

---

**Universidade Federal de Uberlândia**  
Faculdade de Matemática

---

Leonardo Henrique Soria

**Dinâmica unidimensional: teoria da bifurcação, dinâmica  
simbólica e difeomorfismos Morse-Smale**

Uberlândia - MG

2020

Leonardo Henrique Soria

**Dinâmica unidimensional: teoria da bifurcação, dinâmica simbólica e difeomorfismos Morse-Smale**

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi.

**Uberlândia - MG**

**2020**

Leonardo Henrique Soria

# Dinâmica unidimensional: teoria da bifurcação, dinâmica simbólica e difeomorfismos Morse-Smale

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi.

## BANCA EXAMINADORA



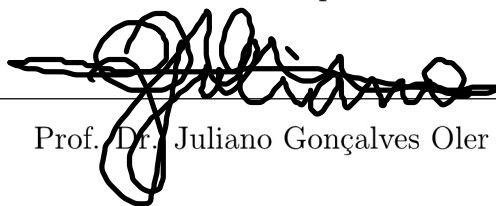
---

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi (Orientador)



---

Prof. Dra. Luciana Aparecida Alves



---

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler

# Agradecimentos

À minha amada mãe que, graças aos seus esforços, possibilitou que eu pudesse me dedicar durante toda a trajetória.

Aos meus amados amigos Vítor, Gabriela, Léo, Matheus, Elis e Japa com quem dividi a rotina e se fizeram alegria nos meus dias.

Ao meu orientador Marcus Bronzi pelos ensinamentos durante os últimos três anos.

Ao professor Fábio Bertoloto e a professora Luciana Alves que contribuíram significativamente para minha formação.

# Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo introduzir os estudos na área de sistemas dinâmicos por meio da dinâmica unidimensional. Os principais tópicos abordados são a hiperbolicidade de pontos fixos e periódicos, alguns resultados acerca da Derivada Schwarziana e suas contribuições para compreensão da dinâmica da família quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ , bifurcações em funções reais, a dinâmica do círculo e o número de rotação, chegando até a estabilidade de difeomorfismos Morse-Smale.

**Palavras-Chave:** sistemas dinâmicos, derivada schwarziana, aplicação shift, família quadrática, difeomorfismos Morse-Smale

# Abstract

The main objective in this work is introducing studies in dynamical systems by means of unidimensional dynamics. The principal topics covered are the hyperbolicity of fixed and periodic points, some results about the Schwarzian Derivative and its contributions to understand the dynamics of the quadratic family  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ , bifurcations in real functions, the dynamics on the circle and the rotation number, reaching the stability of Morse-Smale diffeomorphisms.

**Key-Words:** dynamical systems, schwarzian derivative, shift application, quadratic family, Morse-Smale diffeomorphisms

# Sumário

<b>1</b>	<b>Definições e Teoria preliminar</b>	<b>10</b>
1.0.1	Noções de Espaços Métricos . . . . .	10
1.0.2	Teoria Preliminar . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Derivada Schwarziana</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Teoria da Bifurcação</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>Dinâmica Simbólica</b>	<b>31</b>
4.0.1	Conjugação topológica . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Aplicações no Círculo</b>	<b>42</b>

# Introdução

A expressão “Sistemas Dinâmicos” faz referência a sistemas que se modificam a partir de uma regra ligando os estados atuais, passados e futuros. Pode-se pensar, por exemplo, na evolução de um fenômeno biológico em cada instante de tempo  $t = 0, 1, 2, \dots$ , no comportamento de um pêndulo e muitos outros.

Pontos com a característica de serem fixos para determinadas funções caracterizam um objeto de estudo com resultados muito interessantes, como por exemplo detectar conjuntos que, no decorrer do tempo, são atraídos ou repelidos pelo ponto fixo. Ainda sob o mesmo objeto, mas por uma outra ótica, é possível estudar condições como regiões e parâmetros tais que pontos fixos bifurcam para determinada função. Estes são alguns dos objetos de estudo para a Teoria de Sistemas Dinâmicos. Mas, apesar da incontável quantidade de exemplos existentes para a teoria, a modernização dela é relativamente recente. No século XVI com os trabalhos descrevendo a mecânica celeste, proposto por Johannes Kepler, já se obtinha exemplos para caracterizar a teoria, mas foi somente com o Matemático Henri Poincaré no século XIX, quando ele apresenta ferramentas para descrever o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais sem precisar explicitá-las, que ela enfim é formalizada e passa a ser compreendida como teoria.

Na dinâmica unidimensional é possível identificar e estudar os principais fenômenos e patologias comuns em sistemas de dimensões maiores. Por isso, o estudo de aplicações no círculo ou na reta proporciona o entendimento das ferramentas que originaram o conceito de hiperbolicidade, estabilidade, conjuntos atratores, conjuntos estáveis e instáveis, perturbações dentre outros. Para este trabalho objetiva-se introduzir os estudos nos Sistemas Dinâmicos unidimensionais por meio de estudos de órbitas periódicas e ferramentas que auxiliam na compreensão do objeto. No Capítulo [1](#) serão apresentados definições e exemplos com o propósito de ambientar o trabalho diante do tema. Serão apresentados conceitos de hiperbolicidade para pontos fixos e periódicos e condições para atração e repulsão por pontos hiperbólicos. Além disso, será apresentado um exemplo de uma aplicação no círculo que no Capítulo [5](#) será retomado. Por fim será demonstrado um caso particular do Teorema de Sarkovskii para funções na reta.



No Capítulo 2 serão trabalhados resultados acerca da Derivada Schwarziana. Essa ferramenta quando utilizada em funções reais é de grande ajuda para mensurar quantidade de órbitas periódicas atratoras sob determinadas condições. Resultados desse capítulo serão retomados no Capítulo 4. Já no Capítulo 3, será apresentado, inicialmente, a bifurcação Tangente por meio da família de funções  $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ , e será mostrado que para um determinado valor de  $\lambda$ , o ponto fixo não-hiperbólico sofre bifurcação. Em um segundo momento será apresentado a bifurcação do tipo duplicação de período, e, novamente, por meio da família de funções exponenciais verifica-se que para um determinado valor de  $\lambda$  (nesse caso  $\lambda < 0$ ) um ponto fixo que ora era não-hiperbólico sofre bifurcação para dois novos pontos de período dois. Além disso, serão apresentados resultados que caracterizam regiões onde acontecem tais bifurcações. E por fim serão apresentados teoremas que generalizam essas bifurcações para funções na reta.

No Capítulo 4 será focado o olhar sob a família de funções  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  com o parâmetro  $\mu = 3,839$  no qual possibilita visualizar uma órbita de período três. O objetivo central então é verificar a existência de órbitas de todos os períodos, como garante o Teorema de Sarkovskii. Para isso recorreremos à dinâmica simbólica por meio do shift, de modo a mostrar que, para um determinado conjunto  $\Lambda$  contendo todos os pontos periódicos de  $F$ , obtém-se que  $F$  é topologicamente conjugada ao shift do tipo finito. Com isso tem-se que a dinâmica de  $F$  é totalmente equivalente à dinâmica da aplicação shift, o que possibilita obter resultados com mais facilidade.

Por fim, no Capítulo 5 faremos uma introdução ao estudo de aplicações em  $S^1$ . Para compreender a dinâmica de aplicações nesse espaço recorreremos ao levantamento das aplicações de  $S^1$  para a reta. Apresentaremos alguns resultados iniciais para levantamentos e então será definido o número de rotação para aplicações em  $S^1$ , isto é, um valor entre 0 e 1 que determina a média de pontos que são girados por uma iteração de uma aplicação. Finalmente, estudaremos as aplicações que são Morse-Smale, e será possível provar que difeomorfismos Morse-Smale são estruturalmente estáveis.

# Capítulo 1

## Definições e Teoria preliminar

O objetivo central deste capítulo é estabelecer definições, conceitos e técnicas, bem como ambientar o trabalho no que diz respeito a dinâmica unidimensional, seja ela na reta real ou no círculo. Para este trabalho, diremos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  quando existir a derivada em todos os pontos de  $I$  um intervalo e a função derivada,  $f'$ , for contínua em  $I$ . Se  $f$  for  $r$  vezes diferenciável e as funções derivada de ordem até  $r$  forem contínuas, então diremos que  $f$  é de classe  $C^r$ . Utilizaremos o conceito de classe  $C^r$  no círculo  $S^1$  junto a Definição [5.5](#).

### 1.0.1 Noções de Espaços Métricos

Os conceitos que serão abordados trarão apenas noções para embasar o desenvolvimento do trabalho. Por isso, incentivamos, para maiores detalhes, a busca na Bibliografia [6](#).

**Definição 1.1.** *Uma métrica em um conjunto  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada par ordenado de  $M$  a um valor real  $d(x, y)$ , chamado de distância, de modo que seja satisfeito as seguintes condições para quaisquer  $x$  e  $y$ :*

1.  $d(x, x) = 0$ ;
2. se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $x, y, z \in M$ .

Um espaço métrico é um par ordenado  $(M, d)$  tal que  $d$  é uma métrica em  $M$ . Diremos que um subconjunto  $U$  de  $M$  é um subespaço métrico quando  $U$  é um espaço métrico com  $d$ .

**Exemplo 1.1.**  $(\mathbb{R}, d)$  com  $d(x, y) = |x - y|$  e  $(\mathbb{R}^n, d)$  com  $d(a, b) = \sqrt{(a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$  são espaços métricos.

**Definição 1.2.** Uma bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$ , denotado por  $B(a; r)$ , é o conjunto dos pontos nos quais a distância até  $a$  é menor do que  $r$ . Isto é,

$$B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}.$$

Além disso, dizemos que um subconjunto  $X$  de  $M$  é aberto se para todo  $x \in X$ , existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $B(x; r) \subset X$ .

Nesse contexto, um subconjunto  $Y$  de  $M$  é fechado se o seu complementar é aberto. Equivalentemente, um subconjunto  $Y$  é fechado se para toda sequência  $(x_n) \subset Y$  convergente, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , tem-se que  $b \in Y$ . A demonstração desse resultado pode ser vista em [6].

**Exemplo 1.2.**  $M$  e  $\emptyset$  são abertos e fechados. Já os intervalos da forma  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  são subconjuntos abertos.

**Definição 1.3.** Uma cisão de um espaço métrico é uma decomposição  $M = X \cup Y$ , de modo que  $X$  e  $Y$  são abertos e disjuntos. Dizemos ainda que uma cisão é trivial quando um dos abertos,  $X$  ou  $Y$ , é vazio e, portanto, o outro é igual a  $M$ .

**Definição 1.4.** Um espaço métrico  $M$  é conexo quando admite apenas cisão trivial. Dizemos que um subconjunto de um espaço métrico é conexo quando o subespaço métrico for conexo. Além disso,  $M$  é desconexo quando não for conexo.

Com respeito a conexidade de espaços métricos, quando todos os subconjuntos de  $M$  com mais de um elemento for desconexo, diremos que o espaço é totalmente desconexo. Isso acontece, por exemplo, com o conjunto  $\mathbb{Q}$ .

As demonstrações dos próximos resultados referentes as noções topológicas de espaços métricos serão omitidas mas podem ser encontradas em [6].

**Proposição 1.1.** Um subconjunto de  $\mathbb{R}$  é conexo se, e somente se, for um intervalo.

Podemos ainda estender as noções topológicas de espaços métricos para o conceito de compacidade. Para isso, definimos uma cobertura de um subconjunto  $X$  de  $M$  como sendo uma família  $\mathcal{C} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos de  $M$  tal que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ . Se existe um subconjunto  $L'$  de  $L$  tal que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} A_\lambda$  então a subfamília  $\mathcal{C}' = (A_\lambda)_{\lambda \in L'}$  é chamada de subcobertura de  $\mathcal{C}$ .

**Definição 1.5.** Um espaço métrico é compacto quando toda cobertura aberta (isto é, uma família de subconjuntos abertos) admite subcobertura finita.

**Exemplo 1.3** (Teorema de Borel-Lebesgue). Todo intervalo fechado e limitado de  $\mathbb{R}$  é compacto.

**Proposição 1.2.** *A imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é compacto.*

**Exemplo 1.4.**  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, y) = 1\}$  é compacto, uma vez que  $S^1$  é a imagem do intervalo  $[0, 2\pi]$  pela função  $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ .

Pode-se ainda caracterizar a compacidade de espaços métricos de outras maneiras. Uma delas (e pertinente para este trabalho) diz que um espaço métrico  $M$  é compacto se, e somente se, toda sequência em  $M$  admite subsequência convergente.

## 1.0.2 Teoria Preliminar

Inicialmente, definimos  $f : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo, isto é, uma aplicação bijetora, contínua e com a sua inversa contínua, de modo que  $X$  e  $Y$ , para este trabalho, serão subconjuntos de  $\mathbb{R}$  ou  $S^1$ . Funções como  $f(x) = \tan(x)$  definida no intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e  $g(x) = x^3$  são exemplos de homeomorfismos. Dizemos ainda, para o caso de  $f$ , que o intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Podemos ainda estender esse conceito definindo aplicações que são difeomorfismos, como segue:

**Definição 1.6.** *Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é  $C^r$ -difeomorfismo se  $f$  é  $C^r$ -homeomorfismo, tal que  $f^{-1}$  também é  $C^r$ . Além disso,  $f$  será  $C^\infty$ -difeomorfismo se  $f$  for  $C^\infty$ -homeomorfismo e  $f^{-1}$  for  $C^\infty$ .*

**Exemplo 1.5.** *A função  $f(x) = \tan(x)$  é  $C^\infty$ -difeomorfismo em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Já a função  $g(x) = x^3$  é um homeomorfismo mas não é difeomorfismo pois  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$  e  $(f^{-1})'(0)$  não existe.*

Para simplificar, denotaremos a composição  $f(f(x))$  por  $f^2(x)$ , isto é,  $f^2(x) = (f \circ f)(x)$ . De maneira geral,  $f^n(x) = \overbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}^n(x)$ . Esse processo chamaremos de iteração de  $f$  no ponto  $x$ .

**Definição 1.7.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função. Um ponto  $x$  é fixo para  $f$  se  $f(x) = x$ . Dizemos que  $x$  é periódico se para algum  $n$ ,  $f^n(x) = x$ . Nesse caso, definimos o período de  $x$  como sendo o menor inteiro  $n$  tal que  $f^n(x) = x$ . Além disso, vamos denotar o conjunto dos pontos fixos de  $f$  por  $Fix(f)$  e por  $Per_n(f)$  o conjunto dos pontos de período até  $n$ . Definimos também a órbita positiva de  $x$  como sendo o conjunto dos pontos  $x, f(x), f^2(x) \dots$  e denotamos por  $O^+(x)$ . Se  $f$  é um homeomorfismo podemos definir a órbita completa de  $x$ ,  $O(x)$ , como o conjunto de pontos  $f^n(x)$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .*

**Exemplo 1.6.** *Seja  $I = [a, b]$  um intervalo e  $f : I \rightarrow I$  uma função contínua. Então  $f$  admite pelo menos um ponto fixo em  $I$ .*

*Demonstração.* Considere  $g(x) = f(x) - x$ . Note que  $g$  é contínua em  $I$  uma vez que trata-se de uma diferença de funções contínuas. Suponha  $f(a) > a$  e  $f(b) < b$  (caso contrário,  $a$  ou  $b$  é ponto fixo). Assim, temos  $g(a) > 0$  e  $g(b) < 0$ , pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $c$  entre  $a$  e  $b$  tal que  $g(c) = 0$ , e, portanto, temos que  $f(c) = c$ .  $\square$

**Proposição 1.3.** *Considere  $I = [a, b]$  e  $f : I \rightarrow I$  uma função de classe  $C^1$  e assumamos  $|f'(x)| < 1$  para todo  $x \in I$ . Então  $f$  admite um único ponto fixo em  $I$ . Além disso,*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

para todo  $x, y \in I$  e  $x \neq y$ .

