

LORRAINE APARECIDA SILVA

**MODELAGEM AEROVISCOELÁSTICA DE PAINÉIS
SANDUÍCHES PLANOS VIA MÉTODO DOS PAINÉIS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2018

LORRAINE APARECIDA SILVA

**MODELAGEM AEROVISCOELÁSTICA DE PAINÉIS SANDUÍCHES
PLANOS VIA MÉTODO DOS PAINÉIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Co-orientador: Prof. Dr. Tobias Souza Morais

UBERLÂNDIA – MG

2018

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 Silva, Lorraine Aparecida, 1993-
2018 Modelagem aeroviscoelástica de painéis sanduíches planos via
método dos painéis [recurso eletrônico] / Lorraine Aparecida Silva.
- 2018.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Coorientador: Tobias Souza Morais.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.2357>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de,
1975-, (Orient.). II. Morais, Tobias Souza, 1981-, (Coorient.). III.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



TERMO

ALUNA: Lorraine Aparecida Silva

MATRÍCULA: 11722EMC007

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações **LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica de Sistemas Mecânicos

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: “Modelagem Aeroviscoelástica de Painéis Sanduíches Planos via Método dos Painéis”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima **CO-ORIENTADOR:** Prof. Dr. Tobias Souza Morais

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Anfiteatro B do Bloco 50, Campus Santa Mônica, em 21 de setembro de 2018, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima	UFU
Prof. Dr. Tobias Souza Morais	UFU
Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior	UFU
Prof. Dr. Marcelo Leite Ribeiro	USP

Uberlândia, 21 de setembro de 2018



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/09/2018, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tobias Souza Morais, Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/09/2018, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/09/2018, às 11:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Leite Ribeiro, Usuário Externo**, em 21/09/2018, às 11:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0728748** e o código CRC **EB384F88**.

Primeiramente agradeço a Deus, que me ajudou em cada etapa desse trabalho e não me deixou fraquejar. Dedico esse trabalho aos meus amados pais Teresinha Divina de Moraes Silva e Marcos Eli Silva, que foram meu maior apoio nos momentos de angústia. A minha luta, sempre foi a de vocês. A minha vitória, será eternamente nossa!

AGRADECIMENTOS

Eu te agradeço, meu Deus, pois na tua palavra encontro a força que preciso para continuar caminhando.

Agradeço a Nossa Senhora Aparecida que nas horas mais obscuras sempre segurou minha mão me mostrando o caminho a seguir.

Agradeço infinitamente aos meus pais, Teresinha Divina e Marcos Eli, pelo apoio incondicional, carinho e incentivo em todas as etapas da minha vida, por todas as vezes que pensei em desistir e vocês foram meu exemplo de superação.

À minha família pela paciência e apoio durante esta etapa.

Agradeço imensamente ao professor Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima que pacientemente tem me incentivado e me guiado durante os anos de iniciação científica e mestrado com dedicação e amizade

Gostaria também de agradecer ao professor Dr. Tobias Souza Morais, por toda paciência e dedicação nos últimos meses, não medindo esforços para que eu pudesse concluir este trabalho.

Aos amigos que mesmo estando longe nunca deixaram de me apoiar e não me deixaram fraquejar, em especial Lewton Machado, Isabela Iuriko e Juliana Pelizzaro.

Aos meus colegas do LMest pela ajuda no trabalho e pelos ótimos dias proporcionados, em especial Lorrane e Lauren por todo companheirismo e risadas.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Ao programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade de realizar este trabalho.

SILVA, L. A. **Modelagem aeroviscoelástica de painéis sanduíches planos via método dos painéis**. 2018. 107p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo a modelagem aeroviscoelástica de um painel sanduíche de três camadas, sendo uma camada de base, uma camada viscoelástica e uma camada restringente. A fim de analisar a influência do tratamento viscoelástico na resposta dinâmica do sistema submetido a um carregamento não-estacionário. O carregamento aerodinâmico será modelado a partir do Método Doublet Lattice (DLM), que permite a obtenção da matriz de forças aerodinâmicas (Q) no domínio da frequência, sendo baseado na teoria dos modos assumidos. Além disso, o cálculo estrutural será realizado de forma independente utilizando o método dos elementos finitos aliado à teoria de placas finas de Kirchhoff para as camadas elásticas, e a teoria de Mindlin combinada com o modelo das derivadas fracionárias (MDF) para camada viscoelástica. No decorrer do trabalho, ainda serão descritos os principais métodos de predição da velocidade crítica de *flutter*, que em conjunto com o método de interpolação por *splines* permite realizar o acoplamento aerodinâmico e viscoelástico. Por fim, será avaliado a influência do tratamento viscoelástico em uma estrutura já existente, além da influência de parâmetros ambientais e operacionais na velocidade crítica de *flutter* do painel tratado viscoelasticamente.

Palavras chave: Doublet Lattice, aeroelasticidade, flutter, materiais viscoelásticos, controle passivo

SILVA, L. A. **Proposition of an eroviscoelastic model of sandwich flat panels using the panels methods**. 2018. 107f. M.Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

ABSTRACT

The present work has as main objective the proposition of an aeroviscoelastic model of a sandwich panel of three layers, being a base layer, a viscoelastic layer and a constrained layer. In order to analyze the influence of viscoelastic damping treatment in the dynamic response of the system subjected to an unsteady flow. The aerodynamic loading will be calculated using the Doublet Lattice Method (DLM), which allows obtaining the matrix of aerodynamic forces (Q) in the frequency domain and is based on the theory of the assumed modes. In addition, the structural calculation will be performed independently using the finite element method (MEF) coupled with Kirchhoff thin plate theory for the elastic layers, and the Mindlin's theory combined with the fractional derivative model (MDF) for the viscoelastic layer. In the course of the work, the more usual methods for predicting the critical *flutter* velocity will be described, which together with the spline interpolation method allows coupling the aerodynamic and viscoelastic effects. Finally, the influence of the viscoelastic treatment on an already existing structure will be evaluated, as well as the influence of environmental and operational parameters on the critical *flutter* velocity.

Keywords: Doublet Lattice, aeroelasticity, flutter, viscoelastic materials, passive control

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Triângulo de forças de Collar. (adaptado de BISPLINGHOFF <i>et al</i> 2013).	3
Figura 1.2 - Tipos de tratamentos viscoelásticos: tratamento superficial por camada restrita passiva (a), tratamento superficial por camada livre passiva (b), por apoios translacionais (c) e juntas rotacionais (d). (adaptado de DIACENCO, 2010).....	5
Figura 1.3 - Exemplo de aplicação de materiais viscoelásticos na indústria automotiva. (extraído do site do fabricante: https://www.eftec.ch/en/products-applications).....	6
Figura 1.4 - Exemplo de aplicação de materiais viscoelásticos na indústria aeronáutica. (extraído do site do fabricante: https://earglobal.com/en/aircraft/applications/fuselage/).....	7
Figura 2.1 -Representação gráfica do fenômeno do <i>flutter</i> . (adaptado de HENSHAW, 2007)	12
Figura 3.1 - Ilustração do elemento de placa de três camadas (adaptado de LIMA, 2007).	17
Figura 3.2 – Cinemática da deformação do elemento de placa sanduíche (adaptado de LIMA <i>et al.</i> , 2006).....	17
Figura 3.3 - FRFs de uma viga com material viscoelástico (adaptada de NASHIF <i>et al</i> , 1985).	27
Figura 3.4 - Variação de E' e η de um material viscoelástico qualquer em função da temperatura para uma frequência constante (adaptada de LIMA, 2003).....	28
Figura 3.5 - Variações de E' e η com a frequência para uma temperatura constante (adaptada de NASHIF <i>et al</i> , 1985).....	28
Figura 3.6 - Princípio da superposição PSFT (adaptada de LIMA <i>et al</i> , 2010).	29
Figura 4.1 - Idealização da superfície sustentadora usando o método de painéis.....	42
Figura 4.2 - Discretização típica para uma superfície sustentadora.	46
Figura 4.3 - Orientação dos elementos. (extraído de RODDEN <i>et al</i> ,1972)	46
Figura 4.4 - Representação do sistema de coordenadas de cada painel. (extraído de BLAIR, 1992)	47
Figura 5.1 - Exemplo de malha aerodinâmica 2x2 com uma malha estrutural também 2x2.....	52
Figura 5.2 - Exemplo de construção da spline.	53
Figura 5.3 - Exemplo de diagrama Vxg. (extraído de GARRICK; REED III, 1981)	56

Figura 5.4 - Fluxograma do método PK. (Adaptado de BOTEZ <i>et al</i> , 2003).....	58
Figura 5.5 - Método iterativo usado para a análise aerodinâmica de um sistema contendo amortecimento viscoelástico.	62
Figura 6.1 - Comparação do 1º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).	64
Figura 6.2 - Comparação do 2º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).	65
Figura 6.3 - Comparação do 3º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).	65
Figura 6.4 - Comparação do 4º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).	65
Figura 6.5 - Diagramas v-f e v-g obtidos usando a solução 145 do NASTRAN com o método de predição de <i>flutter</i> PK.....	66
Figura 6.6 –Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 25 e 50 m/s, obtido usando a solução 145 do NASTRAN com o método de predição de <i>flutter</i> PK.....	67
Figura 6.7 - Diagramas v-f e v-g obtido utilizando o modelo numérico aliado ao NASTRAN para obtenção do carregamento aerodinâmico.	67
Figura 6.8 –Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 25 e 50 m/s, obtido utilizando o modelo numérico aliado ao NASTRAN para a obtenção do carregamento aerodinâmico.	68
Figura 6.9 – Resultado do teste de convergência de malha do modelo sem tratamento.	69
Figura 6.10 –Comparação do 1º modo da placa sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).	70
Figura 6.11- Comparação do 2º modo da placa sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).	70
Figura 6.12- Comparação do 2º modo da estrutura sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).	70
Figura 6.13- Comparação do 4º modo a estrutura sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).	71
Figura 6.14 –Diagramas v-f e v-g para a placa sanduíche considerando o SCA.....	72
Figura 6.15 – Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 40 e 70 m/s para a placa sanduíche considerando o SCA.	72
Figura 6.16 - Diagramas v-f e v-g para a placa sanduíche considerando o módulo complexo do material viscoelástico.....	74

Figura 6.17 - Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 58 a 75 m/s para a placa sanduíche considerando o módulo complexo do material viscoelástico.....	74
Figura 6.18 - Análise de convergência e tempo de cálculo para o sistema aeroviscoelástico	75
Figura 6.19 - Influência da temperatura para um carregamento aerodinâmico não estacionário.	76
Figura 6.20 - Influência da espessura da camada viscoelástica da placa sanduíche submetida a um carregamento aerodinâmico não estacionário.	77
Figura 6.21 - Influência da espessura da camada restringente da placa sanduíche submetida a um carregamento aerodinâmico não estacionário.	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Coeficientes para o cálculo de aproximação de J_1	45
Tabela 6.1 – Propriedades geométricas do painel sanduiche viscoelástico.	63
Tabela 6.2 – Propriedades mecânicas do painel sanduíche viscoelástico.	63
Tabela 6.3 – Comparação das frequências naturais dos modelos em MATLAB e ANSYS.	64
Tabela 6.4 – Comparação das frequências naturais da placa sem tratamento, com tratamento SCA e considerando o módulo complexo.....	75

LISTA DE SÍMBOLOS

(x, y, z) : sistema de coordenadas cartesiano

(ξ, η, ζ) : sistema de coordenadas móvel do painel

$[S]$: matriz de áreas dos painéis

$[N(x, y)]$: matriz de funções de forma para placa sanduíche

$[K]$: matriz de rigidez total

$[K_e]$: matriz de rigidez elástica

$[K_v]$: matriz de rigidez viscoelástica

$[M]$: matriz de massa

$[D(x, y)]$: matriz de operadores diferenciais aplicada a matriz de funções de forma $N(x, y)$

$[M_{hh}], [K_{hh}], [C_{hh}]$: matrizes de massa, rigidez e amortecimento no domínio modal, respectivamente

$[AIC]$: matriz de coeficientes de influência aerodinâmica

$[Q(k)]$: matriz de forças aerodinâmicas

$\{U_j\}$: vetor de deslocamentos do elemento j

$\{\delta_j\}$: vetor de deslocamentos do elemento j para placa sanduíche

ax : comprimento do elemento

by : largura do elemento

b : comprimento de referência (semi-corda)

AA : comprimento total da placa

BB : largura total da placa

D : módulo de resistência a flexão

$E^{(k)}$: módulo de Young da camada da k -ésima camada

e : largura do painel na direção y projetado no sistema de coordenadas móvel

g : amortecimento estrutural artificial.

h_k : espessura da camada k

h : deformação modal na direção z

$G(i\omega)$: módulo complexo de cisalhamento do material viscoelástico

G_0 : módulo complexo de cisalhamento do material viscoelástico em baixa frequência

J_1 : aproximação de Laschka

k : frequência reduzida do sistema

$K(x, y, z)$: função de Kernel

L : largura do painel na direção y

M : número de Mach

$T^{(k)}$: energia cinética para o elemento para a k-ésima camada

T_v : temperatura de operação do viscoelástico

U_∞ : velocidade do escoamento

$U^{(k)}$: energia potencial de deformação para a k-ésima camada

$\bar{w}(x, y, t)$: *downwash* do painel

$\bar{w}_{nd}(x, y, t)$: *downwash* adimensionalizado por painel

ΔC_p : variação do coeficiente de pressão

Letras gregas

θ_x : ângulo de rotação em torno do eixo x

θ_y : ângulo de rotação em torno do eixo y

ε_x : deformação na direção x

ε_y : deformação na direção y

γ_{xy} : rotação entre as direções x e y

γ_{yz} : rotação entre as direções y e z

γ_{xz} : rotação entre as direções x e z

σ_x : tensão na direção x

σ_y : tensão na direção y

τ_{xy} : tensão cisalhante entre x e y

$\nu^{(k)}$: coeficiente de Poisson da camada k

$\rho^{(k)}$: densidade da k-ésima camada

ρ_{ar} : densidade do ar

$\eta(\omega)$: fator de perda do material viscoelástico

$\Phi(x, y, z)$: potencial de velocidade

$\bar{\psi}(x, y, z)$: potencial de aceleração

LISTA DE ABREVIações

- CFD: Flúidodinâmica computacional (*Computational Fluid Dynamics*)
CLD: Tratamento com camada restringente (*Constrained-Layer Damping*)
DLM: Método Doublet Lattice
DSM: Método Doublet Sheet
FLD: Tratamento com camada livre (*Free-Layer Damping*)
FRFs: Funções de resposta em frequência
GDLs: Graus de liberdade
MDF: Modelo de derivadas fracionárias
MEF: Modelo de elementos finitos
PSFT: Princípio da Superposição Frequência-Temperatura
VLM: Método Vortex Lattice

SUMÁRIO

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de figuras	vii
Lista de tabelas.....	x
Lista de símbolos.....	xi
Lista de abreviações	xiv
Sumário	xv
Capítulo I	1
INTRODUÇÃO	1
Capítulo II	9
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1. Aerodinâmica não estacionária: Método Doublet-Lattice.....	9
2.2. Acoplamento aeroelástico para escoamento não-estacionário e <i>flutter</i>	11
2.3. Uso de materiais viscoelásticos para o controle do <i>flutter</i>	13
Capítulo III	16
MODELO DINÂMICO ESTRUTURAL - PLACAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS	16
3.1. Relações cinemáticas	16
3.1.1. Relações tensão -deformação.....	18
3.1.2. Discretização por elementos finitos	22
3.1.3. Equações do movimento, resposta em frequência e resposta em tensão	23
3.2. Amortecimento viscoelástico.....	26
Capítulo IV.....	31
MODELO AERODINÂMICO.....	31
4.1. Formulação matemática do método DLM	31

4.2. Aplicação do método DLM	41
Capítulo V	51
MODELO AEROVISCOELÁSTICO	51
5.1. Modelo aerodinâmico generalizado	51
5.1.1. Construção da malha de spline	52
5.1.2. Carregamento aerodinâmico no domínio modal	53
5.2. Métodos para predição da velocidade de <i>flutter</i>	55
5.2.1. Método de solução K.....	55
5.2.2. Método de solução PK	57
5.2.3. Método de solução P.....	58
5.3. Implementação numérica do método PK para o modelo aeroviscoelástico..	60
Capítulo VI.....	63
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	63
6.1. Verificação do modelo estrutural sem tratamento	63
6.2. Verificação do modelo aeroelástico sem tratamento.....	66
6.3. Avaliação da influência do tratamento viscoelástico.....	69
6.3.1. Influência do comportamento estático do tratamento viscoelástico no ponto de flutter	71
6.3.2. Influência do efeito dissipativo do tratamento viscoelástico no ponto de flutter.....	73
6.4 Avaliação da convergência após a aplicação do tratamento viscoelástico	75
6.5. Influência da temperatura de operação na velocidade de <i>flutter</i>	76
6.6. Influência da espessura da camada viscoelástica na velocidade de <i>flutter</i> ..	76
Capítulo VII.....	79
CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	79
Referências Bibliográficas	82
ANEXO A.....	91

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, os meios de transporte aéreo vem se popularizando cada vez mais e com o aumento de aeronaves produzidas e, conseqüentemente, o número de passageiros, aumenta-se também a preocupação com a integridade da aeronave e segurança dos usuários. Este contexto faz com que as normas para a aviação civil se tornem cada vez mais exigentes e, por isso, muitas vezes aeronaves mais antigas passam a não atender os pré-requisitos de vibração e ruídos, peso, consumo de combustível, entre outros. Por estas razões, em alguns casos a melhor solução é a aplicação de tratamento na estrutura já existente, a fim de se adequar às normas cada vez mais severas.

Na maioria dos casos, as aeronaves já estão em utilização, fazendo com que seja necessário o desenvolvimento de um projeto rigoroso para que não imponha riscos aos passageiros e à própria estrutura, mas com aumento dos custos desses projetos. Por este motivo, busca-se sempre tornar o projeto mais eficiente e, para isso, pode-se aprimorar uma ou mais etapas do projeto.

Uma etapa de extrema importância no projeto é a análise aerodinâmica da aeronave, que está relacionada à interação entre o ar e a estrutura. A aerodinâmica é uma ciência utilizada em várias aplicações da engenharia. Dentro deste contexto, não importa quão elegante ou complexa seja a teoria aerodinâmica, todas tem os mesmos objetivos principais:

- A predição de forças e momentos em corpos se movendo em direção a um fluido (normalmente ar), como por exemplo, sustentação, arrasto e momentos em aerofólios, asas e fuselagens;
- Determinação da movimentação interna do escoamento através de um tubo, como por exemplo, dentro de um motor (ANDERSON, 2010).

O movimento de um fluido pode ser, em síntese, classificado em duas categorias: escoamentos aerodinâmicos estacionários e não estacionários. A primeira está associada

ao movimento do fluido em torno da forma do corpo, enquanto que a segunda engloba os escoamentos que ocorrem ao redor de corpos que se movem no tempo, induzindo também um movimento do fluido (SILVA, 2009).

Dentre as diversas teorias aerodinâmicas presentes na literatura, três podem ser destacadas por terem aplicações de interesse industrial e já se encontram em códigos comerciais, como por exemplo, o NASTRAN:

- *Teoria das faixas*: As primeiras soluções para o problema aerodinâmico teórico estacionário foram obtidas por Theodorsen em 1935 e por Küssner e Schwarz em 1940 para superfícies 2D. Estas soluções foram utilizadas em análises de *flutter*, assumindo que as cargas em cada estação de uma asa dependia apenas do movimento daquela estação. Um método inicial de análise de *flutter*, apresentado por Smilg e Wasserman (1942), dividiram a asa em várias faixas, e as cargas aerodinâmicas em cada faixa foram calculadas com base nos coeficientes bidimensionais avaliados na linha central da faixa (RODDEN, JOHNSON, 1994);
- *Teoria do pistão*: pode ser empregado no escoamento supersônico e hipersônico, fornecendo resultados próximos ao real e simplificando a parcela aerodinâmica do problema. Este modelo apresenta algumas restrições: o escoamento deve ser isentrópico e não são consideradas a viscosidade, a dissociação e as mudanças de fase na fronteira entre o corpo e o escoamento. (PEGADO, 2006);
- *Método Doublet-Lattice*: este método é usado em superfícies sustentadoras submetidas a um fluxo subsônico. A teoria foi apresentada por Albano e Rodden (1969), Giesing, Kalman e Rodden (1971) e Rodden, Giesing e Kalman (1972). A base teórica do DLM é a teoria do potencial aerodinâmico linearizado. Todas as superfícies de sustentação são quase paralelas ao fluxo. O DLM é uma extensão do método Vortex-Lattice estacionário para fluxo não estacionário.

Na indústria aeronáutica, dentre os métodos apresentados, o DLM é o mais utilizado, uma vez que permite considerar a viscosidade do fluido e através de alterações e incrementos é possível modelar estruturas não planares, com curvatura e com um ângulo de ataque inicial. Como o maior interesse deste trabalho é o cálculo de painéis planos de interesse aeronáuticos, será utilizado então o DLM para o cálculo do carregamento aerodinâmico não estacionário.

Acoplado ao carregamento aerodinâmico existe também o carregamento elástico, que está associado à estrutura propriamente dita e o carregamento inercial, que é ligado ao movimento realizado pela estrutura. A fim de melhor exemplificar a relação entre estes três carregamentos, Collar em 1946 propôs o chamado triângulo de forças de Collar, que é mostrado na Figura 1.1.

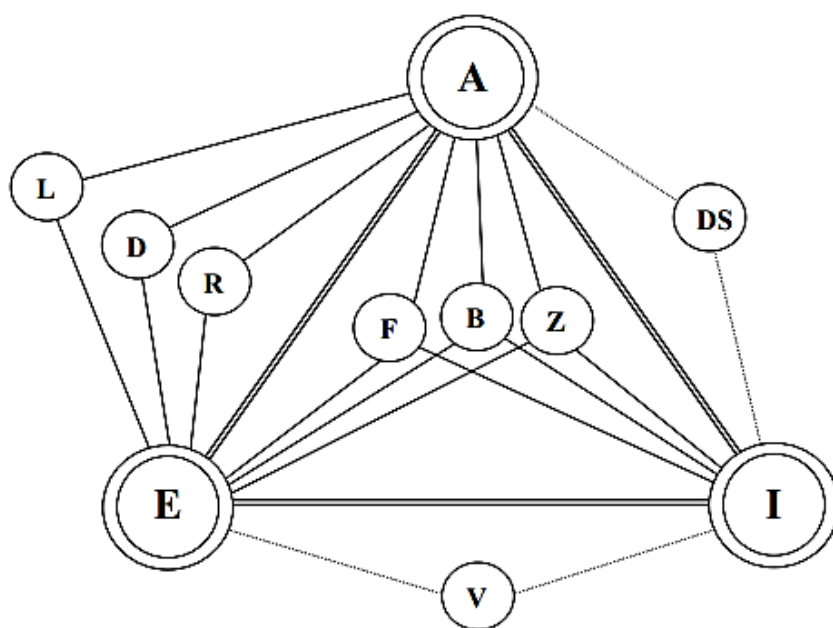


Figura 1.1 - Triângulo de forças de Collar. (adaptado de BISPLINGHOFF *et al* 2013)

Na aeroelasticidade estática são fenômenos que envolvem forças elásticas e aerodinâmicas, que são representadas por L (distribuição de carregamento), D (divergência) e R (reversão do sistema de controle). Já o V representa as vibrações mecânicas do sistema e DS, a estabilidade aerodinâmica de corpo rígido.

Já no campo de aeroelasticidade dinâmica existem três fenômenos: Z, que corresponde à resposta dinâmica do sistema e está relacionado à estabilidade do sistema, enquanto que B representa o fenômeno de *buffeting* que é uma instabilidade em alta frequência, ocasionada por descolamento do fluxo aerodinâmico ou por oscilações de ondas de choque e por fim, o F descreve o *flutter* que é uma oscilação autoexcitada que ocorre quando uma superfície sustentadora sofre deflexões que podem atingir o limite da estrutura. Este último é de interesse deste trabalho.

O fenômeno do *flutter* começou a ser observado durante a Segunda Guerra Mundial, quando aeronaves sem motivo aparente começaram a entrar em colapso, provocando assim diversos acidentes fatais. Segundo Garrick e Reed III (1981), o *flutter* pode ser classificado em cinco categorias: *flutter* de painel, geralmente associado a coalescência de modos ou

ainda a grandes deformações do painel; *flutter* de esteira de vórtices, ocorre a formação de vórtices geralmente na parte inferior da estrutura podendo levar a estrutura ao colapso, como ocorreu com a ponte de Tacoma, por exemplo; *flutter* de *stall*, é um modo torsional de *flutter* que ocorre em asas submetidas a altos carregamentos e em condições próximas a velocidade de *stall*; limite de oscilação cíclica; e por fim, o *flutter* de ponta de hélice que geralmente está relacionado à combinação motor-hélice.

Como o interesse deste estudo é o *flutter* que ocorre em asas, fuselagem ou superfícies de controle, o *flutter* a ser estudado será o *flutter* de painel, que é o mais comum nessas regiões. Esse fenômeno geralmente é catastrófico, uma vez que ao se atingir a velocidade de *flutter*, as deformações nas estruturas são tão grandes que acabam atingindo o limite estrutural e levando à falha da mesma. Por isto, é tão importante o estudo e aplicação de técnicas para o controle deste fenômeno.

Em meio às inúmeras técnicas empregadas para o controle de vibração e ruído em sistemas mecânicos, as chamadas técnicas de controle passivo têm sido incorporadas em muitos sistemas de interesse industrial devido às inúmeras vantagens quando comparadas com as técnicas de controle ativo ou semi-ativo, como por exemplo, baixo custo efetivo de implementação e de fácil manutenção (LIMA, 2007). Além disso, as técnicas passivas não necessitam de nenhuma fonte de energia externa, fato que garante inerente estabilidade ao sistema, tornando-as mais bem adaptadas a aplicações em sistemas industriais de grande porte. Tipicamente, o controle passivo de vibrações pode ser obtido com a utilização de materiais viscoelásticos, que são capazes de absorver a energia vibratória do sistema e dissipá-la sob a forma de calor. (DIACENCO, 2010)

Os materiais viscoelásticos podem ser aplicados sob a forma de tratamentos superficiais e/ou dispositivos discretos como apoios viscoelásticos translacionais ou juntas viscoelásticas rotacionais, como ilustrado na Figura 1.2.

