

**Universidade Federal de Uberlândia**

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

---

Trabalho de Conclusão de Curso

**Curvas em variedades de  
Lorentz tridimensionais**

por

**André Luis Martins Tomaz da Silva**

Licenciatura em Matemática - Ituiutaba - MG

**Orientadora: Profa. Dra. Tânia Maria Machado de  
Carvalho**

# Curvas em variedades de Lorentz tridimensionais

Este exemplar corresponde à redação final do Trabalho de Conclusão de Curso devidamente corrigido e defendido por **André Luis Martins Tomaz da Silva** e aprovado pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 14 de dezembro de 2020.

---

**Profa. Dra. Tânia Maria M. de Carvalho**

Banca examinadora:

Profa. Dra. Tânia Maria Machado de  
Carvalho

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira  
Vieira

Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciado em Matemática.**

*A minha Orientadora*

*Tânia*

---

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família pelo apoio. Em especial, agradeço aos meus pais por sempre me incentivarem e apoiarem em relação aos meus estudos durante a minha vida.

A minha orientadora, Professora Doutora Tânia Maria Machado de Carvalho, agradeço por ter aceitado a trabalhar com esse tema desde seu momento inicial quando ainda era um projeto de pesquisa para a obtenção de nota na disciplina de Metodologia Científica e por todo seu apoio constante com o seu conhecimento, e disponibilidade durante todo o processo de construção deste trabalho.

As amigadas que construí durante a graduação que sem o incentivo e apoio não teria conseguido chegar até essa etapa do curso e aos professores do Curso de Graduação em Matemática que contribuíram com a minha formação acadêmica.

---

# RESUMO

O objetivo do presente trabalho é apresentar alguns conceitos fundamentais no estudo de variedades diferenciáveis semi-riemannianas, com o intuito de criar condições para introduzir as principais características da geometria envolvida no estudo de curvas em uma variedade de Lorentz-Minkowski tridimensional  $\mathbb{R}_1^3$ . A escolha destes espaços para desenvolver este trabalho foi a familiaridade com os estudos de curvas no espaço euclidiano tridimensional, adquirida no curso de Geometria Diferencial, e o interesse em ampliar esses estudos. Para tal foram estudados os conceitos de variedade diferenciável, variedade riemanniana e semi-riemanniana e variedade de Lorentz. São deduzidas as equações de Frenet para curvas tipo tempo, tipo espaço e tipo luz em  $\mathbb{R}_1^3$  e é apresentado um breve estudo sobre hélices e geodésicas nestes espaços. Em relação aos procedimentos de estudo, a pesquisa teve caráter bibliográfico. Para desenvolver este trabalho foram utilizadas como base as referências [1], [2], [3], [4], [5], [6], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [15] e [16]. Em relação à diferença entre o estudo de curvas no espaço euclidiano tridimensional e em espaços de Lorentz de dimensão 3 podemos destacar que nem toda curva nessa variedade possui uma curvatura, e que, para cada tipo de curva, deve-se definir um conjunto de equações de Frenet diferente, a depender de cada caso, de acordo com a causalidade dos vetores tangente, normal e binormal, o que não acontece em curvas no espaço euclidiano tridimensional. Em relação às hélices nestes espaços, são definidas para curvas tipo tempo e espaço com vetor aceleração não sendo tipo luz, de forma análoga ao estudo de hélices no espaço euclidiano tridimensional. No estudo de geodésicas, o conceito é formalizado nesses espaços e são caracterizadas as geodésicas nulas.

**Palavras-chave:** espaços de Lorentz-Minkowski; curvas tipo tempo; curvas tipo espaço; curvas tipo luz; geodésicas nulas.

---

# CONTEÚDO

<b>Agradecimentos</b> . . . . .	i
<b>Resumo</b> . . . . .	ii
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Formas Bilineares e métrica . . . . .	5
1.2 Mudança de Coordenadas em espaços vetoriais . . . . .	8
1.2.1 Vetores contravariantes . . . . .	8
1.2.2 Covetores e vetores covariantes . . . . .	10
<b>2 Conexões em variedades riemannianas e semi-riemannianas</b>	<b>13</b>
2.1 Variedades diferenciáveis . . . . .	13
2.1.1 Mudanças de bases em Espaços Tangentes . . . . .	21
2.1.2 Covetores Tangentes . . . . .	23
2.1.3 Campos de vetores . . . . .	25
2.1.4 A operação colchete . . . . .	26
2.2 Variedades riemannianas e semi-riemannianas . . . . .	29
2.2.1 Métricas riemannianas e semi-riemannianas . . . . .	29
2.2.2 Conexão e Derivada Covariante . . . . .	30
2.2.3 Conexão afim . . . . .	30
2.2.4 Derivadas covariantes ao longo de curvas . . . . .	33

2.3	Conexão de Levi-Civita . . . . .	37
2.4	Extensão a variedades semi-riemannianas . . . . .	44
2.4.1	Métrica pseudo-riemanniana em $\mathbb{R}_1^n$ . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Variedades de Lorentz - Minkowski</b>	<b>50</b>
3.1	Os espaços Lorentzianos $\mathbb{R}_1^n$ . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Curvas no espaço de Lorentz-Minkowski <math>\mathbb{R}_1^3</math></b>	<b>67</b>
4.1	Curvas regulares em espaços de Lorentz-Minkowski . . . . .	67
4.2	Equações de Frenet . . . . .	72
4.2.1	Equações de Frenet para curvas tipo tempo . . . . .	73
4.2.2	Equações de Frenet para curvas tipo espaço . . . . .	77
4.2.3	Equações de Frenet para curvas tipo luz . . . . .	90
4.2.4	Resumo das equações de Frenet para curvas em espaços de Lorentz-Minkowski . . . . .	92
4.3	Hélices . . . . .	93
4.4	Geodésicas . . . . .	96
4.4.1	Geodésicas nulas espaços de $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	99
	<b>Considerações</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>102</b>

---

# Introdução

Uma variedade riemanniana  $M$  é uma variedade diferenciável munida de uma métrica definida por uma forma bilinear simétrica, não degenerada e positiva definida. A teoria geral das curvas em variedades riemannianas já vem sendo desenvolvida há muito tempo e, hoje, já se tem um grande conhecimento de sua geometria tanto local, quanto global.

Uma variedade semi-riemanniana  $M$  é uma variedade diferenciável munida de uma métrica com índice  $v$  constante, definida por uma forma bilinear simétrica, não degenerada, mas que não é necessariamente positiva definida. O índice  $v$  é a dimensão do maior subespaço no qual a métrica é definida negativa para todo ponto em  $M$ . Quando o índice da métrica é igual a zero, tem-se uma variedade riemanniana e quando é igual a 1 tem-se uma variedade de Lorentz.

Uma variedade diferenciável  $M = \mathbb{R}^n$ , munida com uma métrica de Lorentz, definida pelo pseudo-produto interno  $\langle\langle u, v \rangle\rangle = u_1v_1 + \dots + u_{n-1}v_{n-1} - u_nv_n$ , onde  $u = (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$  são vetores de  $\mathbb{R}^n$ , é uma variedade semi-riemanniana de índice 1. Espaços vetoriais munidos com uma métrica de Lorentz são conhecidos como Espaços de Minkowski. Devido a isso, na literatura matemática, é usual se referir à variedade  $M = \mathbb{R}^n$ , munida com uma métrica de Lorentz como os espaços de Lorentz-Minkowski, ou simplesmente  $\mathbb{R}_1^n$ , onde o número 1 indica o índice da métrica. No presente trabalho serão estudadas as curvas em  $\mathbb{R}_1^3$ , as quais são divididas em três tipos, a saber: tipo tempo, tipo espaço e tipo luz (ou curvas nulas). O estudo de curvas tipo tempo tem muitas analogias e semelhanças com o estudo das curvas tipo espaço. Porém, devido ao fato de que a métrica induzida em uma curva nula é degenerada, o estudo deste

---

tipo de curva se torna muito mais complicado e precisa ser abordado de forma diferente do caso não degenerado.

No presente trabalho é apresentada uma introdução à teoria de variedades riemannianas com uma extensão às variedades semi-riemannianas e é dada especial atenção à formulação do *triedro de Frenet*, bem como aos conceitos de *hélices* e *geodésicas* nos espaços de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ .

No estudo de curvas no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3 podemos destacar que em curvas regulares tipo luz e tipo espaço com vetor aceleração tipo luz não é possível definir a curvatura. Assim, em comparação com os estudos de curvas regulares no espaço euclidiano tridimensional, a principal distinção que deve ser observada é em relação ao *Teorema fundamental*, o qual garante que, definidas as funções diferenciáveis que determinam a curvatura e a torsão em cada ponto, então essa curva é única a menos de possíveis rotações e/ou translações. Em espaços de Lorentz  $\mathbb{R}_1^3$ , não é possível caracterizar uma curva dessa forma, pois a curvatura não está definida para todas as curvas nesse espaço.

No espaço euclidiano tridimensional conseguimos estudar uma curva parametrizada pelo comprimento de arco utilizando um único conjunto de equações de Frenet. Em relação aos estudos de curvas no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3 este fato não ocorre. Nesses espaços é necessário adequar o triedro de Frenet, bem como as equações de Frenet, pois os mesmos ficam sujeitos ao tipo de curva (tempo, luz ou espaço) e também ao tipo do vetor aceleração (tempo, luz ou espaço). Assim para o estudo das curvas tipo tempo, tipo espaço com o vetor aceleração tipo tempo e tipo espaço com o vetor aceleração espaço, é possível obter uma base pseudo-ortonormal formada pelos vetores tangente, normal e binormal, em cada ponto da curva. Nestes casos, essa base é denominada o *referencial de Frenet* da curva. Já para as curvas tipo luz e tipo espaço com o vetor aceleração tipo luz, não é possível estabelecer uma base pseudo-ortonormal em nenhum ponto, mas conseguimos estabelecer uma base com os vetores tangente, o normal e o binormal, os quais não formam um conjunto de vetores ortogonais, mas formam um conjunto de vetores linearmente independentes. Em resumo, devido à causalidade dos vetores presentes nos estudos das curvas neste espaço, é necessário estabelecer diferentes conjuntos de equações de Frenet.

Neste trabalho vamos nos restringir ao estudo das principais características da geometria envolvida no estudo de curvas em variedades de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ . Para atingir este objetivo vamos estudar os conceitos de variedade diferenciável, variedade

---

semi-riemanniana, variedade de Lorentz, deduzir as equações de Frenet para curvas tipo tempo, tipo espaço e tipo luz e iremos apresentar um breve estudo de hélices e geodésicas. Quanto aos procedimentos de estudo, a pesquisa tem caráter bibliográfico<sup>1</sup>, uma vez que o estudo de curvas em variedades semi-riemannianas tridimensionais foi realizado por meio de livros, teses e/ou dissertações sobre o tema.

Vamos dividir este trabalho em quatro partes da seguinte maneira:

- No capítulo 1, é exibido um breve resumo sobre formas bilineares, métricas em espaços vetoriais e mudança de coordenadas em espaços vetoriais. Em relação às formas bilineares e à métrica são apresentadas definições e exemplos. Sobre a mudança de coordenadas em espaços vetoriais, o principal objetivo é apresentar os vetores covariantes e contravariantes, os quais são muito utilizados em estudos de variedades riemannianas e semi-riemannianas. Os conceitos tratados nesse capítulo tiveram como base [1], [9] e [11].
- No capítulo 2, são realizados estudos que possibilitam, ao final, demonstrar o teorema que caracteriza a conexão de Levi-Civita em variedades riemannianas para em seguida apresentar uma extensão a variedades semi-riemannianas. Para isso foram realizados estudos sobre variedades diferenciáveis, campos vetoriais, colchetes de Lie, variedades semi-riemannianas, conexões, derivadas covariantes e por fim a conexão de Levi-Civita. As teorias apresentadas neste capítulo basearam-se nas referências [1], [2], [3], [4], [5], [8] e [10].
- No capítulo 3, é introduzido o conceito de variedades de Lorentz. Em particular, é apresentado um estudo sobre propriedades das variedades de Lorentz - Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  (ou espaços de Lorentz-Minkowski). Os textos que serviram de base para esse capítulo foram [6], [12], [13] e [15].
- O capítulo 4 tem por objetivo apresentar estudos envolvendo curvas na variedade de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ . São deduzidas as equações de Frenet para as curvas tipo tempo, tipo espaço, tipo luz e é apresentado um breve estudo sobre hélices e

---

<sup>1</sup>Para Severino (2018) a pesquisa bibliográfica é realizada a partir de registros disponíveis de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Os textos são utilizados como fontes dos temas a serem pesquisados. SEVERINO, J. A. Metodologia do Trabalho Científico. 24<sup>a</sup> edição. São Paulo: Cortez Editora, 2018.

geodésicas nestes espaços. O capítulo foi construído tomando por base as referências [13], [15] e [16].

A título de curiosidade observamos que a teoria da relatividade especial de Einstein foi desenvolvida para um espaço de Lorentz- Minkowski quadridimensional  $\mathbb{R}_1^4$ , munido de um pseudo-produto interno, conhecido como o espaço-tempo de Minkowski. Nesta teoria (também chamada de teoria da relatividade *flat*) estuda-se o que acontece próximo à velocidade da luz. Ela foi desenvolvida a partir de dois postulados. O primeiro postulado diz que as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais e o segundo postulado diz que a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor para qualquer referencial inercial. A ideia de espaço-tempo é representada com base na configuração das três dimensões usuais do espaço combinadas com uma dimensão única do tempo. A teoria da relatividade geral de Einstein generaliza a teoria da relatividade especial e a lei da gravitação universal de Newton, fornecendo uma descrição unificada da gravidade como uma propriedade geométrica do espaço-tempo. Estudos em variedade de Lorentz quadridimensional tem implicações sobre o que acontece próximo a velocidade da luz e dentre suas aplicações se destaca a aplicação da álgebra geométrica desse espaço à *óptica relativista*.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo é exibido um breve resumo sobre formas bilineares, métricas em espaços vetoriais e mudança de coordenadas em espaços vetoriais. Em relação às formas bilineares e à métrica são apresentadas definições e exemplos. Sobre a mudança de coordenadas em espaços vetoriais, o principal objetivo é apresentar os vetores covariantes e contravariantes, os quais são muito utilizados em estudos de variedades riemannianas e semi-riemannianas.

Para desenvolver este capítulo utilizou-se como base as referências [1], [9] e [11].

---

### 1.1 Formas Bilineares e métrica

---

Nesta seção são apresentadas algumas definições envolvendo formas bilineares, métrica e normas, as quais servem de embasamento para que os conceitos apresentados possam ser explorados no contexto dos espaço de Lorentz -Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$ .

**Definição 1.1.** *Sejam  $E, F$  espaços vetoriais. Uma forma bilinear  $\omega : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $\omega(u, v)$ , linear em cada uma das variáveis  $u \in E, v \in F$ . Mais precisamente, para quaisquer  $u, u' \in E, v, v' \in F$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  devem valer:*

$$\begin{aligned}\omega(u + u', v) &= \omega(u, v) + \omega(u', v); & \omega(\alpha u, v) &= \alpha\omega(u, v) \\ \omega(u, v + v') &= \omega(u, v) + \omega(u, v'); & \omega(u, \alpha v) &= \alpha\omega(u, v)\end{aligned}$$

**Definição 1.2.** *Uma forma bilinear  $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  é dita simétrica quando  $\omega(u, v) = \omega(v, u)$  para quaisquer  $u, v \in E$ .*

**Definição 1.3.** Uma forma bilinear  $\omega: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  é dita anti-simétrica quando  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$  para quaisquer  $u, v \in E$ .

**Definição 1.4.** Uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica  $\omega$  é dita uma forma bilinear não-degenerada se satisfaz a seguinte condição: se para todo vetor  $v$  valer  $\omega(v, u) = 0$ , então  $u = 0$ .

**Definição 1.5.** Seja  $M$  um conjunto qualquer, com  $M \neq \emptyset$  e seja  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Indiquemos por  $d(x, y)$  a imagem de um par  $(x, y) \in M \times M$ , através da função  $d$ . Se  $d$  satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $d(x, x) = 0$ ;
2.  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , para todo  $x, y, z \in M$ ,

então  $d$  é chamada uma métrica sobre  $M$ . Um par  $(M, d)$ , onde  $d$  é uma métrica sobre  $M$ , é chamado de espaço métrico.

**Definição 1.6.** Uma norma de um espaço vetorial  $E$  sobre  $\mathbb{R}$  é uma função que associa a cada  $x \in E$  um número real não negativo, indicado por

$$|\cdot|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto |x|$$

de maneira que:

$$N.1) |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$N.2) |\alpha x| = |\alpha||x|, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in E;$$

$$N.3) |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in E.$$

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial  $E$  sobre  $\mathbb{R}$  dotado de uma norma  $|\cdot|$  o qual denotados por  $(E, |\cdot|)$ .

A norma usual do  $\mathbb{R}^n$  é a norma euclidiana definida da seguinte forma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Definição 1.7.** *Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um produto interno em  $E$  é uma função que associa a cada par ordenado  $(x, y) \in E \times E$  um número real indicado por  $\langle x, y \rangle$ , ou seja*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

de maneira que:

$$P.1) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x, y \in E;$$

$$P.2) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in E;$$

$$P.3) \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in E;$$

$$P.4) \langle x, x \rangle > 0 \text{ sempre que } x \neq 0.$$

Segue das propriedades  $P.1$ ,  $P.2$  e  $P.3$  que o produto interno em um espaço vetorial  $E$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \forall x, y, z \in E,$$

e

$$\langle \alpha y + \beta z, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle, \forall x, y, z \in E,$$

então o produto interno é uma forma bilinear.

O produto interno é uma forma bilinear simétrica não-degenerada.

Em  $\mathbb{R}^n$  o produto interno usual é definido da seguinte forma:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

---

## 1.2 Mudança de Coordenadas em espaços vetoriais

---

### 1.2.1 Vetores contravariantes

O objetivo desta seção é compreender os conceitos de *vetor covariante* e *vetor contravariante*.

Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita, munido de uma base

$$B = \{e_1, \dots, e_n\}.$$

Seja  $v \in V$ . Denotaremos por  $[v]_B$  o vetor coluna cujos elementos são as coordenadas do vetor  $v$  em relação à base  $B$ , ou seja, se

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i,$$

então,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Quando não houver a possibilidade de ambiguidades, poderemos escrever

$$[v]_B = (v^1, \dots, v^n),$$

mantendo em mente que isso tem o significado de (1.1).

Sejam  $V$  um espaço vetorial real e

$$B = \{e_1, \dots, e_n\},$$

$$\bar{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\},$$

duas bases para  $V$ . A matriz de mudança de coordenadas da base  $B$  para a base  $\bar{B}$  é a matriz  $A = (a_j^i)$  tal que

$$[v]_{\bar{B}} = A[v]_B, \quad \forall v \in V. \quad (1.2)$$

Aqui o índice superior indica linha (no caso a  $i$ -ésima linha) e o índice inferior indica coluna (no caso a  $j$ -ésima coluna).

**Proposição 1.8.** *Seja  $A = (a_j^i)$  a matriz de mudança de coordenadas da base  $B$  para a base  $\bar{B}$ . A lei de transformação dos vetores da base  $\bar{B}$  para a base  $B$  é dada por*

$$e_j = \sum_{k=1}^n a_j^k \bar{e}_k. \quad (1.3)$$

Observe que as colunas de  $A$  são as coordenadas dos vetores da base  $B$  em relação à base  $\bar{B}$ .

*Demonstração.* Basta mostrar que a igualdade (1.3) é válida se, e somente se, (1.2) se verifica.

De fato, seja  $v \in V$  tal que  $v = \sum_{j=1}^n v^j e_j$ , então, utilizando a expressão (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n v^i e_i = \sum_{j=1}^n v^j \left( \sum_{k=1}^n a_j^k \bar{e}_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_j^k v^j \right) \bar{e}_k, \end{aligned} \quad (1.4)$$

logo,

$$[v]_{\bar{B}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_k^1 v^k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_k^n v^k \end{bmatrix},$$

e portanto,

$$[v]_{\bar{B}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_k^1 v^k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_k^n v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = A[v]_B$$

Isso mostra que a igualdade (1.3) é válida, se, e somente se, (1.2) se verifica.  $\square$

A lei de transformação (1.3) é conhecida como *lei de transformação fundamental*.

Por outro lado, segue de (1.2) que a lei de transformação das coordenadas de vetores da base  $\bar{B}$  para a base  $B$  é dada por  $[v]_B = A^{-1}[v]_{\bar{B}}$ , onde  $A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$ . Podemos pensar, então, que esta lei de transformação é *contrária* à lei de transformação fundamental (1.3) e denotar os vetores que se transformam de acordo com essa lei (ou seja, de forma contrária à lei de transformação fundamental) por *vetores contravariantes*.

Assim, se  $v$  é um vetor do espaço vetorial  $V$ , e  $[v]_B = (v^1, \dots, v^n)$  e  $[v]_{\bar{B}} = (\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n)$ , então as coordenadas do vetor  $V$  são dadas por

$$v^i = \sum_{j=1}^n (a^{-1})_j^i \bar{v}^j, \quad (1.5)$$

onde  $(a^{-1})_j^i$  indica os elementos da matriz  $A^{-1}$ , inversa da matriz  $A$ .

Com essa terminologia temos que  $[v]_B = A^{-1}[v]_{\bar{B}}$ , assim os vetores do espaço vetorial  $V$  são vetores contravariantes.

### 1.2.2 Covetores e vetores covariantes

Vamos considerar agora o conjunto  $\Theta$  de todos os funcionais lineares  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Os funcionais lineares  $f$  são denominados *covetores* de  $V$ .

É possível mostrar que esse conjunto  $\Theta$ , junto com as definições naturais de soma de covetores e multiplicação de covetores por escalares reais define uma estrutura de espaço vetorial. Tal espaço vetorial é denominado o espaço dual do espaço vetorial  $V$  e é denotado por  $V^*$ . Sendo  $V$  um espaço vetorial e fixado uma base  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  para  $V$  podemos definir uma base  $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$  de  $V^*$  tal que

$$f^i(e_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e 0 nos demais casos). A base  $B^*$  é denominada a *base dual* da base  $B$ .

Se  $\mu$  é um funcional linear (ou um covetor) de  $V^*$ , então  $\mu$  pode ser expresso em coordenadas como uma combinação linear dos covetores da base dual  $B^*$ . Isto é,

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j f^j, \quad \mu_j \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

onde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  são números reais.

Observe que, se  $v \in V$ , com  $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ ,  $v^i \in \mathbb{R}$ , então  $f^i(v) = v^i$ .

**Proposição 1.9.** *Sejam  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\bar{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  duas bases para o espaço vetorial  $V$  e e sejam  $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$  e  $\bar{B}^* = \{\bar{f}^1, \dots, \bar{f}^n\}$  as respectivas bases duais*

para  $V^*$ , então

$$f^i = \sum_{j=1}^n (a^{-1})_j^i \bar{f}^j, \quad (1.7)$$

onde  $(a^{-1})_j^i = A^{-1}$  é a matriz inversa da matriz de mudança de coordenadas da base  $B$  para a base  $\bar{B}$ , dada por  $A = (a)_j^i$ .

*Demonstração.* Segue da lei de transformação fundamental (1.3) que

$$e_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \bar{e}_j.$$

Por outro lado,

$$f^k = \sum_{l=1}^n m_l^k \bar{f}^l, \quad (1.8)$$

onde  $M = (m)_l^k$  é a matriz de mudança de coordenadas da base  $\bar{B}^*$  para a base  $B^*$ , daí

$$\begin{aligned} \delta_{ki} &= f^k(e_i) \stackrel{(1.3)}{=} \sum_{j=1}^n a_i^j f^k(\bar{e}_j) \stackrel{(1.8)}{=} \sum_{j=1}^n a_i^j \sum_{l=1}^n m_l^k \bar{f}^l(\bar{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n a_i^j \sum_{l=1}^n m_l^k \delta_{lj} = \sum_{j=1}^n a_i^j m_j^k = \sum_{j=1}^n m_j^k a_i^j, \end{aligned}$$

segue portanto que  $AM = MA = I_3$ , ou seja,  $M = A^{-1}$  e, conseqüentemente, a igualdade (1.7) fica demonstrada, isto é

$$f^k = \sum_{l=1}^n (a^{-1})_l^k \bar{f}^l,$$

□

Segue da Proposição 1.9 que matriz de mudança de coordenadas da base  $B^*$  para a base  $\bar{B}^*$  é a matriz  $[A^{-1}]^T$ , onde o  $T$  indica a transposta da matriz. Isto pode ser verificado aplicando a Proposição 1.8 a (1.7) substituindo  $V$  por  $V^*$  e as bases  $B$  e  $\bar{B}$  por  $B^*$  e  $\bar{B}^*$ . Ou seja,

$$[\mu]_{\bar{B}^*} = [A^{-1}]^T [\mu]_{B^*}. \quad (1.9)$$

Observe que tomando  $[\mu]_{B^*} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  e  $[\mu]_{\bar{B}^*} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n)$  e usando (1.6) para isolar  $[\mu]_{B^*}$ , obtém-se

$$[\mu]_{B^*} = A^T [\mu]_{\bar{B}^*}.$$

Ou seja,

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \bar{\mu}_j. \quad (1.10)$$

Segue de (1.10) que a lei de transformação das coordenadas de vetores da base  $\bar{B}^*$  para a base  $B^*$  é a mesma da transformação fundamental (1.3).

Da discussão anterior conclui-se que covetores se transformam da mesma forma que os vetores da base do espaço vetorial (ou seja, ambas obedecem à lei de transformação fundamental). Isto motiva a definição a seguir.

**Definição 1.10.** *Vetores cujas coordenadas se transformam de acordo com a lei de transformação fundamental (1.3) são denominados vetores covariantes ou covetores.*

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Conexões em variedades riemannianas e semi-riemannianas

Neste capítulo são introduzidos os conceitos de métrica e variedades riemannianas e são apresentados alguns resultados e definições necessários para que possa ser demonstrado o teorema que caracteriza a conexão de Levi-Civita em variedades riemannianas e apresentar uma extensão a variedades semi-riemannianas. Para isso foram realizados estudos sobre variedades diferenciáveis, campos vetoriais, colchetes, variedades semi-riemannianas, conexões, derivadas covariantes e por fim a conexão de Levi-Civita.

