$$

$$\lambda_j = \frac{2}{\left( \omega_j^2 + \left( \frac{1}{L_y} \right)^2 \right) L_y}$$
(2.31)

### 2.2.2 Matriz de rigidez elementar estocástica

A Eq. (2.12) que descreve a matriz de rigidez elementar é determinística. A fim de se representar incerteza na espessura  $h$  de acordo com a expansão de KL, considera-se que o termo  $h^3$  seria escrito segundo a Eq. (2.32), como a soma do seu valor médio  $\bar{h}^3$  com uma contribuição aleatória de média nula:

$$h^3 = (\bar{h}^3 + \alpha_h)$$
(2.32)

sendo processo estocástico  $\alpha_h(x, y, \theta)$ , definido por:

$$\alpha_h(x, y, \theta) = \sum_{k=1}^d \sqrt{\lambda_k} f_k(x, y) \xi_k(\theta)$$
(2.33)

Substituindo a Eq. (2.32) e Eq. (2.33) na Eq. (2.12), representa-se a matriz de rigidez elementar na forma da Eq. (2.34):

$$[K_i] = [\bar{K}_i] + \sum_{k=1}^d [K_{i,\alpha}] \xi_k(\theta)$$
(2.34)

na qual a parcela determinística da matriz de rigidez é definida pela Eq. (2.35):

$$[\bar{K}_i] = \iint_S \frac{\bar{h}^3}{12} E [B]^T [A] [B] dS$$
(2.35)

e a parcela associada à contribuição estocástica é dada pela Eq. (2.36):

$$[K_{i,\alpha}] = \iint_S \frac{E}{12} \sqrt{\lambda_k} f_k(x, y) [B]^T [A] [B] dS$$
(2.36)

### 2.2.3 Matriz de massa elementar estocástica

Semelhantemente ao que foi feito para a matriz de rigidez, a incerteza na espessura  $h$  é representada como a soma do seu valor médio  $\bar{h}$  com uma contribuição aleatória de média nula,  $\alpha_h(x, y, \theta)$ , dada pela Eq. (2.33):

$$h = (\bar{h} + \alpha_h) \quad (2.37)$$

Em seguida, substituindo as Eq. (2.37) e Eq. (2.33) na Eq. (2.18), representa-se a matriz de massa elementar como definido pela Eq. (2.38):

$$[M_i] = [\bar{M}_i] + \sum_{k=1}^d [M_{i,\alpha}] \xi_k(\theta) \quad (2.38)$$

sendo a parcela determinística da matriz de massa descrita pela Eq. (2.39):

$$[\bar{M}_i] = \iint_S \rho \bar{h} N(x, y)^T N(x, y) dS \quad (2.39)$$

e a parcela relacionada à contribuição aleatória definida pela Eq. (2.40):

$$[M_{i,\alpha}] = \iint_S \rho \sqrt{\lambda_k} f_k(x, y) N(x, y)^T N(x, y) dS \quad (2.40)$$

## 2.3 Equação de Movimento

Uma vez que as matrizes elementares foram obtidas considerando-se as variações na espessura, pode-se obter as matrizes globais de massa e de rigidez. Para isso, as matrizes elementares são expandidas em coordenadas globais por meio das matrizes de transformação de coordenadas  $[T_i]$  e, sem seguida, somadas elemento a elemento:

$$[M] = \sum_{i=1}^{n^\circ \text{ de elementos}} [T_i]^T [M_i] [T_i] \quad (2.41)$$

$$[K] = \sum_{i=1}^{n^\circ \text{ de elementos}} [T_i]^T [K_i] [T_i] \quad (2.42)$$

De posse das matrizes globais  $[M]$  e  $[K]$ , a equação de movimento do sistema é dada pela equação (2.43), na qual o amortecimento estrutural foi desprezado:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (2.43)$$

sendo os deslocamentos nodais são dados por  $\{\delta\}$ , enquanto  $\{F\}$ , do lado direito, designa o vetor de esforços atuantes sobre a estrutura.

## CAPÍTULO III

### MODELAGEM AERODINÂMICA

O cálculo da velocidade de crítica de *flutter* pressupõe o conhecimento do carregamento aerodinâmico não-estacionário ao qual a estrutura está submetida. Como o *flutter* é um fenômeno intrinsecamente dinâmico, é necessário fazer uso da aerodinâmica não estacionária. Para essa tarefa, emprega-se, no presente trabalho, o Método *Doublet Lattice* (DLM), cuja descrição é apresentada neste capítulo. Maiores detalhes da formulação podem ser encontrados em Blair (1992).

#### 3.1 Método DLM

O DLM foi originalmente proposto por Albano e Rodden (1969) com o intuito de adaptar o *Vortex Lattice Method* (VLM), desenvolvido por Hedman (1966), a um escoamento não estacionário. Diante disso, semelhantemente ao VLM, a superfície sustentadora é representada por um conjunto de painéis, dispostos em colunas paralelas ao escoamento (Fig. 3.1). Por sua vez, cada painel possui uma linha de dipolos de aceleração potencial, posicionados a  $\frac{1}{4}$  da corda do painel,  $c$ . O escoamento induzido pela linha de dipolos é usado então para gerar uma solução elementar para o potencial aerodinâmico linearizado em torno de um escoamento subsônico e uniforme ao longo do eixo  $x$ . Essa solução pode ser empregada, juntamente com as condições de contorno para a velocidade induzida no ponto de controle, localizado a  $\frac{3}{4}$  de  $c$ , para obter a distribuição de pressão sobre a asa. Todo o procedimento é descrito ao longo dos itens seguintes.

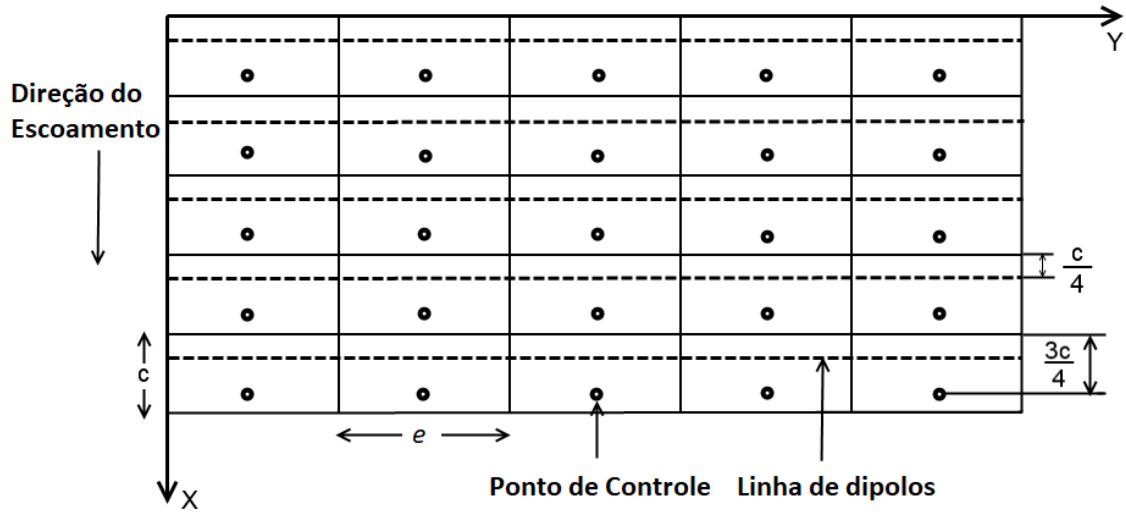


Figura 3.1 – Representação de uma superfície sustentadora pelo DLM (adaptado de Kotikalpudi; Pfifer; Balas, 2015).

### 3.1.1 Potencial aerodinâmico linearizado

Antes que o DLM possa ser aplicado, é necessário linearizar o potencial aerodinâmico  $\phi$  do escoamento uniforme na direção  $x$ , o qual é considerado invíscido, irrotacional e incompressível. Nesse sentido, escreve-se  $\phi$  na forma da Eq. (3.1), como sendo composto por uma parte estacionária,  $\bar{\phi}$ , e uma parte dependente do tempo,  $\tilde{\phi}$ :

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z) + \tilde{\phi}(x, y, z, t) \quad (3.1)$$

Ressalta-se que  $\tilde{\phi}$  representa uma pequena perturbação na velocidade do escoamento  $U_\infty$ , em torno da qual a linearização é feita. Como mostrado detalhadamente por Blair (1992), esse procedimento resulta na Eq. (3.2):

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} - \frac{1}{a_\infty^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + 2U_\infty \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial t} \right) = 0 \quad (3.2)$$

na qual  $M_\infty$  é o número de Mach do escoamento subsônico em torno do qual se faz a linearização.

### 3.1.2 Solução do potencial aerodinâmico

Uma solução elementar para o potencial linearizado definido pela Eq. (3.2) pode ser obtida a partir do potencial de aceleração de Prandtl de um dipolo. Um dipolo (*doublet*) é um



caso especial de um escoamento aerodinâmico, gerado por um par de escoamentos elementares fonte-sumidouro, infinitesimalmente próximos (ANDERSON, 2011). Considerando que a fonte e o sumidouro são separados por um vetor  $\vec{N}_s$ , normal à superfície sustentadora, pode-se escrever, pela Eq. (3.3), o potencial de aceleração do dipolo como a derivada direcional de um potencial de aceleração do tipo fonte,  $\psi_{fonte}$ , ao longo de  $\vec{N}_s$ :

$$\psi_{dipolo} = \frac{\partial \psi_{fonte}}{\partial N_s} \quad (3.3)$$

Se forem assumidas soluções harmônicas,  $\psi_{fonte}$  será dado pela Eq. (3.4):

$$\psi_{fonte} = \bar{\psi}_{fonte} \exp(i\omega t) \quad (3.4)$$

com o módulo  $\bar{\psi}_{fonte}$  sendo:

$$\bar{\psi}_{fonte} = \frac{A_\psi}{R} \exp \left\{ \frac{i\omega}{a_\infty \beta_\infty^2} [M_\infty (x - \kappa) - R] \right\} \quad (3.5)$$

Na Eq. (3.5),  $a_\infty$  é a velocidade do som do escoamento,  $A_\psi$  é a amplitude da solução harmônica proposta e  $\omega$  a frequência de oscilação. O fator de Prandtl-Glauert,  $\beta_\infty$ , e o raio hiperbólico  $R$  são definidos pela Eq. (3.6) e Eq. (3.7), respectivamente:

$$\beta_\infty^2 = 1 - M_\infty^2 \quad (3.6)$$

$$R = \left[ (x - \kappa)^2 + \beta_\infty^2 (y - \eta)^2 + \beta_\infty^2 (z - \zeta)^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

Substituindo a Eq. (3.4) na expressão Eq. (3.3), obtém-se:

$$\psi_{dipolo} = \frac{\partial}{\partial N_s} \left\{ \frac{A_\psi}{R} \exp \left\{ \frac{i\omega}{a_\infty \beta_\infty^2} [M_\infty (x - \kappa) - R] \right\} \right\} \exp(i\omega t) \quad (3.8)$$

que representa o potencial de aceleração de um dipolo, a partir do qual pode-se obter uma solução para o potencial aerodinâmico  $\phi$ . Com esse fim, considera-se a definição para o potencial de aceleração  $\psi$ , o qual pode ser definido pela derivada substancial de  $\phi$ , na forma da Eq. (3.9):

$$\psi(x, y, z, t) = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi(x, y, z, t) \quad (3.9)$$

Isolando  $\phi$ , pode-se escrever:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{U_{\infty}} \int_{-\infty}^x \psi \left( \gamma, y, z, t - \frac{x - \gamma}{U_{\infty}} \right) d\gamma \quad (3.10)$$

sendo  $\gamma$  a variável de integração. Assim, pode-se substituir a Eq. (3.8) na Eq. (3.10) para se obter a magnitude do potencial de velocidade  $\bar{\phi}$ , que representa a solução desejada para a Eq. (3.2):

$$\bar{\phi} = -\frac{A_{\psi}}{U_{\infty}} \frac{\partial}{\partial N_s} \exp \left[ \frac{i\omega}{U_{\infty}} (x - \kappa) \right] \int_{-\infty}^{x - \kappa} \frac{1}{R'} \exp \left\{ i\omega \left[ \frac{\gamma}{U_{\infty}} + \frac{M_{\infty} \gamma}{a_{\infty} \beta_{\infty}^2} - \frac{R'}{a_{\infty} \beta_{\infty}^2} \right] \right\} d\gamma \quad (3.11)$$

com o raio  $R'$  dado por:

$$R' = \left[ \gamma^2 + \beta_{\infty}^2 (y - \eta)^2 + \beta_{\infty}^2 (z - \zeta)^2 \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

onde  $\kappa$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  representam as coordenadas locais do dipolo em um ponto  $s$ .

### 3.1.3 Diferencial de pressão

Uma vez obtida a magnitude do potencial de velocidade  $\bar{\phi}$ , pode-se diferenciá-la ao longo de um vetor normal à superfície  $\vec{N}_r$ , para se calcular a velocidade normal induzida  $\bar{w}$ , também chamada *normalwash*, em um ponto receptor da superfície sustentadora:

$$\bar{w} = -\frac{A_{\psi}}{U_{\infty}} \frac{\partial}{\partial N_r} \frac{\partial}{\partial N_s} \exp \left[ \frac{i\omega}{U_{\infty}} (x - \kappa) \right] \int_{-\infty}^{x - \kappa} \frac{1}{R'} \exp \left\{ i\omega \left[ \frac{\lambda}{U_{\infty}} + \frac{M_{\infty} \lambda}{a_{\infty} \beta_{\infty}^2} - \frac{R'}{a_{\infty} \beta_{\infty}^2} \right] \right\} d\gamma \quad (3.13)$$

Por sua vez, a velocidade *normalwash* pode ser relacionada com o diferencial de pressão gerado pela linha de dipolos através da Eq. (3.14):

$$\Delta p = 4\pi \rho_{\infty} A_{\psi} d\kappa dt \quad (3.14)$$

que é resolvida para  $A_{\psi}$  e substituída na Eq. (3.13). A expressão resultante, após se realizar a integração e se dividir o resultado por  $U_{\infty}$ , é a Eq. (3.15):

$$\frac{\bar{w}}{U_\infty} = \frac{-1}{4\pi\rho_\infty U_\infty^2} \iint_s \Delta p(\kappa, \eta, \zeta) K(x-\kappa, y-\eta, z-\zeta) d\kappa d\eta d\zeta \quad (3.15)$$

na qual  $\kappa$  e  $\eta$  e denotam as coordenadas tangenciais à superfície do painel. Define-se na Eq. (3.15) o *normalwash* normalizado pela velocidade do escoamento livre,  $\bar{w}_N$ :

$$\bar{w}_N = \frac{\bar{w}}{U_\infty} \quad (3.16)$$

De maneira resumida, o método DLM consiste em uma metodologia de solução da Eq. (3.15) para o diferencial de pressão  $\Delta p$ . Com essa finalidade, faz necessário calcular a função *kernel*  $K$ , dada pela Eq. (3.17):

$$K(x-\kappa, y-\eta, z-\zeta) = \exp\left[\frac{i\omega(x-\kappa)}{U_\infty}\right] \frac{\partial}{\partial N_r} \frac{\partial}{\partial N_s} \int_{-\infty}^{x-\kappa} \frac{1}{R'} \exp\left[i\omega \frac{\gamma - M_\infty R'}{U_\infty \beta_\infty^2}\right] d\gamma \quad (3.17)$$

Uma forma é apresentada por Andrews e Vivian (1965), com simplificações adicionais na formulação sendo propostas por Landahl (1967) e Laschka (1963 apud Silva, 2018). Maiores detalhes podem ser encontrados em Borges (2019) e no Apêndice B.

