

BRUNO RESENDE FERREIRA RENDE

**ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DO
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA
ROTOR-PALHETAS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2020

Página intencionalmente deixada em branco

BRUNO RESENDE FERREIRA RENDE

**ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DO
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA ROTOR-
PALHETAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre** em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior

UBERLÂNDIA – MG

2020

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R397 Rende, Bruno Resende Ferreira, 1995-
2020 Análise Numérica e Experimental do Comportamento
Dinâmico de um Sistema Rotor Palhetas [recurso
eletrônico] / Bruno Resende Ferreira Rende. - 2020.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Júnior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.637>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Júnior, Aldemir
Aparecido, 1983-, (Orient.). II. Universidade Federal
de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP
38400-902

Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 568, COPEM				
Data:	22/09/2020	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:30
Matrícula do Discente:	11912EMC005				
Nome do Discente:	Bruno Resende Ferreira Rende				
Título do Trabalho:	Análises Numérica e Experimental do Comportamento Dinâmico de um Sistema Rotor-Palhetas				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU; Ilmar Ferreira Santos - DTU/Dinamarca; e Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, Antônio Marcos Gonçalves de Lima e o Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Ilmar Ferreira Santos desde a cidade de Copenhague/Dinamarca, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se

desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/09/2020, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/09/2020, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilmar Ferreira Santos, Usuário Externo**, em 22/09/2020, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2261320** e o código CRC **8D860CDD**.

Aos meus pais e ao meu irmão

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e ao meu irmão por me motivarem, por sempre me apoiarem e estarem comigo.

Aos meus parentes, tios, tias, primos, primas, avôs e avós, que também sempre estão ao meu lado e sempre me incentivam.

Ao Professor Aldemir, que me ofereceu a oportunidade de realizar este trabalho, pela paciência, por acreditar e confiar em mim, pelos todos os ensinamentos pessoais e profissionais, por sempre estar disponível para me ajudar quando for preciso e por ser um exemplo para todos nós.

Ao Professor Ilmar que me recebeu na Dinamarca, pelos grandes ensinamentos, por confiar em mim, pela paciência e toda destreza para me auxiliar com a parte experimental deste trabalho. E ainda, pelo enorme esforço para que eu pudesse ter acesso ao laboratório durante a quarentena devido ao coronavírus.

Aos meus amigos do laboratório de mecânica de estruturas da UFU e do departamento de engenharia mecânica da DTU pela amizade e companhia.

Ao CNPq e a Petrobrás pela bolsa.

RENDE, B.R.F., **Análise numérica e experimental do comportamento dinâmico de um sistema rotor-palhetas**. 2020. 106 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Os sistemas rotativos com pás são amplamente usados em aplicações industriais, como por exemplo, em ventiladores, turbinas e compressores. Uma forma de entender o comportamento destes sistemas rotativos é utilizar modelos matemáticos representativos. Neste contexto, o presente trabalho apresenta o modelo matemático de um rotor acoplado a quatro vigas (palhetas) que representam as pás. O rotor é considerado um corpo rígido enquanto as palhetas são modeladas como corpos flexíveis. As equações do movimento são determinadas considerando o sistema como um sistema formado por vários corpos e apresentam matrizes cujos elementos são funções do tempo e periódicos. Assim, as equações do movimento são resolvidas numericamente para obter as respostas de vibração do sistema. Além disso, é feito um estudo da estabilidade do sistema utilizando a teoria de Floquet e a transformação de coordenadas multi-pás. Para verificar a capacidade do modelo de representar a realidade, os resultados das simulações numéricas são comparados com parâmetros identificados experimentalmente. Desta forma é possível apontar a capacidade do modelo de reproduzir os fenômenos observados experimentalmente, bem como as suas limitações.

Palavras-Chave: Sistema multi-corpos; Dinâmica de sistemas rotativos; Sistemas variantes no tempo

RENDE, B.R.F., **Numerical and experimental analysis of the dynamic behavior of a rotor-blade system**. 2020. 106 pp. master's thesis, Federal University of Uberlandia

ABSTRACT

The rotor-bladed systems are commonly used in industrial applications, such as in turbines, ventilators, and compressors. One interesting way to understand their dynamic behavior and characteristics is to work with representative mathematical models. Therefore, this work aims to study the mathematical model of a system in which the rotor, considered as rigid, is coupled with four flexible rotating blades. The equations of motion are derived using Lagrange dynamics, resulting in time dependent and periodic matrices. Thus, the model can be considered as linear time variant. The equations of motion are discretized using the finite element method and solved numerically to obtain the vibration responses of the model. Additionally, a stability analysis is presented employing the Floquet's theory and the multiblade coordinate transformation. Finally, experiments were carried out to identify the modal parameters of the rotor-bladed system. Hence, a comparison was made to highlight the model representativeness and its limitations.

Keywords: Multibody systems; rotordynamics; linear time-variant systems

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos onde há um acoplamento de um rotor com pás.....	21
Figura 1.2 - Sistema que será estudado	22
Figura 3.1 - Ilustração do modelo matemático do sistema (Adaptado de Saracho (2002))...	32
Figura 3.2 - Referenciais utilizados (Adaptado de Saracho (2002))	33
Figura 3.3 - Desbalanceamento no rotor.....	37
Figura 3.4 - Elemento finito e os graus de liberdade em cada nó.....	41
Figura 3.5 - Esquema do cálculo da força normal (Adaptado de Hoa (1979))	43
Figura 4.1 - Bancada de testes	65
Figura 4.2 - Posição dos sensores na bancada	67
Figura 4.3 - Esquema que ilustra as grandezas medidas na bancada de testes	68
Figura 4.4 - Placa dSPACE CP1103.....	68
Figura 4.5 - Força aplicada na fundação (a) e seu histograma (b)	69
Figura 4.6 - Esquema da divisão das amostras de um sinal (Adaptado de Welch (1967)) ...	70
Figura 5.1 - Dez primeiros modos de vibrar para o sistema em repouso a) 0°; b) 45°	75
Figura 5.2 - Mapas de instabilidade para a) caso i; b) caso ii; c) caso iii; d) caso iv	78
Figura 5.3 - Respostas temporais para 1500 RPM; a) Deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta 1.....	79
Figura 5.4 - Respostas temporais para 3000 RPM; a) Deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta 1.....	79
Figura 5.5 - Respostas temporais para 2000 RPM; a) Deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta 1.....	80
Figura 5.6 - Respostas temporais para 2700 RPM; a) Deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta.....	80
Figura 5.7 - Diagrama cascata construído a partir dos graus de liberdade: a) Rotor - direção horizontal; b) Rotor - Direção vertical; c) Extremidade da palheta 1; d) Extremidade da palheta 2	81
Figura 5.8 - Frequências determinadas através da transformação de coordenadas multi-pás: a) Referencial inercial; b) Referencial rotativo	83

Figura 5.9 - FRF e coerência para r_x : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$	85
Figura 5.10 - FRF e coerência para r_y : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$	86
Figura 5.11 - FRF e coerência para p_1 : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$	86
Figura 5.12 - FRF e coerência para p_2 : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$	87
Figura 5.13 - Modos de vibrar experimentais para o rotor em repouso a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$...	88
Figura 5.14 - FRF e coerência para o rotor ($\theta = 45^\circ$) com a correia para a) r_x ; b) p_1	88
Figura 5.15 - Procedimento para estimar a velocidade angular	89
Figura 5.16 - Respostas em frequência para medições em r_x - $\Omega = 2,7$ Hz	91
Figura 5.17 - Respostas em frequência para medições em r_y - $\Omega = 2,7$ Hz	91
Figura 5.18 - Respostas em frequência para medições em p_1 - $\Omega = 2,7$ Hz	92
Figura 5.19 - Respostas em frequência para medições em p_2 - $\Omega = 2,7$ Hz	92
Figura 5.20 - Diagrama cascata para medições em r_x	93
Figura 5.21 - Diagrama cascata para medições em r_y	93
Figura 5.22 - Diagrama cascata para medições em p_1	94
Figura 5.23 - Diagrama cascata para medições em p_2	94
Figura 5.24 - Comparação entre as frequências naturais: a) r_x ; b) r_y ; c) p_1 ; d) p_2	97
Figura 5.25 - Erros relativos entre as frequências calculadas e identificadas experimentalmente para as medições em r_y - $\Omega \neq 0$	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Dimensões da bancada	66
Tabela 5.1 - Frequências naturais e fatores de amortecimento para os dez primeiros modos de vibrar do sistema em repouso - $\Omega = 0$	75
Tabela 5.2 - Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para os primeiros seis modos de vibrar do sistema em repouso - $\Omega = 0$	84
Tabela 5.3 - Comparação entre as frequências naturais [Hz] para o sistema em repouso...	95
Tabela 5.4 - Comparação entre os fatores de amortecimento para o sistema em repouso..	96
Tabela 5.5 - Comparação entre as frequências do sistema em r_y - $\Omega \neq 0$	98

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

A_{bi}	Área da seção transversal das palhetas
b_{bi}	Largura das palhetas
b_{ti}	Largura do corpo colocado na extremidade das palhetas
B_I	Referencial inercial
B_{pi}	Referencial rotativo com origem do centro do rotor
B_{ti}	Referencial rotativo com origem na extremidade da palheta
C	Matriz modrominia
c_x	Amortecimento do suporte do rotor na direção horizontal
c_y	Amortecimento do suporte do rotor na direção vertical
D	Matriz de amortecimento (proporcional)
d	Distância do centro de massa do rotor até o seu centro geométrico
E_{bi}	Módulo de elasticidade das palhetas
f	Vetor de forças
f_{nr}	Vetor de forças definido no referencial não rotativo
G	Matriz devido ao efeito giroscópio
G_{nr}	Matriz de amortecimento definida no referencial não rotativo
g	Aceleração da gravidade
h_{bi}	Altura das palhetas
h_{ti}	Altura do corpo colocado na extremidade das palhetas
I_n	Matriz identidade de dimensão n
i	Representa uma palheta genérica
J_r	Momento de inércia do rotor
J_{bi}	Momento de inércia de área das palhetas
J_{ti}	Momento de inércia de massa do corpo na extremidade das palhetas
K	Matriz de rigidez
K_{nr}	Matriz de rigidez definida no referencial não rotativo

k_x	Rigidez do suporte do rotor na direção horizontal
k_y	Rigidez do suporte do rotor na direção vertical
L	Matriz de autovetores a esquerda
L	Comprimento do elemento finito
L_{bi}	Comprimento das palhetas
r_{ti}	Comprimento do corpo colocado na extremidade das palhetas
M	Matriz de massa
M_{nr}	Matriz de massa definida no referencial não rotativo
m_r	Massa do rotor
m_{ti}	Massa do corpo colocado na extremidade das palhetas
m_x	Massa do suporte do rotor na direção horizontal
m_y	Massa do suporte do rotor na direção vertical
N_p	Número de palhetas
$N(x_i)$	Força normal atuante na posição x_i das palhetas
N_a, N_f	Funções de forma
O_n	Matriz de zeros de dimensão n
q	Vetor de graus de liberdade do sistema
q_{nr}	Vetor de graus de liberdade do sistema com os graus de liberdade no referencial não rotativo
q_0	Grau de liberdade no referencial não rotativo que origina o modo cíclico
q_{1c}	Grau de liberdade no referencial não rotativo que origina o modo progressivo
q_{1s}	Grau de liberdade no referencial não rotativo que origina o modo regressivo
q_d	Grau de liberdade no referencial não rotativo que origina o modo diferencial
R	Matriz de autovetores a direita
r	Raio do rotor
r_c	Vetor posição do centro do rotor descrito no referencial inercial
\dot{r}_c	Vetor velocidade do centro do rotor descrito no referencial inercial
r_{cm}	Vetor posição do centro de massa do rotor descrito no referencial inercial
\dot{r}_{cm}	Vetor velocidade do centro de massa do rotor descrito no referencial inercial
r_{pi}	Vetor posição das palhetas descrito no referencial inercial
\dot{r}_{pi}	Vetor velocidade das palhetas descrito no referencial inercial
r_{ti}	Vetor posição do corpo na extremidade descrito no referencial inercial
\dot{r}_{ti}	Vetor velocidade do corpo na extremidade descrito no referencial inercial
T_r	Energia cinética devido ao movimento do rotor
T_{pi}	Energia cinética devido ao movimento das palhetas

T_{ti}	Energia cinética devido ao movimento do corpo na ponta das palhetas
\mathbf{T}_{pi}	Matriz de transformação do referencial B_I para o referencial B_{pi}
\mathbf{T}_{ti}	Matriz de transformação do referencial B_{pi} para o referencial B_{ti}
u_i	Deslocamentos longitudinais da palheta
V_r	Energia potencial armazenada no suporte do rotor
V_{gi}	Energia potencial armazenada devido a gravidade
V_{pi}	Energia potencial armazenada nas palhetas
v_i	Deslocamentos transversais da palheta
x_h	Deslocamento do rotor na horizontal
x_i	Ponto genérico da palheta
y_h	Deslocamento do rotor na vertical

SÍMBOLOS GREGOS

α_i	Rotação do ponto em que o corpo na extremidade é fixo na palheta
β_1, β_2	Coefficientes do amortecimento proporcional
δ_a, δ_f	Graus de liberdade axiais e transversais
ε_{xx}	Deformação das palhetas na direção longitudinal
θ_i	Ângulo entre as palhetas
ρ_{bi}	Densidade das palhetas
$\Phi(t, t_0)$	Matriz de transição de estado
φ	Posição angular do centro de massa do rotor
ϕ	Posição angular do rotor
Ω	Velocidade de rotação ou velocidade angular
$\dot{\Omega}$	Aceleração angular
${}_I \Omega_c$	Vetor velocidade angular do centro do rotor descrito no referencial inercial
${}_I \Omega_{pi}$	Vetor velocidade angular das palhetas descrito no referencial inercial
${}_I \Omega_{ti}$	Vetor velocidade angular do corpo colocado na extremidade das palhetas descrito no referencial inercial

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	viii
RESUMO.....	ix
ABSTRACT	x
LISTA DE FIGURAS.....	xi
LISTA DE TABELAS.....	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
SUMÁRIO.....	xvii
CAPÍTULO I: Introdução	20
CAPÍTULO II: Revisão Bibliográfica.....	25
2.1 Modelos de sistemas multi-corpos.....	25
2.2 Características de sistemas variantes no tempo.....	28
CAPÍTULO III: Fundamentação teórica.....	31
3.1 Modelo matemático do sistema rotor palhetas	31
3.2 Solução analítica das equações do movimento	49
3.3 Teoria de Floquet.....	57
3.4 Transformação de coordenadas multi-pás	59
CAPÍTULO IV: Procedimento Experimental	65
4.1 Bancada de testes	65
4.2 Aquisição dos sinais	68
4.3 Tratamento dos dados	69
CAPÍTULO V: Resultados.....	74
5.1 Resultados numéricos	74
5.2 Resultados experimentais.....	84

5.3 Comparação entre os resultados	95
CAPÍTULO VI: Conclusão.....	100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	103

Página intencionalmente deixada em branco

CAPÍTULO I

Introdução

Nos últimos anos é visível o aumento da competitividade dos setores industriais, sempre buscando novas melhorias. Dessa forma, é evidente o surgimento de novas tecnologias em diversos ramos da indústria, sejam estas capazes de melhorar a qualidade, segurança e principalmente a sustentabilidade. Um exemplo é o desenvolvimento das turbinas eólicas ou aerogeradores, que utilizam o vento para colocar em rotação as pás, que por sua vez, são conectadas a um rotor. O rotor é ligado a um gerador, portanto a energia proveniente do vento é convertida em energia elétrica. Um segundo exemplo são os rotores dos helicópteros. Ao contrário da maioria das turbinas eólicas, nos helicópteros as pás estão acopladas horizontalmente a um rotor. Este fato permite estas aeronaves a realizarem pousos e decolagens verticalmente, o que possibilita a sua utilização em áreas congestionadas e locais de difícil acesso.

Para facilitar a concepção destas máquinas com eficiência, é interessante conhecer o comportamento dos seus componentes, por exemplo, conhecer parâmetros relacionados as vibrações destes sistemas, como as frequências naturais e os modos de vibrar. Basicamente, as frequências naturais são aquelas que fazer os corpos entrarem em ressonância, isto é, apresentarão maiores amplitudes de vibração, o que não é ideal para a vida dos componentes da máquina. Enquanto os modos de vibrar são basicamente a “forma” com que as estruturas irão se movimentar se estão vibrando nas frequências naturais. Estes parâmetros podem ser determinados experimentalmente ao aplicar uma força na estrutura e mensurar seus sinais de vibração. No entanto, este procedimento nem sempre é trivial, e é dificultado quando os sistemas estão em operação. Uma alternativa é construir modelos matemáticos (MUSZYNSKA, 1995), ou seja, são utilizadas equações matemáticas para descrever o comportamento de sistemas mecânicos, e ao solucioná-las pode-se estimar os parâmetros como as frequências naturais.

Assim, neste contexto de construir modelos analíticos que tentam representar o comportamento real de máquinas, este trabalho se encaixa, uma vez que visa estudar o comportamento dinâmico de um sistema mecânico com vários corpos onde há o acoplamento de um rotor com quatro pás, tentando representar de uma forma bastante simplificada estruturas semelhantes as turbinas eólicas mostradas na figura 1.1(a). Então um modelo matemático será desenvolvido e comparado com dados extraídos experimentalmente com o intuito de verificar a confiabilidade do modelo proposto. Apesar das óbvias diferenças entre uma turbina eólica e o sistema mecânico que será estudado nesta dissertação, ambos compartilham muitos efeitos dinâmicos.



a) Turbina eólica



b) Helicóptero

Figura 1.1 - Exemplos onde há o acoplamento de um rotor com pás

Durante a construção do modelo deve-se tomar alguns cuidados para que os efeitos dinâmicos importantes sejam corretamente representados, um exemplo é a classificação dos corpos que compõe o sistema em corpos rígidos ou flexíveis. Os primeiros são corpos cujas deformações são desprezíveis, já os segundos apresentam deformações consideráveis. O sistema que será estudado é mostrado na figura 1.2, sendo que pode ser dividido em cinco corpos, o rotor e as quatro palhetas (pás). Neste trabalho, o rotor será considerado um corpo rígido, modelado por uma massa e uma suspensão (rigidez), enquanto as quatro pás (palhetas) serão consideradas como corpos flexíveis, portanto suas deformações não são desprezadas. Caso as deformações sejam modeladas corretamente uma característica interessante aparece: o enrijecimento centrífugo, que representa um aumento da rigidez dos corpos flexíveis com o aumento da velocidade angular, portanto é esperado que as frequências naturais destes corpos aumentem com a rotação. Outra característica peculiar é que geralmente nestes sistemas que os graus de liberdade das pás, sejam mensurados em um

referencial rotativo, em outras palavras, os deslocamentos (ou acelerações) da ponta de uma pá, são medidos em relação a própria pá, que geralmente está girando, enquanto os graus de liberdade dos corpos rígidos são medidos em relação a um referencial inercial.

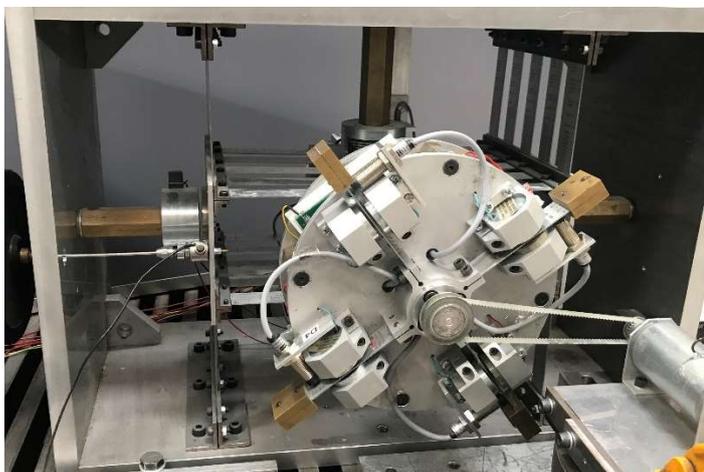


Figura 1.2 - Sistema que será estudado.

Do ponto de vista teórico, esta diferença entre os referenciais é modelada de forma que as matrizes da equação do movimento se tornam variantes no tempo. Segundo Santos (2004) o fato de o sistema ser variante no tempo pode levar ao surgimento das vibrações paramétricas, que são bem evidentes quando o sistema apresenta velocidade angular, isto é, pode-se identificar no domínio da frequência picos cujas frequências são combinações entre as frequências naturais do sistema e múltiplos da velocidade de rotação.

Tendo em mente todos estes fatos, o modelo matemático apresentado neste trabalho consiste em um rotor, considerado rígido, modelado por um sistema massa mola com dois graus de liberdade que realiza movimento no plano, portanto pode movimentar na direção horizontal e na direção vertical, e é acoplado a quatro palhetas flexíveis que apresentam movimento apenas no plano de rotação do rotor.

Para extrair informações do modelo matemático, este será simulado numericamente para diferentes velocidades de rotação, assim obtém-se os parâmetros do sistema como as frequências naturais e modos de vibrar. Em seguida estes resultados numéricos serão comparados com os resultados obtidos a partir de experimentos realizados em uma bancada de testes. Através desta comparação é possível verificar a capacidade do modelo de reproduzir a realidade, além de apontar as limitações do modelo.

Para facilitar a leitura, este trabalho será dividido em capítulos. O capítulo seguinte, que é o capítulo II, apresenta uma revisão bibliográfica sobre a modelagem matemática de sistemas rotor-palhetas, e as técnicas encontradas na literatura para realizar a análise mo-

dal destes sistemas. Já o capítulo III traz toda a parte teórica do trabalho, é nele que será desenvolvido o modelo matemático do sistema, bem como outros conceitos que serão úteis ao longo do trabalho. Em seguida, o capítulo IV é destinado sobre a bancada experimental utilizada e é nele que será explicado como foi feita a aquisição e o tratamento dos dados. O capítulo V é reservado para a apresentação dos resultados. Primeiramente serão mostrados os resultados numéricos, seguidos pelos resultados experimentais e depois, para finalizar uma comparação entre ambos será feita. Finalmente, o capítulo VI sintetiza as conclusões obtidas ao longo deste trabalho, apontando novas perspectivas para quem sabe outros trabalhos.

Página intencionalmente deixada em branco

CAPÍTULO II

Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta uma revisão na literatura sobre as técnicas de modelagem de sistemas multi-corpos, onde há o acoplamento entre corpos rígidos e flexíveis, levando em consideração os principais efeitos e ainda discorrerá um pouco algumas características de sistemas que são variantes no tempo, como o que é estudado neste trabalho.

2.1 Modelos de sistemas multi-corpos

O sistema estudado neste trabalho é constituído de um rotor rígido com quatro palhetas flexíveis conectadas e sujeitas a rotação. Portanto, as deformações das palhetas não são desprezíveis. Saracho (2002) explica que o movimento de rotação acopla com as deformações elásticas das palhetas, tendo um efeito que resulta no aumento da frequência natural das palhetas ao aumentar a velocidade de rotação. Efeito recebe o nome de enrijecimento centrífugo. A influência que as deformações da palheta têm em seu comportamento dinâmico é bem retratada na literatura.

Por exemplo, Craig (1963) conseguiu caracterizar o enrijecimento centrífugo utilizando termos não lineares de segunda ordem para calcular a deformação de uma viga girante. Anderson (1975) apresentou diversos modelos matemáticos para vigas sujeitas a rotação. No trabalho, o autor discute que ao considerar apenas os termos lineares no modelo, foi observada uma redução nas frequências naturais da viga com a rotação. Assim, o autor concluiu que é preciso levar em consideração os termos de deformação não lineares no modelo. O mesmo autor propõe uma forma de linearizar as equações do movimento através da solução do problema de tensão inicial.

Putter e Manor (1978) criaram um modelo matemático que permite estudar o efeito que uma massa colocada na ponta de uma viga girante causa em suas frequências naturais. Os autores mostraram que é preciso considerar uma variação parabólica para o cálculo da força axial a fim de modelar o enrijecimento centrífugo corretamente. Hoa (1979) e Hoa (1980) também estudaram uma viga flexível com uma massa na ponta. No modelo matemático da viga, que foi discretizado em elementos finitos, foram considerados os termos não lineares de deformação. O aumento das frequências naturais da viga com a velocidade angular foi identificado nestes trabalhos.

Simo e Vu-Quoc (1986) apresentaram a análise dinâmica de uma viga flexível em rotação sujeita a grandes deslocamentos. Os autores ressaltam que as equações do movimento para vigas em rotação normalmente são descritas nos referenciais rotativos, mas mostram que ao descrever os movimentos no referencial inercial, as equações do movimento podem ser simplificadas. Em relação aos termos de deformação, os autores utilizaram termos não lineares para poder representar o enrijecimento centrífugo. Na segunda parte do trabalho, Simo e Vu-Quoc (1986) mostraram a implementação numérica das equações do movimento, feita através do método dos elementos finitos.

Kane (1987) analisou o movimento de uma viga flexível engastada em uma base. Além da rotação da viga e de sua base, o sistema em estudo permitiu que a base realizasse movimentos de translação no espaço. As equações do movimento foram obtidas considerando termos não lineares de deformação. Em seguida, os autores aplicaram uma linearização no modelo, a fim de simplificá-lo, mantendo o enrijecimento centrífugo presente.

Simo e Vu-Quoc (1987) compararam diferentes modelos matemáticos para uma viga flexível em rotação. No primeiro modelo, as equações do movimento foram determinadas utilizando termos lineares de deformação. No segundo, termos não lineares de segunda ordem foram considerados para descrever a deformação das palhetas. No terceiro modelo, todos os termos não lineares foram empregados no cálculo da deformação. Os resultados dos autores são semelhantes aos de Anderson (1975), pois mostram que ao considerar apenas termos lineares de deformação, notou-se a redução das frequências naturais da viga com o aumento da rotação, enquanto os modelos não lineares foram capazes de representar corretamente o enrijecimento centrífugo.

Outros trabalhos que também comprovam este fato são Saracho (2002) e Santos (2004). Saracho (2002), em sua tese de doutorado, desenvolveu três modelos matemáticos para um sistema mecânico composto por um rotor rígido com quatro vigas flexíveis. As equações do movimento foram obtidas a partir das equações de Newton-Euler-Jourdain. A diferença entre os modelos é relacionada com a quantidade de termos não lineares que são utilizados na determinação da deformação das vigas. O primeiro levou em consideração

apenas os termos de deformação lineares, o segundo modelo foi construído com os termos não lineares de segunda ordem e o terceiro modelo com todos os termos sendo não lineares. Nos três modelos a autora chegou em equações do movimento cujas matrizes eram variantes no tempo e periódicas, sendo que o segundo e terceiro modelos, ou seja, aqueles que consideraram os termos não lineares durante o equacionamento, apresentaram resultados muito semelhantes para as condições analisadas e ambos foram validados experimentalmente. Outro ponto destacado pela autora sobre os corpos flexíveis diz respeito à implementação numérica das equações do movimento. Dois métodos são destacados, o método dos modos assumidos e o método dos elementos finitos.

No método dos modos assumidos, os deslocamentos da estrutura são aproximados por funções que podem ser funções polinomiais ou família de auto-funções, que são funções matemáticas que representam os primeiros modos de vibrar da estrutura. Este método tem a vantagem de ser capaz de gerar modelos com poucos graus de liberdade. Portanto, não possui custo computacional muito elevado. Já o método dos elementos finitos consiste em dividir a estrutura em um número finito de elementos que são conectados entre si por nós, sendo que dentro de cada elemento o deslocamento da estrutura é aproximado por funções matemáticas, geralmente, funções polinomiais. A representatividade deste método está relacionada com a quantidade de elementos usados na discretização da estrutura e dos tipos das funções que são utilizadas para aproximar o deslocamento da estrutura dentro do elemento considerado. No entanto, uma desvantagem deste método está relacionada com o custo computacional. Modelos discretizados em elementos finitos apresentam muitos graus de liberdade (SARACHO, 2002).

Na literatura existem trabalhos que empregam ambos os métodos e que apresentam resultados coerentes. Por exemplo, Christensen (2004) realizou o controle de vibração de um sistema semelhante ao modelado por Saracho (2002), sendo que o modelo matemático foi determinado a partir do método dos modos assumidos. Moraes (2019) apresentou um estudo de um modelo de um aerogerador excitado por ventos turbulentos, no qual o modelo do aerogerador foi criado assumindo que o deslocamento das pás é modelado a partir do somatório de funções senoidais. Rasmussen (2019) comparou diferentes formas de análise modal de um sistema rotor-palhetas. O modelo matemático foi obtido utilizando o método dos modos assumidos. Já em relação à discretização em elementos finitos, os já citados trabalhos de Putter (1978) e Hoa (1979) utilizaram este método para determinar as matrizes da equação do movimento de uma viga girante acoplada a uma base.

2.2 Características de sistemas variantes no tempo

Deve ter ficado claro que o enrijecimento centrífugo é uma característica importante do sistema em estudo. Outra característica é o fato de o sistema ser variante no tempo, ou seja, suas propriedades, como, por exemplo, os modos de vibrar, variam no tempo quando há a presença da rotação. No modelo matemático, esta característica é representada pelas matrizes da equação do movimento serem funções temporais.