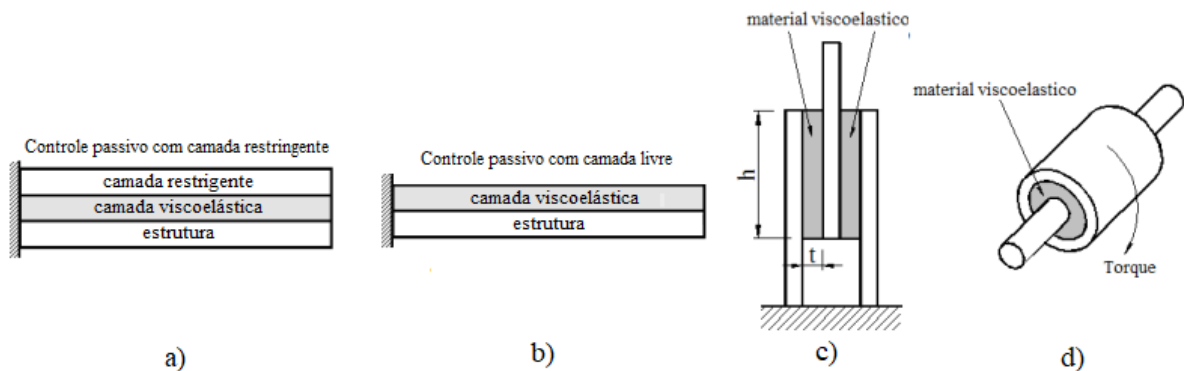


Figura 1.2 - Tipos de tratamentos viscoelásticos: tratamento superficial por camada restrita passiva (a), tratamento superficial por camada livre passiva (b), por apoios translacionais (c) e juntas rotacionais (d). (adaptado de DIACENCO, 2010)

O tratamento superficial com camada restrigente (CLD), consiste em um material sanduíche de duas camadas elásticas externas com um material viscoelástico no núcleo. Quando a estrutura de base sofre deformação, o material viscoelástico é forçado a deformar-se por cisalhamento devido à camada rígida superior. Já o tratamento superficial livre (FLD), caracteriza-se por não dispor de uma camada restrigente sobre a camada viscoelástica. Quando a estrutura sofre flexão o material se deforma, se submetendo-se somente aos efeitos de tração e compressão paralelos ao plano da estrutura. Neste caso, a energia é dissipada através do ciclo de histerese e o grau de amortecimento é limitado pela espessura e massa da camada de material viscoelástico. (FURUKAVA, 2012)

Em geral, o tratamento com camada restrigente é mais eficaz do que o tratamento de camada livre, desde que mais energia mecânica é absorvida e dissipada em forma de calor no trabalho realizado pelo cisalhamento dentro da camada viscoelástica. A configuração simétrica na qual as camadas base e restrigente têm a mesma espessura e rigidez é de longe a configuração de projeto mais eficaz uma vez que maximiza a deformação de cisalhamento induzida no núcleo viscoelástico. (RAO, 1997)

Dentre as principais aplicações industriais de materiais viscoelásticos, é possível destacar as aplicações na indústria automobilista e aeronáutica:

- *Indústria automotiva:* Uma alternativa encontrada na indústria automotiva para atacar o problema de vibração e ruído em veículos é o desenvolvimento de pacotes acústicos que consistem de amortecedores com características viscoelásticas, como ilustrado na Figura 1.3. (ANDRADE, 2017)
- *Indústria aeronáutica:* Os materiais viscoelásticos são bastante utilizados na redução dos níveis de ruído interno causados principalmente pelo fluxo de ar em

volta da aeronave, pelo sistema de controle ambiental dentro da aeronave, pelo funcionamento das turbinas, entre outros. Neste caso, as aplicações consistem de camadas restritas passivas nas longarinas e nas nervuras da fuselagem. A Figura 1.4, mostra um exemplo de utilização na fuselagem de aeronaves. (LIMA, 2003)

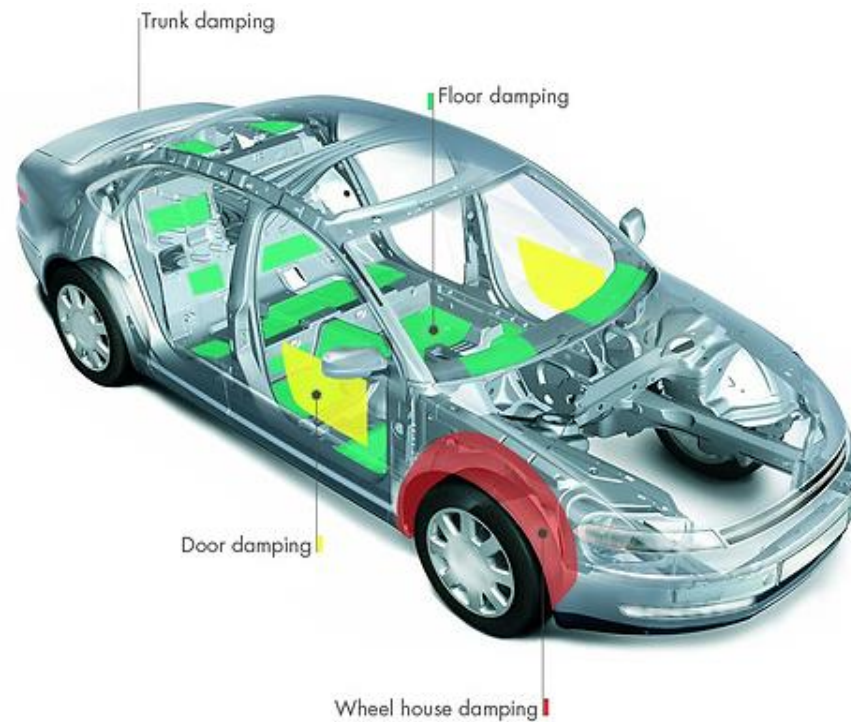


Figura 1.3 - Exemplo de aplicação de materiais viscoelásticos na indústria automotiva. (extraído do site do fabricante: <https://www.eftec.ch/en/products-applications>)

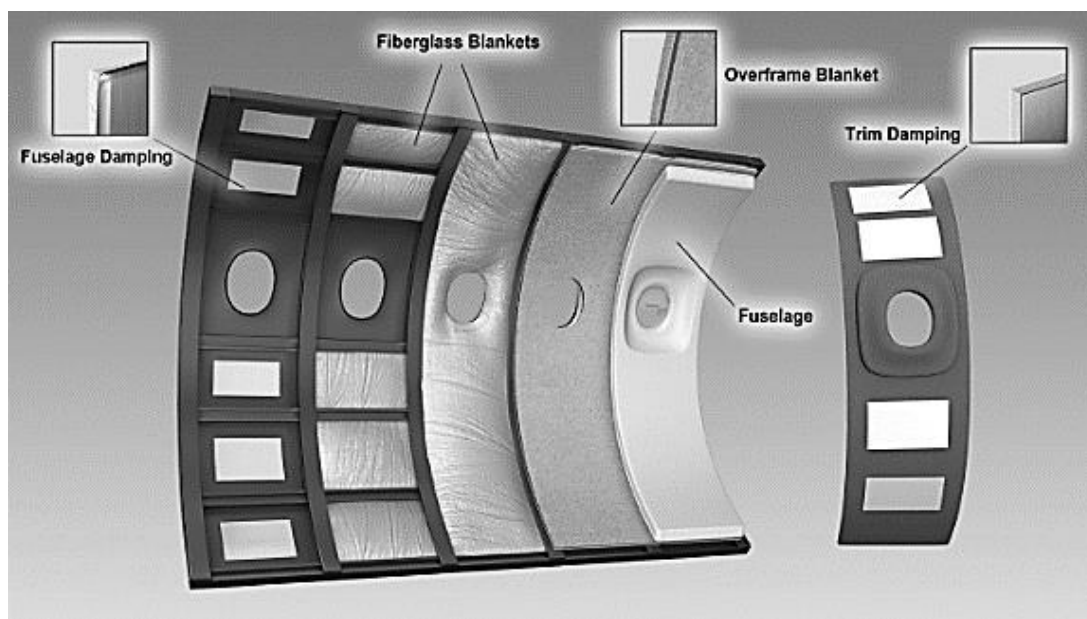


Figura 1.4 - Exemplo de aplicação de materiais viscoelásticos na indústria aeronáutica. (extraído do site do fabricante: <https://earglobal.com/en/aircraft/applications/fuselage/>)

Em termos da modelagem numérica de sistemas amortecidos viscoelasticamente, existem diversos trabalhos na literatura que propõem estratégias de modelagem de sistemas estruturais contendo materiais viscoelásticos empregando o método dos elementos finitos, como reportado pelos trabalhos de (CUNHA FILHO, 2015), (DIACENCO, 2010), (LIMA; DIACENCO; CÔRREA, 2009), (CUNHA, 2016), (LIMA; FARIA; RADE, 2010), (FURUKAVA, 2012), (ANDRADE, 2017) e (MOREIRA, 2004), (MARRA, 2007), (SOUZA, 2015).

Portanto, a principal contribuição desta Dissertação é unir os conhecimentos sobre teorias aerodinâmicas, mais precisamente o método DLM que já foi utilizado em diversos trabalhos para a obtenção do carregamento aerodinâmico (BLAIR, 1992), (SILVESTRE, 2007), (SANTOS *et al*, 2005), (RODDEN; TAYLOR; MCINTOSH, 1998), (VAN ZYL, 1998 e 1999), (GUIMARÃES NETO, 2008), com modelos de elementos finitos de placas sanduíches contendo materiais viscoelásticos. Neste caso, é empregado o método dos elementos finitos para a predição das velocidades de *flutter* do sistema aeroviscoelástico resultante em regime não estacionário subsônico, considerando a viscosidade do fluido.

Além deste capítulo introdutório, esta dissertação é dividida nos seguintes capítulos:

O capítulo II faz uma breve revisão dos trabalhos existentes na área a fim de utilizar este conhecimento como base para o desenvolvimento desta Dissertação e posicioná-la em termos de contribuição na área.

Já o capítulo III trata do modelo estrutural adotado, onde são descritas as equações do movimento do sistema. Inicialmente é feita uma introdução aos conceitos básicos referentes aos materiais viscoelásticos para o controle de vibrações, destacando suas características dissipativa e suas principais particularidades. É apresentada também a estratégia para a união do modelo viscoelástico ao modelo de elementos finitos de placa fina sanduíche de três camadas, a fim de obter as matrizes de massa e rigidez do sistema viscoelástico.

No capítulo IV, o principal intuito é descrever o modelo aerodinâmico adotado, para uma melhor compreensão do modelo para a obtenção da função do *downwash*, bem como da função de Kernel para o método Doublet Lattice. Além disso, são apresentados alguns conceitos importantes como a matriz de coeficientes aerodinâmicos (AIC) e a forma de implementação mais usada.

O capítulo V foca na união dos modelos aerodinâmico e viscoelástico, adicionando assim amortecimento e rigidez aerodinâmica ao sistema e, por fim, descreve as técnicas para a predição das velocidades de *flutter* do sistema completo aeroviscoelástico.

No capítulo VI são realizadas algumas simulações numéricas com o intuito de ilustrar a metodologia desenvolvida e verificar a influência dos materiais viscoelásticos no fenômeno de *flutter*. Neste caso, utilizou-se o carregamento aerodinâmico obtido através do software NX NASTRAN e o modelo de elementos finitos desenvolvido em ambiente de programação MATLAB®. Dentre os fatores analisados, pode-se citar: temperatura de operação do material, espessura da camada viscoelástica, espessura da camada restringente, entre outros.

O capítulo VII apresenta as conclusões gerais do trabalho bem como as perspectivas de realização de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Aerodinâmica não estacionária: Método Doublet-Lattice

O método Doublet-Lattice (DLM), proposto inicialmente por Albano e Rodden (1969), é uma extensão para escoamentos não estacionários do método Vortex-Lattice (VLM) que é baseado no princípio de escoamentos estacionários. Naquele trabalho, os autores descrevem de forma sucinta a formulação do método e definem que a superfície sustentadora deve ser dividida em “*boxes*”, organizadas em colunas paralelas ao escoamento. Além disso, eles destacam que cada painel contém uma linha de dipolos na posição a $\frac{1}{4}$ da corda, e que em regime estacionário, esta linha de dipolos é equivalente a um sistema “vórtice ferradura”, que pode ser representado por um conjunto de vórtices em forma de ferradura. Além disso, os autores apresentam alguns resultados para escoamentos bidimensionais e tridimensionais e, para ambos os casos investigados, as aproximações feitas pelo método DLM se adequam de maneira satisfatória aos resultados obtidos experimentalmente.

A primeira versão proposta do DLM só contemplava superfícies sustentadoras planas, afim de aumentar as aplicações do método. Foi então que Kalman, Rodden e Giesing (1971) propuseram alterações para configurações não planares. Estas modificações fizeram com que o método DLM melhorado pudesse ser aplicado a empenagens em formato T e para combinações como *asa/ pylon* e *asa/fuselagem*. Além de apresentar resultados para os casos citados, também é possível utilizar a técnica para o cálculo da interação *asa/solo*. Vale ressaltar que as modificações propostas não incluem o emprego do DLM para escoamentos transônicos ou supersônicos, apenas subsônicos.

As modificações propostas tiveram relativamente boa precisão para os casos testados, com exceção de aplicações envolvendo estruturas coplanares como por exemplo,

a combinação asa/empenagem horizontal. Com o intuito de resolver este problema, Kalman, Rodden e Giesing (1972) propuseram na sequência um refinamento no DLM melhorado, que em síntese, contorna os problemas das descontinuidades da função de Kernel.

Em seguida, foi proposto um segundo refinamento do DLM proposto por Rodden, Taylor e McIntosh (1998). Desta vez, a alteração se deu no polinômio que faz a aproximação da função de Kernel dentro de cada painel. Inicialmente, foi proposto um polinômio do tipo parabólico, entretanto, exigia-se um elevado número de painéis para se obter uma boa representatividade da superfície estudada. Neste caso, foram utilizados polinômios quadráticos e de ordem superior, onde percebeu-se que um maior grau do polinômio aumentaria a precisão da aproximação, tornando possível uma redução do número de “boxes”, além de tornar o modelo um pouco mais flexível.

Um ano após o último trabalho, Rodden *et al* (1999) publicaram um estudo de convergência para diferentes aplicações, além de estudarem o número de painéis e a influência tanto do polinômio adotado como da razão de aspecto. Além disso, Rodden e Taylor (1994) também são responsáveis pelo guia aeroelástico do MSC/NASTRAN.

Além dos autores supracitados, vale destacar que Van Zyl (1998;1999) também fez um estudo de convergência do método para alguns casos além dos já citados anteriormente. Depois disso, ele investigou os efeitos da razão de aspecto para asas do tipo delta, bem como a convergência da discretização da malha utilizada nas análises.

Por ser um método largamente utilizado na indústria principalmente aeronáutica, existem diversos autores que fizeram revisões sobre o DLM, mas uma das mais completas foi proposta por Blair (1992), onde ele trata de todo o desenvolvimento matemático do método, partindo-se de definições aerodinâmicas até chegar à função de Kernel. Um outro aspecto importante do trabalho do autor é que ele faz comparações com outros métodos para uma dada estrutura de interesse, o que permite usá-lo como referência para validação do modelo, além de abordar uma implementação numérica em linguagem C++.

Uma outra abordagem do DLM é acrescentar correções a fim de incluir efeitos como ângulo de ataque, curvatura do aerofólio, etc. Giesing (1976) desenvolveu um método para modificar a matriz de coeficientes de influência aerodinâmica (AIC) para o cálculo do fenômeno do *flutter* a velocidades supercríticas. Já McCain (1984) usou dados experimentais em túnel de vento para corrigir o método e comparou os resultados do modelo corrigido com os valores medidos experimentalmente. Ao final, o autor pondera que as correções sugeridas melhoraram as instabilidades do cálculo, mas em contrapartida, é uma metodologia considerada extremamente cara do ponto de vista computacional.

Nesta mesma linha de pesquisa de alteração do método DLM, Pitt e Goodman (1987) propuseram uma modificação usando um código de cálculo em CFD. Esta correção foi feita para incluir ondas de choque transônicas, torção de asas, ângulo de ataque, curvaturas e formato do aerofólio.

Em trabalho mais recente, Guimarães Neto (2008) propôs um modelo para calcular o incremento aerodinâmico associado à flexibilidade da aeronave, usando o DLM e VLM, para frequências reduzidas nulas. Ele também analisou a faixa de validade das correções efetuadas e o modelo com formulação quasi-estática foi comparado com o dinâmico acoplado e formulado com DLM.

Ainda nessa linha de alterações propostas para o DLM, pode -se destacar o trabalho escrito por Valente *et al* (2017), onde é proposto correções no método para tornar possível a análise de rajadas. Essa correção é proposta com base na correção da matriz AIC usando dados experimentais ou ainda dados obtidos por CFD.

Outro estudo de extrema relevância foi apresentado por Prasad e Holla (1980), onde os autores propõem esquemas de redução de tempo de custo computacional. Neste caso, é analisado a parte real da matriz D, uma vez que há a ocorrência de valores similares, quando quaisquer dois conjuntos de painéis (i, j) e (k, l) estão situados da mesma forma. Desta forma, é necessário o cálculo de um desses pontos e replica-lo para os demais pontos similares.

Além do uso comum do DLM para superfícies sustentadoras como asas, este método também pode ser usado para outras aplicações de engenharia, um exemplo é o trabalho de Gangwani (1982), que utilizou o DLM com o objetivo de determinar o carregamento induzido pelo movimento do rotor nas empenagens.

2.2. Acoplamento aeroelástico para escoamento não-estacionário e *flutter*

Henshaw *et al* (2007) em seu trabalho apresenta um compilado de informações sobre os métodos de detecção de *flutter*, além de mostrar também como este é implementado no meio industrial. Afim de comparar os métodos, eles estudaram vários casos testes desde de sistemas com poucos graus de liberdade até aeronaves completas, onde o principal foco foi avaliar a não linearidade aerodinâmica e o custo computacional dos métodos apresentados. A título de ilustração, a Figura 2.1 representa como é feita a detecção do ponto de ocorrência do fenômeno do *flutter* em função da velocidade.

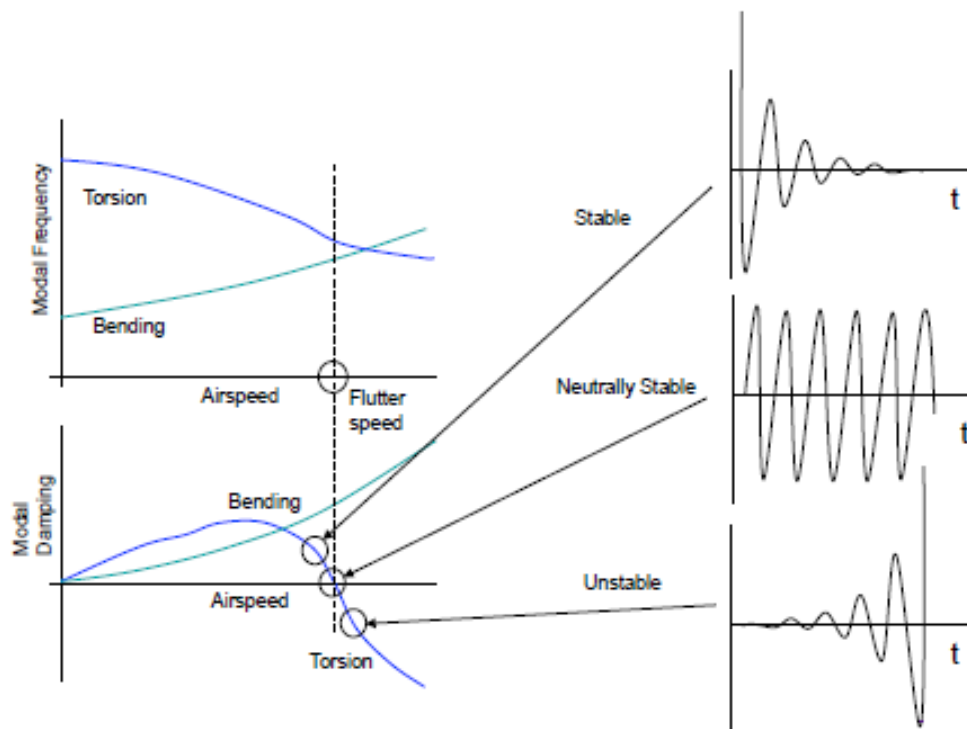


Figura 2.1 -Representação gráfica do fenômeno do *flutter*. (adaptado de HENSHAW, 2007)

Dentro do campo da dinâmica do voo, Guimarães Neto (2008) estudou a relevância dos efeitos da flexibilidade estrutural na dinâmica do voo. Para isto, o autor deu enfoque maior na modelagem aerodinâmica de uma aeronave flexível usando o método DLM, de modo que o atraso na resposta dinâmica devida a excitações na estrutura seria contemplado. Outro ponto importante que ele investiga em seu trabalho é a comparação com Vortex-Lattice com o intuito de explicar fisicamente a origem das diferenças nos resultados entre tais abordagens (estacionária e não estacionária).

Santos *et al* (2005) propõe um estudo em que compara a implementação do DLM para o cálculo de cargas aerodinâmicas não estacionárias em superfícies sustentadoras planares no domínio da frequência. Além disso, ele compara os valores de velocidade de *flutter* obtidos, usando os métodos de previsão do fenômeno do *flutter* KE e PK, com dados experimentais. Além disso, os autores também exploram a condição de mergulho e compara com os dados obtidos via CFD.

Benini (2002) em sua dissertação, adota a metodologia de implementação dos efeitos aerodinâmicos e estruturais de maneira independente. A caracterização dinâmica é feita pelo método dos elementos finitos e a equação do movimento é escrita em coordenadas modais, enquanto o carregamento aerodinâmico não-estacionário é determinado pelo método de vórtices. A união dos dois modelos é feita através do método *splines* de

superfície e a equação do movimento resultante é resolvida de forma iterativa por um método de predição da velocidade de *flutter*.

Uma outra área explorada na aerodinâmica é a utilização do código comercial NASTRAN como ferramenta para a análise de *flutter*. MURPHY (2012) em sua tese de doutorado, propôs calcular o carregamento utilizando o método AIC, com base em formas modais de estruturais mais complexas e construir uma base aerodinâmica, usando códigos em CFD. Essa base aerodinâmica foi transferida para o NASTRAN para permitir a análise de novas configurações. Para validar os resultados, o autor comparou os resultados advindos com a utilização do modelo com alteração da matriz AIC com os resultados do DLM original.

2.3. Uso de materiais viscoelásticos para o controle do *flutter*

O uso de materiais viscoelásticos para a atenuação de vibrações e ruídos de sistemas de engenharia vem crescendo constantemente nos últimos anos, tanto para aplicações civis, automotivas e/ou aeronáuticas.

Nashif; Jones; Handerson (1985) trazem em seu livro a teoria da aplicação de materiais viscoelásticos para o controle de vibrações, além de uma breve revisão histórica da utilização de tais materiais amortecedores. Eles também descrevem a viscoelasticidade linear e a influência de parâmetros ambientais e operacionais no comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos.

Lima (2003), em sua dissertação de mestrado, aborda os principais métodos de inclusão dos efeitos viscoelásticos em modelos de elementos finitos de sistemas discretos como juntas e apoios viscoelásticos, e sistemas sanduíches como vigas e placas planas. O autor também faz uma revisão dos principais modelos reológicos simples disponíveis na literatura e dos métodos de caracterização do comportamento viscoelástico nos domínios do tempo e frequência. Outro ponto tratado pelo autor é a identificação de parâmetros de modelos viscoelásticos a partir de dados experimentais.

No contexto da aplicação de materiais viscoelásticos formando estruturas sanduíches, a tese de doutorado de Silva (2017) é de grande relevância, uma vez que foca na modelagem por elementos finitos estocásticos para casos de sistemas viscoelásticos com grandes deslocamentos e na presença de incertezas. Em um primeiro momento, o autor descreve a formulação dos elementos sanduíches do tipo vigas e placas de três camadas sujeitas a grandes deslocamentos e, em seguida, aborda a formulação do método de elementos finitos estocásticos para a concepção do sistema robusto. Por fim, são

apresentadas inúmeras simulações e um investigação experimental interessante envolvendo vigas sanduíches com comportamento não linear.

Além dos trabalhos mais voltados para a investigação do próprio material e o estudo da redução das vibrações, existem também inúmeros trabalhos que estudam a aplicação dos materiais viscoelásticos para a supressão e controle do fenômeno do *flutter* de painéis em regime supersônico. Neste contexto, MERRETT (2010) fez uma investigação analítica do efeito elástico e viscoelástico quando ocorre o *flutter* de painel. Ao final, ele faz ainda uma comparação entre os métodos de cálculo da velocidade crítica de *flutter* tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência para estruturas elásticas e estruturas com tratamento viscoelástico.

Em sua dissertação, Martins (2014) estudou a influência do amortecimento viscoelástico em modelos de dois e três graus de liberdade. A influência do amortecimento viscoelástico foi introduzido nas molas de suspensão do aerofólio. Para calcular a velocidade crítica de *flutter*, foi utilizado o método k. Além disso, foram feitas avaliações paramétricas em relação à temperatura de operação do sistema amortecido viscoelasticamente e de parâmetros geométricos, com o objetivo de analisar a influência da adição do viscoelástico e estudar a possibilidade de aumento da margem de estabilidade.

Outra dissertação que também estuda a influência dos materiais viscoelásticos na estabilidade aeroelástica é a de Cunha Filho (2015), cujo principal foco de estudo são painéis aeronáuticos com tratamento viscoelástico superficial. No decorrer do trabalho, o autor apresenta a modelagem por elementos finitos de uma placa sanduíche de três camadas e a modelagem do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos, além de descrever sucintamente a formulação da teoria do pistão e ao final analisa a influência de parâmetros físicos e geométricos.

Briend (2017), em sua dissertação aborda métodos de redução de modelos para sistemas aeroviscoelásticos. Neste caso, o autor descreve tanto a modelagem de sistemas viscoelásticos no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, em seguida aborda o modelo aerodinâmico usado, teoria dos pistões, e modelos de predição de *flutter* no domínio da frequência e do tempo. No final, é apresentada uma metodologia para a redução do modelo aeroviscoelástico nos domínios do tempo e da frequência.

Um outro trabalho que traz uma abordagem um pouco diferente mas não menos importante, é o de Guimarães (2016), que estuda o comportamento dinâmico e aeroelástico em compósitos laminados de rigidez variável. O escoamento aerodinâmico é formulado tanto pela teoria das faixas quanto pela teoria dos pistões, enquanto que no modelo

estrutural foi feita uma análise da influência de volume de fibras, bem como da orientação destas, empregando técnicas de otimização para retardar o *flutter* de painéis.

Frente ao exposto anteriormente, é possível notar que existem inúmeros trabalhos que tratam da implementação do método DLM, seja na sua forma original ou com alguma correção associada. O estudo aeroelástico também é bastante explorado utilizando diferentes métodos como a teoria do pistão ou ainda a teoria das faixas, geralmente associados ao estudo do fenômeno do *flutter*. Além disso, ficou claro o interesse da comunidade científica em aplicar tratamentos viscoelásticos discretos ou superficiais para o controle do *flutter*.