Assumindo que a solução para  $K$  pode ser obtida numericamente de acordo com as referências supramencionadas, prossegue-se o desenvolvimento com a discretização da Eq. (3.15) para um conjunto de painéis, como mostrado na Fig. 3.1. O resultado é a Eq. (3.18):

$$(\bar{w}_N)_r = \sum_s \frac{-\Delta p_s c_s}{4\pi\rho_\infty U_\infty^2} \iint_s K(x-\kappa, y-\eta, z-\zeta) d\kappa d\eta d\zeta \quad (3.18)$$

que expressa a velocidade *normalwash* no ponto de controle de um determinado painel receptor  $r$  é em função da contribuição dos demais painéis emissores  $s$ . Salienta-se que  $c$  representa a corda do painel.

A Eq. (3.18) pode ser escrita em função do coeficiente de pressão  $\Delta c_p$  da Eq. (3.19):

$$\Delta c_{p,s} = \frac{\Delta p_s}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} \quad (3.19)$$

o que resulta na Eq. (3.20):

$$(\bar{w}_N)_r = \sum_s -\Delta c_{p,s} \frac{c_s}{8\pi} \iint_s K(x-\kappa, y-\eta, z-\zeta) d\kappa d\eta d\zeta \quad (3.20)$$

Para determinar o conjunto de velocidades *normalwash* de todos os painéis, estende-se a Eq. (3.20) de forma que o lado direito converte-se no vetor  $\{\bar{w}_N\}$ , no qual cada elemento corresponde a um dado  $(\bar{w}_N)_r$ . Desta forma, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\{\bar{w}_N\} = [D] \{\Delta c_p\} \quad (3.21)$$

onde  $[D]$  é a matriz de fatores *downwash*, cuja inversa pode ser empregada para determinar o vetor de coeficientes de pressão  $\{\Delta c_p\}$ . A inversa de  $[D]$  é denominada matriz de coeficientes de influência aerodinâmicos (*Aerodynamics Influence Coefficients Matrix*) e denotada por  $[AIC]$ . Assim, reescreve-se a Eq. (3.21) na seguinte forma:

$$\{\Delta c_p\} = [AIC] \{\bar{w}_N\} \quad (3.22)$$

Como evidenciado pela Eq. (3.22), para avaliar  $\{\Delta c_p\}$  é necessário obter  $[AIC]$  e  $\{\bar{w}_N\}$ . Será mostrado na seção a seguir como a primeira matriz é calculada, enquanto a segunda advém da imposição das condições de contorno do escoamento.

#### 3.1.4 Cálculo da matriz $[AIC]$

A matriz  $[AIC]$  é dada pela Eq. (3.23):

$$[AIC] = [D]^{-1} \quad (3.23)$$

Por sua vez, a matriz de fatores *downwash*  $[D]$  pode ser escrita na forma da Eq. (3.24), como a soma de um termo estacionário  $[D_E]$  com um termo não estacionário,  $[D_{NE}]$ :

$$[D] = [D_E] + [D_{NE}] \quad (3.24)$$

Ressalta-se aqui a dependência de  $[D]$ , e consequentemente de  $[AIC]$ , em relação à frequência reduzida. Esse parâmetro adimensional é importante para o campo da aeroelasticidade e representa o número de oscilações sofridas pelo aerofólio durante o intervalo de tempo que leva para um escoamento de velocidade  $U_\infty$  percorrer a distância da semicorda  $b$  (WRIGHT e COOPER, 2015). A frequência reduzida é definida pela Eq. (3.25):

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty} \quad (3.25)$$

Ademais,  $[D]$  depende também da geometria e do número de Mach. Destaca-se ainda que quando  $k$  é nulo, isto é, no caso de um regime estacionário, o DLM converge para o VLM (ALBANO e RODDEN, 1969). Portanto, emprega-se o VLM para a obtenção da parte estacionária. Segundo Albano e Rodden (1969), uma vantagem dessa abordagem é uma melhor convergência dos resultados para frequências próximas de zero.

No caso do termo não estacionário, assume-se uma distribuição quadrática para a pressão gerada pela linha de dipolos. Essa configuração sugerida por Rodden et al. (1998) seria um aprimoramento em relação à distribuição parabólica proposta originalmente por Albano e Rodden (1969), conferindo maior estabilidade para asas enflechadas com alto alongamento e em situações de altos valores de  $k$  (BORGES, 2019). A metodologia de cálculo de  $[D_{NE}]$  é apresentada sucintamente no Apêndice B. Destaca-se que no presente trabalho a superfície sustentadora estudada é uma placa e, portanto, a matriz  $[D_{NE}]$  é planar.

### 3.1.5 Cálculo da velocidade normal induzida

A velocidade normal induzida (*normalwash*) no ponto de controle de cada painel pode ser determinada a partir das condições de contorno do potencial linearizado da Eq. (3.2). Nesse sentido, de acordo com a condição de não penetrabilidade, não há escoamento normal à superfície sustentadora, o que pode ser imposto matematicamente por:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla h = 0 \quad (3.26)$$

sendo  $h$  uma função que descreve a superfície sustentadora a partir da deformação do seu plano médio ( $h_m$ ) e do envelope de espessura ( $h_t$ ) em relação ao plano médio não deformado, localizado em  $z = 0$ :

$$h(x, y, t) = h_m(x, y, t) \pm h_t(x, y, t) \quad (3.27)$$

Por sua vez, o vetor velocidade  $\vec{V}$  é dado pela Eq. (3.28):

$$\vec{V} = \vec{U}_\infty + \nabla \tilde{\phi} = (U_\infty + u)\hat{i} + (v)\hat{j} + (w)\hat{k} \quad (3.28)$$

na qual  $u$ ,  $v$  e  $w$  são pequenas perturbações no escoamento livre  $U_\infty$ .

Substituindo a Eq. (3.28) na (3.26) obtém-se:

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - (U_\infty + u)\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} + w = 0 \quad (3.29)$$

Como o potencial de velocidade foi linearizado em torno de um escoamento uniforme  $U_\infty$ , as condições de contorno também deverão ser linearizadas. Isso é feito desprezando os termos não lineares da Eq. (3.29), o que resulta, isolando  $w$ , em:

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.30)$$

De acordo com Blair (1992), essa linearização limita a modelagem em questão a superfícies sustentadoras finas. Ainda segundo o autor, para asas de geometria simples, é conveniente representar as deformações por polinômios no espaço e harmônicos no tempo, na forma da série:

$$h(x, y, t) = \left[ \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} X^j Y^m \right] e^{i\omega t} = \bar{h} e^{i\omega t} \quad (3.31)$$

onde  $a_{jm}$  são as constantes do polinômio,  $X$  e  $Y$  são as coordenadas no ponto de aproximação e  $n_x$  e  $n_y$  designam a ordem dos polinômios nas direções  $x$  e em  $y$ , respectivamente.

Substituindo a Eq. (3.31) na Eq. (3.30), chega-se à velocidade normal induzida:

$$w = \bar{w} \exp(i\omega t) \quad (3.32)$$

sendo:

$$\bar{w} = i\omega \left[ \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} X^j Y^m \right] + U_\infty \left[ \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} j a_{jm} X^{j-1} Y^m \right] \quad (3.33)$$

Da definição de frequência reduzida, Eq. (3.25), pode-se escrever a Eq. (3.33):

$$\bar{w} = \frac{ik}{b} U_\infty \left[ \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} X^j Y^m \right] + U_\infty \left[ \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} j a_{jm} X^{j-1} Y^m \right] \quad (3.34)$$

Substituindo a Eq. (3.34) na Eq. (3.32) e fazendo uso da Eq. (3.31) pode-se obter a velocidade induzida normalizada por:

$$\bar{w}_N = \frac{ik}{b} \bar{h} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \quad (3.35)$$

Alternativamente, a fim de representar o vetor *normalwash* de todos os painéis, a Eq. (3.35) pode ser escrita de forma matricial (KIER e LOOYE, 2009):

$$\{\bar{w}_N\} = ([D_R] + ik[D_I])\{\bar{h}\}^T \quad (3.36)$$

onde  $[D_I]$  e  $[D_R]$  denotam as matrizes de diferenciação, relacionadas respectivamente à magnitude dos deslocamentos  $\bar{h}$  e à amplitude das suas inclinações.

### 3.1.6 Esforços aerodinâmicos

Os esforços provenientes do carregamento aerodinâmico não estacionário são calculados através do DLM, a partir das velocidades *normalwash*  $\{\bar{w}_N\}$  e da matriz  $[AIC]$ , como mostrado na Eq. (3.22). Assim, aplicando a definição de coeficiente de pressão, segundo a Eq. (3.19), pode-se escrever o vetor de esforços aerodinâmicos como:

$$\{F_a\} = q_\infty [S] \{w_N\} [AIC] \quad (3.37)$$

onde  $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2$  é a pressão dinâmica e  $[S]$  é o vetor com as áreas de cada painel. Substituindo o vetor de velocidades *normalwash* normalizadas da Eq. (3.36), rescreve-se a Eq. (3.37) na seguinte forma:

$$\{F_a\} = q_\infty [S] [AIC] ([D_R] + ik[D_I])\{\bar{h}\}^T \quad (3.38)$$

A Equação (3.38) representa o vetor de esforços aerodinâmicos obtidos pelo método DLM, atuantes nos pontos de controle dos painéis aerodinâmicos, os quais serão utilizados para modelar o carregamento sobre a estrutura.

## CAPÍTULO IV

### MODELAGEM AEROELÁSTICA

Pretende-se aqui apresentar a metodologia de acoplamento entre os modelos estrutural estocástico e aerodinâmico abordados anteriormente, visando obter a expressão que descreve o comportamento aeroelástico do sistema. Em seguida, apresenta-se o método pk, usado para realizar a análise de estabilidade com relação ao fenômeno de *flutter*. O cálculo da matriz de esforços generalizados via aproximação de Roger também é mostrado.

#### 4.1 Acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico

O único passo restante para se obter o vetor de esforços proveniente do DLM, pela Eq. (3.38), é determinar o vetor de deslocamentos nos pontos de controle,  $\{\bar{h}\}$ . Com essa finalidade, propõe-se escrevê-lo em função dos deslocamentos da malha de elementos finitos,  $\{\delta\}$ , segundo a Eq. (4.1):

$$\{\bar{h}\}^T = [T_{as}] \{\delta\} \quad (4.1)$$

onde  $[T_{as}]$  representa a matriz de interpolação que transforma, através de *splines*, os deslocamentos nodais em  $z$  no deslocamento no ponto de controle de cada painel aerodinâmico (Fig. 4.1).



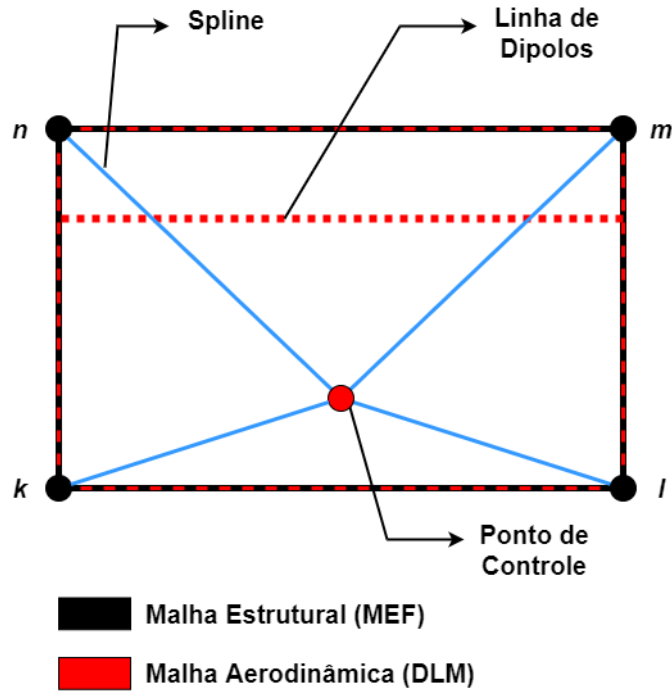


Figura 4.1 – Malha estrutural e malha aerodinâmica de um elemento de placa.

Por sua vez,  $[T_{as}]$  é calculada pela Eq. (4.2):

$$[T_{as}] = \sum_{i=0}^{nx} \sum_{j=0}^{ny} a_{ij} X_a^i Y_a^j \quad (4.2)$$

na qual  $X_a$  e  $Y_a$  representam as coordenadas nos pontos de controle dos painéis e  $a_{ij}$  são as constantes de interpolação das formas modais, obtidas pela Eq. (4.3):

$$a_{ij} = \left[ \sum_{i=0}^{nx} \sum_{j=0}^{ny} X^i Y^j \right]^{-1} \{ \delta \} \quad (4.3)$$

Destaca-se que  $X$  e  $Y$  são as coordenadas dos nós da malha de elementos finitos e que, no presente trabalho, são empregadas interpolações lineares.

Tendo em vista que se pretende obter a equação aeroelástica do sistema no domínio modal, os deslocamentos são reescritos em função dos deslocamentos modais:

$$\{ \bar{h} \}^T = [T_{as}] [\Phi] \{ q \} \quad (4.4)$$

sendo  $[\Phi]$  a matriz e com as formas modais e  $\{q\}$  o vetor com de deslocamentos modais. Pode-se então definir a força atuante nos pontos de controle, através da substituição da Eq. (4.4) na Eq. (3.38), na forma:

$$\{F_a\} = q_\infty [S][AIC]([D_R] + ik[D_I])[T_{as}][\Phi]\{q\} \quad (4.5)$$

Em seguida, a força é transferida para os nós da malha de elementos finitos e para o domínio modal:

$$\{F_q\} = [\Phi]^T [T_{as}]^T \{F_a\} \quad (4.6)$$

A Eq. (4.6) pode ser escrita de maneira a explicitar  $[Q(k)]$ , a matriz aerodinâmica generalizada (GAM), da seguinte forma:

$$\{F_q\} = q_\infty [Q(k)]\{q\} \quad (4.7)$$

Sendo:

$$[Q(k)] = [\Phi]^T [T_{as}]^T [S][AIC]([D_R] + ik[D_I])[T_{as}][\Phi] \quad (4.8)$$

Visando diminuir os custos computacionais, reduz-se  $[\Phi]$  a uma determinada base modal, sendo realizada uma análise de convergência para determinar a ordem dessa redução. Nesse contexto, o número de autovetores que definem a dimensão da base é considerado como igual ao número de modos analisado pelo programa. Além disso, salienta-se a dependência da GAM em relação à frequência reduzida  $k$  e ainda que os esforços  $\{F_q\}$  precisam ser calculados modo a modo.

