

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

MON
621:534
S883a
TES/mem

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**MODELAGEM NUMÉRICA E PROJETO ÓTIMO DE SISTEMAS
DE AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICOS APLICADOS A
PLACAS RETANGULARES**

Tese apresentada por

Marcelo Henrique Stoppa

como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em
Engenharia Mecânica.

Aprovada por:

Prof. Dr. Domingos Alves Rade

Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

Prof. Dr. Renato Pavanello

Prof. Dr. Gilberto Pechoto Melo

Prof. Dr. Luciano Afonso da Silva

FEMEC-UFU

FEMEC-UFU

FEM/UNICAMP

DEM/FEIS/UNESP

CNPq/UFU

Orientador

Co-Orientador

SISBI/UFU



1000213201

Dezembro de 2003



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
Av. João Naves de Ávila, 2121 - 38400-902 Fone: 0XX(34)32394149 Ramal 42
FAX: 0XX(34)32394282 - Campus Santa Mônica - Uberlândia MG



ALUNO: Marcelo Henrique Stoppa

NÚMERO DE MATRÍCULA: 5991911-3

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.


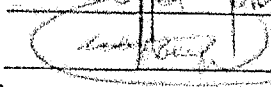
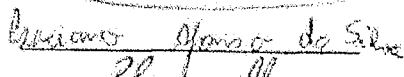

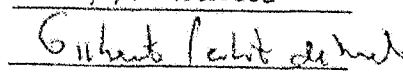
PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL DOUTORADO

TÍTULO DA TESE:

“Modelagem Numérica e Projeto Ótimo de Sistemas de Amortecimento Viscoelásticos Aplicados a Placas Retangulares”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

A Tese foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Anfiteatro do Bloco E, do Campus Santa Mônica, em 18 de dezembro de 2003, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME		ASSINATURA
Domingos Alves Rade, Prof. Dr.	UFU	
Valder Steffen Jr, Prof. Dr.	UFU	
Luciano Afonso da Silva, Dr.	CNPq/UFU	
Renato Pavanello, Prof. Dr.	FEM/UNICAMP	
Gilberto Pechoto de Melo, Prof. Dr.	FEIS/UNESP	

Uberlândia, 18 de dezembro de 2003.

a Diane, Gabriel e meus pais Marcos Caleb e Maria Helena

Agradecimentos

Ao professor **Dr. Domingos Alves Rade**, orientador e amigo, pela sua orientação, competência e pelo modelo de profissional que é.

Ao professor **Dr. Valder Steffen Jr.**, pela dedicação na co-orientação, pela amizade, paciência e pelo belo exemplo de profissional.

Especialmente aos amigos **Antonio Marcos Gonçalves de Lima** e **Rodrigo França Alves Marques**, pela ajuda contínua durante a elaboração deste trabalho.

A todos aqueles colegas do laboratório, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao **Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia**, pela possibilidade de execução deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições dadas ao trabalho.

À **Prefeitura Municipal de Catalão - GO**, pela licença concedida durante o período de doutoramento.

À **CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior** - pelo apoio financeiro.

Stoppa, M. H., 2003, Modelagem Numérica e Projeto Ótimo de Sistemas de Amortecimento Viscoelásticos Aplicados a Placas Retangulares, tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica - MG - Brasil.

Resumo

Materiais viscoelásticos têm sido amplamente utilizados para fins de controle passivo de vibrações, podendo ser dispostos sob a forma de dispositivos discretos (coxins, por exemplo) ou aplicados como tratamentos especiais. Neste último caso, a eficiência do sistema de controle pode ser significativamente aumentada empregando-se a configuração denominada "camada viscoelástica restrita", que consiste em dispor a camada viscoelástica entre a estrutura principal e uma fina lâmina metálica externa, o que permite aumentar a deformação de cisalhamento da camada viscoelástica e, em consequência, a dissipação da energia vibratória. Adicionalmente, foram propostas metodologias de controle híbrido (ativo-passivo) de vibrações baseadas no emprego de pastilhas piezelétricas combinadas com filmes viscoelásticos, em configurações denominadas "camada restrita ativa". O presente trabalho trata da modelagem numérica e do projeto ótimo de placas retangulares tratadas com camadas restritas passivas e ativas. São desenvolvidos modelos de elementos finitos de placas retangulares multi-camadas, considerando-se uma configuração assimétrica com três camadas e uma configuração simétrica com cinco camadas. Os modelos são adaptados para o caso de camadas restritas ativas, mediante a introdução dos efeitos piezelétricos direto e inverso, conferindo ao tratamento, capacidade de atuação e sensoriamento. A típica dependência do comportamento viscoelástico em relação à frequência é introduzida na modelagem por elementos finitos utilizando três modelos viscoelásticos distintos: o modelo de Golla-Hughes-MacTavish (GHM), o modelo dos Campos de Deslocamentos Anelásticos (ADF) e o modelo de Derivadas Fracionárias. O procedimento de modelagem é validado mediante confrontação com resultados obtidos em ensaios experimentais. Com base nos modelos desenvolvidos, é feito um estudo da influência de alguns parâmetros de projeto no comportamento dinâmico das placas tratadas com camada restrita passiva. Visando minimizar as dificuldades geradas pela elevada dimensão dos modelos de elementos finitos incorporando materiais viscoelásticos, é formulada e avaliada numericamente uma técnica de redução de modelo baseada na transformação modal. Em seguida, é proposta e avaliada uma metodologia para o posicionamento ótimo do tratamento superficial empregando Algoritmos Genéticos. Finalmente, é desenvolvida a formulação para a análise de sensibilidade de autovalores complexos e de funções de resposta em frequência de placas tratadas com camada restrita passiva. É também formulada a sensibilidade de funções de resposta em frequência em relação à temperatura. Tal procedimento é ilustrado por meio de simulações numéricas.

Palavras Chave: camada restrita, viscoelasticidade, piezeletricidade, otimização, análise de sensibilidade, amortecimento.

Stoppa, M. H., 2003, Numerical Modeling and Optimal Design of Viscoelastic Damping Systems Applied to Rectangular Plates, Doctorate thesis, Federal University Uberlandia, School of Mechanical Engineering - MG - Brazil.

Abstract

Viscoelastic materials have been extensively used for the passive control of sound and vibration. They can be deployed either as discrete devices (mountings, for instance) or as surface treatments. In this last case, the damping effectiveness can be significantly increased by using the so-called passive constraining layer damping (PCLD), which is obtained by inserting a viscoelastic layer between the base structure and a thin metal sheet. Such procedure enables to increase the shear strain of the viscoelastic core, thus increasing the amount of dissipated energy. Additionally, hybrid active-passive control methodologies have also been developed recently, based on the use of piezoelectric patches combined with viscoelastic films. Such combination has been named active constraining layer damping (ACLCD). The present work is devoted to various aspects of numerical modeling, analysis and design of rectangular plates treated with PCLD and ACLD. Finite element models of laminated plates are developed, considering both a three-layer non-symmetric and a five-layer symmetric configurations. Both models are adapted to include the direct and inverse piezoelectric effects, enabling to represent the sensing and actuation capabilities of ACLD systems. The typical dependency of the viscoelastic behavior with respect to the vibration frequency is introduced into the modeling procedure by means of three different viscoelastic models, namely: the Golla-Hughes-MacTavish (GHM) model, the Anelastic Displacement Field model (ADF) and the Fractional Derivative model. The modeling procedure is validated through the comparison of finite element-predicted dynamic responses and the experimentally derived counterparts. Based on the validated models, it is carried-out a study about the influence of some design parameters on the damping effectiveness of PCLD systems. Aiming at reducing the high computation cost involved in the numerical processing of the systems of equations of motion, a model reduction technique based on the modal transformation is evaluated. It is also suggested a methodology for the optimal placement of partial PCLD treatments based on Genetic Algorithms. Finally, it is developed a technique of sensitivity analysis of complex eigenvalues and frequency response functions with respect to design parameters of PCLD systems. It is also addressed the sensitivity analysis of frequency response functions with respect to the temperature. This last procedure is illustrated by means of numerical simulations.

Keywords: constraining layer, viscoelasticity, piezoelectricity, optimization, sensitivity analysis, damping.

Índice

Lista de Tabelas	xv
Lista de Figuras	xvii
Simbologia	xxiii
1 Introdução	1
1.1 O Tratamento ACLD	4
1.2 Objetivos e Descrição do Trabalho	10
2 Modelagem por Elementos Finitos de Camadas Restritas Passivas e Ativas	13
2.1 Relações Cinemáticas	13
2.2 Relações Tensão-Deformação	15
2.3 Discretização por Elementos Finitos	17
2.3.1 Obtenção das Matrizes de Massa e Rigidez Elementares	18
2.4 O Modelo de 5 Camadas	22
2.5 O Modelo de 3 Camadas	27
2.6 Modelagem de Camadas Restritas Ativas	32
2.6.1 Esforços Gerados pelos Atuadores Piezelétricos no Modelo com 5 Camadas	32
2.6.2 Esforços Gerados pelos Atuadores Piezelétricos no Modelo com 3 Camadas	35
2.7 Voltagem dos Sensores Piezelétricos nos Modelos com 5 e 3 Camadas	36
2.8 Equações do Movimento	37
3 Modelagem do Comportamento Viscoelástico	41
3.1 Modelos Reológicos Simples	42
3.2 Modelo Generalizado Padrão	44
3.3 Leis de Comportamento Viscoelástico	44

3.4	Princípio da Equivalência Freqüência-Temperatura	45
3.5	Incorporação do Efeito Viscoelástico em Modelos de Elementos Finitos	47
3.6	O Modelo de Golla-Hughes-McTavish	48
3.7	O Modelo de Campos de Deslocamento Anelásticos (Anelastic Displacement Fields - ADF)	51
3.8	O Modelo das Derivadas Fracionárias	53
3.9	Decomposição Espectral da Matriz de Rigidez Viscoelástica Fatorada	56
3.10	Análise Dinâmica de Sistemas com Modelos Viscoelásticos Incorporados	57
4	Avaliação Numérica e Experimental do Controle de Vibrações Empregando Camadas Restritas Passivas	61
4.1	Aparato Experimental	61
4.2	Identificação de Parâmetros dos Modelos Viscoelásticos	63
4.2.1	Identificação dos Parâmetros para o Material 3M 242F01	65
4.3	Procedimento Experimental	68
4.4	Resultados para a Placa Sanduíche com 3 camadas	68
4.5	Resultados para a Placa Sanduíche com 5 Camadas	72
4.6	Discussão dos Resultados	74
5	Estudo Numérico da Influência das Variáveis de Projeto no Desempenho de Camadas Restritas Passivas	75
5.1	Comparação Camada Restrita Passiva versus Camada Viscoelástica Livre	75
5.2	Influência da Espessura da Camada Restringente	80
5.3	Influência da Espessura da Camada Viscoelástica	85
5.4	Influência do Posicionamento do Tratamento Superficial	89
6	Posicionamento Ótimo do Tratamento com Camada Restrita Passiva	93
6.1	Descrição da Placa Utilizada na Otimização do Posicionamento do Tratamento Superficial	94
6.2	Posicionamento Ótimo para Placa Multi-Camadas com Tratamento Assimétrico	95

6.2.1	Otimização Para o Primeiro Modo	95
6.2.2	Otimização Para os Dois Primeiros Modos de Vibração da Placa	107
6.3	Posicionamento Ótimo para Placa Multi-Camadas com Tratamento Simétrico	113
6.3.1	Otimização Para o Primeiro Modo	113
6.3.2	Otimização Para os Dois Primeiros Modos de Vibração da Placa	117
6.4	Discussão dos Resultados	121
7	Técnica de Redução de Modelos de Elementos Finitos	123
7.1	Formulação da Técnica de Redução Modal	124
7.2	Avaliação Numérica da Técnica de Redução Modal	127
8	Sensibilidade Paramétrica de Placas Tratadas com Camada Restrita Passiva	131
8.1	Definição de Sensibilidade Paramétrica - Avaliação por Diferenças Finitas	132
8.2	Sensibilidade Paramétrica de Autovalores Complexos	133
8.3	Sensibilidade Paramétrica de Funções de Resposta em Frequência	135
8.4	Sensibilidade das Funções de Resposta em Frequência em Relação à Temperatura	136
8.5	Aplicações Numéricas da Sensibilidade de Placas Tratadas com Camada Restrita Passiva	137
8.5.1	Sensibilidade da FRF com Respeito às Espessuras das Camadas	137
8.5.2	Sensibilidade da FRF com Respeito à Temperatura	139
9	Conclusões e Propostas de Continuidade	145
10	Referências Bibliográficas	149
Anexo I	Funções de Interpolação Para os Modelos de 3 e 5 Camadas	155

Lista de Tabelas

4.1	Propriedades físicas e geométricas dos componentes da placa multi-camada	63
4.2	Parâmetros otimizados para os modelos GHM e ADF (242F01)	68
4.3	Parâmetros do modelo de Derivadas Fracionárias	68
4.4	Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. A	70
4.5	Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. B	71
4.6	Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. C	72
4.7	Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. A	72
4.8	Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. B	73
5.1	Frequências naturais e fatores de amortecimento modais para tratamento assimétrico com e sem camada restrigente	77
5.2	Frequências naturais e fatores de amortecimento modais para tratamento simétrico com e sem camada restrigente	77
5.3	Propriedades físicas de cada uma das camadas da placa sanduíche	78
5.4	Frequências naturais e fatores de amortecimento modais da placa base e da placa completamente tratada com as camadas restritas assimétrica e simétrica	78
5.5	Frequências naturais e fatores de amortecimento modais da placa base e da placa completamente tratada com as camadas viscoelástica livres assimétrica e simétrica	79
5.6	Influência da espessura da camada restrigente para o modelo assimétrico	81
5.7	Influência da espessura da camada restrigente para o modelo simétrico	81
5.8	Influência da espessura da camada viscoelástica para o tratamento assimétrico	85
5.9	Influência da espessura da camada viscoelástica para o tratamento simétrico	85
5.10	Frequências naturais e fatores de amortecimento modais para as configurações i, ii e iii	91

8.1	Parâmetros dos Campos de Deslocamento Anelástico	138
8.2	Constantes da expressão do fator de deslocamento paa o material ISD112	140
8.3	Constantes do módulo complexo para o material ISD112	140

Lista de Figuras

1.1	Amortecimento por camada restrita ativa e passiva	3
1.1	Princípio operacional do tratamento ACLD	4
1.2	Configurações de ACLD propostos na literatura	6
2.1	Cinemática da deformação	14
2.2	Elemento de placa com 5 camadas	22
2.3	Elemento de placa com 3 camadas	28
2.4	Elementos de camada restrita ativa com 3 e 5 camadas	32
2.5	Influência do Efeito Piezelétrico	33
2.6	Esboço do acoplamento de 4 elementos de placa com 3 camadas	39
3.1	Modelos de Kelvin-Voigt (a), Maxwell (b) e Linear Padrão (c)	42
3.2	Variação do módulo e fator de perda (Adaptado de Nashif et al., 1985)	46
3.3	Variação dos módulos e fator de perda para o material ISD112 (Lima, 2003)	47
4.1	Esquema da montagem experimental	61
4.2	Configurações de tratamento superficial utilizadas nos ensaios experimentais de placas	62
4.3	Nomograma do material viscoelástico 242F01 (extraído de 3M)	65
4.4	Interface do programa de identificação de parâmetros (Lima, 2003)	66
4.5	Ajuste de curvas para o material 242F01 (GHM) (Lima,2003)	66
4.6	Ajuste de curvas para o material 242F01 (ADF) (Lima,2003)	67
4.7	Ajuste de curvas para o material 242F01 (Derivadas Fracionárias com 5 parâmetros) (Lima,2003)	67
4.8	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração A (modelo GHM - tratamento assimétrico)	69
4.9	Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração A (modelo GHM - tratamento assimétrico)	69

4.10	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento assimétrico)	70
4.11	Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento assimétrico)	70
4.12	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração C (modelo GHM - tratamento assimétrico)	71
4.13	Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração C (modelo GHM - tratamento assimétrico)	71
4.14	Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração A (modelo GHM - tratamento simétrico)	72
4.15	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento simétrico)	73
4.16	Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento simétrico)	73
5.1	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ para tratamento assimétrico livre e com camada restrigente (GHM) e sem tratamento	76
5.2	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ para tratamento simétrico livre e com camada restrigente (GHM) e sem tratamento	77
5.3	Amplitudes das FRFs da placa base e tratamentos assimétrico e simétrico (GHM) para a conf. C	79
5.4	Amplitudes das FRFs da placa base e tratamentos assimétrico e simétrico (GHM) para a conf. C com camada viscoelástica livre	80
5.5	Influência da espessura da camada restrigente na FRF ($H_{I,I}$) do tratamento assimétrico	82
5.6	Influência da espessura da camada restrigente na FRF ($H_{I,I}$) do tratamento simétrico	82
5.7	Influência da espessura da camada restrigente sobre as frequências naturais (tratamento assimétrico)	83
5.8	Influência da espessura da camada restrigente sobre os fatores de amortecimento (tratamento assimétrico)	83
5.9	Influência da espessura da camada restrigente sobre as frequências naturais (tratamento simétrico)	84
5.10	Influência da espessura da camada restrigente sobre os fatores de amortecimento (tratamento simétrico)	84

5.11	Influência da espessura da camada viscoelástica na FRF ($H_{I,I}$) tratamento assimétrico	86
5.12	Influência da espessura da camada viscoelástica na FRF ($H_{I,I}$) do modelo simétrico	86
5.13	Influência da espessura da camada viscoelástica sobre as frequências naturais (tratamento assimétrico)	87
5.14	Influência da espessura da camada viscoelástica sobre os fatores de amortecimento (tratamento assimétrico)	87
5.15	Influência da espessura da camada viscoelástica sobre as frequências naturais (tratamento simétrico)	88
5.16	Influência da espessura da camada viscoelástica sobre os fatores de amortecimento (tratamento simétrico)	88
5.17	Configurações referentes às várias posições de tratamento superficial	90
5.18	Amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ para as configurações i, ii e iii (tratamento assimétrico - GHM)	90
5.19	Amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ para as configurações i, ii e iii (tratamento simétrico - GHM)	91
6.1	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. I)	96
6.2	Configuração (I) do posicionamento ótimo	96
6.3	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (I) de posicionamento ótimo e do tratamento completo	97
6.4	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. II)	98
6.5	Configuração (II) do posicionamento ótimo	98
6.6	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (II) de posicionamento ótimo e tratamento completo	99
6.7	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. III)	100
6.8	Configuração (III) do posicionamento ótimo	100
6.9	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (III) de posicionamento ótimo e tratamento completo	101
6.10	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada	

	geração (conf. IV)	102
6.11	Configuração (IV) do posicionamento ótimo	102
6.12	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (IV) de posicionamento ótimo e tratamento completo	103
6.13	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. V)	104
6.14	Configuração (V) de posicionamento ótimo	104
6.15	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (V) de posicionamento ótimo e tratamento completo	105
6.16	Configuração (VI) de posicionamento gerada aleatoriamente	106
6.17	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração de posicionamento ótimo, configuração A, tratamento completo e configuração aleatória (VI)	106
6.18	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. VII)	108
6.19	Configuração (VII) do posicionamento ótimo	108
6.20	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (VII) de posicionamento ótimo e do tratamento completo	109
6.21	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. VIII)	110
6.22	Configuração (VIII) do posicionamento ótimo	110
6.23	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (VIII) de posicionamento ótimo e do tratamento completo	111
6.24	Configuração (IX) do posicionamento gerada aleatoriamente	112
6.25	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração de posicionamento ótimo, da configuração A, do tratamento completo e da configuração aleatória (IX)	112
6.26	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. X)	114
6.27	Configuração (X) do posicionamento ótimo	114
6.28	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (X) de posicionamento ótimo e do tratamento completo	115

6.29	Configuração (XI) gerada aleatoriamente	116
6.30	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração de posicionamento ótimo, da configuração A, do tratamento completo e da configuração aleatória (XI)	116
6.31	Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (XII)	118
6.32	Configuração (XII) do posicionamento ótimo	118
6.33	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (XII) de posicionamento ótimo e do tratamento completo	119
6.34	Configuração (XIII) gerada aleatoriamente	120
6.35	Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração de posicionamento ótimo, da configuração A, do tratamento completo e da configuração aleatória (XIII)	120
7.1	Configuração da placa engastada-livre com tratamento assimétrico completo utilizada no método de redução modal	127
7.2	Pares modais obtidos com o emprego dos três modelos viscoelásticos	128
7.3	Amplitudes das funções de resposta em frequência para o modelo completo e reduzido com 2 modos	129
7.4	Amplitudes das funções de resposta em frequência para o modelo completo e reduzido com 5 modos	129
7.5	Amplitudes das funções de resposta em frequência para o modelo completo e reduzido com 25 modos	130
8.1	Sensibilidade da FRF com relação à espessura da camada restrigente (tratamento completo assimétrico)	138
8.2	Sensibilidade da FRF com relação à espessura da camada viscoelástica (tratamento completo assimétrico)	139
8.3	Influência da variação de temperatura nas amplitudes das FRF para as temperaturas de 25°C, 30°C e 35°C (tratamento assimétrico)	141
8.4	Sensibilidade da FRF em relação à variação de temperatura para tratamento assimétrico de (25°C)	142
8.5	Sensibilidade da FRF em relação à variação de temperatura para tratamento assimétrico de (30°C)	142
8.6	Sensibilidade da FRF em relação à variação de temperatura para tratamento assimétrico de (35°C)	143

Simbologia

i : i -ésima camada rígida, j : j -ésimo núcleo flexível,
 k : índice referente à k -ésima camada,
 u, v : deslocamentos longitudinais médios nas direções x e y ,
 t, h : espessuras das camadas rígida e flexível, respectivamente,
 w : deslocamento transversal na direção z ,
 z_i : distância a partir de um ponto médio na i -ésima camada,
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: deformações,
 E, ν : módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson,
 $\{\delta\}^e$: vetor de deslocamentos,
 θ_x, θ_y : rotações em x e y , respectivamente,
 $\{\Delta\}$: campo de deslocamentos,
 $\{\varepsilon\}$: vetor de deformações,
 $[N]$: matriz que relaciona os graus de liberdade geométricos e elementares,
 $[K]^e, [M]^e$: matrizes de rigidez e massa elementares,
 $[B], [D], [P]$: matrizes de deformações, propriedades dos materiais e densidade de massa,
 U : energias de deformação e cinética, respectivamente,
 a, b : dimensões da placa nas direções x e y , respectivamente,
 $\{\varepsilon_m\}, \{\varepsilon_b\}, \{\varepsilon_p\}$: vetores de deformação devido a membrana, flexão e cisalhamento no plano,
 $[N_w], [N_{u_k}], [N_{v_k}]$: matrizes de interpolação espacial correspondentes a w, u_k e v_k , respectivamente,
 $[M], [D], [K]$: matrizes de massa, amortecimento e rigidez globais,
 $\{\Lambda\}$: campo de deslocamentos elétricos,
 d_{31}, d_{32} : constantes piezelétricas,
 V : tensão aplicada no atuador piezelétrico,
 V_s^e : voltagem elementar desenvolvida pelo sensor piezelétrico,
 k_{31}, g_{31}, C : fator de acoplamento eletro-mecânico, constante de voltagem piezelétrica e capacitância do sensor piezelétrico,
 A_s, k_{3t} : área superficial e constante dielétrica do sensor,
 σ, ε : tensão e deformação
 G, μ : módulo de cisalhamento complexo e viscosidade do material viscoelástico,
 G', G'' : partes real e imaginária do módulo complexo viscoelástico,
 $c(t)$: função módulo do material viscoelástico,

G_u : módulo não-relaxado, ou em alta frequência,

G_r : módulo relaxado, ou em baixa frequência,

$h(s)$: funções de dissipação,

$G'(\omega), G''(\omega), \eta(\omega)$: módulo de armazenamento, módulo de perda e fator de perda,

$[K_e], [K_v], [\bar{K}_v]$: matrizes de rigidez elástica, viscoelástica e viscoelástica fatorada,

$\{F\}$: vetor de forças externas,

$[K_v^0]$: matriz de rigidez estática do material viscoelástico,

$[K_v^\infty]$: matriz de rigidez dinâmica, ou em alta frequência do material viscoelástico,

$\alpha_i, \xi_i, \omega_i$: parâmetros do modelo GHM,

C_i, Δ_i, Ω_i : parâmetros do modelo ADF,

G_r, G_1, α, β e b : parâmetros do modelo das Derivadas Fracionárias,

N_G, N_A : número total de mini-osciladores (GHM) e número de campos de deslocamentos anelásticos (ADF) adicionados,

$\{q^G\}, \{q^A\}$: graus de liberdade dissipativos adicionados pelos modelos GHM e ADF, respectivamente,

$[M_G], [K_G], [D_G]$: matrizes de massa, rigidez e amortecimento para o modelo GHM,

$[M_A], [K_A], [D_A]$: matrizes de massa, rigidez e amortecimento para o modelo ADF,

$[M_F], [K_F]$: matrizes de massa e rigidez para o modelo das Derivadas Fracionárias,

$\{q_G\}, \{q_A\}, \{q_F\}$: graus de liberdade globais para os modelos GHM, ADF e das Derivadas Fracionárias,

$\{F_G\}, \{F_A\}, \{F_F\}$: vetores de forças externas para os modelos GHM, ADF e das Derivadas Fracionárias,

$F[x(t)], L[x(t)]$: transformadas de Fourier e Laplace,

$(\{X_r\}, s_r), (\{X_r^*\}, s_r^*)$ auto-soluções, respectivamente de direita e de esquerda,

$\frac{\partial[H(\omega)]}{\partial p}$: sensibilidade de funções de resposta em frequência com respeito ao parâmetro p ,

$\frac{\partial\omega_r}{\partial p}, \frac{\partial\zeta_r}{\partial p}$: sensibilidades da r -ésima frequência natural e do r -ésimo fator de amortecimento modal com respeito ao parâmetro p .

Capítulo 1

Introdução

A combinação entre os recentes avanços tecnológicos em Ciência dos Materiais e o desenvolvimento de técnicas de controle e otimização de estruturas vem proporcionando o uso de sistemas mecatrônicos avançados, dentre os quais destacam-se as chamadas **Estruturas Inteligentes**. Tais estruturas têm integradas em si elementos sensores e atuadores, que compõem um sistema de controle destinado a garantir o funcionamento adequado do sistema sob condições de operação e ambientais variáveis.

Nota-se um crescente aumento da utilização das estruturas inteligentes na indústria aeroespacial e automobilística, tendo como consequência a necessidade de forte investimento e desenvolvimento em pesquisa. Contudo, a utilização destas estruturas inteligentes em outras áreas de aplicação, vem ocorrendo gradualmente em consequência da redução dos custos tecnológicos.

A lista de materiais utilizados em sistemas de estruturas inteligentes, inclui materiais piezelétricos, eletrostritivos, magnetostritivos, fluidos eletroreológicos e magnetoreológicos, materiais com memória de forma, fibras óticas, dentre outros. Em alguns casos as propriedades intrínsecas do material são conhecidas a muito tempo, mas apenas recentemente estes materiais sofreram refinamento tecnológico de modo a ser empregados em engenharia. Por exemplo, Pierre e Jacques Curie descreveram o efeito piezelétrico em 1880, mas apenas 60 anos mais tarde, os primeiros cristais piezelétricos começaram a ser empregados em rádios. Outros exemplos de materiais, como fibras óticas e fluídos eletroreológicos, têm o início de seu desenvolvimento muito recente, o que ainda os deixa com várias de suas propriedades ainda não caracterizadas, o que permite um grande espaço para desenvolvimento destas características e posterior aplicação dos mesmos.

A utilização destes materiais como sensores e/ou atuadores em sistemas inteligentes, necessita, ainda, de muita investigação no que tange as áreas de modelagem matemática, controle, otimização e desenvolvimento tecnológico.

Com a observação dos recentes avanços no desenvolvimento da teoria de estruturas inteligentes, nota-se uma freqüente utilização de diferentes combinações de tipos de materiais inteligentes, sempre procurando a melhoria do controle de vibrações de sistemas mecânicos. Este problema de controle de vibrações tem sido foco das atenções de pesquisadores nos países comprometidos com o desenvolvimento de novas tecnologias.

× As vibrações estruturais são sempre um grave problema uma vez que elas podem causar danos por fadiga estrutural, transmissão de vibração a outros sistemas, ruído interno e externo devido à irradiação acústica, dentre outros. A vibração e ruído em estruturas e maquinário sempre foi problema amplamente investigado por pesquisadores e projetistas industriais e de construção civil. A atenuação dos níveis de vibração e ruído vem se tornando foco cada vez mais constante no âmbito do desenvolvimento de tecnologias, uma vez que as dimensões estruturais e diversidade de materiais empregados, crescem continuamente e o mesmo pode ser observado com respeito à velocidade operacional das máquinas mais modernas.

× Um detalhe importante que vem estimulando o crescente emprego de novas técnicas de supressão de vibração é o mercado competitivo, principalmente das indústrias automobilísticas e aeronáutica, onde o conforto dos passageiros acaba sendo fortemente influenciado pelos níveis de vibração e ruído.

× As técnicas de controle de vibrações e ruído podem ser classificadas em três tipos básicos. As primeiras, denominadas técnicas de **controle passivo**, onde o controle é obtido sem gasto de energia externa. Estas técnicas se aplicam mediante, por exemplo, modificações estruturais, uso de amortecedores viscosos ou absorvedores dinâmicos de vibração. Uma outra aplicação deste tipo de controle consiste na aplicação de materiais viscoelásticos à estrutura base permitindo a dissipação da energia vibratória em forma de calor (Nashif, 1985).

Outras técnicas de controle são as chamadas de **controle ativo**, que contrariamente às técnicas de controle passivo, necessitam de energia para estabelecimento e manutenção do controle. De modo geral, são aplicados atuadores à estrutura vibrante, que são elementos externos com capacidade de desenvolver forças de controle em contraposição às forças excitadoras. O controle, a um determinado custo energético, se dá através do cálculo e posterior aplicação das forças de controle em função da observação/medição das excitações e respostas do sistema.

Finalmente, as técnicas de **controle semi-ativo**, que visam a redução dos níveis de ruído e vibração através de alterações induzidas nos parâmetros físicos do sistema. Em geral, são empregados neste tipo de controle os materiais especiais, que têm suas propriedades físicas alteráveis sob condições pré-determinadas, tais como, fluidos eletroreológicos e magnetoreológicos, materiais com memória de forma e piezelétricos (Banks, 1996).

× Em virtude do baixo custo de manutenção, o controle passivo é adotado como uma solução bastante conveniente para o problema de vibração e ruído, principalmente em estruturas de grande porte. No âmbito do controle passivo, os materiais viscoelásticos têm sido amplamente empregados nos sistemas de controle de sistemas robóticos, na engenharia aeronáutica e aero-espacial e em construções civis.

A forma mais simples para o tratamento do amortecimento passivo é o acoplamento de uma camada amortecedora livre, ilustrada na Fig. 1.1(a) para o caso de placas. Isto se dá simplesmente acoplando-se um material viscoelástico à estrutura base. A vibração da estrutura base deforma o material viscoelástico e a energia de deformação associada é convertida em calor, reduzindo a energia vibratória.

Uma outra forma de amortecimento passivo é a utilização de uma camada amortecedora restrita (Fig. 1.1(b)). Uma camada restringente é sobreposta à camada viscoelástica para aumentar sua deformação e sua capacidade de amortecimento. Tal configuração é conhecida por **Camada Restrita Passiva (PCLD- Passive Constrained Layer Damping)**.

Atualmente, tem-se tratado com muita ênfase o controle híbrido de vibração de estruturas por meio do tratamento do amortecimento por **Camada Restrita Ativa (ACLD - Active Constrained Layer Damping)**. Este tratamento consiste do convencional amortecimento por camada restrita passiva (PCLD), acrescido de um controle ativo como mostrado na Fig. 1.1(c). Neste caso, a camada restringente tem características piezelétricas.

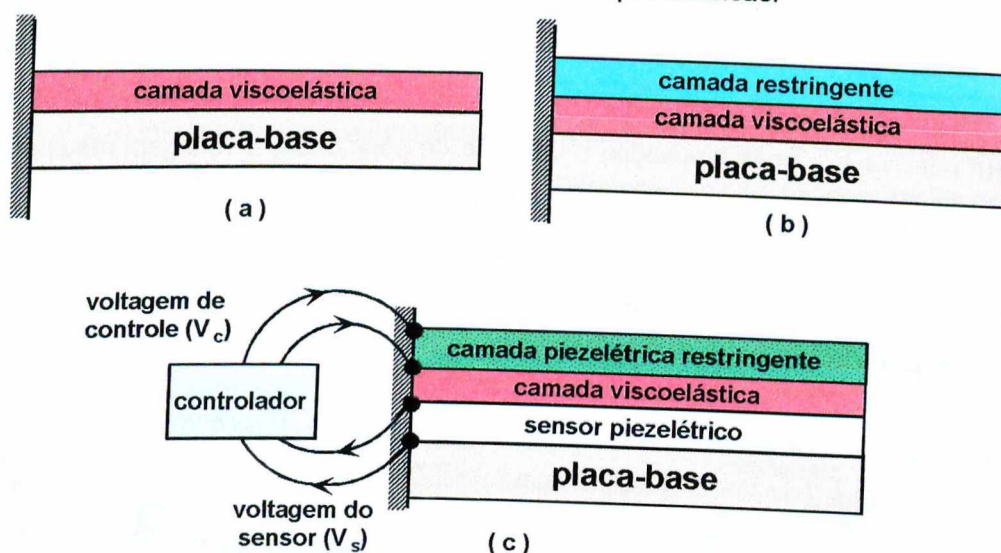


Figura 1.1- Amortecimento por camada restrita ativa e passiva

Uma das principais vantagens do ACLD é sua segurança, uma vez que ele pode operar fielmente mesmo no caso de falha do controlador ativo. O controle de vibrações em alta frequência é eficiente com o amortecimento passivo e, em baixa frequência, mostra-se eficiente com o componente ativo. Esta combinação resulta num tratamento menos exigente em níveis de esforços de controle e que compensa a queda de eficiência em ambientes de temperatura variável (Baz e Ro, 1993).

O tratamento ACLD aumenta a eficiência do amortecimento passivo, diminuindo peso, e viabilizando amortecimento sobre largas faixas de temperatura e bandas de frequência,

para o controle ativo. Portanto, observa-se uma forte tendência na utilização de técnicas de controle híbrido, onde são reunidas as principais vantagens dos sistemas de controle ativo e passivo. Uma revisão de algumas das principais contribuições, reportadas na literatura acerca do emprego de camadas restritas passivas e ativa, são apresentadas a seguir.

1.1 O Tratamento ACLD

O tratamento ACLD apresentado por Baz e Ro (1994), consiste numa camada viscoelástica que é colocada entre duas camadas piezelétricas como mostra a Fig. 1.1. O conjunto ACLD com 3 camadas é acoplado a uma viga, onde uma camada piezelétrica age como sensor e a outra como atuador. O sensor é a camada piezelétrica diretamente acoplada à superfície superior da viga. A outra camada piezelétrica se comporta como uma camada restringente ativa.

O efeito interativo sensor/atuador no tratamento ACLD é ilustrado considerando o movimento da viga durante um ciclo típico de vibração. Na Fig. 1.1(a), a viga se move para baixo. Assim, o sensor diretamente acoplado à viga sofre as tensões desta, gerando uma voltagem positiva V_s . Após ampliação e inversão de polaridade, a voltagem resultante V_c é realimentada para ativar a camada piezelétrica restringente que, por sua vez, contrai. Esta contração da camada restringente ativa resulta num ângulo de deformação de cisalhamento γ_p , na camada viscoelástica, que é maior que o ângulo γ_c desenvolvido por uma camada restringente passiva convencional (Fig. 1.1(a)).

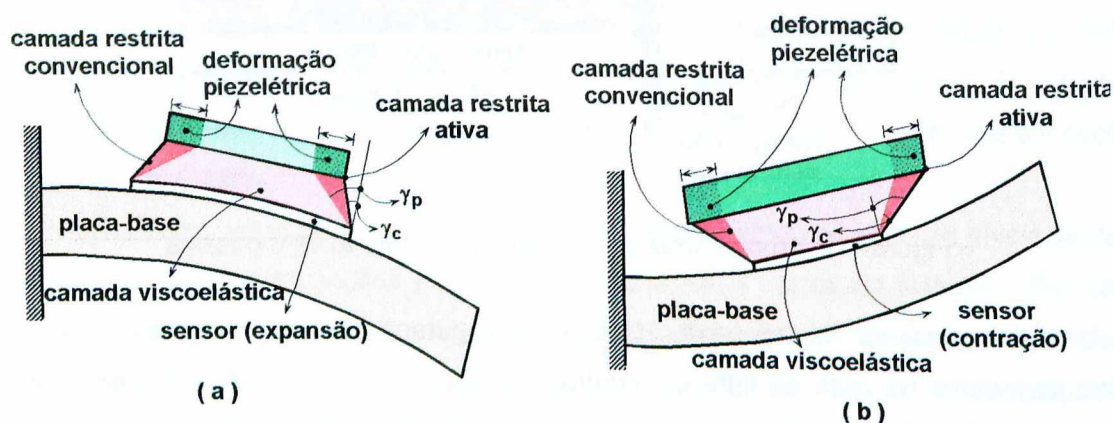


Figura 1.1- Princípio operacional do tratamento ACLD

Analogamente, durante o movimento da viga para cima (Fig. 1.1(b)), a parte superior da viga e o sensor sofrem tensões compressivas e uma voltagem negativa é gerada pelo sensor. De modo análogo à primeira parte do ciclo, enviando o sinal do sensor para a

camada restringente ativa, o atuador se estende e aumenta o ângulo de deformação de cisalhamento γ_p comparativamente ao ângulo γ_c para a camada restringente convencional. A deformação de cisalhamento da camada viscoelástica aumenta durante o ciclo de vibração e, em consequência, têm-se o aumento na energia dissipada. Além disso, o encolhimento da camada piezolétrica durante o movimento para cima, e a expansão durante o movimento para baixo, produzem um momento fletor na viga que tende a trazer a viga de volta a sua posição de equilíbrio.

Desta forma, este efeito do aumento da energia de dissipação em conjunto com o momento fletor residual acabam por amortecer a viga. Não se observa este tipo de efeito num amortecimento por camada restrita convencional e esta, então, é uma das principais contribuições para a eficiência do amortecimento do ACLD.

A deformação de cisalhamento da camada viscoelástica pode ser aumentada mediante uma estratégia de controle apropriada, intensificando a dissipação de energia com posterior amortecimento da vibração.

Agnes e Napolitano (1993) apresentaram um modelo que aumenta significativamente o amortecimento modal de uma viga simplesmente apoiada, para o modo fundamental. Para representar o comportamento viscoelástico (dependente da frequência e da temperatura), foi utilizado um processo iterativo para cada temperatura e os resultados analíticos foram comparados com o modelo de elementos finitos.

Baz (1993) desenvolveu um modelo matemático de ACLD baseado no modelo de amortecimento por cisalhamento de Mead e Markus (1969). O modelo de amortecimento por cisalhamento foi integrado aos modelos do comportamento de sensores (Miller e Hubbard, 1987) e atuadores piezolétricos distribuídos (Crawley e De Luis, 1987) para gerar o modelo ACLD. Para controlar a interação entre o sensor e o atuador piezolétricos, foram consideradas leis de controle que melhoram as características de controle de vibrações. Posteriormente, esta técnica foi estendida a uma viga com cobertura parcial por Baz e Ro (1993). A geometria deste sistema ACLD proposto por Baz é ilustrada na Fig. 1.2(a).

Uma outra forma de tratamento ACLD foi proposta por Shen (1993). Chamada de amortecimento por camada restrita inteligente (ICL-intelligent constrained layer), ela se vale de um sensor "pontual" para medir a resposta de vibração visando a aplicação de controle por realimentação (Fig. 1.2(b)). Mais tarde, Shen (1994) formulou a dinâmica do tratamento ICL para uma viga de Euler-Bernoulli, onde uma equação diferencial de oitava ordem foi utilizada para descrever as vibrações de uma viga com uma camada viscoelástica e uma piezolétrica acopladas, esta última sujeita a um campo elétrico. Ainda foram desenvolvidos por Shen os critérios de estabilidade e controlabilidade para o controle de vibração destas vigas de Euler-

Bernoulli para um tratamento ICL completo (Shen, 1994a). Shen (1995) ainda mostrou que a potência dissipada através do amortecimento ativo é o produto entre o campo elétrico e a velocidade axial das extremidades da camada piezelétrica, por meio de uma aproximação variacional combinando trabalho-energia com as equações de carga.

Comprovando a vantagem do uso do tratamento híbrido ativo/passivo, Azvine et al. (1995) estudaram um mecanismo ACLD com deformação de cisalhamento composta pela combinação dos cisalhamentos por flexão e devido à deformação ativa da camada piezelétrica. Estes resultados indicam a eficiência do amortecimento passivo para modos mais altos e do controle ativo para modos mais baixos, produzindo ainda um mecanismo de segurança para eventuais falhas de realimentação, uma vez que um nível considerável de amortecimento passivo está sempre presente.

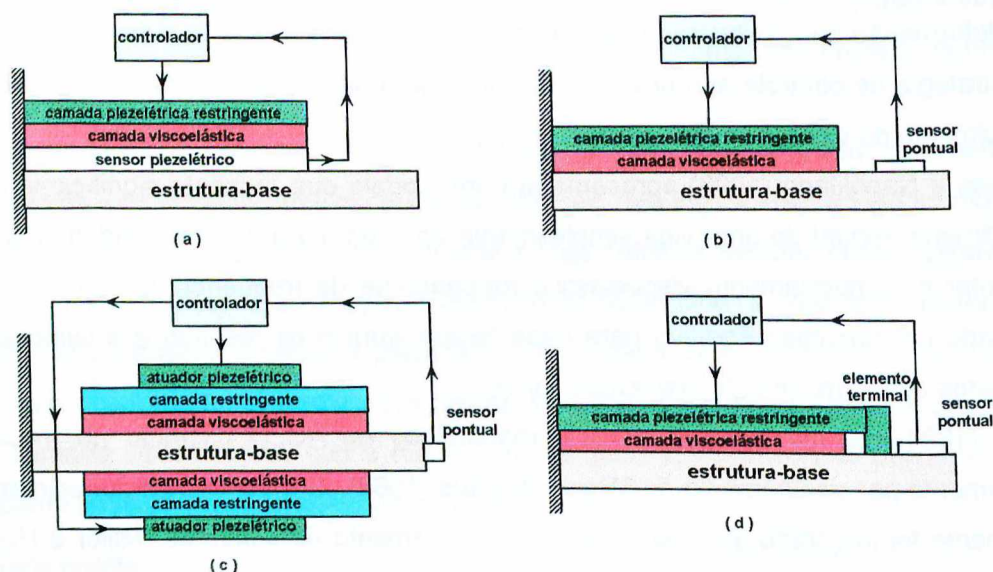


Figura 1.2- Configurações de ACLD propostos na literatura

Um outro modelo proposto por Rongong et al. (1997) é composto por uma camada restrita colocada entre uma camada piezocerâmica e uma viscoelástica, e o conjunto acoplado nas superfícies superior e inferior de uma viga retangular engastada-livre (Fig. 1.2(c)). O comportamento vibratório axial e em flexão da viga engastada-livre com um atuador piezocerâmico foi modelado baseado na aproximação de Rayleigh-Ritz. Os modelos desenvolvidos também foram utilizados em simulações de controle em malha aberta e em malha fechada (realimentação de velocidade), demonstrando estabilidade, apresentando entretanto efeitos de **spillover** em casos de amortecimento ativo convencionais, para ganhos mais altos do controlador.

Lam et al. (1995) investigaram uma viga tratada por ACLD, no domínio do tempo. Os efeitos de amortecimento devido ao material viscoelástico foram modelados usando o

método de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) (Mac-Tavish e Hughes, 1993). A estrutura total foi modelada usando uma aproximação de Ritz-Galerkin, levando em conta o efeito da camada restrigente na viga.

Um modelo de sistema ACLD, foi desenvolvido via princípio de Hamilton baseado nas equações constitutivas dos materiais elásticos, viscoelásticos e piezelétricos (Liao e Wang, 1995). Um método Galerkin-GHM combinado foi empregado na discretização e análise do modelo no domínio do tempo. Os efeitos do material viscoelástico na autoridade de controle foram investigados. Foram identificadas situações nas quais uma camada restrita ativa pode funcionar melhor que sistemas puramente passivos ou puramente ativos. Em seguida, Liao e Wang (1996) desenvolveram o conceito de amortecimento por camada restrita ativa melhorado (EACL-enhanced active constrained layer), ilustrado na Fig. 1.2(d). Esta proposta visa aumentar a transmissibilidade de esforços de controle por meio da adição de elementos extras às extremidades da cobertura piezelétrica. Apesar desta aproximação reduzir apenas suavemente o efeito de amortecimento passivo do material viscoelástico, ela pode aumentar o desempenho da camada restrita ativa.

Estendendo os estudos de Trompette et al. (1978) e Rao (1976) de análise dinâmica de PCLD, Baz e Ro (1993) descrevem a dinâmica de vigas flexíveis com tratamentos ACLD completo e parcial, via elementos finitos. As equações do movimento do sistema foram obtidas pelo princípio do trabalho virtual. Este modelo ressalta as interações entre a viga, camadas piezelétricas (sensor/atuador), camada viscoelástica e uma lei de controle adequada. As frequências naturais e os fatores de amortecimento teóricos foram comparados com frequências naturais e fatores de amortecimento de análises experimentais para diferentes ganhos de controle.

Ao invés de utilizar o módulo complexo para inclusão do efeito viscoelástico no modelo de elementos finitos do ACLD, Van Nostrand e Inman (1995) aplicaram um método baseado no aumento dos campos termodinâmicos (Lesieutre e Mingori, 1990). Este modelo apresenta graus de liberdade independentes para o deslocamento axial da estrutura base e a camada piezelétrica. Isto veio permitir a obtenção das soluções temporais. Os autores concluíram que materiais viscoelásticos mais espessos aumentam o amortecimento, mas diminuem a eficiência da camada piezelétrica.

Varadan et al. (1996) desenvolveram um modelo de elementos finitos tri-dimensional em malha fechada para análise dos efeitos do ACLD aplicado a uma dada estrutura. Foram utilizados três elementos sólidos com 20 nós para modelar as características piezelétricas e a camada de material viscoelástico e para modelar a viga, elementos de casca com 9 nós. Foram utilizados ainda elementos de transição, conectando os elementos sólidos aos

elementos de casca. Foi incluído um algoritmo de controle para fechar o laço entre o sensor e o atuador na análise de elementos finitos. Foram considerados vários tipos de tratamento ACLD para avaliação dos efeitos de amortecimento passivo, além de comparações entre ACLD, PCLD e controle apenas ativo. Os resultados mostraram que, para uma estrutura engastada-livre, os modelos ACLD sempre melhoram o desempenho dos sistemas ativo e passivo, proporcionando benefícios, tanto do amortecimento ativo, quanto do amortecimento passivo.

Lesieutre (1992) propôs examinar uma cobertura completa, porém segmentada da estrutura, usando tratamento viscoelástico, motivado pelo sucesso obtido pelo tratamento com camada restrita passiva segmentada de forma a absorver vibrações de longo comprimento de onda.

Usando um método de energia em combinação com o método de modelagem viscoelástica dos campos de deslocamentos anelásticos (Lesieutre e Bianchini, 1995) (ADF-anelastic displacement fields), Lesieutre e Lee (1996) desenvolveram um elemento finito para vigas planas com tratamentos por camada restrita ativa. O método ADF foi usado para implementar o modelo do material viscoelástico, possibilitando um modelo do material viscoelástico no domínio do tempo. Isto permitiu descrever a rigidez e o amortecimento do material viscoelástico com a dependência da frequência. Foram apresentadas análise modais do elemento finito em configurações contínua e segmentada puramente passivas, assim como desempenho ativo correspondente usando uma estratégia de controle proporcional/derivativo (PD) baseada no sensoriamento de deformação em pontos discretos da estrutura.

Na tentativa de representar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos, possibilitando a incorporação deste efeito aos modelos de elementos finitos, Bagley e Torvik (1979) propuseram um modelo derivativo de ordem fracionária, que é uma extensão do modelo linear padrão, denominado Modelo das Derivadas Fracionárias (MDF). Em trabalhos posteriores (Bagley e Torvik, 1983, 1985), o MDF é incorporado a modelos de elementos finitos de barras e vigas tratadas com camada restrita passiva, permitindo a análise das respostas temporais. A grande vantagem deste modelo é a necessidade de apenas 5 parâmetros para representar o efeito viscoelástico, o que contudo, dependendo dos expoentes fracionários do sistema, pode levar a sistemas de dimensão elevada, ocasionando um alto custo computacional na resolução dos mesmos.

Um problema que aparece da incorporação dos modelos viscoelásticos (GHM e ADF) ao modelo de elementos finitos de placa multi-camadas é o aumento considerável do número de graus de liberdade. Assim, são necessárias técnicas de redução de modelo, principalmente para possível aplicação de controle.

Park et al. (1999) propõem um método de redução modal para abrandar os efeitos do acréscimo de graus de liberdade dissipativos adicionados ao modelo de elementos finitos em virtude da utilização do modelo GHM. Chantalakhana e Stanway (2001) apresentam uma estratégia de controle baseada no modelo de placa multi-camadas tratada por camada restrita passiva onde o modelo é reduzido pela técnica de Guyan.

Trindade (2000) utiliza uma técnica de redução modal mais eficiente, sendo penalizada, entretanto, pela necessidade de se calcular as auto-soluções do sistema completo, após a inclusão do modelo viscoelástico. Este problema foi minimizado através da decomposição espectral da matriz de rigidez viscoelástica fatorada.

Como uma das poucas referências a placas tratadas por ACLD, Baz e Ro (1996) apresentaram uma análise de elementos finitos da dinâmica e controle de uma placa fina parcialmente tratada por conjuntos ACLD. O modelo estendeu o estudo de tratamento PCLD proposto por Kathua e Cheung (1973) para placa. A camada amortecedora foi considerada viscoelástica e, mais uma vez, a representação do comportamento viscoelástico do módulo complexo foi aplicada. Foram confrontados os resultados teóricos com avaliações experimentais.

As considerações acerca da escolha dentre projetos de tratamento PCLD, controle ativo puro e tratamento ACLD, foram apresentadas por Haung et al. (1996). Foram desenvolvidas as equações para uma viga com tratamentos parciais ACLD/PCLD e, para simular um problema de projeto realístico, o posicionamento ótimo, comprimento e espessuras do tratamento sujeitos a restrições de espessura foram estudados para as três possibilidades de tratamento. Concluiu-se que o tratamento ACLD proporciona melhor redução dos níveis de vibração que o PCLD e sua utilização sempre melhora o controle ativo puro em aplicações de baixo ganho.

Numa análise semelhante, Velez e Rao (1996) obtiveram o projeto ótimo de estruturas para três diferentes tipos de tratamentos de amortecimento: PCLD, ACLD, e amortecimento ativo. A estrutura foi projetada para mínimo peso, com restrições na frequência e fatores de amortecimento. Foi desenvolvido um elemento finito bi-dimensional baseado num elemento bi-dimensional de quatro nós. Um método de posicionamento do tratamento foi incorporado ao processo de otimização estrutural. Concluiu-se que o melhor tipo de tratamento de amortecimento para a estrutura depende tanto da massa e fator de amortecimento, quanto da própria estrutura e algoritmo de controle.

Comparações teóricas entre as características da energia de dissipação de vigas tratadas com PCLD, ACLD e controle ativo foram apresentadas por Baz (1996). As comparações foram baseadas nos parâmetros de distribuição dos modelos que foram desenvolvidos para descrever as características quasi-estáticas de vigas controladas tanto por ACLD quanto por

controle ativo e PCLD. Ainda foram comparadas as características de desempenho, os fatores de perda e as energias de controle associadas das vigas tratadas pelos três métodos.

Park e Baz (1999) apresentaram os fundamentos da controle ativo de vibração de placas, teórica e experimentalmente, com ênfase nos comportamentos de dependência de temperatura do sistema placa/ACLD. O sistema foi modelado pela teoria de placa laminada. Observou-se que apesar da estratégia PCLD ser muito efetiva na atenuação de vibrações estruturais da placa, estas atenuações são muito menores que as obtidas com o ACLD ótimo. Consensualmente, o tratamento ACLD aparece superior ao tratamento PCLD, especialmente sobre extensas faixas de temperatura e frequência.

1.2 Objetivos e Descrição do Trabalho

Inserido no contexto das técnicas de controle e vibrações, o presente trabalho enfoca o emprego de camadas restritas passivas e ativas aplicadas a placas, complementando os estudos anteriores, reportando que consideram, majoritariamente, vigas.

São abordados diversos aspectos, tais como: modelagem por elementos finitos do sistema de placa multi-camadas, modelagem do efeito viscoelástico, inclusão dos modelos viscoelásticos aos modelos de elementos finitos, simulações, validações experimentais, otimização, redução de modelos e análise de sensibilidade. Apesar de não serem enfatizados os aspectos relativos ao controle ativo, buscou-se, com o estudo realizado, fornecer os subsídios necessários para uma posterior aplicação desse controle.

Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver um conhecimento amplo sobre as características do sistema passivo, incluindo análises sobre as variáveis de projeto, possibilidades de posicionamento do tratamento, dentre outros, propiciando aumentar a eficiência de sistemas de controle baseados em camadas restritas.

Observando-se os resultados das pesquisas desenvolvidas sobre tratamentos PCLD e ACLD, nota-se que a grande maioria trata de estruturas tipo viga. Além disso, na maior parte das vezes, a modelagem do efeito viscoelástico é abordada considerando-se apenas o módulo complexo do material viscoelástico. Assim, esse trabalho vem contribuir com estudos de estruturas do tipo placas multi-camadas, que têm sido relativamente pouco encontradas no âmbito de tratamento PCLD e ACLD. Outras contribuições deste trabalho são a incorporação dos modelos GHM, ADF e de Derivadas Fracionárias ao modelo de Elementos Finitos de placas multi-camadas e o estudo do posicionamento ótimo do tratamento PCLD, além do desenvolvimento de uma técnica de análise de sensibilidade de autovalores complexos e funções de resposta em frequência com relação às variáveis de projeto e à temperatura.

O desenvolvimento deste trabalho foi organizado da seguinte maneira:

O segundo capítulo apresenta toda a modelagem por elementos finitos de sistemas de placa multi-camadas, com 3 camadas (assimétrico) e 5 camadas (simétrico). Neste capítulo, é ainda apresentada a modelagem dos sistemas de Camada Restrita Ativa, onde as camadas restritivas passivas são substituídas por camadas piezelétricas ativas, e as equações de sensor e atuador piezelétricos são formuladas.

O terceiro capítulo se dedica aos modelos viscoelásticos. Os modelos de Golla-Hughes-MacTavish (GHM), de Campos de Deslocamentos Anelásticos (ADF) e de Derivadas Fracionárias são apresentados e posteriormente incorporados aos modelos de elementos finitos.

O quarto capítulo traz validações experimentais do controle passivo de vibrações em placas multi-camadas tratadas por camada restrita passiva, tanto para 3 camadas como para 5 camadas, onde o efeito viscoelástico foi introduzido ao modelo de elementos finitos por meio do modelo GHM.