*Demonstração.* O Exemplo 1.6 garante a existência de pelo menos um ponto fixo para  $f$ . Suponhamos então que existam  $x$  e  $y$  pontos fixos e  $x \neq y$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c$  entre  $x$  e  $y$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1.$$

Desse modo, supor a existência de dois pontos fixos leva a uma contradição, uma vez que pela hipótese  $|f'(x)| < 1$  para todo  $x \in I$ . Com efeito,  $x = y$ . Para estabelecer a segunda parte da proposição vamos usar o Teorema do Valor Médio para afirmar que, para qualquer  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$ , existe  $c \in I$  tal que

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| < |y - x|. \quad (1.1)$$

Portanto,

$$|f(y) - f(x)| < |y - x|.$$

$\square$

**Exemplo 1.7.** *Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$ , tal que  $f_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ . As aplicações  $f_\lambda$  se comportam de maneira bastante diferentes dependendo da racionalidade ou irracionalidade de  $\lambda$ . Se  $\lambda = p/q$ , com  $p, q$  inteiros, então  $f_\lambda^q(\theta) = \theta + 2\pi p = \theta$  e, portanto,  $f_\lambda$  fixa todos os pontos na  $q$ -ésima iteração. Quando  $\lambda$  é irracional a situação é um tanto quanto diferente.*

O resultado a seguir é conhecido como Teorema de Jacob.

**Teorema 1.1.** *Toda órbita de  $f_\lambda$  é densa em  $S^1$  se  $\lambda$  é irracional.*

*Demonstração.* Seja  $\theta \in S^1$ . Inicialmente observe que os pontos da órbita de  $\theta$  são distintos, pois, se  $f_\lambda^n(\theta) = f_\lambda^m(\theta)$  teremos que  $(n - m)\lambda \in \mathbb{Z}$  e, portanto,  $n = m$ . Agora, como  $S^1$  compacto, a órbita

de  $\theta$  deve admitir subsequência convergente. Logo, para  $\epsilon > 0$  devem existir inteiros  $n$  e  $m$  tais que

$$\begin{aligned} |f_\lambda^n(\theta) - f_\lambda^m(\theta)| &< \epsilon \\ |f_\lambda^{n-m}(\theta) - \theta| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Tomando  $k = n - m$  temos

$$|f_\lambda^k(\theta) - \theta| < \epsilon.$$

Desde que  $f_\lambda$  preserve o comprimento em  $S^1$ , segue que a aplicação  $f_\lambda^k$  conecta  $\theta$  e  $f_\lambda^k(\theta)$  por um arco de comprimento menor do que  $\epsilon$ . Aplicando  $f_\lambda^k$ , temos que os pontos  $f_\lambda^k(\theta)$  e  $f_\lambda^{2k}(\theta)$  também estão conectados por um arco de comprimento menor do que  $\epsilon$ . Dessa forma, os pontos  $\theta, f_\lambda^k(\theta), f_\lambda^{2k}(\theta), \dots$  particionam  $S^1$  em arcos de comprimento menor do que  $\epsilon$ . Logo, todo  $\alpha$  pertencente a  $S^1$  deve pertencer a algum dos arcos com extremidades na órbita de  $\theta$ . E para concluir, para todo  $\theta \in S^1$ , para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $f_\lambda^{ik}$  pertencente a órbita de  $\theta$  tal que  $|\theta - f_\lambda^{ik}(\theta)| < \epsilon$ .  $\square$

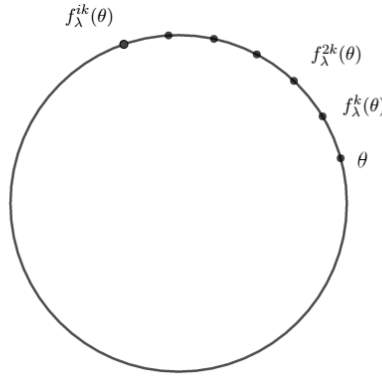


Figura 1.1: Círculo sendo particionado em arcos de comprimento menor do que  $\epsilon$ .

Agora vamos estabelecer alguns conceitos importantes para compreensão da dinâmica unidimensional.

**Definição 1.8.** *Seja  $p$  um ponto periódico de período  $n$ . Um ponto  $x$  é positivamente assintótico para  $p$  se  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{in}(x) = p$ . O conjunto dos pontos positivamente assintóticos à  $p$ , denotado por  $W^s(p)$ , é chamado de conjunto estável de  $p$ .*

**Definição 1.9.** *Seja  $p$  um ponto periódico de período  $n$ . Dizemos que  $p$  é hiperbólico se  $|(f^n)'(p)| \neq 1$ .*

**Proposição 1.4.** *Seja  $f$  uma função  $C^1$  e  $p$  um ponto fixo hiperbólico tal que  $|f'(p)| < 1$ . Então existe um intervalo aberto  $U$  contendo  $p$  tal que se  $x \in U$  então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

*Demonstração.* Desde que  $f$  seja  $C^1$ , pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f'(x)| < A < 1$  para  $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ . Pelo Teorema do Valor Médio

$$|f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \epsilon.$$

Como  $p$  é ponto fixo segue que

$$|f(x) - p| \leq A|x - p| \leq \epsilon.$$

Desse modo obtêm-se que  $f(x) \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ . Reproduzindo o mesmo argumento no intervalo  $[f(x), p]$  obtemos

$$|f^2(x) - p| < A^2|x - p|$$

$$|f^2(x) - p| < A^3|x - p|$$

⋮

$$|f^2(x) - p| < A^n|x - p|.$$

Desde que  $A < 1$  segue que  $f^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . □

Por outro lado, se  $|f'(p)| > 1$  então o comportamento dos pontos numa vizinhança de  $p$  são distintos por  $f$ , como estabelece a seguinte proposição:

**Proposição 1.5.** *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico tal que  $|f'(p)| > 1$ . Então existe um intervalo aberto  $U$  contendo  $p$  tal que, se  $x \in U$ ,  $x \neq p$ , então existe  $k > 0$  tal que  $f^k(x) \notin U$ .*

A demonstração dessa Proposição é similar ao processo feito na demonstração da Proposição [1.4](#). Analogamente obtêm-se o mesmo resultado para  $p$  periódico.

**Definição 1.10.** *Seja  $p$  um ponto periódico de período  $n$  e  $p$  hiperbólico com  $|(f^n)'(p)| < 1$ . Nessas condições  $p$  é chamado de ponto atrator. Se  $|(f^n)'(p)| > 1$  então  $p$  é dito repulsor.*

**Exemplo 1.8.** *Considere a família de funções quadráticas  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  com  $\mu > 1$ . Note que  $F_\mu(0) = 0$  e  $F'_\mu(0) = \mu$ . Por outro lado, tomando  $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$  tem-se que  $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$  e  $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$ . Logo,  $0$  é um ponto repulsor e  $p_\mu$  será atrator se  $1 < \mu < 3$ . Quando  $\mu = 3$ ,  $F'_\mu(p_\mu) = -1$ . Quando  $\mu$  passa por três, o gráfico representado na Fig. [1.0.2](#) mostra o surgimento de dois pontos fixos para  $F^2$ . Esse é um caso de bifurcação de pontos fixos, em especial chamada de Bifurcação Duplicação de período, e será discutido no Capítulo [3](#).*

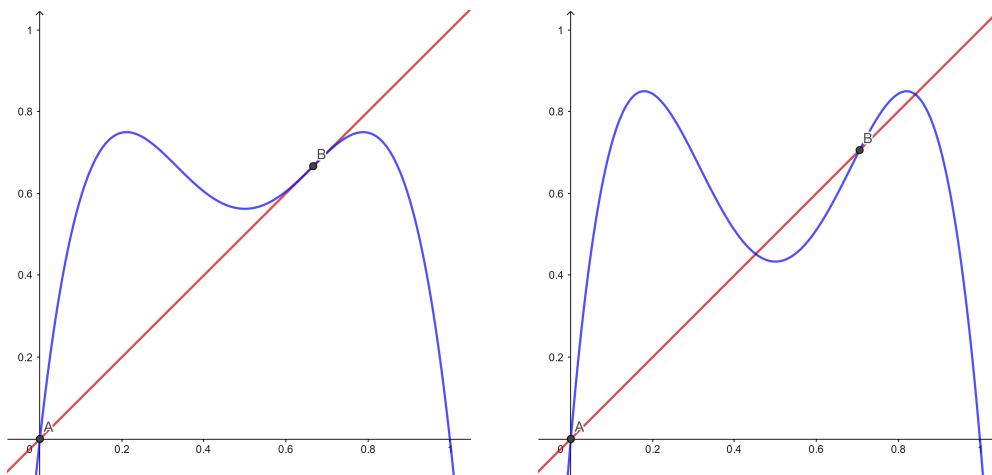


Figura 1.2:  $F^2$  com  $\mu = 3$  e  $F^2$  com  $\mu > 3$ .

Da Proposição [1.4](#) segue que pontos atratores  $p$  possuem uma vizinhança na qual todos os pontos convergem para  $p$ . Essa vizinhança trata-se do conjunto estável local de  $p$ , denotado por  $W_{loc}^s(p)$ . Agora, enunciaremos um caso particular do Teorema de Sarkovskii. O caso geral está enunciado em seguida e a demonstração do mesmo pode ser vista em [\[1\]](#).

**Teorema 1.2.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponha que  $f$  possua um ponto de período três. Então  $f$  possui pontos periódicos de todos os períodos.*

*Demonstração.* A demonstração vai depender de duas construções. Primeiro, se  $I$  e  $J$  são intervalos fechados, tal que  $I \subset J$  e  $f(I) \supset J$  então  $f$  possui pelo menos um ponto fixo em  $I$ . Essa é uma consequência direta do Teorema do Valor Intermediário. Segunda: suponha  $A_0, A_1, \dots, A_n$  intervalos fechados e  $f(A_i) \supset A_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ . Nessas condições, existe um intervalo  $J_0$  de  $A_0$  tal que  $f(J_0) = A_1$ . Analogamente, existe um intervalo semelhante em  $A_1$  que mapeia  $A_2$  e então existe um intervalo  $J_1 \subset J_0$  tal que  $f(J_1) \subset A_1$  e  $f^2(J_1) = A_2$ . Continuando o processo, encontra-se, portanto, uma seqüência de intervalos encaixados nos quais estão contidos em  $A_i$  em ordem. Então, vai existir um ponto  $x \in A_0$  tal que  $f^i(x) \in A_i$  para cada  $i$ . Afirmamos ainda que  $A_i$  cobre  $A_{i+1}$ .

Agora, para provar de fato o teorema, suponha  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = a$ . Vamos assumir que  $a < b < c$ . Seja  $I_0 = [a, b]$  e  $I_1 = [b, c]$  e note que nossa suposição implica que  $f(I_0) \supset I_1$  e  $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$ . Logo deve existir um ponto fixo em  $f$  entre  $b$  e  $c$ . Similar,  $f^2$  deve ter pelo menos um ponto fixo entre  $a$  e  $b$  e é fácil ver que pelo menos um desses pontos possui período 2.

Nosso objetivo agora é produzir pontos de período  $n > 3$ . Indutivamente, vamos definir uma seqüência de intervalos encaixados  $A_0, A_1, \dots, A_{n-2} \subset I_1$ . Escreva  $A_0 = I_1$ . Desde que  $f(I_1) \supset I_1$ , deve existir um subintervalo  $A_1 \subset A_0$  tal que  $f(A_1) = A_0 = I_1$ . Então existe um subintervalo



$A_2 \subset A_1$  tal que  $f(A_2) = A_1$  e  $f^2(A_2) = A_0 = I_1$ . Continuando, encontramos um subintervalo  $A_{n-2} \subset A_{n-3}$  tal que  $f(A_{n-2}) = A_{n-3}$ . De acordo com a segunda observação acima, se  $x \in A_{n-2}$ , então  $f(x), f^2(x), \dots, f^{n-2}(x) \subset A_0$  e, de fato,  $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$ .

Agora, desde que  $f(I_1) \supset I_0$ , existe um subintervalo  $A_{n-1} \subset A_{n-2}$  tal que  $f_{n-1}(A_{n-1}) = I_0$ . Uma vez que  $f(I_0) \supset I_1$ , temos  $f^n(A_{n-1}) \supset I_1$  e então  $f^n(A_{n-1})$  cobre  $A_{n-1}$ . Segue da nossa primeira observação que  $f^n$  tem um ponto fixo  $p$  em  $A_{n-1}$ .

Afirmamos que  $p$  tem período  $n$ . De fato, as primeiras  $n - 2$  iterações de  $p$  pertencem à  $I_1$ , já a iteração  $n - 1$  pertence à  $I_0$  e a  $n$ -ésima é  $p$  novamente. Se  $f^{n-1}(p)$  pertence ao interior de  $I_0$  então segue facilmente que  $p$  tem período  $n$ . Se  $f^{n-1}(p)$  estiver na fronteira, então  $n = 2$  ou  $n = 3$ , o que completa a demonstração.  $\square$

O Teorema de Sarkovskii fornece uma contabilidade completa de quais períodos implicam na existência de outros períodos. Considere a seguinte ordenação dos números naturais:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \dots$$

$$\triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Ou seja, primeiro liste todos os números ímpares, exceto um, seguido de 2 vezes as possibilidades ímpares,  $2^2$  vezes as possibilidades ímpares,  $2^3$  vezes as possibilidades ímpares, etc. Isso percorre todos os números naturais, com exceção dos dois últimos que listamos por último. Esta é a ordem dos números naturais de Sarkovskii. Por fim, o teorema:

**Teorema 1.3** (Teorema de Sarkovskii). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponha que  $f$  possua um ponto periódico de período  $k$ . Se  $k \triangleright l$  na ordem acima, então  $f$  também tem um ponto de período  $l$ .*

A demonstração pode ser vista em [\[1\]](#).