Finalmente, transformando a equação de movimento do sistema, Eq. (2.43), para o domínio modal e substituindo os esforços da Eq. (4.7), chega-se à equação aeroelástica:

$$[M_q]\{\ddot{q}\} + [K_q]\{q\} = q_\infty [Q(k)]\{q\} \quad (4.9)$$

A Eq. (4.9) representa o acoplamento entre os modelos estrutural e aerodinâmico e será empregada para a realização da análise de estabilidade pretendida, como exposto na próxima seção.

#### 4.2 Análise de Estabilidade: Cálculo do *flutter*

O *flutter* é uma vibração instável e auto excitada, na qual a estrutura extrai energia do escoamento, e, frequentemente, resulta em oscilações de elevada amplitude, capazes de levar à falha estrutural (WRIGHT e COOPER, 2015). O chamado *flutter* binário ocorre quando há um acoplamento desfavorável entre dois modos de vibrar, causado pelas forças aerodinâmicas associadas ao movimento desses modos, de maneira que, a depender dos pares em questão, a oscilação resultante pode assumir várias formas (WRIGHT e COOPER, 2015). Existem, porém, casos nos quais mais de dois modos agem para gerar o *flutter*, sendo necessário uma análise mais completa do problema.

Visando prever esse fenômeno, recorre-se à equação aeroelástica do sistema a partir da qual é possível avaliar a sua estabilidade através de um problema de autovalor. Nesse sentido, se relaciona o autovalor ao amortecimento, e identifica-se a velocidade crítica quando a parte real do autovalor for nula, para um determinado modo, como mostrado pela Fig. 4.2.

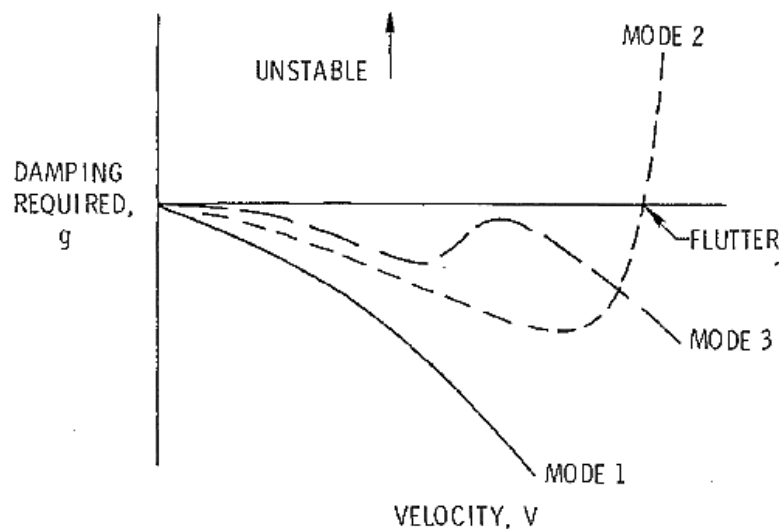


Figura 4.2 – Diagrama  $vg$  para análise de estabilidade (extraído de Garrick e Reed, 1981).

A dependência da matriz GAM com a frequência reduzida, dificulta a resolução do problema de autovalor. Por um lado, o autovalor é determinado com base no conhecimento da matriz  $[Q(k)]$ , que, por outro, requer a frequência reduzida associada ao autovalor desejado. De fato, não existe solução analítica, devendo-se recorrer a uma abordagem iterativa de acoplamento de frequências. Um dos métodos existentes é o método pk, empregado neste trabalho, o qual modela o amortecimento de forma mais realista e, assim, apresenta a vantagem de ser fisicamente representativo também em condições subcríticas.

#### 4.2.1 Método $pk$

O problema de autovalor decorrente da equação aeroelástica do sistema, Eq. (4.9), é dado por:

$$\left( p^2 [M_q] + [K_q] - q_\infty [Q(k)] \right) \{q\} = 0 \quad (4.10)$$

onde está implícita a relação:

$$p \equiv \frac{d}{dt} \rightarrow \ddot{q} = p^2 q \quad (4.11)$$

Para a solução não trivial da Eq. (4.11), impõe-se que o seguinte determinante deve ser nulo:

$$\left| p^2 [I] + [M_q]^{-1} ([K_q] - q_\infty [Q(k)]) \right| = 0 \quad (4.12)$$

Portanto,  $p^2$  é o autovalor do segundo termo do determinante:  $[M_q]^{-1} ([K_q] - q_\infty [Q(k)])$ , sendo  $p$  dado pela forma:

$$p = \omega \left( \frac{g}{2} \pm i \right) \quad (4.13)$$

Ressalta-se aqui que, a partir da Eq. (4.13), a parte imaginária de  $p$  é a frequência circular  $\omega$ , que se relaciona com a frequência reduzida  $k$  por:

$$\omega = \text{Im}(p) = k \frac{V}{b} \quad (4.14)$$

Desta forma, deve-se determinar, de maneira iterativa, um autovalor e uma frequência que satisfaçam ambas as Eq. (4.12) e Eq. (4.14). Para isso, estima-se um valor para  $k$  com base nas frequências naturais da estrutura e então calcula-se o problema de autovalor da Eq. (4.10). Assim, determina-se o novo  $k$  correspondente a esse autovalor e se compara com a estimativa anterior. Se a comparação satisfizer uma determinada tolerância a solução foi obtida, caso contrário, atualiza-se o valor de  $k$  e repete-se o processo até que ocorra a convergência. Todo o procedimento é ilustrado pelo fluxograma da Fig. 4.3.

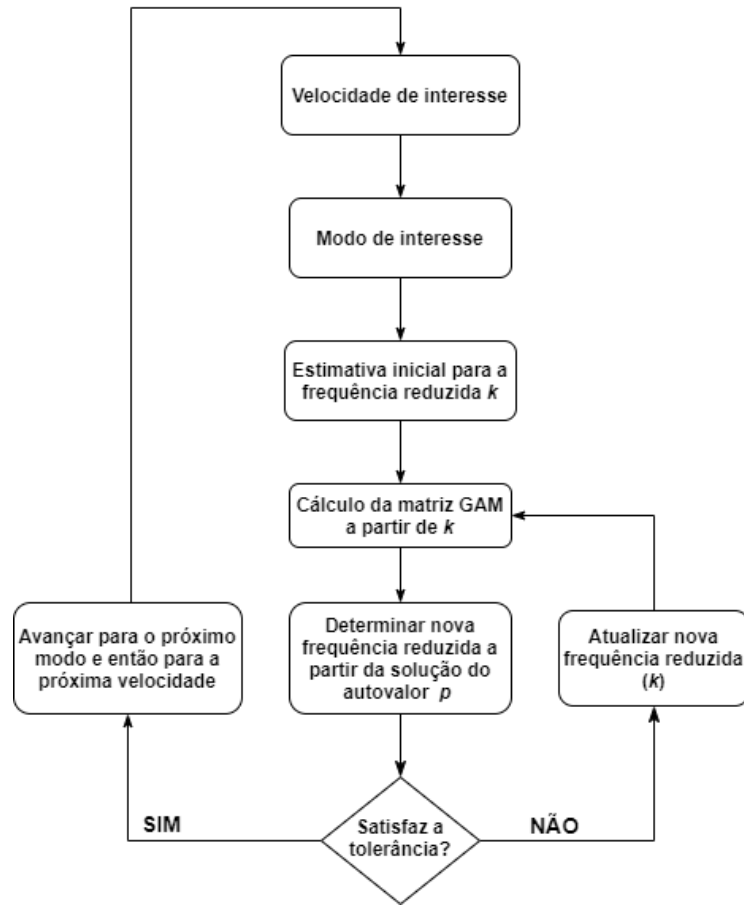


Figura 4.3 – Fluxograma do método pk (adaptado de Borges, 2019).

Destaca-se que o critério que estipula a convergência é dado em função da tolerância  $tol$  por:

$$\begin{cases} |k_j - k_{j-1}| < tol & \text{se } k_{j-1} < 1 \\ |k_j - k_{j-1}| < tol \cdot k_{j-1} & \text{se } k_{j-1} \geq 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Ressalta-se ainda que a fim de facilitar a solução do problema de autovalor, a Eq. (4.10) é escrita na forma de espaço de estados, resultando na Eq. (4.16):

$$[A] - p[I]\{q\} = 0 \quad (4.16)$$

Sendo a matriz  $[A]$  dada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_q]^{-1}([K_q] - q_\infty[\text{Re}(Q)]) & [M_q]^{-1}\left(\frac{q_\infty b}{2V_k}[\text{Im}(Q)]\right) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Destacando que os autovalores assumem a forma da Eq. (4.13), o amortecimento é escrito na forma da Eq. (4.18):

$$g = \frac{2 \operatorname{Re}(p)}{\operatorname{Im}(p)} \quad (4.18)$$

#### 4.2.2 Aproximação de Roger

No método pk faz-se necessário computar a matriz  $[Q(k)]$  para cada iteração, o que pode ser demasiado custoso computacionalmente. A fim de contornar esse problema e viabilizar a análise, utiliza-se a aproximação de Roger. Esse método consiste em calcular previamente as matrizes GAM, para alguns valores discretos de frequência reduzida  $k$ , e, em seguida, realizar um ajuste, através do método dos mínimos quadrados, segundo uma função racional predeterminada (KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015). Mais especificamente, a aproximação é dada segundo a Eq. (4.19):

$$\hat{Q}(k) = A_0 + A_1 \left( \frac{b}{V} \right) s + A_2 \left( \frac{b}{V} \right)^2 s^2 + \sum_{m=3}^6 \frac{A_m s}{s + \frac{V}{b} \beta_{m-2}} \quad (4.19)$$

Ressalta-se que  $s$  se relaciona à  $\omega$  pela Eq. (4.20), enquanto o parâmetro  $\beta_{m-2}$  é definido pela Eq. (4.21), em função do número de estados aerodinâmicos de atraso  $n$ .

$$s = i\omega \quad (4.20)$$

$$\beta_{m-2} = -1,7k_{\max} \frac{n}{(n+1)^2} \quad (4.21)$$

Por sua vez, os coeficientes de ajuste  $A_i$  são determinados por:

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_6 \end{Bmatrix} = \left[ \sum_{j=1}^N \left( \{B_{R,j}\} [B_{R,j}] + \{B_{I,j}\} [B_{I,j}] \right) \right]^{-1} \sum_{i=1}^N \left( \mathcal{Q}_{R,j} \{B_{R,j}\} + \mathcal{Q}_{I,j} \{B_{I,j}\} \right) \quad (4.22)$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
[B_{R,j}] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & k_j^2 & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_1^2} & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_2^2} & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_3^2} & \frac{-k_j^2}{k_j^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix} \\
[B_{I,j}] &= \begin{bmatrix} 0 & -k_j & 0 & \frac{-\beta_1 k_j}{k_j^2 + \beta_1^2} & \frac{-\beta_2 k_j}{k_j^2 + \beta_2^2} & \frac{-\beta_3 k_j}{k_j^2 + \beta_3^2} & \frac{-\beta_4 k_j}{k_j^2 + \beta_4^2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Vale salientar que a aproximação das matrizes GAM pode ser definida em função das suas partes real e imaginária, de maneira a facilitar o seu uso na Eq. (4.17):

$$\begin{aligned}
\text{Re}(Q(k)) &= A_0 - A_2 k^2 + A_2 (ik)^2 + \frac{k^2 A_3}{k^2 + \beta_1^2} + \frac{k^2 A_4}{k^2 + \beta_2^2} + \frac{k^2 A_5}{k^2 + \beta_3^2} + \frac{k^2 A_6}{k^2 + \beta_4^2} \\
\text{Im}(Q(k)) &= A_1 k + \frac{\beta_1 k A_3}{k^2 + \beta_1^2} + \frac{\beta_2 k A_4}{k^2 + \beta_2^2} + \frac{\beta_3 k A_5}{k^2 + \beta_3^2} + \frac{\beta_4 k A_6}{k^2 + \beta_4^2}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

## CAPÍTULO V

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Apresenta-se aqui uma visão geral do procedimento de cálculo numérico adotado nesta dissertação, relacionando-o com uma descrição dos algoritmos utilizados e desenvolvidos. Ressalta-se que a implementação foi realizada em MATLAB®, dado que é a linguagem de programação usual nos algoritmos concebidos nas pesquisas do LMest, obtendo-se assim uma maior facilidade para potenciais integrações entre os diferentes códigos.

#### 5.1 Análise Estrutural com Incerteza

A equação aeroelástica do sistema é obtida com base na sua equação de movimento, a qual advém do método dos elementos finitos estocásticos. Nesse sentido, a rotina *Stochastic Plate* é a responsável por construir as matrizes globais de massa e rigidez da placa fina, nas quais a contribuição estocástica foi inserida através da expansão de KL bidimensional. Portanto, inicialmente, é necessário efetuar a resolução da integral de Fredholm, obtendo os autovalores  $\lambda_k$  e as autofunções  $f_k$ . Por sua vez, os parâmetros aleatórios  $\xi_k(\theta)$  da expansão são obtidos a partir de amostras para a espessura. Tem-se, portanto, uma matriz elementar de massa e de rigidez para cada amostra. Por fim, são impostas as condições de contorno estruturais. Todo esse procedimento é esquematizado no fluxograma da Fig. 5.1.



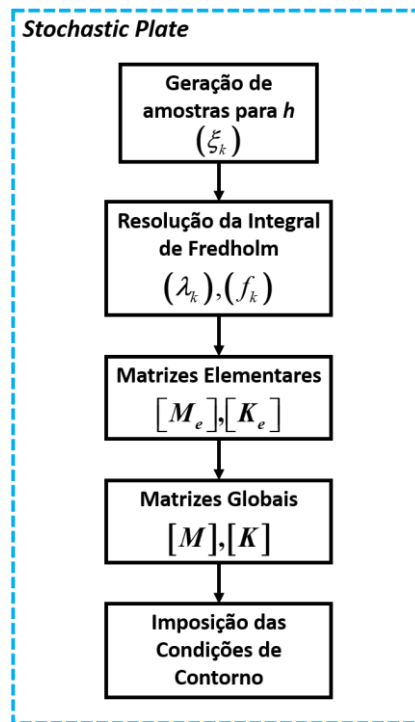


Figura 5.1 – Fluxograma da rotina *Stochastic Plate*.

## 5.2 Análise Aeroelástica

A análise aeroelástica é realizada pelo programa *Aerosolver*, desenvolvido e validado por Borges (2019) no contexto das pesquisas desenvolvidas no LMEst. Primeiramente, faz-se necessário obter o carregamento aerodinâmico. Para isso, o algoritmo recorre ao método DLM. Ressalta-se, porém, que a contribuição estacionária advém do VLM, pois, como mencionado, isso é preferível. Uma vez obtida a matriz  $[AIC]$ , pela combinação de ambos os métodos, falta determinar as velocidades *normalwash*  $\{\bar{w}_N\}$ , o que requer a realização de uma análise modal. Nesse ponto, utilizam-se as matrizes globais de massa e rigidez computadas pelo *Stochastic Plate*. Em seguida, o código pode calcular o vetor de esforços, e todo o sistema é transferido para o domínio modal, momento em que é realizada uma redução de modelo a partir da matriz de autovetores  $[\Phi]$ . Uma vez obtidas as matrizes GAM calculam-se os coeficientes da aproximação de Roger. Finalmente, a velocidade de *flutter* pode ser determinada pelo método pk, descrito na Fig. 4.3. A Figura 5.2 apresenta o fluxograma do *Aerosolver*.