O capítulo V traz um estudo sobre a influência de alguns parâmetros físicos e geométricos do tratamento por camada restrita passiva, tais como, a espessura das camadas e o posicionamento do tratamento, visando obter uma visão ampla do comportamento do sistema sob alterações destes parâmetros.

O capítulo VI apresenta um procedimento de otimização baseado em Algoritmos Genéticos, sobre o posicionamento do tratamento parcial por camada restrita passiva, tanto para o modelo de 3 quanto para o de 5 camadas.

O sétimo capítulo utiliza uma técnica de redução modal, objetivando diminuição dos graus de liberdade do sistema e possibilitando a aplicação de controle, uma vez que a incorporação dos modelos viscoelásticos (GHM e ADF) ao modelo de elementos finitos, aumenta demasiadamente o número de graus de liberdade total.

O oitavo capítulo apresenta técnicas de análise de sensibilidade, as quais são ferramentas úteis na caracterização, projeto e otimização do sistema de controle. É considerada a análise de sensibilidade tanto em relação a um conjunto de parâmetros físicos e geométricos quanto à temperatura, uma vez que esta tem grande influência sobre o comportamento de materiais viscoelásticos. Outra utilidade da análise de sensibilidade é a possibilidade de se avaliar a influência da temperatura na resposta do sistema, uma vez que os modelos viscoelásticos, dependentes da frequência e da temperatura, colocam nos modelos apresentados, dependência explícita apenas da frequência.

Na sequência, são apresentadas as contribuições, conclusões do trabalho, propostas de continuidade e referências bibliográficas.

Capítulo 2

Modelagem por Elementos Finitos de Camadas Restritas Passivas e Ativas

Neste capítulo é desenvolvida a teoria geral de placas multi-camadas, aqui também chamadas placas sanduíche, perfazendo n camadas elásticas alternadas com $n-1$ núcleos viscoelásticos intermediários, com base no desenvolvimento original feito por Kathua e Cheung (1973). Utilizando o Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica, as camadas viscoelásticas são inicialmente modeladas considerando apenas o efeito elástico, e o efeito viscoelástico e a dependência da frequência são introduzidos posteriormente por meio da inclusão do módulo viscoelástico representado pelos modelos viscoelásticos descritos no capítulo seguinte. É apresentada a teoria de discretização por Elementos Finitos onde cada elemento finito forma um sistema sanduíche com $2n - 1$ camadas. São admitidas propriedades isotrópicas para cada camada da estrutura sanduíche.

2.1 Relações Cinemáticas

Na Fig. 2.1, é apresentado um esboço que representa as deformações de três camadas imediatamente sucessivas, havendo um núcleo viscoelástico (camada central) limitado por duas camadas elásticas adjacentes. A análise se estende para i camadas elásticas ($1 \leq i \leq n$) e j núcleos viscoelásticos ($1 \leq j \leq n - 1$) intercalados.

Apenas a rigidez de extensão e a de flexão das camadas elásticas são levadas em conta, negligenciando-se o cisalhamento transversal. Para as camadas viscoelásticas, além da rigidez de extensão e da rigidez de flexão, consideram-se as deformações de cisalhamento transversal. Como hipóteses adicionais considera-se que o deslocamento transversal e as rotações, respectivamente em x e y , sejam comuns a todas as camadas elásticas.

Considerando que as seções transversais permanecem planas após a deformação, de acordo com a Fig. 2.1, para cada núcleo viscoelástico escreve-se a seguinte relação:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_j = \frac{u_B - u_C}{h_j} \quad (2.1)$$

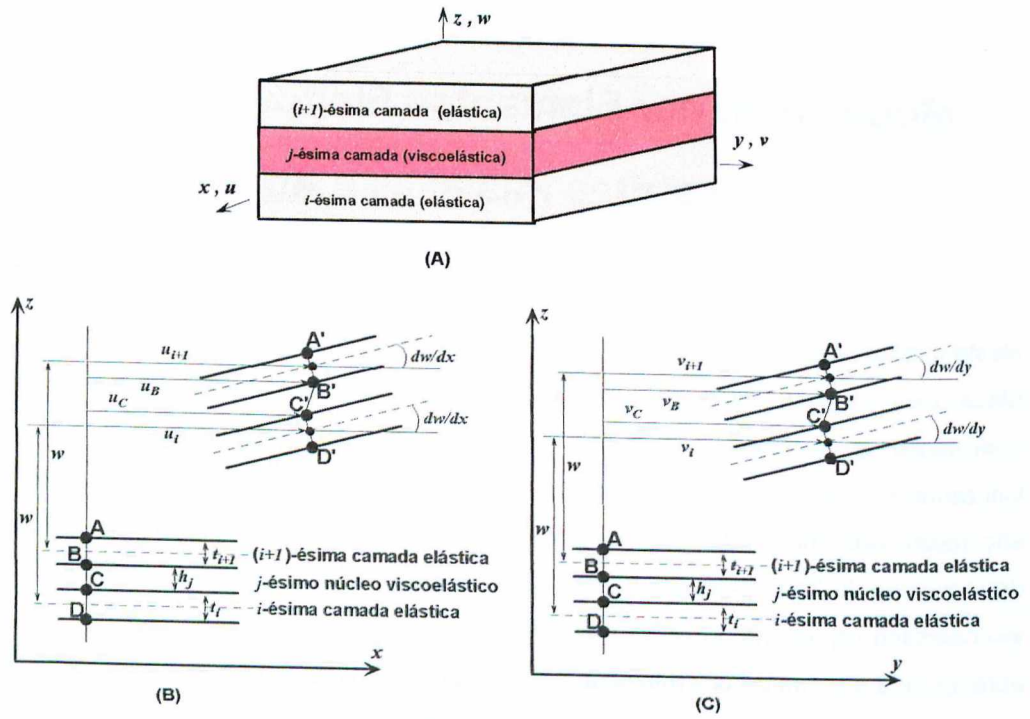


Figura 2.1- Cinemática da deformação

onde:

$$u_B = u_{i+1} + \frac{t_{i+1}}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$u_C = u_i - \frac{t_i}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3)$$

o que substituído em (2.1) fornece:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_j = \frac{1}{h_j} \left[(u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.4)$$

ou ainda:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_j = \frac{d_j}{h_j} \left[\frac{(u_{i+1} - u_i)}{d_j} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.5)$$

com $d_j = (t_{i+1} + t_i) / 2$.

De forma análoga, para a direção y , obtém-se:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_j = \frac{d_j}{h_j} \left[\frac{(v_{i+1} - v_i)}{d_j} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.6)$$

Os deslocamentos longitudinais médios dos núcleos viscoelásticos na direção x são dados por:

$$u_j = \frac{u_B + u_C}{2} = \frac{1}{2} \left[u_i + u_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.7)$$

Analogamente, para a direção y , têm-se:

$$v_j = \frac{1}{2} \left[v_i + v_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.8)$$

2.2 Relações Tensão-Deformação

São consideradas apenas deformações por flexão e extensão nas camadas elásticas e somente deformações de cisalhamento nos núcleos viscoelásticos. As relações deformação-deslocamento são dadas pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.13)$$

É apresentado, a seguir, o desenvolvimento das relações tensão-deformação para cada tipo de camada que compõe a placa multi-camadas. O sobrescrito (i) se refere à i -ésima camada elástica e z_i é a distância, na direção z , medida a partir do plano médio desta, na direção w . Similarmente, o sobrescrito (j) se refere ao j -ésimo núcleo viscoelástico. Para simplificar, os materiais componentes das camadas elásticas e dos núcleos viscoelásticos são considerados isotrópicos, embora se possa considerar, com relativa facilidade, a característica de ortotropia.

Primeiramente, tratam-se as deformações para a i -ésima camada elástica, para a qual os deslocamentos longitudinais de qualquer ponto, nas direções x e y , podem ser escritos,

respectivamente, como:

$$u^{(i)} = u_i - z_i \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$v^{(i)} = v_i - z_i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.15)$$

Combinando as equações (2.9) a (2.15), as deformações se escrevem:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial y} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

$$\gamma_{xy}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} - 2z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.18)$$

o que permite escrever as relações tensão-deformação na seguinte forma (Ugural, 1981):

$$\{\sigma^{(i)}\} = [E^{(i)}] \{\varepsilon^{(i)}\} \quad (2.19)$$

onde o vetor de tensões $\{\sigma^{(i)}\}$, o vetor de deformações $\{\varepsilon^{(i)}\}$ e a matriz de elasticidade $[E^{(i)}]$, da i -ésima camada elástica são dados por:

$$\{\sigma^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$[E^{(i)}] = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Para o j -ésimo núcleo viscoelástico, os deslocamentos longitudinais de qualquer ponto, na direção x , são escritos como:

$$u^{(j)} = u_j + z_j \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_j \quad (2.22)$$

Combinando (2.4) e (2.22), obtém-se:

$$u^{(j)} = u_j + z_j \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h_j} + \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2h_j} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.23)$$

De forma análoga para a direção y , tem-se:

$$v^{(j)} = v_j + z_j \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_j} + \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2h_j} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.24)$$

Empregando as equações (2.9) a (2.13), as deformações normais e de cisalhamento dos núcleos viscoelásticos podem ser escritas, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\varepsilon_x^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_y^{(j)} = \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} = \frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.26)$$

$$\gamma_{xy}^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + (t_{i+1} + t_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.27)$$

$$\gamma_{xz}^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h_j} \left[u_{i+1} - u_i + \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.28)$$

$$\gamma_{yz}^{(j)} = \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h_j} \left[v_{i+1} - v_i + \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.29)$$

Assim, obtém-se as relações tensão-deformação para os núcleos viscoelásticos na seguinte equação matricial:

$$\{\sigma^{(j)}\} = [E^{(j)}] \{\varepsilon^{(j)}\} \quad (2.30)$$

onde o vetor de tensões $\{\sigma^{(j)}\}$, o vetor de deformações $\{\varepsilon^{(j)}\}$ e a matriz de elasticidade $[E^{(j)}]$, do j -ésimo núcleo viscoelástico são dados por:

$$\{\sigma^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(j)} \\ \sigma_y^{(j)} \\ \tau_{xy}^{(j)} \\ \tau_{xz}^{(j)} \\ \tau_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \\ \varepsilon_y^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \\ \gamma_{xz}^{(j)} \\ \gamma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$$[E^{(j)}] = \begin{bmatrix} \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)2}} & \frac{E^{(j)}\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^{(j)}\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)2}} & \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

sim.

2.3 Discretização por Elementos Finitos

A discretização por elementos finitos baseia-se na proposta de Khatua e Cheung (1973), empregando um elemento retangular com quatro nós nos vértices, constituído de n camadas, conforme ilustrado na 2.1. A deflexão transversal w é interpolada por um polinômio cúbico de doze termos e os deslocamentos no plano da placa, u e v , são aproximados por funções bi-lineares em x e y . As rotações em x e y , são denotadas, respectivamente, por $\theta_y = \frac{dw}{dy}$ e $\theta_x = \frac{dw}{dx}$, e as dimensões da placa, respectivamente, em x e y , são dadas por a e b . Desta forma, o vetor de deslocamentos nodais em nível elementar é dado por:

$$\{\delta\} = [\{\delta_1\}^T \ \{\delta_2\}^T \ \{\delta_3\}^T \ \{\delta_4\}^T]^T \quad (2.33)$$

onde:

$$\{\delta_j\} = [u_{1j} \ v_{1j} \ u_{2j} \ v_{2j} \ \dots \ u_{nj} \ v_{nj} \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj}]^T; \quad j = 1, \dots, 4 \quad (2.34)$$

O campo de deslocamentos longitudinais e transversais no interior do elemento é expresso segundo:

$$\{\Delta(x, y)\} = [N(x, y)] \{\delta\} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{matrix} \quad (2.35)$$

onde:

$$\{\Delta(x, y)\} = [u_1(x, y) \ v_1(x, y) \ u_2(x, y) \ v_2(x, y) \ \dots \dots \ u_n(x, y) \ v_n(x, y) \ w(x, y) \ \theta_x(x, y) \ \theta_y(x, y)]^T \quad (2.36)$$

$$[N(x, y)] = [N_{u1}(x, y) \ N_{v1}(x, y) \ N_{u2}(x, y) \ N_{v2}(x, y) \ \dots \dots \ N_{un}(x, y) \ N_{vn}(x, y) \ N_w(x, y) \ N_{\theta_x}(x, y) \ N_{\theta_y}(x, y)]^T \quad (2.37)$$

e $[N(x, y)]$ é a matriz contendo as funções de interpolação.

Empregando as relações deformações-deslocamentos ((2.9) a (2.13)) e a interpolação dada por (2.35), o vetor das deformações pode ser expresso sob a forma:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [D(x, y)] \{\delta\} \quad (2.38)$$

onde $[D(x, y)]$ é a matriz obtida aplicando-se os operadores diferenciais indicados nas equações (2.9) a (2.13) à matriz de funções de forma $[N(x, y)]$.

2.3.1 Obtenção das Matrizes de Massa e Rigidez Elementares

As equações do movimento para o elemento de placa multi-camadas podem ser obtidas através das Equações de Lagrange do Movimento. Para tanto, é necessário formular a energia de deformação e a energia cinética do elemento. A energia de deformação total da placa multi-camadas é igual à soma das energias de deformação de cada camada, ou seja:

$$U = \sum_{k=1}^n U^{(k)} \quad (2.39)$$

onde a energia de deformação da k -ésima camada é dada por:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon^{(k)}\}^T [E^{(k)}] \{\varepsilon^{(k)}\} \right) dV \quad (2.40)$$

Introduzindo (2.38) em (2.40), escreve-se:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V \left([D^{(k)}]^T [E^{(k)}] [D^{(k)}] \right) dV \{\delta\} \quad (2.41)$$

ou ainda:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K^{(k)}] \{\delta\} \quad (2.42)$$

onde $[K^{(k)}] = \int_V ([D^{(k)}]^T [E^{(k)}] [D^{(k)}]) dV$, é a matriz de rigidez da k -ésima camada.

Para o caso das camadas elásticas pode-se escrever o vetor de deformações da seguinte forma:

$$\{\varepsilon^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_m^{(i)}\} + \{\varepsilon_b^{(i)}\} \quad (2.43)$$

onde os vetores $\{\varepsilon_m^{(i)}\}$ e $\{\varepsilon_b^{(i)}\}$ são os vetores de deformação de membrana e de flexão, respectivamente, os quais podem ser expressos em termos dos deslocamentos nodais da seguinte forma:

$$\{\varepsilon_m^{(i)}\} = [D_m^{(i)}] \{\delta\} \quad \{\varepsilon_b^{(i)}\} = [D_b^{(i)}] \{\delta\} \quad (2.44)$$

Portanto, a energia de deformação pode ser reescrita na seguinte forma:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon_m^{(i)}\} + \{\varepsilon_b^{(i)}\} \right)^T [E^{(i)}] \left(\{\varepsilon_m^{(i)}\} + \{\varepsilon_b^{(i)}\} \right) dV \quad (2.45)$$

ou:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V \left([D_m^{(i)}]^T [E^{(i)}] [D_m^{(i)}] + [D_b^{(i)}]^T [E^{(i)}] [D_b^{(i)}] + 2 [D_m^{(i)}]^T [E^{(i)}] [D_b^{(i)}] \right) dV \{\delta\} \quad (2.46)$$

Comparando (2.42) com (2.46), observa-se que, para as camadas elásticas, a matriz de rigidez elementar pode ser expressa sob a forma:

$$[K^{(i)}] = [K_{mm}^{(i)}] + [K_{bb}^{(i)}] + 2 [K_{mb}^{(i)}] \quad (2.47)$$

onde:

$$\begin{aligned} [K_{mm}^{(i)}] &= \int_V [D_m^{(i)}]^T [E^{(i)}] [D_m^{(i)}] dV \\ [K_{bb}^{(i)}] &= \int_V [D_b^{(i)}]^T [E^{(i)}] [D_b^{(i)}] dV \\ [K_{mb}^{(i)}] &= \int_V [D_m^{(i)}]^T [E^{(i)}] [D_b^{(i)}] dV \end{aligned} \quad (2.48)$$

De forma semelhante, para os núcleos viscoelásticos, pode-se escrever o vetor de deformações como:

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon^{(j)}\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \\ \varepsilon_y^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \\ \gamma_{xz}^{(j)} \\ \gamma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
&+ \begin{Bmatrix} \frac{z_i}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \left(\frac{t_{i+1}+t_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \frac{z_i}{h_j} \left[\left(\frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \left(\frac{t_{i+1}+t_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \frac{z_i}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + (t_{i+1} + t_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
&+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{h_j} \left[u_{i+1} - u_i + \left(\frac{t_{i+1}+t_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{h_j} \left[v_{i+1} - v_i + \left(\frac{t_{i+1}+t_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_m^{(j)}\} + \{\varepsilon_b^{(j)}\} + \{\varepsilon_p^{(j)}\} \quad (2.49)
\end{aligned}$$

onde os vetores $\{\varepsilon_m^{(j)}\}$, $\{\varepsilon_b^{(j)}\}$ e $\{\varepsilon_p^{(j)}\}$, são os vetores de deformação de membrana, flexão e cisalhamento fora do plano, respectivamente.

Portanto, a energia de deformação pode ser reescrita como:

$$U^{(j)} = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon_m^{(j)}\} + \{\varepsilon_b^{(j)}\} + \{\varepsilon_p^{(j)}\} \right)^T [E^{(j)}] \left(\{\varepsilon_m^{(j)}\} + \{\varepsilon_b^{(j)}\} + \{\varepsilon_p^{(j)}\} \right) dV \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
U^{(j)} &= \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon_m^{(j)}\}^T [E^{(j)}] \{\varepsilon_m^{(j)}\} + \{\varepsilon_b^{(j)}\}^T [E^{(j)}] \{\varepsilon_b^{(j)}\} + \right. \\
&+ \{\varepsilon_p^{(j)}\}^T [E^{(j)}] \{\varepsilon_p^{(j)}\} + 2 \{\varepsilon_m^{(j)}\}^T [E^{(j)}] \{\varepsilon_b^{(j)}\} + \\
&+ 2 \{\varepsilon_m^{(j)}\}^T [E^{(j)}] \{\varepsilon_p^{(j)}\} + 2 \{\varepsilon_b^{(j)}\}^T [E^{(j)}] \{\varepsilon_p^{(j)}\} \left. \right) dV \quad (2.51)
\end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
U^{(j)} &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V \left([D_m^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_m^{(j)}] + [D_b^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_b^{(j)}] + \right. \\
&+ [D_p^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_p^{(j)}] + 2 [D_m^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_b^{(j)}] + \\
&+ 2 [D_m^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_p^{(j)}] + 2 [D_b^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_p^{(j)}] \left. \right) dV \{\delta\} \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Para as camadas viscoelásticas, comparando (2.42) e (2.52), observa-se que a matriz de rigidez elementar pode ser expressa sob a forma:

$$[K^{(j)}] = [K_{mm}^{(j)}] + [K_{bb}^{(j)}] + [K_{pp}^{(j)}] + 2 [K_{mb}^{(j)}] + 2 [K_{mp}^{(j)}] + 2 [K_{bp}^{(j)}] \quad (2.53)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 [K_{mm}^{(j)}] &= \int_V [D_m^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_m^{(j)}] dV \\
 [K_{bb}^{(j)}] &= \int_V [D_b^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_b^{(j)}] dV \\
 [K_{pp}^{(j)}] &= \int_V [D_p^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_p^{(j)}] dV \\
 [K_{mb}^{(j)}] &= \int_V [D_m^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_b^{(j)}] dV \\
 [K_{mp}^{(j)}] &= \int_V [D_m^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_p^{(j)}] dV \\
 [K_{bp}^{(j)}] &= \int_V [D_b^{(j)}]^T [E^{(j)}] [D_p^{(j)}] dV
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Portanto, a matriz de rigidez elementar é expressa como a soma das matrizes de rigidez elementares de cada camada, ou seja:

$$[K]^e = \sum_{k=1}^n [K^{(k)}] \tag{2.55}$$

De forma análoga, a energia cinética total da placa multi-camadas é expressa como a soma das energias cinéticas de cada camada:

$$T = \sum_{k=1}^n T^{(k)} \tag{2.56}$$

onde:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \int_m (\dot{w}^2 + \dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2) dm = \frac{1}{2} \rho_k h_k \left(\int_A \dot{w}^2 dA + \int_A \dot{u}_k^2 dA + \int_A \dot{v}_k^2 dA \right) \tag{2.57}$$

Com base na interpolação expressa por (2.35), a equação (2.57) acima é escrita sob a forma:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{\dot{\delta}\}^T \left(\rho_k h_k \int_A ([N_w]^T [N_w] + [N_{uk}]^T [N_{uk}] + [N_{vk}]^T [N_{vk}]) dA \right) \{\dot{\delta}\} \tag{2.58}$$

ou ainda

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M^{(k)}] \{\dot{\delta}\} \tag{2.59}$$

onde $[M^{(k)}] = \rho_k h_k \int_{A_r} ([N_w]^T [N_w] + [N_{uk}]^T [N_{uk}] + [N_{vk}]^T [N_{vk}]) dA$, é a matriz de massa da k -ésima camada, e $[N_w]$, $[N_{uk}]$ e $[N_{vk}]$, são as matrizes de interpolação espacial que compõem a matriz $[N(x, y)]$, correspondentes a w , u_k e v_k , respectivamente.

Assim, tal como para a rigidez, a matriz de massa elementar é expressa como a soma das

matrizes de massa elementares de cada camada:

$$[M]^e = \sum_{k=1}^n [M^{(k)}] \quad (2.60)$$

2.4 O Modelo de 5 Camadas

Nesta seção, a formulação desenvolvida anteriormente é particularizada para o caso de uma placa multi-camadas composta por uma placa base metálica, embutida entre duas camadas de material viscoelástico restritas externamente por duas camadas metálicas, perfazendo um sistema simétrico com 5 camadas, ilustrado na Fig. 2.2.

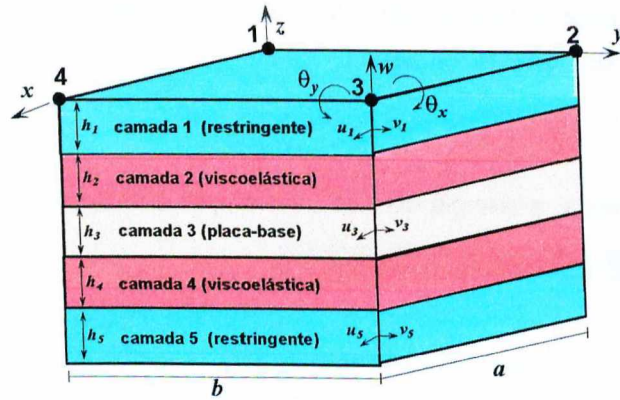


Figura 2.2- Elemento de placa com 5 camadas

De acordo com a geometria do sistema e considerando as equações (2.1) a (2.8) juntamente com (2.9) a (2.13), as deformações de cisalhamento das camadas viscoelásticas, são dadas por:

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{u_1 - u_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.61)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{v_1 - v_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.62)$$

$$\gamma_{xz}^{(4)} = \frac{d_4}{h_4} \left[\frac{u_3 - u_5}{d_4} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.63)$$

$$\gamma_{yz}^{(4)} = \frac{d_4}{h_4} \left[\frac{v_3 - v_5}{d_4} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.64)$$

com $d_2 = \left(\frac{h_1+h_3}{2} + h_2\right)$ e $d_4 = \left(\frac{h_3+h_5}{2} + h_4\right)$.

De acordo com (2.7) e (2.8), os deslocamentos longitudinais médios nas camadas viscoelásticas são dados por:

$$u_2 = \frac{1}{2} \left[u_1 + u_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.65)$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \left[u_3 + u_5 + \frac{h_3 - h_5}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.66)$$

na direção x . Analogamente, para a direção y , tem-se:

$$v_2 = \frac{1}{2} \left[v_1 + v_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.67)$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \left[v_3 + v_5 + \frac{h_3 - h_5}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.68)$$

Conforme pode-se ver na Fig. 2.2, os elementos da placa com 5 camadas são elementos limitados por quatro nós. Cada nó tem 9 graus de liberdade, a saber: os deslocamentos longitudinais u_1 e v_1 da camada restringente superior, nas direções x e y , respectivamente; os deslocamentos longitudinais u_3 e v_3 da placa base, nas direções x e y , respectivamente; os deslocamentos longitudinais u_5 e v_5 da camada restringente inferior, nas direções x e y , respectivamente; a deflexão transversal w ; e as rotações $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$.

Os graus de liberdade nodais, são representados pelo seguinte vetor:

$$\{\delta_j\} = \left[u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{3j} \quad v_{3j} \quad u_{5j} \quad v_{5j} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \right]^T \quad (2.69)$$

onde o índice $j = 1, 2, 3, 4$, indica cada um dos quatro nós do elemento de placa. Desta forma, os graus de liberdade elementares são dados por:

$$\{\delta\} = \left[\{\delta_1\}^T \quad \{\delta_2\}^T \quad \{\delta_3\}^T \quad \{\delta_4\}^T \right]^T \quad (2.70)$$

As funções de interpolação da placa multi-camadas são adotadas como funções bi-lineares para os deslocamentos longitudinais nas direções x e y , e por um polinômio cúbico para a deflexão transversal w , como segue:

$$u_1(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad v_1(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

$$u_3(x, y) = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}xy \quad v_3(x, y) = a_{13} + a_{14}x + a_{15}y + a_{16}xy$$

$$u_5(x, y) = a_{17} + a_{18}x + a_{19}y + a_{20}xy \quad v_5(x, y) = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}xy$$

$$w(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 + b_{11}x^3y + b_{12}xy^3$$

Desta maneira, de acordo com (2.35), omitindo a dependência de x e y para simplificar a notação, a interpolação dos campos de deslocamentos é expressa segundo:

$$\{\Delta\} = [N] \{\delta\} \quad (2.71)$$

onde

$$\{\Delta\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_5 \quad v_5 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T \quad (2.72)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_{u1}] \\ [N_{v1}] \\ [N_{u3}] \\ [N_{v3}] \\ [N_{u5}] \\ [N_{v5}] \\ [N_w] \\ [N_{\theta_x}] \\ [N_{\theta_y}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{61} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_w & N_w^x & N_w^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\theta_x} & N_{\theta_x}^x & N_{\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\theta_y} & N_{\theta_y}^x & N_{\theta_y}^y \\ N_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{62} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2w} & N_{2w}^x & N_{2w}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2\theta_x} & N_{2\theta_x}^x & N_{2\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2\theta_y} & N_{2\theta_y}^x & N_{2\theta_y}^y \\ N_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{63} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{3w} & N_{3w}^x & N_{3w}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{3\theta_x} & N_{3\theta_x}^x & N_{3\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{3\theta_y} & N_{3\theta_y}^x & N_{3\theta_y}^y \\ N_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{64} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{4w} & N_{4w}^x & N_{4w}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{4\theta_x} & N_{4\theta_x}^x & N_{4\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{4\theta_y} & N_{4\theta_y}^x & N_{4\theta_y}^y \end{bmatrix}^T \quad (2.73)$$

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} u_1^1 & v_1^1 & u_3^1 & v_3^1 & u_5^1 & v_5^1 & w^1 & \theta_x^1 & \theta_y^1 & u_1^2 & v_1^2 & u_3^2 & v_3^2 \\ v_3^2 & u_5^2 & v_5^2 & w^2 & \theta_x^2 & \theta_y^2 & u_1^3 & v_1^3 & u_3^3 & v_3^3 & u_5^3 & v_5^3 \\ w^3 & \theta_x^3 & \theta_y^3 & u_1^4 & v_1^4 & u_3^4 & v_3^4 & u_5^4 & v_5^4 & w^4 & \theta_x^4 & \theta_y^4 \end{bmatrix}^T \quad (2.74)$$

e os termos $N_{1i} = N_{2i} = N_{3i} = N_{4i} = N_{5i} = N_{6i}$, N_{wi} , $N_{\theta_x i}$, $N_{\theta_y i}$, N_{wi}^x , $N_{\theta_x i}^x$, $N_{\theta_y i}^x$, N_{wi}^y , $N_{\theta_x i}^y$, $N_{\theta_y i}^y$, para $i = 1, 2, 3, 4$, são dados no Anexo I.

De acordo com (2.19) e (2.30), as relações tensão-deformação para as camadas são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(1)} \\ \sigma_y^{(1)} \\ \tau_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(1)}}{1-\nu^{(1)2}} & \frac{E^{(1)}\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)2}} & 0 \\ \frac{E^{(1)}\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)2}} & \frac{E^{(1)}}{1-\nu^{(1)2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma^{(1)}\} = [E^{(1)}] \{\varepsilon^{(1)}\} \quad (2.75)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(3)} \\ \sigma_y^{(3)} \\ \tau_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(3)}}{1-\nu^{(3)2}} & \frac{E^{(3)}\nu^{(3)}}{1-\nu^{(3)2}} & 0 \\ \frac{E^{(3)}\nu^{(3)}}{1-\nu^{(3)2}} & \frac{E^{(3)}}{1-\nu^{(3)2}} & 0 \\ \text{sim.} & & G^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(3)} \\ \varepsilon_y^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma^{(3)}\} = [E^{(3)}] \{\varepsilon^{(3)}\} \quad (2.76)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(5)} \\ \sigma_y^{(5)} \\ \tau_{xy}^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(5)}}{1-\nu^{(5)2}} & \frac{E^{(5)}\nu^{(5)}}{1-\nu^{(5)2}} & 0 \\ \frac{E^{(5)}\nu^{(5)}}{1-\nu^{(5)2}} & \frac{E^{(5)}}{1-\nu^{(5)2}} & 0 \\ \text{sim.} & & G^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(5)} \\ \varepsilon_y^{(5)} \\ \gamma_{xy}^{(5)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma^{(5)}\} = [E^{(5)}] \{\varepsilon^{(5)}\} \quad (2.77)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G^{(2)} & 0 & 0 \\ & & & G^{(2)} & 0 \\ \text{sim.} & & & & G^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma^{(2)}\} = [E^{(2)}] \{\varepsilon^{(2)}\} \quad (2.78)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(4)} \\ \sigma_y^{(4)} \\ \tau_{xy}^{(4)} \\ \tau_{xz}^{(4)} \\ \tau_{yz}^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(4)}}{1-\nu^{(4)2}} & \frac{E^{(4)}\nu^{(4)}}{1-\nu^{(4)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E^{(4)}}{1-\nu^{(4)2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G^{(4)} & 0 & 0 \\ & & & G^{(4)} & 0 \\ \text{sim.} & & & & G^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(4)} \\ \varepsilon_y^{(4)} \\ \gamma_{xy}^{(4)} \\ \gamma_{xz}^{(4)} \\ \gamma_{yz}^{(4)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma^{(4)}\} = [E^{(4)}] \{\varepsilon^{(4)}\} \quad (2.79)$$

De acordo com o desenvolvimento apresentado nas equações (2.39) a (2.54) as matrizes de cada uma das 5 camadas são dadas pelas seguintes expressões:

$$[K^{(1)}] = \int_V \left([D_m^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_m^{(1)}] + [D_b^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_b^{(1)}] + [D_m^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_b^{(1)}] + [D_b^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_m^{(1)}] \right) dV$$

$$[K^{(2)}] = \int_V \left([D_m^{(2)}]^T [E^{(2)}] [D_m^{(2)}] + [D_b^{(2)}]^T [E^{(2)}] [D_b^{(2)}] + [D_p^{(2)}]^T [E^{(2)}] [D_p^{(2)}] \right) dV$$

$$[K^{(3)}] = \int_V \left([D_m^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_m^{(3)}] + [D_b^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_b^{(3)}] + [D_m^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_b^{(3)}] + [D_b^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_m^{(3)}] \right) dV$$

$$\begin{aligned}
[K^{(4)}] &= \int_V \left([D_m^{(4)}]^T [E^{(4)}] [D_m^{(4)}] + [D_b^{(4)}]^T [E^{(4)}] [D_b^{(4)}] + [D_p^{(4)}]^T [E^{(4)}] [D_p^{(4)}] \right) dV \\
[K^{(5)}] &= \int_V \left([D_m^{(5)}]^T [E^{(5)}] [D_m^{(5)}] + [D_b^{(5)}]^T [E^{(5)}] [D_b^{(5)}] + [D_m^{(5)}]^T [E^{(5)}] [D_b^{(5)}] + \right. \\
&\quad \left. + [D_b^{(5)}]^T [E^{(5)}] [D_m^{(5)}] \right) dV
\end{aligned}$$

As expressões das matrizes $[D_m^{(1)}]$, $[D_b^{(1)}]$, $[D_m^{(2)}]$, $[D_b^{(2)}]$, $[D_p^{(2)}]$, $[D_m^{(3)}]$, $[D_b^{(3)}]$, $[D_m^{(4)}]$, $[D_b^{(4)}]$, $[D_p^{(4)}]$, $[D_m^{(5)}]$ e $[D_b^{(5)}]$ são fornecidas no Anexo I.

Finalmente, a matriz de rigidez elementar do elemento de placa com 5-camadas é expressa por:

$$[K]^e = \sum_{k=1}^5 [K^{(k)}] \quad (2.80)$$

De acordo com a (2.58) as matrizes de massa de cada camada podem ser escritas como:

$$[M^{(1)}] = \rho_1 h_1 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u1}]^T [N_{u1}] + [N_{v1}]^T [N_{v1}] \right) dA \quad (2.81)$$

$$[M^{(2)}] = \rho_2 h_2 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u2}]^T [N_{u2}] + [N_{v2}]^T [N_{v2}] \right) dA \quad (2.82)$$

$$[M^{(3)}] = \rho_3 h_3 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u3}]^T [N_{u3}] + [N_{v3}]^T [N_{v3}] \right) dA \quad (2.83)$$

$$[M^{(4)}] = \rho_4 h_4 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u4}]^T [N_{u4}] + [N_{v4}]^T [N_{v4}] \right) dA \quad (2.84)$$

$$[M^{(5)}] = \rho_5 h_5 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u5}]^T [N_{u5}] + [N_{v5}]^T [N_{v5}] \right) dA \quad (2.85)$$

Então, escreve-se a matriz de massa elementar do elemento de placa com 5 camadas como:

$$[M]^e = \sum_{k=1}^5 [M^{(k)}] \quad (2.86)$$

2.5 O Modelo de 3 Camadas

Considera-se agora, um modelo mais simplificado do que o de 5 camadas, composto por uma placa base com um núcleo de material viscoelástico restrito por uma camada metálica externa, constituindo o sistema assimétrico ilustrado na Fig. 2.3 abaixo.

Para essa configuração, as equações (2.1) a (2.13) permitem escrever as deformações de cisalhamento da camada viscoelástica, da seguinte forma:

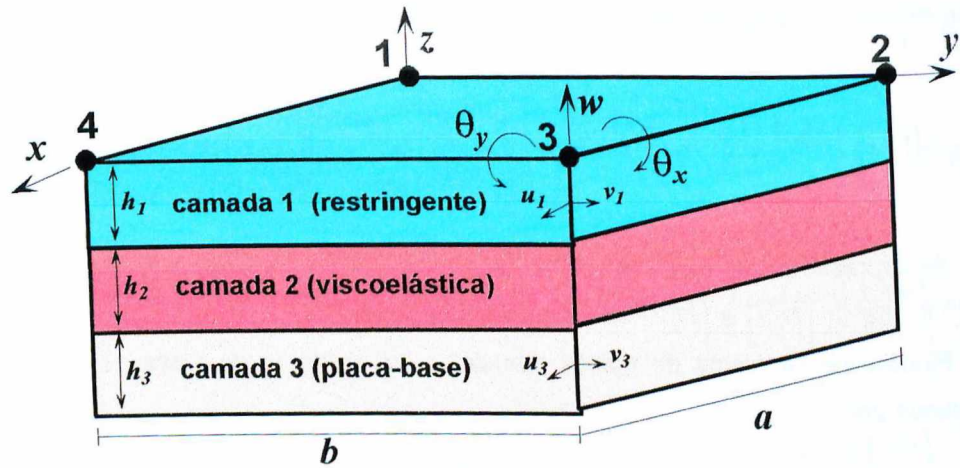


Figura 2.3- Elemento de placa com 3 camadas

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{u_1 - u_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.87)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{v_1 - v_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.88)$$

com $d_2 = \left(\frac{h_1 + h_3}{2} + h_2 \right)$.

Por (2.7) e (2.8), os deslocamentos longitudinais médios no núcleo viscoelástico, nas direções x e y , são dados por:

$$u_2 = \frac{1}{2} \left[u_1 + u_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.89)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \left[v_1 + v_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.90)$$

Os elementos da placa com 3 camadas são limitados por quatro nós. Cada nó tem 7 graus de liberdade, a saber: os deslocamentos longitudinais u_1 e v_1 da camada restringente, u_3 e v_3 da placa base nas direções x e y , respectivamente, a deflexão transversal w , e as rotações $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ e $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$.

Os graus de liberdade nodais são agrupados no seguinte vetor:

$$\{\delta_j\} = [u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{3j} \quad v_{3j} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T \quad (2.91)$$

onde o sobrescrito $i = 1, 2, 3, 4$, indica cada um dos quatro nós do elemento de placa.

Desta forma, os graus de liberdade elementares são dados por:

$$\{\delta\} = [\{\delta_1\}^T \{\delta_2\}^T \{\delta_3\}^T \{\delta_4\}^T]^T \quad (2.9)$$

As funções de interpolação da placa multi-camadas são adotadas como funções bi-lineares para os deslocamentos longitudinais nas direções x e y , e um polinômio cúbico para a deflexão transversal w , como segue:

$$u_1(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad v_1(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

$$u_3(x, y) = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}xy \quad v_3(x, y) = a_{13} + a_{14}x + a_{15}y + a_{16}xy \quad (2.9)$$

$$w(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 + b_{11}x^3y + b_{12}xy^3$$

De modo análogo ao modelo com 5 camadas, de acordo com a (2.35), a interpolação dos campos de deslocamentos é expressa por:

$$\{\Delta\} = [N] \{\delta\} \quad (2.94)$$

onde

$$\{\Delta\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T \quad (2.95)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_{u1}] \\ [N_{v1}] \\ [N_{u3}] \\ [N_{v3}] \\ [N_w] \\ [N_{\theta_x}] \\ [N_{\theta_y}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_w & N_w^x & N_w^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\theta_x} & N_{\theta_x}^x & N_{\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\theta_y} & N_{\theta_y}^x & N_{\theta_y}^y \\ N_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2w} & N_{2w}^x & N_{2w}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2\theta_x} & N_{2\theta_x}^x & N_{2\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2\theta_y} & N_{2\theta_y}^x & N_{2\theta_y}^y \\ N_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{3w} & N_{3w}^x & N_{3w}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{3\theta_x} & N_{3\theta_x}^x & N_{3\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{3\theta_y} & N_{3\theta_y}^x & N_{3\theta_y}^y \\ N_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{4w} & N_{4w}^x & N_{4w}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{4\theta_x} & N_{4\theta_x}^x & N_{4\theta_x}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{4\theta_y} & N_{4\theta_y}^x & N_{4\theta_y}^y \end{bmatrix}^T \quad (2.96)$$

$$\{\delta^*\} = \begin{bmatrix} u_1^1 & v_1^1 & u_3^1 & v_3^1 & w^1 & \theta_x^1 & \theta_y^1 & u_1^2 & v_1^2 & u_3^2 & v_3^2 & w^2 & \theta_x^2 & \theta_y^2 & u_1^3 & v_1^3 & u_3^3 & v_3^3 & w^3 & \theta_x^3 & \theta_y^3 & u_1^4 & v_1^4 & u_3^4 & v_3^4 & w^4 & \theta_x^4 & \theta_y^4 \end{bmatrix}^T \quad (2.97)$$

e os termos $N_{1i} = N_{2i} = N_{3i} = N_{4i}$, N_{wi} , $N_{\theta_x i}$, $N_{\theta_y i}$, N_{wi}^x , $N_{\theta_x i}^x$, $N_{\theta_y i}^x$, N_{wi}^y , $N_{\theta_x i}^y$, $N_{\theta_y i}^y$, para $i = 1, 2, 3, 4$, são dados no Anexo I.

De acordo com (2.19) e (2.30), as relações tensão-deformação para as camadas são as mesmas dadas em (2.75), (2.76) e (2.78) desenvolvidas para o modelo com 5 camadas, e as matrizes de rigidez de cada uma das 3 camadas são dadas pelas expressões:

$$[K^{(1)}] = \int_V \left([D_m^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_m^{(1)}] + [D_b^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_b^{(1)}] + [D_m^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_b^{(1)}] + [D_b^{(1)}]^T [E^{(1)}] [D_m^{(1)}] \right) dV$$

$$\begin{aligned}
[K^{(2)}] &= \int_V \left([D_m^{(2)}]^T [E^{(2)}] [D_m^{(2)}] + [D_b^{(2)}]^T [E^{(2)}] [D_b^{(2)}] + [D_p^{(2)}]^T [E^{(2)}] [D_p^{(2)}] \right) dV \\
[K^{(3)}] &= \int_V \left([D_m^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_m^{(3)}] + [D_b^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_b^{(3)}] + [D_m^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_b^{(3)}] + \right. \\
&\quad \left. + [D_b^{(3)}]^T [E^{(3)}] [D_m^{(3)}] \right) dV
\end{aligned}$$

As expressões das matrizes $[D_m^{(1)}]$, $[D_b^{(1)}]$, $[D_m^{(2)}]$, $[D_b^{(2)}]$, $[D_p^{(2)}]$, $[D_m^{(3)}]$ e $[D_b^{(3)}]$ são aquelas da seção anterior e dadas no Anexo I.

Finalmente, a matriz de rigidez elementar do elemento de placa com 3 camadas é expressa por:

$$[K]^e = \sum_{k=1}^3 [K^{(k)}] \quad (2.98)$$

Novamente, de acordo com (2.58) as matrizes de massa de cada camada podem ser escritas como:

$$[M^{(1)}] = \rho_1 h_1 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u1}]^T [N_{u1}] + [N_{v1}]^T [N_{v1}] \right) dA \quad (2.99)$$

$$[M^{(2)}] = \rho_2 h_2 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u2}]^T [N_{u2}] + [N_{v2}]^T [N_{v2}] \right) dA \quad (2.100)$$

$$[M^{(3)}] = \rho_3 h_3 \int_A \left([N_w]^T [N_w] + [N_{u3}]^T [N_{u3}] + [N_{v3}]^T [N_{v3}] \right) dA \quad (2.101)$$

Então, escreve-se a matriz de massa elementar do elemento de placa com 3 camadas como:

$$[M]^e = \sum_{k=1}^3 [M^{(k)}] \quad (2.102)$$

Como um caso particular dos modelos com 3 e 5 camadas, pode-se considerar o tratamento com apenas a(s) camada(s) viscoelástica(s) acoplada(s) à placa base. Este tratamento, sem a camada restringente, é chamado de tratamento viscoelástico livre. Para esta análise, as propriedades físicas da(s) camada(s) restringente(s) são consideradas nulas, como, por exemplo, a espessura ou o módulo de elasticidade do material desta(s) camada(s).

2.6 Modelagem de Camadas Restritas Ativas

Os modelos de 3 e 5 camadas foram construídos considerando um comportamento puramente elástico para as camadas restringentes. Um caso interessante a ser analisado é a substituição das camadas restringentes passivas por camadas piezelétricas ativas. Este tipo de tratamento, combinando os efeitos passivo e ativo, dá origem a um sistema híbrido ativo-passivo, empregado com sucesso no controle de vibrações de sistemas mecânicos. Além disso, as camadas restritas ativas podem ser dotadas de capacidade de sensoriamento, mediante a inclusão de camada(s) adicionais de material piezelétrico que funcionarão como sensores de deformação. Com este objetivo, os filmes de PVDF têm sido empregados com sucesso, devido às suas características de pequena espessura, baixo peso e grande flexibilidade (Banks, 1996). Tais características possibilitam a inclusão do efeito sensor nos modelos de camada restrita ativa de forma simplificada. Nas ações seguintes, com base no procedimento sugerido por Park e Baz (1999), é desenvolvida a formulação que estende a formulação previamente apresentada para camadas restritas passivas, ao caso de camadas restritas ativas dotadas de atuadores e sensores piezelétricos. São considerados, novamente, os modelos simétricos com 5 camadas e assimétricos com 3 camadas, ilustrados na Fig. 2.4.

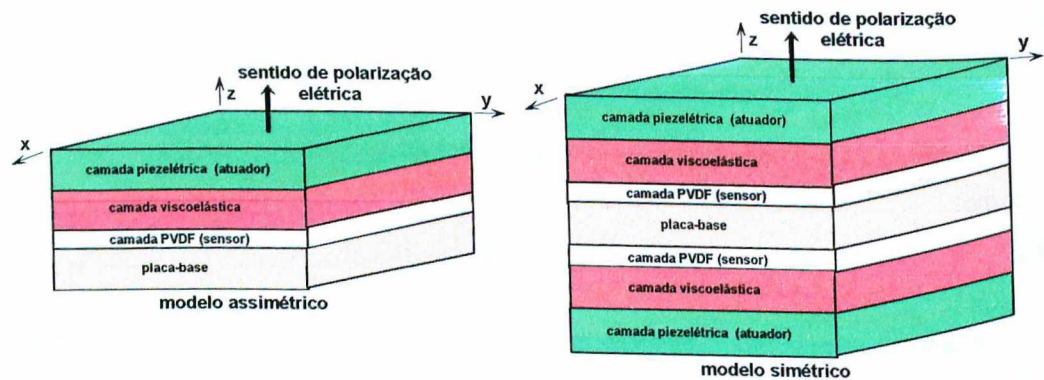


Figura 2.4- Elementos de camada restrita ativa com 3 e 5 camadas

2.6.1 Esforços Gerados pelos Atuadores Piezelétricos no Modelo com 5 Camadas

As equações constitutivas, considerando o acoplamento eletromecânico, para as camadas piezelétricas (1) e (5) são dadas por:

$$\{\sigma^{(1)}\} = [E^{(1)}] \left(\{\epsilon^{(1)}\} - \{\Lambda^{(1)}\} \right) \quad (2.103)$$

$$\{\sigma^{(5)}\} = [E^{(5)}] \left(\{\epsilon^{(5)}\} - \{\Lambda^{(5)}\} \right) \quad (2.104)$$

onde:

$$\{\varepsilon^{(1)}\} = \left([D_m^{(1)}] - z_1 [D_b^{(1)}] \right) \{\delta\} \quad (2.105)$$

$$\{\varepsilon^{(5)}\} = \left([D_m^{(5)}] - z_5 [D_b^{(5)}] \right) \{\delta\} \quad (2.106)$$

e $\{\Lambda^{(j)}\} = \left(\frac{V_j}{|h_j|} \right) \begin{Bmatrix} d_{31}^{(j)} \\ d_{32}^{(j)} \\ 0 \end{Bmatrix}$, para $j = 1, 5$. As equações (2.103) e (2.104) são extensões das equações (2.75) e (2.77), de onde são reduzidos os termos $\{\Lambda^{(j)}\}$, que se referem às deformações devidas aos esforços desenvolvidos pelas camadas piezelétricas, onde V_j é a voltagem aplicada na camada piezelétrica e as constantes piezelétricas são denotadas por $d_{31}^{(j)}$ e $d_{32}^{(j)}$. O módulo $|h_j|$ diferencia o sinal (+ ou -) referente à direção do sistema referencial.

Nas equações acima, considera-se z_i medido do plano neutro da multi-camada até à superfície de cada camada, mais próxima desse plano, conforme ilustrado na Fig. 2.5.

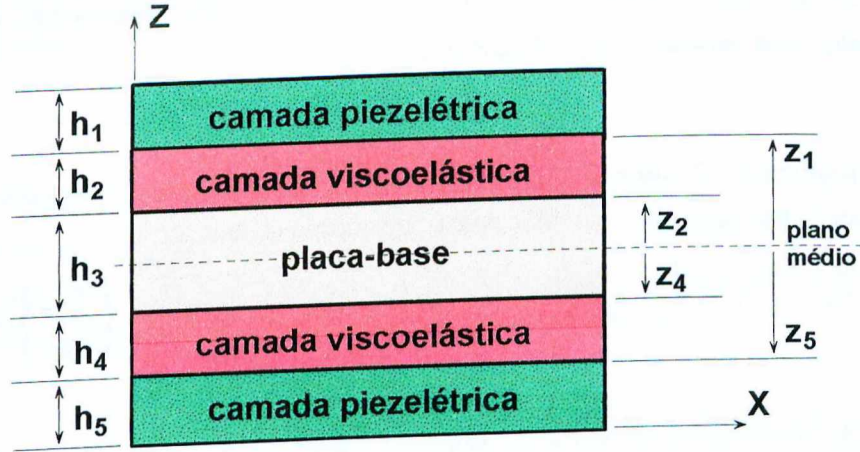


Figura 2.5- Influência do Efeito Piezelétrico

Os esforços nodais equivalentes são calculados através da energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.107)$$

Desenvolvendo a energia de deformação para a camada (1), tem-se:

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^{(1)}\}^T \{\sigma^{(1)}\} dV \quad (2.108)$$

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V \left([D_m^{(1)}]^T - z_1 [D_b^{(1)}]^T \right) [E^{(1)}] \left([D_m^{(1)}]^T - z_1 [D_b^{(1)}]^T \right) dV \{\delta\} - \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V \left([D_m^{(1)}]^T - z_1 [D_b^{(1)}]^T \right) [E^{(1)}] \{\Lambda^{(1)}\} dV \quad (2.109)$$

Observa-se que, nesta última expressão, o primeiro termo do lado direito da equação

(2.109) é aquele anteriormente obtido na dedução da matriz de rigidez da camada (1) do sistema de camada restrita passiva (ver (2.46)). No segundo termo, tem-se a expressão para os esforços nodais devidos à ação do elemento piezelétrico.

Efetuada as integrações ao longo da espessura, obtém-se:

$$U_p^{(1)} = -\frac{1}{2} \{\Delta_i\}^T \left(h_1 \int_0^b \int_0^a [D_m^{(1)}]^T [E^{(1)}] \{\Lambda^{(1)}\} dx dy - \right. \\ \left. - \frac{h_1 (2z_1 + h_1)}{2} \int_0^b \int_0^a [D_b^{(1)}]^T [E^{(1)}] \{\Lambda^{(1)}\} dx dy \right) \quad (2.110)$$

Por desenvolvimento análogo, para a camada (5), obtém-se:

$$U_p^{(5)} = -\frac{1}{2} \{\Delta_i\}^T \left(h_5 \int_0^b \int_0^a [D_m^{(5)}]^T [E^{(5)}] \{\Lambda^{(5)}\} dx dy - \right. \\ \left. - \frac{h_5 (2z_5 + h_5)}{2} \int_0^b \int_0^a [D_b^{(5)}]^T [E^{(5)}] \{\Lambda^{(5)}\} dx dy \right) \quad (2.111)$$

Visando combinar a influência simultânea das duas camadas piezelétricas, considera-se o trabalho total realizado pelos esforços piezelétricos:

$$U_p = U_p^{(1)} + U_p^{(5)} \quad (2.112)$$

Em virtude de (2.110) e (2.111), e admitindo que um único tipo de material piezelétrico seja empregado nas camadas (1) e (5), esta última equação conduz a:

$$U_p = -\frac{1}{2} \{\delta\}^T \left\{ \int_0^b \int_0^a \left([D_m^{(1)}]^T [E^{(p)}] V_1 - [D_m^{(5)}]^T [E^{(p)}] V_5 \right) \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy - \right. \\ \left. - \int_0^b \int_0^a \left(\frac{h_1 (2z_1 + h_1)}{2} [D_b^{(1)}]^T [E^{(p)}] V_1 - \frac{h_5 (2z_5 + h_5)}{2} [D_b^{(5)}]^T [E^{(p)}] V_5 \right) \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy \right\} \quad (2.113)$$

Devido à simetria das camadas e ao fato que $[D_b^{(1)}] = [D_b^{(5)}]$, tem-se $z_5 = -z_1$ e $h_5 = -h_1$, onde o sinal negativo se refere ao sentido da coordenada em relação ao plano médio da placa base. Portanto, (2.113) é reescrita sob a forma:

$$U_p = -\frac{1}{2} \{\delta\}^T \left\{ \int_0^b \int_0^a \left([D_m^{(1)}]^T V_1 - [D_m^{(5)}]^T V_5 \right) [E^{(p)}] \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy - \right. \\ \left. - (2z_1 + h_1) (V_1 + V_5) \int_0^b \int_0^a [D_b^{(1)}]^T [E^{(p)}] \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy \right\} \quad (2.114)$$

Para obtenção do vetor de esforços nodais associados à ação piezelétrica, escreve-se:

$$U_p = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \{Q_p\} \quad (2.115)$$

Igualando (2.114) e (2.115), obtém-se a seguinte expressão para os esforços nodais:

$$\begin{aligned} \{Q_p\} = & - \int_0^b \int_0^a \left([D_m^{(1)}]^T V_1 - [D_m^{(5)}]^T V_5 \right) [E^{(p)}] \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy + \\ & + (2z_1 + h_1) (V_1 + V_5) \int_0^b \int_0^a [D_b^{(1)}]^T [E^{(p)}] \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy \end{aligned} \quad (2.116)$$

A partir da expressão desenvolvida para os esforços nodais de origem piezelétrica, deve-se considerar duas situações distintas.

No caso em que as tensões aplicadas nas camadas piezelétricas (1) e (5) têm o mesmo módulo e o mesmo sinal, pode-se escrever $V = V_1 = V_5$ e (2.116) torna-se:

$$\{Q_p\} = 2V (2z_1 + h_1) \int_0^b \int_0^a [D_b^{(1)}]^T [E^{(p)}] \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy \quad (2.117)$$

Para tensões aplicadas de mesmo módulo e sinais opostos, escreve-se $V_1 = V$ e $V_5 = -V$ e (2.116) torna-se:

$$\{Q_p\} = -\frac{1}{2} \{\delta\}^T V \int_0^b \int_0^a \left([D_m^{(1)}]^T + [D_m^{(5)}]^T \right) [E^{(p)}] \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy \quad (2.118)$$

Conclui-se, pois que, no primeiro caso, os esforços piezelétricos provocam flexão na placa; já no segundo caso, tem-se apenas esforço normal de membrana no plano da placa. Evidentemente, quando o interesse é o de controlar as vibrações transversais da placa tratada com camada restrita ativa, apenas a primeira situação é empregada.

