Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Bacharelado em Matemática

SEMIGRUPOS NUMÉRICOS IRREDUTÍVEIS

Thiago Henrique Silva Araújo

Uberlândia-MG
2020

Thiago Henrique Silva Araújo

SEMIGRUPOS NUMÉRICOS IRREDUTÍVEIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Chaud Tizziotti

Uberlândia-MG
2020

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, ____ de __________________ de 20____

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Guilherme Chaud Tizziotti

____

Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos

____

Prof. Dr. Neiton Pereira da Silva

Uberlândia-MG

2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar serenidade nos momentos de dificuldade.

Agradeço a minha mãe, Eliézer, e aos meus irmãos, Larissa e João, que sempre esteve ao meu lado para me apoiar em todas as minhas decisões, por me amparar e incentivar durante toda minha graduação e por sempre acreditarem em mim.

Agradeço a todos os colegas e amigos que fiz durante essa jornada que certamente contribuíram para minha formação.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Guilherme Chaud Tizziotti, que me acompanhou durante grande parte da minha graduação e, foi essencial para minha formação acadêmica.

Agradeço ao Programa de Iniciação Científica (PICME), vinculado ao CNPq por ter me apresentado e incentivado à pesquisa científica e por ter fomentado a minha permanência na Universidade.

Resumo

Este trabalho consiste em um estudo sobre semigrupos numéricos e em particular aqueles que são chamados irredutíveis.

Palavras-chave: Semigrupos Numéricos, semigrupos numéricos irredutíveis, decomposição de semigrupos numéricos .

Abstract

This work consists of a study about numerical semigroups and in particular those who are called irreducible.

Keywords: Numerical semigroups, irreducible numerical semigroups, decomposition of a numerical semigroup.

Sumário

1. Introdução

Um semigrupo numérico é um subconjunto não-vazio S do conjunto $\mathbb{N}$ dos inteiros não negativos que é fechado para a adição, contém o zero e, seu complementar em $\mathbb{N}$ é finito. Equivalentemente semigrupos numéricos são submonóides de $\mathbb{N}$ com o complementar finito. O conjunto de elementos de $G(S) = \mathbb{N} \backslash S$ é chamado de conjunto de lacunas de S e a cardinalidade desse conjunto é chamado de gênero de S, que denotaremos por $g(S)$. Se $n_1, ..., n_e$ são inteiros positivos com $\text{mdc}\{n_1, ..., n_e\} = 1$, então o conjunto $\langle n_1, ..., n_e \rangle = \{a_1 n_1 + \cdots + a_e n_e | a_1, ..., a_e \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo numérico. Veremos que todo semigrupo numérico possui essa forma.

Esse conceito simples torna os problemas relacionados a ele fáceis de se compreender, porém, com soluções muitas vezes bem complexas. No século XIX semigrupos numéricos foram alvo de estudos de matemáticos como Frobenius e Sylvester, veja [7]. Na segunda metade do século passado a teoria de semigrupos numéricos voltou a ser estudada principalmente devido às suas aplicações na Álgebra Comutativa via anel de semigrupos, já que semigrupos numéricos simétricos, semigrupos numéricos pseudo-simétricos, semigrupos numéricos com S-dimensão máxima e com a propriedade Arf, semigrupos numéricos saturados e intersecções completas, são exemplos de classes de semigrupos que podem ser usados para construir domínios locais Noetherianos unidimensionais com as propriedades desejadas (veja [8]), e na Geometria Algébrica, em que estão diretamente relacionados ao Teorema das Lacunas de Weierstrass ([6, Teorema 1.6.8]). Essa relação coloca semigrupos numéricos como um objeto de estudo dentro da Teoria de Códigos, especialmente no estudo de códigos algébricos geométricos (veja [1]).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira.

No primeiro capítulo, são apresentados conceitos e resultados básicos necessários para o estudo de semigrupos numéricos que será feito nos capítulos seguintes.

No segundo capítulo, é abordado semigrupos numéricos cuja cardinalidade do sistema minimal de geradores é máxima, dando caracterizações utilizando os elementos apresentados no primeiro capítulo. Na parte final desse capítulo são apresentados dois casos particulares de semigrupos numéricos com essa propriedade, os semigrupos Arf e os semigrupos saturados.

Por fim, o último capítulo trata do estudo de semigrupos numéricos irredutíveis, apresentando um algoritmo para decompor qualquer semigrupo numérico em semigrupos numéricos desse tipo.

2. Definições e Propriedades Elementares

2.1 Monóides e Homomorfismos de Monóides

Um *semigrupo* é um par $(S, +)$ com S sendo um conjunto não vazio e $+$ uma operação binária associativa em S, isto é, para qualquer a, b e $c \in S$, temos que $(a + b) + c = a + (b + c)$. Todos os semigrupos considerados nesse trabalho são comutativos, ou seja, $a + b = b + a$ para quaisquer $a, b \in S$, e, portanto, consideremos a comutividade como uma propriedade intrínseca. A fim de simplificar a notação, denotaremos um semigrupo $(S, +)$ simplesmente por S. Um subsemigrupo T do semigrupo S é um subconjunto de S fechado sobre a operação binária considerada em S. É fácil ver que a interseção de dois subsemigrupos de S é novamente um subsemigrupo de S. Assim, dado A um subconjunto não vazio de S, o menor subsemigrupo de S que contém A é a interseção de todos os subsemigrupos de S que contém A. Vamos denotar esse semigrupo por $\langle A \rangle$ e será chamado semigrupo gerado por A. É fácil ver que

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_1, ..., a_n \in A\}$$

Dizemos que S é gerado por A se $S = \langle A \rangle$ e, neste caso, A é chamado de sistema de geradores de S. Se A possui uma quantidade finita de elementos, dizemos que S é finitamente gerado.

Um semigrupo M é um monóide se ele possui um elemento identidade, isto é, existe um elemento em M, geralmente denotado por 0, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in M$. Um subconjunto N de M é um submonóide de M se é um subsemigrupo de M e $0 \in N$. Observe que se M é um monóide, então $\{0\}$ é um submonóide de M, chamado de submonóide trivial. Assim, como os semigrupos, a interseção de submonóides é novamente um submonóide. Dado um monóide M e um subconjunto A de M, o menor submonóide de M contendo A é

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_1, ..., a_n \in A\},$$

que chamaremos de submonóide de M gerado por A. Como no caso de semigrupos, o conjunto A é um sistema de geradores de M, e se $\langle A \rangle = M$ dizemos que M é gerado por A. Um monóide M é finitamente gerado se existe um sistema de geradores de M com uma quantidade finita de elementos. Observe que $\{0\} = \langle 0 \rangle$.

Dados dois semigrupos X e Y, uma aplicação $f : X \to Y$ é dito homomorfismo de semigrupos se $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todos a e $b \in X$. Dizemos que f é um monomorfismo, um epimorfismo ou um isomorfismo se f é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, respectivamente. Dois semigrupos são ditos isomorfos se existe um isomorfismo entre eles. Usaremos a notação $X \cong Y$ para dizer que X e Y são isomorfos. A aplicação $f : X \to Y$ com X e Y monóides é um homomorfismo de monóides se é um homomorfismo de semigrupos e $f(0) = 0$. O conceito de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo são definidos de forma análoga aos definidos para semigrupos.

2.2 MULTIPLICIDADE E S-DIMENSÃO

O conjunto $\mathbb{N}$ dos inteiros não-negativos com a operação de adição é um monóide. Neste trabalho estamos principalmente interessados nos submonóides de $\mathbb{N}$. Veremos a seguir que eles podem ser classificados como isomorfismos por aqueles que possuem o complemento finito em $\mathbb{N}$. Um submonóide de $\mathbb{N}$ com o complementar finito em $\mathbb{N}$ é um *semigrupo numérico.* Nessa seção vamos mostrar que todo semigrupo numérico é finitamente gerado, admite um único sistema minimal de geradores e sua cardinalidade é limitada superiormente pelo menor elemento positivo pertecente ao monóide.

Lema 1. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Então, $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico se, e somente se, o máximo divisor comum dos elementos de A é igual a* 1.

Demonstração. Seja $d = \operatorname{mdc}(A)$ (máximo divisor comum dos elementos de A). Se s pertence a $\langle A \rangle$ então $d \mid s$. Como $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico, $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito, e segue que existe um inteiro não negativo x tal que x e $x+1$ pertencem a $\langle A \rangle$. Logo, temos que $d \mid x$ e $d \mid (x+1)$, e portanto $d = 1$.

Para a recíproca, é suficiente provar que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito. Como $1 = \operatorname{mdc}(A)$, sabemos que existem $z_1, ..., z_n \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n$ em A tais que $z_1a_1 + \cdots + z_na_n = 1$. Passando os termos em que z_i é negativo para o lado direito da igualdade, podemos encontrar $i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l \in \{1, ..., n\}$ tais que $z_{i_1}a_{i_1} + \cdots + z_{i_k}a_{i_k} = 1 - z_{j_1}a_{j_1} - \cdots - z_{j_l}a_{j_l}$. Portanto, existe $s \in \langle A \rangle$ (no caso $s = -z_{j_1}a_{j_1} - \cdots - z_{j_l}a_{j_l}$) tal que $s+1$ também pertence a $\langle A \rangle$. Vejamos que se $n \geq (s-1)s + (s-1)$, então $n \in \langle A \rangle$. De fato, sejam q e r inteiros tais que $n = qs + r$ com $0 \leq r < s$. Como $n \geq (s-1)s + (s-1)$, segue que $q \geq s-1 \geq r$. Daí, $n = (rs+r) + (q-r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle$ e o resultado segue. □

Semigrupos numéricos classificam, a menos de isomorfismo, o conjunto dos submonóides de $\mathbb{N}$.

Proposição 1. *Seja M um submonóide não trivial de $\mathbb{N}$. Então, M é isomorfo a um semigrupo numérico.*

Demonstração. Tome $d = \operatorname{mdc}(M)$. Pelo Lema 1 sabemos que $S = \left\langle \left\{ \dfrac{m}{d} : m \in M \right\} \right\rangle$ é um semigrupo numérico. Considere a aplicação $f : M \to S$, dada por $f(m) = \dfrac{m}{d}$. Veja que dado $s \in S$, temos que é da forma $s = a_1\frac{m_1}{d} + \cdots + a_r\frac{m_r}{d}$. Logo, $s = \dfrac{a_1m_1 + \cdots + a_rm_r}{d} =$

$f(a_1m_1 + \cdots + a_rm_r)$, e assim f é sobrejetora. É claro que f é injetora e, portanto, é um isomorfismo de monóides. $\square$

Se A e B são subconjuntos de números inteiros, escrevemos $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Portanto, para um semigrupo numérico S, se escrevemos $S^* = S \setminus \{0\}$, o conjunto $S^* + S^*$ corresponde aos elementos de S que são a soma de dois elementos não nulos em S.

Lema 2. *Seja S um submonóide de $\mathbb{N}$. Então, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores de S. Além disso, todo sistema de geradores de S contém $S^* \setminus (S^* + S^*)$.*

Demonstração. Seja $s \in S^*$. Se $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$ então, existem $x, y \in S^*$ tais que $s = x + y$. Repetindo o processo para x e y, e após um número finito de passos $(x, y \ < s)$, encontramos $s_1, ..., s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ tais que $s = s_1 + \cdots + s_n$. Portanto, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores de S.

Agora, seja A um sistema de geradores de S. Tome $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Existem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Como $x \notin (S^* + S^*)$, temos necessariamente que $x = a_i$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ está contido em A e o resultado segue. $\square$

A seguir, veremos que o conjunto $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é finito. Para isso introduziremos, provavelmente a ferramenta mais versátil para se trabalhar com semigrupos numéricos.

Seja S um semigrupo numérico e seja n um dos seus elementos diferentes de zero. O conjunto Apéry de n em S é dado por

$$Ap(S, n) := \{s \in S : s - n \notin S\}.$$

Esse conjunto recebe esse nome em homenagem a Roger Apéry, matemático greco-francês (1916-1994).

Lema 3. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Então, $Ap(S, n) = \{0 = w(0), w(1), ..., w(n-1)\}$, em que $w(i)$ é o menor elemento de S congruente a i módulo n, para todo $i \in \{0, ..., n-1\}$.*

Demonstração. O resultado segue do fato de que para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i + kn \in S$, pois $\mathbb{N} \setminus S$ é finito. $\square$

Exemplo 1. *Considere o semigrupo numérico S gerado por $\{5, 7, 11\}$. Então, $S = \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, ...\}$ e $Ap(S, 7) = \{0, 5, 10, 11, 15, 16, 20\}$.*

Observe que, em particular, o Lema 3 implica que a cardinalidade de $Ap(s, n)$ é igual a n. Com esse resultado podemos deduzir o seguinte.

Lema 4. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Então, para todo $s \in S$, existe um único par $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ tal que $s = kn + w$.*

Demonstração. É claro que $kn + w \in S$, pois $n \in S \Rightarrow kn \in S$ e $w \in Ap(S, n) \Rightarrow w \in S$, logo $kn + w \in S$. Vejamos que é único: suponha por que exista $(k_1, w_1), (k_2, w_2) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ tal que $k_1 n + w_1 = k_2 n + w_2$. Isso implica que $(k_1 + k_2)n - (w_1 - w_2) = 0$. Sem perda de generalidade suponha $k_1 > k_2$, assim temos que $(k_1 + k_2)n \neq w_1 - w_2$ pois $(k_1 + k_2)n - n \in S$, mas $(w_1 - w_2) - n = (w_1 - n) - w_2 \notin S$. Logo $k_1 = k_2$ e $w_1 = w_2$. □

Dizemos que o sistema de geradores de um semigrupo numérico é um sistema minimal de geradores se nenhum dos seus subconjuntos próprios gerar o semigrupo numérico.

Teorema 1. *Todo semigruopo numérico admite um único sistema minimal de geradores. Esse sistema minimal de geradores é finito.*

Demonstração. O Lema 2 garante que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema minimal de geradores. Pelo Lema 4, temos que para todo $n \in S^*$, $S = \langle Ap(S, n) \cup \{n\} \rangle$. Como $Ap(S, n) \cup \{n\}$ é finito, deduzimos que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é finito. □

Todo submonóide de $\mathbb{N}$ é isomorfo a um semigrupo numérico, essa propriedade se traduz a submonóides de $\mathbb{N}$.

Corolário 1. *Seja M um submonóide de $\mathbb{N}$. Então, M possui um único sistema minimal de geradores, o qual é finito.*

Demonstração. Seja $d = \text{mdc}(M)$. Então, $T = \{\frac{x}{d} : x \in M\}$ é um submonóide de $\mathbb{N}$ tal que $\text{mdc}(T) = 1$. Como visto no Lema 1, isso significa que T é um semigrupo numérico. Se A é um sistema minimal de geradores de T, então $\{da : a \in A\}$ é um sistema minimal de geradores de M. □

Corolário 2. *Seja M um submonóide de $\mathbb{N}$ gerado por $\{0 \neq m_1 < m_2 < \cdots < m_p\}$. Então, $\{m_1, \cdots, m_p\}$ é um sistema minimal de geradores de M se, e somente se, $m_{i+1} \notin \langle m_1, ..., m_e \rangle$.*

Seja S um semigrupo numérico e tome $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_p\}$ um sistema minimal de geradores. Então, n_1 é chamado de *multiplicidade* de S, e será denotado por $m(S)$. A cardinalidade do sistema minimal de geradores, será chamada de S*-dimensão* e denotada por $e(S)$.

Proposição 2. *Seja S um semigrupo numérico. Então*

1. $m(S) = min(S \setminus \{0\})$,

2. $e(S) \leq m(S)$

Demonstração. É óbvio que a multiplicidade é o menor inteiro positivo em S. A outra afirmação segue do fato que $\{m(S)\} \cup Ap(S, m(S)) \setminus \{0\}$ é um sistema de geradores de S com cardinalidade $m(S)$. □

Observe que $e(S) = 1$ se, e somente se, $S = \mathbb{N}$. Se m é um inteiro positivo, claramente $S = \{0, m, m+1, ...\}$ é um semigrupo numérico com multiplicidade m. É fácil checar que o sistema minimal de geradores de S é $\{m, m+1, ..., 2m-1\}$. Consequentemente $e(S) = m = m(S)$.

2.3 Número de Frobenius e Gênero

O matemático alemão Ferdinand Frobenius (1849-1917) propôs o problema de expressar o maior inteiro que não pode ser representado como uma combinação linear com coeficientes inteiros não negativos de um conjunto de números inteiros positivos cujo maior divisor comum entre eles é 1. Também propós determinar quantos números inteiros positivos não tem essa representação. Na nossa linguagem, o primeiro problema é equivalente a determinar uma fórmula, em termos dos elementos do sistema minimal de geradores de um semigrupo numérico S, para o maior inteiro que não pertença a S. Esse elemento é conhecido como o *número de Frobenius* de S, e é denotado por $F(S)$. O elemento $c(S) := F(S)+1 \in S$ é chamado de *condutor* de S, que é o menor inteiro x tal que $x+n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto dos elementos $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ é chamado de conjunto das lacunas de S. A cardinalidade desse conjunto é chamada de *gênero* de S, que é denotado por $g(S)$. Os conceitos de número de Frobenius, condutor, conjunto de lacunas e gênero são muito importantes no estudo de semigrupos numéricos.

