

**ERIVALDO PEREIRA NUNES**

**ANÁLISE TRANSIENTE DE SISTEMAS TRATADOS  
COM MATERIAIS VISCOELÁSTICOS ATRAVÉS DE  
UM MODELO DE DERIVADAS FRACIONÁRIAS  
MELHORADO E UMA TÉCNICA DE REDUÇÃO**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2020**

**ERIVALDO PEREIRA NUNES**

**ANÁLISE TRANSIENTE DE SISTEMAS TRATADOS COM  
MATERIAIS VISCOELÁSTICOS ATRAVÉS DE UM MODELO DE  
DERIVADAS FRACIONÁRIAS MELHORADO E UMA TÉCNICA DE  
REDUÇÃO**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

**UBERLÂNDIA – MG  
2020**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

N972 2020	<p data-bbox="416 1245 788 1279">Nunes, Erivaldo Pereira, 1996-</p> <p data-bbox="416 1279 1114 1413">Análise transiente de sistemas tratados com materiais viscoelásticos através de um modelo de derivadas fracionárias melhorado e uma técnica de redução [recurso eletrônico] / Erivaldo Pereira Nunes. - 2020.</p> <p data-bbox="416 1447 1066 1570">Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet.</p> <p data-bbox="453 1574 1104 1608">Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.642">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.642</a></p> <p data-bbox="453 1608 667 1641">Inclui bibliografia.</p> <p data-bbox="453 1641 667 1675">Inclui ilustrações.</p> <p data-bbox="416 1704 1104 1832">1. Engenharia mecânica. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, 1975-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p> <p data-bbox="1203 1899 1315 1928">CDU: 621</p>
--------------	---

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 570, COPEM				
Data:	16/10/2020	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	1611:40
Matrícula do Discente:	1192EMC002				
Nome do Discente:	Erivaldo Pereira Nunes				
Título do Trabalho:	Análise Transiente de Sistemas Tratados com Materiais Viscoelásticos Através de um Modelo de Derivadas Fracionárias Melhorado e uma Técnica de Redução				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Bolsa PQ-1D				

Reuniu-se por meio de webconferência via Google Meet a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Marcus Antonio Viana Duarte - FEMEC/UFU; Marcelo Leite Ribeiro - USP/São Carlos; e Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, Marcus Antonio Viana Duarte e o Discente participaram da defesa por meio de webconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Marcelo Leite Ribeiro desde a cidade de São Carlos/SP, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 16/10/2020, às 11:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Viana Duarte, Professor(a) do Magistério Superior**, em 16/10/2020, às 11:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Leite Ribeiro, Usuário Externo**, em 16/10/2020, às 11:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2306497** e o código CRC **558CBCBC**.

A meu pai, minha mãe, minha irmã e meu sobrinho.

## AGRADECIMENTOS

Isaac Newton, famoso cientista do século XVII que fez importantes contribuições na área da Mecânica, certa vez escreveu: “Se eu vi mais longe foi por estar sobre os ombros de gigantes”<sup>1</sup>. Eu, da mesma forma, se concluí este trabalho, foi com a colaboração de diversas pessoas, às quais necessito externar minha gratidão.

Sendo assim, agradeço...

A Deus, primeiramente, por sua bondade.

Ao meu pai, que não teve a oportunidade de estudar, mas sempre deu o devido valor à educação e, ainda que hoje sinta minha ausência em casa, continua sempre me apoiando. À minha mãe e à minha irmã, que são sempre minhas companheiras. Ao meu sobrinho, o pequeno Luiz, que, mesmo tão jovem e ingênuo, com sua ternura trouxe alegria para minha vida.

Ao orientador e amigo, o professor Antônio Marcos, por todo o auxílio durante esta pesquisa, buscando sempre que este trabalho se desenvolvesse da melhor forma possível e, mesmo num cenário de pandemia, em que tivemos que nos reunir à distância, esteve continuamente à disposição.

Aos professores Marcelo Ribeiro e Marcus Duarte, que aceitaram o convite para participar da banca e, com suas sugestões, enriqueceram este trabalho.

A todos os professores que compartilharam um pouco de conhecimento comigo durante o mestrado.

---

<sup>1</sup> Original em inglês: “*If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants*”, tradução nossa. Em carta de Isaac Newton a Robert Hooke escrita em 1675. Disponível em: <<https://discover.hsp.org/Record/dc-9792/Details>>. Acesso em: 04 jan. 2020.

Aos companheiros do LMEst, principalmente aqueles que se tornaram mais próximos: Ely Gomes, Fernanda Beatriz, Gabriella Garcia, Gutemberg Ferreira, João Pedro, Marcelo Delgado, Prince Azsemergh e Raimundo Arrais, pelo acolhimento e por tornar a distância de casa e da família um tanto menos penosa.

Aos irmãos que encontrei pela vida: Jefferson José, José Wéllerson e Luan Ewerton, pois, certamente os bons momentos que compartilhamos juntos me ajudaram a enfrentar os desafios inerentes a este trabalho.

À UFU, escola na qual cursei o mestrado, pois, em tempos nos quais as universidades públicas – instituições responsáveis pela imensa maioria das pesquisas realizadas no Brasil, indispensáveis à promoção de justiça social e imprescindíveis ao desenvolvimento deste país – sofrem cortes arbitrários por serem levemente acusadas de promoverem balbúrdia, são atacadas de todas as formas e são consideradas inimigas deste governo, manter um ensino de qualidade e realizar pesquisas de relevância tornou-se um desafio.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente com este trabalho.

A vocês, meu muito obrigado!



“A minha história é talvez  
É talvez igual a tua, jovem que desceu do Norte  
Que no Sul viveu na rua  
E que ficou desnordeado  
[...]  
Eu sou como você”

Belchior

NUNES, E. P. **Análise transiente de sistemas tratados com materiais viscoelásticos através de um modelo de derivadas fracionárias melhorado e uma técnica de redução.** 2020. 78 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.642>

## RESUMO

O controle de vibrações é um campo importante no estudo das estruturas, e uma das formas frequentemente empregadas para mitigar as oscilações estruturais é o controle passivo utilizando materiais viscoelásticos. As propriedades desses materiais são fortemente dependentes de fatores ambientais, principalmente da temperatura e frequência de excitação, de forma que os modelos para a caracterização do comportamento dinâmico desses devem ser capazes de representar essa dependência. Nesse sentido, este trabalho apresenta a aplicação de um modelo de derivadas fracionárias melhorado na análise no domínio do tempo de algumas estruturas tratadas com material viscoelástico, e a aplicação de um método de redução de modelo. Para tal, é feita a modelagem em elementos finitos de dois tipos de estruturas: uma viga e um pórtico. Os efeitos viscoelásticos foram incorporados através do MDF, que é capaz de eliminar a autodependência do campo de tensões mediante a inclusão de um termo de recorrência, o que diminui o custo computacional. Por meio desse procedimento foi possível representar o comportamento transiente da estrutura e analisar a influência de diversas variações paramétricas. As simulações numéricas apresentadas neste trabalho demonstram a eficácia do modelo e da técnica de redução, que foi capaz de reduzir o tempo de análise computacional em cerca de 95%. Vale aludir que essa redução pode ser ainda maior em estruturas mais complexas de interesse industrial. Ademais, o método de redução de modelos aplicado não se restringe a estruturas dotadas de amortecimento viscoelástico, pode ser utilizado na análise de outros sistemas dinâmicos.

---

Palavras-chave: Controle de vibração; Material Viscoelástico; Método dos Elementos Finitos; Cálculo Fracionário; Redução de Modelo.

NUNES, E. P. **Transient analysis of systems treated with viscoelastic materials through an improved fractional derivative model and a reduction technique.** 2020. 78 p. MSc. dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.  
<https://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.642>

## ***ABSTRACT***

*Vibration control is an important field in the study of structures, and one of the ways often used to mitigate structural oscillations is passive control using viscoelastic materials. The properties of these materials are strongly dependent on environmental factors, mainly on the temperature and frequency of excitation, so that the models for the characterization of their dynamic behavior must be able to represent this dependence. In this sense, this work presents the application of an improved fractional derivative model in the time domain analysis of some structures treated with viscoelastic material, and the application of a model reduction technique. To this purpose, finite element modeling of two types of structures: a beam and a frame is carried out. The viscoelastic effects were incorporated through the FDM, capable of eliminating self-dependence in the stress field by including a recurrence term, which reduces the computational cost. Through this procedure it was possible to represent the transient behavior of the structure and analyze the influence of several parametric variations. The numerical simulations presented in this work demonstrate the effectiveness of the model and the reduction technique, which was able to reduce the computational analysis time in about 95%. It is worth mentioning that this reduction may be even greater in more complex structures of industrial interest. In addition, the model reduction method presented can be used in other dynamic systems that do not have viscoelastic damping.*

---

*Keywords: Vibration Control; Viscoelastic Material; Finite Element Method; Fractional Calculus; Model Reduction.*

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Sistema de coordenadas

$X, Y, Z$	Sistema de coordenadas global
$x, y, z$	Sistema de coordenadas local

## Símbolos latinos

$a_E$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao alongamento
$a_G$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao cisalhamento
$a_h$	Parâmetro do modelo associado ao efeito hidrostático
$a_d$	Parâmetro do modelo associado ao efeito desviatório
$[\bar{A}]$	Parâmetro do modelo
$b$	Largura
$b_E$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao alongamento
$b_G$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao cisalhamento
$b_h$	Parâmetro do modelo associado ao efeito hidrostático
$b_d$	Parâmetro do modelo associado ao efeito desviatório
$[B]$	Parâmetro do modelo
$[\bar{B}]$	Parâmetro do modelo
$[C]$	Parâmetro do modelo
$[\bar{C}]$	Parâmetro do modelo
$D^E_1, D^E_2, D^E_3$	Parâmetros do modelo unidimensional associado ao alongamento
$D^G_1, D^G_2, D^G_3$	Parâmetros do modelo unidimensional associado ao cisalhamento
$E$	Módulo de elasticidade
$E_0$	Módulo de elasticidade a baixa frequência
$E_\infty$	Módulo de elasticidade a alta frequência

$E'$	Módulo de armazenamento
$E''$	Módulo de perda
$F$	Função fluência
$\{F\}$	Vetor dos esforços aplicados no sistema de coordenadas global
$\{F_v\}$	Vetor dos esforços viscoelásticos no sistema de coordenadas global
$f$	Função objetivo
$\{f\}$	Vetor dos esforços aplicados
$\{f_v\}$	Vetor dos esforços viscoelásticos
$\{f_r\}$	Vetor dos esforços aplicados reduzido
$\{f_{vr}\}$	Vetor dos esforços viscoelásticos reduzido
$G$	Módulo de cisalhamento
$G_0$	Módulo de cisalhamento a baixa frequência
$G_\infty$	Módulo de cisalhamento a alta frequência
$h$	Espessura da camada
$[I]$	Matriz identidade
$[K]$	Matriz de rigidez
$[K_r]$	Matriz de rigidez reduzida
$K_0$	Módulo volumétrico a baixa frequência
$K_\infty$	Módulo volumétrico a alta frequência
$k$	Número identificador da camada (1,2 ou 3)
$L$	Comprimento
$\mathcal{L}$	Lagrangeano
$l_i$	Comprimento do elemento finito
$N$	Número de elementos finitos
$N_i$	Comprimento de memória
$[N_u], [N_w], [N_\beta]$	Matrizes relacionada às funções de forma
$[M]$	Matriz de massa
$[M_r]$	Matriz de massa reduzida
$\{q\}$	Vetor de coordenadas generalizadas
$\{q_r\}$	Vetor de coordenadas generalizadas reduzido
$U$	Vetor de deslocamento
$u$	Componente em $x$ do descolamento
$R$	Função relaxação

$T^{(k)}$	Energia cinética da k-ésima camada
$T$	Temperatura do material viscoelástico
$[T_h]$	Matriz de transformação hidrostática
$[T_d]$	Matriz de transformação deviatória
$[T]$	Matriz de transformação do sistema de coordenadas local para o global
$[T_r]$	Base de redução
$[T_{IRV}]$	Base de redução do método IRV
$V^{(k)}$	Energia de deformação da k-ésima camada
$\forall$	Volume
$v$	Componente em y do descolamento
$w$	Componente em z do descolamento

### Símbolos gregos

$\alpha_h$	Ordem da derivada fracionária associada ao efeito hidrostático
$\alpha_d$	Ordem da derivada fracionária associada ao efeito desviatório
$\alpha_T$	Fator de deslocamento
$\beta$	Cisalhamento da camada viscoelástica
$[\beta_{j+1}]$	Termo de recorrência para a lei constitutiva tridimensional
$\beta_{j+1}^E$	Termo de recorrência associado ao alongamento para a lei constitutiva unidimensional
$\beta_{j+1}^G$	Termo de recorrência associado ao cisalhamento para a lei constitutiva unidimensional
$\gamma$	Deformação cisalhante
$\Delta t$	Varição de tempo
$\varepsilon$	Deformação normal unidimensional
$\{\varepsilon\}$	Vetor de deformação
$\varepsilon_0$	Deformação normal aplicada
$\{\varepsilon_h\}$	Vetor das componentes hidrostáticas de deformação
$\{\varepsilon_d\}$	Vetor das componentes desviatórias de deformação
$\eta$	Fator de perda
$\theta$	Rotação

$\mu$	Viscosidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidade
$\sigma$	Tensão normal unidimensional
$\{\sigma\}$	Vetor de tensão
$\sigma_0$	Tensão normal aplicada
$\{\sigma_h\}$	Vetor das componentes hidrostáticas de tensão
$\{\sigma_d\}$	Vetor das componentes desviatórias de tensão
$\tau$	Tensão cisalhante
$\phi$	Ângulo entre os sistemas de coordenadas
$\omega$	Frequência de excitação
$\omega_r$	Frequência reduzida

**Sobrescrito**

1	Camada base
2	Camada viscoelástica
3	Camada restrigente
e	Camadas elásticas
v	Camada viscoelástica

**Subscrito**

e	A nível elementar
---	-------------------

## LISTA DE ABREVIACÕES

ADF	<i>Anelastic displacement field</i>
ATF	<i>Augmenting thermodynamic field</i>
CILAMCE	<i>Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering</i>
EF	Elementos finitos
FEMEC	Faculdade de Engenharia Mecânica
FRF	Função de resposta em frequência
gdl	Grau de liberdade
GHM	Golla-Hughes-McTavis
LMEst	Laboratório de Mecânica de Estruturas
MDF	Modelo de derivadas fracionárias
MEF	Método dos elementos finitos
PEEV	Princípio da equivalência elástico-viscoelástico
PSFT	Princípio da superposição frequência-temperatura
RTG	<i>Rubbery, transition and glassy regions</i>
TCL	Teoria clássica dos laminados
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
VRI	Vetores de resposta ao impacto



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Técnicas de controle de vibrações.....	2
Figura 1.2 – tratamento com a) camada livre, b) camada restringente e c) absorvedores viscoelásticos.....	3
Figura 1.3 – Sistema de amortecimento viscoelástico utilizado no World Trade Center e no Columbia Center: a) amortecedores e b) esquema de posicionamento na estrutura. Adaptado de Khoshraftar (2016).....	3
<hr/>	
Figura 2.1 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura. Adaptado de Nashif <i>et al.</i> (1985).....	9
Figura 2.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência. Adaptado de Nashif <i>et al.</i> (1985).....	10
Figura 2.3 – Comportamento temporal: a) fluência e b) relaxação. Adaptado de Lima (2007) .....	11
Figura 2.4 – Representação dos modelos clássicos .....	12
Figura 2.5 – Modelos generalizados.....	13
<hr/>	
Figura 3.1 – a) Curva mestre para as propriedades de amortecimento do material ISD-112 e b) Influência da temperatura sobre o fator de deslocamento. Adaptado de Lima (2007) ....	28
Figura 3.2 – Otimização dos parâmetros do MDF para o ISD 112 a 27 °C .....	29
<hr/>	
Figura 4.1 – Cinemática da deformação da viga sanduíche viscoelástica.....	33
Figura 4.2 – Definição dos gdl's de um EF $i$ de viga sanduíche .....	35
Figura 4.3 – Pórtico plano tratado com viga sanduíche e um elemento genérico .....	40
Figura 4.4 – Fluxograma da implementação computacional.....	42
<hr/>	

Figura 5.1 – Principais etapas da integração de Newmark com o método de redução VRI .....	47
<hr/>	
Figura 6.1 – Comparação entre as respostas temporais obtidas pelos MDFs anelástico e com recorrência .....	51
Figura 6.2 – Comparação entre as respostas temporais obtidas pelos MDFs de Schmidt e Gaul (2001) e com recorrência.....	52
Figura 6.3 – Convergência da malha de EFs .....	54
Figura 6.4 – Influência do comprimento de memória nas respostas do sistema viscoelástico .....	55
Figura 6.5 – Influência do passo de tempo e do comprimento de memória na resposta.....	56
Figura 6.6 – Respostas temporais da viga sem e com tratamento viscoelástico .....	57
Figura 6.7 – FRFs da viga sem e com tratamento viscoelástico.....	57
Figura 6.8 – Ajuste de curvas para as temperaturas de 10 °C, 20 °C, 30 °C e 40 °C.....	59
Figura 6.9 – Respostas temporais da viga sanduíche para várias temperaturas .....	60
Figura 6.10 – FRFs da viga sanduíche para várias temperaturas .....	60
Figura 6.11 – Influência da temperatura sobre a) o fator de perda e b) os módulos do ISD 112 .....	61
Figura 6.12 – Influência das espessuras das a) b) camadas viscoelástica, c) base e d) restrigente da viga sanduíche.....	62
Figura 6.13 – FRFs para diferentes espessuras da camada viscoelástica .....	63
Figura 6.14 - Respostas no tempo dos modelos completo e reduzido da viga sanduíche ....	64
Figura 6.15 - Ilustração do pórtico 2D tratado com a viga sanduíche.....	65
Figura 6.16 – Respostas no tempo do pórtico sem com tratamento viscoelástico .....	66
Figura 6.17 – FRFs do pórtico sem e com tratamento viscoelástico .....	66
Figura 6.18 – Respostas temporais dos modelos completo e reduzido do pórtico .....	67

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Propriedades físicas e geométricas da viga sanduíche de Banerjee <i>et al.</i> (2007) .....	49
Tabela 6.2 – Frequências naturais para a viga sanduíche elástica.....	49
Tabela 6.3 – Custo computacional do MDF com recorrência e o MDF anelástico .....	51
Tabela 6.4 – Custo computacional do MDF com recorrência e o MDF de Schmidt e Gaul (2001).....	53
Tabela 6.5 – Parâmetros do MDF com recorrência.....	58
Tabela 6.6 – Custo computacional dos modelos completo e reduzido da viga sanduíche ...	63
Tabela 6.7 – Propriedades físicas e geométricas do pórtico.....	65
Tabela 6.8 – Custo computacional para os modelos completo e reduzido do pórtico .....	67

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1. JUSTIFICATIVAS E CONTEXTO DO ESTUDO</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2. OBJETIVOS</b> .....	<b>5</b>
<b>1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO</b> .....	<b>6</b>
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>8</b>
<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>8</b>
<b>2.1. FUNDAMENTOS DA VISCOELASTICIDADE LINEAR</b> .....	<b>8</b>
<b>2.2. MODELOS VISCOELÁSTICOS</b> .....	<b>12</b>
<b>2.3. O CÁLCULO FRACIONÁRIO</b> .....	<b>15</b>
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>19</b>
<b>MODELO FDM MELHORADO COM A FÓRMULA DA RECORRÊNCIA</b> .....	<b>19</b>
<b>3.1. ESTUDOS ANTERIORES</b> .....	<b>19</b>
<b>3.2. LEI CONSTITUTIVA TRIDIMENSIONAL</b> .....	<b>20</b>
<b>3.2.1. A recorrência</b> .....	<b>25</b>
<b>3.3. OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS</b> .....	<b>28</b>
<b>3.4. SIMPLIFICAÇÃO DA LEI CONSTITUTIVA PARA O CASO DA VIGA</b> .....	<b>30</b>
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>32</b>
<b>MODELAGEM DE VIGAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS UTILIZANDO O</b> <b>MODELO MDF COM A RECORRÊNCIA</b> .....	<b>32</b>
<b>4.1. MODELAGEM DE VIGAS SANDUÍCHES</b> .....	<b>32</b>
<b>4.1.1. Relações deformações-deslocamentos</b> .....	<b>33</b>
<b>4.1.2. Energias cinética e de deformação</b> .....	<b>35</b>
<b>4.1.3. Equações do movimento</b> .....	<b>38</b>

4.2.	<b>MODELAGEM DE PÓRTICOS .....</b>	<b>39</b>
4.3.	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....</b>	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO 5 .....</b>	<b>43</b>	
	<b>REDUÇÃO DE MODELOS NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA SISTEMAS</b>	
	<b>VISCOELÁSTICOS.....</b>	<b>43</b>
5.1.	<b>ESTUDOS ANTERIORES .....</b>	<b>43</b>
5.2.	<b>REDUÇÃO DE MODELO NO DOMÍNIO DO TEMPO.....</b>	<b>44</b>
<b>CAPÍTULO 6 .....</b>	<b>48</b>	
	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>48</b>
6.1.	<b>VERIFICAÇÃO DO MODELO DE VIGA SANDUÍCHE .....</b>	<b>48</b>
6.2.	<b>MDF COM RECORRÊNCIA E OUTROS MODELOS FRACIONÁRIOS</b>	
	<b>.....</b>	<b>49</b>
6.2.1.	<b>Modelos MDF com recorrência e MDF anelástico .....</b>	<b>50</b>
6.2.2.	<b>Modelos MDF com recorrência e MDF de Schmidt e Gaul .....</b>	<b>51</b>
6.3.	<b>CONVERGÊNCIA DA MALHA E COMPRIMENTO DE MEMÓRIA</b>	
	<b>.....</b>	<b>53</b>
6.4.	<b>INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMETRICOS NA</b>	
	<b>RESPOSTA DO SISTEMA VISCOELÁSTICO.....</b>	<b>56</b>
6.4.1.	<b>Efeito da temperatura .....</b>	<b>58</b>
6.4.2.	<b>Influência das espessuras das camadas .....</b>	<b>51</b>
6.5.	<b>REDUÇÃO DE MODELO NO DOMÍNIO DO TEMPO.....</b>	<b>59</b>
6.6.	<b>A INFLUÊNCIA DE VARIAÇÕES GEOMÉTRICAS .....</b>	<b>63</b>
6.7.	<b>PÓRTICO 2D TRATADO COM A VIGA SANDUÍCHE.....</b>	<b>64</b>
<b>CAPÍTULO 7 .....</b>	<b>68</b>	
	<b>CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVA DE TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>68</b>
7.1.	<b>PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>69</b>
7.2.	<b>TRABALHOS PUBLICADOS.....</b>	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>72</b>	
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>i</b>	
	<b>DETALHES SOBRE A FORMULAÇÃO EM MEF.....</b>	<b>i</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. JUSTIFICATIVAS E CONTEXTO DO ESTUDO

Desde a revolução científica, ocorrida por volta do ano 1500, o mundo tem evoluído de forma jamais evidenciada anteriormente (HARARI, 2018). A humanidade cresceu em população, em produtividade e em consumo; edificações cada vez mais altas e suntuosas são construídas; veículos aeroespaciais, inconcebíveis há algum tempo, alcançam velocidades e distâncias maiores; automóveis mais potentes, seguros e confortáveis são desenvolvidos. Esses são alguns poucos exemplos de como os seres humanos têm evoluído em conhecimento e inovação tecnológica. Todo esse progresso, no entanto, só tem se tornado possível mediante os avanços também realizados na área da Engenharia de Estruturas.

Novas criações muitas vezes demandam estruturas mais resistentes com o menor peso, e o desenvolvimento de novos materiais, como os compósitos, tem tornado isso possível. A redução de massa nas estruturas, no entanto, reduz seu amortecimento inerente, gerando vibrações normalmente indesejadas e que podem ocasionar diversos inconvenientes, como o desgaste excessivo em mancais, formação de trincas, afrouxamento de parafusos, falhas estruturais e mecânicas, manutenção frequente em máquinas, mal funcionamento de equipamentos eletrônicos, entre outros (RAO, 2011).

Sendo assim, o controle de vibração é um campo de estudo importante na Engenharia de Estruturas, e pode ser realizado através de técnicas de controle ativo, passivo, semiativo e híbrido. O controle ativo se dá quando se aplicam forças no sistema através de atuadores, a fim de se produzir um sinal fora de fase, de modo a cancelar a perturbação, havendo, portanto,

a dependência de um suprimento externo de energia (RAO, 2003). O controle passivo, de forma oposta, é tipicamente independente de fontes de energia exteriores, consistindo na alteração de parâmetros físicos da estrutura (INMAN, 2006). Os controles semiativo e híbrido possuem características intermediárias dos dois anteriores. O primeiro se caracteriza pela utilização de fontes externas para alterar propriedades mecânicas do sistema que atuará de forma passiva (RAO, 2003); o segundo é uma combinação de ambos e atua de forma passiva algumas vezes e ativamente nos momentos em que o controle puramente passivo perde sua eficácia (BENEVELI, 2002). A Fig. 1.1 ilustra esquematicamente as classes de controle existentes bem como alguns exemplos de técnicas.

