

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES

CAMPUS PATOS DE MINAS

**UM ESTUDO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE
SÍMBOLO DA MODULAÇÃO TQAM NOS CANAIS
AWGN E DE RAYLEIGH**

PEDRO RICARDO S. SANTOS

ORIENTADORA: PROF^a. DR^a. KARINE BARBOSA CARBONARO

Patos de Minas – MG

Dezembro/2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES

CAMPUS PATOS DE MINAS

**UM ESTUDO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE
SÍMBOLO DA MODULAÇÃO TQAM NOS CANAIS
AWGN E DE RAYLEIGH**

PEDRO RICARDO S. SANTOS

Monografia apresentada à banca examinadora como parte das exigências para a aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II da graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações, da Faculdade de Engenharia Elétrica, da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Patos de Minas.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Karine Barbosa Carbonaro.

Patos de Minas – MG

Dezembro/2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES

CAMPUS PATOS DE MINAS

UM ESTUDO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO DA MODULAÇÃO TQAM NOS CANAIS AWGN E DE RAYLEIGH

PEDRO RICARDO S. SANTOS

Monografia apresentada à banca examinadora como parte das exigências para a aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II da graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações, da Faculdade de Engenharia Elétrica, da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Patos de Minas.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Karine Barbosa Carbonaro.

Patos de Minas, 18 de dezembro de 2020

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof^a. Dr^a. Karine Barbosa Carbonaro
Universidade Federal de Uberlândia
Orientadora

Prof. Dr. Jeovane Vicente de Sousa
Universidade Federal de Uberlândia
Examinador

Prof. Dr. Renan Alves dos Santos
Universidade Federal de Uberlândia
Examinador

Patos de Minas – MG

Dezembro/2020

AGRADECIMENTO

Primeiramente, agradeço a Deus por me acompanhar nessa trajetória, iluminando e abençoando sempre o meu caminho.

Agradeço aos meus pais Marília e Elson por todo apoio, incentivo e amor incondicional durante todo o curso.

Agradeço também a minha irmã, meus familiares e amigos pelo o apoio e ajuda durante esses anos.

Por fim, agradeço aos meus professores pelos ensinamentos compartilhados em minha formação acadêmica, em especial a minha querida orientadora Karine, que me orientou tão bem nessa monografia. Que esta vitória seja apenas a primeira de muitas que virão. Obrigado!

RESUMO

No receptor dos enlaces de rádio móvel, o sinal resultante é constituído por vários sinais com diferentes amplitudes, fases e atrasos correspondentes aos diferentes caminhos de propagação. A propagação por múltiplos caminhos resulta em desvanecimento e para atenuar o efeito do desvanecimento são utilizadas técnicas para estabilizar o enlace e, assim melhorar o desempenho do canal. Uma das técnicas descritas na literatura é a diversidade espacial na recepção com um canal de única entrada e múltiplas saídas (SIMO – *Single Input Multiple Output*). Para implementar essa técnica de diversidade espacial foi utilizada a combinação de máxima razão (MRC - *Maximal Ratio Combining*). Nesse cenário de transmissão de sinais digitais, esse trabalho estudou o desempenho da modulação M-TQAM em canais com ruído e desvanecimento. As conclusões foram que a constelação triangular apresenta desempenho similar a constelação quadrada e que há uma demanda menor de SNR quando o número de canais de recepção aumenta.

Palavras-chave: desvanecimento, diversidade espacial MRC, *M-ary* TQAM.

ABSTRACT

In the receiver of the mobile radio links, the signal resultant is constituted by various signals with different amplitudes, phases and delays corresponding to the different propagation paths. The propagation multi-path results in fading and to mitigate the effect of fading are techniques are used to stabilize the link and thus improve channel performance. One of the techniques described in the literature is the spatial diversity in reception with single input multiple outputs (SIMO - Single Input Multiple Output). To implement this spatial diversity technique, was used the maximum ratio combination (MRC -Maximum Ratio Combination). In this scenario of digital signal transmission, this work studied the performance of M-TQAM modulation in noise and fading channels. The conclusions were that the triangular constellation performs similarly to the square constellation and that there is less demand for SNR when the number of reception channels increases

Keywords: fading, MRC spatial diversity, *M-ary* TQAM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Propagação multipercurso	15
Figura 2.2 – Um sinal no receptor sob a ação do desvanecimento.....	16
Figura 2.3 – Sistema de comunicações digitais com diversidade.....	17
Figura 2.4 – Função densidade de probabilidade da distribuição gaussiana	21
Figura 2.5 – Função densidade de probabilidade da distribuição Rayleigh	24
Figura 2.6 – Função distribuição acumulada da distribuição de Rayleigh	24
Figura 2.7 – Constelações do tipo I, II e III	28
Figura 2.8 – Várias constelações QAM	29
Figura 2.9 – Constelações M-QAM quadradas	29
Figura 3.1 – Constelação 16-TQAM	32
Figura 3.2 – Limites de decisão para o 16-TQAM.....	33
Figura 4.1 – SEP da M-QAM constelação quadrada e triangular no canal AWGN	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Número de vizinhos adjacentes	35
Tabela 4.1 – SEP das modulações no canal AWGN	43
Tabela 4.2 – 16-TQAM no sistema de diversidade	43
Tabela 4.3 – 64-TQAM no sistema de diversidade	44

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AWGN	Additive White Gaussian Noise
ASK	Amplitude Shift Keying
BER	Bit Error Rate
CDF	Cumulative Distribution Function
I	In-phase
ISI	Intersymbol Interference
FSK	Frequency Shift Keying
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MISO	Multiple Input Single Output
MGF	Moment-Generating Function
ML	Maximum Likelihood
NLOS	Non-line-of-sight
PDF	Probability Density Function
PSD	Power Spectral Density
PSK	Phase Shift Keying
Q	Quadrature
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
SEP	Symbol Error Probability
SER	Symbol Error Rate
SIMO	Single Input Multiple Output

SUMÁRIO

AGRADECIMENTO	IV
RESUMO	V
ABSTRACT	VI
LISTA DE FIGURAS	VII
LISTA DE TABELAS	VIII
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	13
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1 Desvanecimento	15
2.2 Diversidade	17
2.3 Processo Estocástico	18
2.3.1 Função Densidade de Probabilidade e Função Distribuição Acumulada.....	19
2.3.2 Valor Médio	19
2.3.3 Valor médio quadrático	20
2.3.4 Variância	20
2.3.5 Desvio Padrão	20
2.3.6 Ruído Branco Gaussiano Aditivo.....	21
2.3.7 Distribuição de <i>Rayleigh</i>	22
2.4 Modulação M-QAM.....	25
2.4.1 Sinal QAM.....	25
2.4.2 Constelação	27
2.6 Considerações finais.....	31
CAPÍTULO 3 – MATERIAIS E MÉTODOS	32
3.1 Modelagem da M-ary TQAM.....	32
3.2 SEP da M-ary TQAM no canal AWGN.....	34
3.3 Modelo de canal <i>Rayleigh</i>	36
3.4 SEP M-ary TQAM no sistema de diversidade MRC	37
3.5 Análise realizada	41
3.4 Considerações finais.....	41

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	42
4.1 M-QAM e M-TQAM no canal AWGN	42
4.2 M-TQAM no canal de <i>Rayleigh</i>	43
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO GERAL	45
PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	46
REFERÊNCIAS.....	47

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Neste Capítulo são delimitados os objetivos específicos do estudo proposto nesse trabalho de conclusão de curso de acordo com a justificativa apresentada. Além disso, apresenta-se a metodologia utilizada para o desenvolvimento da pesquisa visando o cumprimento do objetivo principal.

Nos sistemas de comunicação sem fio, o meio de propagação contém vários caminhos distintos entre o transmissor e o receptor. No receptor têm-se um sinal resultante constituído pelos vários sinais com diferentes amplitudes, fases e atrasos correspondentes aos diferentes caminhos de propagação. Esse fenômeno de propagação de múltiplos caminhos resulta em desvanecimento do sinal no receptor. Portanto, o desvanecimento *Rayleigh* que ocorre nos canais de rádio móveis prejudica a qualidade da transmissão de dados [1].

Diferentes técnicas de diversidade foram estudadas e empregadas para atenuar o efeito do desvanecimento. Essas técnicas buscam estabilizar o enlace proporcionando uma melhora no desempenho do canal. Para isso, geram-se réplicas do sinal transmitido de modo que esses sinais apresentem desvanecimentos descorrelacionados [2]. A diversidade pode ocorrer em três domínios: tempo, frequência e espaço. Na diversidade temporal tem-se o intervalo entre as réplicas maior que o tempo de coerência do canal. Já na diversidade em frequência, o espaçamento entre as portadoras deve ser maior que a banda de coerência do canal. E na diversidade espacial, a separação entre as antenas deve ser de alguns comprimentos de onda ($\approx 10\lambda$) para que não haja correlação entre os canais [2]. A diversidade espacial divide-se em canal: MISO (*Multiple Input Single Output*), SIMO (*Single Input Multiple Output*) e MIMO (*Multiple Input Multiple Output*).

Apesar das dificuldades para a propagação de sinais nos canais móveis, as comunicações modernas devem suportar aplicações multimídias com transmissão de dados

em taxas altas e utilização eficiente da largura de banda. Para satisfazer esse requisito das aplicações é preciso utilizar esquemas de modulação digital de ordem superior e robustos para as deficiências de canal. Os esquemas de modulação digital são altamente impactados pelo ruído, porém, as modulações digitais fornecem flexibilidade de multiplexação de vários formatos de informações em taxas de dados altas. A modulação mais popular utilizada nos sistemas de comunicação comercial é a Modulação de Amplitude em Quadratura (QAM – *Quadrature Amplitude Modulation*) com constelação quadrada. Ela apresenta procedimento de detecção simples, é fácil de ser implementada e demonstra bom desempenho [3].

A modulação QAM com constelação quadrada apresenta melhor desempenho de erro em relação as suas antecessoras (ASK – *Amplitude Shift Keying*, FSK – *Frequency Shift Keying*, PSK – *Phase Shift Keying*). Nela a probabilidade de detecção é realizada utilizando o conceito de máxima verossimilhança (ML - *Maximum Likelihood*) aplicado nos limites retangulares ou quadrados da constelação. As constelações QAM de ordem inferior têm eficiência espectral menor, provêm controle de sobreposição e maior tolerância à distorção mantendo a taxa de erro de bit (BER – *Bit Error Rate*). No entanto, para alcançar taxa de dados elevada são utilizadas constelações QAM de ordem superior, porém elas demandam um *hardware* mais complexo e apresentam uma elevada BER [4]. O estudo da QAM constelação quadrada encontram-se nos principais livros de comunicação digital.

