



**Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática**

**Bacharelado em Matemática**

**TEORIA DOS JOGOS APLICADA AO  
MERCADO FINANCEIRO**

**Matheus Deodato Arruda**

**Uberlândia-MG  
2020**



**Matheus Deodato Arruda**

**TEORIA DOS JOGOS APLICADA AO  
MERCADO FINANCEIRO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Marcos Antônio da Câmara

**Uberlândia-MG**

**2020**





**Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática**

**Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática**

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 20\_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Marcos Antônio da Câmara

---

Neiton Pereira da Silva

---

Fernando Rodrigo Rafaeli

**Uberlândia-MG  
2020**



# AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de expressar a minha gratidão diante todos os acontecimentos que diretamente ou indiretamente me conduziram a este exato momento. Agradecer aos pequenos momentos de alegria que tive na matemática, assim como as inúmeras dificuldades que me moldaram e me prepararam durante o curso.

Digo isso pois houve momentos onde pensei em talvez mudar a minha trajetória, mudar de curso, mudar meus métodos, me procurar mais uma vez, enfim, começar de novo. Mas sinto que apesar de tudo, eu sempre encontrei as repostas que procurei na matemática.

Gostaria de agradecer a minha família, que sempre me deu o suporte necessário, tanto financeiramente como emocionalmente, e sempre a me incentivou com cobranças de resultados e quando eu iria concluir a minha graduação.

Gostaria de agradecer também meu orientador Marcos Antônio da Câmara, por sua contribuição significativa na criação da base de toda essa pesquisa. Principalmente nesses tempos incertos de pandemia, onde ele foi compreensivo e teve a empatia necessária diante desta situação tão única.

Também gostaria de agradecer a todos aqueles que considero meus amigos, esses que seria injusto de minha parte nominar apenas alguns, que sempre estiveram presente no dia a dia. Sejam aqueles que estavam presentes todos os dias, aqueles que estavam comigo apenas alguns minutos no ônibus ou aqueles em que tivemos apenas algumas interações memoráveis. Acredito que todos eles foram experiências necessárias e únicas, que dificilmente consigo quantificar.

Por fim, gostaria de agradecer a Universidade Federal de Uberlândia como um todo, assim como a Faculdade de Matemática. Agradecer a todos aqueles que foram meus professores, sejam aqueles em que tenho um extremo carinho e consideração por serem melhores professores em que tive o prazer de ser aluno, bem como aqueles em que não houve uma grande apreciação por minha parte. Acredito que todos foram importantes para mim, de uma forma ou de outra.





# RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução à Teoria dos Jogos e a existência de solução para um jogo em Estratégia Pura e Estratégia Mista. O Teorema Minimax de Von Neumann garante a existência de solução por Equilíbrio de Nash em Estratégia Mista para jogos de soma zero. A determinação de tal solução decorre da resolução do Primal e do Dual de um problema de Programação Linear.

Utilizaremos estes estudos em uma aplicação hipotética no mercado de ações a partir de dados coletados, a fim de apresentar uma maneira alternativa para a tomada de decisões diante de investimentos de risco, que possa corroborar com métodos mais comuns do mercado financeiro de mesma finalidade.

**Palavras-chave:** Teoria dos Jogos, Equilíbrio de Nash, Teorema Minimax de Von Neumann, Mercado de Ações.



# ABSTRACT

This work presents an introduction to Game Theory and the existence of a solution for a game in Pure Strategy and Mixed Strategy. Von Neumann's Minimax Theorem guarantees the existence of a solution by Nash's Equilibrium in Mixed Strategy for zero sum games. The determination of such solution results from the resolution of the Primal and Dual of a Linear Programming problem.

We will apply these studies in a hypothetical application in the stock market, based on collected data, with the goal of presenting an alternative way of decision making when facing of high-risk investments, which could support the most common and established methods in the financial market with the same purpose.

**Keywords:** Game Theory, Nash's Equilibrium, Von Neumann's Minimax Theorem, Stock Market.



# SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Solução em Estratégia Pura	7
3	Estratégia Mista	10
4	Existência de Soluções em Estratégias Mistas	14
5	Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras	16
6	Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas	20
7	Aplicação no Mercado Financeiro de Ações	24
	Referências Bibliográficas	55



# 1. INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais “agentes de decisão” interagem entre si.

Inicialmente, a teoria dos jogos foi desenvolvida como um modelo para analisar situações de conflito, buscando uma razão nas escolhas a serem realizadas por esses agentes de decisão. Em sua essência, ela é o estudo da interdependência estratégica, isto é, situações em que minhas ações afetam meu resultado e o resultado dos outros e vice-versa.

Discussões sobre jogos entre duas pessoas começaram muito antes do surgimento da teoria moderna e matemática dos jogos. Em 1713, uma carta atribuída a Charles Waldegrave analisava um jogo chamado "le her". Nesta carta, Waldegrave fornece uma solução de estratégia mista mínima para uma versão do jogo para duas pessoas, e o problema agora é conhecido como problema Waldegrave. Em suas "Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses" (Pesquisas sobre os Princípios Matemáticos da Teoria da Riqueza) de 1838, Antoine Augustin Cournot considerou um duopólio e apresenta uma solução, a qual sendo um equilíbrio de Nash do jogo.

Em 1913, Ernst Zermelo publicou "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels" (Sobre uma Aplicação da Teoria do Conjunto à Teoria do Jogo de Xadrez) [7], onde provou que a estratégia ideal de xadrez é estritamente determinada, o que abriu o caminho para teoremas mais gerais.

Em 1938, o economista matemático dinamarquês Frederik Zeuthen provou que o modelo matemático tinha uma estratégia vencedora ao utilizar o teorema de pontos fixos de Brouwer. Em seu livro "Applications aux Jeux de Hasard" de 1938 e em notas anteriores, Émile Borel provou um teorema minimalista para jogos de matriz de duas pessoas de soma zero somente quando a matriz de pay-off era simétrica e fornece uma solução para um jogo infinito não-trivial (conhecido em inglês como jogo Blotto). Borel conjecturou a inexistência de equilíbrios de estratégia mista em jogos finitos de soma zero para duas pessoas, uma conjectura que foi provada falsa por von Neumann.

A teoria dos jogos não existia realmente como um campo único até que John von Neumann

publicou o artigo "On the Theory of Games of Strategy" em 1928. A prova original de Von Neumann utilizou o teorema de pontos fixos de Brouwer em mapeamentos contínuos em conjuntos compactos convexos, que se tornou um método padrão na teoria dos jogos e na economia matemática. Seu trabalho foi seguido por seu livro "Theory of Games and Economic Behavior" de 1944 em co-autoria com Oskar Morgenstern [6]. Este trabalho contém o método para encontrar soluções mutuamente consistentes para jogos de soma zero para duas pessoas. O trabalho subsequente concentrou-se principalmente na teoria dos jogos cooperativos, que analisa estratégias ótimas para grupos de indivíduos, presumindo que eles possam impor acordos entre eles sobre estratégias adequadas.

Em 1950, John Nash desenvolveu um critério de consistência mútua das estratégias dos jogadores conhecido como equilíbrio de Nash, aplicável a uma maior variedade de jogos do que o critério proposto por von Neumann e Morgenstern. Nash provou que todo jogo finito de  $n$  jogadores, de soma não-zero, não cooperativo tem o que agora é conhecido como equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Em 1979, Robert Axelrod tentou criar programas de computador como jogadores e descobriu que nos torneios entre eles o vencedor era muitas vezes um simples programa "olho por olho" apresentado pela Anatol Rapoport - que coopera no primeiro passo, depois, nos passos seguintes, faz o que seu oponente tenha feito no passo anterior. O mesmo vencedor também foi muitas vezes obtido por seleção natural; um fato que é amplamente tomado para explicar os fenômenos de cooperação na biologia evolutiva e nas ciências sociais.

Podemos utilizar a teoria dos jogos em aspectos casuais da vida, como um jogo de pedrapapel-tesoura, o traje a ser escolhido para uma certa situação, qual filme um casal irá ver no cinema, ou até mesmo para processos mais complexos tais como eleições, leilões, a evolução genética ou no mercado financeiro.

Um jogo possui os seguintes elementos básicos: um conjunto de jogadores, o conjunto de estratégias de cada jogador, o espaço de perfis (situações) gerado quando cada jogador escolhe sua estratégia, e, uma função utilidade que atribui o ganho (payoff) do jogador a cada situação do jogo.

Em termos mais técnicos, temos um conjunto finito de jogadores, representado por  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , para cada  $g_i$  existe o seu conjunto de estratégias puras. Uma estratégia pura é um elemento  $s_{ij}$  de  $S_i$ .  $S_i$  é o conjunto das estratégias puras de  $g_i$  denotado por  $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$ ,  $m_i \geq 2$ .

Uma estratégia é frequentemente definida como um plano de ação destinado a atingir um objetivo específico. Podemos pensar este plano como uma lista da forma: "se  $a$  acontecer, então



$b$ , se  $c$  acontecer, então  $d^n$  e assim por diante.

O conjunto de todos os perfis de estratégia pura é dado por  $S = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ , em que  $S$  é denominado espaço de estratégia pura do jogo. Para cada  $g_i$ , temos a função payoff

$$\begin{aligned} u_i : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto u_i(s) \end{aligned}$$

que associa o ganho (payoff)  $u_i(s)$  do jogador  $g_i$  a cada perfil de estratégia pura  $s \in S$ .

Geralmente utilizamos a forma matricial para representar os payoffs de um jogo. Para 2 jogadores, obtemos a matriz de payoffs  $P = [p_{ij}]$ ,  $i \in \{1, m_i\}$ ,  $j \in \{1, m_j\}$ , com  $p_{ij} = (u_1(s), u_2(s))$  e  $s = (s_{1i}, s_{2j})$ .

Vejam alguns exemplos:

Exemplo 01: (Dilema do Prisioneiro)

O dilema do prisioneiro talvez seja o modelo mais estudado de teoria de jogos, possuindo um conceito de solução bastante simples, e um tanto quanto contra intuitivo quando visto pela primeira vez. Formulado por Albert W. Tucker em 1950, em um seminário para psicólogos na Universidade de Stanford, com o intuito de ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos.

Imagine a seguinte situação: João e Marcus são dois criminosos suspeitos de um assassinato, são pegos pela polícia após um furto mal sucedido. A polícia tem evidências apenas do furto, e para prender os suspeitos pelo assassinato, eles precisam do testemunho de pelo menos um dos suspeitos. A polícia decide separar os dois suspeitos na delegacia e questionando cada um em uma sala diferente. A cada suspeito é oferecido um acordo que reduz a sentença que ele receberá se confessar, ou entregar seu parceiro.

Caso nenhum deles confesse, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se os dois confessarem, então ambos terão uma pena de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão.

Como é razoável supor que mais tempo na prisão é pior, usamos a representação de payoff que equivale a cada ano na prisão com um valor de -1. Assim representamos este jogo da

seguinte maneira:

- Jogadores:  $G = \{\text{João}, \text{Marcus}\}$ .
- Estratégias:  $S_i = \{C, N\}$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , tendo como C representando a escolha de confessar e N a escolha de não confessar.
- Payoff:
 
$$u_1(C, C) = u_2(C, C) = -5.$$

$$u_1(C, N) = u_2(N, C) = 0.$$

$$u_1(N, C) = u_2(C, N) = -10.$$

$$u_1(N, N) = u_2(N, N) = -1.$$

Assim, temos a seguinte forma matricial deste jogo:

		Marcus	
		Confessar	Negar
João	Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Exemplo 02: (Pedra, Papel, Tesoura)

Também chamado em algumas regiões do Brasil de jokempô, é um jogo simples para duas ou mais pessoas, que é frequentemente empregado como método de seleção (como na escolha de equipes, por exemplo). Assumindo um jogo com apenas dois jogadores, podemos representá-lo da seguinte forma:

- Jogadores:  $G = \{g_1, g_2\}$ .
- Estratégias:  $S_i = \{\text{Pedra}, \text{Papel}, \text{Tesoura}\}$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- Payoff: Simbolizando uma vitória com 1, uma derrota com -1 e um empate com 0, segue:

$$u_1(\text{Pedra}, \text{Pedra}) = u_1(\text{Papel}, \text{Papel}) = u_1(\text{Tesoura}, \text{Tesoura}) = 0.$$

$$u_1(\text{Pedra}, \text{Tesoura}) = u_1(\text{Papel}, \text{Pedra}) = u_1(\text{Tesoura}, \text{Papel}) = 1.$$

$$u_1(\text{Pedra}, \text{Papel}) = u_1(\text{Papel}, \text{Tesoura}) = u_1(\text{Tesoura}, \text{Pedra}) = -1.$$

Os payoffs dos jogadores são análogos.

Na forma matricial, temos:

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	( 0 , 0)	(-1 , 1)	(1 , -1)
	Papel	(1 , -1)	(0 , 0)	(-1 , 1)
	Tesoura	(-1 , 1)	(1 , -1)	(0 , 0)

Exemplo 03: (Batalha dos Sexos)

Outro jogo clássico é a Batalha dos Sexos, apresentada por R. Duncan Luce e Howard Raia em [2]. O casal Enzo e Valentina estão planejando uma atividade para desfrutarem a noite e após discutirem, os candidatos são ir a uma ópera ou a um jogo de futebol. Ambos preferem estar juntos, mas temos que Enzo prefere ir ao jogo de futebol ao invés de ir a ópera, já Valentina prefere o oposto. Assim, temos que para cada jogador, estarem juntos no local de sua escolha e melhor que estarem juntos no local escolhido pelo outro, que por sua vez é melhor que estarem separados. Usando os payoffs de 2,1 e 0 para representar este nesta respectiva ordem, o jogo tem as seguintes características:

- Jogadores:  $G = \{\text{Enzo, Valentina}\}$ .
- Estratégias:  $S_i = \{\text{Futebol, Ópera}\}$ , com  $i \in \{1, 2\}$ .
- Payoff:  $u_1(\text{Futebol, Futebol}) = u_2(\text{Ópera, Ópera}) = 2$ .  
 $u_1(\text{Futebol, Ópera}) = u_2(\text{Ópera, Futebol}) = 0$ .  
 $u_1(\text{Ópera, Ópera}) = u_2(\text{Futebol, Futebol}) = 1$ .

E tem a forma matricial:

		Valentina	
		Futebol	Opera
Enzo	Futebol	(2 , 1)	(0 , 0)
	Opera	(0 , 0)	(1 , 2)

## Exemplo 04 (Modelo de Cournot)

Uma variante deste exemplo foi introduzida pela primeira vez por Augustin Cournot (1838) [4]. Considere duas empresas idênticas (jogadores 1 e 2) que produzem o mesmo produto. Suponha que não há um custo fixo de produção e, seja o custo variável para cada empresa  $i$  ao produzir uma quantidade  $q_i \geq 0$  dado pela função custo  $c_i(q_i) = q_i^2$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . A demanda é dada pela função  $q = 100 - p$ , onde  $q = q_1 + q_2$  e  $p$  sendo o preço de mercado.

Cournot começa com a referência de firmas que operam em um ambiente competitivo no qual cada uma assume o preço de mercado como dado, e acredita que seu comportamento não pode influenciar o preço de mercado. Assim, sob essa suposição, a solução será o equilíbrio competitivo em que cada empresa irá produzir de maneira em que o preço será igual aos custos marginais, de modo que os lucros das unidades marginalmente produzidas sejam zero.

Neste caso particular, como o custo marginal é a derivada da função custo de cada empresa, cada uma delas produziria  $q_i = 25$ , e o preço seria  $p = 50$ , e assim, cada empresa teria 625 em lucros.

No jogo proposto por Cournot observamos que as estratégias puras são as escolhas de quantidades e o payoff é o lucro. Portanto, o jogo tem a seguinte representação:

- Jogadores:  $G = \{1, 2\}$ .
- Estratégias:  $S_i = [0, \infty]$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , onde as empresas escolhem as quantidades  $s_i \in S_i$
- Payoff: Para  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ ,  $u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} (100 - s_i - s_j)s_i - s_i^2 & s_i + s_j < 100 \\ -s_i^2 & s_i + s_j \geq 100 \end{cases}$

Note que neste caso, a função payoff foi definida desta maneira pois ela precisa estar bem definida para qualquer par de estratégias (quantidades) que os jogadores escolherem.

## 2. SOLUÇÃO EM ESTRATÉGIA PURA

Analisando o Dilema do Prisioneiro, vemos que cada um dos dois jogadores possui uma ação que aparenta ser a melhor, independentemente da escolha de seu. Sugerir que cada jogador irá escolher esta ação parece natural porque é consistente com o conceito básico de racionalidade. Se assumirmos que os jogadores são racionais, devemos esperar que escolham o que julgarem melhor para eles.