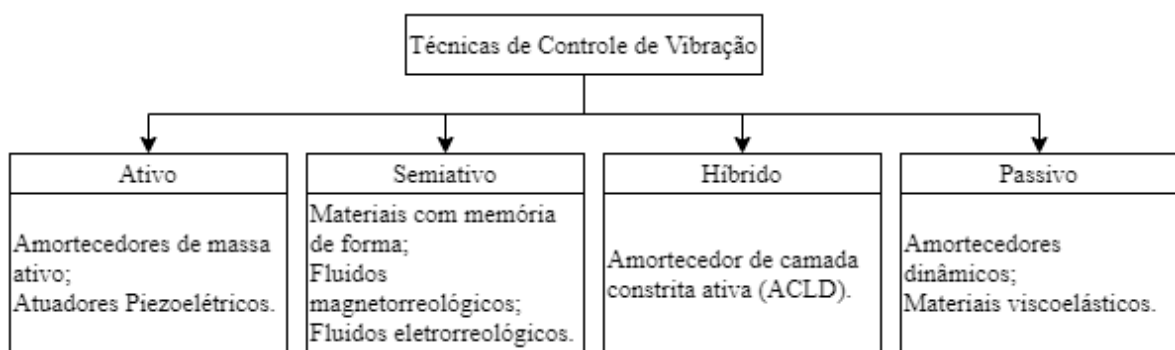


Figura 1.1 – Técnicas de controle de vibrações

O controle passivo, apesar de ser a forma mais simples, é normalmente o meio mais eficiente de controlar vibrações em estruturas (INMAN, 2006). Dentre as técnicas existentes nessa classe, há o uso das propriedades de dissipação de energia dos materiais viscoelásticos para mitigar as oscilações. De acordo com Cunha-Filho (2015), o uso desses materiais no controle de vibrações pode ser feito de duas formas: através de camadas superficiais ou por meio de sistemas discretos. O primeiro modo, que é estudado neste trabalho, trata-se da aplicação de uma camada de material viscoelástico sobre a superfície da estrutura cuja vibração deve ser mitigada. Essa camada pode ser livre ou restringida através da adição de uma segunda camada com propriedades elásticas, conforme se observa na Fig. 1.2. A utilização da camada restringente intensifica a dissipação de energia, uma vez que introduz no material viscoelástico tensões cisalhantes. O segundo modo, a técnica de sistemas discretos, como o próprio nome indica, baseia-se no posicionamento de absorvedores constituídos de um elemento viscoelástico e uma massa em pontos críticos da estrutura, a

Fig. 1.2 c) ilustra essa técnica. Essas formas de tratamentos usando os materiais viscoelásticos são utilizados em diversas aplicações.

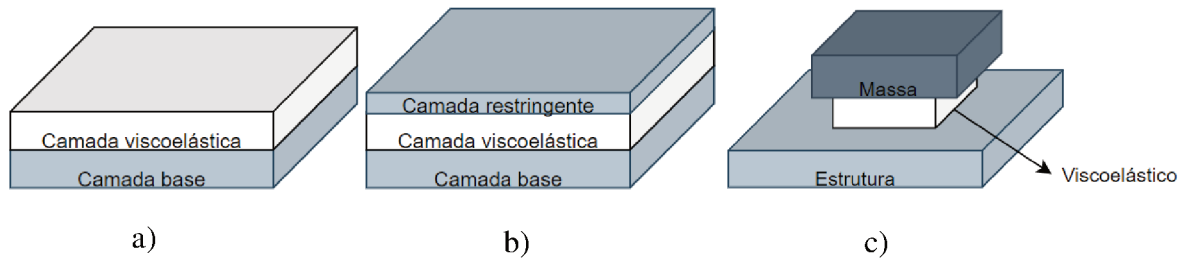


Figura 1.2 – tratamento com a) camada livre, b) camada restringente e c) absorvedores viscoelásticos

Na construção civil, os materiais viscoelásticos podem ser utilizados a fim de atenuar a ação do vento ou de terremotos em grandes construções. Edifícios como o antigo World Trade Center em Nova Iorque e o Columbia Center em Seattle foram projetados com um sistema de amortecimento que faz uso desse tipo de material (KHOSHRAFTAR, 2016). A Fig. 1.3 apresenta uma ilustração dos amortecedores utilizados.

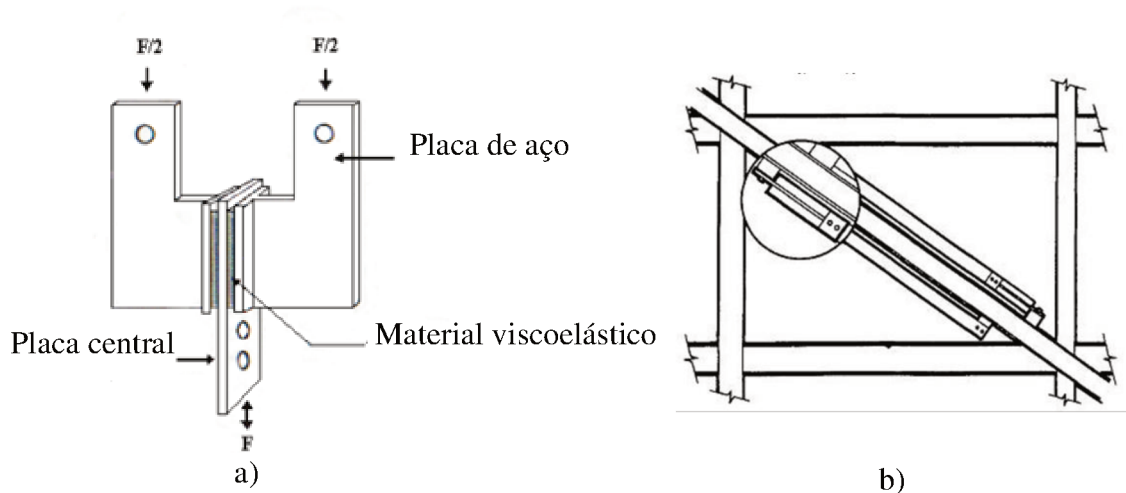


Figura 1.3 – Sistema de amortecimento viscoelástico utilizado no World Trade Center e no Columbia Center: a) amortecedores e b) esquema de posicionamento na estrutura. Adaptado de Khoshraftar (2016)



Nos veículos aeronáuticos, à medida que se movem mais rápido, instabilidades aeroelásticas podem vir a ocorrer. Com o aumento da velocidade e devido à interação entre forças elásticas, aerodinâmicas e inerciais, há uma diminuição na dissipação de energia do sistema, que se torna nula ao se alcançar determinada velocidade crítica, momento em que as oscilações se tornam puramente harmônicas. A esse fenômeno dá-se o nome de *flutter*, uma instabilidade autoexcitada e potencialmente catastrófica. Dentre as alternativas para se retardar a ocorrência desse fenômeno, o controle de vibrações com estruturas sanduíches empregando materiais viscoelásticos pode ser utilizado.

Nas indústrias automotiva, naval e ferroviária, o controle de vibrações é importante não apenas para fins estruturais, mas também para o conforto físico e acústico dos ocupantes. Cerca de 90% do ruído no interior de um automóvel é proveniente de irregularidades nas rodovias, oscilações no motor e nos sistemas de transmissão e de condicionamento térmico, entre outros (RAO, 2003) e pode ser mitigado através do controle de vibrações utilizando frequentemente materiais viscoelásticos.

Além das aplicações já citadas, o controle de vibrações utilizando materiais viscoelásticos é empregado na indústria petrolífera para atenuar os movimentos oscilatórios em *risers* e dutos em geral (BORGES *et al.*, 2011). Ademais, os modelos de caracterização destes materiais também são importantes na Engenharia Biomecânica, uma vez que grande parte dos tecidos humanos e biomateriais podem ser bem modelados através de suas propriedades viscoelásticas (COUSSOT *et al.*, 2009).

Diante da ampla aplicabilidade dos materiais viscoelásticos, estudos que se propõem a desenvolver novos modelos, ou melhorar aqueles já usados na caracterização desses materiais são de grande relevância, sobretudo quando se trabalha domínio do tempo, onde as análises são mais complicadas e computacionalmente mais custosas. Além disso, modelos em elementos finitos para aplicações industriais que fazem uso de amortecimento viscoelástico são normalmente muito complexos, e, mesmo com o desenvolvimento de modelos mais eficientes, comumente se faz necessária a aplicação de algum método de redução de modelo, a fim de tornar o uso do MEF (método dos elementos finitos) viável. Nesse sentido, o estudo de novas técnicas de redução de modelo, bem como o aperfeiçoamento e melhor entendimento daquelas já existentes também são de considerável importância.

Vale aludir que esta pesquisa foi desenvolvida no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), sendo uma continuidade de outros trabalhos já realizadas nesse mesmo laboratório que tem ampla experiência na área de controle de vibrações mecânicas utilizando não apenas materiais viscoelásticos mas também outros tipos de tratamentos com materiais piezoelétricos, ligas de memória de forma, fluidos magnetorreológicos, entre outros.

No que tange aos estudos mais recentes do LMEst acerca dos materiais viscoelásticos, podem ser citados os trabalhos de Gonçalves (2018), que analisou o aumento da vida em fadiga de sistemas dinâmicos tratados com esses materiais; Briend (2017), que aplicou um método de redução de modelos em elementos finitos a sistemas aeroviscoelásticos para a predição do fenômeno de *flutter*; e Cunha-Filho (2019), que também estudou o *flutter*, empregando o controle passivo de vibrações de forma a retardar a ocorrência desse fenômeno e analisou os efeitos viscoelásticos por meio de um modelo de derivadas fracionadas melhorado. Esta dissertação se alinha aos trabalhos anteriores e é uma continuação das pesquisas de Briend (2017) e Cunha-Filho (2019).

## 1.2. OBJETIVOS

O alto custo computacional é uma das limitações na modelagem de sistemas complexos tratados com materiais viscoelásticos, o que motiva o desenvolvimento de modelos mais eficientes e a utilização de técnicas de redução de modelo. No entanto, são raros os trabalhos disponíveis na literatura que abordam a redução de modelos aplicados a estruturas dotadas de amortecimento viscoelástico no domínio do tempo utilizando um modelo MDF (Modelo de derivadas fracionárias). Nesse sentido, esta pesquisa tem como objetivo preencher um pouco essa lacuna, aplicando uma técnica de redução de modelos no domínio do tempo baseada na resposta transiente do próprio sistema ao MDF com recorrência.

De forma específica, objetiva-se:

- Aplicar o cálculo fracionário à descrição da lei constitutiva do material viscoelástico;
- Discretizar em elementos finitos a estrutura analisada e posterior incorporação do novo modelo MDF com recorrência;

- Aplicar a técnica de redução de modelos proposta ao sistema viscoelástico e comparação entre as respostas dos modelos reduzido e completo para fins de verificação da eficiência e acurácia do método.

### **1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO**

Além deste primeiro capítulo onde é feita a introdução do trabalho, apresentando o contexto em que este estudo se insere, suas justificativas e seus objetivos, esta dissertação está organizada em sete capítulos conforme se segue.

O segundo capítulo dedica-se à revisão da literatura, onde se expõe a teoria acerca dos materiais viscoelásticos, apresentando suas principais características, a teoria da viscoelasticidade linear e os principais modelos de caracterização do comportamento dinâmico, sobretudo o MDF. Em seguida discorre-se brevemente ainda sobre o cálculo fracionário e suas aplicações.

O terceiro capítulo inicia com um breve estado da arte sobre a aplicação do cálculo fracionário à viscoelasticidade. Em seguida apresenta o desenvolvimento da lei constitutiva tridimensional do material viscoelástico baseada nos conceitos de tensores hidrostáticos e de desvio e, a partir desta, desenvolve-se a fórmula da recorrência utilizada para eliminar a auto dependência do campo de tensões. Posteriormente é apresentado um ajuste de curvas a fim de determinar os parâmetros a serem utilizados no modelo. Finalmente a lei constitutiva tridimensional é simplificada para a aplicação em vigas.

O quarto capítulo expõe a modelagem em EFs (elementos finitos) de vigas multicamadas, apresentando as relações cinemáticas, as matrizes de massa e rigidez e todo o desenvolvimento até se determinar a equação do movimento para o sistema incorporando o MDF da recorrência ao modelo em elementos finitos. Essa formulação é posteriormente estendida para estruturas de pórticos.

O quinto capítulo inicia com uma breve revisão dos estudos anteriores acerca das técnicas de redução de modelo no domínio do tempo. Em seguida, a técnica VRI (vetores de resposta ao impulso) e sua aplicação na análise transiente de estruturas tratadas com material viscoelástico são apresentados.

O sexto capítulo apresenta as simulações numéricas realizadas neste trabalho, através das quais se investiga a eficiência e acurácia do MDF com a fórmula da recorrência por meio da comparação com dois dos modelos mais utilizados na literatura para a análise transiente de sistemas viscoelásticos. São investigadas também a influência de variações de parâmetros geométricos e físicos nas respostas dinâmicas do sistema. Nesse capítulo são apresentados ainda os resultados da aplicação da técnica de redução de modelos às estruturas de viga e pórtico.

Por fim, o sétimo capítulo apresenta as conclusões gerais, algumas recomendações para trabalhos futuros e as publicações realizadas até o momento.

Além desses sete capítulos, é incluído um apêndice ao final deste texto a fim de se explicar com maiores detalhes a formulação em EFs.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentado primeiramente uma revisão sobre a viscoelasticidade linear, abordando o comportamento desses materiais e alguns dos principais modelos usados para sua caracterização. Em seguida, abordam-se a evolução do cálculo fracionário e suas aplicações em Engenharia. Informações complementares sobre a viscoelasticidade podem ser encontradas em Zhou *et al.* (2016), Jones (2001) e Nashif *et al.* (1985). No que diz respeito ao cálculo fracionário, um panorama mais completo pode ser encontrado em Miller e Ross (1993), Debnath (2004), Oliveira (2010) e Herrmann (2018).

#### 2.1. FUNDAMENTOS DA VISCOELASTICIDADE LINEAR

Os materiais viscoelásticos são materiais que quando solicitados mecanicamente exibem comportamento elástico e viscoso. Um desafio ao se modelar o comportamento de tais materiais é o fato de suas propriedades mecânicas serem fortemente dependentes de fatores ambientais e operacionais, principalmente da temperatura e da frequência de excitação. Na Fig. 2.1 é possível observar que os materiais viscoelásticos se apresentam em quatro estados diferentes conforme sua temperatura varia, quais sejam: o estado vítreo, no qual o módulo de armazenamento tem valor elevado, variando pouco com a temperatura, e o fator de perda cresce substancialmente; o estado de transição, onde há um decréscimo considerável do módulo de armazenamento, e o fator de perda atinge seu valor máximo; o estado de borracha, em que há pouca variação das propriedades do material com a temperatura; e o estado de fluido, que é típico de poucos materiais e tem normalmente pouca aplicabilidade em projetos (NASHIF *et al.*, 1985).

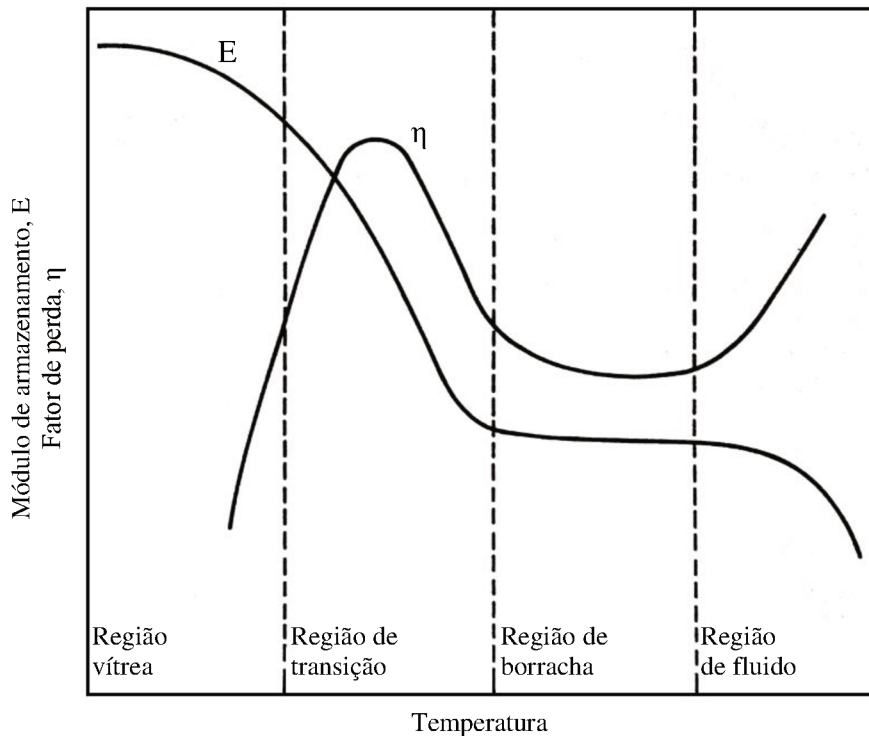


Figura 2.1 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura. Adaptado de Nashif *et al.* (1985)

Quanto à frequência, seu principal efeito sobre as propriedades do material viscoelástico é o aumento do módulo de armazenamento, conforme se observa na Fig. 2.2. Através dessa figura, é possível notar também que a frequência tem um efeito inverso ao da temperatura. Nashif *et al.* (1985) afirmam que esse fenômeno é um dos aspectos mais importantes da viscoelasticidade linear, uma vez que através dele é possível estabelecer o princípio da superposição frequência-temperatura (PSFT), o qual possibilita a transformação das propriedades viscoelásticas do domínio da temperatura para o da frequência e vice-versa. A Fig. 2.2 mostra ainda uma característica interessante: o fator de perda possui inicialmente valores muito baixos que aumentam com a frequência, chegando a um valor máximo e passa a decrescer a frequências excessivamente altas; desse comportamento é possível perceber que os materiais viscoelásticos não são muito eficientes quanto ao controle de vibrações a frequências extremamente baixas. De fato, há na literatura trabalhos que aplicam a viscoelasticidade ao controle híbrido, de modo que o controle ativo atua a baixas frequências e o material viscoelástico nas frequências mais altas (WANG, 2001).

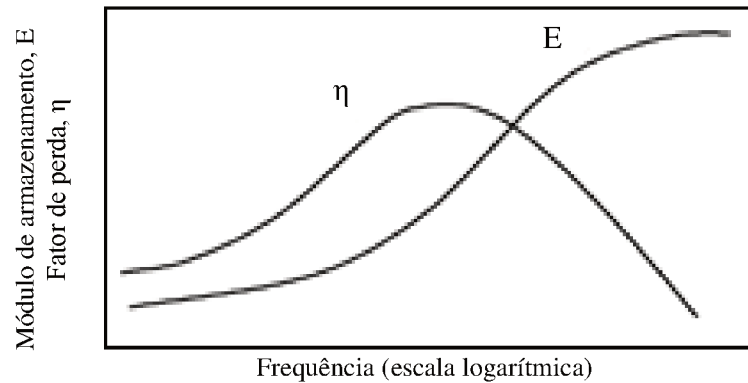


Figura 2.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência. Adaptado de Nashif *et al.* (1985)

Quanto ao comportamento temporal, os materiais viscoelásticos quando solicitados mecanicamente se comportam de forma intermediária entre um sólido elástico e um fluido viscoso. Os materiais elásticos obedecem à lei de Hooke e, mediante a aplicação de uma tensão, se deformam praticamente de forma instantânea e, quando a aplicação da carga cessa, o material recupera sua forma anterior indeformada. Os materiais viscosos, por outro lado, se deformam continuamente enquanto a tensão é aplicada e não há qualquer recuperação após a retirada da solicitação. Nos materiais viscoelásticos, por sua vez, a aplicação da carga resulta em uma deformação elástica instantânea e uma deformação anelástica, que é dependente do tempo. Uma vez que a carga é retirada, a deformação é recuperada e o material retorna à sua configuração inicial, essa recuperação, no entanto, também não ocorre instantaneamente. Dessa forma, a viscoelasticidade pode ser definida como a característica que certos materiais possuem de se deformarem através de componentes elásticas e viscosas.

Conforme reportado por Lima (2007), a caracterização do comportamento temporal dos materiais viscoelásticos pode ser feita através de duas funções que representam a resposta do material a dois tipos de solicitações. São elas a função fluência, que caracteriza a deformação do material submetido a uma tensão constante e a função relaxação, que descreve a tensão do material sujeito a uma deformação constante. Ambas as funções são expressas, respectivamente, pelas Eqs. 2.1 e 2.2, e ilustradas na Fig. 2.3.

$$F(\sigma_0, t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.1)$$

$$R(\varepsilon_0, t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (2.2)$$

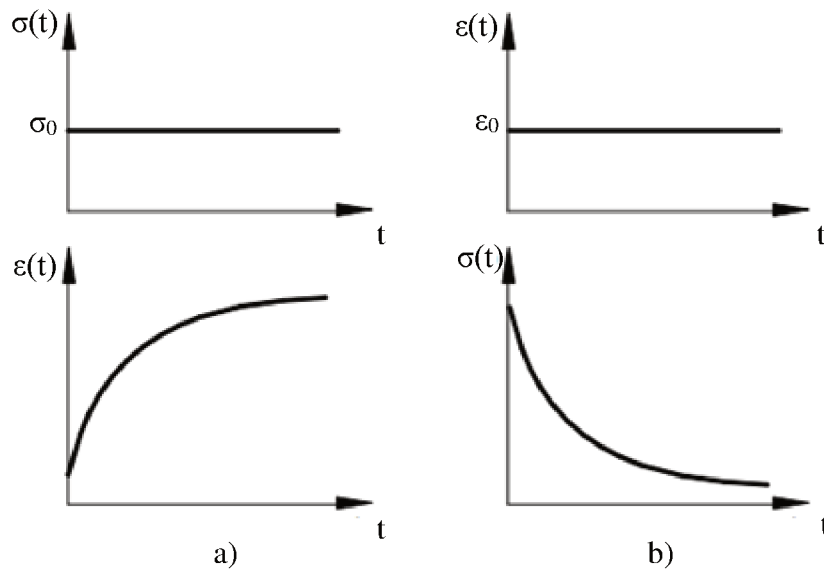


Figura 2.3 – Comportamento temporal: a) fluência e b) relaxação. Adaptado de Lima (2007)

Do comportamento temporal caracterizado pelas funções fluência e relaxação advém o efeito de memória dos materiais viscoelásticos e a necessidade de se conhecer o histórico do carregamento. Como uma consequência do princípio da superposição de Boltzmann (a influência das tensões ou deformações impostas sobre o material pode ser superpostas no regime linear), as variações futuras no carregamento são sobrepostas às solicitações anteriores, de forma que todos os estados de tensão ou deformação passados contribuirão para o comportamento do material viscoelástico. Nesse sentido, o campo de tensões pode ser expresso por meio de uma integral de convolução da forma:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (2.3)$$



## 2.2. MODELOS VISCOELÁSTICOS

Os primeiros modelos para descrever o comportamento dos materiais viscoelásticos começaram a ser desenvolvidos no final do século XIX e foram modelos unidimensionais mais simples, representados por associações de molas e amortecedores. Essa classe inclui os modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt e Zener (também denominado modelo linear padrão). As formulações de Maxwell e Kelvin-Voigt, no entanto, não eram capazes de representar os fenômenos de fluência e relaxação dos materiais viscoelásticos, e o modelo de Zener, para o qual a relação tensão-deformação é dada pela Eq. 2.4 cujos parâmetros seguem a Eq. 2.5, foi considerado a primeira aproximação ao comportamento desses materiais (LIMA, 2007). A Fig. 2.2 ilustra esquematicamente esses três modelos.

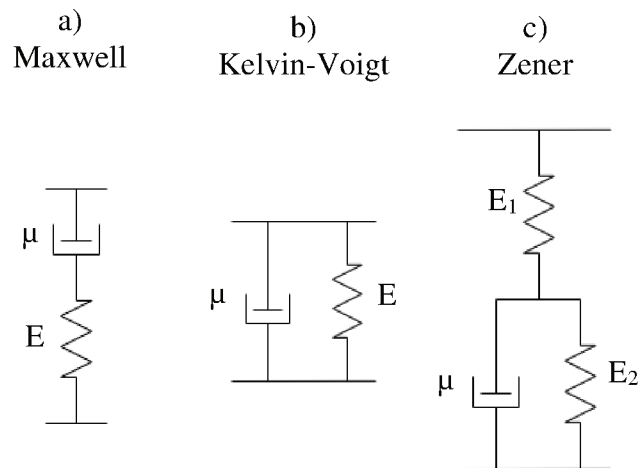


Figura 2.4 – Representação dos modelos clássicos

$$\sigma + a \frac{d\sigma}{dt} = E_0 \varepsilon + b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.4)$$

$$a = \frac{\mu}{E_1 + E_2}; \quad E_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}; \quad b = \frac{E_1 \mu}{E_1 + E_2} \quad (2.5)$$

Os modelos simples podem ser combinados formando os modelos generalizados, que expressam com melhor precisão o comportamento do material viscoelásticos, no entanto, são

mais complexos, geram equações diferenciais de ordens maiores, e há mais parâmetros a serem encontrados experimentalmente. A Figura 2.5 ilustra os modelos de Maxwell e de Kelvin-Voigt generalizados.

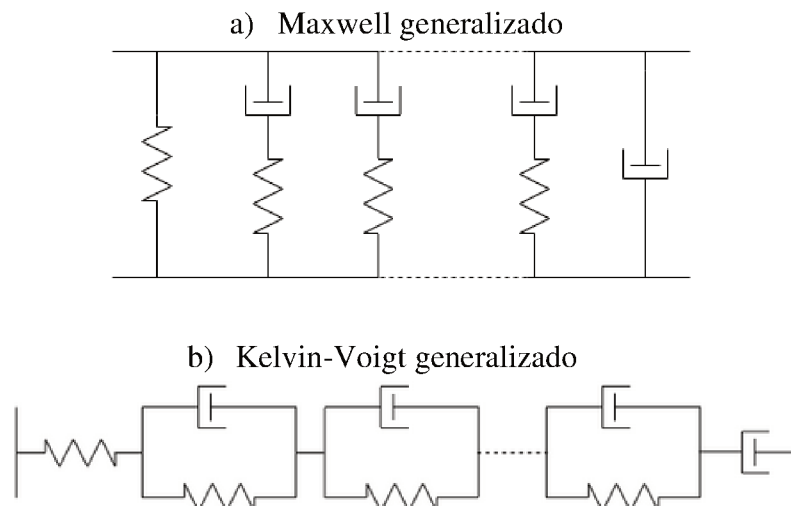


Figura 2.5 – Modelos generalizados

Uma outra abordagem, similar ao que se observa pela lei de Hooke para a elasticidade, consiste em relacionar tensão e deformação através de um módulo. Para a viscoelasticidade linear, no entanto, esse módulo contém uma componente imaginária e é denominado módulo complexo. Com efeito, assumindo que o material está sujeito a solicitações harmônicas do tipo  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$  e  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ , e utilizando o modelo de Zener definido na Eq. 2.4, é possível encontrar a Eq. 2.6, onde a relação tensão-deformação é expressa em termos de valores reais e complexos. Esta última equação pode ser escrita na forma da Eq. 2.7, em que  $E'(\omega)$  e  $E''(\omega)$  são, respectivamente, os módulos de armazenamento e de perda.