Exemplo 2. *Considere o semigrupo numérico S gerado por $\{5,7,11\}$. Sabemos que $S = \{0,5,7,10,11,12,14,15,...\}$ e portanto $F(S) = 13$, $G(S) = \{1,2,3,4,6,8,9,13\}$ e $g(S) = 8$.*

Proposição 3. *Seja S um semigrupo numérico e n um elemento não nulo de S. Então:*

1. $F(S) = (maxAp(S,n)) - n$
2. $g(S) = \frac{1}{n}(\sum_{w \in Ap(S,n)} w) - \dfrac{n-1}{2}$

Demonstração. Pela definição de conjunto de Apéry, temos que $(maxAp(s,n)) - n \notin S$. Se $x > (maxAp(S,n)) - n$, então $x+n > maxAp(S,n)$. Seja $w \in Ap(S,n)$ tal que w e $x+n$ saõ congruentes módulo n (que existe devido ao Lema 3). Como $w < x+n$, isto implica que $x = w + kn$ para algum inteiro positivo k, e conseguentemente $x - n = w + (k-1)n$ pertence a S, logo temos que qualquer número maior que $(maxAp(S,n)) - n$ está em S. Observe que para todo $w \in Ap(S,n)$, se w é congruente a i módulo n e $i \in \{0,...,n-1\}$, então existe um inteiro não negativo k_i tal que $w = k_i n + i$. Portanto, usando a notação do Lema 3, $Ap(S,n) = \{0, w(1) = k_1 n + 1, w(2) = k_2 n + 2, ..., w(n-1) = k_{n-1}n + n - 1\}$. Um inteiro x congruente a $w(i)$ módulo n pertence a S se, e somente se, $w(i) \leq x$. Logo,

$$\begin{aligned} g(S) &= k_1 + \cdots + k_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}((k_1 n + 1) + \cdots + (k_{n-1}n + n - 1)) - \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{1}{n}(\textstyle\sum_{w \in Ap(S,n)} w) - \dfrac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

□

Se S é um semigrupo numérico minimamente gerado por $\langle a,b \rangle$, temos que $Ap(S,n) = \{s \in S | s - a \notin S\} = \{ax_1 + bx_2 | x_1, x_2 \in \mathbb{N}, ax_1 + bx_2 - a \notin S\} = \{ax_1 + bx_2 | x_1, x_2 \in \mathbb{N}, a(x_1 - 1) + bx_2 \notin S\}$. Observe que se $x_1 \geq 1$, todo elemento $a(x_1 - 1) + bx_2 \in S$. Assim precisamos que $x_1 = 0$, logo $Ap(S,a) = \{bx_2 | x_2 \in \mathbb{N}, bx_2 - a \notin S\}$, isto é,

$$Ap(S,a) = \{0, b, 2b, ..., (a-1)b\}$$

e pela Proposição 3 conseguimos o seguinte resultado.

Proposição 4. *Sejam a e b números inteiros positivos com $mdc(a,b)=1$. Então,*

1. $F(<a,b>) = ab - a - b$,
2. $g(<a,b>) = \dfrac{ab-a-b+1}{2}$

Observe que para um semigrupo numérico com S-dimensão igual a 2, $g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2}$ (e portanto $F(S)$ é sempre ímpar). Esse não é o caso para S-dimensões maiores, embora essa propriedade caracterize uma classe muito interessante de semigrupos numéricos, que será estudada neste trabalho.

Sabemos que se S é um semigrupo numérico e $s \in S$, então $F(S) - s$ não pertence a S. A partir disso, obtemos que a igualdade acima é uma desigualdade no caso geral.

Lema 5. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}$$

Assim, semigrupos numéricos para os quais a igualdade se mantém são semigrupos numéricos com o "menor" número possível de lacunas.

Observação 1. *Se fixarmos um inteiro postivo f, em geral, nem sempre existem mais semigrupos numéricos com número de Frobenius $f+1$ do que semigrupos numéricos com número de Frobenius f. Na seguinte tabela, encontrada em [4].($ns(F)$ representa o número de semigrupos numéricos com o número de Frobenius F).*

F	$ns(F)$	F	$ns(F)$	F	$ns(F)$
1	1	11	51	21	1828
2	1	12	40	22	1913
3	2	13	106	23	4096
4	2	14	103	24	3578
5	5	15	200	25	8273
6	4	16	205	26	8175
7	11	17	465	27	16132
8	10	18	405	28	16132
9	21	19	961	29	34903
10	22	20	900	30	31822

Observe que os semigrupos numéricos com número de Frobenius 5 são 5, sendo eles

$$\langle 2,7\rangle, \langle 3,4,6\rangle, \langle 3,7,8\rangle, \langle 4,5,7\rangle, \langle 6,7,8,9,10,11\rangle$$

, enquanto os semigrupos numéricos com o número de Frobenius 6 são 4, sendo eles

$$\langle 4,5,7\rangle\,, \langle 4,7,9,10\rangle\,, \langle 5,7,8,9,11\rangle\,, \langle 7,8,9,10,11,12,13\rangle.$$

Maria Brás-Amorós calculou em [2], o número de semigrupos numéricos com gênero g para $g \in \{0,...,50\}$, e seus cálculos mostraram um comportamento semelhante ao da sequência de Fibonacci para o número de semigrupos numéricos com gênero g fixo menor ou igual a 50. Contudo, ainda não se sabe em geral se, para um número inteiro positivo positivo g, há mais semigrupos numéricos com gênero $g+1$ do que semigrupos numéricos com gênero g. Vamos reproduzir na Tabela 2.1 os resultados obtidos por Maria Brás-Amorós (na tabela n_g representa o número de semigrupos numéricos de gênero g). Temos os semigrupos numéricos com gênero g:

- $g=0$, um único semigrupo numérico sendo ele $\langle 1\rangle = \mathbb{N}$.
- $g=1$, um único semigrupo numérico sendo ele $\langle 2,3\rangle$.
- $g=2$, 2 semigrupos numéricos, sendo eles $\langle 2,5\rangle\,, \langle 3,4,5\rangle$.
- $g=3$, 4 semigrupos numéricos, sendo eles $\langle 4,5,6,7\rangle\,, \langle 3,4\rangle\,, \langle 2,7\rangle\,, \langle 3,5,7\rangle$.
- $g=4$, 7 semigrupos numéricos, sendo eles $\langle 2,9\rangle\,, \langle 3,5\rangle\,, \langle 3,7,8\rangle\,, \langle 4,5,6\rangle\,, \langle 4,5,7\rangle\,, \langle 4,6,7\rangle\,, \langle 5,6,7,8,9\rangle$.
- $g=5$, 12 semigrupos numéricos, sendo eles $\langle 2,11\rangle\,, \langle 3,7\rangle\,, \langle 3,8,10\rangle\,, \langle 4,5\rangle\,, \langle 4,6,7\rangle\,, \langle 4,6,9,11\rangle\,, \langle 4,7,9,10\rangle\,, \langle 5,6,7,8\rangle\,, \langle 5,6,7,9\rangle\,, \langle 5,6,8,9\rangle\,, \langle 5,7,8,9,11\rangle\,, \langle 6,7,8,9,10,11\rangle$

Tabela 2.1: Número de semigrupos numéricos com gênero até 50 (veja [2])

g	n_g	$n_{g-1}+n_{g-2}$	$(n_{g-1}+n_{g-2})/n_g$	n_g/n_{g-1}
2	2	2	1	2
3	4	3	0.75	2
4	7	6	0.857143	1.75
5	12	11	0.916667	1.71429
6	23	19	0.826087	1.91667
7	39	35	0.897436	1.69565
8	67	62	0.925373	1.71795
9	118	106	0.898305	1.76119
10	204	185	0.906863	1.72881
11	343	322	0.938776	1.68137
12	592	547	0.923986	1.72595
13	1001	935	0.934066	1.69088
14	1693	1593	0.940933	1.69131
15	2857	2694	0.942947	1.68754
16	4806	4550	0.946733	1.68218
17	8045	7663	0.952517	1.67395
18	13467	12851	0.954259	1.67396
19	22464	21512	0.957621	1.66808
20	37396	35931	0.960825	1.66471
21	62194	59860	0.962472	1.66312
23	170963	165440	0.967695	1.65588
24	282828	274209	0.969526	1.65432
25	467224	453791	0.971249	1.65197
26	770832	750052	0.973042	1.64981
27	1270267	1238056	0.974642	1.64792
28	2091030	2041099	0.976121	1.64613
29	3437839	3361297	0.977735	1.64409
30	5646773	5528869	0.97912	1.64254
31	9266788	9084612	0.980341	1.64108
32	15195070	14913561	0.981474	1.63973
33	24896206	24461858	0.982554	1.63844
34	40761087	40091276	0.983567	1.63724
35	66687201	65657293	0.984556	1.63605
36	109032500	107448288	0.98547	1.63498
37	178158289	175719701	0.986312	1.63399
38	290939807	287190789	0.987114	1.63304
39	474851445	469098096	0.987884	1.63213
40	774614284	765791252	0.98861	1.63128
41	1262992840	1249465729	0.98929	1.63048
42	2058356522	2037607124	0.989919	1.62975
43	3353191846	3321349362	0.990504	1.62906
44	5460401576	5411548368	0.991053	1.62842
45	8888486816	8813593422	0.991574	1.62781
46	14463633648	14348888392	0.992067	1.62723
47	23527845502	23352120464	0.992531	1.62669
48	38260496374	37991479150	0.992969	1.62618
49	62200036752	61788341876	0.993381	1.6257
50	101090300128	100460533126	0.99377	1.62525

Lema 6. *Seja S um semigrupo numérico gerado por $\{n_1, n_2, ..., n_p\}$. Tome $d = mdc\{n_1, n_2, ..., n_{p-1}\}$ e o conjunto $T = \langle\{n_1/d, ..., n_{p-1}/d, n_p\}\rangle$. Então*

$$Ap(S, n_p) = d(Ap(T, n_p)).$$

Demonstração. Se $w \in Ap(S, n_p)$, então $w \in \langle n_1, ..., n_{p-1}\rangle$. Conseguentemente, $w/d \in \langle n_1/d, ..., n_{p-1}/d\rangle \subseteq T$. Se $w/d - n_p \in T$, então $w - dn_p \in S$, o que não é possível. Agora, tome $w \in Ap(T, n_p)$. Então $w \in \langle n_1/d, ..., n_{p-1}/d\rangle$ e portanto $dw \in \langle n_1, ..., n_{p-1}\rangle \subseteq S$. Se $dw - n_p$ pertencer também a S, então $dw - n_p = \lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_{p-1} n_{p-1} + \lambda_p n_p$ para alguns $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{N}$. Como S é um semigrupo numérico, $d = \text{mdc}\{n_1, ..., n_p\} = 1$, que implica que $\text{mdc}\{d, n_p\} = 1$. Com isso temos que $d|(\lambda_p + 1)$, pois $\lambda_p + 1n_p = dw - (\lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_{p-1} n_{p-1})$. Porém temos que $w = \dfrac{\lambda_1 n_1}{n} + \cdots + \dfrac{\lambda_{p-1} n_{p-1}}{n} + \dfrac{\lambda_p n_p}{n}$, com $(\lambda_p + 1)/n$ um inteiro positivo, contradizendo que $w \in Ap(T, n_p)$. □

Com a Proposição 3 e o Lema 6, obtemos a seguinte propriedade.

Proposição 5. *Seja S um semigrupo numérico com o sistema minima de geradores $\{n_1, ..., n_p\}$. Sejam $d = mdc\{n_1, ..., n_{p-1}\}$ e $T = \langle n_1/d, ..., n_{p-1}/d, n_p\rangle$. Então,*

1. *$F(S) = dF(T) + (d - 1)n_p$,*

2. *$g(S) = dg(T) + \dfrac{(d-1)(n_p - 1)}{2}$.*

Exemplo 3. *Seja $S = \langle 20, 50, 13\rangle$. Como $mdc\{20, 50\} = 10$, temos que $T = \langle 2, 5, 13\rangle = \langle 2, 5\rangle$. $F(T)$ e $g(T)$ podem ser facilmente calculados pela Proposição 4. Então, temos $F(S) = 10F(T) = 10 \cdot 3 + 9 \cdot 13 = 147$ e $g(S) = 10g(T) + \dfrac{9 \cdot 12}{2} = 74$.*

2.4 Pseudo Número de Frobenius

Seja S um semigrupo numérico. Dizemos que um inteiro x é um *pseudo número de Frobenius* se $x \notin S$ e $x + s \in S$ para todos $s \in S \setminus \{0\}$. Vamos denotar por $PF(S)$ o conjunto dos pseudos números de Frobenius de S, sua cardinalidade será chamada de *tipo* de S e denotada por $t(S)$. Pelas definições segue que $F(S) = \max\{x \; ; \; x \in PF(S)\}$.

Sobre o conjunto de inteiros podemos definir a seguinte relação: $a \leq_S b$ se $b - a \in S$. Como S é um semigrupo numérico temos uma relação de ordem, isto é, $\leq_S$ é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Pela definição de pseudo número de Frobenius, obtemos que eles são os elementos máximos com respeito a $\leq_S$ de $\mathbb{Z} \setminus S$.

Proposição 6. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

1. *$PF(S) = Maximos_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$,*

2. *$x \in \mathbb{Z} \setminus S$ se e somente se $f - x \in S$ para algum $f \in PF(S)$.*

Esse resultado estabelece uma espécie de dualidade entre os geradores minimais e os pseudos números de Frobenius de um semigrupo numérico, desde que $Minimos_{\leq_S}$ é o sistema minimal de geradores de S.

Proposição 7. *Seja S um semigrupo numérico e n um elemento diferente de zero de S. Então,*

$$PF(S) = \{w - n | w \in Maximos_{\leq_S} Ap(S, n)\}.$$

Demonstração. Seja $x \in PF(S)$. Como $x \notin S$ e $x + n \in S$ podemos dizer em outras palavras que $x+n \in Ap(S, n)$. Seja $w \in Ap(S, n)$ tal que $x+n \leq_S w$. Então, $w-(x+n) = w-n-x \in S$. Dessa forma, temos que $w - n = x + s$ para algum $s \in S$. Como $w - n \notin S$ e $x \in PF(S)$ segue que $s = 0$ e daí $w = x + n$.

Agora, seja $w \in Maximo_{\leq_S} Ap(S, n)$. Então, $w - n \notin S$. Se $w - n + s \notin S$ para algum elemento s de S, diferente de zero, então $w + s \in Ap(S, n)$, contradizendo a maximalidade de w. □

Exemplo 4. *Seja $S = \langle 5, 7, 11\rangle$. Então, $Maximos_{\leq_S} Ap(S, 7) = \{16, 20\}$ e $PF(S) = \{9, 13\}$.*

Exemplo 5. *Se S é um semigrupo numérico minimamente gerado por $\langle a, b\rangle$, então*

$$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, ..., (a - 1)b\}.$$

Isso implica que $Maximos_{\leq_S} Ap(S, a) = \{(a - 1)b\}$ e $PF(S) = \{ab - a - b\}$. Portanto, semigrupos numéricos com S-dimensão igual a 2, tem tipo 1.

Como a cardinalidade de $Ap(S, n)$ é n e o zero nunca é um elemento maximal, então tomando $n = m(S)$ e pela proposição anterior conseguimos uma cota superior para o tipo de um semigrupo numérico.

Corolário 3. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$t(S) \leq m(S) - 1.$$

Lembramos que a cardinalidade do sistema minimal de geradores de um semigrupo numérico não ultrapassa sua multiplicidade, e que semigrupos numéricos com S-dimensão 2 tem tipo 1. No Capítulo 9 de [4] os autores mostram que semigrupos numéricos com S-dimensão igual a 3 tem tipo 1 ou 2. Contudo, para S-dimensões maiores do que 3, o tipo não é limitado superiormente pela S-dimensão como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 6. *Seja $S = \langle 19, 21, 26, 27\rangle$ tem tipo 9 e, de modo geral, temos:*

$S = \langle s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2\rangle$. Para $n \geq 2$, $r \geq 3n + 2$ e $s = r(3n + 2) + 3$, o tipo de S é $2n + 3$.