Em [5], os autores desenvolveram estudos baseado em simulações da taxa de erro de símbolo (SER – *Symbol Error Rate*) das variações 16-QAM e 64-QAM. As constelações estudadas foram circular e a triangular. O estudo concluiu que a QAM constelação triangular apresenta a melhor SER para sistemas com potência média limitada. Em [6] é mostrado que a TQAM é mais eficiente em termos de energia, enquanto preserva a baixa complexidade de detecção da QAM quadrada. Na constelação triangular, os pontos de sinal são vértices de uma rede de triângulos equiláteros e a constelação é simétrica em relação à origem. A região de decisão da parte interna da constelação são hexágonos regulares que fornecem cobertura ideal da área, menos energia para a mesma distância mínima entre símbolos adjacentes [5].

Nos livros de comunicação digital geralmente não são encontrados estudos sobre a QAM constelação triangular. Diante disso, esse trabalho de conclusão de curso contribui com um estudo sobre essa constelação. O objetivo principal é avaliar o desempenho da TQAM nos canais AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) e de *Rayleigh*. Para alcançar tal objetivo, a constelação triangular foi estudada para a determinação da probabilidade de erro de símbolo (SEP – *Symbol Error Probability*) da M-ary TQAM em um canal AWGN [7]. Outro conceito novo estudado foi o ambiente SIMO com diversidade espacial. Por fim, desenvolveu-se o

estudo da equação da SEP da *M-ary* TQAM com diversidade espacial, especificamente para a distribuição de *Rayleigh*.

O restante desse trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2 são mostrados os principais conceitos relacionados ao desvanecimento e ruído no canal de comunicação. Ainda no capítulo 2, a modelagem matemática da *M-ary* QAM constelação quadrada é apresentada. A modelagem matemática da *M-ary* TQAM nos canais AWGN e de *Rayleigh* é descrita no Capítulo 3. As discussões dos resultados obtidos são apresentadas no Capítulo 4. E o último capítulo apresenta as conclusões gerais desse trabalho de conclusão de curso.

Capítulo 2

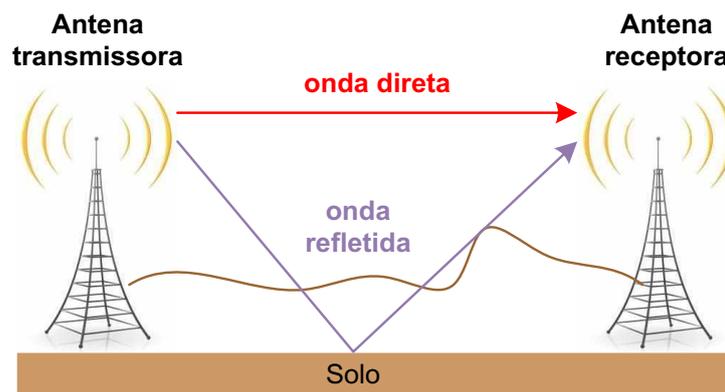
REFERENCIAL TEÓRICO

Neste Capítulo apresentam-se os principais conceitos teóricos sobre desvanecimento e a sua análise qualitativa e quantitativa de acordo com critérios estatísticos. Além disso, será descrita a modulação QAM de constelação quadrada.

2.1 Desvanecimento

Entre o transmissor e o receptor, as ondas eletromagnéticas podem percorrer caminhos diferentes produzindo múltiplos percursos ou simplesmente multipercurso [8]. Por exemplo, na antenna receptora tem-se a presença de uma onda direta e uma onda refletida como ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Propagação multipercurso.



Fonte: O autor.

As variações do meio de propagação podem afetar a polarização da onda, causar espalhamentos indesejáveis e modificar a absorção da onda eletromagnética e, conseqüentemente modificar a amplitude e o formato o sinal recebido [8]. O enfraquecimento

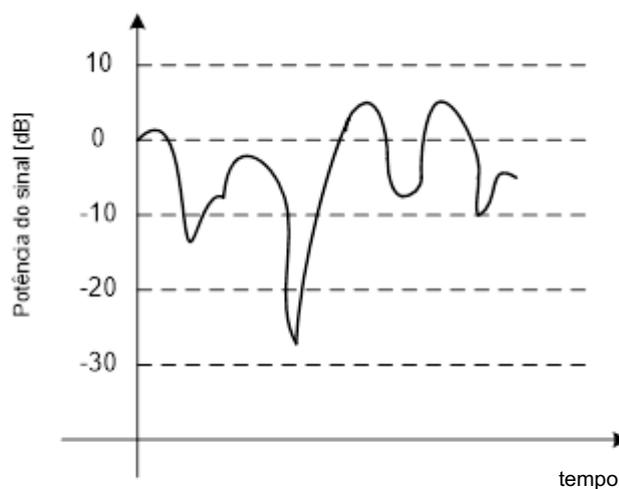
desse sinal recebido recebe a denominação de desvanecimento (*fading*) e nos sistemas digitais, o formato resultante apresenta comportamento aleatório no tempo.

O caráter seletivo do desvanecimento é definido quando a influência é maior em uma frequência do que em outra. Caso todas as componentes do sinal sejam afetadas igualmente e ao mesmo tempo tem-se o desvanecimento não seletivo ou plano [8]. A modelagem matemática adequada dos canais com desvanecimento seletivo é mais difícil do que os canais com desvanecimento plano.

Dependendo da faixa de frequência de operação, o desvanecimento é classificado também em lento e rápido. O desvanecimento lento (desvanecimento por atenuação) envolve intervalos de tempo de vários segundos, de minutos, horas ou mesmo dias. Esse tipo é ocasionado por mudanças nas características de propagação ao longo da altura da atmosfera ou por alterações na absorção do sinal pelo meio de transmissão. Já no desvanecimento rápido (desvanecimento por interferência e desvanecimento por multipercurso) ocorrem muitos enfraquecimentos do sinal por segundo causados pela entrada de diversos sinais no receptor com fases aleatórias que combinadas resultam em um nível de sinal com variações acentuadas e rápidas. Esse tipo de desvanecimento varia com o tempo, com o tipo de terreno entre as antenas e é função da frequência e, isto lhe confere caráter seletivo [8].

A Figura 2.2 ilustra uma exemplificação da variação dos níveis de potência de um sinal recebido sob o efeito do desvanecimento.

Figura 2.2 – Um sinal no receptor sob a ação do desvanecimento.



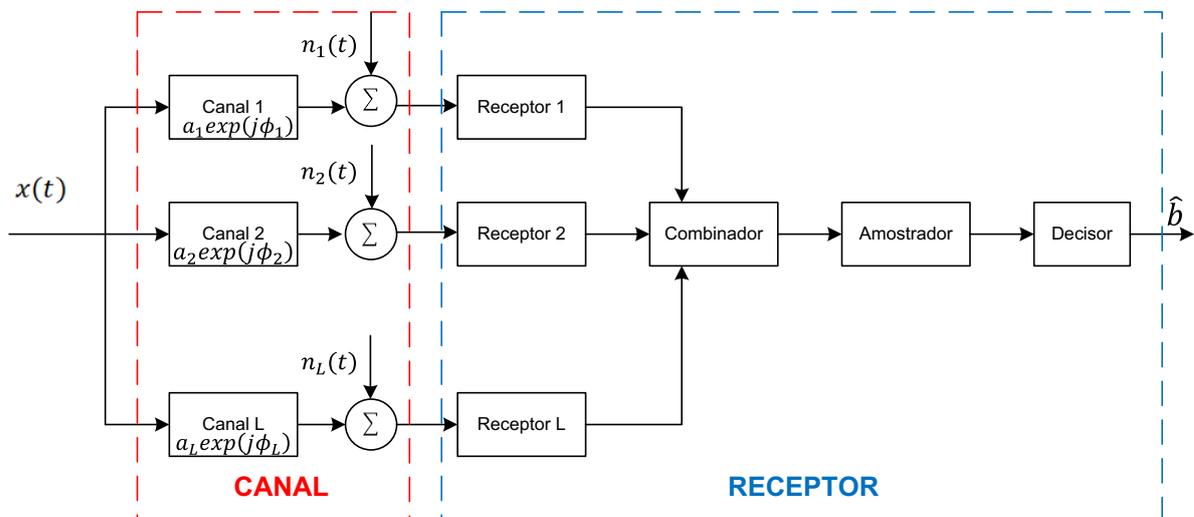
Fonte: O autor.

Observando o sinal ilustrado na Figura 2.2 conclui-se que o fenômeno apresenta comportamento imprevisível.

2.2 Diversidade

As técnicas de diversidade são utilizadas no combate aos efeitos do desvanecimento dos sinais nos canais de comunicação. A diversidade consiste na transmissão de um mesmo sinal várias vezes [2]. Deste modo, caso ocorra desvanecimento do sinal em um canal, é provável que não ocorra desvanecimento nos outros canais. Isso faz com que o desempenho do sistema melhore. Para que a diversidade seja efetiva, os desvanecimentos nos canais não podem ser correlatos devendo ser independentes entre si. A Figura 2.3 ilustra um sistema de comunicações digitais com diversidade que consiste em receber redundantemente a mesma informação por dois ou mais canais, diminuindo-se a probabilidade de ocorrer um desvanecimento profundo do sinal.

Figura 2.3 – Sistema de comunicações digitais com diversidade.



Fonte: Adaptado de [9].

Os tipos comuns de diversidade dependem do domínio que ela ocorre [2]:

- **Diversidade temporal:** envia-se a mesma informação utilizando o intervalo entre as réplicas maior que o tempo de coerência do canal. As várias maneiras de prover são, por exemplo, por meio de códigos corretores de erros e um canal seletivo em frequência;
- **Diversidade em frequência:** envia-se a mesma informação por meio de L canais com espaçamento entre as portadoras maior que a banda de coerência do canal;

- **Diversidade espacial:** as antenas devem que estar separadas de uma distância de alguns comprimentos de onda para que não tenha correlação entre os canais.

A diversidade espacial divide-se em: diversidade espacial na recepção com um canal de única entrada e múltiplas saídas (SIMO – *Single Input Multiple Output*), diversidade espacial na transmissão com um canal de múltiplas entradas e uma única saída (MISO – *Multiple Input Single Output*) e diversidade espacial na transmissão e recepção com um canal de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO – *Multiple Input Multiple Output*).

Alguns métodos de combinação utilizados para associar os sinais recebidos na recepção são [9]:

- **Combinação de seleção** (*Selection Combining*): o sinal com a maior relação sinal-ruído instantânea é selecionado a cada intervalo de símbolo;
- **Combinação comutada** (*Switched Combining*): o receptor seleciona um “ramo” com SNR acima de um limiar γ e permanece com este até a SNR fique abaixo de γ ;
- **Combinação de máxima razão** (MRC - *Maximal Ratio Combining*): realiza-se uma combinação linear dos sinais recebidos.

2.3 Processo Estocástico

Na área de engenharia elétrica há sinais que não têm descrição matemática exata porque se desenvolvem como funções aleatórias do tempo. O desenvolvimento aleatório é causado por uma ou mais variáveis aleatórias. A variável aleatória pode ser entendida como uma variável quantitativa cujo resultado depende de fatores aleatórios. O caráter aleatório em função do tempo dificulta a definição, o processamento e a filtragem do sinal. O campo de estudo que fornece ferramentas para análise de sistemas com comportamento aleatório é o conceito de processo estocástico [10].