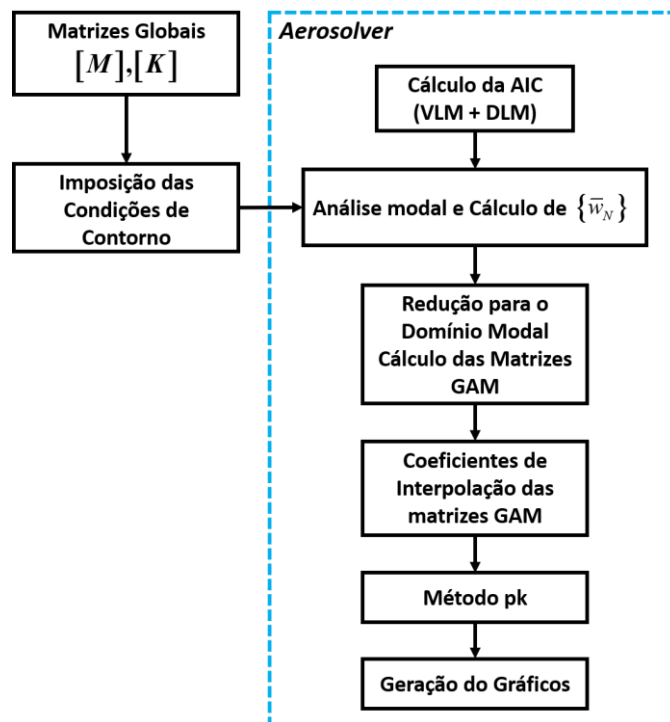


Figura 5.2 – Fluxograma da rotina *Aerosolver*.

Salienta-se que, como foi referido, para o cálculo da velocidade crítica é necessário usar as matrizes estruturais, que variam com cada amostra. Portanto, é necessário executar o *Aerosolver* sucessivas vezes para a obtenção dos resultados, o que constitui uma abordagem Monte Carlo de propagação de incerteza.

# CAPÍTULO VI

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentados os resultados da análise de estabilidade pretendida. Primeiramente, descreve-se a superfície sustentadora estudada, dada por uma asa retangular. Em seguida, a metodologia empregada para definição dos parâmetros de simulação é discutida e o fenômeno de *flutter* avaliado para o caso do sistema nominal. Por fim, analisa-se o efeito gerado pela consideração de incerteza na espessura da asa sobre o comportamento estrutural e aeroelástico do sistema.

### 6.1 Parâmetros de Simulação

Para a realização da simulação numérica proposta, um conjunto de parâmetros deve ser adequadamente definido a fim de assegurar resultados representativos. Entre esses parâmetros, encontram-se o número de elementos finitos e painéis aerodinâmicos, nos quais a placa será discretizada, o número de amostras, o número de modos de vibrar e a ordem da expansão de KL. Há também as propriedades físico-geométricas relacionadas à estrutura da superfície sustentadora, e os parâmetros do escoamento, bem como o nível de incerteza associado à espessura.

#### 6.1.1 Estrutura Analisada

O objeto de estudo do presente trabalho é uma asa retangular sem enflechamento ou afilamento, de maneira que pode ser representada como uma placa plana. Assim, a fim de representar uma asa, a placa será submetida a uma condição de contorno estrutural engastada-livre. As dimensões da asa, em milímetros, são mostradas na Fig. 6.1, juntamente com o sistema de referência global  $xy$ , cuja origem encontra-se no vértice formado entre a linha da raiz e a aresta do bordo de ataque.

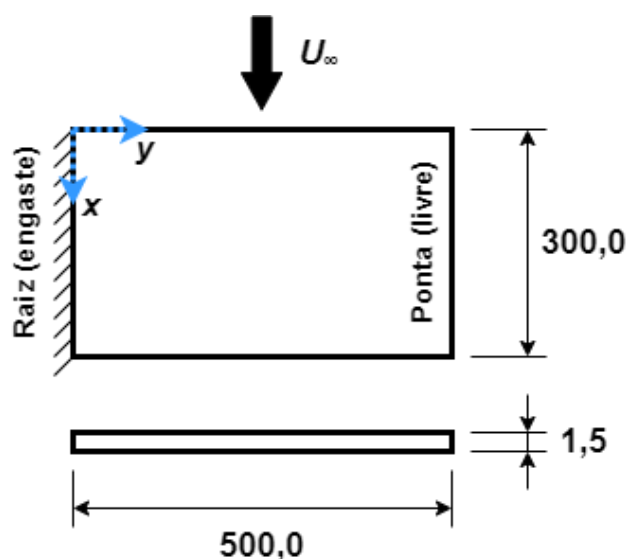


Figura 6.1 – Dimensões nominais da asa em milímetros.

Quanto à fonte de incerteza, será considerada, no caso estocástico, uma variação na espessura, segundo uma distribuição normal. Salienta-se que as propriedades do material serão consideradas constantes. Nesse sentido, a asa é composta de alumínio aeronáutico 6061-T6, cujas propriedades estão listadas na Tab. 6.1.

Tabela 6.1 – Propriedades físicas do alumínio aeronáutico 6061-T6.

Propriedade do Material	Valor
Módulo de Young ( $E$ )	70 GPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,34
Densidade ( $\rho$ )	2700 (kg/m <sup>3</sup> )

### 6.1.2 Escoamento

Quanto ao escoamento assume-se um regime subsônico, com a linearização do potencial aerodinâmico sendo realizada em torno de um Mach de 0,25. Os demais parâmetros são definidos na Tab. 6.2 incluindo a faixa de velocidade analisada, para a qual foi adotada uma resolução de 0,1 m/s.

Tabela 6.2 – Propriedades do regime de escoamento.

Propriedade do Escoamento	Valor
Densidade do ar ( $\rho_\infty$ )	1,225 (kg/m <sup>3</sup> )
Faixa de velocidade	0 a 60 (m/s)

### 6.1.3 Refinamento de malha

Devido ao caráter numérico da modelagem matemática pretendida, faz-se necessário realizar uma análise de convergência em relação ao nível de refinamento de malha necessário para se obter resultados representativos. Vale salientar que, como exposto na Fig. 4.1, cada elemento finito da malha estrutural está associado a um painel da malha aerodinâmica, de forma que o número de painéis que conduz à convergência é assumido como igual ao número de elementos finitos que leva a essa condição. Assim, a Fig. 6.2, mostra a variação da velocidade de *flutter* para o sistema nominal, sem a existência de incertezas, com o número de elementos finitos nas direções  $x$  e  $y$ . Observa-se a convergência para 25 elementos finitos em ambas as direções, ponto a partir do qual não há variação da velocidade para a resolução de 0,1 m/s adotada. Ressalta-se que em virtude de uma limitação no algoritmo computacional, o número de elementos finitos em  $x$  sempre será o mesmo que o número de elementos em  $y$ .

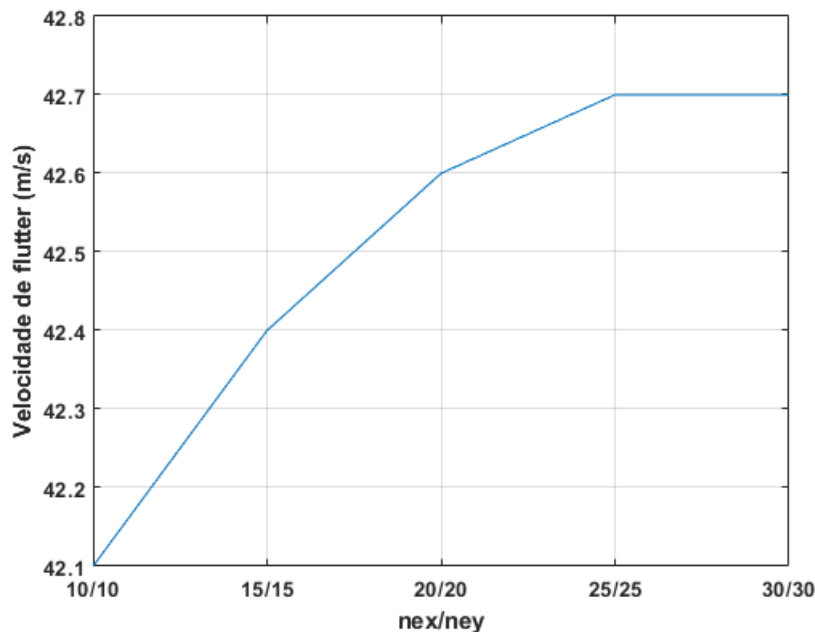


Figura 6.2 – Convergência da velocidade de *flutter* do sistema nominal com o refinamento de malha.

### 6.1.4 Número de amostras

Como já discutido em capítulos anteriores, a incerteza é propagada no sistema através do método Monte Carlo, sendo necessário gerar um número adequado de amostragens para representar a espessura aleatória  $h$ . Da mesma maneira que o refinamento de malha, o número de amostras a ser empregado na simulação é um parâmetro que, se demasiado pequeno, não resulta em resultados coerentes, e, se demasiado grande, eleva considerável, e

desnecessariamente, o custo computacional. Desta forma, utiliza-se o desvio-padrão  $\sigma$  em relação à velocidade de *flutter* do sistema nominal,  $v_r$ , como forma de avaliar a convergência em relação ao número de amostras, como definido pela expressão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - v_r)^2} \quad (6.1)$$

em que  $v_i$  representa a velocidade de *flutter* correspondente a uma determinada amostra.

Empregando a Eq. (6.1), plota-se a Fig. 6.3 na qual se observa que a partir de 200 amostras o desvio-padrão oscila entre 1.3 e 1.4. Considerando esse comportamento, seria possível determinar a convergência de acordo com algum critério baseado na variação entre valores consecutivos. No entanto, visando obter posteriormente gráficos com a maior qualidade possível, utiliza-se o número máximo de 600 amostras.

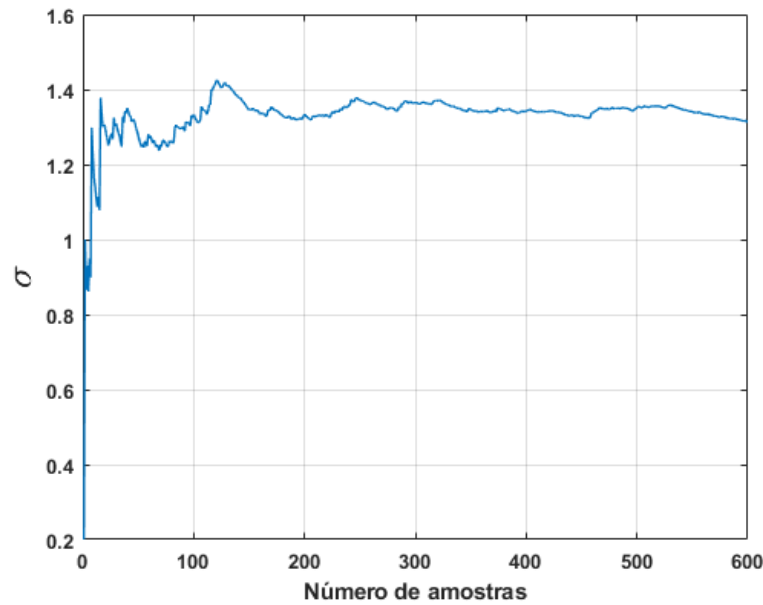


Figura 6.3 – Convergência da velocidade de *flutter* com o número de amostras.

#### 6.1.5 Número de modos

Considerando que a análise de estabilidade é feita modo a modo, é natural que a quantidade de modos avaliados seja um parâmetro de entrada do algoritmo. No entanto, o número de modos também influencia diretamente o cálculo da velocidade de *flutter*, na medida em que determina a ordem da matriz  $[\Phi]$ , empregada para transformar a equação aeroelástica do sistema, Eq. (4.9), para o domínio modal. Portanto, realiza-se uma redução na base modal, visando diminuir o tempo de processamento, de forma que, mais uma vez, realiza-

se uma análise de convergência, a fim de se determinar o número ideal de modos. Nesse sentido, a Fig. 6.4 mostra que seis modos seriam suficientes para descrever o comportamento aeroelástico do sistema nominal, observada a invariância da velocidade a partir desse ponto, para a resolução empregada.

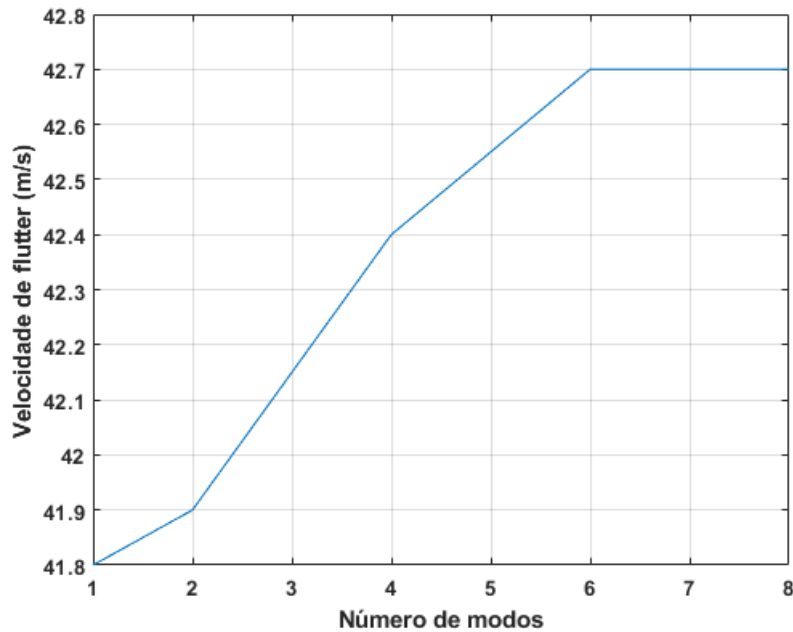


Figura 6.4 – Convergência da velocidade de *flutter* do sistema nominal com o número de modos.

#### 6.1.6 Ordem da expansão de Karhunen-Loève

A expansão de KL precisa ser truncada para a ser implementada computacionalmente. Assim, faz-se necessário determinar a ordem de truncamento, o que é feito a partir da avaliação dos autovalores provenientes da resolução da integral de Fredholm, Eq. (2.20). De acordo com a Fig. 6.5, fica evidente que a maior contribuição para a parcela estocástica das matrizes elementares de rigidez e massa, descritas respectivamente pelas Eq. (2.34) e Eq. (2.38), advém dos cinco primeiros autovalores  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$ . Portanto, considera-se que uma expansão de quinta ordem é adequada.