Exemplo 7. *Seja $m > 1$ um inteiro. Note que, para $S = \{0, m, m + 1, ...\}$. Esses semigrupos atingem o limite dado pelo corolário acima.*

Seja S um semigrupo numérico. Denotamos o conjunto dos elementos em S que são menores do que o número de Frobenius $F(S)$ por $N(S)$, ou seja,

$$N(S) = \{s \in S | s < F(S)\}.$$

Esse conjunto determina totalmente S. Sua cardinalidadé é denotada por $n(S)$. Claramente $g(S) + n(S) = F(S) + 1$. Pela proposição 6, sabemos que se x é um inteiro que não pertence a S, então existe $f \in PF(S)$ tal que $x \leq_S f$. Defina $f_x := min\{f \in PF(S) | f - x \in S\}$. Então, a aplicação

$$G(S) \to PF(S) \times N(S),\, x \mapsto (f_x, f_x - x)$$

é injetora, o que prova o seguinte resultado.

Proposição 8. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$g(S) \leq t(S)n(S).$$

Essa desigualdade é equivalente a $F(S)+1 \leq (t(S)+1)n(S)$. Foi conjecturado que $F(S)+1 \leq e(S)n(S)$. Para algumas familias de semigrupos numéricos a Conjectura de Wilf é verdadadeira, mas para o caso geral permanece sem solução.

3. Semigrupos Numéricos Com S-Dimensão Máxima

O estudo e a relevância de semigrupos numéricos cuja cardinalidade do sistema minimal de geradores é a maior possível surge de maneira natural. Dentre outras classes de semigrupos numéricos, eles se tornam especiais devido as suas possíveis aplicações existentes na álgebra comutativa via anel de semigrupos, já são uma fonte de exemplos de anéis comutativos com propriedades de máximo. Neste capítulo estaremos particularmente interessados em duas subclasses de semigrupos numéricos com S-dimensão máxima, que são aqueles com a propriedade Arf e semigrupos numéricos saturados.

3.1 Caracterizações

Seja S um semigrupo numérico. Sabemos que a S-dimensão, $e(S)$, é menor ou igual a sua multiplicidade, $m(S)$. Dizemos que S tem S-dimensão máxima se $e(S) = m(S)$. Nessa seção vamos dar várias caracterizações dessa propriedade em termos dos elementos notáveis apresentados no primeiro capítulo.

Se x é um gerador minimal de S, e $n \in S \setminus \{0, x\}$, então $x - n$ não pertence a S. Isso implica que $x \in Ap(S, n)$.

Proposição 9. *Seja S um semigrupo numérico minimamente gerado por $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_e\}$. Então, S tem S-dimensão máxima se, e somente se, $Ap(S, n_1) = \{0, n_2, ..., n_e\}$.*

Demonstração. Como dizemos anteriormente, $\{n_2, ..., n_e\} \subseteq Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$. Sabemos que a cardinalidade de $Ap(S, n_1)$ é n_1. Consequentemente, $e = n_1$ se, e somente se, $\{0, n_2, ..., n_e\} = Ap(S, n_1)$. □

Como conseguência imediata das proposições 3 e 7 obtemos a seguinte propriedade.

Corolário 4. *Seja S um semigrupo numérico minimamente gerado por $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_e\}$.*

1. *Se S tem S-dimensão máxima, então $F(S) = n_e - n_1$.*
2. *S tem S-dimensão máxima se, e somente se, $g(S) = \frac{1}{n_1}(n_2 + \cdots + n_e) - \frac{n_1 - 1}{2}$.*
3. *S tem S-dimensão máxima se, e somente se, $t(S) = n_1 - 1$.*

Exemplo 8. *O semigrupo numérico* $S = \langle 4, 5, 11 \rangle$ *tem* $F(S) = 11 - 4 = n_e - n_1$*, mas não possui S-dimensão máxima.*

Observação 2. *Seja* S *um semigrupo numérico minimamente gerado por* $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_e\}$.

1. *Sabemos pelo Corolário 3 que* $t(S) \leq m(S) - 1$*. Então, semigrupos com S-dimensão máxima são aqueles com tipo máximo.*

2. *Pela Proposição 3* $g(S) \geq \dfrac{1}{n_1}(n_2 + \cdots n_e) - \dfrac{n_1 - 1}{2}$*. Semigrupos numéricos com S-dimensão máxima podem ser vistos como aqueles com o menor número de lacunas.*

Dado n um inteiro diferente de zero e dois inteiros a e b, escrevemos $a \equiv b \pmod{n}$ para denotar que n divide $a - b$. Vamos denotar por $b \pmod{n}$ o resto da da divisão de b por n. O resultado a seguir caracteriza os subconjuntos dos números inteiros positivos que podem ser vistos como um conjunto Apéry de um semigrupo numérico.

Proposição 10. *Seja* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *e tome* $C = \{w(0) = 0, w(1), ..., w(n-1)\} \subseteq \mathbb{N}$ *tal que* $w(i)$ *é congruente a* i *módulo* n *para todo* $i \in \{1, ..., n-1\}$*. Seja* S *o semigrupo numérico* $\langle \{n\} \cup C \rangle$*. As seguinte afirmações são equivalentes.*

1. $Ap(S, n) = C$.

2. *Para todo* $i, j \in \{1, ..., n-1\}$, $w(i) + w(j) \geq w((i + j) \text{ mod } n)$.

Demonstração. Note que $w(i) + w(j)$ e $w((i + j) \bmod n)$ são congruentes módulo n para todos $i, j \in \{1, ..., n - 1\}$. Portanto, a condição 2 é equivalente a condição 2'): para todo $i, j \in \{1, ..., n-1\}$, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $w(j) + w(j) = tn + w((i + j) \bmod n)$. Se $Ap(S, n) = C$, então pelo Lema 4, $w(i) + w(j) = kn + c$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $c \in C$. É claro que $w(i) + w(j) \equiv c \bmod n$ e, portanto, $c = w((i + j) \text{mod} n)$.

Agora, assuma que a segunda afirmação é verdadeira. Mostremos que $Ap(S, n) \subseteq C$. Se $s \in Ap(S, n) \subset S$, então existe $c_1, ..., c_t \in C$ tal que $s = \sum_{i=1}^{t} c_i$. Fazendo aplicações sucessivas da condição 2', temos que $s = kn + c$ com $c \in C$ e $k \in \mathbb{N}$. Como $s \in Ap(S, n)$, k deve ser zero e portanto $s = c \in C$. Como visto no Lema 3, a cardinalidade de $Ap(S, n)$ é n. Como a cardinalidade de C também é n e $Ap(S, n) \subseteq C$, podemos concluir que $Ap(S, n)$ é igual a C. □

Vimos na Proposição 9, que os conjuntos Apéry de multiplicidade em semigrupos numéricos com S-dimensão máxima tem formas especiais. Isso juntamente com a última caracterização do conjunto Apéry nos da uma maneira de distinguir semigrupos numéricos com S-dimensão máxima olhando para o conjunto Apéry de suas multiplicidades.

Corolário 5. *Seja* S *um semigrupo numérico com multiplicidade* m *e considere que* $Ap(S, m) = \{w(0), = 0, w(1), ..., w(m-1)\}$ *com* $w(i) \equiv i \bmod m$ *para todo* $i \in \{1, ..., m-1\}$*. Então,* S *tem S-dimensão se, e somente se, para todo* $i, j \in \{1, ..., m-1\}$, $w(i) + w(j) > w((i + j) \text{ mod } m)$.

Demonstração. A necessidade segue das proposições 9 e 10. Pelo Lema 4, sabemos que $S = \langle m, w(1), ..., w(m-1) \rangle \}$. Da condição $w(i) + w(j) > w((i+j) \pmod{m})$, deduzimos que $\{m, w(1), ..., w(m-1)\}$ é um sistema minimal de geradores de S. Portanto, S tem S-dimensão máxima. □

A Proposição 10 e o Corolário 5 podem ser usados para construir um semigrupo numérico com S-dimensão máxima a partir de um semigrupo numérico arbitrário.

Corolário 6. *Seja S um semigrupo numérico e tome n um inteiro positivo de S. Então, $\langle n, w(1)+n, ..., w(n-1)+n \rangle$ é um semigrupo numérico com S-dimensão máxima, onde para todo $i \in \{1, ..., n-1\}, w(i)$ é um elemento de $Ap(S, n)$ congruente a i módulo n.*

Exemplo 9. *Sejam a e b dois números inteiros positivos maiores que um com $mdc\{a, b\} = 1$. Sabemos que $Ap(\langle a, b \rangle, a) = \{0, b, 2b, ..., (a-1)b\}$. Pelo Corolário 6,*

$$\langle a, a+b, a+2b, ..., a+(a-1)b \rangle$$

tem S-dimensão máxima.

Em um semigrupo numérico com S-dimensão máxima podemos realizar uma espécie de operação inversa.

Corolário 7. *Seja S um semigrupo numérico com S-dimensão máxima e multiplicidade m. Para todos $i \in \{1, ..., m-1\}$, escrevendo $w(i)$ para o único elemento em $Ap(S, m)$ congruente a i módulo m. Defina $T = \langle m, w(1)-m, ..., w(m-1)-m \rangle$. Então, T é um semigrupo numérico com $Ap(T, m) = \{0, w(1)-m, ..., w(m-1)-m\}$.*

Demonstração. A prova segue diretamente da Proposição 10 e do Corolário 5. □

A partir dos dois últimos resultados e da Proposição 3, obtemos a seguinte correspondência.

Corolário 8. *Existe uma correspondência de um para um entre o conjunto dos semigrupos numéricos com multiplicidade m e número de Frobenius f, e o conjunto dos semigrupos numéricos com S-dimensão máxima, número de Frobenius $f+m$, multiplicidade m e o restante dos geradores minimais maiores que $2m$.*

Observação 3. *Se queremos construir o conjunto de todos os semigrupos numéricos, o resultado anterior nos diz que é suficiente construir aqueles com S-dimensão máxima. Em outras palavras, semigrupos numéricos com S-dimenão máxima podem ser usados para representar toda a classe de semigrupos numéricos.*

Proposição 11. *Seja S um semigurpo númerico. As seguintes condições são equivalentes.*

1. *S tem S-dimensão máxima.*
2. *Para todos $x, y \in S^*, x+y-m(S) \in S$.*
3. *$-m(S)+S^*$ é um semigrupo numérico.*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2). Se $x - m(S) \in S$ ou $y - m(S) \in S$ então 2) segue de forma trivial. Assumindo agora que x e $y \in Ap(S, m(S))$. Pelo Corolário 5, temos que, como S tem S-dimensão máxima, então tomando $x = w(i)$ e $y = w(j)$, segue que $w(i) + w(j) > w((i + j) \text{mod } m(S))$. Logo $x + y > m(S) \Rightarrow x + y - m(S) \in S$.

2)$\Rightarrow$ 3). Como $m(S) \in S$, temos que $0 = -m(S) + m(S) \in -m(S) + S^*$. Dados $x, y \in -m(S) + S^*$, temos que existem $x', y' \in S^*$ tal que $x = -m(S) + x'$, $y = -m(S) + y'$. Assim $x + y = -m(S) + x' - m(S) + y' = -m(S) + (-m(S) + x' + y')$. Pela hipótese, temos que $(-m(S) + x' + y') \in S^*$ logo $x + y \in -m(S) + S^*$. Por fim, como $\mathbb{N} \setminus S^*$ é finito, temos que $\mathbb{N} \setminus -m(S) + S^*$ é finito. Logo $-m(S) + S^*$ é um semigrupo numérico.

3) $\Rightarrow$ 1). Denotando por $w(i)$ o único elemento em $Ap(S, m(S))$ congruente a i módulo m, $1 \leq i \leq m - 1$. Se $w(i) + w(j) = w((i + j) \bmod m(S))$ para alguns $i, j \in \{1, ..., m(S) - 1\}$, então $w(i) - m(S) + w(j) - m(S) = w((i + j) \bmod m(S)) - 2m(S) \notin \{x - m(S) | x \in S^*\}$ que contradiz que o conjunto é um semigrupo numérico. Logo, o resultado segue novamente pelo Corolário 5 □

Se na última proposição usarmos T para denotar o semigrupo $-m(S) + S^*$, então $S = (m(S) + T) \cup \{0\}$. Com isso podemos fazer a seguinte caracterização.

Corolário 9. *Seja S um semigrupo numérico. Então, S tem S-dimensão máxima se, e somente se, existe um semigrupo numérico T e $t \in T \setminus \{0\}$ tal que $S = (t + T) \cup \{0\}$.*

Exemplo 10. *Seja $S = \langle 5, 7, 11 \rangle = \{0, 5, 7, 11, 10, 11, 12, 14, 15, ...\}$. Então $T = (10+S) \cup \{0\} = \{0, 10, 15, 17, 20, 21, 22, 24, 25, ...\}$ é um semigrupo numérico com S-dimensão máxima.*

Lema 7. *Seja S e T semigrupos numéricos. Tome $s \in S^*$ e $t \in T^*$. Então $(s + S) \cup \{0\} = (t + T) \cup \{0\}$ se e somente se $S = T$ e $s = t$.*

Demonstração. Assume que $(s + S) \cup \{0\} = (t + T) \cup \{0\}$. Note que $m((s + S) \cup \{0\}) = s$ e $m((t + T) \cup \{0\}) = t$. Portanto, $s = t$. Além disso, $S = -s + (s + S) = -s + (t + T) = -t + (t + T) = T$. A recíproca é trivial. □

Definição 1. *Seja S um semigrupo numérico. Um subconjunto $I \neq \varnothing$ de S é um ideal de S se $I + S = \{x + s | x \in I \text{ e } s \in S\} \subseteq I$.*

Se S é um semigrupo numérico e s é um elemento de S diferente de zero, então $s + S$ é um ideal de S. Esse ideal é chamado de ideal principal de S. Semigrupos numéricos que são da forma $(x + S) \cup \{0\}$ com S sendo um semigrupo numérico e x um elemento de S diferente de zero são chamados de pi-semigrupos. Dado um semigrupo numérico S definimos

$$\mathcal{P}I(S) = \{(x + S) \cup \{0\} | x \in S^*\}.$$

Se $x \neq 1$, é possivel mostrar que $F((x+S) \cup \{0\}) = F(S) + x$ e $g((x+S) \cup \{0\}) = g(S) + x - 1$. Com isso segue que se dois elementos S_1 e S_2 em $\mathcal{P}I(S)$ coincidem se, e somente se, têm o mesmo número de Frobenius, ou equivalentemente, o mesmo gênero.

Proposição 12. *O conjunto* $\{\mathcal{PI}(S)|S$ *é um semigrupo numérico*$\}$ *é uma partição do conjunto dos semigrupos numéricos com S-dimensão máxima.*

Demonstração. Pelo Corolário 9 temos que S tem S-dimensão máxima se, e somente se, existir um semigrupo numérico T e $t \in T^*$ tal que $S = (t+T) \cup \{0\}$. Pelo Lema 7 temos que isso é feita de maneira única e elementos diferentes geram semigrupos numéricos diferentes, logo o conjunto $\{\mathcal{PI}(S)|S$é um semigrupo numérico$\}$ é uma partição do conjuntos dos semigrupos numéricos com S-dimensão máxima. □

Esse resultado nos diz que para um semigrupo numérico fixo podemos obter infinitos semigrupos numéricos com S-dimensão máxima, e que semigrupos numéricos produzem diferentes semigrupos com S-dimensão máxima. Todo semigrupo numérico com S-dimensão máxima são construidos nesse caminho.

3.2 Semigrupos Numéricos Arf

Um semigrupo numérico S é dito *Arf* se para todo $x, y, z \in S$, com $x \geq y \geq z$, tem-se que $x + y - z$ está em S. Nessa seção vamos apresentar algumas caracterizações para essa propriedade. Para um semigrupo numérico vamos mostrar como calcular o menor semigrupo numérico Arf que o contém.

Pela Proposição 11 segue que um semigrupo numérico Arf tem S-dimensão máxima. O exemplo a seguir nos mostra que a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 11. *Se* m *é um inteiro positivo, então o semigrupo numérico* $\{0, m, m+1, ...\}$ *é um semigrupo com a propriedade Arf. Observe que o semigrupo* T *do Exemplo 10 tem S-dimemsão máxima porém não é Arf, pois* $10 + 10 - 15 = 5 \notin T$.

Dado um inteiro positivo x e um semigrupo numérico S, o semigrupo numérico $(x+S) \cup \{0\}$ é Arf se, e somente se, S é Arf. Esse resultado segue diretamente da definição de Arf.

Proposição 13. *Seja* S *um semigrupo numérico e tome* $x \in S^*$. *Então,* S *é Arf se, e somente se,* $S' = (x+S) \cup \{0\}$ *é Arf. Em particular,* S *é Arf se, e somente se, todos os elementos em* $\mathcal{PI}(S)$ *são Arf.*

Seja S um semigrupo numérico Arf. Então, S tem S-dimensão máxima. Pelo Corolário 9 temos que existe um semigrupo numérico S' e $x \in S' \setminus \{0\}$ tal que $S = (x+S') \cup \{0\}$. Se $S \neq \mathbb{N}$, então $S \subsetneq S'$. Como visto na Proposição 13, S' é é um semigrupo numérico Arf. Podemos repetir esse argumento com S', obtemos um semigrupo numérico Arf S'' e $y \in S'' \setminus \{0\}$ tal que $S' = (y + S'') \cup \{0\}$. Como $\mathbb{N} \setminus S$ tem finitos elementos, esse processo é finito, obtemos um semigrupo numérico Arf estacionário: $S_0 = S \subsetneq S' \subsetneq \cdots \subsetneq S_n = \mathbb{N}$, com $S_i = (x_{i+1} + S_{i+1}) \cup \{0\}$ para algum $x_{i+1} \in S_{i+1} \setminus \{0\}$. O seguinte resultado deriva dessa ideia.