Os conceitos apresentados neste capítulo tiveram como base [1], [2], [3], [4], [5], [8] e [10].

---

### 2.1 Variedades diferenciáveis

---

**Definição 2.1.** *Uma topologia num conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$ , chamados os subconjuntos abertos (segundo a topologia  $\tau$ ) satisfazendo as seguintes condições:*

- 1)  $X$  e o subconjunto vazio  $\emptyset$  são abertos;
- 2) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;

3) a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

**Definição 2.2.** Um espaço topológico é um par  $(X, \tau)$  onde  $X$  é um conjunto e  $\tau$  é uma topologia em  $X$

No que se segue,  $\mathfrak{S}$  indicará um conjunto de índices.

**Definição 2.3.** Uma base em um espaço topológico  $X$  é uma coleção  $B$  de subconjuntos abertos de  $X$  tal que todo subconjunto aberto  $A$  de  $X$  se exprime como reunião  $A = \cup B_\lambda, \lambda \in \mathfrak{S}$ , de conjuntos  $B_\lambda \in B$ . Dizemos que  $B$  é enumerável quando  $\mathfrak{S}$  é enumerável.

**Definição 2.4.** Um espaço topológico  $X$  chama-se um espaço de Hausdorff (ou espaço separado) quando, dados dois pontos arbitrários  $x \neq y$  em  $X$ , existem abertos  $A, B \subset X$  tais que  $x \in A, y \in B$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

**Definição 2.5.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $S$  um subconjunto de  $X$ . Uma cobertura de  $S$  é uma família  $\zeta = (C_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{S}}$  de subconjuntos abertos de  $X$  com  $S \subset \cup_{\lambda \in \mathfrak{S}} C_\lambda$ , isto é, para cada  $s \in S$  existe um índice  $\lambda \in \mathfrak{S}$  tal que  $s \in C_\lambda$ .

**Definição 2.6.** Seja  $S$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$ . Um ponto  $x \in X$  diz-se aderente a  $S$  quando todo subconjunto aberto em  $X$  contém  $x$  e pelo menos um ponto de  $S$ . O conjunto dos pontos de  $X$  que são aderentes a  $S$  chama-se o fecho de  $S$  e indica-se com a notação  $\overline{S}$

**Definição 2.7.** Seja  $f: X \rightarrow V$  uma função definida em um espaço topológico  $X$  com imagem em um espaço vetorial  $V$ , definimos o suporte da função  $f$  como:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X: f(x) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(\{0\}^c)},$$

onde  $c$  indica o complementar do conjunto  $\{0\}$ .

**Definição 2.8.** Um atlas  $A$  de uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  é uma coleção de triplas da forma  $(D_\lambda, U_\lambda, \varphi_\lambda)$ , onde:

- 1)  $D_\lambda$  é um domínio em  $\mathbb{R}^n$ ;
- 2)  $U_\lambda$  é um conjunto aberto de  $M$ ;
- 3)  $\varphi_\lambda: D_\lambda \rightarrow U_\lambda$  um homeomorfismo;

$$4) M = \cup U_\lambda$$

Se substituirmos o item 3) por  $\varphi_\lambda: D_\lambda \rightarrow U_\lambda$  um difeomorfismo de classe  $C^k$  então teremos um atlas de classe  $C^k$ .

**Definição 2.9.** *Um atlas  $A$  de classe  $C^k$  em  $M$  é dito maximal se não está propriamente contido em nenhum outro atlas de classe  $C^k$  em  $M$ .*

**Definição 2.10.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\varphi_\lambda: U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\lambda$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que:*

- (1)  $\cup_\lambda \varphi_\lambda(U_\lambda) = M$ .
- (2) *Para todo par  $\lambda, \beta$ , com  $\varphi_\lambda(U_\lambda) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\varphi_\lambda^{-1}(W)$  e  $\varphi_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\lambda$  são diferenciáveis.*
- (3) *A família  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$  é maximal relativamente às condições (1) e (2).*

Uma família  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$  satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em  $M$ . O par  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  tal que  $p \in \varphi_\lambda(U_\lambda)$  determina um sistema de coordenadas (ou uma parametrização) para uma vizinhança de  $p$ .  $V_\lambda = \varphi_\lambda(U_\lambda)$  é denominada uma vizinhança coordenada de  $M$  em  $p$ .

**Observação 2.11.** *Uma estrutura diferenciável em um conjunto  $M$  induz de uma maneira natural uma topologia em  $M$ . Basta definir que  $A \subset M$  é um aberto de  $M$  se  $\varphi_\lambda^{-1}(A \cap \varphi_\lambda(U_\lambda))$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\lambda$ . É imediato verificar que  $M$  e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos  $\varphi_\lambda(U_\lambda)$  são abertos e as aplicações  $\varphi_\lambda$  são contínuas.*

*Se  $p = \varphi_\lambda(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$ ,  $q \in U$  então as coordenadas  $x_1(q), \dots, x_n(q)$  são chamadas as coordenadas locais de  $p$  na parametrização  $\varphi_\lambda$ .*

*Uma estrutura diferenciável para uma variedade  $M$  é um atlas maximal.*

*O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.*

**Observação 2.12.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável munido de uma estrutura diferenciável.*

**Observação 2.13.** *No que se segue o expoente  $n$  em  $M^n$  indica a dimensão de  $M$ .*

**Definição 2.14.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável. Dizemos que uma função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma função diferenciável se, para todo  $p \in M$ , existe uma parametrização  $(\varphi, U)$  de uma vizinhança de  $p$  tal que*

$$f \circ \varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

*é uma função diferenciável de classe  $C^\infty$ .*

A definição de diferenciabilidade pode ser estendida a aplicações entre variedades como segue.

**Definição 2.15.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  é diferenciável em  $p \in M_1$  se dada uma parametrização  $\mathbf{y}: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$  em  $\varphi(p)$ , existe uma parametrização  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  em  $p$  tal que  $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$  e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*é diferenciável em  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ . A aplicação  $\varphi$  é diferenciável em um aberto de  $M_1$  se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

A função  $f \circ \varphi$ , dada na Definição 2.14, é denominada uma representação de  $f$  em coordenadas. Quando não houver risco de ambiguidades a parametrização  $\varphi$  será omitida, isto é, se  $q = (x_1, \dots, x_n) \in U$ , escreveremos  $f(q)$ , significando  $(f \circ \varphi)(q)$ .

**Definição 2.16.** *Seja  $\nu = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{S}}$  uma cobertura por abertos de uma variedade diferenciável  $M$ . Uma partição da unidade subordinada a  $\nu$  é uma coleção  $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{S}}$  de funções diferenciáveis  $\rho_\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$  tais que*

$$(i) \quad 0 \leq \rho_\lambda(p) \leq 1, \quad \forall p \in M$$

$$(ii) \quad \text{supp}(\rho_\lambda) \subset V_\lambda$$

(iii)  $\{\text{supp}(\rho_\lambda)\}_{\lambda \in \mathfrak{S}}$  é localmente finita (todo ponto em  $M$  possui uma vizinhança com um número finito destes suportes).

$$(iv) \quad \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}} \rho_\lambda = 1$$

**Teorema 2.17. (Existência de Partições da Unidade).** *Toda cobertura  $\nu = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{S}}$  por abertos de uma variedade diferenciável  $M$  possui uma partição da unidade subordinada a  $\nu$ .*

*Demonstração.* Veja [8], p.43. □

**Corolário 2.18.** (*Lema de Extensão*) Dados um fechado  $A$ , um aberto  $V \supset A$  em uma variedade diferenciável  $M$  e uma função diferenciável  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ , então existe uma extensão diferenciável  $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  de  $f$  tal que  $\text{supp}(\bar{f}) \subset V$ .

Em particular, se  $(\varphi; U)$  é uma parametrização local e  $V \subset \varphi(U)$ , qualquer função diferenciável  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^k$  pode ser estendida a uma função diferenciável  $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  com  $\text{supp}(\bar{f}) \subset \varphi(U)$ .

*Demonstração.* Veja [1], p.7. □

**Definição 2.19.** Uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha: I \rightarrow M$ , onde  $I$  é um intervalo de uma reta real.

**Definição 2.20.** Seja  $\alpha: I \rightarrow M$  uma curva diferenciável com  $\alpha(0) = (x^1(0), \dots, x^n(0)) = p$  e  $v = \alpha'(0) = \left( \frac{dx^1}{dt}(0), \dots, \frac{dx^n}{dt}(0) \right)$  e seja  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $p$ . A derivada direcional de  $f$  em  $p$  na direção de  $v$  é dada pela regra da cadeia por

$$(f \circ \alpha)'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \frac{dx^i}{dt}(0) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \right] f(p), \quad (2.1)$$

o que significa que a derivada direcional na direção de  $v$  pode ser vista como um operador linear sobre funções diferenciáveis, o qual depende apenas do vetor  $v$ .

Indicaremos por  $D(M)$  o conjunto das funções de classe  $C^\infty$  em um ponto  $p$  de uma variedade diferenciável  $M$ .

**Definição 2.21.** Seja  $\alpha: I \rightarrow M$  uma curva diferenciável com  $\alpha(0) = p$ . O vetor tangente à curva  $\alpha$  em  $p$  é uma função  $\alpha'(0): D(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\alpha'(0)f = (f \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D(M). \quad (2.2)$$

Comparando (2.1) e (2.2) é fácil ver que a expressão de um vetor tangente a uma curva  $\alpha$ , em um ponto  $p = \alpha(0)$ , de uma variedade  $M$ , é exatamente a expressão da derivada direcional segundo o vetor  $\vartheta = \alpha'(0) \in \mathbb{R}^n$ . No que se segue utilizaremos a notação  $\alpha'(0)f := \vartheta_p(f)$ .

Segue da Definição 2.21 que um vetor tangente a uma variedade  $M$  em um ponto  $p$  é qualquer vetor tangente a uma curva diferenciável, com traço em  $M$ , passando por  $p$ .

O vetor tangente a  $M$  em  $p$ , dado em (2.2), satisfaz a regra do produto, isto é, se  $f, g \in D(M)$ , então

$$\begin{aligned}\vartheta_p(fg) &= \frac{d}{dt}((fg) \circ \alpha)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}[(f \circ \alpha)(g \circ \alpha)]|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0}(g \circ \alpha)(0) + (f \circ \alpha)(0) \frac{d}{dt}(g \circ \alpha)|_{t=0} \\ &= \vartheta_p(f)g(p) + f(p)\vartheta_p(g).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Isto nos diz que  $\vartheta_p: D(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma derivação em  $p$ , a qual satisfaz a regra do produto. Desta forma, é possível pensar no conjunto dos vetores tangentes em um ponto  $p \in M$  como um espaço vetorial real,  $n$ -dimensional, o qual é um subespaço do espaço vetorial dos funcionais lineares em  $D(M)$ .

**Definição 2.22.** *O conjunto dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$  é chamado espaço tangente a  $M$  em  $p$  e será denotado  $T_pM$ .*

**Observação 2.23.** *Mostra-se que o conjunto  $T_pM$  com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão  $n$  (ver [1] pg.8 e [3] pg.8). Mostra-se ainda que o vetor tangente a uma curva  $\alpha$  depende somente das derivadas de  $\alpha$  em um sistema de coordenadas e que a escolha de uma parametrização  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  determina uma base associada  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_0\}$ , chamada de base coordenada do espaço tangente  $T_pM$  associada ao sistema de coordenadas  $\varphi$  (ver [3] pgs. 8 e 9). Por fim, verifica-se que uma tal estrutura linear em  $T_pM$  não depende da parametrização  $\varphi$  (ver [3] pg. 9).*

Quando não houver risco de ambiguidade e não for necessário explicitar as coordenadas da parametrização, a base  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_0\}$  de  $T_pM$  será denotada simplesmente  $\{\partial_1|_0, \dots, \partial_n|_0\}$  e  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  será denotado simplesmente  $\partial_i$ .

Sejam  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha_i: I_i \rightarrow M$  uma curva diferenciável dada por  $\alpha_i(t) = \varphi(x_0 + te_i)$ , onde  $I_i$  é um intervalo aberto contendo  $t_0$  tal que  $x_0 + te_i \in U$ ,  $\forall t \in I_i$ .

Observe que, se  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{t_0}$  é o vetor tangente à curva  $\alpha_i$  em  $p \in M$  então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^i}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \alpha)(x_0 + te_i) - (f \circ \alpha)(x_0)}{t} \\ &= (f \circ \alpha_i)'(t_0) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{t_0} (f),\end{aligned}$$

onde  $f \in D(M)$ .

**Definição 2.24.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $F: M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável em  $p \in M$ . A diferencial de  $F$  em  $p$  é aplicação linear*

$$dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$$

definida por

$$[dF_p(\vartheta_p)](f) = \vartheta_p(f \circ F)$$

para todo  $f \in D(N)$ . Note que  $f \circ F \in C^\infty(N)$  (ou seja  $f \circ F \in D(M)$ ), e, portanto, computações algébricas análogas a (2.3) mostram que  $dF_p(\vartheta_p)$  é uma derivação em  $F(p)$ . Além disso, como  $\vartheta_p$  é uma aplicação linear, então  $dF_p$  também é linear.

**Proposição 2.25** (Regra da Cadeia). *Sejam  $M, N, P$  variedades diferenciáveis e sejam  $F: M \rightarrow N$  e  $G: N \rightarrow P$  aplicações diferenciáveis. Então  $G \circ F: M \rightarrow P$  é uma aplicação diferenciável e*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

*Demonstração.* Por definição, para todo  $f \in D(P)$

$$\begin{aligned} [d(G \circ F)_p(\vartheta_p)](f) &= \vartheta_p(f \circ (G \circ F)) = \vartheta_p((f \circ G) \circ F) = dF_p(\vartheta_p)(f \circ G) \\ &= [dG_{F(p)}(dF_p(\vartheta_p))](f). \end{aligned}$$

□

A seguir apresentaremos o conceito de diferencial em um sistema de coordenadas.

Seja  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$  é uma parametrização para uma vizinhança coordenada  $V$  de  $p = \varphi(q) \in M$ , a base coordenada associada a  $\varphi$  é dada por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = d\varphi_q(e_i),$$

onde  $q \in U$ .

De fato, se  $f \in D(M)$ , então

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^i}(q) = e_i(f \circ \varphi) = d\varphi_q(e_i)(f).$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x^i} (q). \quad (2.4)$$

Em primeiro lugar vamos considerar o caso em que as variedades são *espaços euclidianos*.

Denote por  $B^m = \{e_1, \dots, e_m\}$  e  $B^n = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  as bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Observe que se  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável, então  $dF_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a derivada usual para cada  $p \in U$  e pela regra da cadeia

$$dF_p(e_i)(f) = e_i(f \circ F) = \frac{\partial (f \circ F)}{\partial x^i} (p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} (F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \bar{e}_j(f),$$

ou seja,

$$dF_p(e_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \bar{e}_j.$$

Assim, a matriz da diferencial  $dF_p$  em relação às bases  $B^m$ ,  $B^n$  é o jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{bmatrix} =: [dF_p]_{B^m, B^n}.$$

Ou seja, se  $v = \sum_{i=1}^m v^i e_i$ , então

$$dF_p(v) = \sum_{i=1}^m v^i dF_p(e_i) = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i} (p) \right] \bar{e}_j,$$

isto é,

$$[dF_p(v)]_{B^n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{bmatrix} = J[v]_{B^m}.$$

Assim, para o caso geral considere uma aplicação diferenciável  $F: M^m \rightarrow N^n$  e  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(U)$ ,  $\psi: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V)$  parametrizações de vizinhanças de  $p = \varphi(q)$  em  $M$  e de  $F(p) = \psi(\bar{q})$  em  $N$  ( $\bar{q} = (y^1, \dots, y^n) \in V$ ), respectivamente, de modo que

$$\bar{F} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Escrevendo agora  $F \circ \varphi = \psi \circ \bar{F}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= dF_p[d\varphi_q(e_i)] = d\psi_{\bar{q}}[d\bar{F}_q(e_i)] = d\psi_{\bar{q}} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{F}^j}{\partial x^i}(q) \bar{e}_j \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{F}^j}{\partial x^i}(q) d\psi_{\bar{q}}(\bar{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{F}^j}{\partial x^i}(q) \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} \right). \end{aligned}$$

Portanto, se

$$B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p \right\} \quad \text{e} \quad B_{F(p)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_{F(p)} \right\}$$

são as bases coordenadas de  $T_p M$  e  $T_{F(p)} N$ , respectivamente, então a matriz que representa a diferencial  $dF_p$  em relação a estas bases é dada por

$$[dF_p]_{B_p, B_{F(p)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{F}^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \bar{F}^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{F}^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \bar{F}^n}{\partial x^m} \end{bmatrix} =: [dF_q]_{B^m, B^n}.$$

### 2.1.1 Mudanças de bases em Espaços Tangentes

Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional e sejam  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  e  $\psi: V \rightarrow \psi(V)$  duas parametrizações para vizinhanças coordenadas de  $p = \varphi(q) = \varphi(x^1, \dots, x^n) = \psi(\bar{q}) = \psi(y^1, \dots, y^n)$  em  $M$ , onde  $q = (x^1, \dots, x^n) \in U$  e  $\bar{q} = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)) \in V$ .

Tomando  $w = \varphi(U) \cap \psi(V)$  e  $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$ , podemos escrever

$$\Phi(q) := (\psi^{-1} \circ \varphi)(q) = (\psi^{-1} \circ \varphi)(x^1, \dots, x^n) = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)). \quad (2.5)$$

Assim, no que se segue denotaremos por  $y^j(q)$  às funções coordenadas  $(\Phi)^j(q)$  da aplicação  $\Phi$ .

**Proposição 2.26.** *Sejam*

$$B = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}, \quad (2.6)$$

$$\bar{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_p \right\}, \quad (2.7)$$

as bases coordenadas de  $T_pM$  induzidas pelas parametrizações  $\varphi$  e  $\psi$ , respectivamente. Denote

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} := \frac{\partial(\Phi)^j}{\partial x^i}(q),$$

então a matriz de mudança de coordenadas da base  $B$  para a base  $\bar{B}$  é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

*Demonstração.* Para a demonstração vamos recordar que  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = d\varphi_q(e_i)$  e vamos utilizar as simplificações  $\varphi(q) = \varphi$ ,  $\psi(\bar{q}) = \psi$  e  $\Phi(q) = \Phi$ .

Segue de (2.5) que  $\varphi(q) = (\psi \circ \Phi)(q)$ . Daí, aplicando a regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= d\varphi_q(e_i) \\ &= d\psi_{\bar{q}}[d\Phi_q(e_i)] \\ &= d\psi_{\bar{q}} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(q) \bar{e}_j \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} d\psi_{\bar{q}}(\bar{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p. \end{aligned}$$

□

Assim, se  $v = (v^1, \dots, v^n)$  são as componentes de um vetor  $v \in T_pM$  na base  $B$ , então  $v$  pode ser escrito na forma

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Por outro lado, se o mesmo vetor  $v \in T_pM$  é escrito como  $v = (\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n)$  na base  $\bar{B}$ , então  $v$  pode ser escrito na forma

$$v = \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p,$$

então, pelo exposto na seção 1.2.1, a lei de transformação de coordenadas é dada por

$$v^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \bar{v}^j,$$

onde  $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$  são os elementos da matriz de mudança de coordenadas da base  $B$  para a base  $\bar{B}$ .

Segue do exposto que o conceito de vetores tangentes em variedades permite uma interpretação independente, livre de coordenadas de derivadas de curvas.

### 2.1.2 Covetores Tangentes

O conceito de *diferenciais de funções reais em variedades* pode ser visto como sendo o análogo do conceito de gradiente em  $\mathbb{R}^n$ . Desta forma, diferenciais de funções reais em variedades podem ser interpretadas de maneira mais natural como *covetores tangentes*, os quais são definidos a seguir.

**Definição 2.27.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Para cada  $p \in M$  definimos o espaço cotangente  $T_p^*M$  a  $M$  em  $p$  por*

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

*Elementos de  $T_p^*M$  são chamados covetores tangentes a  $M$  em  $p$ .*

Definido dessa forma, o *espaço cotangente* a  $M$  em  $p$  é o dual do espaço tangente a  $M$  em  $p$ . Ou seja, se  $M$  é uma variedade diferenciável e  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  é uma parametrização de uma vizinhança coordenada de um ponto  $p \in M$  e a base coordenada do espaço tangente  $T_pM$  associada à parametrização  $\varphi$  é dada por

$$B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\},$$

então a base dual coordenada para o espaço cotangente  $T_p^*M$ , associada a essa parametrização, será denotada por

$$B_p^* = \{ dx^1|_p, \dots, dx^n|_p \},$$

de forma que,  $dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$  e qualquer covetor  $\mu \in T_p^*M$  pode ser escrito de maneira única como

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i dx^i|_p,$$

onde

$$\mu_i = \mu \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right).$$

No que se segue vamos dar uma ideia geral de como as coordenadas de um covetor tangente se transformam em termos de uma mudança de bases coordenadas (entre duas parametrizações).

Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional e  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ,  $\psi: V \rightarrow \psi(V)$  duas parametrizações para vizinhanças coordenadas de  $p = \varphi(q) = \psi(\bar{q})$  em  $M$ . Sejam  $B$  e  $\bar{B}$  as bases coordenadas de  $T_pM$  induzidas pelas parametrizações  $\varphi$  e  $\psi$ , respectivamente, dadas em (2.6) e (2.7). Denote por

$$\begin{aligned} B^* &= \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\} \\ \bar{B}^* &= \{dy^1|_p, \dots, dy^n|_p\} \end{aligned}$$

as respectivas bases duais. Aplicando-se os procedimentos expostos na Seção 1.2.2 verifica-se que a mudança de coordenadas da base  $B^*$  para a base  $\bar{B}^*$  é dada por

$$dx^i|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j|_p.$$

Obtemos também da discussão Seção 1.2.2 que se

$$\begin{aligned} [\mu]_{B^*} &= (\mu_1^x, \dots, \mu_n^x), \\ [\mu]_{\bar{B}^*} &= (\mu_1^y, \dots, \mu_n^y), \end{aligned}$$

então

$$\mu_i^x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \mu_j^y.$$

### 2.1.3 Campos de vetores

**Definição 2.28.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  com um atlas  $\Pi = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in \lambda}$  de classe  $C^k$ . O fibrado tangente de  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2n$  e classe  $C^{k-1}$ , dada pelo conjunto*

$$TM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$$

*munido de um atlas*

$$\Psi = \{\psi : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM\}_{\alpha \in \lambda},$$

*tal que*

$$\psi_\alpha(q_\alpha, v^1, \dots, v^n) = \left( \varphi_\alpha(q_\alpha), \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right),$$

onde  $q_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ ,  $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$  são as coordenadas de  $v$  na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \right\}$ .

No que se segue  $\pi: TM \rightarrow M$  denotará a projeção canônica do fibrado tangente de  $M$  sobre  $M$ , isto é,  $\pi(p, v) = p$  para todo  $v \in T_p M$ .

**Definição 2.29.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um campo vetorial diferenciável em  $M$  é uma aplicação diferenciável  $X: M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ X = id_M$ .*

Campos vetoriais podem ser vistos como aplicações que associam a cada ponto  $p \in M$  um vetor tangente  $X(p) \in T_p M$ . No que se segue, para facilitar a notação, o vetor tangente  $X(p) = (X^1(p), \dots, X^n(p))$  será denotado simplesmente por  $X_p$ .

Para representar campos vetoriais em termos de coordenadas locais, considere  $B = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$  como sendo a base do espaço tangente  $T_p M$ , associada à uma parametrização  $\varphi: U \rightarrow M$ . Assim, para pontos  $p \in \varphi(U)$ , escrevemos

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (2.8)$$

Segue de (2.8) que um campo vetorial  $X$  é diferenciável em  $p \in \varphi(U)$ , se, e somente se, as funções coordenadas  $X^1, \dots, X^n$  forem diferenciáveis.

Campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade  $M$  também podem ser estudados a partir de uma aplicação que associa a cada função  $f \in D(M)$  uma função  $Xf \in D(M)$  através da expressão

$$(Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p$$

onde  $X_p: D(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é um vetor tangente.

**Definição 2.30.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um campo vetorial diferenciável em  $M$  é uma aplicação  $X: D(M) \rightarrow D(M)$  que satisfaz as seguintes propriedades*

(i)  $X$  é linear:

$$X(\alpha f + \beta g) = \alpha Xf + \beta Xg$$

para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in D(M)$ .

(ii)  $X$  satisfaz a regra do produto:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

para todos  $f, g \in D(M)$ .

### 2.1.4 A operação colchete

Serão introduzidas nessa seção noções mínimas sobre colchetes. Evitou-se propositadamente utilizar o termo colchete de Lie, visto que um estudo mais abrangente deveria envolver tópicos de álgebra de Lie, o que não está dentro da proposta do trabalho.

No que se segue indicaremos por  $\Lambda(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em uma variedade  $M$ . A Definição 2.30 de campos vetoriais nos permite definir a composta de campos vetoriais e, já que  $Xf$  é interpretada como a derivada de  $f$  na direção de  $X$ , vamos interpretar a expressão

$$X(Yf)$$

como a derivada segunda de  $f$ , primeiro na direção de  $Y$ , e em seguida na direção de  $X$ . Geralmente esta composição não é um campo vetorial pois não satisfaz a regra do

produto. De fato,

$$\begin{aligned} (X \circ Y)(fg) &= X[Y(fg)] = X[(Yf)g + f(Yg)] = X[(Yf)g] + X[f(Yg)] \\ &= [X(Yf)]g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f[X(Yg)] \\ &= [(X \circ Y)f]g + f[(X \circ Y)g] + (Xf)(Yg) + (Yf)(Xg). \end{aligned}$$

A seguir mostraremos, em coordenadas locais, que a operação  $X \circ Y - Y \circ X$  define um campo vetorial.