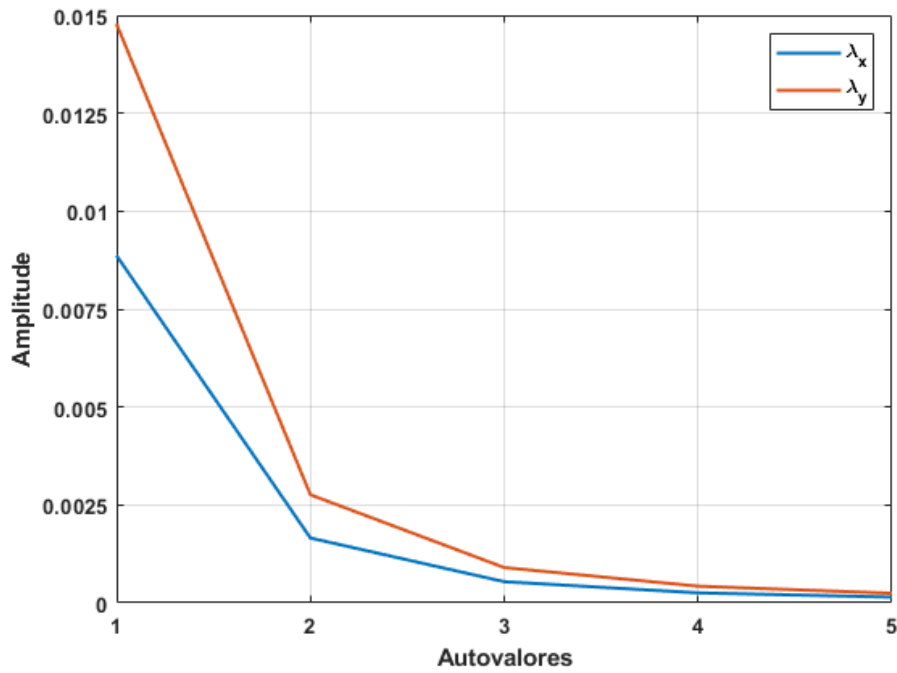


Figura 6.5 – Cinco primeiros autovalores da expansão de Karhunen-Loève.

Para maior conveniência, os autovalores são sumarizados na Tab. 6.3, juntamente com os autovalores resultantes para o problema bidimensional, obtidos a partir de  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  pelo produto da Eq. (2.25):  $\lambda_n = \lambda_x \cdot \lambda_y$ . Um ponto a ser destacado é que, pela integral de Fredholm, os autovalores são dependentes dos comprimentos de correlação nas direções  $x$  e  $y$ . Assim, neste trabalho, adotaram-se comprimentos de correlação iguais às dimensões da asa, sendo  $L_x = 0,3$  e  $L_y = 0,5$ . Ademais, ressalta-se que o processo estocástico é definido sobre a extensão da superfície sustentadora, de maneira que  $\tau_x$  e  $\tau_y$  correspondem à metade dos comprimentos de correlação:  $\tau_x = L_x/2$  e  $\tau_y = L_y/2$ .

Tabela 6.3 – Autovalores para uma expansão Karhunen-Loève de quinta ordem.

$\lambda_x$	$\lambda_y$	$\lambda_n$
0,0089	0,0148	$1,3100 \cdot 10^{-4}$
0,0017	0,0028	$4,5708 \cdot 10^{-6}$
$5,4106 \cdot 10^{-4}$	$9,0177 \cdot 10^{-4}$	$4,8791 \cdot 10^{-7}$
$2,5595 \cdot 10^{-4}$	$4,2658 \cdot 10^{-4}$	$1,0918 \cdot 10^{-7}$
$1,4735 \cdot 10^{-4}$	$2,4558 \cdot 10^{-4}$	$3,6185 \cdot 10^{-8}$



## 6.2 Análise de Estabilidade do Sistema Nominal

No sistema nominal, são considerados os valores médios constantes dos parâmetros físico-geométricos da estrutura e do escoamento, sumarizados respectivamente na Fig. 6.1 e na Tab. 6.1, e Tab. 6.2. A fim de realizar a análise de estabilidade para esse caso, plota-se, nas Fig. 6.6 e Fig. 6.7, a variação do amortecimento com a velocidade da aeronave para os seis primeiros modos de vibrar. A partir desses gráficos, denominados diagramas vg, pode-se prontamente determinar tanto o modo quanto a velocidade de ocorrência do fenômeno de *flutter*, identificados quando o amortecimento muda de sinal.

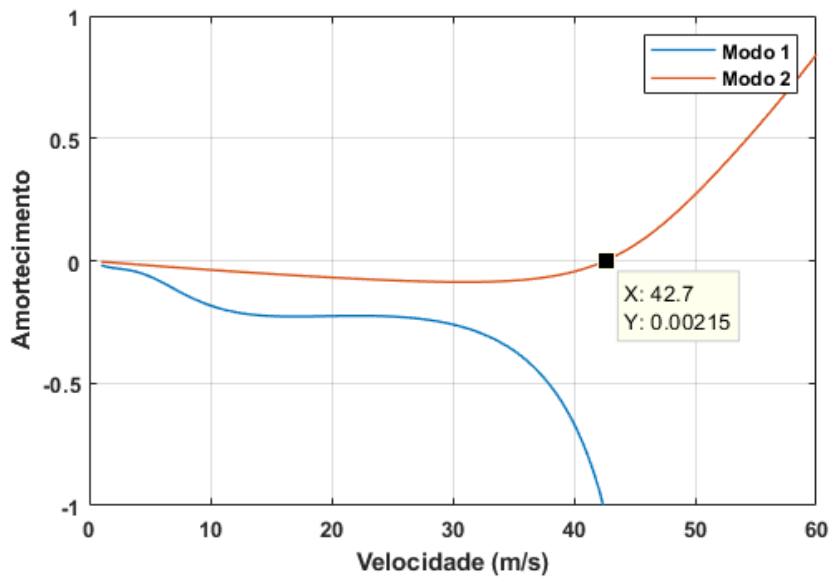


Figura 6.6 – Diagrama vg para os modos 1 e 2.

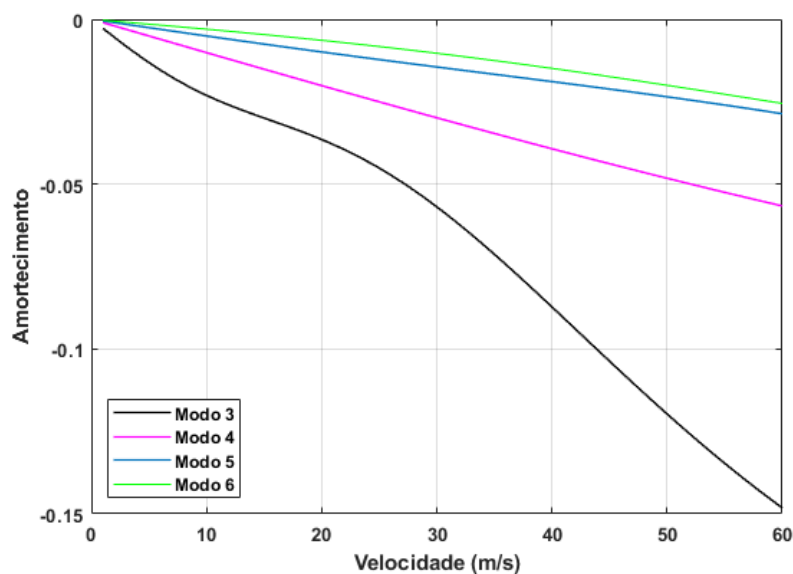


Figura 6.7 – Diagrama vg para os demais modos.

Observando os gráficos, tem-se uma velocidade crítica de 42,7 m/s para o sistema nominal, a qual está associada ao comportamento instável do segundo modo. Ademais, nota-se que se trata de um caso de *soft flutter*, no qual a aproximação até o ponto crítico é gradual e suave. Por sua vez, a Fig. 6.8 mostra as formas do primeiro e segundo modos cujo acoplamento conduz ao *flutter*. Em contraste, o terceiro modo, apesar de tender inicialmente à instabilidade, permanece estável, juntamente com quarto, quinto e sexto modos, como pode ser constatado pela a Fig. 6.7. As formas dos modos 3, 4, são apresentadas na Fig. 6.9 e as formas dos modos 5 e 6 na Fig. 6.10.

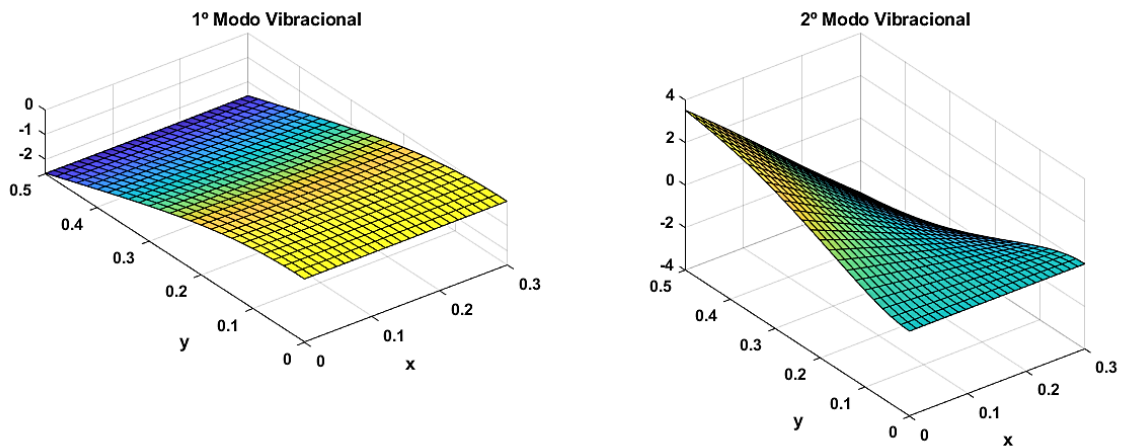


Figura 6.8 – Primeiro e segundo modos de vibrar.

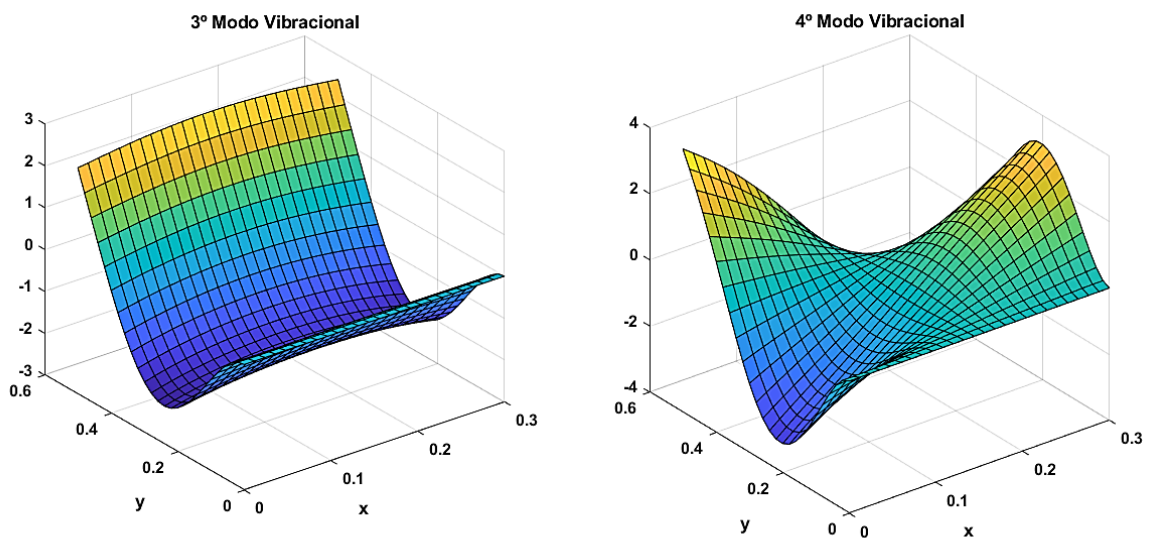


Figura 6.9 – Terceiro e quarto modos de vibrar.

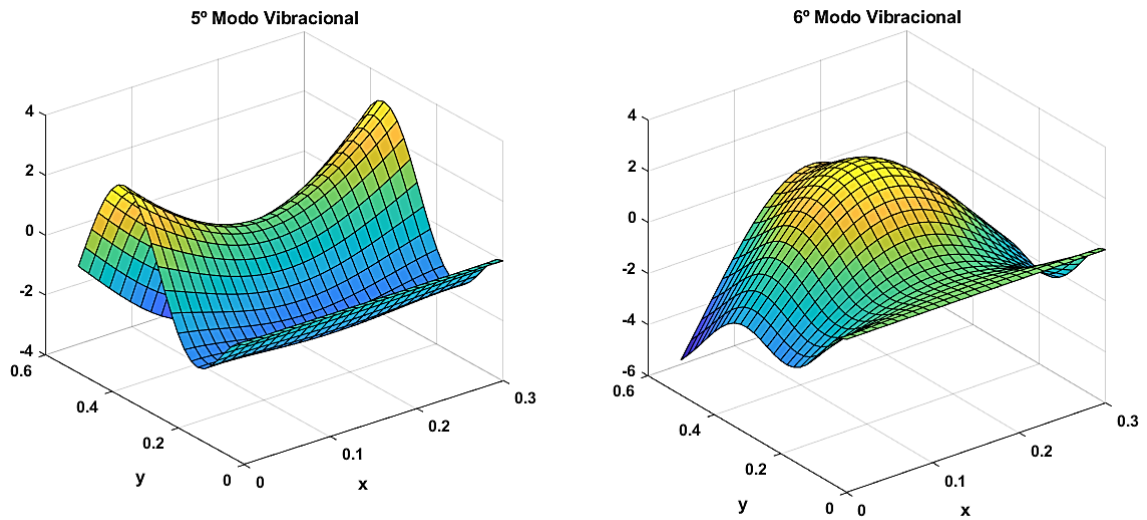


Figura 6.10 – Quinto e sexto modos de vibrar.

Paralelamente, a variação das frequências dos seis primeiros modos com a velocidade é apresentada na Fig. 6.11 e Fig. 6.12, denominadas diagramas vf. Na primeira, percebe-se uma tendência inicial à convergência entre as frequências dos dois primeiros modos, o que é interrompido pela ocorrência da instabilidade. Desta forma, devido ao efeito do amortecimento aerodinâmico, as frequências não coalescem, mas aproximam-se suficientemente para gerar o acoplamento entre os modos. Já na segunda, as frequências praticamente não variam com a velocidade.