No processo estocástico define-se, inicialmente, uma variável aleatória X com um conjunto de valores $X(S)$. A variável aleatória é considerada discreta quando os possíveis resultados estão contidos em um conjunto finito e enumerável. Para ser considerada uma variável aleatória contínua, os possíveis resultados abrangem todo um intervalo de números reais. Para o desenvolvimento das subseções considera-se uma variável aleatória contínua.

2.3.1 Função Densidade de Probabilidade e Função Distribuição Acumulada

A Função Densidade de Probabilidade (PDF – *Probability Density Function*) é uma função que associa a cada $x \in X(S)$ um número $f(x)$ que deve satisfazer as duas condições [10]:

$$f(x) \geq 0 \text{ para } -\infty \leq x \leq \infty \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (2.2)$$

A probabilidade de assumir um valor entre os limites x_1 e x_2 é [10]:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad (2.3)$$

A coleção dos pares $(x, f(x))$ é conhecida como distribuição de probabilidade da variável aleatória X . A Função Distribuição Acumulada (CDF - *Cumulative Distribution Function*) $F(x)$ é definida como a probabilidade para que a variável aleatória X seja menor igual ao valor especificado de x [10]:

$$F(x) \triangleq P(X \leq x) \triangleq \int_{-\infty}^x f(u)du \quad (2.4)$$

Resolvendo a Equação (2.4) encontram-se os seguintes valores assintóticos para a CDF $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.

Resumidamente, $F(x)$ é a integral de $f(x)$ até um ponto genérico “ x ” ou a função densidade de probabilidade é a derivada da função de distribuição para todos os valores de x como mostrado na Equação (2.5).

$$f(x) = \frac{d F(x)}{dx} \quad (2.5)$$

2.3.2 Valor médio

O valor médio (valor esperado, expectativa matemática, esperança matemática, esperança, momento) de uma variável aleatória X , denominado de $E(X)$, corresponde a componente de nível contínuo do sinal (d.c) e pode ser calculado pela Equação (2.6) [10]:

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.6)$$

Nos fenômenos estacionários, a densidade de probabilidade é independente do tempo e o resultado dessa operação é uma constante. Em muitas situações, o valor médio de uma variável aleatória é nulo e não se consegue tirar dele maiores informações.

2.3.3 Valor médio quadrático

O valor médio quadrático (segundo momento) $E(X^2)$ corresponde à potência da componente de nível contínuo do sinal definido na Equação (2.7) [10]:

$$\mu_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (2.7)$$

O valor determinado será diferente de zero, mesmo para uma expectativa matemática nula no mesmo intervalo.

2.3.4 Variância

A variância (σ_X^2) corresponde à potência das componentes do sinal variando no tempo, potência alternada (a.c) e pode ser determinado seguindo a Equação (2.8) [10]:

$$\sigma_X^2 = E[(x - \mu_1)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^2 f(x) dx \quad (2.8)$$

Resolvendo a Equação (2.8) tem-se que a variância resulta da diferença entre a média quadrática e o quadrado da média do processo aleatório.

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \mu_2 - \mu_1^2 = E(X^2) - E(X)^2 \quad (2.9)$$

2.3.5 Desvio padrão

O desvio padrão (afastamento típico ou afastamento quadrático médio) σ_X é a raiz quadrada do valor médio quadrático das componentes do sinal variando no tempo, ou seja, o valor raiz quadrada média (rms). Ele é definido como:

$$\sigma_X = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^2 f(x) dx} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \quad (2.10)$$

Esse parâmetro quantifica a dispersão que ocorre nos valores da variável aleatória.

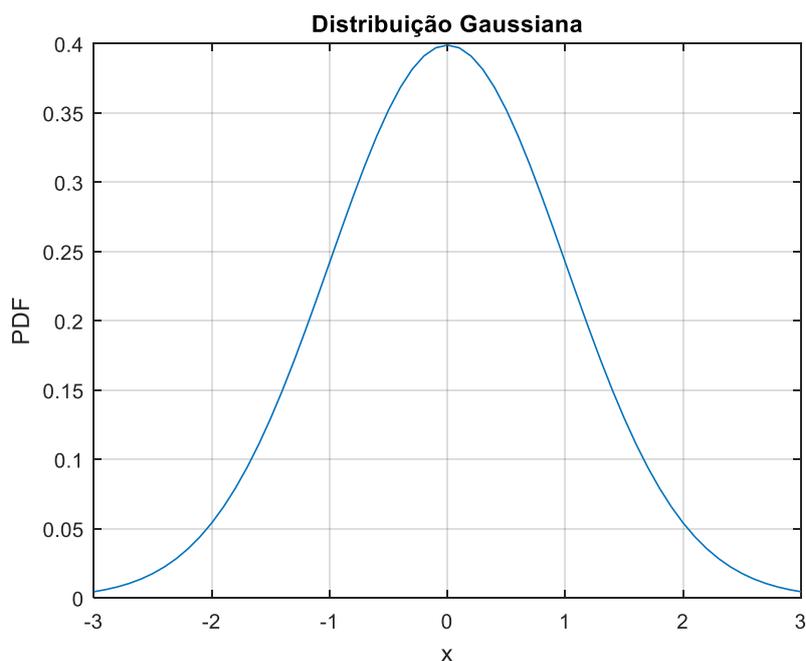
2.3.6 Ruído Branco Gaussiano Aditivo

O termo ruído designa sinais indesejáveis que perturbam a transmissão e o processamento de sinais em sistemas de comunicação [11]. A presença do ruído sobrepõe-se ao sinal de informação mascarando o sinal e conseqüentemente, limita a capacidade do receptor em detectar o símbolo corretamente.

Na prática tem-se o ruído térmico que é causado pelo movimento aleatório dos elétrons em um condutor qualquer. Ele é modelado por meio do processo gaussiano que apresenta função densidade de probabilidade da variável aleatória gaussiana X definida por [10]:

$$f_G(x) = \frac{1}{\sigma_G \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_G^2} \right] \quad (2.11)$$

Figura 2.4 - Função densidade de probabilidade da distribuição gaussiana.



Fonte: O autor.

Em sistemas de comunicação o ruído térmico é modelado como ruído branco com densidade espectral de potência (PSD – *Power Spectral Density*), potência média por unidade de banda, de valor constante para todas as frequências [12].

$$S(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad (2.12)$$

O valor de N_0 é expresso em função da constante de *Boltzmann* (k) com valor igual a $1,38.10^{-23}$ Joules por Kelvin, e da temperatura equivalente de ruído (T_e) no receptor em Kelvin. A unidade de medida do N_0 é Watts por Hertz.

$$N_0 = \kappa T_e \quad (2.13)$$

Aplicando a transformada inversa de *Fourier* na Equação (2.12) determina-se a função autocorrelação mostrada na Equação (2.14).

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \exp(j\omega\tau) d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (2.14)$$

Em que, $\delta(\tau)$ é a função delta de *Dirac*.

A função autocorrelação mostra que quaisquer duas amostras diferentes de ruído branco não são correlacionadas. As amostras também são independentes uma vez que o processo é gaussiano [12].

O ruído branco acontece de maneira aditiva ao contaminar um sinal e, por isso é chamado de ruído aditivo gaussiano branco (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*). Ele é idealizado matematicamente para as frequências no intervalo de $-\infty$ a $+\infty$ com média é igual a zero e a variância é determinada pela Equação (2.15) [12].

$$\sigma_G^2 = \frac{N_0}{2} \quad (2.15)$$

2.3.7 Distribuição de Rayleigh

O título da distribuição refere-se ao seu idealizador, o inglês Sir John William Strutt, 3º Duque de Rayleigh. Ele dividiu o Prêmio Nobel de Física de 1904 com Sir William Ramsay, por estudos com gases e a descoberta do argônio. Essa distribuição foi proposta para utilização com eletromagnetismo e, posteriormente foi destacada por Pawsey, em 1935, no tratamento de dados de potência de sinais de rádio [12].

A distribuição de Rayleigh é utilizada para modelar os ambientes de propagação homogêneos. Nesses ambientes há um elevado número de ondas originadas de múltiplos percursos e não há linha de visada (NLOS - *Non-line-of-sight*). As inúmeras componentes da propagação por múltiplos percursos apresentam suas fases distribuídas no intervalo de 0 a 2π e suas amplitudes são mutuamente independentes. No ambiente de propagação homogêneo, a

envoltória do sinal recebido é expressa em relação às componentes em fase e quadratura [12] como definido na Equação (2.16).

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2.16)$$

Em que,

R - envoltória do sinal recebido;

X e Y - processos gaussianos independentes.

Os processos gaussianos independentes apresentam média nula $E(X) = E(Y) = 0$ e variâncias iguais $E(X^2) = E(Y^2) = \sigma^2$.

A função densidade de probabilidade da distribuição de Rayleigh é apresentada na Equação (2.17) [12].

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right), r \geq 0 \quad (2.17)$$

Para normalizar a envoltória considere $P = \frac{R}{\hat{r}}$, em que $\hat{r} = \sqrt{E(R^2)}$ é a raiz do valor quadrático médio (rms) de R . Assim, tem-se a função densidade de probabilidade da envoltória da distribuição de Rayleigh reescrita em função de um parâmetro de desvanecimento (ρ) na Equação (2.18) [12].

$$f_R(\rho) = 2\rho \exp(-\rho^2) \quad (2.18)$$

A função distribuição acumulada é mostrada na Equação (2.19) [12].

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right), r \geq 0 \quad (2.19)$$

A função distribuição acumulada para a envoltória normalizada é obtida utilizando-se a definição que a CDF é igual a integral da PDF. Integrando a Equação (2.19) resulta na Equação (2.20) [12].

