

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

1100  
327  
89246  
TES/MEC

OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS:  
FERRAMENTA DE ENGENHARIA DE  
CONCEPÇÃO

**DIRBI/UFU**



1000186999

1998

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal de Uberlândia por SERGIO BUTKEWITSCH como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica,.

Orientador: Prof. Valder Steffen Jr., Dr. Ing., Hab.

Dedico este trabalho à Fabiana.

## AGRADECIMENTOS

O autor é grato:

- Ao Prof. Valder Steffen Jr., pelo exemplo dado ao longo de anos de convivência, resultando neste trabalho e em muitos planos para o futuro;
- À toda a equipe do Laboratório de Dinâmica do Departamento de Engenharia Mecânica da UFU, em especial ao seu coordenador, o Prof. Dr. Francisco Paulo Léopore Neto, pelo esforço em disponibilizar todos os recursos necessários;
- À empresa Humaitá Informática e Tecnologia, representada pelo seu departamento de Cálculos Estruturais (HCAE), principalmente mediante a participação dos Srs. Marcos Antônio Argentino e Udo Ricardo Ricardo Wildmann, pelo interesse, apoio e espírito de parceria;
- Aos amigos Juscelino, Dóris e Fernando;
- Ao CNPq, pelo subsídio financeiro fornecido ao longo do programa de mestrado.

# OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS: FERRAMENTA DE ENGENHARIA DE CONCEPÇÃO

## SUMÁRIO

❖ LISTA DE FIGURAS	IX
❖ LISTA DE TABELAS	XVI
❖ LISTA DE SÍMBOLOS	XVIII
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 – Conceituação	1
1.2 – Formulação Matemática do Problema de Otimização	2
1.3 – Extremização da Função Objetivo: Métodos	3
1.3.1 – Determinação da Direção de Busca	6
1.3.2 – Determinação do Passo na Busca Uni – Direcional	16
1.3.3 – Considerações Adicionais Sobre Restrições	19
1.3.4 – Métodos Diretos	25
1.3.5 – Análise de Sensibilidade	27
1.3.6 – Cálculo da Função Objetivo e das Restrições pelo Método dos Elementos Finitos	28
2. REDUÇÃO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS	36
2.1 – Considerações Preliminares	36
2.2 – Normalização de Restrições	38
2.3 – Técnicas de Aproximação	40
2.3.1 – Vinculação de Variáveis de Projeto	40

2.3.2	– Deleção e Enquadramento de Restrições	42
2.3.3	– Aproximações Formais	45
2.3.4	– Técnicas de Aproximação Avançadas	47
3.	PROGRAMAS COMPUTACIONAIS EMPREGADOS	50
3.1	– Considerações Iniciais	50
3.2	– Características Gerais	50
3.2.1	– MSC/NASTRAN	50
3.2.2	– VMA/GENESIS	52
3.3	– Programação das Sub-rotinas de Otimização nos Software Utilizados	53
3.4	– Procedimentos de Otimização de Forma	61
3.4.1	– Otimização de Forma no MSC/NASTRAN	62
3.4.2	– Otimização de Forma no VMA/GENESIS	72
3.5	– Conclusão sobre os procedimentos de Otimização de Cada Programa	
4.	ESTUDOS DE CASO	78
4.1	– Casos Estudados	78
4.1.1	– Otimização de Forma de um Suporte de Mola da Suspensão Dianteira de um Veículo de Carga Pesado	78
4.1.2	– Otimização do Comportamento Dinâmico do Conjunto de Escape de um Veículo de Carga Médio	92
4.1.3	– Estudo Comparativo das Técnicas de Otimização Dimensional e de Forma	114
5.	VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL PELA TÉCNICA FOTO – ELÁSTICA	123
5.1	– Considerações Iniciais	123

5.2 – Análise Experimental de Tensões Pela Técnica Foto – Elástica	123
5.2.1 – Conceituação Geral	124
5.2.2 – Etapas do Procedimento Experimental	125
5.3 – Resultados	130
5.4 – Conclusões dos Ensaios Fotoelásticos	143
6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	145
6.1 – Conclusões Gerais	145
6.2 – Conclusões Específicas	147
6.2.1 – Aplicativos Empregados	147
6.2.2 – Casos Estudados	148
6.3 – Sugestões	149
7. BIBLIOGRAFIA	151

Butkewitsch, S.; Otimização de Sistemas Mecânicos: Ferramenta de Engenharia de Concepção, U.F.U., Uberlândia, 155 pp.

Resumo:

O presente trabalho enfoca o problema da síntese automatizada de sistemas mecânicos, através de estudos de casos relacionados ao projeto de componentes da indústria automotiva. É feita uma revisão bibliográfica das técnicas fundamentais da síntese no contexto aqui colocado: a análise pelo método dos elementos finitos, a otimização não-linear e os métodos de redução de modelos ou técnicas de aproximação. Foram escolhidas duas ferramentas computacionais de destaque (VMA/GENESIS e MSC/NASTRAN) para a aplicação da referida metodologia em três estudos de caso: otimização de forma de uma peça obtida por fundição, otimização do comportamento dinâmico de uma estrutura excitada pela fonte de potência do veículo e comparação de diferentes técnicas de otimização aplicadas sobre um componente de suspensão a ar. Finalmente, para uma das situações estudadas, é desenvolvida uma aplicação experimental através da técnica da fotoelasticidade.

Palavras-chave: síntese estrutural, otimização de componentes veiculares

Butkewitsch, S.; Optimization of Mechanical System: A Design Engineering Tool, U.F.U., Uberlândia, 155 pp.

Abstract:

The present work focuses the problem of mechanical systems automated structural synthesis by means of case studies related to the design of components belonging to the automotive industry. A bibliographic review about the synthesis fundamental techniques (in the context presented here) is done: the analysis by the finite element method, the non-linear optimization and the model reduction or approximation techniques. Two first tier software tools were chosen (VMA/GENESIS and MSC/NASTRAN) in order to apply the aforementioned methodology in three case studies: the shape optimization of a part obtained by iron casting, the optimization of the dynamic behaviour of a structure excited by the vehicle's powertrain and the comparison between two different optimization techniques applied to an air suspension component. Finally, for one of the studied situations, a photoelastic experimental application is developed.

Keywords: structural synthesis, optimization of vehicle components.



### Lista de Figuras:

Número	Título	Pág.
Figura 1.1	– Espaço de projeto bi-dimensional, mostrando as variáveis $x_1$ e $x_2$ , o ponto de partida e o ótimo a ser alcançado (Matlab versão 4.2 for Windows, bandemo.m, The Mathworks Inc., 1994)	5
Figura 1.2	– Interpretação geométrica do Método da Máxima Descida num espaço de projeto bi-dimensional. (Moore, 1992)	10
Figura 1.3	– Interpretação geométrica do Método de Fletcher e Reeves num espaço de projeto bi-dimensional. (Moore, 1992)	11
Figura 1.4	– Interpretação geométrica de usabilidade e viabilidade num espaço de projeto bi-dimensional. (Moore, 1992)	20
Figura 1.5	– Interpretação geométrica das condições de Kuhn-Tucker num espaço de projeto bi-dimensional, evidenciando a função dos multiplicadores de Lagrange (Moore, 1992)	25
Figura 1.6	– Tanque cilíndrico modelado por elementos finitos. (Spyrakos, 1996)	31
Figura 1.7	– Tipos de elementos finitos usados na modelagem de estruturas (Spyrakos, 1996)	32
Figura 2.1	– Fragmento de arquivo de saída do software VMA/GENESIS, ilustrando a quantidade de avaliações da função objetivo e seu gradiente a cada iteração	36
Figura 2.2	– Fluxograma simplificado de acoplamento entre análise e otimização (inviável para problemas grandes)	37
Figura 2.3	– Fluxograma de acoplamento entre análise e otimização mediante modelos aproximados (Adaptado de GENESIS User's Manual, Vol I)	37

Figura 2.4	– Intervalos numéricos de ativação e violação de restrições. (Moore, 1992)	39
Figura 2.5	– Torre em estrutura metálica otimizada com variáveis de projeto vinculadas, visando reduzir custo computacional e garantir certas relações geométricas importantes (Moore, 1992)	42
Figura 2.6	– Representação gráfica da aplicação do critério do TRS para deleção de restrições (Moore, 1992)	43
Figura 2.7	– Representação gráfica da aplicação do critério do NSTR para deleção de restrições (Moore, 1992)	45
Figura 3.1	– Estrutura geral de um arquivo de submissão para o MSC/NASTRAN. Entre molduras estão blocos de dados e em negrito, comandos isolados (MSC/ NASTRANQuick Reference Manual, The McNeal-Schwendler Corp., 1992 )	51
Figura 3.2	– Linha reta representada por quatro nós (Moore, 1992)	62
Figura 3.3	– Representação gráfica da relação entre as variações das coordenadas nodais e as colunas da matriz base de formas. (Moore, 1992)	64
Figura 3.4	– Modelo em elementos sólidos de uma viga engastada. Deseja-se otimizar a forma para eliminar o excesso de material na extremidade livre. (Moore, 1992)	69
Figura 3.5	– Forma otimizada pretendida para o modelo da figura 3.4. (Moore, 1992)	69
Figura 3.6	– Modelo auxiliar para otimizar a forma na fronteira e interpolar os resultados para o interior, mudando da configuração 3.4 e 3.5 (Moore, 1992)	70
Figura 3.7	– Viga a ter a forma otimizada mediante emprego do comando DOMAIN do VMA/GENESIS	73

Figura 3.8	- Fragmento de código de otimização de forma no GENESIS, ilustrando o uso do comando SET, destinado a formar conjuntos de entidades de análise semelhantes (adaptado de VMA ENGINEERING, 1996)	74
Figura 3.9	- Fragmento de código de otimização de forma no VMA/GENESIS, ilustrando o uso do comando DOMAIN, que contém o conjunto de nós definido em SET, os nós-vértices 1, 2, 5, 8, 17, 20, 21 e 24 e terá suas deformações associadas às variáveis de projeto SH1, SH2, SH3 e SH4 (VMA ENGINEERING, 1996)	74
Figura 3.10	- Declaração de variáveis de projeto a serem associadas às deformações do DOMAIN. Os rótulos das variáveis são os mesmos que aparecem na definição do DOMAIN, em sua última linha (adaptado de VMA ENG., 1996)	75
Figura 3.11	- Prescrição de deslocamentos nos nós vértices do DOMAIN e associação com as variáveis de projeto correspondentes, ilustrando o uso do comando DVGRIDC (adaptado de VMA ENGINEERING, 1996)	75
Figura 3.12	- Fragmento de código destinado a evitar distorção de malha durante o processo de otimização de forma (adaptado de email do suporte técnico da VMA ENGINEERING, 1997)	77
Figura 4.1	- Modelo de elementos finitos da primeira versão (sem reforço) do suporte de molas da suspensão dianteira do veículo de carga 1935 (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996 )	79
Figura 4.2	- Diagrama de esforços atuantes no suporte do deixo de molas da suspensão dianteira do veículo de carga 1935 (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996 )	80

Figura 4.3	– Modelo de elementos finitos da segunda versão ( dotada de reforço posterior, aqui mostrado em primeiro plano) do suporte de molas da suspensão dianteira do veículo de carga 1935 (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996 )	81
Figura 4.4	– Regiões do suporte afetadas pela otimização de forma	84
Figura 4.5	– Representação esquemática de um elemento DOMAIN e suas principais propriedades	87
Figura 4.6.1	– DOMAIN e perturbações associadas abrangendo os elementos da porção posterior do suporte do feixe de molas	88
Figura 4.6.2	– DOMAIN e perturbações associadas abrangendo os elementos da porção dianteira do suporte do feixe de molas	89
Figura 4.6.3	– Idem nervura horizontal inferior	89
Figura 4.7	Configuração resultante da aplicação do método dos DOMAINs sobre o suporte do feixe de molas	90
Figura 4.8	– Conjunto suporte, tubagem e silencioso do sistema de escape de um veículo de carga médio (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996 )	95
Figura 4.9	– Sistema dinamicamente análogo ao conjunto de escape do veículo de carga médio	96
Figura 4.10.1	– Primeiro modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso	96
Figura 4.10.2	– Segundo modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso	97
Figura 4.10.3	– Terceiro modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso	97
Figura 4.10.4	– Quarto modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso	98
Figura 4.10.5	– Quinto modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso	98

Figura 4.10.6	– Sexto modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso	99
Figura 4.11.1	– Perfil tubo retangular e respectivas variáveis de projeto	102
Figura 4.11.2	– Perfil cantoneira e respectivas variáveis de projeto	103
Figura 4.11.3	– Perfil halter e respectivas variáveis de projeto	103
Figura 4.11.4	– Perfil retangular maciço e respectivas variáveis de projeto	104
Figura 4.11.5	– Perfil trilho e respectivas variáveis de projeto	104
Figura 4.11.6	– Perfil tubo circular e respectivas variáveis de projeto	105
Figura 4.11.7	– Perfil viga-I e respectivas variáveis de projeto	105
Figura 4.11.8	– Perfil viga-T e respectivas variáveis de projeto	106
Figura 4.12	– Representação gráfica comparativa da evolução dos valores da função objetivo (primeira frequência natural do sistema suporte/silencioso/tubagem) com as sucessivas iterações do otimizador	108
Figura 4.12	– Esquema de partição das lâminas da mola zeta em propriedades contíguas diferentes	115
Figura 4.13	– Modelo de elementos finitos planos da mola “zeta”, dividido em várias propriedades	116
Figura 4.14.1	– Detalhe superior dos modelos auxiliares à otimização de forma na fronteira do modelo primário da mola “zeta”	118
Figura 4.14.2	– Detalhe inferior dos modelos auxiliares à otimização de forma na fronteira do modelo primário da mola “zeta”	119
Figura 4.15	– Configuração dos “DOMAINS” para otimização de forma da mola “zeta” no software VMA/GENESIS	119

Figura 5.1	– Esquema de visualização da refração dupla temporária (Silva, 1995)	124
Figura 5.2	– Ilustração de um polariscópio. Ao fundo, modelo fotoelástico carregado cuja distribuição de tensões será observada (Durelli e Riley, 1965)	125
Figura 5.3	– Esquema típico de calibração do material fotoelástico (Dally e Riley, 1965)	127
Figura 5.4	– Modelo fotoelástico empregado para o estudo experimental comparativo entre as diversas versões do suporte do feixe de molas de um veículo de carga	129
Figura 5.5	– Reta de regressão resultante, com indicação da constante óptica	131
Figura 5.6	– Representação esquemática dos raios de curvatura de região crítica em termos de concentração de tensões	133
Figura 5.7	– Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura vertical, versão ótima	135
Figura 5.8	– Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura horizontal, versão ótima	136
Figura 5.9	– Distribuição geral de tensões vistas ao polariscópio, modelo fotoelástico correspondente à versão ótima	136
Figura 5.10	– Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura vertical, versão inicial	138
Figura 5.11	– Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura horizontal, versão inicial	139
Figura 5.12	– Distribuição geral de tensões vistas ao polariscópio, modelo fotoelástico correspondente à versão inicial	139
Figura 5.13	– Ilustração das etapas de obtenção do modelo fotoelástico, a partir da peça original e de um gabarito geométrico em alumínio	140

Figura 5.14	– Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura vertical, versão reforçada	141
Figura 5.15	– Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura horizontal, versão reforçada	142
Figura 5.16	– Distribuição geral de tensões vistas ao polariscópio, modelo fotoelástico correspondente à versão reforçada	143

Lista de Tabelas:

Número	Título	Pág.
Tabela 3.1	– Convenção de especificação de graus de liberdade no comando BNDGRID	71
Tabela 4.1	– Resultados da otimização de forma do suporte do veículo 1935 executada no software MSC/NASTRAN	85
Tabela 4.2	– Resultados da otimização de forma do suporte do veículo 1935 executada no software VMA/GENESIS	90
Tabela 4.3	– Resultados da análise modal computacional do conjunto de escape de um veículo de carga médio	93
Tabela 4.4.1	– Progresso da otimização usando perfil tipo tubo retangular	101
Tabela 4.4.2	– Progresso da otimização utilizando perfil tipo cantoneira	102
Tabela 4.4.3	– Progresso da otimização utilizando perfil tipo halter	103
Tabela 4.4.4	– Progresso da otimização utilizando perfil retangular maciço	104
Tabela 4.4.5	– Progresso da otimização utilizando perfil tipo trilho	104
Tabela 4.4.6	– Progresso da otimização utilizando perfil tipo tubo circular	105
Tabela 4.4.7	– Progresso da otimização utilizando perfil tipo viga-I	106
Tabela 4.4.8	– Progresso da otimização utilizando perfil tipo viga-T	107



Tabela 4.5	– Resultados da otimização do comportamento dinâmico do conjunto suporte/tubagem/silencioso do veículo 1620 usando o método “Beta”	111
Tabela 4.6.1	– Resultados para a otimização dimensional do projeto existente	117
Tabela 4.6.2	– Resultados da otimização dimensional do projeto super – dimensionado	118
Tabela 4.6.3	– Resultados da otimização de forma da mola zeta no MSC/NASTRAN	120
Tabela 4.6.4	– Resultados da otimização de forma da mola zeta no VMA/GENESIS	120
Tabela 5.1	– Dados do ensaio de calibração da resina fotoelástica usada para construir o modelo do suporte	130
Tabela 5.2	– Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura vertical, versão ótima	134
Tabela 5.3	– Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão ótima	135
Tabela 5.4	– Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura vertical, versão inicial	137
Tabela 5.5	– Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão inicial	138
Tabela 5.6	– Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura vertical, versão reforçada	141
Tabela 5.7	– Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão reforçada	142

## Lista de símbolos:

- $h, H$ : altura
- $A$ : área
- $\Phi$ : auto - vetor
- $P, F$ : carga estáticamente aplicada
- $\nu_{ij}$ : coeficiente de sensibilidade
- $B$ : comprimento da base
- $C$ : constante óptica de um material fotoelástico
- $X$ : coordenada cartesiana; fator de escala
- $\partial$ : derivada parcial
- $D$ : deslocamento nodal em módulo
- $y$ : diferença entre os gradientes da função objetivo de duas iterações consecutivas
- $p$ : diferença entre os vetores das variáveis de projeto de duas iterações consecutivas
- $T$ : energia cinética
- $U$ : energia potencial
- $t, T$ : espessura
- $r$ : fator aleatório do método de busca randômica
- $\beta_q$ : fator escalar do método das direções conjugadas
- $r_p$ : fator de penalização
- $COEFF$ : fator de escala de perturbações aplicadas a um nó
- $F(t)$ : força excitadora variável com o tempo
- $\omega$ : freqüência natural
- $P(x)$ : função de penalidade
- $\omega$ : função de uma variável calculada no intervalo de incerteza
- $L(x, \lambda)$ : função Lagrangeana
- $f(\{x\})$ : função objetivo
- $\tilde{f}$ : função objetivo linearizada por série de Taylor
- $\phi(x, r_p)$ : função pseudo - objetivo
- $\nabla f$ : gradiente da função objetivo
- $\nabla g(x)$ : gradiente de uma restrição

$j$ : índice das restrições de desigualdade  
 $g_i(\{x\})$ : restrições de desigualdade  
 $TRS$ : índice de relevância de uma restrição  
 $\varepsilon$ : intervalo no qual está contido o passo para busca unidirecional ou intervalo de incerteza  
 $\Delta$ : variação no intervalo de incerteza de determinação da secção áurea  
 $a_0$ : limite inferior inicial do intervalo de incerteza  
 $y_0$ : limite inferior recalculado do intervalo de incerteza  
 $b_0$ : limite superior inicial do intervalo de incerteza  
 $x_0$ : limite superior recalculado do intervalo de incerteza  
 $[C]$ : matriz de amortecimento  
 $M, [M]$ : matriz de massa  
 $K, [K]$ : matriz de rigidez  
 $[T]$ : matriz de transformação linear  
 $H$ : matriz Hessiana  
 $\tau$ : matriz Hessiana ortogonalizada pelo vetor  $y$ ; número áureo  
 $J$ : matriz Jacobiana  
 $f_{\text{máx.}}$ : máxima frequência excitada pela fonte de potência  
 $r_{\text{rpm máx.}}$ : máxima rotação atingida pelo motor do veículo  
 $\lambda$ : multiplicador de Lagrange; auto - valor  
 $N_{\text{cil.}}$ : número de cilindros do motor do veículo  
 $n$ : número de colunas de  $T$   
 $m$ : número de linhas de  $T$   
 $NSTR$ : número de restrições retidas por região  
 $q$ : ordem de iteração do otimizador  
 $\alpha^*$ : passo escalar na direção de busca  
 $\sigma$ : produto de escalar de  $p$  por  $y$ ; tensão mecânica  
 $r, Y$ : resposta física  
 $g_i(\{x\})$ : restrições de desigualdade  
 $h_k(\{x\})$ : restrições de igualdade

$x_i^l$ : restrições laterais inferiores

$x_i^u$ : restrições laterais superiores

$( )^T$ : transposto de um vetor

$CT$ : valor a partir do qual uma restrição normalizada é considerada ativa

$CTMIN$ : valor a partir do qual uma restrição normalizada é considerada violada

$\delta x$ : variação diferencial no vetor das variáveis de projeto

$\Delta$ : variação no intervalo de incerteza de determinação da secção áurea

$BETA$ : variável de projeto auxiliar

$\{x\}$ : vetor das variáveis de projeto

$\{\ddot{x}\}$ : vetor de acelerações

$\{x\}$ : vetor de deslocamentos

$N$ : vetor de perturbação aplicado a um nó; ordem de franja fotoelástica

$\{\Delta G\}$ : vetor de variações nas coordenadas nodais

$\{\dot{x}\}$ : vetor de velocidades

$S^g$ : vetor direção de busca

## 1 - INTRODUÇÃO:

### 1.1 - CONCEITUAÇÃO:

Técnicas de otimização numérica são procedimentos pelos quais pode ser estabelecida uma metodologia de projeto **sistemática**, **direta** e **racional**.

Atribui-se à otimização o adjetivo **sistemática** pois a tarefa de projetar otimamente é empreendida passo-a-passo, conforme um algoritmo pré-definido, ou seja, o método de otimização. Além disso, o procedimento é **direto**, uma vez que tudo o que se busca é a satisfação de uma meta estabelecida a priori, a função objetivo.

Finalmente, a metodologia é **racional** pois são considerados consistentemente os vários fatores que interferem na obtenção do objetivo almejado: os elementos cuja alteração tem conseqüências no comportamento do sistema em estudo (variáveis de projeto), a intensidade destas conseqüências (sensibilidade) e as limitações intrínsecas que devem ser respeitadas na busca pelo ótimo (restrições).

Assim sendo, mais que uma ferramenta computacional poderosa, a otimização é um paradigma de engenharia, pelo qual a concepção de um dado sistema ocorre de forma automatizada.

A título de exemplificação, a função objetivo pode ser a redução a um mínimo possível do nível de ruído em um ambiente fechado tendo-se à disposição diferentes quantidades e tipos de fibras acústicas isolantes (variáveis

de projeto), sendo que o custo total da solução adotada não deve superar um certo valor (restrição).

Em problemas reais de engenharia, sobretudo nos de otimização estrutural, a quantidade de variáveis de projeto e restrições tende a ser grande o suficiente para acarretar intenso esforço computacional. Mesmo a meta definida pode comportar mais de um alvo, sendo então chamada de função multi-objetivo, situações em que o apelo e a dificuldade em se obter uma solução de compromisso tornam-se ainda mais evidentes.

Face a tais complexidades, a solução é adotar um formalismo matemático para tratar o problema de otimização. Em seguida será feita, ainda que sucintamente, uma descrição desta abordagem formal.

## 1.2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO:

Geralmente, o problema de otimização é expresso da seguinte forma:

Seja :

$$\{\mathbf{x}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1.1)$$

um vetor n dimensional contendo as variáveis de projeto. Deseja-se extremizar a função objetivo:

$$f(\{\mathbf{x}\}) \quad (1.2)$$

Sujeita a:

$$g_j(\{\mathbf{x}\}) \leq 0 \quad (1.3)$$

j restrições de desigualdade e

$$h_k(\{x\}) = 0 \quad (1.4)$$

$k$  restrições de igualdade, sendo ainda que as variáveis de projeto ou componentes do vetor  $\{x\}$  estão sujeitas a restrições laterais do tipo:

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad (1.5)$$

Comentando-se as restrições de forma mais completa, pode-se dizer que as de desigualdade são como barreiras que não devem ser transpostas, ou seja, os valores das grandezas consideradas não podem ser superiores (ou inferiores) a determinados limites. Por exemplo, a tensão resultante em uma determinada peça de aço não pode superar o limite de escoamento daquele material.

Já as restrições de igualdade são valores que devem ser exatamente (no sentido de matemática finita) atingidos por itens do sistema. Este seria o caso em que certa dimensão de uma peça (largura, por exemplo) devesse ter um valor determinado, para fins de montagem. Restrições de igualdade podem ser expressas matematicamente como a composição de duas restrições de desigualdade idênticas porém de sinais contrários.

Finalmente, as restrições laterais tratam dos valores máximo e mínimo que podem ser assumidos por uma determinada variável de projeto, tal qual a maior e a menor espessuras possíveis de serem atribuídas a uma chapa.

### 1.3 - EXTREMIZAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO: MÉTODOS

Como a função objetivo é dependente das variáveis de projeto, a variação destas, da forma apropriada, é o recurso utilizado para extremizá-la.

Via de regra, esta extremização é a busca do mínimo, mesmo quando se deseja aumentar o valor do objetivo. Neste caso, minimiza-se  $-f(\{x\})$ .

A forma como as variáveis de projeto comportam-se durante o processo de otimização é dependente do problema e fortemente não-linear, inexistindo qualquer regra geral sobre quais terão seus valores aumentados ou diminuídos.

Algumas constatações são úteis no sentido de facilitar o tratamento deste problema. Inicialmente, deve-se considerar que o vetor das variáveis de projeto define um espaço n-dimensional (vide figura 1.1) , e a dificuldade encontra-se justamente na topologia complexa que ele geralmente apresenta. A questão de alterar otimamente as variáveis de projeto é equivalente a encontrar uma forma de “locomoção” eficaz dentro do espaço de projeto. A abordagem corrente para este item é a iterativa, isto é, os valores das variáveis de projeto são alterados conforme uma lei de recorrência do tipo:

$$\{x\}^q = \{x\}^{q-1} + \alpha^* \cdot S^q \quad (1.6)$$

onde:

$\{x\}^q$  : Vetor das variáveis de projeto na q-ésima iteração (atual);

$\{x\}^{q-1}$  : Vetor das variáveis de projeto na iteração anterior;

$\alpha^*$  : Passo escalar dado numa certa direção;

$S^q$  : Direção de busca atual, sobre a qual se percorre um passo  $\alpha^*$



Vê-se que as possibilidades de “locomoção” pelo espaço de projeto ficam limitadas a uma única direção de busca por iteração. Desta forma, cada iteração do otimizador é chamada de **busca uni-dimensional**, descrevendo com propriedade esta solução que facilita enormemente o processo, pois uma vez definida a direção de busca, o problema numérico de  $n$  variáveis fica reduzido a apenas uma variável  $\alpha^*$ . Em última análise, os diversos métodos de otimização a serem tratados na seção seguinte consistem em diferentes meios de se determinar a direção de busca.

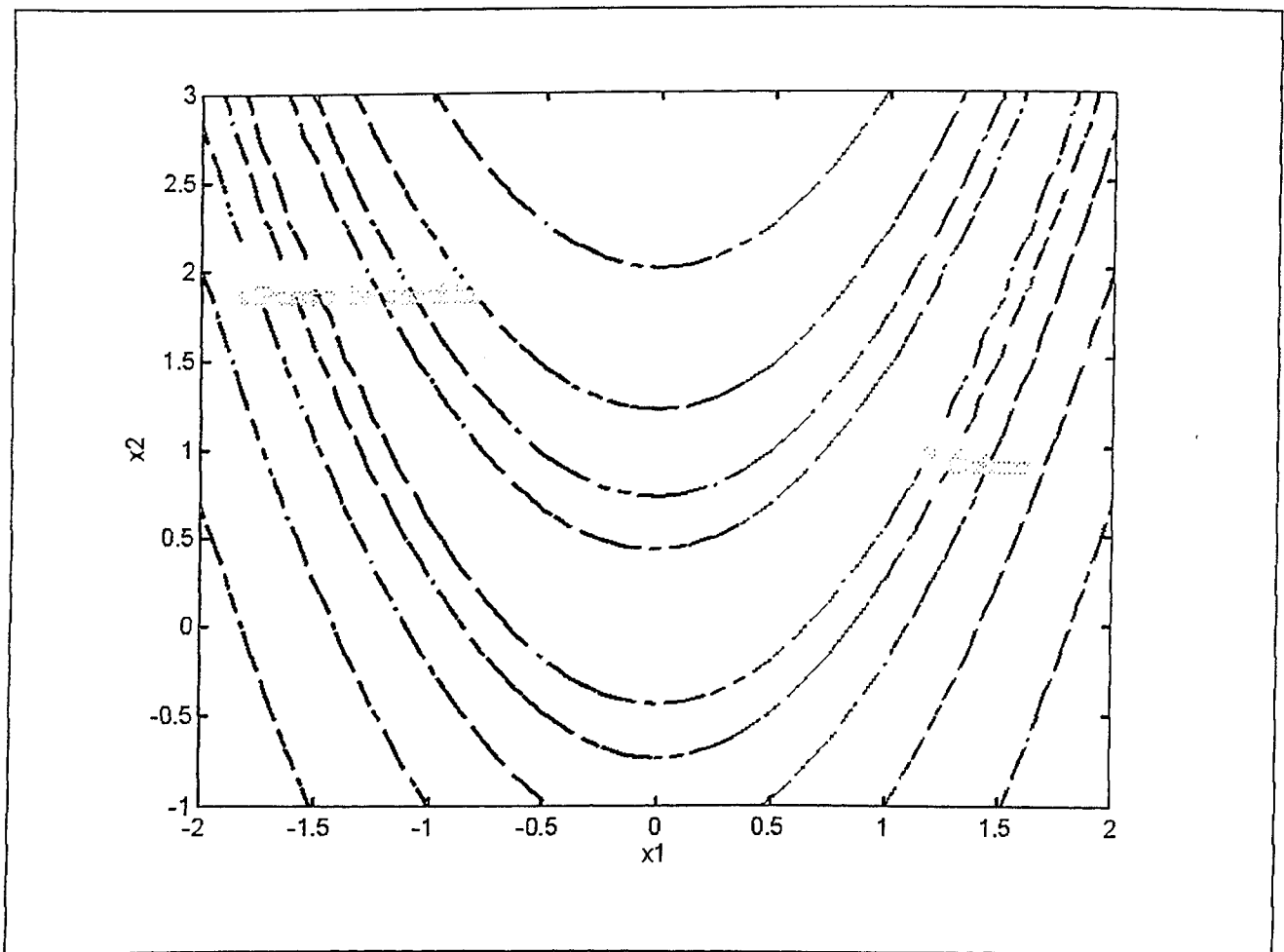


Figura 1.1 : Espaço de projeto bi-dimensional, mostrando as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , o ponto de partida e o ótimo a ser alcançado (Matlab versão 4.2 for Windows, bandemo.m, The Mathworks Inc., 1994)

### 1.3.1 - Determinação da direção de busca:

A classificação aqui apresentada é uma adaptação de Garret N. Vanderplaats (Vanderplaats, 1984). O vetor de variáveis de projeto será notado sem os parênteses por questão de simplicidade.

#### A) Métodos de ordem zero:

Recebem esta nomenclatura pois não requerem o cálculo de derivadas. São normalmente confiáveis e fáceis de se programar, apresentando razoável robustez perante certos problemas de condicionamento numérico (concavidades e descontinuidades da função objetivo). O preço pago por esta generalidade é que requerem um alto número de avaliações da função objetivo, sendo portanto relegados aos casos em que tal cálculo não apresenta elevado custo computacional. Pode-se dizer de antemão que não se aplicariam aos casos estudados no quarto capítulo deste trabalho.

Serão apresentadas a seguir as principais características de alguns métodos pertencentes a este grupo:

- Método da BUSCA RANDÔMICA:

Este é o mais ineficiente, sendo porém o de mais fácil implementação. Consiste em selecionar aleatoriamente vetores  $x$  pertencentes ao espaço de projeto, verificando continuamente se eles são capazes de reduzir a

função objetivo sem incorrer em violação das restrições. O processo pode ser melhorado à medida em que se reduz o intervalo definido pelas restrições laterais impostas às variáveis de projeto. A fórmula de recorrência é do tipo:

$$x_i^q = x_i^l + r \cdot (x_i^u - x_i^l) \quad (1.7)$$

análoga à expressão iterativa geral, sendo que  $r$  é um número randomicamente gerado entre zero e um.

- Método de POWELL:

“É o mais eficiente, confiável e popular dos métodos de ordem zero” (Steffen Jr., 1996). O conceito básico de Powell consiste em procurar primeiramente nas direções coordenadas, isto é, direções das variáveis de projeto, onde cada busca consiste em uma atualização destas variáveis conforme a equação (1.6).

Combinações lineares destas direções coordenadas são as direções conjugadas, ou seja, cada nova direção de busca é a soma vetorial de todas as anteriores. Com duas variáveis de projeto, isto significa que:

$$S^3 = \alpha_1^* \cdot S^1 + \alpha_2^* \cdot S^2 \quad (1.8)$$

Vê-se que os coeficientes de combinação linear são os próprios passos dados em cada direção.

Existem alguns problemas relacionados à essa técnica. Por exemplo, se alguma direção de busca não for capaz de levar à minimização da função

objetivo, as buscas subseqüentes não serão conjugadas, dificultando a convergência numérica. Além disso, após algumas iterações a direção de busca tende a tornar-se paralela às anteriores devido a mal condicionamento numérico ou caso à natureza não quadrática da função objetivo, uma vez que o método é especialmente idealizado para tal classe de funções.

- Outros métodos de ordem zero:

Existem ainda alguns outros métodos de ordem zero.

O de Box (Box, 1965), também chamado de COMPLEX, é um algoritmo baseado na busca randômica.

Já os métodos de Hooke e Jeeves (Hooke e Jeeves, 1961) e o de Rosenbrock (Rosenbrock, 1960) utilizam procedimentos de busca semelhantes aos de Powell, sofisticados por aceleradores de convergência que utilizam informações sobre a forma do espaço de projeto.

Informações adicionais sobre métodos de ordem zero podem ser encontradas em Himmelblau, 1964.

#### B) Métodos de primeira ordem:

Também chamados de métodos baseados no gradiente, são dotados de eficiência numérica maior em relação aos métodos de ordem zero. Em contrapartida, há um incremento no grau de dificuldade em implementá-los.

Num espaço de projeto  $n$ -dimensional, os métodos de primeira ordem requerem o cálculo da matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ), de ordem  $n$ , que contém os gradientes (derivadas parciais primeiras) da função objetivo em relação às variáveis de projeto.

- Método da MÁXIMA DESCIDA:

“É o mais conhecido e o de pior desempenho. Sua importância é de estabelecer o ponto inicial para métodos mais sofisticados” (Steffen Jr., 1996)

Do cálculo diferencial e integral, sabe-se que o vetor gradiente de uma dada função de  $n$  variáveis é perpendicular às curvas de valor constante da função em cada ponto. Além disso, o máximo aumento de valor da função ocorre na direção do gradiente. Portanto, é razoável supor que a direção que mais rápido minimizará a função seja:

$$\mathbf{S} = -\nabla f \quad (1.9)$$

isto é, a direção oposta à do gradiente da função objetivo no ponto de partida da iteração. O problema deste método reside numa certa falta de uniformidade pois, numa dada iteração, não é levada em conta nenhuma informação acerca da anterior. Desta forma, a busca torna-se algo errática, fazendo com que a “distância total” percorrida no espaço de projeto, até o ótimo, seja muito (e desnecessariamente) grande, conforme ilustrado pela figura 1.2 abaixo:

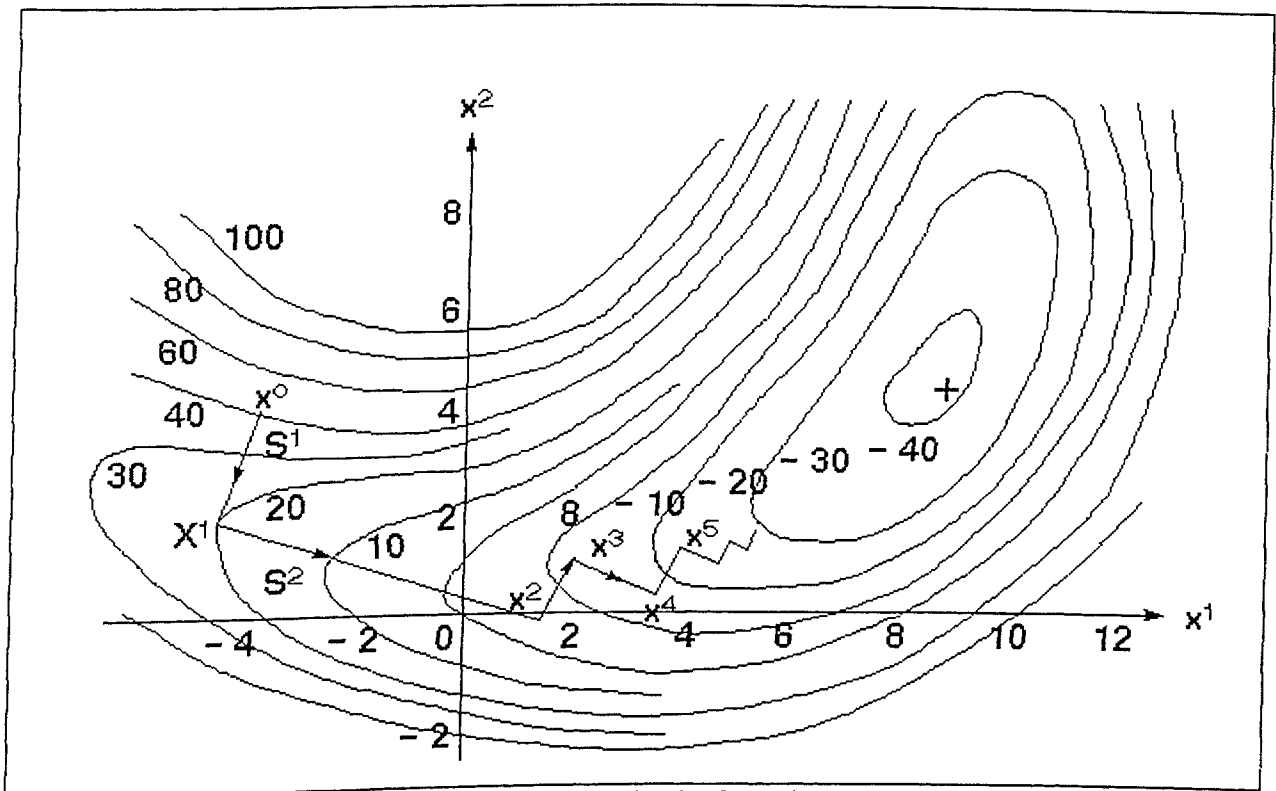


Figura 1.2 : Interpretação geométrica do Método da Máxima Descida num espaço de projeto bi-dimensional (Moore, 1992)

- Método das DIREÇÕES CONJUGADAS (FLETCHER E REEVES)

Este método introduz uma ligeira alteração no algoritmo de Máxima Descida, com efeitos bastante benéficos quanto à velocidade de convergência. Sua implementação computacional é simples e requer pouca memória.

A direção de busca inicial é o vetor oposto ao gradiente da função objetivo no ponto de partida. Porém, nas iterações subsequentes, definem-se direções conjugadas da seguinte forma:

$$S^q = -\nabla f(x^q) + \beta_q \cdot S^{q-1} \quad (1.10)$$

onde o escalar  $\beta_q$  é dado por:

$$\beta_q = \frac{|\nabla f(\mathbf{x}^q)|^2}{|\nabla f(\mathbf{x}^{q-1})|^2} \quad (1.11)$$

É importante notar que as relações (1.10) e (1.11) exprimem claramente a influência que cada direção de busca de cada iteração tem sobre a subsequente.

