

**LÁZARO ANTÔNIO DA FONSECA JÚNIOR**

**MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL DE  
VIGAS SANDUICHES VISCOELÁSTICAS SUJEITAS A  
GRANDES DESLOCAMENTOS NA PRESENÇA DE  
INCERTEZAS PARAMÉTRICAS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2020**

**LÁZARO ANTÔNIO DA FONSECA JÚNIOR**

**MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL DE VIGAS SANDWICHES  
VISCOELÁSTICAS SUJEITAS A GRANDES DESLOCAMENTOS NA PRESENÇA  
DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS**

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Mecânica da Universidade Federal de  
Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção  
do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e  
Vibrações.

Orientador: Prof. Antônio Marcos Gonçalves De Lima

Co-orientador: Prof. Romes Antonio Borges

**UBERLÂNDIA – MG**

**2020**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

F676 Fonseca Júnior, Lázaro Antonio da, 1991-  
2020 Modelagem Numérico-Computacional de Vigas Sanduiches  
Viscoelásticas Sujeitas a Grandes Deslocamentos na  
Presença de Incertezas Paramétricas [recurso eletrônico]  
: Modelagem Numérico-Computacional de Vigas Sanduiches  
Viscoelásticas Sujeitas a Grandes Deslocamentos na  
Presença de Incertezas Paramétricas / Lázaro Antonio da  
Fonseca Júnior. - 2020.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.  
Coorientador: Romes Antonio Borges.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2020.645>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Lima, Antônio Marcos  
Gonçalves de, 1975-, (Orient.). II. Borges, Romes  
Antonio, 1971-, (Coorient.). III. Universidade Federal  
de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. IV.  
Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4282 - [www.posgrad.mecanica.ufu.br](http://www.posgrad.mecanica.ufu.br) - [secposmec@mecanica.ufu.br](mailto:secposmec@mecanica.ufu.br)



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica			
Defesa de:	Tese de Doutorado, nº 304, COPEM			
Data:	02/10/2020	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:
Matrícula do Discente:	11613EMC008			
Nome do Discente:	Lázaro Antonio da Fonseca Júnior			
Título do Trabalho:	Modelagem Numérico-Computacional de Vigas Sanduíches Viscoelásticas Sujeitas a Grandes Deslocamentos na Presença de Incertezas Paramétricas			
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações			
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos			
Projeto de Pesquisa de vinculação:				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU; Fran Sérgio Lobato - FEQUI/UFU; Leonardo Sanches - UFU/ISAE; Edson Hideki Koroishi - UTFPR; Sebastião Simões da Cunha Júnior - UNIFEI; Romes Antonio Borges (coorientador) - UFG; e Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, Fran Sérgio Lobato, Antônio Marcos Gonçalves de Lima e o Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG; Leonardo Sanches desde a cidade de Toulouse/França; Edson Hideki Koroishi desde a cidade de Cornélio Procópio/PR; Sebastião Simões da Cunha Júnior desde a cidade de Itajubá/MG; e Romes Antonio Borges desde a cidade de Catalão/GO, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(as) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/10/2020, às 13:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/10/2020, às 13:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/10/2020, às 13:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Sanches, Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/10/2020, às 13:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Hideki Koroishi, Usuário Externo**, em 02/10/2020, às 13:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastiao Simoes da Cunha Jr, Usuário Externo**, em 02/10/2020, às 13:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Romes Antonio Borges, Usuário Externo**, em 02/10/2020, às 13:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2296059** e o código CRC **54A44411**.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, da superação e por ter abençoado cada passo desta caminhada.

A minha esposa Nattany, pelo seu carinho, sua compreensão e seu amor. Pela força e incentivo para vencermos mais esse desafio. Ao meu amado filho Adryan, que em meio a tantas pesquisas e correrias da vida, veio trazer mais alegria e significado para as nossas vidas. Vocês foram meus maiores incentivadores. Amo vocês.

A minha família, meus pais, Lázaro e Célia, pelos ensinamentos e pela base humana que me foi passado. Vocês são exemplos de família, trabalho e dignidade. Este trabalho também é dedicado a vocês.

Ao meu orientador, Prof. Dr Antônio Marcos, pela dedicação, esforço, comprometimento, competência e paciência em sua orientação, auxiliando tanto no crescimento pessoal e profissional.

Ao meu co-orientador Romes Antonio, pela dedicação, apoio, ensinamentos e boas conversas nessa trajetória da graduação, mestrado e doutorado.

A todos os amigos da UFU, em especial os amigos do LMEst, que sempre estiveram presentes nos momentos de risadas, RU e em discursões filosóficos de pesquisas. A ajuda de vocês foi importantíssima.

Aos professores, técnicos e demais colaboradores do programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, que trabalharam fortemente para a minha formação.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, ao programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, ao Laboratório de Mecânica de Estruturas – Prof. José Eduardo Tannús Reis pela oportunidade de realizar este trabalho.

À Universidade Federal de Catalão, á Faculdade de Engenharia pelo incentivo e apoio durante o período de desenvolvimento do doutorado.

FONSECA JR, L. A. **Modelagem Numérico-Computacional de Vigas Sanduiches Viscoelásticas Sujeitas a Grandes Deslocamentos na Presença de Incertezas Paramétricas.** 2020. 126f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020.

## Resumo

Este trabalho se dedica a modelagem numérico-computacional de estruturas do tipo viga sanduiche amortecida viscoelásticamente e sujeita a não linearidade por grandes deslocamentos. Para avaliar os efeitos não lineares, o campo das deformações foi modelado de acordo com a teoria clássica de Von Karman e a resposta não linear do sistema obtida pela combinação entre o método de Galerkin e o método do Balanço Harmônico. Para representar os efeitos do amortecimento na base de Galerkin, foi necessário resolver o problema de autovalores complexo, e nesse caso, um método iterativo foi proposto para que as frequências naturais não amortecidas convergissem para as frequências amortecidas. O oneroso esforço computacional durante o cálculo dos autovalores complexos foi reduzido graças ao método de redução de modelo proposto neste trabalho. Para levar em conta as incertezas advindas de fatores geométricos e físicos, foi avaliado também um modelo estocástico não linear baseado na discretização de campos aleatórios de Karhunen-Loève. Para verificar a precisão do modelo numérico-computacional determinístico e estocástico para a viga sanduiche não linear, foi realizado também um procedimento experimental dentro de uma câmara térmica com controle rigoroso da temperatura. Por meio dos vários exemplos de simulações e ensaios experimentais, os resultados demonstram-se que as metodologias propostas neste trabalho foram capazes de representar a influência das condições operacionais e ambientais nas respostas dinâmicas em sistemas viscoelásticos com não linearidade geométrica. Foi verificado tanto numericamente quanto experimentalmente que a resposta não linear do sistema sofre influência de fatores como a força de excitação e a temperatura de operação do material viscoelástico.

---

*Palavras-chave:* *Materiais viscoelásticos. Vibrações não-lineares. Incertezas paramétricas. Elementos finitos estocásticos.*

FONSECA JR, L. A. **Numerical-Computational Modeling of Viscoelastic Sandwich Beams Subject to Large Displacements in the Presence of Parametric Uncertainties.** 2020. 126f. Thesis (Mechanical Engineering), Federal University of Uberlândia, 2020.

## Abstract

This work is dedicated to numerical-computational modeling of viscoelastically damped sandwich beam structures and subject to non-linearity by large displacements. To evaluate the nonlinear effects, the strain field was modeled according to the classical theory of Von Karman and the nonlinear response of the system obtained by combining the Galerkin method and the Harmonic Balance method. In order to represent the effects of damping on the Galerkin base, it was necessary to solve the complex eigenvalue problem, and in this case, an iterative method was proposed so that the undamped natural frequencies converged to the damped frequencies. The costly computational effort during the calculation of the complex eigenvalues was reduced thanks to the model reduction method proposed in this work. In order to take into account the uncertainties arising from geometric and physical factors, a non-linear stochastic model based on the discretization of random Karhunen-Loève fields was also evaluated. To verify the accuracy of the deterministic and stochastic numerical-computational model for the nonlinear sandwich beam, an experimental procedure was also carried out inside a thermal camera with strict temperature control. Through the various examples of simulations and experimental tests, the results show that the methodologies proposed in this work were able to represent the influence of operational and environmental conditions on dynamic responses in viscoelastic systems with geometric nonlinearity. It was verified both numerically and experimentally that the non-linear response of the system is influenced by factors such as the excitation force and the operating temperature of the viscoelastic material.

---

*Keywords: Viscoelastic materials. Non-linear vibrations. Parametric uncertainties. Stochastic finite elements.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. 1: Helicóptero sujeito a ressonância solo .....	16
Figura 1. 2: Pontos de aplicação de tratamento viscoelástico em automóveis.....	17
Figura 2. 1 Funções de fluência (a) - $F(\sigma_0, t) = \varepsilon(t) / \sigma_0$ ; e relaxação (b) - $R(\varepsilon_0, t) = \sigma(t) / \varepsilon_0$ de um material viscoelástico.....	25
Figura 2. 2: (a)variação do $G'(\omega)$ e $\eta$ com a temperatura; (b) variação do $G'(\omega)$ e com a frequência.....	30
Figura 2. 3: Ilustração do PSFT .....	31
Figura 3. 1: Ilustração da viga sanduiche viscoelástica.....	35
Figura 3. 2:Etapas para a construção da resposta da viga sanduiche não linear .....	58
Figura 5. 1:Porcentagem da economia de tempo do método de redução MAMI.....	72
Figura 5. 2: Medidas de erro do modelo utilizando MAMI: (a) frequência (b)fator de perda.....	73
Figura 5. 3: FRF da viga: (a) engastada - livre; (b) engastada - apoiada .....	75
Figura 5. 4: Respostas em frequência da viga sanduíche engastada-apoiada (a) e engastada-livre para vários fatores de perda.....	77
Figura 5. 5: FRFs da viga sanduiche: (a) engastada – livre; (b) bi - engastada.....	79
Figura 5. 6: Parte real e imaginaria do primeiro modo de vibrar da viga sanduiche para engastada-livre (a) e bi engastada (b). ....	80
Figura 5. 7: Comparação das respostas em frequência da viga sanduíche utilizando os métodos MR e FI para as condições engastada-livre (a) e bi-engastada (b). ....	81
Figura 5. 8: Resposta em frequência do sistema viscoelásticos não linear com ISD112 a 27°.....	83
Figura 5. 9:Resposta em frequência do sistema viscoelásticos não linear com PVB.....	83
Figura 5. 10: Respostas em frequência do sistemas não linear com ISD112 a 27°C.....	85

Figura 5. 11: Resposta em frequência da viga sanduíche em grande deslocamento para amplitude da força de 15 N .....	85
Figura 5. 12: Variação do fator de perda (a) e do módulo de armazenamento (b) do material ISD112 em função da temperatura. .....	87
Figura 5. 13: Respostas em frequência da viga sanduiche não linear para várias temperaturas de operação do material viscoelástico ISD112. .....	88
Figura 5. 14: Incerteza nas espessuras das faces elásticas: (a)5% (b)10%.....	91
Figura 5. 15: Incerteza na espessura da camada viscoelástica: (a) 5% (b) 10% .....	92
Figura 5. 16: Análise de convergência para o cenário 2.....	92
Figura 5. 17: Incerteza na temperatura de operação do material viscoelástico: (a) 10% (b) 20% .....	93
Figura 5. 18: Incerteza na força de excitação:(a) 10% (b) 20% .....	94
Figura 5. 19:Análise de convergência via RMSD normalizado para o cenário 6 .....	94
Figura 6. 1:Fluxograma das principais etapas do código em LabView. .....	99
Figura 6. 2: Configuração do experimento de viga sanduiche dentro da câmera térmica.....	100
Figura 6. 3: Comparaçao entre as respostas em frequência experimentais e numéricas: (a) 1N; (b) 2N; (c) 3N; (d) 4N.....	101
Figura 6. 4: Comparaçao entre os envelopes das respostas em frequência aleatórias com as experimentais: (a) 1N, (b) 2N, (c) 3N, (d) 4N.....	103
Figura 6. 5: Influênci da temperatura de operação do viscoelástico nas respostas em frequência do sistema não linear.....	104
Figura 6. 6:Resposta em frequência experimental e numérica para viga sanduiche a uma temperatura de: (a) 25°C (b) 28°C. .....	105
Figura 6. 7: Comparaçao entre os envelopes das respostas em frequência aleatórias e as experimentais: (a) 25°C (b) 28°C.....	105

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3. 1: Simbologia da viga sanduiche.....	35
Tabela 5. 1: Característica da viga sanduíche de alumínio/polímero/alumínio .....	71
Tabela 5. 2:Dados dos materiais viscoelásticos a serem utilizados. ....	72
Tabela 5. 3:Frequência natural e fator de perda para viga engastada – apoiada.....	76
Tabela 5. 4: Frequência natural e fator de perda para viga engastada – livre. ....	77
Tabela 5. 5: Parâmetros do modelo viscoelástico dependente da frequência. ....	78
Tabela 5. 6: Frequência natural e fator de perda para viga sanduiche com PVB. ....	79
Tabela 5. 7: Frequência natural e fator de perda para viga sanduiche com ISD112.....	80
Tabela 5. 8: Variáveis incertas e desvios padrões.....	90
Tabela 6. 1: Níveis de incerteza para comparação entre modelo e experimento:.....	102

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS LATINOS

$A$	Amplitude complexa
$C$	Matriz de amortecimento
$F(\sigma_0, t)$	Função de fluência
$R(\varepsilon_0, t)$	Função de relaxação
$E_f$	Módulo de Young das camadas elásticas
$E_c(\omega), E(\omega)$	Módulo complexo do material viscoelástico
$E'(\omega)$	Módulo de armazenamento
$E''(\omega)$	Módulo de perda
$F(t)$	Vetor de forças
$f_R$	Frequência reduzida
$f_i(x)$	Autofunções
$G_c(\omega), G(\omega)$	Módulo de cisalhamento
$H(x, \theta)$	Campo aleatório
$h_c$	Espessura da camada viscoelástica
$h_f$	Espessura da camada elástica
$K(\omega, T)$	Matriz de rigidez
$K_0$	Matriz de rigidez elástica
$K_c(\omega, T)$	Matriz de rigidez viscoelástica
$K(\omega, T)$	Matriz de rigidez não linear
$k(\omega, T)$	Matriz de rigidez multimodal não linear
$k_{nl}(\omega, T)$	Matriz de rigidez multimodal não linear
$k_0$	Matriz de rigidez multimodal elástica
$k_c(\omega, T, \theta)$	Matriz de rigidez viscoelástica estocástica
$k_{nl}(\omega, T, \theta)$	Matriz de rigidez não linear estocástica
$k_0(\theta)$	Matriz de rigidez da parte elástica estocástica
$L$	Comprimento da estrutura
$L_x$	Comprimento de correlação
$L_e$	Comprimento do elemento finito
$l$	Largura da estrutura
$M$	Matriz de massa

$M_i$	Momentos fletores
$m$	Matriz de massa multimodal
$m(\theta)$	Matriz de massa estocástica
$N$	Matriz das funções de forma
$N_i$	Esforços normais
$R^*(t)$	Função de relaxação do material viscoelástico
$S_c$	Área da seção transversal da camada viscoelástica
$S_f$	Área da seção transversal da camada elástica
$T$	Temperatura do material viscoelástico
$T_0$	Base de redução estática
$t$	Tempo
$U$	Modos de vibração
$x(t)$	Vetor de respostas
$w$	Deslocamento transversal

## SÍMBOLOS GREGOS

$\alpha$	Constantes
$\alpha_T$	Fator de deslocamento
$\beta$	Rotação da camada viscoelástica
$\phi$	Autovetores
$\eta$	Fator de perda
$\varepsilon$	Deformações
$\lambda$	Autovalores
$\omega$	Frequência
$\xi$	Deformação cisalhante
$\nu_c$	Coeficiente de Poisson da camada viscoelástica
$\nu_f$	Coeficiente de Poisson da camada elástica
$\rho_c$	Densidade da camada viscoelástica
$\rho_f$	Densidade da camada elástica

## LISTA DE ABREVIASÕES

ADF	<i>Anelastic Displacement Fields</i>
ADV	Absorvedor dinâmico de vibrações
CC	Complexo conjugado
EF	Elementos Finitos
FDM	<i>Fractional Derivative Model</i>
FI	Frequência Iterativa
FRF	Função de Resposta em Frequência
GHM	Golla-Hughes-MacTavish
GDLs	Graus de Liberdade
HCL	Amostragem por Hipercubo Latino
KL	Método de expansão em série Karhunen-Loève
LMEst	Laboratório de Mecânicas e Estruturas
MAMI	Método de Aproximação Modal Iterativa
MDF	Modelo de Derivadas Fracionárias
MEF	Método dos Elementos Finitos
PSFT	Princípio da Superposição Frequência – Temperatura
SFEM	<i>Stochastic Finit Element Method</i>
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....</b>	15
1.1. Contexto do estudo.....	15
<b>CAPÍTULO II - COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS .</b>	24
2.1. Expressão do módulo complexo .....	24
2.2. Modelagem geral de sistemas viscoelásticos utilizando o método dos elementos finitos .....	27
<b>CAPÍTULO III - MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS SANDUICHE VISCOELÁSTICAS SUJEITAS A GRANDES DESLOCAMENTOS .....</b>	33
3.1. Estrutura sanduíche viscoelástica.....	33
3.1.1. Deslocamentos e deformações da viga sanduiche .....	37
3.1.2. Relações constitutivas .....	38
3.1.3. Formulação Variacional .....	39
3.2. Solução do problema linear.....	42
3.3. Solução do problema não linear.....	45
3.4. Método de redução para o sistema viscoelástico não linear .....	50
3.4.1. Método da Aproximação Modal Iterativa (MAMI) .....	50
3.5 Método da Frequência Iterativa .....	55
<b>CAPÍTULO IV - MODELAGEM ESTOCÁSTICA DA VIGA SANDUÍCHE EM GRANDES DESLOCAMENTOS .....</b>	59
4.1. Incertezas em Sistemas Mecânicos e Métodos Estocásticos.....	59
4.2. Discretização dos campos aleatórios.....	61
4.3. Determinação das matrizes estocásticas.....	63
<b>CAPÍTULO V - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	70
5.1. Método de redução de modelo aplicado ao sistema viscoelástico .....	70
5.2. Verificação da parte linear da viga sanduiche viscoelástica .....	74
5.2.1. Modelo viscoelástico constante.....	75
5.2.2. Modelo viscoelástico dependente da frequência.....	78
5.3. Comportamento não linear de viga sanduíche viscoelástica .....	82
5.3.1. Influência da amplitude da força externa .....	84
5.3.2. Influência da temperatura de operação do material viscoelástico.....	86
5.4. Influência das incertezas nas respostas do sistema viscoelástico não linear..	88

<b>CAPÍTULO VI - AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DE UMA VIGA SANDUÍCHE SUJEITA A GRANDES DESLOCAMENTOS.....</b>	<b>96</b>
6.1. Procedimento experimental.....	96
6.2 Resultados experimentais.....	100
<b>CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS .....</b>	<b>107</b>
7.1. Perspectivas de trabalhos futuros .....	110
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>111</b>
<b>ANEXO A - CÁLCULO DAS MATRIZES ELEMENTARES DA VIGA SANDUICHE .....</b>	<b>123</b>
<b>ANEXO B - RIGIDEZ NÃO LINEAR DE UMA VIGA COM AS EXTREMIDADES IMÓVEIS.....</b>	<b>125</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Contexto do estudo

Esta Tese está inserida no contexto das temáticas de pesquisa que vem sendo realizadas no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) da FEMEC/UFU, que trata da proposição de metodologias eficientes para o projeto de sistemas viscoelásticos do tipo vigas sanduíches sujeitas a grandes deslocamentos na presença de incertezas paramétricas para fins de controle passivo de vibrações não lineares.

Os sistemas de engenharia estão frequentemente sujeitos a níveis de vibrações e ruído indesejáveis que podem causar desconforto ambiental, desgaste de peças e componentes mecânicos, perda de desempenho de sistemas e rupturas por fadiga induzida por vibrações (GONÇALVES, 2018), podendo levar a falhas catastróficas. Pode-se citar como exemplo as vibrações causadas pela ressonância solo em helicópteros (SANCHES; RADE, 2013), como ilustrado na Fig. 1.1.



Figura 1. 1: Helicóptero sujeito a ressonância solo (extraído de Irvine (2005)).

Neste sentido, a atenuação de vibrações e ruído de sistemas é parte importante de qualquer projeto de engenharia, de modo que a predição do seu comportamento requer que tanto o procedimento de modelagem como o de sua caracterização seja confiável. Dentre as várias técnicas de controle de vibrações existentes (RIBEIRO et al., 2020; GONÇALVES et al., 2019; CUNHA-FILHO et al., 2016), as técnicas de controle passivo via emprego de materiais viscoelásticos apresentam muitas vantagens, a saber: não conferem instabilidade ao sistema; são eficientes numa ampla faixa de frequência; baixo custo de instalação e manutenção; e seu funcionamento não requer consumo externo de energia. A principal desvantagem é que sua eficiência depende tanto da frequência de excitação como da temperatura de operação do material viscoelástico. Nesse sentido, o uso desses materiais tem-se tornado um procedimento cada vez mais corrente para tratar os problemas de vibrações e ruído nas indústrias (RAO, 2003; SAMALI e KWOK, 1995). A Fig. 1.2 ilustra o uso de materiais viscoelásticos em uma carcaça de automóvel para reduzir os níveis de vibração e ruído do veículo gerados pelo motor e/ou irregularidades do pavimento para melhor conforto interno dos usuários.

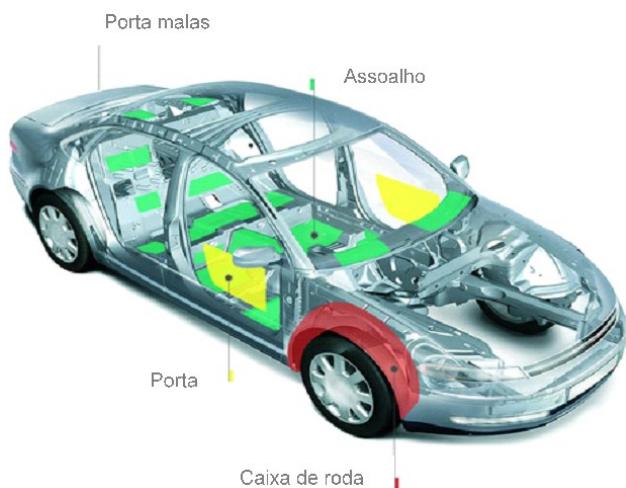


Figura 1. 2: Pontos de aplicação de tratamento viscoelástico em automóveis (adaptado de EMS - EFTEC, 2018).

Entretanto, no contexto da viscoelasticidade linear, os materiais viscoelásticos são representados matematicamente por um módulo complexo que depende da frequência da excitação e de outros fatores como a temperatura de operação e pré-carga (De LIMA et al., 2018; RODOVALHO et al., 2016). Isto impõe dificuldades para a modelagem e o cálculo das respostas dinâmicas de sistemas viscoelásticos, principalmente quando o foco do estudo são as vibrações não lineares, que é objeto de estudo deste trabalho. Salienta-se que os fenômenos não lineares é que são, muitas vezes, correntes em sistemas de engenharia, sendo o comportamento linear de tal sorte, uma exceção (SILVA et al., 2019; GERGES, 2013). Além disso, a característica potencialmente imprevisível de um sistema dinâmico não linear pode levá-lo com mais facilidade a uma falha catastrófica.

As não linearidades podem estar associadas a diversos fatores, dentre os quais destacam-se (SAVI, 2006): as não linearidades geométricas que surgem quando a estrutura apresenta valores relativamente grandes para os deslocamentos (GERGES 2013; ZIENKIEWICZ et al., 2005; BATHE et al., 1975); as não linearidades devido à inércia que tem relação com termos da velocidade e/ou aceleração (KERSCHEN et al., 2005) e não linearidades físicas decorrentes do tipo de material, onde as leis constitutivas não são lineares (a lei de Hooke não é obedecida e o comportamento do material não é elástico e linear) (WHITE et al., 2000).

No que tange às não linearidades geométricas, Rao (2008) e Silva et al., (2019) atestam que não se pode ignorar os efeitos dos grandes deslocamentos em estruturas flexíveis, uma vez que as deformações aparecem como termos combinados e, dependendo das condições de operação, a não consideração desses efeitos pode levar a erros consideráveis nas respostas dinâmicas. Desta forma, a proposição de modelos numéricos cada vez mais eficientes para tratar esse tipo de não linearidade tem possibilitado o estudo numérico-computacional de sistemas de engenharia cada vez mais realísticos e de forma confiável, a um custo bem mais acessível quando comparado aos custos da realização de ensaios experimentais.

Quanto aos modelos de sistemas viscoelásticos lineares do tipo sanduíches, eles podem ser facilmente encontrados na literatura aberta (De LIMA et al., 2009; TRINDADE et al., 2000; LESIEUTRE e LEE 1997; RAO, 1978). Entretanto, pouco se tem feito quanto ao estudo de sistemas dinâmicos não lineares contendo tratamentos viscoelásticos superficiais (SILVA et al., 2019), motivando o presente estudo, onde é proposto uma metodologia de modelagem por elementos finitos no domínio da frequência de sistemas viscoelásticos sujeitos a não linearidades geométricas, contemplando uma das contribuições deste trabalho. Neste caso, as equações do movimento que representam as relações frequência-amplitude do sistema viscoelástico não linear são obtidas combinando-se o método multimodal de Galerkin com a técnica do balanço harmônico e o princípio da relação frequência-temperatura para a parte viscoelástica.

Vale ressaltar que o método de integração de Newmark foi utilizado por Zhang et al., (2001) e Galucio et al., (2007) para obter a resposta dinâmica de sistemas não lineares com amortecimento viscoelástico. Entretanto, devido ao custo computacional requerido para a obtenção de respostas harmônicas de tais sistemas, essa técnica não é apropriada para investigar a resposta forçada dentro de uma ampla gama de frequências de excitação para os sistemas viscoelásticos não lineares de interesse deste trabalho. Dessa forma, para a classe de problemas em que o movimento pode ser assumido como periódico no tempo, métodos no domínio da frequência, como o método do balanço harmônico tem se mostrado bastante interessante para obter as respostas dinâmicas dos sistemas tratados neste trabalho.

Além disso, Iu et al., (1985) propuseram um modelo numérico para a vibração não linear de vigas sanduíche multicamadas. Em sua abordagem, a estrutura é discretizada em elementos finitos com soluções periódicas obtidas usando o método do balanço harmônico.

Mais tarde, Iu e Cheung (1986) aplicaram uma técnica semelhante para estudar a vibração não linear de placas sanduíches. Entretanto, em ambos os trabalhos, apenas o amortecimento viscoso é levado em consideração e esses modelos reológicos simples geralmente não são capazes de descrever com precisão os fenômenos de fluência e relaxação ocorridos nos materiais viscoelásticos, o que demanda por modelos mais elaborados baseados no módulo complexo combinado com o princípio da superposição frequência-temperatura (NASHIF et al., 1975; De LIMA et al., 2015). Portanto, um modelo geral no domínio da frequência para estruturas sanduíches amortecidas viscoelasticamente sujeitas a não linearidades geométricas ainda é um desafio.

Por fim, outro aspecto importante quanto ao projeto de sistemas viscoelásticos não lineares mais realísticos de interesse prático é a consideração das incertezas presentes no sistema. Representar as fontes de incerteza advindas tanto dos processos de fabricação e/ou variabilidade paramétrica tem se tornado atualmente um grande interesse da comunidade científica global. Nesse sentido, métodos que abordam a parte de incerteza são divididos em duas áreas quanto ao seu tratamento (SOIZE, 2000; 2003; 2005; ARNST e GOYAL; 2017): não paramétricas e paramétricas. A primeira refere-se à variabilidade dos parâmetros do sistema devido à geometria, condições de contorno e propriedades dos materiais. A segunda está associada ao modelo mecânico-matemático que foi utilizado para a previsão do comportamento da estrutura, utilizando principalmente o Método dos Elementos Finitos Estocásticos (GHANEM e SPANOS, 1991).

Este processo envolve a construção de um modelo de ordem reduzida associado à simulação numérica e, em seguida, as matrizes reduzidas são representadas como matrizes aleatórias. A abordagem não paramétrica é muito geral e as matrizes aleatórias são introduzidas na tentativa de representar algum erro de modelagem do problema físico (WU et al., 2019; SOIZE e POLOSKOV, 2012; SHOJAEI et al., 2011; ROBERTS e SPANOS, 2003; SOIZE e CHEBLI, 2003). Nesse sentido, este trabalho apresenta como uma das principais contribuições a construção de um modelo estocástico para o sistema não linear devido a grandes deslocamentos, tratado com camada restrita passiva, considerando incertezas paramétricas nas principais variáveis do sistema.

Entretanto, uma das grandes dificuldades em considerar a presença de incertezas em um sistema dinâmico não linear com material viscoelástico é a de resolver o sistema de

equações resultantes para um grande número de amostras e obter os envelopes de soluções, além da própria dificuldade na modelagem estocástica do sistema viscoelástico não linear.

Para essa finalidade, técnicas para a redução de modelos tem sido empregada. Em linhas gerais, está configura-se como uma poderosa ferramenta matemática que consegue diminuir significativamente o tempo computacional requerido para a resolução numérica de sistemas de engenharia, mantendo uma alta capacidade de predição do comportamento dinâmico original. Vários são os trabalhos que propõem métodos de redução de modelos para sistemas viscoelásticos (ROULEAU et al., 2016; FONSECA JR et al., 2015; De LIMA et al., 2015; OUISSE, 2011; DE LIMA et al., 2010; QU, 2004; KERGOULAY et al., 2000). Especialmente para o caso de sistemas viscoelásticos lineares, a maioria desses métodos consistem em usar bases de redução constituídas de autovetores do sistema conservativo associado e resíduos estáticos de primeira ordem associados aos esforços atuantes no sistema (CUNHA-FILHO et al., 2018; ROULEAU et al., 2016; De LIMA et al., 2010).

Uma das grandes vantagens desses métodos propostos para sistemas viscoelásticos lineares é que as bases resultantes não requerem nenhuma atualização após a sua construção (FONSECA JR 2016; De LIMA et al., 2015). Entretanto, apesar de funcionarem de forma satisfatória para tais sistemas, elas têm se mostrado ineficazes para o caso de sistemas viscoelásticos não lineares devido à falta de critério sobre as dimensões dos enriquecimentos utilizados para levar em conta, por exemplo, as mudanças no sistema devido às não linearidades (CUNHA-FILHO et al., 2018).

A principal dificuldade é a determinação da quantidade necessária de autovetores e de resíduos que formam a base. Assim, como contribuição deste trabalho, é proposto o Método da Aproximação Modal Iterativa (MAMI), baseado nos trabalhos de Cunha-Filho et al., (2018); Rouleau et al., 2016 e Fonseca Jr et al., 2015, onde será determinado uma base de redução que também usa as informações dos autovetores associados ao sistema conservativo, mas o seu enriquecimento é feito de forma iterativa, onde é verificado a influência da perturbação causada no sistema com o acréscimo de um autovetor na base de redução para cada nível de não linearidade.

Portanto, o estudo proposto nesta tese de doutorado foi realizado com os seguintes objetivos:

- Desenvolver o modelo numérico-computacional de vigas sanduiches viscoelásticas multimodal com não linearidades geométricas.
- Para resolver o problema de autovalores complexos do sistema não linear não linear com o uso de método iterativo baseado em sucessivas resoluções de problemas lineares. As auto soluções são obtidas através de um critério de convergência estabelecido;
- Estudar e desenvolver um método de redução de modelo eficiente, em que as respostas do problema de autovalor complexo não linear seja obtida de forma mais rápida, mantendo a qualidade das respostas. Neste caso, propôs-se um método de redução iterativo baseado na matriz de autovetores do sistema estático, enriquecida com um resíduo referente ao amortecimento viscoelástico da estrutura;
- Desenvolver uma modelagem estocástica da viga sanduíche viscoelástica não linear através do método dos elementos finitos para levar em conta a presença de incertezas em alguns parâmetros do sistema. Neste caso, é utilizando a expansão de Karhunen-Loève (KL), conforme descrito por Ghanem e Spanos (1991);
- Desenvolver um procedimento experimental não linear para a análise e comparação com os resultados numéricos previstos pelo modelo de viga sanduiche multimodal não linear.