Teremos análises de perfis de estratégia na qual apenas a estratégia de um único jogador  $g_i$  estará variando, enquanto as estratégias dos outros jogadores permanecerão fixas.

Seja  $s_{-i} = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n}) \in S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$  uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador  $g_i$ , desta maneira temos que  $s = (s_{ij_i}, s_{-i}) \in S$

**Estratégia Pura Estritamente Dominada:** Uma estratégia pura  $s_{ik} \in S_i$  do jogador  $g_i \in G$  é estritamente dominada pela estratégia  $s'_{ik} \in S_i$  se  $u_i(s'_{ik}, s_{-i}) > u_i(s_{ik}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ . A estratégia  $s_{ik} \in S_i$  é fracamente dominada pela estratégia  $s'_{ik} \in S_i$  se  $u_i(s'_{ik}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$

Exemplo: Considere o jogo determinado pela seguinte matriz de payoffs:

		Jogador 2		
		$s_{21}$	$s_{22}$	$s_{23}$
Jogador 1	$s_{11}$	(5, 2)	(2, 6)	(0, 4)
	$s_{12}$	(7, 0)	(3, 2)	(5, 1)
	$s_{13}$	(6, 5)	(1, 7)	(4, 6)

Neste jogo, para o jogador 2, as estratégias  $s_{21}$  e  $s_{23}$  são estritamente dominadas pela estratégia  $s_{22}$ . Já para o jogador 1, temos que as estratégias  $s_{11}$  e  $s_{13}$  são estritamente dominadas pela estratégia  $s_{12}$ . Logo, a solução em estratégia pura deste jogo por dominância será o perfil  $s = (s_{12}, s_{22})$ .

Em alguns casos, prever um resultado único, como aconteceria em qualquer jogo para o qual existe um equilíbrio de estratégia dominante nem sempre é possível, como por exemplo na Batalha de Sexos. Nesse caso, existe uma maneira de se analisar um jogo onde obtemos uma resposta satisfatória.

Um equilíbrio de Nash é um perfil de estratégias para as quais cada jogador está escolhendo uma melhor resposta às estratégias de todos os outros jogadores.

**Equilíbrio de Nash:** Dizemos que um perfil de estratégia  $s^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \in S$  é um equilíbrio de Nash se  $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, s_{-i}^*), \forall i = 1, \dots, n, \forall j_i = 1, \dots, m_i$ , com  $m_i \geq 2$ .

Vejamos alguns exemplos:

No Dilema do Prisioneiro tínhamos o seguinte:

		Marcus	
		Confessar	Negar
João	Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Ou seja, o perfil  $s^* = (C, C)$  destacado é um equilíbrio de Nash em estratégia pura, pois se Marcus manter sua estratégia mas João mudar, temos que João terá um prejuízo, e analogamente, se João manter sua estratégia e Marcus mudar a sua, então Marcus terá um prejuízo. Ambos passarão 5 anos a mais na prisão em cada uma das situações.

Na Batalha dos Sexos:

		Valentina	
		Futebol	Opera
Enzo	Futebol	(2, 1)	(0, 0)
	Opera	(0, 0)	(1, 2)

Os perfis  $s_1^* = (\text{Futebol}, \text{Futebol})$ , e  $s_2^* = (\text{Opera}, \text{Opera})$  destacados são equilíbrios de Nash em estratégia pura.

Jpa no jogo de Pedra, Papel, Tesoura, percebemos que não há equilíbrios de Nash em estratégia pura.

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	( 0 , 0)	(-1 , 1)	(1 , -1)
	Papel	(1 , -1)	(0 , 0)	(-1 , 1)
	Tesoura	(-1 , 1)	(1 , -1)	(0 , 0)

### 3. ESTRATÉGIA MISTA

Uma estratégia mista  $p_i$  de  $g_i \in G$  é uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto  $S_i$ , ou seja,  $p_i \in \Delta m_i$ , com  $m_i = \{(x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, m_i, \text{ e } \sum_{i=1}^{m_i} x_i = 1\}$ .

O espaço de todos os perfis de estratégia mista é  $\Delta = \Delta m_1 \times \Delta m_2 \times \dots \times \Delta m_n$  denominado espaço de estratégia mista. Um vetor  $p \in \Delta$  é denominado um perfil de estratégia mista e, usaremos  $p_{-i}$  para representar as estratégias de todos os jogadores, com exceção do jogador  $g_i$ .

Temos que um perfil de estratégia mista será dado por  $p = (p_1; p_2; \dots; p_n) = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_1}; p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_2}; \dots; p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_n})$ , assim a função utilidade do jogador  $g_i$  é dado por  $u_i(p) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} (\prod_{k=1}^n p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}))$ .

Voltando ao exemplo do Pedra, Papel, Tesoura, que é descrito pela matriz:

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	( 0 , 0)	(-1 , 1)	(1 , -1)
	Papel	(1 , -1)	(0 , 0)	(-1 , 1)
	Tesoura	(-1 , 1)	(1 , -1)	(0 , 0)

Podemos escrever a correspondência de melhor jogada para o jogador 1 quando ele acredita que o jogador 2 jogará uma de suas estratégias puras da seguinte maneira:

$$s_1(s_2) = \begin{cases} \text{Pedra se } s_2 = \text{Tesoura} \\ \text{Papel se } s_2 = \text{Pedra} \\ \text{Tesoura se } s_2 = \text{Papel} \end{cases}$$

Assim, assumindo que o jogador 2 tenha a seguinte estratégia:  $p_2(\text{Pedra}) = p_2(\text{Papel}) = 1/2$ ,  $p_2(\text{Tesoura}) = 0$ , com  $p_2 \in \Delta m_3$ , podemos calcular o payoff esperado da seguinte maneira:



$$u_1(\text{Pedra}, p_2) = 1/2 \times 0 + 1/2 \times (-1) + 0 \times 1 = -1/2.$$

$$u_1(\text{Papel}, p_2) = 1/2 \times 1 + 1/2 \times 0 + 0 \times (-1) = 1/2.$$

$$u_1(\text{Tesoura}, p_2) = 1/2 \times (-1) + 1/2 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

É fácil ver que o jogador 1 tem uma única melhor resposta à essa estratégia mista do jogador 2. Se ele joga Papel, ele vence ou empata com uma probabilidade igual, enquanto suas outras duas estratégias puras são piores: com Pedra ele perde ou empata e com Tesoura ele perde ou vence.

**Equilíbrio de Nash** - Dizemos que um perfil de estratégia mista  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash se  $u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in \Delta m_i$ .

Para contextualizar, voltemos ao Dilema dos Prisioneiros com a distribuição de probabilidade de João dada por  $(p, 1-p)$  e a distribuição de probabilidade de Marcus por  $(q, 1-q)$  com  $0 \leq p \leq 1$ , e  $0 \leq q \leq 1$ . Teremos a seguinte situação:

		Marcus	
		(q) Confessar	(1-q) Negar
João	(p) Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	(1-p) Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Nesse caso, temos que a função utilidade de João será dado por:

$$u_1(p, 1-p; q, 1-q) = p(-5q + 0(1-q)) + (1-p)(-10q + (-1)(1-q)) = p(-5q) + (1-p)(-9q-1).$$

Analogamente, a função utilidade de Marcus sera dado por:

$$u_2(p, 1-p; q, 1-q) = q(-5p) + (1-q)(-9p-1).$$

Vamos analisar o perfil  $p = (1, 0; 1, 0)$  que corresponde ao equilíbrio de Nash considerando a mudança de estratégia mista de somente um jogador ao estudar o payoff. Suponha que João mude de estratégia e Marcus não mude, então temos:

$$u_1(p, 1-p; 1, 0) = 5p - 10.$$

Como  $0 \leq p \leq 1$ , temos que  $u_1(p, 1 - p; 1, 0) = 5p - 10 < 5 - 10 = -5 = u_1(1, 0; 1, 0)$ . Portanto, se Marcus não mudar sua estratégia mista  $p_2(1, 0)$ , João não deverá mudar sua estratégia mista  $p_1(1, 0)$ , caso contrário terá um payoff menor. O argumento é análogo caso Marcus mude de estratégia e João não mude. Ou seja, temos que as estratégias mistas  $p_1^* = p_2^* = (1, 0)$  são equilíbrios de Nash.

Agora, quando temos jogos com mais do que duas estratégias para cada jogador, determinar equilíbrios de Nash de estratégia mista é um pouco mais complicado do que em jogos  $2 \times 2$ , e geralmente envolve uma álgebra mais elaborada, já que existem muitas possibilidades de combinações para cada jogador.

Assim, utilizando o jogo de Pedra, Papel, Tesoura, para encontrar o equilíbrio de Nash iremos proceder em três passos. Primeiro, mostraremos que não há equilíbrio de Nash no qual pelo menos um jogador joga uma estratégia pura. Então, mostraremos que não há equilíbrio de Nash no qual, um jogador faz combinações apenas entre duas estratégias puras. Essas etapas implicarão que em qualquer equilíbrio de Nash, os dois jogadores devem combinar as três estratégias puras, e isso levará à solução.

1º - “Não há equilíbrio de Nash no qual pelo menos um jogador joga uma estratégia pura.”

Para ver isso, suponha que o jogador 1 jogue uma estratégia pura. É fácil ver, observando a matriz de payoff, que o jogador 2 sempre recebe payoffs diferentes de cada uma de suas estratégias puras sempre que o jogador 1 joga uma estratégia pura. Portanto, o jogador 2 não pode ser indiferente entre nenhuma de suas estratégias puras, e portanto, 2 não pode estar jogando uma estratégia mista se o jogador 1 jogar uma estratégia pura. Mas sabemos que não há equilíbrios de Nash quando ambos estão usando estratégia puras e, portanto, concluímos que não há equilíbrios de Nash em que os dois jogadores jogam uma estratégia pura.

2º - “ Não há equilíbrio de Nash no qual, um jogador faz combinações apenas entre duas estratégias puras.”

Para ver isso, suponha que o jogador 1 faça uma combinação entre Pedra e Papel. Então o jogador 2 sempre obtém um payoff estritamente maior ao jogar Papel do que ao jogar Pedra, portanto, nenhuma estratégia que exija que o jogador 2 jogue Pedra com probabilidade positiva pode ser a melhor resposta para o jogador 2, assim ele não pode jogar Pedra em nenhum equilíbrio de Nash. Mas se o jogador 2 não joga Pedra, então o jogador 1 tem um payoff estritamente maior de Tesoura do que de Papel, portanto, nenhuma estratégia que exija que o jogador 1 jogue Papel com probabilidade positiva pode ser a melhor resposta ao jogador 2 não jogar Pedra entre Pedra e Papel, e assim chegamos a uma contradição. Concluímos então que, em um equilíbrio, não é possível combinar apenas entre Pedra e Papel. Podemos aplicar

um raciocínio semelhante aos outros pares de estratégias puras. Concluímos que em qualquer equilíbrio de Nash deste jogo, nenhum jogador pode jogar uma estratégia mista, na qual ele joga apenas duas estratégias puras com probabilidade positiva.

3”o - “As estratégias mistas  $p_1^* = p_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$  formam um equilíbrio de Nash, sendo  $(p_1^*, p_2^*)$  o único equilíbrio de Nash deste jogo.”

É intuitivo assumir que as estratégias mistas  $p_1^* = p_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$  são equilíbrios de Nash. Se o jogador 1 jogar  $p_1^*$  então o jogador 2 terá um payoff esperado de 0 para todas as suas estratégias puras, então o jogador 2 será indiferente entre qualquer de suas estratégias puras. Dai, dadas todas as estratégias mistas do jogador 2, ele não terá interesse de mudar para outra estratégia caso o jogador 1 escolher  $p_1^*$ , e em particular, se ele escolher  $p_2^*$ . O pensamento é análogo fixando  $p_2^*$  para o jogador 2.

Agora vamos mostrar que  $(p_1^*, p_2^*)$  é o único equilíbrio de Nash. Suponha que o jogador 1 jogue Pedra com uma probabilidade  $p_1(\text{Pedra}) \in (0, 1)$ , Papel com uma probabilidade  $p_2(\text{Papel}) \in (0, 1)$  e Tesoura com uma probabilidade  $p_3(\text{Tesoura}) = 1 - p_1(\text{Pedra}) - p_2(\text{Papel})$ . Assim temos que  $p_1(\text{Pedra}) + p_2(\text{Papel}) < 1$  para que  $(p_3(\text{Tesoura}) = 1 - p_1(\text{Pedra}) - p_2(\text{Papel})) \in (0, 1)$ . Então, sendo  $p = (p_1(\text{Pedra}), p_2(\text{Papel}), p_3(\text{Tesoura}))$ , segue que os payoffs do jogador 2 são:

$$u_2(\text{Pedra}, p) = -p_2(\text{Papel}) + 1 - p_1(\text{Pedra}) - p_2(\text{Papel}) = 1 - p_1(\text{Pedra}) - 2p_2(\text{Papel}).$$

$$u_2(\text{Papel}, p) = p_1(\text{Pedra}) - (1 - p_1(\text{Pedra}) - p_2(\text{Papel})) = 2p_1(\text{Pedra}) + p_2(\text{Papel}) - 1.$$

$$u_2(\text{Tesoura}, p) = -p_1(\text{Pedra}) + p_2(\text{Papel})$$

Em qualquer equilíbrio de Nash no qual o jogador 2 jogar todas as três de suas estratégias puras com probabilidade positiva, ele deve receber o mesmo payoff de todas as estratégias. Assim, em qualquer equilíbrio,  $u_2(\text{Pedra}, p) = u_2(\text{Papel}, p) = u_2(\text{Tesoura}, p)$ . Resolvendo essas equações, obtemos que  $p_1(\text{Pedra}) = p_2(\text{Papel}) = p_3(\text{Tesoura}) = 1/3$ . Assim concluímos que o jogador 2 está disposto a incluir todas as suas três estratégias puras em sua estratégia mista, se e somente se, o jogador 1 escolher  $p_1^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ . Com um argumento análogo para o jogador 1, não há outro equilíbrio de Nash em Estratégias Mistadas no qual os dois jogadores joguem todas as suas estratégias puras com probabilidade positiva.

## 4. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES EM ESTRATÉGIAS MISTAS

Um jogo de soma constante com dois jogadores, comumente denominados jogador linha e jogador coluna, com estratégias  $S_l = 1, 2, \dots, m$  e  $S_c = 1, 2, \dots, n$  e matriz de payoff  $P = [p_{ij}]$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , com  $p_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$ , satisfaz,  $a_{ij} + b_{ij} = c, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$ , sendo  $c \in \mathbb{R}$ .

Particularmente, quando  $c = 0$ , dizemos que o jogo é de soma zero. Assim, sendo  $p = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta_m$  uma distribuição de probabilidades para as estratégias puras do jogador linha e  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta_n$  uma distribuição de probabilidades para as estratégias puras do jogador coluna, então temos que o payoff esperado para o jogador linha é

$$u_1(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

ou seja,  $u_1(p, q) = p^T A q$ , com  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Analogamente, temos que o payoff esperado para o jogador coluna é dado por  $u_2(p, q) = p^T B q$ ,

com  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$

Se o jogo tiver soma constante, teremos

$$A + B = C = \begin{bmatrix} c & \cdots & c \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c & \cdots & c \end{bmatrix} = c[1],$$

com  $[1]$  a matriz  $m \times n$  formada com 1 em todas as suas entradas, e conseqüentemente  $u_2(p, q) = p^T Bq = p^T (c[1] - A)q = cp^T[1]q - p^T Aq = c - u_1(p, q)$ , isso pois temos que  $p^T[1]q = 1$  pois  $p$  e  $q$  são distribuições de probabilidades e, por isto,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$  e  $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ . Portanto,  $u_1(p, q) + u_2(p, q) = c$ .

Conseqüentemente, temos que  $u_1(p^*, q^*) \geq u_1(p, q^*) \Leftrightarrow u_2(p^*, q^*) \leq u_2(p, q^*)$  em que  $p \in \Delta_m$  e  $q \in \Delta_n$

## 5. EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS PURAS

Dizemos que um elemento  $a_{ij}$  de uma matriz  $A$  é um ponto de sela dessa matriz se  $a_{ij}$  for simultaneamente um mínimo em sua linha e um máximo em sua coluna, ou seja,  $a_{ij} \leq a_{il}, l = 1, \dots, n$  e,  $a_{ij} \geq a_{kj}, k = 1, \dots, m$ .

