

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

1001  
621  
64932  
TES/ME

IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EXCITADORAS A PARTIR DAS RESPOSTAS  
DINÂMICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

**DIRBI/UFU**



1000186988

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Uberlândia, por **Gino Genaro**, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Presidente: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

Examinadores:

Prof. Dr. João Antônio Pereira (UNESP)  
Prof. Dr. Valder Steffen Júnior (UFU)  
Prof. Dr. José Francisco Ribeiro (UFU)

Uberlândia, 07 de novembro de 1997.

Aos meus pais, **Sebastião Genaro**  
e **Marlene F. Genaro**, pelo apoio  
e incentivo fundamentais à  
realização deste trabalho.

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao professor e amigo, Dr. Domingos Alves Rade, pelo incentivo, orientação e pela compreensão relativa aos contratempos advindos de minhas atividades de militância.

Ao companheiro Ricardo Martins Ferreira, pelo incentivo nos momentos mais difíceis.

À CAPES - Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo apoio financeiro.

À Deus, por ter me concedido a oportunidade de realização deste trabalho.

IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EXCITADORAS A PARTIR DAS RESPOSTAS  
DINÂMICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

SUMÁRIO

	Página:
LISTA DE FIGURAS E TABELAS	ix
LISTA DE ABREVIATURAS E DE SÍMBOLOS	xiv
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 - MÉTODOS BASEADOS NAS FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQÜÊNCIA	5
2.2 - MÉTODOS BASEADOS NO DOMÍNIO DO TEMPO	10
CAPÍTULO III - MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO INDIRETA DE FORÇAS BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS	16
3.1 - A FORMULAÇÃO DO MÉTODO FUNDAMENTADO NAS COORDENADAS MODAIS	16
3.2 - INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES INICIAIS	21
CAPÍTULO IV - MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO INDIRETA DE FORÇAS BASEADO NA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	25
4.1 - SISTEMAS COM UMA ENTRADA E UMA SAÍDA	25
4.2 - SISTEMAS COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E SAÍDAS	28
CAPÍTULO V - APLICAÇÕES NUMÉRICAS: MÉTODO DE IIF BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS	34
5.1 - DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA-TESTE	34
5.2 - IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS HARMÔNICAS	41
5.2.1 - EFEITO DO TRUNCAMENTO DO NÚMERO DE MODOS	

NA BASE MODAL	43
5.2.2 - EFEITO DO NÚMERO DE COORDENADAS INSTRUMENTADAS	47
5.2.3 - ANÁLISE DAS MAGNITUDES RELATIVAS DAS FORÇAS MODAIS E DO EFEITO DE FILTRAGEM FREQUÊNCIAL	51
5.2.4 - IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS HARMÔNICAS CONSIDERANDO RUÍDOS EXPERIMENTAIS	58
5.3 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA TRANSITÓRIA	62
5.3.1 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA TRANSITÓRIA CONSIDERANDO O EFEITO DOS RUÍDOS EXPERIMENTAIS	70
CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES NUMÉRICAS: MÉTODO DE IIF BASEADO NA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	72
6.1 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA HARMÔNICA APLICADA EM UM SISTEMA DE 1 GDL	72
6.1.1 - REGULARIZAÇÃO PELO MÉTODO DE THIKONOV	75
6.1.2 - REGULARIZAÇÃO PELA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES	78
6.2 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA HARMÔNICA APLICADA EM UM SISTEMA DE 1 GDL	80
6.3 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA TRANSITÓRIA APLICADA EM UM SISTEMA DE 11 GDL	84
6.4 - IDENTIFICAÇÃO NA PRESENÇA DE RUÍDOS EXPERIMENTAIS	86
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS	90
CAPÍTULO VIII - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92
APÊNDICES	98

<u>APÊNDICE A</u> - RESPOSTAS DINÂMICAS DE SISTEMA DISCRETOS LINEARES: DESENVOLVIMENTO NO ESPAÇO DE ESTADO	98
A.1 - PROBLEMA DE AUTOVALOR	98
A.2 - RESPOSTAS FORÇADAS	101
A.2.1- SOLUÇÃO PELO MÉTODO DA MATRIZ EXPONENCIAL	101
A.2.2 - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO MODAL	103
<u>APÊNDICE B</u> - MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO	106
B.1 - REGULARIZAÇÃO DE THIKONOV	106
B.2 - A REGULARIZAÇÃO PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES (DVS)	107

## R E S U M O

GENARO, G., "Identificação de Forças Excitadoras A Partir Das Respostas Dinâmicas no Domínio do Tempo", Dissertação de Mestrado, UFU, Uberlândia-MG, 1997.

O objeto deste trabalho é identificação indireta de forças utilizando-se métodos operando no domínio do tempo. Dentro deste contexto, são examinados dois métodos distintos de identificação: o primeiro método proposto, denominado "Método das Coordenadas Modais", baseia-se na utilização das equações do movimento em coordenadas modais, empregando as acelerações amostradas no tempo, bem como um conjunto de auto-soluções da estrutura: frequências naturais, fatores de amortecimento modais, massas generalizadas e componentes dos autovetores. O segundo método, denominado "Método da Deconvolução", baseia-se na deconvolução das respostas temporais em aceleração empregando um conjunto de funções de resposta ao impulso da estrutura.

Após a apresentação de suas formulações, os métodos são avaliados mediante diversas aplicações efetuadas em uma estrutura simulada numericamente. Com base nos resultados pôde-se avaliar os desempenhos e as características operacionais dos métodos estudados. Em particular, foram estudadas as influências, sobre os desempenhos dos métodos, do uso de dados experimentais incompletos e dos ruídos experimentais.

---

### Palavras-chave:

Identificação de forças, medição de forças, problemas inversos, vibrações, análise modal.

## A B S T R A C T

GENARO, G., "Force Identification from the Dynamic Responses in the Time Domain", UFU, Uberlândia-MG, 1997.

This work addresses the problem of indirect force reconstruction employing time-domain-based techniques. In this context, two methods are examined. The first method proposed, named "Modal Coordinate Technique", explores the modal equilibrium equations and utilizes the acceleration time histories as well as a set of eigensolutions of the structure (natural frequencies, modal damping factors, generalized masses and eigenvector components). The second method, named "Deconvolution Technique" is based on the deconvolution of the acceleration time histories, requiring a set of impulse response functions of the structure.

After the formulation of both methods are presented they are evaluated through several applications performed on a numerically simulated test-structure. Based on the obtained results, it is possible to evaluate the performance and major characteristics of both methods. In particular, attention is paid to the effects of the incompleteness of the data and experimental noise upon the performance of the methods.

---

### KEYWORDS:

Force identification, force measurement, inverse problems, vibration, modal analysis.



## LISTA DE FIGURAS E TABELAS

<u>TABELA</u>	<u>PÁGINA</u>
5.1 - Erros aleatórios afetando os parâmetros modais	60

<u>FIGURAS</u>	<u>PÁGINA</u>
1.1 - Esquema de um sistema simples de identificação indireta de forças, com uma entrada (força) e uma saída (deformação)	2
1.2 - Representação esquemática entrada-modelo-saída	2
2.1 - Exemplo ilustrativo: modo de corpo rígido longitudinal usado para identificação de duas forças	12
3.1 - Efeito das condições iniciais sobre as forças identificadas	23
5.1 - Características do modelo de 11 GDL empregado nas simulações numéricas	34
5.2(a) a 5.2(k) - Modos naturais do sistema de 11 GDL	35 a 40
5.3 - Respostas exata e integrada do sistema de 11 GDL, para a massa n° 1	42
5.4 - Respostas exata e integrada do sistema de 11 GDL, para a massa n° 7	43

5.5 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=11, n=7)	44
5.6 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=11, n=8)	45
5.7 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=11, n=9)	45
5.8 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=11, n=10)	46
5.9 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=n=11)	46
5.10 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=8, n=11)	48
5.11 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=9, n=11)	49
5.12 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=10, n=11)	49
5.13 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=n=9)	50
5.14 - Forças harmônicas exatas e identificadas (c=10, n=9)	51
5.15 - Forças modais para os modos 1 e 2	52
5.16 - Forças modais para os modos 3 e 4	52
5.17 - Forças modais para os modos 5 e 6	53

5.18 - Forças modais para os modos 7 e 8	53
5.19 - Forças modais para os modos 9 e 10	54
5.20 - Forças modais para o modo 11	54
5.21 - Teste da filtragem modal de uma força harmônica identificada ( $c=n=9$ )	56
5.22(a) a 5.22(c) - Coordenadas generalizadas $q_1(t)$ , $q_2(t)$ e $q_3(t)$	57 e 58
5.23 - Modelo do ruído utilizado na contaminação das acelerações	60
5.24 - Forças harmônicas exata e identificada, na presença de ruídos ( $c=n=11$ )	61
5.25 - Forças harmônicas exata e identificada, na presença de ruídos ( $c=n=7$ )	61
5.26 - Força transitória simulando uma excitação por impacto, aplicada na massa n° 1	62
5.27 - Espectro de frequência da força transitória	63
5.28 - Respostas do sistema de 11 GDL à força de impacto medidas na massa n° 1	64
5.29 - Respostas do sistema de 11 GDL à força de impacto medidas na massa n° 5	64
5.30 - Forças transitórias exata e identificada ( $c=11$ , $n=2$ )	65

5.31 - Forças transitórias exata e identificada (c=11, n=7)	66
5.32 - Forças transitórias exata e identificada (c=11, n=10)	66
5.33 - Forças transitórias exata e identificada (c=n=11)	67
5.34 - Forças transitórias exata e identificada (c=2, n=11)	67
5.35 - Forças transitórias exata e identificada (c=7, n=11)	68
5.36 - Forças transitórias exata e identificada (c=n=4)	68
5.37 - Forças transitórias exata e identificada (c=n=6)	69
5.38 - Forças transitórias exata e identificada, na presença de ruídos (c=n=11)	70
5.39 - Forças transitórias exata e identificada, na presença de ruídos (c=n=7)	71
6.1 - Sistema teste de 1 GDL	73
6.2 - Respostas temporais do sistema de 1 GDL à excitação harmônica	73
6.3 - FRI do sistema de 1 GDL	74
6.4 - Forças harmônicas exata e identificada, pelo método recursivo	74

6.5 - Forças harmônicas exata e identificada, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=0$ )	76
6.6 - Forças harmônicas exata e identificada, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=0,05$ )	76
6.7 - Forças harmônicas exata e identificada, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=0,01$ )	77
6.8 - Forças harmônicas exata e identificada, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=0,002$ )	77
6.9 - Valores singulares da matriz [T]	78
6.10 - Forças harmônicas exata e identificada, pela DVS (15 valores singulares eliminados)	79
6.11 - Forças harmônicas exata e identificada, pela DVS (13 valores singulares eliminados)	79
6.12 - Forças harmônicas exata e identificada, pela DVS (10 valores singulares eliminados)	80
6.13 - Respostas exatas do sistema de 11 GDL, à excitação de uma força harmônica aplicada na massa n° 1	81
6.14 - Respostas exatas do sistema de 11 GDL, à excitação de uma força harmônica aplicada na massa n° 5	81
6.15 - FRI, em aceleração, do sistema de 11 GDL ( $h_{1,1}$ )	82
6.16 - FRI, em aceleração, do sistema de 11 GDL ( $h_{2,1}$ )	82

6.17 - Forças harmônicas exata e identificada, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=1 \times 10^{-5}$ )	83
6.18 - Forças harmônicas exata e identificada, pela DVS (Valores manores que 0,001 eliminados)	84
6.19 - Forças transitórias exata e identificada, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=1 \times 10^{-5}$ )	85
6.20 - Forças transitórias exata e identificada, pela DVS (Valores manores que 0,001 eliminados)	86
6.21 - Forças harmônicas exata e identificada, com a presença de ruídos, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=2 \times 10^{-5}$ )	87
6.22 - Forças harmônicas exata e identificada, com a presença de ruídos, pela DVS (Valores manores que 0,001 eliminados)	87
6.23 - Forças transitórias exata e identificada, com a presença de ruídos, pela regularização de Thikonov ( $\alpha=1 \times 10^{-5}$ )	88
6.24 - Forças transitórias exata e identificada, com a presença de ruídos, pela DVS (Valores manores que 0,001 eliminados)	88

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### LETRAS LATINAS

- IIF: Identificação Indireta de Forças  
GDL: Graus de Liberdade  
DVS: Decomposição em Valores Singulares  
FRF: Função de Resposta em Freqüência  
FRI: Função de Resposta ao Impulso  
N: Número de GDL da estrutura  
p: Número de pontos amostrados no tempo  
n: Número de modos utilizados na base modal (autovetores)  
c: Número de pontos instrumentados (sensores)  
f: Número de forças excitadoras  
[M], [C], e [K]  $\in \mathbb{R}^{N,N}$ : Respectivamente as matrizes simétricas de massa, amortecimento e rigidez  
[A], [U]  $\in \mathbb{R}^{2N,2N}$ : Matrizes de estado  
[Y], [S]  $\in \mathbb{C}^{2N,2N}$ : Respectivamente as matrizes modal e espectral no espaço de estado  
[N]  $\in \mathbb{C}^{2N,2N}$ : Matriz de massas generalizadas no espaço de estado  
[U] e [V]: Matrizes ortogonais da DVS  
 $\{f(t)\} \in \mathbb{R}^{f,1}$ : Vetor das forças excitadoras  
 $\{x(t)\} \in \mathbb{R}^{c,1}$ : Vetor de respostas (deslocamento, velocidade ou aceleração)  
[H( $\omega$ )]: Matriz de FRFs  
 $\{X(\omega)\}$ : Transformada de Fourier de  $\{x(t)\}$   
 $\{F(\omega)\}$ : Transformada de Fourier de  $\{f(t)\}$   
 $h_{ij}(\omega)$ : Função de resposta em freqüência  
 $h_{ij}(t)$ : Função de resposta ao impulso  
 $\{q(t)\}$ : Coordenadas modais ou generalizadas  
 $m_i^r$ : Massa generalizada associada ao modo  $\{x_i^r\}$

$s_i(t)$ : GDL generalizado  
 $s_i$ :  $i$ -ésimo autovalor complexo  
 $S_i$ :  $i$ -ésimo fator de amortecimento modal  
 $\{y_i\}$ :  $i$ -ésimo autovetor complexo  
 $[I]$ : Matriz identidade  
 $\{w_i\}$ : Vetor de pesos (SWAT)  
 $[X] \in \mathbb{R}^{N,N}$ : Matriz modal  
 $\{x_i\} \in \mathbb{R}^{N,1}$ :  $i$ -ésimo autovetor  
 $\{x_i^r\} \in \mathbb{R}^{N,1}$ :  $i$ -ésimo modo de corpo rígido  
 $\{f_I(t)\}$ ,  $\{f_D(t)\}$  e  $\{f_E(t)\}$ : Respectivamente, vetor das forças modais de inércia, de amortecimento e elástica  
 $v(t)$ : Ruído aleatório  
 $c_{xu}(t)$ : Função de correlação entre dois sinais  $x(t)$  e  $u(t)$

#### LETRA GREGAS

$\sigma_i$ :  $i$ -ésimo valor singular  
 $\Delta$ : Deslocamento  
 $\Delta t$ : Intervalo de tempo  
 $\alpha$ : Fator de regularização de Thikonov  
 $[\Lambda] \in \mathbb{R}^{N,N}$ : Matriz espectral  
 $[\eta] \in \mathbb{R}^{N,N}$ : Matriz das massas generalizadas  
 $[\beta] \in \mathbb{R}^{N,N}$ : Matriz de amortecimentos generalizados  
 $[\Sigma]$ : Matriz de valores singulares  
 $\sigma^2$ : Variância  
 $\epsilon_{\text{RMS}}$ : Função-erro RMS  
 $\xi_r$ : Fator de amortecimento modal



## OPERADORES MATRICIAIS

$[ ]^+$ : Pseudo-inversa de Moore-Penrose

$[ ]^T$ : Matriz transposta

$\text{Cond}([ ])$ : Número de condicionamento de uma matriz

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A determinação das forças excitadoras atuantes em estruturas em regime vibratório é uma etapa essencial no estudo de vários problemas da dinâmica. Em particular, tais forças devem ser conhecidas com boa precisão para que possam ser feitas simulações confiáveis do comportamento dinâmico a partir de modelos analíticos ou ainda quando se procede ao dimensionamento de peças e componentes sujeitos a esforços dinâmicos. Entretanto, várias situações práticas existem em que a medição direta de forças excitadoras, mediante o emprego de transdutores de força (células de carga), revela-se inviável ou mesmo impossível. Tal é o caso, por exemplo, quando as forças são distribuídas em diversas localizações espaciais ou ainda quando elas incidem em locais inacessíveis à instrumentação. Em tais casos, técnicas de identificação indireta de forças (IIF) a partir das respostas dinâmicas da estrutura - as quais podem ser facilmente obtidas experimentalmente - apresentam-se como alternativas interessantes. Neste contexto, o problema de identificação indireta de forças, que se insere na classe dos problemas inversos, tem merecido considerável interesse de numerosos pesquisadores nos últimos anos. Diversas aplicações são descritas na literatura, tratando da identificação de forças de diversas naturezas, tanto determinísticas quanto aleatórias. Podem ser citados, a título de exemplo, os estudos tratando da identificação de forças de impacto em projéteis [Bateman et al., 1991], forças aerodinâmicas [Ellis, 1973], forças devidas ao desbalanceamento e forças transmitidas por abalos sísmicos [Pilkey & Kalinowski, 1972], forças de impacto em cascos de navios [Ghoneim et al., 1984], entre outros.

A IIF não é um conceito novo. Na verdade, ela é a base de vários transdutores de força comumente empregados. Considere, por exemplo, o sistema simples mostrado na Figura

1.1, em que medições de deformação sobre uma viga engastada-livre são utilizadas para se determinar o peso de um objeto suspenso em sua extremidade livre. A força aplicada sobre a viga é determinada de forma indireta, a partir da deformação que ela provoca na viga. Se o sistema for composto de apenas uma entrada e uma saída, como neste exemplo, o mesmo pode ser calibrado experimentalmente, aplicando-se pesos conhecidos, adequando-se a escala para se determinar a relação entre a entrada e a saída. Nas situações mais simples esta relação pode também ser calculada analiticamente.

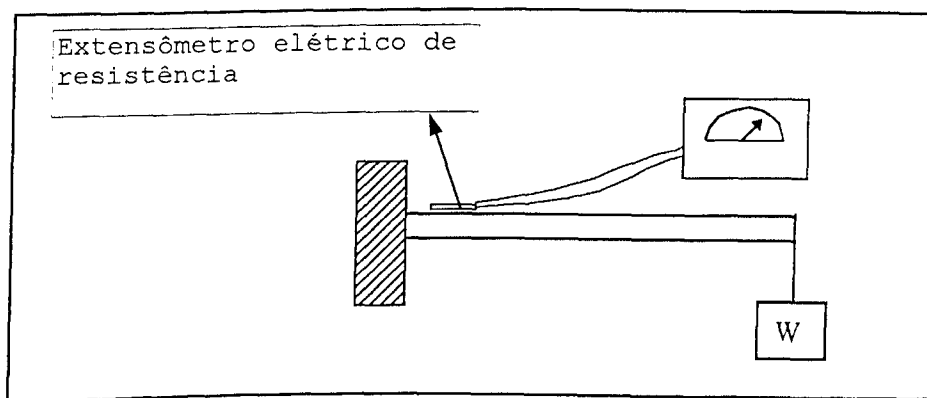


Figura 1.1 - Esquema de um sistema simples de identificação indireta de forças com uma entrada (força) e uma saída (deformação).

De modo geral, as técnicas de IIF constituem uma inversão do problema direto, que consiste em calcular a resposta (saída) do sistema conhecendo-se a força excitadora (entrada) e a função de transferência (modelo) que relaciona a excitação e a resposta (Figura 1.2). Na IIF, as forças são estimadas a partir da resposta do sistema e de sua função de transferência, tratando-se portanto de um problema inverso.

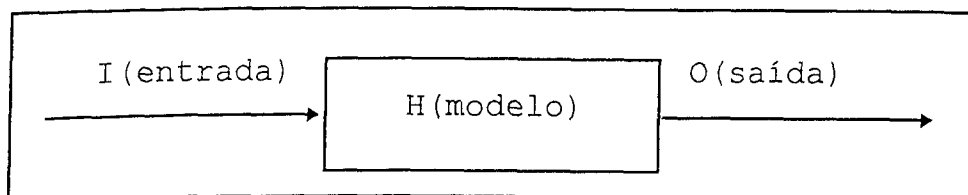


Figura 1.2 - Representação esquemática entrada-modelo-saída.

Foram desenvolvidas recentemente técnicas avançadas que possibilitam a identificação de forças em situações muito mais complexas, envolvendo múltiplas entradas e múltiplas saídas. Carregamentos dinâmicos discretos têm sido identificados com sucesso em um grande número de aplicações, e carregamentos continuamente distribuídos têm sido objeto de recentes estudos [Stevens, 1987]. Entretanto, conforme reportam vários autores [Starkey, 1989], a dificuldade maior na resolução do problema de identificação de forças e, de modo geral, na resolução de problemas inversos, é o mau condicionamento numérico do sistema de equações de estimação. O mau condicionamento numérico faz com que as forças estimadas sejam altamente sensíveis a ruídos de origem experimental e a erros de truncamento durante os cálculos. O problema de mau condicionamento é usualmente minimizado pelo emprego de técnicas especiais de regularização numérica [Fasana & Piombo, 1996].

Os métodos de IIF são usualmente separados em dois grandes grupos: o dos métodos operando no domínio da frequência e o dos métodos baseados no domínio do tempo. A grande maioria dos estudos encontrados na literatura é dedicada aos métodos do primeiro grupo, ao passo que os métodos do segundo grupo tem merecido menor atenção.

Os estudos mostram que as duas classes de métodos apresentam suas vantagens e inconvenientes e a escolha do método mais adequado dever ser feita caso a caso, levando-se em conta o tipo de dados experimentais disponíveis.

Os métodos de IIF operando no domínio do tempo constituem o objeto do estudo reportado neste memorial. No contexto da elastodinâmica linear, são investigados dois métodos de IIF: um método baseado no emprego de coordenadas modais, que são obtidas mediante a representação das respostas temporais no espaço modal, e o método fundamentado na deconvolução das respostas temporais a partir das funções de resposta ao impulso.

Este memorial é organizado em seis capítulos, além deste primeiro capítulo introdutório.

No Capítulo II é feita uma síntese dos principais métodos de IIF encontrados na literatura.

Nos Capítulos III e IV são apresentadas as formulações e discutidas as características dos métodos de IIF baseados nas coordenadas modais e na deconvolução das respostas temporais, respectivamente.

São apresentados, nos Capítulos V e VI, diversos testes numéricos realizados para a avaliação dos dois métodos estudados, sendo também discutidos os resultados obtidos.

Finalmente, o Capítulo VII traz as conclusões gerais e sugestões para a continuidade dos estudos sobre as técnicas de IIF.

## CAPÍTULO II

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

São apresentadas neste Capítulo, as formulações pertinentes a alguns dos principais métodos de IIF documentados na literatura. São também discutidas as principais características e aspectos operacionais destes métodos.

#### 2.1 - MÉTODOS BASEADOS NAS FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

As equações de movimento para um sistema vibratório linear podem ser expressas, no domínio da frequência, pela equação:

$$\{X(\omega)\}_{cx1} = [H(\omega)]_{cx f} \{F(\omega)\}_{fx1} \quad (2.1)$$

onde  $\{X(\omega)\}$  e  $\{F(\omega)\}$  designam, respectivamente, as transformadas de Fourier (espectros) dos vetores de respostas (deslocamentos, velocidades ou acelerações) e de excitação. A matriz  $[H(\omega)]$ , que relaciona excitação e resposta é a chamada *matriz de transferência*, ou *matriz de funções de respostas em frequência (FRFs)*. Esta matriz depende exclusivamente das características dinâmicas do sistema. No caso dos problemas mais simples, ela pode ser calculada analiticamente. Para problemas mais complexos, pode ser determinada por métodos numéricos aproximados, como o método dos elementos finitos. Ela pode também ser determinada experimentalmente através de ensaios dinâmicos.

Uma vez conhecidos  $[H(\omega)]$  e  $\{X(\omega)\}$ , o espectro do vetor de forças excitadoras  $\{F(\omega)\}$  poderá ser calculado resolvendo-se o sistema (2.1) para cada valor da frequência  $\omega$ :

$$\{F(\omega)\} = [H(\omega)]^+ \{X(\omega)\} \quad (2.2)$$

onde  $[H(\omega)]^+$  designa a pseudo-inversa da matriz de FRFs.

Pode-se ainda conhecer as forças identificadas no domínio do tempo, computando-se a transformada inversa de Fourier de  $\{F(\omega)\}$ .

Embora simples na sua essência, os métodos de IIF baseados na inversão da matriz de FRFs comportam, via de regra, dificuldades quando de sua implementação prática. Por exemplo, para todo e qualquer valor da frequência,  $\omega$ , a resposta será influenciada por uns poucos modos cujas frequências características situam-se próximas daquele valor. Tal fato se verifica principalmente nas ressonâncias ou nas regiões próximas a elas. Neste caso,  $[H(\omega)]$  será posto-deficiente e, em consequência, mal-condicionada. Este fato faz com que a solução do problema, dada por (2.2), seja muito sensível aos ruídos que contaminam, inevitavelmente, as grandezas medidas experimentalmente. Esta sensibilidade pode ser suficientemente alta para inutilizar completamente os resultados da identificação [Starkey & Merril, 1989].

Conforme afirma [Alisson, 1979], os problemas diretos, casos em que são conhecidos  $[H(\omega)]$  e  $\{F(\omega)\}$ , e deseja-se conhecer  $\{X(\omega)\}$ , são processos "bem comportados", semelhantes aos processos de integração, enquanto os problemas inversos, em que se conhece  $\{X(\omega)\}$  e  $[H(\omega)]$  e deseja-se conhecer  $\{F(\omega)\}$ , são processos "mal comportados", semelhantes à diferenciação, na medida em que pequenas perturbações nos dados podem provocar grandes variações na solução.

Uma vez que os problemas inversos tendem a ser mal-condicionados, deve-se dar uma maior atenção aos efeitos dos erros no processo de identificação. Além dos erros provenientes dos algoritmos computacionais utilizados, existem duas fontes principais de erro: os ruídos experimentais, que contaminam a

medição das respostas do sistema  $\{X(\omega)\}$ , e os erros de modelagem.

Os erros de modelagem surgem, por exemplo, quando os elementos de  $[H(\omega)]$  são calculados por expansões modais. Por limitações de ordem prática, estas expansões são feitas com números relativamente pequenos de modos. Neste caso, o truncamento das expansões provocam os erros de modelagem.

Fabunmi [Fabunmi, 1986], estudou detalhadamente o efeito do grau de participação dos vários modos nos problemas de identificação de força. Seus resultados mostram que, dentro de uma certa faixa de frequência, há um limite para o número de forças que podem ser identificadas com precisão, e que este número está relacionado com o número de modos que contribuem efetivamente na resposta. Em particular, este autor concluiu que nas regiões próximas às ressonâncias, onde a resposta do modo ressonante domina todos os outros, não mais que uma força de excitação pode ser identificada com precisão.

Diversos procedimentos têm sido empregados para a resolução do sistema de equações (2.1) com o objetivo de se minimizar os efeitos do mau-condicionamento da matriz  $[H(\omega)]$ , entre os quais podem ser citados:

- Aproximação diagonal [Desanghere, 1985]

Uma solução muito simples pode ser usada quando a matriz de FRFs for quadrada (número de forças aplicadas igual ao número de coordenadas instrumentadas com acelerômetros) e diagonalmente dominante. Neste caso, as FRFs fora da diagonal principal podem ser negligenciadas, o que corresponde a assumir que não haja acoplamento dinâmico entre os vários pontos da estrutura, ou seja, uma força aplicada em um certo ponto causará apenas um deslocamento naquele ponto.

Sob tais circunstâncias, a inversão da matriz de resposta em frequência torna-se simples:



$$[H(\omega)]_{c \times c} \cong \text{diag}\{h_{ii}(\omega)\} \quad i=1 \text{ a } c$$

$$\{F(\omega)\} = [H(\omega)]^{-1} \{X(\omega)\} \cong \text{diag}\left\{\frac{1}{h_{ii}(\omega)}\right\} \{X(\omega)\}$$

A aplicação deste método, porém, é muito limitada porque na maioria dos problemas de identificação existe um forte acoplamento entre os vários pontos da estrutura.

• Solução por decomposições matriciais

Quando a matriz de FRFs for quadrada, algoritmos computacionalmente estáveis podem ser utilizados na resolução do sistema, aproveitando-se da propriedade de simetria da matriz de FRFs.

A decomposição  $LDL^T$  permite decompor a matriz quadrada  $[H(\omega)]$  segundo:

$$[H(\omega)] = [L][D][L]^T \quad (2.3)$$

onde  $[L]$  é uma matriz triangular inferior e  $[D]$  é uma matriz diagonal.

Este método permite reduzir à metade o número de operações, bem como o espaço de armazenagem, quando comparado ao método clássico da eliminação de Gauss [Desanghere, 1985].

Uma outra decomposição matricial que requer um maior tempo de cálculo mas apresenta vantagens numéricas no caso de matrizes virtualmente singulares, além de poder ser aplicado aos sistemas matriciais retangulares, é a decomposição  $Q$ - $R$ . Segundo este método, a matriz de FRFs é decomposta sob a forma:

$$[H(\omega)] = [Q][R] \quad (2.4)$$

onde  $[Q]$  é uma matriz ortogonal ( $[Q]^T[Q]=[I]$ ) e  $[R]$  é uma matriz triangular inferior. A decomposição Q-R foi utilizada por [Fregolent & Sestieri, 1990] no âmbito da IIF.

Um dos algoritmos mais eficientes e estáveis para a resolução de sistemas lineares quadrados ou retangulares é o baseado na *decomposição em valores singulares (DVS)*, segundo o qual a matriz de FRFs é expressa sob a forma:

$$[H(\omega)] = [U][\Sigma][V]^T \quad (2.5)$$

onde  $[U]$  e  $[V]$  são matrizes ortogonais ( $[U]^T[U]=[I]$ ,  $[V]^T[V]=[I]$ ) e  $[\Sigma]$  é a matriz diagonal constituída pelos valores singulares de  $[H(\omega)]$ .

Esta decomposição foi empregada por [Fasana & Piombo, 1996] e nas aplicações numéricas apresentadas nos Capítulos V e VI deste memorial.

#### • Solução pelo Método dos Mínimos Quadrados

O efeito do ruído nas medições e os problemas de singularidade da matriz de resposta em frequência podem ser diminuídos na identificação de forças quando o sistema (2.1) for redundante ou superdeterminado, ou seja, quando o número de equações de estimação (que coincide com o número de coordenadas instrumentadas, onde se observam as respostas dinâmicas) exceder o número de forças a serem identificadas. Nestes casos, as forças podem ser obtidas através da *solução normal* do método dos mínimos quadrados.

Admitindo-se, em (2.1),  $c > f$ , esta solução é dada por:

$$\{F(\omega)\} = \left( [H(\omega)]^T [H(\omega)] \right)^{-1} [H(\omega)]^T \{x(\omega)\} \quad (2.5)$$

O tempo de cálculo é geralmente elevado para este método. Além disso, pode-se demonstrar que a matriz  $[H(\omega)]^T[H(\omega)]$  que deve ser invertida em (2.5) possui número de condicionamento sempre superior àquele da matriz  $[H(\omega)]$  [Desanghere, 1985].

## 2.2 - MÉTODOS BASEADOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Dentre os métodos de identificação de forças baseados no domínio do tempo encontrados na literatura, merece destaque um cujas entradas do sistema são expandidas em termos de uma série de Fourier [Steffen & Rade, 1991]. Este método converte um sistema de equações diferenciais em um modelo algébrico linear que, ao ser resolvido, permite a estimação dos coeficientes de Fourier das forças excitadoras que atuam sobre a estrutura. O método mais conhecido, porém, é o denominado *SWAT* (*Sum of Weighted Accelerations Technique*), [Bateman et al., 1991], [Bateman et al., 1992], [Bateman et al., 1994]. A formulação deste método é apresentada a seguir.

As equações do movimento para a estrutura no domínio do tempo se escrevem:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.6)$$

Procedendo-se à transformação modal, o vetor de deslocamentos é expresso como uma combinação linear dos autovetores:

$$\{x(t)\} = \sum_i \{x_i\} q_i(t) = [X]\{q(t)\} \quad (2.7)$$

Derivando-se (2.7) em relação ao tempo, as seguintes expressões para os vetores das velocidades e acelerações são obtidas:

$$\{\dot{x}(t)\} = \sum_i \{x_i\} \dot{q}_i(t) = [X]\{\dot{q}(t)\} \quad (2.8)$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = \sum_i \{x_i\} \ddot{q}_i(t) = [X]\{\ddot{q}(t)\} \quad (2.9)$$

Nestas equações:

- $[X]$  é a matriz modal, contendo os modos de corpo rígido e os modos elásticos ; e

- $\{q(t)\}$  é o vetor contendo os fatores de participação modal (coordenadas modais ou coordenadas generalizadas).

Introduzindo-se as equações (2.7) a (2.9) na equação (2.6), e pré-multiplicando-se a equação resultante pelo transposto do  $i$ -ésimo modo de corpo rígido, denotado por  $\{x_i^r\}$ , tem-se:

$$\{x_i^r\}^T [M][X]\{\ddot{q}(t)\} + \{x_i^r\}^T [C][X]\{\dot{q}(t)\} + \{x_i^r\}^T [K][X]\{q(t)\} = \{x_i^r\}^T \{f(t)\} \quad (2.10)$$

Para os modos de corpo rígido as forças elásticas são nulas. Admite-se igualmente que sejam nulas as forças de amortecimento, o que implica:

$$\{x_i^r\}^T [K] = 0 \quad (\text{forças modais elásticas}) \quad (2.11)$$

$$\{x_i^r\}^T [C] = 0 \quad (\text{forças modais de amortecimento}) \quad (2.12)$$

Introduzindo-se as equações (2.11) e (2.12), e fazendo-se uso da propriedade de ortogonalidade dos modos em relação à matriz de massa, da equação (2.10) resulta:

$$m_i^r \ddot{q}_i(t) = \{x_i^r\}^T \{f(t)\} \quad (2.13)$$

onde  $m_i^r$  é a massa generalizada associada ao modo  $\{x_i^r\}$ , dada por:

$$m_r = \{x_i^r\}^T [M] \{x_i^r\} \quad (2.14)$$

O segundo membro da equação (2.13) representa o trabalho realizado pelas forças externas, associado ao campo de deslocamentos dado por  $\{x_i^r\}$ .

Assim, se se dispuser das quantidades modais  $m_r$ ,  $\ddot{q}_r(t)$  e  $\{x_i^r\}$ , obtidos experimentalmente, pode-se determinar  $\{f(t)\}$  para cada valor do tempo  $t$  em que a resposta foi medida. Entretanto, devido à sua característica de somente utilizar os modos de corpo rígido, o método permite, na verdade, determinar somente a força resultante e o momento resultante das forças externas em relação ao centro de massa  $G$  da estrutura. Disto resulta que o método não fornece informação sobre a forma como as forças são espacialmente distribuídas, no caso em que a estrutura é solicitada por mais de uma força. Este fato é ilustrado com o auxílio da Figura 2.1, que mostra o primeiro modo de corpo rígido (na direção longitudinal) de uma viga livre-livre, utilizada para a identificação de duas forças  $f_1$  e  $f_2$ . Neste caso, dispõe-se apenas de uma equação de estimação, relativa ao modo de corpo rígido associado ao deslocamento longitudinal.

$$m_i^r \ddot{q}_1(t) = \{x_i^r\}^T \{f(t)\} = f_1 \Delta + f_2 \Delta \Rightarrow f_1 + f_2 = \frac{\Delta}{m_i^r \ddot{q}_1(t)}$$

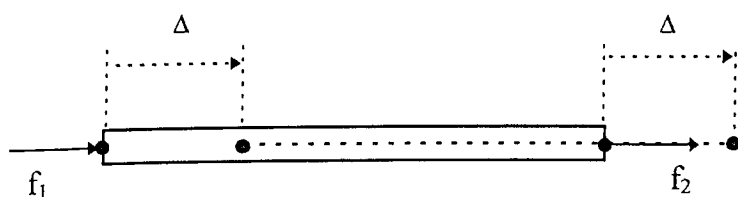


Figura 2.1 - Exemplo ilustrativo: modo de corpo rígido longitudinal usado para identificação de duas forças.

O problema que se apresenta, relativo à utilização da equação (2.13), é o de *como calcular, na prática,  $\ddot{q}_i(t)$  a partir das acelerações medidas experimentalmente.*

Sendo  $\{\ddot{x}(t)\} \in R^{c,1}$ , o vetor das acelerações medidas sobre a estrutura em um número  $c$  de coordenadas instrumentadas com acelerômetros, define-se o *grau de liberdade generalizado* (ou grau de liberdade SWAT) segundo:

$$s_r(t) = \sum_{i=1}^c w_i \cdot \ddot{x}_i(t) = \{w_r\}^T \{\ddot{x}(t)\} \quad (2.15)$$

Por outro lado, as acelerações podem ser escritas como combinações lineares dos  $n$  primeiros modos da estrutura (incluindo os modos de corpo rígido e os modos elásticos), da seguinte forma:

$$\{\ddot{x}(t)\}_{(c \times 1)} = [X]_{(c \times n)} \{\ddot{q}(t)\}_{(n \times 1)} \quad (2.16)$$

Onde  $[X]$  é a sub-base modal contendo os  $n$  primeiros autovetores.

Introduzindo a equação (2.16) em (2.15), tem-se:

$$s_r(t) = \{w_r\}^T [X] \{\ddot{q}(t)\} \quad (2.17)$$

Em seguida, o vetor dos pesos  $\{w_r\}$  é escolhido de modo que  $s(t)$  seja igual a  $\ddot{q}_r(t)$ . Para tanto:

$$\{w_r\}^T [X] = \{I_r\}^T \quad (2.18)$$

Onde  $\{I_r\}$  é a  $r$ -ésima coluna da matriz identidade.

Aplicando-se o operador transposição à equação (2.18), resulta:

$$[X]^T \{w_r\} = \{I_r\} \quad (2.19)$$

Admitindo-se  $n \geq c$ , ou seja, que o número de autovetores na sub-base modal seja maior ou igual ao número de graus de liberdade instrumentados da estrutura, os coeficientes de ponderação são calculados empregando-se a solução normal do método dos mínimos quadrados:

$$\{w_r\} = ([X][X]^T)^{-1} [X] \{I_r\} \quad (2.20)$$

Resolvendo-se a equação (2.20) para cada um dos modos de corpo rígido, pode-se então determinar os fatores de participação modal  $\ddot{q}_r(t)$ , que serão, em seguida, introduzidos na equação (2.13) para se estimar  $\{f(t)\}$ .