## 1.1. Conteúdo da tese

Além deste capítulo introdutório, a presente tese de doutorado é composta ainda pelos seguintes capítulos:

O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão sobre o comportamento dos materiais viscoelásticos e a utilização do método dos elementos finitos combinado com o módulo complexo para a modelagem de tais sistemas, ainda no contexto linear. É mostrado um procedimento genérico para a introdução da dependência em frequência e temperatura de materiais viscoelásticos. Além disso, é feita uma breve discussão sobre o Princípio da

Superposição Frequência–Temperatura (PSFT) para a introdução do comportamento viscoelástico em modelos de elementos finitos de sistemas de engenharia.

O Capítulo 3 apresenta a modelagem por elementos finitos de vigas sanduíches de três camadas sujeitas a grandes deslocamentos. Neste caso, para a obtenção das respostas em frequência do sistema viscoelástico não linear é utilizado o método multimodal de Galerkin combinado com o balanço harmônico. Uma técnica de resolução do problema de autovalores complexos do sistema viscoelástico resultante é apresentada, juntamente com a proposta de um método de redução de modelos adaptado ao sistema viscoelástico. O método de redução utiliza um procedimento iterativo para calcular a dimensão da base de redução, o que constitui uma das contribuições deste trabalho de tese.

No Capítulo 4 é realizada uma introdução sobre a importância e os principais métodos de tratamentos de incertezas. Em especial, este capítulo se dedica à modelagem do sistema sanduíche viscoelástico não linear com incertezas. É apresentada a formulação por elementos finitos estocásticos da viga sanduíche não linear, onde as incertezas são introduzidas segundo o método de discretização de campos aleatórios de Karhunen-Loève. Para resolver o sistema de equações do movimento do sistema estocástico e obter os envelopes das soluções, é utilizado o Método Hyper-Cubo-Latino (HCL). Vale ressaltar, que a inserção de incertezas no modelo viscoelástico não linear de viga constitui uma outra contribuição deste trabalho.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas com o objetivo de verificar a validade da metodologia desenvolvida. Neste caso, vários exemplos são mostrados de vigas sanduíches de três camadas sujeitas a grandes deslocamentos e para diferentes condições de contorno e modelos viscoelásticos para a confrontação, quando possível, com resultados da literatura. Ainda neste capítulo, simulações com o sistema estocástico não linear e reduzido são apresentados, onde as espessuras das camadas e a temperatura do sistema são consideradas como parâmetros incertos, além da amplitude da excitação.

O Capítulo 6 dedica-se ao estudo experimental de uma viga sanduíche de três camadas em grande deslocamento. Em uma primeira etapa, o interesse é verificar a metodologia de modelagem por EFs do sistema viscoelástico não linear. Para tanto, diferentes níveis de força são avaliados em uma dada condição ambiental para avaliar os

efeitos da não linearidade geométrica na resposta em frequência do sistema. Em um segundo momento, é verificado a representatividade do modelo não linear estocástico de viga sanduiche através dos envelopes de solução gerados a partir de incertezas introduzidas nas camadas da viga e na força de excitação, constituindo outra contribuição importante deste trabalho.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões gerais, bem como as perspectivas de continuidade de trabalhos futuros.

## CAPÍTULO II

### COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Nesse capítulo são descritas as principais características e uma breve introdução das leis constitutivas dos materiais viscoelásticos, que permitem estabelecer as relações entre tensões e deformações.

#### 2.1. Expressão do módulo complexo

Segundo NASHIF et al., (1995), os materiais viscoelásticos possuem características tanto de um sólido elástico (tensão proporcional à deformação) quanto de um fluido, tais como a dependência do fluxo com o tempo, temperatura e tensão aplicada (tensão proporcional à taxa de deformação). Eles também são conhecidos como materiais com memória ou dependentes do tempo, por poder associar os esforços de deformação em função do tempo (histórico do carregamento) para uma determinada tensão aplicada. Logo, para um certo instante de tempo, o estado de tensões num dado ponto do material não depende somente do estado atual de deformações, mas também de todo o histórico de deformações anteriores.

De acordo com a lei da viscoelasticidade linear, a resposta dos materiais viscoelásticos com a evolução do tempo pode ser dividida em fluência,  $F(\sigma_0, t)$ , que representa a evolução da deformação do material viscoelástico a uma tensão constante,  $\sigma_0$ ,

e em relaxação,  $R(\varepsilon_0, t)$  que representa a evolução da tensão suportada pelo material a uma deformação constante,  $\varepsilon_0$ .

A Fig. 2.1 ilustra os fenômenos de fluênci a e relaxação dos materiais viscoelásticos.

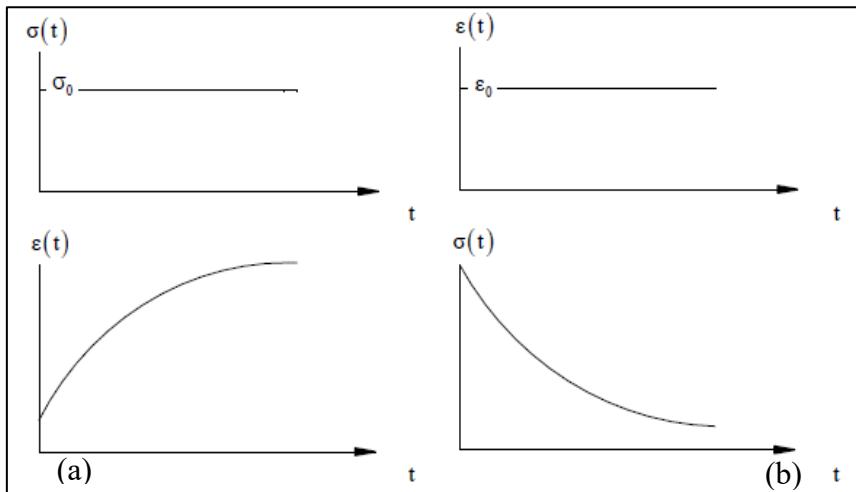


Figura 2. 1 Funções de fluênci a (a) -  $F(\sigma_0, t) = \varepsilon(t) / \sigma_0$ ; e relaxação (b) -  $R(\varepsilon_0, t) = \sigma(t) / \varepsilon_0$  de um material viscoelástico. (Adaptado De LIMA, 2007).

Considerando que o material não apresenta deformação para valores de tempo negativos, tem-se que  $\varepsilon(t) = 0$  no intervalo  $[-\infty < t < 0]$ . Assim, a relação tensão-deformação é estabelecida como segue:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= G(t)\varepsilon(0) + \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \\ \sigma(t) &= G_r \varepsilon(t) + h(t)\varepsilon(0) + \int_0^t h(t-\tau) \frac{d\varepsilon(t)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde,  $\sigma(t)$  e  $\varepsilon(t)$  são as componentes de tensão e de deformação (normais ou de cisalhamento), respectivamente e  $G(t)$  é denominada função módulo do material viscoelástico,  $G_r$  é o módulo estático ou módulo de baixa frequência, sendo que  $G(t) = G_r + h(t)$ .

No domínio de Laplace, a Eq.(2.1), pode ser escrita como:

$$\sigma(s) = G_r \varepsilon(s) + sh(s) \varepsilon(s) = [G_r + H(s)] \varepsilon(s) \quad (2.2)$$

Ou ainda:

$$\sigma(s) = G(s) \varepsilon(s) \quad (2.3)$$

onde  $s$  é a variável complexa de Laplace e  $H(s) = sh(s)$ ;  $G(s) = G_r + H(s)$ .

A função  $H(s)$  é conhecida como função de dissipação, o termo  $H(s)\varepsilon(s)$  representa o comportamento dissipativo do viscoelástico e  $G_r(s)\varepsilon(s)$  é a elasticidade do mesmo.

De acordo com o Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico (PEEV) (NASHIF, 1985), é possível descrever as propriedades dos materiais viscoelásticos lineares no domínio da frequência, através do módulo complexo. Dessa forma, a Eq. (2.3) pode ser reescrita como:

$$\sigma(\omega) = G(\omega) \varepsilon'(\omega) + iG''(\omega) = G'(\omega)[1 + i\eta(\omega)] \quad (2.4)$$

onde  $G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$ ,  $G(\omega)$  é o módulo complexo do material,  $G'(\omega)$  é o módulo de armazenamento (associado à capacidade do material para recuperar a energia de cada ciclo de carregamento),  $G''(\omega)$  é o módulo de perda (associado à energia dissipada em forma de calor) e  $\eta = G''(\omega) / G'(\omega)$  é o fator de perda (capacidade de amortecimento do material viscoelástico).

As propriedades complexas dos materiais isotrópicos e homogêneos, podem ser descritas por um módulo de cisalhamento  $G(s)$  e um coeficiente de Poisson  $\nu(s)$  complexo. O que ocorre na prática, é a identificação do módulo de Young  $E(s)$ , ou o módulo de cisalhamento  $G(s)$ , e supõe-se um coeficiente de Poisson independente da

frequência para a maioria dos materiais viscoelásticos utilizados em aplicações práticas (SOUZA, 2015; LIMA et al., 2009; PRITZ, 1998). Dessa forma, os modos de armazenamento e perda podem ser relacionados a partir dos módulos transversais, segundo as Eqs. (2.5) e (2.6):

$$E'(\omega) = G'(\omega)(1+2\nu) \quad (2.5)$$

$$E''(\omega) = G''(\omega)(1+2\nu) \quad (2.6)$$

onde  $\nu$  representa o módulo de Poisson,  $E'(\omega)$  é o módulo de armazenamento longitudinal e  $E''(\omega)$  representa o módulo de perda longitudinal.

## 2.2. Modelagem geral de sistemas viscoelásticos utilizando o método dos elementos finitos

De uma maneira geral, para modelar sistemas dinâmicos tratados com materiais viscoelásticos para fins de controle de vibrações, o método dos elementos finitos tem sido bastante utilizado em conjunto com modelos matemáticos que descrevem a dependência das propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos em relação principalmente à temperatura de operação e à frequência de excitação.

Considerando um sistema dinâmico generalizado com  $n$  graus de liberdade (GDLs), com elementos elásticos e elementos viscoelásticos, a equação do movimento é descrita como segue (De LIMA et al., 2010):

$$[M]\ddot{\{x\}} + [C]\dot{\{x\}} + [K](\omega, T)\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.7)$$

Onde:  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K(\omega, T)]$  representam, respectivamente, a matriz de massa, de amortecimento viscoso e a matriz de rigidez complexa;  $\{x(t)\}$  é o vetor de respostas e  $\{F(t)\}$  é o vetor de carregamentos.

Vale ressaltar que nesse tipo de equacionamento, a matriz de rigidez complexa pode ser dividida em duas matrizes de rigidez, conforme a Eq. (2.8), onde,  $[K_0]$  é a rigidez da parte puramente elástica do sistema e  $[K_c(\omega, T)]$  está associada à subestrutura puramente viscoelástica, sendo fortemente dependente da frequência e da temperatura de operação do sistema.

$$[K(\omega, T)] = [K_0] + [K_c(\omega, T)] \quad (2.8)$$

Pelo PEEV, a dependência do material viscoelástico em relação à frequência na matriz  $K_c(\omega, T)$  pode ser obtida via emprego de elementos específicos, como barras, vigas e placas, dentre outros, para uma dada temperatura de operação. Dessa forma, supondo-se num primeiro momento que o módulo de Young  $E(\omega, T)$  e/ou módulo de cisalhamento  $G(\omega, T)$  (segundo o estado de tensão-deformação adotado) são independentes da frequência, eles podem ser fatorados da matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica, ou seja, a dependência da frequência dos módulos pode ser inserida após a montagem das matrizes globais de elementos finitos, de acordo com o modelo viscoelástico adotado (CHRISTENSEN, 2013).

Assim, inserindo as Eqs (2.5) e (2.6) na Eq. (2.8), resulta na seguinte expressão:

$$[K(\omega, T)] = [K_0] + G(\omega, T)[K_c] \quad (2.9)$$

Vale ressaltar novamente que a relação proporcional  $E(\omega, T) = G(\omega, T)2(1 + \nu)$  é obtida supondo que o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) seja independente da frequência (PRITZ, 1998; MURAVYOV, 1998).

O módulo complexo pode ser representado tanto pela forma paramétrica quanto pela não paramétrica (CHRISTENSEN, 2013). A principal diferença entre as duas formas é o fato da abordagem paramétrica ser baseada na aproximação do comportamento viscoelástico por meio de modelos analíticos compostos por parâmetros que necessitam ser identificados por um processo de ajuste de curvas entre os dados experimentais de materiais viscoelásticos fornecidos por fabricantes ou através de ensaios experimentais de vibração com controle rigoroso de temperatura e as curvas analíticas previstas pelos modelos. Já a abordagem não paramétrica baseia-se no Princípio da Superposição Frequência – Temperatura (PSFT) (CHRISTENSEN, 1982; NASHIF et al., 1985), através de medidas experimentais fornecidas pelos fabricantes.

A abordagem paramétrica utiliza-se dos modelos reológicos ou modelos incorporados a modelos de elementos finitos para representar o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos. Os modelos reológicos têm por característica associar (em série ou em paralelo) elementos simples do tipo molas e amortecedores viscosos para descrever o comportamento do material viscoelástico. Os modelos de Kelvin-Voigt, de Maxwell, de Zener (ou modelo padrão) (BERT, 1973; De LIMA et al., 2009) são exemplos de modelos reológicos encontrados na literatura. De acordo com Nashif et al. (1985) e De Lima (2006), a grande desvantagem destes modelos é a dificuldade em representar os fenômenos de fluência e relaxação ocorridos nos materiais viscoelásticos.

Para contornar os problemas conduzidos pelos modelos reológicos, foram propostos modelos viscoelásticos baseados na utilização de derivadas fracionárias e de variáveis internas não físicas. Dentre os modelos propostos destacam-se o Modelo das Derivadas Fracionárias (BAGLEY e TORVIK, 1985), o modelo desenvolvido por Golla e Hughes e adaptado por MacTAvish e Hughes, conhecido por modelo GHM (GOLLA et al., 1985), e o modelo baseado nos Campos de Deslocamento Anelásticos (LESIEUTRE e BIANCHINI, 1995). Esses modelos visam representar o comportamento viscoelástico diretamente no domínio do tempo através de representações matemáticas do módulo complexo que sejam bem adaptadas para serem utilizadas também em modelos de elementos finitos

A partir do PSFT, a abordagem não paramétrica permite construir um nomograma em frequência reduzida de dados tabulados de materiais viscoelásticos através de um certo número de ensaios dinâmicos para extração de dados num contexto de uma modelagem por elementos finitos de sistemas viscoelásticos. Conforme De Lima (2003), para conhecer

o módulo complexo em um ponto arbitrário deve-se interpolar ou extrapolar os valores experimentais do fator de deslocamento para encontrar a frequência reduzida, após isto, interpola-se ou extrapola-se o módulo sobre a curva mestre

Conforme mostrado na Fig. 2.2, a partir do fato de que os efeitos da frequência e temperatura em materiais viscoelásticos são inversos (NASHIF et al., 1985), é possível combinar os efeitos da temperatura e da frequência em uma única variável mestre, como ilustrado na Fig. 2.3, designada por frequência reduzida ( $f_R$ ), ou seja, o conjunto é reduzido a um par de curvas que descrevem a variação do módulo de armazenamento e do fator de perda em função da frequência reduzida que é calculada através da relação descrita por um fator de translação em frequência para cada par de frequência-temperatura.

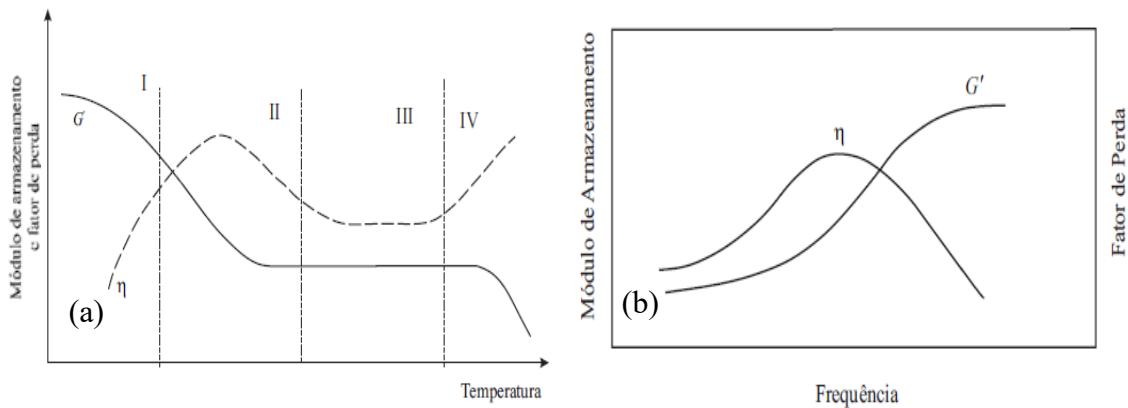


Figura 2. 2: (a) variação do  $G'(\omega)$  e  $\eta$  com a temperatura; (b) variação do  $G'(\omega)$  e com a frequência (Adaptado Nashif et al., 1985).

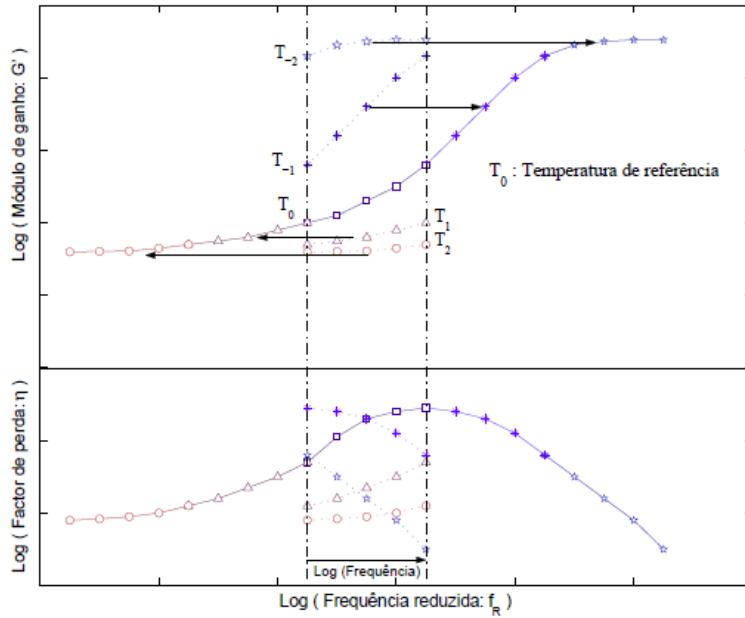


Figura 2.3: Ilustração do PSFT (Adaptado Moreira (2004)).

Dessa forma, dois pares de frequência-temperatura,  $(\omega_1, T_1)$  e  $(\omega_2, T_2)$ , podem ser relacionados pela Eq.(2.10):

$$G(\omega_1, T_1) = G(\omega_2, T_2) \quad (2.10)$$

então esses dois pares definem o mesmo valor de frequência reduzida, da forma:

$$f_R = \omega_1 \alpha_T(T_1) = \omega_2 \alpha_T(T_2) \quad (2.11)$$

Sendo  $\alpha_T$  denominada como fator de translação, uma função única e exclusivamente dependente da temperatura.

De acordo com a Fig. (2.3), a curva formada pela translação dos pontos com relação a frequência de referência, dos pontos experimentais  $(T_{-2}; T_{-1}; T_0; T_1; T_2)$  com diferentes temperaturas para diferentes frequências, é uma função da frequência reduzida, que permite determinar o valor do módulo complexo do material viscoelástico para diferentes

pares de frequência e de temperatura, mesmo que estes não tenham sido considerados na caracterização experimental.

Neste procedimento é necessário recorrer a relação que define o valor do fator de translação em função da temperatura, de forma a determinar o valor de frequência reduzida correspondente (MOREIRA, 2004).

Dessa maneira, o nomograma da frequência reduzida constitui uma das principais formas de representar o módulo complexo de materiais viscoelásticos, ou através de modelo analíticos paramétricos ajustados aos resultados experimentais (MOREIRA, 2002; KETEMA, 1998; JONES, 1978).

## CAPÍTULO III

### **MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS SANDUICHE VISCOELÁSTICAS SUJEITAS A GRANDES DESLOCAMENTOS**

Neste capítulo, é apresentado o modelo de viga sanduiche viscoelástica para representar o efeito das não linearidades geométricas na resposta no domínio da frequência. As hipóteses básicas são consideradas conforme Rao (1978), em que as duas camadas elásticas permanecem paralelas e há uma tensão de cisalhamento que não varia ao longo da espessura do núcleo viscoelástico. As não linearidades geométricas e os efeitos cinemáticos segundo o modelo zigzag são utilizados para obter as equações governantes da análise de vibrações linear e não linear. Neste caso, é empregado o método multimodal de Galerkin em conjunto com o balanço harmônico para a construção das respostas em frequência do sistema viscoelástico não linear. Salienta-se que a modelagem apresentada neste trabalho para a camada central viscoelástica é feita para um caso geral, podendo ser combinada com qualquer modelo viscoelástico.

#### **3.1. Estrutura sanduíche viscoelástica**

É comum a utilização do material viscoelástico em estruturas do tipo sanduíches, que são assim conhecidas por apresentarem uma camada fina intermediária constituída pelo material viscoelástico entre duas camadas elásticas (De LIMA et al., 2010).

A principal característica deste tipo de sistema é a de oferecer uma capacidade maior de dissipação de energia pelo aumento significativo do amortecimento com a vantagem da adição de pouco peso à estrutura-base. Mas uma das principais dificuldades encontradas é a identificação precisa das características do material viscoelástico e suas propriedades de amortecimento (RAO, 2003).

De acordo com Vinson (2005), a primeira vez que uma estrutura sanduiche foi utilizada, se deu na Inglaterra durante a 2<sup>a</sup> Guerra Mundial, porém, avanços mais significativos foram obtidos somente na década de 50, com estudos voltados ao uso dos materiais viscoelásticos como dispositivos amortecedores (FERRY et al., 1953; MAXWELL, 1956; OBERST, 1956; MYKLESTAD, 1952). Na década de 60, os primeiros artigos e livros de estruturas sanduiches começaram a ser publicados, como o de Ferry (1961), Plantema (1966) e Allen (1969).

O crescente interesse de pesquisadores sobre estas estruturas despertou também pesquisas para outros campos da engenharia estrutural, como a indústria automobilística, aeronáutica, mecânica, civil, produção, biomédica entre outros (RAO, 2003).

Neste estudo, considera-se uma viga sanduíche simétrica com uma seção transversal retangular consistindo de uma camada viscoelástica entre duas camadas elásticas, como visto na Fig. 3.1. As direções nas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam respectivamente o comprimento, a largura e a espessura da viga. Neste caso, é assumido que as faces externas são elásticas e simétricas. Já a camada central de material viscoelástico possui propriedades dependentes da frequência da excitação e da temperatura de operação. Os materiais que constituem a viga sanduíche são isotrópicos e homogêneos.

Os subscritos  $f$  e  $c$  indicam as propriedades das camadas elásticas e viscoelástica e os subscritos  $i=1,3$  designam as faces externas elásticas de igual espessura que estão descritos na Tab. 3.1.

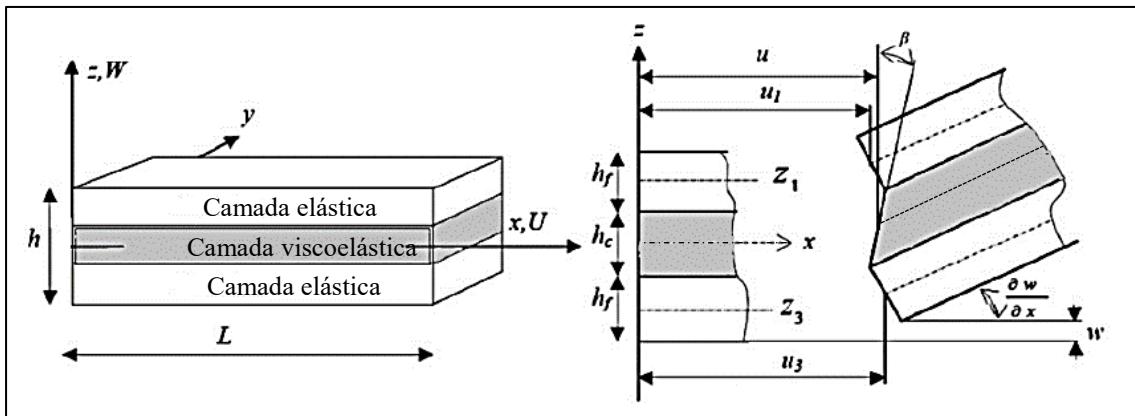


Figura 3.1: Ilustração da viga sanduiche viscoelástica.

Tabela 3.1: Simbologia da viga sanduiche

$z_i$	Plano médio das coordenadas em relação ao centro do sanduiche $z=0$ , que coincide com o centro da camada viscoelástica ( $i=2$ ) ..
$h_f$	Espessura das faces elásticas
$h_c$	Espessura da camada viscoelástica
$b$	Largura da viga sanduiche
$L$	Comprimento da viga sanduiche
$S_f$ e $S_c$	Área da seção transversal
$\nu_f$ e $\nu_c$	Coeficientes de Poisson
$\rho_f$ e $\rho_c$	Densidades com relação a massa
$E_f$ e $E_c^*(\omega)$	Módulos e elasticidade

A Fig. 3.1 ilustra o modelo zigzag de Rao (1978), onde  $w$  é o deslocamento transversal,  $w_x$  é a variação do deslocamento transversal com relação ao eixo  $x$ ,  $\beta$  é a rotação da normal ao plano médio da camada viscoelástica,  $u_1$  e  $u_3$  são, respectivamente,

os deslocamentos longitudinais dos planos médios das camadas elásticas (estrutura base e restringente).

No presente trabalho foi considerado que a estrutura sanduiche da Fig. 3.1 está sujeita às condições de grandes deslocamentos e rotações moderadas, onde as não linearidades geométricas no campo das deformações serão modeladas de acordo com a teoria clássica de Von Karman (DAYA, AZRAR, POTIER-FERRY, 2004). Dessa forma, são as seguintes as considerações assumidas para o desenvolvimento do modelo:

- Para cada camada do sanduíche, as seções planas transversais inicialmente normais ao plano médio permanecem planas e normais ao plano médio durante a flexão;
- A tensão normal transversal na direção ( $O_z$ ) é muito pequena comparada com a tensão normal axial na direção ( $O_x$ );
- Os efeitos de inércia axial e rotacional são desprezíveis em relação aos efeitos de inércia transversal para o estudo de flexão;
- O efeito de cisalhamento é levado em conta na camada viscoelástica, mas ignorado para as faces elásticas;
- As três camadas da estrutura sanduíche estão perfeitamente coladas garantindo a continuidade do campo de deslocamentos nas interfaces;
- O deslocamento transversal  $w$  é o mesmo para as três camadas.

Hu et al., (2008) realizaram uma avaliação de modelos em zigzag clássicos por testes estáticos e dinâmicos e demonstraram que o modelo em zigzag proposto por Rao (1978) tem um bom desempenho nas condições de razão  $\frac{h_c}{h_f} \leq 10$  e  $\frac{E_c}{E_f} \leq 0,01$ .

De acordo com Nashif (1985), é desejável que a restrição seja tão rígida quanto possível para que seja introduzida máxima tensão cisalhante na camada viscoelástica, mas que não exceda a da camada base. A tensão máxima é obtida quando a camada restrita é do mesmo tipo e geometria da estrutura base, ou seja, as camadas elásticas sejam simétricas.

### 3.1.1. Deslocamentos e deformações da viga sanduiche

Com base na Fig. 3.1 e as considerações da seção anterior, os deslocamentos transversais são comuns em todas as camadas, como exposto na Eq.(3.1):

$$W_i(x,t) = w(x,t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Neste caso, os campos de deslocamentos longitudinais ( $U_i$ ) do plano médio das faces elásticas ( $i=1,3$ ) e as deformações, segundo a Teoria de Von Karman, são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} U_i(x,z,t) &= u_i(x,t) - (z - z_i) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \\ \varepsilon_i(x,z,t) &= \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 - (z - z_i) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $z_1 = (h_f + h_c) / 2 = -z_3$ .

A hipótese de continuidade do campo de deslocamentos nas interfaces permite expressar a relação entre os deslocamentos longitudinais dos planos médios das camadas elásticas e o núcleo viscoelástico da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= u(x,t) + \left[ \frac{h_c}{2} \beta(x,t) - \frac{h_f}{2} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right] \\ u_3(x,t) &= u(x,t) - \left[ \frac{h_c}{2} \beta(x,t) - \frac{h_f}{2} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para a camada viscoelástica ( $i=2$ ) tem-se as relações seguintes:

$$U_2(x,z,t) = u(x,t) + z\beta(x,t) \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_2(x, z, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x}$$

$$\xi_2(x, t) = \beta(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$$

onde  $\beta$  a rotação da normal com relação ao plano médio da camada central.  $\varepsilon_2$  é a deformação da normal e  $\xi_2$  deformação cisalhante do núcleo viscoelástico.

### 3.1.2. Relações constitutivas

De acordo com a Lei de Hooke generalizada o comportamento constitutivo da estrutura sanduiche pode ser expresso pelas forças axiais ( $N_i$ ) e os momentos fletores ( $M_i$ ) de cada camada. Para as faces elásticas  $i = 1, 3$ , tem-se a Eq. (3.5).

$$N_i(x, t) = E_f S_f \left( \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (3.5)$$

$$M_i(x, t) = E_f I_f \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$$

Quanto à lei constitutiva do material viscoelástico, admite-se que ela é determinada para tensões harmônicas. Neste caso, o módulo complexo ( $E_c^*$ ) do núcleo viscoelástico corresponde ao módulo operacional  $R^*$  no domínio da frequência expresso pela seguinte expressão (CHRISTENSEN, 1982; HYER et al., 1976).

$$E_c(\omega) \simeq R^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} R(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.6)$$

onde  $R^*$  representa a função de relaxação do material viscoelástico.

A Eq.(3.6) é resolvida utilizando o produto de convolução, conforme Daya et al., (2004) e Hyer et al., (1976).

Usando as relações tensão-deformação no domínio do tempo, a força normal  $N_2$  e o momento fletor  $M_2$  na camada viscoelástica e a força de cisalhamento  $T$  são expressas como segue.

$$N_2(x,t) = \frac{S_c}{2(1+\nu_c)} R * \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (3.7)$$

$$M_2 = I_c R * \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)$$

$$T(x,t) = \frac{S_c}{2(1+\nu_c)} R * \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \beta(x,t) \right) \quad (3.8)$$

Os termos  $N_2$  e  $M_2$  são complexos, devido ao amortecimento introduzido pelo material viscoelástico, inserido por meio do módulo complexo.

De acordo com Hu et al., (2008), para vigas sanduiches em que a camada central é composta por um material macio, a tensão cisalhante é quase constante em toda a espessura do núcleo, não sendo necessário, portanto, a adição de um fator de correção.

### 3.1.3. Formulação Variacional

Utilizando o Princípio do Trabalho Virtual para estabelecer a equação do movimento da viga sanduiche viscoelástica sujeita a uma força de excitação harmônica, a formulação variacional do problema pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ine}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (3.9)$$

onde  $\delta W_{\text{int}}, \delta W_{\text{ine}}, \delta W_{\text{ext}}$  são os trabalhos virtuais das forças internas, iniciais e externas, respectivamente .