**Lema 2.31.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então existe um único campo vetorial  $Z$  tal que, para todo  $f \in D(M)$ ,  $Zf = (XY - YX)f$ .*

*Demonstração.* Primeiro provemos que se  $Z$  existe, ele é único. Admitamos, portanto, a existência de um tal  $Z$ . Seja  $p \in M$  e  $\varphi: U \rightarrow M$  uma parametrização em  $p$ , e sejam

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

as expressões de  $X$  e  $Y$  nesta parametrização. Então para todo  $f \in D(M)$ ,

$$\begin{aligned} XYf &= X\left(\sum_j Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \\ YXf &= Y\left(\sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Portanto,  $Z$  é dado, na parametrização  $\varphi$ , por

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

o que mostra a unicidade de  $Z$ .

Para demonstrar a existência, basta definir  $Z_\alpha$  em cada vizinhança coordenada  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  de uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de  $M$  pela expressão (2.9) e observar que, por unicidade,  $Z_\alpha = Z_\beta$  em  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ . Como  $Z_\alpha$  e  $Z_\beta$  são arbitrários, então é possível definir  $Z$  em toda a variedade  $M$ .  $\square$

Pela forma como foi definido, o campo vetorial  $Z$  dado pelo Lema 2.31 é diferenciável e é denominado o *colchete*  $[X, Y] = XY - YX$  de  $X$  e  $Y$ . A proposição a seguir mostra que a operação colchete é anticomutativa (item (a)), linear (item (b)) e satisfaz a *identidade de Jacobi* (item (c)).

**Proposição 2.32.** *Se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são campos diferenciáveis em  $M$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  são números reais e  $f$ ,  $g$  são funções diferenciáveis, então:*

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ,
- (c)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ ,
- (d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

Observe que de acordo com a Definição 2.28  $X$  é um campo de vetores  $X(p) \in TM$ , para qualquer  $p \in M$ . Como  $f \in D(M)$  então,  $fX$  pode ser entendido como um campo vetorial obtido do produto da função  $f$  aplicada em  $p$  pelo vetor  $X_p$  em cada ponto  $p \in M$ .

*Demonstração.* Para demonstrar (a) e (b) utilizaremos a definição do colchete, temos que

$$\begin{aligned} [X, \alpha Y + \beta Z] &= X(\alpha Y + \beta Z) - (\alpha Y + \beta Z)X = X\alpha Y + X\beta Z - \alpha YX - \beta ZX \\ &= \alpha(XY - YX) + \beta(XZ - ZX) = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z], \end{aligned}$$

e que

$$[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X], \quad (2.10)$$

Utilizando a (b) em  $[[X, Y], Z]$ , obtemos

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] = [XY, Z] - [YX, Z] \\ &= XYZ - ZXY - YXZ + ZYX. \end{aligned}$$

Logo, usando (a) e (b) em  $[[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]$ , temos que

$$\begin{aligned} [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] &= -[X, [Y, Z]] - [Y, [Z, X]] \\ &= -[X, YZ - ZY] - [Y, ZX - XZ] \\ &= -[X, YZ] + [X, ZY] - [Y, ZX] + [Y, XZ] \\ &= -XYZ + YZX + XZY - ZYX - YZX + ZXY + YXZ - XZY \\ &= -XYZ + ZXY + YXZ - ZYX \\ &= -[[X, Y], Z], \end{aligned}$$

então,

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

o que mostra (c).

Para demonstrar (d), calculamos

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X. \end{aligned}$$

□

---

## 2.2 Variedades riemannianas e semi-riemannianas

---

O conceito de variedades semi-riemannianas generaliza o conceito de variedades riemannianas. O que distingue uma variedade riemanniana de uma variedade semi-riemanniana é a escolha da métrica, a qual em variedades riemannianas é definida positiva. Na literatura, variedades semi-riemannianas são também conhecidas por *variedades pseudo-riemannianas* e a métrica semi-riemanniana é em geral chamada de pseudo-métrica. Estas nomenclaturas ficarão mais claras no último capítulo.

### 2.2.1 Métricas riemannianas e semi-riemannianas

**Definição 2.33.** (*Métrica riemanniana*) Uma métrica riemanniana em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M^n$  uma forma bilinear simétrica, positiva definida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = p \in \varphi(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\varphi_p(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então as funções  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$  são diferenciáveis em  $U$ .

No que se segue denotaremos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, \dots, x_n),$$

onde as funções  $g_{ij}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  são as componentes do *tensor métrico*

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx^i|_p \otimes dx^j|_p.$$

Para maiores detalhes veja [1], página 47.

**Proposição 2.34.** *Toda variedade diferenciável  $M$  admite uma métrica riemanniana.*

Para a demonstração deste resultado veja [3], pg.43.

## 2.2.2 Conexão e Derivada Covariante

Os conceitos de conexão e derivada covariante são frutos de um desejo de generalizar a noção de derivada direcional do  $\mathbb{R}^n$  para variedades. A direção em que se pretende diferenciar, em cada ponto da variedade, é dada por um vetor tangente a esta variedade neste ponto e, de forma global, por um campo vetorial, enquanto que, o objeto a ser diferenciado é uma seção de algum fibrado vetorial sobre a variedade, de forma que o resultado desta operação seja também uma seção do mesmo fibrado vetorial (ver [7]). O objetivo desta seção é apresentar algumas definições e resultados que permitam a introdução dos conceitos de conexão (riemanniana e semi-riemanniana) e derivada covariante.

Os tópicos apresentados servem de base para os capítulos seguintes e são introduzidos em uma forma sintética, de maneira que esses conceitos possam ser assimilados por alunos dos últimos períodos de um curso de graduação em matemática.

## 2.2.3 Conexão afim

A seguir será introduzido o conceito de *conexão afim*. A escolha de uma métrica riemanniana em uma variedade  $M$  determina univocamente uma certa conexão afim sobre  $M$ , o que permite derivar campos de vetores em  $M$ .

**Definição 2.35.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Uma conexão afim  $\nabla$  em  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla: \Lambda(M) \times \Lambda(M) \rightarrow \Lambda(M),$$

denotada por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$(ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$(iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (Xf)Y.$$

para todos os campos  $X, Y, Z \in \Lambda(M)$  e para todas as funções  $f, g \in D(M)$ .

Podemos interpretar o símbolo  $\nabla_XY$  como a derivada direcional do campo  $Y$  na direção do campo  $X$ .

**Proposição 2.36.** *Seja  $\nabla$  uma conexão afim em uma variedade diferenciável  $M$ . Se  $X, Y \in \Lambda(M)$  são campos vetoriais que se expressam em coordenadas locais por*

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i, \quad (2.11)$$

e

$$Y = \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j, \quad (2.12)$$

onde  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ , então

$$\nabla_XY = \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \sum_{j=1}^n X(Y^j) \partial_j, \quad (2.13)$$

Em particular,  $(\nabla_XY)_p$  depende apenas do valor de  $X$  em  $p$  e do valor de  $Y$  ao longo de uma curva tangente a  $X$  em um ponto  $p$ .

*Demonstração.* Utilizando as expressões (2.11), (2.12) e as propriedades (i), (ii) e (iii) de uma conexão, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_XY &\stackrel{(2.12)}{=} \nabla_X \left( \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j \right) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{j=1}^n \nabla_X(Y^j \partial_j) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \sum_{j=1}^n Y^j \nabla_X(\partial_j) + \sum_{j=1}^n X(Y^j) \partial_j \\ &\stackrel{(2.11)}{=} \sum_{j=1}^n Y^j \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \partial_i} \partial_j + \sum_{j=1}^n X(Y^j) \partial_j \\ &\stackrel{(i)}{=} \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \sum_{j=1}^n X(Y^j) \partial_j. \end{aligned}$$

Em particular, a expressão de  $\nabla_X Y$  em um ponto  $p$ , é escrita na forma

$$(\nabla_X Y)_p = \sum_{i,j=1}^n X^i(p)Y^j(p)(\nabla_{\partial_i} \partial_j)_p + \sum_{j=1}^n [X_p(Y^j)](p)\partial_j|_p. \quad (2.14)$$

É possível observar que os coeficientes  $X^1(p), \dots, X^n(p)$  na expressão 2.14 dependem apenas do valor de  $X$  em  $p$  e, além disso, os coeficientes  $X_p(Y^1), \dots, X_p(Y^n)$ , por definição de vetor tangente, dependem apenas dos valores de  $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$  ao longo de uma curva passando por  $p$  cujo vetor tangente em  $p$  é  $X_p$ .  $\square$

Segue da expressão (2.13), escrevendo os campos vetoriais  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$  em termos dos campos base  $\partial_k$  na forma

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad (2.15)$$

que a seguinte expressão é a expressão local para o campo  $\nabla_X Y$ :

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left( X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \quad (2.16)$$

**Definição 2.37.** *As funções suaves  $\Gamma_{ij}^k$  definidas pela expressão (2.16) são chamadas os símbolos de Christoffel associados à parametrização particular utilizada.*

Observando a expressão (2.16) é possível perceber que para determinar localmente uma conexão precisamos obter  $n^3$  símbolos de Christoffel.

**Proposição 2.38.** *Toda variedade diferenciável possui uma conexão afim.*

*Demonstração.* Seja  $V$  uma vizinhança coordenada de  $M$  e suponha conhecidas as  $n^3$  funções arbitrárias  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(V)$ . Então (2.16) define uma conexão em  $V$ . Seja  $\{V_\alpha\}$  uma cobertura de  $M$  por vizinhanças coordenadas, cada  $V_\alpha$  com uma conexão  $\nabla^\alpha$  definida. Defina uma conexão global em  $M$ , usando uma partição da unidade  $\{\rho_\alpha\}$  subordinada a esta cobertura, por

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \nabla_X^\alpha Y. \quad (2.17)$$

Verificaremos que as propriedades de uma conexão se verificam para a expressão (2.17).

(i)

$$\begin{aligned}\nabla_{fX+gY}Z &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_{fX+gY}^{\alpha} Z = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} [f \nabla_X^{\alpha} Z + g \nabla_Y^{\alpha} Z] \\ &= f \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_X^{\alpha} Z + g \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_Y^{\alpha} Z \\ &= f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z,\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y+Z) &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_X^{\alpha}(Y+Z) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} [\nabla_X^{\alpha}(Y) + \nabla_X^{\alpha}(Z)] \\ &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_X^{\alpha}(Y) + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_X^{\alpha}(Z) \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Z,\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\nabla_X fY &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_X^{\alpha}(fY) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} [(Xf)Y + f \nabla_X^{\alpha}(Y)] \\ &= (Xf)Y \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} + f \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla_X^{\alpha} Y \\ &= (Xf)Y + f \nabla_X Y.\end{aligned}$$

De (i), (ii) e (iii) segue que  $\nabla_X Y$  construído em (2.17) é uma conexão em  $M$ . □

## 2.2.4 Derivadas covariantes ao longo de curvas

Para facilitar o entendimento vamos entender o conceito de derivada covariante no contexto da Geometria Diferencial (em superfícies no espaço tridimensional euclidiano).

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície,  $c: I \rightarrow S$  uma curva parametrizada em  $S$ , e  $V: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo de vetores tangentes a  $S$  ao longo de  $c$ . O vetor  $\frac{dV}{dt}(t), t \in I$ , não pertence em geral, ao plano tangente  $T_{c(t)}S$ , ou seja, em geral, o vetor  $\frac{dV}{dt}(t), t \in I$  é um vetor pertencente ao “espaço ambiente” da superfície. A ideia é considerar, em vez da derivada usual  $\frac{dV}{dt}(t)$ , a projeção ortogonal de  $\frac{dV}{dt}(t)$  sobre  $T_{c(t)}S$ . Esta projeção é denominada a derivada covariante do campo vetorial  $V$  e é denotada por  $\frac{DV}{dt}(t), t \in I$ .

Definida desta forma, a derivada covariante pode ser vista como um conceito da *geometria intrínseca* da superfície, e, conseqüentemente, só depende da primeira forma quadrática de  $S$ . Em particular, a noção de derivada covariante permite-nos dar um sentido à derivada do vetor velocidade (a aceleração) da curva  $c$  em  $S$ .

No que se segue faremos um breve resumo de como este conceito pode ser considerado nos contextos de *variedades riemanniana e semi-riemanniana*.

**Definição 2.39.** *Seja  $\alpha: I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável  $M$ . Um campo vetorial ao longo da curva  $\alpha$  é um campo vetorial diferenciável  $V: I \rightarrow TM$  tal que  $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$  para todo  $t \in I$ .*

*É possível mostrar [1] que os campos vetoriais ao longo de uma curva  $\alpha$  definem um espaço vetorial o qual será denotado  $\Lambda(\alpha)$ .*

**Proposição 2.40.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão  $\nabla$ . Existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial diferenciável  $V$  ao longo de uma curva diferenciável  $\alpha: I \rightarrow M$  um outro campo diferenciável  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $\alpha$  tal que para todos os campos diferenciáveis  $V, W$  ao longo de  $\alpha$  e para toda função diferenciável  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , verificam-se as propriedades*

$$i. \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$ii. \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt};$$

iii. *se  $V$  é induzido por um campo de vetores  $X \in \Lambda(M)$ , ou seja,  $V = X \circ \alpha$ , então*

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}X,$$

*sendo a expressão local dada por,*

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt} \Gamma_{ij}^k V^j \right] \partial_k|_t. \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Para a expressão  $\nabla_{\alpha'(t)}X$  fazer sentido, vamos considerar o subscrito  $\alpha'(t)$  neste símbolo como qualquer extensão local do campo  $\alpha'(t)$  a um campo em  $M$ , pois só importa o valor da extensão em  $\alpha(t)$  segundo a Proposição 2.36, isto é, o vetor tangente  $\alpha'(t)$ , e o valor de  $X$  em uma curva tangente a  $\alpha'(t)$  em  $\alpha(t)$ .

Vamos provar primeiro a unicidade de  $\frac{DV}{dt}$ . Suponha que exista um tal campo  $\frac{DV}{dt}$  satisfazendo todas as propriedades do enunciado. Seja

$$V(t) = \sum_{j=1}^n V^j(t) \partial_j|_t$$

a expressão local do campo  $V$ . Pelas primeiras duas propriedades do enunciado, temos

$$\frac{DV}{dt} \Big|_t = \sum_{j=1}^n \frac{dV^j}{dt}(t) \partial_j|_t + \sum_{j=1}^n V^j(t) \frac{D\partial_j}{dt} \Big|_t$$

Pela terceira propriedade,

$$\frac{D\partial_j}{dt} \Big|_t = (\nabla_{\alpha'(t)} \partial_j)_t = (\nabla_{\sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \partial_i} \partial_j)_t = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \nabla_{\partial_i} \partial_j|_t.$$

Portanto, localmente o campo  $\frac{DV}{dt}$  se escreve na forma

$$\frac{DV}{dt} \Big|_t = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{dV^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \Gamma_{ij}^k(t) V^j(t) \right] \partial_k|_t.$$

o que mostra que o campo  $\frac{DV}{dt}$  é unicamente determinado.

Para determinar a existência de  $\frac{DV}{dt}$ , dada uma parametrização  $(\varphi, U)$  para uma vizinhança de  $\alpha(t)$ , defina o campo  $\frac{DV}{dt}$  em  $\varphi(U)$  pela expressão (2.18), agora verificaremos se o campo assim definido satisfaz todas as propriedades do enunciado

(i)

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt}(V+W) &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d(V^k+W^k)}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt} \Gamma_{ij}^k(V^j+W^j) \right] \partial_k|_t \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d(V^k)}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt} \Gamma_{ij}^k(V^j) \right] \partial_k|_t \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d(W^k)}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt} \Gamma_{ij}^k(W^j) \right] \partial_k|_t \\ &= \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt}(fV) &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d(fV)}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^t}{dt} \Gamma_{ij}^k(fV) \right] \partial_k|_t \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d(f)}{dt} V^k + f \frac{dV^k}{dt} + f \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^t}{dt} \Gamma_{ij}^k(V) \right] \partial_k|_t \\
&= \frac{d(f)}{dt} \sum_{k=1}^n V^k \partial_k|_t + f \sum_{k=1}^n \left[ \frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha^t}{dt} \Gamma_{ij}^k(V) \right] \partial_k|_t \\
&= \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}
\end{aligned}$$

(iii) Basta verificar que, se  $\frac{DV}{dt}$  está definida por (2.18) em duas parametrizações  $(\varphi, U)$  e  $(\bar{\varphi}, \bar{U})$  para uma vizinhança de  $\alpha(t)$ , com  $\varphi(U) \cap \bar{\varphi}(\bar{U}) \neq \emptyset$ , então, pela unicidade de  $\frac{DV}{dt}$  em  $(\bar{\varphi}, \bar{U})$  e em  $(\varphi, U)$  segue que as definições “concordam” em  $\varphi(U) \cap \bar{\varphi}(\bar{U})$ . Logo, a definição pode ser estendida para toda a variedade  $M$ .

□

**Definição 2.41.** O campo diferenciável  $\frac{DV}{dt}$  é chamado a derivada covariante de  $V$  ao longo da curva  $\alpha$ .

**Definição 2.42.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana com conexão afim  $\nabla$ . Um campo  $V$  ao longo de uma curva  $\alpha: I \rightarrow M$  é chamado paralelo quando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ .

**Proposição 2.43.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Seja  $\alpha: I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $V_0$  um vetor tangente a  $M$  em  $\alpha(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  (i.e.  $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ ). Então existe um único campo de vetores paralelo  $V$  ao longo de  $\alpha$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ .

*Demonstração.* Admitamos que o teorema foi provado para caso em que  $\alpha(I)$  está contido em uma vizinhança coordenada. Por compacidade, para todo  $t_1 \in I$ , o segmento  $\alpha([t_0, t_1]) \subset M$  pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas, em cada uma das quais  $V$  pode ser definido, por hipótese. Pela unicidade, as definições coincidem nas intersecções não vazias, o que permite definir  $V$  para  $[t_0, t_1]$ .

Devemos, portanto, provar o teorema no caso em que  $\alpha(I)$  está contido numa vizinhança coordenada  $\varphi(U)$  de um sistema de coordenadas  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  em torno de

$c(I)$ . Seja  $\varphi^{-1}(\alpha(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  a expressão local de  $\alpha(t)$  e seja  $V_0 = \sum_j v_0^j \partial_j$  onde  $\partial_j = \partial_j(\alpha(t_0))$ .

Suponhamos que existe um  $V$  em  $\varphi(U)$  que é paralelo ao longo de  $\alpha$  com  $V(t_0) = V_0$ . Então  $V = \sum v^j \partial_j$  satisfaz

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} \partial_j + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{\partial_i} \partial_j.$$

Fazendo  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ , e trocando  $j$  com  $k$  na primeira soma, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_k \frac{dv^k}{dt} \partial_k + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} v^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k = \sum_k \frac{dv^k}{dt} \partial_k + \sum_k \left( \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k \\ &= \sum_k \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k = 0. \end{aligned}$$

O sistema de  $n$  equações diferenciais em  $v^k(t)$ ,

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt}, k = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

possui uma única solução satisfazendo a condição inicial  $v^k(t_0) = v_0^k$ . Segue-se que, se  $V$  existe, ele é único. Além disso, como o sistema é linear, a solução está definida para todo  $t \in I$ , o que demonstra a existência de um (único)  $V$  com as propriedades desejadas.  $\square$

O campo de vetores  $V(t)$  da Proposição 2.43 é denominado o *transporte paralelo* de  $V(t_0)$  ao longo da curva  $\alpha$ .

---

## 2.3 Conexão de Levi-Civita

---

**Definição 2.44.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e uma métrica riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A conexão é dita compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , quando para toda curva diferenciável  $c$  e quaisquer pares de campos de vetores paralelos  $P$  e  $P'$  ao longo de  $c$ , tivermos  $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$ .*

A Definição 2.44 é justificada pela proposição seguinte que mostra que se  $\nabla$  é compatível com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , então podemos diferenciar o produto interno pela *regra do produto* usual.

**Proposição 2.45.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  é compatível com a métrica, se, e somente se, para todo par  $V, W$  de campos de vetores ao longo da curva diferenciável  $c: I \rightarrow M$  tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \quad (2.20)$$

*Demonstração.* É óbvio que a equação (2.20) implica na Definição 2.44, pois, se  $V_1$  e  $W_1$  são dois campos quaisquer de vetores paralelos sobre uma curva  $c$  segue de (2.20) que

$$\frac{d}{dt}\langle V_1, W_1 \rangle = \left\langle \frac{DV_1}{dt}, W_1 \right\rangle + \left\langle V_1, \frac{DW_1}{dt} \right\rangle = \langle 0, W_1 \rangle + \langle V_1, 0 \rangle = 0.$$

Logo,  $\langle V_1, W_1 \rangle = \text{constante}$ .

Para provar a recíproca devemos escolher uma base ortonormal  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$  de  $T_{c(t_0)}(M)$ ,  $t_0 \in I$  e estender paralelamente cada um dos vetores  $P_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ao longo de  $c$  utilizando a Proposição 2.43. Como  $\nabla$  é compatível com a métrica, então para todo par  $(P_i(t), P_j(t))$  de campos paralelos ao longo da curva  $c$  temos que  $\langle P_i(t), P_j(t) \rangle = \text{constante}$  para todo  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Do fato de que  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$  é uma base ortonormal, segue que  $\langle P_i(t), P_j(t) \rangle = 0$  para todo  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), pois  $P_i(t)$  é o transporte paralelo de  $P_i(t_0)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, temos que  $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$  é uma base ortonormal de  $T_{c(t)}(M)$ , para todo  $t \in I$ . Logo, podemos escrever

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

onde  $v^i$  e  $w^i$  são funções diferenciáveis em  $I$ .

Segue de (2.21) e da Proposição 2.40 que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \left\langle \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \sum_i w^i P_i \right\rangle + \left\langle \sum_i v^i P_i, \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i \right\rangle \\
 &= \sum_i \left\langle \frac{dv^i}{dt} P_i, w^i P_i \right\rangle + \sum_i \left\langle v^i P_i, \frac{dw^i}{dt} P_i \right\rangle \\
 &= \sum_i \frac{dv^i}{dt} w^i + \sum_i v^i \frac{dw^i}{dt} = \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right\} \\
 &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} (v^i w^i) \right\} \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i (v^i w^i) \right) = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.46.** *Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade riemanniana  $M$  é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \Lambda(M). \quad (2.22)$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $\nabla$  é compatível com a métrica. Seja  $p \in M$  e seja  $c: I \rightarrow M$  uma curva diferenciável com  $c(t_0) = p, t_0 \in I$ , e com  $\frac{dc}{dt}|_{t=t_0} = X_p$ . Então

$$\begin{aligned}
 X_p \langle Y, Z \rangle &= \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle |_{t=t_0} = \left[ \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt} \right\rangle \right] \Big|_{t=t_0} \\
 &= [\langle \nabla_{dc/dt} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{dc/dt} Z \rangle] |_{t=t_0} \\
 &= \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle_p
 \end{aligned}$$

Como  $p$  é arbitrário, segue-se (2.22).

A recíproca é óbvia, pois se  $V, W$  são campos ao longo de uma curva diferenciável  $\alpha$  em  $M$  com  $\alpha(t_0) = p$  e  $\alpha'(t_0) = X_p$ , então

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle V_t, W_t \rangle \Big|_{t=t_0} &= X_p \langle V_t, W_t \rangle \\
 &= \langle (\nabla_X V)_p, W_t \rangle + \langle V_t, (\nabla_X W)_p \rangle \\
 &= \langle (\nabla_{\alpha'(t_0)} V)_{\alpha(t_0)}, W_{t_0} \rangle + \langle V_{t_0}, (\nabla_{\alpha'(t_0)} W)_{\alpha(t_0)} \rangle \\
 &= \left\langle \frac{DV}{dt} \Big|_{t_0}, W_{t_0} \right\rangle + \left\langle V_{t_0}, \frac{DW}{dt} \Big|_{t_0} \right\rangle,
 \end{aligned}$$

onde  $V_t$  e  $W_t$  são representantes dos campos vetoriais  $V$  e  $W$  no ponto  $\alpha(t)$ , respectivamente. Logo,  $\nabla$  é compatível com a métrica pela Proposição 2.45.  $\square$

**Definição 2.47.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \Lambda(M). \quad (2.23)$$

**Observação 2.48.** *Em um sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$ , o fato de ser  $\nabla$  simétrica implica que para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0, \quad (2.24)$$

o que justifica o nome adotado (observe que (2.24) é equivalente ao fato de que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ).

Podemos agora enunciar o teorema fundamental deste capítulo.

**Teorema 2.49** (Levi-Civita). *Dada uma variedade riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:*

- a)  $\nabla$  é simétrica.
- b)  $\nabla$  é compatível com a métrica riemanniana.

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente a existência de uma tal  $\nabla$ . Então

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (2.25)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (2.26)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (2.27)$$

Somando (2.25) e (2.26) e subtraindo (2.27), teremos, usando a simetria de  $\nabla$ , que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle \nabla_X Y, Z \rangle \\ &\quad + \langle Z, \nabla_Y X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle - \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z \rangle \\ &\quad + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle\} \quad (2.28)$$

A expressão (2.28) mostra que  $\nabla$  está univocamente determinada pela métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Portanto, caso exista, ela será única. De fato, para verificar a unicidade, suponha que exista uma conexão  $\bar{\nabla}$  distinta de  $\nabla$  satisfazendo (2.28). Assim,

$$\langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle\},$$

se, e somente se,

$$\langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle = \langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Logo,

$$\langle Z, \bar{\nabla}_Y X - \nabla_Y X \rangle = 0.$$

Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não-degenerada e  $Z \neq 0$ , então,  $\bar{\nabla}_Y X - \nabla_Y X = 0$ , o que contraria a hipótese de  $\bar{\nabla}$  ser distinta de  $\nabla$ .