Com base no exposto acima, e nas diversas aplicações numéricas encontradas na literatura, as seguintes observações merecem ser destacadas, com relação ao método SWAT:

- trata-se de um método muito eficiente, requerendo pequeno montante de instrumentação;
- dada a sua característica de explorar os modos de corpo rígido, o método apresenta os seguintes inconvenientes:
  - ele somente fornece as forças resultantes, não sendo capaz de "separar" as forças que atuam em diferentes estações.
  - ele só pode ser aplicado em estruturas sob condições de contorno livres.

As aplicações deste método, encontradas na literatura, tratam essencialmente da identificação de forças de impacto em estruturas sob condições de contorno livres, tais como bombas e torpedos ) [Bateman et al., 1991], [Bateman et al., 1992] e [Bateman et al., 1994].

Será proposto, no Capítulo III, um método fundamentado no emprego de coordenadas modais, que pode ser considerado uma extensão do método SWAT, e que, devido ao fato de não se

limitar à exploração dos modos de corpo rígido, não apresenta os inconvenientes destacados acima.



## CAPÍTULO III

### MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO INDIRETA DE FORÇAS BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS

Propõe-se, neste Capítulo, um método de identificação de forças operando no domínio do tempo, fundamentado na utilização das equações do movimento no espaço modal, empregando ainda as respostas em aceleração amostradas no domínio do tempo e um conjunto de auto-soluções da estrutura: frequências naturais, fatores de amortecimento modais, massas generalizadas e componentes dos autovetores.

#### 3.1 - A FORMULAÇÃO DO MÉTODO FUNDAMENTADO NAS COORDENADAS MODAIS

Seja um sistema mecânico linear, simétrico, com amortecimento viscoso, descrito pelas seguintes equações do movimento, na forma matricial:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1)$$

O problema de autovalor do modelo conservativo (não amortecido) associado é o seguinte:

$$([K] - \lambda[M])\{x\} = 0 \quad \text{ou} \quad [K][X] = [M][X][\Lambda], \quad (3.2)$$

onde  $[X] = [\{x_1\} \dots \{x_N\}] \in R^{N,N}$  e  $[\Lambda] = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_N\} \in R^{N,N}$  são respectivamente a matriz modal e a matriz espectral.

Admite-se que os autovetores sejam normalizados de modo a satisfazerem:

$$[X]^T[M][X] = [\eta] \quad [X]^T[K][X] = [\eta][\Lambda] \quad (3.3)$$

Onde  $[\eta] = \text{diag}\{\eta_1 \dots \eta_N\} \in \mathbb{R}^{N,N}$  é a matriz de massas generalizadas.

Utilizando-se o Teorema da Expansão, a solução de (3.1) pode ser expressa sob a forma:

$$\{x(t)\} = [X]\{q(t)\} \quad (3.4)$$

onde  $\{q(t)\}$  é o vetor das coordenadas generalizadas ou coordenadas modais.

Introduzindo-se (3.4) em (3.1), pré-multiplicando-se a equação resultante por  $[X]^T$  e fazendo-se uso das equações de ortogonalidade (3.3), tem-se:

$$[\eta]\{\ddot{q}(t)\} + [\beta]\{\dot{q}(t)\} + [\Lambda][\eta]\{q(t)\} = [X]^T\{f(t)\}, \quad (3.5)$$

onde  $[\beta] = [X]^T[C][X]$  é a matriz de amortecimentos generalizados.

Admite-se que seja válida a relação:

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C].$$

Neste caso, os autovetores são reais e a matriz de amortecimentos generalizados é diagonal, ou seja:

$$[\beta] = \text{diag}\{\beta_1 \dots \beta_N\} = \text{diag}\{2\xi_1\sqrt{\lambda_1} \dots 2\xi_N\sqrt{\lambda_N}\} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

onde  $\xi_r$  designa o fator de amortecimento para o r-ésimo modo. O sistema (3.5) contém N equações diferenciais desacopladas de segunda ordem no espaço modal, do tipo:

$$\eta_r \ddot{q}_r(t) + \beta_r \dot{q}_r(t) + \lambda_r \eta_r q_r(t) = \{x_r\}^T \{f(t)\}, \quad r=1 \text{ a } N \quad (3.6)$$

As equações (3.6) podem ser reescritas na seguinte forma matricial:

$$\{f_I(t)\} + \{f_D(t)\} + \{f_E(t)\} = [X]^T \{f(t)\} \quad (3.7)$$

onde:

- $\{f_I(t)\} = [\eta] \{\ddot{q}(t)\}$  (3.8)

é o vetor das forças de inércia modais,

- $\{f_D(t)\} = [\beta] \{\dot{q}(t)\}$  (3.9)

é o vetor das forças de amortecimento modais, e

- $\{f_E(t)\} = [\Lambda][\eta] \{q(t)\}$  (3.10)

é o vetor das forças elásticas modais.

Desta forma, supondo-se que tanto a matriz modal  $[X]$  quanto os vetores de forças modais (3.8) a (3.10) possam ser obtidos experimentalmente, o vetor  $\{f(t)\}$  pode ser calculado resolvendo-se o sistema (3.7):

$$\{f(t)\} = [X]^{-T} (\{f_I(t)\} + \{f_D(t)\} + \{f_E(t)\}) \quad (3.11)$$

Obviamente, uma solução na forma (3.11) somente pode ser obtida se um conjunto completo de dados experimentais estiver disponível, ou seja, quando todos os autovalores complexos bem como todos os componentes dos autovetores forem disponíveis. Isto, porém, raras vezes é possível nas aplicações práticas, onde normalmente trabalha-se com um número reduzido "n" de autovalores identificados ( $n < N$ ), e um número reduzido "c" de coordenadas instrumentadas ( $c < N$ ) para a identificação dos autovetores nos procedimentos de análise modal experimental. Neste caso, os dados incompletos são agrupados em matrizes com as seguintes dimensões:

$$[\tilde{\eta}] \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad [\tilde{\Lambda}] \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad [\tilde{\beta}] = \text{diag}\{2\xi_r \sqrt{\lambda_r}\} \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ e } [\tilde{X}] \in \mathbb{R}^{c,n}.$$

Supondo-se que as coordenadas onde as forças são aplicadas constituam um subconjunto das coordenadas nas quais as componentes dos autovetores foram identificadas, a equação de estimação, análoga a (3.11), se escreve:

$$\{\tilde{f}(t)\} = ([\tilde{X}]^T)^+ (\{\tilde{f}_I(t)\} + \{\tilde{f}_D(t)\} + \{\tilde{f}_E(t)\}) \quad (3.12)$$

Onde  $([\tilde{X}]^T)^+$  é a pseudo-inversa de  $[\tilde{X}]^T$  e:

$$\{\tilde{f}(t)\} \in \mathbb{R}^c$$

$$\{\tilde{f}_I(t)\} = [\tilde{\eta}]\{\ddot{q}(t)\} \in \mathbb{R}^n \quad (3.13.a)$$

$$\{\tilde{f}_D(t)\} = [\tilde{\beta}]\{\dot{q}(t)\} \in \mathbb{R}^n \quad (3.13.b)$$

$$\{\tilde{f}_E(t)\} = [\tilde{\Lambda}]\{q(t)\} \in \mathbb{R}^n \quad (3.13.c)$$

Com base nesta formulação e admitindo-se que as acelerações tenham sido amostradas em "p" instantes de tempo:

$$\{\ddot{x}(t_i)\} \in \mathbb{R}^{c,1}, \text{ com } i=1 \text{ a } p,$$

a identificação das forças dar-se-á através dos seguintes passos:

Primeiro passo: integrações sucessivas das acelerações amostradas  $\{\ddot{x}(t_i)\}$ , para obter as respostas em velocidade  $\{\dot{x}(t_i)\}$  e deslocamento  $\{x(t_i)\}$ , ambos pertencentes ao espaço  $\mathbb{R}^{c,1}$ , com

$i=1$  até  $p$ . Isto pode ser feito empregando-se quaisquer métodos numéricos conhecidos como a regra do trapézio, a regra de Simpson, o método da quadratura, etc. [Forsythe et. al., 1977].

**Segundo passo:** estimativa das coordenadas modais e suas derivadas temporais a partir das acelerações, velocidades e deslocamentos calculados no primeiro passo, através das seguintes equações:

$$\{\ddot{\tilde{q}}(t_i)\} = [\tilde{X}]^+ \{\ddot{\tilde{x}}(t_i)\}, \quad (3.14)$$

$$\{\dot{\tilde{q}}(t_i)\} = [\tilde{X}]^+ \{\dot{\tilde{x}}(t_i)\}, \quad (3.15)$$

$$\{\tilde{q}(t_i)\} = [\tilde{X}]^+ \{\tilde{x}(t_i)\} \quad (3.16)$$

para  $i=1$  a  $p$ .

**Terceiro passo:** cálculo dos vetores de forças modais através das equações (3.13), e resolução da equação (3.12) para cada instante de tempo:

$$\{\tilde{f}(t_i)\} = ([\tilde{X}]^T)^+ (\{\tilde{f}_I(t_i)\} + \{\tilde{f}_D(t_i)\} + \{\tilde{f}_E(t_i)\}) \quad (3.17)$$

Pode-se observar que o método dos mínimos quadrados é utilizado duas vezes: para a estimação das coordenadas generalizadas e suas derivadas, empregando as equações (3.14) a (3.16) e para a estimação das forças excitadoras através da equação (3.17). Em ambas as estimações é necessário que os sistemas de equações sejam super determinados, de modo que as soluções normais do método dos mínimos quadrados possam ser obtidas. Evita-se, desta forma, o uso de soluções de norma mínima. A análise da formulação mostra que, para que esta condição seja satisfeita, deve-se ter:

$$c \geq n \geq f.$$

Deve ainda ser notado que, quando o número de forças "f" e as posições das forças são conhecidas, apenas as colunas de  $[X]^T$  correspondentes às coordenadas em que as forças são aplicadas devem ser obtidas para a resolução de (3.17).

O método das coordenadas modais apresenta algumas vantagens em relação aos métodos apresentados no capítulo anterior. Com efeito, foi visto que o método SWAT, por exemplo, possui duas importantes limitações: a primeira é que o método permite que se identifique apenas a resultante de todas as forças externas aplicadas sobre a estrutura, ou seja, não se pode identificar cada força separadamente; a segunda é que, uma vez que o método baseia-se apenas nos modos de corpo rígido, ele somente pode ser aplicado nos casos em que a estrutura apresenta condições de contorno livres.

Diferentemente do método SWAT, o método das coordenadas modais explora tanto os modos de corpo rígido quanto os modos elásticos da estrutura. Isto permite sua aplicação a sistemas sujeitos a quaisquer condições de contorno. Além disso, o método permite a identificação de cada uma das forças excitadoras nos seus diferentes pontos de aplicação. Porém, a principal vantagem apresentada pelo método das coordenadas modais reside no fato de não se ter que inverter matrizes mal condicionadas. Conforme pode ser visto na formulação, o método requer apenas a inversão da matriz modal, numericamente bem condicionada. Este fato ficará evidenciado pelas aplicações numéricas apresentadas no Capítulo V.

### 3.2 - INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Em geral, os métodos de identificação indireta de forças assumem a hipótese de que o sistema tenha partido de condições iniciais nulas, ou seja:

$$\{x(0)\} = \{0\} \text{ e } \{\dot{x}(0)\} = \{0\}$$

Porém, na prática, algumas vezes, tal hipótese não pode ser garantida. A existência de condições iniciais não nulas introduz uma dificuldade adicional no emprego do método de identificação estudado. Com efeito, neste caso, a integração sucessiva das respostas em aceleração conduz, não às respostas em velocidade e deslocamento, requeridas pelo método, mas, sim, às diferenças entre os valores das velocidades e deslocamentos instantâneos e os seus valores iniciais. Em consequência, estimativas polarizadas são obtidas para as forças. Por outro lado, a determinação experimental das condições iniciais requereria uma maior quantidade de instrumentação.

Apresenta-se, a seguir, um procedimento que permite "corrigir" os efeitos das condições iniciais não nulas, quando seus valores exatos são desconhecidos, mas dispõe-se de informações adicionais "a priori" sobre a variação das forças no tempo.

As duas integrações sucessivas das coordenadas generalizadas associadas às respostas em aceleração, conduzem às relações:

$$\{\ddot{\tilde{q}}(t)\} = \{\ddot{\tilde{q}}(t)\} \quad (3.18)$$

$$\{\dot{\tilde{q}}(t)\} = \{\dot{\tilde{q}}(0)\} + \int_0^t \{\ddot{\tilde{q}}(\xi)\} d\xi = \{\dot{\tilde{q}}(0)\} + \{\Delta\dot{q}(t)\} \quad (3.19)$$

$$\{\tilde{q}(t)\} = \{\tilde{q}(0)\} + \{\dot{\tilde{q}}(0)\}t + \int_0^t \int_0^t \{\ddot{\tilde{q}}(\xi)\} d\xi^2 = \{\tilde{q}(0)\} + \{\dot{\tilde{q}}(0)\}t + \{\Delta q(t)\} \quad (3.20)$$

onde:  $\{\Delta\dot{q}(t)\}$ ,  $\{\Delta q(t)\}$  são as funções obtidas por integração numérica de  $\{\ddot{\tilde{q}}(t)\}$ .

Introduzindo-se as equações (3.18), (3.19) e (3.20) na equação (3.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}(t)\} = & \left([\tilde{X}]^T\right)^+ \left\{ [\tilde{\eta}]\{\ddot{q}(t)\} + [\tilde{\beta}]\{\Delta\dot{q}(t)\} + [\tilde{\Lambda}][\tilde{\eta}]\{\Delta q(t)\} \right\} + \\ & + \left([\tilde{X}]^T\right)^+ \left\{ [\tilde{\beta}]\{\dot{q}(0)\} + [\tilde{\Lambda}][\tilde{\eta}]\{q(0)\} \right\} + \left([\tilde{X}]^T\right)^+ [\tilde{\Lambda}][\tilde{\eta}]\{\dot{q}(0)\}t \end{aligned} \quad (3.21)$$

ou:

$$\{\tilde{f}(t)\} = \{\Delta f(t)\} + \{f_0(t)\} \quad (3.22)$$

com:

$$\{\Delta f(t)\} = \left([\tilde{X}]^T\right)^+ \left\{ [\tilde{\eta}]\{\ddot{q}(t)\} + [\tilde{\beta}]\{\Delta\dot{q}(t)\} + [\tilde{\Lambda}][\tilde{\eta}]\{\Delta q(t)\} \right\}$$

$$\{f_0(t)\} = \left([\tilde{X}]^T\right)^+ \left\{ [\tilde{\beta}]\{\dot{q}(0)\} + [\tilde{\Lambda}][\tilde{\eta}]\{q(0)\} \right\} + \left([\tilde{X}]^T\right)^+ [\tilde{\Lambda}][\tilde{\eta}]\{\dot{q}(0)\}t$$

Observa-se, então, que o vetor de forças exatas,  $\{\tilde{f}(t)\}$ , é igual ao vetor de forças identificadas supondo-se condições iniciais nulas,  $\{\Delta f(t)\}$ , acrescido de um vetor  $\{f_0(t)\}$  contendo funções que variam linearmente com o tempo, sendo estas funções determinadas pelas condições iniciais. Tal comportamento é ilustrado na Figura 3.1.

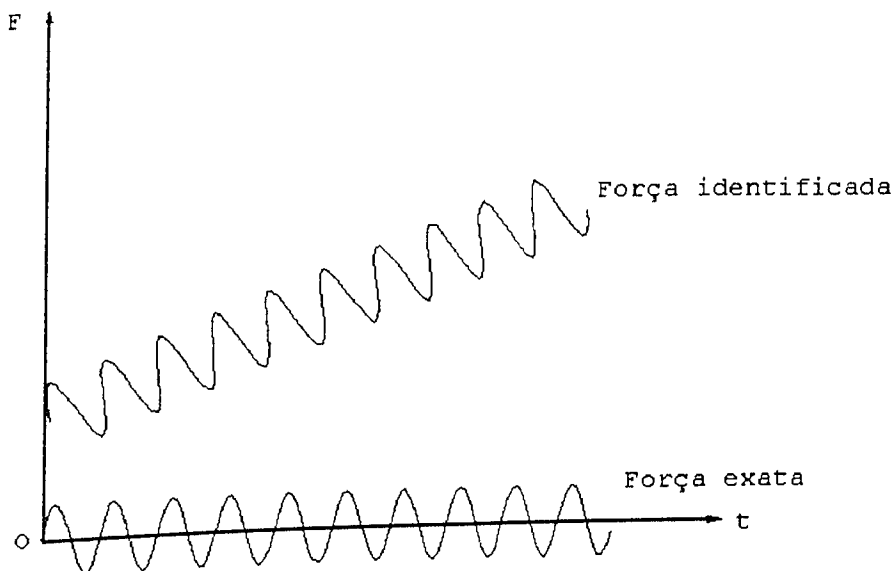


Figura 3.1 - Efeito das condições iniciais sobre as forças identificadas



Analisados os efeitos das condições iniciais sobre a força estimada no processo de identificação torna-se possível, em certos casos, fazer uma correção visando a obtenção das forças exatas a partir das forças estimadas admitindo-se condições iniciais nulas. Sabendo-se, por exemplo, que a força exata possui média temporal nula, pode-se determinar, e em seguida remover, a componente DC e a componente variando linearmente com o tempo.

## CAPÍTULO IV

### MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO INDIRETA DE FORÇAS BASEADO NA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Neste capítulo, apresenta-se o segundo método de identificação indireta de forças estudado, fundamentado na deconvolução das respostas temporais no domínio do tempo. Como será visto mais adiante, o método requer, como dados experimentais, as funções de resposta ao impulso da estrutura.

Este método foi recentemente examinado por Kammer [Kammer, 1996], que propôs uma formulação e metodologia de implementação diferentes daquelas apresentadas a seguir.

A formulação do método será desenvolvida inicialmente para um sistema com uma entrada e uma saída. Em seguida, ela será estendida a sistemas comportando múltiplas entradas e múltiplas saídas.

#### 4.1 - SISTEMAS COM UMA ENTRADA E UMA SAÍDA

Sejam  $f(t)$  e  $x(t)$  a entrada (força) e a saída (resposta) de um sistema dinâmico linear, respectivamente. Admitindo-se condições iniciais nulas, a entrada e a saída são relacionadas, no domínio do tempo, pela *integral de convolução*, ou integral de Duhamel [Craig, 1981], dada por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (4.1)$$

onde  $h(t-\tau)$  é a função de resposta ao impulso unitário (FRI), que é uma característica dinâmica intrínseca do sistema.

A equação (4.1) mostra que as saídas  $x(t)$  são obtidas como uma soma ponderada de todos os valores de entrada  $f(t)$ .

Para sistemas mecânicos fisicamente realizáveis (causais) a FRI é identicamente nula para todos os valores de  $t \leq 0$ , e a equação (4.1) pode ser substituída por:

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (4.2)$$

Muitos autores, [Delves & Walsh, 1974], [Deuflhard & Hairer, 1983], [Phillips, 1962] e [Twomey, 1963], têm demonstrado que esta equação nem sempre apresenta uma solução analítica exata, mas este problema pode ser ignorado aqui. De fato, no âmbito da identificação indireta de forças, o essencial é que a função de resposta ao impulso unitário de um sistema mecânico linear sempre exista e seja única. Além disso, a equação integral (4.2) será tratada numericamente considerando-se os valores de  $x(t)$  e  $f(t)$  amostrados no tempo.

Seja  $\Delta t$  o período uniforme de amostragem, no domínio do tempo, das funções  $x(t)$  e  $f(t)$ . As amostras obtidas em  $p$  instantes de tempo são designadas por:  $x(i\Delta t)$ ,  $f(i\Delta t)$ ,  $i=0,1,2,\dots,p-1$ . Com base nesta discretização temporal, a integração indicada em (4.2) pode ser aproximada por um somatório. Para tanto, utiliza-se, neste estudo, a regra do retângulo (segurador de ordem zero [Ogata, 1993]). Esta escolha foi feita com base no fato de que, neste tipo de aplicação, ela demonstrou-se mais apropriada que as regras de integração de ordens superiores [Linz, 1985]. A equação 4.2 é transformada então em:

$$x(k\Delta t) = \sum_{i=0}^k h[(k-i)\Delta t]f(i\Delta t)\Delta t, \quad \text{com } k=0,1,2,\dots,p-1 \quad (4.3)$$

A notação será simplificada introduzindo-se:

$$x_i = x(i\Delta t)$$

$$f_i = f(i\Delta t)$$

$$h_i = h(i\Delta t),$$

para  $i=0$  a  $p-1$ .

Empregando-se esta notação, a equação (4.3) se escreve:

$$x_k = \sum_{i=0}^k h_{k-i} f_i, \quad \text{com } k=1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Para maior clareza, a equação (4.4) é expandida de modo a se obter as equações relacionando os valores da resposta e da força amostradas no tempo:

$$\begin{aligned} \text{Para } k=0: \quad x_0 &= h_0 f_0 \\ \text{Para } k=1: \quad x_1 &= h_1 f_0 + h_0 f_1 \\ \text{Para } k=2: \quad x_2 &= h_2 f_0 + h_1 f_1 + h_0 f_2 \\ &\quad \vdots \\ \text{Para } k=p-1: \quad x_{p-1} &= h_{p-1} f_0 + h_{p-2} f_1 + \dots + h_0 f_{p-1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Objetivando a identificação dos valores das forças amostradas no tempo, uma primeira alternativa (a mais simples) consiste na resolução das equações (4.5) empregando-se o seguinte esquema recursivo:

$$f_0 = x_0 / h_0 \quad \text{com } h_0 \neq 0 \quad (4.6.a)$$

$$f_1 = \frac{x_1 - f_0 h_1}{h_0}; \quad (4.6.b)$$

$$f_2 = \frac{x_2 - h_2 f_0 - h_1 f_1}{h_0}; \quad (4.6.c)$$

⋮

$$f_{p-1} = \frac{x_{p-1} - h_{p-1}f_0 - \dots - h_1f_{p-2}}{h_0} \quad (4.6.d)$$

Embora seja simples e rápido do ponto de vista computacional, este procedimento conduz, como será visto mais adiante, a resultados insatisfatórios. Um outro método de resolução, proporcionando melhores resultados, consiste em agrupar as equações (4.5) em um sistema de equações, que será em seguida resolvido para a identificação de todos os valores amostrados da força excitadora, de uma só vez. Tal sistema é matricialmente expresso sob a forma:

$$\{x\} = [T]\{f\}, \quad (4.7)$$

onde:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{Bmatrix}; \quad f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{Bmatrix} \quad e \quad T = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p-1} & h_{p-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix}$$

Este segundo método de resolução revela-se mais adequado que o primeiro porque o problema inverso de identificação de forças é essencialmente mal-condicionado. Conforme será visto mais adiante, ao contrário do primeiro método, o segundo permite o emprego de técnicas de regularização objetivando a melhoria da estabilidade numérica durante o processo de resolução das equações de estimação.

#### 4.2 - SISTEMAS COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E SAÍDAS

A formulação que proporciona a extensão da equação (4.2) a sistemas de múltiplas entradas e saídas é apresentada no Apêndice A.

Admitindo-se condições iniciais nulas, as equações (A.20) e (A.27) deste Apêndice assumem a forma:

$$\{y(t)\} = \int_0^t [H(t-\tau)]\{g(\tau)\}d\tau \quad (4.8)$$

Lembrando-se que (4.8) foi obtida a partir da formulação no espaço de estado, a matriz e vetores que figuram nesta equação podem ser particionados como segue:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \text{---} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} ; \{g(t)\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \text{---} \\ \{0\} \end{Bmatrix} ; [H(t)] = \begin{bmatrix} [h(t)] & [\tilde{h}(t)] \\ [h'(t)] & [\tilde{h}'(t)] \end{bmatrix}$$

Introduzindo-se estes particionamentos em (4.8), obtém-se:

$$\{x(t)\} = \int_0^t [h(t-\tau)]\{f(\tau)\}d\tau \quad (4.9)$$

Assume-se que atuem simultaneamente um número  $f$  de forças excitadoras  $f_j(t)$ , com  $j=1$  a  $f$ ; que as respostas sejam observadas em um número  $c$  de pontos instrumentados da estrutura  $x_i(t)$ , com  $i=1$  a  $c$ . Admite-se também que se disponha das funções de resposta ao impulso  $h_{ij}(t)$ , com  $i=1$  a  $c$ ,  $j=1$  a  $f$ . Assim, a equação matricial (4.9) pode ser desenvolvida, obtendo-se o seguinte conjunto de equações escalares:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t [h_{11}(t-\tau)f_1(\tau) + h_{12}(t-\tau)f_2(\tau) + \dots + h_{1f}(t-\tau)f_f(\tau)]d\tau \\ &\quad \vdots \\ x_c(t) &= \int_0^t [h_{c1}(t-\tau)f_1(\tau) + h_{c2}(t-\tau)f_2(\tau) + \dots + h_{cf}(t-\tau)f_f(\tau)]d\tau \end{aligned} \quad (4.10)$$

Admitindo-se que as respostas temporais, as funções de resposta ao impulso e as forças excitadoras sejam amostradas em  $p$  instantes de tempo regularmente espaçados:  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (p-1)\Delta t$ , as integrais indicadas em (4.10) podem ser aproximadas das seguintes formas:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \sum_{\ell=0}^k h_{11}(k-\ell)f_1(\ell)\Delta t + \dots + \sum_{\ell=0}^k h_{1f}(k-\ell)f_f(\ell)\Delta t \\ &\quad \vdots \\ x_c(k) &= \sum_{\ell=0}^k h_{c1}(k-\ell)f_1(\ell)\Delta t + \dots + \sum_{\ell=0}^k h_{cf}(k-\ell)f_f(\ell)\Delta t \end{aligned} \quad , k=0 \text{ a } p-1 \quad (4.11)$$

Para abreviar a notação, designar-se-á por  $x_i(k)$  a quantidade  $x_i(k\Delta t)$ , sendo esta mesma notação empregada para designar os valores amostrados das FRI e das forças excitadoras.

Para identificar os valores das forças amostradas:

$$f_j(k), \quad j=1 \text{ a } f, \quad k=0 \text{ a } p-1,$$

a partir das quantidades conhecidas:

$$x_i(k), \quad i=1 \text{ a } c, \quad k=0 \text{ a } p-1$$

$$h_{ij}(k), \quad i=1 \text{ a } c, \quad j=1 \text{ a } f, \quad k=0 \text{ a } p,$$

as equações (4.11) são agrupadas em um sistema de  $c \cdot p$  equações e  $f \cdot p$  incógnitas, com a seguinte estrutura triangular por blocos:

$$\begin{Bmatrix} \{x(0)\} \\ \{x(1)\} \\ \vdots \\ \{x(p)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T(0)] & & & [0] \\ [T(1)] & [T(0)] & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ [T(p-1)] & [T(p-2)] & \dots & [T(0)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f(0)\} \\ \{f(1)\} \\ \vdots \\ \{f(p)\} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

onde:

$$[T(k)] = \Delta t \begin{bmatrix} h_{11}(k) & h_{12}(k) & \cdots & h_{1f}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{c1}(k) & h_{c2}(k) & \cdots & h_{cf}(k) \end{bmatrix}, \quad k=0 \text{ a } p-1.$$

Escrevendo-se o sistema (4.12) sob a forma compacta:

$$\{x\} = [T]\{f\}, \quad (4.13)$$

e admitindo-se que o número de coordenadas instrumentadas seja maior ou igual ao número de forças aplicadas, ( $c \geq f$ ), a solução normal de (4.13) conduz aos valores das forças amostradas no tempo:

$$\{f\} = ([T]^T [T])^{-1} [T]^T \{x\} \quad (4.14)$$

#### OBSERVAÇÕES:

Na formulação desenvolvida acima,  $\{x(t)\}$  designa genericamente o vetor das respostas observadas nas coordenadas instrumentadas, que podem ser quaisquer uma das grandezas cinemáticas: deslocamento, velocidade ou aceleração. A matriz  $[T]$  é então formada pelas respostas ao impulso unitário correspondentes. Sob o ponto de vista prático, as acelerações são as quantidades cinemáticas mais convenientes de serem medidas experimentalmente com o emprego de acelerômetros. Assim, a formulação apresentada está adequada para a identificação de forças a partir das acelerações temporais e das FRI em aceleração.

As funções de resposta ao impulso podem ser obtidas, na prática, por diversos procedimentos dentre os quais pode-se citar:



1°) Computando-se a transformada inversa de Fourier das funções de resposta em frequência (acelerâncias). A demonstração de que as funções de resposta ao impulso e as funções de resposta em frequência formam pares de transformadas de Fourier é dada por [Bendat & Piersol, 1980];

2°) Elas podem ser identificadas utilizando-se procedimentos similares ao aqui descrito para a identificação de forças. A título de ilustração deste procedimento, considere-se a equação (4.9) particularizada para o caso de uma única força aplicada na coordenada  $j$  e uma única coordenada  $i$  instrumentada com acelerômetro:

$$x_i(t) = \int_0^t h_{ij}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau$$

Após a discretização temporal, a equação acima é aproximada por:

$$x_i(k) = \sum_{\ell=0}^k h_{ij}(k-\ell) f_j(\ell) \Delta t, \quad k=0 \text{ a } p-1. \quad (4.15)$$

Admitindo-se que os  $x_i(k)$  e  $f_j(\ell)$  sejam conhecidos, as equações (4.15) podem ser agrupadas no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} f_j(0) & & & & \\ f_j(1) & f_j(0) & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ f_j(p-1) & f_j(p-2) & \dots & f_j(0) & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{ij}(0) \\ h_{ij}(1) \\ \vdots \\ h_{ij}(p-1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i(0) \\ x_i(1) \\ \vdots \\ x_i(p-1) \end{Bmatrix}, \text{ ou:}$$

$$[F]_{(p,p)} \{H\}_{(p,1)} = \{X\}_{(p,1)} \quad (4.16)$$

donde:

$$\{H\} = [F]^{-1} \{X\} \quad (4.17)$$

Este método foi examinado por [Fasana & Piombo, 1996], tendo sido avaliado tanto em testes de simulação numérica quanto em estudos experimentais.

3°) As FRI podem ainda ser obtidas por uma análise de correlação, como sugerido por [Söderström & Stoica, 1989]. Tal procedimento é sumarizado a seguir.

Aplicando-se na coordenada  $j$  uma excitação  $u_j(t)$ , do tipo ruído branco de média zero e variância  $\sigma^2$ , a integral de convolução discretizada (4.15) fornece a relação entrada-saída:

$$x_i(k) = \sum_{\ell=0}^k h_{ij}(\ell) u_j(k-\ell) \Delta t + v(k) \quad (4.18)$$

onde  $v(t)$  é um ruído aleatório independente de  $u(t)$ . Multiplicando-se a equação (4.18) por  $u_j(k-m)$ , com  $m \leq k$ , e tomando-se os valores esperados de ambos os lados, tem-se:

$$E[x_i(k) u_j(k-m)] = \sum_{\ell=0}^k h_{ij}(\ell) E[u(k-m) u(k-\ell)] \Delta t + E[v(k) u_j(k-m)]$$

o que resulta em:

$$C_{xu}(m) = \sigma^2 h_{ij}(m) \Delta t \quad (4.19)$$

onde  $C_{xu}(m)$  é a função de correlação entre os sinais  $x(t)$  e  $u(t)$ .

Com base em (4.19), os valores amostrados da FRI podem ser estimados segundo:

$$h_{ij}(k) = \frac{C_{xu}(k)}{\sigma^2 \Delta t} \cong \frac{\frac{1}{N} \sum_{\ell=k+1}^{N-1} x(\ell) u(\ell-k)}{\Delta t \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{p-1} u^2(\ell)} \quad (4.20)$$

## CAPÍTULO V

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS: MÉTODO DE IIF BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS

Neste capítulo são apresentadas diversas aplicações numéricas realizadas com o objetivo de validar e ilustrar as características do método de IIF apresentado no Capítulo III.

#### 5.1 - DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA-TESTE

Para se estimar a eficiência dos métodos de IIF estudados, lançou-se mão de um modelo simples, de 11 graus de liberdade. A Figura 5.1 mostra as características físicas deste modelo. Nesta mesma figura e nas Figuras 5.2(a) a 5.2(k) são apresentadas as características modais do sistema-teste.

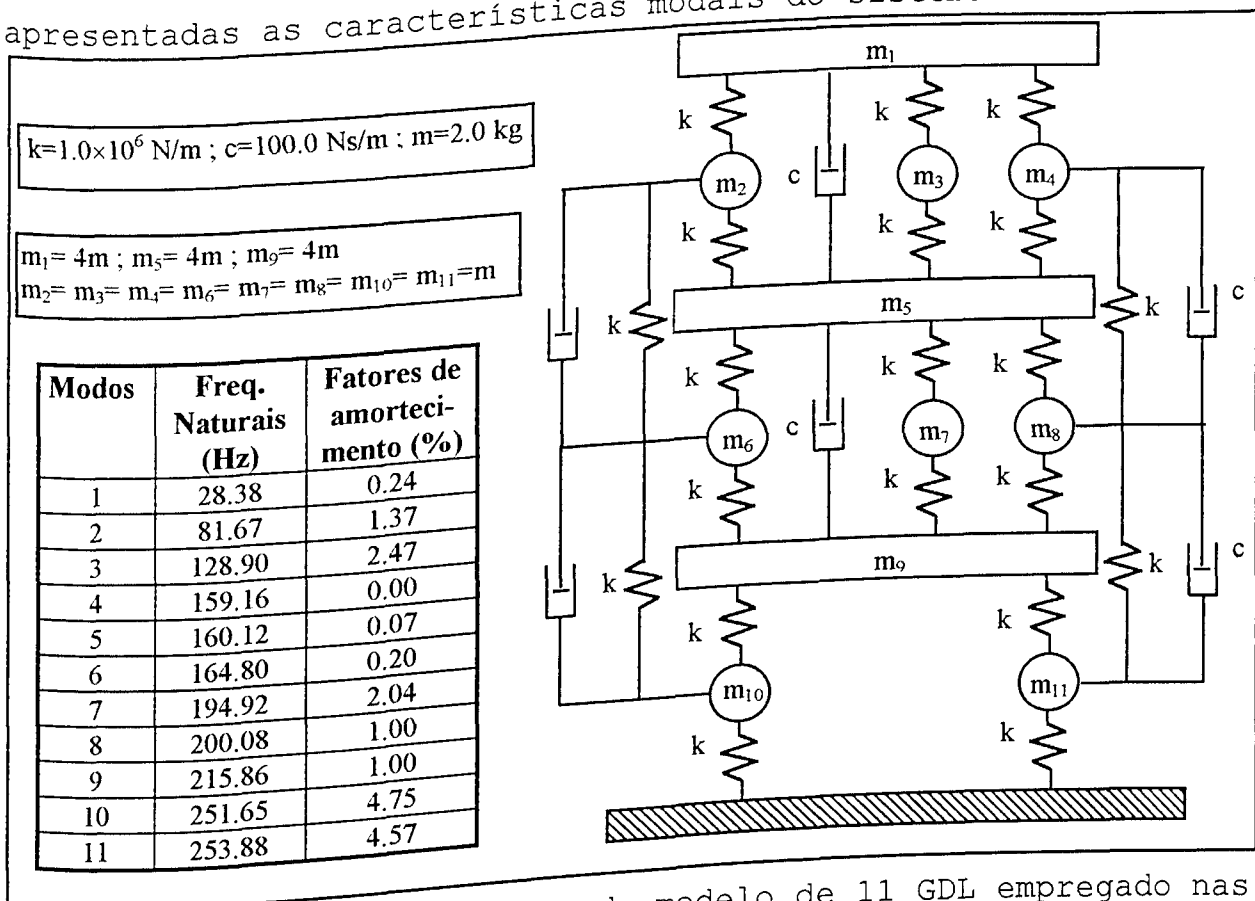


Figura 5.1 - Características do modelo de 11 GDL empregado nas simulações numéricas.

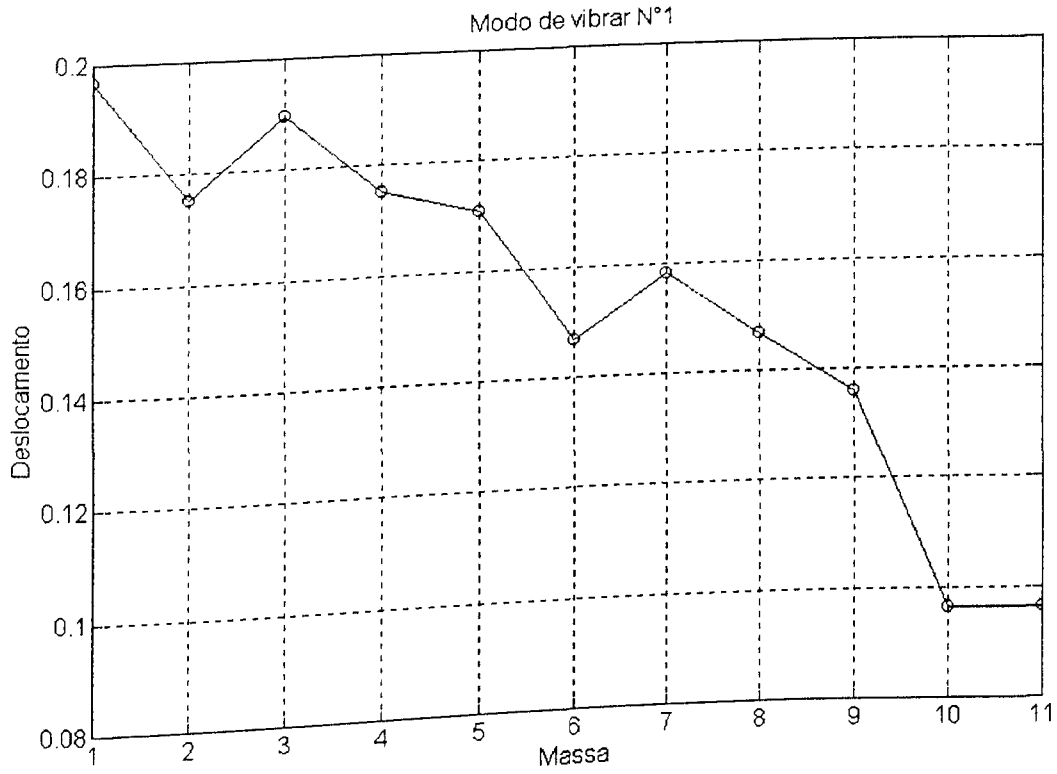


Figura 5.2(a) - 1° modo natural do sistema de 11 GDL.