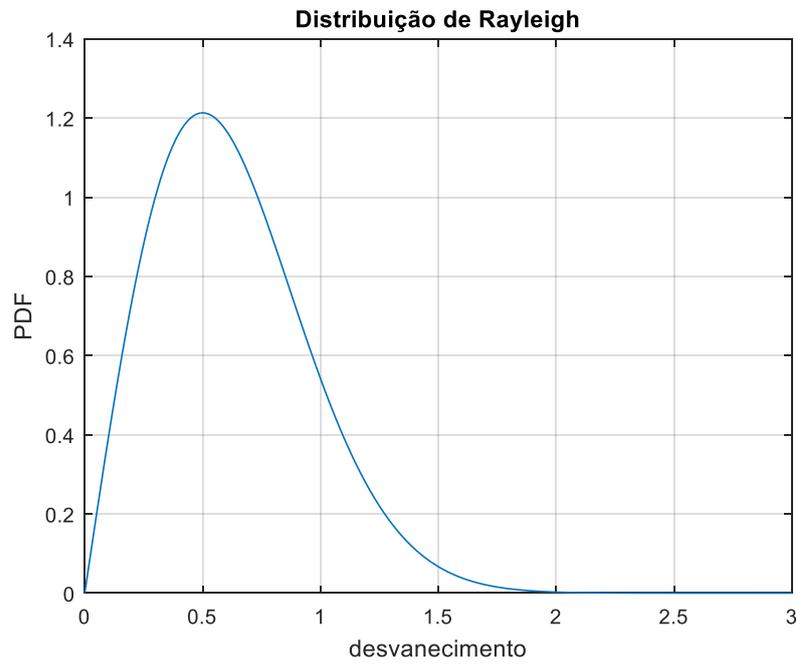
$$\int f_R(\rho) = \int 2\rho \exp(-\rho^2) d\rho \quad (2.20)$$

Resultando na Equação (2.21) [12].

$$F_R(\rho) = 1 - \exp(-\rho^2) \quad (2.21)$$

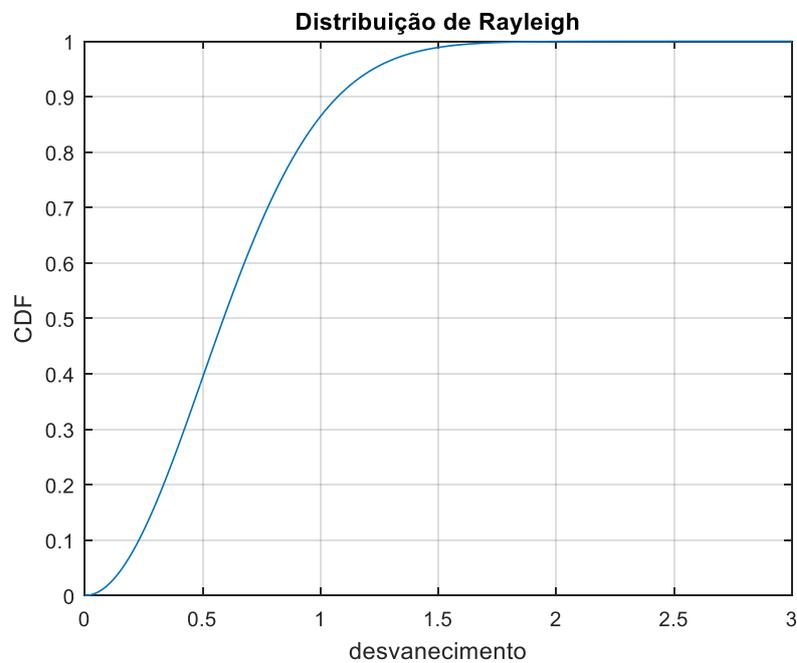
A Figura 2.5 ilustra a função densidade de probabilidade da distribuição de Rayleigh e a sua curva da função distribuição acumulada é ilustrada na Figura 2.6.

Figura 2.5 - Função densidade de probabilidade da distribuição de Rayleigh.



Fonte: O autor.

Figura 2.6- Função distribuição acumulada da distribuição de Rayleigh.



Fonte: O autor.

A distribuição de Rayleigh pode ser vista como um caso particular das distribuições de Nakagami, Rice, Weibull, conforme apresentado em [13].

2.4 Modulação M-QAM

A modulação QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) é amplamente utilizada para modular sinais de dados nas comunicações de rádio. O sinal consiste em variações de amplitude e fase.

2.4.1 Sinal QAM

A equação característica do sinal QAM usando as modulações de amplitude e de fase é mostrado na Equação (2.22) [12].

$$s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_c t + \theta_i), i = 1, 2, \dots, M \quad (2.22)$$

Em que, A_i é a amplitude, f_c é a frequência da portadora e θ_i é a fase do i -ésimo sinal na modulação M-ário. A modelagem do pulso é usada para melhorar o espectro e controlar a ISI (*Intersymbol interference*) na QAM. O sinal QAM definido na Equação (2.22) é modulado pelo pulso conforme a Equação (2.23) [12].

$$s_i(t) = A_i p(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_i), i = 1, 2, \dots, M \quad (2.23)$$

O $p(t)$ é um pulso definido em $[0, T]$ e, portanto, reescrevendo a Equação (2.23) é obtido o sinal QAM da Equação (2.24) [12].

$$s_i(t) = A_{i1} p(t) \cos(2\pi f_c t) + A_{i2} p(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.24)$$

Em que, $A_{i1} = A_i \cos \theta_i$ e $A_{i2} = A_i \sin \theta_i$ e, portanto tem-se [12]:

$$A_i = \sqrt{(A_{i1})^2 + (A_{i2})^2} \quad (2.25)$$

A Equação (2.26) [12] expressa o sinal QAM como uma combinação linear de duas funções ortonormais.

$$s_i(t) = s_{i1} \phi_1(t) + s_{i2} \phi_2(t) \quad (2.26)$$

Em que, os termos s_{i1} e s_{i2} são definidos respectivamente [12].

$$s_{i1} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_{i1} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_i \cos \theta_i \quad (2.27)$$

$$s_{i2} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_{i2} = \sqrt{\frac{E_p}{2}} A_{i2} \text{sen} \theta_i \quad (2.28)$$

E as funções base ϕ_1 e $\phi_2(t)$ são [12]

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_p}} p(t) \cos(2\pi f_c t), 0 \leq t \leq T \quad (2.29)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_p}} p(t) \text{sen}(2\pi f_c t), 0 \leq t \leq T \quad (2.30)$$

A energia do pulso $p(t)$ no intervalo de $[0, T]$ é definida por $E_p = \int_0^T p^2(t) dt$. O termo $\sqrt{\frac{2}{E_p}}$ é normalizado para as bases $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ que são ortonormais para a condição $f_c \gg \frac{1}{T}$ e, portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi_1^2(t) dt &= \frac{2}{E_p} \int_0^T p^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ \int_0^T \phi_1^2(t) dt &= \frac{1}{E_p} \int_0^T p^2(t) [1 + \cos(4\pi f_c t)] dt \\ \int_0^T \phi_1^2(t) dt &\cong 1, f_c \gg \frac{1}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi_2^2(t) dt &= -\frac{2}{E_p} \int_0^T p^2(t) \cos(2\pi f_c t) \cdot \text{sen}(2\pi f_c t) dt \\ \int_0^T \phi_2^2(t) dt &= -\frac{2}{E_p} \int_0^T p^2(t) \text{sen}(4\pi f_c t) dt \\ \int_0^T \phi_2^2(t) dt &\cong 0, f_c \gg \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Quando não há modelagem de pulso, $p(t) = 1$ em $[0, T]$, a energia do pulso torna-se $E_p = T$ e a energia do i -ésimo sinal é definida na Equação (2.33) [12].

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt \cong \frac{1}{2} A_i^2 E_p \quad (2.31)$$

Retornando a Equação (2.26) define-se a magnitude, que se relaciona com a amplitude do sinal, e a fase do fasor [12].

$$\|s_i\| = \sqrt{(s_{i1})^2 + (s_{i2})^2} = \sqrt{E_i} \quad (2.32)$$

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{E_p}} \|s_i\| \quad (2.33)$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{s_{i2}}{s_{i1}} \quad (2.34)$$

A distância entre um par de fasores é [12].

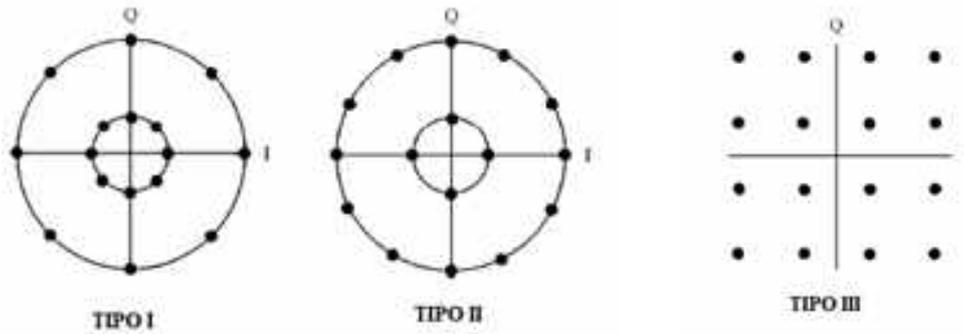
$$d_{ij} = \sqrt{|s_i - s_j|^2} = \sqrt{(s_{i1} - s_{j1})^2 + (s_{i2} - s_{j2})^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (2.35)$$

Dependendo dos valores de (s_{i1}, s_{i2}) ou (A_i, θ_i) são criados os diversos tipos de constelações QAM.

2.4.2 Constelação

Em 1960, *C. R. Cahn* [14] propôs a QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) expandindo a modulação em fase para uma modulação com múltiplas amplitudes em fase e mais que uma amplitude associada a uma fase permitida. Ele propôs uma constelação do tipo I com um número fixo de pontos igualmente espaçados em cada um dos N círculos (N – número de níveis de amplitudes). Após alguns meses *Hancock e Lucky* [15] propuseram a constelação do tipo II com os pontos do sinal em círculo, mas o número de pontos no círculo interno é menor do que o número de pontos no círculo externo e a distância entre dois pontos adjacentes no círculo interno é aproximadamente igual à do círculo externo. Em 1962, *Campopiano e Glazer* [16] propuseram a constelação quadrada tipo III. A Figura 2.7 ilustra as constelações dos tipos I, II e III.

Figura 2.7 – Constelações dos tipos I, II e III.



Fonte: adaptada de [12].