Corolário 10. *Seja* S *um subconjunto próprio de* $\mathbb{N}$. S *é um semigrupo numérico Arf se, e somente se, existe inteiros positivos* $x_1, ..., x_n$, *tais que*

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + \cdots + x_{n-1}, x_1 + ... + x_n, \rightarrow\}$$

e $x_i \in \{x_{i+1}, x_{i+1} + x_{i+2}, ..., x_{i+1} + \cdots + x_n, ...\}$ *para todos* $i \in \{1, ..., n\}$.

Demonstração. $\Rightarrow$ Segue da construção da cadeia $S_0 = S \subsetneq S' \subsetneq \cdots \subsetneq S_n = \mathbb{N}$ com $S_i = (x_{i+1} + S_{i+1}) \cup \{0\}$ e $x_{i+1} \in S_{i+1} \setminus \{0\}$.

$\Leftarrow$ Note que $S = (x_1 + (x_2 + (\cdots((x_n + \mathbb{N} \cup \{0\})\cdots) \cup \{0\}$. Como $\mathbb{N}$ é Arf, aplicando a Proposição 13 várias vezes, obtemos que S é Arf. □

Exemplo 12. *Tome* $x_1 = 7$, $x_2 = 4$ *e* $x_3 = 2$. *Essa sequência satisfaz a condição dada no Corolário 10. Então,* $S = \{0, 7, 11, 13, 14, ...\}$ *é um semigrupo numérico com a propriedade Arf. Pela Proposição 13,* $(7 + S) \cup \{0\}$, $(11 + S) \cup \{0\}$, $(13 + S) \cup \{0\}, ...$ *também são semigrupos numéricos Arf. A Proposição 13 afirma que* $T = -7 + S^*$ *é um semigrupo numérico Arf, pois* $S = (7 + T) \cup \{0\}$ *é também um semigrupo numérico Arf.*

Lembramos que a interseção de uma quantidade finita de semigrupos numéricos é um semigrupo numérico. Isto tembém vale para a interseção de um número finito de semigrupos numéricos Arf .

Proposição 14. *A interseção de um número finito de semigrupos numéricos Arf é um semigrupo numérico Arf.*

Demonstração. Suponha que $S_1, \ldots, S_n$ sejam Arf. Agora sejam $x, y, z \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, com $x \geq y \geq z$. Daí, como $x + y - z \in S_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, já que S_i é Arf para todo i, temos que $x + y - z \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ e o resultado segue. □

Seja S um semigrupo numérico. Desde que o complementar de S em $\mathbb{N}$ é finito, o conjunto de semigrupos numéricos Arf contendo S também é finito. A Proposição 14 garante que a interseção deses semigrupos é de novo um semigrupo numérico Arf. Vamos denotar essa interseção por $Arf(S)$ e chamaremos de *fecho Arf* de S. Observe que o fecho Arf é o menor semigrupo numérico Arf contendo S.

Se X é um subconjutno não vazio de inteiros não negativos com $\text{mdc}(X) = 1$, então $\langle X \rangle$ é um semigrupo numérico. Qualquer semigrupo numérico Arf contendo X deve conter $\langle X \rangle$. Então, faz sentido falar sobre o fecho Arf de X, e define como $Arf(\langle X \rangle)$. Vamos fazer um abuso da notação e vamos escrever $Arf(X)$ para denotar $Arf(\langle X \rangle)$.

Calculando o conjunto de semigrupos numéricos que contém um dado semigrupo numérico pode ser trabalhoso. Ainda mais se quisermos decidir quais deles são Arf e então calcular a interseção deles ou, decidir qual deles é o menor. Vamos agora descrever uma alternativa para calcular o fecho Arf de uma forma mais eficaz.

Lema 8. *Seja* S *um submonóide de* $\mathbb{N}$. *Então,*

$$S' = \{x + y - z | x, y, z \in S, x \geq y \geq z\}$$

é um submonóide de $\mathbb{N}$ *e* $S \subseteq S'$.

Demonstração. Seja $x \in S$. Então $x+x-x \in S'$, e logo $S \subseteq S'$. Claro que $S' \subseteq \mathbb{N}$. Agora tome $a, b \in S'$. Pela definição de S', existem $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S$, tal que $x_i \geq y_i \geq z_i$, $i \in \{1, 2\}$, e $a = x_1 + y_1 - z_1$, $b = x_2 + y_2 - z_2$. Portanto $a + b = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$. Veja que $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$ e $z_1 + z_2 \in S$ e $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$. Isso prova que $a + b \in S'$ Portanto, S' é um submonóide. □

Para um dado submonóide S de $\mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos S^n da seguinte forma:

- $S^0 = S$,
- $S^{n+1} = (S^n)'$.

Veremos que isso se torna estacionário no fecho Arf de S.

Proposição 15. *Seja* S *um semigrupo numérico. Então existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $S^k = Arf(S)$.

Demonstração. Usando indução sobre n podemos mostrar facilmente que $S^n \subseteq Arf(S)$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 8, $S^n \subseteq S^{n-1}$ e $S \subseteq S^n$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Como apontamos anteriormente , o número de semigrupos numéricos contendo S é finito, de onde podemos concluir que $S^k = S^{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Segue que S^k é um semigrupo numérico Arf. Como $S^k \subseteq Arf(S)$ e $Arf(S)$ é o menor semigrupo numérico Arf contendo S, concluímos que $S^k = Arf(S)$. □

Embora essa seja uma boa caracteriação, ainda não mostramos como calcular S^k. Portanto, é necessário mais resultados para encontrar uma maneira eficaz de calcular o fecho Arf de um semigrupo numérico.

Lema 9. *Seja* $m, r_1, ..., r_p, n \in \mathbb{N}$ *tal que* $mdc(\{m, r_1, ..., r_p\}) = 1$. *Então*

$$m + \langle m, r_1, ..., r_p \rangle^n \subseteq Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p).$$

Demonstração. Provemos por indução sobre n. Para $n = 0$ temos que provar que $m + \langle m, r_1, ..., r_p \rangle \subseteq Arf(m, m+r_1, ..., m+r_p)$. Seja $i, j \in \{1, ..., p\}$. Temos que $m, m+r_i, m+r_j \in Arf(m, m+r_1, ..., m+r_p)$, onde $m+r_i+r_j = (m+r_i)+(m+r_j)-m \in Arf(m, m+r_1, ..., m+r_p)$. Agora para $k \in \{1, ..., p\}$, $m, m + r_i + r_j, m + r_k \in Arf(m, m + r_1, ..., m + r_k)$ e portanto $m + r_i + r_j + r_k = (m + r_i + r_j) + (m + r_k) - m \in Arf(m, m + r_1, ..., m + r_k)$. Repetindo esse processo temos que para todo $a, a_1, ..., a_p \in \mathbb{N}$ temos que $(a + 1)m + a_1 r_1 + \cdots + a_p r_p \in Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p)$, e logo $m + \langle m, r_1, ..., r_p \rangle \subseteq Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p)$.

Agora assuma que $m + \langle m, r_1, ..., r_p \rangle^n \subseteq Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p)$, provemos que $m + \langle m, r_1, ..., r_p \rangle^{n+1} \subseteq Arf(m, m+r_1, ..., m+r_p)$. Seja $a \in m+\langle m, r_1, ..., r_p \rangle^{n+1}$. Então $a = m+b$ com $b \in \langle m, r_1, ..., r_p \rangle^{n+1}$. Portanto existem $x, y, z \in \langle m, r_1, ..., r_p \rangle^n$ tal que $x \geq y \geq z$ e $x + y - z = b$. Dessa forma $a = m + b = m + x + y - z = (m + x) + (m + y) - (m - z) \in Arf(m, m+r_1, ..., m+r_p)$, pela hipótese de indução $m+x, m+y, m+z \in m+\langle m, r_1, ..., r_p \rangle^n \subseteq Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p)$. □

A partir disso podemos dar um procedimento para calcular o fecho Arf que tem aparência de um algoritmo de Euclides estendido.

Proposição 16. *Seja* $m, r_1, ..., r_p$ *inteiros não negativos com maior divisor comum um. Então*

$$Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p) = (m + Arf(m, r_1, ..., r_p)) \cup \{0\}.$$

Demonstração. Usando a Proposição 15 e o Lema 9, obtemos que $(m + Arf(m + r_1, ..., m + r_p)) \cup \{0\} \subseteq Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p)$. Para a outra inclusão observe que $m, m + r_1, ..., m + r_p \in (m + Arf(m, r_1, ..., r_p)) \cup \{0\}$, que pela proposição 13 é um semigrupo numérico Arf. Segue-se que $Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p) = (m + Arf(m, r_1, ..., r_p)) \cup \{0\}$. □

O número de Frobenius de um fecho Arf pode ser calculado então da seguinte forma.

Corolário 11. *Seja* $m, r_1, ..., r_p$ *inteiros não negativos com maior divisor comum um. Então,*

$$F(Arf(m, m + r_1, ..., m + r_p)) = m + F(Arf(m, r_1, ..., r_p)).$$

Temos agora todos os ingredientes necessários para dar uma forma de calcular os elementos do fecho Arf de qualquer subconjunto de inteiros não negativos com maior divisor comum um. Seja $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\text{mdc}(X) = 1$. Definimos a seguinte sequencia de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

- $A_1 = X$,
- $A_{n+1} = (\{x - minA_n | x \in A_n\} \setminus \{0\}) \cup \{minA_n\}$.

Como consequência do algoritomo de Euclides para calcular $\text{mdc}(X)$, nós obtemos que existe $q = min\{k \in \mathbb{N} | 1 \in A_k\}$.

Proposição 17. *Usando a notação acima temos*

$$Arf(X) = \{0, minA_1, minA_1 + minA_2, ..., minA_1 + \cdots + minA_{q-1}, minA_1 + \cdots + minA_{q-1} + 1, ...\}.$$

Demonstração. Desde que $1 \in A_q$, $Arf(A_q) = \mathbb{N}$. Temos pela proposição 16, $Arf(A_{q-1}) = minA_{q-1} + \mathbb{N} \cup \{0\}$, Isso implica que

$$Arf(A_{q-1}) = \{0, minA_{q-1}, minA_{q-1} + 1, ...\}$$

Assumindo como hipótese de indução que

$$Arf(A_{q-i}) = \{0, minA_{q-i}, minA_{q-i} + minA_{q-i+1}, ..., minA_{q-i} + \cdots + minA_{q-i}, minA_{q-i} + \cdots + minA_{q-i} + 1, ...\}.$$

Devemos mostrar que

$$Arf(A_{q-i-1}) = \{0, minA_{q-i-1}, minA_{q-i-1} + minA_{q-i}, ..., minA_{q-i-1} + \cdots + minA_{q-1}, minA_{q-i-1} + \cdots + minA_{q-1} + 1, ...\}.$$

Pela Proposição 16 sabemos que $Arf(A_{q-i-1}) = (minA_{q-i-1} + Arf(A_{q-i})) \cup \{0\}$. Usando agora a hipótese de indução e o Corolário 11 nós obtemos o resultado desejado. □

Exemplo 13. *Vamos calcular* $Arf(11, 29, 44)$. $A_1 = \{11, 29, 44\}$, $min_{\leq} A_1 = 11$,

$A_2 = \{11, 18, 33\}$, $min_{\leq} A_2 = 11$,

$A_3 = \{11, 7, 22\}$, $min_{\leq} A_3 = 7$,

$A_4 = \{4, 7, 15\}$, $min_{\leq} A_4 = 4$,

$A_5 = \{4, 3, 11\}$, $min_{\leq} A_5 = 3$,

$A_6 = \{1, 3, 8\}$.

Portanto, $Arf(11, 29, 44) = \{0, 11, 22, 29, 33, 36, 37, ...\}$.

3.3 Semigrupos Numéricos Saturados

Um semigrupo numérico S é dito *saturado* se a seguinte condição é satisfeita: se $s, s_1, ..., s_r \in S$ são tais que $s_i \leq s$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$ e $z_1, ..., z_r \in \mathbb{Z}$ são tais que $z_1 s_1 + \cdots + z_r s_r \geq 0$, então $s + z_1 s_1 + \cdots + z_r s_r \in S$.

Exemplo 14. *O semigrupo numérico* $S = \langle 7, 11, 13, 15, 16, 17, 19 \rangle$ *que aparece no Exemplo 12 é um semigrupo Arf mas não é um semigrupo saturado. Note que* $7, 11 \in S$ *e* $12 = 11 + 2 \times 11 - 3 \times 7 \notin S$.

Lema 10. *Todo semigrupo numérico saturado é um semigrupo numérico Arf.*

Demonstração. Seja S um semigrupo numérico saturado e sejam $x, y, z \in S$ com $x \geq y \geq z$. Logo, $x + y - z \geq 0$ e como S é saturado segue que $x + y - z \in S$ e temos que S é Arf. □

Como todo semigrupo numérico saturado é Arf, concluímos que todo semigrupo saturado tem S-dimensão máxima.

Vamos dar uma caracterização para esse tipo de semigrupos numéricos. Para $A \subseteq \mathbb{N}$ e $a \in A \setminus \{0\}$, definimos

$$d_A(a) = \text{mdc}\{x \in A | x \leq a\}.$$

Lema 11. *Seja* S *um semigrupo numérico saturado e seja* $s \in S$. *Então,* $s + d_S(s) \in S$.

Demonstração. Seja $\{s_1, ..., s_r\} = \{x \in S | x \leq s\}$. Pela identidade de Bézout, existe inteiros $z_1, ..., z_r$ tal que $z_1 s_1 + \cdots + z_r s_r = d_S(s)$. Como S é saturado, nós temos $s + d_S(s) \in S$. □

Vamos ver que essa propriedade caracteriza os semigrupos numéricos saturados. Precisamos de alguns lemas prévios.

Lema 12. *Seja* A *um conjunto não vazio de inteiros positivos tal que* $mdc(A) = 1$ *e* $a + d_A(a) \in A$ *para todo* $a \in A$. *Então,* $a + kd_A(a) \in A$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *e* $A \cup \{0\}$ *é um semigrupo numérico.*

Demonstração. Provemos por indução sobre $d_A(a)$.

Note que $d_A(a) > 0$. Vamos mostrar que se $d_A(a) = 1$, então $a + k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para isso vamos fazer uma indução sobre k. Para $k = 0$, o resultado é óbvio. Considere agora que $a + k \in A$. Desde que $0 \neq d_A(a + k) \leq d_A(a) = 1$, temos que $d_A(a + k) = 1$. Consequentemente $a + k + 1 = a + k + d_A(a + k) \in A$.

Agora assuma que se $a' \in A$ e $d_A(a') < d_A(a)$, então $a' + kd_A(a') \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $d_A(a) \geq 2$ e vamos provar que $a + kd_A(a) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desde que $\mathrm{mdc}(A) = 1$, existe $b \in A$ tal que $d_A(b) = 1$. Se $d_A(a+kd_A(a)) = d_A(a)$ e $a+kd_A(a) \in A$, então $a + (k+1)d_A(a) = a + kd_A(a) + d_A(a + kd_A(a)) \in A$. A partir dessas duas observações fazendo $a' = a + td_A(a)$, deduzimos que existe um menor inteiro positivo t tal que $a + td_A(a) \in A$ e $d_A(a + td_A(a)) < d_A(a)$. Como $d_A(a + td_A(a)) < d_A(a)$, usando a hipótese de indução, obtemos que $(a + td_A(a)) + kd_A(a + td_A(a)) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Claro que $d_A(a + td_A(a))$ divide $d_A(a)$, logo $d_A(a) = ld_A(a + td_A(a))$ para algum inteiro positivo l. Consequentemente, $a+td_A(a)+\frac{k}{l}d_A(a) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto $a+(t+n)d_A(a) \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de t, segue que $a+kd_A(a) \in A$ para todo $k \in \{1, ..., t\}$. Concluímos que $a+kd_A(a) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Vamos provar que $A \cup \{0\}$ é um semigrupo numérico. Desde que $\mathrm{mdc}(A) = 1$, é suficiente provar que para qualquer $a, b \in A$, $a + b \in A$. Assuma que $a \leq b$. Então $d_A(b)$ divide $d_A(a)$ e portanto existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $d_A(a) = \lambda d_A(b)$. Note também que $d_A(a)$ divide a, consequentemente $a = \mu d_A(a)$ para algum $\mu \in \mathbb{N}$. Portanto $a + b = \mu d_A(a) + b = \mu\lambda d_A(b) + b$, que pelo que já provamos, pertence a A. □

Proposição 18. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in A$ e $mdc(A) = 1$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *A é um semigrupo numérico saturado.*
2. *$a + d_A(a) \in A$ para todo $a \in A \setminus \{0\}$.*
3. *$a + kd_A(a) \in A$ para todo $a \in A \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. 1) ⇒ 2). Segue do Lema 11.

