

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISES DE INCERTEZAS E SENSIBILIDADE INTERVALARES
APLICADAS EM UMA MÁQUINA ROTATIVA COM EIXO DE
MATERIAL COMPÓSITO**

LEANDRO SOARES SILVA

Uberlândia

2021

LEANDRO SOARES SILVA

**ANÁLISES DE INCERTEZAS E SENSIBILIDADE INTERVALARES
APLICADAS EM UMA MÁQUINA ROTATIVA COM EIXO DE
MATERIAL COMPÓSITO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações
Linha de pesquisa: Dinâmica de Máquinas Rotativas

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr.,
Orientador

Prof. Dr. Valder Steffen Jr.,

Prof. Dr. Americo Barbosa da Cunha Junior

Uberlândia

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 2021	<p>Silva, Leandro Soares, 1993- ANÁLISES DE INCERTEZAS E SENSIBILIDADE INTERVALARES APLICADAS EM UMA MÁQUINA ROTATIVA COM EIXO DE MATERIAL COMPÓSITO [recurso eletrônico] / Leandro Soares Silva. - 2021.</p> <p>Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Jr.. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.108 Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Jr., Aldemir Aparecido Cavalini, 1983-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 621</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

LEANDRO SOARES SILVA

**ANÁLISES DE INCERTEZAS E SENSIBILIDADE INTERVALARES
APLICADAS EM UMA MÁQUINA ROTATIVA COM EIXO DE
MATERIAL COMPÓSITO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Linha de pesquisa: Dinâmica de Máquinas Rotativas

Uberlândia, 12 de fevereiro de 2021.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr., Orientador (UFU)

Prof. Dr. Valder Steffen Jr. (UFU)

Prof. Dr. Americo Barbosa da Cunha Junior (UERJ)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 582, COPEM				
Data:	12/02/2021	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	11912EMC012				
Nome do Discente:	Leandro Soares Silva				
Título do Trabalho:	Análises de Incertezas e Sensibilidade Intervalares Aplicadas a Máquina Rotativa com Eixo de Material Compósito				
	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de webconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Valder Steffen Júnior - FEMEC/UFU; Americo Barbosa da Cunha Junior - UERJ; e Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Valder Steffen Júnior; Prof. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior e o Discente participaram da defesa presencialmente desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Americo Barbosa da Cunha Junior por webconferência desde a cidade de Rio de Janeiro/RJ, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 15/02/2021, às 14:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 16/02/2021, às 10:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Americo Barbosa da Cunha Junior, Usuário Externo**, em 16/02/2021, às 14:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2541097** e o código CRC **A5C0EBC0**.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela sua imensa misericórdia em ter me dado esta oportunidade e me ajudado a concluir este trabalho, adquirindo novos conhecimentos nesta etapa da minha vida.

Agradeço à minha família, em especial minha mãe, por ter me incentivado e me ajudado em cada detalhe.

Agradeço aos meus amigos do LMEst por sempre me ajudarem compartilhando seus conhecimentos para que fosse possível a conclusão desta dissertação.

Agradeço ao meu orientador Aldemir Ap. Cavalini Jr. pelo incentivo e pela orientação proporcionada neste tempo.

Por fim, agradeço ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela boa estrutura oferecida e pela oportunidade.

À minha família e amigos.

Resumo

Silva, L. S. *ANÁLISES DE INCERTEZAS E SENSIBILIDADE INTERVALARES APLICADAS EM UMA MÁQUINA ROTATIVA COM EIXO DE MATERIAL COMPÓSITO*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Fevereiro 2021.

Os materiais compósitos possuem atualmente diversas aplicações em diferentes tipos de componentes e estruturas. Isto ocorre devido a sua ampla gama de vantagens, como por exemplo, alta rigidez e resistência comparados ao seu peso e facilidade em se alterar rigidez e capacidade de amortecimento através da manipulação de suas propriedades. Desse modo, pesquisadores da área de dinâmica de máquinas rotativas têm visto a utilização destes materiais, no lugar de eixos metálicos, como uma oportunidade de maximizar velocidades de operação, reduzir o tempo de aceleração e desaceleração, aumentar eficiência estrutural, entre outros aspectos. Assim sendo, inicialmente um modelo em elementos finitos da máquina rotativa, abordando a modelagem do eixo, disco, mancais e massa de desbalanceamento foi utilizado. Posteriormente modelou-se o eixo de material compósito utilizando o modelo reológico de Kelvin-Voigt, onde as matrizes D_i e K_i foram obtidas. O método de homogeneização SHBT, que define propriedades do eixo de compósito também foi apresentado. Em seguida, análises de incertezas e sensibilidade intervalares dos parâmetros do eixo de compósito foram realizadas. Com os resultados obtidos, foi possível a identificação, de forma clara, dos parâmetros que mais influenciam nas respostas de vibração do eixo em função da frequência e da máquina rotativa completa em função da velocidade de rotação. O Diagrama de Campbell indicando a velocidade crítica e a velocidade de instabilidade do rotor também foi apresentado.

Palavras-chave: Máquinas rotativas. Eixo de compósito. Modelo numérico. Análise de incertezas. Análise de sensibilidade.

Abstract

Silva, L. S. *INTERVAL UNCERTAINTY AND SENSITIVITY ANALYSIS APPLIED TO A ROTATING MACHINE WITH COMPOSITE MATERIAL SHAFT*. M.Sc. Dissertation - Federal University of Uberlândia, Fevereiro 2021.

Composite materials present currently several applications in different types of components and structures. This is due to their wide range of advantages, such as high stiffness and resistance as compared to their weight and ability to change stiffness and damping capacity through the manipulation of their properties. In this way, researchers in the field of rotordynamics have seen the use of these materials instead of metallic shafts as an opportunity to maximize operating speeds, to reduce the time of acceleration and deceleration, to increase structural efficiency, among other aspects. Therefore, in the present contribution, a finite element model of the rotating composite shaft was initially formulated by considering the Kelvin-Voigt rheological model, from which the matrices D_i and K_i were obtained. The disc, bearings, and mass unbalance were also taken into account in this model. The SHBT homogenization method, which defines the properties of the composite shaft, was also presented. Then, uncertainty and sensitivity analyses devoted to the composite shaft parameters were applied. The obtained results demonstrated the parameters that influence most the vibration responses of the shaft according to the frequency and rotation speed. The Campbell diagram indicating the critical and instability speeds of the rotor was also presented.

Keywords: Rotating machine. Composite shaft. Numerical model. Uncertainty analysis. Sensitivity analysis.

Publicações

- SILVA, L.S., BARBOSA, P.C.P.F., CAVALINI JR, A.A., STEFFEN JR, V. Análise comparativa entre modelos numéricos e modelo experimental de eixo de material compósito. Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Faculdade de Engenharia Mecânica, 2018, Uberlândia. Anais.
- SILVA, L.S., BARBOSA, P.C.P.F., CAVALINI JR, A.A., STEFFEN JR, V., LARA-MOLINA, F.A. Analysis of the dynamic behavior of a composite hollow shaft considering uncertain and sensitivity information. 25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2019, 2019, Uberlândia, Brasil.

Sumário

Lista de Figuras	xvi
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Contribuição do estudo	5
1.3 Justificativas	6
1.4 Objetivos	7
1.4.1 Objetivo geral	7
1.4.2 Objetivos específicos	7
1.5 Organização do trabalho	8
2 Revisão Bibliográfica	10
2.1 Histórico de Máquinas Rotativas	10
2.2 Materiais Compósitos	13
2.3 Análise de Incertezas	16
2.4 Análise de Sensibilidade	20
3 Modelo Matemático de Rotores com Eixo de Material Compósito	24
3.1 Modelo de Kelvin-Voigt	24
3.2 Equação do Movimento para Eixo de Material Compósito	30
3.3 Método de Homogeneização	30
3.3.1 Simplified Homogenized Beam Theory - SHBT	35

4	Análise de Incertezas e Sensibilidade Intervalares	37
4.1	Análise de Incertezas Intervalares	38
4.2	Análise de Sensibilidade Intervalar	39
4.3	Cálculo da Sensibilidade Intervalar Absoluta	41
4.3.1	Cálculo da Sensibilidade Intervalar	41
4.3.2	Algoritmo da Sensibilidade Intervalar	42
5	Bancada de Testes e Resultados	45
5.1	Primeiro Caso - Eixo na condição livre-livre	45
5.1.1	Ajuste das Funções de Resposta em Frequência	47
5.1.2	Análises de incertezas e sensibilidade em função da frequência	52
5.2	Segundo Caso - Máquina rotativa com eixo de material compósito . . .	61
5.2.1	Análise de incertezas e sensibilidade em função da velocidade de rotação	64
6	Conclusão	68
	Referências	71
A	Modelo Matemático de Rotores	79
A.1	Eixo	79
A.1.1	Energia Cinética	81
A.1.2	Energia de Deformação	83
A.2	Disco	87
A.3	Mancais	89
A.4	Massa de Desbalanceamento	91
A.5	Equação do Movimento	92
B	Otimização Heurística pelo Método da Evolução Diferencial	93
B.1	Inicialização do algoritmo de ED	94
B.2	Operador de mutação	94
B.3	Operador de cruzamento	96
B.4	Operador de seleção	96

Lista de Figuras

1.1	Aplicação de compósitos no Boeing 787.	2
1.2	Bobinamento circunferencial e bobinamento helicoidal.	3
1.3	Processo de fabricação do material compósito.	4
1.4	Eixo de transmissão de fibra de carbono.	5
3.1	Representação do elemento de Kelvin-Voigt.	25
3.2	Comportamento da fluência e restabelecimento.	26
3.3	Representação da camada no plano indicando as fibras unidirecionais.	31
3.4	Eixo de material compósito.	33
3.5	Representação da camada com as fibras orientadas a uma ângulo θ_p	34
4.1	Algoritmo da abordagem intervalar.	43
5.1	Bancada de testes.	46
5.2	Eixo de material compósito utilizado.	46
5.3	Posição dos sensores e do excitador.	47
5.4	Modelo EF do eixo de material compósito.	47
5.5	FRFs numérica e experimental com respostas obtidas no sensor 1.	49
5.6	FRFs numérica e experimental com respostas obtidas no sensor 2.	51
5.7	Envelope de incertezas com FRF numérica obtida no sensor 1.	53
5.8	Envelope de incertezas com FRF numérica obtida no sensor 2.	54
5.9	Envelope de incertezas com FRF numérica e experimental obtida no sensor 1.	54
5.10	Envelope de incertezas com FRF numérica e experimental obtida no sensor 2.	55
5.11	Índices de sensibilidade relativa normalizada.	55

5.12 Índices de sensibilidade relativa normalizada na frequência de 164,1 Hz.	56
5.13 Índices de sensibilidade relativa normalizada na frequência de 449,9 Hz.	56
5.14 Médias dos índices de sensibilidade relativa normalizada.	57
5.15 Comparação entre FRFs aumentando os amortecimentos específicos (Sensor 1).	57
5.16 Comparação entre FRFs aumentando os amortecimentos específicos (Sensor 2).	58
5.17 Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas.	58
5.18 Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas.	59
5.19 Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas na 1 ^a frequên- cia natural.	59
5.20 Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas na 2 ^a frequên- cia natural.	60
5.21 Média dos índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas.	60
5.22 Vista isométrica da bancada de testes.	62
5.23 Vista lateral da bancada de teste.	62
5.24 Vista superior da bancada de testes.	62
5.25 Bancada de testes na posição vertical.	63
5.26 Modelo EF da máquina rotativa com eixo de material compósito.	64
5.27 Envelope de incertezas na máxima amplitude de vibração do eixo em função da velocidade de rotação.	65
5.28 Índices de sensibilidade relativa normalizada.	66
5.29 Índices de sensibilidade relativa normalizada na velocidade de rotação de 1480 rpm (crítica).	66
5.30 Médias dos índices de sensibilidade relativa normalizada.	67
5.31 Diagrama de Campbell do rotor.	67
A.1 Graus de liberdade (GDLs) associados ao elemento finito do eixo	80
A.2 Representação de um ponto arbitrários B	84
A.3 Representação do elemento de disco.	87
A.4 Encorporação do disco ao eixo em elementos finitos no seu nó corres- pondente.	89
A.5 Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal.	90

A.6	Representação da massa de desbalanceamento.	91
B.1	Fundamentação teórica do algoritmo de ED.	95

Lista de Tabelas

5.1	Propriedades geométricas do eixo.	47
5.2	Limites inferior e superior das variáveis de projeto.	48
5.3	Resultados encontrados nos 12 processos de otimização realizados. . .	50
5.4	Comparação de frequências naturais numéricas/experimentais/ANSYS®. .	51
5.5	Parâmetros do eixo com os limites inferior e superior das incertezas. . .	52
5.6	Componentes da bancada de testes.	63
5.7	Parâmetros dos mancais.	64
B.1	Propriedades geométricas do eixo.	95

Lista de Símbolos

Acrônimos

FRF_{exp} Função resposta em frequência experimental

FRF_{num} Função resposta em frequência numérica

ACP *ANSYS Composite prepPost*

EMBT *Equivalent modulus beam theory*

EMD *Empirical Mode Decomposition*

ESLT *Equivalent modulus beam theory*

F.O. Função objetivo

FRF Função resposta em frequência

HBM *Harmonic balance method*

ISO *International Organization for Standardization*

LBT *Layerwise beam theory*

MCS *Monte Carlo simulation*

MEF Método dos elementos finitos

SHBT *Simplified homogenized beam theory*

Símbolos Gregos

Δp_i^* Largura nominal do intervalo de entrada

$\delta\theta$ Orientação das fibras

$\delta_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}}$	Sensibilidade intervalar absoluta
Δy_i^*	Largura nominal do intervalo de saída
$[\Psi]$	Matriz da capacidade de amortecimento específico
$[\zeta]$	Matriz de amortecimento da camada
Ω	Velocidade de rotação
ω_e	Incremento da frequência ou da velocidade de rotação
ω_i	Frequência ou velocidade de rotação inicial
ω_s	Frequência ou velocidade de rotação final
ψ_1	Amortecimento específico na direção 1
ψ_2	Amortecimento específico na direção 2
ψ_{12}	Amortecimento específico no plano 1-2
ρ	Densidade do eixo
$\rho_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}}$	Sensibilidade intervalar relativa
σ	Tensão
θ_p	Ângulo de orientação das fibras
$v_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}}$	Sensibilidade intervalar relativa normalizada
ν_{12}	Coefficiente de Poisson
φ_1	Rotação vertical 1
φ_2	Rotação vertical 2
α	Tempo de relaxação
η	Viscosidade do amortecedor
λ	Taxa de relaxação
ω_x	Velocidade angular do disco em relação ao eixo x

ω_y	Velocidade angular do disco em relação ao eixo y
ω_z	Velocidade angular do disco em relação ao eixo z
θ_1	Rotação horizontal 1
θ_2	Rotação horizontal 2
θ	Rotação do disco
ε	Deformação
φ	Rotação do disco
ϑ_γ	Termo referente à teoria de viga de Timoshenko

Símbolos Latinos

$[Q]$	Matriz de rigidez do material ortotrópico
$[S]$	Matriz de flexibilidade do material ortotrópico
$[T]$	Matriz transformação
\bar{f}	Função intervalar
$[Q^\Psi]$	Matriz de rigidez amortecida do material ortotrópico
A	Sistema dinâmico
p	Conjunto de parâmetros
p_l	Limite inferior dos parâmetros
p_u	Limite superior dos parâmetros
y	Saída do sistema dinâmico
y_l	Limite inferior da saída
y_u	Limite superior da saída
\tilde{E}_y^p	Módulo de elasticidade amortecido da camada
\tilde{G}_{yx}^p	Módulo de cisalhamento amortecido da camada

B	Ponto arbitrário do eixo
C	Centro geométrico do eixo
CR_{DE}	Probabilidade de cruzamento
D	Matriz de amortecimento associada aos mancais
d	Distância da massa de desbalanceamento em relação ao centro geométrico do eixo
D_D	Efeito giroscópico do disco
D_g	Matriz do efeito giroscópico
D_i	Matriz de amortecimento associada ao material compósito
D_S	Efeito giroscópico do eixo
d_{xx}	Amortecimento do mancal direção xx
d_{xz}	Amortecimento do mancal direção xz
d_{zx}	Amortecimento do mancal direção zx
d_{zz}	Amortecimento do mancal direção zz
dt	Passo de tempo
E	Módulo de elasticidade
E_1	Módulo de elasticidade na direção 1
E_2	Módulo de elasticidade na direção 2
E_y^p	Módulo de elasticidade da camada
F_{DE}	Taxa de perturbação
F_i^t	Força generalizada devido ao amortecimento interno
F_{mu}	Força generalizada mancal
F_{mw}	Força generalizada mancal

F_{uX}	Força de desbalanceamento aplicada na direção X
F_{uZ}	Força de desbalanceamento aplicada na direção Z
F_u	Força de desbalanceamento
G	Módulo de cisalhamento do eixo
G_{12}	Módulo de cisalhamento no plano 1-2
G_{yx}^p	Módulo de cisalhamento da camada
I	Momento de inércia de área
I^p	Momento de inércia de área transversal da camada
I_{Dx}	Momento de inércia em relação ao eixo x
I_{Dy}	Momento de inércia em relação ao eixo y
I_{Dz}	Momento de inércia em relação ao eixo z
K	Matriz de rigidez
K_i	Matriz de rigidez associada ao material compósito
k_s	Fator de correção do cisalhamento transversal
K_{Dt}	Enrijecimento do disco devido ao regime transiente
K_{st}	Enrijecimento do rotor
k_{xx}	Rigidez do mancal direção xx
k_{xz}	Rigidez do mancal direção xz
k_{zx}	Rigidez do mancal direção zx
k_{zz}	Rigidez do mancal direção zz
L	Comprimento elemento de viga
M	Matriz de massa total
M_1	Matriz clássica de massa

M_2	Matriz clássica de massa
M_3	Matriz do efeito secundário da inércia de rotação
M_4	Matriz do efeito secundário da inércia de rotação
M_5	Matriz do efeito giroscópico
M_D	Matriz de massa do disco
M_S	Matriz de massa do eixo
M_T	Matriz do efeito secundário da inércia de rotação do eixo
m_u	Massa de desbalanceamento
N_1	Funções de interpolação do plano XY
N_2	Funções de interpolação do plano ZY
N_p	Número total de parâmetros
q	Vetor de deslocamentos nodais
q_u	Vetor de deslocamentos nodais direção X
q_w	Vetor de deslocamentos nodais direção Z
R_{p-1}	Raio interno da camada
R_p	Raio externo da camada
S	Área da seção transversal do eixo
S^p	Área da seção transversal da camada
S_1	Acelerômetro 1
S_2	Acelerômetro 2
t	Tempo
T_D	Energia cinética do disco
T_s	Energia cinética do eixo

T_u	Energia cinética da massa de desbalanceamento
U	Energia de deformação
u	Deslocamento associado à coordenada fixa do eixo X
u^*	Deslocamento associado à coordenada rotativa do eixo x
u_1	Deslocamento direção X nó 1
u_2	Deslocamento direção X nó 2
V	Volume
W	Força peso
w	Deslocamento associado à coordenada fixa do eixo Z
w^*	Deslocamento associado à coordenada rotativa do eixo z
w_1	Deslocamento direção Z nó 1
w_2	Deslocamento direção Z nó 2

Capítulo 1

Introdução

Nesta seção, apresenta-se primeiramente a contextualização e contribuições do estudo abordado. Em seguida, o problema estudado nesta dissertação é discutido, juntamente com suas justificativas e objetivos. Por fim, a forma como organizou-se o trabalho também é demonstrada.

1.1 Contextualização

Muitas das tecnologias modernas requerem materiais com combinações incomuns de propriedades mecânicas, as quais não podem ser atendidas pelas ligas metálicas convencionais (CALLISTER JR; RETHWISCH, 2020). Estas combinações são comumente necessárias em materiais utilizados na indústria aeroespacial, automobilística e naval. A Fig. 1.1 apresenta uma aplicação de material compósito em componentes de uma aeronaves comercial. Características como baixa densidade, rigidez, resistência a abrasão e a impactos são muito desejadas e procuradas por engenheiros de aeronaves (CALLISTER JR; RETHWISCH, 2020). Sendo assim, os materiais compósitos possibilitam uma alternativa interessante para suprir estas necessidades.

Segundo Reddy (2003), materiais compósitos são aqueles formados pela combinação de dois ou mais materiais em uma escala macroscópica, de modo que tenham melhores propriedades mecânicas do que os materiais convencionais, por exemplo, metais. Algumas das propriedades que podem ser aprimoradas pela formação de um material compósito são rigidez, redução de peso, resistência à corrosão, propriedades térmicas, resistência a fadiga e ao desgaste. A maioria dos materiais compósitos fa-

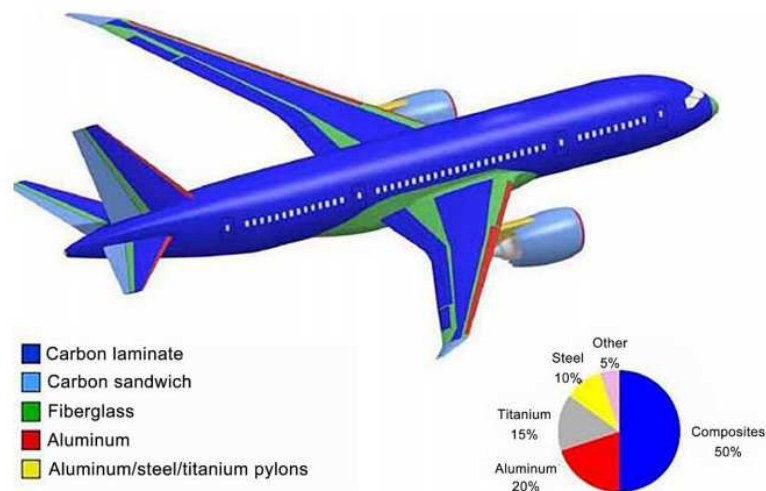


Figura 1.1: Aplicação de compósitos no Boeing 787.
Fonte: (FREISSINET, 2011).

bricados são feitos de dois materiais: um material de reforço, que são as fibras e um material base, que é a matriz (REDDY, 2003).

No entanto, como apresentado por Jones (1978), os materiais compósitos podem ser classificados em quatro tipos: (1) Materiais compósitos fibrosos que consistem em fibras em uma matriz, (2) Materiais compósitos laminados que consistem em camadas de vários materiais, (3) Materiais compósitos particulados que são compostos de partículas em uma matriz e (4) Combinações de alguns ou todos os três primeiros tipos. Os eixos de material compósito normalmente fabricados, e que são analisados neste trabalho, são uma combinação de materiais compósitos fibrosos com técnicas de laminação. Ou seja, várias camadas compostas por reforço de fibras (ex.: fibra de vidro, fibra de carbono, fibra de aramida) onde cada camada apresenta tipicamente fibras orientadas em diferentes direções e são unidas por uma matriz (ex.: resina poliéster, resina epóxi e matriz mineral.)

A fabricação de materiais compósitos pode ser feita através de várias técnicas. A técnica comumente utilizada para manufatura de eixos é o bobinamento, conforme apresentado na Fig. 1.2. Para isso, fibras de carbono ou fibras de vidro são bobinadas em um mandril, produzindo eixos tubulares. Normalmente a espessura da parede de um eixo de material compósito compreende n -camadas, onde cada camada possui as fibras contínuas orientadas em uma determinada direção. Sendo assim, o laminado é obtido empilhando as camadas em uma ordem particular (MENDONÇA et al., 2017). O esquema apresentado na Fig. 1.3 mostra o processo executado para se fabricar um

eixo de material compósito.

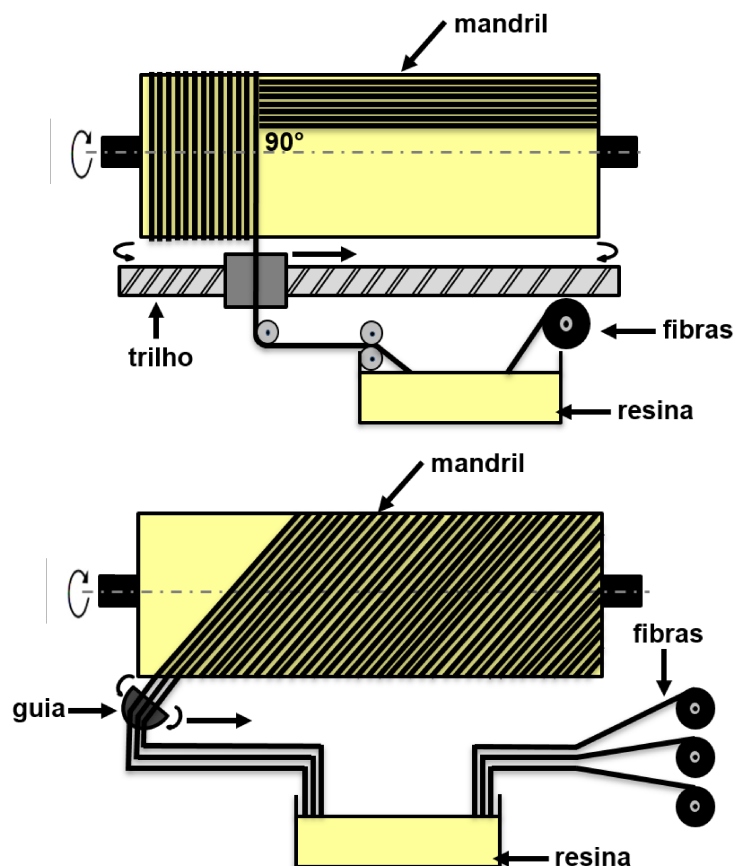


Figura 1.2: Bobinamento circunferencial e bobinamento helicoidal.
Fonte: Adaptado de Pereira (2003)

Nesse sentido, uma área em que existe grande interesse e que se pode extrair benefícios deste tipo de material, é a dinâmica de máquinas rotativas. Eixos de máquinas rotativas podem se beneficiar do uso de materiais compósitos (KUSCHMIERZ et al., 2015). Para máquinas rotativas que operam em condições subcríticas (rotores rígidos), o baixo peso dos eixos compostos permite aceleração e desaceleração mais rápidas (BRUSH, 1999). Em operações supercríticas (rotores flexíveis), onde as amplitudes de vibração associadas à flexão do eixo, tensões dinâmicas, problemas de instabilidade e fadiga são significativas, as técnicas de fabricação de componentes dos rotores em materiais compósitos permitem a personalização das propriedades mecânicas (LEES, 2011). Isso pode ser realizado através de alterações no projeto do eixo, como o número de camadas, orientação das fibras, materiais escolhidos para se utilizar na matriz e no reforço e espessura das camadas, modificando assim as velocidades críticas, velocidade de instabilidade e amplitudes de vibração da máquina

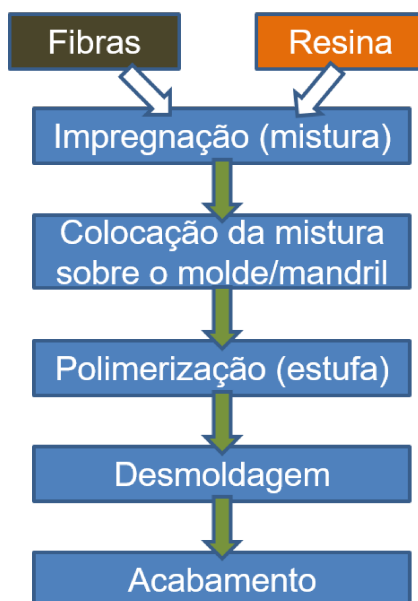


Figura 1.3: Processo de fabricação do material compósito.

rotativa, de acordo com a faixa de operação necessária do equipamentos (GUPTA, 2015). Em síntese, segundo Silveira et al. (2001), eixos de material compósito são uma solução viável para minimizar problemas associados aos eixos metálicos. A Fig. 1.4(a) apresenta um eixo de transmissão de fibra de carbono utilizado na indústria automotiva. No entanto, eixos de material compósitos também podem apresentar desvantagens em relação a outros tipos de materiais, como por exemplo, alto custo de fabricação, dificuldade em se obter precisão em sua geometria e possíveis defeitos decorrentes dos processos de fabricação que influenciem de forma significativa nas propriedades do material.

Por fim, tendo em vista a característica inerente aos materiais compósitos de se alterar suas propriedades, através da forma como ocorre sua fabricação e consequentemente se alterar as respostas dinâmicas do sistema, propõe-se, neste trabalho, a análise de incertezas intervalares (MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009) e análise de sensibilidade (MOENS; VANDEPITTE, 2006; MOENS; VANDEPITTE, 2007) dos parâmetros do eixo de compósito. Com isso, possibilita-se a identificação dos parâmetros que são mais sensíveis e que consequentemente necessitam de maior atenção devido a sua grande influência no comportamento dinâmico do sistema.



Figura 1.4: Eixo de transmissão de fibra de carbono.

1.2 Contribuição do estudo

O laboratório de mecânica de estruturas LMEst da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia tem contribuído ao longo dos anos com vários estudos sobre máquinas rotativas. Steffen Jr (1981) foi o primeiro artigo científico publicado pelo laboratório nessa área.

Posteriormente, outros trabalhos foram publicados por pesquisadores do LMEst sobre modelagem e análise do comportamento dinâmico de materiais inteligentes, como é o caso dos compósitos. Alves (2015) propuseram um sistema de controle passivo e semiativo de vibrações em rotores horizontais flexíveis usando liga com memória de forma nos mancais. Cavalini Jr et al. (2017) desenvolveram uma análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas através da investigação das frequências naturais e das velocidades de instabilidade do rotor, considerando diferentes eixos de material compósito. Barbosa (2018) analisaram o comportamento dinâmico de um eixo de material compósito e comparou resultados numéricos determinados a partir de dois métodos de homogeneização distintos com resultados obtidos experimentalmente.