## Capítulo 2

# Derivada Schwarziana

Neste capítulo trabalharemos alguns resultados acerca da Derivada Schwarziana, introduzida na dinâmica unidimensional, inicialmente, por Singer em 1978. O objetivo principal é mostrar como a ferramenta pode ser utilizada para mensurar a quantidade de órbitas periódicas atratoras para funções sob determinadas condições. Além disso, quando for mencionado  $f$  como uma função, a mesma estará compreendida como uma função de classe  $C^3$ . Para construção do capítulo foi utilizado, principalmente, a Bibliografia [\[1\]](#)

**Definição 2.1.** *A derivada schwarziana de uma função  $f$  em  $x$  é*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

**Exemplo 2.1.** *Seja  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  a família de funções quadráticas. Então  $SF_\mu = \frac{-6}{(1-2x)^2}$ , que é menor de que zero para todo  $x \neq 1/2$ .*

Uma das propriedades mais importantes das funções que possuem derivada Schwarziana negativa é que essa propriedade é preservada sob composição, como mostra a seguinte proposição

**Proposição 2.1.** *Suponha  $Sf < 0$  e  $Sg < 0$  tais que  $f$  e  $g$  satisfaçam  $f \circ g$ . Então,  $S(f \circ g) < 0$ .*

*Demonstração.* Usando a Regra da Cadeia temos

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ g)''(x) = (g'(x))^2 \cdot f''(g(x)) + g''(x) \cdot f'(g(x)).$$

e

$$(f \circ g)'''(x) = (g'(x))^3 \cdot f'''(g(x)) + 3f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x).$$

Com isso, segue que

$$\begin{aligned} S(f \circ g) &= \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} \right)^2 \\ &= Sf(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + Sg(x) < 0. \end{aligned}$$

□

Uma consequência direta do resultado acima é que, se  $f$  tem derivada schwarziana negativa, então  $f^n$ , para  $n > 1$ , também terá. A suposição de que  $Sf < 0$  leva ao principal resultado desta seção.

**Lema 2.1.** *Se  $Sf < 0$ , então  $f'$  não pode ter um mínimo local positivo ou um máximo local negativo.*

*Demonstração.* Suponhamos  $x_0$  ponto crítico para  $f'$ , isto é,  $f''(x_0) = 0$ . Desde que  $Sf(x_0) < 0$  segue que  $f'''(x_0)/f'(x_0) < 0$  e, portanto, possuem sinais diferentes. Com isso, se  $f'''(x_0) < 0$  então  $f'(x_0)$  é um máximo local positivo. Analogamente, se  $f'''(x_0) > 0$  então  $f'(x_0)$  é um mínimo local negativo. □

Com isso obtêm-se que, entre dois pontos críticos sucessivos para  $f'$ , o gráfico de  $f'$  cruza o eixo  $x$ . Logo deve existir um ponto crítico para  $f$  entre esses dois pontos.

**Lema 2.2.** *Se  $f$  tem uma quantidade finita de pontos críticos, então  $f^n$  também tem.*

*Demonstração.* Note que, para  $f$  com uma quantidade finita de pontos críticos, para qualquer  $c$ ,  $f^{-1}(c)$  é um conjunto finito. Disso segue que  $f^{-m}(c) = \{x \mid f^m(x) = c\}$  é um conjunto finito. Suponhamos a existência de pontos críticos para  $f^m$ , isto é,  $(f^m(x))' = 0$ . Aplicando a Regra da Cadeia obtêm-se

$$(f^m(x))' = \prod_{i=0}^{m-1} f'(f^i(x)).$$

Consequentemente,  $f^i(x)$  para  $0 \leq i \leq m - 1$  é ponto crítico de  $f^m$ . Assim, se  $x$  é ponto crítico para  $f^m$ , então  $x \in f^{-i}(c)$  com  $c$  crítico para  $f$ . Portanto, o conjunto dos pontos críticos para  $f^m$  é a união das imagens inversas de ordem menor do que  $m$  dos pontos críticos de  $f$ . Como observado acima, é um conjunto finito. □

**Lema 2.3.** *Suponha que  $f$  possua uma quantidade finita de pontos críticos e que  $Sf < 0$ . Então  $f$  possui uma quantidade finita de órbitas periódicas de período  $m$  para qualquer  $m$  inteiro.*

*Demonstração.* Seja  $g = f^m$  para algum  $m$  inteiro. Note que um ponto de período  $m$  para  $f$  será fixo para  $f^m$ . Pela Proposição [2.1](#) obtêm-se que  $Sg < 0$ . Agora, suponha que  $g$  possua infinitos pontos

fixos. Pelo Teorema do Valor Médio, existe uma infinidade de pontos tais que  $g'(x) = 1$ . De fato, para  $a$  e  $b$  pontos fixos para  $g$ , tal que  $a < b$ , tem-se que existe  $c$  tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 1.$$

Isso constrói uma infinidade de pontos  $c$  tais que  $g'(c) = 1$ . Desde que  $Sg < 0$ , segue que  $g'$  não é constante e, portanto, existe uma vizinhança de cada ponto com  $g' = 1$  tais que  $g'(x) < 1$ . Como a função decresce nesse intervalo tem-se que existe um ponto de mínimo para  $g'$  e o valor deste ponto não pode ser positivo, de acordo com o Lema [2.1](#). Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe  $x$  tal que  $g'(x) = 0$ . Desse modo produzimos infinitos pontos críticos para  $g$ . Por outro lado, desde que  $f$  tenha uma quantidade finita de pontos críticos,  $g = f^m$  também terá. Portanto supor uma infinidade de órbitas periódicas nos leva a uma contradição.  $\square$

**Teorema 2.1.** *Suponha que  $Sf < 0$ . Se  $f$  possui  $n$  pontos críticos, então  $f$  têm no máximo  $n + 2$  órbitas periódicas atratoras.*

*Demonstração.* A demonstração consistirá em associar cada órbita atratora a um ponto crítico. Assim sendo, considere  $p$  um ponto periódico atrator de período  $m$  para  $f$ . Então  $W(p)$  é o intervalo aberto maximal dos pontos assintóticos a  $p$  por iterações de  $f^m$ . Note ainda que  $W(p)$  é invariante por  $f^m$ , isto é,  $f^m(W(p)) \subset W(p)$ . Para seguir a demonstração provaremos inicialmente para  $p$  um ponto fíxo atrator. Desde que  $f(W(p)) \subset W(p)$  e  $W(p)$  é o maior intervalo dos pontos que convergem para  $p$  por iterações de  $f$ , segue que os extremos de  $W(p) = (a, b)$  são preservados por  $f$ , ou um ou ambos são infinitos. Para o primeiro caso tem-se os seguintes sub-casos:

1.  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$
2.  $f(a) = b$  e  $f(b) = a$
3.  $f(a) = f(b)$ .

Se  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ , então existem pontos  $c$  e  $d$  com  $a < c < p < d < b$  tal que  $f'(c) = f'(d) = 1$ . Desde que  $f'(p) < 1$ , segue que  $f'$  admite mínimo local e pela Proposição [2.1](#) ele não pode ser positivo. Logo,  $f'$  admite uma raiz em  $(c, d)$ , e, portanto,  $f$  tem um ponto crítico nesse mesmo intervalo. O segundo caso é análogo, sendo suficiente tomar  $f^2$ . Para o terceiro caso, aplicando o Teorema de Rolle haverá um ponto crítico para  $f$  em  $W(p)$ . Para o caso em que um ou os dois extremos de  $W(p)$  são infinitos, a construção feita acima falha, ou seja, o ponto atrator não estará associado a nenhum ponto crítico, restando, portanto, ser somente o primeiro ou o último atrator. Daí então obtemos no

máximo  $n + 2$  órbitas atradoras. Se  $p$  é periódico, o mesmo argumento produz pontos críticos para  $f^m$  em  $W(p)$ . Desde que

$$(f^m(x))' = \prod_{i=0}^{m-1} f'(f^i(x))$$

tem-se que um ponto crítico de  $f^m$  pertence à órbita de um ponto crítico de  $f$  e, portanto, o mesmo argumento segue.  $\square$

**Exemplo 2.2.** *Considere  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ . Se  $x \notin [0, 1]$  então  $|F^n(x)| \rightarrow \infty$ , conseqüentemente não haverá pontos periódicos fora desse intervalo. Desde que  $SF_\mu < 0$  e  $F_\mu$  tenha um ponto de máximo em  $(0, 1)$  então  $F_\mu$  terá no máximo uma órbita atradora para cada  $\mu \in \mathbb{R}$*

## Capítulo 3

# Teoria da Bifurcação

Na teoria de Sistemas Dinâmicos, o objetivo da Teoria da Bifurcação é estudar mudanças que ocorrem em funções à partir da variação de parâmetros. O objetivo principal deste capítulo é compreender como e quando a estrutura periódica de pontos de algumas funções que dependem de um determinado parâmetro muda. Para tal, vamos considerar uma família de funções reais. Mais precisamente, vamos considerar funções de duas variáveis da forma

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x)$$

de modo que, para um valor fixo  $\lambda$ ,  $f_\lambda(x)$  é  $C^\infty$ . Para construção do capítulo foi utilizado, principalmente, a Bibliografia [\[1\]](#).

**Exemplo 3.1** (Bifurcação Sela-nó ou Bifurcação Tangente). *Considere a família  $E_\lambda(x) = \lambda e^x$  com  $\lambda > 0$ . Quando  $\lambda = 1/e$  essa família ganha um ponto fixo em  $x = 1$ . De fato,*

$$\begin{aligned} E_\lambda(p) &= p \\ \lambda e^p &= p \\ \lambda &= p/e^p \end{aligned} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{aligned} E'_\lambda(p) &= 1 \\ \lambda e^p &= 1 \\ \lambda &= 1/e^p. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De [\(3.1\)](#) e [\(3.2\)](#) temos que  $p = 1$  e, portanto,  $\lambda = 1/e$ .

Quando  $\lambda > 1/e$  o gráfico de  $E_\lambda$  não encosta na reta  $y = x$  e, portanto, não admite ponto fixo. Para  $\lambda < 1/e$  o gráfico de  $E_\lambda$  encontra a diagonal em dois pontos,  $p$  e  $q$ . Desse modo, quando o parâmetro  $\lambda$  decresce passando por  $1/e$  dois pontos fixos surgem, como mostra a Figura 3.2.

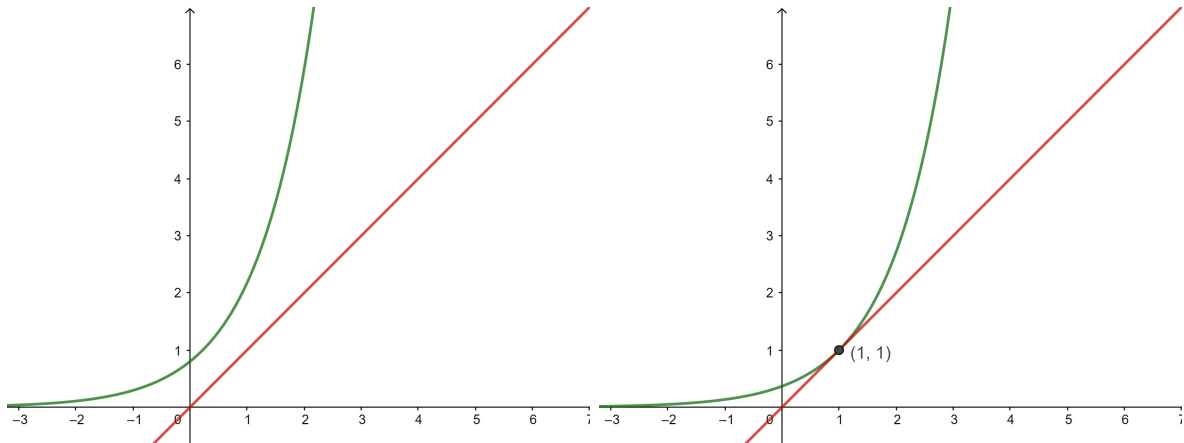


Figura 3.1:  $\lambda > 1/e$ ;  $\lambda = 1/e$ .

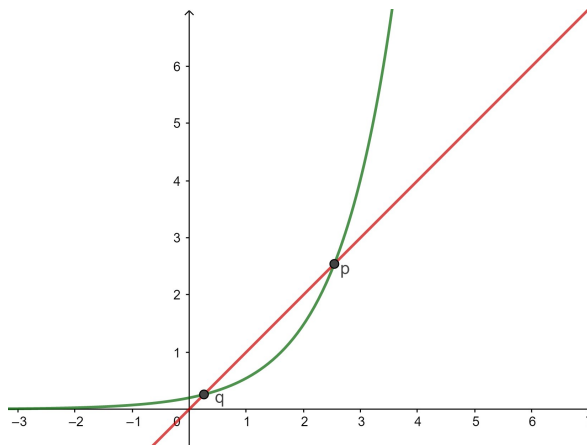


Figura 3.2:  $1/e < \lambda$ .

A partir dos gráficos é possível fazer algumas observações:

1. Quando  $\lambda > 1/e$ ,  $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$  para todo  $x$ .
2. Quando  $\lambda = 1/e$ , temos que 1 é ponto fixo por  $E$ . Note que para todo  $x$  menor do que 1, tem-se que  $x$  tende à 1 por iterações de  $E$ . De fato. Tomando  $x < 1$  temos  $E_\lambda(x) < 1$ . Logo, para todo valor nesse intervalo temos  $|E'_\lambda(x)| < M < 1$ . Tomando  $x_1 < 1$ , pelo Teorema do valor Médio, existe  $c_1$  em  $[x_1, 1]$  tal que

$$|E(x_1) - 1| = |E'(c_1)||x_1 - 1| < M|x_1 - 1| < |x_1 - 1|.$$

Logo  $x_1 < E(x_1)$ . Tomando o intervalo  $[E(x_1), 1]$  novamente, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c_2$  tal que:

$$|E(E(x_1)) - 1| = |E'(c_2)||E(x_1) - 1| < M^2|x_1 - 1|.$$

Pelo mesmo argumento

$$|E^3(x_1) - 1| < M^3|x_1 - 1|$$

$$|E^4(x_1) - 1| < M^4|x_1 - 1|$$

$\vdots$

$$|E^n(x_1) - 1| < M^n|x_1 - 1|.$$

E quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $E^n(x_1) \rightarrow 1$ . Por outro lado é fácil visualizar que se  $x > 1$ , então  $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$ .

3. Quando  $0 < \lambda < 1/e$ , note que  $E'_\lambda(q) < 1$  e  $E'_\lambda(p) > 1$ . Então  $E_\lambda^n(x) \rightarrow q$  para todo  $x < p$  e  $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$  se  $x > p$ .

A imagem abaixo mostra o retrato de fase de  $E_\lambda$ .

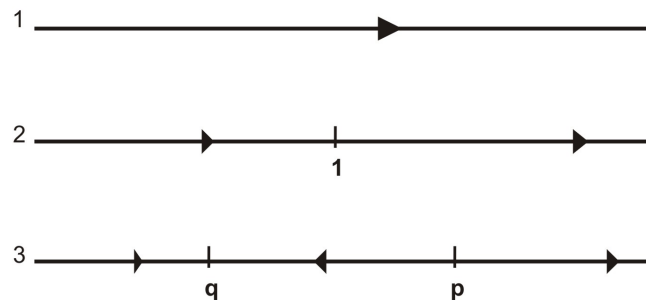


Figura 3.3: Retrato de fases de  $E_\lambda$ .