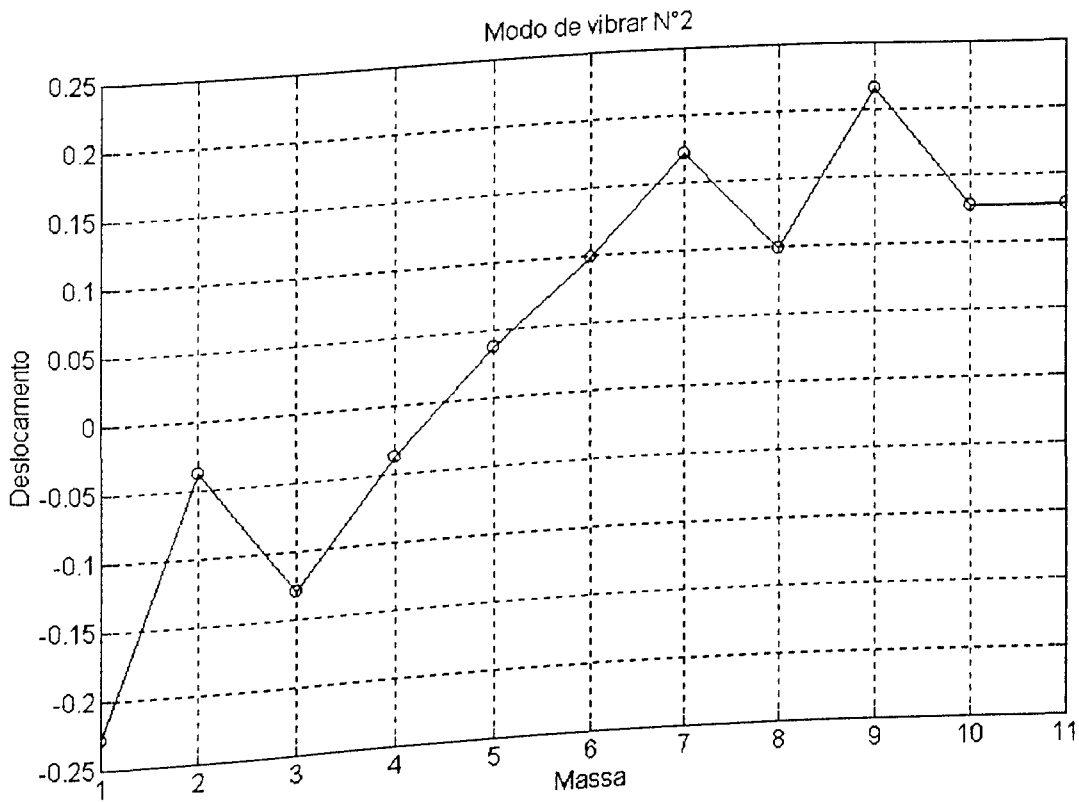


Figura 5.2(b) - 2° modo natural do sistema de 11 GDL.

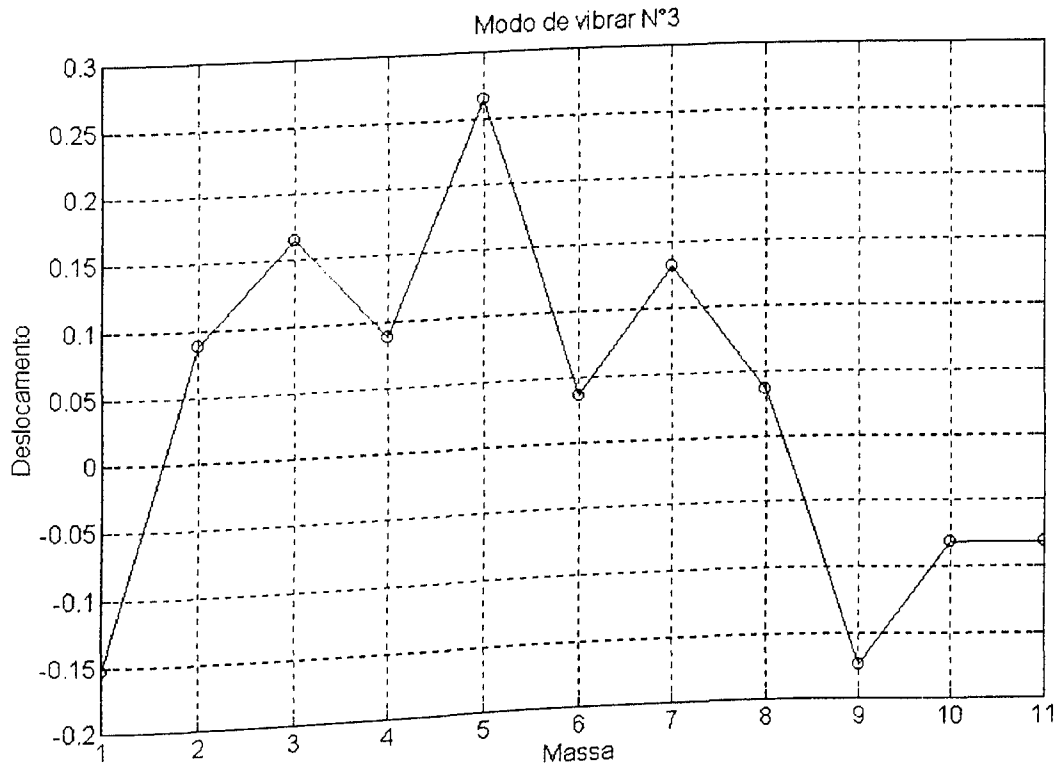


Figura 5.2(c) - 3° modo natural do sistema de 11 GDL.

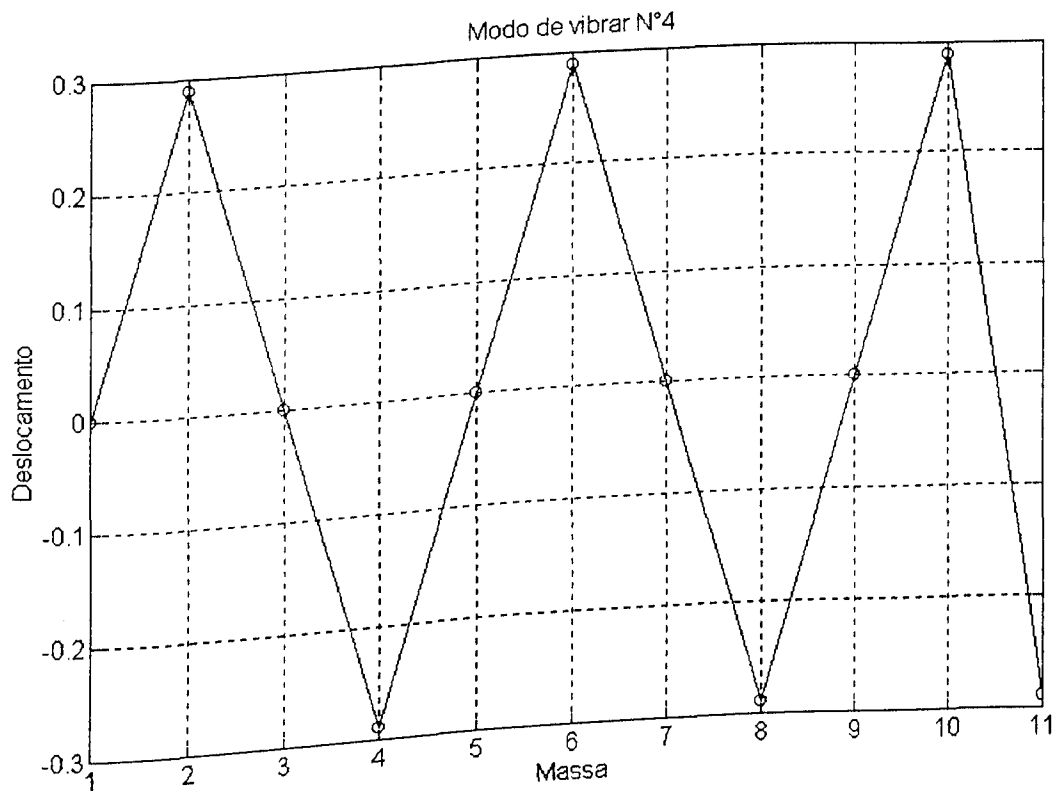


Figura 5.2(d) - 4° modo natural do sistema de 11 GDL.

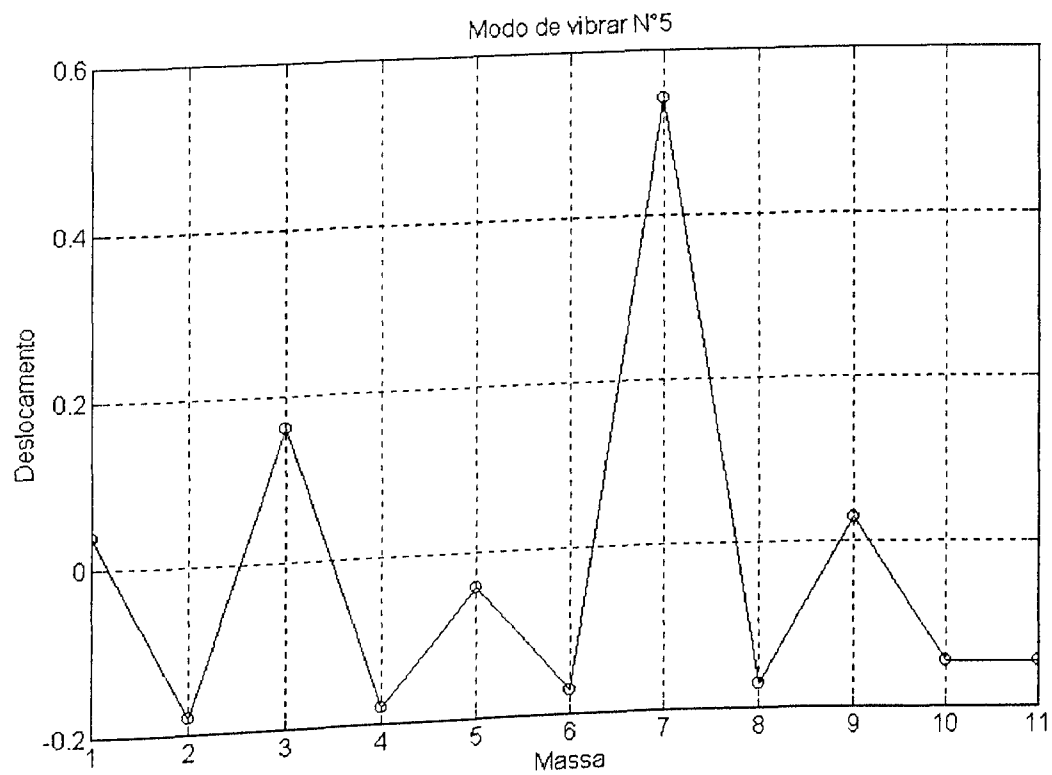


Figura 5.2(e) - 5° modo natural do sistema de 11 GDL.

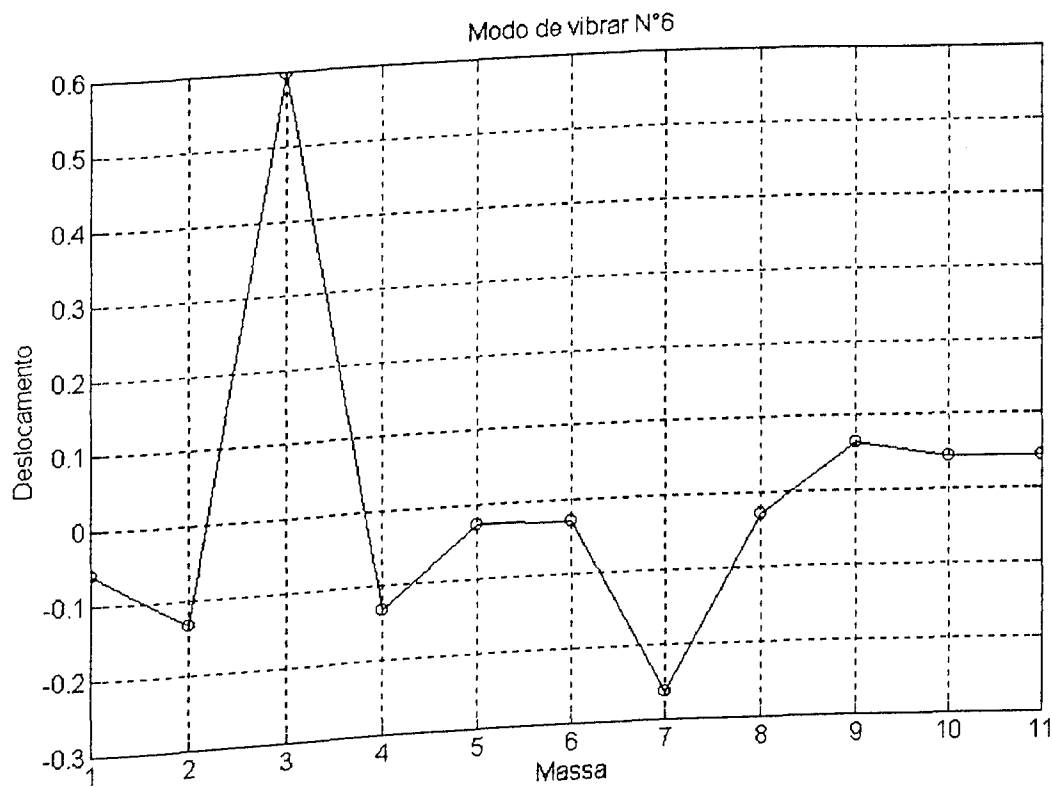


Figura 5.2(f) - 6° modo natural do sistema de 11 GDL.

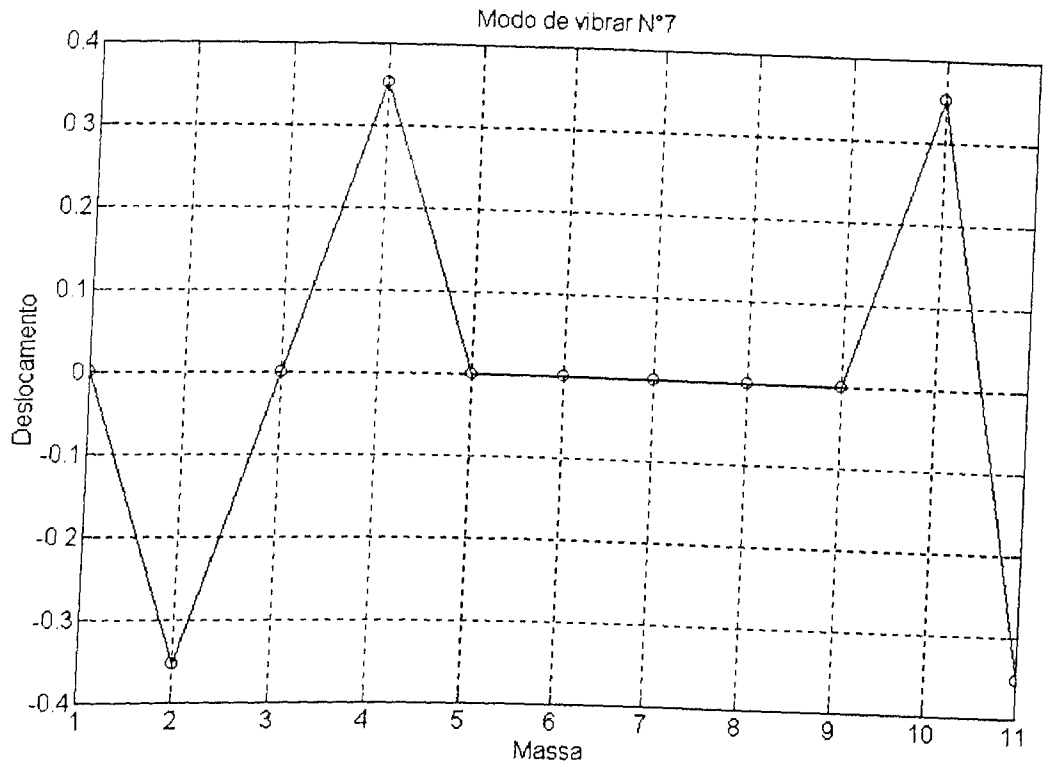


Figura 5.2(g) - 7° modo natural do sistema de 11 GDL.

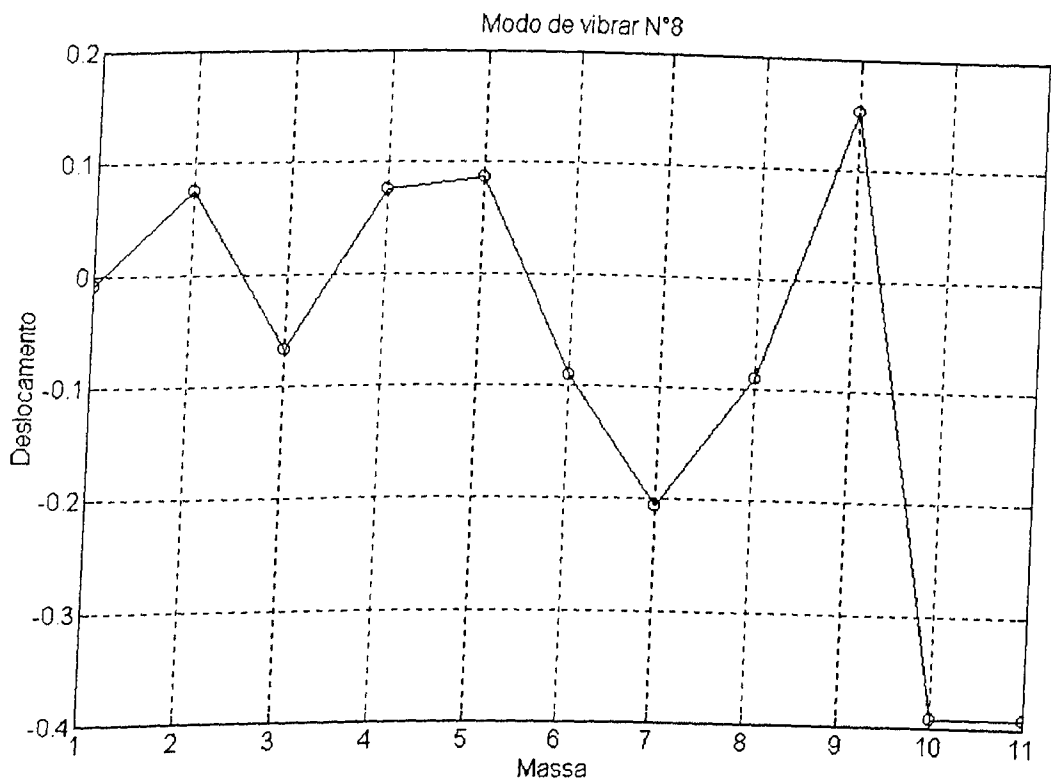


Figura 5.2(h) - 8° modo natural do sistema de 11 GDL.

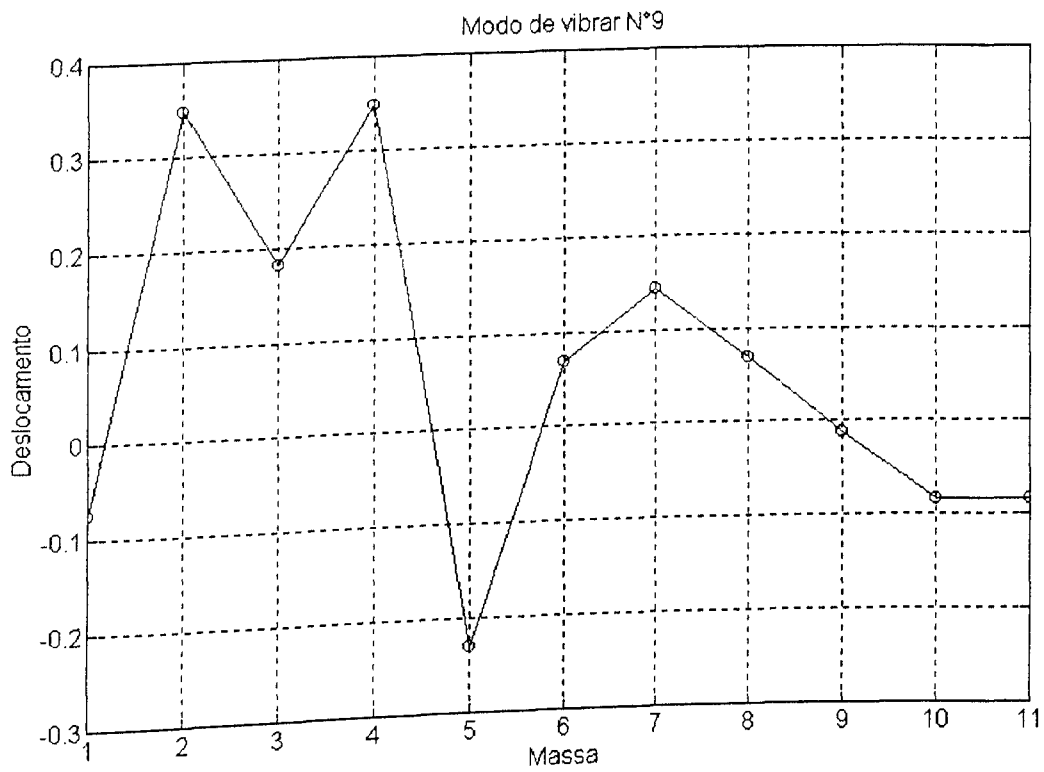


Figura 5.2(i) - 9° modo natural do sistema de 11 GDL.

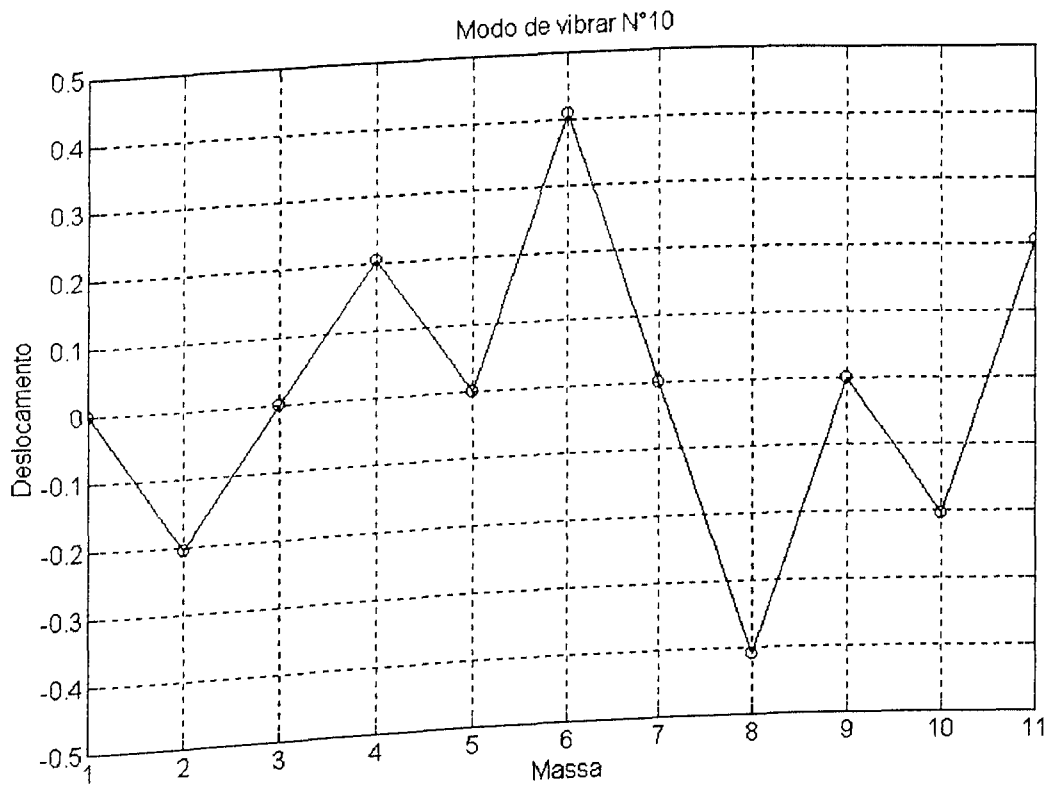


Figura 5.2(j) - 10° modo natural do sistema de 11 GDL.



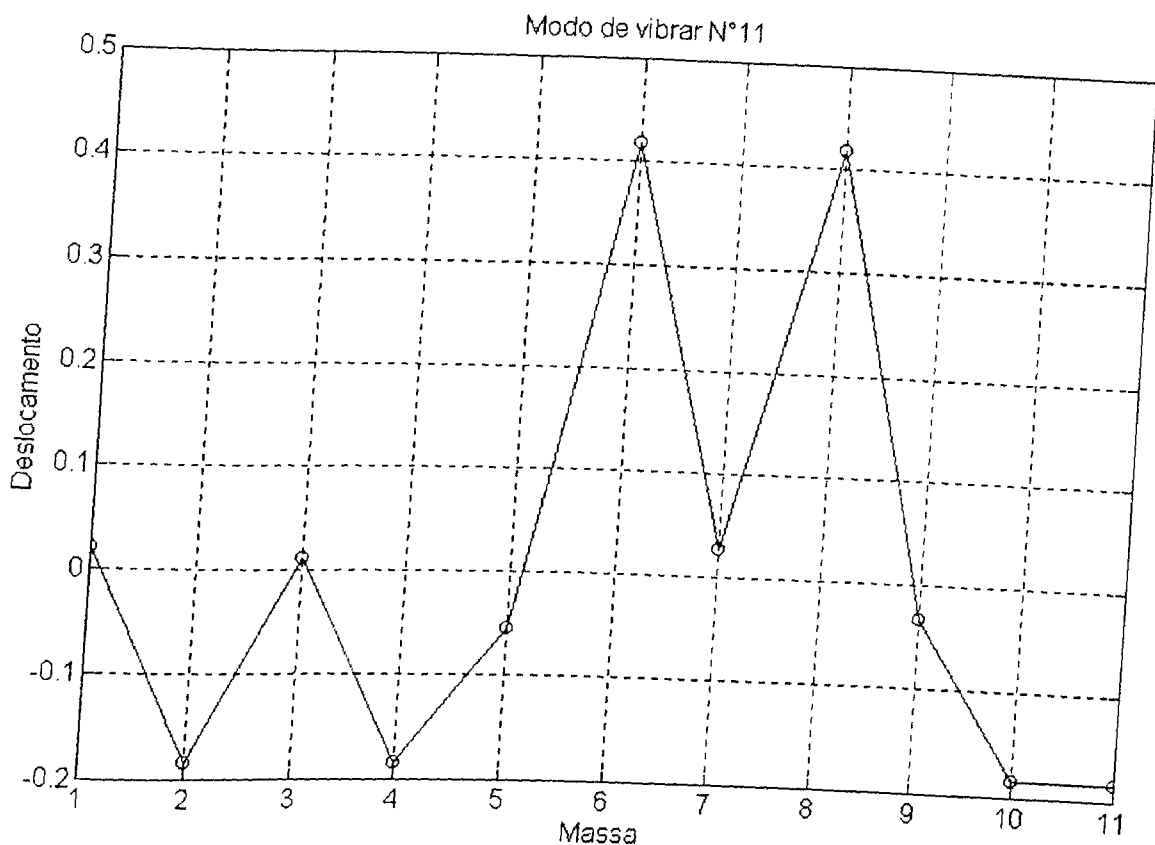


Figura 5.2(k) - 11º modo natural do sistema de 11 GDL.

São avaliadas, a seguir, a eficiência e as características do método de identificação indireta de forças baseado nas coordenadas modais. Dois tipos de forças são identificadas, a saber: a) duas forças harmônicas, de diferentes frequências, aplicadas simultaneamente em pontos distintos da estrutura e, b) uma força transitória simulando forças de impacto, aplicada em uma única estação da estrutura.

Nestas aplicações são analisados os efeitos da integração numérica das acelerações temporais e da utilização de base modal incompleta, tanto no que diz respeito ao número de modos utilizados, quanto no que se refere ao número de sensores (número de coordenadas instrumentadas). Por fim, são observados os efeitos de ruídos sobre a precisão das forças identificadas. Estes ruídos são introduzidos na forma de perturbações aleatórias afetando as respostas temporais e as auto-soluções (frequências naturais, massas generalizadas, fatores de amortecimento e componentes dos autovetores), de

modo a simular os erros que contaminam inevitavelmente os dados experimentais em situações práticas.

## 5.2 - IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS HARMÔNICAS

Para esta simulação foram aplicadas duas forças harmônicas nas massas de números 1 e 7, dadas por:

$$f_1 = 500\cos(300\pi t) + 250\cos(150\pi t) \text{ [N]} \quad (5.1.a)$$

$$f_7 = 250\cos(360\pi t) \text{ [N]} \quad (5.1.b)$$

Para a geração da resposta do sistema foi desenvolvido um programa computacional em ambiente MATLAB®, que gera as respostas em aceleração, velocidade e deslocamento em todas as coordenadas do modelo, a partir das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento. Este programa utiliza a formulação no espaço de estado, detalhada no Apêndice A.

O intervalo de tempo observado foi de 0 a 0,1[s], e as respostas foram amostradas a intervalos regulares  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  s.

Objetivando simular uma situação real, em que apenas as respostas em aceleração são determinadas experimentalmente com o emprego de acelerômetros, adotou-se o procedimento de considerar as acelerações calculadas através desse programa que simula as respostas do sistema como as respostas experimentais. Estas acelerações, amostradas no tempo em intervalos regularmente espaçados, foram em seguida integradas por duas vezes para a obtenção das respostas em velocidade e deslocamento. Para tanto, foi desenvolvido um segundo programa que realiza estas integrações numéricas através do método do trapézio.

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram as respostas do sistema em algumas de suas coordenadas. Estão superpostas as respostas exatas e as integradas, bem como as diferenças entre ambas,

sendo ainda fornecidos os valores do erro gerado pelas integrações, definido segundo:

$$\varepsilon_{\text{RMS}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^p [u^{\text{exato}}(t_i) - u^{\text{integ.}}(t_i)]^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p [u^{\text{exato}}(t_i)]^2}} \times 100 \quad (5.2)$$

onde  $p$  é o número de amostras temporais e  $u(t_i)$  designa simbolicamente a velocidade ou o deslocamento no instante  $t=t_i$ .

Pode-se observar que o esquema de integração pela regra do trapézio, embora seja um dos mais simples, fornece excelente precisão. Este comportamento foi sistematicamente observado nos diversos testes realizados.

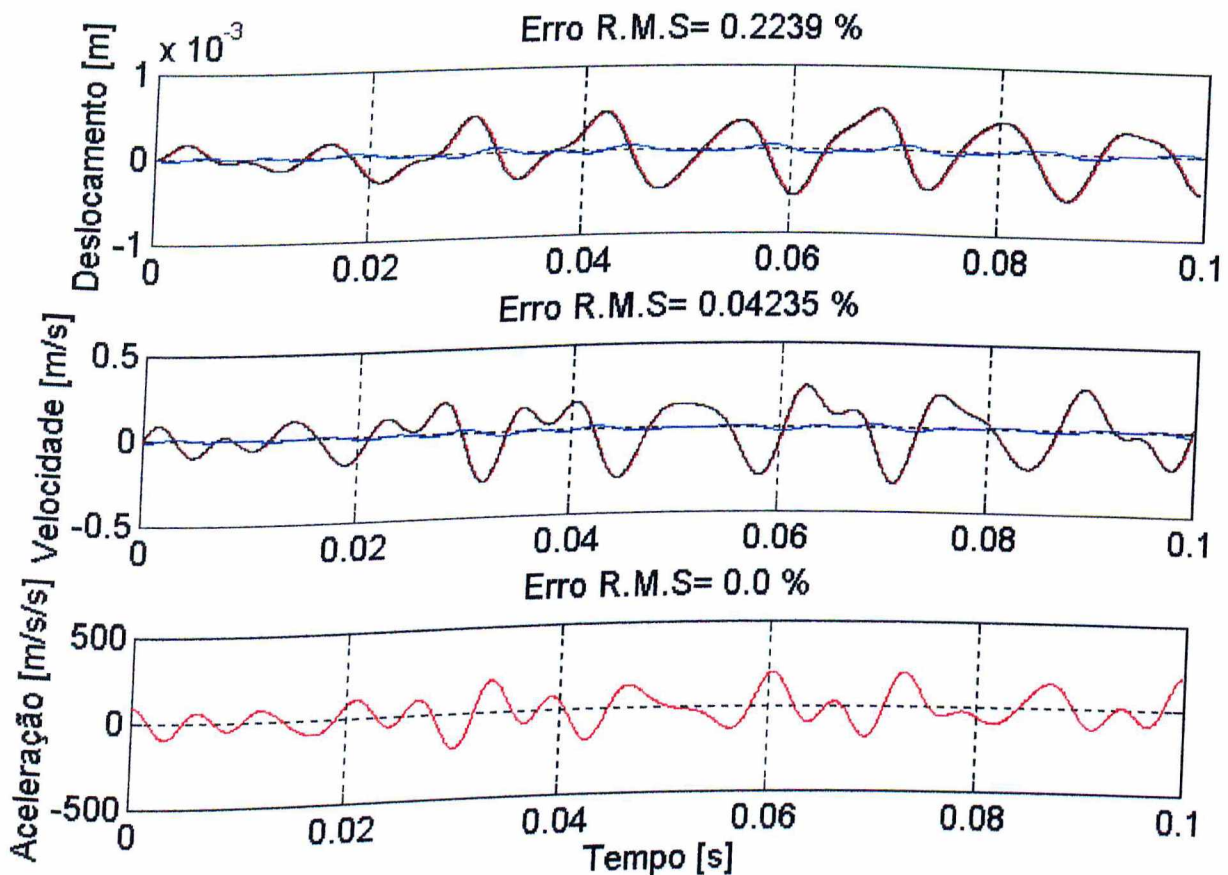


Figura 5.3- Respostas exata e integrada, para a massa N°1.  
vermelho: exata; preto: integrada; azul: erro de integração.

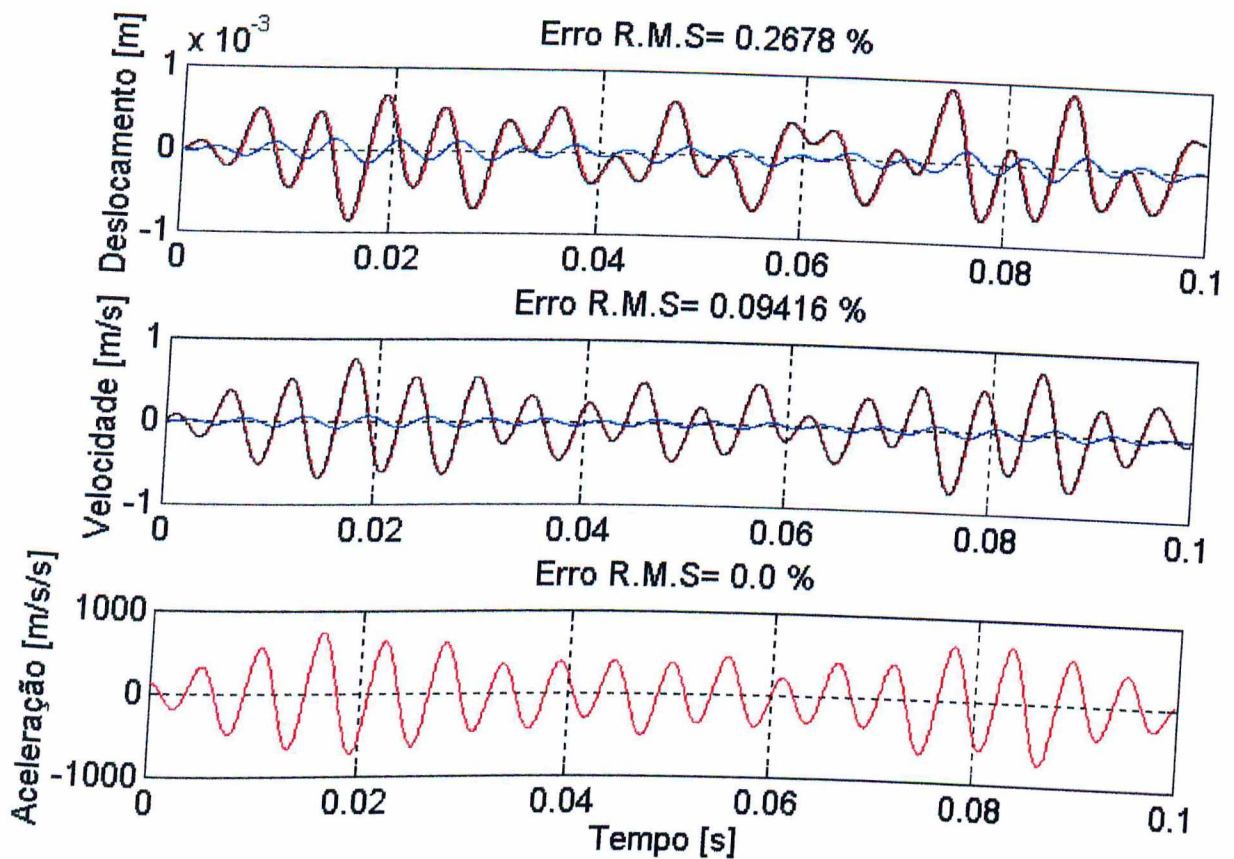


Figura 5.4- Respostas exata e integrada, para a massa N°7. vermelho: exata; preto: integrada; azul: erro de integração.

### 5.2.1 - EFEITO DO TRUNCAMENTO DO NÚMERO DE MODOS NA BASE MODAL

Nesta seção são apresentadas as aplicações numéricas realizadas objetivando caracterizar o efeito do truncamento da base modal no tocante ao número de modos utilizados na matriz modal  $[\tilde{X}] \in \mathbb{R}^{c,n}$ . Para tanto, o número de modos na base modal foi continuamente aumentado ( $n=7$  a 11 primeiros modos), admitindo-se que todas as coordenadas tenham sido instrumentadas ( $c=11$ ). As figuras a seguir permitem avaliar a influência do número de modos na base modal, sobre a precisão das forças identificadas. Em cada uma destas figuras estão superpostas as curvas representando as forças exatas, as forças identificadas e as diferenças entre ambas. São ainda fornecidos os desvios entre as forças exatas e identificadas, definidos segundo:

$$\varepsilon_{\text{RMS}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^p [f^{\text{exata}}(t_i) - f^{\text{identif.}}(t_i)]^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p [f^{\text{exata}}(t_i)]^2}} \times 100 \quad (5.3)$$

Para cada um dos testes, é também indicado o número de condicionamento da sub-matriz modal  $[\tilde{X}] \in \mathbb{R}^{c,n}$ , que permite avaliar a estabilidade numérica do processo de resolução das equações de estimação.