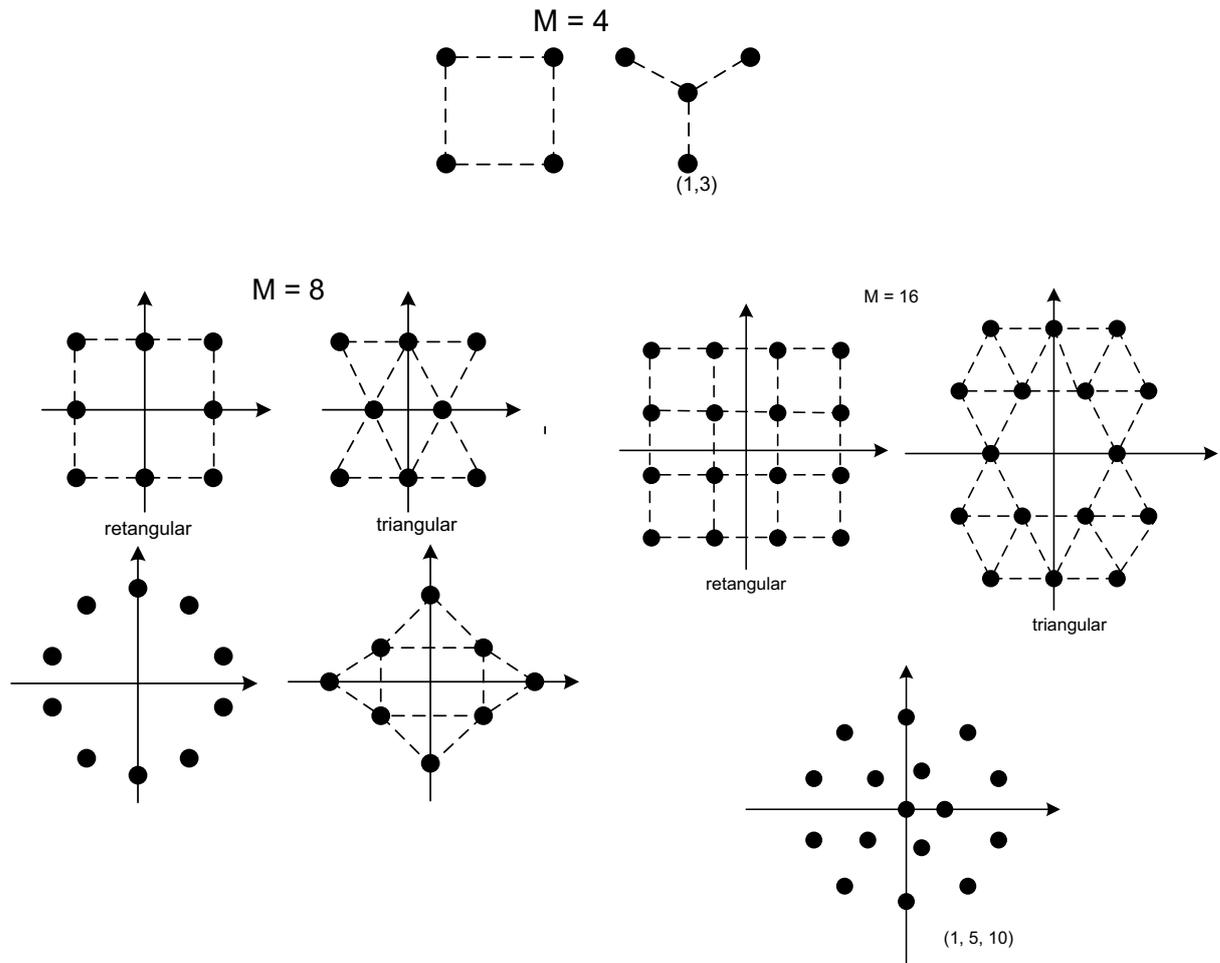
Os requisitos das constelações QAM são:

- i. Distância euclidiana mínima entre os pontos do sinal (fasor);
- ii. Diferentes fases entre os fasores;
- iii. Potência média dos fasores menor possível em relação às outras constantes;
- iv. Relação entre a potência de pico e a média do fasor deve ser um.

A modulação é composta de fase (*I - In-phase*) e de quadratura (*Q - Quadrature*) e são ortogonais porque elas estão separadas de 90° . A fase é relativa ao sinal de referência, a portadora e a magnitude são o valor absoluto. A projeção do vetor sinal no eixo *I* é a componente “*I*” e a projeção no eixo *Q* é a componente “*Q*”. Esse vetor sinal é mapeado em um ponto discreto denominado de ponto da constelação que pode ser descrito também em coordenadas retangulares. Os motivos dessa representação são:

- i. Metade dos bits é representada no eixo real e a outra metade é representada no eixo imaginário. Os sinais em fase e em quadratura são independentes;
- ii. Para decodificar o critério de decisão pode ser aplicado independente dos eixos real e imaginário. Assim, simplifica a implementação do receptor.

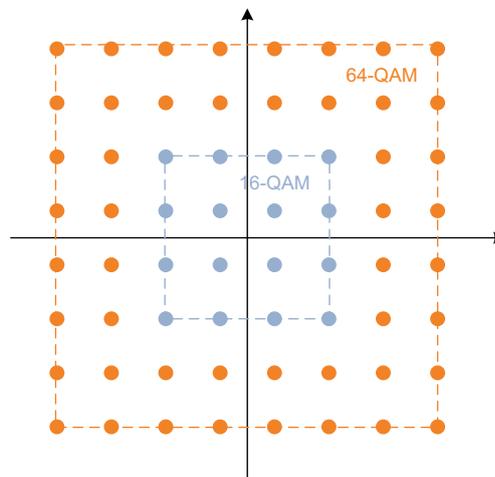
Figura 2.8 – Várias constelações QAM.



Fonte: adaptada de [12].

Neste trabalho o tipo de constelação estudado é comparado com as constelações quadradas. A Figura 2.9 ilustra exemplos de constelações quadradas 16-QAM e 64-QAM.

Figura 2.9 – Constelações M-QAM quadradas.



Fonte: adaptada de XIONG (2006).

Os sinais M-QAM na constelação quadrada são definidos na Equação (2.36) [12].

$$s_i(t) = I_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} p(t) \cos(2\pi f_c t) - Q_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} p(t) \text{sen}(2\pi f_c t) = I_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} \phi_1(t) + Q_i \sqrt{\frac{E_o}{E_p}} \phi_2(t) \quad (2.36)$$

Em que, E_o é a energia do sinal com a menor amplitude e os valores mínimos para o par (I_i, Q_i) do elemento da matriz $L \times L$ são $(\pm 1, \pm 1)$. A matriz com dimensão $L \times L$ possui L linhas e L colunas e é mostrada na Equação (2.37) [12].

$$[I_i, Q_i] = \begin{bmatrix} (-L + 1, L - 1) & \cdots & (L - 1, L - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-L + 1, -L + 1) & \cdots & (L - 1, -L + 1) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Em que, $L = \sqrt{M}$, $M = 2^b$, $b = 1, 2, \dots$

Caso o número de bits por símbolo seja par, a constelação é chamada de quadrada (16-QAM, 64-QAM, 256-QAM) e a sua matriz 16-QAM com $L = 4$ é exemplificada como:

$$[I_i, Q_i] = \begin{bmatrix} (-3, 3) & (-1, 3) & (1, 3) & (3, 3) \\ (-3, 1) & (-1, 1) & (1, 1) & (3, 1) \\ (-3, -1) & (-1, -1) & (1, -1) & (3, -1) \\ (-3, -3) & (-1, -3) & (1, -3) & (3, -3) \end{bmatrix}$$

A constelação pode ser expressa em termos de (I_i, Q_i) na forma de fasor de acordo com a Equação (2.38) [12].

$$s_i = \left(I_i \sqrt{\frac{E_o}{2}}, Q_i \sqrt{\frac{E_o}{2}} \right) \quad i = 1, 1, \dots, M \quad (2.38)$$

A magnitude do fasor é expressa por [12]:

$$\|s_i\| = \sqrt{\frac{E_o}{2} (I_i^2 + Q_i^2)} \quad (2.39)$$

O sinal QAM definido na Equação (2.22) terá amplitude [12]

$$A_i = \sqrt{\frac{E_o}{E_p} (I_i^2 + Q_i^2)} = \sqrt{\frac{2}{E_p}} \|s_i\| \quad (2.40)$$

e a sua fase é o ângulo do fasor correspondente

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{Q_i}{I_i} \quad (2.41)$$

A distância entre os pares de fasores de acordo com a Equação (2.35) é [12]:

$$d_{ij} = \sqrt{|s_i - s_j|^2} = \sqrt{(I_i - I_j)^2 + (Q_i - Q_j)^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (2.42)$$

A energia e a potência média são mostradas nas Equações (2.43) e (2.44), respectivamente.

$$\overline{E_{média}} = E \left\{ \frac{E_0}{2} (I_i^2 + Q_i^2) \right\} = \frac{E_0}{2} [E\{I_i^2\} + E\{Q_i^2\}] = E_0 E\{I_i^2\} \quad (2.43)$$

$$\overline{P_{média}} = \frac{E_0}{T} E\{I_i^2\} \quad (2.44)$$

Para as constelações quadradas (L x L) QAM tem-se

$$E\{I_i^2\} = \frac{1}{3}(L^2 - 1) = \frac{1}{3}(M - 1) \quad (2.45)$$

Conforme [12], a Equação (2.46) é a mais utilizada para determinar a probabilidade de erro da *M*-ário QAM com constelação quadrada.

$$P_e \cong 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{(M - 1) N_0}} \right) \quad (2.46)$$

Em que,

M – número de símbolos;

E_b – energia do símbolo;

N_0 – PSD do AWGN.

2.5 Considerações finais

Neste capítulo foi apresentada a fundamentação teórica sobre a modulação *M*-ário QAM e os modelos utilizados em canais com ruído gaussiano e distribuição de *Rayleigh*. Além disso foi introduzido o conceito de diversidade. No próximo capítulo apresenta-se o desenvolvimento matemático da constelação TQAM.

Capítulo 3

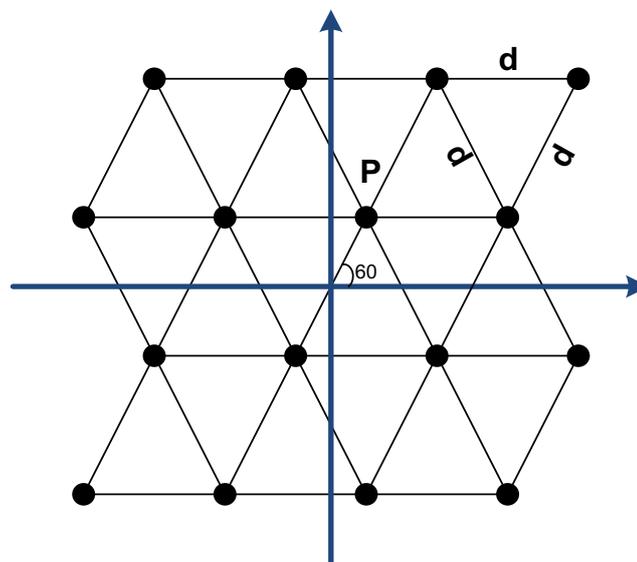
MATERIAIS E MÉTODOS

Neste Capítulo apresenta-se o equacionamento matemático para determinar a probabilidade de erro de símbolo da M-ário TQAM nos canais com distribuição gaussiana e Rayleigh.

3.1 Modelagem da M-ário TQAM

Na modulação TQAM, todos os vizinhos próximos de um sinal são equidistantes na constelação como ilustrado na Figura 3.1. O ponto P está a uma distância *Euclidiana* $\frac{d}{2}$ da origem em um ângulo de 60° , onde d é o comprimento de um lado do triângulo. Então, a distância entre dois pontos adjacentes é d [7]. A M-ário TQAM tem M como a ordem da modulação na constelação, por exemplo $M = 2^b$ onde $b = 2, 3, 4, \dots$. A Figura 3.1 ilustra a constelação 16-TQAM.