**Exemplo 3.2** (Bifurcação duplicação de período). Vamos considerar agora a família  $E_\lambda(x) = \lambda e^x$  com  $\lambda < 0$ . Tomando  $\lambda = -e$ , temos que  $E_\lambda(-1) = -1$  e  $E'_\lambda(-1) = -1$ , tratando-se portanto de um ponto fixo não-hiperbólico. Quando  $\lambda > -e$  é possível verificar que o ponto fixo para  $E_\lambda$  é atrator; quando  $\lambda < -e$  este torna-se repulsor, como ilustra a Figura [3.4](#).



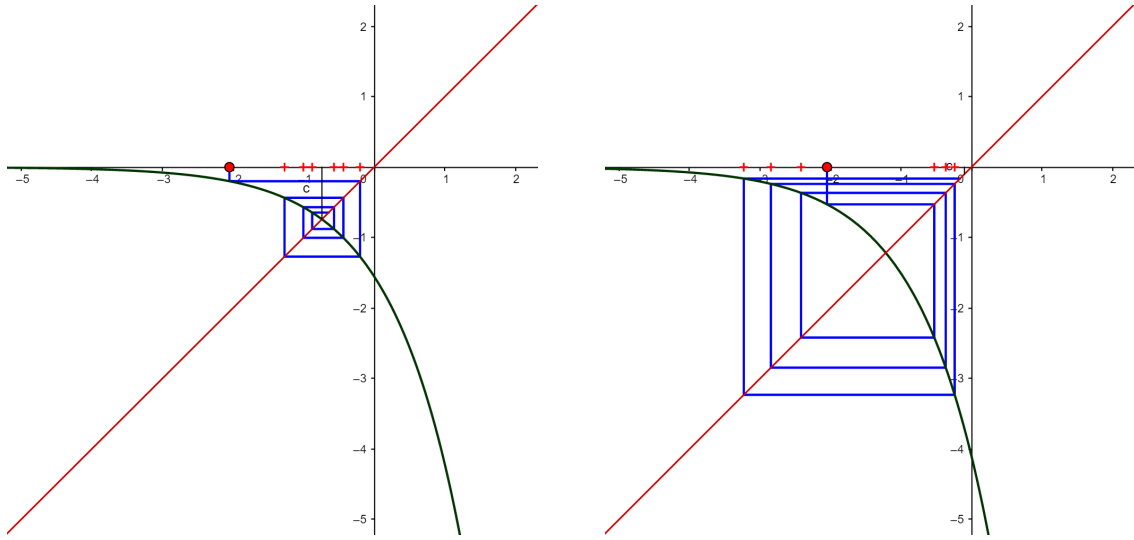


Figura 3.4:  $\lambda > -e$ ;  $\lambda < -e$ .

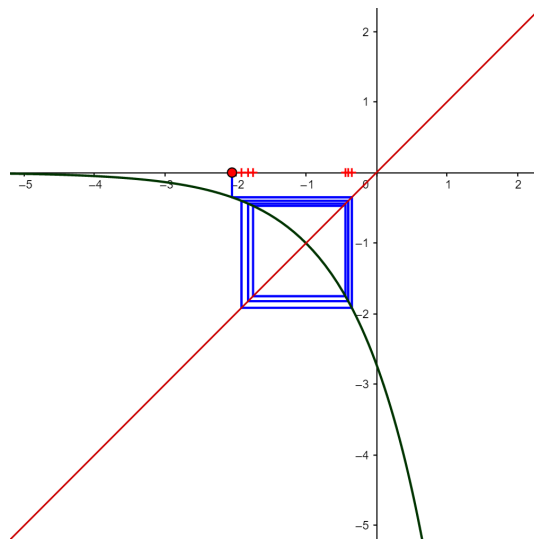


Figura 3.5:  $\lambda = -e$ .

Agora, considere a função  $E_\lambda^2$ . Temos que  $E_\lambda^2$  é uma função crescente e côncava para cima se  $E_\lambda(x) > -1$ , e côncava para baixo se  $E_\lambda(x) < -1$ . De fato

$$(E_\lambda^2)'(x) = \lambda^2 e^{\lambda e^x + x}$$

$$(E_\lambda^2)''(x) = \lambda^2 (e^{\lambda e^x + x}) \cdot (\lambda e^x + 1).$$

Segue que, se  $E_\lambda(x) > -1$  então  $E_\lambda^2$  é côncava para cima. Analogamente,  $E_\lambda^2$  é côncava para baixo se  $E_\lambda(x) < -1$ . As mudanças não acabam por aí, Observe na Figura [3.6](#) que  $E_\lambda^2$  possui 2 novos pontos fixos  $q_1$  e  $q_2$  quando  $\lambda$  decresce de  $-e$ . Como  $E_\lambda$  possui um único ponto fixo, esses devem de fato

serem pontos de período 2. Dinamicamente, a bifurcação duplicação de período envolve mudança de ponto fixo atrator para repulsor junto ao surgimento de uma órbita de período dois.

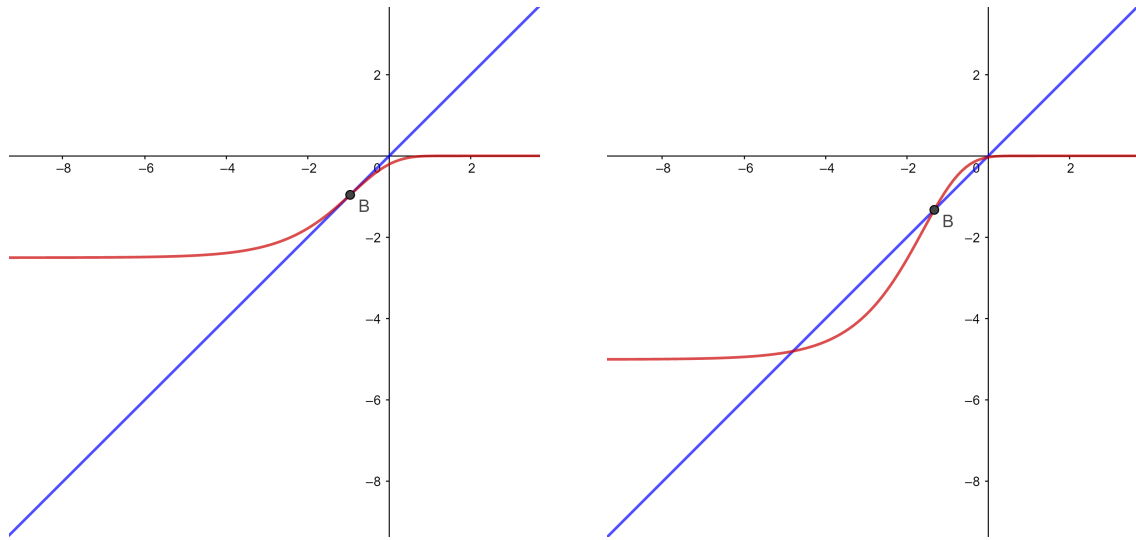


Figura 3.6:  $E^2$  com  $\lambda > -e$ ;  $E^2$  com  $\lambda < -e$ .

No exemplo acima, note que enquanto o ponto fixo perde atratividade, o ponto de período dois adquire. Além disso, para um cenário mais geral, observe que no ponto de bifurcação,  $\lambda = -e$  e  $x = -1$ ,  $(E_\lambda^2)'(-1) = 1$ . Essa observação abre caminhos para o seguinte questionamento: sob quais condições ocorrem bifurcações de pontos fixos ou periódicos? O teorema que segue mostra, pelo menos em parte, que bifurcações de pontos fixos ou periódicos ocorrem em pontos não hiperbólicos. Mais adiante será tratado o caso geral.

**Teorema 3.1.** *Seja  $f_\lambda$  uma família de funções a um parâmetro e suponha que  $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$  e  $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$ . Então existem intervalos  $I$  contendo  $x_0$  e  $J$  contendo  $\lambda_0$  e uma função de classe  $C^1$   $p: J \rightarrow I$  satisfazendo:*

1.  $p(\lambda_0) = x_0$ ;
2.  $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ .

*Além disso,  $f_\lambda$  não possui outros pontos fixos em  $I$ .*

*Demonstração.* O objetivo é provar que existe um intervalo aberto contendo  $\lambda_0$  tal que, cada  $\lambda$  neste intervalo associa a um único ponto fixo de  $f_\lambda$ , isto é, não ocorre bifurcações de pontos fixos ou periódicos nas variações do parâmetro.

Considere a função  $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ . Como por hipótese temos que  $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$  e obtemos que  $G(x_0, \lambda_0) = 0$ . Além disso,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem intervalos abertos  $I$  contendo  $x_0$  e  $J$  contendo  $\lambda_0$  e uma função  $C^1$

$$p : J \rightarrow I$$

tal que  $p(\lambda_0) = x_0$  e  $G(p(\lambda), \lambda) = 0$  para todo  $\lambda \in J$ . Logo  $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$  para cada  $\lambda \in J$ . Como  $p$  é função, para cada  $\lambda$ ,  $f_\lambda$  possui um único ponto fixo e isso conclui a demonstração.  $\square$

Para simplificar a teoria, é conveniente considerar que o conjunto dos pontos fixos é estacionário enquanto o parâmetro varia. O que nos permite essa simplificação é o teorema anterior. Suponha  $f_\lambda$  como no Teorema [3.1](#), tal que  $f_\lambda(p_\lambda) = p_\lambda$ . Considere a nova função

$$g_\lambda(z) = f_\lambda(z + p(\lambda)) - p(\lambda).$$

Note que  $g_\lambda(0) = 0$  para todo  $\lambda$ , isto é, 0 é sempre fixo. Além disso, considere  $h(x) = x - p(\lambda)$  uma função. Observe que  $g_\lambda \circ h = h \circ f_\lambda$ , o que nos permite compreender a dinâmica de  $f_\lambda$  por meio de  $g_\lambda$ . Este conceito é chamado de conjugação topológica e será tratado com maior rigor na próxima seção.

A partir de agora podemos ir para o cenário geral da Teoria da Bifurcação.

**Teorema 3.2** (Bifurcação Sela-nó). *Suponhamos*

1.  $f_{\lambda_0}(q) = q$ .
2.  $f'_{\lambda_0}(q) = 1$ .
3.  $f''_{\lambda_0}(q) \neq 0$ .
4.  $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}(q) \neq 0$ .

Então existe um intervalo  $I$  contendo 0 e uma função suave  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$f_{p(x)}(x) = x.$$

Além disso,  $p'(q) = 0$  e  $p''(q) \neq 0$ .

*Demonstração.* Considere a função  $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ . Pela hipótese  $G(q, \lambda_0) = 0$  e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(q, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}(q) \neq 0. \tag{3.3}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem um intervalo  $I$  contendo  $q$  e uma função  $C^1$   $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $p(q) = \lambda_0$  e  $G(x, p(x)) = 0$  para todo  $x$  em  $I$ . Note que  $G(x, p(x)) = 0$  implica que  $f_\lambda$  tem ponto fixo em  $x$ . Assim, pela Regra da Cadeia

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \lambda} p'(x) = 0$$

e, portanto,

$$p'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, p(x))}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, p(x))}.$$

De [3.3](#) tem-se que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(q, p(q)) \neq 0$$

e

$$-\frac{\partial G}{\partial x}(q, p(q)) = f'_{\lambda_0}(q) - 1 = 0.$$

Logo  $q$  é ponto crítico de  $p$ . Agora,

$$\begin{aligned} p''(q) &= \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(q, \lambda_0) \frac{\partial G}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}(q)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(q, \lambda_0)\right)^2} \\ &= \frac{-f''_{\lambda_0}(q)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}(q)} \neq 0. \end{aligned}$$

□

Logo  $q$  é ponto de máximo ou mínimo local em  $p$ , o que nos permite concluir que  $p$  tem mudança de comportamento e, portanto, não é injetora. Logo, para um mesmo  $\lambda$ ,  $f_\lambda$  admite pelo menos dois pontos fixos. Observe que os sinais de  $f''_{\lambda_0}(q)$  e  $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}(q)$  determinam a direção da bifurcação; se eles possuem sinais diferentes então o diagrama de bifurcação é como mostra a Figura [3.7](#)

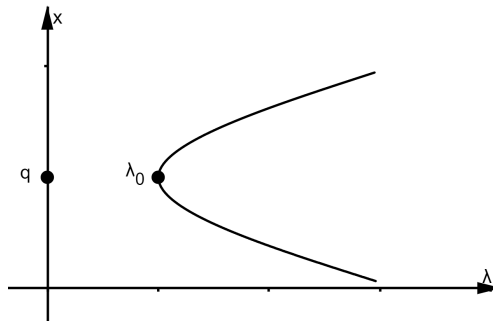


Figura 3.7: Diagrama da bifurcação do tipo Tangente.

**Teorema 3.3** (Bifurcação duplicação de período). *Suponhamos*

1.  $f'_{\lambda_0}(0) = -1$ .

2.  $f_\lambda(0) = 0$  para todo  $\lambda$  em um intervalo ao redor de  $\lambda_0$ .

3.  $\frac{\partial(f_\lambda^2)'}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$ .

Então existe um intervalo  $I$  contendo 0 e uma função suave  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_{p(x)}(x) \neq x$  mas  $f_{p(x)}^2(x) = x$ .