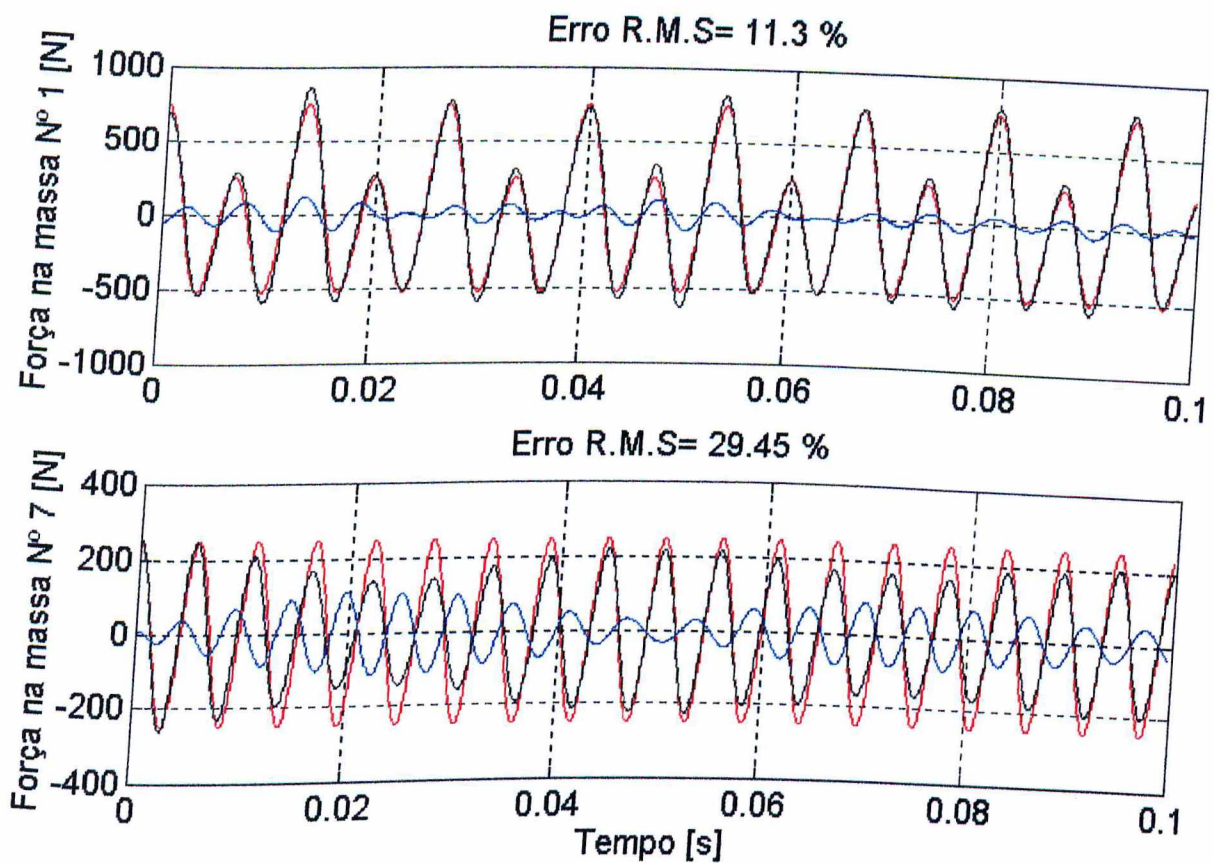


Figura 5.5- Forças exatas e identificadas. ( $c=11$ ,  $n=7$ )  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([\tilde{X}]) = 1,9.$$

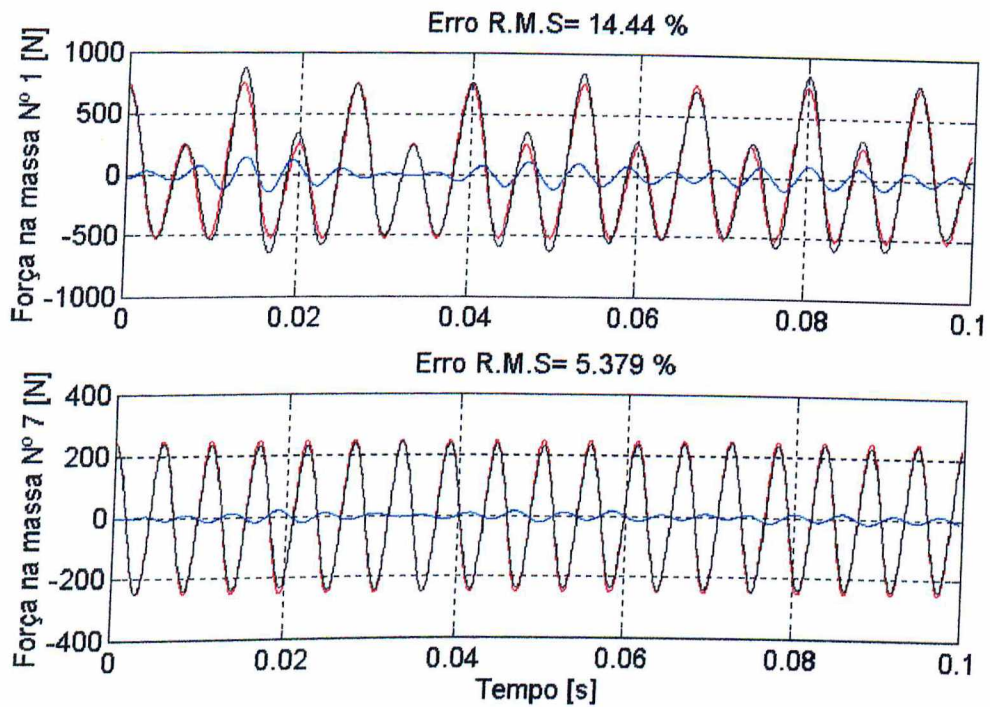


Figura 5.6- Forças exatas e identificadas. ( $c=11$ ,  $n=8$ )  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}(\tilde{X}) = 1,9.$$

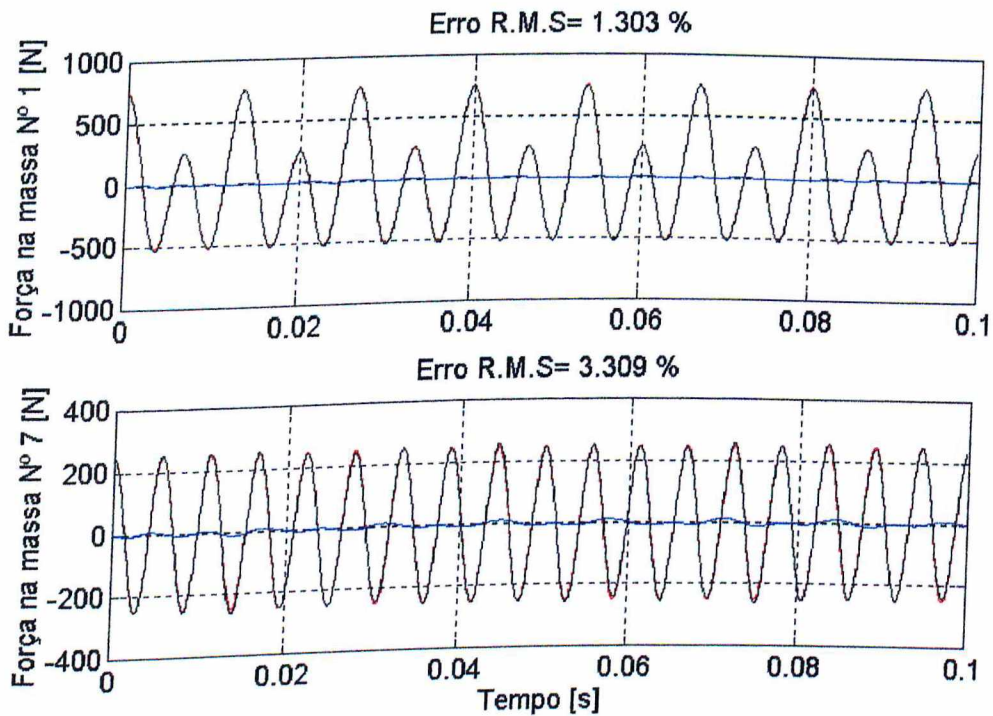


Figura 5.7- Forças exatas e identificadas. ( $c=11$ ,  $n=9$ )  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}(\tilde{X}) = 2,0.$$

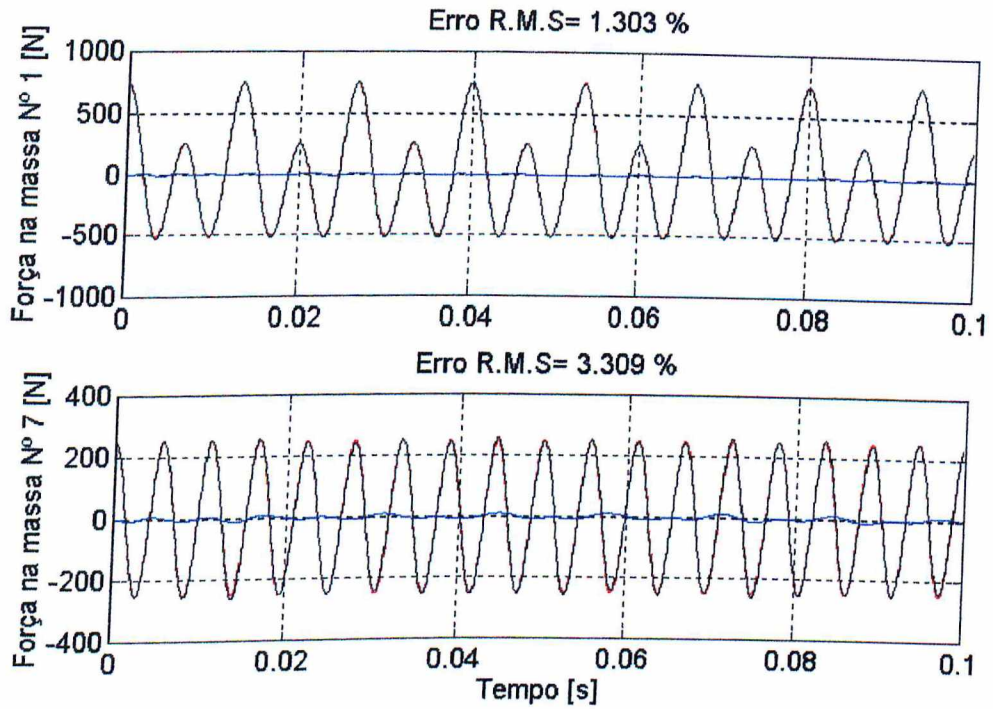


Figura 5.8- Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=10$ )  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}(\tilde{X}) = 2, 0.$$

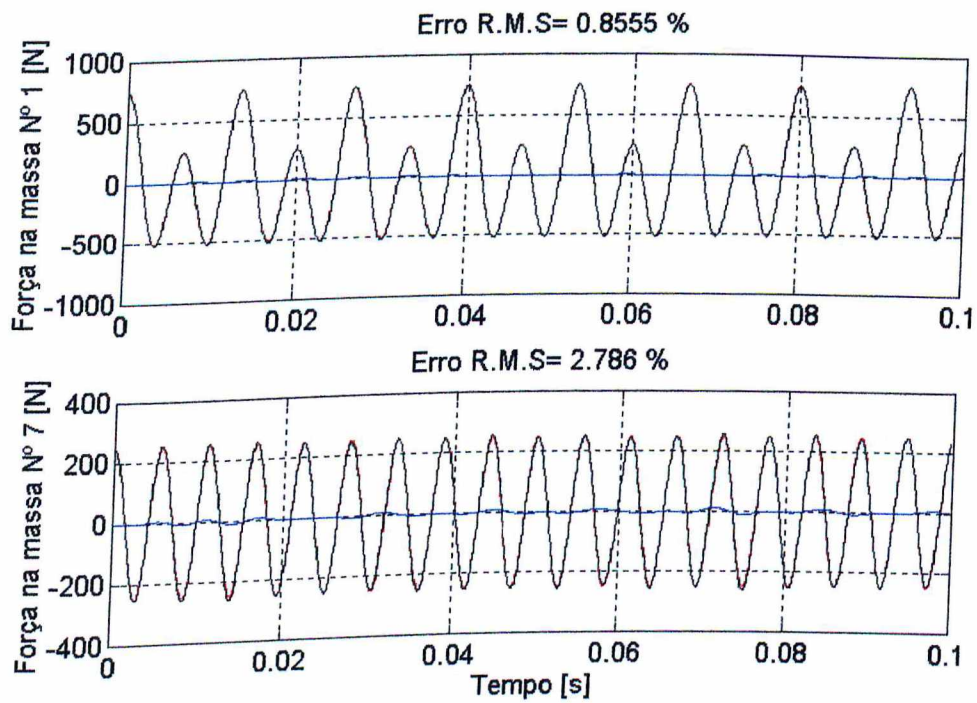


Figura 5.9- Forças exatas e identificadas. ( $c=n=11$ )  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}(\tilde{X}) = 2, 0.$$

Os resultados obtidos mostram que, como era de se esperar, de um modo geral, a precisão das forças identificadas aumenta continuamente, à medida em que se aumenta o número de modos na base modal. No caso específico em que, aumentando-se o número de sensores a precisão da força identificada na massa N°1 piorou ao invés de melhorar (Figuras 5.5 e 5.6), tal fato pode ser explicado observando-se a melhora significativa da precisão da força identificada na massa N°7, onde o erro RMS passou de 29,5% para 5,4%. Ou seja, quando se aumenta o número de coordenadas instrumentadas o sistema como um todo é que passa a ser melhor identificado, ainda que uma das forças atuantes sobre o sistema passe a ser identificada com uma precisão menor.

Os erros subsistentes quando se procede à identificação com a base completa ( $n=c=11$ ) são atribuídos aos erros resultantes da integração da aceleração para obtenção das velocidades e deslocamentos.

Pode-se constatar que nenhuma melhoria é obtida com a inclusão do 10° modo. Este fato pode ser entendido através da análise das componentes deste modo de vibrar, mostradas na Figura 5.2(j). Nota-se que as massas 1 e 7, onde são aplicadas as forças, localizam-se sobre nós deste modo, o que faz com que o 10° modo não tenha nenhuma influência sobre as forças identificadas.

### 5.2.2 - EFEITO DO NÚMERO DE COORDENADAS INSTRUMENTADAS

Para a verificação do efeito do número de coordenadas instrumentadas,  $c$ , sobre a precisão das forças identificadas, o número de modos na base modal foi mantido inalterado, fazendo-se variar o número, bem como as posições dos sensores. Trabalhou-se inicialmente com 11 modos na base modal.

O número de sensores foi inicialmente aumentado continuamente de 8 a 10, localizados nas massas de números 1 a 8. Sendo, nestes casos,  $n > c$ , observa-se que, de acordo com as



equações (3.14) a (3.16), as coordenadas modais são determinadas mediante a resolução de sistemas de equações sub-determinados (número de equações menor que o número de incógnitas). Nestes casos, as soluções obtidas são as soluções de norma mínima.

Os resultados das identificações são apresentados nas figuras seguintes.

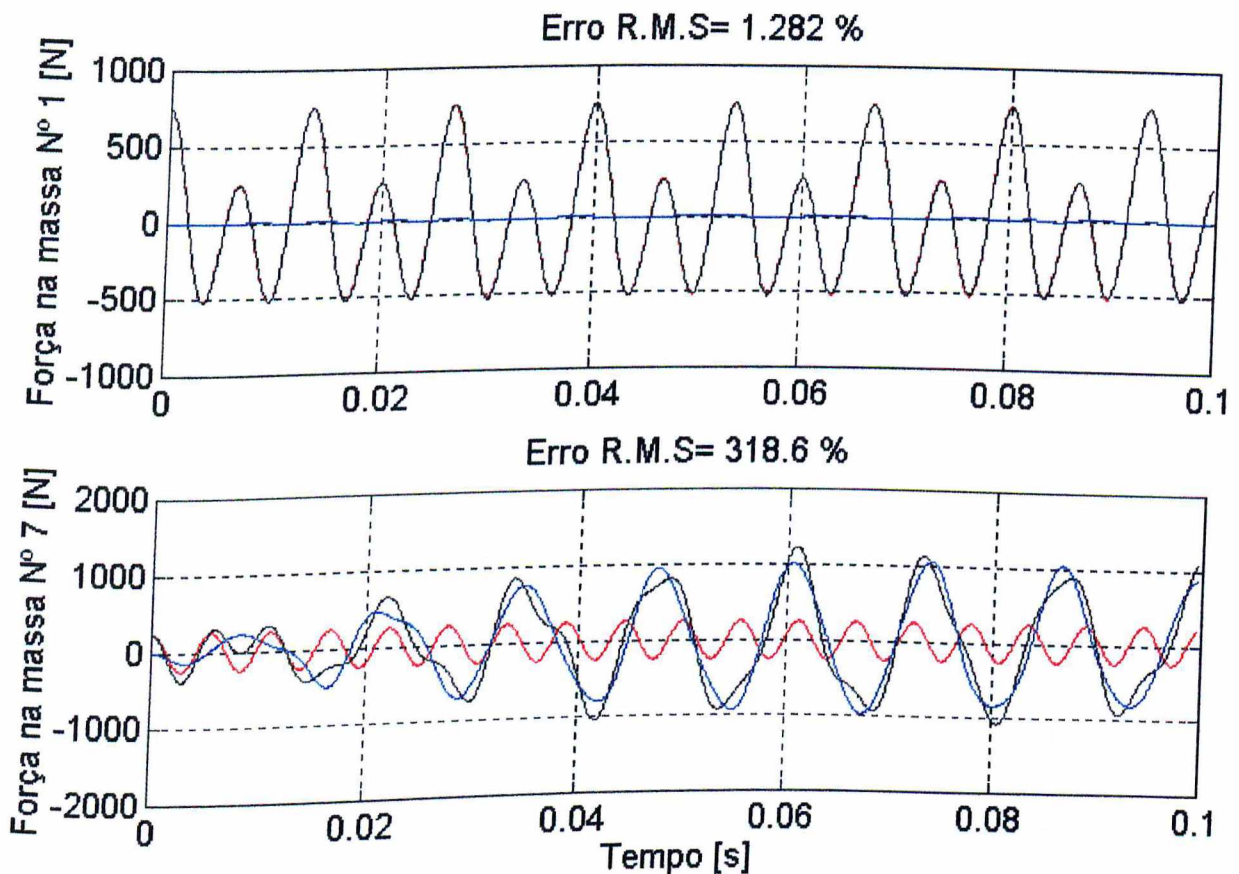


Figura 5.10- Forças exatas e identificadas com 11 modos e 08 sensores localizados nas massas 1,2,3,4,5,6,7 e 8.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([\tilde{X}]) = 2,0.$$

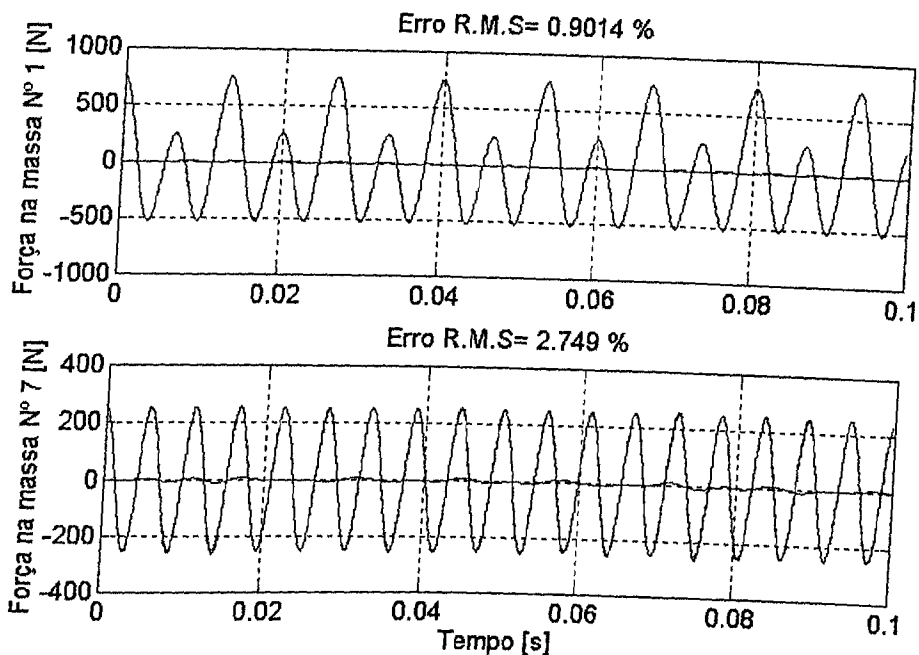


Figura 5.11- Forças exatas e identificadas com 11 modos e 09 sensores localizados nas massas 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}(\tilde{X}) = 2,0.$$

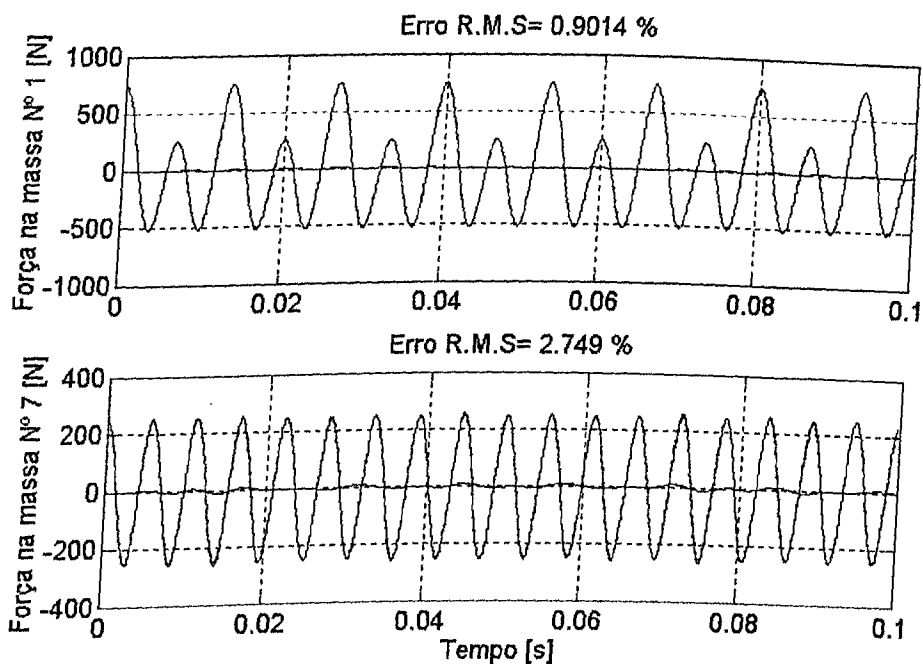


Figura 5.12- Forças exatas e identificadas com 11 modos e 10 sensores localizados nas massas 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e 10. vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}(\tilde{X}) = 2,0.$$

Os resultados apresentados revelam que mesmo empregando as soluções de norma mínima para estimação das coordenadas generalizadas, precisões aceitáveis para as forças podem ser geralmente obtidas. Observa-se, contudo, que a qualidade da identificação aumenta com a redução do grau de indeterminação dos sistemas de equações.

Diversos outros testes realizados revelaram que a colocação de um sensor na massa nº 9 é de fundamental importância para assegurar a qualidade da identificação. Esta observação sugere a necessidade de estabelecimento de um critério para o posicionamento ótimo dos sensores com vistas à identificação de forças.

As Figuras 5.13 e 5.14 mostram os resultados da identificação com  $(c \geq n)$ , o que permite estimar as coordenadas modais através da solução normal do método dos mínimos quadrados. Nota-se que pequenas diferenças são obtidas em comparação com os resultados obtidos com pequeno grau de indeterminação nas equações de estimação das coordenadas generalizadas  $(c < n)$ .

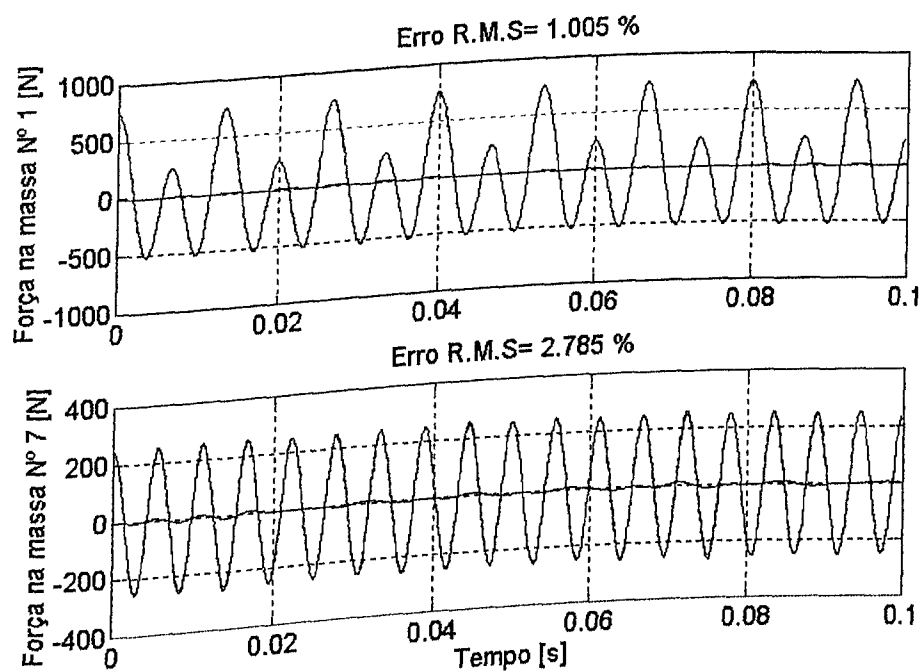


Figura 5.13- Forças exatas e identificadas com 9 modos e 9 sensores localizados nas massas 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.  
 $Cond(\tilde{X}) = 2,8$ .

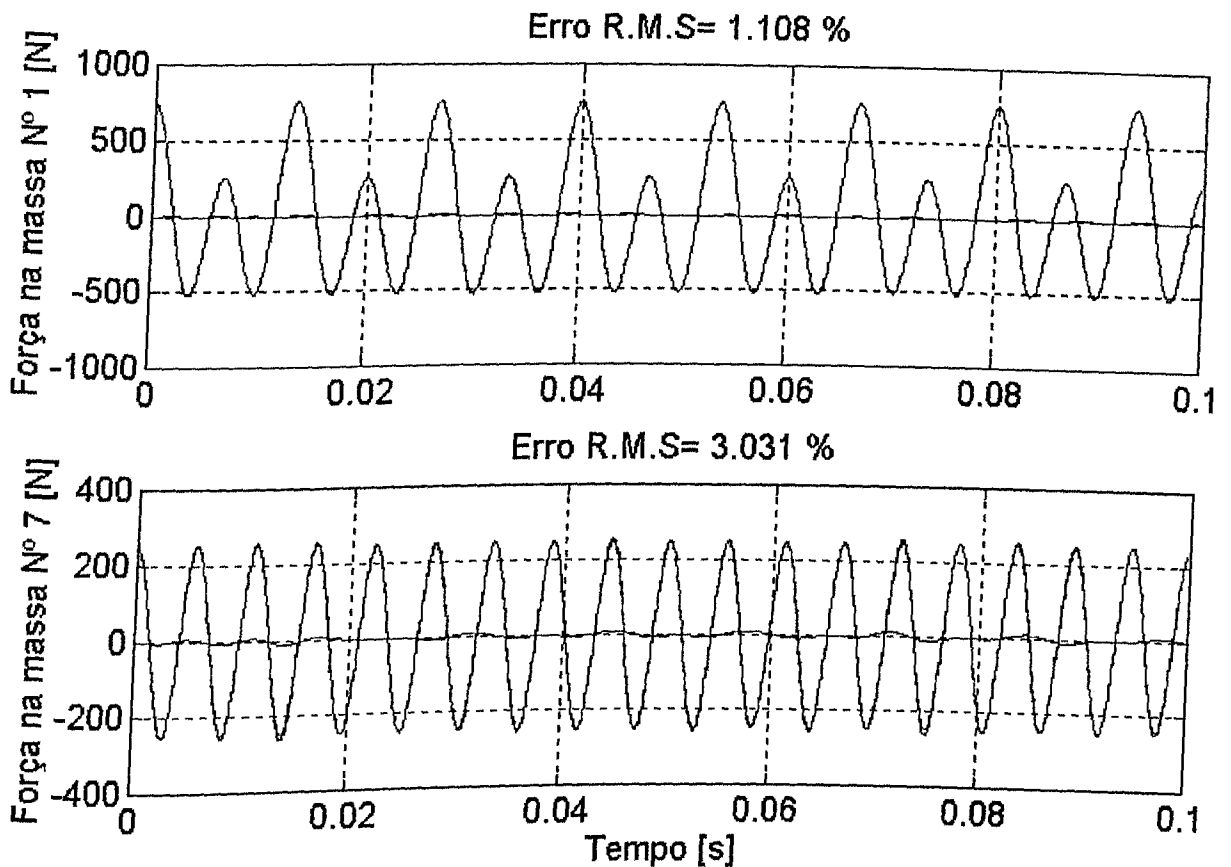


Figura 5.14- Forças exatas e identificadas com 9 modos e 10 sensores localizados nas massas 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e 10. vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([\tilde{X}]) = 2,6.$$

### 5.2.3 - ANÁLISE DAS MAGNITUDES RELATIVAS DAS FORÇAS MODAIS E DO EFEITO DE FILTRAGEM FREQUÊNCIAL

Neste ponto é interessante analisar as amplitudes relativas de cada uma das forças modais: de inércia, de amortecimento e elástica, definidas pelas equações (3.13). Para tanto estas forças foram calculadas considerando-se a base modal completa (11 modos e 11 coordenadas instrumentadas).

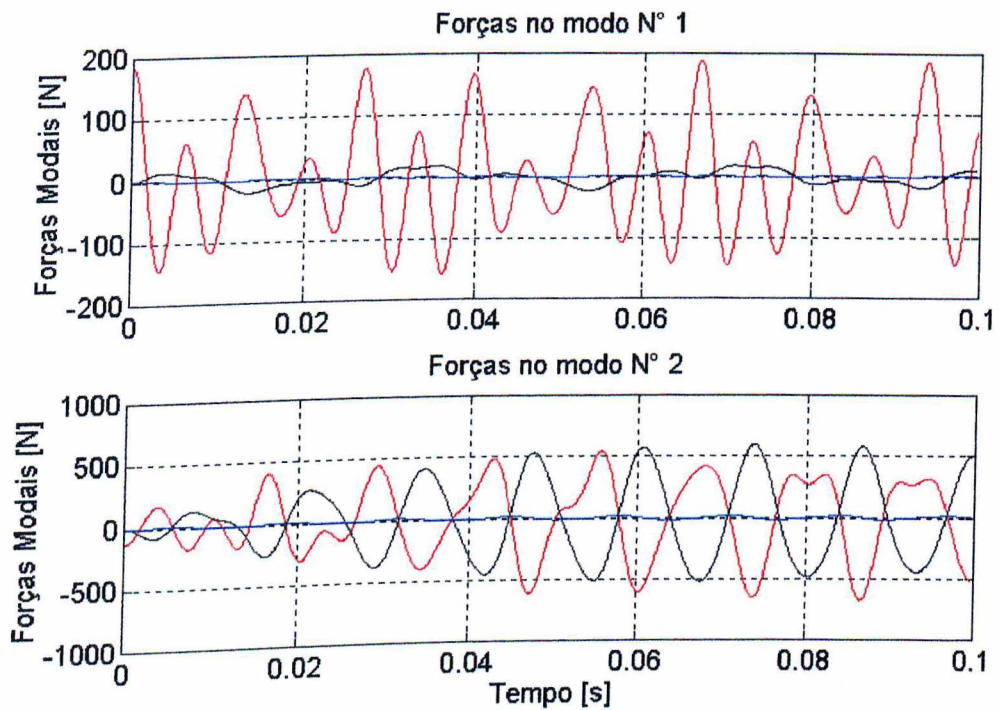


Figura 5.15- Forças modais para os modos 1 e 2.  
vermelho: força de inércia; preto: força elástica; azul: força de amortecimento.

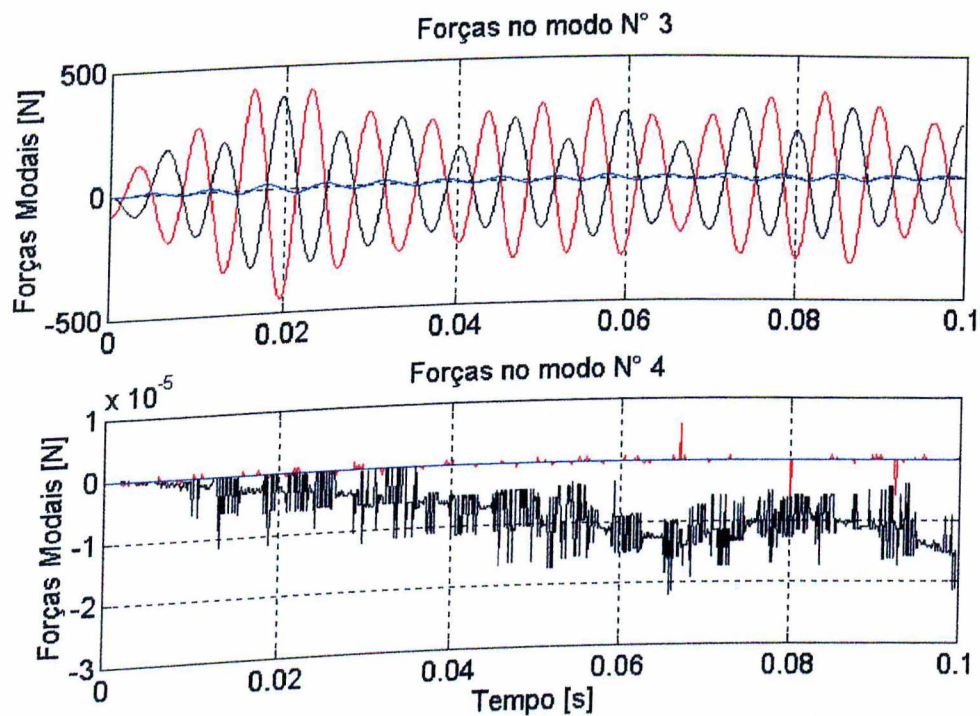


Figura 5.16- Forças modais para os modos 3 e 4.  
vermelho: força de inércia; preto: força elástica; azul: força de amortecimento.

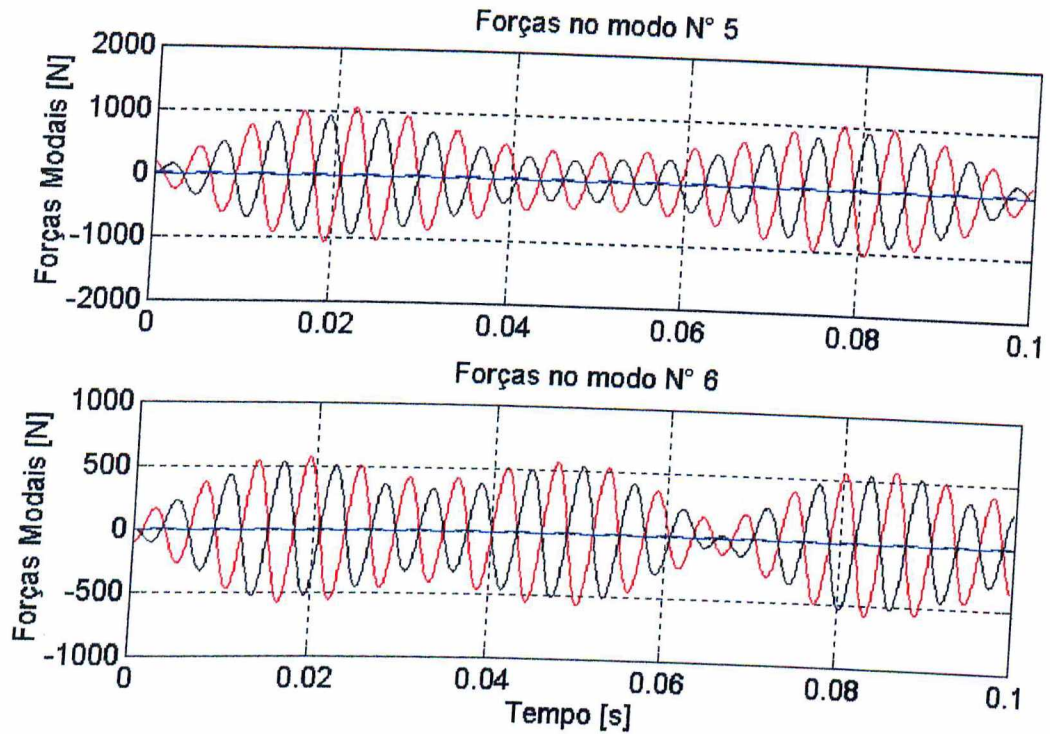


Figura 5.17- Forças modais para os modos 5 e 6.  
vermelho: força de inércia; preto: força elástica; azul: força de amortecimento.

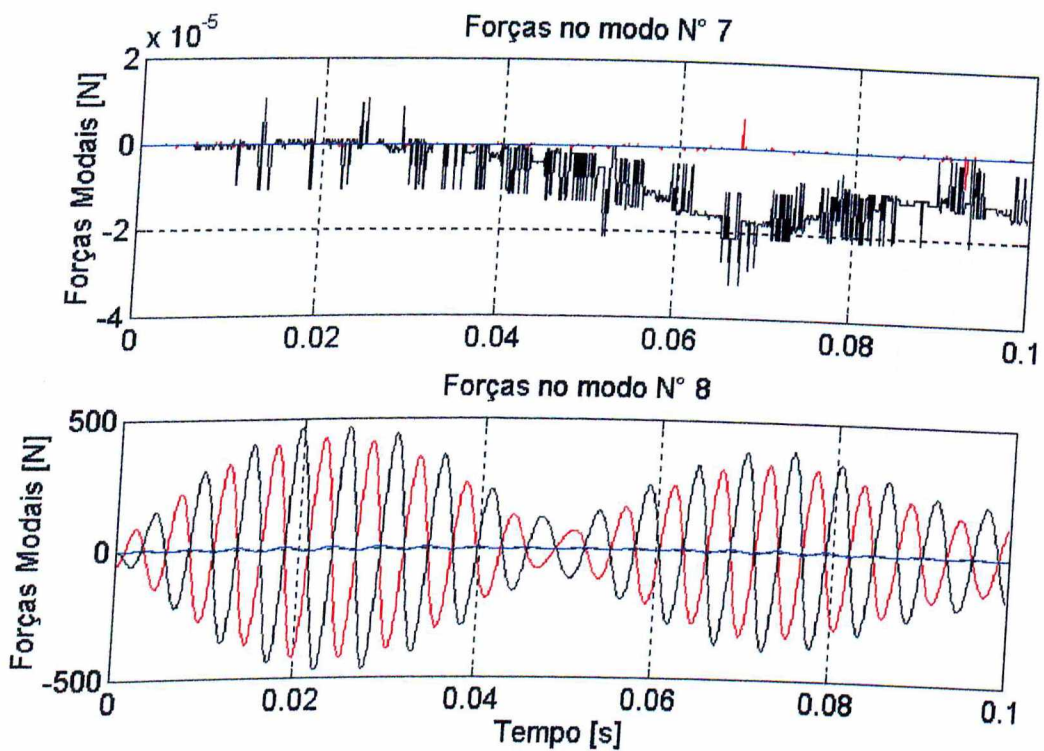


Figura 5.18- Forças modais para os modos 7 e 8.  
vermelho: força de inércia; preto: força elástica; azul: força de amortecimento.