O método de Fletcher e Reeves teoricamente minimiza uma função quadrática. Quando este não for exatamente o caso, ou ainda sob influência de outros problemas numéricos, pode ocorrer a necessidade de reinicialização do método. Os critérios para tal opção são os seguintes:

- ⇒ A busca uni-direcional não consegue melhorar o projeto;
- ⇒ A direção de máxima descida não consegue reduzir a função objetivo, implicando que o mínimo foi encontrado.

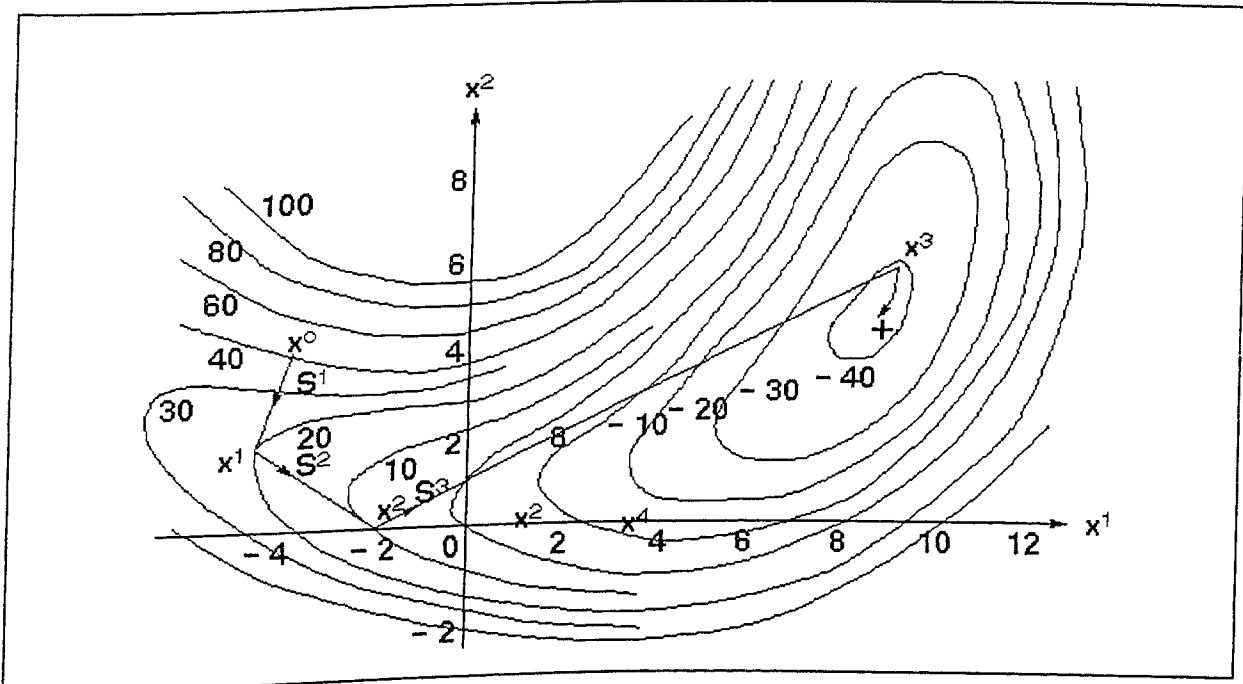


Figura 1.3 : Interpretação geométrica do Método de Fletcher e Reeves num espaço de projeto bi-dimensional (Moore, 1992)

Uma interpretação geométrica do método de Fletcher e Reeves é dada na figura 1.3 acima. Em comparação com o método da Máxima Descida (figura 1.2), a convergência ocorre de forma muito mais eficaz, ou seja, o caminho percorrido do ponto inicial ao mínimo é bem mais direto.

- Métodos da MÉTRICA VARIÁVEL:

A contribuição do método de Fletcher e Reeves sobre o de Máxima descida ocorreu justamente por se incorporar no cálculo da direção de busca informações das iterações anteriores. Assim sendo, além do gradiente da função objetivo, é importante possuir informações a respeito de suas variações no espaço de projeto, isto é, as derivadas segundas. Tais derivadas de ordem dois compõe a Matriz Hessiana ( $\mathbf{H}$ ), cujo cálculo pode ser efetuado de duas formas:

⇒ Analiticamente: quando a função objetivo for disponível explicitamente nas variáveis de projeto. Além de poupar tempo computacional, evitam-se erros de procedência numérica. Tais casos, porém, ficam cada vez mais raros à medida em que cresce a complexidade do sistema a ser otimizado;

⇒ Numericamente: O método das Diferenças Finitas é o preferido quando se recorre ao cálculo numérico de derivadas. Apesar do método ser bastante conhecido e de fácil implementação, o custo computacional desta alternativa tende a ficar proibitivo caso se queira ter uma precisão razoável (o passo deve ser muito pequeno).



Como ambas as alternativas apresentam pontos negativos, a saída preferível é estimar as derivadas parciais segundas da função objetivo em relação às variáveis de projeto, evitando-se o pesado cálculo computacional da matriz Hessiana.

A solução apresentada nos métodos da Métrica Variável consiste em estimar as derivadas segundas, num processo computacional menos custoso, simulando o funcionamento dos métodos de segunda ordem. Por esta razão, eles são também conhecidos por métodos "Quasi-Newton", numa alusão aos métodos de Newton, que realmente procedem ao cálculo da matriz Hessiana.

Sua performance é superior à do método de Fletcher e Reeves pois o termo que contém as informações advindas das iterações anteriores não é simplesmente um escalar como  $\beta_q$ , mas uma grandeza vetorial  $u$ , cuja obtenção ocorre segundo um grupo de algoritmos que diferem entre si somente pelos valores atribuídos a certos parâmetros (coeficientes) constantes.

Tais algoritmos implicam nas seguintes etapas:

⇒ Dada uma direção de busca inicial  $S^q$ , faz-se uma primeira busca unidimensional. Como a matriz Hessiana estimada é uma matriz identidade nesta iteração,  $S^q$  é inicialmente a direção de máxima descida.

⇒ Ao final da iteração  $q$ , faz-se:

$$H^{q-1} = H^q + D^q \quad (1.12)$$

onde  $H$  é a matriz Hessiana estimada e  $D$  é uma matriz simétrica de atualização definida como:

$$D^q = \frac{\sigma + \theta \cdot \tau}{\sigma^2} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T + \frac{\theta - 1}{\tau} \cdot H^q \cdot \mathbf{y} \cdot (H^q \cdot \mathbf{y})^T - \frac{\theta}{\sigma} \cdot [H^q \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{p}^T \cdot (H^q \cdot \mathbf{y})^T] \quad (1.13)$$

onde:

os vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{y}$  são dados por:

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}^q - \mathbf{x}^{q-1} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}^q) - \nabla f(\mathbf{x}^{q-1}) \quad (1.15)$$

os escalares  $\sigma$  e  $\tau$  são obtidos mediante:

$$\sigma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \quad (1.16)$$

$$\tau = \mathbf{y}^T \cdot H^q \cdot \mathbf{y} \quad (1.17)$$

O coeficiente  $\theta$  varia conforme o método:

$\Rightarrow \theta = 0$  : Método Dayton-Fletcher-Powell (D.F.P)

$\Rightarrow \theta = 1$  : Método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannos (B.F.G.S)

C) Métodos de segunda ordem:

Conforme adiantado no tópico precedente, tais métodos requerem a obtenção da matriz Hessiana, isto é, o cálculo das derivadas parciais segundas da função objetivo em relação às variáveis de projeto.

- Método de NEWTON:

É o clássico método de segunda ordem, baseando-se numa expansão em série de Taylor truncada. Para a q-ésima iteração:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^q) + \nabla f(\mathbf{x}^q) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \cdot \delta \mathbf{x} \cdot H(\mathbf{x}^q) \cdot \delta \mathbf{x} \quad (1.18)$$

onde:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^{q+1} - \mathbf{x}^q \quad (1.19)$$

numa condição de estacionareidade:

$$\delta \mathbf{x} = -[H(\mathbf{x}^q)]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^q) \quad (1.20.1)$$

e

$$\mathbf{x}^{q+1} = \mathbf{x}^q + \delta \mathbf{x} \quad (1.20.2)$$

logo, de (1.20.1) e (1.20.2):

$$\mathbf{x}^{q+1} = \mathbf{x}^q - [H(\mathbf{x}^q)]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^q) \quad (1.21)$$

Ainda, levando-se em conta a equação (1.6) e arbitrando um valor unitário para o passo escalar, chega-se à seguinte expressão para a busca unidirecional geral:

$$S^q = -[H(\mathbf{x}^q)] \cdot \nabla f(\mathbf{x}^q) \quad (1.22)$$

Na prática, a matriz Hessiana não é invertida. Ao invés disso, resolve-se um sistema de equações simultâneas do tipo:

$$H \cdot S = -\nabla f \quad (1.23)$$

As vantagens e dificuldades deste método e de seus semelhantes sobre os demais já foram previamente evidenciadas.

### 1.3.2 - Determinação do passo na busca uni-direcional:

A grande questão é: uma vez definido em qual direção o método irá buscar o mínimo da função objetivo, quanto avançar nesta direção?

Serão apresentados a seguir dois métodos de determinação do passo na busca uni-direcional.

#### A) Método da SECÇÃO ÁUREA:

Ao longo da história, é comum o aparecimento de uma certa fração fixa de dimensões lineares como sendo aquela que proporciona um aspecto ou proporção mais harmoniosa entre diferentes fatores.

Traços deste número especial encontram-se na arquitetura grega antiga, em estudos de Leonardo Da Vinci e na razão da série numérica de Fibonacci:

Trata-se da SECÇÃO ÁUREA, que denotaremos por:

$$\tau = 0.618034$$

(1.21)

Partindo-se deste valor, é necessário percorrer os seguintes passos para a obtenção do passo ideal ( $\alpha^*$ ):

⇒ Assumindo que o valor de  $\alpha^*$  esteja contido num certo intervalo de incerteza, definir  $\Delta$  como fator de redução deste intervalo.

⇒ Calcular a amplitude do intervalo final desejado:

$$\varepsilon = \Delta \cdot (b_0 - a_0) \quad (1.22)$$

onde  $b_0$  e  $a_0$  são os limites superior e inferior respectivamente, do intervalo de incerteza.

⇒ Obter:

$$x_0 = a_0 + (1 - \tau) \cdot (b_0 - a_0) \quad (1.23.1)$$

e

$$y_0 = a_0 + \tau \cdot (b_0 - a_0) \quad (1.23.2)$$

⇒ avaliar  $\omega(x_0)$  e  $\omega(y_0)$ , onde:

$$\omega(\alpha) = f(x^q + \alpha \cdot S^q) \quad (1.24)$$

função de uma única variável

⇒ Fazer  $S = 0$  (índice de iteração das variáveis  $x$  e  $y$ )

⇒ Comparar  $\omega(x_s)$  e  $\omega(y_s)$ . Caso o primeiro seja menor que o segundo, proceder ao passo seguinte. Senão, proceder dois passos adiante.

⇒ Fazer:

$$a_{s+1} = x_s \quad (1.25.1)$$

$$b_{s+1} = b_s \quad (1.25.2)$$

$$x_{s+1} = y_s \quad (1.25.3)$$

$$y_{s+1} = a_{s+1} + (1 - \tau) \cdot (b_{s+1} - a_{s+1}) \quad (1.25.4)$$

$$\omega(y_{s+1}) \quad (1.25.5)$$

e proceder ao último passo

⇒ Fazer:

Obs.: executar este passo somente se  $\omega(\mathbf{x}_s) > \omega(\mathbf{y}_s)$

$$a_{s+1} = a_s \quad (1.26.1)$$

$$b_{s+1} = y_s \quad (1.26.2)$$

$$y_{s+1} = x_s \quad (1.26.3)$$

$$x_{s+1} = a_{s+1} + (1 - \tau) \cdot (b_{s+1} - a_{s+1}) \quad (1.26.4)$$

$$\omega(x_{s+1}) \quad (1.26.5)$$

e proceder ao último passo

⇒ Verificar se:

$$|b_{s+1} - a_{s+1}| \leq \varepsilon \quad (1.27)$$

em caso afirmativo, o intervalo de incerteza final é o módulo da diferença apresentado em (1.27). Senão, reiniciar o procedimento a partir do sexto passo, comparando os valores de  $\omega(\mathbf{x}_s)$  e  $\omega(\mathbf{y}_s)$ .

## B) Método da INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL CÚBICA:

Parte do princípio de que toda função contínua de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  pode ser aproximada em um intervalo fechado por um polinômio cujo grau depende da amplitude deste intervalo e da natureza da própria função.

Neste caso, pretende-se aproximar  $\omega(\alpha)$  por um polinômio do terceiro grau em  $\alpha$ . Isto é possível dados quatro pontos da função  $\omega(\alpha)$  no

intervalo de interesse. Em seguida, encontra-se o mínimo da função polinomial anulando-se sua derivada em relação à variável única  $\alpha$ .

Como o polinômio é do terceiro grau, tal derivada será uma função quadrática cuja raiz positiva será o valor ótimo do passo a ser dado na direção de busca, ou seja,  $\alpha^*$ .

### 1.3.3 - Considerações adicionais sobre restrições:

Na coletânea de métodos apresentados ao longo da seção precedente, nenhuma consideração especial foi feita a respeito das restrições embora elas tenham sido consideradas partes integrantes do problema de otimização tanto em sua formulação conceitual (seção 1.1) quanto no modelamento matemático (seção 1.2).

As estratégias dos métodos até aqui discutidos têm como única meta declarada reduzir o valor da função objetivo. Uma direção de busca que consegue satisfazer este requisito mantém o projeto na chamada **região usável** (porção do espaço de projeto onde é possível reduzir o valor da função objetivo).

Projetos nesta região podem, entretanto, estar violando restrições. Isto não deve ocorrer, visto que o sistema em estudo estaria sujeito a configurações físicas capazes de desencadear algum mecanismo de falha. Portanto, além de ser usável, o projeto deve pertencer à **região viável** (sub-espaço de projeto em que não há violação das restrições estabelecidas).

Matematicamente, estes elementos são definidos por:

condição de usabilidade:

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S} \leq 0 \quad (1.28)$$

condição de viabilidade:

$$\nabla g_j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S} \leq 0 \quad (1.29)$$

onde  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  são as  $j$  restrições impostas.

A figura 1.4 ilustra um sub-espço de projeto simultaneamente usável e viável:

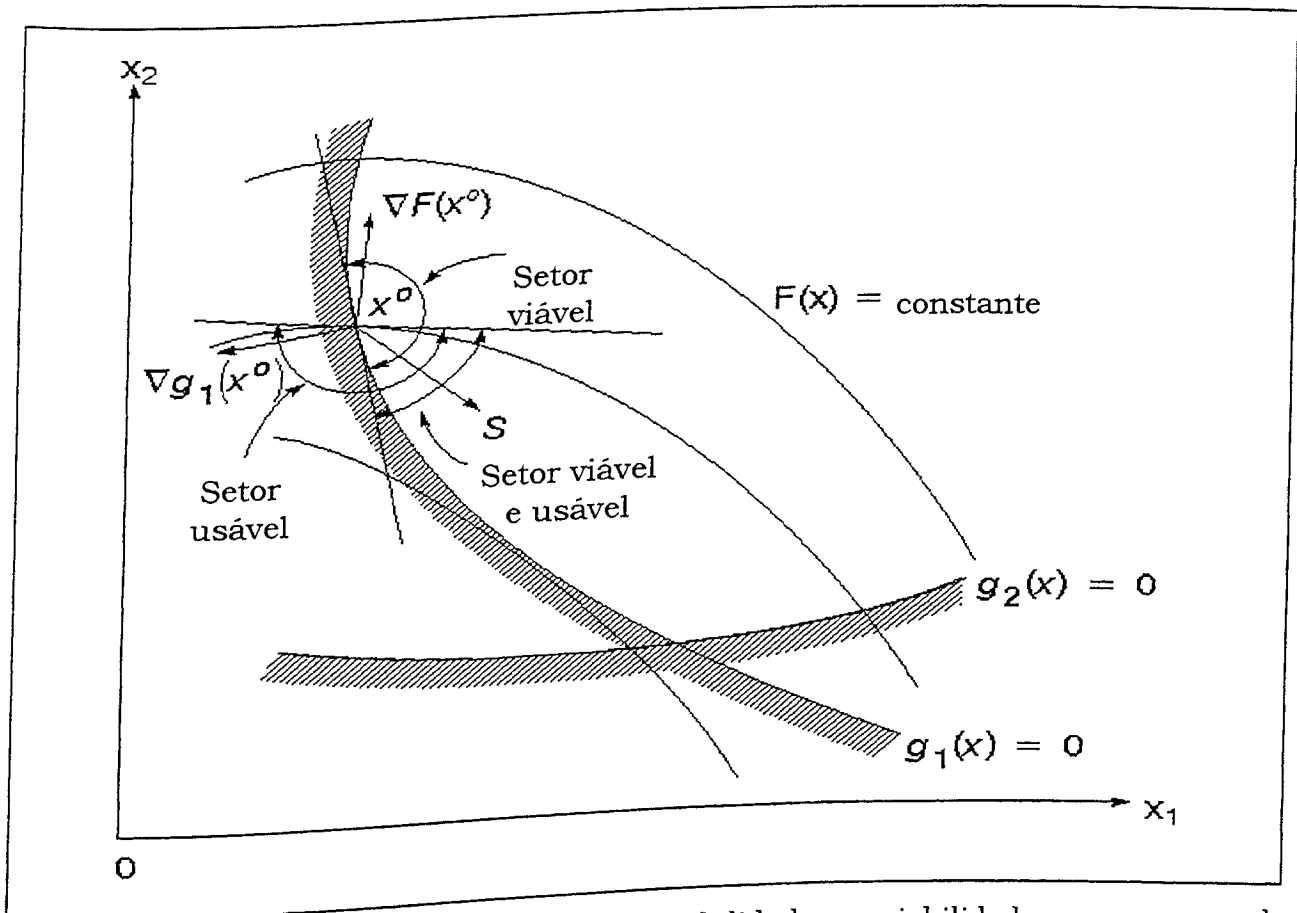


Figura 1.4 : Interpretação geométrica de usabilidade e viabilidade num espaço de projeto bi-dimensional (Moore, 1992)

Tendo em vista a presença das restrições, foram introduzidos métodos de otimização especialmente adaptados para gerar projetos pertencentes à região viável.



O princípio fundamental é o de executar a otimização de forma irrestrita, para a qual se pode lançar mão de inúmeros métodos, como os da seção anterior, ao mesmo tempo em que se penaliza qualquer tentativa do otimizador em violar as restrições impostas. A formulação de uma função pseudo-objetivo e a introdução de coeficientes de penalidade formam a base dos métodos que serão apresentados a seguir.

#### A) Métodos de PENALIDADE:

Primeiramente, a partir da função objetivo original, cria-se uma função pseudo-objetivo da forma:

$$\phi(\mathbf{x}, r_p) = f(\mathbf{x}) - r_p \cdot P(\mathbf{x}) \quad (1.30)$$

onde os termos além da função objetivo original são:

$P(\mathbf{x})$  = função de PENALIDADE

$r_p$  = escalar associado a  $P(\mathbf{x})$ . O sub-índice  $p$  representa o número da iteração na busca irrestrita.

O problema pode ser abordado de diferentes formas:

⇒ Método da FUNÇÃO DE PENALIDADE EXTERIOR:

Penaliza o objetivo somente quanto restrições são violadas,

isto é, quando o projeto recai numa porção EXTERIOR à região viável.

A função de penalidade é portanto formulada conforme a equação abaixo:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \{\max[0, g_j(\mathbf{x})]\}^2 + \sum_{k=1}^l [h_k(\mathbf{x})]^2 \quad (1.31)$$

onde  $g_j(\mathbf{x})$  são as restrições de desigualdade e  $h_k(\mathbf{x})$  as de igualdade.

Se nenhuma delas estiver sendo violada, não ocorre aplicação de penalidade e a função pseudo-objetivo é a própria função objetivo original.

Nas primeiras iterações, o valor do coeficiente de penalidade  $r_p$  é menor, para que a função pseudo-objetivo seja mais facilmente minimizada (menos restrita). À medida em que o método avança, entretanto, a penalidade deve ir sendo aumentada para garantir a viabilidade do projeto. Valores muito altos de  $r_p$  vão gerando problemas de condicionamento numérico.

⇒ Método da FUNÇÃO DE PENALIDADE INTERIOR:

A penalidade é aplicada ainda no INTERIOR da região viável, sempre que for iminente (perante uma tolerância previamente estabelecida) a violação de alguma restrição. Desta forma, as violações de restrição não ocorrem e, mesmo que haja parada imprevista do processo, o projeto será sempre viável. Já no método da penalidade exterior isto nem sempre é verdade.

Quanto à equação de penalidade em sua forma mais comum (Vanderplaats, 1984):

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (1.32)$$

O coeficiente de penalidade é alto a princípio, decrescendo ao longo do processo de otimização. Uma dificuldade freqüente deste método é o aparecimento de descontinuidades nas extremidades das restrições.

Há ainda um grupo de métodos de penalidade EXTENDIDA, que procuram aliar as vantagens de velocidade de convergência dos métodos de penalidade exterior e respeito às restrições dos métodos de penalidade interior.

⇒ Método do LAGRANGEANO AUMENTADO:

Um revés freqüente dos métodos de penalidade é a dificuldade em se arbitrar e variar satisfatoriamente os coeficientes de penalidade  $r_p$ . Este problema torna-se especialmente grave dada a dependência dos métodos em relação aos valores assumidos por estes fatores.

Isto pode ser contornado com a utilização do método do LAGRANGEANO AUMENTADO. Sua apresentação torna propícia neste momento a introdução de certas regras de convergência, **necessárias mas não suficientes**, chamadas Condições de Kuhn-Tucker, nas quais o método de baseia.

Tomando o caso geral de minimização restrita de uma função de  $n$  variáveis, as condições de Kuhn-Tucker são expressas por:

Condição 1: O projeto ótimo  $x^*$  é viável, ou seja,

$$g_j(x^*) \leq 0$$

(1.33.1)

Condição 2:

$$\lambda_j \cdot g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (1.33.2)$$

onde os termos  $\lambda_j$  são chamados MULTIPLICADORES DE LAGRANGE..

Condição 3: No mínimo, deve ser satisfeita a seguinte condição:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

(1.33.3)

que é uma condição de equilíbrio vetorial cuja interpretação gráfica encontra-se na figura 1.5.

Para um caso irrestrito mais simples, a equação (1.33.3) fica reduzida à anulação do gradiente, forma comum de determinação de pontos estacionários de funções de  $n$  variáveis.

Usando estas condições, escreve-se para a função objetivo uma função Lagrangeana:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(\mathbf{x}) \quad (1.34)$$

que pode ser “aumentada” (daí o nome do método) introduzindo-se funções de penalidade na parcela  $f(\mathbf{x})$  correspondente ao objetivo.

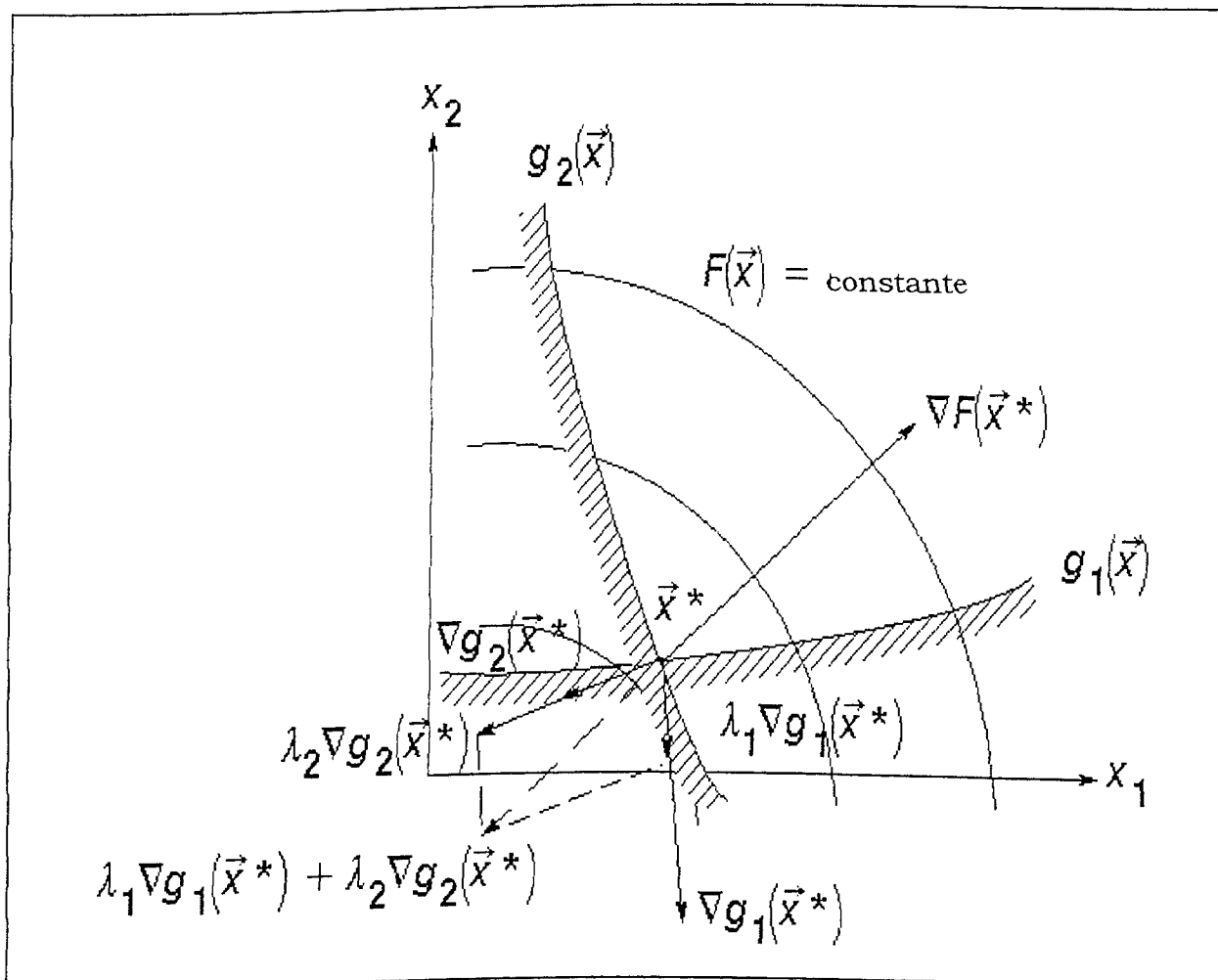


Figura 1.5 : Interpretação geométrica das condições de Kuhn-Tucker num espaço de projeto bi-dimensional, evidenciando a função dos multiplicadores de Lagrange (Moore, 1992)

Nestes problemas, os multiplicadores de Lagrange são termos acessórios, tratados como variáveis de projeto independentes, cujos valores ótimos extremizam a função.

#### 1.3.4) Métodos Diretos:

Os algoritmos de otimização apresentados na seção 3.2 são chamados de Métodos Seqüenciais, uma vez que operam segundo um modelo de procura sucessiva do ótimo ao longo de uma série de direções de busca.

Os métodos considerados em 1.3.3 também são sequenciais pois se apoiam nos primeiros embora incorporem características especiais para melhor abordagem da questão das restrições.

Outra forma de se lidar com a otimização restrita é usar uma classe diferente de métodos, chamados DIRETOS. Estudos recentes (Steffen Jr. e Saramago, 1995) têm mostrado a eficácia destes métodos em otimizações altamente restritas.

Este sucesso deve-se ao fato destes métodos atuarem sempre nas fronteiras das restrições, conseguindo minimizar rapidamente o objetivo.

O Método do Gradiente Reduzido baseia-se em conceitos de programação linear (método SIMPLEX) e divide o vetor de variáveis de projeto em variáveis básicas (dependentes, usadas para satisfazer as restrições) e não-básicas (independentes). O trabalho supracitado contém uma descrição completa do algoritmo.

O Método Modificado das Direções Viáveis, incorporado pelos pacotes de análise e otimização estrutural empregados na solução de casos reais durante o desenvolvimento desta dissertação (vide capítulo 4), baseia-se nos conceitos de usabilidade e viabilidade introduzido pelas equações (1.27) e (1.28) respectivamente.

O problema em se determinar uma direção de busca simultaneamente usável e viável é resolvido mediante uma tarefa de otimização acessória definida por:

Minimizar:

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S} \quad (1.35)$$

isto é, manter a direção de busca  $\mathbf{S}$  o mais próximo possível da direção de máxima descida, respeitando as seguintes restrições:

$$\nabla g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S} \leq 0 \quad (1.36)$$

que significam manter a direção de busca num ângulo sempre maior que  $180^\circ$  em relação aos planos definidos pelas restrições, de forma a não violá-las.

Ainda, para impor limites à magnitude do vetor  $\mathbf{S}$ , introduz-se:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \leq 1 \quad (1.37)$$

### 1.3.5) Análise de Sensibilidade:

Até este momento, nossa discussão versou sobre as variáveis de projeto sem contudo entrar no mérito de sua importância relativa. Intuitivamente, porém, engenheiros podem perceber quais os fatores mais relevantes em determinados projetos.

Conforme estabelecido nas seções 1 e 2, entretanto, aspectos subjetivos podem não ser preferíveis no contexto da otimização. É preciso lançar mão de uma ferramenta sistemática e metodológica, expressa e controlável por um modelo matemático, para avaliar quais as variáveis de projeto mais influentes e até mesmo descartar (com reflexos benéficos no custo computacional) aquelas cuja consideração pouco contribui para a obtenção do objetivo. Isto é possível através de uma ANÁLISE DE SENSIBILIDADE.

Ela consiste em se calcular a taxa de variação de respostas apresentadas pela configuração em estudo em relação a variações padrão impostas às variáveis de projeto. Tais taxas de variação podem ser definidas matematicamente como as derivadas das respostas estruturais de interesse em relação às variáveis de projeto consideradas, num dado ponto do espaço de projeto:

$$v_{ij} = \left. \frac{\partial(r_j)}{\partial(x_i)} \right|_{x^0} \quad (1.38)$$

onde:

$v_{ij}$  são os coeficientes de sensibilidade de uma dada resposta estrutural  $r_j$  em relação à  $i$ -ésima variável de projeto, isto é, métricas da influência exercida pelas variáveis de projeto sobre o comportamento do sistema.

Combinando todas as respostas estruturais e variáveis de projeto existentes, gera-se uma MATRIZ DE SENSIBILIDADE, recurso de inquestionável utilidade para a obtenção de informações a respeito do comportamento físico do sistema e conseqüente aumento da eficiência numérica, advinda do uso apenas das variáveis de projeto interessantes.

### 1.3.6) Cálculo da função objetivo e das restrições pelo Método dos Elementos

Finitos:

A avaliação da função objetivo e das restrições são operações requeridas iterativamente por todos os algoritmos de otimização apresentados.



Em problemas simples, este passo pode ser executado com apenas uma equação, que relacione analítica e explicitamente a meta de otimização e as limitações intrínsecas às variáveis de projeto participantes do problema.

No caso de complexos problemas de otimização estrutural, entretanto, tal meio de obtenção destes valores é inviabilizada por uma série de dificuldades decorrentes da inconveniência ou mesmo impossibilidade em se definir o objetivo e as restrições de projeto explicitamente em função das variáveis de projeto. Tal tentativa poderia depender de hipóteses simplificadoras que acarretariam um risco à validade do modelo empregado para estudar a estrutura.

Nestes casos, o ideal seria calcular a função objetivo e as restrições impostas por meio de um método geral e robusto, cuja confiabilidade já tivesse sido amplamente testada. Acoplando-se este método a otimizadores numéricos, a síntese de estruturas complexas seria viabilizada.

Um algoritmo de análise estrutural que atende a todos estes requisitos é o Método dos Elementos Finitos, técnica de discretização de sistemas contínuos amplamente aplicada em engenharia, nas mais diversas disciplinas: tensões e deformações estáticas, análise modal, vibrações forçadas, resposta transiente, mecânica dos fluidos, transferência de calor e em virtualmente todos os contextos em que a solução de uma equação diferencial pode ser obtida mediante a ortogonalização de funções de interpolação visando a anulação de um resíduo.

O método é desenvolvido nas seguintes etapas (Ribeiro, 1985):

- ⇒ Discretização do Contínuo: a estrutura é dividida em elementos de dimensões limitadas (elementos finitos), delimitadas por pontos especiais chamados nós. Os nós são autorizados a sofrerem deslocamentos para acomodarem os esforços aplicados à estrutura, enquanto que o restante da estrutura é considerado fixo, a priori;
- ⇒ Escolha das funções de interpolação: Os deslocamentos nodais serão aproximados por funções de interpolação simples. Vale um comentário importante: a validade dos resultados dependerá da combinação entre o nível de discretização da estrutura e o grau das funções de interpolação. A solução será melhor se a malha de discretização for mais "fina" e as funções de interpolação de grau mais alto, mas isto implica obviamente em um alto custo computacional. Normalmente, pode-se balancear estas opções usando-se uma malha mais fina e funções mais simples (elementos-h) ou então o oposto, ou seja, uma malha menos discreta compensada por funções de interpolação de maior ordem (elementos-p) (Meirovitch, 1975)
- ⇒ Ortogonalização: É claro que entre as funções de aproximação e a solução exata haverá um resíduo, como é inerente a todos os métodos numéricos. Técnicas de ortogonalização podem ser usadas para minimizar estes resíduos (portanto, trata de um problema de otimização), transformando a equação diferencial em um sistema de equações algébricas cuja ordem depende do número de elementos finitos em que a estrutura foi discretizada. Nesta etapa podem ocorrer algumas variantes do método, que são diferentes abordagens

para a minimização do resíduo: equações de equilíbrio, balanço de energia, resíduos ponderados (mais comum, sobretudo o método de Galerkin), etc...

⇒ Solução numérica dos sistema de equações algébricas simultâneas provenientes da etapa anterior. Obtém-se o valor da variável de campo nos nós, os deslocamentos nodais por exemplo.

⇒ Interpolação das soluções nodais para o restante da estrutura, usando-se as funções definidas na segunda etapa. Desta forma, tem-se uma solução aproximada em toda a estrutura.

A figura 1.6 mostra o aspecto típico de uma estrutura modelada por elementos finitos:

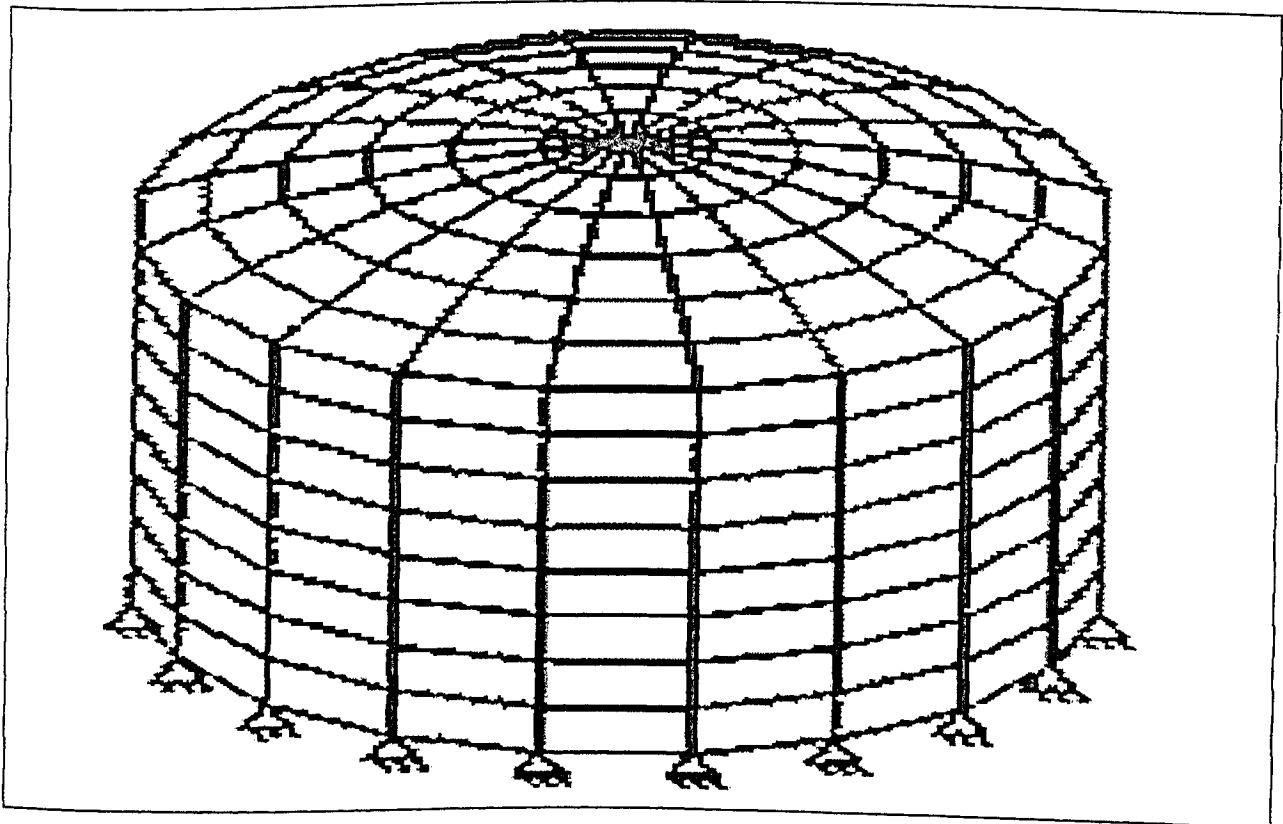


Figura 1.6 : Tanque cilíndrico modelado por elementos finitos (Spyrakos, 1996)

Nos pacotes comerciais, existem bibliotecas de elementos em que cada um é mais apropriado à modelagem de certas configurações ou partes da estrutura, no sentido de tornar o modelo o mais realista possível. Seguem alguns exemplos:

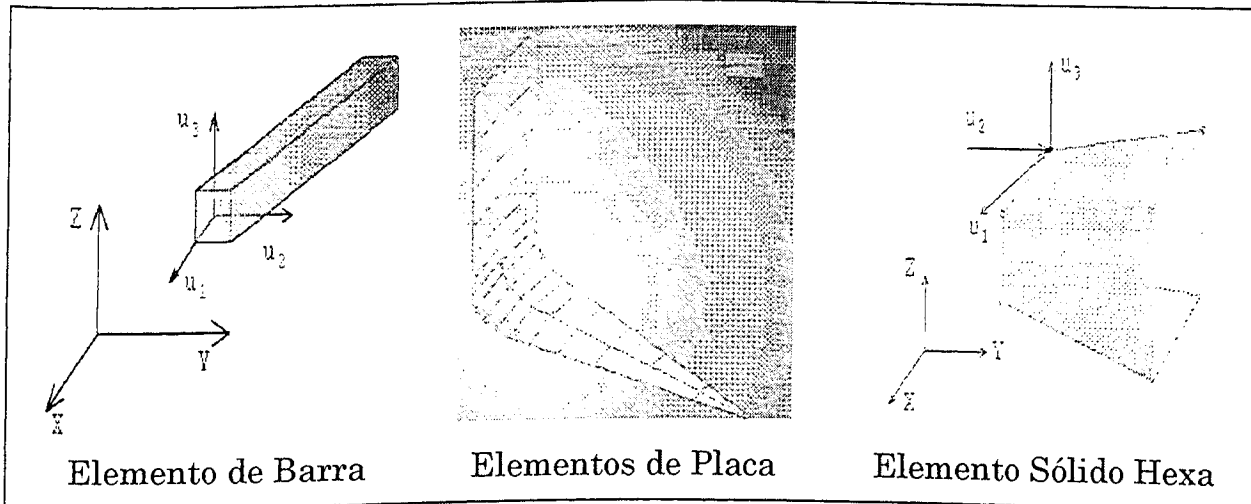


Figura 1.7 : Tipos de elementos finitos usados na modelagem de estruturas (Spyrakos, 1996).

Nas indústrias aeronáutica e automobilística, é generalizado o uso do Método de Elementos Finitos, tanto pelo emprego de pacotes comerciais quanto pelo desenvolvimento de software proprietários, ou ainda pela aplicação conjunta destes.