Para exemplificar, considere as seguintes matrizes de payoff:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que  $a_{21} = 3$  é o único ponto de sela de  $A$ ,  $b_{31} = 7$  é o único ponto de sela de  $B$  e  $C$  não possui ponto de sela

**Teorema:** O elemento  $a_{ij}$  é um ponto de sela da matriz  $A$  se, e somente se, o perfil de estratégia pura  $s = (i, j)$  for um equilíbrio de Nash em estratégias puras para o jogo.

*Demonstração:*

( $\Rightarrow$ ) Seja  $a_{ij}$  um ponto de sela da matriz  $A$ , então como  $a_{ij}$  é máximo em sua coluna, vale que  $u_1(i, j) = a_{ij} \geq a_{kj} = u_1(k, j), \forall k = 1, \dots, m$ , isto é, o jogador 1 não pode aumentar o seu payoff se o jogador 2 mantiver a escolha da coluna  $j$ . Por outro lado, como  $a_{ij}$  é mínimo em sua linha, vale que  $u_2(i, j) = b_{ij} = c - a_{ij} \geq c - a_{ik} = b_{ik} = u_2(i, k), \forall k = 1, \dots, n$ , isto significa que o jogador 2 não pode aumentar o seu payoff se o jogador 1 mantiver a escolha da linha  $i$ . Logo, temos que o perfil de estratégia pura  $s = (i, j)$  é um equilíbrio de Nash do jogo.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $s = (i, j)$  um equilíbrio de Nash do jogo, assim temos que  $a_{ij}$  é máximo da coluna  $j$  e o mínimo da linha  $i$ , pois  $a_{ij} + b_{ij} = c \Rightarrow b_{ij} = c - a_{ij}$  e portanto,  $a_{ij}$  é um ponto de sela de  $A$ .  $\square$

**Teorema:** Se  $a_{ij}$  e  $a_{rs}$  são dois pontos de sela da matriz  $A$ , então  $a_{is}$  e  $a_{rj}$  também são pontos de sela da matriz  $A$ , e,  $a_{ij} = a_{rs} = a_{is} = a_{rj}$ .

*Demonstração:*

Considere a matriz  $A =$

$$\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{is} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rs} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

como  $a_{ij}$  e  $a_{rs}$  são pontos de sela, sabemos que eles são mínimos em suas respectivas linhas e máximos em suas respectivas colunas. Assim,  $a_{ij} \leq a_{is} \leq a_{rs}$  e  $a_{ij} \geq a_{rj} \geq a_{rs}$ , logo  $a_{ij} = a_{rs} = a_{is} = a_{rj}$ .

Assim, temos que  $a_{is}$  é mínimo em sua linha, pois  $a_{ij} = a_{is}$  é mínimo da mesma linha e, que  $a_{is}$  é máximo em sua coluna, pois  $a_{rs} = a_{is}$  é máximo da mesma coluna. Analogamente,  $a_{rj}$  é mínimo em sua linha e máximo em sua coluna. Portanto temos que  $a_{is}$  e  $a_{rj}$  também são pontos de sela da matriz  $A$ .  $\square$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} \pi & \sqrt{17} & 8\pi & \pi \\ e & \ln 2 & \sqrt{2} & e \\ \pi & 18\pi & \sqrt{15} & \pi \end{bmatrix}$$

Nesse caso, temos que  $a_{11} = a_{14} = a_{31} = a_{34} = \pi$  são pontos de sela de  $A$ .

**Notações:**

- O payoff mínimo do jogador linha  $g_1$ , se ele escolher a linha  $k$ , será dado por  $\underline{a}_k = \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}$ .

- O payoff mínimo do jogador coluna  $g_2$ , se ele escolher a linha  $l$ , será dado por  $c - \bar{a}_l$ , onde  $\bar{a}_l = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl}$ .

**Definições:**

- Definimos o valor linha de A por  $v_l(A) = \max_{1 \leq k \leq m} \underline{a}_k = \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}$ .

- Definimos o valor coluna de A por  $v_c(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \bar{a}_l = \min_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl}$ .

**Teorema:** Para toda matriz A temos que  $v_c(A) \geq v_l(A)$ .

*Demonstração:*

Temos que  $\forall k = 1, \dots, m$  e  $\forall j = 1, \dots, n$ ,  $a_{kj} \geq \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}$ . Assim,  $\max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = v_l(A)$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Consequentemente,  $v_c(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = v_l(A)$ .  $\square$

**Teorema:** Uma matriz A tem um ponto de sela se, e somente se,  $v_c(A) = v_l(A)$ .

*Demonstração:*

( $\Rightarrow$ ) Se  $a_{ij}$  é um ponto de sela da matriz A, então  $a_{ij} = \min_{1 \leq l \leq n} a_{il} = \underline{a}_i$ . Como  $v_l(A) = \max_{1 \leq k \leq m} \underline{a}_k$ , então,  $v_l(A) \geq \underline{a}_i = a_{ij}$ . Mas por outro lado,  $a_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} = \bar{a}_j$  e, como  $v_c(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \bar{a}_l$ , temos que  $v_c(A) \leq \bar{a}_j = a_{ij}$ , logo  $v_c(A) \leq a_{ij} \leq v_l(A)$ , mas pelo teorema anterior, temos que  $v_c(A) \geq v_l(A)$ , e portanto  $v_c(A) = v_l(A)$ .

( $\Leftarrow$ ) Como  $v_l(A) = \max_{1 \leq r \leq m} \underline{a}_r$ , então existe uma linha  $i$  tal que  $v_l(A) = \underline{a}_i$ . Mas,  $\underline{a}_i = \min_{1 \leq s \leq n} a_{is}$ , logo existe uma coluna  $l$  tal que  $\underline{a}_i = a_{il}$ . Analogamente, como  $v_c(A) = \min_{1 \leq s \leq n} \bar{a}_s$ , existe uma coluna  $j$  tal que  $v_c(A) = \bar{a}_j$ . Como  $\bar{a}_j = \max_{1 \leq r \leq m} a_{rj}$ , existe uma linha  $k$  tal que  $\bar{a}_j = a_{kj}$ . Assim, temos que  $a_{il} = \underline{a}_i = v_l(A) = v_c(A) = \bar{a}_j = a_{kj}$ .

Então, temos que  $a_{ij} \leq \bar{a}_j = \underline{a}_i \leq a_{is}$ ,  $\forall s = 1, \dots, n$ , isto é,  $a_{ij}$  é o mínimo de sua linha. Por outro lado,  $a_{ij} \geq \underline{a}_i = \bar{a}_j \geq a_{rj}$ ,  $\forall r = 1, \dots, m$ , ou seja,  $a_{ij}$  é o máximo de sua coluna. Portanto



$a_{ij}$  é um ponto de sela da matriz  $A$ . □

**Corolário:** Um jogo de dois jogadores com soma constante definido pela matriz de payoff  $A$  do jogador linha tem um equilíbrio de Nash em estratégias puras se, e somente se,  $v_l(A) = v_c(A)$ .

Exemplos:

Tomando o exemplo do Pedra, Papel, Tesoura, temos a seguinte matriz de payoff  $A$  referente ao jogador 1:

	Pedra	Papel	Tesoura
Pedra	0	-1	1
Papel	1	0	-1
Tesoura	-1	1	0

Assim, temos que:

$$v_l(A) = \max \{-1, -1, -1\} = -1 \text{ e } v_c(A) = \min \{1, 1, 1\} = 1.$$

Portanto temos que  $v_l(A) \leq v_c(A)$ .

Agora, considere a seguinte matriz de payoff  $A$ :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Temos que:

$$v_l(A) = \max \{1, 4, 7\} = 7 \text{ e } v_c(A) = \min \{7, 8, 9\} = 7.$$

Logo, temos que  $v_l(A) = v_c(A)$ .

## 6. EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS MISTAS

Neste capítulo estabeleceremos um procedimento para se encontrar Equilíbrios de Nash em Estratégias Mistas para Jogos de Soma Zero utilizando Problemas de Programação Linear.

Definimos o valor linha e o valor coluna da matriz A para Estratégias Mistas da seguinte maneira::

$$- v_l(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^T A q.$$

$$- v_c(A) = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q.$$

**Teorema:** Para toda matriz A, temos  $v_c(A) \geq v_l(A)$ .

*Demonstração:*

Temos que  $\forall p \in \Delta_m, p^T A q \geq \min_{y \in \Delta_n} p^T A y$ , então temos que  $\max_{p \in \Delta_m} p^T A q \geq \max_{p \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} p^T A y = v_l(A)$ . Consequentemente  $v_c(A) = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q \geq \max_{p \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} p^T A y = v_l(A)$ .  $\square$

**Teorema:** Um perfil de estratégia mista  $(p^*, q^*)$  é um equilíbrio de Nash de um jogo de dois jogadores com soma constante c, definido pela matriz de payoff A do jogador linha se, e somente se,  $v_l(A) = v_c(A) = p^{*T} A q^*$ .

*Demonstração:*

$(\Rightarrow)$  Se  $(p^*, q^*)$  é um equilíbrio de Nash, então  $p^{*T} A q^* = u_l(p^*, q^*) \geq u_l(p, q^*) = p^T A q^*, \forall p \in \Delta_m$ . Em particular  $p^{*T} A q^* = \max_{p \in \Delta_m} p^T A q^* \geq \min_{y \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A y = v_c(A)$ .

Temos também que  $p^{*T} A q^* = c - u_c(p^*, q^*) \leq c - u_c(p^*, q) = p^{*T} A q, \forall q \in \Delta_n$ . Em particular,  $p^{*T} A q^* = \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} A q \leq \max_{x \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} x^T A q = v_l(A)$ .

Logo,  $v_l(A) \geq p^{*T} A q^* \geq v_c(A)$  e, pelo teorema anterior, temos que  $v_c(A) \geq v_l(A)$  e portanto  $v_l(A) = v_c(A) = p^{*T} A q^*$ .

( $\Leftarrow$ ) Como  $v_l(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^T A q$ , existe  $p^* \in \Delta_m$  tal que  $v_l(A) = \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} A q$ , e analogamente, como  $v_c(A) = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q$ , existe  $q^* \in \Delta_n$  tal que  $v_c(A) = \max_{p \in \Delta_m} p^T A q^*$ .

Por hipótese, temos que  $v_l(A) = v_c(A)$  e portanto  $\min_{q \in \Delta_n} p^{*T} A q = \max_{p \in \Delta_m} p^T A q^*$ . Agora temos que  $u_l(p^*, q^*) = p^{*T} A q^* \geq \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} A q = \max_{p \in \Delta_m} p^T A q^* \geq x^T A q^* = u_l(x, q^*)$ ,  $\forall x \in \Delta_m$ . Por outro lado  $u_c(p^*, q^*) = c - p^{*T} A q^* \geq c - \max_{p \in \Delta_m} p^T A q^* = c - \min_{q \in \Delta_n} p^{*T} A q \geq c - p^{*T} A y = u_c(p^*, y)$ ,  $\forall y \in \Delta_n$ . Assim  $(p^*, q^*)$  é um equilíbrio de Nash do jogo.  $\square$

**Teorema Minimax de Von Neumann:** Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, representado pela matriz de payoff  $A$  do jogador linha, sempre existe um perfil de estratégia mista  $(p^*, q^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$  satisfazendo  $v_l(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^T A q = p^{*T} A q^* = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q = v_c(A)$ .

A demonstração deste teorema será dada usando o teorema de dualidade da teoria de Programação Linear.

Temos que um problema de Programação Linear é um problema de otimização com uma função objetivo e restrições lineares:

(problema primal)

maximizar:  $b^T y$

sujeito a  $Ay \leq c$ ,

$y \geq 0$ ,

A cada problema de Programação Linear (problema primal) podemos associar um outro problema de otimização (problema dual):

(problema dual)

minimizar:  $c^T x$

sujeito a  $x^T A \geq b^T$ ,

$x \geq 0$ ,

**Teorema da dualidade em Programação Linear:** Um problema primal possui uma solução se, e somente se, o seu problema dual possui uma solução, além disso, se  $y^*$  é solução do problema primal e  $x^*$  é solução do problema dual, então  $c^T x^* = b^T y^*$ .

*Demonstração do Teorema Minimax de Von Neumann:*

Podemos assumir que todas as entradas da matriz de payoffs  $A$  do jogador linha são positivas. Caso contrário, basta substituir  $A$  por  $A' = A + D$  e  $B = -A$  por  $B' = -D + B$ , onde  $D = d[1]$ , com  $d > \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$ . Observe que  $A' + B' = 0$  e que  $(p^*, q^*)$  é um equilíbrio de Nash para o jogo definido pela matriz  $A$  se, e somente se,  $(p^*, q^*)$  é um equilíbrio de Nash para o jogo definido pela matriz  $A'$ .

Sejam  $c = (1, 1, \dots, 1)^T$  e  $b = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Considere os problemas de Programação Linear:

(problema primal)	(problema dual)
maximizar: $b^T y$	minimizar: $c^T x$
sujeito a $Ay \leq c,$	sujeito a $x^T A \geq b^T,$
$y \geq 0,$	$x \geq 0,$

### 1º - O dual possui uma solução.

Como  $A > 0$ , o conjunto admissível  $X = \{x \in \mathbb{R}^m : x^T A \geq b^T \text{ e } x \geq 0\}$  é não vazio. Por outro lado, como  $c = (1, 1, \dots, 1)^T$ , a função objetivo do problema é escrita como  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto c^T x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ .

Assim, o problema dual consiste em encontrar o ponto do conjunto  $X$  mais próximo da origem segundo a norma da soma  $\|\cdot\|_1$ , um problema que certamente possui uma solução pois, se  $p \in X$ , então podemos “compactificar” o conjunto admissível incluindo a restrição  $\|x\|_1 \leq \|p\|_1$  e, com isso, podemos usar o teorema de Weierstrass para garantir a existência de um mínimo.

### 2º - Construção do equilíbrio de Nash.

Dado que o problema dual possui uma solução, pelo teorema de dualidade, o problema primal também possui. Mais ainda: se  $x^*$  é solução do problema dual e  $y^*$  é solução do problema primal, então  $c^T x^* = b^T y^*$ .

Seja  $\theta = c^T x^* = b^T y^*$  (que é  $> 0$  pois  $(0, 0, \dots, 0)$  não é admissível) e defina  $p^* = \frac{x^*}{\theta}$  e  $q^* = \frac{y^*}{\theta}$ . Afirmamos que  $(p^*, q^*)$  é um equilíbrio de Nash do jogo. Isso pois: claramente  $p^* \in \Delta_m$  e  $q^* \in \Delta_n$ , pois  $p^* \geq 0$  (já que  $x^* \geq 0$  e  $\theta > 0$ ),  $q^* \geq 0$  (já que  $y^* \geq 0$  e  $\theta > 0$ ),  $\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m \frac{x_i^*}{\theta} = \frac{c^T x^*}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} = 1$  e  $\sum_{j=1}^n q_j = \sum_{j=1}^n \frac{y_j^*}{\theta} = \frac{b^T y^*}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} = 1$

Agora, como  $x^{*T}A \geq b^T$ , temos que para todo  $q \in \Delta_n$ ,  $x^{*T}Aq \geq b^Tq = \sum_{j=1}^n q_j = 1$ . Mas  $x^* = \frac{p^*}{\theta}$ . Assim,  $p^{*T}Aq \geq \theta = p^{*T}Aq^*$ , para todo  $q \in \Delta_n$ . Logo,  $u_c(p^*, q^*) = -p^{*T}Aq^* \geq -p^{*T}Aq = u_c(p^*, q)$  para todo  $q \in \Delta_n$ . Ou seja, o jogador coluna não pode aumentar o seu payoff esperado trocando  $q^*$  por  $q$ , se o jogador linha mantiver a escolha  $p^*$ . Analogamente, como  $Ay \leq c$ , temos que para todo  $p \in \Delta_m$ ,  $p^T Ay^* \leq p^T c = \sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Mas  $y^* = \frac{q^*}{\theta}$ . Então,  $p^* Aq^* \leq \theta = p^{*T} Aq^*$ , para todo  $p \in \Delta_m$ . Consequentemente,  $u_l(p^*, q^*) = p^{*T} Aq^* \geq p^T Aq^* = u_l(p, q^*)$ , para todo  $p \in \Delta_m$ . Portanto o jogador coluna não pode aumentar o seu payoff esperado trocando  $p^*$  por  $p$  se o jogador coluna mantiver a escolha  $q^*$ . Concluindo então que  $(p^*, q^*)$  é um equilíbrio de Nash do jogo.  $\square$

## 7. APLICAÇÃO NO MERCADO FINANCEIRO DE AÇÕES

Tendo em mãos tudo o que foi construído até o momento, podemos utilizar esses conceitos a fim de construir situações no mercado financeiro e assim montar jogos a serem analisados, uma vez que a demonstração do Teorema Minimax de Von Neumann não só estabelece a existência de equilíbrios de Nash, mas também sugere uma maneira de encontrá-los resolvendo dois problemas de programação linear.