2.6.2 Esforços Gerados pelos Atuadores Piezelétricos no Modelo com 3 Camadas

De modo análogo ao que foi desenvolvido para o caso de atuadores piezelétricos no modelo com 5 camadas, as equações constitutivas para a camada piezelétrica (1), no modelo de 3 camadas, ilustrado na 2.3, são dadas por:

$$\{\sigma^{(1)}\} = [E^{(1)}] \left(\{\varepsilon^{(1)}\} - \{\Lambda\} \right) \quad (2.119)$$

onde:

$$\{\varepsilon^{(1)}\} = \left([D_m^{(1)}] - z_1 [D_b^{(1)}] \right) \{\delta\} \quad (2.120)$$

$$\text{e } \{\Lambda\} = \left(\frac{V}{|h_1|} \right) \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Os esforços nodais equivalentes são calculados através da energia de deformação:

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (2.121)$$

cujo desenvolvimento conduz à expressão:

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V \left(\left[D_m^{(1)} \right]^T - z_1 \left[D_b^{(1)} \right]^T \right) \left[E^{(1)} \right] \left(\left[D_m^{(1)} \right]^T - z_1 \left[D_b^{(1)} \right]^T \right) dV \{\delta\} - \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V \left(\left[D_m^{(1)} \right]^T - z_1 \left[D_b^{(1)} \right]^T \right) \left[E^{(1)} \right] \{\Lambda\} dV \quad (2.122)$$

a partir da qual se obtém a seguinte expressão para os esforços nodais equivalentes:

$$\{Q_p\} = - \left(h_1 \int_A \left[D_m^{(1)} \right]^T \left[E^{(1)} \right] dxdy - \frac{h_1 (2z_1 + h_1)}{2} \int_A \left[D_b^{(1)} \right]^T \left[E^{(1)} \right] dxdy \right) \{\Lambda\} \quad (2.123)$$

Pode-se observar que, em decorrência da assimetria do modelo com 3 camadas, a aplicação de uma voltagem à camada (1) terá, como consequência, a combinação de esforços de membrana e de flexão, representados pela primeira e segunda parcelas do lado direito de (2.123), respectivamente.

2.7 Voltagem dos Sensores Piezelétricos nos Modelos com 5 e 3 Camadas

Uma vez que os sensores constituídos de filmes polímeros piezelétricos (PVDF) apresentam uma espessura e uma rigidez muito menores do que as outras camadas consideradas, sua influência pode ser negligenciada nas relações cinemáticas dos modelos de placa multicamadas.

Admite-se ainda que, uma vez que estes elementos são diretamente acoplados à superfície da placa base, conforme ilustrado na Fig. 2.4, suas deformações igualam-se às deformações superficiais da placa base.

De acordo com Lee (1987), a voltagem desenvolvida em cada elemento sensor é dada por:

$$V_s^e = C_s \int_{A_s} f(x, y) [\varepsilon_x + \varepsilon_y] dA_s \quad (2.124)$$

onde $f(x, y)$ é uma função de distribuição de forma do sensor, $C_s = \frac{-k_{31}^2}{g_{31}C}$, com k_{31} , g_{31} e C são, respectivamente, o fator de acoplamento eletro-mecânico, constante de voltagem piezelétrica e capacitância do sensor, esta última dada por:

$$C = 8.854 \times 10^{-12} \frac{A_s k_{3t}}{h_s} \quad (2.125)$$

onde A_s é a área superficial do sensor, k_{3t} é a constante dielétrica e h_s é a espessura do sensor.

No caso aqui considerado, para um sensor uniforme, $f(x, y) = 1$ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) e a (2.124) simplifica-se:

$$V_s^e = C_s \int_{A_s} [\varepsilon_x + \varepsilon_y] dA_s \quad (2.126)$$

Das relações cinemáticas ((2.2) e (2.3)), os deslocamentos longitudinais, respectivamente em x e y , na superfície da placa base se escrevem:

$$u_s = u_3 - \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.127)$$

$$v_s = v_3 - \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.128)$$

Portanto, as deformações na superfície da placa base são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{h_3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.129)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_s}{\partial y} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{h_3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.130)$$

Introduzindo as interpolações expressas por (2.73) em (2.129) e (2.130), obtém-se:

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} [N_{u3}] - \frac{h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_w] \right) \{\delta\} \quad (2.131)$$

$$\varepsilon_y = \left(\frac{\partial}{\partial y} [N_{v3}] - \frac{h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [N_w] \right) \{\delta\} \quad (2.132)$$

Introduzindo (2.131) e (2.132) em (2.124), obtém-se a seguinte expressão para a voltagem gerada no sensor piezelétrico, em função do conjunto de deslocamentos nodais $\{\delta\}$:

$$V_s^e = C_s \int_{A_s} \left(\frac{\partial}{\partial x} [N_{u3}] + \frac{\partial}{\partial y} [N_{v3}] - \frac{h_3}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_w] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [N_w] \right) \right) dA_s \{\delta\} \quad (2.133)$$

Como o modelo com 3 camadas é um caso particular do modelo com 5 camadas, a expressão para a voltagem desenvolvida em cada elemento sensor é dada pela mesma expressão do modelo com cinco camadas, a saber, a equação (2.133).

2.8 Equações do Movimento

Uma vez determinadas as matrizes elementares de massa e rigidez do sistema, dadas por (2.55) e (2.60), resta obter as equações do movimento em nível elementar.

As expressões para as energias cinética e de deformação podem ser escritas como:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M]^e \{\dot{\delta}\} \quad (2.134)$$

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]^e \{\delta\} \quad (2.135)$$

A partir de (2.134) e (2.135), se escreve o Lagrangeano da seguinte forma:

$$L = T - U = \frac{1}{2} \left(\{\dot{\delta}\}^T [M]^e \{\dot{\delta}\} - \{\delta\}^T [K]^e \{\delta\} \right) \quad (2.136)$$

As equações de Euler-Lagrange se escrevem:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \{\dot{\delta}\}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \{\delta\}} = \{Q\} \quad (2.137)$$

onde $\{Q\}$ é o vetor de esforços generalizados, que inclui as forças e momentos externos nodais aplicados sobre os graus de liberdade elementares e os esforços de origem piezelétrica.

Finalmente, substituindo (2.136) em (2.137), obtém-se o sistema de equações do movimento em nível elementar:

$$[M]^e \{\ddot{\delta}\} + [K]^e \{\delta\} = \{Q\} \quad (2.138)$$

O procedimento de montagem das matrizes globais do sistema se desenvolve da maneira tradicional, identificando os graus de liberdade comuns entre dois ou mais elementos finitos. Esta montagem é executada com base na conectividade dos elementos. A título de exemplo, a Fig. 2.6 ilustra o acoplamento de quatro elementos finitos de placa com 3 camadas, ressaltando a conectividade dos graus de liberdade em nós comuns, onde a notação $(\cdot)_i$ representa os graus de liberdade do i -ésimo nó.

As condições de contorno impostas ao sistema são consideradas eliminando-se as linhas e colunas das matrizes de massa e rigidez, referentes aos graus de liberdade bloqueados em cada nó restringido.

Após a finalização do procedimento de montagem, obtém-se o sistema global de equações do movimento escrito como:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{Q\} \quad (2.139)$$

onde $[M]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez globais da placa multicamadas, e $\{\delta\}$ e $\{Q\}$ são os vetores dos deslocamentos e esforços generalizados globais, respectivamente.

Na equação (2.138), a matriz $[K]^e$ é escrita como a soma das matrizes de rigidez de cada camada, conforme visto em (2.55). Em particular, para o modelo com 5 camadas se escreve:

$$[K]^e = [K^{(1)}] + [K^{(2)}] + [K^{(3)}] + [K^{(4)}] + [K^{(5)}] \quad (2.140)$$

ou ainda:

$$[K]^e = [K_e]^e + [K_v]^e \quad (2.141)$$

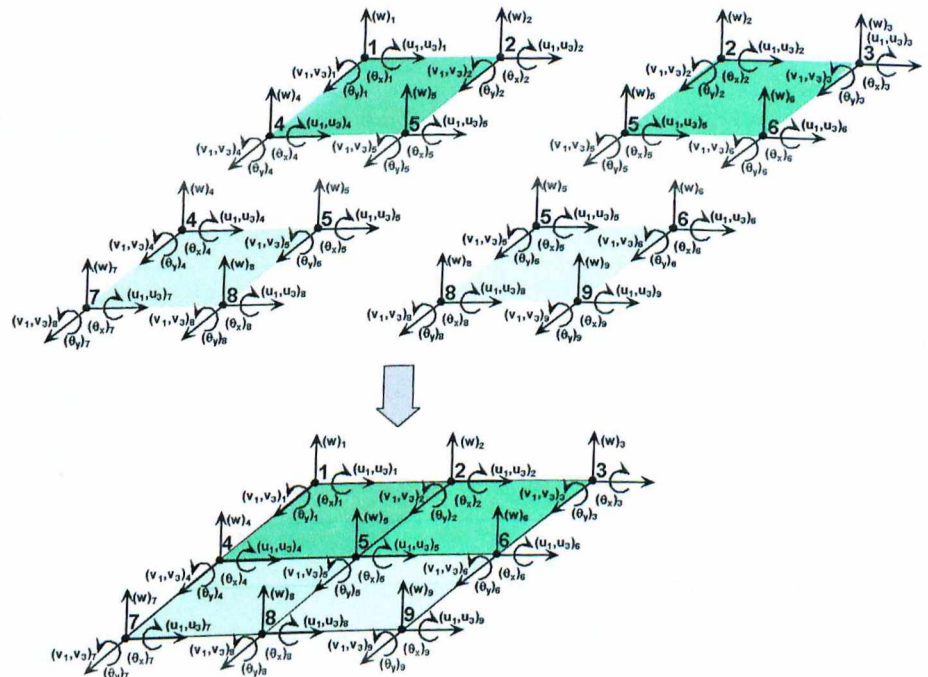


Figura 2.6- Esboço do acoplamento de 4 elementos de placa com 3 camadas

onde $[K_e]^e = [K^{(1)}] + [K^{(3)}] + [K^{(5)}]$ se refere às camadas elásticas e $[K_v]^e = [K^{(2)}] + [K^{(4)}]$ se refere às camadas viscoelásticas. De modo análogo, se escrevem $[K_e]^e = [K^{(1)}] + [K^{(3)}]$ e $[K_v]^e = [K^{(2)}]$ para o modelo com 3 camadas.

No procedimento de montagem das matrizes globais, pode-se montar a matriz de rigidez global, separada em duas partes, uma elástica e outra viscoelástica, da seguinte forma:

$$[K] = [K_e] + [K_v] \quad (2.142)$$

Em (2.142) a dependência da frequência é introduzida na matriz de rigidez viscoelástica, que pode ser fatorada da seguinte maneira:

$$[K_v] = G(\omega) [\bar{K}_v] \quad (2.143)$$

onde $G(\omega)$ é o módulo complexo do material viscoelástico.

Substituindo (2.143) em (2.139) tem-se a equação do movimento modificada:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + ([K_e] + G(\omega) [\bar{K}_v]) \{\delta\} = \{Q\} \quad (2.144)$$

O capítulo seguinte trata da modelagem dos materiais viscoelásticos, determinando expressões para a função módulo do material $G(\omega)$, as quais podem ser substituídas na equação (2.144), completando a modelagem por elementos finitos de placas tratadas com camadas restritas passivas e ativas.

Capítulo 3

Modelagem do Comportamento Viscoelástico

De acordo com Persoz (1987), o comportamento mecânico dos materiais viscoelásticos pode ser visto como uma composição de dois tipos fundamentais de comportamento: o primeiro é o comportamento de um sólido linear elástico, para o qual a tensão é instantaneamente proporcional à deformação, sendo, independente da taxa de deformação. Este comportamento é regido pela Lei de Hooke, a qual, para os casos de solicitação axial e de cisalhamento, escreve-se $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$ e $\tau(t) = G\gamma(t)$, respectivamente, onde E e G representam os módulos de Young e de cisalhamento. O segundo é o comportamento de um fluido viscoso Newtoniano, para o qual a tensão é proporcional à velocidade de deformação cisalhante, porém, independente da deformação, o que pode ser expresso pela equação $\tau(t) = \mu\dot{\gamma}(t)$, onde μ é a viscosidade do fluido.

Assim, a viscoelasticidade se refere a uma deformação elástica dependente do tempo, sendo observada tanto em materiais metálicos quanto não-metálicos. A dependência temporal do fenômeno viscoelástico muitas vezes é relacionado com a variação da distância inter-molecular que pode, também, causar deformação plástica. Contudo, submetendo o material viscoelástico a um carregamento externo, estas variações inter-moleculares desaparecem com a remoção do carregamento. Desta forma, a teoria da viscoelasticidade considera as relações entre deformação "quase permanente" e o comportamento elástico linear (Nashif et al., 1985). Observa-se o amortecimento viscoelástico em muitos materiais poliméricos e vítricos, que oferecem muitas possibilidades de aplicações industriais deste mecanismo de amortecimento interno. De acordo com Courtney (1990) os polímeros são constituídos de longas cadeias moleculares onde os átomos de carbono unem-se fortemente e podem ser ramificados de modo que as cadeias longas são fortemente ou fracamente ligadas, de acordo com a composição e o processamento do polímero. O amortecimento surge do relaxamento e recuperação do polímero após ele ter sido deformado, e existe uma forte dependência deste comportamento em relação à frequência e à temperatura, devido à relação direta destas grandezas com o movimento molecular do material.

No que diz respeito à modelagem do comportamento viscoelástico, foram sugeridos modelos reológicos simples, compostos por diferentes tipos de associações de molas e amortecedores viscosos.

Os principais modelos reológicos clássicos incluem os modelos de Kelvin-Voigt, Maxwell,

o modelo Linear Padrão ou Modelo de Zener e o modelo Padrão Generalizado, que nada mais são do que modelos simples uni-dimensionais, representados por associações de molas e amortecedores viscosos (Nashif, et al., 1985; Lemaitre e Chaboche, 1988).

Mesmo estes modelos apresentam limitações que impedem seu emprego na modelagem de sistemas estruturais complexos, caracterizados por estados multi-axiais de tensões. Em consequência, mais recentemente, foram desenvolvidos modelos para o comportamento viscoelástico mais bem adaptados a sistemas complexos modelados pela técnica de elementos finitos. Dentre eles destacam-se o modelo de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) (Golla e Hughes, 1985; MacTavish e Hughes, 1993), o modelo de Campos de Deslocamentos Anelásticos, sugerido por Lesieutre e colaboradores (Lesieutre e Bianchini, 1995; Lesieutre, 1996) e o modelo das Derivadas Fracionárias (Bagley e Torvik, 1979, 1983, 1985).

Nas seções seguintes, são sumarizados os fundamentos teóricos dos modelos viscoelásticos mencionados acima, sendo enfatizada a associação dos modelos modernos GHM, ADF e das Derivadas Fracionárias aos modelos finitos de placas tratadas com camadas restritas passivas e ativas, desenvolvidos no Capítulo 2.

3.1 Modelos Reológicos Simples

O modelo de Kelvin-Voigt é caracterizado por uma mola e um amortecedor combinados em paralelo (ver Fig. 3.1(a)). A relação entre a tensão e a deformação para este modelo é estabelecida pela relação constitutiva:

$$\sigma(t) = G\varepsilon(t) + \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (3.1)$$

onde G é o módulo do material e μ é a sua viscosidade.

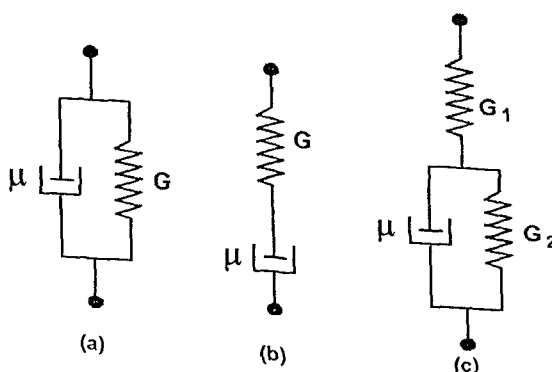


Figura 3.1- Modelos de Kelvin-Voigt (a), Maxwell (b) e Linear Padrão (c)

O modelo de Maxwell é composto por uma mola e um amortecedor viscoso dispostos em série, conforme ilustra a Fig. 3.1(b). Para este modelo, a relação entre tensão e deformação

é dada por:

$$\sigma(t) + \frac{\mu}{G} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Os modelos reológicos simplificados são úteis para a caracterização qualitativa do efeito viscoelástico em condições de carregamento uniaxiais, porém, não são suficientes para uma modelagem mais precisa do comportamento viscoelástico.

O Modelo Linear Padrão é uma das representações conhecidas da equação de estado de materiais viscoelásticos, relacionando a tensão σ e a deformação ε da seguinte forma:

$$\sigma(t) + b \frac{d\sigma(t)}{dt} = G_0 \varepsilon(t) + G_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (3.3)$$

onde os parâmetros b , G_0 e G_1 são constantes (Fig. 3.1(c)) a serem determinadas, relacionando as propriedades dos materiais viscoelásticos como módulos e constantes de viscosidade, de acordo com as equações:

$$b = \frac{\mu}{G_1 + G_2}; \quad G_0 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad \text{e} \quad G_1 = \frac{\mu G_2}{G_1 + G_2} \quad (3.4)$$

Apesar deste modelo ser mais preciso que os modelos anteriores na representação da relação entre tensão e a deformação, ele ainda representa com dificuldade, o comportamento real dos materiais viscoelásticos.

Com efeito, nota-se que numa análise temporal, tanto o modelo de Kelvin-Voigt quanto o modelo de Maxwell não representam o comportamento real de materiais viscoelásticos em ensaios de fluência e relaxação (Christensen, 1982). O modelo Linear Padrão não apresenta estes problemas, podendo ser considerado como a primeira aproximação adequada para o comportamento de materiais viscoelásticos reais. Considerando a tensão e a deformação variando harmonicamente, segundo $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ e $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, a equação (3.3), após algumas manipulações algébricas conduz à relação:

$$\sigma_0 = E \left(\frac{G_0 + G_1(i\omega)}{1 + b(i\omega)} \right) \varepsilon_0 \quad (3.5)$$

que também pode ser escrita como

$$\sigma_0 = [G'(\omega) + iG''(\omega)] \varepsilon_0 \quad (3.6)$$

onde

$$G'(\omega) = \left(\frac{G_0 + G_1 b \omega^2}{1 + b^2 \omega^2} \right) \quad (3.7)$$

$$G''(\omega) = \left(\frac{\omega (G_1 - b G_0)}{1 + b^2 \omega^2} \right) \quad (3.8)$$

As funções representadas em (3.7) e (3.8) são funções da frequência que refletem a dependência do comportamento de materiais reais em relação a este parâmetro. Entretanto, a

variação dessas funções com a frequência, é muito mais rápida que a usualmente observada nos materiais viscoelásticos reais (Nashif et al., 1985). Isto motivou a proposição do modelo Padrão Generalizado, que fornece melhores aproximações para o comportamento de materiais viscoelásticos em relação à frequência.

3.2 Modelo Generalizado Padrão

A forma simples do modelo Linear Padrão pode ser estendida introduzindo derivadas temporais de ordem mais alta para σ e ε , na equação (3.3), produzindo a forma:

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = G_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N G_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n} \quad (3.9)$$

Considerando variações harmônicas para a tensão e a deformação, conforme $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, de (3.9) obtém-se a relação:

$$\sigma_0 = \frac{\left[G_0 + \sum_{n=1}^N G_n (i\omega)^n \right]}{\left[1 + \sum_{m=1}^M b_m (i\omega)^m \right]} \varepsilon_0 \quad (3.10)$$

ou ainda:

$$\sigma_0 = (G' + iG'') \varepsilon_0 \quad (3.11)$$

onde G' e G'' são agora funções mais complicadas de ω , mas que podem ser convenientemente construídas escolhendo b_m e G_n . A maior desvantagem deste modelo é que um grande número de termos são geralmente necessários para modelar adequadamente o comportamento de materiais reais sobre uma banda larga de frequência.

3.3 Leis de Comportamento Viscoelástico

A relação constitutiva entre a tensão e deformação, considerando o caso de solicitação uniaxial, pode ser expressa sob a forma de uma integral de convolução (Christensen, 1982):

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t c(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \quad (3.12)$$

onde σ e ε representam, respectivamente, a tensão e a deformação e $c(t)$ é denominada **função módulo** do material. No caso de um material elástico linear, a função $c(t)$ é constante $c(t) = c^0$, e a lei de comportamento (3.12) reduz-se a:

$$\sigma(t) = c^0 \varepsilon(t) \quad (3.13)$$

Para um material viscoelástico, as funções $c(t)$ não são constantes, e a integral em (3.12) deve ser calculada a todo instante de tempo no intervalo $[-\infty, t]$. Porém, $c(t)$ satisfaz a todas as propriedades de simetria dos tensores de elasticidade.

A equação (3.12) se escreve:

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon(0) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

e definindo $\bar{h}(t) = G(t) - G_0$, tem-se:

$$\sigma(t) = G_0\varepsilon(t) + \bar{h}(t)\varepsilon(0) + \int_0^t \bar{h}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

onde G_0 é o **módulo estático**, **módulo relaxado** ou **módulo a baixa frequência**, ou seja, $G_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$.

Para condições iniciais nulas, (3.15) é exatamente a transformada inversa de Laplace de:

$$\sigma(s) = [G_0 + h(s)]\varepsilon(s) \quad (3.16)$$

onde $h(s) = s\bar{h}(s)$, e s é a variável complexa de Laplace. Os termos $G_0\varepsilon(s)$ e $h(s)\varepsilon(s)$ representam, respectivamente, a **elasticidade** e o **comportamento dissipativo** do material. As funções $h(s)$ são propriedades do material que regem seu comportamento dissipativo, sendo freqüentemente denominadas **funções de dissipação**.

Com a suposição de que s é imaginário puro, $s = i\omega$, o termo $[G_0 + h(s)]$ em (3.16) é escrito em função da frequência ω da seguinte forma:

$$G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) = G'(\omega)[1 + i\eta(\omega)] \quad (3.17)$$

onde $G'(\omega)$ é a parte real do módulo complexo, denominado **módulo de armazenamento**, $G''(\omega)$ é a parte imaginária do módulo complexo, denominado **módulo de perda** e $\eta(\omega)$ é o **fator de perda**, definido por:

$$\eta(\omega) = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \quad (3.18)$$

3.4 Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura

É bem conhecido o fato que as características mecânicas de materiais viscoelásticos dependem fortemente da temperatura. Desta forma, torna-se importante incluir na modelagem, esta dependência, o que pode ser feito através do princípio da equivalência frequência-temperatura.

De acordo com Nashif et al. (1985), a base para a formulação do Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura é relação inversa existente entre os efeitos da frequência e

da temperatura para materiais viscoelásticos termo-reologicamente simples. Conforme Christensen (1982), a partir de propriedades dos materiais, coletadas experimentalmente em diferentes temperaturas, pode-se gerar uma **curva mestre**, e valendo-se de um fator de deslocamento adequado, dependente da temperatura, encontram-se as propriedades do material em qualquer temperatura dentro da faixa considerada.

Essa relação pode ser representada na seguinte forma:

$$G(\omega, T) = G(\alpha_T \omega, T_0) \quad (3.19)$$

$$\eta(\omega, T) = \eta(\alpha_T \omega, T_0) \quad (3.20)$$

onde α_T é o **fator de deslocamento** dependente da temperatura, T_0 é o valor da temperatura tomado como referência.

A **freqüência reduzida** (Ferry et al., 1952) é definida como sendo:

$$\omega_r = \alpha_T \omega \quad (3.21)$$

O fator de deslocamento é identificado como sendo o deslocamento necessário para fazer com que as curvas $\log(G') \times \log(\omega)$, na temperatura T_i ($i = \pm 1, 2, \dots, T$), se sobreponham à curva e $\log(G') \times \log(\omega)$ na temperatura T_0 , como representado na Figura 3.2, abaixo.

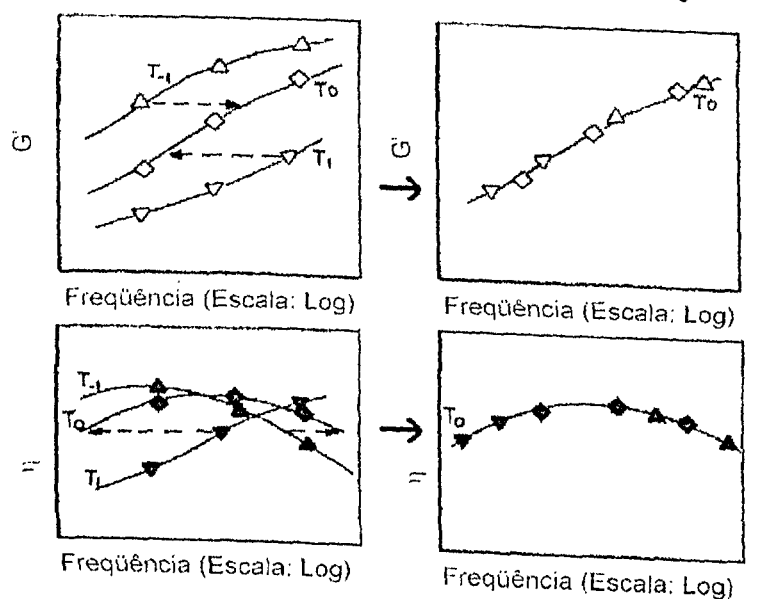


Figura 3.2- Variação do módulo e fator de perda (Adaptado de Nashif et al., 1985)

A Figura 3.3 representa as variações do módulo e do fator de perda com a freqüência reduzida para o material ISD112 da 3M, de acordo com Drake e Soovere (1984). Esta representação constitui a relação fundamental entre a freqüência reduzida e os parâmetros do material viscoelástico. Entretanto, seu uso para obtenção direta do módulo e do fator de

perda para uma dada frequência e temperatura só é possível se for conhecida a função que relaciona o parâmetro de deslocamento a com a temperatura absoluta T .

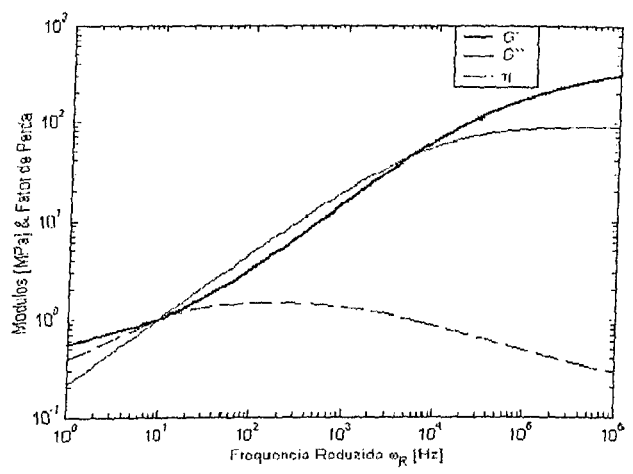


Figura 3.3- Variação dos módulos e fator de perda para o material ISD112 (Lima, 2003)

3.5 Incorporação do Efeito Viscoelástico em Modelos de Elementos Finitos

Considere-se o seguinte sistema de equações do movimento de um sistema elástico com N graus de liberdade resultante de uma discretização por elementos finitos:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\} \quad (3.22)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa, simétrica e definida-positiva, $[D]$ é a matriz de amortecimento viscoso, simétrica, definida positiva ou semi-definida-positiva, $[K]$ é a matriz de rigidez, também simétrica, definida positiva ou semi-definida-positiva, $\{q\}$ é o vetor de deslocamentos generalizados e $\{Q\}$ é o vetor de carregamentos generalizados.

Admite-se que a estrutura modelada possa ser considerada como resultante da associação de duas sub-estruturas: uma puramente elástica e outra viscoelástica. Assim, (3.22) pode ser reescrita:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + [[K_e] + [K_v]] \{q\} = \{Q\} \quad (3.23)$$

onde $[K_e]$ representa a rigidez do sistema referente à subestrutura elástica e $[K_v]$ representa a rigidez da subestrutura viscoelástica, a qual é dependente da frequência.

Note-se que, no caso de placas multi-camadas com 3 e 5 camadas consideradas neste trabalho, a sub-estrutura elástica é constituída pelas camadas metálicas (placa base e camadas restridentes), enquanto a sub-estrutura viscoelástica é formada pelos núcleos viscoelásticos.

Neste caso, de acordo com (2.98) e (2.80), tem-se:

- Para a placa com 3 camadas:

$$[K_e] = [K^{(1)}] + [K^{(3)}]; \quad [K_v] = [K^{(2)}] \quad (3.24)$$

- Para a placa com 5 camadas:

$$[K_e] = [K^{(1)}] + [K^{(3)}] + [K^{(5)}]; \quad [K_v] = [K^{(2)}] + [K^{(4)}] \quad (3.25)$$

No Capítulo 2, as matrizes de rigidez foram formuladas considerando os módulos elásticos constantes. Utilizando o Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico (Christensen, 1982) pode-se agora introduzir o efeito viscoelástico fatorando os módulos das matrizes de rigidez considerando a dependência da frequência de acordo com uma modelagem viscoelástica específica. Neste procedimento, supõe-se o coeficiente de Poisson do material viscoelástico constante (independente da frequência), de modo que $E(\omega)$ torna-se proporcional a $G(\omega)$, de acordo com a relação:

$$G(\omega) = \frac{E(\omega)}{2[1 + \nu]} \quad (3.26)$$

Desta forma, a matriz de rigidez da sub-estrutura viscoelástica pode ser escrita como:

$$[K_v(\omega)] = G(\omega) [\bar{K}_v] \quad (3.27)$$

onde $G(\omega)$ é o módulo de cisalhamento complexo do material viscoelástico e $[\bar{K}_v]$ é a matriz de rigidez viscoelástica fatorada.

Nas seções seguintes, são apresentados três modelos que têm sido utilizados para representar a função módulo $G(\omega)$ dos materiais viscoelásticos em associação com a técnica de elementos finitos.

3.6 O Modelo de Golla-Hughes-McTavish

Este modelo foi desenvolvido por Golla e Hughes (Golla e Hughes, 1985), e adaptado por Golla (Golla et al., 1993), recebendo a denominação de modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM). O modelo GHM, baseado no conceito de coordenadas dissipativas, propõe representar a função módulo do material viscoelástico por uma série de termos chamados de **mini-osciladores** (devido a sua semelhança com as funções de transferência de sistemas amortecidos de um grau de liberdade) dependentes da frequência, no domínio de Laplace de acordo com a relação:

$$G(s) = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\xi_i \omega_i s}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \quad (3.28)$$

onde G_r é denominado **módulo relaxado**, ou **módulo em baixa frequência**, ou **módulo estático**; α_i , ξ_i , ω_i são parâmetros reais positivos que caracterizam cada mini-oscilador, e N_G é o número de mini-osciladores. O **módulo em alta frequência** se relaciona com o módulo estático da seguinte forma:

$$G_u = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \right) \quad (3.29)$$

A transformada de Laplace da equação do movimento (3.23) conduz a:

$$(s^2 [M] + s [D] + [K_e] + G_v(s) [\bar{K}_v]) \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.28) nesta última equação tem-se:

$$\left(s^2 [M] + s [D] + [K_e] + G_r [\bar{K}_v] \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\xi_i \omega_i s}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \right) \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.31)$$

ou ainda:

$$\left(s^2 [M] + s [D] + [K_e] + [K_v^0] + [K_v^0] \left(\sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\xi_i \omega_i s}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \right) \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.32)$$

onde $[K_v^0] = G_r [\bar{K}_v]$ é a matriz de rigidez estática do material viscoelástico.

Agora, introduz-se uma série de N_G variáveis de dissipação $\{q_i^G(s)\}$ ($i = 1, \dots, N_G$) que se relacionam com as variáveis elásticas $\{q\}$ da seguinte forma:

$$\{q_i^G(s)\} = \frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \{q(s)\} \quad (3.33)$$

Manipulando (3.33), obtém-se a relação:

$$\{q(s)\} - \{q_i^G(s)\} = \frac{s^2 + 2\hat{\xi}_i \hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \{q(s)\}$$

que, substituída em (3.31), permite escrever:

$$(s^2 [M] + s [D] + [K_e] + [K_v^0]) \{q(s)\} + [K_v^0] \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i [\{q(s)\} - \{q_i^G(s)\}] = \{F(s)\} \quad (3.34)$$

Combinando (3.33) com (3.34) obtém-se o sistema acoplado:

$$(s^2 [M] + s [D] + [K_e] + [K_v^\infty]) \{q(s)\} - [K_v^0] \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \{q_i^G(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.35)$$

onde $[K_v^\infty] = [K_v^0] \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \right)$ define a matriz de rigidez dinâmica ou em alta frequência do material viscoelástico.

Aplicando a transformada da inversa de Laplace às equações, encontra-se o seguinte

sistema de equações no domínio do tempo:

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + ([K_e] + [K_v^\infty]) \{q\} - [K_v^0] \alpha_i \{q_i^G\} = \{F\} \\ \frac{\alpha_i}{\omega_i^2} [K_v^0] \{\ddot{q}_i^G\} + \frac{2\alpha_i \xi_i}{\omega_i} [K_v^0] \{\dot{q}_i^G\} + \alpha_i [K_v^0] \{q_i^G\} - \alpha_i [K_v^0] \{q\} = \{0\} \end{cases}$$

que pode ser colocado sob a seguinte forma matricial:

$$[M_G] \{\ddot{q}_G\} + [D_G] \{\dot{q}_G\} + [K_G] \{q_G\} = \{F_G\} \quad (3.36)$$

onde:

$$[M_G] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M_{dd}] \end{bmatrix}; \quad [D_G] = \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [D_{dd}] \end{bmatrix}; \quad [K_G] = \begin{bmatrix} [K_e] + [K_v^\infty] & [K_{qd}] \\ [K_{qd}]^T & [K_{dd}] \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\{q_G\} = \left\{ \{q\}, \{q_1^d\}, \dots, \{q_n^d\} \right\}^T; \quad \{F_G\} = \left\{ \{F\}, \{0\}, \dots, \{0\} \right\}^T \quad (3.38)$$

$$[M_{dd}] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\omega_1^2} [K_v^0] & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & \frac{\alpha_{N_G}}{\omega_{N_G}^2} [K_v^0] \end{bmatrix}; \quad [D_{dd}] = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha_1 \xi_1}{\omega_1} [K_v^0] & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & \frac{2\alpha_{N_G} \xi_{N_G}}{\omega_{N_G}} [K_v^0] \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$[K_{dd}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 [K_v^0] & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & \alpha_{N_G} [K_v^0] \end{bmatrix}; \quad [K_{qd}] = [-\alpha_1 [K_v^0] \quad \dots \quad -\alpha_{N_G} [K_v^0]] \quad (3.40)$$

onde $[M_G]$ é a matriz de massa, geralmente não definida-positiva, $[K_G]$ é a matriz de rigidez e $[D_G]$ é a matriz de amortecimento, ambas usualmente semi-definidas-positivas.

Observe-se que a inclusão de variáveis dissipativas para representar o efeito viscoelástico multiplica pelo número de mini-osciladores a ordem do sistema original. Assim, se N_G é o número de mini-osciladores necessários para representação do comportamento viscoelástico, o número total de gdl's é dado por $N = n(1 + N_G)$, onde n é o número de gdl's do sistema original antes da inclusão do modelo GHM.

Observa-se também a singularidade da matriz $[M_G]$ para os casos em que é feito tratamento viscoelástico parcial, pois a matriz $[K_v^0]$ e, em consequência, a matriz de massa aumentada do sistema, $[M_G]$, são semi-definidas-positivas (Trindade et al., 2000). Uma forma de se contornar esse problema de singularidade, e reduzir o número total de gdl's é tratar a matriz de rigidez fatorada do material viscoelástico, $[\bar{K}_v]$, por meio de uma decomposição espectral. Este tratamento numérico reduz o custo computacional em virtude da redução do número de gdl's do modelo em um número correspondente ao número de autovalores nulos de $[K_v^0]$, de N_n . Desta forma, o número de gdl's total para tratamento parcial é dado por $N_{Gp} = n + (n - N_n) N_G$. Esta decomposição espectral será detalhada na Seção 3.9.

3.7 O Modelo de Campos de Deslocamento Anelásticos (Anelastic Displacement Fields - ADF)

Este modelo foi desenvolvido por Lesieutre e Bianchini (1995), e adaptado para utilização em sistemas de elementos finitos do tipo barra (Lesieutre e Bianchini, 1996), e do tipo viga com camada restrita passiva (PCLD) (Lesieutre e Lee, 1996). Em vários aspectos, tem grande similaridade com o modelo GHM, adotando a seguinte representação para o módulo do material viscoelástico:

$$G(s) = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_A} \frac{\Delta_i s}{s + \Omega_i} \right) \quad (3.41)$$

onde G_r é o **módulo relaxado**, sendo o **módulo não-relaxado** dado por $G_u = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_A} \Delta_i \right)$. Aqui, Ω_i é o **inverso dos tempos característicos de relaxação a deformação constante**, Δ_i é a **intensidade de relaxação correspondente**, ligada aos parâmetros C_i (**parâmetros de acoplamento constitutivo**, que descrevem o acoplamento do processo físico de relaxação ao deslocamento total) de acordo com a relação:

$$C_i = \frac{1 + \sum_{i=1}^{N_A} \Delta_i}{\Delta_i} \quad (3.42)$$

O modelo ADF tem por base a separação das deformações totais do material viscoelástico numa parte elástica, instantaneamente proporcional à tensão, e numa parte anelástica, representando a relaxação do material viscoelástico, que descreve a parte da deformação que não é instantaneamente proporcional à tensão. Para acomodar múltiplos processos de relaxação, há uma subdivisão da parte anelástica em uma série de campos de deslocamentos anelásticos $\{q_i^A\}$ ($i = 1, \dots, N_A$) o que permite escrever:

$$\{q^e\} = \{q\} - \sum_{i=1}^{N_A} \{q_i^A\} \quad (3.43)$$

Assim, substituindo a expressão do módulo em alta frequência, G_u , em (3.27) e depois em (3.23), e trocando $\{q\}$ pela expressão (3.43), para a porção viscoelástica, obtém-se a seguinte equação do movimento:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + [K_e] \{q\} + G_r (1 + \Delta_i) [\bar{K}_v] \left(\{q\} - \sum_{i=1}^{N_A} \{q_i^A\} \right) = \{F\} \quad (3.44)$$

que pode ser re-escrita na forma:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + ([K_e] + [K_v^\infty]) \{q\} - [K_v^\infty] \{q_i^A\} = \{F\} \quad (3.45)$$

onde $[K_v^\infty] = [K_v^0] \left(1 + \sum_{i=1}^{N_A} \Delta_i \right)$ é a **matriz de rigidez dinâmica** e $[K_v^0] = G_r [\bar{K}_v]$ é a **matriz de rigidez estática do núcleo viscoelástico**. Esta última equação descreve a evolução dos graus-de-liberdade elásticos do sistema. Além desta equação, deve-se considerar um sistema

de equações diferenciais de primeira ordem, que descreve a evolução no tempo dos graus-de-liberdade associados com as deformações anelásticas:

$$\frac{C_i}{\Omega_i} [K_v^\infty] \{\dot{q}_i^A\} + C_i [K_v^\infty] \{q_i^A\} - [K_v^\infty] \{q\} = \{0\} \quad (3.46)$$

As equações (3.45) e (3.46) conduzem ao sistema matricial acoplado:

$$[M_A] \{\ddot{q}_A\} + [D_A] \{\dot{q}_A\} + [K_A] \{q_A\} = \{F\} \quad (3.47)$$

com

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}; \quad [D_A] = \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [D_{dd}] \end{bmatrix}; \quad [K_A] = \begin{bmatrix} [K_e] + [K_v^\infty] & [K_{qd}] \\ [K_{qd}]^T & [K_{dd}] \end{bmatrix}; \quad (3.48)$$

$$\{q_A\} = \{\{q\}, \{q_1^A\}, \dots, \{q_{N_A}^A\}\}^T; \quad \{F\} = \{\{F\}, \{0\}, \dots, \{0\}\}^T \quad (3.49)$$

$$[D_{dd}] = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{\Omega_1} [K_v^\infty] & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & \frac{C_{N_A}}{\Omega_{N_A}} [K_v^\infty] \end{bmatrix}; \quad [K_{dd}] = \begin{bmatrix} C_1 [K_v^\infty] & & \\ & \ddots & \\ & & C_{N_A} [K_v^\infty] \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$[K_{qd}] = [-[K_v^\infty] \quad \dots \quad -[K_v^\infty]] \quad (3.51)$$

onde $[M_A]$ é a matriz de massa, não necessariamente definida-positiva e $[D_A]$ e $[K_A]$ são as respectivas matrizes de amortecimento e rigidez, ambas semi-definidas-positivas.

Similarmente ao modelo GHM, a utilização dos campos de deslocamentos anelásticos para incorporação do comportamento viscoelástico ao sistema, aumenta consideravelmente o número de gdl's total. Se N_A é o número de campos de deslocamentos anelásticos utilizados, o número total de gdl's do modelo é dado por $N = n(1 + N_A)$, onde n é o número de gdl's do sistema original antes da utilização do modelo ADF.

Apesar da decomposição espectral da matriz $[\bar{K}_v]$ reduzir o número de gdl's total, faz persistir o problema de singularidade, uma vez que, ao contrário do que ocorre para o modelo GHM, não existe, para o modelo ADF, influência das variáveis dissipativas na inércia do sistema. Assim, a matriz de massa $[M_A]$ continua apresentando problemas de singularidade.

Para se reduzir o número total de gdl's, tal como executado para o modelo GHM, trata-se a matriz $[\bar{K}_v]$ por meio de uma decomposição espectral, mais uma vez diminuindo o custo computacional em virtude da redução do número de gdl's do modelo. Assim, tem-se uma forma semelhante a do modelo GHM e o número de gdl's total para tratamento parcial é dado por $N_{Ap} = n_A + (n_A - N_n) p_A$, onde N_n é o número de autovetores nulos de $[\bar{K}_v]$.

3.8 O Modelo das Derivadas Fracionárias

Como visto na Seção 3.2, a aplicação de derivadas temporais de ordem inteira sobre os campos de tensão e deformação permite escrever o Modelo Generalizado Padrão na seguinte forma:

$$\sigma(t) + \sum_{n=1}^N b_n \frac{d^n \sigma(t)}{dt^n} = G_0 \varepsilon(t) + \sum_{m=1}^M G_m \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m} \quad (3.52)$$

Observa-se porém, que para um grande número de materiais viscoelásticos reais, o número de derivadas temporais necessário para a representação satisfatória do comportamento dinâmico geralmente é muito grande, requerendo um elevado número de parâmetros b_n e G_m . Uma consequência imediata é que este modelo representativo do material, quando inserido nas equações de elementos finitos, leva a sistemas de equações diferenciais de alta ordem, dificultando seu processamento numérico.

O modelo proposto por Bagley e Torvik (1979), com o intuito de diminuir a quantidade de parâmetros necessários ao modelo, propõe a generalização do modelo (3.52), mediante a introdução de derivadas de ordem fracionária na relação constitutiva:

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\beta_m} [\sigma(t)] = G_r \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N G_n D^{\alpha_n} [\varepsilon(t)] \quad (3.53)$$

onde α_n e β_m são expoentes fracionários e D^α representa a operação de derivação fracionária definida da seguinte forma:

$$D^\alpha [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (3.54)$$

onde $\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ é a função gama.

Podem ser demonstradas as seguintes propriedades das derivadas fracionárias em termos das transformadas de Fourier e Laplace (Bagley e Torvik, 1984):

$$F[D^\alpha [x(t)]] = (i\omega)^\alpha F[x(t)] \quad (3.55)$$

$$L[D^\alpha [x(t)]] = s^\alpha L[x(t)] \quad (3.56)$$

Com base em observações experimentais (Bagley e Torvik, 1979) concluiu-se que modelos adequados a uma ampla gama de materiais viscoelásticos reais, podem ser obtidos conservando-se apenas os primeiros termos das séries em (3.53), obtendo-se a seguinte expressão:

$$\sigma(t) + b D^\beta [\sigma(t)] = G_r \varepsilon(t) + G_1 D^\alpha [\varepsilon(t)] \quad (3.57)$$

Este é um modelo simplificado com apenas cinco parâmetros, a saber: G_r , G_1 , α , β e b .

Além disso, os parâmetros α e β , podem ser supostos idênticos, mais precisamente,

$\alpha = \beta = 1/2$, o que de acordo com Bagley e Torvik (1983), se torna satisfatório para alguns materiais viscoelásticos e reduz de maneira considerável a ordem das matrizes finais do sistema, havendo apenas 3 parâmetros a serem determinados para caracterização do comportamento viscoelástico.

De acordo com Bagley e Torvik (1983), a formulação das equações do movimento utilizando o Modelo de Derivadas Fracionárias (MDF) também produz equações matriciais de alta ordem. Porém, a vantagem deste modelo é a exigência de um pequeno número de parâmetros, e a ordem do sistema de equações do movimento depende exclusivamente dos parâmetros α e β .

Aplicando a Transformada de Laplace à (3.57), valendo-se da propriedade (3.55), obtém-se a expressão para a equação constitutiva do modelo no domínio de Laplace:

$$\sigma(s) = G_v(s) \varepsilon(s) \quad (3.58)$$

onde:

$$G_v(s) = \frac{G_r + G_1 s^\alpha}{1 + b s^\beta} \quad (3.59)$$

Esta última expressão representa o módulo do material viscoelástico que é utilizada para a constituição da matriz de rigidez viscoelástica, incluída a dependência da frequência.

Introduzindo (3.59) em (3.27), obtém-se:

$$[K_v(s)] = \left(\frac{G_r + G_1 s^\alpha}{1 + b s^\beta} \right) [\bar{K}_v] \quad (3.60)$$

Introduzindo (3.59) em (3.30), e multiplicando o resultado por $(1 + b s^\beta)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(s^2 [M] + b s^{\beta+2} [M] + s [D] + b s^{\beta+1} [D] + [K_e] + b s^\beta [K_e] + (G_r + G_1 s^\alpha) [\bar{K}_v] \right) \{q_F(s)\} = \\ = (1 + b s^\beta) \{F(s)\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Conforme detalhado por Bagley e Torvik (1983) e Lima (2003), (3.61) pode ser expressa na seguinte forma:

$$\sum_{j=0}^J s^{\frac{j}{m}} [A_j] \{q_F(s)\} = (1 + b s^\beta) \{F(s)\} \quad (3.62)$$

onde m é o mínimo múltiplo comum entre α e β .

Observe que $J = m(2 + \beta)$ e as matrizes $[A_j]$ são calculadas diretamente da comparação entre (3.61) e (3.62), sendo nulas algumas destas matrizes. A equação (3.62) pode ainda ser expressa em termos de duas matrizes reais e simétricas, conforme:

$$\left(s^{1/m} [M_F] + [K_F] \right) \{q_F(s)\} = \{F_F(s)\} \quad (3.63)$$

onde:

$$\{q_F(s)\} = \begin{Bmatrix} s^{\frac{(J-1)}{m}} \{q(s)\} \\ s^{\frac{J-2}{m}} \{q(s)\} \\ \vdots \\ s^{\frac{1}{m}} \{q(s)\} \\ \{q(s)\} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{F_F(s)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \\ (1 + bs^\beta) \{F(s)\} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

$$[M_F] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \cdots & [0] & [A_j] \\ [0] & [0] & \cdots & [A_j] & [A_{j-1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0] & [A_j] & \cdots & [A_3] & [A_2] \\ [A_j] & [A_{j-1}] & \cdots & [A_2] & [A_1] \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$[K_F] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \cdots & [0] & [-A_j] & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & [-A_j] & [-A_{j-1}] & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & [-A_{j-1}] & [-A_{j-2}] & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [-A_j] & [-A_{j-1}] & \cdots & [-A_3] & [-A_2] & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & [0] & [A_0] \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

A equação de estado do sistema amortecido é expressa por (3.63) onde a característica de destaque é a aplicação de um expoente fracionário ao parâmetro de Laplace s .

Observa-se que, apesar de existirem matrizes constantes na composição dessa equação de estado, independentes da frequência, facilitando o uso de procedimentos numéricos na resolução do problema de autovalor, o retorno para o domínio do tempo, pelo uso da transformada inversa de Laplace, é uma tarefa difícil. Fica caracterizada, também, a dependência da ordem das matrizes $[M_F]$ e $[K_F]$, em relação aos valores dos parâmetros α e β .

Utilizando uma representação para o módulo do material viscoelástico em função de 3 parâmetros:

$$G(s) = G_r + G_1 s^\alpha \quad (3.67)$$

tem-se:

$$(s^2 [M] + s [D] + [K_e] + G_r [\bar{K}_v] + G_1 s^\alpha [\bar{K}_v]) \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.68)$$

e o sistema (3.68) é re-escrito na forma:

$$\sum_{j=0}^J s^{\frac{j}{m}} [A_j] \{q_F(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.69)$$

Aqui, $J = 2m$, onde m é o menor fator que transforma α em um número inteiro. De maneira análoga ao modelo de 5 parâmetros, as matrizes $[A_j]$ para o modelo de 3 parâmetros são calculadas mediante comparação direta entre (3.68) e (3.69).

3.9 Decomposição Espectral da Matriz de Rigidez Viscoelástica Fatorada

A seguir é apresentada a técnica para decomposição espectral da matriz de rigidez viscoelástica fatorada, $[\bar{K}_v]$, referente ao modelo ADF.

Considere as equações que descrevem a evolução dos graus-de-liberdade elásticos do sistema, e a evolução no tempo dos graus-de-liberdade associados às deformações anelásticas, dadas respectivamente por:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + ([K_e] + [K_v^\infty]) \{q\} - [K_v^\infty] \{q_i^A\} = \{F\} \quad (3.70)$$

e

$$\frac{C_i}{\Omega_i} [K_v^\infty] \{\dot{q}_i^A\} + C_i [K_v^\infty] \{q_i^A\} - [K_v^\infty] \{q\} = \{0\} \quad (3.71)$$

Fatorando o módulo G_u da matriz de rigidez dinâmica $[K_v^\infty] = G_u [\bar{K}_v]$ pode-se escrevê-la sob uma representação espectral na seguinte forma:

$$[K_v^\infty] = G_u [\bar{R}] [\bar{\Lambda}] [\bar{R}]^T \quad (3.72)$$

onde

$$[\bar{K}_v] = [\bar{R}] [\bar{\Lambda}] [\bar{R}]^T \quad (3.73)$$

e as matrizes $[\bar{R}]$ e $[\bar{\Lambda}]$, são respectivamente, as matrizes modal e espectral, contendo as auto-soluções correspondentes aos autovalores não-nulos do seguinte problema de auto-valor:

$$[\bar{K}_v] \{X_r\} - \lambda_r [I] \{X_r\} = \{0\} \quad (3.74)$$

Aqui, consideram-se os auto-vetores normalizados satisfazendo a seguinte expressão:

$$[\bar{R}]^T [\bar{R}] = [I] \quad (3.75)$$

Introduzindo (3.72) em (3.70), obtém-se:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + ([K_e] + [K_v^\infty]) \{q\} - [\bar{R}] [\bar{\Lambda}] [\bar{R}]^T \{q_i^A\} = \{F\} \quad (3.76)$$

com $[\Lambda] = G_u [\bar{\Lambda}]$.

Pode-se escrever ainda (3.76) na seguinte forma:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + ([K_e] + [K_v^\infty]) \{q\} - [R] \{q^{An}\} = \{F\} \quad (3.77)$$

onde $[R] = [\bar{R}] [\Lambda]$ e $\{q^{An}\} = [\bar{R}]^T \{q_i^A\}$.

Por procedimento análogo, substituindo (3.72) em (3.71), têm-se:

$$\frac{C_i}{\Omega_i} [\bar{R}] [\Lambda] \{\dot{q}_i^{An}\} + C_i [\bar{R}] [\Lambda] \{q_i^{An}\} - [\bar{R}] [R]^T \{q\} = \{0\} \quad (3.78)$$

Pré-multiplicando (3.78) por $[\bar{R}]^T$ e valendo-se da condição de normalização dada por

(3.75), escreve-se:

$$\frac{C_i}{\Omega_i} [\Lambda] \{\dot{q}_i^{An}\} + C_i [\Lambda] \{q_i^{An}\} - [R]^T \{q\} = \{0\} \quad (3.79)$$

Finalmente, combinando-se (3.77) e (3.79), as equações do movimento são dadas por:

$$[M_A^r] \{\ddot{q}_A^r\} + [D_A^r] \{\dot{q}_A^r\} + [K_A^r] \{q_A^r\} = \{F_A^r\} \quad (3.80)$$

onde o sobrescrito r indica matriz reduzida e para o caso de N_A campos de deslocamentos anelásticos:

$$[M_A^r] = \begin{bmatrix} [M] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [0] \end{bmatrix}; \quad [K_A^r] = \begin{bmatrix} [K_e] + [K_v^\infty] & -[R] & -[R] & \cdots & -[R] \\ -[R]^T & C_1 [\Lambda] & [0] & \cdots & [0] \\ -[R]^T & [0] & C_2 [\Lambda] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -[R]^t & [0] & [0] & \cdots & C_{N_A} [\Lambda] \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$[D_A^r] = \begin{bmatrix} [D] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & \frac{C_1}{\Omega_1} [\Lambda] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & \frac{C_{N_A}}{\Omega_{N_A}} [\Lambda] \end{bmatrix}; \quad \{q_A^r\} = \begin{bmatrix} \{q\}^T & \{q_1^{An}\}^T & \cdots & \{q_{N_A}^{An}\}^T \end{bmatrix}^T$$

$$\{F_A^r\} = \begin{bmatrix} \{F\}^T & \{0\}^T & \cdots & \{0\}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.82)$$

3.10 Análise Dinâmica de Sistemas com Modelos Viscoelásticos Incorporados

A análise dinâmica dos sistemas estruturais com tratamento viscoelástico é efetuada por meio da resolução numérica dos sistemas de equações do movimento. Para os modelos GHM, ADF e de Derivadas Fracionárias, estas equações do movimento são expressas, respectivamente, por (3.36), (3.47) e (3.63).

A conveniente transformação dos sistemas de segunda ordem em sistemas equivalentes de primeira ordem para os modelos GHM e ADF é apresentada em seguida.

Os sistemas de equações de primeira ordem para os modelos GHM e ADF se escrevem:

$$\{\dot{X}\} = [A] \{X\} + [B] \{F\} \quad (3.83)$$

onde $[B] = [M]^{-1}$ e a matriz $[A]$, e o vetor $\{X\}$, são dados por:

Para o Modelo GHM:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \cdots & [0] & -[M]^{-1}([K_e] + [K_v^\infty]) & \omega_1^2 [\Lambda]^{-1} [R]^T & \cdots & \omega_{N_G}^2 [\Lambda]^{-1} [R]^T \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & \alpha_1 [M]^{-1} [R] & -\omega_1^2 [I] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & \alpha_{N_G} [M]^{-1} [R] & [0] & \cdots & -\omega_{N_G}^2 [I] \\ [I] & [0] & \cdots & [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [I] & \cdots & [0] & [0] & -2\zeta_1 \omega_1 [I] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [I] & [0] & [0] & \cdots & -2\zeta_1 \omega_{N_G} [I] \end{bmatrix}^T \quad (3.84)$$

$$\{X\} = \left[\{q\}^T \quad \{q_1^{An}\}^T \quad \cdots \quad \{q_{N_G}^{An}\}^T \quad \{\dot{q}\}^T \quad \{\dot{q}_1^{An}\}^T \quad \cdots \quad \{\dot{q}_{N_G}^{An}\}^T \right]^T \quad (3.85)$$

Para o Modelo ADF:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] & [I] \\ \frac{\Omega_1}{C_1} [\Lambda]^{-1} [R]^T & -\Omega_1 [I] & [0] & \cdots & [0] & [0] \\ \frac{\Omega_2}{C_2} [\Lambda]^{-1} [R]^T & [0] & -\Omega_2 [I] & \cdots & [0] & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Omega_{N_A}}{C_{N_A}} [\Lambda]^{-1} [R]^T & [0] & [0] & \cdots & -\Omega_{N_A} [I] & [0] \\ -[M]^{-1}([K_e] + [K_v^\infty]) & [M]^{-1} [R] & [M]^{-1} [R] & \cdots & [M]^{-1} [R] & [0] \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\{X\} = \left[\{q\}^T \quad \{q_1^{An}\}^T \quad \cdots \quad \{q_{N_A}^{An}\}^T \quad \{\dot{q}\}^T \right]^T \quad (3.87)$$

O comportamento dinâmico das estruturas tratadas com material viscoelástico é caracterizado mediante a análise dos autovalores complexos do sistema no espaço de estados e a análise das Funções de Resposta em Frequência (FRF).