Portanto, entende-se que a principal contribuição desta Dissertação é a proposição de uma estratégia de modelagem numérica de sistemas aeroviscoelásticos em regime não-estacionário utilizando o método a fim de estudar o *flutter* de painéis.

CAPÍTULO III

MODELO DINÂMICO ESTRUTURAL - PLACAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS

Este capítulo apresenta uma breve revisão sobre a modelagem determinística por elementos finitos de placas finas sanduíches de três camadas contendo um núcleo de material viscoelástico cujo comportamento mecânico é fortemente dependente da frequência e da temperatura de operação. Além disso, é mostrado um procedimento de introdução do amortecimento viscoelástico em modelos de elementos finitos, bem como o cálculo das respostas em dinâmicas do sistema contendo materiais viscoelásticos.

3.1. Relações cinemáticas

A Figura. 3.1 mostra o modelo composto pelas camadas base (1), viscoelástica (3) e restrigente (3), e a Fig. 3.2 ilustra a cinemática da deformação do elemento para os planos xz e yz , onde u é o deslocamento na direção x , v é o deslocamento na direção y , e w é o deslocamento transversal. $\theta_x = \partial w / \partial x$ é a rotação em torno do eixo x , e $\theta_y = \partial w / \partial y$ é a rotação em torno do eixo y (LIMA, 2007). Foram assumidas as seguintes hipóteses: (a) será considerado material elástico e linear para ambas as camadas; (b) as tensões cisalhantes transversais serão negligenciadas para as camadas base e restrigente (Teoria de Kirchhoff para placas finas), e para o núcleo viscoelástico, o cisalhamento transversal é considerado; (c) as tensões normais na direção z são assumidas desprezíveis para todas as camadas.

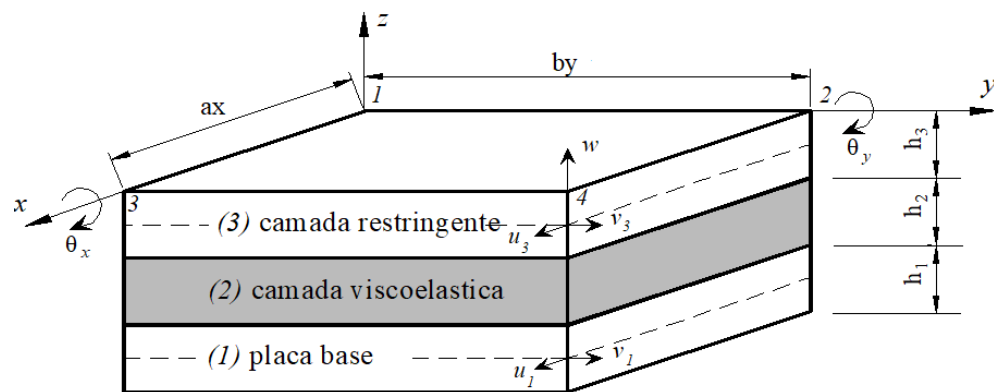


Figura 3.1 - Ilustração do elemento de placa de três camadas (adaptado de LIMA, 2007).

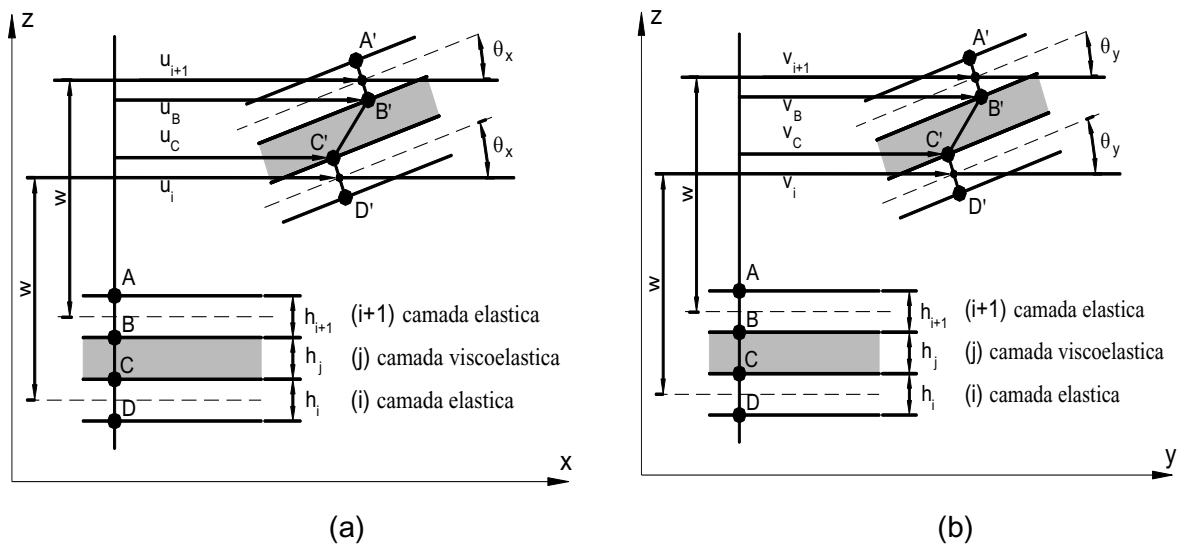


Figura 3.2 – Cinemática da deformação do elemento de placa sanduíche (adaptado de LIMA *et al.*, 2006).

Será assumido que o deslocamento transversal, w , e as rotações, θ_x e θ_y , são comuns a todas as camadas do elemento de placa sanduíche. Neste sentido, a partir da Fig. 3.2, pode-se chegar às seguintes relações para os deslocamentos das camadas elásticas:

$$(3.1) \quad u_B = u_3 + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_c = u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}$$

onde u_1 e u_3 representam, respectivamente, os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior na direção x .

Similarmente, os campos de deslocamentos na direção y podem ser obtidos:

$$v_B = v_3 + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad v_c = v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2)$$

Para a camada viscoelástica, as seguintes relações para as direções x e y , podem ser obtidas, respectivamente:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_2 = \frac{u_B - u_C}{h_2}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_2 = \frac{v_B - v_C}{h_2} \quad (3.3)$$

Através da substituição das Eqs. (3.1) e (3.2) nas relações (3.3), obtém -se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{(u_3 - u_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{(v_3 - v_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.4)$$

onde (u_1, v_1) e (u_3, v_3) são os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior nas direções x e y , respectivamente, e $d_2 = (h_3 + h_1)/2$.

Por fim, os deslocamentos longitudinais médios do núcleo viscoelástico nas respectivas direções x e y são dados pelas seguintes expressões:

$$u_2 = \frac{u_B + u_C}{2} = \frac{1}{2} \left[(u_3 + u_1) + \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.5)$$

$$v_2 = \frac{v_B + v_C}{2} = \frac{1}{2} \left[(v_3 + v_1) + \left(\frac{h_3 - h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.6)$$

3.1.1. Relações tensão-deformação

Através da teoria da elasticidade linear, onde é assumido a hipótese de pequenos deslocamentos, são válidas as seguintes relações envolvendo os deslocamentos e as deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.7)$$

Para as camadas elásticas serão consideradas somente as deformações de extensão e flexão, e para o núcleo viscoelástico, serão consideradas ainda as deformações devido ao cisalhamento transversal.

Estrutura base

$$u^I = u_I + z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1, \quad v^I = v_I + z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \quad (3.8)$$

Camada restrigente

$$u^3 = u_3 + z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3, \quad v^3 = v_3 + z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \quad (3.9)$$

A partir das relações (3.7) e das Eqs. (3.8) e (3.9), pode-se obter os seguintes campos de deformações para as camadas base (1) e restrigente (3):

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.10.a)$$

$$\varepsilon_y^{(1)} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.10.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.10.c)$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial x} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.11.a)$$

$$\varepsilon_y^{(3)} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

(3.11.b)

$$\gamma_{xy}^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(3.11.c)

As relações anteriores podem ser escritas sob a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{C}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)},$$

$$\mathbf{s}^{(3)} = \mathbf{C}^{(3)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}$$

(3.12)

onde \mathbf{s} representa o vetor contendo as tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor das deformações, e \mathbf{C} indica a matriz dos coeficientes elásticos, dados por ($i = 1$ e 3):

$$\mathbf{s}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix}$$

(3.13)

Camada viscoelástica

Para a camada viscoelástica, os deslocamentos longitudinais de um ponto qualquer nas direções x e y são dados por:

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_2, \quad v^{(2)} = v_2 + z_2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_2 \quad (3.14)$$

Combinando as expressões (3.4) a (3.6) com as relações (3.14), pode-se obter os campos de deslocamentos para o núcleo viscoelástico nas direções x e y , respectivamente:

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left[\frac{u_3 - u_1}{h_2} + \left(\frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad v^{(2)} = v_2 + z_2 \left[\frac{v_3 - v_1}{h_2} + \left(\frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.15)$$

Considerando-se as relações (3.7), as deformações para a camada viscoelástica podem ser escritos como se segue:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

(3.16.a)

$$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

(3.16.b)

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + (h_3 + h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.16.c)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \left[u_3 - u_1 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.16.d)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h_2} \left[v_3 - v_1 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.16.e)$$

Desta forma, obtém-se a seguinte expressão matricial que representa as relações tensão-deformação para a camada viscoelástica:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{C}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$$

(3.17)

onde o vetor das tensões $\mathbf{s}^{(2)}$, o vetor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$, e a matriz dos coeficientes elásticos $\mathbf{C}^{(2)}$, para o núcleo viscoelástico são dados como segue:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G^{(2)} & 0 & 0 \\ & & & G^{(2)} & 0 \\ sym. & & & & G^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

3.1.2. Discretização por elementos finitos

Após a obtenção dos deslocamentos e das relações tensão -deformações, pode -se discretizar o modelo via método dos elementos finitos. Para tanto, será empregado o elemento de placa retangular plana composto por quatro nós e sete graus de liberdade por nó, conforme os desenvolvimentos originais feitos por Khatua e Cheung (1973) e implementado por Lima *et al.* (2010). São os seguintes os graus de liberdade a nível nodal: deslocamentos longitudinais u_l e v_l da camada restringente superior, deslocamentos u_3 e v_3 da camada base; deflexão transversal w ; e rotações $\theta_x = \partial w/\partial x$ e $\theta_y = \partial w/\partial y$. a e b representam, respectivamente, as dimensões do elemento nas direções x e y . Portanto, o vetor dos graus de liberdade nodais pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{(e)_j}(t) = [u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{3j} \quad v_{3j} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.19)$$

e o vetor dos graus de liberdade a nível elementar é dado como segue:

$$\mathbf{u}_{(e)}(t) = [u_{(e)_1} \quad u_{(e)_2} \quad u_{(e)_3} \quad u_{(e)_4}]^T \quad (3.20)$$

O campo de deslocamentos longitudinais e transversais no interior do elemento é interpolado segundo a relação:

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad 0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b$$

(3.21)

onde $\mathbf{U}(x, y) = [u_1 \ v_1 \ u_3 \ v_3 \ w \ \theta_x \ \theta_y]^T$ e $\mathbf{N}(x, y) = [N_{u_1} \ N_{v_1} \ N_{u_3} \ N_{v_3} \ N_w \ N_{\theta_x} \ N_{\theta_y}]^T$ é a matriz contendo as funções de interpolação descritas no Anexo A.

A partir das expressões (3.10), (3.11) e (3.16), pode -se definir o seguinte vetor das deformações como função da matriz dos operadores diferenciais e do vetor dos campos de deslocamentos a nível elementar:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{u}_{(e)}(t)$$

(3.22)

onde $\mathbf{B}(x, y, z)$ é a matriz obtida aplicando-se os operadores diferenciais das relações tensão-deformação na matriz contendo as funções de forma $\mathbf{N}(x, y)$. Essas matrizes são definidas de acordo com o estado de tensão assumido para cada camada.

3.1.3. Equações do movimento, resposta em frequência e resposta em tensão

As equações do movimento do sistema podem ser obtidas através das equações de Lagrange (LIMA, 2007). Para isto, é preciso formular as expressões das energias de deformação e cinética do elemento de placa sanduíche formado por três camadas.

A energia de deformação total do elemento de placa sanduíche pode ser obtida através da adição das energias de deformação de cada camada da seguinte forma:

$$U = \sum_{k=1}^3 U^{(k)} \tag{3.23}$$

onde o índice k representa a camada a ser considerada, sendo a energia de deformação da k -ésima camada calculada da forma:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dV \tag{3.24}$$

A introdução da Eq. (3.22) na equação anterior permite obter a seguinte relação:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}(t)^T \left(\int_V \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} dV \right) \mathbf{u}_{(e)}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}(t)^T \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (3.25)$$

onde $\mathbf{K}^{(k)} = \int_V \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} dV$ é a contribuição da k -ésima camada na rigidez do elemento finito de placa sanduíche de três camadas.

Após algumas manipulações matemáticas, pode -se mostrar que a matriz de rigidez elementar para as camadas elásticas, $i = 1 e 3$, são escritas como segue:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_{mm}^{(i)} + \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(i)} \quad (3.26)$$

onde $\mathbf{K}_{mm}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_m^{(i)} dV$, $\mathbf{K}_{ff}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} dV$ e $\mathbf{K}_{mf}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} dV$, e os índices m , f , e mf designam os efeitos de membrana, flexão e membrana-flexão, respectivamente.

Para a camada viscoelástica, a matriz de rigidez elementar é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_{mm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ff}^{(2)} + \mathbf{K}_{cc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{fc}^{(2)} \quad (3.27)$$

onde $\mathbf{K}_{mm}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_m^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{ff}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_f^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{cc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_c^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{mf}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_f^{(2)} dV$, $\mathbf{K}_{mc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$ e $\mathbf{K}_{fc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$, onde o índice c designa os efeitos do cisalhamento na camada viscoelástica.

Da mesma forma, a energia cinética total do elemento finito de placa sanduíche de três camadas é dada pela soma das energias cinéticas de cada camada:

$$T = \sum_{k=1}^3 T^{(k)} \quad (3.28)$$

onde $T^{(k)} = \frac{I}{2} \int_V \left(\dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} + \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} \right) dV$, ou ainda sob a seguinte forma:

$$T^{(k)} = \frac{\rho_k h_k}{2} \left(\int_A \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} dA \right) \quad (3.29)$$

A expressão (3.21) permite reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \left[\rho_k h_k \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_k}^T \mathbf{N}_{u_k} + \mathbf{N}_{v_k}^T \mathbf{N}_{v_k} \right) dA \right] \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}^{(k)} \dot{\mathbf{U}} \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{M}^{(k)} = \rho_k h_k \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_k}^T \mathbf{N}_{u_k} + \mathbf{N}_{v_k}^T \mathbf{N}_{v_k} \right) dA$ é a matriz de massa de cada camada k do elemento, \mathbf{N}_w , \mathbf{N}_{u_k} e \mathbf{N}_{v_k} são as matrizes contendo as funções de interpolação, e h_k e ρ_k são as espessuras e as densidades da k -ésima camada, respectivamente. Detalhes dos desenvolvimentos para a obtenção das matrizes elementares de massa e rigidezes estão no Anexo A.

Finalmente, as matrizes de massa e rigidez elementares do elemento finito de placa sanduíche de três camadas podem ser escritas, respectivamente, como segue:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{M}^{(k)}, \quad \mathbf{K} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{K}^{(k)} \quad (3.31)$$

Após a obtenção das matrizes elementares, as matrizes globais podem ser obtidas aplicando-se procedimentos padrões de montagem de matrizes elementares e levando -se em conta a conectividade dos nós. Portanto, chega-se à seguinte equação do movimento do sistema viscoelástico no domínio do tempo (sem a presença de amortecimento viscoso), composta por N graus de liberdade (GDLs):

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.32)$$

onde $\mathbf{M}, \mathbf{K}^* \in R^{N \times N}$ são as matrizes de massa e rigidez complexa, $\mathbf{u}(t) \in R^N$ e $\mathbf{f}(t) \in R^N$ são os vetores de deslocamentos e forças externas.

Para o caso de uma excitação harmônica da forma, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ e $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{i\omega t}$, as equações do movimento do sistema no domínio do tempo são transformadas nas seguintes equações algébricas no domínio da frequência:

$$\mathbf{Z}(\omega, T) \mathbf{U}(\omega, T) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M}$ é a expressão da matriz de rigidez dinâmica complexa do sistema viscoelástico, \mathbf{K}_e é a rigidez da subestrutura puramente elástica, e $\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v$ é a matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica dependente da frequência e temperatura, conforme o módulo complexo, $G(\omega, T)$, como detalhado na sequência.

Uma vez definido a rigidez dinâmica complexa, a etapa seguinte consiste em resolver o sistema no domínio da frequência, o que pode ser feito através da construção da seguinte matriz de Funções de Resposta em Frequência (FRFs):

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{Z}(\omega, T)^{-1} \quad (3.34)$$

3.2. Amortecimento viscoelástico

Uma vez definido as equações do movimento do sistema com material viscoelástico, antes de proceder à incorporação no modelo da dependência das propriedades mecânicas do mesmo em relação à frequência e temperatura, é importante fazer uma revisão sobre a

influência da frequência da excitação e da temperatura no comportamento mecânico desses materiais, uma vez que estes são considerados os parâmetros mais influentes.

A Figura. 3.3 ilustra as amplitudes das FRFs experimentais de uma viga engastada-livre tratada com material viscoelástico. Através das mudanças observadas nas frequências de ressonância e amplitudes de vibração do sistema amortecido, conclui-se que as propriedades mecânicas do sistema viscoelástico dependem fortemente da temperatura e da frequência.

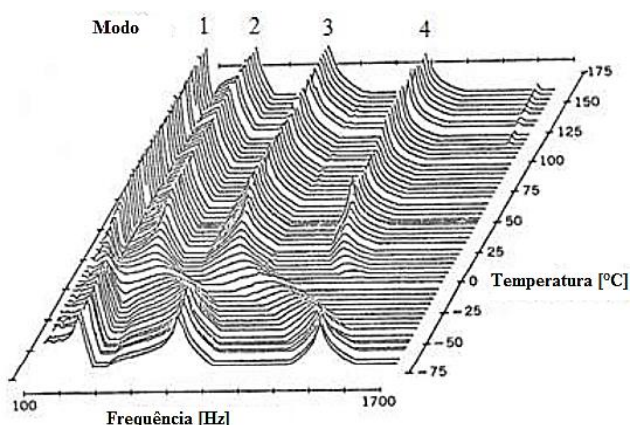


Figura 3.3 - FRFs de uma viga com material viscoelástico (adaptada de NASHIF *et al*, 1985).

A temperatura é o fator ambiental que exerce a maior influência sobre as propriedades dos materiais viscoelásticos (NASHIF *et al.*, 1985). Neste caso, eles podem apresentar quatro tipos de comportamento, como ilustrado na Figura. 3.4: estado vítreo (I), estado de transição (II), estado de borracha (III) e estado de fluido (IV). Portanto, é imprescindível considerar as variações de temperatura durante a modelagem de sistemas viscoelásticos (LIMA *et al*, 2010).

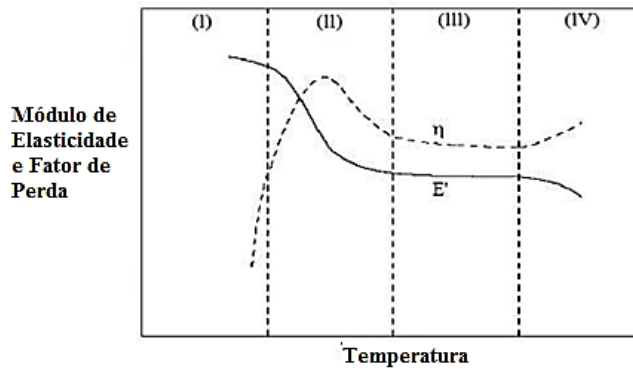


Figura 3.4 - Variação de E' e η de um material viscoelástico qualquer em função da temperatura para uma frequência constante (adaptada de LIMA, 2003).

A região (I) corresponde às temperaturas mais baixas onde o material apresenta-se sob a forma vítrea, caracterizado por um módulo de armazenamento atingindo seu valor máximo, e variando pouco com a temperatura. Já o fator de perda é muito pequeno e aumenta rapidamente com a temperatura. Nesta região, as deformações do material são muito pequenas. A região (II) é caracterizada por um módulo que decresce fortemente com a temperatura, e um fator de perda apresentando seu valor máximo. Na região da borracha (III), o módulo de armazenamento e o fator de perda são caracterizados por valores pequenos e que variam pouco com a temperatura. A quarta região corresponde ao estado de fluido do material. Este estado é pouco considerado em aplicações estruturais em razão de sua instabilidade.

Para uma temperatura fixa próxima da temperatura de transição vítrea (dentro da região de transição II), as medidas das características viscoelásticas fornecem o módulo de armazenamento, E' , e o fator de perda, η , para o qual a variação em frequência assemelha-se geralmente à configuração ilustrada na Figuras. 3.5.

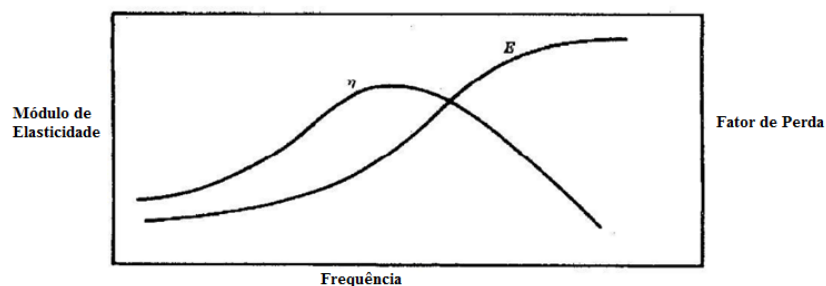


Figura 3.5 - Variações de E' e η com a frequência para uma temperatura constante (adaptada de NASHIF *et al*, 1985).

Através da análise das Figuras. 3.4 e 3.5 para materiais viscoelásticos lineares, observou-se que a influência exercida pela frequência da excitação é, qualitativamente, o inverso do efeito da temperatura, mas em uma escala menor, ou seja, a variação na frequência de algumas décadas reflete a mesma influência de alguns poucos graus de temperatura. Como consequência, se deslocamentos em frequência das curvas mostradas na Fig. 3.5 são aplicados para diferentes temperaturas, elas tendem a se sobreporem, e a descreverem uma única curva contínua. Este fato indica que as características viscoelásticas em diferentes temperaturas podem ser associadas entre si através de deslocamentos horizontais aplicados nos valores da frequência da excitação, conduzindo aos então conhecidos *fator de deslocamento* e *frequência reduzida*, caracterizando o Princípio da Superposição Frequência-Temperatura (PSFT), que se aplica a vários materiais viscoelásticos lineares. Simbolicamente, o PSFT pode ser expresso da forma:

$$G(\omega_r, T_0) = E(\alpha_T \omega, T_0); \quad \eta(\omega_r, T_0) = \eta(\alpha_T \omega, T_0) \quad (3.36)$$

onde $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ é a frequência reduzida, ω corresponde à frequência da excitação, $\alpha_T(T)$ é o fator de deslocamento que depende da temperatura do material viscoelástico, e T_0 é a temperatura de referência. Os termos $E(\alpha_T \omega, T_0)$ e $\eta(\alpha_T \omega, T_0)$ permitem construir as curvas mestre ou nomogramas do material viscoelástico.

A Fig. 3.6 ilustra o PSFT, tendo o módulo de armazenamento e o fator de perda de um material viscoelástico arbitrário para diferentes valores de temperatura, T_{-1} , T_0 , T_1 , se deslocamentos horizontais segundo o eixo da frequência são aplicados a cada uma das curvas, elas podem ser combinadas numa única curva. O fator de deslocamento é dado por α_T , e depende da temperatura.

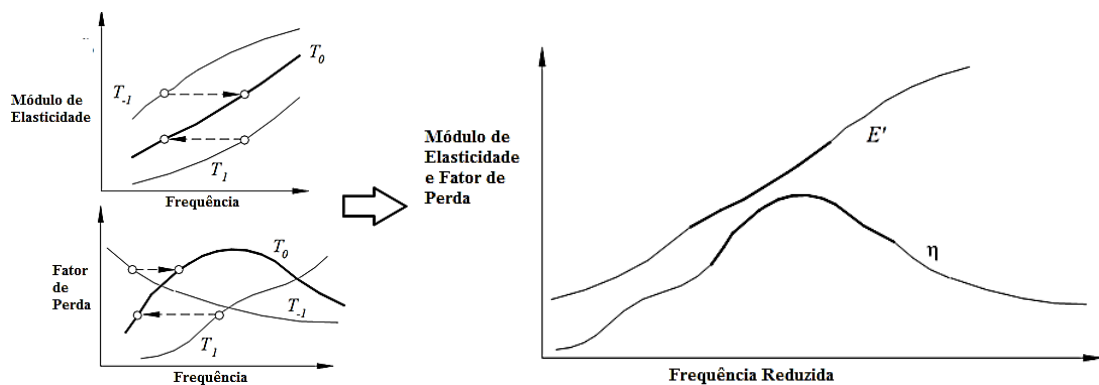


Figura 3.6 - Princípio da superposição PSFT (adaptada de LIMA *et al*, 2010).

A expressão seguinte representa o módulo complexo como função da frequência reduzida e da temperatura para o material viscoelástico 3M ISD112 a ser utilizado neste trabalho, conforme desenvolvimentos feitos por Drake e Soovere (1984).

$$G(\omega_r, T_v) = \frac{1200}{1 + 3.24 \times \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.18} + \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.6847}} \quad [MPa] \quad (3.37)$$

onde $\alpha(T_v) = \left(-3758.4 \times \left(\frac{1}{T_v} - 0.00345 \right) - 225.06 \times \log(0.00345 \times T_v) + 0.23273 \times (T_v - 290) \right)$ é o fator de deslocamento

e $\omega_r = \alpha(T_v) \omega$ é a frequência reduzida.

CAPÍTULO IV

MODELO AERODINÂMICO

Segundo Van Zyl (1998), o método Doublet Lattice (DLM) é uma das técnicas mais rudimentares empregadas para estudar aerodinâmica não estacionária que considera o fluido compressível. Entretanto, ela é extremamente útil em fases preliminares de um projeto aerodinâmico que, associado a métodos de elementos finitos, torna-se eficaz no cálculo da velocidade de *flutter* de um determinado modo.

4.1. Formulação matemática do método DLM

O método DLM é uma alteração do método Vortex Lattice (VLM), usado para o cálculo de escoamentos estacionários. A linha dos dipolos é equivalente, na frequência zero, ao vórtice ferradura e, portanto os dipolos podem representar uma aproximação da parte estacionária.

A formulação parte da linearização do potencial aerodinâmico e, além disso, considera o escoamento como sendo invíscido, compressível e subsônico sobre um corpo sólido. Vale ressaltar que a formulação aqui apresentada é exaustivamente descrita por Blair (1992).