É importante salientar que os valores para os módulos de perda descritos através do modelo linear padrão (ver Eq. 2.7) apresentam uma variação com a frequência de forma mais rápida do que normalmente se observa nos materiais reais (NASHIF *et al.*, 1985). O módulo complexo é normalmente escrito na forma da Eq. 2.8, onde  $\eta(\omega)$  é o fator de perda, obtido pela relação entre ambos os módulos.

$$\sigma_0 = \left( \frac{E_0 + bi\omega}{1 + ai\omega} \right) \varepsilon_0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_0 = [E'(\omega) + iE''(\omega)] \varepsilon_0, \text{ com } E'(\omega) = \frac{E_0 + ab\omega^2}{1 + a^2\omega^2} \text{ e } E''(\omega) = \frac{b - aE_0}{1 + a^2\omega^2} \quad (2.7)$$

$$E(\omega) = [1 + i\eta(\omega)]E'(\omega) \quad (2.8)$$

O módulo complexo é um método muito utilizado para representar o comportamento de materiais viscoelásticos no domínio da frequência, mas com limitações quando aplicado no domínio do tempo, como discutido por Nashif *et al.* (1985), como problemas na aplicação da transformada inversa de Fourier de sistemas viscoelásticos utilizando este tipo de modelo. Neste caso, surgiu o modelo de derivadas fracionárias (MDF), introduzido por Bagley e Torvik (1979) e definido pela Eq. 2.9, onde  $a_m$ ,  $b_0$  e  $b_n$  são parâmetros do modelo e  $D$  é o operador diferencial fracionário com ordens  $\alpha_m$  e  $\beta_n$  definidos entre 0 e 1.

$$\left( 1 + \sum_{m=1}^M a_m D^{\alpha_m} \right) \sigma = \left( b_0 + \sum_{n=1}^N b_n D^{\beta_n} \right) \varepsilon \quad (2.9)$$

$$(1 + a_1 D^{\alpha_1}) \sigma = (b_0 + b_1 D^{\beta_1}) \varepsilon \quad (2.10)$$

Apesar de à primeira vista parecer complexo, o MDF representa de forma adequada a física envolvida no comportamento viscoelástico que normalmente poucos termos são necessários à caracterização do material e apenas duas derivadas fracionária são suficientes, conforme a Eq. 2.10 (BAGLEY; TORVIK, 1979; SCHMIDT; GAUL, 2001; ZHOU *et al.*, 2016; FILHO, 2019). É importante destacar ainda que o MDF é efetivo e útil para descrever o comportamento dos materiais viscoelásticos também no domínio da frequência. Nesse caso, aplica-se a transformada de Fourier à Eq. 2.10 e determina-se o módulo complexo baseado nos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  e  $b_1$ , que descreve melhor o comportamento do material do que aquele expresso pela Eq. 2.7.

Por tudo o que já foi pontuado, além de sua fácil integração com o método dos elementos finitos, o MDF se tornou uma ferramenta importante, relativamente ainda pouco explorada e que é capaz de gerar bons resultados quando comparados com ensaios

experimentais (FILHO, 2019). Ademais, de acordo com Zhou *et al.* (2016, p. 473, tradução nossa),

De todos os modelos matemáticos aplicados à descrição das propriedades dinâmicas do material viscoelástico, particularmente nos campos de redução e controle de vibração, o MDF provou ser o modelo mais poderoso para simular as propriedades dinâmicas do material viscoelástico em uma ampla gama de frequências e exigindo poucos parâmetros.<sup>1</sup>

No contexto deste trabalho, o modelo MDF será melhorado para ser utilizado na análise dinâmica de sistemas estruturais do tipo vigas sanduíche tratadas com materiais viscoelásticos. Existem alguns outros modelos para a caracterização do comportamento dos materiais viscoelásticos, como o ATF (*Augmenting thermodynamic field*), ADF (*Anelastic displacement field*) e GHM (Golla-Hughes-McTavis) (NASHIF *et al.* 1985). Esses modelos não serão utilizados nesse trabalho, por isso não serão abordados. No entanto, informações acerca destes podem ser encontradas em Lesieutre e Mingori (1990), Golla e Hughes (1985) e McTavish e Hughes (1993).

### 2.3. O CÁLCULO FRACIONÁRIO

As primeiras indagações acerca do cálculo de ordem fracionária se deram em 1695 em cartas trocadas por Leibniz<sup>2</sup> e l'Hôpital<sup>3</sup>. Em uma dessas correspondências, após ser questionado sobre a derivada de ordem  $\frac{1}{2}$ , Leibniz se referiu a essa como “*um paradoxo do qual, aparentemente, consequências úteis um dia serão extraídas*”<sup>4</sup>.

A partir de então, diversos matemáticos como Euler<sup>5</sup>, Lagrange<sup>6</sup>, Laplace<sup>7</sup>, Fourier<sup>8</sup> e Lacroix<sup>9</sup> se debruçaram sobre o cálculo fracionário. Este último estendeu a expressão da

---

<sup>1</sup> Of all mathematic models applied to describe the dynamic properties of VDM, particularly in the vibration reduction and control fields, FDM has proven to be the most powerful model to simulate the dynamic properties of VDM across a wide range of frequencies and requiring few parameters.

<sup>2</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), filósofo e matemático alemão, um dos responsáveis pela criação do cálculo de ordem inteira.

<sup>3</sup> Guillaume François Antonie l'Hôpital (1661 – 1704), matemático francês.

<sup>4</sup> Original em francês: “*Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des consequences bien utiles de ces paradoxes*”, tradução nossa. Em carta de Leibniz a l'Hôpital escrita em 30 de setembro de 1695.

<sup>5</sup> Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), matemático e físico suíço.

<sup>6</sup> Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), matemático italiano.

<sup>7</sup> Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827), matemático, astrônomo e físico francês.

<sup>8</sup> Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 -1830), matemático francês.

<sup>9</sup> Silvestre François Lacroix (1765 – 1843), matemático francês.

derivada de ordem inteira de uma função de potência, obtendo a Eq. (2.11). No entanto, até aquele momento, os estudos se restringiam ao campo teórico puro, ainda sem nenhuma aplicabilidade.

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \quad | \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{e} \quad n \leq m \quad (2.11)$$

A primeira aplicação do cálculo de ordem arbitrária, ainda que no campo da matemática, se deu em 1823, quando Abel<sup>10</sup> fez uso dessa ferramenta para encontrar a tautócrona, curva sobre a qual um objeto desliza sem fricção e sob a ação da gravidade de forma que o tempo do deslocamento até seu ponto de mínimo independe da sua posição de partida (OLIVEIRA, 2010).

Após quase dez anos de pouco progresso na área do cálculo fracionário, Liouville<sup>11</sup> generalizou a propriedade das derivadas de funções exponenciais conforme a Eq. (2.12), desenvolvendo a Eq. (2.13), conhecida como a primeira fórmula de Liouville para a derivada fracionária. É importante destacar que, ainda que “cálculo fracionário” seja o termo mais difundido, a ordem das derivadas não se restringe ao conjunto dos números racionais e, na fórmula de Liouville, a ordem  $\nu$  pode assumir qualquer valor real ou até mesmo complexo. Posteriormente, Liouville desenvolveu a Eq. (3.14) válida para derivadas fracionárias de funções de potência com expoentes negativos.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad a_n \in \mathbb{R}_+ \quad (2.12)$$

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x} \quad (2.13)$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \quad a > 0 \quad (2.14)$$

---

<sup>10</sup> Niels Henrik Abel (1802 – 1829), matemático norueguês.

<sup>11</sup> Joseph Liouville (1809 – 1882), matemático francês.

Riemann<sup>12</sup>, ainda como estudante de graduação, desenvolveu uma teoria para integrais fracionárias, que foi publicada postumamente em 1892, conforme a Eq. (2.15), em que  $\Psi(x)$  representa uma função complementar usada a fim de quantificar a divergência com a lei dos expoentes de Lagrange. O uso da função complementar torna essa expressão demasiadamente complexa, de forma que a definição de integral fracionária mais utilizada nos dias atuais, a integral fracionária de Riemann-Liouville, é dada pela Eq. (2.16), sem a função  $\Psi(x)$  (MILLER; ROSS, 1993).

$$D^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \Psi(x) \quad (2.15)$$

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (2.16)$$

Em 1867 Grünwald<sup>13</sup> introduziu o conceito de limite às derivadas fracionárias, expressando-as conforme a Eq. (2.17). Esta definição é conhecida atualmente como derivada fracionária de Grünwald-Letnikov, que é uma importante ferramenta na resolução de problemas numéricos, dada a facilidade de implementação em códigos computacionais.

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} f(x-j \cdot h) \quad (2.17)$$

Por muito tempo o cálculo fracionário foi um tema teórico e seu uso se restringiu ao cálculo da tautócrona por Abel. Na segunda metade do século XX, no entanto, diversos trabalhos foram publicados e o cálculo de ordem arbitrária passou a ser aplicado na descrição de diversos fenômenos físicos que não podem ser formulados adequadamente através dos métodos convencionais, sobretudo aqueles em que existe o efeito de memória, i.e., o comportamento de determinado sistema não é descrito apenas pelo estado atual, mas também pelo histórico de eventos que ocorreram no passado.

---

<sup>12</sup> Georg Friedrich Bernard Riemann (1826 – 1866), matemático alemão.

<sup>13</sup> Anton Karl Grünwald (1838–1920), matemático tcheco.

Nas últimas décadas o cálculo de ordem arbitrária tem sido aplicado à modelagem de fenômenos associados a diversas áreas do conhecimento, como a viscoelasticidade linear (BAGLEY; TORVIK, 1979, 1983a), a mecânica dos fluidos (YANG *et al.*, 2017), a transferência de calor (BROCIEK *et al.*, 2017), a reologia (MAINARDI; SPADA, 2011; YANG; ZHU, 2011), o transporte difusivo (XU; DENG, 2018), a teoria eletromagnética (ENGHETA, 1996; TENREIRO MACHADO *et al.*, 2006), às redes neurais (CHEN *et al.*, 2013), a probabilidade e estatística (COTTONE *et al.* 2010). Seu uso atualmente é vasto e se estende além da Engenharia e das Ciências Exatas. Há na literatura aberta aplicações dessa ferramenta também às áreas de Economia e das Ciências Biológicas, como se observa no trabalho de Luo *et al.* (2018), em que o cálculo fracionário é usado num modelo de crescimento econômico, e em Anastasio (1994), que utiliza um modelo fracionário para descrever a neurodinâmica do reflexo vestibulo-ocular.

## **CAPÍTULO 3**

### **MODELO MDF MELHORADO COM A FÓRMULA DA RECORRÊNCIA**

Este capítulo apresenta o desenvolvimento do novo modelo MDF proposto baseado na utilização de uma fórmula de recorrência para a representação do campo de tensões de sistemas viscoelásticos. Esse modelo tem uma grande vantagem em comparação com os modelos MDF disponíveis na literatura. Uma vez que as tensões e deformações de materiais viscoelásticos dependem das condições do carregamento em um instante qualquer de tempo e de todo o seu histórico no tempo, e a lei constituinte que descreve o campo das tensões possui uma autodependência da tensão, a recorrência proposta neste trabalho elimina essa autodependência. Como resultado, o processo de integração numérica é mais eficiente, além de facilitar a sua implementação em elementos finitos de sistemas simples a complexos contendo materiais viscoelásticos. Nas seções que se seguem serão apresentadas a lei constitutiva tridimensional baseada na recorrência e uma simplificação para a aplicação em problemas bidimensionais como é o caso de vigas sanduíches de interesse deste trabalho.

#### **3.1. ESTUDOS ANTERIORES**

Bagley e Torvik foram pioneiros na aplicação do cálculo fracionário para tratar problemas envolvendo a viscoelasticidade. Em seu primeiro trabalho (BAGLEY; TORVIK, 1979), os autores descreveram, através do cálculo de ordem arbitrária, a lei constitutiva de um material viscoelástico sujeito a um estado uniaxial de tensões, apontando as vantagens do MDF em relação a modelos clássicos, como o do módulo complexo. No trabalho seguinte



(BAGLEY; TORVIK, 1983a), os autores aplicaram o modelo unidimensional à análise de uma viga posicionada sobre apoios viscoelásticos utilizando o MEF. Eles demonstraram que com poucos parâmetros era possível representar o comportamento do material viscoelástico. Entretanto, o MDF era até então bastante baseado no empirismo e em 1983, um outro artigo foi publicado (BAGLEY; TORVIK, 1983b), onde foi demonstrada a consistência do modelo com as teorias moleculares de Rouse e Williams, Landel e Ferry. Os estudos de Bagley e Torvik foram de grande importância na aplicação do cálculo fracionário a sistemas viscoelásticos, mas se limitavam a estruturas unidimensionais.

Mais tarde, Schmidt e Gaul (2001) utilizaram o conceito de tensores hidrostático e de desvio para modelar o comportamento tridimensional de materiais viscoelásticos através de um modelo fracionário com quatro parâmetros. Os autores aplicaram sua formulação com o modelo de elementos finitos de uma viga sanduíche viscoelástica. O modelo proposto por Schmidt e Gaul, no entanto, tem a desvantagem de possuir uma autodependência do campo de tensões, o que eleva significativamente o custo computacional envolvido em análises transientes de sistemas viscoelásticos, principalmente para sistemas mais complexos de interesse prático.

Galucio *et al.* (2004) basearam-se no modelo proposto por Bagley e Torvik (1983a) e desenvolveram um modelo que elimina a autodependência de tensões através da introdução de uma nova variável: o chamado deslocamento anelástico. O modelo dos autores, todavia, não é capaz de ser aplicado ao estado tridimensional de tensões.

Portanto, partindo-se dos trabalhos de Schmidt e Gaul (2001) e Cunha-Filho (2019), será apresentado de forma detalhada o desenvolvimento de um modelo tridimensional do MDF que elimina a autodependência do campo de tensões através de uma fórmula de recorrência. A aplicação dessa nova abordagem se mostra bastante promissora, uma vez que é capaz de representar de forma eficiente o comportamento de materiais viscoelásticos do ponto de vista computacional, possibilitando sua extensão para problemas de interesse prático.

### **3.2 LEI CONSTITUTIVA TRIDIMENSIONAL**

A fim de simplificar o desenvolvimento da lei constitutiva para os materiais viscoelásticos, os conceitos de tensor hidrostático e desviatório são aplicados. De acordo com

essa teoria, o estado de tensões e deformações em um ponto qualquer de um meio contínuo pode ser representado através da soma das componentes hidrostáticas (responsáveis por alterações volumétricas) e de desvio (alterações de forma), conforme as Eqs. (3.1) e (3.2). Essa abordagem facilita a obtenção da lei constitutiva, pois cada efeito pode ser analisado separadamente e posteriormente somados.

$$\{\sigma\} = \{\sigma_h\} + \{\sigma_d\} \quad (3.1)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_h\} + \{\varepsilon_d\} \quad (3.2)$$

As parcelas hidrostática e desviatória são encontradas através da aplicação das matrizes de transformação dadas pela Eq. (3.5) sobre as tensões e deformações, conforme as Eqs. (3.3) e (3.4).

$$\{\sigma_h\} = \{\sigma\} [T_h] , \quad \{\sigma_d\} = \{\sigma\} [T_d] \quad (3.3)$$

$$\{\varepsilon_h\} = \{\varepsilon\} [T_h] , \quad \{\varepsilon_d\} = \{\varepsilon\} [T_d] \quad (3.4)$$

$$[T_h] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad [T_d] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Dessa forma, a lei constitutiva para um modelo com quatro variáveis que, de acordo com Schmidt e Gaul (2001), já apresentam boa concordância, pode ser descrita para cada um dos efeitos através das relações (3.6) e (3.7). Nessas equações,  $K_0$  e  $G_0$  são os módulos volumétrico e de cisalhamento a baixa frequência e  $\alpha_h$ ,  $\alpha_d$ ,  $a_h$ ,  $a_d$ ,  $b_h$  e  $b_d$  são parâmetros a serem determinados através de ajustes de curva (MAKRIS, 1997; SCHMIDT; GAUL, 2001). É possível observar que os parâmetros  $a_h$ ,  $a_d$ ,  $b_h$  e  $b_d$  são nulos para um material puramente elástico. Para esse caso, verifica-se que essas equações são consistentes com a lei de Hooke.

$$\{\sigma_h\} + a_h \frac{d^{\alpha_h}}{dt^{\alpha_h}} \{\sigma_h\} = 3K_0 \{\varepsilon_h\} + 3b_h \frac{d^{\alpha_h}}{dt^{\alpha_h}} \{\varepsilon_h\} \quad (3.6)$$

$$\{\sigma_d\} + a_d \frac{d^{\alpha_d}}{dt^{\alpha_d}} \{\sigma_d\} = 2G_0 \{\varepsilon_d\} + 2b_d \frac{d^{\alpha_d}}{dt^{\alpha_d}} \{\varepsilon_d\} \quad (3.7)$$

Passando as Eqs. (3.6) e (3.7) para o domínio da frequência através da aplicação da transformada de Fourier, as Eqs. (3.8) e (3.9) são obtidas.

$$\left(1 + a_h (i\omega)^{\alpha_h}\right) \{\sigma_h^*\} = 3 \left(K_0 + b_h (i\omega)^{\alpha_h}\right) \{\varepsilon_h^*\} \quad (3.8)$$

$$\left(1 + a_d (i\omega)^{\alpha_d}\right) \{\sigma_d^*\} = 2 \left(G_0 + b_d (i\omega)^{\alpha_d}\right) \{\varepsilon_d^*\} \quad (3.9)$$

A partir das expressões anteriores, os módulos volumétrico e de cisalhamento são encontrados como segue:

$$K^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_h^*\}}{3\{\varepsilon_h^*\}} = \frac{K_0 + b_h (i\omega)^{\alpha_h}}{1 + a_h (i\omega)^{\alpha_h}} \quad (3.10)$$

$$G^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_d^*\}}{2\{\varepsilon_d^*\}} = \frac{G_0 + b_d (i\omega)^{\alpha_d}}{1 + a_d (i\omega)^{\alpha_d}} \quad (3.11)$$

As Eqs. (3.10) e (3.11) podem ser relacionadas através do Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico (PEEV) (CHRISTENSEN, 1982), que assume que as propriedades de materiais viscoelásticos lineares no domínio da frequência são elásticas. A partir da aplicação desse princípio, o módulo volumétrico e de cisalhamento complexos se relacionam conforme a Eq. (3.12). Vale salientar que nesse caso o coeficiente de Poisson é assumido constante, sendo independente da frequência.

$$\mathbf{K}^*(i\omega) = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \mathbf{G}^*(i\omega) \quad (3.12)$$

Comparando as Eqs. (3.10) e (3.12), é possível relacionar os parâmetros hidrostáticos e de desvio como segue:

$$\mathbf{K}_0 = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \mathbf{G}_0 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{b}_h = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \mathbf{b}_d \quad (3.14)$$

$$\alpha_h = \alpha_d = \alpha \quad (3.15)$$

$$\mathbf{a}_h = \mathbf{a}_d = \mathbf{a} \quad (3.16)$$

Ao se somar as Eqs. (3.6) e (3.7) e utilizando as relações Eqs. (3.15) e (3.16), obtém-se a seguinte expressão:

$$\{\sigma\} + a \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\sigma\} = (3\mathbf{K}_0[\mathbf{T}_h] + 2\mathbf{G}_0[\mathbf{T}_d])\{\varepsilon\} + (3\mathbf{b}_h[\mathbf{T}_h] + 2\mathbf{b}_d[\mathbf{T}_d]) \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\varepsilon\} \quad (3.17)$$

A fim de simplificar a notação, define-se novos parâmetros  $[\mathbf{B}]$  e  $[\mathbf{C}]$ , de forma que a Eq. (3.17) é reescrita da forma:

$$\{\sigma\} + a \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\sigma\} = [\mathbf{C}]\{\varepsilon\} + [\mathbf{B}] \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\varepsilon\} \quad (3.18)$$

onde:

$$[B] = 3b_h [T_h] + 2b_d [T_d] \quad (3.19)$$

$$[C] = 3K_0 [T_h] + 2G_0 [T_d] \quad (3.20)$$

Para avaliar a derivada fracionária, a definição de Grünwald-Letnikov dada pela Eq. (2.17), será usada. Essa formulação pode ser aproximada, conforme Schmidt e Gaul (2001), pela Eq. (3.21), em que  $N_1$  indica o número de tempos passados a serem analisados e  $A_{j+1}$  são os coeficientes de Grünwald. Esses coeficientes podem ser calculados recursivamente através da Eq. (3.22). A partir dessa equação, é importante observar que a fração que multiplica o termo recursivo anterior é sempre menor que um e, portanto, os coeficientes de Grünwald vão ficando cada vez mais próximos de zero. Isso implica que os eventos passados, quanto mais longe do tempo presente, têm cada vez menos efeito sobre o estado atual.

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_1} A_{j+1} f(t - j\Delta t) \quad (3.21)$$

$$A_{j+1} = \frac{j - \alpha - 1}{j} A_j, \text{ com } A_1 = 1 \quad (3.22)$$

Incorporando a formulação de Grünwald-Letnikov à Eq. (3.18) e realizando algumas manipulações matemáticas, pode-se chegar à Eq. (3.23), onde a notação para a dependência temporal é simplificada e indicada por meio de subscrito, i. e.,  $\sigma_t = \sigma(t)$ , por exemplo.

$$\{\sigma_t\} = \frac{([C] + \Delta t^{-\alpha} [B])\{\varepsilon_t\} + \Delta t^{-\alpha} [B] \sum_{j=1}^{N_1} A_{j+1} \{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} - a\Delta t^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N_1} A_{j+1} \{\sigma_{t-j\Delta t}\}}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} \quad (3.23)$$

Para simplificar mais ainda a notação, novamente outros parâmetros são definidos, de forma que a lei constitutiva encontrada para o material viscoelástico possua a forma da Eq. (3.24). Os novos parâmetros seguem as Eqs. (3.25) a (3.27).

$$\{\sigma_t\} = [\bar{C}]\{\varepsilon_t\} + [\bar{B}] \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1} \{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} - [\bar{A}] \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1} \{\sigma_{t-j\Delta t}\} \quad (3.24)$$

$$[\bar{C}] = \frac{[C] + \Delta t^{-\alpha} [B]}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} \quad (3.25)$$

$$[\bar{B}] = \frac{\Delta t^{-\alpha} [B]}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} \quad (3.26)$$

$$[\bar{A}] = \frac{a\Delta t^{-\alpha}}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} [I] \quad (3.27)$$

Conforme se observa na Eq. (3.24), o campo de tensões no instante de tempo atual depende do campo de tensões nos instantes de tempo passado. Essa autodependência será eliminada através da introdução da fórmula de recorrência.