As frequências naturais e os fatores de amortecimento modais são obtidos através da resolução do problema de autovalor. Em posse do sistema de primeira ordem no espaço de estados, o problema de autovalor complexo é formulado resolvendo-se:

$$([A] - \lambda [I]) \{X\} = \{0\} \quad (3.88)$$

De modo geral, as auto-soluções do problema de autovalor complexo (3.88) são divididas em **modos estruturais**, representantes dos modos associados às deformações elásticas, e os **modos de relaxação**, associados às variáveis dissipativas internas, adicionadas devido à incorporação dos modelos viscoelásticos, estes últimos sem caracterização relevante ao comportamento dinâmico do sistema, a não ser para sistemas que sejam altamente

amortecidos.

Assim, para os modos estruturais, o r -ésimo autovalor complexo, considerado amortecimento subcrítico se escreve:

$$\lambda_r = -\zeta_r \omega_r \pm i \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (3.89)$$

onde ω_r e ζ_r são, respectivamente, a frequência natural e fator de amortecimento modal, associados ao r -ésimo modo estrutural.

A identificação dos modos estruturais é realizada mediante o exame das partes reais e imaginárias dos autovalores complexos, descartando-se aqueles cuja parte real seja negativa e parte imaginária seja nula, ou ainda, correlacionando-se os modos do sistema amortecido com aqueles do sistema não-amortecido associado.

Por outro lado, as Funções de Resposta em Frequência indicam picos de ressonância para as frequências correspondentes às frequências naturais dos modos estruturais, além de permitir a avaliação dos níveis de amortecimento através das amplitudes observadas.

A matriz de FRF's (receptâncias) $[H(\omega)]$, para uma dada frequência de excitação ω , é calculada utilizando-se a expressão:

$$[H(\omega)] = (i\omega[I] - [A])^{-1} \quad (3.90)$$

A partir de (3.90), os fatores de amortecimento modais podem ser identificados por meio de procedimentos numéricos, tais como, método da Largura de Banda de Meia Potência (Nashif et al., 1985) e o método RFP (Rational Fraction Polynomial).

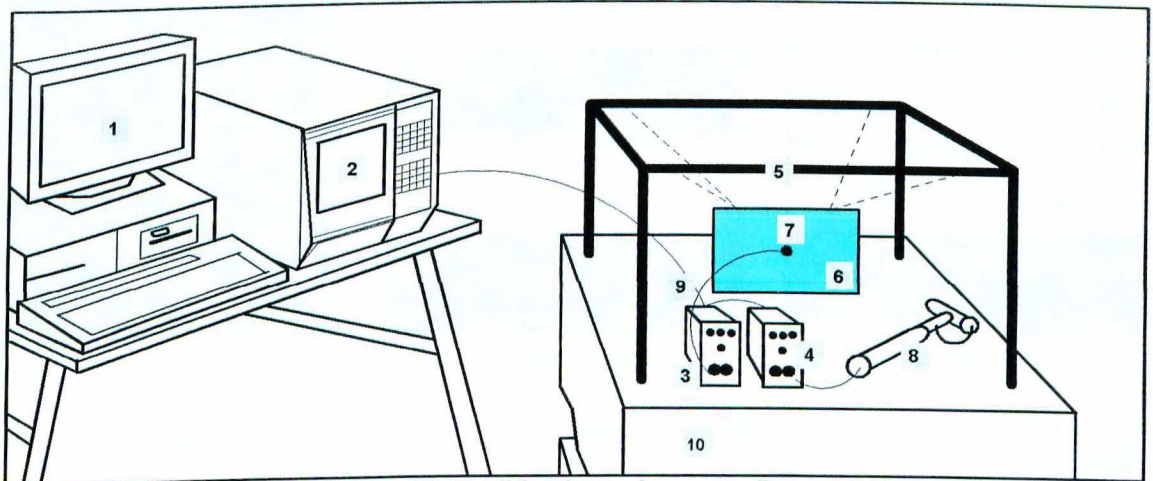
Capítulo 4

Avaliação Numérica e Experimental do Controle de Vibrações Empregando Camadas Restritas Passivas

Neste capítulo é apresentado um estudo experimental de placas tratadas com camada restrita passiva, com o objetivo de verificar a eficiência deste tipo de tratamento na atenuação dos níveis de vibração. Além disso, busca-se validar os procedimentos de modelagem desenvolvidos, conforme descrito nos capítulos precedentes. A validação é baseada na comparação entre as amplitudes das funções de resposta em frequência adquiridas experimentalmente com as correspondentes calculadas a partir de modelos de elementos finitos. A caracterização do comportamento viscoelástico é avaliada com a inclusão do modelo GHM no modelo de elementos finitos.

4.1 Aparato Experimental

A Fig. 4.1 apresenta um esquema da montagem experimental utilizada para realização de ensaios de vibração de uma placa de alumínio de dimensões $0,2m$ por $0,25m$, com condições de contorno livre, à qual foram aplicadas 3 configurações de tratamento viscoelástico superficial, a saber, as configurações A, B e C, representadas na Fig. 4.2.



1- micro-computador; 2-SD380; 3,4-amplificadores de carga; 5-suporte de fixação;
6- placa; 7- acelerômetro; 8- martelo de impacto; 9-cabos; 10- mesa inercial

Figura 4.1- Esquema da montagem experimental

No esquema de instrumentação da Fig. 4.1 estão indicados os seguintes equipamentos utilizados nos ensaios:

- Um analisador de espectros de dois canais Scientific Atlanta - SD380.
- Dois amplificadores de carga Brüel & Kjaer, ambos ajustados com ganho de $31,6 \text{ mV/unid.saída}$ e faixa operacional de 1Hz a 1KHz .
- Um acelerômetro piezoelétrico Brüel & Kjaer com sensibilidade $0,351 \text{ pC/m/s}^2$.
- Um martelo de impacto, Brüel & Kjaer, modelo 8202, com célula de carga possuindo sensibilidade de $1,03 \text{ pC/m/s}^2$.
- Um micro computador para transferência de dados, cabos e conexões.

Tanto a placa base quanto as camadas restringentes externas são de alumínio. Foi adotada a banda $[0; 500\text{Hz}]$ com uma resolução de 800 pontos.

No que diz respeito à modelagem numérica, a placa é discretizada por elementos finitos com uma malha de 8 por 10 elementos, perfazendo um total de 80 elementos finitos e 99 nós. A distribuição dos elementos tratados com o revestimento viscoelástico e os pontos escolhidos para a aquisição das funções de resposta em frequência podem ser visualizados, para as 3 configurações, na Fig. 4.2.

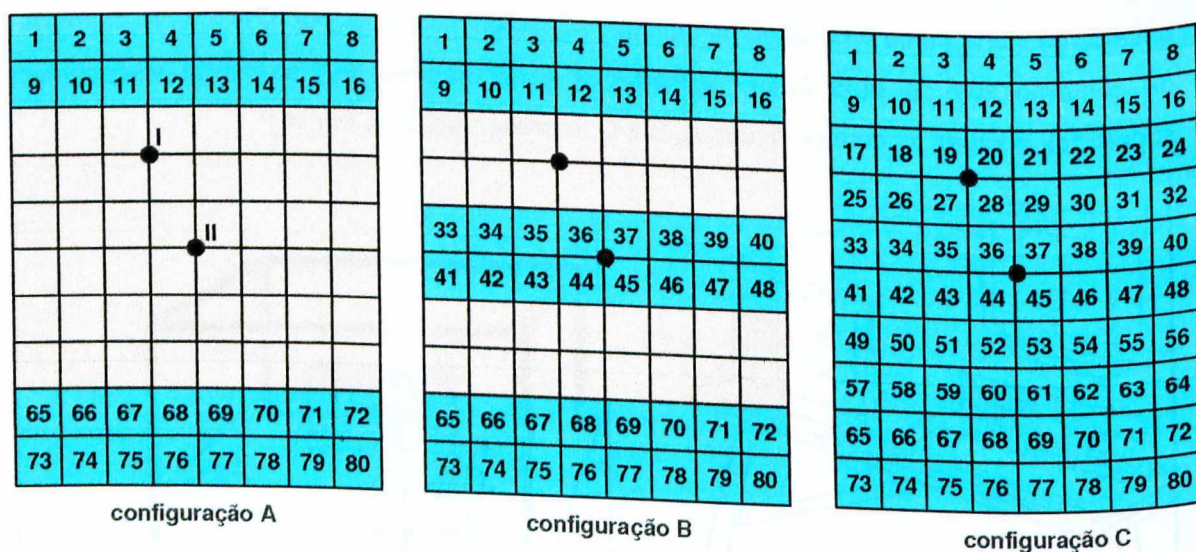


Figura 4.2- Configurações de tratamento superficial utilizadas nos ensaios experimentais de placas

Nos procedimentos de modelagem, foram utilizados elementos com 3 e 5 camadas previamente formulados nas seções 2.4 e 2.5 deste trabalho e, nas porções não tratadas,

utilizou-se o elemento clássico de placa de Kirchhoff.

Os valores das propriedades físicas e geométricas da placa base e das camadas restrigente(s) e viscoelástica(s), esta última constituída pelo material 242F01 fabricado pela 3M[®], à temperatura de 24°C, são fornecidas na Tab. 4.1. Tanto nas simulações como nos ensaios experimentais, as coordenadas utilizadas para obtenção das FRFs pontuais são os deslocamentos transversais nos pontos I e II indicados na Fig. 4.2.

Os valores das densidades volumétricas da placa base e camadas viscoelástica e restrigente foram determinadas experimentalmente através de medidas das respectivas massas (com precisão de $10^{-6}g$) para um volume pré-definido. O coeficiente de Poisson para o material viscoelástico foi adotado como sendo o valor típico para elastômeros na região de borracha (Nashif et al., 1985).

Tabela 4.1- Propriedades físicas e geométricas dos componentes da placa multi-camada

	Espessura [m]	Módulo de Young [N/m ²]	Coefficiente de Poisson	Densidade Volumétrica [Kg/m ³]
camada restringente	$0,5 \times 10^{-3}$	$70,3 \times 10^9$	0,345	2750,0
camada viscoelástica	$20,0 \times 10^{-5}$	depende da frequência	0,500	1099,5
placa base	$3,0 \times 10^{-3}$	$70,3 \times 10^9$	0,345	2750,0

4.2 Identificação de Parâmetros dos Modelos Viscoelásticos

Para cada um dos modelos viscoelásticos descritos anteriormente, torna-se necessária a identificação dos parâmetros figurando nas expressões para as funções módulo, $G(s)$. Em geral, os fabricantes fornecem dados na forma de nomogramas contendo o módulo de armazenamento, $G'(\omega, T)$ e o fator de perda $\eta(\omega, T)$, para diferentes valores de frequência e temperatura. Estes procedimentos de identificação dos parâmetros dos modelos viscoelásticos baseiam-se no ajuste de curvas de dados experimentais por meio de técnicas de otimização, onde os valores dos parâmetros dos modelos são ajustados de modo a minimizar as diferenças entre os dados coletados experimentalmente (fornecidos pelo fabricante) e as curvas ajustadas.

As funções módulo para cada um dos modelos viscoelásticos, expressas pelas (3.28), (3.41), (3.59) e (3.67), fazendo-se $s = i\omega$, assumem as formas complexas:

Modelo GHM

$$\operatorname{Re}(G(\omega)) = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{(\omega^2 (\omega^2 - \omega_i^2) + 4\xi_i^2 \omega_i^2 \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_i^2) + 4\xi_i^2 \omega_i^2 \omega^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\operatorname{Im}(G(\omega)) = G_r \left(\sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{2\xi_i^2 \omega_i^3 \omega}{(\omega^2 - \omega_i^2) + 4\xi_i^2 \omega_i^2 \omega^2} \right) \quad (4.2)$$

Modelo ADF

$$\operatorname{Re}(G(\omega)) = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^{N_A} \Delta_i \frac{\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2} \right) \quad (4.3)$$

$$\operatorname{Im}(G(\omega)) = G_r \left(\sum_{i=1}^{N_A} \Delta_i \frac{\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2} \right) \quad (4.4)$$

Modelo de Derivadas Fracionárias com 5 Parâmetros

$$\operatorname{Re}(G(\omega)) = \frac{G_r \left(1 + b\omega^\beta \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \right) + G_1 \left(\omega^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + b\omega^{\alpha+\beta} \cos\left(\frac{\pi(\alpha-\beta)}{2}\right) \right)}{1 + 2b\omega^\beta \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) + (b\omega^\beta)^2} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{Im}(G(\omega)) = \frac{G_1 \left(\omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + b\omega^{\alpha+\beta} \cos\left(\frac{\pi(\alpha-\beta)}{2}\right) \right) G_1 - G_r \left(b\omega^\beta \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \right)}{1 + 2b\omega^\beta \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) + (b\omega^\beta)^2} \quad (4.6)$$

Modelo de Derivadas Fracionárias com 3 Parâmetros

$$\operatorname{Re}(G(\omega)) = G_r + G_1 \left(\omega^\alpha \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \right) \quad (4.7)$$

$$\operatorname{Im}(G(\omega)) = G_1 \left(\omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \right) \quad (4.8)$$

Os valores dos parâmetros para cada um dos modelos são obtidos por meio da resolução de problemas de otimização não linear. As funções objetivo para esses problemas de otimização representam as diferenças entre as curvas de dados experimentais e as curvas teóricas dos modelos correspondentes, onde a quantidade de variáveis de projeto é dependente da ordem dos modelos, a qual deve ser suficiente para uma representação adequada da dependência em frequência do comportamento viscoelástico, com a temperatura fixada na faixa de frequência de interesse. De acordo com Lima (2003), o número de parâmetros para os modelos GHM e ADF são dados, respectivamente, por $N_{par}^G = 1 + 2N_G$ e $N_{par}^A = 1 + 2N_A$.

Os escalares N_A e N_G são determinantes na ordem dos sistema de equações do movimento dos modelos ADF e GHM, respectivamente. Além disso,

N_A e N_G melhoram o ajuste de curvas, ocasionando porém aumento considerável no número de variáveis de projeto e ordem do sistema global de equações (Lima, 2003).

As funções objetivo podem ser representadas de forma geral como:

$$F = \sum_{i=1}^{N_f} \left| \frac{\operatorname{Re}(G_{\text{teórico}}(\omega_i)) - \operatorname{Re}(G_{\text{experimental}}(\omega_i))}{\operatorname{Re}(G_{\text{experimental}}(\omega_i))} \right| + \left| \frac{\operatorname{Im}(G_{\text{teórico}}(\omega_i)) - \operatorname{Im}(G_{\text{experimental}}(\omega_i))}{\operatorname{Im}(G_{\text{experimental}}(\omega_i))} \right| \quad (4.9)$$

onde N_f , $G_{\text{teórico}}(\omega_i)$ e $G_{\text{experimental}}(\omega_i)$ representam, respectivamente, o número de pontos frequenciais utilizados no ajuste, o módulo de cada modelo e o módulo experimental para cada modelo.

No processo de otimização realizado por Lima (2003), foram utilizados Algoritmos Genéticos com população de 800 indivíduos, 200 gerações e restrições laterais aplicadas às variáveis de projeto.

4.2.1 Identificação dos Parâmetros para o Material 3M 242F01

Para o material identificado comercialmente por 242F01, produzido pela companhia 3M[®], os dados (fator de perda e módulo de armazenamento, em função da frequência e da temperatura) são disponibilizados pelo fabricante sob a forma do nomograma mostrado na Fig. 4.3. A partir deste nomograma, foram computados os valores das partes real e imaginária do módulo complexo, para um conjunto de valores de frequência e de temperatura. Em seguida, estes valores foram interpolados de acordo com os procedimentos descritos na Seção 4.2 para a obtenção dos conjuntos ótimos de parâmetros dos modelos viscoelásticos. Para tanto, foi utilizado um programa computacional desenvolvido por (Lima, 2003), dispondo de uma interface gráfica, ilustrada na Fig. 4.4.

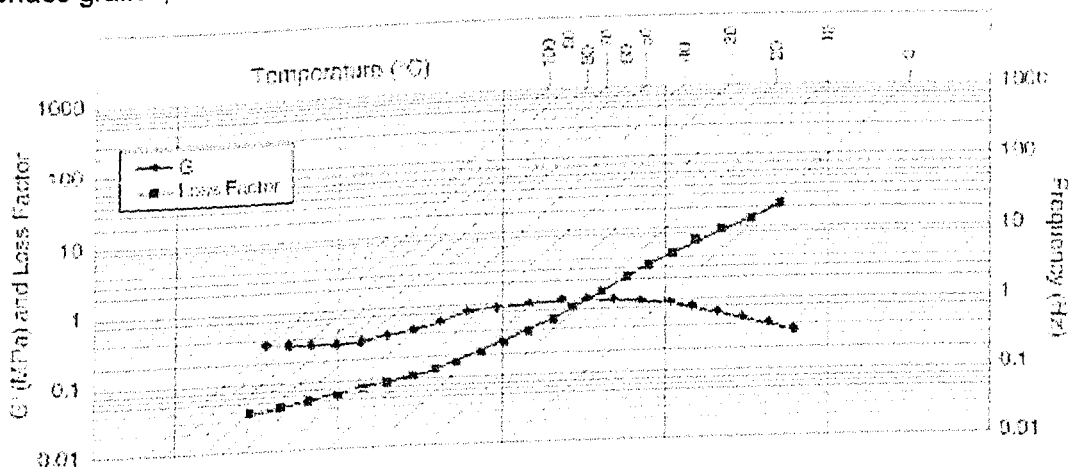


Figura 4.3- Nomograma do material viscoelástico 242F01 (extraído de 3M)

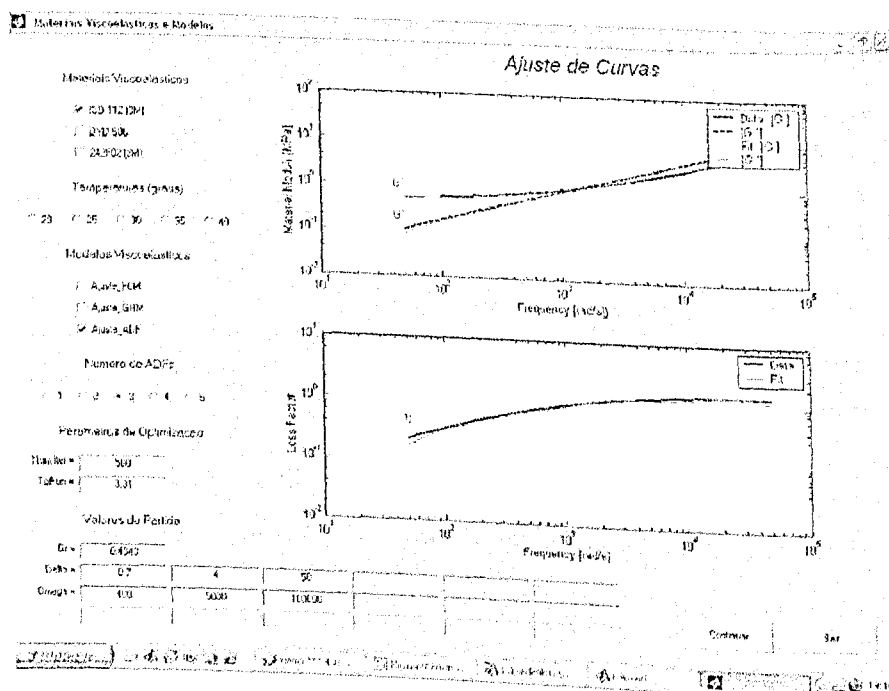


Figura 4.4- Interface do programa de identificação de parâmetros (Lima, 2003)

Os parâmetros identificados foram otimizados para uma temperatura fixada em 24°C , e a qualidade dos ajustes para os modelos GHM, ADF utilizando, respectivamente, 6 mini-osciladores, 6 campos de deslocamentos anelásticos e de Derivadas Fracionárias com 5 parâmetros, é evidenciada nas Figuras 4.5, 4.6 e 4.7:

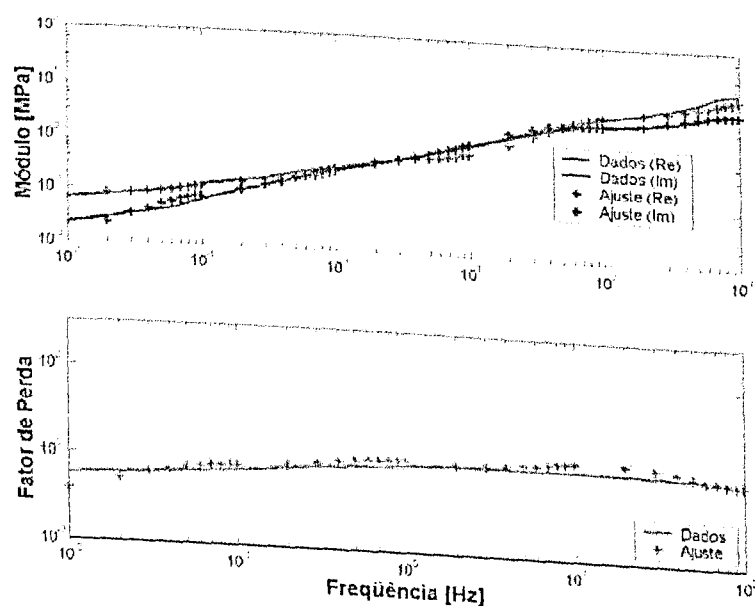


Figura 4.5- Ajuste de curvas para o material 242F01 (GHM) (Lima, 2003)

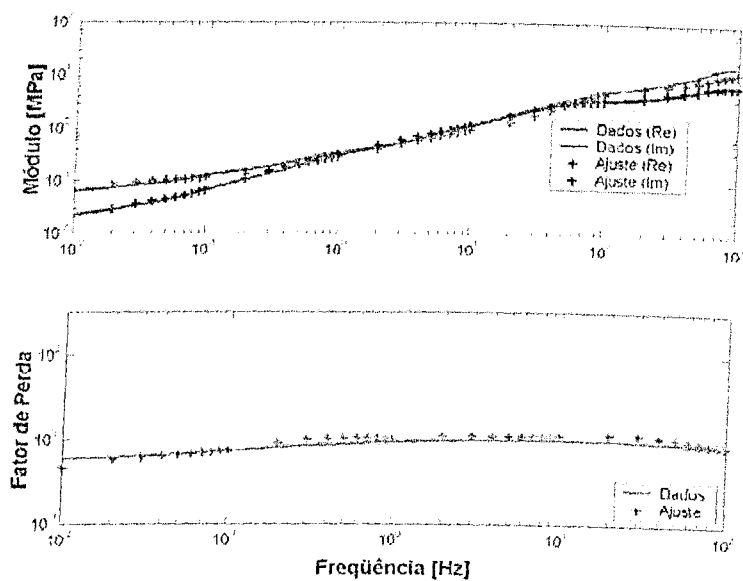


Figura 4.6- Ajuste de curvas para o material 242F01 (ADF) (Lima,2003)

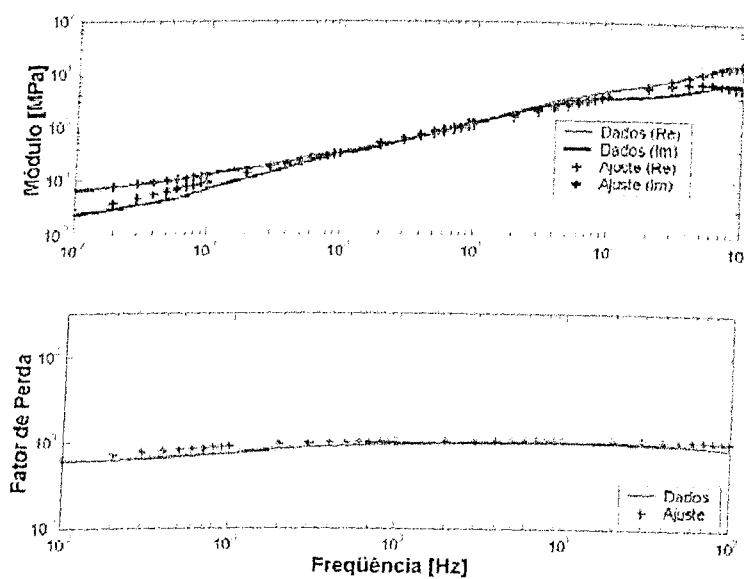


Figura 4.7- Ajuste de curvas para o material 242F01 (Derivadas Fracionárias com 5 parâmetros) (Lima,2003)

Os valores dos parâmetros encontrados para os modelos GHM, ADF e de Derivada Fracionárias com 5 parâmetros são fornecidos nas Tabelas 4.2 e 4.3 a seguir.

Tabela 4.2- Parâmetros otimizados para os modelos GHM e ADF (242F01)

	1	2	3	4	5	6
GHM						
α_i	1,047	5,524	1,589	10,330	59,999	163,130
ξ_i	3911,898	323,891	48,414	30,544	14,627	4,763
ω_i [rad/s]	4943,062	6577,256	56363,554	45473,430	8601,413	57841,215
G_r [MPa]	0,079					
ADF						
Δ_i	0,511	1,075	1,529	8,356	63,137	182,043
Ω_i [rad/s]	0,110	2,367	3,468	24,380	341,632	4549,034
G_r [MPa]	0,069895					

Tabela 4.3- Parâmetros do modelo de Derivadas Fracionárias

G_r [MPa]	G_1 [MPa]	α	b	β
0,157	0,130	0,601	0,002	0,679

4.3 Procedimento Experimental

As FRFs pontuais associadas aos deslocamentos transversais dos nós I e II foram adquiridas através de excitação por impacto, medindo-se a resposta correspondente. Os dados de excitação e resposta foram processados pelo analisador de espectro, que forneceu a FRF pontual computada com uma média de 20 amostras, na banda [0; 500 Hz].

As FRFs foram adquiridas primeiramente para a placa base sem tratamento. Em seguida, o mesmo procedimento foi aplicado às configurações A, B e C da placa contendo tratamento viscoelástico.

4.4 Resultados para a Placa Sanduíche com 3 camadas

As Figuras 4.8 a 4.13 representam as amplitudes das funções de resposta em frequência pontuais associadas aos pontos I e II, calculadas a partir dos modelos de elementos finitos, comparadas às correspondentes FRFs obtidas experimentalmente para as configurações A, B e C da placa sanduíche com 3 camadas.

As Tabelas 4.4 a 4.6 permitem comparar os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modal experimentais e analíticos, para o modelo viscoelástico GHM em cada uma das configurações propostas.

Para estimar os fatores de amortecimento modal através das funções de resposta em frequência experimentais, aplicou-se o método da largura de banda de meia-potência (Nashif et. al., 1985), ao passo que, para obtenção dos parâmetros modais do modelo de elementos finitos foi resolvido o problema de autovalor indicado pela equação (3.88), considerando para

tanto, o modelo viscoelástico GHM.

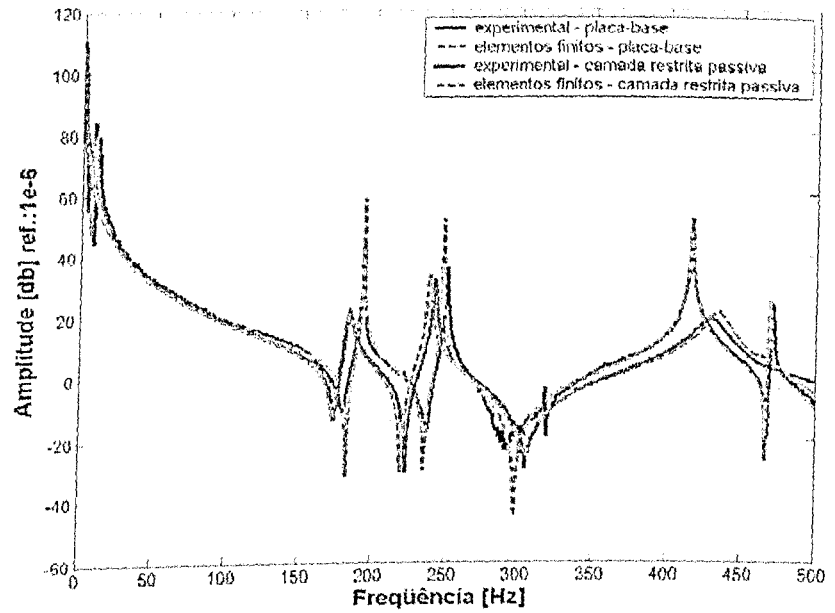


Figura 4.8- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração A (modelo GHM - tratamento assimétrico)

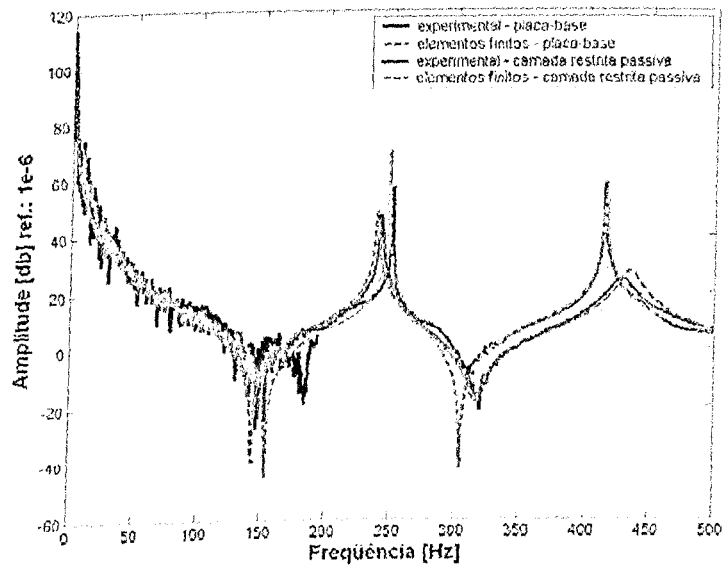


Figura 4.9- Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração A (modelo GHM - tratamento assimétrico)

Tabela 4.4- Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. A

	ω_1 [Hz]	ζ_1 (%)	ω_2 [Hz]	ζ_2 (%)	ω_3 [Hz]	ζ_3 (%)
Experimental	184,38	0,72	242,50	0,19	429,37	1,79
Elementos Finitos	184,37	0,75	238,75	0,18	434,69	1,44
Erro (%)	0,01	4,17	1,57	5,56	1,24	24,31

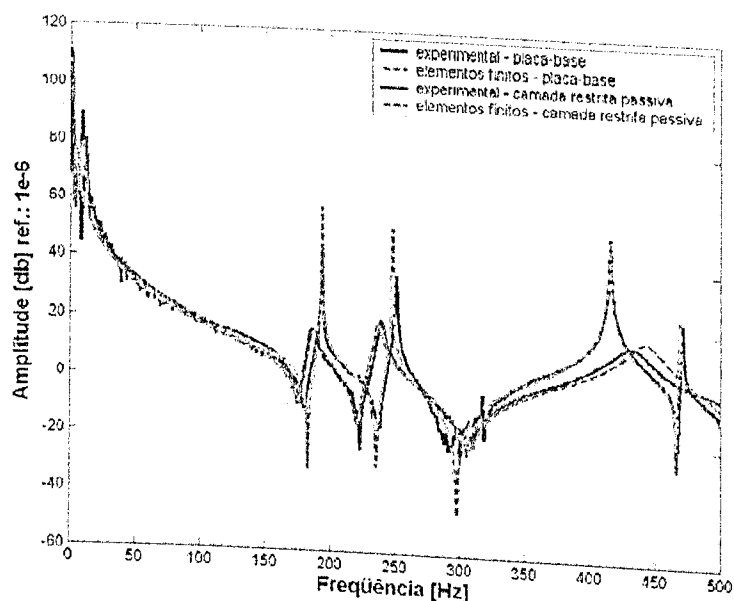
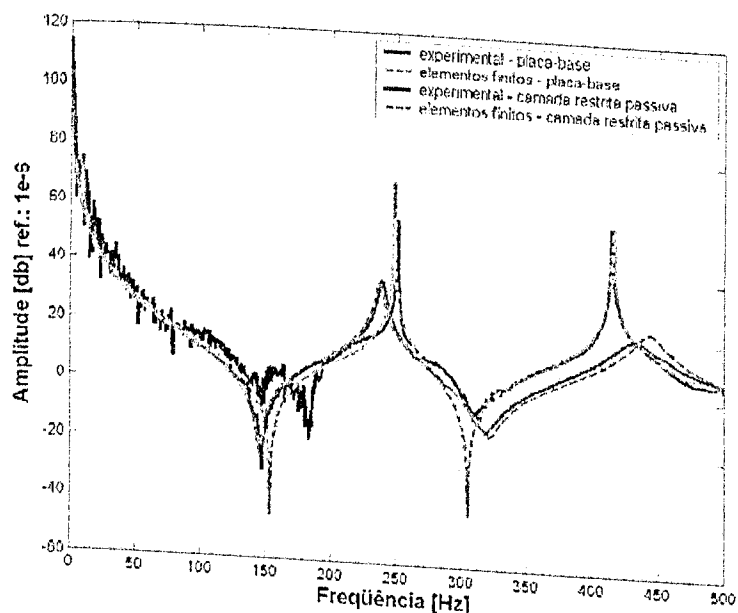
Figura 4.10- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento assimétrico)Figura 4.11- Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento assimétrico)

Tabela 4.5- Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. B

	ω_1 [Hz]	ζ_1 (%)	ω_2 [Hz]	ζ_2 (%)	ω_3 [Hz]	ζ_3 (%)
Experimental	186,25	1,26	239,38	0,73	433,13	2,63
Elementos Finitos	186,88	1,46	236,88	0,86	443,12	2,22
Erro (%)	0,34	15,87	1,06	17,81	2,31	18,47

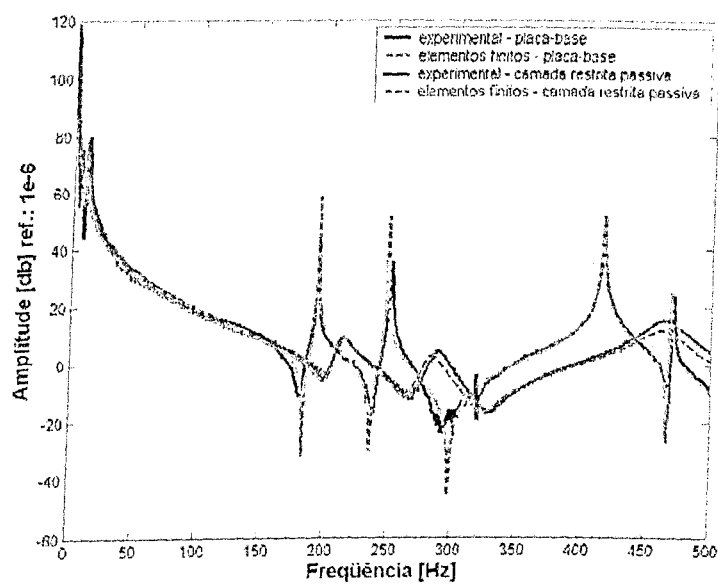
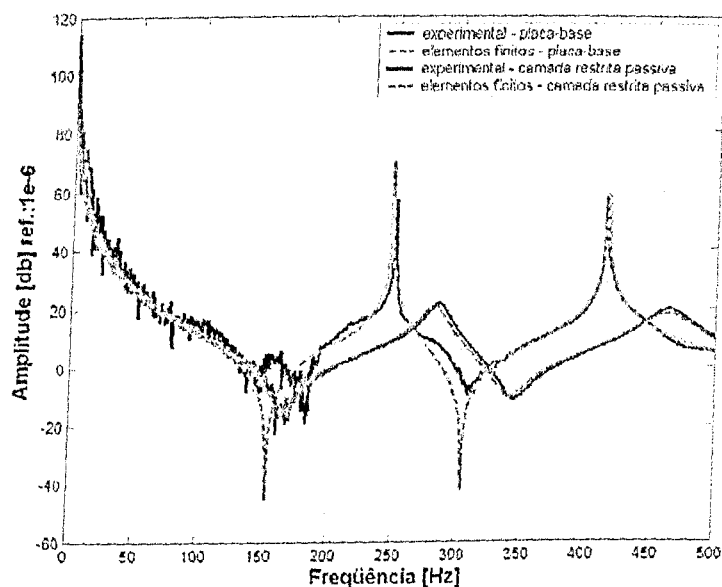
Figura 4.12- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração C (modelo GHM - tratamento assimétrico)Figura 4.13- Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração C (modelo GHM - tratamento assimétrico)

Tabela 4.6- Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. C

	$\omega_1 [Hz]$	$\zeta_1 (\%)$	$\omega_2 [Hz]$	$\zeta_2 (\%)$	$\omega_3 [Hz]$	$\zeta_3 (\%)$
Experimental	213,75	2,52	288,76	1,89	465,63	2,70
Elementos Finitos	214,38	2,72	283,75	2,38	462,50	3,35
Erro (%)	0,29	7,94	1,77	25,93	0,68	24,07

4.5 Resultados para a Placa Sanduíche com 5 Camadas

As Figuras 4.14 a 4.16 representam as amplitudes das funções de resposta em frequência pontuais associadas aos pontos I e II, da placa base e da placa tratada. São apresentadas as FRFs obtidas experimentalmente, confrontadas com as FRFs simuladas pelo modelo de elementos finitos, para as configurações A e B.

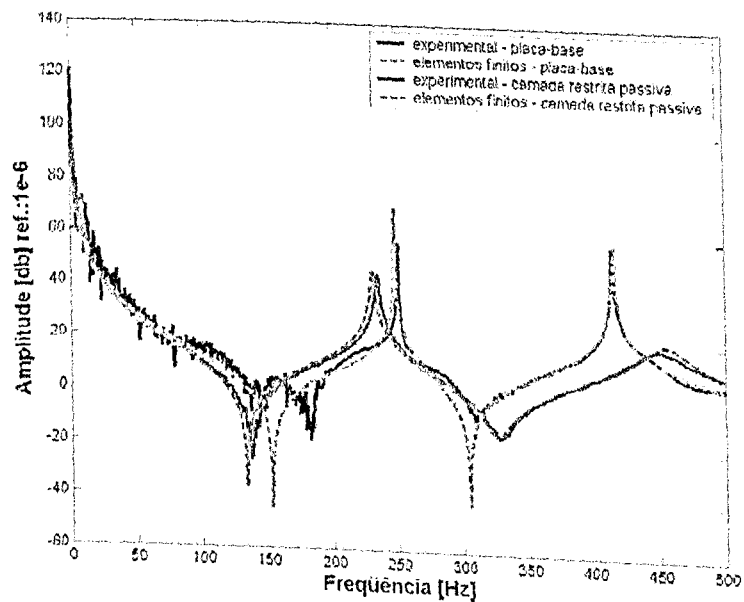


Figura 4.14- Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração A (modelo GHM - tratamento simétrico)

As Tabelas 4.7 e 4.8 exibem os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modal experimentais e analíticos, obtidos da mesma forma descrita para a placa sanduiche de 3 camadas.

Tabela 4.7- Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. A

	ω_1 [Hz]	ζ_1 (%)	ω_2 [Hz]	ζ_2 (%)	ω_3 [Hz]	ζ_3 (%)
Experimental	*	*	235,00	0,34	451,25	3,55
Elementos Finitos	*	*	230,63	0,33	455,00	2,73
Erro (%)	*	*	1,9	3,0	0,8	30,0

Obs.: * dados não disponíveis para o primeiro modo

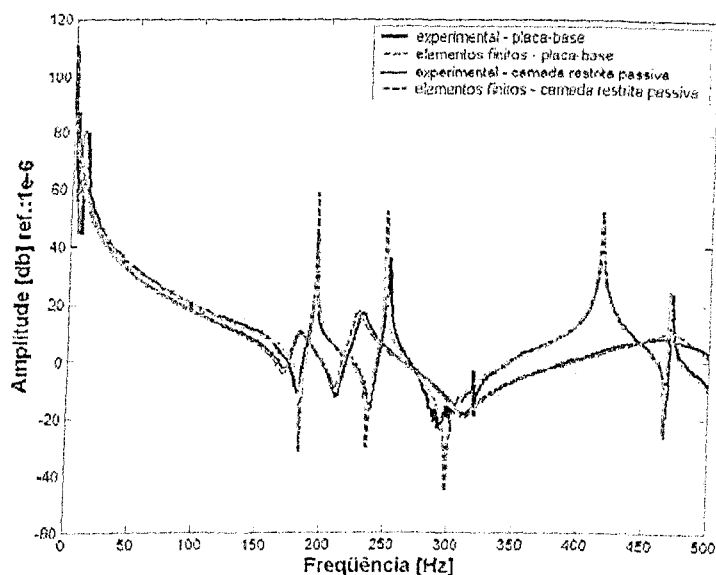


Figura 4.15- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento simétrico)

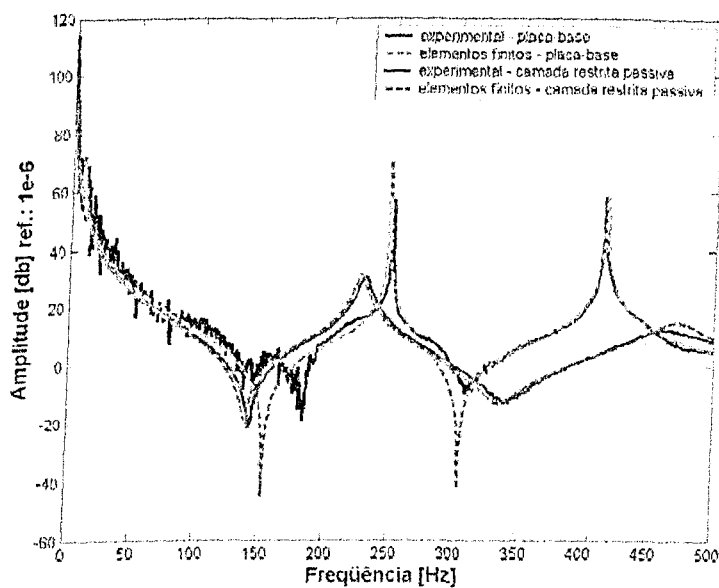


Figura 4.16- Amplitudes das FRFs $H_{II,II}$ analíticas e experimentais, para a configuração B (modelo GHM - tratamento simétrico)

Tabela 4.8- Frequências naturais e fatores de amortecimento modal - Conf. B

	ω_1 [Hz]	ζ_1 (%)	ω_2 [Hz]	ζ_2 (%)	ω_3 [Hz]	ζ_3 (%)
Experimental	181,88	2,73	230,63	1,56	461,14	3,15
Elementos Finitos	181,88	2,72	227,50	1,46	475,69	1,95
Erro (%)	0,0	0,37	1,37	6,85	3,16	61,5

4.6 Discussão dos Resultados

As figuras e tabelas acima permitem observar, para todas as configurações examinadas, a proximidade entre as características dinâmicas extraídas dos dados experimentais e as correspondentes obtidas a partir dos modelos de elementos finitos. Tal fato valida os procedimentos de modelagem analítica implementadas e confirma a adequação das hipóteses admitidas às situações consideradas no estudo.

Os desvios observados, considerados aceitáveis, são atribuídos aos aspectos seguintes.

Em termos do modelo analítico:

- imprecisões introduzidas no processo de coleta dos valores experimentais do módulo de armazenamento e fator de perda do material 242F01, que são fornecidos pelo fabricante através de curvas apresentadas em escala logarítmica;
- erros originados no ajuste de curvas dos dados experimentais coletados para obtenção dos parâmetros dos modelos viscoelásticos utilizados;
- admissão, nos modelos de elementos finitos, de condições ideais de aplicação do tratamento superficial, sendo suposta aderência perfeita entre as camadas, não se levando em conta defeitos como empenamento da placa base e da camada restrigente e a criação de bolhas durante a aplicação do material viscoelástico;
- erros relativos aos valores utilizados para as propriedades físicas e geométricas da placa base, do material viscoelástico e da camada restrigente.

Em termos dos ensaios experimentais:

- erros resultantes das oscilações da temperatura ambiental;
- baixa resolução em frequência adotada na obtenção das FRFs experimentais, influenciando diretamente nos valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modal conforme estimados pelo método da Largura de Banda de Meia-potência;
- aplicação não ideal das condições de contorno no sistema (simulação livre-livre por meio de fios de nylon).

Os resultados revelam que o grau de amortecimento obtido depende da extensão e posicionamento do tratamento superficial aplicado, fato que justifica o emprego dos modelos desenvolvidos como ferramentas de análise e projeto ótimo de sistemas de amortecimento baseados em camada restrita passiva, tópicos que serão abordados nos Capítulos 5 e 6.

Capítulo 5

Estudo Numérico da Influência das Variáveis de Projeto no Desempenho de Camadas Restritas Passivas

O projeto de um sistema de controle de vibrações baseado no uso de camada restrita passiva requer a definição de um conjunto de variáveis de projeto que têm influência direta sobre o grau de amortecimento a ser obtido.

Neste capítulo, com base nos modelos com 3 e 5 camadas desenvolvidos nos capítulos anteriores, é feito um estudo acerca da influência de alguns parâmetros geométricos sobre o desempenho do sistema de controle passivo. Este estudo compreende:

- a) comparação dos desempenhos das camadas restritas passivas e camadas viscoelásticas livres em tratamentos completos;
- b) avaliação da influência da espessura das camadas restritivas em tratamentos completos;
- c) avaliação da influência da espessura das camadas viscoelásticas em tratamentos completos;
- d) avaliação da influência do posicionamento do tratamento superficial no caso de recobrimento parcial.

5.1 Comparação Camada Restrita Passiva versus Camada Viscoelástica Livre

O grau de atenuação de amplitudes de vibração proporcionado por tratamentos viscoelásticos está relacionado ao nível de deformação (especialmente de cisalhamento), experimentado pelo material viscoelástico durante o movimento vibratório da estrutura. Como resultado, observa-se que a simples deposição da camada viscoelástica sobre uma superfície resulta em baixas taxas de amortecimento, as quais podem ser significativamente aumentadas pela adição da(s) camada(s) restritivas, que têm, por efeito, aumentar a deformação de cisalhamento no núcleo viscoelástico.

Nesta seção apresentam-se os resultados de simulações numéricas realizadas com o objetivo de evidenciar esta característica e quantificar o aumento de amortecimento

proporcionado pela inclusão da(s) camada(s) restrigente(s) no caso particular de placas com tratamento simétrico (5 camadas) e assimétrico (3 camadas).

Neste capítulo, os cálculos foram efetuados considerando uma placa de alumínio de dimensões $0,2m$ por $0,25m$, com condições de contorno livre, à qual foi aplicada tratamento viscoelástico superficial completo (configuração C), onde as coordenadas utilizadas para obtenção das FRFs pontuais são os deslocamentos transversais no ponto I, indicado na Fig. 5.2. Tanto a placa base quanto a(s) camada(s) restrigente(s) externa(s) são de alumínio. Para a camada viscoelástica foi utilizado o material 242F01 fabricado pela 3M[®], à temperatura de $24^{\circ}C$.

Os procedimentos de modelagem e os valores das propriedades físicas e geométricas da placa base e das camadas restrigente e viscoelástica são os mesmos utilizados no Capítulo 4 (fornecido na Tab. 4.1).

Na Fig. 5.1 observam-se as amplitudes das funções de resposta em frequência pontuais correspondentes ao deslocamento transversal do ponto I da placa em três condições: sem tratamento; com tratamento assimétrico e camada viscoelástica livre; e com tratamento assimétrico e camada viscoelástica restrita. Nas simulações seguintes foi utilizado o modelo GHM para caracterização do efeito viscoelástico. Na Fig. 5.2 tem-se as funções de resposta em frequência correspondentes para a placa com tratamento simétrico.

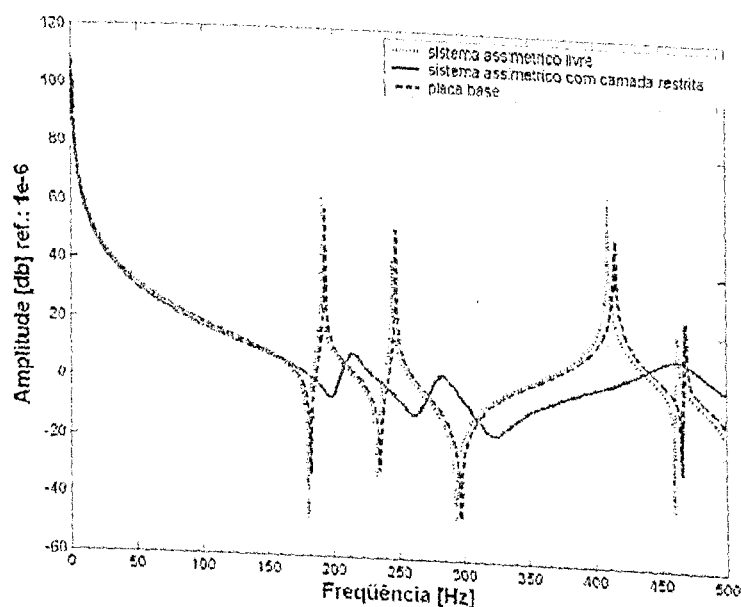


Figura 5.1- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ para tratamento assimétrico livre e com camada restrigente (GHM) e sem tratamento

As Tabelas 5.1 e 5.2 fornecem os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento para ambas as situações. Pelos resultados obtidos, nota-se claramente a baixa capacidade de amortecimento do tratamento viscoelástico livre (sem as camadas restritivas) e que, efetivamente, a inclusão das camadas restritivas promovem expressivo aumento nas taxas de amortecimento.

	MODO 1		MODO 2		MODO 3	
	ω_1 [Hz]	ζ_1 (%)	ω_2 [Hz]	ζ_2 (%)	ω_3 [Hz]	ζ_3 (%)
camada viscoelástica restrita	213,90	1,94	282,95	1,06	467,75	3,82
camada viscoelástica livre	191,28	0,00	244,91	0,01	410,64	0,00

	MODO 1		MODO 2		MODO 3	
	$\omega_1 [Hz]$	$\zeta_1 (\%)$	$\omega_2 [Hz]$	$\zeta_2 (\%)$	$\omega_3 [Hz]$	$\zeta_3 (\%)$
camada viscoelástica restrita	239,27	2,79	328,04	1,62	*	*
camada viscoelástica livre	188,88	0,00	242,61	0,00	409,35	0,00

Obs.: * valores fora da banda de interesse

Consideram-se as propriedades de cada uma das camadas como mostra a tabela abaixo:

	largura [m]	comprimento [m]	espessura [m]	densidade [Kg/m ³]	volume [m ³]	massa [Kg]
placa base	20×10^{-2}	25×10^{-2}	3×10^{-3}	2750	1.5×10^{-4}	0,4125
núcleo viscoelástico	20×10^{-2}	25×10^{-2}	20×10^{-5}	1099.5	1×10^{-5}	0,0110
camada restringente	20×10^{-2}	25×10^{-2}	0.5×10^{-3}	2750	2.5×10^{-5}	0,0688

De forma análoga, o tratamento simétrico com camada restrita proporciona um acréscimo de 0,1596Kg, ou seja, 38,691% na massa da placa base, enquanto o tratamento simétrico livre aumenta a massa do sistema em 0,0220Kg, equivalente a 5,334% da massa da placa base.

Na Fig. 5.3, observam-se as amplitudes das funções de resposta em frequência pontuais correspondentes ao deslocamento transversal do ponto I da placa base sem tratamento, e com os tratamentos assimétrico e simétrico com camada viscoelástica restrita. A Tabela 5.4 indica os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento para as três situações.

	MODO 1		MODO 2		MODO 3	
	$\omega_1 [Hz]$	$\zeta_1 (\%)$	$\omega_2 [Hz]$	$\zeta_2 (\%)$	$\omega_3 [Hz]$	$\zeta_3 (\%)$
placa base	193,75	-	248,28	-	416,32	-
tratamento assimétrico	213,90	1,94	282,95	1,06	467,75	3,82
tratamento simétrico	239,27	2,79	328,04	1,62	*	*

Obs.: * valores fora da banda de interesse

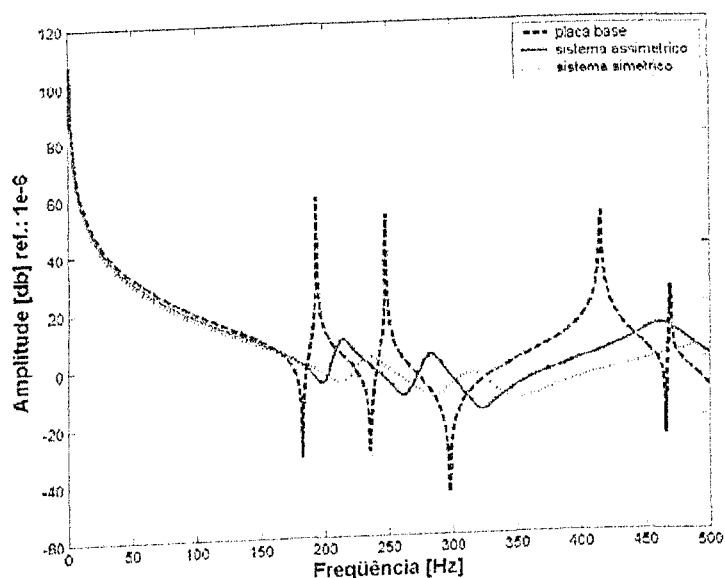


Figura 5.3- Amplitudes das FRFs da placa base e tratamentos assimétrico e simétrico (GHM) para a conf. C

As amplitudes das funções de resposta em frequência pontuais correspondentes ao deslocamento transversal do ponto I da placa base sem tratamento, e com os tratamentos assimétrico e simétrico com camada viscoelástica livre, podem ser observadas na Fig 5.4. A Tabela 5.5 apresenta os valores das frequências naturais e dos fatores de amortecimento para estas situações.