No contexto de vantagens que possam existir na utilização de eixos de materiais compósitos em máquinas rotativas, este presente trabalho consiste-se, inicialmente, no desenvolvimento de um modelo numérico através do Método dos Elementos Finitos (MEF) do eixo e da máquina rotativa completa, considerando disco e mancais. Para se obter as matrizes de amortecimento e rigidez associadas ao material compósito,

desenvolveu-se o modelo reológico de Kelvin-Voigt. Nestes modelos, utilizou-se a teoria de vigas de Timoshenko, no qual adiciona-se ao modelo de Euler-Bernoulli tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de inércia de rotação. Associado ao modelo de elementos finitos, utilizou-se ainda um método de homogeneização, proposto por Sino (2007) conhecido como SHBT (Simplified Homogenized Beam Theory). Este método baseia-se na homogeneização direta das rigidezes à flexão e ao cisalhamento. As rigidezes à flexão e ao cisalhamento amortecidas também são obtidas através da associação com os fatores de amortecimento inerentes ao material compósito.

Em seguida, utilizou-se respostas de experimentos realizados por Barbosa (2018) e respostas obtidas através do software ANSYS[®] para se ajustar o modelo numérico e comparar com as funções resposta em frequência obtidas.

Posteriormente, análises de incertezas e sensibilidade intervalares foram aplicadas para dois casos distintos. No primeiro caso realizou-se as duas análises em função da frequência, aplicado no eixo de compósito na condição livre-livre. No segundo caso, considerando a máquina rotativa completa, realizou-se as análises de incertezas e sensibilidade em função da velocidade de rotação. Com os resultados obtidos, foi possível a identificação dos parâmetros que mais influenciam nas respostas de vibração do eixo em função da frequência, especialmente nas duas primeiras frequências naturais e da máquina rotativa completa em função da velocidade de rotação, dando ênfase na velocidade crítica.

Por fim, obteve-se o diagrama de Campbell e avaliou-se a velocidade de instabilidade e as velocidades críticas do rotor. A máquina rotativa utilizada foi projetada e construída durante este trabalho, no entanto, somente análises numéricas foram abordadas para este caso.

1.3 Justificativas

A aplicação de eixos de materiais compósitos em dinâmica de máquinas rotativas, como já mencionado nos tópicos anteriores, apresenta vantagens e desvantagens em relação a eixos metálicos comumente utilizados. Tendo em vista as vantagens, a aplicação de análise de incertezas e sensibilidade dos parâmetros se torna importante, tendo como objetivo se encontrar os parâmetros que mais influenciam no compor-

tamento dinâmico do sistema e posteriormente alcançar um objetivo almejado. Com isso, salienta-se a importância de se aplicar uma otimização robusta, com os parâmetros mais sensíveis, e se considerar eixos com diferentes configurações, de modo a customizá-los para se obter respostas dinâmicas favoráveis. Além disso, tendo em vista as desvantagens do material compósito, em se ter precisão nas suas propriedades, a análise de sensibilidade possibilita a identificação dos parâmetros do eixo que necessitam de maior atenção em sua fabricação, de modo a evitar defeitos que possam comprometer significativamente seu comportamento.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo geral

O objetivo deste presente trabalho é desenvolver análises de incertezas e sensibilidade através da aplicação de incertezas intervalares nos parâmetros mecânicos e geométricos de um eixo de material compósito afim de se quantificar a influência destes parâmetros nas funções de resposta em frequência do eixo e nas amplitudes de vibração da máquina rotativa em função da velocidade de rotação.

1.4.2 Objetivos específicos

- Desenvolver um modelo numérico em elementos finitos de uma máquina rotativa com eixo de material compósito, utilizando o modelo reológico de Kelvin-Voigt;
- Aplicar o método de homogeneização SHBT para se definir a rigidez à flexão equivalente, a rigidez à flexão equivalente amortecida, a rigidez ao cisalhamento equivalente e a rigidez ao cisalhamento equivalente amortecido do eixo de compósito;
- Ajustar as funções de resposta em frequência numéricas e experimentais e se identificar os parâmetros do eixo;
- Desenvolver um modelo no ANSYS® do eixo de material compósito com os parâmetros identificados no item anterior;

- Comparar as frequências naturais obtidas pelo modelo numérico, pelo experimento e pelo modelo do ANSYS® nos dois primeiros modos de vibrar do eixo;
- Apresentar uma bancada de máquina rotativa com eixo de material compósito para fins de análises numéricas neste trabalho e para experimentos em trabalhos futuros;
- Aplicar análises de incertezas e de sensibilidade considerando incertezas intervalares nos parâmetros de módulos de elasticidade (duas direções), módulo de cisalhamento, coeficiente de Poisson, coeficientes de amortecimento e orientação das fibras;
- Desenvolver análise de instabilidades e construir o Diagrama de Campbell.

1.5 Organização do trabalho

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

- Capítulo I: apresenta uma introdução do problema de forma a contextualizar e mostrar sua contribuição. Apresenta-se ainda as justificativas e objetivos do trabalho;
- Capítulo II: apresenta uma revisão bibliográfica composta de estruturas de compósito, eixo de material compósito, histórico de máquinas rotativas, análise de incertezas e análise de sensibilidade;
- Capítulo III: descreve o modelo matemático de rotores através do desenvolvimento do modelo do eixo, disco, mancais e massa de desbalanceamento. Em seguida, a equação do movimento é obtida;
- Capítulo IV: descreve o modelo matemático de rotores com eixo de material compósito. O modelo de Kelvin-Voigt é detalhado e obtém-se a equação do movimento para rotores com eixo de material compósito. O método de homogeneização SHBT também é demonstrado neste capítulo;
- Capítulo V: desenvolve as etapas para se realizar as análises de incertezas e sensibilidade;

- Capítulo VI: descreve a bancada de testes utilizada no trabalho e os resultados obtidos. Primeiro apresenta-se o caso onde o eixo está na condição livre-livre, depois o caso com a máquina rotativa completa, com o eixo de compósito;
- Capítulo VII: descreve as conclusões do trabalho e as perspectivas futuras.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo são apresentados diversos trabalhos relacionados aos temas abordados na pesquisa. Assim sendo, esta revisão bibliográfica conta com os seguintes tópicos: histórico de máquinas rotativas, materiais compósitos, análise de incertezas e análise de sensibilidade.

2.1 Histórico de Máquinas Rotativas

Eixos rotativos são empregados em máquinas industriais, em turbinas a vapor e a gás, turbogeradores, motores de combustão interna, compressores alternativos e centrífugos para transmissão de potência (RAO, 1996). Segundo a ISO (*International Organization for Standardization*), uma máquina rotativa é composta por um eixo suportado por mancais que o permite girar livremente em torno de um eixo de coordenadas fixo no espaço.

O assunto sobre dinâmica de máquinas rotativas tem sido estudado de forma extensiva durante o século passado. No final do século dezenove e início do século vinte muitas pessoas na Inglaterra, Alemanha e Estados Unidos estudaram os conceitos fundamentais associados a sistemas dinâmicos rotativos e investigaram os efeitos de diversos tipos de mecanismos destes sistemas. O material publicado nesta área se reduziu de forma significativa entre o começo da Primeira Guerra Mundial e o fim da Segunda Guerra Mundial. Com a viabilização da comercialização de turbinas a gás após a Segunda Guerra Mundial, a necessidade de se entender melhor a dinâmica de sistemas rotativos de alta velocidade se tornaram críticas. Em seguida, o desenvol-

vimento de computadores digitais auxiliou o desenvolvimento de procedimentos altamente sofisticados de análise, simulação, projeto e teste de sistemas rotativos. Muitos pesquisadores ao redor do mundo dedicaram-se na contribuição para um melhor entendimento da dinâmica de máquinas rotativas de alta velocidade durante a última metade do século vinte (ISHIDA; YAMAMOTO, 2013).

A primeira publicação científica, que se tem conhecimento, sobre dinâmica de rotação foi publicada por Rankine (1869), onde descreve-se sobre força centrífuga de eixo com movimento rotativo e conclui-se, de forma equivocada, que existe uma velocidade máxima de rotação permitida que depende dos parâmetros físicos do rotor. Esta velocidade é denominada posteriormente por Dunkerley (1893) como velocidade crítica. Dunkerley (1893) propôs ainda uma equação empírica para o cálculo da menor velocidade crítica de um rotor.

De Laval (1894) demonstrou a possibilidade de operar uma turbina a vapor de um estágio com velocidades superiores a velocidade crítica. Campbell (1924) apresentou o conhecido e muito aplicado Diagrama de Campbell, através da investigação detalhada das vibrações em turbinas a vapor. Newkirk e Taylor (1925) investigaram fenômenos que ocorrem em um rotor sustentado por mancais hidrodinâmicos operando acima de suas velocidades críticas. Stodola (1927) representou uma máquina rotativa simplificada pela primeira vez através da utilização da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Newkirk (1927) apresentou o fenômeno de precessão direta. Lewis (1932) investigou, em um rotor Jeffcott, a respeito de fenômenos não estacionários durante a passagem por velocidades críticas. Smith (1933) foi pioneiro nos estudos onde se considera um rotor com mancais e eixo assimétricos. Thearle (1934) desenvolveu uma técnica de balanceamento onde se utiliza dois planos.

Myklestad (1944) desenvolveu um novo método chamado de método das matrizes de transferência, para se calcular as frequências naturais e modos de vibrar de asas de aeronaves e outros tipos de vigas. Em seguida, Prohl (1945) utilizou este mesmo método para realizar análises de vibração em um rotor flexível. Yamamoto (1955) investigou o efeito das ressonâncias em rotores. Fedrn (1957) desenvolveu técnicas para se balancear rotores flexíveis enquanto Bishop e Gladwell (1959) apresentaram um método geral de balanceamento de rotores flexíveis modo a modo.

Goodman (1964) desenvolveu um procedimento de mínimos quadrados feito por

computador para calcular as massas finais de correção para se balancear uma máquina rotativa em várias velocidades e planos. Neste procedimento, utilizou o método dos mínimos quadrados para minimizar a vibração residual eficaz de pontos selecionados na fundação da máquina e, em seguida, utilizou o método dos mínimos quadrados ponderados para se reduzir a vibração residual máxima. Uma investigação analítica foi realizada por Eshleman e Eubanks (1969) sobre o efeito do torque nas velocidades críticas de um rotor contínuo cujo movimento foi descrito por um conjunto de equações diferenciais parciais, incluindo os efeitos de cisalhamento transversal, inércia rotacional e efeito giroscópico. Ruhl e Booker (1972) aplicaram pela primeira vez o método de elementos finitos em um turbomotor. Para as respostas de desbalanceamento comparou-se este método com o método de Prohl, que representa a massa discretamente. No caso da formulação em elementos finitos, observou-se uma redução considerável no número de graus de liberdade necessários para uma representação precisa do sistema.

Schweitzer (1975) iniciou os estudos com mancais magnéticos aplicando controle ativo para estabilização de vibrações. Lees e Friswell (1997) apresentaram um método para se determinar o estado de desequilíbrio de uma máquina rotativa utilizando a medida de vibração de um pedestal. Swanson, Powell e Weissman (2005) apresentaram em seu artigo um entendimento prático da terminologia e do comportamento, com base na visualização de como um eixo vibra e examinaram os problemas que afetam a vibração. Lei et al. (2013) fizeram uma revisão geral para levantar a recente pesquisa e desenvolvimento de EMD (*Empirical Mode Decomposition*), que é, segundo ele, umas das mais poderosas técnicas de processamento de sinais e foi amplamente estudada e aplicada no diagnóstico de falhas de máquinas rotativas.

No sub-tópico a seguir são apresentados os trabalhos já desenvolvidos e publicados sobre aplicações de materiais compósitos. Inicialmente faz-se uma revisão geral da aplicação e importância dos materiais compósitos em diferentes tipos de estruturas, em seguida, foca-se na apresentação de trabalhos já desenvolvidos sobre aplicação de eixos de materiais compósitos em máquinas rotativas. Neste sentido são apresentados exemplos de diferentes técnicas, métodos e análises já desenvolvidas.

2.2 Materiais Compósitos

Considerando o grande aumento nas aplicações de materiais compósitos em estruturas diversas, conforme já discutido anteriormente, alguns trabalhos têm sido desenvolvidos com o intuito de se estudar as aplicações, características e vantagens inerentes a estes materiais. Assim sendo, alguns trabalhos são apresentados para mostrar as abordagens que já foram feitas, através da utilização de métodos e técnicas distintas e os resultados já obtidos pelos autores em relação aos materiais compósitos.

Mamalis et al. (1997) desenvolveram um trabalho de pesquisa com materiais compósitos onde a ideia era aplicar cargas axiais e de flexão em estruturas simples compostas por paredes finas e investigar o efeito da geometria da amostra na capacidade de absorção de energia. Neste caso, variou-se as dimensões da seção transversal, espessura e comprimento da estrutura. A influência do tipo de material compósito, as características do laminado, o método de carregamento e a taxa de deformação também foram investigados no processo. Com isso, os autores obtiveram várias conclusões, algumas delas foram que materiais compósitos de paredes finas fabricados com carbono e epoxy absorvem mais energia que os fabricados com fibra de vidro e epoxy. Concluiu-se também que a energia específica tende a variar com a orientação das fibras. Um ângulo de 45° para a orientação das fibras aparentemente é bem crítico quando se considera a capacidade de absorção de energia e, em geral, a energia de absorção específica de vários materiais compósitos é reduzida com o aumento da temperatura, acima de cerca de 0°C .

Um modelo anisotrópico generalizado para materiais compósitos com grande deformação baseado na teoria clássica da plasticidade isotrópica foi investigado por Car, Oller e Oñate (2001). Como descrito pelos autores, esta teoria proposta é uma generalização das teorias clássicas e permite o uso de modelos e algoritmos desenvolvidos para materiais isotrópicos. Todo o comportamento do compósito é modelado incorporando o modelo anisotrópico em um modelo baseado em uma teoria de mistura modificada. Neste sentido, a precisão e o potencial do modelo anisotrópico foram testados, no trabalho, em análise de falhas na qual comparou-se com resultados experimentais disponíveis. Logo, concluiu-se que o modelo constitutivo desenvolvido é apropriado para análise de materiais compósitos em regimes lineares e não-lineares e a formulação permite reproduzir fenômenos não-lineares complexos em materiais compósitos,

como anisotropia, grandes deformações, plasticidade e fratura.

Vários trabalhos também foram desenvolvidos ao longo dos anos para se estudar a aplicação de materiais compósitos, mais especificamente, em dinâmica de máquinas rotativas. O primeiro trabalho nesta área que se tem conhecimento foi desenvolvido por Zinberg e Symonds (1970), onde investigou-se numericamente um eixo de transmissão do rotor de cauda de um helicóptero, assumido como um tubo de parede fina e produzido em boro/epóxi e calculou-se suas velocidades críticas. Em seguida, Bauchau (1983) investigou diferentes tipos de eixos de compósito, em máquinas rotativas, com diferentes números de camadas e orientações de fibras para encontrar uma configuração ótima, de modo que a frequência natural aumentasse e a tensão à flexão reduzisse de forma significativa. Duas patentes (WORGAN; SMITH, 1978; YATES; REZIN, 1979) e um trabalho (SPENCER; MCGEE, 1985) foram desenvolvidos no Estados Unidos indicando que naquela época obstáculos preliminares em projetos de eixos de material compósito e suas aplicações em máquinas rotativas foram superados. Outras aplicações de eixos de material compósito também foram estudados: um eixo gerador de compósito de uma aeronave por Raghava e Hammond (1984), aplicação de eixo de compósito na tomada de força de uma aeronave por Gargiulo (1986), eixo de compósito em um sistema de propulsão naval por Wilhelmi, Appleman e Loo (1986) e eixo de transmissão de compósito em torres de resfriamento por Berg (1989).

Em seguida, Singh e Gupta (1996) iniciaram análises dinâmicas em rotores com eixo de material compósito, onde desenvolveu-se dois modelos numéricos distintos de eixo de material compósito e os comparou. Os modelos desenvolvidos foram o EMBT (*Equivalent Modulus Beam Theory*) e o LBT (*Layerwise Beam Theory*) derivado de um teoria de cascas já existente. Neste estudo, os autores verificaram algumas vantagens do modelo LBT em relação ao modelo EMBT, como por exemplo: a deformação por cisalhamento em vigas com paredes finas é levada em consideração de forma mais realística no modelo LBT, não sendo necessário o uso de fatores de correção, os efeitos que as alterações de empilhamento causam podem ser consideradas no modelo LBT e o campo de deslocamento é melhor representado se comparado com o deslocamento real. Os autores concluíram ainda que o modelo EMBT apresenta resultados mais precisos quando aplicado em eixo de material compósito simétricos.

Chang, Chang e Huang (2004) estudaram algumas características dinâmicas como,

frequências naturais e as velocidades críticas de uma máquina rotativa com um eixo de material compósito formado por fibras orientadas aleatoriamente. Neste caso, a teoria do campo médio de Mori-Tanaka foi adotada para levar em conta a interação nas concentrações finitas de reforços (fibras) no material compósito. Os módulos de elasticidade efetivo do material compósito foram expressos em função das propriedades de fase, fração de volume e ângulos de orientação de seus constituintes. Por fim, analisou-se as respostas dinâmicas do rotor com eixos de material compósito laminado reforçado em quatro casos distintos de inclusões de fibra. A importância das orientações, proporção e fração de volume das fibras inclusas, nas frequências e nas velocidades críticas do rotor com eixo de compósito foram apresentadas.

Sino et al. (2008) desenvolvam análises próximas às desenvolvidas por Singh e Gupta (1996) no entanto com foco na análise da instabilidade dinâmica do rotor obtida por quatro métodos distintos, que foram o EMBT (*Equivalent Modulus Beam Theory*), EMBT modificado, LBT (*Layerwise Beam Theory*), SHBT (*Simplified Homogenized Beam Theory*) e resultados obtidos por experimentos. Os autores concluíram que as velocidades críticas obtidas pelo método SHBT apresentam bastante similaridade com aquelas obtidas pelos métodos LBT, EMBT modificado e resultados experimentais. Em contrapartida, o método EMBT apresentou discrepâncias significativas em termos de frequências e principalmente em termos de velocidades de instabilidade. Segundo os autores, estas discrepâncias ocorrem devido às simplificações impostas pela formulação do método EMBT onde se considera somente sequências simétricas e balanceadas de empilhamento das camadas e não se considera as distâncias das camadas do compósito até o eixo neutro.

Alwan et al. (2010) desenvolveram uma análise dinâmica de eixos vazados e eixos sólidos de compósito. Foram utilizados três tipos diferentes de materiais compósitos nas análises: vidro/epóxi, carbono/epóxi e boro/epóxi. Os autores investigaram os efeitos dos diferentes materiais e das diferentes sequências de empilhamento nas características de vibração, como frequências, tanto nos modos de flexão quanto de torção e através da estimativa de amortecimento. Dados experimentais foram obtidos para se calcular as frequências naturais de flexão e torção. O ANSYS[®] foi o software, baseado no método dos elementos finitos, utilizado para simular o comportamento dinâmico dos compósitos, onde foram utilizadas as propriedades obtidas experimen-

talmente. Algumas das observações apontadas pelos autores neste estudo foi que a inclusão de camadas ao longo da direção transversal no material boro/epóxi é uma boa opção para a fabricação de eixos mais rígidos e que um eixo de compósito fabricado de vidro/epóxi apresenta as menores frequências naturais. Outra conclusão obtida foi que a inclusão de camadas mais internas, nas sequências de empilhamento do eixo laminado, com orientação de 45° aumenta drasticamente a frequência de torção do sistema.

Arab et al. (2017) apresentaram uma análise dinâmica de um rotor com eixo de material compósito utilizando o método elementos finitos baseado no modelo ESLT (*Equivalent Modulus Beam Theory*). Este modelo ESLT foi desenvolvido e comparado com os modelos EMBT (*Equivalent Modulus Beam Theory*), EMBT modificado, LBT (*Layerwise Beam Theory*) e SHBT (*Simplified Homogenized Beam Theory*). Os resultados obtidos pelo modelo ESLT foram considerados satisfatórios se comparados com os resultados disponíveis na literatura utilizando diferentes teorias. O modelo em elementos finitos desenvolvido associado ao modelo ESLT considera os efeitos da sequência de empilhamento, orientação da fibra e acoplamento normal-cisalhante. Segundo os autores o modelo EMBT e SHBT podem levar a discrepâncias significativas em termos de frequências, devido ao fato de que o acoplamento normal-cisalhante, as orientações das fibras e as sequências de empilhamento influenciam significativamente as características dinâmicas dos eixos de material compósito em máquinas rotativas. Conclui-se ainda no trabalho que o modelo adotado nas análises apresentou-se adequado para eixos de material compósito com sequências de empilhamento tanto simétricas como assimétricas.

2.3 Análise de Incertezas

Os componentes de qualquer sistema mecânico podem estar sujeitos a incertezas. Segundo Lalanne e Ferraris (1998), máquinas rotativas são inevitavelmente sujeitas a incertezas. Neste caso, sabe-se que dentre as maiores fontes de incertezas incluem-se a variação das propriedades mecânicas dos materiais, fabricação (ex.: materiais compósitos), posicionamento dos componentes nas montagens dos sistemas, defeitos e desgastes dos materiais. Trabalhos anteriores já propuseram a aplicação de

análise de incertezas em sistemas mecânicos diversos através da utilização de várias metodologias e técnicas distintas. Estas aplicações são estudadas e investigadas para se verificar a influência que a variação de parâmetros de um sistema pode ter nas respostas.

Koroishi et al. (2012) aplicaram o método dos elementos finitos estocásticos para avaliar o comportamento dinâmico incerto de uma máquina rotativa. Neste caso, as incertezas foram modeladas como campos estocásticos gaussianos homogêneos e foram discretizados com o método espectral utilizando expansões de Karhunen-Loève. Os parâmetros escolhidos como sendo variáveis incertas foram o módulo de elasticidade do eixo e os parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais. Como solucionador estocástico utilizou-se o método de Monte Carlo combinado com a amostragem do Hipercubo Latino. As simulações numéricas foram feitas para se observar as variações dos envelopes nas funções resposta em frequência, no diagrama de Campbell e nas órbitas do rotor flexível. Por fim, os autores concluíram que incertezas associadas aos parâmetros do eixo e dos mancais representam um aspecto importante a ser investigado durante as fases de projeto de um sistema de rotor flexível devido a sua grande influência nas velocidades críticas.

Murugan et al. (2012) investigaram os efeitos causados por propriedades espacialmente incertas de um rotor de helicóptero, fabricado de material compósito, na resposta aeroelástica, como frequências de rotação, cargas vibratórias, etc. Os autores salientam que inicialmente a incerteza espacial foi modelada como variáveis aleatórias discretas ao longo do período da pá e a análise de incertezas foi realizada através de simulações diretas de Monte Carlo (MCS). Algumas das conclusões tiradas deste estudo foi que as incertezas consideradas nas propriedades do material compósito tiveram influência considerável nas frequências de rotação do rotor. As frequências fundamentais de *flap*, *lag* e torção são sensíveis às incertezas nas seções internas e de raiz da pá do rotor.

Ma et al. (2013) compararam o método baseado na superposição modal intervalar, com a aplicação do método de Monte Carlo para determinar o envelope na resposta dinâmica de um sistema de rotor considerando parâmetros incertos. Os autores concluíram que os resultados numéricos obtidos estão coerentes, considerando os dois métodos, apresentando que as respostas dinâmicas intervalares obtidas pelo mé-

todo da superposição modal engloba as respostas obtidas pela aplicação de Monte Carlo. No entanto, os autores salientam que o método da superposição modal intervalar apresenta-se mais eficiente que o método de Monte Carlo em questão de tempo de simulação.

Cavalini Jr et al. (2015) apresentaram uma análise nos parâmetros incertos que afetam o comportamento dinâmico de um rotor flexível contendo três discos rígidos e suportado por dois mancais com filmes de óleo. Duas análises foram realizadas: incertezas na viscosidade do óleo e incertezas na folga radial aplicadas aos dois mancais. As incertezas consideradas neste trabalho foram modeladas utilizando uma análise baseada em lógica fuzzy. Os autores destacam que as análises fuzzy são vantajosas pois possibilitam saber quais são os limites superior e inferior do envelope de incertezas de forma mais abrangente. Algumas das conclusões evidenciadas no trabalho foi que as aplicações numéricas e os testes experimentais levaram a resultados semelhantes e que a estratégia proposta demonstrou a relevância de se introduzir incertezas nos parâmetros do ponto de vista do projeto de máquinas rotativas.

Lara-Molina, Koroishi e Steffen Jr (2015) realizaram uma análise de incertezas de um rotor flexível através da implementação do Método dos Elementos Finitos Fuzzy e do Método dos Elementos Finitos Estocásticos Fuzzy. Neste caso, as incertezas consideradas nos parâmetros (rigidez, módulo de elasticidade) que caracterizam o sistema do rotor foram introduzidas diretamente através de uma abordagem paramétrica e modeladas como variáveis fuzzy e variáveis aleatórias fuzzy. As órbitas e as funções resposta em frequência do rotor flexível com parâmetros incertos foram simuladas utilizando o método de análise dinâmica estocástica fuzzy. Os autores concluíram que os resultados numéricos indicaram o grau de influência que as variáveis incertas fuzzy exercem sobre o comportamento dinâmico do rotor e que a estratégia utilizada demonstra ser válida para o projeto e análises de sistemas rotativos. No entanto, os autores concluíram ainda que a principal desvantagem de se utilizar a análise fuzzy e a análise estocástica fuzzy é a necessidade de se resolver o problema de otimização no nível α , pois exige alto esforço computacional.

Fu et al. (2017) realizaram uma análise dinâmica de respostas de um rotor com parâmetros incertos através de um método não-intrusivo intervalar baseado na aproximação polinomial de Chebyshev. Um modelo de elementos finitos do rotor foi utilizado

para se obter a solução original. Neste caso, vários parâmetros foram definidos como sendo variáveis intervalares incertas e a resposta de saída foi aproximada pela primeira classe de polinômios ortogonais de Chebyshev. Os resultados foram comparados com os obtidos no método *scanning* e no MCS para mostrar a eficácia e precisão da abordagem proposta. Segundo os autores o método intervalar se mostrou mais eficiente e sua utilização se apresentou mais coerente em várias situações de incertezas porque os pontos de *scanning* ou amostras multi-dimensões utilizadas nos outros dois métodos são enormes enquanto os números de interpolação usados no método intervalar permanecem aceitáveis. Em questão dos resultados obtidos pelas respostas incertezas do rotor, concluiu-se ainda que devido as incertezas introduzidas, as amplitudes das respostas dinâmicas apresentaram grandes variações, em velocidades de rotação próximas da velocidade crítica.

Fu et al. (2018) analisaram incertezas não probabilísticas em um sistema rotativo com uma trinca transversal *breathing*. Um modelo substituto foi estabelecido para quantificar os efeitos incertos de diferentes parâmetros no estado estacionário da resposta não-linear do rotor com trinca, incluindo a profundidade da trinca em si. Para isto, acoplou-se o HBM (*harmonic balance method*) com a teoria da aproximação de Chebyshev. A precisão do método proposto neste trabalho foi validada comparando-o com o método *scanning*. Concluiu-se que alguns parâmetros como o módulo de Young e a profundidade da trinca se mostraram com alta sensibilidade, tendo em vista que pequenas variações nestes parâmetros levaram a grandes variações na resposta do sistema. Além disso, segundo os autores o método de análise é conveniente e pode ser utilizado para outros problemas não lineares, como sistemas de rotores com folga ou falha por impacto.

Como pode ser visto nos trabalhos apresentados neste sub-tópico, foram descritas aplicações com vários problemas diferentes, considerando incertezas em parâmetros distintos e através da utilização de métodos distintos. No sub-tópico a seguir serão apresentados trabalhos onde aplicam-se também metodologias diferentes para se realizar a análise de sensibilidade dos parâmetros em sistemas mecânicos diversos.

2.4 Análise de Sensibilidade

Trabalhos anteriores a este já propuseram a aplicação de análises de sensibilidade em máquinas rotativas e outras estruturas para se conhecer os parâmetros que mais influenciam nas suas respostas. A análise de sensibilidade é essencial para se melhorar o projeto de máquinas rotativas através da previsão de respostas de vibração. Nesta seção são apresentados exemplos de trabalhos onde realizou-se análises de sensibilidade de sistemas através de diferentes métodos probabilísticos e não-probabilísticos.

Venkatesan, Friedmann e Yuan (1994) apresentaram a formulação matemática de uma análise de sensibilidade necessária para a otimização estrutural de uma pá de rotor fabricada de material compósito com restrições estruturais dinâmicas e aeroelásticas. Sendo assim, formulou-se a sensibilidade para características de estabilidade dinâmica e aeroelástica da pá do rotor. Os autores apontaram que a validação da formulação matemática proposta foi feita através da comparação dos resultados de sensibilidade com os obtidos de uma abordagem de diferença finita pura. Com isso, algumas das conclusões destacadas pelos autores foram as seguintes: as frequências naturais nos modos de *flap* e torção da pá do rotor são mais sensíveis a orientações das fibras na parede horizontal do que na parede vertical, enquanto as frequências de *lag* são igualmente sensíveis a variações nas orientações das fibras na parede horizontal e na vertical. Além de que, as frequências naturais dos modos mais altos em *flap* e *lag* são mais sensíveis a variações nas orientações das fibras do que as frequências naturais correspondentes aos modos mais baixos.

Moens e Vandepitte (2006) apresentaram o método de análise de sensibilidade intervalar para calcular quão influentes parâmetros do sistema poderiam ser, individualmente, na função resposta em frequência. Para isso, considerou-se incertezas intervalares nestes parâmetros. O objetivo principal do trabalho, segundo os autores, foi obter informação sobre o comportamento da resposta do sistema quando se considera mudanças nos intervalos dos parâmetros do modelo. Os autores justificam a utilização do método intervalar, que é um método não-probabilístico, o fato de que diferente dos métodos probabilísticos, esta abordagem pode ser aplicada mesmo quando as informações sobre as incertezas nos parâmetros são limitadas. O modelo estudado neste trabalho foi de um veículo comercial de transporte e as incertezas consideradas

foram de $\pm 10\%$ nas propriedades de massa do chassi, carreta e cabine. Alguns dos resultados apresentados foram que a importância da massa da cabine se mostra bastante evidente em frequências mais baixas, próximas a 1 Hz, enquanto a massa do chassi aparece com grande influência na resposta por volta de 2,5 Hz. Isto ocorre devido ao fato destas frequências estarem próximas aos modos de vibrar destas duas estruturas, respectivamente. Por fim, os autores ainda concluíram que o conceito de sensibilidade intervalar se mostra muito apropriado para análise do efeito das incertezas intervalares nos parâmetros na resposta do sistema, pois ajuda a identificar de forma clara quais são os parâmetros mais cruciais no problema considerado.