Para mostrar a existência, defina (2.28). É fácil verificar que  $\nabla$  está bem definida e que satisfaz as propriedades desejadas.  $\square$

**Observação 2.50.** *A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita (ou conexão riemanniana) de  $M$ .*

**Observação 2.51.** *A expressão (2.28) é conhecida como a formula de Koszul.*

Antes de concluirmos esta seção vamos escrever parte do que foi feito acima em um sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$ . É conveniente dizer que as funções  $\Gamma_{ij}^k$  definidas em  $U$  por  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$  são os coeficientes da conexão  $\nabla$  em  $U$  ou os símbolos de Christoffel da

conexão. Segue da expressão (2.28) que

$$\begin{aligned}
 \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \sum_l \Gamma_{ij}^l \langle \partial_l, \partial_k \rangle = \langle \sum_l \Gamma_{ij}^l \partial_l, \partial_k \rangle = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{ \partial_j \langle \partial_i, \partial_k \rangle + \partial_i \langle \partial_k, \partial_j \rangle - \partial_k \langle \partial_j, \partial_i \rangle - \langle [\partial_j, \partial_k], \partial_i \rangle \\
 &\quad - \langle [\partial_i, \partial_k], \partial_j \rangle - \langle [\partial_j, \partial_i], \partial_k \rangle \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \partial_j \langle \partial_i, \partial_k \rangle + \partial_i \langle \partial_k, \partial_j \rangle - \partial_k \langle \partial_j, \partial_i \rangle \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle + \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \}
 \end{aligned}$$

onde  $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ .

Como a matriz  $(g_{km})$  admite uma inversa  $(g^{km})$ , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} g^{km} \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão em termos dos  $g_{ij}$  (dados pela métrica).

**Observação 2.52.** Se  $M = \mathbb{R}^n$  com  $\partial_i$  identificado com  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  então para o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , tem-se  $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Daí,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \{ \partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij} \} g^{mk} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \langle e_j, e_m \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle e_m, e_i \rangle - \frac{\partial}{\partial x_m} \langle e_i, e_j \rangle \right\} g^{mk} = 0,
 \end{aligned}$$

pois, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $g_{ij}$  é constante.

Em termos dos símbolos de Christoffel, a derivada covariante tem a expressão clássica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} \partial_k, \quad (2.30)$$

a qual segue de (2.18).

Observe que espaços euclidianos munidos com o produto interno usual é um exemplo de variedade riemanniana. Segue da expressão (2.30) que a derivada covariante difere

da derivada usual do espaço euclidiano apenas por termos que envolvem os símbolos de Christoffel. Como os símbolos de Cristoffel em espaços euclidianos são todos nulos (observação 2.52) segue que em espaços euclidianos a derivada covariante coincide com a derivada usual.

**Exemplo 2.53 (Conexão Euclidiana).** *Identificando espaços tangentes em  $\mathbb{R}^n$  com o próprio  $\mathbb{R}^n$  com aplicações suaves  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , nós definimos a conexão euclidiana  $\nabla: \Lambda(\mathbb{R}^n) \times \Lambda(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda(\mathbb{R}^n)$  por*

$$(\nabla_X Y)_p = dY_p(X_p), \quad (2.31)$$

ou seja, a derivada direcional do campo  $Y$  em  $p$  na direção de  $X_p$ . Em coordenadas, usando a definição de diferencial em  $\mathbb{R}^n$ ,

$$dY_p(X_p) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) e_j,$$

ou seja,

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (2.32)$$

Outra maneira de obter a mesma expressão em coordenadas, usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} dY_p(X_p)(f) &= X_p(f \circ Y) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial (f \circ Y)}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n X^i \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}(f). \end{aligned}$$

Em notação mais sucinta, a expressão em coordenadas da conexão euclidiana que obtemos a partir de (2.32) é

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^n X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (2.33)$$

Segue da observação 2.52 que a conexão euclidiana é uma conexão com símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k = 0$ .

No que se segue será mostrado que os conceitos apresentados nesta seção independem da métrica associada à variedade. Assim, a definição de conexão semi-riemanniana e suas propriedades em nada diferem da definição de conexão riemanniana.

## 2.4 Extensão a variedades semi-riemannianas

**Definição 2.54.** (*Métrica semi-riemanniana*) Uma métrica semi-riemanniana em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M^n$  uma forma bilinear simétrica não-degenerada  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (porém, não necessariamente positiva definida) no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = p \in \varphi(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\varphi_p(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então as funções  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$  são diferenciáveis em  $U$ .

No que se segue denotaremos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = g_{ij}^*(x_1, \dots, x_n),$$

onde as funções  $g_{ij}^*: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  são as componentes do *tensor métrico*

$$g_p^* = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^*(p) dx^i|_p \otimes dx^j|_p.$$

Para maiores detalhes veja [14], páginas 29 e 30.

**Definição 2.55.** A dimensão do maior subespaço no qual uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é negativo definido, em cada  $p \in M$  é denominada o *índice da métrica*  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ .

No que segue será omitido o ponto  $p$  na expressão  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  e será adotada a notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ , onde  $v$  indica o índice da métrica.

**Observação 2.56.** Uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  é denominada *métrica de Lorentz*.

**Definição 2.57.** Uma variedade semi-riemanniana (ou pseudo-riemanniana) é uma variedade diferenciável  $M$  munida de uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  com índice  $v$  constante.

Dada uma variedade semi-riemanniana  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_v)$ , em cada  $p \in M$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  é um produto escalar (isto é, uma *forma bilinear simétrica não-degenerada*) em  $T_pM$  de índice  $v$ .

Observe que, de acordo com as definições anteriores, uma variedade riemanniana é uma variedade semi-riemanniana de índice zero. Variedades semi-riemannianas de índice 1 são conhecidas como variedades de Lorentz, como veremos no próximo capítulo. Variedades de Lorentz,  $n$  - dimensionais, em geral, são denotadas por  $\mathbb{L}^n$ . Variedades de Lorentz

dadas por espaços vetoriais euclidianos munidos com uma pseudo-métrica são chamados de *espaços de Minkowski* (ou *espaços de Lorentz - Mikowski*).

Vimos na Proposição 2.34 que qualquer variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana. Isso não acontece para métricas Lorentzianas  $\mathbb{L}^n$ . Existem algumas obstruções para que se possa munir uma variedade com tais métricas. Vamos fazer uma breve explanação sobre este aspecto.

O conjunto dos vetores não nulos tipo tempo de uma variedade lorentziana, possui duas componentes conexas, ambas convexas. Uma *orientação temporal* em uma variedade Lorentziana  $M$  é a escolha de um cone temporal em cada espaço tangente, que depende diferenciavelmente de  $p \in M$ . Se existir uma orientação temporal diremos que  $M$  é *t-orientável*.

A proposição a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [5], pg. 12, determina condições necessárias e suficientes para que uma variedade de Lorentz seja *t-orientável*.

**Proposição 2.58.** *Uma variedade Lorentziana é denominada t-orientável, se e somente se, existe um campo vetorial globalmente definido  $X \in \Lambda(M)$  tal que  $\langle X, X \rangle_1 < 0$ .*

Caso exista um tal campo satisfazendo as condições da Proposição 2.58 diz-se que a métrica Lorentziana  $\langle X, X \rangle_1$  é *t-orientável*. Segue da Proposição 2.58 que a *t-orientabilidade* em variedades Lorentzianas é uma propriedade que depende da métrica. Mostra-se que (ver [5], pg 12) se uma variedade admite uma métrica Lorentziana ela admite também uma métrica Lorentziana *t-orientável*, sendo que as duas métricas podem, ou não, coincidir. Mostra-se, ainda, que as afirmações i)  $M$  admite uma métrica Lorentziana, ii)  $M$  admite uma métrica Lorentziana com orientação temporal e iii)  $M$  admite um campo de vetores  $X$  sem zeros, são equivalentes.

Na próxima subseção veremos que é possível munir o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  (que é uma variedade diferenciável) com uma pseudo-métrica de índice 1.

### 2.4.1 Métrica pseudo-riemanniana em $\mathbb{R}_1^n$

Todas as definições até agora apresentadas continuam válidas quando consideramos uma métrica pseudo-riemanniana.

Por exemplo, o fato de uma conexão ser compatível com uma métrica pseudo-riemanniana de  $M$  ou ser simétrica (se (2.46) é satisfeita e (2.23) se verifica) não depende do fato de

que a métrica é, ou não, definida positiva.

Também o Teorema de Levi-Civita se estende a métricas pseudo-riemannianas. Basta observar que na demonstração do Teorema de Levi-Civita, não utiliza-se o fato de que a métrica riemanniana é definida positiva. A conexão assim obtida é chamada *conexão pseudo-riemanniana*.

Nesta seção, a qual servirá de embasamento para o próximo capítulo, veremos que é possível munir o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  (que é uma variedade diferenciável) com uma pseudo-métrica de índice 1, de forma que  $\bar{M} = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  será denotado por  $\mathbb{R}_1^n$ . No que se segue vamos mostrar que:

1. É possível introduzir uma métrica pseudo-riemanniana em  $\mathbb{R}_1^n$  pela forma quadrática

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n.$$

2. O transporte paralelo da conexão de Levi-Civita desta métrica coincide com o transporte paralelo usual do  $\mathbb{R}_1^n$

Esta métrica pseudo-riemanniana é uma métrica de Lorentz. Para demonstrar os itens 1. e 2. vamos precisar da seguinte proposição:

**Proposição 2.59.** *Se  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e  $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma quadrática definida positiva, então  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)), \quad u, v \in V, \quad (2.34)$$

*é um produto interno em  $V$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que (2.34) satisfaz as propriedades: positividade, comutatividade (simetria) e bilinearidade. De fato, seja  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação bilinear tal que  $Q(v) = f(v, v)$ . Temos

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \frac{1}{2}(Q(2v) - 2Q(v)) = \frac{1}{2}(f(2v, 2v) - 2f(v, v)) \\ &= \frac{1}{2}(4f(v, v) - 2f(v, v)) = f(v, v) = Q(v), \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

e, portanto,  $\langle v, v \rangle \geq 0$  e  $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ . Isso mostra a positividade.

Além disso, é imediato verificar que  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ,  $\forall u, v \in V$ , o que demonstra a comutatividade (simetria).

$$\begin{aligned}
 \langle u + \lambda v, w \rangle &= \frac{1}{2}(Q(u + \lambda v + w) - Q(u + \lambda v) - Q(w)) \\
 &= \frac{1}{2}((f(u + \lambda v + w, u + \lambda v + w) - f(u + \lambda v, u + \lambda v) - f(w, w)) \\
 &= \frac{1}{2}((f(u, u) + \lambda f(u, v) + f(u, w) + \lambda f(v, u) + \lambda^2 f(v, v) \\
 &+ \lambda f(v, w) + f(w, u) + \lambda f(w, v) + f(w, w) - f(u, u) - \lambda f(u, v) \\
 &- \lambda f(v, u) - \lambda^2 f(v, v) - f(w, w)) \\
 &= \frac{1}{2}(f(u, w) + f(w, u)) + \frac{\lambda}{2}(f(v, w) + f(w, v)) \\
 &= \frac{1}{2}(f(u, u) + f(u, w) + f(w, u) + f(w, w) - f(u, u) - f(w, w)) \\
 &+ \frac{\lambda}{2}(f(v, v) + f(v, w) + f(w, v) + f(w, w) - f(v, v) - f(w, w)) \\
 &= \frac{1}{2}(f(u + w, u + w) - f(u, u) - f(w, w)) \\
 &+ \frac{\lambda}{2}(f(v + w, v + w) - f(v, v) - f(w, w)) \\
 &= \frac{1}{2}(Q(u + w) - Q(u) - Q(w)) + \frac{\lambda}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)) \\
 &= \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle, \quad \forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Isso mostra a bilinearidade. Segue portanto que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno. □

**Observação 2.60.** Se  $Q(v) = f(v, v)$  para alguma forma bilinear  $f(v, v)$  previamente conhecida, então (2.34) pode ser expresso por  $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(f(u, v) + f(v, u))$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v)) = \frac{1}{2}(f(u + v, u + v) - f(u, u) - f(v, v)) \\
 &= \frac{1}{2}(f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v) - f(u, u) - f(v, v)) \\
 &= \frac{1}{2}(f(u, v) + f(v, u))
 \end{aligned}$$

A seguir apresentaremos as demonstrações dos itens 1 e 2.

*Demonstração. item 1.* A Proposição 2.59 motiva uma pseudo-métrica riemanniana a partir da forma quadrática  $Q$ . Observe que  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n,$$

é uma aplicação bilinear e que  $Q(x) = f(x, x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Defina em todo ponto  $p \in \mathbb{R}_1^n$  e para quaisquer vetores  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x)) = f(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n.$$

Isso de fato define uma pseudo-métrica pois  $f$  é diferenciável, bilinear, simétrica e não-degenerada (isto é, se  $f(x, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$  então  $x = 0$ ). Portanto,  $\bar{M} = (\mathbb{R}^n, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle) = \mathbb{R}_1^n$  é uma variedade pseudo-riemanniana.

**Item 2.** Vamos denotar por  $\bar{\nabla}$  e  $[[ \cdot, \cdot ]]$  a conexão pseudo-riemanniana e o colchete de  $\bar{M}$ , respectivamente. Como, em termos de variedades diferenciáveis  $\bar{M}$  é o  $\mathbb{R}^n$  (independentemente da escolha da métrica), e como o colchete depende apenas da estrutura diferenciável, temos que  $[[ \cdot, \cdot ]] = [ \cdot, \cdot ]$ , onde  $[ \cdot, \cdot ]$  é o colchete de  $M = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a métrica riemanniana).

Por outro lado, considere  $\nabla$  a conexão riemanniana de  $M$ . Vamos mostrar que  $\nabla = \bar{\nabla}$ . Basta mostrar que  $\nabla$  é compatível com a pseudo-métrica de  $\bar{M}$  e simétrica com relação ao colchete de  $\bar{M}$ , uma vez que a unicidade segue do Teorema de Levi-Civita 2.49. Assim,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = [[X, Y]], \quad X, Y \in \Lambda(\bar{M}) = \Lambda(M),$$

e, portanto,  $\nabla$  é simétrica em  $\bar{M}$ . Lembre-se que

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{\partial Y(p)}{\partial X(p)}, \quad p \in \mathbb{R}_1^n.$$

Mostremos que  $\nabla$  é compatível com  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ . De fato, para todo  $p \in \mathbb{R}_1^n$ , e  $X, Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  e  $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \Lambda(\bar{M})$ , temos

$$\begin{aligned} X \langle\langle Y, Z \rangle\rangle(p) &= \frac{\partial \langle\langle Y, Z \rangle\rangle}{\partial X(p)}(p) = \frac{\partial}{\partial X(p)}(Y_1 Z_1 + \cdots + Y_{n-1} Z_{n-1} - Y_n Z_n) \\ &= \frac{\partial Y_1(p)}{\partial X(p)} Z_1(p) + Y_1(p) \frac{\partial Z_1(p)}{\partial X(p)} + \cdots + \frac{\partial Y_{n-1}(p)}{\partial X(p)} Z_{n-1}(p) + Y_{n-1}(p) \frac{\partial Z_{n-1}(p)}{\partial X(p)} \\ &\quad - \frac{\partial Y_n(p)}{\partial X(p)} Z_n(p) - Y_n(p) \frac{\partial Z_n(p)}{\partial X(p)} \\ &= \left\langle \left\langle \left( \frac{\partial Y_1(p)}{\partial X(p)}, \dots, \frac{\partial Y_n(p)}{\partial X(p)} \right), (Z_1(p), \dots, Z_n(p)) \right\rangle \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left\langle (Y_1(p), \dots, Y_n(p)), \left( \frac{\partial Z_1(p)}{\partial X(p)}, \dots, \frac{\partial Z_n(p)}{\partial X(p)} \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \left\langle \frac{\partial Y(p)}{\partial X(p)}, Z(p) \right\rangle \right\rangle + \left\langle \left\langle Y(p), \frac{\partial Z(p)}{\partial X(p)} \right\rangle \right\rangle \\ &= \langle\langle (\nabla_X Y)(p), Z(p) \rangle\rangle + \langle\langle Y(p), \nabla_X Z(p) \rangle\rangle \\ &= (\langle\langle \nabla_X Y, Z \rangle\rangle + \langle\langle Y, \nabla_X Z \rangle\rangle)(p). \end{aligned}$$

Portanto

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

o que mostra a compatibilidade e, portanto,  $\bar{\nabla} = \nabla$ .

Por fim, como a derivada covariante induzida por uma conexão é única, segue que  $\frac{\bar{D}}{dt} = \frac{D}{dt}$ , isto é, a derivada covariante de campos ao longo de uma curva, induzida por  $\bar{\nabla}$  coincide com a do  $\mathbb{R}_1^n$ . Logo, os transportes paralelos ao longo de curvas também coincidem.

Variedades de Lorentz dadas por espaços vetoriais euclidianos munidos com uma pseudo-métrica são chamados de espaços de Minkowski (ou espaços de Lorentz - Minkowski).

□

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## Variedades de Lorentz - Minkowski

Neste capítulo é introduzido o conceito de variedades de Lorentz. Em particular, é apresentado um estudo sobre propriedades das variedades de Lorentz - Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  (ou espaços de Lorentz-Minkowski).

Os textos que serviram de base para esse capítulo foram [6], [12], [13] e [15].

---

### 3.1 Os espaços Lorentzianos $\mathbb{R}_1^n$

---

**Definição 3.1.** *As variedades semi-riemannianas de índice  $v$  dadas por  $\mathbb{R}_v^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_v)$ , onde a métrica é dada pelo produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  definido por*

$$\langle x, y \rangle_v = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-v} y_{n-v} - x_{n-v+1} y_{n-v+1} - \cdots - x_n y_n,$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , são chamadas espaços pseudo-euclidianos, e o produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  é chamado pseudo-produto interno.

O índice  $v$  na definição indica a quantidade das últimas parcelas do produto escalar que receberão o sinal  $-$ , ou equivalentemente, indica a dimensão do maior subespaço no qual o pseudo-produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  é negativo definido, em cada  $p \in M$ .

Como foi visto no capítulo anterior, uma variedade de Lorentz  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  é uma variedade semi-riemanniana cuja métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  possui índice 1. No que se segue utilizaremos a notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 = \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ . Desta forma nos restringiremos às variedades  $M = \mathbb{R}^n$ , munidas

com uma métrica de Lorentz  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  com  $\partial_i$  identificado com  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , da seguinte forma:

$$\langle\langle (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n), (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) \rangle\rangle = \left( \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i \right) - u_n v_n,$$

onde  $(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n), (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) \in \mathbb{R}^n$ . Uma variedade de Lorentz  $M = \mathbb{R}^n$  munida desta métrica é dita uma variedade de Lorentz - Minkowski (ou simplesmente espaço de Lorentz-Minkowski) a qual será denotada por  $\mathbb{R}_1^n$ . Dizemos que  $(+, \dots, +, -)$  é a assinatura da dita métrica.

Observe que quando  $v = 0$ , o pseudo-produto interno torna-se o produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$  e nesse caso temos o espaço euclidiano usual, de forma que  $\mathbb{R}_0^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_0) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Como o objetivo é estudar os espaços de Lorentz - Minkowski vamos defini-lo abaixo com esta notação:

**Definição 3.2.** *O espaço de Lorentz - Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  é o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  dotado do pseudo-produto interno*

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n,$$

para todo  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Este pseudo-produto interno tem as seguintes propriedades:

P.1)

$$\begin{aligned} \langle\langle x, y + z \rangle\rangle &= \langle\langle (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) + (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), (y_1 + z_1, \dots, y_{n-1} + z_{n-1}, y_n + z_n) \rangle\rangle \\ &= x_1(y_1 + z_1) + \dots + x_{n-1}(y_{n-1} + z_{n-1}) - x_n(y_n + z_n) \\ &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_{n-1} z_{n-1} - x_n y_n - x_n z_n \\ &= x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n + x_1 z_1 + \dots + x_{n-1} z_{n-1} - x_n z_n \\ &= \langle\langle (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \rangle\rangle + \langle\langle (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle x, y \rangle\rangle + \langle\langle x, z \rangle\rangle. \end{aligned}$$

P.2)

$$\begin{aligned}
\langle\langle x, y \rangle\rangle &= \langle\langle (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \rangle\rangle \\
&= x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_{n-1} x_{n-1} - y_n x_n \\
&= \langle\langle (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n), (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \rangle\rangle \\
&= \langle\langle y, x \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

P.3)

$$\begin{aligned}
\langle\langle \alpha x, y \rangle\rangle &= \langle\langle \alpha(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \rangle\rangle \\
&= \langle\langle (\alpha x_1, \dots, \alpha x_{n-1}, \alpha x_n), (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \rangle\rangle \\
&= \alpha x_1 y_1 + \dots + \alpha x_{n-1} y_{n-1} - \alpha x_n y_n \\
&= \alpha(x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n) \\
&= \alpha \langle\langle (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \rangle\rangle \\
&= \alpha \langle\langle x, y \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

A propriedade  $\langle\langle x, x \rangle\rangle \geq 0$  não faz sentido para o pseudo-produto interno, pois se  $x \in \mathbb{R}_1^n$ ,  $x = (0, \dots, 1)$  então  $\langle\langle x, x \rangle\rangle = \langle\langle (0, \dots, 1), (0, \dots, 1) \rangle\rangle = -1$ . A seguir vamos definir os tipos de vetores e seu comportamento nesse espaço.

**Definição 3.3.** Um vetor não nulo  $x \in \mathbb{R}_1^n$  é tipo espaço se  $\langle\langle x, x \rangle\rangle > 0$ , tipo luz se  $\langle\langle x, x \rangle\rangle = 0$  e tipo tempo se  $\langle\langle x, x \rangle\rangle < 0$ .

Nos referiremos a esta classificação como *caráter causal* do vetor  $x$  pertencente a  $\mathbb{R}_1^n$ . O termo *causal* é "herdado" da teoria da relatividade, a qual é desenvolvida em  $\mathbb{R}_1^4$ , onde 3 dos 4 vetores que compõem a base do espaço são associados ao espaço euclidiano tridimensional e o quarto vetor representa a variável tempo.

Os vetores  $e_1 = (1, 0, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$  em  $\mathbb{R}_1^3$  são vetores tipo espaço e tipo tempo respectivamente, pois  $\langle\langle e_1, e_1 \rangle\rangle = \langle\langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle\rangle = 1$  e  $\langle\langle e_3, e_3 \rangle\rangle = \langle\langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle\rangle = -1$ . O vetor  $e_1 + e_3 = (1, 0, 1)$  em  $\mathbb{R}_1^3$  é um vetor tipo luz, pois  $\langle\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle\rangle = 1 - 1 = 0$ .

**Observação 3.4.** O vetor nulo pertencente a  $\mathbb{R}_1^n$  é considerado um vetor tipo espaço.

**Definição 3.5.** Dizemos que dois vetores  $x, y$  em  $\mathbb{R}_1^n$  são pseudo-ortogonais se, e somente se,  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$ .

**Definição 3.6.** Se  $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$  é um subconjunto qualquer, o espaço  $v$ -ortogonal à  $S$  é definido por

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}_v^n \mid \langle x, y \rangle_v = 0 \text{ para todo } y \in S\}.$$

**Proposição 3.7.** Seja  $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$  um subespaço vetorial. Então vale que  $\dim S + \dim S^\perp = n$  e além disto,  $(S^\perp)^\perp = S$ .

*Demonstração.* Ver [6], páginas 9 e 10. □

Um subespaço  $S$  do espaço vetorial  $\mathbb{R}_v^n$  é dito não-degenerado se o pseudo-produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  restrito a  $S$  é não-degenerado.

**Corolário 3.8.** Seja  $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$  um subespaço vetorial. Então  $S$  é não-degenerado se, e somente se,  $\mathbb{R}_v^n = S \oplus S^\perp$ . Em particular,  $S$  é não-degenerado se, e somente se,  $S^\perp$  também for não-degenerado.

*Demonstração.* Ver [6] página 10. □

A norma de um vetor  $x \in \mathbb{R}_1^n$  é definida por  $\|x\|_1 = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ .

**Definição 3.9.** Sejam  $x$  e  $y$  vetores tipo luz ou tipo tempo. O vetor  $x$  tem a mesma paridade do vetor  $y$  se as últimas coordenadas dos vetores tem o mesmo sinal.

**Observação 3.10.** Segue da observação 3.4 que os vetores tipo tempo e tipo luz são não nulos. Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$  e  $y = (y_1, \dots, y_n) \neq 0$  vetores tipo tempo e tipo luz, respectivamente então,

$$\langle x, x \rangle < 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 < 0.$$

Logo  $\langle x, x \rangle < 0$  só pode ocorrer se  $x_n \neq 0$ .

Da mesma forma,

$$\langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 - y_n^2 = 0.$$

Isso só pode ocorrer se  $y_n \neq 0$  e existe pelo menos um  $y_i \neq 0, i = 1, \dots, n-1$ .

**Teorema 3.11.** Sejam  $x$  e  $y$  vetores não tipo espaço de mesma paridade em  $\mathbb{R}_1^n$ . Então  $\langle x, y \rangle \leq 0$ . A igualdade ocorre se, e somente se,  $x$  e  $y$  são tipo luz e linearmente dependentes.

*Demonstração.* Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  vetores de  $\mathbb{R}_1^n$  não tipo espaço de mesma paridade. Considerando as  $n - 1$  primeiras coordenadas dos vetores  $x$  e  $y$  como os vetores  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$  e  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$  com produto interno usual, segue que,

$$\langle\langle x, x \rangle\rangle = \langle\bar{x}, \bar{x}\rangle - x_n^2 = \|\bar{x}\|^2 - |x_n|^2 \leq 0 \quad (3.1)$$

$$\langle\langle y, y \rangle\rangle = \langle\bar{y}, \bar{y}\rangle - y_n^2 = \|\bar{y}\|^2 - |y_n|^2 \leq 0 \quad (3.2)$$

Logo,

$$\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \leq |x_n y_n| = x_n y_n \quad (3.3)$$

uma vez que,  $x_n$  e  $y_n$  possuem o mesmo sinal, por hipótese. Portanto, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle - x_n y_n \leq |\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle| - x_n y_n \leq \|\bar{x}\|\|\bar{y}\| - x_n y_n \leq 0. \quad (3.4)$$

Resta mostrar que  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$ , se, e somente se,  $x$  e  $y$  são vetores tipo luz linearmente dependentes. É claro que se  $x$  e  $y$  são vetores linearmente dependentes tipo luz, então o produto entre os dois vetores é nulo. Para a recíproca, observamos inicialmente que, por definição  $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$  para todo  $u, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Assim, se  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$  em (3.4), então  $\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$ , logo,  $\cos(\theta) = 1$  e, conseqüentemente,

$$\bar{x} = \lambda \bar{y}. \quad (3.5)$$

Precisamos mostrar ainda que  $x$  e  $y$  são tipo luz e  $x_n = \lambda y_n$ .