### 3.2.1. A recorrência

O desenvolvimento da fórmula da recorrência proposta neste trabalho se baseia na análise do campo de tensões em passos de tempo sucessivos, onde é avaliado como o campo de tensões anteriores se repetem no cálculo das tensões seguintes. Para o primeiro passo de tempo tem-se, a partir da Eq. (3.24), a Eq. (3.28). Essa equação pode ser reescrita na forma da Eq. (3.29), onde  $[\beta_1]$  é o primeiro termo da recorrência e segue a Eq. (3.30).

$$\{\sigma_{1\Delta t}\} = [\bar{C}]\{\varepsilon_{1\Delta t}\} \quad (3.28)$$

$$\{\sigma_{1\Delta t}\} = [\beta_1]\{\varepsilon_{1\Delta t}\} \quad (3.29)$$

$$[\beta_1] = [\bar{C}] \quad (3.30)$$

Para o segundo passo de tempo, o campo de tensões é avaliado novamente a partir da Eq. (3.24), permitindo obter a Eq. (3.31). Nessa equação, incorporando o primeiro termo da recorrência e substituindo a Eq. (3.29), chega-se à Eq. (3.32), que pode ser escrita na forma da Eq. (3.33), onde o segundo termo da recorrência,  $[\beta_2]$ , é definido pela Eq. (3.34).

$$\{\sigma_{2\Delta t}\} = [\bar{C}]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\bar{B}]A_2\{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}]A_2\{\sigma_{\Delta t}\} \quad (3.31)$$

$$\{\sigma_{2\Delta t}\} = [\beta_1]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + \left([\bar{B}]A_2 - [\bar{A}]A_2[\beta_1]\right)\{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.32)$$

$$\{\sigma_{2\Delta t}\} = [\beta_1]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_2]\{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.33)$$

$$[\beta_2] = [\bar{B}]A_2 - [\bar{A}]A_2[\beta_1] \quad (3.34)$$

Para  $t=3\Delta t$ , o campo de tensões é descrito pela Eq. (3.35). Mais uma vez, substituindo as Eqs. (3.29) e (3.33), encontra-se a Eq. (3.36), que pode ser reescrita na forma da Eq. (3.37). Isto permite definir o terceiro termo da recorrência dado pela Eq. (3.38). Pode-se notar que os termos da recorrência se repetem, permitindo defini-los de uma forma mais genérica.

$$\begin{aligned} \{\sigma_{3\Delta t}\} &= [\bar{C}]\{\varepsilon_{3\Delta t}\} + [\bar{B}]A_2\{\varepsilon_{2\Delta t}\} - [\bar{A}]A_2\{\sigma_{2\Delta t}\} \\ &\quad + [\bar{B}]A_3\{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}]A_3\{\sigma_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_{3\Delta t}\} &= [\bar{C}]\{\varepsilon_{3\Delta t}\} + \left([\bar{B}]A_2 - [\bar{A}]A_2[\beta_1]\right)\{\varepsilon_{2\Delta t}\} \\ &\quad + \left([\bar{B}]A_3[\beta_1] - [\bar{A}]A_2[\beta_2] - [\bar{A}]A_3[\beta_1]\right)\{\varepsilon_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\{\sigma_{3\Delta t}\} = [\beta_1]\{\varepsilon_{3\Delta t}\} + [\beta_2]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_3]\{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.37)$$

$$[\beta_3] = [\bar{B}]A_3 - [\bar{A}]A_2[\beta_2] - [\bar{A}]A_3[\beta_1] \quad (3.38)$$

Portanto, para um instante de tempo  $n\Delta t$  qualquer, tem-se a Eq. (3.39). Incorporando os campos de tensões para os tempos anteriores, obtém-se a Eq. (3.40). Agrupando-se os termos de forma cronológica, nota-se que essa equação pode ser escrita da forma (3.41).

$$\begin{aligned} \{\sigma_{n\Delta t}\} = & [\bar{C}]\{\varepsilon_{n\Delta t}\} + [\bar{B}]A_2\{\varepsilon_{(n-1)\Delta t}\} - [\bar{A}]A_2\{\sigma_{(n-1)\Delta t}\} + \dots \\ & \dots + [\bar{B}]A_{n-1}\{\varepsilon_{2\Delta t}\} - [\bar{A}]A_{n-1}\{\sigma_{2\Delta t}\} + [\bar{B}]A_n\{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}]A_n\{\sigma_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_{n\Delta t}\} = & [\beta_1]\{\varepsilon_{n\Delta t}\} + [\bar{B}]A_2\{\varepsilon_{(n-1)\Delta t}\} \\ & - [\bar{A}]A_2([\beta_1]\{\varepsilon_{(n-1)\Delta t}\} + \dots + [\beta_{n-2}]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_{n-1}]\{\varepsilon_{\Delta t}\}) + \dots \\ & \dots + [\bar{B}]A_{n-1}\{\varepsilon_{2\Delta t}\} - [\bar{A}]A_{n-1}([\beta_1]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_2]\{\varepsilon_{\Delta t}\}) + [\bar{B}]A_n\{\varepsilon_{\Delta t}\} \\ & - [\bar{A}]A_n\{[\beta_1]\{\varepsilon_{\Delta t}\}\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\{\sigma_{n\Delta t}\} = [\beta_1]\{\varepsilon_{n\Delta t}\} + [\bar{B}]\sum_{j=1}^{n-1} A_{j+1}\{\varepsilon_{(n-j)\Delta t}\} - [\bar{A}]\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{j-1} A_{j+1-i}[\beta_{i+1}]\{\varepsilon_{(n-j)\Delta t}\} \quad (3.41)$$

A partir da Eq. (3.41), pode-se generalizar e escrever a lei constitutiva para o material viscoelástico dado pela Eq. (3.42) com a recorrência dada pela Eq. (3.43).

$$\{\sigma_t\} = \sum_{j=0}^{N_t} [\beta_{j+1}]\{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} \quad (3.42)$$

$$[\beta_{j+1}] = [\bar{B}]A_{j+1} - [\bar{A}]\sum_{i=0}^{j-1} A_{j+1-i}[\beta_{i+1}], \text{ com } [\beta_1] = [\bar{C}] \quad (3.43)$$

Toda a formulação até aqui desenvolvida levou em consideração o estado triplo de tensões. No entanto, em algumas aplicações, algumas tensões podem ser consideradas nulas. Nesse caso, a lei constitutiva pode ser simplificada através da utilização de matrizes de ordem menor. Para a aplicação em vigas, esse desenvolvimento precisa ser simplificado ainda mais, a fim de evitar uma abordagem demasiadamente complexa e desnecessária.



### 3.3. OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MDF

A partir do PSFT, os valores para o módulo de armazenamento e o fator de perda do material a diferentes temperaturas podem ser reunidos em um só gráfico (curva mestre) a uma temperatura de referência. Isto é feito utilizando um fator de deslocamento,  $\alpha_T$ , que leva em consideração a dependência da temperatura. A partir deste fator, pode-se encontrar a frequência reduzida,  $\omega_r = \alpha_T \omega$ , que representa a frequência na qual as propriedades do material viscoelástico à temperatura de referência são iguais àsquelas para a frequência e temperatura em que se tem interesse. Desse modo, o módulo complexo, que é dependente da temperatura e frequência, passa a ser função apenas da frequência reduzida.

Soovere e Drake (1984) propõem equações analíticas para descrever o nomograma de diversos materiais viscoelásticos utilizados em aplicações práticas. Para o 3M-ISD 112, material usado neste trabalho, o módulo complexo de cisalhamento é descrito pela Eq. (3.44), sendo a frequência reduzida calculada a partir do fator de deslocamento que é dado pela Eq. (3.45). A Figura 3.1 mostra o nomograma obtido através dessas equações.

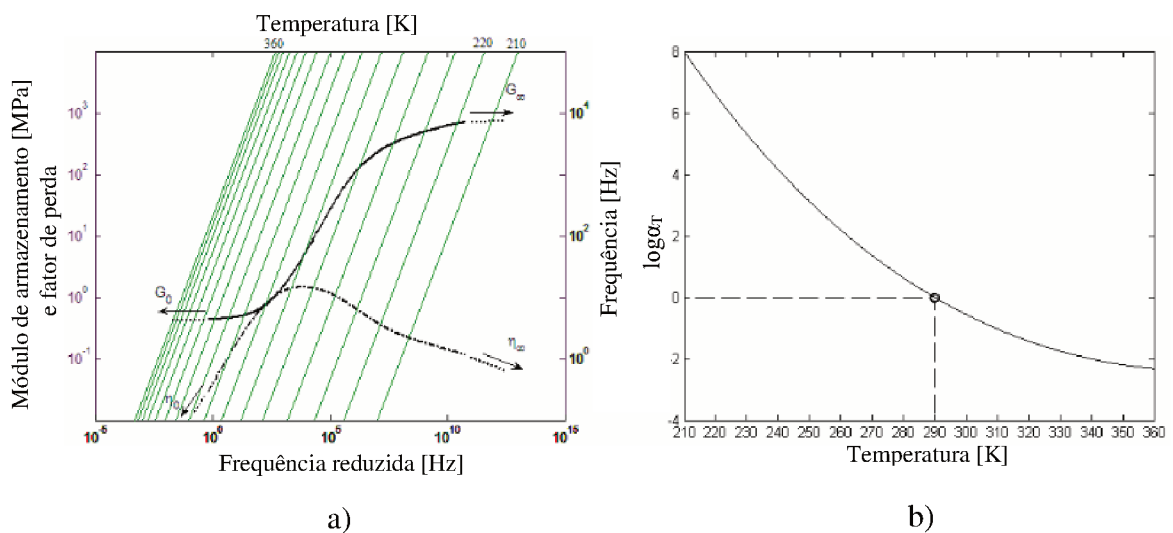


Figura 3.1 – a) Curva mestre para as propriedades de amortecimento do material ISD-112 e b) Influência da temperatura sobre o fator de deslocamento. Adaptado de Lima (2007)

$$G(\omega_r) = 0,4307 + \frac{1200}{1 + 3,241 \left( \frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0,18} + \left( \frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0,6847}} \text{ MPa} \quad (3.44)$$

$$\log \alpha_T = -3758,4 \left( \frac{1}{T} - 0,00345 \right) - 225,06 \log(0,00345T) + 0,23273(T - 290) \quad (3.45)$$

Para determinar os valores dos parâmetros a serem utilizados no modelo, é feito um ajuste de curvas entre o módulo complexo de cisalhamento definido pela Eq. (3.11) e as previsões dadas pela Eq. (3.44). Neste caso, uma otimização através do método heurístico de evolução diferencial (VIANA; STEFFEN-JÚNIOR, 2007) foi realizada com a função objetivo definida pela Eq. (3.46). Os seguintes valores para os parâmetros  $G_0$ ,  $b$ ,  $a$  e  $\alpha$  foram encontrados para a temperatura de 27 °C:  $G_0 = 423.632,8$  Pa,  $b = 30.177,8$  Pa s<sup>a</sup>,  $a = 0,00022$  s<sup>a</sup>,  $\alpha = 0,6766$ .

$$f(i\omega) = \left| \frac{G(i\omega) - G^*(i\omega)}{G(i\omega)} \right| \quad (3.46)$$

A Figura 3.2 compara as curvas dos módulos de armazenamento e de perda ajustadas com as correspondentes obtidas pela referência. Destaca-se que, como o amortecimento da estrutura sanduíche mediante a aplicação da camada viscoelástica se dá sobretudo pela ação das deformações cisalhantes, é preferível, como está sendo apresentado aqui, utilizar os parâmetros experimentais referentes ao cisalhamento.

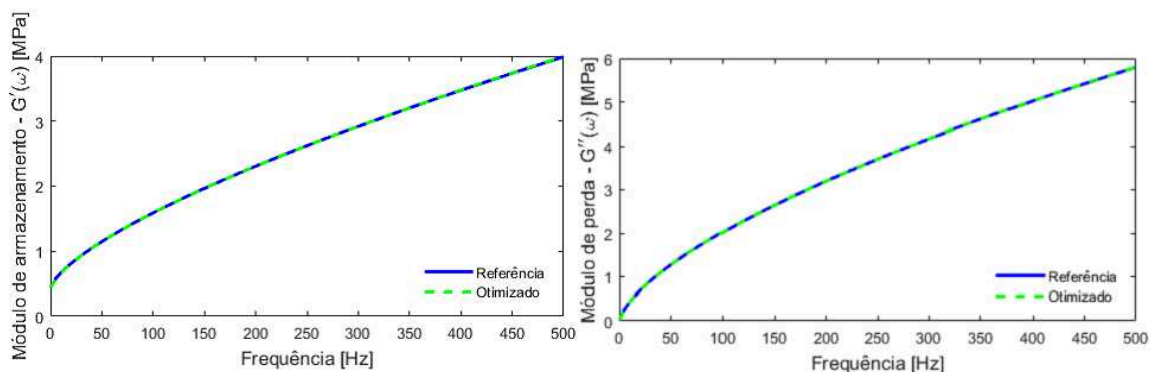


Figura 3.2 – Otimização dos parâmetros do MDF para o ISD112 a 27 °C

### 3.4. SIMPLIFICAÇÃO DA LEI CONSTITUTIVA PARA O CASO DA VIGA

Vigas elásticas finas são sujeitas a um estado uniaxial de tensões, uma vez que, de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, pode-se desconsiderar o cisalhamento. Para a camada viscoelástica de uma viga sanduíche, contudo, o estado de tensões é alterado uma vez que deve ser considerado o cisalhamento. De qualquer forma, a lei constitutiva tridimensional desenvolvida anteriormente deve ser simplificada para o caso da viga. Nesse sentido, baseado na lei constitutiva tridimensional e nos trabalhos de Bagley e Torvik (1983a) e Makris (1997), um modelo RTG (*rubbery, transition and glassy regions*) para o alongamento e cisalhamento do material viscoelástico pode ser expresso pelas Eqs. (3.47) e (3.48), onde os parâmetros definidos pela Eq. (3.49) são obtidos pelo PEEV.

$$\sigma_x + a_E \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \sigma_x = E_0 \varepsilon_x + b_E \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon_x \quad (3.47)$$

$$\tau_{xz} + a_G \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \tau_{xz} = 2G_0 \varepsilon_{xz} + 2b_G \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon_{xz} \quad (3.48)$$

$$E_0 = 2G_0(1 + \nu); \quad b_E = 2b_G(1 + \nu); \quad a_E = a_G \quad (3.49)$$

A partir de um procedimento semelhante àquele descrito na Seção 3.2.1, é possível descrever a lei constitutiva baseada na recorrência a ser aplicada à camada viscoelástica da viga conforme as Eqs. (3.50) e (3.51), sendo os termos de recorrência descritos pelas relações (3.52) e (3.53), e seus parâmetros expressos pelas (3.54) e (3.55).

$$\sigma_t = \sum_{j=0}^{N_1} \beta_{j+1}^E \varepsilon_{t-j\Delta t} \quad (3.50)$$

$$\tau_t = \sum_{j=0}^{N_1} \beta_{j+1}^G \varepsilon_{t-j\Delta t} \quad (3.51)$$

$$\beta_{j+1}^E = D_3^E A_{j+1} + \sum_{i=0}^j D_1^E A_{i+1} \beta_{j+1-i}^E \quad \text{com } \beta_1^E = D_2^E \quad (3.52)$$

$$\beta_{j+1}^G = D_3^G A_{j+1} + \sum_{i=0}^j D_1^G A_{i+1} \beta_{j+1-i}^G \quad \text{com } \beta_1^G = D_2^G \quad (3.53)$$

$$D_1^E = -\frac{a_E \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_2^E = \frac{E_0 + E_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}} \quad e \quad D_3^E = \frac{E_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}} \quad (3.54)$$

$$D_1^G = -\frac{a_G \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_2^G = \frac{2G_0 + 2G_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}} \quad e \quad D_3^G = \frac{2G_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}} \quad (3.55)$$

## **CAPÍTULO 4**

### **MODELAGEM DE VIGAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS UTILIZANDO O MODELO MDF COM A RECORRÊNCIA**

Neste capítulo é apresentada a modelagem por elementos finitos de vigas sanduíches de três camadas com material viscoelástico. Será mostrado em detalhes todo o procedimento de introdução do amortecimento viscoelástico utilizando o modelo MDF melhorado com a fórmula de recorrência. Essa modelagem em elementos finitos é, em seguida, estendida a uma estrutura do tipo pórtico bidimensional.

#### **4.1. MODELAGEM DE VIGAS SANDUÍCHES**

Seja a viga sanduíche ilustrada na Fig. 4.1 composta por uma camada base (1), um núcleo viscoelástico (2) e uma camada restringente (3), todas com comprimento,  $L$ , largura,  $b$ , e espessuras,  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ , respectivamente. Para a formulação em elementos finitos dessa estrutura, faz-se necessário determinar as relações cinemáticas entre as camadas, a fim de se descrever os campos de deslocamento e de deformação. A partir desses são determinadas as expressões para as energias cinética e potencial de deformação em termos das matrizes de massa e rigidez para cada uma das camadas. Esse procedimento é essencialmente o mesmo para vigas sanduíches, independente do modelo de caracterização do material viscoelástico a ser utilizado. A principal diferença se dá na matriz de rigidez viscoelástica, a qual é definida neste trabalho em termos da lei constitutiva baseada no MDF com a recorrência. De posse das expressões para as energias, aplicam-se os princípios variacionais da mecânica, através dos

quais a equação do movimento do sistema é determinada e, por fim, solucionada através de uma técnica de resolução numérica, como o método de Newmark.

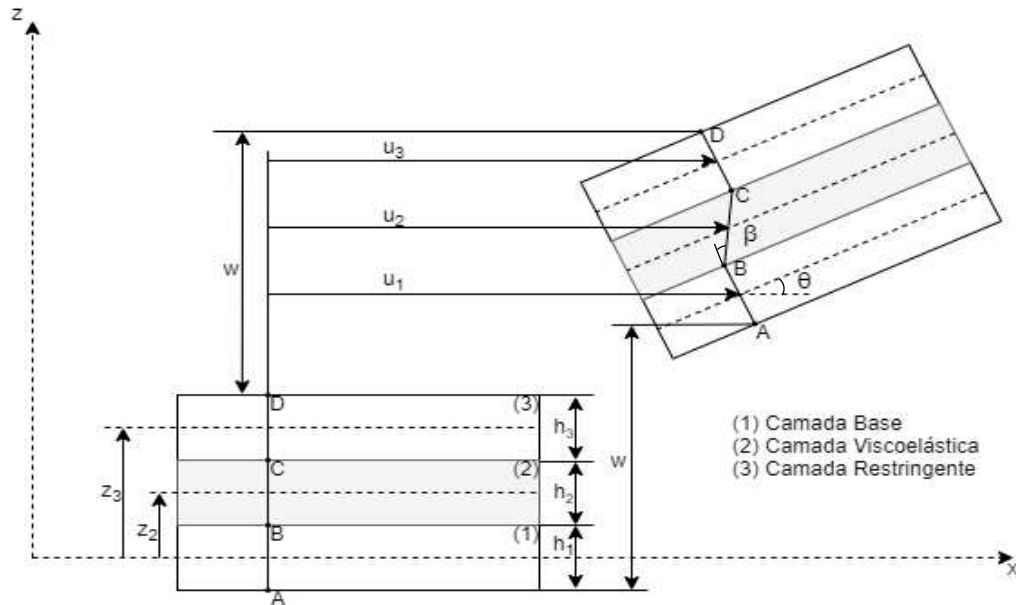


Figura 4.1 – Cinemática da deformação da viga sanduíche viscoelástica

#### 4.1.1. Relações deformações-deslocamentos

No desenvolvimento que se segue, as seguintes hipóteses são assumidas:

- Todos os materiais são homogêneos, apresentam propriedades isotrópicas e as deformações não são grandes o suficiente para exceder o regime linear;
- A aderência entre as camadas é perfeita;
- As tensões normais na direção  $z$  são nulas;
- Os deslocamentos transversais das três camadas são os mesmos, bem como as rotações;
- As hipóteses da teoria de Euler-Bernoulli são válidas para as faces elásticas e para a camada viscoelástica a teoria de Timoshenko é usada.

É válido destacar que essas hipóteses são razoáveis para o problema em questão e têm sido assumidas por diversos outros autores (GALUCIO *et al.*, 2004; LIMA *et al.*, 2010; GUARALDO-NETO, 2012). Com base nessas suposições e na teoria clássica dos laminados (TCL), é possível descrever a cinemática de deformação da viga sanduíche. De modo que o

campo de deslocamentos na direção  $z$  é descrito pela Eq. (4.1), válida para toda a seção transversal da viga, uma vez que a estrutura se deforma de forma uniforme. Os deslocamentos longitudinais em  $x$ , de outro modo, ocorrem de formas diferentes em cada camada, sendo responsáveis pelo cisalhamento do material viscoelástico. O movimento longitudinal das camadas base, viscoelástica e restringente, são expressos, respectivamente, pelas Eqs. (4.2), (4.3) e (4.4), como ilustrado na Fig. 4.1.

$$w^{(k)}(x, t) = w(x, t), \text{ com } k=1, 2, 3 \quad (4.1)$$

$$u^{(1)}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$u^{(2)}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \left( z - \frac{h_1}{2} \right) \beta(x, t) \quad (4.3)$$

$$u^{(3)}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + h_2 \beta(x, t) \quad (4.4)$$

A partir da cinemática da deformação e das equações para o campo de deslocamentos, é possível perceber que o modelo para a viga possui quatro graus de liberdade (gdls), quais sejam: o deslocamento longitudinal,  $u(x,t)$ ; o deslocamento transversal,  $w(x,t)$ ; a rotação,  $\theta(x,t)$  (equivalente à derivada da deflexão em relação à posição  $x$ ); e o ângulo de cisalhamento da camada viscoelástica,  $\beta(x,t)$ , esquematizados para um EF qualquer na viga como ilustrado na Figura 4.2 (a fim de simplificar a ilustração, a separação entre as três camadas foi omitida).

No contexto do MEF, os gdls são aproximados por meio de funções de interpolação, que devem garantir a condição de continuidade nos elementos. Para os gdls,  $u(x,t)$  e  $\beta(x,t)$ , são utilizadas funções de interpolação lineares e, para  $w(x,t)$ , uma função polinomial de terceiro grau. Dessa forma, os campos de deslocamentos podem ser aproximados pelas Eqs. (4.5) e (4.6), onde as matrizes  $N_u$  e  $N_w$  são relacionadas às funções de forma e o vetor  $q$  é aquele que contém todos os gdls do EF ( $q$  depende do tempo, mas para simplificar a notação, nas equações que seguem essa dependência será suprimida). Maiores detalhes acerca das funções de forma e das matrizes  $N$  podem ser encontrados no Apêndice A.

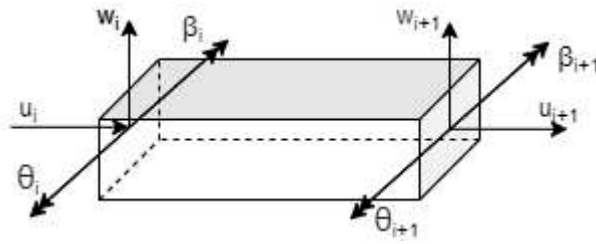


Figura 4.2 – Definição dos gdl's de um EF qualquer  $i$  de viga sanduíche

$$w(x, t) = [N_w(x)] \{q_{(e)}\} \quad (4.5)$$

$$u^{(k)}(x, z, t) = [N_u^{(k)}(x, z)] \{q_{(e)}\}, \text{ com } k=1, 2, 3 \quad (4.6)$$

Vale ressaltar que, considerando as hipóteses assumidas para a viga sanduíche detalhadas anteriormente, as deformações normais na direção  $z$  são nulas, uma vez que a seção transversal da viga se desloca uniformemente. Além disso, as deformações cisalhantes são nulas para as camadas elásticas e os efeitos do cisalhamento são considerados somente para o núcleo viscoelástico. Portanto, as deformações normais em cada uma das camadas ( $k=1,2,3$ ) são dadas pela Eq. (4.7), e as deformações cisalhantes na camada viscoelástica é dada pela Eq. (4.8).

$$\varepsilon_x^{(k)}(x, z, t) = \left[ \frac{d}{dx} N_u^{(k)}(x, z) \right] \{q_{(e)}\} \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)}(x, t) = [N_\beta(x)] \{q_{(e)}\} \quad (4.8)$$

#### 4.1.2. Energias cinética e de deformação

Baseado nos campos de deslocamento e deformação, e a partir da lei constitutiva para o material viscoelástico, as parcelas de energia cinética e potencial de deformação da viga podem ser determinadas. A energia cinética de um corpo deformável é dada pela Eq. (4.9), onde o vetor  $U$  representa o deslocamento de uma porção infinitesimal de volume. Para cada uma das camadas, incorporando as Eqs. (4.5) e (4.6), a Eq. (4.9) pode ser escrita na forma da Eq. (4.10), sendo  $M$  a matriz de massa. A energia cinética do elemento é dada pela soma das



parcelas das camadas base, viscoelástica e restringente. Desta forma, a matriz de massa elementar pode ser calculada conforme a Eq. (4.11), com  $\rho$  e  $A$  representando a densidade e a área da seção de cada camada.

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{\forall} \rho \left( \frac{d}{dt} \{U\} \right)^2 dV \quad (4.9)$$

$$T_e^{(k)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}_e\}^T [M_e^{(k)}] \{\dot{q}_e\} \quad (4.10)$$

$$[M_e] = \sum_{k=1}^3 \rho_k \left( b \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N_u^{(k)}]^T [N_u^{(k)}] dx dz + A_k \int_0^{li} [N_w^{(k)}]^T [N_w^{(k)}] dx \right) \quad (4.11)$$

De forma semelhante, a energia de deformação, expressa pela Eq. (4.12), também é determinada a partir da soma de suas componentes para cada uma das camadas da viga. Nesse sentido, é possível analisar cada camada separadamente e somar posteriormente cada um dos efeitos. Primeiramente, para facilitar a abordagem, uma vez que a energia de deformação associada ao material viscoelástico é um pouco mais complexa, concentremos nossa atenção nas duas camadas elásticas. Neste caso, a lei de Hooke dada pela Eq. (4.13) é válida, podendo ser substituída na Eq. (4.12), juntamente com a Eq. (4.7). Portanto, a energia de deformação pode ser escrita na forma da Eq. (4.14), em que  $K$  representa a matriz de rigidez elástica do elemento, definida na Eq. (4.15).

$$V_e = \frac{1}{2} \iiint_{\forall} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (4.12)$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (4.13)$$

$$V_e^{(e)} = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_e^{(e)}] \{q_e\} \quad (4.14)$$

$$[K_e^{(e)}] = b \sum_{k=1,3} E_k \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N'_u{}^{(k)}]^T [N'_u{}^{(k)}] dx dz \quad (4.15)$$

Para o material viscoelástico, deve-se usar a lei constitutiva baseada no modelo MDF melhorado com a fórmula de recorrência. Da relação tensão-deformação, descrita pelas Eqs. (3.50) e (3.51), na Eq. (4.12), é possível descrever a energia de deformação para a camada viscoelástica, conforme a Eq. (4.16). Incorporando as expressões para as deformações dessa camada (ver Eqs. (4.7) e (4.8)), a energia de deformação é expressa de acordo com a Eq. (4.17).