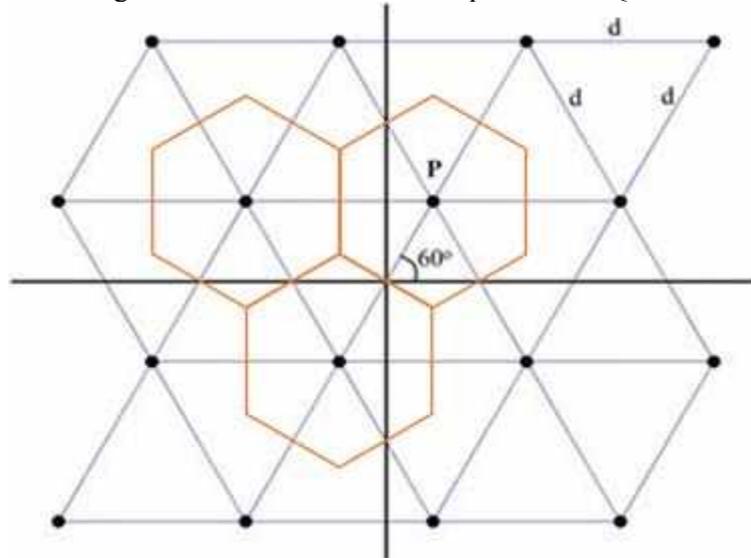
Figura 3.1 – Constelação 16-TQAM.



Fonte: Adaptado de [7].

A Figura 3.2 ilustra a modulação 16-TQAM onde os pontos p_j representam os j – ésimos pontos de sinais, $j = 1, 2, \dots, M$ e as linhas tracejadas delimitam as áreas de decisão, limites de decisão.

Figura 3.2 – Limites de decisão para o 16-TQAM.



Fonte: Adaptado de [7].

Observe que os quatro pontos mais centrais têm as regiões de decisão na forma hexagonal. Em [7] considerou-se que todos os pontos de sinal são equiprováveis e que $Re(p_j)$ e $Im(p_j)$ são, respectivamente, os valores real e imaginário do ponto de sinal p_j . A Equação (3.1) apresenta a energia média por símbolo (E_s) de forma generalista para as modulações.

$$E_s = \frac{1}{M} \left\{ \sum_{j=1}^M [Re(p_j)]^2 + \sum_{j=1}^M [Im(p_j)]^2 \right\} \quad (3.1)$$

Desenvolvendo a Equação (3.1) para a M-ário T-QAM tem-se a Equação (3.2) [7].

$$E_s = \frac{4}{M} \left\{ \frac{\sqrt{M}}{4} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}} \left[(2i-1) \frac{d}{2} \cos 60^\circ \right]^2 + \frac{\sqrt{M}}{2} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} \left[(2i-1) \frac{d}{2} \sin 60^\circ \right]^2 \right\} \quad (3.2)$$

Em que,

d - distância entre dois pontos adjacentes, e

M - ordem da modulação.

Resolvendo a somatória das expressões polinomiais usando a fórmula de *Faulhaber* de acordo com [7] tem-se a Equação (3.2).

$$E_s = \frac{(7M - 4)d^2}{48} \quad (3.3)$$

A partir da Equação (3.3) determina-se a expressão da distância *Euclidiana* na Equação (3.4) [7].

$$d = \sqrt{\frac{48E_s}{7M - 4}} \quad (3.4)$$

3.2 SEP da M-ary TQAM no canal AWGN

No canal AWGN acontece o ruído branco contaminando o sinal informação. Para esse tipo de canal a variância da função de distribuição de probabilidade Gaussiana é definida como $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ a aplicação dela na definição de relação sinal ruído do símbolo é apresentada na Equação (3.5) [7].

$$\gamma = \frac{E_s}{N_0} = \frac{(7M - 4)d^2}{48(2\sigma^2)} = \frac{(7M - 4)}{24} \left(\frac{d}{2\sigma}\right)^2 \quad (3.5)$$

Considerando na Equação (3.5) que $\frac{d}{2\sigma} = \beta$ tem-se:

$$\gamma = \frac{E_s}{N_0} = \frac{(7M - 4)d^2}{48(2\sigma^2)} = \frac{(7M - 4)}{24} (\beta)^2 \quad (3.6)$$

Portanto, a normalização da menor distância entre os símbolos adjacentes é:

$$\beta = \sqrt{\frac{24\gamma}{7M - 4}} = \sqrt{2D\gamma} \quad (3.7)$$

Analisando a constelação da Figura 3.2 observou-se que há cinco tipos de pontos de sinal em relação ao número de pontos vizinhos. Por exemplo, P4 possui dois vizinhos (P3 e P8), P1 possui três vizinhos (P2, P5 e P6), P2 possui quatro vizinhos (P1, P3, P6 e P7), P8 possui cinco vizinhos (P4, P3, P7, P11 e P12) e P7 possui seis vizinhos (P2, P3, P6, P8, P10 e P11). Resumidamente, a constelação 16-TQAM possui 2 pontos com 2 vizinhos, 4 pontos

com 3 vizinhos, 4 pontos com 4 vizinhos, 2 pontos com 5 vizinhos e 4 pontos com seis vizinhos. A generalização do número de vizinhos adjacentes de cada ponto de sinal da modulação *M-ário* T-QAM é apresentada na Tabela 3.1 [7]. Nessa Tabela tem-se S_N com $N = 2, 3, 4, 5$ e 6 que significa o número de pontos de sinal com N vizinhos adjacentes.

Tabela 3.1 – Número de vizinhos adjacentes.

	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
TQAM	2	\sqrt{M}	$2(\sqrt{M} - 2)$	$\sqrt{M} - 2$	$M - 4\sqrt{M} + 4$

Fonte: [7].

A probabilidade de acerto na recepção do símbolo ($P_{C,N}$) para um símbolo que possui N vizinhos adjacentes é mostrada nas cinco equações a seguir [7]:

$$P_{C,2} = (1 - Q(\beta))^2 = 1 - 2Q(\beta) + Q^2(\beta) \quad (3.8)$$

$$P_{C,3} = (1 - Q(\beta))^3 = 1 - 3Q(\beta) + 3Q^2(\beta) - Q^3(\beta) \quad (3.9)$$

$$P_{C,4} = (1 - Q(\beta))^4 = 1 - 4Q(\beta) + 6Q^2(\beta) - 4Q^3(\beta) + Q^4(\beta) \quad (3.10)$$

$$P_{C,5} = (1 - Q(\beta))^5 = 1 - 5Q(\beta) + 10Q^2(\beta) - 10Q^3(\beta) + 5Q^4(\beta) - Q^5(\beta) \quad (3.11)$$

$$P_{C,6} = (1 - Q(\beta))^6 = 1 - 6Q(\beta) + 15Q^2(\beta) - 20Q^3(\beta) + 15Q^4(\beta) \quad (3.12)$$

$$- 6Q^5(\beta) + Q^6(\beta)$$

Em que, $Q(\beta)$ é a função Q Gaussiana definida no artigo [17].

O conceito de probabilidade de acerto na recepção do símbolo para a *M-ário* TQAM é mostrado na Equação (3.13).

$$P_C(\beta) = \frac{1}{M} [S_2 P_{C,2} + S_3 P_{C,3} + S_4 P_{C,4} + S_5 P_{C,5} + S_6 P_{C,6}] \quad (3.13)$$

Aplicando na Equação (3.13) os valores apresentados na Tabela 3.1 e as equações definidas de (3.8) a (3.12) tem-se a expressão da probabilidade de acerto na recepção do símbolo para a *M-ário* TQAM [7].

$$\begin{aligned}
P_c(\beta) = & 1 - \left(\frac{2}{M} - \frac{8}{\sqrt{M}} + 6\right) Q(\beta) + \left(\frac{18}{M} - \frac{35}{\sqrt{M}} + 15\right) Q^2(\beta) \\
& - \left(\frac{44}{M} - \frac{61}{\sqrt{M}} + 20\right) Q^3(\beta) + \left(\frac{46}{M} - \frac{53}{\sqrt{M}} + 15\right) Q^4(\beta) \\
& - \left(\frac{22}{M} - \frac{23}{\sqrt{M}} + 6\right) Q^5(\beta) + \left(\frac{4}{M} - \frac{4}{\sqrt{M}} + 1\right) Q^6(\beta)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

É sabido que $P_e(\beta) = 1 - P_c(\beta)$, portanto, a probabilidade de erro de símbolo (SEP – *Symbol Error Probability*) da M-ário TQAM em um canal AWGN é definida como [7]:

$$\begin{aligned}
P_e(\beta) = & 6 \left(1 + \frac{1}{3M} - \frac{4}{3\sqrt{M}}\right) Q(\beta) - 15 \left(1 + \frac{6}{5M} - \frac{7}{3\sqrt{M}}\right) Q^2(\beta) \\
& + 20 \left(1 + \frac{11}{5M} - \frac{61}{20\sqrt{M}}\right) Q^3(\beta) - 15 \left(1 + \frac{46}{15M} - \frac{53}{15\sqrt{M}}\right) Q^4(\beta) \\
& + 6 \left(1 + \frac{11}{3M} - \frac{23}{6\sqrt{M}}\right) Q^5(\beta) - \left(1 + \frac{4}{M} - \frac{4}{\sqrt{M}}\right) Q^6(\beta)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3 Modelo de canal *Rayleigh*

No sistema de uma única entrada com múltiplas saídas SIMO, os sinais são transmitidos sobre L caminhos de diversidade e cada cópia do sinal tem o efeito da amplitude do desvanecimento individualmente. Neste trabalho utilizou-se a teoria da combinação de máxima razão MRC em um ambiente com múltiplos caminhos. O MRC é utilizado como técnica de diversidade espacial no receptor final. A diversidade é uma maneira de lidar com as consequências do desvanecimento por multipercurso. No receptor um sinal de saída que combina SNR e desvanecimento é definido conforme Equação (3.16) [7].

$$\gamma_\Sigma = \frac{E_s}{N_0} \sum_{i=1}^L \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^L \gamma_i, i = 1, 2, \dots, L \tag{3.16}$$

Em que, γ_i é o valor de SNR instantâneo recebido por símbolo vezes a amplitude instantânea do desvanecimento no i -ésimo caminho de diversidade (α_i) definido como [7]:

$$\gamma_i = \frac{E_s}{N_0} \alpha_i^2 \tag{3.17}$$

Neste trabalho usou-se o modelo de canal de *Rayleigh* para estudar o desvanecimento ocasionado pelos múltiplos caminhos. A função densidade de probabilidade por símbolo recebido do *i-ésimo* caminho de diversidade é definida na Equação (3.18).

$$P_{\gamma_i, Rayleigh}(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}_i} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}_i}\right), \gamma_i \geq 0 \quad (3.18)$$

Em que, $\bar{\gamma}_i = E[\gamma_i^2]$ é a média da SNR por símbolo recebido.