Irritier (1999) demonstrou através da obtenção das de resposta em frequência analíticas que quando sistemas do tipo rotor palhetas são excitados por uma força harmônica, a sua resposta de vibração possui uma série de frequências que são combinações entre as frequências naturais do sistema com múltiplos da velocidade de rotação, característica essa que não acontece nos sistemas invariantes no tempo (ZADEH, 1963; IRRITIER, 1999).

No domínio do tempo, a teoria de Floquet (FLOQUET, 1883) mostra qual é a forma da solução de uma equação diferencial de primeira ordem com coeficientes variantes no tempo e periódicos. Esta teoria envolve o cálculo da matriz de transição de estado do sistema em um período, que posteriormente pode ser utilizada para transformar o sistema variante no tempo em um sistema invariante. Embora esta teoria possua uma base teórica muito forte, ela não explica como calcular a matriz de transição de estado para um sistema variante no tempo e periódico. Friedmann (1977) e Meirovitch (1988) mostraram que uma maneira de encontrar esta matriz é solucionar a equação do movimento no formato de primeira ordem para $2n$ condições iniciais, onde n é o número de graus de liberdade do sistema. A matriz de transição é determinada considerando que cada uma das n soluções é uma coluna da matriz de transição.

É evidente que este método é oneroso computacionalmente, e com o objetivo de reduzir este custo o autor propõe uma maneira de encontrar esta matriz utilizando um passo de integração ao invés de n , mas o custo computacional é ainda considerável. Friedmann (1986), se inspirando em Hsu (1974), mostrou que é possível aproximar a matriz de transição como um produto de matrizes exponenciais. O método consiste em dividir o período em pequenos intervalos, nos quais o sistema é considerado invariante. Mesmo assim, a determinação da matriz de transição ainda representa um desafio. Diferentes formas de aproximar a matriz de transição podem ser encontradas no trabalho de Peletan (2013).

Devido a esta dificuldade de aproximar a matriz de transição, grande parte dos trabalhos encontrados na literatura aplicam a teoria de Floquet em sistemas que possuem poucos graus de liberdade. Por exemplo, Stol (2002) realizou a análise modal de um modelo de uma turbina eólica com 13 graus de liberdade através da teoria de Floquet. Skjoldan (2009) utilizou a teoria de Floquet para encontrar as frequências naturais de um modelo de

turbina eólica com cinco graus de liberdade e comparou os resultados obtidos com outro método, a transformação de Coleman. O autor concluiu que a transformação de Coleman é um caso particular da teoria de Floquet quando as pás da turbina são idênticas e igualmente espaçadas ao redor do rotor.

A transformação de Coleman foi desenvolvida por Coleman (1943) com o objetivo de estudar o fenômeno de ressonância solo em helicópteros. Este método também pode ser encontrado na literatura como transformação de coordenadas de Fourier, como em Johnson (1980), e transformação de coordenadas multi-pás, como em Bir (1997) e Bir (2008).

Johnson (1980) traz uma explicação detalhada do método, que consiste em uma transformação de coordenadas, na qual os graus de liberdade definidos no referencial rotativo, geralmente os graus de liberdade das pás, passam a ser definidos no referencial fixo. Assim, os movimentos das pás são representados como um todo ao invés de representar o movimento das pás individuais (JOHNSON, 1980; BIR, 2008). Uma vez que os graus de liberdade são transformados para o referencial fixo, é possível realizar a análise modal tradicional para encontrar os parâmetros modais.

Segundo Bir (2008), para um rotor com três pás, os graus de liberdade que representam um modo de flexão da pá isolada irão definir três novos modos de vibrar: coletivo, progressivo e regressivo. No primeiro, as pás do rotor apresentam movimento simétrico, enquanto nos outros dois modos, o movimento das pás é assimétrico. No modo progressivo, o sentido da rotação do centro de gravidade do rotor é a mesma da rotação do sistema. No modo regressivo, acontece o contrário (JOHNSON, 1980).

Esta análise para um rotor com quatro pás é feita por Bir (1997). A única diferença é que um modo de flexão origina quatro modos, ou seja, além dos três já citados, existe o modo diferencial, que segundo o autor é um modo *reactionless*, isto é, este modo não é afetado pelo movimento da base da turbina, e as pás tem movimento assimétrico.

Johnson (1980) e Bir (1997) também comentam sobre a relação das frequências que esses novos modos têm com a frequência natural de uma pá. De acordo com os autores, se o rotor for considerado rígido, os modos coletivo e diferencial terão frequências próximas da frequência natural da pá, enquanto que as frequências dos modos progressivo e regressivo serão a soma da frequência natural da pá com a velocidade de rotação e a subtração entre frequência natural da pá e a velocidade de rotação.

Página intencionalmente deixada em branco

CAPÍTULO III

Fundamentação teórica

Este capítulo mostra como foi construído o modelo matemático do sistema rotor palhetas, ou seja, como foi considerado um rotor rígido acoplado a quatro palhetas flexíveis. Desta forma, apenas as deformações das palhetas foram levadas em consideração no modelo. Também, algumas características de sistemas variantes no tempo são abordadas neste capítulo.

3.1 Modelo matemático do sistema rotor palhetas

O sistema rotor-palhetas que é modelado está ilustrado na Fig. 3.1, sendo que é composto por quatro palhetas flexíveis acopladas em um rotor rígido. O rotor de massa m_r , e raio r , é colocado em um suporte com massas m_{rx} e m_{ry} (as massas são de fato diferentes), rigidezes k_x e k_y e amortecimentos c_x e c_y , que permitem o movimento do rotor em dois graus de liberdade, deslocamentos na horizontal, x_h , e na vertical, y_h . Acopladas ao rotor estão quatro palhetas ($i = 1, 2, 3, 4$), cujas propriedades são: densidade ρ_{bi} , módulo de elasticidade E_{bi} , comprimento L_{bi} , largura b_{bi} e altura h_{bi} . Nas extremidades das palhetas são colocados corpos rígidos de massa m_{ti} , com comprimento, largura e altura L_{ti} , b_{ti} , e h_{ti} , respectivamente. O objetivo da inclusão dessas massas nas pontas das palhetas é potencializar o efeito da inércia das palhetas, visto que estas são bastante delgadas. Tanto o rotor quanto as palhetas têm velocidade angular Ω . Deve-se ressaltar que cada palheta possui seção transversal retangular e todas foram fixadas no rotor de forma que não há nenhum ângulo de pré-torção (*pre-twist*). Portanto, as palhetas também apresentam movimento apenas no plano XY, representado aqui pelos graus de liberdade x_1 , x_2 , x_3 e x_4 . Os movimentos angulares do rotor não foram levados em consideração no modelo.

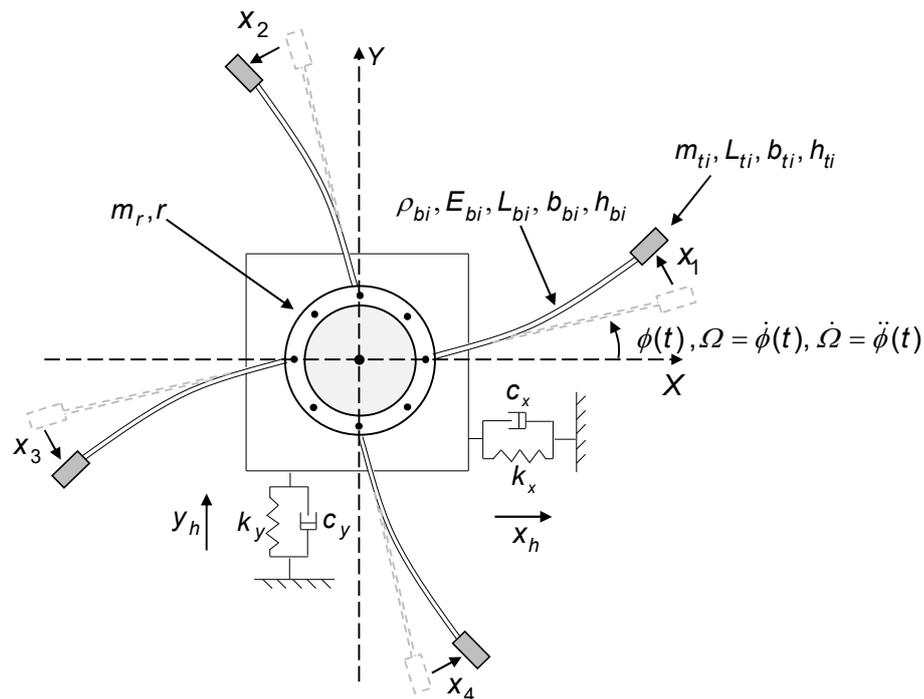


Figura 3.1 - Ilustração do modelo matemático do sistema (Adaptado de Saracho (2002)).

Como é um sistema com vários corpos, as equações do movimento resultante serão equações com o acoplamento dos movimentos dos corpos rígido e flexíveis. Nesta dissertação, as equações do movimento serão determinadas pelas equações de Lagrange. Assim, deve-se calcular as energias potencial e cinética do sistema, e para isso, é necessário definir os vetores posição e velocidade dos corpos. Portanto, é preciso escolher os referenciais de forma adequada para que os movimentos sejam descritos corretamente. Os referenciais adotados neste trabalho foram os mesmos referenciais utilizados nos trabalhos de Saracho (2002) e Santos (2004), são eles:

- O referencial inercial B_I .
- O referencial B_{pi} que gira com a mesma velocidade angular do rotor (Ω), cuja origem é no centro do rotor.
- O referencial B_{ij} que é fixado no ponto de contato entre as palhetas e o corpo em sua extremidade e é solidário ao movimento do corpo na ponta.

Estes referenciais utilizados para definir os vetores posição dos três corpos estão ilustrados na Fig. 3.2.

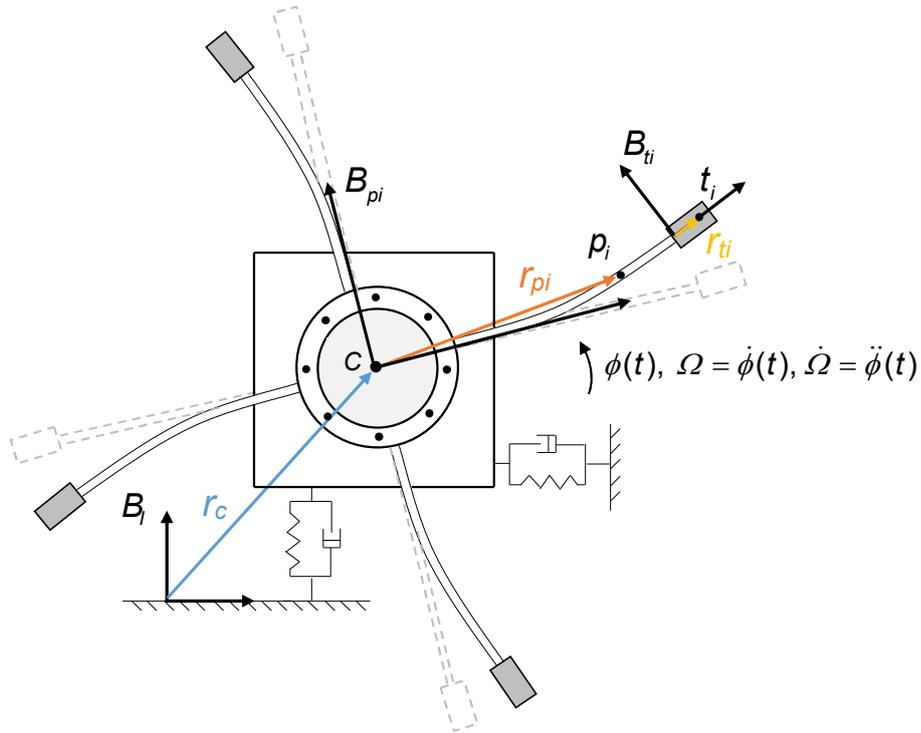


Figura 3.2 - Referenciais utilizados (Adaptado de Saracho (2002)).

Com os referenciais estabelecidos, o próximo passo é definir as matrizes de transformação de coordenadas. A matriz \mathbf{T}_{pi} permite passar um vetor descrito no referencial inercial B_i para o referencial B_{pi} , e a matriz \mathbf{T}_{ti} é capaz de transformar um vetor no referencial B_{pi} em um vetor no referencial B_{ti} :

$$\mathbf{T}_{pi} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \phi(t)) & \text{sen}(\theta_i + \phi(t)) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_i + \phi(t)) & \cos(\theta_i + \phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.a)$$

$$\mathbf{T}_{ti} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i(x_i, t)) & \text{sen}(\alpha_i(x_i, t)) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha_i(x_i, t)) & \cos(\alpha_i(x_i, t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.b)$$

onde $\phi(t)$ é a posição angular do rotor, θ_i é o ângulo entre as palhetas, considerando a primeira palheta na posição horizontal, logo, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi$ e $\theta_4 = 3\pi/2$, e $\alpha_i(x_i, t)$ é a rotação do ponto em que o corpo na extremidade é fixo na palheta.

Assumindo pequenas rotações é possível considerar a seguinte aproximação: $\cos(\alpha_i(x_i, t)) = 1$ e $\text{sen}(\alpha_i(x_i, t)) = \alpha_i(x_i, t)$. Dessa forma:

$$\mathbf{T}_{ti} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_i(x_i, t) & 0 \\ -\alpha_i(x_i, t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.c)$$

Seja ${}_i\mathbf{b}_i$ um vetor no referencial inercial. Este vetor nos referenciais B_{pi} e B_{ti} pode ser calculado por:

$${}_{pi}\mathbf{b}_i = \mathbf{T}_{pi} {}_i\mathbf{b}_i \quad (3.2.a)$$

$${}_{ti}\mathbf{b}_i = \mathbf{T}_{ti} \mathbf{T}_{pi} {}_i\mathbf{b}_i \quad (3.2.b)$$

A transformação inversa, ou seja, passar um vetor dos referenciais rotativos para o referencial inercial, é dada por:

$${}_i\mathbf{b}_i = \mathbf{T}_{pi}^T {}_{pi}\mathbf{b}_i \quad (3.2.c)$$

$${}_i\mathbf{b}_i = \mathbf{T}_{pi}^T \mathbf{T}_{ti}^T {}_{ti}\mathbf{b}_i \quad (3.2.d)$$

Pela Fig. 3.2, o vetor posição do centro do rotor é dado por:

$${}_i\mathbf{r}_c = \{x_h \quad y_h \quad 0\}^T \quad (3.3.a)$$

Já o vetor posição de um ponto genérico x_i na palheta e o vetor posição do centro de massa do corpo na extremidade da palheta são, respectivamente:

$${}_{pi}\mathbf{r}_{pi}(x_i) = \{r + x_i + u_i(x_i, t) \quad v_i(x_i, t) \quad 0\}^T \quad (3.3.b)$$

$${}_{ti}\mathbf{r}_{ti} = \{r_t \quad 0 \quad 0\}^T \quad (3.3.c)$$

onde u_i e v_i são, respectivamente, os deslocamentos longitudinais e transversais de um ponto genérico x_i localizado na palheta; r_{ti} é a posição do centro de massa do corpo conectado na ponta de cada uma das palhetas. Neste trabalho é adotado que $r_{ti} = L_{ti}/2$.

Os vetores ${}_{pi}\mathbf{r}_{pi}$ e ${}_{ti}\mathbf{r}_{ti}$ nas Eqs. 3.3 estão nos referenciais rotativos e para passá-los para o referencial inercial são utilizadas as matrizes de transformação de coordenadas mostradas na Eqs. (3.4).

$${}_{I}\mathbf{r}_{pi}(x_i) = {}_{I}\mathbf{r}_c + \mathbf{T}_{pi}^T {}_{pi}\mathbf{r}_{pi}(x_i) \quad (3.4.a)$$

$${}_{I}\mathbf{r}_{ti} = {}_{I}\mathbf{r}_c + \mathbf{T}_{pi}^T {}_{pi}\mathbf{r}_{pi}(L_{bi}) + \mathbf{T}_{pi}^T \mathbf{T}_{ti}^T {}_{ti}\mathbf{r}_{ti} \quad (3.4.b)$$

Substituindo as matrizes de transformação nas Eqs. 3.4 e realizando as simplificações adequadas, chega-se nos vetores abaixo mostrados nas Eqs. 3.5. Por conveniência, com a finalidade de simplificar a apresentação das equações, as variáveis dependentes como t e x_i serão omitidas do equacionamento para os termos que representam os deslocamentos de um ponto genérico da palheta.

$${}_{I}\mathbf{r}_{pi}(x_i) = \begin{Bmatrix} x_h + (r + x_i)\cos(\theta_i + \phi) + u_i \cos(\theta_i + \phi) - v_i \sin(\theta_i + \phi) \\ y_h + (r + x_i)\sin(\theta_i + \phi) + u_i \sin(\theta_i + \phi) + v_i \cos(\theta_i + \phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5.a)$$

$${}_{I}\mathbf{r}_{ti} = \begin{Bmatrix} x_h + (r + L_{bi} + r_{ti})\cos(\theta_i + \phi) + u_i \cos(\theta_i + \phi) - v_i \sin(\theta_i + \phi) - \alpha_i r_{ti} \sin(\theta_i + \phi) \\ y_h + (r + L_{bi} + r_{ti})\sin(\theta_i + \phi) + u_i \sin(\theta_i + \phi) + v_i \cos(\theta_i + \phi) + \alpha_i r_{ti} \cos(\theta_i + \phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5.b)$$

Como os vetores posição estão descritos nos referenciais inerciais, é possível derivá-los em relação ao tempo e encontrar os vetores velocidades sem que ocorra a perda de informações:

$${}_{I}\dot{\mathbf{r}}_{pi} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_h - \Omega(r + x_i)\sin(\theta_i + \phi) + \dot{u}_i \cos(\theta_i + \phi) - u_i \Omega \sin(\theta_i + \phi) \\ \quad - \dot{v}_i \sin(\theta_i + \phi) - v_i \Omega \cos(\theta_i + \phi) \\ \dot{y}_h + \Omega(r + x_i)\cos(\theta_i + \phi) + \dot{u}_i \sin(\theta_i + \phi) + u_i \Omega \cos(\theta_i + \phi) \\ \quad + \dot{v}_i \cos(\theta_i + \phi) - v_i \Omega \sin(\theta_i + \phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6.a)$$

$${}_i\dot{\mathbf{r}}_{ti} = \begin{cases} \dot{x}_h - \Omega(r + L_{bi} + r_{ti})\text{sen}(\theta_i + \phi) + \dot{u}_i \cos(\theta_i + \phi) - u_i\Omega\text{sen}(\theta_i + \phi) \\ \quad - \dot{v}_i\text{sen}(\theta_i + \phi) - v_i\Omega\cos(\theta_i + \phi) - \dot{\alpha}_i r_{ti}\text{sen}(\theta_i + \phi) - \alpha_i r_{ti}\Omega\cos(\theta_i + \phi) \\ \dot{y}_h + \Omega(r + L_{bi} + r_{ti})\cos(\theta_i + \phi) + \dot{u}_i\text{sen}(\theta_i + \phi) + u_i\Omega\cos(\theta_i + \phi) \\ \quad + \dot{v}_i\cos(\theta_i + \phi) - v_i\Omega\text{sen}(\theta_i + \phi) + \dot{\alpha}_i r_{ti}\cos(\theta_i + \phi) - \alpha_i r_{ti}\Omega\text{sen}(\theta_i + \phi) \\ 0 \end{cases} \quad (3.6.b)$$

Em um procedimento análogo ao adotado para as velocidades lineares, define-se as velocidades angulares do rotor, das palhetas e das massas na ponta das palhetas, respectivamente:

$${}_i\boldsymbol{\Omega}_c = \{0 \quad 0 \quad \Omega\}^T \quad (3.7.a)$$

$${}_{pi}\boldsymbol{\Omega}_{pi}(x_i) = \{0 \quad 0 \quad \dot{\alpha}_i(x_i, t)\}^T \quad (3.7.b)$$

$${}_{ti}\boldsymbol{\Omega}_{ti} = \{0 \quad 0 \quad \dot{\alpha}_i(L_{bi}, t)\}^T \quad (3.7.c)$$

No referencial inercial,

$${}_i\boldsymbol{\Omega}_{pi}(x_i) = {}_i\boldsymbol{\Omega}_c + \mathbf{T}_{pi}^T {}_{pi}\boldsymbol{\Omega}_{pi}(x_i) \quad (3.8.a)$$

$${}_i\boldsymbol{\Omega}_{ti} = {}_i\boldsymbol{\Omega}_c + \mathbf{T}_{pi}^T {}_{pi}\boldsymbol{\Omega}_{pi}(L_{bi}) + \mathbf{T}_{pi}^T \mathbf{T}_{ti}^T {}_{ti}\boldsymbol{\Omega}_{ti}(L_{bi}) \quad (3.8.b)$$

Após fazer as devidas substituições,

$${}_i\boldsymbol{\Omega}_{pi}(x_i) = \{0 \quad 0 \quad \Omega + \dot{\alpha}_i(x_i, t)\}^T \quad (3.9.a)$$

$${}_i\boldsymbol{\Omega}_{ti} = \{0 \quad 0 \quad \Omega + \dot{\alpha}_i(L_{bi}, t)\}^T \quad (3.9.b)$$

É muito comum em máquinas rotativas que haja um desbalanceamento no rotor, isto é, o centro de massa do rotor não coincide com o seu centro geométrico. Neste trabalho, o desbalanceamento foi considerado como uma excentricidade, conforme mostra a Fig. 3.3.

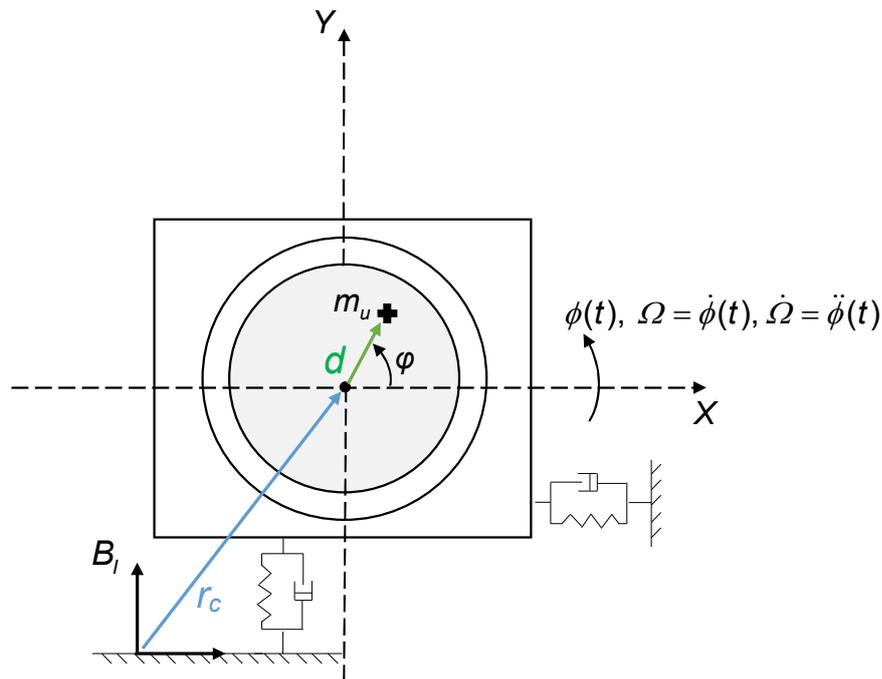


Figura 3.3 - Desbalanceamento no rotor.

Neste caso, uma massa m_u fica a uma distância d do centro geométrico do rotor e faz um ângulo φ com o eixo horizontal. O vetor posição do centro de massa pode ser escrito no referencial inercial da seguinte forma:

$${}_I \mathbf{r}_{cm} = \begin{Bmatrix} x_h \\ y_h \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d \cos(\varphi + \phi(t)) \\ d \sin(\varphi + \phi(t)) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10.a)$$

Derivando a Eq. (3.10) em relação ao tempo tem-se a velocidade do centro de massa do rotor, tem-se:

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{cm} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_h - \Omega d \sin(\varphi + \phi(t)) \\ \dot{y}_h + \Omega d \cos(\varphi + \phi(t)) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10.b)$$

Com todos os vetores velocidades definidos é possível calcular a energia cinética do sistema, que será a soma de três contribuições: a energia cinética devido ao movimento do rotor, T_r , a energia cinética relacionada ao movimento das palhetas, T_{pi} , e a energia cinética devido ao movimento das massas na ponta das palhetas, T_{ti} , (Eq. (3.11.a), Eq. (3.11.b) e Eq. (3.11.c), respectivamente):

$$T_r = \frac{1}{2} m_{rx} \dot{x}_h^2 + \frac{1}{2} m_{ry} \dot{y}_h^2 + \frac{1}{2} m_u \dot{\mathbf{r}}_{cm}^T \dot{\mathbf{r}}_{cm} + \frac{1}{2} J_r \Omega^2 \quad (3.11.a)$$

$$T_{pi} = \sum_{i=1}^4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{L_b} \rho_{bi} A_{bi} \dot{\mathbf{r}}_{pi}^T(x_i) \dot{\mathbf{r}}_{pi}(x_i) dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \rho_{bi} J_{bi} \boldsymbol{\Omega}_{pi}^T(x_i) \boldsymbol{\Omega}_{pi}(x_i) dx_i \right] \quad (3.11.b)$$

$$T_{ti} = \sum_{i=1}^4 \left[\frac{1}{2} m_{ti} \dot{\mathbf{r}}_{ti}^T \dot{\mathbf{r}}_{ti} + \frac{1}{2} J_{bi} \boldsymbol{\Omega}_{pi}^T \boldsymbol{\Omega}_{ti} \right] \quad (3.11.c)$$

$$T = T_r + T_{pi} + T_{ti} \quad (3.11.d)$$

onde A_{bi} , J_{bi} e J_{ti} são respectivamente a área da seção transversal das palhetas, o momento de inércia das palhetas e o momento de inércia de massa na ponta

$$A_{bi} = b_{bi} h_{bi}, \quad J_{bi} = \frac{b_{bi} h_{bi}^3}{12}, \quad J_{ti} = \frac{m_{ti} (L_{ti}^2 + h_{ti}^2)}{12} \quad (3.12)$$

A energia potencial também pode ser dividida em três diferentes parcelas: a energia potencial armazenada no suporte do rotor, V_r , a energia potencial devido a deformação das palhetas, V_{pi} , e a energia potencial gravitacional V_g . A energia armazenada na fundação do rotor é a energia potencial elástica das molas que compõe a fundação:

$$V_r = \frac{1}{2} k_x x_h^2 + \frac{1}{2} k_y y_h^2 \quad (3.13)$$

Conforme mencionado, é preciso que os termos não lineares da deformação da palheta sejam levados em consideração para que o modelo possa representar fielmente o sistema real. Saracho (2002) comparou diferentes modelos matemáticos para um sistema rotor palhetas e validou experimentalmente um modelo com deformações não lineares de segunda ordem. Assim, nesta dissertação de mestrado apenas os termos não lineares de segunda ordem serão levados em consideração no cálculo da energia de deformação das palhetas. O desenvolvimento é realizado genericamente para uma palheta i , podendo ser aplicado para as demais. É importante ressaltar que pelo fato de as palhetas serem delgadas, a deformação devido aos esforços cortantes não será levada em consideração.