Iremos então coletar dados do mercado financeiro de investimentos no ano de 2019 escolhendo alguns itens de relevância a um suposto investidor, e assim definir situações onde este investidor irá interagir com esses dados e tomar uma decisão, de maneira que podemos analisar o seu suposto ganho.

Este estudo está sendo feito, pois acredito que a Teoria dos Jogos pode ser uma ferramenta auxiliar aos métodos consagrados de maneira a corroborar com os seus resultados. Ou talvez o uso destes estudos em locais não habituais, pode até mesmo gerar maneiras diferentes de se entender um tópico analisado e nos dar ideias e pontos de vista diferentes a se perseguir.

Assim, vamos primeiro definir alguns termos que serão usados a seguir. Primeiramente, um perfil de investidor, também chamado de suitability, é uma espécie de análise que identifica as preferências e expectativas de uma pessoa em relação aos investimentos. Existem três tipos de investidores: o investidor conservador, o moderado e o agressivo.

O investidor considerado conservador é aquele que prefere não correr riscos na valorização do dinheiro que decidiu aplicar. Já o investidor moderado é aquele que aplica uma parte dos seus recursos em investimentos com menor liquidez entendendo que os retornos financeiros nessas modalidades vêm a médio e longo prazo e que, por isso, elas apresentam um grau de risco médio em suas variações. Por fim, o investidor agressivo é aquele investidor que aceita com tranquilidade os riscos de variação em seus rendimentos ou até mesmo alterações em seu capital investido inicialmente. Isso porque ele acredita que a longo prazo todas as movimentações trarão resultados positivos ou, pelo menos, de reequilíbrio.

Nesse estudo optamos por oito investimentos de risco de relevância ao mercado financeiro, escolhidos de maneira a diversificar os objetos em estudo. Entre eles estão dois commodities, duas moedas de câmbio, dois índices futuros e duas ações de empresas brasileiras.

O termo commodity corresponde a produtos de qualidade e características uniformes, que não são diferenciados de acordo com quem os produziu ou de sua origem, sendo seu preço uniformemente determinado pela oferta e procura internacional. O termo é geralmente usado referente aos produtos de base em estado bruto (matérias-primas) ou com pequeno grau de industrialização. Para esse trabalho foram escolhidos os petróleos Brent e WTI.

De forma simples, podemos dizer que a taxa de câmbio é o preço de uma moeda estrangeira em relação ao valor que a moeda nacional tem. O câmbio é essa relação de quantos reais são necessários para adquirir essa moeda. Assim, referente ao câmbio direto de moeda, foram escolhidos o dólar e o euro.

Índices futuros são contratos futuros que derivam de índices de mercado. Os contratos associados a ele são acordos que preveem uma estimativa de valor para determinada data de vencimento, ou seja, são acordos que definem preços de compra e venda para uma data futura. Escolhemos os índices IBOVESPA e DOW.

Ações representam uma fração do capital social de uma empresa. Ao comprar uma ação o investidor se torna sócio da empresa, ou seja, de um negócio. Quem compra uma ação na Bolsa de Valores está levando uma pequena parte de uma empresa de terceiros e passa a ser chamado de acionista minoritário. Foram escolhidas as ações da Vale e da Petrobras. Vale ressaltar que para a resolução dos problemas de programação linear, usaremos o software LPSOLVE.

Seguem as tabelas dos investimentos, retirados do site investing [1], referentes ao ano de 2019:

Commodities				Câmbio			
Petróleo Brent		Petróleo WTI		EURO - REAL		DÓLAR - REAL	
Data	Cotação	Data	Cotação	Data	Cotação	Data	Cotação
02/01/19	54.91	01/01/19	45.89	01/01/19	4.4494	01/01/19	3.8813
03/01/19	55.95	02/01/19	46.54	02/01/19	4.2992	02/01/19	3.79
04/01/19	57.06	03/01/19	47.09	03/01/19	4.2801	03/01/19	3.7565
07/01/19	57.33	04/01/19	47.96	04/01/19	4.2339	04/01/19	3.7155
08/01/19	58.72	07/01/19	48.52	07/01/19	4.2868	07/01/19	3.7356
09/01/19	61.44	08/01/19	49.78	08/01/19	4.2488	08/01/19	3.7133
10/01/19	61.68	09/01/19	52.36	09/01/19	4.2482	09/01/19	3.6807
11/01/19	60.48	10/01/19	52.59	10/01/19	4.2671	10/01/19	3.7105
14/01/19	58.99	11/01/19	51.59	11/01/19	4.2565	11/01/19	3.7113
15/01/19	60.64	14/01/19	50.51	14/01/19	4.2453	14/01/19	3.6991
16/01/19	61.32	15/01/19	52.11	15/01/19	4.2425	15/01/19	3.7172
17/01/19	61.18	16/01/19	52.31	16/01/19	4.2595	16/01/19	3.7366
18/01/19	62.70	17/01/19	52.07	17/01/19	4.2735	17/01/19	3.7504
21/01/19	62.74	18/01/19	53.80	18/01/19	4.263	18/01/19	3.7517
22/01/19	61.50	20/01/19	53.65	21/01/19	4.2682	21/01/19	3.755
23/01/19	61.14	21/01/19	54.24	22/01/19	4.3337	22/01/19	3.8152
24/01/19	61.09	22/01/19	52.57	23/01/19	4.2864	23/01/19	3.7663
25/01/19	61.64	23/01/19	52.62	24/01/19	4.2661	24/01/19	3.7733
28/01/19	59.93	24/01/19	53.13	25/01/19	4.3013	25/01/19	3.7708
29/01/19	61.32	25/01/19	53.69	28/01/19	4.2987	28/01/19	3.7619
30/01/19	61.65	28/01/19	51.99	29/01/19	4.253	29/01/19	3.7202
31/01/19	61.89	29/01/19	53.31	30/01/19	4.2298	30/01/19	3.685
01/02/19	62.75	30/01/19	54.23	31/01/19	4.1713	31/01/19	3.644
04/02/19	62.51	31/01/19	53.79	01/02/19	4.1925	01/02/19	3.6597
05/02/19	61.98	01/02/19	55.26	04/02/19	4.1968	04/02/19	3.6687
06/02/19	62.69	04/02/19	54.56	05/02/19	4.189	05/02/19	3.6698
07/02/19	61.63	05/02/19	53.66	06/02/19	4.202	06/02/19	3.6983
08/02/19	62.10	06/02/19	54.01	07/02/19	4.2172	07/02/19	3.7167
11/02/19	61.51	07/02/19	52.64	08/02/19	4.2254	08/02/19	3.7292
12/02/19	62.42	08/02/19	52.72	11/02/19	4.2372	11/02/19	3.7577
13/02/19	63.61	11/02/19	52.41	12/02/19	4.2016	12/02/19	3.7098
14/02/19	64.57	12/02/19	53.10	13/02/19	4.2278	13/02/19	3.7544
15/02/19	66.25	13/02/19	53.90	14/02/19	4.2057	14/02/19	3.7233
18/02/19	66.50	14/02/19	54.41	15/02/19	4.1797	15/02/19	3.7008
19/02/19	66.45	15/02/19	55.59	18/02/19	4.2249	18/02/19	3.7353
20/02/19	67.08	17/02/19	56.33	19/02/19	4.2223	19/02/19	3.7231
21/02/19	67.07	18/02/19	56.27	20/02/19	4.226	20/02/19	3.7277
22/02/19	67.12	19/02/19	56.09	21/02/19	4.2732	21/02/19	3.7696
25/02/19	64.76	20/02/19	56.92	22/02/19	4.252	22/02/19	3.7485
26/02/19	65.21	21/02/19	56.96	25/02/19	4.2621	25/02/19	3.7521
27/02/19	66.39	22/02/19	57.26	26/02/19	4.2729	26/02/19	3.7489
28/02/19	66.03	25/02/19	55.48	27/02/19	4.2393	27/02/19	3.7287
01/03/19	65.07	26/02/19	55.50	28/02/19	4.2657	28/02/19	3.7514
04/03/19	65.67	27/02/19	56.94	01/03/19	4.2948	01/03/19	3.7752
05/03/19	65.86	28/02/19	57.22	04/03/19	4.2812	04/03/19	3.7755
06/03/19	65.99	01/03/19	55.80	05/03/19	4.2694	05/03/19	3.7755
07/03/19	66.30	04/03/19	56.59	06/03/19	4.3419	06/03/19	3.8401



08/03/19	65.74	05/03/19	56.56	07/03/19	4.3324	07/03/19	3.8704
11/03/19	66.58	06/03/19	56.22	08/03/19	4.3465	08/03/19	3.8668
12/03/19	66.67	07/03/19	56.66	11/03/19	4.3205	11/03/19	3.8403
13/03/19	67.55	08/03/19	56.07	12/03/19	4.3034	12/03/19	3.8114
14/03/19	67.23	11/03/19	56.79	13/03/19	4.3202	13/03/19	3.8147
15/03/19	67.16	12/03/19	56.87	14/03/19	4.3442	14/03/19	3.8443
18/03/19	67.54	13/03/19	58.26	15/03/19	4.3189	15/03/19	3.8144
19/03/19	67.61	14/03/19	58.61	18/03/19	4.2983	18/03/19	3.7915
20/03/19	68.50	15/03/19	58.52	19/03/19	4.3012	19/03/19	3.7891
21/03/19	67.86	18/03/19	59.09	20/03/19	4.3101	20/03/19	3.7763
22/03/19	67.03	19/03/19	59.03	21/03/19	4.3141	21/03/19	3.793
25/03/19	67.21	20/03/19	59.83	22/03/19	4.4188	22/03/19	3.9071
26/03/19	67.97	21/03/19	59.98	25/03/19	4.3605	25/03/19	3.8544
27/03/19	67.83	22/03/19	59.04	26/03/19	4.3681	26/03/19	3.8773
28/03/19	67.82	25/03/19	58.82	27/03/19	4.4904	27/03/19	3.9935
29/03/19	68.39	26/03/19	59.94	28/03/19	4.3804	28/03/19	3.901
01/04/19	69.01	27/03/19	59.41	29/03/19	4.4027	29/03/19	3.9247
02/04/19	69.37	28/03/19	59.30	01/04/19	4.3189	01/04/19	3.8518
03/04/19	69.31	29/03/19	60.14	02/04/19	4.3181	02/04/19	3.8537
04/04/19	69.40	01/04/19	61.59	03/04/19	4.3478	03/04/19	3.87
05/04/19	70.34	02/04/19	62.58	04/04/19	4.3301	04/04/19	3.859
08/04/19	71.10	03/04/19	62.46	05/04/19	4.3445	05/04/19	3.8735
09/04/19	70.61	04/04/19	62.10	08/04/19	4.3351	08/04/19	3.8495
10/04/19	71.73	05/04/19	63.08	09/04/19	4.3369	09/04/19	3.851
11/04/19	70.83	08/04/19	64.40	10/04/19	4.3122	10/04/19	3.8251
12/04/19	71.55	09/04/19	63.98	11/04/19	4.3414	11/04/19	3.8582
15/04/19	71.18	10/04/19	64.61	12/04/19	4.3875	12/04/19	3.8819
16/04/19	71.72	11/04/19	63.58	15/04/19	4.3795	15/04/19	3.8723
17/04/19	71.62	12/04/19	63.89	16/04/19	4.4041	16/04/19	3.904
18/04/19	71.97	15/04/19	63.40	17/04/19	4.4488	17/04/19	3.9382
22/04/19	74.04	16/04/19	64.05	18/04/19	4.4108	18/04/19	3.9274
23/04/19	74.51	17/04/19	63.76	19/04/19	4.4178	19/04/19	3.9275
24/04/19	74.57	18/04/19	64.00	22/04/19	4.4323	22/04/19	3.9365
25/04/19	74.35	22/04/19	65.70	23/04/19	4.4028	23/04/19	3.9211
26/04/19	72.15	23/04/19	66.30	24/04/19	4.4535	24/04/19	3.9927
29/04/19	72.04	24/04/19	65.89	25/04/19	4.4018	25/04/19	3.9542
30/04/19	72.80	25/04/19	65.21	26/04/19	4.3807	26/04/19	3.9293
01/05/19	72.18	26/04/19	63.30	29/04/19	4.4104	29/04/19	3.9456
02/05/19	70.75	29/04/19	63.50	30/04/19	4.3978	30/04/19	3.9215
03/05/19	70.85	30/04/19	63.91	01/05/19	4.3891	01/05/19	3.9202
06/05/19	71.24	01/05/19	63.60	02/05/19	4.4336	02/05/19	3.9661
07/05/19	69.88	02/05/19	61.81	03/05/19	4.4116	03/05/19	3.9382
08/05/19	70.37	03/05/19	61.94	06/05/19	4.4455	06/05/19	3.9695
09/05/19	70.39	06/05/19	62.25	07/05/19	4.444	07/05/19	3.971
10/05/19	70.62	07/05/19	61.40	08/05/19	4.3967	08/05/19	3.9285
13/05/19	70.23	08/05/19	62.12	09/05/19	4.4267	09/05/19	3.9466
14/05/19	71.24	09/05/19	61.70	10/05/19	4.4459	10/05/19	3.9572
15/05/19	71.77	10/05/19	61.66	13/05/19	4.4827	13/05/19	3.9939
16/05/19	72.62	13/05/19	61.04	14/05/19	4.4585	14/05/19	3.9751
17/05/19	72.21	14/05/19	61.78	15/05/19	4.4827	15/05/19	4.0017

20/05/19	71.97	15/05/19	62.02	16/05/19	4.5221	16/05/19	4.0469
21/05/19	72.18	16/05/19	62.87	17/05/19	4.5744	17/05/19	4.0999
22/05/19	70.99	17/05/19	62.76	20/05/19	4.5762	20/05/19	4.0968
23/05/19	67.76	20/05/19	63.10	21/05/19	4.5077	21/05/19	4.039
24/05/19	68.69	21/05/19	62.99	22/05/19	4.5059	22/05/19	4.0403
27/05/19	70.11	22/05/19	61.42	23/05/19	4.5171	23/05/19	4.0401
28/05/19	70.11	23/05/19	57.91	24/05/19	4.5071	24/05/19	4.0225
29/05/19	69.45	24/05/19	58.63	27/05/19	4.5267	27/05/19	4.0423
30/05/19	66.87	26/05/19	58.77	28/05/19	4.4917	28/05/19	4.0247
31/05/19	64.49	27/05/19	59.16	29/05/19	4.4242	29/05/19	3.9747
03/06/19	61.28	28/05/19	59.14	30/05/19	4.4319	30/05/19	3.9818
04/06/19	61.97	29/05/19	58.81	31/05/19	4.3871	31/05/19	3.9228
05/06/19	60.63	30/05/19	56.59	03/06/19	4.3681	03/06/19	3.8859
06/06/19	61.67	31/05/19	53.50	04/06/19	4.3375	04/06/19	3.8548
07/06/19	63.29	03/06/19	53.25	05/06/19	4.3549	05/06/19	3.8811
10/06/19	62.29	04/06/19	53.48	06/06/19	4.3749	06/06/19	3.8798
11/06/19	62.29	05/06/19	51.68	07/06/19	4.396	07/06/19	3.8789
12/06/19	59.97	06/06/19	52.59	10/06/19	4.3979	10/06/19	3.8887
13/06/19	61.31	07/06/19	53.99	11/06/19	4.3708	11/06/19	3.8571
14/06/19	62.01	10/06/19	53.26	12/06/19	4.3654	12/06/19	3.8672
17/06/19	60.94	11/06/19	53.27	13/06/19	4.3402	13/06/19	3.8487
18/06/19	62.14	12/06/19	51.14	14/06/19	4.3675	14/06/19	3.8958
19/06/19	61.82	13/06/19	52.28	17/06/19	4.362	17/06/19	3.8883
20/06/19	64.45	14/06/19	52.51	18/06/19	4.3212	18/06/19	3.8603
21/06/19	65.20	17/06/19	51.93	19/06/19	4.3096	19/06/19	3.839
24/06/19	64.86	18/06/19	53.90	20/06/19	4.3354	20/06/19	3.839
25/06/19	65.05	19/06/19	53.76	21/06/19	4.3418	21/06/19	3.8192
26/06/19	66.49	20/06/19	56.65	24/06/19	4.3605	24/06/19	3.8254
27/06/19	66.55	21/06/19	57.43	25/06/19	4.3741	25/06/19	3.848
28/06/19	66.55	24/06/19	57.90	26/06/19	4.3711	26/06/19	3.8445
01/07/19	65.06	25/06/19	57.83	27/06/19	4.3423	27/06/19	3.8196
02/07/19	62.40	26/06/19	59.38	28/06/19	4.378	28/06/19	3.852
03/07/19	63.82	27/06/19	59.43	01/07/19	4.3342	01/07/19	3.8405
04/07/19	63.30	28/06/19	58.47	02/07/19	4.3429	02/07/19	3.8456
05/07/19	64.23	01/07/19	59.09	03/07/19	4.3163	03/07/19	3.8272
08/07/19	64.11	02/07/19	56.25	04/07/19	4.2895	04/07/19	3.8011
09/07/19	64.16	03/07/19	57.34	05/07/19	4.2903	05/07/19	3.8221
10/07/19	67.01	04/07/19	56.80	08/07/19	4.2695	08/07/19	3.8073
11/07/19	66.52	05/07/19	57.51	09/07/19	4.2596	09/07/19	3.8005
12/07/19	66.72	08/07/19	57.66	10/07/19	4.2242	10/07/19	3.7546
15/07/19	66.48	09/07/19	57.83	11/07/19	4.2259	11/07/19	3.7551
16/07/19	64.35	10/07/19	60.43	12/07/19	4.2123	12/07/19	3.7373
17/07/19	63.66	11/07/19	60.20	15/07/19	4.2293	15/07/19	3.7567
18/07/19	61.93	12/07/19	60.21	16/07/19	4.2252	16/07/19	3.7687
19/07/19	62.47	15/07/19	59.58	17/07/19	4.2246	17/07/19	3.7641
22/07/19	63.26	16/07/19	57.62	18/07/19	4.1943	18/07/19	3.7193
23/07/19	63.83	17/07/19	56.78	19/07/19	4.2077	19/07/19	3.7494
24/07/19	63.18	18/07/19	55.30	22/07/19	4.1932	22/07/19	3.7407
25/07/19	63.39	19/07/19	55.63	23/07/19	4.2095	23/07/19	3.7737
26/07/19	63.46	22/07/19	56.22	24/07/19	4.2043	24/07/19	3.7736