Tabela 5.5- Frequências naturais e fatores de amortecimento modais da placa base e da placa completamente tratada com as camadas viscoelásticas livres assimétrica e simétrica

	MODO 1		MODO 2		MODO 3	
	ω_1 [Hz]	ζ_1 (%)	ω_2 [Hz]	ζ_2 (%)	ω_3 [Hz]	ζ_3 (%)
placa base	193,75	-	248,28	-	416,32	-
tratamento assimétrico camada viscoelástica livre	191,28	0,00	244,91	0,01	410,64	0,00
tratamento simétrico camada viscoelástica livre	188,88	0,00	242,61	0,00	409,35	0,00

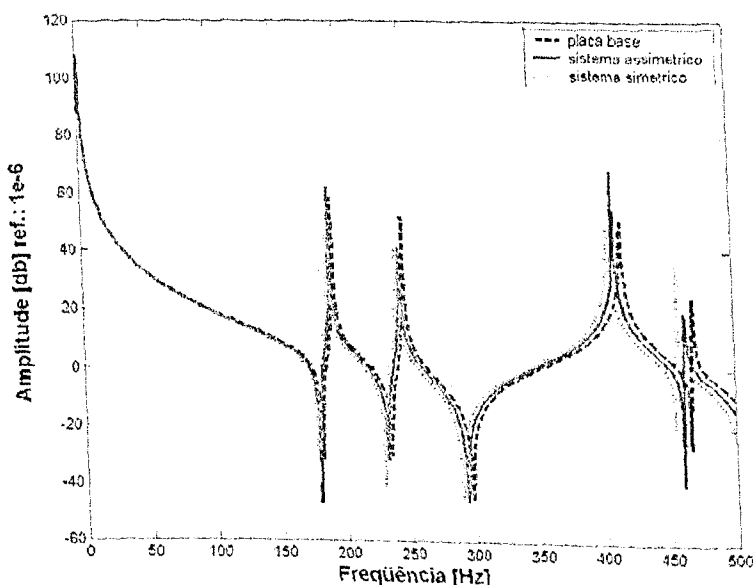


Figura 5.4- Amplitudes das FRFs da placa base e tratamentos assimétrico e simétrico (GHM) para a conf. C com camada viscoelástica livre

Conforme observado nas figuras e tabelas acima, nota-se claramente uma melhor capacidade de amortecimento do tratamento simétrico em relação ao tratamento assimétrico. Entretanto, apesar desta vantagem, o tratamento simétrico acarreta um acréscimo muito maior na massa total do sistema, conforme observado nas considerações comentadas acima. Além disso, é inexpressivo o amortecimento obtido com camada viscoelástica livre, tanto para o tratamento assimétrico, quanto para o simétrico.

5.2 Influência da Espessura da Camada Restringente

Visando caracterizar a influência da espessura da camada restringente no desempenho do sistema de amortecimento passivo, toma-se por referência a configuração utilizada nos ensaios experimentais realizados anteriormente, cujas características físicas e geométricas são dadas na Tab. 4.1, fazendo a espessura das camadas restringentes variar, mantendo-se constantes os demais parâmetros. A configuração adotada aqui é o tratamento completo da placa. Nas simulações, foi utilizado o modelo GHM para caracterização do comportamento viscoelástico.

Adimensionalizando os parâmetros, denota-se a espessura de referência da camada restringente por h_r , e a proposta é analisar a resposta da estrutura sob a variação de h . A espessura da placa base é denotada por h_b , sendo $h_b = 6h_r$.

A variação das frequências naturais e fatores de amortecimento modais para os dois

modelos, em função da espessura das camadas restritivas, é apresentada nas Tabelas 5.6 e 5.7 abaixo.

Tabela 5.6- Influência da espessura da camada restritiva para o modelo assimétrico

		$h/4$	$h/2$	h	$2h$	$4h$	$h_b = 6h$
modo 1	$\omega_1 [Hz]$	199,49	205,01	213,90	225,71	253,86	291,20
	$\zeta_1 (\%)$	0,52	1,22	1,94	5,07	8,05	9,09
modo 2	$\omega_2 [Hz]$	257,65	267,58	282,95	306,10	350,30	404,02
	$\zeta_2 (\%)$	0,34	1,01	1,06	5,37	8,68	9,94
modo 3	$\omega_3 [Hz]$	430,78	444,76	467,75	489,90	*	*
	$\zeta_3 (\%)$	0,51	1,43	3,82	6,63	*	*
Obs.: * valores fora da banda de interesse							

Tabela 5.7- Influência da espessura da camada restritiva para o modelo simétrico

		$h/4$	$h/2$	h	$2h$	$4h$	$h_b = 6h$
modo 1	$\omega_1 [Hz]$	205,17	216,18	239,27	256,98	301,47	351,27
	$\zeta_1 (\%)$	0,97	2,23	2,79	8,62	14,37	14,93
modo 2	$\omega_2 [Hz]$	266,90	286,23	328,04	357,50	413,51	*
	$\zeta_2 (\%)$	0,65	1,84	3,91	9,06	14,40	*
modo 3	$\omega_3 [Hz]$	445,20	472,58	*	*	*	*
	$\zeta_3 (\%)$	0,96	2,58	*	*	*	*
Obs.: * valores fora da banda de interesse							

As amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$, para cada uma das espessuras consideradas, podem ser vistas nas Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente, para os modelos assimétrico e simétrico. Uma comparação gráfica da influência da espessura da camada restritiva nas frequências naturais e fatores de amortecimento dos dois primeiros modos é apresentada nas Figuras 5.7 a 5.10.

Das análises realizadas aqui, pode-se observar que tanto os valores das frequências naturais, quanto os respectivos fatores de amortecimento modais referentes aos modos de vibração dentro da banda de interesse $[0 - 500 Hz]$, aumentam monotonicamente com o aumento da espessura da camada restritiva. O limite observado para a espessura da camada restritiva foi de $6h$, que corresponde à espessura da placa base. É conveniente notar que, apesar de proporcionar alta taxa de amortecimento, o uso de uma camada restritiva espessa aumenta consideravelmente o peso da estrutura.

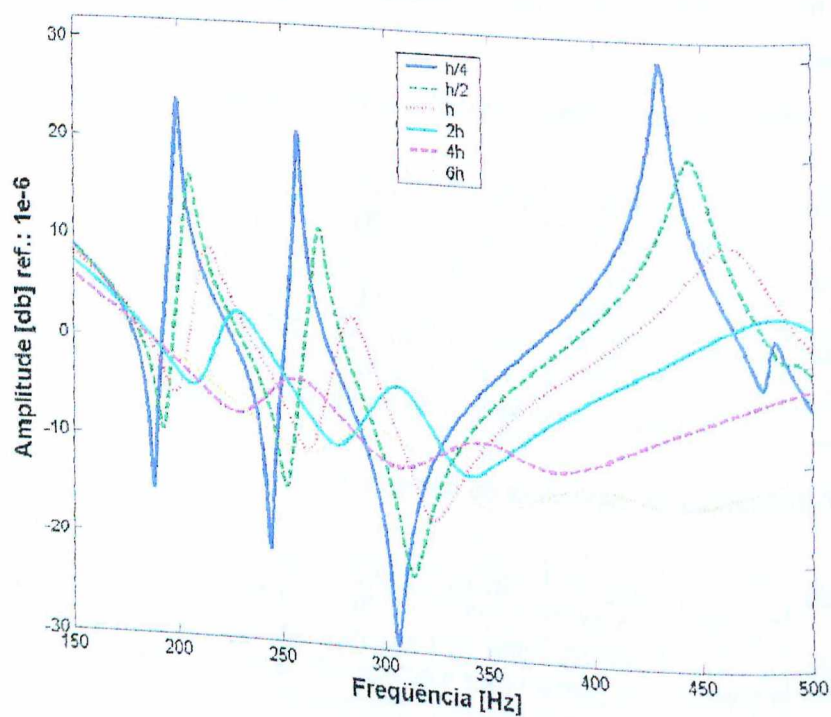


Figura 5.5- Influência da espessura da camada restrigente na FRF ($H_{1,1}$) do tratamento assimétrico

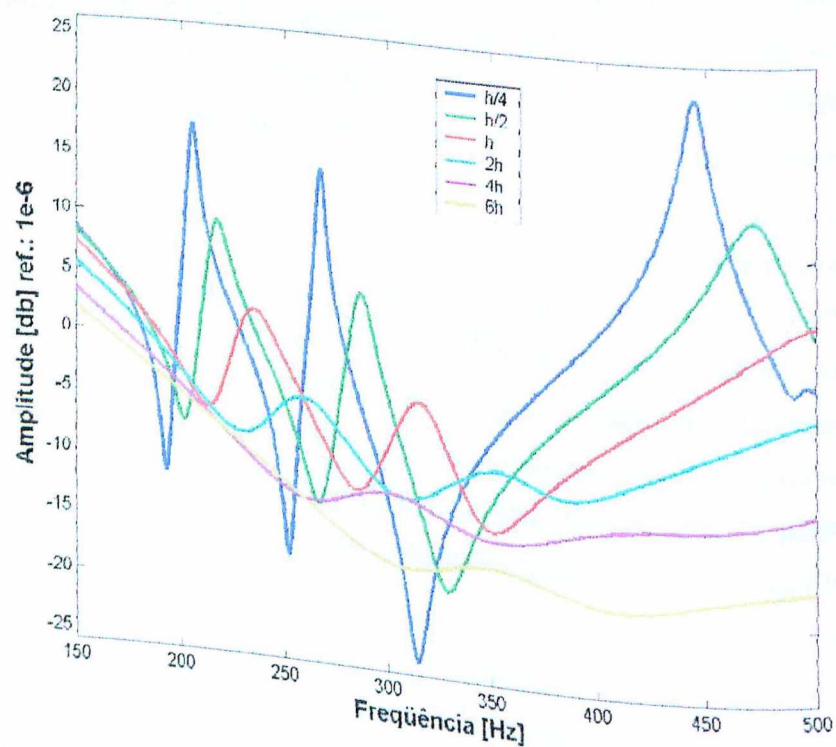


Figura 5.6- Influência da espessura da camada restrigente na FRF ($H_{1,1}$) do tratamento simétrico

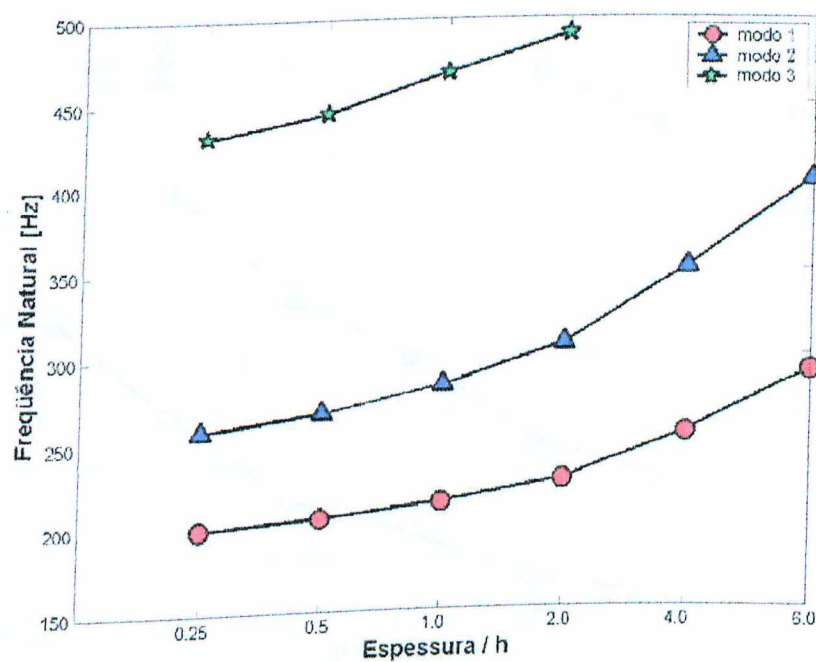


Figura 5.7- Influência da espessura da camada restringente sobre as frequências naturais (tratamento assimétrico)

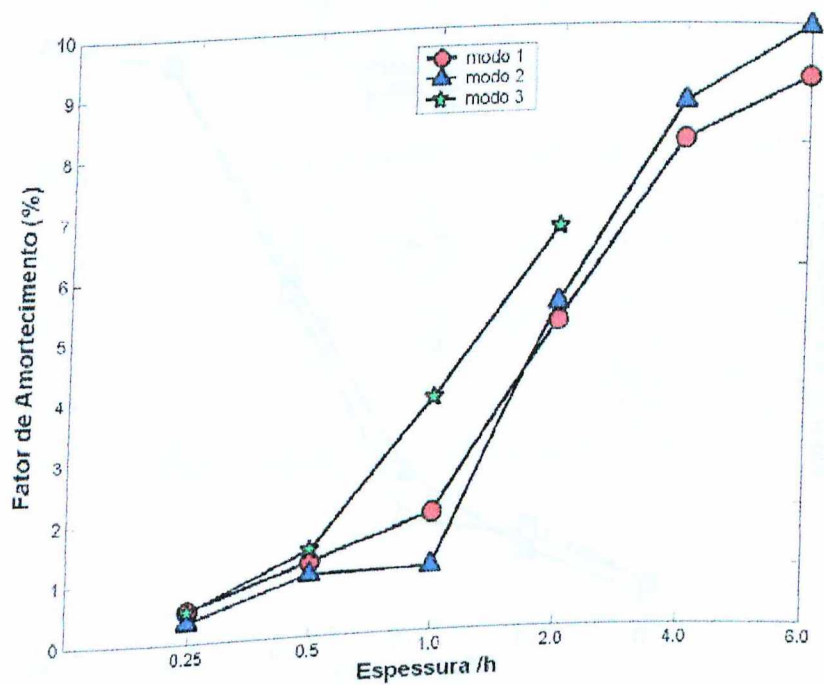


Figura 5.8- Influência da espessura da camada restringente sobre os fatores de amortecimento (tratamento assimétrico)

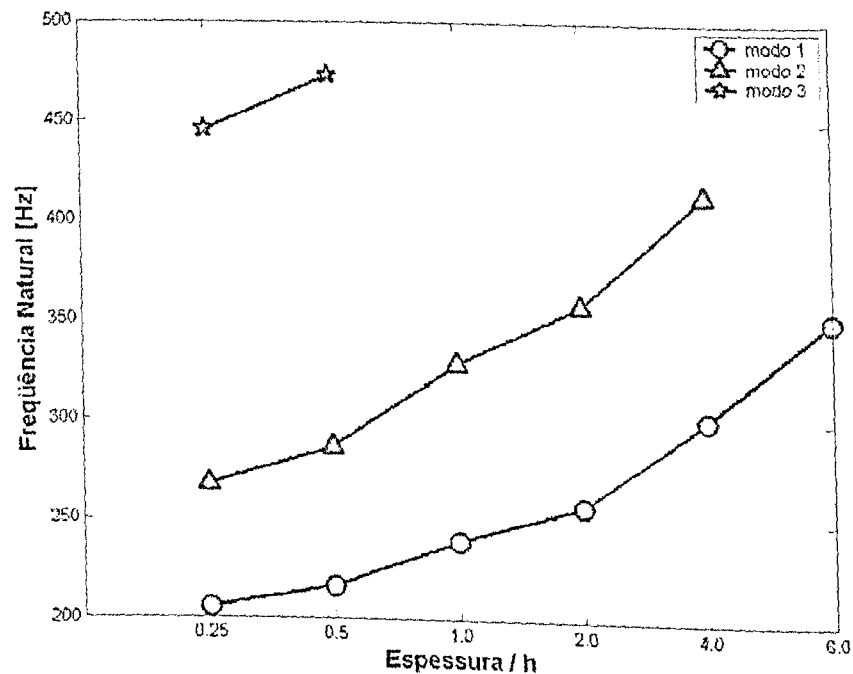


Figura 5.9- Influência da espessura da camada restringente sobre as frequências naturais (tratamento simétrico)

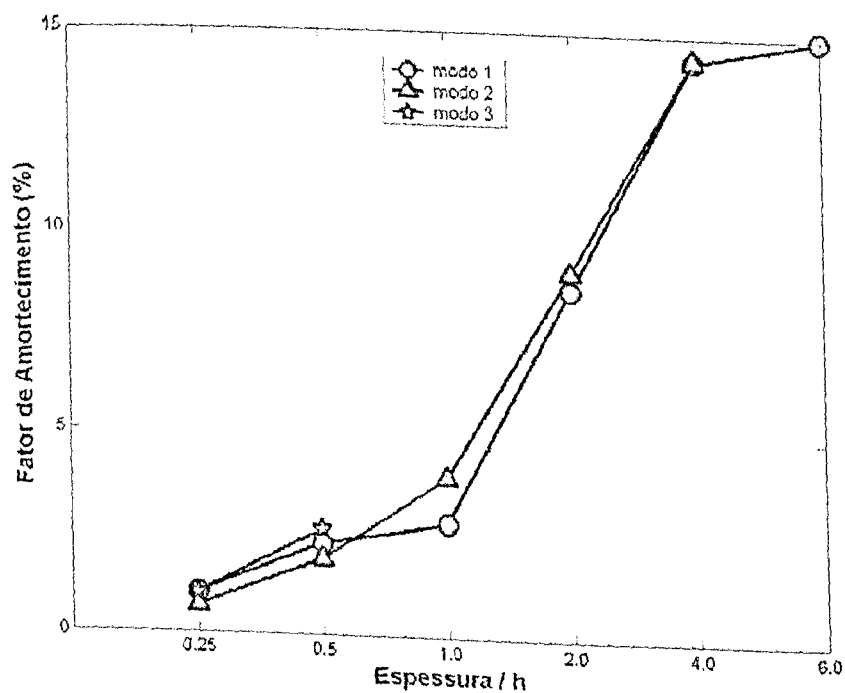


Figura 5.10- Influência da espessura da camada restringente sobre os fatores de amortecimento (tratamento simétrico)

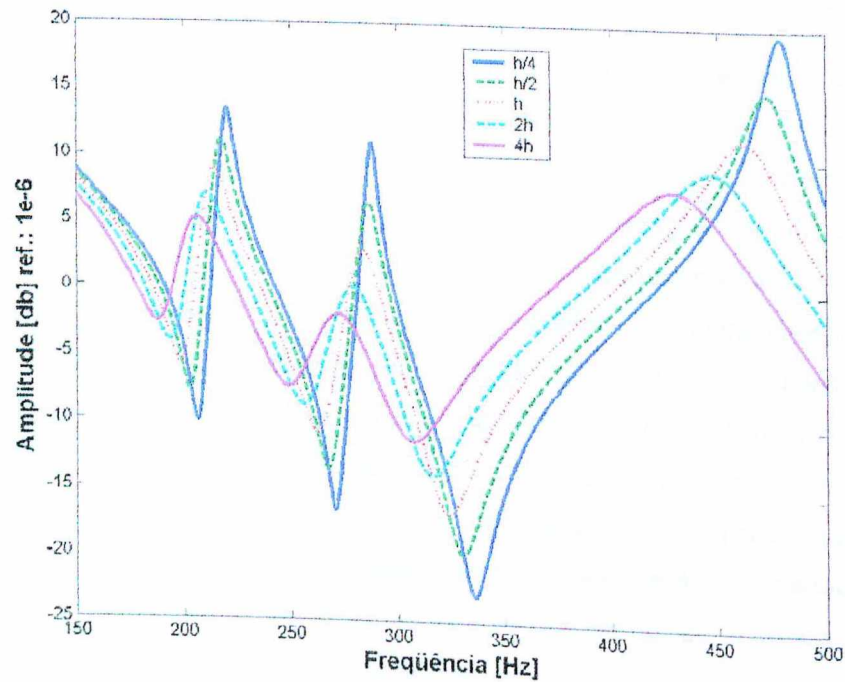


Figura 5.11- Influência da espessura da camada viscoelástica na FRF ($H_{I,I}$) tratamento assimétrico

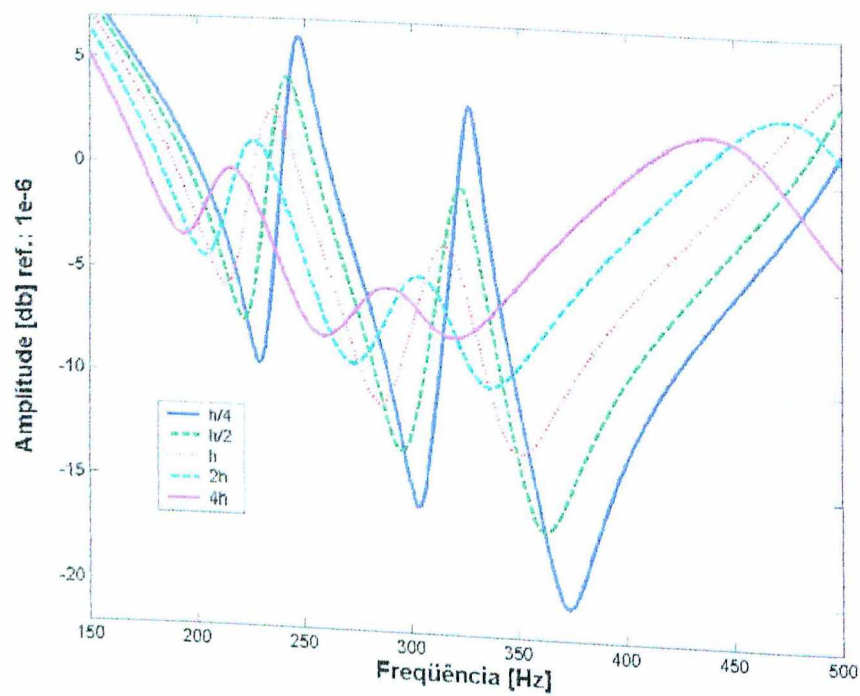


Figura 5.12- Influência da espessura da camada viscoelástica na FRF ($H_{I,I}$) do modelo simétrico

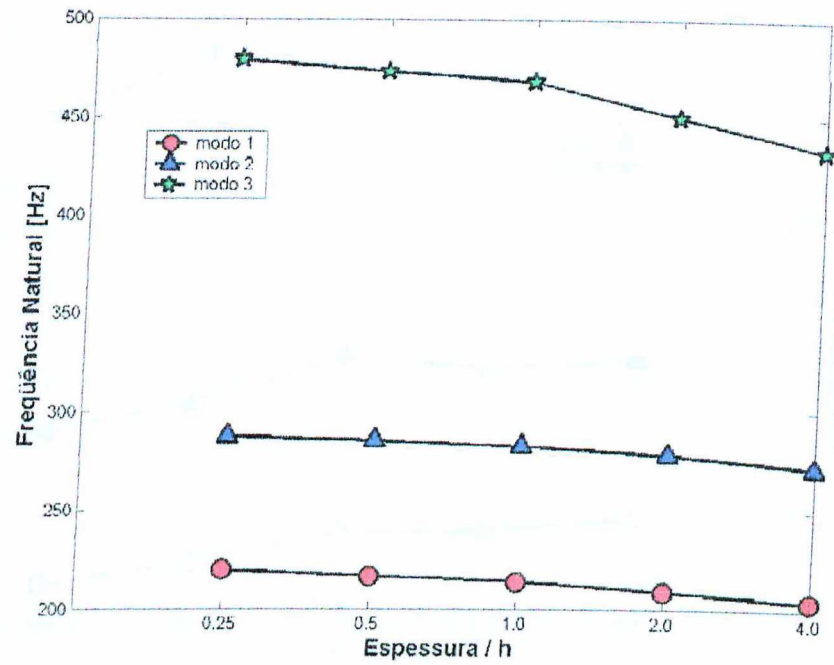


Figura 5.13- Influência da espessura da camada viscoelástica sobre as frequências naturais (tratamento assimétrico)

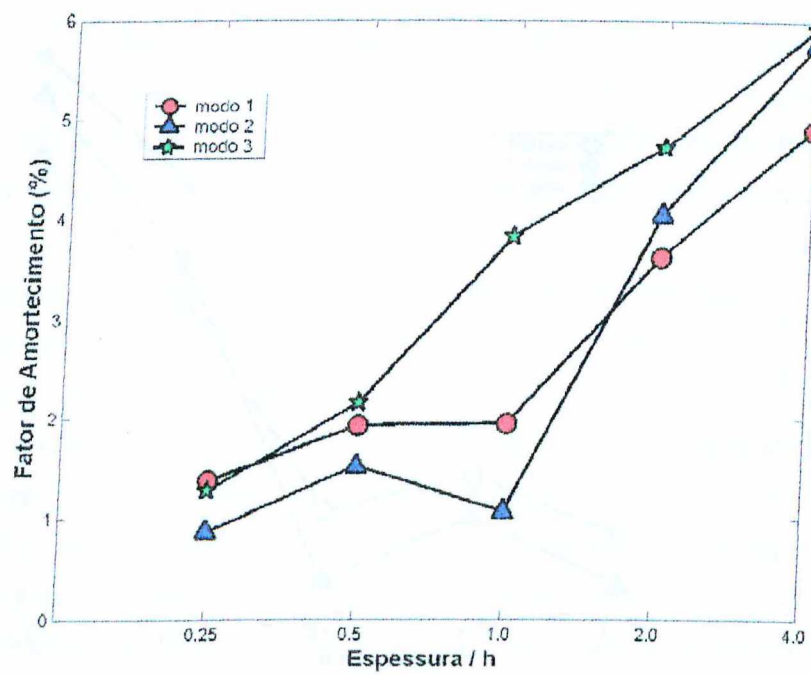


Figura 5.14- Influência da espessura da camada viscoelástica sobre os fatores de amortecimento (tratamento assimétrico)

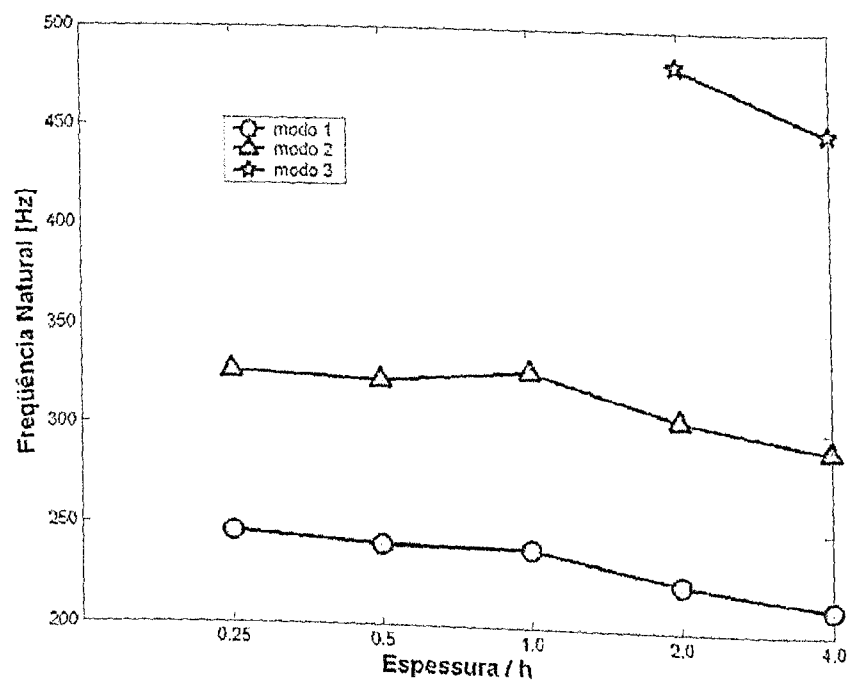


Figura 5.15- Influência da espessura da camada viscoelástica sobre as frequências naturais (tratamento simétrico)

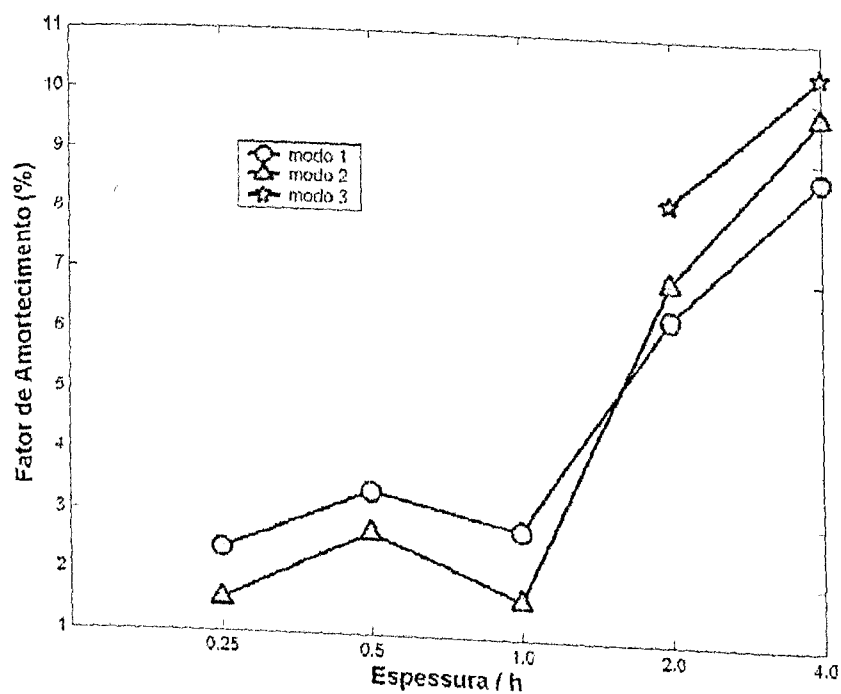


Figura 5.16- Influência da espessura da camada viscoelástica sobre os fatores de amortecimento (tratamento simétrico)

Observa-se que, contrariamente à variação da espessura da camada restringente, o aumento da espessura da camada viscoelástica, de modo geral, causa uma diminuição no valor das frequências naturais dos modos de vibração, uma vez que o acréscimo na espessura da camada viscoelástica altera apenas a massa da estrutura e não a rigidez. Contudo, o aumento da espessura da camada viscoelástica continua ocasionando aumento dos fatores de amortecimento modais, tornando o tratamento mais eficiente. Há que se observar, contudo, que um aumento excessivo da espessura da camada viscoelástica pode conduzir a uma situação que viola a hipótese admitida na teoria subjacente à formulação dos modelos de elementos finitos empregados na simulação. Esta diz respeito à não consideração das deformações normais na direção transversal. Com efeito, tais deformações tendem a tornar-se mais relevantes à medida em que aumenta a espessura desta camada.

5.4 Influência do Posicionamento do Tratamento Superficial

Outra análise importante, que deve ser considerada no projeto do tratamento por camada restrita passiva, diz respeito ao posicionamento do tratamento, no caso de tratamento parcial.

Nesta seção, é verificada a variação das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modais, em função da alteração do posicionamento dos elementos tratados por camada restrita passiva na discretização por elementos finitos. A estrutura considerada nesta seção, continua sendo a placa utilizada nas avaliações experimentais com as respectivas propriedades físicas e geométricas dos materiais componentes de cada camada da placa multicamadas (ver Tab. 4.1), a malha considerada é aquela de 8 por 10 elementos, respectivamente nas direções x e y .

A idéia é tratar uma banda compreendendo duas faixas de elementos na direção x , num total de 16 elementos, e variar a colocação desta banda ao longo da direção y . O modelo GHM foi utilizado para caracterizar o efeito viscoelástico.

Foram escolhidas arbitrariamente, três configurações para o posicionamento desta banda, identificadas por i, ii e iii, conforme pode ser visto na Fig. 5.17.

Os posicionamentos propostos na Fig. 5.17 foram aplicados a modelos assimétrico e simétrico e análises das funções de resposta em frequência foram efetuadas. As Figuras 5.18 e 5.19 mostram as amplitudes das FRFs $H_{I,I}$, para cada uma das configurações de posicionamento consideradas aqui, para os modelos assimétrico e simétrico, respectivamente.

A variação das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modais em função do posicionamento do tratamento é observada na Tab. 5.10, para os modelos assimétrico e simétrico.

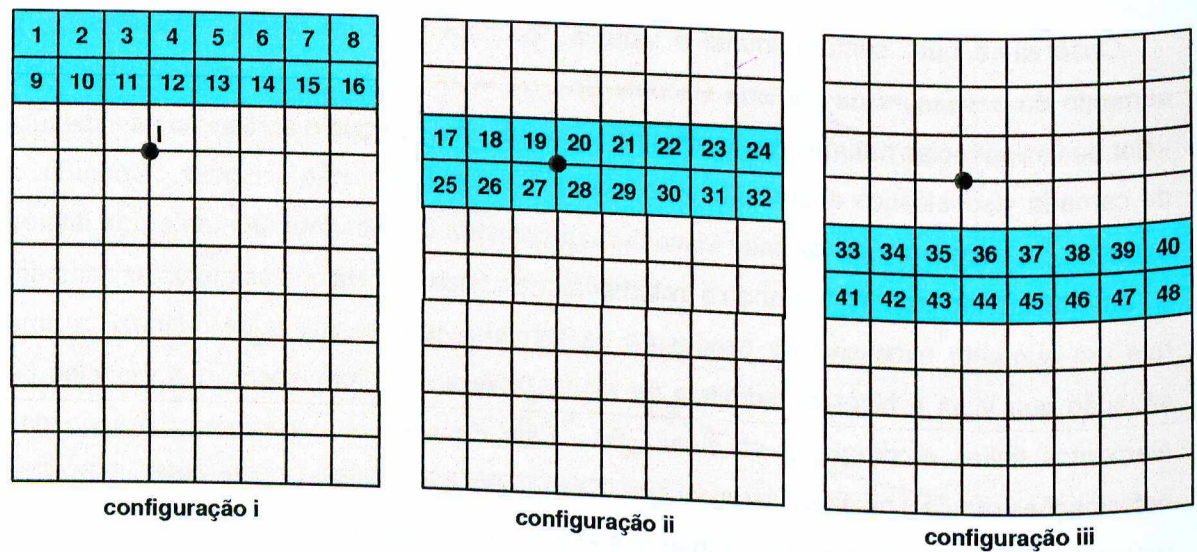


Figura 5.17- Configurações referentes às várias posições de tratamento superficial

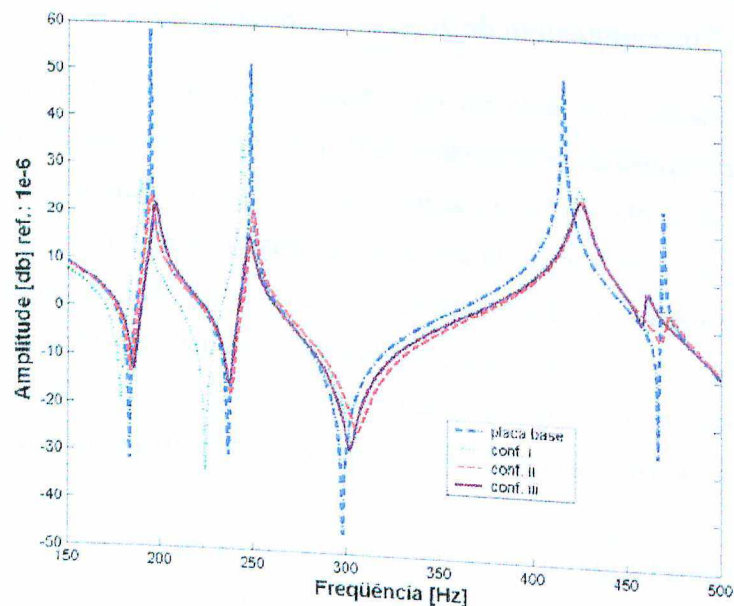


Figura 5.18- Amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ para as configurações i, ii e iii (tratamento assimétrico - GHM)

Embora as posições e extensão do tratamento superficial aqui considerado tenham sido escolhidas arbitrariamente, nota-se que, tanto para o modelo de 3 camadas quanto para o de 5 camadas, à medida que a banda tratada se desloca para a linha média central da placa os fatores de amortecimento têm seus valores aumentados. A análise realizada mostra que para estas configurações particulares, considerando-se a faixa com 16 elementos tratados, a que mostra maior nível de amortecimento é a configuração iii. Isto serve para evidenciar a importância da busca pelo projeto ótimo da estrutura no tocante ao posicionamento do

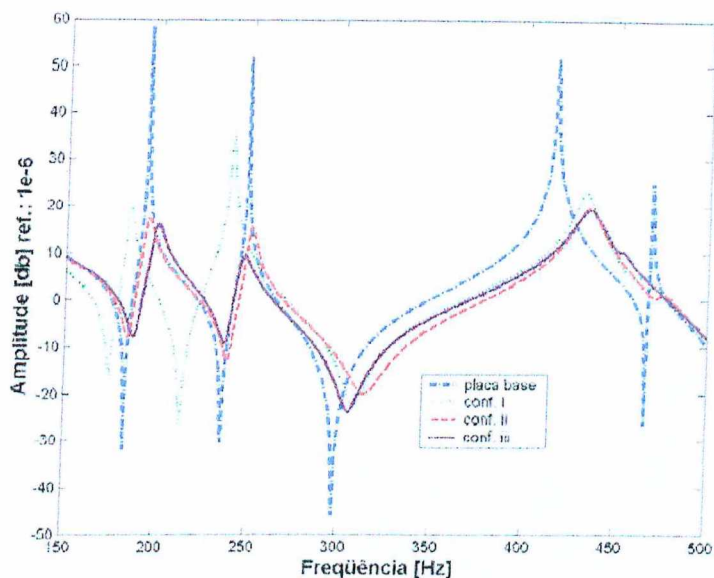


Figura 5.19- Amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,1}$ para as configurações i, ii e iii (tratamento simétrico - GHM)

Tabela 5.10- Frequências naturais e fatores de amortecimento modais para as configurações i, ii e iii

	modelo assimétrico			modelo simétrico		
	i	ii	iii	i	ii	iii
ω_1 [Hz]	188,86	194,08	196,65	184,85	194,49	199,56
ζ_1 (%)	0,37	0,58	0,72	0,72	1,12	1,43
ω_2 [Hz]	243,52	249,49	247,15	239,79	250,66	246,40
ζ_2 (%)	0,11	0,41	0,72	0,17	0,75	1,34
ω_3 [Hz]	424,84	425,59	425,38	433,11	435,20	435,46
ζ_3 (%)	0,63	0,75	0,82	1,03	1,39	1,60

tratamento superficial, levando-se em conta a banda frequencial de interesse.

Sob essas considerações, a proposta agora é examinar, no próximo capítulo, a aplicação de técnicas de otimização objetivando uma maior eficiência do projeto de tratamento por camada restrita passiva.

Capítulo 6

Posicionamento Ótimo do Tratamento com Camada Restrita Passiva

Evidenciou-se, no capítulo anterior, a influência das variações de parâmetros geométricos (espessuras das camadas viscoelásticas e restridentes) e do posicionamento dos tratamentos superficiais simétrico e assimétrico sobre o desempenho do sistema de amortecimento por camada restrita passiva. Acerca das possibilidades de um procedimento completo de otimização, uma das alternativas é a otimização discreto-contínua, viabilizando, simultaneamente, a obtenção dos parâmetros geométricos ótimos, via otimização contínua e do posicionamento ótimo dos tratamentos, por otimização discreta.

Diante das evidências apresentadas aqui, acerca da influência das possíveis variáveis de projeto a serem consideradas (espessuras das camadas viscoelásticas e restridentes e posicionamento do tratamento), a estratégia de otimização poderia ser conduzida inicialmente de duas maneiras: otimização discreta ou otimização contínua, e posteriormente, a otimização discreto-contínua.

Em virtude da possibilidade de comparação com os resultados experimentais do Capítulo 4, este capítulo trata do projeto ótimo do posicionamento dos elementos tratados com camada restrita passiva, visando obter a maior eficiência do amortecimento realizado pelos tratamentos assimétrico e simétrico.

A estratégia adotada para o procedimento de otimização discreta é considerar cada elemento finito da discretização dos modelos simétrico e assimétrico como candidato a receber um elemento tratado na placa. Nestas condições, a técnica de otimização por Algoritmos Genéticos se apresenta como sendo bastante conveniente, uma vez que deve-se evitar mínimos locais da função objetivo na busca pelo ótimo, além de facilitar a construção dos indivíduos que irão compor a população inicial necessária para inicialização do algoritmo.

Uma vez discretizada a malha da placa, cada indivíduo da população será constituído de um vetor de "zeros" e "uns", de comprimento igual ao número total de elementos na malha, onde o dígito "1" é associado a um elemento tratado e o dígito "0" é associado a um elemento não tratado.

Observa-se que, dentre as configurações propostas no capítulo 4, observa-se que, tanto para o modelo assimétrico quanto para o modelo simétrico, a que exibe amortecimento mais

efetivo é a que representa o tratamento superficial completo. Entretanto, convém lembrar que, nesta situação, o sistema sofre um acréscimo equivalente a 19,345% e 38,691%, na massa da placa base, respectivamente, para os tratamentos assimétrico e simétrico com camada restrita.

Com o intuito de encontrar um posicionamento ótimo sem um acréscimo tão considerável na massa do sistema, propõe-se limitar a 30 o número de elementos tratados, contribuindo com um máximo de 7,254% e 14,509% de acréscimo na massa da placa, respectivamente, para os tratamentos assimétrico e simétrico. Convenciona-se efetuar a numeração para os elementos da malha da placa, de cima para baixo e da direita para a esquerda. A análise é realizada por meio de funções de resposta em frequência, dentro de faixas de frequência pré-determinadas contendo os modos de interesse dentro da banda $[0 - 500\text{Hz}]$.

Uma primeira dificuldade na utilização da otimização por Algoritmos Genéticos foram as condições iniciais a serem utilizadas, tais como, tamanho de população e número de gerações. A seguir, são apresentadas as condições de utilização do procedimento de otimização por algoritmos genéticos, bem como a descrição do sistema estrutural adotado para a efetivação da otimização. O critério de convergência (critério de parada) adotado para o procedimento de otimização, foi adotado como sendo o número total de gerações admitido em cada caso.

6.1 Descrição da Placa Utilizada na Otimização do Posicionamento do Tratamento Superficial

A estrutura analisada é a mesma placa de alumínio utilizada nos ensaios experimentais apresentados no Capítulo 4. Discretizada por elementos finitos, a malha da placa consiste de 8 por 10 elementos, respectivamente nas dimensões de 0,2m e 0,25m metros, perfazendo um total de 80 elementos finitos e 99 nós, com condições de contorno livre. O modelo GHM foi utilizado para a caracterização do comportamento viscoelástico.

Admitindo que cada um dos elementos possa ser tratado independentemente dos demais, têm-se 80 possibilidades para colocação do tratamento por camada passiva. O problema de otimização do posicionamento consiste, então, em escolher dentre as 80 posições candidatas, um máximo de 30 posições que receberão tratamento superficial, de modo a possibilitar a máxima atenuação das amplitudes de vibração dentro das faixas que contenham os modos de vibração de interesse, na banda de $[0 - 500\text{Hz}]$. Lembra-se que o número de configurações possíveis com 30 elementos tratados dentre os 80 elementos da malha chega a $2,3532 \times 10^{54}$.

Desta forma, criou-se uma população inicial, cujos indivíduos seriam representados por vetores com 80 elementos, onde até trinta elementos seriam dígitos "1", indicando

um elemento tratado na malha da placa e os elementos restantes seriam dígitos "0", representando elementos sem tratamento superficial na malha da placa. Para exemplificar, o posicionamento para o tratamento superficial completo é representado por uma lista de 80 "uns", já o posicionamento da configuração A, é representado por um vetor contendo 16 "uns", seguidos por 48 "zeros", terminando com 16 "uns". O posicionamento da configuração B, é representado por um vetor contendo sequencialmente, 16 "uns", 16 "zeros", 16 "uns", 16 "zeros" e terminando com 16 "uns" (ver Fig. 4.2).

6.2 Posicionamento Ótimo para Placa Multi-Camadas com Tratamento Assimétrico

Para utilizar o código de algoritmo genéticos GAOT (Houck et al., 1995), considerou-se uma população inicial gerada aleatoriamente onde cada indivíduo é um vetor com 80 coordenadas representando os 80 possíveis tratamentos na malha da placa. Cada um destes indivíduos é construído conforme as considerações de "zeros" e "uns" apresentadas acima.

Com a restrição de até 30 elementos tratados, definiram-se faixas de frequência nas quais se situam os dois primeiros modos de vibração da placa. Então, o problema de otimização foi resolvido em duas etapas: a primeira, limitando a análise apenas para as amplitudes correspondentes ao primeiro modo de vibração e, a segunda, considerando as amplitudes associadas aos dois primeiros modos, simultaneamente.

6.2.1 Otimização Para o Primeiro Modo

A dificuldade encontrada para a inicialização do algoritmo genético foi a definição dos parâmetros determinantes de tamanho da população inicial e do número de gerações.

Como parâmetros iniciais, para efeito de teste, foram considerados:

- População inicial: 100 indivíduos;
- Número de gerações: 10;
- Banda de frequência: $[185 - 205 Hz]$, contendo o primeiro modo de vibração da placa base;
- Índice de desempenho: $J = \max_{185 \leq \omega \leq 205} \{20 \log_{10} (abs(H_{II}(\omega))) / (1 \times 10^{-6})\}$;

A evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração pode ser observado na Fig. 6.1 (conf. I). A configuração ótima (I) é apresentada na Fig. 6.2. As amplitudes da função de resposta em frequência $H_{I,I}$ com a banda de interesse em destaque

pode ser vista na Fig. 6.3.

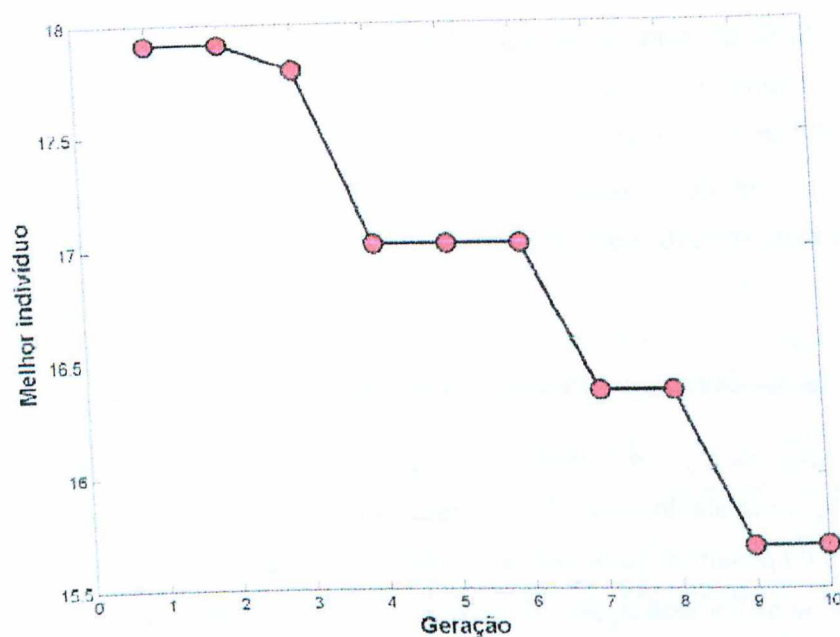


Figura 6.1- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. I)

1	2						
9	10						16
17							
		27			30	31	
				37	38	39	40
41			44	45	46	47	
	50			53	54	55	
				61	62	63	
65							72
73	74						

Figura 6.2- Configuração (I) do posicionamento ótimo

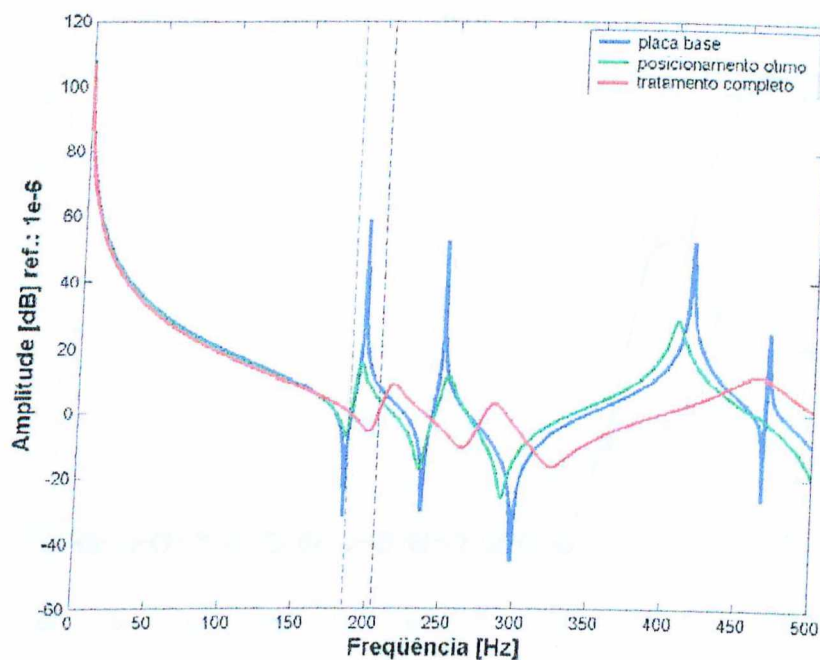


Figura 6.3- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (I) de posicionamento ótimo e do tratamento completo

Após essa configuração inicial, foi observado que a convergência do algoritmo não é satisfatória, decidindo-se aumentar o tamanho da população inicial e o número máximo de gerações, conforme abaixo:

- População inicial: 200 indivíduos;
- Número de gerações: 20;

Para estes novos parâmetros, e considerando a mesma banda de frequência e o mesmo índice de desempenho anteriormente utilizados, a evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração pode ser observada na Fig. 6.4 (conf. II). A configuração (II) para o resultado ótimo é apresentada na Fig. 6.5. A função de resposta em frequência $H_{I,I}$ com a banda de interesse em destaque pode ser vista na Fig. 6.6.

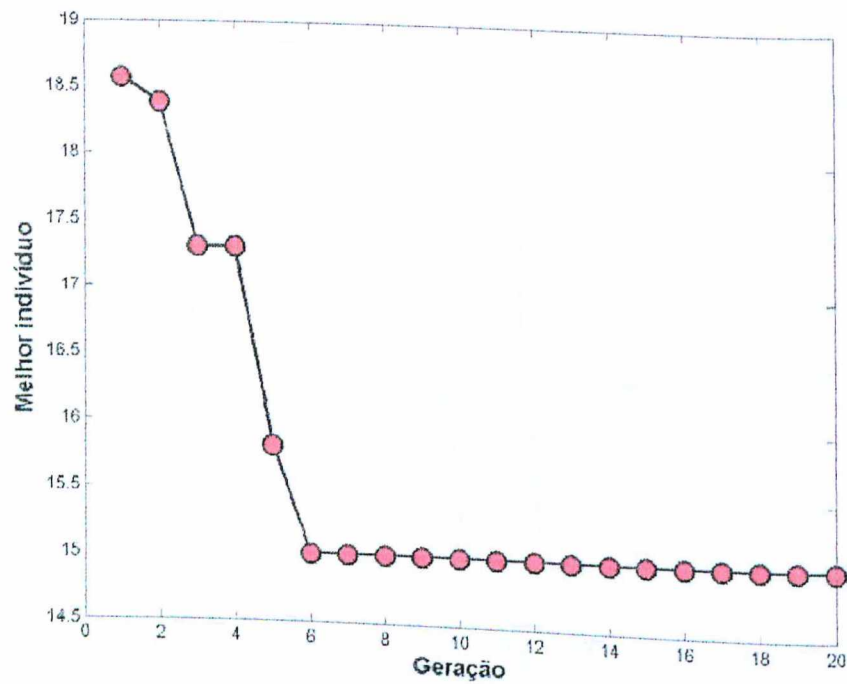


Figura 6.4- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. II)

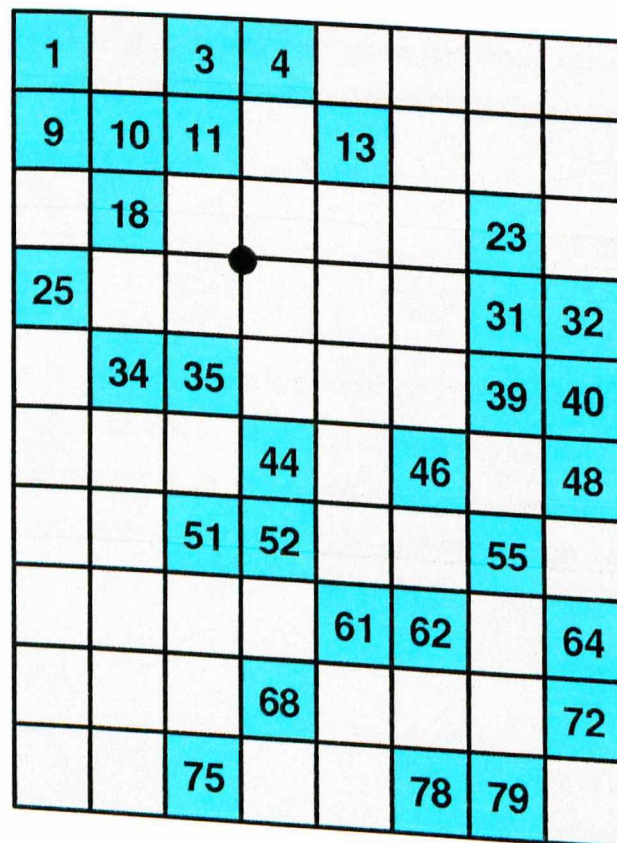


Figura 6.5- Configuração (II) do posicionamento ótimo

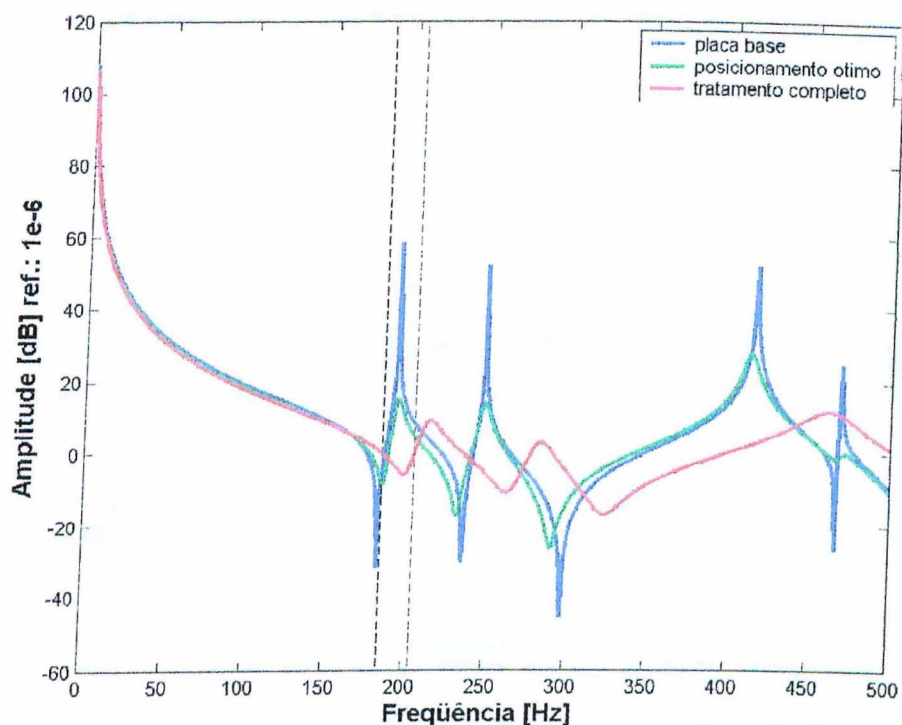


Figura 6.6- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (II) de posicionamento ótimo e tratamento completo

Nota-se aqui que, a partir da sexta geração, o valor do índice de desempenho estaciona em 15, 0. Uma possível razão para esta convergência prematura é que a população inicial teria pouca variedade de indivíduos, levando o algoritmo a encontrar um valor pouco adequado.

Para atenuar esse problema aumentou-se a população inicial, porém operando com um número reduzido de gerações, para que o custo computacional não fosse proibitivo. Os valores adotados foram os seguintes:

- População Inicial: 300 indivíduos;
- Número de gerações: 10;

Para estas condições, a evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração é apresentado na Fig. 6.7 (conf. III). A configuração ótima (III) é apresentada na Fig. 6.8. A função de resposta em frequência $H_{I,I}$ com a banda de interesse em destaque pode ser vista na Fig. 6.9.