É importante destacar que, diferentemente do que ocorre na elasticidade, nos materiais viscoelásticos a energia de deformação dependerá dos tempos anteriores, que estão associados a diferentes termos de recorrência. Isso faz com que não seja possível descrever a energia potencial dessa camada através de uma única matriz de rigidez. De fato, a Eq. (3.18) representa a energia de deformação para a camada viscoelástica, sendo observado uma matriz de rigidez para cada termo da fórmula de recorrência expressas pela Eq. (4.19).

$$V_e^{(v)} = \frac{1}{2} \iiint_V \sum_{j=0}^{N_l} (\beta_{j+1}^E \varepsilon_t \varepsilon_{t-j\Delta t} + \beta_{j+1}^G \gamma_t \gamma_{t-j\Delta t}) dV \quad (4.16)$$

$$V_e^{(v)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N_l} \left( \beta_{j+1}^E \{q_e(t)\}^T b \int_{z_2}^{z_2+h_2} \int_0^{li} [N'_u{}^{(2)}]^T [N'_u{}^{(2)}] dx dz \{q_e(t-j\Delta t)\} \dots \right. \\ \left. + \beta_{j+1}^G \{q_e(t)\}^T A_2 \int_0^{li} [N_\beta(x)]^T [N_\beta(x)] dx \{q_e(t-j\Delta t)\} \right) \quad (4.17)$$

$$V_e^{(v)} = \frac{1}{2} \{q_e(t)\}^T \sum_{j=0}^{N_l} [K_e^{** (v)}]_j \{q_e(t-j\Delta t)\} \quad (4.18)$$

$$[K_e^{** (e)}]_j = b \left( \beta_{j+1}^E \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N'_u{}^{(2)}]^T [N'_u{}^{(2)}] dx dz \dots \right. \\ \left. + \beta_{j+1}^G \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N_\beta^{(2)}]^T [N_\beta^{(2)}] dx dz \right) \quad (4.19)$$

Uma vez determinadas as matrizes de massa e rigidez elementares, é necessário fazer a montagem dessas matrizes para a obtenção das matrizes globais da estrutura. Isto pode ser feito através da soma das matrizes elementares levando-se em consideração a conectividade de cada elemento, conforme as Eqs. (4.20) a (4.22).

$$[\mathbf{M}] = \bigcup_{e=1}^N [\mathbf{M}_e] \quad (4.20)$$

$$[\mathbf{K}^{(e)}] = \bigcup_{e=1}^N [\mathbf{K}_e^{(e)}] \quad (4.21)$$

$$[\mathbf{K}^{**(v)}] = \bigcup_{e=1}^N [\mathbf{K}_e^{**(v)}] \quad (4.22)$$

#### 4.1.3. Equações do movimento

As equações do movimento do sistema podem ser determinadas a partir das equações de Lagrange (4.23), onde  $F$  e  $L$  são, respectivamente, o vetor de esforços generalizados e o Lagrangeano do sistema, que é definido como a diferença entre as energias cinética e de deformação. Desse modo, utilizando as Eqs. (4.10), (4.14) e (4.18) para o Lagrangeano e incorporando-o à Eq. (4.23), chega-se à Eq. (4.24) do movimento do sistema.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \{\dot{\mathbf{q}}\}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \{\mathbf{q}\}} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.23)$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}^{(e)}]\{\mathbf{q}(t)\} + \sum_{j=0}^{N_t} [\mathbf{K}^{**(v)}]_j \{\mathbf{q}(t-j\Delta t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (4.24)$$

A fim de simplificar e auxiliar na resolução da Eq. (4.24), o primeiro termo ( $j=0$ ) pode ser extraído para fora do somatório, permanecendo na soma apenas aqueles associados aos demais valores de  $j$ , conforme mostrado na Eq. (4.25). Esse procedimento torna possível a separação de todos os termos que dependem dos valores nodais no tempo analisado em um

lado da igualdade, e no outro lado aparecem aqueles relacionados aos esforços. A equação do movimento do sistema é, portanto, a Eq. (4.26), na qual  $f_v$  e  $K^{*(v)}$  são dados na Eq. (4.27).

$$\sum_{j=0}^{N_1} [K^{***(v)}]_j \{q(t-j\Delta t)\} = [K^{***(v)}]_0 \{q(t)\} + \sum_{j=1}^{N_1} [K^{***(v)}]_j \{q(t-j\Delta t)\} \quad (4.25)$$

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + ([K^{(e)}] + [K^{*(v)}]) \{q(t)\} = \{f(t)\} - \{f_v(t)\} \quad (4.26)$$

$$\{f_v(t)\} = \sum_{j=1}^{N_1} [K^{***(v)}]_j \{q(t-j\Delta t)\} \text{ e } [K^{*(v)}] = [K^{***(v)}]_0 \quad (4.27)$$

Finalmente, pode-se usar alguma técnica de resolução numérica, como o método de Newmark para determinar as respostas do sistema em função do tempo. Esse método possui algumas variações de acordo com os valores utilizados para os seus parâmetros. Neste trabalho será utilizado o método da aceleração média constante, que apresenta convergência incondicional e evita a introdução de amortecimento artificial.

## 4.2. MODELAGEM DE PÓRTICOS

Os pórticos planos são estruturas formadas por elementos que podem estar sujeitos a esforços axiais, cisalhantes e fletores, e são unidos uns aos outros em suas extremidades, formando uma estrutura de grande aplicabilidade. De modo geral, cada elemento do pórtico pode ser tratado como uma viga, de forma que a sua modelagem é semelhante ao que foi apresentado na Seção 4.1. A principal diferença se dá na necessidade de se fazer uma melhor distinção entre os sistemas de coordenadas global e local, para que seja possível conectar elementos de vigas com orientações diferentes. A Fig. 4.4 ilustra um pórtico constituído por membros tratados com vigas sanduíches viscoelásticas, o sistema de coordenadas global, que está associado à estrutura, e o sistema local, associado a cada elemento.

Ambos os sistemas de coordenadas podem ser relacionados por meio dos cossenos diretores, e cada um dos elementos podem ser levados do sistema local para o global através de uma matriz de rotação dada pela Eq. (4.28). Os gdl's e esforços aplicados associados às coordenadas locais de qualquer elemento podem ser descritos no sistema global através das Eqs. (4.29) e (4.30).

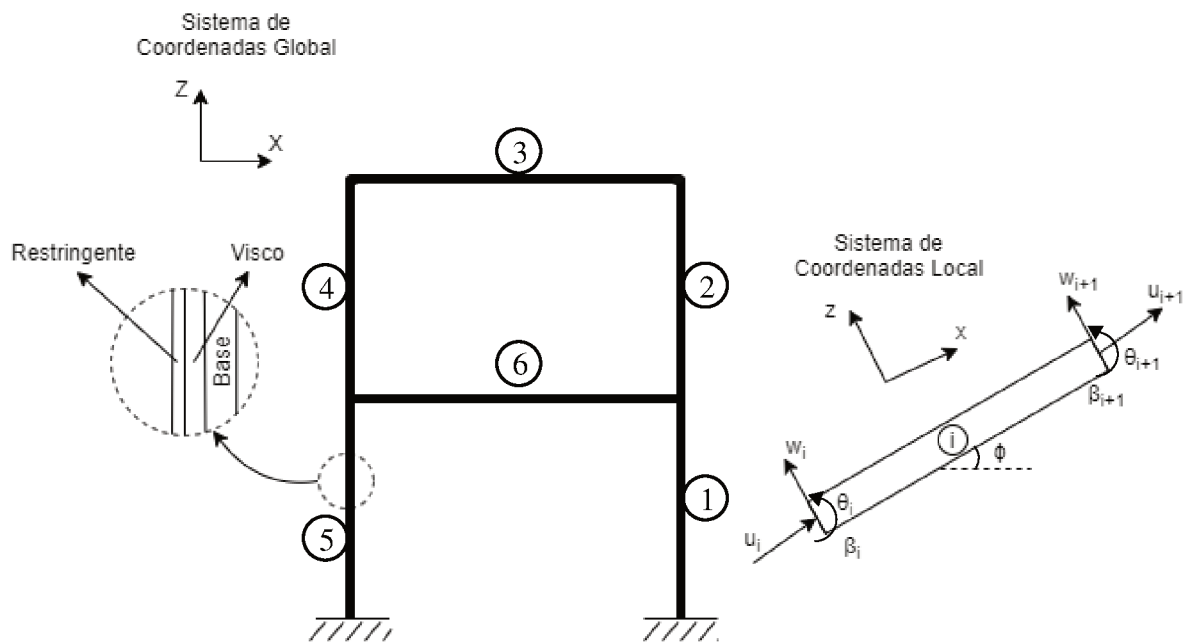


Figura 4.3 – Pórtico plano tratado com viga sanduíche e um elemento genérico

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\{Q\} = [T]\{q\} \quad (4.29)$$

$$\{F\} = [T]\{f\} \quad (4.30)$$

Uma vez que todas as grandezas estão no mesmo sistema de coordenadas, todos os elementos podem ser conectados, as energias cinética e potencial podem ser determinadas de forma semelhante à que foi feita na seção anterior, e as equações do movimento do sistema, semelhante à Eq. (4.26), é expressa na forma da Eq. (4.31), onde  $M$  e  $K$  são as matrizes de massa e rigidez do pórtico, descritas pelas Eqs. (4.32) a (4.34).

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + ([K^{(e)}] + [K^{*(v)}])\{q(t)\} = \{f(t)\} - \{f_v(t)\} \quad (4.31)$$

$$[M] = \bigcup_{e=1}^N [T]^T [M_e] [T] \quad (4.32)$$

$$[K^{(e)}] = \bigcup_{e=1}^N [T]^T [K_e^{(e)}] [T] \quad (4.33)$$

$$[K^{*(v)}] = \bigcup_{e=1}^N [T]^T [K_e^{*(v)}] [T] \quad (4.34)$$

### 4.3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Desenvolveu-se o código computacional para a análise das vigas sanduíches e pórticos tratados em ambiente Matlab, sendo constituído por um programa principal e três funções que calculam os parâmetros de recorrência; as matrizes de massa e rigidez de cada uma das camadas da viga; e uma etapa que resolve a equação do movimento através do método de Newmark. O pórtico é avaliado de forma semelhante, adicionando ao programa apenas uma outra função para o cálculo das matrizes de rotação. A Fig. 4.4 ilustra as principais etapas do código utilizado neste trabalho.

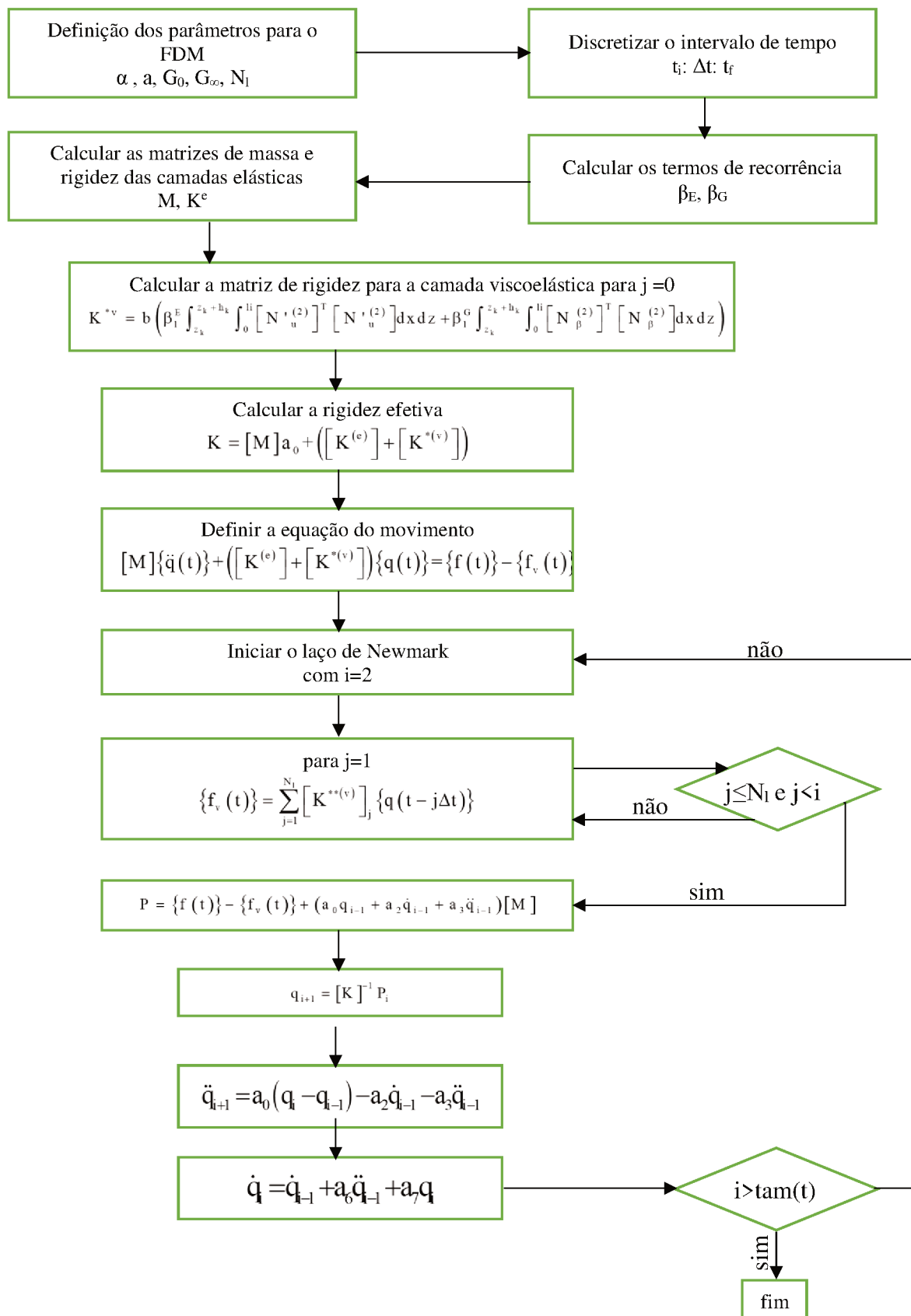


Figura 4.4 – Fluxograma da implementação computacional

## **CAPÍTULO 5**

### **REDUÇÃO DE MODELO NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA SISTEMAS VISCOELÁSTICOS**

O MEF é uma técnica poderosa na análise de problemas em Engenharia. No entanto, para problemas envolvendo a viscoelasticidade, o uso de tal técnica pode requerer um alto custo computacional para obtenção das respostas amortecidas dos sistemas envolvidos. Isto é particularmente verdade para análises transientes de sistemas com materiais viscoelásticos em virtude de sua matriz de rigidez ser fortemente dependente da frequência de excitação e da temperatura de operação, dentre outros fatores. Mesmo que o modelo MDF melhorado pela recorrência proposto neste trabalho permita já reduzir o custo computacional envolvido em análises transientes de sistemas com viscoelástico, ainda assim, o uso de um método de redução bem adaptado a este problema específico se torna interessante. Isto permitirá estender a aplicação do modelo MDF proposto a problemas mais realísticos com os materiais viscoelásticos, como é caso de sistemas mais complexos e/ou envolvendo a presença de incertezas. Dessa forma, este capítulo apresenta um novo método de redução de modelos no domínio do tempo para sistemas viscoelásticos modelados via MEF-MDF melhorado.

#### **5.1. ESTUDOS ANTERIORES**

Nos últimos anos, inúmeros estudos vêm sendo realizados no LMEst/UFU acerca de técnicas de redução de modelos aplicados a sistemas viscoelásticos, sobretudo no domínio



da frequência (CUNHA-FILHO *et al.*, 2018; FONSECA-JÚNIOR *et al.*, 2019; GONÇALVES *et al.*, 2019). Normalmente, o que se faz é construir a base considerando o sistema conservativo associado e enriquecê-la posteriormente com algum tipo de resíduo estático. Lima *et al.* (2010) foi o primeiro a propor um método de redução que se baseia no uso de uma base constante independente da temperatura e da frequência da excitação, que é posteriormente enriquecida com resíduos estáticos associados às forças externas e aos esforços do material viscoelástico. Os autores utilizaram sua base de redução na análise de um painel aeronáutico e demonstraram boa concordância das funções de resposta em frequência (FRFs) obtidas com as correspondentes geradas pelo modelo completo. Além, é claro, da redução significativa do tempo de cálculo requerido nas análises dinâmicas.

No domínio do tempo, no entanto, os estudos sobre redução de modelos aplicados à modelagem de estruturas sanduíches com materiais viscoelásticos são bem mais escassos, sobretudo aqueles que fazem uso de um modelo de derivadas fracionárias. Dentre os poucos trabalhos existentes, Lima *et al.* (2014) apresentaram um método de redução aplicado a sistemas viscoelásticos que possuem comportamento linear ou não-linear discreto. A base de redução proposta por esses autores é semelhante àquela apresentada inicialmente por Lima *et al.* (2010), onde há um enriquecimento sucessivo da base com resíduos estáticos e, para o caso não-linear, são adicionados resíduos devidos às forças não-lineares. O método se mostrou eficaz e preciso na aproximação das respostas temporais de tais sistemas, mas a base não foi capaz de representar adequadamente sistemas sujeitos a incertezas ou não-linearidades geométricas. Nesse caso, a base deve ser recalculada em cada ciclo de iteração, o que torna o custo computacional alto e, às vezes, proibitivo.

Portanto, a partir do trabalho de Briend (2017), será proposto neste trabalho um método de redução baseado na própria resposta temporal do sistema viscoelástico modelado com MDF e recorrência.

## **5.2. REDUÇÃO DE MODELOS NO DOMÍNIO DO TEMPO**

Comumente, modelos em elementos finitos utilizados na análise de estruturas de interesse industrial são compostos por um grande número de gdl's, podendo chegar às centenas de milhares ou até mesmo milhões (LIMA *et al.*, 2014). Nesse sentido, o custo computacional associado à análise dinâmica de tais sistemas pode torná-la inviável, o que faz

com que seja necessária a utilização de um método de redução de modelos para reduzir a ordem das matrizes de EFs e possibilitar a análise da estrutura. É imprescindível, no entanto, que as aproximações obtidas com o modelo reduzido mantenham a capacidade de representar adequadamente o comportamento dinâmico do sistema completo.

Existem diversas técnicas de redução de modelos disponíveis na literatura. Entretanto, a maioria se baseia no fato de que os gdl's do sistema completo podem ser aproximados pela Eq. (5.1), onde  $T_r$  é uma matriz de transformação de ordem  $N \times NR$ , com  $NR \ll N$ , e  $q_r$  é o vetor das coordenadas reduzidas.

$$\{q\} \approx [T_r] \{q_r\} \quad (5.1)$$

Combinando a Eq. (5.1) com a equação do movimento do sistema viscoelástico, já definida na Seção 4.1.3, obtém-se a Eq. (5.2), em que  $M_r$  e  $K_r$  são as matrizes de massa e rigidez reduzidas, e  $f_r$  e  $f_{vr}$  são os vetores dos esforços externos e viscoelásticos reduzidos.

$$[M_r] \{\ddot{q}_r\} + \left( [K_r^{(e)}] + [K_r^{*(v)}] \right) \{q_r\} = \{f_r\} - \{f_{vr}\} \quad (5.2)$$

onde:

$$[M_r] = [T_r]^T [M] [T_r] \quad (5.3)$$

$$[K_r^{(e)}] = [T_r]^T [K^{(e)}] [T_r] \quad (5.4)$$

$$[K_r^{*(v)}] = [T_r]^T [K^{*(v)}] [T_r] \quad (5.5)$$

$$\{f_r\} = [T_r]^T \{f\} \quad (5.6)$$

$$\{f_{vr}\} = [T_r]^T \sum_{j=1}^{N_j} [K_r^{**(v)}]_j \{q_r(t - j\Delta t)\}, \text{ com } [K_r^{*(v)}] = [T_r]^T [K^{**(v)}] [T_r] \quad (5.7)$$

Um dos pontos fundamentais da redução de modelos é a escolha adequada da base, que é essencialmente aquilo que diferencia as diversas técnicas de redução existentes. Nesse sentido, o método Vetores de Respostas ao Impulso (VRI) no domínio do tempo proposto neste trabalho baseia-se na utilização dos deslocamentos do sistema viscoelástico, obtidos a

partir do modelo de EFs completo. Submete-se o sistema a uma força impulsiva (de onde vem sua nomenclatura), que excita todos os modos de vibrar do sistema viscoelástico, onde são armazenados somente alguns vetores de deslocamentos avaliados para um pequeno intervalo de tempo. Esses vetores devem possuir informações modais importantes e serão usados para compor a base do VRI dada na Eq. (5.8).

Entretanto, à medida que a dimensão da base é aumentada, podem surgir vetores com informações repetidas, tornando-a linearmente dependente e fazendo com que os determinantes das matrizes reduzidas fossem nulos. Isto decorre de duas propriedades da Álgebra Linear, a saber: (i) matrizes com duas linhas ou colunas cujos elementos são proporcionais possuem determinantes nulos; (ii) o determinante de uma matriz não é alterado quando se soma a uma linha ou coluna os elementos de outra linha ou coluna previamente multiplicados por um número real diferente de zero (WINTERLE; STEINBRUCH, 1987). Desse modo, faz-se necessário ortonormalizar os vetores da base inicial de modo a se obter um conjunto de vetores linearmente independentes. Por meio desse procedimento, os vetores que possuem informações redundantes são eliminados. Na sequência, essa nova base é utilizada na obtenção da Eq. (5.2), que é resolvida através de alguma técnica numérica como o método de Newmark.

$$[T_{\text{VRI}}] = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{\text{NR}}] \quad (5.8)$$

É possível perceber que a utilização desse método torna necessária a execução de dois laços de integração no contexto do método Newmark, como ilustrado na Fig. 5.1: um para encontrar os vetores da base e outro para resolver a equação do movimento do sistema reduzido. Esse procedimento pode parecer contraditório porque, na busca de uma redução do custo computacional, resolve-se o modelo de EFs completo e introduz-se uma nova iteração ao algoritmo de integração. A execução do novo laço de Newmark, no entanto, não reduz consideravelmente a eficiência do método, uma vez que o modelo completo é solucionado somente para um pequeno intervalo de tempo,  $0 : \Delta t : \text{NL} \cdot \Delta t$ , suficiente para que se obtenha os vetores contendo as informações necessárias que formarão a base de redução.

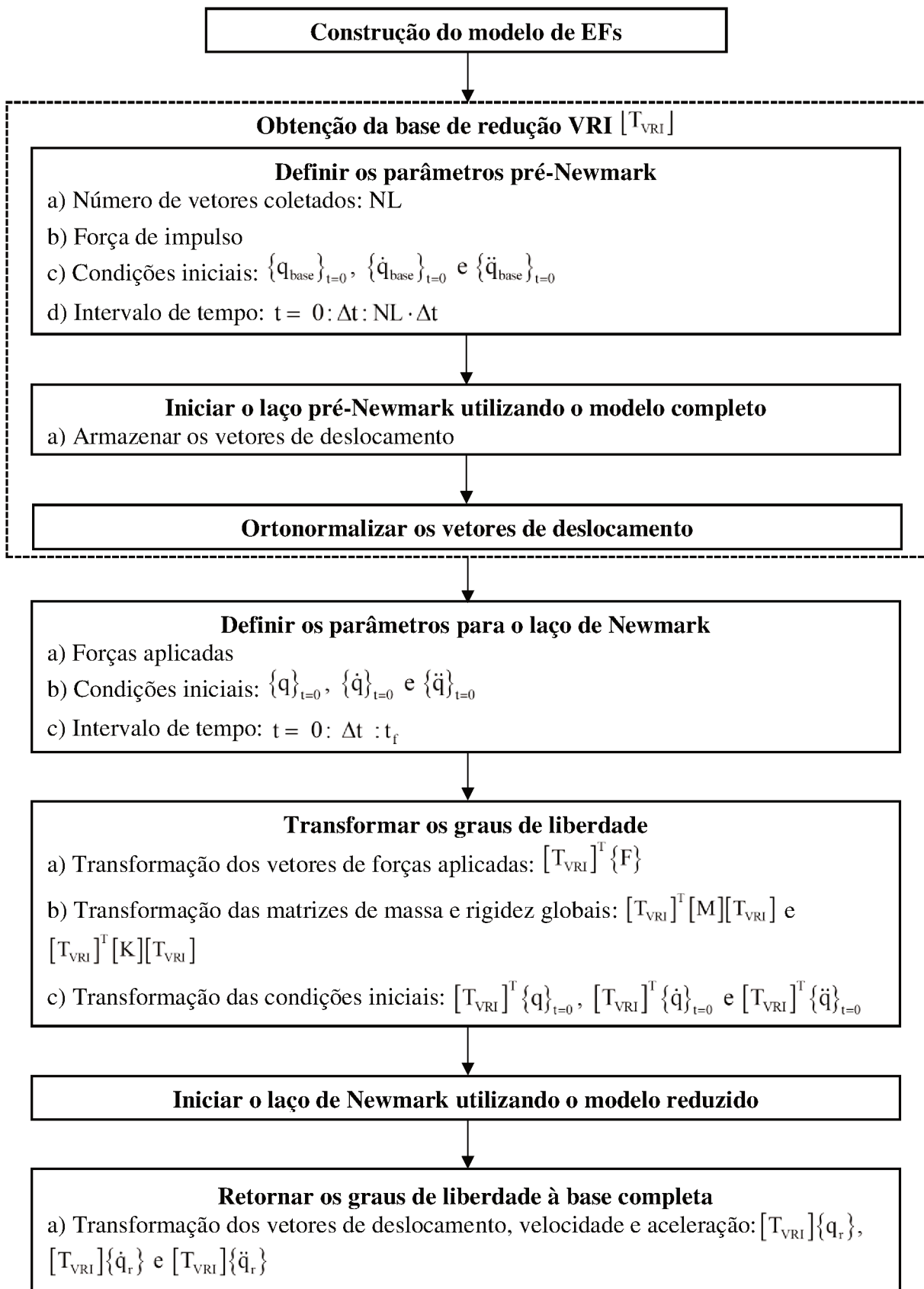


Figura 5.1 – Principais etapas da integração de Newmark com o método de redução VRI

# CAPÍTULO 6

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentados os resultados das diversas simulações realizadas com a viga sanduíche viscoelástica modelada com o MDF e a recorrência, além da redução de modelos no domínio do tempo. Primeiramente, a fim de verificação da modelagem, uma análise modal é realizada e seus resultados são confrontados com os correspondentes disponíveis na literatura aberta. Em seguida, a viga sanduíche é aplicada a um pórtico para verificar a eficiência do tratamento por camadas restritas passivas e alguns aspectos sobre o comportamento de tais estruturas com amortecimento viscoelástico. Por fim, é apresentada a aplicação da redução de modelos, mostrando a eficiência e acurácia do método proposto em aproximar as respostas temporais de sistemas viscoelásticos.