Segundo Przemieniecki (1968), a deformação na direção normal a seção transversal da palheta é dada por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - y \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.14)$$

onde u e v são os deslocamentos nas direções longitudinal e transversal, respectivamente, e y é distância vertical de um ponto genérico da seção transversal até sua linha neutra. Então é possível calcular a energia de deformação na direção normal como:

$$V_{\rho i} = \frac{E_{bi}}{2} \int_{Vol} \varepsilon_{xx}^2 dVol \quad (3.15)$$

sendo Vol o volume e E_b o módulo de elasticidade do material que constitui as palhetas. Substituindo a deformação calculada pela Eq. (3.14) na Eq. (3.15) e expandindo os termos resultantes, tem-se:

$$\begin{aligned} V_{\rho i} = & \frac{E_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \int_{A_{bi}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dA_{bi} dx_i - \frac{E_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \int_{A_{bi}} 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} y dA_{bi} dx_i \\ & + \frac{E_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \int_{A_{bi}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 dA_{bi} dx_i - \frac{E_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \int_{A_{bi}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 y dA_{bi} dx_i \\ & + \frac{E_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \int_{A_{bi}} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^2 y^2 dA_{bi} dx_i + \frac{E_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \int_{A_{bi}} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^4 dA_{bi} dx_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

Desprezando o termo não linear de quarta ordem na Eq. (3.16) e considerando as seguintes relações:

$$\int_{A_b} z dA_b = z A_b, \quad \forall z \quad \int_{A_b} y dA_b = 0, \quad \int_{A_b} y^2 dA_b = J_b \quad (3.17)$$

a equação da energia de deformação na direção longitudinal é simplificada para:

$$V_{\rho i} = \frac{E_{bi} A_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i + \frac{E_{bi} J_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i + \frac{E_{bi} A_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i \quad (3.18)$$

Na Eq. (3.18) os dois primeiros termos são os termos que representam a energia de deformação devido ao alongamento na direção longitudinal e devido à flexão, respectiva-

mente. O terceiro termo, que é um termo não linear de segunda ordem, representa o acoplamento das deformações nas direções longitudinal e transversal. Este termo pode ser simplificado a partir do problema de tensão inicial, onde N é a força normal:

$$\sigma = \frac{N(x_i)}{A_{bi}} \quad (3.19.a)$$

De acordo com a Lei de Hooke, a tensão normal é dada por:

$$\sigma = E_{bi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.19.b)$$

Ao combinar as Eqs. (3.19), chega-se na seguinte expressão para a variação da deformação na direção longitudinal:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{N(x_i)}{E_{bi} A_{bi}} \quad (3.20)$$

Substituindo a Eq. (3.20) no termo não linear da energia de deformação, esta parcela fica em função da força normal que atua nas palhetas. Assim,

$$V_{pi} = \frac{E_{bi} A_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i + \frac{E_{bi} J_{bi}}{2} \int_0^{L_{bi}} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_{bi}} N(x_i) \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i \quad (3.21)$$

A última contribuição para a energia potencial do sistema é a energia potencial gravitacional, sendo que é composta por uma parcela devido ao movimento das palhetas, outra pelo movimento das massas na extremidade e pelo movimento do rotor:

$$V_{gi} = m_{r_i} \mathbf{g}^T \mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^4 \left[\int_0^{L_{bi}} \rho_{bi} A_{bi} \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{pi}(x_i) dx_i + m_{ti} \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{ti} \right] \quad (3.22)$$

onde \mathbf{g} é o vetor que representa a aceleração da gravidade, com $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

$${}_i \mathbf{g} = \{0 \quad -g \quad 0\}^T \quad (3.23)$$

Logo, a energia potencial total é calculada somando as Eqs. (3.13), (3.18) e (3.30):

$$V = V_r + \sum_{i=1}^4 V_{pi} + V_{gi} \quad (3.24)$$

Para facilitar a implementação numérica, os deslocamentos das palhetas do sistema em estudo foram discretizadas utilizando o método dos elementos finitos. Neste caso, cada elemento finito (teoria de vigas de Euler-Bernoulli) contém dois nós, de forma que cada nó possui três graus de liberdade. A Fig. 3.4 mostra o elemento finito e os graus de liberdade considerados.

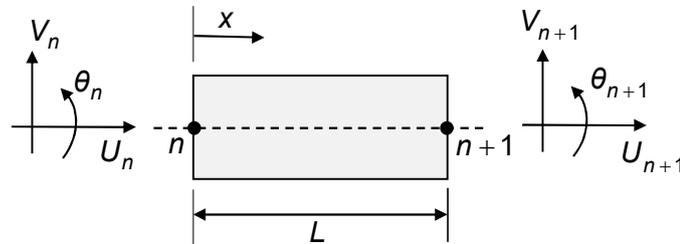


Figura 3.4 - Elemento finito e os graus de liberdade em cada nó.

Os graus de liberdade do elemento finito são divididos em axiais, δ_a , e transversais, δ_f . Os deslocamentos dos nós do elemento finito são organizados nos seguintes vetores:

$$\delta_a = \{U_n \quad U_{n+1}\}^T \quad (3.25.a)$$

$$\delta_f = \{V_n \quad \theta_n \quad V_{n+1} \quad \theta_{n+1}\}^T \quad (3.25.b)$$

As velocidades associadas são dadas por:

$$\dot{\delta}_a = \{\dot{U}_n \quad \dot{U}_{n+1}\}^T \quad (3.26.a)$$

$$\dot{\delta}_f = \{\dot{V}_n \quad \dot{\theta}_n \quad \dot{V}_{n+1} \quad \dot{\theta}_{n+1}\}^T \quad (3.26.b)$$

Dentro de um elemento, os deslocamentos são aproximados segundo funções polinomiais dadas por:

$$u_i = N_a(x)\delta_a \quad (3.27.a)$$

$$v_i = N_f(x)\delta_f \quad (3.27.b)$$

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{\partial N_f(x)}{\partial x} \delta_f \quad (3.27.c)$$

Analogamente, as velocidades são obtidas da seguinte forma:

$$\dot{u}_i = N_a(x)\dot{\delta}_a \quad (3.28.a)$$

$$\dot{v}_i = N_f(x)\dot{\delta}_f \quad (3.28.b)$$

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial x} = \frac{\partial N_f(x)}{\partial x} \dot{\delta}_f \quad (3.28.c)$$

onde $N_a(x)$ e $N_f(x)$ são as funções de forma:

$$N_a(x) = \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\} \quad (3.29.a)$$

$$N_f(x) = \left\{ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right\} \quad (3.29.b)$$

O vetor que representa os graus de liberdade do sistema é dado por:

$$q = \{x_h \quad y_h \quad \delta_a \quad \delta_f\}^T \quad (3.30.a)$$

$$\dot{q} = \{\dot{x}_h \quad \dot{y}_h \quad \dot{\delta}_a \quad \dot{\delta}_f\}^T \quad (3.30.b)$$

Como os deslocamentos foram discretizados em elementos finitos, a força normal, que depende dos deslocamentos, não será constante ao longo da palheta. A forma com que

a força centrífuga foi discretizada é baseada no trabalho de Hoa (1979). A Fig. 3.5 ilustra o sistema em estudo com as palhetas discretizadas em elementos finitos.

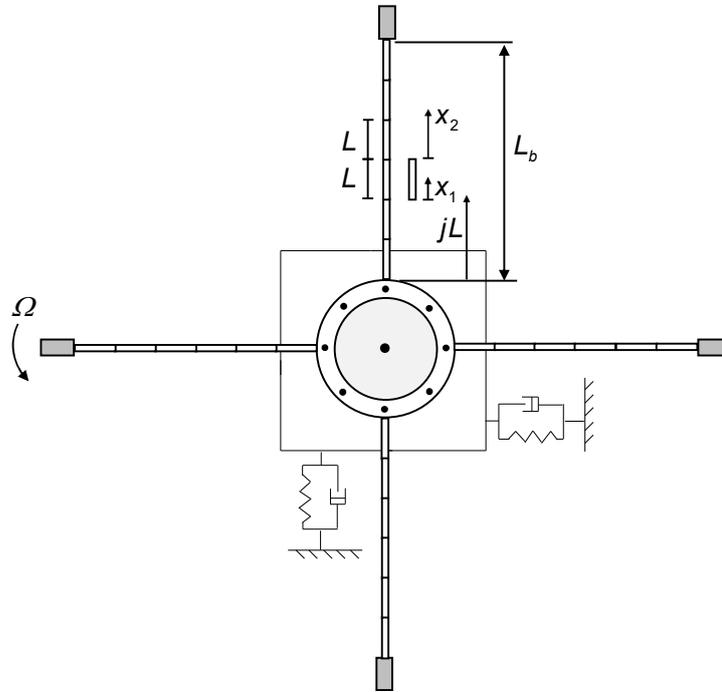


Figura 3.5 - Esquema do cálculo da força normal (Adaptado de Hoa (1979)).

Considerando um elemento j genérico em qualquer uma das palhetas, a força normal atuante neste elemento é a contribuição da força centrífuga e da força da gravidade. Neste elemento j , cujo comprimento é L , define-se uma seção transversal a uma distância x da borda inferior do elemento, conforme a Fig. 3.5. A força normal atuante nesta seção transversal é composta pela força normal devido à parte superior deste elemento e dos elementos que estão acima dele. Assim é possível escrever:

$$\begin{aligned}
 N_p(x) = & \rho_{bi} A_{bi} \Omega^2 \int_x^L (r + jL + x_1) dx_1 + \rho_{bi} A_{bi} \Omega^2 \int_{(j+1)L}^{L_{bi}} (r + x_2) dx_2 \\
 & - \rho_{bi} A_{bi} g \text{sen}(\theta_i + \phi(t)) \int_x^L dx_1 - \rho_{bi} A_{bi} g \text{sen}(\theta_i + \phi(t)) \int_x^{L_{bi}} dx_2
 \end{aligned} \tag{3.31.a}$$

Reescrevendo a Eq. (3.31.a) em função das componentes devido a força centrífuga e devido a gravidade:

$$N_p(x) = \rho_{bi} A_{bi} \Omega^2 N_\Omega(x) - \rho_{bi} A_{bi} g \text{sen}(\theta_i + \phi(t)) N_g(x) \tag{3.31.b}$$

Ainda deve-se considerar o efeito da massa na ponta:

$$N_t(x) = (r + L_{bi} + r_{ii})m_{ii}\Omega^2 - m_{ii}g\text{sen}(\theta_i + \phi(t)) \quad (3.32)$$

Logo, somando as Eqs. (3.31) e (3.32), tem-se a força normal atuante nas palhetas:

$$N(x) = N_p(x) + N_t(x) \quad (3.33)$$

Introduzindo a discretização em elementos finitos, da Eq. (3.27) nas equações da energia cinética e da energia potencial do sistema em estudo, e em seguida ao aplicar as equações de Lagrange, mostrada na Eq. (3.34), chega-se nas equações do movimento. O lado direito das equações de Lagrange leva em consideração os esforços generalizados atuantes sobre o sistema, sendo que neste caso não há nenhum esforço externo agindo.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q \quad (3.34)$$

Finalmente, introduzindo as energias nas equações de Lagrange, chega-se na equação do movimento, que pode ser organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{G}(t, \Omega) + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t, \Omega, \dot{\Omega})\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t, \Omega, \dot{\Omega}) \quad (3.35)$$

As equações de Lagrange foram aplicadas para os graus de liberdade das equações (3.30). Portanto chegou-se a uma expressão para cada um dos quatro termos do vetor \mathbf{q} . Como foi explicado, o método dos elementos finitos foi empregado para facilitar a implementação numérica, então o vetor de graus de liberdade do sistema dependerá da quantidade de elementos finitos utilizados, mas é possível escrevê-los conforme a equação (3.36):

$$\mathbf{q} = [x_h \quad y_h \quad U_1^{b_1} \quad V_1^{b_1} \quad \theta_1^{b_1} \quad \dots \quad U_1^{b_4} \quad V_1^{b_4} \quad \theta_1^{b_4}]^T \quad (3.36)$$

onde $U_1^{b_1}$ representa o grau de liberdade axial do nó da direita primeiro elemento da palheta 1, $V_1^{b_1}$ e $\theta_1^{b_1}$ são os graus de liberdade transversais deste mesmo nó. Analogamente, $U_n^{b_4}$, $V_n^{b_4}$ e $\theta_n^{b_4}$ são os graus de liberdade axiais e transversais do nó da direita do último elemento finito da palheta 4, por exemplo.

É importante lembrar que no vetor \mathbf{q} , os graus de liberdade do rotor estão definidos no referencial inercial enquanto os graus de liberdade das palhetas são descritos no referencial rotativo. Então, as matrizes da equação do movimento foram organizadas seguindo a mesma analogia do vetor dos graus de liberdade. Por exemplo, a matriz \mathbf{M} é a matriz de massa, mostrada pela Eq. (3.37). Nela, os termos da diagonal representam as massas do rotor e das palhetas e os outros termos representam o acoplamento entre os graus de movimento, isto é, o movimento do rotor influencia o movimento das palhetas e vice versa. Outro ponto importante é que os termos desta matriz dependem do tempo e são periódicos, pois são funções trigonométricas. Esta característica também será observada nas outras matrizes que compõe o modelo matemático do sistema em estudo.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & m_{x_1} & m_{x_2} & m_{x_3} & m_{x_4} \\ 0 & m_y & m_{y_1} & m_{y_2} & m_{y_3} & m_{y_4} \\ m_{x_1}^T & m_{y_1}^T & m_{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ m_{x_2}^T & m_{y_2}^T & 0 & m_{b_2} & 0 & 0 \\ m_{x_3}^T & m_{y_3}^T & 0 & 0 & m_{b_3} & 0 \\ m_{x_4}^T & m_{y_4}^T & 0 & 0 & 0 & m_{b_4} \end{bmatrix} \quad (3.37.a)$$

As submatrizes da matriz \mathbf{M} são dadas por:

$$m_{bi} = \begin{bmatrix} m_{ai} & 0 \\ 0 & m_{fi} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.37.b)$$

$$m_{xi} = [\psi_{ai} \cos(\phi(t) + \theta_i) \quad -\psi_{fi} \sin(\phi(t) + \theta_i)] \quad (3.37.c)$$

$$m_{yi} = [\psi_{ai} \sin(\phi(t) + \theta_i) \quad \psi_{fi} \cos(\phi(t) + \theta_i)] \quad (3.37.d)$$

onde os termos da matriz de massa podem ser calculados de acordo com as expressões abaixo. O símbolo (') representa a derivada espacial da função $N(x)$, ou $dN(x)/dx$.

$$m_x = m_{rx} + m_u + \sum_{i=1}^4 \rho_{bi} A_{bi} L_{bi} + \sum_{i=1}^4 m_{ti} \quad \text{e} \quad m_y = m_{ry} + m_u + \sum_{i=1}^4 \rho_{bi} A_{bi} L_{bi} + \sum_{i=1}^4 m_{ti} \quad (3.38.a)$$

$$\psi_{ai} = \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_a(x) dx + m_{ti} N_a(L) \quad (3.38.b)$$

$$\psi_{fi} = \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_f(x) dx + m_{ti} N_f(L) + m_{ti} r_{ti} N_f'(L) \quad (3.38.c)$$

$$m_{ai} = \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_a(x)^T N_a(x) dx + m_{ai} N_a(L)^T N_a(L) \quad (3.38.d)$$

$$m_{fi} = \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_f(x)^T N_f(x) dx + \rho_{bi} J_{bi} \int_0^L N_f'(x)^T N_f'(x) dx + m_{ti} N_f(L)^T N_f(L) \\ + 2m_{ti} r_{ti} N_f'(L)^T N_f(L) + (J_{ti} + m_{ti} r_{ti}^2) N_f'(L)^T N_f'(L) \quad (3.38.e)$$

A matriz \mathbf{G} é a matriz de Coriolis, que representa o efeito giroscópico. Esta matriz aparece devido ao acoplamento entre os graus de liberdade axiais e transversais das palhetas. Foi adicionada ao sistema uma matriz de amortecimento proporcional, denominada por \mathbf{D} , que é dada por $\mathbf{D} = \beta_1 \mathbf{M} + \beta_2 \mathbf{K}$, onde β_1 e β_2 são constantes e \mathbf{M} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez. Os valores adotados para as constantes foram $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1 \cdot 10^{-5}$.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & c_{x_1} & c_{x_2} & c_{x_3} & c_{x_4} \\ 0 & c_y & c_{y_1} & c_{y_2} & c_{y_3} & c_{y_4} \\ 0 & 0 & c_{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{b_4} \end{bmatrix} \quad (3.39.a)$$

$$c_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{\Omega} c_{ai} \\ 2\dot{\Omega} c_{ai} & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.39.b)$$

$$c_{xi} = [-2\Omega \psi_{ai} \text{sen}(\phi(t) + \theta_i) \quad -2\Omega \psi_{fi} \text{cos}(\phi(t) + \theta_i)] \quad (3.39.c)$$

$$c_{yi} = [2\Omega \psi_{ai} \text{cos}(\phi(t) + \theta_i) \quad -2\Omega \psi_{fi} \text{sen}(\phi(t) + \theta_i)] \quad (3.39.d)$$

$$c_{ai} = \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_a(x)^T N_f(x) dx + m_{ti} N_a(L)^T N_f(L) + m_{ti} r_{ti} N_a(L)^T N_f'(L) \quad (3.39.e)$$

A matriz \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema, sendo composta pelas rigidezes dos suportes do rotor, as rigidezes estruturais das palhetas, e por termos que representam os efeitos da velocidade angular e da aceleração sobre a rigidez do sistema. As submatrizes da matriz \mathbf{K} e os seus elementos são mostradas a seguir. Pela Eq. (3.40.f) é evidente que as rigidezes das palhetas são proporcionais ao quadrado da velocidade, Esta parcela positiva surge devido a inclusão dos termos não lineares de deformação das palhetas no modelo matemático, e mostra que a rigidez das palhetas aumenta com a velocidade de rotação, ou seja, se apenas os termos lineares tivessem sido levados em consideração, este crescimento da rigidez não seria introduzido, o que não representa corretamente o comportamento destes sistemas (SANTOS, 2004).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & k_{x_1} & k_{x_2} & k_{x_3} & k_{x_4} \\ 0 & k_y & k_{y_1} & k_{y_2} & k_{y_3} & k_{y_4} \\ 0 & 0 & k_{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{b_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{b_4} \end{bmatrix} \quad (3.40.a)$$

$$k_{bi} = \begin{bmatrix} k_{ai} & -\dot{\Omega} c_{ai} \\ \dot{\Omega} c_{ai} & k_{fi} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.40.b)$$

$$k_{xi}^T = \begin{bmatrix} -\Omega^2 \psi_{ai} \cos(\phi(t) + \theta_i) - \dot{\Omega} \psi_{ai} \text{sen}(\phi(t) + \theta_i) \\ \Omega^2 \psi_{fi} \text{sen}(\phi(t) + \theta_i) - \dot{\Omega} \psi_{fi} \cos(\phi(t) + \theta_i) \end{bmatrix} \quad (3.40.c)$$

$$k_{yi}^T = \begin{bmatrix} -\Omega^2 \psi_{ai} \text{sen}(\phi(t) + \theta_i) + \dot{\Omega} \psi_{ai} \cos(\phi(t) + \theta_i) \\ -\Omega^2 \psi_{fi} \cos(\phi(t) + \theta_i) - \dot{\Omega} \psi_{fi} \text{sen}(\phi(t) + \theta_i) \end{bmatrix} \quad (3.40.d)$$

$$k_{ai} = E_{bi} A_{bi} \int_0^L N_a'(x)^T N_a'(x) dx \quad (3.40.e)$$

$$\begin{aligned}
k_{fi} = & E_{bi} J_{bi} \int_0^L N_f''(x)^T N_f''(x) dx + \Omega^2 \left[-\rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_f(x)^T N_f(x) dx \right. \\
& - m_{ti} N_f(L)^T N_f(L) - 2m_{ti} r_{ti} N_f'(L)^T N_f(L) - m_{ti} r_{ti}^2 N_f(L)^T N_f(L) \\
& \left. + \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_{\Omega}(x) N_f''(x)^T N_f''(x) dx + (r + L_{bi} + r_{ti}) m_{ti} \int_0^L N_f''(x)^T N_f''(x) dx \right] \quad (3.40.f) \\
& - g \text{sen}(\phi(t) + \theta_i) \left[\rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_g(x) N_f''(x)^T N_f''(x) dx + m_{ti} \int_0^L N_f''(x)^T N_f''(x) dx \right] \\
& - \dot{\Omega} \left[\rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_a(x)^T N_f(x) dx + m_{ti} N_a(L)^T N_f(L) + m_{ti} r_{ti} N_a(L) N_f(L)^T \right]
\end{aligned}$$

O vetor de forças é representado por \mathbf{f} . Nele estão os efeitos do desbalanceamento, da gravidade e ainda forças associadas com a velocidade angular que agem nos graus de liberdade axiais das palhetas e forças devido a aceleração angular, atuantes nos graus de liberdade transversais das palhetas.

$$\mathbf{f} = \left[f_x \quad f_y \quad f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3} \quad f_{b_4} \right]^T \quad (3.41.a)$$

Os subvetores do vetor de forças são e os seus elementos são dados por:

$$f_{bi} = \left[f_{ai} \quad f_{fi} \right]^T \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.41.b)$$

As forças agindo no rotor que são dependentes do desbalanceamento e da força de gravidade:

$$\begin{aligned}
f_x = & m_u d (\Omega^2 \cos(\phi(t) + \varphi) + \dot{\Omega} \text{sen}(\phi(t) + \varphi)) \\
& + \sum_{i=1}^4 \left[\left(m_{ti} (r + L_{bi} + r_{ti}) + \rho_{bi} A_{bi} \int_0^{L_{bi}} (r + x) dx \right) (\Omega^2 \cos(\phi(t) + \varphi) + \dot{\Omega} \text{sen}(\phi(t) + \varphi)) \right] \quad (3.42.a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y = & m_u d (\Omega^2 \text{sen}(\phi(t) + \varphi) - \dot{\Omega} \cos(\phi(t) + \varphi)) - g \sum_{i=1}^4 (m_r + \rho_{bi} A_{bi} L_b + m_{ti}) \\
& + \sum_{i=1}^4 \left[\left(m_{ti} (r + L_{bi} + r_{ti}) + \rho_{bi} A_{bi} \int_0^{L_{bi}} (r + x) dx \right) (\Omega^2 \text{sen}(\phi(t) + \varphi) - \dot{\Omega} \cos(\phi(t) + \varphi)) \right] \quad (3.42.b)
\end{aligned}$$

E as forças atuando nas palhetas são dadas por:

$$f_{ai} = \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L (r+x) N_a(x) dx + m_{ti} (r + L_{bi} + r_{ti}) N_a(L) - g \sin(\phi(t) + \theta_i) \left(\rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_a(x) dx + m_{ti} N_a(L) \right) \quad (3.43.a)$$

$$f_{fi} = \rho_{bi} A_{bi} \int_0^L (r+x) N_f(x) dx + \rho_{bi} J_{bi} \int_0^L N_f'(x) dx + m_{ti} (r + L_b + r_{ti}) N_f(L) + (m_{ti} (r + L_b + r_{ti}) + J_{ti}) N_f'(L) - g \cos(\phi(t) + \theta_i) \left(\rho_{bi} A_{bi} \int_0^L N_f(x) dx + m_{ti} N_f(L) + m_{ti} r_{ti} N_f'(L) \right) \quad (3.43.b)$$

3.2 Solução analítica das equações do movimento

As matrizes da equação do movimento apresentada na Eq. (3.35) são dependentes do tempo, o que caracteriza um sistema variante no tempo, sendo que estes sistemas possuem comportamento diferente dos sistemas invariantes no tempo. Uma forma de visualizar estas diferenças é estudar a solução analítica das equações do movimento. Então, este procedimento é feito primeiro para um sistema invariante no tempo, e logo em seguida é repetido para um sistema variante no tempo, ressaltando as diferenças observadas. A análise feita aqui teve como base os trabalhos de Zadeh (1963) e Saracho (2002).

Assim, um sistema invariante no tempo é aquele cujos coeficientes não são funções do tempo, para o caso de um sistema dinâmico, as matrizes da equação do movimento não são dependentes do tempo. Assim, a forma homogênea das equações do movimento pode ser escrita no espaço de estado como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (3.44)$$

onde o vetor de estados \mathbf{x} e a matriz \mathbf{A} são dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

A solução da Eq. (3.45) é dada por segundo Zadeh (1963):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0), \quad \text{onde } e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \approx \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{A}^j (t-t_0)^j}{j!} \quad (3.46)$$

Segundo o mesmo autor, pode-se definir a matriz de transição de estado que relaciona os estados do sistema em diferentes instantes, t_1 e t_0 :

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (3.47.a)$$

Além disso, para o sistema homogêneo, como na Eq. (3.44), a matriz de Transição é solução do sistema:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}\Phi(t, t_0) \quad (3.47.b)$$

E ainda, a matriz de transição possui a seguinte propriedade, que é válida para qualquer instante:

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad (3.47.c)$$

A forma forçada da Eq. (3.44) está na Eq. (3.48), onde $p(t)$ é uma excitação qualquer:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) \quad (3.48)$$

cuja solução é (ZADEH, 1963):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{p}(\tau)d\tau \quad (3.49)$$

Existe outra forma de representar a solução do sistema usando os parâmetros modais. Assim, são definidos os autovetores a direita, \mathbf{R} , e os autovetores a esquerda, \mathbf{L} , da matriz \mathbf{A} . Os autovetores a direita e os autovetores a esquerda são ortogonais (SARACHO, 2002) e serão iguais se a matriz \mathbf{A} for simétrica.

$$(\Lambda - \mathbf{A})\mathbf{R} = 0 \quad (3.50.a)$$

$$(\Lambda - \mathbf{A}^T)\mathbf{L} = 0 \quad (3.50.b)$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3.50.c)$$

onde Λ é matriz que contém os autovalores da matriz \mathbf{A} em sua diagonal principal:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Combinando as equações (3.50.a) e (3.50.b) e pós-multiplicando por \mathbf{R} , chega-se na seguinte relação:

$$\Lambda = \mathbf{L}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \quad (3.52)$$

Ao introduzir a seguinte transformação de coordenadas, é possível desacoplar a matriz as equações do movimento:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \mathbf{q}(t) \quad (3.53)$$

Substituindo as Eq. (3.53) na Eq. (3.48), pré-multiplicando o resultado por \mathbf{L}^T , e fazendo as simplificações necessárias, chega-se na seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) - \Lambda \mathbf{q}(t) = \mathbf{L}^T \mathbf{p}(t) \quad (3.54)$$

É mais fácil resolver a Eq. (3.54) ao passá-la para o domínio da frequência. Para isso emprega-se a transformada de Fourier. Então, aplicando a transformada de Fourier nos dois lados da Eq. (3.54):

$$2\pi i \omega \mathbf{Q}(\omega) - \Lambda \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{L}^T \mathbf{P}(\omega) \quad (3.55.a)$$

$$\mathbf{Q}(\omega) = \left[\frac{1}{2\pi i \omega \mathbf{I} - \Lambda} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{P}(\omega) \quad (3.55.b)$$

Aplicando a transformada de Fourier na Eq. (3.53) e a substituindo a Eq. (3.55.b):

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{R} \left[\frac{1}{2\pi i \omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{P}(\omega) \quad (3.56)$$

Ao escolher uma excitação $\mathbf{p}(t)$ é possível estudar o comportamento do sistema para esta excitação. Escolhendo uma excitação harmônica com amplitudes p^+ e p^- e considerando condições iniciais nulas:

$$\mathbf{p}(t) = p^+ e^{2\pi i \omega_0 t} + p^- e^{-2\pi i \omega_0 t} \quad (3.57)$$

A transformada de Fourier da excitação harmônica é dada pela Eq. (3.58) e depende da função delta de Dirac, $\delta(\omega)$:

$$\mathbf{P}(\omega) = p^+ \delta(\omega - \omega_0) + p^- \delta(\omega + \omega_0) \quad (3.58)$$

Substituindo a Eq. (3.58) na Eq. (3.56), tem-se a resposta do sistema invariante no tempo devido a excitação harmônica:

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{R} \left[\frac{1}{2\pi i \omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T \left[p^+ \delta(\omega - \omega_0) + p^- \delta(\omega + \omega_0) \right] \quad (3.59.a)$$

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \left[p^+ \delta(\omega - \omega_0) + p^- \delta(\omega + \omega_0) \right], \quad \text{onde} \quad \mathbf{H}(\omega) = \mathbf{R} \left[\frac{1}{2\pi i \omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T \quad (3.59.b)$$

onde $\mathbf{H}(\omega)$ é a função de resposta em frequência do sistema.

É possível passar para o domínio do tempo ao aplicar a transformada inversa de Fourier na Eq. (3.59):

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega) \left[p^+ \delta(\omega - \omega_0) + p^- \delta(\omega + \omega_0) \right] e^{2\pi i \omega t} d\omega \quad (3.60.a)$$

A integral acima pode resolvida ao utilizar as propriedades da função delta de Dirac:

$$\delta(\omega - \omega_0) = 0 \text{ para } \omega \neq \omega_0 \text{ e } \delta(\omega + \omega_0) = 0 \text{ para } \omega \neq -\omega_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1 \quad (3.60.b)$$

Assim, após a aplicação da transformação inversa

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(\omega_0) \mathbf{p}^+ e^{2\pi i \omega_0 t} + \mathbf{H}(-\omega_0) \mathbf{p}^- e^{-2\pi i \omega_0 t} \quad (3.61.a)$$

ou,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \left[\frac{1}{2\pi i \omega_0 \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^+ e^{2\pi i \omega_0 t} + \mathbf{R} \left[\frac{1}{-2\pi i \omega_0 \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}^T \mathbf{p}^- e^{-2\pi i \omega_0 t} \quad (3.61.b)$$

A Eq. (3.61.b) mostra a solução de um sistema invariante no tempo sujeito a uma excitação harmônica, através dela, observa-se que ao excitar o sistema com uma frequência ω_0 ele será excitado apenas nesta frequência.

Em seguida, a mesma análise é feita para um sistema variante no tempo (IRRITIER, 1999). Existe um caso particular de sistemas variantes no tempo, tal como a equação do movimento do sistema estudado neste trabalho, que são os sistemas variantes no tempo e periódicos. Estes sistemas, obedecem a teoria de Floquet, que será explicada adiante. Então, considerando o sistema variante no tempo e periódico, a equação do sistema é:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \quad (3.62)$$

A matriz de transição também é solução para o caso variante no tempo e periódico, e ainda é uma matriz periódica. Vale salientar que as propriedades mostradas nas equações (3.47) ainda são válidas.