*Demonstração.* Defina  $G(x, \lambda) = f_\lambda^2(x) - x$ . Por hipótese, para  $\lambda$  próximo de  $\lambda_0$  tem-se

$$G(0, \lambda) = f_\lambda^2(0) - 0 = 0$$

mas

$$\frac{\partial G}{\partial\lambda}(0, \lambda_0) = 0.$$

Com isso, as condições do Teorema da Função Implícita não estão satisfeitas para  $G$ . Definimos então  $H$

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{G(x, \lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Note que  $H$  é  $C^1$  e, pela expansão de Taylor, tem-se

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0).$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} H(0, \lambda_0) &= \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) \\ &= (f_{\lambda_0}^2)'(0) - 1 \\ &= f'_{\lambda_0}(0) \cdot f'_{\lambda_0}(0) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}(H(0, \lambda))\Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) \right)\Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda} ((f_\lambda^2)'(0) - 1)\Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &= \frac{\partial(f_\lambda^2)'}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita existe  $p$  uma função  $C^1$  e um intervalo  $I$  contendo 0 tal que  $p(0) = \lambda_0$  e  $H(x, p(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ . Em particular, para  $x \neq 0$ ,

$$\frac{1}{x}G(x, p(x)) = 0,$$

o que garante que  $x$  é fixo para  $f_{p(x)}^2$ . Desde que  $f'_{\lambda_0}(0) = -1$ , segue do Teorema 3.1 que esses pontos não são fixos para  $f_{p(x)}$  e, portanto, são de fato periódicos de período dois. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f^2(x) - x)_{x=0} \\ &= (f'(f(x)) \cdot f'(x))' \Big|_{x=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita,

$$p'(0) = \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = 0$$

o que completa a demonstração. □

## Capítulo 4

# Dinâmica Simbólica

Neste capítulo iremos retomar a família de funções quadráticas  $F_\mu$  mencionada anteriormente. Em especial, trabalharemos nela sob parâmetro  $\mu = 3,839$ . O objetivo principal é visualizar a existência de órbitas de todos os períodos a partir da existência de órbitas de período três, como garante o Teorema de Sarkovskii. Para isso vamos recorrer a dinâmica simbólica por meio do shift e suas propriedades. Para construção do capítulo foi utilizado, principalmente, a Bibliografia [\[1\]](#)

**Definição 4.1.** *Considere o conjunto*

$$\Sigma_N = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j \in \mathbb{N}, 1 \leq s_j \leq N\}.$$

*de todas as possíveis seqüências  $s$  de números naturais entre 1 e  $N$ .  $\Sigma_N$  é chamado de Espaço de Seqüência de  $N$  símbolos. Elementos de  $\Sigma_N$  são seqüências infinitas como:  $(121211 \dots)$  e  $(111 \dots N \dots)$ .*

Podemos transformar  $\Sigma_N$  em um espaço métrico da seguinte maneira: para duas seqüências  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  e  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$  definimos a distância entre elas por:

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i}.$$

Note que  $s_i$  e  $t_i$  podem assumir valores entre 1 e  $N$ , então temos que  $|s_i - t_i| \leq (N - 1)$  para todo  $i$  e para todo  $N$  natural. Se  $N = 1$ , naturalmente a série converge. No caso em que  $N > 1$  temos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(N - 1)}{N^i}$$

para todo  $i$ . Dessa maneira, a série é dominada pela série geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(N - 1)}{N^i} = N$$

e, portanto, converge.

**Proposição 4.1.**  $d_N$  é uma métrica em  $\Sigma_N$ .

*Demonstração.* Para provar que  $d_N$  é uma métrica devemos observar que  $|s_i - t_i| \geq 0$  e, uma vez que  $d_N[s, t]$  é uma soma de termos positivos, temos que essa soma é maior ou igual a 0. Além disso,  $d_N[s, t] = 0$  se, e somente se  $|s_i - t_i| = 0$ . Logo,  $d_N[s, t] = 0$  se, e somente se  $s_i = t_i$  para todo  $i$ . Agora, desde que  $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$  segue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{N^i}$$

e, portanto,  $d_N[s, t] = d_N[t, s]$ . Finalmente, seja  $s$ ,  $t$  e  $r$  elementos de  $\Sigma_N$ . Como  $s_i, t_i$  e  $r_i \in \mathbb{R}$  temos que Desigualdade Triangular se aplica, assim,

$$|s_i - t_i| = |s_i - r_i + r_i - t_i| \leq |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$$

então

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i|}{N^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - t_i|}{N^i}$$

e, portanto,  $d_N[s, t] \leq d_N[s, r] + d_N[r, t]$ . □

**Proposição 4.2.** Se  $s_i = t_i$  para  $i = 0, \dots, k$ , então  $d_N[s, t] \leq 1/N^k$ . Inversamente, se  $d_N[s, t] < 1/N^k$ , então  $s_i = t_i$  para  $i \leq k$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $s_i = t_i$  para  $i \leq k$ . Então

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{i=0}^k \frac{|s_i - t_i|}{N^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(N-1)}{N^i} = \frac{1}{N^k}. \end{aligned}$$

Assim,  $d[s, t] \leq 1/N^k$ . Agora, para provar o inverso, vamos supor que existe  $j \leq k$  tal que  $s_j \neq t_j$ . Então

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{i=0}^k \frac{|s_i - t_i|}{N^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \\ &\geq \sum_{i=0}^k \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \geq \frac{|s_j - t_j|}{N^j} \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}. \end{aligned}$$

Logo, supor que  $j$  nos leva a uma contradição. Portanto  $s_i = t_i$  para  $i \leq k$ . □

Esses resultados nos permite decidir se duas sequências estão próximas ou não. Intuitivamente, esses resultados nos dizem que duas sequências estão próximas se coincidem com as primeiras entradas. Agora, vamos definir uma importante ferramenta para dinâmica simbólica, a função shift.



**Definição 4.2.** A função shift  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  é definida por  $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2s_3\dots)$ .

O shift "esquece" a primeira entrada de uma sequência e desloca todas as próximas para um lugar à esquerda. E mais, na métrica anterior o shift é contínuo.

**Proposição 4.3.**  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  é contínuo.

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$  e  $s = s_0s_1s_2\dots$ . Escolheremos  $n$  tal que  $1/N^n < \epsilon$ . Tomando  $\delta = 1/N^{n+1}$  temos que, se  $t = t_0t_1t_2\dots$  satisfaz  $d[s, t] < \delta$ , então, pela Proposição 4.2,  $s_i = t_i$  para  $i \leq n+1$ . Consequentemente,  $\sigma(s)$  e  $\sigma(t)$  coincidem nas  $n$  primeiras entradas. Portanto, pela Proposição 4.2,  $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq 1/N^n < \epsilon$ . □

Nosso objetivo agora é descrever certos subconjuntos de  $\Sigma_N$  que surgem naturalmente e que fornecem uma configuração geral da dinâmica simbólica. Consideremos  $A$  uma matriz  $N \times N$  tal que  $a_{ij}$  são 0 ou 1. Isto é,  $A$  é uma matriz quadrada de 0's e 1's, que será chamada de *matriz de transição* para o sistema. Vamos utilizar  $A$  como regra para descrever um subconjunto de  $\Sigma_N$ , o qual denotaremos por  $\Sigma_A$ . Assim, uma sequência  $s = (s_0s_1s_2\dots)$  pertence a  $\Sigma_A$  se, e somente se, cada par adjacente em  $s$  corresponde a coordenadas  $i$  e  $j$  de  $A$ , isto é,  $a_{s_i s_{i+1}}$ . Mais precisamente,

$$\Sigma_A = \{s = (s_0s_1s_2\dots) \mid a_{s_i s_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i\}.$$

Em outras palavras, vamos usar a matriz de transição para determinar quais elementos são adjacentes em sequências que pertencem a  $\Sigma_A$ .

**Exemplo 4.1.** *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $a_{12} = a_{21} = 0$  segue que 1 e 2 não podem ser adjacentes em elementos de  $\Sigma_A$ . Consequentemente, existem apenas dois tipos de sequências em  $\Sigma_A$ , as sequências constantes:  $s = (11111\dots)$  e  $s = (22222\dots)$ .

**Exemplo 4.2.** *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nesse exemplo, 1 pode ser adjacente à direita do 2 mas não o contrário. Então,  $\Sigma_A$  consiste de sequências constantes e sequências da forma  $s = (2222\dots 1111\dots)$ , de modo que a quantidade de 2 seja arbitrária.

A partir de agora vamos denotar por  $\sigma_A$  a restrição de  $\sigma$  ao conjunto  $\Sigma_A$ .

**Proposição 4.4.**  $\Sigma_A$  é um subconjunto fechado de  $\Sigma_N$ , no qual é invariante por  $\sigma_A$

*Demonstração.* Para provar o outro resultado, vamos supor que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência em  $\Sigma_A$ , isto é, uma sequência de sequências no qual converge para  $t$ . Se  $t \notin \Sigma_A$ , então existe um menor natural  $\alpha$  para o qual a entrada  $a_{t_\alpha t_{\alpha+1}} = 0$ .

Como  $(x_n)$  converge para  $t$ , tomando  $\epsilon = 1/N^{\alpha+1}$  temos que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $d_N[x_n, t] < 1/N^{\alpha+1}$  para todo  $n > k$ . Pela proposição 2.2, temos que  $t_0 t_1 \dots t_{\alpha+1}$  coincidem com as entradas correspondentes de  $x_n$  para  $n > k$ . Dessa forma  $a_{t_\alpha t_{\alpha+1}} = 1$ , contradizendo  $t \notin \Sigma_A$ . Essa contradição prova o resultado.

Como  $\sigma_A$  não modifica a lei formação de  $\Sigma_A$ , segue que o conjunto é invariante por  $\sigma_A$  □

Chamaremos  $\sigma_A$  de subshift do tipo finito, uma vez que ele é determinado por uma quantidade finita de regras impostas pela matriz  $A$ . Agora, retornemos à família quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ . Em particular, trabalharemos sob parâmetro  $\mu = 3,839$ . Notemos que para esse parâmetro existe uma órbita atratora na vizinhança de  $a_1 = 0,149888$ ,  $a_2 = 0,489172$  e  $a_3 = 0,959299$  para  $F$ . Os gráficos de  $F$  e  $F^3$  podem ser vistos na Figura 4.1.

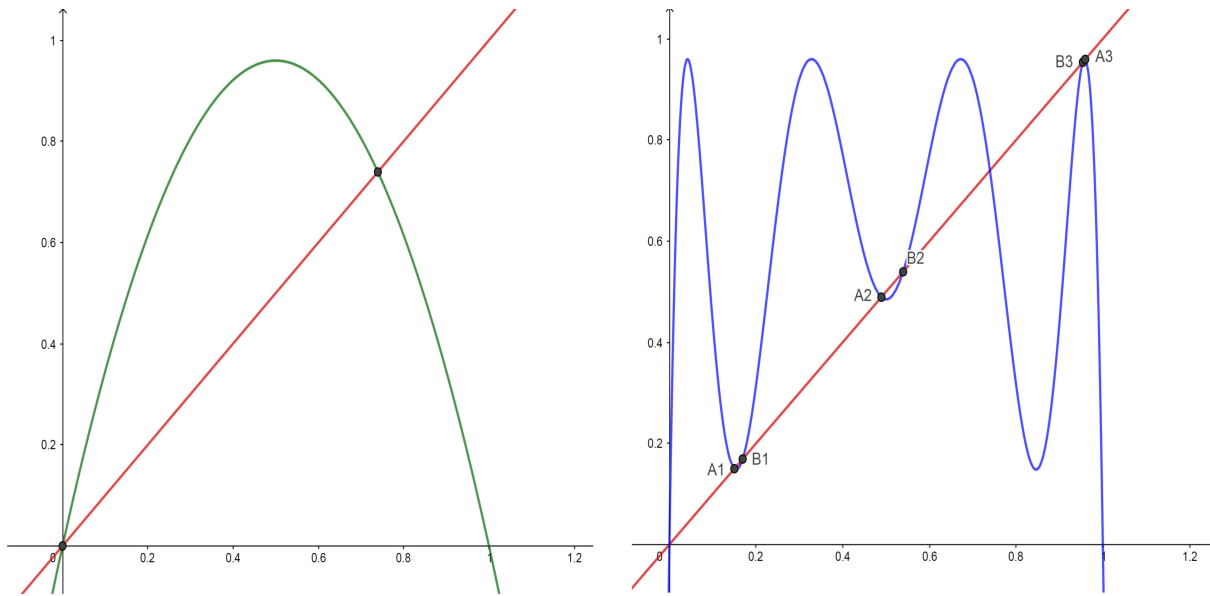


Figura 4.1: Gráfico de  $F$  e  $F^3$ .

Existe ainda uma segunda órbita periódica de período 3 para  $F$ , qual denotaremos por  $b_1$ ,  $b_2$ , e

$b_3$ . Esses pontos são aproximadamente

$$b_1 = 0,169040$$

$$b_2 = 0,539247$$

$$b_3 = 0,953837$$

com  $F(b_1) \approx b_2$ ,  $F(b_2) \approx b_3$  e  $(F^3)'(b_i) \approx 2,66$ . como construído na demonstração do Teorema 2.1, existe um intervalo aberto sob cada  $a_i$  que consiste de pontos que tendem à  $a_i$  por iterações de  $F^3$ . Vamos denotar esses intervalos por  $W(a_i)$ . Pela demonstração do Teorema 2.1, sabemos que um dos extremos de cada  $W(a_i)$  é fixo para  $F^3$ . Consequentemente,  $b_i$  é um dos extremos de  $W(a_i)$ . Agora, vamos denotar por  $\widehat{b}_i$  o ponto oposto à  $b_i$  com relação a  $a_i$  no qual mapeia  $b_i$  por  $F^3$ . Veja na Figura 4.2.

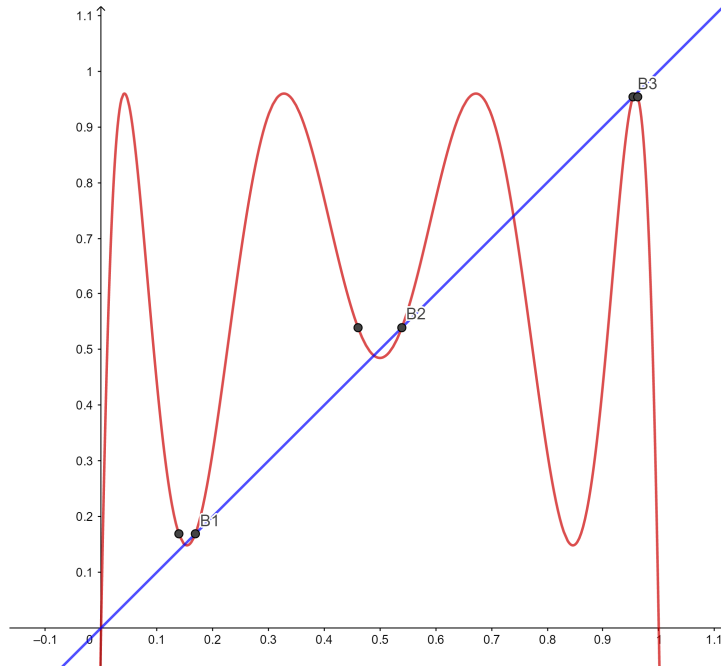


Figura 4.2: Gráfico de  $F^3$  com  $\widehat{b}_i$ .

Seja  $A_1 = (\widehat{b}_1, b_1)$ ,  $A_2 = (\widehat{b}_2, b_2)$  e  $A_3 = (b_3, \widehat{b}_3)$ . Note que  $F(b_1) = b_2$ , e, além disso, existe  $q < F(b_1)$  tal que  $F(\widehat{b}_1) = q$ . Uma vez que  $b_1 = F^3(\widehat{b}_1)$  temos que  $F^2(q) = b_1$  e  $F^3(q) = b_2$ . Desse modo,  $q$  é um ponto que mapeia  $b_2$  por  $F^3$ . Observe no gráfico de  $F^3$  que existem duas possibilidades para  $q$ , mas afirmamos que  $q = \widehat{b}_2$  pois se  $q = t > b_1$  então  $F(t) > b_2$ . Logo  $F(A_1) = A_2$ . Agora, como  $F$  tem ponto crítico em  $1/2$  e  $F(1/2) = 0,95975$  podemos afirmar que  $F(A_2) \subset A_3$ . Por ultimo, afirmamos que  $F(A_3) = A_1$  pois, pela continuidade e monotonicidade de  $F$  existe  $x > b_3$  tal que  $F(x) = \widehat{b}_1$ . Então,  $F^4(x) = b_1$  e, uma vez que  $b_1$  tem período três,  $F^4(x) = F(b_3)$ , e

$F(F^3(x)) = F(b_3)$ . Assim,  $x$  é um ponto maior do que  $b_3$  que o mapeia por  $F^3$ . Pelo gráfico, a única possibilidade é  $x = \widehat{b}_3$ . Portanto  $F(A_3) = A_1$ .