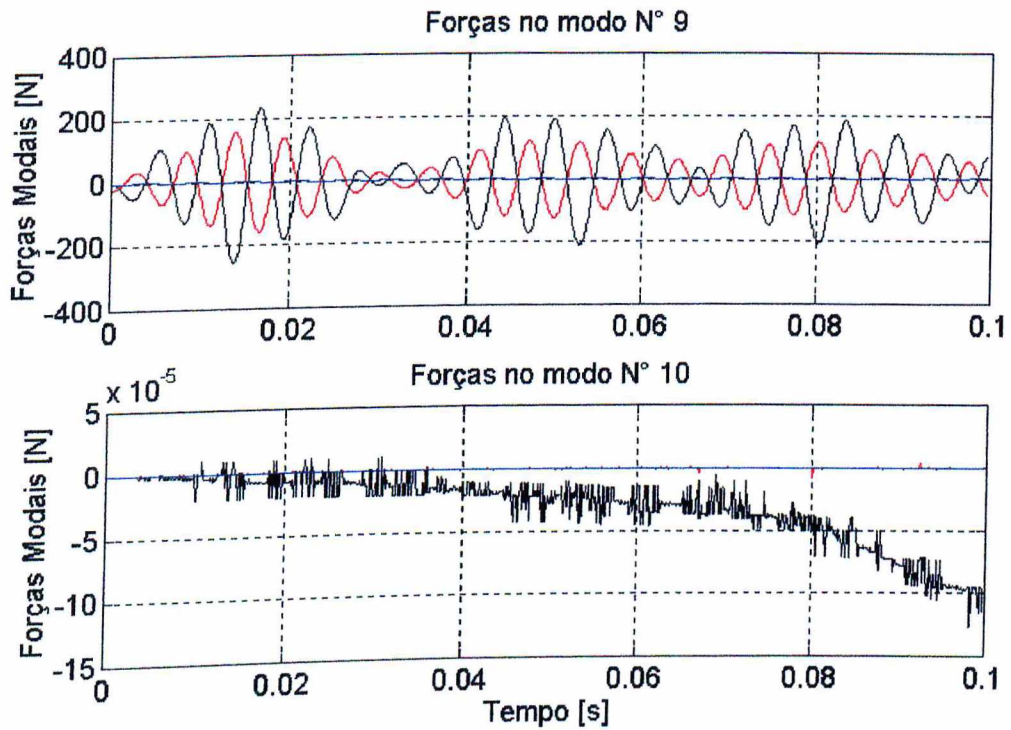


Figura 5.19- Forças modais para os modos 9 e 10.  
vermelho: força de inércia; preto: força elástica; azul: força de amortecimento.

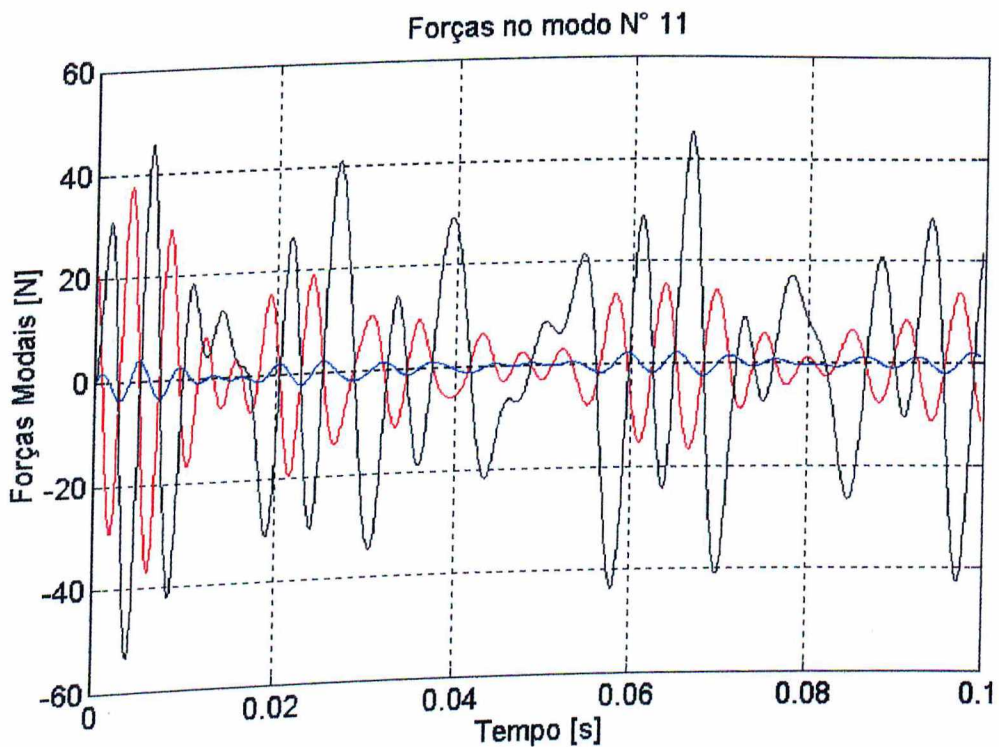


Figura 5.20- Forças modais para o modo 11.  
vermelho: força de inércia; preto: força elástica; azul: força de amortecimento.

Pode-se observar que, em geral, a contribuição dada pela força de amortecimento é muito pequena quando comparada às forças de inércia e elástica, podendo muitas vezes ser desprezada.

Houve também interesse de se verificar se as forças identificadas sofrem um efeito de filtragem passa-baixa, determinado pela banda freqüencial dos modos usados para formar as matrizes  $[\tilde{X}]$ ,  $[\tilde{\Lambda}]$ ,  $[\tilde{\beta}]$  e  $[\tilde{\eta}]$ . Procurou-se responder à questão: a precisão da identificação ficaria limitada aos casos em que o conteúdo freqüencial da força estivesse contido na banda freqüencial dos modos utilizados?

Para responder a esta questão um teste foi realizado destinado a identificar uma única força harmônica, cuja freqüência situa-se além da banda freqüencial dos modos utilizados na identificação. Foi aplicada uma força harmônica na massa 1, com uma freqüência de 360 Hz, dada pela expressão:

$$f_1(t) = 500 \cos(720\pi t) \text{ [N]}$$

Procedeu-se, também, ao truncamento do número de modos na base modal ( $n=9$ ), e do número de sensores ( $c=9$ ). Foram instrumentadas as massas de número 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Desta forma, os nove modos utilizados na identificação da força abrangem uma faixa de freqüência que varia de 20 a 220 Hz. Percebe-se, portanto, que a freqüência da força excitadora encontra-se além deste intervalo.

A Figura 5.21 compara as forças exata e identificada, mostrando ainda a diferença entre elas.



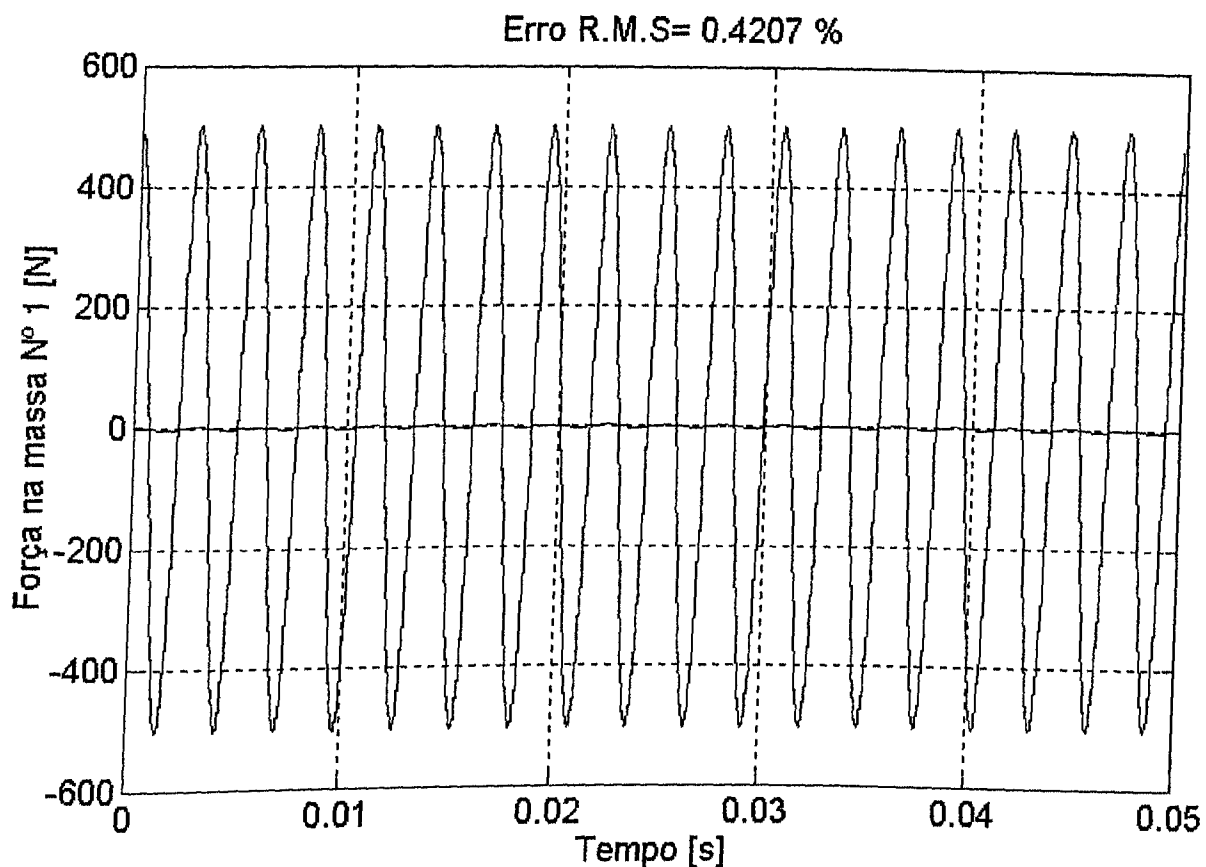


Figura 5.21 - Forças exata e identificada. ( $n=c=9$ )  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.  
 $\text{Cond}([\tilde{X}]) = 2,9$ .

Pode-se observar que o método identifica a força com excelente precisão, ainda que sua frequência de excitação esteja além da faixa de frequência dos modos utilizados. Assim, não parece haver efeito de filtragem de frequência no método de IIF proposto. Este fato pode ser explicado através da análise das curvas representando as coordenadas modais referentes a alguns modos da estrutura, apresentadas nas Figuras 5.22(a) a 5.22(c).

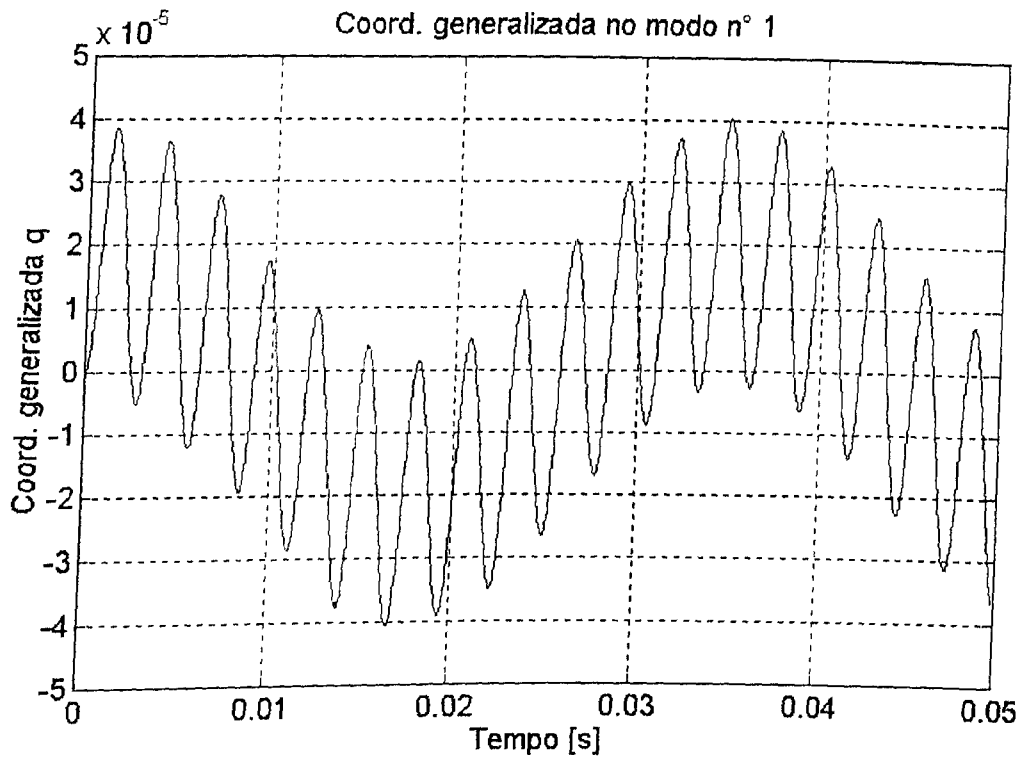


Figura 5.22 (a) - Coordenada generalizada  $q_1(t)$ .

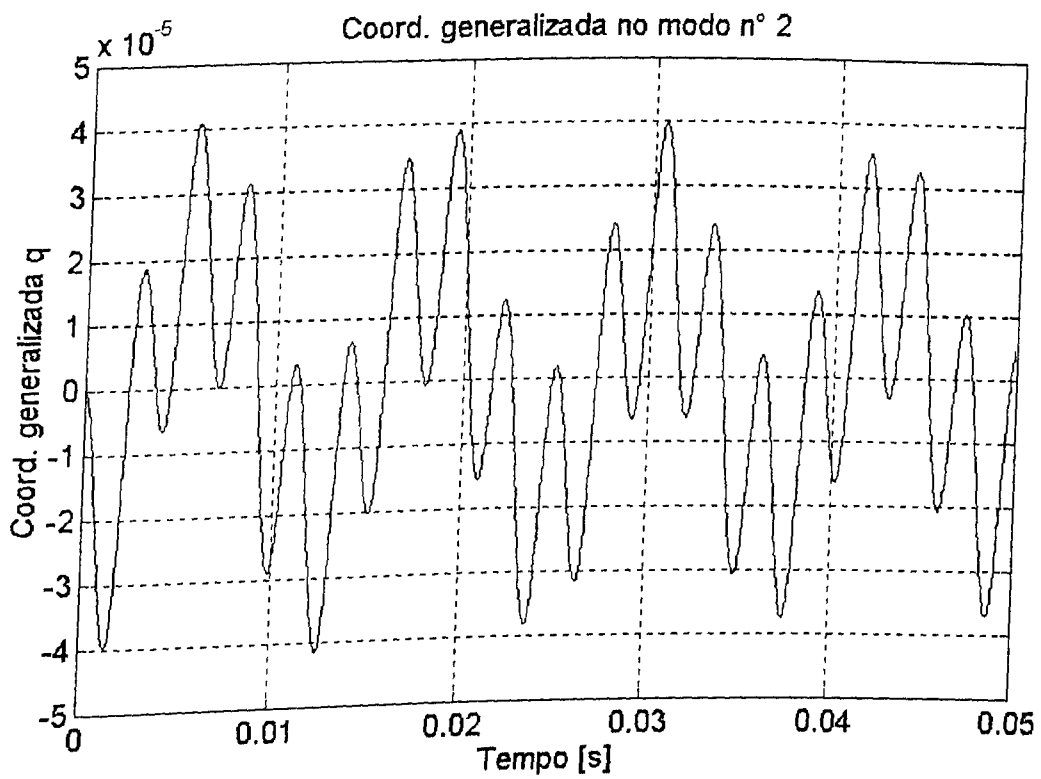


Figura 5.22 (b) - Coordenada generalizada  $q_2(t)$ .

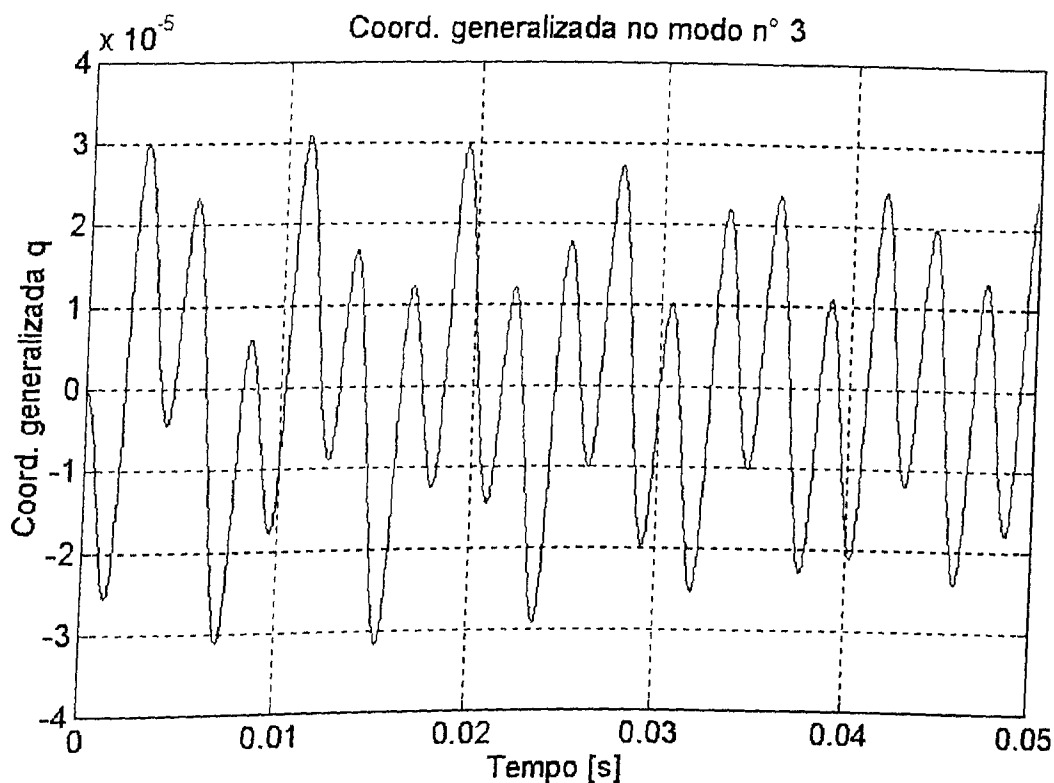


Figura 5.22 (c) - Coordenada generalizada  $q_3(t)$ .

Pode-se observar que cada coordenada generalizada tem duas componentes frequenciais: a frequência da excitação e a frequência natural da componente. Assim, pode-se concluir que mesmo as coordenadas modais relativas aos modos de baixa frequência trazem informação acerca da força excitadora, qualquer que seja a frequência da excitação.

#### 5.2.4 - IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS HARMÔNICAS CONSIDERANDO RUÍDOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais são inevitavelmente corrompidos por ruídos introduzidos pelos diversos elementos da cadeia de medição. Além disso, as autosoluções identificadas por procedimentos de análise modal experimental são afetadas por erros e imprecisões provocadas tanto pelos ruídos experimentais, quanto pelas diversas hipóteses inerentes ao modelo matemático utilizado para o ajuste de parâmetros modais.

No âmbito dos problemas inversos, a influência dos ruídos sobre as estimações é de importância capital. Encontram-se frequentemente situações (geralmente caracterizadas por mau condicionamento numérico) em que pequenos ruídos nos dados podem ser fortemente amplificados invalidando completamente os resultados da identificação.

Nesta seção é avaliada a estabilidade das estimações proporcionadas pelo método de IIF baseado nas coordenadas modais, em relação aos diversos erros e ruídos contaminando os dados experimentais. Estes erros e ruídos são simulados mediante a introdução de perturbações aleatórias nas acelerações temporais e nas autosoluções.

Foi empregado, para o ruído afetando as acelerações, um modelo tal que, para cada sensor, o erro aleatório em um determinado instante é inversamente proporcional à amplitude da aceleração naquele instante. Acredita-se ser este um modelo realista, levando-se em conta as características típicas das cadeias de medição. A Figura 5.23 representa este modelo, onde  $\hat{x}_i(t_j)$  é a aceleração contaminada pelo ruído no  $i$ -ésimo sensor, no instante  $t_j$ ;  $r_j$  é um número real aleatório, de distribuição uniforme, e pertencente ao intervalo  $[-1;1]$ .  $|\ddot{x}_i|_{\max}$  é a máxima amplitude da aceleração no intervalo de tempo considerado e  $e_{\max}$  e  $e_{\min}$  são os valores máximo e mínimo dos erros aleatórios, respectivamente. Os valores adotados para estes dois parâmetros foram:  $e_{\max} = 10\%$  e  $e_{\min} = 2\%$ .

Quanto aos erros afetando as características modais, estes foram introduzidos usando-se fatores multiplicativos aleatórios, de distribuição uniforme, cujos intervalos são mostrados na Tabela 5.1.

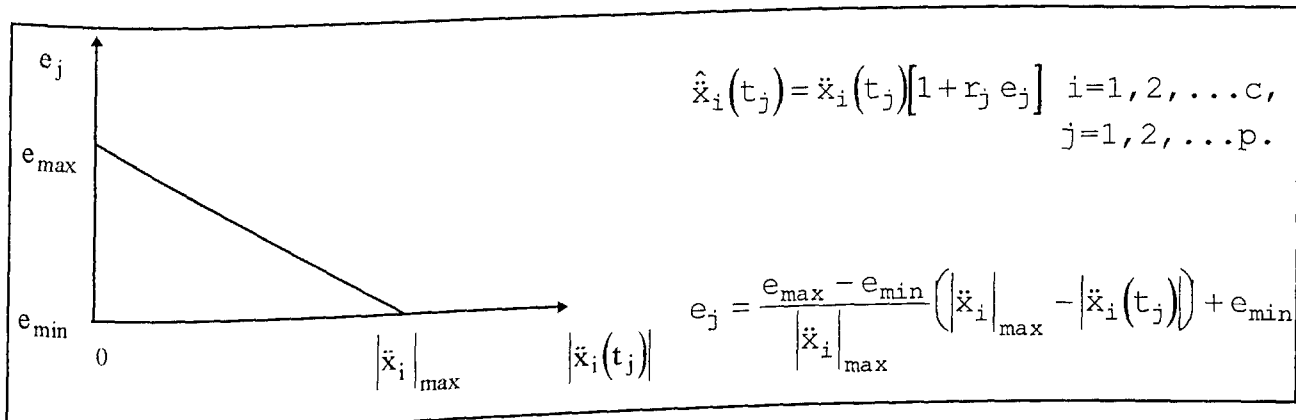


Figura 5.23 - Modelo do ruído utilizado na contaminação das acelerações.

Tabela 5.1- Erros aleatórios afetando os parâmetros modais.

Parâmetros Modais	Faixa dos erros aleatórios
Frequências naturais	0.990 - 1.010
Componentes dos autovetores	0.900 - 1.100
Massas generalizadas	0.950 - 1.050
Fatores de amortecimento	0.900 - 1.100

Procedeu-se, primeiramente, à identificação das forças harmônicas com a base modal completa (11 modos e 11 coordenadas instrumentadas). O resultado da identificação é apresentado na Figura 5.24.

A Figura 5.25 mostra o resultado de um segundo teste de identificação utilizando a base modal incompleta (7 sensores e sete modos).

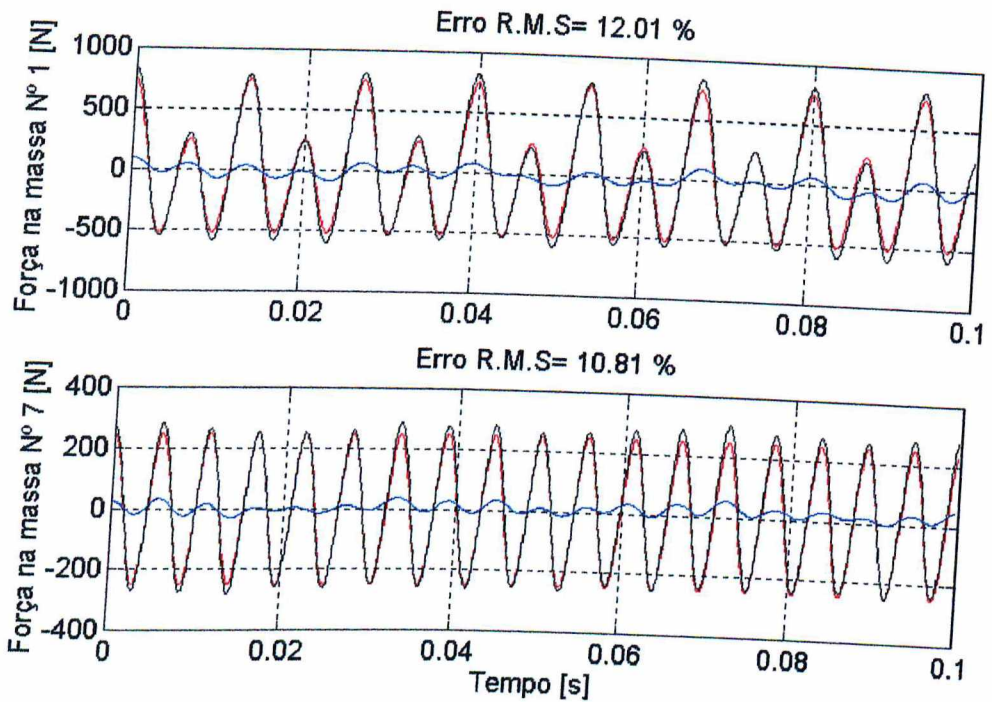


Figura 5.24 - Forças exatas e identificadas. ( $c=n=11$ )  
 Vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([\tilde{X}]) = 2, 2.$$

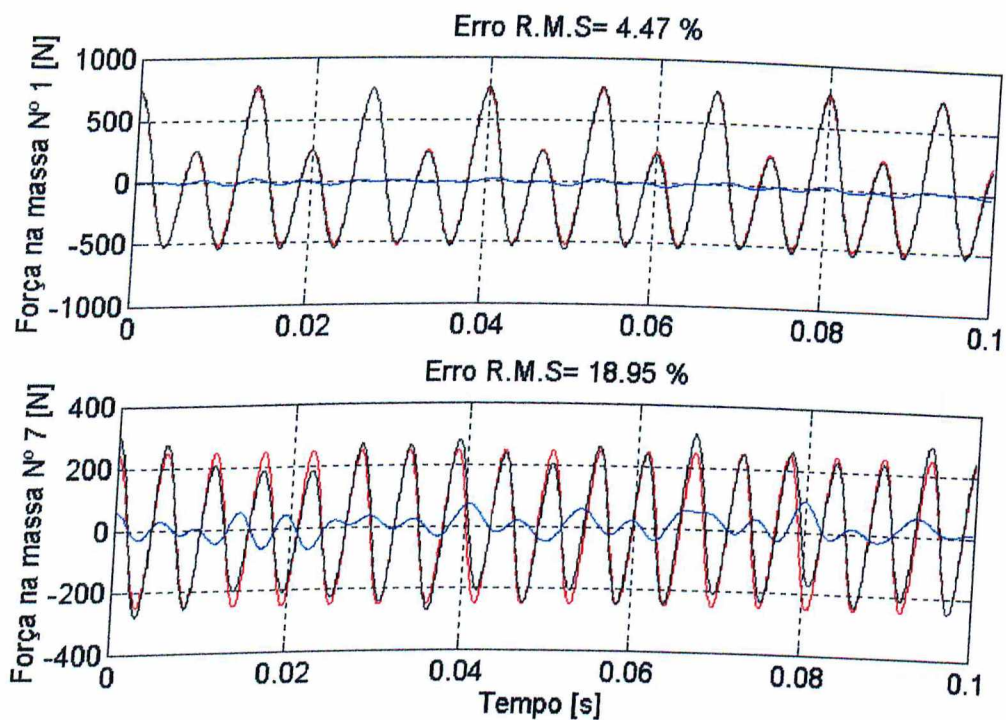


Figura 5.25 - Forças exatas e identificadas. ( $c=n=7$ )  
 Vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([\tilde{X}]) = 4, 5.$$

Confrontando as Figuras 5.24 e 5.13, observa-se que não há amplificação dos níveis de ruído nas forças identificadas, o que significa que o método de IIF baseado nas coordenadas modais mostra-se robusto com relação aos ruídos presentes nos dados experimentais.

### 5.3 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA TRANSITÓRIA

São apresentados, nesta seção, os resultados de identificação de uma única força transitória, aplicada na massa número 1, ilustrada na Figura 5.26. Esta força simula, de maneira aproximada, uma excitação por impacto. O conteúdo freqüencial desta força, obtido através da Transformada Rápida de Fourier, é apresentado na Figura 5.27.

Vale observar que a identificação de forças de impacto é uma aplicação diversas vezes enfocada em estudos reportados na literatura [Bateman et al., 1991].

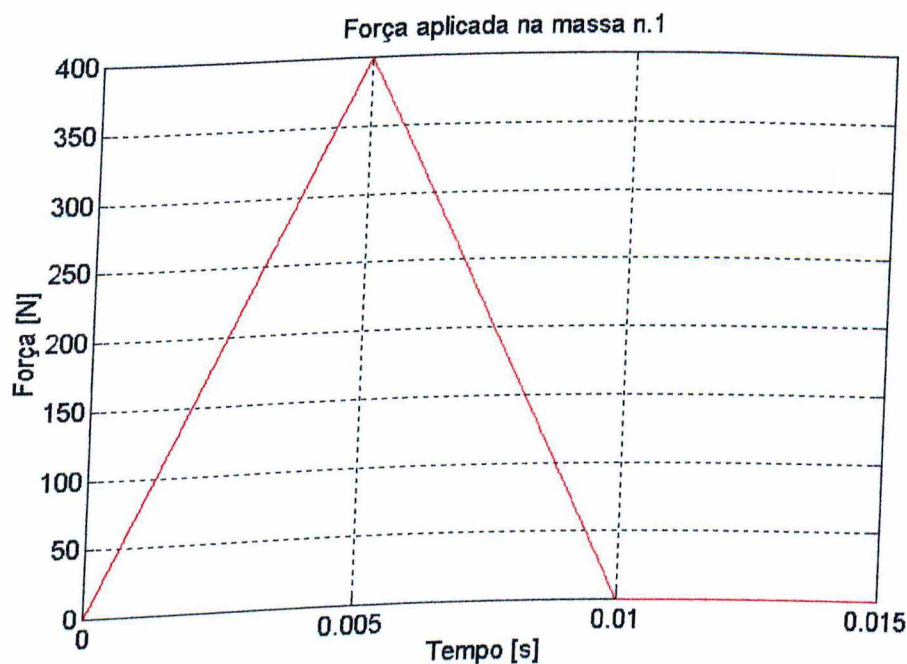


Figura 5.26 - Força transitória simulando uma excitação por impacto, aplicada na massa número 1.

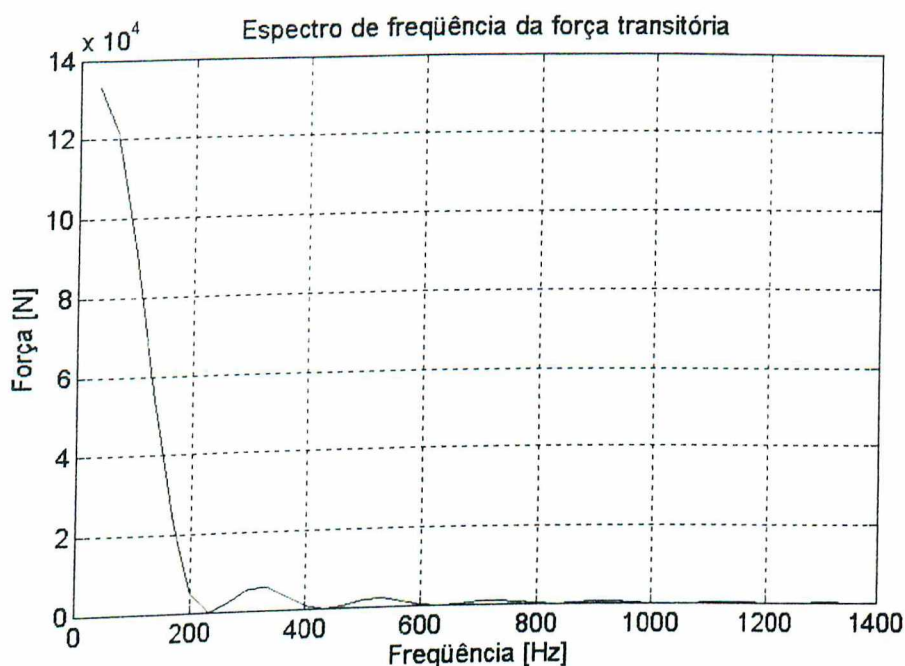


Figura 5.27 - Espectro de frequência da força transitória.

As respostas do sistema a esta força excitadora foram calculadas empregando-se o método de integração passo-a-passo de Newmark [Forsythe et al., 1977], implementado em linguagem MATLAB<sup>®</sup>. O valor do passo de integração empregado foi de  $\Delta t = 1.5 \times 10^{-5}$  [s].

Procedimento idêntico ao já descrito na seção 5.2 foi adotado para a obtenção das respostas à força de impacto: admitindo-se que apenas as respostas em aceleração possam ser determinadas experimentalmente, as acelerações calculadas através do programa de integração de NEWMARK foram assimiladas às respostas experimentais. Estas acelerações, amostradas no tempo, foram em seguida integradas por duas vezes para a obtenção das respostas em velocidade e deslocamento.

As figura 5.28 e 5.29 permitem observar as respostas exatas e integradas em algumas das coordenadas do sistema.



vermelho: exata; preto: integrada; azul: desvio da exata.

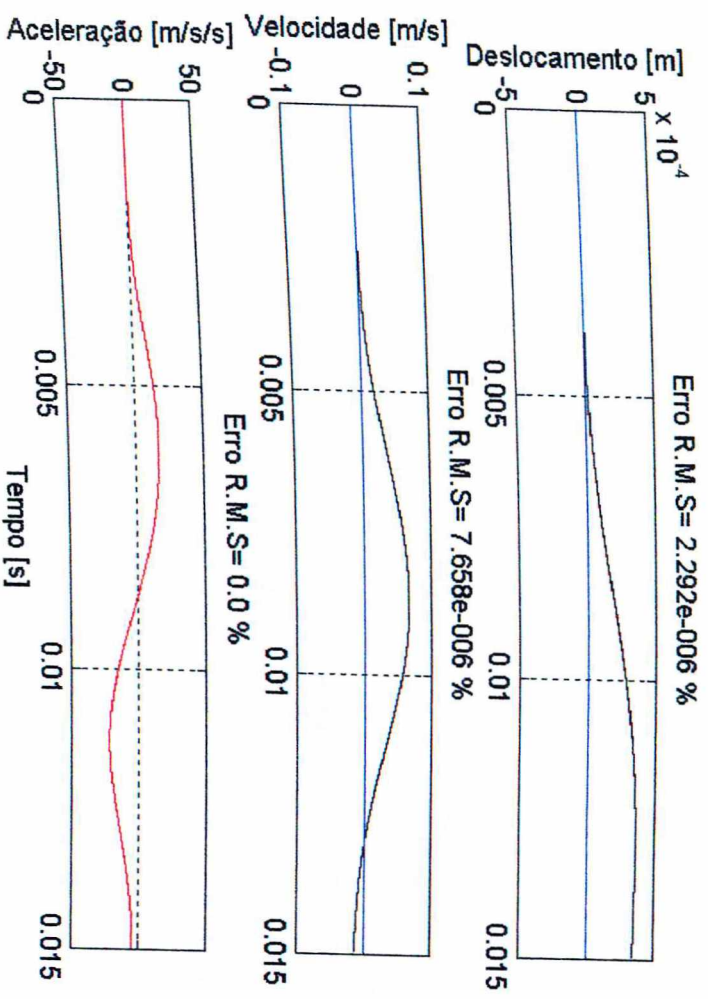


Figura 5.29 - Respostas do sistema à força de impacto medidas na massa n° 5.

vermelho: exata; preto: integrada; azul: desvio da exata.

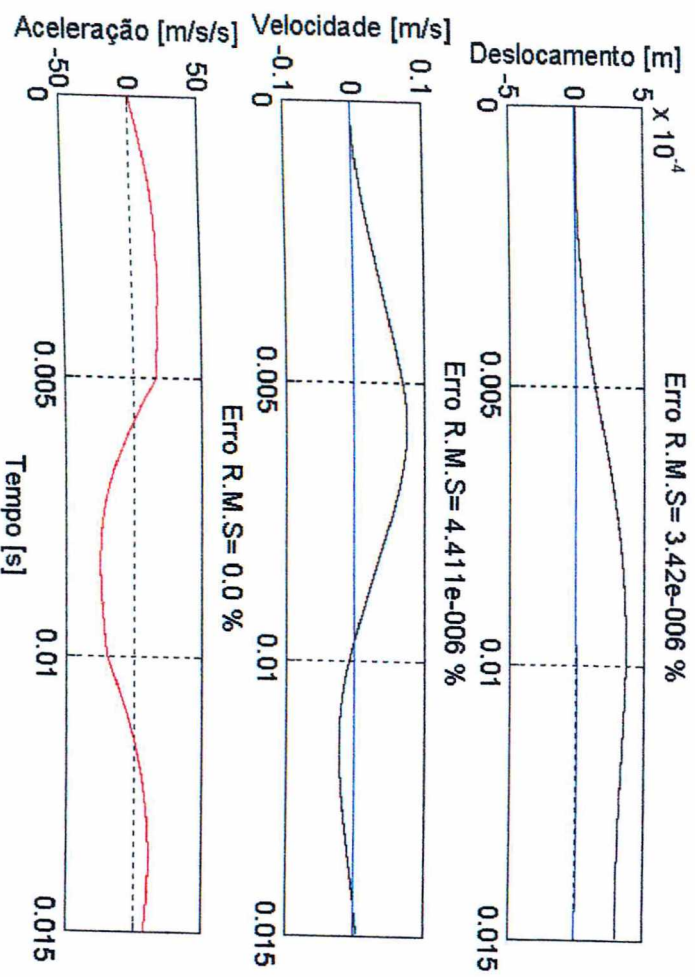


Figura 5.28 - Respostas do sistema à força de impacto medidas na massa n° 1.