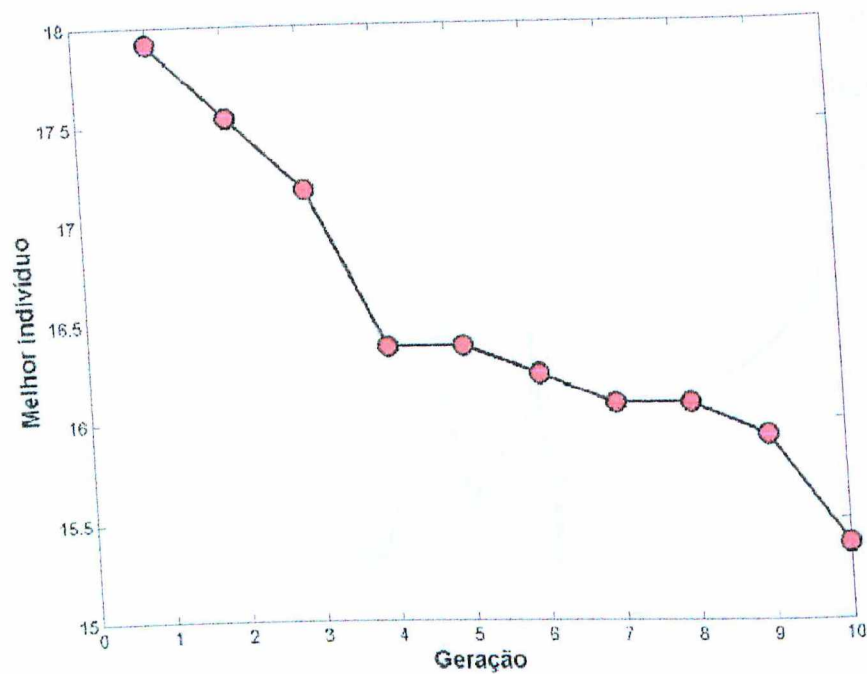


Figura 6.7- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. III)

1	2						
9							16
17					22		
		27		29		31	
				37	38	39	40
41			44	45	46	47	
	50	51		53	54	55	
				61	62	63	
65							72
73	74						

Figura 6.8- Configuração (III) do posicionamento ótimo

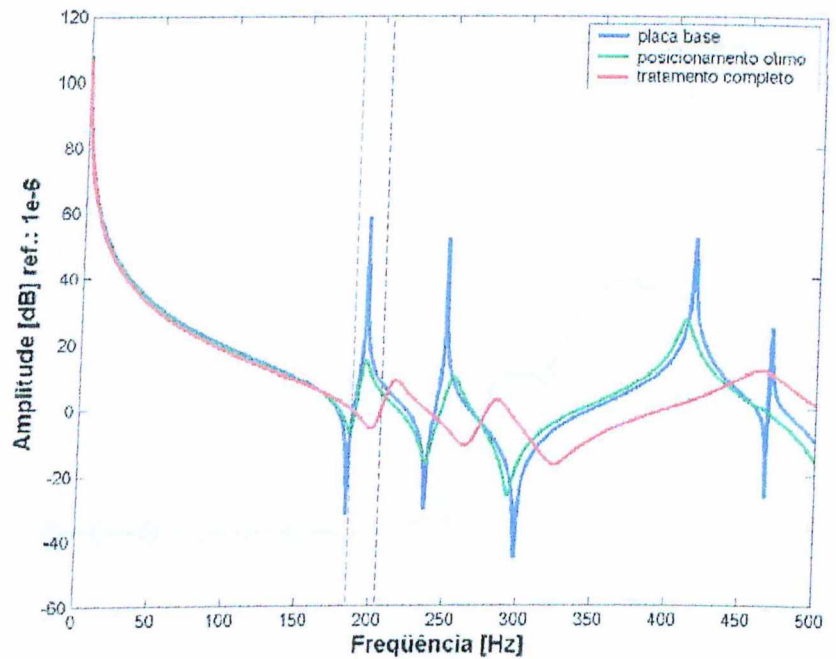


Figura 6.9- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (III) de posicionamento ótimo e tratamento completo

Pode-se perceber que, com apenas 10 gerações o algoritmo parece não ter convergido para a melhor solução e então foi feita uma nova tentativa, aumentando o número de gerações, mas conservando o tamanho da população inicial, apesar do esperado aumento do custo computacional envolvido.

- População inicial: 300 indivíduos;
- Número de gerações: 15;

A Fig. 6.10 mostra a evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. IV). A configuração ótima (IV) é apresentada na Fig. 6.11. A função de resposta em frequência com a banda de interesse em destaque pode ser vista na Fig. 6.12.

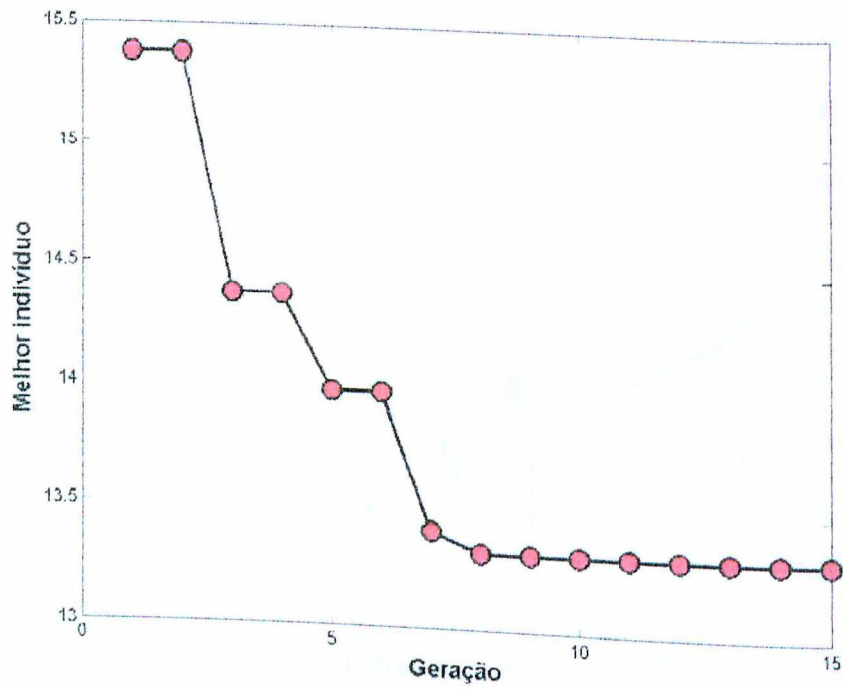


Figura 6.10- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. IV)

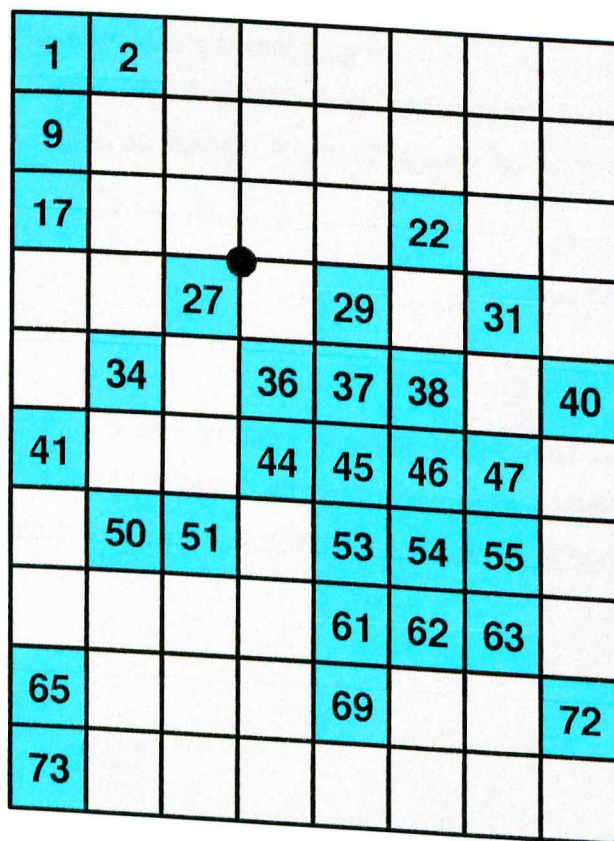


Figura 6.11- Configuração (IV) do posicionamento ótimo

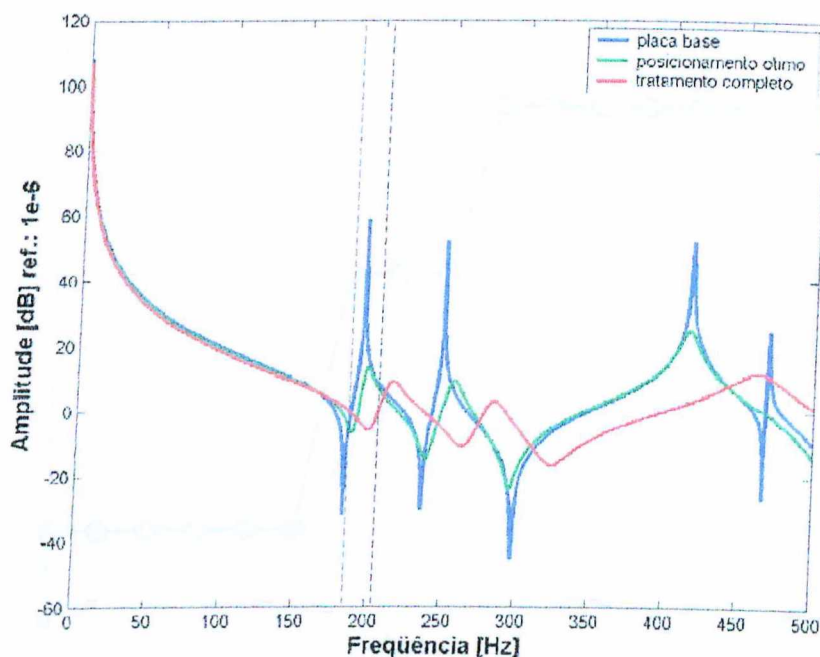


Figura 6.12- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (IV) de posicionamento ótimo e tratamento completo

Assim, finalmente, o algoritmo converge a partir da oitava geração e encontra-se o valor ótimo, correspondendo a uma amplitude de 13,3182 dB para o primeiro modo.

Numa tentativa de aumentar ainda mais a eficiência do tratamento otimizado, optou-se pela criação de uma população inicial onde todos os indivíduos representem configurações de posicionamento com "exatamente" 30 elementos, não se permitindo, portanto, como nos casos anteriores, configurações com um menor número de elementos tratados. A banda de frequência e o índice de desempenho são mantidos. Assim, os outros parâmetros iniciais são:

- População inicial: 300 indivíduos;
- Número de gerações: 15;

A Fig. 6.13 mostra a evolução do melhor indivíduo em cada geração (conf. V). A configuração (V) ótima é apresentada na Fig. 6.14. As amplitudes da função de resposta em frequência $H_{I,I}$ com a banda de interesse em destaque pode ser vista na Fig. 6.15.

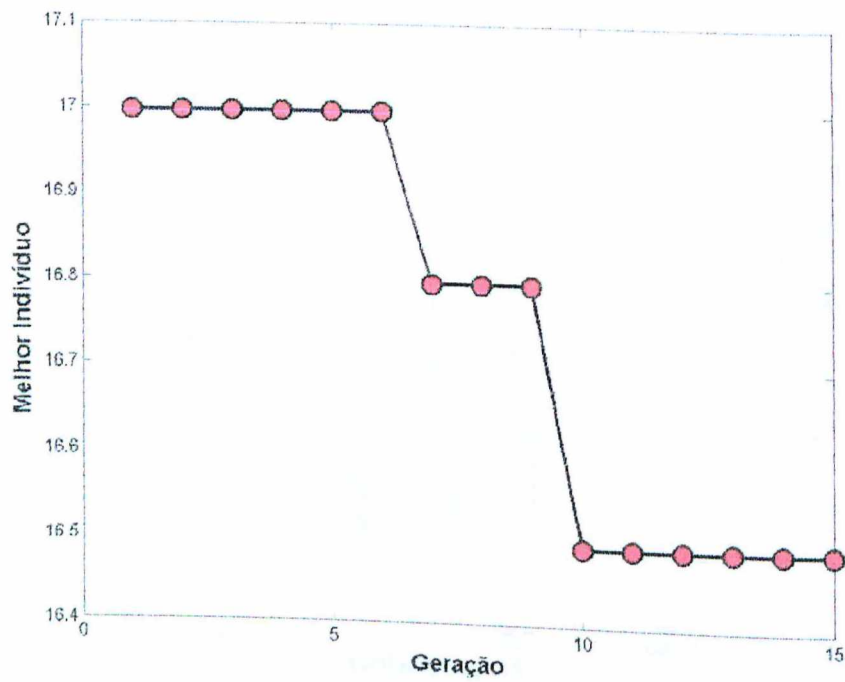


Figura 6.13- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. V)

	10	11	12	13		15	
17	18	19	20		22		24
25	26			29	30	31	
33							40
41		43		45	46	47	
	50		52	53			56
						63	
							72
					78		

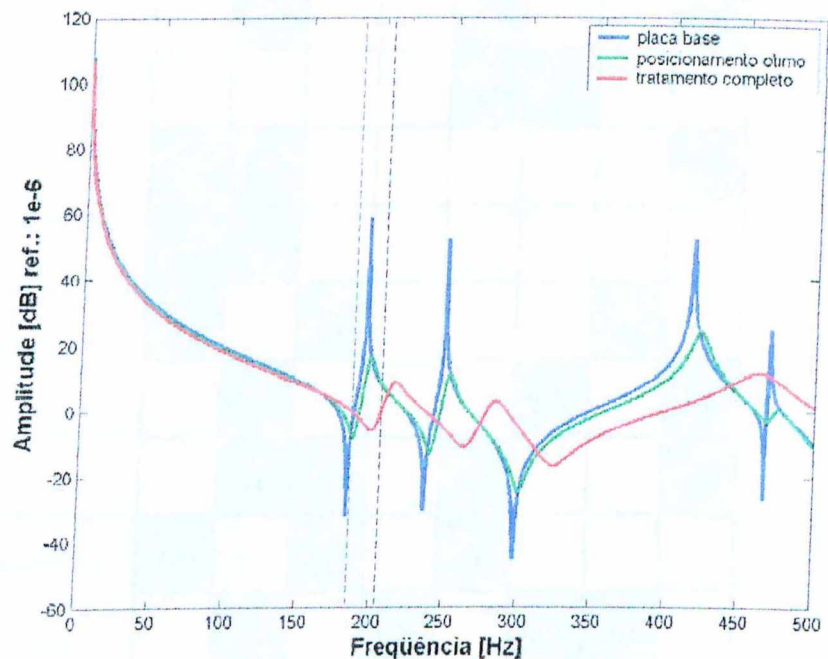


Figura 6.15- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração (V) de posicionamento ótimo e tratamento completo

Percebe-se claramente que o fato de se ter "forçado" o número de elementos com tratamento passivo a ser exatamente 30, acabou por prejudicar a ação do algoritmo, comprometendo os resultados do problema de otimização.

Para efeito comparativo, na Fig. 6.17 mostram-se as amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ para as seguintes condições:

- a) sem tratamento algum;
- b) configuração ótima cujo valores ótimos estão apresentados nas Figuras 6.10 e 6.12;
- c) configuração A, utilizada na validação experimental (Fig. 4.2);
- d) tratamento completo;
- e) configuração (VI) gerada aleatoriamente sem qualquer critério de otimização, com exatamente 30 elementos tratados (Fig. 6.16);

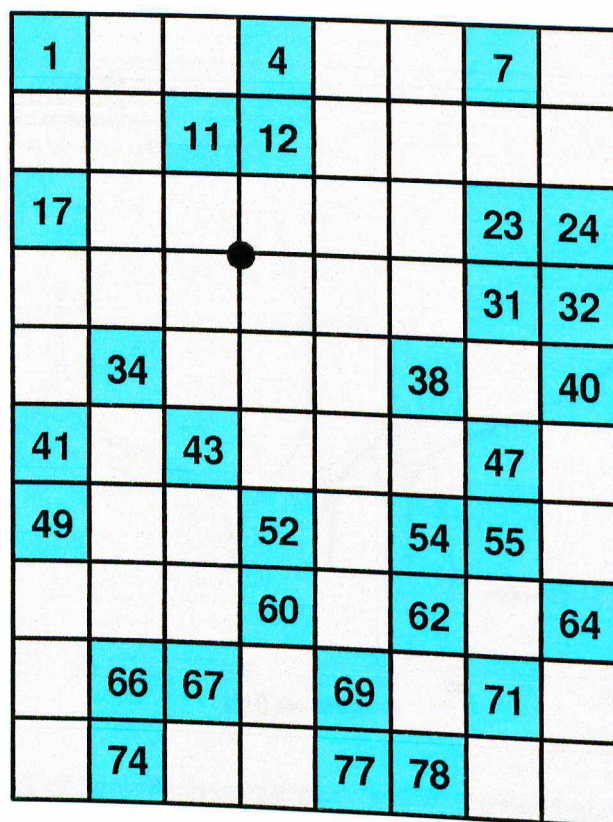


Figura 6.16- Configuração (VI) de posicionamento gerada aleatoriamente

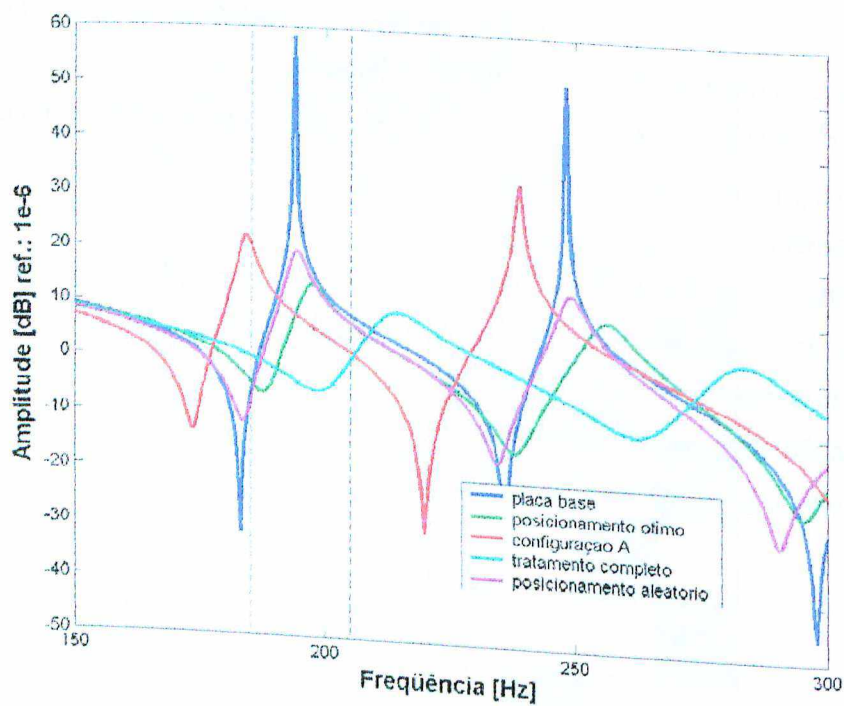


Figura 6.17- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, configuração de posicionamento ótimo, configuração A, tratamento completo e configuração aleatória (VI)

6.2.2 Otimização Para os Dois Primeiros Modos de Vibração da Placa

Segundo procedimento similar ao adotado no caso da otimização considerando as amplitudes de vibração na vizinhança do primeiro modo de vibração da placa, estende-se agora o processo de otimização, objetivando a máxima redução das amplitudes nas vizinhanças dos dois primeiros modos de vibração, simultaneamente. Os valores dos parâmetros empregados no processo de otimização são apresentados a seguir.

- População inicial: 300 indivíduos;
- Número de gerações: 20;
- Bandas de frequência: $[185 - 205 Hz]$ e $[245 - 265 Hz]$, contendo, respectivamente, os dois primeiros modos de vibração;
- Índice de desempenho:

$$J = \max_{185 \leq \omega \leq 205} \{20 \log_{10} (abs(H_{II}(\omega))) / (1 \times 10^{-6})\} + \\ + \max_{245 \leq \omega \leq 265} \{20 \log_{10} (abs(H_{II}(\omega))) / (1 \times 10^{-6})\}$$

Aqui, na definição dos diferentes testes numéricos realizados a estratégia foi manter o mesmo número de indivíduos utilizado na obtenção da configuração ótima considerando apenas o primeiro modo, aumentando-se, porém, o número de gerações.

A evolução do melhor indivíduo em cada geração pode ser observada na Fig. 6.18 (conf VII). A configuração ótima (VII) é apresentada na Fig. 6.19. As amplitudes da função de resposta em frequência $H_{I,I}$, com as bandas de interesse em destaque, pode ser vista na Fig. 6.20.

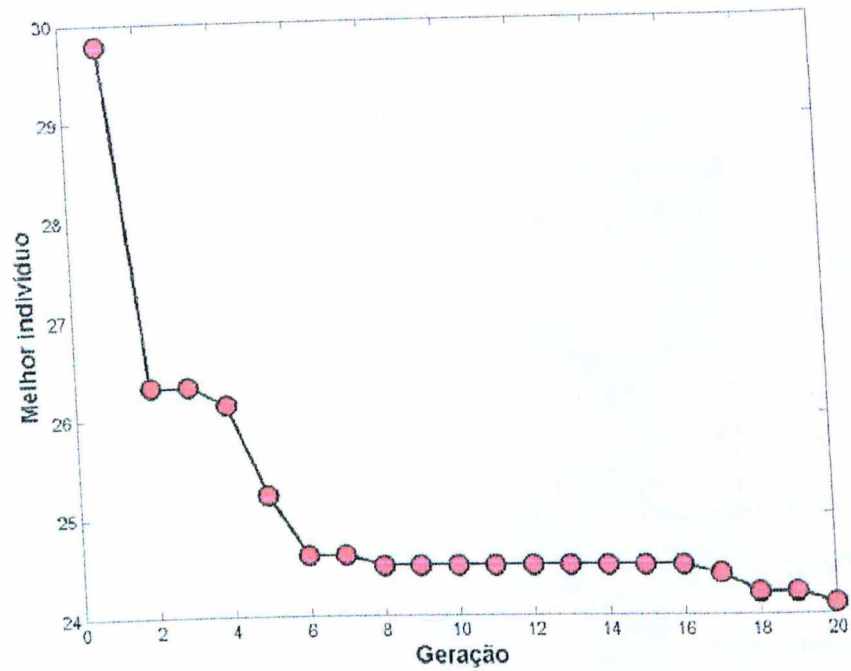


Figura 6.18- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. VII)

	2						
	10				14	15	
	18	19	20	21		23	
25	26	27	28				
33	34	35	36			39	40
41	42		44				
49			52		54		
	58	59		61			
	74	75					

Figura 6.19- Configuração (VII) do posicionamento ótimo

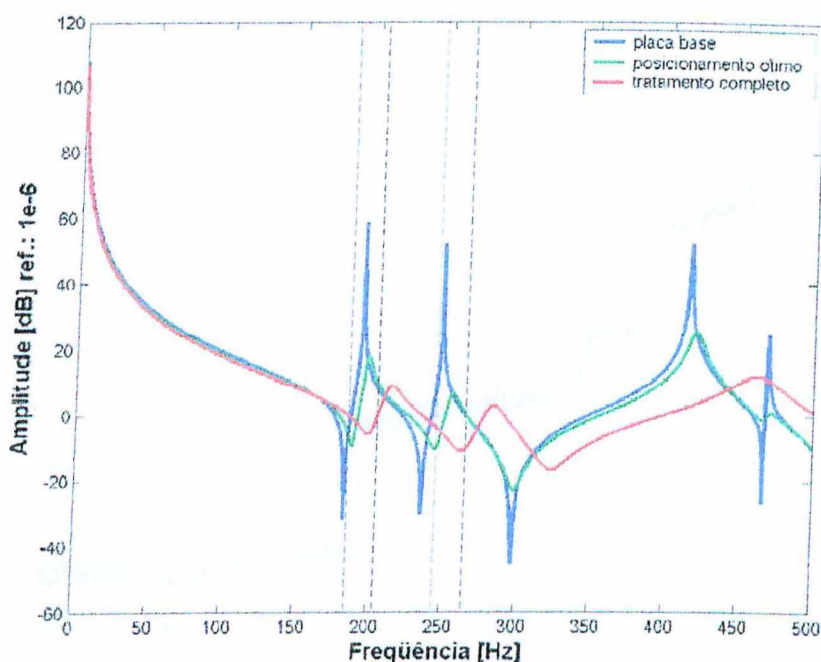


Figura 6.20- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (VII) de posicionamento ótimo e do tratamento completo

Com esta configuração, nota-se que o valor do índice de desempenho, entre a oitava e a décima sexta gerações, correspondendo ao melhor indivíduo, fica inalterado, mas, após isso, começa a alterar seu valor sem entretanto se chegar à convergência do processo. Decidiu-se assim, aumentar número de gerações, na tentativa de viabilizar a convergência para a solução ótima. Assim, os parâmetros foram alterados para:

- População inicial: 300 indivíduos (manteve-se este número em relação à situação anterior);
- Número de gerações: 30.

Para estes novos parâmetros, e considerando a mesma banda de frequência e índice de desempenho anteriores, a evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração pode ser observada na Fig. 6.21 (conf VIII). Observa-se aqui que, a partir da vigésima terceira geração, o valor do índice de desempenho estaciona em 22,51, que é considerado como sendo o valor ótimo encontrado neste caso. A configuração ótima (VIII) é apresentada na Fig. 6.22. As amplitudes da função de resposta em frequência $H_{I,I}$ com a banda de interesse em destaque pode ser vista na Fig. 6.23.

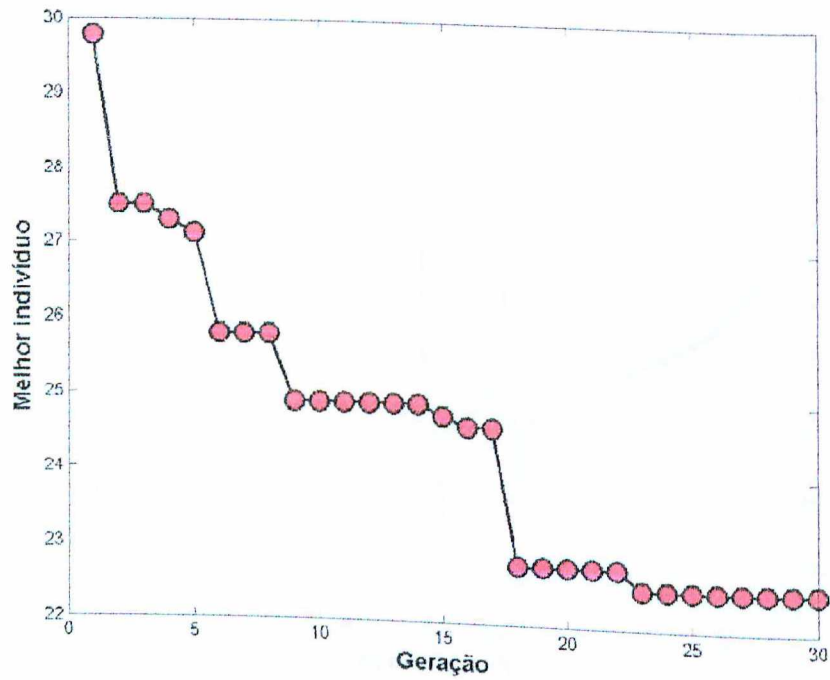


Figura 6.21- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. VIII)

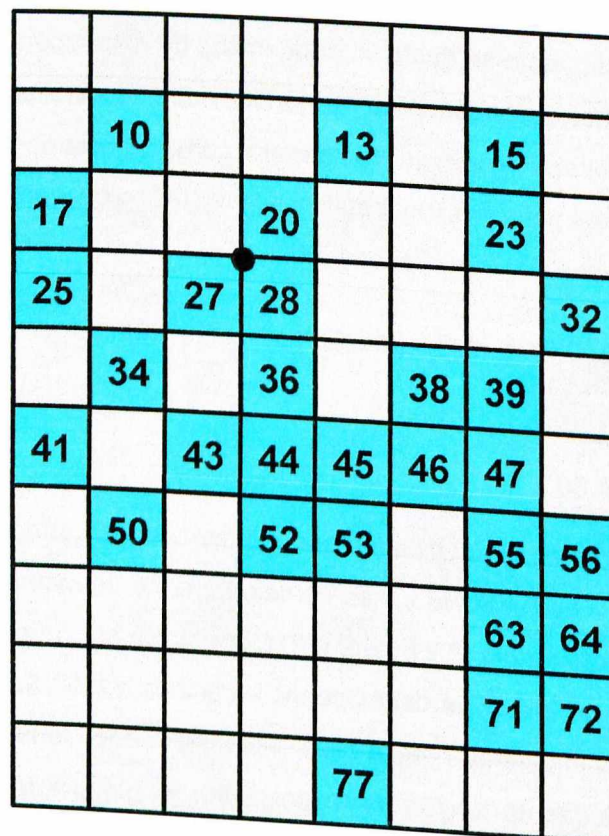


Figura 6.22- Configuração (VIII) do posicionamento ótimo

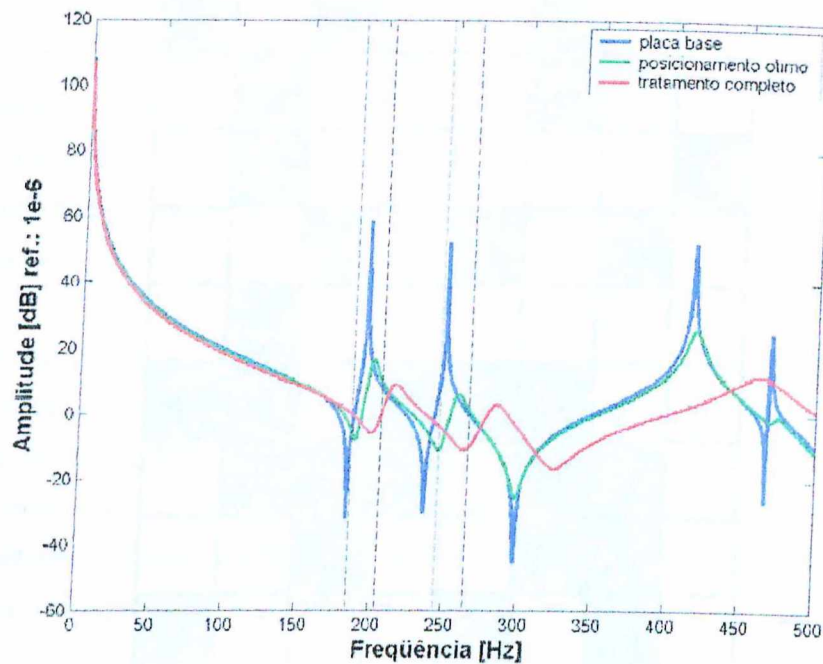


Figura 6.23- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (VIII) de posicionamento ótimo e do tratamento completo

Como no caso da otimização para o primeiro modo, para fins de comparação, na Fig. 6.25 mostram-se as amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ da placa para os seguintes casos:

- a) sem tratamento algum;
- b) configuração ótima cujo valor ótimo está apresentado nas Figuras 6.21 e 6.23;
- c) configuração A, utilizada na validação experimental (Fig. 4.2);
- d) tratamento completo;
- e) configuração (IX) gerada aleatoriamente sem qualquer critério de otimização, com exatamente 30 elementos tratados (Fig. 6.24);

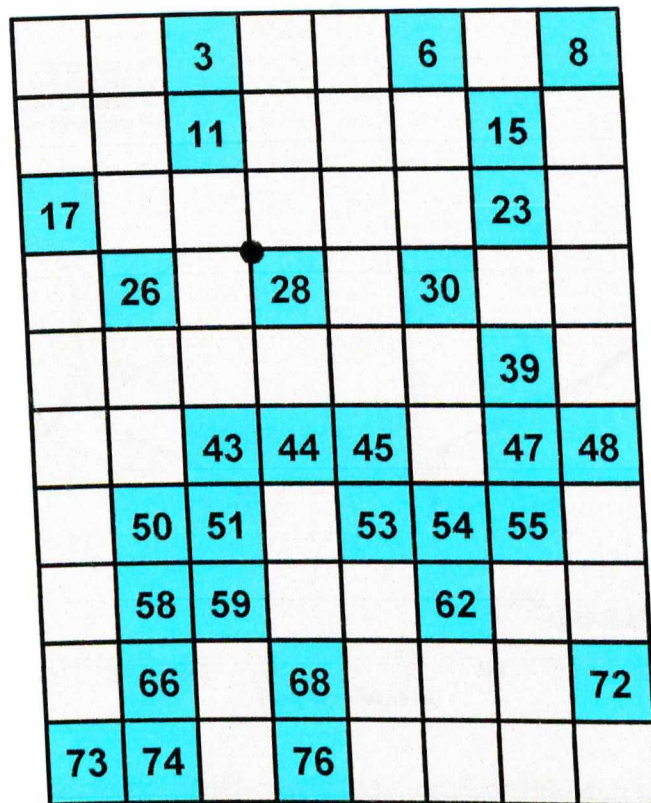


Figura 6.24- Configuração (IX) do posicionamento gerada aleatoriamente

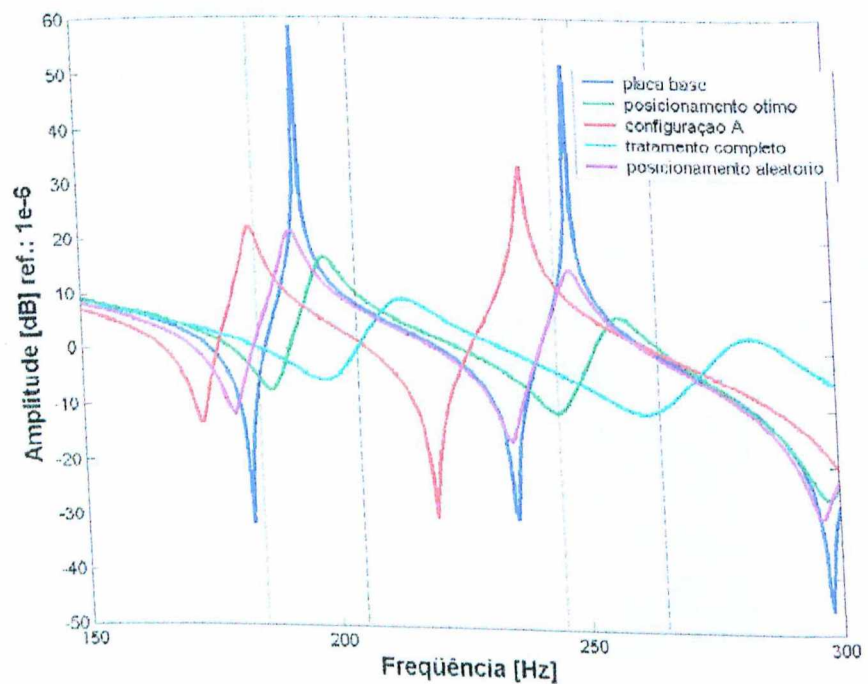


Figura 6.25- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração de posicionamento ótimo, da configuração A, do tratamento completo e da configuração aleatória (IX)

6.3 Posicionamento Ótimo para Placa Multi-Camadas com Tratamento Simétrico

Com base no que foi analisado para o caso de placa multi-camadas com 3 camadas e mais uma vez utilizando-se o código de algoritmos genéticos GAOT (Houck et al., 1995), analogamente, considerou-se uma população inicial onde cada indivíduo é um vetor com 80 coordenadas representando os 80 possíveis tratamentos na malha da placa. Uma representação idêntica ao caso de 3 camadas foi utilizada onde os elementos que recebem tratamento são representados por dígitos "1", e os outros não tratados são representados por dígitos "0" em cada indivíduo. Conservaram-se, mais uma vez, as 80 variáveis de projeto, com a restrição de até 30 elementos tratados (até 30 algarismos "1" em cada indivíduo). As faixas de frequência examinadas contemplam os dois primeiros modos de vibração da placa. O problema de otimização, mais uma vez, foi resolvido em duas etapas: a primeira, limitando a análise apenas para as amplitudes correspondentes ao primeiro modo de vibração e, a segunda, considerando as amplitudes associadas aos dois primeiros modos.

6.3.1 Otimização Para o Primeiro Modo

Com a apreensão de haver uma variação mais considerável da FRF em torno do primeiro modo de vibração da placa não tratada, em virtude da alocação de elementos tratados com 5 camadas, foi considerada uma banda frequencial maior que aquela utilizada no caso de 3 camadas. Os parâmetros iniciais do algoritmo genético, para efeito de teste, foram adotados conforme o seguinte:

- População inicial: 200 indivíduos;
- Número de gerações: 10;
- Banda de frequência: $[174 - 213\text{Hz}]$, contendo o primeiro modo de vibração da placa base;
- Índice de desempenho: $J = \max_{174 \leq \omega \leq 213} \{20 \log_{10}(\text{abs}(H_{II}(\omega))) / (1 \times 10^{-6})\}$;

A evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração pode ser observado na Fig. 6.26 (conf. X). A configuração ótima (X) é apresentada na Fig. 6.27. As amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ com a banda de interesse em destaque podem ser vistas na Fig. 6.28.

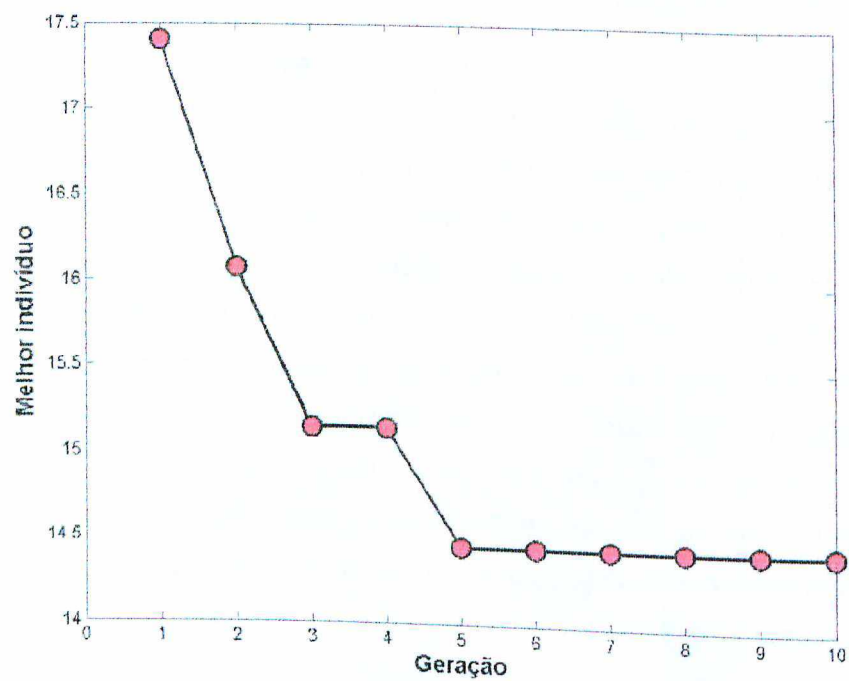


Figura 6.26- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (conf. X)

1		3	4		6	7	8
9		11					
		19					
		27		29		31	
33		35				39	40
41	42	43	44				48
		51		53		55	
			60				64
		67		69			72
	74						

Figura 6.27- Configuração (X) do posicionamento ótimo

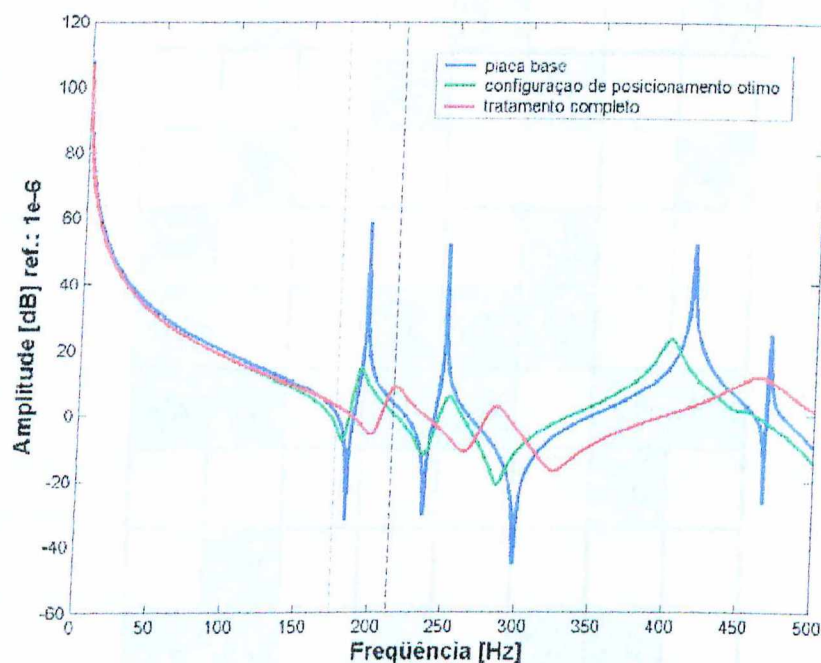


Figura 6.28- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (X) de posicionamento ótimo e do tratamento completo

Observa-se que após a quinta geração o algoritmo converge para o ótimo.

Para efeito comparativo, na Fig. 6.30 encontram-se as amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ da placa para os seguintes casos:

- a) sem tratamento algum;
- b) configuração cujo valor ótimo está apresentado nas Figuras 6.26 e 6.28;
- c) configuração A, utilizada na validação experimental (Fig. 4.2);
- d) tratamento completo;
- e) configuração (XI) gerada aleatoriamente sem qualquer critério de otimização, com exatamente 30 elementos tratados (Fig. 6.29);

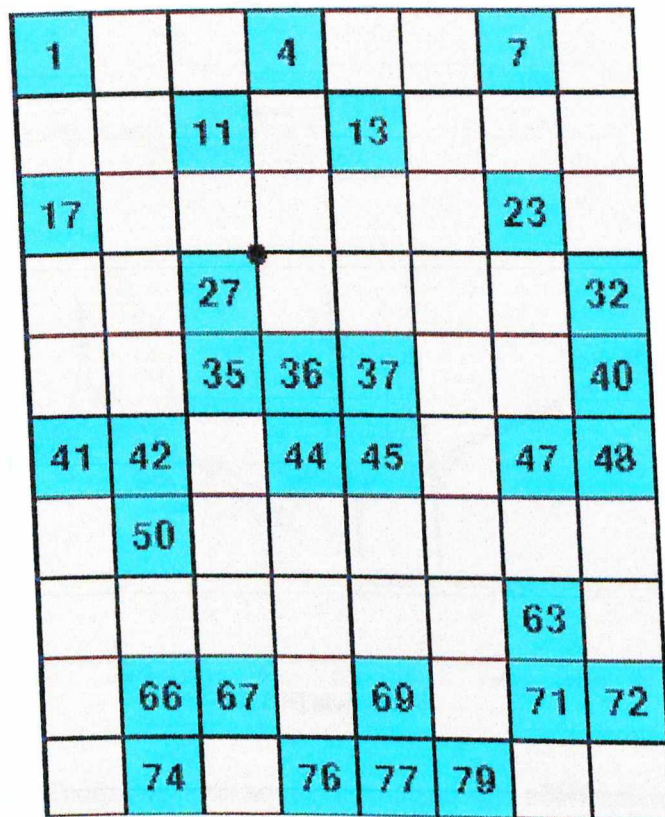
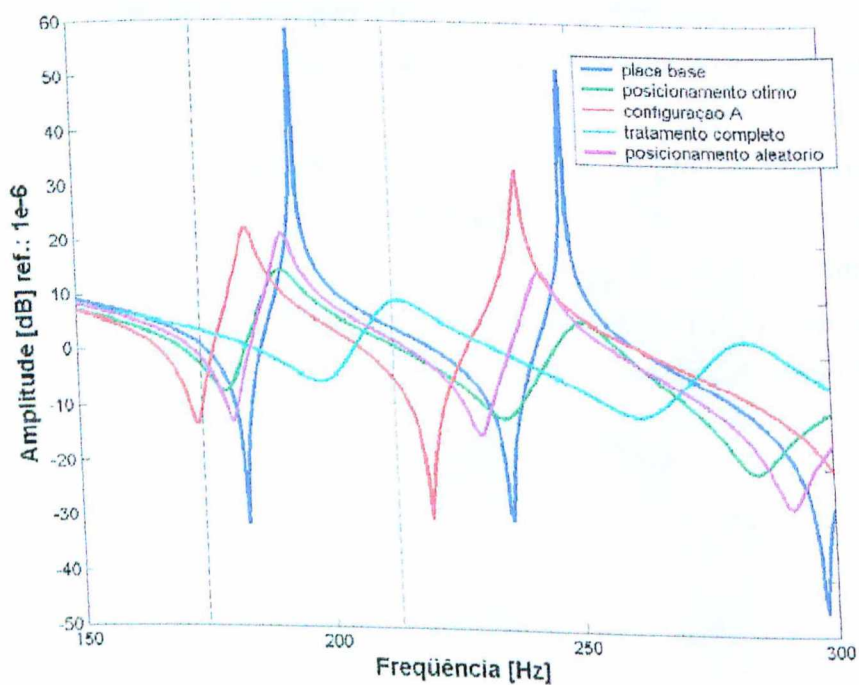


Figura 6.29- Configuração (XI) gerada aleatoriamente

Figura 6.30- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração de posicionamento ótimo, da configuração A, do tratamento completo e da configuração aleatória (XI)

6.3.2 Otimização Para os Dois Primeiros Modos de Vibração da Placa

Através de um procedimento análogo ao adotado no caso da otimização para o primeiro modo de vibração, estende-se o processo para o caso em que se deseja proceder uma otimização simultânea envolvendo os dois primeiros modos de vibração.

Os parâmetros adotados são os seguintes:

- População inicial: 200 indivíduos;
- Número de gerações: 10;
- Bandas de frequência: $[174 - 213Hz]$ e $[235 - 274Hz]$, contendo, respectivamente, os dois primeiros modos de vibração da placa base;
- Índice de desempenho:

$$J = \max_{174 \leq \omega \leq 213} \left\{ 20 \log_{10} (abs(H_{II}(\omega))) / (1 \times 10^{-6}) \right\} + \\ + \max_{235 \leq \omega \leq 274} \left\{ 20 \log_{10} (abs(H_{II}(\omega))) / (1 \times 10^{-6}) \right\}$$

Aqui, a estratégia foi manter o mesmo número de indivíduos na população inicial e o mesmo número de gerações utilizado na obtenção do ótimo considerando apenas o primeiro modo.

A evolução do melhor indivíduo em cada geração pode ser observada na Fig. 6.31 (conf. XII). A configuração ótima (XII) é apresentada na Fig. 6.32. As amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ com as bandas de interesse em destaque podem ser vistas na Fig. 6.33.

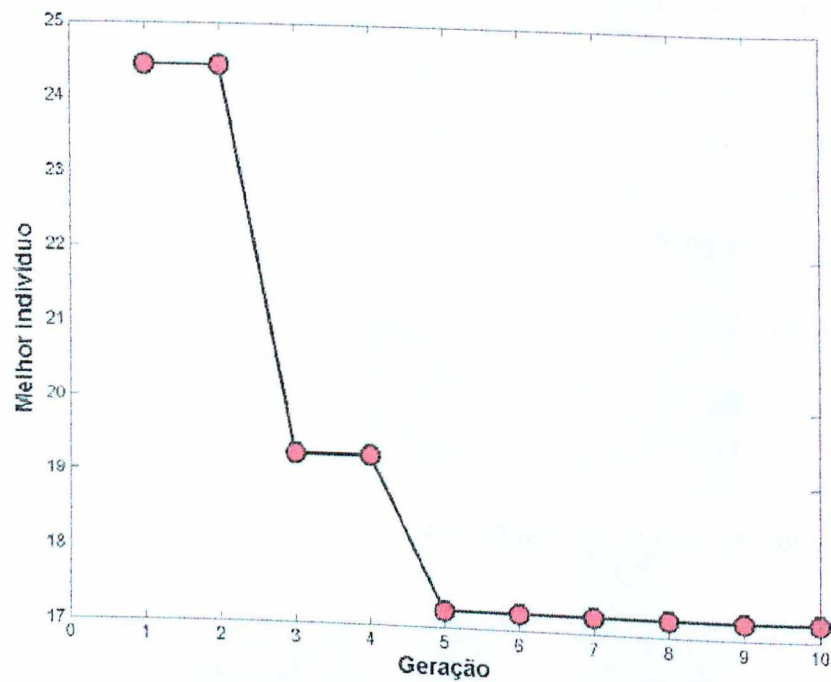


Figura 6.31- Evolução do índice de desempenho do melhor indivíduo em cada geração (XII)

1		3				7	8
9	10	11			14		
17	18		20		22		24
	26	27					
	34	35	36			39	
41						47	48
						55	56
					62		64
		67		69	70		
	74						

Figura 6.32- Configuração (XII) do posicionamento ótimo

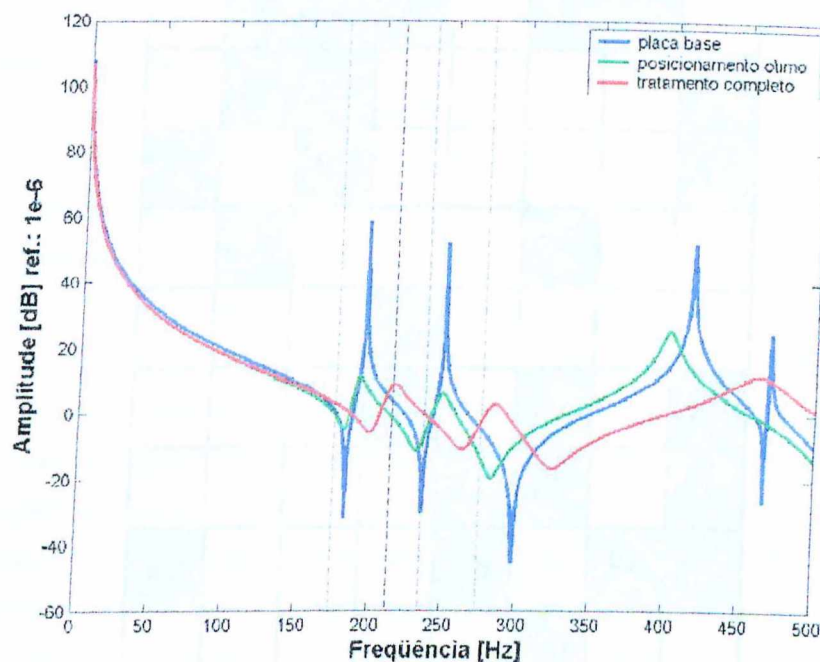


Figura 6.33- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração (XII) de posicionamento ótimo e do tratamento completo

Observa-se que, a partir da quinta geração, o valor estaciona em 17, 22, que é considerado como sendo o valor ótimo encontrado neste caso.

Como no caso da otimização feita para o primeiro modo, na Fig. 6.35 encontram-se as amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ da placa para os seguintes casos:

- a) sem tratamento algum;
- b) configuração ótima cujo valor ótimo está apresentado nas Figuras 6.31 e 6.33;
- c) configuração A, utilizada na validação experimental (Fig. 4.2);
- d) tratamento completo;
- e) configuração (XIII) gerada aleatoriamente sem qualquer critério de otimização, com exatamente 30 elementos tratados (Fig. 6.34);

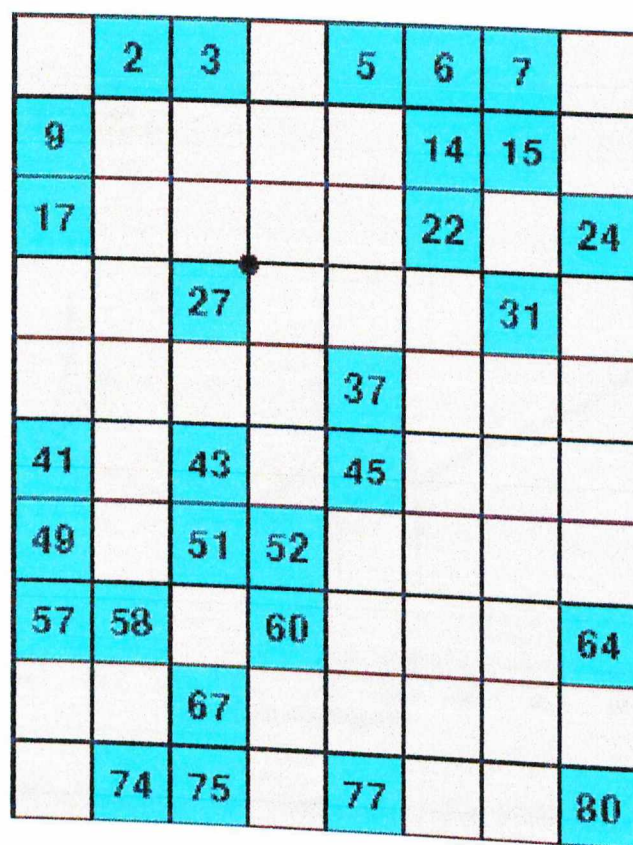


Figura 6.34- Configuração (XIII) gerada aleatoriamente

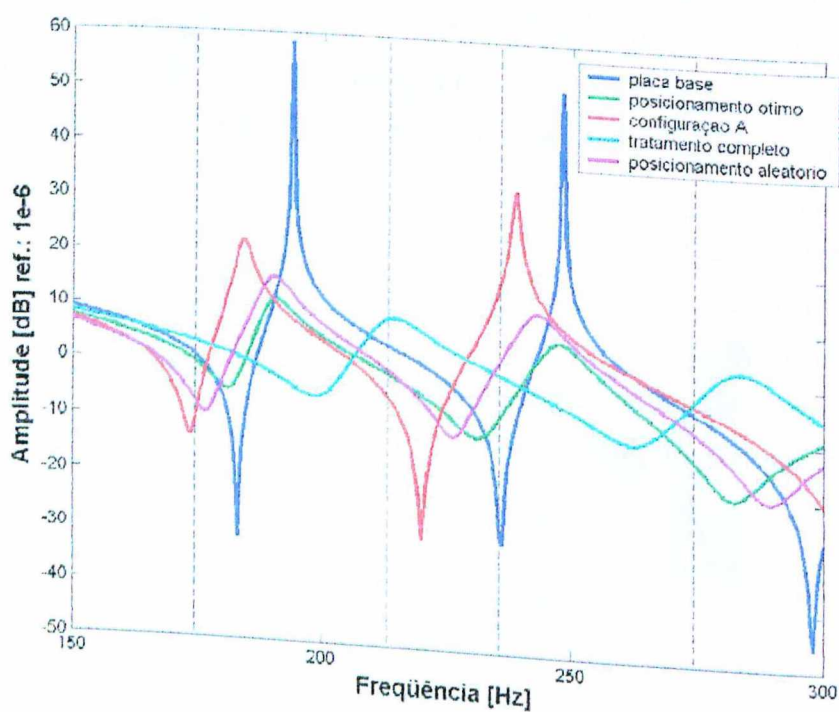


Figura 6.35- Amplitudes das FRFs $H_{I,I}$ da placa base, da configuração de posicionamento ótimo, da configuração A, do tratamento completo e da configuração aleatória (XIII)

6.4 Discussão dos Resultados

Com respeito aos resultados obtidos neste capítulo, observa-se, primeiramente, a maior eficiência do tratamento simétrico em relação ao tratamento assimétrico com respeito aos níveis de amortecimento estrutural. Nota-se ainda, que uma vez acertados os parâmetros do algoritmo de otimização, tais como, tamanho da população, número de gerações, e largura das faixas contendo os modos de interesse, o procedimento de otimização discreta usando algoritmos genéticos mostrou-se eficiente. Os resultados para as amplitudes das funções de resposta em frequência examinadas se apresentaram coerentes, correspondendo à forma de vibração da estrutura analisada. Conforme evidenciado nas Figuras 6.17, 6.25, 6.30 e 6.35 as configurações ótimas obtidas apresentam, sistematizadamente, amortecimento maior que as configurações propostas aleatoriamente, tanto para os exemplos acima avaliados quanto para a configuração A, utilizada anteriormente no Capítulo 4 (32 elementos tratados). Os resultados obtidos, demonstram que o amortecimento efetivo introduzido no sistema é bastante significativo, quando comparado ao tratamento completo, ainda mais levando-se em conta a menor quantidade de massa acrescentada à estrutura.