Supondo, por absurdo, que  $x$  é tipo tempo, podemos ter  $\bar{x} = 0$  ou  $\bar{x} \neq 0$ . Para  $\bar{x} = 0$ , temos,  $x = (0, \dots, 0, x_n)$ , considerando  $x_n \neq 0$  em (3.4), obtém-se,  $0 = \langle\langle x, y \rangle\rangle = -x_n y_n$ , implicando  $y_n = 0$ , o que contradiz a hipótese de  $y$  não ser tipo espaço, pois  $\langle\langle y, y \rangle\rangle = \langle\bar{y}, \bar{y}\rangle - y_n^2 = \langle\bar{y}, \bar{y}\rangle \geq 0$ , de forma que a igualdade ocorre, se, e somente se  $y$  é um vetor nulo (veja observação 3.4).

Analisemos agora quando  $\bar{x}$  é não nulo. Dividindo ambos os lados da Equação (3.1) por  $\|\bar{x}\|^2$ , obtém-se que,

$$\frac{x_n^2}{\|\bar{x}\|^2} - 1 > 0.$$

Por outro lado, por hipótese,  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\| - x_n y_n = 0$ , de onde,  $\|\bar{y}\| = \frac{x_n y_n}{\|\bar{x}\|}$ . Disto,

$$\langle\langle y, y \rangle\rangle = \|\bar{y}\|^2 - y_n^2 = \frac{x_n^2 y_n^2}{\|\bar{x}\|^2} - y_n^2 = y_n^2 \left( \frac{x_n^2}{\|\bar{x}\|^2} - 1 \right) > 0$$

contradizendo, novamente,  $y$  não ser tipo espaço. Portanto,  $x$  deve ser tipo luz. De modo análogo, conclui-se que  $y$  é um vetor tipo luz. Por último, como  $x$  e  $y$  são tipo luz, temos  $\|\bar{x}\|^2 = x_n^2$ ,  $\|\bar{y}\|^2 = y_n^2$  e

$$0 = \langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle - x_n y_n \stackrel{(3.5)}{=} \lambda \|\bar{y}\|^2 - x_n y_n = \lambda y_n^2 - x_n y_n \Rightarrow y_n (\lambda y_n - x_n) = 0$$

com  $y_n \neq 0$  ( $y$  é tipo luz), portanto,  $x_n = \lambda y_n$  e  $x = \lambda y$ . □

**Proposição 3.12.** *Sejam  $x$  e  $y$  vetores tipo tempo ou tipo luz de mesma paridade em  $\mathbb{R}_1^n$  e  $t$  um número real positivo, então o vetor  $tx$  tem a mesma paridade de  $x$  e o vetor  $x + y$  herda o tipo e a paridade dos vetores  $x$  e  $y$ . Além disso,  $x + y$  será tipo luz se, e somente se,  $x$  e  $y$  forem vetores linearmente dependentes tipo luz.*

*Demonstração.* É claro que o vetor  $tx$  herda o tipo e paridade do vetor  $x$ . O vetor  $x + y$ , tem a última coordenada dada pela soma das últimas coordenadas de  $x$  e  $y$ , os quais têm mesma paridade por hipótese, logo a paridade de  $x + y$  é a mesma de  $x$  e  $y$ . Como  $x$  e  $y$  são vetores tipo tempo e tipo luz de mesma paridade, então

$$\langle\langle x + y, x + y \rangle\rangle = \underbrace{\langle\langle x, x \rangle\rangle}_{\leq 0} + 2 \underbrace{\langle\langle x, y \rangle\rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle\langle y, y \rangle\rangle}_{\leq 0} \leq 0, \tag{3.6}$$

pois  $x + y$  não é tipo espaço. Segue da equação (3.6) que  $\langle\langle x + y, x + y \rangle\rangle = 0$  se, e somente se,

$$\begin{cases} \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0 \\ \langle\langle x, y \rangle\rangle = 0 \\ \langle\langle y, y \rangle\rangle = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Logo, segue da equação 3.7 e do Teorema 3.11 que isso ocorre se, e somente se,  $x$  e  $y$  são vetores tipo luz linearmente dependentes. □

**Corolário 3.13.** *O pseudo-produto interno de dois vetores tipo tempo nunca se anula.*

*Demonstração.* Se  $x$  e  $y$  são dois vetores tipo tempo, então  $-x$  e  $-y$  também são vetores tipo tempo, porém, com paridades diferentes de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Deste modo, temos,

$$\begin{cases} \langle\langle x, y \rangle\rangle < 0, & \text{se } x \text{ e } y \text{ tem mesma paridade,} \\ \langle\langle x, y \rangle\rangle > 0, & \text{se } x \text{ e } y \text{ tem paridade diferente.} \end{cases}$$

Na segunda linha utilizamos que  $\langle\langle x, -y \rangle\rangle < 0$ , então  $\langle\langle x, y \rangle\rangle > 0$ .  $\square$

**Teorema 3.14.** *Sejam  $x, y$  vetores tipo luz em  $\mathbb{R}_1^n$ . O pseudo-produto interno  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$  se, e somente se,  $x, y$  são linearmente dependentes.*

*Demonstração.* Se  $x, y$  são linearmente dependentes temos que o pseudo-produto interno  $\langle\langle x, y \rangle\rangle$  é igual a zero. De fato, seja  $x = \lambda y$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  então,

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle\langle \lambda y, y \rangle\rangle = \lambda \langle\langle y, y \rangle\rangle = 0.$$

Para demonstrar a recíproca é necessário considera dois casos: os vetores  $x, y$  tem a mesma paridade e os vetores  $x, y$  não tem a mesma paridade

Caso 1) Os vetores  $x, y$  tem a mesma paridade. Neste caso a demonstração segue diretamente do Teorema 3.11.

Caso 2) Os vetores  $x, y$  não tem a mesma paridade. Observe que  $-x$  e  $-y$  têm paridades contrárias às dos vetores  $x$  e  $y$  respectivamente, logo os vetores  $x$  e  $-y$  tem a mesma paridade. Segue do Teorema 3.11 que

$$\langle\langle x, -y \rangle\rangle = 0,$$

se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $x = \lambda(-y)$ . Ou seja,  $x = -\lambda y$ . Portanto,  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes.  $\square$

**Teorema 3.15.** *Sejam  $x$  e  $y$  vetores não nulos pseudo-ortogonais em  $\mathbb{R}_1^n$ . Se  $x$  é tipo tempo, então  $y$  é tipo espaço.*

*Demonstração.* Se  $x$  é tipo tempo e  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$ , então  $y$  é tipo espaço, pois caso contrário cairíamos no Corolário 3.13 e no Teorema 3.14. O Teorema 3.14 nos garante a igualdade somente quando são vetores tipo luz que são linearmente dependentes e o Corolário 3.13 nos garante que o produto de vetores tipo tempo nunca se anula. Portanto  $y$  não pode ser um vetor tipo tempo nem tipo luz.  $\square$

**Teorema 3.16.** *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa). Sejam  $u, v \in \mathbb{R}_1^n$  vetores tipo tempo. Então vale que  $|\langle\langle u, v \rangle\rangle| \geq \|u\|_1 \|v\|_1$ . Ainda mais, a igualdade vale se, e somente se,  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.15 que se  $u$  é um vetor tipo tempo e é pseudo-ortogonal a um vetor  $v$ , então  $v$  é tipo espaço. Logo, existe um vetor  $v$  tipo tempo em  $u^\perp$ , pois caso contrário teríamos  $\langle\langle u, v \rangle\rangle = 0$ , com  $v$  sendo um vetor tipo tempo ou tipo luz o que contradiz o Teorema 3.15. Decomponha  $\mathbb{R}_1^n = u^\perp \oplus \mathbb{R}u$  e escreva  $v = u_0 + \lambda u$ , para um certo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e tal que  $u_0$  seja tipo espaço e ortogonal a  $u$ . Por um lado, temos:

$$\langle\langle v, v \rangle\rangle = \langle\langle u_0 + \lambda u, u_0 + \lambda u \rangle\rangle = \langle\langle u_0, u_0 \rangle\rangle + \langle\langle \lambda u, \lambda u \rangle\rangle = \langle\langle u_0, u_0 \rangle\rangle + \lambda^2 \langle\langle u, u \rangle\rangle \quad (3.8)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \langle\langle u, v \rangle\rangle^2 &= \langle\langle u, u_0 + \lambda u \rangle\rangle^2 \\ &= (\langle\langle u, u_0 \rangle\rangle + \langle\langle u, \lambda u \rangle\rangle)^2 \\ &= \lambda^2 \langle\langle u, u \rangle\rangle^2 \\ &= \lambda^2 \langle\langle u, u \rangle\rangle \langle\langle u, u \rangle\rangle \\ &\stackrel{(3.8)}{=} (\langle\langle v, v \rangle\rangle - \langle\langle u_0, u_0 \rangle\rangle) \langle\langle u, u \rangle\rangle \\ &\geq \langle\langle v, v \rangle\rangle \langle\langle u, u \rangle\rangle > 0. \end{aligned}$$

Onde utilizou-se o fato de que  $u_0$  é tipo espaço e  $u$  é tipo tempo. Extraindo a raiz dos dois lados, obtém-se que  $|\langle\langle u, v \rangle\rangle| \geq \|u\|_1 \|v\|_1$ , como queríamos. Assim, quando  $\langle\langle u_0, u_0 \rangle\rangle = 0$ , como  $u_0$  é tipo espaço, temos que  $u_0 = 0$ . Substituindo  $u_0 = 0$  na equação (3.8), obtemos que  $\langle\langle v, v \rangle\rangle = \lambda^2 \langle\langle u, u \rangle\rangle$ . Portanto  $u$  e  $v$  são vetores linearmente dependentes.  $\square$

**Teorema 3.17.** (*Desigualdade triangular reversa*). *Sejam  $u, v \in \mathbb{R}_1^n$  vetores tipo tempo, satisfazendo  $\langle\langle u, v \rangle\rangle < 0$ . Então  $\|u + v\|_1 \geq \|u\|_1 + \|v\|_1$ .*

*Demonstração.* Como  $\langle\langle u, v \rangle\rangle < 0$ , temos que  $u + v$  também é tipo tempo. De fato,

$$\begin{aligned} \langle\langle u + v, u + v \rangle\rangle &= \langle\langle u, u \rangle\rangle + \langle\langle u, v \rangle\rangle + \langle\langle v, u \rangle\rangle + \langle\langle v, v \rangle\rangle \\ &= \underbrace{\langle\langle u, u \rangle\rangle}_{<0} + 2 \underbrace{\langle\langle u, v \rangle\rangle}_{<0} + \underbrace{\langle\langle v, v \rangle\rangle}_{<0} < 0. \end{aligned}$$

Agora aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa:

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_1^2 &= \left(\sqrt{|\langle u + v, u + v \rangle|}\right)^2 \\
&= |\langle u + v, u + v \rangle| \\
&= -\langle u + v, u + v \rangle \\
&= -(\langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle) \\
&= -(\langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle) \\
&= -\langle u, u \rangle + 2(-\langle u, v \rangle) - \langle v, v \rangle \\
&= |\langle u, u \rangle| + 2|\langle u, v \rangle| + |\langle v, v \rangle| \\
&= \|u\|_1^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|_1^2 \\
&\geq \|u\|_1^2 + 2\|u\|_1\|v\|_1 + \|v\|_1^2 \\
&= (\|u\|_1 + \|v\|_1)^2,
\end{aligned}$$

donde concluimos que  $\|u + v\|_1 \geq \|u\|_1 + \|v\|_1$ , como desejado.  $\square$

**Definição 3.18.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}_1^3$  um subespaço.*

- i)  $U$  é dito tipo espaço, se a métrica de Lorentz-Minkowski induzida neste subespaço é definida positiva.*
- ii)  $U$  é dito tipo tempo, se a métrica de Lorentz-Minkowski restrita neste subespaço é não definida positiva e não-degenerada.*
- iii)  $U$  é dito tipo luz ou nulo, se a métrica de Lorentz-Minkowski restrita neste subespaço é degenerada.*

**Observação 3.19.** *Seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  com  $e_3$  um vetor tipo tempo. O subespaço gerado pelos vetores  $e_2$  e  $e_3$  é tipo tempo. Para isso basta provar que  $[e_2, e_3]$  é não-degenerado, pois como  $e_3$  é tipo tempo então a métrica de Lorentz-Minkowski  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  não é definida positiva neste subespaço.*

*De fato, se  $v \in [e_2, e_3]$  é um vetor fixo dado por  $(0, a, b)$  e todo vetor  $w \in [e_2, e_3]$  pode ser escrito da forma  $c_1e_2 + c_2e_3$ ,  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , então,*

$$\langle\langle (0, c_1, c_2), (0, a, b) \rangle\rangle = ac_1 - bc_2 = 0, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Como o vetor  $(0, a, b)$  é um vetor fixo então,  $\langle\langle (0, c_1, c_2), (0, a, b) \rangle\rangle = ac_1 - bc_2 = 0$ ,  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  se, e somente se,  $a = b = 0$ .*

*Logo,  $[e_2, e_3]$  é não-degenerado e não definido positivo, conseqüentemente é tipo tempo.*

**Definição 3.20.** *Seja  $u \in \mathbb{R}_1^3$  um vetor tipo tempo. Definimos o cone tipo tempo do vetor  $u$  como sendo o conjunto  $\mathcal{T}(u) = \{v \in \mathbb{R}_1^3; \langle\langle u, v \rangle\rangle \leq 0\}$ . O conjunto dos vetores  $v \in \mathcal{T}(u)$  que satisfazem  $\langle\langle u, v \rangle\rangle = 0$  é chamado o cone de luz determinado pelo vetor  $u$ .*

Uma representação geométrica do relacionamento entre os subespaços  $U$  e o conjunto  $\mathcal{T}(u)$  das Definições 3.18 e 3.20 pode ser visualizada na Figura 3.1.

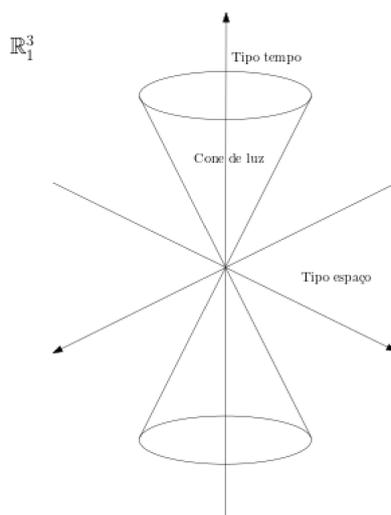


Figura 3.1: Cone de luz e os subespaços tipo tempo e tipo espaço.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

**Proposição 3.21.** *Seja  $v \in \mathbb{R}_1^3$ . Tem-se que  $v$  é um vetor tipo tempo se, e somente se,  $[v]^\perp$  é um subespaço tipo espaço. Tem-se que  $v$  é tipo espaço, se, e somente se,  $[v]^\perp$  é um subespaço tipo tempo. Assim, em ambos os casos temos que  $\mathbb{R}_1^3 = [v] \oplus [v]^\perp$ .*

*Demonstração.* Ver [15] páginas 24 e 25. □

**Proposição 3.22.** *Considere  $U \subset \mathbb{R}_1^3$  um subespaço. Então*

- i)  $U$  é tipo espaço se, e somente se,  $U^\perp$  é tipo tempo.*
- ii)  $U$  é tipo tempo se, e somente se,  $U^\perp$  é tipo espaço.*
- iii)  $U$  é tipo luz se, e somente se,  $U^\perp$  é tipo luz.*

*Demonstração.* i) Suponha que  $U$  seja tipo espaço, segue da Definição 3.18 que  $U$  é definida positiva então existe  $u \neq 0$  em  $U$  que é tipo espaço e segue da Proposição

3.21 que  $[u]^\perp$  é um subespaço tipo tempo e  $U^\perp$  está contido em  $[u]^\perp$ , logo é tipo tempo.

Reciprocamente se  $U^\perp$  é tipo tempo então, segue da Definição 3.18 que  $U^\perp$  é não degenerado. Logo, existem vetores tipo tempo e tipo luz, pois caso contrário  $U^\perp$  seria definido positivo, e conseqüentemente, tipo espaço, o que contraria a hipótese. Seja  $v$  em  $U^\perp$  um vetor tipo tempo, assim  $[v]^\perp$  é um subespaço tipo espaço e como  $U$  está contido em  $[v]^\perp$  temos que  $U$  é tipo espaço.

ii) É análoga a prova do item i).

iii) Vamos dividir a demonstração desse item em dois casos:  $U$  não é tipo tempo e  $U^\perp$  não é tipo espaço e  $U$  não é tipo espaço e  $U^\perp$  não é tipo tempo.

Caso 1)  $U$  não é tipo tempo e  $U^\perp$  não é tipo espaço. Suponha que  $U$  é um subespaço tipo tempo, então do item ii) temos que  $U^\perp$  é tipo espaço, portanto uma contradição. Se supomos que  $U^\perp$  é um subespaço tipo espaço também será uma contradição pelo item ii).

Caso 2)  $U$  não é tipo espaço e  $U^\perp$  não é tipo tempo. Suponha que  $U$  é um subespaço tipo espaço, então do item i) temos que  $U^\perp$  é tipo tempo, portanto uma contradição. Se supomos que  $U^\perp$  é um subespaço tipo tempo também será uma contradição pelo item i).

□

**Proposição 3.23.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}_1^3$  um subespaço bi-dimensional. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $U$  é um subespaço tipo tempo.
2.  $U$  contém dois vetores linearmente independentes tipo luz.
3.  $U$  contém um vetor tipo tempo.

*Demonstração.*  $[1 \Rightarrow 2]$  Seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  com  $e_3$  um vetor tipo tempo. Como  $U = [e_2, e_3]$  é um subespaço tipo tempo (observação 3.19), então  $e_2 + e_3$  e  $e_2 - e_3$  são vetores linearmente independentes e tipo luz, pois

$$\langle\langle e_2 + e_3, e_2 + e_3 \rangle\rangle = \langle\langle e_2, e_2 \rangle\rangle + \langle\langle e_3, e_3 \rangle\rangle = 1 - 1 = 0$$

$$\langle\langle e_2 - e_3, e_2 - e_3 \rangle\rangle = \langle\langle e_2, e_2 \rangle\rangle + \langle\langle e_3, e_3 \rangle\rangle = 1 - 1 = 0$$

[2  $\Rightarrow$  3] Se  $u$  e  $v$  são dois vetores linearmente independentes tipo luz, então  $u + v$  ou  $u - v$  é tipo tempo, pois

$$\begin{aligned}\langle\langle u + v, u + v \rangle\rangle &= 2\langle\langle u, v \rangle\rangle, \\ \langle\langle u - v, u - v \rangle\rangle &= -2\langle\langle u, v \rangle\rangle.\end{aligned}$$

Como do Corolário 3.13 temos  $\langle\langle u, v \rangle\rangle \neq 0$ , segue que existe um vetor tipo tempo.

[3  $\Rightarrow$  1] Seja  $v \in U$  um vetor tipo tempo. Assim  $U^\perp \subset [v]^\perp$  que é um subespaço tipo espaço e então  $U$  é um subespaço tipo tempo. □

**Observação 3.24.** A Proposição 3.23 nos garante que basta existir um vetor tipo tempo em um subespaço  $U$ , bidimensional de  $\mathbb{R}_1^3$  para que este subespaço seja tipo tempo.

No que se segue o conjunto  $C = \{v \in \mathbb{R}_1^3; \langle\langle v, v \rangle\rangle = 0\}$  é o cone de luz e  $L$  é uma reta com o vetor diretor sendo um vetor tipo luz.

**Proposição 3.25.** Seja  $U$  um subespaço de  $\mathbb{R}_1^3$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $U$  é um subespaço tipo luz.
2.  $U$  contém um vetor tipo luz, mas nenhum vetor tipo tempo.
3.  $U \cap C = L - \{(0, 0, 0)\}$ , e  $\dim(L) = 1$ .

*Demonstração.* [1  $\Rightarrow$  2] Suponha que  $U$  é um subespaço tipo luz, segue da Definição 3.18 que  $U$  é degenerado, então para um vetor não nulo  $v \in U$ , fixo, temos que

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = 0, \forall u \in U.$$

Logo,  $v$  é tipo luz, pois caso contrário  $[v]^\perp$  seria tipo tempo ou tipo espaço o que contraria o Corolário 3.8. Assim, segue da Proposição 3.23 que não existem vetores tipo tempo.

[2  $\Rightarrow$  3] Como existe um vetor tipo luz  $v$  em  $U$ ,  $U \cap C$  é um conjunto não vazio. Se  $U$  contém dois vetores tipo luz linearmente independentes pela Proposição 3.23 existe um vetor tipo tempo, gerando uma contradição. Portanto  $U \cap C = L - \{(0, 0, 0)\}$  e  $\dim(L) = 1$ , pois  $L$  é uma reta com  $v$  sendo o vetor diretor.

[3  $\Rightarrow$  1] Supondo  $U \cap C = L - \{(0, 0, 0)\}$  e  $\dim(L) = 1$ , segue da Proposição 3.23 que  $U$  não é um subespaço tipo tempo, mas também não pode ser um subespaço tipo espaço, já que existe um vetor tipo luz em  $U$ . Portanto  $U$  é um subespaço tipo luz.

□

Lembremos que quando não houver a possibilidade de ambiguidades, podemos escrever

$$[x]_B = (x_1, \dots, x_n),$$

mantendo em mente que isso tem o significado de (1.1).

**Observação 3.26.** *O produto vetorial usual dos vetores  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$  em  $\mathbb{R}^3$  é dado por:*

$$\begin{aligned} x \times y &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (a, b, c) \end{aligned} \tag{3.9}$$

**Definição 3.27.** *Sejam  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$  vetores de  $\mathbb{R}^3$  e seja*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*O pseudo-produto vetorial de  $x$  e  $y$  é definido por*

$$\begin{aligned} x \wedge y &= J(x \times y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= (a, b, -c) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, -x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é base canônica do  $\mathbb{R}^3$ , e  $\times$  é o produto vetorial usual do  $\mathbb{R}^3$ .

A bilinearidade da métrica assegura a existência e unicidade desse vetor. Observemos que (3.10) é a multiplicação da última coordenada de (3.9) por  $-1$ . Sendo assim temos para qualquer  $x \in \mathbb{R}^3$  que  $\langle\langle x, x \wedge y \rangle\rangle$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$  entre  $x$  e  $x \times y$  e portanto:

$$\begin{aligned}\langle\langle x, x \wedge y \rangle\rangle &= \langle\langle x, J(x \times y) \rangle\rangle = \langle x, (x \times y) \rangle = 0, \\ \langle\langle y, x \wedge y \rangle\rangle &= \langle\langle y, J(x \times y) \rangle\rangle = \langle y, (x \times y) \rangle = 0,\end{aligned}$$

onde  $\langle , \rangle$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,  $x \wedge y$  é pseudo-ortogonal a  $x$  e a  $y$ . Na prova do próximo teorema usamos a seguinte igualdade:

$$u \wedge v = J(v) \times J(u) \tag{3.11}$$

Vamos prová-la considerando  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  em  $\mathbb{R}^3$  e lembrando que

$$\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v_i & v_j \\ u_i & u_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_i & -v_j \\ u_i & -u_j \end{vmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned}u \wedge v &= J(u \times v) \\ &= J\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= \left(- \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} v_2 & -v_3 \\ u_2 & -u_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & -v_3 \\ u_1 & -u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= (v_1, v_2, -v_3) \times (u_1, u_2, -u_3) \\ &= J(v) \times J(u)\end{aligned}$$

**Teorema 3.28.** *Se  $w, u, v, z$  são vetores em  $\mathbb{R}^3$ , então*

$$(1) \quad u \wedge v = -v \wedge u,$$

$$(2) \quad \langle\langle u \wedge v, z \rangle\rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$(3) \quad u \wedge (v \wedge z) = \langle\langle u, v \rangle\rangle z - \langle\langle z, u \rangle\rangle v,$$

$$(4) \quad \langle\langle u \wedge v, z \wedge w \rangle\rangle = \begin{vmatrix} \langle\langle u, w \rangle\rangle & \langle\langle u, z \rangle\rangle \\ \langle\langle v, w \rangle\rangle & \langle\langle v, z \rangle\rangle \end{vmatrix}.$$

*Demonstração.* (1) Segue da identidade (3.11) que,

$$u \wedge v = J(v) \times J(u) = -J(u) \times J(v) = -v \wedge u$$

(2)

$$\begin{aligned} \langle\langle u \wedge v, z \rangle\rangle &= \langle\langle J(u \times v), z \rangle\rangle \\ &= \langle u \times v, z \rangle \\ &= \left\langle \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right), z \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} z_3 \\ &= \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(3) Provamos este item usando a fórmula de Lagrange satisfeita pelo produto vetorial no espaço euclidiano, dada por  $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$ ,

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge z) &= J(v \wedge z) \times J(u) \\ &= (J(J(v \times z))) \times J(u) \\ &= (v \times z) \times J(u) \\ &= -(J(u) \times (v \times z)) \\ &= -(\langle J(u), z \rangle v - \langle J(u), v \rangle z) \\ &= \langle\langle u, v \rangle\rangle z - \langle\langle u, z \rangle\rangle v. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \langle\langle u, w \rangle\rangle & \langle\langle u, z \rangle\rangle \\ \langle\langle v, w \rangle\rangle & \langle\langle v, z \rangle\rangle \end{vmatrix} &= \langle\langle u, w \rangle\rangle \langle\langle v, z \rangle\rangle - \langle\langle u, z \rangle\rangle \langle\langle v, w \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle u \langle\langle v, z \rangle\rangle, w \rangle\rangle - \langle\langle v \langle\langle u, z \rangle\rangle, w \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle u \langle\langle v, z \rangle\rangle - v \langle\langle u, z \rangle\rangle, w \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle -(\langle\langle z, u \rangle\rangle v - \langle\langle z, v \rangle\rangle u), w \rangle\rangle \\
 &\stackrel{(3)}{=} \langle\langle -z \wedge (u \wedge v), w \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle (u \wedge v) \wedge z, w \rangle\rangle \\
 &= \begin{vmatrix} u \wedge v \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z \\ w \\ u \wedge v \end{vmatrix} \\
 &= \langle\langle z \wedge w, u \wedge v \rangle\rangle.
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.29.** *Se  $u$  e  $v$  são vetores tipo espaço em  $\mathbb{R}^3$ , então*

(1)  $|\langle\langle u, v \rangle\rangle| < \|u\|_1 \|v\|_1$  se, e somente se,  $u \wedge v$  é tipo tempo,

(2)  $|\langle\langle u, v \rangle\rangle| = \|u\|_1 \|v\|_1$  se, e somente se,  $u \wedge v$  é tipo luz,

(3)  $|\langle\langle u, v \rangle\rangle| > \|u\|_1 \|v\|_1$  se, e somente se,  $u \wedge v$  é tipo espaço.