Verifica-se que os erros de integração são mínimos fazendo com que os deslocamentos e as velocidades integradas estejam bem próximas dos valores exatos.

São apresentados nas Figuras (5.30) a (5.37), os resultados de diversos testes de identificação da força de impacto, considerando-se diversas combinações do número de sensores,  $c$ , e do número de autosoluções,  $n$ . Estes resultados permitem avaliar os efeitos do truncamento dos dados experimentais sobre os resultados da identificação.

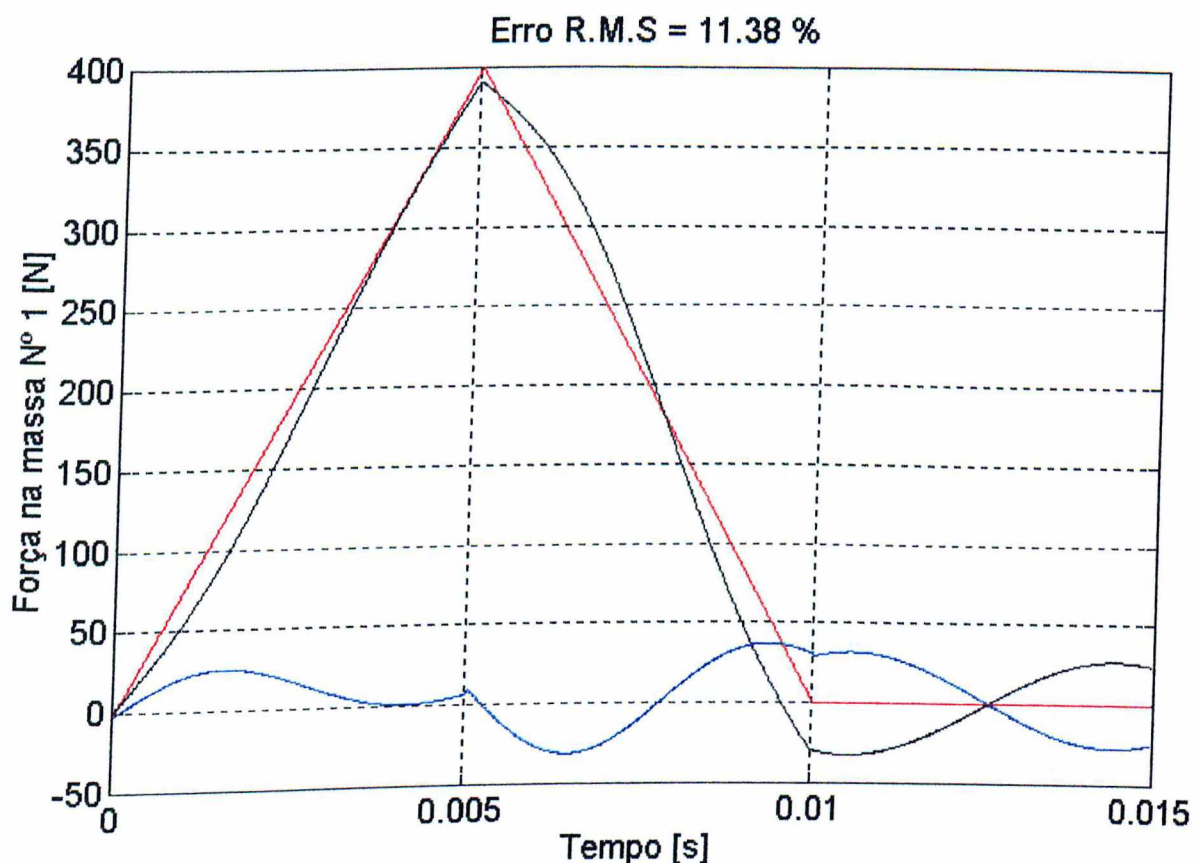


Figura 5.30 - Comparação entre as forças exata e identificada.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=2, c=11). \text{Cond}(\tilde{X}) = 1,2.$$

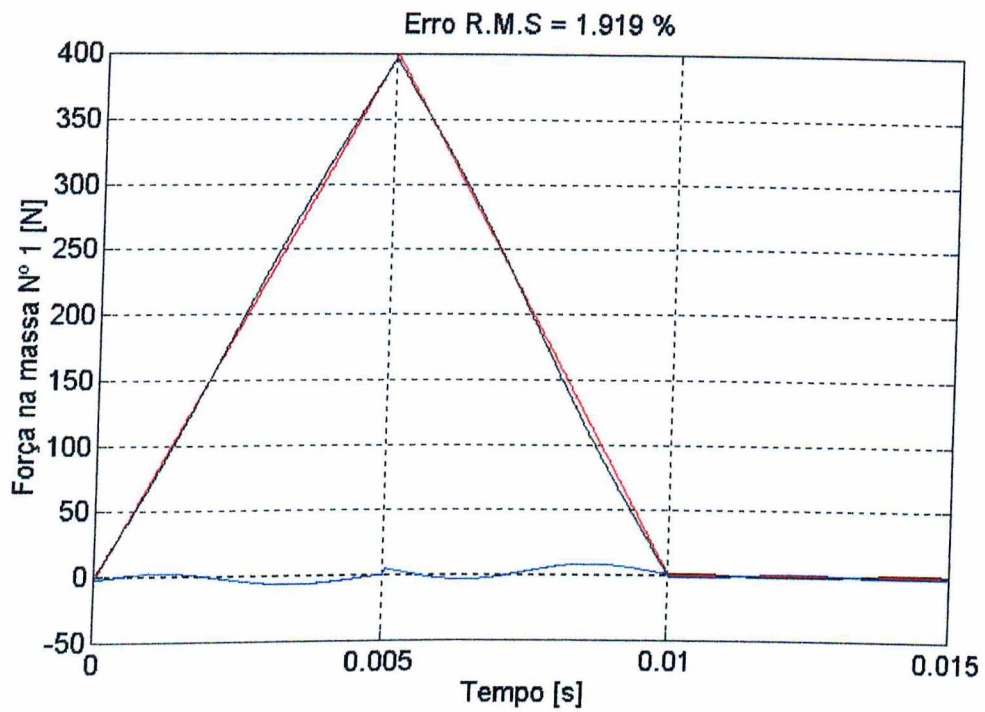


Figura 5.31 - Comparação entre as forças exata e identificada.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=7, c=11). \text{Cond}(\tilde{X}) = 1,9.$$

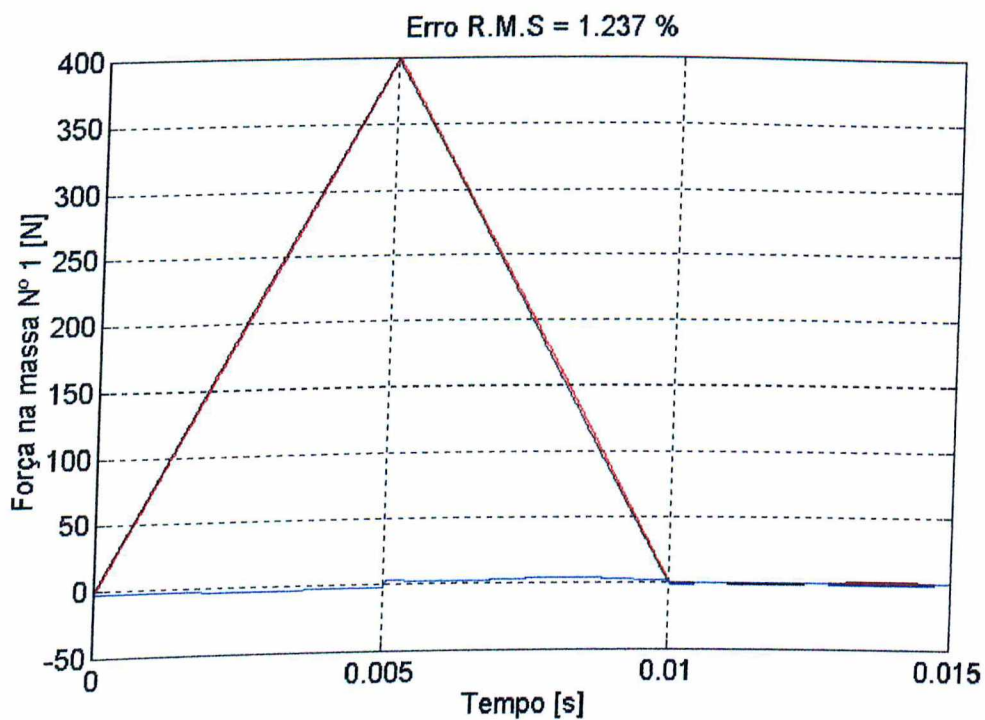


Figura 5.32 - Comparação entre as forças exata e identificada.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=10, c=11). \text{Cond}(\tilde{X}) = 2,0.$$

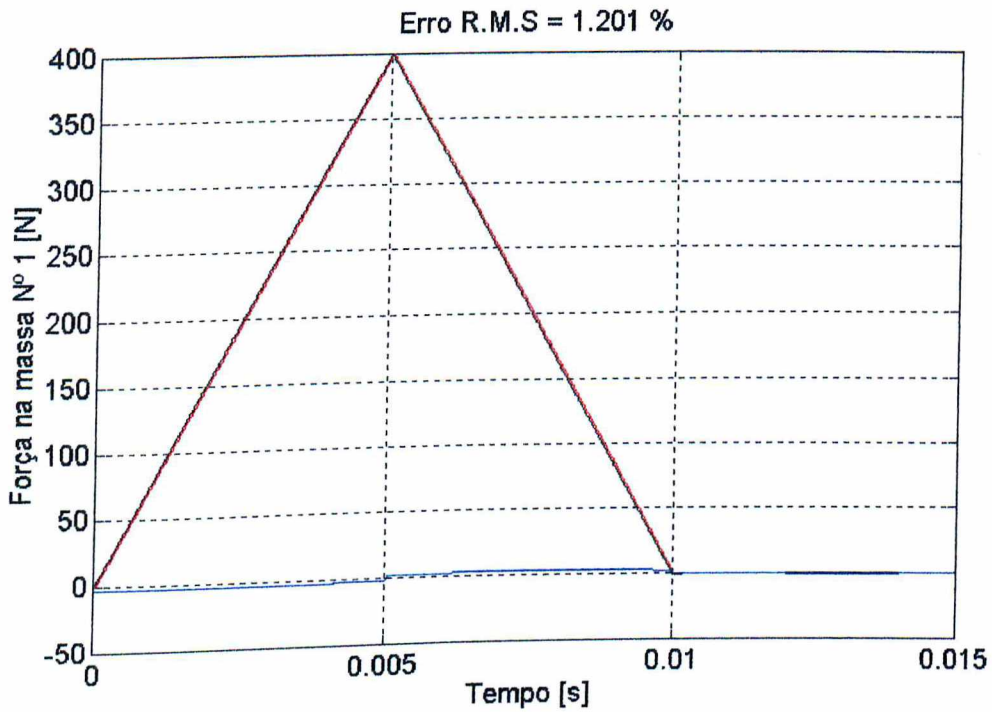


Figura 5.33 - Comparação entre as forças exata e identificada.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=11, c=11). \text{Cond}(\tilde{X}) = 2,0.$$

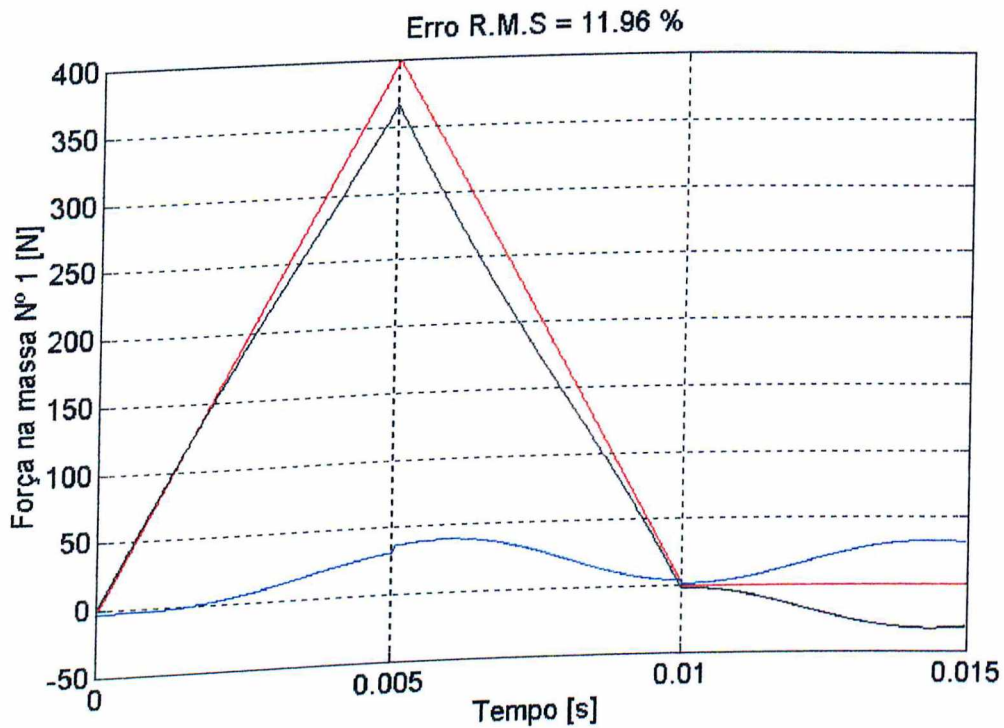


Figura 5.34 - Comparação entre as forças exata e identificada.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=11, c=2). \text{Cond}(\tilde{X}) = 2,0.$$

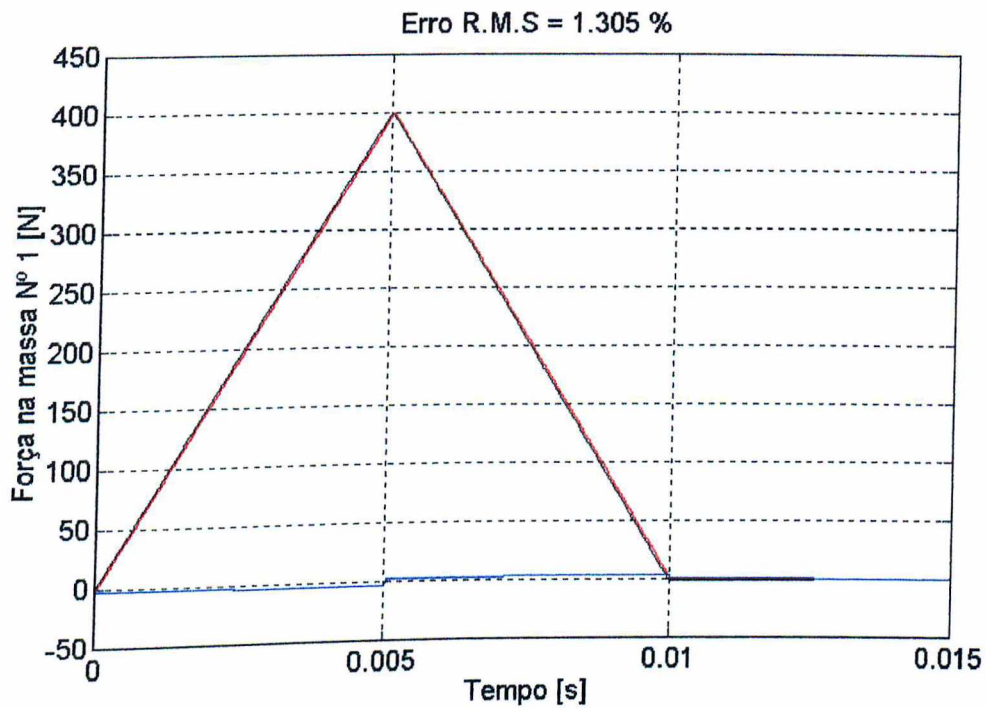


Figura 5.35 - Comparação entre as forças exata e identificada.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=11, c=7). \text{Cond}(\tilde{X}) = 2,0.$$

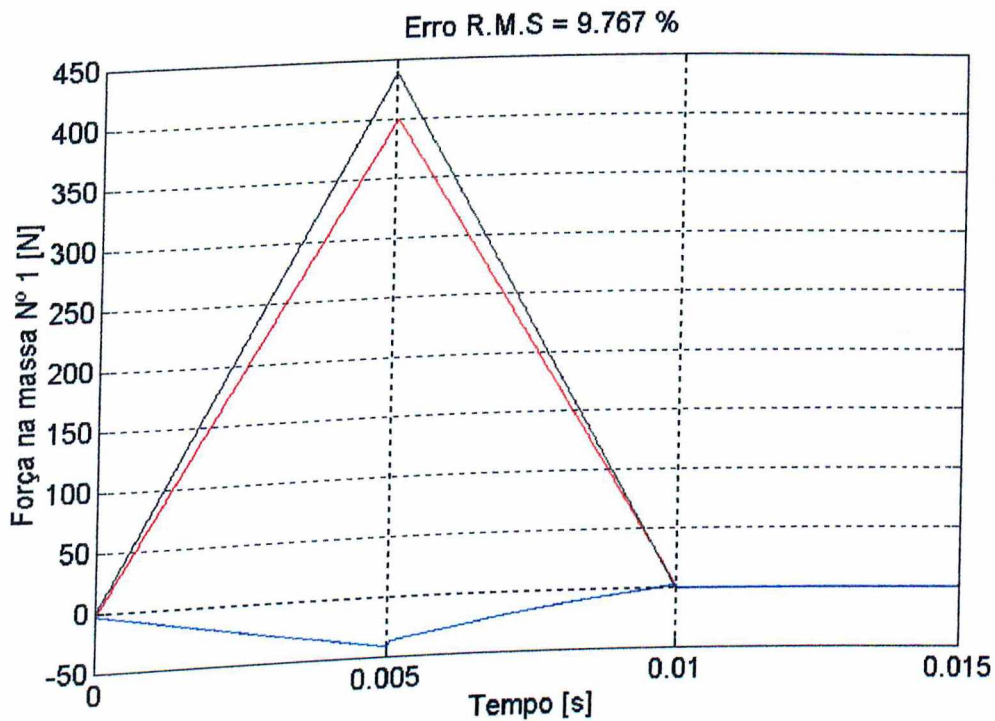


Figura 5.36 - Comparação entre as forças exata e identificada.  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=4, c=4). \text{Cond}(\tilde{X}) = 6,0.$$

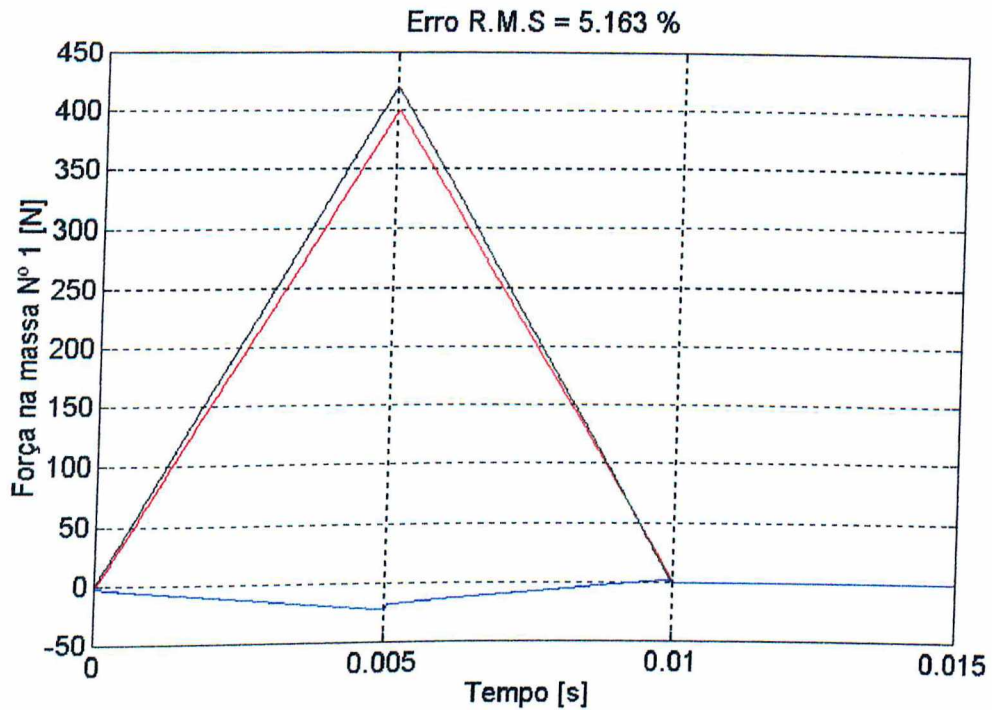


Figura 5.37 - Comparação entre as forças exata e identificada. vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$(n=6, c=6). \text{Cond}([\tilde{X}]) = 10,4.$$

Os resultados apresentados revelam que, ao contrário do que se verificou na identificação de forças harmônicas, no caso de identificação da força transitória, não há uma influência muito significativa do número de sensores e do número de modos utilizados sobre a precisão da força identificada.

Deve também ser destacado o fato de que a relação entre o número de sensores e modos também tem pouca influência sobre a qualidade da identificação, embora dois tipos de soluções distintos sejam utilizados para a resolução das equações (3.14) a (3.16) conforme:

- $c \geq n \Rightarrow$  solução normal do método dos mínimos quadrados;
- $c < n \Rightarrow$  solução de norma mínima.

### 5.3.1 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA TRANSITÓRIA CONSIDERANDO O EFEITO DOS RUÍDOS EXPERIMENTAIS

São apresentados nesta seção alguns resultados de identificação da força transitória empregando-se acelerações temporais e autosoluções perturbadas por números aleatórios simulando os ruídos experimentais. O modelo empregado para a implantação do ruído foi o mesmo utilizado no caso da identificação de forças harmônicas, apresentado na seção 5.2.4.

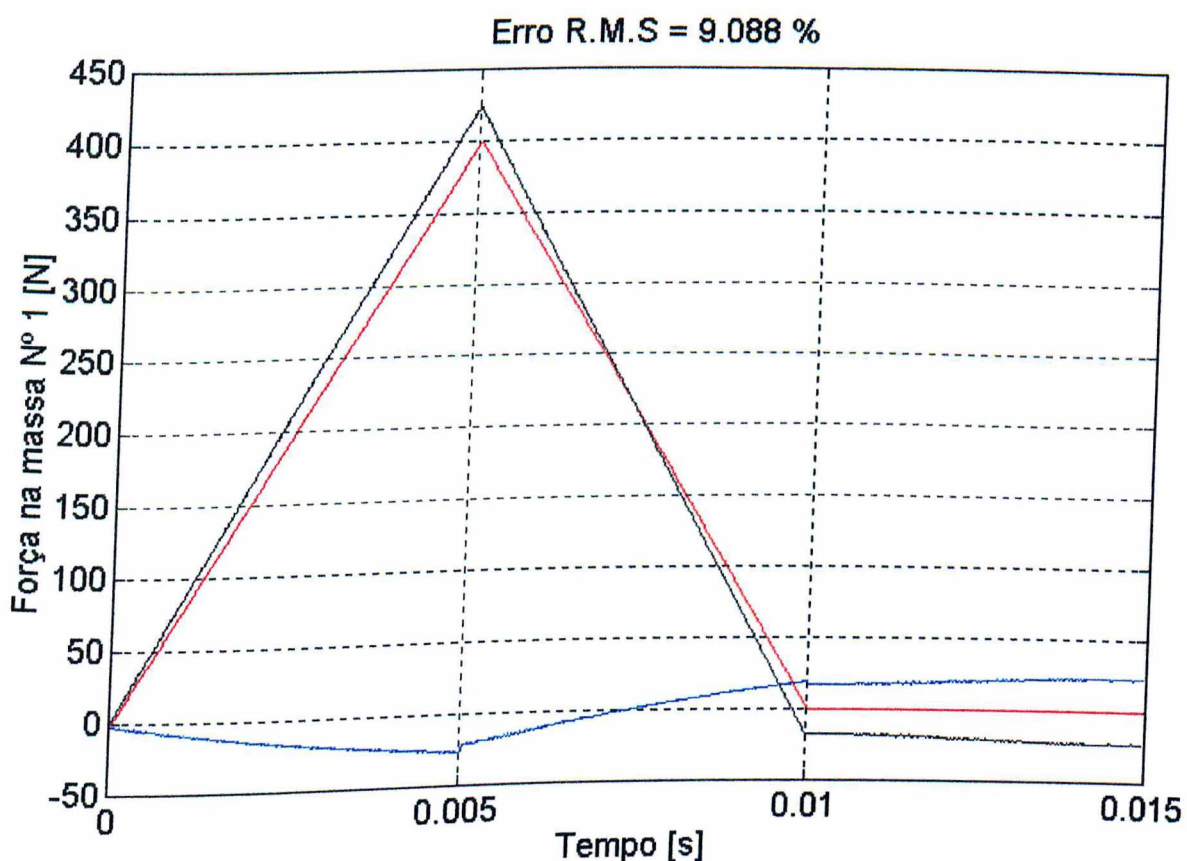


Figura 5.38 - Forças exata e identificada. (c=n=11)  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([\tilde{X}]) = 2,3.$$



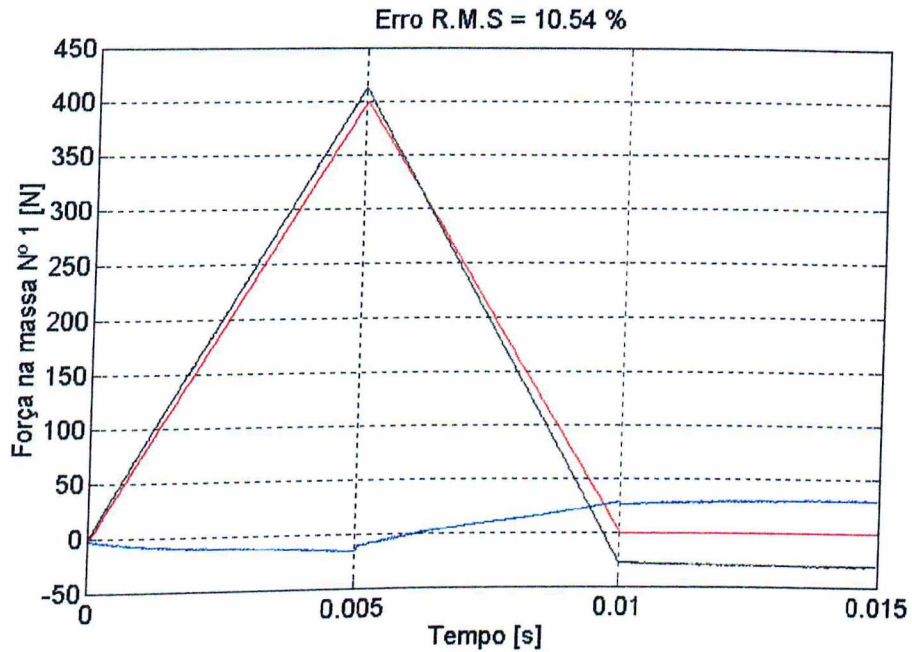


Figura 5.39 - Forças exata e identificada. ( $c=n=7$ )  
vermelho: exata; preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([\tilde{X}]) = 4,5.$$

Os resultados de identificação da força transitória confirmam o que já havia sido observado nos resultados de identificação das forças harmônicas: não se observa nenhuma amplificação importante do efeito do ruído que chegue a provocar uma deterioração pronunciada dos resultados de identificação.

## CAPÍTULO VI

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS: MÉTODO DE IIF BASEADO NA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Neste capítulo são apresentadas diversas aplicações numéricas realizadas com o objetivo de validar e ilustrar as características do método de IIF estudado no Capítulo IV deste memorial.

O método é utilizado inicialmente para a identificação de uma força harmônica atuando em um sistema simples de 1 gdl. Através desta aplicação é evidenciada a característica de mau condicionamento numérico e justificado o emprego de técnicas de regularização. Em seguida, diversas aplicações são efetuadas ao mesmo sistema discreto de 11 graus de liberdade apresentado na seção 5.1, empregado para o estudo do método baseado nas coordenadas modais. São considerados dois tipos de forças excitadoras: uma força harmônica em regime permanente e uma força transitória simulando uma excitação por impacto.

#### 6.1- IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA HARMÔNICA APLICADA EM UM SISTEMA DE 1 GDL.

A Figura 6.1 mostra as características físicas do sistema de 1 gdl utilizado, suposto submetido a uma força excitadora, com uma frequência de 15 rad/s, dada pela expressão:

$$f(t) = 800\cos(15t) \text{ [N]}$$

As condições iniciais foram admitidas nulas. As respostas temporais foram observadas na janela de 0 a 4 [s] e discretizadas em 256 pontos igualmente espaçados

( $\Delta t=0,016$  [s]). A Figura 6.2 mostra as respostas temporais do sistema e a Figura 6.3 ilustra as suas funções de resposta ao impulso unitário em deslocamento, velocidade e aceleração. Tais FRI foram obtidas analiticamente.

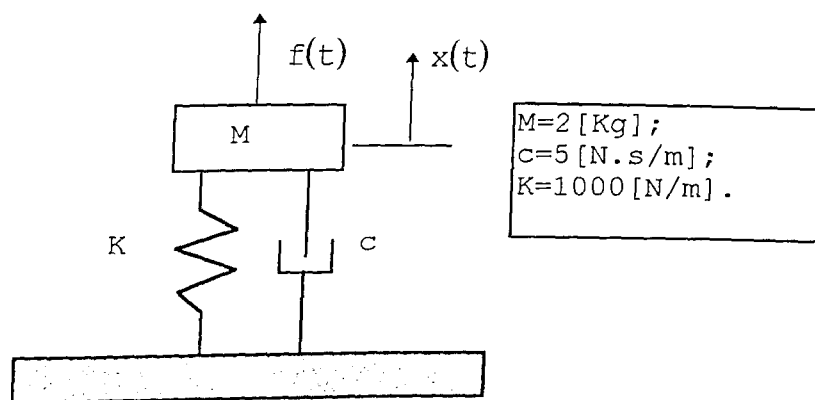


Figura 6.1 - Sistema teste de 1 GDL.

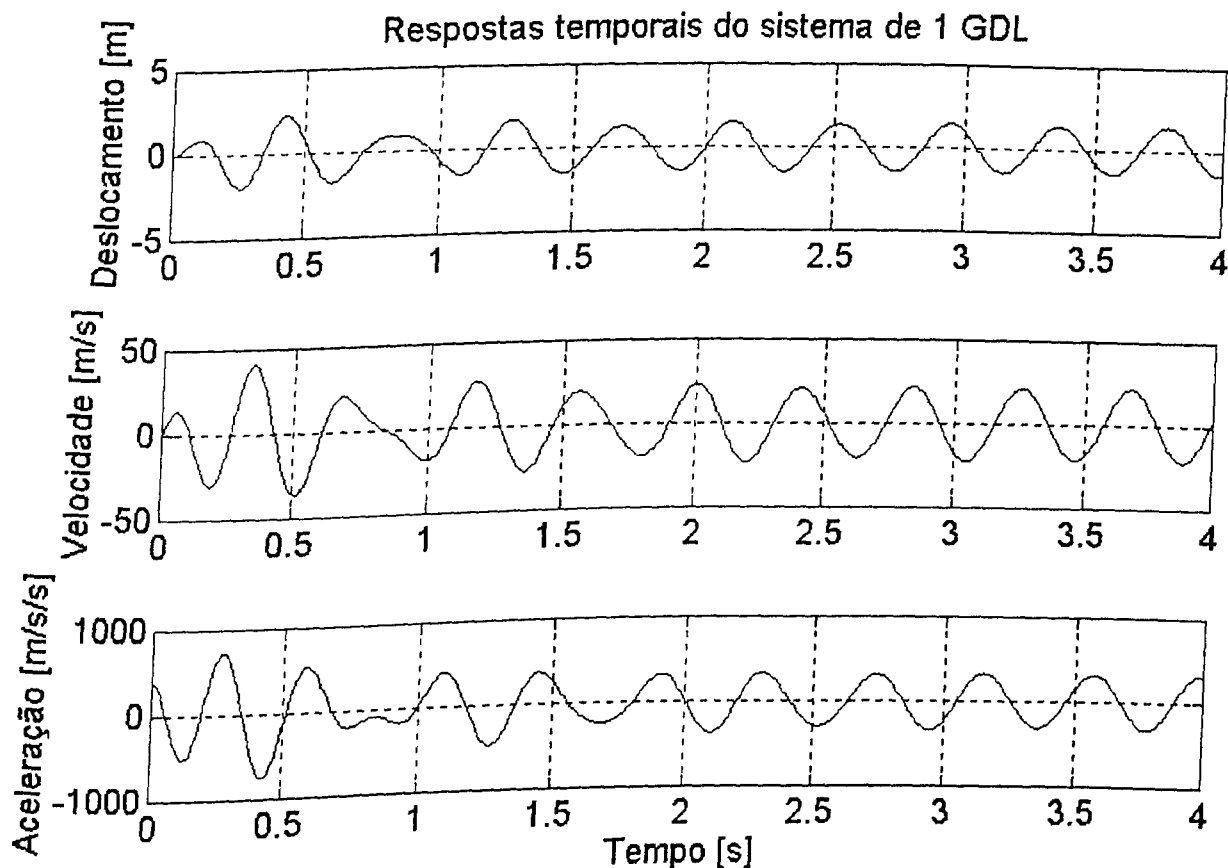


Figura 6.2 - Respostas temporais do sistema de 1 GDL à excitação harmônica.

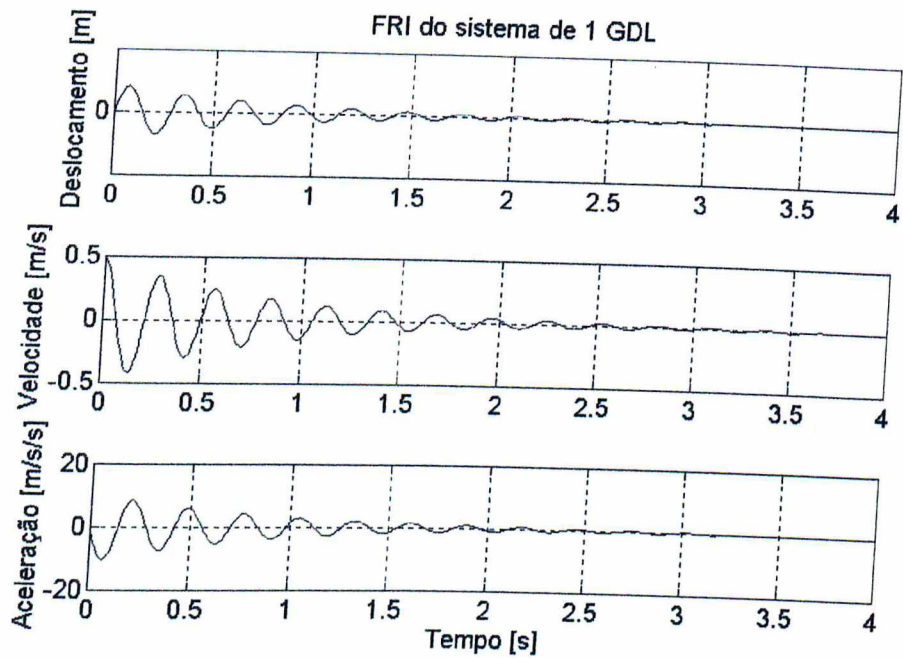


Figura 6.3 - FRI do sistema de 1 gdl.

A partir da resposta temporal e da FRI em aceleração, procedeu-se inicialmente ao teste do método de identificação recursivo sumarizado pelas equações (4.6). A força resultante da identificação é apresentada na Figura 6.4, confrontada com a força excitadora exata.

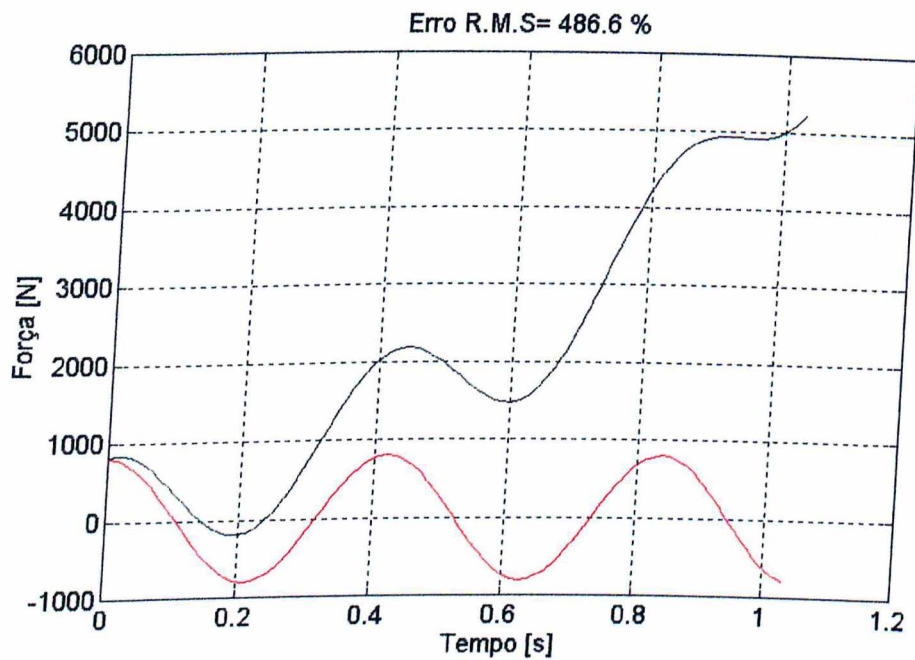


Figura 6.4 - Forças exata (vermelho) e identificada (preto).

Observa-se a tendência de crescimento permanente da amplitude da força identificada, tipicamente devido ao mau-condicionamento numérico do problema de deconvolução, que torna os resultados da identificação altamente sensíveis aos pequenos erros de arredondamento numérico afetando as respostas em aceleração e as FRI.

Os resultados mostram a necessidade de se empregar um outro método para a resolução do problema inverso, qual seja, aquele baseado na equação (4.7), associado a técnicas de regularização que objetivam a estabilização numérica do problema. Neste sentido, foram utilizados dois métodos de regularização, a saber:

- o método de Thikonov;
- o método da baseado na Decomposição em Valores Singulares (DVS).