29/07/19	63.71	23/07/19	56.77	25/07/19	4.2142	25/07/19	3.779
30/07/19	64.72	24/07/19	55.88	26/07/19	4.2017	26/07/19	3.7761
31/07/19	65.17	25/07/19	56.02	29/07/19	4.2144	29/07/19	3.7816
01/08/19	60.50	26/07/19	56.20	30/07/19	4.2284	30/07/19	3.7906
02/08/19	61.89	29/07/19	56.87	31/07/19	4.2246	31/07/19	3.8129
05/08/19	59.81	30/07/19	58.05	01/08/19	4.2569	01/08/19	3.8403
06/08/19	58.94	31/07/19	58.58	02/08/19	4.3206	02/08/19	3.8893
07/08/19	56.23	01/08/19	53.95	05/08/19	4.4563	05/08/19	3.9783
08/08/19	57.38	02/08/19	55.66	06/08/19	4.4365	06/08/19	3.9612
09/08/19	58.53	05/08/19	54.69	07/08/19	4.445	07/08/19	3.9691
12/08/19	58.57	06/08/19	53.63	08/08/19	4.382	08/08/19	3.9199
13/08/19	61.30	07/08/19	51.09	09/08/19	4.414	09/08/19	3.9416
14/08/19	59.48	08/08/19	52.54	12/08/19	4.468	12/08/19	3.9855
15/08/19	58.23	09/08/19	54.50	13/08/19	4.4303	13/08/19	3.966
16/08/19	58.64	12/08/19	54.93	14/08/19	4.5141	14/08/19	4.0526
19/08/19	59.74	13/08/19	57.10	15/08/19	4.4326	15/08/19	3.991
20/08/19	60.03	14/08/19	55.23	16/08/19	4.4425	16/08/19	4.0058
21/08/19	60.30	15/08/19	54.47	19/08/19	4.5136	19/08/19	4.0743
22/08/19	59.92	16/08/19	54.87	20/08/19	4.5004	20/08/19	4.0542
23/08/19	59.34	19/08/19	56.21	21/08/19	4.4641	21/08/19	4.0269
26/08/19	58.70	20/08/19	56.34	22/08/19	4.5101	22/08/19	4.0706
27/08/19	59.51	21/08/19	55.68	23/08/19	4.5929	23/08/19	4.1198
28/08/19	60.49	22/08/19	55.35	26/08/19	4.6151	26/08/19	4.1571
29/08/19	61.08	23/08/19	54.17	27/08/19	4.5816	27/08/19	4.1311
30/08/19	60.43	26/08/19	53.64	28/08/19	4.6174	28/08/19	4.1682
02/09/19	58.66	27/08/19	54.93	29/08/19	4.6094	29/08/19	4.1688
03/09/19	58.26	28/08/19	55.78	30/08/19	4.5538	30/08/19	4.1453
04/09/19	60.70	29/08/19	56.71	02/09/19	4.5924	02/09/19	4.1871
05/09/19	60.95	30/08/19	55.10	03/09/19	4.5737	03/09/19	4.1681
06/09/19	61.54	01/09/19	54.80	04/09/19	4.5193	04/09/19	4.095
09/09/19	62.59	02/09/19	54.66	05/09/19	4.5338	05/09/19	4.1094
10/09/19	62.38	03/09/19	53.94	06/09/19	4.4789	06/09/19	4.0618
11/09/19	60.81	04/09/19	56.26	09/09/19	4.5245	09/09/19	4.0953
12/09/19	60.38	05/09/19	56.30	10/09/19	4.5069	10/09/19	4.0808
13/09/19	60.22	06/09/19	56.52	11/09/19	4.4789	11/09/19	4.068
16/09/19	69.02	09/09/19	57.85	12/09/19	4.4924	12/09/19	4.0608
17/09/19	64.55	10/09/19	57.40	13/09/19	4.524	13/09/19	4.0849
18/09/19	63.60	11/09/19	55.75	16/09/19	4.4897	16/09/19	4.081
19/09/19	64.40	12/09/19	55.09	17/09/19	4.515	17/09/19	4.0777
20/09/19	64.28	13/09/19	54.85	18/09/19	4.5347	18/09/19	4.1112
23/09/19	64.77	16/09/19	62.90	19/09/19	4.6011	19/09/19	4.1678
24/09/19	63.10	17/09/19	59.34	20/09/19	4.5704	20/09/19	4.148
25/09/19	62.39	18/09/19	58.11	23/09/19	4.5772	23/09/19	4.1638
26/09/19	62.74	19/09/19	58.13	24/09/19	4.589	24/09/19	4.165
27/09/19	61.91	20/09/19	58.09	25/09/19	4.5403	25/09/19	4.149
30/09/19	60.78	23/09/19	58.64	26/09/19	4.5556	26/09/19	4.1711
01/10/19	58.89	24/09/19	57.29	27/09/19	4.5508	27/09/19	4.1602
02/10/19	57.69	25/09/19	56.49	30/09/19	4.5296	30/09/19	4.1556
03/10/19	57.71	26/09/19	56.41	01/10/19	4.5469	01/10/19	4.159
04/10/19	58.37	27/09/19	55.91	02/10/19	4.5253	02/10/19	4.1293

07/10/19	58.35	30/09/19	54.07	03/10/19	4.4786	03/10/19	4.0841
08/10/19	58.24	01/10/19	53.62	04/10/19	4.4521	04/10/19	4.0556
09/10/19	58.32	02/10/19	52.64	07/10/19	4.5058	07/10/19	4.1071
10/10/19	59.10	03/10/19	52.45	08/10/19	4.487	08/10/19	4.0954
11/10/19	60.51	04/10/19	52.81	09/10/19	4.5095	09/10/19	4.1104
14/10/19	59.35	07/10/19	52.75	10/10/19	4.5229	10/10/19	4.1095
15/10/19	58.74	08/10/19	52.63	11/10/19	4.5381	11/10/19	4.1097
16/10/19	59.42	09/10/19	52.59	14/10/19	4.551	14/10/19	4.1265
17/10/19	59.91	10/10/19	53.55	15/10/19	4.6126	15/10/19	4.1807
18/10/19	59.42	11/10/19	54.70	16/10/19	4.5969	16/10/19	4.1518
21/10/19	58.96	14/10/19	53.59	17/10/19	4.6321	17/10/19	4.1643
22/10/19	59.70	15/10/19	52.81	18/10/19	4.5945	18/10/19	4.1117
23/10/19	61.17	16/10/19	53.36	21/10/19	4.6039	21/10/19	4.1293
24/10/19	61.67	17/10/19	53.93	22/10/19	4.5412	22/10/19	4.0819
25/10/19	62.02	18/10/19	53.78	23/10/19	4.4906	23/10/19	4.0346
28/10/19	61.57	21/10/19	53.31	24/10/19	4.4878	24/10/19	4.0415
29/10/19	61.59	22/10/19	54.16	25/10/19	4.4362	25/10/19	4.0038
30/10/19	60.61	23/10/19	55.97	28/10/19	4.43	28/10/19	3.991
31/10/19	60.23	24/10/19	56.23	29/10/19	4.4432	29/10/19	3.9986
01/11/19	61.69	25/10/19	56.66	30/10/19	4.4515	30/10/19	3.9909
04/11/19	62.13	28/10/19	55.81	31/10/19	4.4813	31/10/19	4.0184
05/11/19	62.96	29/10/19	55.54	01/11/19	4.456	01/11/19	3.9903
06/11/19	61.74	30/10/19	55.06	04/11/19	4.4686	04/11/19	4.0156
07/11/19	62.29	31/10/19	54.18	05/11/19	4.4229	05/11/19	3.9937
08/11/19	62.51	01/11/19	56.20	06/11/19	4.5187	06/11/19	4.0836
11/11/19	62.18	04/11/19	56.54	07/11/19	4.5312	07/11/19	4.1007
12/11/19	62.06	05/11/19	57.23	08/11/19	4.5882	08/11/19	4.1635
13/11/19	62.37	06/11/19	56.35	11/11/19	4.5807	11/11/19	4.1518
14/11/19	62.28	07/11/19	57.15	12/11/19	4.5883	12/11/19	4.1677
15/11/19	63.30	08/11/19	57.24	13/11/19	4.5904	13/11/19	4.1704
18/11/19	62.44	11/11/19	56.86	14/11/19	4.6243	14/11/19	4.1951
19/11/19	60.91	12/11/19	56.80	15/11/19	4.6376	15/11/19	4.1962
20/11/19	62.40	13/11/19	57.12	18/11/19	4.6701	18/11/19	4.218
21/11/19	63.97	14/11/19	56.77	19/11/19	4.6471	19/11/19	4.1945
22/11/19	63.39	15/11/19	57.72	20/11/19	4.6468	20/11/19	4.1965
25/11/19	63.65	18/11/19	57.05	21/11/19	4.6369	21/11/19	4.1932
26/11/19	64.27	19/11/19	55.21	22/11/19	4.6263	22/11/19	4.1966
27/11/19	64.06	20/11/19	57.11	25/11/19	4.6555	25/11/19	4.2268
28/11/19	63.87	21/11/19	58.58	26/11/19	4.665	26/11/19	4.2332
29/11/19	62.43	22/11/19	57.77	27/11/19	4.6898	27/11/19	4.2638
02/12/19	60.92	25/11/19	58.01	28/11/19	4.6131	28/11/19	4.1902
03/12/19	60.82	26/11/19	58.41	29/11/19	4.6675	29/11/19	4.2367
04/12/19	63.00	27/11/19	58.11	02/12/19	4.6791	02/12/19	4.2234
05/12/19	63.39	28/11/19	58.08	03/12/19	4.6621	03/12/19	4.2066
06/12/19	64.39	29/11/19	55.17	04/12/19	4.6616	04/12/19	4.208
09/12/19	64.25	02/12/19	55.96	05/12/19	4.6483	05/12/19	4.186
10/12/19	64.34	03/12/19	56.10	06/12/19	4.5799	06/12/19	4.1414
11/12/19	63.72	04/12/19	58.43	09/12/19	4.5832	09/12/19	4.1425
12/12/19	64.20	05/12/19	58.43	10/12/19	4.6002	10/12/19	4.147
13/12/19	65.22	06/12/19	59.20	11/12/19	4.5902	11/12/19	4.1242

16/12/19	65.34	09/12/19	59.02	12/12/19	4.553	12/12/19	4.0908
17/12/19	66.10	10/12/19	59.24	13/12/19	4.5688	13/12/19	4.1082
18/12/19	66.17	11/12/19	58.76	16/12/19	4.528	16/12/19	4.0632
19/12/19	66.54	12/12/19	59.18	17/12/19	4.5401	17/12/19	4.0719
20/12/19	66.14	13/12/19	60.07	18/12/19	4.5156	18/12/19	4.0634
23/12/19	66.39	16/12/19	60.21	19/12/19	4.5263	19/12/19	4.0697
24/12/19	67.20	17/12/19	60.94	20/12/19	4.5452	20/12/19	4.1025
26/12/19	67.92	18/12/19	60.93	23/12/19	4.5278	23/12/19	4.0835
27/12/19	68.16	19/12/19	61.22	24/12/19	4.5282	24/12/19	4.0838
30/12/19	68.44	20/12/19	60.44	25/12/19	4.5293	25/12/19	4.0838
31/12/19	66.00	23/12/19	60.52	26/12/19	4.5014	26/12/19	4.056
		24/12/19	61.11	27/12/19	4.522	27/12/19	4.046
		25/12/19	61.19	30/12/19	4.5015	30/12/19	4.0195
		26/12/19	61.68	31/12/19	4.5066	31/12/19	4.0195
		27/12/19	61.72	01/01/20	4.5066	01/01/20	4.0195
		30/12/19	61.68				
		31/12/19	61.06				
		01/01/20	61.33				

Índices Futuros				Ações			
DOW		IBOVESPA		VALE		PETROBRAS	
Data	Cotação	Data	Cotação	Data	Cotação	Data	Cotação
01/01/19	23,372	02/01/19	91,738	02/01/19	51.09	02/01/19	24.06
02/01/19	23,325	03/01/19	91,746	03/01/19	49.00	03/01/19	24.65
03/01/19	22,659	04/01/19	92,299	04/01/19	52.19	04/01/19	24.72
04/01/19	23,395	07/01/19	92,165	07/01/19	51.91	07/01/19	25.11
07/01/19	23,512	08/01/19	92,654	08/01/19	52.41	08/01/19	24.96
08/01/19	23,743	09/01/19	94,107	09/01/19	53.69	09/01/19	25.48
09/01/19	23,830	10/01/19	94,335	10/01/19	53.10	10/01/19	25.26
10/01/19	23,953	11/01/19	94,145	11/01/19	52.38	11/01/19	24.99
11/01/19	23,950	14/01/19	94,849	14/01/19	52.60	14/01/19	24.85
14/01/19	23,867	15/01/19	94,299	15/01/19	52.35	15/01/19	24.83
15/01/19	23,984	16/01/19	94,653	16/01/19	52.65	16/01/19	24.82
16/01/19	24,151	17/01/19	95,814	17/01/19	54.23	17/01/19	25.16
17/01/19	24,321	18/01/19	96,375	18/01/19	54.76	18/01/19	25.40
18/01/19	24,687	21/01/19	96,266	21/01/19	55.28	21/01/19	25.53
20/01/19	24,654	22/01/19	95,221	22/01/19	55.08	22/01/19	25.13
21/01/19	24,610	23/01/19	96,695	23/01/19	55.65	23/01/19	25.43
22/01/19	24,390	24/01/19	97,794	24/01/19	56.15	24/01/19	25.54
23/01/19	24,551	28/01/19	95,845	28/01/19	42.38	28/01/19	24.77
24/01/19	24,458	29/01/19	95,906	29/01/19	42.74	29/01/19	25.37
25/01/19	24,696	30/01/19	97,296	30/01/19	46.60	30/01/19	25.62
28/01/19	24,473	31/01/19	97,675	31/01/19	45.50	31/01/19	25.58
29/01/19	24,553	01/02/19	97,935	01/02/19	46.25	01/02/19	25.80
30/01/19	24,968	04/02/19	98,724	04/02/19	44.68	04/02/19	26.03
31/01/19	24,976	05/02/19	98,466	05/02/19	44.64	05/02/19	26.05
01/02/19	24,996	06/02/19	94,659	06/02/19	42.46	06/02/19	25.49
04/02/19	25,188	07/02/19	94,396	07/02/19	41.59	07/02/19	25.09
05/02/19	25,324	08/02/19	95,474	08/02/19	43.16	08/02/19	25.13
06/02/19	25,327	11/02/19	94,432	11/02/19	42.02	11/02/19	24.84
07/02/19	25,131	12/02/19	96,091	12/02/19	44.30	12/02/19	25.72
08/02/19	25,081	13/02/19	96,082	13/02/19	45.49	13/02/19	26.05
11/02/19	25,017	14/02/19	99,004	14/02/19	45.66	14/02/19	26.95
12/02/19	25,406	15/02/19	98,408	15/02/19	45.88	15/02/19	26.84
13/02/19	25,488	18/02/19	97,281	18/02/19	45.25	18/02/19	26.76
14/02/19	25,427	19/02/19	98,269	19/02/19	45.49	19/02/19	27.38
15/02/19	25,888	20/02/19	97,316	20/02/19	45.80	20/02/19	27.04
17/02/19	25,919	21/02/19	97,664	21/02/19	45.38	21/02/19	27.40
18/02/19	25,882	22/02/19	98,634	22/02/19	46.99	22/02/19	27.13
19/02/19	25,883	25/02/19	98,018	25/02/19	47.12	25/02/19	26.70
20/02/19	25,964	26/02/19	98,354	26/02/19	47.20	26/02/19	26.58
21/02/19	25,833	27/02/19	98,061	27/02/19	46.83	27/02/19	27.08
22/02/19	26,002	28/02/19	96,161	28/02/19	47.10	28/02/19	27.06
25/02/19	26,099	01/03/19	95,192	01/03/19	46.74	01/03/19	26.70
26/02/19	26,037	06/03/19	94,748	06/03/19	48.05	06/03/19	26.76
27/02/19	26,008	07/03/19	94,945	07/03/19	48.86	07/03/19	26.77
28/02/19	25,913	08/03/19	95,954	08/03/19	48.85	08/03/19	26.67
01/03/19	26,031	11/03/19	98,449	11/03/19	49.88	11/03/19	27.75
04/03/19	25,814	12/03/19	98,321	12/03/19	49.97	12/03/19	27.50