Esta popularidade pode ser comprovada tanto por uma simples inspeção da rotina diária de empresas do setor quanto por algumas publicações que divulgam aplicações das mais variadas e interessantes usando esta ferramenta:

⇒ Análise estática e dinâmica de rotores flexíveis (Lalanne, 1983);

- ⇒ Validação de modelos de elementos finitos de componentes automotivos via FRFs experimentais (Lammens et alii, 1995);
- ⇒ Desenvolvimento de uma FRF não-linear para simulação do conforto com o veículo em movimento (Tsutsui et alii, 1995);
- ⇒ Análise de tensões na porta do trem de pouso dianteiro de aeronaves a jato (Arakaki, Honda e Salomão, 1996);
- ⇒ Mapeamento da vulnerabilidade de aeronaves a explosivos (Moon et alii, 1996);
- ⇒ Segurança veicular (Roots et alii, 1996);
- ⇒ Predição do nível de ruído em cabines de veículos de carga, em associação com o Método dos Elementos de Contorno (Mohanty et alii, 1996);

Além destes e de inúmeros outros exemplos de aplicação da técnica de elementos finitos apenas como ferramenta de modelagem e simulação, diversos trabalhos expõe linhas de pesquisa sobre o uso do método em conjunto com otimizadores numéricos:

- ⇒ Otimização de rotores flexíveis e rodas de reação para controle de atitude de satélites (Rodrigues, 1991);
- ⇒ Ajuste de modelos de elementos finitos com base em dados experimentais (Blakely, 1991);
- ⇒ Estimção da rigidez equivalente de ligações em flaps aeronáuticos (Gonçalves, 1994);

- ⇒ Análise de durabilidade à fadiga em componentes automotivos (Kuo et alii, 1995);
- ⇒ Estudo do conforto em cabines de veículos em função de desbalanceamento nas rodas (Rose, 1995);
- ⇒ Análise de sensibilidade em estruturas espaciais (West, 1996);
- ⇒ Otimização de materiais compostos para estruturas espaciais (Collier, 1996);
- ⇒ Otimização de forma em componentes de turbinas (Holzmann e Wagner, 1996);
- ⇒ Otimização global de veículos (Bedi, Dede e Moore 1996);
- ⇒ Simulação e otimização estrutural e aerodinâmica de veículos de competição (Automotive Engineering, 1996);
- ⇒ Otimização de rotores flexíveis (Steffen Jr., 1997);

Estas publicações e os casos de sucesso nela relatados indicam que o acoplamento do método de elementos finitos com otimizadores numéricos trata-se de uma ferramenta de engenharia de concepção bastante promissora no sentido de atingir requisitos de desempenho, tempo e custo extremamente exigentes. Tal acoplamento de ferramentas já constitui uma ampla área da engenharia, estando até dividida em dois grandes grupos:

- OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL: ajustes de grandezas tais quais espessuras e comprimentos, sem contudo alterar as posições dos nós;

- OTIMIZAÇÃO DE FORMA: melhora da geometria, rearranjando as posições dos nós.

Méritos freqüentemente citados referem-se também à filosofia de trabalho decorrente da adoção destas técnicas: “Antigamente, alguns engenheiros concebiam um componente e outros o calculavam, cada qual guardando vaidosamente seus segredos. Hoje, a otimização requer uma formulação clara, computacional e ao alcance de todos” (Petiau em Ferreti, 1986)

Estas são algumas das evidências sobre uma forte tendência para que a otimização (juntamente com elementos-p, geração automática de malhas e realidade virtual/internet) se torne um paradigma de projeto em engenharia (Clarkson, 1996).

## 2 - REDUÇÃO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS:

### 2.1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES:

```
FUNCTION CALLS =    57
GRADIENT CALLS =    12

IGENESIS VERSION 3.0
DATE 10-20-97 TIME 13:31 PAGE 56
MINIMIZACAO DE TENSOES DINAMICAS, LSI620, BOX3
* DESIGN CYCLE      3 (ANALYSIS)*
```

Figura 2.1 : Fragmento de arquivo de saída do software VMA/GENESIS, ilustrando a quantidade de avaliações da função objetivo e seu gradiente a cada iteração

A julgar pela figura acima, resultado de uma tentativa real em se otimizar um sistema mecânico modelado por elementos finitos, seria extremamente custoso, do ponto de vista computacional, usufruir das vantagens listadas no capítulo anterior, quando esta técnica foi apresentada.

Assim sendo, é razoável supor que entre o otimizador e o código de elementos finitos, doravante denominado **solver**, deva existir algum elemento computacional que evite o recálculo integral do modelo tantas vezes nas muitas iterações necessárias à convergência do otimizador.

Este elemento de ligação é um conjunto de algoritmos de redução de modelos genericamente chamados de TÉCNICAS DE APROXIMAÇÃO, e sua função é considerar, para cada avaliação da função objetivo, somente a parcela do modelo de elementos finitos que efetivamente influirá no sentido do otimizador desempenhar seu papel. O estudo destas técnicas é um campo de pesquisas muito fértil e grandes esforços têm sido dispendidos para aperfeiçoá-las, uma vez que é de fundamental importância obter melhoras na velocidade de processamento,



sem contudo comprometer a qualidade das aproximações.

As duas figuras seguintes confrontam as duas formas de acoplamento do solver ao otimizador, a primeira, simplista e direta, porém inviável e a segunda, adotada correntemente, baseada nas técnicas de aproximação. Embora a introdução das técnicas de aproximação torne o processo aparentemente mais complexo, a prática tem demonstrado amplas compensações do ponto de vista da performance.

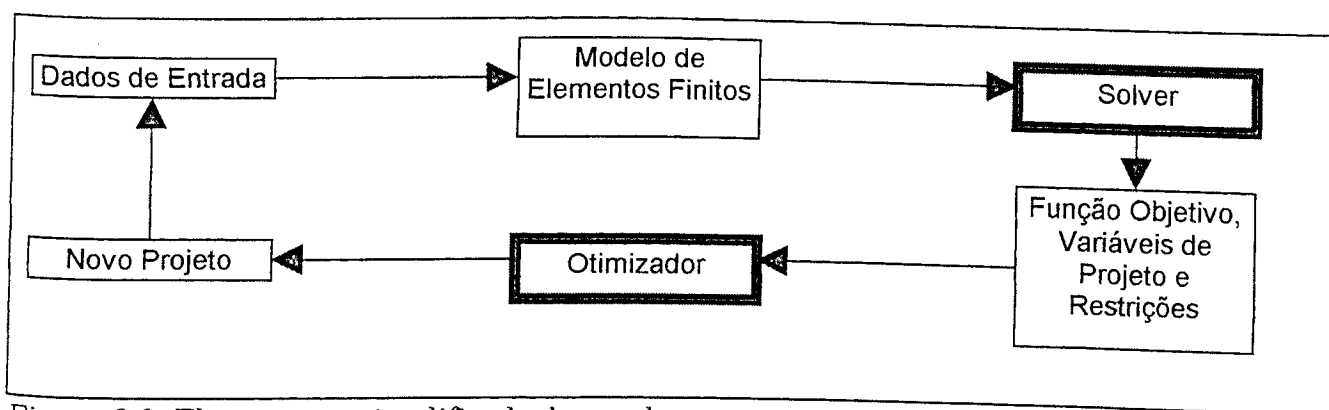


Figura 2.2: Fluxograma simplificado de acoplamento entre análise e otimização (inviável para problemas grandes)

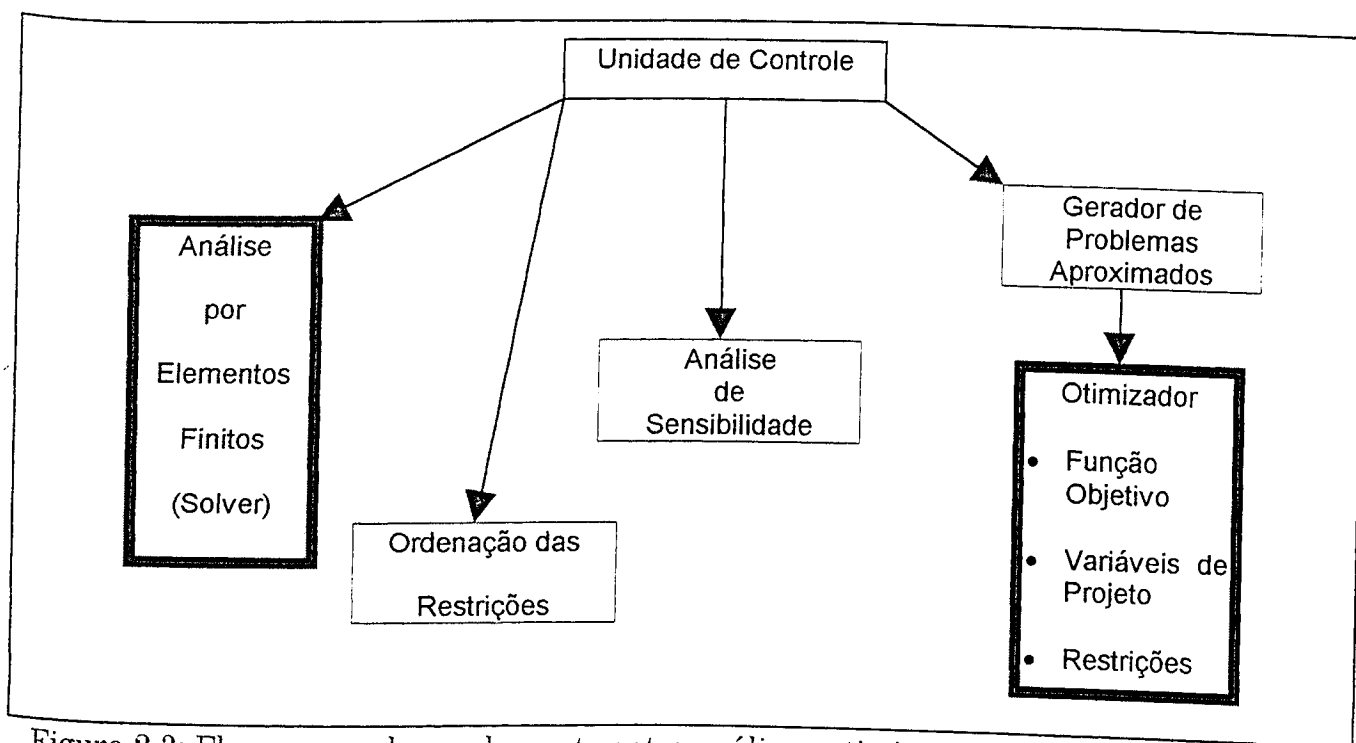


Figura 2.3: Fluxograma de acoplamento entre análise e otimização mediante modelos aproximados (Adaptado de GENESIS User's Manual, Vol I)

Vê-se que as restrições desempenham papel importante na geração de modelos aproximados, razão pela qual foi incluído o próximo tópico.

## 2.2 - NORMALIZAÇÃO DE RESTRIÇÕES:

Para que as restrições possam ser tratadas de maneira unificada pelos algoritmos de redução de modelos, é ideal que elas sejam normalizadas e tratadas de forma adimensional, uma vez que, na formulação do problema, podem ser aplicadas a um sem número de grandezas diferentes, abrangendo as mais diferentes escalas possíveis.

As seguintes equações definem as regras de normalização:

$$g_{2j-1}(\mathbf{x}) = \frac{r_j^L - r_j(\mathbf{x})}{|r_j^L|} \leq 0 \quad (2.1.1)$$

$$g_{2j}(\mathbf{x}) = \frac{r_j(\mathbf{x}) - r_j^U}{|r_j^U|} \leq 0 \quad (2.1.2)$$

onde :

$r_j(\mathbf{x})$  = valor da  $j$ -ésima resposta do sistema dada a configuração  $\mathbf{x}$ ;

$r_j^L$  = valor do limite inferior de restrição imposto à  $j$ -ésima resposta;

$r_j^U$  = valor do limite superior de restrição imposto à  $j$ -ésima resposta;

Normas com valores positivos indicam violação de restrições. Um valor unitário para uma dada restrição normalizada, por exemplo, indica uma

violação de 100 % (a grandeza restrita atingiu o dobro do valor especificado como limite).

No sentido numérico, entretanto, é necessário estabelecer um valor de tolerância para indicar tanto restrições violadas quanto restrições ativas, isto é, aquelas que estão próximas de serem violadas. Este intervalo de tolerância está representado graficamente na figura 2.4 abaixo:

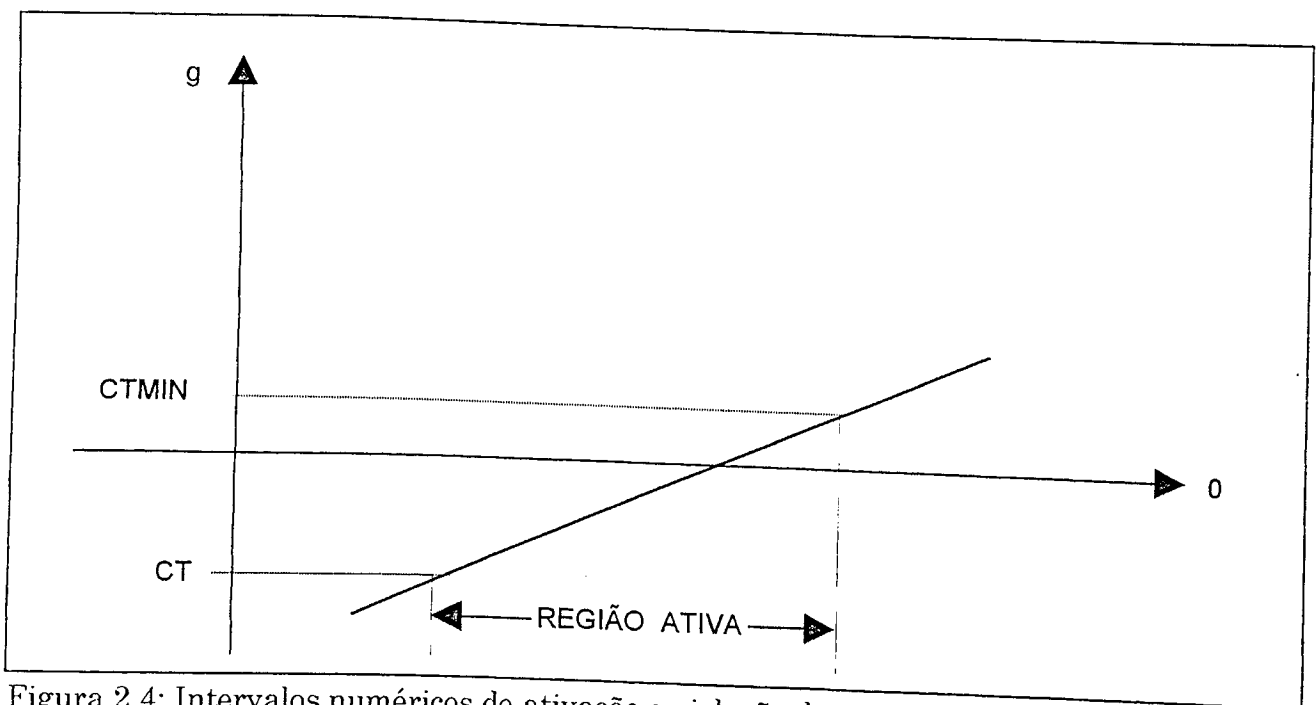


Figura 2.4: Intervalos numéricos de ativação e violação de restrições (Moore, 1992)

Na figura, CT é um valor real negativo a partir do qual a restrição é considerada ativa (suficientemente próxima de zero). A restrição permanece ativa até CTMIN, valor real positivo acima do qual a norma da restrição já se afastou de zero o suficiente para configurar uma violação.

Nos pacotes comerciais utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho, os valores de CT e CTMIN podem ser alterados pelo usuário, embora as referências (Moore, 1992 e VMA Engineering, 1996) recomendem amplamente a

utilização dos valores default. As justificativas baseiam-se no fato de que a determinação destes valores é muito mais uma questão de arte que de ciência, no que muito influem as particularidades do problema e a experiência do usuário.

Considerando o aspecto numérico, a restrição é bem condicionada se uma ampla faixa de possíveis projetos ( $x$  - abcissas) estiver contida entre os valores de  $CT$  e  $CTMIN$  (ordenadas), isto é, se a reta da figura 2.4 for suavemente inclinada.

Após estas considerações, serão apresentadas as técnicas de aproximação mais comuns.

## **2.3 - TÉCNICAS DE APROXIMAÇÃO:**

### **2.3.1) Vinculação de variáveis de projeto:**

Conforme posto na seção 3.5 do capítulo precedente, a função da análise de sensibilidade é a de selecionar quais das variáveis de projeto realmente contribuem para governar o projeto. Obviamente, aquelas que não tiverem relevância podem ser desconsideradas, reduzindo o esforço computacional requerido para desempenhar o processo de otimização.

Pode ocorrer, entretanto, que mesmo após a execução de uma rigorosa análise de sensibilidade a quantidade de variáveis de projeto participantes seja demasiadamente alta, levando a longos tempos de processamento.

Uma saída possível para reduzir o custo computacional é estabelecer algum tipo de relação entre variáveis de projeto, de modo que diminua a quantidade daquelas realmente independentes.

Chama-se este procedimento de LINKAGEM de variáveis de projeto e os critérios para executá-lo devem estar em conformidade com a física do sistema. Este alerta é feito pois não há nenhum impedimento de natureza matemática e/ou computacional para estabelecer relações de dependência entre as variáveis de projeto mas, se elas não refletirem o real comportamento do sistema, sua adoção pode comprometer a qualidade dos resultados.

Além de benefícios tocantes ao custo computacional, a vinculação de variáveis de projeto pode servir para reforçar certas condições de simetria e uniformidade altamente desejáveis para a exequibilidade prática do projeto. Seja por exemplo o caso da torre de transmissão em estrutura metálica, apresentada na figura 2.5. Imaginando que as posições dos nós em destaque na figura sejam variáveis de projeto, relações de dependência entre algumas delas seriam úteis para garantir que a configuração otimizada resulte em uma estrutura simétrica em relação ao eixo vertical . Tais relações seriam expressas pelas seguintes equações:

$$x_1 = -x_2 \tag{2.2.1}$$

$$x_5 = -x_6 \tag{2.2.2}$$

Ainda, desejando-se um projeto em que as laterais inclinadas da torre sejam linhas paralelas:

$$\mathbf{x}_4 = \frac{h_2}{h_1} \cdot \mathbf{x}_2 + \left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right) \cdot \mathbf{x}_6 \quad (2.3)$$

Após estas transformações, o vetor de variáveis de projeto, inicialmente  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6)^T$  pode ser subdividido em:

$\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_6)^T$  : vetor das variáveis de projeto independentes

$\mathbf{x}_d = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5)^T$  : vetor das variáveis de projeto dependentes

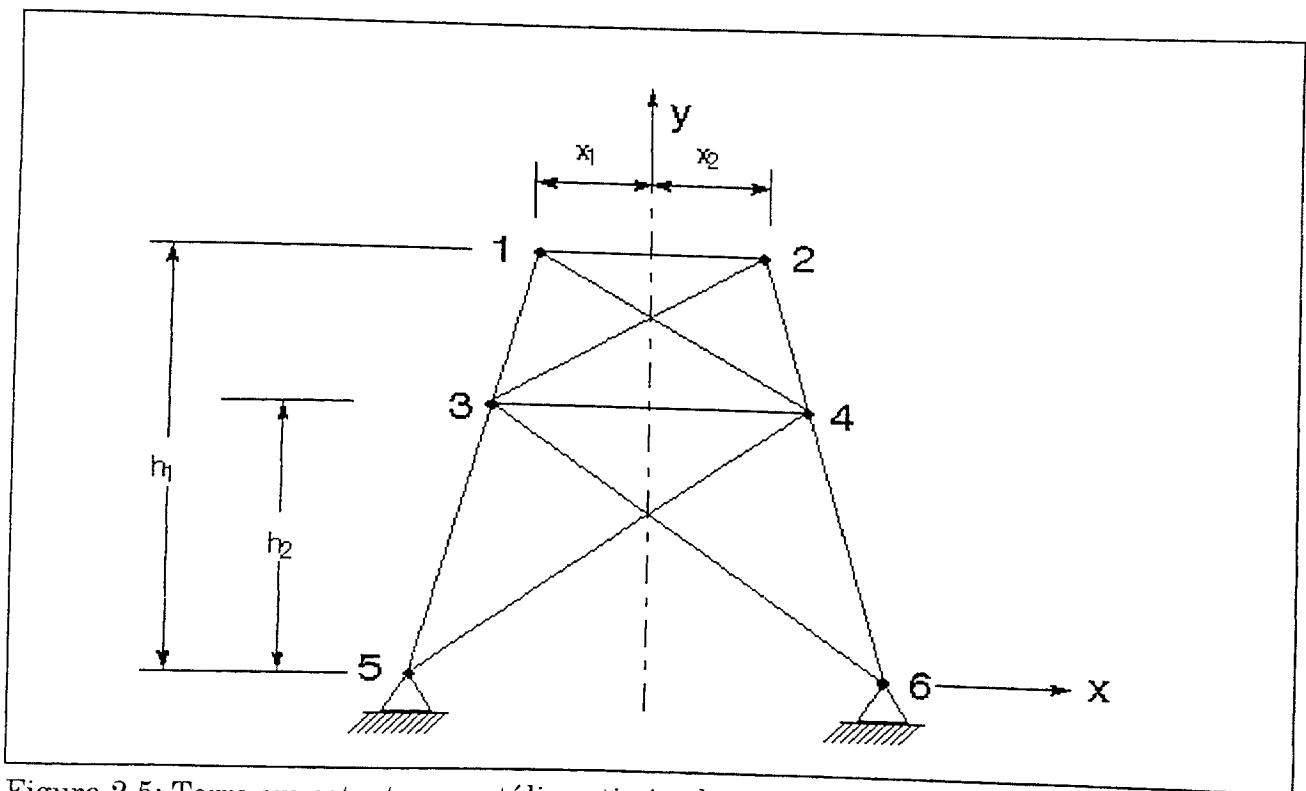


Figura 2.5: Torre em estrutura metálica otimizada com variáveis de projeto vinculadas, visando reduzir custo computacional e garantir certas relações geométricas importantes (Moore, 1992)

### 2.3.2) Deleção e enquadramento de restrições:

A unificação do tratamento das restrições, tratada na seção 3.2 do presente capítulo, tem participação nestas importantes técnicas de aproximação,

que partem do princípio evidente de que nem todas as restrições são importantes o tempo todo.

Desta forma, as restrições devem ser “filtradas” para que o algoritmo de otimização só se ocupe daquelas que efetivamente correm risco de violação em dado estágio do projeto. Isto reduz, por exemplo, a quantidade de custosas avaliações numéricas de gradientes de funções de restrição implícitas, muito comuns na otimização estrutural acoplada com o método dos elementos finitos.

A primeira das técnicas, DELEÇÃO DE RESTRIÇÕES, leva em conta que, a cada iteração do otimizador, apenas uma parcela das normas das restrições está suficientemente próxima da região de ativação, sendo que as demais pouco afetarão o projeto.

A figura abaixo ilustra estes dois grupos de restrições, sendo que TRS é um valor arbitrariamente estipulado a partir do qual a restrição é considerada “perigosa”. As observações feitas com relação aos valores default dos parâmetros CT e CTMIN na seção 3.2 também são aplicáveis a TRS.

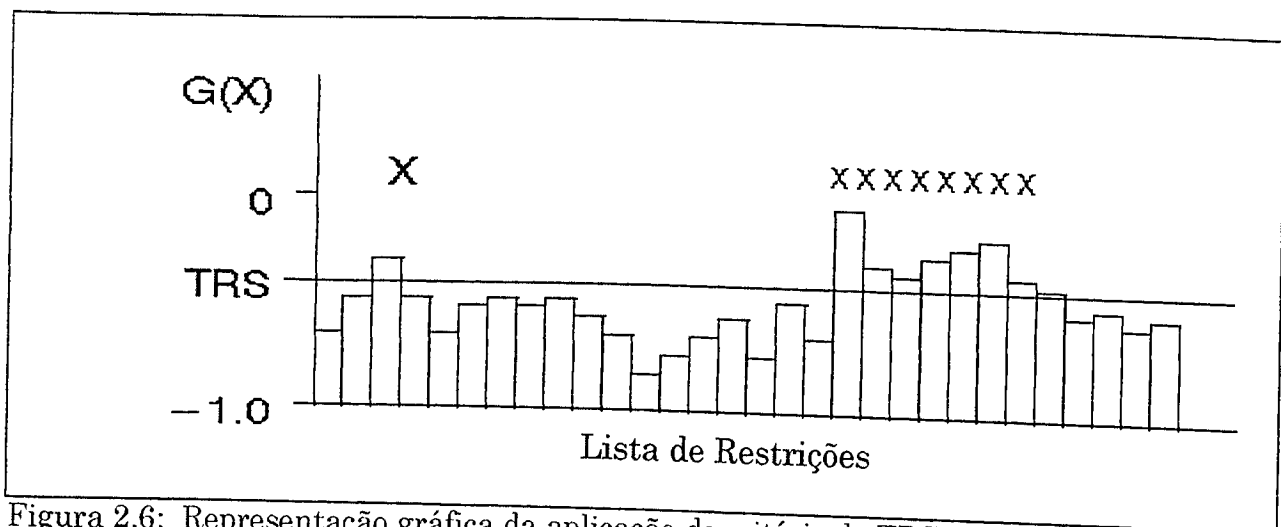


Figura 2.6: Representação gráfica da aplicação do critério do TRS para deleção de restrições (Moore, 1992)

Evidentemente, estipulando para TRS um valor mais próximo de zero, a otimização pode ser acelerada devido à consideração de um número reduzido de restrições por iteração, mas corre-se o risco de desconsiderar alguma restrição importante.

Imaginando que as restrições tenham sido deletadas a um máximo possível e que, ainda assim, seu número seja suficientemente grande para comprometer o desempenho computacional, pode-se recorrer à técnica do ENQUADRAMENTO.

Trata-se de uma estratégia que parte do seguinte princípio: várias restrições, enquanto entidades matemáticas que podem ser definidas pelo engenheiro com relativa liberdade, podem estar representando, redundantemente, um mesmo aspecto físico. Tome-se o exemplo de uma asa de aeronave modelada por centenas, talvez milhares de elementos finitos de casca. Evidentemente, os níveis de tensão em todos os elementos devem estar restritos para que não haja, em lugar algum, possibilidade de falha. Numa porção reduzida do aerofólio, entretanto, o estado de tensões em um único elemento pode ser representativo de toda a **região**, podendo então todas as restrições repetidas serem agrupadas sob uma única. Cada software comercial trata a sua maneira o conceito de regiões (Moore, 1992 e VMA Engineering, 1996), mas percebe-se claramente o potencial de redução de dados que dele decorre.

A figura 2.7 a seguir é uma ilustração gráfica do procedimento de enquadramento de restrições. O parâmetro **NSTR** define a quantidade máxima



de restrições representativas a serem retidas por região, e a especificação de seus valores segue regras análogas às dos parâmetros CT, CTMIN e TRS.

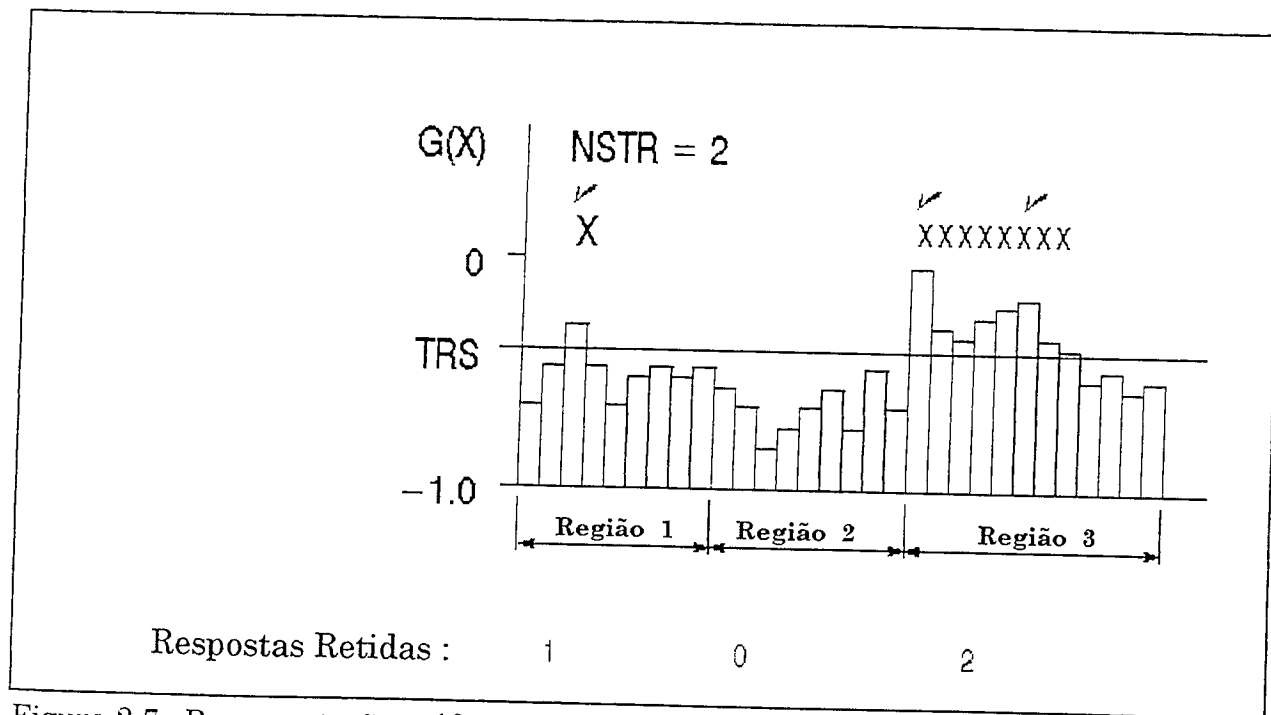


Figura 2.7: Representação gráfica da aplicação do critério do NSTR para deleção de restrições (Moore, 1992)

### 2.3.3) Aproximações Formais:

As duas técnicas de aproximação descritas na seção precedente atuam sobre as restrições de forma puramente quantitativa, sem levar em conta sua natureza matemática. Isto significa que o único objetivo é o de eliminar restrições consideradas redundantes ou desnecessárias.

Embora de inquestionável utilidade e eficiência em muitos casos, este raciocínio está sujeito a falhar quando, por exemplo, elimina-se uma série de restrições descritas por funções matemáticas simples, deixando para o otimizador a árdua tarefa de tratar numericamente outras altamente não-lineares.

Nestas situações, é cabível a aplicação da técnica das APROXIMAÇÕES FORMAIS, através da qual as restrições descritas por funções de mais alto grau de não-linearidade são aproximadas por séries de Taylor truncadas no termo linear, conforme as seguintes equações:

$$f(\mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{df}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} \cdot \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{d^2f}{d\mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}^0} \cdot \frac{\Delta\mathbf{x}^2}{2!} + \left. \frac{d^3f}{d\mathbf{x}^3} \right|_{\mathbf{x}^0} \cdot \frac{\Delta\mathbf{x}^3}{3!} + \dots$$

$$\tilde{f}(\mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{df}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^0} \cdot \Delta\mathbf{x}$$

(2.4)

Neste caso a expansão em série de Taylor foi efetuada em termos do próprio vetor das variáveis de projeto ( $\mathbf{x}$ ). Em alguns casos, entretanto, a restrição pode apresentar uma relação inversa com as variáveis de projeto, como, por exemplo, o valor da tensão em relação às dimensões da secção transversal de um dado componente da estrutura. Em casos como este, são definidas variáveis auxiliares recíprocas às variáveis de projeto originais sobre as quais é feita a expansão em série.

Os pacotes comerciais de análise e otimização fazem a seleção automática sobre qual deve ser a natureza das variáveis de aproximação formal (diretas ou recíprocas), levando em conta qual das duas formas conduzirá a um projeto mais seguro. Além disso, esta escolha pode ser facultada ao usuário do aplicativo, em função das particularidades do projeto.

#### 2.3.4) Técnicas de aproximação avançadas:

Desde o trabalho pioneiro na área (Schmidt, 1960), muitos estudos têm sido realizados sobre as técnicas de aproximação, resultando em avanços importantes, alguns dos quais já incorporados pelos software de síntese estrutural.

O foco das pesquisas mais recentes tem sido voltado para a aproximação das grandezas mais freqüentes nos problemas de otimização de estruturas. As restrições mais comuns, por exemplo, dizem respeito a tensões e freqüências naturais. Desta forma, o objetivo tem girado em torno da criação de métodos capazes de estimar estas grandezas com bom grau de precisão, utilizando com parcimônia os recursos computacionais. Existem evidências (Vanderplaats e Salajegheh, 1989 e Canfield, 1990) de que estes requisitos podem ser preenchidos mediante a substituição das grandezas a serem estimadas por outras com modelos matemáticos menos não-lineares e tão (ou mais) representativas da entidade física que se deseja aproximar.

Tanto em análise estática quanto em dinâmica, estes métodos desempenham um importante papel e é altamente desejável que o engenheiro possua uma compreensão básica a seu respeito, embora atuem de forma transparente nos programas em que se encontram disponíveis.

Os dois trabalhos supramencionados merecem destaque especial neste grupo e serão brevemente detalhados a seguir:

⇒ Aproximação de tensões em elementos estruturais (Vanderplaats e Salajegheh, 1989):

É bem provável que o problema de otimização estrutural mais comum seja o de redução do peso próprio de estruturas (com vistas à redução de custo) mediante redimensionamento de seus componentes, que inevitavelmente tendem a ficar sujeitos a tensões mais elevadas.

Como as tensões são geralmente funções altamente não-lineares das variáveis de projeto, seu cálculo direto requer grande capacidade computacional.

Entretanto, as tensões são a forma com que os materiais reagem a carregamentos externos nele aplicados, e isto ocorre mediante o surgimento de forças internas, cujo tratamento numérico é bem mais simples. A idéia deste método, portanto, reside na estimação (de alta qualidade) das tensões a partir do cálculo das forças internas atuantes nos componentes estruturais sujeitos a carregamentos, o que pode ser conseguido através de equações de equilíbrio simples.

⇒ Estimação de auto-soluções (Canfield, 1990):

Seguindo a mesma linha de raciocínio dos autores do trabalho anterior, Canfield se propõe a encontrar um conjunto de grandezas físicas representativas das frequências naturais e modos de vibrar de determinada estrutura, sem recorrer diretamente ao clássico cálculo por auto-valores e auto-vetores que implica em complicadas manipulações matriciais que aumentam o

tempo de processamento de forma não-linear com a ordem (número de graus de liberdade) do problema.

Da teoria fundamental de vibrações mecânicas (Thomson, 1978), o comportamento de um sistema vibratório é determinado (a menos dos termos de dissipação) pela relação entre as energias Cinética e Potencial que ele é capaz de armazenar em seus modos naturais de vibração. Tal relação é definida matematicamente pelo Coeficiente de Rayleigh:

$$\lambda = \omega^2 = \frac{\Phi^T K \Phi}{\Phi^T M \Phi} = \frac{U}{T} \quad (2.5)$$

onde:

$\lambda$  são os auto-valores

$\omega$  são as frequências naturais

$\phi$  são os auto-vetores

**M** é a matriz de massa do sistema

**K** é a matriz de rigidez do sistema

**U** é a energia potencial elástica

**T** é a energia cinética

A estimação das energias, através da aproximação do coeficiente de Rayleigh, implica em menores tempos de processamento, representando com boa precisão as auto-soluções do sistema.

### **3 - PROGRAMAS COMPUTACIONAIS EMPREGADOS:**

#### **3.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS:**

Duas razões principais nortearam a opção em se adotar dois programas diferentes para realizar estudos de casos de otimização estrutural de projetos de componentes veiculares : comparar os resultados por um e pelo outro programa e verificar as possíveis diferenças gerais entre um software de análise por elementos finitos dotado de um módulo opcional de otimização (MSC/NASTRAN versão 68) e outro com análise e otimização integradas (VMA/GENESIS versão 3.0). Cabe salientar que a empresa em parceria com a qual foi desenvolvida a presente pesquisa utiliza há vários anos o programa MSC/NASTRAN como ferramenta de projeto.

É bem provável que diversos software além dos já existentes com as mesmas finalidades sejam criados e comercializados nos próximos anos, dada a imensa demanda que se espera do mercado de engenharia auxiliada por computador (CAE) por programas de síntese estrutural. Isto possibilitará um sem número de comparações semelhantes à que foi desenvolvida neste trabalho, gerando informações importantes tanto para o meio acadêmico como para o industrial.

Ambos os programas foram utilizados em plataformas IBM RISC/6000, sob sistema operacional AIX.

#### **3.2 - CARACTERÍSTICAS GERAIS:**

##### **3.2.1) MSC/NASTRAN:**

MSC/NASTRAN é um dos mais antigos e bem estabelecidos códigos de elementos finitos disponíveis no mercado, desfrutando de grande prestígio nos setores industrial e acadêmico. Atualmente, o software encontra-se na versão 70, e as disciplinas de análise são definidas pelo usuário mediante a escolha de uma dentre várias seqüências de solução disponíveis, chamadas simplesmente de SOLUÇÕES. A solução 200 é responsável pela ativação do módulo de otimização no NASTRAN. Tal módulo de otimização pode atuar em conjunto com quaisquer outras disciplinas de análise suportadas pelo programa, que são chamadas, na forma de modelos reduzidos, como acessórios do módulo de otimização, desempenhando somente a tarefa de cálculo da função objetivo e das restrições.

A estrutura geral do software é descrita na figura 3.1 abaixo:

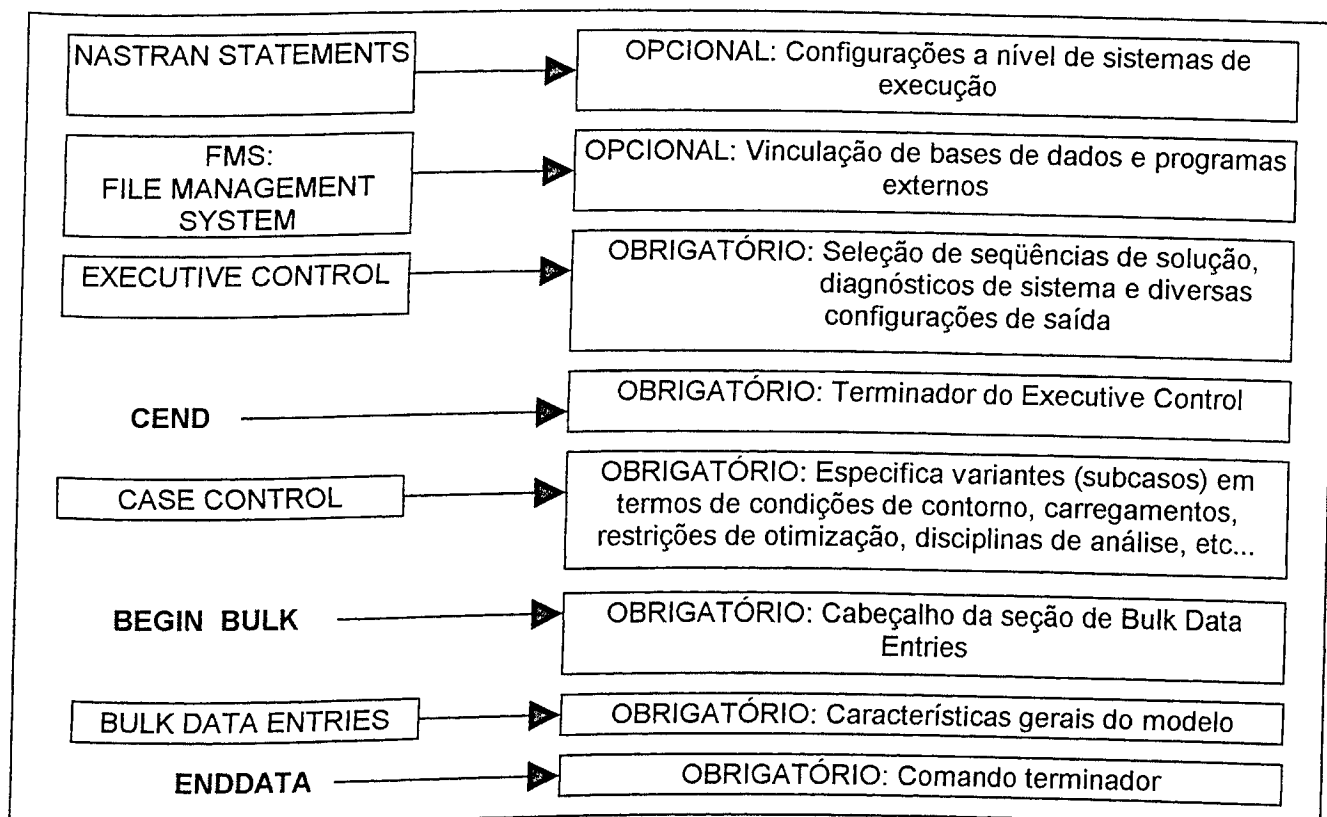


Figura 3.1: Estrutura geral de um arquivo de submissão para o MSC/NASTRAN. Entre molduras estão blocos de dados e em negrito, comandos isolados (Reymond e Miller, 1993)

### 3.2.2) VMA/GENESIS:

A estrutura de programação de um arquivo de entrada de dados para o VMA/GENESIS é bem semelhante à do MSC/NASTRAN, com algumas diferenças no tocante a detalhes de sintaxe:

- ⇒ Em GENESIS, o CASE CONTROL do MSC NASTRAN tem a mesma função e a mesma posição no fluxo de código, mas é chamado de LOAD CASE;
- ⇒ O décimo campo de sintaxe dos comandos, que é dedicado ao caractere continuador de linha no MSC/NASTRAN, recebe dois possíveis tratamentos em GENESIS: na parte de análise, ele é simplesmente ignorado enquanto que, na parte de otimização, é ativo, contendo parâmetros de comandos;

As demais diferenças devem-se a particularidades de sintaxe entre comandos com funções semelhantes e às diferenças nos algoritmos de otimização de forma. Detalhes serão cobertos nas duas seções seguintes.