Neste caso, considerando somente o efeito da inercia transversal, cada componente da Eq.(3.9) podem ser descritos como segue:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{i=1}^3 \int_0^L N_i \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) dx + \int_0^L \left( (M_1 + M_3) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial \delta \beta}{\partial x} \right) dx + \int_0^L T \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \partial \beta \right) dx \quad (3.10)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = F(x, t) \quad (3.11)$$

$$\delta W_{\text{ine}} = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \quad (3.12)$$

onde  $\delta u, \delta w$  e  $\delta \beta$  são os deslocamentos virtuais generalizados.

Neste estudo, a força é assumida como harmônica no tempo, transversal e não depende do campo de deslocamento. Considerando as condições de continuidade dos deslocamentos nas interfaces entre as camadas apresentadas na Eq.(3.3), é possível eliminar todas as variáveis principais das expressões das energias potencial e cinética (RAO, 1978). Portanto, todas as variáveis são escritas apenas em termos dos deslocamentos das camadas elásticas. Este procedimento tem sido aplicado por muitos autores (HE e MA, 1996; GUPIAL e NIZIOL, 1995; RAO, 1978). Nesta análise, as variáveis da camada viscoelástica serão utilizadas e o número de deslocamentos independentes é reduzido para três, ou seja,  $u, w$  e  $\beta$ .

Sendo assim, as forças internas são, por um lado, a tensão de cisalhamento  $T$  que é devida à deformação por cisalhamento da camada viscoelástica, a força axial total  $N$  e dois momentos flexão da viga  $M_\beta$  e  $M_w$ , conforme a Eq.(3.13) e (3.14).

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 \\ M_\beta &= M_2 + \frac{N_1 - N_3}{2} h_c \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$M_w = M_1 + M_3 - \frac{N_1 - N_3}{2} h_f$$

Considerando as relações descritas pelas Eqs. (3.3) e (3.13), a formulação variacional da Eq. (3.10) pode ser então escrita como segue:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left\{ N \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \left( M_w \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_\beta \frac{\partial \delta \beta}{\partial x} \right) + T \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \beta \right) \right\} dx \quad (3.14)$$

Substituindo cada termo da Eq. (3.9), obtém-se a Eq.(3.15) que governa as vibrações não lineares da viga sanduiche viscoelástica.

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[ N \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + M_w \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_\beta \frac{\partial \delta \beta}{\partial x} T \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \beta \right) \right] dx \\ & + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx = \int_0^L F(x, t) \delta w dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

Na Eq. (3.15) é possível verificar o acoplamento entre os termo não lineares. Com os termos de inercia axial e as componentes axiais da força podem ser negligenciados, a solução de equilíbrio axial é obtida pela seguinte expressão.

$$\int_0^L N \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx = 0 \quad (3.16)$$

Assim, a resposta não linear em flexão da viga sanduíche é obtida resolvendo-se a Eq.(3.17).

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[ \underbrace{N \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x}}_{\text{Equation (3.17)}} + M_w \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_\beta \frac{\partial \delta \beta}{\partial x} + T \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \partial \beta \right) + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^x \ddot{w} dx \right] dx \\
& = \int_0^L F(x, t) \delta w dx
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A Eq. (3.17) não permite soluções analíticas, apenas soluções aproximadas. Desta forma, o método dos elementos finitos é utilizado em conjunto com o método multimodal de Galerkim para resolver esse problema não linear.

### 3.2. Solução do problema linear

A solução linear do problema em flexão da viga é obtida considerando apenas o terno linear da Eq.(3.17). Dessa forma, procura-se soluções harmônicas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} w(x, t) \\ \beta(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W(x) \\ B(x) \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \tag{3.18}$$

onde  $\{W, B\}$  são os modos de vibração linear, onde o elemento finito considerado possui dois nós com três GDLs por nó, que descrevem o deslocamento transversal ( $W$ ), a inclinação  $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)$  e a rotação ( $\beta$ ), de forma que o deslocamento nodal elementar é dado como se segue

$$\{U^e\} = \{W_1 \quad W'_1 \quad B_1 \quad W_2 \quad W'_2 \quad B_2\} \tag{3.19}$$

Neste trabalho, será usado funções de forma clássicas baseadas em Zienkiewicz et al., (2005) para determinar o vetor de deslocamentos Eq.(3.19), chegando a seguinte expressão.

$$\begin{Bmatrix} W \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_w \\ N_\beta \end{bmatrix} \{U^e\}^T \quad (3.20)$$

onde as matrizes de funções de forma elementar,  $[N_w]$  e  $[N_\beta]$ , definidas no Anexo A, são da forma:

$$\begin{aligned} [N_w] &= [n_1(\zeta) \ n_2(\zeta) \ 0 \ n_3(\zeta) \ n_4(\zeta) \ 0] \\ [N_\beta] &= [0 \ 0 \ n_5(\zeta) \ 0 \ 0 \ n_6(\zeta)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

As matrizes elementares são então levadas á nível global para um caso geral com  $n$  GDLs, desse modo as vibrações livres e lineares a partir da Eq.(3.17), inserindo os termos das Eqs. (3.19) a (3.21), obtém-se o seguinte problema de autovalores a ser resolvido, para uma condição de contorno arbitrária:

$$[K(\omega, T) - \lambda M] \phi = 0 \quad (3.22)$$

onde  $\lambda$  são os autovalores complexos do sistema e  $\phi$  são os correspondentes autovetores complexos, e as matrizes de rigidez e massa são dadas por:

$$[K(\omega, T)] = \int_0^L [M_w [N_{w,xx}] + M_\beta [N_{\beta,x}] + T([N_{w,x} + N_\beta])] dx \quad (3.23)$$

$$[M] = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L [N_w^T] [N_w] dx \quad (3.24)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 M_\beta &= \left( G(\omega, T) 2(1 + \nu_c) I_c + 0.5(E_f S_f h_c^2) \right) [N_{\beta,x}] - \left( 0.5(E_f S_f h_c h_f) \right) [N_{w,xx}] \\
 M_w &= E_f \left( 2I_f + 0.5(S_f h_f^2) \right) [N_{w,xx}] - \left( 0.5(E_f S_f h_c^2) \right) [N_{\beta,x}] \\
 T &= G(\omega, T) S_c \left( [N_{w,x}] + [N_\beta] \right) \\
 G(\omega, T) &= G_0(0, T) + G_\omega(\omega, T) \\
 G_0(0, T) &= \frac{E_c(0, T)}{2(1 + \nu_c)} \\
 G_\omega(\omega, T) &= \frac{E_c(\omega, T)}{2(1 + \nu_c)}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nas equações anteriores,  $E_c(\omega, T)$  e  $G(\omega, T)$  são os módulos de elasticidade e de cisalhamento complexos,  $\nu_c$  é o coeficiente de Poisson e  $[M]$  e  $[K(\omega, T)]$  são as matrizes de massa e rigidez complexa. A matriz de rigidez pode ser dividida em duas partes, a rigidez referente a parte elástica dada por  $K_0 = K(\omega = 0, T)$ , em que o momento de flexão  $M_\beta$  e a tensão de cisalhamento  $T$  não varia com a frequência, onde o módulo de cisalhamento é avaliado para a frequência  $\omega = 0$ , dado por  $G_0(0, T)$ . A influência da frequência é inserida através da matriz de rigidez viscoelástica dada por  $K_c = K(\omega, T)$ .

O problema de autovalor e autovetor associado é então reescrito conforme a seguinte expressão:

$$\left[ K_0 + G_\omega(\omega, T) K_c - \lambda_k M \right] \phi_k = 0 \tag{3.26}$$

onde  $\phi_k$  e  $\lambda_k = (\omega_k)^2 = \lambda_k' + i\lambda_k''$  são os autovetores e os autovalores complexos do sistema, com  $k = 1 \dots N$ . A frequência  $\omega_k$  e o fator de perda  $\eta_k$ , que é a capacidade de amortecimento do material viscoelástico (relaciona a parte real e imaginária da frequência natural), podem ser obtidos pelas relações  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k'}$  e  $\eta_k = \frac{\lambda_k''}{\lambda_k'}$ .

Esta formulação de matriz é bem conhecida na análise de vibrações livres de estruturas viscoelásticas (CHEN et al., 1999; RICKARDS et al., 1993; UNGAR e KERWIN, 1962). Entretanto a solução do problema (3.26) não pode ser obtida pelos procedimentos clássicos de autovalor quando  $[K(\omega, T)]$  depende não linearmente da frequência  $\omega$  e da temperatura  $T$ ; dessa maneira, uma abordagem iterativa mais eficiente é proposta neste trabalho, conforme descrito na seção 3.5.

### 3.3. Solução do problema não linear

Para solucionar o problema não linear da viga sanduiche viscoelástica em grandes deslocamentos, primeiramente utiliza-se o método do Balanço Harmônico para transferir a formulação variacional definida pela Eq.(3.17) para o domínio da frequência. Desta forma, as variáveis da equação resultante são funções apenas de  $x$ , e em seguida o método dos elementos finitos é utilizado, de tal forma que o comportamento do material viscoelástico é considerado sem nenhuma simplificação.

Para soluções não lineares do sistema viscoelástico em grandes deslocamentos, a análise é baseada nas respostas periódicas do sistema sujeito a uma excitação harmônica transversal  $F(x, t) = F(x)e^{i\omega t}$  ou a vibrações livres. Assim, a resposta da viga sanduiche não linear será assumida como harmônica no tempo, paralela ao modo no espaço e sua amplitude complexa como sendo arbitrária.

A Eq. (3.16) que se refere à solução do problema axial dever ser resolvida para encontrar o esforço Normal ( $N(x, t)$ ) e os deslocamentos axiais ( $u(x, t)$ ). Neste caso, a equação de flexão (3.17) é transformada em uma equação complexa, através do método do balanço harmônico e a aproximação de Galerkin. Isso levará a uma relação de frequência-amplitude não linear que governará a resposta do sistema viscoelástico não linear.

O método do balanço harmônico utiliza dados em frequência para modelar não linearidades. Nesse caso, trata-se de uma aproximação de sinais periódicos por uma soma de harmônicos (série de Fourier finita), e possui duas vertentes: aproximação da força não

linear (termos equivalentes) e agrupamento de harmônicos na equação do movimento (amplitudes) (RAZZAK, 2016; LUO e HUANG, 2011; PENG et al, 2008).

Este método possui vantagens como a possibilidade de estimar e melhorar a aproximação da solução não linear. A maior desvantagem é que ele trabalha com parâmetros físicos, isto é, análise teórica, e com base no conhecimento de um modelo prévio da não linearidade e sua forma paramétrica (TANG et al., 2015).

Aplicando o método de Galerkin, a resposta não linear do sistema é dada como:

$$\begin{Bmatrix} w(x,t) \\ \beta(x,t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} W(x)e^{i\omega t} \\ B(x)e^{i\omega t} \end{Bmatrix} + CC \quad (3.27)$$

onde  $A$  é a amplitude complexa desconhecida, CC denota o complexo conjugado e  $\{W, B\}$  é a base de Galerkin a ser determinada pela resolução numérica do problema de autovalores complexos associado ao sistema viscoelástico, conforme a Eq.(3.26).

Através das relações da Eq.(3.13) pode-se perceber que a força axial  $N(x,t)$  é função do campo de deslocamento  $\{u, w\}$ , e em modelos genéricos de von Karman, o problema axial da Eq.(3.16) é linear em relação às incógnitas axiais  $u(x,t)$  e  $N(x,t)$ . Dessa forma, para determinar a resposta não linear do sistema definido pela Eq.(3.17), é necessário determinar o esforço normal  $N$  e o deslocamento longitudinal  $u$  da Eq.(3.16).

Pela Eq.(3.27), o termo não linear na deformação induz harmônicos em  $0$  e  $2\omega$  (DAYA et al., 2004). Portanto, considerando o esforço normal da Eq.(3.13) e o termo não linear segundo a Teoria de Von Karman, a resposta axial da Eq.(3.16) pode ser dividida da mesma maneira, como segue:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= |A|^2 u_0(x) + \{A^2 u_{2\omega}(x)e^{i2\omega} + CC\} \\ N(x,t) &= |A|^2 N_0(x) + \{A^2 N_{2\omega}(x)e^{i2\omega} + CC\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $u_0(x)$  e  $N_0(x)$  são as amplitudes de  $u(x,t)$  e  $N(x,t)$ , no harmônico 0, bem como  $u_{2\omega}(x)$  e  $N_{2\omega}(x)$  no harmônico  $2\omega$ .

Inserindo a Eq. (3.28) na Eq. (3.13) e usando as Eqs. (3.5) e (3.7), obtém-se as amplitudes da força axial:

$$\begin{aligned} N_0(x) &= \left(2E_f S_f + E_c(0)S_c\right) \left( u_0(x) + \left|W'(x)\right|^2 \right) \\ N_{2\omega}(x) &= \left(2E_f S_f + E_c(2\omega)S_c\right) \left( u_{2\omega}(x) + 0.5 \left(W'(x)\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Introduzindo a Eq.(3.29) na Eq.(3.16), as componentes  $u_0$  e  $u_{2\omega}$  do deslocamento axial são expressas em função do modo de vibração linear da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_0^L u_0(x) \delta u' dx &= - \int_0^L \left(W'(x)\right)^2 \delta u' dx \\ \int_0^L u_{2\omega}(x) \delta u' dx &= - \int_0^L 0.5 \left(W'(x)\right)^2 \delta u' dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

Através do balanço harmônico, os deslocamentos e rotações virtuais são escolhidos na mesma base (BILASSE et al., 2010), ou seja:  $\delta\beta(x) = B(x)e^{i\omega t}$  e  $\delta w(x) = W(x)e^{i\omega t}$ . Portanto, substituindo cada membro da Eq.(3.17) por sua expressão e retendo os termos independentes do tempo, obtém-se a seguinte equação que relaciona a amplitude complexa  $A$  de vibração do sistema com a frequência de excitação  $\omega$ :

$$\left[ [k_0] + G_\omega(\omega, T) [k_c] - \omega^2 [m] \right] A + [k_{nl}(\omega, T)] \bar{A} A^2 = f \quad (3.31)$$

Na Eq.(3.31), a matriz de rigidez viscoelástica é dada por  $[k_c] = \{\phi^T\} [K_c] \{\phi\}$ , com o módulo complexo fatorado;  $[k_0] = \{\phi^T\} [K_0] \{\phi\}$  é a matriz de rigidez da parte elástica,  $[m] = \{\phi^T\} [M] \{\phi\}$  e  $\{f\} = \{\phi^T\} \{F\}$  são a matriz de massa e o vetor de força. Já  $\{\phi\}$

representa o modo de vibração obtido pela resolução do problema de autovalor complexo pelo método da Frequência Iterativa que será descrito na seção 3.5. Nesse caso, os modos utilizados na base de Galerkin representam os modos referente as frequências naturais de interesse.

Neste caso, a resposta multimodal pode ser obtida considerando mais de um modo de vibração, resolvidos de maneira independente, onde as matrizes globais  $[K_c], [K_0], [K_{nl}], [M]$  e o vetor de força  $\{F\}$  são determinadas para os  $n$  elementos  $\left( \bigcup \right)$ .

$$[K_0] = \left( \frac{E_f S_f h_c^2}{2} + G_0(0, T)(2I_c(1 + v_c)) \right) [k_1] - \frac{E_f S_f h_c h_f}{2} [k_2] + \\ \left( 2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2} \right) [k_3] + G_0(0, T) S_c [k_4] \quad (3.32)$$

$$[K_c] = (2I_c(1 + v_c)) [k_1] + S_c [k_4] \quad (3.33)$$

$$[M] = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) [k_5] \quad (3.34)$$

A matriz de rigidez não linear  $[k_{nl}(\omega, T)] = \{\phi^T\} [K_{nl}(\omega, T)] \{\phi\}$  é dada pela Eq.(3.35), conforme desenvolvimentos apresentados no Anexo B.

$$[K_{nl}(\omega, T)] = [k_{nl}^0] + G_\omega(2\omega, T) [k_{nl}^1] \quad (3.35)$$

$$[k_{nl}^0] = \left[ \left[ 3E_f S_f + 2G_0(0, T)(1 + v_c) S_c \right] \frac{1}{L} \right] [k_6]^2 \\ [k_{nl}^1] = \left[ \left[ (1 + v_c) S_c \right] \frac{1}{L} \right] [k_6]^2 \quad (3.36)$$

As matrizes  $[k_{j=1\dots 6}]$  são obtidas através das funções de forma do métodos dos elementos finitos, conforme mostrado no Anexo A.

Os coeficientes da matriz de rigidez que aparecem na Eq.(3.31) são dependentes da frequência, e para resolvê-los para uma determinada temperatura de operação do sistema, esses coeficientes são decompostos em parte real e em parte imaginária da seguinte forma:

$$\begin{aligned}[k_\alpha(\omega)] &= [k_0] + G_\omega(\omega, T)[k_c] = [k_\alpha^R(\omega)] + i[k_\alpha^I(\omega)] \\ [k_{nl}(\omega, T)] &= [k_{nl}^R(\omega, T)] + i[k_{nl}^I(\omega, T)]\end{aligned}\tag{3.37}$$

Substituindo a Eq. (3.37) na Eq.(3.31), e elevando ambos os lados ao quadrado e reorganizando adequadamente cada termo em função da incógnita  $r$ , encontra-se uma equação cúbica, cuja as raízes formam a curva da resposta em frequência da viga sanduiche não linear. As raízes da equação cúbica definida na Eq.(3.38), podem ser obtidas numericamente, permitindo obter os coeficientes  $r$ .

$$C_3(\omega)r^3 + C_2(\omega)r^2 + C_1(\omega)r + C_0 = 0\tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}r &= A^2 \\ C_0 &= -\{[f]\}^2 \\ C_1(\omega) &= \left(-\omega^2[m] + [k_\alpha^R(\omega)]\right)^2 + [k_\alpha^I(\omega)]^2 \\ C_2(\omega) &= 2\left(\left([k_{nl}^R(\omega)]\left(-\omega^2[m] + [k_\alpha^R(\omega)]\right)\right) + [k_\alpha^I(\omega)][k_{nl}^I(\omega)]\right) \\ C_3(\omega) &= [k_{nl}^R(\omega)]^2 + [k_{nl}^I(\omega)]^2\end{aligned}\tag{3.39}$$

A base de Galerkin utilizada para resolver a Eq.(3.38) dependerá das frequências de interesse de cada sistema. Considerando o caso multimodal, a base de Galerkin pode ser

estendida para mais de um modo de interesse, no qual a resposta em frequência é obtida por um processo iterativo resolvendo modo a modo a Eq.(3.38).

### 3.4. Método de redução para o sistema viscoelástico não linear

Durante a avaliação das respostas em frequência do sistema viscoelástico não linear e a posterior análise do mesmo na presença de incertezas, o custo computacional é primordial. Para contornar este problema, nesta parte do trabalho, é proposto uma nova técnica de redução para aproximar as respostas do sistema viscoelástico não linear no domínio da frequência, sendo considerada também uma contribuição importante deste trabalho. Neste caso, a nova base de redução proposta para lidar com o sistema viscoelástico estocástico é uma base também enriquecida, mas de forma iterativa. Para tanto, baseia-se os autovetores do sistema conservativo e nos resíduos de primeira ordem para levar em conta as informações das não linearidades geométricas e dos esforços viscoelásticos.

#### 3.4.1. Método da Aproximação Modal Iterativa (MAMI)

Os modelos reduzidos ganharam uma atenção considerável por permitirem atender a dois desafios, reduzir a dimensão de problemas complexos e o custo computacional envolvido em simulações de grande escala, mas mantendo a precisão da solução do sistema reduzido resultante (LULF, 2013; FONSECA JR et al., 2015). De acordo com Qu (2004), técnicas de redução de modelos têm sido amplamente utilizadas em problemas de análises dinâmica e estática, reanálises, ajuste de modelos, otimização, análise estocástica, controle e integridade estrutural. Além disso, diferentes problemas relacionados à transferência de calor, interação fluido-estrutura, entre outros, também são domínios que empregam técnicas de redução de modelos.

O processo de redução ocorre quando a resposta de um sistema de ordem  $N$  é aproximada da seguinte forma:

$$\{U\} \simeq \{ \} \quad (3.40)$$

onde  $[T]$  é uma base de redução de tamanho  $(N, N_R)$ , sendo  $N_R \ll N$ , e  $\{\gamma\}$  é o vetor de coordenadas generalizadas.

Ao substituir a Eq.(3.40) na (Eq.(3.26)) e pré-multiplicar a equação resultante por  $[T]^T$ , obtém-se a seguinte equação do sistema reduzido:

$$[K_0^R + G_\omega(\omega, T)K_c^R - \lambda M^R] \phi = 0 \quad (3.41)$$

$$\text{onde } [K_c^R] = \{T^T\} [K_c] \{T\}; [K_0^R] = \{T^T\} [K_0] \{T\}; [M^R] = \{T^T\} [M] \{T\}.$$

Para garantir a qualidade da aproximação da solução o processo de escolha da base é uma das etapas mais delicadas de um processo de redução de modelos, uma vez que ela deve conseguir representar o comportamento dinâmico do sistema para uma dada faixa de interesse (FONSECA JR et al., 2015, QU, 2008).

A suposição de que os modos do sistema conservativo associado seriam capazes de representar também os modos do sistema amortecido produz bons resultados para sistemas lineares suavemente amortecidos (BORGES et al., 2019; CUNHA-FILHO et al., 2018; LIMA et al., 2010; JOHNSON e KIENHOLZ, 1980). Entretanto, para sistemas com materiais viscoelásticos, a construção da base de redução,  $[T]$ , é mais complicada, devido à dependência do viscoelástico em relação à frequência da excitação e a temperatura.

Para contornar esse problema, Shin et al., (2006) abordou uma estratégia interessante que consiste na criação de uma base formada pelos modos do sistema viscoelástico em baixa frequência, ou seja, para  $G_0 = G(\omega = 0, T)$ . Dessa forma, o comportamento do material viscoelástico é puramente elástico, e a matriz de rigidez é real, não considerando nenhuma dependência da frequência e da temperatura. Borges et al., (2019), Fonseca Jr. et al., (2015) e Qu (2008) apresentam uma extensa lista de métodos de redução tradicionais, que podem ser adaptados para sistemas não lineares. Entretanto,

poucos apresentam afinidade a uma adaptação para sistemas não lineares amortecidos viscoelasticamente.

Entretanto, métodos que buscam enriquecer a base de redução inicial do sistema conservativo tiveram bons resultados para aproximar respostas do sistema viscoelástico com uma precisão considerável, como é o caso dos trabalhos de Cunha–Filho et al., (2018); Rouleau et al., (2016), De Lima et al., (2015) e Kirsch et al., (2007).

Os métodos da Aproximação Combinada (CA) proposto em Kirsch et al., (2007) e da Base Modal Enriquecida (BME) De Lima et al., (2015) utilizam como aproximação inicial uma quantidade  $n$  de autovetores para formar a base inicial, mas apresentam estratégias diferentes para melhorar a qualidade desta base. Enquanto o BME propõe enriquecer a base com informações sobre os resíduos estáticos dos esforços externos e viscoelásticos para sistemas lineares, o método CA propõe um processo iterativo baseado no cálculo da energia de deformação de um sistema não linear, mas sem amortecimento. Desta forma, quanto maior a energia do sistema não linear, maior será a quantidade de autovetores na base. Mais recentemente, Belonsi (2017) propôs um método CA melhorado mais eficiente para o enriquecimento iterativo da base, levando a uma redução significativa do tempo de cálculo das soluções para problemas não lineares estocásticos não amortecidos. Entretanto, pouco se tem feito para sistemas não lineares amortecidos viscoelasticamente.

O método MAMI, baseado nos trabalhos de Cunha-Filho et al., (2018); Rouleau et al., 2016 e Fonseca Jr et al., 2015, propõe uma base que também parte das informações dos autovetores do sistema viscoelástico, mas seu enriquecimento é feito de maneira iterativa, considerando a influência da rigidez do sistema viscoelástico. Neste caso, é estabelecido um critério de convergência para a perturbação causada com o acréscimo de um autovetor na base. A ideia é apresentar um enriquecimento que leve em consideração as informações tanto do resíduo estático, quanto das matrizes elásticas e viscoelásticas que compõem o sistema não linear.

Seja a base de redução inicialmente proposta pelo método BME:

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & \phi(0)_1, \dots, \phi(0)_k \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde  $\phi_k(0)$  são os  $k$  autovetores escolhidos referentes ao problema de autovalores linear:

$$[K_0 - \lambda_n M] \phi_n = 0 \quad (3.43)$$

onde os autovalores são organizados em ordem crescente,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  e a matriz de rigidez da parte elástica obtida pela Eq.(3.32). Já  $T_0$  é dado por:

$$T_0 = [K_0^{-1}] \{F\} \quad (3.44)$$

A melhora na qualidade da resposta do sistema reduzido, pode ser obtida através de um processo iterativo. A ideia do MAMI não é resolver o problema de autovalores do sistema amortecido, mas sim utiliza-la para enriquecer a base de redução. A inserção dos autovetores com informações dinâmicas é feita através de um processo iterativo, pelo qual valores de frequências ( $\omega_k$ ) são utilizados. Estes valores correspondem aos autovalores associados aos autovetores da base  $[\phi(0)]$ , que são utilizados para o cálculo da seguinte matriz de rigidez do sistema.

$$K^* = K_0 + G_\omega(\omega_k, T) K_c \quad (3.45)$$

Na etapa inicial do processo, define-se uma tolerância desejada,  $tol$ , um indicador de erro  $\xi_k = 1$  e a temperatura de operação,  $T$ .

O processo iterativo para enriquecer a matriz de transformação é determinado pelos cálculos da Eq.(3.46), para cada iteração  $k$ , até que a relação,  $\xi_k \leq tol$  seja satisfeita. Na Eq. ( $\omega_k$ ) (3.46) a matriz  $[T_2]$  representa os autovetores do sistema conservativo da Eq.(3.43), que não são capazes de representar todo amortecimento introduzido pelo material viscoelástico, necessitando do enriquecimento obtido a partir da matriz  $[T_1]$ . As

matrizes do sistema que formam  $[K^*]$  se torna complexa devido a frequência ( $\omega_k$ ) atualizada a cada iteração, dessa forma o amortecimento é levado em consideração sem a necessidade da resolução de um problema de autovalor complexo.

$$\begin{aligned}
 T_1^k &= \left[ K_0^{-1}(K^*) \phi_k \right] \\
 T_2^k &= [\phi_k] \\
 T_{MAMI} &= [[T_2] \quad [T_1] \quad [T_0]] \\
 k &= 1 \dots n
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

A avaliação do erro da energia de deformação é dado por:

$$\xi_k = \left| \frac{T_{MAMI}^T \left[ K(\omega_{(k)}) \right] T_{MAMI}}{\phi_{(k)}^T \left[ K(\omega_{(k)}) \right] \phi_{(k)}} \right| \tag{3.47}$$

A medida que a base  $[T_{MAMI}]$  é enriquecida, a razão entre a nova base e a base dos autovetores do sistema conservativo  $[T_1]$  se reduz, de modo que obtenha o valor ideal para a quantidade de enriquecimento que deve ser realizado. Nesse caso, esse enriquecimento chegando a tolerância desejada representa que o acréscimo de um autovetor na base  $[T_1]$  e o seu enriquecimento na base  $[T_2]$  não influenciará significativamente a base de redução.

Pela Eq.(3.46), é possível verificar que a matriz de transformação do método MAMI é uma composição entre o resíduo estático  $[T_0]$ , o resíduo devido as matrizes de rigidez elástica e viscoelástica de  $[T_1]$  e aos autovetores do sistema linear  $[T_2]$ . Observa-se que os efeitos viscoelásticos são levados em consideração com a mudança do parâmetro do autovalor ( $\omega_k$ ) na matriz de rigidez viscoelástica, tornando a matriz de transformação complexa. Note, que somente a resolução do problema de autovalor linear é necessária, e os modos não amortecidos são enriquecidos com a influência da matriz de rigidez

viscoelástica. Assim, para cada modo não amortecido adicionado na base, um modo enriquecido com o resíduo das matrizes de rigidez também é adicionado.

As matrizes do sistema são então reduzidas conforme a Eq.(3.48)

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \{T_{MAMI}^T\} [K_0] \{T_{MAMI}\} \\
 K_c &= \{T_{MAMI}^T\} [K_c] \{T_{MAMI}\} \\
 K_{nl} &= \{T_{MAMI}^T\} [K_{nl}] \{T_{MAMI}\} \\
 M &= \{T_{MAMI}^T\} [M] \{T_{MAMI}\} \\
 F &= \{T_{MAMI}^T\} [F]
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Para a análise de incerteza do modelo não linear estocástico, que é um dos objetivos deste trabalho, a aplicação do método MAMI se torna essencial para que as frequências naturais amortecidas devido ao material viscoelástico sejam obtidas de forma mais rápida e precisa, através do método da Frequência Iterativa.

### 3.5 Método da Frequência Iterativa

A particularidade do comportamento dos materiais viscoelásticos em depender tanto da frequência da excitação quanto da temperatura de operação fazem com que os meios tradicionais de se obter as informações sobre suas frequências naturais e seus modos de vibrar não sejam mais adequados, de modo que, esse procedimento agora se torna não linear, por exigir que as informações da matriz de rigidez viscoelástica também sejam levadas em consideração. Dessa forma, nesta seção, é apresentado o método da Frequência Iterativa (FI) para o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibrar viga sanduiche viscoelástica. O processo iterativo proposto faz com que as frequências naturais não amortecidas sejam convergidas para as frequências amortecidas. Isso torna possível representar o comportamento do sistema considerando o amortecimento

induzido pelo material viscoelástico, para que os modos utilizados na base de Galerkin também sejam capazes de representar esse efeito.

A resolução da Eq.(3.31) necessita-se do cálculo dos modos do sistema amortecido viscoelásticamente para a composição da base de Galerkin. Na literatura, algumas opções podem ser encontradas, como o método modal da energia de deformação proposto por Ungar e Kerwin (1962), que é aplicável a estruturas dependentes da frequência, mas em alguns casos práticos, de acordo com Rickards et al., (1993), o erro pode ser relativamente significativo. A abordagem assintótica proposta por Ma e He (1992) é limitada ao caso de estruturas viscoelásticas de rigidez constante.

Outros métodos numéricos para problemas não lineares de autovalores como em Chen et al., (1999) e Daya e Potier-Ferry (2001) utilizaram algoritmos numéricos assintóticos; Duigou et al., (2003) com o algoritmo iterativo de redução de ordem; Arnoldi (2004) com o método da projeção iterativa e Silva et al., (2019) por meio do método da iteração inversa contabilizaram a dependência da frequência na resolução de problemas de autovalores complexo. Entretanto, o tempo computacional pode-se chegar a elevados níveis, dependendo da dimensão do sistema.

Para contornar esse problema, o método de redução MAMI apresentado na seção 3.4 é utilizado para reduzir as matrizes da Eq.(3.49) e auxiliar para que a resolução iterativa o seguinte problema de autovalores complexo seja obtida de forma mais rápida.

$$[K_0 + G_\omega(\omega, T)K_c - \lambda M]\phi = 0 \quad (3.49)$$

O método da Frequência Iterativa (FI) procura uma solução do problema de autovalor complexo da Eq.(3.49) para determinar os autovalores ( $\lambda$ ) e os autovetores ( $\phi$ ) partindo da solução inicial do problema de autovalores linear, de modo que o autovalor complexo seja atualizado a cada iteração. As matrizes que compõe a Eq. (3.49) são as matrizes obtidas pela redução, conforme a resolução na seção 3.4. O pseudocódigo deste algoritmo é apresentado a seguir:

1. Início: Definir os valores iniciais:

$k = 1$  : Contador para o cálculo do autovalor complexo.