Além disso, se  $x$  pertence a algum dos  $A_i$ , então  $F^n(x)$  tende a órbita de  $a_i$ . Conseqüentemente, todos os outros pontos periódicos de  $F$  pertencem ao complementar dos  $A_i$  em  $I$ . Existem 4 intervalos fechados no complementar dos  $A_i$  em  $I$  que vamos denotar por  $I_0, I_1, I_2$ , e  $I_3$ , da esquerda para a direita. Desde que saibamos o comportamento de  $b_i$  por iterações de  $F$ , também saberemos como esses intervalos se comportam. Suas imagens estão retratadas na Figura 4.3.

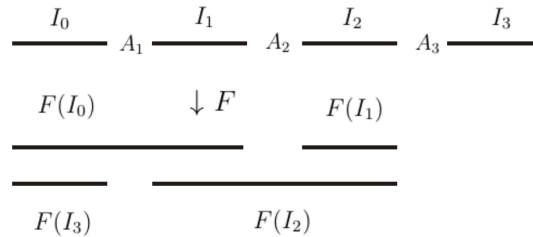


Figura 4.3: Imagem dos intervalos  $I_0, I_1, I_2$ , e  $I_3$ .

Uma vez que não existam outros pontos periódicos de  $F$  em  $A_i$  segue que os demais pontos estão em  $I_j$ . Vejamos:

**Proposição 4.5.** *Todos os pontos periódicos de  $F$  pertencem à  $I_1 \cup I_2$ , com exceção dos pontos fixos  $0$  e os periódicos de período 3:  $a_1, a_2$  e  $a_3$ .*

*Demonstração.* Note que  $F$  é monótona em cada um dos  $I_i$ . Além disso, temos que  $F$  mapeia  $I_0$  em  $I_0$  e  $I_1, I_1$  em  $I_2, I_2$  em  $I_1$  e  $I_2$  e finalmente  $I_3$  em  $I_0$ . Disso segue que, se um ponto periódico  $x \in I_1 \cup I_2$ , então toda órbita dele está contida em  $I_1 \cup I_2$ .

Agora, suponhamos  $x \in I_0$ , e  $x \neq 0$ . Notemos que  $F(x) > x$  pois  $F$  é crescente em  $I_0$ . Conseqüentemente existe um  $n$  tal que  $F^n(x) \notin I_0$ , isto é,  $F^n(x) \in A_1$  ou  $F^n(x) \in I_1$ . Se o primeiro caso acontece, então  $x$  não é periódico pois os pontos de  $A_1$  tendem a órbita de  $a_1$ . No segundo caso, a órbita de  $F^n(x)$  nunca sairá de  $I_1$  ou  $I_2$  e, portanto, não pode ser periódico. Finalmente, se  $x \in I_3$ , temos que  $F(x) \in I_0$  e, portanto, não é periódico.

□

Conseqüentemente, todos os pontos periódicos restantes podem apenas pertencer à  $I_1 \cup I_2$ . Vamos denotar por  $\Lambda$  o conjunto dos pontos no qual a órbita está inteiramente contida nesses dois intervalos. Observe ainda que este conjunto é invariante por  $F$ . Para compreender a dinâmica de  $F$  em  $\Lambda$  vamos invocar a dinâmica simbólica. Definiremos uma sequência associada à  $x$  pela regra

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$$

tal que  $s_j = 1$  se  $F^j(x) \in I_1$  e  $s_j = 2$  se  $F^j(x) \in I_2$ . Uma vez que  $F(I_1) = I_2$ , segue que  $S$  tem seus valores em  $\Sigma_A$  tal que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antes de apresentar um resultado muito importante para a seção, vamos introduzir duas novas definições.

**Definição 4.3.** Um conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  é um conjunto hiperbólico repulsor (ou atrator) para  $f$  se  $\Gamma$  é fechado, limitado e invariante por  $f$  e se existe um  $N > 0$  tal que  $|(f^n)'(x)| > 1$  (respectivamente  $< 1$ ) para todo  $n > N$  e  $x \in \Gamma$ .

**Proposição 4.6.**  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico. Além disso,  $\Lambda$  é totalmente desconexo.

*Demonstração.* Inicialmente provaremos que  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico. Para isso, observe que  $|F'(x)|$  não é maior do que 1 em todo ponto de  $I_1 \cup I_2$ , contudo, notemos que  $|F'(x)| > \nu = F'(\widehat{b}_2) \approx 0,3$  para todo  $x$  em  $I - A_2$ .

Agora, afirmamos que existe  $\lambda > 1$  tal que, se  $x \in \Lambda$ , então  $|F^3(x)| > \lambda$ . Para verificar isso, note que existem três intervalos em  $I_1 \cup I_2$  tais que  $|F^3(x)| \leq 1$ . Dois deles,  $B_1$  e  $B_2$  são simétricos com relação a  $x = 1/2$ , enquanto o terceiro,  $B_3$ , está contido em  $I_2$ . Note que a imagem de  $B_3$  por  $F^3$  está contida em  $(\widehat{b}_1, b_1)$  e, portanto,  $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$ . Agora,  $B_2$  está contido no intervalo  $0,661 < x < 0,683$ , uma vez que  $(F^3)'(0,661) > 1$  e  $(F^3)'(0,683) < -1$ . Além disso, a imagem deste intervalo por  $F^3$  está contido em  $(b_3, \widehat{b}_3)$ . Logo,  $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$ . Pela simetria de  $B_2$  e  $B_1$  afirmamos que  $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ .

Finalmente, escolhemos  $K$  tal que  $\nu^2 \lambda^K > 1$ . Agora, seja  $N = 3K + 2$ . Se  $n > N$ , então podemos escrever  $n = 3(K + \alpha) + i$  com  $\alpha > 0$  e  $0 \leq i \leq 2$  são inteiros e  $\alpha$  depende de  $n$ . Dessa forma, se  $x \in \Lambda$ , pela Regra da Cadeia temos

$$|(F^n)'(x)| = |(F^i)'(F^{3(K+\alpha)}(x))| \cdot |(F^{3(K+\alpha)})'(x)| > \nu^2 \lambda^{K+\alpha} > 1.$$

Para provar que  $\Lambda$  é fechado notemos que existe um intervalo aberto em  $I_2$  cuja imagem por  $F$  é igual a  $A_2$ . Vamos denotar esse conjunto por  $K_1$ . Dessa maneira temos que

$$K_1 = \{x \in I_1 \cup I_2 | F(x) \in A_1\}.$$

Portanto,  $K_1$  consiste dos pontos que deixam  $I_1 \cup I_2$  após uma iteração de  $F$ . Seja

$$K_2 = \{x \in I_1 \cup I_2 | F^2(x) \in A_1\}.$$

isto é, se  $x \in K_2$  então  $F^2(x) \notin I_1 \cup I_2$ . Indutivamente,

$$K_n = \{x \in I_1 \cup I_2 | F^n(x) \in A_1\}.$$

Desse modo, os pontos de  $K_n$  deixam  $I_1 \cup I_2$  na  $n$ -ésima iteração de  $F$ . Observe que, uma vez que  $F$  é contínua e  $F(I_1) = I_2$ , então existe um intervalo aberto em  $I_1$  tal que  $F^2(I_1) \notin I_1 \cup I_2$ . Analogamente, uma vez que  $F(I_2) = (I_1 \cup A_2 \cup I_2)$ , existe um intervalo aberto em  $I_2$  tal que, a imagem deste intervalo deixa  $I_1 \cup I_2$  por  $F^2$ . Agora, note que  $F^2$  possui um ponto de máximo em  $I_2$  cuja imagem é 0,95975. Logo deve existir um intervalo ao redor deste ponto cuja imagem por  $F^2$  é  $A_3$ . A união destes intervalos é precisamente  $K_2$ . Como  $F^2$  intercala entre crescimento e decréscimo em  $I_1 \cup I_2$ , processo semelhante pode ser feito para retirada de intervalos abertos. Agora, se os conjuntos omitidos  $K_n$  são conjuntos abertos então  $M = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  é um conjunto fechado, logo  $\Lambda = [0, 1] \cap M$  é limitado e fechado. A invariância do conjunto segue da sua construção.

Para provar que  $\Lambda$  é totalmente desconexo vamos supor o contrário, que ele é conexo. Então, pela Proposição 1.1 existe  $x, y \in \Lambda$ ,  $x \neq y$  tal que  $[x, y] \subset \Lambda$ . Pelas construções anteriores sabemos que existe  $N > 0$  e  $N \in \mathbb{Z}$  tal que, para todo  $n > N$

$$|(F^n)'(x)| = |(F^i)'(F^{3(K+\alpha)}(x))| \cdot |(F^{3(K+\alpha)})'(x)| > \nu^2 \lambda^{K+\alpha} > 1.$$

Escolha  $n$  de modo que  $\nu^2 \lambda^{K+\alpha} |x - y| > 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio temos que  $|(F^n)'(y) - (F^n)'(x)| > \nu^2 \lambda^{K+\alpha} |x - y| > 1$ , o que significa que  $F^n(y)$  ou  $F^n(x)$  deixam  $I$ . Isso é uma contradição e, portanto,  $\Lambda$  é totalmente desconexo.  $\square$

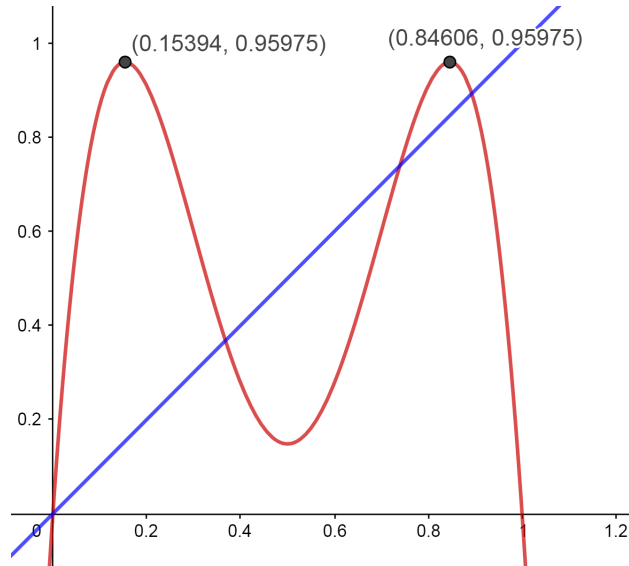


Figura 4.4: Gráfico de  $F^2$ .

#### 4.0.1 Conjugação topológica

**Definição 4.4.** *Seja  $f : A \rightarrow A$  e  $g : B \rightarrow B$  funções.  $f$  e  $g$  são ditas topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo  $h : A \rightarrow B$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ . O homeomorfismo  $h$  é chamado de conjugação topológica.*

As funções que são topologicamente conjugadas são completamente equivalentes em termos de sua dinâmica. Por exemplo, se  $f$  é topologicamente conjugado a  $g$  via  $h$  e  $p$  é um ponto fixo de  $f$ , então  $h(p)$  é fixo em  $g$ . De fato,  $h(p) = h(f(p)) = g(h(p))$ . Da mesma forma,  $h$  fornece uma correspondência injetora entre  $Per_n(f)$  e  $Per_n(g)$ . Pode-se também verificar que, eventualmente, órbitas periódicas e assintóticas para  $f$  passam via  $h$  para órbitas em  $g$ .

**Teorema 4.1.** *A restrição de  $F$  a  $\Lambda$  é topologicamente conjugada ao subshift do tipo finito  $\sigma_A$  em  $\Sigma_A$ .*

*Demonstração.* Inicialmente precisamos garantir que  $S$  seja um homeomorfismo. Tome  $x, y \in \Lambda$ , com  $x \neq y$  e suponha  $S(x) = S(y)$ . Então, para cada  $n$ ,  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$  pertencem ao mesmo lado de  $A_2$ . Como  $F$  é monótona em  $I_1$  e  $I_2$  segue que  $F$  é monótona em cada intervalo entre  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$ . Consequentemente, todos os pontos destes intervalos permanecem em  $I_1 \cup I_2$ , contradizendo o fato de  $\Lambda$  ser totalmente desconexo.

Para verificar que  $S$  é sobrejetora vamos introduzir a seguinte notação. Seja  $J \subset I$  um intervalo fechado. Seja

$$F^{-n}(J) = \{x \in I \mid F^n(x) \in J\}.$$

Em particular,  $F^{-1}(J)$  descreve a pré-imagem de  $J$  por  $F$ . Observe que se  $J \subset I$  um intervalo fechado, então  $F^{-1}(J)$  consiste de dois intervalos fechados. Agora, seja  $s = s_0s_1s_2\dots$ . Vamos produzir  $x \in \Lambda$  tal que  $S(x) = s$  e para isso vamos definir

$$\begin{aligned} I_{s_0s_1s_2\dots s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, F(x) \in I_{s_1}, \dots, F^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Vamos verificar que esses conjuntos forma uma sequência de intervalos encaixados quando  $n \rightarrow \infty$ .

Note inicialmente que

$$I_{s_0s_1s_2\dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1s_2\dots s_n}).$$

Isto, é,  $x \in I_{s_0}$  e  $F(x) \in I_{s_1s_2\dots s_n}$ . Indutivamente temos que  $I_{s_1s_2\dots s_n}$  é não vazio e, portanto,  $F_\mu^{-1}(I_{s_1s_2\dots s_n})$  consiste de dois intervalos fechados, um em  $I_1$  e outro em  $I_2$ . Logo,  $I_{s_0s_1s_2\dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1s_2\dots s_n})$  é um unico intervalo fechado. Agora, desde que

$$I_{s_0s_1s_2\dots s_n} = I_{s_0s_1s_2\dots s_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0s_1s_2\dots s_{n-1}}$$

tem-se que  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  forma uma sequência de intervalos fechados encaixados em um compacto, e, portanto,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} \neq \emptyset.$$

Assim, se  $x$  pertence a essa interseção, então  $x \in I_{s_0}$ ,  $F(x) \in I_{s_1}, \dots$ . Consequentemente  $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$ . Desde que  $S$  seja injetora, segue que essa interseção consiste de um único ponto.