No mais, a grande semelhança entre os programas garante uma certa compatibilidade no sentido de ser possível a utilização de um único pré/pós-processador gráfico para ambos os programas.

As semelhanças entre os dois software prosseguem no que diz respeito ao otimizador por eles usado. Ambos lançam mão do programa D.O.T. (Design Optimization Tools), comercializado pela empresa Vanderplaats Research and Development (VR&D). Ao NASTRAN está acoplada a versão 4.0 e, ao GENESIS, a 4.10, cujo formato de saída de dados é mais conveniente ao



usuário. Em ambas as versões, entretanto, o algoritmo de busca default é o Método Modificado das Direções Viáveis.

### **3.3 - PROGRAMAÇÃO DAS SUB-ROTINAS DE OTIMIZAÇÃO NOS SOFTWARE UTILIZADOS:**

Em ambos os pacotes empregados, existem opções limitadas quanto à seqüência de programação a ser adotada, o que facilita consideravelmente o trabalho do usuário, que fica então restrito à formulação conceitual do programa e posterior emprego adequado dos comandos, respeitando suas relações lógicas e regras de sintaxe.

A seguir, apresentaremos as linhas gerais que governam a geração de uma tarefa de otimização estrutural, citando os comandos empregados em ambos os programas utilizados, ressaltando aspectos importantes ao entendimento do fluxo lógico. Como não se pretende que esta seção faça o papel de guia de utilização dos software, os detalhes de sintaxe e implementação serão omitidos, sendo que o leitor interessado pode encontrá-los na farta documentação que acompanha cada programa e que se encontra listada na seção de referências bibliográficas ao final deste trabalho.

⇒ Primeiro passo - Declaração das variáveis de projeto:

Uma das grandes vantagens do emprego de um algoritmo de síntese estrutural que alie o método dos elementos finitos e otimizadores numéricos é

que não se requer o conhecimento da função objetivo como uma função explícita das variáveis de projeto.

Assim sendo, basta compor uma lista de quais parâmetros o otimizador está autorizado a alterar na tentativa de otimizar a estrutura, e o próprio código se encarrega de estabelecer as relações entre os membros desta lista (variáveis de projeto) e o modelo matemático do sistema.

A declaração propriamente dita destas variáveis é feita mediante os seguintes comandos:

- MSC/NASTRAN: DESVAR
- VMA/GENESIS: DVAR

Em ambos os pacotes, o comando é descrito por um mnemônico de DESIGN VARIABLES (variáveis de projeto, em inglês). Isto é, de certa forma, comum a todos os outros comandos, tanto de análise quanto de otimização, com o objetivo evidente de facilitar a memorização pelo usuário.

Ainda fazendo parte do procedimento de declaração, a cada variável de projeto deve ser atribuído um rótulo e um valor inicial. Opcionalmente, pode-se ainda impor limites inferiores e/ou superiores aos valores que estas variáveis poderão assumir durante o processo de otimização (restrições laterais).

Um comentário importante deve ser feito sobre os valores iniciais das variáveis de projeto. Evidentemente, elas estarão associadas a propriedades do modelo de elementos finitos (por exemplo, a espessura de um elemento de

casca descrevendo as paredes de um cilindro), mas seus valores não devem ser necessariamente coincidentes. Caso ainda assim o sejam, a saída do programa conterá um elemento constatando que não há diferenças entre o projeto inicial e o modelo. Se houver alguma diferença, ela pode ser identificada como razoável, resultando apenas numa mensagem de alerta, ou discrepante, caso em que a execução será abortada, seguida de uma mensagem de erro fatal.

⇒ Segundo passo - Fixação de relações entre as variáveis de projeto e propriedades do modelo:

Normalmente, os modelos de elementos finitos são construídos de forma que um grande número de elementos (função da geometria), estejam agrupados sob uma mesma entidade representativa de suas características em comum, isto é, sob uma mesma propriedade.

Desta forma, quando o otimizador altera uma variável de projeto associada a uma propriedade do modelo, um grande número de elementos (e conseqüentemente uma grande parcela física da estrutura), será afetada de uma só vez.

Isto confere amplo poder aos otimizadores de estruturas pois grandes alterações podem ser conseguidas mediante o emprego de um pequeno número de variáveis de projeto. Evidentemente, poucas variáveis de projeto implicam em baixo esforço computacional imposto ao otimizador.

Adicionalmente, existe a vantagem de que as relações entre variáveis de projeto e propriedades do modelo podem ser estabelecidas de diferentes formas.

A primeira e mais simples delas corresponde a associar variáveis de projeto a características do modelo que sejam prontamente disponíveis, como a espessura de um elemento de placa, por exemplo.

Uma opção mais sofisticada é a associação de variáveis de projeto a propriedades sintéticas, que são características artificiais criadas a partir das propriedades fundamentais do modelo. Um exemplo seria a composição de uma propriedade sintética que descrevesse a distribuição de espessuras ao longo da estrutura a partir das espessuras fundamentais dos elementos de placa.

GENESIS vai além, oferecendo uma classe de propriedades que especificam o tipo construtivo de cada elemento. Isto significa que, ao invés de definir um dado componente apenas como elemento de viga, por exemplo, poder-se-ia especificar mais, adotando um elemento de viga I, T, cantoneira ou uma série de outros perfis estruturais disponíveis.

A nível de comandos, os dois software implementam os recursos acima descritos da seguinte forma:

- Relação entre variáveis de projeto e propriedades fundamentais:
  - MSC/NASTRAN: DVPREL1
  - VMA/GENESIS: DVPROP1
- Relação entre variáveis de projeto e propriedades sintéticas:

- MSC/NASTRAN: DVPREL2
- VMA/GENESIS: DVPROP2

A especificação das relações sintéticas com as variáveis de projeto e propriedades fundamentais envolvidas requer ainda a chamada do comando DEQATN (tanto NASTRAN quanto GENESIS) que, utilizando as regras da linguagem FORTRAN, define equações para as relações desejadas.

- Relação entre variáveis de projeto e propriedades construtivas específicas:
  - MSC/NASTRAN: N/A
  - VMA/GENESIS: DVPROP3

É possível perceber que a associação entre variáveis de projeto e propriedades de modelos é o ponto nevrálgico do funcionamento das rotinas de síntese estrutural. Associações corretas e criativas levam a convergência rápida, fácil e satisfatória, enquanto qualquer equívoco nesta etapa pode gerar problemas consideráveis. Evidentemente, o uso apropriado deste recurso está sujeito a uma boa compreensão física do problema que estiver sendo tratado.

Para problemas de otimização de forma, esta etapa é desenvolvida a partir de comandos diferentes, embora a essência seja praticamente a mesma. Por sua extensão, o problema será tratado na próxima seção.

Na otimização dimensional, as variáveis de projeto são associadas a propriedades também dimensionais do modelo (espessuras, comprimentos, etc...).

Já em problemas de otimização de forma, associação é feita com o posicionamento dos nós do modelo de elementos finitos, diretamente ou a partir de modos preferenciais de deformação (vide maiores detalhes na seção 3.4)

⇒ Terceiro passo - Especificação das respostas de interesse a serem obtidas a partir da análise:

Em problemas de síntese estrutural, o projetista está normalmente mais interessado em algumas respostas que em outras, porque existem aquelas que estão mais diretamente relacionadas à obtenção do objetivo e/ou ao condicionamento das restrições. Ambos os pacotes comerciais empregados no desenvolvimento deste trabalho permitem a seleção estas grandezas mais prioritárias, através dos seguintes comandos:

- NASTRAN: DRESP1 ou DRESP2
- GENESIS: DRESP1, DRESP2 ou DRESP3

DRESP1 define respostas primárias que podem ser diretamente obtidas a partir das saídas padrão dos programas. Já o comando DRESP2 define respostas sintéticas, a serem construídas com base nas respostas fundamentais (DRESP1), num raciocínio bastante análogo ao das relações sintéticas entre variáveis de projeto e propriedades do modelo, descritas na seção precedente. A semelhança é estendida pelo uso da diretiva DEQATN como meio de definição das respostas sintéticas via equação. Com o uso combinado de DRESP2 e

DEQATN pode-se, por exemplo, determinar o valor RMS de um conjunto de deslocamentos a partir de um conjunto de amplitudes.

GENESIS oferece ainda a opção DRESP3, em que respostas sintéticas podem ser definidas pelo usuário mediante subrotinas completas, ao invés do mero emprego de equações. Este recurso seria então reservado aos casos em que as respostas sintéticas tivessem alto grau de complexidade quando comparadas com as respostas fundamentais.

⇒ Quarto passo - Eleger o objetivo dentre as respostas de interesse:

A uma das respostas selecionadas no passo precedente deve ser atribuído o status de objetivo. Isto é feito de forma simples, sem a necessidade de explicitar as relações entre a função objetivo e as variáveis de projeto.

Ao nível dos aplicativos utilizados, os comandos reservados para esta operação são os seguintes:

- MSC/NASTRAN: DESOBJ (No CASE CONTROL)
- VMA/GENESIS: DOBJ (No BULK DATA SECTION)

É importante notar que a declaração da função objetivo ocorre em blocos de códigos diferentes em cada um dos software. Até a versão 67 do MSC/NASTRAN, DESOBJ também era declarada no BULK DATA SECTION, nas versões posteriores tal sintaxe resultará numa mensagem de erro fatal

⇒ Quinto passo - Aplicação de restrições às respostas de interesse

Conforme foi visto anteriormente, as restrições laterais, caso existam, devem ser aplicadas diretamente sobre as variáveis de projeto, no momento de sua declaração.

Quanto às respostas estruturais, que muito freqüentemente são funções implícitas de variáveis de projeto, devem ser restritas explicitamente, ou seja, devem ser estabelecidos limites inferiores e superiores para as respostas estruturais especificadas no passo precedente. Nos programas utilizados, isto se faz da seguinte forma:

- MSC/NASTRAN: DCONSTR
- VMA/GENESIS: DCONS

As restrições serão aplicadas às respostas estruturais independentemente de seu tipo (fundamentais ou sintéticas).

Em caso de violação durante o processo de síntese, o arquivo de saída de dados pode conter as informações pertinentes (quais as restrições violadas e em quanto), se for configurado para tal.

⇒ Sexto passo - Customização de parâmetros do otimizador:

Esta etapa é opcional, sendo que os manuais correspondentes aos programas até mesmo recomendam a manutenção dos valores default para grande parte dos parâmetros customizáveis.

Em todo caso, podem ser usados os comandos DOPTPRM no MSC/NASTRAN e DOPT no VMA/GENESIS para definir, por exemplo, o número



máximo de iterações do otimizador, as opções do arquivo de saída e o método de aproximações formais, entre outros.

### 3.4 - PROCEDIMENTOS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA:

A montagem de uma rotina básica de otimização de forma em MSC/NASTRAN ou VMA/GENESIS deve seguir aproximadamente as mesmas etapas necessárias à otimização dimensional. A grande diferença irá situar-se justamente no interior do módulo de associação das variáveis de projeto às propriedades do modelo, que novamente assume papel preponderante no processo.

As variáveis de projeto, parâmetros continuamente variados pelo otimizador ao longo do processo, devem estar vinculadas às coordenadas nodais. Isto pode ser obtido mediante uma associação direta, isto é, as posições dos nós serão alteradas proporcionalmente às variações impostas às variáveis de projeto, ou ainda através de um modo de deformação preferencial, ou seja, o aspecto da forma otimizada é definido a priori, mediante modelos auxiliares, cabendo às variáveis de projeto atuarem apenas e tão somente como fatores de escala em relação à forma escolhida.

Tudo isto decorre da maneira como os pacotes computacionais representam internamente esta entidade geométrica complexa que chamamos de forma. Neste particular, existe intensa atividade de pesquisa e, conforme referência consultada (Eizadian, 1984), os programas comerciais utilizam apenas

uma pequena parcela das várias opções existentes no que tange à representação e otimização de forma.

Os que foram empregados durante o desenvolvimento deste trabalho, por exemplo, recorrem aos seguintes métodos:

### 3.4.1) Otimização de forma no MSC/NASTRAN:

⇒ Representação da forma:

Seja a linha reta abaixo, definida por quatro nós:

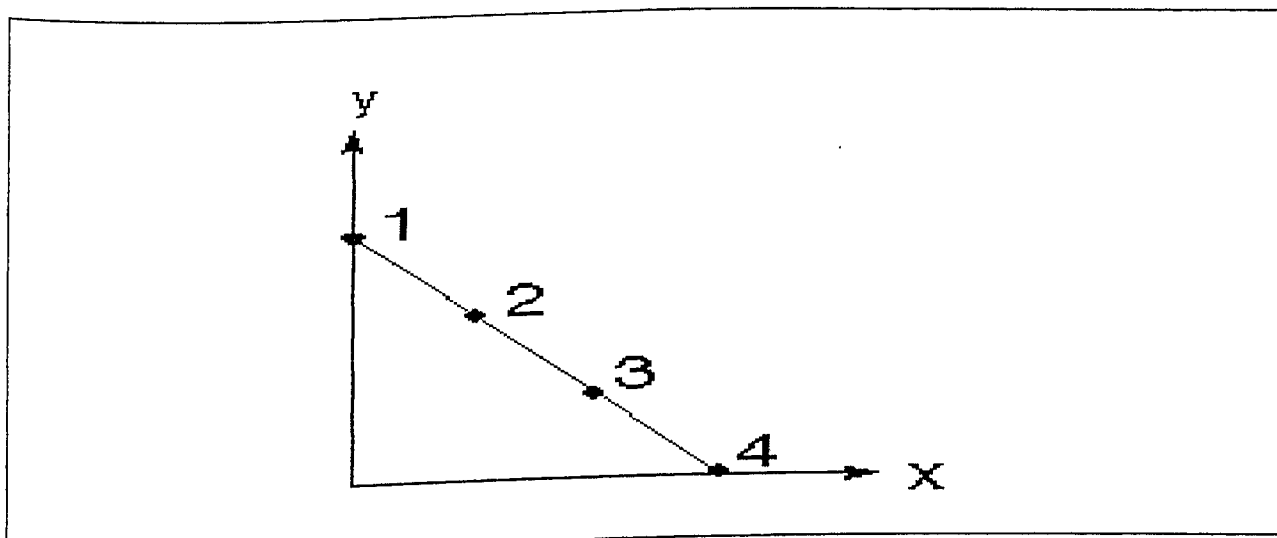


Figura 3.2: Linha reta representada por quatro nós (Moore, 1992)

Sua forma pode ser equacionada da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} G_{2x} \\ G_{2y} \\ G_{3x} \\ G_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} G_{1y} \\ G_{4x} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde  $G_{ij}$  indica a presença de um nó (grid), sendo  $i$  o número do ponto e  $j$  a referência ao eixo ( $x$  ou  $y$ ).

Desta maneira, as coordenadas planas dos pontos intermediários da reta são expressos como uma combinação linear das posições das extremidades. Reescrevendo a relação em termos das variações nas posições nodais (mecanismo de ação da otimização de forma), tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \Delta G_{2x} \\ \Delta G_{2x} \\ \Delta G_{2x} \\ \Delta G_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta G_{1y} \\ \Delta G_{4x} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

A matriz de coeficientes, que é a base do espaço vetorial das possíveis combinações lineares entre os pontos da geometria permaneceu inalterada com a introdução do termo variacional  $\Delta$ . Ela será o agente diretor da otimização de forma e os diferentes algoritmos disponíveis constituem as diversas alternativas existentes para sua obtenção. Por ser a base do espaço vetorial de todas as possíveis formas (produzidas então a partir de combinações lineares desta base), recebe a denominação de **base de forma**.

A equação (3.2) mostra como as coordenadas dos pontos intermediários da reta irão variar em função de alterações nas posições dos nós da extremidade. Entretanto, mesmo estes nós terminais não são afetados diretamente pelo otimizador que, na verdade, atua sobre as variáveis de projeto. Desta maneira, conforme já havia sido antecipado, deve ser feita uma associação pela qual a cada alteração imposta pelo otimizador às variáveis de projeto, corresponderá uma variação nas coordenadas nodais. Fazendo a seguinte substituição de variáveis:

$$\Delta x_1 = \Delta G_{1y}$$

$$\Delta x_2 = \Delta G_{4x}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta G_{1y} \\ \Delta G_{2x} \\ \Delta G_{2y} \\ \Delta G_{3x} \\ \Delta G_{3y} \\ \Delta G_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{Bmatrix}$$

(3.3)

onde  $x_1$  e  $x_2$  são duas variáveis de projeto, cada uma associada ao deslocamento nodal de uma das extremidades da reta. A influência de cada uma delas sobre o posicionamento dos nós é determinada pela coluna correspondente da matriz de base de formas, isto é,  $x_1$  está associada à primeira coluna e  $x_2$  à segunda.

A figura 3.3 a seguir representa graficamente este conceito, para as colunas 1 (influência em  $y$ , por estar associada a  $x_1$ ) e 2 (influência em  $x$ , por estar associada a  $x_2$ ) da matriz de transformação linear deste exemplo.

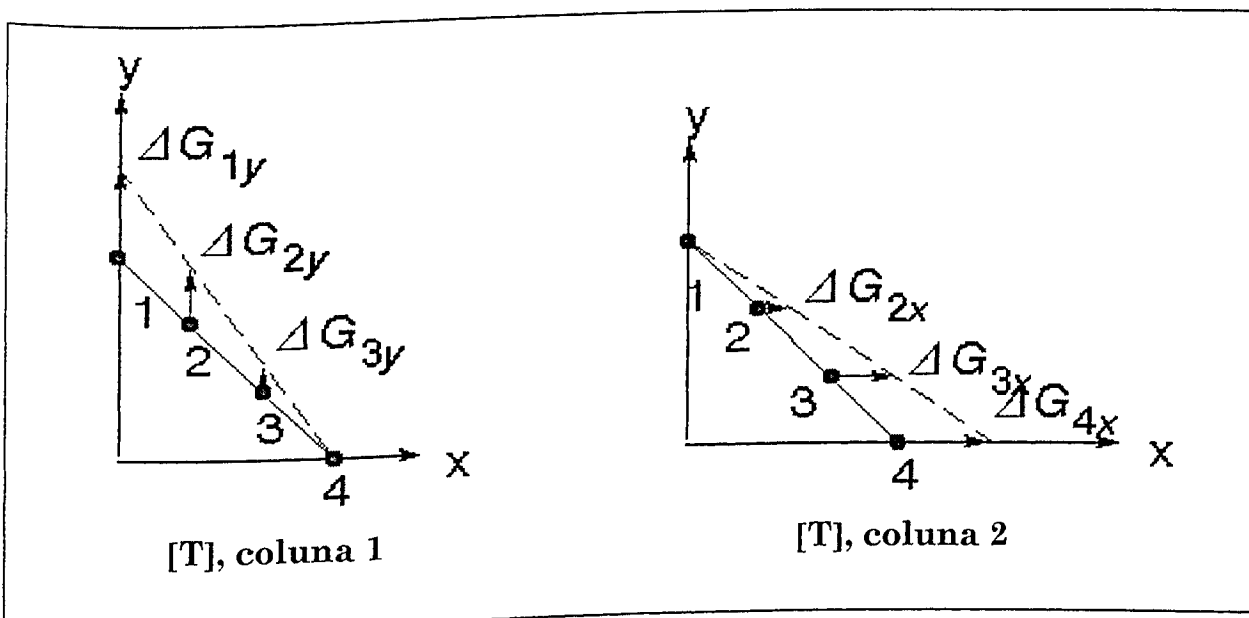


Figura 3.3: Representação gráfica da relação entre as variações das coordenadas nodais e as colunas da matriz base de formas (Moore, 1992)

Generalizando esta formulação, vem que:

$$\{\Delta G\}_{m \times 1} = [T]_{m \times n} \cdot \{\Delta x\}_{n \times 1} \quad (3.4)$$

onde:

$\{\Delta G\}$  : vetor das variações nas coordenadas nodais;

$[T]$  : matriz base de formas;

$\{\Delta x\}$  : vetor das variações nas variáveis de projeto;

$m$  : números de nós sujeitos a alteração de coordenadas;

$n$  : quantidade de variáveis de projeto.

Uma vez apresentada a maneira de representação da forma, serão introduzidos os algoritmos pelos quais ela pode ser modificada:

⇒ Métodos de otimização de forma no MSC/NASTRAN:

- Variação manual:

Requer uma entrada de dados no formato nó-a-nó, sendo portanto pouco indicada para problemas grandes. O comando DVGRID (DESIGN VARIABLE TO GRID) associa às alterações nas variáveis de projeto variações, em cada direção, nas coordenadas nodais. A equação governante tem a seguinte forma:

$$\{\Delta G\}_i = \left( \text{COEFF} \cdot \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \right) \cdot \Delta x_j \quad (3.5)$$

onde:

$\{ \Delta G \}_i$  : variação nas coordenadas do i-ésimo nó;

COEFF : fator de escala entre as alterações nas variáveis de projeto e as variações nas coordenadas nodais;

N1, N2, N3 : componentes de variação de coordenadas nodais em cada uma das direções coordenadas do espaço tri-dimensional;

$\Delta x_j$  : alteração imposta pelo otimizador à j-ésima variável de projeto;

- Entrada direta de formas:

Baseia-se no princípio de que os vetores que descrevem as bases de forma já estão disponíveis em algum banco de dados externo à rotina de síntese estrutural, de onde podem ser recuperados pelo uso do comando DBLOCATE, na FMS (File Management Section : Seção de Gerenciamento de Arquivos) do arquivo de submissão. Uma vez lidos das bases de dados externas, estes vetores são associados às variáveis de projeto através do comando DVSHAP (DESIGN VARIABLE TO SHAPE).

A geração destes vetores, por sua vez, requer a construção de modelos auxiliares que, quando sujeitos a carregamentos estáticos, tenham modos de deformação semelhantes às mudanças de forma que o usuário deseja impor à estrutura.

Sua principal desvantagem é que as bases de forma são lidas do arquivo externo uma única vez, no início do processo, não sendo continuamente

atualizadas à medida em que a forma varia. Deste modo, existe uma forte tendência à distorção da malha de elementos finitos, incorrendo no risco de mal condicionamento numérico. O método manual apresentado anteriormente, aliás, também está sujeito a este problema.

- Formas de contorno geométricas:

Define variações de forma permitidas apenas na fronteira da estrutura, o que já é uma vantagem, pois diminui enormemente a massa de dados (coordenadas de nós) a ser tratada. Os nós de contorno da estrutura são coletados pelo comando BNDGRD (BOUNDARY GRID).

Outro ganho introduzido por este método é que as variações de forma impostas à fronteira são continuamente interpoladas para os nós do interior da estrutura, evitando portanto o problema de distorção de malha.

Apesar destas vantagens, um ponto negativo é herdado do primeiro método (associação manual) : é requerido o uso do comando DVGRID para vincular as variações nas coordenadas de cada nó às alterações impostas às variáveis de projeto pelo otimizador.

Portanto, este método pode ser considerado como um aperfeiçoamento do método de associação manual, pois fica restrito apenas aos nós da fronteira, economizando dados de entrada, ao mesmo tempo em que há um mecanismo de prevenção contra a distorção de malha.

- Formas de fronteira analíticas:

Este método é o mais avançado à disposição dos usuários do MSC/NASTRAN para otimização de forma. De uma certa forma, ele é uma combinação do segundo com o terceiro métodos apresentados pois:

- A geração das bases de forma é feita mediante modelos auxiliares, eliminando a tediosa tarefa de atribuir, nó-a-nó, as variações de coordenadas às alterações nas variáveis de projeto;
- As mudanças de forma na fronteira do modelo são interpoladas para o interior, estando tal processo sob controle (e, portanto, responsabilidade) do usuário.

A geração de modelos auxiliares é conceitualmente muito simples, embora sua execução possa ser trabalhosa conforme o caso: no caso de problemas planos, empregam-se elementos de barra sucessivamente dispostos para descrever o contorno. Por exemplo, se o objetivo for otimizar a forma de um furo numa placa, as bordas deste furo podem ser moldadas por um polígono de  $n$  elementos de barra, com  $n$  suficientemente grande para evitar aproximações grosseiras.

Em problemas tridimensionais, as faces do modelo (fronteiras que terão a forma otimizada) podem ser modeladas por elementos de placa sujeitos à condições de contorno e carregamentos coerentes com a variação de forma que se deseja impor. Por exemplo, para levar a viga engastada da configuração descrita



na figura 3.4 para a da figura 3.5, o modelo auxiliar descrito na figura 3.6 seria bastante apropriado.

A utilização de programas de pré-processamento adequados facilita a criação destes modelos aproximados, sobretudo nos casos mais complexos, envolvendo quantidades consideráveis de nós. Uma recomendação geral, entretanto, diz respeito à condução de uma análise estática prévia dos modelos auxiliares, com o intuito de verificar se as deformações que eles irão assumir condizem com as mudanças de forma que o projetista deseja impor.

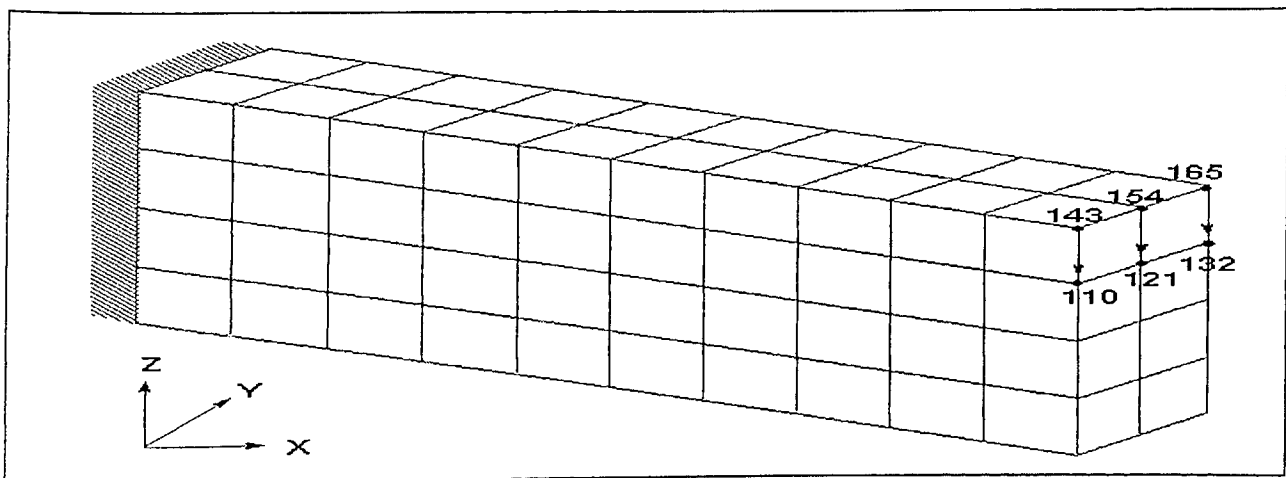


Figura 3.4: Modelo em elementos sólidos de uma viga engastada. Deseja-se otimizar a forma para eliminar o excesso de material na extremidade livre (Moore, 1992)

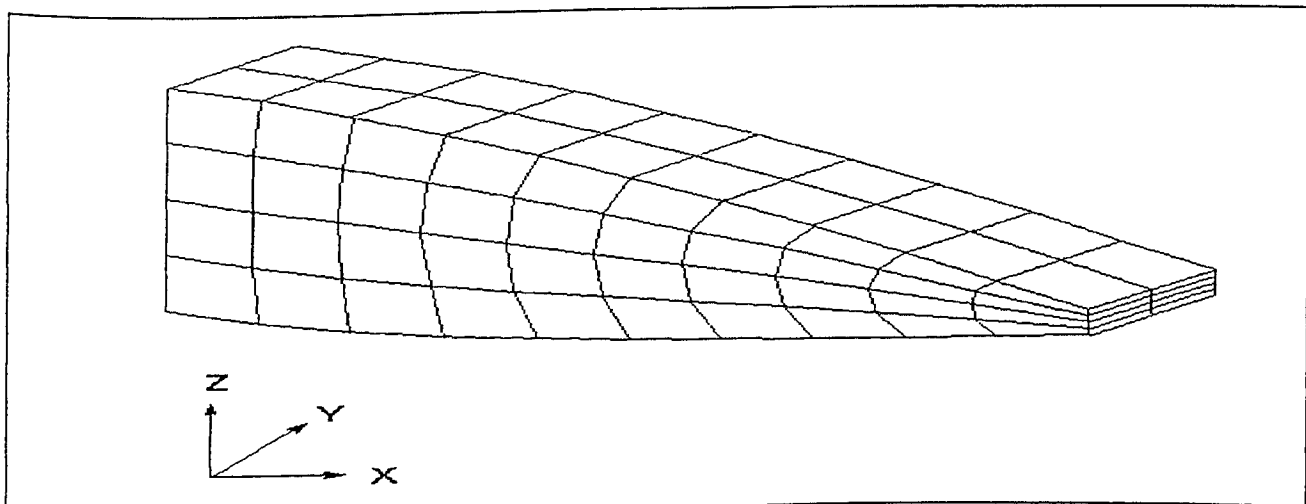


Figura 3.5: Forma otimizada pretendida para o modelo da figura 3.4 (Moore, 1992)

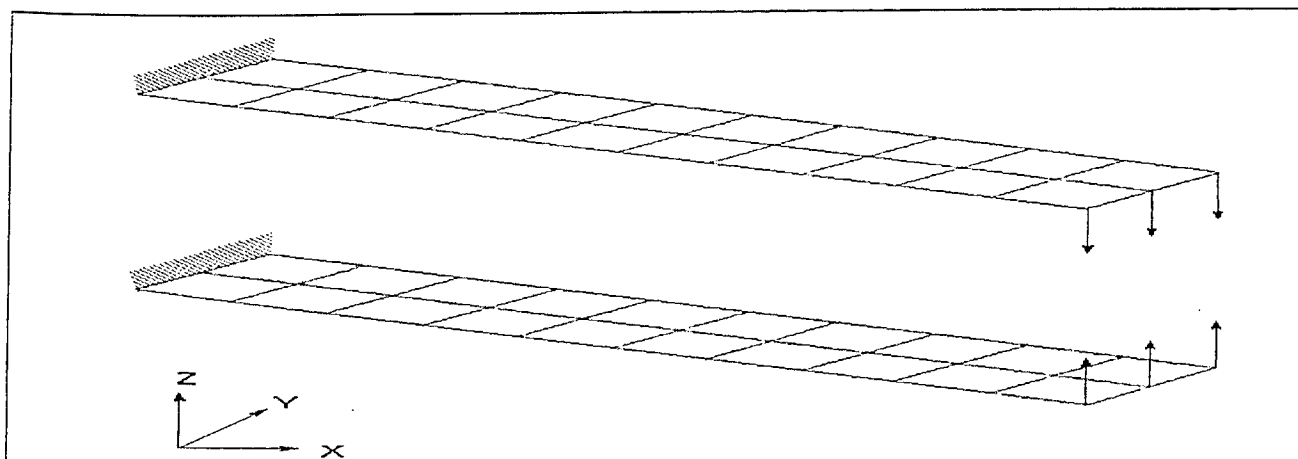


Figura 3.6: Modelo auxiliar para otimizar a forma na fronteira e interpolar os resultados para o interior, mudando da configuração 3.4 e 3.5 (Moore, 1992)

A elaboração dos modelos auxiliares, a cargo do projetista, é de fundamental importância para o sucesso da otimização. Modelos criativos e com condições de contorno e carregamentos coerentes com as mudanças de forma pretendidas são um pré-requisito indispensável para o total aproveitamento do método. A tendência é que os pacotes computacionais de otimização estrutural incluam ambientes gráficos de pré e pós processamento de modelos capazes de reduzirem o esforço requerido para a geração precisa de modelos auxiliares, atendendo a condição de coincidência entre os nós dos dois tipos de modelos (principal e auxiliares).

A nível de comandos, deve-se especificar as condições de contorno e carregamento dos modelos auxiliares ainda na seção CASE CONTROL, utilizando a palavra chave AUXCASE  $n$ , onde  $n$  é o número do modelo auxiliar correspondente.

Em seguida, já no BULK DATA SECTION, emprega-se o comando BNDGRID para controlar a interpolação da fronteira para o interior. Seu

segundo campo de sintaxe é destinado a especificar, para os nós internos, quais graus de liberdade deverão permanecer absolutamente fixos ou aqueles que deverão ser interpolados segundo o modelo auxiliar. Os graus de liberdade omitidos (não mencionados) em BNDGRID são interpolados livremente pelo código. A convenção para designar estes movimentos é dada na tabela abaixo, sendo usada generalizadamente em vários comandos do MSC/NASTRAN e do VMA/GENESIS:

Tabela 3.1: Convenção de especificação de graus de liberdade no comando BNDGRID:

Grau de Liberdade	Código
Translação em "x"	1
Translação em "y"	2
Translação em "z"	3
Rotação em torno de "x"	4
Rotação em torno de "y"	5
Rotação em torno de "z"	6

Os vetores de base de forma gerados a partir dos resultados da análise estática dos modelos auxiliares e da interpolação para os nós do interior são relacionados então às variáveis de projeto através do comando DVSHAP (Design Variable SHAPE - variável de projeto de forma).

Finalmente, depois do BULK DATA SECTION do modelo principal, deve vir o código correspondente ao(s) modelo(s) auxiliar(es) para a otimização de forma.

O MSC/NASTRAN possui um recurso muito útil para organizar o trabalho com estes modelos e arquivos externos em geral: é o comando INCLUDE, pelo qual se faz referência a uma porção de código pertencente a outro arquivo, mencionando apenas seu nome. Desta forma, uma única linha tem o efeito de extensos blocos de código, com óbvios benefícios organizacionais. A VMA Engineering, através de seu suporte técnico, informou a intenção de incorporar a opção do INCLUDE em uma versão futura do GENESIS.

Diversos modelos auxiliares podem ser usados na otimização de forma de uma única peça, possibilitando diversas combinações. O problema do suporte de suspensão de veículo de carga, cujo estudo será apresentado no próximo capítulo, foi resolvido por esta abordagem.

#### 3.4.2 ) Otimização de forma no VMA/GENESIS:

Embora tenha a opção de associação manual direta entre variáveis de projeto e alterações de coordenadas nodais, optamos por utilizar uma alternativa mais sofisticada disponível no software GENESIS: DOMAINs.

DOMAINs podem ser entendidos como elementos envolventes, no sentido de englobarem grupos de elementos do modelo de elementos finitos, cujas

deformações indicarão as variações de forma a serem sofridas pelos elementos neles contidos.

Desta forma, o procedimento começa com a determinação de um conjunto de elementos (planos ou sólidos). Na seqüência, são escolhidos alguns nós-chave na fronteira do elemento envolvente (DOMAIN) criado. Neste nós, são aplicados carregamentos em conformidade com as variações de forma que o projetista almeja obter. Finalmente, estas variações de forma são associadas a variáveis de projeto, que serão diretamente controladas pelo otimizador em sua busca do objetivo.

O seguinte exemplo contém um roteiro dos comandos do VMA/GENESIS necessários para implementar este procedimento.

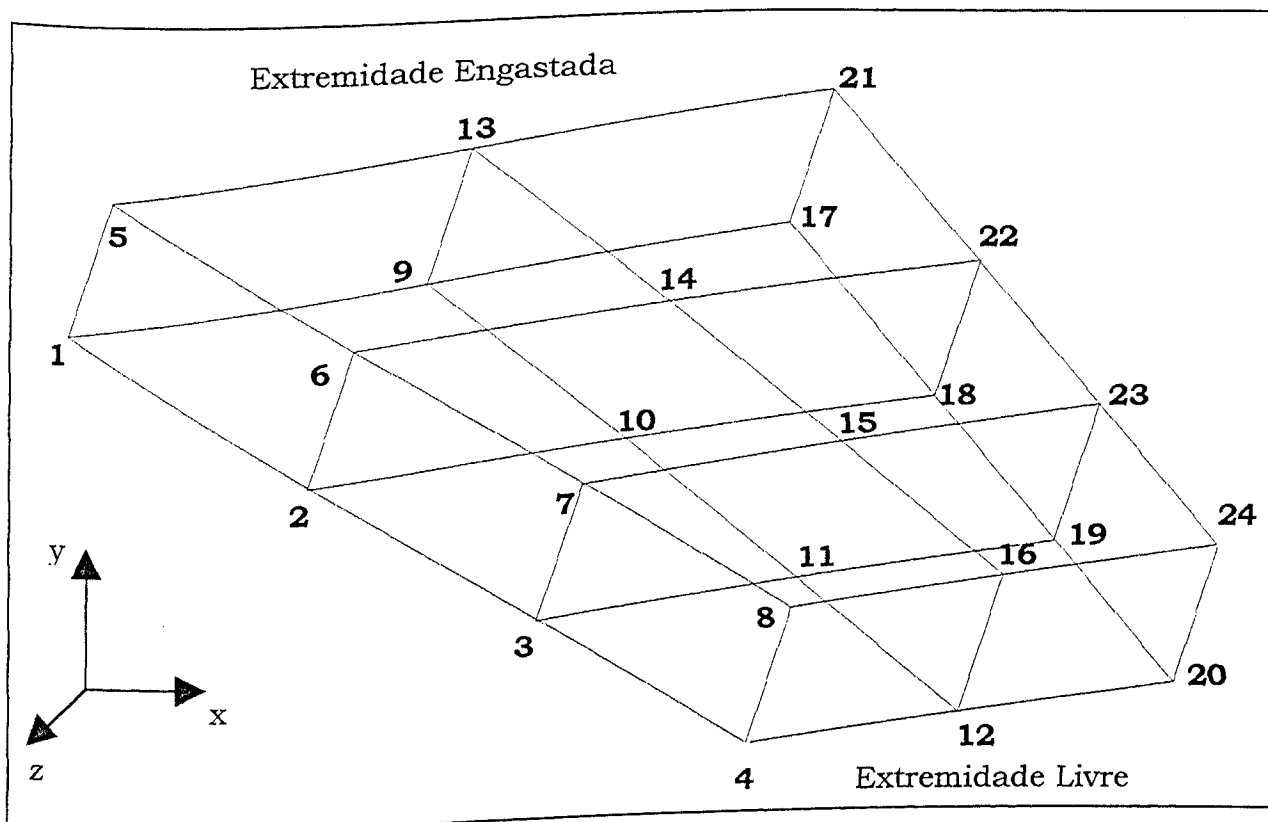


Figura 3.7: Viga a ter a forma otimizada mediante emprego do comando DOMAIN do VMA/GENESIS

Tal qual no exemplo de formas de fronteira analíticas do MSC/NASTRAN, deseja-se reduzir a quantidade de material na extremidade livre da viga ilustrada na figura 3.7, com a diferença de que esta não possui a seção transversal constante ao longo do comprimento.