$tol = 10^{-6}$  : Tolerância estabelecida para o critério de convergência

$n_f$  : Número de modos amortecidos desejado

2. Resolver o problema de autovalor linear  $[K_0 - \lambda M]\{\phi\} = 0$ ;

3. Início do processo iterativo:

Enquanto  $k \leq n_f$ ;

$\omega_k^0 = \sqrt{\lambda_k}$  : Seleção da frequencia inicial

$\varepsilon = 1$  : Erro inicial para a frequencia selecionada

4. Enquanto  $\varepsilon \leq tol$

Resolver o problema de autovalor complexo

$[K_0 + G_\omega(\omega_k^0, T)K_c - \lambda_k M]\{\phi\} = 0$  para encontrar a frequência amortecida

$\omega_k^c = \sqrt{\lambda_k}$  e seus correspondentes modos  $\phi_k$

5. Calcular o resíduo:

$$\varepsilon = \frac{|\omega_k^0 - \omega_k^c|}{|\omega_k^c|}$$

$$\omega_k^0 = \omega_k^c$$

6. Retornar ao passo 4 até que a tolerância seja atingida

Guardar o valor do par de frequência e modo amortecido  $\omega_k^c$  e  $\phi_k$

7. Retornar ao passo 3 e calcular a próxima frequência amortecida até que as  $n_f$  sejam obtidas.

$$k = k + 1$$

8. Fim algoritmo

Dessa forma, a utilização do método de redução MAMI se faz necessária para acelerar o processo iterativo no cálculo do problema de autovalores e consequentemente atingir a convergência de forma mais rápida.

Os modos complexos que compões a base de Galerkin, foram normalizados em relação a massa e em relação aos modos de flexão ( $\phi_w$ ), conforme a Eq.(3.50).

$$\phi = \frac{\phi}{|\phi_w|} \quad (3.50)$$

A Fig. 3.2 apresenta as principais etapas da metodologia de construção das respostas em frequência do sistema sanduíche viscoelástico em grandes deslocamentos.

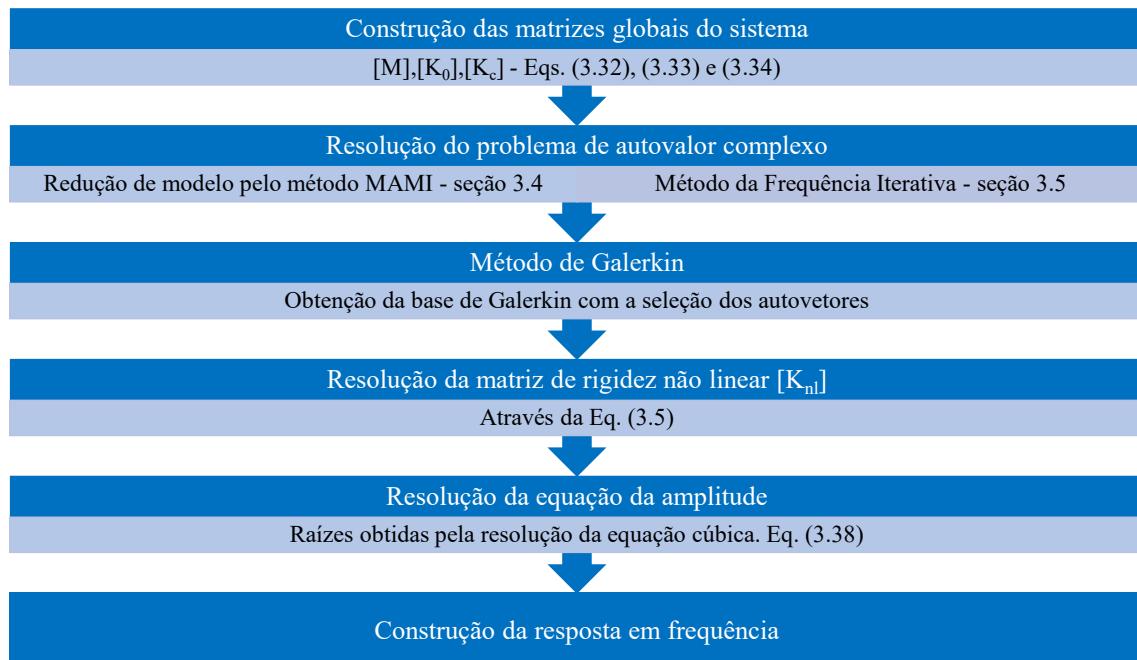


Figura 3.2: Etapas para a construção da resposta da viga sanduíche não linear.

## CAPÍTULO IV

### MODELAGEM ESTOCÁSTICA DA VIGA SANDUÍCHE EM GRANDES DESLOCAMENTOS

O comportamento de um modelo é caracterizado por sua representação matemática, pelas suas propriedades mecânicas e as condições de operação. O valor dado a estas variáveis pode apresentar erros, sejam eles por medição ou de ensaios mecânicos. No caso específico do problema abordado neste trabalho, a presença de incertezas em algumas variáveis que influem significativamente na dinâmica da viga sanduiche sujeita a grandes deslocamentos é uma extensão natural e necessária da capacidade de modelagem das técnicas existentes de análise determinística. Dentre os vários métodos usados para modelar incertezas, o método dos elementos finitos estocásticos (*stochastic finite element method*- SFEM) é utilizado neste trabalho, onde as incertezas são modeladas como campos estocásticos gaussianos homogêneos e discretizadas através da expansão de Karhunen-Loëve. O procedimento de modelagem está confinado às análises no domínio da frequência, nas quais são construídos os envelopes das respostas em frequência do sistema viscoelástico não linear estocástico.

#### 4.1. Incertezas em Sistemas Mecânicos e Métodos Estocásticos

Em engenharia, os projetos possuem requisitos que devem ser seguidos como, por exemplo, segurança, custo e durabilidade. Portanto, ao se considerar a aleatoriedade dos dados de entrada, poderá ser obtida uma melhor configuração da estrutura que irá ser

projetada. Para isto, os parâmetros são considerados como variáveis aleatórias e, estas são representadas por meio da estatística com algum grau de incerteza.

Muller, Vaz e Eboli (2003), definem que os sistemas estocásticos são os que possuem um ou mais componentes que estão sujeitos a efeitos aleatórios. Segundo Schueller (2001), as incertezas podem surgir a partir de tolerâncias de fabricação, das variabilidades afetando as propriedades dos materiais, das condições de contorno, entre outras possibilidades.

Shueller, (2001), Soize (2000) e Ghanem e Spanos, (1991) atestam que as incertezas inseridas nos modelos podem ser classificadas como paramétricas e não paramétricas. Enquanto a aproximação não paramétrica confia no modelo utilizado, introduzindo as incertezas diretamente nas matrizes globais do modelo adotado, a aproximação paramétrica considera o uso das incertezas na construção do modelo, combinando os elementos finitos com a análise estatística, conhecido com elementos finitos estocásticos.

Na abordagem paramétrica, um aspecto importante a ser considerado é a escolha da melhor técnica de resolução a ser empregada para a obtenção da variabilidade das soluções dos sistemas estocásticos resultantes. Nesse contexto, pode-se citar os seguintes métodos frequentemente empregados para resolver tais problemas: o método de Monte Carlo (MC) ou sua variante chamada de Hipercubo Latino (HCL); os Métodos de Perturbação e os Métodos Espectrais (KOROISHI et al., 2012; SCHUËLLER, 2001).

A simulação de MC (SCHINOZURA, 1972; RUBINSTEIN, 1981; PAPADRAKAKIS e KOTSOPULOS, 1999) é usada como referência por não ser um método intrusivo (SOIZE, 2001), mas que possui o inconveniente de requerer um alto custo computacional em função do número elevado de cálculos para se atingir a convergência (GONÇALVES et al., 2019; DE LIMA, RADE e BOUHADDI, 2010). Como alternativa, o método Hipercubo-Latino (HCL) (IMAN e CONOVERS, 1980; FLORIAN, 1992; VIANA et al., 2008) foi proposto para reduzir o número de cálculos necessários para a convergência da simulação de Monte Carlo, conservando o nível de predição. Já os métodos de perturbação são baseados nas expansões em série de Taylor (KLEIBER e HIEN, 1992; ALVIN, 1998) ou série de Neumann (YAMAZAKI e SCHINOZUKA, 1988; LEI; QIU, 2000), das respostas ao redor das médias das variáveis aleatórias;

Os métodos espectrais, por sua vez, são caracterizados por utilizarem as funções de base no espaço de Hilbert associadas aos problemas aleatórios, no qual estas funções podem

ser polinômios ortogonais de uma maneira geral, e um caos polinomial em particular (GHANEM e SPANOS, 1991). Um método de análise espectral é chamado de Decomposição de Karhunen-Loève (KL) também encontrado na literatura como expansão ou transformação de Karhunen-Loève.

Koroishi (2012), descreve o método KL como uma representação contínua para campos aleatórios onde estes são expressos como superposição de variáveis aleatórias ponderadas por funções espaciais determinísticas. Os campos aleatórios são vistos como uma extensão espacial de uma variável aleatória que descreve a correlação espacial de um parâmetro estrutural que varia aleatoriamente.

## 4.2. Discretização dos campos aleatórios

Uma dificuldade de incorporar processos aleatórios em análises de elementos finitos é lidar com variáveis aleatórias definidas no espaço dos eventos aleatórios. Neste caso, a abordagem proposta por Ghanem e Spanos (1991) se torna bastante interessante, uma vez que utiliza como base a decomposição espectral de funções de covariância e de problemas de autovetores. Por exemplo, um campo aleatório unidimensional qualquer,  $H(x, \theta)$ , com  $\theta$  pertencente ao espaço dos eventos aleatórios, pode ser discretizado como se segue:

$$H(x, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \xi_i(\theta) \quad (4.1)$$

onde  $\xi_i(\theta)$  é um conjunto de variáveis aleatórias que devem ser determinadas e  $\lambda_i$  e  $f_i(x)$  são, respectivamente, os autovalores e autofunções da função de covariância.

Pela decomposição de KL, o campo aleatório  $\hat{H}(x, \theta)$  é uma aproximação de  $H(x, \theta)$  truncado em  $n$  termos sobre a base das auto funções  $f_i(x)$ , da forma:

$$H(x, \theta) \cong \hat{H}(x, \theta) = \mu + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \xi_i(\theta) \quad (4.2)$$

onde  $\mu$  é o valor médio do campo.

Para o problema da viga sanduiche não linear mostrada no Capítulo 3, considera-se que todas as variáveis de interesse são fatoradas das matrizes elementares e representam processos aleatórios gaussianos com a seguinte função de covariância:

$$C(x_1, x_2) = C(x_1 - x_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x}\right) \quad (4.3)$$

onde  $L_x$  representa o comprimento de correlação para o domínio  $\Omega_x = (x_1, x_2) = [-a, +a]$  que serão utilizados nas equações transcendentais. Para a viga sanduiche não linear, tem-se que  $(x_1, x_2) = (0, L^e)$  e  $L_x = L^e$ .

Segundo Gonçalves et al., (2019), dentre as funções de covariância avaliadas por Ghanem e Spanos (1991), a do tipo exponencial é a mais utilizada por resultar em um problema de autovalor unidimensional, onde os termos  $\omega_i$  são as soluções das seguintes equações transcendentais utilizadas para o cálculo das auto soluções da decomposição do campo aleatório,

$$c - \omega_i \tan(\omega_i a) = 0 \text{ se } i \text{ é ímpar} \quad (4.4)$$

$$\omega_i + c \tan(\omega_i a) = 0 \text{ se } i \text{ é par} \quad (4.5)$$

As Eqs.(4.4) e (4.5) são válidas nos domínios  $\left[(i-1)\frac{\pi}{a}, \left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}\right]$  e  $\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}, i\frac{\pi}{a}\right]$  respectivamente, com  $c = 1/L_x$

Dessa forma, os autovalores e as autofunções são dadas por:

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2} \quad (4.6)$$

$$f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \text{ se } i \text{ é ímpar} \quad (4.7)$$

$$f_i(x) = \alpha_k \sin(\omega_i x) \text{ se } i \text{ é par} \quad (4.8)$$

onde:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \quad (4.9)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \quad (4.10)$$

### 4.3. Determinação das matrizes estocásticas

A partir das autofunções e dos autovalores, é possível calcular as matrizes estocásticas ao nível elementar da viga sanduíche viscoelástica não linear. Para isso, as matrizes da Seção 3.3, conforme detalhes no Anexo A, são novamente integradas levando-se em conta a expansão (4.2):

$$\bar{k}_{li} = \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \int_0^l f_i(x) \begin{bmatrix} N_{\beta,x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{\beta,x} \end{bmatrix} dx \quad (4.11)$$

$$\bar{k}_{2i} = \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \int_0^l f_i(x) \begin{bmatrix} N_{\beta,x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{w,xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{w,xx} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{\beta,x} \end{bmatrix} dx \quad (4.12)$$

$$\bar{k}_{3i} = \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \int_0^l f_i(x) \begin{bmatrix} N_{w,xx} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{w,xx} \end{bmatrix} dx \quad (4.13)$$

$$\bar{k}_{4i} = \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \int_0^l f_i(x) \left[ \begin{bmatrix} N_{w,x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{w,x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{\beta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{w,x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{w,x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{\beta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{\beta} \end{bmatrix} \right] dx \quad (4.14)$$

$$\bar{k}_{5i} = \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \int_0^l f_i(x) \begin{bmatrix} N_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_w \end{bmatrix} dx \quad (4.15)$$

$$\bar{k}_{6i} = \alpha_i \sqrt{\lambda_i} \int_0^l f_i(x) \begin{bmatrix} N_{w,x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{w,x} \end{bmatrix} dx \quad (4.16)$$

O sub índice  $i = 1 \dots n$  representa a quantidade de campos aleatórios descritos, somados e elevados a nível global, como se segue:

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= \sum_1^n \left[ \bar{k}_{1i} \right] \\ \bar{K}_2 &= \sum_1^n \left[ \bar{k}_{2i} \right] \\ \bar{K}_3 &= \sum_1^n \left[ \bar{k}_{3i} \right] \\ \bar{K}_4 &= \sum_1^n \left[ \bar{k}_{4i} \right] \\ \bar{K}_5 &= \sum_1^n \left[ \bar{k}_{5i} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\bar{K}_6 = \sum_1^n \left[ \bar{k}_{6i} \right]$$

A montagem das matrizes determinísticas realizada na Seção 3.3 do Capítulo 3, é agora estendida para a montagem das matrizes estocásticas do sistema não linear, que estão parametrizadas pelas variáveis aleatórias incertas:

$$\left[ \bar{M}(\theta) \right] = (2c_1 l \rho_f + l c_1 \rho_c) \left[ \bar{K}_5 \right] \quad (4.18)$$

$$\left[ \bar{K}_0(\theta) \right] = \left[ \bar{K}^{(1)} \right] + \left[ \bar{K}^{(2)} \right] + \left[ \bar{K}^{(3)} \right] + \left[ \bar{K}^{(4)} \right] \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} \bar{K}^{(1)} = \left( \frac{c_4 c_7 l (2(1 + \nu_c))}{12} + \frac{l c_5 E_f}{2} \right) \left[ \bar{K}_1 \right] \\ \bar{K}^{(2)} = \left( \frac{l c_6 E_f}{2} \right) \left[ \bar{K}_2 \right] \\ \bar{K}^{(3)} = \left( \frac{c_3 l E_f}{2} + \frac{2 l c_3 E_f}{12} \right) \left[ \bar{K}_3 \right] \\ \bar{K}^{(4)} = (c_2 c_7 l) \left[ \bar{K}_4 \right] \end{cases} \quad (4.20)$$

Para a subestrutura viscoelástica, como o comportamento do material depende da frequência e da temperatura, a matriz de rigidez estocástica é definida como:

$$\left[ \bar{K}_c(\omega, T, \theta) \right] = \left( \frac{(2(1 + \nu_c)) l c_4 c_8}{12} \right) \left[ \bar{K}_1 \right] + c_2 c_8 l \left[ \bar{K}_4 \right] \quad (4.21)$$

A matriz de rigidez estocástica não linear, também depende da frequência e da temperatura, conforme apresenta a Eq. (4.22).

$$[\bar{K}_{nl}(\omega, T, \theta)] = \left( \frac{3E_f l c_1 + l c_2 c_7 (2(1 + \nu_c))}{L} + \frac{(1 + \nu_c) l c_2 c_9}{L} \right) [\bar{K}_6] \quad (4.22)$$

onde cada amostra HCL pode ser avaliada para os parâmetros que foram fatorados das matrizes do modelo, segundo as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} c_1 &= h_f - h_f(\theta) \\ c_2 &= h_c - h_c(\theta) \\ c_3 &= h_f^3 - h_f(\theta)^3 \\ c_4 &= h_c^3 - h_c(\theta)^3 \\ c_5 &= (h_f - h_f(\theta)) (h_c^2 - h_c(\theta)^2) \\ c_6 &= (h_c - h_c(\theta)) (h_f^2 - h_f(\theta)^2) \\ c_7 &= G_0(0, T) - G_0(0, T(\theta)) \\ c_8 &= G_\omega(\omega, T) - G_\omega(\omega, T(\theta)) \\ c_9 &= G_\omega(2\omega, T) - G_\omega(2\omega, T(\theta)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Vale destacar que os termos  $c_7, c_8$  e  $c_9$  referem-se aos módulos do material viscoelástico que devem ser considerados para os casos em que incertezas na temperatura de operação do viscoelástico são consideradas.

As matrizes globais do sistema viscoelástico estocástico não linear são determinadas pela soma das matrizes globais determinísticas (considerando o valor nominal das variáveis de projeto de interesse deste trabalho) e estocásticas definidas anteriormente.

$$[M(\theta)] = [M] + [\bar{M}(\theta)] \quad (4.24)$$

$$[K_0(\theta)] = [K_0] + [\bar{K}_0(\theta)] \quad (4.25)$$

$$[K_c(\omega, T, \theta)] = [K_c(\omega, T)] + [\bar{K}_c(\omega, T, \theta)] \quad (4.26)$$

$$\{F\} = \{F(\theta)\} \quad (4.27)$$

$$[K_{nl}(\omega, T, \theta)] = [K_{nl}(\omega, T)] + [\bar{K}_{nl}(\omega, T, \theta)] \quad (4.28)$$

onde as matrizes  $[M]$ ,  $[K_0]$ ,  $[K_c]$  e  $[K_{nl}(\omega, T)]$  foram obtidas na Seção 3.6. Já as matrizes  $[\bar{M}(\theta)]$ ,  $[\bar{K}(\theta)]$ ,  $[\bar{K}_c(\theta)]$  e  $[\bar{K}_{nl}(\omega, T, \theta)]$  são definidas pelas Eqs. (4.18) a Eq. (4.22).

Portanto, tem-se a seguinte equação da amplitude do sistema viscoelástico estocástico não linear a ser resolvida, onde a incerteza na amplitude da força,  $(F)$ , é introduzida pela dispersão,  $F(\theta)$ , em torno de seu valor médio.

$$[k_0(\theta) + k_c(\theta) - \omega^2 m(\theta)] A(\theta) + [k_{nl}(\omega, T, \theta)] \bar{A}(\theta) A(\theta)^2 = f(\theta) \quad (4.29)$$

$[m(\theta)] = \{\phi^T\} [M(\theta)] \{\phi\}$ ,  $[k_0(\theta)] = \{\phi^T\} [K_0(\theta)] \{\phi\}$ ,  $[k_c(\theta)] = \{\phi^T\} [K_c(\omega, T, \theta)] \{\phi\}$ ,  $[k_{nl}(\omega, T, \theta)] = \{\phi^T\} [K_{nl}(\omega, T, \theta)] \{\phi\}$  e  $\{f(\theta)\} = \{\phi^T\} \{F(\theta)\}$  são as matrizes estocásticas de massa, rigidez linear, viscoelástica e não linear e o vetor de força estocástico, respectivamente.

A análise de convergência das respostas do sistema estocástico foi obtida considerando o Erro Quadrático Médio (GUEDRI et al., 2010) em função do número de amostras  $n_s$ , segundo a seguinte expressão:

$$conv(n_s) = \sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} |A_i(\theta) - A|^2} \quad (4.30)$$

Neste trabalho, as incertezas são introduzidas nas espessuras das camadas do sanduíche, na temperatura de operação do viscoelástico e na amplitude da força de excitação externa. O intuito é investigar o nível de influência das incertezas em cada um destes parâmetro nas respostas em frequência de estruturas sanduíches viscoelásticas sujeitas a não linearidades geométricas.

Além disso, é de se esperar uma elevação do custo computacional para a resolução da Eq. (4.29) para o sistema viscoelástico não linear no contexto estocástico, uma vez que há a necessidade de se avaliar a matriz de rigidez não linear dependente da frequência e da temperatura para todas as amostras para a construção dos envelopes das soluções. Neste caso, torna-se imprescindível o emprego do método de redução de modelos proposto na Seção 3.4, Capítulo 3.

A Fig. 4.1 representa as principais etapas para determinar os envelopes de solução das respostas em frequência da viga sanduiche viscoelástico estocástica não linear.

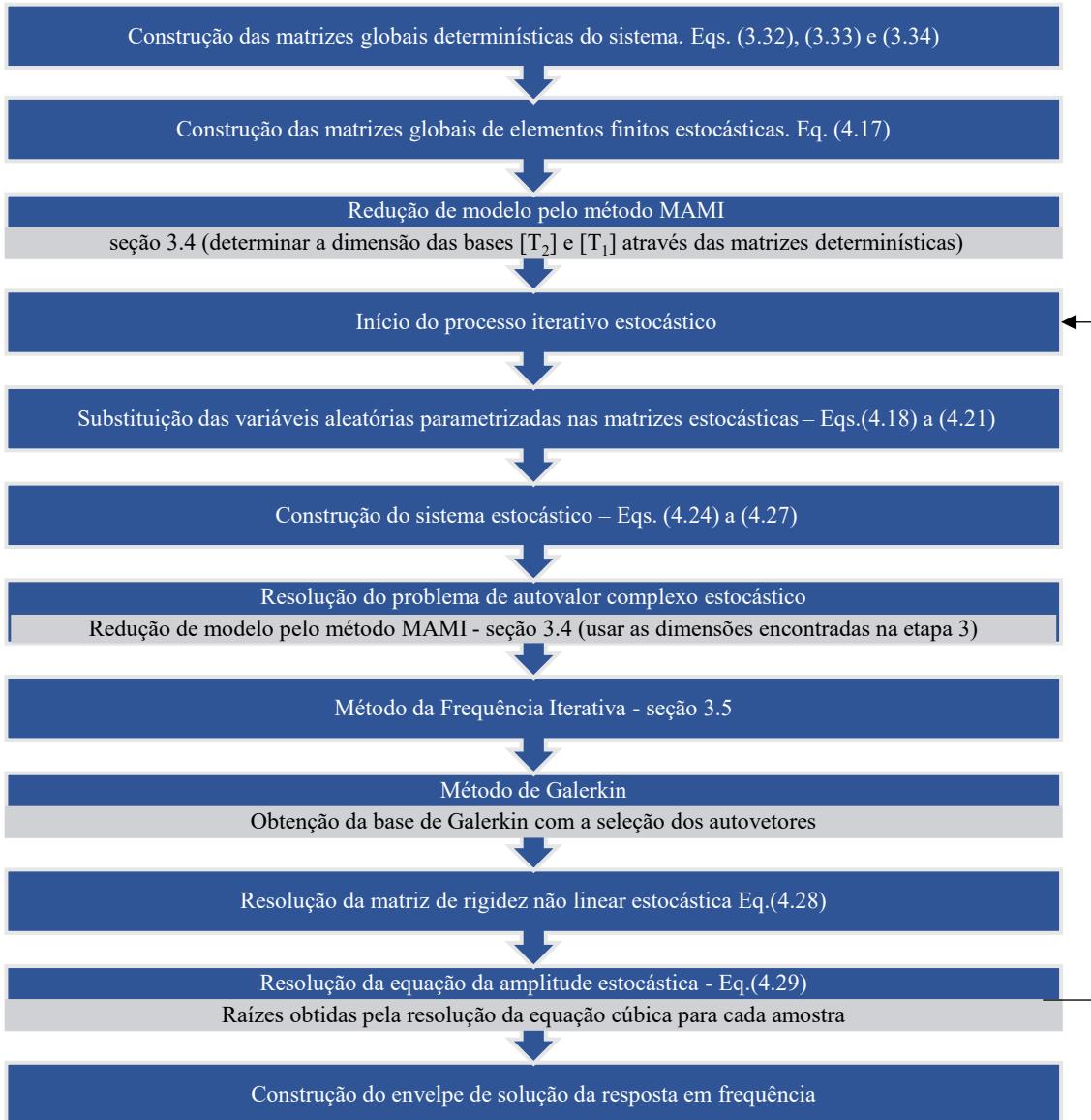


Figura 4.1: Principais etapas para a construção das respostas em frequência da viga sanduíche viscoelástica estocástica não linear.

## CAPÍTULO V

### SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta os resultados das simulações numéricas realizadas para fins de verificação dos procedimentos de modelagem numérico-computacionais que foram propostos para a viga sanduíche sujeita a não linearidades geométricas e incertezas. Para tanto, os resultados obtidos serão confrontados, quando possível, com os correspondentes disponíveis na literatura. Salienta-se que aspectos como o método da frequência iterativa usado para a obtenção da base modal de Galerkin, o método de redução de modelos, bem como o procedimento de obtenção da equação da amplitude que governa as vibrações não lineares do sistema sanduíche para diferentes leis do comportamento do amortecimento viscoelástico são abordados neste capítulo. A influência da escolha da base de Galerkin é um dos parâmetros que influencia nas propriedades de amortecimento e nas respostas do sistema não linear para diferentes níveis de não linearidades. Por fim, são avaliadas as respostas do sistema viscoelástico estocástico não linear para vários níveis de incertezas e não linearidades.

#### 5.1. Método de redução de modelo aplicado ao sistema viscoelástico

Um método de redução de modelos eficiente é aquele que permite obter aproximações aceitáveis com custo computacional menor quando comparado com a execução do modelo completo. Esta seção destina-se a verificar a eficiência e acurácia do método da aproximação modal iterativa (MAMI) proposto neste trabalho para lidar com

problemas não lineares contendo materiais viscoelásticos, conforme visto na seção 3.4, Capítulo 3.

Vale ressaltar que o método da Frequência Iterativa (FI) necessita de  $n$  iterações para a resolução do problema de autovalores complexo e, dependendo da complexidade do modelo de elementos finitos do sistema não linear, pode se tornar um processo caro e às vezes impraticável. Além disso, ao introduzir as incertezas no contexto da modelagem estocástica do sistema viscoelástico não linear, a resolução do problema resultante para uma quantidade  $k$  de amostras eleva ainda mais o custo computacional envolvido no processo de obtenção das respostas aleatórias. Dessa forma, é imprescindível a utilização de um método de redução que seja eficiente e preciso.

Para as simulações decorrentes do processo de redução, os dados geométricos e físicos utilizados para a construção do modelo não linear de elementos finitos são vistos na Tab. 5.1. Já a Tab. 5.2 (BILASSE et al., 2010; KOUTSAWA et al., 2008), apresenta os dados do material viscoelástico ISD112 utilizado nesta aplicação para a temperatura de 20º.

Tabela 5. 1: Característica da viga sanduíche de alumínio/polímero/alumínio

Geométricas	Comprimento [m]	$L = 177,8 \times 10^{-3}$
	Espessura [m]	$h_f = 1,524 \times 10^{-3}$
	Largura [m]	$h_c = 0,127 \times 10^{-3}$
Físicas	Densidade [Kg / m <sup>3</sup> ]	$\rho_f = 2766$
	Módulo de Elasticidade [Pa]	$E_f = 69 \times 10^9$
	Coeficiente de Poisson	$\nu_f = 0,5$

Tabela 5. 2:Dados dos materiais viscoelásticos a serem utilizados.

	Densidade [ $Kg/m^3$ ]	Coeficiente de Poisson
ISD112	$\rho_c = 1600$	$\nu_c = 0,5$
PVB	$\rho_c = 999$	$\nu_c = 0,4$
Constante	$\rho_c = 968,1$	$\nu_c = 0,3$

A partir da análise modal da viga sanduíche viscoelástica no contexto não linear, a Fig. 5.1 mostra a porcentagem de duas medidas como função do número de EFs da malha para verificar a eficiência do método MAMI proposto neste trabalho, para uma tolerância do processo iterativo de redução de  $10^{-5}$ . Neste caso, a viga sanduiche não linear está sujeita a uma força de amplitude de 10N, aplicada em sua extremidade livre para a condição de engastada-livre.

Os resultados foram obtidos utilizando um notebook com processador Intel Core i5, 8GB de Memória Ram e placa de vídeo dedicada de 4GB modelo GeForce GTX 1050.

A curva azul é a porcentagem de redução da dimensão do modelo, demonstrando que a dimensão das matrizes reduzidas pelo MAMI são muito menores que a dimensão do sistema completo.

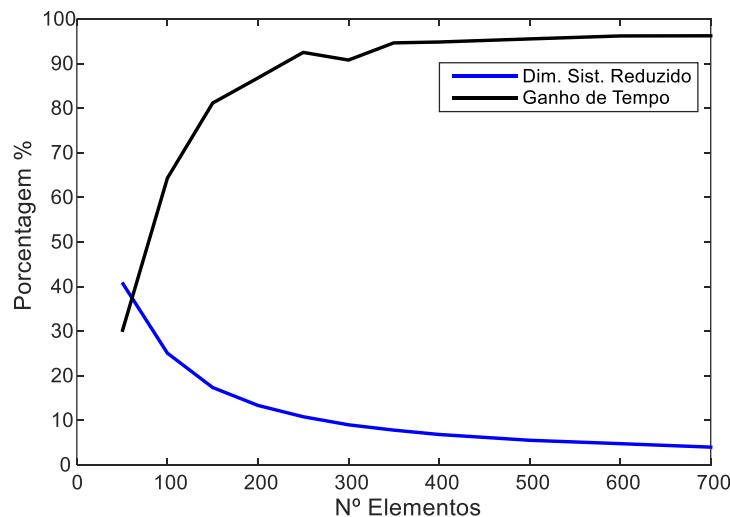


Figura 5. 1:Porcentagem da economia de tempo do método de redução MAMI.

Por exemplo, para uma malha de 200 EFs onde a dimensão das matrizes do sistema completo é da ordem de 600x600 GDLs, após a aplicação do MAMI, essa dimensão se reduz para aproximadamente 10%, ou seja, torna-se 60x60 GDLs. Consequentemente, há uma redução significativa no tempo de cálculo para as respostas, como pode ser visto pela curva preta. Ela representa o ganho de tempo com a utilização do método MAMI. Nota-se que para os mesmos 200 EFs, o ganho de tempo é da ordem de 85%, chegando a uma economia de mais de 90% para valores superiores a 300 EFs.

A redução da dimensão das matrizes e a economia de tempo obtido com o método de redução proposto são resultados muito relevantes. Entretanto, deve-se, quando possível, avaliar a qualidade das aproximações obtidas. A Fig. 5.2 mostra os erros entre as respostas da viga sanduíche viscoelástica em termos das três primeiras frequências naturais e de seus fatores de perda em função do número de elementos finitos. Nota-se que em todos os casos, o método mantém a qualidade da aproximação com um erro absoluto menor  $10^{-3}$ .