Urbiola-Soto (2018) apresentou em seu trabalho, primeiramente, uma abordagem de otimização na dinâmica de rotação e no desempenho tribológico de mancais tilting pad. Em seguida, realizou uma análise de sensibilidade e um estudo da variação da resposta do sistema para se identificar as variáveis de entrada mais influentes nestas respostas. O método de Monte Carlo foi utilizado para se gerar variações aleatórias nas variáveis de entrada, em seguida, cálculos probabilísticos foram realizados nas amostras geradas. Com isso, algumas das conclusões obtidas foram: a pré-carga no mancal, uma das variáveis de projeto, apresentou grande influência sobre a velocidade de instabilidade do rotor e sobre as vibrações em todas as velocidades críticas e velocidades de operação. Neste caso, observou-se um aumento das vibrações na velocidade crítica e uma redução das vibrações operacionais em ambos os mancais. Observou-se que a folga diametral dos mancais proporcionou um maior impacto nas proximidades da velocidade crítica. Tanto a folga diametral dos mancais como a temperatura do filme lubrificante apresentaram uma tendência de se reduzir os coeficientes de atrito.

Koroishi, Lara-Molina e Repinaldo (2018) apresentaram um método numérico que permite avaliar os efeitos das incertezas na resposta estrutural de um sistema de rotor inteligente e também avaliar a sensibilidade de cada parâmetro incerto. A resposta da estrutura sujeita a parâmetros incertos foi analisada com base na modelagem estocástica e a sensibilidade em relação às órbitas foi examinada utilizando o método de sensibilidade global. Os resultados numéricos permitiram identificar de que forma cada parâmetro incerto contribuiu para a resposta incerta das órbitas. Sendo assim, os autores concluíram que o módulo de elasticidade do eixo é o parâmetro mais sen-

sível seguido pela rigidez dos mancais.

Lara-Molina et al. (2019) propuseram, assim como Moens e Vandepitte (2006), a análise do efeito de parâmetros intervalares incertos nas respostas dinâmicas de um rotor flexível utilizando a metodologia intervalar associado ao método de otimização global. As respostas incertas do rotor flexível são calculadas usando a análise intervalar com base no método de elementos finitos intervalares. Além disso, os autores salientaram que a sensibilidade de cada parâmetro incerto também é calculada com base na análise intervalar e os resultados da simulação numérica são obtidos nos domínios do tempo e da frequência que abrangem as respostas de FRF, órbitas, diagrama de Campbell e de run-up. Algumas das conclusões apontadas pelos autores foram que na FRF a sensibilidade do amortecimento dos mancais ao longo da direção x (direção horizontal) aumenta nas frequências naturais. No diagrama de Campbell concluiu-se que os coeficientes de rigidez dos mancais na direção x são os parâmetros mais sensíveis e a rigidez na direção z (direção vertical) apresenta baixa sensibilidade para pequenas velocidades de rotação. Por fim, na resposta de run-up os índices de sensibilidade indicaram que a rigidez do eixo e dos mancais são mais sensíveis e o amortecimento dos mancais apresenta uma pequena sensibilidade nas velocidades críticas.

Barbosa et al. (2020), assim como Lara-Molina et al. (2019), realizaram uma análise de incertezas e sensibilidade utilizando a abordagem intervalar. Porém, a aplicação foi realizada em um eixo de material compósito com dois discos e dois rolamentos acoplados. A análise de sensibilidade intervalar foi aplicada neste trabalho para avaliar os efeitos dos parâmetros incertos sobre o comportamento dinâmico do eixo de material compósito para diferentes frequências. Neste caso, o método de homogeneização utilizado foi o SHBT associado à teoria de vigas de Timoshenko, para se obter o modelo em elementos finitos do eixo de compósito. As incertezas foram consideradas em diferentes parâmetros do eixo, como módulos de elasticidade, módulo de cisalhamento, amortecimento específico do material compósito, entre outros. Considerou-se também incertezas nos posicionamentos dos discos e dos rolamentos. Por fim, os autores concluíram que os resultados obtidos demonstraram que o cenário incerto adotado foi capaz de representar as FRFs experimentais e que os índices de sensibilidade dos parâmetros incertos considerados mudaram de acordo com a faixa de

frequência das FRFs.

Capítulo 3

Modelo Matemático de Rotores com Eixo de Material Compósito

Neste capítulo, será apresentada a modelagem matemática de máquinas rotativas com eixo de material compósito, de maneira que será demonstrada a formulação das matrizes elementares que constituem o modelo matemático do sistema, através da utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF). Através do desenvolvimento que será apresentado a seguir, é possível perceber o surgimento de duas novas matrizes que estão associadas ao material compósito, que são as matrizes D_i e K_i , definidas através da formulação do modelo de Kelvin-Voigt (SINO, 2007). As demais matrizes são apresentadas no modelo geral para rotores no apêndice A. Em seguida, apresenta-se também o método de homogeneização SHBT, utilizado para definir as propriedades do eixo de material compósito.

3.1 Modelo de Kelvin-Voigt

O amortecimento interno que está presente no eixo de material compósito é considerado como sendo um amortecimento viscoso equivalente. Em sua modelagem, o material é representado por um sólido viscoelástico linear através da utilização do modelo reológico de Kelvin-Voigt (SINO, 2007). O elemento que representa esta abordagem consiste numa associação em paralelo de uma mola e um amortecedor, conforme mostra a Fig. 3.1.

Este modelo consiste na associação em paralelo de uma mola com módulo de

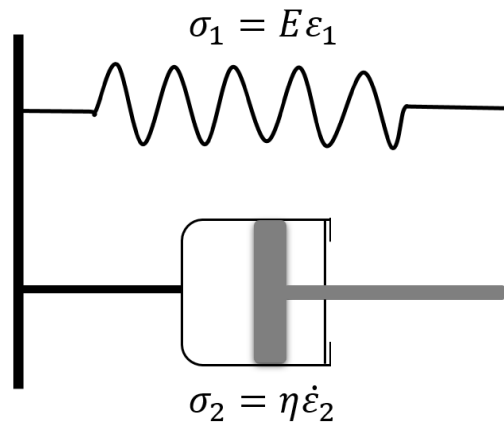


Figura 3.1: Representação do elemento de Kelvin-Voigt.

elasticidade E e um amortecedor de viscosidade η . A mola representa a fração elástica da deformação (seguindo a lei de Hooke) e o amortecedor é assumido como linear com uma tensão resultante expressa em função da taxa de deformação $\dot{\varepsilon}_2$.

A relação entre tensão σ e deformação ε para o modelo de Kelvin-Voigt é dada por:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3.1)$$

onde σ e ε são dados pelas Eqs. (3.2) e (3.3), respectivamente:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3.2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (3.3)$$

A deformação ocorre a uma taxa variável, com a tensão distribuída entre os dois componentes, após um tempo dependente da viscosidade do amortecedor, a mola aproxima-se da elongação máxima e finita (fluência). Quando a tensão é removida, ocorre o processo reverso, onde a deformação decai com o tempo, então o comprimento inicial tende a se restabelecer, conforme mostra a Fig. 3.2 (WASILKOSKI, 2006).

Percebe-se ainda que se uma tensão constante σ for aplicada a um tempo $t = 0$ a elongação da mola poderá não ser imediata, sendo retardada pelo amortecedor. Este fenômeno pode ser representados matematicamente pela Eq. (3.4):

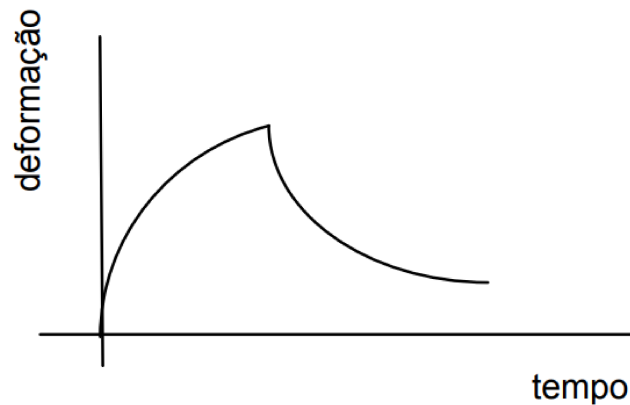


Figura 3.2: Comportamento da fluência e restabelecimento.
Fonte: Wasilkoski (2006).

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-\lambda t}) \quad (3.4)$$

onde λ é a taxa de relaxação dada pela Eq. (3.5):

$$\lambda = \frac{E}{\eta} \quad (3.5)$$

O tempo de relaxação α associado à característica mecânica do amortecimento do material é obtido através da Eq. (3.6):

$$\alpha = \frac{\eta}{E} \quad (3.6)$$

Assim sendo, a expressão que representa o trabalho virtual dos efeitos dissipativos provenientes do amortecimento interno por ser formulado conforme mostra a Eq. (3.7):

$$\delta W = \int_0^L \int_S \sigma \delta \varepsilon dS dy \quad (3.7)$$

Substituindo somente o termo $\eta \dot{\varepsilon}$ da Eq. (3.1) na Eq. (3.7), pois neste momento formula-se somente a modelagem que representa o amortecimento do material (a modelagem da rigidez é apresentada no Apêndice A), obtém-se a Eq. (3.8):

$$\delta W = \int_0^L \int_S E \alpha \dot{\varepsilon} \delta \varepsilon dS dy \quad (3.8)$$

onde $\dot{\varepsilon}$ e $\delta \varepsilon$ são apresentados pelas Eqs. (3.9) e (3.10):

$$\dot{\varepsilon} = -x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

$$\delta \varepsilon = -x \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \quad (3.10)$$

Em seguida, reescreve-se o trabalho virtual em função das Eqs. (3.9) e (3.10), conforme mostra a Eq. (3.11):

$$\delta W = \int_0^L \int_S E \alpha \left(-x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \right) \left(-x \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (3.11)$$

Expandindo a Eq. (3.11), obtém-se:

$$\delta W = \int_0^L \int_S E \alpha \left(x^2 \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} - xz \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} - xz \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (3.12)$$

Os termos \dot{u}^* e \dot{w}^* são obtidos a partir da derivada no tempo das Eqs. (A.19) e (A.20), respectivamente, conforme mostra as Eqs. (3.13) e (3.14):

$$\dot{u}^* = \dot{u} \cos(\Omega t) - u \Omega \sin(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t) - w \Omega \cos(\Omega t) \quad (3.13)$$

$$\dot{w}^* = \dot{w} \sin(\Omega t) + u \Omega \cos(\Omega t) + \dot{u} \cos(\Omega t) - w \Omega \sin(\Omega t) \quad (3.14)$$

onde \dot{u} e \dot{w} são apresentados pelas Eqs. (3.15) e (3.16), respectivamente:

$$\dot{u} = \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u \quad (3.15)$$

$$\dot{w} = \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w \quad (3.16)$$

sendo $\dot{\mathbf{q}}_u$ e $\dot{\mathbf{q}}_w$ as derivadas temporais dos vetores mostrados nas Eqs. (A.4) e (A.5), respectivamente.

Devido à simetria do eixo, conforme demonstrado anteriormente nas Eqs. (A.26) e (A.27), a Eq. (3.12) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\delta W = E\alpha I \int_0^L \left[\frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w^*}{\partial y^2} \right] dy \quad (3.17)$$

Em seguida, substitui-se as Eqs. (A.19) e (A.20) e as Eqs. (3.13) e (3.14) (considerando $t = 0$) na Eq. (3.17) e obtém-se a Eq. (3.18):

$$\delta W = E\alpha I \int_0^L \left[\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \Omega \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} \right] dy \quad (3.18)$$

Utiliza-se então as Eqs. (A.6) e (A.7) e as Eqs. (3.15) e (3.16) na Eq. (3.18) e obtém-se a Eq. (3.19):

$$\delta W = E\alpha I \int_0^L \left[\left(\frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} + \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \dot{\mathbf{q}} + \Omega \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} - \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \mathbf{q} \right] \delta \mathbf{q} dy \quad (3.19)$$

Sabe-se que a Eq. (3.19) pode ser escrita de forma simplificada, como mostrado na Eq. (3.20):

$$\delta W = -F_i^t \delta \mathbf{q} \quad (3.20)$$

onde o termo F_i^t representa a força generalizada devido ao amortecimento interno, representada pela Eq. (3.21):

$$F_i = -E\alpha I \int_0^L \left[\left(\frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} + \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \dot{\mathbf{q}} + \Omega \left(\frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} - \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \right) \mathbf{q} \right] dy \quad (3.21)$$

Assim sendo, substitui-se as funções de forma dado pelas Eqs. (A.8) e (A.9) na Eq. (3.21) para se obter as matrizes \mathbf{D}_i e \mathbf{K}_i , referentes ao material compósito, como mostrado pelas Eqs. (3.22) e (3.23), respectivamente. Também são considerados nestas duas matrizes o efeito de cisalhamento interno, baseado no modelo de viga de Timoshenko.

$$\mathbf{D}_i = K_L^\alpha \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ & & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ & & & & & & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ SIM. \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K}_i = K_L^\alpha \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & & 0 & -(4 + \vartheta_\gamma)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2 - \vartheta_\gamma)L^2 \\ & & & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & & 0 & -(4 + \vartheta_\gamma)L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ANTI \\ SIM. \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (3.23)$$

onde K_L^α é dado pela Eq. (3.24):

$$K_L^\alpha = \frac{EI\alpha}{(1 + \vartheta_\gamma)L^3} \quad (3.24)$$

Salienta-se que a matriz de rigidez K , definida no Apêndice A, depende dos termos homogeneizados EI e GS , enquanto as matrizes K_i e D_i dependem dos termos homogeneizados amortecidos $EI\alpha$ e $GS\alpha$. Estes termos, que são as rigidezes equivalentes relacionadas ao eixo de material compósito, são obtidos utilizando-se a teoria de vigas homogêneas por meio do método de homogeneização SHBT apresentado por Sino (2007), conforme será mostrado na seção 3.3.

3.2 Equação do Movimento para Eixo de Material Compósito

Por fim, obtém-se a equação diferencial que representa o comportamento dinâmico de um sistema de rotor flexível com eixo de material compósito, conforme apresentado pela Eq. (3.25).

$$M\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g + \mathbf{D}_i]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega}\mathbf{K}_{st} + \Omega\mathbf{K}_i]\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u \quad (3.25)$$

onde as matrizes \mathbf{D}_i e \mathbf{K}_i representam, respectivamente, o amortecimento interno e rigidez associados ao material compósito. As demais matrizes são referentes às partes girantes da máquina rotativa, conforme explicado na seção A.5.

3.3 Método de Homogeneização

Os eixos de máquinas rotativas fabricados em materiais compósito são considerados como sendo materiais laminados, reforçados com fibras unidirecionais. As fibras são os componentes que mais suportam o carregamento e possuem maior rigidez. A função da matriz é dar suporte e proteção às fibras e fornecer um meio de distribuição e transmissão de carga entre elas (JONES, 1978).

Cada camada do laminado possui fibras unidirecionais e comportamento de material ortotrópico, ou seja, possui diferentes propriedades nas direções perpendiculares, como mostrado na Fig. 3.3.

A relação entre tensão e deformação (Lei de Hooke) para materiais ortotrópicos é dada pela Eq. (3.26):

$$\{\sigma\} = [Q] \{\varepsilon\} \text{ ou } \{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (3.26)$$

onde σ é o vetor que representa o campo de tensão e ε o campo de deformação do material. O termo $[Q]$ e $[S]$ representam a matriz de rigidez e de flexibilidade do material, respectivamente. Sendo assim, a Lei de Hooke aplicada a materiais ortotrópicos na sua forma completa pode ser representada como mostra a Eq. (3.27). A matriz apresentada na Eq. (3.27) com as propriedade mecânicas do material é a ma-

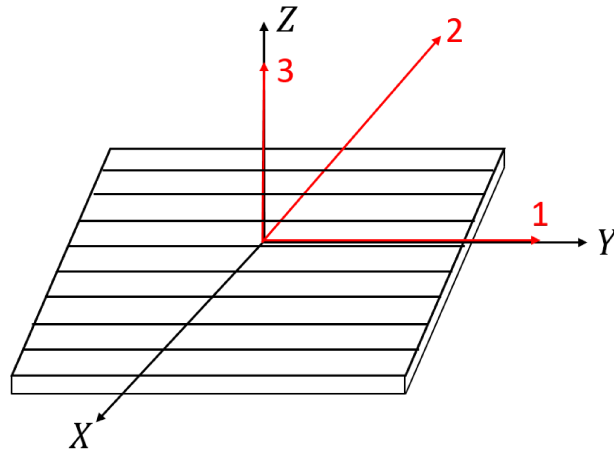


Figura 3.3: Representação da camada no plano indicando as fibras unidirecionais.

triz de flexibilidade (JONES, 1978). Para se obter a matriz de rigidez basta calcular $[Q] = [S]^{-1}$.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{31}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

onde os índices 1, 2 e 3 indicam os eixos do material ortotrópico com diferentes propriedades. O índice 1 indica a direção das fibras, o 2 a direção transversal as fibras e o 3 a direção perpendicular ao plano.

No entanto, como a análise é feita no plano 1-2 (veja Fig. 3.3) os termos da Eq. (3.27) referentes à direção 3 são desconsiderados, como mostra a Eq. (3.28):

$$\sigma_3 = 0 \quad \tau_{23} = 0 \quad \tau_{31} = 0 \quad (3.28)$$

Sendo assim, a Eq. (3.27) pode ser simplificada como mostra a Eq. (3.29):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Pode ser escrito também em função de $[Q]$:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

onde E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade nas direções 1 e 2, respectivamente, G_{12} é o módulo de cisalhamento do plano 1-2 e ν_{12} e ν_{21} são os coeficientes de Poisson (JONES, 1978).

O comportamento do material compósito viscoelástico sujeito a uma excitação harmônica pode ser descrito através de uma relação constitutiva complexa, conforme mostra a Eq. (3.31):

$$\{\sigma\} = ([Q] + j [Q^\Psi]) \{\varepsilon\} \quad (3.31)$$

onde,

$$[Q^\Psi] = [Q] [\zeta] \quad (3.32)$$

$[\zeta]$ é a matriz de amortecimento da camada e j representa a parte imaginária. As propriedades dissipativas da camada também podem ser representadas utilizando a matriz da capacidade de amortecimento específico $[\Psi]$ (SINO et al., 2008). Esta matriz indica os três amortecimentos específicos da camada de material compósito, conforme mostra a Eq. (3.33):

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde ψ_1 , ψ_2 e ψ_{12} são o amortecimento específico na direção 1 (direção das fibras), amortecimento específico da direção 2 (direção transversal às fibras) e amortecimento específico de cisalhamento no plano 1-2. A matriz de amortecimento da camada $[\zeta]$ e a matriz de amortecimentos específicos $[\Psi]$ podem ser relacionados como mostra a Eq. (3.34)(SINO et al., 2008):

$$[\zeta] = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Assim sendo, a matriz de rigidez amortecida $[Q^\Psi]$ também pode ser representada em função da capacidade de amortecimento específico, como mostra a Eq. (3.35):

$$[Q^\Psi] = \frac{1}{2\pi} [Q] [\Psi] \quad (3.35)$$

Como explicado no capítulo 1, o eixo é obtido empilhando-se as camadas, que possuem fibras contínuas orientadas em diferentes direções (Fig. 3.4).

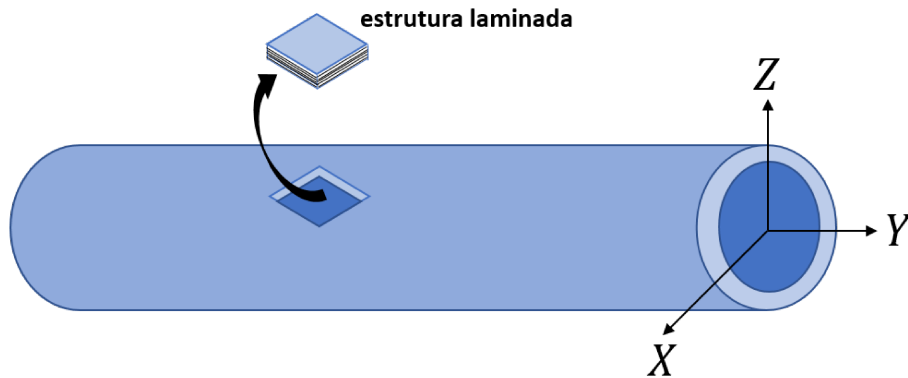


Figura 3.4: Eixo de material compósito.

Por este motivo, muitas vezes os eixos do plano 1-2 não coincidirão com os eixos do plano $Y-X$, podendo apresentar uma rotação θ_p . A Fig. 3.5 mostra este caso.

Sabe-se que as propriedades mecânicas do eixo devem ser escritas nas coordenadas $Y-X-Z$, onde Y é a direção longitudinal do eixo, como mostrado na Fig. 3.4. Por este motivo, deve-se reescrever as matrizes de tensão, deformação, flexibilidade, rigidez e rigidez amortecida, conforme mostra as Eqs. (3.36) - (3.40), respectivamente:

$$\{\sigma\}_{YX} = [T]^{-1} \{\sigma\}_{1,2} \quad (3.36)$$

$$\{\varepsilon\}_{YX} = [T]^T \{\varepsilon\}_{1,2} \quad (3.37)$$

$$[\bar{S}] = [T] [S]_{1,2} [T]^T \quad (3.38)$$

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q]_{1,2} [T]^{-T} \quad (3.39)$$

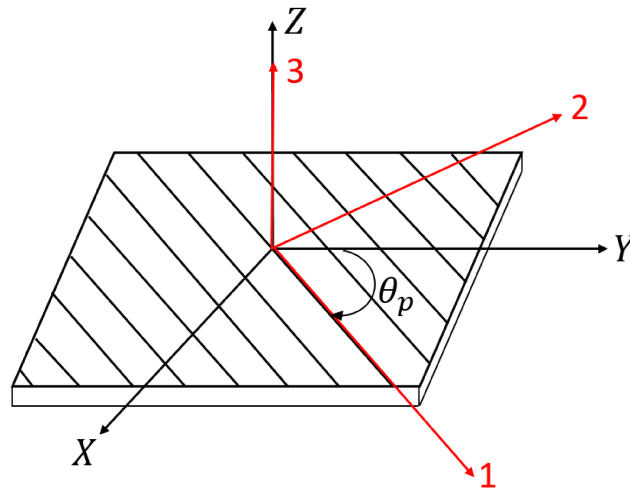


Figura 3.5: Representação da camada com as fibras orientadas a um ângulo θ_p .

$$[\bar{Q}]^\Psi = [T]^{-1} [Q]_{1,2}^\Psi [T]^{-T} \quad (3.40)$$

onde $[T]$ é a matriz de transformação, que transfere os termos escrito no plano 1-2 (material ortotrópico) para o plano $Y-X$ (coordenadas do eixo), e é dada pela Eq. (3.41)(JONES, 1978):

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_p & \sin^2\theta_p & 2\sin\theta_p\cos\theta_p \\ \sin^2\theta_p & \cos^2\theta_p & -2\sin\theta_p\cos\theta_p \\ -\sin\theta_p\cos\theta_p & \sin\theta_p\cos\theta_p & \cos^2\theta_p - \sin^2\theta_p \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Com isso, tem-se que a relação entre tensão e deformação, dada pela Eq. (3.31), nas coordenadas $Y-X$ passa a ser:

$$\begin{bmatrix} \sigma_Y \\ \sigma_X \\ \tau_{YX} \end{bmatrix} = ([\bar{Q}] + j[\bar{Q}^\Psi]) \begin{bmatrix} \varepsilon_Y \\ \varepsilon_X \\ \gamma_{YX} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde $[\bar{Q}]$ e $[\bar{Q}^\Psi]$ são matrizes 3×3 , como mostrado nas Eqs. (3.43) e (3.44), respectivamente:

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$[\bar{Q}]^{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{\Psi} & \bar{Q}_{12}^{\Psi} & \bar{Q}_{16}^{\Psi} \\ \bar{Q}_{12}^{\Psi} & \bar{Q}_{22}^{\Psi} & \bar{Q}_{26}^{\Psi} \\ \bar{Q}_{16}^{\Psi} & \bar{Q}_{26}^{\Psi} & \bar{Q}_{66}^{\Psi} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Por fim, tem-se que a relação tensão-deformação na direção Y e no plano $Y-X$ podem ser dadas pelas Eqs. (3.45) e (3.46), respectivamente:

$$\sigma_Y = \bar{Q}_{11}^{\Psi} \varepsilon_Y + \bar{Q}_{11}^{\Psi} \dot{\varepsilon}_Y \quad (3.45)$$

$$\tau_{YX} = \bar{Q}_{66}^{\Psi} \gamma_{YX} + \bar{Q}_{66}^{\Psi} \dot{\gamma}_{YX} \quad (3.46)$$

onde,

$$\bar{Q}_{11} = \cos^4(\theta_p) Q_{11} + \sin^4(\theta_p) Q_{22} + \cos^2(\theta_p) \sin^2(\theta_p) (2Q_{12} + 4Q_{66}) \quad (3.47)$$

$$\bar{Q}_{11}^{\Psi} = \cos^4(\theta_p) \psi_1 Q_{11} + \sin^4(\theta_p) \psi_2 Q_{22} + \cos^2(\theta_p) \sin^2(\theta_p) (\psi_1 Q_{12} + \psi_2 Q_{12} + 4\psi_{12} Q_{66}) \quad (3.48)$$

$$\bar{Q}_{66} = \cos^2(\theta_p) \sin^2(\theta_p) (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + (\cos^2(\theta_p) - \sin^2(\theta_p))^2 Q_{66} \quad (3.49)$$

$$\bar{Q}_{66}^{\Psi} = \cos^2(\theta_p) \sin^2(\theta_p) (\psi_1 Q_{11} + \psi_2 Q_{22} - \psi_1 Q_{12} - \psi_2 Q_{12}) + (\cos^2(\theta_p) - \sin^2(\theta_p))^2 \psi_{12} Q_{66} \quad (3.50)$$

É importante salientar que também existe tensão de cisalhamento no plano $Y-Z$ (τ_{YZ}) do eixo, no entanto, sabe-se que as propriedades do material, tanto no plano $Y-X$ como no plano $Y-Z$ são as mesmas, ou seja, utiliza-se as mesmas Eqs. (3.49) e (3.50) neste caso.

3.3.1 Simplified Homogenized Beam Theory - SHBT

As equações utilizadas para se calcular as propriedades do material compósito, como mostrado no final da seção anterior, são referentes às camadas individualmente. No entanto, para se calcular as propriedades equivalentes ao eixo completo, se faz necessária a utilização de métodos de homogeneização. Nesta dissertação, o método a ser utilizado é o SHBT. Este método de homogeneização desenvolvido por Sino (2007) consiste na homogeneização direta dos produtos EI , $EI\alpha$, GS e $GS\alpha$. O método pode ser aplicado para qualquer orientação e sequência de empilhamento.

Além do mais, considera-se a distância de cada camada ao eixo neutro. Sendo assim, a forma que se calcula a rigidez à flexão equivalente é mostrada na Eq. (3.51):

$$EI_{eq} = \sum_{p=1}^N E_y^p I^p \quad I^p = \pi \frac{(R_p^4 - R_{p-1}^4)}{4} \quad (3.51)$$

onde $E_y^p = \bar{Q}_{11}$ e é o módulo de elasticidade da camada dado pela Eq. (3.47), I^p é o momento de inércia de área da seção transversal da camada, R_{p-1} é o raio interno da camada e R_p é o raio externo.

A rigidez à flexão equivalente amortecida é calculada pela Eq. (3.52):

$$EI\alpha_{eq} = \sum_{p=1}^N \tilde{E}_y^p I^p \quad (3.52)$$

onde $\tilde{E}_y^p = \bar{Q}_{11}^\Psi$ e é o módulo de elasticidade amortecido da camada dado pela Eq. (3.48).

A rigidez ao cisalhamento equivalente é calculada pela Eq. (3.53):

$$GS_{eq} = \sum_{p=1}^N G_{yx}^p S^p \quad S^p = \pi(R_p^2 - R_{p-1}^2) \quad (3.53)$$

onde $G_{yx}^p = \bar{Q}_{66}$ e é o módulo de cisalhamento da camada dado pela Eq. (3.49) e S^p é a área da seção transversal da camada.

Por fim, a rigidez ao cisalhamento equivalente amortecido é calculado pela Eq. (3.54):

$$GS\alpha_{eq} = \sum_{p=1}^N \tilde{G}_{yx}^p S^p \quad (3.54)$$

onde $\tilde{G}_{yx}^p = \bar{Q}_{66}^\Psi$ e é o módulo de cisalhamento amortecido da camada dado pela Eq. (3.50). Evidencia-se ainda que os termos GS_{eq} e $GS\alpha_{eq}$ são calculados através das Eqs. (3.53) e (3.54) tanto para o plano $Y-X$ como para o plano $Y-Z$, ou seja, são iguais para os dois casos.

Por fim, os termos EI_{eq} e GS_{eq} , são utilizados na matriz $[K]$ (Eq. (A.31)), enquanto os termos $EI\alpha_{eq}$ e $GS\alpha_{eq}$ são utilizados nas matrizes $[D_i]$ (Eq. (3.22)) e $[K_i]$ (Eq. (3.23)).

Capítulo 4

Análise de Incertezas e Sensibilidade Intervalares

A abordagem intervalar aparece como uma alternativa às metodologias probabilísticas utilizadas para se avaliar incertezas, especificamente para problemas em que os dados estatísticos não são suficientes para se avaliar a probabilidade associada com as incertezas, ou quando os dados experimentais são incompletos ambíguos ou conflitantes (WALLEY, 1991). Este é o caso das probabilidades associadas com as incertezas nos parâmetros do eixo de compósito. Não se sabe com exatidão a forma como estes parâmetros variam.