Para a linearização do potencial aerodinâmico, parte-se da equação da continuidade, como mostrado na Eq. (4.1) e das equações do balanço da quantidade de movimento, como mostrado na Eq.(4.2).

$$\frac{\partial \rho_{ar}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{ar} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{ar} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_{ar} w)}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_{ar}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.2.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_{ar}} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.2.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_{ar}} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.2.c)$$

Onde ρ_{ar} é a densidade do fluido, (u, v, w) é o campo de velocidade do fluido, p é a pressão.

Neste momento, existem cinco incógnitas (x, y, z, p e ρ). Assumindo uma condição isotrópica do fluido e a condição de irrotacionalidade, o potencial de velocidade pode ser expresso da seguinte forma:

$$q = \nabla\Phi = i \frac{\partial\Phi}{\partial x} + j \frac{\partial\Phi}{\partial y} + k \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (4.3)$$

Para reduzir a ordem do problema, o vetor de velocidade do fluido pode ser considerado como descrito na Eq. (4.4) e explicitando a condição de irrotacionalidade ($\nabla \times q = 0$), as componentes do vetor q são definidas pelas seguintes relações.

$$q = ui + vj + wk \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.5.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.5.b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.5.c)$$

Substituindo q pelo gradiente de potencial de velocidade, $\nabla\Phi$, e utilizando a Eq.(4.5), a Eq. (4.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\Phi] + \nabla\left[\frac{q^2}{2}\right] = -\frac{\nabla p}{\rho_{ar}} \quad (4.6)$$

A lei de Leibnitz (HILDEBRAND, 1962) permite reescrever o termo da direita da Eq. (4.6) como representado abaixo:

$$\nabla\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho_{ar}}\right] = 0 \quad (4.7)$$

Ao resolver o gradiente, percebe-se que as componentes independem de x , y e z , e a constante de integração depende apenas do tempo. Nota-se ainda que Φ é invariante no tempo, a pressão é constante e a velocidade constante é U_∞ . Portanto, em um ponto distante, o potencial de velocidade pode ser descrito em função de F , que é dependente do tempo.

$$\phi = \Phi - \int_0^t F(t)dt = \Phi - \frac{U_\infty^2 t}{2} \quad (4.8)$$

Portanto, a chega-se à seguinte equação de Bernoulli modificada:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho_{ar}} = 0 \quad (4.9)$$

Como $\frac{dp}{d\rho_{ar}} = a_0^2$, considerando que a velocidade do som é invariante no tempo, e novamente usando a lei de Leibnitz, é possível descrever a equação do potencial total da seguinte forma:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{a_0^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(q^2) + \nabla\phi \cdot \nabla\left(\frac{q^2}{2}\right)\right] = 0 \quad (4.10)$$

Outra consideração importante a ser feita é que cada uma das componentes do potencial total é composto por uma parcela constante mais uma pequena perturbação dependente do tempo (BLAIR, 1992):

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z) + \phi(x, y, z, t) \quad (4.11.a)$$

$$p(x, y, z, t) = \bar{p}(x, y, z) + p(x, y, z, t) \quad (4.11.b)$$

$$\rho_{ar}(x, y, z, t) = \bar{\rho}_{ar}(x, y, z) + \rho_{ar}(x, y, z, t) \quad (4.11.c)$$

Desenvolvendo a Eq. (4.10) e considerando que a velocidade U_∞ é apenas na direção x e que a é invariante no tempo, tem-se então:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} - \frac{1}{a_0^2} (\phi_{tt} + 2U_\infty \phi_{xt} + U_\infty^2 \phi_{xx}) \quad (4.12)$$

Usando a teoria de pequenas perturbações lineares, além disso assumindo -se que tanto a velocidade U_∞ quanto a velocidade do som a , são constantes por todo o escoamento, chega-se à equação do potencial aerodinâmico, como mostrado abaixo:

$$(1 - M^2) \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{a_0^2} \right) \phi_{xt} - \left(\frac{1}{a_0^2} \right) \phi_{tt} = 0 \quad (4.13)$$

Uma etapa importante para a solução da equação anterior é definir as condições de contorno do problema. Neste caso, considera-se que o escoamento tangencia a superfície do corpo, ou seja, não existe componente normal à superfície:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V \cdot \nabla F = 0 \quad (4.14)$$

A partir da linearização da Eq. acima é possível encontrar uma função que descreve a superfície das asas, esta função pode ser expressa por duas componentes, uma relacionada à deformação do plano médio (h_m) e outra relacionada à espessura em relação ao plano médio (h_t), como definido pela função abaixo:

$$F_w(x, y, z, t) = z - h_m(x, y, t) \pm h_t(x, y, t) = 0 \quad (4.15)$$

Matematicamente, o vetor de velocidade aerodinâmico pode ser descrito em função das três componentes e da velocidade do escoamento considerado apenas na direção x . Utilizando a Eq. (4.14) e lembrando que u , v e w representam pequenas perturbações no escoamento, tem-se a seguinte relação:

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - (U_\infty + u) \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0 \quad (4.16)$$

onde:

$$h = h_m \pm h_t \quad (4.17)$$

Como o interesse é obter uma relação linear entre as componentes, desconsidera-se os termos não-lineares da equação, logo a Eq. (4.16) torna-se:

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.18)$$

Como já mostrado anteriormente, o h é formado por duas componentes, para a análise da resposta dinâmica do sistema, essas duas componentes podem ser analisadas de maneira independente. A componente analisada irá depender do método escolhido, uma vez que o h_m é considerado invariante no tempo e é utilizado pelo método DLM, enquanto que o h_t depende do tempo e é usado pelo método Doublet Sheet (DSM) (BLAIR, 1992).

Além das considerações já citadas vale ressaltar que o escoamento é considerado uniforme em condições de contorno distantes e que não existe influência de fontes a distâncias infinitas.

Para asas simples com deformações planares, as deformações podem ser representadas por polinômios no espaço e por harmônicos no tempo, na forma da série mostrada abaixo:

$$h(x, y, t) = \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} x^j y^m \right] e^{i\omega t} \quad (4.19)$$

Sendo que n_x é o grau do polinômio de aproximação da deformação na direção x , n_y é o grau do polinômio na direção y , a_{jm} representa as constantes do polinômio, enquanto que x e y , na Eq. (4.19), representa a coordenada do ponto da aproximação.

A partir da Eq. (4.18) e utilizando a função das deformações expresso na Eq. (4.19), chega-se à seguinte expressão para w :

$$w = \left(i\omega \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} x^j y^m \right] + U \left[\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} j a_{jm} x^{j-1} y^m \right] \right) e^{i\omega t} \quad (4.20)$$

É importante notar que a aproximação do *downwash* é feita por painel para cada modo analisado. Em seguida, utilizando o conceito de frequência reduzida (ALBANO; RODDEN, 1969), é possível reescrever a Eq. (4.20) da seguinte forma:

$$\bar{w} = \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} j a_{jm} x^{j-1} y^m + \frac{ik}{b} \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} a_{jm} x^j y^m \quad (4.21)$$

onde:

$$w(x, y, t) = \bar{w}(x, y, \omega) e^{i\omega t} \quad (4.22)$$

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty} \quad (4.23)$$

Vale ressaltar que k é a frequência reduzida, ω é a frequência de oscilação, U_∞ é a velocidade do escoamento e b é o comprimento de referência, que neste caso, corresponde à semi-corda. Além disso, assume-se que a equação (4.22) satisfaz as deformações dentro de cada partição ou painel separadamente e independentemente.

Para que seja possível relacionar as equações do potencial acústico e aerodinâmica é necessária uma mudança de variável, como descrita abaixo:

$$\begin{aligned}
x_0^m &= x - U_\infty t \\
y_0^m &= y \\
z_0^m &= z
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Para que se estabeleça uma relação entre os potenciais e acústica, utiliza-se o conceito de fontes móveis, cujo potencial pode ser determinado da seguinte maneira:

$$\bar{\phi}(r, t) = \frac{g\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} \tag{4.25}$$

Esta representa a solução elementar da equação potencial acústica. Vale ressaltar que g é uma função do tempo e o termo entre parênteses representa um atraso no tempo. Agora é necessário uma expansão da Eq. (4.25) para várias fontes que pulsam em sequência. Para isso, é preciso fazer uma segunda mudança de variáveis, que representa a transição do sistema de coordenadas estacionário para o móvel.

$$\begin{aligned}
x_0^e &= x_0^m - \xi \\
y_0^e &= y_0^m - \eta \\
z_0^e &= z_0^m - \zeta
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde (ξ, η, ζ) define a distância relativa a uma fonte localizada ao longo do eixo e os sobrescritos m e e , são referentes ao sistema móvel e estacionário, respectivamente.

Portando a Eq. (4.25) pode ser expandida para:

$$\phi_s(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \left(\frac{1}{\bar{R}}\right) F \left[\frac{1}{\beta^2} \left(t + \frac{U_\infty(x - U_\infty t - \xi)}{a_0^2} \right) - \frac{1}{a_0} \bar{R} \right] \tag{4.27}$$

onde \bar{R} e β são duas variáveis auxiliares, definidas como:

$$\bar{R} = \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \right)^{1/2} \tag{4.28}$$

$$\beta^2 = 1 - M^2 \quad (4.29)$$

Através de manipulações matemáticas, encontra-se a seguinte expressão:

$$\phi_s(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \left(\frac{1}{R} \right) F \left[t + \frac{M(x - \xi) - \bar{R}}{a_0 \beta^2} \right] \quad (4.30)$$

Que ainda pode ser expressa em função do atraso:

$$\phi_s(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \left(\frac{1}{R} \right) F[t - \tau] \quad (4.31)$$

É possível se provado por substituição da Eq. (4.13) na Eq. (4.31), que a Eq. (4.13) é a solução fonte fundamental da equação do potencial aerodinâmico. Como já foi descrito anteriormente, a função que descreve a deformação, h , depende da deformação no tempo no plano xy .

Além disso, é importante notar que uma única fonte não é capaz de gerar força, entretanto, duas ou mais fontes são capazes de gerar diferencial de pressão. Por isto, serão consideradas duas fontes opostas e com intensidade inversamente proporcionais a distância entre elas.

A próxima etapa consiste no cálculo do potencial de aceleração. Para isto, parte-se da equação do potencial aerodinâmico, Eq. (4.13), e, em seguida, deriva-se a equação em relação ao tempo e espaço e somando as respostas de acordo com a aproximação adotada para o *downwash*, mostrado na Eq. (4.18), para obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \beta^2 \rho_0 (\phi_t + U \phi_x)_{xx} + \rho_0 (\phi_t + U_\infty \phi_x)_{yy} - \rho_0 (\phi_t + U_\infty \phi_x)_{zz} - \left[\frac{2U_\infty}{a_0^2} \right] \rho_0 (\phi_t + U_\infty \phi_x)_{xt} \\ - \left[\frac{1}{a_0^2} \right] \rho_0 (\phi_t + U_\infty \phi_x)_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

A Eq. (4.32) ainda pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\beta^2 p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - \left[\frac{2U_\infty}{a_0^2} \right] p_{xt} - \left[\frac{1}{a_0^2} \right] p_{tt} = 0 \quad (4.33)$$

onde $p = -\rho_0 (\phi_t + U_\infty \phi_x)$ descreve tanto a pressão como o potencial de pressão.

As expressões (4.33) e (4.13) são matematicamente idênticas, apenas a interpretação física é diferente. Portanto, a solução elementar da equação do potencial aerodinâmico também é solução da equação do potencial de pressão, Eq. (4.31), logo:

$$p_s = \left[\frac{1}{\bar{R}} \right] f(t - \tau) \quad (4.34)$$

$$\text{onde } \tau = \frac{-M(x - \xi) + \bar{R}}{a_0^2 \beta^2} \text{ e } \bar{R} = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2}.$$

Restringindo o problema a uma frequência constante e adicionando a dependência no tempo, considera-se p_s como da forma complexa $\bar{p}_s e^{i\omega t}$.

$$p_s = \left[\frac{A}{\bar{R}} \right] e^{(i\omega(t - \tau))} = \left[\frac{A e^{-i\omega\tau}}{\bar{R}} \right] e^{i\omega t} = \bar{p}_s e^{i\omega t} \quad (4.35)$$

Substituindo o valor de τ :

$$\bar{p}_s = \frac{A}{\bar{R}} \left[\frac{i\omega}{a_0 \beta^2} (M(x - \xi) - \bar{R}) \right] \quad (4.36)$$

Através das considerações feitas é possível formular o potencial de aceleração:

$$\bar{\psi}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{A}{\bar{R}} \left[\frac{i\omega}{a_0 \beta^2} (M(x - \xi) - \bar{R}) \right] \right] \quad (4.37)$$

Resolvendo a derivada, encontra-se:

$$\bar{\psi}(x, y, z) = A \beta^2 (z - \zeta) \left[\frac{-i\omega}{\bar{R}^2} - \frac{1}{\bar{R}^3} \right] e^{\frac{i\omega}{a_0 \beta^2} (M(x - \xi) - \bar{R})} \quad (4.38)$$

Uma outra consideração a ser feita é que os dipolos são contínuos no plano ($\xi, \eta, \zeta = 0$), sendo necessária, portanto, a integração da área como segue:

$$\bar{\psi}(x, y, z) = \beta^2 z \int_S A(\xi, \eta) \left[\frac{-i\omega}{\bar{R}^2} - \frac{1}{\bar{R}^3} \right] e^{\frac{i\omega}{a_0\beta^2}(M(x-\xi)-\bar{R})} d\xi d\eta \quad (4.39)$$

Através de algumas manipulações matemáticas e fazendo a hipótese de escoamento sobre a placa, a amplitude A pode ser obtida como segue:

$$A = \frac{\Delta\bar{p}}{4\pi\rho_{ar}} \quad (4.40)$$

Logo,

$$\bar{\psi}(x, y, z) = \frac{\beta^2 z}{4\pi\rho_{ar}} \int_S \Delta\bar{p} \left[\frac{-i\omega}{\bar{R}^2} - \frac{1}{\bar{R}^3} \right] e^{\frac{i\omega}{a_0\beta^2}(M(x-\xi)-\bar{R})} d\xi d\eta \quad (4.41)$$

O objetivo é encontrar uma relação linear explícita entre o salto de pressão devido aos dipolos e a condição de contorno linear, que é a componente normal ao escoamento. E sabendo que o potencial de velocidade se relaciona com o potencial de aceleração pela equação abaixo, temos:

$$\bar{\phi}(x, y, z) = \frac{-1}{U_\infty} \exp\left[\frac{-i\omega x}{U_\infty}\right] \int_{-\infty}^{x-\xi} e^{\frac{i\omega\lambda}{U_\infty}} \bar{\psi} d\lambda \quad (4.42)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\phi}), \quad (4.43)$$

torna-se então possível encontrar a seguinte expressão:

$$\bar{w}(x, y, z) = \left[\frac{-1}{4\pi\rho_{ar}U_\infty} \right] \iint_S (\Delta\bar{p}) e^{\frac{-i\omega(x-\xi)}{U_\infty}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\int_{-\infty}^{x-\xi} \frac{1}{\bar{R}} e^{i\omega\left(\frac{\lambda}{U_\infty} + \frac{M\lambda}{a_0\beta^2} - \frac{\bar{R}}{a_0\beta^2}\right)} d\lambda \right] d\xi d\eta \quad (4.44)$$

Por fim, a Eq. (4.44) pode ser colocada numa forma resumida como segue:

$$\bar{w}(x, y, z) = \left[\frac{-1}{4\pi\rho_{ar}U_\infty} \right] \iint_S \Delta\bar{p}K((x-\xi), (y-\eta), z) d\xi d\eta \quad (4.45)$$

onde:

$$K(x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\frac{-i\omega x_0}{U_\infty}\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{R} e^{\frac{i\omega}{U_\infty\beta^2}(\lambda - M\bar{R})} d\lambda \right] \quad (4.46)$$

Uma transformação comum é adimensionalizar a velocidade e a pressão utilizando as seguintes relações:

$$\bar{w}_{nd} = \bar{w} / U_\infty \quad (4.47)$$

$$\Delta\bar{p}_{nd} = \frac{2\Delta\bar{p}}{\rho U_\infty^2} \quad (4.48)$$

Logo a Eq. (4.45), com os parâmetros adimensionalizados, é reescrita na forma da Eq. (4.49). Sendo uma maneira sucinta para se determinar a amplitude do *downwash* induzido pelo movimento da superfície.

$$\bar{w}_{nd}(x, y, z) = \left[\frac{-1}{8\pi} \right] \iint_S \Delta\bar{p}_{nd}K((x-\xi), (y-\eta), z) d\xi d\eta \quad (4.49)$$

4.2. Aplicação do método DLM

Em síntese, no método é suposto que a superfície pode ser aproximada por segmentos de planos, sendo dividida em pequenos painéis trapezoidais conhecidos como "boxes", conforme ilustrado na Figura 3.1. Neste caso, os "boxes" são organizadas em colunas paralelas ao escoamento (ALBANO e RODDEN, 1969).

Na forma como é aqui mostrado só pode ser usado para asas planares, no entanto Kalman (1971) propôs alterações para que o método fosse usado para configurações não planares.

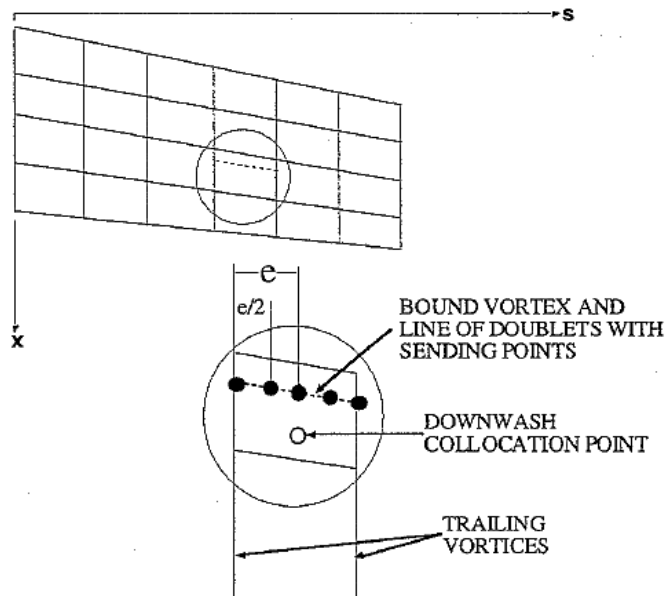


Figura 4.1 - Idealização da superfície sustentadora usando o método de painéis.
(extraído de RODDEN *et al*, 1988)

A função de Kernel, descrita pela Eq. (4.46), é uma função complexa onde está presente uma derivada segunda com relação à normal à superfície de sustentação.

$$K(x_0, y_0, z_0) = e^{\left(\frac{-i\omega x_0}{U_\infty}\right)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{R} e^{\frac{i\omega}{U_\infty \beta^2}(\lambda - MR)} d\lambda \right] \quad (4.50)$$

O objetivo agora é calcular esta derivada segunda em relação a z. Para isto, a Eq. (4.50) será reescrita numa forma mais simplificada como segue:

$$K(x_0, y_0, z_0) = e^{\left(\frac{-i\omega x_0}{U_\infty}\right)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [I_0] \quad (4.51)$$

$$\text{onde } I_0 = \int_{-\infty}^{x_0} \left[\frac{1}{R} e^{\frac{i\omega}{U_\infty \beta^2}(\lambda - MR)} \right] d\lambda$$

Para auxiliar no processo, serão definidas algumas relações auxiliares como segue:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{(y_0^2 + z_0^2)} \\
 \bar{R} &= \sqrt{(\lambda^2 + \beta^2 r_1^2)} \\
 v &= \frac{\lambda}{\beta r_1} \\
 k_1 &= \frac{\omega r_1}{U}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Ao se aplicar a derivada segunda presente na função de Kernel e considerando as mudanças de variáveis apresentadas, obtêm-se:

$$K(x_0, y_0, z_0) = e^{\left(\frac{-i\omega x_0}{U_\infty}\right)} \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial I_0}{\partial r_1} + \left(\frac{z_0^2}{r_1^2}\right) \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial I_0}{\partial r_1} \right) \right] \tag{4.53}$$

Landahl (1967) propôs uma mudança de variáveis para a integral I_0 dada por:

$$I_0 = \int_{t_1}^{\infty} \left[\frac{e^{\left[\frac{i\omega t}{U_\infty}\right]}}{\sqrt{r_1^2 + t^2}} \right] dt \tag{4.54}$$

$$\text{onde } t = \omega r_1, \quad t_1 = \frac{1}{\beta^2} (M\bar{R} - x_0).$$

Segundo Silva (2009) para pequenas perturbações de superfícies finas de sustentação, tal como no caso de asas, o efeito da espessura é de segunda ordem. Desta forma é consistente assumir apenas uma distribuição de dipolos para representar o salto de potencial que ocorre no caso da asa oscilando segundo um movimento harmônico simples, bem como o salto de potencial que ocorre na esteira.

A fim de simplificar a Eq. (4.53), assumiu-se que a superfície de sustentação é coincidente com o plano (xy), foi proposta uma representação mais resumida.

$$K(x_0, y_0, z_0) = e^{\left(\frac{-i\omega x_0}{U_\infty}\right)} \left(\frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{r_1^2} \right) \quad (4.55)$$

onde:

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_2 &= \left(\frac{z_0}{r_1} \right)^2 \\ K_1 &= r_1 \frac{\partial I_0}{\partial r_1} \\ K_2 &= r_1^3 \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial I_0}{\partial r_1} \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

No entanto, assumindo que a superfície é plana ($z_0 = 0$), tem-se o resultado final para o Kernel simplificado dado por:

$$\lim_{x \rightarrow 0} K(x_0, y_0, z_0) = e^{\frac{i\omega x_0}{U_\infty}} \left(\frac{K_1}{r_1^2} \right) \quad (4.57)$$

Vale ressaltar que esta simplificação aqui descrita é tratada de forma detalhada por Albano e Rodden (1969). Como foi assumido o caso plano, a expressão de K_1 pode ser dada da seguinte forma:

$$K_1 = -I_1 - \left(\frac{Mr_1}{\bar{R}} \right) \left(\frac{e^{-ik_1 u_1}}{\sqrt{u_1^2 + 1}} \right) \quad (4.58)$$

Neste caso, o parâmetro I_1 pode ser definido como:

$$I_1 = e^{-ik_1 u_1} \left[1 - \left(\frac{u_1}{\sqrt{1+u_1}} \right) + (-ik_1 J_1) \right] \quad (4.59)$$

$$\text{onde } u = -\frac{1}{\beta} \left[v - M \sqrt{1+v^2} \right] \text{ e } u_1 = \frac{-x_0 + M\bar{R}}{r_1 \beta^2}$$

A integral J_1 pode ser resolvida aproximando-a por uma série finita. Esta solução foi apresentada por Laschka (LASCHKA, 1963) para o caso onde o argumento da integral u é positivo e maior que zero.

$$J_1 \cong \sum_{n=1}^{11} \left[\frac{a_n e^{-ncu_1}}{(k_1^2 + n^2 c^2)} \right] (nc - ik_1) \quad (4.60)$$

onde $c = 0,372$ e a_n é definido conforma mostra a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Coeficientes para o cálculo de aproximação de J_1 .

"	‡"
1	0,24186198
2	-2,7918027
3	24,991079
4	-111,59196
5	271,43549
6	305,75288
7	-41,183630
8	545,98537
9	-644,78155
10	328,72755
11	-64,279511

Uma vez que tem-se simetria, quando $u_1 < 0$, pode-se tirar vantagem desta simetria e obter o valor de I_1 e usar a mesma aproximação da Eq. (4.60) para estas condições. Portanto, avalia-se separadamente a parte real e imaginária:

$$I_1(u_1, k_1) = 2 \operatorname{Re}[I_1(0, k_1)] - \operatorname{Re}[I_1(-u_1, k_1)] + i \operatorname{Im}[I_1(-u_1, k_1)] \quad (4.61)$$

O método *Doublet Lattice* (DLM) assume que os dipolos são distribuídos ao longo de uma linha a $\frac{1}{4}$ da corda de cada painel, bem como a escolha de um ponto a $\frac{3}{4}$ da corda onde se mede o *downwash* induzido pelos demais painéis que discretizam o corpo (SILVA, 2009).

Além disso, a função de Kernel por definição, é singular quando os *sending* e *receiving points* estão alinhados ou ainda nos painéis à jusante. Outro ponto importante é

que o Q tem variação de $F \gg a E$, estas dificuldades fazem com que só seja possível a resolução utilizando funções aproximadas.

Uma das considerações é que os dipolos estão dispostos ao longo de uma linha ao longo da envergadura do painel, a $\frac{1}{4}$ da corda do painel, e não ao longo do plano, como pode ser observado na Figura 4.2.

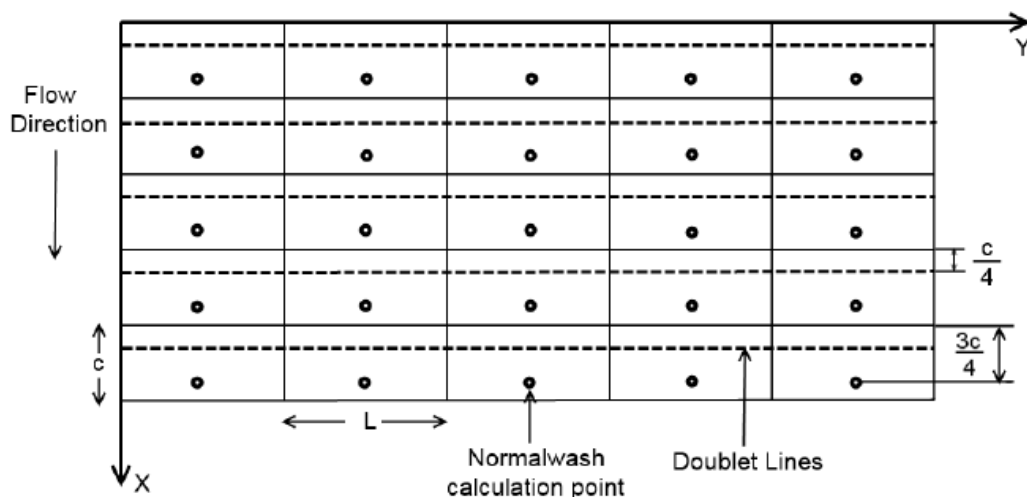


Figura 4.2 - Discretização típica para uma superfície sustentadora.
(extraído de KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015)

A Figura 4.3 mostra a orientação dos elementos em relação à estrutura. Vale ressaltar que cada elemento tem um comprimento que varia de $-e$ a $+e$.