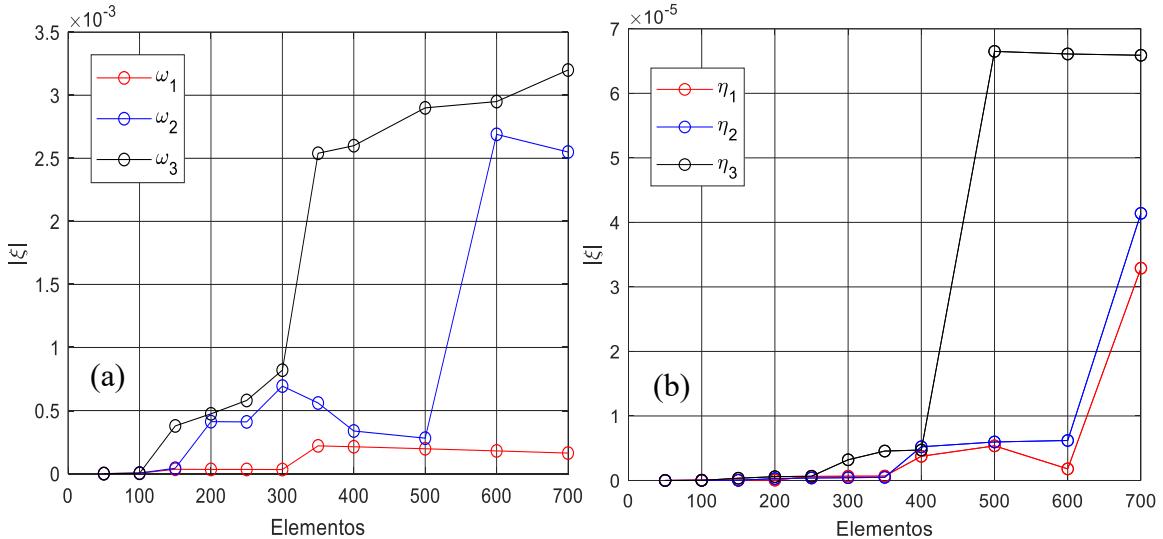


Figura 5. 2: Medidas de erro do modelo utilizando MAMI: (a) frequência (b)fator de perda.

O interesse neste trabalho, é analisar as duas primeiras frequências de ressonância. Para sistemas em que o interesse esta em frequências mais altas, deve-se aumentar a

tolerância do processo iterativo, assim durante a convergência do método, mais autovetores referente as maiores frequências serão adicionados a base de redução.

Isso permite concluir que os resíduos construídos com o processo iterativo complexo proposto neste trabalho contém as informações dos efeitos viscoelásticos. Portanto, nas simulações que seguem, todos os resultados foram gerados empregando-se o método de redução MAMI.

## 5.2. Verificação da parte linear da viga sanduiche viscoelástica

Nesta seção, as respostas da parte linear do modelo de EFs da viga sanduíche não linear apresentado na Seção 3.2 do Capítulo 3, são comparadas com as correspondentes obtidas pelo modelo linear proposto por Lesieutre e Lee (1996). Os autores propõem um elemento de viga sanduíche com 3 nós e 10 GDLs, a saber: nos nós da extremidade tem-se o deslocamento longitudinal,  $u(x)$ , o transversal,  $w(x)$ , o anglo de cisalhamento do viscoelástico,  $\beta(x)$ , e a rotação,  $w_x(x)$ ; para o nó central, que não faz parte da conectividade entre um elemento e outro, tem-se o anglo de cisalhamento,  $\beta(x)$ , e o deslocamento longitudinal,  $u(x)$ .

Neste caso, para a verificação do procedimento de modelagem que foi desenvolvido, foram investigadas diferentes condições de contorno e o problema da dependência em frequência e temperatura do comportamento dinâmico do material viscoelástico. Salienta-se ainda que o método da Frequência Iterativa (FI), descrito na Seção 3.5 do Capítulo 3, foi comparado com os métodos disponíveis na literatura.

Em todos os casos, foram utilizados uma malha regular formada por 300 EFs para o sistema completo, cuja o tempo de simulação era em torno de 90 minutos. Após o processo de redução pelo método MAMI, o tempo de simulação se reduziu para 7 minutos, dependendo do intervalo de frequência de análise e do incremento da frequência. As funções de respostas em frequência (FRFs) são obtidas para uma excitação unitária aplicada

na extremidade livre da viga sanduíche na condição de contorno engastada-livre, e no centro da mesma para as condições bi-engastada e engastada-apoiada.

### 5.2.1. Modelo viscoelástico constante

Uma das maneiras mais utilizadas para representar o comportamento viscoelástico quando suas propriedades como módulo de elasticidade e fator de perda variam pouco com a frequência é o Módulo Complexo Constante, como discutido por Soni (1981). Neste caso, o problema de autovalores torna-se linear, podendo ser resolvido diretamente. Assim, o módulo de Young complexo da camada viscoelástica é aproximado por:

$$E_c(\omega) = E_0(1+i\eta_c) \approx E_0i\eta_c \quad (5.1)$$

onde  $E_c(0) = E_0$  é o módulo retardado e  $\eta_c$  é o fator de perda do núcleo viscoelástico. As propriedades da viga sanduíche utilizadas nesta seção são definidas pela Tab. 5.1.

A Fig. 5.3 mostra os resultados para duas condições de contorno e para dois fatores de perda,  $\eta_c = \{0,5; 1,5\}$ .

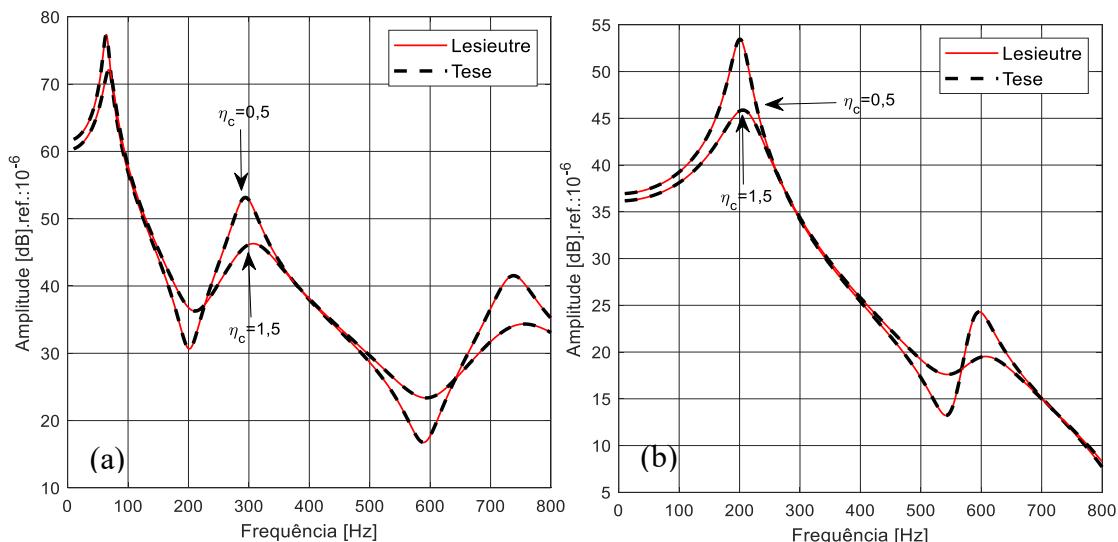


Figura 5. 3: FRF da viga: (a) engastada - livre; (b) engastada – apoiada.

Nota-se claramente uma boa aproximação das respostas da parte linear do modelo de viga sanduíche proposto neste trabalho com o modelo apresentado por Lesieurte e Lee (1996). Neste caso, utilizando-se o modelo proposto com 8 GDLs consegue-se representar de forma satisfatória os efeitos dissipativos do viscoelástico para as condições de contorno.

A boa correlação entre os modelos também é obtida para o método da Frequência Iterativa, quando comparado com os resultados de Soni (1981) e Koutsawa et al., (2008) em termos das três primeiras frequências naturais e seus fatores de perda, como mostrados nas Tabelas 5.3 e 5.4.

Tabela 5. 3: Frequência natural e fator de perda para viga engastada – apoiada.

Resultados da (FI)			Soni (1981)		Koutsawa et al., (2008)	
$\eta_c$	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$
0,5	206,12	0,152	206,13	0,153	206,12	0,153
	598,9	0,087	599,8	0,086	598,9	0,087
	1200,2	0,050	1201,3	0,050	1200,2	0,050
1	209,37	0,242	209,38	0,242	209,37	0,245
	601,56	0,143	601,60	0,142	601,56	0,144
	1201,9	0,084	1202,02	0,083	1201,9	0,084
1,5	215,01	0,335	215,0	0,331	215,01	0,344
	606,62	0,210	606,60	0,209	606,62	0,0212
	1205,1	0,125	1204,9	0,123	1205,1	0,126

A resposta normalizada da viga sanduíche em função de  $A$  (amplitude) e  $h$  (espessura total da viga sanduíche) nas condições engastada-livre e engastada-apoiada para diferentes fatores de perda são apresentadas na Fig. 5.4. Como esperado, quanto maior o fator de perda do material viscoelástico, menor é a amplitude de vibração do sistema.

Tabela 5. 4: Frequência natural e fator de perda para viga engastada – livre.

Resultados Obtidos (FI)			Soni (1981)		Koutsawa et al., (2008)	
$\eta_c$	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$
0,5	65,7	0,147	65,5	0,147	65,9	0,148
	299,9	0,138	299,2	0,232	303,1	0,134
	747	0,091	746,3	0,092	752,3	0,09
1	67,8	0,200	67,5	0,202	67,8	0,204
	304,8	0,215	303,1	0,217	309,1	0,201
	751,5	0,149	749,4	0,150	761,1	0,142
1,5	70,3	0,226	69,8	0,229	70,3	0,232
	312,4	0,290	308,8	0,295	317,4	0,264
	759,7	0,216	754,2	0,219	777,2	0,196

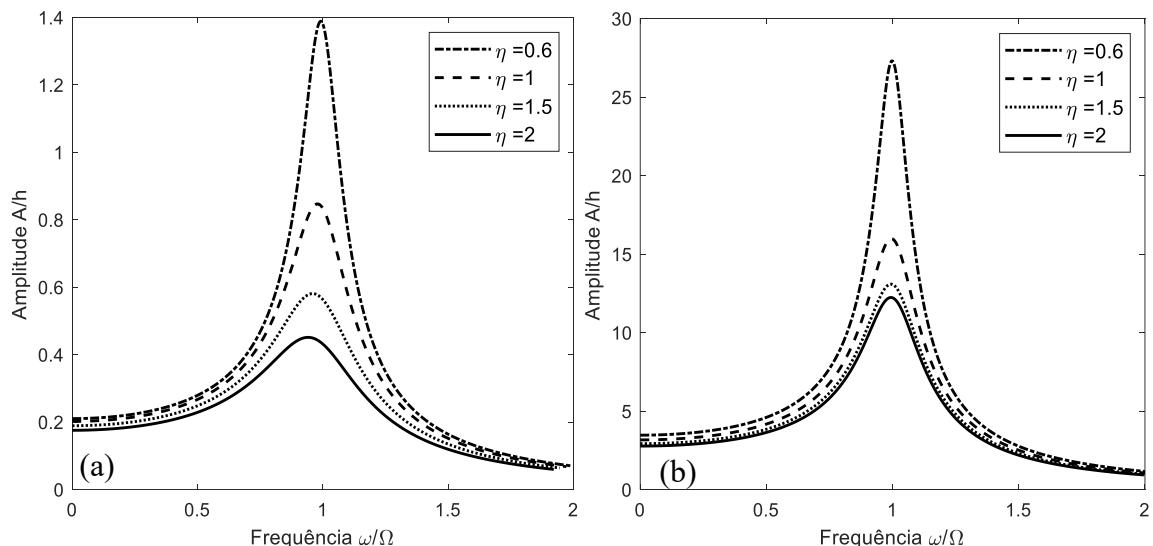


Figura 5. 4: Respostas em frequência da viga sanduíche engastada-apoiada (a) e engastada-livre para vários fatores de perda.

### 5.2.2. Modelo viscoelástico dependente da frequência

Nestas aplicações, os materiais Polivinil de Butiral (PVB) e ISD112 foram utilizados para verificar os efeitos da frequência e temperatura nas respostas do sistema. Para o núcleo de PVB, utiliza-se o modelo de derivadas fracionárias (BAGLEY e TORVIK, 1985) e para o material ISD112, será usado o modelo generalizado de Maxwell, conforme discutido por Trindade et al., (2000) para a temperatura de 20°C, e por Trindade (2006) para a temperatura de 27°C. O módulo complexo utilizado para o material o PVB e para o ISD112 são descritos, respectivamente, pelas Eqs.(5.2) e (5.3).

Os dados das camadas elásticas e as especificações geométricas da viga sanduiche são as mesmas já descritas na Tab. 5.1, e os dados para a camada viscoelástica dos dois materiais são apresentados na Tab. 5.2 e os parâmetros de cada modelo e apresentado na Tab. 5.5.

$$G_c(\omega) = G_\infty + (G_0 - G_\infty) \left[ 1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha} \right]^{-\beta} \quad (5.2)$$

$$G_c(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j \omega}{\omega - i\Lambda_j} \right) \quad (5.3)$$

Tabela 5. 5: Parâmetros do modelo viscoelástico dependente da frequência.

PVB 20º	ISD112 20º	ISD112 27º
$G_0 = 4,79 \times 10^5 (Pa)$	$G_0 = 5,11 \times 10^4 (Pa)$	$G_0 = 5 \times 10^5 (Pa)$
$G_\infty = 2,35 \times 10^8$	$\Delta = [2,816; 13,116; 45,465]$	$\Delta = [0,764; 3,265; 43,284]$
$\tau = 0,3979$		
$\alpha = 0,46$	$\Lambda = [31,12; 446,45; 5.502,53]$	$\Lambda = [468,7; 4.742,4; 71.532,5]$
$\beta = 0,1946$		

As FRFs da Fig. 5.5 mostram uma boa correlação entre o modelo deste trabalho e o proposto por Lesieutre e Lee (1996), para os dois materiais viscoelásticos submetidos à mesma temperatura de operação de 20°C. Essa boa correlação também pode ser vista nos dados das Tabelas 5.6 e 5.7, onde os valores obtidos com o método FI estão sempre próximos dos valores apresentados por Bilasse et al., (2010) utilizando o método do Modo Complexo Exato (MCE), e por Silva et al., (2019), usando o Método Iterativo Inverso. Isso permite verificar o método da FI tanto para leis em que o comportamento viscoelástico é constante, quanto para leis em que o comportamento viscoelástico depende da frequência.

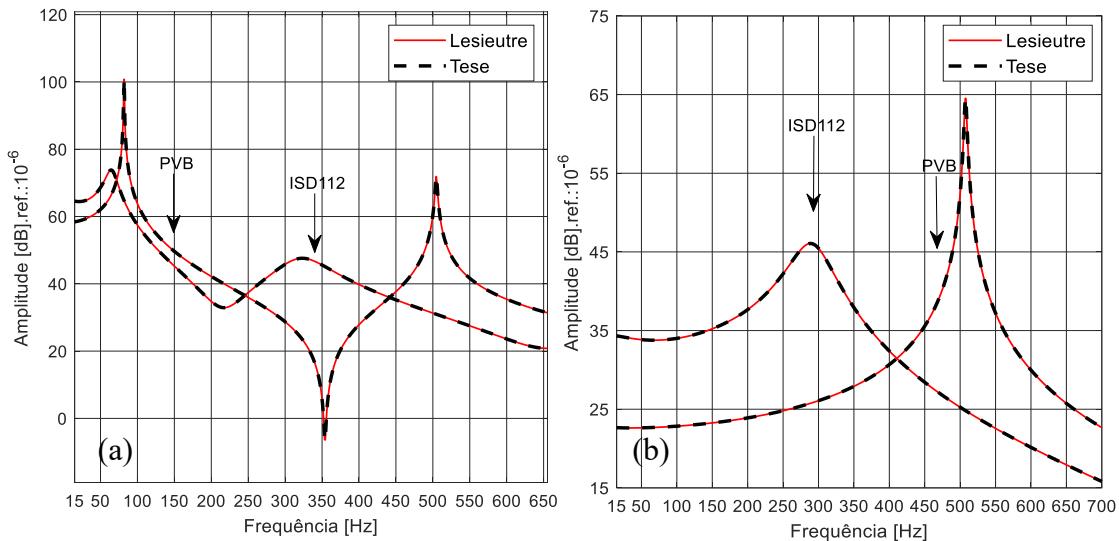


Figura 5.5: FRFs da viga sanduiche: (a) engastada – livre; (b) bi - engastada.

Tabela 5.6: Frequência natural e fator de perda para viga sanduiche com PVB.

	Resultados Obtidos (FI)		Bilasse et al., (2010)		Silva et al., (2019)	
	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$
Engastada - livre	81,80	0,00133	81,79	0,00137	81,76	0,00136
	504,44	0,00501	504,79	0,00543	504,41	0,00516
	1381,7	0,0877	1380,34	0,00938	1381,3	0,0879
Bi - engastada	507,69	0,0075	506,77	0,00803	507,7	0,00752
	1363	0,0116	1358,71	0,0125	1363	0,0117
	2592,8		2581,5	0,0165	2592,8	0,0154

Pela Fig. 5.5 nota-se que o material ISD112 possui maior poder de amortecimento. Essa relação é possível de ser confirmada pelas Tabelas 5.6 e 5.7, através das três primeiras frequências naturais e seus respectivos fatores de perda.

Tabela 5. 7: Frequência natural e fator de perda para viga sanduiche com ISD112.

	Resultados Obtidos (FI)		Bilasse et al., (2010)		Silva et al., (2019)	
	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$	$\omega$ [Hz]	$\eta$
Engastada - livre	65,10	0,2401	63,07	0,1960	65,09	0,2400
	321,28	0,2196	316,54	0,1870	321,28	0,2222
	839,89	0,1700	823,29	0,1600	829,89	0,1712
Bi - engastada	290,57	0,2029	288,07	0,1800	290,57	0,2050
	783,38	0,1452	774,05	0,1360	783,39	0,1460
	1491	0,0782	1482,42	0,8090	1491,2	0,0784

A Fig.5.6 mostra as partes real e imaginária do primeiro modo de vibrar da viga com os dois materiais viscoelásticos e para as diferentes condições de contorno.

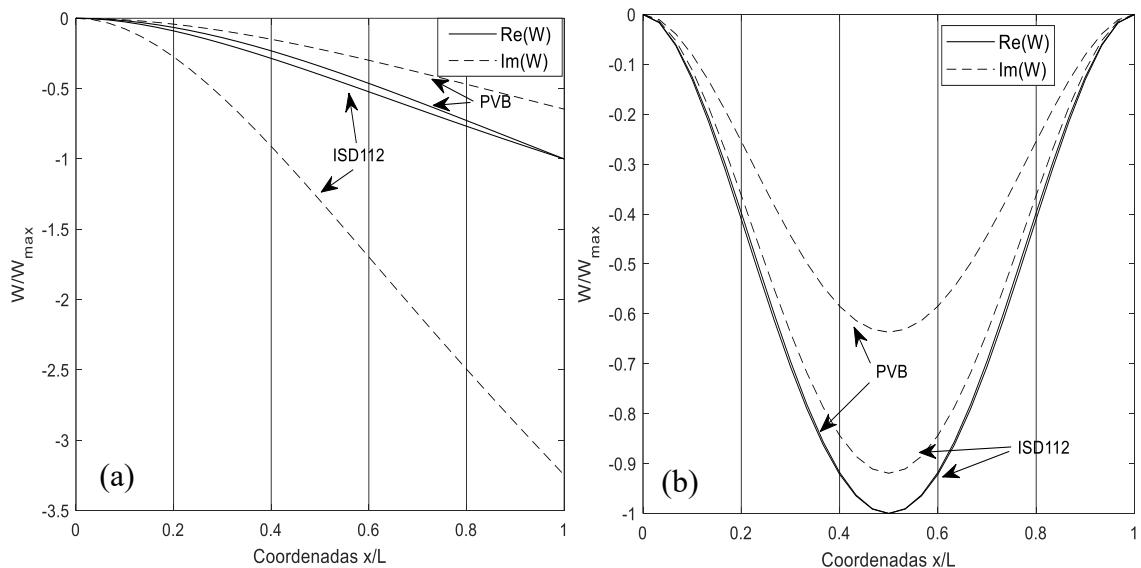


Figura 5. 6: Parte real e imaginária do primeiro modo de vibrar da viga sanduiche para engastada-livre (a) e bi engastada (b).

Como visto, as partes real e imaginária possuem a mesma forma, mas com amplitudes diferentes conforme o modelo viscoelástico. A parte imaginária da amplitude de deflexão para o ISD112 é maior que a do PVB, isso explica porque o fator de perda é maior para o material ISD112. Consequentemente, o amortecimento induzido por ele é maior que o obtido com o material PVB.

A utilização de métodos que desconsideram a matriz de rigidez viscoelástica dependente da frequência [ $K_c$ ] para o cálculo dos autovetores que compõe a base de Galerkin, como o método dos Modos Reais (MR) (UNGAR e KERWIN, 1962; RICKARDS et al., 1993), pode levar à uma subestimação ou superestimação das frequências naturais e dos fatores de amortecimento (BILASSE et al., 2010), principalmente para o caso não linear.

Na Fig. 5.7, para o material ISD112 a 20°C, nota-se claramente a diferença dos resultados obtidos pelo emprego dos métodos MR e do FI, sendo este último, baseado nos modos complexos para o cálculo da base de Galerkin. Observa-se que para as duas condições de contorno analisadas, o MR subestima as amplitudes de vibração do sistema na região de ressonância.

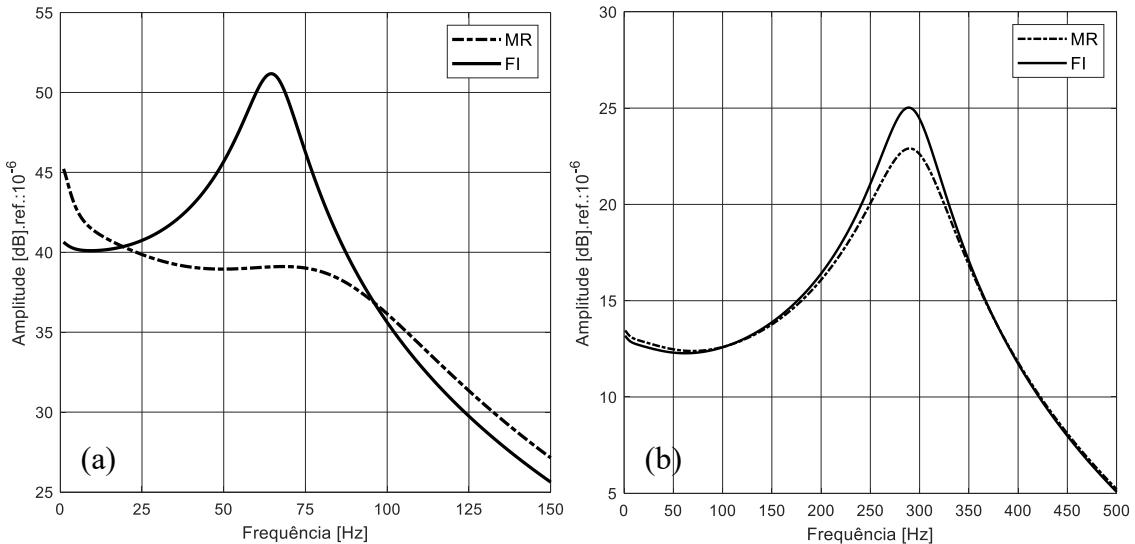


Figura 5.7: Comparação das respostas em frequência da viga sanduíche utilizando os métodos MR e FI para as condições engastada-livre (a) e bi-engastada (b).

Através dos resultados obtidos entre os métodos disponíveis na literatura para o cálculo dos autovalores complexos e o método da Frequência Iterativa (FI) proposto neste trabalho, pode-se concluir que o uso de uma base de Galerkin por meio do Modo Real não é realista, especialmente para o caso de modelos viscoelásticos dependentes da frequência da excitação. Portanto, é importante que, pela eficiência do método numérico desenvolvido aqui, deve-se escolher uma base de Galerkin com modos complexos, baseado no método FI para levar em conta o amortecimento viscoelástico em função da frequência.

### 5.3. Comportamento não linear de viga sanduíche viscoelástica

Nesta seção, os resultados são referentes ao comportamento dinâmico da viga sanduíche sujeita a grandes deslocamentos, como descrito na Seção 3.5.2, Capítulo 3. A inclusão no modelo dos efeitos não lineares devido aos grandes deslocamentos enriquece o modelo, mas o comportamento não linear da viga sanduíche depende de parâmetros como a temperatura de operação do viscoelástico e a frequência da excitação. Desta forma, algumas investigações serão realizadas nesta seção para verificar a influência desses parâmetros ambientais e operacionais nas respostas em frequência da viga sanduíche viscoelástica.

Considera-se então os dados da Tab. 5.1 e 5.2 para o material ISD112 operando a 27°C, para uma viga sanduíche engastada – livre sujeita a uma força de excitação harmônica de 10N aplicada em sua extremidade livre.

A Fig. 5.8 apresenta a resposta em frequência para o modelo não linear. É possível observar claramente a resposta não linear para o primeiro modo de ressonância. Para as condições de operação e ambientais utilizadas nesta aplicação, nota-se uma inclinação para a direita do primeiro modo previsto pelo modelo não linear, efeito este conhecido como *hardening* (enrijecimento) que propicia o acontecimento do fenômeno do salto, que é visualizado como uma mudança abrupta na amplitude da curva resposta em frequência (WORDEN, TOMLINSON, 2001), nesse caso ocorre uma variação da frequência natural decorrente do efeito não linear (KERSCHEN et al., 2006). Isto significa que há um ganho

de rigidez na estrutura com o aumento da frequência de excitação. Já na segunda frequência, a modelagem não linear apresenta uma resposta semelhante à linear.

O efeito do amortecimento devido à presença do material viscoelástico para o caso do modelo não linear também ocorre para o material viscoelástico de PVB, conforme demonstra a Fig. 5.9.

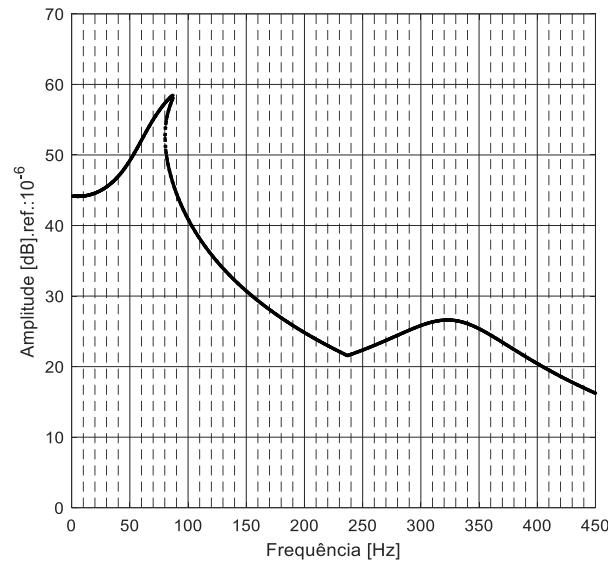


Figura 5. 8: Resposta em frequência do sistema viscoelásticos não linear com ISD112 a 27°

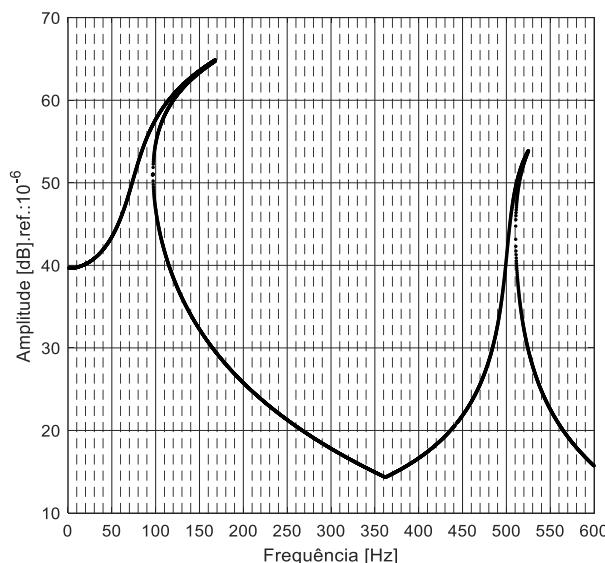


Figura 5. 9:Resposta em frequência do sistema viscoelásticos não linear com PVB

Entretanto, para a viga sanduíche menos amortecida com o uso do PVB a 20°C, sob as mesmas condições de operação da viga com ISD112, nota-se o aparecimento do efeito *hardening* também no segundo pico de ressonância. Neste caso, o aumento da influência da rigidez não linear do sistema viscoelástico é oriundo do aumento da influência das não linearidades geométricas associadas ao acoplamento das deformações, conforme apresentado no Capítulo 3.

Salienta-se novamente que as não linearidades geométricas neste tipo de sistema são devidas ao acoplamento das deformações. Portanto, é de se esperar que para níveis maiores de força, o efeito *hardening*, acompanhado pelo fenômeno conhecido como salto, fique cada vez mais evidente na região de ressonância.

### 5.3.1. Influência da amplitude da força externa

Nesta seção, o objetivo é verificar a influência do aumento da amplitude da força de excitação externa nas respostas em frequência da viga sanduíche viscoelástica com ISD112 a 27°. Nas simulações que seguem, são considerados os dados das Tabelas 5.1 e 5.2, onde a viga está engastada-livre e sujeita a uma força harmônica de amplitude variando de 1 N a 15 N aplicada à sua extremidade livre.

Na Fig. 5.10 é possível verificar as amplitudes das respostas em frequência obtidas do modelo não linear, para várias amplitudes da força. Nota-se um distanciamento do primeiro pico de ressonância previsto pelo modelo a partir da amplitude de 10 N. Além disso, nota-se que o efeito *hardening* se torna mais pronunciado à medida em que a amplitude da força aumenta. Isto é devido ao aumento dos efeitos das não linearidades geométricas. Quando se tem um sistema em regime linear de movimento, as frequências naturais se mantêm constantes. Já para o regime não linear, o que se observa é, a partir de um determinado nível de excitação, as frequências naturais sofrem alterações.

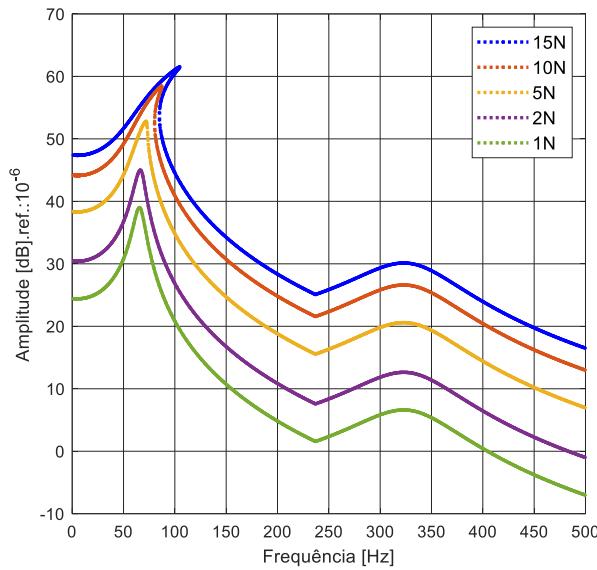


Figura 5. 10: Respostas em frequência do sistemas não linear com ISD112 a 27°C.

A região onde acontece o salto é melhor observada na Fig. (5.11), que é determinada traçando-se uma reta entre o pico maior no ponto A da frequência de ressonância até o pico menor no ponto B da frequência de ressonância. Nota-se que para uma mesma frequência, obtem-se duas amplitudes diferentes, característica esta, de um sistema não linear.