### 6.1. VERIFICAÇÃO DO MODELO DE VIGA SANDUÍCHE

Primeiramente, para verificar a modelagem por EFs da viga sanduíche viscoelástica, uma análise modal foi realizada e seus resultados foram comparados com os da literatura e com uma simulação feita no ANSYS Workbench versão estudantil. A viga implementada foi proposta por Banerjee *et al.* (2007), cujas propriedades estão definidas na Tabela 6.1.

Nesta primeira análise, todas as camadas são assumidas com propriedades elásticas. Esta simulação é importante para demonstrar que os campos de deslocamentos, deformações, matrizes de massa e rigidez, e, conseqüentemente, as equações do movimento foram formuladas corretamente. Na Tabela 6.2 são apresentadas as quatro primeiras frequências naturais encontradas a partir de cada uma das abordagens. Nota-se uma boa correlação entre

os resultados obtidos com o modelo proposto e os correspondentes obtidos pelo código comercial ANSYS, apresentando um erro percentual de no máximo 1,3 %. As frequências previstas por Banerjee *et al.* (2007), apesar de apresentarem valores com pequenas diferenças, sobretudo para o terceiro modo, também concordam com aquelas previstas pelo modelo deste trabalho. O primeiro modo de vibrar apresenta um erro percentual de 1,7 %.

Tabela 6.1 – Propriedades físicas e geométricas da viga sanduíche

	1ª camada	2ª camada Elástica	2ª camada Viscoelástica	3ª camada
Material	Aço	Chumbo	ISD 112	Aço
Comprimento (L)	0,5 m	0,5 m	0,5 m	0,5 m
Largura (b)	0,04 m	0,04 m	0,04 m	0,04 m
Espessura (h)	0,015 m	0,02 m	0,02 m	0,01 m
Módulo de elasticidade (E)	210 GPa	16 GPa	----	210 GPa
Módulo de cisalhamento (G)	80 GPa	5,5 GPa	----	80 GPa
Densidade ( $\rho$ )	7.850 kg/m <sup>3</sup>	11.100 kg/m <sup>3</sup>	1.600 kg/m <sup>3</sup>	7.850 kg/m <sup>3</sup>

Tabela 6.2 – Frequências naturais para a viga sanduíche elástica

Frequência natural	Modelo proposto	ANSYS	Banerjee <i>et al.</i> (2007)
1ª	125,65 Hz	125,94 Hz	123,57 Hz
2ª	662,19 Hz	658,22 Hz	611,33 Hz
3ª	1560,6 Hz	1540,7 Hz	1393,10 Hz
4ª	1824,6 Hz	1825,9 Hz	1823,79 Hz

## 6.2. MDF COM RECORRÊNCIA E OUTROS MODELOS FRACIONÁRIOS

A fim de se comparar a eficiência do modelo proposto neste trabalho, nesta seção o MDF com recorrência é comparado, em termos de custo computacional, aos dois modelos fracionários mais utilizados atualmente: o MDF anelástico, proposto por Galucio *et al.* (2004), e o MDF desenvolvido por Schmidt e Gaul (2001).

As simulações computacionais foram realizadas no ambiente de programação Matlab num único computador com as seguintes configurações: 4 GB de memória RAM; 500 GB de

armazenamento HDD; processador Intel Core i5-3317U CPU @ 1,70 GHz; Windows 10 Home Single Language 64 bits.

### **6.2.1. Modelos MDF com recorrência e MDF anelástico**

A fim de se comparar o MDF com a recorrência proposto neste trabalho e o MDF com gdl's anelásticos desenvolvido por Galucio *et al.* (2004), foi feita a implementação da viga sanduíche proposta por esses autores, que possui comprimento  $L=200$  cm, largura  $b=1$  cm e espessuras  $h_1=1$  mm,  $h_2=0,2$  mm e  $h_3=1$  mm. As camadas elásticas possuem módulo de elasticidade  $E=70,3$  GPa e densidade  $\rho=2.690$  kg/m<sup>3</sup>. O material viscoelástico (ISD 112) possui densidade  $\rho=1.600$  kg/m<sup>3</sup>, coeficiente de Poisson  $\nu=0,5$  e encontra-se à temperatura de 27 °C. Essa estrutura é engastada em uma das extremidades e a outra está sujeita a um impulso triangular unitário com pico em 2 ms. O sistema foi discretizado em 5, 50 e 100 elementos finitos e utilizou-se um passo de tempo de 0,1 ms com 500 termos de memória.

A Fig. 6.1 apresenta as respostas transientes obtidas pelos dois modelos. É importante destacar que o MDF anelástico se baseia em uma formulação bastante diferente daquela apresentada neste trabalho e, apesar de partir do modelo RGT proposto por Bagley e Torvik (1983a), uma nova variável relativa à deformação anelástica para o viscoelástico é introduzida ao modelo. Isto faz com que a lei constitutiva, que antes possuía dois termos de derivadas fracionárias, passe a contar com apenas um termo, enquanto que o MDF com recorrência se baseia nos conceitos de tensores hidrostático e de desvio propostos inicialmente por Schmidt e Gaul (2001). Além disso os parâmetros do modelo proposto por Galucio possuem natureza e valores diferentes daqueles utilizados para a recorrência. Nesse sentido, todas essas diferenças entre ambas as formulações podem justificar as pequenas diferenças observadas entre as respostas temporais da viga.

A tabela 6.3 mostra uma comparação entre o custo computacional associado a cada uma das abordagens. É possível notar que os tempos de cálculos de ambos os modelos são aproximadamente equivalentes. No entanto, é importante destacar que o MDF anelástico possui uma limitação quanto à aplicação no estado tridimensional de tensões. O MDF com recorrência, por outro lado, supera essa limitação por meio da lei constitutiva tridimensional apresentada nas seções 3.2 e 3.3.

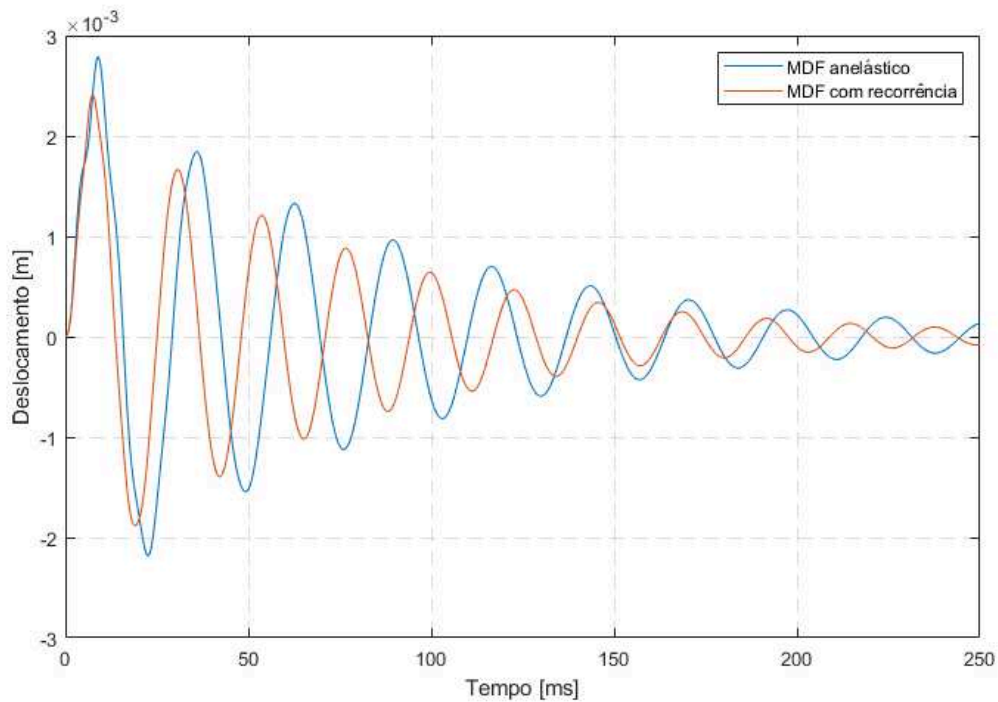


Figura 6.1 – Comparação entre as respostas temporais obtidas pelos MDFs anelástico e com recorrência.

Tabela 6.3 – Custo computacional do MDF com recorrência e o MDF anelástico

Número de elementos	Número de gds livres	Tempo		Ganho em desempenho
		Galucio et. al. (2004)	MDF com recorrência	
5	20	1,47 s	1,52 s	-3,4 %
50	200	20,2 s	17,1 s	15,3%
100	400	54,3 s	49,7 s	8,4 %

### 6.2.2. Modelos MDF com recorrência e MDF de Schmidt e Gaul

Schmidt e Gaul (2001) propuseram uma lei constitutiva para os materiais viscoelásticos baseada nos conceitos de tensores hidrostáticos e de desvio semelhante àquela desenvolvida na seção 3.2. O modelo proposto pelos autores têm a vantagem de possibilitar a aplicação ao estado tridimensional de tensões, no entanto, devido à autodependência do campo de tensões que a formulação dos autores possui, o custo computacional associados às



análises transientes é excessivamente alto e, em muitos casos, torna a análise de sistemas viscoelásticos inviável.

A fim de comparação, o modelo de Schmidt e Gaul (2001) foi implementado e aplicado a uma viga sanduíche com comprimento  $L=200$  cm, largura  $b=4$  cm e espessuras  $h_1=15$  mm,  $h_2=15$  mm e  $h_3=10$  mm. As camadas elásticas possuem módulo de elasticidade  $E=210$  GPa e densidade  $\rho=7.850$  kg/m<sup>3</sup>. O material viscoelástico (ISD 112) encontra-se à temperatura de 27 °C. A estrutura é engastada e sujeita a um impulso unitário com pico em 2 ms. O intervalo de tempo foi discretizado em 0,25 ms e foram utilizados 160 pontos de comprimento de memória. A Fig. 6.2 mostra a comparação entre as respostas transientes de ambos os sistemas.

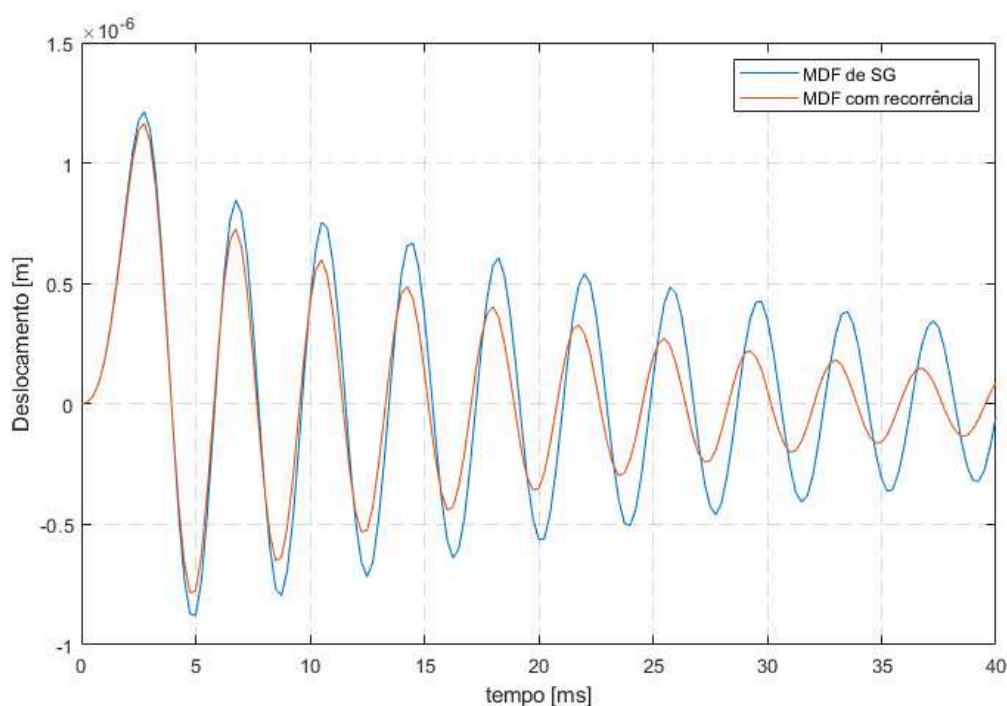


Figura 6.2 – Comparação entre as respostas temporais obtidas pelos MDFs de Schmidt e Gaul (2001) e com recorrência.

A Tabela 6.4 apresenta o tempo de cálculo associado a ambos os modelos. É possível notar que o MDF proposto neste trabalho diminui consideravelmente o custo computacional associado à análise de estruturas viscoelásticas e é capaz de descrever adequadamente o comportamento desses materiais. Essa grande redução ocorre porque, quando se usa a

recorrência, as matrizes de massa e rigidez do sistema podem ser calculadas previamente e apenas atualizadas em cada iteração. De outro modo, quando se utiliza o método proposto por Schmidt e Gaul (2001), a matriz associada ao histórico de tensões de cada elemento deve ser calculada para cada passo de tempo no procedimento de Newmark. Isso torna as análises muito mais custosas no que tange ao tempo de cálculo. De forma que mesmo para aplicações simples, como a viga estudada, o custo computacional é alto, e em sistemas mais complexos, o uso do modelo de Schmidt e Gaul torna-se inviável.

Tabela 6.4 – Custo computacional do MDF com recorrência e o MDF de Schmidt e Gaul (2001)

Número de elementos	Número de gds livres	Tempo		Ganho em desempenho
		Schmidt e Gaul (2001)	MDF com recorrência	
5	20	10 h 50 min	20.5 s	100 %

Nesse sentido, ambas as comparações deixam clara a grande vantagem do modelo com recorrência proposto neste trabalho, que supera as limitações dos modelos de Galucio *et al.* (2004), no que tange à aplicação tridimensional, e de Schmidt e Gaul (2001), no que diz respeito ao custo computacional, e é capaz de viabilizar a análise transiente de sistemas viscoelásticos complexos de interesse industrial, que envolvam, inclusive, fenômenos aeroelásticos, estocásticos ou não-lineares.

### 6.3. CONVERGÊNCIA DA MALHA E COMPRIMENTO DE MEMÓRIA

Nas simulações que se seguem, a viga proposta por Banerjee *et al.* (2007) e cujas especificações são dadas na Tabela 6.1 será utilizada. A única diferença são as propriedades mecânicas da camada viscoelástica que, a partir de agora é constituída pelo material ISD 112 da 3M, cujos parâmetros para a temperatura de 27 °C foram apresentados na Seção 3.2. Com o propósito de determinar o número de EFs adequado a ser utilizado na malha, analisou-se como o número de EFs afeta a resposta a um impulso triangular unitário com pico em 2 ms.

A Fig. 6.3 mostra que é necessário um número mínimo de 20 EFs na malha para que não haja variação significativa na resposta temporal da viga sanduíche. Desta forma, nas

simulações subsequentes são utilizados 25 EFs. De fato, o erro obtido utilizando-se essa malha é da ordem de 0,015 %.

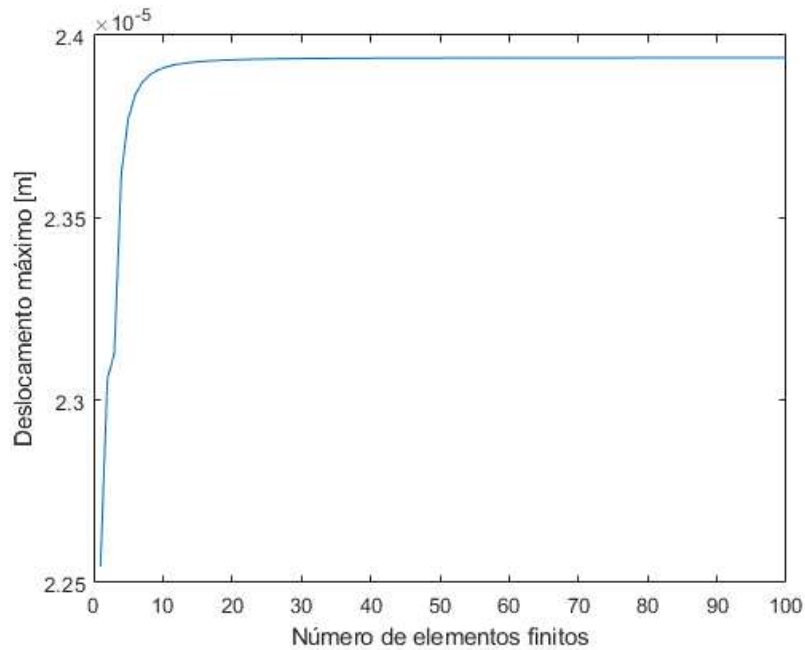


Figura 6.3 – Convergência da malha de EFs

Outro parâmetro bastante relevante quanto à aplicação do método MDF com a fórmula de recorrência é o chamado “comprimento de memória”, que estabelece a quantidade de passos de tempo anteriores ao instante atual a serem avaliados para o viscoelástico. Uma vez que o efeito dos estados precedentes se esvanece, a utilização de muitos, ou até mesmo todos os tempos passados, tem pouca influência sobre o resultado, levando apenas a um aumento excessivo no custo computacional. Com o uso de poucos valores, por outro lado, obtém-se uma caracterização errônea da resposta temporal, como é possível observar na Fig. 6.4, que mostra a influência do comprimento de memória quando o intervalo de tempo é discretizado em passos de 0,5 ms.

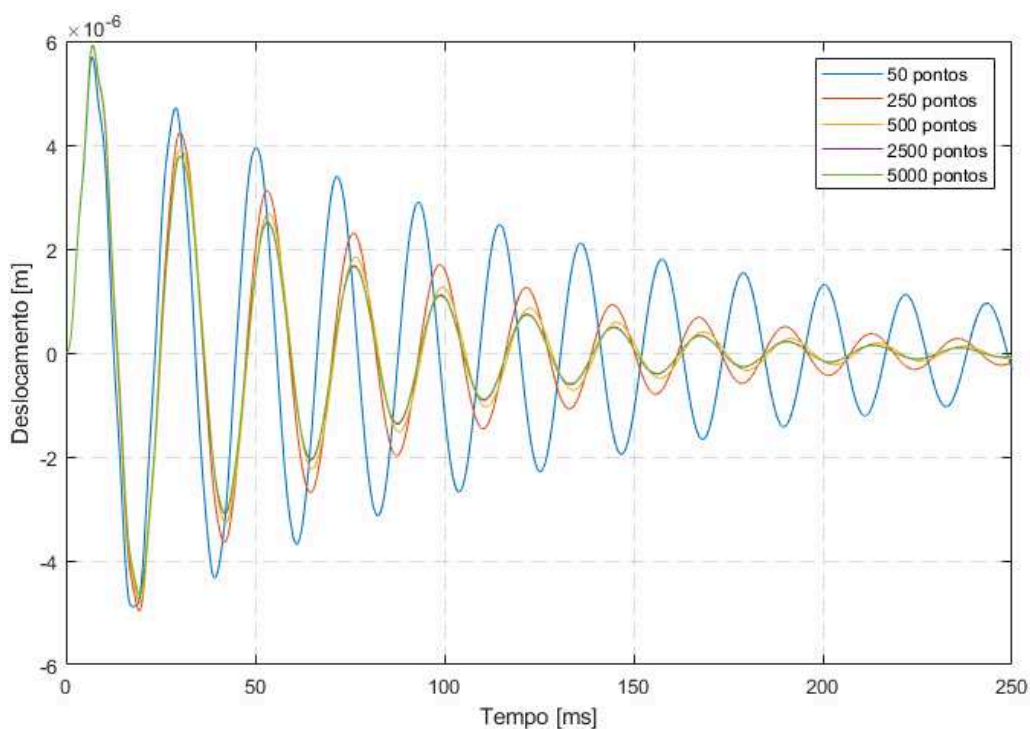


Figura 6.4 – Influência do comprimento de memória nas respostas do sistema viscoelástico

É possível observar que, quanto menos pontos são utilizados no cálculo do instante atual, menos amortecida é a resposta do sistema, o que é natural uma vez que as propriedades de amortecimento do material viscoelástico advêm do seu efeito de memória. Para valores mais altos de comprimento de memória, a influência da utilização de pontos adicionais deixa de ser relevante, de modo que os gráficos passam a convergir.

É importante salientar que o efeito do comprimento de memória é diretamente dependente da discretização do intervalo de tempo, i. e., a utilização de um intervalo com muitos pontos de tempo eleva o número de tempos passados a serem avaliados, conforme mostrado na Fig. 6.5 abaixo. Neste caso, a utilização de passos de tempo excessivamente discretizados é duplamente danosa, uma vez que não apenas aumenta o número de vezes que o laço de Newmark é executado, mas também faz necessária a avaliação de mais tempos passados para a obtenção de uma resposta que descreva adequadamente o comportamento do sistema amortecido viscoelasticamente. Portanto, quando se utiliza o MDF com recorrência, é importante que essa análise seja feita e, nas simulações da viga que seguem, a resposta é avaliada a cada 0,1 ms, sendo utilizados 500 pontos de tempo anteriores, que já possui uma precisão adequada, como se observa na Fig. 6.5.

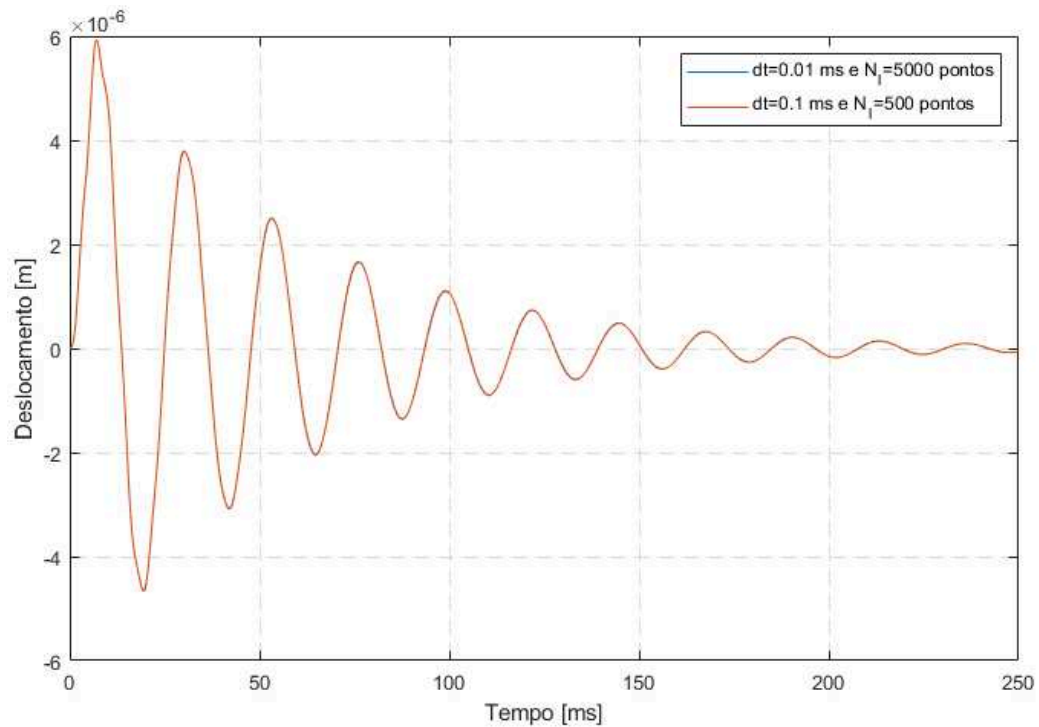


Figura 6.5 – Influência do passo de tempo e do comprimento de memória na resposta

#### 6.4. INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMETRICOS NA RESPOSTA DO SISTEMA VISCOELÁSTICO

Nesta seção é avaliada a influência da temperatura de operação do viscoelástico e de variações nas espessuras das camadas do sanduíche na eficiência do tratamento viscoelástico com modelo MDF melhorado. Primeiramente, são comparadas as amplitudes das respostas temporais e FRFs da viga sem e com tratamento viscoelástico para um impulso unitário aplicado na extremidade livre da viga. Neste caso específico, considerou-se ainda que o amortecimento estrutural das camadas elásticas é proporcional às suas matrizes de massa e rigidez ( $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ ), com  $\alpha = 10^{-1} \text{ s}$  e  $\beta = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

A Fig. 6.6 compara as respostas no tempo da viga sem e com viscoelástico. Nota-se claramente a eficiência do tratamento viscoelástico em reduzir os deslocamentos da viga, demonstrando a capacidade do modelo MDF com recorrência de representar os efeitos dissipativos do viscoelástico e levando à uma redução das vibrações da estrutura base. Isto

pode ser visto na Fig. 6.7 que compara as amplitudes das FRFs da viga sem e com tratamento viscoelástico.