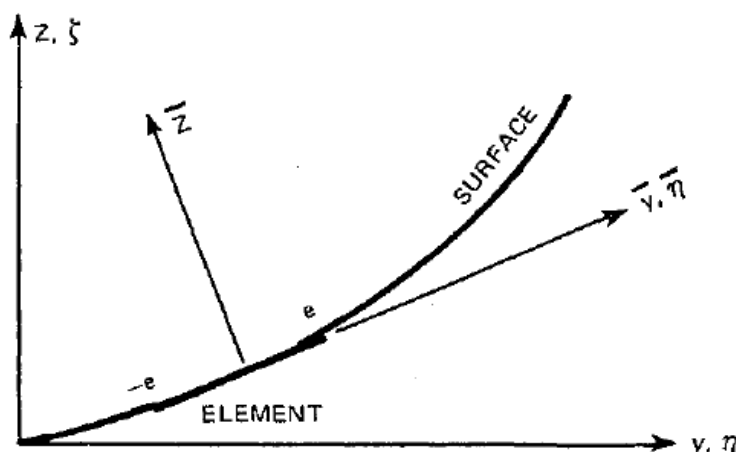


Figura 4.3 - Orientação dos elementos. (extraído de RODDEN *et al*, 1972)

De acordo com o DLM, o *downwash* é calculado a partir da seguinte relação:

$$\bar{w}(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi} \iint_S (\Delta C_p) K(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \quad (4.62)$$

A Eq. (4.62) também pode ser representada por uma integral ao longo de cada uma das distribuições lineares de dipolo ao longo da corda do painel, como representado na Figura 4.4.

$$\bar{w}(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi} \int_{-L}^L (\Delta C_p) K(x - \xi, y - \eta, z) dl \quad (4.63)$$

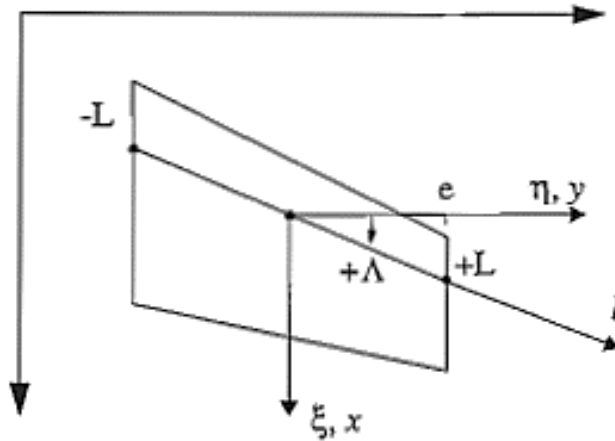


Figura 4.4 - Representação do sistema de coordenadas de cada painel. (extraído de BLAIR, 1992)

A força por unidade de comprimento, Δf , desta distribuição de dipolos, assim como a força por unidade de área do painel, Δp , são assumidas constantes dentro do painel e são relacionadas por:

$$\Delta p = \frac{\Delta f}{\Delta x \cos \Lambda} \quad (4.64)$$

Logo,

$$\Delta f = \Delta p \Delta x \cos \Lambda \quad (4.65)$$

Aplicando uma mudança de coordenadas de ξ e η para ξ e l , seguindo a seguinte relação,

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \Lambda \\ 0 & \text{cos } \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ l \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

integrando a Eq. (4.62) em relação a ξ ,

$$\bar{w}(x, y, 0) = -\frac{\Delta f}{4\pi U_\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-L \cos \Lambda}^{L \cos \Lambda} K(x-\xi, y-\eta, \varepsilon) dl, \quad (4.67)$$

e da Eq. (4.58),

$$\bar{K}(x_0, y_0, 0) = e^{\frac{i\omega x_0}{U_\infty}} K_1(x_0, y_0), \quad (4.68)$$

pode-se chegar portanto à seguinte relação:

$$\bar{w}(x, y, 0) = -\frac{\Delta f}{4\pi \rho_{ar} U_\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-e}^e \frac{K_1(x-\xi, y-\eta) e^{\frac{-i\omega x_0}{U_\infty}}}{(y-\eta)^2 + \varepsilon^2} dl \quad (4.69)$$

ou de forma abreviada:

$$\bar{w}(x, y, 0) = -\frac{\Delta p \Delta x}{4\pi \rho_{ar} U_\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-e}^e \frac{\bar{K}(x-\xi, y-\eta)}{(y-\eta)^2 + \varepsilon^2} \cos \Lambda dl \quad (4.70)$$

onde:

$$\bar{K}(x_0, y_0, 0) = K_1(x-\xi, y-\eta) e^{\frac{-i\omega x_0}{U_\infty}} \quad (4.71)$$

Sabendo que $\beta L \ll \mathcal{R} \&$, pode ser feita a mudança de variável na integral:

$$\bar{w}(x, y, 0) = -\frac{\Delta p \Delta x}{4\pi \rho_{ar} U_\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-e}^e \frac{\bar{K}(x-\xi, y-\eta)}{(y-\eta)^2 + \varepsilon^2} d\eta \quad (4.72)$$

O K é uma função complexa, entretanto, esta pode ser aproximada por uma função parabólica complexa em função de η .

$$\bar{K}(x_0, y_0) = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 \quad (4.73)$$

onde os coeficientes são dados por:

$$A_2 = \bar{K}(x_L, y_L) \quad (4.74.a)$$

$$A_1 = \frac{\bar{K}(x_R, y_R) - \bar{K}(x_L, y_L)}{2e} \quad (4.74.b)$$

$$A_0 = \frac{\bar{K}(x_L, y_L) - 2\bar{K}(x_C, y_C) - \bar{K}(x_R, y_R)}{2e^2} \quad (4.74.c)$$

Na forma como estão apresentadas $T_{\hat{A}}$ e $U_{\hat{A}}$ são as coordenadas referentes ao ponto onde β vale $-e$, enquanto que $T_{\hat{E}}$ e $U_{\hat{E}}$ diz respeito ao ponto com valor de β igual a $+e$, e por fim $T_{1/4}$ e $U_{1/4}$ correspondem ao ponto onde β vale 0, ou seja, na posição central do painel.

Portanto, a Eq. (4.72) pode ser escrita como:

$$\bar{w}(x, y, 0) = -\frac{\Delta p \Delta x}{4\pi\rho_{ar}U_{\infty}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-e}^e \frac{A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2}{(y-\eta)^2 + \varepsilon^2} d\eta \quad (4.75)$$

ou ainda sob a seguinte forma:

$$\bar{w}(x, y, 0) = -\frac{\Delta p \Delta x}{4\pi\rho_{ar}U_{\infty}} [B_0 + B_1 + B_2] \quad (4.76)$$

Sendo que:

$$B_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-e}^e \left[\frac{A_0}{\eta^2 - 2y\eta + (y^2 + \varepsilon^2)} \right] d\eta \quad (4.77)$$

Resolvendo a integral e o limite de ε é possível reduzir a Eq. (4.77) para:

$$B_0 = \left[\frac{2eA_0}{y^2 - e^2} \right] \quad (4.78)$$

De maneira análoga, pode-se encontrar as expressões de B_1 e B_2 .

$$B_1 = A_1 \left[\frac{1}{2} \log \left[\frac{(e-y)^2}{(e+y)^2} \right] + \left[\frac{2ey}{y^2 - e^2} \right] \right] \quad (4.79)$$

$$B_2 = A_2 \left[2e + y \log \left[\frac{(e-y)^2}{(e+y)^2} \right] + \left[\frac{2ey}{y^2 - e^2} \right] \right] \quad (4.80)$$

CAPÍTULO V

MODELO AEROVISCOELÁSTICO

O objetivo deste capítulo é descrever a aplicação do DLM para superfícies sanduíches sustentadoras, a partir dos desenvolvimentos apresentados no Capítulo 3. Como já foi dito anteriormente, o DLM é um método de painéis que assume uma distribuição de pressão constante em cada painel e que parte do princípio de que cada painel é afetado por uma linha de dipolos localizada a $\frac{1}{4}$ da corda e que a $\frac{3}{4}$ encontra-se o ponto de *normalwash*.

5.1. Modelo aerodinâmico generalizado

O método DLM fornece a distribuição da força aerodinâmica para uma determinada distribuição *normalwash* na malha aerodinâmica para uma dada frequência reduzida. No entanto, o modelo aerodinâmico deve ser capaz de interagir efetivamente com o modelo estrutural correspondente para ser capaz de calcular os determinar o comportamento aeroviscoelásticos do sistema.

Para isso, necessita-se gerar a distribuição *normalwash* para uma dada deformação elástica que é fornecida pela malha estrutural. Além disso, o efeito das forças aerodinâmicas aplicadas no modelo estrutural deve ser computado. Finalmente, precisa-se de um modelo no domínio de frequência para realizar as análises aeroviscoelásticas conforme desejado. (KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015)

5.1.1. Construção da malha de spline

O primeiro passo é fazer a ligação entre as malhas estrutural e aerodinâmica. A fim de facilitar o entendimento, será considerado uma superfície com apenas quatro painéis, como pode ser observado na Figura 5.1.

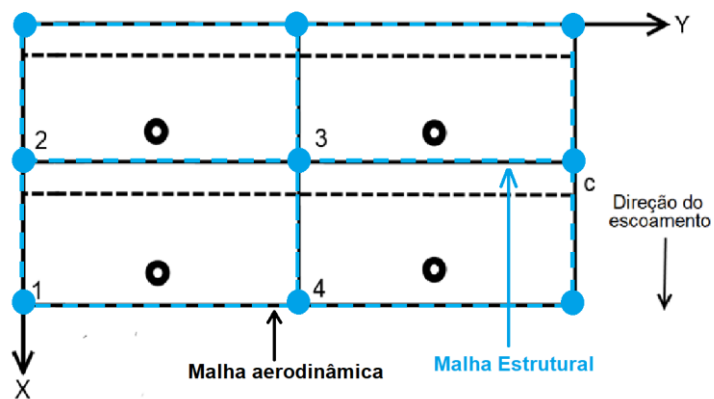


Figura 5.1 - Exemplo de malha aerodinâmica 2x2 com uma malha estrutural também 2x2.

O modelo estrutural pode ser expresso em coordenadas modais via decomposição modal pelo método dos elementos finitos:

$$\mathbf{M}_{hh} = [\phi]^T \mathbf{M} [\phi] \quad (5.1.a)$$

$$\mathbf{K}_{hh} = [\phi]^T \mathbf{K} [\phi] \quad (5.1.b)$$

$$\mathbf{C}_{hh} = [\phi]^T \mathbf{C} [\phi] \quad (5.1.c)$$

onde \mathbf{M}_{hh} , \mathbf{K}_{hh} e \mathbf{C}_{hh} representam as matrizes de massa, rigidez e amortecimento modal, respectivamente, e ϕ são os autovetores do sistema. Portanto o modelo estrutural pode ser escrito como segue:

$$\mathbf{M}_{hh} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{hh} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_{hh} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}_{\text{modal}} \quad (5.2)$$

Sendo que, F_{modal} é a excitação externa em coordenadas modais A próxima etapa é a construção da *spline* baseada na malha estrutural existente que é responsável por fazer a conexão entre ambas as malhas. Essa conexão pode ser observada na Figura 5.2.

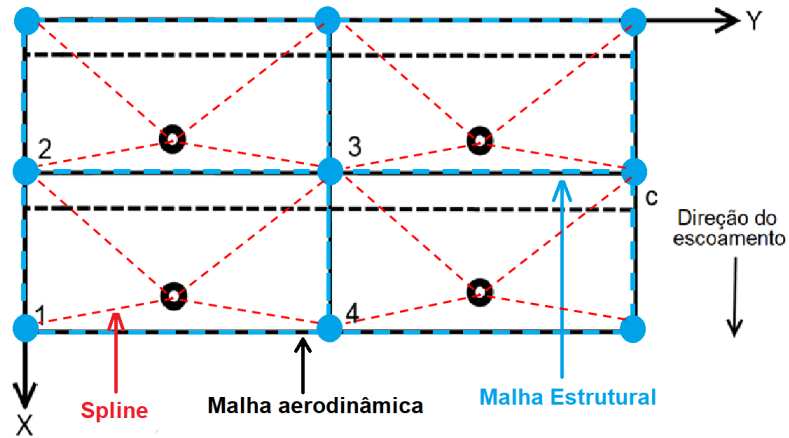


Figura 5.2 - Exemplo de construção da spline.

Cada uma das conexões vermelhas da malha de *spline* é considerada rígida. O propósito da *spline* é transformar o movimento de todos os graus de liberdade de um nó na malha estrutural em movimento puro de elevação dos nós da *spline* anexado a ele. Assume-se que essa transformação é representada pela matriz, ϵ_{aero} . (KOTIKALPUDI; PFIFER; BALAS, 2015).

O movimento dos painéis aerodinâmicos é descrito em termos de seus pontos médios a $\frac{3}{4}$ do bordo de ataque do painel. Assim, a sustentação relativa dos nós da *spline* é interpolada para obter a força em cada nó da malha, a fim de poder calcular o deslocamento. Esta operação de interpolação pode ser expressa na forma de uma matriz 6_{aero} . Pode-se então avaliar 6_{aero} da seguinte forma:

$$T_{as} = T_{\text{interp}} T_{\text{spline}} \quad (5.3)$$

5.1.2. Carregamento aerodinâmico no domínio modal

Baseado no DLM, a distribuição da força aerodinâmica pode ser escrita da forma:

$$F_{\text{aero}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{ar}} U_{\infty}^2 AIC(k) S(D_R + ikD_I) T_{as} \phi \eta \quad (5.4)$$

onde \mathbf{S} é a matriz de integração aerodinâmica que neste caso de placa plana, ela é composta pela própria área dos painéis. Para, $\mathbf{p}_{\hat{\epsilon}}$, é a matriz que contém as amplitudes das inclinações, \hat{h}_x , associadas a cada painel e para cada modo, e $\mathbf{p}_{\hat{A}}$ é a matriz que contém apenas os deslocamentos, h , dos painéis para cada modo. (SANTOS *et al*, 2005). Já a matriz \mathbf{AIC} representa a influência aerodinâmica, sendo obtida via DLM pelas seguintes relações:

$$\{\bar{w}\}_i = \mathbf{D}(k)\{\Delta C_p\}_i \quad (5.5)$$

$$\{\Delta C_p\}_i = \mathbf{AIC}(k)\{\bar{w}\}_i \quad (5.6)$$

Portanto, tem-se que:

$$\mathbf{AIC}(k) = (\mathbf{D}(k))^{-1} \quad (5.7)$$

Usando a mesma transformação usada na Eq. (5.1), pode-se encontrar a seguinte expressão para a força aerodinâmica no domínio modal:

$$\mathbf{F}_{\text{modal}} = \frac{1}{2} \rho_{ar} U_{\infty}^2 \phi^T \mathbf{T}_{as}^T \mathbf{AIC}(k) \mathbf{S} (\mathbf{D}_R + ik\mathbf{D}_I) \mathbf{T}_{as} \phi \boldsymbol{\eta} \quad (5.8)$$

A Eq. (5.8) pode ser ainda escrita em função da matriz aerodinâmica generalizada, \mathbf{Q} , da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{\text{modal}} = \frac{1}{2} \rho_{ar} U_{\infty}^2 [\mathbf{Q}(k)] \{\boldsymbol{\eta}\} \quad (5.9)$$

$$\text{onde } [\mathbf{Q}(k)] = \phi^T \mathbf{T}_{as}^T \mathbf{AIC}(k) \mathbf{S} (\mathbf{D}_R + ik\mathbf{D}_I) \mathbf{T}_{as} \phi.$$

Logo, a Eq. (5.2) pode ser escrita como segue:

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_{hh} + i\omega \mathbf{C}_{hh} + \mathbf{K}_{hh}) \{\boldsymbol{\eta}\} = \frac{1}{2} \rho_{ar} U_{\infty}^2 [\mathbf{Q}(k)] \{\boldsymbol{\eta}\} \quad (5.10)$$

Para avaliar a estabilidade do sistema representado pela equação anterior é necessário avaliar os autovalores do sistema.

Então, quando a parte imaginária do autovalor se torna positiva, o sistema se torna instável. Mas o fato de que Q é uma matriz complexa dependente do valor de k torna a análise de estabilidade um pouco mais complicada, pois as frequências naturais do sistema aeroelástico variam em função da frequência reduzida, já que o carregamento aerodinâmico não estacionário é dependente da frequência reduzida e esta é função das frequências naturais do sistema. Isto significa que o problema dos autovalores a ser resolvido é não-linear. Então, alguns métodos foram desenvolvidos para resolver o problema de autovalores não-lineares associado à estabilidade aeroelástica ou ainda aeroviscoelástica. (SANTOS *et al*, 2005)

5.2. Métodos para predição da velocidade de *flutter*

Na sequência, serão apresentados alguns dos métodos presentes na literatura e que também podem ser usados de forma combinada.

Vale salientar que além dos métodos aqui apresentados, desenvolvidos no domínio da frequência, existem também os métodos no domínio de Laplace, como a aproximação *Least-square* ou ainda a aproximação *Matrix-Padé* que são utilizados para problemas relacionados a servoelasticidade.

5.2.1. Método de solução K

A equação básica para a análise de *flutter* modal pelo método K é dado por:

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M}_{hh} + i\omega \mathbf{C}_{hh} + (1 + ig) \mathbf{K}_{hh} - \frac{1}{2} \rho_{ar} U_{\infty}^2 [\mathbf{Q}(k)] \right] \{\boldsymbol{\eta}\} = 0 \quad (5.11)$$

onde g é o amortecimento estrutural artificial.

No método de solução K, o termo aerodinâmico é convertido para massa aerodinâmica equivalente:

$$\left[- \left[\mathbf{M}_{hh} + \frac{\rho_{ar}}{2} \left(\frac{b}{k} \right)^2 \mathbf{Q}_{hh}(m, k) \right] \frac{\omega^2}{1+ig} + \mathbf{C}_{hh} \frac{i\omega}{\sqrt{1+ig}} + \mathbf{K}_{hh} \right] \{\boldsymbol{\eta}\} = 0 \quad (5.12)$$

Neste caso, o autovetor do sistema é dado por:

$$p^2 = \left(\frac{\omega^2}{1+ig} \right) \quad (5.13)$$

Que também pode ser reescrito como:

$$p^2 = \frac{\omega^2(1+ig)}{1-g^2} = a+ib \quad (5.14)$$

onde: $g = \frac{b}{a}$ e $\omega = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}$

Depois do cálculo da frequência natural e da nova frequência reduzida para uma dada velocidade que é fixada inicialmente, compara-se com a frequência reduzida do ciclo anterior até que haja a convergência do método.

Assim como em outros métodos, a detectar a ocorrência do *flutter* em algum modo é necessário plotar o diagrama Vxg, como mostrado na Figura 5.3.

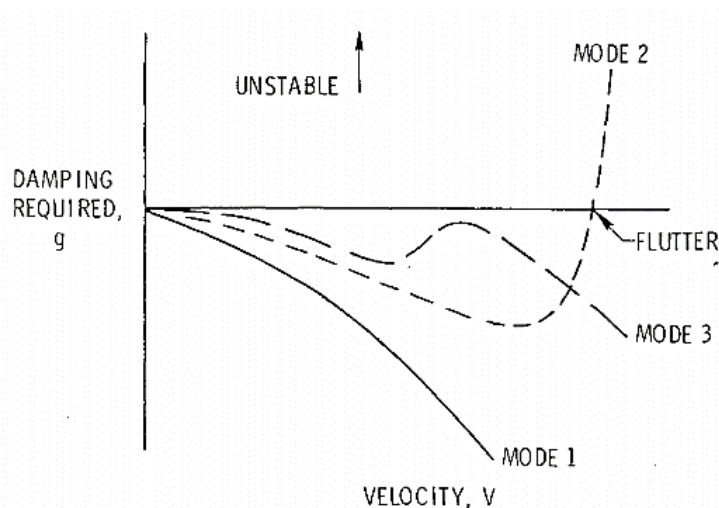


Figura 5.3 - Exemplo de diagrama Vxg. (extraído de GARRICK; REED III, 1981)

5.2.2. Método de solução PK

Já para o método PK, a equação fundamental para a análise de *flutter* é dada por:

$$\left[\mathbf{M}_{hh} p^2 + \left(\mathbf{C}_{hh} - \frac{1}{2} \rho_{ar} b U_\infty \text{Im}(\mathbf{Q}) / k \right) p + \left(\mathbf{K}_{hh} - \frac{1}{2} \rho_{ar} U_\infty^2 \text{Re}(\mathbf{Q}) \right) \right] \{\boldsymbol{\eta}\} = 0 \quad (5.15)$$

Para facilitar a resolução do sistema acima, escreve-se a equação no espaço de estado, ($[\mathbf{A} - p\mathbf{I}]\{\boldsymbol{\eta}\} = 0$), fazendo com que a ordem do sistema dobre:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{M}_{hh})^{-1} \left(\mathbf{K}_{hh} - \frac{1}{2} \rho_{ar} U_\infty^2 \text{Re}(\mathbf{Q}) \right) & -(\mathbf{M}_{hh})^{-1} \left(\mathbf{C}_{hh} - \frac{1}{2k} \rho_{ar} b U_\infty \text{Im}(\mathbf{Q}) \right) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Ao resolver o problema de autovalores, encontra-se um raízes da seguinte forma:

$$p = \omega \left(\frac{g}{2} \pm i \right) \quad (5.17)$$

onde $\omega = \text{Im}(p)$, $g = \frac{2 \text{Re}(p)}{\text{Im}(p)}$, e o critério de parada para a convergência da frequência reduzida segue o esquema mostrado abaixo:

$$\left| k_s^{(j)} - k_s^{(j-1)} \right| < \varepsilon \rightarrow k_s^{(j-1)} < 1 \quad e \quad \left| k_s^{(j)} - k_s^{(j-1)} \right| < \varepsilon k_s^{(j-1)} \rightarrow k_s^{(j-1)} \geq 1 \quad (5.18)$$

Sendo que o sobrescrito j representa j -ésimo passo do loop, já subscrito s representa a frequência reduzida avaliada, e conseqüentemente, o modo avaliado e ε é o valor da tolerância, que por *default* é usado 0,001. (RODDEN; JOHNSON, 1994)

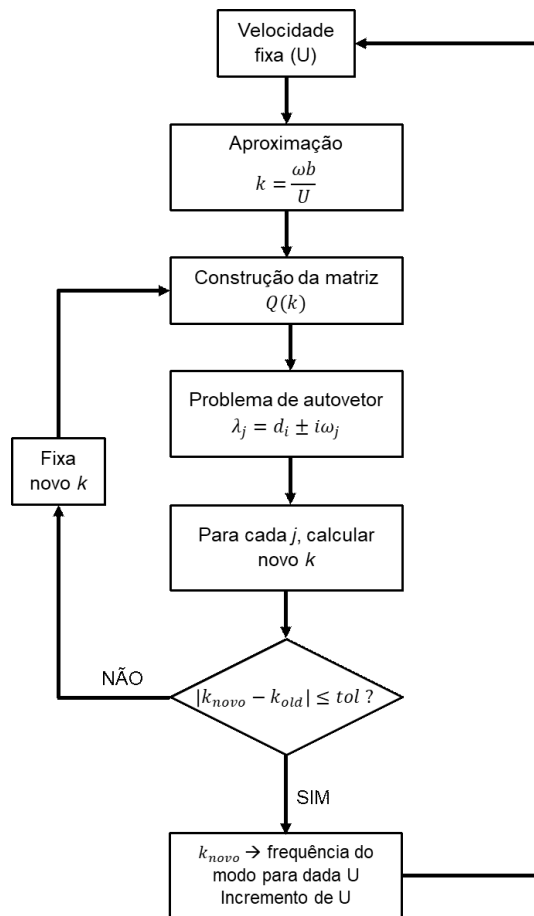


Figura 5.4 - Fluxograma do método PK. (Adaptado de BOTEZ *et al*, 2003)

5.2.3. Método de solução P

O método P é derivado no método PK. O processo de iterações é o mesmo mas a forma como as equação são apresentadas é diferente. Na verdade, o método P é uma forma não-dimensional do método PK, onde as coordenadas generalizadas, a velocidade e o tempo são normalizadas. (BOTEZ, 2005)

$$\mathbf{M}_{hh}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \left(\mathbf{C}_{hh} - \frac{1}{2k} \rho_{ar} b U_{\infty} \text{Im}(\mathbf{Q}) \right) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \left(\mathbf{K}_{hh} - \frac{1}{2} \rho_{ar} U_{\infty}^2 \text{Re}(\mathbf{Q}) \right) \boldsymbol{\eta} = 0 \quad (5.19)$$

Com base nas definições de taxa de densidade do ar e velocidade equivalente, é possível encontrar a seguinte relação:

$$\rho_{ar} U_{\infty} = \rho_0 V_E \sqrt{\sigma} \quad (5.20)$$

onde $\sigma = \frac{\rho}{\rho_0}$ é a taxa de densidade do ar e $V_E = \sqrt{\sigma}U$ é a velocidade equivalente do

ar.

Introduzindo a Eq. (5.20) na Eq. (5.19), encontra-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{M}_{hh}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \left(\mathbf{C}_{hh} - \frac{1}{2k} \rho_{ar} b \sqrt{\sigma} V_E \text{Im}(\mathbf{Q}) \right) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \left(\mathbf{K}_{hh} - \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 \text{Re}(\mathbf{Q}) \right) \boldsymbol{\eta} = 0 \quad (5.21)$$

A próxima etapa é uma mudança de variável, sendo introduzida uma velocidade de referência, V_0 , e uma frequência de referência, ω_0 , definido como:

$$\omega_0 = \frac{V_0}{c} \quad (5.22)$$

Sendo c o valor da corda de referência. Para fazer a conversão das coordenadas generalizadas $\boldsymbol{\eta}$ no domínio ω para $\boldsymbol{\eta}^P$ no domínio ω^P , escreve-se a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\eta}^P(\omega^P) = \boldsymbol{\eta}(\omega) \quad (5.23)$$

onde ω^P é a taxa entre a própria frequência e a frequência de referência obtendo, portanto, as seguintes relações :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \omega_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^P \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \omega_0^2 \ddot{\boldsymbol{\eta}}^P \end{aligned} \quad (5.24)$$

Utilizando a equação anterior e a definição de ω^P , obtém-se a expressão da frequência reduzida:

$$k = \frac{\sqrt{\sigma}}{2\kappa} \omega^P \quad (5.25)$$

Sendo que κ é a relação de velocidade dado pela velocidade equivalente em função da velocidade de referência. Portanto introduzindo o novo sistema de coordenadas, a Eq. (5.21) pode ser reescrita como descrito abaixo:

$$\mathbf{M}^P \ddot{\boldsymbol{\eta}}^P + (\mathbf{D}^P + \kappa \sqrt{\sigma} \mathbf{D}_Q^P) \dot{\boldsymbol{\eta}}^P + (\mathbf{K}^P + \kappa^2 \mathbf{K}_Q^P) \boldsymbol{\eta}^P = 0 \quad (5.26)$$

onde $\mathbf{M}^P = \mathbf{M}_{hh}$, $\mathbf{K}^P = \frac{1}{\omega_0^2} \mathbf{K}_{hh}$, $\mathbf{D}^P = \frac{1}{\omega_0} \mathbf{C}_{hh}$, $\mathbf{D}_Q^P = \frac{1}{4k} \rho_0 c^2 \text{Im}(\mathbf{Q})$ e $\mathbf{K}_Q^P = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 \text{Re}(\mathbf{Q})$.