05/03/19	25,827	13/03/19	99,407	13/03/19	50.70	13/03/19	28.10
06/03/19	25,666	14/03/19	99,035	14/03/19	50.71	14/03/19	28.19
07/03/19	25,467	15/03/19	99,483	15/03/19	50.55	15/03/19	28.25
08/03/19	25,495	18/03/19	100,321	18/03/19	50.46	18/03/19	28.74
11/03/19	25,653	19/03/19	100,012	19/03/19	51.90	19/03/19	29.20
12/03/19	25,553	20/03/19	98,399	20/03/19	50.56	20/03/19	28.97
13/03/19	25,735	21/03/19	96,957	21/03/19	50.89	21/03/19	28.56
14/03/19	25,710	22/03/19	93,842	22/03/19	50.05	22/03/19	27.00
15/03/19	25,759	25/03/19	93,937	25/03/19	49.55	25/03/19	27.34
18/03/19	25,965	26/03/19	95,534	26/03/19	50.28	26/03/19	28.63
19/03/19	25,906	27/03/19	91,734	27/03/19	49.60	27/03/19	27.34
20/03/19	25,729	28/03/19	94,636	28/03/19	49.30	28/03/19	28.06
21/03/19	26,011	29/03/19	95,473	29/03/19	50.93	29/03/19	28.06
22/03/19	25,570	01/04/19	96,171	01/04/19	52.60	01/04/19	28.00
25/03/19	25,577	02/04/19	95,524	02/04/19	51.63	02/04/19	28.29
26/03/19	25,676	03/04/19	94,665	03/04/19	51.78	03/04/19	27.54
27/03/19	25,660	04/04/19	96,494	04/04/19	52.16	04/04/19	28.47
28/03/19	25,737	05/04/19	97,264	05/04/19	51.98	05/04/19	28.78
29/03/19	25,933	08/04/19	97,426	08/04/19	53.39	08/04/19	29.25
01/04/19	26,258	09/04/19	96,271	09/04/19	52.35	09/04/19	29.16
02/04/19	26,153	10/04/19	96,014	10/04/19	51.76	10/04/19	28.78
03/04/19	26,240	11/04/19	94,850	11/04/19	51.79	11/04/19	28.00
04/04/19	26,388	12/04/19	92,922	12/04/19	51.48	12/04/19	25.83
05/04/19	26,394	15/04/19	93,144	15/04/19	51.33	15/04/19	25.91
08/04/19	26,334	16/04/19	94,239	16/04/19	53.10	16/04/19	26.70
09/04/19	26,158	17/04/19	92,985	17/04/19	52.25	17/04/19	26.73
10/04/19	26,166	18/04/19	95,223	18/04/19	52.58	18/04/19	27.58
11/04/19	26,133	22/04/19	95,347	22/04/19	51.30	22/04/19	27.42
12/04/19	26,408	23/04/19	96,716	23/04/19	51.92	23/04/19	27.66
15/04/19	26,373	24/04/19	95,700	24/04/19	50.36	24/04/19	27.58
16/04/19	26,447	25/04/19	97,164	25/04/19	50.33	25/04/19	27.78
17/04/19	26,428	26/04/19	96,893	26/04/19	50.42	26/04/19	27.25
18/04/19	26,566	29/04/19	96,932	29/04/19	50.25	29/04/19	27.37
19/04/19	26,567	30/04/19	97,025	30/04/19	50.10	30/04/19	27.11
22/04/19	26,513	02/05/19	96,186	02/05/19	48.94	02/05/19	26.73
23/04/19	26,639	03/05/19	96,791	03/05/19	50.40	03/05/19	26.85
24/04/19	26,541	06/05/19	95,551	06/05/19	49.66	06/05/19	26.77
25/04/19	26,440	07/05/19	94,921	07/05/19	49.70	07/05/19	26.35
26/04/19	26,517	08/05/19	96,127	08/05/19	49.00	08/05/19	27.37
29/04/19	26,548	09/05/19	95,300	09/05/19	48.54	09/05/19	26.83
30/04/19	26,584	10/05/19	94,781	10/05/19	49.46	10/05/19	26.58
01/05/19	26,390	13/05/19	92,136	13/05/19	47.43	13/05/19	25.80
02/05/19	26,265	14/05/19	92,501	14/05/19	47.59	14/05/19	25.90
03/05/19	26,499	15/05/19	91,715	15/05/19	47.95	15/05/19	25.78
06/05/19	26,405	16/05/19	90,327	16/05/19	46.40	16/05/19	25.17
07/05/19	25,973	17/05/19	90,436	17/05/19	47.72	17/05/19	24.59
08/05/19	26,014	20/05/19	92,259	20/05/19	46.75	20/05/19	25.42
09/05/19	25,816	21/05/19	94,718	21/05/19	47.41	21/05/19	26.39
10/05/19	25,964	22/05/19	94,715	22/05/19	47.46	22/05/19	26.29
13/05/19	25,281	23/05/19	94,174	23/05/19	47.82	23/05/19	25.84

14/05/19	25,570	24/05/19	93,838	24/05/19	48.31	24/05/19	26.09
15/05/19	25,674	27/05/19	95,158	27/05/19	50.19	27/05/19	26.24
16/05/19	25,867	28/05/19	96,561	28/05/19	50.25	28/05/19	26.80
17/05/19	25,780	29/05/19	96,715	29/05/19	49.70	29/05/19	26.50
20/05/19	25,696	30/05/19	97,664	30/05/19	50.01	30/05/19	26.15
21/05/19	25,875	31/05/19	97,140	31/05/19	49.00	31/05/19	25.55
22/05/19	25,771	03/06/19	97,079	03/06/19	48.83	03/06/19	25.99
23/05/19	25,463	04/06/19	97,535	04/06/19	49.11	04/06/19	26.20
24/05/19	25,620	05/06/19	96,192	05/06/19	48.39	05/06/19	25.86
26/05/19	25,626	06/06/19	97,285	06/06/19	48.80	06/06/19	26.28
27/05/19	25,653	07/06/19	97,947	07/06/19	48.66	07/06/19	26.76
28/05/19	25,369	10/06/19	97,473	10/06/19	48.34	10/06/19	26.65
29/05/19	25,109	11/06/19	98,995	11/06/19	51.43	11/06/19	27.16
30/05/19	25,190	12/06/19	98,359	12/06/19	51.49	12/06/19	26.85
31/05/19	24,820	13/06/19	99,799	13/06/19	51.85	13/06/19	27.18
03/06/19	24,869	14/06/19	98,902	14/06/19	51.40	14/06/19	27.06
04/06/19	25,346	17/06/19	98,666	17/06/19	50.20	17/06/19	27.11
05/06/19	25,558	18/06/19	100,273	18/06/19	52.00	18/06/19	27.45
06/06/19	25,745	19/06/19	101,174	19/06/19	52.30	19/06/19	27.52
07/06/19	26,007	21/06/19	102,879	21/06/19	52.44	21/06/19	28.28
10/06/19	26,086	24/06/19	102,950	24/06/19	52.40	24/06/19	28.25
11/06/19	26,065	25/06/19	100,826	25/06/19	51.38	25/06/19	27.51
12/06/19	26,012	26/06/19	101,469	26/06/19	51.58	26/06/19	27.67
13/06/19	26,117	27/06/19	101,479	27/06/19	51.70	27/06/19	27.23
14/06/19	26,123	28/06/19	101,570	28/06/19	51.82	28/06/19	27.41
17/06/19	26,131	01/07/19	102,017	01/07/19	53.65	01/07/19	27.26
18/06/19	26,495	02/07/19	101,242	02/07/19	51.39	02/07/19	26.82
19/06/19	26,529	03/07/19	102,711	03/07/19	51.29	03/07/19	27.13
20/06/19	26,763	04/07/19	104,303	04/07/19	51.67	04/07/19	27.39
21/06/19	26,746	05/07/19	104,658	05/07/19	50.36	05/07/19	27.40
24/06/19	26,762	08/07/19	105,137	08/07/19	50.95	08/07/19	27.65
25/06/19	26,562	10/07/19	106,496	10/07/19	52.13	10/07/19	28.07
26/06/19	26,550	11/07/19	105,726	11/07/19	52.05	11/07/19	28.40
27/06/19	26,546	12/07/19	104,452	12/07/19	51.81	12/07/19	28.53
28/06/19	26,593	15/07/19	104,276	15/07/19	52.69	15/07/19	28.18
01/07/19	26,700	16/07/19	104,269	16/07/19	53.05	16/07/19	27.83
02/07/19	26,797	17/07/19	104,340	17/07/19	52.69	17/07/19	27.68
03/07/19	26,970	18/07/19	105,116	18/07/19	52.59	18/07/19	27.51
04/07/19	26,990	19/07/19	103,892	19/07/19	52.72	19/07/19	27.44
05/07/19	26,885	22/07/19	104,275	22/07/19	52.45	22/07/19	27.49
08/07/19	26,793	23/07/19	104,098	23/07/19	51.76	23/07/19	27.52
09/07/19	26,779	24/07/19	104,434	24/07/19	50.65	24/07/19	27.35
10/07/19	26,860	25/07/19	102,888	25/07/19	50.49	25/07/19	26.89
11/07/19	27,077	26/07/19	103,314	26/07/19	50.23	26/07/19	26.14
12/07/19	27,309	29/07/19	103,673	29/07/19	50.26	29/07/19	26.38
15/07/19	27,342	30/07/19	103,129	30/07/19	50.01	30/07/19	26.24
16/07/19	27,328	31/07/19	101,967	31/07/19	49.81	31/07/19	26.08
17/07/19	27,231	01/08/19	102,307	01/08/19	48.40	01/08/19	25.60
18/07/19	27,201	02/08/19	102,814	02/08/19	47.84	02/08/19	26.31
19/07/19	27,130	05/08/19	100,185	05/08/19	46.00	05/08/19	25.35



22/07/19	27,176	06/08/19	102,244	06/08/19	46.62	06/08/19	25.68
23/07/19	27,324	07/08/19	102,982	07/08/19	46.48	07/08/19	25.40
24/07/19	27,237	08/08/19	104,300	08/08/19	47.18	08/08/19	26.14
25/07/19	27,096	09/08/19	103,961	09/08/19	45.49	09/08/19	26.08
26/07/19	27,149	12/08/19	101,947	12/08/19	45.16	12/08/19	25.45
29/07/19	27,198	13/08/19	103,349	13/08/19	46.50	13/08/19	25.79
30/07/19	27,164	14/08/19	100,330	14/08/19	44.88	14/08/19	24.92
31/07/19	26,855	15/08/19	99,813	15/08/19	43.89	15/08/19	24.23
01/08/19	26,543	16/08/19	100,649	16/08/19	43.69	16/08/19	23.91
02/08/19	26,449	19/08/19	100,168	19/08/19	43.65	19/08/19	24.03
05/08/19	25,550	20/08/19	99,994	20/08/19	43.84	20/08/19	24.02
06/08/19	25,924	21/08/19	102,084	21/08/19	44.15	21/08/19	25.45
07/08/19	25,940	22/08/19	100,808	22/08/19	43.89	22/08/19	25.22
08/08/19	26,365	23/08/19	98,367	23/08/19	43.28	23/08/19	24.28
09/08/19	26,268	26/08/19	96,718	26/08/19	42.80	26/08/19	23.96
12/08/19	25,867	27/08/19	97,692	27/08/19	43.32	27/08/19	24.34
13/08/19	26,314	28/08/19	98,762	28/08/19	43.48	28/08/19	24.59
14/08/19	25,455	29/08/19	101,269	29/08/19	45.10	29/08/19	25.50
15/08/19	25,575	30/08/19	102,221	30/08/19	45.57	30/08/19	25.50
16/08/19	25,907	02/09/19	101,190	02/09/19	46.01	02/09/19	25.30
19/08/19	26,118	03/09/19	100,208	03/09/19	45.52	03/09/19	25.60
20/08/19	25,931	04/09/19	101,704	04/09/19	46.52	04/09/19	26.26
21/08/19	26,226	05/09/19	102,764	05/09/19	46.52	05/09/19	26.39
22/08/19	26,225	06/09/19	103,457	06/09/19	46.45	06/09/19	26.52
23/08/19	25,670	09/09/19	103,655	09/09/19	47.89	09/09/19	26.93
26/08/19	25,943	10/09/19	103,466	10/09/19	48.24	10/09/19	27.10
27/08/19	25,744	11/09/19	103,955	11/09/19	47.95	11/09/19	26.87
28/08/19	26,037	12/09/19	104,781	12/09/19	49.69	12/09/19	27.06
29/08/19	26,378	13/09/19	103,842	13/09/19	49.79	13/09/19	26.88
30/08/19	26,406	16/09/19	103,929	16/09/19	48.59	16/09/19	28.06
01/09/19	26,276	17/09/19	104,951	17/09/19	48.90	17/09/19	27.69
02/09/19	26,198	18/09/19	104,831	18/09/19	48.40	18/09/19	27.22
03/09/19	26,122	19/09/19	104,667	19/09/19	48.32	19/09/19	27.29
04/09/19	26,372	20/09/19	105,061	20/09/19	48.42	20/09/19	27.00
05/09/19	26,701	23/09/19	104,896	23/09/19	48.10	23/09/19	27.48
06/09/19	26,808	24/09/19	104,126	24/09/19	46.93	24/09/19	27.27
09/09/19	26,840	25/09/19	104,700	25/09/19	47.86	25/09/19	27.34
10/09/19	26,894	26/09/19	105,540	26/09/19	47.86	26/09/19	27.70
11/09/19	27,144	27/09/19	105,344	27/09/19	47.66	27/09/19	27.66
12/09/19	27,198	30/09/19	105,139	30/09/19	47.75	30/09/19	27.55
13/09/19	27,218	01/10/19	104,157	01/10/19	47.71	01/10/19	27.51
16/09/19	27,084	02/10/19	101,149	02/10/19	45.10	02/10/19	26.72
17/09/19	27,114	03/10/19	101,456	03/10/19	45.44	03/10/19	26.74
18/09/19	27,148	04/10/19	102,613	04/10/19	46.59	04/10/19	26.51
19/09/19	27,086	07/10/19	100,661	07/10/19	46.04	07/10/19	26.17
20/09/19	27,141	08/10/19	99,898	08/10/19	45.32	08/10/19	26.02
23/09/19	26,963	09/10/19	101,300	09/10/19	45.67	09/10/19	26.52
24/09/19	26,818	10/10/19	101,892	10/10/19	47.24	10/10/19	26.74
25/09/19	26,958	11/10/19	103,837	11/10/19	48.64	11/10/19	27.26
26/09/19	26,892	14/10/19	104,293	14/10/19	47.99	14/10/19	27.31