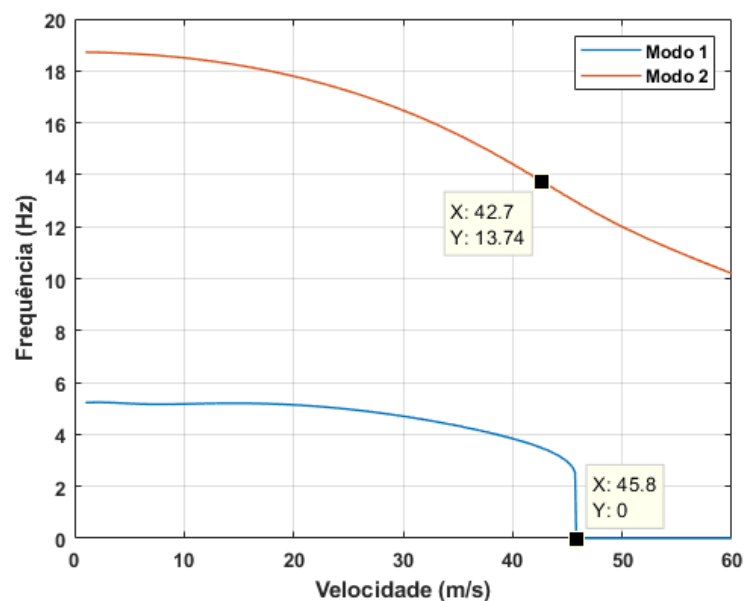


Figura 6.11 – Diagrama vf para os modos 1 e 2.

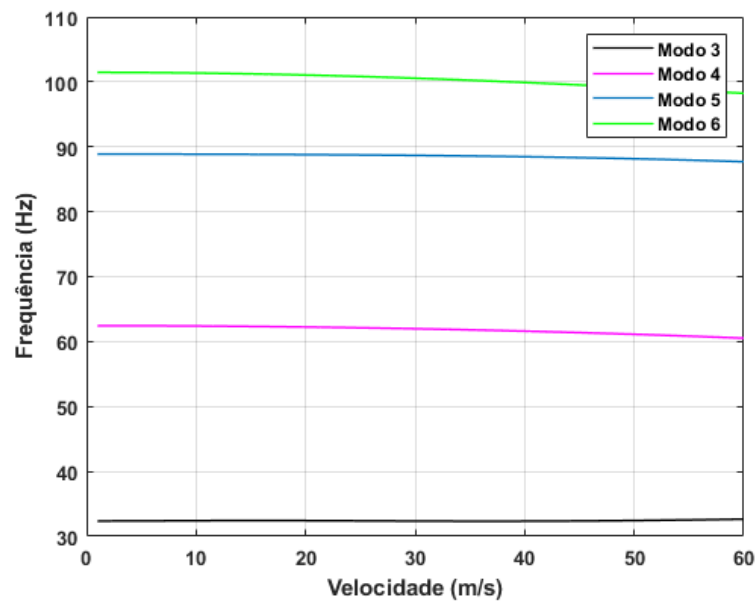


Figura 6.12 – Diagrama  $v_f$  para os demais modos.

De maneira semelhante ao amortecimento, pode-se definir também uma frequência de *flutter* correspondente à velocidade crítica encontrada. Pela Figura 6.11, tem-se uma frequência de 13,74 Hz associada à instabilidade. Outro resultado interessante, ainda em relação a essa figura, é que a frequência do primeiro modo se anula em 45,8 m/s, indicando que ocorreria divergência caso o *flutter* não tivesse se manifestado primeiro.

### 6.3 Análise de Estabilidade do Sistema Estocástico

No caso anterior, todas as propriedades foram consideradas com seus valores nominais. Todavia, em situações de interesse prático, os parâmetros que descrevem o modelo matemático do sistema aeroelástico podem sofrer pequenas variações, levando a variações também nas respostas aeroelásticas. Neste trabalho, considera-se uma variação na geometria da asa, com a espessura sendo tratada como um parâmetro aleatório. Conforme exposto na seção 2.1, isso influencia diretamente as matrizes de massa e de rigidez do modelo, apresentando potencial para modificar a estabilidade do sistema aeroelástico.

Como é usual na modelagem de variações dimensionais, assume-se que a espessura apresenta uma distribuição gaussiana. Quanto à magnitude da variação, assume-se um coeficiente de variação (COV) de 5%. Ressalta-se que COV é definido pela razão entre o desvio-padrão e a média. Apesar desse valor parecer elevado, principalmente considerando

estruturas aeronáuticas, tem-se o intuito de se incluir casos extremos. Ademais, acrescenta-se que a magnitude do COV selecionado está de acordo com a literatura consultada, sendo possível encontrar valores semelhantes nos trabalhos de Kurdi et al. (2007) e Georgiou et al. (2012).

Com relação à amostragem, vale salientar que se considera uma confiança de 99,7%, de maneira que as amostras se encontram em um intervalo dentro de três desvios-padrão  $\sigma$  em torno da média, segundo a distribuição gaussiana proposta.

### 6.3.1 Efeito da Incerteza sobre o Comportamento Estrutural

A Figura 6.13 apresenta os envelopes da função de resposta em frequência (FRF) da estrutura analisada, considerando um dos vértices da extremidade livre, na posição  $x = 0,3$  e  $y = 0,5$ , como ponto de excitação e de obtenção da resposta. Fica evidente o desvio em relação ao comportamento do sistema nominal, perceptível pelos deslocamentos tanto dos picos das FRFs, ao longo do eixo horizontal, quanto das próprias FRFs, na direção do eixo vertical. Nota-se ainda que as variações crescem com a frequência. Além disso, como esperado, a curva média tende à curva do sistema nominal, o que indica a convergência para o número de amostras empregado.

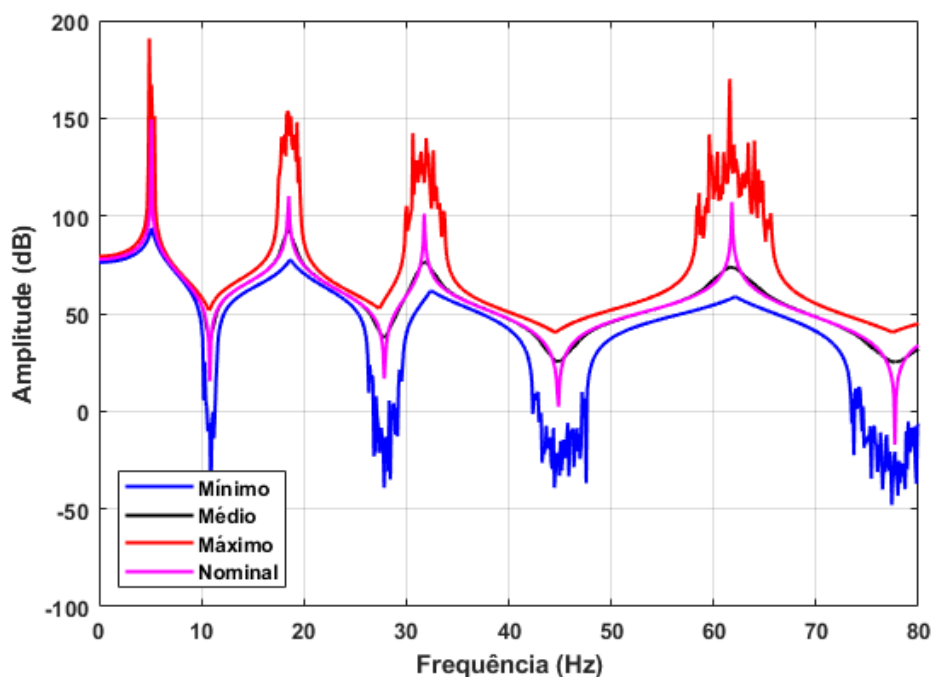


Figura 6.13 – Envelope de FRF para o caso estocástico.

Tendo em vista que os picos representam as frequências naturais, fica evidente que o comportamento estrutural é consideravelmente afetado pela adição da incerteza. Para uma melhor observação da variação, são gerados histogramas das primeiras quatro frequências naturais (Fig. 6.14). Como mostrado, tem-se uma distribuição aproximadamente gaussiana, a mesma que foi assumida para a espessura estocástica.

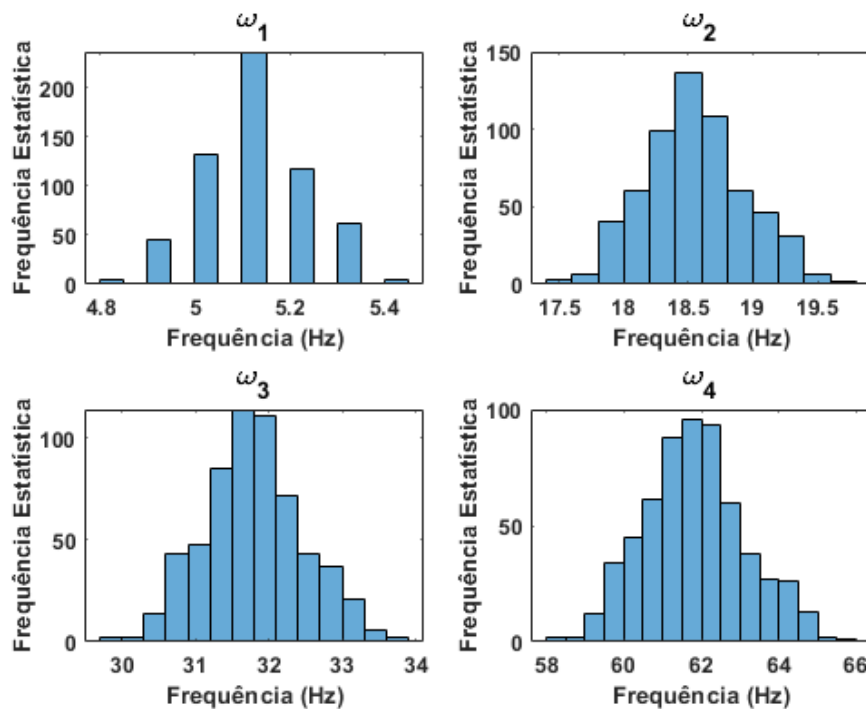


Figura 6.14 – Histogramas para a variação das quatro primeiras frequências naturais.

As médias e os desvios-padrão correspondentes são exibidos na Tab. 6.4 juntamente com os valores nominais. Como constatado anteriormente, percebe-se um aumento considerável da variação com o aumento da frequência, com o desvio padrão da quarta frequência natural sendo mais de dez vezes superior ao valor da primeira. Nota-se também que os valores médios tenderam aos nominais, indicando que a convergência foi obtida.

Tabela 6.4 – Primeiros momentos estatísticos e valores nominais das quatro primeiras frequências naturais.

$\omega_i$ (Hz)	$\mu$ (Hz)	$\sigma$
5,12	5,12	0,1119
18,53	18,53	0,3927
31,75	31,80	0,6790
61,78	61,87	1,2996

### 6.3.2 Efeito da Incerteza sobre o Comportamento Aeroelástico

Tendo em vista a variação na dinâmica estrutural da asa, espera-se que o seu comportamento aeroelástico também seja afetado. Assim, a Figura 6.15 mostra a variação do amortecimento com a velocidade do escoamento para os dois primeiros modos de vibrar. Nota-se que o efeito da incerteza é inicialmente desprezível. No entanto, ao se aproximar da instabilidade, há um nítido desvio nas curvas do diagrama  $v_g$  em relação ao sistema nominal, levando a uma oscilação da velocidade crítica entre um mínimo de 39,2 m/s e um máximo de 47,0 m/s, ou cerca de 8,20% e 9,15%, respectivamente, em relação ao valor nominal de 42,7 m/s.

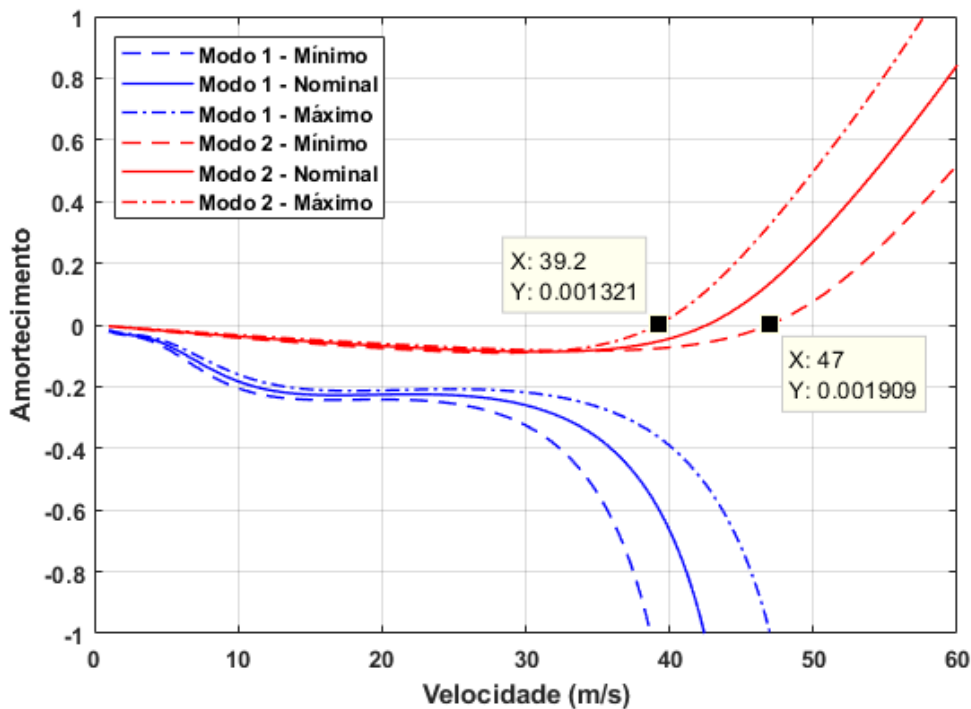


Figura 6.15 – Envelope  $v_g$  para os modos 1 e 2.

O fato de a velocidade crítica assumir valores inferiores ao nominal, evidencia a importância da abordagem proposta, que permite obter envelopes de voo mais realísticos, levando-se em conta possíveis oscilações de variáveis de projeto.

Os envelopes  $v_g$  para os demais modos são apresentados na Fig. 6.16 e Fig. 6.17 nas quais é possível verificar que embora variem, permanecem estáveis. Assim, em todos os casos, o modo instável é o segundo, de maneira que não há uma alteração do modo que conduz à instabilidade.

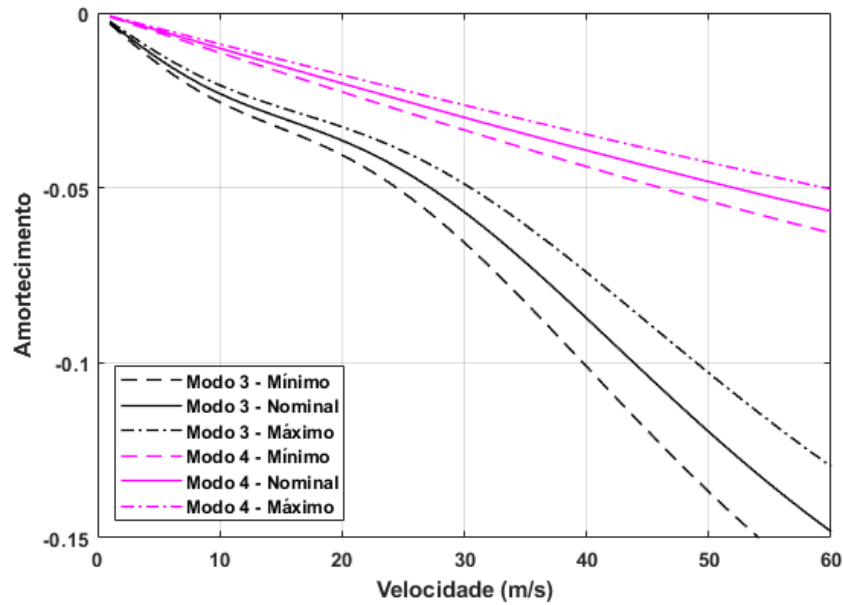


Figura 6.16 – Envelope vg para os modos 3 e 4.