2) ⇒ 3). Segue do Lema 12.

3) ⇒ 1). Pelo Lema 12, sabemos que A é um semigrupo numérico. Tome $a, a_1, ..., a_r \in A$ com $a_i \leq a$ para todo $i \in \{1, ...r\}$, e tome $z_1, ..., z_r$ inteiros tal que $z_1a_1 + \cdots + z_ra_r\ be 0$. Desde que $a_i \leq a$, segue que $d_A(a)$ divide a_i para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Consequentemente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_1a_1 + \cdots + z_ra_r = kd_A(a)$, e portanto $a + z_1a_1 + \cdots + z_ra_r = a + kd_A(a) \in A$. Isso prova que A é saturado. □

Estamos focados em obter uma caracterização similar as dadas pela Proposição13 e pelo Corolário 10 para os semigrupos numéricos Arf. Veremos que nesse sentido as caracterização não é tão generosa.

Proposição 19. *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes.*

1. *S é saturado.*
2. *Existe $x \in S^*$ tal que $(x + S) \cup \{0\}$ é um semigrupo numérico saturado.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2)$. Assuma que $S = \{0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots\}$. Nós provamos que $(s_1+S)\cup\{0\} = \{0 < s_1 < s_1+s_1 < s_1+s_2 < \cdots < s_1+s_n < \cdots\}$ é saturado. Pela Proposição 18, é suficiente mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, os elementos $s_1 + s_n + \text{mdc}\{0, s_1, ..., s_n\}$ são encontrados em $(s_1 + S) \cup \{0\}$. Desde que S é saturado, $s_n + \text{mdc}\{0, s_1, ..., s_n\} \in S$. Além disso, $\text{mdc}\{0, s_1, s_1 + s_1, ..., s_1 + s_n\} = \text{mdc}\{0, s_1, s_2, ..., s_n\}$, onde $s_1 + s_n + \text{mdc}\{0, s_1, s_1 + s + 1, ..., s_1 + s_n\} \in (s_1 + S) \cup \{0\}$.

$2) \Rightarrow 1)$. Se $S = \{0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots\}$, então $(x + S) \cup \{0\} = \{0 < x < x + s_1 < x + s_2 < \cdots < x + s_n < \cdots\}$. Desde que $\text{mdc}\{0, x, x + s_1, ..., x + s_n\} = \text{mdc}\{0, x, s_1, ..., s_n\}$, temos que $\text{mdc}\{0, x, x + s_1, ..., x + s_n\}$ divide mdc $\{0, s_1, s_2, ..., s_n\}$, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k(\text{mdc}\{0, x, x+s_1, ..., x+s_n\}) = \text{mdc}\{0, s_1, ..., s_n\}$. Pela Proposição 18, é suficiente mostrar que $s_n+\text{mdc}\{0, s_1, ..., s_n\} \in S$ para todo n. Como $(x+S)\cup\{0\}$ é saturado, pela Proposição 18, temos que $x + s_n + k(\text{mdc}\{0, x, x + s_1, ..., x + s_n\}) \in (x + S) \cup \{0\}$ e portanto $s_n + \text{mdc}\{0, s_1, ..., s_n\} \in S$. $\square$

Como conseguência da demonstração anterior obtemos o seguinte resultado.

Corolário 12. *Seja S um semigrupo numérico. Então S é saturado se e somente se $(m(S) + S \cup \{0\}$ é saturado.*

Exemplo 15. *O semigrupo $S = \langle 5, 7, 8, 9, 11\rangle$ Temos que $5+d_S(5) = 10 \in S$, $7+d_S(7) = 8 \in S$, $8+d_S(8) = 9 \in S$, $9+d_S(9) = 10 \in S$ e $11+d_S(11) = 12 \in S$. Assim, pela Proposição 18 temos que S é saturado. Pelo Corolário 12 temos que ambos $(5 + S) \cup \{0\}$ e $-5 + S^*$ são saturados.*

Corolário 13. *Seja S um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$. Então S é um semigrupo numérico saturado se e somente se existem inteiros positivos $x_1, ..., x_n$ tal que*

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + \cdots + x_n, x_1 + \cdots + x_n + 1, ...\}$$

e

$$mdc\{x_1, ..., x_k\} \in \{x_{k+1} + x_{k+2}, ..., x_{k+1} + \cdots x_n, , x_{k+1} + \cdots x_n + 1, ...\}$$

para todos $k \in \{1, ..., n\}$.

Demonstração. $\Rightarrow$ Desde que S é um semigrupo numérico saturado, S é também Arf, de onde, pelo Corolário 10 existem inteiros positivos $x_1, ...x_n$ tais que

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + \cdots + x_n, x_1 + \cdots + x_n + 1, ...\}$$

Como S é saturado, para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $(x_1 + \cdots + x_k\} + \text{mdc}\{0, x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + \cdots + x_k\} \in S$ e desde que $\text{mdc}\{0, x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + \cdots + x_k\} = \text{mdc}\{x_1, ..., x_k\}$, temos que $(x_1 + \cdots + x_k) + \text{mdc}\{x_1, ..., x_k\} \in \{0, x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + \cdots + x_n, x_1 + \cdots + x_n + 1, ...\}$, ou equivalentemente, $(x_1 + \cdots + x_k) \in \{x_{k+1} + x_{k+2}, ..., x_{k+1} + \cdots x_n, , x_{k+1} + \cdots x_n + 1, ...\}$.

$\Leftarrow$. Usando a Proposição 18, é suficiente mostrar que $(x_1 + \cdots + x_k) + \text{mdc}\{0, x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + \cdots x_k\} \in S$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$. Como apontado acima, isso é equivalente a mostrar que $(x_1 + \cdots + x_k) + \text{mdc}\{x_1, ..., x_k\} \in S$, e isso segue da hipótese. $\square$

Como para os semigrupos numéricos Arf, uma interseção finita de semigrupos numéricos saturados é novamente saturado. Esse resultado segue diretamente da definição.

Proposição 20. *A interseção de finitos semigrupos numéricos saturados é um semigrupo numérico saturado.*

Isso permite definirmos o fecho saturado de um semigrupo numérico (ou de um subconjunto de inteiros não negativos com o maior divisor comum igual a 1), como feito para os semigrupos numéricos Arf. Dado um semigrupo numérico S, vamos denotar por $Sat(S)$ a interseção de todos os semigrupos saturados que contem S, ou em outras palavras, o menor semigrupo numérico saturado que contém S. Vamos chamar esse semigrupo de fecho saturado de S.

O fecho saturado de um semigrupo pode ser calculado como se segue.

Proposição 21. *Seja $n_1 < n_2 < \cdots < n_e$ inteiros positivos tais que $mdc(n_1, ..., n_e) = 1$. Para todo $i \in \{1, ..., e\}$, o conjunto $d_i = mdc(n_1, ...n_i)$ e para todo $j \in \{1, ..., e-1\}$ define $k_j = max\{k \in \mathbb{N} | n_j + kd_j < n_{j+1}\}$. Então*

$$Sat(n_1, ..., n_e) = \{0, n_1, n_1 + d_1, ..., n_1 + k_1d_1, n_2, n_2 + d_2, ..., n_2 + k_2d_2, ..., n_{e-1}, n_{e-1} + d_{e-1}, ..., n_{e-1} + k_{e-1}d_{e-1}, n_e, n_e + 1, n_e + 2, ...\}.$$

Demonstração. Seja

$$A = \{0, n_1, n_1 + d_1, ..., n_1 + k_1d_1, n_2, n_2 + d_2, ..., n_2 + k_2d_2, ..., n_{e-1}, n_{e-1} + d_{e-1}, ..., n_{e-1} + k_{e-1}d_{e-1}, n_e, n_e + 1, n_e + 2, ...\}$$

Claro que A é não vazio, $0 \in A$, $\text{mdc}(A) = 1$ e $a + d_a(a) \in A$ para todo $a \in A$. Pela proposição 18, A é um semigrupo numérico saturado, e como $\{n_1, ..., n_e\} \subset A$, temos que $Sat(n_1, ..., n_e) \subseteq A$. Para a outra inclusão, tome $a \in A$. então existe $i \in \{1, ..., e\}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $a = n_i + kd_i$. Desde que $\{n_1, ..., n_e\} \subseteq Sat(n_1, ..., n_e)$, temos que $d_{Sat(n_1,...,n_e)}(n_i)$ divide d_i, de onde existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $d_i = ld_{Sat(n_1,...,n_e)}(n_i)$. Pela Proposição 18, sabemos que $n_i + td_{Sat(n_1,...,n_e)}(n_i) \in Sat(n_1, ...n_e)$ para todo $t \in \mathbb{N}$ e portanto $a = n_ikd_i = n_i + kld_{Sat(n_1,...,n_e)}(n_i) \in Sat(n_1, ..., n_e)$. □

Exemplo 16. *$Sat(\{12, 20, 26, 35\}) = \{0, 12, 20, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 36, ...\}$, pois $d_1 = mdc(12) = 0$, $d_2 = mdc(12, 20) = 4$, $d_3 = mdc(12, 20, 26) = 2$, $d_4 = mdc(12, 20, 26, 35) = 1$, $k_1 = 7, k_2 = 1, k_3 = 4$ e assim segue pela Proposição21.*

4. Semigrupos Numéricos Irredutíveis

Semigrupos numéricos simétricos são provavelmente os semigrupos numéricos mais estudados na literatura. A motivação e a introdução desses semigrupos devem-se principalmente a um resultado de E. Kunz (1970), que diz que um anel local noetheriano analiticamente irredutível e unidimensional é Gorenstein se, e somente se, seu semigrupo de valor for simétrico. Semigrupos simétricos sempre têm número Frobenius ímpar, fato que motiva a definição de semigrupos numéricos pseudo-simétricos. Tais semigrupos também têm sua interpretação em anéis locais unidimensionais, uma vez que um semigrupo numérico é pseudo-simétrico se, e somente se, seu anel de semigrupo for um anel de Kunz. [3]

O conceito de semigrupos numéricos irredutíveis foi feita por J. C. Rosales e M. B. Branco em um artigo do início desse século. Como semigrupos numéricos irredutíveis reúnem semigrupos simétricos e pseudo-simétricos, a importância do estudo desses semigrupos é algo natural.

4.1 Semigrupos Numéricos Simétricos e Pseudo-Simétricos

Um semigrupo numérico é dito *irredutível* se não puder ser expresso como uma interseção de dois semigrupos numéricos que o contenham propriamente.

Vamos mostrar que semigrupos numéricos irredutíveis são maximais no conjunto dos semigrupos numéricos com numérico de Frobenius fixo. Primeiramente vamos provar que adicionando o número de Frobenius a um semigrupo numérico produz um semigrupo numérico.

Lema 13. *Seja S um semigrupo numérico diferente de $\mathbb{N}$. Então, $S\bigcup\{F(S)\}$ é novamente um semigrupo numérico.*

Demonstração. Como $\mathbb{N}\setminus S$ é finito, segue que $\mathbb{N}\setminus S\bigcup\{F(S)\}$ também é finito. Agora, sejam $a,b\in S\bigcup\{F(S)\}$. Se a ou b é $F(S)$ temos então que $a+b>F(S)$ e, portanto, $a+b\in S$. Logo, $a+b\in S\bigcup\{F(S)\}$. Se a e $b\in S$, então $a+b\in S\subseteq S\bigcup\{F(S)\}$, e por fim $0\in S\subseteq S\bigcup\{F(S)\}$. Isso mostra que $S\bigcup\{F(S)\}$ é um semigrupo numérico. □

Teorema 2. *Seja S um semigrupo numérico. Então as seguintes condições são equivalentes.*

1. *S é irredutível.*

2. *S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos com o número de Frobenius $F(S)$.*

3. *S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos que não contém $F(S)$.*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2). Seja T um semigrupo numérico tal que $S \subseteq T$ e $F(T) = F(S)$. Veja que $S = (S \bigcup \{F(S)\}) \bigcap T$. Como $S \neq S \bigcup \{F(S)\}$ e $S \subseteq T$ pela irredutibilidade de S segue que $S = T$.

2) $\Rightarrow$ 3). Seja T um semigrupo numérico que satisfaz $S \subseteq T$ e $F(S) \notin T$. Então, $T \bigcup \{F(S)+1, F(S)+2, \dots\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$. Veja que como $S \subseteq T$ e S é maximal segue que $S = T \bigcup \{F(S)+1, F(S)+2, \dots\}$. Como $\{F(S)+1, F(S)+2, \dots\} \subset S$ e S é irredutível segue que $S = T$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sejam S_1 e S_2 dois semigrupos numéricos que contém S propriamente. Pela maximalidade de S temos que $F(S) \in S_1$ e $F(S) \in S_2$. Logo, $S \neq S_1 \bigcap S_2$. □

Um semigrupo numérico é dito *simétrico* se é irredutível e $F(S)$ é ímpar e *pseudo-simétrico* se $F(S)$ for par.

Dado um semigrupo numérico S, se S não é irredutível, então pelo Teorema 2, temos que existe um semigrupo numérico irredutível T contendo S com $F(S) = F(T)$. O resultado abaixo pode ser visto como um procedimento para construir um semigrupo numérico irredutível.

Lema 14. *Seja S um semigrupo numérico e suponha que exista*

$$h = max\{x \in \mathbb{Z} \setminus S | F(S) - x \notin S \ e \ x \neq F(S)/2\}.$$

Então, $S \bigcup \{h\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$.

Demonstração. É fácil ver que $\mathbb{N} \setminus S \bigcup \{h\}$ é finito e $0 \in S \bigcup \{h\}$. Tome $H = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S | F(S) - x \notin S \ e \ x \neq F(S)/2\}$. Se $x \in H$ temos que $F(S) - x \notin S$ que implica que $F(S) - x \in \mathbb{Z} \setminus S$ e $F(S) - (F(S) - x) = x \notin S$. Logo $F(S) - x \in H$. Como x ou $F(S) - x$ são maiores que $F(S)/2$ segue que $h > F(S)/2$. Tome $s \in S \setminus \{0\}$. Se $h + s \notin S$ pela maximalidade de h temos $F(S) - (h+s) = t \in S$. Assim, $F(S) - h = t + s \in S$, que contradiz a definição de h. Se $2h \notin S$ de maneira análoga $F(S) - 2h = t \in S$. Contudo $h + t = F(S) - h$ que não pode pertencer a S, contradição. □

A próxima proposição nos da uma caracterização para os conceitos de semigrupos simétrico e pseudo-simétrico. Às vezes na literatura essas são dadas como definições.

Proposição 22. *Seja S um semigrupo numérico, então:*

1. *S é simétrico se, e somente se, $F(S)$ é ímpar e $x \in \mathbb{Z} \setminus S \Rightarrow F(S) - x \in S$.*

2. *S é pseudo-simétrico se, e somente se, $F(S)$ é par e $x \in \mathbb{Z} \setminus S \Rightarrow F(S) - x \in S$ ou $x = \dfrac{F(S)}{2}$.*

Demonstração. Provemos para o item 1 e 2 pode ser feito de maneira análoga.

($\Rightarrow$) Suponha que exista $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ tal que $F(S) - x \notin S$, então temos que existe um máximo h como definido no Lema 14. Consequentemente $S \cup \{h\}$ é semigrupo numérico com o número de Frobenius $F(S)$, contradizendo a maximalidade de S no Teorema 2.

($\Leftarrow$) Pelo Teorema 2 é suficiente mostrar que S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos que não contém $F(S)$. De fato, seja T um semigrupo com $S \subsetneq T$. Tome $x \in T \setminus S \subset \mathbb{Z} \setminus S$. Então por hipótese $F(S) - x \in S$ e $F(S) - x \in T$. Mas isso implica que $F(S) = x + (F(S) - x) \in T$. Contradição. $\square$

Com esse resultado podemos deduzir a seguinte caracterização alternativa.