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t+T, t_0) = \Phi(t, t_0) \quad (3.63)$$

Com o intuito de comparação, para os sistemas variantes no tempo e periódicos, a solução do sistema para uma excitação $\mathbf{p}(t)$ será obtida com o auxílio da transformada de Fourier. Então o sistema na forma forçada e considerando condições iniciais nulas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \quad (3.64)$$

Tal como para os sistemas invariantes, é possível definir os autovetores a direita e a esquerda. Mas, neste caso, os autovetores serão função do tempo e periódicos:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) + (\Lambda - \mathbf{A}(t))\mathbf{R}(t) = 0, \quad \mathbf{R}(t + T) = \mathbf{R}(t) \quad (3.65.a)$$

$$\mathbf{L}(t)^T \mathbf{R}(t) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{L}(t + T) = \mathbf{L}(t) \quad (3.65.b)$$

E a matriz dos autovalores é dada por:

$$\Lambda = \mathbf{L}(t)^T \mathbf{A}(t) \mathbf{R}(t) - \mathbf{L}(t)^T \dot{\mathbf{R}}(t) \quad (3.66)$$

Também, a seguinte transformação de coordenadas é definida:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{q}(t) \quad (3.67)$$

Introduzindo a Eq. (3.67) na Eq. (3.64), pré-multiplicando por $\mathbf{L}^T(t)$, e tendo em mente a Eq. (3.66), chega-se na equação desacoplada do sistema:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) - \Lambda \mathbf{q}(t) = \mathbf{L}(t)^T \mathbf{p}(t) \quad (3.68)$$

Aplicando a transformada de Fourier no lado direito da equação desacoplada (Eq. (3.68)):

$$\mathfrak{T}\{\dot{\mathbf{q}}(t) - \Lambda \mathbf{q}(t)\} = 2\pi i \omega \mathbf{Q}(\omega) - \Lambda \mathbf{Q}(\omega) \quad (3.69.a)$$

No lado esquerdo, primeiramente os autovetores a esquerda são expandidos em série de Fourier, e logo em seguida a transformada de Fourier é aplicada:

$$\mathbf{L}(t)^T = \sum_{u=-U}^U \mathbf{L}_u^T e^{2\pi i u \omega_0 t} \quad (3.69.b)$$

$$\mathfrak{T}\{\mathbf{L}(t)^T \mathbf{p}(t)\} = \mathfrak{T}\left\{ \sum_{u=-U}^U \mathbf{L}_u^T e^{2\pi i u \omega_0 t} \mathbf{p}(t) \right\} = \sum_{u=-U}^U \mathbf{L}_u^T \mathfrak{T}\{e^{2\pi i u \omega_0 t} \mathbf{p}(t)\} \quad (3.69.c)$$

$$\mathfrak{T}\{\mathbf{L}(t)^T \mathbf{p}(t)\} = \sum_{u=-U}^U \mathbf{L}_u^T \mathbf{P}(\omega - u\omega_0) \quad (3.69.d)$$

Portanto após a transformada de Fourier, a equação desacoplada no domínio da frequência é:

$$(2\pi i\omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{Q}(\omega) = \sum_{u=-U}^U \mathbf{L}_u^T \mathbf{P}(\omega - u\omega_0) \quad (3.70)$$

Repetindo o mesmo procedimento para a transformação de coordenadas definida pela Eq. (3.67), ou seja, primeiro expande-se os autovetores a direita em série de Fourier, e para depois aplicar a transformada de Fourier:

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{v=-V}^V \mathbf{R}_v e^{2\pi i v \omega_0 t} \quad (3.71.a)$$

$$\mathfrak{T}\{\mathbf{R}(t)\mathbf{q}(t)\} = \mathfrak{T}\left\{\sum_{v=-V}^V \mathbf{R}_v e^{2\pi i v \omega_0 t} \mathbf{q}(t)\right\} = \sum_{v=-V}^V \mathbf{R}_v \mathfrak{T}\{e^{2\pi i v \omega_0 t} \mathbf{q}(t)\} = \sum_{v=-V}^V \mathbf{R}_v \mathbf{Q}(\omega - v\omega_0) \quad (3.71.b)$$

Agora, ao combinar as Eqs. (3.70) e (3.71.b),

$$\mathbf{X}(\omega) = \sum_{v=-V}^V \sum_{u=-U}^U \mathbf{R}_v \left[\frac{1}{2\pi i(\omega - v\omega_0)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}_u^T \mathbf{P}(\omega - (u+v)\omega_0) \quad (3.72.a)$$

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}_{uv}(\omega) \mathbf{P}(\omega - (u+v)\omega_0), \quad \text{onde} \quad \mathbf{H}_{uv}(\omega) = \sum_{v=-V}^V \sum_{u=-U}^U \mathbf{R}_v \left[\frac{1}{2\pi i(\omega - v\omega_0)\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}} \right] \mathbf{L}_u^T \quad (3.72.b)$$

Considerando a mesma excitação harmônica, mas com frequência Ω :

$$\rho(t) = p^+ e^{2\pi i \Omega t} + p^- e^{-2\pi i \Omega t} \quad (3.73.a)$$

E a transformada de Fourier desta excitação é dada por:

$$\mathbf{P}(\omega) = p^+ \delta(\omega - \Omega) + p^- \delta(\omega + \Omega) \quad (3.73.b)$$

Substituindo a transformada de Fourier da excitação na Eq. (3.72.b), tem-se a resposta de um sistema variante no tempo e periódico para uma excitação harmônica:

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}_{uv}(\omega) \left[p^+ \delta(\omega - (u+v)\omega_0 - \Omega) + p^- \delta(\omega - (u+v)\omega_0 + \Omega) \right] \quad (3.74)$$

A resposta pode ser escrita no domínio do tempo utilizando a transformada inversa de Fourier, mostrada pela equação abaixo:

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{uv}(\omega) \left[p^+ \delta(\omega - (u+v)\omega_0 - \Omega) + p^- \delta(\omega - (u+v)\omega_0 + \Omega) \right] e^{2\pi i \omega t} d\omega \quad (3.75)$$

O cálculo da transformada inversa é realizado com a ajuda das propriedades da função delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \delta(\omega - (u+v)\omega_0 - \Omega) &= 0 \quad \text{para} \quad \omega \neq (u+v)\omega_0 + \Omega \\ \delta(\omega - (u+v)\omega_0 + \Omega) &= 0 \quad \text{para} \quad \omega \neq (u+v)\omega_0 - \Omega \end{aligned} \quad (3.76.a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1 \quad (3.76.b)$$

Então, a resposta do sistema no domínio do tempo é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}_{uv} p^+ e^{2\pi i((u+v)\omega_0 + \Omega)t} + \mathbf{H}_{uv} p^- e^{2\pi i((u+v)\omega_0 - \Omega)t} \quad (3.77.a)$$

onde \mathbf{H}_{uv} são as submatrizes da função de resposta em frequência (IRRITIER, 1999),

$$\mathbf{H}_{uv} = \sum_{v=-V}^V \sum_{u=-U}^U \mathbf{R}_v \left[\frac{1}{2\pi i(u\omega_0 \pm \Omega) \mathbf{I} - \Lambda} \right] \mathbf{L}_u^T \quad (3.77.b)$$

Ao analisar as Eqs. (3.77) é possível notar que ao excitar o sistema com uma frequência, Ω , o sistema não será excitado apenas por essa frequência (como os sistemas invariante no tempo), mas na verdade por um conjunto de frequências $\Omega + u\omega$. Segundo Ewins (1999), este fenômeno pode ser observado quando as medições são feitas no referencial rotativo.

3.3 Teoria de Floquet

Como citado, uma classe de sistemas variantes no tempo é a classe dos sistemas variantes no tempo e periódicos. Por exemplo, caso o sistema rotor palhetas opere com velocidade constante, a equação do movimento será variante no tempo e periódica. Para o sistema na forma homogênea, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \quad (3.78)$$

sendo que foi mostrado que a matriz de transição definida pela Eq. (3.47) é solução do sistema.

Se a matriz $\mathbf{A}(t)$ é periódica, pode ser provado (MEIROVITCH, 1988; SARACHO, 2002) que a matriz de transição deslocada de um (ou múltiplos inteiros) período também é solução do sistema:

$$\dot{\Phi}(t+T, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t+T, t_0) \quad (3.79)$$

Então, existe uma matriz constante \mathbf{C} denominada matriz monodromia, tal que:

$$\Phi(t+T, t_0) = \Phi(t, t_0)\mathbf{C} \quad (3.80)$$

A teoria de Floquet diz que a solução de um sistema variante no tempo e periódico é dado pelo produto de uma matriz periódica $\mathbf{Q}(t)$ e a exponencial de uma matriz constante \mathbf{R} (MEIROVITCH, 1988). Portanto:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{Q}(t, t_0)e^{\mathbf{R}(t-t_0)}, \quad \mathbf{Q}(t+T, t_0) = \mathbf{Q}(t, t_0) \quad (3.81)$$

sendo que a matriz \mathbf{R} se relaciona com a matriz \mathbf{C} da seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{T}\ln(\mathbf{C}) \quad (3.82)$$

A Eq. (3.81) é demonstrada com detalhes por Meirovitch (1988), que também mostra que pelo teorema de Lyapunov existe uma transformação de coordenadas utilizando a ma-

triz periódica $\mathbf{Q}(t)$ que permite transformar um sistema variante no tempo e periódico em um sistema invariante no tempo:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t, t_0)\mathbf{z}(t) \quad (3.83)$$

Tal que o sistema abaixo é invariante no tempo:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{z}(t) \quad (3.84)$$

onde \mathbf{B} é uma matriz cujos elementos são constantes no tempo e seus autovalores são iguais aos autovalores da matriz \mathbf{R} . Estes, por sua vez, são denominados expoentes característicos, λ_k . Através da Eq. (3.82) é possível relacionar os autovalores das matrizes \mathbf{C} e \mathbf{R} :

$$\lambda_k = \frac{1}{T} \ln(\mu_k) = \frac{1}{T} (\ln(|\mu_k|) + i \arg(\mu_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.85)$$

onde μ_k são os autovalores da matriz \mathbf{C} , conhecidos como multiplicadores característicos. Pela definição, os expoentes característicos são definidos a partir de um logaritmo de um número complexo, isto significa que a sua parte imaginária não é única, pois sempre diferem de um múltiplo de $2\pi/T$.

É possível determinar a estabilidade do sistema ao analisar os expoentes característicos e/ou os multiplicadores característicos. Se apenas um dos expoentes característicos possuir parte real maior que zero o sistema é instável. Então, pela Eq. (3.85), o sistema será instável se o módulo de um dos multiplicadores característicos for maior que um.

Mas para determinar os multiplicadores característicos ou os expoentes característicos é preciso primeiro encontrar a matriz de transição de estado. Uma forma, segundo Meirovitch (1988), é a resolver a Eq. (3.78) para n condições iniciais diferentes, onde n é a dimensão da matriz $\mathbf{A}(t)$, tal que cada uma das soluções será uma coluna da matriz de transição. Esta forma é utilizada por Skjoldan (2009) e Stol (2002). Claramente, para sistema com muitos graus de liberdade, como é o caso deste trabalho, este procedimento é extremamente oneroso.

Uma outra forma, desenvolvida por Friedmann (1986), que será utilizada neste trabalho, consiste em dividir o período T em k pequenos intervalos de tamanho Δt onde o sistema é considerado invariante no tempo. Dessa forma, a matriz de transição dentro de um intervalo é considerada como a solução de um sistema invariante no tempo, conforme definido pela Eq. (3.46). Fazendo $t = t_0$:

$$\mathbf{C} = \Phi(t_0, t_0)^{-1} \Phi(t_0 + T, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (3.86)$$

Ao utilizar a propriedade da matriz de transição de estado definida na Eq. (3.48) é possível chegar a seguinte aproximação para a matriz de transição dentro de um período:

$$\Phi(t_0 + T, t_0) = \prod_{j=0}^{k-1} \Phi(t_{j+1}, t_j) = \prod_{j=0}^{k-1} e^{\mathbf{A}(t_{j+1}-t_j)} \quad (3.87)$$

Ao substituir a Eq. (3.81) na Eq. (3.80) é possível encontrar uma aproximação para a matriz constante \mathbf{C} , e assim pode determinar os multiplicadores característicos e os expoentes característicos.

3.4 Transformação de coordenadas multi-pás

É notório como a teoria de Floquet é uma forma criteriosa para estudar sistemas variantes no tempo. Contudo, pelo desafio imposto para aproximar a matriz de transição e pelo possível custo computacional aliado, existem alternativas para encontrar os autovalores de sistemas variantes no tempo, como, por exemplo, a transformação de coordenadas multi-pás. Skjoldan (2009) mostrou que esta transformação é um caso particular da teoria de Floquet ao aplicá-la em um modelo matemático de uma turbina eólica.

A transformação de coordenadas multi-pás foi proposta por Coleman (1943) para estudar a ressonância solo em helicópteros e mais recentemente vem sendo aplicada em turbinas eólicas, como em Bir (2008) e Skjoldan (2009). Este método também pode ser encontrado na literatura como transformada de Coleman (COLEMAN, 1943) ou transformada de coordenadas de Fourier (JOHNSON, 1980).

Segundo Coleman (1943) e Johnson (1980), a transformação de coordenadas multi-pás consiste em definir quatro novos graus de liberdade que são calculados em função dos graus de liberdade das pás q_i , que representam o movimento das pás como um todo, ao invés de individualmente. Assim,

$$q_0(t) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i(t) \quad (3.88.a)$$

$$q_{nc}(t) = \frac{2}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i(t) \cos(n(\phi(t) + \theta_i)) \quad (3.88.b)$$

$$q_{ns}(t) = \frac{2}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i(t) \text{sen}(n(\phi(t) + \theta_i)) \quad (3.88.c)$$

$$q_d(t) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (-1)^i q_i(t) \quad (3.88.d)$$

onde N_p é o número de pás.

Cada um dos novos graus de liberdade definidos pelas Eqs. (3.88) define novos modos de vibrar que descrevem o movimento de todas as pás como um todo em relação ao referencial inercial, enquanto os graus de liberdade q_i definem modos em relação às pás isoladas (JOHNSON, 1980). O grau de liberdade q_0 representa o modo coletivo, q_{nc} e q_{ns} representam os modos cíclicos e q_d o modo diferencial, sendo que o modo diferencial só aparece quando o número de pás é par. Segundo Johnson (1980), os modos q_0 , q_{1c} e q_{1s} tem maior importância pois tem uma função importante no acoplamento entre a fundação e as pás. A relação que as frequências destes novos modos têm com as frequências naturais das pás isoladas é explicada por Johnson (1980) e Bir (1997). As frequências dos modos q_0 e q_d são muito próximas das frequências das pás isoladas, já as frequências dos modos q_c e q_s são similares a, respectivamente, a frequência da pá isolada mais a velocidade de rotação e a frequência da pá isolada menos a velocidade de rotação.

De acordo com Johnson (1980) é possível estabelecer a transformação de coordenadas multi-pás inversa para um grau de liberdade j de uma pá i :

$$q_j^i(t) = q_0(t) + \sum_{n=1}^{(N_p-2)/2} [q_{nc}(t) \cos(n(\phi(t) + \theta_i)) + q_{ns}(t) \text{sen}(n(\phi(t) + \theta_i))] + (-1)^i q_d(t) \quad (3.89)$$

Considerando somente os termos que influenciam no acoplamento entre a fundação e as pás, e o termo q_d para representar todos os outros termos a transformação inversa é simplificada para:

$$q_j^i(t) = q_0(t) + q_{1c}(t) \cos(\phi(t) + \theta_i) + q_{1s}(t) \text{sen}(\phi(t) + \theta_i) + (-1)^i q_d(t) \quad (3.90)$$

O procedimento para realizar a transformação das matrizes em matrizes projetadas no referencial inercial é simples. Pela equação da transformação inversa, é possível estabelecer a seguinte relação entre os graus de liberdade:

$$\begin{Bmatrix} q_1^{b_1}(t) \\ q_1^{b_2}(t) \\ q_1^{b_3}(t) \\ q_1^{b_4}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\phi(t) + \theta_1) & \sin(\phi(t) + \theta_1) & -1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \theta_2) & \sin(\phi(t) + \theta_2) & 1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \theta_3) & \sin(\phi(t) + \theta_3) & -1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \theta_4) & \sin(\phi(t) + \theta_4) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0(t) \\ q_{1c}(t) \\ q_{1s}(t) \\ q_d(t) \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{q}_j^{bi} = \mathbf{t}_1^j \mathbf{q}_b^j \quad (3.91)$$

No lado esquerdo estão os graus de liberdade de cada pá definidos no referencial rotativo, enquanto no lado direito estão os graus de liberdade definidos no referencial inercial. É possível expandir a matriz acima, para que ela englobe todos os graus de liberdade do sistema. Mas antes disso é preciso reordenar as matrizes da equação do movimento porque, os graus de liberdade foram dispostos para cada palheta por vez. Para usar a matriz de transformação definida na Eq. (3.91) é preciso organizar os graus de liberdade das palhetas por nó. Por exemplo, primeiro o deslocamento axial do primeiro nó das quatro palhetas, em seguida o deslocamento transversal das quatro palhetas, e assim por diante, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{q} = [x_h \quad y_h \quad U_1^{b_1} \quad U_1^{b_2} \quad U_1^{b_3} \quad U_1^{b_4} \quad \dots \quad \theta_1^{b_1} \quad \theta_1^{b_2} \quad \theta_1^{b_3} \quad \theta_1^{b_4}]^T \quad (3.92)$$

Analogamente, o vetor dos graus de liberdade no referencial inercial é dado por:

$$\mathbf{q}_{nr} = [x_h \quad y_h \quad q_0^1 \quad q_{1c}^1 \quad q_{1s}^1 \quad q_d^1 \quad \dots \quad q_0^j \quad q_{1c}^j \quad q_{1s}^j \quad q_d^j]^T \quad (3.93)$$

Agora é possível organizar a matriz de transformação definida na Eq. (3.91) como uma matriz de transformação global:

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ U_1^{b_1} \\ \vdots \\ \theta_4^{b_4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & & & \\ & \mathbf{t}_1^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{t}_1^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ q_0^1 \\ \vdots \\ q_d^j \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{q} = \mathbf{T}_1 \mathbf{q}_{nr} \quad (3.94)$$

onde \mathbf{I}_2 é matriz identidade com dimensão 2 e q_r representa os graus de liberdade da fundação, que já estão definidos no referencial inercial.

Substituindo a Eq. (3.94) e as suas derivadas na Eq. (3.35), chega-se à:

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{T}}_1\ddot{\mathbf{q}}_{nr}(t) + \mathbf{G}(t, \Omega)\dot{\mathbf{T}}_1\dot{\mathbf{q}}_{nr}(t) + \mathbf{K}(t, \Omega, \dot{\Omega})\mathbf{T}_1\mathbf{q}_{nr}(t) = \mathbf{f}_{nr}(t, \Omega, \dot{\Omega}) \quad (3.95)$$

Ao realizar a multiplicação das matrizes e organizar os termos chega-se na equação do movimento na qual todos os graus de liberdade estão definidos no referencial inercial:

$$\mathbf{M}_{nr}(t)\ddot{\mathbf{q}}_{nr}(t) + \mathbf{G}_{nr}(t, \Omega)\dot{\mathbf{q}}_{nr}(t) + \mathbf{K}_{nr}(t, \Omega, \dot{\Omega})\mathbf{q}_{nr}(t) = \mathbf{f}_{nr}(t, \Omega, \dot{\Omega}) \quad (3.96)$$

Segundo Bir (2008), o único critério que deve ser obedecido para a aplicação da transformação de coordenadas multi-pás é que as palhetas sejam igualmente espaçadas em volta do rotor. O mesmo autor faz algumas ressalvas sobre o método: ele pode ser aplicado para situações em que a velocidade angular não é constante e ele não transforma o sistema variante no tempo em um invariante.

As matrizes da Eq. (3.96) são as matrizes da equação do movimento, mas descritas no referencial inercial. Elas são calculadas através das relações:

$$\mathbf{M}_{nr}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{T}_1 \quad (3.97.a)$$

$$\mathbf{G}_{nr}(t, \Omega) = 2\Omega\mathbf{M}(t)\mathbf{T}_2 + (\mathbf{G}(t, \Omega) + \mathbf{D})\mathbf{T}_1 \quad (3.97.b)$$

$$\mathbf{K}_{nr}(t, \Omega, \dot{\Omega}) = \Omega^2\mathbf{M}(t)\mathbf{T}_3 + \dot{\Omega}\mathbf{M}(t)\mathbf{T}_2 + (\mathbf{G}(t, \Omega) + \mathbf{D})\mathbf{T}_2 + \mathbf{K}(t, \Omega, \dot{\Omega})\mathbf{T}_1 \quad (3.97.c)$$

$$\mathbf{f}_{nr}(t, \Omega, \dot{\Omega}) = \mathbf{f}(t, \Omega, \dot{\Omega}) \quad (3.97.d)$$

As matrizes \mathbf{T}_2 e \mathbf{T}_3 são obtidas derivando a matriz \mathbf{T}_1 em relação ao tempo:

$$\mathbf{T}_2 = \dot{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2 & & & \\ & \mathbf{t}_2^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{t}_2^j \end{bmatrix} \quad (3.98.a)$$

onde \mathbf{O}_2 é uma matriz de zeros com dimensão 2. Tal como a matriz \mathbf{T}_1 , a matriz \mathbf{T}_2 também podem ser divididas em blocos. Cada bloco é dado por:

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_1) & \cos(\phi(t) + \theta_1) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_2) & \cos(\phi(t) + \theta_2) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_3) & \cos(\phi(t) + \theta_3) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_4) & \cos(\phi(t) + \theta_4) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.98.b)$$

Analogamente para a matriz \mathbf{T}_3 , que é a derivada segunda da matriz \mathbf{T}_1 em relação ao tempo, tem-se:

$$\mathbf{T}_3 = \ddot{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2 & & & \\ & \mathbf{t}_3^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{t}_3^j \end{bmatrix} \quad (3.99.a)$$

E seus blocos são dados por:

$$\mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\phi(t) + \theta_1) & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_1) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \theta_2) & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_2) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \theta_3) & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_3) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \theta_4) & -\text{sen}(\phi(t) + \theta_4) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.99.b)$$

Página intencionalmente deixada em branco

CAPÍTULO IV

Procedimento Experimental

Enquanto no capítulo anterior foi discutido sobre o modelo matemático do sistema rotor-palhetas, este capítulo apresenta a bancada experimental utilizada para realizar os experimentos e explica a forma com que a aquisição e o processamento dos sinais foram feitos.

4.1 Bancada de testes

A bancada utilizada para os experimentos desta dissertação é mostrada na Fig. 4.1, a qual faz parte do laboratório do Prof. Ilmar Ferreira Santos na *Denmark Technical University*. O rotor é conectado a um motor elétrico de corrente contínua utilizando uma correia dentada, sendo que a velocidade do rotor é controlada através da voltagem aplicada no motor. Além disso, a bancada possui seis sensores de deslocamento, seis atuadores eletromagnéticos, e um *shaker* eletromecânico que foi montado na estrutura para excitar a fundação na direção horizontal. As dimensões dos componentes do sistema estão na Tab. 4.1

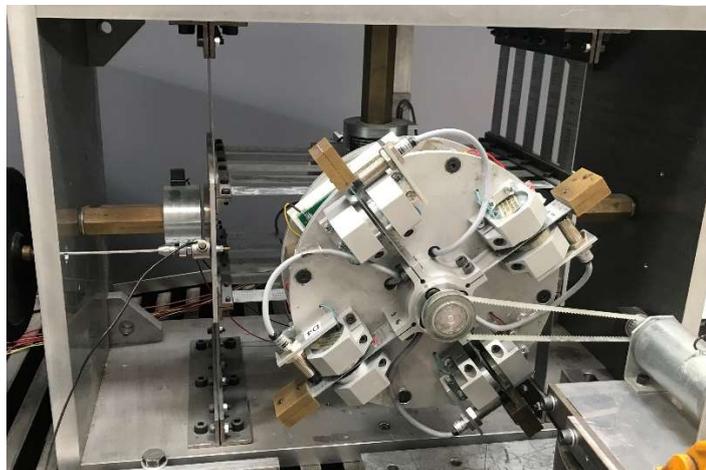


Figura 4.1 - Bancada de testes.

Tabela 4.1 - Dimensões da bancada.

Rotor e Fundação			
Massa na vertical	m_{ry}	8,6	kg
Massa na horizontal	m_{rx}	10,5	kg
Rigidez na vertical	k_y	71000	N/m
Rigidez na horizontal	k_x	96000	N/m
Amortecimento na vertical	c_y	$1,2 \cdot 10^{-6}$	N·s/m
Amortecimento na horizontal	c_x	$1,5 \cdot 10^{-6}$	N·s/m
Massa de desbalanceamento	m_u	0,003	kg
Excentricidade	d	0,01	m
Ângulo da excentricidade	φ	0	°
Raio do rotor	r	0,04	m
Palhetas ($i = 1, 2, 3, 4$)			
Comprimento	L_{bi}	0,08	m
Largura	b_{bi}	0,025	m
Altura	h_{bi}	0,01	m
Densidade	ρ_{bi}	7800	kg/m ³
Módulo de elasticidade	E_{bi}	$2,1 \cdot 10^{11}$	N/m ²
Massas na ponta			
Massa	m_{ti}	0,109	kg
Comprimento	L_{ti}	0,030	m
Largura	b_{ti}	0,015	m
Altura	h_{ti}	0,015	m

Como mencionado, o sistema é instrumentado com seis sensores de deslocamento, dois para medir o deslocamento da fundação nas direções horizontal e vertical, e quatro para medir o deslocamento das palhetas, sendo um para cada palheta. Nas palhetas, os sensores foram posicionados o mais próximo possível da ponta, portanto a uma distância de 62,5 cm do rotor.

Existe em cada palheta um atuador eletromagnético para excitação, a fim de realizar o controle da vibração destas. A eletrônica que controla os atuadores é embarcada no sistema, ela foi colocada atrás do disco que contém as palhetas. É importante ressaltar que apesar de ser possível excitar as palhetas por meio dos atuadores, não foram instalados sensores para medir esta excitação.

Todos os sensores de deslocamento utilizados eram do modelo KJ4-M12MN50-ANU da *Pulsortonic*, e possuem sensibilidade aferida por Górriz (2019) de 2,67 V/mm. A força

exercida pelo *shaker* foi medida por um sensor de força colocado na extremidade da sua haste. Este sensor de força é do fabricante *Brüel & Kjaer* modelo 8230-002, cuja sensibilidade, também aferida por Górriz (2019), é de 0,22 V/N.

Os principais componentes da bancada, bem como os sensores e o *shaker* estão identificados na Fig. 4.2, de forma que são listados a seguir:

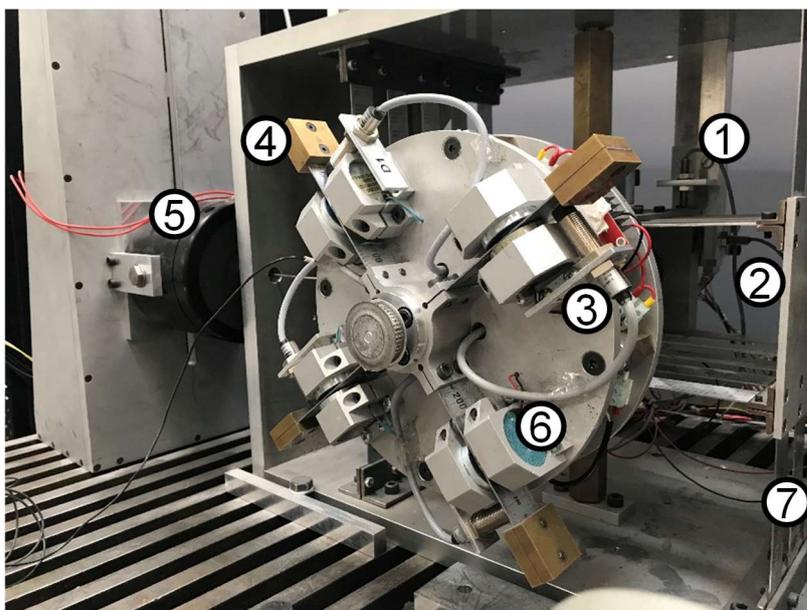


Figura 4.2 - Posição dos sensores na bancada.

- ① Sensor de deslocamento do rotor na direção vertical
- ② Sensor de deslocamento do rotor na direção horizontal
- ③ Sensor de deslocamento da palheta
- ④ Palheta e a massa em sua extremidade
- ⑤ *Shaker* eletromecânico
- ⑥ Atuador eletromagnético da palheta (não foi usado)
- ⑦ Fundação da estrutura

A Fig. 4.3 mostra um esquema que ilustra as grandezas mensuradas, sendo os deslocamentos da fundação, x_h e y_h , os deslocamentos das palhetas, x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , e a força F que foi utilizada para excitar o sistema.