As formulações básicas de ambos os métodos são apresentadas no Apêndice B deste Memorial.

Os resultados das identificações empregando-se os métodos de regularização são apresentados a seguir.

#### 6.1.1 - REGULARIZAÇÃO PELO MÉTODO DE TIKHONOV

No exemplo em questão foi feita uma série de tentativas para se chegar aos valores do parâmetro de regularização  $\alpha$  que proporcionasse soluções satisfatórias para o problema. As figuras seguintes mostram os resultados obtidos para alguns dos valores de  $\alpha$  utilizados.

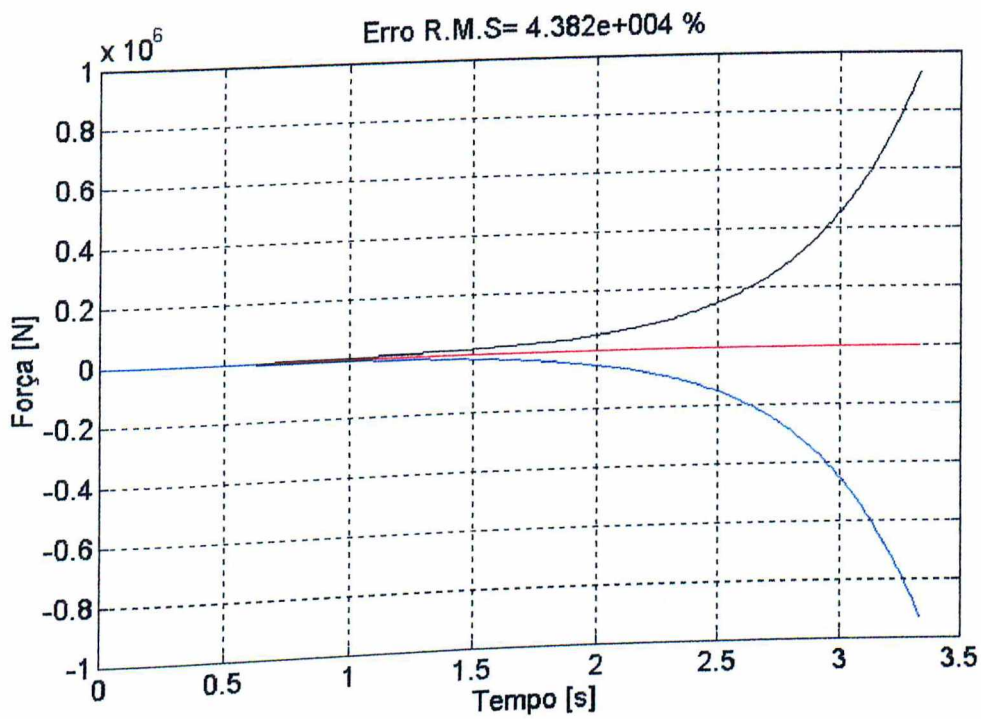


Figura 6.5 - Forças exata e identificada.

vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\alpha=0. \text{ Cond}([T]^T[T]-\alpha[I])= 9,9 \times 10^{10}.$$

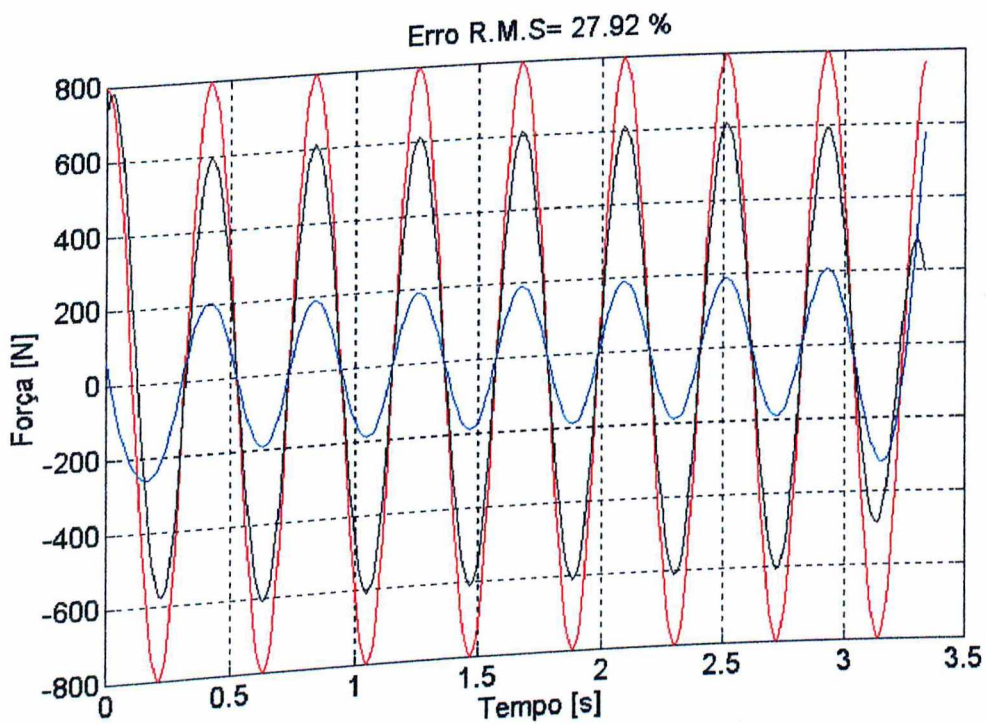


Figura 6.6 - Forças exata e identificada.

vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\alpha=0,05. \text{ Cond}([T]^T[T]-\alpha[I])= 294,4.$$

04128/97

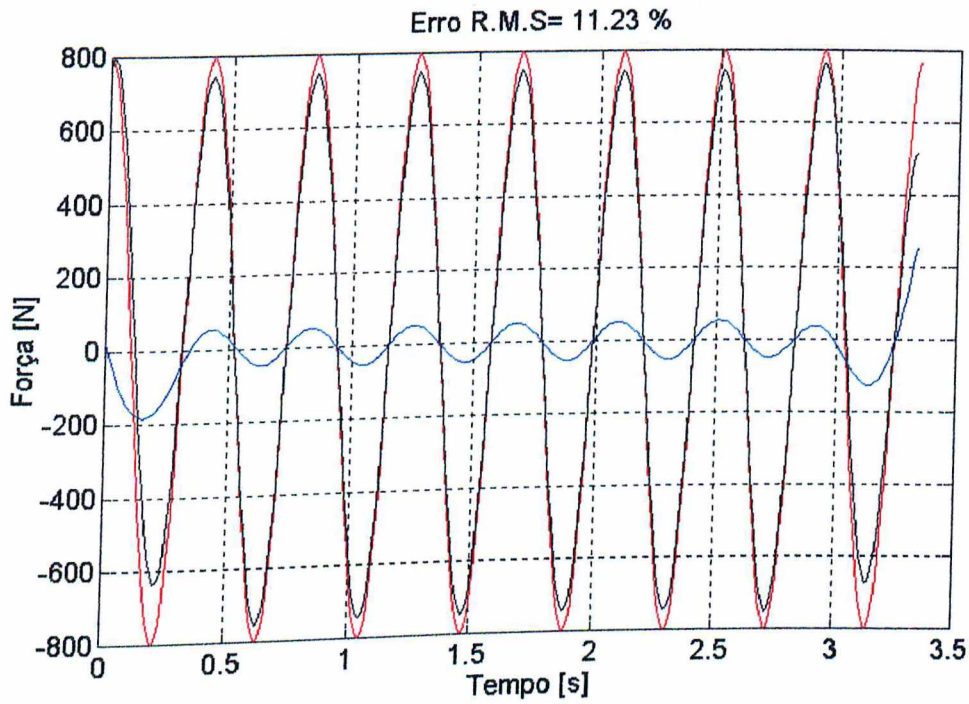


Figura 6.7 - Forças exata e identificada.  
vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\alpha=0,01. \text{Cond}([T]^T[T]-\alpha[I])= 1,5 \times 10^3.$$

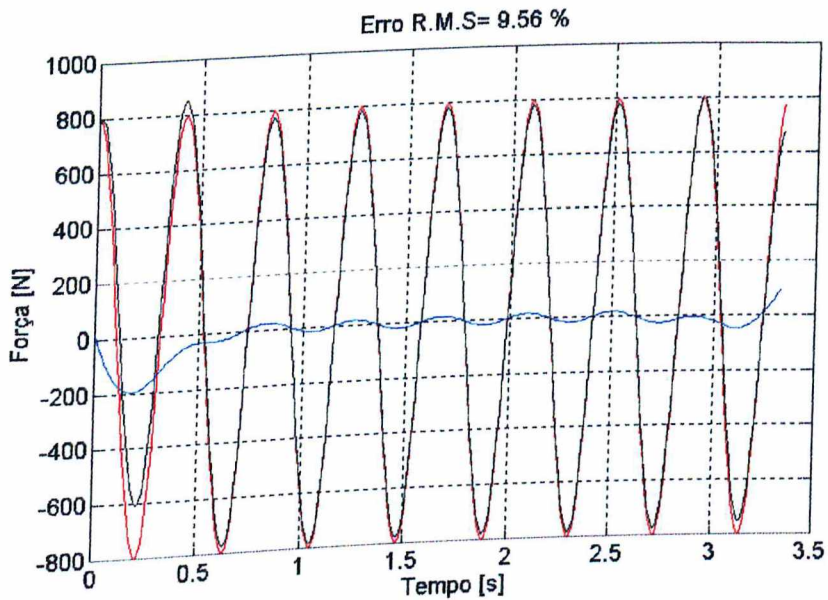


Figura 6.8 - Forças exata e identificada.  
vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\alpha=0,002. \text{Cond}([T]^T[T]-\alpha[I])= 7,3 \times 10^3.$$

Universidade Federal de Uberlândia  
Biblioteca

6.1.2 - REGULARIZAÇÃO PELA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES DVS)

A Figura 6.9 mostra os valores singulares da matriz [T].

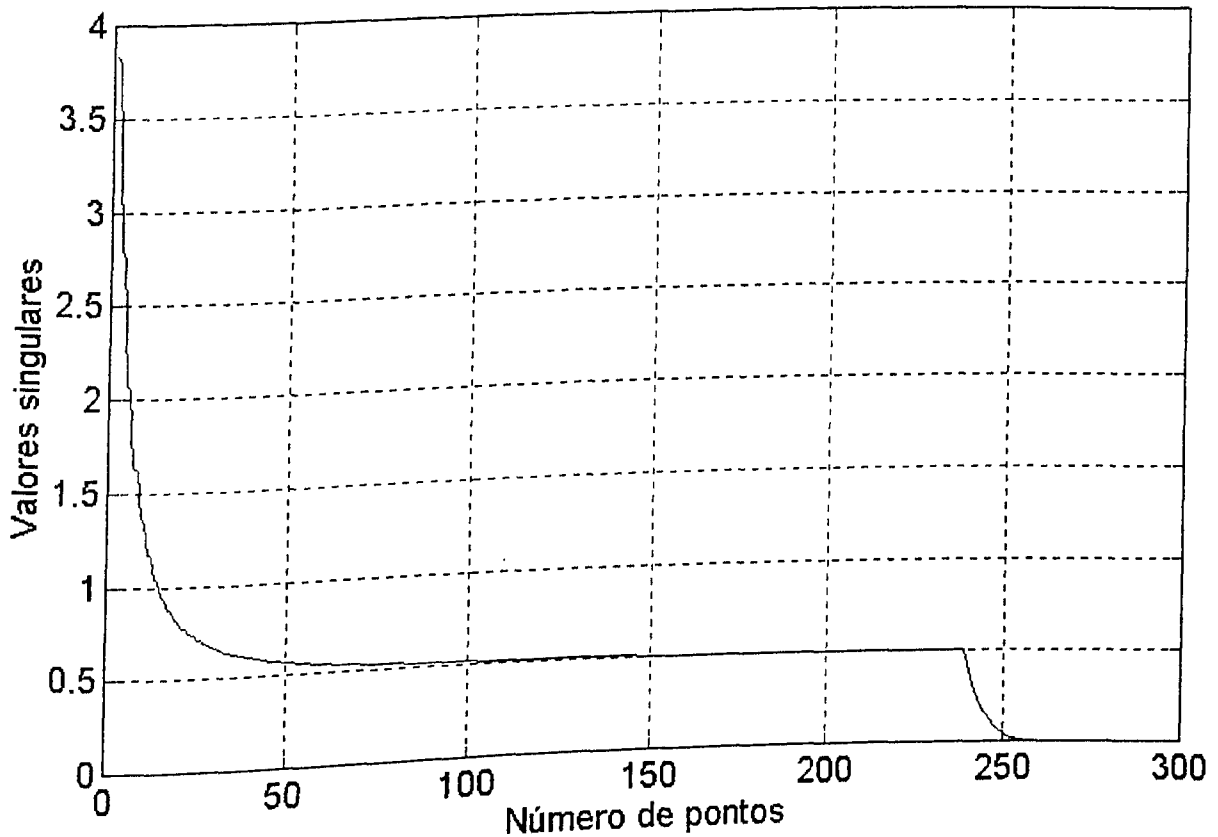


Figura 6.9 - Valores singulares da matriz [T]  $\in \mathbb{R}^{256,256}$ .

As Figuras 6.10 a 6.12 mostram os resultados de identificação obtidos após a eliminação de diferentes números de valores singulares da matriz [T].



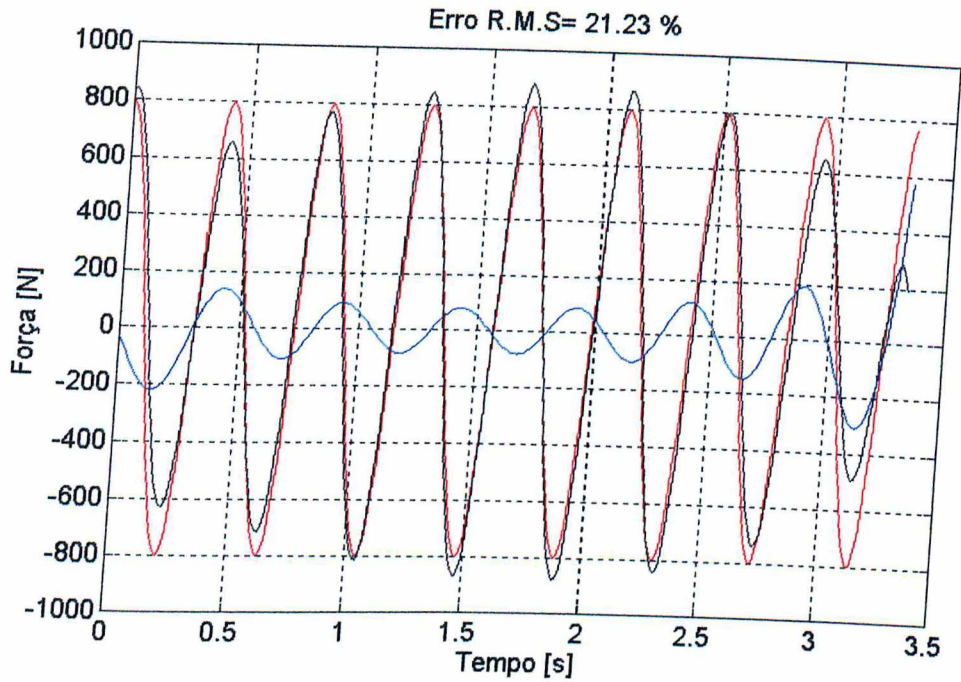


Figura 6.10 - Forças exata e identificada.  
vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.  
(15 valores singulares anulados).

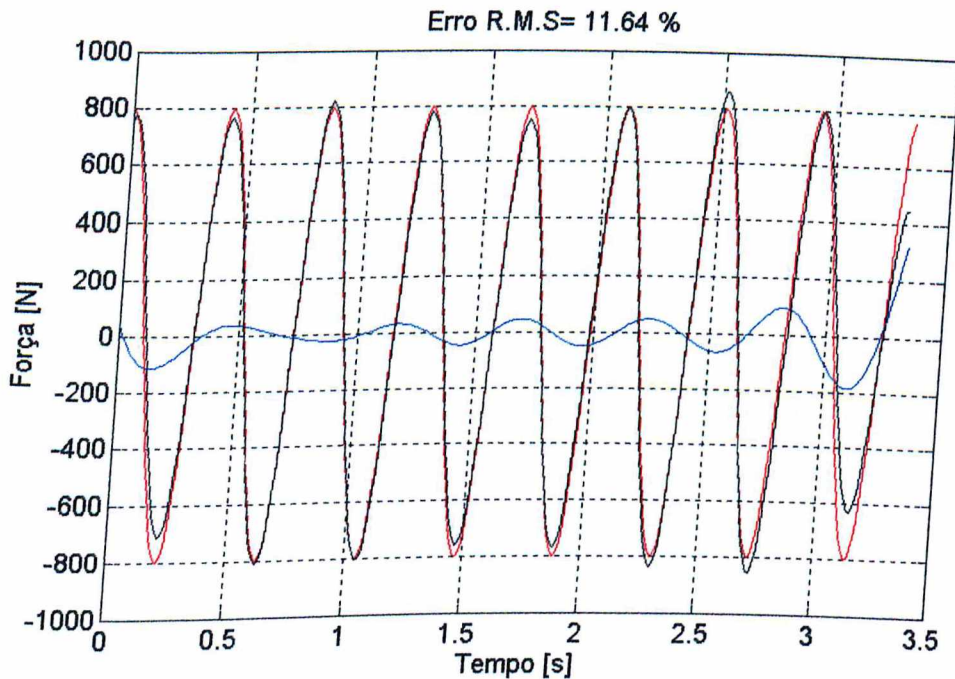


Figura 6.11 - Forças exata e identificada.  
vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.  
(13 valores singulares anulados).

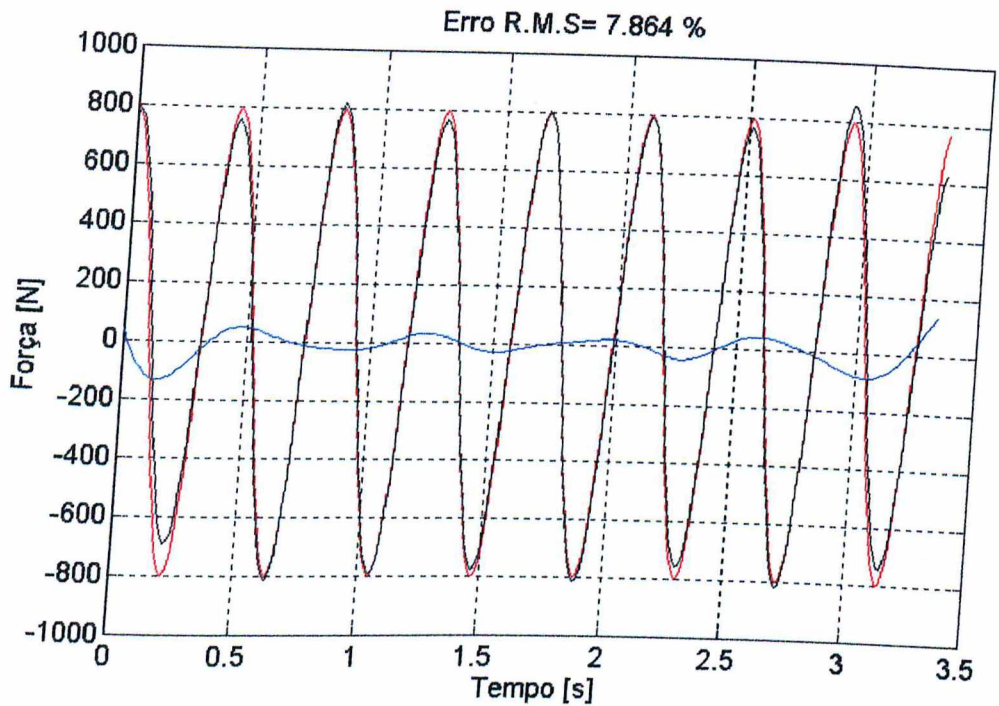


Figura 6.12 - Forças exata e identificada.  
vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.  
(10 valores singulares anulados).

## 6.2 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA HARMÔNICA APLICADA EM UM SISTEMA DE 11 GDL

Os testes cujos resultados são apresentados nesta seção foram obtidos mediante a aplicação do método de IIF ao sistema discreto de 11 gdl apresentado na seção 5.1.

Os testes visaram a identificação de uma força harmônica, com frequência de 150 Hz, aplicada na massa número 1, dada por:

$$f_1(t) = 500 \cos(300\pi t) \text{ [N]} \quad (6.1)$$

As condições iniciais foram admitidas nulas. As respostas temporais foram observadas na janela de 0 a 0.05 [s] e discretizadas em 200 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 2,5 \times 10^{-4}$  [s]). As Figuras 6.13 e 6.14 mostram as respostas

temporais do sistema em algumas de suas coordenadas e as Figuras 6.15 e 6.16 ilustram algumas das suas funções de resposta ao impulso unitário em aceleração do sistema teste empregado.

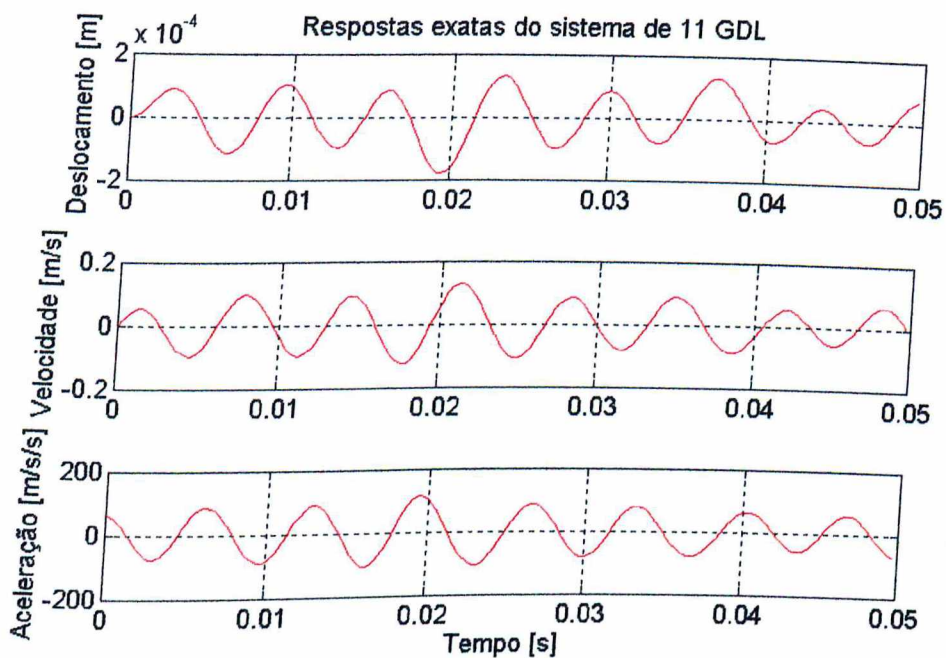


Figura 6.13 - Respostas da massa N°1 do sistema de 11 GDL.

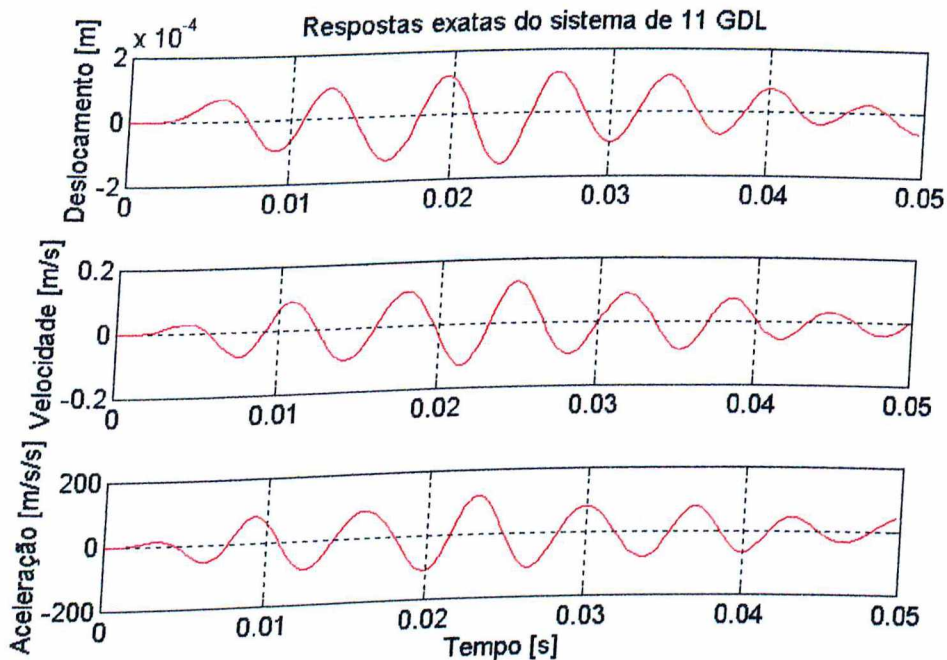


Figura 6.14 - Respostas da massa N°5 do sistema de 11 GDL.

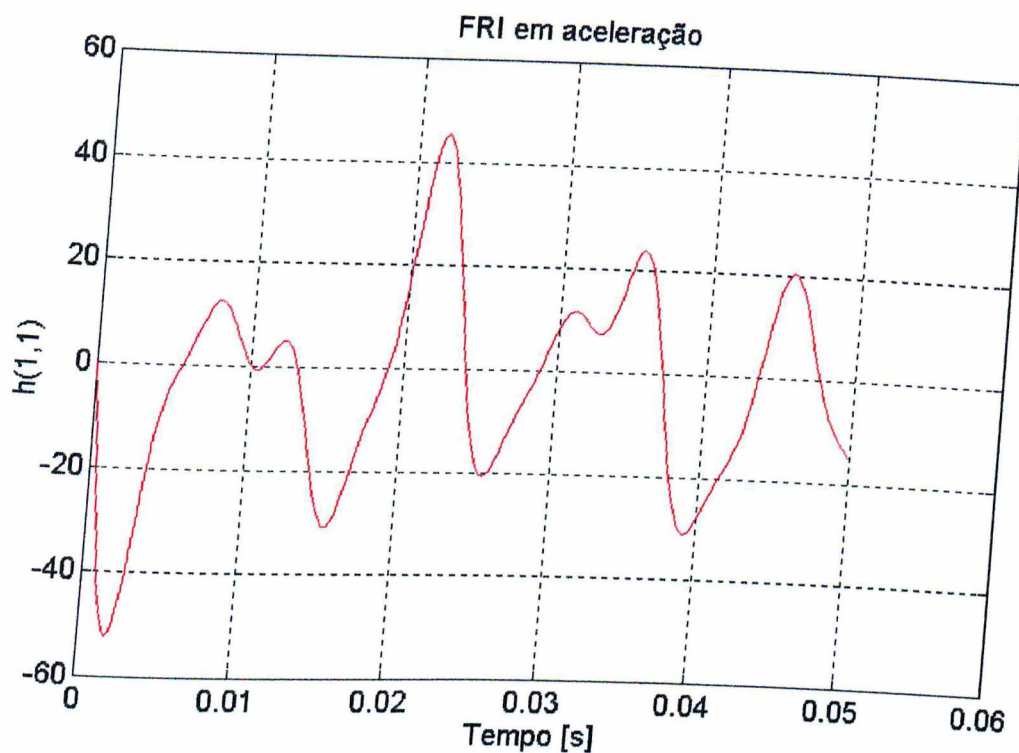


Figura 6.15 - FRI, em aceleração, do sistema de 11 GDL.

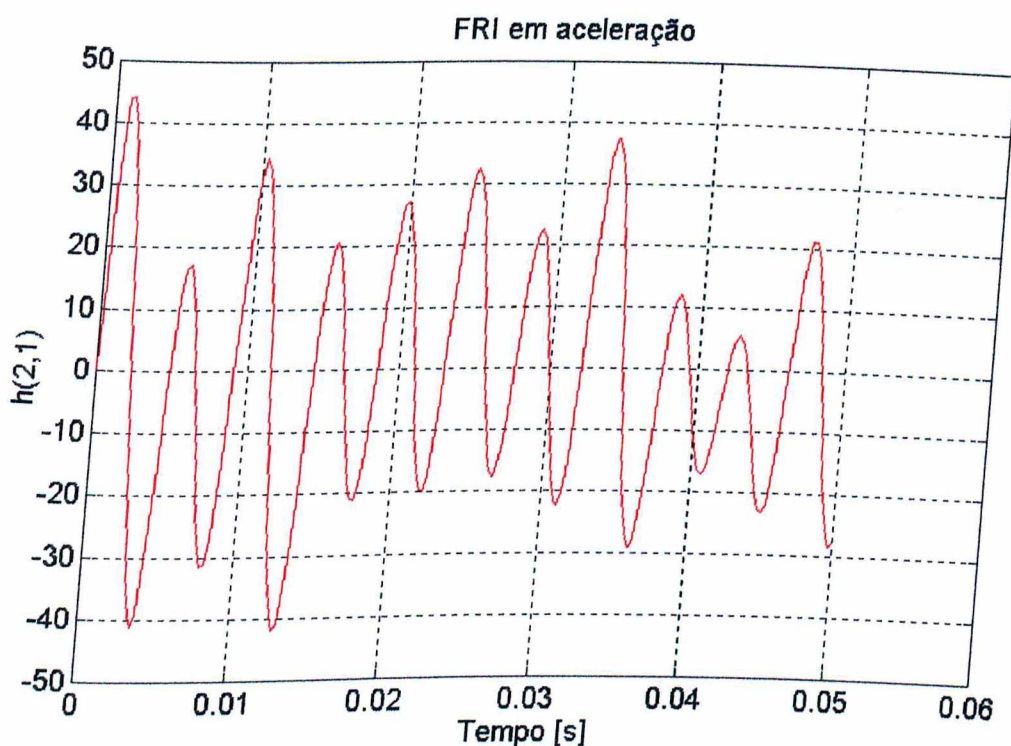
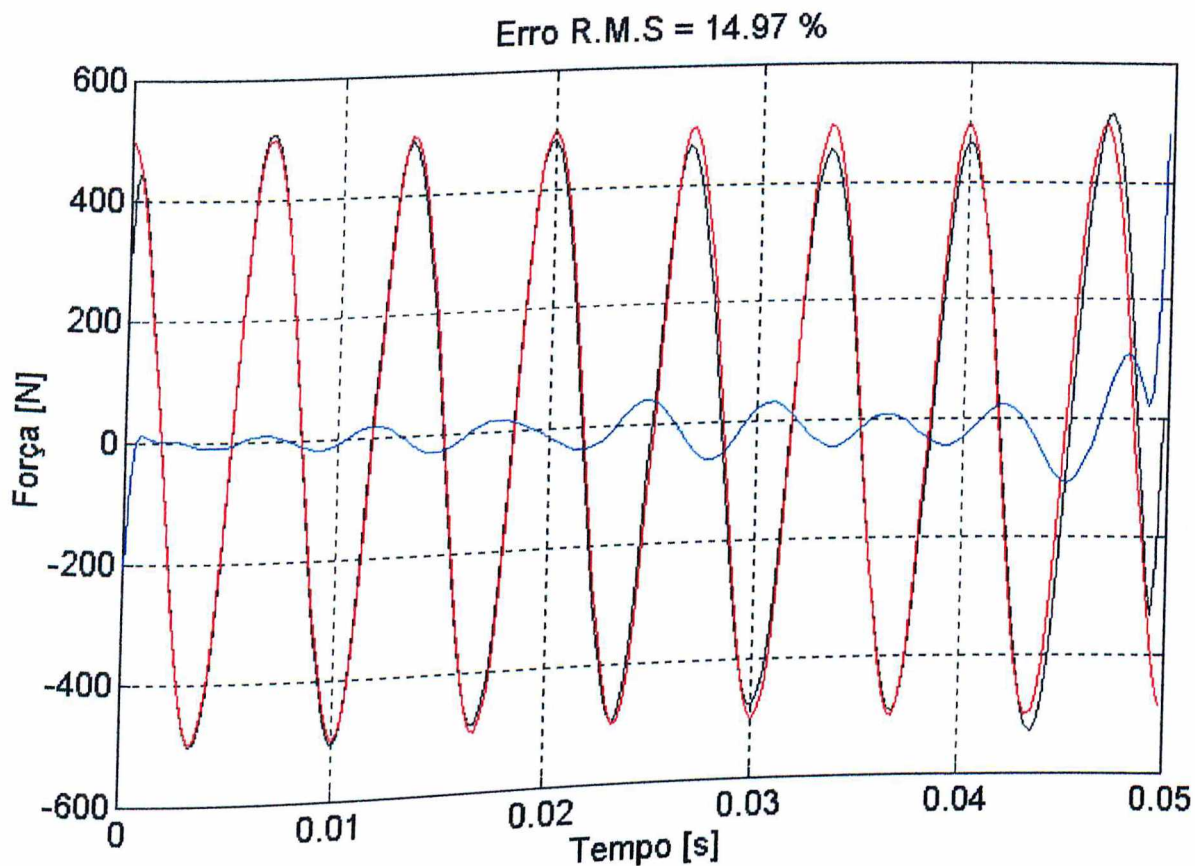


Figura 6.16 - FRI, em aceleração, do sistema de 11 GDL.

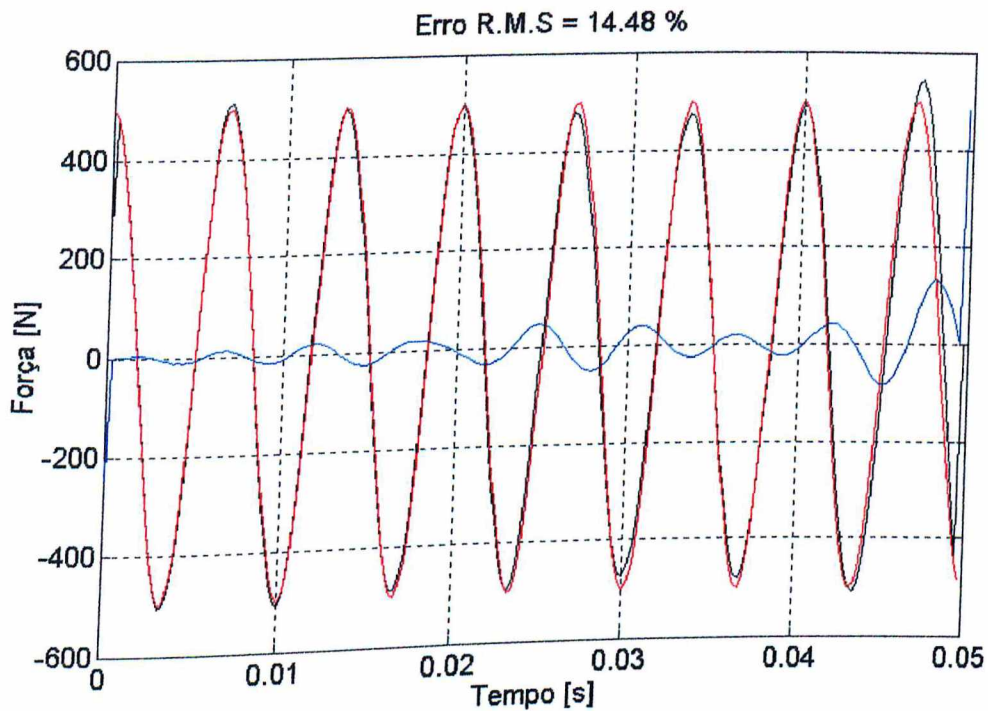
Os testes de identificação da força aplicada na massa nº 1 foram efetuados empregando-se as respostas em aceleração observadas na coordenada nº 2. Neste caso, a FRI que intervém

na formulação é apenas a FRI  $h_{21}(t)$ . Os resultados obtidos empregando-se tanto a regularização de Thikonov, quanto a regularização pela Decomposição em Valores Singulares, são apresentados nas Figuras 6.17 e 6.18 a seguir:



**Figura 6.17** - Regularização de Thikonov. ( $\alpha=1 \times 10^{-5}$ )  
 vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([T]^T[T] - \alpha[I]) = 1,9 \times 10^4.$$



**Figura 6.18** - Regularização pela DVS.  
vermelho: exata, preto: identificada; azul: desvio da exata.  
Valores menores que 0,001 eliminados.

Pode-se notar que os resultados obtidos se mostraram bastante satisfatórios.

### 6.3 - IDENTIFICAÇÃO DE UMA FORÇA TRANSITÓRIA APLICADA EM UM SISTEMA DE 11 GDL

Assim como foi feito com relação ao método de IIF baseado nas coordenadas modais, procedeu-se à identificação de uma força transitória, simulando uma carga de impacto, utilizando-se o método de identificação baseado na deconvolução no domínio do tempo. A força de impacto, cuja variação é ilustrada na Figura 5.26, foi aplicada na massa nº 1. As respostas do sistema, são aquelas apresentadas nas Figuras 5.28 e 5.29.

Foram efetuados diversos testes de identificação, nos quais foram utilizados os métodos de regularização de Thikonov

e DVS. Foram utilizados na identificação as respostas em aceleração medidas na massa 2.