Para provar a continuidade de  $S$ , tome  $x \in \Lambda$  e suponha  $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$ . Para  $\epsilon > 0$  tome  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^n < \epsilon$ . Considere os intervalos  $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$  para todas as possibilidades de  $t_0 t_1 t_2 \dots t_n$ . Esses subintervalos são disjuntos e  $\Lambda$  está contido na união deles. Note que existem  $2^{n+1}$  desses intervalos e  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  é um deles. Consequentemente podemos escolher  $\delta > 0$  tal que  $|x - y| < \delta$  e  $y \in \Lambda$  o que implica que  $y \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ . Desse modo  $S(y)$  e  $S(x)$  coincidem nas primeiras  $n + 1$  entradas. Pela Proposição [4.2](#)

$$d[S(x), S(y)] < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

A continuidade de  $S^{-1}$  é imediato. Para verificar a conjugação nota que um ponto  $x \in \Lambda$  pode ser unicamente definido pela sequência de intervalos encaixados

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n \dots} = \{x\}.$$

Note que  $F_\mu(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = I_{s_1 s_2 \dots s_n}$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} S \circ F_\mu(x) &= S \circ F_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}) \\ &= S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 s_2 \dots s_n}) \\ &= s_1 s_2 \dots = \sigma \circ S(x). \end{aligned}$$

□

Agora é possível verificar a existência de pontos periódicos de todos os períodos para  $F$ , como garante o Teorema de Sarkovskii. É possível ir além, como por exemplo questionar quantos pontos de período  $K$  existem para  $F$ . Antes de responder a este questionamento vamos introduzir a seguinte definição:

**Definição 4.5.** *Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz quadrada  $N \times N$ . O traço de  $A$  é dado por*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^N a_{ii}$$

*isto é, a soma da diagonal principal de  $A$ .*

Para nós, o traço tem um significado muito importante, ele fornecerá uma contagem de pontos periódicos em  $\Sigma_A$ , conforme a proposição que segue:



**Proposição 4.7.** *Seja  $A$  uma matriz de transição. Então*

$$\text{card}(Per_K(\sigma_A)) = Tr(A^K).$$

*Demonstração.* Antes de confirmarmos o resultado relembremos que uma seqüência  $s$  é fixa para  $\sigma^K$  se  $s$  é uma seqüência da forma  $(s_0s_1 \dots s_{k-1}s_0 \dots)$ . Essa seqüência pertence a  $\Sigma_A$  se, e somente se  $a_{s_0s_1} = a_{s_1s_2} = \dots = a_{s_{k-1}s_0} = 1$  ou, equivalentemente  $a_{s_0s_1}a_{s_1s_2} \dots a_{s_{k-1}s_0} = 1$ . Então, o produto  $a_{s_0s_1}a_{s_1s_2} \dots a_{s_{k-1}s_0} = 1$  se, e somente se o bloco  $s_0s_1 \dots s_{k-1}s_0$  é um pedaço de uma seqüência em  $\Sigma_A$ , e igual a zero se o contrário. Consequentemente, cada ponto periódico de período  $K$  está associado a um um produto que da forma  $a_{s_0s_1}a_{s_1s_2} \dots a_{s_{k-1}s_0} = 1$ . Logo, a soma

$$\sum_{s_0s_1 \dots s_{k-1}} a_{s_0s_1}a_{s_1s_2} \dots a_{s_{k-1}s_0}$$

fornece a quantidade de pontos de período  $K$ . Uma vez que o produto de entradas com índices periódicos só possa estar na diagonal de  $A^K$ , segue que esse somatório é o  $Tr(A^K)$ .

□

## Capítulo 5

# Aplicações no Círculo

Neste capítulo será introduzido os estudos sobre aplicações no círculo, onde serão apresentados resultados acerca do levantamento de aplicações de  $S^1$  para a reta, o conceito de número de rotação e a estabilidade estrutural de difeomorfismos do tipo Morse-Smale. Além disso, é importante ressaltar que para este trabalho serão considerados homeomorfismos em  $S^1$  que preservam orientação, isto é, que preservam a ordem dos pontos. Os resultados aqui apresentados são revisões das Bibliografias [1], [2], [3], [4] e [5]. Inicialmente, vamos caracterizar o círculo como o intervalo fechado  $[0, 1]$ , de modo que os números 0 e 1 estão identificados. Além disso vamos atribuir a essa estrutura a noção de distância. Para isso, diremos que para  $\pi(x), \pi(y) \in S^1$ ,

$$d(\pi(x), \pi(y)) = \min\{|x - y|, |x - y - 1|, |x - y + 1|\},$$

com  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida adiante. Note que  $d(\pi(0), \pi(1)) = 0$ , o que garante que a métrica está bem definida. A verificação de que  $d$  é uma métrica pode ser vista em [4].

**Definição 5.1.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  e  $g : X \rightarrow X$  duas funções e  $X = \mathbb{R}$  ou  $X = S^1$ . A  $C^0$  – distância entre  $f$  e  $g$ , denotado por  $d_0(f, g)$ , é definida por*

$$d_0(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}.$$

A  $C^1$  – distância entre  $f$  e  $g$  é definida por

$$d_1(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\}.$$

Note que que se  $X = \mathbb{R}$ ,  $d_0$  e  $d_1$  não estão bem definidas, uma vez que  $d(f(x), g(x))$  pode assumir valores arbitrariamente grandes. Com isso, essa noção de distância será útil para casos em que funções estão suficientemente próximas. Nesse caso diremos que  $f$  e  $g$  são  $C^r - \epsilon$  – próximas para algum  $\epsilon > 0$ .

**Definição 5.2.** *Seja  $f : X \rightarrow X$ . Dizemos que  $f$  é estruturalmente estável em  $X$ , se existe  $\epsilon > 0$  tal que sempre que  $d_r(f, g) < \epsilon$ , então  $f$  é topologicamente conjugada a  $g$ .*

Para auxiliar a compreensão da dinâmica no círculo vamos recorrer ao levantamento de um homeomorfismo no círculo, uma função em  $\mathbb{R}$ . Mas antes, defina  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a projeção de  $\mathbb{R}$  em  $S^1$ , tal que

$$\pi(x) = \exp(2\pi ix) = \cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x).$$

Em [2] é possível verificar a existência de um homeomorfismo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\pi \circ F = f \circ \pi,$$

para  $f$  um homeomorfismo em  $S^1$ . chegamos então à seguinte definição:

**Definição 5.3.** *Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um homeomorfismo crescente.  $F$  é chamada de levantamento de  $f : S^1 \rightarrow S^1$  se satisfaz*

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

A definição anterior pode ser representada no diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \pi & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \pi \\ & & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & & f & & \end{array}$$

**Exemplo 5.1.** *Seja  $f_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ . Para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , a função  $F(x) = x + \lambda + k$  é um levantamento de  $f_\lambda$ . Similarmente, para  $-1 < \epsilon < 1$  a função  $T(x) = x + \frac{\epsilon}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x) + k$  é um levantamento de  $\tau(\theta) = \theta + \epsilon \operatorname{sen}(\theta)$  para cada  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Observe que  $\pi$  não é uma conjugação topológica, uma vez que não se trata de uma função injetora. Desse modo, é esperado que  $F$  e  $f$  tenham dinâmicas diferentes. Além disso, é possível criar uma infinidade de outros levantamentos à partir de um. Isso motiva o seguinte resultado:

**Proposição 5.1.** *Quaisquer dois levantamentos de  $f$  diferem por um inteiro.*

*Demonstração.* Sejam  $F_1$  e  $F_2$  levantamentos de  $f$ . Por hipótese temos que  $\pi \circ F_1 = f \circ \pi$  e  $\pi \circ F_2 = f \circ \pi$ . Então

$$\pi(F_1(x)) = \pi(F_2(x)). \tag{5.1}$$

De (5.1) segue que

$$\cos(2\pi F_1(x)) + i\operatorname{sen}(2\pi F_1(x)) = \cos(2\pi F_2(x)) + i\operatorname{sen}(2\pi F_2(x)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\cos(2\pi F_1(x)) &= \cos(2\pi F_2(x)) \\ \operatorname{sen}(2\pi F_1(x)) &= \operatorname{sen}(2\pi F_2(x)).\end{aligned}$$

E, portanto

$$F_1(x) = F_2(x) + k.$$

com  $k \in \mathbb{Z}$

□

**Proposição 5.2.** *Seja  $F$  um levantamento de  $f$ . Então  $F(x+1) = F(x) + 1$ .*

*Demonstração.* Note que  $\pi(x) = \pi(x+1)$ . Consequentemente

$$f(\pi(x)) = f(\pi(x+1))$$

e

$$\pi \circ F(x) = \pi \circ F(x+1),$$

no qual implica

$$F(x+1) = F(x) + k \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Para provar que  $k = 1$ , suponhamos inicialmente que  $k \geq 2$ . Então  $F(x+1)$  e  $F(x)$  diferem por um número maior ou igual à dois. Tomando pontos  $x_0$  e  $x_1$  tais que  $F(x_0) = n$  e  $F(x_1) = n+1$  com  $n \in \mathbb{N}$  temos que as imagens de  $x_0$  e  $x_1$  diferem por uma unidade. Como  $F$  é um homeomorfismo crescente afirmamos que  $x_0$  e  $x_1$  pertencem à um intervalo da forma  $(x, x+1)$ . Além disso, note que

$$\begin{aligned}\pi(F(x_1)) &= \pi(F(x_0) + 1) \\ &= \pi(F(x_0))\end{aligned}$$

o que significa que  $f(\pi(x_1)) = f(\pi(x_0))$ . Como  $f$  é um homeomorfismo, temos que  $\pi(x_0) = \pi(x_1)$  e, portanto,  $x_0$  e  $x_1$  representam o mesmo ponto em  $S^1$ . Por outro lado, o fato de  $|x_1 - x_0| < 1$  implica que a imagem deles por  $\pi$  é diferente, levando a suposição à uma contradição. Assim,  $k \leq 1$ .

Suponha agora  $k = 0$ . Temos que  $F(1) = F(0)$ , contradizendo  $F$  ser estritamente crescente em  $\mathbb{R}$ . Se  $k < 0$  então  $F$  projetaria uma orientação reversa em  $f$ . Portanto  $k = 1$ . De maneira geral, é possível verificar que  $F(x+k) = F(x) + k$  com  $k$  inteiro. □

Consequentemente,

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) - x.$$

Isso mostra que a função  $F(x) - id(x)$  tem período um. Da mesma forma,  $F^n - id$  é periódica de período um, uma vez que  $F^n$  é um levantamento de  $f^n$ . Segue diretamente que, se  $|x - y| < 1$ , então  $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$ .

Um dos principais invariantes associado a aplicações no círculo é o número de rotação. Essencialmente, esse número é um valor entre 0 e 1 que determina a média de pontos que são girados por uma iteração de uma aplicação. Antes de definir formalmente esse número vamos introduzir um conceito preliminar. Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  uma translação que preserva orientação e escolha qualquer levantamento  $F$  de  $f$ . Defina

$$\rho_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}.$$

Afirmamos que esse limite, quando existe, não depende do valor de  $x$ . De fato. Inicialmente note que

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq |(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| + |x - y|. \quad (5.2)$$

Note que para  $x$  e  $y$  reais, existem  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{Z}$  tais que  $x \in (x_0, x_0+1)$  e  $y \in (x_0+m, x_0+m+1)$ .

Disso segue que  $y - m \in (x_0, x_0 + 1)$ , e mais, como  $F^n - id$  é periódica temos que

$$F^n(y) - y = F^n(y - m) - (y - m).$$

Logo,

$$|(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| < 1.$$

De [5.2](#) segue que

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq 1 + |x - y|.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x) - F^n(y)|}{n} = 0.$$

Isso mostra que  $\rho_0(F)$ , se existe, independente de  $x$ .

**Exemplo 5.2.** Tome  $f_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$  uma translação no círculo e considere  $F_\lambda(x) = x + \lambda + k$  o levantamento de  $f$ . Temos

$$\rho_0(F_\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + n\lambda + nk}{n} = \lambda + k.$$

Isto é, diferentes levantamentos para  $f_\lambda$  produzem diferentes  $\rho_0$  que diferem por um inteiro. Esse exemplo abre caminho para o fato mais geral. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  levantamentos para  $f$ . Como mostrado anteriormente, existe  $c$  inteiro tal que  $F_2(x) = F_1(x) + c$ . Da Proposição [5.2](#) segue facilmente que  $F_2^n(x) = F_1^n(x) + nc$ . E então  $\rho_0(F_2) = \rho_0(F_1) + c$ .

**Exemplo 5.3.** Suponha que  $f : S^1 \rightarrow S^1$  tenha um ponto fixo em  $\theta = 0$ . Suponha  $F$  um levantamento de  $f$ . Então  $F(0) = k$  para  $k$  inteiro. De fato,

$$\begin{aligned}\pi(F(0)) &= f(\pi(0)) \\ &= f(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo,  $\pi(F(0)) = 0$  implica que  $F(0) = k$  para  $k$  inteiro. Disso, segue que  $F^n(0) = kn$  e  $\rho_0(F) = k$ . Como  $\rho_0$  independe do valor de  $x$  segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = k$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Agora vamos finalmente definir o número de rotação de  $f$  no círculo.

**Definição 5.4.** O número de rotação de  $f$ ,  $\rho(f)$ , é a parte fracional de  $\rho_0(F)$  para qualquer levantamento de  $f$ . Isto é,  $\rho(f)$  é o único número  $[0, 1)$  tal que  $\rho_0(F) - \rho(f)$  é um inteiro.

Note que essa definição só estará bem definida se for possível garantir que  $\rho_0(F)$  existe. Além disso, observe que se  $\rho_0$  existe, então é possível eliminar a sua dependência do levantamento eliminando a parte inteira de  $\rho_0$ .

**Teorema 5.1.** Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação no círculo. Tome  $F$  um levantamento de  $f$ . Então

$$\rho_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n}.$$

existe e independe de  $x$ . Consequentemente, o número de rotação  $\rho(f)$  está bem definido.