Em [7], a função geradora de momentos (MGF – *Moment-Generating Function*) é escrita à partir da MGF do *i-ésimo* caminho individual de diversidade conforme a Equação (3.19).

$$M_{\gamma_\Sigma}(s) = \prod_{i=1}^L M_{\gamma_i}(s) = \prod_{i=1}^L \int_0^\infty e^{s\gamma} p_{\gamma_i}(\gamma) d\gamma \quad (3.19)$$

3.4 SEP da M-ary TQAM no sistema de diversidade MRC

Nessa seção apresenta-se a equação da SEP para a M-ary TQAM no sistema de diversidade MRC. Inicialmente, tem-se a probabilidade da diversidade definida como:

$$P_{diversidade} = \int_0^\infty P_e(\gamma) p_{\gamma_\Sigma}(\gamma) d\gamma \quad (3.20)$$

Em que, $P_e(\gamma)$ – SEP da M-ário TQAM em um canal AWGN;

Substituindo a probabilidade de erro de símbolo da M-ário TQAM em um canal AWGN mostrado na Equação (3.15) na Equação (3.20) resulta a Equação (3.21).

$$\begin{aligned}
P_{diversi\ dade} = & 6 \left(1 + \frac{1}{3M} - \frac{4}{3\sqrt{M}} \right) \int_0^\infty Q(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \\
& - 15 \left(1 + \frac{6}{5M} - \frac{7}{3\sqrt{M}} \right) \int_0^\infty Q^2(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \\
& + 20 \left(1 + \frac{11}{5M} - \frac{61}{20\sqrt{M}} \right) \int_0^\infty Q^3(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \\
& - 15 \left(1 + \frac{46}{15M} - \frac{53}{15\sqrt{M}} \right) \int_0^\infty Q^4(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \\
& + 6 \left(1 + \frac{11}{3M} - \frac{23}{6\sqrt{M}} \right) \int_0^\infty Q^5(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \\
& - \left(1 + \frac{4}{M} - \frac{4}{\sqrt{M}} \right) \int_0^\infty Q^6(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Na Equação (3.21), os termos Q^i de ordem $i > 4$ são descartados no cálculo aproximado da SEP [7]. Para a resolução da equação aplicou-se a representação bidimensional da função Q Gaussiana [17]:

$$Q_a(\beta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\phi \exp\left(-\frac{\beta^2}{2s \sin^2 \theta}\right) d\theta \tag{3.22}$$

Então, tem-se $Q(\beta) = 2Q_a(\beta, \pi/2)$, $Q^2(\beta) = 2Q_a(\beta, \pi/4)$, $Q^3(\beta) = Q(\beta) \cdot Q^2(\beta)$, $Q^4(\beta) = Q^2(\beta) \cdot Q^2(\beta)$. Em que, têm-se as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
Q^3(\beta) = & \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-1} \left[\frac{3 \cos 2\theta}{2 \cos^3 2\theta} - 1 \right] \exp\left(-\frac{\beta^2}{2s \sin^2 \theta}\right) d\theta \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\sin^{-1}(1/\sqrt{3})} \left\{ \pi - \cos^{-1} \left[\frac{3 \cos 2\theta}{2 \cos^3 2\theta} - 1 \right] \right\} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2s \sin^2 \theta}\right) d\theta
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$Q^4(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-1} \left[\frac{3 \cos 2\theta}{2 \cos^3 2\theta} - 1 \right] \exp\left(-\frac{\beta^2}{2s \sin^2 \theta}\right) d\theta \tag{3.24}$$

Para resolver a Equação (3.21) foram feitas algumas considerações e substituições de acordo com [7].

$$I(\beta, \phi) = \int_0^{\infty} Q(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma = \int_0^{\infty} Q_a(\beta, \phi) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \quad (3.25)$$

Na Equação (3.7) foi definido que $\beta = \sqrt{2D\gamma}$ e aplicando essa definição na Equação (3.25) encontrou-se a Equação (3.26).

$$I(D, \phi) = 2 \int_0^{\infty} Q_a(\sqrt{2D\gamma}, \phi) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \quad (3.26)$$

Resolvendo a equação defina acima tem-se:

$$I(D, \phi) = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\phi} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2s \text{sen}^2\theta}\right) d\theta p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \quad (3.27)$$

$$I(D, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{D\gamma}{s \text{sen}^2\theta}\right) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma d\theta$$

Aplicando a função geradora de momentos definida na Equação (3.19) na Equação (3.27), tem-se:

$$I(D, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\phi} M_{\gamma}\left(\frac{D}{s \text{sen}^2\theta}\right) d\theta \quad (3.28)$$

Essa Equação (3.28) é válida para as funções Q gaussiana de primeira e segunda ordens. Para as demais, terceira e quarta ordens, tem-se as equações a seguir:

$$I_{Q3}\left(D, \frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\infty} Q^3(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma$$

$$I_{Q3}\left(D, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-1}\left[\frac{3\cos 2\theta - 1}{2\cos^3 2\theta} - 1\right] M_{\gamma}\left(\frac{D}{s \text{sen}^2\theta}\right) d\theta \quad (3.29)$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \left\{ \pi - \cos^{-1}\left[\frac{3\cos 2\theta - 1}{2\cos^3 2\theta} - 1\right] \right\} M_{\gamma}\left(\frac{D}{s \text{sen}^2\theta}\right) d\theta$$

$$I_{Q^4} \left(D, \frac{\pi}{6} \right) = \int_0^{\infty} Q^4(\beta) p_{\gamma\Sigma}(\gamma) d\gamma \quad (3.30)$$

$$I_{Q^4} \left(D, \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-1} \left[\frac{3\cos 2\theta - 1}{2\cos^3 2\theta} - 1 \right] M_{\gamma} \left(\frac{D}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

Aplicando as equações definidas acima na Equação (3.31) obtém-se a probabilidade de erro de símbolo da M-ary TQAM no sistema de diversidade [7].

$$\begin{aligned} P_{\text{diversidade}} &= 6 \left(1 + \frac{1}{3M} - \frac{4}{3\sqrt{M}} \right) I \left(D, \frac{\pi}{2} \right) - 15 \left(1 + \frac{6}{5M} - \frac{7}{3\sqrt{M}} \right) I \left(D, \frac{\pi}{4} \right) \\ &+ 20 \left(1 + \frac{11}{5M} - \frac{61}{20\sqrt{M}} \right) I_{Q^3} \left(D, \frac{\pi}{6} \right) \\ &- 15 \left(1 + \frac{46}{15M} - \frac{53}{15\sqrt{M}} \right) I_{Q^4} \left(D, \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Nesse trabalho propõe-se o estudo da probabilidade de erro de símbolo da M-ário TQAM no canal de *Rayleigh* e, portanto, é necessário delimitar a Equação (3.31). Para isso, utiliza-se a Equação (3.32) definida para o canal de *Rayleigh* [7].

$$I_{\text{Rayleigh}}(D, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\phi} \prod_{i=1}^L \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + D\tilde{\gamma}_i} \right] d\theta \quad (3.32)$$

Substituindo a definição da Equação (3.32) nas Equações (3.29) e (3.30), respectivamente, originam as Equações (3.33) e (3.34).

$$\begin{aligned} I_{Q^3, \text{Rayleigh}} \left(D, \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-1} \left[\frac{3\cos 2\theta - 1}{2\cos^3 2\theta} - 1 \right] \prod_{i=1}^L \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + D\tilde{\gamma}_i} \right] d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\sin^{-1}(1/\sqrt{3})} \left\{ \pi - \cos^{-1} \left[\frac{3\cos 2\theta - 1}{2\cos^3 2\theta} - 1 \right] \right\} \prod_{i=1}^L \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + D\tilde{\gamma}_i} \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$I_{Q^4, \text{Rayleigh}} \left(D, \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-1} \left[\frac{3\cos 2\theta - 1}{2\cos^3 2\theta} - 1 \right] \prod_{i=1}^L \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + D\tilde{\gamma}_i} \right] d\theta \quad (3.34)$$

Aplicando as equações (3.32), (3.33) e (3.34) na Equação (3.31) determina-se a probabilidade de erro de símbolo da M-ário TQAM no canal de *Rayleigh*.

3.5 Análise realizada

Inicialmente, nesse trabalho estudou-se as distribuições gaussiana e de *Rayleigh* utilizadas para modelar canais com ruído e desvanecimento, respectivamente. Em seguida, o estudo apresentou a constelação M-QAM quadrada descrita na maioria dos livros de comunicações digitais. Esse estudo foi estendido para a M-ário TQAM, constelação triangular descrita apenas em artigos científicos a partir de 2007 [18]. Para compreender melhor esse tipo de constelação é preciso simular as equações e analisar os resultados obtidos. Para isso foram seguidas as seguintes fases:

- i. Verificar a SEP comparativamente das constelações quadrada e triangular para validar as equações estudadas;
- ii. Avaliar o impacto do ruído na SEP da modulação com constelação triangular;
- iii. Avaliar a SEP da 16-TQAM no canal de *Rayleigh*, situações de multipercurso $L = 2, 3$ e 5 ;
- iv. Avaliar a SEP da 64-TQAM no canal de *Rayleigh*, situações de multipercurso $L = 2, 3$ e 5 ;

3.6 Considerações finais.

Neste capítulo foi apresentado o desenvolvimento matemático para o cálculo da SEP para a modulação QAM com constelação triangular em canais AWGN e *Rayleigh*. Com base nas equações estudadas foram definidos os cenários de simulação para as análises que serão apresentadas no Capítulo 4.

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

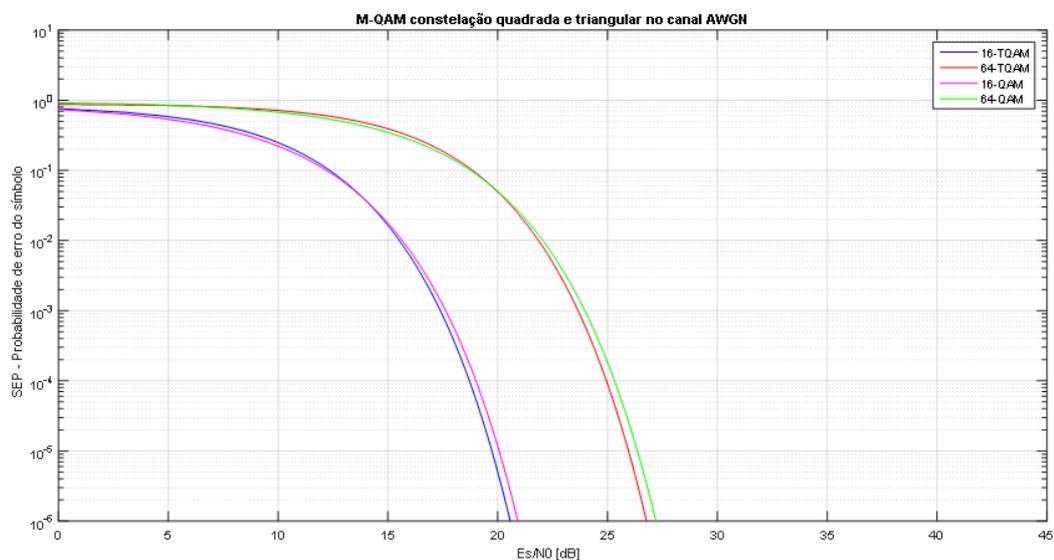
Neste Capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir dos equacionamentos demonstrados no capítulo de matérias e métodos. Além disso, os valores encontrados são analisados para a compressão do efeito do desvanecimento seguindo a distribuição de Rayleigh quando a técnica de diversidade é aplicada nas modulações 16-TQAM e 64-TQAM.