Um exemplo de método de modelagem de incertezas baseado em distribuição probabilística é o estocástico. Este tipo de abordagem é baseada na teoria da probabilidade e métodos numéricos para se quantificar os efeitos das incertezas em modelos numéricos (LARA-MOLINA et al., 2019). A análise intervalar, assim como a teoria fuzzy (MÖLLER; BEER, 2004), é uma abordagem não-probabilística, utilizada para a modelagem de incertezas.

Para se calcular então as sensibilidades intervalares, são necessários alguns procedimentos baseados nas teorias propostas por (MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009) e por (MOENS; VANDEPITTE, 2006; MOENS; VANDEPITTE, 2007), que serão apresentados a seguir.

4.1 Análise de Incertezas Intervalares

O primeiro passo para se chegar nas sensibilidades intervalares é através da realização da análise de incertezas intervalares. Sendo assim, considera-se o modelo matemático do sistema dinâmico A que representa a relação entre as respostas (saídas) y e a entrada é definida pelo conjunto de equações diferenciais f , como mostrado na Eq. (4.1):

$$A : y = f(\mathbf{p}, \omega) \quad (4.1)$$

onde as entradas do modelo são o conjunto de parâmetros $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_{N_p}]$ e N_p é o número total de parâmetros. Nesta dissertação a variável independente ω representa frequência e velocidade de rotação.

O objetivo principal da análise intervalar é calcular a variação da saída y do modelo do sistema considerando uma variação entre um limite inferior p_l e um limite superior p_u nos parâmetros de entrada \mathbf{p} . Tem-se então que:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}, \omega) \quad (4.2)$$

com,

$$\bar{\mathbf{p}} = [p_l, p_u] \quad (4.3)$$

$$\bar{y} = [y_l, y_u] \quad (4.4)$$

onde \bar{f} é a função intervalar que representa a relação entre o intervalo de entrada e o intervalo de saída.

As estratégias utilizadas para se calcular o intervalo de saída \bar{y} têm sido basicamente duas: otimização global e aritmética intervalar. Nesta dissertação utilizou-se a estratégia da otimização global executada pelo Método da Evolução Diferencial (PRICE; STORN, 1995), que é a estratégia mais amplamente utilizada.

Na otimização global o intervalo resultante é calculado através da maximização e minimização da função objetivo f no domínio $\bar{\mathbf{p}}$ correspondente aos parâmetros incertos, temos assim que:

$$y_l(\omega) = \min_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{P}}} f(\mathbf{p}, \omega) \quad (4.5)$$

$$y_u(\omega) = \max_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{P}}} f(\mathbf{p}, \omega) \quad (4.6)$$

Esta estratégia permite então encontrar o limite inferior e superior da variação da saída do sistema. No entanto, o custo computacional pode ser alto dependendo da complexidade do sistema a ser analisado e da quantidade de parâmetros incertos considerados.

4.2 Análise de Sensibilidade Intervalar

O principal objetivo de se desenvolver uma análise de sensibilidade intervalar é para se quantificar o impacto individual de cada parâmetro na resposta intervalar, a qual é obtida através do modelo numérico do sistema em estudo.

A relação entre o intervalo de entrada e o intervalo de saída é redefinido como a função f^Δ , que relaciona o raio da entrada intervalar com o raio da saída intervalar. O raio intervalar é definido conforme mostra a Eq. (4.7):

$$\delta y = \frac{y_u - y_l}{2} \quad (4.7)$$

Já a relação entre os intervalos de entrada e saída, estabelecido pela função f^Δ , é definido pela Eq. (4.8):

$$\Delta y = f^\Delta(\Delta \mathbf{p}) \quad (4.8)$$

A função intervalar f^Δ é a base da definição da sensibilidade intervalar absoluta. A sensibilidade intervalar da saída intervalar \bar{y} em relação a um intervalo de entrada $\bar{\mathbf{p}}$ é definida como mostrado na Eq. (4.9):

$$\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i} \bar{y} = \frac{\partial(\Delta y)}{\partial(\Delta \mathbf{p})} = \frac{\partial f^\Delta(\Delta \mathbf{p})}{\partial(\Delta \mathbf{p})} \quad (4.9)$$

A sensibilidade intervalar, definida pela Eq. (4.9), expressa a relação entre a variação da largura do intervalo absoluto tanto na entrada como na saída do problema.

O intervalo de saída pode depender de múltiplos intervalos quando se considera

vários parâmetros incertos. Para estes casos, a largura relativa destes intervalos proporciona uma importante percepção sobre a sensibilidade intervalar observada. Sendo assim, a sensibilidade intervalar relativa é definida pela Eq. (4.10):

$$\rho_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}} = \frac{\partial \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta y_i^*} \right)}{\partial \left(\frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta \mathbf{p}_i^*} \right)} = \frac{\Delta \mathbf{p}_i^*}{\Delta y_i^*} \times \delta_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}} \quad (4.10)$$

onde $\Delta y_i^* = y_{ui} - y_{li}$ e $\Delta \mathbf{p}_i^* = p_{ui} - p_{li}$ representam a largura nominal dos intervalos correspondentes às incertezas consideradas no problema, que são obtidas resolvendo as Eqs. (4.11) e (4.12):

$$\mathbf{y}_{li}(\omega) = \min_{\mathbf{p}_{li} \in \bar{\mathbf{p}}_i} f(\mathbf{p}_{li}, \omega) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{y}_{ui}(\omega) = \max_{\mathbf{p}_{ui} \in \bar{\mathbf{p}}_i} f(\mathbf{p}_{ui}, \omega) \quad (4.12)$$

Desta definição, se evidencia que a sensibilidade intervalar representa a variação relativa no intervalo de saída com relação a variação na largura do intervalo da entrada. As sensibilidades intervalares para cada um dos parâmetros incertos são adimensionais e, portanto, é possível comparar a influência das incertezas intervalares considerando diferentes situações no sistema.

Por fim, a sensibilidade intervalar relativa normalizada é definida pela Eq. (4.13):

$$v_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}} = \frac{\rho_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}}}{\sum_{i=1}^n \rho_{\mathbf{p}_i}^{\bar{y}}} \quad (4.13)$$

Estas sensibilidades intervalares relativas normalizadas representam a contribuição relativa dos diferentes intervalos de entrada para a sensibilidade intervalar cumulativa e indica também suas importâncias relativas na sensibilidade total intervalar do sistema com incertezas. O conceito de sensibilidade intervalar relativa normalizada permite uma comparação objetiva entre a influência das entradas individuais nos componentes da saída no caso de análise multidimensional.

Esta é a grande importância no contexto de problemas com incertezas que tratam de estruturas discretizadas com o método dos elementos finitos que consideram parâmetros incertos modelados como intervalos. Estes tipos de problemas geralmente tem múltiplos intervalos de entrada (correspondem a múltiplas incertezas no modelo)

e múltiplas saídas (valores da resposta considerando diferentes frequências, tempos, velocidade de rotação).

Sabe-se que, para se calcular a sensibilidade intervalar relativa e a sensibilidade intervalar relativa normalizada, dadas pelas Eqs. (4.10) e (4.13), respectivamente, é necessário calcular, inicialmente, a sensibilidade intervalar absoluta, mostrada na Eq. (4.9). A forma para se calcular esta sensibilidade em um procedimento de análise intervalar numérico, é mostrada a seguir.

4.3 Cálculo da Sensibilidade Intervalar Absoluta

A sensibilidade intervalar absoluta pode ser calculada se a relação entre o raio de entrada e a saída é conhecida. Esta relação encontra-se na função intervalar f^Δ da Eq. (4.8). Em geral, esta relação não pode ser determinada diretamente. No entanto, utilizando as definições do raio intervalar da Eq. (4.7), a sensibilidade intervalar absoluta é obtida conforme mostra a Eq. (4.14):

$$\delta_{\bar{p}_i}^{\bar{y}} = \frac{\partial \Delta y}{\partial \Delta \mathbf{p}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_u}{\partial \Delta \mathbf{p}} - \frac{\partial y_l}{\partial \Delta \mathbf{p}} \right) = \frac{1}{2} (\delta_{\bar{\mathbf{p}}}^{y_u} - \delta_{\bar{\mathbf{p}}}^{y_l}) \quad (4.14)$$

A Eq. (4.14) define os limites superior e inferior $\delta_{\bar{\mathbf{p}}}^{y_u}$ e $\delta_{\bar{\mathbf{p}}}^{y_l}$, respectivamente, da sensibilidade intervalar absoluta. Estas expressões representam a taxa de variação dos limites superior e inferior do resultado da análise intervalar obtida através da variação dos parâmetros intervalares de entrada. A forma como se calcula estes limites de sensibilidade intervalar é mostrada a seguir.

4.3.1 Cálculo da Sensibilidade Intervalar

Para se calcular os limites superior e inferior da sensibilidade intervalar utiliza-se a otimização global. As sensibilidades inferior e superior representam a variação no limite inferior y_l e superior y_u , respectivamente, resultantes da análise intervalar. Esta variação é calculada em relação à variação no raio dos parâmetros intervalares de entrada Δp . Para isto, deve-se considerar os seguintes pontos:

- Considerando que os limites y_l e y_u são encontrados avaliando-se a função f nos valores dos parâmetros dentro do intervalo $\bar{\mathbf{p}}$, a largura do intervalo de $\bar{\mathbf{y}}$ não pode

diminuir quando a largura do intervalo de entrada Δp aumenta. Por este motivo, a taxa de variação no limite superior e inferior deve obedecer às seguintes condições:

$$\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_l} = \frac{\partial y_l}{\partial \Delta \mathbf{p}} \leq 0 \quad (4.15)$$

$$\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_u} = \frac{\partial y_u}{\partial \Delta \mathbf{p}} \geq 0 \quad (4.16)$$

- A sensibilidade nos limites somente é zero se o respectivo limite inferior y_l e superior y_u corresponder a pontos ótimos locais da função f dentro do intervalo $\bar{\mathbf{p}}$. Na verdade, se um limite de saída deriva de um ótimo local no domínio de entrada observado, um aumento incremental na região do parâmetro não altera a localização deste limite no intervalo. Consequentemente, o limite é insensível a uma mudança na largura do intervalo de entrada.

Com base nestas observações, conclui-se que os limites superior e inferior da sensibilidade estão relacionados com o comportamento da função f analisada nos parâmetros de entrada \mathbf{p}^{y_l} e \mathbf{p}^{y_u} onde os limites das saídas são obtidos. Sendo assim, em resumo, os limites inferior e superior da sensibilidade são calculados conforme mostram as Eqs. (4.17) e (4.18), respectivamente:

$$\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_l} = - \left| \left(\frac{\partial y}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}^{y_l}} \right| \quad (4.17)$$

$$\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_u} = \left| \left(\frac{\partial y}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}^{y_u}} \right| \quad (4.18)$$

Isto indica que no caso das saídas intervalares obtidas através do processo de otimização global, os limites de sensibilidade superior e inferior do intervalo resultante correspondem diretamente aos gradientes nos pontos finais da otimização. Por fim, obtém-se a sensibilidade intervalar absoluta através da Eq. (4.14).

4.3.2 Algoritmo da Sensibilidade Intervalar

Nesta seção apresenta-se o algoritmo utilizado para se realizar a análise de incertezas e a análise de sensibilidade na resposta dinâmica do rotor com eixo de material compósito, baseado em seu modelo numérico e na abordagem intervalar (Veja Fig.

4.1). No algoritmo, o termo N_p representa o numérico total de parâmetros incertos, que são considerados na dissertação como sendo propriedades do eixo de compósito.

Dois processos iterativos distintos foram realizados, um considerando as variáveis independentes ω como sendo um vetor de frequências, para se calcular as FRFs, e outro ω um vetor de velocidades de rotação, para se calcular as respostas de vibração do rotor. As variáveis ω vão de ω_i (frequência ou velocidade de rotação inicial) até ω_s (frequência ou velocidade de rotação final), com incremento de ω_e . Para cada valor de ω do processo, primeiramente calcula-se a resposta intervalar, através da resolução do problema de otimização das Eqs. (4.5) e (4.6). Em seguida, calcula-se, para cada valor de ω , os índices de sensibilidade apresentados pelas Eqs (4.10), (4.13), (4.17) e (4.18).

```

Initialization;
for  $\omega \leftarrow \omega_i$  to  $\omega_s$  do
     $y_l(\omega) \leftarrow \min_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{p}}} f(\mathbf{p}, \omega)$  → Problema intervalar: Eqs. (4.5) e (4.6)
     $y_u(\omega) \leftarrow \max_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{p}}} f(\mathbf{p}, \omega)$ 
    for  $i \leftarrow 1$  to  $N_p$  do
         $y_{li}(\omega) \leftarrow \min_{\mathbf{p}_{li} \in \bar{\mathbf{p}}_i} f(\mathbf{p}_{li}, \omega)$  → Problema intervalar para o parâmetro  $i^{th}$ : Eqs. (4.11) e (4.12)
         $y_{ui}(\omega) \leftarrow \max_{\mathbf{p}_{ui} \in \bar{\mathbf{p}}_i} f(\mathbf{p}_{ui}, \omega)$ 
         $i \leftarrow i + 1$ 
    end
     $\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_l} \leftarrow - \left| \left( \frac{\partial y}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}^{y_l}} \right|$  → Limite inferior da sensibilidade: Eq. (4.17)
     $\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_u} \leftarrow \left| \left( \frac{\partial y}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}^{y_u}} \right|$  → Limite superior da sensibilidade: Eq. (4.18)
     $\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{\bar{y}} \leftarrow \frac{1}{2} (\delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_u} - \delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{y_l})$  → Sensibilidade intervalar absoluta: Eq. (4.14)
     $\rho_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{\bar{y}} \leftarrow \frac{\partial \left( \frac{\Delta y_i}{\Delta y_i} \right)}{\partial \left( \frac{\Delta p_i}{\Delta p_i} \right)} = \frac{\Delta p_i^*}{\Delta y_i^*} \times \delta_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{\bar{y}}$  → Sensibilidade intervalar relativa (cada parâmetro): Eq. (4.10)
     $u_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{\bar{y}}(\omega) \leftarrow \frac{\rho_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{\bar{y}}}{\sum_{i=1}^n \rho_{\bar{\mathbf{p}}_i}^{\bar{y}}}$  → Sensibilidade intervalar normalizada (cada parâmetro): Eq. (4.13)
     $\omega \leftarrow \omega + \omega_e$ 
end
    
```

Figura 4.1: Algoritmo da abordagem intervalar.

O capítulo 6, apresentado a seguir, mostra com mais detalhes os procedimentos

realizados nestes dois casos (dois processos iterativos) e os resultados obtidos.

Capítulo 5

Bancada de Testes e Resultados

Neste capítulo apresenta-se os dois casos distintos que foram analisados. O primeiro caso consiste na análise do eixo na condição livre-livre, onde é feito primeiramente um ajuste das funções de resposta em frequência (FRFs) numéricas, obtidas através do modelo numérico desenvolvido em elementos finitos utilizando o modelo reológico de Kelvin-Voigt associado ao modelo de homogeneização SHBT, com as FRFs obtidas experimentalmente. Em seguida, ainda no primeiro caso, apresenta-se as análises de incertezas intervalares obtidas nas FRFs e as análises de sensibilidade intervalar obtidas em função da frequência.

No segundo caso, apresenta-se a bancada completa da máquina rotativa em análise. Neste caso, obteve-se uma análise de incertezas e sensibilidade intervalares do rotor em sua máxima amplitude de vibração em função das velocidades de rotação. Por fim, apresenta-se ainda o diagrama de Campbell com as velocidades críticas e velocidade de instabilidade do rotor.

5.1 Primeiro Caso - Eixo na condição livre-livre

Neste primeiro caso, considerou-se o eixo de material compósito suportado por fios de *nylon* (condição livre-livre para o movimento na direção X). A Fig. 5.1 apresenta a bancada de testes desenvolvida, com todos os aparatos experimentais utilizados neste experimento. Todo o procedimento experimental foi realizado e os resultados foram obtidos por Barbosa (2018).

O eixo de material compósito utilizado também é mostrado na Fig. 5.2 com mais

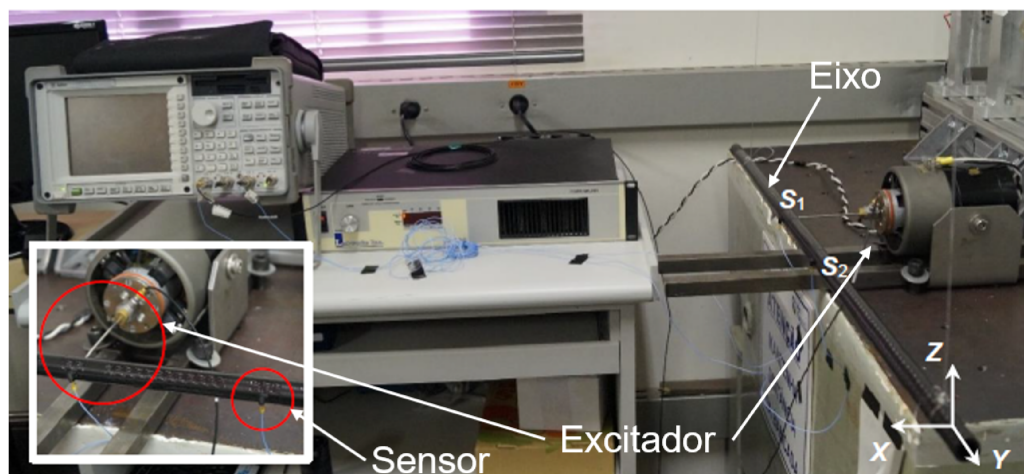
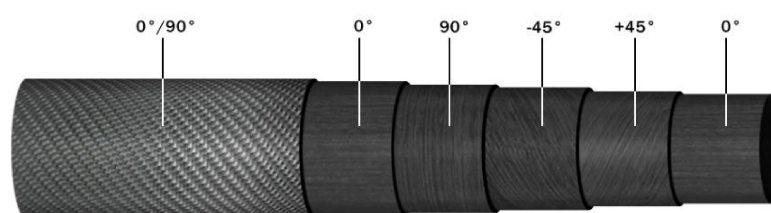


Figura 5.1: Bancada de testes.
Fonte: Barbosa (2018).

detalhes. Trata-se de um eixo vazado constituído de fibras de carbono pré-impregnadas com resina epóxi. O eixo apresenta 20 camadas, seguindo a seguinte sequência de empilhamento: $[0\ 0\ 0\ 0\ 90\ 90\ 45\ -45\ 0\ 0\ 0\ 45\ -45\ 90\ 90\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0/90]$, onde na última camada as fibras são entrelaçadas, possuindo orientação de 0° e 90° . No entanto, como o método SHBT considera somente uma orientação por camada, considerou-se a última camada como sendo duas camadas com a metade da espessura, onde uma tem orientação de 0° e a outra de 90° . As propriedades geométricas do eixo são mostradas na Tab. 5.1. Como as propriedades físicas do eixo não foram fornecidas pelo fabricante, os parâmetros foram todos indentificados neste trabalho.



(a) Eixo em perspectiva.



(b) Representação das fibras.

Figura 5.2: Eixo de material compósito utilizado.
Fonte: Barbosa (2018).

A Fig. 5.3 mostra as posições em que foram colocados o excitador eletrodinâmico e os dois acelerômetros S_1 e S_2 ao longo da direção X , para que fosse possível se obter as FRFs do eixo.

O excitador eletrodinâmico utilizado foi o Labworks[®] modelo ET-126, no qual se

Tabela 5.1: Propriedades geométricas do eixo.

Propriedades	Valores
Comprimento (m)	0,907
Diâmetro externo (m)	0,018
Diâmetro interno (m)	0,0128
Densidade (kg/m ³)	1677

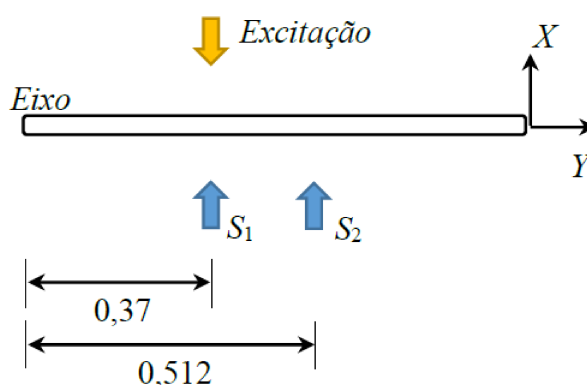


Figura 5.3: Posição dos sensores e do excitador.
 Fonte: Barbosa (2018).

efetuou uma varredura de frequências com sinal de excitação senoidal. Os acelerômetros utilizados para se medir as repostas de vibração foram acelerômetros PCB[®] modelo 352C22. Sendo assim, obteve-se duas FRFs através do analisador de sinais Agilent modelo 35670A (10 Hz à 1 kHz com resolução de 0,618 Hz).

5.1.1 Ajuste das Funções de Resposta em Frequência

O modelo de elementos finitos (EF) do eixo de material compósito é representado por 39 elementos e 40 nós. O acelerômetro S_1 e o *shaker* estão localizados no nó #17 e o acelerômetro S_2 no nó #23, conforme apresentado pela Fig. 5.4.

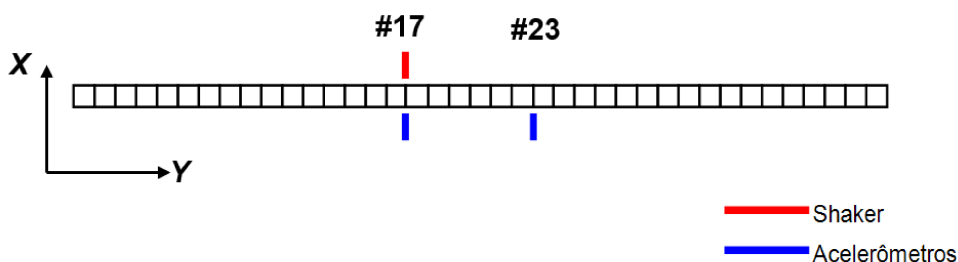


Figura 5.4: Modelo EF do eixo de material compósito.

Em seguida, comparou-se as FRFs obtidas experimentalmente com as obtidas numericamente. Sendo assim, realizou-se um ajuste das respostas experimentais e das numéricas, até a frequência de 500 Hz, através da minimização da função objetivo (veja Eq. (5.1)), para se determinar os parâmetros desconhecidos do eixo, que são as variáveis de projeto listadas na Tab. 5.2. Vale ressaltar ainda que, estas foram as propriedades do eixo escolhidas como variáveis de projeto para o ajuste devido a dificuldade em mensurá-las experimentalmente. Para se identificar estes parâmetros utilizou-se um problema inverso resolvido através do método da Evolução Diferencial (STORN; PRICE, 1997). A Evolução Diferencial foi escolhida por sua capacidade na resolução de problemas inversos complexos e variados (veja detalhes no Apêndice A).

Neste processo de minimização utilizou-se uma população de 280 indivíduos e 250 iterações, resultando em um número de avaliações da função objetivo de 70.280. Conforme recomendado pela literatura específica, determinou-se os parâmetros como $F_{DE} = 0,8$ e $CR_{DE} = 0,5$ (VIANA et al., 2007). A função objetivo a ser minimizada neste caso é mostrada pela Eq. (5.1):

$$F.O. = \sum_{i=1}^n \frac{\|FRF_{exp,i} - FRF_{num,i}\|}{\|FRF_{exp,i}\|} \quad (5.1)$$

onde n é o número de FRFs utilizadas (2 neste trabalho), FRF_{exp} representa a função resposta em frequência experimental e FRF_{num} a numérica. A norma utilizada na Eq. (5.1) é do tipo 2, onde se calcula a raiz quadrada do somatório dos termos do vetor ao quadrado. A Tab. 5.2 apresenta os limites inferior e superior do domínio considerado para as variáveis de projeto.

Tabela 5.2: Limites inferior e superior das variáveis de projeto.

Propriedade	Limite inferior	Limite superior
Módulo de elasticidade E_1 (Gpa)	84	156
Módulo de elasticidade E_2 (Gpa)	4,9	9,1
Módulo de cisalhamento G_{12} (Gpa)	4,9	9,1
Coefficiente de Poisson ν_{12}	0,098	0,182
Amortecimento específico ψ_1	5×10^{-7}	8×10^{-7}
Amortecimento específico ψ_2	1×10^{-5}	3×10^{-5}
Amortecimento específico ψ_{12}	1×10^{-5}	3×10^{-5}
Fator de correção do cisalhamento k_s	0,42	0,78

Estes limites foram definidos, inicialmente, de modo a englobar os valores dos pa-

râmetros encontrados na literatura. Em seguida, tanto o limite inferior como o superior foram sendo ajustados, conforme foram sendo aplicadas as otimizações.

O ajuste foi realizado 12 vezes para se tentar evitar que a solução encontrada fosse um mínimo local. A Tab. 5.3 apresenta estes 12 resultados, onde são mostrados os valores ótimos dos parâmetros e o valor da função objetivo (*Fitness*) para cada processo de ajuste realizado. O ajuste que apresenta menor *Fitness* é o escolhido, porque em teoria é o que possui os parâmetros que mais se aproximam dos valores reais. Neste caso, o processo considerado como sendo o mais correto, por apresentar menor *Fitness*, é o processo 9.

Em seguida, após o ajuste, apresenta-se nas Figs. 5.5 e 5.6 a comparação entre as FRFs numéricas e experimentais obtidas pelo sensor 1 e sensor 2, respectivamente.

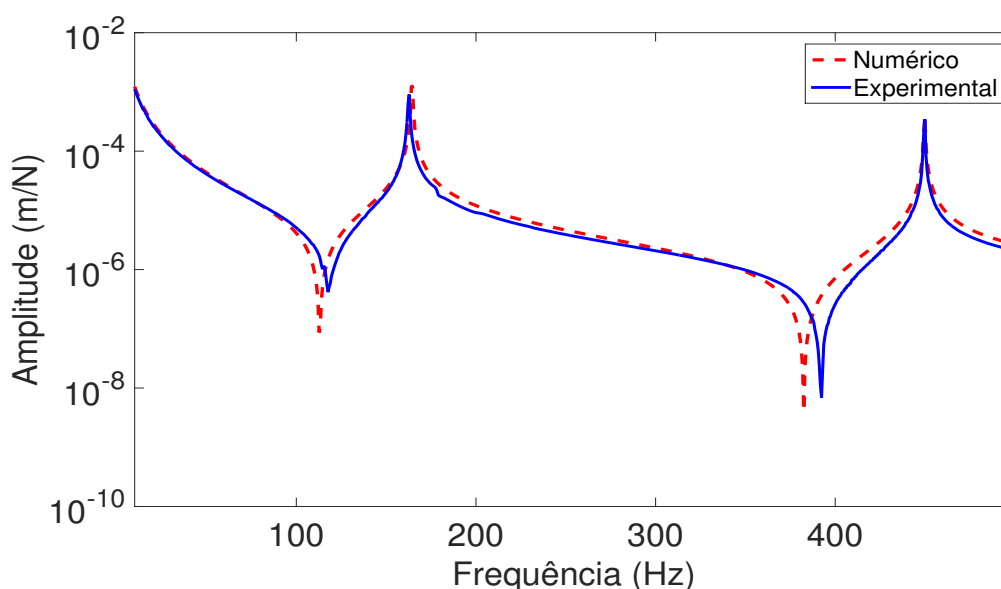


Figura 5.5: FRFs numérica e experimental com respostas obtidas no sensor 1.

Através destas comparações é possível observar a proximidade das respostas numéricas e as experimentais, principalmente nos picos, que representam as duas primeiras frequências naturais.

Em seguida, desenvolveu-se ainda uma comparação dos valores das frequências dos dois primeiros modos de vibrar do eixo obtidas numericamente, experimentalmente e através de uma simulação no ANSYS[®]. A ferramenta utilizada no ANSYS[®] foi o ANSYS Composite PrepPost (ACP), que possibilita uma análise de materiais ortotrópicos dispostos em camadas, permitindo inclusive se realizar análises modais deste tipo de material. Sendo assim, realizou-se uma análise modal, onde o tipo de

Tabela 5.3: Resultados encontrados nos 12 processos de otimização realizados.