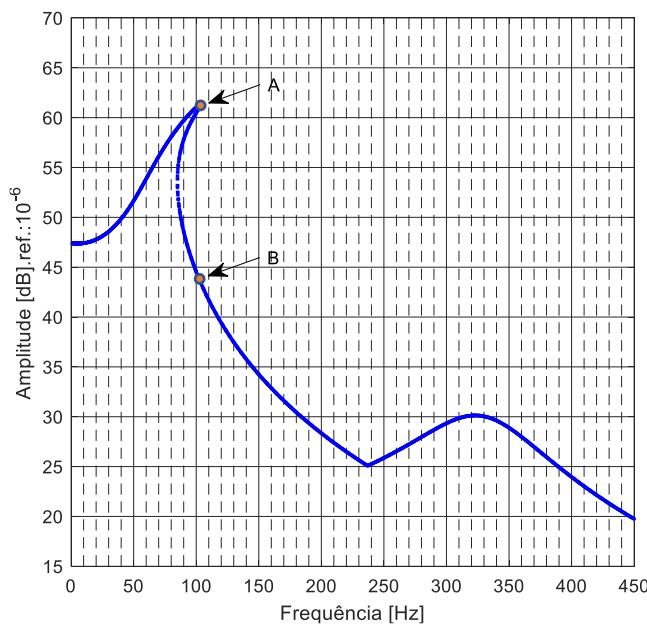


Figura 5. 11: Resposta em frequência da viga sanduíche em grande deslocamento para amplitude da força de 15 N.

A região do salto, é mais facilmente vista devido ao procedimento numérico utilizado na modelagem não linear, através do balanço harmônico e do método de Galerkin, por meio da combinação das raízes obtidas pela resolução da equação cúbica (3.38). Essa região seria dificilmente capturada em ensaios experimentais. Normalmente, são realizadas varredura senoidais em ordem crescente e decrescente para a frequência de excitação da viga. Nesse caso, o que se observa são saltos diferentes para a varredura em ordem crescente e decrescente, isto implica que há uma região de valores de frequência em que múltiplas soluções de equilíbrio estáveis são encontradas.

### 5.3.2. Influência da temperatura de operação do material viscoelástico

Como discutido anteriormente, a temperatura de operação do material viscoelástico é um dos parâmetros que mais influencia o comportamento dinâmico de sistemas contendo este tipo de material, como já discutido por vários autores na literatura aberta (CUNHA-FILHO et al., 2016; De LIMA et al., 2015; De LIMA et al., 2006; TRINDADE et al., 2000; LESIEUTRE et al., 1997). Entretanto, pouco se tem feito quanto à modelagem numérico-computacional e verificação experimental da sua influência no comportamento dinâmico de sistemas viscoelásticos em grandes deslocamentos. O que motiva esta aplicação.

Neste caso, a função módulo complexo descrito na Eq.(5.4) para o material ISD112 é utilizada em conjunto com o Princípio da Superposição Frequência–Temperatura (PSFT) (De LIMA et al., 2016), conforme discutido no Capítulo 2, válida para as faixas de temperatura e frequência de  $210K \leq T \leq 360K$  e  $1,0 \leq \omega \leq 10^6 Hz$ , respectivamente.

$$G(\omega_r) = 0.4307 + \frac{1200}{1 + 3.24 \times \left( \frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.18} + \left( \frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.6847}} [MPa] \quad (5.4)$$

onde  $\alpha(T) = 10^{\left(-3758.4 \times (T^{-1} - 0.00345) - 225.06 \times \log(0.00345 \times T) + 0.23273 \times (T - 290)\right)}$  é o fator de deslocamento em temperatura e  $\omega_r = \alpha(T)\omega$  é a frequência reduzida (NASHIF et al., 1985).

A Fig. 5.12 apresenta o fator de perda e o módulo de armazenamento do material ISD112 em função da temperatura de operação entre 0°C e 150°C, onde é observado a região de 10 °C a 40 °C de maior influência da temperatura no módulo de armazenamento e no fator de perda do material. Nas simulações que seguem será considerada esta região.

Especificamente para os resultados apresentados pela Fig. 5.13, a espessura da camada viscoelástica foi de  $h_c = 1.07 \times 10^{-3}$ , isso representa uma razão de  $h_c / h_f = 0,7$ .

Quanto mais próximo de 1 essa razão, mais efeito de amortecimento introduzido pelo material viscoelástico na estrutura poderá ser observado. Pela Fig. 5.13 é fácil verificar que o comportamento do sistema se torna mais amortecido e com menos efeitos das não linearidades geométricas para valores de temperaturas entre 10°C e 20°C. Entretanto, para valores de temperatura acima de 30 °C, nota-se claramente um aumento dos efeitos das não linearidades geométricas, portanto, do efeito *hardening*. Isto pode ser explicado pelo fato de que, com o aumento da temperatura, por exemplo, para 40°C, o módulo de armazenamento já está próximo do seu valor mínimo e o fator de perda continua em queda acentuada, como visto na Fig. 5.12.

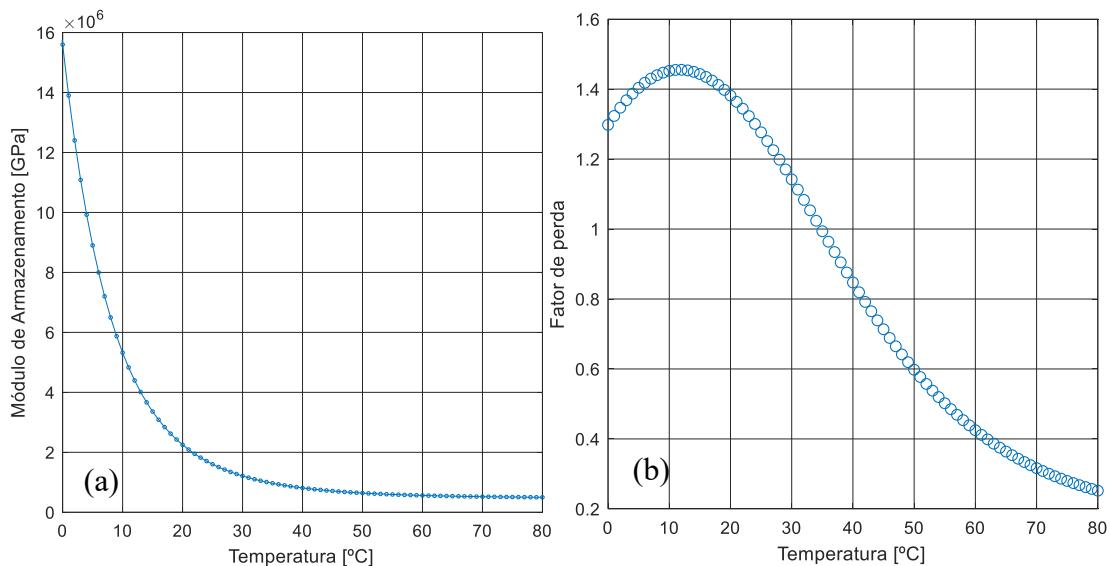


Figura 5. 12: Variação do fator de perda (a) e do módulo de armazenamento (b) do material ISD112 em função da temperatura.

Desta forma, há uma perda de eficiência do material viscoelástico em termos da atenuação das vibrações do sistema e, como efeito, as não linearidades geométricas se tornam mais acentuadas, fazendo com que o pico e a frequência de ressonância cheguem a níveis bastante elevados.

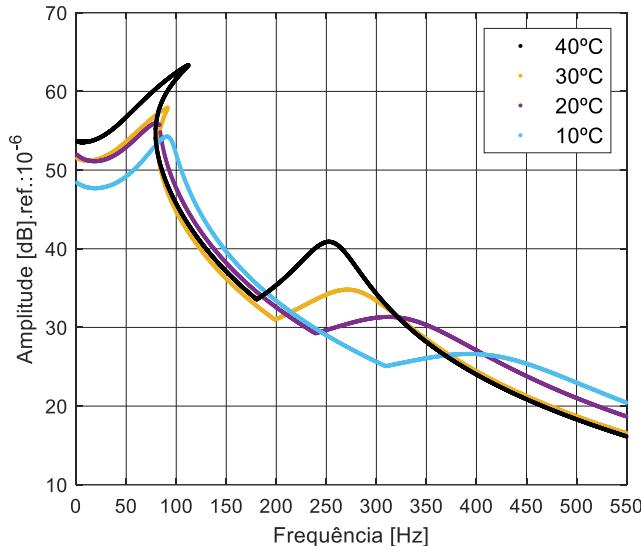


Figura 5. 13: Respostas em frequência da viga sanduíche não linear para várias temperaturas de operação do material viscoelástico ISD112.

#### 5.4. Influência das incertezas nas respostas do sistema viscoelástico não linear

Nesta seção, são mostrados os resultados das simulações realizadas com o modelo de viga sanduíche estocástico não linear para investigar a influência das incertezas em alguns parâmetros do sistema nas suas respostas em frequência. A modelagem estocástica utilizada neste trabalho via emprego do método KL foi apresentada no Capítulo 4. Os dados utilizados correspondem aos apresentados pela Tab. 5.1 a uma força com amplitude de 10N para a condição de bi-engastamento, cuja a função do módulo completo foi apresentada na Eq.(5.4) para a temperatura de 30°C.

É importante destacar que a análise envolvendo incertezas é um passo importante para representar qualquer sistema diante das diferentes condições de operação e geometria que acontece em situações mais realísticas de interesse prático (RITTO et al., 2008).

Neste caso, a etapa de parametrização do modelo de viga sanduíche não linear para tratar as variáveis incertas do problema como desenvolvido neste trabalho (ver Seção 4.3, Capítulo 4), é uma etapa importante do processo de modelagem do sistema não linear empregando o método dos elementos finitos estocásticos. Isto evita a atualização das matrizes estocásticas no sistema não linear no contexto da análise de incertezas, reduzindo também o custo computacional.

Mesmo assim, o esforço computacional de análises numéricas de sistemas na presença de incertezas é considerável, mesmo para problemas acadêmicos. Isto é devido à quantidade de amostras normalmente requerida para se obter a convergência das respostas aleatórias do modelo estocástico em função das variáveis incertas. Além, é claro, da própria complexidade do modelo do sistema em termos de sua dimensão (número de GDLs), viscoelasticidade e não linearidades. Para contornar este problema e deixar o processo de avaliação das incertezas com um tempo computacional aceitável, além da parametrização já discutida, é importante integrar ao modelo de elementos finitos estocástico o método de redução MAMI. Para as simulações seguintes, utilizaou-se uma malha de 300 elementos finitos para o sistema completo, com o tempo de simulação para as 500 amostras variando entre 5000 a 6000 minutos. Já com o sistema reduzido, passou-se a obter um tempo de simulação de 490 a 620 minutos, considerando um passo em frequência de 0.5 Hz para a resolução da equação não linear (4.29).

Da literatura (De LIMA et al., 2006), sabe-se que as espessuras das camadas e a temperatura de operação exercem forte influência no comportamento de um sistema viscoelástico. Entretanto, a temperatura é considerada o parâmetro de maior influência nas propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos comumente usados em aplicações práticas, além de ser um parâmetro de difícil controle (NASHIF et al., 1985).

Nesse caso, em um primeiro momento, assume-se que as propriedades geométricas da viga como espessuras das camadas sejam consideradas como variáveis aleatórias. Na sequência, será considerada como variável aleatória a amplitude da excitação externa e a temperatura de operação do viscoelástico, já que ela influencia significativamente na resposta do sistema viscoelástico não linear.

O próximo passo é determinar o número de termos a serem utilizados na expansão de KL. Segundo recomendações de Briend (2017), De Lima, Rade e Bohuaddi (2010) e

Ghanem e Spanos (1991), para problemas de vigas sanduíches lineares de características similares à utilizada neste trabalho, optou-se pela utilização de dez termos na composição da série. Além disso, é utilizado um total de 500 amostras obtidas pelo HCL visto que, estudos realizados por Ribeiro et al., (2020) e Gonçalves et al., (2019), demonstraram que a convergência foi atingida com amostras menores. Foi adotada uma amostragem de distribuição Gaussiana com confiança de 95%, ou seja, pode-se afirmar com 95% de probabilidade que o valor esperado estará contido nesse intervalo e nos envelopes das respostas em frequência. As variáveis aleatórias a serem consideradas nas simulações são definidas na Tabela 5.8 com os seus respectivos desvios padrões. Para as variáveis geométricas adotou-se os desvios de 5% e 10% dos valores de referência. Nesse caso, 5% refere-se a valores aceitáveis de variabilidade durante o processo de fabricação (SETTER, 2002), e 10% como sendo valores extrapolados que acarretariam em uma perturbação, ou em casos extremos, em uma modificação estrutural (LIMA Jr., 1999).

Para as variáveis de temperatura e amplitude da força, os fatores externos tornam-as mais difíceis de serem controladas, por isso, são utilizados os desvios de 10% para os casos considerados típicos de operação, e 20% para os casos atípicos de operação, sendo importante ressaltar, que estes valores devem ser revisados dependendo do sistema e das circunstâncias de operação.

Tabela 5. 8: Variáveis incertas e desvios padrões.

Cenário	Nível de incerteza			
	$h_f$	$h_c$	$T$	$F$
<b>1</b>	5%	--	--	--
<b>2</b>	10%	--	--	--
<b>3</b>	--	5%	--	--
<b>4</b>	--	10%	--	--
<b>5</b>	--	--	10%	--
<b>6</b>	--	--	20%	--
<b>7</b>	--	--	--	10%
<b>8</b>	--	--	--	20%

Para cada cenário de teste, os envelopes das respostas em frequência do sistema viscoelástico estocástico não linear são construídos, como os mostrados na Fig. 5.14 para os cenários 1 e 2. Nota-se a influência da espessura das faces elásticas sobre os envelopes das respostas aleatórias do sistema. Há um aumento dos efeitos da não linearidade geométrica com o aumento do desvio padrão dos parâmetros. Outro aspecto importante é que a curva de referência está dentro dos envelopes de solução, demonstrando a representatividade da modelagem determinística de viga sanduíche não linear.

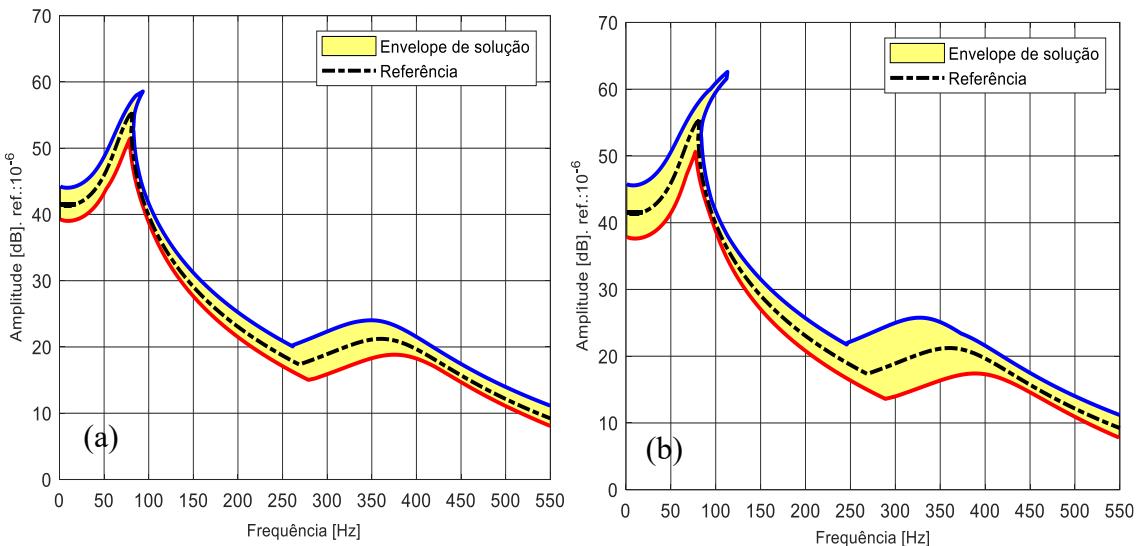


Figura 5. 14: Incerteza nas espessuras das faces elásticas: (a)5% (b)10%.

A Fig. 5.15 representa as dispersões das respostas referentes à influência da incerteza na camada viscoelástica.

Os níveis de dispersão apresentados para as respostas dos cenários 3 e 4 mostrados na Fig. 5.15 demonstram que para os dados levados em consideração, a influência causada pela espessura da camada viscoelástica não gera grandes dispersões em torno da curva de referência, como acontece aos efeitos causados pelas faces elásticas. Vale ressaltar, que a razão entre a camada viscoelástica e a face elástica é de 0,08 (ver Tab. 5.1) e a medida que essa razão tende a aumentar, o efeito causado pela modelagem estocástica também tende a ser mais significativo.

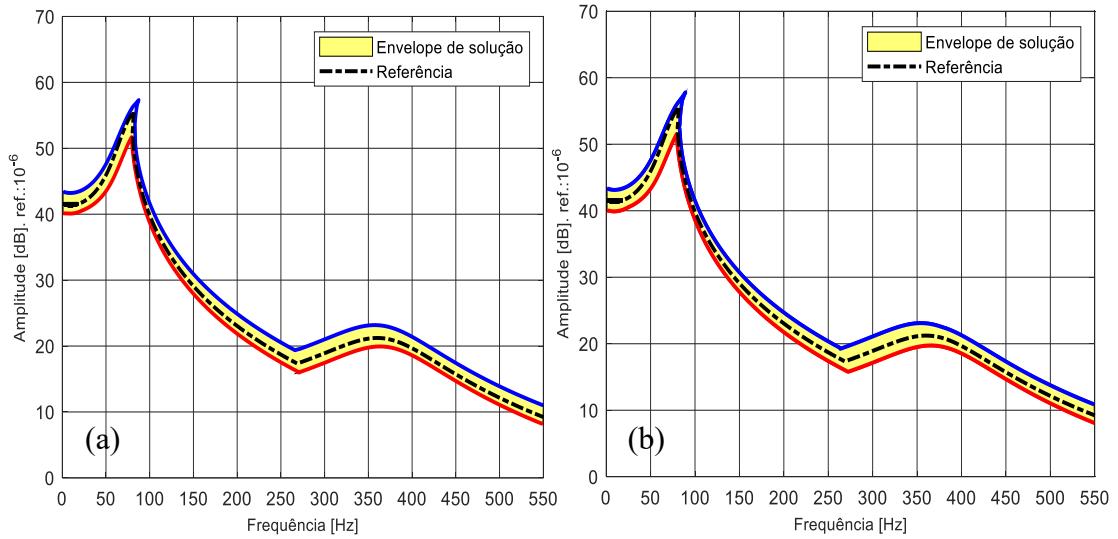


Figura 5. 15: Incerteza na espessura da camada viscoelástica: (a) 5% (b) 10%.

Já a Fig. 5.16 mostra a análise de convergência realizada para o cenário 2, visto que o envelope gerado para este cenário foi o mais amplo na região do primeiro modo de ressonância, sendo considerado o cenário de referência para a avaliação da convergência para os parâmetros geométricos. Nota-se que o número utilizado de 500 amostras que foi utilizado em todos os cenários garante uma boa convergência nos resultados.

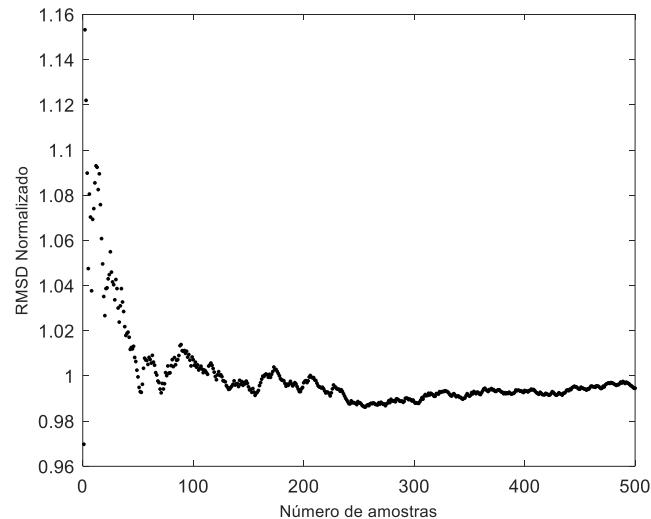


Figura 5. 16: Análise de convergência para o cenário 2.

Os resultados dos cenários 5 e 6 são apresentados na Fig. 5.17 e demonstram que com o aumento do nível de dispersão ao redor da temperatura, o pico da amplitude de ressonância também eleva, e a não linearidade se torne mais evidente, com o favorecimento do fenômeno do salto, evidenciando que a temperatura é um dos fatores mais influentes na resposta não linear do sistema estocástico.

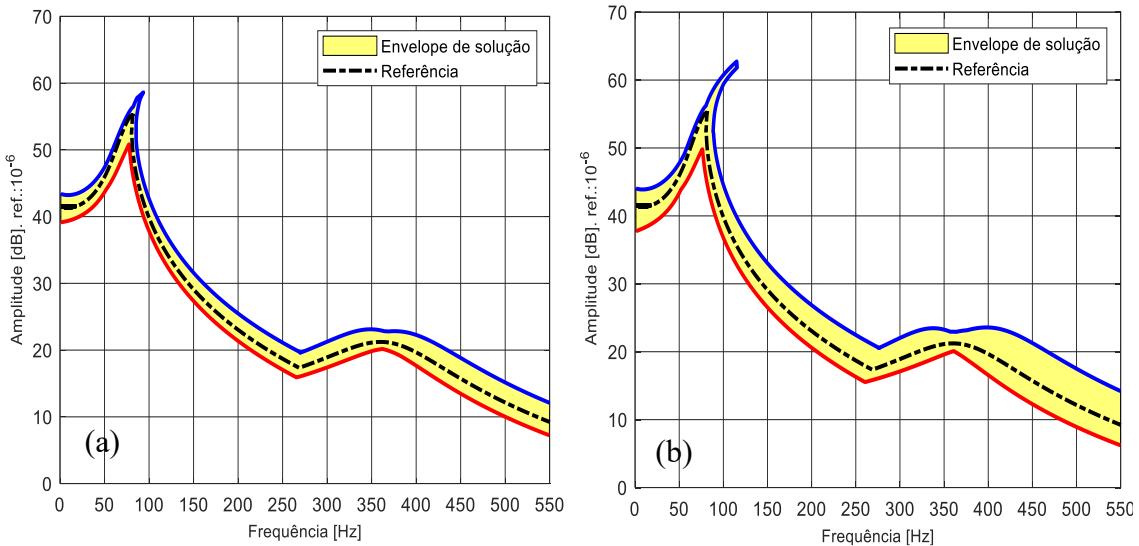


Figura 5. 17: Incerteza na temperatura de operação do material viscoelástico: (a) 10% (b) 20%.

Os resultados dos cenários 7 e 8 são mostrados na Fig. 5.18 para a incerteza na amplitude da força de excitação, que foi previamente discutida na Seção 5.3. Para os dados levados em consideração, mesmo a amplitude da força sendo um parâmetro de difícil controle, os envelopes de solução não apresentaram grandes distorções em torno da curva de referência, e o efeito da não linearidade geométrica aparece mais de forma menos evidente, diferentes de outros cenários.

Outro aspecto importante a ser observado é que para ambos os níveis de dispersão investigados neste estudo, a resposta em frequência do sistema não linear de referência para cada cenário de teste está contida nos extremos do intervalo de confiança (máximos e mínimos das amplitudes). Novamente, isto demonstra a capacidade da modelagem por elementos finitos do sistema não linear estocástica em representar a variabilidade das respostas aleatórias para estes níveis de perturbação.

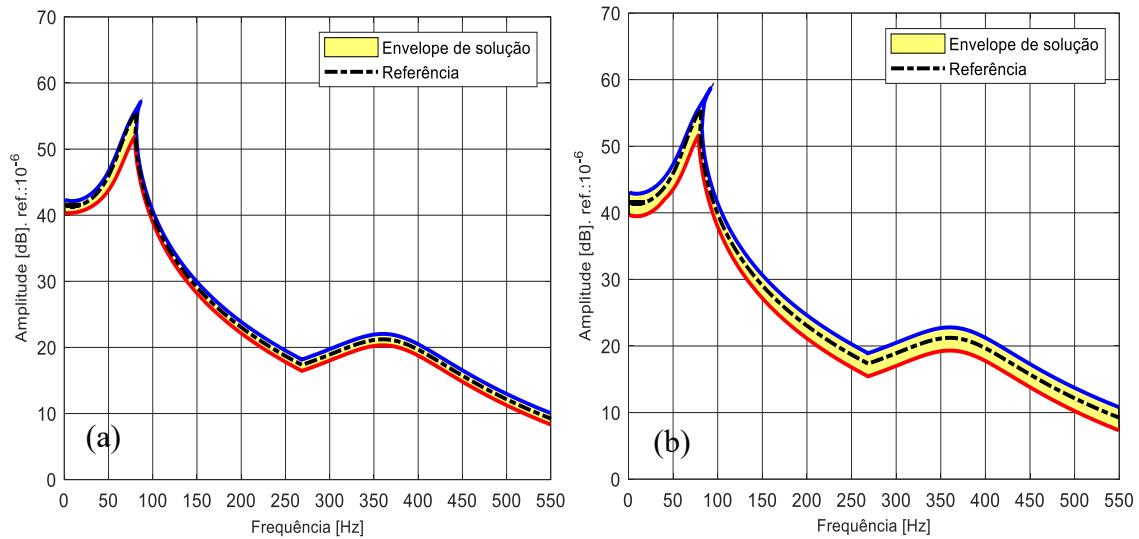


Figura 5.18: Incerteza na força de excitação:(a) 10% (b) 20%.

Por fim, a Fig. 5.19 mostra a análise de convergência realizada para o cenário 6, já que o intervalo de confiança obtido para este cenário foi o mais amplo. Dessa forma ele foi considerado dentro dos cenários para os parâmetros físicos como sendo o de referência para a avaliação da convergência com um número de 500 amostras.

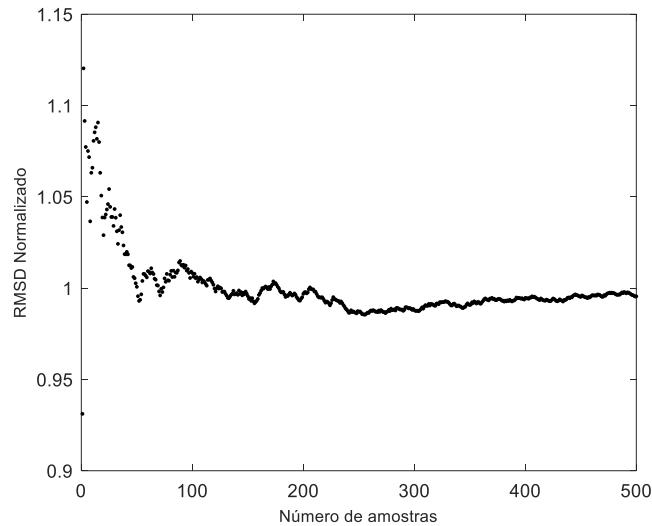


Figura 5.19:Análise de convergência via RMSD normalizado para o cenário 6

De acordo com os resultados obtidos, pode-se concluir que a metodologia proposta neste trabalho é adequada para lidar com situações envolvendo a presença de incertezas

nas variáveis de projeto do sistema viscoelástico em grandes deslocamentos, como forma de obter respostas dinâmicas mais realísticos de interesse prático para o controle passivo de vibrações e ruído.

De uma maneira geral, pôde-se perceber que todas as variáveis incertas analisadas apresentam resultados que demostram a sua influência no comportamento não linear do sistema. Para o caso da espessura das faces elásticas e da temperatura de operação do material viscoelástico, a medida que os níveis de incerteza aumentam, a variabilidade da resposta em frequência também aumenta, de uma maneira mais destacada do que acontece para as variáveis de força e espessura da camada viscoelástica. Então, pode-se afirmar que para modelos cujas os parâmetros físicos e geométricos se assemelham ao modelo de viga sanduiche utilizado, a influência da espessura da camada viscoelástica e da força pouco influenciarão nas respostas não lineares do sistema. Para sistemas com características diferentes, essas influências não devem ser descartadas de um estudo estocástico, deve-se levar em consideração os dados físicos e geométricos de cada sistema, bem como sua condição de operação.

Portanto, a influência das dispersões nas respostas não lineares mostradas nas figuras 5.14 a 5.18, revelam que é importante saber onde as fontes de incertezas estão concentradas no sistema, para melhorar sua previsibilidade para situações mais realistas.

## CAPÍTULO VI

### AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DE UMA VIGA SANDUÍCHE SUJEITA A GRANDES DESLOCAMENTOS

Neste capítulo é apresentado um estudo experimental de uma viga tratada com camada restrita passiva sujeita a grandes deslocamentos. O interesse é avaliar experimentalmente a influência da amplitude da excitação externa e da temperatura de operação do material viscoelástico na resposta em frequência do sistema viscoelástico não linear. Além disso, os resultados experimentais são confrontados com os correspondentes obtidos pelo modelo numérico-computacional desenvolvido neste trabalho. Para considerar a variabilidade do sistema no contexto experimental, a análise estocástica do sistema viscoelástico não linear devido aos grandes deslocamentos foi realizada para encontrar o envelope de solução de cada experimento. É importante ressaltar que todos os testes foram realizados dentro de uma câmara térmica com controle rigoroso de temperatura.

#### 6.1. Procedimento experimental

Para compreender melhor o comportamento dinâmico de um sistema submetido a condições gerais de carregamento, as não linearidades envolvidas devem ser investigadas através de procedimentos experimentais ou por meio de modelos numéricos que sejam confiáveis e capazes de representar os fenômenos presentes no sistema. Borges (2008) destaca que a presença de não linearidades em estruturas pode gerar fenômenos físicos bastante interessantes como saltos, sub- e super-harmônicos, interação entre modos e caos.

Segundo Nayfeh e Mook (2004), as características de uma curva de função de resposta em frequência (FRF) em sistemas lineares apresentam picos de grandes magnitudes em torno das frequências naturais do sistema. Essas características também podem ser observadas para uma resposta em frequência não linear, porém é importante destacar os aspectos que as diferenciam, como por exemplo: os picos de ressonância de um sistema não linear pode ocorrer fora dos modos de vibração não lineares (ressonâncias super-harmônicas); os picos de ressonância podem ter influência de várias órbitas periódicas para uma única frequência de excitação; a resposta em frequência pode conter respostas periódicas instáveis e a lei da superposição não se aplica para os sistemas não lineares, nesses casos, tem-se uma resposta em frequência, e não mais uma função.

Nesse sentido, as respostas temporais podem ser utilizadas para se obter as amplitudes das respostas em frequência experimentais de um sistema não linear, através de varreduras senoidais. A amplitude da força deve ser mantida constante, mas a sua frequência deve ser alterada gradualmente na faixa de interesse. O que acontece, é que para algumas faixas de frequência, o sistema pode apresentar diferentes órbitas de energia, e o aumento ou a diminuição da frequência de excitação pode fazer com que o sistema salte para uma órbita de maior energia para outra de menor energia. (CARRELLA; EWINS, 2011).

Em respostas experimentais, a dificuldade em realizar um engaste perfeito, como realizado na análise numérico-computacional, pode contribuir para o aumento/redução do amortecimento do sistema e produzir diferenças entre os resultados. Além disso, pequenos erros relativos à colagem perfeita entre as camadas que forma o sanduíche e imperfeições geométricas das próprias camadas também podem contribuir para as diferenças observadas entre as respostas (NAYFEH E MOOK, 2004; KOVAC et al., 1971).