*Demonstração.* Inicialmente suponha que  $f^m(\theta) = \theta$  e  $\pi(t) = \theta$ . Então,  $F^m(t) = t + k$ . Consequentemente,  $F^{jm}(t) = t + jk$  e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(t)|}{jm} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{t}{jm} + \frac{k}{m} \right) = \frac{k}{m}.$$

Mais geral, podemos escrever qualquer inteiro  $n$  da forma  $n = jm + r$  com  $j, r \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r < m$ . Note que para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $b$  inteiro tal que  $x - b$  pertence ao intervalo  $[0, 1]$ . Como já visto anteriormente,

$$F(x) - x = F(x - b) - (x - b).$$

Da continuidade de  $F^n - id$  em  $[0, 1]$  segue que existem  $M_i$  com  $0 < i \leq r$  tal que

$$\begin{aligned} |F(x) - x| &< M_1 \\ |F^2(x) - x| &< M_2 \\ &\vdots \\ |F^r(x) - x| &\leq M_r. \end{aligned}$$

Tomando  $M = \max\{M_1, \dots, M_r\}$  temos que

$$|F^r(x) - x| < M$$

para todo  $x$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{|F^n(t) - F^{jm}(t)|}{n} &= \frac{|F^r(F^{jm})(t) - F^{jm}(t)|}{n} \\ &\leq \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(t)|}{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(t)|}{jm} = \frac{k}{m}.$$

Isso mostra que  $\rho(f)$  existe sempre que  $f$  possui pontos periódicos. Além disso,  $\rho(f)$  é racional nesse caso. Para o caso em que  $f$  não possui pontos periódicos, note que dessa suposição temos que  $F^n(x) - x$  nunca será um inteiro se  $n \neq 0$ . Então existe  $k_n$  tal que  $k_n < F^n(x) - x$  para todo  $x$ . Como  $F^n - id$  é contínua, segue que

$$k_n < F^n(x) - x < k_n + 1 \tag{5.3}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Tomando  $x = 0$  e aplicando  $F^n(0)$  repetidas vezes na inequação [5.3](#) obtemos

$$\begin{aligned} k_n &< F^n(0) < k_n + 1 \\ k_n &< F^{2n}(0) - F^n(0) < k_n + 1 \\ &\vdots \\ k_n &< F^{mn}(0) - F^{(m-1)n} < k_n + 1. \end{aligned}$$

Somando todas as inequações temos

$$mk_n < F^{mn}(0) < m(k_n + 1).$$

Consequentemente

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{k_n + 1}{n}. \tag{5.4}$$

Da inequação original temos

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^n(0)}{n} < \frac{k_n + 1}{n}. \quad (5.5)$$

Juntando (5.4) e (5.5) obtemos

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Repetindo o mesmo argumento mas invertendo  $n$  e  $m$  obtemos

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{m}.$$

Segue que

$$\left| \frac{F^n(0)}{n} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Isso significa que a sequência  $\{F^n(0)/n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  e, portanto, converge. Com isso a demonstração está completa.  $\square$

A demonstração do Teorema acima também nos permite estabelecer um resultado de que  $\rho(f)$  depende continuamente de  $f$ , conforme ilustra o seguinte corolário

**Corolário 5.1.** *Suponha  $f$  um homeomorfismo que preserva orientação em  $S^1$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $g : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação no qual é  $C^0 - \delta$  próximo de  $f$ , então  $|\rho(f) - \rho(g)| < \epsilon$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, escolha  $n$  de tal forma que  $2/n < \epsilon$ . Além disso, escolha um levantamento de  $f$  de modo que  $r - 1 < F^n(0) < r + 1$  para um  $r$  inteiro. Podemos escolher  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de modo para  $g$   $C^0 - \delta$  próximo de  $f$  tem-se que  $r - 1 < G^n(x) < r + 1$  para  $G$  levantamento de  $g$ . Como visto no Teorema 5.1, temos

$$m(r - 1) < F^{nm}(0) < m(r + 1)$$

$$m(r - 1) < G^{nm}(0) < m(r + 1).$$

Consequentemente

$$\left| \frac{F^{nm}(0)}{mn} - \frac{G^{nm}(0)}{nm} \right| < \frac{2}{n} < \epsilon.$$

para todo  $m$ . Uma vez que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^{nm}(0)}{m} = \rho_0(F),$$

a demonstração está completa.  $\square$



A demonstração do Teorema [5.1](#) mostra que se  $f$  possui um ponto periódico, então  $\rho(f)$  é racional. Podemos questionar o contrário, se  $\rho(f)$  é racional então  $f$  possui pontos periódicos? O resultado que segue responde exatamente essa pergunta. A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrado em [3](#).

**Teorema 5.2.**  $\rho(f)$  é racional se, e somente se,  $f$  possui um ponto periódico.

*Demonstração.* Como a recíproca do teorema está feita na demonstração do Teorema [5.1](#) é suficiente que demonstremos apenas a ida, isto é, se  $\rho(f)$  é racional então  $f$  possui um ponto periódico. Para isso, observe que para  $F$  levantamento de  $f$  e  $m$  inteiro, tem-se que  $\rho_0(F^m) = m\rho_0(F)$ .

Agora, assumamos  $\rho_0(F) = p/q$  com  $p$  e  $q$  inteiros e  $q \neq 0$ . Então,  $(q\rho_0(F) - p) = 0$ , o que significa que a função  $G := F^q - p$  tem número de rotação 0. Note ainda que se  $G$  possui um ponto fixo, então,  $f$  possui um ponto periódico (de período  $q$ ). Suponha agora que  $G$  não possua ponto fixo. Então  $G(x) > x$  ou  $G(x) < x$  para todo  $x$ . Assumindo  $G(x) > x$ , observe que  $\{G^n(0)\}$  é limitado por 1. De fato. Suponha que exista  $k > 0$  tal que  $G^k(0) > 1$ . Então,

$$G^{2k}(0) = G^k(G^k(0)) > G^k(1) = G^k(0 + 1) = G^k(0) + 1 > 2.$$

Repetindo o processo conclui-se que  $G^{nk} > n$  para todo  $n > 0$ . E daí obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^{nk}(0)}{nk} > \frac{1}{k},$$

contradizendo  $\rho_0(G) = 0$ . Consequentemente, a sequência  $\{G^n(0)\}$  deve convergir para algum  $y$ . Em outras palavras,

$$\begin{aligned} G(y) &= G\left(\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(0)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} G(G^n(0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} G^{n+1}(0) = y, \end{aligned}$$

contradizendo a suposição de que  $G$  não possui ponto fixo, o que finaliza a demonstração.  $\square$

Note ainda que, do resultado estabelecido acima obtém-se o seguinte resultado:

**Teorema 5.3.**  $\rho(f)$  é irracional se, e somente se,  $f$  não possui ponto periódico.

**Definição 5.5.** (*Diferenciabilidade em  $S^1$* ) Sejam  $f : S^1 \rightarrow S^1$  e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f$ . Dizemos que  $f$  é derivável em  $a \in S^1$  se  $F$  é derivável em algum  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(b) = a$ . Definimos então a derivada  $f$  em  $a$  por  $f'(a) = F'(b)$ . Dizemos que  $f$  é uma aplicação diferenciável se possui

derivada em todos os pontos de  $S^1$ . Note que essa diferenciabilidade em  $S^1$  está bem definida, uma vez que se  $b, c \in \mathbb{R}$  são tais que  $\pi(b) = a = \pi(c)$  então  $b - c = k \in \mathbb{Z}$ . Supondo que  $F'(c)$  exista, temos

$$\begin{aligned} F(b+h) - F(b) &= F(c+k+h) - F(c+k) \\ &= F(c+h) + k - F(c) - k = F(c+h) - F(c). \end{aligned}$$

Obtemos então

$$\frac{F(b+h) - F(b)}{h} = \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Desde que  $F'(c)$  exista, segue que  $F'(b) = F'(c)$ .

**Definição 5.6.** Um difeomorfismo que preserva orientação em  $S^1$  é chamado de Morse-Smale se possui número de rotação racional e todos os seus pontos periódicos são hiperbólicos.

**Lema 5.1.** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  e  $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$  homeomorfismos tais que  $f(x) > x$  para todo  $x \in (a, b)$  e  $g(x) > x$  para todo  $x \in (c, d)$ . Então  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas.

*Demonstração.* Tome  $\alpha \in (a, b)$  e  $\beta \in (c, d)$  arbitrários. Note que, pela hipótese temos que  $f(x) > x$ , o que implica que  $f^n(x)$  é uma seqüência crescente com relação a  $n \in \mathbb{Z}$ . Além disso, a Proposição [1.6](#) nos garante a existência de pontos fixos nessas condições e, portanto, eles só podem ser  $a$  e  $b$ , uma vez que  $f$  é bijetora. Agora, como  $[a, b]$  é compacto, temos que  $f^n(x)$  converge para algum ponto quando  $n \rightarrow \infty$  e para outro ponto a direita quando  $n \rightarrow -\infty$ . Pela continuidade de  $f$  eles só podem ser os pontos fixos e, portanto, são respectivamente  $a$  e  $b$ . Aplicando o mesmo argumento para  $g$  podemos escrever  $(a, b)$  e  $(c, d)$  como

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)] = (a, b) \quad e \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n(\beta), g^{n+1}(\beta)] = (c, d).$$

Note que a imagem de cada intervalo é um intervalo adjacente e disjuto e por isso, para todo  $x \in (a, b)$  existe um único  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$ . Analogamente, para  $x \in (c, d)$  existe um único  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $g^n(x) \in [\beta, g(\beta)]$ . Seja  $H : [\alpha, f(\alpha)] \rightarrow [\beta, g(\beta)]$  um homeomorfismo tal que  $H(\alpha) = \beta$  (uma vez que os intervalos são do mesmo tipo esse homeomorfismo existe). Agora defina  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  tal que  $h(x) = (g^{-n} \circ H \circ f^n)(x)$  para  $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$ ,  $h(a) = c$  e  $h(b) = d$ . Note que  $h$  é contínua nos intervalos  $[f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)]$  para todo  $n$ , uma vez que para cada restrição  $h$  é composição de homeomorfismos fixos. Portanto, para verificar a continuidade em  $[a, b]$  é suficiente que seja garantido a continuidade nas fronteiras de cada um dos intervalos. Então, fixe  $f^n(\alpha)$  para algum  $n$  e tome  $(x_k)$  e  $(y_k)$  duas seqüências tais que  $(x_k)$  converge para  $f^n(\alpha)$  pela direita e  $(y_k)$

converge para  $f^n(\alpha)$  pela esquerda. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} g^k \circ H \circ f^{-k}(x_k) \\
&= g^k \circ H(\alpha) \\
&= g^k(\beta) \\
&= g^{k-1}(g(\beta)) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} g^{k-1} \circ H \circ f^{-k+1}(y_k) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} h(y_k)
\end{aligned}$$

E, portanto,  $h$  é contínua em  $f^n(\alpha)$ . Agora,  $h$  é uma bijeção contínua entre dois compactos, logo é um homeomorfismo. Agora, note que  $h$  conjuga  $f$  e  $g$ . Tomando  $x \in [a, b]$  com  $f^k(x) \in [\alpha, f(\alpha))$  temos:

$$\begin{aligned}
h \circ f(x) &= g^{-k+1} \circ H \circ f^{k-1}(f(x)) \\
&= g \circ (g^{-k} \circ H \circ f^k)(x) = g \circ h(x).
\end{aligned}$$

□

O resultado a seguir é um caso particular no que diz respeito a estabilidade estrutural de difeomorfismos Morse-Smale. O caso geral pode ser visto em [4].

**Proposição 5.3.** *Um difeomorfismo Morse-Smale com número de rotação zero (ou seja, com pontos fixos) em  $S^1$  é  $C^1$  – estruturalmente estável.*

*Demonstração.* Seja  $F$  um levantamento de  $f$  que possua apenas pontos fixos. Desde que  $f$  seja Morse-Smale,  $F$  possui uma finidade de pontos fixos em  $[0, 1]$ , sendo eles  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  pontos fixos consecutivos. Seja  $U_i = (\alpha_i, \beta_i)$  uma vizinhança de cada  $p_i$  com  $F'(x) \neq 1$  para  $x \in U_i$ . Existe  $\epsilon_i > 0$  tal que  $|F'(x) - 1| > \epsilon_i$  para cada  $x \in U_i$ , e além disso  $|F(\alpha_i) - \alpha_i| > \epsilon_i$  e  $|F(\beta_i) - \beta_i| > \epsilon_i$ . Daí, se um homeomorfismo  $G$  é  $C^1 - \epsilon_i$  próximo de  $F$  em  $U_i$ , segue que  $G'(x) \neq 1$  em  $U_i$  e  $G$  possui um único ponto fixo nesse conjunto.

Agora, se  $F$  não possui nenhum ponto fixo no complementar da união dos  $U_i$  temos que existe  $\epsilon_0$  tal que  $|F(x) - x| > \epsilon_0$  para todo  $x$  no complementar. Analogamente, se  $G$  é  $C^0 - \epsilon_0$  próximo de  $F$  nesse conjunto, então  $G$  também não possui pontos fixos nessa região. Tomando  $\epsilon = \{\epsilon_j; j = 0, \dots, n\}$  então qualquer homeomorfismo  $G$  no qual é  $C^1 - \epsilon$  próximo de  $F$  possui o mesmo retrato de fases que  $F$ . Com isso obtemos que  $G$  possui uma finidade de pontos fixos assim como  $F$ , isto é,  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  é o conjunto dos pontos fixos para  $G$ . Se  $G$  é um levantamento de  $g$  um difeomorfismo em  $S^1$ , então

podemos aplicar os mesmos argumentos acima, o que garante que  $g$  é Morse-Smale e possui o mesmo retrato de fases de  $f$ .

Defina  $I_i = [p, p_{i+1}]$ . Então, pela Proposição [5.1](#),  $F$  restrita a  $I_i$  é conjugada com  $G$  restrita a  $L_i$ , com  $L_i = [q_i, q_{i+1}]$ . Chame  $h_i$  a conjugação referente ao intervalo  $I_i$  e defina  $H : [p_1, p_n] \rightarrow [q_1, q_n]$  como  $H(x) = h_i(x)$  se  $x \in I_i$ . Note que se  $x$  pertence a mais de um intervalo, então ele é da forma  $p_i$ , e pela forma como foram construídos os homeomorfismos, temos que  $h(p_i) = q_i = h_{i+1}(p_i)$ . Isso nos garante a continuidade de  $H$  na fronteira dos  $I_i$ . Naturalmente  $H$  é uma bijeção e sua inversa é dada por  $H^{-1}(y) = h_i^{-1}(y)$  com  $y \in L_i$ , que também é contínua.

Desde que  $H$  conjugua  $F$  restrita a  $[p_1, p_n]$  a  $G$  restrita  $[q_1, q_n]$  pode-se definir  $h : S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $h(\pi(x)) = \pi \circ H(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned} h \circ f(\pi(x)) &= h \circ \pi \circ F(x) \\ &= \pi \circ H \circ F(x) \\ &= \pi \circ G \circ H(x) \\ &= g \circ \pi \circ H(x) = g \circ h(\pi(x)). \end{aligned}$$

□

# Considerações finais

Com o estudo da família quadrática pode-se ter um primeiro contato com fenômenos relacionados ao caos. Para determinados parâmetros ela gera um conjunto invariante que é hiperbólico, é um conjunto de Cantor e possui estabilidade estrutural. Na mesma perspectiva, os estudos da dinâmica de  $S^1$  por meio de difeomorfismos Morse-Smale demonstram ainda a possibilidade de se aproximar qualquer difeomorfismo no círculo por um que seja Morse-Smale, evidenciando, portanto, que o conjunto dessas aplicações representam um objeto potencialmente capaz de gerar resultados muito interessantes para dinâmica unidimensional.

# Referências Bibliográficas

- [1] DEVANEY, Robert L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. 2. ed. Redwood City: Addison-Wesley, 1989.
- [2] GELFERT, Katrin. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-SisDin/2017-1-SisDin.pdf>. Acesso em: 13 de setembro de 2020.
- [3] CIRCLE Homeomorphisms. Disponível em: [https://users.math.msu.edu/users/hhu/840/lec\\_4.pdf](https://users.math.msu.edu/users/hhu/840/lec_4.pdf). Acesso em: 19 de novembro de 2020.
- [4] FRANÇA, Luiz F. N. **Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos Morse-Smale do Círculo**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Rio de Janeiro. 2008.
- [5] ABDENUR, L. FRANÇA, Luiz F. N. **Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em dimensão um**. 26° Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2007.
- [6] LIMA, Elon L. **Espaços Métricos**. 2 ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.