Processo	E_1 (Gpa)	E_2 (Gpa)	G_{12} (Gpa)	ν_{12}	ψ_1	ψ_2	ψ_{12}	k_s	Fitness
1	114,68	6,4377	7,9564	0,1492	$6,6 \times 10^{-7}$	$1,77 \times 10^{-5}$	$1,19 \times 10^{-5}$	0,6282	3,1228
2	113,57	8,9369	7,7564	0,1259	$7,05 \times 10^{-7}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$1,47 \times 10^{-5}$	0,6456	3,1245
3	114,24	8,4241	6,3545	0,1344	$6,69 \times 10^{-7}$	$2,71 \times 10^{-5}$	$1,16 \times 10^{-5}$	0,7045	3,1265
4	114,58	7,9351	6,2696	0,1203	$5,72 \times 10^{-7}$	$1,47 \times 10^{-5}$	$1,73 \times 10^{-5}$	0,6905	3,1377
5	114,55	7,6882	6,8461	0,1148	$6,61 \times 10^{-7}$	$1,14 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	0,6620	3,1401
6	114,91	6,6606	7,2359	0,1004	$6,38 \times 10^{-7}$	$2,16 \times 10^{-5}$	$1,02 \times 10^{-5}$	0,6581	3,1220
7	114,15	7,1290	8,9194	0,1169	$7,55 \times 10^{-7}$	$1,31 \times 10^{-5}$	$2,19 \times 10^{-5}$	0,5931	3,1240
8	113,95	8,8455	6,4735	0,1443	$5,42 \times 10^{-7}$	$2,80 \times 10^{-5}$	$1,39 \times 10^{-5}$	0,6994	3,1236
9	114,44	6,7834	8,1100	0,1533	$6,76 \times 10^{-7}$	$1,88 \times 10^{-5}$	$1,88 \times 10^{-5}$	0,6280	3,1211
10	114,23	7,1447	8,5846	0,1296	$5,17 \times 10^{-7}$	$1,31 \times 10^{-5}$	$1,93 \times 10^{-5}$	0,5948	3,1333
11	114,99	6,4290	7,1914	0,1285	$7,92 \times 10^{-7}$	$2,58 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	0,6580	3,1337
12	114,67	6,5710	7,6900	0,1504	$6,91 \times 10^{-7}$	$2,37 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-5}$	0,6483	3,1220
Média	114,41	7,4154	7,4490	0,1307	$6,57 \times 10^{-7}$	$1,92 \times 10^{-5}$	$1,50 \times 10^{-5}$	0,6509	3,1276
Desvio Padrão	0,4070	0,9288	0,8694	0,0163	$8,11 \times 10^{-8}$	$5,93 \times 10^{-6}$	$3,55 \times 10^{-6}$	0,0364	0,0067

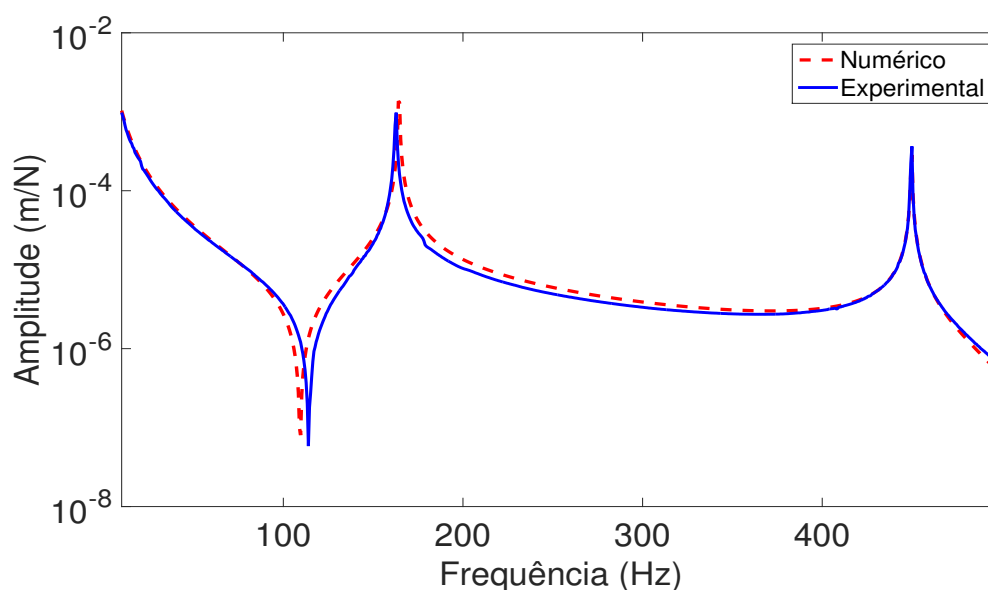


Figura 5.6: FRFs numérica e experimental com respostas obtidas no sensor 2.

elemento utilizado foi o SHELL181, com 54676 elementos e 54716 nós. O solucionador utilizado para se determinar as frequências naturais no ANSYS[®] foi o PCG Lanczos Eigensolver. A Tab. 5.4 apresenta a comparação das frequências naturais obtidas. Os erros apresentados foram calculados utilizando a Eq. (5.2):

Tabela 5.4: Comparação de frequências naturais numéricas/experimentais/ANSYS[®].

Frequências naturais [Hz]	Numérico	Experimental	Erro 1(%)	ANSYS [®]	Erro 2(%)
1 ^a	164,1	162,8	0,8	161,44	1,65
2 ^a	449,9	449,9	≈0	441,03	2,01

$$Erro = \left\| \frac{Freq_{exp} - Freq_{num}}{Freq_{exp}} \right\| \times 100 \quad (5.2)$$

onde $Freq_{exp}$ representa a frequência natural obtida experimentalmente e $Freq_{num}$ a numérica. O Erro 1 foi obtido através da comparação entre as frequências naturais do modelo numérico e as experimentais, enquanto o Erro 2 através da comparação das frequências naturais numéricas com as obtidas pelo modelo do ANSYS[®]. É importante salientar ainda que, para se realizar a simulação no ANSYS[®] utilizou-se os valores ótimos das propriedades obtidos no processo 9, que é apresentado na Tab. 5.3.

5.1.2 Análises de incertezas e sensibilidade em função da frequência

Inicialmente foi realizado uma análise de incertezas nas duas funções de resposta em frequência numéricas obtidas do eixo (sensores 1 e 2). Para isso, considerou-se um cenário de incertezas onde os valores ótimos dos parâmetros do eixo variavam $\pm 5\%$ e a orientação das fibras $\pm 1^\circ$. Estas variações foram definidas com base em trabalhos realizados anteriormente com a mesma abordagem intervalar em material compósito, como é o caso de Barbosa et al. (2020). A Tab. 5.5 apresenta os parâmetros do eixo com as incertezas (limite inferior e superior) consideradas para cada um deles.

Tabela 5.5: Parâmetros do eixo com os limites inferior e superior das incertezas.

Propriedade	Valor nominal	p_l	p_u
Módulo de elasticidade E_1 (Gpa)	114,44	108,72	120,16
Módulo de elasticidade E_2 (Gpa)	6,78	6,44	7,12
Módulo de cisalhamento G_{12} (Gpa)	8,11	7,70	8,52
Coefficiente de Poisson ν_{12}	0,1533	0,1456	0,1610
Amortecimento específico ψ_1	$6,75 \times 10^{-7}$	$6,41 \times 10^{-7}$	$7,09 \times 10^{-7}$
Amortecimento específico ψ_2	$1,88 \times 10^{-5}$	$1,79 \times 10^{-5}$	$1,97 \times 10^{-5}$
Amortecimento específico ψ_{12}	$1,88 \times 10^{-5}$	$1,79 \times 10^{-5}$	$1,97 \times 10^{-5}$
Orientação das fibras $\delta\theta$ (graus)	0	-1	+1

O processo de otimização para o cálculo dos limites inferior e superior do envelope de incertezas é calculado através da minimização e maximização da função objetivo, conforme mostrado anteriormente nas Eqs. (4.5) e (4.6). Neste caso, a função objetivo é a própria FRF do eixo de compósito, que é representada pela Eq. (5.3):

$$\alpha(\omega) = \frac{X(\omega)}{F} = \frac{1}{[-\omega^2 M + i\omega(D + D_i) + K]} \quad (5.3)$$

onde $X(\omega)$ é a amplitude de deslocamento e F é a força externa aplicada.

Com isso, a função objetivo foi minimizada e maximizada, como mostrado nas Eqs. (5.4) e (5.5):

$$y_l(\omega) = \min_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{P}}} |\alpha(\mathbf{p}, \omega)| \quad (5.4)$$

$$y_u(\omega) = \max_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{P}}} |\alpha(\mathbf{p}, \omega)| \quad (5.5)$$

onde ω é a frequência, que varia entre 0 e 500 Hz, com passo de 0,619 Hz. Neste processo de otimização, assim como no ajuste das funções, utilizou-se o método da Evolução Diferencial. Os parâmetros escolhidos foram os mesmos do ajuste, exceto o número de indivíduos da população que foi definido como 64 e o número de iterações que foi definido como 100.

As Figs. 5.7 e 5.8 apresentam os envelopes de incertezas das duas FRFs obtidos através da aplicação do cenário com variáveis incertas ao modelo em elementos finitos do eixo de material compósito, associado ao método de homogeneização SHBT.

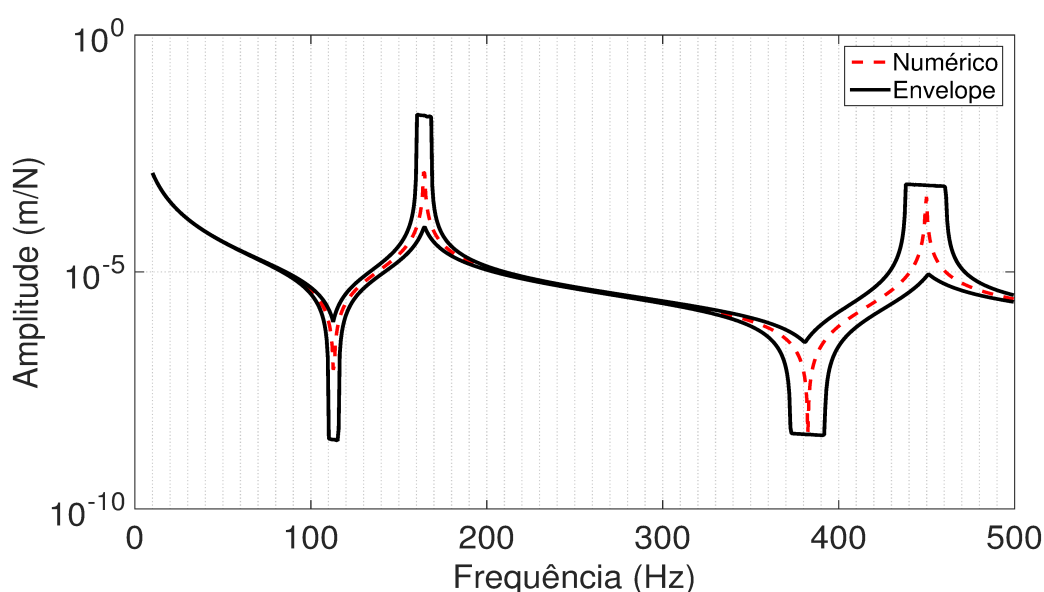


Figura 5.7: Envelope de incertezas com FRF numérica obtida no sensor 1.

As FRFs experimentais também são apresentadas nas Figs. 5.9 e 5.10, juntamente com o envelope de incertezas para fins de comparação. Note que os envelopes de incertezas foram capazes de englobar praticamente todos os pontos das FRFs experimentais. Apenas em pequenas regiões as respostas experimentais ficaram ligeiramente fora dos envelopes.

A Fig. 5.11 apresenta os índices de sensibilidade relativa normalizada dos parâmetros do eixo, calculados pela Eq. (4.13), para a FRF com envelope de incertezas, obtida pelo sensor 1. Note que, todos os parâmetros possuem índices de influência aproximados na amplitude em todas as frequências da FRF, com exceção dos picos, onde percebe-se claramente a grande influência que os amortecimentos específicos ψ_1 , ψ_2 e ψ_{12} passam a ter.

As Figs. 5.12 e 5.13 apresentam de forma separada, em gráficos de barras, os

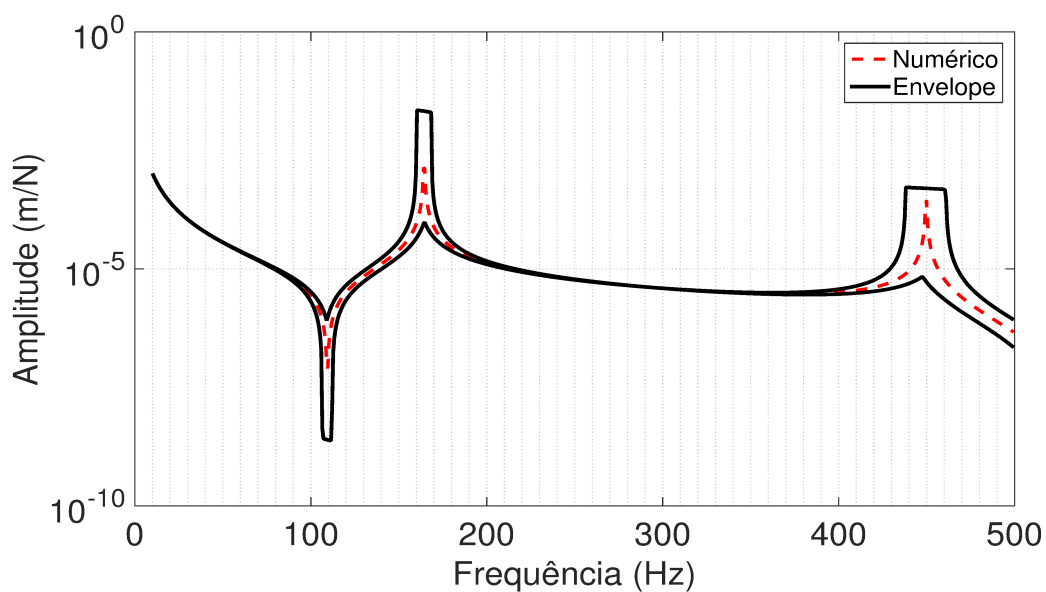


Figura 5.8: Envelope de incertezas com FRF numérica obtida no sensor 2.

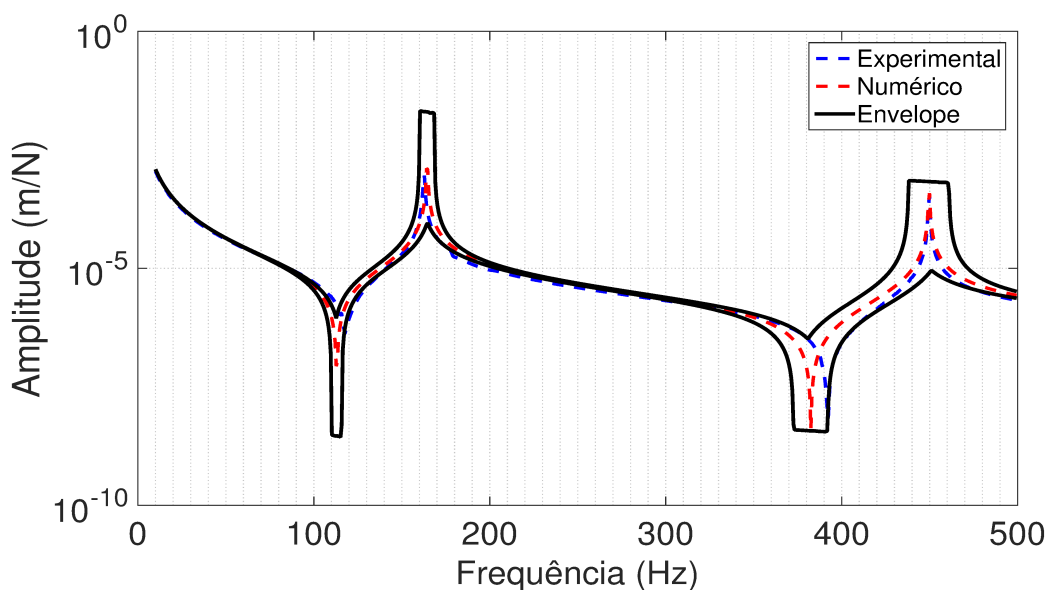


Figura 5.9: Envelope de incertezas com FRF numérica e experimental obtida no sensor 1.

índices de sensibilidade dos parâmetros na primeira e segunda frequência natural do eixo, que são 164,1 e 449,9 Hz, respectivamente. Nestes dois gráficos é possível observar a importância dos amortecimentos específicos nas frequências naturais.

A média da sensibilidade relativa normalizada de cada parâmetro obtida ao longo de todas as frequências da FRF também é apresentada na Fig. 5.14. Nota-se que todos os parâmetros, com exceção dos amortecimentos específicos, que são muito sensíveis somente nos picos, possuem sensibilidade média próximas uns dos outros.

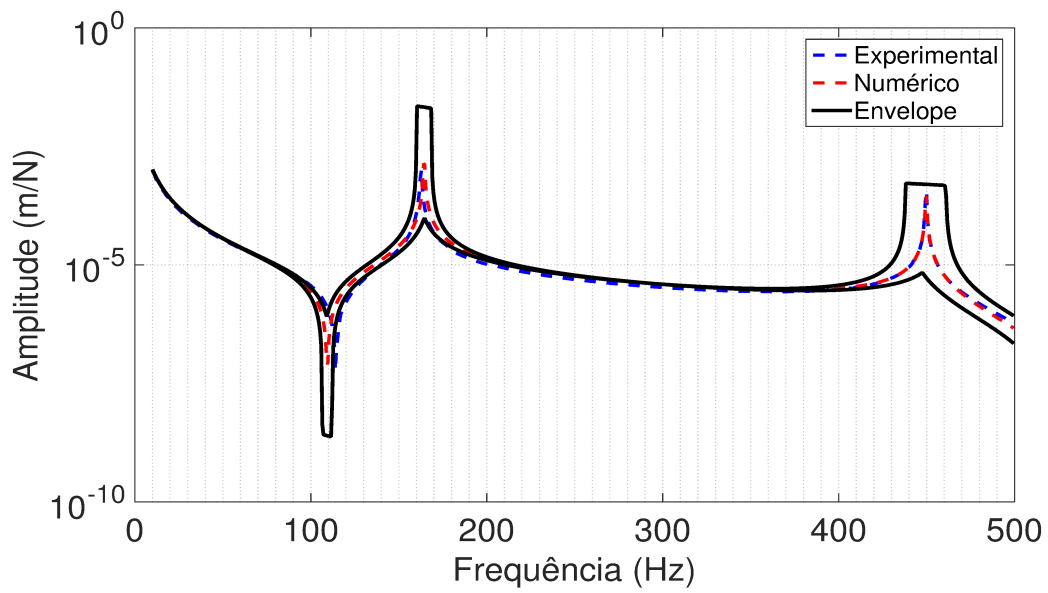


Figura 5.10: Envelope de incertezas com FRF numérica e experimental obtida no sensor 2.

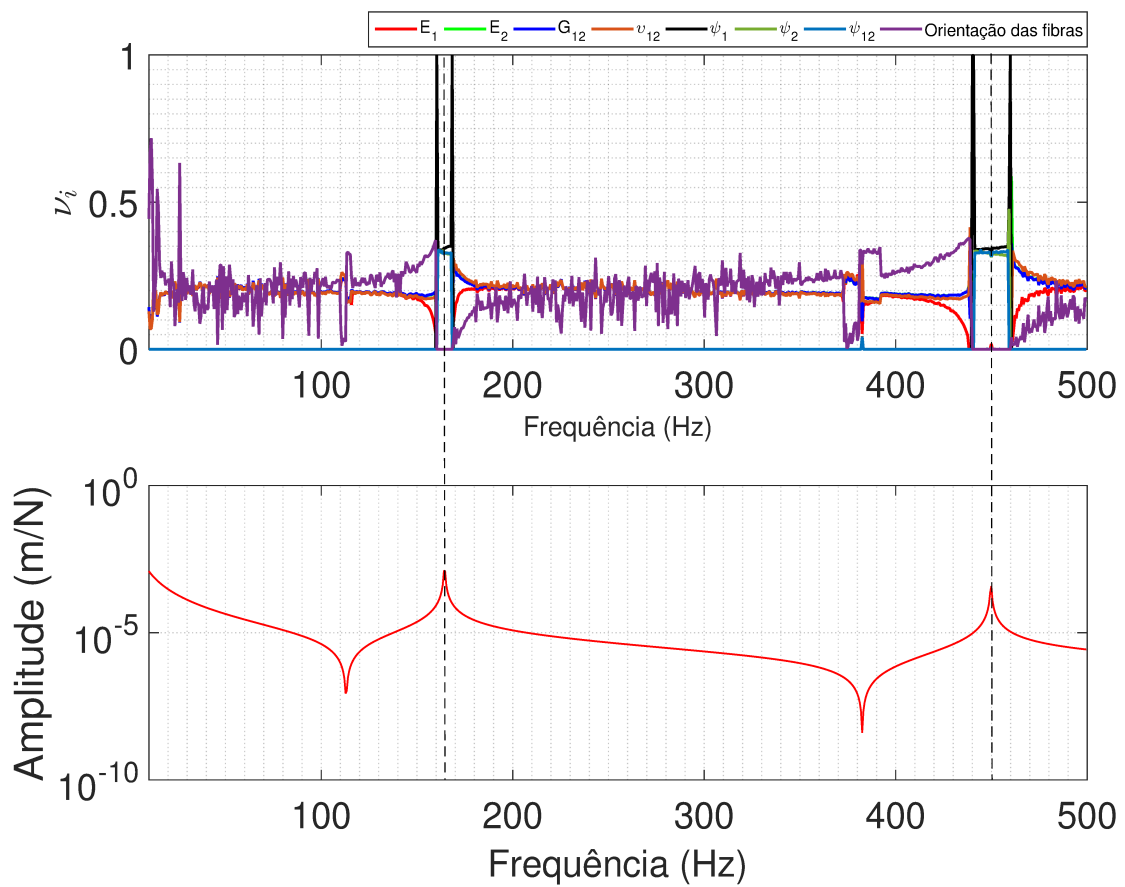


Figura 5.11: Índices de sensibilidade relativa normalizada.

Para demonstrar a importância dos amortecimentos específicos nas frequências naturais, a Fig. 5.15 e 5.16 mostram a comparação das FRFs, para os sensores 1 e 2,

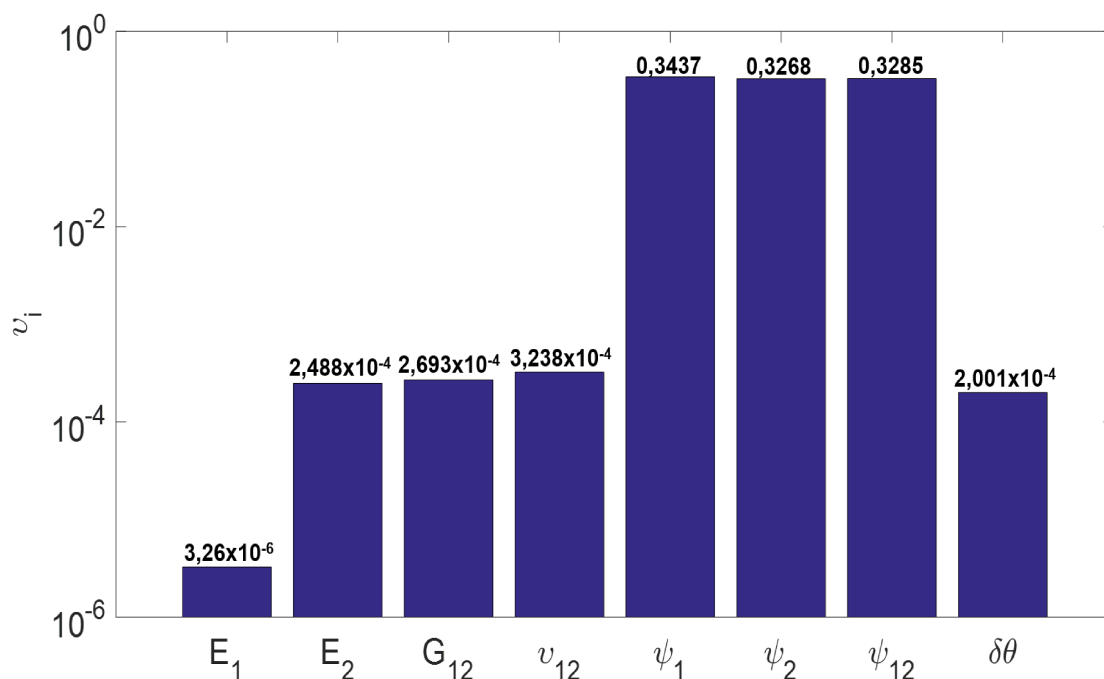


Figura 5.12: Índices de sensibilidade relativa normalizada na frequência de 164,1 Hz.

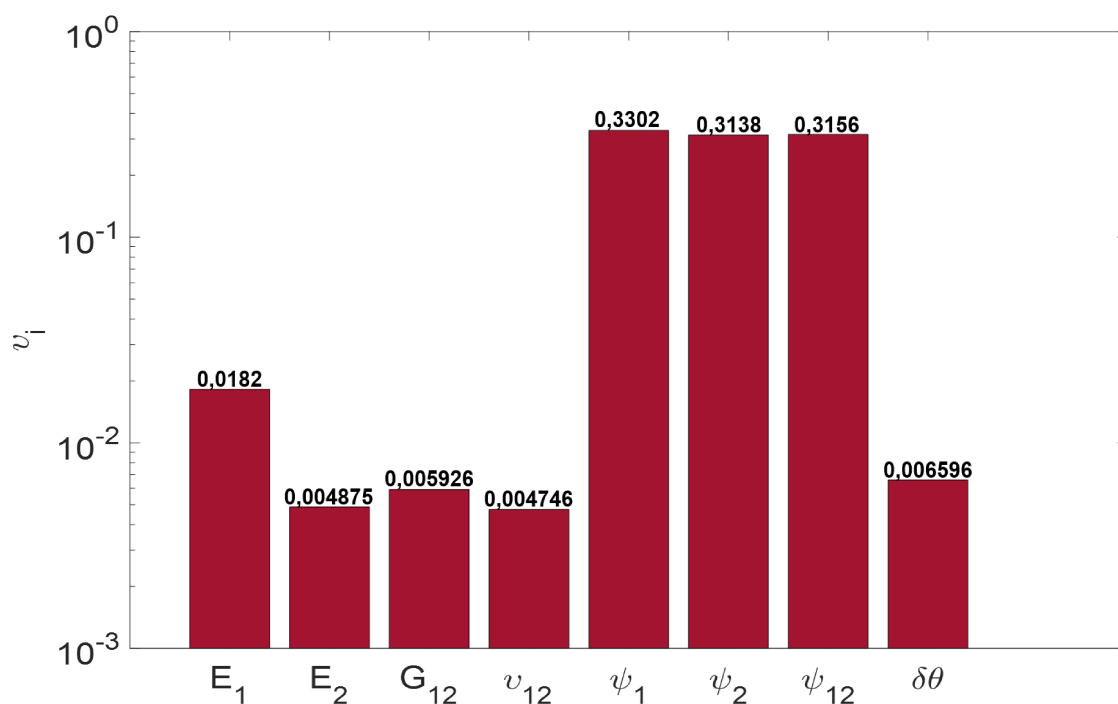


Figura 5.13: Índices de sensibilidade relativa normalizada na frequência de 449,9 Hz.

quando utiliza-se amortecimentos específicos nominais e aumentados em 15 vezes.

Em seguida, avaliou-se a sensibilidade da orientação das fibras separadamente para cada camada do eixo de compósito. As Figs. 5.17 e 5.18 mostram os índices

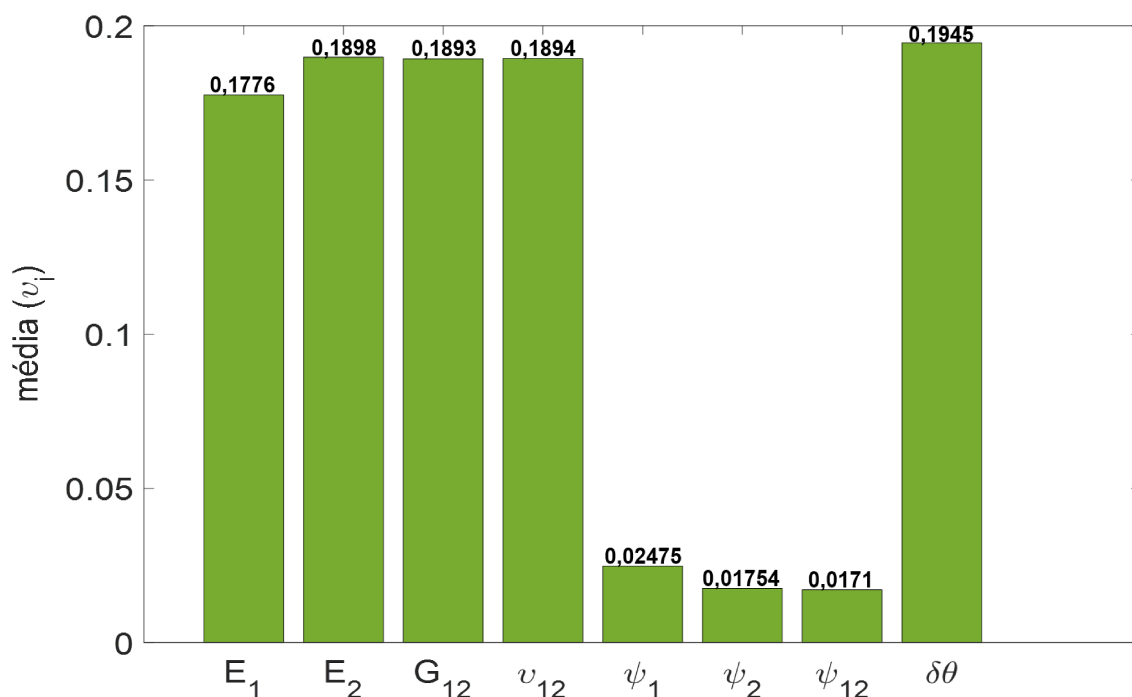


Figura 5.14: Médias dos índices de sensibilidade relativa normalizada.

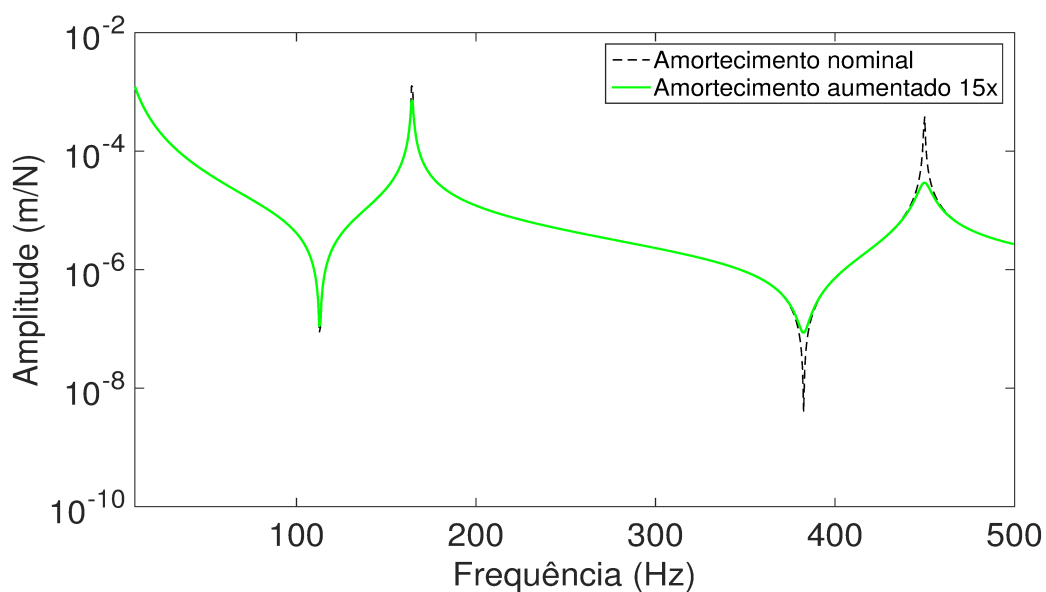


Figura 5.15: Comparação entre FRFs aumentando os amortecimentos específicos (Sensor 1).

de sensibilidade relativa normalizada das orientações das fibras das 21 camadas do compósito em função da frequência. As respostas nestes gráficos também são considerando as respostas de vibração medidas na posição do sensor 1.