4.1 M-QAM e M-TQAM no canal AWGN

Nessa seção são apresentados os resultados comparativos da probabilidade de erro de símbolo no canal AWGN das modulações M-QAM e M-TQAM, com M igual a 16 e 64. Esses resultados são apresentados com o objetivo para avaliar o comportamento dos sistemas perante a equação (2.46) SEP da M-QAM constelação quadrada e a equação (3.15) SEP da M-TQAM.

A Figura 4.1 ilustra o gráfico dos resultados obtidos nas equações (2.46) e (3.15) de uma SEP da M-QAM constelação quadrada e triangular no canal AWGN.

Figura 4.1 – SEP da M-QAM constelação quadrada e triangular no canal AWGN.



Fonte: O autor.

Na Tabela 4.1 são mostrados, detalhadamente, os valores da SNR necessária para alcançar cada SEP.

Tabela 4.1 – SEP das modulações no canal AWGN.

SEP	Constelação quadrada		Constelação triangular	
	M = 16	M = 64	M = 16	M = 64
10^{-1}	12,3 dB	18,75 dB	12,3 dB	18,81 dB
10^{-2}	15,68 dB	22,07 dB	15,56 dB	21,88 dB
10^{-3}	17 dB	23,94 dB	17,4 dB	23,64 dB
10^{-4}	18,98 dB	25,31 dB	18,69 dB	24,94 dB
10^{-5}	20,1 dB	25,31 dB	19,73 dB	25,95 dB

Fonte: O autor.

Na metodologia propõe-se avaliar o desempenho da constelação triangular em um canal AWGN. Observando os resultados obtidos na Figura 4.1 e os valores de SEP das duas constelações mostrados na Tabela 4.1, conclui-se que a constelação triangular apresenta desempenho muito semelhante a constelação quadrada.

4.2 M-TQAM no canal de *Rayleigh*

Inicialmente, avaliou-se a modulação 16-TQAM no sistema de diversidade espacial em relação ao número de caminhos ($L = 1, 2, 3$ e 5). Para isso, a variação do número de caminhos foi aplicada na Equação (3.31) e os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – 16-TQAM no sistema de diversidade.

SEP	SNR [dB]			
	L = 1	L = 2	L = 3	L = 5
10^{-1}	18,0	12,3	9,3	6,6
10^{-2}	26,6	18,3	15,0	10,6

Fonte: O autor.

De acordo com os resultados, para uma SEP de 10^{-2} em um sistema com 2 caminhos é preciso uma SNR de 18,3 dB, enquanto, em um sistema com 5 caminhos é preciso uma SNR de apenas 10,6 dB. Observando os resultados obtidos para a 16-TQAM verificou-se que o valor da relação sinal-ruído necessária para uma determinada probabilidade de erro de símbolo caiu com o aumento no número de caminhos.

A seguir, avaliou-se a modulação 64-TQAM no sistema de diversidade em relação ao número de caminhos ($L = 1, 2, 3$ e 5). Para isso, novamente a variação do número de caminhos foi aplicada na Equação (3.31) e os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – 64-TQAM no sistema de diversidade.

SEP	SNR [dB]			
	L = 1	L = 2	L = 3	L = 5
10^{-2}	35	26	22	17,5
10^{-3}	45	30,5	25	20

Fonte: O autor.

Para uma SEP de 10^{-2} em um sistema com 2 caminhos é preciso de uma SNR de 30,5 dB, enquanto, em um sistema com 5 caminhos é preciso uma SNR de apenas 17,5 dB. Observando os resultados obtidos para a 64-TQAM verificou-se novamente que o valor da relação sinal-ruído necessária para uma determinada probabilidade de erro de símbolo caiu com o aumento no número de canais.

Observando as Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 tem-se uma análise do desempenho da modulação M-TQAM nos canais AWGN e com diversidade utilizando a distribuição de *Rayleigh*. Comparando os resultados apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2 note que para uma SEP de 10^{-2} em um caminho sem desvanecimento é necessária uma SNR de 15,56 dB. Para manter uma proximidade com esse valor, no caso a SNR encontrada foi 15 dB, são necessários pelo menos 3 caminhos. No caso em que sistema utiliza 5 canais, a SNR necessária é menor. De maneira similar, comparando os resultados apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.3 note que para uma SEP de 10^{-2} em um canal sem desvanecimento é necessária uma SNR de 21,88 dB. Para manter uma proximidade com esse valor, no caso a SNR encontrada foi 25 dB, são necessários pelo menos 3 canais. No caso em que sistema utiliza 5 canais, a SNR necessária é menor. Com essa análise conclui-se que a técnica da diversidade é considerada uma forma eficiente de combate ao efeito do fenômeno de multipercursos nos sistemas de comunicação digital modernos que utilizam as modulações M-TQAM.

Capítulo 5

CONCLUSÃO GERAL

Neste Capítulo são apresentadas as conclusões gerais e a sugestão de pesquisa futura que poderá ser realizada utilizando como base o desenvolvimento apresentado nesse trabalho.

No cenário de transmissão de dados em taxas altas utilizando os sistemas de rádio móvel observa-se que a qualidade do sinal recebido é prejudicada pelo ruído e desvanecimento. Para atenuar o efeito do desvanecimento no sinal uma das técnicas utilizada é a diversidade espacial na recepção com um canal de única entrada e múltiplas saídas. Utilizando o contexto desse cenário de transmissão de dados, esse trabalho de conclusão de curso analisou o desempenho da modulação *M-ário* TQAM.

No Capítulo 2 foram feitas conceituações necessárias para o entendimento dos conceitos de ruído, desvanecimento e diversidade. Foram descritos conceitos de processos estocásticos relacionados as distribuições gaussiana e de *Rayleigh* utilizados na modelagem de canais de comunicação. Além disso, foi mostrada a modelagem matemática da modulação M-QAM constelação quadrada em canal AWGN que foi a base para o desenvolvimento do estudo proposto nesse trabalho.

O conceito e o desenvolvimento matemático da constelação triangular foi apresentado no Capítulo 3. Nele foram mostradas as equações para determinar a probabilidade de erro de símbolo da modulação M-TQAM no canal com ruído branco gaussiano aditivo e no sistema de diversidade de recepção MRC. Ainda nesse capítulo foram delimitados os cenários e os parâmetros de análise da proposta.

Os resultados obtidos e a discussão deles foram apresentados no Capítulo 4. Inicialmente, foram apresentados os resultados das modulações 16-TQAM e 64-TQAM em um canal ruidoso. Os resultados foram comparados aos resultados apresentados na literatura para as modulações 16-QAM e 64-QAM e conclui-se que a constelação triangular apresenta

desempenho muito semelhante a constelação quadrada. Na segunda fase de análises foram apresentados os resultados das modulações 16-TQAM e 64-TQAM em um canal com desvanecimento utilizando a técnica da diversidade espacial na recepção. Conclui-se que para as duas modulações, o valor da relação sinal-ruído necessária para uma determinada probabilidade de erro de símbolo caiu com o aumento no número de caminhos.

Propostas de trabalhos futuros

O assunto desenvolvido nesse trabalho de conclusão de curso deixou alguns questionamentos que poderão ser respondidos em outros trabalhos, tais como:

Qual é o desempenho das modulações M-TQAM em canais com desvanecimento *Rayleigh* e *Nakagami-m* utilizando a técnica de diversidade espacial na recepção SC - Combinação de Seleção?

Qual é o desempenho das modulações M-TQAM em canais com desvanecimento *Rayleigh* e *Nakagami-m* utilizando a técnica de diversidade espacial na transmissão?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] KIM, C.J. et al. SER Analysis of QAM with Space Diversity in Rayleigh Fading Channels. *ETRI Journal*, volume 17, number 4, January 1996
- [2] Notas de aula. Disponível em: <<https://wiki.sj.ifsc.edu.br/wiki/images/1/19/Diversidade.pdf>>. Acesso em: 04 de dezembro de 2020.
- [3] KOSTADINOV, H. MANEV, N. L. On the Probability of Error for Triangular Quadrature Amplitude Modulation. *Fifteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*. Albena, Bulgaria. June, 2016, pp.193 – 199.
- [4] SINGYA, P. K. et al. A Survey on Design and Performance of Higher-Order QAM Constellations. Disponível em: < <https://arxiv.org/abs/2004.14708v1>>. Acesso em: 24 de novembro de 2020.
- [5] PAPPI, K. N. LIOUMPAS, A.S. KARAGIANNIDIS, G.K. θ -QAM: A parametric quadrature amplitude modulation Family and its performance in AWGN and fading channels. *IEEE Transactions on Communications*, vol. 58, no. 4, April, 2010.
- [6] Sung-Joon Park: Triangular quadrature amplitude modulation, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11 (2007), no. 4, 292–294.
- [7] QURESHI, F. H. et al. SEP performance of triangular QAM with MRC spatial diversity over fading channels. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2016.
- [8] RIBEIRO, J. A. J. Propagação das ondas eletromagnéticas: Princípios e aplicações. Editora Érica; 2. ed. 2008.
- [9] Modulação Digital em Canais com Desvanecimento. Disponível em: <<http://www.decom.fee.unicamp.br/~celso/mac/fading.pdf>>. Acesso em: 10/10/2020.
- [10] ETTEN, W. C. Introduction to Random Signals and Noise. John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [11] HAYKIN, S. Sistemas de comunicação: analógicos e digitais. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- [12] XIONG, F. Digital modulation techniques. 2. ed, Artech house, 2006.
- [13] PINHEIRO, J. C. M. Caracterização de Canais Sem Fio Em Ambientes Generalizados de Desvanecimento. Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Elétrica, 2012.

-
- [14] CAHN, C. Combined digital phase and amplitude modulation communication systems. *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 150 –155, setembro 1960.
- [15] HANCOCK, J.; LUCKY, R. Performance of combined amplitude and phase-modulated communication systems. *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 8, no. 4, pp. 232 – 237, dezembro 1960.
- [16] CAMPOPIANO, C.; GLAZER, B. A coherent digital amplitude and phase modulation scheme. *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 90 – 95, março 1962.
- [17] PARK, J. PARK, S. Approximation for the Two-Dimensional Gaussian Q-Function and Its Applications. *ETRI Journal*, vol. 32, N. 1, February, 2010.
- [18] PARK, J. PARK, S. Triangular quadrature amplitude modulation. *IEEE Commun. Lett.* 11 (4), 292 – 294, 2007.