O código de otimização pode conter um comando SET:

SET	10 =	1	2	3	4	5	6	7	8
		9	10	11	12	13	14	15	16
		17	18	19	20	21	22	23	24

Figura 3.8: Fragmento de código de otimização de forma no GENESIS, ilustrando o uso do comando SET, destinado a formar conjuntos de entidades de análise semelhantes (adaptado de VMA ENGINEERING, 1996)

que facilita a organização dos dados, por coletar entidades de análise semelhantes, tais quais os nós que definem a geometria da viga em estudo.

O próximo passo é especificar um DOMAIN, ou elemento sólido hexaédrico que irá envolver os elementos nos quais a viga foi discretizada. Alguns nós do DOMAIN serão destacados como vértices para a aplicação de deslocamentos forçados que definem o modo como a forma deve ser otimizada. Neste exemplo, serão três nós por aresta da viga, ao longo do eixo x, para que seja possível realizar uma interpolação de segundo grau da deformação na direção longitudinal da viga. Em casos mais simples, pode-se optar pelo emprego de apenas dois nós-vértices por aresta, implicando inevitavelmente numa interpolação linear.

DOMAIN	10								
HEXA		1	4	5	8	17	20	21	24
GSET	10								
DVAR		SH1	SH2	SH3	SH4				

Figura 3.9: Fragmento de código de otimização de forma no VMA/GENESIS, ilustrando o uso do comando DOMAIN, que contém o conjunto de nós definido em SET, os nós-vértices 1, 2, 5, 8, 17, 20, 21 e 24 e terá suas deformações associadas às variáveis de projeto SH1, SH2, SH3 e SH4 (VMA ENGINEERING, 1996)

Em seguida, procede-se à declaração das variáveis de projeto que serão associadas aos deslocamentos elementares do elemento envolvente DOMAIN. A determinação das restrições laterais para tais variáveis é de certa forma dependente do caso, sendo aconselhável ao projetista testar diversas configurações com valores diferentes entre si .

DVAR	1	SH1	0.5	0.0	1.0
DVAR	2	SH2	0.5	0.0	1.0
DVAR	3	SH3	0.5	0.0	1.0
DVAR	4	SH4	0.5	0.0	1.0

Figura 3.10: Declaração de variáveis de projeto a serem associadas às deformações do DOMAIN. Os rótulos das variáveis são os mesmos que aparecem na definição do DOMAIN, em sua última linha (adaptado de VMA ENG., 1996)

Finalmente, é preciso explicitar que tipo de relação existirá entre as variáveis de projeto e os deslocamentos prescritos aos nós vértices do DOMAIN. Isto é feito através do comando DVGRIDC (DESIGN VARIABLE TO GRID CONTROL)

\$ Na extremidade livre					
DVGRIDC	1	4	0.0	1.0	0.0
DVGRIDC	1	20	0.0	1.0	0.0
DVGRIDC	2	8	0.0	-1.0	0.0
DVGRIDC	2	24	0.0	-1.0	0.0
\$ Nos pontos intermediários da viga, para elevar a ordem da interpolação dos					
\$deslocamentos:					
DVGRIDC	3	3	0.0	0.5	0.0
DVGRIDC	3	19	0.0	0.5	0.0
DVGRIDC	4	7	0.0	-0.5	0.0
DVGRIDC	4	23	0.0	-0.5	0.0

Figura 3.11: Prescrição de deslocamentos nos nós vértices do DOMAIN e associação com as variáveis de projeto correspondentes, ilustrando o uso do comando DVGRIDC (adaptado de VMA ENGINEERING, 1996)

Pelo fragmento da figura 3.11, as variáveis de projeto 1 e 2 ficam associadas aos deslocamentos prescritos nos nós da extremidade livre da viga, da

mesma forma que as variáveis 3 e 4 aos nós intermediários.

É conveniente observar que os deslocamentos são prescritos na direção  $y$ , onde se dará a redução da espessura da viga. A magnitude é maior na extremidade (1.0) que nos pontos intermediários (0.5), pois deseja-se que a viga fique continuamente mais delgada desde o engaste até a extremidade livre.

Embora estes passos básicos já sejam suficientes para a execução do procedimento de otimização de forma cabe ao usuário uma precaução, tendo em vista uma eventual distorção de malha, uma vez que a interpolação dos nós-vértices para os demais é executada livremente pelo software. Isto acarretaria, para o exemplo acima, a adição da seguinte porção de código:

```

$ Equação referenciada por uma resposta sintética: é a diferença entre
$ dois valores, no caso, entre deslocamentos nodais:
DEQATN, 100, D(A,B) = B - A
$
$ RESPOSTA SINTÉTICA QUE REFERENCIA A EQUAÇÃO ACIMA. OS
$ ARGUMENTOS PASSADOS PARA DEQATN SÃO OS DESLOCAMENTOS NA
$ DIREÇÃO Y DOS NÓS QUE SÃO FORÇADOS A SE MOVEREM EM SENTIDOS
$ OPPOSTOS (DAÍ O NÚMERO 2, INDICANDO A COORDENADA APÓS AS
$ IDENTIDADES DE CADA NÓ)
$
DRESP2, 501, 100
+   DGRID, 4,2,8,2
$ NÓS 8 E 4, OPOSTOS NA EXTREMIDADE LIVRE
$ IMPOSIÇÃO DE RESTRIÇÕES À DIFERENÇA ENTRE OS DESLOCAMENTOS
$ NODAIS, PREVENINDO DISTORÇÃO DE MALHA
DCONS, 501, , 0.1
$
$ EM SEGUIDA, BASTA REPETIR O PROCEDIMENTO PARA OS PARES DE NÓS
$ 20 E 24; 7 E 3 E, FINALMENTE, 19 E 23.
$
$ FIM

```

Figura 3.12: Fragmento de código destinado a evitar distorção de malha durante o processo de otimização de forma (adaptado de email do suporte técnico da VMA ENGINEERING, 1997)



### 3.5 - CONCLUSÃO SOBRE OS PROCEDIMENTOS DE OTIMIZAÇÃO DE CADA PROGRAMA:

Evidentemente, a compreensão destes detalhes tocantes aos procedimentos de otimização de forma (assim como os de otimização dimensional) foi fundamental para a implementação dos estudos de caso que serão apresentados no capítulo seguinte onde, além da solução dos problemas específicos à engenharia automobilística, serão confrontadas as propostas dos dois software empregados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
BIBLIOTECA 4

## 4 – ESTUDOS DE CASO

Para ilustrar a aplicação da metodologia e dos fundamentos de projeto descritos nos capítulos precedentes, serão agora abordados problemas reais de otimização de componentes de veículos, conforme encontrados na indústria automobilística. Tais problemas foram propostos pela Humaitá Informática e Tecnologia, empresa pertencente à holding Mercedes-Benz do Brasil.

### 4.1 – CASOS ESTUDADOS:

4.1.1 - Otimização de forma de um suporte de mola da suspensão dianteira de um veículo de carga pesado:

A) Histórico e caracterização do problema:

A figura 4.1 mostra uma configuração já não mais existente do suporte do feixe de molas (popularmente conhecido como “berço” do feixe de molas) da suspensão dianteira do veículo de carga 1935 (Dezenove toneladas de carga líquida, motor com potência de 350 HP).

Esta versão antiga do suporte foi acometida de falha quando testada em um banco de provas que reproduzia, com alto grau de realismo, impactos frontais ocorridos na roda (ver diagrama comentado de esforços, figura 4.2). O nível de tensões na região assinalada como crítica superou ao limite de resistência do material empregado (ferro fundido GGG 60), provocando a fratura da peça.

Imediatamente, foi executada uma análise estática pelo método dos elementos finitos, visando identificar o estado de tensões da peça, simulando as condições de teste em que a falha ocorreu. À luz dos resultados obtidos, foi proposto e implementado um reforço na parte posterior do suporte (oposta ao contato deste com a longarina do veículo), conforme pode ser visto na figura 4.3. Esta configuração apresentou grande eficácia em testes de laboratório e não foram notificados casos de falha nos veículos com ela equipados.

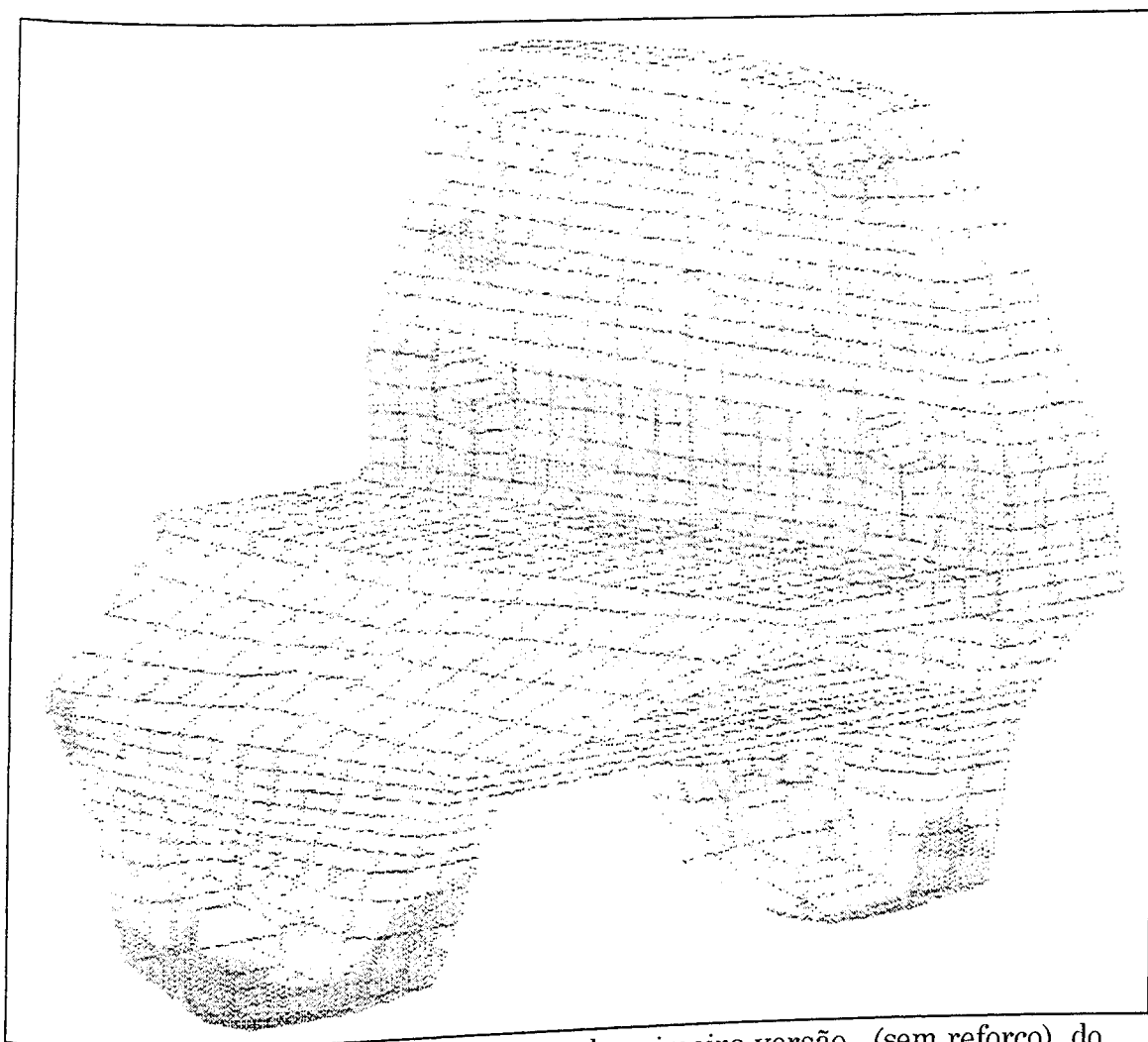


Figura 4.1: Modelo de elementos finitos da primeira versão (sem reforço) do suporte de molas da suspensão dianteira do veículo de carga 1935 (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996)

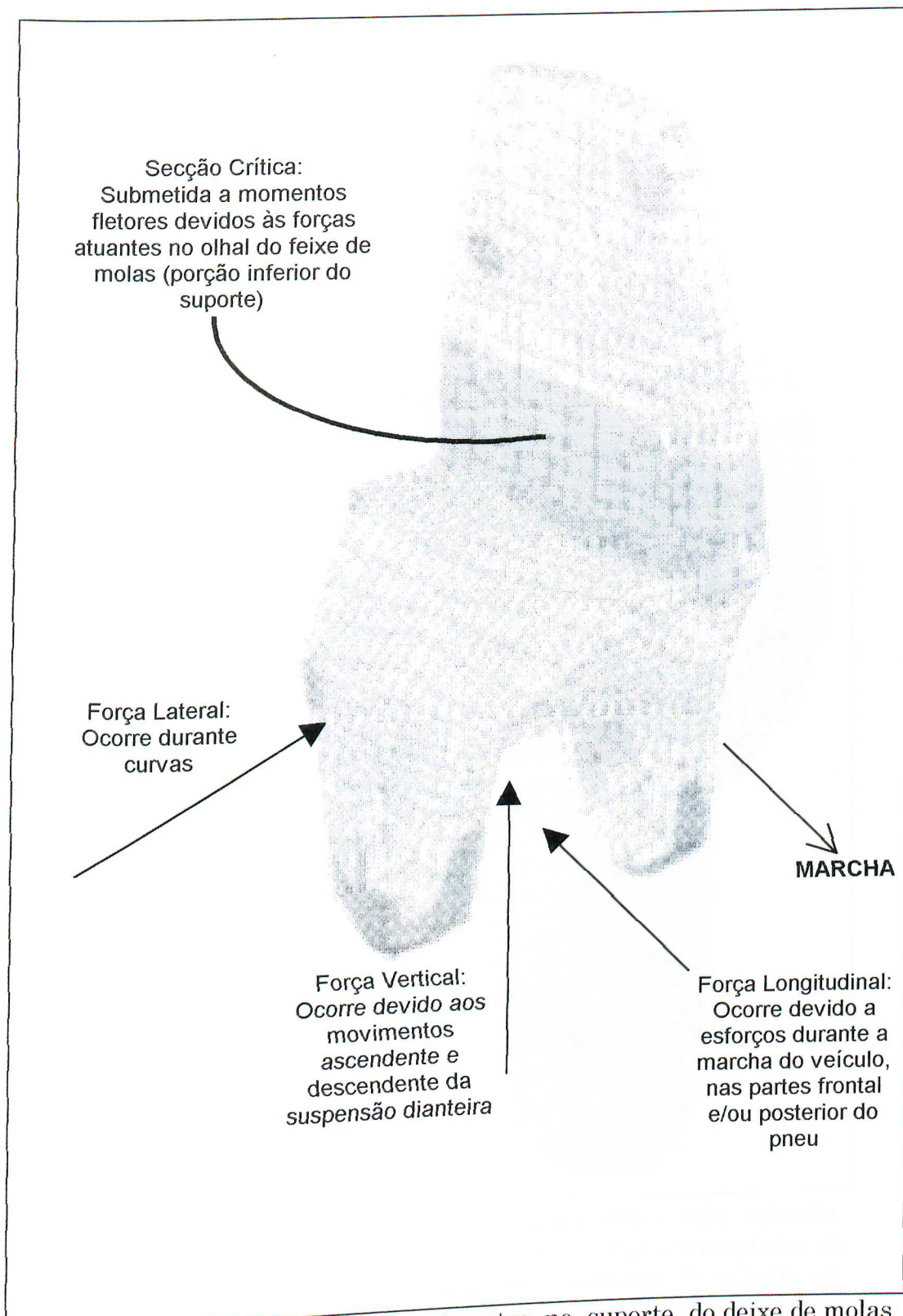


Figura 4.2: Diagrama de esforços atuantes no suporte do deixo de molas da suspensão dianteira do veículo de carga 1935 (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996)

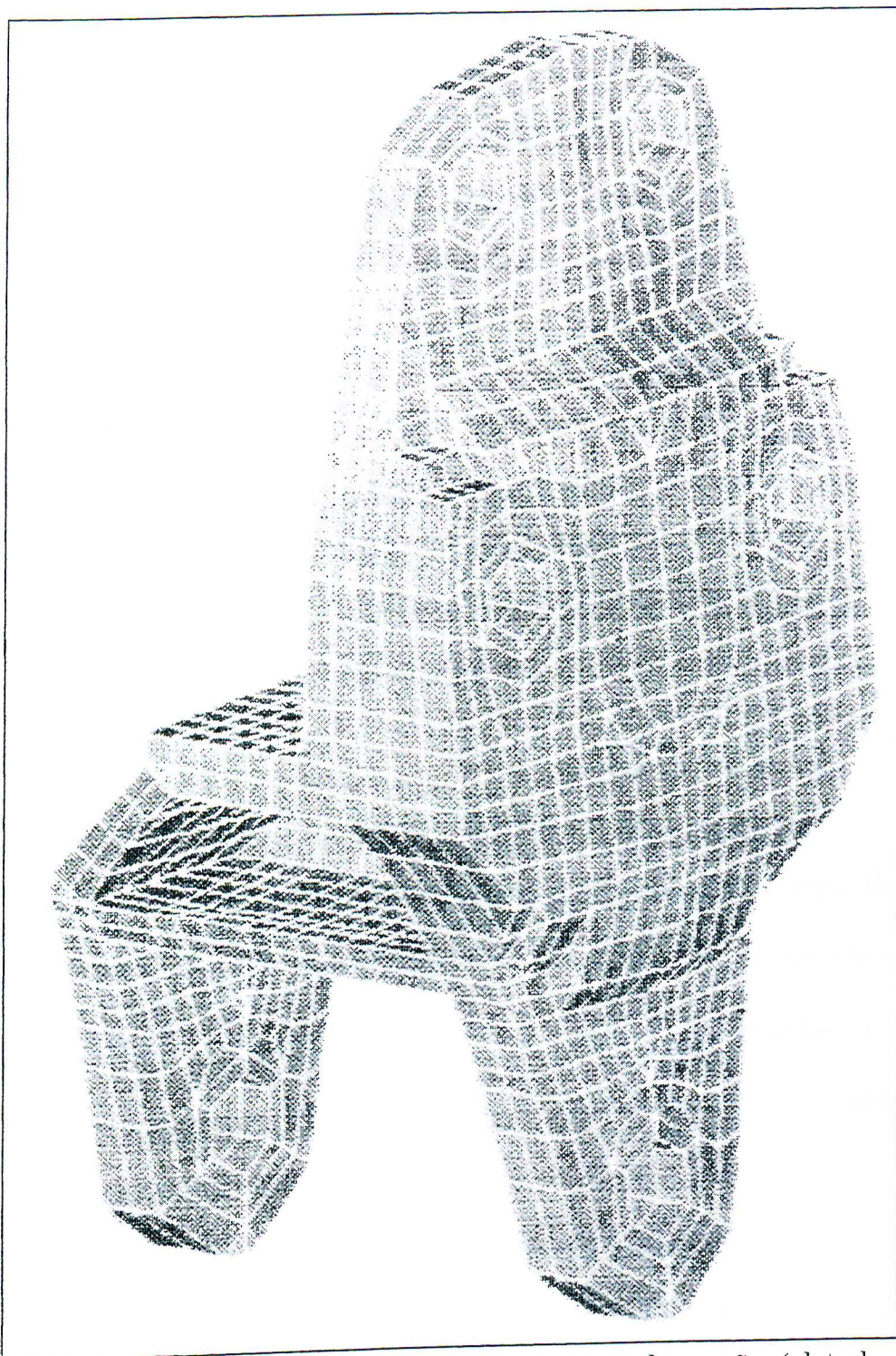


Figura 4.3: Modelo de elementos finitos da segunda versão ( dotada de reforço posterior, aqui mostrado em primeiro plano) do suporte de molas da suspensão dianteira do veículo de carga 1935 (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996)

Apesar da solução ter sido satisfatória sob os aspectos de resistência e segurança, surgiu a questão sobre uma eventual otimização do reforço, dada a

hipótese de um superdimensionamento da nova versão, isto é, a robustez do suporte estaria desnecessariamente elevada face às solicitações atuantes, situação caracterizada por um peso elevado e emprego excessivo de material.

A estratégia de otimização voltou-se, desta forma, para a retirada de material excedente onde quer que fosse possível, respeitando evidentemente as restrições de tensão necessárias à segurança da peça.

#### B) Metodologia de solução:

O modelo de elementos finitos disponível para esta peça foi confeccionado mediante o uso de elementos sólidos, dada a importância em se conhecer as variações de tensão nas três dimensões.

Do ponto de vista da síntese estrutural, este tipo de modelo não possui propriedades diretamente otimizáveis, como ocorre em elementos planos caracterizados por grandezas tais como momentos de inércia (elementos de barra e viga) e espessuras (elementos de placa). Desta forma, a alternativa restante consiste em realocar espacialmente os nós e os elementos por eles definidos, ou seja, efetuar um procedimento de otimização de forma.

Conforme exposto nas seções 3.4.1 e 3.4.2 do capítulo precedente, os dois programas comerciais empregados abordam o problema de otimização de forma de maneiras diferentes, com reflexos nos resultados e na operacionalidade. As duas seções seguintes exploram estas características de forma comparativa, levando-se em conta a experiência com o caso do suporte do feixe de molas.

C) Otimização de forma pelo MSC/NASTRAN - Método Analítico de Formas de Fronteira (Analytical Boundary Shapes Method):

Conforme exposto anteriormente, o procedimento consiste da construção de modelos auxiliares na fronteira (faces ou arestas exteriores dos elementos mais externos), com nós comuns aos do modelo primário (que se quer otimizar), cujas deflexões estáticas formarão a base vetorial das possíveis variações na forma do objeto a ser otimizado.

As condições de contorno dos modelos auxiliares (esforços e vínculos) desempenham um papel chave na execução deste procedimento, uma vez que determinam as deflexões estáticas dos mesmos. Ainda sobre este tópico, é mister salientar que foram experimentados diversos problemas de singularidade com os modelos auxiliares, devidos a condições de contorno inadequadas. Este fenômeno reforça a recomendação em se proceder a uma análise estática dos modelos auxiliares em separado, ressaltando que sua propensão a efeitos de singularidade é afetada, em certa medida, pelas características particulares do modelo primário em questão.

- Configuração dos modelos auxiliares do suporte do feixe de molas para otimização de forma:

A figura 4.4 a seguir destaca as posições do suporte em cujas fronteiras foram introduzidos modelos auxiliares:

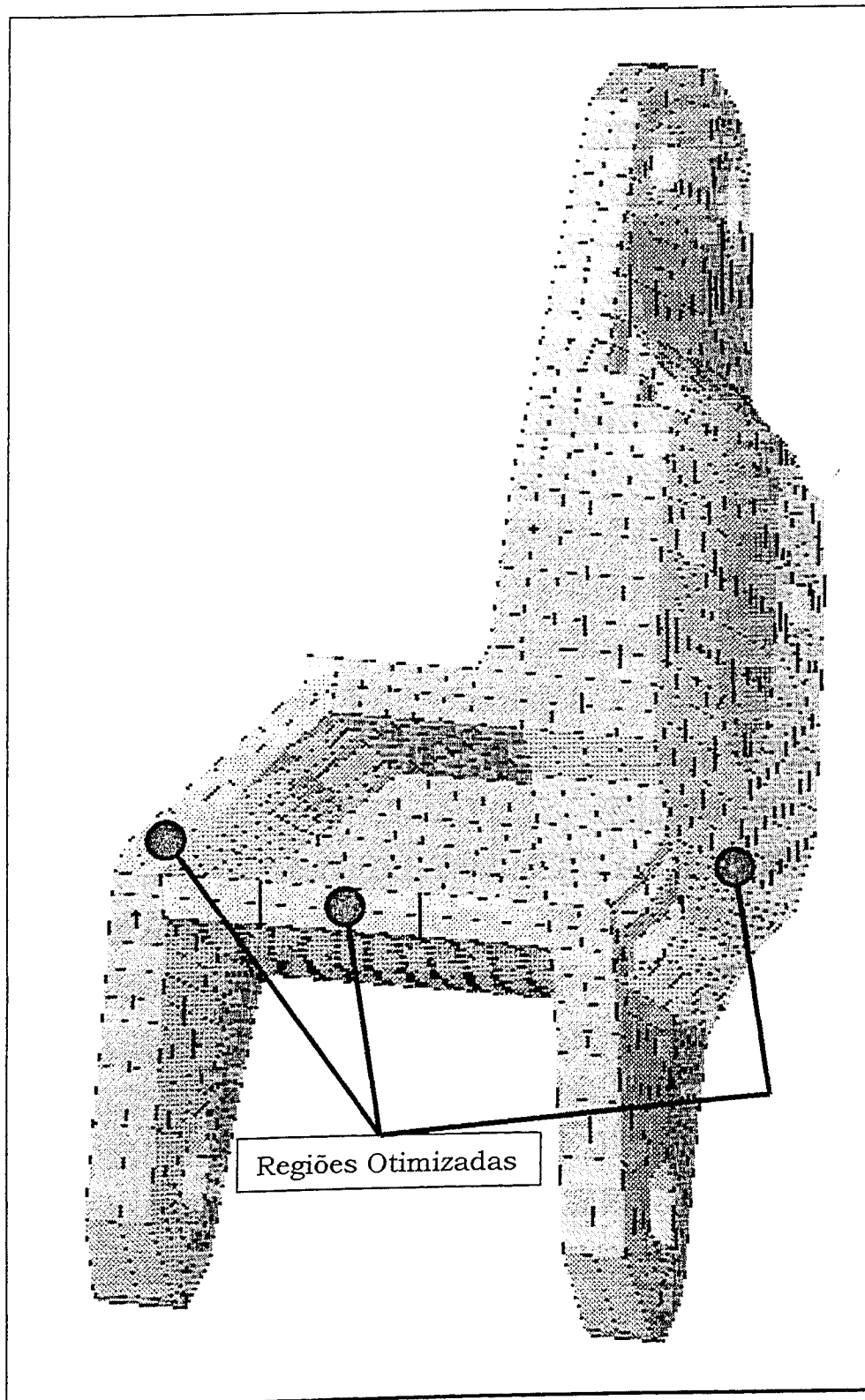


Figura 4.4 – Regiões do suporte afetadas pela otimização de forma



- Resultados:

A tabela 4.1 abaixo ilustra o progresso do procedimento de otimização de forma a cada iteração:

Tabela 4.1 – Resultados da otimização de forma do suporte do veículo 1935 executada no software MSC/NASTRAN:

	Objetivo (peso em Kg)	Máxima violação percentual da tensão limite
Projeto Inicial	$3.81899 \times 10^{-2}$	0.0%
Projeto Final	$3.807529 \times 10^{-2}$	0.0%

- Considerações gerais:

Mesmo se tratando do método mais automático disponível no MSC/NASTRAN com a finalidade de otimização de forma, “Analytical Boundary Shapes” exigiu, para o caso desta peça, um considerável trabalho de pré-processamento para a confecção dos modelos auxiliares e definição das regras de interpolação dos nós externos para os internos. Em problemas deste porte, a grande quantidade de nós a serem manipulados requer um ambiente gráfico com uma interface de processamento dotada de funções específicas para a execução das tarefas necessárias.

Um outro fator que limitou consideravelmente a taxa de redução de peso possível foi a sensibilidade da malha quanto a distorções, à medida em que as variações de geometria provenientes da otimização de forma progrediam. Durante muitas tentativas, menos de dez iterações (e cerca de 2% de redução na

massa) já eram suficientes para distorcer os elementos, inviabilizando numericamente o avanço do procedimento. Em casos mais extremos, não restou outro recurso senão excluir os modelos auxiliares pertinentes a certas porções do suporte, cancelando a possibilidade de variar a forma nestes locais: foi o caso das regiões onde se insere o pino do olhal do feixe de molas, caracterizada por complexidades de modelagem tais como elementos de corpo rígido conectados por elementos de barra.

A causa mais provável para este comportamento é a própria natureza do método: uma vez que tanto os modelos auxiliares quanto as regras de interpolação das deflexões estáticas são definidas apenas na fronteira do modelo, os nós do interior tendem a ficar sujeitos a mal condicionamento numérico.

O problema foi parcialmente contornado através da variação local das magnitudes das perturbações impostas aos nós pelos modelos auxiliares: foram acentuadas nas regiões mais imunes à distorção de malha e reduzidas nas mais problemáticas. Este procedimento entretanto requer várias tentativas (altamente custosas computacionalmente) e cria-se uma indesejável dependência em relação à aplicação, comprometendo portanto a generalidade da metodologia.

#### D) Otimização de forma pelo VMA/GENESIS - Método dos DOMAINS:

Um "DOMAIN" é um elemento envolvente que contém os elementos do modelo de elementos finitos de fato. Assim sendo, sua definição deve estar em

conformidade com as regras aplicadas aos elementos pertencentes à biblioteca do software, inclusive no que diz respeito à seqüência de numeração dos nós e possíveis configurações de malha distorcidas (um DOMAIN deve possuir geometria a mais regular possível, evitando formas distorcidas que instabilizem numericamente o procedimento de otimização de forma).

Entretanto, não se aplicam aos elementos DOMAIN as definições de material e propriedade necessárias aos elementos de modelagem.

Finalmente, uma importante propriedade dos DOMAINS é que os nós que os definem não necessitam forçosamente pertencer ao modelo principal, podendo ser coordenadas livres no espaço, não relacionadas com nenhum elemento a menos do próprio DOMAIN. Isto facilita consideravelmente a preparação do modelo para otimização de forma, flexibilizando o tratamento de geometrias irregulares.

Estas características gerais são esquematizadas na figura 4.5 a seguir:

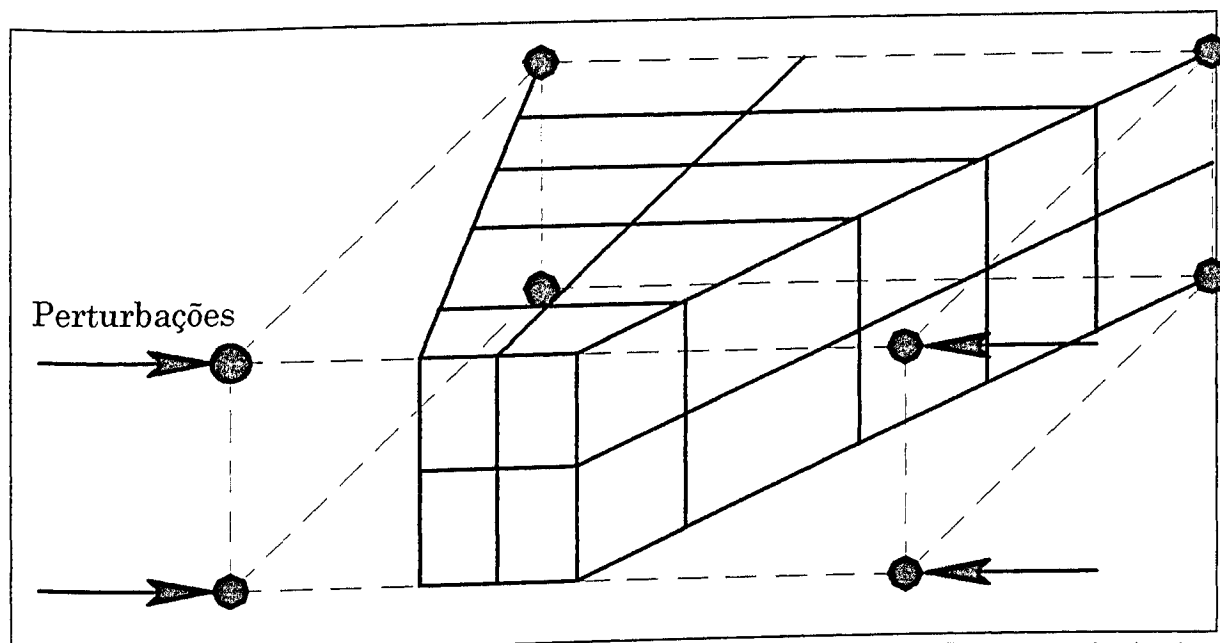


Figura 4.5: Representação esquemática de um elemento DOMAIN e suas principais propriedades

Para variar a forma do modelo, aplicam-se cargas (perturbações) sobre os nós do DOMAIN. Os deslocamentos nodais resultantes são usados como referência para reposicionar os nós (e conseqüentemente os elementos) do modelo a ser otimizado.

- Configuração de DOMAINS para otimizar a forma do suporte do feixe de molas:

A seqüência de figuras abaixo ilustra a disposição dos elementos DOMAIN em relação aos elementos do modelo do suporte propriamente dito, além das perturbações aplicadas com o intuito de variar a forma.

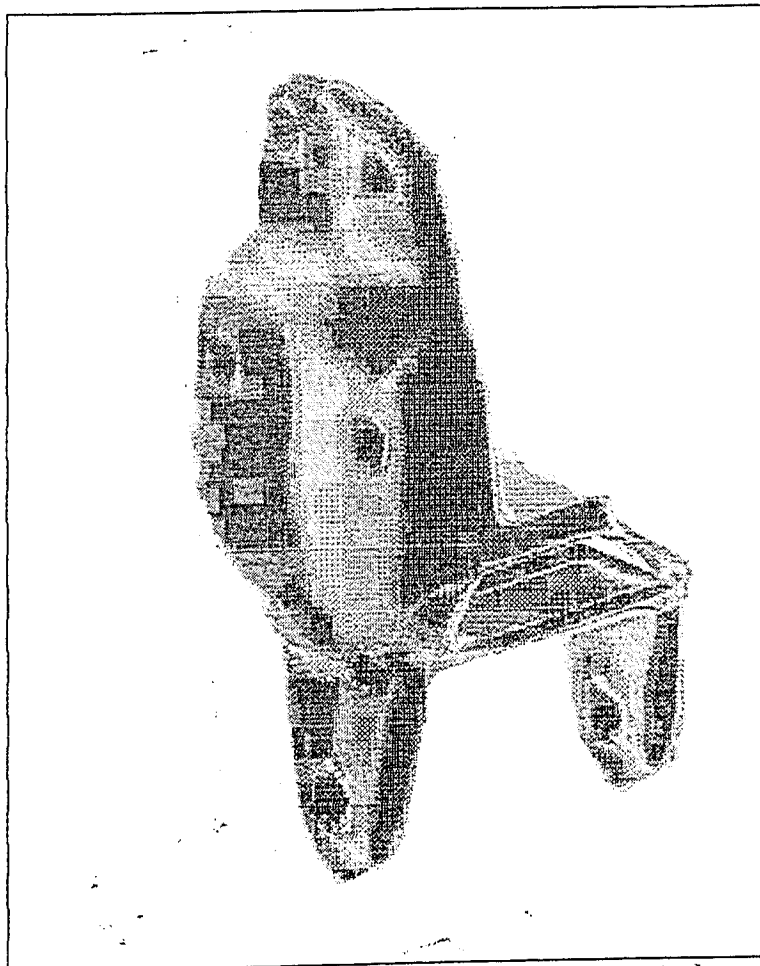


Figura 4.6.1: DOMAIN e perturbações associadas abrangendo os elementos da porção posterior do suporte do feixe de molas

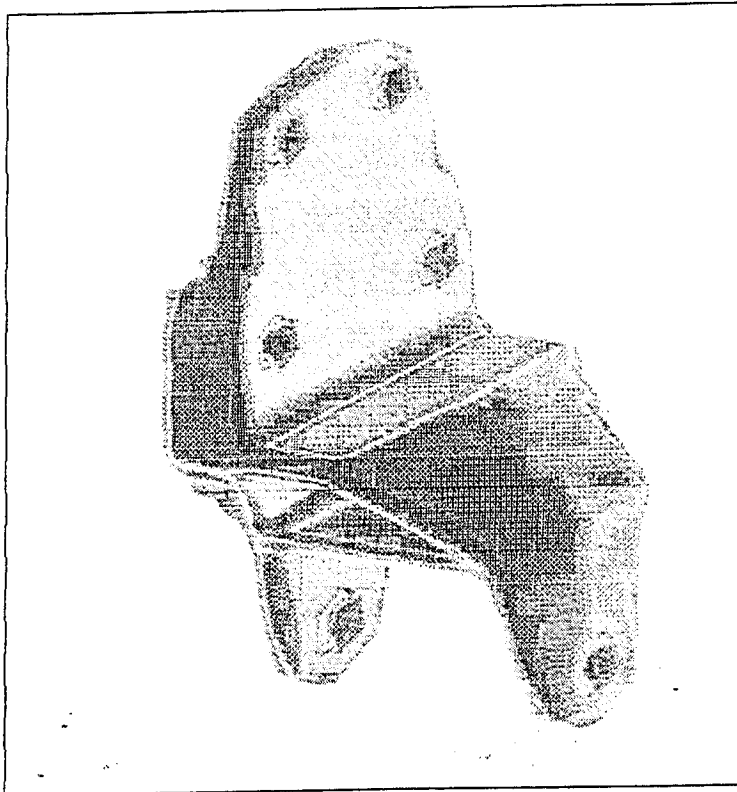


Figura 4.6.2: DOMAIN e perturbações associadas abrangendo os elementos da porção dianteira do suporte do feixe de molas

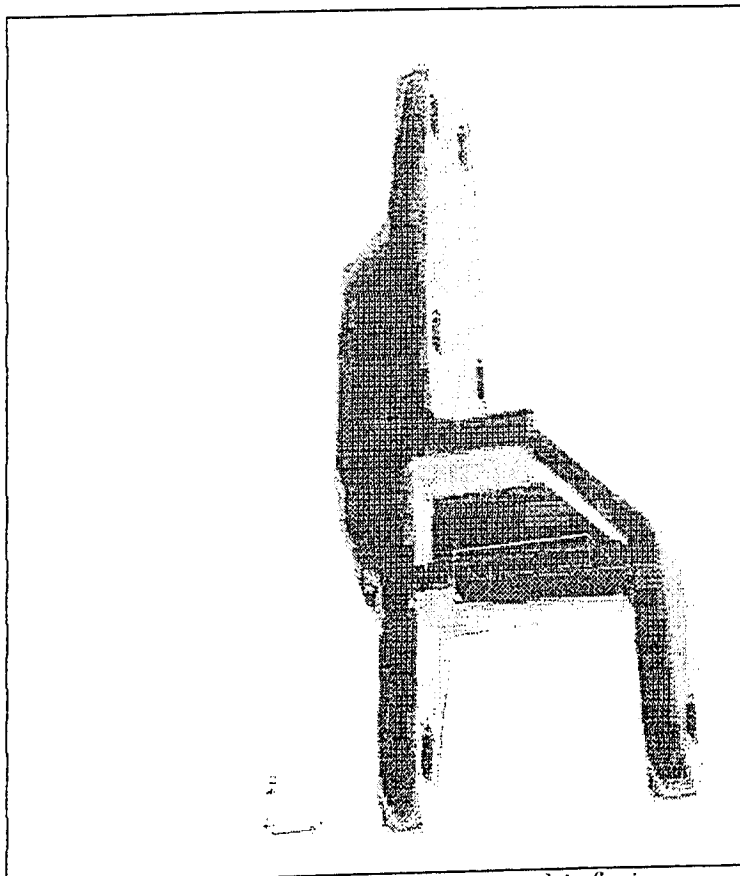


Figura 4.6.3: Idem nervura horizontal inferior

A figura abaixo ilustra a configuração resultante da aplicação do método dos DOMAINS sobre o suporte do feixe de molas:

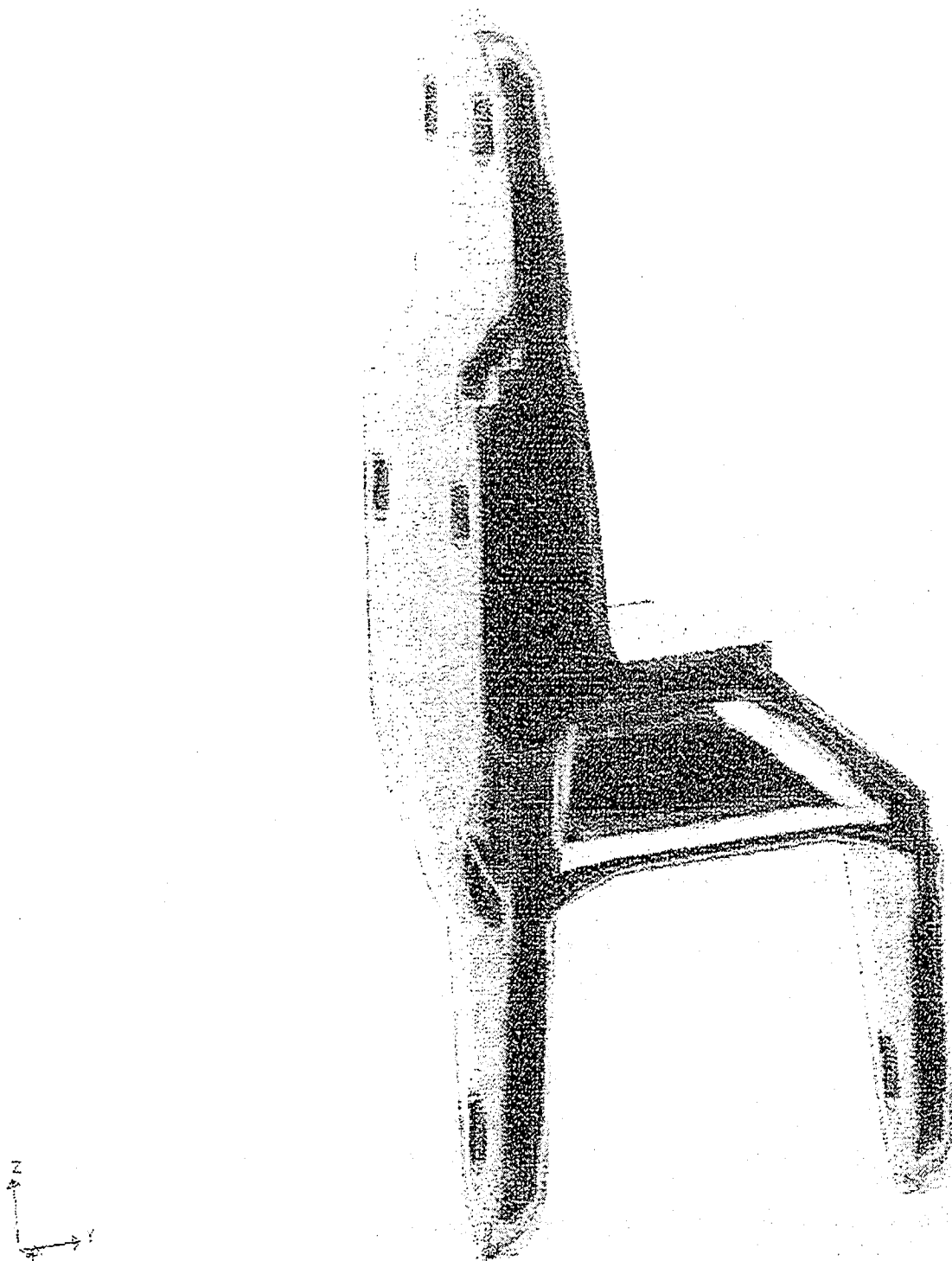


Figura 4.7 - Configuração resultante da aplicação do método dos DOMAINS sobre o suporte do feixe de molas

- Resultados:

A tabela 4.2 abaixo ilustra o progresso do procedimento de otimização de forma a cada iteração:

Tabela 4.2 – Resultados da otimização de forma do suporte do veículo 1935 executada no software VMA/GENESIS:

	Objetivo (peso em Kg)	Máxima violação percentual da tensão limite
Projeto Inicial	$3.817911 \times 10^{-2}$	0.0%
Projeto Final	$3.609716 \times 10^{-2}$	0.0%

- Considerações gerais:

Para o caso mais geral de otimização de forma tridimensional (aplicado neste estudo de caso), o DOMAIN deve corresponder a um elemento hexagonal (HEXA), cuja definição pode depender de oito a vinte nós. Optou-se pelo DOMAIN HEXA mais simples (definido por oito nós e capaz de estabelecer apenas relações lineares de perturbação de forma ao longo da região otimizada), o que resultou numa enorme facilidade de pré-processamento, sobretudo quando comparada ao trabalho desenvolvido para executar a tarefa correspondente no MSC/NASTRAN.