É possível observar que existem variações de sensibilidade das orientações das fi-

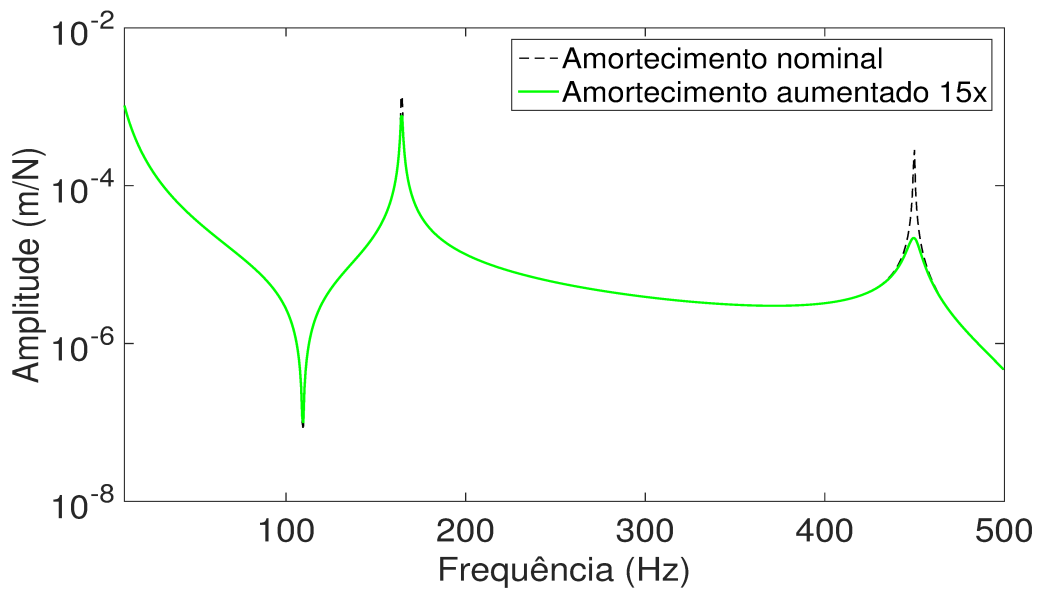


Figura 5.16: Comparação entre FRFs aumentando os amortecimentos específicos (Sensor 2).

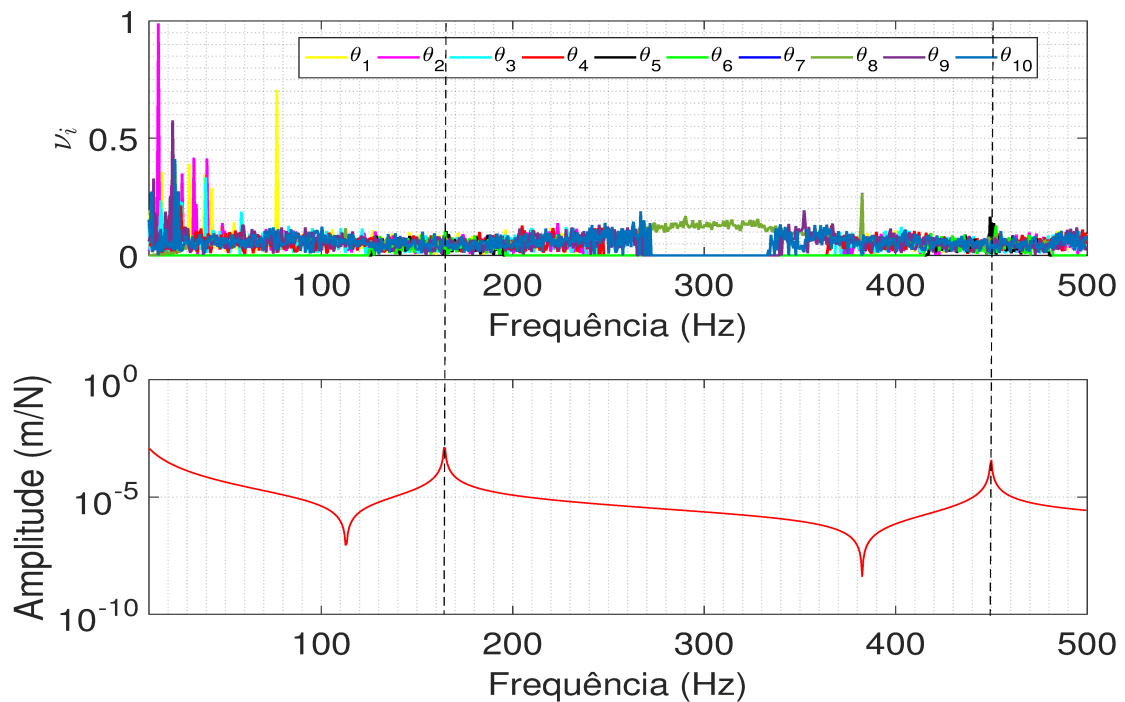


Figura 5.17: Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas.

bras nas diferentes camadas e também em diferentes frequências. No entanto, existe uma certa dificuldade de se analisar estas variações somente através destes dois gráficos. Com isso, as Figs. 5.19, 5.20 e 5.21 mostram a sensibilidade relativa normalizada de cada camada nas frequências de 164,1 Hz (1ª frequência natural) e 449,9 Hz

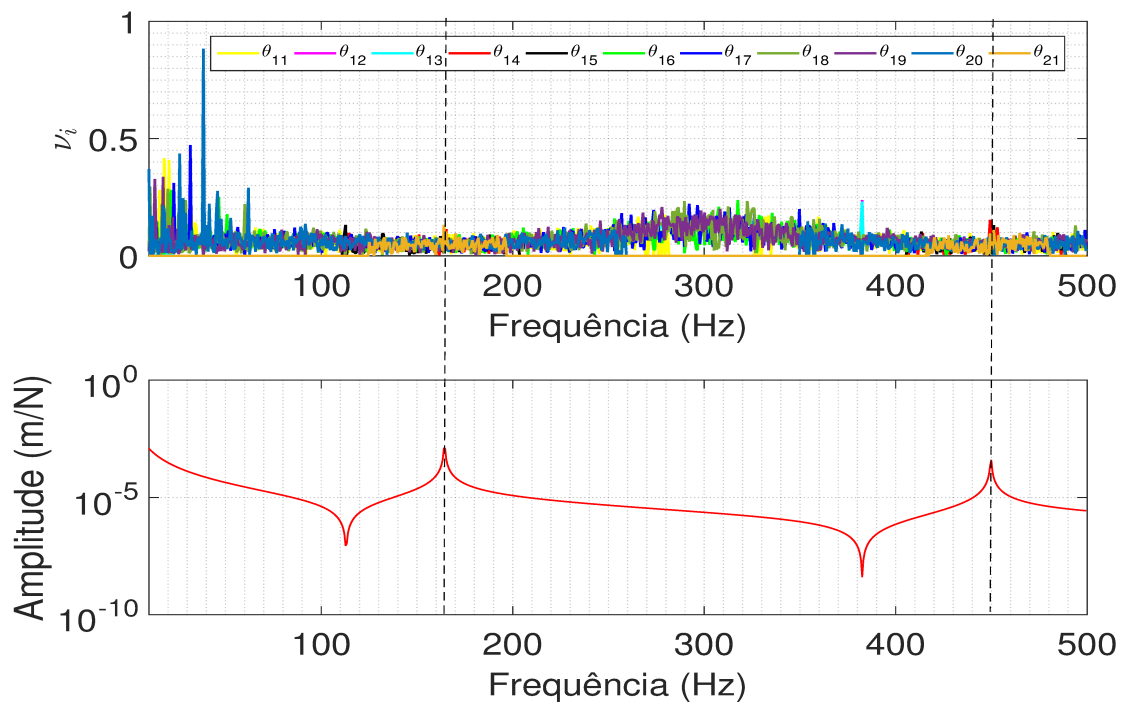


Figura 5.18: Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas.

(2ª frequência natural) e a média das sensibilidades nas camadas ao longo de todas as frequências, respectivamente.

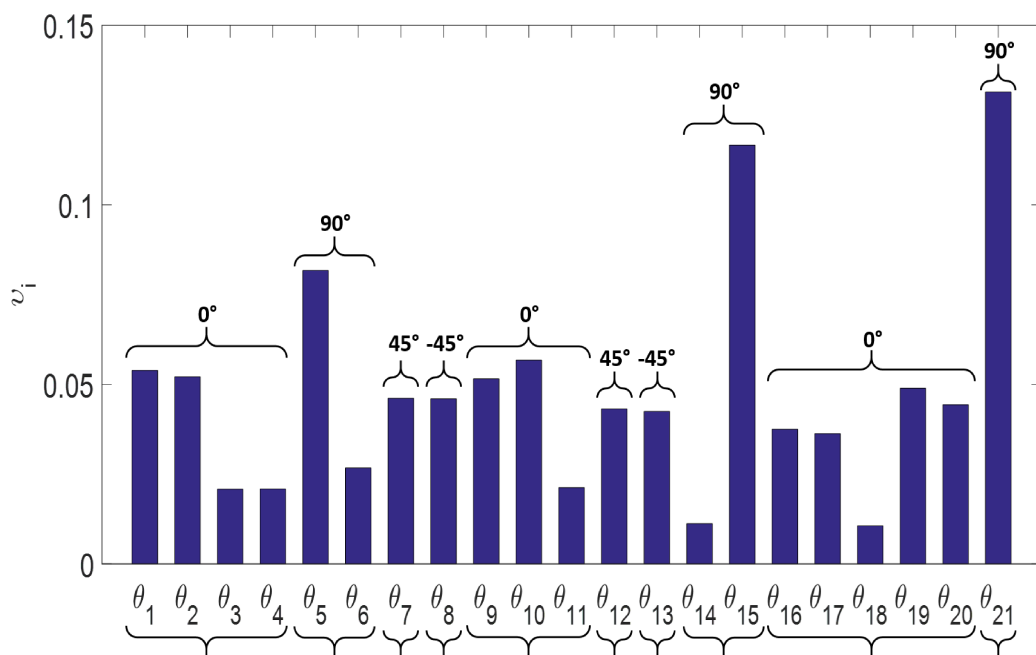


Figura 5.19: Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas na 1ª frequência natural.

Nas Figs. 5.19 e 5.20 não é possível observar de forma clara um padrão da re-

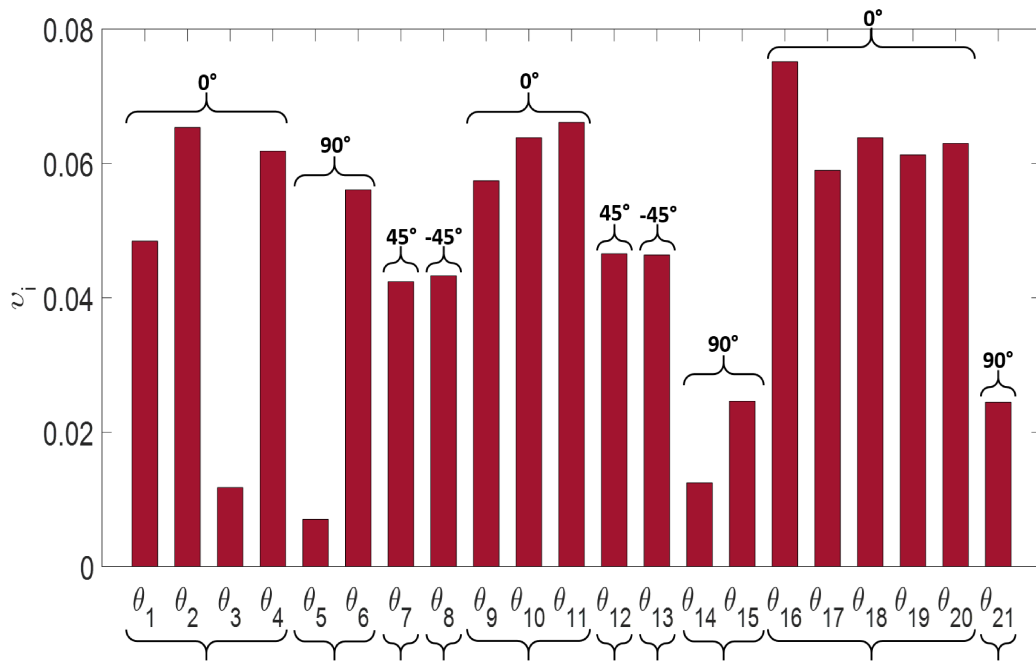


Figura 5.20: Índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas na 2ª frequência natural.

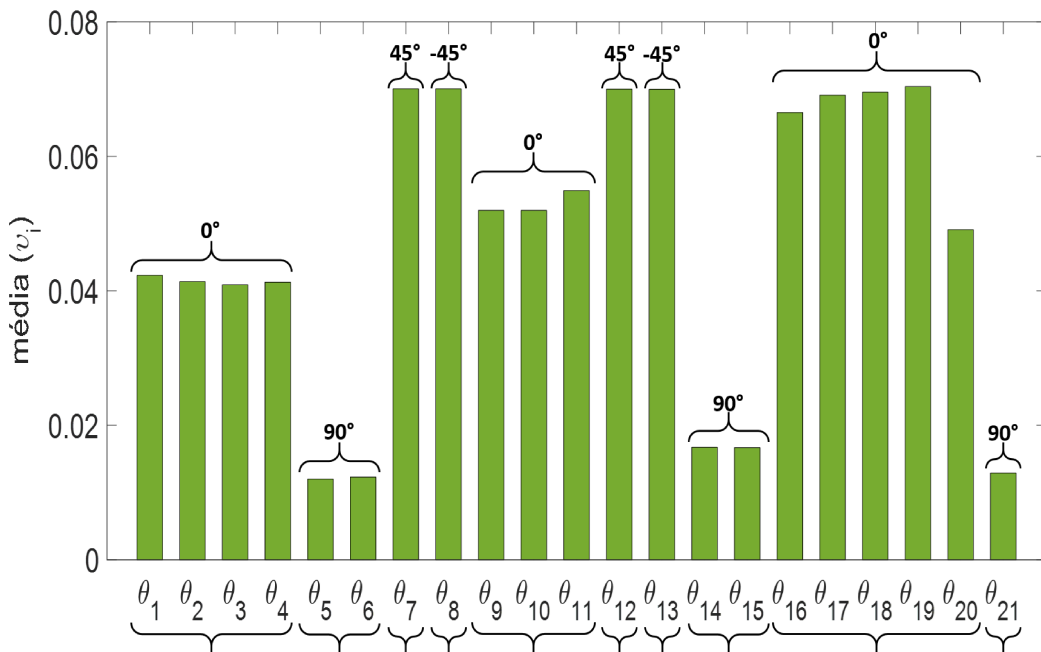


Figura 5.21: Média dos índices de sensibilidade relativa normalizada das camadas.

lação entre a orientação das fibras e o índice de sensibilidade, ou entre o índice de sensibilidade e a posição da camada (mais interna ou mais externa). Já na Fig. 5.21, que mostra a média dos índices de sensibilidade, é possível observar estas relações de forma mais nítida.

Nota-se que as camadas com orientação de 0° e $\pm 45^\circ$ são mais sensíveis que as camadas com orientação de 90° . Isto ocorre porque o módulo de elasticidade da camada na direção Y (longitudinal do eixo) é máximo quando as fibras estão orientadas a 0° e mínimo quando as fibras estão orientadas a 90° . Dessa forma, quando se varia a orientação das fibras em $\pm 1^\circ$ nas camadas a 0° , a rigidez da camada, consequentemente a rigidez do eixo, é mais influenciada do que quando se varia a orientação das fibras direcionadas a 90° . Já nas camadas orientadas a $\pm 45^\circ$ o módulo de cisalhamento da camada é máximo, com isso, a variação das mesmas em $\pm 1^\circ$ também passa a influenciar significativamente a rigidez do eixo. Consequentemente, observa-se uma alta sensibilidade nestas camadas.

A relação entre o índice de sensibilidade e a posição da camada (se ela é mais interna ou mais externa) também pode ser observada neste gráfico. Observa-se que camadas mais internas ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$, etc.) são menos sensíveis que as camadas mais externas. Isto ocorre porque a deformação no eixo tende a aumentar conforme se migra para camadas mais externas, sendo zero na linha neutra (centro do eixo) e máxima na superfície do eixo (última camada). Esta variação no índice de sensibilidade pode ser observada de forma nítida nas camadas orientadas a 0° .

5.2 Segundo Caso - Máquina rotativa com eixo de material compósito

Neste segundo caso, considerou-se a bancada de uma máquina rotativa com eixo de material compósito, projetada durante este trabalho, conforme mostrado nas Figs. 5.22, 5.23 e 5.24 em três diferentes vistas.

A bancada de testes também pode ser operada na posição vertical, como mostrado na Fig. 5.25.

A Tab. 5.6, apresentada abaixo, mostra os componentes que compõem a bancada com suas respectivas descrições.

Todas as análises realizadas nesta etapa foram puramente numéricas. O modelo de elementos finitos da bancada é representado por 30 elementos e 31 nós. O disco está localizado no nó #11, juntamente com o sensor, e os mancais estão localizados nos nós #1 e #31, conforme apresentado pela Fig. 5.26.

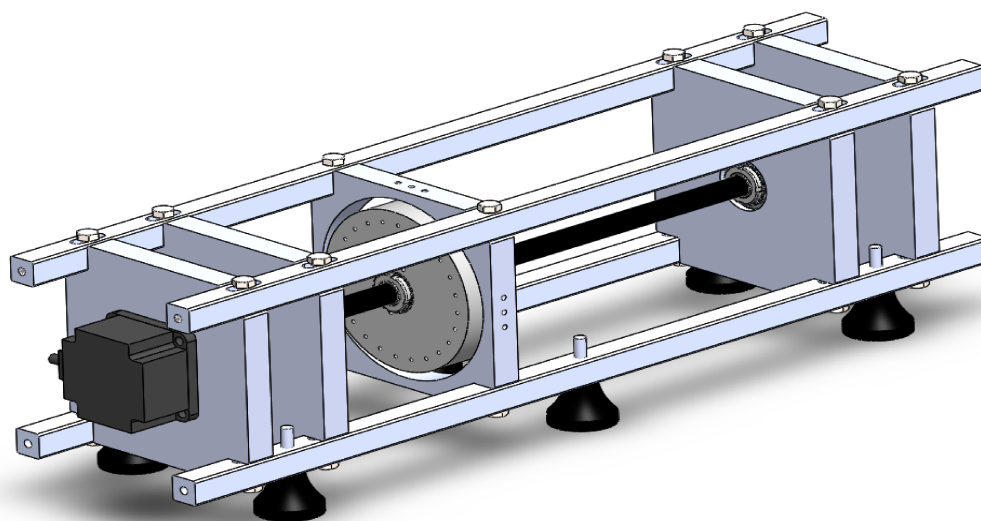


Figura 5.22: Vista isométrica da bancada de testes.

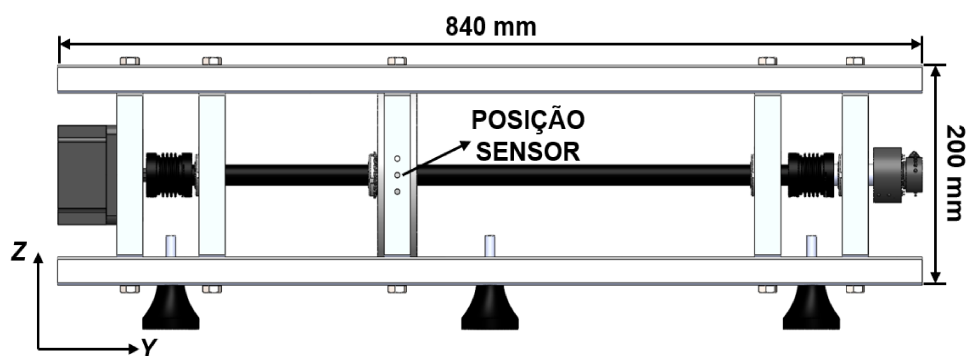


Figura 5.23: Vista lateral da bancada de teste.

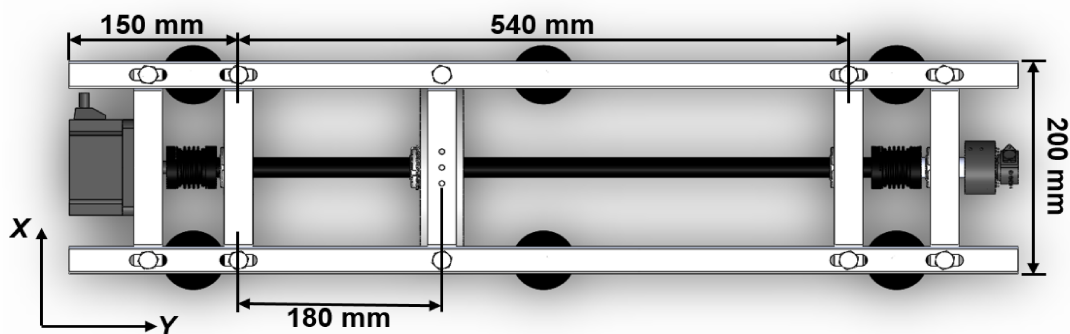


Figura 5.24: Vista superior da bancada de testes.



Figura 5.25: Bancada de testes na posição vertical.

Tabela 5.6: Componentes da bancada de testes.

Quantidade	Descrição	Material
1	Acoplamento BKL/10/19,05/19,05	aço inoxidável
1	Acoplamento BKL/10/12/19,05	aço inoxidável
4	Barra quadrada 25,4 mm x 25,4 mm	alumínio
1	Base para <i>slip ring</i>	alumínio
4	Bucha cônica H205	-
1	Disco	aço AISI 1040
1	Eixo - diâmetro 18 mm	carbono/epóxi
3	Mancal de rolamento	alumínio
1	Mancal suporte do motor	alumínio
3	Rolamento de esfera	-
1	Suporte dos sensores	alumínio
1	Slip ring	-
8	Amortecedor Vibra-Stop [®]	borracha
1	Motor	-

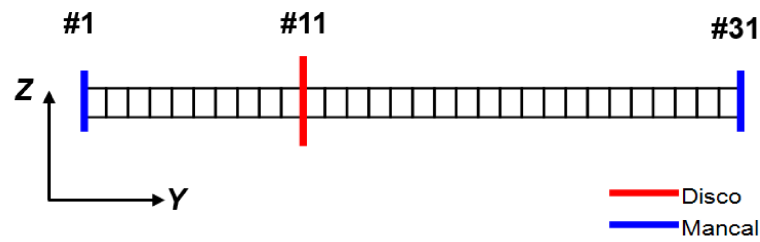


Figura 5.26: Modelo EF da máquina rotativa com eixo de material compósito.

5.2.1 Análise de incertezas e sensibilidade em função da velocidade de rotação

Nesta etapa, inicialmente realizou-se uma análise de incertezas no rotor onde considerou-se incertezas nas máximas amplitudes de vibração do eixo em uma simulação no tempo de duração de 10 segundos, com um $dt = 1 \times 10^{-4}$ s. Esta simulação foi realizada em função da velocidade de rotação que variou de 1000 a 2000 rpm com passo de 20, passando pela velocidade crítica da máquina rotativa (1480 rpm). Ou seja, em cada velocidade de rotação selecionou-se a máxima amplitude do eixo, alcançada em até 10 segundos. A amplitude de vibração foi coletada do sensor posicionado na direção X (veja Figs. 5.23 e 5.24). As propriedades dos mancais, como rigidez e amortecimento são mostradas na Tab. 5.7.

Tabela 5.7: Parâmetros dos mancais.

k_{xx1}	k_{zz1}	k_{xx2}	k_{zz2}	c_{xx1}	c_{zz1}	c_{xx2}	c_{zz2}
$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	$1,00 \times 10^7$	$1,30 \times 10^3$	$1,30 \times 10^3$	$1,30 \times 10^3$	$1,30 \times 10^3$

A massa de desbalanceamento adicionada no disco foi de $2,00 \times 10^{-4}$ kg e uma fase de 6° .

Da mesma forma como realizou-se nas análises de incertezas em função da frequência, neste caso também considerou-se incertezas nos parâmetros do eixo de $\pm 5\%$ e na orientação das fibras $\pm 1^\circ$.

Neste caso, a função objetivo utilizada para se calcular os limites inferior e superior do envelope de incertezas foi a máxima amplitude de vibração do eixo, conforme mostrado nas Eqs. (5.6) e (5.7):

$$y_l(\omega) = \min_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{P}}} |A(\mathbf{p}, \omega)| \quad (5.6)$$

$$y_u(\omega) = \max_{\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{P}}} |A(\mathbf{p}, \omega)| \quad (5.7)$$

onde ω é a velocidade de rotação, que varia entre 1000 e 2000 rpm, com passo de 20 rpm. Neste processo de otimização, assim como nos anteriores, utilizou-se a Evolução Diferencial. Os parâmetros escolhidos foram os mesmos utilizados nas análises em função da frequência.

A Fig. 5.27 apresenta o envelope de incertezas obtido através da aplicação do cenário com variáveis incertas ao modelo em elementos finitos da máquina rotativa com eixo de material compósito.

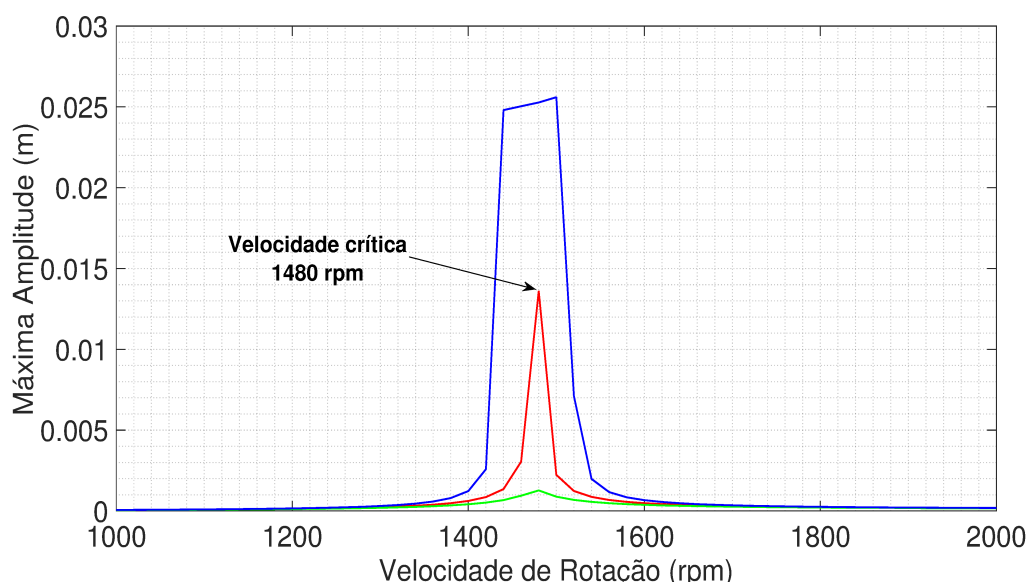


Figura 5.27: Envelope de incertezas na máxima amplitude de vibração do eixo em função da velocidade de rotação.

Note que o pico observado no gráfico representa a velocidade crítica do rotor, que é 1480 rpm. A Fig. 5.28 apresenta os índices de sensibilidade relativa normalizada dos parâmetros do eixo, calculados pela Eq. (4.13), de 1400 a 1600 rpm.

Note que, os índices de influência dos parâmetros variam em função da velocidade de rotação. Pode-se observar claramente ainda a grande influência que os parâmetros ψ_1 , ψ_2 e ψ_{12} passam a ter na velocidade crítica. Esta afirmação é confirmada pela Fig. 5.29, que mostra os índices de influência dos parâmetros sobre a velocidade crítica (1480 rpm). Neste gráfico é possível observar a importância dos coeficientes

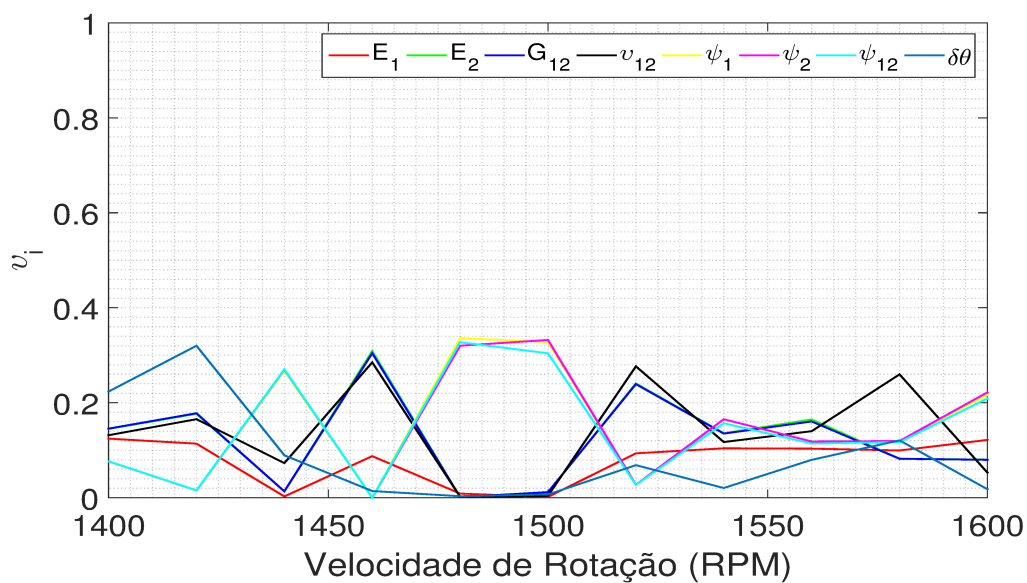


Figura 5.28: Índices de sensibilidade relativa normalizada.

de amortecimento nesta velocidade.