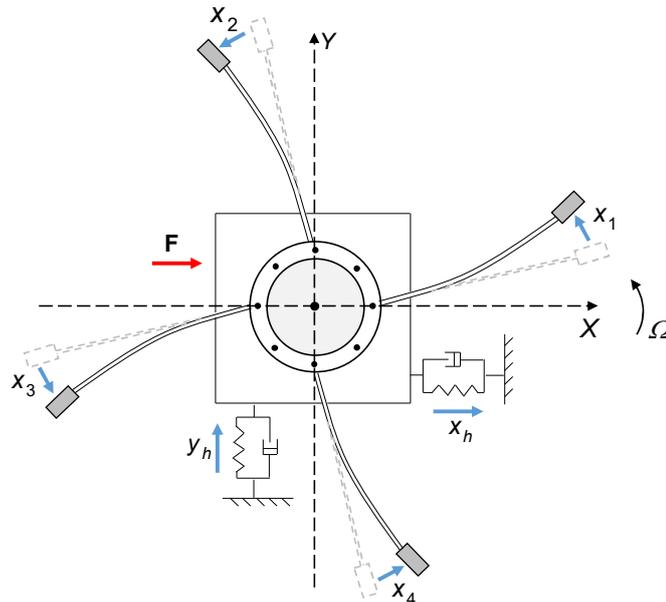


Figura 4.3 - Esquema que ilustra as grandezas medidas na bancada de testes.

4.2 Aquisição dos sinais

Para adquirir os sinais, todos os sete sensores foram conectados a uma placa dSPACE CP1103 (veja a Fig. 4.4) que contém conversores analógicos-digitais. Esta placa de aquisição é controlada por um modelo criado em ambiente *Simulink*, e é possível monitorar os dados adquiridos em tempo real através da interface *ControlDesk*. Esta interface ainda grava o sinal e o salva em um arquivo *.mat*, usado para o tratamento dos dados.



Figura 4.4 - Placa dSPACE CP1103.

O código feito no *Simulink* ainda permite definir o tipo da excitação que o *shaker* introduzirá no sistema. Neste trabalho, a excitação utilizada foi do tipo ruído branco, gerado a partir de uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão três, a força aplicada,

bem como seu histograma estão ilustrados na Fig. 4.5. Os sinais foram adquiridos usando 1000 Hz como frequência de aquisição, portanto, pelo teorema de Nyquist apenas frequências até 500 Hz podem ser observadas.

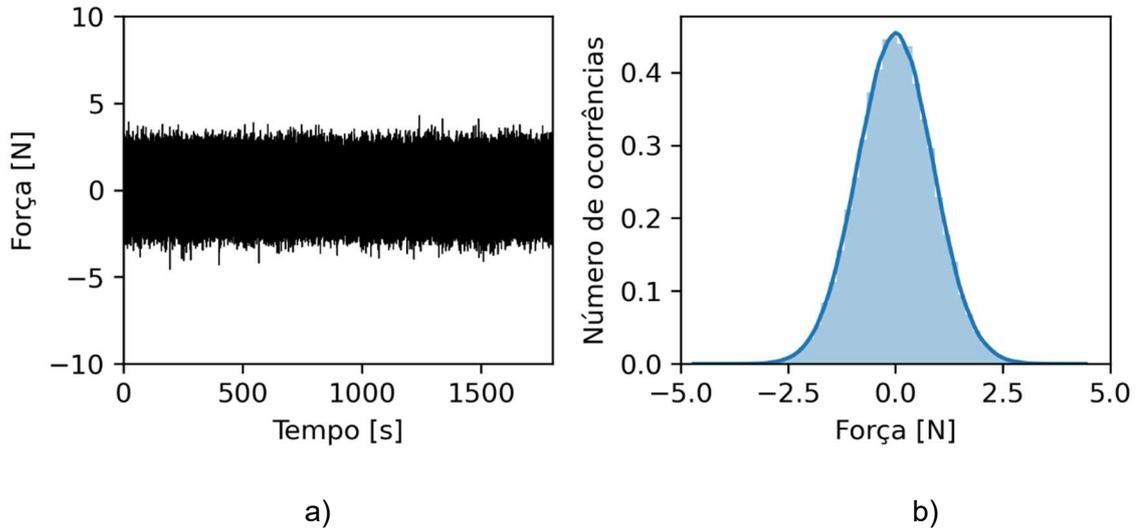


Figura 4.5 - Força aplicada na fundação (a) e seu histograma (b).

Como será mostrado no capítulo a seguir, o sistema em estudo possui modos com frequências naturais bem próximas, o que dificulta bastante a identificação destes. Uma forma de tentar contornar este problema é realizar um experimento longo para que a resolução em frequência seja baixa o suficiente para distinguir estes modos. Tendo isto em mente, os experimentos realizados tiveram 36 minutos de duração, ou 2200 segundos, como os sinais foram adquiridos a uma taxa de 1000 Hz, cada experimento continha então aproximadamente 2.200.000 amostras. Dessas amostras ainda foi retirado o nível DC.

4.3 Tratamento dos dados

Para extrair as informações dos dados foi utilizada a análise modal experimental, onde as propriedades do sistema são extraídas utilizando as funções de resposta em frequência (FRFs), sendo que os estimadores da FRF, H_1 e H_2 , podem ser calculados por:

$$H_1(\omega) = \frac{\hat{P}_{xy}(\omega)}{\hat{P}_{xx}(\omega)}, \quad H_2(\omega) = \frac{\hat{P}_{yy}(\omega)}{\hat{P}_{yx}(\omega)} \quad (4.1)$$

onde P_{xx} e P_{yy} são os estimadores das funções de auto densidade espectral, enquanto P_{xy} e P_{yx} são os estimadores das funções de densidade espectral cruzada. Estes quatro estimadores são calculados baseado no método de Welch (1967), usando os periodogramas descritos a seguir.

Um sinal $X(t)$ com N amostras, portanto $X(t) = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ é dividido em k blocos com $L-1$ amostras, isto é, o tamanho do bloco é $L-1$, conforme mostra Fig. 4.6. Deve-se ressaltar que um bloco k começa no meio do bloco $k-1$, o que caracteriza um *overlap* de 50%. Assim, $D = (L-1)/2$ e $M = (K-1) \cdot (N-1)$ na Fig. 4.6.

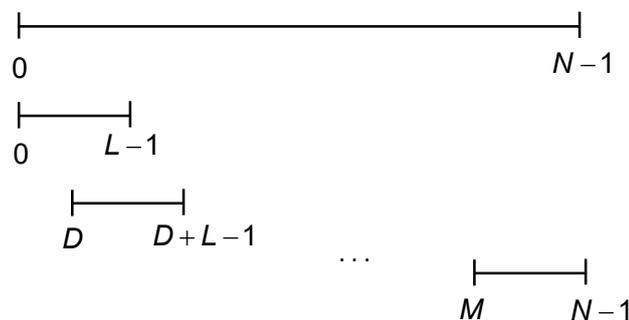


Figura 4.6 - Esquema da divisão das amostras de um sinal (Adaptado de Welch (1967)).

Para cada um dos blocos, calcula-se a transformada de Fourier:

$$A_k(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{N-1} X_k(j) W(j) e^{-\frac{2kijn}{L}} \quad (4.2)$$

onde i é a unidade imaginária e $W(j)$ é a janela utilizada. Neste trabalho optou-se por uma janela Hann. Em seguida, os k periodogramas são calculados:

$$I_k(f_n) = \frac{L}{U} |A_k(n)|^2 \quad (4.3)$$

na Eq. (4.3):

$$U = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{N-1} W^2(j) \quad \text{e} \quad f_n = \frac{n}{L}, \quad n = 0, \dots, \frac{L}{2} \quad (4.4)$$

Ao calcular as médias dos periodogramas é possível encontrar o estimador da função de auto densidade espectral:

$$\hat{P}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_k(f_n) \quad (4.5)$$

De maneira análoga é possível calcular o estimador da função densidade espectral cruzada. Primeiro, determina-se as transformadas de Fourier do sinal de entrada $x(t)$ e do sinal de saída $y(t)$:

$$A_{kx}(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{N-1} X_k(j)W(j)e^{-\frac{2kijn}{L}} \quad \text{e} \quad A_{ky}(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{N-1} Y_k(j)W(j)e^{-\frac{2kijn}{L}} \quad (4.6)$$

Logo, os novos periodogramas são dados por:

$$I_{kxy}(f_n) = \frac{L}{U} \overline{A_x(n)} A_y(n) \quad \text{e} \quad I_{kyx}(f_n) = \frac{L}{U} \overline{A_y(n)} A_x(n) \quad (4.7)$$

Ao computar a média dos periodogramas dos blocos, chega-se nos estimadores da função de densidade espectral cruzada:

$$\hat{P}_{xy} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{kxy}(f_n) \quad \text{e} \quad \hat{P}_{yx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{kyx}(f_n) \quad (4.8)$$

Tendo calculado os estimadores da função de auto densidade espectral e da função de densidade espectral cruzada, pode-se estimar a FRF ao substituí-los na Eq. (4.1), sendo que o estimador H_1 é indicado para estimar as antirressonâncias, enquanto o estimador H_2 é recomendado para estimar as ressonâncias. Quando não há ruído no sistema, H_1 é igual ao H_2 .

Nota-se que as FRFs são grandezas complexas, assim é possível determinar sua amplitude e sua fase. Ao estudar a amplitude (o módulo), espera-se que as frequências naturais, apareçam nos picos, já ao analisar a fase, que pode ser encontrada pela Eq. (4.9), normalmente as frequências naturais ocorrem quando há uma mudança de fase de $\pm 90^\circ$.

$$\theta = a \cos\left(\frac{\text{Re}(H(\omega))}{|H(\omega)|}\right) \quad (4.9)$$

Um outro parâmetro importante é a coerência, que é usada como um indicador da qualidade do experimento, isto é, se a grandeza medida foi proveniente da excitação aplicada. Em outras palavras, quando a coerência é mais próxima de um, significa que o que foi medido foi originado da força aplicada, portanto houve pouca influência de fatores externos, ou seja, quanto mais próxima de um a coerência, melhor o experimento.

$$\gamma^2 = \frac{|\hat{P}_{yx}|^2}{\hat{P}_{xx} \hat{P}_{yy}} \quad (4.10)$$

Página intencionalmente deixada em branco

CAPÍTULO V

Resultados

Este capítulo aborda os resultados obtidos nesta dissertação. Inicialmente, com o intuito de uma ideia sobre se as principais características o sistema rotor-palhetas, foram feitas simulações numéricas do modelo matemático desenvolvido. Logo em seguida são apresentados os resultados obtidos a partir da bancada de testes, e por fim uma comparação entre ambos é realizada, o que permite verificar a capacidade do modelo matemático apresentado neste trabalho de reproduzir a realidade, além de expor suas possíveis limitações, o que é interessante para a evolução do modelo.

5.1 Resultados numéricos

O primeiro caso estudado foi para o sistema em repouso, ou seja, a velocidade angular é zero. Nesta condição o sistema comporta-se como um sistema invariante no tempo, assim ao resolver o problema de autovalor é possível encontrar suas frequências naturais, seus fatores de amortecimento e seus modos de vibrar. Para realizar a implementação numérica e possibilitar a simulação do modelo matemático desenvolvido, dez elementos finitos foram utilizados para discretizar os deslocamentos de cada palheta. Como cada elemento finito tem três graus de liberdade por nó, e foi considerado que as palhetas estavam engastadas no rotor, o modelo apresenta 122 graus de liberdade ao todo.

Ao determinar os parâmetros para o sistema em repouso, duas condições foram consideradas com respeito a posição angular do rotor; θ nas matrizes da equação do movimento. Na primeira, o ângulo que a palheta 1 faz com a direção horizontal foi 0° ($\theta = 0^\circ$). Já na segunda, este ângulo foi considerado como sendo de 45° ($\theta = 45^\circ$). Os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento para os dez primeiros modos de vibrar estão dispostos na Tab. 5.1, já os modos de vibrar estão ilustrados na Fig. 5.1(a) para $\theta = 0^\circ$ e na Fig. 5.1(b) para $\theta = 45^\circ$.

Tabela 5.1 - Frequências naturais e fatores de amortecimento para os dez primeiros modos de vibrar do sistema em repouso - $\Omega = 0$.

Modos	Frequência natural [Hz]		Fator de amortecimento [10^{-4}]	
	0°	45°	0°	45°
1°	13,77	13,77	4,32	4,32
2°	14,46	14,46	4,54	4,54
3°	17,23	17,23	5,41	5,41
4°	17,24	17,23	5,41	5,41
5°	17,78	17,78	5,58	5,58
6°	17,90	17,89	5,61	5,62
7°	236,72	236,73	74,36	74,37
8°	236,75	236,73	74,37	74,37
9°	236,90	236,92	74,42	74,42
10°	236,92	236,92	74,43	74,42

É possível observar que a posição angular do rotor não exerceu muita diferença nas frequências naturais nos fatores de amortecimento, pois ambos são muito semelhantes para as duas posições angulares em questão. A respeito dos modos, existe uma certa diferença, veja a Fig. 5.1. O primeiro modo de vibrar a 13,77 Hz é um modo em que o movimento do rotor na direção vertical é predominante, enquanto o segundo modo, cuja frequência é 14,46 prevalece o movimento do rotor na direção horizontal. Embora menos evidente, estes dois primeiros modos também apresentam movimentos das palhetas, o que comprova o acoplamento entre os corpos do sistema. Os próximos quatro modos previstos pelo modelo estão entre 17 Hz e 18 Hz, nos quais o movimento das palhetas é bem mais acentuado do que o do rotor. Dois destes modos apresentam frequências muito próximas, 17,23 Hz e 17,24 Hz para o rotor a 0°, e são modos que vibram a 17,23 Hz para $\theta = 45^\circ$.

O fato dos modos de vibrar serem muito próximos apresenta um desafio para conseguí-los identificar experimentalmente pois será preciso de realizar um experimento longo para que a resolução em frequência seja pequena o suficiente para que essa diferença seja detectada. Outro fato interessante nesses modos é que para $\theta = 0^\circ$, os movimentos das palhetas são invertidos, isto é, no modo de 17,23 Hz apenas as palhetas verticais estão movimentando, e no próximo modo e 17,24 Hz somente as palhetas horizontais vibram. Os modos sete ao dez também apresentam movimento predominante das palhetas e são muito próximos entre si, visto que as frequências destes modos são 236,72 Hz, 236,75 Hz, 236,90 Hz e 236,92 Hz.

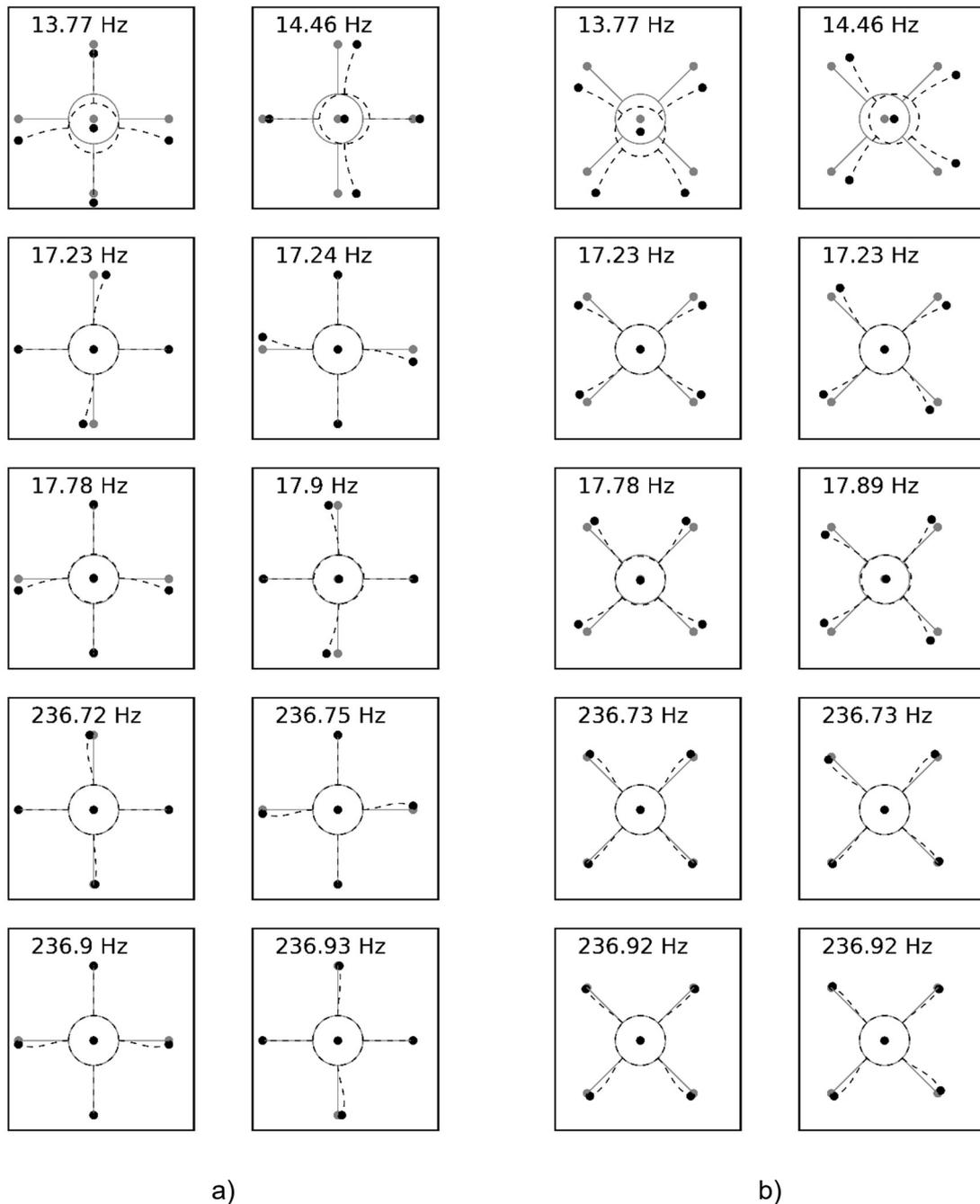


Figura 5.1 - Dez primeiros modos de vibrar para o sistema em repouso a) 0° ; b) 45° .

Além disso, segundo o modelo teórico estes modos de 236 Hz são bem mais amortecidos do que os seis primeiros, porque o fator de amortecimento destes é quase dez vezes maior que o fator de amortecimento dos seis primeiros.

Para simular o sistema com velocidade angular, as equações do movimento (Eq. (3.35) foram integradas numericamente utilizando o método de Newmark-Newton-Rapson com passo de tempo constante, $dt = 0,001$ s, calculando então os deslocamentos, as velocidades e acelerações de cada grau de liberdade.

Entretanto, durante as simulações foi verificado que o integrador não convergia para certas velocidades angulares, uma vez que as amplitudes dos graus de liberdade se tornavam muito grandes, o que gerou uma suspeita que o sistema fosse instável nessas velocidades.

Para um sistema invariante no tempo é possível determinar se um sistema é instável se a parte real de pelo menos um de seus autovalores é maior do que zero. Como foi ressaltado por Bir (2008), esta técnica aplicada em sistemas variantes no tempo pode levar a resultados equivocados. Então, surge a necessidade de aplicar outras técnicas, como por exemplo a transformação de coordenadas multi-pás ou a teoria de Floquet. Sabendo disto, quatro formas diferentes foram analisadas:

- i.* Foi analisada a parte real dos autovalores do sistema para a média das matrizes da Eq. (3.35) para 100 posições angulares diferentes;
- ii.* É análogo ao teste *i*, mas as matrizes foram passadas para o referencial inercial utilizando a transformação de coordenadas multi-pás;
- iii.* Calcular os expoentes característicos utilizando a teoria de Floquet com as matrizes da equação do movimento da forma da Eq. (3.35), ou seja, com os graus de liberdade do rotor definidos no referencial inercial e os graus de liberdade das palhetas definidos no referencial rotativo;
- iv.* Os expoentes característicos foram determinados pela teoria de Floquet, mas antes os graus de liberdade foram todos projetados no referencial inercial pela transformação de coordenadas multi-pás.

Os quatro testes foram feitos para velocidades entre 20 RPM e 3000 RPM, com um passo de 20 RPM. Para o primeiro caso, o mapa de estabilidade, que mostra o maior autovalor em função da velocidade angular está na Fig. 5.2(a). É possível ver que neste caso todos os autovalores possuem parte real menor ou igual a zero, portanto esta análise indica que o sistema é estável para a banda de velocidades estudada. Estes resultados não estão de acordo com o mapa de estabilidade obtido para o segundo caso, veja Fig. 5.2(b). Neste teste, no qual também foi feita a média das matrizes para diferentes posições angulares, mas com os graus de liberdade definidos no referencial inercial, é identificada uma região de instabilidade entre as velocidades de 1920 RPM e 2820 RPM.

Ao determinar os expoentes característicos através da teoria de Floquet, também foi observado para estas velocidades os expoentes tinham parte real positiva, o que caracteriza um sistema instável, como é possível observar nas Figs. 5.2(c) e 5.2(d) que representam os mapas de instabilidade para os casos *iii* e *iv*, respectivamente.

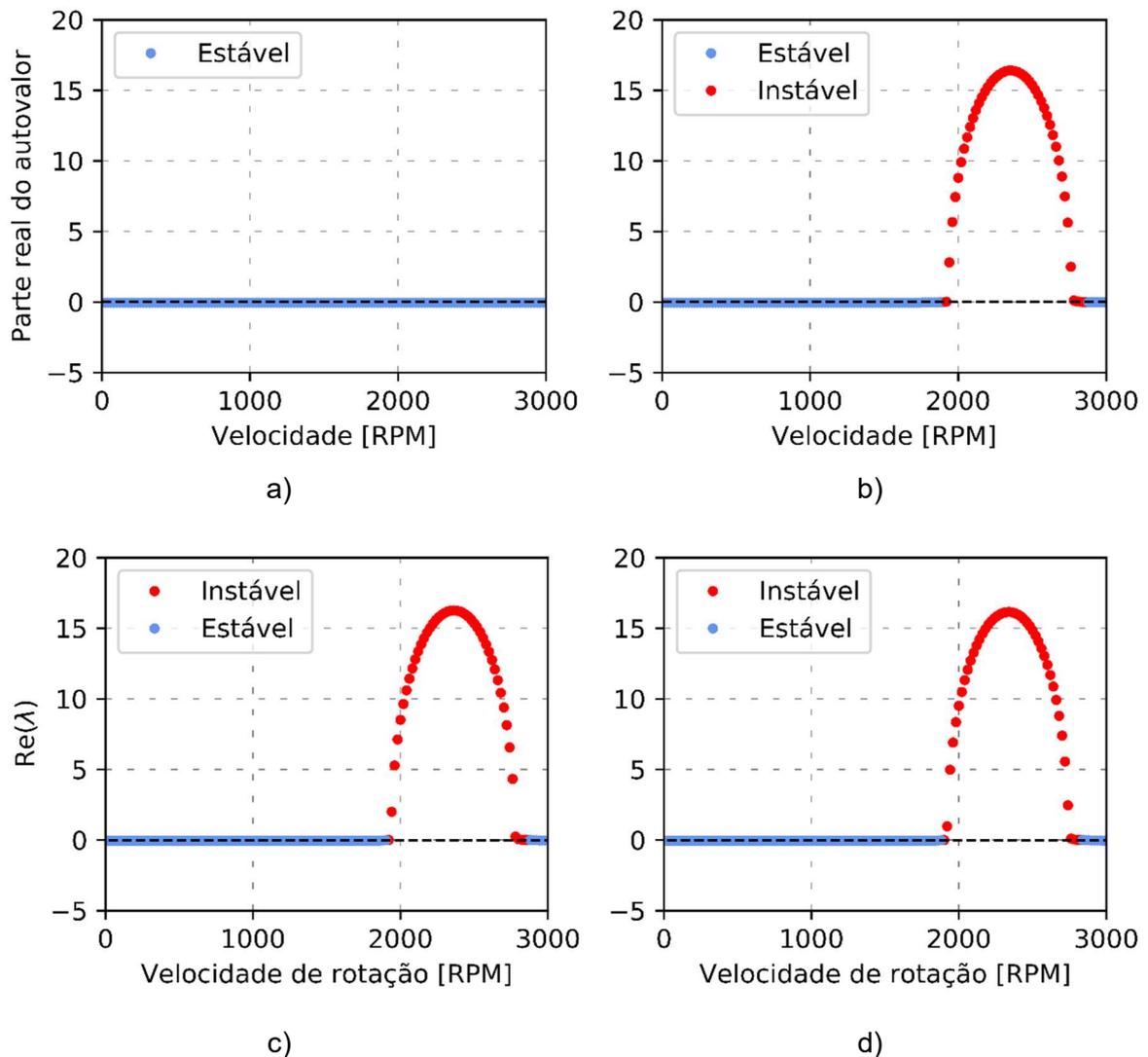


Figura 5.2 - Mapas de instabilidade para a) caso *i*; b) caso *ii*; c) caso *iii*; d) caso *iv*.

Para realizar a aproximação da matriz de transição, como explicado no capítulo três, o período foi dividido em 128 intervalos nos quais o sistema foi considerado invariante.

É possível verificar estes mapas de instabilidade ao simular as repostas temporais do sistema e estudar o comportamento da amplitude dos deslocamentos. Caso as repostas de vibração aumentem indefinidamente com o tempo, o sistema é instável.

Então o sistema foi simulado para várias velocidades, sendo que serão mostradas as repostas com o sistema rodando a 1500 RPM, 3000 RPM, 2000 RPM e 2700 RPM. Para as duas primeiras velocidades, o sistema sempre foi estável para todos os casos testados, seja pelos autovalores das médias das matrizes para diferentes posições angulares ou para os expoentes característicos. Pelas repostas temporais do sistema para as duas primeiras velocidades, que estão mostradas nas Figs. 5.3 e 5.4, respectivamente, é possível dizer que o sistema nestas condições é de fato estável.

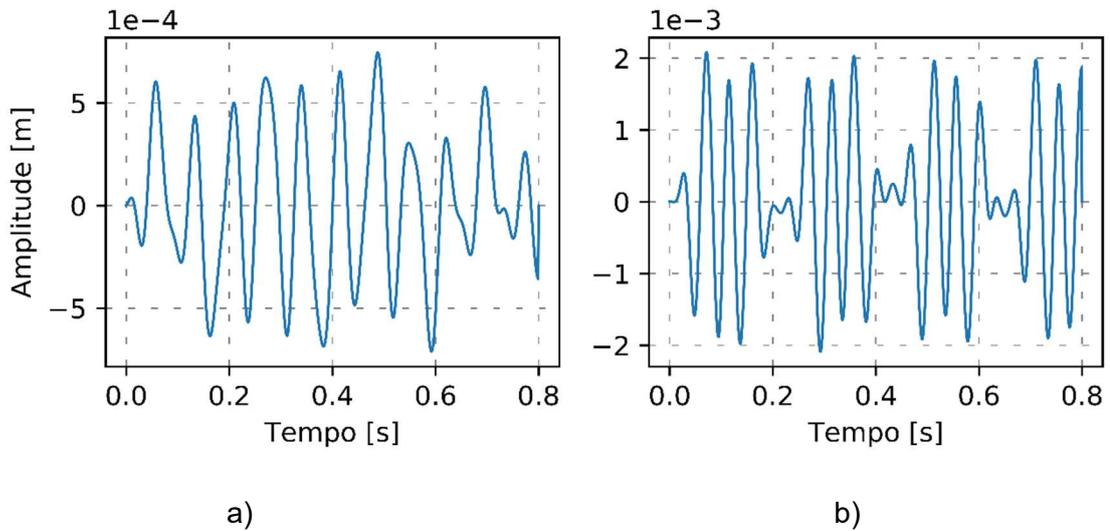


Figura 5.3 - Respostas temporais para 1500 RPM: a) deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta 1.

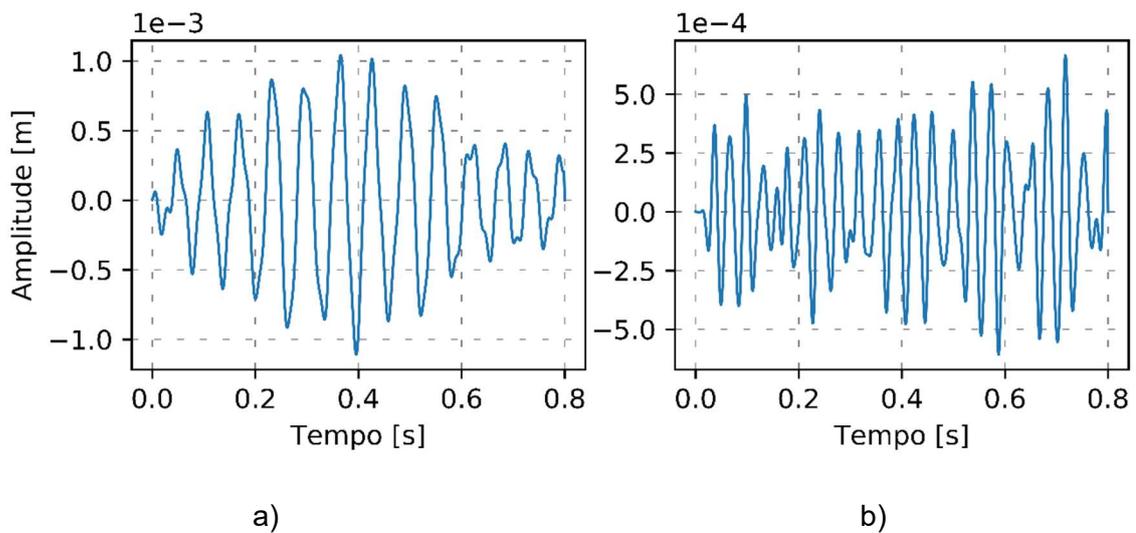


Figura 5.4 - Respostas temporais para 3000 RPM: a) deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta 1.