Os resultados, conforme expostos na tabela 4.2, mostram uma considerável taxa de redução da massa do suporte. Ao final do processo, foi gerada uma configuração bastante mais leve (vide figura 4.7) que a anterior (super-reforçada), e igualmente capaz de resistir aos esforços solicitantes em condições de operação.

Ainda, como o DOMAIN pode ser definido de forma a referenciar todos os nós presentes em seu interior, o efeito das perturbações na forma é interpolado de maneira numericamente estável, sendo que, neste exemplo, não foi experimentado nenhum problema com distorção de malhas.

4.1.2 - Otimização do comportamento dinâmico do conjunto de escape de um veículo de carga médio (Dimaragonas, 1994 e Inman, 1994):

A) Apresentação do problema:

A dinâmica de um sistema mecânico é expressa pela equação diferencial abaixo:

$$[M] \cdot \ddot{\{x\}} + [C] \cdot \dot{\{x\}} + [K] \cdot \{x\} = F(t) \quad (4.1)$$

onde:

[M]: Matriz de massa do sistema - termo relacionado à energia cinética;

[C]: Matriz de amortecimento do sistema - termo relacionado à dissipação de energia;

[K]: Matriz de rigidez do sistema - termo relacionado à energia potencial;

$\{x\}$ ,  $\dot{\{x\}}$  e  $\ddot{\{x\}}$ : vetor de deslocamento e suas derivadas primeira (velocidade)

e segunda (aceleração) em relação ao tempo;

F(t): Força excitadora.

Passando (4.1) à sua forma homogênea ( $F(t) = 0$ ) e assumindo uma solução do tipo:



$$x = \Phi \cdot e^{i\lambda \cdot t} \quad (4.2)$$

obtém-se, após algumas manipulações, a seguinte equação matricial:

$$([K] + i \cdot [C] \cdot \lambda - [M] \cdot \lambda^2) \cdot \Phi = 0 \quad (4.3)$$

A expressão denotada por (4.3) é a equação característica do sistema dinâmico descrito em (4.1), que está associada a um problema de auto-valores( $\lambda$ ) e auto-vetores( $\Phi$ ) cuja solução assume a forma:

$$\det\{[K] + i \cdot [C] \cdot \lambda - [M] \cdot \lambda^2\} = 0 \quad (4.4)$$

Matematicamente, portanto, as soluções de (4.4) são os auto-valores da equação (4.1). Fisicamente, estão associados às frequências naturais amortecidas de vibração do sistema dinâmico. Quando ocorre a coincidência entre elas e a frequência de aplicação da força excitadora  $F(t)$ , verifica-se o fenômeno de ressonância, que resulta em altas taxas de amplificação dos deslocamentos ( $x$ ) experimentados pelo sistema. Na prática, tal efeito tende a ser bastante severo em termos de solicitações resultantes sobre a estrutura vibrante, uma vez que esta é posta a se deslocar com amplitudes que tenderiam ao infinito, não fossem limitadas pela presença do amortecimento.

Entretanto, caso o sistema seja reconfigurado de forma a elevar os valores de suas frequências de ressonância, deverá vibrar, quando nelas excitado, com menores taxas de amplificação das amplitudes de deslocamento, resultando em melhora dos níveis de ruído associados e menor incidência de esforços dinamicamente induzidos que possam levar à falha estrutural por fadiga .

Uma situação desejável para o regime permanente seria a de se ter uma configuração final de projeto em que a frequência de excitação estaria situada entre duas frequências de ressonância, porém a uma distância “segura” das mesmas.

Um procedimento de análise modal pelo método dos elementos finitos usando a solução 103 do MSC/NASTRAN (que basicamente resolve o auto-problema exposto acima) revelou o seguinte comportamento vibratório para o sistema suporte/silencioso/tubagem de escape mostrado na figura 4.8:

Tabela 4.3 - Resultados da análise modal computacional do conjunto de escape de um veículo de carga médio:

Ordem do Modo	Frequência Natural Associada (Hz)	Comentário
1°	27.84	modo de torção
2°	38.61	modo de flexão, com o conjunto se deslocando na direção vertical. Solicita a chapa transversal que prende o suporte ao silencioso.
3°	65.91	Modo de flexão, dependente da rigidez do suporte
4°	108.40	Movimento lateral do conjunto; empena o suporte criando uma flexa na horizontal
5°	123.01	Flexão do conjunto, devido a movimento longitudinal do suporte
6°	131.57	Muito semelhante ao quarto modo

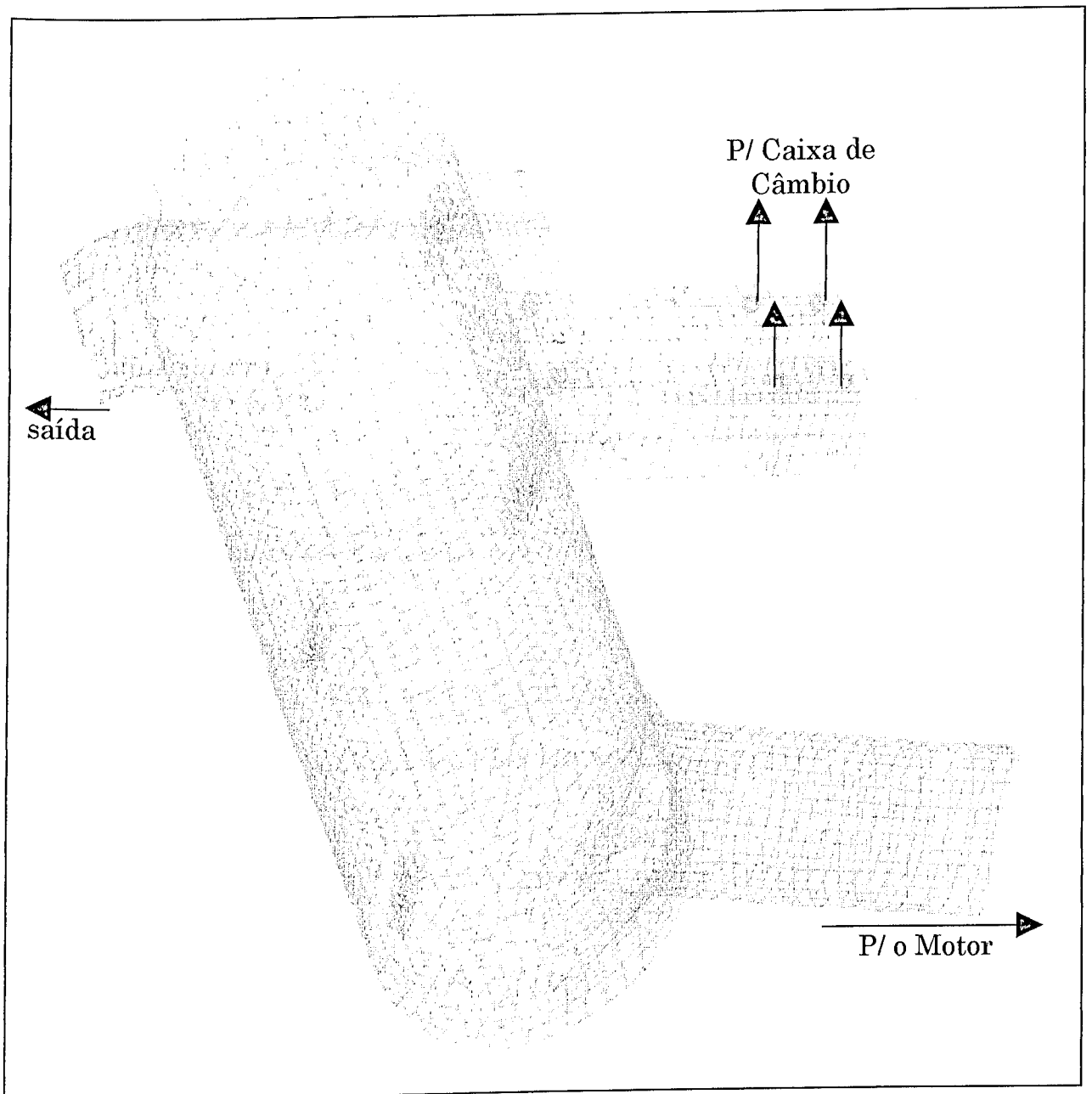


Figura 4.8: Conjunto suporte, tubagem e silencioso do sistema de escape de um veículo de carga médio (Humaitá Informática e Tecnologia, 1996 )

Um sistema dinamicamente análogo ao da figura 4.8 encontra-se esquematizado a seguir:

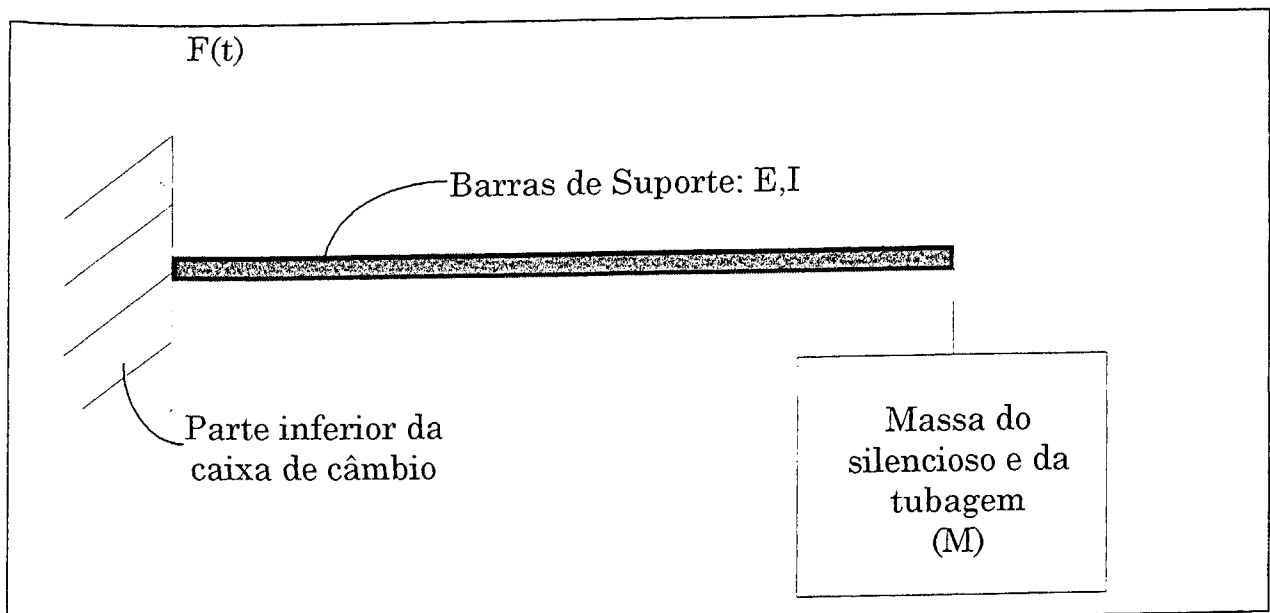


Figura 4.9: Sistema dinamicamente análogo ao conjunto de escape do veículo de carga médio

Animações dos modos obtidas com o software de pré/pós-processamento DEBIS/MEDINA são apresentados nas figuras 4.10.1 a 4.10.6:

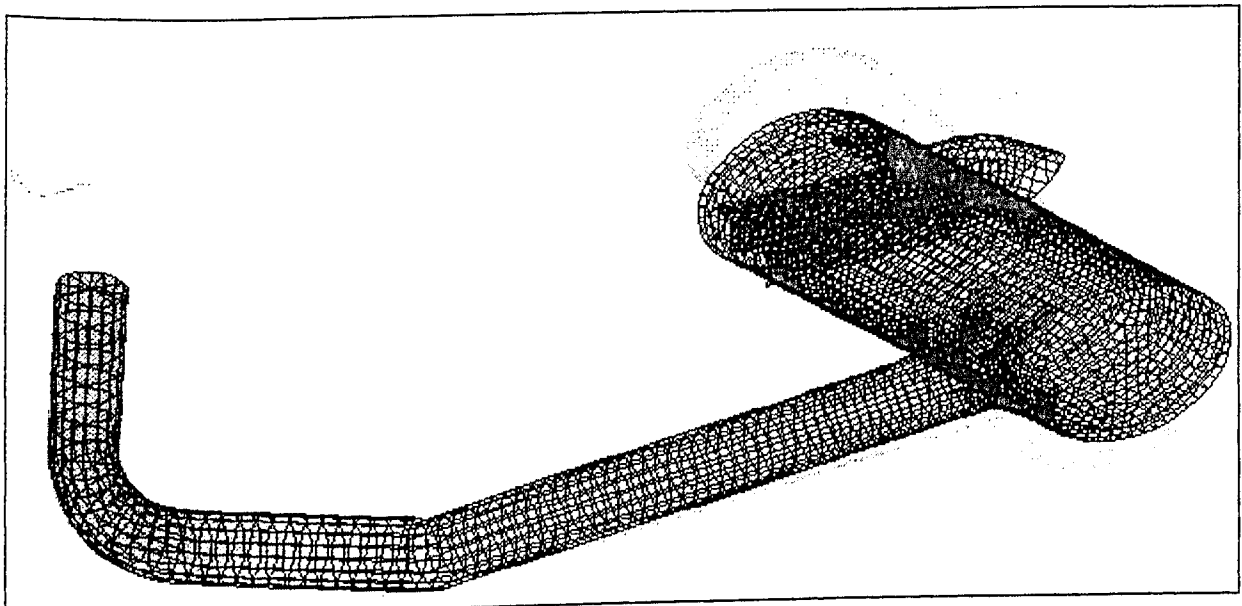


Figura 4.10.1: Primeiro modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso

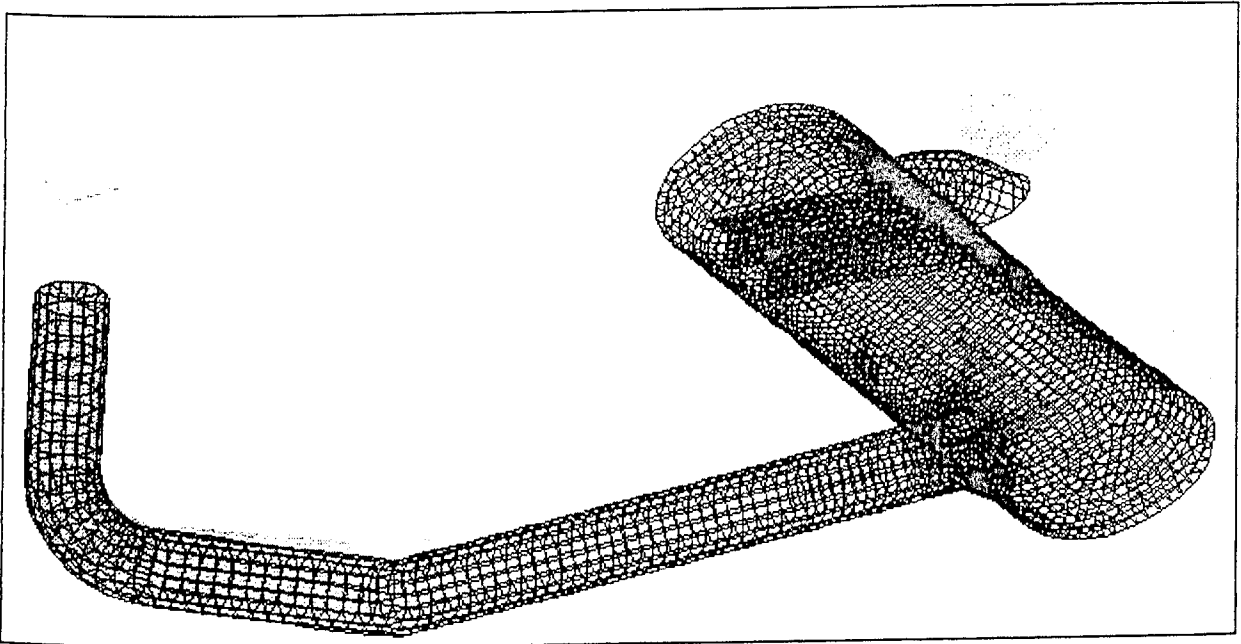


Figura 4.10.2: Segundo modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso

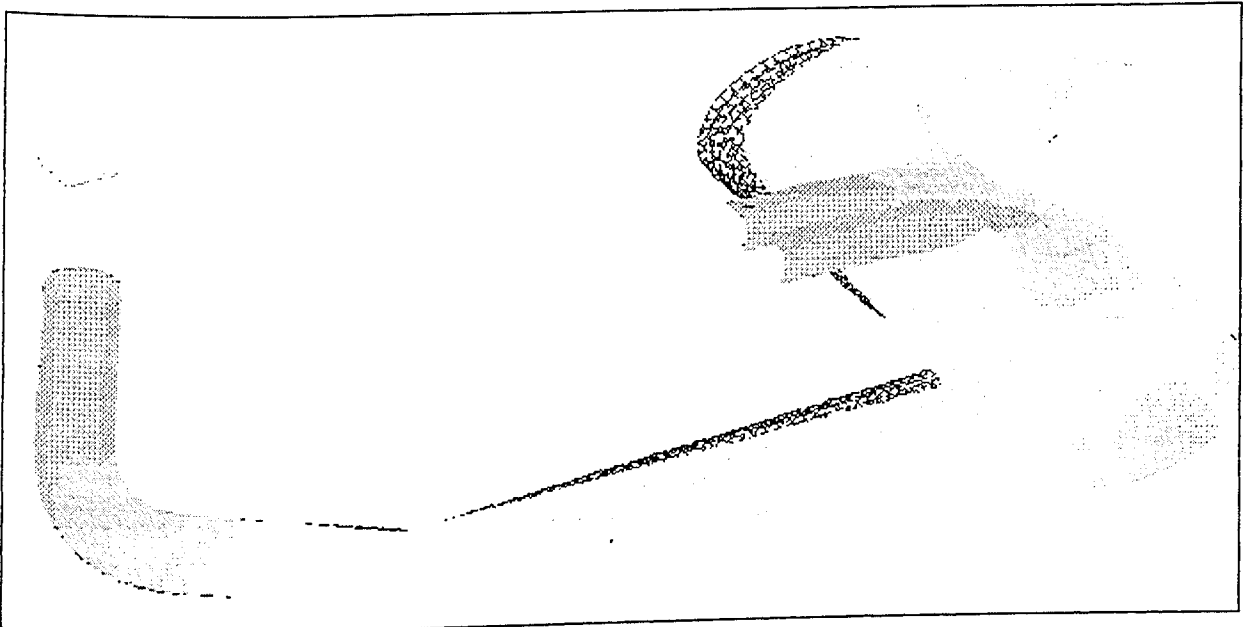


Figura 4.10.3: Terceiro modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso

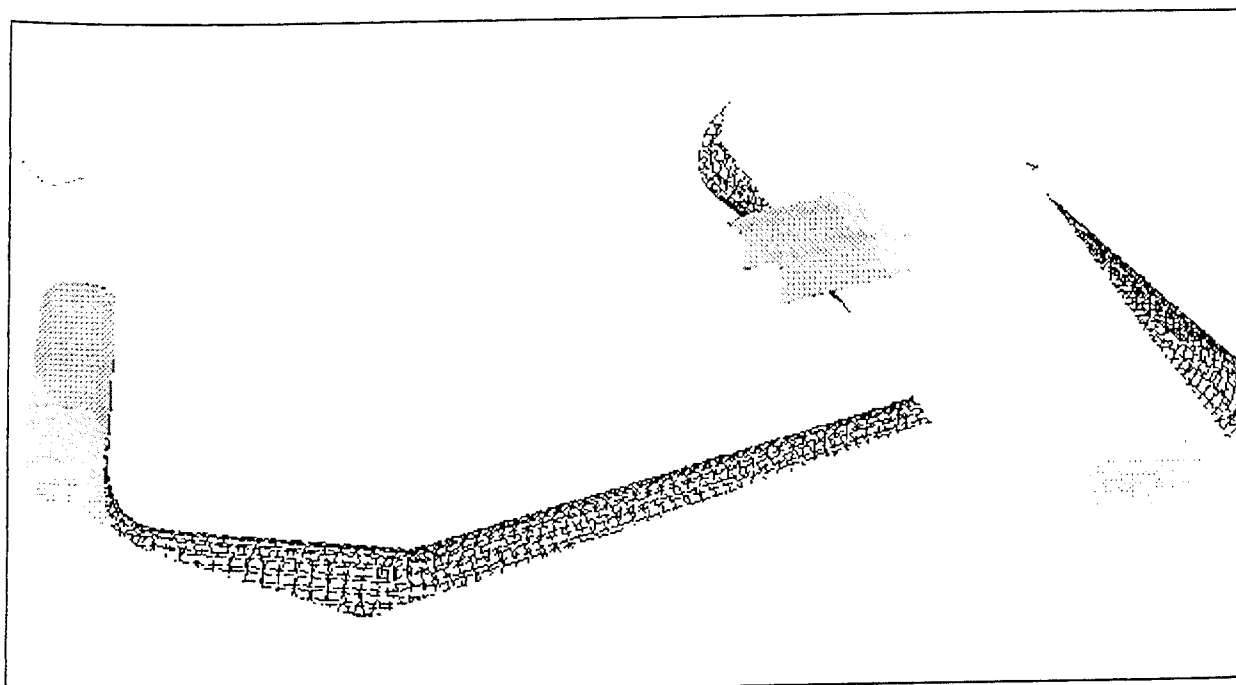


Figura 4.10.4: Quarto modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso.

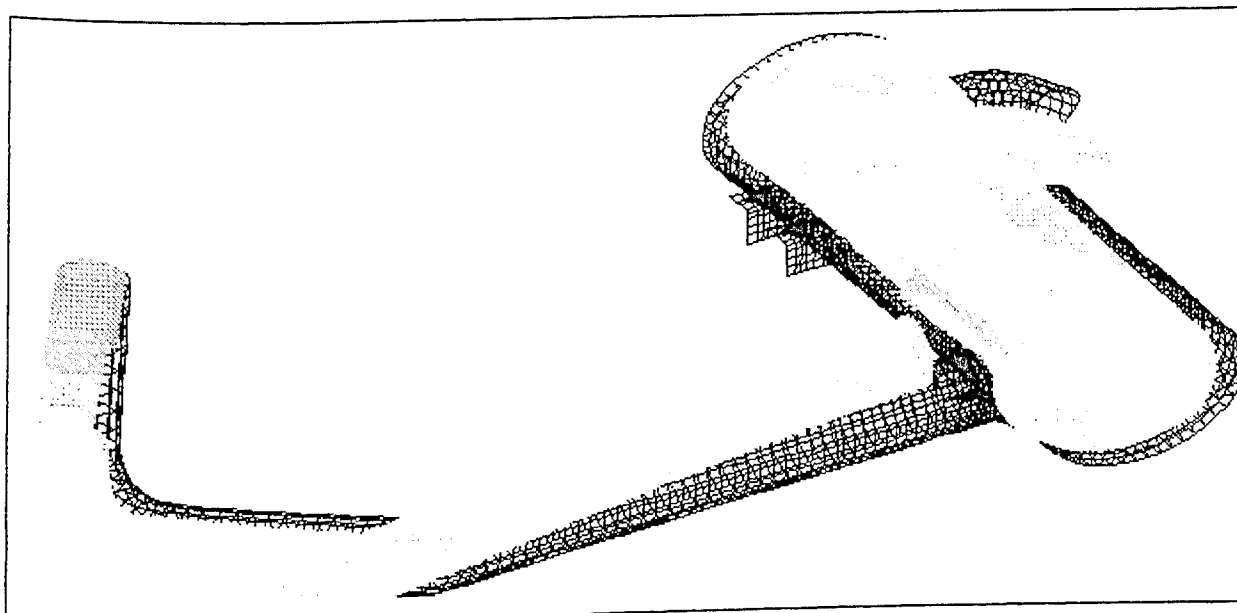


Figura 4.10.5: Quinto modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso.

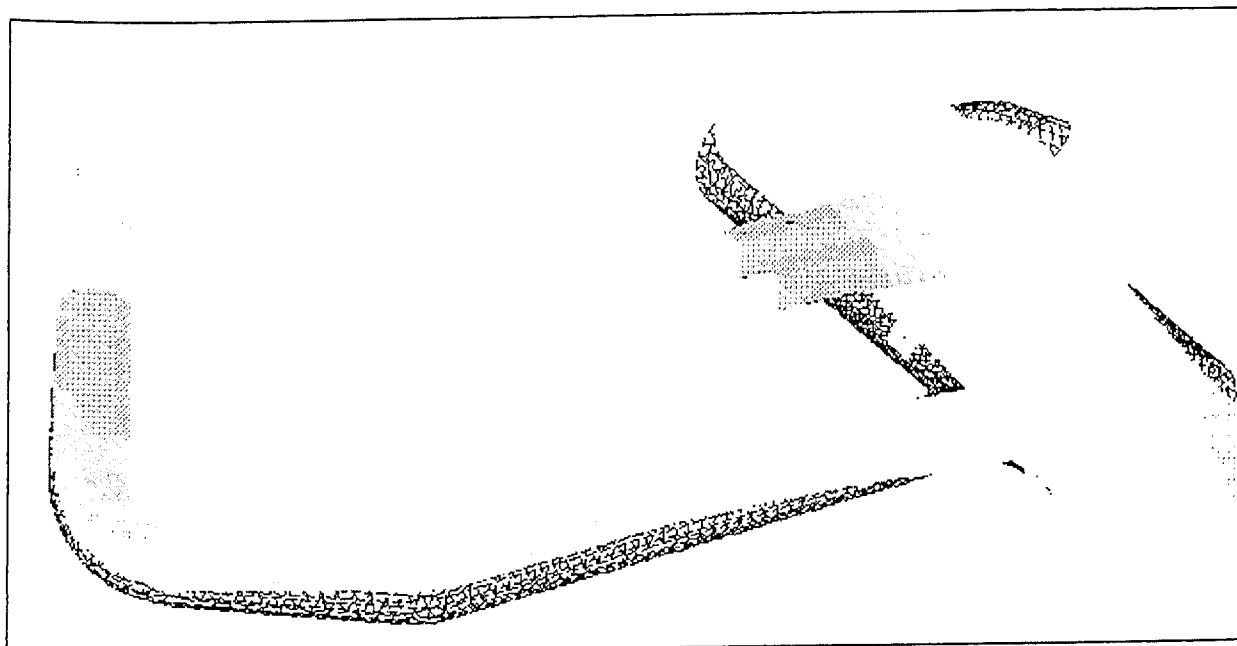


Figura 4.10.6: Sexto modo de vibração do conjunto suporte/tubagem/silencioso.

O conjunto é parafusado, em uma de suas extremidades, na parte inferior da caixa de câmbio de um veículo de carga médio, sendo excitado pelo motor numa faixa de zero a cento e vinte e cinco hertz. O limite superior da banda de excitação é dado pela seguinte equação:

$$f_{\text{máx}} = \frac{\text{rpm}_{\text{max}}}{60} \cdot \frac{N_{\text{cil.}}}{2} \quad (4.5)$$

onde:

**rpm<sub>max.</sub>** : máxima rotação do motor em rotações por minuto (neste veículo, 3000 rpm). É dividida por 60 para que o valor da frequência seja obtido diretamente em hertz;

**N<sub>cil.</sub>** : Número de cilindros (neste veículo, 6). O quociente 2 aparece por se tratar de um motor de quarto tempos, que requer duas voltas do virabrequim para completar um ciclo de admissão-compressão-explosão-exaustão.

Como se vê, existem cinco frequências de ressonância compreendidas na banda de excitações geradas pela fonte de potência. A princípio, uma solução para o problema seria alterar a configuração das barras de suporte no sentido de enrijecê-las, tentando, se possível, situar a primeira frequência natural em 125 Hz, ou seja, isenta da banda de excitações atuante.

B) Solução pela elevação das frequências naturais empregando vários perfis estruturais da biblioteca de VMA/GENESIS (Butkewitsch, Steffen Jr., Argentino e Wildmann, 1997):

Conforme comentado anteriormente, aumentando-se a rigidez das barras de suporte, é possível elevar os valores das frequências naturais até bandas em que as excitações nas frequências de ressonância resultem em amplitudes de deslocamento menores, com vantagens em aspectos relativos à resistência à fadiga e redução dos níveis de ruído associados. Além disso a frequência fundamental do sistema pode ser deslocada para uma região mais pobre no espectro de excitações (função das condições usuais de operação).

A adição de material da qual se espera resultar a almejada elevação na rigidez deve, sem dúvida, obedecer a certos limites.

Os ingredientes deste projeto tornam-no bastante adequado para ser abordado como um problema de síntese estrutural e as ferramentas para resolvê-lo são um módulo de análise (solver) acoplado a um otimizador numérico através de um conjunto de algoritmos de geração de modelos aproximados. Assim, o



estabelecimento dos critérios de projeto confundem-se com a própria formulação do problema de otimização, resultando, para este caso:

- Objetivo: Maximizar a primeira frequência natural, função implícita das variáveis de projeto;
- Sujeita à restrição (também implícita em relação às variáveis de projeto) de não se elevar a massa do conjunto além de um valor estipulado a priori;
- Variáveis de decisão (sujeitas a restrições laterais): dimensões da secção transversal das barras de suporte.

- Solução:

Utilizou-se o VMA/GENESIS para analisar e otimizar oito configurações geométricas alternativas propostas para as barras de suporte. Recordando da seção 3.3, a diretiva DVPROP3 disponível em GENESIS permite relacionar variáveis de projeto direta e automaticamente às dimensões principais de uma série de perfis estruturais comuns, armazenados numa biblioteca do programa. Este recurso poupa grande parte do tempo de pré-processamento, uma vez que não é necessário confeccionar um modelo diferente para cada uma das configurações testadas, pois estas já foram pré-definidas.

Foram testados os seguintes perfis:

- TUBO RETANGULAR;
- CANTONEIRA;
- PERFIL TIPO HALTER;

- VIGA RETANGULAR MACIÇA;
- PERFIL TIPO TRILHO;
- TUBO CIRCULAR;
- VIGA-I;
- VIGA-T.