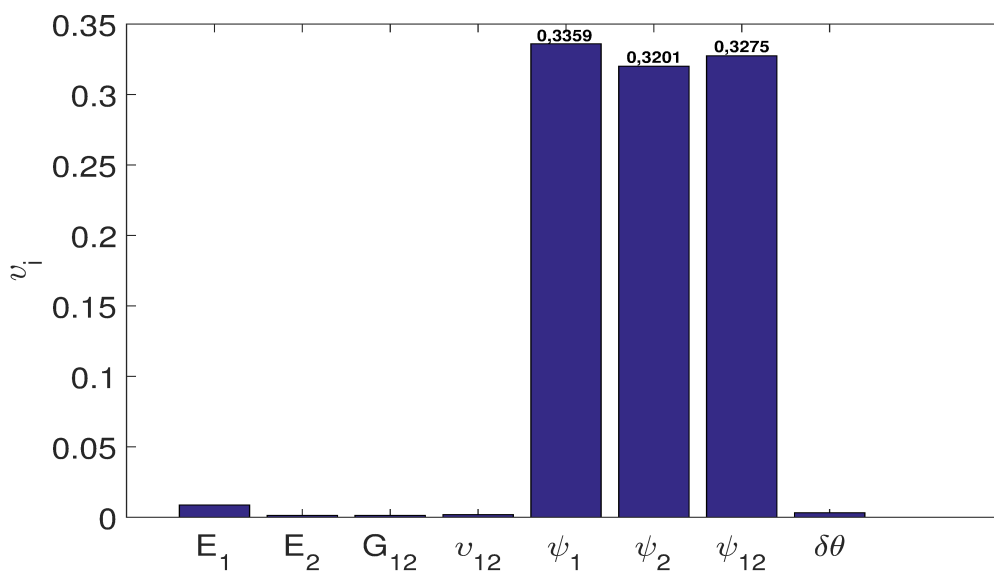


Figura 5.29: Índices de sensibilidade relativa normalizada na velocidade de rotação de 1480 rpm (crítica).

A Fig. 5.30 apresenta a média da sensibilidade relativa normalizada de cada parâmetro, obtida ao longo de todas as velocidades de rotação

A Fig. 5.31 mostra o Diagrama de Campbell do rotor, com sua primeira velocidade crítica em destaque, juntamente com a velocidade de instabilidade, observada em 8360 rpm.

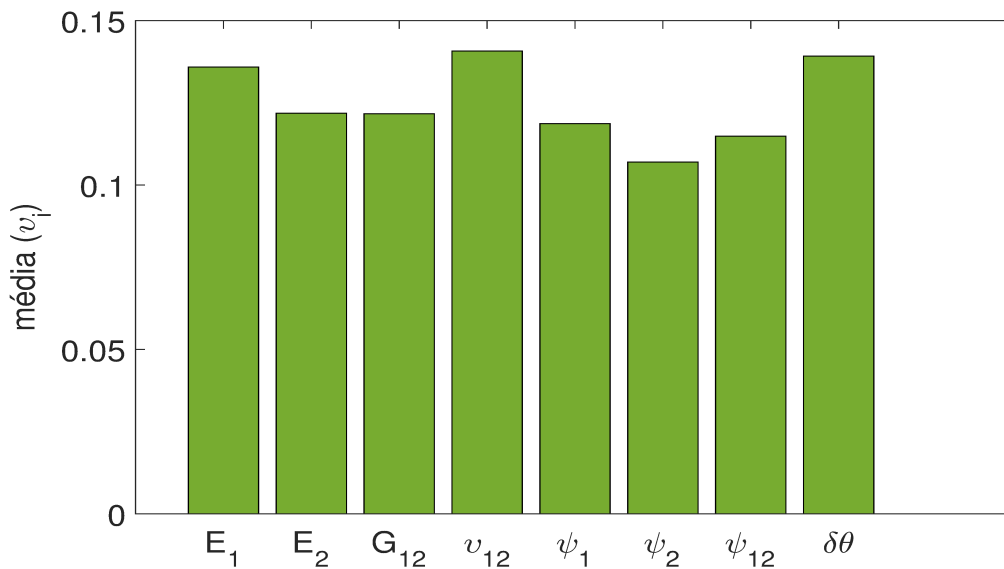


Figura 5.30: Médias dos índices de sensibilidade relativa normalizada.

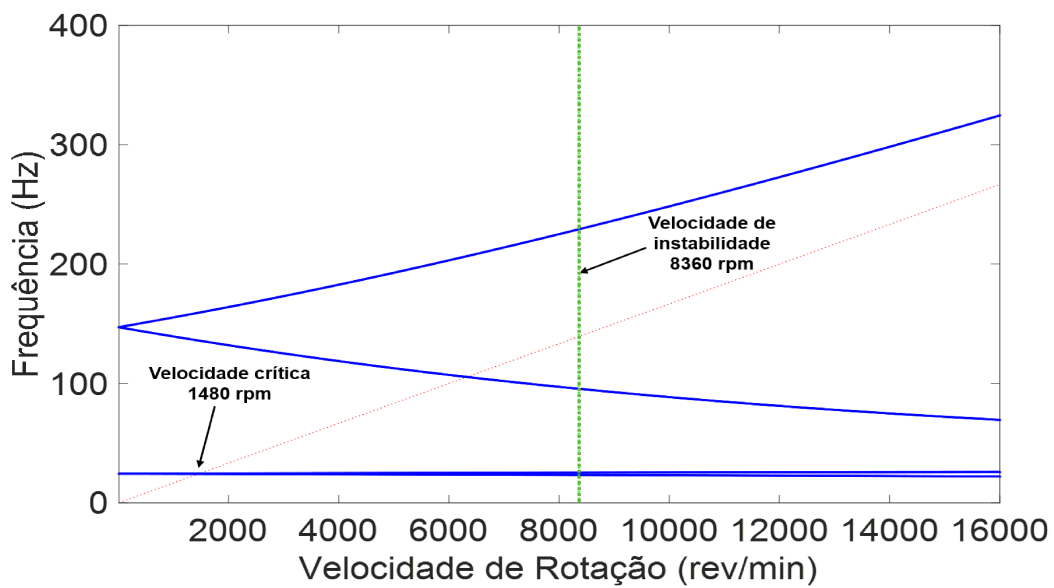


Figura 5.31: Diagrama de Campbell do rotor.

Capítulo 6

Conclusão

Esta dissertação teve como objetivo a aplicação de análises de incertezas e sensibilidade intervalares considerando os principais parâmetros do eixo de material compósito como sendo parâmetros com incertezas intervalares. Este processo foi realizado para julgar-se qual destes parâmetros possuíam maior influência nas FRFs, quando considerou-se somente a resposta do eixo, e na máxima amplitude de vibração, para velocidades de rotação que variavam de 1000 a 2000 rpm, quando considerou-se a máquina rotativa completa. Nestes casos, destacou-se a influência dos parâmetros do eixo principalmente nas frequências naturais, apresentadas nas FRFs, e na velocidade crítica do rotor, apresentada pelo gráfico das máximas amplitudes de vibração em função da velocidade de rotação.

Para se realizar todos estes processos citados, que foram os objetivos principais deste trabalho, inicialmente foi construído um modelo em elementos finitos da máquina rotativa com eixo de material compósito. Para o desenvolvimento do modelo numérico do eixo de compósito utilizou-se o modelo reológico de Kelvin-Voigt, para que fosse possível se obter as matrizes D_i e K_i . Em seguida, aplicou-se o método de homogeneização SHBT para se definir os termos EI_{eq} , GS_{eq} , $EI\alpha_{eq}$ e $GS\alpha_{eq}$ associados ao compósito. Obteve-se também FRFs numéricas que foram ajustadas com as FRFs experimentais para se identificar os parâmetros do eixo. Utilizou-se ainda a ferramenta ANSYS Composite PrepPost (ACP) para se obter as duas primeiras frequências naturais do eixo e compará-las com as obtidas através dos experimentos e do modelo numérico. Posteriormente, uma bancada contendo o eixo de compósito foi projetada para que fosse possível se realizar as análises numéricas propostas neste

trabalho. No entanto, apenas análises numéricas foram realizadas nesta bancada. Por fim, realizou-se a análise de incertezas e de sensibilidade considerando incertezas intervalares nos dois módulos de elasticidade do compósito (E_1 e E_2), no módulo de cisalhamento (G_{12}), no coeficiente de Poisson (ν_{12}), nos coeficientes de amortecimento (ψ_1 , ψ_2 e ψ_{12}) e na orientação das fibras ($\delta\theta$) e construiu-se o Diagrama de Campbell do rotor.

Os primeiros resultados obtidos pelo ajuste das FRFs numéricas com as experimentais foram muito satisfatórios, sendo possível observar nas Figs. 5.5 e 5.6 a grande proximidade das duas respostas tanto nas frequências como nas amplitudes, em especial nos picos, onde a 1ª e 2ª frequência natural apresentaram desvios do numérico para o experimental de 0% e 0,8%, respectivamente. Com estes resultados foi possível demonstrar a validade do modelo reológico de Kelvin-Voigt associado ao método de homogeneização SHBT para o tipo de eixo de compósito abordado neste trabalho. Na comparação das frequências naturais realizada entre os resultados numéricos, experimentais e os obtidos pelo ANSYS® já se observa um desvio um pouco maior, de 1,65% e 2,01%. Isto provavelmente ocorre devido as aproximações realizadas no modelo numérico, como por exemplo, o fato de a última camada do eixo ser com orientações de 0° e 90°, com fibras entrelaçadas, e o modelo SHBT abordar somente camadas com fibras unidirecionais, sendo necessário assim considerar a última camada como sendo duas camadas com a metade da espessura das demais, onde uma possuía fibras orientadas a 0° e a outra orientada a 90°. Outro fator que pode ter tido influência é o revestimento na superfície externa do eixo, utilizado na sua fabricação, que pode ter possíveis alterações nas propriedades homogeneizadas do material, alterando assim suas respostas.

Em seguida, obteve-se os resultados através das análises de incertezas e de sensibilidade intervalares. No primeiro caso, onde considerou-se os eixo na condição livre-livre, os primeiros resultados obtidos foram os envelopes de incertezas das duas FRFs, obtidas pelo sensor 1 e 2, depois plotou-se as FRFs experimentais juntamente com os envelopes. Neste caso os parâmetros considerados incertos foram as propriedades do eixo, citadas no segundo parágrafo. Assim, notou-se que os envelopes de incertezas foram capazes de englobar praticamente todos os pontos das FRFs experimentais, com exceção de pequenas regiões que ficaram ligeiramente fora dos envelo-

pes (veja Figs. 5.9 e 5.10). Em seguida, no gráfico obtido dos índices de sensibilidade relativa normalizada foi possível observar, como esperado, a grande influência dos amortecimentos específicos nos picos (veja Figs. 5.12 e 5.13), enquanto que nos outros parâmetros as sensibilidades se apresentaram aproximadas ao longo de todas as frequências da FRF (veja Fig. 5.14). Logo depois, avaliou-se ainda a sensibilidade da orientação das fibras separadamente para cada camada do eixo. Nas sensibilidades observadas especificamente nas frequências naturais, não foi possível se estabelecer uma relação entre a orientação das fibras e o índice de sensibilidade ou entre o índice de sensibilidade e a posição da camada (veja Figs. 5.19 e 5.20).

No entanto, na média dos índices de sensibilidade (veja Fig. 5.21) observou-se, de forma mais nítida, que as fibras orientadas a 0° e $\pm 45^\circ$ são mais sensíveis que as camadas orientadas a 90° . A explicação para isto é que módulo de elasticidade da camada na direção Y (longitudinal do eixo) é máximo quando as fibras estão orientadas a 0° e mínimo quando as fibras estão orientadas a 90° . Dessa forma, quando se varia a orientação das fibras em $\pm 1^\circ$ nas camadas a 0° , a rigidez da camada, conseqüentemente a rigidez equivalente do eixo, é mais influenciada do que quando se varia a orientação das fibras direcionadas a 90° . Já nas camadas orientadas a $\pm 45^\circ$ a explicação é que o módulo de cisalhamento da camada é máximo, com isso, a variação das mesmas em $\pm 1^\circ$ também passa a influenciar significativamente a rigidez equivalente do eixo, conseqüentemente observa-se uma maior sensibilidade nestas camadas. Neste mesmo gráfico observa-se também a relação entre o índice de sensibilidade e a posição da camada. As camadas localizadas mais internamente no eixo são menos sensíveis que as camadas localizadas mais externamente. A explicação para isto é que a deformação nas camadas mais externas tende a ser maior que nas camadas mais internas, sendo zero na linha neutra e máxima na superfície externa do eixo (última camada).

Por fim, na análise de incertezas intervalares aplicadas ao modelo da máquina rotativa completa obteve-se inicialmente o envelope de incertezas (veja Fig. 5.27). Neste gráfico observou-se nitidamente o pico que representa a velocidade crítica do rotor em 1480 rpm e os limites inferior e superior do envelope. Logo em seguida, apresentou-se os índices de sensibilidade relativa normalizada dos parâmetros do eixo (veja Fig. 5.28). Neste gráfico foi possível observar, de forma clara, que os índices

de sensibilidade variam em função da velocidade de rotação e que os coeficientes de amortecimento ψ_1 , ψ_2 e ψ_{12} apresentam grande influência, como esperado, na máxima amplitude de vibração do rotor na velocidade crítica (veja Fig. 5.29). O Diagrama de Campbell também foi apresentado, confirmando a velocidade crítica do rotor em 1480 rpm e com a indicação da velocidade de instabilidade em 8360 rpm.

A contribuição deste trabalho foi mostrar as propriedades do eixo de material compósito que podem influenciar, de forma positiva ou negativa, o comportamento dinâmico da máquina rotativa, sendo possível, através da manipulação das mesmas, a redução de amplitudes de vibração (principalmente em regiões como frequências naturais e velocidades críticas) e apontá-las como sendo propriedades que necessitam de maior atenção durante o processo de fabricação do material. Para trabalhos futuros, propõe-se a realização de experimentos, com a bancada já apresentada neste trabalho, alternando eixos de material compósito, com diferentes orientações de fibras e quantidade e espessuras de camadas. Propõe-se também a utilização de diferentes materiais na matriz e nas fibras, utilizando, se possível, materiais com coeficientes de amortecimento variados para assim confirmar as suas influências no comportamento dinâmico da máquina rotativa.

Referências

ALVES, M. T. S. Controle de vibrações em máquinas rotativas usando ligas com memória de forma. Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

ALWAN, V.; GUPTA, A.; SEKHAR, A.; VELMURUGAN, R. Dynamic analysis of shafts of composite materials. **Journal of reinforced plastics and composites**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 29, n. 22, p. 3364–3379, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/0731684410371404>>.

ARAB, S. B.; RODRIGUES, J. D.; BOUAZIZ, S.; HADDAR, M. A finite element based on equivalent single layer theory for rotating composite shafts dynamic analysis. **Composite Structures**, Elsevier, v. 178, p. 135–144, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.052>>.

BARBOSA, P. C. d. F.; LARA-MOLINA, F. A.; SILVA, I. B. da; CAVALINI, A. A.; STEFFEN, V. Uncertain and sensitivity analyses of a composite shaft. **Meccanica**, Springer, v. 55, n. 1, p. 35–48, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/05831024030356001>>.

BARBOSA, P. C. P. d. F. Análise do comportamento dinâmico de eixos de material composto em máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2018.

BAUCHAU, O. A. Optimal design of high speed rotating graphite/epoxy shafts. **Journal of Composite Materials**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 17, n. 2, p. 170–181, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/002199838301700205>>.

BERG, K. Composite driveshafts in cooling towers. **J. Cool. Tower Inst**, v. 10, n. 1, p. 36–37, 1989.

BISHOP, R.; GLADWELL, G. The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor. **Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 1, n. 1, p. 66–77, 1959. Disponível em: <https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1959_001_010_02>.

BRUSH, M. Still spinning after all these years: a profile of the ultracentrifuge. **The Scientist**, The Scientist, v. 13, n. 20, p. 16–18, 1999.

CALLISTER JR, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Callister's Materials Science and Engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020.

CAMPBELL, W. **Protection of steam turbine disk wheels from axial vibration**. [S.l.]: General electric Company, 1924.

- CAR, E.; OLLER, S.; OÑATE, E. A large strain plasticity model for anisotropic materials—composite material application. **International Journal of Plasticity**, Elsevier, v. 17, n. 11, p. 1437–1463, 2001. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(00\)00098-X](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(00)00098-X)>.
- CAVALINI JR, A.; LARA-MOLINA, F. A.; DOURADO, A.; JR, V. S. Experimental uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. **sign**, v. 1, n. 2, p. 2, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78251582>>.
- CAVALINI JR, A. A.; GUIMARÃES, T. A.; SILVA, B. R. da; JR, V. S. Analysis of the dynamic behavior of a rotating composite hollow shaft. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 14, n. 1, p. 1–16, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78253168>>.
- CAVALINI JR, A. A. et al. Detecção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2013.
- CHANG, C.-Y.; CHANG, M.-Y.; HUANG, J. H. Vibration analysis of rotating composite shafts containing randomly oriented reinforcements. **Composite structures**, Elsevier, v. 63, n. 1, p. 21–32, 2004. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(03\)00121-1](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(03)00121-1)>.
- COELHO, L. d. S. Fundamentos, potencialidades e aplicações de algoritmos evolutivos. **Notas em matemática aplicada. São Carlos, SP: SBMAC-Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**, 2003.
- DE LAVAL, C. G. Steam turbine. **U.S. Patent No 522,066**, 1894.
- DUNKERLEY, S. On the whirling and vibration of shafts. **Proceedings of the Royal Society of London**, JSTOR, v. 54, p. 365–370, 1893.
- ESHLEMAN, R.; EUBANKS, R. On the critical speeds of a continuous rotor. 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3591768>>.
- FAN, H.-Y.; LAMPINEN, J. A trigonometric mutation operation to differential evolution. **Journal of global optimization**, Springer, v. 27, n. 1, p. 105–129, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1024653025686>>.
- FEDRN, K. Grundlagen einer systematischen schwingung-sentstörung wellenelastischer rotoren. **VDI-Bericht**, v. 24, p. 9, 1957.
- FREISSINET, S. Worries about new composite made airplane. **<http://www.1001crash.com/index-page-composite-lg-2.html>**. Acessado em dezembro de 2020, 2011.
- FU, C.; REN, X.; YANG, Y.; QIN, W. Dynamic response analysis of an overhung rotor with interval uncertainties. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 89, n. 3, p. 2115–2124, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-017-3573-3>>.
- FU, C.; REN, X.; YANG, Y.; LU, K.; WANG, Y. Nonlinear response analysis of a rotor system with a transverse breathing crack under interval uncertainties. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 105, p. 77–87, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.07.001>>.

- GARGIULO, D. J. Design and development of a power takeoff shaft. **Journal of Aircraft**, v. 23, n. 12, p. 876–880, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.45395>>.
- GOODMAN, T. P. A least-squares method for computing balance corrections. 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3670532>>.
- GUPTA, K. Composite shaft rotor dynamics: an overview. In: **Vibration Engineering and Technology of Machinery**. Springer, 2015. p. 79–94. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09918-7_6>.
- ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. **Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- JONES, R. M. **Mechanics of composite materials with different moduli in tension and compression**. [S.l.], 1978.
- KOROISHI, E. H.; JR, A. A. C.; LIMA, A. M. de; JR, V. S. Stochastic modeling of flexible rotors. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 34, n. SPE2, p. 574–583, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000600006>>.
- KOROISHI, E. H.; LARA-MOLINA, F. A.; REPINALDO, J. P. Sensitivity analysis of smart rotor under to uncertainties. In: EDP SCIENCES. **MATEC Web of Conferences**. 2018. v. 211, p. 18001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/mateconf/201821118001>>.
- KUSCHMIERZ, R.; FILIPPATOS, A.; GÜNTHER, P.; LANGKAMP, A.; HUFENBACH, W.; CZARSKE, J.; FISCHER, A. In-process, non-destructive, dynamic testing of high-speed polymer composite rotors. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 54, p. 325–335, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.07.016>>.
- LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. [S.l.]: Wiley, 1998. v. 2.
- LARA-MOLINA, F. A.; JR, A. A. C.; KOROISHI, E. H.; JR, V. S. Sensitivity analysis of flexible rotor subjected to interval uncertainties. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78255476>>.
- LARA-MOLINA, F. A.; KOROISHI, E. H.; STEFFEN JR, V. Uncertainty analysis of flexible rotors considering fuzzy parameters and fuzzy-random parameters. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 12, n. 10, p. 1807–1823, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78251466>>.
- LEES, A.; FRISWELL, M. The evaluation of rotor imbalance in flexibly mounted machines. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 208, n. 5, p. 671–683, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1260>>.
- LEES, A. W. Smart machines with flexible rotors. **Mechanical systems and signal processing**, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 373–382, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.09.006>>.

- LEI, Y.; LIN, J.; HE, Z.; ZUO, M. J. A review on empirical mode decomposition in fault diagnosis of rotating machinery. **Mechanical systems and signal processing**, Elsevier, v. 35, n. 1-2, p. 108–126, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.09.015>>.
- LEWIS, F. M. Vibration during acceleration through a critical speed. **Trans. Am. Soc. Mech. Eng.**, v. 54, p. 253, 1932.
- LOBATO, F. S.; JR, V. S.; NETO, A. S. Resolução de problemas inversos em processos difusivos e transferência radiativa usando o algoritmo de evolução diferencial. **Computação Evolucionária em Problemas de Engenharia**. Curitiba, PR: Omnipax, p. 173–195, 2011.
- MA, Y.; LIANG, Z.; CHEN, M.; HONG, J. Interval analysis of rotor dynamic response with uncertain parameters. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 332, n. 16, p. 3869–3880, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.03.001>>.
- MAMALIS, A.; ROBINSON, M.; MANOLAKOS, D.; DEMOSTHENOUS, G.; IOANNIDIS, M.; CARRUTHERS, J. Crashworthy capability of composite material structures. **Composite structures**, Elsevier, v. 37, n. 2, p. 109–134, 1997. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)80005-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)80005-0)>.
- MENDONÇA, W. R. D. P.; MEDEIROS, E. C. D.; PEREIRA, A. L. R.; MATHIAS, M. H. The dynamic analysis of rotors mounted on composite shafts with internal damping. **Composite Structures**, Elsevier, v. 167, p. 50–62, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.078>>.
- MOENS, D.; VANDEPITTE, D. Sensitivity analysis of frequency response function envelopes of mechanical structures with interval uncertainties. In: KATHOLIEKE UNIV LEUVEN, DEPT WERKTUIGKUNDE. **Proceedings of ISMA2006: International Conference on Noise and Vibration Engineering, Vols 1-8**. [S.l.], 2006. v. 7, p. 4197–4212.
- MOENS, D.; VANDEPITTE, D. Interval sensitivity theory and its application to frequency response envelope analysis of uncertain structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 196, n. 21-24, p. 2486–2496, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.01.006>>.
- MÖLLER, B.; BEER, M. **Fuzzy randomness: uncertainty in civil engineering and computational mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.
- MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to interval analysis**. [S.l.]: Siam, 2009. v. 110.
- MURUGAN, S.; CHOWDHURY, R.; ADHIKARI, S.; FRISWELL, M. Helicopter aeroelastic analysis with spatially uncertain rotor blade properties. **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 29–39, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000600006>>.
- MYKLESTAD, N. A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 11, n. 2, p. 153–162, 1944. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/8.11116>>.

- NEWKIRK, B.; TAYLOR, H. Shaft whipping due to oil action in journal bearings. **General Electric Review**, v. 28, n. 8, p. 559–568, 1925.
- NEWKIRK, B. L. Shaft rubbing. **Journal of the American Society for Naval Engineers**, Wiley Online Library, v. 39, n. 1, p. 114–120, 1927.
- NOURI, T.; GAY, D. Shear stresses in orthotropic composite beams. **International journal of engineering science**, Elsevier, v. 32, n. 10, p. 1647–1667, 1994. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)90171-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90171-6)>.
- PEREIRA, J. C. Curso de projeto estrutural com materiais compostos. **Apostila do curso de Engenharia Mecânica. Florianópolis: UFSC**, 2003.
- PRICE, K.; STORN, R. Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous space. **Technical Report, International Computer Science Institute**, 1995.
- PROHL, M. A general method for calculating critical speeds of flexible rotors. **Trans. ASME**, v. 67, p. A142, 1945.
- RAGHAVA, R.; HAMMOND, E. Development of a filament wound composite shaft for an aircraft generator. In: **Composites go to market. SPI Annual conference preprint. 39**. [S.l.: s.n.], 1984. p. 11–F.
- RANKINE, W. M. On the thermal energy of molecular vortices. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 6, p. 590–592, 1869.
- RAO, J. **Rotor dynamics**. [S.l.]: New Age International, 1996.
- REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. [S.l.]: CRC press, 2003.
- RUHL, R. L.; BOOKER, J. A finite element model for distributed parameter turborotor systems. 1972. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3428101>>.
- SCHWEITZER, G. Stabilization of self-excited rotor vibrations by an active damper. **Dynamics of rotors**, p. 472–493, 1975.
- SILVEIRA, M. E. et al. Análise do comportamento dinâmico de rotores em eixos bobinados. Florianópolis, SC, 2001.
- SINGH, S.; GUPTA, K. Composite shaft rotordynamic analysis using a layerwise theory. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 191, n. 5, p. 739–756, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0153>>.
- SINO, R. **Comportement dynamique et stabilité des rotors: application aux rotors composites**. Tese (Doutorado) — Lyon, INSA, 2007.
- SINO, R.; BARANGER, T.; CHATELET, E.; JACQUET, G. Dynamic analysis of a rotating composite shaft. **Composites Science and Technology**, Elsevier, v. 68, n. 2, p. 337–345, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.06.019>>.

- SMITH, D. M. The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 142, n. 846, p. 92–118, 1933. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1933.0158>>.
- SPENCER, B.; MCGEE, J. Design methodology for a composite drive shaft. **Advanced composites**, p. 69–82, 1985.
- STEFFEN JR, V. Estudo analítico e experimental de dinâmica de rotores. **Revista Brasileira de Ciências. Mecânicas**, v. 3, n. 3, p. 3–8, 1981.
- STODOLA, A. **Steam and gas turbines: with a supplement on the prospects of the thermal prime mover**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1927. v. 2.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of global optimization**, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>>.
- SWANSON, E.; POWELL, C. D.; WEISSMAN, S. A practical review of rotating machinery critical speeds and modes. **Sound and vibration**, [Bay Village, Ohio, Acoustical Publications, inc.], v. 39, n. 5, p. 16–17, 2005.
- THEARLE, E. L. Dynamic balancing of rotating machinery in the field. **Trans. ASME**, v. 56, n. 10, p. 745–753, 1934.
- URBIOLA-SOTO, L. Multivariate response rotordynamic modeling and sensitivity analysis of tilting pad bearings. **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 140, n. 7, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4038549>>.
- VENKATESAN, C.; FRIEDMANN, P.; YUAN, K.-A. A new sensitivity analysis for structural optimization of composite rotor blades. **Mathematical and computer modeling**, Elsevier, v. 19, n. 3-4, p. 1–25, 1994. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0895-7177\(94\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0895-7177(94)90054-X)>.
- VIANA, F.; JR, V. S. Simple optimization toolbox—users guide. <http://www.geocities.com/fchegury/>>(downloaded at November 2006), 2006.
- VIANA, F. A. C.; OLIVEIRA, F. C. s. G. d.; BORGES, J. A. F.; JR, V. S. Differential evolution applied to the design of a three-dimensional vehicular structure. In: **International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**. [s.n.], 2007. v. 48078, p. 1321–1330. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/DETC2007-34290>>.
- WALLEY, P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. **Chapman and Hall**, CRC Press Company, 1991.
- WASILKOSKI, C. M. Comportamento mecânico dos materiais poliméricos. **Curitiba, Brasil**, 2006.
- WILHELMI, G. F.; APPLEMAN, W. M.; LOO, F. T. Composite shafting for naval propulsion systems. **Naval Engineers Journal**, Wiley Online Library, v. 98, n. 4, p. 129–136, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1986.tb03464.x>>.

WORGAN, G. P.; SMITH, D. R. Carbon fiber drive shaft. Google Patents, maio 16 1978. US Patent 4,089,190.

YAMAMOTO, T. On the critical speed of a shaft of subharmonic oscillation. **Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng**, v. 21, n. 111, p. 853–858, 1955.

YATES, D.; REZIN, D. Carbon fibre reinforced composite. Google Patents, maio 16 1979. US Patent 4,089,190.

ZINBERG, H.; SYMONDS, M. The development of an advanced composite tail rotor driveshaft. In: **Proceedings of the 26th Annual Forum of the American helicopter Society, Washington, United States**. [S.l.: s.n.], 1970.

Apêndice A

Modelo Matemático de Rotores

Neste capítulo, será apresentada, inicialmente, a modelagem matemática de rotores em geral, de maneira que será demonstrada a formulação das matrizes elementares que constituem o modelo matemático do sistema, através da utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF). Este modelo possibilita se avaliar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas numericamente, de forma fidedigna. Nos sub-tópicos a seguir, será mostrado, separadamente, o desenvolvimento apresentado por Lalanne e Ferraris (1998) para se obter o modelo matemático de cada componente do sistema: eixo, disco, mancais e massa de desbalancamento. Por fim, será apresentada a equação diferencial que representa o rotor flexível.

A.1 Eixo

O eixo é modelado como uma viga de seção transversal circular e com diâmetro constante. A Fig. A.1, mostrada abaixo, representa o elemento que possui comprimento L , dois nós e oito graus de liberdade (4 graus de liberdade por nó), sendo que u_1, u_2, w_1 e w_2 são os quatro deslocamentos e $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$ e φ_2 as quatro rotações.