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.28 item (4) que

$$\begin{aligned}
 \langle\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle\rangle &= \begin{vmatrix} \langle\langle u, v \rangle\rangle & \langle\langle u, u \rangle\rangle \\ \langle\langle v, v \rangle\rangle & \langle\langle v, u \rangle\rangle \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \langle\langle u, v \rangle\rangle & |\langle\langle u, u \rangle\rangle| \\ |\langle\langle v, v \rangle\rangle| & \langle\langle v, u \rangle\rangle \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \langle\langle u, v \rangle\rangle & \|u\|_1^2 \\ \|v\|_1^2 & \langle\langle u, v \rangle\rangle \end{vmatrix} \\
 &= (\langle\langle u, v \rangle\rangle)^2 - \|u\|_1^2 \|v\|_1^2.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$(\langle\langle u, v \rangle\rangle)^2 = \langle\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle\rangle + \|u\|_1^2 \|v\|_1^2 \tag{3.12}$$

(1) Segue da expressão (3.12) que

$$(\langle\langle u, v \rangle\rangle)^2 < \|u\|_1^2 \|v\|_1^2 \Leftrightarrow \langle\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle\rangle < 0.$$

Assim,

$$|\langle\langle u, v \rangle\rangle| < \|u\|_1 \|v\|_1 \Leftrightarrow u \wedge v \text{ é tipo tempo.}$$

(2) Segue da expressão (3.12) que

$$(\langle\langle u, v \rangle\rangle)^2 = \|u\|_1^2 \|v\|_1^2 \Leftrightarrow \langle\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle\rangle = 0.$$

Assim,

$$|\langle\langle u, v \rangle\rangle| = \|u\|_1 \|v\|_1 \Leftrightarrow u \wedge v \text{ é tipo luz.}$$

(3) Segue da expressão (3.12) que

$$(\langle\langle u, v \rangle\rangle)^2 > \|u\|_1^2 \|v\|_1^2 \Leftrightarrow \langle\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle\rangle > 0.$$

Assim,

$$|\langle\langle u, v \rangle\rangle| > \|u\|_1 \|v\|_1 \Leftrightarrow u \wedge v \text{ é tipo espaço.}$$

□

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Curvas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}_1^3$

O objetivo deste capítulo é apresentar estudos envolvendo curvas na variedade de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ . São deduzidas as equações de Frenet para as curvas tipo tempo, tipo espaço, tipo luz e é apresentado um breve estudo sobre hélices e geodésicas nestes espaços. Para desenvolver este capítulo utilizamos como base [13], [15] e [16].

---

### 4.1 Curvas regulares em espaços de Lorentz-Minkowski

---

**Definição 4.1.** *Uma curva parametrizada em  $\mathbb{R}_1^3$  é uma aplicação  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , onde  $I$  é um intervalo aberto da reta. A curva  $\alpha$  é dita diferenciável se as funções coordenadas  $x(t), y(t)$  e  $z(t)$  possuem todas as derivadas contínuas.*

**Definição 4.2.** *Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva parametrizada diferenciável.*

- i)  $\alpha$  é chamada tipo espaço se  $\alpha'(t)$  é um vetor tipo espaço para todo  $t \in I$ .*
- ii)  $\alpha$  é chamada tipo tempo se  $\alpha'(t)$  é um vetor tipo tempo para todo  $t \in I$ .*

iii)  $\alpha$  é chamada tipo luz se  $\alpha'(t)$  é um vetor tipo luz para todo  $t \in I$ .

A seguir apresentaremos exemplos de curvas tipo tempo, tipo espaço e tipo luz.

**Exemplo 4.3.** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), \sqrt{2}t)$ . Derivando  $\alpha(t)$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), \sqrt{2}).$$

A curva  $\alpha(t)$  é tipo tempo pois,

$$\begin{aligned} \langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\rangle &= \langle\langle (-\sin(t), \cos(t), \sqrt{2}), (-\sin(t), \cos(t), \sqrt{2}) \rangle\rangle \\ &= \sin^2(t) + \cos^2(t) - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1 < 0. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.4.** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva dada por  $\alpha(t) = (t \cos(t), t \sin(t), \frac{t^3}{3})$ , onde  $I = ]2, +\infty[$ . Derivando  $\alpha(t)$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\alpha'(t) = (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), t^2).$$

Aplicando o pseudo-produto interno em relação a  $\alpha'(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\rangle &= \\ &= \langle\langle (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), t^2), (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), t^2) \rangle\rangle \\ &= (\cos(t) - t \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t))^2 - t^4 = \cos^2(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \sin^2(t) \\ &\quad + \sin^2(t) + 2t \cos(t) \sin(t) + t^2 \cos^2(t) - t^4 = 1 + t^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) - t^4 \\ &= 1 + t^2(1 - t^2) < 0, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Vamos resolver a inequação  $1 + t^2(1 - t^2) < 0$ , para isso temos que encontrar as raízes da equação  $1 + t^2(1 - t^2) = 0$ . Substituindo  $t^2$  por  $x$ , obtemos

$$1 + x(1 - x) = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 1 = 0,$$

então as raízes da equação anterior são  $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Logo,

$$t = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

Assim,  $1 + t^2(1 - t^2) < 0$  se, e somente se,  $t > \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$  ou  $t < -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ . Portanto, como estamos considerando  $I = ]2, +\infty[$  então,  $\alpha(t)$  é uma curva tipo tempo.

**Exemplo 4.5.** Seja  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), \frac{t}{2})$ . Derivando  $\alpha(t)$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\alpha'(t) = \left( -\sin(t), \cos(t), \frac{1}{2} \right).$$

A curva  $\alpha(t)$  é tipo espaço pois,

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \rangle &= \left\langle \left\langle \left( -\sin(t), \cos(t), \frac{1}{2} \right), \left( -\sin(t), \cos(t), \frac{1}{2} \right) \right\rangle \right\rangle = \sin^2(t) + \cos^2(t) - \frac{1}{4} \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.6.** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva dada por  $\alpha(t) = (t^2 \cos(t), t^2 \sin(t), t^2)$ , onde  $I = ]0, +\infty[$ . Derivando  $\alpha(t)$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\alpha'(t) = (2t \cos(t) - t^2 \sin(t), 2t \sin(t) + t^2 \cos(t), 2t).$$

Aplicando o pseudo-produto interno em relação a  $\alpha'(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \rangle &= \langle \langle (2t \cos(t) - t^2 \sin(t), 2t \sin(t) + t^2 \cos(t), 2t), (2t \cos(t) - t^2 \sin(t), 2t \sin(t) \\ &\quad + t^2 \cos(t), 2t) \rangle \rangle \\ &= (2t \cos(t) - t^2 \sin(t))^2 + (2t \sin(t) + t^2 \cos(t))^2 - 4t^2 \\ &= 4t^2 \cos^2(t) - 4t^3 \sin(t) \cos(t) + t^4 \sin^2(t) + 4t^2 \sin^2(t) + 4t^3 \sin(t) \cos(t) \\ &\quad + t^4 \cos^2(t) - 4t^2 \\ &= 4t^2 (\sin^2(t) + \cos^2(t)) + t^4 (\sin^2(t) + \cos^2(t)) - 4t^2 \\ &= 4t^2 + t^4 - 4t^2 = t^4 > 0, \end{aligned}$$

pois,  $t \in ]0, +\infty[$ . Logo,  $\alpha(t)$  é uma curva tipo espaço.

**Exemplo 4.7.** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ . Derivando  $\alpha(t)$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1).$$

A curva  $\alpha(t)$  é tipo luz pois,

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \rangle &= \langle \langle (-\sin(t), \cos(t), 1), (-\sin(t), \cos(t), 1) \rangle \rangle = \sin^2(t) + \cos^2(t) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

**SEÇÃO 4.1 • CURVAS REGULARES EM ESPAÇOS DE LORENTZ-MINKOWSKI**

**Exemplo 4.8.** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva dada por  $\alpha(t) = (t, \cosh(t), \sinh(t))$ . Derivando  $\alpha(t)$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\alpha'(t) = (1, \sinh(t), \cosh(t)).$$

A curva  $\alpha(t)$  é tipo luz pois,

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle &= \langle (1, \sinh(t), \cosh(t)), (1, \sinh(t), \cosh(t)) \rangle = 1 + \sinh^2(t) - \cosh^2(t) \\ &\stackrel{(*)}{=} 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Em  $(*)$  foi utilizada a relação  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ .

**Definição 4.9.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é chamada curva regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

Lembre-se que os vetores tangentes de curvas tipo luz e espaço são tipo luz e tipo tempo, respectivamente. Segue da Definição 3.3 e da observação 3.4 que os vetores tipo luz e tipo tempo são não nulos.

**Proposição 4.10.** Toda curva tipo luz ou tipo tempo é regular.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  uma curva em  $\mathbb{R}_1^3$  parametrizada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Segue da observação 3.10 que os vetores tipo luz e tipo tempo são não nulos. Se  $\alpha$  é tipo luz temos  $x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 = 0$ , e, conseqüentemente, pelo menos duas dessas parcelas são não nulas, logo  $\alpha'(t) \neq 0$ . Portanto  $\alpha$  é regular. Analogamente, se  $\alpha$  é tipo tempo temos  $x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 < 0$ , logo  $z'(t) \neq 0$ . Portanto  $\alpha$  é uma curva regular.  $\square$

**Definição 4.11.** Uma curva regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada  $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$  o comprimento de arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Isto é

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\|_1 dt = t_1 - t_0$$

**Proposição 4.12.** Uma curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\|_1 = 1$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos  $t_0 \in I$ . Consideremos a função  $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ , que, para cada  $t \in I$ , associa  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\|_1 dt$ . Se  $t_0 \leq t$ , então por hipótese,  $\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\|_1 dt = t - t_0$ ; se  $t \leq t_0$ , então  $-s(t) = \int_t^{t_0} \|\alpha'(t)\|_1 dt = t_0 - t$ . Portanto, para todo  $t \in I, s(t) = t - t_0$ , e  $s'(t) = 1$ . Como  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|_1$  concluímos que  $\|\alpha'(t)\|_1 = 1, \forall t \in I$ . A recíproca é imediata.  $\square$

**Lema 4.13.** *Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva regular tipo tempo ou tipo espaço e  $s: I \rightarrow s(I)$  a função comprimento de arco. Então existe uma função  $h$ , inversa de  $s$ , definida em um intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma reparametrização de  $\alpha$  tal que  $\|\beta'\|_1 = 1$ .*

*Demonstração.* Observe que  $\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|\alpha'(t)\|_1 > 0$  para todo  $t \in I$ , pois  $\alpha$  é uma curva regular tipo tempo ou tipo espaço. Assim  $s$  é um difeomorfismo sobre  $J = s(I)$ , logo existe a inversa de  $s$ , isto é, existe  $h: J \rightarrow I$ , tal que  $h(s(t)) = t$ . Utilizando a regra da cadeia para derivar em relação a  $t$  obtemos

$$\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dh}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|_1}.$$

Assim tomando  $\beta(s) = \alpha \circ h(s(t))$ , temos

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|_1} \alpha'(t),$$

portanto  $\|\beta'(s)\|_1 = 1$ . □

Uma situação não trivial ocorre quando uma curva regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é tipo luz, pois nesse caso tem-se que  $\langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\rangle = 0$  para todo  $t \in I$ , assim não é possível reparametrizar essa curva de forma que  $\langle\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle\rangle = 1$  para todo  $s \in I$ . Desta forma, para contornar este problema é necessário adequar a definição. Por diferenciação obtém-se  $\langle\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle\rangle = 0, \forall t \in I$ . Vamos supor que  $\alpha''(t) \neq 0$ , de forma que a curva  $\alpha(t)$  não seja uma reta, ou seja,  $\alpha''(t)$  não tem a mesma direção de  $\alpha'(t)$ . Logo, segue do Teorema 3.11 que  $\alpha''(t)$  não pode ser tipo luz, pois  $\alpha''(t)$  e  $\alpha'(t)$  são linearmente independentes. Como  $[\alpha'(t)]^\perp$  é tipo luz (subespaço tipo luz, pela Proposição 3.22) segue da Proposição 3.25 que  $[\alpha'(t)]^\perp$  não possui vetores tipo tempo. Portanto  $\alpha''(t)$  é tipo espaço.

**Lema 4.14.** *Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva tipo luz em  $\mathbb{R}_1^3$ . Existe uma reparametrização de  $\alpha$  dada por  $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$  de maneira que  $\|\beta''(s)\|_1 = 1$ .*

*Demonstração.* Escrevendo  $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ , com  $t = \phi(s)$ , queremos determinar a função  $\phi$  que satisfaz as condições do enunciado. Por diferenciação obtemos

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \phi'(s) \alpha'(\phi(s)) \text{ e} \\ \beta''(s) &= \phi''(s) \alpha'(\phi(s)) + [\phi'(s)]^2 \alpha''(t). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\langle\langle\beta''(s), \beta''(s)\rangle\rangle &= \langle\langle\phi''(s)\alpha'(t) + [\phi'(s)]^2\alpha''(t), \phi''(s)\alpha'(t) + [\phi'(s)]^2\alpha''(t)\rangle\rangle \\ &= [\phi'(s)]^4\langle\langle\alpha''(t), \alpha''(t)\rangle\rangle.\end{aligned}$$

Do comentário feito antes desse Lema temos que  $\alpha''(t)$  deve ser tipo espaço. Logo,  $\beta''(s)$  também é tipo espaço.

Utilizando o fato de  $\beta''$  ser tipo espaço, obtemos

$$\|\beta''(s)\|_1 = 1 \Leftrightarrow \langle\langle\beta''(s), \beta''(s)\rangle\rangle = 1,$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned}1 &= [\phi'(s)]^4\langle\langle\alpha''(\phi(s)), \alpha''(\phi(s))\rangle\rangle \\ \Leftrightarrow [\phi'(s)]^4 &= \frac{1}{\langle\langle\alpha''(\phi(s)), \alpha''(\phi(s))\rangle\rangle} \\ \Leftrightarrow [\phi'(s)]^4 &= \frac{1}{\|\alpha''(\phi(s))\|_1^2} \\ \Leftrightarrow \phi'(s) &= \frac{1}{\sqrt{\|\alpha''(\phi(s))\|_1}}.\end{aligned}$$

O teorema de soluções de equações diferenciais ordinárias garante a existência e unicidade de  $\phi$ , dada pela solução da equação diferencial de primeira ordem

$$\phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\alpha''(\phi(s))\|_1}}, \quad \phi(0) = t_0.$$

□

---

## 4.2 Equações de Frenet

---

No caso euclidiano é bem conhecido que, dada uma curva curva regular, o triedro de Frenet e as equações de Frenet são definidas da mesma forma, para todos os pontos da curva. Isto não ocorre em espaços de Lorentz - Minkowski, como veremos ao longo desta seção. O objetivo é determinar uma base, a qual será também chamada *base de Frenet*, ao longo da curva, e deduzir as equações de Frenet em  $\mathbb{R}_1^3$ , levando-se em consideração o tipo da curva e também o tipo do vetor tangente (espaço, tempo ou luz). Serão consideradas somente curvas parametrizadas pelo comprimento de arco e curvas satisfazendo as condições do Lema 4.14, no caso de curvas tipo luz.

Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, isto é  $\langle\langle T(s), T(s) \rangle\rangle = 1$ , onde  $\alpha'(s) = T(s)$  é o vetor tangente a  $\alpha$  em  $s$ . Segue, por derivação em relação a  $s$  que  $\langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle = 0$ . Assim se  $T'(s) = \alpha''(s) = 0, \forall s \in I$ , então  $\alpha$  é uma reta, e conseqüentemente, o vetor tangente é um vetor constante. Nesse caso todo conjunto de três vetores, linearmente independentes, contendo o vetor tangente forma uma base de Frenet. Considere agora o caso em que  $\alpha$  não é uma reta, isto é,  $T'(s) \neq 0$ . Nesse caso é possível definir o vetor normal  $N(s)$ , e um vetor binormal  $B(s)$ , de maneira que estes três vetores, linearmente independentes, formem uma base em  $\mathbb{R}_1^3$ . Neste caso os conceitos de curvatura  $k(s)$  e torção  $\tau(s)$  de  $\alpha$  podem ser introduzidos, porém, para isso deve ser considerado o tipo de curva.

Por outro lado, já vimos anteriormente que uma  $\alpha$  tipo luz não pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco, apenas podemos reparametrizar de forma que  $\langle\langle T'(s), T'(s) \rangle\rangle = 1$ . Neste caso, assim como no caso de curvas tipo espaço com vetor  $T'(s)$  tipo luz ( $\langle\langle T'(s), T'(s) \rangle\rangle = 0$  com  $T(s) \neq 0$ ), é possível determinar a torção da curva, mas não é possível determinar a curvatura, como veremos.

O plano de  $\mathbb{R}_1^3$  que contém  $\alpha(s)$  e é formado pelos vetores  $N(s)$  e  $B(s)$  é denominado *plano normal* à curva  $\alpha(s)$ . O plano que contém  $\alpha(s)$  e é formado por  $T(s)$  e  $N(s)$  é chamado *plano osculador*. O plano que contém  $\alpha(s)$  e é formado pelos vetores  $T(s)$  e  $B(s)$  é chamado *plano retificante*.

### 4.2.1 Equações de Frenet para curvas tipo tempo

Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tipo tempo. Como  $\|T(s)\|_1 = 1$  e  $\alpha(s)$  é tipo tempo, então, por definição, o vetor tangente é tipo tempo. Segue então que:

$$|\langle\langle T(s), T(s) \rangle\rangle| = 1 \Rightarrow \langle\langle T(s), T(s) \rangle\rangle = -1.$$

Derivando em relação a  $s$  obtemos

$$\langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle + \langle\langle T(s), T'(s) \rangle\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle = 0.$$

Assim,  $T(s)$  é pseudo-ortogonal a  $T'(s)$ , e portanto, segue do Teorema 3.15 que o vetor  $T'(s)$  é tipo espaço. Queremos agora determinar um vetor  $N(s)$ , pseudo-ortogonal a  $T(s)$  com norma igual a 1. Basta tomar  $N(s)$  satisfazendo  $\|N(s)\|_1 = 1$  e tal que

$$T'(s) = k(s)N(s),$$

onde  $k(s) > 0$  e  $k(s) = \|T'(s)\|_1$ , pois,

$$\|T'(s)\|_1 = \|k(s)N(s)\|_1 = k(s)\|N(s)\|_1 \Rightarrow k(s) = \frac{\|T'(s)\|_1}{\|N(s)\|_1} = \|T'(s)\|_1. \quad (4.1)$$

Definimos, portanto, o vetor normal  $N(s)$  como sendo o vetor

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}.$$

Para completar a base de Frenet precisamos de um vetor pseudo-ortogonal a  $N(s)$  e  $T(s)$  com norma igual a 1. O vetor binormal é um vetor tipo espaço, definido por  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ , onde  $\wedge$  indica o produto vetorial lorentziano. Para concluirmos que o vetor  $B(s)$  é tipo espaço utilizamos o fato de ser pseudo-ortogonal ao vetor  $T(s)$  que é tipo tempo então segue do Teorema 3.15 que  $B(s)$  é tipo espaço.

Portanto para cada  $s$ ,  $\{T; N; B\}$  forma uma base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  a qual é denominada o *triedro de Frenet* de  $\alpha$  em  $s$ . A seguir é apresentada a descrição da relação entre os vetores  $\{T; N; B\}$ .

No que se segue será omitido o parâmetro  $s$  e escreveremos  $T(s) = T = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $N(s) = N = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $B(s) = B = (z_1, z_2, z_3)$ . Com essa notação segue que,

$$B = T \wedge N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3, y_1x_3 - x_1y_3, y_1x_2 - y_2x_1) = (z_1, z_2, z_3). \quad (4.2)$$

Calculando  $T \wedge B$ ,

$$T \wedge B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (x_2z_3 - z_2x_3, z_1x_3 - x_1z_3, z_1x_2 - z_2x_1),$$

usando (4.2) e o fato de que  $\|T\|_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ , obtemos

$$\begin{aligned} x_2z_3 - z_2x_3 &= x_2(y_1x_2 - y_2x_1) - (y_1x_3 - x_1y_3)x_3 \\ &= y_1(x_2^2 - x_3^2) - x_1x_2y_2 + x_1x_3y_3 \\ &= y_1(-1 - x_1^2) - x_1x_2y_2 + x_1x_3y_3 \\ &= -y_1 - x_1(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) \\ &= -y_1 - x_1\langle T, N \rangle \\ &= -y_1. \end{aligned}$$

Analogamente,  $z_1x_3 - x_1z_3 = -y_2$  e  $z_1x_2 - z_2x_1 = -y_3$ . Logo  $T \wedge B = -N$ . Finalmente calculando  $N \wedge B$  temos,

$$N \wedge B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - z_2y_3, z_1y_3 - y_1z_3, z_1y_2 - z_2y_1),$$

usando (4.2) e que  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ ,

$$\begin{aligned} y_2z_3 - z_2y_3 &= y_2(y_1x_2 - y_2x_1) - (y_1x_3 - x_1y_3)y_3 \\ &= -x_1(y_2^2 - y_3^2) + x_2y_1y_2 - y_1x_3y_3 \\ &= -x_1(1 - y_1^2) + x_2y_1y_2 - y_1x_3y_3 \\ &= -x_1 + y_1(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) \\ &= -x_1 + y_1\langle\langle T, N \rangle\rangle \\ &= -x_1. \end{aligned}$$

Analogamente,  $z_1y_3 - y_1z_3 = -x_2$  e  $z_1y_2 - z_2y_1 = -x_3$ . Logo  $N \wedge B = -T$ .

Em resumo, mostramos que

$$B = T \wedge N = -N \wedge T; \quad N = B \wedge T = -T \wedge B; \quad T = -N \wedge B = B \wedge N. \quad (4.3)$$

Vamos agora deduzir as equações de Frenet. Temos que  $T' = kN$ . Derivando  $B = T \wedge N$  em relação a  $s$ , obtemos

$$B' = T' \wedge N + T \wedge N' = kN \wedge N + T \wedge N' = T \wedge N',$$

o que nos diz que  $B'$  é pseudo-ortogonal a  $T$ , e, como  $B$  é tipo espaço, então

$$\|B\| = 1 \Rightarrow \langle\langle B, B \rangle\rangle = 1.$$

Derivando em relação a  $s$  obtemos:

$$\langle\langle B', B \rangle\rangle + \langle\langle B, B' \rangle\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle\langle B', B \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle\langle B', B \rangle\rangle = 0.$$

Assim,  $B'$  é pseudo-ortogonal a  $B$ . Logo  $B'$  está na direção de  $N$ , daí podemos escrever

$$B' = \tau N,$$

onde  $\tau$  é um número real que chamamos de torção. Segue da equação (4.3) que

$$N = B \wedge T.$$

Derivando

$$N' = B' \wedge T + B \wedge T'.$$

Substituindo  $B'$  e  $T'$ , obtemos

$$N' = \tau N \wedge T + kB \wedge N = -\tau B + kT.$$

As equações

$$\begin{cases} T' = kN \\ N' = kT - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}, \quad (4.4)$$

são denominadas *equações de Frenet* para uma curva  $\alpha$  tipo tempo.

Vamos apresentar um exemplo de curva tipo tempo e encontrar os valores da curvatura e torção utilizando as equações de Frenet.

**Exemplo 4.15.** A curva  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \sqrt{2}t)$  apresentada no exemplo 4.3 está parametrizada pelo comprimento de arco, pois  $\|\alpha'(t)\|_1 = \sqrt{|\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle|} = \sqrt{|-1|} = 1$ .