27/09/19	26,796	15/10/19	104,440	15/10/19	47.91	15/10/19	27.60
30/09/19	26,901	16/10/19	104,921	16/10/19	46.80	16/10/19	27.93
01/10/19	26,521	17/10/19	105,750	17/10/19	46.71	17/10/19	27.66
02/10/19	25,985	18/10/19	105,366	18/10/19	46.03	18/10/19	27.60
03/10/19	26,180	21/10/19	106,678	21/10/19	47.21	21/10/19	27.77
04/10/19	26,525	22/10/19	107,969	22/10/19	47.30	22/10/19	28.57
07/10/19	26,439	23/10/19	108,180	23/10/19	47.11	23/10/19	28.95
08/10/19	26,138	24/10/19	107,681	24/10/19	46.75	24/10/19	28.32
09/10/19	26,305	25/10/19	108,099	25/10/19	48.56	25/10/19	29.25
10/10/19	26,484	28/10/19	108,756	28/10/19	48.70	28/10/19	29.60
11/10/19	26,775	29/10/19	108,100	29/10/19	48.65	29/10/19	29.62
14/10/19	26,746	30/10/19	109,000	30/10/19	48.59	30/10/19	29.88
15/10/19	27,002	31/10/19	107,885	31/10/19	47.20	31/10/19	30.19
16/10/19	26,940	01/11/19	108,782	01/11/19	48.44	01/11/19	30.23
17/10/19	26,993	04/11/19	109,228	04/11/19	49.82	04/11/19	30.16
18/10/19	26,754	05/11/19	109,091	05/11/19	49.87	05/11/19	29.46
21/10/19	26,797	06/11/19	108,876	06/11/19	49.69	06/11/19	29.51
22/10/19	26,763	07/11/19	110,001	07/11/19	50.11	07/11/19	30.70
23/10/19	26,802	08/11/19	107,908	08/11/19	49.18	08/11/19	29.82
24/10/19	26,780	11/11/19	108,834	11/11/19	48.13	11/11/19	30.25
25/10/19	26,904	12/11/19	107,146	12/11/19	47.90	12/11/19	30.02
28/10/19	27,053	13/11/19	106,589	13/11/19	47.12	13/11/19	29.90
29/10/19	27,042	14/11/19	106,944	14/11/19	47.00	14/11/19	29.30
30/10/19	27,132	18/11/19	106,681	18/11/19	47.61	18/11/19	29.08
31/10/19	26,982	19/11/19	106,080	19/11/19	48.17	19/11/19	28.78
01/11/19	27,259	21/11/19	107,758	21/11/19	48.42	21/11/19	29.85
04/11/19	27,380	22/11/19	108,891	22/11/19	50.03	22/11/19	29.98
05/11/19	27,421	25/11/19	108,766	25/11/19	50.86	25/11/19	29.73
06/11/19	27,430	26/11/19	107,500	26/11/19	51.22	26/11/19	29.19
07/11/19	27,667	27/11/19	108,035	27/11/19	50.58	27/11/19	29.33
08/11/19	27,631	28/11/19	108,539	28/11/19	50.37	28/11/19	29.53
11/11/19	27,658	29/11/19	108,359	29/11/19	49.98	29/11/19	29.15
12/11/19	27,663	02/12/19	109,153	02/12/19	51.34	02/12/19	29.07
13/11/19	27,761	03/12/19	109,184	03/12/19	50.42	03/12/19	28.98
14/11/19	27,746	04/12/19	110,428	04/12/19	50.92	04/12/19	29.66
15/11/19	27,953	05/12/19	110,775	05/12/19	50.95	05/12/19	30.05
18/11/19	28,008	06/12/19	111,303	06/12/19	51.35	06/12/19	30.35
19/11/19	27,895	09/12/19	111,071	09/12/19	51.44	09/12/19	30.21
20/11/19	27,800	10/12/19	110,705	10/12/19	51.20	10/12/19	30.44
21/11/19	27,748	11/12/19	111,055	11/12/19	51.83	11/12/19	30.40
22/11/19	27,862	12/12/19	112,458	12/12/19	52.95	12/12/19	30.97
25/11/19	28,039	13/12/19	112,665	13/12/19	52.37	13/12/19	29.57
26/11/19	28,130	16/12/19	112,176	16/12/19	51.96	16/12/19	29.01
27/11/19	28,148	17/12/19	112,629	17/12/19	51.97	17/12/19	29.44
28/11/19	28,117	18/12/19	114,023	18/12/19	52.09	18/12/19	30.12
29/11/19	28,073	19/12/19	115,728	19/12/19	52.61	19/12/19	30.19
02/12/19	27,789	20/12/19	115,759	20/12/19	53.38	20/12/19	29.85
03/12/19	27,487	23/12/19	116,319	23/12/19	53.17	23/12/19	30.09
04/12/19	27,643	26/12/19	117,858	26/12/19	53.38	26/12/19	30.49
05/12/19	27,678	27/12/19	116,938	27/12/19	53.60	27/12/19	30.52

06/12/19	28,014	30/12/19	115,952	30/12/19	53.30	30/12/19	30.18
09/12/19	27,902						
10/12/19	27,921						
11/12/19	27,924						
12/12/19	28,131						
13/12/19	28,168						
16/12/19	28,253						
17/12/19	28,276						
18/12/19	28,266						
19/12/19	28,386						
20/12/19	28,606						
23/12/19	28,550						
24/12/19	28,508						
25/12/19	28,517						
26/12/19	28,619						
27/12/19	28,610						
30/12/19	28,440						
31/12/19	28,508						
01/01/20	28,568						

Figura 7.1: Gráfico Petróleo

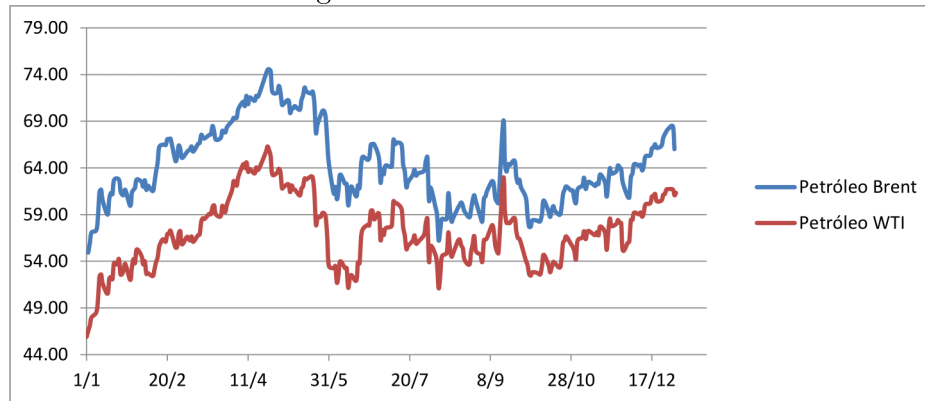


Figura 7.2: Gráfico Câmbio

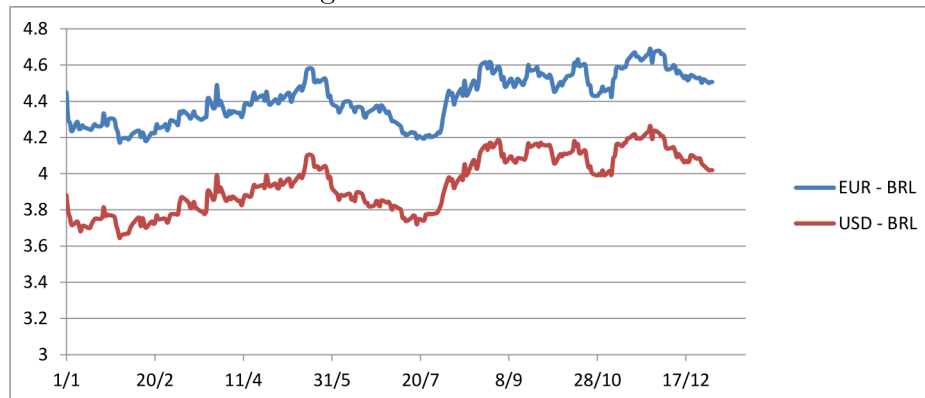


Figura 7.3: Gráfico Índices Futuros

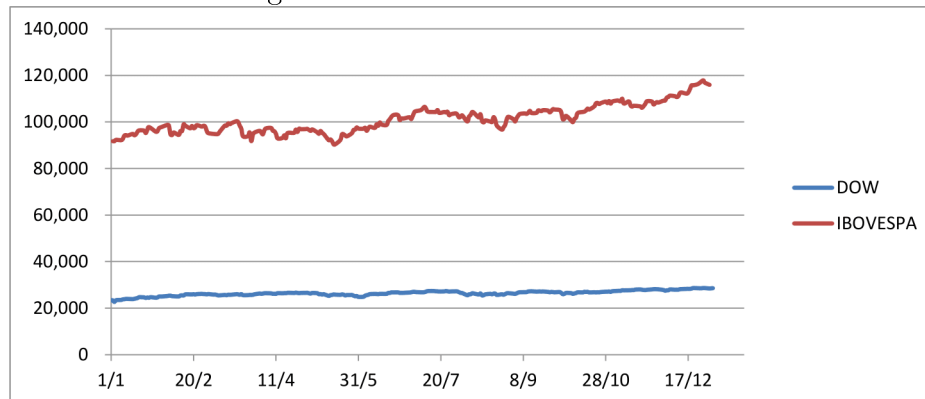


Figura 7.4: Gráfico Ações



Com esses dados em mãos, iremos supor um investimento no dia 03/06, assim podemos definir o payoff como a porcentagem em que o valor deste investimento cresceu ou diminuiu no começo de cada mês em relação ao investimento inicial. Assim, temos as seguintes tabelas:

Tabela 7.1: Tabela Geral

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
3/6	61.28	52.31	4.3681	3.8859	24869	97079	48.83	25.99
1/7	65.06	59.09	4.3342	3.8405	26700	102017	53.65	27.26
1/8	60.5	53.95	4.2569	3.8403	26543	102307	48.4	25.6
2/9	58.66	54.66	4.5924	4.1871	26198	101190	46.01	25.3
1/10	58.89	53.62	4.5469	4.159	26521	104157	47.71	27.51
1/11	61.69	56.2	4.456	3.9903	27259	108782	48.44	30.23
2/12	60.92	55.96	4.6791	4.2234	27789	109153	51.34	29.07
30/12	68.44	61.68	4.5015	4.0195	28440	115952	53.3	30.18

Ou seja, temos a seguinte matriz de payoff:

Tabela 7.2: Matriz de Payoff da Tabela Geral

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
1/7	6.17	12.96	-0.78	-1.17	7.36	5.09	9.87	4.89
1/8	-1.27	3.14	-2.55	-1.17	6.73	5.39	-0.88	-1.50
2/9	-4.28	4.49	5.13	7.75	5.34	4.23	-5.78	-2.65
1/10	-3.90	2.50	4.09	7.03	6.64	7.29	-2.29	5.85
1/11	0.67	7.44	2.01	2.69	9.61	12.06	-0.80	16.31
2/12	-0.59	6.98	7.12	8.69	11.74	12.44	5.14	11.85

Assim, para encontrar um equilíbrio de Nash, devemos resolver os seguintes problemas, em que a matriz dos coeficientes foi obtida da Tabela 7.2 somando  $d = 6$  em todas as entradas:

(primal)

maximizar:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$

sujeito a  $12.17x_1 + 18.96x_2 + 5.22x_3 + 4.83x_4 + 13.36x_5 + 11.09x_6 + 15.87x_7 + 10.89x_8 \leq 1$

$4.732x_1 + 9.14x_2 + 3.45x_3 + 4.838x_4 + 12.73x_5 + 11.39x_6 + 5.12x_7 + 4.50x_8 \leq 1$

$1.72x_1 + 10.49x_2 + 11.13x_3 + 13.75x_4 + 11.34x_5 + 10.23x_6 + 0.22x_7 + 3.35x_8 \leq 1$

$2.10x_1 + 8.50x_2 + 10.09x_3 + 13.03x_4 + 12.64x_5 + 13.29x_6 + 3.71x_7 + 11.85x_8 \leq 1$

$6.67x_1 + 13.44x_2 + 8.01x_3 + 8.69x_4 + 15.61x_5 + 18.06x_6 + 5.20x_7 + 22.31x_8 \leq 1$

$5.41x_1 + 12.98x_2 + 13.12x_3 + 1.694x_4 + 17.74x_5 + 18.44x_6 + 11.14x_7 + 17.85x_8 \leq 1$

$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$

(dual)

minimizar:  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$ 

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } & 12.17y_1 + 4.732y_2 + 1.72y_3 + 2.10y_4 + 6.67y_5 + 5.41y_6 \geq 1 \\ & 18.96y_1 + 9.14y_2 + 10.49y_3 + 8.50y_4 + 13.44y_5 + 12.98y_6 \geq 1 \\ & 5.22y_1 + 3.45y_2 + 11.13y_3 + 10.09y_4 + 8.01y_5 + 13.12y_6 \geq 1 \\ & 4.83y_1 + 4.838y_2 + 13.75y_3 + 13.03y_4 + 8.69y_5 + 1.694y_6 \geq 1 \\ & 13.36y_1 + 12.73y_2 + 11.34y_3 + 12.64y_4 + 15.61y_5 + 17.74y_6 \geq 1 \\ & 11.09y_1 + 11.39y_2 + 10.23y_3 + 13.29y_4 + 18.06y_5 + 18.44y_6 \geq 1 \\ & 15.87y_1 + 5.12y_2 + 0.22y_3 + 3.71y_4 + 5.20y_5 + 11.14y_6 \geq 1 \\ & 10.89y_1 + 4.50y_2 + 3.35y_3 + 11.85y_4 + 22.31y_5 + 17.85y_6 \geq 1 \\ & y_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Utilizando o software LPSolve, obtemos:

Primal -  $Q(X) = 0,126595$

$X = (0.050148, 0, 0.052441, 0, 0.024005, 0, 0, 0, 0)$

$p^* = (0.3961, 0, 0.4142, 0.1896, 0, 0, 0, 0)$

Dual -  $Q(Y) = 0,126595$

$Y = (0.071964, 0, 0.046438, 0, 0, 0.008192)$

$q^* = (0.5684, 0, 0.3668, 0, 0, 0.0647)$

Então, temos que  $(p^*, q^*)$  é o Equilíbrio de Nash para essa situação. Podemos interpretar que, do capital disponível, devemos aplicar: 39.61% em Brent, 41.42% em Euro e 18.98% em Dólar, com uma relevância de 56.84% em julho, 36.68% em setembro e 6.47% em dezembro na escolha das porcentagens de aplicação.

Podemos também fazer análises de curto (1 a 2 meses), médio (3 a 4 meses) e longo (5 a 6 meses) prazos referentes a um investidor agressivo. Para esta parte, faremos a matriz de payoff de uma maneira posicional, isto é, ao melhor resultado será atribuído o payoff 1, ao segundo melhor será atribuído o 2, e assim sucessivamente. Além do mais, usaremos um pivoteamento nos tipos de investimentos, dando prioridade a eles ao fazer essa distribuição de payoff.

Faremos desta maneira pois assim podemos conseguir uma distribuição mista nos investimentos. A ideia inicial deste projeto era fazer com que o investidor jogasse contra ele mesmo, onde analisaríamos as jogadas de investir contra as de não investir. Assim o ganho de um jogador seria a perda do outro, tornando assim um jogo de soma zero.

Mas, após algumas tentativas, foi observado que o processo retornaria sempre uma estratégia pura, que no caso seria o investimento de maior retorno até aquele momento.

Agora com essa abordagem de payoff posicional, aproximamos mais da ideia de um equilíbrio de Nash, onde iremos minimizar o nosso prejuízo, juntamente com a maximização dos nossos lucros, levando em conta não só o resultado de cada investimento, mas também sua variação.