As configurações ótimas são viáveis de realização, apesar da esperada dificuldade de implementação prática, uma vez que os elementos tratados devem ser aplicados de acordo com uma topologia complexa. Uma simplificação seria aplicar, na prática, uma configuração geometricamente "próxima" da ótima, porém de topologia mais simples, facilitando a implementação, sem prejudicar, entretanto, o desempenho do sistema, do ponto de vista do amortecimento introduzido.

Ressalte-se que este tipo de otimização discreta não se apresenta como a solução definitiva para o problema de aumento do desempenho do sistema com respeito à introdução de amortecimento na estrutura. Foi mencionado anteriormente que um procedimento completo de otimização discreto-contínuo onde os parâmetros geométricos (espessuras) do modelo são otimizados simultaneamente com o posicionamento do tratamento, representa uma técnica mais abrangente podendo levar a resultados interessantes.

Há que se considerar entretanto, que os resultados apresentados usando a estratégia de preocupar-se apenas com o posicionamento podem ser considerados bastante satisfatórios.

Capítulo 7

Técnica de Redução de Modelos de Elementos Finitos

Conforme evidenciado no Capítulo 3, um inconveniente resultante da incorporação dos modelos viscoelásticos nos modelos de elementos finitos é a alta ordem das matrizes do sistema de equações de estado, em decorrência da introdução das coordenadas dissipativas nas matrizes do modelo de elementos finitos, com a intenção de representar a dependência da frequência dos materiais viscoelásticos. A representatividade adequada desta dependência da frequência está geralmente condicionada à adoção de um número razoável de parâmetros: mini-osciladores para o modelo GHM, campos de deslocamentos anelásticos para o modelo ADF e os parâmetros G_r , G_1 , α , β e b , para o modelo de Derivadas Fracionárias.

Para se comparar as ordens das matrizes envolvidas na modelagem por elementos finitos, seja n o número de graus de liberdade elásticos. O número total de graus de liberdade para o modelo GHM é $2n(1 + N_G)$, onde N_G é o número de mini-osciladores utilizados. Por outro lado, o número total de graus de liberdade para o modelo ADF é $n(2 + N_A)$, onde N_A é o número de campos de deslocamento anelásticos utilizados.

Supondo que $N_A = N_G$ seja o número suficiente para a representação dos modelos ADF e GHM, nota-se, da observação anterior, que o modelo ADF conduz a um sistema de equações no espaço de estados cuja ordem é nN_A menor, comparada com o modelo GHM, fato que favorece a utilização do modelo ADF em detrimento do modelo GHM.

Entretanto, mesmo na escolha pelo modelo ADF, a ordem final das matrizes de estado continua sendo muito grande, justificando portanto o uso de técnicas de redução de modelos com o objetivo de reduzir o custo computacional associado ao processamento numérico. Além disso, na implementação de sistema de controle híbrido ativo-passivo baseado em camadas restritas ativas, é impraticável o emprego de modelos de ordem elevada, devendo-se buscar modelos de dimensão reduzida que sejam capazes de representar adequadamente o comportamento dinâmico do sistema dentro de uma certa banda freqüencial de interesse.

Dentre as várias técnicas de redução de modelos, destaca-se o método de redução de Guyan (1965), que remove coordenadas físicas consideradas menos importantes na caracterização da dinâmica do sistema, produzindo matrizes de massa e rigidez de ordem mais baixa, sendo as coordenadas do modelo reduzido um sub-conjunto das coordenadas

do modelo original. Porém, uma desvantagem deste método é o fato de não ser geralmente aplicável a sistemas amortecidos, uma vez que ele é baseado em considerações exclusivamente estáticas.

Outro método de redução, denominado método do balanceamento interno, proposto por Moore (1981), é formulado a partir das equações de espaço de estados original e leva em conta a resposta dinâmica do sistema, sendo aplicável a sistemas amortecidos, desde que a estabilidade assintótica seja garantida pelo sistema. A desvantagem deste método reside no fato que as coordenadas do sistema reduzido não são um sub-conjunto das coordenadas do sistema original, não havendo significado físico para o sistema reduzido.

Em contraposição, Yae e Inman (1993) produziram uma versão modificada do método do balanceamento interno que mantém os aspectos desejáveis dos dois métodos citados acima, ou seja, a possibilidade de análise dinâmica com as coordenadas do sistema reduzido formando um sub-conjunto das coordenadas do sistema original.

Uma outra técnica eficiente e bastante simples de redução de modelos (Trindade, 2000) se baseia na aproximação do sistema de estado original por um sistema equivalente de dimensão consideravelmente menor, através da decomposição espectral da matriz de estado, seguida da eliminação dos modos que têm pouca contribuição à resposta dinâmica da estrutura na banda frequencial de interesse. Segue a descrição desta técnica.

7.1 Formulação da Técnica de Redução Modal

Considerando que o interesse em obter modelos de dimensão reduzida encontra-se com frequência no domínio do controle de vibrações, considera-se, no que segue, a notação usualmente empregada na teoria do controle, partindo-se das seguintes equações:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A] \{x(t)\} + [B] \{u(t)\} + \{p(t)\} \quad (7.1)$$

$$\{y(t)\} = [C] \{x(t)\}$$

onde $\{x\}$ é o vetor de estados, $\{p\}$ é o vetor das forças externas (perturbações), $\{u\}$ é o vetor dos esforços de controle (no caso das camadas restritas ativas, exercidos pelos atuadores piezelétricos), $\{y\}$ é o vetor das saídas do sistema.

Deve ser lembrado que, cada um dos 3 modelos viscoelásticos conduz a um vetor de estado $\{x\}$ diferente.

Denotam-se por $[\Lambda]$, $[X]$, $[X^*]$, as matrizes espectral e as matrizes modais de direita e de

esquerda, associados aos problemas de auto-valor:

$$[A][X] = [X][\Lambda] \quad (7.2)$$

$$[A]^T [X^*] = [X^*][\Lambda] \quad (7.3)$$

Admite-se ainda que os autovetores de direita e de esquerda sejam normalizados de modo a satisfazerem:

$$[X^*]^T [X] = [I]. \quad (7.4)$$

$$[X^*]^T [A][X] = [\Lambda] \quad (7.5)$$

Como o sistema formado por (7.1) inclui tanto as coordenadas físicas quanto as coordenadas dissipativas, pode-se esperar que, dentre as auto-soluções $[\Lambda]$, $[X]$, $[X^*]$, estarão representados tanto os modos de vibração "estruturais", correspondendo a reais formas de vibração da estrutura, quanto modos denominados "dissipativos", que estarão associados à evolução das coordenadas internas dissipativas. De acordo com Trindade (2000), o primeiro grupo constitui geralmente os modos que são mais importantes para a representação do movimento da estrutura e permite conceber a eliminação das auto-soluções associadas aos modos dissipativos e promover uma transformação modal com os modos estruturais, exclusivamente. Para este fim, as matrizes das auto-soluções são particionadas como segue:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} [\Lambda_e] & [0] \\ [0] & [\Lambda_d] \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} [X_e] & [X_d] \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$[X^*] = \begin{bmatrix} [X_e^*] & [X_d^*] \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Empregando o Teorema da Expansão, a transformação modal expressa em termos dos autovetores associados aos modos estruturais é expressa segundo:

$$\{x(t)\} = [X_e] \{c_e(t)\} \quad (7.9)$$

Introduzindo (7.9) em (7.1), pré-multiplicando a primeira equação por $[X_e^*]^T$ e fazendo uso de (7.4) e (7.5), obtém-se o sistema de equações reduzido em termos das coordenadas modais:

$$[\dot{c}_e(t)] = [\Lambda_e] \{c_e(t)\} + [X_e^*]^T [B] \{u\} + [X_e^*]^T \{p\} \quad (7.10)$$

$$\{y(t)\} = [C][X_e]\{c_e(t)\} \quad (7.11)$$

Observe-se que, este último sistema de equações tem dimensão igual ao número de auto-soluções mantidas em $[\Lambda]$, $[X]$, $[X^*]$.

Uma vez resolvidas estas equações, para as coordenadas nodais $\{c_e(t)\}$, pode-se retornar às coordenadas físicas utilizando a equação (7.9).

Uma nova etapa de redução pode ser realizada com base na banda frequencial de interesse. Dentre os modos estruturais, podem ser mantidos na transformação modal apenas aqueles que têm maior participação na resposta dinâmica do sistema na banda frequencial de interesse. Assim, particionam-se as matrizes de autosoluções segundo os autovalores que serão conservados (c) e negligenciados (g) nesta banda considerada:

$$[\Lambda_e] = \begin{bmatrix} [\Lambda_c] & [0] \\ [0] & [\Lambda_g] \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$$\{X_e\} = \begin{bmatrix} \{X_c\} & \{X_g\} \end{bmatrix}^T \quad (7.13)$$

$$\{X_e^*\} = \begin{bmatrix} \{X_c^*\} & \{X_g^*\} \end{bmatrix}^T$$

Desprezando a contribuição dos auto-valores $[X_g]$ e $[X_g^*]$ externos à banda de interesse, o sistema de equações é reduzido considerando $\{x\} \approx [X_c]\{C_c(t)\}$, sendo escrito na forma:

$$\begin{aligned} \{\dot{C}_c(t)\} &= [\Lambda_c]\{C_c(t)\} + [X_c^*]^T [B]\{u\} + [X_c^*]^T \{p\} \\ \{y(t)\} &= [C][X_c]\{C_c(t)\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

De acordo com Trindade (2000), apesar da simplicidade deste método, para sistemas muito amortecidos sua aplicação não é tão simples porque podem existir modos elásticos sobre-amortecidos ou fortemente acoplados com os modos dissipativos, complicando a separação dos modos que devem ser retidos e descartados. Assim, somente a análise dos auto-valores pode não ser suficiente e esta análise deve ser estendida aos auto-vetores. Em certos casos, pode ser interessante conservar alguns modos dissipativos para uma melhor representação do relaxamento do material viscoelástico.

Para mostrar a eficiência deste método de redução, serão apresentados a seguir, resultados de simulações numéricas para análise.

7.2 Avaliação Numérica da Técnica de Redução Modal

Será considerada nesta Seção, a placa com condições de contorno engastada-livre, tratamento assimétrico com 3 camadas, discretizada com uma malha de 3×3 elementos, apresentada na Figura 7.1. É indicado o ponto I, utilizado para determinação das amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$, as quais possibilitam avaliar a capacidade de representação do modelo reduzido na banda de frequência escolhida ($[0 - 500Hz]$). A placa tem suas propriedades físicas e geométricas dadas na Tabela 4.1, com tramento superficial completo (Configuração C), sendo o comportamento do material viscoelástico modelado pelo modelo GHM com 6 mini-osciladores.

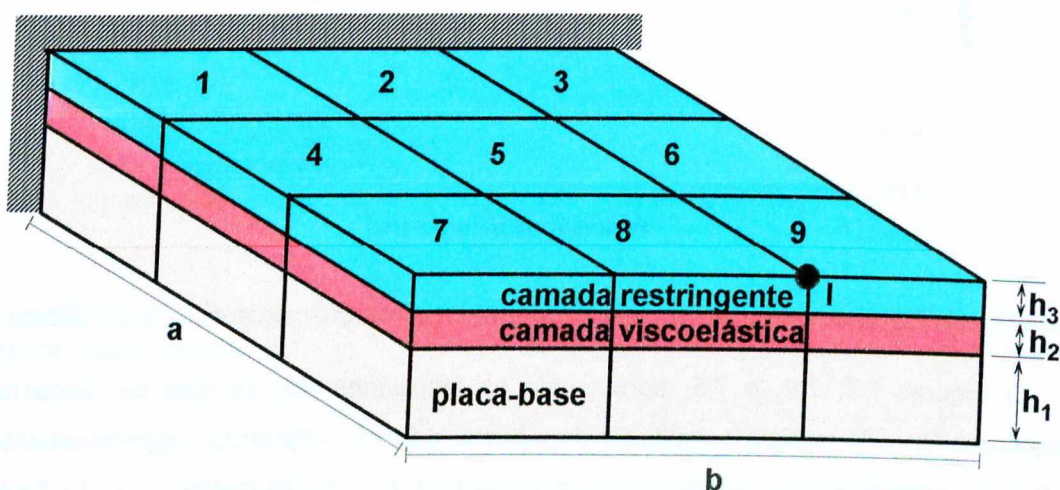


Figura 7.1- Configuração da placa engastada-livre com tratamento assimétrico completo utilizada no método de redução modal

Inicialmente foi resolvido o problema de autovalor complexo para o sistema empregando os três modelos viscoelásticos considerados neste trabalho (GHM, ADF e Derivadas Fracionárias). Para efeito de verificação da coerência entre os três modelos, são comparados, na Figura 7.2, os autovalores complexos (expressos em termos das frequências naturais e fatores de amortecimentos modais) para os modos na banda $[0 - 500Hz]$. Observa-se uma ótima aproximação entre as estimativas de frequências naturais e fatores de amortecimento modais obtidas pelo emprego dos três modelos viscoelásticos, fato que expressa a esperada equivalência da capacidade preditiva dos três modelos.

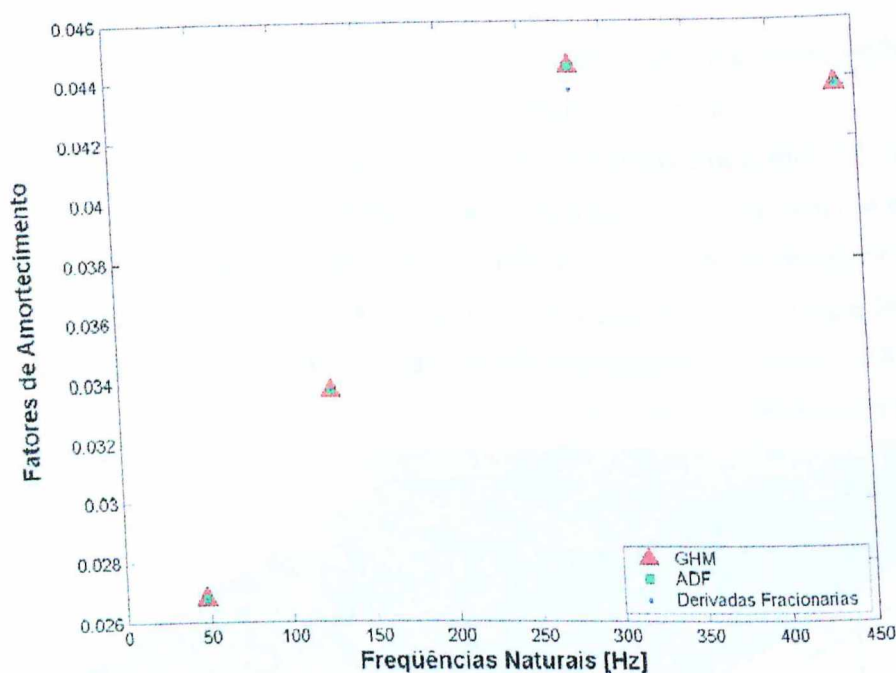


Figura 7.2- Pares modais obtidos com o emprego dos três modelos viscoelásticos

As Figuras 7.3, 7.4, e 7.5, apresentam as amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$, do modelo completo e do modelo reduzido, utilizando, respectivamente, os 2, 5 e 25 primeiros modos selecionados para a técnica de redução modal. Estas FRFs foram computadas a partir da resolução das equações (7.14) para a condição de regime harmônico permanente.

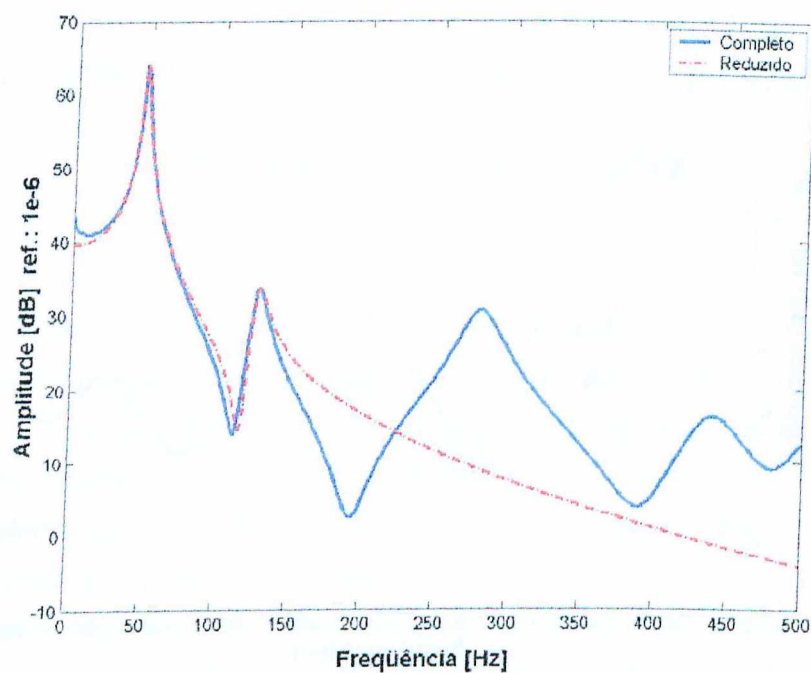


Figura 7.3- Amplitudes das funções de resposta em frequência para o modelo completo e reduzido com 2 modos

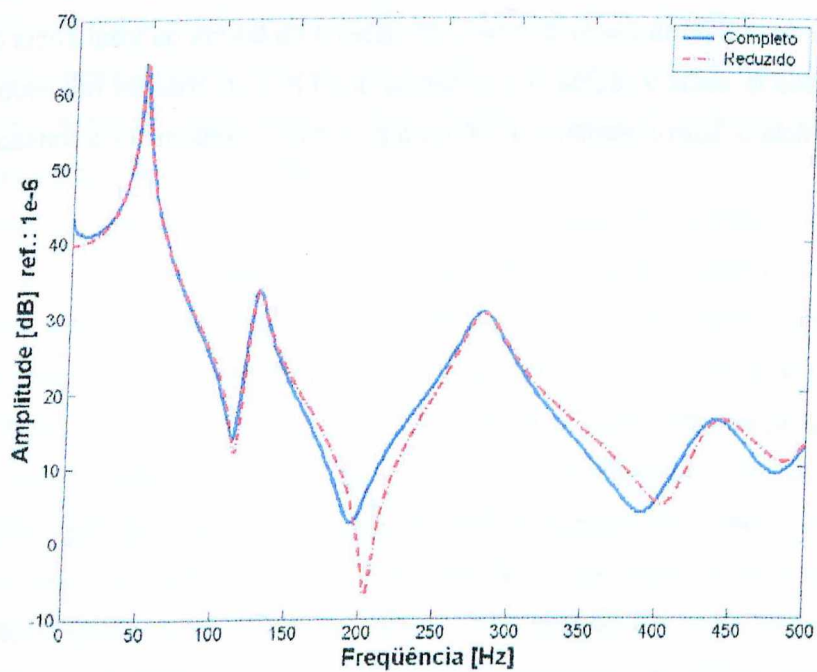


Figura 7.4- Amplitudes das funções de resposta em frequência para o modelo completo e reduzido com 5 modos

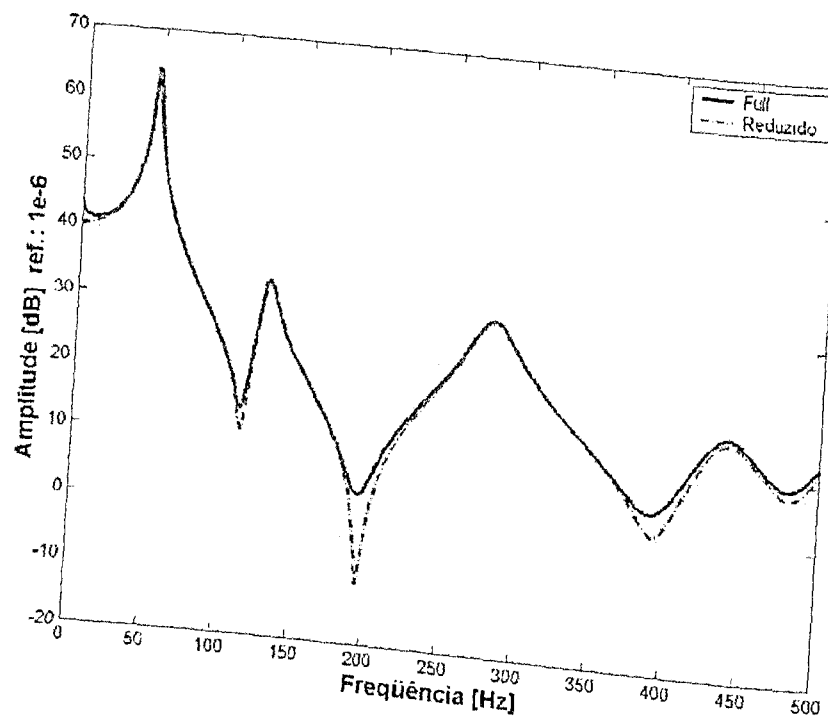


Figura 7.5- Amplitudes das funções de resposta em frequência para o modelo completo e reduzido com 25 modos

Os resultados acima comprovam a eficiência do procedimento de redução modal na caracterização do comportamento dinâmico do sistema na banda de frequência de interesse, ficando evidenciada ainda a rápida convergência das FRFs do modelo reduzido para a FRF do sistema completo, com o aumento do número de modos mantidos no processo de redução.

Capítulo 8

Sensibilidade Paramétrica de Placas Tratadas com Camada Restrita Passiva

No Capítulo 5 foi apresentado um estudo numérico objetivando caracterizar a influência de alguns parâmetros geométricos (espessuras das camadas) na eficiência do sistema de amortecimento baseado em camada retrita passiva. O procedimento empregado foi aquele consistindo na re-análise exata do modelo de elementos finitos, após a introdução de variações finitas nos valores dos parâmetros considerados. Tal procedimento é bastante oneroso, em termos do esforço computacional necessário.

No presente capítulo é desenvolvida uma estratégia alternativa, que constitui uma importante ferramenta de análise e projeto de sistemas mecânicos: trata-se de **análise de sensibilidade**, que permite avaliar, de forma aproximada, a influência de variações paramétricas nas respostas mecânicas (estáticas e dinâmicas) de tais sistemas.

A análise de sensibilidade consiste, basicamente, na avaliação das derivadas das respostas do sistema em relação aos parâmetros de interesse, limitando-se, geralmente, às derivadas de primeira ordem e pode ser associada a diferentes tipos de respostas mecânicas: deslocamentos estáticos, autovalores e autovetores, funções de resposta em frequência e respostas temporais (Haug et al., 1986).

De acordo com Murthy e Haftka (1988), o projeto ótimo de sistemas tem uma ligação estreita com a análise de sensibilidade, pois a grande maioria dos algoritmos de otimização exigem muitas avaliações da resposta do sistema e as derivadas podem ser usadas para aproximar a resposta do sistema modificado, por variações nos parâmetros, reduzindo significativamente o custo de uma re-análise, especialmente para sistemas de ordem elevada.

Existem várias outras aplicações da análise de sensibilidade, como por exemplo, identificação de sistemas (Collins et al, 1974) e controle (Prasad e Emerson, 1982).

Dentre as técnicas para o cálculo das sensibilidades de auto-soluções destacam-se o **Método Modal** (Fox e Kapoor, 1968), o **Método de Nelson** (Nelson, 1976) e o **Método Modal Melhorado** (Lim et al., 1987). O método modal necessita do cálculo de todas as auto-soluções do sistema, o que torna o custo computacional bastante elevado, principalmente em sistemas de alta ordem. O método proposto por Nelson calcula as auto-derivadas do r -ésimo modo usando apenas os parâmetros modais para aquele modo; contudo, para cada modo é

necessário inverter uma matriz de ordem $N-1$, onde N é a ordem do sistema, na resolução dos sistema de equações algébricas lineares envolvidas. Já o método modal melhorado calcula as auto-derivadas aproximadamente, valendo-se dos modos de ordem mais baixas e da matriz de flexibilidade dinâmica.

Nas seções seguintes é desenvolvida a formulação pertinente à análise de sensibilidade de auto-soluções complexas e de funções de resposta em frequência, com respeito a alguns parâmetros relevantes de projeto de camadas restritas passivas. Em especial, é proposta uma formulação para a análise de sensibilidade de funções de resposta em frequência em relação à temperatura que, como se sabe, é um fator que tem significativa influência nas características viscoelásticas.

8.1 Definição de Sensibilidade Paramétrica - Avaliação por Diferenças Finitas

Para uma dada estrutura, as matrizes de massa $[M]$, amortecimento $[C]$, e rigidez $[K]$, contém todas as suas informações a respeito das características físicas e geométricas presentes no modelo de elementos finitos.

Supondo que um determinado parâmetro p_i apareça explicitamente nas matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$, a dependência entre as respostas da estrutura (respostas estáticas, respostas no domínio do tempo, respostas no domínio da frequência, autosoluções) com relação a este parâmetro genérico pode ser expressa simbolicamente na forma:

$$r = r([M(p_i)], [C(p_i)], [K(p_i)]) \quad (8.1)$$

Define-se a sensibilidade da resposta estrutural com respeito a um dado parâmetro p_i , como sendo:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial p_i} \right|_{p_i^0} = \lim_{\Delta p_i \rightarrow 0} \left[\frac{r([M(p_i^0 + \Delta p_i)], [C(p_i^0 + \Delta p_i)], [K(p_i^0 + \Delta p_i)])}{\Delta p_i} - \frac{r([M(p_i^0)], [C(p_i^0)], [K(p_i^0)])}{\Delta p_i} \right] \quad (8.2)$$

onde Δp_i é um acréscimo infinitesimal aplicado ao valor inicial parâmetro p_i^0 .

De maneira geral, a sensibilidade pode ser calculada a partir do modelo de elementos finitos de duas maneiras diferentes: a primeira, por meio de diferenças finitas, onde a sensibilidade da resposta com respeito a um dado parâmetro p_i é calculada pela resolução sucessiva das equações do modelo primeiro para o valor $p_i = p_i^0$ e em seguida para $p_i = p_i^0 + \Delta p_i$. De posse das respostas obtidas para esses valores, a sensibilidade pode ser

estimada como:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial p_i} \right|_{p_i^0} \approx \left[\frac{r([M(p_i^0 + \Delta p_i)], [C(p_i^0 + \Delta p_i)], [K(p_i^0 + \Delta p_i)])}{\Delta p_i} - \frac{r([M(p_i^0)], [C(p_i^0)], [K(p_i^0)])}{\Delta p_i} \right] \quad (8.3)$$

A outra maneira consiste em calcular analiticamente as derivadas das equações do modelo de elementos finitos com respeito aos parâmetros de interesse. Este método, é desenvolvido nas seções seguintes para o caso de placas tratadas com camadas restritas passivas.

8.2 Sensibilidade Paramétrica de Autovalores Complexos

Considere-se o sistema de equações diferenciais de primeira ordem representando o modelo matemático obtido pela técnica de elementos finitos, de uma placa tratada com camada restrita passiva, dado pela equação (3.83), repetida abaixo:

$$\{\dot{X}(t)\} = [A] \{X(t)\} \quad (8.4)$$

Observe-se que a matriz $[A]$, e portanto as respostas dinâmicas obtidas através da resolução do sistema de equações (8.4), são funções de parâmetros físicos e geométricos do sistema, em relação aos quais se deseja avaliar as sensibilidades.

Sendo $[A]$ uma matriz não simétrica, são associados dois problemas de autovalor complexos:

$$[A] \{X_r\} = s_r \{X_r\} \quad (8.5)$$

e

$$[A]^T \{X_r^*\} = s_r^* \{X_r^*\} \quad (8.6)$$

onde os pares $(\{X_r\}, s_r)$, $(\{X_r^*\}, s_r^*)$ são as auto-soluções de direita e de esquerda, respectivamente. Pode-se mostrar que vale a relação $s_r = s_r^*$.

Admite-se que os autovalores sejam todos distintos e que os autovetores sejam normalizados de modo a satisfazerem as relações:

$$\{X_r^*\}^T \{X_r\} = 1$$

$$\{X_r^*\}^T [A] \{X_r\} = s_r$$

Lancaster (1964) obteve a seguinte expressão para a primeira derivada dos autovalores

da matriz $[A]$ em relação a um parâmetro genérico p_i :

$$\frac{\partial s_r}{\partial p_i} = \frac{\{X_r^*\}^T \left[\frac{\partial A}{\partial p_i} \right] \{X_r\}}{\{X_r^*\}^T \{X_r\}} \quad (8.7)$$

Considerando que, para pequenos valores de amortecimento modal, os autovalores complexos podem ser expressos segundo:

$$s_r = -\zeta_r \omega_r + i\omega_r \quad (8.8)$$

onde ω_r e ζ_r são, respectivamente, a frequência natural e o fator de amortecimento modal do r -ésimo modo, derivando (8.8) pode-se escrever:

$$\frac{\partial s_r}{\partial p_i} = - \left(\frac{\partial \zeta_r}{\partial p_i} \omega_r + \zeta_r \frac{\partial \omega_r}{\partial p_i} \right) + i \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial p_i} \right) \quad (8.9)$$

Donde obtém-se as sensibilidades da frequência natural e o fator de amortecimento modal em relação ao parâmetro p_i , expressos sob as formas:

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial p_i} = \text{Im} \left(\frac{\partial s_r}{\partial p_i} \right) \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial \zeta_r}{\partial p_i} = \frac{\text{Re} \left(\frac{\partial s_r}{\partial p_i} \right) + \zeta_r \text{Im} \left(\frac{\partial s_r}{\partial p_i} \right)}{-\omega_r} \quad (8.11)$$

Na equação (8.7) é indicada a derivação da matriz $[A]$ em relação ao parâmetro genérico p_i . Admitindo que tal parâmetro intervenha explicitamente na matriz de massa e/ou na matriz de rigidez, a partir das matrizes de estado associadas aos modelos GHM, ADF e de Derivadas Fracionárias, definidas nas equações (3.84), (3.86) e (3.69), respectivamente, as derivadas de $[A]$ são computadas de acordo com as expressões:

Para o modelo GHM:

$$\frac{\partial [A]}{\partial p_i} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \cdots & [0] & -\frac{\partial \{[M]^{-1}([K_e] + [K_v])\}}{\partial p_i} & \omega_1^2 \frac{\partial \{[\Lambda]^{-1}[R]^T\}}{\partial p_i} & \cdots & \omega_{N_G}^2 \frac{\partial \{[\Lambda]^{-1}[R]^T\}}{\partial p_i} \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & \alpha_1 \frac{\partial \{[M]^{-1}[R]\}}{\partial p_i} & [0] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & \frac{\partial \{\alpha_{N_G}[M]^{-1}[R]\}}{\partial p_i} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] \end{bmatrix}^T \quad (8.12)$$

Para o modelo ADF:

$$\frac{\partial [A]}{\partial p_i} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ \frac{\Omega_1}{C_1} \frac{\partial \{[A]^{-1}[R]^T\}}{\partial p_i} & [0] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ \frac{\Omega_2}{C_2} \frac{\partial \{[A]^{-1}[R]^T\}}{\partial p_i} & [0] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Omega_{N_A}}{C_{N_A}} \frac{\partial \{[A]^{-1}[R]^T\}}{\partial p_i} & [0] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ -\frac{\partial \{[M]^{-1}([K_e] + [K_v])\}}{\partial p_i} & \frac{\partial \{[M]^{-1}[R]\}}{\partial p_i} & \frac{\partial \{[M]^{-1}[R]\}}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial \{[M]^{-1}[R]\}}{\partial p_i} & [0] \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Para o modelo de Derivadas Fracionárias:

$$\frac{\partial [A]}{\partial p_i} = \sum_{j=0}^J s_m^j \frac{\partial [A_j]}{\partial p_i} \quad (8.14)$$

8.3 Sensibilidade Paramétrica de Funções de Resposta em Frequência

Uma análise interessante pode ser feita acerca da sensibilidade de funções de resposta em frequência dos modelos de placa tratada com camada restrita passiva em relação a parâmetros físicos e geométricos.

De acordo com a equação (2.139), a matriz de rigidez dinâmica de uma placa multicamadas, com a inclusão do efeito viscoelástico, é dada por:

$$[Z(\omega)] = [K(\omega)] - \omega^2 [M] \quad (8.15)$$

onde as matrizes $[K(\omega)]$ e $[M]$ são respectivamente as matrizes de rigidez e massa dadas em (2.139).

A matriz de flexibilidade dinâmica, ou matriz de FRFs, $[H]$, é definida segundo:

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} \quad (8.16)$$

Esta definição conduz à relação:

$$[H(\omega)][Z(\omega)] = [I] \quad (8.17)$$

Derivando (8.17) em relação a um dado parâmetro p_i , obtém-se a relação:

$$\frac{\partial [H(\omega)]}{\partial p_i} = -[H(\omega)] \left(\frac{\partial}{\partial p_i} [K(\omega)] - \omega^2 \frac{\partial}{\partial p_i} [M] \right) [H(\omega)] \quad (8.18)$$

8.4 Sensibilidade das Funções de Resposta em Frequência em Relação à Temperatura

Conforme mencionado no Capítulo 3, a temperatura tem expressiva influência sobre as características mecânicas dos materiais viscoelásticos. Torna-se, pois, de capital importância, avaliar a sensibilidade das respostas dinâmicas de estruturas tratadas com estes materiais em relação à temperatura.

Os modelos viscoelásticos considerados nos capítulos precedentes não exibem explicitamente a dependência das características viscoelásticas em relação à temperatura. Assim, nesta seção, propõe-se um procedimento para avaliar a sensibilidade de FRFs em relação à temperatura, fazendo uso do Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura, e do conceito de frequência reduzida, apresentados na Seção 3.6.

A frequência reduzida é definida segundo:

$$\omega_r = \alpha_T(T) \omega \quad (8.19)$$

onde α_T é uma função da temperatura, que pode ser identificada a partir de ensaios experimentais para um tipo específico de material viscoelástico.

O módulo complexo, para uma dada frequência e temperatura, pode então ser avaliado sob a forma:

$$G(\omega, T) = G(\omega_r, T_z) = G(\alpha_T \omega, T_z) \quad (8.20)$$

onde T_z é o valor da temperatura de referência.

Expressando a matriz de rigidez em termos da soma das matrizes correspondentes às sub-estruturas elástica e viscoelástica, tem-se:

$$[K(\omega, T)] = [K_e] + G(\alpha_T \omega, T_z) [\bar{K}_v] \quad (8.21)$$

e as matrizes de rigidez e flexibilidade dinâmica se escrevem:

$$[Z(\omega, T)] = [K_e] + G(\alpha_T \omega, T_z) [\bar{K}_v] - \omega^2 [M] \quad (8.22)$$

$$[H(\omega, T)] = ([K_e] + G(\alpha_T \omega, T_z) [\bar{K}_v] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (8.23)$$

Derivando a relação:

$$[H(\omega, T)] [Z(\omega, T)] = [I] \quad (8.24)$$

em relação à temperatura, faz-se o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{\partial [H(\omega, T)]}{\partial T} [Z(\omega, T)] + [H(\omega, T)] \frac{\partial [Z(\omega, T)]}{\partial T} = [0]$$

$$\frac{\partial [H(\omega, T)]}{\partial T} = -[H(\omega, T)] \frac{\partial [Z(\omega, T)]}{\partial T} [H(\omega, T)] \quad (8.25)$$

Combinando as equações (8.22) e (8.25), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [H(\omega, T)]}{\partial T} &= ([K_e] + G(\alpha_T \omega, T_z) [\bar{K}_v] - \omega^2 [M])^{-1} \times \\ &\times \left(\frac{\partial G(\alpha_T \omega, T_z)}{\partial T} [\bar{K}_v] \right) ([K_e] + G(\alpha_T \omega, T_z) [\bar{K}_v] - \omega^2 [M])^{-1} \end{aligned} \quad (8.26)$$

Empregando a relação (8.19), pode-se escrever:

$$\frac{\partial G(\alpha_T \omega, T_z)}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial \omega_r} \frac{\partial \alpha_T}{\partial T} \omega \quad (8.27)$$

Combinando as equações (8.26) e (8.27), escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [H(\omega, T)]}{\partial T} &= ([K_e] + G(\alpha_T \omega, T_z) [\bar{K}_v] - \omega^2 [M])^{-1} \times \\ &\times \left(\frac{\partial G}{\partial \omega_r} \frac{\partial \alpha_T}{\partial T} \omega [\bar{K}_v] \right) ([K_e] + G(\alpha_T \omega, T_z) [\bar{K}_v] - \omega^2 [M])^{-1} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Esta última expressão pode ser utilizada para computar as funções complexas da frequência que representam as sensibilidades das FRFs em relação à temperatura.

8.5 Aplicações Numéricas da Sensibilidade de Placas Tratadas com Camada Restrita Passiva

Nesta seção, são apresentadas avaliações numéricas da sensibilidade de funções de resposta em frequência com respeito às espessuras das camadas restritivas e viscoelásticas de placas tratadas com camada restrita passiva assimétrica. Também são apresentadas avaliações numéricas da sensibilidade das funções de resposta em frequência em relação à temperatura, para placas tratadas com camada restrita passiva assimétrica

8.5.1 Sensibilidade da FRF com Respeito às Espessuras das Camadas

Para as simulações numéricas foi considerada a placa com tratamento completo assimétrico (3 camadas) (configuração C) onde as propriedades físicas e geométricas são as mesmas das avaliações experimentais (Tabela 4.1).

Utilizou-se o material 242F01 da 3M[®] na camada viscoelástica e o modelo ADF para a modelagem do efeito viscoelástico. Foram utilizados 6 campos de deslocamento anelástico, cujos parâmetros são dados na Tabela 8.1.

A placa de dimensões de 0,2m e 0,25m, novamente é discretizada por elementos finitos

Tabela 8.1- Parâmetros dos Campos de Deslocamento Anelástico

ADF	1	2	3	4	5	6
Δ_i	0,5029924	1,085542	1,549004	8,539322	65,25963	170,1102
Ω_i	0,20111832	3,2663729	4,1381493	30,362244	401,23746	6145,8787
C_i	493,1419	228,5003	160,133	29,04758	3,80092	1,458153
G_r [MPa]	0,076205					
G_u [MPa]	18,9023					

com uma malha de 8 por 10 elementos, (80 elementos finitos e 99 nós). O ponto de determinação das amplitudes das funções de resposta em frequência é representado por I na Figura 4.2.

As amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$, juntamente com as sensibilidades destas com relação à variações na espessura da camada restrigente, em termos de suas partes real e imaginária, foram calculados de acordo com a equação (8.18), sendo os resultados mostrados na Figura 8.1. São apresentadas também a título de referência, as partes real e imaginária da sensibilidade determinada por meio de diferenças finitas, tendo sido adotada uma variação de 1% do valor nominal do parâmetro em questão.

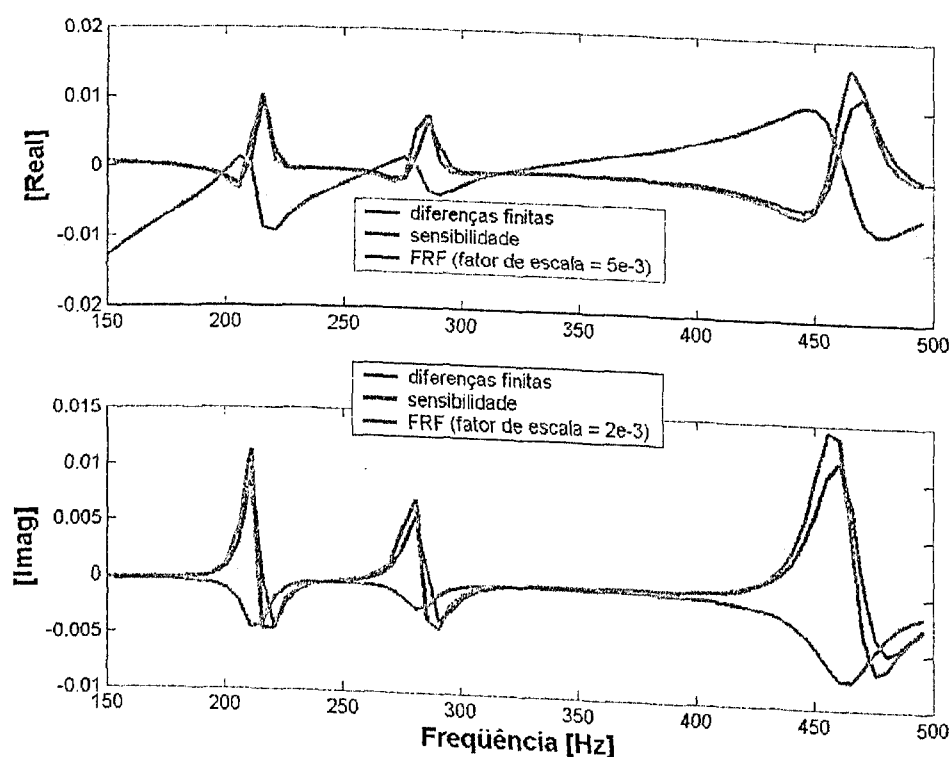


Figura 8.1- Sensibilidade da FRF com relação à espessura da camada restrigente (tratamento completo assimétrico)

As curvas acima indicam que o modo mais sensível às variações da espessura da camada

restringente é o terceiro, seguido pelos primeiro e segundo modos. Observe-se ainda uma boa aproximação entre os valores da sensibilidade obtidos pela técnica de diferenças finitas e por derivação.

As funções de resposta em frequência $H_{I,I}$, e as sensibilidades determinadas por (8.18) e pelo método de diferenças finitas, com relação à variações na espessura da camada viscoelástica, são apresentadas na Figura 8.2.

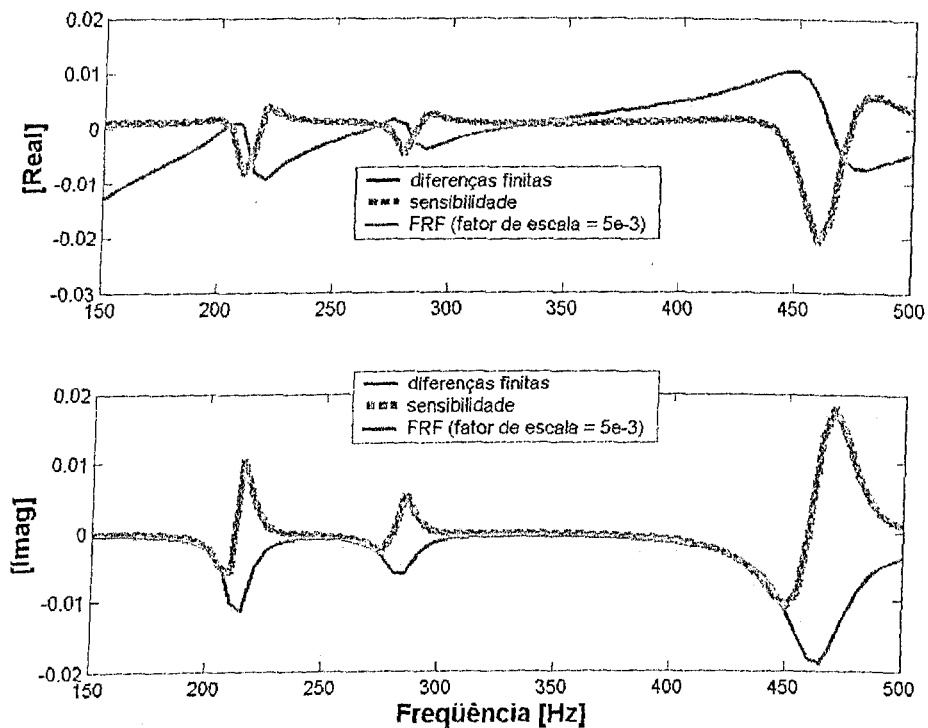


Figura 8.2- Sensibilidade da FRF com relação à espessura da camada viscoelástica (tratamento completo assimétrico)

Observa-se novamente, que o modo mais sensível às variações da espessura da camada viscoelástica é o terceiro, seguido pelo primeiro e depois o segundo.

8.5.2 Sensibilidade da FRF com Respeito à Temperatura

Nesta seção, busca-se avaliar a técnica de análise de sensibilidade formulada na Seção 8.3. Para avaliar o efeito da variação de temperatura, utilizou-se o material ISD112[®] da 3M, na faixa de temperatura $[200^{\circ}K - 360^{\circ}K]$.

Drake e Soovere (1984), propõem a seguinte expressão para o fator de deslocamento, α_T ,

para o material ISD112[®] da 3M, na faixa de temperatura $[200^\circ K - 360^\circ K]$:

$$\log(\alpha_T) = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_z} \right) + 2,303 \left(\frac{2a}{T_z} - b \right) \log \left(\frac{T}{T_z} \right) + \left(\frac{b}{T_z} - \frac{a}{T_z^2} - S_{AZ} \right) (T - T_z) \quad (8.29)$$

e, portanto:

$$\alpha_T = 10^{a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_z} \right) + 2,303 \left(\frac{2a}{T_z} - b \right) \log \left(\frac{T}{T_z} \right) + \left(\frac{b}{T_z} - \frac{a}{T_z^2} - S_{AZ} \right) (T - T_z)} \quad (8.30)$$

onde os valores das constantes são dados na Tabela 8.2:

Tabela 8.2- Constantes da expressão do fator de deslocamento para o material ISD112

$T_z = 290^\circ K$	$T_L = 210^\circ K$	$T_H = 360^\circ K$	
$S_{AZ} = 0,05956^\circ K^{-1}$	$S_{AL} = 0,1474^\circ K^{-1}$	$S_{AH} = 0,009725^\circ K^{-1}$	
$C_A = \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_z} \right)^2$	$C_B = \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_z} \right)$	$C_C = S_{AL} - S_{AZ}$	
$D_A = \left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_z} \right)^2$	$D_B = \left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_z} \right)$	$D_C = S_{AH} - S_{AZ}$	$D_E = D_B C_A - C_B D_A$
	$a = \frac{D_B C_C - C_B D_C}{D_E}$	$b = \frac{C_A D_C - D_A C_C}{D_E}$	

A expressão para o módulo complexo do material viscoelástico é dada por:

$$G(\omega_r) = G'(\omega_r) + iG''(\omega_r) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_5 \left(\frac{i\omega_r}{B_3} \right)^{-B_6} + \left(\frac{i\omega_r}{B_3} \right)^{-B_4}} \quad (8.31)$$

sendo os valores de B_i ($i = 1, \dots, 6$), fornecidos na Tabela 8.3:

Tabela 8.3- Constantes do módulo complexo para o material ISD112

$B_1 [MPa]$	$B_2 [MPa]$	$B_3 [MPa]$	B_4	B_5	B_6
0,4307	1200	$0,1543 \times 10^7$	0,6847	3,241	0,18

Com o intuito de explicitar G' e G'' em função da frequência reduzida ω_r , escreve-se (8.31) na seguinte forma:

$$G(\omega_r) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_5 \omega_r^{-B_6} B_3^{B_6} e^{-\frac{iB_6\pi}{2}} + \omega_r^{-B_4} B_3^{B_4} e^{-\frac{iB_4\pi}{2}}} \quad (8.32)$$

Derivando (8.30) com respeito a T , e (8.32) com respeito a ω_r , obtém-se, respectivamente, as expressões:

$$\frac{\partial \alpha_T}{\partial T} = \alpha_T \left(-\frac{a}{T^2} + 2,303 \frac{2\frac{a}{T_z} - b}{T} + \frac{b}{T_z} - \frac{a}{T_z^2} - S_{AZ} \right) \quad (8.33)$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial \omega_r} = -\frac{B_2 \left(-B_5 \omega_r^{-B_6} \frac{B_6}{\omega_r} B_3^{B_6} e^{-\frac{iB_6\pi}{2}} - \omega_r^{-B_4} \frac{B_4}{\omega_r} B_3^{B_4} e^{-\frac{iB_4\pi}{2}} \right)}{\left(1 + B_5 \omega_r^{-B_6} B_3^{B_6} e^{-\frac{iB_6\pi}{2}} + \omega_r^{-B_4} B_3^{B_4} e^{-\frac{iB_4\pi}{2}} \right)^2} \quad (8.34)$$

As expressões (8.33) e (8.34), são necessárias para o cálculo da sensibilidade das funções de resposta em frequência, dada em (8.28).

Aplicou-se o material viscoelástico, considerando um tramento assimétrico completo

(configuração C), na placa com as propriedades e dimensões utilizadas validações experimentais do Capítulo 4, e as amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$ são obtidas considerando-se o ponto I indicado na Figura 4.2.

São consideradas três temperaturas, a saber, $298^{\circ}K = 25^{\circ}C$, $303^{\circ}K = 30^{\circ}C$ e $308^{\circ}K = 35^{\circ}C$.

A Figura 8.3 mostra as amplitudes das funções de resposta em frequência $H_{I,I}$, para cada uma dos três valores de temperatura considerados, evidenciando a influência da variação da temperatura no comportamento do sistema tratado com camada restrita passiva.

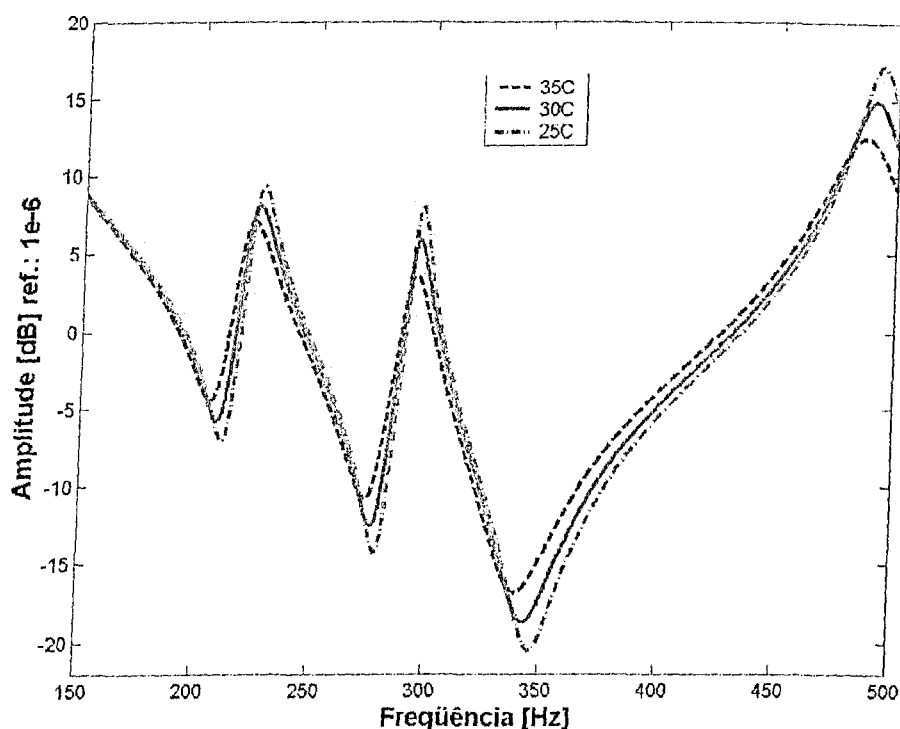


Figura 8.3- Influência da variação de temperatura nas amplitudes das FRF para as temperaturas de 25°C, 30°C e 35°C (tratamento assimétrico)

As funções de resposta em frequência $H_{I,I}$, juntamente com a sensibilidade obtida por meio de (8.18) e por diferenças finitas (calculadas considerando variações de 1% dos valores normais da temperatura), em termos de suas partes real e imaginária podem ser observadas nas Figuras 8.4, 8.5 e 8.6, respectivamente, para as temperaturas 25°C, 30°C e 35°C.