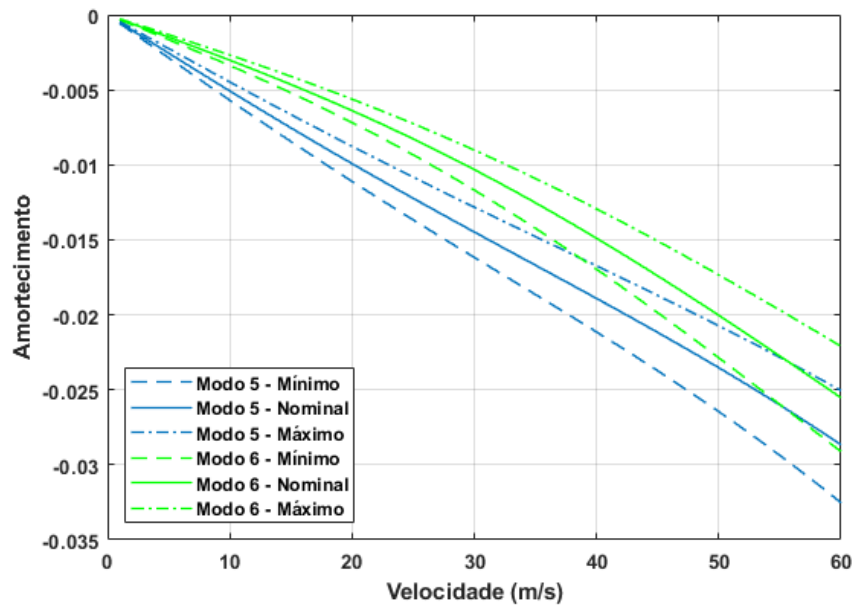


Figura 6.17 – Envelope vg para os modos 5 e 6.

Em relação aos envelopes vf (Fig. 6.18 e Fig. 6.19), percebe-se novamente que as duas primeiras frequências tendem a se aproximar, mas não chegam a coalescer devido à presença do amortecimento aerodinâmico. Por sua vez, as frequências dos demais modos variam com a incerteza, mas não muito com a velocidade. Além disso, como constatado anteriormente na análise estrutural, nota-se a que a variação da frequência natural cresce a cada modo. Mais



uma vez, verifica-se a existência de divergência após a condição de *flutter*, pela Fig. 6.18. Salienta-se que, em todos os casos, o *flutter* ocorre antes da divergência.

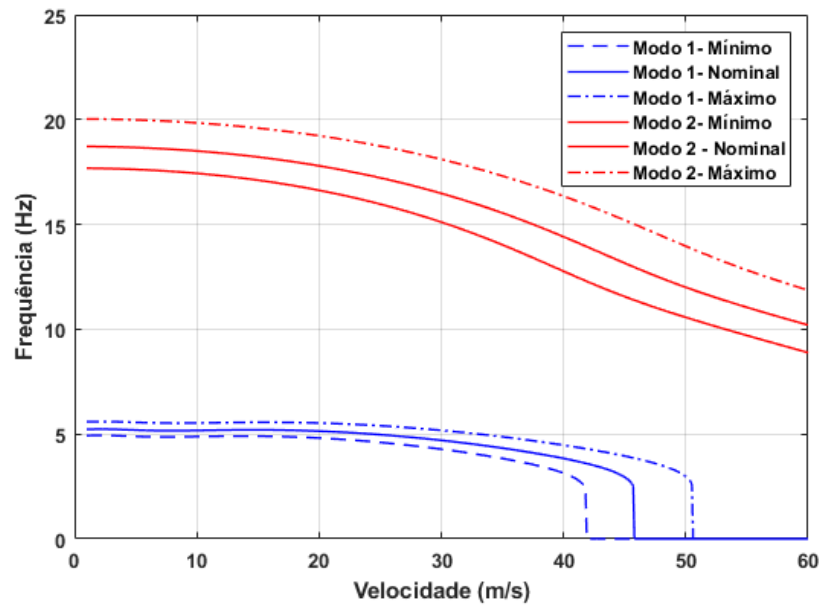


Figura 6.18 – Envelope vf para os modos 1 e 2.

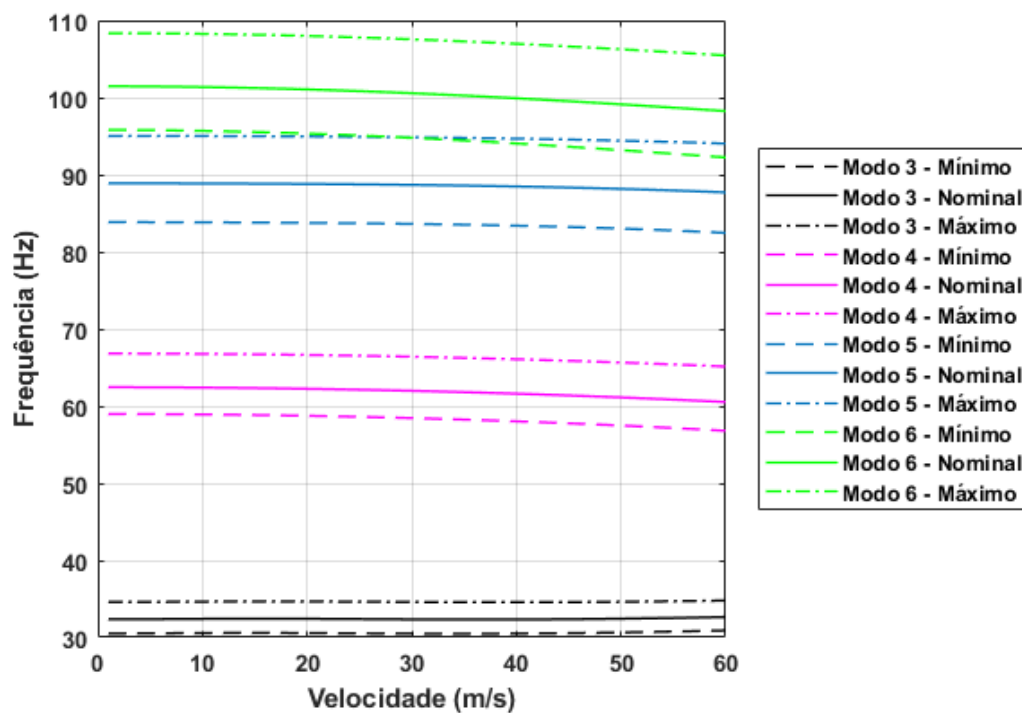


Figura 6.19 – Envelope vf para os modos 3, 4, 5 e 6.

Visando uma análise quantitativa para a velocidade de *flutter*, se emprega o histograma da Fig. 6.20. Percebe-se que uma variação segundo uma distribuição aproximadamente gaussiana, com um desvio padrão de 1,31 e uma média 42,66 m/s.

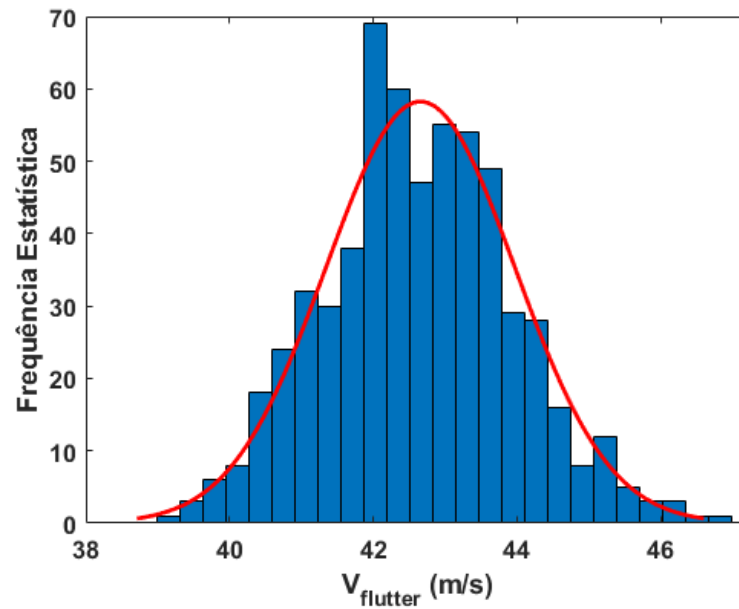


Figura 6.20 – Histograma da velocidade de *flutter*.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES GERAIS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A demanda por aeronaves mais eficientes tem levado à concepção de estruturas cada vez mais esbeltas e flexíveis e, portanto, mais sujeitas a instabilidades. No intuito de se viabilizar tais projetos com confiabilidade e robustez faz-se necessário realizar uma modelagem matemática mais precisa. Nesse sentido, uma abordagem determinística pode ser insuficiente, considerando que o comportamento do sistema aeroelástico pode ser consideravelmente afetado por flutuações relativamente pequenas nos parâmetros que o descrevem. Como nenhum sistema é, na prática, invariável, estando sujeito a oscilações nos parâmetros nominais de projeto, a quantificação das incertezas associadas é um aspecto importante. Diante disso, este trabalho objetivou analisar a estabilidade de uma superfície sustentadora em regime de escoamento subsônico, considerando a presença de incerteza em sua geometria. Ademais, destaca-se que o trabalho realizado representou uma contribuição no âmbito dos estudos atualmente desenvolvidos no LMest-UFU, na medida em que se propõe a inserir quantificação de incerteza em problemas aeroelásticos.

Inicialmente empreendeu-se uma revisão bibliográfica, segundo a qual foi constatado uma considerável sensibilidade do fenômeno de *flutter* em relação às incertezas paramétricas como a espessura da superfície sustentadora e propriedades do material, sobretudo em regime subsônico. Foi observado ainda que os trabalhos que tratam a espessura como estocástica e representam-na pela expansão de KL utilizam uma expansão monodimensional, modelando a asa como uma viga.

Com relação à metodologia utilizada nesta dissertação, procedeu-se inicialmente à inserção da contribuição aleatória no modelo estrutural. Nesse contexto, representou-se a incerteza inerente à espessura da asa através de um processo estocástico bidimensional, o qual foi discretizado pela expansão de Karhunen-Loève. A espessura incerta, assumida gaussiana,

foi então incorporada no MEF através das matrizes elementares de massa e de rigidez. Assim, somadas às matrizes determinísticas, tem-se uma contribuição variável com cada amostra de espessura o que, naturalmente, eleva o custo computacional. Apesar disso, observou-se a convergência do método Monte Carlo a partir de 600 amostras, um número relativamente pequeno.

Na sequência, para a realização da modelagem aeroelástica, empregou-se o programa *Aerosolver*, desenvolvido no LMest por Borges (2019). Esse algoritmo computacional descreve o comportamento do sistema a partir da equação de movimento do MEF, com os esforços atuantes sobre a estrutura advindos do carregamento aerodinâmico não estacionário, dado pelo DLM. Para a realização da análise de estabilidade quanto ao fenômeno de *flutter* segundo o *Aerosolver* recorreu-se ao método pk, representando a equação de movimento do sistema no domínio modal. Nesse momento, visando-se mitigar os elevados custos computacionais associados, realiza-se uma redução da base modal.

Além da quantidade de amostras, foi necessário definir alguns outros parâmetros de simulação, como a ordem da expansão de KL, o nível de refinamento de malha e o número de modos empregado na redução para o domínio modal. Através da realização de análises de convergência, selecionou-se uma expansão de quinta ordem, uma malha de 25x25 e seis modos para base modal.

Finalmente, foram obtidos os resultados da análise de estabilidade para os sistemas nominal e estocástico. Em relação ao primeiro, observou-se que uma velocidade crítica de 42.7 m/s. Já com relação ao segundo, o comportamento da estrutura, dado pelo envelope de FRF, apesar de pouco sensível à incerteza para primeira frequência natural, mostra uma variação crescente para as frequências posteriores. Quanto ao comportamento aerodinâmico do sistema estocástico, percebe-se um desvio em relação ao sistema nominal, com a velocidade variando cerca de 8,20% para baixo e 9,15% para cima, segundo uma distribuição aproximadamente normal.

Concluiu-se, portanto, que a quantificação de incerteza é importante não somente para o caráter estrutural de uma superfície sustentadora, mas também para o seu comportamento aeroelástico. Além disso, a modelagem proposta permitiu obter envelopes de voo mais realistas, sem a necessidade de se adotar de fatores de segurança genéricos, os quais podem ser demasiado conservadores, contribuindo assim para uma metodologia de projeto mais eficiente. Ademais, foi possível obter uma aproximação para a distribuição estatística da velocidade de *flutter*. De forma mais geral, demonstrou-se que o método dos elementos finitos

estocástico é adequado para incluir o efeito de incertezas paramétricas em problemas aeroelásticos de interação fluido-estrutura.

Como perspectivas de trabalhos futuros, em alinhamento com as frentes de pesquisa do LMest, propõe-se:

- Considerar incertezas relacionadas às propriedades do material, especialmente considerando materiais compósitos, uma vez que, como constatado na revisão de literatura, influenciam bastante a resposta do sistema;
- Estender a metodologia deste trabalho para sistemas aeroviscoelásticos, os quais empregam placas sanduíche para a mitigação do fenômeno de *flutter*;
- Analisar e propor métodos de redução de modelo para a análise aeroelástica, visando otimizar o procedimento de cálculo numérico;
- Validar experimentalmente os modelos computacionais utilizados e desenvolvidos;
- Implementar outras formas de propagar as incertezas, de maneira a reduzir o custo, dado que o método Monte Carlo é a técnica menos eficiente.

## Referências

ALBANO, E.; RODDEN, W. P. Doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, v. 7, n. 11, p. 2192a–2192a, 1969. <https://doi.org/10.2514/3.55530>

ANDERSON Jr., J. D. *Fundamentals of aerodynamics*. 5th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011. 1106 p.

ANDREWS, L. V.; VIVIAN, H. T. Unsteady aerodynamics for advanced configurations. Part 1- application of the subsonic kernel function to nonplanar lifting surfaces (Pressure distributions and aerodynamic forces equations for thin nonplanar lifting surface in simple harmonic motion at s. [S.l.], 1965. 122 p.

BANSAL, P.; PITT, D. M. Stochastic variations in Aerodynamic Influence Coefficients (AICs): Effects on flutter prediction of a generic wing. In: 54<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. [s.n.], 2013. <https://doi.org/10.2514/6.2013-1841>

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. 4. ed. John Wiley & Sons, Inc., 2010. 640 p. <https://doi.org/10.1002/9781118032428>

BERAN, P.; STANFORD, B.; SCHROCK, C. Uncertainty Quantification in Aeroelasticity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 49, n. 1, p. 361–386, 2017. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122414-034441>

BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. *Principles of Aeroelasticity*. New York, NY: Dover Publications, Inc, 1975.