Assim, como antes, supondo que o investidor irá fazer esse investimento no dia 03/06, e sendo G1 = commodities, G2 = câmbio, G3 = índices futuros e G4 = Ações, temos que a matriz de payoff e o equilíbrio de Nash em cada mês será:

## Julho:

Tabela 7.3: Matriz de Payoff de Julho

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
Geral	5	1	7	8	3	4	2	6
G1	2	1	7	8	4	5	3	6
G2	7	3	1	2	5	6	4	8
G3	5	3	7	8	1	2	4	6
G4	6	3	7	8	4	5	1	2
G1 e G2	2	1	3	4	6	7	5	8
G3 e G4	6	5	7	8	2	3	1	4

Ou seja temos os seguintes problemas:

(primal)

$$\text{maximizar: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{sujeito a } 5x_1 + 1x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 3x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 8x_8 \leq 1$$

$$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 1x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$6x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 1x_7 + 2x_8 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 5x_7 + 8x_8 \leq 1$$

$$6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 1x_7 + 4x_8 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

(dual)

$$\text{minimizar: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$\text{sujeito a } 5y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 5y_4 + 6y_5 + 2y_6 + 6y_7 \geq 1$$

$$1y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 1y_6 + 5y_7 \geq 1$$

$$7y_1 + 7y_2 + 1y_3 + 7y_4 + 7y_5 + 3y_6 + 7y_7 \geq 1$$

$$8y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 8y_4 + 8y_5 + 4y_6 + 8y_7 \geq 1$$

$$3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 1y_4 + 4y_5 + 6y_6 + 2y_7 \geq 1$$

$$4y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 2y_4 + 5y_5 + 7y_6 + 3y_7 \geq 1$$

$$2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 4y_4 + 1y_5 + 5y_6 + 1y_7 \geq 1$$

$$6y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 6y_4 + 2y_5 + 8y_6 + 4y_7 \geq 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$



$$\text{Primal - } Q(X) = 0.294118$$

$$X = (0, 0.176471, 0, 0, 0, 0, 0.117647, 0)$$

$$p^* = (0, 0.6, 0, 0, 0, 0, 0.4, 0)$$

$$\text{Dual - } Q(Y) = 0.294118$$

$$Y = (0, 0, 0.176471, 0.058824, 0, 0, 0.058824)$$

$$q^* = (0, 0, 0, 6, 0.2, 0, 0, 0.2)$$

Temos então que  $(p^*, q^*)$  é o equilíbrio de Nash nestas condições e assim, conseguimos inferir que do capital disponível, devemos fazer uma aplicação de 60% em WTI e de 40% em Ações da Vale, com uma relevância de 60% em G2, 20% em G3 e 20% em G3-G4.

## Agosto:

Tabela 7.4: Matriz de Payoff de Agosto

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
Geral	6	3	8	5	1	2	4	7
G1	2	1	8	6	3	4	5	7
G2	7	5	2	1	3	4	6	8
G3	6	3	8	5	1	2	4	7
G4	7	5	8	6	3	4	1	2
G1 e G2	3	1	4	2	5	6	7	8
G3 e G4	7	5	8	6	1	2	3	4

Assim temos:

(primal)

$$\text{maximizar: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{sujeito a } 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 1x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 7x_8 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 7x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 6x_7 + 8x_8 \leq 1$$

$$6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 1x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 7x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 1x_7 + 2x_8 \leq 1$$

$$3x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 1x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

(dual)

$$\text{minimizar: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$\text{sujeito a } 6y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 6y_4 + 7y_5 + 3y_6 + 7y_7 \geq 1$$

$$3y_1 + 1y_2 + 5y_3 + 3y_4 + 5y_5 + 1y_6 + 5y_7 \geq 1$$

$$8y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 8y_4 + 8y_5 + 4y_6 + 8y_7 \geq 1$$

$$5y_1 + 6y_2 + 1y_3 + 5y_4 + 6y_5 + 2y_6 + 6y_7 \geq 1$$

$$1y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 1y_4 + 3y_5 + 5y_6 + 1y_7 \geq 1$$

$$2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 6y_6 + 2y_7 \geq 1$$

$$4y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 4y_4 + 1y_5 + 7y_6 + 3y_7 \geq 1$$

$$7y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 7y_4 + 2y_5 + 8y_6 + 4y_7 \geq 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$

$$\text{Primal - } Q(X) = 0.272727$$

$$X = (0, 0.090909, 0, 0, 0.181818, 0, 0, 0)$$

$$p^* = (0, 0.333333, 0, 0, 0.666667, 0, 0, 0)$$

$$\text{Dual - } Q(Y) = 0.272727$$

$$Y = (0, 0, 0.054545, 0, 0.127273, 0.090909, 0)$$

$$q^* = (0, 0, 0.2, 0, 0.466667, 0.333333, 0)$$

Assim, temos que em agosto o equilíbrio de Nash é  $(p^*, q^*)$ , assim, segue que devemos ter uma aplicação de 33.33% em WTI e 66.67% em Índice DOW, com uma relevância de 20% em G2, 46.67% em G4 e 33.33% em G1-G2.

## Setembro:

Tabela 7.5: Matriz de Payoff de Setembro

2/9	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
Geral	7	4	3	1	2	5	8	6
G1	2	1	5	3	4	6	8	7
G2	7	4	2	1	3	5	8	6
G3	7	5	4	3	1	2	8	6
G4	8	6	5	3	4	7	2	1
G1 e G2	4	3	2	1	5	6	8	7
G3 e G4	8	7	6	5	1	2	4	3

Assim temos:

(primal)

$$\text{maximizar: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{sujeito a } 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 5x_6 + 8x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 8x_7 + 7x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 8x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 1x_5 + 2x_6 + 8x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 2x_7 + 1x_8 \leq 1$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 8x_7 + 7x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 1x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 3x_8 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

(dual)

$$\text{minimizar: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$\text{sujeito a } 7y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 7y_4 + 8y_5 + 4y_6 + 8y_7 \geq 1$$

$$4y_1 + 1y_2 + 4y_3 + 5y_4 + 6y_5 + 3y_6 + 7y_7 \geq 1$$

$$3y_1 + 5y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 2y_6 + 6y_7 \geq 1$$

$$1y_1 + 3y_2 + 1y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 1y_6 + 5y_7 \geq 1$$

$$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 1y_4 + 4y_5 + 5y_6 + 1y_7 \geq 1$$

$$5y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 2y_4 + 7y_5 + 6y_6 + 2y_7 \geq 1$$

$$8y_1 + 8y_2 + 8y_3 + 8y_4 + 2y_5 + 8y_6 + 4y_7 \geq 1$$

$$6y_1 + 7y_2 + 6y_3 + 6y_4 + 1y_5 + 7y_6 + 3y_7 \geq 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$

$$\text{Primal - } Q(X) = 0.294118$$

$$X = (0, 0, 0, 0.176471, 0.117647, 0, 0, 0)$$

$$p^* = (0, 0, 0, 0.6, 0.4, 0, 0, 0)$$

$$\text{Dual - } Q(Y) = 0.294118$$

$$Y = (0, 0.098039, 0, 0, 0.137255, 0, 0.058824)$$

$$q^* = (0, 0.333333, 0, 0, 0.466667, 0, 0.2)$$

Assim, para as condições de setembro, temos que  $(p^*, q^*)$  é o equilíbrio de Nash, logo, segue que devemos ter uma aplicação de 60% em Dólar e 40% em Índice DOW, com uma relevância de 33.33% em G1, 46.67% em G4 e 20% em G3-G4.

## Outubro:

Tabela 7.6: Matriz de Payoff de Outubro

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
Geral	8	6	5	2	3	1	7	4
G1	2	1	7	4	5	3	8	6
G2	8	6	2	1	4	3	7	5
G3	8	6	5	3	2	1	7	4
G4	8	7	6	4	5	3	2	1
G1 e G2	4	3	2	1	6	5	8	7
G3 e G4	8	7	6	5	2	1	4	3

Assim temos:

(primal)

$$\text{maximizar: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{sujeito a } 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 1x_6 + 7x_7 + 4x_8 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 7x_7 + 5x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 7x_7 + 4x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 1x_8 \leq 1$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 8x_7 + 7x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 4x_7 + 3x_8 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

(dual)

$$\text{minimizar: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$\text{sujeito a } 8y_1 + 2y_2 + 8y_3 + 8y_4 + 8y_5 + 4y_6 + 8y_7 \geq 1$$

$$6y_1 + 1y_2 + 6y_3 + 6y_4 + 7y_5 + 3y_6 + 7y_7 \geq 1$$

$$5y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 6y_5 + 2y_6 + 6y_7 \geq 1$$

$$2y_1 + 4y_2 + 1y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 1y_6 + 5y_7 \geq 1$$

$$3y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 5y_5 + 6y_6 + 2y_7 \geq 1$$

$$1y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 1y_4 + 3y_5 + 5y_6 + 1y_7 \geq 1$$

$$7y_1 + 8y_2 + 7y_3 + 7y_4 + 2y_5 + 8y_6 + 4y_7 \geq 1$$

$$4y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 4y_4 + 1y_5 + 7y_6 + 3y_7 \geq 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$

$$\text{Primal - } Q(X) = 0.294118$$

$$X = (0, 0, 0, 0.117647, 0, 0.176471, 0, 0)$$

$$p^* = (0, 0, 0, 0.4, 0, 0.6, 0, 0)$$

$$\text{Dual - } Q(Y) = 0.294118$$

$$Y = (0, 0.137255, 0, 0, 0.098039, 0.058824, 0)$$

$$q^* = (0, 0.466667, 0, 0, 0.333333, 0.2, 0)$$

Logo, para o mês de outubro,  $(p^*, q^*)$  é o equilíbrio de Nash, o que indica uma aplicação de 40% em Dólar e 60% em Índice IBOVESPA, com uma relevância de 46.67% em G1, 33.33% em G4 e 20% em G1-G2.

## Novembro:

Tabela 7.7: Matriz de Payoff de Novembro

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
Geral	7	4	6	5	3	2	8	1
G1	2	1	7	6	5	4	8	3
G2	7	6	2	1	5	4	8	3
G3	7	4	6	5	2	1	8	3
G4	8	5	7	6	4	3	2	1
G1 e G2	4	1	3	2	7	6	8	5
G3 e G4	8	5	7	6	3	2	4	1

Assim temos:

(primal)

$$\text{maximizar: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{sujeito a } 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 8x_7 + 1x_8 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 8x_7 + 3x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 8x_7 + 3x_8 \leq 1$$

$$7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 8x_7 + 3x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 1x_8 \leq 1$$

$$4x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 7x_5 + 6x_6 + 8x_7 + 5x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 1x_8 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

(dual)

$$\text{minimizar: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$\text{sujeito a } 7y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 7y_4 + 8y_5 + 4y_6 + 8y_7 \geq 1$$

$$4y_1 + 1y_2 + 6y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 1y_6 + 5y_7 \geq 1$$

$$6y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 6y_4 + 7y_5 + 3y_6 + 7y_7 \geq 1$$

$$5y_1 + 6y_2 + 1y_3 + 5y_4 + 6y_5 + 2y_6 + 6y_7 \geq 1$$

$$3y_1 + 5y_2 + 5y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 7y_6 + 3y_7 \geq 1$$

$$2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 1y_4 + 3y_5 + 6y_6 + 2y_7 \geq 1$$

$$8y_1 + 8y_2 + 8y_3 + 8y_4 + 2y_5 + 8y_6 + 4y_7 \geq 1$$

$$1y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 1y_5 + 5y_6 + 1y_7 \geq 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$



$$\text{Primal - } Q(X) = 0.29097$$

$$X = (0, 0.073579, 0, 0.06689, 0, 0.040134, 0, 0.110368)$$

$$p^* = (0, 0.252874, 0, 0.229885, 0, 0.137931, 0, 0.37931)$$

$$\text{Dual - } Q(Y) = 0.29097$$

$$Y = (0, 0, 0.048495, 0.108696, 0.035117, 0.098662, 0)$$

$$q^* = (0, 0, 0.166667, 0.373563, 0.12069, 0.33908, 0)$$

Ou seja, temos que  $(p^*, q^*)$  é o equilíbrio de Nash nestas condições e assim, segue que do capital disponível, devemos aplicar 25.29% em WTI, 22.99% em Dolar, 13.79% em Índice IBOVESPA e 37.93% em Ações da Petrobras, com uma relevância de 16.67% em G2, 37.36% em G3, 12.07% em G4 e 33.9% em G1-G2.

## Dezembro:

Tabela 7.8: Matriz de Payoff de Dezembro

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
Geral	8	6	5	4	3	1	7	2
G1	2	1	7	6	5	3	8	4
G2	8	6	2	1	5	3	7	4
G3	8	6	5	4	2	1	7	3
G4	8	7	6	5	4	3	2	1
G1 e G2	4	3	2	1	7	5	8	6
G3 e G4	8	7	6	5	3	1	4	2

Assim temos:

(primal)

$$\text{maximizar: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{sujeito a } 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 1x_6 + 7x_7 + 2x_8 \leq 1$$

$$2x_1 + 1x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 4x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 7x_7 + 4x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 7x_7 + 3x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 1x_8 \leq 1$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 8x_7 + 6x_8 \leq 1$$

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 1x_6 + 4x_7 + 2x_8 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

(dual)

$$\text{minimizar: } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$$

$$\text{sujeito a } 8y_1 + 2y_2 + 8y_3 + 8y_4 + 8y_5 + 4y_6 + 8y_7 \geq 1$$

$$6y_1 + 1y_2 + 6y_3 + 6y_4 + 7y_5 + 3y_6 + 7y_7 \geq 1$$

$$5y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 6y_5 + 2y_6 + 6y_7 \geq 1$$

$$4y_1 + 6y_2 + 1y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 1y_6 + 5y_7 \geq 1$$

$$3y_1 + 5y_2 + 5y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 7y_6 + 3y_7 \geq 1$$

$$1y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 1y_4 + 3y_5 + 5y_6 + 1y_7 \geq 1$$

$$7y_1 + 8y_2 + 7y_3 + 7y_4 + 2y_5 + 8y_6 + 2y_7 \geq 1$$

$$2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 1y_5 + 6y_6 + 4y_7 \geq 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$

$$\begin{aligned} \text{Primal - } Q(X) &= 0.265823 \\ X &= (0, 0.012658, 0, 0.075949, 0, 0.177215, 0, 0) \\ p^* &= (0, 0.047619, 0, 0.285714, 0, 0.666667, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dual - } Q(Y) &= 0.265823 \\ Y &= (0, 0.075949, 0, 0, 0.088608, 0.101266, 0) \\ q^* &= (0, 0.285714, 0, 0, 0.333333, 0.380952, 0) \end{aligned}$$

Ou seja, temos que  $(p^*, q^*)$  é o equilíbrio de Nash para um investimento até dezembro e assim, segue que do devemos ter uma aplicação de 4.76% em WTI, 28.57% em Dólar e 66.67% em Índice IBOVESPA, com uma relevância de 28.57% em G1, 33.33% em G4 e 38.1% em G1-G2.

Assim, obtemos a seguinte tabela com todos os equilíbrios de Nash obtidos:

	Brent	WTI	Euro	Dolar	DOW	Ibov	Vale	Petrobras
Geral	39.61%	0%	41.42%	18.98%	0%	0%	0%	0%
1/7	0%	60.00%	0%	0%	0%	0%	40%	0%
1/8	0%	33.33%	0%	0%	66.67%	0%	0%	0%
2/9	0%	00%	0%	60%	40%	0%	0%	0%
1/10	0%	0%	0%	40%	0%	60%	0%	0%
1/11	0%	25.29%	0%	22.99%	0%	13.79%	0%	37.93%
2/12	0%	4.76%	0%	28.57%	0%	66.67%	0%	0%

Em conclusão, apesar de que a cotação dos ativos escolhidos já estarem predeterminados, conseguimos maneiras diferentes de analisar um problema dependendo de como escolhermos influenciar nosso julgamento, seja dando ênfase ao lucro, estabilidade ou até mesmo o medo de um mal investimento, que em nosso caso foi se preocupar em como comparar os ativos, e em quanto tempo este investimento duraria.

Por isso acredito que um Equilíbrio de Nash possa ser um resultado relevante em situações como essa, pois o processo da busca de um Equilíbrio de Nash se dá com uma análise do objeto como um todo, se preocupando não só com o seu estado atual, mas também com sua variação

de comportamento. O que é importante nesse mundo do mercado financeiro, pois um ativo que apresenta um ganho ou perda significativa, não possui garantias de que continuará retornando este ganho/perda em um futuro próximo, isto é, geralmente variações extremas em um curto período de tempo indicam que o mesmo poderá se estabilizar. Essa situação se encaixa muito bem em equilíbrio de Nash, que busca minimizar as perdas enquanto tenta maximizar o lucro.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] *Site Investing*. <https://br.investing.com/>, Accessed: 2020-01-20.
- [2] Luce, R. D. e Raia, H.: *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Harvard University Press, 1957.
- [3] Myerson, R. B.: *Game Theory Analysis of Conflict*. Harvard University Press, 1ª ed., 1997.
- [4] Sartini, B. A., Garbugio, G., Bortolossi, H. J., Santos, P. A. e Barreto, L. S.: *Uma Introdução à Teoria dos Jogos*. II Bienal da SBM, 2004.
- [5] Tadelis, S.: *Game Theory: An Introduction*. Princeton University Press, 1ª ed., 2013.
- [6] Von Neumann, J. e Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1ª ed., 1944.
- [7] Zermelo, E.: *On an Application of Set Theory to the Theory of the Game of Chess*. Cambridge University Press, 1913.