Corolário 14. *Seja S um semigrupo numérico.*

1. *S é simétrico se, e somente se, $g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2}$.*

2. *S é pseudo-simétrico se, e somente se, $g(S) = \dfrac{F(S)+2}{2}$.*

Demonstração. Provemos para o primeiro item 1 e 2 pode ser feito de maneira análoga. Pela proposição anterior, temos que S é simétrico se, e somente se, $F(S)$ é ímpar e $x \in \mathbb{Z} \setminus S \Rightarrow F(S) - x \in S$, isso quer dizer que S é simétrico se, e somente se, o conjunto de lacunas forem dados por $\{x \in \mathbb{N} \setminus S | F(S) - x \in S$. Assim S é simétrico se, e somente se, as lacunas de S são $F(S), F(S)-1, F(S)-2, ..., \dfrac{F(S)+1}{2}$, logo S é simétrico se, e somente se, $g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2}$. $\square$

Observação 4. *Sabemos pelo Lema 5 que se S é um semigrupo numérico, então $g(S) \geq \dfrac{F(S)+1}{2}$. Como consequência do corolário anterior, temos que semigrupos numéricos irredutíveis são aqueles com o menor gênero em termos de seu número de Frobenius.*

A partir da Proposição 4 e do Corolário 14, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 15. *Todo semigrupo numérico gerado por dois elementos é simétrico.*

Exemplo 17. *O semigrupo numérico $\langle 4, 6, 7\rangle = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, ...\}$, tem gênero 5 e número de Frobenius 9, logo pelo corolário 14 é simétrico. $\langle 3, 4, 5\rangle = \{0, 3, 4, 5, ...\}$ tem gênero 2 e número de Frobenius 2, logo é pseudo-simétrico, e $\langle 5, 7, 9\rangle$ tem gênero 8 e número de Frobenius 13, logo não é irredutível.*

Os conjuntos Apéry de semigrupos numéricos irredutíveis têm formas especiais, e veremos a caracterização dessas formas na sequência dessa seção.

Lema 15. *Seja S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Se $x, y \in S$ são tais que $x + y \in Ap(S, n)$, então $\{x, y\} \subseteq Ap(S, n)$*

Demonstração. De fato, se $x + y \in Ap(S, n)$ por definição temos que $x + y - n \notin S$. Assim, em particular temos que $x - n \notin S \Rightarrow x \in Ap(S, n)$ e $y - n \notin S \Rightarrow y \in Ap(S, n)$. $\square$

Proposição 23. *Seja S um semigrupo numérico e tome $n \in S \setminus \{0\}$. Considere $Ap(S,n) = \{a_0 < a_1 < ... < a_{n-1}\}$ o conjunto Apéry de n em S. Então, S é simétrico se, e somente se, $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$ para todo $i \in \{0, ..., n-1\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pela Proposição 3 temos que $F(S) = (maxAp(S,n)) - n$, assim $F(S) = a_{n-1} - n$. Da definição de $Ap(S,n)$ temos que $a_i - n \notin S$ e como S é simétrico temos $F(S) - (a_i - n) = a_{n-1} - a_i \in S$. Pelo Lema 15, sabemos que existe $j \in \{0, ..., n-1\}$ tal que $a_{n-1} = a_i + a_j$. Como $a_0 < a_1 < ... < a_{n-1}$, segue do Lema 3 que j deve ser igual a $n-1-i$.

($\Leftarrow$) Por hipótese temos que $\{a_{n-1}\} = max_{\leq}Ap(S,n)$. Pela Proposição 7, temos que $PF(S) = \{F(S)\}$ e assim $\{F(S)\} = max_{\leq}(\mathbb{Z} \setminus S)$. Em particular, isso implica que se $x \in \mathbb{Z} \setminus S$, então $F(S) - x \in S$. Além disso, se $F(S)/2$ é um inteiro, então $F(S)/2 \in \mathbb{Z} \setminus S$. Agora, $F(S) - \dfrac{F(S)}{2} = \dfrac{F(S)}{2} \in S$, contradição. Logo, $F(S)$ é ímpar. Portanto, segue da Proposição 22 que S é simétrico. □

A partir dessa proposição, podemos ver facilmente que semigrupos simétricos são aqueles semigrupos com tipo 1.

Corolário 16. *Seja S um semigrupo numérico. São equivalentes:*

1. *S é simétrico*
2. *$PF(S) = \{F(S)\}$*
3. *$t(S) = 1$*

Demonstração. Observe que $F(S)$ sempre pertence a $PF(S)$. Portanto as condições 2) e 3) são equivalentes. A eguivalência entre as condições 1) e 2) segue pela demonstração da Proposição 23. □

Tendo em vista a Proposição 7, o Corolário 16 pode ser reformulado da seguinte forma.

Corolário 17. *Seja S um semigrupo numérico e n um elemento não nulo de S.*

$$S \text{ é simétrico} \Leftrightarrow Maximals_{\leq}Ap(S,n) = \{F(S) + n\}$$

Exemplo 18. *Seja $S = \langle 4, 6, 7 \rangle$. Então, $Ap(S,4) = \{0, 6, 7, 13\}$. Logo, $maximo_{\leq S}Ap(S,4) = \{13\}$ e, portanto, $PF(S) = \{9\}$. Isso significa que S é simétrico.*

Podemos obter uma caracterização similar para semigrupos numéricos pseudo-simétricos, mas devemos dar uma atenção especial a $\dfrac{F(S)}{2}$.

Lema 16. *Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico e n um elemento não nulo de S. Então, $\dfrac{F(S)}{2} + n \in Ap(S,n)$.*

Demonstração. Desde que $\dfrac{F(S)}{2} \notin S$, basta mostrar que $\dfrac{F(S)}{2} + n \in S$. Se isso não ocorrer, pela Proposição 22 temos que $F(S) - \left(\dfrac{F(S)}{2} + n\right) = \dfrac{F(S)}{2} - n \in S$. Daí $\dfrac{F(S)}{2} = \dfrac{F(S)}{2} - n + n \in S$, que não pode ocorrer. □

Observe que esse fato também nos mostra que se S é pseudo simétrico, então $\dfrac{F(S)}{2} \in PF(S)$.

Proposição 24. *Seja S um semigrupo numérico com número de Frobenius par e $n \in S\backslash\{0\}$. S é pseudo-simétrico se, e somente se, $Ap(S,n) = \{a_0 < a_1, ... < a_{n-2} = F(S)+n\} \cup \{(F(S)/2)+n\}$ e $a_i + a_{n-2-i} = a_{n-2} \forall i \in \{0, ..., n-2\}$.*

Demonstração. $\Longrightarrow$ Pelo Lema 16 temos que $\dfrac{F(S)}{2} + n \in Ap(S,n)$. Pela Proposição 3 temos que $F(S) = (maxAp(S,n)) - n$ então $\dfrac{F(S)}{2} + n < maxAp(S,n) = F(S) + n$. Se $w \in Ap(S,n) \setminus \{(F(S)/2 + n\}$, então $w - n \notin S$ e $w - n \neq \dfrac{F(S)}{2}$. Pela Proposição 22 temos que $F(S) - (w-n) \in S$ e, assim, $maxAp(S,n) - w = F(S) + n - w \in S$. Pelo Lema 15, temos que ter $maxAp(S,n) \in Ap(S,n)$. Além disso, $maxAp(S,n) - w \neq \dfrac{F(S)}{2} + n$ pois caso contrário teríamos $w = \dfrac{F(S)}{2}$.

$\Longleftarrow$ Seja x um inteiro tal que $x \neq \dfrac{F(S)}{2}$ e $x \notin S$. Vamos mostrar que $F(S) - x \in S$. Tome $w \in Ap(S,n)$ tal que $w \equiv x \pmod n$. Então, $x = w - kn$ para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dividimos em dois casos:

1. Se $w = \dfrac{F(S)}{2} + n$ então $F(S) - x = F(S) - (F(S)/2 + n - kn) = F(S)/2 + (k-1)n$. Se $x \neq F(S)/2$, segue que $k \neq 1$. Assim, temos que $F(S) - x \in S$.

2. Se $w \neq F(S)/2 + n$. Então, $F(S) - x = F(S) - (w - kn) = F(S) + n - w + (k-1)n = a_{n-2} - w + (k-1)n \in S$, desde que $a_{n-2} - w \in S$ pelas hipóteses.

□

O análogo para o Corolário 16 para semigrupos numéricos pseudo-simétricos é dado a seguir. Veremos com um exemplo que não conseguimos dar uma condição similar a terceira condição nesse resultado.

Corolário 18. *Seja S um semigrupo numérico. São equivalentes:*

1. *S é pseudo-simétrico;*

2. *$PF(S) = \{F(S), F(S)/2\}$.*

Observe que nesse caso, se $t(S) = 2$ não podemos garantir que $PF(S) = \{F(S), F(S)/2\}$.

Exemplo 19. *Seja $S = \langle 5, 7, 8 \rangle$. O conjunto de pseudo número de Frobenius de S é $PF(S) = \{9, 11\}$. Esse semigrupo tem tipo 2, mas não é pseudo-simétrico.*

Exemplo 20. *Seja $S = \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$. Então, $Ap(S,5) = \{0, 6, 7, 9, 13\}$ e $maximo_{\leq S} Ap(S,5) = \{9, 13\}$. Isso implica que $PF(S) = \{4, 8\} = \{F(S)/2, F(S)\}$. Portanto, S é pseudo-simétrico.*

Usando a Proposição 7, podemos obter uma caracterização alternativa em termos do conjunto Apéry.

Corolário 19. *Seja S um semigrupo numérico e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então, S é pseudo simétrico, se e somente se, $Maximals \leq (Ap(S,n)) = \{F(S)/2 + n, F(S) + n\}$.*

4.2 Semigrupos Numéricos Com Multiplicide e S-Dimensão Arbitrárias

Veremos que se S é um semigrupo numérico irredutível com $m(S) \geq 4$, então $e(S) \leq m(S) - 1$. O objetivo dessa seção é mostrar como construir, para dados m e e inteiros tais que $2 \leq e \leq m - 1$, um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e S-dimensão e. Já sabemos que um semigrupo numérico com S-dimensão dois, é simétrico. Assim, não podemos encontrar um semigrupo pseudo-simétrico com S-dimensão dois. Se nós mudarmos a restrição para $3 \leq e \leq m-1$, então somos capazes de construir um semigrupo numérico pseudo-simétrico S com $m(S) = m$ e $e(S) = e$.

4.2.1 Caso Simétrico

Lema 17. *Seja S um semigrupo numérico simétrico com $m(S) \geq 3$. Então,*

$$e(S) \leq m(S) - 1.$$

Demonstração. Escrevendo o conjunto Apéry da seguinte forma: $Ap(S, n) = \{0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m(S)-1}\}$, pela Proposição 23 temos que $a_{m(S)-1} = a_i + a_{m(S)-1-i}$ para todo $i \in \{0, ..., m(S) - 1\}$. Se $m(S) \geq 3$, então podemos escolher $i = 1$, e assim $a_{m(S)-1}$ não é um gerador minimal. Como pelo menos um elemento não nulo de $Ap(S, n)$ não é gerador minimal, segue que $e(S) \leq m(S) - 1$. □

Observação 5. *Como consequência desse resultado juntamente com o Corolário 15, temos que um semigrupo numérico simétrico tem S-dimensão máxima se, e somente se, tem multiplicidade dois.*

Agora, vamos descrever o método para obter um semigrupo numérico simétrico S com $e(S) = e$ e $m(S) = m$, onde e e m são inteiros fixos tais que $2 \leq e \leq m - 1$.

Vamos introduzir duas famílias de semigrupos numéricos simétricos. Cada uma delas será usada para produzir o semigrupo numérico simétrico desejado, dependendo da paridade da multiplicidade menos a sua S-dimensão.

Lema 18. *Sejam m e q inteiros positivos tais que $m \geq 2q + 3$ e seja S um submonóide de $(\mathbb{N}, +)$ gerado por*

$$\{m, m + 1, qm + 2q + 2, ..., qm + (m - 1)\}.$$

Então, S é um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m, S-dimensão $m - 2q$ e número de Frobenius $2qm + 2q + 1$.

Demonstração. Como $\mathrm{mdc}(m, m+1) = 1$, temos pelo Lema 1 que S é um semigrupo numérico. Claro que $\{m, m + 1, qm + 2q + 2, ..., qm + (m - 1)\}$ é um sistema minimal de geradores de S e portanto $m(S) = m$, $e(S) = m - 2q$. Veja que $Ap(S, m) = \{0 < m + 1 < 2m + 2 < \cdots <$

$qm+q < qm+2q+2 < \cdots < qm+(m-1)v < (q+1)m+q+1 < \cdots < (2q+1)m+2q+1\}$. Vamos usar a Proposição 23 para mostrar que S é simétrico. Devemos encontrar para todo $w \in Ap(S,m)$ um elemento $w' \in Ap(S,m)$ tal que $w+w' = (2q+1)m+2q+1$.

- Para $i \in \{0,1,...,m-1-2q-2\}$,

$$(qm+2q+2+i)+(qm+m-1-i) = (2q+1)m+2q+1.$$

- Para $k \in \{0,1,2,...,q\}$,

$$(km+k)+((2q+1-k)m+2q+1-k)m+2q+1-k) = (2q+1)m+2q+1.$$

Além disso, como $F(S)+m = maxAp(S,m)$ (3), temos que $F(S) = 2qm+2q+1$ □

Lema 19. *Sejam m e q inteiros não negativos tais que $m \geq 2q+4$ e seja S um submonóide de $(\mathbb{N},+)$ gerado por*

$$\{m, m+1, (q+1)m+q+2, ..., (q+1)m+m-q-2\}.$$

Então, S é um semigrupo simétrico com multiplicidade m, S-dimensão $m-2q-1$ e número de Frobenius $2(q+1)m-1$.

Demonstração. Como no lema anterior, temos que S é um semigrupo numérico com $m(S) = m$ e $e(S) = m-2q-1$. É fácil ver que

$Ap(S,m) = \{0 < m+1 < 2m+2 < \cdots < (q+1)m+q+1 < (q+1)m+q+2 < \cdots < (q+1)m+m-q-2 < (q+2)m+m-q-1 < (q+3)m+(m-q) < \cdots < 2(q+1)m+m-1\}$.

Novamente, pela Proposição 23 temos que

- Para $i \in \{0,1,...,m-2q-3\}$,

$$((q+1)m+q+1+i)+((q+1)m+m-q-2-i) = 2(q+1)m+m-1.$$

- Para $k \in \{0,1,...,q\}$,

$$((q+2+k)m+m-q-1-k)+((q-k)m+q-k) = 2(q+1)m+m-1$$

Como $F(S)+m = max(Ap(S,m))$, obtemos que $F(S) = 2(q+1)m-1$. □

Teorema 3. *Sejam m e e inteiros tal que $2 \leq e \leq m-1$. Então, existe um semigrupo simétrico com multiplicidade m e S-dimensão e.*

Demonstração. Se $e = 2$, então $S = \langle m, m+1 \rangle$ é um semigrupo simétrico com multiplicidade m e $e(S) = 2$. Então, podemos assumir $e \geq 3$ e vamos separar em dois casos.

- Se $m-e$ é par, existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $m-e = 2q$. Além disso, como $e \geq 3$, temos que $m \geq m-e+3$ e portanto $m \geq 2q+3$. Logo, pelo Lema 18 temos a garantia da existência de um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e $e(S) = m-2q$.

- Se $m - e$ é ímpar, existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $m - e = 2q + 1$. Da restrição $e \geq 3$ temos que $m \geq m - e + 3$, que implica que $m \geq 2q + 4$. Agora, pelo Lema 19 temos que existe um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e $e(S) = m - 2q - 1$.

□

Exemplo 21. *O semigrupo* $\langle 13, 13, 58, 59\rangle$ *é simétrico com multiplicidade* 12 *e* S*-dimensão* 4 *e número de Frobenius* 105 *(* $q = 4$*).*

O semigrupo $\langle 10, 11, 22, 23, 24, 25, 26, 27\rangle$ *é simétrico com multiplicidade* 10*,* S*-dimensão* 7 *e número de Frobenius* 39 *(* $q = 1$*).*

4.2.2 Caso Pseudo-Simétrico

Faremos de maneira semelhante ao caso simétrico. Como dito no Lema 16 vamos encontrar pequenas diferenças com o caso simétrico. Começaremos provando para multiplicidades maiores do que 3, a S-dimensão de um semigrupo numérico pseudo-simétrico nunca alcança sua multiplicidade.

Lema 20. *Seja* S *um semigrupo numérico com* $m(S) \geq 4$*. Então,*

$$e(S) \leq m(S) - 1.$$

Demonstração. Pela Proposição 2, temos que $e(S) \leq m(S)$. Se $e(S) = m(S)$, então S é minimamente gerado por $\{m(S), n_1, ..., n_{m(S)-1}\}$ e pela Proposição 24, $Ap(S, m(S))$ é da forma

$$Ap(S, m(S)) = \{0 < n_2 < \cdots < n_{m(S)-1}\} \cup \{n_1 = \frac{F(S)}{2} + m(S)\} .$$

Como $m(S) - 1 \geq 3$, pela Proposição 24 temos que $n_2 + a_{m(S)-4} = a_{m(S)-1}$, que implica que $a_{m(S)-1} - a_2 \in S$, que contradiz o fato que $\{m(S), n_1, ..., n_{m(S)-1}\}$ é um sistema minimal de geradores de S. □

Veja que nesse resultado demos atenção para o caso em que a multiplicidade é maior ou igual a quatro. Sabemos que semigrupos numéricos com multiplicidade dois são simétricos. Portanto, nos próximos resultados estudaremos o caso em que a multiplicidade é exatamente três.