5.3. Implementação numérica do método PK para o modelo aeroviscoelástico

O modelo aeroelástico já é um problema não linear e com dificuldades para resolução, se acrescentarmos a parte viscoelástica do sistema, as dificuldade para encontrar também a solução aumentam.

Como já explicado em capítulos anteriores, o comportamento do material viscoelástico além de depender de parâmetros ambientais depende também da frequência de operação e isso faz com que as matrizes de massa, rigidez, amortecimento e rigidez sejam alterados a cada ciclo.

Por ser de fácil implementação e também de fácil interpretação dos resultados, será utilizado neste trabalho o método PK. Vale ressaltar que a implementação aqui apresentada considera que o carregamento aerodinâmico não é alterado pela presença do material viscoelástico. Isso é possível, uma vez que a presença do material não altera a forma modal do sistema, apenas provoca uma redução das amplitudes de vibração dos mesmos.

Os passos para a implementação serão descritos em seguida e para uma melhor compreensão, ao final deste capítulo será apresentado um fluxograma da implementação da metodologia utilizada.

Inicialmente, através do código NASTRAN foi feita a modelagem do painel plano sem o tratamento viscoelástico superficial, a fim de obter uma base de dados da matriz Q para uma faixa de valores de frequência reduzida, que variou de 0,0065 até 14. Esta base será usada na obtenção da matriz Q para um determinado k através da interpolação dos dados.

Em seguida, inicia-se o método do PK, para iniciar o método serão usadas as frequências naturais da estrutura sem tratamento. O primeiro passo é fixar uma velocidade (

U_∞) pequena. Com a velocidade já definida calcula-se a frequência reduzida: $k = \frac{\omega b}{U_\infty}$. Com

o valor de frequência reduzida calculado, o próximo passo é calcular a matriz Q a partir da interpolação da base e obter as matrizes de massa, rigidez e amortecimento modal do sistema com tratamento. A obtenção dessas matrizes é feita utilizando MEF de uma placa sanduiche em MATLAB®.

A próxima etapa é a união dos modelos aerodinâmico e viscoelástico, conforme descrito na Eq. (5.15) e a partir deste sistema calcular os autovalores e autovetores do sistema. Os autovetores traduzem a frequência natural e amortecimento do sistema, conforme descrito na Eq. (5.17).

Em seguida, compara-se a nova frequência reduzida calculada com aquela que se iniciou o *loop*: se o absoluto da diferença for menor que a tolerância para todos os modos analisados, então parte-se para a próxima etapa; caso esse valor seja maior que a tolerância para algum dos modos, fixa-se aqueles que já convergiram e continua o processo para os modos que ainda não convergiram, até o ponto em que todos atendam ao requisito de tolerância. Isto quer dizer que para uma dada velocidade e conseqüentemente, uma dada frequência reduzida, estes últimos valores correspondem à frequência e ao amortecimento. O último passo do *loop* é dar um acréscimo na velocidade e recomeçar o processo.

Ao final do cálculo, o objetivo é ter a velocidade em função da frequência natural de cada modo, bem como a taxa de amortecimento estrutural, g , que será responsável por identificar se um dado modo entrou em *flutter* ou não.

Todos os passos descritos são apresentados na forma de fluxograma na Figura 5.5.

Observando a Figura 5.5 é possível notar que existe um caminho chamado interpolação para novo k (à direita), este equivale ao processo em que utiliza-se a base de matrizes $Q(k)$ existente e aliado a uma função de interpolação calcula-se a matriz Q correspondente à nova frequência reduzida. Este caminho é realizado a partir do segundo loop, vale ressaltar que a base de matrizes obtida do NASTRAN não é alterada em nenhum momento.

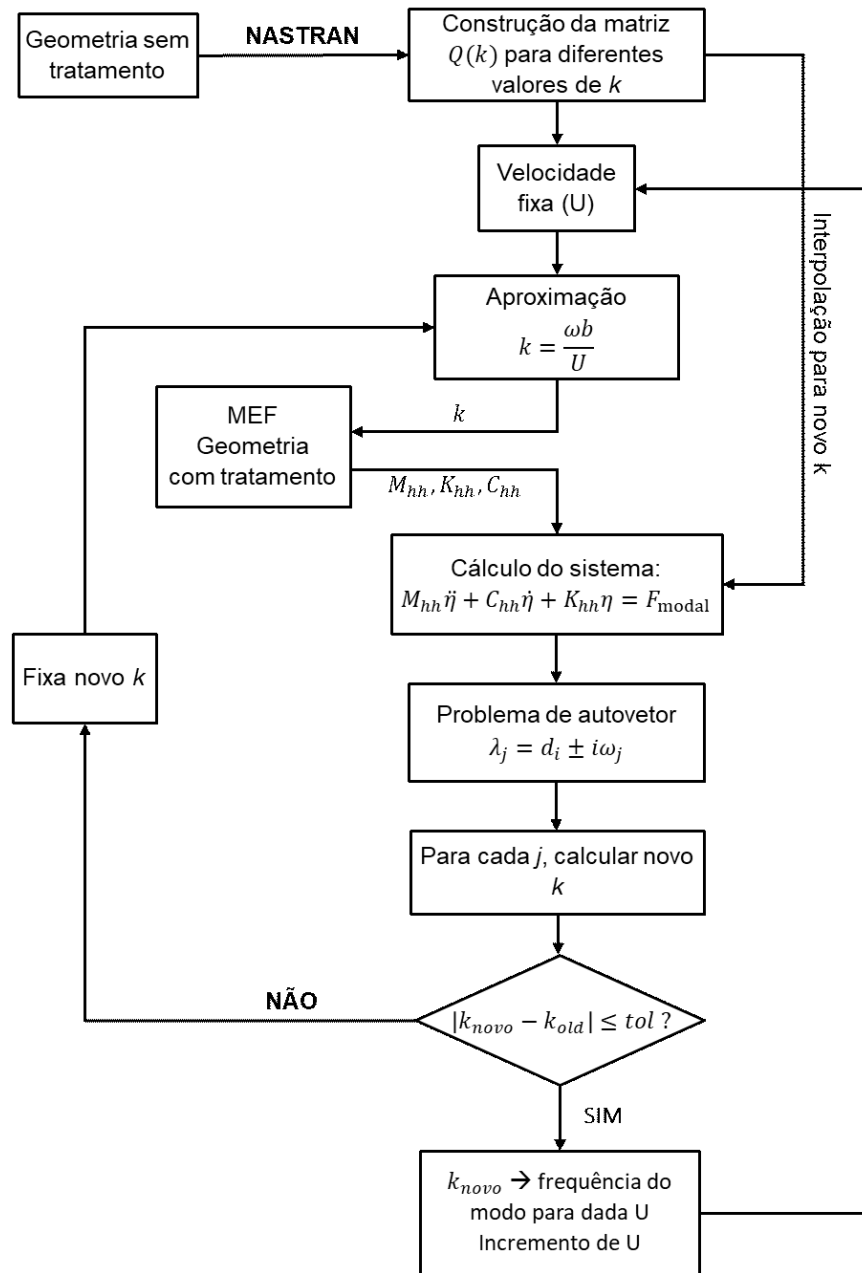


Figura 5.5 - Método iterativo usado para a análise aerodinâmica de um sistema contendo amortecimento viscoelástico.

CAPÍTULO VI

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos das inúmeras simulações numéricas, usando o ambiente de programação MATLAB®. A fim de melhor compreender a influência do amortecimento viscoelástico no fenômeno do *flutter*, será avaliado um painel sanduíche viscoelástico de três camadas: uma camada base de alumínio, uma camada viscoelástica do material 3M ISD112 e uma camada restrigente de alumínio. As propriedades geométricas e físicas de cada camada são descritas, respectivamente, nas Tabela 6.1 e 6.2.

Tabela 6.1 – Propriedades geométricas do painel sanduíche viscoelástico.

<i>Camada</i>	<i>Comprimento [mm]</i>	<i>Largura [mm]</i>	<i>Espessura [mm]</i>
Base	300	500	1,5
Viscoelástica	300	500	0,0254
Restringente	300	500	0,5

Tabela 6.2 – Propriedades mecânicas do painel sanduíche viscoelástico.

<i>Camada</i>	<i>Módulo [GPa]</i>	<i>Coef. de Poisson</i>	<i>Densidade [g/cm³]</i>
Placa base	70	0,34	2700
Viscoelástica	-	0,49	950
Restringente	70	0,34	2700

Vale ressaltar que as propriedades geométricas apresentadas na Tabela 6.1 serão utilizadas como referências para os estudos paramétricos que serão realizados neste capítulo. Além disso, em todas as simulações, a temperatura de operação foi considerada 27°C.

6.1. Verificação do modelo estrutural sem tratamento

Inicialmente, é necessário fazer a verificação do modelo de elementos finitos da placa base sem tratamento viscoelástico. Para isto, utilizou-se como base de comparação um modelo implementado no código comercial de elementos finitos NASTRAN. A Tabela 6.3 mostra as frequências naturais obtidas para ambos os modelos.

Tabela 6.3 – Comparação das frequências naturais dos modelos em MATLAB e ANSYS.

Modo	\tilde{n}_a (ANSYS)	\tilde{n}_a (MATLAB)
1	5,16	5,25
2	18,58	18,58
3	32,07	32,90
4	62,08	62,50

A diferença nas frequências naturais observadas na Tabela 6.3 é dada principalmente por arredondamentos e simplificações do método usado, outra fonte de erro pode estar relacionada a função de aproximação escolhida para o método analítico. Nota-se também que essa diferença é da ordem de 10^{-1} e que esta não apresenta grandes impactos nas próximas etapas.

Além de comparar as frequências naturais obtidas é necessário comparar as formas modais de cada modo. Como o fenômeno do *flutter* normalmente está associado aos modos de frequências mais baixas, portanto neste trabalho, serão avaliados os quatro primeiros modos de vibrar do painel. A comparação das formas modais é apresentada nas Figura 6.1 a 6.4.

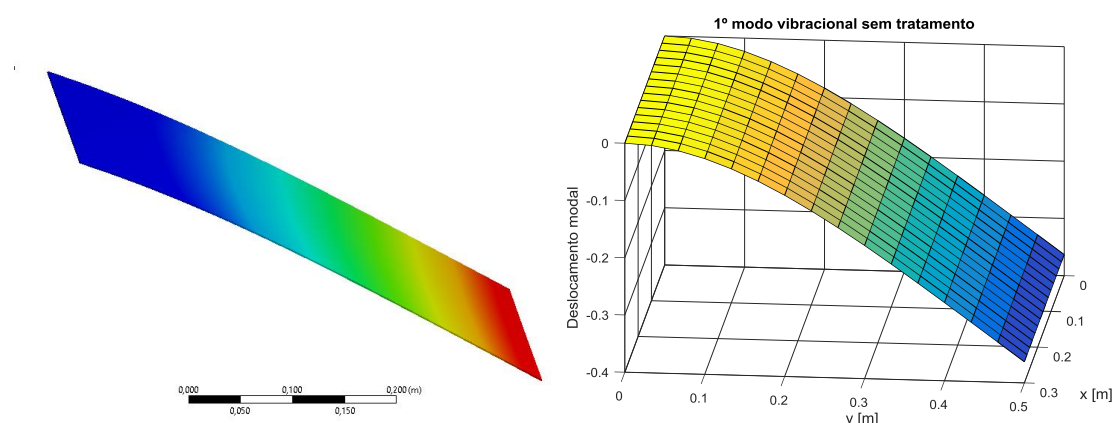


Figura 6.1 - Comparação do 1º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).

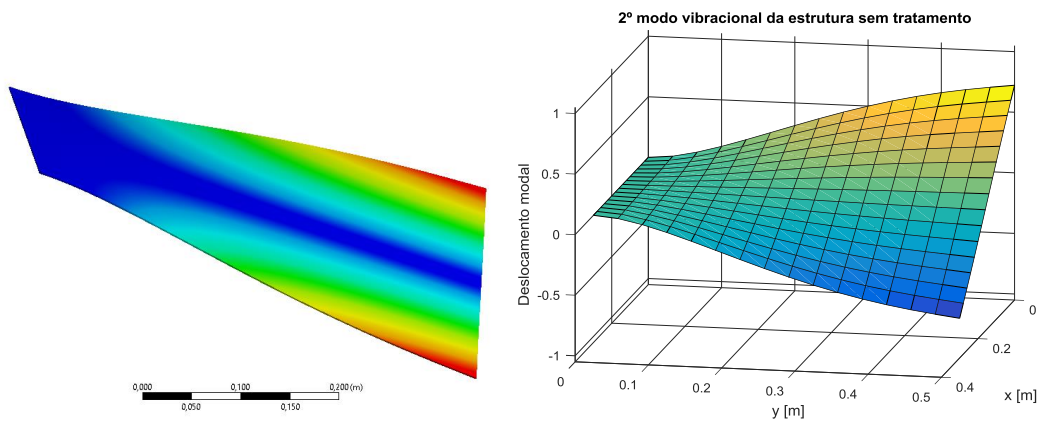


Figura 6.2 - Comparação do 2º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).

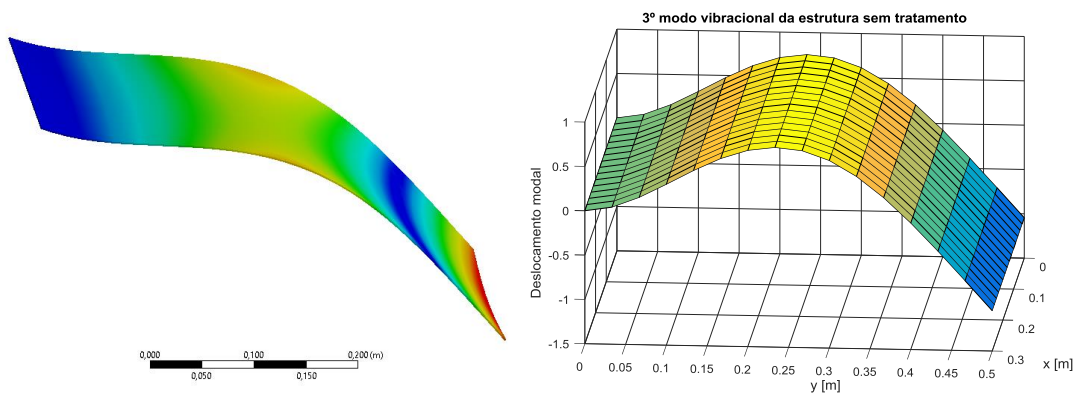


Figura 6.3 - Comparação do 3º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).

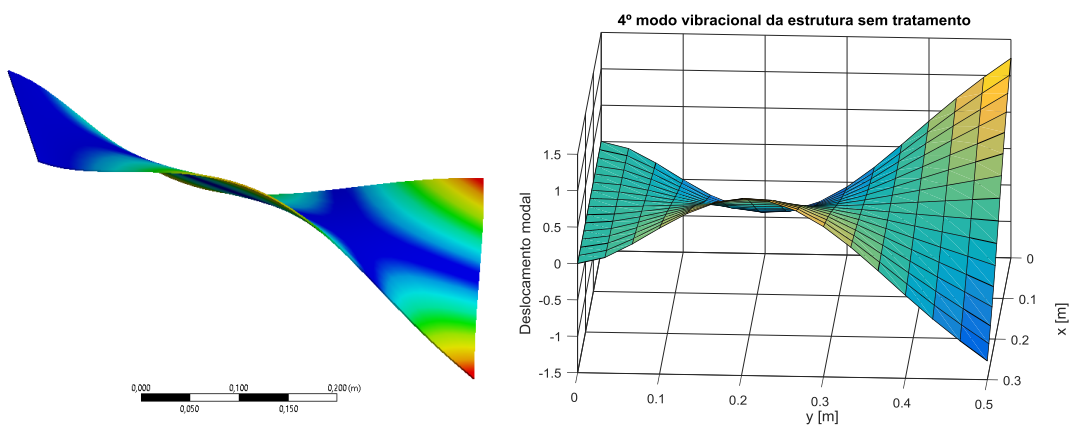


Figura 6.4 - Comparação do 4º modo entre os modelos ANSYS (esquerda) e MATLAB (direita).

Observando as Figuras acima é possível notar uma equivalência dos modos calculados pelo software comercial (ANSYS) e pelo método analítico (MATLAB), tanto na forma modal quanto dos locais de máxima amplitude.

6.2. Verificação do modelo aeroelástico sem tratamento

Após a validação do modelo dinâmico do painel sem tratamento viscoelástico, faz-se necessário a verificação do modelo aeroelástico. Para isso, utilizou-se a solução 145 do NASTRAN (*Aerodynamic Flutter Analysis*) que permite obter a velocidade de *flutter* através do diagrama v-g, usando um dos métodos de predição de *flutter* já implementados, como método K, KE, PK, entre outros.

Já a análise numérica utiliza o carregamento aerodinâmico não estacionário obtido através do software NASTRAN, obtido para várias condições de frequência reduzida, aliado ao código de elementos finitos implementado em MATLAB para a predição dos pontos de ocorrência do *flutter*.

A Figura 6.5 mostra os diagramas v-f (velocidade x frequência) e v-g (velocidade x amortecimento estrutural artificial) obtidos e a Figura 6.6 mostra o detalhe do digrama v-g a fim de ter uma melhor visualização de identificação da velocidade crítica de *flutter*.

Já a Figura 6.7 mostra os diagramas v-f e v-g obtidos através do modelo numérico aliado ao modelo do NASTRAN para a obtenção do carregamento aerodinâmico.

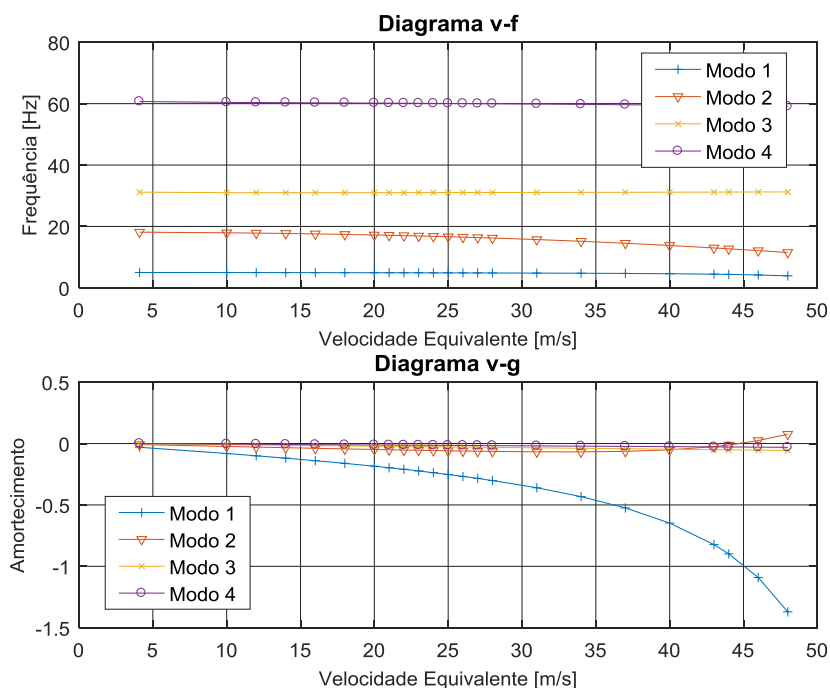


Figura 6.5 - Diagramas v-f e v-g obtidos usando a solução 145 do NASTRAN com o método de predição de *flutter* PK.

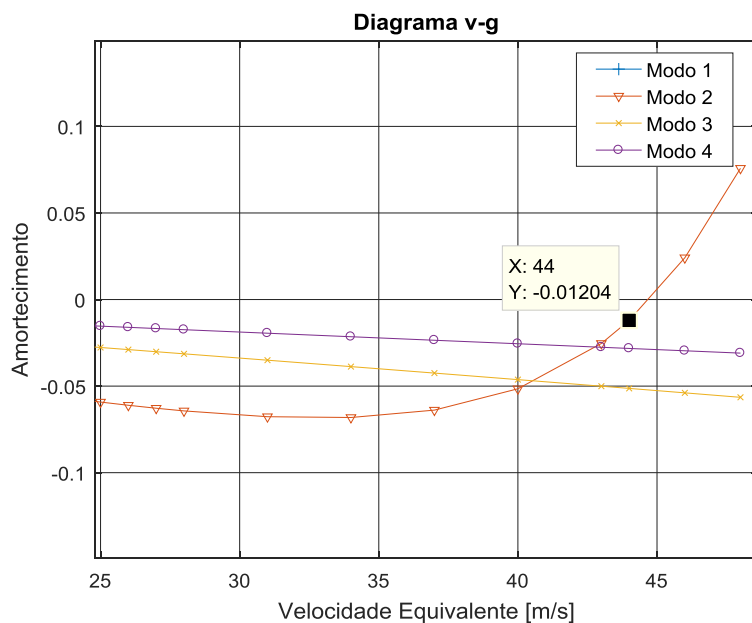


Figura 6.6 –Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 25 e 50 m/s, obtido usando a solução 145 do NASTRAN com o método de predição de *flutter* PK.

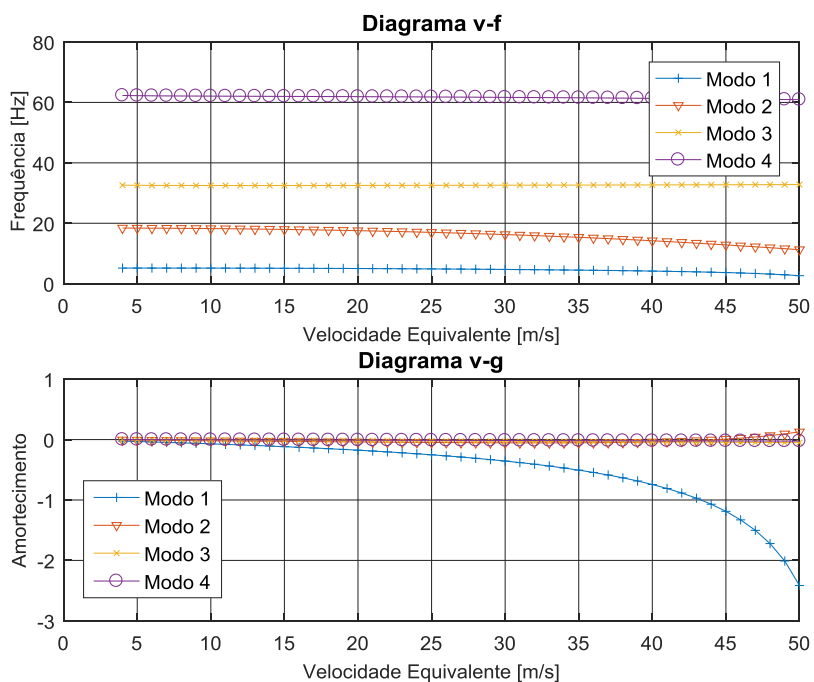


Figura 6.7 - Diagramas v-f e v-g obtido utilizando o modelo numérico aliado ao NASTRAN para obtenção do carregamento aerodinâmico.

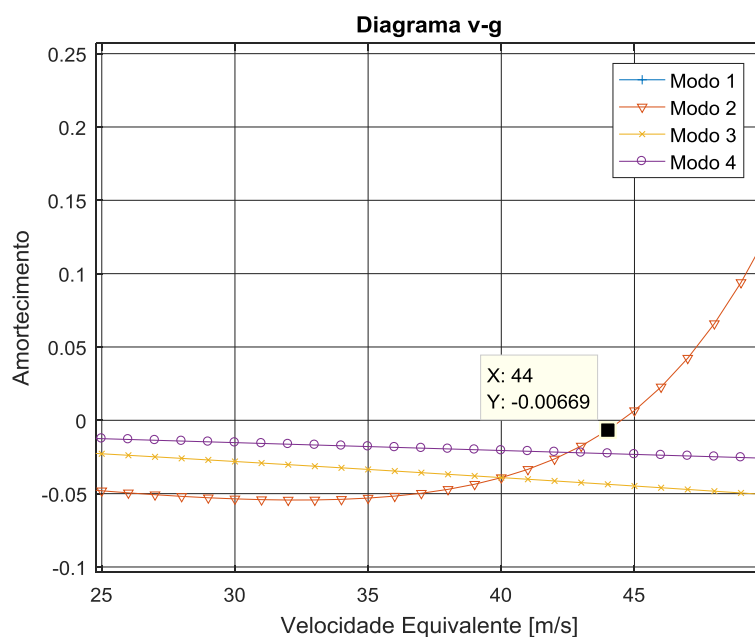


Figura 6.8 –Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 25 e 50 m/s, obtido utilizando o modelo numérico aliado ao NASTRAN para a obtenção do carregamento aerodinâmico.

Na Figura 6.6, observa-se que a velocidade crítica de *flutter* é de 44 m/s enquanto o amortecimento é de -0,01204. Já na Figura 6.8, a velocidade de *flutter* também é de 44m/s, mas o amortecimento é de -0,00669, esta diferença é ocasionada principalmente pela função de interpolação utilizada.

Nas Figuras 6.5 e 6.7 também é possível notar que a frequência do segundo modo tem um acréscimo, enquanto a frequência do terceiro modo tenta a diminuir, isto representa a coalescência desses dois modos, que com o aumento da velocidade pode ocasionar o desencadeamento do fenômeno de *flutter*.

Portanto, constata-se a eficiência da estratégia utilizada neste trabalho para modelagem aeroviscoelástica de sistemas viscoelásticos. Neste caso, a técnica permite o alimentar o modelo estrutural viscoelástico gerado no MATLAB com o carregamento aerodinâmico gerado no NASTRAN.

Após a constatação de que o modelo é funcional, outra etapa importante é o teste de convergência de malha, que garante que o resultado obtido já convergiu para o valor final. O resultado desta análise é mostrado na Figura 6.9.

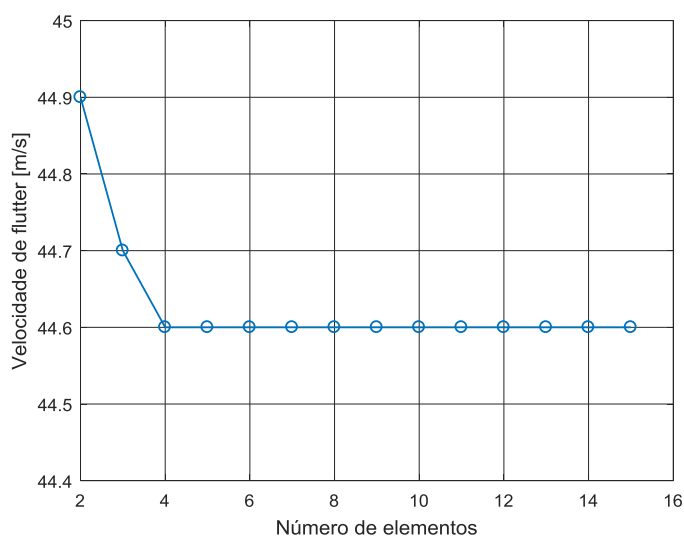


Figura 6.9 – Resultado do teste de convergência de malha do modelo sem tratamento.