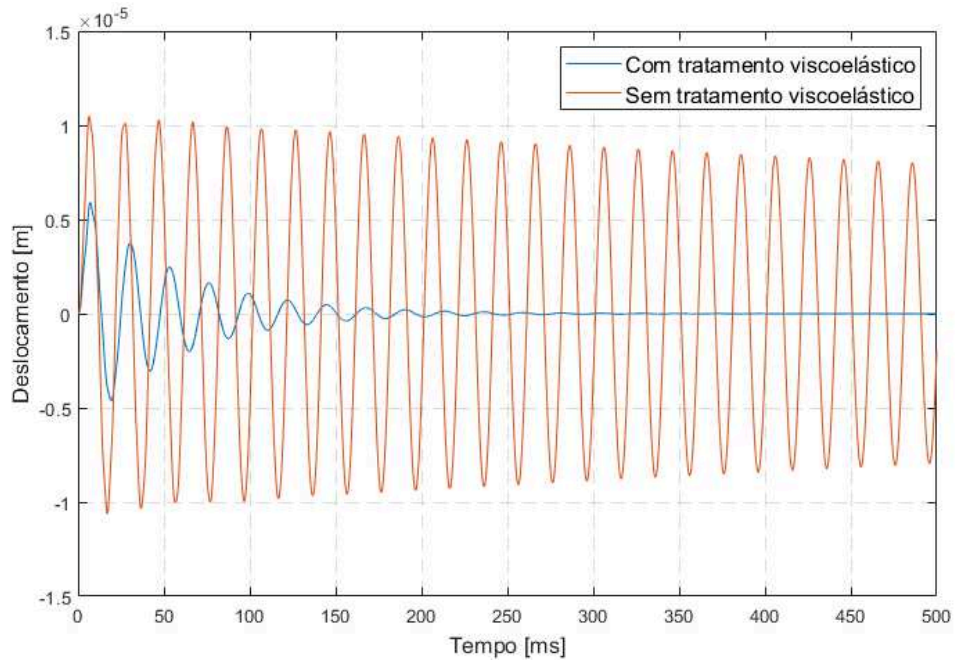


Figura 6.6 – Respostas temporais da viga sem e com tratamento viscoelástico.

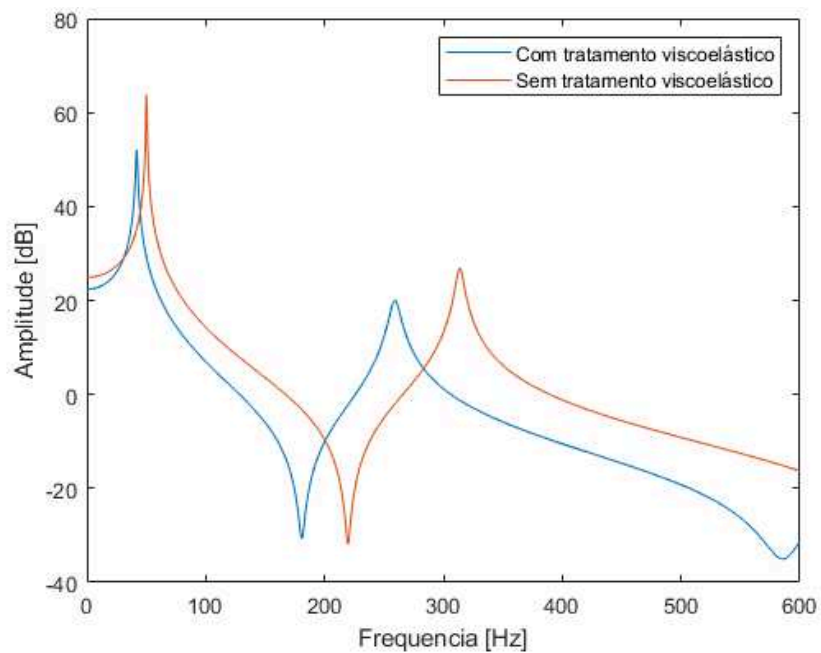


Figura 6.7 – FRFs da viga sem e com tratamento viscoelástico.

Outro aspecto interessante a ser observado na Fig. 6.7 é a alteração das frequências de ressonância do sistema pelo tratamento. Isto pode ser explicado pela adição de massa e rigidez à viga-base pelas camadas viscoelástica e restringente. Além disso, salienta-se que para uma dada temperatura de operação, o comportamento dinâmico do viscoelástico é fortemente dependente da frequência, como definido pela Eq. (3.44), Capítulo 3.

#### 6.4.1 Efeito da temperatura

O comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos é dependente da temperatura na qual esses se encontram, como discutido no Capítulo 2. Nesse sentido, a fim de verificar a capacidade do modelo MDF com recorrência em representar a sua influência nas respostas da viga sanduíche, os parâmetros do MDF foram otimizados para outros valores de temperatura de operação do ISD112 (10 °C, 20°C, 30°C e 40 °C), como mostrados na Tabela 6.4.

A Fig. 6.8 mostra a variação dos módulos com a frequência e uma comparação entre as curvas obtidas a partir dos parâmetros otimizados para o MDF e os valores de referência. As Fig. 6.9 e 6.10 mostram, respectivamente, as respostas temporais do sistema sujeito a uma força harmônica unitária com frequência de excitação de 50 Hz, e as amplitudes das FRFs da viga com tratamento para várias temperaturas de operação.

Tabela 6.5 – Parâmetros do MDF com recorrência

Temperatura [°C]	$G_0$ [Pa]	$G_\infty$ [Pa s $^\alpha$ ]	$a_G$ [s $^\alpha$ ]	$\alpha$ [-]
10	392.340,6	151.312,0	$8,0603 \cdot 10^{-4}$	0,6638
20	414.446,8	55.756,9	$3,6025 \cdot 10^{-4}$	0,6727
30	425.512,5	23.702,9	$1,833.3 \cdot 10^{-4}$	0,6777
40	428.743,9	11.533,7	$1,0405 \cdot 10^{-4}$	0,6803

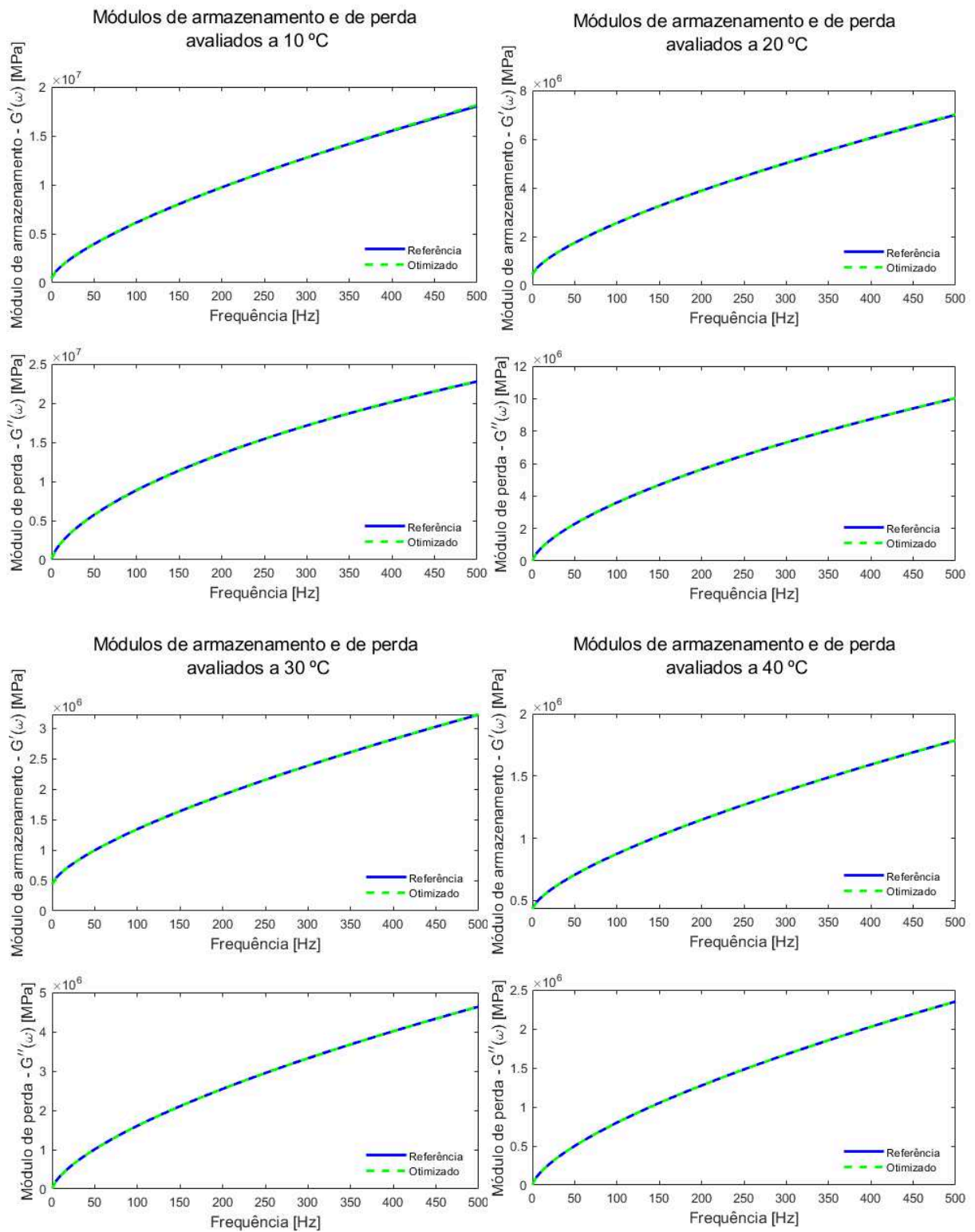


Figura 6.8 – Ajuste de curvas para as temperaturas de 10 °C, 20 °C, 30 °C e 40 °C

Comparando as respostas no tempo, nota-se um aumento na amplitude de vibração da viga sanduíche com o aumento da temperatura de operação do viscoelástico. A partir das



FRFs é possível notar que esse comportamento ocorre não apenas para a frequência de excitação considerada, mas também sobre boa parte do intervalo de frequência analisado, o que inclui os picos de ressonância. Neste caso, conclui-se que com o aumento da temperatura, a eficiência do tratamento viscoelástico, no tocante à mitigação das vibrações, é fortemente comprometida.

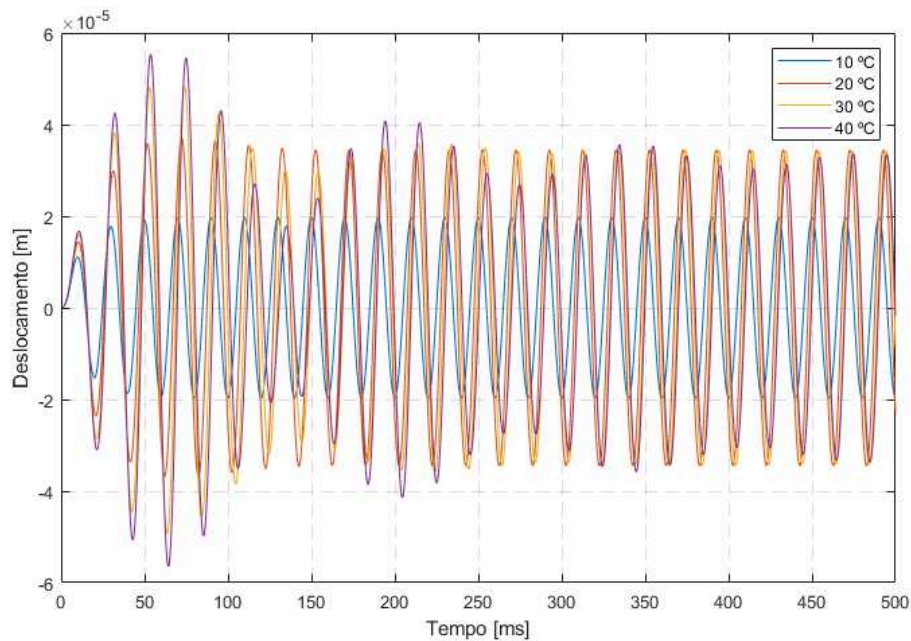


Figura 6.9 – Respostas temporais da viga sanduíche para várias temperaturas

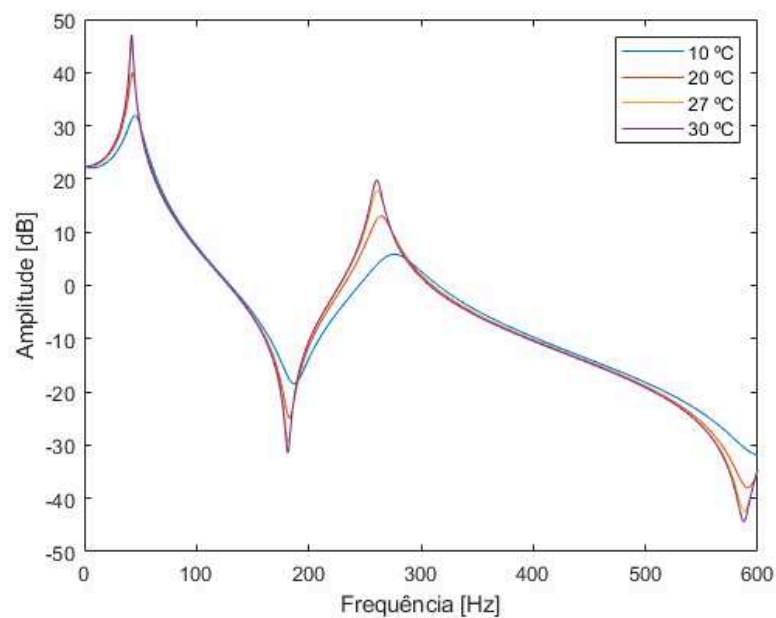


Figura 6.10 – FRFs da viga sanduíche para várias temperaturas

Neste caso, a máxima eficiência de amortecimento utilizando o ISD 112, de fato, ocorre próximo de 10 °C. A partir da Fig. 6.7 a), que mostra como a variação da temperatura afeta o fator de perda do material, é possível observar que em torno dessa temperatura o fator de perda atinge o valor máximo e passa a decrescer rapidamente à medida que o material aquece, afetando, conforme já demonstrado, sua capacidade de amortecimento.

Ao chegar aos 40 °C, o material encontra-se próximo de sair da região de transição e entrar na de borracha, de modo que o fator de perda passará a variar com menor intensidade. Além disso, a Fig. 6.7 b) mostra a influência da temperatura sobre os módulos de perda e de armazenamento do material. É possível observar que, para temperaturas mais baixas, ambos os módulos variam com maior intensidade, de forma que a influência do aquecimento é mais sensível. Tudo isso demonstra a capacidade do MDF com recorrência de representar adequadamente o comportamento do sistema a diferentes temperaturas, e a grande influência do aquecimento na eficiência do controle de vibrações quando se utiliza o tratamento viscoelástico, sobretudo à medida que o material se afasta da região de transição.

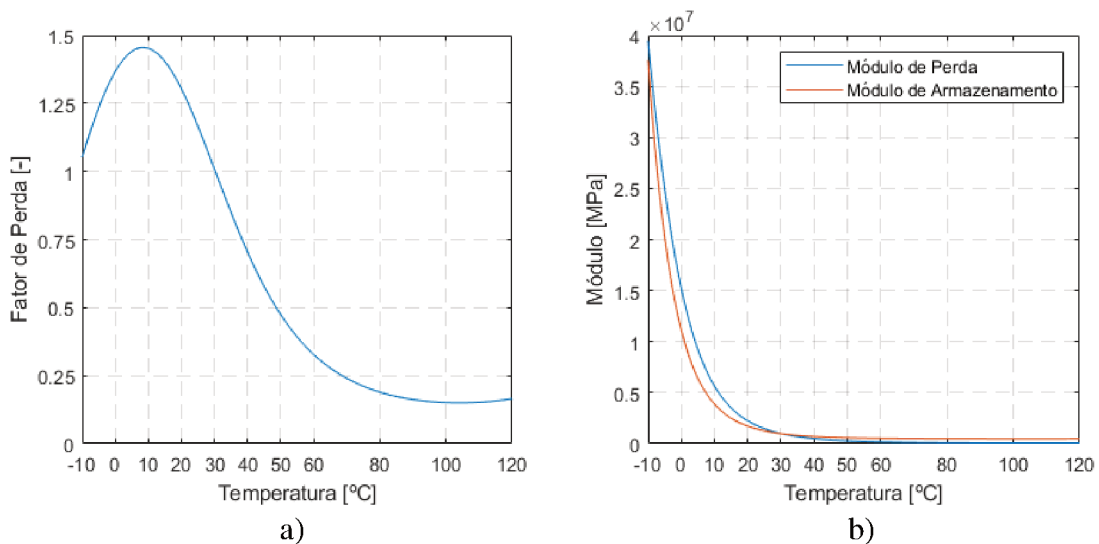


Figura 6.11 – Influência da temperatura sobre a) o fator de perda e b) os módulos do ISD 112

#### 6.4.2. Influência das espessuras das camadas

Nessa seção é investigado como a variação de parâmetros geométricos da viga afeta seu comportamento dinâmico. A resposta transiente a um impulso unitário é avaliada para

diversas espessuras das camadas da viga sanduíche. As Fig. 6.12 mostra como esses parâmetros influenciam a resposta do sistema viscoelástico.

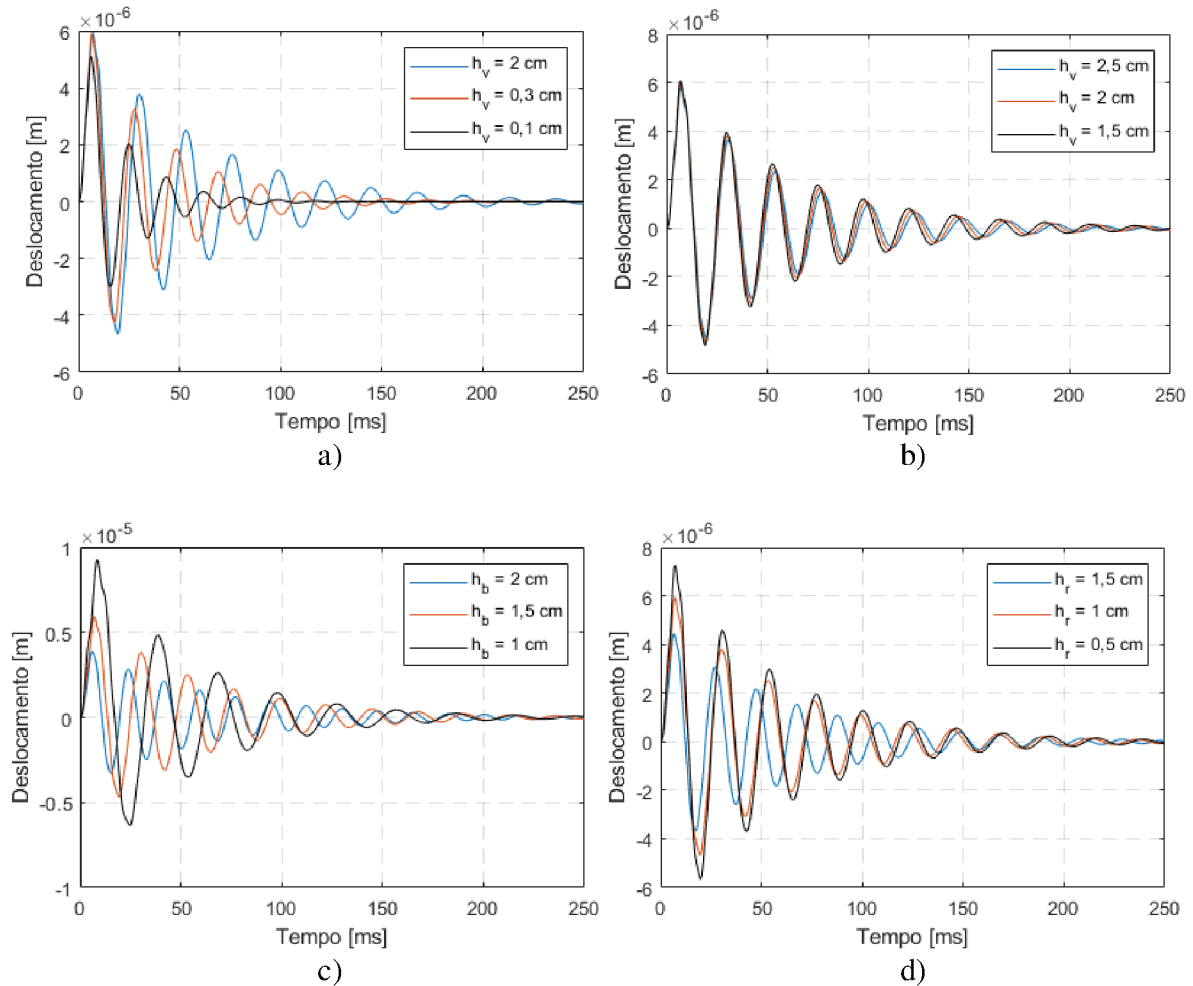


Figura 6.12 - Influência das espessuras das a) b) camadas viscoelástica, c) base e d) restrigente da viga sanduíche

A redução na amplitude é esperada quando se aumentam as espessuras das faces elástica (viga base e camada restrigente), uma vez que esses parâmetros afetam a rigidez do sistema, aumentando-a. Quando se varia a espessura do núcleo viscoelástico, no entanto, o efeito é inverso. Isso ocorre porque o amortecimento da estrutura sanduíche se dá por meio das deformações cisalhantes no material viscoelástico, que são maiores quando o gradiente de velocidade na camada viscoelástica aumenta, o que ocorre quando sua espessura diminui. Entretanto, a partir de determinado valor, o aumento na espessura não possui grandes efeitos sobre o comportamento do sistema. Tudo isso pode ser observado nas FRFs, onde de fato, a

diminuição na espessura dessa camada torna o sistema mais amortecido, reduzindo as amplitudes de vibração, conforme mostram as FRFs da Fig. 6.13.

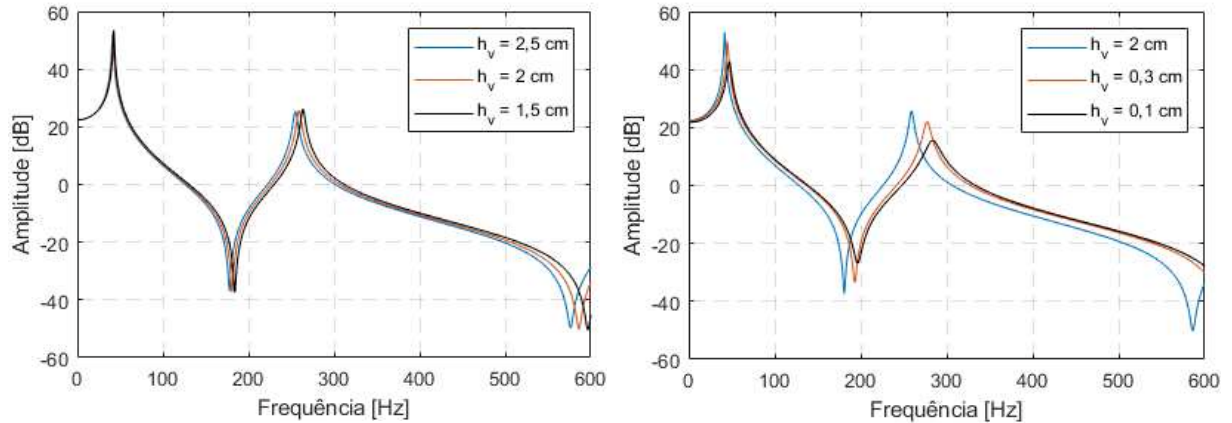


Figura 6.13 – FRFs para diferentes espessuras da camada viscoelástica

## 6.5. REDUÇÃO DO MODELO NO DOMÍNIO DO TEMPO

A fim de avaliar a técnica de redução VRI proposta neste trabalho para lidar com sistemas viscoelásticos no domínio do tempo, é feita a comparação das repostas transientes dos modelos completo e reduzido de uma viga sanduíche cujas dimensões estão na Tabela 6.1, e o viscoelástico encontra-se à temperatura de 27 °C. Essa estrutura é sujeita a uma excitação harmônica com frequência de 50 Hz, e a comparação entre as repostas transientes é mostrada na Fig. 6.14. Percebe-se a capacidade do modelo de ordem reduzida em aproximar com acurácia a resposta dinâmica do sistema viscoelástico completo. Para esta aplicação, foi utilizada uma base de redução composta por 15 vetores, o que permitiu um ganho computacional de tempo da ordem de aproximadamente 62 %, como visto na Tabela 6.6, demonstrando a eficiência do método proposto.

Tabela 6.6 – Custo computacional dos modelos completo e reduzido da viga sanduíche

	Dim. das matrizes	Tempo
Completo	200x200	27,41 s
IRV	15x15	10,32 s

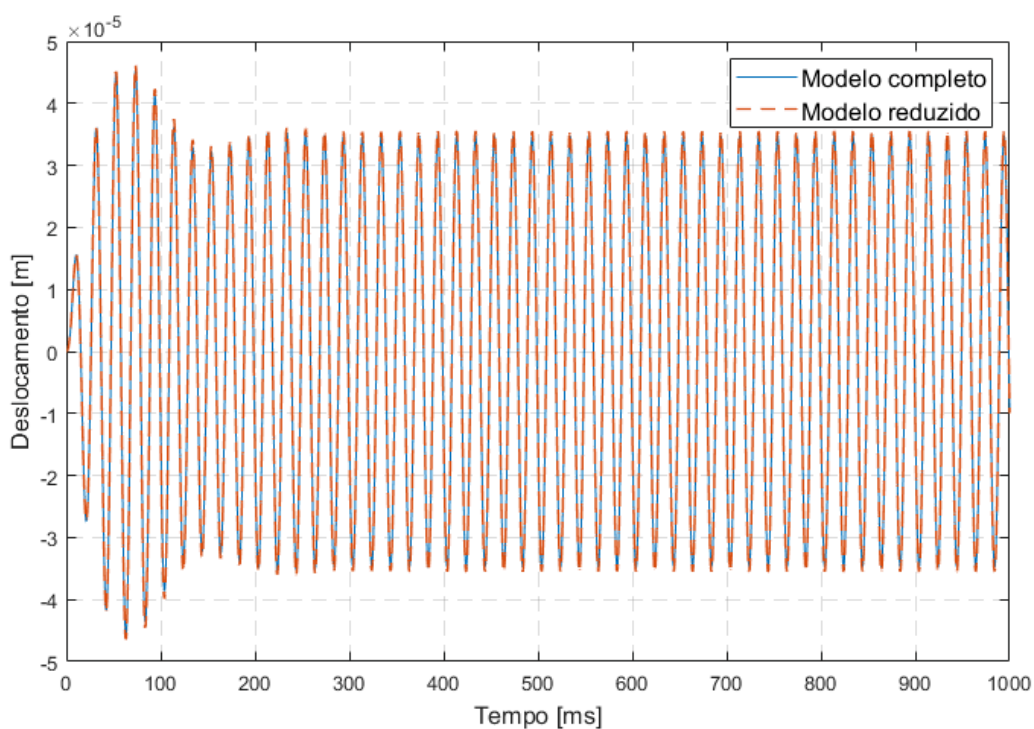


Figura 6.14 – Respostas no tempo dos modelos completo e reduzido da viga sanduíche

Neste ponto destaca-se que ficou evidente a eficiência e acurácia do método de redução temporal proposto para sistemas viscoelásticos, mesmo sendo para o caso da viga sanduíche acadêmica. Claro que, para sistemas viscoelásticos mais complexos de interesse industrial formados por um grande número de gdl's, espera-se que a utilização do método VRI leve à um ganho computacional ainda mais significativo. Além disso, o método VRI proposto não é restrito a aplicações viscoelásticas, podendo ser utilizado a uma vasta gama de problemas em dinâmica estrutural.