Apenas estão ilustrados os deslocamentos do rotor na direção horizontal e o deslocamento na ponta da palheta 1, mas é importante ressaltar que os deslocamentos de todos os graus de liberdade seguiram este mesmo padrão de comportamento.

Já para as outras duas velocidades, 2000 RPM e 2700 RPM, observa-se claramente pelas Figs. 5.5 e 5.6 que as amplitudes aumentam indefinidamente com o tempo, portanto, para estas velocidades, o sistema é instável.

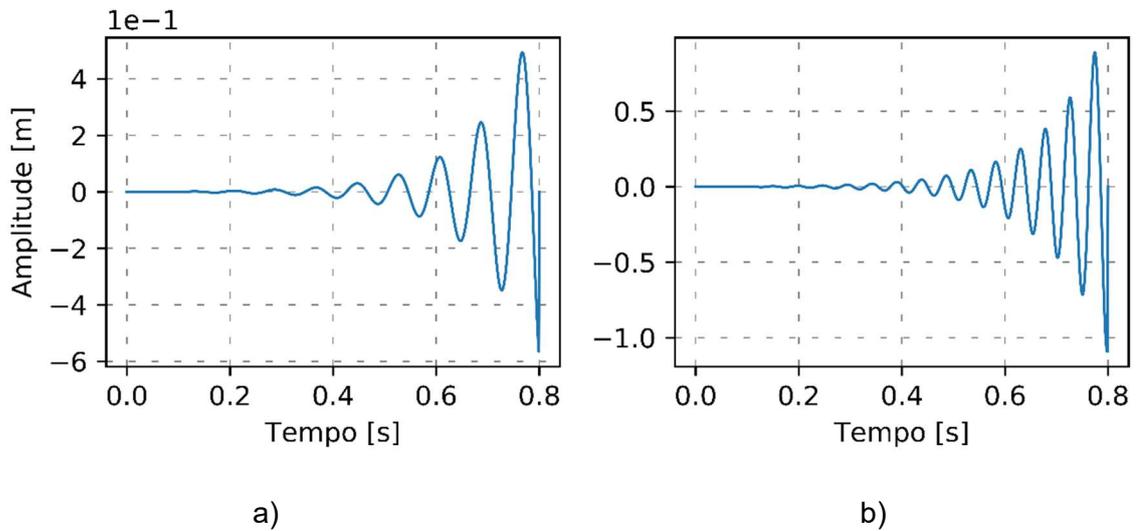


Figura 5.5 - Respostas temporais para 2000 RPM: a) deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta 1.

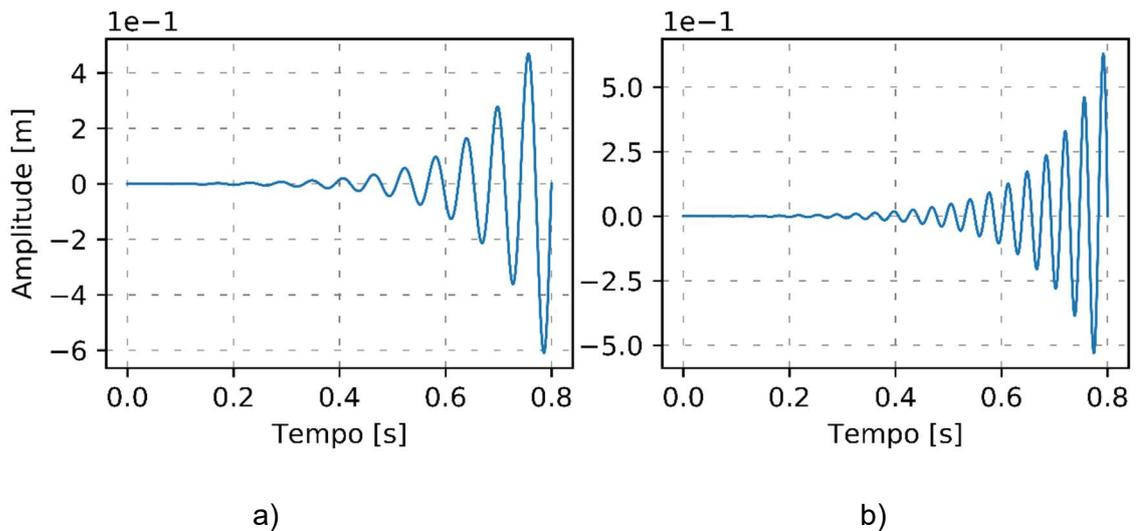


Figura 5.6 - Respostas temporais para 2700 RPM: a) deslocamento do rotor na direção horizontal e b) deslocamento da ponta da palheta 1.

Logo é evidente que o estudo da parte real dos autovalores das matrizes quando os graus de liberdade estão definidos em referenciais diferentes (inercial e rotativo) levará a resultados equivocados mesmo calculando a média das matrizes para diferentes posições angulares. É interessante que quando este mesmo procedimento é feito para as matrizes projetadas no referencial inercial é possível classificar corretamente o sistema quanto a instabilidade. Vale a pena salientar que as respostas no tempo foram conferidas para todas as velocidades da região instável da Fig. 5.2, e todas apresentaram o aumento das amplitudes como as Figs. 5.5 e 5.6.

Assim, novas simulações foram feitas, mas dessa vez com velocidades nas quais o sistema é estável, entre 0 RPM e 250 RPM, que é a banda de velocidades utilizadas nos experimentos. Para estas velocidades, o sistema foi simulado durante 100 segundos para que entrasse em regime permanente. Neste instante (100 segundos) foi aplicada uma força impulsiva na direção horizontal do rotor e a simulação continuou por mais 100 segundos, portanto até 200 segundos. Os deslocamentos calculados a partir a aplicação do impacto até o final foram passados para o domínio da frequência através da transformada de Fourier e normalizados. Ao realizar este processo para as velocidades citadas, que foram mantidas constantes, é possível construir os diagramas de cascata (Fig. 5.7), permitindo assim observar o comportamento das frequências do sistema em função da velocidade de rotação.

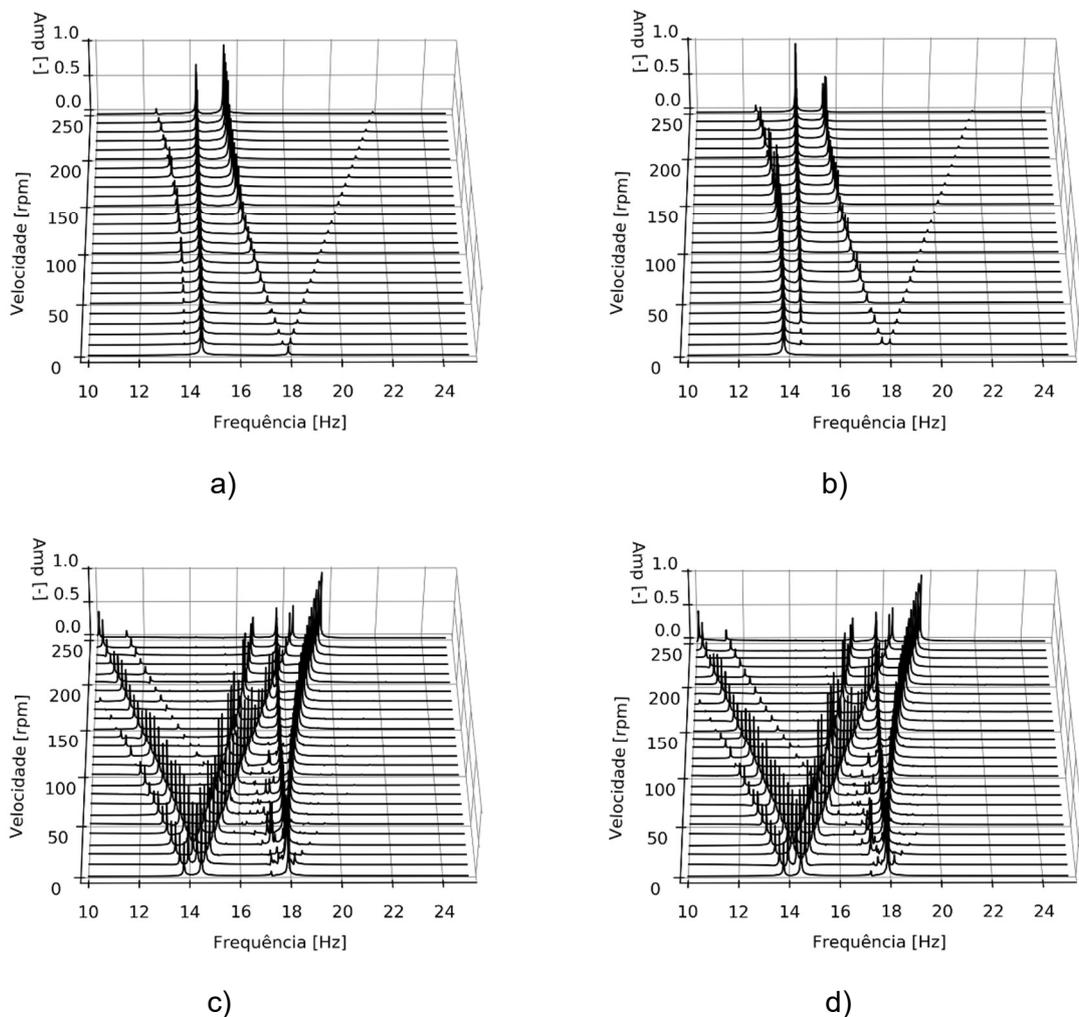


Figura 5.7 - Diagrama cascata construído: a) rotor-direção horizontal; b) rotor-direção vertical; c) extremidade da palheta 1; d) extremidade da palheta 2.

Como as frequências naturais dos seis primeiros modos estavam entre 10 Hz e 24 Hz, foi dado um enfoque para esta banda na análise. Para os diagramas obtidos a partir dos deslocamentos do rotor, Figs. 5.7(a) e 5.7(b), nota-se que há uma série de picos constantes próximos à 13,7 Hz e 14,4 Hz, que são as frequências cujos modos de vibrar apresentam movimento predominante do rotor. Já para as frequências dos modos das palhetas, localizadas na banda entre 17 Hz e 18 Hz, observa-se uma bifurcação em V, onde os picos são combinações entre as frequências naturais das palhetas e a velocidade de rotação. Estas frequências, referidas como frequências paramétricas, são vistas no espectro, devido ao acoplamento dos movimentos do rotor e das palhetas. E ainda, uma terceira característica pode ser vista. Em velocidades próximas a 200 RPM uma das frequências paramétricas das palhetas aproxima-se bastante das frequências do modo do rotor de forma que surge um efeito chamado *veering*, onde há uma interação entre os modos nessa região. Contudo, não há o cruzamento entre as frequências. Segundo Christensen (2004), este efeito é importante ao fazer o controle de vibração destes sistemas.

Agora, ao analisar os diagramas de cascata construídos a partir dos graus de liberdade das extremidades das palhetas 1 e 2, mostrados nas Figs. 5.7(c) e 5.7(d), verifica-se um comportamento diferente. As frequências paramétricas estão relacionadas com os modos de vibrar do rotor, $13,7 \pm \Omega$ e $14,4 \pm \Omega$, enquanto é evidente que as frequências dos modos de vibrar das palhetas, entre 17 Hz e 18 Hz, aumentam com a velocidade de rotação, seguindo uma tendência aproximadamente parabólica. Este aumento das frequências com a velocidade angular é que caracteriza o enrijecimento centrífugo, que foi introduzido no modelo devido a inclusão dos termos não lineares de segunda ordem no cálculo das deformações das palhetas.

Este comportamento observado nas respostas temporais também é visto ao realizar uma análise modal teórica na estrutura. Neste trabalho foi escolhido a transformação de coordenadas multi-pás para realizar a análise modal. Além de sua simplicidade, o método apresenta menor custo computacional em relação a teoria de Floquet e não requer a solução do problema da indeterminação associada ao logaritmo de um número complexo. Para isso, o procedimento será o mesmo que foi feito para a determinação das regiões de estabilidade.

Foram escolhidas cem posições angulares diferentes, isto é, 100 valores entre 0 e 2π e as matrizes da equação do movimento após a transformação de coordenadas foram determinadas para cada uma destas posições angulares. Feito isto, a média das cem matrizes é computada; o módulo dos autovalores representa as frequências naturais do sistema. As evoluções destas frequências em função da velocidade estão mostradas na Fig. 5.8(a).

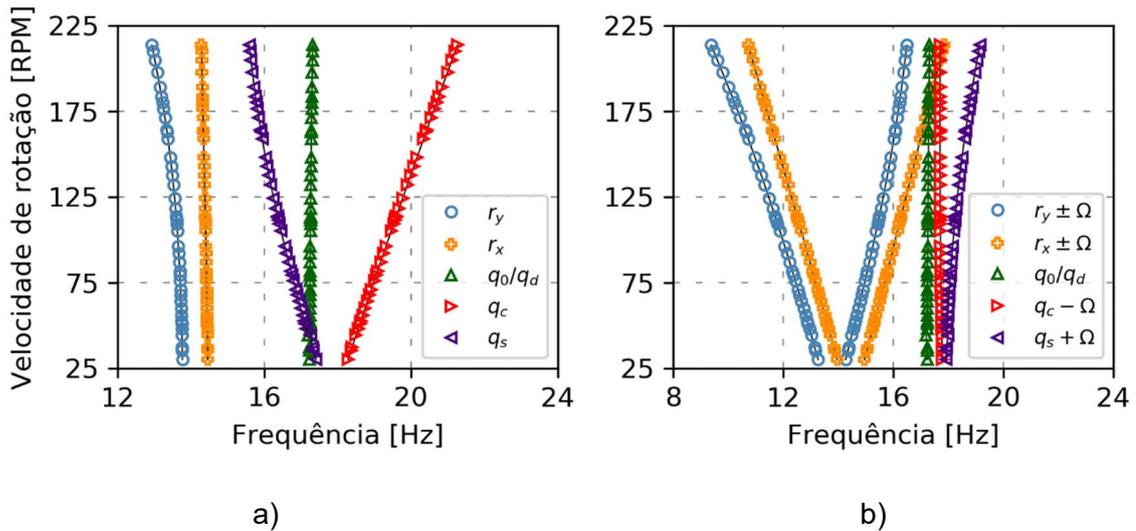


Figura 5.8 - Frequências determinadas através da transformação de coordenadas multi-pás:
a) referencial inercial; b) referencial rotativo.

Na Fig. 5.8(a) é possível verificar de fato um comportamento semelhante ao mostrado nos diagramas cascata construídos a partir dos graus de liberdade do rotor. Ao recordar a transformação de coordenadas, pela Eq. (3.82), é possível verificar que os graus de liberdade das palhetas são descritos a partir de quatro novos graus de liberdade que representam o movimento delas como um todo. Ainda, as frequências destes novos modos podem ser comparadas com as frequências naturais das palhetas isoladas. Os modos coletivo e diferencial, q_0 e q_d , tem frequência igual a das palhetas isoladas, enquanto o modo progressivo, q_c , tem frequência de aproximadamente a frequência da palheta isolada mais a velocidade de rotação e o modo regressivo, q_s , terá frequência que é a frequência da palheta isolada menos a velocidade angular.

Sabendo desta relação entre as frequências, foi feita uma intervenção nos resultados com o objetivo de estimar as frequências naturais do sistema medidas no referencial rotativo através da análise modal. Para tanto, as frequências do modo regressivo foram acrescidas da velocidade de rotação e subtraiu-se a velocidade de rotação das frequências do modo progressivo, além de adicionar $\pm \Omega$ as frequências ligadas aos modos do rotor. Dessa forma, é possível construir um diagrama mostrado na Fig. 5.8(b), que se assemelha muito aos picos observados nas Figs. 5.7(c) e 5.7(d). Uma característica observada é que no referencial rotativo as frequências do modo progressivo e regressivo não são idênticas. De certa forma, para o sistema estudado, isso faz sentido, uma vez que as quatro palhetas não estão isoladas, mas sim acopladas pelo rotor.

5.2 Resultados experimentais

As simulações computacionais do modelo matemático mostraram algumas características do sistema rotor-palhetas que estão condizentes com os efeitos dinâmicos descritos na literatura. Agora, nesta seção, serão apresentados os resultados coletados a partir dos experimentos feitos na bancada experimental apresentada. Os primeiros experimentos foram feitos para o rotor em repouso, isto é, com velocidade angular igual a zero, $\Omega = 0$. Tal como nas simulações, foram consideradas duas posições angulares, $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$. Durante os experimentos, com resolução em frequência de aproximadamente 0,029 Hz, percebeu-se que apenas os primeiros seis modos foram excitados. Assim, na necessidade de melhorar o cálculo dos estimadores das FRFs, todos os sinais coletados passaram por um filtro passa-banda entre 10 Hz e 24 Hz. Na Tab. 5.2 estão as frequências naturais identificadas pelos picos das amplitudes do estimador H_2 das FRFs e os fatores de amortecimento. Para determinar os fatores de amortecimento foi utilizada a regra do decaimento de 3 dB nas amplitudes nos picos, descrita por Inman (2014).

Tabela 5.2 - Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para os primeiros seis modos de vibrar do sistema em repouso - $\Omega = 0$.

Modos	Frequência natural [Hz]		Fator de amortecimento	
	0°	45°	0°	45°
1°	13,76	13,76	0,0171	0,0149
2°	14,46	14,46	0,0055	0,0059
3°	17,15	17,15	0,0037	0,0037
4°	-	-	-	-
5°	17,89	17,89	0,0031	0,0036
6°	-	18,00	-	0,0177

Quatro frequências foram identificadas pelas FRFs com o rotor a 0° : 13,76 Hz, 14,46 Hz, 17,15 Hz e 17,89 Hz. Todas estão próximas das previstas pelo modelo. No entanto, a frequência em torno de 18,0 Hz não foi identificada para este experimento, o que não aconteceu quando o experimento foi feito com o rotor na posição angular de 45° . Neste caso, foi possível identificar uma frequência no pico a 18,0 Hz. Já os valores estimados para os fatores de amortecimento são um pouco discrepantes do modelo, fato que de certa forma é esperado, principalmente devido ao uso das janelas na estimação das FRFs, que podem introduzir erros de vazamento.

As Figs. 5.9 a 5.12 mostram as amplitudes e as fases para o estimador H_2 das FRFs, bem como a coerência, para as medições na direção horizontal do rotor, r_x , direção vertical do rotor, r_y , na palheta 1, p_1 , e na palheta 2, p_2 , para as duas posições angulares $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$.

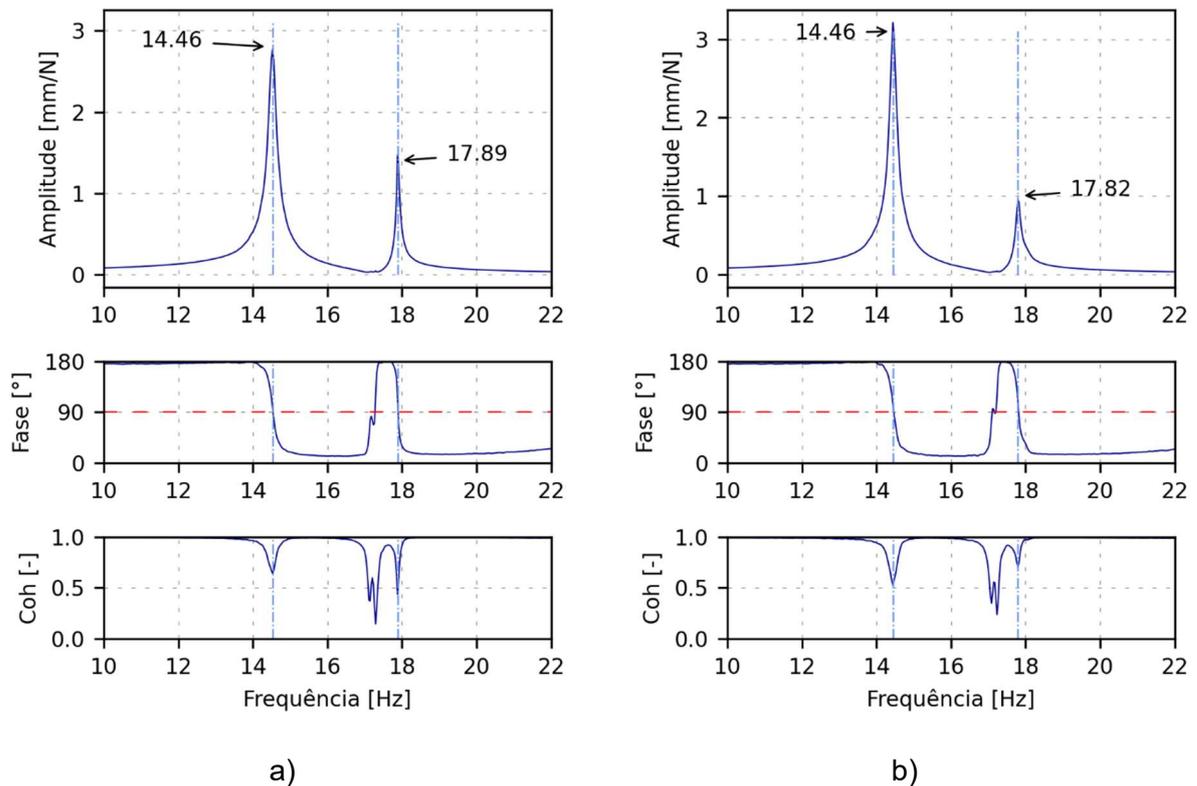


Figura 5.9 - FRFs e coerências para r_x : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$.

É possível notar que na direção horizontal do rotor as FRF estimadas para ambas as posições angulares são bem próximas, onde o pico em 14,46 Hz é predominante. Já para a FRF na direção vertical do rotor é possível observar um pico em 13,76 Hz, que pelo modelo matemático é a frequência natural do modo de vibrar onde há uma grande amplitude do movimento do rotor na vertical. Para este grau de liberdade, verifica-se uma diferença interessante, pois para $\theta = 45^\circ$ há um pico em 18,0 Hz, que não aparece para o rotor a $\theta = 0^\circ$. Esta mesma diferença também é notada nas FRFs da palheta 2. A respeito da palheta 1, não se nota grandes alterações quanto aos picos, mas é possível observar alterações de amplitude para $\theta = 45^\circ$, possivelmente pelo fato de que a palheta não estar mais na mesma direção da excitação. As FRF para as palhetas 3 e 4 não são ilustradas, mas elas são idênticas as das palhetas 1 e 2, exceto pela defasagem de 180° devido ao posicionamento dos sensores.

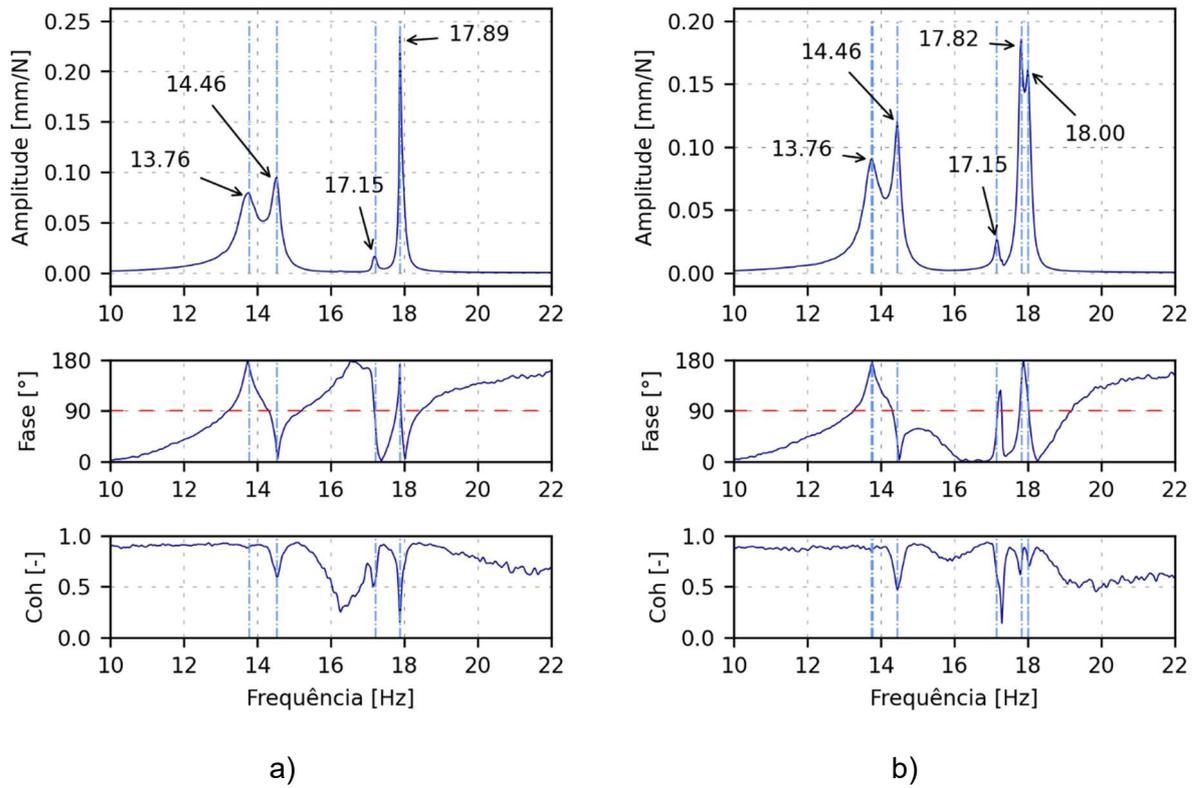


Figura 5.10 - FRFs e coerências para r_y : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$.

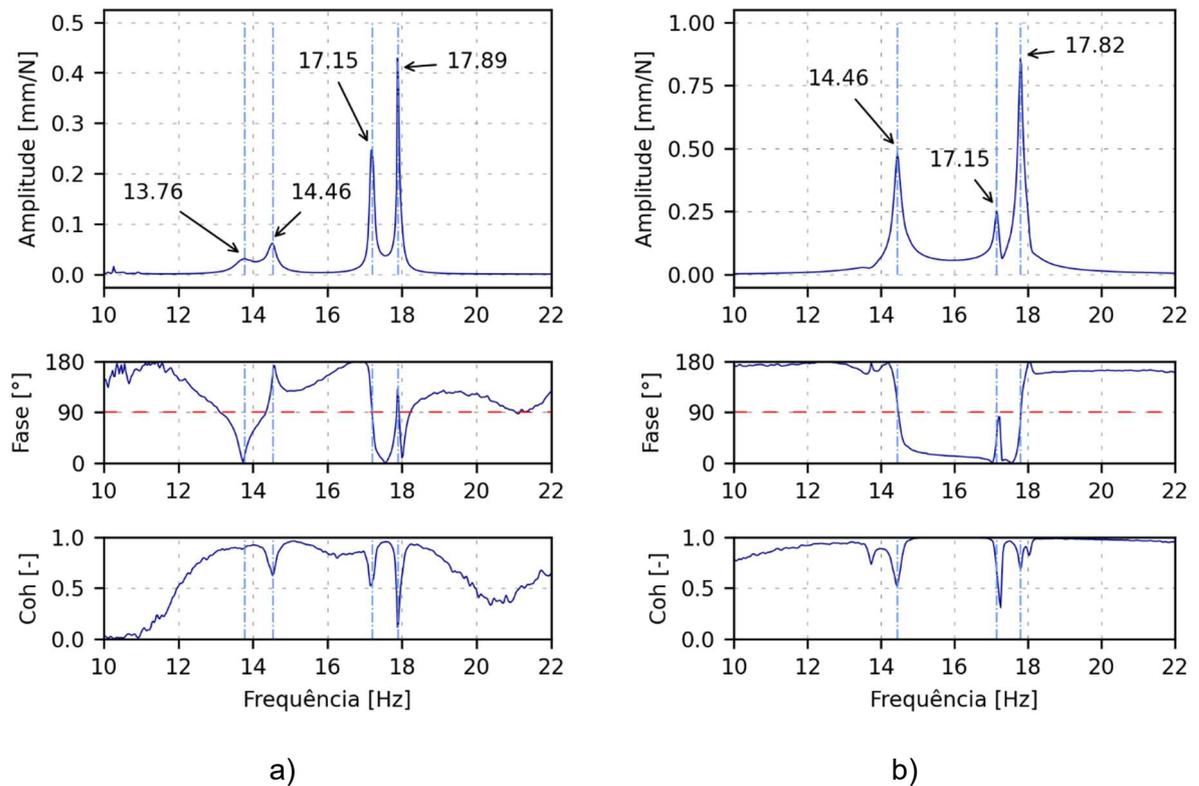


Figura 5.11 - FRFs e coerências para p_r : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$.