É possível notar que não é necessário uma malha muito refinada para se obter bons resultados em termos da velocidade crítica de *flutter*. A partir de uma malha 4x4 já se obtém resultados satisfatórios, fazendo com o que cálculo ocorra de maneira muito rápida, para um sistema sem tratamento viscoelástico.

6.3. Avaliação da influência do tratamento viscoelástico

Com o modelo de placa sem tratamento verificado, é necessário verificar o modelo numérico da placa sanduíche contendo material viscoelástico. Primeiro, é necessário destacar as considerações feitas para que fosse possível utilizar o carregamento aerodinâmico obtido diretamente do código NASTRAN, como descrito no Capítulo 5 na seção 5.3.

A hipótese mais importante assumida neste estudo, é que não há alteração da forma modal com a adição do tratamento viscoelástico superficial por camada restrita passiva, apenas ocorre alteração da amplitude do modo vibração pela atuação do amortecimento viscoelástico. Isto pode ser visto pela análise das Figura 6.10 a 6.13.

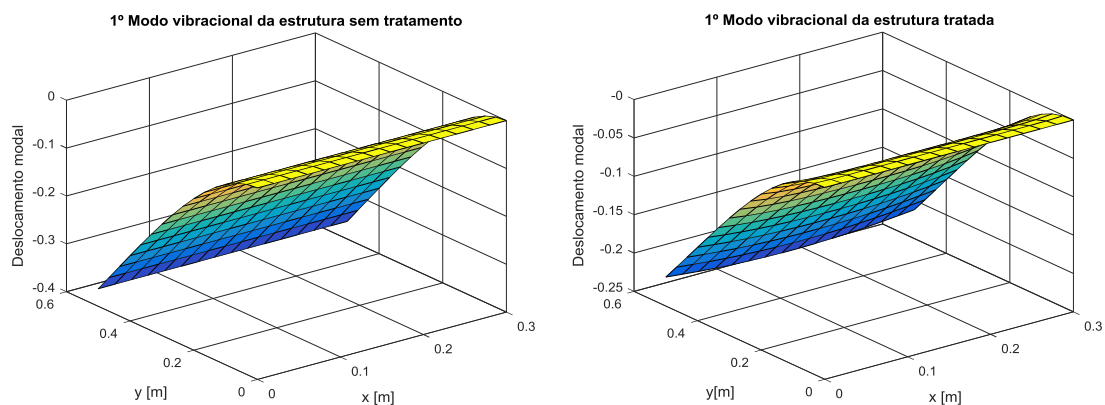


Figura 6.10 –Comparação do 1º modo da placa sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).

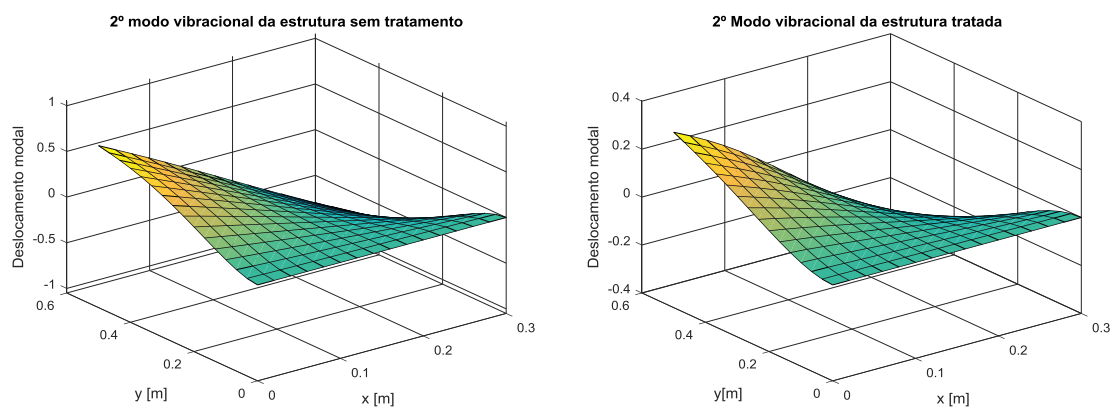


Figura 6.11- Comparação do 2º modo da placa sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).

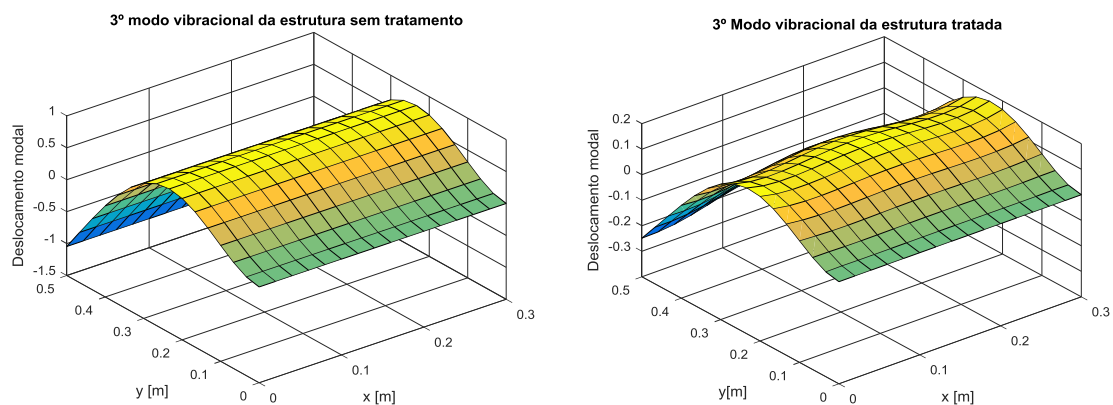


Figura 6.12- Comparação do 2º modo da estrutura sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).

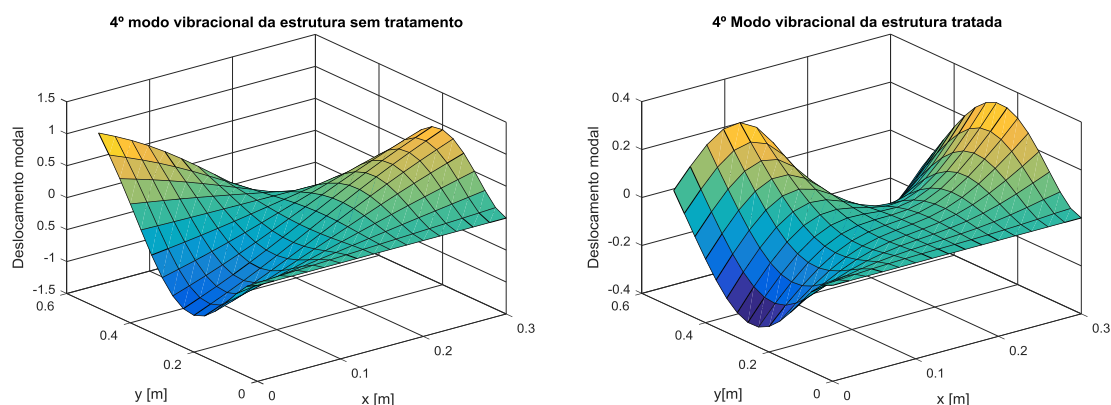


Figura 6.13- Comparação do 4º modo a estrutura sem tratamento (esquerda) e tratada (direita).

Como já falado em capítulos anteriores, a inclusão dos materiais viscoelásticos adicionam amortecimento estrutural ao sistema e devido as suas propriedades dissipativas estes se apresentam como um ótimos amortecedores passivos para sistemas mecânicos. As Figuras acima comprovam a eficiência desses materiais, uma vez que é possível notar a “redução da amplitude modal” em todos os modos analisados, devido a variação da fase entre os graus de liberdade do sistema, mas sem alteração das formas modais.

6.3.1. Influência do comportamento estático do tratamento viscoelástico no ponto de flutter

Com a adição do material viscoelástico e da camada restringente na estrutura base, é de se esperar que ocorra um acréscimo de rigidez e massa ao sistema. Neste caso, seria interessante quantificar a influência deste acréscimo na velocidade de *flutter* do sistema. Ao invés de adotar a rigidez da camada viscoelástica como sendo dependente da frequência e temperatura, é utilizado somente o módulo estático, ou módulo a baixa frequência do material viscoelástico, resultando no seguinte valor para o módulo de cisalhamento do sistema conservativo associado (SCA), $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}$. Logo, o módulo complexo do sistema, Eq.(3.33), ficaria reduzido apenas ao G_0 e a Eq. (3.33) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left[\mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{U}(\omega, T) = \mathbf{F}(\omega) \quad (6.1)$$

Logo, o problema de autovalor desse sistema pode ser calculado como mostrado abaixo:

$$M\ddot{x} + (G_0\bar{K}_v + K_e + K_A)x = 0 \quad (6.2)$$

onde K_A é a rigidez associada a parcela aerodinâmica.

Os diagramas v-f e v-g para o SCA são mostrados nas Figura 6.14 e 6.15 abaixo.

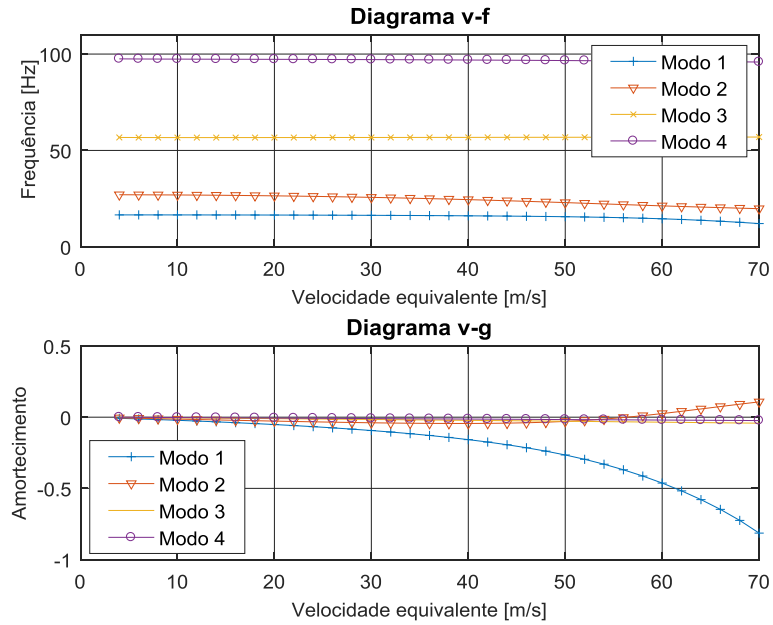


Figura 6.14 –Diagramas v-f e v-g para a placa sanduíche considerando o SCA.

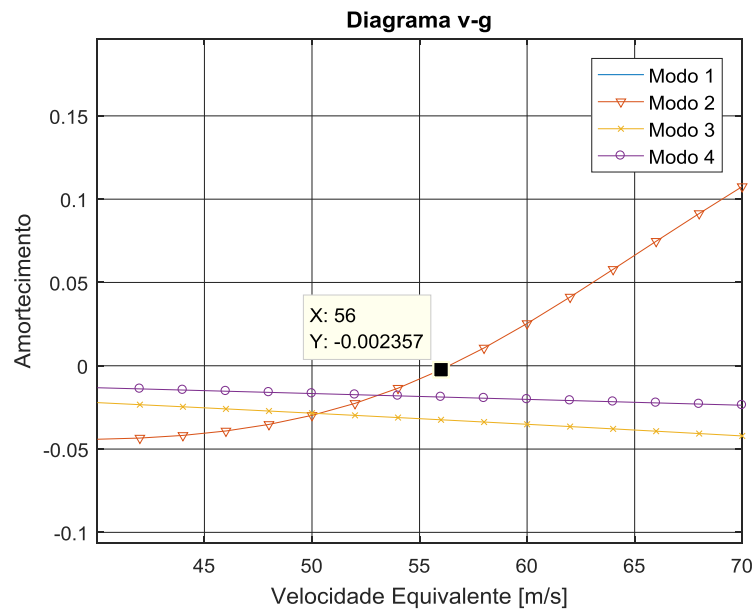


Figura 6.15 – Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 40 e 70 m/s para a placa sanduíche considerando o SCA.

Como pode ser observado pela análise da Figura 6.8, a velocidade crítica de *flutter* para a placa sem tratamento viscoelástico foi de aproximadamente 44 m/s. Em contrapartida, a Figura 6.15 deixa claro a eficiência do tratamento viscoelástico superficial na supressão do fenômeno do *flutter*, uma vez que a velocidade calculada para este foi de aproximadamente 56 m/s. Isto representa um aumento de 27% na velocidade de *flutter* do sistema. Claro que este aumento representa o acréscimo devido a rigidez estática e massa do sistema SCA, não levando em consideração a característica dissipativa do material viscoelástico.

6.3.2. Influência do efeito dissipativo do tratamento viscoelástico no ponto de flutter

Neste subseção, será avaliada a influência do efeito dissipativo do material viscoelástico na velocidade de *flutter*, utilizando a equação do movimento expressa na Eq. (3.33). Sendo que o módulo complexo, $G(\omega, T)$, definido pela Eq. (3.37), leva em conta tanto o efeito estático quanto o dissipativo do material viscoelástico, sendo que este último depende fortemente da temperatura de operação e da frequência de excitação, conforme discutido na Seção 3.2, Capítulo 3.

Pela análise das Figura 6.8 e 6.17, fica evidente o ganho em termos da supressão do *flutter* de aproximadamente, 48%, ou seja, de 44 m/s para 65 m/s. Uma parte desse ganho se deve ao acréscimo de rigidez ao sistema pelas camadas viscoelástica e restringente, e a outra parte se deve aos efeitos dissipativos do material viscoelástico. Além disso, comparando as Figura 6.7 e Figura 6.16, nota-se claramente um aumento expressivo nas frequências naturais dos sistemas com tratamento quando comparado com o sistema sem tratamento. A Tabela 6.4 apresenta a comparação dessas frequências naturais.

Além de perceber o aumento da frequência natural com a adição do tratamento viscoelástico, percebe-se também que o efeito dissipativo quando se considera a expressão do módulo complexo (3.37) pouco interfere nas frequências naturais. Nota-se também que os modos com frequências mais altas sofrem maior influência do efeito dissipativo, isto ocorre pelo fato que o desempenho do material viscoelástico depende diretamente da frequência de operação.

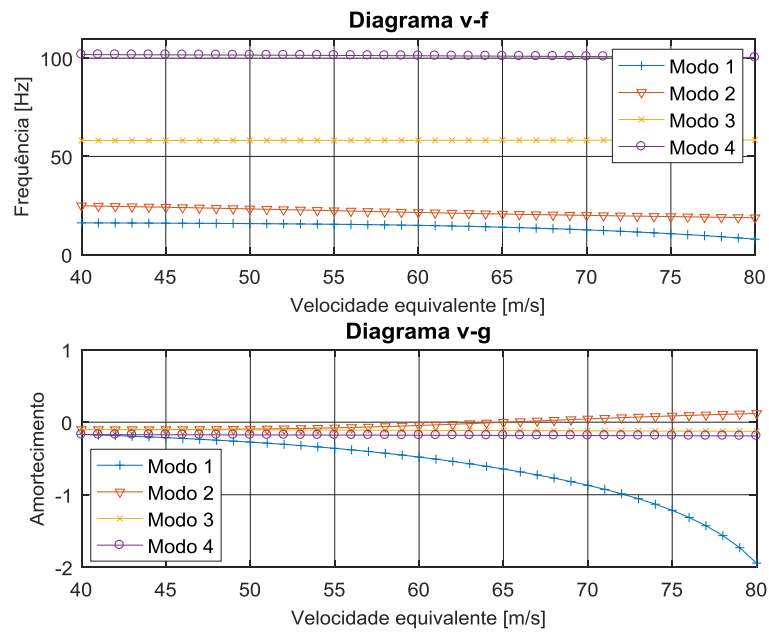


Figura 6.16 - Diagramas v-f e v-g para a placa sanduíche considerando o módulo complexo do material viscoelástico.

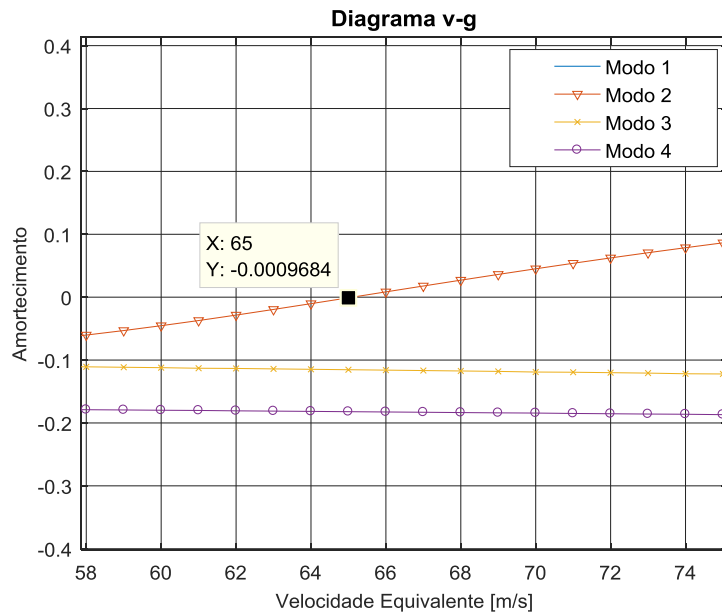


Figura 6.17 - Detalhe do diagrama v-g entre as velocidades de 58 a 75 m/s para a placa sanduíche considerando o módulo complexo do material viscoelástico.

Tabela 6.4 – Comparação das frequências naturais da placa sem tratamento, com tratamento SCA e considerando o módulo complexo.

Modo	\tilde{n}_a [Hz] (sem tratamento)	\tilde{n}_a [Hz] (SCA)	\tilde{n}_a [Hz] (Módulo complexo)
1	5,3	16,4	16,2
2	18,6	26,9	24,7
3	32,9	56,7	58,2
4	62,5	97,4	101,8

6.4 Avaliação da convergência após a aplicação do tratamento viscoelástico

Em todo cálculo utilizando o método dos elementos finitos é de extrema importância os testes de convergência de malha, com o intuito de encontrar a melhor malha possível que alie precisão da aproximação com custo computacional de cálculos.

Neste caso, como tanto o comportamento aerodinâmico quanto o estrutural do sistema dependem da frequência reduzida, o sistema resultante aeroviscoelástico é resolvido de forma iterativa, o que leva a um aumento praticamente exponencial do custo computacional de cálculo das velocidades de *flutter* do sistema aeroviscoelástico, como pode ser observado na Figura 6.18. Nota-se também que uma malha de 7x7 apresenta uma boa relação entre predição e custo de cálculo e por isso, esta será utilizada nas análises que seguem.

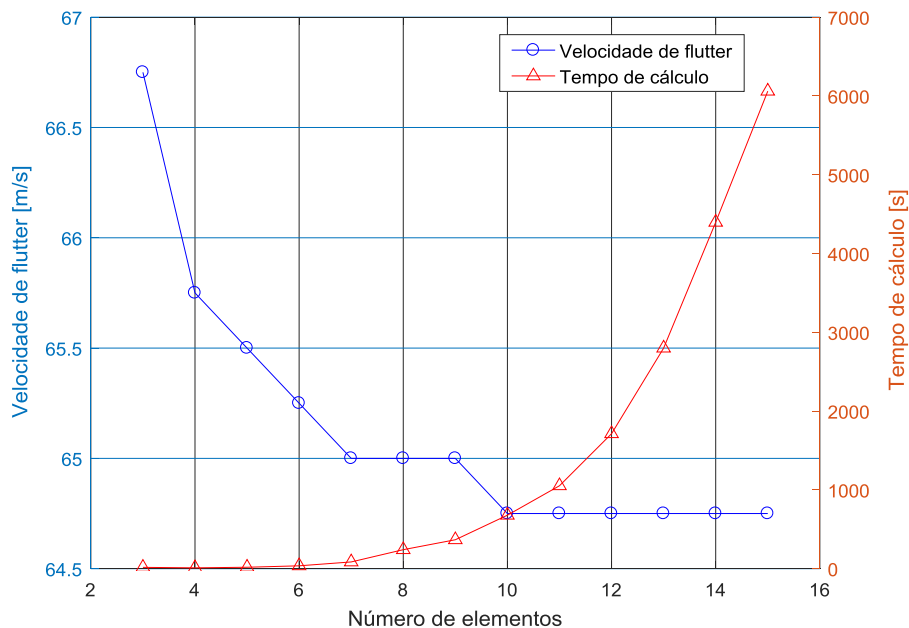


Figura 6.18 - Análise de convergência e tempo de cálculo para o sistema aeroviscoelástico

6.5. Influência da temperatura de operação na velocidade de *flutter*

A temperatura é um dos parâmetros que mais influência no desempenho dos materiais viscoelásticos. A análise desta influência é mostrada na Figura 6.19.

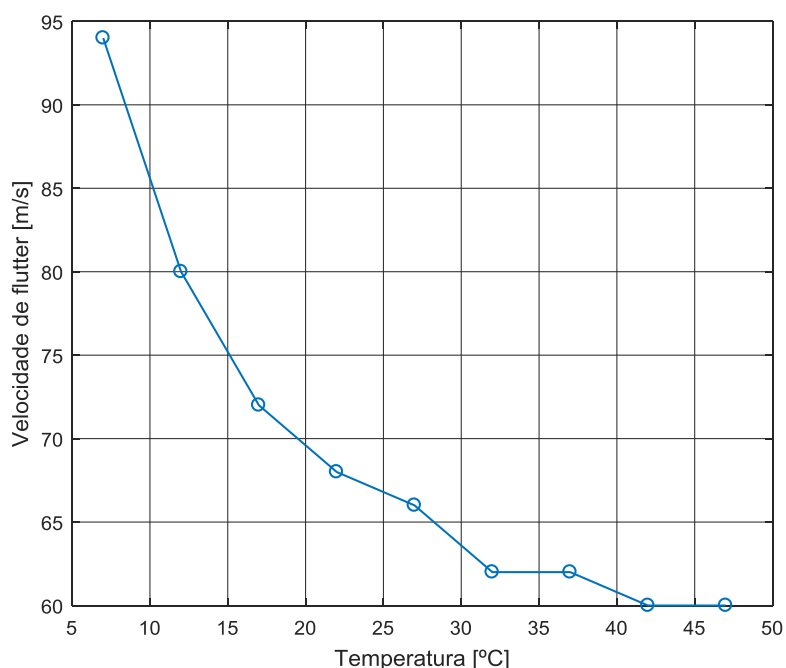


Figura 6.19 - Influência da temperatura para um carregamento aerodinâmico não estacionário.

Da figura anterior, pode-se notar que o aumento da temperatura de operação do sistema aeroviscoelástico provoca uma redução significativa na sua velocidade de *flutter*. Isto pode ser explicado pelo fato de que tanto o módulo de armazenamento (parte real do módulo complexo) quanto o fator de perda (capacidade de amortecimento) do material viscoelástico tende a diminuir com o aumento da temperatura, reduzindo assim a eficiência do amortecimento viscoelástico em termos da supressão do fenômeno do *flutter*.

6.6. Influência da espessura da camada viscoelástica na velocidade de *flutter*

Parâmetros geométricos como espessuras das camadas viscoelástica e restringente também influenciam significativamente na eficiência do sistema aeroviscoelástico. Entretanto, para projetos de interesse aeronáuticos, deve-se ficar atento ao acréscimo de peso no sistema pelo tratamento viscoelástico. Para a placa sanduíche de três camadas utilizadas neste trabalho, a Figura 6.20 mostra a velocidade de *flutter* em função da

espessura da camada viscoelástica e o peso. Variando a espessura de 0,0254 para 2 mm, percebe-se um aumento na velocidade de *flutter* de 65 m/s para 77 m/s, ou seja, um aumento de 18,5%. Entretanto, esse acréscimo de espessura provoca um aumento de peso de 0,7124 para 0,9937 kg, ou seja, de 40% na massa total da estrutura.

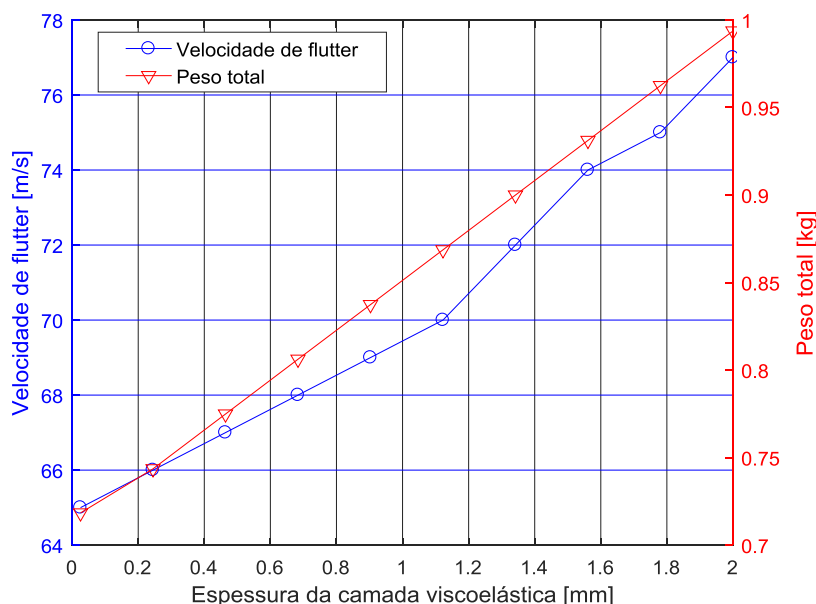


Figura 6.20 - Influência da espessura da camada viscoelástica da placa sanduíche submetida a um carregamento aerodinâmico não estacionário.

Já a Figura 6.21 mostra os resultados para variações impostas na camada restrigente. Comparando as Figuras 6.20 e 6.21, percebe-se claramente a maior influência de espessura da camada restrigente na supressão do fenômeno do *flutter* de sistemas aeroviscoelásticos. Quando a espessura da camada restrigente passa de 0,1 para 1,5 mm, a velocidade de *flutter* aumenta de 60 m/s para 129 m/s. Como a função da camada restrigente é induzir deformações cisalhantes na camada viscoelástica durante as deformações de flexões da placa, quanto maior a espessura dela, maiores serão as deformações cisalhantes da camada viscoelástica e, portanto, maior a dissipação do viscoelástico. Entretanto, como nesta aplicação o material da camada restrigente possui densidade maior que a do viscoelástico, ocorre um maior acréscimo de peso ao sistema variou de 0,65 para 1,22 kg.