## 6.6. PÓRTICO 2D TRATADO COM A VIGA SANDUÍCHE

Nas simulações que seguem, o pórtico 2D mostrado na Fig. 6.15 é utilizado para mostrar a eficiência da metodologia proposta aplicada à uma estrutura um pouco mais complicada de interesse prático. As propriedades físicas e geométricas do pórtico 2D são definidas na Tabela 6.7. No modelo de EFs, os membros horizontais e verticais são discretizados, respectivamente em 30 e 45 EFs de viga sanduíche, o que totaliza 832 gdl's

livres. O intervalo de tempo para a análise transiente do problema foi dividido em passos de 1 ms e foram utilizados 500 pontos como comprimento de memória.

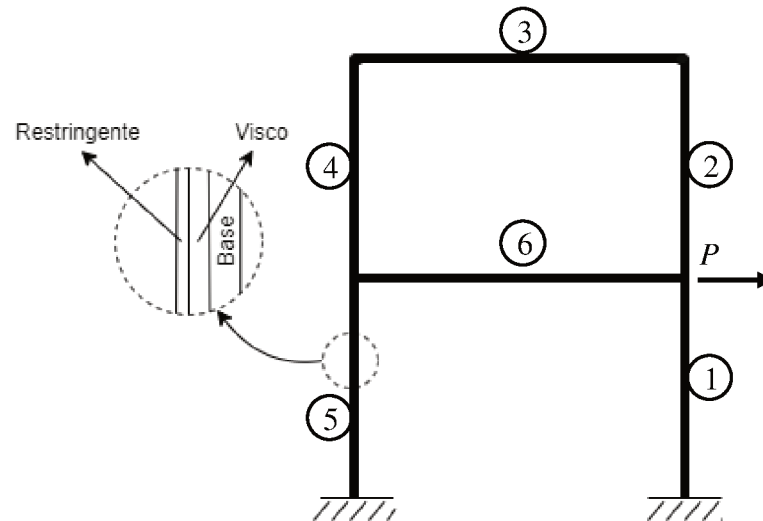


Figura 6.15 – Ilustração do pórtico 2D tratado com a viga sanduíche

Tabela 6.7 - Propriedades físicas e geométricas do pórtico

	1ª camada	2ª camada	3ª camada
Material	Alumínio	ISD-112	Alumínio
Comprimento dos membros dispostos na vertical	1 m	1 m	1 m
Comprimento dos membros dispostos na horizontal	1,5 m	1,5 m	1,5 m
Largura	5 mm	5 mm	5 mm
Espessura	5 mm	1 mm	1 mm
Módulo de elasticidade	70,3 GPa	Não se aplica	70,3 GPa
Coefficiente de Poisson	0,345	0,5	0,345
Densidade	2690 kg/m <sup>3</sup>	1600 kg/m <sup>3</sup>	2690 kg/m <sup>3</sup>

Em termos da redução de modelos, o método VRI foi aplicado ao pórtico sujeito à um impulso unitário aplicado ao ponto P mostrado na Fig 6.15. Neste caso, foi utilizada arbitrariamente uma base de 60 vetores. A Fig. 6.16 permite comparar as respostas temporais dos modelos completo e reduzido do pórtico tratado com viscoelástico. Nota-se uma boa concordância entre as respostas de ambos os modelos. Em termos de eficiência, a Tabela 6.8 mostra que houve um ganho computacional da ordem de 95 % para este caso formado por um número maior de gdl.

Dessa forma, a técnica VRI demonstrou ser uma ferramenta poderosa na análise de sistemas viscoelásticos no domínio do tempo, sendo capaz de descrever com acurácia e eficiência as respostas transientes, podendo ser aplicada a estruturas complexas e sendo capaz de viabilizar simulações cujo custo computacional é alto.

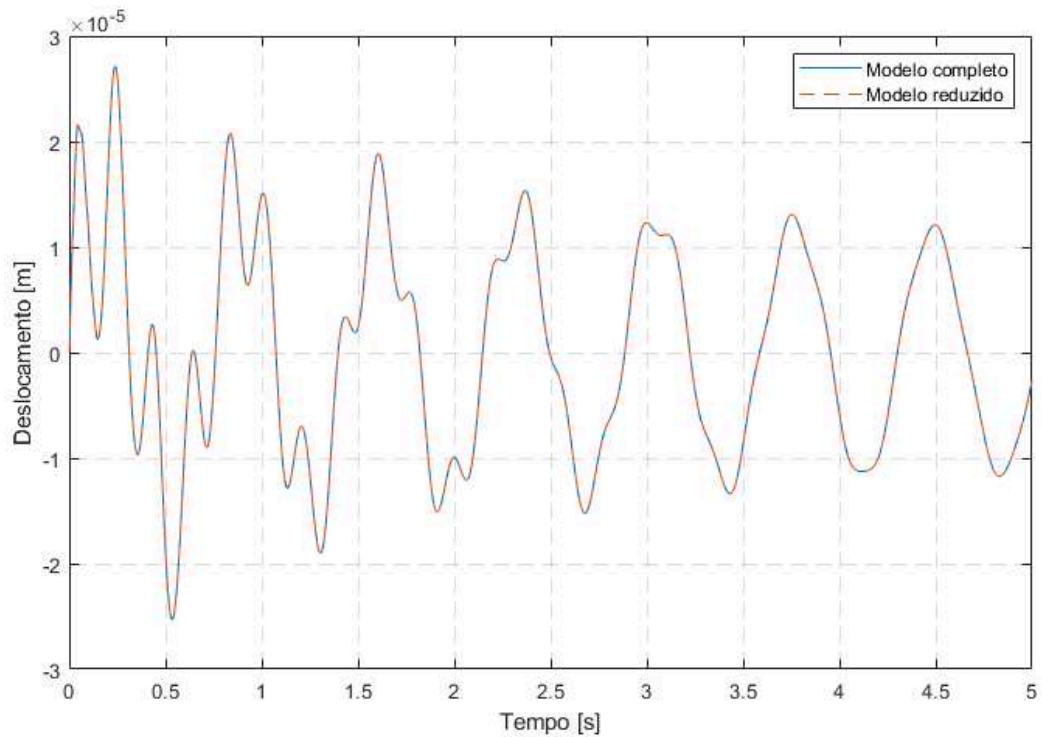


Figura 6.16 – Respostas temporais dos modelos completo e reduzido do pórtico

Tabela 6.8 – Custo computacional dos modelos completo e reduzido do pórtico

	Dim. das matrizes	Tempo
Completo	832 x 832	433,36 s
Reduzido	60 x 60	20,569 s

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Essa pesquisa, que se deu no âmbito do programa de pós-graduação da FEMEC/UFU, buscou aplicar um modelo viscoelástico melhorado baseado no cálculo fracionário em conjunto com uma técnica de redução de modelos no domínio do tempo para análises transientes de sistemas contendo materiais viscoelásticos.

Inicialmente, uma revisão bibliográfica acerca dos materiais viscoelásticos e das técnicas de redução de modelos foi realizada. A partir desse estudo da literatura, notou-se uma carência de trabalhos que versam sobre a aplicação de métodos de redução aplicados a sistemas viscoelásticos modelados via derivadas fracionárias, sobretudo no domínio do tempo. Observou-se ainda que boa parte dos modelos fracionários aplicados à análise transiente que são disponíveis na literatura aberta se restringem a aplicações unidimensionais, ou possuem a desvantagem de apresentarem uma autodependência quando se avaliam os históricos das tensões viscoelásticas, o que eleva o custo computacional de cálculo, principalmente para sistemas de interesse prático. Tudo isso motivou a realização deste trabalho.

Em seguida, a formulação matemática do MDF com recorrência foi descrita em detalhes e seus parâmetros foram otimizados. Neste caso, a lei constitutiva desenvolvida aqui conforme a recorrência foi aplicada a uma viga sanduíche modelada via MEF e aplicada a uma estrutura do tipo pórtico bi-dimensional. O método de redução proposto VRI neste trabalho para lidar com o sistema viscoelástico resultante também foi descrito de forma detalhada.



Com o intuito de verificar todos os procedimentos de modelagem propostos, inúmeras simulações foram realizadas. A partir dos resultados obtidos, pode-se concluir que:

- O MDF com a fórmula da recorrência se mostrou um modelo capaz de representar adequadamente a resposta temporal de sistemas viscoelásticos e, quando comparado dois dos modelos mais utilizados na literatura, apresentou vantagens sobre ambos no que diz respeito ao custo computacional. Isto é uma grande vantagem deste novo modelo principalmente para casos práticos de sistemas complexos com viscoelástico formados por um grande número de graus de liberdade ou envolvendo um estado tridimensional de tesões;
- Há uma influência fundamental da temperatura de operação nas respostas transientes do sistema viscoelástico. De uma forma geral, para o material utilizado nas simulações, notou-se que um aumento da temperatura reduz a eficiência do viscoelástico em termos da sua capacidade de mitigar as amplitudes de vibração do sistema;
- Nos casos estudados, o método VRI de redução de modelo se mostrou capaz de prever de forma satisfatória as respostas transientes dos sistemas viscoelásticos analisados com uma eficiência de aproximadamente 95% em termos da redução do custo computacional envolvido nas análises.

## **7.1. PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS**

A realização desta pesquisa levantou alguns pontos de continuidade que podem ser explorados posteriormente. Desse modo, como trabalhos futuros, sugere-se:

- A aplicação da lei constitutiva tridimensional baseada na fórmula da recorrência a outras estruturas com maior complexidade tratadas com material viscoelástico;
- O uso da técnica VRI em estruturas viscoelásticas complexas de interesse industrial;

- A utilização do método VRI a sistemas tratados com outros tipos de materiais, como aqueles que apresentam propriedades piezoelétricas, entre outros;
- A análise da aplicação da fórmula da recorrência e do método VRI de redução de modelos a sistemas viscoelásticos com comportamento não linear;
- O uso do MDF na análise de fadiga de estruturas tratadas com materiais viscoelásticos;
- Realização de ensaios experimentais com controle de temperatura para verificação da modelagem proposta e ajustar os parâmetros do MDF com a recorrência para o material 3M-ISD 112 e para outros materiais viscoelásticos disponíveis no LMEst;

## 7.2. TRABALHOS PUBLICADOS

Como resultado desta pesquisa de dissertação, dois trabalhos foram publicados nos anais do CILAMCE 2020 (*XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*):

- *Use of an improved fractional derivative model for transient analyses of viscoelastic systems* (Nunes *et al.*, 2020), em que se aplica o tratamento com material viscoelástico no controle de vibrações de uma estrutura de viga, analisando as respostas temporais por meio do MDF com recorrência;
- *Numerical analysis of a beam with and without viscoelastic treatment subject to cyclic loading in the time domain* (Garcia *et al.*, 2020), em que se utiliza o MDF da recorrência na predição da vida em fadiga de vigas metálicas tratadas com material viscoelástico.

## REFERÊNCIAS

ANASTASIO, T. J. The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons. **Biological Cybernetics**, v. 72, n. 1, p. 69–79, nov. 1994. <https://doi.org/10.1007/BF00206239>

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. **A generalized derivative model for an elastomer damper**. The Shock and Vibration Bulletin v. 2, n. 49, p. 135–143, set. 1979.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. Fractional calculus – A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. **AIAA Journal**, v. 21, n. 5, p. 741–748, mai. 1983a. <https://doi.org/10.2514/3.8142>

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, v. 27, n. 3, p. 201–210, jun. 1983b. <https://doi.org/10.1122/1.549724>

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, v. 30, n. 1, p. 133–155, fev. 1986. <https://doi.org/10.1122/1.549887>

BANERJEE, J. R. et al. Free vibration of a three-layered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 22–23, p. 7543–7563, nov. 2007. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.024>

BENEVELI, S. M. A. **Controle híbrido para atenuação de vibrações em edifícios**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002. <https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.3124>

BORGES, F. et al. Vibration reduction in steel catenary risers by the use of viscoelastic materials. **Pipeline and Riser Technology**, v. 4, p. 829-838, jan. 2011. <https://doi.org/10.1115/OMAE2011-50052>

BRIEND, Y. P. J. **Contribuição aos Métodos de Redução de Modelo Aplicados a Sistemas Aeroviscoelásticos**. 2017. 138 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil. <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2017.72>

BROCIK, R. et al. Modeling of heat distribution in porous aluminum using fractional differential equation. **Fractal and Fractional**, v. 1, n. 1, p. 17, 12 dez. 2017. <https://doi.org/10.3390/fractalfract1010017>

CHEN, L. et al. Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay. **Neurocomputing**, v. 111, p. 190–194, jul. 2013. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2012.11.034>

COTTONE, G.; DI PAOLA, M.; METZLER, R. Fractional calculus approach to the statistical characterization of random variables and vectors. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 389, n. 5, p. 909–920, mar. 2010. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2009.11.018>

COUSSOT, C. et al. Fractional derivative models for ultrasonic characterization of polymer and breast tissue viscoelasticity. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 56, n. 4, p. 715–726, abr. 2009. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2009.1094>

CUNHA-FILHO, A. G. **Abordagem transiente sobre os efeitos do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de estruturas aeronáuticas**. 2019. 183 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2208>

CUNHA-FILHO, A. G. et al. An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 104, p. 575–588, mai. 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.018>

CUNHA-FILHO, A. G. **A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos**. 2015. 106 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of viscoelasticity: an introduction**. New York: Academic Press, 1982. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7>

DEBNATH, L. A brief historical introduction to fractional calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 35, n. 4, p. 487–501, 2004. <https://doi.org/10.1080/00207390410001686571>

ENGHETA, N. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 44, n. 4, p. 554–566, abr. 1996. <https://doi.org/10.1109/8.489308>

FONSECA-JÚNIOR, L. A. et al. An efficient iterative model reduction method for a non-linear sandwich beam. **In: 25th International Congress of Mechanical Engineering, 2019, Uberlândia. Anais do 25th COBEM – Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas - ABCM.**

GALUCIO, A. C.; DEÛ, J.-F.; OHAYON, R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*, v. 33, n. 4, p. 282–291, 1 mar. 2004. <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0529-x>

GARCIA, G. F. et al. Numerical analysis of a beam with and without viscoelastic treatment subject to cyclic request in the time domain. **In: XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2020, Foz do Iguaçu. Anais do XLI CILAMCE – Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia - ABMEC.**

GOLLA, D. F.; HUGHES, P. C. Dynamics of viscoelastic structures-a time-domain, finite element formulation. *Journal of Applied Mechanics*, v. 52, n. 4, p. 897–906, dez. 1985. <https://doi.org/10.1115/1.3169166>

GONÇALVES, L. K. S.; LIMA ROSA, U.; DE LIMA, A. M. Iterative condensation strategy to fatigue analysis of viscoelastically damped structures. **In: 25th International Congress**

of Mechanical Engineering, 2019, Uberlândia. **Anais do 25th COBEM – Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas - ABCM.**

GONÇALVES, L. K. S. **Análise de fadiga de sistemas estocásticos incorporando materiais viscoelásticos.** 2018. 99 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.817>

HARARI, Y. NOAH. **Sapiens: Uma breve história da humanidade.** 34. ed. Porto Alegre: L&PM, 2018.

HERRMANN, R. **Fractional calculus: an introduction for physicists.** 2 ed. : World Scientific, 2014. <https://doi.org/10.1142/8934>

INMAN, D. J. **Vibration with control.** Chichester: John Wiley & Sons, 2006. <https://doi.org/10.1002/0470010533>

JONES, D. I. G. **Handbook of viscoelastic vibration damping.** Chichester: John Wiley & Sons, 2001.

KHOSHRAFTAR, A. The evaluation of steel frame structures with viscoelastic dampers. **International Journal of Engineering and Technology**, v. 8, n. 4, p. 269–272, abr. 2016. <https://doi.org/10.7763/IJET.2016.V8.897>

LESIEUTRE, G. A.; MINGORI, D. L. Finite element modeling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 13, n. 6, p. 1040–1050, 1990. <https://doi.org/10.2514/3.20577>

LIMA, A. M. G. et al. Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures. **Engineering Structures**, v. 32, n. 5, p. 1479–1488, 1 maio 2010. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.01.028>

LIMA, A. M. G. **Modélisation et optimisation robuste de systèmes mécaniques en présence d'amortissement viscoélastique.** 2007. 197 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

LIMA, A. M. G. et al. A time-domain finite element model reduction method for viscoelastic linear and nonlinear systems. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 6, p. 1182–1201, 2014. <https://doi.org/10.1590/1679-78251695>

LUO, D.; WANG, J. R.; FEČKAN, M. Applying fractional calculus to analyze economic growth modelling. **Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics**, v. 14, p. 25–36, 2018. <https://doi.org/10.2478/jamsi-2018-0003>

MAINARDI, F.; SPADA, G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 193, n. 1, p. 133–160, 4 mar. 2011. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01387-1>

MAKRIS, N. Three-dimensional constitutive viscoelastic laws with fractional order time derivatives. **Journal of Rheology**, v. 41, n. 5, p. 1007–1020, set. 1997. <https://doi.org/10.1122/1.550823>

MCTAVISH, D. J.; HUGHES, P. C. Modeling of linear viscoelastic space structures. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 115, n. 1, p. 103–110, jan. 1993. <https://doi.org/10.1115/1.2930302>

MILLER, K. S.; ROSS, B. **An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**. New York: Wiley, 1993

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration damping**. New York: John Wiley & Sons, 1985.

GUARALDO-NETO, B. **Modelagem de sistemas dinâmicos contendo materiais viscoelásticos e ligas com memória de forma para o controle passivo de vibrações**. 2012. 121 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.

NUNES, E. P. et al. Use of an improved fractional derivative model for transient analyses of viscoelastic systems. 2020. In: **XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2020, Foz do Iguaçu. Anais do XLI CILAMCE – Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia - ABMEC**.

OLIVEIRA, H. S. **Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária**. 2010. 122 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

RAO, M. D. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 262, n. 3, p. 457–474, mai. 2003. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8)

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5. ed. Upper Saddle River: prentice hall, 2011.

SCHMIDT, A.; GAUL, L. FE implementation of viscoelastic constitutive stress-strain relations involving fractional time derivatives. **Constitutive models for rubber**, v. 2, p. 79-92, 2001

SOOVERE, J.; DRAKE, M. L. A design guide for damping of aerospace structures. In: **AFWAL Vibration Damping Workshop Proceedings**. Atlantic City: AFWAL, 1984.

MACHADO, J. A. T. et al. Fractional order electromagnetics. **Signal Processing**, v. 86, n. 10, p. 2637–2644, out. 2006. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2006.02.010>

VIANA, F. A. C.; STEFFEN-JÚNIOR, V. **Simple optimization tool box user's guide**. 3. ed. [S. l.: s. n.], 2007.

WANG, G. **Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores**. 2001. 196 p. Tese (Doutorado em Engenharia Aeroespacial) - University of Maryland, College Park, 2001.

WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

XU, P.; DENG, W. Fractional compound Poisson processes with multiple internal states. **Mathematical Modelling of Natural Phenomena**, v. 13, n. 1, p. 10, 6 abr. 2018. <https://doi.org/10.1051/mmnp/2018001>

YANG, F.; ZHU, K.-Q. A note on the definition of fractional derivatives applied in rheology. **Acta Mechanica Sinica**, v. 27, n. 6, p. 866–876, 28 dez. 2011. <https://doi.org/10.1007/s10409-011-0526-9>



YANG, X. et al. A fractional model for time-variant non-Newtonian flow. **Thermal Science**, v. 21, n. 1 Part A, p. 61–68, 2017. <https://doi.org/10.2298/TSCI160426245Y>

ZHOU, X. Q. et al. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review. **Composite Structures**, v. 136, p. 460–480, fev. 2016. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.10.014>

# APÊNDICE A

## DETALHES SOBRE A FORMULAÇÃO EM MEF

Com o propósito de manter a fluidez na leitura e focar naquilo que é essencial, no Capítulo IV não foi mostrado com muitos detalhes a formulação em MEF nem se deu muito destaque às funções de forma e demais matrizes. Nesse sentido, a fim de esclarecer melhor quaisquer dúvidas que porventura possam vir a surgir ao leitor, este apêndice se propõe a mostrar de forma mais detalhada a discretização em elementos finitos.

Conforme já mencionado anteriormente, as vigas sanduíche constituídas de três camadas na qual a segunda possui propriedades viscoelásticas podem ser modeladas em elementos finitos a partir da utilização de quatro graus de liberdade para cada nó:  $u(x,t)$ ,  $w(x,t)$ ,  $\theta(x,t)$  e  $\beta(x,t)$ . Esses graus de liberdades podem ser aproximados através da utilização de funções interpoladoras lineares, para  $u(x,t)$  e  $\beta(x,t)$ , e cúbica, para  $w(x,t)$ . Nesse sentido os GDLs são expressos na forma das Eqs. A.1 – A.3, onde  $q$  é o vetor dos graus de liberdades elementares, conforme a Eq. A.4, e as matrizes  $N$  são as funções de forma, que seguem as Eqs. A.5 – A.7.

$$u(x,t) = [N_u] \{q(x,t)\} \quad (A.1)$$

$$w(x,t) = [N_w] \{q(x,t)\} \quad (A.2)$$

$$\beta(x,t) = [N_\beta] \{q(x,t)\} \quad (A.3)$$

$$\{q(x, t)\} = \begin{Bmatrix} u_i(x, t) \\ u_{i+1}(x, t) \\ w_i(x, t) \\ w'_i(x, t) \\ w_{i+1}(x, t) \\ w'_{i+1}(x, t) \\ \beta_i(x, t) \\ \beta_{i+1}(x, t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$[N_u(x)] = [N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{A.5})$$

$$[N_w(x)] = [0 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{A.6})$$

$$[N_\beta(x)] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_1 \quad N_2] \quad (\text{A.7})$$

com,

$$N_1 = 1 - \frac{x}{li} \quad (\text{A.8})$$

$$N_2 = \frac{x}{li} \quad (\text{A.9})$$

$$N_3 = 2\left(\frac{x}{li}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{li}\right)^2 + 1 \quad (\text{A.10})$$

$$N_4 = x\left(1 - \frac{x}{li}\right)^2 \quad (\text{A.11})$$

$$N_5 = 3\left(\frac{x}{li}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{li}\right)^3 \quad (\text{A.12})$$

$$N_6 = \frac{x^2}{li} \left( \frac{x}{li} - 1 \right) \quad (\text{A.13})$$

Dessa forma, incorporando as aproximações em MEF, Eqs. A.1 – A.3, aos deslocamentos transversal e de membrana de cada camada, descritos pelas Eqs. 4.2 – 4.4, é possível se obter as Eqs. A.14 – A.16. Todos os termos dessas equações dependem das funções de forma e do vetor dos graus de liberdade, de modo que podem ser simplificadas conforme a Eq. A.17, agrupando nas matrizes  $N_u^{(1)}(x,z)$ ,  $N_u^{(2)}(x,z)$  e  $N_u^{(3)}(x,z)$ , expressas de acordo com as Eqs. A.18 – A.20. Essas são as matrizes utilizadas na formulação apresentada na seção 4.1.

$$u^{(1)}(x,z,t) = [N_u(x)]\{q(t)\} - z \frac{\partial [N_w(x)]}{\partial x} \{q(t)\} \quad (\text{A.14})$$

$$u^{(2)}(x,z,t) = [N_u(x)]\{q(t)\} - z \frac{\partial [N_w(x)]}{\partial x} \{q(t)\} + z_2 [N_\beta(x)]\{q(t)\}, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{com } z_2 = \left( z - \frac{h_1}{2} \right)$$

$$u^{(3)}(x,z,t) = [N_u(x)]\{q(t)\} - z \frac{\partial [N_w(x)]}{\partial x} \{q(t)\} + h_2 [N_\beta(x)]\{q(t)\} \quad (\text{A.16})$$

$$u^{(k)}(x,z,t) = [N_u^k(x)]\{q(t)\} \quad (\text{A.17})$$

$$[N_u^{(1)}] = [N_1 \quad N_2 \quad -z \cdot N'_3 \quad -z \cdot N'_4 \quad -z \cdot N'_5 \quad -z \cdot N'_6 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{A.18})$$

$$[N_u^{(2)}] = [N_1 \quad N_2 \quad -z \cdot N'_3 \quad -z \cdot N'_4 \quad -z \cdot N'_5 \quad -z \cdot N'_6 \quad z_2 \cdot N_1 \quad z_2 \cdot N_2] \quad (\text{A.19})$$

$$\left[ \mathbf{N}_u^{(3)} \right] = \left[ \mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_3 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_4 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_5 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_6 \quad \mathbf{h}_2 \mathbf{N}_1 \quad \mathbf{h}_2 \mathbf{N}_2 \right] \quad (\text{A.20})$$