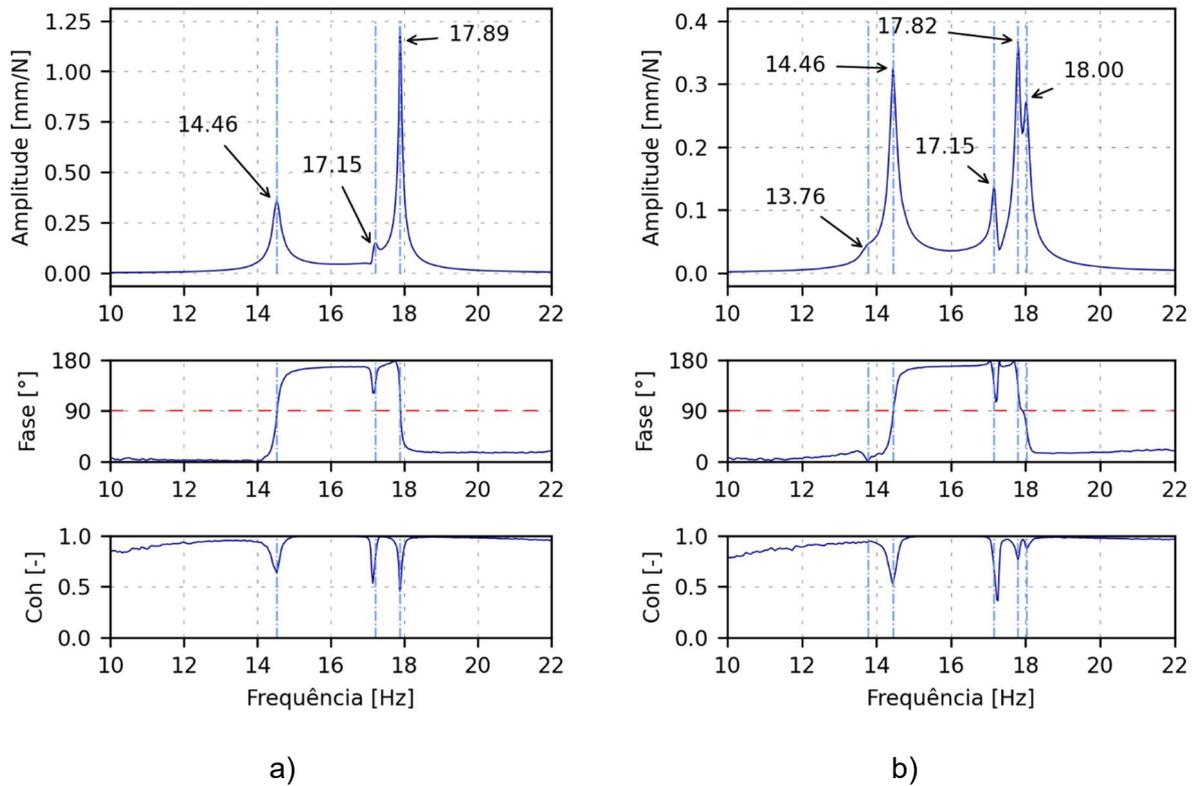


Figura 5.12 - FRFs e coerências para p_2 : a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$.

A partir dos estimadores das FRFs ainda foram extraídos os modos de vibrar, que estão ilustrados na Fig. 5.13 para as duas posições angulares estudadas. Observa-se que de fato os modos a 13,76 Hz e a 14,46 Hz são modos cujo movimento do rotor é predominante nas direções vertical e horizontal, respectivamente. Nos modos de 17,15 Hz e 17,89 Hz para o rotor a $\theta = 0^\circ$ e nos modos de 17,15 Hz, 17,82 Hz e 18,00 Hz para $\theta = 45^\circ$ o acoplamento entre os corpos é mais visível.

Todas as FRFs mostradas nas Figs. 5.9 a 5.12 e os modos de vibrar da Fig. 5.13 foram estimados a partir das medições feitas sem a correia dentada que conecta o rotor ao motor elétrico. Durante a realização dos experimentos, foi verificado que, para o rotor em repouso, esta correia influencia bastante as respostas, o que é possível ver na Fig. 5.14, que ilustra as FRFs obtidas a partir das medições na direção horizontal do rotor e da palheta 1. As frequências correspondentes aos picos são maiores que para o sistema sem a correia, portanto, provavelmente a correia introduz uma rigidez no sistema. Um outro ponto interessante é que o pico cuja frequência é 18,72 Hz é mais achatado que os picos das FRFs sem a correia nesta faixa de 18 Hz, logo isso indica que a correia também adiciona um amortecimento no sistema. Esta diferença no comportamento das frequências foi notada de uma forma mais evidente para o rotor em repouso do que quando o rotor estava girando.

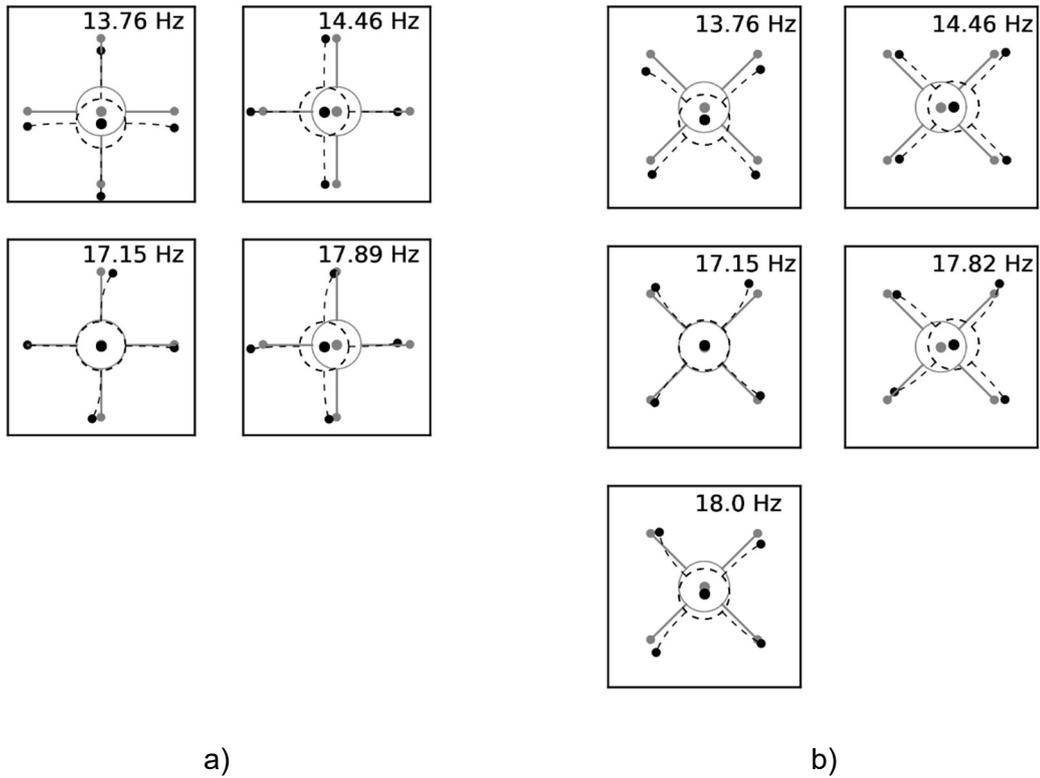


Figura 5.13 - Modos de vibrar experimentais para o rotor em repouso: a) $\theta = 0^\circ$; b) $\theta = 45^\circ$.

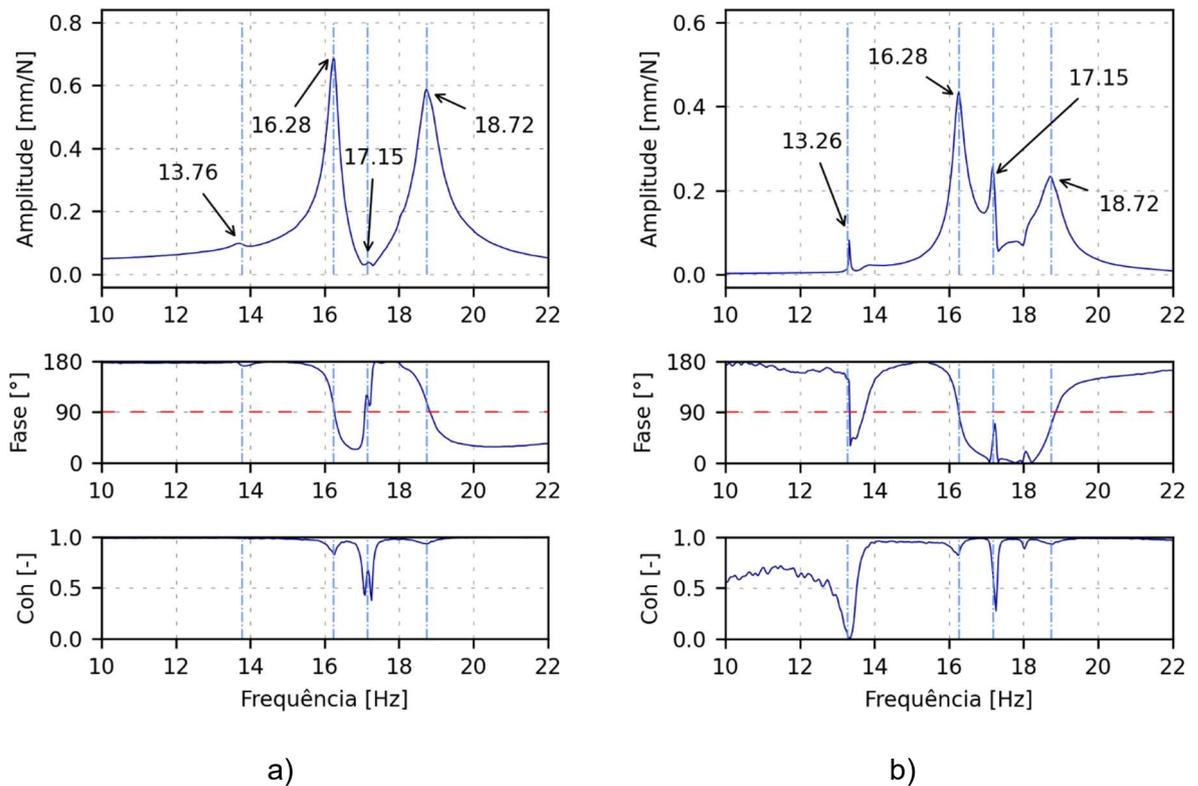


Figura 5.14 - FRFs e coerências para o rotor ($\theta = 45^\circ$) com a correia para: a) r_x ; b) p_1 .

Pelos resultados já mostrados para o rotor em repouso, aparentemente, os parâmetros obtidos experimentalmente estão próximos dos fornecidos pelo modelo. Agora serão apresentadas as FRFs estimadas com o sistema em operação. A velocidade do rotor foi controlada através da voltagem do motor no qual era acoplado, sendo que foram feitos 35 testes com as voltagens variando entre 3,0 V e 6,4 V. Para cada experimento, a voltagem foi mantida constante, logo a velocidade teoricamente também é constante. Mesmo assim, foram observadas algumas pequenas flutuações na voltagem, portanto não foi possível garantir que a velocidade sempre foi constante. O procedimento feito para estimar a velocidade de rotação e a posição angular do rotor está ilustrado na Fig. 5.15.

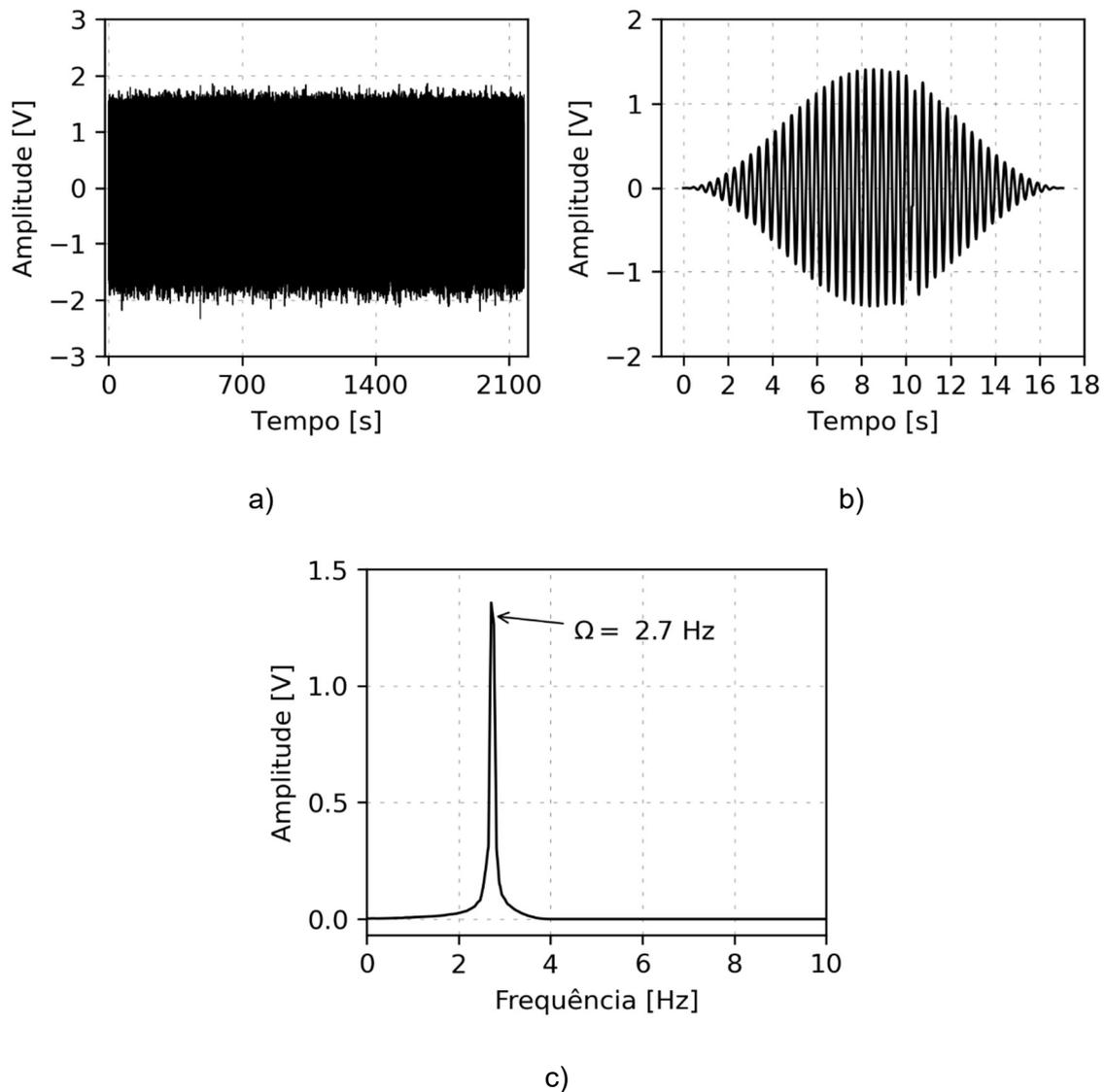


Figura 5.15 - Procedimento para estimar a velocidade angular do sistema.

O sinal medido em uma das palhetas, veja a Fig. 5.15(a), é dividido em blocos, tal como no cálculo dos estimadores das FRFs. Um dos blocos é selecionado, é janelado para reduzir os erros de vazamento e é filtrado em um filtro passa baixa com frequência de corte de 4 Hz. O bloco filtrado está mostrado na Fig. 5.15(b). A frequência de 4 Hz foi escolhida como frequência de corte, pois o sinal nesta banda contém apenas as excitações devido a gravidade, portanto pode-se utilizá-lo para estimar a posição angular da palheta em que o sinal foi medido. Devido ao fato de o sistema estar girando, a excitação por causa da gravidade apresenta uma frequência que será próxima da velocidade de rotação. Então o sinal da Fig. 5.17(b) é passado para o domínio da frequência através da transformada de Fourier e a frequência correspondente ao valor do pico observado é utilizada como uma estimativa da velocidade de rotação, o que é mostrado na Fig. 5.17(c). Este procedimento foi feito para todos os experimentos, tal que as velocidades estimadas estão entre 0,88 Hz e 3,56 Hz, ou 53 RPM e 215 RPM. As velocidades foram baixas por causa da eletrônica embarcada no disco, caso o rotor rodasse muito rápido haveria o risco da quebra dos componentes.

Outro fator que deve ser destacado é que, de acordo com Christensen (2004), realizar as medições com velocidades angulares é desafiador, pois a excitação é feita em relação ao referencial inercial enquanto os deslocamentos das palhetas são medidos no referencial rotativo. Isto significa que as palhetas serão excitadas por forças dependentes da rotação. A fim de tentar estimar as FRFs das palhetas com melhor qualidade, a força de excitação produzida pelo *shaker* foi projetada no referencial rotativo utilizando a posição angular aproximada (veja Fig. 5.15(b)), sendo que foi utilizada a componente que possui mesma direção dos deslocamentos das palhetas. Portanto, seria inadequado utilizar o termo FRF para definir estas respostas uma vez que não representam a relação entre a saída e a entrada do sistema, mas sim a relação entre a saída e a projeção da entrada na mesma direção da saída.

Dessa forma, nas Figs. 5.16 a 5.19 estão as respostas em frequência obtidas para as medições na direção horizontal do rotor, vertical do rotor, palheta 1 e palheta 2, respectivamente, para a velocidade angular $\Omega \approx 2,7$ Hz (162 RPM). Nas medições feitas na fundação, portanto em r_x e r_y , nota-se claramente que os picos referentes as frequências dos modos da fundação são praticamente as mesmas de quando o sistema estava em repouso. Ainda, observa-se as frequências paramétricas em 15,83 Hz e 20,49 Hz, que correspondem aproximadamente a $18,6 - \Omega$ e $17,9 + \Omega$, sendo que são observados picos nas frequências de 17,9 Hz e 18,6 Hz nas FRF estimadas a partir das medições realizadas nas palhetas. Nestas medições ainda é possível observar as frequências paramétricas relacionadas com os modos da fundação, $13,76 \pm \Omega$ e $14,46 \pm \Omega$ nas frequências: 10,81 Hz, 16,26 Hz, 11,21 Hz e 17,76 Hz.

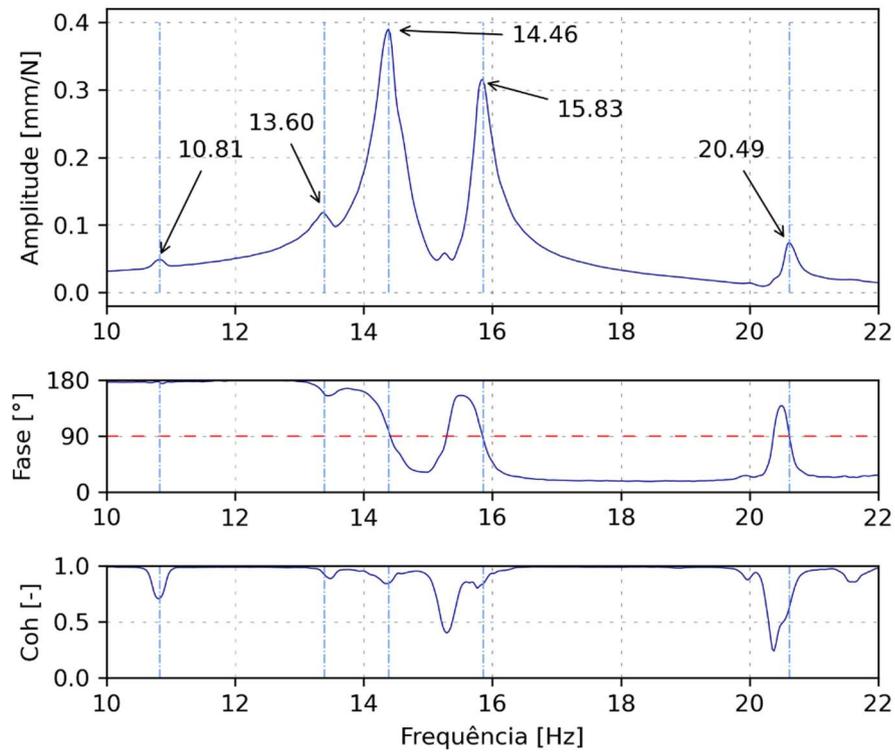


Figura 5.16 – Respostas em frequência para medições em r_x - $\Omega \approx 2,7$ Hz.

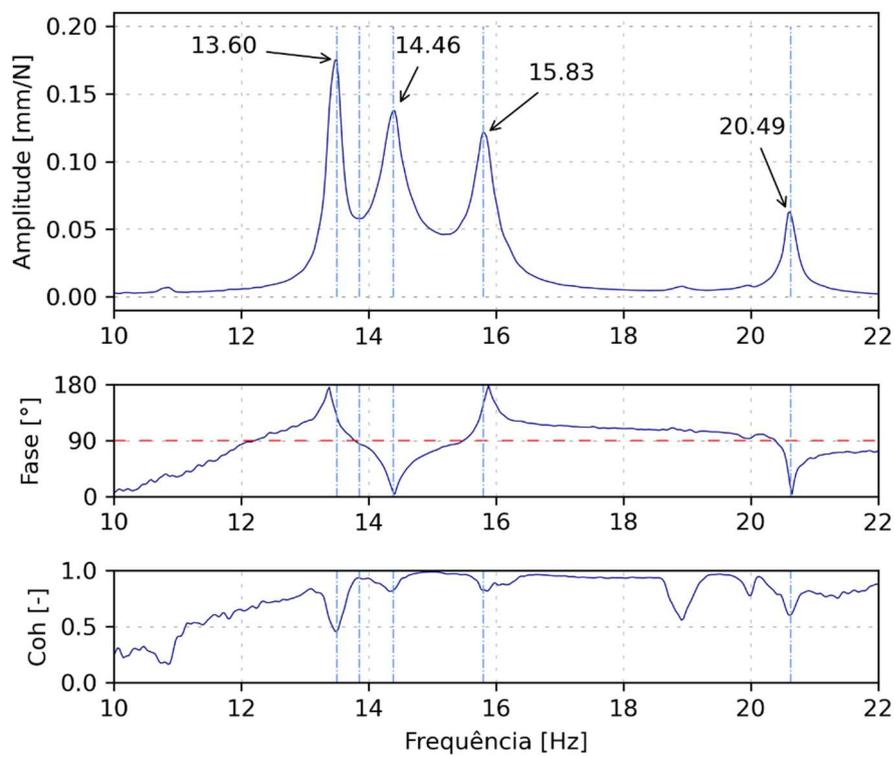


Figura 5.17 - Respostas em frequência para medições em r_y - $\Omega \approx 2,7$ Hz.

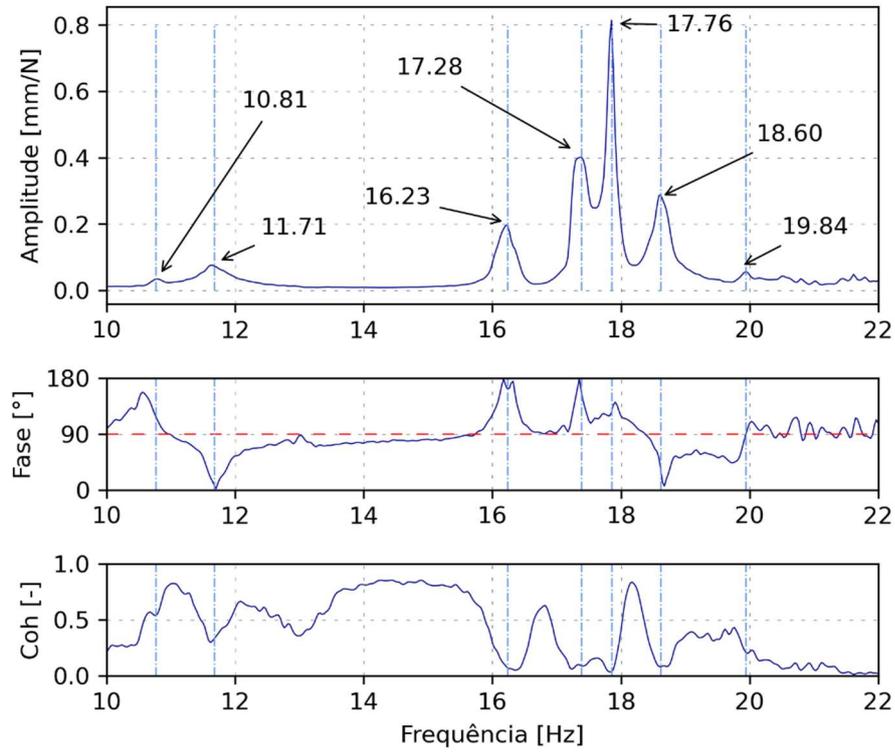


Figura 5.18 – Respostas em frequência para medições em $p_1 - \Omega \approx 2,7$ Hz.

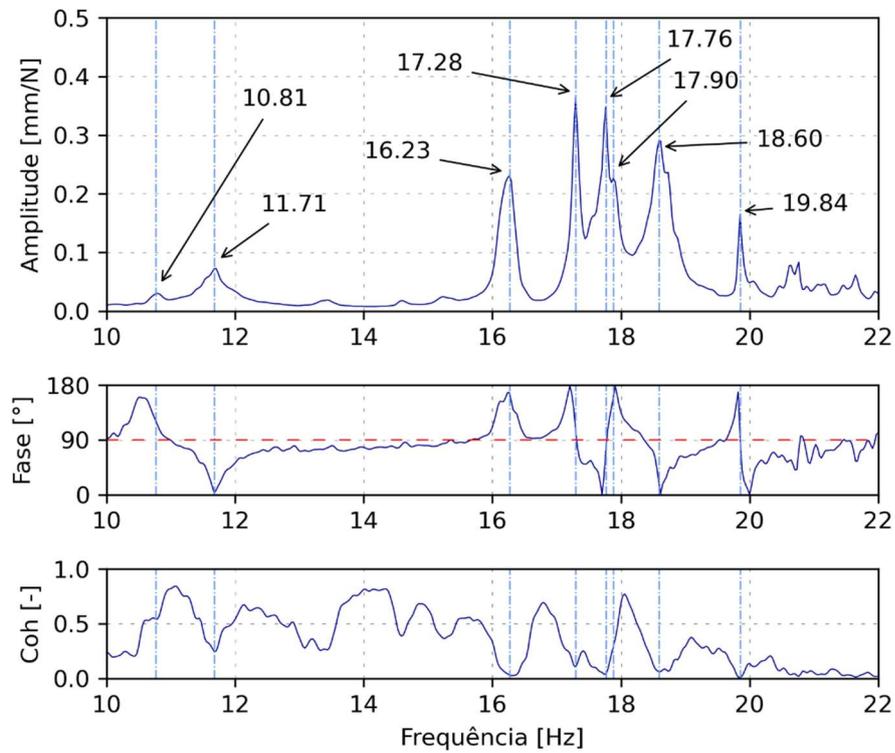


Figura 5.19 – Respostas em frequência para medições em $p_2 - \Omega \approx 2,7$ Hz.

Nas repostas do sistema com as medições dos deslocamentos nas palhetas é possível notar o enrijecimento centrífugo pois as frequências 17, 28 Hz, 17,90 Hz e 18,60 Hz que são relacionadas aos modos de vibrar das palhetas são maiores que as frequências dos modos das palhetas com o rotor em repouso (17,15 Hz, 17,79 Hz e 17,89 Hz). É possível observar com mais clareza este efeito nos diagramas cascata mostrados nas Figs. 5.20 até 5.23, construído para as respostas em frequência normalizadas entre as velocidades de 30 RPM e 225 RPM.

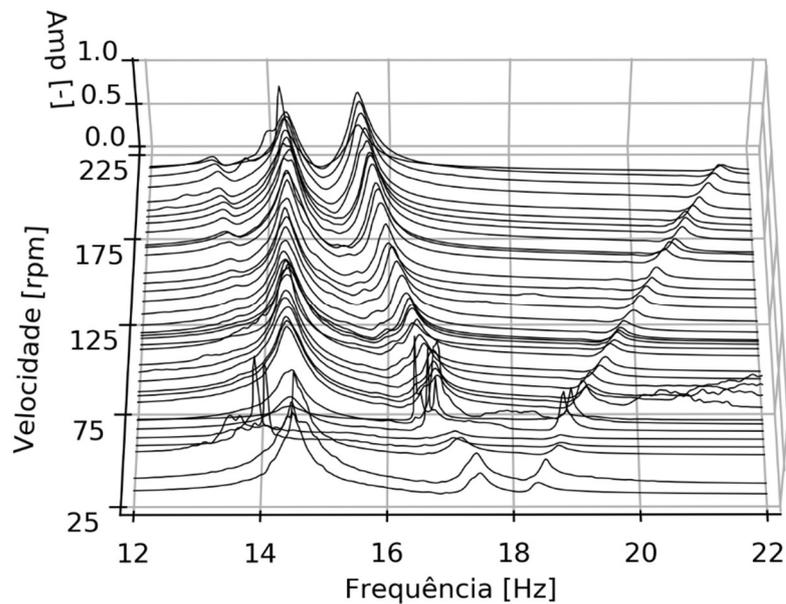


Figura 5.20 - Diagrama cascata para medições em r_x .