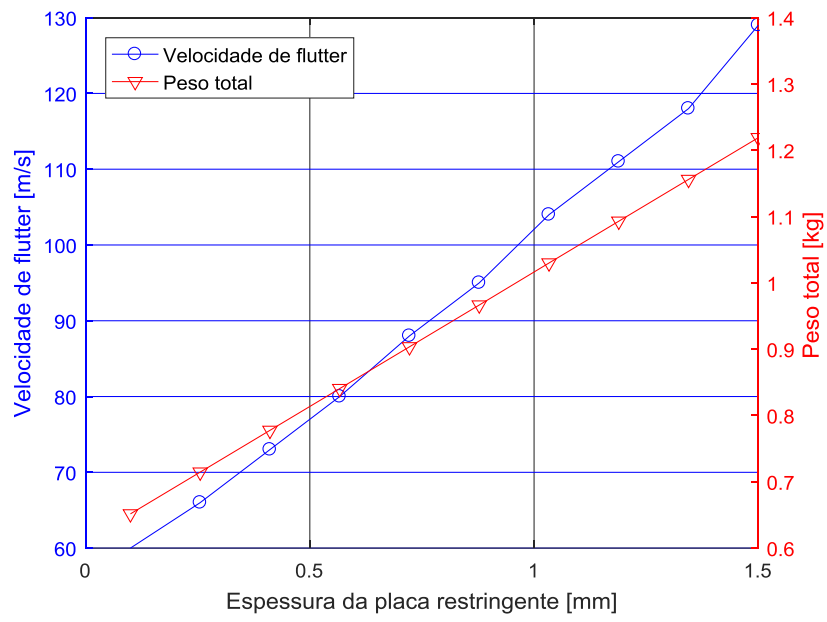


Figura 6.21 - Influência da espessura da camada restringente da placa sanduíche submetida a um carregamento aerodinâmico não estacionário.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho de dissertação representa uma contribuição aos desenvolvimentos recentes com relação ao estudo numérico-computacional da viabilidade da aplicação de tratamentos viscoelásticos superficiais a sistemas dinâmicos submetidos ao fenômeno do flutter para o controle passivo do mesmo.

Diante dos resultados das simulações realizadas com placas sanduíches planas contendo amortecimento viscoelástico, comprovou-se que os materiais viscoelásticos tem viabilidade para serem utilizados em painéis aeronáuticos com objetivo de retardar a ocorrência do fenômeno de *flutter*. Neste caso, tais materiais podem se apresentar como uma das soluções mais viáveis na aplicação de estruturas já existentes para a supressão do flutter, uma vez que se trata de um controle passivo de fácil implementação e custo de manutenção relativamente baixo. Entretanto, deve-se atentar ao peso adicionado à estrutura base, principalmente no caso de painéis de interesse aeronáutico, como mostrado pelos resultados numéricos.

Na Figura 6.20 e Figura 6.21 é possível perceber que o aumento tanto da espessura do núcleo viscoelástico quanto da espessura da camada restringente tem impactos positivos na velocidade crítica de *flutter* da placa base. Entretanto, para tratamentos viscoelásticos superficiais como o proposto neste trabalho, o aumento da espessura da camada restringente é mais efetivo no controle passivo do fenômeno do flutter. Isto deve pelo fato de que um aumento na espessura da camada restringente leva a um aumento não só da rigidez do sistema, mas também das deformações induzidas no núcleo viscoelástico, aumento assim sua capacidade de amortecimento. Novamente, deve-se ter bastante cuidado na busca pela eficiência do tratamento e o peso acrescido na estrutura base.

Outro fator que deve ser levado em conta no projeto de sistemas aeroviscoelásticos como o tratado aqui, é a temperatura de operação do sistema, uma vez que geralmente

durante um mesmo voo ocorrem variações de temperaturas extremas e isto pode ter um impacto direto no desempenho do tratamento viscoelástico superficial, como mostrado nas simulações. De forma geral, o aumento da temperatura de operação do sistema aeroviscoelástico leva à uma diminuição da eficiência do mesmo em termos da atenuação da velocidade crítica de flutter.

Além da avaliação de parâmetros físicos e geométricos na eficiência do sistema aeroviscoelástico, foi avaliada somente a influência do efeito dissipativo do material viscoelástico na velocidade de flutter do sistema aeroviscoelástico. Para tanto, duas análises foram feitas: a primeira refere-se ao sistema conservativo associado que mostrou que apenas a inclusão da rigidez estática da camada viscoelástica e a rigidez da camada restringente provocou um aumento na velocidade de flutter de aproximadamente, 27%; a segunda diz respeito à inclusão do efeito dissipativo do material viscoelástico, notando-se um aumento na velocidade de flutter da ordem de, 48%, em relação à placa base sem tratamento.

Outro ponto importante que deve mencionado aqui diz respeito a algumas dificuldades encontradas para a realização deste trabalho: a primeira foi a não linearidade do sistema aeroviscoelástico, uma vez que tanto o carregamento aerodinâmico quanto as matrizes do modelo estrutural dependem da frequência reduzida, além da temperatura de operação devido à presença do material viscoelástico. Isto forçou a utilização de métodos iterativos para resolução do sistema aeroviscoelástico e obtenção das velocidades de flutter. Além disso, deve-se destacar a dificuldade matemática associada à própria implementação do método DLM do sistema amortecido viscoelasticamente. Por fim, vale destacar ainda o alto custo computacional envolvido na resolução do problema aeroviscoelástico em termos do tempo requerido para a resolução do problema de autovalores complexos do sistema aeroviscoelástico. Neste caso, teria sido interessante a implementação de métodos de redução de modelos para diminuir o esforço computacional requerido nesta fase.

A realização deste trabalho gerou algumas perspectivas para trabalhos futuros, como:

- Estudar a hipótese de realizar correções na matriz AIC, baseadas em dados experimentais ou CFD, para possibilitar a inclusão de efeitos como: ângulo de ataque, torção do painel, curvatura do aerofólio;
- Expandir a aplicação do método para casos transônicos e supersônicos;

- Estudar formas de inserir correções no carregamento afim de viabilizar a aplicabilidade do método para situações como: rajada ou diferentes condições de voo, como decolagem ou pouso;
- Propor um projeto baseado na otimização de parâmetros estruturais, com o objetivo de maximizar a velocidade crítica de flutter e reduzir a massa do sistema;
- Estabelecer um modelo reduzido, seja usando bases modais normais ou bases modais enriquecidas, para possibilitar uma maior flexibilidade do modelo sem o alto custo computacional associado;
- Estudo de outras disposições de aplicação do viscoelástico, como por exemplo só em áreas específicas da estrutura e analisar a influência sobre a velocidade de *flutter* e a aumento de peso;
- Fazer a concepção de um sistema robusto, com o objetivo de estudar as incertezas associadas ao sistema;
- Em uma proposta um pouco mais desafiadora, estudar o efeito viscoelástico da resina em um painel fabricado em material compósito, considerando também a orientação das fibras das camadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBANO, E.; RODDEN, W. P. A Doublet Lattice Method for Calculations Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic flows. *AIAA Journal*, v. 7, n. 2, p. 279-285, 1969.
<https://doi.org/10.2514/3.5086>
- ANDERSON JR, J. D. *Fundamentals of aerodynamics*. Tata McGraw-Hill Education, 2010.
- ANDRADE, G de O. Projeto ótimo de um sistema automotivo utilizando materiais viscoelásticos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, 2017.
- BENINI, G. R. Modelo numérico para simulação da resposta aeroelástica de asas fixas. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2002.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. Courier Corporation, 2013.
- BLAIR, M. A compilation of the mathematics leading to the doublet lattice method. WRIGHT LAB WRIGHT-PATTERSON AFB OH, 1992.
<https://doi.org/10.21236/ADA256304>
- BOTEZ, R. M., DOIN, A., BISKRI, D. E., COTOI, I., HAMZA, D., & PARVU, P. Method for flutter aero-servoelastic open loop analysis. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 49(4), 179-190. 2003.
<https://doi.org/10.5589/q03-016>
- BRIEND, Y. P. J. Contribuição aos métodos de redução de modelos aplicados a sistemas aeroviscoelásticos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia. 2017.

CHUNG, D. D. L., Composite Materials, Science and Applications. Springer, 2009.

CUNHA, B. S. C. D. Controle passivo de vibrações induzidas por vórtices utilizando materiais viscoelásticos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2016

CUNHA FILHO, A. G. A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

CUNHA-FILHO, A. G.; LIMA, A. M. G.; DONADON, M. V.; LEÃO, L. S. Flutter suppression of plates using passive constrained viscoelastic layers. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 79, p. 99-111, 2016.

<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.02.025>

LIMA, A.M.G.; DIACENCO, A. A.; CÔRREA, E. O. Finite Element Modeling of Composite Sandwich Plates with Viscoelastic Layers. In: 20th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), Gramado, RS, 2009.

LIMA, A. M. G.; FARIA, A. W.; RADE, D. A. Sensitivity analysis of frequency response functions of composite sandwich plates containing viscoelastic layers. Composite Structures, v. 92, n. 2, p. 364-376, 2010.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.017>

LIMA, A.M.G. Modelagem numérica e avaliação experimental de materiais viscoelásticos aplicados ao controle passivo de vibrações mecânicas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2003.

LIMA, A. M., STOPPA, M. H., & RADE, D. A. Finite Element Modelling and Experimental Characterization of Beams and Plates Treated with Constraining Damping Layers. Proceedings of the 17th International Conference of Mechanical Engineering. São Paulo, Brazil, 2003.

LIMA, A. M. G. de; RADE, D. A.; BOUHADDI, N. Optimization of viscoelastic systems combining robust condensation and metamodeling. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 32, n. SPE, p. 485-495, 2010.

<https://doi.org/10.1590/S1678-58782010000500008>

DIACENCO, A. A. Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá*, 2010.

DOWELL, E. H. Panel flutter-A review of the aeroelastic stability of plates and shells. *AIAA Journal*, v. 8, n. 3, p. 385-399, 1970.

<https://doi.org/10.2514/3.5680>

FELIPPE FILHO, W. N. Aplicação de modelos teórico-computacionais para simulação do comportamento dinâmico de estruturas amortecidas através de materiais viscoelásticos. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora*, 2012.

FURUKAVA, M. Uma metodologia de avaliação de desempenho de material viscoelástico aplicado a uma estrutura de veículo de passeio. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina*, 2012.

GANGWANI, S. T. A doublet lattice method for the determination of rotor induced empennage vibration airloads. *Analysis description and program documentation*. 1982.

GARRICK, I. E.; REED III, W. H. Historical development of aircraft flutter. *Journal of Aircraft*, v. 18, n. 11, p. 897-912, 1981.

<https://doi.org/10.2514/3.57579>

GIESING, J.; KALMAN, T. Subsonic unsteady aerodynamics for general configurations. *10th Aerospace Sciences Meeting*. 1971. p. 26.

<https://doi.org/10.2514/6.1972-26>

GIESING, J. P.; KALMAN, T. P.; AND RODDEN, W. P.; Correction Factor Techniques for Improving Aerodynamic Prediction Methods. NASA-CR-144967, 1976.

GRANDIN, H., Fundamentals of the Finite Element Method, Waveland Press, 1991.

GUIMARÃES, T. A. M. Contribuição ao estudo do comportamento dinâmico e aeroelástico de laminados compósitos de rigidez variável. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

GUIMARÃES NETO, A. B. Flight Dynamics of Flexible Aircraft Using General Body Axes: A Theoretical and Computational Study. Tese de Doutorado. Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), 2014.

GUIMARÃES NETO, A. B. Dinâmica e controle de aeronaves flexíveis com modelagem aerodinâmica pelo método Doublet-Lattice. Trabalho de Conclusão de curso, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), 2008.

HARDER, R. L.; DESMARAIS, R. N. Interpolation using surface splines. Journal of aircraft, v. 9, n. 2, p. 189-191, 1972.

<https://doi.org/10.2514/3.44330>

HENSHAW, M. J. DE C.; BADCOCK, K. J.; VIO, G. A.; ALLEN, C. B.; CHAMBERLAIN, J., KAYNES, I.; DENLEY, C. J. Non-linear aeroelastic prediction for aircraft applications. Progress in Aerospace Sciences, 43(4-6), 65-137. 2007

<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2007.05.002>

HILDEBRAND, F. B. Advanced calculus for applications. 1962.

KALMAN, T. P.; RODDEN, W. P.; GIESING, J. P. Application of the doublet-lattice method to nonplanar configurations in subsonic flow. Journal of Aircraft, v. 8, n. 6, p. 406-413, 1971.

<https://doi.org/10.2514/3.59117>

KOTIKALPUDI, A.; PFIFER, H.; BALAS, G. J. Unsteady aerodynamics modeling for a flexible unmanned air vehicle. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference. p. 2854. 2015.

<https://doi.org/10.2514/6.2015-2854>

LANDAHL, M. T. Kernel function for nonplanar oscillating surfaces in a subsonic flow. AIAA Journal, v. 5, n. 5, 1045p, 1967.

<https://doi.org/10.2514/3.55319>

LASCHKA, B. Zur Theorie der harmonischen schwingungen der tragenden fläche bei unterschallanströmung. 1963.

MCCAIN, W. E.: Comparison of Measured and Calculated Airloads on an Energy Efficient Transport Wing Model Equipped with Oscillating Control Surfaces. 22nd Aerospace Sciences Meeting, 1984.

<https://doi.org/10.2514/6.1984-301>

MARRA, J. C. de O. Controle híbrido de vibrações em estruturas sob excitação de banda larga, utilizando neutralizador viscoelástico e filtro adaptativo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

MARTINS, P. C. O. M. Estudo da influência do amortecimento viscoelástico no fenômeno aeroelástico de flutter. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

MERRETT, C. G.; HILTON, H. H. Elastic and viscoelastic panel flutter in incompressible, subsonic and compressible flows. Journal of Aeroelasticity and Structural Dynamics, v. 2, n. 1, 2010.

MOREIRA, R. A. S. Modelação e Análise de Tratamentos Viscoelásticos Multi-Camada para Controlo passivo de vibrações. Tese de doutorado, Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2004.

MURPHY, Q. Improved Unsteady Aerodynamic Influence Coefficients for Dynamic Aeroelastic Response. Tese de Doutorado, McGill University, 2012.

NASHIF, A.; JONES, D.; HANDERSON, J. *Vibration Damping*. New York: John Wiley & Sons. 1985

NIKISHKOV, G. P. *Introduction to the finite element method*. University of Aizu. 2004. 70p.

PEGADO, H. de A.. Flutter de painéis: mais um desafio no vôo supersônico. *Exacta*, v. 4, n. 2, 2006.

<https://doi.org/10.5585/exacta.v4i2.752>

PITT, D. M.; GOODMAN, C. B. Flutter calculations using doublet lattice aerodynamics modified by the full potential equations. 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, p. 882. 1987

<https://doi.org/10.2514/6.1987-882>

PRASAD, D. S. S.; HOLLA, V. S. Doublet lattice method-schemes for CPU time reduction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 23, n. 1, p. 59-65, 1980.

[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(80\)90078-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(80)90078-X)

RAO, M. D. Automotive applications of viscoelastic damping treatment. 5th International Congress on Sound and Vibration, Adelaide, South Australia, 1997.

REED III, W. H.; CAZIER JR, F. W.; FOUGHNER JR, J.T. Passive control of wing/store flutter. 1980.

RODDEN, W. P.; GIESING, J. P.; KALMAN, T. P. New developments and applications of the subsonic doublet-lattice method for nonplanar configurations. AGARD Symposium on Unsteady Aerodynamics for Aeroelastic Analyses in Interfering Surfaces, Paper. 1970.

<https://doi.org/10.2514/6.1970-539>

RODDEN, W. P.; GIESING, J. P.; KALMAN, T. P. Refinement of the nonplanar aspects of the subsonic doublet-lattice lifting surface method. *Journal of Aircraft*, v. 9, n. 1, p. 69-73, 1972.

<https://doi.org/10.2514/3.44322>

RODDEN, W. P.; JOHNSON, E. H. MSC/NASTRAN aeroelastic analysis: user's guide; Version 68. MacNeal-Schwendler Corporation, 1994.

RODDEN, W. P.; TAYLOR, P. F.; MCINTOSH, S. C. Improvements to the Doublet-Lattice Method in MCS/NASTRAN, 1999.

RODDEN, W. P.; TAYLOR, P. F.; MCINTOSH, S. C. Further refinement of the subsonic doublet-lattice method. *Journal of Aircraft*, v. 35, n. 5, p. 720-727, 1998.

<https://doi.org/10.2514/2.2382>

SILVESTRE, F. J. Modelagem da mecânica do voo de aeronaves flexíveis e aplicações de controle, 115p. Dissertação de mestrado - Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), 2007.

SANTOS, L. A.; SILVA, R. G. A.; CASTRO, B. M.; MARTO, A. G.; ALONSO, A. C. P. A planar doublet-lattice code for teaching and research in aeroelasticity. 18TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 18, 2005, Ouro Preto. Anais.

SERRANO, A. Análise conceitual da aeroelasticidade, fenômenos aeroelásticos e tecnologia da Asa Aeroelástica Ativa. *Revista Conexão SIPAER*, v. 1, n. 2, p. 100-111, 2010.

SILVA, R. G. A. O método Doublet Lattice. Notas de aula da disciplina de aerodinâmica não estacionária (AA-220). Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2009.

SILVA, V. A. da C. Modelagem estocástica de estruturas sanduíches não-lineares contendo amortecimento viscoelástico. Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2017.

SOUZA, J. C. S. de. Caracterização Experimental e Modelagem de Estruturas usando Materiais Viscoelásticos para o Controle Passivo de Vibrações. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Itajubá. 2015.

SMILG, B.; WASSERMAN, L. S. Application of Three-Dimensional Flutter Theory to Aircraft Structures. Army Air Force Tech. Rpt. 4798, 1942.

SOUZA, J. C. S. de. Caracterização Experimental e Modelagem de Estruturas usando Materiais Viscoelásticos para o Controle Passivo de Vibrações. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Itajubá, 2015.

SUNDRESAN, M.; JOSEPH, D. R.; KARTHICK, J.; SHIBI JOE, C. S. Review of Aeroelasticity Testing Technology. Procedia engineering, v. 38, p. 2297-2311, 2012.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.06.276>

VALENTE, C; LEMMENS, Y.; WALES, C.; JONES, D.; GAITONDE, A.; COOPER, J. E. A doublet-lattice method correction approach for high fidelity gust loads analysis. 58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. p. 0632. 2017
<https://doi.org/10.2514/6.2017-0632>

VAN ZYL, L. H. Application of the subsonic doublet lattice method to delta wings. Journal of aircraft, v. 36, n. 3, p. 609-611, 1999.
<https://doi.org/10.2514/2.2480>

VAN ZYL, L. H. Convergence of the subsonic doublet lattice method. Journal of aircraft, v. 35, n. 6, p. 977-979, 1998.
<https://doi.org/10.2514/2.2398>

WASZAK, M. R.; SCHMIDT, D. K. Flight dynamics of aeroelastic vehicles. Journal of Aircraft, 1988, v. 25, n. 6, p. 563-571.
<https://doi.org/10.2514/3.45623>

WASZAK, M. R.; DAVIDSON, J. B.; SCHMIDT, D. K. A simulation study of the flight dynamics of elastic aircraft. Volume 1 e 2: Data. 1987.

WEISSHAAR, T. A. Aeroelasticity, an introduction to fundamental problems-with an historical perspective, examples and homework problems. 2012.

YEAGER JR, W. T.; KVATERNIK, R. G. A historical overview of aeroelasticity branch and transonic dynamics tunnel contributions to rotorcraft technology and development. 2001.

<https://doi.org/10.2514/6.2000-1771>

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. The Finite Element Method. 5.ed. M.A: Butterworth-Heinemann, 1967. Volume 1. 708p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. The Finite Element Method. 5.ed. M.A: Butterworth-Heinemann, 1967. Volume 2. 476p.

ANEXO A

A.1 Definição das funções de interpolação para os campos de deslocamentos

Os deslocamentos longitudinais nas direções x e y são interpolados por funções bilineares, e o deslocamento transversal w é interpolado por um polinômio de terceira ordem, fornecidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}u_1 &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\v_1 &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \\u_3 &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}xy \\v_3 &= a_{13} + a_{14}x + a_{15}y + a_{16}xy \\w &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 + b_{11}x^3y + b_{12}xy^3\end{aligned}\tag{A.1}$$

Desta forma, segundo a Eq. (3.21) e omitindo a dependência com relação a x e y para simplificar a notação, a interpolação dos campos de deslocamentos, é expressa como segue:

$$U(x, y) = N(x, y) \mathbf{u}_{(e)}\tag{A.2}$$

onde:

$$\mathbf{U}(x, y) = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T\tag{A.3}$$

$$N(x, y) = [N_{u_1} \quad N_{v_1} \quad N_{u_3} \quad N_{v_3} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y}]^T\tag{A.4}$$

$$\mathbf{u}_{(e)} = [u_1^1 \ v_1^1 \ u_3^1 \ v_3^1 \ w^1 \ \theta_x^1 \ \theta_y^1 \ u_1^2 \ v_1^2 \ u_3^2 \ v_3^2 \ w^2 \ \theta_x^2 \ \theta_y^2 \ u_1^3 \ v_1^3 \ u_3^3 \ v_3^3 \ w^3 \ \theta_x^3 \ \theta_y^3 \ u_1^4 \ v_1^4 \ u_3^4 \ v_3^4 \ w^4 \ \theta_x^4 \ \theta_y^4]$$

(A.5)

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{u_i} &= [N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{N}_{v_i} &= [0_1 \ N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{N}_{u_3} &= [\mathbf{0} \ N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \ \mathbf{N}_{v_3} = [\mathbf{0} \ N_{11} \ \mathbf{0} \ N_{12} \ \mathbf{0} \ N_{13} \ \mathbf{0} \ N_{14} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{N}_w &= [\mathbf{0} \ N_{1w} \ N_{1\theta_x} \ N_{1\theta_y} \ \mathbf{0} \ N_{2w} \ N_{2\theta_x} \ N_{2\theta_y} \ \mathbf{0} \ N_{3w} \ N_{3\theta_x} \ N_{3\theta_y} \ \mathbf{0} \ N_{4w} \ N_{4\theta_x} \ N_{4\theta_y}], \\ \mathbf{N}_{\theta_x} &= [\mathbf{0} \ N_{1w}^x \ N_{1\theta_x}^x \ N_{1\theta_y}^x \ \mathbf{0}_6 \ N_{2w}^x \ N_{2\theta_x}^x \ N_{2\theta_y}^x \ \mathbf{0}_6 \ N_{3w}^x \ N_{3\theta_x}^x \ N_{3\theta_y}^x \ \mathbf{0}_6 \ N_{4w}^x \ N_{4\theta_x}^x \ N_{4\theta_y}^x], \\ \mathbf{N}_{\theta_y} &= [\mathbf{0} \ N_{1w}^y \ N_{1\theta_x}^y \ N_{1\theta_y}^y \ \mathbf{0} \ N_{2w}^y \ N_{2\theta_x}^y \ N_{2\theta_y}^y \ \mathbf{0} \ N_{3w}^y \ N_{3\theta_x}^y \ N_{3\theta_y}^y \ \mathbf{0} \ N_{4w}^y \ N_{4\theta_x}^y \ N_{4\theta_y}^y]. \end{aligned}$$

Os termos N_{li} , N_{iw} , $N_{i\theta_x}$, $N_{i\theta_y}$, N_{iw}^x , $N_{i\theta_x}^x$, $N_{i\theta_y}^x$, N_{iw}^y , $N_{i\theta_x}^y$ et $N_{i\theta_y}^y$ para $i = 1, \dots, 4$, são fornecidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{(y-b)(x-b)}{ab}; \quad N_{12} = \frac{x(b-y)}{ab}; \quad N_{13} = \frac{xy}{ab}; \quad N_{14} = \frac{y(a-x)}{ab}; \\ N_{1w} &= \frac{(b-y)(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b - a^2b^2)}{a^3b^3}; \\ N_{2w} &= \frac{x(y-b)(x-a)(2x^2a^2 - ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2)}{a^3b^3}; \\ N_{3w} &= \frac{-xy(a^2b^2 - 3xab^2 - 3ya^2b + 2x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}; \\ N_{4w} &= \frac{y(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 - 3ya^2b + 2y^2a^2)}{a^3b^3}; \\ N_{1\theta_x} &= \frac{x(x-a)^2(b-y)}{a^2b}; \quad N_{2\theta_x} = \frac{x^2(b-y)(x-a)}{a^2b}; \quad N_{3\theta_x} = \frac{x^2y(x-a)}{a^2b} \end{aligned}$$

$$N_{4\theta_x} = \frac{xy(x-a)^2}{a^2b} ; N_{1\theta_y} = \frac{y(y-b)^2(a-x)}{ab^2} ; N_{2\theta_y} = \frac{xy(y-b)^2}{ab^2} ; N_{3\theta_y} = \frac{xy^2(y-b)}{ab^2}$$

$$N_{4\theta_y} = \frac{y^2(y-b)(a-x)}{ab^2} ; N_{1w}^x = \frac{(b-y)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3} ;$$

$$N_{2w}^x = \frac{(y-b)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3} ;$$

$$N_{3w}^x = \frac{-y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3} ;$$

$$N_{4w}^x = \frac{y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3} ; N_{1\theta_x}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3x-a)}{a^2b} ;$$

$$N_{2\theta_x}^x = \frac{x(b-y)(3x-2a)}{a^2b} ; N_{3\theta_x}^x = \frac{xy(3x-2a)}{a^2b} ; N_{4\theta_x}^x = \frac{y(x-a)(3x-a)}{a^2b} ;$$

$$N_{1\theta_y}^x = \frac{-y(y-b)^2}{ab^2} ; N_{2\theta_y}^x = \frac{y(y-b)^2}{ab^2} ; N_{3\theta_y}^x = \frac{y^2(y-b)^2}{ab^2} ; N_{4\theta_y}^x = \frac{y^2(b-y)}{ab^2} ;$$

$$N_{1w}^y = \frac{(a-x)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3} ;$$

$$N_{2w}^y = \frac{x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3} ;$$

$$N_{3w}^y = \frac{-x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3} ;$$

$$N_{4w}^y = \frac{(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3} ; N_{1\theta_x}^y = \frac{-x(x-a)^2}{ba^2} ;$$

$$N_{2\theta_x}^y = \frac{-x^2(x-a)}{ba^2}$$

$$N_{3\theta_x}^y = \frac{x^2(x-a)}{ba^2} ; N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2} ; N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2} ; N_{1\theta_y}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3y-b)}{ab^2}$$

$$N_{2\theta_y}^x = \frac{x(y-b)(3y-b)}{ab^2} ; N_{3\theta_y}^x = \frac{xy(-2b+3y)}{ab^2} ; N_{4\theta_y}^x = \frac{y(x-a)(2b-3y)}{ab^2}$$