- Resultados:

1º perfil - Tubo retangular:

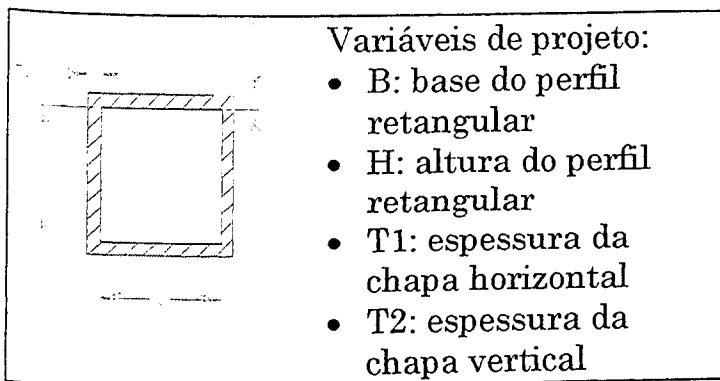


Figura 4.11.1 – Perfil tubo retangular e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.1: Progresso da otimização usando perfil tipo tubo retangular:

Iteração	B (mm)	H (mm)	T1(mm)	T2(mm)	Objetivo (Hz)	Máxima Violação Restrição
0	4.00E1	4.00E1	5.00E0	5.00E0	4.265E1	0%
1	4.39E1	4.45E1	4.99E0	5.60E0	4.338E1	0%
2	4.83E1	4.95E1	4.95E0	6.27E0	4.392E1	0%
3	6.35E1	6.66E1	4.83E0	8.52E0	4.476E1	0%
4	9.53E1	1.00E2	7.24E0	1.00E1	4.510E1	0%
5	1.43E2	1.50E2	1.00E1	1.00E1	4.519E1	0%
6	2.38E2	1.30E2	1.00E1	1.00E1	4.521E1	0%
7	4.26E2	7.57E1	9.99E0	1.00E1	4.521E1	0%

## 2º perfil - Cantoneira:

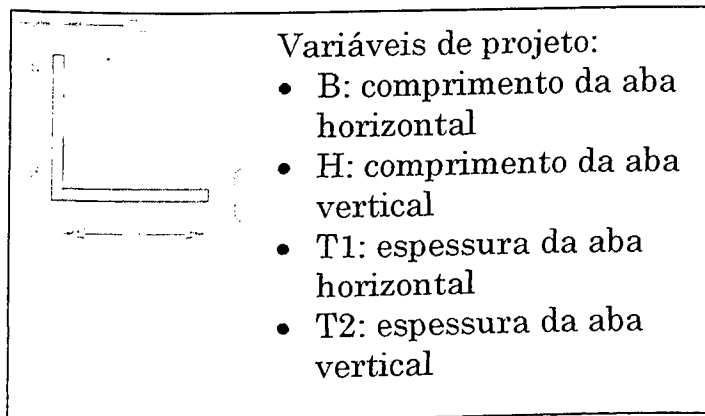


Figura 4.11.2 – Perfil cantoneira e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.2: Progresso da otimização utilizando perfil tipo cantoneira:

Iteração	B (mm)	H (mm)	T1(mm)	T2(mm)	Objetivo (Hz)	Máxima Violação Restrição
0	4.00E1	1.00E1	5.00E0	5.00E0	3.242E1	0%
1	4.41E1	1.02E1	5.26E0	7.21E0	3.489E1	0%
2	4.89E1	1.11E1	5.66E0	8.66E0	3.710E1	0%
3	6.47E1	1.53E1	7.82E0	1.00E0	4.161E1	0%
4	9.71E1	2.29E1	1.00E1	1.00E0	4.391E1	0%
5	1.45E2	3.44E1	1.00E1	1.00E0	4.460E1	0%
6	2.42E2	5.74E1	1.00E1	1.00E0	4.496E1	0%
7	4.58E2	1.08E2	1.00E1	1.00E0	4.511E1	0%
8	5.00E2	2.37E2	1.00E1	1.00E0	4.514E1	0%
9	5.00E2	5.00E2	1.00E1	1.00E0	4.514E1	0%

## 3º perfil - Halter:

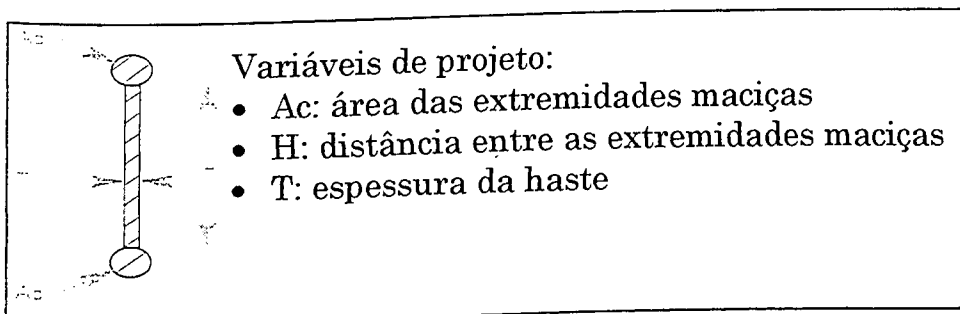


Figura 4.11.3 – Perfil halter e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.3: Progresso da otimização utilizando perfil tipo halter:

Iteração	Ac (mm <sup>2</sup> )	H (mm)	T (mm)	Objetivo (Hz)	Máxima Violação Restrição
0	2.00E2	1.00E1	5.00E0	2.581E1	0%
1	2.44E2	1.10E1	5.52E0	2.644E1	0%
2	2.992	1.22E1	6.11E2	2.716E1	0%
3	4.48E2	1.83E1	7.78E2	2.943E1	0%
4	5.00E2	2.75E1	8.00E2	3.042E1	0%
5	5.00E2	4.58E1	8.00E2	3.094E1	0%
6	5.00E2	8.66E1	8.00E2	3.173E1	0%
7	5.00E2	1.00E2	8.00E2	3.192E1	0%

4º perfil - Viga retangular maciça:

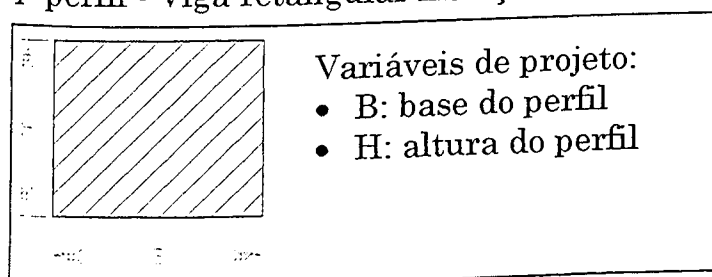


Figura 4.11.4 – Perfil retangular maciço e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.4: Progresso da otimização utilizando perfil retangular maciço:

Iteração	B (mm)	H (mm)	Objetivo (Hz)	Máxima Violação Restrição
0	2.50E1	2.50E1	3.184E1	0%
1	2.76E1	2.76E1	3.317E1	0%
2	3.05E1	3.05E1	3.455E1	0%
3	3.87E1	3.87E1	3.801E1	0%
4	5.80E1	5.80E1	4.281E1	0%
5	8.70E1	8.71E1	4.464E1	0%
6	1.00E2	1.00E2	4.487E1	0%

5º perfil - Trilho:

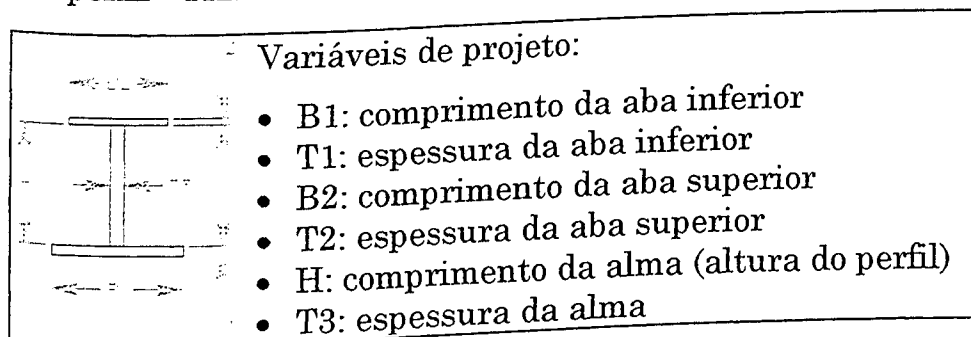


Figura 4.11.5 – Perfil trilho e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.5: Progresso da otimização utilizando perfil tipo trilho:

Iteração	B1(mm)	T1(mm)	B2(mm)	T2(mm)	H (mm)	T3(mm)	OBJETIVO (HZ)	Máxima Violação Restrição
0	4.00E1	5.00E0	4.00E1	5.00E0	1.00E1	5.00E0	3.935E1	0%
1	4.39E1	5.42E0	4.39E1	5.42E0	1.12E1	6.76E0	4.086E1	0%
2	4.84E1	5.80E0	4.84E1	5.80E0	1.28E1	8.91E0	4.203E1	0%
3	6.43E1	7.96E0	6.43E1	7.96E0	1.65E1	9.99E0	4.397E1	0%
4	9.65E1	1.00E1	9.65E1	1.00E1	2.47E1	9.99E0	4.479E1	0%
5	1.44E2	1.00E1	1.44E2	1.00E1	3.71E1	9.99E0	4.500E1	0%
6	2.41E2	1.00E1	2.41E2	1.00E1	6.19E1	9.99E0	4.511E1	0%
7	4.56E2	1.00E1	4.56E2	1.00E1	1.00E2	9.99E0	4.516E1	0%
8	5.00E2	1.00E1	5.00E2	1.00E1	1.00E2	9.99E0	4.517E1	0%

6° perfil - Tubo circular:

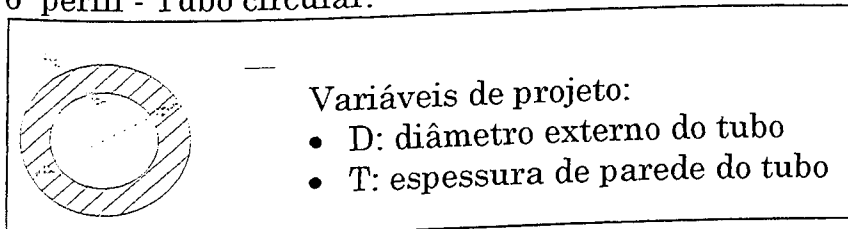


Figura 4.11.6 – Perfil tubo circular e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.6: Progresso da otimização utilizando perfil tipo tubo circular:

Iteração	D (mm)	T (mm)	Objetivo (Hz)	Máxima Violação Restrição
0	2.00E1	5.00E0	3.188E1	0%
1	2.17E1	5.67E0	3.316E1	0%
2	2.34E1	6.46E0	3.450E1	0%
3	2.37E1	9.70E0	3.728E1	0%
4	3.07E1	1.45E1	4.164E1	0%
5	4.61E1	2.42E1	4.444E1	0%
6	6.46E1	4.58E1	4.510E1	0%
7	9.70E1	5.00E1	4.516E1	0%
8	1.00E2	5.00E1	4.516E1	0%

7° perfil - Viga-I:

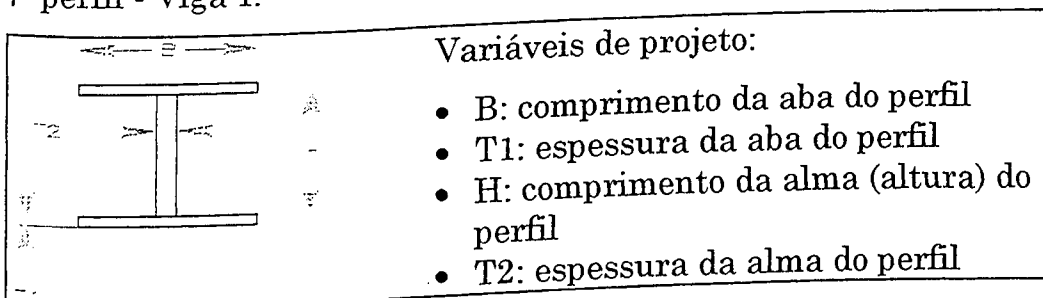


Figura 4.11.7 – Perfil viga-I e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.7: Progresso da otimização utilizando perfil tipo viga-I:

Iteração	B (mm)	T1 (mm)	H (mm)	T2 (mm)	Objetivo (Hz)	Máxima Violação Restrição
0	4.00E1	5.00E0	4.00E1	5.00E0	4.013E1	0%
1	4.41E1	5.63E0	4.39E1	5.10E0	4.144E1	0%
2	4.87E1	6.31E0	4.84E1	5.23E0	4.246E1	0%
3	6.46E1	8.36E0	6.42E1	7.02E0	4.414E1	0%
4	9.70E1	1.25E1	9.63E1	1.05E1	4.494E1	0%
5	1.45E2	1.88E1	1.44E2	1.58E1	4.514E1	0%
6	2.42E2	3.13E1	2.40E2	2.63E1	4.520E1	0%
7	4.49E2	3.09E1	1.82E2	4.97E1	4.522E1	0%
8	4.49E2	3.09E1	1.82E2	5.00E1	4.522E1	0%

8° perfil - Viga-T:

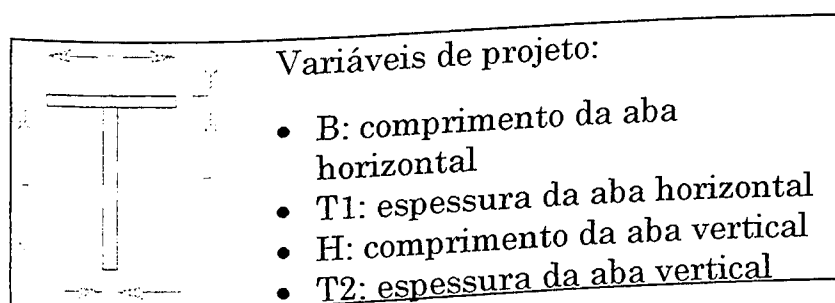


Figura 4.11.8 – Perfil viga-T e respectivas variáveis de projeto

Tabela 4.4.8: Progresso da otimização utilizando perfil tipo viga-T:

Iteração	B (mm)	T1(mm)	H (mm)	T2(mm)	Objetivo (Hz)	Máxima Violação Restrição
0	4.00E1	5.00E0	1.00E1	5.00E0	3.242E1	0%
1	4.41E1	5.26E0	1.02E1	7.21E0	3.489E1	0%
2	4.89E1	5.66E0	1.11E1	8.66E0	3.710E1	0%
3	6.48E1	7.67E0	1.50E1	1.07E1	4.161E1	0%
4	9.72E1	1.15E1	2.25E1	1.61E1	4.429E1	0%
5	1.45E2	1.72E1	3.37E1	2.42E1	4.498E1	0%
6	2.43E2	2.87E1	5.63E1	4.04E1	4.517E1	0%
7	4.44E2	5.00E1	1.06E2	5.00E1	4.521E1	0%
8	5.00E2	5.00E1	2.32E2	5.00E1	4.522E1	0%

- Análise e conclusões:

Em quase todos os casos, o programa foi capaz de aumentar em quase 100% a frequência natural associada ao primeiro modo de vibração do sistema.

O perfil de pior desempenho foi o de tipo halter (SPAR), provavelmente porque se estende predominantemente ao longo do eixo vertical, enquanto o efeito de torção associado ao primeiro modo (devido à grande largura do silencioso) ocorre em relação ao eixo horizontal.

Intencionalmente, as restrições laterais (mínimo e máximo valores permitidos às variáveis de decisão) foram definidas com bastante folga, implicando muitas vezes em grandezas demasiadamente elevadas perante limitações construtivas. Esta opção foi adotada com o intuito de garantir uma maior liberdade numérica ao algoritmo de otimização, podendo-se então avaliar suas potencialidades com maior extensão, ou seja, num espaço de projeto mais amplo. Entretanto, como era de se esperar, os próprios limites físicos do sistema prevaleceram, isto é, devido aos fatores dinâmicos envolvidos, os máximos valores para a primeira frequência natural foram atingidos mesmo antes do esgotamento do espaço de projeto disponível. Este dado pode ser confirmado mediante a inspeção das tabelas de resultados (e da figura 4.12 a seguir), nas quais se verifica a tendência assintótica aos valores máximos para a primeira frequência

natural, iniciada muito antes das restrições laterais terem se tornado ativas, isto é, com dimensões significativamente menores que as máximas permitidas.

Com certa disponibilidade de variáveis de decisão (parâmetros de projeto alteráveis), procedimentos de síntese estrutural foram capazes de modificar significativamente a resposta dinâmica do conjunto suporte/silencioso/tubagem de um veículo de carga.

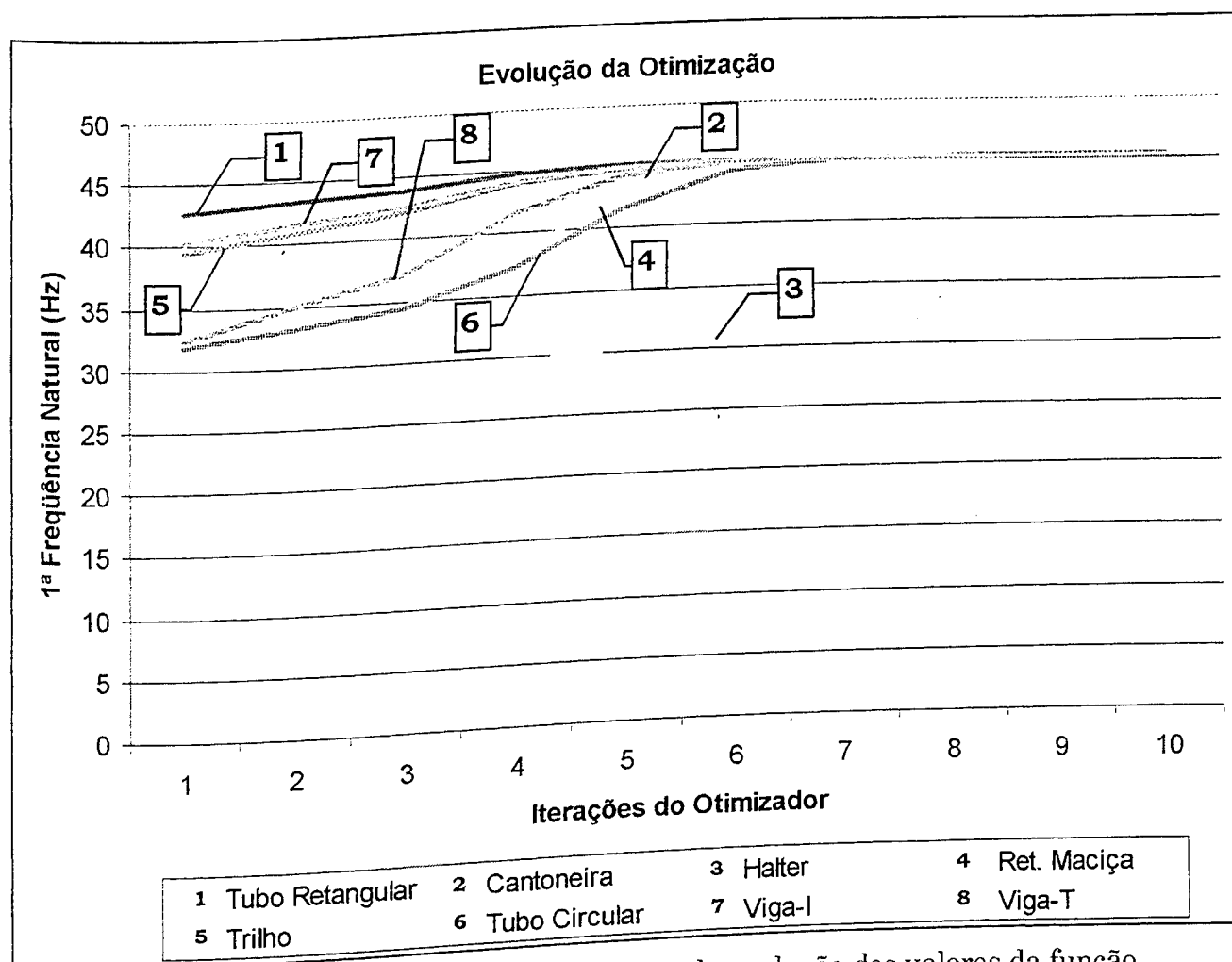


Figura 4.12 : Representação gráfica comparativa da evolução dos valores da função objetivo (primeira frequência natural do sistema suporte/silencioso/tubagem) com as sucessivas iterações do otimizador



A presença de um gerador de modelos aproximados entre o módulo de análise e o de otimização possibilitou a convergência do processo de síntese em um prazo de poucas horas (quatro no caso mais lento) para um sistema relativamente grande (quase 20.000 graus de liberdade no modelo discretizado).

O programa VMA/GENESIS demonstrou plena capacidade para aplicações desta natureza. Impondo uma curva de aprendizado normal em relação aos pacotes computacionais do mesmo tipo, seu uso foi bastante facilitado em função da flexibilidade introduzida pela disponibilidade de uma biblioteca de perfis estruturais reais, prontamente utilizáveis e com precisa definição das variáveis de projeto envolvidas. O tempo (normalmente longo) destinado ao pré-processamento de cada novo modelo dotado de perfil construtivo diferente foi economizado.

Face aos resultados obtidos nesta tentativa, uma outra possibilidade analisada voltou-se à minimização dos deslocamentos e tensões atuantes nas barras de suporte em função das excitações dinâmicas exercidas pela fonte de potência. Eventualmente, seria possível minimizar os níveis destas duas grandezas a tal ponto que o perigo de falha fosse afastado. Além disso, é sempre interessante testar a eficácia numérica do programa de síntese partindo-se de problemas de otimização com formulações diferentes, tanto em relação ao projeto inicial quanto ao próprio objetivo em si.

Os desdobramentos desta outra frente de investigação revelaram detalhes importantes acerca da otimização da resposta dinâmica via síntese estrutural, conforme será descrito na seção seguinte.

### C) Minimização de deslocamentos dinamicamente induzidos:

Uma das grandes vantagens provenientes do emprego de técnicas de otimização diz respeito à descoberta de relações sutis sobre o comportamento físico do sistemas, que muitas vezes somente podem ser percebidas à luz da sensibilidade de certas grandezas em relação às variáveis de projeto.

A tentativa de elevação das frequências naturais do conjunto suporte/tubagem/silencioso descrita na seção precedente forneceu percepções desta natureza, resultando numa outra alternativa para a otimização do comportamento dinâmico do referido componente: reduzir ao menor nível possível os deslocamentos induzidos pelas excitações dinâmicas exercidas pela fonte de potência. Evidentemente, os valores das frequências naturais sofrem alterações, mas de forma colateral, indireta.

Assim sendo, o problema de otimização fica redefinido da seguinte forma:

- Minimizar deslocamentos dinâmicos:

A partir de nós convenientemente escolhidos, procurou-se estabelecer

uma relação genérica representativa dos deslocamentos do sistema como um todo, conforme a seguinte equação:

$$D = \sqrt{(X_{3386}^2 + Y_{3386}^2 + Z_{3386}^2 + X_{3388}^2 + Y_{3388}^2 + Z_{3388}^2)} \quad (4.6)$$

onde:

⇒ X, Y e Z são as componentes de deslocamento nas respectivas direções

⇒ 3386 e 3388 são os nós de fixação escolhidos para representar o movimento do conjunto

- Resultados:

Tabela 4.5 – Resultados da otimização do comportamento dinâmico do conjunto suporte/tubagem/silencioso do veículo 1620 usando o método “Beta”

	Objetivo artificial BETA (adimensional)
Projeto Inicial	$1.000000 \times 10^3$
Projeto Final	$4.137149 \times 10^{-1}$

C) Grandezas com múltiplos valores e o “Método Beta” (FembGenesis training Manual, VMA Engineering, 1996):

Em determinadas situações, é possível que uma mesma grandeza física possa assumir mais de um valor. É o caso, por exemplo, das respostas dinâmicas (deslocamentos e tensões) abordadas neste estudo, cujos valores alteram-se em função das frequências de excitação presentes.

Frente a cenários deste tipo, o otimizador numérico presente nos programas de síntese estrutural empregados esbarra numa limitação: não é

possível estabelecer como objetivo ou restrições grandezas físicas que apresentem mais de um valor num único caso de carregamento.

Desta forma, a otimização do comportamento dinâmico de sistemas sob vibração forçada em diferentes frequências deve voltar-se à escolha de um único valor da grandeza que seja, ao mesmo tempo, representativo dos demais e eficaz do ponto de vista de engenharia (isto é, sua extremização contribui efetivamente para a otimização do comportamento global do sistema). Certamente, o máximo valor da grandeza (tensão ou deslocamento) é um forte candidato a preencher estes requisitos.

Nos programas utilizados, a saída mais imediata para a seleção da máxima grandeza remete ao uso da função MAX presente na linguagem FORTRAN, cuja finalidade é retornar o maior valor de um conjunto de dados. Esta aparente simplicidade, entretanto, tem um sério efeito colateral: a natureza fortemente descontínua da função MAX impede a obtenção de derivadas em quase todo o domínio, implicando, na prática, em graves problemas de condicionamento numérico para o otimizador.

Um elegante artifício matemático é normalmente empregado para contornar este impasse. O Método Beta faz uso de uma variável de projeto auxiliar (geralmente notada como Beta, donde vem o nome do procedimento), definida nos seguintes termos:

- Beta tem valor inicial unitário e pode variar no intervalo  $[0,1]$ , ou seja, assume valores normalizados a uma faixa estável para a maioria dos métodos numéricos;

- Define-se o alvo real da otimização (Y), que não pode ser abordado diretamente porque assume múltiplos valores;
- Cria-se uma resposta artificial da forma:

$$F(\text{BETA}, Y) = \text{BETA} - \left(\frac{Y}{X}\right) \quad (4.7)$$

onde X é um fator de escala conveniente.

- Impõe-se uma restrição de forma que a expressão (4.7) seja sempre positiva;
- Minimiza-se BETA. À medida em que seu valor decresce, a restrição imposta à relação (4.7) força com que a grandeza Y também seja minimizada, qualquer que seja seu valor instantâneo (isto é, qualquer que seja a frequência de excitação no caso da otimização da resposta dinâmica).

O valor ideal do fator de escala X deve atender ao seguinte compromisso:

- Ser suficientemente grande para que a restrição imposta seja respeitada;
- Não ser demasiadamente elevado para que o termo correspondente à grandeza Y na equação (4.7) tenha ordem de grandeza compatível com a de BETA. Caso contrário, a sensibilidade da resposta artificial (4.7) em relação às variáveis de projeto reais (através da grandeza Y) será baixa, com tendência a que apenas o valor de BETA seja alterado ao curso da otimização. A recomendação geral é, portanto, estipular o valor de X de forma que a restrição à equação (4.7) seja quase violada.

Finalmente, é possível concluir que este procedimento desempenha

papel fundamental em problemas de otimização que exibam grandezas capazes de assumir múltiplos valores, como é freqüente em estudos dinâmicos. A obtenção dos valores demonstrados na seção "A" precedente só foi possível mediante o emprego do Método Beta.

#### 4.1.3 - Estudo comparativo das técnicas de otimização dimensional e de forma:

##### 4.1.3.1 - Descrição:

Esta etapa do trabalho "Otimização de Estruturas Mecânicas: Ferramenta de Engenharia de Concepção" tem como principal objetivo a comparação entre as técnicas de otimização dimensional e de forma aplicadas a um mesmo problema.

Para tanto, foi escolhida a "Mola Zeta" (Humaitá Informática e Tecnologia, 1993), componente da suspensão traseira a ar de um veículo de carga. O estudo foi realizado tendo em vista a incidência sobre a mola de carregamentos provenientes da aceleração do veículo.

Conforme resultados de análises estáticas de Elementos Finitos realizados no recinto da HCAE, a mola apresenta, para as condições de carga descritas, ligeira superação do limite de resistência, estipulado em  $1000 \text{ N/mm}^2$ .

Desta forma, foi definido o seguinte procedimento de otimização:

- Objetivo: Minimizar a massa do componente,
- Sujeito à restrição de limite de tensão.

As soluções propostas e seus respectivos resultados são apresentados a seguir:

#### 4.1.3.2 - Propostas de solução:

A - Otimização dimensional usando modelo de elementos finitos construído por elementos de placa:

Partindo-se do modelo de elementos de placa (CQUAD4 e CTRIA3) disponível no departamento de cálculos estruturais da empresa Humaitá Informática e Tecnologia, provedora dos problemas estudados neste trabalho, adotou-se o procedimento de otimização dimensional das espessuras dos referidos elementos ao longo das lâminas superior e inferior da mola. Para atribuir diferentes espessuras locais, cada fileira de elementos foi definida sob uma propriedade PSHELL diferente, conforme esquematizado na figura a seguir:

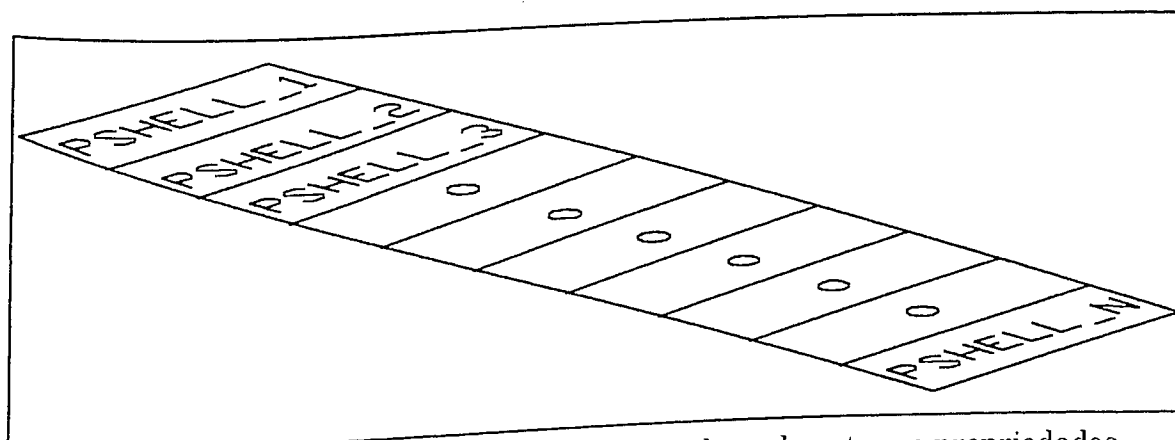


Figura 4.13: Esquema de partição das lâminas da mola zeta em propriedades contíguas diferentes

Com o intuito de conseguir boa resolução entre as variações locais de espessura, a divisão da mola em diversas propriedades foi bastante refinada (discreta), resultando em 65 fatias para a lâmina superior e 63 para a inferior.

Em termos de otimização dimensional, a soma de 128 fatias para as duas lâminas resultou igualmente em 128 variáveis de projeto e restrições, uma para cada fatia portanto. O modelo de elementos finitos correspondente pode ser visto na figura abaixo.

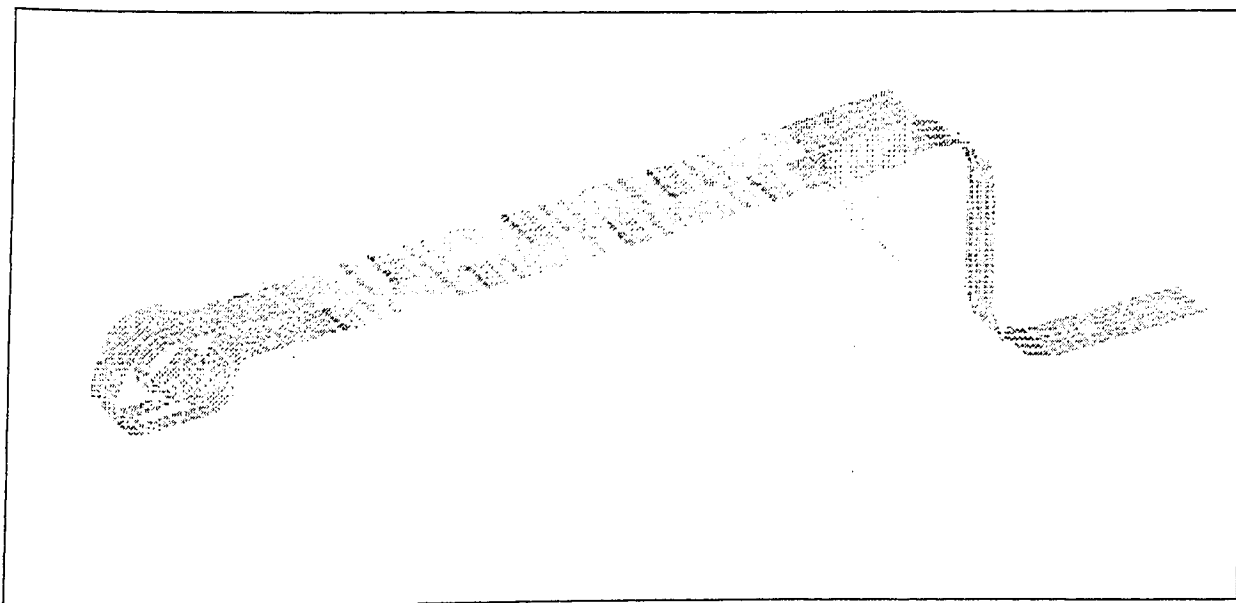


Figura 4.14 – Modelo de elementos finitos planos da mola “zeta”, dividido em várias propriedades

Com base nestes dados, foram feitas duas tentativas:

- Otimização a partir das dimensões reais da mola já existente:

A cada propriedade foi atribuída a espessura média do trecho da lâmina por ela compreendida. Como este projeto apresenta ligeira violação das restrições de tensão, é razoável prever uma tendência de acréscimo de material por parte do otimizador, levando ao aumento das espessuras vinculadas às propriedades locais.

Os resultados obtidos confirmaram a previsão descrita acima e foram essencialmente os mesmos tanto em Genesis quanto em Nastran:



Tabela 4.6.1: Resultados para a otimização dimensional do projeto existente:

	Objetivo ( $\approx$ peso)	Máxima violação percentual da tensão limite
Projeto Inicial	$1.74 \times 10^{-1}$	66.3%
Projeto Final	$1.797346 \times 10^{-1}$	0.0%

- Otimização a partir de um projeto inicial fictício super-dimensionado:

É uma boa prática em otimização partir de projetos iniciais diferentes para o mesmo problema, visto que:

- Consegue-se ampliar o leque de possíveis soluções;
- Boas configurações são reforçadas, uma vez que tendem a resultar repetidamente de diversos pontos de partida diferentes, ao passo que configurações inadequadas podem ser descartadas por não apresentarem, via de regra, a mesma repetibilidade.

Desta forma, foi idealizado um projeto em que as espessuras ao longo das lâminas da mola foram consideradas constantes e iguais às das regiões mais espessas (40mm para a lâmina superior e 50mm para a inferior). Nesta conjuntura, cabe ao otimizador executar as retiradas locais de material, aliviando o peso do componente até o limite das restrições de tensão impostas. Evidentemente, a taxa de redução local de espessura é inversamente proporcional à solicitação resultante na mesma região.

Os resultados, também bastante semelhantes entre Genesis e Nastran, são listados na tabela abaixo:

Tabela 4.6.2: Resultados da otimização dimensional do projeto superdimensionado:

	Objetivo ( $\approx$ peso)	Máxima violação percentual da tensão limite
Projeto Inicial	$1.921171 \times 10^{-1}$	0.0%
Projeto Final	$1.83669 \times 10^{-1}$	0.0%

B - Otimização de forma da mola modelada por elementos sólidos:

Usando-se o comando GEDIST do software DEBIS/MEDINA, foi possível gerar rapidamente um novo modelo da mola zeta empregando elementos finitos sólidos, com o intuito de executar procedimentos de otimização de forma semelhantes aos empregados no problema relativo ao suporte do feixe de molas dianteiro do veículo 1935. Também aqui, optou-se pelo Analytical Boundary Shapes Method no MSC/NASTRAN (vide figuras 4.15.1 e 4.15.2 a respeito das posições dos modelos auxiliares) e pelo Método dos DOMAINS no VMA/GENESIS (a figura 4.16 apresenta as posições dos domínios de otimização de forma adotados).

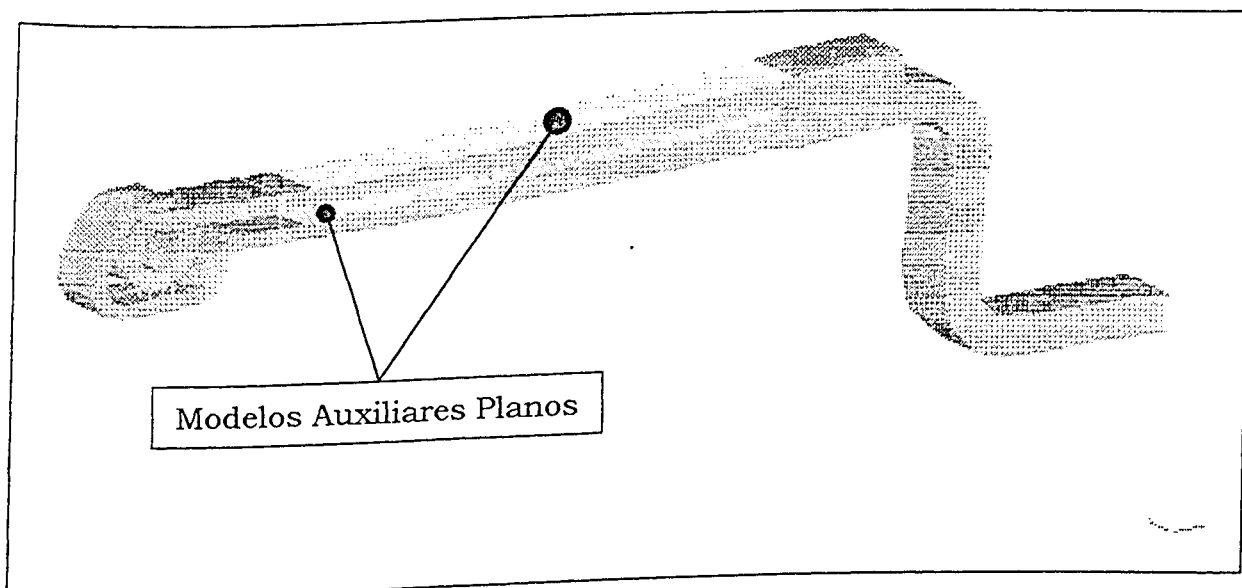


Figura 4.15.1 – Detalhe superior dos modelos auxiliares à otimização de forma na fronteira do modelo primário da mola “zeta”

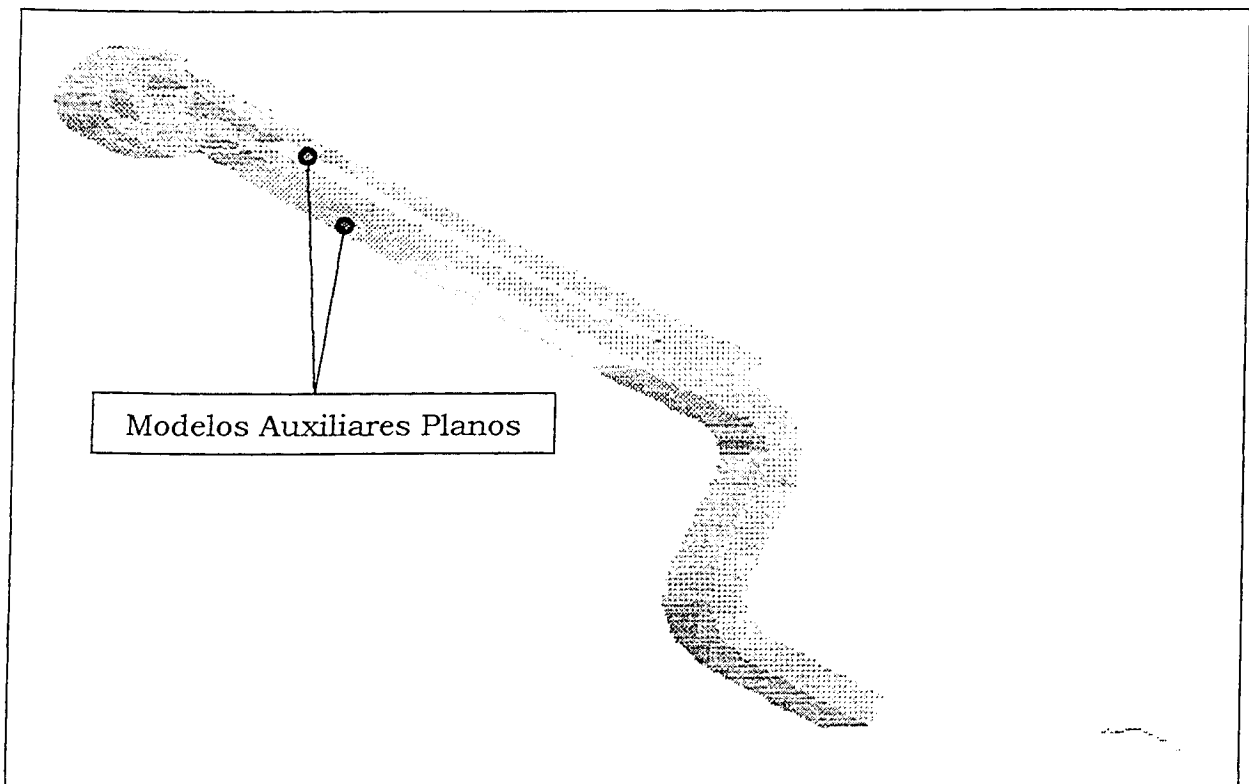


Figura 4.15.2 – Detalhe inferior dos modelos auxiliares à otimização de forma na fronteira do modelo primário da mola “zeta”

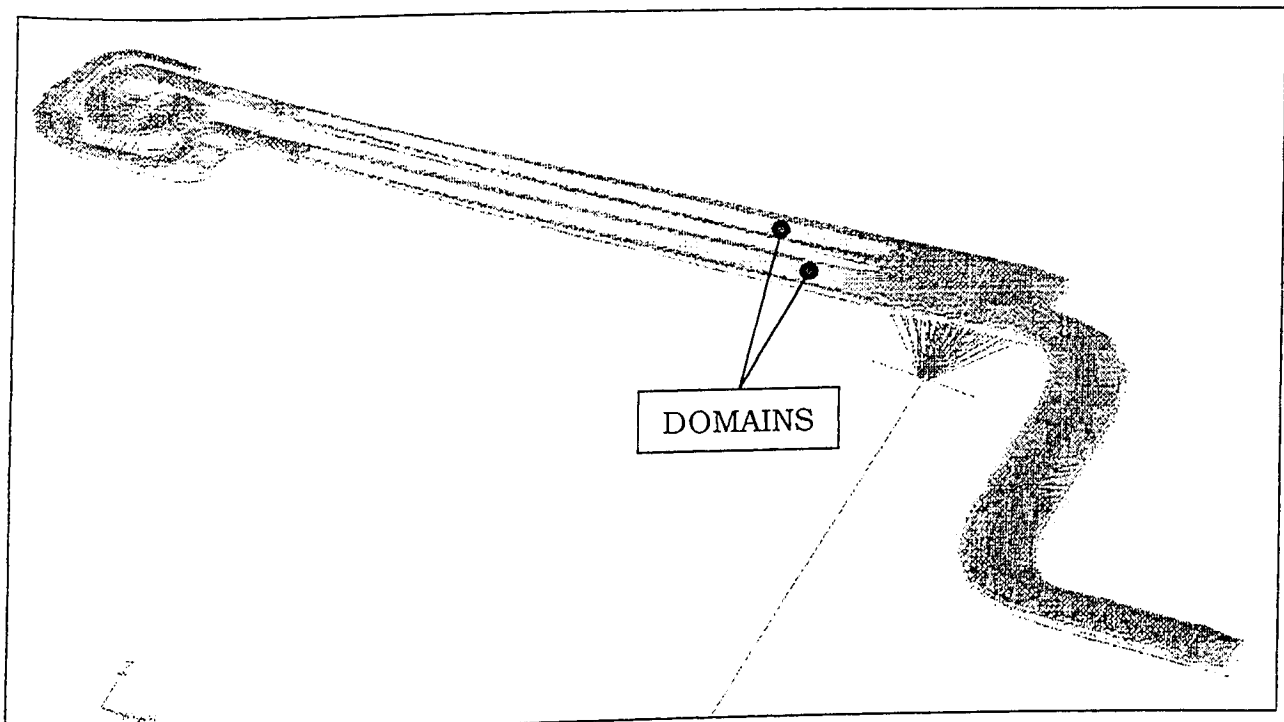


Figura 4.16 – Configuração dos “DOMAINS” (tonalidade mais clara) para otimização de forma da mola “zeta”

Ao contrário da semelhança entre os procedimentos de otimização dimensional empregados pelos dois programas utilizados, as profundas diferenças entre os métodos de otimização de forma de cada um deles se fizeram perceber nos resultados obtidos, conforme mostrado pelas duas tabelas a seguir:

Tabela 4.6.3: Resultados da otimização de forma da mola zeta no MSC/NASTRAN:

	Objetivo ( $\approx$ peso)	Máxima violação percentual da tensão limite
Projeto Inicial	$7.08 \times 10^{-3}$	20.0%
Projeto Final	$7.169 \times 10^{-3}$	16.1%

Tabela 4.6.4: Resultados da otimização de forma da mola zeta no VMA/GENESIS:

	Objetivo ( $\approx$ peso)	Máxima violação percentual da tensão limite
Projeto Inicial	$7.08 \times 10^{-3}$	20.0%
Projeto Final	$7.102109 \times 10^{-3}$	18.0%

Convém ressaltar que os resultados obtidos com o MSC/NASTRAN são fortemente dependentes de um parâmetro definido pelo usuário analista: o fator de escala da perturbação de malha para a otimização de forma (SF). Os valores listados na tabela 4.6.3 são resultantes da tentativa mais bem sucedida. Valores maiores para SF teriam levado a um projeto melhor (menores tensões) mas isto não foi possível devido a efeitos de distorção de malha, conforme já havia sido verificado no caso do suporte do feixe de molas do veículo 1935.