Lema 21. *As seguintes condições são equivalentes.*

1. S *é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com* $m(S) = e(S) = 3$.
2. $S = \langle 3, x + 3, 2x + 3\rangle$ *com* x *um inteiro não divisível por* 3.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Se $m(S) = e(S) = 3$, então $\{3, n_1, n_2\}$ é um sistema minimal de geradores para S. Pela Proposição 22, deduzimos que $F(S)$ é par, e pela Proposição 24 temos que

$$Ap(S, 3) = \{0, n_1 = \frac{F(S)}{2} + 3, n_2 = F(S) + 3\}.$$

Tomando $x = \frac{F(S)}{2}$ temos que $n_1 = x + 3$ e $n_2 = 2x + 3$. Desde que $x = \frac{F(S)}{2} \notin S$ temos que x não é múltiplo de 3.

2) $\Rightarrow$ 1) Claro que $\{3, x+3, 2x+3\}$ é um sistema minimal de geradores de S e, portanto, $m(S) = e(S) = 3$. Consequentemente, $Ap(S,3) = \{0, x+3, 2x+3\}$. Pela Proposição 3, temos que $2x + 3 = F(S) + 3$. Assim, $\frac{F(S)}{2} + 3 = x + 3$. A Proposição 24 garante que S é pseudo-simétrico. □

Pelo Corolário 15, todo semigrupo numérico com S-dimensão dois é simétrico. Veremos que para S-dimensão três, são sempre pseudo-simétricos, com multiplicidade arbitrária.

Lema 22. *Seja m um inteiro positivo maior ou igual a quatro. Então, existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico S com $F(S)$ par, $m(S) = m$ e $e(S) = 3$.*

Demonstração. Vamos distinguir em dois casos, dependendo da paridade de m.

1. Se m é par, então $m = 2q + 4$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Tome $S = \langle m, m+1, (q+1)m + (m-1)\rangle$. É claro que $m(S) = m$ e $e(S) = 3$. Sob essas condições

$$Ap(S,m) = \{0, m+1, 2(m+1), ..., (m-2)(m+1)\} \cup \{(q+1)m + (m-1)\}.$$

Pela Proposição 3, $F(S) = (m-2)m - 2$, que é par e $\frac{F(S)}{2} + m = (q+1)m + (m-1)$. Pela Proposição 24 concluímos que S é um semigrupo numérico irredutível.

2. Se m é ímpar, então $m = 2q + 3$ para algum $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja $S = \langle m, m+1, (q+1)m + q + 2\rangle$. Claro que $m(S) = m$ e $e(S) = 3$. Assim,

$$Ap(S,m) = \{0, m+1, 2(m+1), ..., q(m+1), (q+1)m + q + 2, (m+1) + (q+1)m + q + 2, ..., q(m+1) + (q+1)m + q + 2\} \cup \{(q+1)(m+1)\}.$$

Consequentemente, $F(S) = 2(1 + q + mq)$ é par e $\frac{F(S)}{2} + m = (q+1)(m+1)$. Pela Proposição 24, temos que S é pseudo-simétrico.

□

Agora vamos proceder como no caso simétrico, apresentando duas famílias de semigrupos numéricos pseudo-simétricos que usaremos dependendo da paridade da multiplicidade desejada menos a S-dimensão desejada.

Lema 23. *Sejam $m, q \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2q + 5$ e seja S o submonóide de $(\mathbb{N}, +)$ gerado por*

$$\{m, m+1, (q+1)m + q + 2, ..., (q+1)m + m - q - 3, (q+1)m + m - 1\}.$$

Então, S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $m(S) = m$, $e(S) = m - 2q - 1$ e $F(S) = 2(q+1)m - 2$.

Demonstração. Desde que $\mathrm{mdc}(m, m+1) = 1$, temos que S é um semigrupo numérico. Note que $m = minS \setminus \{0\}$ e portanto $m(S) = m$. É direto ver que

$$\{n_0 = m, n_1 = m+1, n_2 = (q+1)m+q+2, ..., n_{p-1} = (q+1)m+m-q-3, n_p = (q+1)m+m-1\}$$

é um sistema minimal de geradores de S e, portanto, $e(S) = m-2q-1$. É fácil checar também que

$$Ap(S.m) = \{0, n_1, 2n_1, ..., (q+1)n_1, n_2, ..., n_{p-1}, n_1+n_{p-1}, 2n_1+p_{p-1}, ..., qn_1+n_{p-1}, F(S)+m = (q+1)n_1 + n_{p-1}\} \cup \{n_p\},$$

e se $p \geq 4$, por adição $F(S) + m = n_i + n_{p-i}$ para todo $i \in \{2, ..., \lceil p/2 \rceil\}$. Portanto, $F(S) = 2(q+1)m - 2$ e assim $\frac{F(S)}{2} + m = (q+1)m + (m-1) = n_p$. Aplicando a Proposição 24, temos que S é pseudo-simétrico. □

Lema 24. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $m \geq 2q+4$ e seja S o submonóide de $(\mathbb{N}, +)$ gerado por*

$$\{m, m+1, qm+2q+3, ..., qm+m-1, (q+1)m+q+2\}.$$

Então, S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $m(S) = m$, $e(S) = m-2q$ e $F(S) = 2qm + 2q + 2$.

Demonstração. Como $\mathrm{mdc}(m, m+1) = 1$ temos que S é um semigrupo numérico. Veja que $m = minS \setminus \{0\}$, assim $m(S) = m$. Claro que $\{n_0 = m, n_1 = m+1, n_2 = qm+2q+3, ..., n_{p-1} = qm+m-1, n_p = (q+1)m+q+2\}$ é um sistema minimal de geradores de S e portanto $e(S) = m-2q$. É possível verificar que

$$Ap(S, m) = \{0, n_1, 2n_1, ..., qn_1, n_2, ..., n_{p-1}, n_p, n_1+n_p, 2n_1+n_p, ..., F(S) = m = qn_1 + n_p\} \cup \{(q+1)n_1\},$$

e $F(S) + m = n_i + n_{p-i+1}$ para todo $i \in \{2, ..., \lceil (p+1)/2 \rceil\}$. Então $F(S) = 2qm+2q+2$ e portanto $\frac{F(S)}{2} + m = (q+1)m + q + 1 = (q+1)n_1$. Pela Proposição 24 garante que S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico. □

Teorema 4. *Sejam m e e inteiros positivos tal que $3 \leq e \leq m-1$. Então, existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico com multiplicidade m e S-dimensão e.*

Demonstração. Se $e = 3$, então o Lema 22 garante a existência desse semigrupo. Agora, assuma que $4 \leq e \leq m-1$. Vamos distinguir em dois casos, dependendo da paridade de $m-e$.

1. Se $m-e$ é ímpar, temos que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m-e = 2q+1$. Além disso, desde que $e \geq 4$, $m \geq 2q+5$, pelo Lema 23 existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $m(S) = m$ e $e(S) = m-2q-1 = e$.

2. Se $m-e$ é par, temos que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m-e = 2q$. Além disso, desde que $e \geq 4$ e $m \geq 2q+4$, pelo Lema 24 deduzimos que existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico S com $m(S) = m$ e $e(S) = m-2q = e$.

$\square$

Exemplo 22. *O semigrupo numérico* $S = \langle 11, 12, 37, 38, 39, 43\rangle$ *é pseudo-simétrico com* $m(S) = 11$*,* $e(S) = 6$ *e* $F(S) = 64$ $(q = 2)$*.*

O semigrupo $S = \langle 12, 12, 29, 30, 31, 37\rangle$ *é pseudo-simétrico com* $m(S) = 11$*,* $e(S) = 7$ *e* $F(S) = 50(q = 2)$*.*

No caso de S-dimensão 3,

- $S = \langle 6, 7, 17\rangle$ *é um semigrupo numérico irredutível com* $m(S) = 6$ *e* $F(S) = 22$*.*

- $S = \langle 7, 8, 25\rangle$ *é um semigrupo numérico irredutível com* $m(S) = 7$ *e* $F(S) = 34$*.*

4.3 Extensões Unitárias De Um Semigrupo Numérico

Vamos introduzir um conceito especial de lacunas de um semigrupo numérico. Essa definição é motivada pelo problema de encontrar o conjunto de todos os semigrupos numéricos que contém um dado semigrupo numérico.

Seja S um semigrupo numérico S e considere o conjunto

$$SG(S) := \{x \in PF(S)|2x \in S\}.$$

Os elementos de $SG(S)$ são chamados de *lacunas especiais* de S.

Proposição 25. *Seja* S *um semigrupo numérico e seja* $x \in G(S)$*. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $x \in SG(S)$*;*

2. $S \cup \{x\}$ *é um semigrupo numérico.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Veja que $S \cup \{x\}$ de fato é um semigrupo numérico.

- $0 \in S \cup \{x\}$, pois $0 \in S$

- $a + b \in S \cup \{x\} \forall a + b \in S \cup \{x\}$, já que $2x \in S \Rightarrow x + x \in S \cup \{x\}$.

- $\mathbb{N} \setminus S$ é finito $\Rightarrow \mathbb{N} \setminus S \cup \{x\}$ também é finito.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico, então temos que $x \in G(S)$, $x + s \in S$ $\forall s \in S$, e $x + x \in S \cup \{x\} \Rightarrow 2x \in S$, e o resultado segue. $\square$

Exemplo 23. *Seja* $S = \{0, 7, 8, \ldots\}$*. Então,* S *é um semigrupo numérico com* $PF(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e consequentemente* $SG(S) = \{4, 5, 6\}$*. Isso implica que* $\{0, 4, 7, 8, \ldots\}$*,* $\{0, 5, 7, 8, \ldots\}$ *e* $\{0, 6, , 7, \ldots\}$ *são semigrupos numéricos.*

Lema 25. *Seja S e T dois semigrupos numéricos tal que $S \subsetneq T$. Então, $S \cup \{maxT \setminus S\}$ é um semigrupo numérico ou, equivalentemente, $max(T \setminus S) \in SG(S)$.*

Demonstração. Como $S \subsetneq T$ temos que existe $x \in T$ tal que $x \in G(S)$. Tome $x = max(T \setminus S)$, então $x + s \in T$ e $x + s > x \forall s \in S \setminus \{0\}$. Pela maximidade de x temos então que $x + s \in S$. Analogamente, $2x \in T$, $2x > x$ e então $2x \in S$. Logo, $max(T \setminus S) \in SG(S)$, isto é, pela proposição anterior $S \cup \{max(T \setminus S)\}$ é um semigrupo numérico. $\square$

Dado um semigrupo numérico S denotamos por $\mathcal{O}(S)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos que contém S. Vamos nos referir a $\mathcal{O}(S)$ como o conjunto de *sobre-semigrupos* de S. Desde que $\mathbb{N} \setminus \mathbb{S}$ seja finito, $\mathcal{O}(S)$ é finito. Dado dois semigrupos numéricos S e T com $S \subseteq T$, definimos recursivamente

- $S_0 = S$.
- $S_n \cup \{max(T \setminus S_n)\}$ se $S_n \neq T$, e $S_n = S_{n+1}$.

Se a cardinalidade de $T \setminus S$ é k, então:

$$S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_k = T$$

Usando essa ideia podemos construir o conjunto $\mathcal{O}(S)$. Começamos definindo $\mathcal{O}(S) = \{S\}$ e para cada elemento de $\mathcal{O}(S)$ diferente de $\mathbb{N}$ anexamos a $\mathcal{O}(S)$ os semigrupos numéricos $S \cup \{x\}$ com x variando em $SG(S)$.

Exemplo 24. *Seja $S = \langle 5, 7, 9, 11\rangle$. Para esse semigrupo $SG(S) = \{13\}$ e então $S \cup \{13\} = \langle 5, 7, 9, 11, 13\rangle$ é um semigrupo numérico com $SG(S \cup \{13\}) = \{6, 8\}$. A partir dele obtemos dois semigrupos $S \cup \{13, 6\}$ e $S \cup \{13, 8\}$. Repetindo esse processo obtemos $\mathcal{O}(S)$.*

$$\begin{tikzcd}
 & S = \langle 5,7,9,11\rangle \arrow[d, "\cup\{13\}"] & \\
 & \langle 5,7,9,11,13\rangle \arrow[dl, "\cup\{6\}"'] \arrow[dr, "\cup\{8\}"] & \\
\langle 5,6,7,9\rangle \arrow[d, "\cup\{8\}"] & & \langle 5,7,8,9,11\rangle \arrow[dll, "\cup\{6\}"'] \arrow[d, "\cup\{4\}"] \\
\langle 5,6,7,8,9\rangle \arrow[d, "\cup\{3\}"] \arrow[drr, "\cup\{4\}"] & & \langle 4,5,7\rangle \arrow[d, "\cup\{6\}"] \\
\langle 3,5,7\rangle \arrow[d, "\cup\{4\}"] & & \langle 4,5,6,7\rangle \arrow[dll, "\cup\{3\}"'] \arrow[d, "\cup\{2\}"] \\
\langle 3,4,5\rangle \arrow[dr, "\cup\{2\}"] & & \langle 2,5\rangle \arrow[dl, "\cup\{3\}"'] \\
 & \mathbb{N} \setminus \{1\} \arrow[d, "\cup\{1\}"] & \\
 & \mathbb{N} &
\end{tikzcd}$$

Como consequência do Lema 25, se S é um semigrupo numérico, então S é maximal com respeito a inclusão de conjuntos no conjunto de todos os semigrupos numéricos não intersecta $SG(S)$. Além disso, $SG(S)$ é o menor conjunto de lacunas que determina S até a maximalidade.

Proposição 26. *Seja S um semigrupo numérico e tome $\{g_1, ..., g_t\} \subseteq G(S)$. São equivalentes:*

1. *S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos T tal que $T \cap \{g_1, ..., g_t\}$ é vazio.*

2. *$SG(S) \subseteq \{g_1, ..., g_t\}$.*

Demonstração. Seja $x \in SG(S)$, pela Proposição 25 temos que $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico contendo S propriamente. Se 1) for verdadeira, então $S \cup \{x\} \cap \{g_1, ..., g_t\} \neq \varnothing$. Portanto $x \in \{g_1, ..., g_t\}$. A aplicação 2) $\Rightarrow$ 1) segue diretamente da Proposição 25 e do Lema 25.

□

Como corolário podemos obter outra caracterização para semigrupos numéricos irredutíveis. Pelo teorema 2, sabemos que um semigrupo S é irredutível se e somente se é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos que não interseptam $\{F(S)\}$. É claro que $F(S)$ pertence a $SG(S)$, sempre que S não é igual a $\mathbb{N}$

Corolário 20. *Seja S um semigrupo numérico. Então, S é irredutível se, e somente se, $SG(S)$ tem somente um elemento.*

Os próximos dois resultados nos habilitará a encontrar a generalização de construção proposta no Lema 14 para encontrar um sobre-semigrupo irredutível de um dado semigrupo numerico com o mesmo número de Frobenius.

Lema 26. *Seja S um semigrupo numérico e tome $\{g_1, ..., g_t\} \subseteq G(S)$. São equivalentes:*

1. *S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos T tal que $T \cap \{g_1, ...g_t\}$ é vazio.*

2. *Se $x \in SG(S)$, então existe $i \in \{1, ..., t\}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $g_i - kx \in S$.*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Seja $x \in G(S)$. Como $S \subsetneq \langle S, x\rangle$, temos que $\langle S, x\rangle \cap \{g_1, ..., g_t\}$ é não vazia. Portanto existe $i \in 1, ..., t\}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $s \in S \setminus \{0\}$ tal que $g_i = s + kx$, que implica que, $g_i - kx \in S$.

2) $\Rightarrow$ 1) Seja T um semigrupo numérico tal que $T \subsetneq S$. Tome $x \in T \setminus S$. Então $S \subsetneq \langle S, x\rangle \subseteq T$. Por hipótese, existe i e k tal que $g_i - kx \in S$. Portanto $g_i \in \langle S, x\rangle$. Assim $g_i \in T$ □

Proposição 27. *Seja S um semigrupo numérico e $\{g_1, ..., g_t\} \subseteq G(S)$. Se existir*

$$h = max\{x \in \mathbb{Z} \setminus S | 2x \in S, g_i - x \notin S \forall i \in \{1, ..., t\}\},$$

então $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico que não intersecta $\{g_1, ..., g_t\}$.