Para a realização dos ensaios experimentais de uma viga sanduíche viscoelástica em grandes deslocamentos, um código para a varredura senoidal foi desenvolvido em ambiente de programação LabView®, conforme ilustrado na Fig. 6.1. A estratégia consiste em aumentar / diminuir a frequência de excitação passo a passo, enquanto a sua amplitude e a temperatura de operação são mantidas constantes para todas as frequências. Para controlar a temperatura de operação, a viga sanduíche foi montada dentro de uma câmara ambiental, modelo 877-GO-ESPEC. Então, para uma amplitude específica da força e para cada valor

de frequência, a operação de integração do sinal da aceleração ( $x_i$ ) para a obtenção da amplitude  $X$  do deslocamento em regime permanente é realizada, conforme a Eq. (6.1), onde  $N$  é o número de pontos do sinal adquirido.

$$X = \sqrt{\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (6.1)$$

Para todos os testes, uma excitação harmônica é aplicada por um Shaker, modelo TMS® K2007E0. Um conector de nylon é responsável por fazer a conexão entre o shaker e o transdutor de força modelo 208C02 da PCB®, que foi preso à extremidade livre da viga. As respostas do sistema são obtidas por meio de um acelerômetro, modelo 352C22 PCB®, colocado no mesmo ponto que o transdutor de força. Para aquisição e processamento dos sinais, um código LabView® foi desenvolvido para gerar o sinal de excitação e obter as respostas de aceleração através dos sistemas *National Instrument NI® 9269* e *NI® 9233*, respectivamente, conforme ilustrado na Fig. 6.1. O sistema aguarda pelo menos 10 s para que a resposta atinja seu estado estacionário antes de gravada / exportada para outro código em MATLAB®, para a construção das curvas de frequência versus amplitude. Para evitar perturbações, foi implementado um controle para monitorar / controlar a amplitude da força de excitação durante os ensaios. Esse controle é realizado aumentando e diminuindo a voltagem enviada ao Shaker, e também restringe a uma quantidade  $n_F$  de iterações, para que o tempo da varredura em frequência não fique mais oneroso.

O material viscoelástico utilizado nos ensaios foi o ISD112 da 3M® disponível no LMEst/UFU, com o módulo complexo definido pela Eq.(5.4). Foram utilizadas as seguintes dimensões geométricas da viga sanduíche: 19 cm de comprimento, 2,8 cm de largura e todas as três camadas possuem 1 cm de espessura.

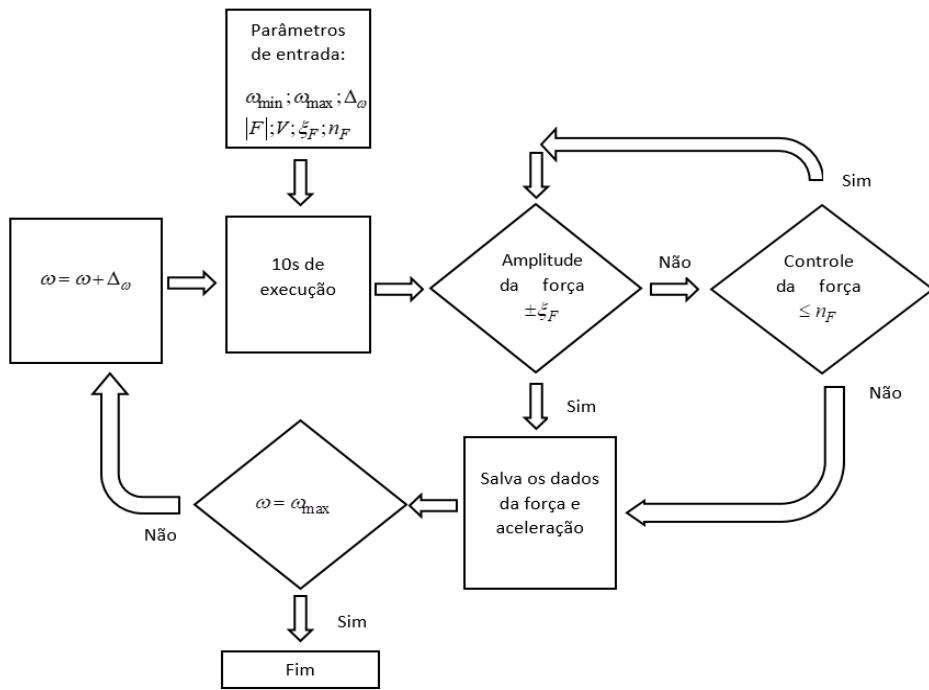


Figura 6. 1:Fluxograma das principais etapas do código em LabView.

onde  $\omega_{\min}; \omega_{\max}; \Delta\omega; |F|; V; \xi_F; n_F$  são respectivamente as frequências mínima e máxima utilizadas durante a varredura, o passo em frequência, a amplitude da força, a voltagem inicial, a tolerância estabelecida e o número máximo de iterações para o controle da força.

A Fig. 6.2 apresenta a vista do experimento com a viga sanduíche, condições de contorno e equipamentos/materiais utilizados para a realização dos ensaios experimentais.

Pela figura, os equipamentos utilizados correspondem as seguintes legendas: V1, V2, V3 e V4 representam o engaste da viga sanduiche; o acelerômetro; o suporte do engaste e o suporte do shaker. Enquanto que as legendas V5, V6, V7, V8 e V9 corresponde a viga sanduiche; o transdutor de força; o conector de nylon; o shaker e os cabos de conecção com as placas NI® 9269 e NI® 9233.

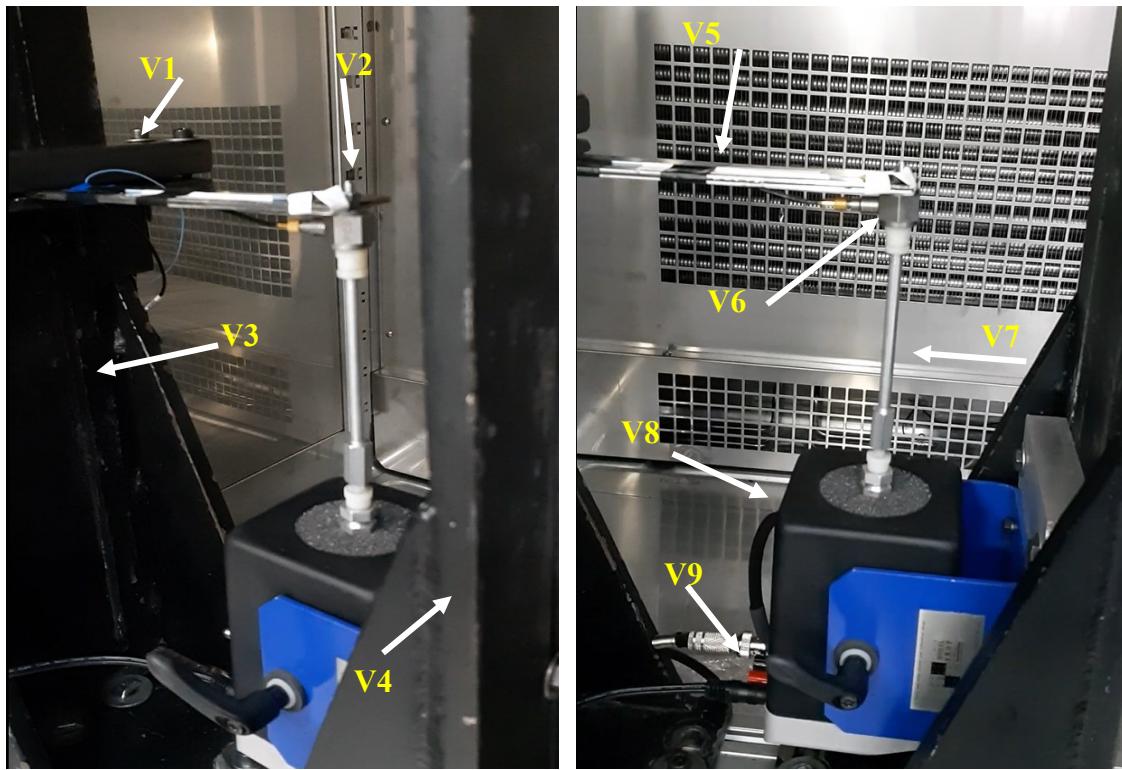


Figura 6.2: Configuração do experimento de viga sanduiche dentro da câmera térmica.

## 6.2 Resultados experimentais

Para estimar a frequência natural do primeiro modo de vibração da viga sanduiche, foi realizado uma varredura senoidal, de aproximadamente 70 Hz a uma temperatura de 30°C. A resposta em frequência do sistema foi obtida para uma banda de frequência de 20 a 70 Hz com um passo constante de 0,01 Hz, mantendo a amplitude constante da força. Além disso, quatro cenários de forças foram investigados, a saber: 1N, 2N, 3N e 4N.

A Fig. 6.3 permite comparar as respostas em frequência experimentais com as correspondentes obtidas utilizando-se o modelo de viga sanduíche não linear proposto neste trabalho. Nota-se que para a excitação de 1 N e 2 N, os efeitos não lineares são pequenos, uma vez que as respostas em frequência experimentais para estes cenários são praticamente lineares. Além disso, pode-se notar uma boa correlação entre as previsões do modelo e as curvas experimentais.

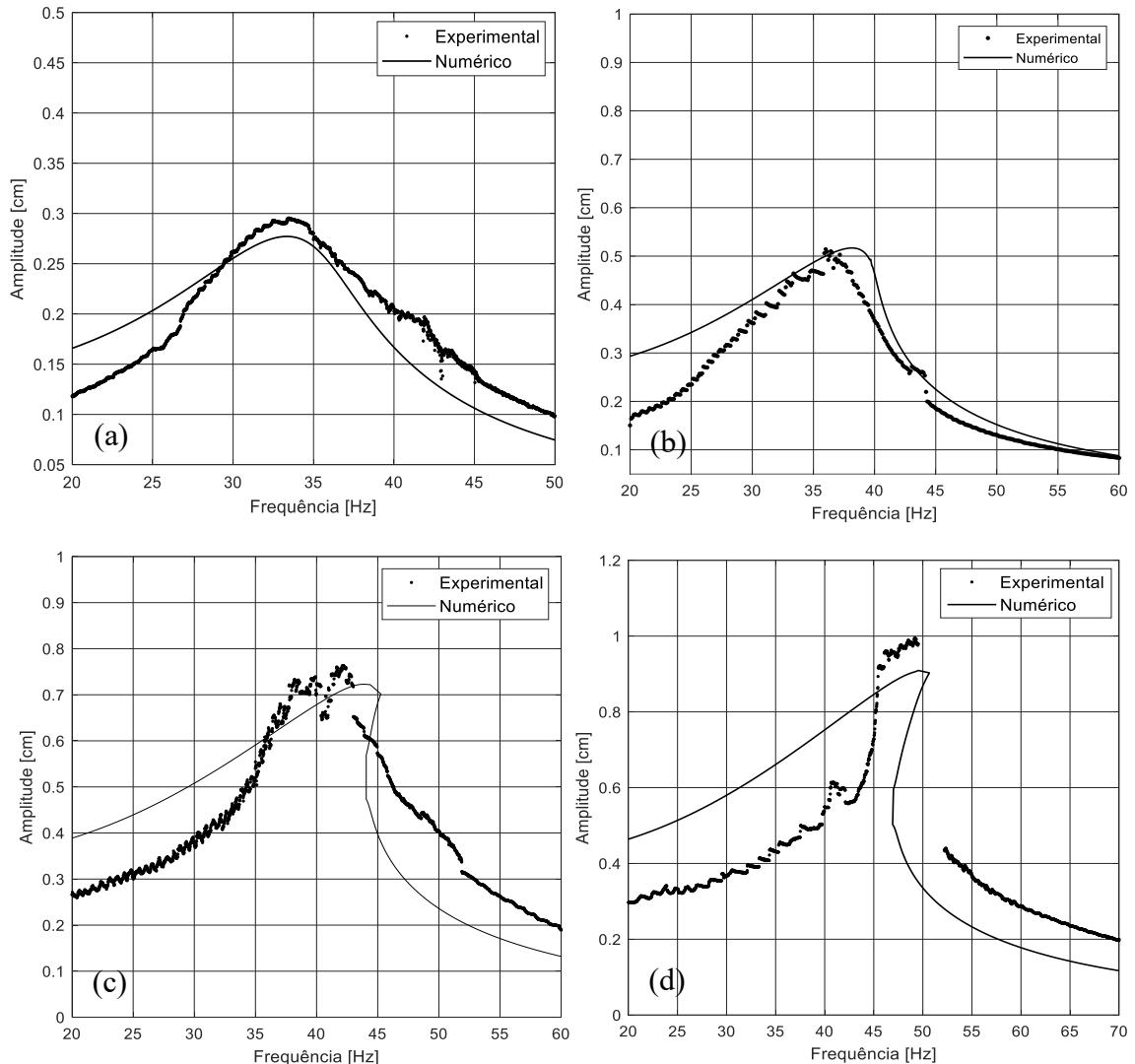


Figura 6.3: Comparaçāo entre as respostas em frequência experimentais e numéricas: (a) 1N; (b) 2N; (c) 3N; (d) 4N.

Para a excitação de 3N, a Fig. 6.3(c) mostra que na região de ressonância, o sistema já apresenta um pequeno aspecto de instabilidade, em que os pontos indicam um pequeno salto. Na previsão numérica, o aspecto não linear da curva de resposta é melhor visualizado e, embora haja uma diferença na região da ressonância entre as curvas numérica e experimental, os resultados ainda mostram uma boa correlação. Para o cenário de 4N visto na Fig. 6.3(d), o fenômeno do salto na região da ressonância é mais evidente, efeito este característico de um sistema com comportamento não linear. De fato, uma vez que as não linearidades geométricas modeladas são oriundas do acoplamento das deformações, é de se

esperar que para níveis mais elevados da força, o fenômeno do salto se torne cada vez evidente na região da ressonância.

Vale ressaltar, que os resultados numérico-computacional obtidos pela Fig. 6.3 foram obtidos por meio dos dados da viga experimental, descrito na Seção 6.1.

Para levar em consideração as fontes de incertezas advindas dos parâmetros geométricos e físicos, foi realizado um estudo considerando incertezas paramétricas nas variáveis de projeto conforme discursão na Seção 5.4 do Capítulo 5. Assim, a espessura das camadas elásticas e viscoelástica, bem como a temperatura do viscoelástico são variáveis que influem significativamente nas respostas do sistema viscoelástico, além de variações da amplitude da força.

Para as análises de incerteza no modelo sanduiche não linear, foi considerado uma variação de 5 % para as variáveis de espessura. Neste caso, a temperatura de operação será mantida constante, uma vez que há um controle rigoroso da mesma pela realização do ensaio na câmara térmica. No modelo construído em ambiente LabView®, o controle da força é realizado para uma tolerância de  $\xi_F \pm 0,1N$  e nesse caso, o nível de incerteza varia de acordo com a amplitude utilizada para cada cenário, conforme definido na Tab. 6.1.

Tabela 6. 1: Níveis de incerteza para comparação entre modelo e experimento:

Variável incerta	Variação	Nível de incerteza (%)
$h_c$	$1 \pm 0,05\text{cm}$	5%
$h_f$	$1 \pm 0,05\text{cm}$	5%
$F$	$[1,2,3,4] \pm 0,1N$	2,5% – 10%

A Fig. 6.4 permite confrontar os envelopes de soluções obtidos pelo modelo numérico-computacional estocástico de viga sanduíche não linear considerando, simultaneamente, os níveis de incertezas da Tabela 6.1 com as respostas experimentais. Neste caso, as simulações com o modelo estocástico foram realizadas com 500 amostras. As respostas foram obtidas para um nível de confiança de 95%. Isso implica dizer que a

resposta do sistema está dentro das curvas de mínimo e máximo dos envelopes com uma probabilidade de 95%, como verificado através da curva experimental.

A combinação das incertezas em todas as variáveis de projeto, também demonstra que dependendo dos valores considerados, o cenário com excitação de 2N já tende a apresentar uma resposta não linear para o sistema, por meio da combinação das incertezas introduzidas nas variáveis da Tab. 6.1, fato que não havia sido observado na Fig. 6.3(b).

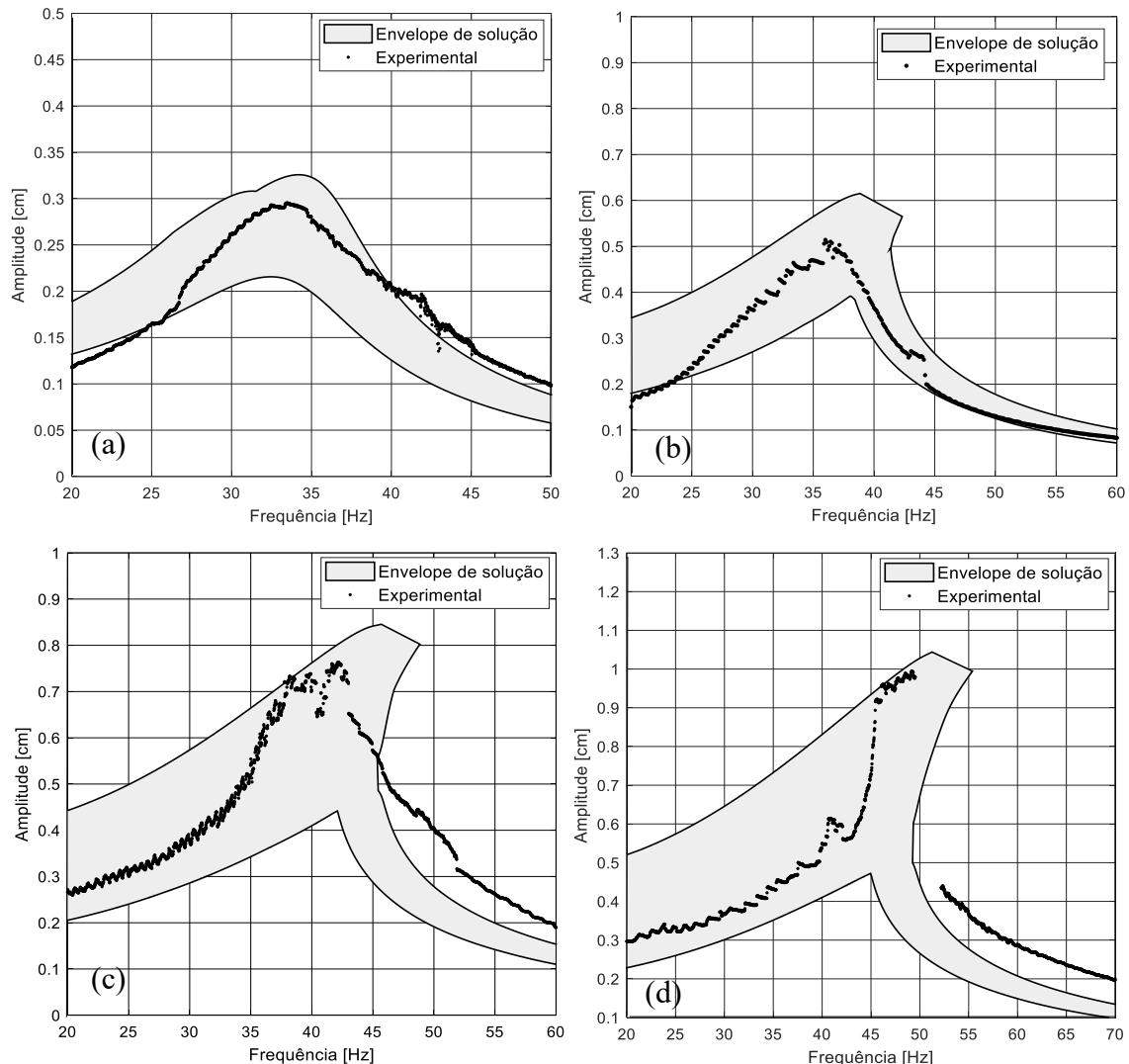


Figura 6.4: Comparação entre os envelopes das respostas em frequência aleatórias com as experimentais: (a) 1N, (b) 2N, (c) 3N, (d) 4N.

Para verificar a influência da temperatura na resposta do sistema, foram analisadas as respostas experimentais e as numéricas para as temperaturas de operação de 25°C e 28°C,

para a excitação de 4 N. A título de comparação, as respostas experimentais são apresentadas em conjunto com as respostas numéricas para 30°C, conforme mostrado na Fig. 6. 5.

Na Fig. 6.6 é possível observar que para a temperatura de 25°C, a resposta experimental apresenta regiões com pontos instáveis de difícil previsão, podendo indicar a formação do fenômeno do salto na região da ressonância. Já para a temperatura de 28°C, esse fenômeno já é visto.

Os resultados para o modelo estocástico não linear em grandes deslocamentos também foram construídos para as temperaturas de 25°C e 28°C, conforme demonstra a Fig. 6.7. Nota-se que as respostas experimentais estão contidas dentro dos envelopes das soluções, demonstrando uma boa correlação entre o modelo estocástico não linear e o experimento. A consideração de incertezas também aponta que dependendo da combinação das variáveis incertas, o fenômeno do salto já ocorre para a temperatura de 25°C, o que não pôde ser completamente visto pelas respostas determinística e experimental.

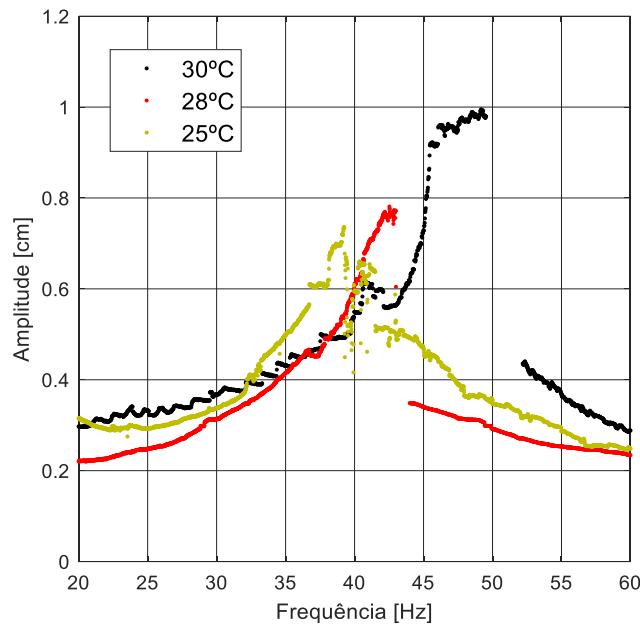


Figura 6. 5: Influência da temperatura de operação do viscoelástico nas respostas em frequência do sistema não linear.

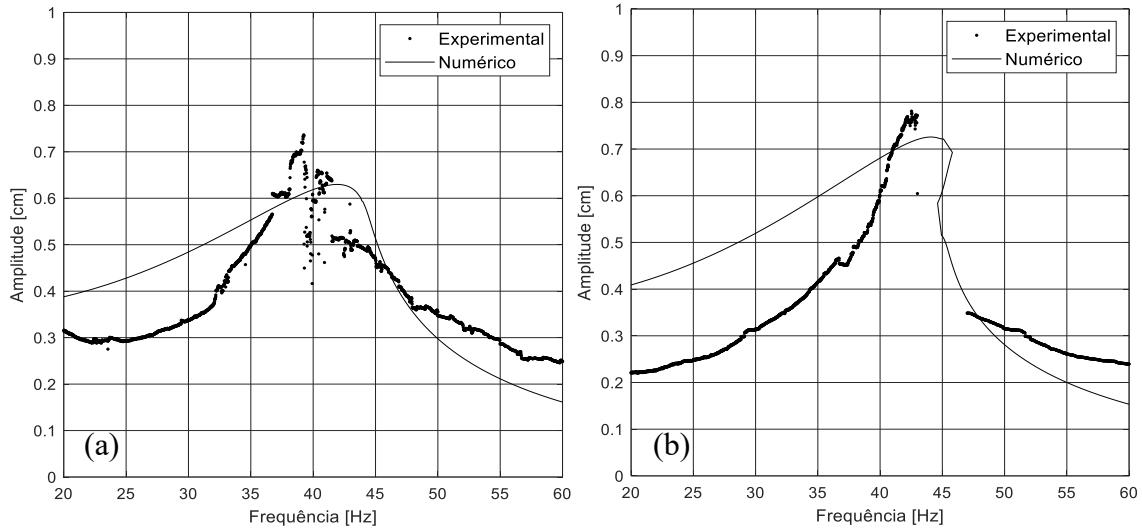


Figura 6.6: Resposta em frequência experimental e numérica para viga sanduiche a uma temperatura de: (a) 25°C (b) 28°C.

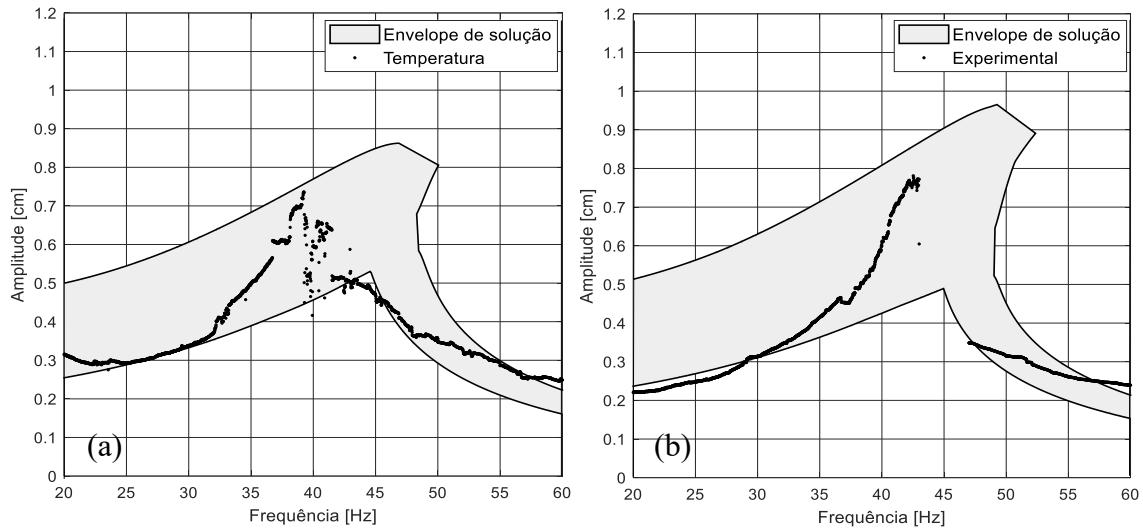


Figura 6.7: Comparação entre os envelopes das respostas em frequência aleatórias e as experimentais: (a) 25°C (b) 28°C.

Outro aspecto interessante a ser observado pelos resultados obtidos, é que conforme a temperatura aumenta, a frequência e amplitude de ressonância tende a aumentar. Isto era esperado, uma vez que, para as temperaturas onde foram obtidas as respostas, o módulo e o fator de perda diminuem com o aumento da temperatura, conforme visto na Fig. 5.13, Seção 5.3.2. Outro ponto importante é a importância da modelagem estocástica não linear. Por meio dela, foi possível verificar que alguns casos em que a resposta do sistema

determinístico e experimental apresentavam efeitos não lineares pequenos, ou praticamente lineares, pela modelagem estocástica, a perturbação causada pelas variáveis aleatórias demonstraram que o efeito não linear pode ser maior a ponto de levar o sistema a apresentar uma resposta não linear, como nos casos da Fig. 6.4(b ) e 6.7(a).

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho representa uma contribuição importante aos recentes desenvolvimentos que vem sendo realizados no LMEst/UFU quanto à modelagem de sistemas não lineares contendo materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações e ruído.

O trabalho apresentou os principais conceitos e abordagens sobre o comportamento dos materiais viscoelásticos e a relação frequência-temperatura introduzida pelo módulo complexo. Foi desenvolvida a modelagem no domínio da frequência de uma viga sanduíche de três camadas sujeitas a grandes deslocamentos e incertezas paramétricas, sendo esta uma das contribuições do trabalho. Para tanto, foi utilizado o método de Galerkin combinado com o balanço harmônico para a obtenção das respostas em frequência do sistema viscoelástico sujeito a não linearidades geométricas. Além disso, foi proposto um novo método de redução de modelos para sistemas viscoelásticos não lineares através da construção iterativa de uma base que leva em conta as modificações do sistema viscoelástico. O método de redução se mostrou indispensável para a aproximação das respostas do sistema viscoelástico não linear, principalmente para o caso estocástico, reduzindo o esforço computacional requerido para a resolução do sistema através do método da Frequência Iterativa. Neste sentido, esta é também considerada uma outra contribuição deste trabalho.

Destaca-se ainda que a modelagem por elementos finitos estocásticos de estruturas sanduíches viscoelásticas sujeitas a grandes deslocamentos para levar em conta a presença de incertezas é também algo pouco explorado na literatura aberta. Para tanto, foi utilizado a expansão de Karhunen-Loève dos campos aleatórios. Visando a redução do custo

computacional, as matrizes estocásticas foram devidamente parametrizadas e o método Hyper Cubo Latino foi utilizado para a resolução da equação da amplitude do sistema. Por fim, também como uma importante contribuição deste trabalho de tese, foi realizado um estudo experimental sobre as vibrações lineares e não lineares de uma viga sanduíche de três camadas, com controle de temperatura para verificar os procedimentos de modelagem e avaliar a influência de alguns parâmetros operacionais e ambientais na resposta dinâmica do sistema sanduíche viscoelástico.

As inúmeras aplicações numéricas envolvendo uma viga sanduiche viscoelástica e os ensaios experimentais realizados permitiram avaliar de uma forma geral a eficiência dos procedimentos de modelagem de sistemas sanduíches com viscoelástico, quando estes estão sujeitos a não linearidades geométricas. A partir dos resultados obtidos, pode-se tirar as seguintes conclusões:

- A modelagem por elementos finitos realizada aqui para tratar o problema de vibrações não lineares de estruturas viscoelásticas demonstrou ser eficiente para caracterizar o comportamento em frequência e temperatura do sistema viscoelástico no contexto não linear. Além disso, destaca-se que alguns resultados obtidos do modelo proposto foram confrontados, quando possível, com os correspondentes disponíveis na literatura aberta;
- Os resultados demonstraram que dependendo do nível da excitação externa e da temperatura de operação do sistema, este pode apresentar comportamento dinâmico não linear na frequência, ocasionando na presença do fenômeno de *hardening* e do salto. Portanto, torna-se imprescindível o uso de modelos fidedignos que consigam representar os efeitos não lineares para tornar as aplicações práticas e de interesse industrial mais realísticas e confiáveis;
- O emprego do método da aproximação modal iterativo com o método da Frequência Iterativa para a resolução do problema de autovalores complexo foi bastante eficiente para a redução do tempo computacional, mantendo a qualidade das respostas. Isto tornou viável a análise estocástico do problema viscoelástico não linear. Ressalta-se que a base de redução foi obtida a partir do procedimento iterativo para verificar a influência da adição de um autovetor no enriquecimento da base inicial. Neste caso, o enriquecimento

proposto leva em consideração as informações dos esforços viscoelásticos sem a necessidade da resolução do problema de autovalores complexo;

- O modelo do sistema viscoelástico estocástico não linear permitiu avaliar o grau de influência dos principais parâmetros que influenciam na eficiência de tratamentos viscoelásticos superficiais. No caso das incertezas introduzidas nas espessuras das faces elásticas, observou-se mais largos principalmente na região da ressonância, enquanto que as incertezas introduzidas na temperatura de operação do material viscoelástico levaram à maior influência no pico de ressonância. Portanto, esta é uma ferramenta importante para projetistas de sistemas viscoelásticos para o controle passivo de vibrações, principalmente em aplicações de interesse prático;
- Por fim, é importante destacar os testes experimentais que foram realizados dentro da câmara térmica com controle rígido de temperatura. Primeiramente, os resultados experimentais obtidos permitiram concluir sobre a grande influência da temperatura de operação do viscoelástico e da amplitude da força externa nas respostas em frequência. Ficou evidente que, dependendo da combinação desses parâmetros, tem-se um maior ou menor efeito das não linearidades geométricas atuantes no sistema, deixando evidente o efeito não linear de *hardening* provocado no pico de ressonância. Foi possível também verificar a modelagem numérico-computacional proposta neste trabalho sem a necessidade de ajuste de modelo. Neste caso, foi feita a confrontação direta entre os resultados experimentais e os correspondentes gerados pelo modelo viscoelástico estocástico não linear, demonstrando uma boa correlação entre ambos. Para as incertezas inseridas nas camadas elásticas e viscoelásticas e na amplitude da força externa, a curva de experimental de referência se manteve dentro dos envelopes de solução, demonstrando a capacidade de predição do modelo proposto.