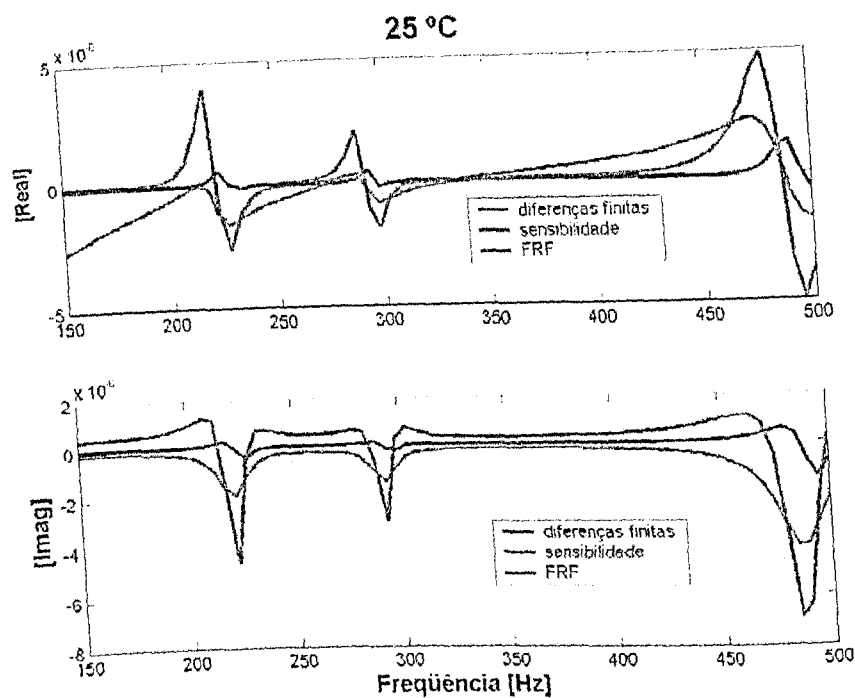


Figura 8.4- Sensibilidade da FRF em relação à variação de temperatura para tratamento assimétrico de (25°C)

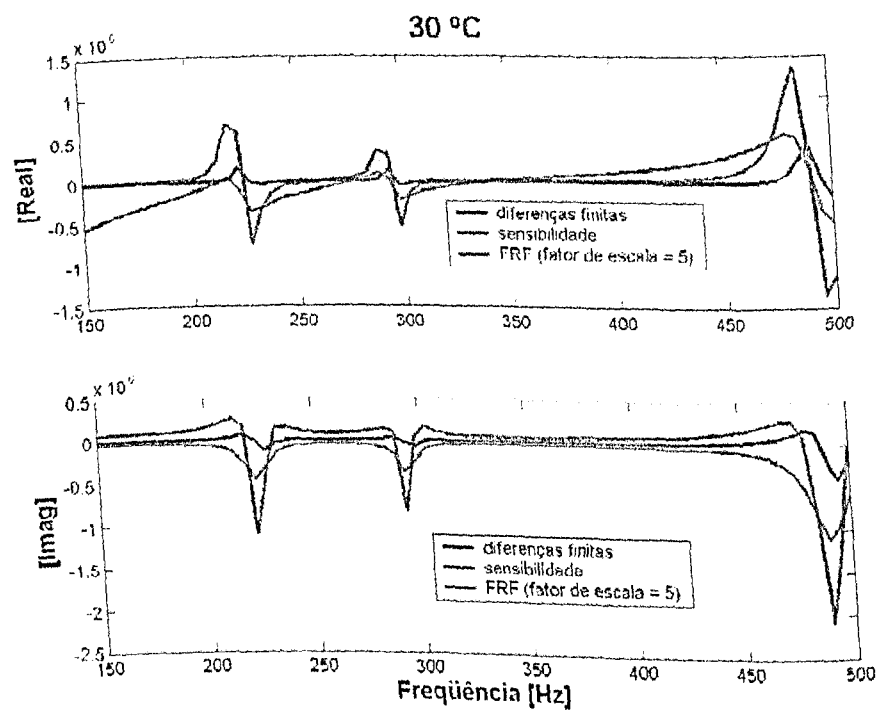


Figura 8.5- Sensibilidade da FRF em relação à variação de temperatura para tratamento assimétrico de (30°C)

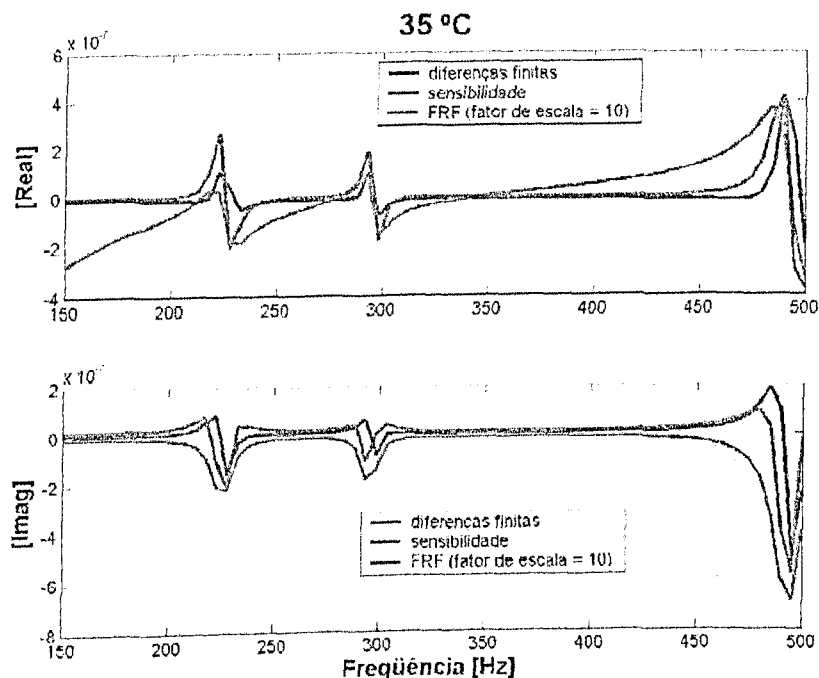


Figura 8.6- Sensibilidade da FRF em relação à variação de temperatura para tratamento assimétrico de (35°C)

Observa-se, a partir desta análise de sensibilidade que, seguindo a mesma tendência apresentada na análise de sensibilidade de FRF em relação à espessura das camadas restringente e viscoelástica, o terceiro modo é o mais sensível, seguido pelo primeiro e terceiro modos.

Notam-se ainda diferenças entre os valores das sensibilidades calculadas por diferenças finitas e aquelas calculadas através da equação (8.28) sendo estas diferenças mais significativas para os valores mais baixos de temperaturas. Observa-se, não obstante, as mesmas tendências de variação em ambas as curvas de sensibilidade.

Capítulo 9

Conclusões e Propostas de Continuidade

Com a realização do trabalho de pesquisa reportado neste Memorial buscou-se contribuir para o avanço do conhecimento acerca dos sistemas de amortecimento baseados em camada restrita passiva, tendo sido enfatizados diferentes aspectos da modelagem e projeto ótimo destes sistemas. No âmbito dos estudos relacionados ao tema em questão, pode-se destacar as seguintes contribuições:

1ª) Realização de estudos tratando da análise quantitativa da influência de variações paramétricas sobre o desempenho de placas sujeitas a tratamentos por camadas restritas passivas: assimétrico com três camadas e simétrico com cinco camadas.

2ª) Incorporação sistemática de modelos viscoelásticos modernos: GHM, ADF e das Derivadas Fracionárias em modelos de elementos finitos de placas multi-camadas.

3ª) Proposição de uma metodologia de otimização de posicionamento de tratamento viscoelástico superficial baseado em Algoritmos Genéticos.

4ª) Proposição de uma metodologia de análise de sensibilidade paramétrica e em relação à temperatura, de placas tratadas com camada restrita passiva.

Com base nos resultados obtidos, podem-se enunciar as seguintes conclusões específicas:

A) Os procedimentos de modelagem desenvolvidos mostraram ser eficientes na caracterização do comportamento dinâmico dos sistemas estruturais analisados, especialmente na representação da dependência das características dinâmicas dos materiais viscoelásticos em relação à frequência e à temperatura.

B) Os modelos viscoelásticos estudados, GHM, ADF e das Derivadas Fracionárias, mostraram-se eficientes para a caracterização do comportamento dinâmico, de materiais viscoelásticos incorporados em modelos de elementos finitos. A escolha dentre um ou outro destes modelos para uma dada aplicação deve ser orientada pelas vantagens e inconvenientes que cada um deles apresenta. Em relação ao número de parâmetros necessários para ajuste da função módulo, o modelo das Derivadas Fracionárias permitiu uma melhor qualidade de ajuste com um número relativamente pequeno de parâmetros, para os materiais estudados. Entretanto, o sistema de equações do movimento obtido para alguns valores dos parâmetros fracionários apresentou ordem muito superior às dos sistemas de equações do movimento dos dois outros modelos. Apesar da semelhança entre os modelos GHM e ADF, devido à

correspondência entre os significados das variáveis dissipativas destes, o utilização do modelo ADF leva a sistemas de equações de estado de ordem significativamente menor que os do modelo GHM. Isto reflete principalmente sobre o esforço computacional necessário para as análises numéricas realizadas a partir destas equações.

C) O uso de tratamentos por camada restrita passiva é uma estratégia eficiente para o controle passivo de vibrações, apesar do grau de eficiência depender de diversos fatores, tais como:

- o tipo de material viscoelástico utilizado, com respeito à dependência de suas propriedades em relação à temperatura e à frequência;
- as dimensões e a geometria de posicionamento dos tratamentos por camada restrita passiva utilizados;
- a banda de frequência de interesse.

O conjunto de variáveis de projeto de um sistema de controle de vibrações baseado no uso de camada restrita passiva mostrou-se ter influência direta sobre o grau de amortecimento a ser obtido, fato que foi evidenciado pelo estudo realizado acerca da influência de alguns parâmetros geométricos sobre o desempenho deste sistema de controle passivo. Tal constatação motivou a proposição de uma metodologia de otimização do posicionamento de tratamento viscoelástico parcial empregando Algoritmos Genéticos.

Foi desenvolvido o projeto ótimo referente ao posicionamento do tratamento superficial, levando-se em conta a banda frequencial de interesse objetivando uma maior eficiência do projeto de tratamento por camada restrita passiva. Com respeito aos resultados obtidos no processo de otimização, destaca-se:

- a eficiência do tratamento simétrico é superior em relação ao tratamento assimétrico com respeito aos níveis de amortecimento estrutural;
- o procedimento de otimização discreta usando Algoritmos Genéticos mostrou-se eficiente, apesar de certa dificuldade na definição dos parâmetros do algoritmo de otimização, tais como, tamanho da população, número de gerações, e largura das faixas contendo os modos de interesse;
- as configurações ótimas obtidas apresentam, sistematicamente, amortecimento maior que as configurações propostas aleatoriamente;
- levando-se em conta a menor quantidade de massa acrescentada à estrutura, o

amortecimento efetivo introduzido no sistema é bastante significativo, quando comparado ao tratamento completo;

A otimização discreta não se apresenta como a solução definitiva para o problema de aumento do desempenho do sistema. Porém, com respeito à introdução de amortecimento na estrutura, os resultados apresentados usando a estratégia puramente discreta foram considerados satisfatórios.

Dentre as várias técnicas de redução de modelos, foi utilizada a técnica de redução de modelos baseada na decomposição espectral da matriz de estado, seguida da eliminação dos modos que têm pouca contribuição à resposta dinâmica da estrutura na banda frequencial de interesse. Embora tenha se mostrado eficiente e de fácil implementação, para sistemas fortemente amortecidos esta técnica pode apresentar dificuldade de escolha de quais modos devem ser retidos e quais devem descartados, uma vez que podem existir modos elásticos sobre-amortecidos ou fortemente acoplados com os correspondentes graus de liberdade dissipativos adicionados.

A análise de sensibilidades desenvolvidas mostra-se como uma importante ferramenta de análise e projeto de sistemas mecânicos, permitindo avaliar, de forma aproximada, a influência de variações paramétricas e ambientais (temperatura) sobre as respostas mecânicas de tais sistemas.

A realização do trabalho de pesquisa aqui reportado permitiu identificar importantes tópicos a serem investigados:

- extensão dos procedimentos de modelagem a estruturas mais complexas, tais como estruturas automotivas e aeroespaciais.
- implementação de procedimentos numéricos mais eficientes, especialmente adaptados para resolução das equações de movimento de sistemas com amortecimento viscoelástico;
- desenvolvimento de procedimentos de ajuste de modelos de elementos finitos a partir de respostas experimentais, especialmente adaptadas a estruturas tratadas com camada restrita passiva.
- extensão da metodologia de projeto ótimo, visando obter configurações otimizadas por meio de otimização completa discreto-contínua, com o objetivo de uma máxima atenuação de vibrações, avaliando simultaneamente o posicionamento e os parâmetros físicos do sistema;

- implementação de procedimentos de controle híbrido passivo-ativo empregando camadas restritas ativas, baseados nos modelos desenvolvidos.

Capítulo 10

Referências Bibliográficas

- Agnes, G.; Napolitano, K., 1993, "Active Constrained Layer Viscoelastic Damping", Proceedings of 34th SDM Conference, pp 3499-3506.
- Alam, N.; Asnani, N. T., 1984, "Vibration and Damping Analysis of Multilayered Rectangular Plates With Constrained Viscolastic Layers", Journal of Sound and Vibration, **97**(4), pp 597-614.
- Alam, N.; Asnani, N. T., 1987, "Refined Vibration and Damping Analysis of Multilayred Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration, **119**(2), pp 347-362.
- Azvine, B.; Tomlinsom, G. R.; Wynne, R. J., 1995, "Use of Active Constrained-Layer Damping for Controlling Resonant Vibration", Smart Materials and Structures, Vol 4, pp 1-6.
- Bagley, R. L.; Torvik, P. J., 1979, "A Generalized Derivative Model for an Elastomer Damper", The Shock and Vibration Bulletin, No. 49, Pt. 2, pp 135-143.
- Bagley, R. L.; Torvik, P. J., 1983, "Fractional Calculus - A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures", AIAA Journal, Vol. 21, No. 5, pp 741-748.
- Bagley, R. L.; Torvik, P. J., 1985, "Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures", AIAA Journal, Vol. 23, No. 6, pp 918-925.
- Banks, H. T., 1996, "Smart Materials Structures - Modelling, Estimation and Control", John Wiley & Sons-Mason, Inc., Research in Applied Mathematics, Series Editors: P.G. Ciarlert and J.L. Lions.
- Baz, A., 1993, "Active Constrained Layer Damping", in Proceedings for Damping '93, Vol 3, IBB, pp 1-23.
- Baz, A., 1996, "On the Energy Dissipation Characteristics of Active Constrained Layer Damping", ASME Active Control of Vibration and Noise, Vol DE-93, pp 239-246.
- Baz, A., 1997, "Boundary Control of Beams Using Active Constrained Layer Damping", Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME, Vol II 9, Iss 2, pp 166-172.
- Baz, A., 1997a, "Optimization of Energy Dissipation Characteristics of Active Constrained Layer Damping", Smart Materials & Structures, Vol 6, Iss 3, pp 360-368.

Baz, A., 1997b, "Dynamic Boundary Control of Beams Using Active Constrained Layer Damping", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol 11, Iss 6, pp 811-825.

Baz, A.; Ro, J., 1993, "Partial Treatment of Flexible Beams With Active Constrained Layer Damping", *AMD Recent Developments en Stability, Vibration and Control in Structural Systems*, **167**, pp 61-80.

Baz, A.; Ro, J., 1993a, "Finite Element Modeling and Performance of Active Constrained Layer Damping", in *Ninth Conference on Dynamics and Control of Large Structures*, pp 345-358.

Baz, A.; Ro, J., 1994, "The Concept and Performance of Active Constrained Layer Damping Treatments", *Sound and Vibration*, Vol 28, Iss 3, pp 18-21.

Baz, A.; Ro, J., 1995, "Optimum Design and Control of Active Constrained Layer Damping", *Journal of Mechanical Design*, Vol 117, pp 135-144.

Baz, A.; Ro, J., 1995a, "Performance-Characteristics of Active Constrained Layer Damping", *Shock and Vibration*, Vol 2, Iss 1, pp 33-42.

Baz, A.; Ro, J., 1996, "Vibration Control of Plates with Active Constrained Layer Damping", *Smart Materials and Structures*, Vol 5, pp 272-280.

Chantalakhana, C.; Stanway, R., 2001, "Active Constrained Layer Damping of Clamped-Clamped Plate Vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, **241**(5), pp 755-777.

Collins, J. D.; Hart, G. C.; Hasselman, T. K.; Kennedy, B., 1974, "Statistical Identification of Structures", *AIAA J.*, Vol. 12.

Courtney, T. H., 1990, "Mechanical Behavior of Materials", McGraw-Hill, USA, pp 65-75.

Christensen, R. M., 1982, "Theory of Viscoelasticity: An Introduction", Academic Press, Inc., New York, 2nd edition.

Crawley, E.; De Luis, J., 1987, "Use of Piezoelectric Actuators as Elements in Intelligent Structures", *Journal of AIAA*, Vol. 25, No. 10, pp. 1373-1385.

Drake, M. L.; Soovere J., 1984, "A design guide for damping of aerospace structures", *AFWAL Vibration Damping Workshop Proceedings* 3.

Dwyer, P. S.; MacPhail, M. S., 1948, "Symbolic Matrix Derivatives", *Annals of Mathematical Statistics*, 19, pp. 517-534.

Ferry, J. D.; Fitzgerald, E. R.; Grandine, L. D., 1952, "Temperature Dependence of Dynamic Properties of Elastomers; Relaxation Distributions", *J. Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 44, pp 703-706.

- Frazer, R. A.; Duncan, W. J.; Collar, A. R., 1936, "Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations", Cambridge University Press.
- Fox, R. L.; Kapoor, M. P.; 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA J., Vol. 6.
- Golla, D. F.; Hughes, P. C., 1985, "Dynamics of Viscoelastic Structures - A Time Domain, Finite Element Formulation", *Journal of Applied Mechanics*, Vol 52, pp 897-906.
- Guyan, R. J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal, Vol. 3, pp. 380.
- He, J., 1994, "An Introduction of Matrix Derivatives and Their Applications in Modal Analysis", *Proceedings of the 12th IMAC Conference, Honolulu/Hawaii*, pp 561-567.
- Houck, C. R.; Joines, J. A.; Kay, M. G., 1995, "A Genetic Algorithm for Function Optimization: A Matlab Implementation", NESU-IE, Technical Report 95-09, pp 1-14.
- Huang, S. C.; Inman, D. J.; Austin, E. M., 1996, "Some Design Considerations for Active and Passive Constrained Layer Damping Treatments", *Smart Materials & Structures*, Vol 5, Iss 3, pp 301-313.
- Khatua, T. P.; Cheung, Y. K., 1973, "Bending and Vibration of Multilayer Sandwich Beams and Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, pp 11-24.
- Lam, M. J.; Inman, D. J.; Saunders, W. R., 1995, "Modeling Active Constrained Layer Damping Using Golla-Hughes-McTavish Approach", *Passive Damping, North American Conference on Smart Structures and Materials*, Ed. Johnson and L. C. Rogers, **2445**, pp 86-97.
- Lancaster, P., 1964, "On Eigenvalues of Matrices Dependent on a Parameter", *Numerische Math.*, **6**, pp. 377-387.
- Lee, C. K., 1987, "Piezoelectric Laminates for Torsional and Bending Modal Control: Theory and Experiment", Ph. D. Dissertation, Cornell University, Ithaca, NY, USA.
- Lemaitre, J.; Chaboche, L., 1988, "*Mécanique des Matériaux Solides*", Dunod, Paris, pp. 146-161.
- Lesieutre, G. A.; Mingori, D., 1990, "Finite Element Modeling of Frequency Dependent Materials Using Augmenting Thermodynamics Fields", *Journal of Guidance and Control*, Vol. 13, pp. 1040-1050.
- Lesieutre, G. A., 1992, "Finite Element for Dynamic Modeling of Uniaxial Rods with Frequency-dependent Material Properties", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 29, No. 12, pp. 1567-1579.

- Lesieutre, G. A.; Bianchini, E., 1995, "Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity Using Anelastic Displacement Fields", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol. 117, pp 424-430.
- Lesieutre, G. A. and Bianchini, E., 1996, "Finite Element Modeling of One-dimensional Viscoelastic Structures Using Anelastic Displacement Fields", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 3, pp. 520-527.
- Lesieutre, G. A.; Lee, U., 1996, "A Finite Element for Beams Having Segmented Active Constrained Layers With Frequency-dependent Viscoelastics", *Smart Materials & Structures*, Vol 5, Iss 5, pp 615-627.
- Liao, W. H.; Wang, K. W., 1995, "On the Active-Passive Vibration Control of Structures With Active Constrained Layer Treatments", *ASME Design Engineering Technical Conferences*, 84-3, pp 125-141.
- Liao, W. H.; Wang, K. W., 1996, "A New Active Constrained Layer Configuration With Enhanced Boundary Actions", *Smart Materials & Structures*, Vol 5, Iss 5, pp 638-648.
- Lim, K. B.; Junkins, J. L.; Wang, P. B., 1987, "Re-examination of Eigenvector Derivatives", *AIAA J.*, Vol. 10.
- Lima, A. M. G. de, 2003, "Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Materiais Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas", *Tese de Mestrado*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia - MG, Brasil.
- Lin, R. M.; Lim, M. K., 1993, "Methods for Calculating Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors", *Proceedings of the 11th IMAC Conference*, Kissimmee, FL, pp 1554-1558.
- Lin, R. M.; Wang, Z.; Lim, M. K., 1995, "A Practical Algorithm for the Efficient Computation of Eigenvector Sensitivities", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 130, pp 355-367.
- MacTavish, D.; Hughes, P. C., 1993, "Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol 115, pp 103-115.
- Mead, D.; Markus, S., 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer Damped Sandwiched Beam with Arbitrary Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 10, No. 1, pp 163-175.
- Moore, B. C., 1981, "Principal Component Analysis for Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction", *Institute of Electronic Engineers Transactions on Automatic Control*, AC-26, pp. 17-32.
- Murthy, D. V.; Haftka, R. T., 1988, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General

- Complex Matrix", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp 293-311.
- Nashif, A. D.; Jones, D. I. G.; Henderson, J. P., 1985, "Vibration Damping", John Wiley & Sons, New York.
- Nelson, R. B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives", *AIAA J.*, Vol. 14.
- Neudecker, H., 1969, "Some Theorems on Matrix Differentiation with Special Reference to Kronecker Matrix Products", *Journal of the American Statistical Association*, 62, pp. 953-962.
- Park, C. H.; Baz, A., 1999, "Vibration Control of Bending Modes of Plates Using Active Constrained Layer Damping", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 227, Iss 4, pp 711-734.
- Park, C. H.; Baz, A., 2001, "Comparision Between Finite Element Formulations of Active Constrained Layer Damping Using Classical and Layer-Wise Laminate Theory", *Finite Elements in Analysis and Design*, 37, pp 35-56.
- Park, C. H.; Inman, D. J.; Lam, M. J., 1999, "Model Reduction of Viscoelastic Finite Element Models", *Journal of Sound and Vibration*, 219(4), pp 619-637.
- Persoz, B., 1987, "Introduction a L'Étude de La Rhéologie", Dunod.
- Prasad, B.; Emerson, J. F., 1982, "A General Capability of Design Sensitivity for Finite Element Systems", *AIAA/ASME/ASCE/AHA 23rd Structures, Structural Dynamics and Material Conf.*
- Rao, D. K., 1976, "Static Response of Stiff-Cored Unsymmetric Sandwich Beams", *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 98, pp 391-396.
- Rongong, J. A.; Wright, J. R.; Wynne, R. J.; Tomlinson, G. R., 1997, "Modelling of a Hybrid Constrained Layer/Piezoceramic Approach to Active Damping", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol 119, pp 120-130.
- Ross, D.; Ungar, E. E.; Kervin, E. M. Jr., 1959, "Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminae", in *ASME Colloquium on Structural Damping*, pp 49-87.
- Shen, I. Y., 1993, "Intelligent Constrained Layer: An Innovative Approach", *ASME Intelligent Structures, Materials and Vibration*, Vol DE-58, pp 75-82.
- Shen, I. Y., 1994, "Hybrid Damping Through Intelligent Constrained Layer Treatments", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol 116, pp 341-349.
- Shen, I. Y., 1994a, "Stability and Controllability of Euler-Bernoulli Beams With Intelligent Constrained Layer Treatments", *ASME Active Control of Vibration and Noise*, DE-75, pp 169-178.

Shen, I. Y., 1995, "A Variational Formulation, a Work-Energy Relation and Damping Mechanism of Active Constrained Layer Treatments", ASME Design Engineering Technical Conferences, Vol. DE-84-3, pp 149-160.

Shen, I. Y., 1997, "A Variational Formulation, a Work-Energy Relation and Damping Mechanisms of Active Constrained Layer Treatments", Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME, Vol 119, Iss 2, pp 192-199.

Trindade, M. A., 2000, "Contrôle Hybride Actif-Passif des Vibrations de Structures Par des Matériaux Piézoélectriques et Viscoélastiques: Poutres Sandwich/Multicouches Intelligentes", Thèse, Conservatoire National des Arts et Métiers.

Trindade, M. A.; Benjeddou, A.; Ohayon, R., 2000, "Modeling of Frequency-dependent Viscoelastic Materials for Active-passive Vibration Damping", Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 122, No. 2, pp. 169-174.

Trompette, P.; Boillot, D.; Ravanel, M., 1978, "The Effect of Boundary Conditions on the Vibration of a Viscoelastically Damped Cantilever Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 60, pp. 345-350.

Ugural, A. C., 1981, "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, Inc.

VanNorstrand, W. C.; Knowles, G.; Inman, D. J., 1993, "Active Constrained Layer Damping for Micro-Satellites", Proceedings 2nd International Conference on Dynamics and Control of Structures in Space, ed. C. L. Kirk and P. C. Hughes, pp 667-81.

VanNorstrand, W. C.; Knowles, G.; Inman, D. J., 1995, "Finite Element Model for Active Constrained Layer Damping", Passive Damping, ed. C. D. Johnson, SPIE Vol 2445, pp 98-109.

Varadan, V. V.; Lim, Y. H.; Varadan, V. K., 1996, "Closed Loop Finite-Element Modeling of Active Passive damping in Structural Vibration Control", Smart Materials & Structures, Vol 5, Iss 5, pp 685-694.

Veley, D. E.; Rao, S. S., 1996, "A Comparision of Active, Passive and Hybrid Damping in Structural Design", Smart Materials & Structures, Vol 5, Iss 5, pp 660-671.

Yae, K. H.; Inman, D. J., 1993, "Control-oriented Order Reduction of Finite Element Model", Dynamic Systems and Control, Vol. 115, pp. 708-711.

ANEXO I

Funções de Interpolação Para os Modelos de 3 e 5 Camadas

Utilizadas nas equações (2.73) e (2.96):

$$[N_{u1}] = [N_{11} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{12} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{13} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{14} \quad [0]_{1 \times 8}]$$

$$[N_{v1}] = [0 \quad N_{21} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{22} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{23} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{24} \quad [0]_{1 \times 7}]$$

$$[N_{u3}] = [[0]_{1 \times 2} \quad N_{31} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{32} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{33} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{34} \quad [0]_{1 \times 6}]$$

$$[N_{v3}] = [[0]_{1 \times 3} \quad N_{41} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{42} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{43} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{44} \quad [0]_{1 \times 5}]$$

$$[N_{u5}] = [[0]_{1 \times 4} \quad N_{51} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{52} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{53} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{54} \quad [0]_{1 \times 4}]$$

$$[N_{v5}] = [[0]_{1 \times 5} \quad N_{61} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{62} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{63} \quad [0]_{1 \times 8} \quad N_{64} \quad [0]_{1 \times 3}]$$

$$[N_w] = [[0]_{1 \times 6} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y} \quad [0]_{1 \times 6} \quad N_{2w} \quad N_{2\theta_x} \quad N_{2\theta_y} \\ [0]_{1 \times 6} \quad N_{3w} \quad N_{3\theta_x} \quad N_{3\theta_y} \quad [0]_{1 \times 6} \quad N_{4w} \quad N_{4\theta_x} \quad N_{4\theta_y}]$$

$$[N_{\theta_x}] = [[0]_{1 \times 6} \quad N_w^x \quad N_{\theta_x}^x \quad N_{\theta_y}^x \quad [0]_{1 \times 6} \quad N_{2w}^x \quad N_{2\theta_x}^x \quad N_{2\theta_y}^x \\ [0]_{1 \times 6} \quad N_{3w}^x \quad N_{3\theta_x}^x \quad N_{3\theta_y}^x \quad [0]_{1 \times 6} \quad N_{4w}^x \quad N_{4\theta_x}^x \quad N_{4\theta_y}^x]$$

$$[N_{\theta_y}] = [[0]_{1 \times 6} \quad N_w^y \quad N_{\theta_x}^y \quad N_{\theta_y}^y \quad [0]_{1 \times 6} \quad N_{2w}^y \quad N_{2\theta_x}^y \quad N_{2\theta_y}^y \\ [0]_{1 \times 6} \quad N_{3w}^y \quad N_{3\theta_x}^y \quad N_{3\theta_y}^y \quad [0]_{1 \times 6} \quad N_{4w}^y \quad N_{4\theta_x}^y \quad N_{4\theta_y}^y]$$

onde:

$$N_{11} = \frac{(y-b)(x-a)}{ab} \quad N_{12} = \frac{x(b-y)}{ab} \quad N_{13} = \frac{xy}{ab} \quad N_{14} = \frac{y(a-x)}{ab}$$

$$N_{w1} = \frac{(b-y)(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b - a^2b^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{w3} = \frac{-xy(a^2b^2 - 3xab^2 - 3ya^2b + 2x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{w2} = \frac{x(y-b)(2y^2a^2 - ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{w4} = \frac{y(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 - 3ya^2b + 2y^2a^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{\theta_{x1}} = \frac{x(x-a)^2(b-y)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x2}} = \frac{x^2(b-y)(x-a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x3}} = \frac{x^2y(x-a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x4}} = \frac{xy(x-a)^2}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{y1}} = \frac{y(y-b)^2(a-x)}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y2}} = \frac{xy(y-b)^2}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y3}} = \frac{xy^2(y-b)}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y4}} = \frac{y^2(y-b)(a-x)}{ab^2}$$

$$N_{w1}^x = \frac{(b-y)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3}$$

$$N_{w3}^x = \frac{-y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{w2}^x = \frac{(y-b)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3}$$

$$N_{w4}^x = \frac{y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{\theta_{x1}}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3x-a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x2}}^x = \frac{x(b-y)(3x-2a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x3}}^x = \frac{xy(3x-2a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x4}}^x = \frac{y(x-a)(3x-a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{y1}}^x = \frac{-y(y-b)^2}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y2}}^x = \frac{y(y-b)^2}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y3}}^x = \frac{y^2(y-b)}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y4}}^x = \frac{y^2(b-y)}{ab^2}$$

$$N_{w1}^y = \frac{(a-x)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3}$$

$$N_{w3}^y = \frac{-x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{w2}^y = \frac{x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3}$$

$$N_{w4}^y = \frac{(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3}$$

$$N_{\theta_{x1}}^y = \frac{-x(x-a)^2}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x2}}^y = \frac{-x^2(x-a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x3}}^y = \frac{x^2(x-a)}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{x4}}^y = \frac{x(x-a)^2}{a^2b}$$

$$N_{\theta_{y1}}^y = \frac{(x-a)(b-y)(3y-b)}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y2}}^y = \frac{x(y-b)(3y-b)}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y3}}^y = \frac{xy(-2b+3y)}{ab^2}$$

$$N_{\theta_{y4}}^y = \frac{y(x-a)(2b-3y)}{ab^2}$$

Utilizadas na determinação das matrizes de massa e rigidez elementares para cada uma das camadas:

$$[D_m^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{y-b}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & \frac{b-y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & \frac{y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & \frac{-y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} \\ 0 & \frac{x-a}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & \frac{-x}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & \frac{x}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & \frac{a-x}{ab} & [0]_{1 \times 7} \\ \frac{x-a}{ab} & \frac{y-b}{ab} & [0]_{1 \times 7} & \frac{-x}{ab} & \frac{b-y}{ab} & [0]_{1 \times 7} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & [0]_{1 \times 7} & \frac{a-x}{ab} & \frac{-y}{ab} & [0]_{1 \times 7} \end{bmatrix}$$

$$[D_b^{(1)}] = \begin{bmatrix} [0]_{1 \times 6} & \frac{(b-y)(-6ab^2 + 12xb^2)}{a^3b^3} & \frac{3(a-x)(y-b) - (3x-a)(y-b)}{a^2b} & \dots \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{(a-x)(12ya^2 - 6a^2b)}{a^3b^3} & 0 & \dots \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-2(2y^2a^2 - ya^2b - 6xab^2 + 6x^2b^2) + 2(b-y)(4ya^2 - a^2b)}{a^3b^3} & \frac{2(3x-a)(a-x)}{a^2b} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 0 & [0]_{1 \times 6} \\ \frac{3(b-y)(x-a) - (3y-b)(x-a)}{ab^2} & [0]_{1 \times 6} \\ \frac{-2(y-b)^2 + 4y(y-b)}{ab^2} & [0]_{1 \times 6} \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} \frac{-(y-b)(3x-2a)}{a^2b} & \frac{(y-b)(-6ab^2 + 12xb^2)}{a^3b^3} & \dots \\ 0 & \frac{x(12ya^2 - 6a^2b)}{a^3b^3} & \dots \\ \frac{-2x(3x-2a)}{a^2b} & \frac{-2(2y^2a^2 - ya^2b - 6xab^2 + 6x^2b^2) + 2(y-b)(4ya^2 - a^2b)}{a^3b^3} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 0 & [0]_{1 \times 6} \\ \frac{3x(y-b) + x(3y-b)}{ab^2} & [0]_{1 \times 6} \\ \frac{2(y-b)^2 + 4y(y-b)}{ab^2} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \frac{-y(-6ab^2+12xb^2)}{a^3b^3} \\ \frac{-x(12ya^2-6a^2b)}{a^3b^3} \\ \frac{-2(a^2b^2-6xab^2-3ya^2b+6x^2b^2+2y^2a^2)-2y(-3a^2b+4ya^2)}{a^3b^3} \end{array} \begin{array}{c} \frac{y(3x-2a)+3xy}{a^2b} \\ 0 \\ \frac{2x(3x-2a)}{a^2b} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{x(3y-2b)+3xy}{ab^2} \\ \frac{4y(y-b)+2y^2}{ab^2} \end{array} \begin{array}{c} [0]_{1 \times 6} \\ [0]_{1 \times 6} \\ [0]_{1 \times 6} \end{array} \dots \\
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \frac{y(-6ab^2+12xb^2)}{a^3b^3} \\ \frac{(x-a)(12ya^2-6a^2b)}{a^3b^3} \\ \frac{2(a^2b^2-6xab^2-3ya^2b+6x^2b^2+2y^2a^2)+2y(-3a^2b+4ya^2)}{a^3b^3} \end{array} \begin{array}{c} \frac{3y(x-a)+y(3x-a)}{a^2b} \\ 0 \\ \frac{2(3x-a)(x-a)}{a^2b} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{(2b-3y)(x-a)-3y(x-a)}{ab^2} \\ \frac{4y(b-y)-2y^2}{ab^2} \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \\
[D_m^{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{(y-b)}{2ab} & 0 & \frac{(y-b)}{2ab} & 0 & 0 & 0 & \frac{(b-y)(-6ab^2+12xb^2)(h_1-h_3)}{4a^3b^3} \\ 0 & \frac{(x-a)}{2ab} & 0 & \frac{(x-a)}{2ab} & 0 & 0 & \frac{(h_1-h_3)(a-x)(12ya^2-6a^2b)}{4a^3b^3} \\ \frac{(x-a)}{2ab} & \frac{(y-b)}{2ab} & \frac{(x-a)}{2ab} & \frac{(y-b)}{2ab} & 0 & 0 & \frac{(h_1-h_3)(-(2y^2a^2-ya^2b-6xab^2+6x^2b^2)+(b-y)(4ya^2-a^2b))}{2a^3b^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \frac{(h_1-h_3)(3(a-x)(y-b)-(3x-a)(y-b))}{4a^2b} \\ 0 \\ \frac{(h_1-h_3)(3x-a)(a-x)}{2a^2b} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{(h_1-h_3)(3(b-y)(x-a)-(3y-b)(x-a))}{4ab^2} \\ \frac{(h_1-h_3)(-(y-b)^2-2y(y-b))}{2ab^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{(b-y)}{2ab} \\ 0 \\ -\frac{x}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{x}{2ab} \\ \frac{(b-y)}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{(b-y)}{2ab} \\ 0 \\ -\frac{x}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{x}{2ab} \\ \frac{(b-y)}{2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \dots \\
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{(h_1-h_3)(y-b)(-6ab^2+12xb^2)}{4a^3b^3} \\ \frac{(h_1-h_3)x(12ya^2-6a^2b)}{4a^3b^3} \\ \frac{(h_1-h_3)((2y^2a^2-ya^2b-6xab^2+6x^2b^2)+(y-b)(4ya^2-a^2b))}{2a^3b^3} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{(h_1-h_3)(-(y-b)(3x-2a)-3x(y-b))}{4a^2b} \\ 0 \\ -\frac{(h_1-h_3)x(3x-2a)}{2a^2b} \\ 0 \\ 0 \end{array} \dots \\
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{(h_1-h_3)(3x(y-b)+x(3y-b))}{4ab^2} \\ \frac{(h_1-h_3)((y-b)^2+2y(y-b))}{2ab^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{y}{2ab} \\ 0 \\ \frac{x}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{x}{2ab} \\ \frac{y}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{x}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{y}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} \frac{(h_1-h_3)y(-6ab^2+12xb^2)}{4a^3b^3} \\ \frac{(h_1-h_3)x(12ya^2-6a^2b)}{4a^3b^3} \\ \frac{(h_1-h_3)(-(a^2b^2-6xab^2-3ya^2b+6x^2b^2+2y^2a^2)-y(-3a^2b+4ya^2))}{2a^3b^3} \end{array} \begin{array}{c} \frac{(h_1-h_3)(y(3x-2a)+3xy)}{4a^2b} \\ 0 \\ \frac{(h_1-h_3)x(3x-2a)}{2a^2b} \end{array} \begin{array}{c} \frac{(h_1-h_3)(x(3y-2b)+3xy)}{4ab^2} \\ \frac{(h_1-h_3)(2y(y-b)+y^2)}{2ab^2} \end{array} \dots \\
\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} -\frac{y}{2ab} \\ 0 \\ \frac{(a-x)}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{(a-x)}{2ab} \\ -\frac{y}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -\frac{y}{2ab} \\ 0 \\ \frac{(a-x)}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{(a-x)}{2ab} \\ -\frac{y}{2ab} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{(h_1-h_3)y(-6ab^2+12xb^2)}{4a^3b^3} \\ \frac{(h_1-h_3)(a-x)(12ya^2-6a^2b)}{4a^3b^3} \\ \frac{(h_1-h_3)((a^2b^2-6xab^2-3ya^2b+6x^2b^2+2y^2a^2)+y(-3a^2b+4ya^2))}{2a^3b^3} \end{array} \dots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{(h_1-h_3)(3y(x-a)+y(3x-a))}{4a^2b} & 0 & \frac{(h_1-h_3)((2b-3y)(x-a)-3y(x-a))}{4ab^2} & & & \\
 0 & \frac{(h_1-h_3)(3x-a)(x-a)}{2a^2b} & \frac{(h_1-h_3)(2y(b-y)-y^2)}{2ab^2} & & & \\
 \dots & 0 & 0 & & & \\
 \end{array} \right] \\
 & D_b^{(2)} = \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{y-b}{abh_2} & 0 & -\frac{y-b}{abh_2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{x-a}{abh_2} & 0 & -\frac{x-a}{abh_2} & 0 & 0 \\
 \frac{x-a}{abh_2} & \frac{y-b}{abh_2} & -\frac{x-a}{abh_2} & -\frac{y-b}{abh_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \frac{(h_1+h_3)(b-y)(-6ab^2+12xb^2)}{2a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)(a-x)(12ya^2-6a^2b)}{2a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)((-2x^2b^2-xab^2+6y^2a^2-6ya^2b)+(a-x)(4xb^2-ab^2))}{a^3b^3h_2} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{(h_1+h_3)(3(a-x)(y-b)-(3x-a)(y-b))}{2a^2bh_2} & 0 & \frac{b-y}{abh_2} & 0 & -\frac{b-y}{abh_2} & \\
 0 & \frac{(h_1+h_3)(3(b-y)(x-a)-(3y-b)(x-a))}{2ab^2h_2} & 0 & -\frac{1}{xabh_2} & 0 & \\
 \dots & \frac{(h_1+h_3)((-x-a)^2-2x(x-a))}{a^2bh_2} & \frac{(h_1+h_3)(3y-b)(b-y)}{ab^2h_2} & -\frac{1}{h_2xab} & \frac{b-y}{abh_2} & \frac{1}{h_2xab} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \frac{(h_1+h_3)(y-b)(-6ab^2+12xb^2)}{2h_2a^3b^3} \\
 \frac{(h_1+h_3)x(12ya^2-6a^2b)}{2a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)((a^2b^2-3xab^2-6ya^2b+2x^2b^2+6y^2a^2)+x(-3ab^2+4xb^2))}{a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)(-2x(x-a)-x^2)}{a^2bh_2} \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & \frac{(h_1+h_3)(y-b)(-6ab^2+12xb^2)}{2h_2a^3b^3} & \frac{(h_1+h_3)(-2x(x-a)-x^2)}{a^2bh_2} & \\
 \frac{1}{xabh_2} & 0 & 0 & \frac{(h_1+h_3)x(12ya^2-6a^2b)}{2a^3b^3h_2} & 0 & \\
 -\frac{b-y}{abh_2} & 0 & 0 & \frac{(h_1+h_3)((a^2b^2-3xab^2-6ya^2b+2x^2b^2+6y^2a^2)+x(-3ab^2+4xb^2))}{a^3b^3h_2} & \frac{(h_1+h_3)(-2x(x-a)-x^2)}{a^2bh_2} & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & \frac{1}{yabh_2} & 0 & -\frac{1}{yabh_2} & 0 & 0 \\
 \frac{(h_1+h_3)(3x(y-b)+x(3y-b))}{2ab^2h_2} & 0 & \frac{1}{xabh_2} & 0 & -\frac{1}{xabh_2} & 0 \\
 \dots & \frac{(h_1+h_3)(3y-b)(y-b)}{ab^2h_2} & \frac{1}{yabh_2} & -\frac{1}{yabh_2} & -\frac{1}{yabh_2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \frac{(h_1+h_3)y(-6ab^2+12xb^2)}{2a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)x(12ya^2-6a^2b)}{2a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)((a^2b^2-3xab^2-6ya^2b+2x^2b^2+6y^2a^2)+x(-3ab^2+4xb^2))}{a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)(y(3x-2a)+3xy)}{2a^2bh_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)(2x(x-a)+x^2)}{a^2bh_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)(x(3y-2b)+3xy)}{2a^2bh_2}
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{(h_1+h_3)y(-6ab^2+12xb^2)}{2a^3b^3h_2} & \frac{(h_1+h_3)(y(3x-2a)+3xy)}{2a^2bh_2} & 0 & \frac{(h_1+h_3)(x(3y-2b)+3xy)}{2a^2bh_2} & & \\
 \frac{(h_1+h_3)x(12ya^2-6a^2b)}{2a^3b^3h_2} & 0 & \frac{(h_1+h_3)(2x(x-a)+x^2)}{a^2bh_2} & \frac{(h_1+h_3)(x(3y-2b)+3xy)}{2a^2bh_2} & & \\
 \dots & \frac{(h_1+h_3)((a^2b^2-3xab^2-6ya^2b+2x^2b^2+6y^2a^2)+x(-3ab^2+4xb^2))}{a^3b^3h_2} & 0 & \frac{(h_1+h_3)(3y-2b)+3xy}{ab^2h_2} & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 -\frac{1}{yabh_2} & 0 & \frac{1}{yabh_2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{a-x}{abh_2} & 0 & -\frac{a-x}{abh_2} & 0 & 0 \\
 \frac{a-x}{abh_2} & -\frac{1}{yabh_2} & -\frac{a-x}{abh_2} & \frac{1}{yabh_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \frac{(h_1+h_3)y(-6ab^2+12xb^2)}{2a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)(x-a)(12ya^2-6a^2b)}{2a^3b^3h_2} \\
 \frac{(h_1+h_3)((2x^2b^2-xab^2+6y^2a^2-6ya^2b)+(x-a)(4xb^2-ab^2))}{a^3b^3h_2} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{(h_1+h_3)(3y(x-a)+y(3x-a))}{2a^2bh_2} & 0 & \frac{(h_1+h_3)((2b-3y)(x-a)-3y(x-a))}{2ab^2h_2} & & & \\
 0 & \frac{(h_1+h_3)((x-a)^2/a^2/b+2x(x-a))}{a^2bh_2} & \frac{(h_1+h_3)y(2b-3y)}{ab^2h_2} & & & \\
 \dots & 0 & 0 & & & \\
 \end{array} \right] \\
 & D_p^{(2)} = \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{(y-b)(x-a)}{abh_2} & 0 & -\frac{(y-b)(x-a)}{abh_2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{(y-b)(x-a)}{abh_2} & 0 & -\frac{(y-b)(x-a)}{abh_2} & 0 & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{(h_1+2h_2+h_3)(y-b)(2y^2a^2-ya^2b-6xab^2+6x^2b^2)}{2h_2a^3b^3} & -\frac{(h_1+2h_2+h_3)(3x-a)(x-a)(y-b)}{2h_2a^2b} & & & & \\
 \frac{(h_1+2h_2+h_3)(x-a)(2x^2b^2-xab^2+6y^2a^2-6ya^2b)}{2h_2a^3b^3} & -\frac{(h_1+2h_2+h_3)x(x-a)^2}{2h_2a^2b} & & & & \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{(h_1+2h_2+h_3)y(y-b)^2}{2h_2ab^2} & -\frac{y-b}{h_2xab} & 0 & \frac{y-b}{h_2xab} & 0 & 0 \\
 \frac{(h_1+2h_2+h_3)(3y-b)(y-b)(x-a)}{2h_2ab^2} & 0 & -\frac{y-b}{h_2xab} & 0 & \frac{y-b}{h_2xab} & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{(h_1+2h_2+h_3)y(y-b)^2}{2h_2ab^2} & \frac{1}{h_2xyab} & 0 & -\frac{1}{h_2xyab} & 0 & 0 \\
 \frac{(h_1+2h_2+h_3)x(3y-b)(y-b)}{2h_2ab^2} & 0 & \frac{1}{h_2xyab} & 0 & -\frac{1}{h_2xyab} & 0 \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots \\
 & \dots \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{(h_1+2h_2+h_3)y(a^2b^2-3xab^2-6ya^2b+2x^2b^2+2y^2a^2)}{2h_2a^3b^3} & \frac{(h_1+2h_2+h_3)xy(3x-2a)}{2h_2a^2b} & & & & \\
 \frac{(h_1+2h_2+h_3)x(a^2b^2-3xab^2-6ya^2b+2x^2b^2+6y^2a^2)}{2h_2a^3b^3} & \frac{(h_1+2h_2+h_3)x^2(x-a)}{2h_2a^2b} & & & & \\
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(h_1+2h_2+h_3)y^2(y-b)}{2h_2ab^2} & -\frac{x-a}{h_2yab} & 0 & \frac{x-a}{h_2yab} & 0 \\ \frac{(h_1+2h_2+h_3)xy(3y-2b)}{2h_2ab^2} & 0 & -\frac{x-a}{h_2yab} & 0 & \frac{x-a}{h_2yab} \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(h_1+2h_2+h_3)y(a^2b^2-6xab^2-3ya^2b+6x^2b^2+2y^2a^2)}{2h_2a^3b^3} \\ 0 & 0 & \frac{(h_1+2h_2+h_3)(x-a)(2x^2b^2-xab^2+6y^2a^2-6ya^2b)}{2h_2a^3b^3} \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{(h_1+2h_2+h_3)y(3x-a)(x-a)}{2h_2a^2b} & -\frac{(h_1+2h_2+h_3)y^2(y-b)}{2h_2ab^2} \\ \frac{(h_1+2h_2+h_3)x(x-a)^2}{2h_2a^2b} & -\frac{(h_1+2h_2+h_3)y(3y-2b)(x-a)}{2h_2ab^2} \end{bmatrix} \dots \\
[D_m^{(3)}] = \begin{bmatrix} [0]_{1 \times 2} & \frac{y-b}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & \frac{b-y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & \frac{y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & -\frac{y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 5} \\ [0]_{1 \times 2} & 0 & \frac{x-a}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & -\frac{x}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & \frac{x}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & \frac{a-x}{ab} & [0]_{1 \times 5} \\ [0]_{1 \times 2} & \frac{x-a}{ab} & \frac{y-b}{ab} & [0]_{1 \times 7} & -\frac{x}{ab} & \frac{b-y}{ab} & [0]_{1 \times 7} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & [0]_{1 \times 7} & \frac{a-x}{ab} & -\frac{y}{ab} & [0]_{1 \times 5} \end{bmatrix} \\
[D_b^{(3)}] = \begin{bmatrix} [0]_{1 \times 6} & \frac{-6(y-b)(-a+2x)}{ba^3} & \frac{-2(y-b)(3x-2a)}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-6(x-a)(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{-2(x-a)(3y-2b)}{ab^2} \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{-2(3x-a)(x-a)}{a^2b} & \frac{-2(y-b)(3y-b)}{ab^2} \end{bmatrix} \dots \\
\dots \begin{bmatrix} [0]_{1 \times 6} & \frac{6(y-b)(-a+2x)}{ba^3} & \frac{-2(3x-a)y-b}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{6x(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{2x(3y-2b)}{ab^2} \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{-2x(3x-2a)}{a^2b} & \frac{2(y-b)(3y-b)}{ab^2} \end{bmatrix} \dots \\
\dots \begin{bmatrix} [0]_{1 \times 6} & \frac{-6y(-a+2x)}{ba^3} & \frac{2y(3x-a)}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-6x(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{2x(3y-b)}{ab^2} \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{2x(3x-2a)}{a^2b} & \frac{2y(3y-2b)}{ab^2} \end{bmatrix} \dots \\
\dots \begin{bmatrix} [0]_{1 \times 6} & \frac{6y(-a+2x)}{ba^3} & \frac{2y(3x-2a)}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{6(x-a)(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{-2(3y-b)(x-a)}{ab^2} \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{2(3x-a)(x-a)}{a^2b} & \frac{-2y(3y-2b)}{ab^2} \end{bmatrix} \dots \\
[D_m^{(4)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{y-b}{2ab} & 0 & \frac{y-b}{2ab} & 0 & \frac{-3(h_3-h_5)(y-b)(-a+2x)}{2ba^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x-a}{2ab} & 0 & \frac{x-a}{2ab} & \frac{-3(h_3-h_5)(x-a)(2y-b)}{2ab^3} \\ 0 & 0 & \frac{x-a}{2ab} & \frac{y-b}{2ab} & \frac{x-a}{2ab} & \frac{y-b}{2ab} & \frac{(h_3-h_5)(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{2a^3b^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \begin{bmatrix} \frac{-(h_3-h_5)(y-b)(3x-2a)}{2a^2b} & 0 \\ 0 & \frac{-(h_3-h_5)(x-a)(3y-2b)}{2ab^2} \\ \dots & \frac{-(h_3-h_5)(y-b)(3y-b)}{2ab^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{y-b}{2ab} & 0 & -\frac{y-b}{2ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x}{2ab} & 0 & \frac{-x}{2ab} \\ \dots & 0 & 0 & \frac{-x}{2ab} & -\frac{y-b}{2ab} & \frac{-y-b}{2ab} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{3(h_3-h_5)(y-b)(-a+2x)}{2ba^3} \\
& \dots \begin{bmatrix} \frac{-(h_3-h_5)(3x-a)(y-b)}{2a^2b} & 0 \\ 0 & \frac{(h_3-h_5)x(3y-2b)}{2ab^2} \\ \dots & \frac{-(h_3-h_5)x(3x-2a)}{2a^2b} & \frac{(h_3-h_5)(y-b)(3y-b)}{2ab^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{y}{2ab} & 0 & \frac{y}{2ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{2ab} & 0 & \frac{x}{2ab} \\ \dots & 0 & 0 & \frac{x}{2ab} & \frac{y}{2ab} & \frac{x}{2ab} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{-3(h_3-h_5)y(-a+2x)}{2ba^3} \\
& \dots \begin{bmatrix} \frac{(h_3-h_5)y(3x-a)}{2a^2b} & 0 \\ 0 & \frac{(h_3-h_5)x(3y-b)}{2ab^2} \\ \dots & \frac{(h_3-h_5)x(3x-2a)}{2a^2b} & \frac{(h_3-h_5)y(3y-2b)}{2ab^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{y}{2ab} & 0 & -\frac{y}{2ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x-a}{2ab} & 0 & \frac{-x-a}{2ab} \\ \dots & 0 & 0 & \frac{-y}{2ab} & -\frac{x-a}{2ab} & \frac{-y}{2ab} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{3(h_3-h_5)y(-a+2x)}{2ba^3} \\
& \dots \begin{bmatrix} \frac{(h_3-h_5)y(3x-2a)}{2a^2b} & 0 \\ 0 & \frac{-(h_3-h_5)(3y-b)(x-a)}{2ab^2} \\ \dots & \frac{(h_3-h_5)(3x-a)(x-a)}{2a^2b} & \frac{-3(h_3-h_5)y(y-2b)}{2ab^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \\
[D_b^{(4)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{y-b}{ab h_4} & 0 & -\frac{y-b}{ab h_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x-a}{ab h_4} & 0 & \frac{-x-a}{ab h_4} \\ 0 & 0 & \frac{x-a}{ab h_4} & \frac{y-b}{ab h_4} & -\frac{x-a}{ab h_4} & -\frac{y-b}{ab h_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{-3(h_3+h_5)(y-b)(-a+2x)}{bh_4a^3} \\
& \dots \frac{-3(h_3+h_5)(x-a)(2y-b)}{ab h_4} \\
& \dots \frac{-(h_3+h_5)(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{h_4a^3b^3} \dots
\end{aligned}$$

$$\dots \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(h_3+2h_4+h_5)y(a^2b^2-6xab^2-3ya^2b+6x^2b^2+2y^2a^2)}{2h_3a^3b^3} & \frac{(h_3+2h_4+h_5)y(3x-a)(x-a)}{2h_3a^2b} & \frac{-(h_3+2h_4+h_5)y^2(y-b)}{2h_3ab^2} \\ \frac{(h_3+2h_4+h_5)(x-a)(2x^2b^2-xab^2+6y^2a^2-6ya^2b)}{2h_3a^3b^3} & \frac{(h_3+2h_4+h_5)x(x-a)^2}{2h_3a^2b} & \frac{-(h_3+2h_4+h_5)y(3y-2b)(x-a)}{2h_3ab^2} \end{array} \right]$$

$$\left[D_m^{(5)} \right] = \left[\begin{array}{cccccccccccc} [0]_{1 \times 4} & \frac{y-b}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & \frac{b-y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & \frac{y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 7} & -\frac{y}{ab} & 0 & [0]_{1 \times 3} \\ [0]_{1 \times 4} & 0 & \frac{x-a}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & -\frac{x}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & \frac{x}{ab} & [0]_{1 \times 7} & 0 & \frac{a-x}{ab} & [0]_{1 \times 3} \\ [0]_{1 \times 4} & \frac{x-a}{ab} & \frac{y-b}{ab} & [0]_{1 \times 7} & -\frac{x}{ab} & \frac{b-y}{ab} & [0]_{1 \times 7} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & [0]_{1 \times 7} & \frac{a-x}{ab} & -\frac{y}{ab} & [0]_{1 \times 3} \end{array} \right]$$

$$\left[D_b^{(5)} \right] = \left[\begin{array}{ccc} [0]_{1 \times 6} & \frac{-6(y-b)(-a+2x)}{ba^3} & \frac{-2(y-b)(3x-2a)}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-6(x-a)(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{-2(x-a)(3y-2b)}{ab^2} \dots \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{-2(3x-a)(x-a)}{a^2b} & \frac{-2(y-b)(3y-b)}{ab^2} \end{array} \right]$$

$$\dots \left[\begin{array}{ccc} [0]_{1 \times 6} & \frac{6(y-b)(-a+2x)}{ba^3} & \frac{-2(3x-a)(y-b)}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{6x(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{2x(3y-2b)}{ab^2} \dots \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{-2x(3x-2a)}{a^2b} & \frac{2(y-b)(3y-b)}{ab^2} \end{array} \right]$$

$$\dots \left[\begin{array}{ccc} [0]_{1 \times 6} & \frac{-6y(-a+2x)}{ba^3} & \frac{2y(3x-a)}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-6x(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{2x(3y-b)}{ab^2} \dots \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{-2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{2x(3x-2a)}{a^2b} & \frac{2y(3y-2b)}{ab^2} \end{array} \right]$$

$$\dots \left[\begin{array}{ccc} [0]_{1 \times 6} & \frac{6y(-a+2x)}{ba^3} & \frac{2y(3x-2a)}{a^2b} & 0 \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{6(x-a)(2y-b)}{ab^3} & 0 & \frac{-2(3y-b)(x-a)}{ab^2} \\ [0]_{1 \times 6} & \frac{2(6y^2a^2-6ya^2b-6xab^2+6x^2b^2+a^2b^2)}{a^3b^3} & \frac{2(3x-a)(x-a)}{a^2b} & \frac{-2y(3y-2b)}{ab^2} \end{array} \right]$$