Do exemplo 4.3 temos que  $T = \alpha'(t) = (-\text{sen}(t), \cos(t), \sqrt{2})$ , derivando  $T$  em relação a  $t$ , obtemos

$$T' = \alpha''(t) = (-\cos(t), -\text{sen}(t), 0), \quad \forall t \in I. \quad (4.5)$$

Como a curvatura é dada por  $k = \|\alpha''(t)\|_1$ , então

$$\begin{aligned} k &= \|(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0)\|_1 = \sqrt{|\langle (-\cos(t), -\text{sen}(t), 0), (-\cos(t), -\text{sen}(t), 0) \rangle|} \\ &= \sqrt{|\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)|} = \sqrt{|1|} = 1, \quad \forall t \in I. \end{aligned} \quad (4.6)$$

As equações de Frenet para curvas tipo tempo, parametrizadas pelo comprimento de arco, são dadas por (4.4), donde,  $N = T'$ . Substituindo  $T$  e  $N$  em  $B = T \wedge N$ , obtemos

$$\begin{aligned} B &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & \sqrt{2} \\ -\cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( \sqrt{2}\text{sen}(t), -\sqrt{2}\cos(t), -(\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)) \right) \\ &= \left( \sqrt{2}\text{sen}(t), -\sqrt{2}\cos(t), -1 \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Segue da equação (4.7) que  $B = (\sqrt{2}\text{sen}(t), -\sqrt{2}\cos(t), -1)$ , derivando em relação a  $t$ , obtemos

$$B' = \left( \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\text{sen}(t), 0 \right). \quad (4.8)$$

Segue de (4.4) que  $B' = \tau N$ , aplicando o pseudo-produto interno em relação a  $N$  dos dois lados e usando que  $N$  é tipo espaço, obtemos

$$\begin{aligned} \langle\langle B', N \rangle\rangle &= \langle\langle \tau N, N \rangle\rangle = \tau \langle\langle N, N \rangle\rangle \\ &\Rightarrow \tau = \langle\langle B', N \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Segue da equação (4.9) substituindo  $B'$  e  $N$  que

$$\begin{aligned} \tau &= \langle\langle B', N \rangle\rangle = \langle\langle (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\text{sen}(t), 0), (-\cos(t), -\text{sen}(t), 0) \rangle\rangle \\ &= -\sqrt{2}\cos^2(t) - \sqrt{2}\text{sen}^2(t) = -\sqrt{2}(\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)) \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

### 4.2.2 Equações de Frenet para curvas tipo espaço

Considere  $\alpha$  uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja  $\langle\langle \alpha', \alpha' \rangle\rangle = 1$ . Como  $\alpha' = T$  é tipo espaço  $[T]^\perp$  é um subespaço tipo tempo de duas dimensões, pois  $[T]$  é tipo espaço e segue da Proposição 3.22 que  $[T]^\perp$  é tipo tempo. A Proposição 3.23 afirma que existem dois vetores linearmente independentes tipo luz em  $[T]^\perp$ . Assim devemos considerar três casos: o vetor  $T'$  é tipo tempo; o vetor  $T'$  é tipo espaço; o vetor  $T'$  é tipo luz.

Caso 1) O vetor  $T'$  é tipo tempo. Do fato de que  $\|T(s)\|_1 = 1$  e  $\alpha(s)$  é tipo espaço, segue que o vetor tangente é tipo espaço, logo

$$|\langle\langle T(s), T(s) \rangle\rangle| = 1 \Rightarrow \langle\langle T(s), T(s) \rangle\rangle = 1.$$

Derivando em relação a  $s$  obtemos,

$$\langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle + \langle\langle T(s), T'(s) \rangle\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle = 0.$$

Assim  $T(s)$  é pseudo-ortogonal a  $T'(s)$ . Queremos agora determinar um vetor  $N(s)$ , pseudo-ortogonal a  $T(s)$  com norma igual a 1. Basta tomar  $N(s)$  satisfazendo  $\|N(s)\|_1 = 1$  e tal que

$$T'(s) = k(s)N(s),$$

onde  $k(s) > 0$  e  $k(s) = \|T'(s)\|_1$ .

Definimos o vetor normal  $N(s)$  por

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}.$$

Para construir a base de Frenet precisamos de um vetor simultaneamente pseudo-ortogonal a  $N(s)$  e  $T(s)$  com norma igual a 1. O vetor binormal, definido por  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  é tipo espaço pelo Teorema 3.15, pois é pseudo-ortogonal a  $N$  que é tipo tempo.

Portanto para cada  $s$ ,  $\{T; N; B\}$  forma uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  que é chamada de triedro de Frenet de  $\alpha$ . Logo abaixo descreveremos a relação entre os vetores  $\{T; N; B\}$ .

No que se segue será omitido o parâmetro  $s$  e escreveremos  $T(s) = T = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $N(s) = N = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $B(s) = B = (z_1, z_2, z_3)$ . Com essa notação segue que,

$$B = T \wedge N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3, y_1x_3 - x_1y_3, y_1x_2 - y_2x_1) = (z_1, z_2, z_3). \quad (4.10)$$

Calculando  $T \wedge B$

$$T \wedge B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (x_2z_3 - z_2x_3, z_1x_3 - x_1z_3, z_1x_2 - z_2x_1),$$

usando (4.10) e que  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ , obtemos:

$$T \wedge B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (y_1, y_2, y_3) = N,$$

Finalmente calculando  $N \wedge B$  temos:

$$N \wedge B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2 z_3 - z_2 y_3, z_1 y_3 - y_1 z_3, z_1 y_2 - z_2 y_1),$$

usando (4.10) e que  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1$ , obtemos:

$$N \wedge B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (x_1, x_2, x_3) = T,$$

Resumindo, mostramos que

$$B = T \wedge N = -N \wedge T, N = T \wedge B = -B \wedge T, T = N \wedge B = -B \wedge N. \quad (4.11)$$

Vamos agora deduzir as equações de Frenet. Temos que  $T' = kN$ . De  $B = T \wedge N$  derivando obtemos

$$B' = T' \wedge N + T \wedge N' = T \wedge N'.$$

Temos que  $B'$  é pseudo-ortogonal a  $T$ , como  $B$  é tipo espaço, daí

$$\|B'\| = 1 \Rightarrow \langle\langle B', B' \rangle\rangle = 1.$$

Derivando obtemos:

$$\langle\langle B', B' \rangle\rangle + \langle\langle B, B' \rangle\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle\langle B', B' \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle\langle B', B' \rangle\rangle = 0,$$

assim  $B'$  é pseudo-ortogonal a  $B$ . Logo  $B'$  está na direção de  $N$ , daí podemos escrever

$$B' = \tau N,$$

onde  $\tau$  é um número real que chamamos de torção. Segue da equação (4.11) que

$$N = T \wedge B,$$

derivando em relação a  $s$ ,

$$N' = T' \wedge B + T \wedge B'.$$

e substituindo  $B'$  e  $T'$ , obtemos

$$N' = kN \wedge B + \tau T \wedge N = kT + \tau B.$$

As equações

$$\begin{cases} T' = kN \\ N' = kT + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \quad (4.12)$$

são chamadas de *equações de Frenet* para uma curva  $\alpha$  tipo espaço com  $T'$  tipo tempo. Vamos apresentar um exemplo de curva tipo espaço, com  $T'$  tipo tempo, calculando a curvatura e a torção utilizando as equações de Frenet.

**Exemplo 4.16.** A curva  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por  $\alpha(t) = \left( \frac{\sqrt{3}t}{2}, \frac{\sinh(t)}{2}, \frac{\cosh(t)}{2} \right)$  é tipo espaço e parametrizada pelo comprimento de arco. Derivando  $\alpha$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\alpha'(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\cosh(t)}{2}, \frac{\sinh(t)}{2} \right),$$

então,

$$\begin{aligned} \langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\rangle &= \left\langle \left\langle \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\cosh(t)}{2}, \frac{\sinh(t)}{2} \right), \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\cosh(t)}{2}, \frac{\sinh(t)}{2} \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{3}{4} + \frac{\cosh^2(t)}{4} - \frac{\sinh^2(t)}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(\cosh^2(t) - \sinh^2(t)) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\alpha'(t)\|_1 = \sqrt{|\langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\rangle|} = \sqrt{|1|} = 1, \quad \forall t \in I.$$

O vetor  $T' = \alpha''(t)$  é tipo tempo, pois

$$\alpha''(t) = \left( 0, \frac{\sinh(t)}{2}, \frac{\cosh(t)}{2} \right),$$

então,

$$\begin{aligned} \langle\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle\rangle &= \left\langle \left\langle \left( 0, \frac{\sinh(t)}{2}, \frac{\cosh(t)}{2} \right), \left( 0, \frac{\sinh(t)}{2}, \frac{\cosh(t)}{2} \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{\sinh^2(t)}{4} - \frac{\cosh^2(t)}{4} = \frac{1}{4}(\sinh^2(t) - \cosh^2(t)) = -\frac{1}{4}, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Aqui utilizou-se a relação  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$  multiplicado por  $-1$  dos dois lados. Assim, para encontrar o valor da curvatura  $k(t)$  e a torção  $\tau(t)$  devemos utilizar as equações (4.12) (equações de Frenet para uma curva  $\alpha$  tipo espaço, com  $T'$  tipo tempo). Como  $k(t) = \|T'(t)\|_1$ , então

$$k(t) = \sqrt{|\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle|} = \sqrt{\left| -\frac{1}{4} \right|} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad \forall t \in I.$$

De  $N = \frac{T'}{k(t)}$ , obtemos

$$N = \frac{\left(0, \frac{\sinh(t)}{2}, \frac{\cosh(t)}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 2 \left(0, \frac{\sinh(t)}{2}, \frac{\cosh(t)}{2}\right) = (0, \sinh(t), \cosh(t)).$$

Como  $B = T \wedge N$ , então

$$\begin{aligned} B &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\cosh(t)}{2} & \frac{\sinh(t)}{2} \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{vmatrix} = \left( \frac{\cosh^2(t)}{2} - \frac{\sinh^2(t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\cosh(t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\sinh(t)}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}(\cosh^2(t) - \sinh^2(t)), -\frac{\sqrt{3}\cosh(t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\sinh(t)}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}\cosh(t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\sinh(t)}{2} \right). \end{aligned}$$

Derivando  $B$  em relação a  $t$ , obtemos

$$B' = \left( 0, -\frac{\sqrt{3}\sinh(t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\cosh(t)}{2} \right)$$

Segue da terceira linha do sistema (4.12), aplicando o pseudo-produto interno em relação a  $N$  e usando que  $\langle\langle N, N \rangle\rangle = -1$ , pois  $N$  é tipo tempo, que

$$\begin{aligned} \langle\langle B', N \rangle\rangle &= \langle\langle \tau N, N \rangle\rangle = \tau \langle\langle N, N \rangle\rangle = -\tau \\ &\Rightarrow \tau = -\langle\langle B', N \rangle\rangle, \quad \forall t \in I, \end{aligned}$$

substituindo  $B'$  e  $N$ , obtemos

$$\begin{aligned}\tau &= - \left\langle \left\langle \left( 0, -\frac{\sqrt{3}\sinh(t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\cosh(t)}{2} \right), (0, \sinh(t), \cosh(t)) \right\rangle \right\rangle \\ &= - \left( -\frac{\sqrt{3}\sinh^2(t)}{2} + \frac{\sqrt{3}\cosh^2(t)}{2} \right) \\ &= - \left( \frac{\sqrt{3}}{2}(-\sinh^2(t) + \cosh^2(t)) \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \forall t \in I.\end{aligned}$$

Caso 2) O vetor  $T'$  é tipo espaço. Do fato de que  $\|T(s)\|_1 = 1$  e  $\alpha(s)$  é tipo espaço, segue que o vetor tangente é tipo espaço, logo

$$|\langle\langle T(s), T(s) \rangle\rangle| = 1 \Rightarrow \langle\langle T(s), T(s) \rangle\rangle = 1.$$

Derivando a expressão anterior em relação a  $s$ , obtemos

$$\langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle + \langle\langle T(s), T'(s) \rangle\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle\langle T'(s), T(s) \rangle\rangle = 0.$$

Assim  $T(s)$  é pseudo-ortogonal a  $T'(s)$ . Queremos agora determinar um vetor  $N(s)$ , pseudo-ortogonal a  $T(s)$  com norma igual a 1. Basta tomar  $N(s)$  satisfazendo  $\|N(s)\|_1 = 1$  e tal que

$$T'(s) = k(s)N(s),$$

onde  $k(s) > 0$  e  $k(s) = \|T'(s)\|_1$  pois

$$\|T'(s)\|_1 = \|k(s)N(s)\|_1 \Rightarrow \|T'(s)\|_1 = k(s)\|N(s)\|_1 \Rightarrow k(s) = \frac{\|T'(s)\|_1}{\|N(s)\|_1} = \|T'(s)\|_1.$$

Definiremos o vetor normal  $N(s)$  como:

$$N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)}.$$

Para terminar a base de Frenet precisamos de um vetor pseudo-ortogonal a  $N(s)$  e  $T(s)$  com norma igual a 1. O vetor binormal é definido como  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  é tipo tempo, pois  $B \in [T, N]^\perp$  e como  $[T, N]$  é tipo espaço segue da Proposição 3.22 que  $[T, N]^\perp$  é tipo tempo. Os vetores de Frenet possuem a seguinte relação.

$$B = T \wedge N = -N \wedge T, T = B \wedge N = -N \wedge B, N = T \wedge B = -B \wedge T, \quad (4.13)$$

Temos que  $T' = kN$ . De  $B = T \wedge N$  derivando obtemos

$$B' = T' \wedge N + T \wedge N' = T \wedge N',$$

temos que  $B'$  é pseudo-ortogonal a  $T$ , como  $B$  é tipo tempo, daí

$$\|B'\| = 1 \Rightarrow \langle\langle B', B \rangle\rangle = -1.$$

Derivando obtemos:

$$\langle\langle B', B \rangle\rangle + \langle\langle B, B' \rangle\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle\langle B', B \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle\langle B', B \rangle\rangle = 0,$$

assim  $B'$  é pseudo-ortogonal a  $B$ . Logo  $B'$  está na direção de  $N$ , daí podemos escrever

$$B' = \tau N,$$

onde  $\tau$  é um número real que chamamos de torção. Segue da equação (4.13) que

$$N = T \wedge B.$$

Derivando

$$N' = T' \wedge B + T \wedge B'.$$

Substituindo  $B'$  e  $T'$ , obtemos

$$N' = kN \wedge B + \tau T \wedge N = -kT + \tau B.$$

Assim as equações

$$\begin{cases} T' = kN \\ N' = -kT + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \quad (4.14)$$

são chamadas de equações de Frenet para uma curva  $\alpha$  tipo Espaço com  $T'$  tipo espaço. Vamos apresentar um exemplo de curva tipo espaço com  $T'$  tipo espaço calculando a curvatura e a torção utilizando as equações de Frenet.

**Exemplo 4.17.** A curva  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), \frac{t}{2})$  apresentada no exemplo 4.5 não é parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$\|\alpha'(t)\|_1 = \sqrt{|\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle|} = \sqrt{\left|\frac{3}{4}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall t \in I$ . A função comprimento de arco para curvas tipo espaço é dado por  $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\|_1 dt$ , obtemos

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^t dt = \frac{\sqrt{3}}{2} [t]_0^t = \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ &\Rightarrow t = \frac{s}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2s}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}s}{3}. \end{aligned}$$

Assim, a curva  $\alpha(s) = \left( \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), \sin\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), \frac{2\sqrt{3}s}{6} \right)$  é uma reparametrização de  $\alpha(t)$  pelo comprimento de arco. De fato, derivando  $\alpha(s)$  em relação a  $s$ , obtemos

$$\alpha'(s) = \left( -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), \frac{2\sqrt{3}}{6} \right), \forall s \in I,$$

aplicando a norma, obtemos

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\|_1 &= \left\| \left( -u' \sin(u), u' \cos(u), \frac{2\sqrt{3}}{6} \right) \right\|_1 \\ &= \sqrt{\left| \left\langle \left( -u' \sin(u), u' \cos(u), \frac{2\sqrt{3}}{6} \right), \left( -u' \sin(u), u' \cos(u), \frac{2\sqrt{3}}{6} \right) \right\rangle \right|} \\ &= \sqrt{\left| (-u' \sin(u))^2 + (u' \cos(u))^2 - \left( \frac{2\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right|}, \end{aligned}$$

onde  $u = u(s) = \frac{2\sqrt{3}s}{3}$ . Então,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\|_1 &= \sqrt{\left| \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right)^2 + \left( \frac{12}{3} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right)^2 - \frac{12}{36} \right|} \\ &= \sqrt{\left| \frac{12}{9} \sin^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) + \frac{12}{9} \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) - \frac{12}{36} \right|} \\ &= \sqrt{\left| \frac{12}{9} \left( \sin^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right) - \frac{12}{36} \right|} \\ &= \sqrt{\left| \frac{12}{9} - \frac{12}{36} \right|} = \sqrt{\left| \frac{48 - 12}{36} \right|} = \sqrt{|1|} = 1, \forall s \in I. \end{aligned}$$

Sabemos  $T = \alpha'(s)$ , derivando em relação a  $s$ , obtemos

$$T' = \left( -\frac{12}{9} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{12}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right).$$

O vetor  $T'$  é tipo espaço, pois

$$\begin{aligned} \langle\langle T', T' \rangle\rangle &= \\ &= \left\langle \left\langle \left( -\frac{12}{9} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{12}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right), \left( -\frac{12}{9} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{12}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left( -\frac{12}{9} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right)^2 + \left( -\frac{12}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right)^2 \\ &= \frac{144}{81} \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) + \frac{144}{81} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \\ &= \frac{144}{81} \left( \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right) \\ &= \frac{144}{81}. \end{aligned}$$

Queremos determinar a curvatura  $k(s)$  e a torção  $\tau(s)$  da curva  $\alpha$  em  $s$ . Para calcular a curvatura  $k(s)$  vamos utilizar  $k(s) = \|\alpha'(s)\|_1 = \|T'\|_1$ ,  $\forall s \in I$ , então

$$k(s) = \|T'\|_1 = \sqrt{|\langle\langle T', T' \rangle\rangle|} = \sqrt{\left| \frac{144}{81} \right|} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{3}.$$

Como o vetor  $N = \frac{T'}{\|T'\|_1}$ , então

$$\begin{aligned} N &= \frac{\left( -\frac{12}{9} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{12}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right)}{\frac{4}{3}} \\ &= \left( -\frac{4}{3} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{4}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right) \frac{3}{4} \\ &= \left( -\cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Como  $B = T \wedge N$ , então

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) & \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) & \frac{2\sqrt{3}}{6} \\ -\cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \left( \frac{2\sqrt{3}}{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{2\sqrt{3}}{6} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right) \\
 &= \left( \frac{2\sqrt{3}}{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{2\sqrt{3}}{6} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right) \right) \\
 &= \left( \frac{2\sqrt{3}}{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{2\sqrt{3}}{6} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right). \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Para calcular  $\tau$  vamos utilizar as equações de Frenet para uma curva  $\alpha$  tipo espaço com  $T'$  tipo espaço (4.14), mas antes vamos calcular o vetor  $B'$ , segue da expressão (4.16) derivando que

$$B' = \left( \frac{12}{18} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), \frac{12}{18} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right). \tag{4.17}$$

Segue da terceira linha de (4.14), aplicando o pseudo-produto interno em relação a  $N$ , que

$$\tau = \langle\langle B', N \rangle\rangle. \tag{4.18}$$

Segue da expressão (4.18) substituindo (4.15) e (4.17) que

$$\begin{aligned}
 \tau &= \left\langle \left\langle \left( \frac{12}{18} \cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), \frac{12}{18} \operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right), \left( -\cos\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right), 0 \right) \right\rangle \right\rangle \\
 &= -\frac{12}{18} \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) - \frac{12}{18} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \\
 &= -\frac{12}{18} \left( \cos^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\sqrt{3}s}{3}\right) \right) \\
 &= -\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Caso 3) O vetor  $T'$  é tipo luz. Neste caso não faz sentido definir a curvatura como  $k = \|T'\|_1$ , pois  $\|T'\|_1 = 0$ . Definimos  $N = T'$  o vetor normal de  $\alpha$ . Como  $\alpha$  é uma curva tipo espaço temos  $[T]^\perp$  é um subespaço tipo tempo bidimensional e segue da Proposição

3.23 que existem dois vetores tipo luz em  $[T]^\perp$  linearmente independentes. Como  $N$  é tipo luz, defina o vetor binormal  $B \in [T]^\perp$  como o único vetor tipo luz tal que  $\langle\langle N, B \rangle\rangle = 1$ . Além disso, defina  $\tau = \langle\langle N', B \rangle\rangle$  a torção de  $\alpha$ .

Para calcular as equações de Frenet é preciso encontrar uma expressão para  $T', N'$  e  $B'$ . Observe que  $\langle\langle N, N \rangle\rangle = 0$ , assim  $\langle\langle N', N \rangle\rangle = 0$ . Mas por outro lado,

$$\langle\langle T, N \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle\langle T', N \rangle\rangle + \langle\langle T, N' \rangle\rangle = 0.$$

Assim, podemos escrever  $N' = aN + bB$  e

$$\begin{aligned} \tau &= \langle\langle N', B \rangle\rangle = \langle\langle aN + bB, B \rangle\rangle = \langle\langle aN, B \rangle\rangle + \langle\langle bB, B \rangle\rangle = a \\ 0 &= \langle\langle N', N \rangle\rangle = \langle\langle aN + bB, N \rangle\rangle = \langle\langle aN, N \rangle\rangle + \langle\langle bB, N \rangle\rangle = b \end{aligned}$$

Portanto

$$N' = \tau N.$$

Para obter  $B'$  observe que

$$\begin{aligned} \langle\langle N, B \rangle\rangle = 1 &\Rightarrow \langle\langle N', B \rangle\rangle + \langle\langle N, B' \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \tau N, B \rangle\rangle + \langle\langle N, B' \rangle\rangle + \langle\langle T, N \rangle\rangle \\ &= \langle\langle T + \tau B + B', N \rangle\rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$B' = -T - \tau B.$$

Portanto as equações de Frenet neste caso são:

$$\begin{cases} T' = N \\ N' = \tau N \\ B' = -T - \tau B \end{cases} \quad (4.19)$$

Vamos apresentar um exemplo de curva tipo espaço com  $T'$  tipo luz calculando a curvatura e a torção utilizando as equações de Frenet.

**Exemplo 4.18.** A curva  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , onde  $I = ]0, +\infty[$  dada por  $\alpha(t) = (t^3, t, t^3)$ ,  $\forall t \in I$  é tipo espaço e parametrizada pelo comprimento de arco. De fato,

$$\alpha'(t) = (3t^2, 1, 3t^2), \quad \forall t \in I,$$

então,

$$\begin{aligned}\langle\langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle\rangle &= \langle\langle(3t^2, 1, 3t^2), (3t^2, 1, 3t^2)\rangle\rangle \\ &= 9t^4 + 1 - 9t^4 = 1, \quad \forall t \in I.\end{aligned}$$

Como  $\|\alpha'(t)\|_1^2 = |\langle\langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle\rangle| = \langle\langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle\rangle = 1$ , então  $\|\alpha'(t)\|_1 = 1$ . Como  $T = \alpha'(t)$  segue que  $T'$  é dado por

$$T' = (6t, 0, 6t), \quad \forall t \in I.$$

O vetor  $T'$  é um vetor tipo luz, pois

$$\langle\langle T', T' \rangle\rangle = \langle\langle(6t, 0, 6t), (6t, 0, 6t)\rangle\rangle = 36t^2 - 36t^2 = 0, \quad \forall t \in I.$$

Definimos  $N = T'$  o vetor normal de  $\alpha$ .

Vamos definir o vetor binormal  $B$  como o único vetor tipo luz pseudo-ortogonal a  $T$  tal que  $\langle\langle N, B \rangle\rangle = 1$ , então

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \langle\langle(x, y, z), (x, y, z)\rangle\rangle = 0 \\ \langle\langle(3t^2, 1, 3t^2), (x, y, z)\rangle\rangle = 0 \\ \langle\langle(6t, 0, 6t), (x, y, z)\rangle\rangle = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 3t^2x + y - 3t^2z = 0 \\ 6tx - 6tz = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Segue da terceira linha do sistema (4.20) e de  $t > 0$  que  $x = \frac{1+6tz}{6t}$ , substituindo  $x$  na segunda linha do sistema (4.20), obtemos

$$\begin{aligned}3t^2 \frac{1+6tz}{6t} + y - 3t^2z &= 0 \Rightarrow \frac{t}{2} + 3t^2z + y - 3t^2z = 0 \\ &\Rightarrow y = -\frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Segue da primeira linha do sistema (4.20) substituindo  $x$  e  $y$  que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1+6tz}{6t}\right)^2 + \left(-\frac{t}{2}\right)^2 - z^2 &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{1+12tz+36t^2z^2}{36t^2} + \frac{t^2}{4} - z^2 &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{1+12tz+36t^2z^2-36t^2z^2}{36t^2} + \frac{t^2}{4} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{1+12tz}{36t^2} + \frac{t^2}{4} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{36t^2} + \frac{z}{3t} + \frac{t^2}{4} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{z}{3t} = -\frac{1}{36t^2} - \frac{t^2}{4} \\
 \Rightarrow z = -\frac{1}{12t} - \frac{3t^3}{4}.
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $z$  em  $x = \frac{1+2z}{2}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1+6t\left(-\frac{1}{12t}-\frac{3t^3}{4}\right)}{6t} \\
 &= \frac{1}{6t} - \frac{1}{12t} - \frac{3t^3}{4} \\
 &= \frac{2-1}{12t} - \frac{3t^3}{4} \\
 &= \frac{1}{12t} - \frac{3t^3}{4}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$B = (x, y, z) = \left(\frac{1}{12t} - \frac{3t^3}{4}, -\frac{t}{2}, -\frac{1}{12t} - \frac{3t^3}{4}\right).$$

Derivando  $N$  em relação a  $t$ , obtemos

$$N' = (6, 0, 6).$$

Como para as curvas tipo espaço com  $T'$  definimos  $\tau = \langle\langle N', B \rangle\rangle$  a torção de  $\alpha$  em  $t$ , então

$$\begin{aligned}
 \tau &= \left\langle\left\langle (6, 0, 6), \left(\frac{1}{12t} - \frac{3t^3}{4}, -\frac{t}{2}, -\frac{1}{12t} - \frac{3t^3}{4}\right) \right\rangle\right\rangle \\
 &= \frac{1}{2t} - \frac{9t^3}{2} + \frac{1}{2t} + \frac{9t^3}{2} \\
 &= \frac{1}{t}, \quad \forall t \in I.
 \end{aligned}$$

### 4.2.3 Equações de Frenet para curvas tipo luz

Considere  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva tipo luz. Já vimos anteriormente que  $\alpha$  não pode ser parametrizada pelo comprimento de arco, apenas podemos reparametrizar de forma que  $\|\alpha''\|_1 = 1$  pelo Lema 4.14. Para construir o triedro de Frenet defina  $T' = N$  o vetor normal de  $\alpha$ . O vetor binormal  $B$  como o único vetor tipo luz pseudo-ortogonal a  $N$  de forma que  $\langle\langle T, B \rangle\rangle = 1$ . Assim temos uma base de vetores do  $\mathbb{R}_1^3$  que se relacionam de forma mais simples, uma vez que, neste caso, não é possível obter uma base ortonormal. Analogamente ao caso que  $\alpha$  é tipo espaço com  $T'$  tipo luz, não se define a curvatura  $k$  de  $\alpha$  mas a torção  $\tau$  de  $\alpha$  é dada por  $\tau = \langle\langle N', B \rangle\rangle$ .