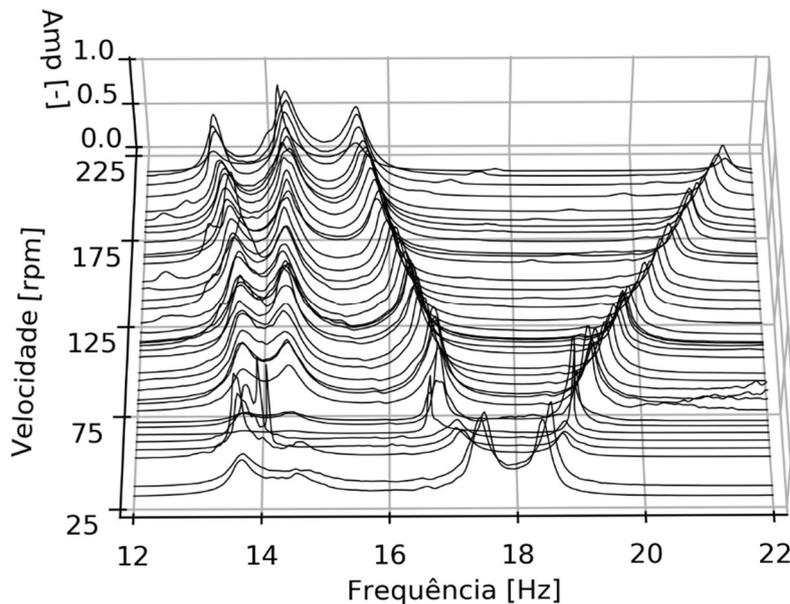


Figura 5.21 - Diagrama cascata para medições em r_y .

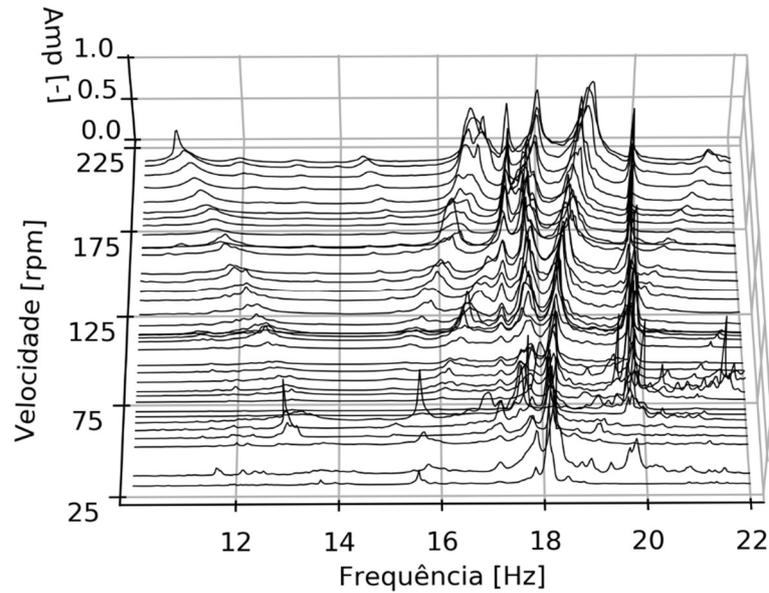


Figura 5.22 - Diagrama cascata para medições em p_1 .

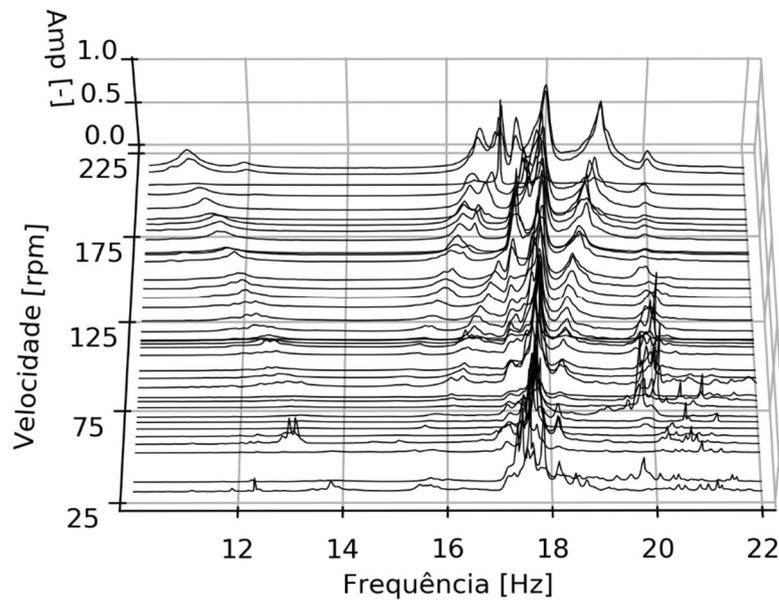


Figura 5.23 - Diagrama cascata para medições em p_2 .

Pelas Figs. 5.22 e 5.23 é observado que há um aumento das frequências dos modos das palhetas com o aumento da velocidade de rotação. Além disso, no diagrama cascata construído com os deslocamentos medidos na direção vertical do rotor, r_y , pode-se observar para velocidades próximas a 200 RPM o efeito do *veering* quando ocorre a interação entre um modo do rotor e um modo paramétrico das palhetas. Nessa região as frequências ficam próximas, mas as curvas não se cruzam. Outro ponto que deve ser ressaltado é o apareci-

mento de picos em frequências próximas a 20 Hz. Estas frequências não foram previstas no modelo matemático.

Como foi citado para o rotor em repouso, nas FRFs obtidas com o sistema parado, a correia que acopla o rotor ao motor influencia bastante as frequências naturais. Para o sistema com velocidade angular, o que se percebe é que, embora a correia fosse dentada, há o deslizamento da correia, principalmente quando as velocidades angulares do sistema eram mais baixas. Isto faz com que a correia vibre bastante, o que possivelmente afetou a qualidade dos experimentos para estas velocidades. A respeito das frequências, não houve diferença entre as frequências dos modos do rotor em relação ao modelo, diferença que é clara quando o rotor estava em repouso.

5.3 Comparação entre os resultados

Esta seção apresenta uma comparação entre os resultados das simulações numéricas e os obtidos experimentalmente. Para o sistema em repouso, as frequências naturais identificadas experimentalmente são próximas das frequências calculadas teoricamente para ambas as posições angulares, como é possível ver pela Tab. 5.3, na qual mostra que o maior erro relativo entre as frequências foi aproximadamente 0,6 %. Para $\theta = 45^\circ$ foi possível identificar um modo das palhetas a mais, pois provavelmente nesta posição angular a força foi capaz de excitar melhor as palhetas.

Tabela 5.3 - Comparação entre as frequências naturais [Hz] para o sistema em repouso.

Modos	$\theta = 0^\circ$			$\theta = 45^\circ$		
	Teórico (Hz)	Exp. (Hz)	Erro (%)	Teórico (Hz)	Exp. (Hz)	Erro (%)
1°	13,77	13,76	0,072	13,77	13,76	0,072
2°	14,46	14,46	0	14,46	14,46	0
3°	17,23	17,15	0,464	17,23	17,15	0,464
4°	17,24	-	-	17,23	-	-
5°	17,78	17,89	-	17,78	17,89	0,614
6°	17,90	17,89	0,055	17,89	18,00	0,611

Para os modos de vibrar, os resultados obtidos experimentalmente também estão de acordo com os modos de vibrar teóricos, sendo que os dois primeiros modos, 13,76 Hz e 14,46 Hz, com movimentos predominantes do rotor, enquanto nos outros três os movimentos das palhetas são bem evidentes, embora nos modos identificados experimentalmente há

uma maior contribuição do movimento do rotor. De forma geral, os resultados estão coerentes.

Entretanto, a proximidade entre os resultados experimentais e teóricos não é observada para os fatores de amortecimento, visto que os erros relativos chegam até 97%, como mostra a Tab. 5.4. Existem alguns fatores que podem explicar esta divergência. Primeiro, o modelo não foi ajustado, isto é, pode-se atualizar os valores das constantes β_1 e β_2 introduzidas na matriz do amortecimento proporcional, \mathbf{D} , de forma que os fatores de amortecimento teóricos fiquem mais condizentes com os obtidos experimentalmente. Um segundo ponto que não pode ser esquecido é a respeito ao tratamento dos sinais. Como o sistema foi excitado por uma força aleatória, ao realizar a passagem dos sinais diretamente para o domínio da frequência pelo algoritmo da FFT (*Fast Fourier Transform*), é muito provável que ocorra vazamento. Assim, os picos das FRFs ficam mais achatados, o que afeta a determinação dos fatores de amortecimento. Por isso, antes de aplicar a FFT, os sinais foram multiplicados por uma janela tal que a primeira e a última amostra do sinal fiquem iguais. Apesar de diminuir os erros de vazamento, a janela não os elimina, e ainda, altera a amplitude real do sinal. Portanto, os erros de vazamento estão presentes, embora um pouco reduzidos.

Tabela 5.4 - Comparação entre os fatores de amortecimento para o sistema em repouso.

Modos	$\theta = 0^\circ$			$\theta = 45^\circ$		
	Teo. ($\cdot 10^{-4}$)	Exp.	Erro (%)	Teo. ($\cdot 10^{-4}$)	Exp.	Erro (%)
1°	4,32	0,0171	97,47	4,32	0,0149	97,10
2°	4,54	0,0055	91,74	4,54	0,0059	92,30
3°	5,41	0,0037	85,37	5,41	0,0037	85,37
4°	5,41	-	-	5,41	-	-
5°	5,58	-	-	5,58	0,0036	84,50
6°	5,61	0,0031	82,00	5,62	0,0177	96,82

Os resultados obtidos para o sistema em operação também foram comparados. Como os modos de vibrar são variantes no tempo e periódicos, quando o sistema apresenta rotação, pelos erros introduzidos ao processar os sinais, e por medir os deslocamentos e aplicar a força em referenciais diferentes, apenas as frequências naturais serão comparadas. As frequências determinadas a partir da aplicação da transformação de coordenadas multi-pás é comparada com os picos das FRFs mostradas nos diagramas cascata. As Figs. 5.24(a) e 5.24(b) mostram os picos obtidos para as medições nas direções horizontal e ver-

tical do rotor, respectivamente, enquanto as Figs. 5.24(c) e 5.24(d) ilustram os picos extraídos das medições feitas nas palhetas 1 e 2.

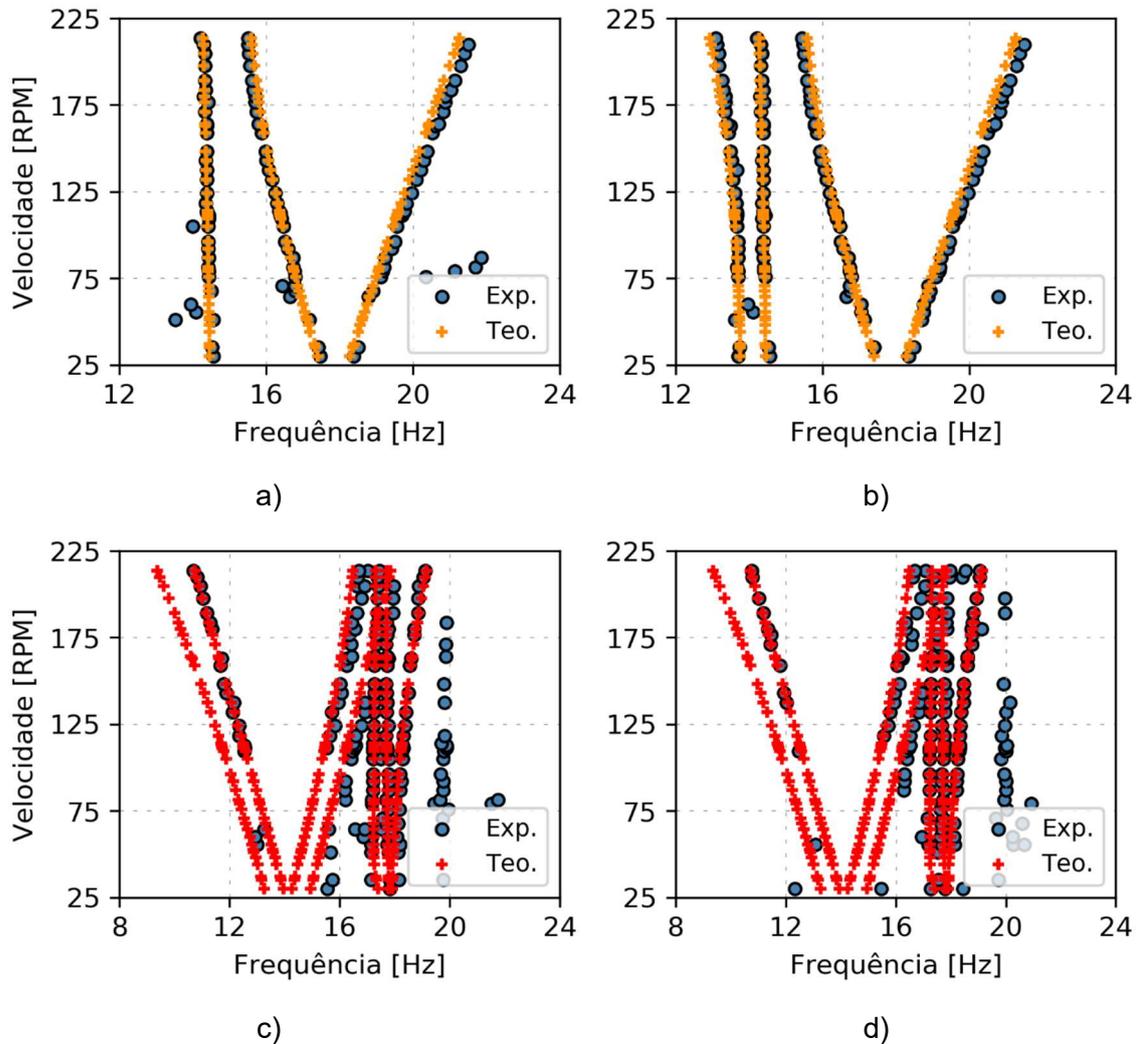


Figura 5.24 - Comparação entre as frequências naturais: a) r_x ; b) r_y ; c) p_1 ; d) p_2 .

Observa-se que as frequências previstas pelo modelo estão condizentes com os picos das respostas em frequência estimadas, principalmente em relação ao enrijecimento centrífugo. Veja nas Figs. 5.24(c) e 5.24(d) que as frequências aumentam com a velocidade angular. Há, contudo, a presença de picos em frequências próximas de 20 Hz, bem perceptíveis nas medições das palhetas, que não aparecem no modelo. Possivelmente são frequências de algum modo cujo grau de liberdade não foram considerados no modelo, como por exemplo os movimentos angulares do rotor.

Com a finalidade de ressaltar esta comparação foi calculado o erro relativo entre as frequências identificadas a partir das medições na direção vertical do rotor e das frequências

calculadas pelo modelo (veja a Fig. 5.24(b)). Os erros para as quatro frequências, duas do rotor e as paramétricas das palhetas calculados para todas as velocidades angulares estão mostrados nas Figs.5.25(a) a 5.25(d), respectivamente. Os erros relativos são maiores do que os obtidos para o sistema em repouso, mas continuam baixos, uma vez que as médias dos erros para todas as velocidades, dispostas na Tab. 5.5, estão na casa dos 2%. Com esses resultados é possível dizer que o modelo matemático está coerente com os resultados experimentais.

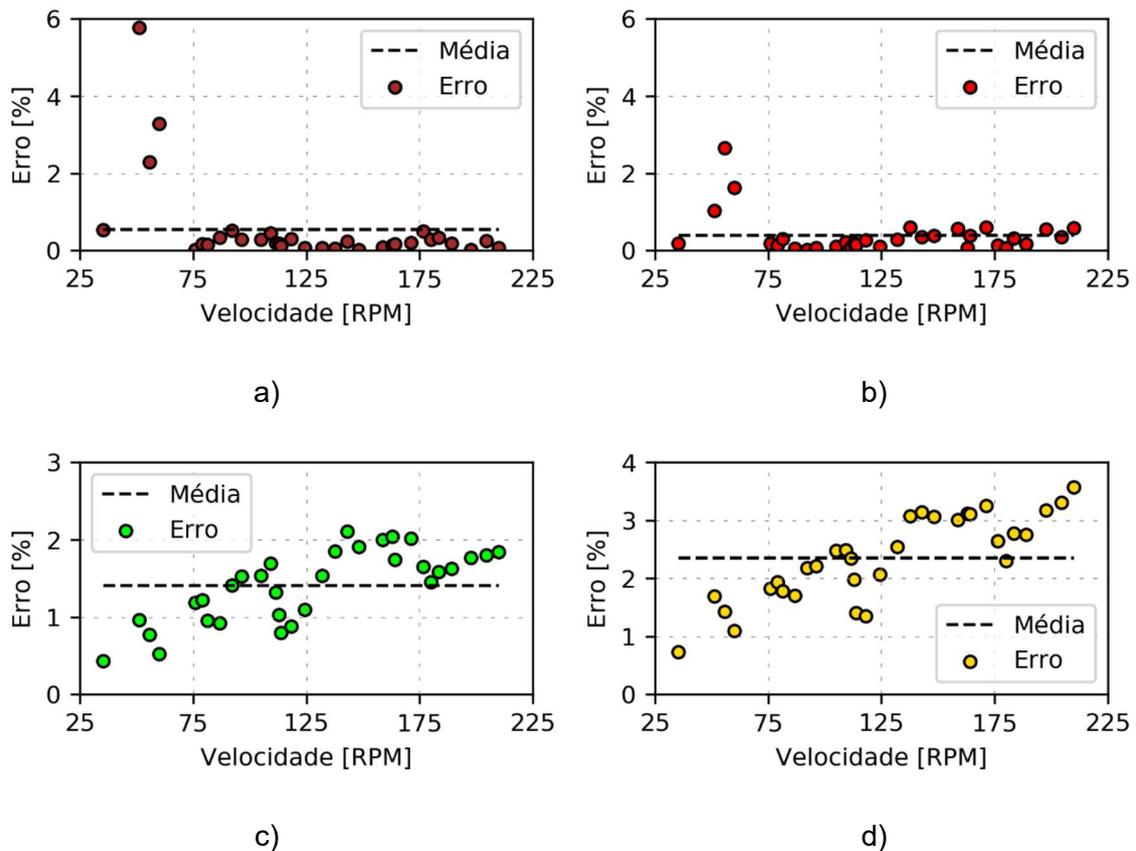


Figura 5.25 - Erros relativos entre as frequências calculadas e identificadas experimentalmente para as medições em $r_y - \Omega \neq 0$.

Tabela 5.5 - Comparação entre as frequências do sistema em $r_y - \Omega \neq 0$.

	Média dos erros (%)	Desvio padrão dos erros (%)
Rotor horizontal	0,54	1,14
Rotor vertical	0,40	0,51
Paramétrica $-\Omega$	1,41	0,45
Paramétrica $+\Omega$	2,36	0,71

Página intencionalmente deixada em branco

CAPÍTULO VI

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi desenvolver o modelo matemático de um sistema mecânico composto por vários corpos, sendo que o sistema estudado consistia em um rotor rígido acoplado a quatro palhetas flexíveis, que são modelos bem simplificados de estruturas como ventiladores, turbinas eólicas e hélices de helicópteros, e comparar os resultados do modelo com resultados experimentais.

Para modelar o sistema, o rotor foi considerado rígido, como um sistema massa mola e as palhetas foram modeladas como vigas girantes flexíveis, portanto suas deformações não foram desprezadas. É sabido da literatura que estes sistemas possuem características peculiares como o enrijecimento centrífugo e o surgimento de frequências paramétricas. O primeiro efeito é o aumento das frequências naturais das palhetas com o aumento da velocidade angular e as frequências paramétricas estão relacionadas com os referenciais utilizados na medição das grandezas. Por exemplo, ao excitar o rotor (quando este não está em repouso), medir seus deslocamentos e estimar as FRFs, serão vistas as frequências dos modos do rotor e frequências que são combinações lineares entre as frequências das palhetas e a velocidade de rotação.

As equações de Lagrange foram escolhidas para derivar as equações do movimento que representam o modelo matemático do sistema. Para isso, no cálculo das energias de deformação das palhetas, foram considerados os termos não lineares de segunda ordem, que segundo a literatura, são necessários para representar corretamente o enrijecimento centrífugo. Feito isto, chegou-se em uma equação do movimento cujas matrizes eram variantes no tempo, o que exige certos cuidados na hora de calcular as propriedades do sistema.

Uma forma de fazer isto é utilizar a teoria de Floquet, que apesar de apresentar uma base teórica muito rica, possui um custo computacional elevado. Com isso existem alternativas a teoria de Floquet, como por exemplo a transformação de coordenadas multi-pás, que como o nome já diz, é uma transformação de coordenadas na qual os graus de liberdade definidos no referencial rotativo são passados para o referencial inercial. Estes métodos fo-

ram comparados em relação a estabilidade, e pelos resultados simulados obtidos com a transformação de coordenadas foram muito próximos dos encontrados pela teoria de Floquet. Por isso a transformação de coordenadas multi-pás foi escolhida para realizar a análise modal do sistema quando este apresenta velocidade angular. Os resultados numéricos ilustraram que o modelo matemático foi capaz de representar as duas características citadas acima, o enrijecimento centrífugo e as frequências paramétricas. Em seguida estes resultados foram comparados com dados experimentais.

Então, os experimentos foram feitos na bancada de testes da *Denmark Technical University* sob a supervisão do Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos, e alguns desafios foram encontrados, como por exemplo, o fato de excitar o sistema no referencial inercial e medir os deslocamentos no referencial rotativo. Por causa disso, as palhetas ficavam muito suscetíveis a excitações que dependessem da velocidade angular, como por exemplo a gravidade. Logo, especial atenção foi dada na estimação e análise das respostas do sistema.

Com o auxílio dos experimentos ficou mais fácil enxergar os efeitos dinâmicos do sistema. Contudo, os resultados obtidos da bancada de testes estavam de acordo com os resultados obtidos pelo modelo. Mesmo assim, existem alguns pontos que podem ser melhorados, como por exemplo ajustar os parâmetros do modelo, com o objetivo de melhor modelar o amortecimento do sistema.

Além disso, novos efeitos podem ser estudados, tais como a introdução da posição angular do rotor como um grau de liberdade no sistema, considerar o movimento das palhetas fora do plano do rotor, e levar em conta o ângulo de torção em que as palhetas são conectadas no rotor. Neste trabalho todas as análises foram feitas para velocidades constantes. É interessante estudar qual é o efeito da aceleração no conjunto, seja nas simulações quanto nos experimentos. Um outro ponto que também poderia ser estudado no futuro seria aumentar a quantidade de palhetas no sistema.

Página intencionalmente deixada em branco

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, G.L., On the extensional and flexural vibrations of bars. **International Journal of Non-linear Mechanics**. 1975. Vol. 10, pp. 223-236.

BIR, G., Multi-blade coordinate transformation and its applications to wind turbine analysis. In: **Proceedings of the AIAA Wind Energy Symposium**, Reno, Nevada, 2008.

BIR, G.; Wright, A.P; Butterfield, C.P., Stability analysis of variable-speed wind turbine. In: **Proceedings of the 1997 ASME Wind Energy Symposium**, Reno, Nevada, 1997.

CRAIG, R.R., Rotating beam with tip mass analyzed by a variational method. 1963. **Journal of Acoustical Society of America**, Vol. 35, pp. 990-993.

CHRISTENSEN, R.H., **Active vibration control of rotor-blade systems - Theory and experiments**. 2004. Tese de Doutorado. Technical University of Denmark, Kongens Lyngby.

COLEMAN, R.P., FEINGOLD, A.M., **Theory of self-excited mechanical oscillations of helicopter rotor with hinged blades**. 1943. Technical Report NACA-WR-L-308, Langley Research Center.

EWINS, D.J, **Modal analysis for rotating machinery**. 1999. Modal Analysis and Testing, NATO ASI Series E Applied Sciences – Advanced Study Institute, Vol. 363, pp. 549-568.

FLOQUET, G., Sur les équations différentielles linéaires a coefficients périodiques. 1883. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**. pp. 47-88.

FRIEDMANN, P., Numerical methods for determining the stability and response of periodic systems with applications to helicopter rotor dynamics and aeroelasticity. 1986. **Computer and Mathematics with Applications**. 1986. Vol. 12, pp. 131-148.

FRIEDMANN, P., HAMMOND, C.E., WOO, T.Z., Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. 1977. Vol. 11, pp. 1117-1136.

GÓRRIZ, Á. B., **Design, implementation, and testing hardware for sensing and controlling the dynamics of rotor-bladed systems**. 2019. Dissertação de Mestrado. Technical University of Denmark, Kongens Lyngby.

HOA, S.V., Vibration of a rotating beam with tip mass. **Journal of Sound and Vibration**. 1979. Vol. 67, pp. 369-381.

HOA, S. V., HODGES, D. H., RUTKOWSKI, M. J., Comments on Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass. **Journal of Sound and Vibration**. 1980. Vol. 72, No. 4, pp. 547-549.

HSU, C.S., On approximating a general linear periodic system. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 1974. Vol. 45, pp. 234 – 251.

INMAN, D., **Engineering Vibration**, Pearson, 2014, New Jersey, EUA. 720p.

IRRITIER, H. Mathematical foundations of experimental modal analysis in rotor dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**. 1999. Vol 13, pp. 183-191.

JOHNSON, W., **Helicopter theory**. Princeton University Press, 1980, Princeton, EUA. 1084p.

KANE, T.R., RYAN, R.R., BANERJEE, A.K., Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. **Journal of Guidance**. 1987. Vol. 10, pp. 139-151.

MEIROVITCH, L., **Methods of analytical mechanics**. McGraw-Hill, 1988, New York, EUA. 544p.

MORAES, L. F. B., **Modelagem e análise de um aerogerador de eixo horizontal sujeito a ação de ventos**, 2019. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MUSZYNSKA, A., Vibrational diagnostics of rotating machinery malfunctions. **International Journal of Rotating Machinery**, 1995, Vol. 1, pp. 237-266.

PELETAN, L., BAGUET, S., TORKHANI, M., JAQUES-RICHARDET, G. A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. **Nonlinear Dynamics**, 2013, Vol. 72, pp. 671-682.

PRZEMIENIECKI, J.S., **Theory of matrix structural analysis**. McGraw-Hill, 1968. New York, EUA, 468p.

PUTTER, S.; MANOR, H., Natural frequencies of radial rotating beams. **Journal of Sound and Vibration**. 1978. Vol. 56, pp. 175-185.

RASMUSSEN, T.O.H, **Experimental and operational modal analysis applied to rotating structures with focus on rotor-blades dynamics**. 2019. Dissertação de Mestrado. Technical University of Denmark, Kongens Lyngby.

SANTOS, I.F.; SARACHO, C.M.; SMITH, J.T.; EILAND, J., Contribution to experimental validation of linear and non-linear dynamics models for representing rotor-blade parametric coupled vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, 2004, Vol. 271, pp. 883-904.

SARACHO, C.M., **Modelos matemáticos lineares e não-lineares para representar o acoplamento entre rotor e palhetas flexíveis – Exemplos numéricos e validação experimental**. 2002. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SIMO, J.C., VU-QUOC, L., On the dynamics of flexible beams under large overall motions – Part I. **Journal of Applied Mechanics**. 1986. Vol 53. pp. 849-854.

SIMO, J.C., VU-QUOC, L., On the dynamics of flexible beams under large overall motions – Part II. **Journal of Applied Mechanics**. 1986. Vol 53. pp. 855-863.

SIMO, J.C., VU-QUOC, L., The role on non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures. **Journal of Sound and Vibration**. 1987. Vol 117. pp. 487-508.

STOL, K., BALAS, M., BIR, G., Floquet modal analysis of a teetered rotor wind turbine. **Journal of Solar Energy Engineering**. 2002. Vol. 124, pp. 364-371.

SKJOLDAN, P.F., HANSEN, M.H., On the similarity of the Coleman and Lyapunov-Floquet transformations for modal analysis of bladed rotor structures. **Journal of Sound and Vibration**, 2009, Vol. 327, pp. 424-439.

WELCH, P.D., The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra: A method based on time-averaging over short, modified periodograms. **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics**, 1967, Vol. 15, pp. 70-73.

XU, J. GASCH, R., Modale behandlung linearer periodisch zeitvarianter bewegungsgleichungen. 1995. **Archive of Applied Mechanics**. Vol. 65, pp. 178-193.

ZADEH, L.A., DESOER, C. A., **Linear system theory**. McGraw-Hill, 1963. New York, EUA, 648p.