• REGULARIZAÇÃO PELO MÉTODO DE THIKONOV

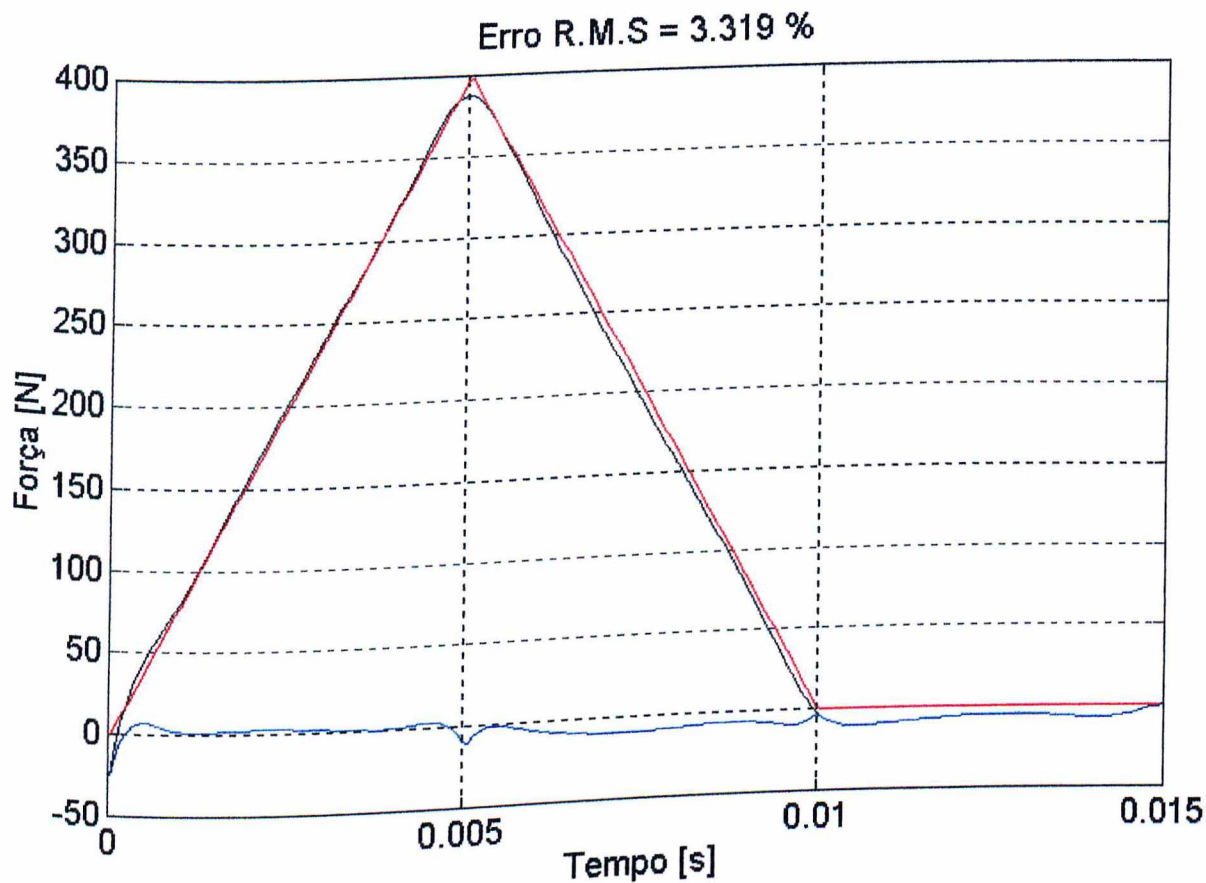
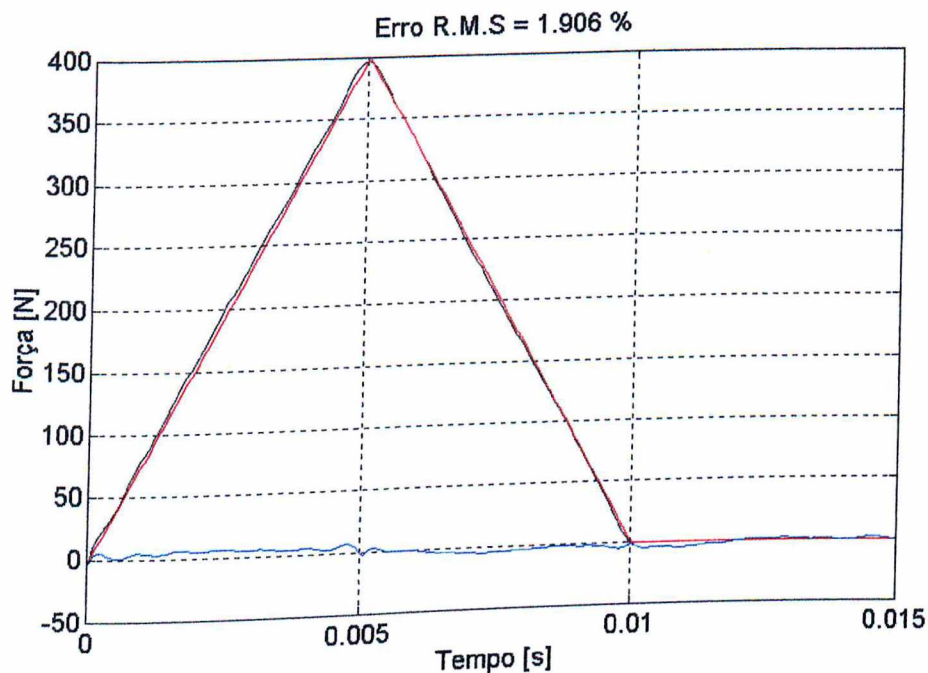


Figura 6.19 - Regularização de Thikonov. ( $\alpha=1 \times 10^{-5}$ )  
vermelho: exata, preto: identificada, azul: desvio da exata.  
 $\text{Cond}([T]^T[T] - \alpha[I]) = 2,8 \times 10^3$ .

• REGULARIZAÇÃO PELA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES  
(DVS)



**Figura 6.20** - Regularização pela DVS.  
vermelho: exata, preto: identificada, azul: desvio da exata.  
Valores menores que 0,001 eliminados.

**6.4 - IDENTIFICAÇÃO NA PRESENÇA DE RUÍDOS EXPERIMENTAIS**

De forma análoga ao que foi feito na avaliação do método baseado nas coordenadas modais, foi também avaliado o desempenho do método baseado na deconvolução no domínio do tempo quando os dados experimentais (respostas em aceleração e FRIs) estão contaminadas por ruídos aleatórios. Estes ruídos foram produzidos aplicando-se o modelo apresentado na Figura 5.23 tanto às repostas em aceleração quanto às FRIs. Os limites utilizados para as amplitudes máxima e mínima dos ruídos foram de  $e_{\text{máx}} = 10\%$  e  $e_{\text{mín}} = 2\%$ , respectivamente.

Alguns dos testes cujos resultados foram apresentados na seção anterior foram repetidos empregando-se os dados corrompidos pelos ruídos. Os resultados destes testes são apresentados nas Figuras 6.21 a 6.24, a seguir.



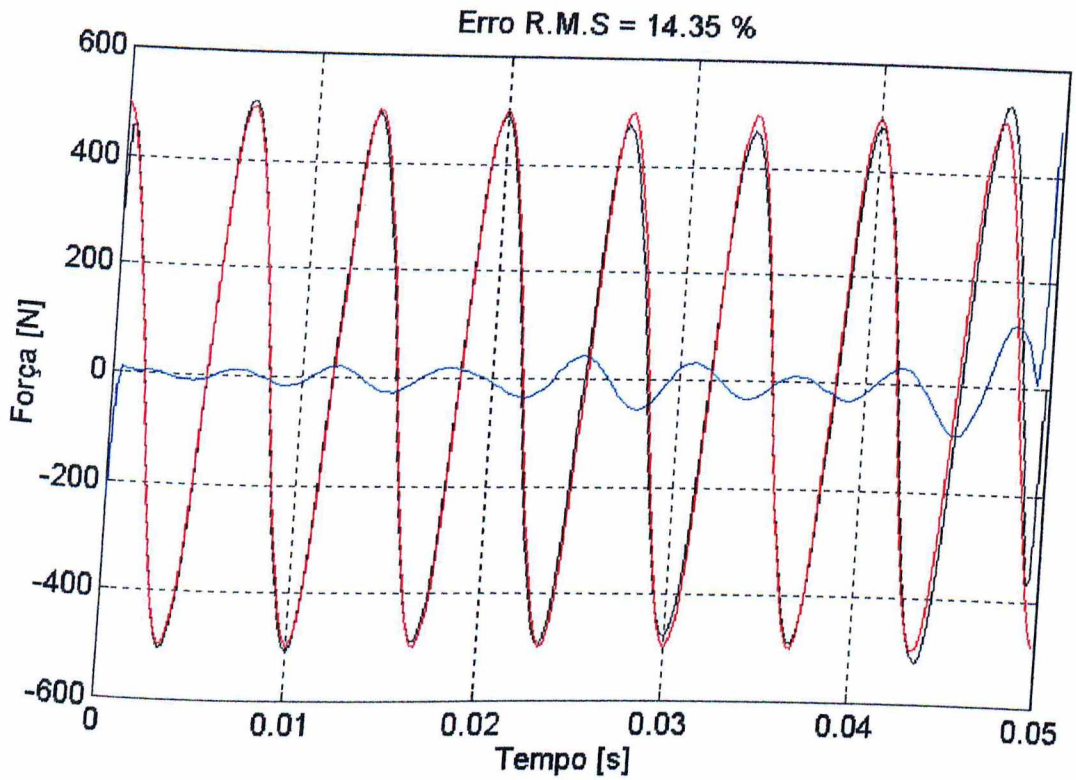


Figura 6.21 - Regularização de Thikonov. ( $\alpha=2 \times 10^{-6}$ )  
 vermelho: exata, preto: identificada, azul: desvio da exata.  
 $\text{Cond}([T]^T[T] - \alpha[I]) = 9,4 \times 10^4$ .

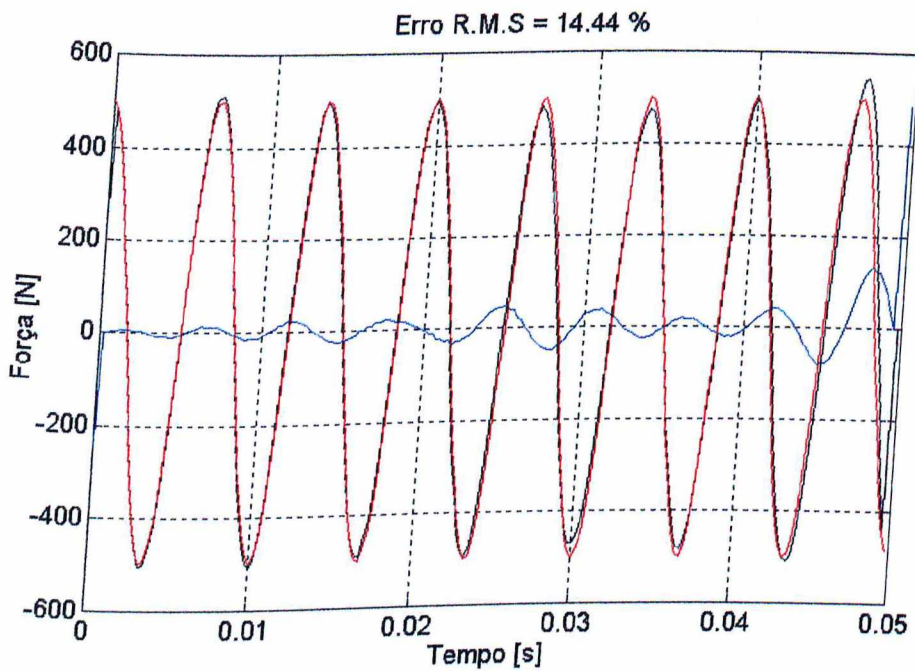


Figura 6.22 - Regularização pela DVS.  
 vermelho: exata, preto: identificada, azul: desvio da exata.  
 Valores menores que 0,001 eliminados.

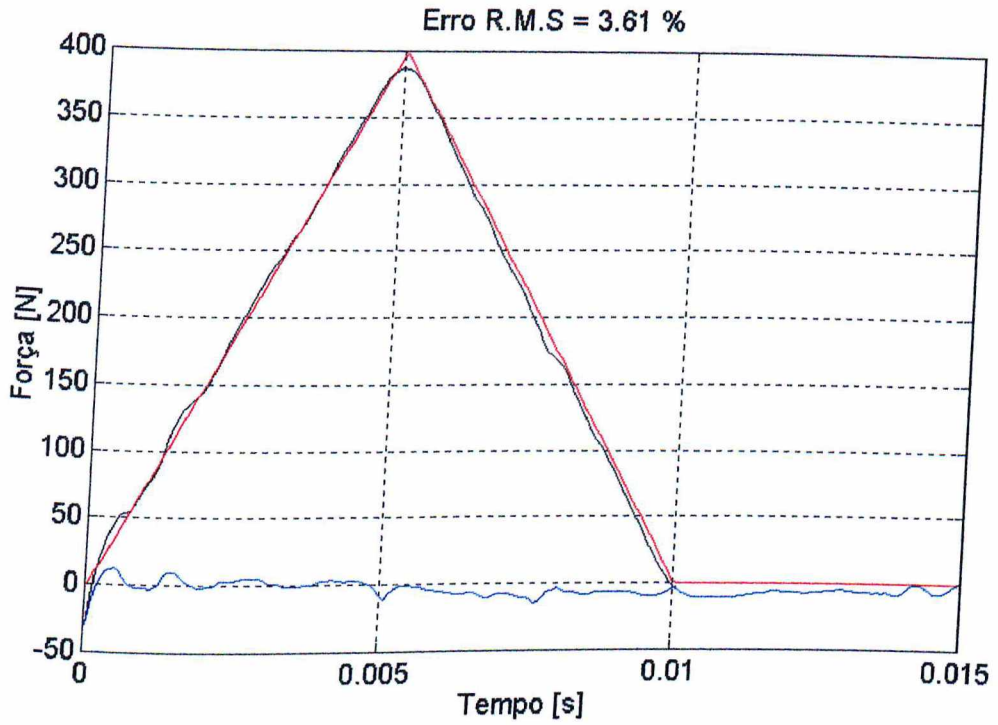


Figura 6.23- Regularização de Thikonov. ( $\alpha=1 \times 10^{-5}$ )  
 vermelho: exata, preto: identificada, azul: desvio da exata.

$$\text{Cond}([T]^T[T] - \alpha[I]) = 2,8 \times 10^3.$$

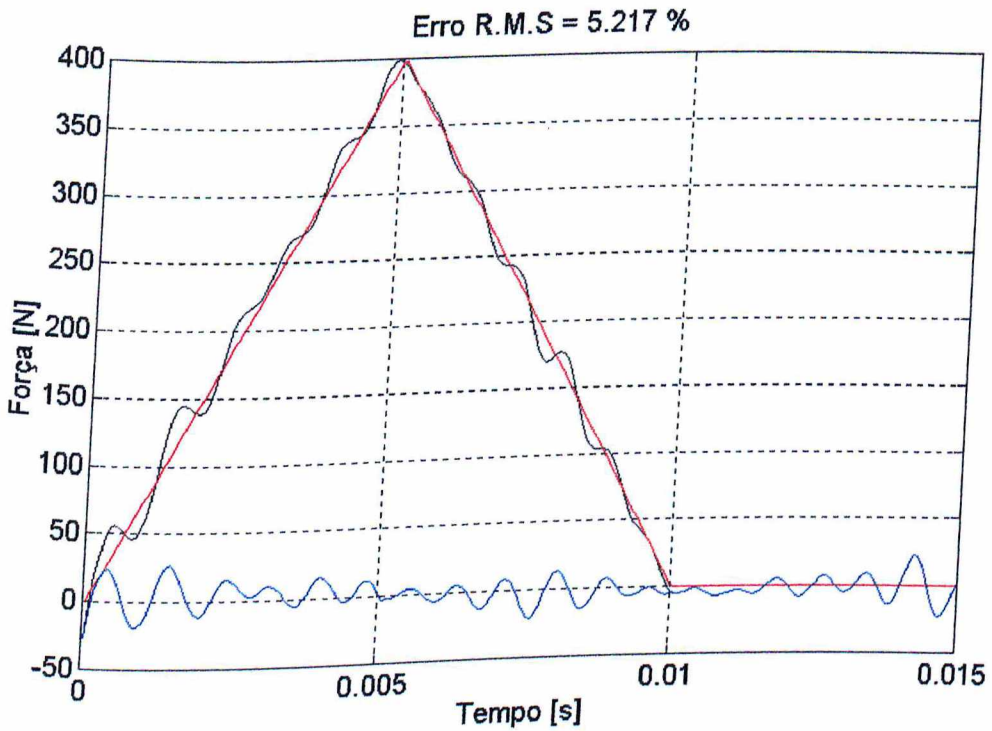


Figura 6.24 - Regularização pela DVS.  
 vermelho: exata, preto: identificada, azul: desvio da exata.  
 Valores menores que 0,001 eliminados.

Os resultados revelam que, ainda que as respostas tenham sido contaminadas por ruídos, o método de identificação de forças baseado na deconvolução no domínio do tempo é capaz de produzir resultados bastante satisfatórios, desde que técnicas de regularização sejam utilizadas.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

No contexto do problema da identificação indireta de forças, o presente trabalho enfocou dois métodos operando no domínio do tempo. O primeiro deles, proposto neste trabalho, foi denominado Método das Coordenadas Modais; o segundo método examinado é conhecido na literatura como Método da Deconvolução.

Os desempenhos e as características dos dois métodos foram examinados mediante diversas aplicações efetuadas em uma estrutura simples simulada numericamente. Nestas aplicações, especial atenção foi dada aos efeitos de ruídos e truncamento dos dados experimentais. Os resultados obtidos permitem afirmar que:

- ambos os métodos revelam-se bastante adequados a aplicações em situações práticas de engenharia, dadas as suas características de robustez em relação aos ruídos experimentais e à sua capacidade de explorar dados incompletos. Adicionalmente, os dois métodos parecem ser adequados à identificação simultânea de diversas forças excitadoras, atuando em diferentes localizações espaciais da estrutura;

- o Método das Coordenadas Modais tem a importante característica de produzir equações de estimação numericamente bem condicionadas, o que lhe dá uma importante vantagem em relação a métodos baseados em outras formulações, que se caracterizam, via de regra, pelo mau condicionamento numérico, induzindo instabilidades numéricas no processo de resolução.

- foi evidenciado o mau condicionamento numérico caracterizando o Método da Deconvolução. Todavia, ficou demonstrado que o uso de técnicas de regularização permite

amenizar esta dificuldade e garantir resultados de identificação razoavelmente precisos;

- o Método das Coordenadas Modais mostrou requerer menor esforço computacional que o Método da Deconvolução.

Vários aspectos relativos aos métodos de identificação de forças no domínio do tempo não foram abordados neste trabalho e poderão vir a ser objeto de investigações futuras. Dentre eles, podem ser citados:

- avaliação dos desempenhos dos métodos nos casos em que números mais elevados de forças devem ser identificados simultaneamente;
- utilização de algoritmos de ordem mais elevada, destinados à integração numérica das respostas em aceleração, capazes de proporcionar menores erros de integração que o método do trapézio;
- estudo de procedimentos objetivando a seleção ótima das coordenadas instrumentadas onde as respostas dinâmicas são adquiridas;
- estudo mais aprofundado dos procedimentos de escolha ótima do parâmetro de regularização de Thikonov;
- avaliação dos desempenhos dos métodos quando aplicados a estruturas reais, ensaiadas em laboratório e/ou em condições normais de operação;

## CAPÍTULO VIII

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Alisson, 1979] Alisson, H., "Inverse Unstable Problems and Some of Their Applications", The Mathematical Scientist, vol. 4, pp. 9-30, 1979.
- [Bateman et al., 1991] Bateman, V.I., Carne, T.G., Gregory, D.L., Attaway, S.W. & Yoshimura, H.R., "Force Reconstruction for Impact Tests", ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol. 113, pp. 192-200, 1991.
- [Bateman et al., 1992] Bateman, V.I., Carne, T.G. & Mayes, R.L., "Force Reconstruction Using A Sum Of Weighted Accelerations Technique", Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, UC/SEM, pp. 291-298, 1992.

- [Bateman et al., 1994] Bateman, V.I., Carne, T.G. & Mayes, R.L., "Force Reconstruction Using A Sum Of Weighted Accelerations Technique - Max-Flat Procedure", Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, UC/SEM, pp. 1.054-1.062, 1994.
- [Bendat & Piersol, 1980] Bendat, J.S. & Piersol, A.G., "Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis", A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Ney York, 1980.
- [Commenges, 1984] Commenges, D., "The Deconvolution Problem: Fast Algorithms Including the Preconditioned Conjugate-gradient to Compute a MAP Estimator", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-29, pp. 229-243, 1984.
- [Craig, 1981] Craig, R.R.Jr., "Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods", John & Sons, 1981.
- [Delves & Walsh, 1974] Delves, L.M. & Walsh, J., "Numerical Solution Of Integral Equations", Oxford, Clarendon Press, 1974.

- [Desanghere, 1985] Desanghere, Ir.G., "Indirect Identification of Excitation Forces", Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, pp. 1-25, 1985.
- [Deuflhard & Hairer, 1983] Deuflhard, P. & Hairer, E., "Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations", Proceedings of an International workshop, Heidelberg, Germany, 1983.
- [Ellis, 1973] Ellis, N.A., "Technique for Evaluating the Fluctuating Aerodynamic Forces on a Flexible Building", Proceedings of the International Symposium on Vibration Problem in Industry, Keswick, Inglaterra, 1973.
- [Fabunmi, 1986] Fabunmi, J.A., "Effects of Structural Modes on Vibratory Force Determination by the Pseudoinverse Technique", AIAA Journal, vol. 24, n°3, pp. 504-509, 1986.
- [Fasana & Piombo, 1996] Fasana, A. & Piombo, B.A.D., "Identification of Linear Mechanical Systems By Deconvolution Techniques", Mechanical Systems and Signal Processing, pp. 350-373, 1996.



- [Forsythe, 1977] Forsythe, G.E., Malcom, M.A. & Moler, C.B., "Computer Methods for Mathematical Computations", Prentice-Hall, 1977.
- [Fregolent & Sestieri, 1990] Fregolent, A. & Sestieri, A., "Assessment of Procedures for Force Identification from Experimental Response", Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis, pp. 825-838, 1990.
- [Ghoneim et al., 1984] Ghoneim, G.A.M., Johansson, B.M., Smyth, M.W. & Grinstead, J., "Global Ship Ice Impact Forces Determined from Full-Scale Tests and Analytical Modeling of the Ice-breakers Canner Kigoriak and Robert Le Meur", Trans. of SNAME, pp. 253-282, 1984.
- [Groetsch, 1984] Groetsch, C.W., "The Theory of Thikonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind", Pitman Publishing, London, 1984.
- [Kammer, 1996] Kammer, D.C., "Input Force Reconstruction Using a Time Domain Technique", AIAA Journal, AIAA-96-1201-CP, pp. 21-30, 1996.

- [Linz, 1985] Linz, P., "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations", Studies in Applied Mathematics - SIAM, 1985.
- [Mas et al., 1994] Mas, P., Sas P. & Wyckaert, K., "Indirect Force Identification Based Upon Impedance Matrix Inversion: A Study on Statistical and Deterministical Accuracy", ISMA 19 - Tools for Noise and Vibration Analysis, pp. 1049-1065, 1994.
- [Ogata, 1993] Ogata, K., "Engenharia de Controle Moderno", Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, Rio de Janeiro, 1993.
- [Phillips, 1962] Phillips, D.L., "A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 9, pp. 84-95, 1962.
- [Pilkey & Kalinowski, 1972] Pilkey, W.D. & Kalinowski, J., "Identification of Shock and Vibration Forces", System Identification of Vibrating Structures, ASME, pp. 73-86, 1972.

- [Söderström & Stoica, 1989] Söderström, T. & Stoica, P., "Systems Identification", Prentice-Hall, 1989.
- [Steffen & Rade, 1991] Steffen, V.Jr. & Rade, D.A., "An Identification Method of Multi-Degree-Of-Freedom Systems Based on Fourier Series", The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol.6, n°4, pp.271-278, 1991.
- [Stevens, 1987] Stevens, K.K., "Force Identification Problems - An Overview", Procedures of the SEM Conference on Experimental Mechanics, pp. 838-844, 1987.
- [Starkey & Merril, 1989] Starkey, J.M., Merril, G.L., "On the Ill-conditioned Nature of Indirect Force-Measurement Techniques", The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, vol. 4, n°3, pp. 103-108, 1989.
- [Twomey, 1963] Twomey, S., "On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature", Journal of the Association for Computing Machinery, pp. 97-101, 1963.

## APÊNDICE A

### RESPOSTAS DINÂMICAS DE SISTEMAS DISCRETOS LINEARES

#### FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADO

##### A.1 - PROBLEMA DE AUTOVALOR

Considere o sistema discreto de N graus de liberdade, regido pelo seguinte sistema de equações do movimento:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (\text{A.1})$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K] \in R^{N,N}$  e  $\{x(t)\} \in R^N$ .

Buscando representar o sistema no espaço de estado, o sistema (A.1) é reescrito sob a forma:

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \\ [M]\{\ddot{x}(t)\} = [M]\{\ddot{x}(t)\} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

ou:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{\ddot{x}(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}$$

ou ainda:

$$[U]\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} \quad (\text{A.3})$$

onde são definidas as seguintes matrizes de estado:

$$[U] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \in R^{2N, 2N} \quad \text{e} \quad [A] = \begin{bmatrix} -[K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Para o sistema homogêneo (A.3), buscam-se soluções do tipo:

$$\{y(t)\} = \{y\} e^{st} \quad (\text{A.5})$$

Introduzindo-se (A.5) em (A.3), obtém-se o seguinte problema de autovalor:

$$([A] - s[U])\{y\} = \{0\} \quad (\text{A.6})$$

As soluções de (A.6) são os pares de auto-soluções complexas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{Y_r\} \in D^{2N} = \left\{ \begin{array}{l} s_r \in \mathbb{C} \text{ (autovalores)} \\ \{X_r\} \\ s_r \cdot \{X_r\} \end{array} \right\} \in C^{2N} \text{ (autovetores), com } r=1 \text{ a } 2N \end{array} \right.$$

Pode-se verificar que os autovetores satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\left. \begin{array}{l} \{Y_r\}^T [U] \{Y_s\} = \delta_{rs} \eta_s \\ \{Y_r\}^T [A] \{Y_s\} = \delta_{rs} \eta_s s_s \end{array} \right\} \text{ com } r, s = 1 \text{ a } 2N. \quad (\text{A.7})$$

São definidas as seguintes matrizes, formadas a partir das autosoluções:

$$[S] = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_{2N}\} \in C^{2N, 2N}: \text{Matriz Espectral.}$$

$$[Y] = [\{Y_1\} \dots \{Y_{2N}\}] \in C^{2N, 2N}: \text{Matriz Modal.}$$

$$[N] = \text{diag}\{\eta_1, \dots, \eta_{2N}\} \in C^{2N, 2N}: \text{Matriz de Massas Generalizadas.}$$

Com estas definições, os dois conjuntos de equações de ortogonalidade (A.7), se escrevem:

$$[Y]^T[U][Y] = [N] \quad (A.8)$$

$$[Y]^T[A][Y] = [N][S]$$

Os valores das massas generalizadas  $\eta_1, \dots, \eta_{2N}$ , que estão relacionados às normas dos autovetores, podem ser escolhidos arbitrariamente. Usualmente, eles são escolhidos de modo a satisfazerem:

$$\begin{aligned} \{Y_r\}^T[U]\{Y_r\} &= 1 \\ \{Y_r\}^T[A]\{Y_r\} &= s_r \end{aligned} \quad \text{com } r=1 \text{ a } 2N.$$

Neste caso,  $[N]=[I_{2N}]$  e as equações (A.8) tornam-se:

$$\begin{aligned} [Y]^T[U][Y] &= [I_{2N}] \\ [Y]^T[A][Y] &= [S] \end{aligned} \quad (A.9)$$

No caso de estruturas pouco amortecidas (amortecimento subcrítico), freqüentemente encontradas na prática, as  $2N$  autosoluções ocorrem em pares complexos conjugados e os autovalores podem ser expressos sob a forma:

$$s_r = -\xi_r \omega_r \pm j \omega_r^d, \quad \text{com } r=1 \text{ a } 2N. \quad (A.10)$$

onde:

- $\omega_r$ : são as freqüências naturais não amortecidas;
- $\xi_r$ : são os fatores de amortecimento modais; e
- $\omega_r^d = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$ : são as freqüências naturais amortecidas.

Quando  $\xi_r \ll 1$ ,  $r=1$  a  $2N$ , os autovalores são dados, com boa aproximação, por:

$$s_r \cong -\xi_r \omega_r + j\omega_r, \text{ com } r=1 \text{ a } 2N. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 - RESPOSTAS FORÇADAS

No caso de vibrações forçadas as equações do movimento se escrevem:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (\text{A.12})$$

com as condições iniciais  $\{x(0)\} = \{x_0\}$ ; e  $\{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}$ , onde:

$\{f(t)\} \in R^N$ , é o vetor das forças excitadoras.

Após a passagem ao espaço de estado, (12) assume a forma:

$$[U]\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} + \{g(t)\} \quad (\text{A.13})$$

com as condições iniciais:  $\{y(0)\} = \{y_0\}$ ,

onde:

$$\{g(t)\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \in R^{2N \cdot 2N}$$

São apresentadas a seguir, duas formas de se obter a solução geral de (A.13).

### A.2.1- SOLUÇÃO PELO MÉTODO DA MATRIZ EXPONENCIAL

Admitindo-se que  $[U]$  seja regular, (A.13) é primeiramente transformada em:

$$\{\dot{y}(t)\} = [\tilde{A}]\{y(t)\} + [U]^{-1}\{g(t)\}; \text{ com } \{y(0)\} = \{y_0\} \quad (\text{A.14})$$

onde:  $[\tilde{A}] = [U]^{-1}[A]$ .

Introduz-se em seguida a matriz exponencial definida segundo [Ogata, 1993]:

$$e^{[\tilde{A}]t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [\tilde{A}]^k, \text{ onde } e^{[\tilde{A}]t} \in \mathbb{R}^{2N,2N}, \text{ com as seguintes}$$

propriedades:

$$\text{I. } \frac{d}{dt} \left( e^{[\tilde{A}]t} \right) = [\tilde{A}] e^{[\tilde{A}]t} = e^{[\tilde{A}]t} [\tilde{A}] \quad (\text{A.15})$$

$$\text{II. } e^{[\tilde{A}]0} = [I_{2N}] \quad (\text{A.16})$$

$$\text{III. } e^{[\tilde{A}](t_1+t_2)} = e^{[\tilde{A}]t_1} e^{[\tilde{A}]t_2} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{IV. } \left( e^{[\tilde{A}]t} \right)^{-1} = e^{-[\tilde{A}]t} \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando-se ambos os lados de (A.14) por  $e^{-[\tilde{A}]t}$ , tem-se:

$$e^{-[\tilde{A}]t} [\tilde{A}] \{ \dot{y}(t) \} = e^{-[\tilde{A}]t} [\tilde{A}] + e^{-[\tilde{A}]t} [U]^{-1} \{ g(t) \} \quad (\text{A.19})$$

Levando-se em conta que:

$$e^{-[\tilde{A}]t} \{ \dot{y}(t) \} - [\tilde{A}] e^{-[\tilde{A}]t} \{ y(t) \} = \frac{d}{dt} \left( e^{-[\tilde{A}]t} \{ y(t) \} \right),$$

a equação (A.19) conduz a:

$$e^{-[\tilde{A}]t} \{ y(t) \} = \int_0^t e^{-[\tilde{A}]\tau} [U]^{-1} \{ g(\tau) \} d\tau + \{ y_0 \}$$



e:

$$\{y(t)\} = e^{[\tilde{A}]t} \{y_0\} + \int_0^t e^{-[\tilde{A}](t-\tau)} [U]^{-1} \{g(\tau)\} d\tau$$

ou:

$$\{y(t)\} = e^{[\tilde{A}]t} \{y_0\} + \int_0^t [h(t-\tau)] \{g(\tau)\} d\tau \quad (\text{A.20})$$

Em (A.20), a matriz:

$$[h(t)] = e^{[\tilde{A}]t} [U]^{-1} \in R^{2N,2N} \quad (\text{A.21})$$

é a chamada matriz de funções de respostas ao impulso unitário. Os elementos desta matriz são interpretados da seguinte forma:  $h_{ij}(t)$  é a resposta temporal do sistema no seu  $i$ -ésimo grau de liberdade, devida a uma excitação do tipo impulso unitário  $\delta(t)$  (delta de Dirac) aplicada no  $j$ -ésimo grau de liberdade.

#### A.2.2 - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO MODAL

De acordo com este método, a solução procurada para (A.13) é expressa como uma combinação linear dos autovalores do sistema, que são as soluções do problema homogêneo (A.6). Assim escreve-se:

$$\{y(t)\} = [Y] \{c(t)\} \quad (\text{A.22})$$

onde  $\{c(t)\} \in C^{2N}$  é o vetor de coordenadas generalizadas.

A introdução de (A.22) em (A.13), seguido da pré-multiplicação da equação resultante por  $[Y]^T$  e o uso das relações de ortogonalidade (A.9) resulta em:

$$\{\dot{c}(t)\} = [S]\{c(t)\} + [Y]^T\{g(t)\} \quad (\text{A.23})$$

A solução de (A.23) é então obtida pelo Método da Variação dos Parâmetros, segundo o qual, primeiramente impõe-se:

$$\{c(t)\} = e^{[S]t}\{d(t)\} \quad (\text{A.24})$$

Derivando-se (A.24) em relação ao tempo tem-se:

$$\{\dot{c}(t)\} = [S]e^{[S]t}\{d(t)\} + e^{[S]t}\{\dot{d}(t)\} \quad (\text{A.25})$$

A introdução de (A.24) e (A.25) em (A.23) conduz a:

$$\{\dot{d}(t)\} = e^{-[S]t}[Y]^T\{g(t)\},$$

cujá integração leva a:

$$\{d(t)\} = \{d(0)\} + \int_0^t e^{-[S]\tau}[Y]^T\{g(\tau)\}d\tau$$

Introduzindo-se esta solução em (A.24) e em seguida (A.22), obtém-se:

$$\{y(t)\} = [Y]e^{[S]t}\{v(0)\} + \int_0^t [Y]e^{[S](t-\tau)}[Y]^T\{g(\tau)\}d\tau$$

O vetor  $\{d(0)\}$  é determinado impondo-se as condições iniciais:

$$\{y(0)\} = \{y_0\} = [Y]\{d(0)\} \Rightarrow \{d(0)\} = [Y]^{-1}\{y_0\} = [Y]^T[U]\{y_0\}$$

A solução de (A.13) é finalmente expressa sob a forma:

$$\{y(t)\} = [Y]e^{[s]t}[Y]^T[U]\{y_0\} + \int_0^t [Y]e^{[s](t-\tau)}[Y]^T\{g(\tau)\}d\tau \quad (\text{A.26})$$

ou ainda:

$$\{y(t)\} = [Y]e^{[s]t}[Y]^T[U]\{y_0\} + \int_0^t [h(t-\tau)]\{g(\tau)\}d\tau \quad (\text{A.27})$$

Nesta última equação, a matriz:

$$[h(t)] = [Y]e^{[s]t}[Y]^T \quad (\text{A.28})$$

é a matriz das funções de respostas ao impulso unitário, apresentada numa forma alternativa a (A.21).

## APÊNDICE B

### MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO

#### B.1- REGULARIZAÇÃO DE THIKONOV

Na literatura, o método de regularização de Thikonov é muitas vezes mencionado como uma forma eficiente de se contornar os problemas de mau-condicionamento numérico. A explanação completa deste método não será apresentada neste trabalho (neste sentido, ver [Groetsch, 1984]). Uma breve apresentação, contudo, é apresentada a seguir.

Com relação ao sistema de equações (4.13) e a sua solução (4.14), o método consiste basicamente em se modificar os elementos da diagonal principal de  $[T]^T[T]$ . Isto é feito reescrevendo (4.14) sob a forma:

$$\{f(t)\} = ([T]^T[T] + \alpha[I])^{-1} [T]^T \{x(t)\} \quad (B.1)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade e  $\alpha$  é chamado de "parâmetro de regularização".

A equação (B.1) pode ser reescrita de forma a se evitar a inversão matricial, da forma:

$$([T]^T[T] + \alpha[I])\{f(t)\} = [T]^T \{x(t)\} \quad (B.2)$$

ou:

$$[A]\{f(t)\} = \{b\} \quad (B.3)$$

Sendo  $[A]$  uma matriz simétrica positiva definida, o sistema de equações (B.3) pode ser resolvido através de

algoritmos eficientes que explorem estas características, tal como a decomposição de Cholesky.

A regularização de Thikonov é uma técnica eficiente, porém, requer a definição de  $[A]$ , isto é, a escolha do parâmetro de regularização  $\alpha$ . Esta escolha não é tarefa simples e deve se dar por tentativas. Na verdade, a literatura não oferece estratégia definitiva para a escolha do valor de  $\alpha$ .

Existem algumas técnicas para se chegar a uma primeira aproximação para  $\alpha$ . Uma delas é o princípio de Morozov [Groetsch, 1984]. Segundo este princípio, se  $\delta$  é o erro presente na saída  $\{x(t)\}$  do sistema, então  $\alpha$  deve ser escolhido de forma a satisfazer a seguinte relação:

$$\| [T] \{f(t)\} - \{a(t)\} \| = \delta \quad (\text{B.4})$$

Note que  $\alpha$  é definido apenas indiretamente e que ele depende de um valor estimado para  $\delta$ .

Outras técnicas de estimação de  $\alpha$  foram desenvolvidas, porém, em cada caso, o objetivo é o de se escolher um valor de  $\alpha$  que seja suficientemente grande para regularizar a solução do sistema, mas não tão grande a ponto de modificar significativamente a matriz original  $[T]^T[T]$  e, conseqüentemente, o vetor-solução  $\{f(t)\}$ .

## B.2 - A REGULARIZAÇÃO PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES (DVS)

Outra forma de se regularizar sistemas de equações mal-condicionados é através da Decomposição em Valores Singulares (DVS) da matriz dos coeficientes.

Para um sistema de equações dado por:

$$[T]_{(m,n)} \{f(t)\}_{(n,1)} = \{x(t)\}_{(m,1)} \quad (B.5)$$

A DVS permite escrever [T] sob a forma:

$$[T] = [U] [\Sigma] [V]^T, \quad (B.6)$$

onde:

- [U] ∈ R<sup>m,m</sup>, [V] ∈ R<sup>n,n</sup> são matrizes ortogonais, ou seja:

$$[U]^T [U] = I_m \text{ e } [V]^T [V] = I_n$$

- [Σ] ∈ R<sup>m,n</sup>, tal que σ<sub>ii</sub> ≥ 0, com i=1 a k e k=mín(m,n); e σ<sub>ij</sub>=0, para i≠j. Os σ<sub>ii</sub> são os valores singulares de [T].

A matriz [T] será singular se, e somente se, ela possuir pelo menos um valor singular nulo. O número de valores singulares não nulos é igual ao posto de [T].

A equação (B.5) pode então ser escrita na forma:

$$[U][\Sigma][V]^T \{f(t)\} = \{x(t)\} \quad (B.7)$$

Fazendo-se uso das propriedades de ortogonalidade das matrizes [U] e [V], (B.7) conduz a:

$$\{f(t)\} = [V][\Sigma]^+ [U]^T \{x(t)\} \quad (B.8)$$

onde:

$$[\Sigma]^+ = \begin{cases} \sigma_{ii}^+ = 1/\sigma_{ii}, & \sigma_{ii} > 0 \\ \sigma_{ii}^+ = 0, & \text{se } \sigma_{ii} = 0 \\ \sigma_{ij}^+ = 0, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (B.9)$$

Observa-se em (B.9) que numa situação de quase-colinearidade, quando pelo menos um valor singular tende a zero, a solução tende a apresentar amplitudes tendendo ao infinito, o que caracteriza a instabilidade numérica.

A regularização consiste então em considerar nulos, na construção da matriz  $[\Sigma]$ , os menores valores singulares de  $[T]$ .

FU-00011869-2