Demonstração. Pela Proposição 27 basta mostrar que $h \in SG(S)$. Por definição temos que $2h \in S$. Assuma que exista $s \in S \setminus \{0\}$ tal que $h + s \notin S$. Como $2(h + s) \in S$ e $h < h + s$, temos que $g_i - (h + s) \in S$ para algum $i \in \{1, ..., t\}$. Mas isso leva que $g_i - h \in S$, contradição com a definição de h. □

Corolário 21. *Seja S um semigrupo numérico e $\{g_1, ..., g_t\} \subseteq G(S)$. São equivalentes:*

1. *S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos dos quais a interseção com $\{g_1, ..., g_t\}$ é vazia;*

2. *para todo $x \in \mathbb{N}$, se $x \in G(S)$ e $2x \in S$, então $g_i - x \in S$ para algum $i \in \{1, ..., t\}$.*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Segue diretamente da Proposição 27

2) $\Rightarrow$ 1) Como visto no Lema 26, é suficiente mostrar que para todo $x \in G(S)$, existem i e k apropriados tal que $g_i - kx \in S$. Tome $x \in G(S)$ e $k = max\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | nx \notin S\}$. Claro que $kx \in G(S)$ e $2kx \in S$. Por hipótese $g_i - kx \in S$ para algum $\{1, ..., t\}$. □

Temos uma caracterização para semigrupos numéricos irredutíveis, que reúne as condições 1) e 2) da Proposição 22, como conseguência desses resultados.

Corolário 22. *Seja S um semigrupo numérico. S é irredutível se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \in G(S)$ e $2x \in S$ implica $F(S) - x \in S$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2 e do Corolário 21 □

Seja $\mathcal{L}$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos. Para $\{g_1, ..., g_t\} \subset \mathbb{N}$, defina

$$\mathcal{L}(g_1, ..., g_t) = \{S' \in \mathcal{L} | S' \cap \{g_1, ..., g_t\} = \varnothing\}.$$

A Proposição 27 pode ser usada para encontrar o elemento maximal em $\mathcal{L}(g_1, ..., g_t)$. Precisamos pegar um ponto de partida $S = \{0, max\{g_1, ..., g_t\} + 1, max\{g_1, ..., g_t\} + 2, ...\}$ e definimos recursivamente

- $S_0 = S$

- $S_n = S_n \cup \{h(S_n)\}$ onde $h(S_n)$ é $max\{x \in G(S_n) | 2x \in S_n, g_i - x \notin S_n \forall i \in \{1, ..., t\}\}$; se $h(S_n)$ não existir, então S_n é o semigrupo desejado.

Exemplo 25. *Calculamos um elemento em $Maximal_{\subseteq}\mathcal{L}(7, 8))$.*

1. *$S_0 = S = \{0, 9, 10, 11, ...\}$, $h(S_0) = 6$,*

2. *$S_1 = \{0, 6, 9, 10, 11, ...\}$, $h(S_1) = 5$*

3. *$S_2 = \{0, 5, 6, 9, 10, 11, ...\}$, $h(S_2)$ não existe e portanto S_2 pertence a $Maximal_{\subseteq}\mathcal{L}(7, 8))$.*

4.4 Decomposição de um Semigrupo Numérico em Irredutíveis

Nessa seção vamos apresentar um algoritmo para calcular uma decomposição de um dado semigrupo numérico em semigrupos numéricos irredutíveis. Além disso, vamos mostrar também como obter decomposições "mínimas".

Seja S um semigrupo numérico qualquer. Se S não é irredutível, então existe S_1 e S_2 propriamentes contidos tais que $S = S_1 \cap S_2$. Podemos pensar novamente se S_1 e S_2 não são irredutíveis e escrevê-los como uma interseção de semigrupos numéricos. Podemos repetir esse processo exaustivamente, mas por uma quantidade finita de vezes, desde que todo semigrupo numérico que aparecer nesse processo contém S e $\mathcal{O}(S)$ é finito. Assim, conseguimos o seguinte resultado.

Proposição 28. *Todo semigrupo numérico pode ser expresso como uma interseção finita de semigrupos numéricos irredutíveis.*

Já temos um procedimento para construir $\mathcal{O}(S)$, como dado no Exemplo 24, baseado no cálculo do conjunto $SG(S)$. Durante esse procedimento, podemos escolher semigrupos com no máximo uma lacuna especial e como visto no Corolário 20, estes são sobresemigrupos irredutíveis de S. Denotamos por

$$\mathcal{J} = \{T \in \mathcal{O}(S) | T \text{é irredutível}\}.$$

Segue que $S = \cap_{T \in \mathcal{J}(S)} T$. Podemos remover dessa interseção alguns elementos que não são minimais com respeito a inclusão de conjuntos, e os semigrupos resultantes permanecerem inalterados. Logo, teremos o seguinte resultado.

Proposição 29. *Seja S um semigrupo numérico e tome*

$$\{S_1, ..., S_n\} = Minimals_{\subseteq}\mathcal{J}(S).$$

Então, $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$.

Quando olhamos para o menor inteiro n tal que $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$, com $S_1, ..., S_n \in \mathcal{J}(S)$, é suficiente procurar entre as decomposições com com elementos em $Minimals_{\subseteq}\mathcal{J}(S)$.

Proposição 30. *Seja S um semigrupo numérico. Se $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$, com $S_1, ..., S_n \in \mathcal{J}(S)$, então existem $S_1' \cap \cdots \cap S_n' \in \mathcal{J}(S)$ tais que*

$$S = S_1' \cap \cdots \cap S_n'.$$

Demonstração. Para todo $i \in \{1, ..., n\}$, se S_i não pertence a $Minimals_{\subseteq}(\mathcal{J}(S))$, então tome $S_i' \in Minimals_{\subseteq}(\mathcal{J}(S))$ tal que $S_i' \subseteq S_i$ e o resultado segue. □

A próxima proposição nos da uma ideia sobre quais semigrupos devem aparecer em uma decomposição mínima.

Proposição 31. *Seja S um semigrupo numérico e tome $S_1, ..., S_n \in \mathcal{O}(S)$. São equivalentes:*

1. $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$;

2. *para todo* $h \in SG(S)$, *existe* $i \in \{1, ..., n\}$ *tal que* $h \in S_i$.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Se $h \in SG(S)$, então $h \in S$ e portanto $h \notin S_i$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Se $S \subsetneq S_1 \cap \cdots \cap S_n$, então pelo Lema 25, $h = max((S_1 \cap \cdots \cap S_n \setminus S)$ está em $SG(S)$, e em todos os S_i, que contradiz a hipótese. □

Nós conseguimos calcular $Minimals_{\subseteq}(\mathcal{J}(S)) = \{S_1, ..., S_n\}$. Para todo $i \in \{1, ..., n\}$, defina

$$C(S_i) = \{h \in SG(S) | h \not\in n S_i\}.$$

Pela Proposição 35 temos que

$$S = S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_r} \text{ se, e somente se, } C(S_{i_1}) \cup \cdots \cup C(S_{i_r}) = SG(S).$$

A partir dos resultados acima podemos obter um método para calcular a decomposição de S como interseção de semigrupos numéricos com o menor número possível de componentes.

Para um conjunto Y, uitilizaremos $\#Y$ para denotar sua cardinalidade.

Algoritmo 1.

1. *Encontre o conjunto* $SG(S)$.

2. *Defina* $I = \varnothing$ *e* $C = S$.

3. *Para todo* $S' \in C$, *encontre (usando a Proposição 25 todos os semigrupos* $\bar{S}$ *tais que* $\#(\bar{S} \setminus S) = 1$. *Remova* S' *de* C. *Tome* B *o conjunto formado pelos semigrupos construídos dessa forma.*

4. *Remova de* B *os semigrupos* S' *que cumprem* $SG(S) \subseteq S'$.

5. *Remova de* B *os semigrupos* S' *tal que existem* $\tilde{S} \in I$ *com* $\tilde{S} \subseteq S'$.

6. *Defina* $C = \{S' \in B | S' \text{não é irredutível}\}$.

7. *Defina* $I = I \cup \{S' \in B | S' \text{é irredutível}\}$.

8. *Se* $C \neq \varnothing$ *vai para o passo 3.*

9. *Para todo* $S \in I$ *encontre* $C(S)$.

10. *Escolha* $\{S_1, ..., S_r\}$ *tais que* r *é mínimo cumprindo que*

$$C(S_1) \cup \cdots \cup C(S_r) = SG(S) \ .$$

11. *Retorne* $S_1, ..., S_r$.

Agora vamos ilustrar esse método com um exemplo.

Exemplo 26. *Vamos considerar novamente o semigrupo* $S = \langle 5, 6, 8 \rangle$. *Temos que* $SG(S) = \{7, 9\}$. *Realizando as etapas do algoritmo temos que* $I = \{\langle 5, 6, 7, 8 \rangle\}$ *e* $C = \{\langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle\}$. *Desde que* $C \neq \emptyset$, *voltamos ao passo 3 e obtemos que* $I = \{\langle 5, 6, 7, 8 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5, 6 \rangle\}$ *e* $C = \emptyset$. *O passo 8 resulta*

$$C(\langle 5, 6, 7, 8 \rangle) = \{9\}, C(\langle 3, 5 \rangle) = \{7\}, C(\langle 4, 5, 6 \rangle) = \{7\}.$$

As decomposições minimais de S *são*

$$S = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle \cap \langle 3, 5 \rangle$$

e

$$S = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle \cap \langle 4, 5, 6 \rangle.$$

Dado um semigrupo numérico, podemos considerar dois tipos de minimalidade de uma decomposição deste semigrupo numérico em inrredutíveis. O primeiro é em termos de carnalidade, que é mínima no sentido de ser o menor número possível de irredutíveis que aparecem na decomposição. O segundo é em termos de redundância, este é, a decomposição mínima se nenhum semigrupo envolvido é redudante (não pode ser eliminado e a interseção restante é a mesma), em outras palavras, não pode ser refinado em uma menor decomposição. Ambos conceitos não coincidem. Claramente a decomposição com o menor número de irredutíveis envolvidos não pode ser refinada. Contudo essas decomposições não podem ser refinadas com mais irredutíveis que outras decomposições.

4.5 Lacunas Fundamentais de um Semigrupo Numérico

Como vimos na Proposição 26, se S é um semigrupo numérico, o conjunto $SG(S)$ determina S até a maximalidade (com respeito a inclusão de conjuntos). Isso não quer dizer que pode ser feito de maneira única. Podemos encontrar semigrupos numéricos S e T com $S \neq T$ e $SG(S) = SG(T)$.

Exemplo 27. *Para todo* S *em* $\{\langle 3, 8, 13 \rangle, \langle 4, 7, 9 \rangle, \langle 6, 7, 8, 9, 11 \rangle\}$, $SG(S) = \{10\}$.

Vamos apresentar nessa seção um subconjunto do conjunto das lacunas de um semigrupo numérico que o determina completamente. Seja S um semigrupo numérico. Dizemos que o conjunto X de inteiros positivos determina as lacunas de S se S é um semigrupo numérico máximo (com respeito a inclusão de conjuntos) tal que $X \subseteq G(S)$. Dado $X \in \mathbb{N}$ denotamos por $D(X)$ o conjunto de todos os divisores positivos de todos os elementos de X tais que

$$D(X) = \{a \in \mathbb{N} | a \text{ divide algum} x \in X\}$$

Proposição 32. *Seja* S *um conjunto finito de inteiros positivos. São equivalentes:*

1. *o conjunto* X *determina as lacunas de um semigrupo numérico;*

2. $\mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico.

Se essas condições se mantiverem, então X determina as lacunas de um semigrupo numérico $\mathbb{N} \setminus D(X)$.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Seja S o semigrupo numérico que cuja lacunas são determinadas por X. Desde que $X \subseteq G(S)$, temos que $D(X) \subseteq G(S)$ e portanto $S \subseteq \mathbb{N} \setminus D(X)$. Tome $a \in \mathbb{N} \setminus D(X)$. Então $S' = \langle a, max(X)+1, ... \rangle$ é um semigrupo numérico tal que $X \subseteq G(S')$, e a partir da definição de S, temos que $S' \subseteq S$. Consequentemente $a \in S$ e isso prova que $\mathbb{N} \setminus D(X) = S$. Em particular obtemos que $\mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico.

2) $\Rightarrow$ 1) É claro que $\mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico do qual as lacunas são determinadas por X. □

Proposição 33. *Seja S um semigrupo numérico e tome X um subconjunto de $G(S)$. São equivalentes:*

1. *X determina as lacunas de S;*
2. *para todo $a \in \mathbb{N}$, se $a \in G(S)$ e $\{2a, 3a\} \subset S$, então $a \in X$.*

Demonstração. Se S determina as lacunas de S, então aplicando a Proposição 32, temos que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$, e consequentemente $G(S) = D(X)$. Se a é um elemento de $G(S)$, então existe $x \in X$ tal que $a|x$ e portanto $ka = x$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se além disso assumirmos que $\{2a, 3a\} \subset S$, temos que $la \in S$ para todo positivo l maior do que um. Portanto, $k = 1$ e $a = x \in X$.

Para a outra implicação, como visto na Proposição 32, é suficiente mostrar que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$. Por hipótese $X \subseteq G(S)$ e portanto $D(X) \subseteq G(S)$. Consequentemente $S \subseteq \mathbb{N} \setminus D(X)$. Se a é um inteiro não negativo que não pertence a S, então $a \in G(S)$. Seja $k = max\{n \in \mathbb{N} | na \in G(S)\}$. Seque que $ka \in G(S)$ e $\{2ka, 3ka\} \subset$. Isso implica pelas hipótese que $ka \in X$, e consequentemente $a \in D(X)$. Isso prova $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$. □

Esse resultado motiva a seguinte definição. A lacuna x de um semigrupo numérico S é fundamental se $\{2x, 3x\} \subset S$. Vamos denotar por $FG(S)$ o conjunto das lacunas fundamentais de S.

Exemplo 28. *Seja $S = \langle 5, 8, 9 \rangle = \{0, 5, 8, 9, 10, 13, 14, ...\}$. Então $FG(S) = \{7, 11, 12\}$.*

Com essa nova notação podemos reescrever a Proposição 33.

Corolário 23. *Seja S um semigrupo numérico e tome X um subconjunto de $G(S)$. Então, X determina as lacunas de S se, e somente se, $FG(S) \subseteq X$.*

Para um semigrupo numérico S, $FG(S)$ é justamente o menor (com respeito a inclusão de conjuntos) subconjunto de $G(S)$ determinando as lacunas de S. Dois elementos diferentes de $FG(S)$ não são comparáveis com respeito a relação de divisibilidade.

Proposição 34. *Seja X um subconjunto finito de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. São equivalentes:*

1. *existe um semigrupo numérico tal que* $FG(S) = X$*;*

2. $\mathbb{N} \setminus D(X)$ *é um semigrupo numérico e* $x \nmid y$ *para todo* $x, y \in X$ *tal que* $x \neq y$*.*

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2). Já foi provado.

2) $\Rightarrow$ 1). Se $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico, então X determina suas lacunas. Além disso, aplicando o corolário 23 temos que $FG(S) \subseteq X$. Pelas hipotése $x \nmid y$ para todos $x, y \in S$, $x \neq y$, temos que $\{2x, 3x\} \cap D(X)$ é vazia. Portanto $x \in G(S)$ e $\{2x, 3x\}$ $subsetS$. Isso significa que $x \in FG(S)$. □

Seja S um semigrupo numérico e tome $x \in SG(S)$. Então $3x = x + 2x \in S$, $2x \in S$ por definição. Consequentemente $SG(S) \subseteq FG(S)$. Além disso, a condição $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$ implica que os elementos de $SG(S)$ são máximos em $FG(S)$ com respeito a ordem $\leq_S$.

Proposição 35. *Seja* S *um semigrupo numérico. Então*

$$SG(S) = Maximals_{\leq_S} FG(S).$$

Com isso o Corolário 20 pode ser reformulado.

Corolário 24. *Seja* S *um semigrupo numérico. Então* S *é irredutível se e somente se* $Maximals_{\leq_S} FG(S)$ *tem apenas um elemento.*

O conjunto das lacunas fundamentais de um semigrupo numérico da uma alternativa para construir o conjunto de todas os sobre-semigrupos.

Referências Bibliográficas

[1] A. Garcia, S. J. K. e Lax, R. F.: *Consecutive Weierstrass gaps and minimum distance of Goppa codes.* J. Pure Appl. Algebra, (84):199–207, 1993.

[2] Brás-Amorós, M.: *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus.* Semigroup Forum 76, pp. 379–384, 2008.

[3] MOTA, S.: *Semigrupos de valores de anéis de Gorenstein, Kunz e Arf e a árvore de semigrupos numéricos.* Dissertação de Mestrado, 2015.

[4] Rosales, J. e García-Sánchez, P.: *Numerical Semigroups.* Springer, 1ª ed., 2009.

[5] Silva, R.: *Sobre Semigrupos Numéricos.* Dissertação de Mestrado, 2006.

[6] Stichtenoth, H.: *Algebraic Function Fields and Codes.* Springer, 1ª ed., 1993.

[7] Sylvester, J.: *Excursus on rational fractions and partitions.* Amer J. Math, (5):119–136, 1882.

[8] V. Barucci, M. D. e Fröberg, R.: *Analytically Unramified One-dimensional Semilocal Rings and their Value Semigroups.* Journal of Pure and Applied Algebra, (147):215–254, 2000.