Vamos agora encontrar as equações de Frenet. Sendo  $\langle\langle T, B \rangle\rangle = 1$  temos

$$0 = \langle\langle T', B \rangle\rangle + \langle\langle T, B' \rangle\rangle = \langle\langle N, B \rangle\rangle + \langle\langle T, B' \rangle\rangle = \langle\langle T, B' \rangle\rangle.$$

Como  $B$  é tipo luz,  $\langle\langle B, B' \rangle\rangle = 0$  e  $\langle\langle T, B' \rangle\rangle = 0$ , podemos escrever  $B' = aN$ . Utilizando que  $\langle\langle N, B \rangle\rangle = 0$  e derivando em relação a  $s$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle\langle N', B \rangle\rangle + \langle\langle N, B' \rangle\rangle = 0 &\Rightarrow \langle\langle N, B' \rangle\rangle = -\langle\langle N', B \rangle\rangle \\ &\Rightarrow \langle\langle N, aN \rangle\rangle = -\tau \\ &\Rightarrow a = -\tau. \end{aligned}$$

Logo,  $B' = -\tau N$ . Utilizando que  $\langle\langle N, B \rangle\rangle = 0$ ,  $\langle\langle B, B \rangle\rangle = 0$  e substituindo  $B'$  em  $0 = \langle\langle N', B \rangle\rangle + \langle\langle N, B' \rangle\rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle\langle N', B \rangle\rangle + \langle\langle N, -\tau N \rangle\rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle\langle N', B \rangle\rangle - \tau & \\ \Rightarrow \langle\langle N', B \rangle\rangle - \tau \langle\langle T, B \rangle\rangle + \langle\langle B, B \rangle\rangle & \\ \Rightarrow \langle\langle N' - \tau T + B, B \rangle\rangle & \\ \Rightarrow N' = \tau T - B. & \end{aligned}$$

Portanto das equações

$$\begin{cases} T' = N \\ N' = \tau T - B \\ B' = -\tau N \end{cases} \quad (4.21)$$

são as equações de Frenet procuradas.

Vamos apresentar um exemplo de curva tipo luz e calcular a curvatura e a torção utilizando as equações de Frenet.

**Exemplo 4.19.** A curva  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por  $\alpha(t) = (t, \cosh(t), \sinh(t))$  apresentada no exemplo 4.8 é parametrizada de forma que  $\|\alpha''(t)\|_1 = 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (0, \cosh(t), \sinh(t)) & (4.22) \\ \Rightarrow \|\alpha''(t)\|_1 &= \|(0, \cosh(t), \sinh(t))\|_1 \\ &= \sqrt{|\langle\langle(0, \cosh(t), \sinh(t)), (0, \cosh(t), \sinh(t))\rangle\rangle|} \\ &= \sqrt{|\cosh^2(t) - \sinh^2(t)|} = \sqrt{|1|} = 1, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

As equações de frenet para as curvas tipo luz são dadas por (4.21).

Segue da equação (4.21) que  $T' = N$  e segue da equação (4.22) que  $N = (0, \cosh(t), \sinh(t))$ , derivando  $N$  em relação a  $t$  obtemos

$$N' = (0, \sinh(t), \cosh(t)). \quad (4.23)$$

Temos que  $B$  como o único vetor tipo luz ortogonal a  $N$  de forma que  $\langle\langle T, B \rangle\rangle = 1$ , então

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \langle\langle(x, y, z), (x, y, z)\rangle\rangle = 0 \\ \langle\langle(0, \cosh(t), \sinh(t)), (x, y, z)\rangle\rangle = 0 \\ \langle\langle(0, \sinh(t), \cosh(t)), (x, y, z)\rangle\rangle = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y \cosh(t) - z \sinh(t) = 0 \\ y \sinh(t) - z \cosh(t) = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Segue segunda linha do sistema (4.24) que  $y = z \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$ , substituindo  $y$  na terceira linha do sistema (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} z \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} \sinh(t) - z \cosh(t) &= 1 \Rightarrow z \left( \frac{\sinh^2(t)}{\cosh(t)} - \cosh(t) \right) = 1 \\ &\Rightarrow z \left( \frac{\sinh^2(t) - \cosh^2(t)}{\cosh(t)} \right) = 1 \\ &\Rightarrow z \left( \frac{-1}{\cosh(t)} \right) = 1 \\ &\Rightarrow z = \frac{1}{\frac{-1}{\cosh(t)}} = -\cosh(t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Substituindo (4.25) em  $y$ , obtemos

$$y = -\cosh(t) \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = -\sinh(t). \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) e (4.25) na primeira linha do sistema (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + (-\sinh(t))^2 - (-\cosh(t))^2 = 0 &\Rightarrow x^2 + \sinh^2(t) - \cosh^2(t) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x = \sqrt{1} = 1. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Segue das equações (4.25), (4.26) e (4.27) que  $B = (1, -\sinh(t), -\cosh(t))$ . Como a torção  $\tau$  de  $\alpha$  em  $t$  é dada por  $\tau = \langle\langle N', B \rangle\rangle$  então,

$$\begin{aligned} \tau &= \langle\langle N', B \rangle\rangle \\ &= \langle\langle (0, \sinh(t), \cosh(t)), (1, -\sinh(t), -\cosh(t)) \rangle\rangle \\ &= -\sinh^2(t) - (-\cosh^2(t)) \\ &= -\sinh^2(t) + \cosh^2(t) = 1, \forall t \in I. \end{aligned}$$

#### 4.2.4 Resumo das equações de Frenet para curvas em espaços de Lorentz-Minkowski

Nesta subseção faremos um breve resumo na forma de um quadro das equações de Frenet para facilitar estudos a posteriori sobre curvas em uma variedade de Lorentz-Minkowski tridimensional. O quadro apresenta: a parametrização da curva, os tipos de curva, curvatura, torção e as equações de Frenet em cada caso, levando em conta o tipo da curva e seu vetor aceleração.

Parametrização	Tipo de curva	Tipo do vetor aceleração	Curvatura	Torção	Equações de Frenet
Curvas parametrizadas pelo comprimento de arco	tipo tempo	tipo espaço	$k = \ T'\ _1$	$\tau = \langle\langle B', N \rangle\rangle$	$\begin{cases} T' = kN \\ N' = kT - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$
	tipo espaço	tipo tempo	$k = \ T'\ _1$	$\tau = -\langle\langle B', N \rangle\rangle$	$\begin{cases} T' = kN \\ N' = kT + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$
		tipo espaço	$k = \ T'\ _1$	$\tau = \langle\langle B', N \rangle\rangle$	$\begin{cases} T' = kN \\ N' = -kT + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$
		tipo luz	não se define	$\tau = \langle\langle N', B \rangle\rangle$	$\begin{cases} T' = N \\ N' = \tau N \\ B' = -T - \tau B \end{cases}$
Curvas parametrizadas de forma que $\ \alpha''(t)\ _1 = 1, \forall t \in I$	tipo luz	tipo espaço	não se define	$\tau = \langle\langle N', B \rangle\rangle$	$\begin{cases} T' = N \\ N' = \tau T - B \\ B' = -\tau N \end{cases}$

### 4.3 Hélices

No espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  uma hélice é definida como uma curva cujo vetor tangente faz um ângulo constante com uma direção fixa. A reta dada por esta direção fixa é denominada o *eixo da hélice*. Em  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ , na teoria clássica de curvas espaciais, prova-se que uma curva  $\alpha$  é uma hélice se, e somente se,  $\frac{\tau}{k} = \text{constante}$  em todos os pontos, onde  $k$  e  $\tau$  são a curvatura e a torção da curva, respectivamente. Nessa seção vamos definir uma hélice em  $\mathbb{R}_1^3$  e vamos mostrar um resultado análogo ao que citamos sobre hélices em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 4.20.** *Uma hélice em  $\mathbb{R}_1^3$  é uma curva regular tal que  $\langle\langle T(s), v \rangle\rangle$  é uma função constante para algum vetor fixo  $v$  não nulo. Cada reta paralela à direção  $v$  é chamada eixo da hélice.*

**Teorema 4.21.** *Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva tipo tempo em  $\mathbb{R}_1^3$ . Se  $\alpha$  é uma hélice, então  $\tau/k$  é uma função constante.*

*Demonstração.* Observe que as curvas regulares tipo tempo podem ser reparametrizadas pelo comprimento de arco.

Seja  $\alpha$  uma curva tipo tempo, parametrizada pelo comprimento de arco. Derivando  $\langle\langle T, v \rangle\rangle = \text{constante}$  em relação a  $s$ , obtém-se

$$\langle\langle T', v \rangle\rangle = 0.$$

Como  $T' = kN$  então  $v$  é ortogonal a  $N$ . Assim podemos escrever  $v = aT + bB$ , onde  $a, b$  são funções reais. Derivando  $v$  em relação a  $s$ , segue que

$$a'T + aT' + b'B + bB' = a'T + akN + b'B + b\tau N = a'T + (\tau b + ak)N + b'B = 0,$$

pois  $T' = kN$  e  $B' = \tau N$ . Segue do fato de que os vetores  $\{T, N, B\}$  são linearmente independentes que

$$a' = 0; \quad b' = 0; \quad \text{e} \quad \tau b + ak = 0.$$

Logo,  $a$  e  $b$  são constantes e da última linha temos que  $\frac{\tau}{k} = -\frac{a}{b}$  é constante.  $\square$

**Teorema 4.22.** *Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva tipo espaço com  $T'$  não tipo luz em  $\mathbb{R}_1^3$ . Se  $\alpha$  é uma hélice, então  $\tau/k$  é uma função constante.*

*Demonstração.* Observe que as curvas regulares tipo espaço, com  $T'$  não tipo luz, podem ser reparametrizadas pelo comprimento de arco.

Vamos considerar  $\alpha$  uma curva tipo espaço com  $T'$  não tipo luz, parametrizada pelo comprimento de arco. Como  $T'$  não pode ser tipo luz então vamos considerar a curva tipo espaço com vetor  $T'$  tipo tempo e a curva tipo espaço com vetor  $T'$  tipo espaço. Começemos com  $T'$  tipo tempo e derivando  $\langle\langle T, v \rangle\rangle = \text{constante}$  em relação a  $s$ , obtemos

$$\langle\langle T', v \rangle\rangle = 0.$$

Como  $T' = kN$  temos que  $v$  é ortogonal a  $N$ . Assim podemos escrever  $v$  como combinação linear de  $T$  e  $B$  dada por  $v = aT + bB$ , onde  $a, b$  são funções reais. Derivando  $v$  em relação a  $s$  temos que

$$a'T + aT' + b'B + bB' = a'T + akN + b'B + b\tau N = a'T + (\tau b + ak)N + b'B = 0,$$

pois  $T' = kN$  e  $B' = \tau N$ . Segue dos vetores  $\{T, N, B\}$  serem linearmente independentes que

$$a' = 0; \quad b' = 0 \quad \text{e} \quad \tau b + ak = 0.$$

Logo,  $a$  e  $b$  são constantes e da ultima linha temos que  $\frac{\tau}{k} = -\frac{a}{b}$  é constante. Para  $T'$  tipo espaço e derivando  $\langle\langle T, v \rangle\rangle = \text{constante}$  em relação a  $s$ , obtemos

$$\langle\langle T', v \rangle\rangle = 0.$$

Como  $T' = kN$  temos que  $v$  é ortogonal a  $N$ . Assim podemos escrever  $v$  como combinação linear de  $T$  e  $B$  dada por  $v = aT + bB$ , onde  $a, b$  são funções reais. Derivando  $v$  em relação a  $s$  temos que

$$a'T + aT' + b'B + bB' = a'T + akN + b'B + b\tau N = a'T + (\tau b + ak)N + b'B = 0,$$

pois  $T' = kN$  e  $B' = \tau N$ . Segue dos vetores  $\{T, N, B\}$  serem linearmente independentes que

$$a' = 0; \quad b' = 0 \text{ e } \tau b + ak = 0.$$

Logo,  $a$  e  $b$  são constantes e da ultima linha temos que  $\frac{\tau}{k} = -\frac{a}{b}$  é constante □

**Teorema 4.23.** *Seja  $\alpha$  uma curva tipo tempo ou espaço, com vetor normal não tipo luz. Se  $\frac{\tau}{k}$  é constante, então  $\alpha$  é uma hélice.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  tipo tempo e  $\frac{\tau}{k} = c \Rightarrow \tau = kc$ . Definindo  $v = cT - B$  e derivando em relação a  $s$ , obtemos

$$v' = cT' - B' = ckN - \tau N = k \left( c - \frac{\tau}{k} \right) N = 0,$$

pois  $T' = kN$  e  $B' = \tau N$ . Calculando a expressão  $\langle\langle T, v \rangle\rangle$  temos que

$$\begin{aligned} \langle\langle T, v \rangle\rangle &= \langle\langle T, cT - B \rangle\rangle \\ &= \langle\langle T, cT \rangle\rangle - \langle\langle T, B \rangle\rangle = c. \end{aligned}$$

Os outros dois casos são análogos ao anterior. □

**Observação 4.24.** *Se  $\alpha$  é uma curva regular regular contida em um plano então  $\langle\langle T, v \rangle\rangle = \text{constante}$ , com  $v \in \mathbb{R}_1^3$ , isto é,  $\alpha$  é uma hélice. Uma curva tipo tempo ou tipo espaço com vetor  $T'$  está contida em um plano se, e somente se,  $\tau = 0$ .*

## 4.4 Geodésicas

É conhecido que na teoria de superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$  as geodésicas desempenham um papel similar ao das retas no plano  $\mathbb{R}^2$ , no sentido de que são trajetórias descritas por partículas que minimizam energia e também minimizam, localmente, o comprimento de arco dentre as curvas que unem dois pontos da superfície. Ou seja, minimizam distâncias. Nesta seção serão apresentados alguns resultados referentes a geodésicas em variedades semi-riemannianas, sendo que, a maioria deles permanecem válidos para qualquer variedade riemanniana. O principal objetivo da seção é introduzir o conceito de *geodésica nula*.

Seja  $M$  uma variedade semi-riemanniana munida de uma conexão de Levi-Civita.

**Definição 4.25.** *Uma geodésica em  $M$  é uma curva  $\gamma: I \rightarrow M$  cujo campo vetorial tangente  $\gamma'(t)$  é paralelo para todo  $t \in I$ . Isto é,*

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0, \forall t \in I. \quad (4.28)$$

Seja  $\gamma: I \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ , então para todo  $t \in I$ ,

$$\|\gamma'\|^2 = |\langle \gamma', \gamma' \rangle| = \begin{cases} \langle \gamma', \gamma' \rangle, & \text{se } \langle \gamma', \gamma' \rangle \geq 0 \\ -\langle \gamma', \gamma' \rangle, & \text{se } \langle \gamma', \gamma' \rangle < 0 \end{cases}.$$

Por outro lado, como a conexão é compatível com a métrica, segue da equação (2.20) que, no caso em que  $\langle \gamma', \gamma' \rangle \geq 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

e no caso em que  $\langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( - \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \right) &= - \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = - \left( \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \right\rangle \right) \\ &= -2 \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Isto nos diz que geodésicas são curvas cujo comprimento de arco do vetor tangente  $\gamma'(t)$  é constante para todo  $t \in I$ . Vamos considerar apenas geodésicas que não se reduzem a

pontos, isto é,  $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$ . O comprimento de arco  $s$  de  $\gamma$ , a partir de uma origem fixa, digamos  $t = t_0$ , é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento do arco, isto é,  $c = 1$ , diz-se que a geodésica  $\gamma$  está normalizada.

Um fato muito importante a ser observado é que, em geral uma reparametrização de uma geodésica não é uma geodésica. O próximo resultado nos diz que isso ocorre se, e somente se a função mudança de parâmetro é uma reta.

**Proposição 4.26.** *Uma reparametrização  $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ , com  $J = h(I)$ , de uma geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica se, e somente se,  $h(t) = mt + n$ , para alguns  $m, n \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Como  $\|\gamma'(t)\| = c$ , segue da regra da cadeia que

$$(\gamma \circ h)'(t) = h'(t)\gamma'(h(t)),$$

daí,

$$\|(\gamma \circ h)'(t)\| = \|h'(t)\gamma'(h(t))\| = |h'(t)|\|\gamma'(h(t))\|. \quad (4.29)$$

Portanto, como a condição para que  $\gamma \circ h$  seja uma geodésica é que  $\|(\gamma \circ h)'(t)\|$  seja igual a uma constante, segue da expressão (4.29) que se  $\bar{c} \in \mathbb{R}$ , então  $\|(\gamma \circ h)'(t)\| = \bar{c}$ , se, e somente se,  $h'(t)$  é constante, para todo  $t \in I$ . Ou seja  $h(t) = mt + n$ , para alguns  $m, n \in \mathbb{R}$ .

Reciprocamente, se  $\alpha(t) = \gamma \circ h(t) = \gamma(mt + n)$ , então

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = \frac{D(\gamma \circ h)'}{dt}(t) = \frac{D\gamma'}{dt}(h'(t)) = 0,$$

e conseqüentemente  $\gamma \circ h$  é uma geodésica. □

**Teorema 4.27.** *Seja  $(U, \varphi)$  um sistema de coordenadas locais em uma variedade semi-riemanniana  $M$  de dimensão  $n$ . Uma curva*

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow U \\ t &\rightarrow \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

é uma geodésica de  $M$  se, e somente se, suas funções coordenadas  $x_k$  satisfazem

$$x_k'' + \sum_{ij} x_i' x_j' \Gamma_{ij}^k = 0$$

para  $1 \leq k \leq n$ .

*Demonstração.* Vamos determinar as equações locais satisfeitas por uma geodésica  $\gamma$  em um sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$  em torno de  $\gamma(t_0)$ . Em  $U$ ,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

$\gamma$  será uma geodésica se e só se

$$0 = \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_k}{dt} \right) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right\} \partial_k = \sum_k \left\{ \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right\} \partial_k$$

Logo o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, k = 1, \dots, n \quad (4.30)$$

fornece as equações procuradas. A equação (4.30) é conhecida como *equação geodésica*.  $\square$

**Teorema 4.28.** (*Teorema de Existência e Unicidade de Geodésicas*) *Seja  $M$  uma variedade semi-riemanniana com uma conexão  $\bar{\nabla}$ . Então para todos  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ , e para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  contendo  $t_0$  e uma única geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tal que  $\gamma(t_0) = p$  e  $\gamma'(t_0) = v$ .*

*Demonstração.* A demonstração segue direto do Teorema 4.27, uma vez que a equação geodésica (4.30) determina um sistema de segunda ordem, o qual pode ser transformado num sistema de primeira ordem introduzindo  $n$  equações de primeira ordem dadas por meio das transformações  $\mu^k = \frac{dx^k}{dt}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  as quais, em união com a equação  $\frac{d\mu_k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \mu^i \mu^j = 0, k = 1, \dots, n$  determinam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente ao sistema (4.30). O resultado segue, portanto, do teorema de existência e unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.  $\square$

Observe que, pelo que foi exposto na última seção do Capítulo 2 é imediato verificar que este teorema permanece válido para geodésicas definidas em quaisquer variedades diferenciáveis dotadas de uma conexão afim.

**Definição 4.29.** Uma variedade riemanniana ou semi-riemanniana  $M$  para a qual toda geodésica está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  é dita geodesicamente completa.

#### 4.4.1 Geodésicas nulas espaços de $\mathbb{R}_1^3$

**Exemplo 4.30. Geodésicas dos espaços de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ .** Seja  $M = \mathbb{R}_1^3$  e seja  $\gamma: I \rightarrow M$  uma geodésica. Então, segue do Teorema 4.27 que

$$x_k'' + \sum_{ij=1}^3 x_i' x_j' \Gamma_{ij}^k = 0,$$

$k = 1, 2, 3$ . Como  $M$  é o  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica de Lorentz então  $\partial_i = e_i$ , logo

$$g_{ij}^* = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_j^i, i, j = 1, 2 \text{ e } \langle \partial_i, \partial_j \rangle = -1, i, j = 3.$$

Como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 g^{km} \{ \partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij} \}$$

Logo todos os  $\Gamma_{ij}^k$  são nulos. Daí,

$$x_k'' = 0, k = 1, 2, 3,$$

donde, por integração, obtém-se que

$$x_k = a_k t + b_k, k = 1, 2.$$

Portanto,  $\gamma(t) = at + b$ , onde  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)$  são vetores constantes de  $M$ .

Ou seja, as geodésicas de  $\mathbb{R}_1^3$  são as retas de  $\mathbb{R}_1^3$ .

**Definição 4.31.** Dizemos que  $\gamma: I \rightarrow M = \mathbb{R}_1^3$  é uma geodésica nula de  $M$  se  $\gamma$  é uma geodésica e  $\gamma'(t)$  é um vetor nulo para todo  $t \in I$ .

**Definição 4.32.** Seja  $\gamma: I \rightarrow M = \mathbb{R}_1^3$  uma curva nula. Dizemos que  $\gamma$  é uma reta nula se possuir a seguinte parametrização

$$\gamma(t) = at + b$$

onde  $a$  e  $b$  são vetores constantes.

Do exemplo 4.30 temos que as únicas geodésicas de  $\mathbb{R}_1^3$  são retas e sua parametrização está de acordo com a definição anterior portanto as retas nulas são as únicas geodésicas nulas de  $\mathbb{R}_1^3$ .

---

# Considerações

Para o desenvolvimento deste trabalho nos baseamos no estudo de curvas no espaço euclidiano tridimensional para apresentar resultados similares sobre curvas em uma variedade de Lorentz-Minkowski, também tridimensional. O estudo de curvas nessa variedade difere do estudo de curvas em  $\mathbb{R}^3$ , principalmente, no fato de que, nessas variedades existe a necessidade de se definir conjuntos de equações de Frenet diferentes para cada tipo de curva, pois, como a métrica nessas variedades não é definida positiva, a relação entre os vetores tangente, normal e binormal depende da causalidade dos vetores. Em relação as hélices nessa variedade, foi possível estabelecer definições e proposições análogas ao estudo de hélices no espaço euclidiano tridimensional. Foi possível também, caracterizar as geodésicas nessas variedades. Os comentários feitos anteriormente mostram que o principal objetivo da nossa pesquisa, que era de apresentar as principais características da geometria envolvidas no estudo de curvas em uma variedade de Lorentz-Minkowski foi atingido.

Como contribuição original, é apresentada na subseção 4.2.4 do capítulo 4, um quadro com as principais informações sobre as equações de Frenet, a curvatura e a torção de cada tipo de curva, de acordo com o vetor aceleração de cada uma delas. Esse quadro simplifica a teoria e permite uma visão de conjunto, o que facilita a comparação entre as principais diferenças de cada tipo de curva.

Vale ressaltar que parte da teoria estudada neste trabalho, com as devidas adaptações, servem de base para estender os conceitos apresentados para variedades de Lorentz quadridimensionais, em particular para o estudo de geodésicas nulas no espaço tempo de

Lorentz-Minkowski, cuja importância reside, principalmente na sua presença na teoria de relatividade clássica.

O presente trabalho contribuiu para a formação acadêmica do discente. Essa contribuição se deu principalmente por meio da aplicação de parte dos conceitos aprendidos na disciplina de Geometria Diferencial do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia Campus Pontal em um contexto mais amplo, como por exemplo o conhecimento de artigos resultantes de pesquisas em Geometria Diferencial, e em específico, das pesquisas em variedades riemannianas e semi-riemannianas, que são conteúdos que, em geral, o aluno não tem contato em um curso regular de graduação.

---

# BIBLIOGRAFIA

- [1] BIEZUNER, R. J. **Notas de geometria riemanniana**. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2017.
- [2] Caixeta, F. A. **Superfícies Mínimas de Bour em  $\mathbb{R}^3$** . Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Faculdade de Ciências Integradas do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2017.
- [3] CARMO, M. P. **Geometria riemanniana**. 5ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [4] CEZANA, M. J. **As curvaturas de Cartan de uma curva nula no espaço-tempo de Minkowski**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.
- [5] CINTRA, A. A. **Superfícies mínimas em variedades Lorentzianas**. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemáticas, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
- [6] COUTO, I. T. **Caracterizações de subvariedades marginalmente aprisionadas em formas espaciais**. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.
- [7] FORGER, M.; JUNIOR, F. A. **Fibrados, Conexões e Classes Características**. São Paulo, 2011.

- [8] LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. 2nd Edition, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, 2012.
- [9] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 1<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [10] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Editora AO Livro Técnico S.A. 1970.
- [11] MARCON, D. **Espaços Métricos**. Trabalho de Conclusão de Curso - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- [12] RAMOS, L. M. **Teorema de Schur no Plano de Minkowski e caracterização de Hélices Inclinadas no Espaço de Minkowski**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal São Carlos, São Carlos, 2013.
- [13] SACRAMENTO, A. J. N. **Curvas no Espaço de Minkowski**. Tese (Doutorado em Ciências - Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- [14] SANTOS, F. R. **Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura de Ordem Superior Constante no Espaço de Sitter**. Tese (Doutorado em Ciências - Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- [15] SILVA, F. N. **Superfícies Regradas Desenvolvíveis Tipo Tempo e Tipo Espaço no Espaço de Minkowski**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2013.
- [16] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2<sup>a</sup> edição. Brasília: Editora da Edgard Blucher, 2008.