## 7.1. Perspectivas de trabalhos futuros

O presente trabalho de tese possibilitou o surgimento de algumas perspectivas, no qual pode-se destacar:

1<sup>a</sup>) Otimização do tratamento viscoelástico na estrutura-base, visando o aumento da eficiência do amortecimento viscoelástico em termos da atenuação das vibrações lineares e não lineares, tomando como restrição a adição de massa no sistema. Isto se faz necessário uma vez que em aplicações de interesse aeronáutico, por exemplo, o acréscimo de massa à estrutura é um dos maiores problemas;

2<sup>a</sup>) Estender a metodologia de modelagem da viga sanduiche sujeita a grandes deslocamentos para outras estruturas de grande interesse, como placas e cascas;

3<sup>a</sup>) Propor uma modelagem termomecânica do sistema viscoelástico não linear para levar em conta os efeitos do auto-aquecimento do material viscoelástico quando este está sujeito a grandes deslocamentos.

4<sup>a</sup>) Propor um modelo de fadiga no domínio da frequência do sistema viscoelástico não linear. Para tanto, a princípio, pensa-se em aplicar o Critério Multiaxial de Sines, já desenvolvido pelo grupo de pesquisa do LMEst/UFU para sistemas lineares com amortecimento. Além disso, isto permitirá analisar parâmetros do sistema amortecido como vida útil e envelhecimento do tratamento.

5<sup>a</sup>) Expandir o estudo não linear de estruturas sanduiches devido a grandes deslocamentos do domínio do tempo, para a investigação de fenômenos como o *flutter*.

6<sup>a</sup>) No âmbito da não linearidade, estender estudos sobre o fenômeno do salto, bifurcações e a análise de instabilidade por meio do método de Lyapunov em sistemas viscoelásticos sujeitos a grandes deslocamentos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDOUN, F.; AZRAR, L.; DAYA, E.; POTIER-FERRY, M. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method, **Computers and structures**. V. 87. pp. 91-100, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.08.006>
- AKOUSSAN, K.; BOUDAOUED, H.; DAYA, E. M.; CARRERA, E. Vibration Modeling of Multilayer **Composite Structures** with Viscoelastic Layers, **Mechanics of Advanced Materials and Structures**. v.22, p. 136-149, 2015. <https://doi.org/10.1080/15376494.2014.907951>
- AL-BENDER, F.; SYMENS, W.; SWEVERS, J.; VAN BRUSSEL, H. Theoretical analysis of the dynamic behavior of hysteresis elements in mechanical system. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 39, p. 1721-173, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.04.005>
- ALLE, H. G. **Analysis and Design of Structural Sandwich Panels**, 1<sup>a</sup> Ed. B. G. Neal, 1969. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-012870-2.50005-5>
- ALVIN, K. F. Efficient computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**. v.35(11), 1998. <https://doi.org/10.2514/2.24>
- ARIKOGLU, A.; OZKOL, I. Vibration analysis of composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential transform method. **Compos. Struct.** v. 92(12), p.3031-3039, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.022>
- ARNST, M.; CLOUTEAU, D.; CHELI, H.; OTHMAN, R.; DEGRANDE, G. A non-parametric probabilistic model for ground-borne vibrations in buildings. **Probab Eng Mech**, v.21, p. 18-34, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2005.06.004>
- ARNST, M.; GOYAL, K. Sensitivity analysis of parametric uncertainties and modeling errors in computational-mechanics models by using a generalized probabilistic modeling approach, **Reliability Engineering & System Safety**, v. 167, p. 394-405, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2017.06.007>
- BATHE, K-J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, p. 353-386, 1975. <https://doi.org/10.1002/nme.1620090207>
- BELONSI, M. H. **Contribuição aos Métodos de Redução de Modelos de Sistemas Dinâmicos Não Lineares Estocásticos**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia. 2017.

BORGES, R. A. **Contribuição aos Estudos dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Não Lineares**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

BORGES, R. A.; GONÇALVES, D.; DE LIMA, A. M. G.; FONSECA JÚNIOR, L. A. Model reduction methods applied to a nonlinear mechanical system. **International Journal for Innovation Education and Research**, v. 7, p. 281-300, 2019. <https://doi.org/10.31686/ijier.Vol7.Iss7.1611>

CAPIEZ-LERNOUT, E.; SOIZE, C. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks. **Journal Eng Gas TurbinesPower**, v.126, p. 610-618, 2004. <https://doi.org/10.1115/1.1760527>

CARRELLA, A. EWINS, D. J. Identifying and quantifying structural nonlinearities in engineering applications from measured frequency response functions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.25, p.1011-1027, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.09.011>

CASCIATI, F.; MAGONETTE, G.; MARAZZI, F. Semiactive Devices and Applications in Vibration Mitigation. **John & Sons, Chichester, UK**, 2006. <https://doi.org/10.1002/0470022914>

CAUGHEY, T. K.; VIJAYARAGHAVAN, A. Free and forced oscillations of a dynamic system with linear hysteretic damping. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 5, p. 533-55, 1970. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(70\)90015-6](https://doi.org/10.1016/0020-7462(70)90015-6)

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity: an introduction**. 2<sup>a</sup> Ed. New York: Academic Press, Inc.; 1982.

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity**. 2<sup>a</sup>Ed. Dover Civil and Mechanical Engineering.2013.

CUNHA-FILHO, A. G; de LIMA, A. M. G.; DONADON, M. V.; LEÃO, L. S. Flutter suppression of plates subjected to supersonic flow using passive constrained viscoelastic layers and Golla-Hughes-McTavish method. **Aerospace Science and Technology (Imprimé)**, v. 52, p. 70-80, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.022>

CUNHA-FILHO, A. G.; BRIEND, Y. P. J.; DE LIMA, A. M. G.; Donadon, M. V. An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 104, p. 575-588, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.018>

CUPIAL, P.; NIZIOL, J. Vibration and damping analysis of three-layered composite plate with viscoelastic mid-layer. **Journal of Sound and Vibration**, v. 183 (1), p. 99-114, 1995. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0241>

DAYA, E. M.; AZRAR, L.; POTIER-FERRY, M. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. **Journal of Sound and Vibration**, v.271 (3-5), p. 789-813, 2004. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00754-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00754-5)

DAYA, E. M.; POTIER-FERRY, M. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures, **Computers and structures**, v. 79 (5), p.533-541, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00151-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00151-6)

DAYA, E. M; AZRAR, L.; POTIER-FERRY, M. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, p. 789-813, 2004. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00754-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00754-5)

de LIMA, A. M. G.; DA CUNHA, B. S. C. ; da Silva, A. R. ; RODOVALHO, L. F. F. . Vortex-induced vibration analysis of viscoelastically mounted rigid circular cylinders in cross-flow at a moderate Reynolds number. **Journal of Vibration and Control**, v. 24, p.2688-1700, 2018. <https://doi.org/10.1177/1077546317733656>

de LIMA, A. M. G.; DA SILVA, A. R.; RADE, D. A.; BOUHADDI, N. Component Mode Synthesis Combining Robust Enriched Ritz Approach for Viscoelastically Damped Structures. **Engineering Structures**, v. 32, p. 1479-1488, 2010 <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.01.028>

de LIMA, A. M. G.; RADE, D. A. ; LEPORE NETO, F. P. . An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, p. 1272-1281, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.09.005>

de LIMA, A. M. G.; STOPPA, M. H. ; RADE, D. A. ; STEFFEN JR., V. Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures. **Shock and Vibration**, v. 13, p. 545-558, 2006. <https://doi.org/10.1155/2006/917967>

de LIMA, A. M.G.; BOUHADDI, N.; RADE, D. A.; BELONSI. M. A. Time-Domain Finite Element Model Reduction Method for Viscoelastic Linear and Nonlinear Systems. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, p. 1182-1201, 2015 <https://doi.org/10.1590/1679-78251695>

DHATT, G. TOUZOT, G. **Une présentation de la méthode des éléments finis**. Maloine S.A. 2<sup>a</sup> Ed, 1984.

DUIGOU, L.; DAYA, E.M.; POTIER-FERRY, M. Iterative algorithms for nonlinear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.192, p.1323-1335, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00641-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00641-2)

DURAND, J. F.; SOIZE, C.; GAGLIARDINI, L. Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation. **Jounal Acoust Soc. Am**, v.124, p. 1513-1525, 2008. <https://doi.org/10.1121/1.2953316>

FERRY, J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. Wiley, New York, 1<sup>a</sup> Ed, 1961. <https://doi.org/10.1149/1.2428174>

FERRY, J. D.; GRANDINE, L. D.; FRITZGERALD, E. R. The relaxation distribution function of Polyisobutylene in the transition from rubber-like to glass-like behavior. **Journal of Applied Physics**, v. 24(7), p.911-916, 1953. <https://doi.org/10.1063/1.1721401>

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 7(2), p.123-130, 1992. [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(92\)90015-A](https://doi.org/10.1016/0266-8920(92)90015-A)

FONSECA JÚNIOR, L. A.; GONÇALVES, D. F. ; DE LIMA, A. M. G. ; BORGES, R. A. . Model reductions methods applied of nonlinear mechanical systems. In: **23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering**, v. 23. Rio de Janeiro. 2015. <https://doi.org/10.20906/CPS/COB-2015-2407>

FONTE, P. D. P. C. R. **Aplicação do método de monte carlo em simulações hidrotérmicas de edifícios**. Dissertação de Mestrado. Universidade do Porto, 2011.

FREITAS, S. T.; KOLSTEIN, H.; BIJLAARD, F. Composite bonded systems for renovations of orthotropic steel bridge decks. **Composite Structures**, v. 92 (4), p. 853-862, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.016>

GALUCIO, A. C.; DEÜ, J. F.; OHAYON, R. Hybrid active-passive damping treatment of sandwich beams in non-linear dynamics. **Journal of Vibration and Control**, v.13 (7), p.851-881, 2007. <https://doi.org/10.1177/1077546307078755>

GERGES, Y. **Méthodes De Réduction De Modèles En Vibroacoustique Non-Linéaire**. Tese (Doutorado) - Université de Franche-Comté, 2013.

GHANEM, R. G.; SPANOS P. D. **Stochastic finite elements: a spectral approach**. Springer, 1991.

GONÇALVES, L. K. S.; ROSA, U. L.; DE LIMA, A. M. G. Fatigue damage investigation and optimization of a viscoelastically damped system with uncertainties. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 41, p. 382, 2019. <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1879-4>

GONÇALVES, L. K. S. **Análise de Fadiga de Sistemas Estocásticos Incorporando Materiais Viscoelásticos**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2018.

GORDIS, J. H. An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure. **In - 10th International Modal Analysis Conference**, v. 1, p. 471-479, 1992.

GUYAN, R. J. **Reduction of Stiffness and Mass Matrices**. AIAA Journal, v. 3(2), p. 380-380, 1965. <https://doi.org/10.2514/3.2874>

HE, J. F.; MA, B. A. Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich shells. **Shock and Vibration Bulletin**, v. 3 (6), p. 403-417, 1996. <https://doi.org/10.1155/1996/768303>

HOHE, J.; LIBRESCU, L. Advances in the structural modeling of elastic sandwich panels. **Mech. Adv. Mater. Struct.**, v. 11(4-5), p. 395-424, 2004. <https://doi.org/10.1080/15376490490451561>

HU, H.; BELOUETTAR, S.; POTIER-FERRY, M.; DAYA, E. M. Review and assessment of various theories for modelling sandwich composites, **Composite Of Structures**, v. 84 (3), p. 282-292, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.08.007>

HYER, M. W.; ANDERSON, W. J.; SCOTT, R. A. Non-linear vibrations of three-layer beams with viscoelastic cores, I. Theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 46 (1), p. 121-136, 1976. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90822-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90822-1)

IMAN, R. L.; CONOVER, W. J. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models, with an application to risk assessment. **Communications Statistics**, v. A9, p. 1749-1842, 1980. <https://doi.org/10.1080/0361092800827996>

JOHNSON, C. D.; KIENHOLZ, D. A.; ROGERS, L. C. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. **Shock and Vibration Bulletin**, v.51, p.71-81, 1981. <https://doi.org/10.2514/6.1981-486>

JONES, D. I. G. A reduced-temperature nomogram for characterization of damping material behavior. **Shock and Vibration Bulletin**, v. 48(2), p. 13-22, 1978.

KEEL, C. J.; MAHMOODI, P. Design of viscoelastic dampers for the Columbia Center Building. **Building Motion in Wind**, ASCE, pp. 66- 82, 1986.

KERSCHEN, G.; WORDEN, K.; VAKAKIS, A. F.; GOLINVAL, J. C. Past, Present and Future of Nonlinear System Identification in Structural Dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, p. 505-592, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.04.008>

KETEMA, Y. A viscoelastic dynamic vibration absorber with adaptable suppression band: a feasibility study. **Journal of Sound and Vibration**, v. 216(1), p. 133-145, 1998. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1692>

KIM, J. G.; LEE, P. S. An accurate error estimator for Guyan reduction. **Computer Methods Applied Mechanics and Engineering**, v. 278, p. 1-19, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.05.002>

KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M. Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. **Computers and structures**, v. 85(10), p. 566-578, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.08.073>

KLEIBER, M.; HIEN, T. D. **The Stochastic finite element method, basic perturbation technique and computer implementation**. John Wiley & Sons. 1992.

KOROISHI, E. H.; CAVALINI JR., A. A.; LIMA, A. M. G.; STEFFEN JR., V. Stochastics modeling of flexible rotors. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v.34(Special Issue), p.597-603, 2012. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000600006>

KOVAC, E. J.; ANDERSON, W. J.; SCOTT, R. A. Forced non-linear vibrations of a damped sandwich beam. **Journal of Sound and Vibration**, v.17 (1), p. 25-39, 1971. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90131-3](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90131-3)

LEE, H. H. Stochastic analysis for offshore structures with added mechanical dampers. **Ocean Eng.**, v.24(9), p. 817-834, 1997. [https://doi.org/10.1016/S0029-8018\(96\)00039-X](https://doi.org/10.1016/S0029-8018(96)00039-X)

LEI, Z.; QIU, C. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration force structures with stochastic parameters to random excitation. **Computers and structures**, v. 77, p. 651-657, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00019-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00019-5)

LESIEUTRE, G. A.; LEE, U. Finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastic material properties. **Smart Structures and Materials** 1997. <https://doi.org/10.1111/12.274210>

LU, V. P.; CHEUNG, Y. K.; LAU, S. L. Non-linear vibration analysis of multilayer beams by incremental finite elements (parts I). **Journal of Sound and Vibration**, v.100 (3), p.359-382, 1985.

LU, V. P.; CHEUNG, Y. K.; LAU, S. L. Non-linear vibration analysis of multilayer sandwich plates by incremental finite elements (parts II), **Engineering Computations**, v.3, p. 36-52, 1986. <https://doi.org/10.1108/eb023640>

LUO, A. C. J.; HUANG, J. Approximate solutions of periodic motions in nonlinear systems via a generalized harmonic balance. **Journal of Vibration and Control**, v. 18, n. 11, p. 1661-1674, 2011. <https://doi.org/10.1177/1077546311421053>

MA, B.; HE, J. A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 152 (1), p. 107-123, 1992. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(92\)90068-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90068-9)

MAXWELL, B. An investigation of the dynamic mechanical properties of polymethyl methacrylate. **Journal of Polymer Science**, v.20(96), p.551-566, 1956. <https://doi.org/10.1002/pol.1956.120209613>

MIGNOLET, M.; SOIZE, S. Nonparametric stochastic modeling of linear system with prescribed variance of several natural frequencies. **Probab Eng Mech**, v.23, p. 267-278, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2007.12.027>

MOREIRA, R. A. S. **Modelagem e análise de tratamentos viscoelásticos multi-camada para controlo passivo de vibração**. Tese de doutorado, Universidade do Porto, 2004.

MULLER, A. L.; VAZ, L. E.; EBOLI, C. R. **Análise de Estruturas Incorporando Incertezas**. In: Epusp V simpósio epusp sobre estruturas de concreto, 2003.

MURAVYOV, A. Forced vibration responses of a viscoelastic structure. **Journal of Sound and Vibration**, v.218(5), p.892-907, 1998. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1819>

MYKLESTAD, N. O. The concept of complex damping. **Journal of Applied Mechanics**, v.19(3), p. 284-286, 1952.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear Oscillations**. Wiley-Interscience, New York, 1979.

NETO, B. G. **Modelagem por elementos finitos de sistemas dinâmicos combinando materiais viscoelásticos e materiais com memória de forma para o controle passivo de vibrações e ruído**. Dissertação de mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2012.

O'CALLAHAN, J.; AVITABILE, P.; RIEMER, R. System equivalent reduction expansion process (SEREP). **Seventh International Modal Analysis Conference**, p. 29-37, 1989.

OBERST, H. Material of high inner damping. **Acustica. Journal international d'acoustique**, v.6(1), p.144-153, 1956.

PALMERI, A. A state-space viscoelastic model of double beam systems toward the dynamic analysis of wind turbine blades. **Earth and Space, ASCE**, Reston, p.1973-1980, 2010. [https://doi.org/10.1061/41096\(366\)180](https://doi.org/10.1061/41096(366)180)

PALMERI, A; NTOTSIOS, E. Transverse Vibrations of Viscoelastic Sandwich Beams via Galerkin-Based State-Space Approach. **J. Eng. Mech.**, v.142(7), 2016. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001069](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001069)

PAPADRAKAKIS, M.; KOTSOPULOS, A. Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo Simulation. **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, vol. 168, p. 305-320, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00147-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00147-9)

PENG, Z. K.; LANG, Z.; BILLINGS, S. A.; TOMLINSON, G. R. Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 311, p. 56-73, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.035>

PLANTEMA, Frederik J. Sandwich Construction. John Wiley and Sons, New York, 1966.

PRITZ, T. Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson's ratio of real solid materials. **Journal of Sound and Vibration**, v.214(1), p.83-104, 1998. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1534>

RAND, R. **Lecture Notes on Nonlinear Vibrations**, Cornell, 2003.

RAO, D. K. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 20 (5), P. 271-282, 1978. [https://doi.org/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1978\\_020\\_047\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1978_020_047_02)

RAO, M. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. **J. Sound Vibr**, v. 262(3), P. 457-474, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8)

RAO, S. S. Vibrações mecânicas. 4<sup>a</sup>. Ed, Pearson Prentice Hall, 2008.

RAZZAK, M. A. A simple harmonic balance method for solving strongly nonlinear oscillators. **Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences**, v. 21, p. 68-76, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.jaubas.2015.10.002>

RIBEIRO, L. P.; DE LIMA, A. M. G.; SILVA, V. A. C. . Robust project of resonant shunt circuit for passive vibration control of **Composite Structures**. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 42, p. 342, 2020. <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02396-1>

RITTO, T. G.; SAMPAIO, R.; CATALDO, E. Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v.30, p. 2995-303, 2008. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782008000400005>

ROBERTS, J; SPANOS, P. **Random vibration and statistical linearization** Dover. Mineola, NY, 2003.

RODOVALHO, L. F. F.; LIMA, A. M. G.; BORGES, R. A.; LACERDA, H. B. A Study of the Thermal Runaway Phase Generated During Cyclic Loading of Viscoelastic Materials

Accounting for the Prestress. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, p. 2834-2851, 2016. <https://doi.org/10.1590/1679-78253098>

RUBINSTEIN, R. Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**. 1<sup>a</sup> Ed. New York: John & Wiley & Sons, 1981. <https://doi.org/10.1002/9780470316511>

SAMALI, B.; KWOK, K. C. S. Use of viscoelastic dampers in reducing wind and earthquake induced motion of building structures. **Engineering Structures**, v.17, p. 639-654, 1995. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(95\)00034-5](https://doi.org/10.1016/0141-0296(95)00034-5)

SANCHES, L.; RADE, D. A. Influence of Viscoelastic Dampers on the Ground Resonance Instability of Helicopters. **22nd International Congress of Mechanical Engineering** (COBEM), ABCM, Brasil, 2013.

SASTRY, C. V. C.; MAHAPATRA, D. R.; SOPALAKRISHNAN, S.; RAMAMURTHY, T. S. An Iterative System Equivalent Reduction Expansion Process for Extraction of High Frequency Response From Reduced Order Finite Element Model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192(15), p. 1821-1840, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00204-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00204-4)

SAVI, M. A. **Dinâmica Não linear Caos**. 2<sup>a</sup> Ed. 2006.

SCHINOZURA, M. Monte Carlo Solution of Structural dynamics. **Computers and structures**, v.2, p. 855-874, 1972. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(72\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(72)90043-0)

SHIN, W-H.; HAN, J-H.; OH, I-K. Aeroelastic characteristic sof cylindrical hybrid composite painel with viscoelastic damping treatments. **Journal of Sound and Vibration**, v.296, p.99-116, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.068>

SHOJAEI, K; SHAHRI, A. M; TARAKAMEH, A. Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in presence of parametric and nonparametric uncertainties. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 27, p. 194-204, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.07.007>

SHUËLLER, G. I. Computational stochastic mechanics - recente advances. **Journal of Computers and structures**, v. 79, p.2225-2234, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00078-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00078-5)

SILVA, V. A. C.; de Lima, A. M. G. ; BOUHADDI, N. ; LACERDA, H. B. . Uncertainty propagation and experimental verification of nonlinear viscoelastic sandwich beams. **MECHANICAL SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING**, v. 132, p. 654-669, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.07.022>

SILVA, V. A. C.; DE LIMA, A. M. G.; RIBEIRO, L. P.; DA SILVA, A. R. Uncertainty propagation and numerical evaluation of viscoelastic sandwich plates having nonlinear

behavior. **Journal of Vibration and Control**, v. 26, p. 447-458, 2019. <https://doi.org/10.1177/1077546319889816>

SOIZE, C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 288, p. 623-652, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.07.009>

SOIZE, C. CHEBLI, H. Random uncertainties model in dynamic substructuring using a nonparametric probabilistic model. **Journal Eng Mech**, v.129, p. 449-457, 2003. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:4\(449\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:4(449))

SOIZE, C. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 263, p. 893-916, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01170-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01170-7)

SOIZE, C., A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 15, p. 277-294, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00028-4)

SOIZE, C.; POLOSKOV, I. Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation. **Comput Math Appl**, v.64, p. 2012. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.09.010>

SONI, M. L. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. **Shock and Vibration Bulletin**, v.55 (1), p.97-109, 1991

SOONG, T. T.; DARGUSH, G. F. **Passive energy dissipation systems in structural engineering**, Wiley, Chichester, U.K, 1997.

TANG, B.; BRENNAN, M. J.; CROCKER, M. J.; PAWELECZYK, M.; PEDRIELLI, F.; CARLETTI, E.; LUZZI, S. Steady-state analysis of nonlinear systems by the receptance harmonic balance method. In: **Proceedings Of The International Congress On Sound And Vibration**, 22, 2015, Auburn. Proceedings of the [...]. Auburn: Int. Inst. Acoustics & Vibration, 2015. p. 7.

TRINDADE, M. A. Reduced-order finite element models of viscoelastically damped beams through internal variables projection. **Journal of Vibration and Acoustics**, v.128, p.501-508, 2006. <https://doi.org/10.1115/1.2202155>

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A.; OHAYON, R. Modeling of frequency dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. **Journal of Vibration and Acoustics**, v.122 (2), p.169-174, 2000. <https://doi.org/10.1115/1.568429>

UNGAR, E. E.; KERWIN, E. M. Loss factors of viscoelastic systems in terms of energy concepts. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 34(7), p. 954-957, 1962. <https://doi.org/10.1121/1.1918227>

VERHULST, F. **Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer, 2<sup>a</sup> Ed. Berlin, 1999.

VIANA, F.C.; HAFTKA, R.T.; STEFFEN JR., V; BUTKEWITSCH, S.; LEAL, M.F. Ensemble of Surrogates: A Framework Based on Minimization of Integrated Square Error. In: **49th Aiaa/Asme/Asce/Ahs/Asc Structures, Structural Dynamics, And Materials Conference 16th Aiaa/Asme/Ahs Adaptive Structures Conference**, Schaumburg, IL. American Institute of Aeronautics and Astronautics. p.1-27, 2008.

VINSON, J. R. Sandwich Structures: Past, Present, and Future. **Sandwich Structures. Advancing with Sandwich Structures and Materials**, v.7, 2005. <https://doi.org/10.1177/1099636205049810>

WHITE, S. W.; KIM, S. K.; BAJAJ, A. K.; DAVIES, P.; SHOWERS, D. K.; LIEDTKE, P. E. Experimental techniques and identification of nonlinear and viscoelastic properties of flexible polyurethane. **Nonlinear Dynamics**, v. 22, p. 281-313, 2000. <https://doi.org/10.1023/A:1008302208269>

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. **Nonlinearity in Structural Dynamics - Detection, Identification and Modelling**. Institute of Physics Publishing, University of Sheffield, Reino Unido, 2001.

WU, F; CHEN, K; WANG, T. Y; YAO, L. Y; HU, M. Stochastic hybrid perturbation technique-based smoothed finite element-statistical energy method for mid-frequency analysis of structure-acoustic systems with parametric and nonparametric uncertainties. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 349 (1), p. 522-549, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.02.034>

XIA, Y.; LIN, R. Improvement on the Iterated IRS Method for Structural Eigensolutions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 270, (4), p. 713-727, 2004. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00188-3](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00188-3)

YAMAZAKI, F.; SCHINOKUZA, M. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. **Journal of Engineering Mechanics ASCE**, v. 114(8), p. 1335-1354, 1988. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1335\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1335))

YU, H.; LI, P.; DING, C.; SUN, C.; GUO, X.; ZHANG, F.; ZHOU, Y.; YU, Z. Krylov Subspace Based Model Reduction Method for Transient Simulation of Active Distribution Grid. **Power and Energy Society General Meeting (PES)**, IEEE, 2013.

ZHANG, R. H.; SOONG, T. T. Seismic design of viscoelastic dampers for structural applications. **J. Struct. Eng.**, v.10, p. 1375-1392, 1992. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1992\)118:5\(1375\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:5(1375))

ZHANG, X.; ERDMAN, A. G.; Dynamic responses of flexible linkage mechanisms with viscoelastic constrained layer damping treatment. **Computers and structures**, v.79 (13), p. 1269-1274, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00019-0)

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. Elsevier, 6<sup>a</sup> Ed, 2005.

## ANEXO A

### CÁLCULO DAS MATRIZES ELEMENTARES DA VIGA SANDUICHE

Considerando como  $e$   $L^e$  o comprimento do elemento finito, as funções de forma utilizadas na seção 3.4 são dadas de acordo com Zienkiewicz, et al., (2005), no qual  $\zeta = \frac{x}{L^e}$  para  $x \in [0 \quad L^e]$ :

$$\begin{Bmatrix} W \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_w \\ N_\beta \end{bmatrix} \{U^e\} \quad (A.1)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_1(\zeta) & n_2(\zeta) & 0 & n_3(\zeta) & n_4(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_5(\zeta) & 0 & 0 & n_6(\zeta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A.2)$$

Cada componente  $n_{j=1\dots 6}(\zeta)$  do vetor de funções de forma a nível elementar é dado pelas equações de (A.3)

$$n_1(\zeta) = \left[ 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \right] \quad (A.3)$$

$$n_2(\zeta) = \left[ \zeta^3 l - 2\zeta^2 l + x \right]$$

$$n_3(\zeta) = \left[ -2\zeta^3 + 3\zeta^2 \right]$$

$$n_4(\zeta) = \left[ \zeta^3 l - \zeta^2 l \right]$$

$$n_5(\zeta) = 1 - \zeta$$

$$n_6(\zeta) = \zeta$$

As matrizes de integração utilizadas nas Eqs. (3.32), (3.33), (3.34) e (3.36) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \int_0^{L^e} \left[ N_{\beta,x} \right]^T \left[ N_{\beta,x} \right] dx \\
 k_2 &= \int_0^{L^e} \left[ \left[ N_{\beta,x} \right]^T \left[ N_{w,xx} \right] + \left[ N_{w,xx} \right]^T \left[ N_{\beta,x} \right] \right] dx \\
 k_3 &= \int_0^{L^e} \left[ \left[ N_{w,xx} \right]^T \left[ N_{w,xx} \right] \right] dx \\
 k_4 &= \int_0^{L^e} \left[ \left[ N_{w,x} \right]^T \left[ N_{w,x} \right] + \left[ N_{\beta} \right]^T \left[ N_{w,x} \right] + \left[ N_{w,x} \right]^T \left[ N_{\beta} \right] + \left[ N_{\beta} \right]^T \left[ N_{\beta} \right] \right] dx \\
 k_5 &= \int_0^{L^e} \left[ \left[ N_w \right]^T \left[ N_w \right] \right] dx \\
 k_6 &= \int_0^{L^e} \left[ \left[ N_{w,x} \right]^T \left[ N_{w,x} \right] \right] dx
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

## ANEXO B

### RIGIDEZ NÃO LINEAR DE UMA VIGA COM AS EXTREMIDADES IMÓVEIS

O problema axial (3.29) e (3.30) pode ser resolvido como:

$$\begin{aligned} \dot{u_0} + (W')^2 &= \alpha_1 \\ \dot{u_{2\omega}} + \frac{1}{2}(W')^2 &= \alpha_2 \end{aligned} \quad (B.1)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes. A integração de ambos os lados da Eq. (B.1) resulta em:

$$\begin{aligned} L\alpha_1 &= \int_0^L \dot{u_0} dx + \int_0^L (W')^2 dx \\ L\alpha_2 &= \int_0^L \dot{u_{2\omega}} dx + \frac{1}{2} \int_0^L (W')^2 dx \end{aligned} \quad (B.2)$$

Para a análise considerando não linearidades geométricas, considera-se que a viga sanduíche possui as bordas axialmente imóveis, ou seja,  $u_0(0) = u_0(L) = u_{2\omega}(0) = u_{2\omega}(L) = 0$ .

Dessa forma, é possível encontrar as constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{1}{2L} \int_0^L (W')^2 dx \quad (B.3)$$

Dessa forma a matriz de rigidez não linear  $k_{nl}$  é dada por:

$$k_{nl}(\omega, T) = \int_0^L (N_0 + N_{2\omega}) (W')^2 dx \quad (B.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} N_0 &= (2E_f S_f + 2G_0(0, T)(1 + v_c)S_c) \alpha_1 \\ N_{2\omega} &= (2E_f S_f + 2G_c(2\omega, T)(1 + v_c)S_c) \alpha_2 \end{aligned} \quad (B.5)$$

Substituindo (B.3) em (B.5) e (B.4), tem-se:

$$\begin{aligned} k_{nl}(\omega, T) &= (2E_f S_f + 2G_0(0, T)(1 + v_c)S_c) \alpha_1 \int_0^L (W')^2 dx \\ &+ (2E_f S_f + 2G_c(2\omega, T)(1 + v_c)S_c) \alpha_2 \int_0^L (W')^2 dx \end{aligned} \quad (B.6)$$

A matriz de rigidez não linear  $[k_{nl}]$  pode ser então reescrito como:

$$k_{nl}(\omega, T) = \left[ 2E_f S_f + 2G_0(0, T)(1 + v_c)S_c + E_f S_f + G_c(2\omega, T)(1 + v_c)S_c \right] L \alpha_1^2 \quad (B.7)$$

Reorganizando a Eq.(B.7) tem-se:

$$\begin{aligned} [k_{nl}(\omega, T)] &= \left[ k_{nl}^0 \right] + G_\omega(2\omega, T) \left[ k_{nl}^1 \right] \\ \left[ k_{nl}^1 \right] &= \left[ [(1 + v_c)S_c] \frac{1}{L} \right] [k_6]^2 \\ \left[ k_{nl}^0 \right] &= \left[ \left[ 3E_f S_f + 2G_0(0, T)(1 + v_c)S_c \right] \frac{1}{L} \right] [k_6]^2 \end{aligned} \quad (B.8)$$