BLAIR, M. A compilation of the Mathematics Leading to the Doublet Lattice Method. [S.l.], 1992. v. 48, n. 88, 1091–1104 p.

BORGES, D. M. Desenvolvimento de uma Metodologia de Análise da Estabilidade de Sistemas Aeroviscoelásticos Empregando o Método Doublet Lattice. Tese (Dissertação deMestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2019.

- CASTRAVETE, S. C.; IBRAHIM, R. A. Effect of stiffness uncertainties on the flutter of a cantilever wing. *AIAA Journal*, v. 46, n. 4, p. 925–935, 2008. <https://doi.org/10.2514/1.31692>
- DAI, Y.; YANG, C. Methods and advances in the study of aeroelasticity with uncertainties. *Chinese Journal of Aeronautics*, Chinese Society of Aeronautics and Astronautics, v. 27, n. 3, p. 461–474, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2014.04.016>
- DOWELL, E. H. *A Modern Course in Aeroelasticity*. 5. ed. [S.l.]: Springer International Publishing Switzerland, 2015. 730 p.
- FUNG, Y. C. *An Introduction to The Theory of Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover Publications, Inc, 1993. v. 1. 331–345 p.
- GARRICK, I. E.; REED, W. H. Historical development of aircraft flutter. *Journal of Aircraft*, v. 18, n. 11, p. 897–912, May 1981. <https://doi.org/10.2514/3.57579>
- GEORGIU, G.; MANAN, A.; COOPER, J. E. Modeling composite wing aeroelastic behavior with uncertain damage severity and material properties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 32, p. 32–43, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.05.003>
- GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. New York, NY: Springer New York, 1991. 214 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3094-6>
- HEDMAN, S. G. Vortex lattice method for calculation of quasi steady state loadings on thin elastic wings. [S.l.], 1966. 17 p.
- HODGES, D. H.; PIERCE, G. A. *Introduction to Structural dynamics and aeroelasticity*, second edition. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. 1–247 p.
- KHODAPARAST, H. H.; MOTTERSHEAD, J. E.; BADCOCK, K. J. Propagation of structural uncertainty to linear aeroelastic stability. *Computers and Structures*, Elsevier Ltd, v. 88, n. 3-4, p. 223–236, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.10.005>
- KOTIKALPUDI, A.; PFIFER, H.; BALAS, G. J. Unsteady Aerodynamics Modeling for a Flexible Unmanned Air Vehicle. In: *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 2015. p. 14. <https://doi.org/10.2514/6.2015-2854>

- KUMAR, S.; ONKAR, A. K.; MALIGAPPA, M. Frequency domain approach for probabilistic flutter analysis using stochastic finite elements. *Meccanica*, Springer Netherlands, v. 54, n. 14, p. 2207–2225, 2019. <https://doi.org/10.1007/s11012-019-01061-9>
- KURDI, M.; LINDSLEY, N.; BERAN, P. Uncertainty quantification of the Goland+ Wing's flutter boundary. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, v. 1, n. August, p. 104–123, 2007. <https://doi.org/10.2514/6.2007-6309>
- KUTTENKEULER, J.; RINGERTZ, U. Aeroelastic tailoring considering uncertainties in material properties. *Structural Optimization*, Springer Verlag, v. 15, n. 3-4, p. 157–162, Jan 1998. <https://doi.org/10.1007/BF01203526>
- LANDAHL, M. T. Kernel Function for Nonplanar Oscillating Surfaces in a Subsonic Flow. *AIAA Journal*, v. 5, n. 5, p. 1045, 1967. <https://doi.org/10.2514/3.55319>
- LIAW, D. G.; YANG, H. T. Reliability of uncertain laminated shells due to buckling and supersonic flutter. *AIAA Journal*, v. 29, n. 10, p. 1698–1708, May 1991. <https://doi.org/10.2514/3.10793>
- MURUGAN, S.; CHOWDHURY, R.; ADHIKARI, S.; FRISWELL, M.I. Helicopter aeroelastic analysis with spatially uncertain rotor blade properties. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier Masson SAS, v. 16, n. 1, p. 29–39, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2011.02.004>
- NITSCHKE, C. T.; CINNELLA, P.; LUCOR, D.; CHASSAING, J. C. Model-form and predictive uncertainty quantification in linear aeroelasticity. *Journal of Fluids and Structures*, v. 73, p. 137–161, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.05.007>
- RAO, S. S. *Mechanical Vibrations*. 5th. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. 1104 p.
- REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2006.
- SAMPAIO, R.; LIMA, R. Q. de. *Modelagem Estocástica e Geração de Amostras e Variáveis e Vetores Aleatórios*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012.



SAVIN, É.; HANTRAIS-GERVOIS, J. L. Sparse polynomial surrogates for non-intrusive, high-dimensional uncertainty quantification of aeroelastic computations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Elsevier Ltd, v. 59, n. January, p. 103027, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2020.103027>

SCARTH, C.; COOPER J. E.; WEAVER, P. M.; SILVA, G. H. C. Uncertainty quantification of aeroelastic stability of composite plate wings using lamination parameters. *Composite Structures*, Elsevier Ltd, v. 116, n. 1, p. 84–93, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.007>

SILVA, L. A. Modelagem Aeroviscoelástica de Painéis Sanduíches Planos Via Método dos Painéis. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2018.

SUDRET, B. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. 252 p. Tese (Doutorado), 2007.

TARTARUGA, I.; COOPER, J. E.; GEORGIU, G.; KHODAPARAST, H. H. Flutter uncertainty quantification for the S4T model. In: *AIAA SciTech Forum - 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2017. <https://doi.org/10.2514/6.2017-1653>

VERHOOSSEL, C. V.; SCHOLCZ, T. P.; HULSHOFF, S. J.; GUTIÉRREZ, M. A. Uncertainty and reliability analysis of fluid-structure stability boundaries. *AIAA Journal*, v. 47, n. 1, p. 91–104, 2009. <https://doi.org/10.2514/1.35770>

WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2015. 574 p. <https://doi.org/10.1002/9781118700440>

## Apêndice A

Na seção 2.1, foi apresentada a metodologia para a obtenção das matrizes de massa e de rigidez elementares para uma placa fina modelada via MEF. Nesse sentido, mostra-se aqui a derivação das funções de forma empregadas, denotadas por  $N(x, y)$ .

Adotando-se uma aproximação polinomial de terceiro grau para o campo de deslocamento do gdl  $w$  na direção  $z$ , obtém-se:

$$\tilde{w}(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9y^2x + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}xy^3 \quad (\text{A.1})$$

Escrevendo a Eq. (A.1) em forma matricial:

$$\tilde{w}(x, y) = [P(x, y)]\{c\} \quad (\text{A.2})$$

Sendo:

$$[P(x, y)] = [1 \quad x \quad y \quad \dots \quad xy^3] \quad (\text{A.3})$$

$$\{c\} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_{12}]^T \quad (\text{A.4})$$

A partir da Eq. (A.5) e Eq. (A.6) expressões similares podem ser escritas para os gdl's de deslocamento angular, resultando na Eq. (A.7) e Eq. (A.8):

$$\tilde{\theta}_x(x, y) = \frac{\partial(\tilde{w}(x, y))}{\partial y} \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{\theta}_y(x, y) = -\frac{\partial\tilde{w}(x, y)}{\partial x} \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{\theta}_x(x, y) = [P_y(x, y)]\{c\} \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{\theta}_y(x, y) = [-P_x(x, y)]\{c\} \quad (\text{A.8})$$

Aplicando a Eq. (A.2), Eq. (A.7) e Eq. (A.8) para cada nó do elemento de placa, observando as condições de contorno nodais dadas pelas coordenadas  $x$  e  $y$  de cada nó, pode-se escrever:

$$\{u^e\} = [AB]\{c\} \quad (\text{A.9})$$

Sendo  $\{u^e\}$  o vetor com todos os gdl's elementares:

$$\{u^e\} = [w^k \quad \theta_x^k \quad \theta_y^k \quad w^l \quad \theta_x^l \quad \theta_y^l \quad w^m \quad \theta_x^m \quad \theta_y^m \quad w^n \quad \theta_x^n \quad \theta_y^n]^T \quad (\text{A.10})$$

e a matriz  $[AB]$  é determinada em função das coordenadas dos nós  $k, l, m, n$ :

$$[AB] = \begin{bmatrix} P(x_k, y_k) \\ P_y(x_k, y_k) \\ -P_x(x_k, y_k) \\ P(x_l, y_l) \\ P_y(x_l, y_l) \\ -P_x(x_l, y_l) \\ P(x_m, y_m) \\ P_y(x_m, y_m) \\ -P_x(x_m, y_m) \\ P(x_n, y_n) \\ P_y(x_n, y_n) \\ -P_x(x_n, y_n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Assim, as funções de forma para a placa fina podem ser determinadas isolando  $\{c\}$  na Eq. (A.9) e substituindo o resultado na Eq. (A.2), o que permite obter:

$$N(x, y) = [P(x, y)][AB]^{-1} \quad (\text{A.12})$$

## Apêndice B

Considerando uma superfície planar, a componente não estacionária  $[D_{NE}]$  da matriz de fatores *downwash*  $[D]$  pode ser determinada pela Eq. (B.1). Como exposto na seção 3.1.4, a distribuição de pressão  $P(\bar{\eta})$  é obtida a partir de uma aproximação quadrática para a pressão induzida pela linha de dipolos do painel. Assim,  $P(\bar{\eta})$  é calculada pela Eq. (B.2), como proposto por Rodden et al. (1998).

$$[D_{NE}] = \frac{c}{8\pi} \int_{-e}^e \frac{P(\bar{\eta})}{r^2} d\bar{\eta} \quad (B.1)$$

$$P(\bar{\eta}) = A\bar{\eta}^2 + B\bar{\eta} + C + D\bar{\eta}^3 + E\bar{\eta}^4 \quad (B.2)$$

Na Eq. (B.1),  $e$  designa a meia envergadura e  $c$  a corda do painel, enquanto o raio cilíndrico  $r$  é dado por:

$$r = \left[ (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \right]^{1/2} \quad (B.3)$$

Os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  na Eq. (B.2) são obtidos em seis pontos ao longo da linha de dipolos  $(-e, -e/2, 0, e/2, e)$ , segundo as coordenadas  $\bar{\eta}$ , da seguinte maneira:

$$A = \left[ P(-e) - 16P(-e/2) + 30P(0) - 16P(+e/2) + P(+e) \right] / 6e^2 \quad (B.4)$$

$$B = \left[ P(-e) - 2P(-e/2) + 8P(+e/2) - P(+e) \right] / 6e \quad (B.5)$$

$$C = P(0) \quad (B.6)$$

$$D = \left[ -P(-e) - 2P(-e/2) + 2P(+e/2) - P(+e) \right] / (3e^3/2) \quad (B.7)$$

$$E = \left[ P(-e) - 4P(-e/2) + 6P(0) - 4P(+e/2) + P(+e) \right] / (3e^4/2) \quad (B.8)$$

Sendo  $P(\bar{\eta})$  dada pela aproximação para o numerador da função *kernel*:

$$P(\bar{\eta}) \approx \left\{ K \exp \left[ -i\omega \frac{(\bar{x} - \bar{\eta} \tan \Lambda_s)}{U_\infty} \right] - K_0 \right\} T \quad (B.9)$$

Na Eq.(B.9),  $\Lambda_s$  é o ângulo de enflechamento do painel emissor, enquanto  $T$  é definido em função dos ângulos de diedro do painel emissor,  $\Gamma_s$ , e receptor  $\Gamma_r$ :

$$T = \cos (\Gamma_r - \Gamma_s) \quad (\text{B.10})$$

Já os termos com barra designam coordenadas expressas no plano do elemento emissor, em relação ao centro da linha de dipolos localizado em  $(\kappa_c, \eta_c, \zeta_c)$ . Esses termos podem ser escritos em função de  $\Gamma_s$ , através seguintes relações:

$$\bar{x} = x - \kappa_c \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{y} = (y - \eta_c) \cos \Gamma_s + (z - \zeta_c) \sin \Gamma_s \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{z} = (z - \zeta_c) \cos \Gamma_s - (y - \eta_c) \sin \Gamma_s \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{y} = (y - \eta_c) \cos \Gamma_s + (z - \zeta_c) \sin \Gamma_s \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{\kappa} = \kappa - \kappa_c \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{\eta} = (\eta - \eta_c) \cos \Gamma_s + (\zeta - \zeta_c) \sin \Gamma_s \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{\zeta} = (\zeta - \zeta_c) \cos \Gamma_s - (\eta - \eta_c) \sin \Gamma_s \quad (\text{B.17})$$

Ainda se referindo à Eq.(B.9),  $K_0$  e  $K$  representam respectivamente os termos estacionário e planar e do *kernel*, calculados segundo as relações (B.18) e (B.19).

$$K_0 = 1 + \frac{(x - \kappa)}{R} \quad (\text{B.18})$$

$$K = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\exp(-ik_1 u_1)}{(1+u^2)^{3/2}} + \frac{M_{\infty} r}{R} \frac{\exp(-ik_1 u_1)}{(1+u_1^2)^{1/2}} \quad (\text{B.19})$$

Ressalta-se que  $R$  é o raio hiperbólico definido na Eq. (3.7). Ademais, vale salientar que, como mostrado por Borges (2019), a integral da Eq. (B.19) pode ser avaliada numericamente, utilizando a aproximação proposta por Laschka (1963 apud Silva, 2018).

Por fim, para se calcular a matriz  $[D_{NE}]$ , substitui-se na Eq. (B.1) os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , descritos pelas Eq. (B.4) a Eq. (B.8). Integrando por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
[D_{NE}] = & \frac{c_s}{8\pi} \left\{ \left[ \left( \bar{y}^2 - \bar{z}^2 \right) A + \bar{y}B + C + \bar{y} \left( \bar{y}^2 - 3\bar{z}^2 \right) D + \left( \bar{y}^4 - 6\bar{y}^2\bar{z}^2 + \bar{z}^4 \right) E_1 \right] f \right. \\
& + \left[ \bar{y}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2} \left( 3\bar{y}^2 - \bar{z}^2 \right) D + 2\bar{y} \left( \bar{y}^2 - \bar{z}^2 \right) E \right] \log \left[ \frac{\left( \bar{y} - e \right)^2 + \bar{z}^2}{\left( \bar{y} + e \right)^2 + \bar{z}^2} \right] \\
& \left. + 2e \left[ A + 2\bar{y}D + \left( 3\bar{y}^2 - \bar{z}^2 + \frac{1}{3}e^2 \right) E \right] \right\} \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

Sendo a integral  $f$ :

$$f = \int_{-e}^e \frac{d\bar{\eta}}{\left( \bar{y} - \bar{\eta} \right)^2 + \bar{z}^2} = \frac{1}{|\bar{z}|} \tan^{-1} \left[ \frac{2e|\bar{z}|}{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - e^2} \right] \quad (\text{B.21})$$