Sabe-se que as relações entre deslocamento e rotações são dadas pelas Eqs. (A.1) e (A.2), respectivamente:

$$\theta = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{A.1}$$

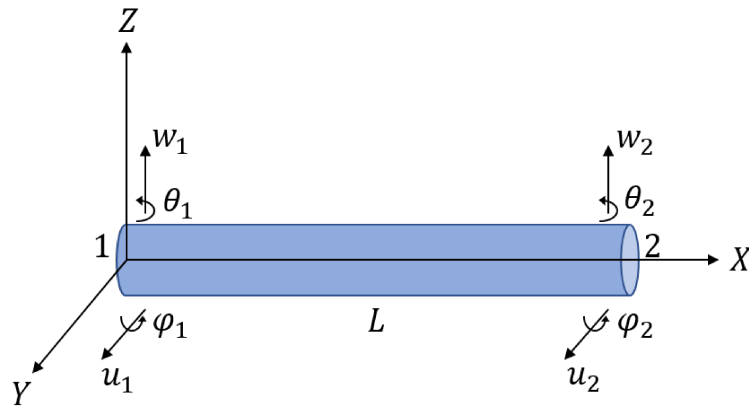


Figura A.1: Graus de liberdade (GDLs) associados ao elemento finito do eixo
Adaptado de: Cavalini Jr et al. (2013).

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{A.2}$$

Os vetores de deslocamentos nodais podem ser escritos conforme demonstrado na Eq. (A.3):

$$q = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \varphi_2\}^t \tag{A.3}$$

Já os movimentos nas direções X e Z são mostrados nas Eqs. (A.4) e (A.5), respectivamente:

$$q_u = \{u_1 \ \theta_1 \ u_2 \ \theta_2\}^t \tag{A.4}$$

$$q_w = \{w_1 \ \varphi_1 \ w_2 \ \varphi_2\}^t \tag{A.5}$$

As Eqs. (A.6) e (A.7), mostradas a seguir, apresentam o campo de deslocamentos transversais ao longo do elemento. Estes deslocamentos são formulados a partir de um polinômio de terceiro grau.

$$u = N_1 q_u \tag{A.6}$$

$$w = N_2 q_w \tag{A.7}$$

onde $N_1 = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]$ e $N_2 = [c_5 \ c_6 \ c_7 \ c_8]$ são vetores formados, através de uma hipótese adotada, de coeficientes de equações de terceira ordem. Estes polinômios representam os deslocamentos nodais nos planos XY e ZY , respectivamente, e $c_i (i =$

1, 2, ..., 8) são os seus coeficientes. Estas funções de interpolação são obtidas através da resolução dos sistema linear formado quando se aplica as condições de contorno do problema sobre as Eqs. (A.6) e (A.7). Sendo assim, determina-se os coeficientes das funções de interpolação e obtém-se as equações de deslocamento e rotação ao longo do comprimento do eixo:

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{A.9})$$

A.1.1 Energia Cinética

A primeira equação utilizada para se caracterizar o eixo é a equação da energia cinética, que é apresentada pela Eq. (A.10):

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho l}{2} \int_0^L (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\varphi} \theta dy + \rho I L \Omega^2 \quad (\text{A.10})$$

onde ρ é a densidade, S a área da seção transversal do eixo e I o momento de inércia de área. Assim, substituindo as Eqs. (A.6) e (A.7) na Eq. (A.10) obtém-se a energia cinética para o eixo em sua forma compacta, conforme apresentado na Eq. (A.11):

$$\begin{aligned} T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{q}}_u^t \mathbf{N}_1^t \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \mathbf{N}_2^t \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w) dy + \\ & + \frac{\rho l}{2} \int_0^L \left(\dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^t \frac{d\mathbf{N}_2^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right) dy + \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\mathbf{q}}_u^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \mathbf{q}_w dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Nesta Eq. (A.11), a primeira integral representa a energia do eixo em flexão, a segunda integral indica o efeito secundário da inércia de rotação, a terceira integral retrata o efeito giroscópico e o último termo, por ser uma constante não influencia nas equações.

Posteriormente, substitui-se as Eqs. (A.8) e (A.9) na Eq. (A.11) e obtém-se a Eq. (A.12):

$$T_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_u^t \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_w^t \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}}_w + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_u^t \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{q}}_u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_w^t \mathbf{M}_4 \dot{\mathbf{q}}_w + \Omega \dot{\mathbf{q}}_u^t \mathbf{M}_5 \mathbf{q}_w + \rho I L \Omega^2 \quad (\text{A.12})$$

onde as matrizes \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 são matrizes clássicas de massa, já as matrizes \mathbf{M}_3 e \mathbf{M}_4 são as que fornecem a influência do efeito secundário da inércia de rotação e \mathbf{M}_5 refere-se ao efeito giroscópico. Em seguida, aplica-se a equação de Lagrange na Eq.(A.12) para se formular a Eq. (A.13):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_s}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_T) \ddot{\mathbf{q}} + \Omega \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st} \mathbf{q} \quad (\text{A.13})$$

onde a soma das matrizes \mathbf{M}_s (matriz de massa do eixo) e \mathbf{M}_T (matriz do efeito secundário da inércia de rotação do eixo) resultam na matriz de massa \mathbf{M} . A matriz \mathbf{D}_s representa o efeito giroscópico e \mathbf{K}_{st} o enrijecimento do rotor quando em regime transiente. Todas essas matrizes são apresentadas abaixo nas Eqs. (A.14) a (A.17), respectivamente:

$$\mathbf{M}_s = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ SIM. & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ SIM. & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ -SIM. & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{K}_{ST} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

A.1.2 Energia de Deformação

Em seguida, utiliza-se na caracterização do eixo a energia de deformação para eixo em rotação, obtida através da análise de tensões σ e deformações ε . Considerando o eixo como sendo simétrico, assume-se então um ponto C como o centro geométrico

do eixo. Os termos u e w correspondem aos deslocamentos associados às coordenadas fixas dos eixos X e Z , respectivamente. Os termos u^* e w^* correspondem aos deslocamentos associados às coordenadas rotativas, com velocidade de rotação Ω , dos eixos x e z , respectivamente. A Fig. A.2 representa todas estas considerações. A deformação longitudinal de um ponto arbitrário B (mostrado na Fig. A.2) pode ser representado pela Eq. (A.18):

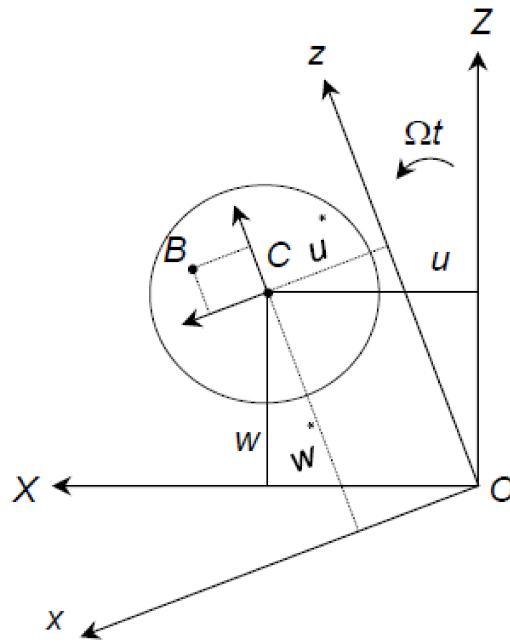


Figura A.2: Representação de um ponto arbitrários B
 Fonte: Lalanne e Ferraris (1998).

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{A.18})$$

onde u^* e w^* são representados pelas Eqs. (A.19) e (A.20), respectivamente:

$$u^* = u \cos(\Omega t) - w \sin(\Omega t) \quad (\text{A.19})$$

$$w^* = u \sin(\Omega t) + w \cos(\Omega t) \quad (\text{A.20})$$

A equação da energia de deformação para o eixo é apresentado pela Eq. (A.21). Nesta equação, despreza-se o esforço axial.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^t \sigma dV \quad (\text{A.21})$$

Sabe-se que com a relação de tensão e deformação, apresentado pela Lei de Hooke (veja a Eq. (A.22)), pode-se reescrever a Eq. (A.21) e se obter a Eq. (A.23):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{A.22})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^t \varepsilon dV \quad (\text{A.23})$$

onde E é o módulo de elasticidade do eixo.

Em seguida, substitui-se a deformação longitudinal (Eq. (A.18)) na Eq. (A.23):

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (\text{A.24})$$

Expandindo a Eq. (A.24) obtém-se a Eq. (A.25), apresentada abaixo:

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 - 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (\text{A.25})$$

Sabendo que o eixo em estudo é simétrico em relação a sua seção transversal, nas direções X e Z , algumas considerações a respeito do seu momento de inércia podem ser estabelecidas, conforme mostrado nas Eqs. (A.26) e (A.27):

$$I = \int_S x^2 dS = \int_S z^2 dS \quad (\text{A.26})$$

$$\int_S xz ds = 0 \quad (\text{A.27})$$

Sendo assim, substituindo-se as Eqs. (A.26) e (A.27) na Eq. (A.25), obtém-se a Eq. (A.28):

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.28})$$

Em seguida, substitui-se as Eqs. (A.6) e (A.7) nas Eqs. (A.19) e (A.20), respec-

tivamente (considerando $t = 0$), e, posteriormente, na Eq. (A.28) para se obter a Eq. (A.29):

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\mathbf{q}_u^t \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_w^t \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \mathbf{q}_w \right] dy \quad (\text{A.29})$$

Por fim, aplica-se a equação de Lagrange na Eq. (A.29) no termo que se refere à energia de deformação, como mostra a Eq. (A.30):

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (\text{A.30})$$

onde K é a matriz de rigidez obtida pela Eq. (A.29) e apresentada pela Eq. (A.31). Nesta matriz de rigidez considera-se o efeito de cisalhamento interno nas seções transversais da viga durante a flexão. Esta consideração é aplicada através da utilização do modelo de viga de Timoshenko.

$$\mathbf{K} = K_L \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ & & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2 - \vartheta_\gamma)L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 & 0 \\ & & & & & & & (4 + \vartheta_\gamma)L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

SIM.

onde K_L é apresentado pela Eq. (A.32) e ϑ_γ , que é o termo que se refere à teoria de viga de Timoshenko, é apresentado pela Eq. (A.33):

$$K_L = \frac{EI}{(1 + \vartheta_\gamma)L^3} \quad (\text{A.32})$$

$$\vartheta_\gamma = \frac{12EI}{k_s G S L^2} \quad (\text{A.33})$$

onde S e G são a área da seção transversal e o módulo de cisalhamento do eixo, respectivamente. E o termo k_s é o fator de correção do cisalhamento transversal,

obtido através da avaliação da forma de deformação da seção transversal do rotor, conforme descrito por Nouri e Gay (1994).

A.2 Disco

O disco é representado como sendo um elemento rígido. O seu sistema de coordenadas fixas R_0 é representados pelos eixos X , Y e Z (mesma referência do eixo veja a (Fig. A.1)) e o sistema de coordenadas móveis R é representado pelos eixos x , y e z (com origem posicionada no centro do disco), conforme mostra a Fig. A.3.

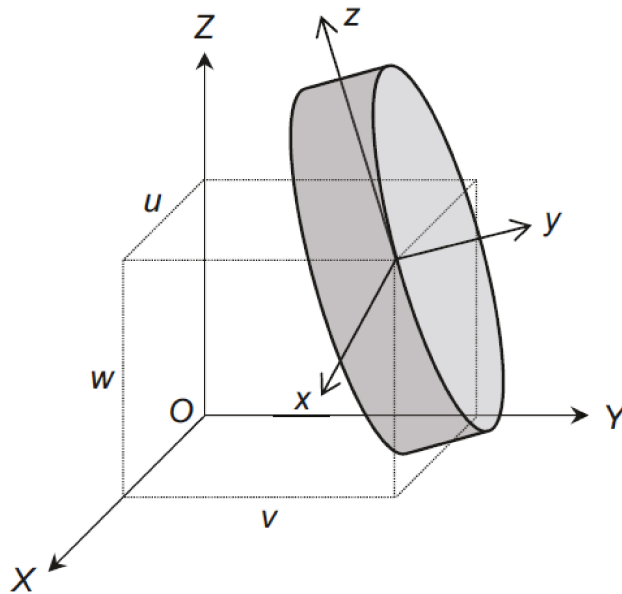


Figura A.3: Representação do elemento de disco.
Fonte: Cavalini Jr et al. (2013).

O elemento é considerado como tendo quatro graus de liberdade: dois deslocamentos laterais (u e w) e duas rotações (θ e φ), conforme apresentado na Eq. (A.34):

$$\mathbf{q}_D = \{u \ w \ \theta \ \varphi\}^t \quad (\text{A.34})$$

A energia cinética para o elemento de disco pode ser representada pela Eq. (A.35), conforme apresentado por Lalanne e Ferraris (1998):

$$T_D = \frac{1}{2}m_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}(I_{Dx}\omega_x^2 + I_{Dy}\omega_y^2 + I_{Dz}\omega_z^2) \quad (\text{A.35})$$

onde I_{Dx} , I_{Dy} e I_{Dz} são os momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z , respectivamente. Os termos ω_x , ω_y e ω_z são as velocidades angulares também em relação aos eixos x , y e z , respectivamente, conforme apresentado na Eq. (A.36):

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\cos\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Considerando que $I_{Dx} = I_{Dz} = I_D$, ou seja, que o disco seja simétrico e que os ângulos de rotação θ e φ são ínfimos, a Eq. (A.35) pode ser simplificada como mostra a Eq. (A.37) abaixo:

$$T_D = \frac{1}{2}m_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_D(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_{Dy}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}\theta) \quad (\text{A.37})$$

onde o termo $I_{Dy}\Omega\dot{\varphi}\theta$ representa o efeito giroscópico no disco.

Em seguida, aplica-se a Eq.(A.37) na equação de Lagrange e obtém-se a Eq. (A.38):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \Omega \mathbf{D}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{Dt} \mathbf{q}_D \quad (\text{A.38})$$

onde \mathbf{M}_D representa a matriz de massa do disco, \mathbf{D}_D o efeito giroscópico e \mathbf{K}_{Dt} o enrijecimento do disco devido ao regime transiente e cada matriz é apresentada abaixo pelas Eqs. (A.39), (A.40) e (A.41), respectivamente:

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$\mathbf{D}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{K}_{Dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Neste caso, considera-se que o disco pode ser incorporado ao modelo sem que haja alteração na rigidez do eixo no ponto em que ele é fixado. Considera-se ainda que todas as características de inércia e massa do disco são concentradas no nó correspondente ao elemento finito do eixo onde é fixado o disco, conforme mostra a Fig. A.4 (LALANNE; FERRARIS, 1998).

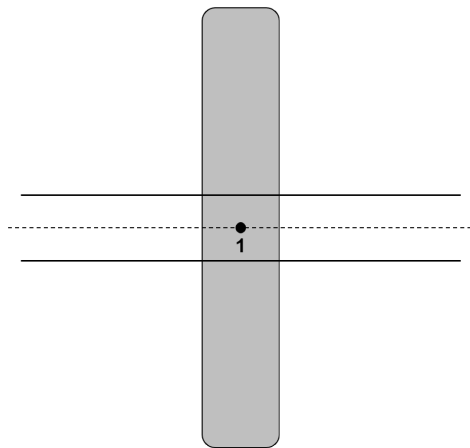


Figura A.4: Encorpção do disco ao eixo em elementos finitos no seu nó correspondente.

Adaptado de: Lalanne e Ferraris (1998).

Ou seja, a matriz \mathbf{M}_D é somada às matrizes \mathbf{M}_S e \mathbf{M}_T do eixo, a matriz \mathbf{D}_D é somada à matriz \mathbf{D}_S e por fim, a matriz \mathbf{K}_{Dt} é somada à matriz \mathbf{K}_{st} , todas no nó correspondente a localização do disco.

A.3 Mancais

Os mancais utilizados na máquina rotativa desta dissertação de mestrado, são mancais de rolamento que possuem componentes de rigidez e amortecimento viscoso. A Fig. A.5 apresenta o esquema com os detalhes do mancal de rolamento considerado.

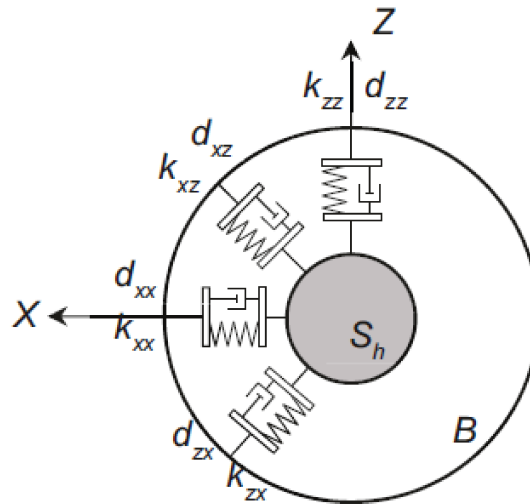


Figura A.5: Coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal.
 Fonte: Lalanne e Ferraris (1998).

As forças de sustentação atuantes exercidas pelos mancais em oposição aos deslocamentos do eixo podem ser escritas pelo trabalho virtual, como é apresentado pela Eq. (A.42):

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - d_{xx}\dot{u}\delta u - d_{xz}\dot{w}\delta u - d_{zz}\dot{w}\delta w - d_{zx}\dot{u}\delta w \quad (\text{A.42})$$

A Eq. (A.43), mostrada abaixo, apresenta a Eq. (A.42) de forma simplificada:

$$\delta W = F_{mu}\delta u + F_{mw}\delta w \quad (\text{A.43})$$

Os termos F_{mu} e F_{mw} são as forças generalizadas que podem ser escritas pela forma matricial, conforme mostra a Eq. (A.44):

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Pode-se escrever ainda a Eq.(A.44) da forma expandida, considerando os mesmos graus de liberdade utilizados no modelo em elementos finitos do eixo. A Eq. (A.45) apresenta esta forma expandida:

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \\ F_{m\theta} \\ F_{m\varphi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} & 0 & 0 \\ d_{zx} & d_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Assim sendo, a matriz de rigidez dos mancais, mostrada acima, é incorporada à matriz \mathbf{K} do eixo nos nós correspondentes a localização dos mancais. Soma-se ainda a massa dos rolamentos na junção das matrizes \mathbf{M}_S e \mathbf{M}_T do eixo, nos seus respectivos nós.

A.4 Massa de Desbalanceamento

A força de desbalanceamento do rotor é definida por uma massa m_u que está localizada a uma distância d do centro geométrico do eixo que tem coordenadas u e w , conforme mostrado na Fig. A.6.

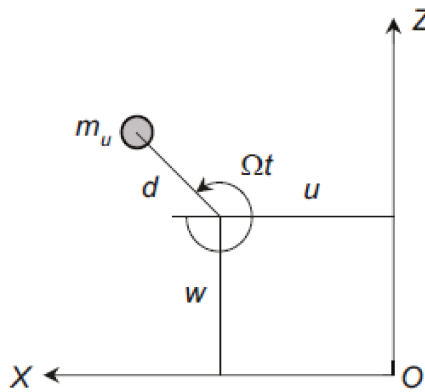


Figura A.6: Representação da massa de desbalanceamento.
Fonte: Lalanne e Ferraris (1998).

Em seguida, calcula-se a energia cinética T_u da massa m_u utilizando o vetor velocidade obtido através da sua posição em coordenadas móveis, conforme mostra a Eq. (A.46):

$$T_u = \frac{m_u}{2} [\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \sin(\Omega t) - 2\Omega d \dot{w} \cos(\Omega t)] \quad (\text{A.46})$$

onde o termo $\Omega^2 d^2$ é constante e não influencia nas equações. Sendo assim, a expressão da energia cinética pode ser escrita como mostrado na Eq. (A.47):

$$T_u \approx m_u \Omega d [\dot{u} \text{sen}(\Omega t) - \dot{w} \text{cos}(\Omega t)] \quad (\text{A.47})$$

Aplicando a equação de Lagrange na Eq. (A.47), temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial u} = -m_u d \dot{\Omega} \text{sen}(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \text{cos}(\Omega t) \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial w} = -m_u d \dot{\Omega} \text{cos}(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (\text{A.49})$$

Sendo assim, as forças de desbalanceamento F_u , que são aplicadas nas direções X e Z no nó do modelo matemático em elementos finitos do eixo onde se encontra a massa de desbalanceamento, são representadas respectivamente por F_{uX} e F_{uZ} , conforme apresentado pelas Eqs. (A.50) e (A.51):

$$F_{uX} = -m_u d \dot{\Omega} \text{sen}(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \text{cos}(\Omega t) \quad (\text{A.50})$$

$$F_{uZ} = -m_u d \dot{\Omega} \text{cos}(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (\text{A.51})$$

A.5 Equação do Movimento

Por fim, através das matrizes obtidas pela modelagem das partes girantes da máquina rotativa, conforme definido nos sub-tópicos anteriores, obtém-se a equação diferencial (Eq.(A.52)) que representa o comportamento dinâmico de um sistema de rotor flexível (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \Omega \mathbf{D}_g] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{st}] \mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u \quad (\text{A.52})$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{D} a matriz de amortecimento associado aos mancais, \mathbf{D}_g a matriz do efeito giroscópico, \mathbf{K} a matriz de rigidez e \mathbf{K}_{st} a matriz que representa o enrijecimento do sistema quando está em regime transiente. O vetor deslocamento é representado por \mathbf{q} e a velocidade de rotação é dada por Ω . \mathbf{W} representa a força peso e \mathbf{F}_u as forças de desbalanceamento.

Apêndice B

Otimização Heurística pelo Método da Evolução Diferencial

A Evolução Diferencial é um método de otimização heurística proposto inicialmente em 1995 por Storn e Price (PRICE; STORN, 1995). Este algoritmo é conhecido por ser uma das estratégias mais utilizadas para se resolver problemas de engenharia. Seu sucesso se deve a sua concepção conceitual simples, facilidade de implementação, capacidade de estruturação em arquitetura paralela, habilidade de escapar de ótimos locais, e pelos resultados obtidos em aplicações com diferentes graus de complexidade (LOBATO; JR; NETO, 2011).

Este método utiliza procedimentos derivados dos processos biológicos, tais como a herança genética, mutação, seleção natural e cruzamento. No entanto, diferentemente do método dos algoritmos genéticos, a principal ideia por trás do método de Evolução Diferencial não é propriamente simular a teoria de Darwin sobre a sobrevivência e evolução das espécies (VIANA; JR, 2006). Diferentemente, este método apresenta uma concepção puramente matemática, baseada em operações vetoriais, sendo por esse motivo considerada uma abordagem estrutural (COELHO, 2003).

Para se utilizar o algoritmo de Evolução Diferencial, algumas etapas devem ser realizadas, como mostrado nas subseções apresentadas a seguir (LOBATO; JR; NETO, 2011).

B.1 Inicialização do algoritmo de ED

Inicialmente define-se o tamanho da população e do domínio de cada variável de projeto. Em seguida, geram-se números aleatórios que serão aplicados a este intervalo, obtendo-se assim um vetor de indivíduos da população. A Eq. (B.1) apresenta como é gerado este vetor de indivíduos da população:

$$x_{i,j} = x_{i,L} + rand(x_{i,U} - x_{i,L}) \quad (\text{B.1})$$

onde $x_{i,L}$ e $x_{i,U}$ são limites inferiores e superiores das j -ésimas variáveis de projeto, respectivamente, e $rand$ é comando que gera um número aleatório entre 0 e 1.

B.2 Operador de mutação

Com o início do processo evolutivo, o algoritmo de Evolução Diferencial inicia as operações de mutação e recombinação, gerando assim uma nova população com NP indivíduos. O operador de mutação diferencial adiciona a um vetor de referência, que é escolhido de forma aleatória na população, um vetor diferença obtido a partir de outros dois vetores também selecionados de forma aleatória. A Eq. (B.2) apresenta como é feito este processo para se gerar o novo vetor (candidato) $v_{i,g}$, e a Fig. B.1 apresenta de forma gráfica (problema bidimensional) a Eq. (B.2).

$$v_{i,g} = x_{r0,g} + F_{DE}(x_{r1,g} - x_{r2,g}) \quad (\text{B.2})$$

onde o escalar F_{DE} , denominado taxa de perturbação, é um número real que controla a magnitude do vetor diferença obtido em cada operação aritmética realizada. Os vetores $x_{r0,g}$, $x_{r1,g}$ e $x_{r2,g}$ são geralmente escolhidos aleatoriamente na população, porém podem ser definidos também de outras maneiras, como mostrado na Tab. B.1 (FAN; LAMPINEN, 2003).

A convenção utilizada nesta tabela é DE/X/Y/Z, onde X representa o vetor que será perturbado (BEST OU RAND), Y é o número de pares de vetores que são considerados durante a perturbação e Z é o tipo de cruzamento usado para a geração do candidato, BIN no caso binominal e EXP no caso exponencial. Os subscritos k_i ($i = 1, \dots, 5$) são índices escolhidos aleatoriamente na população, x_{best} é o melhor indi-

Tabela B.1: Propriedades geométricas do eixo.

Estratégia	Representação	Mecanismo de Mutação
1	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j)$	DE/BEST/1/EXP
2	$x^{j+1} = x_{k_3}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j)$	DE/RAND/1/EXP
3	$x^{j+1} = x_{old}^j + F(x_{best}^j - x_{old}^j) + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j)$	DE/RAN-TO-BEST/2/EXP
4	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j) + F(x_{k_3}^j - x_{k_4}^j)$	DE/BEST/2/EXP
5	$x^{j+1} = x_{k_5}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j) + F(x_{k_3}^j - x_{k_4}^j)$	DE/RAND/2/EXP
6	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j)$	DE/BEST/1/BIN
7	$x^{j+1} = x_{k_3}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j)$	DE/RAND/1/BIN
8	$x^{j+1} = x_{old}^j + F(x_{best}^j - x_{old}^j) + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j)$	DE/RAND-TO-BEST/2/BIN
9	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j) + F(x_{k_3}^j - x_{k_4}^j)$	DE/BEST/2/BIN
10	$x^{j+1} = x_{k_5}^j + F(x_{k_1}^j - x_{k_2}^j) + F(x_{k_3}^j - x_{k_4}^j)$	DE/RAND/2/BIN

v duo da popula o na gera o anterior e x_{old}   um indiv duo escolhido aleatoriamente dentro da popula o na gera o anterior.

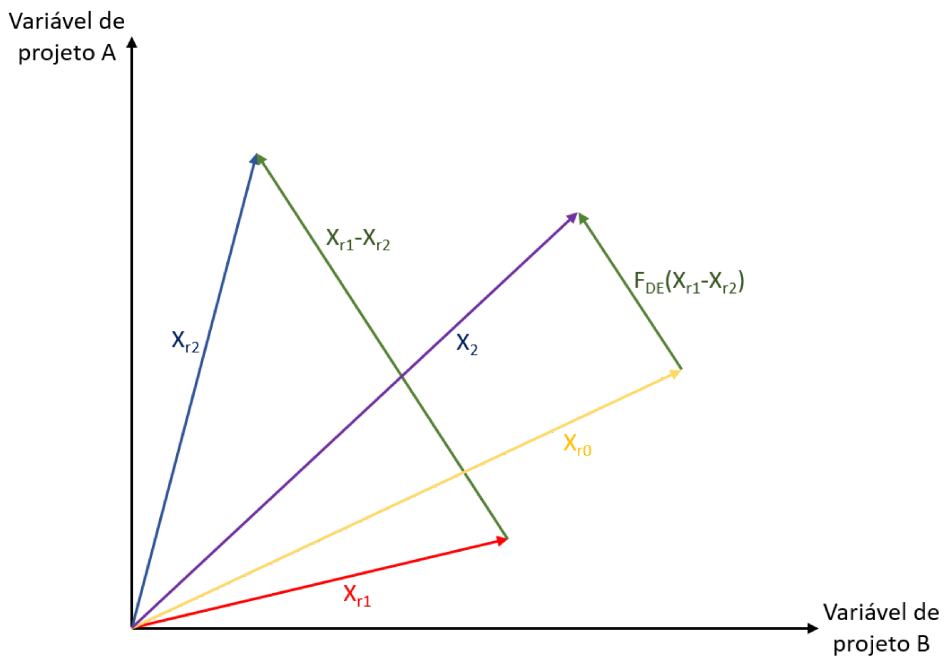


Figura B.1: Fundamenta o te rica do algoritmo de ED.
Fonte: Autoria pr pria.

No caso deste trabalho, a estrat gia utilizada foi a 7 e o valor de F_{DE} foi fixado em 0,8. De acordo Viana et al. (VIANA et al., 2007), resultados satisfat rios s o obtidos em processos de minimiza o com taxa de perturba o variando entre 0,5 e 1,0.

B.3 Operador de cruzamento

Para complementar a operação de mutação, utiliza-se no algoritmo de Evolução Diferencial o operador de cruzamento. Este operador serve para condicionar se o vetor $v_{i,g}$, gerado anteriormente, será ou não aceito na próxima geração. A condição estabelecida é a seguinte:

$$u_{i,g} = \begin{cases} v_{i,g} & \text{se } rand \leq CR \text{ ou } j = j_{rand} \\ x_{i,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

onde CR é a probabilidade de cruzamento, que é definida pelo usuário em um intervalo entre 0 e 1. Neste trabalho definiu-se o valor de CR como sendo 0,5. No entanto, Viana (VIANA; JR, 2006) afirma que se a convergência não for alcançada, uma probabilidade CR entre 0,8 e 1 pode ser utilizada. Após a definição do valor de CR , compara-o com um número gerado aleatoriamente pelo comando $rand$. Se o número aleatório gerado for menor ou igual a CR , o vetor $v_{i,g}$ (com posição $j = j_{rand}$) é aceito, caso contrário, mantêm-se o vetor $x_{i,g}$ na população atual.

B.4 Operador de seleção

Caso o vetor $u_{i,g}$ apresente um valor de função objetivo (f_o) melhor que a do vetor $x_{i,g}$, ele o substitui na próxima geração, caso contrário $x_{i,g}$ é mantido por mais uma geração. A Eq. (B.4) mostra este caso:

$$x_{i,g+1} = \begin{cases} u_{i,g} & \text{se } f_o(u_{i,g}) \leq f_o(x_{i,g}) \\ x_{i,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Todo os processos descritos acima são repetidos até que um critério de parada seja satisfeito. Neste trabalho, o critério de parada utilizado foi o número máximo de gerações, definido pelo usuário.