Analisando-se a tabela 4.6.4, vê-se que o processo teve convergência bastante rápida, até mesmo prematura, ao empregar-se o VMA/GENESIS. Mesmo alterando-se os parâmetros de convergência para valores muito menores que os default do programa, não foi possível prosseguir por mais de uma iteração.

Assim sendo, a otimização de forma executada revelou entre os dois programas utilizados:

- Semelhança na direção de busca ao projeto ótimo: ambos tenderam a estabelecer novos projetos com peso mais elevado visando redução das máximas tensões atuantes. Pode-se inferir que isto foi feito positivamente, uma vez que os percentuais de elevação de peso foram menores que os de diminuição das tensões em todos os casos. Em outras palavras, a taxa de redução das tensões foi mais alta que a de aumento de peso;
- A impossibilidade de obtenção de projetos ainda melhores deveu-se a problemas numéricos: no MSC/NASTRAN, dificuldade do solver em efetuar cálculos sobre uma malha distorcida pelo procedimento de otimização de forma. No VMA/GENESIS, convergência prematura devida (segundo todos os indícios) à presença de mínimos locais no espaço de projeto.

#### C - Conclusões:

A experiência realizada com este estudo de caso indicou algumas diretrizes para futuros trabalhos na área de otimização estrutural:

- Na disponibilidade de modelos de elementos finitos de casca, utilizar procedimentos de otimização dimensional, devido à maior facilidade de

preparação de dados em relação às tentativas de otimização de forma de modelos sólidos (sobretudo no MSC/NASTRAN);

- Executando otimização dimensional, partir de diversos projetos iniciais, tendo em vista a facilidade de fazê-lo: o modelo de elementos finitos permanece inalterado em todas as tentativas, uma vez que os valores iniciais das variáveis de projeto não precisam necessariamente coincidir com as propriedades básicas dos elementos do modelo. Ao optar-se por otimização de forma, cada teste com um projeto inicial diferente implica forçosamente na construção do modelo correspondente, o que pode ser muito trabalhoso;
- Tentar partir de projetos iniciais viáveis, mesmo que fictícios: o otimizador terá muito mais facilidade em determinar um projeto ótimo caso as restrições não precisem ser consideradas. É uma questão de bom condicionamento numérico e até mesmo de esforço computacional economizado, uma vez que os métodos de redução de modelos de elementos finitos levam em conta apenas as restrições mais críticas.

Para o caso da mola zeta em particular, caso seja implementada alguma alteração construtiva na peça, sugerimos tomar por base os resultados da tabela 4.6.1, configuração obtida a partir do modelo em elementos de placa com as dimensões reais. Tal configuração apresentou a melhor relação massa/tensões.

## 5 - VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL PELA TÉCNICA FOTO - ELÁSTICA

### 5.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS:

Os procedimentos de otimização de forma executados sobre o suporte do feixe de molas de um veículo de carga, descritos na seção 4.2.1 garantem, a nível computacional, que as restrições de tensão impostas ao componente serão respeitadas.

Na prática, isto significa que sob condições operacionais reais, em nenhum ponto da peça a tensão devida aos carregamentos será maior ou igual ao limite de resistência à fadiga do material, determinado em função de suas propriedades mecânicas e um coeficiente de segurança.

Apesar desta garantia quantitativa, optou-se por comparar a versão otimizada do suporte com as duas anteriores em bases mais qualitativas, no que diz respeito à eficácia da distribuição de tensões ao longo da peça. A questão básica desta investigação foi: pode a peça ótima sob o ponto de vista do peso ser de alguma forma inferior quanto a concentração de tensões devida à geometria?

Para ajudar a respondê-la, foi realizado um procedimento experimental de fotoelasticidade, cujos fundamentos, etapas, resultados e conclusões são apresentados a seguir.

### 5.2 - ANÁLISE EXPERIMENTAL DE TENSÕES PELA TÉCNICA FOTOELÁSTICA (DURELLI E RILEY, 1965; DALLY E RILEY, 1978):

### 5.2.1 - CONCEITUAÇÃO GERAL:

Os procedimentos de investigação fotoelástica baseiam-se nas propriedades fotomecânicas de certos materiais transparentes não cristalinos, que são opticamente isotrópicos na ausência de tensões mecânicas. Quando carregados, entretanto, perdem a propriedade de isotropia óptica, exibindo características semelhantes às dos cristais.

Este comportamento, conhecido como refração dupla temporária, foi primeiramente observado por Sir David Brewster em 1816 e permite estabelecer uma associação direta entre o estado de tensões no material e suas características ópticas.

As conseqüências da anisotropia óptica somente podem ser constatadas mediante um aparato de visualização adequado, capaz de polarizar (interromper a oscilação entre os campos elétrico e magnético) feixes luminosos, conforme esquematizado na figura 5.1. Tal esquema é implementado na prática através de um aparelho denominado polariscópio (figura 5.2).

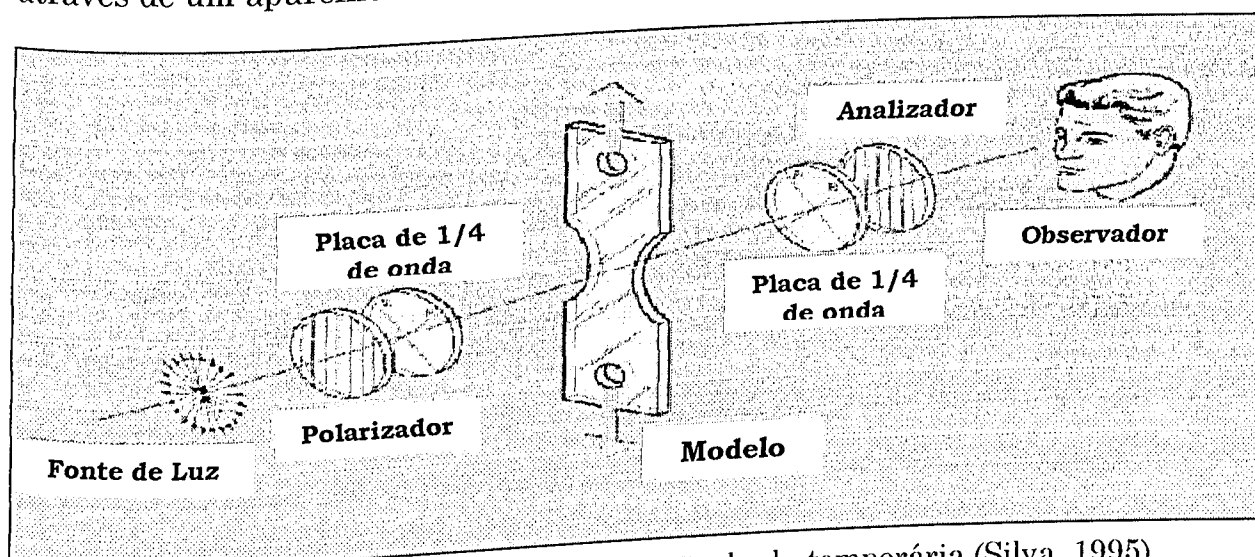


Figura 5.1: Esquema de visualização da refração dupla temporária (Silva, 1995)



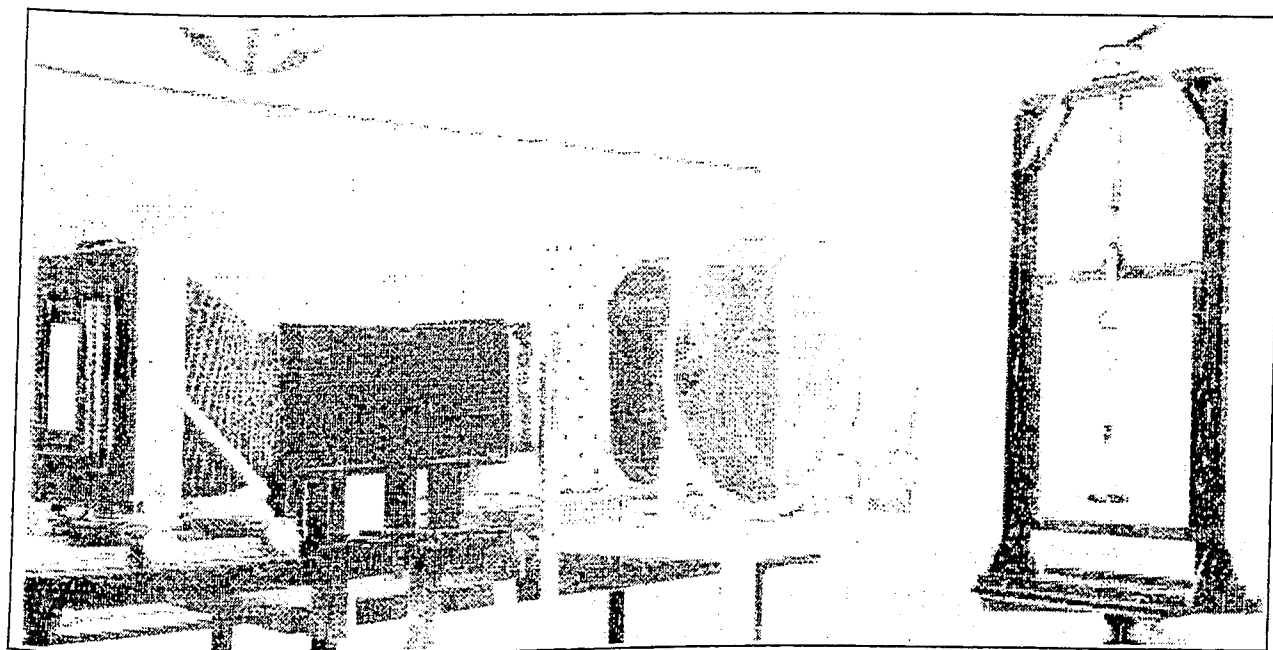


Figura 5.2: Ilustração de um polariscópio. Ao fundo, modelo fotoelástico carregado cuja distribuição de tensões será observada (Durelli e Riley, 1965)

Visto através do polariscópio, o modelo fotoelástico apresenta, quando carregado, linhas coloridas conhecidas como franjas. A ordem das franjas é função do grau de distorção dos planos ópticos do material, que corresponde, por sua vez, aos níveis de tensão mecânica provenientes das cargas aplicadas.

#### 5.2.2 - ETAPAS DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL:

##### A) SELEÇÃO DO MATERIAL FOTOELÁSTICO A SER EMPREGADO:

O material fotoelástico deve possuir as seguintes características:

- Transparência à luz empregada no polariscópio;
- Significativa sensibilidade à tensão e deformação;
- Linearidade quanto a:
  - propriedades de tensão e deformação;

- relação das tensões com a ordem das franjas;
- relação das deformações com a ordem de franja.
- Óptica e mecanicamente homogêneo e isotrópico;
- Isenção de propriedades dependentes do tempo, tais como fluência;
- Elevados módulo de elasticidade e limite elástico;
- Isenção de tensões residuais;
- Usinabilidade por métodos convencionais;
- A relação entre tensões/deformações e a ordem de franjas deve ser relativamente estável em relação à temperatura;
- e, obviamente, custo compatível.

Algumas resinas poliméricas comerciais são comumente empregadas como materiais fotoelásticos: Resina Colúmbia CR-39, Homalite 100, Policarbonatos, Resina Epóxi curada com Aminas (adotada neste trabalho) e Borracha de Uretano.

#### B) Calibração do material fotoelástico (Oliveira, 1988):

Do material selecionado deve ser retirada uma amostra para ser submetida a um procedimento de calibração, que permitirá a conversão das ordens de franja vistas no polariscópio em valores de tensão.

Para tanto, basicamente aplica-se sobre a amostra uma configuração de carga simples, cuja distribuição resultante de tensões seja conhecida ou possa ser determinada analiticamente. A distribuição de franjas correspondente é

registrada e servirá como gabarito para as leituras do ensaio propriamente dito (justificando a premissa de comportamento linear entre as tensões/deformações e as ordens de franja).

Um procedimento usual envolve a aplicação de solicitações axiais puras com intensidades conhecidas a um corpo de prova como o da figura abaixo, que também ilustra a curva de calibração resultante:

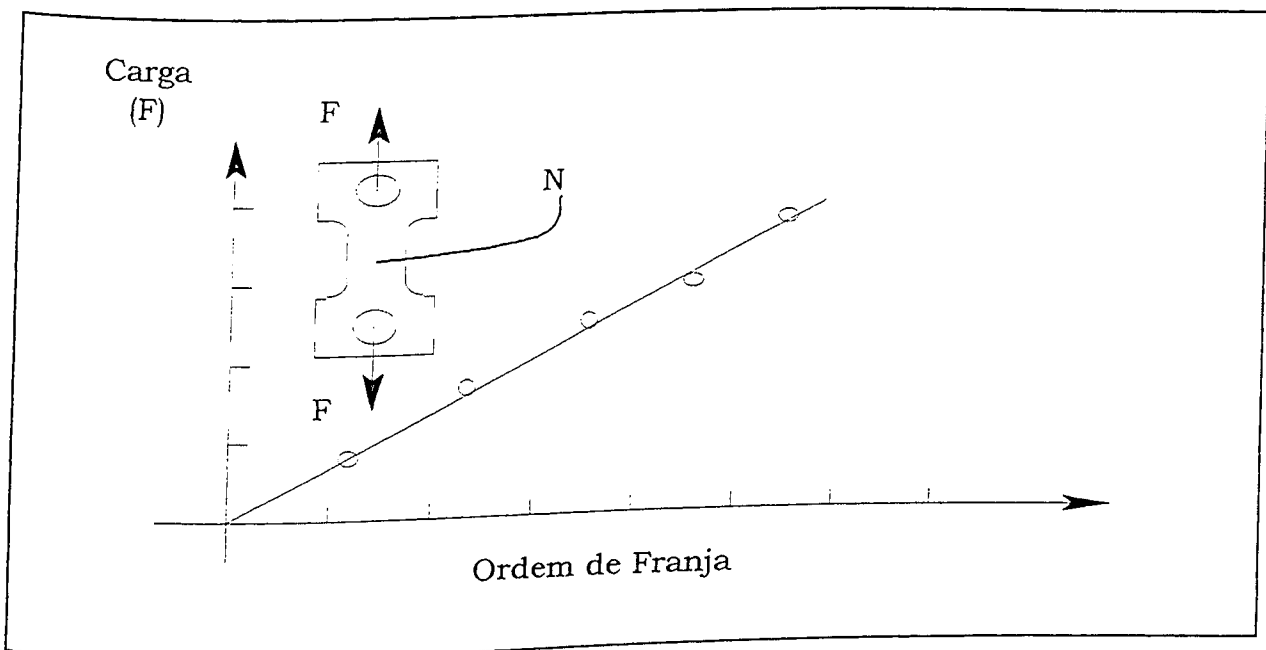


Figura 5.3: Esquema típico de calibração do material fotoelástico (Dally e Riley, 1965)

O objetivo específico do procedimento de calibração é a obtenção do valor da constante óptica do material (C). Para fazê-lo, deve-se levar em conta o seguinte:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (5.1)$$

lei básica de cálculo da tensão atuante num corpo com área de secção transversal A sujeito a uma solicitação axial pura (tipo de carregamento do ensaio de calibração) de magnitude F.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{C \cdot N}{t} \quad (5.2)$$

onde:

$\sigma_1$ : Máxima tensão normal principal;

$\sigma_2$ : Mínima tensão normal principal;

C: Constante óptica do material;

N: Ordem de franja;

t: espessura de material.

A equação (5.2) expressa a lei óptica dos materiais, relacionando ordem da franja com a diferença entre as tensões principais resultantes do carregamento (no caso de sollicitação uniaxial,  $\sigma_2$  anula-se fazendo com que  $\sigma_1 - \sigma_2$  seja equivalente a  $\sigma$ ).

Logo, igualando (5.1) a (5.2) tem-se que:

$$\frac{F}{A} = C \cdot \frac{N}{t} \quad (5.3)$$

Assim sendo, conhecendo-se a área e a espessura de um corpo de prova de calibração, são anotados os valores das ordens de franja correspondentes a uma série de cargas aplicadas. Em seguida, é feita uma regressão linear entre estes pares de dados e o coeficiente angular da reta resultante é a constante óptica C do material, conforme expresso por (5.3).

C) Construção do modelo fotoelástico:

Trata-se da confecção de um modelo representativo (em escala real ou não) do componente a ser testado.

Em se tratando de fotoelasticidade tridimensional, o modelo normalmente é obtido mediante fundição da resina fotoelástica em um molde de gesso revestido com silicone. Já no caso plano, desenvolvido neste trabalho, a projeção de uma secção da peça é recortada sobre uma placa de material fotoelástico.

Também fazem parte do modelo fotoelástico sistemas de carga e condições de vinculação que corretamente representem as condições operacionais que se queiram reproduzir. Regras de similitude devem ser aplicadas para ajustar as solicitações reais em função da resistência do material fotoelástico e do fator de escala empregado na construção do modelo.

A seguinte figura ilustra o modelo fotoelástico completo (peça + condições de contorno) construído para este trabalho:

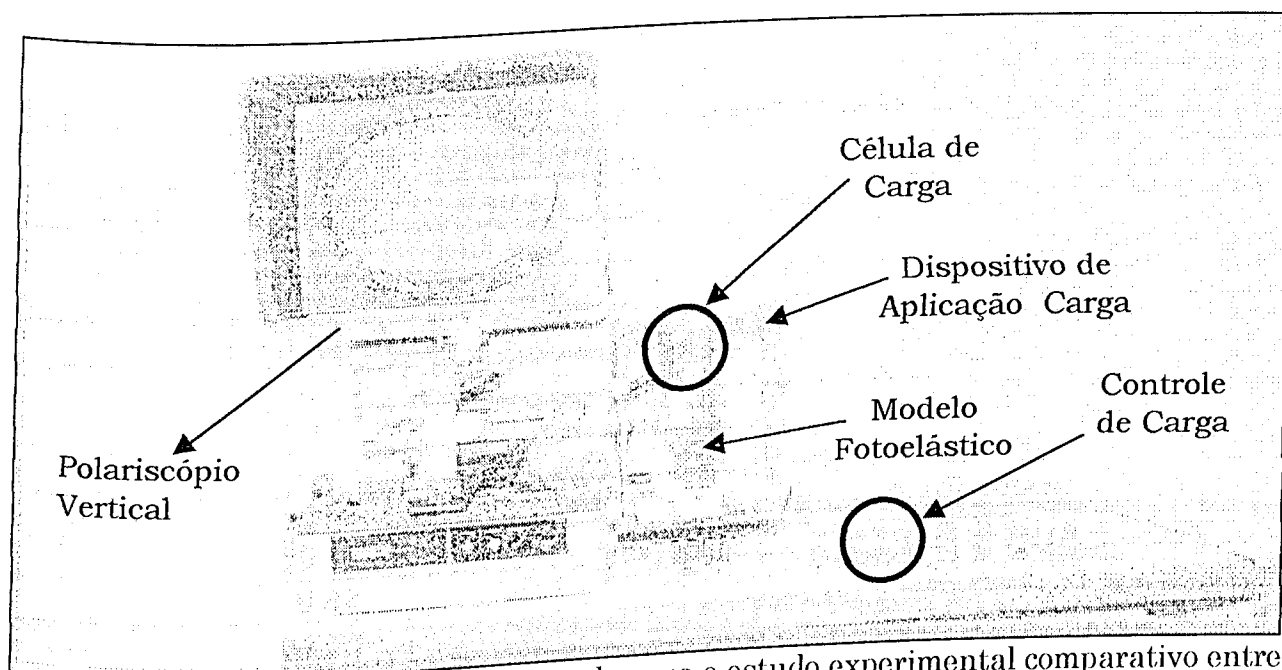


Figura 5.4: Modelo fotoelástico empregado para o estudo experimental comparativo entre as diversas versões do suporte do feixe de molas de um veículo de carga

#### D) Aplicação das cargas e visualização das tensões:

Uma vez que o fenômeno de refração dupla (responsável pelo aparecimento das franjas coloridas relacionadas às tensões atuantes) é temporário (dura somente enquanto estiverem aplicadas as cargas que distorcem os planos ópticos do material), torna-se necessário solicitar o modelo fotoelástico simultaneamente ao emprego do polariscópio para contagem das ordens de franja resultantes.

#### E) Leitura dos resultados pela contagem das ordens de franja:

As ordens de franja visualizadas no polariscópio são contadas e comparadas com o padrão de calibração obtido na etapa "B".

### 5.3 - RESULTADOS:

- Dados de calibração do material fotoelástico:

Tabela 5.1: Dados do ensaio de calibração da resina fotoelástica usada para construir o modelo do suporte:

Dimensão	Valor
Espessura	1.80 mm
Área	38.25 mm <sup>2</sup>
Ordem de Franja	Carga Aplicada (N)
	595.2
0.14	104.40
0.27	148.98
0.41	193.38
0.62	224.64
0.70	254.28
0.82	283.86
0.90	327.06
1.03	402.72
1.28	447.12
1.42	

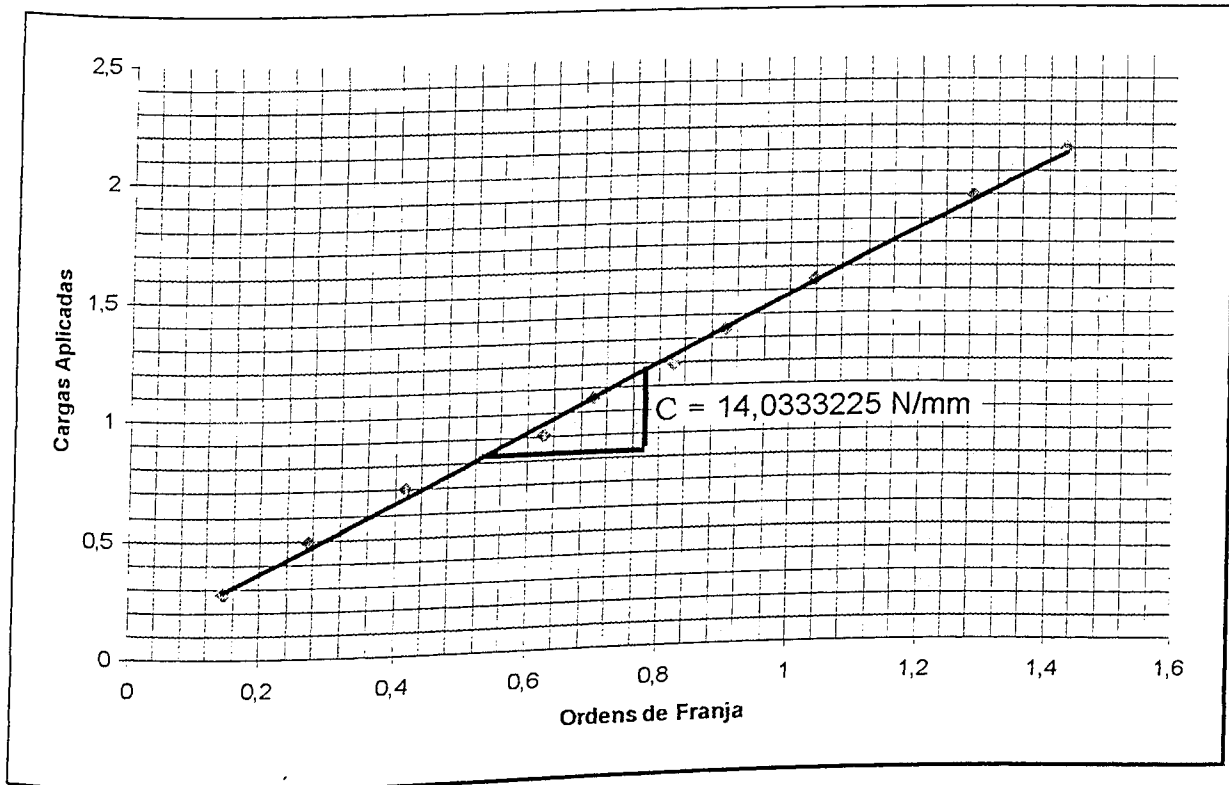


Figura 5.5 - Reta de regressão resultante, com indicação da constante óptica

Uma vez calibrado o material, o procedimento de leitura das franjas levou às seguintes conclusões:

A - Versão Ótima:

- Conclusões Qualitativas:

- Por inspeção visual, a região de máxima concentração de tensões da peça continua sendo a área correspondente à junção das faces de apoio vertical e horizontal da longarina (vide figura 5.6), resultado este consoante com análises de elementos finitos executadas na HCAE para as outras versões

da peça. Os valores das ordens de franja obtidas (proporcionais aos fatores de concentração de tensões) para as curvaturas vertical e horizontal desta região serão demonstrados na seção seguinte (Conclusões Quantitativas) ;

- Ainda sobre a região crítica comentada no item anterior, cabe salientar que ela não foi alvo direto dos procedimentos de otimização executados. Além disso as influências indiretas de outras mudanças geométricas introduzidas sobre a configuração das cargas nesta região tende a ser negligenciável. Isto tudo indica que as alterações de forma decorrentes do processo de otimização não introduziram deméritos em relação à versão reforçada do suporte em se tratando da região sujeita aos maiores esforços. Logo, se a referida região da peça já encontrava-se segura na versão anterior, tem-se esta evidência experimental de que continua segura na versão ótima.
- Também visualmente, percebe-se que as regiões inferior (“pernas” do suporte) e da nervura central não configuram focos de concentração de tensões, apesar do alívio de material a elas imposto. Pelo contrário, a presença apenas da franja de ordem zero nestas regiões assegura que nelas o risco de falha é bastante mais baixo que na junção das faces de apoio vertical e horizontal da longarina.



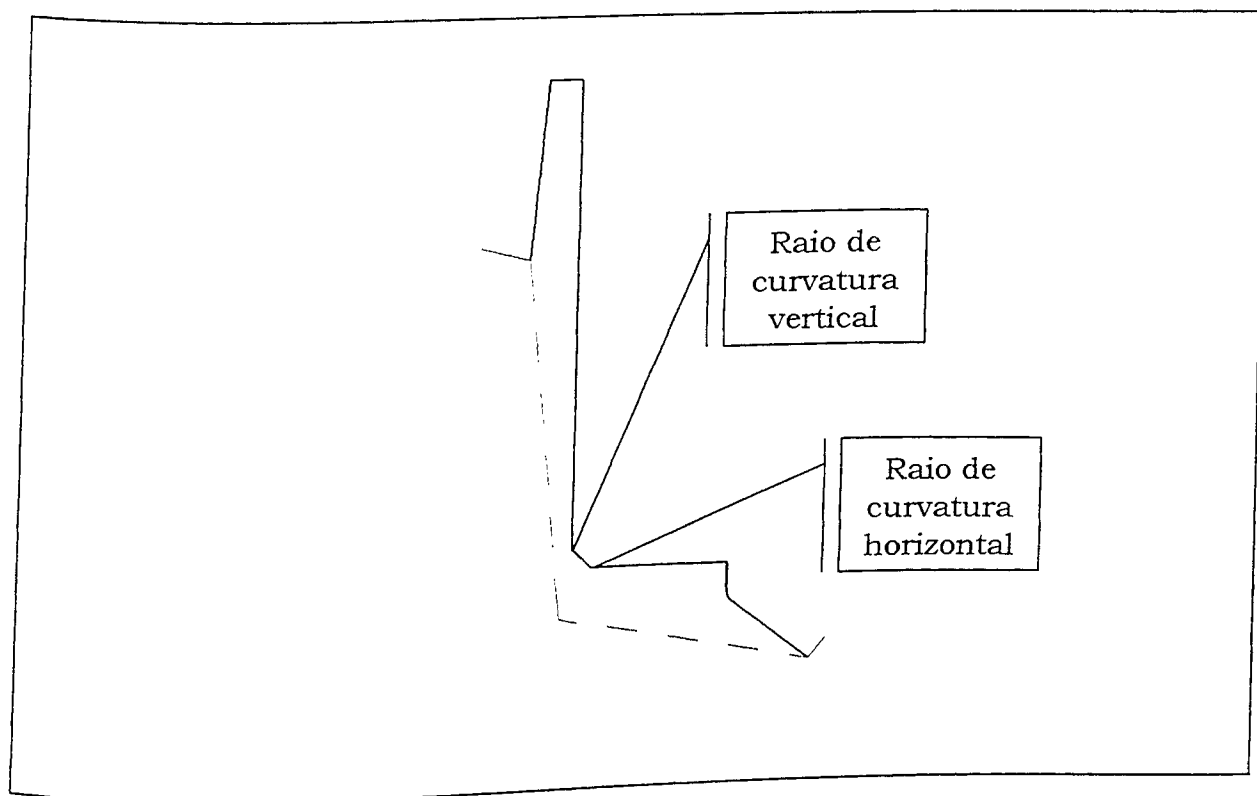


Figura 5.6 – Representação esquemática dos raios de curvatura de região crítica em termos de concentração de tensões

- Conclusões Quantitativas:

Para o cálculo do fator da máxima ordem de franja na região crítica, foram desenvolvidos os seguintes passos:

1 – Isolar um ponto de mais alta criticidade na região de maior concentração de tensões. Evidentemente, este ponto encontra-se sobre a descontinuidade geométrica da região, ou seja, seus raios de curvatura horizontal e vertical. Desta forma, a ordem de franjas tende a aumentar à medida em que são executadas leituras mais próximas ao raio de curvatura. Isto é comprovado pelas tabelas 5.2 e 5.3 a seguir:

Tabela 5.2 – Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura vertical, versão ótima:

Distância em mm	Ordem de franja
30,00	1,22
28,00	1,23
26,00	1,24
24,00	1,26
22,00	1,27
20,00	1,30
18,00	1,31
16,00	1,34
14,00	1,57
12,00	1,64
10,00	1,68
8,00	1,86
6,00	2,00
4,00	2,17
2,00	2,31

Sobre os resultados acima listados, cabem ainda as seguintes observações:

- A não linearidade entre a distância em relação ao raio de curvatura e a ordem de franjas acentua-se consideravelmente à medida em que a leitura é feita mais proximamente à borda do raio de curvatura (menor distância). Este dado está em conformidade com as referências teóricas disponíveis;

Extrapolando-se os resultados da tabela acima para distância zero, obtém-se a ordem de franja máxima da região igual a 2.5154, conforme mostrado no gráfico 5.7 abaixo:

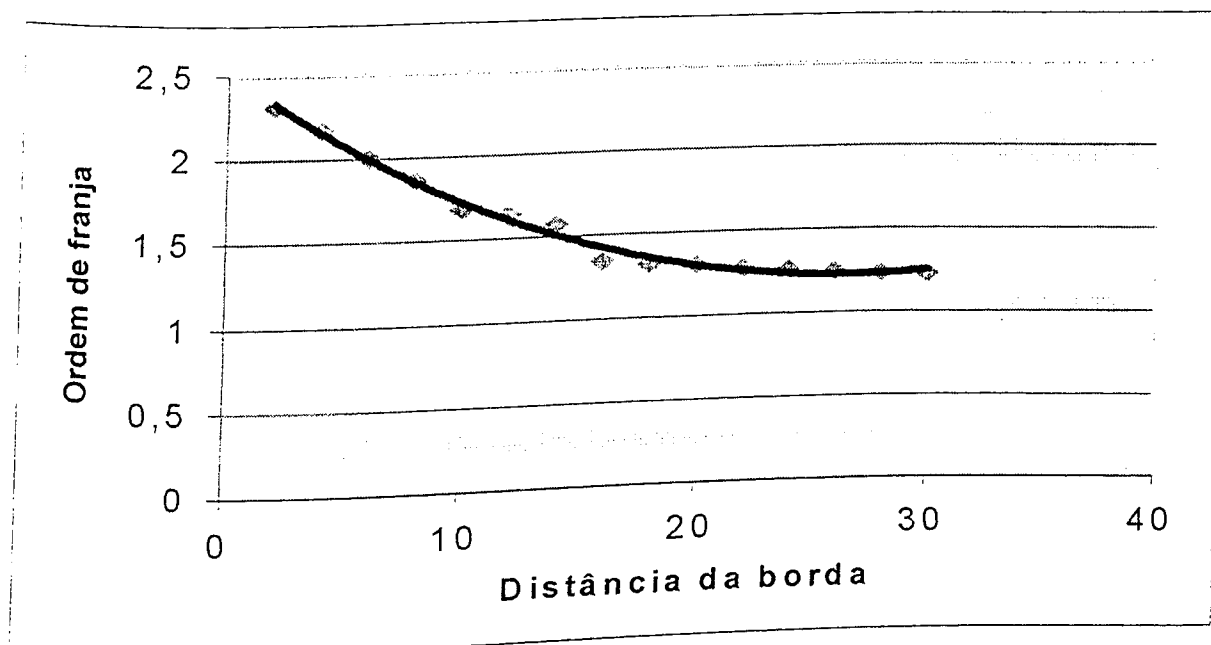


Figura 5.7: Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura vertical, versão ótima

Tabela 5.3 – Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão ótima:

Distância em mm	Ordem de franja
30,00	0,00
28,00	0,00
26,00	0,00
24,00	0,00
22,00	0,00
20,00	0,00
18,00	0,00
16,00	0,12
14,00	0,15
12,00	0,26
10,00	0,46
8,00	0,67
6,00	0,89
4,00	1,14
2,00	

É possível perceber que a ordem de franja máxima para a curvatura horizontal é menor que para a vertical, resultando em menor taxa de

concentração de tensões. O valor exato desta ordem de franja é de **1,3405**, conforme indicado na figura 5.8:

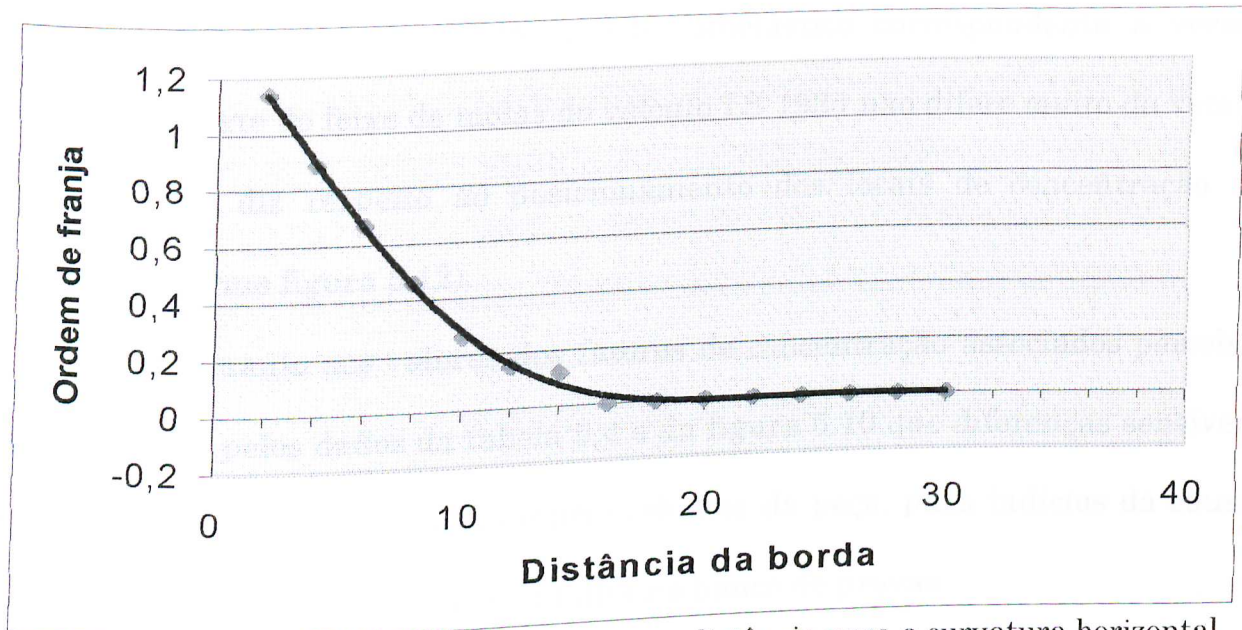


Figura 5.8 – Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura horizontal versão ótima.

Finalmente, a distribuição de tensões resultante na versão ótima, conforme visualizada no polariscópio, é ilustrada a seguir:

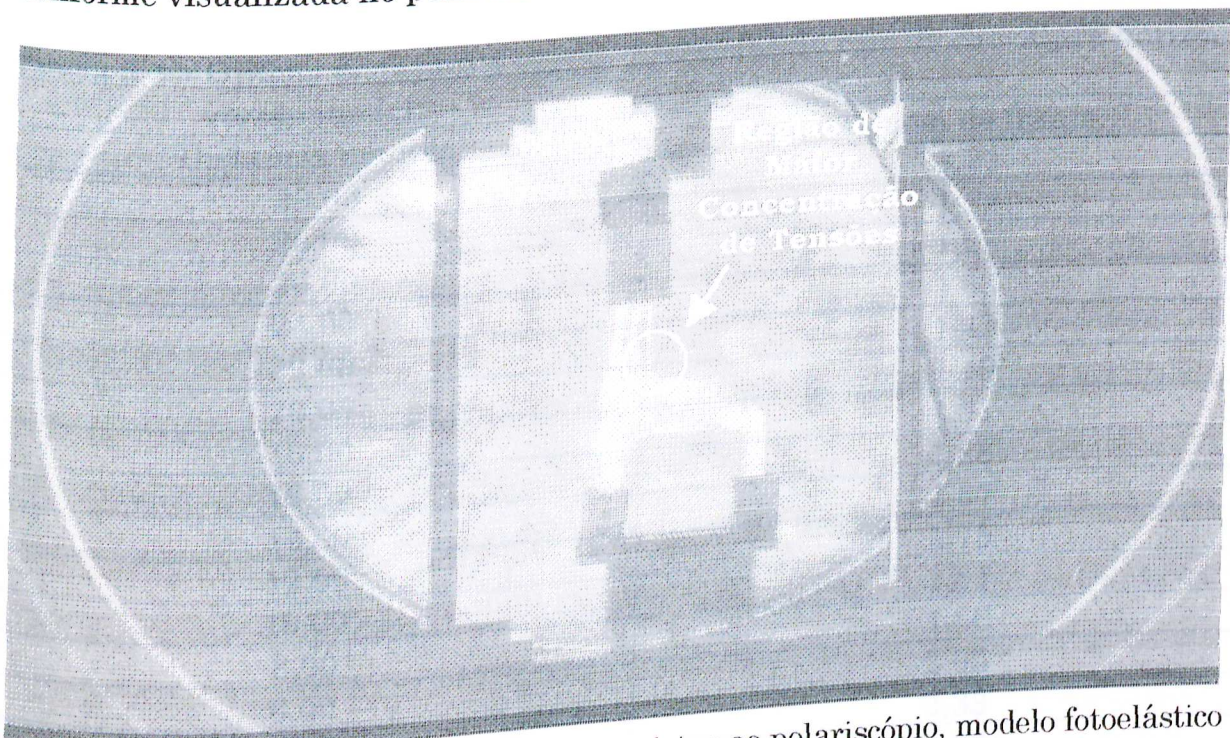


Figura 5.9 – Distribuição geral de tensões vistas ao polariscópio, modelo fotoelástico correspondente à versão ótima

## B – Versão Inicial:

O aspecto geral do modelo fotoelástico correspondente à versão inicial do suporte do feixe de molas do veículo LS 1935 não difere muito da versão ótima no que diz respeito ao posicionamento dos locais de concentração de tensões (conforme figura 5.12).

Quanto aos valores dos fatores de concentração associados percebe-se, entretanto, pelos dados da tabela 5.4 e da figura 5.10 que diferenças sensíveis apontam, conjuntamente com a própria esbeltez da peça, para indícios da causa que levou o protótipo desta versão à falha no banco de provas.

A ordem de franja máxima de 2.9456 no ponto crítico (raio de curvatura vertical) por exemplo, é significativamente mais alto que o apresentado no caso da peça ótima (2.5154), conforme atestado a seguir:

Tabela 5.4 – Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão inicial:

Distância em mm	Ordem de franja
	1,21
30,00	1,23
28,00	1,28
26,00	1,33
24,00	1,43
22,00	1,49
20,00	1,51
18,00	1,58
16,00	1,67
14,00	1,75
12,00	1,81
10,00	1,86
8,00	2,05
6,00	2,33
4,00	2,58
2,00	

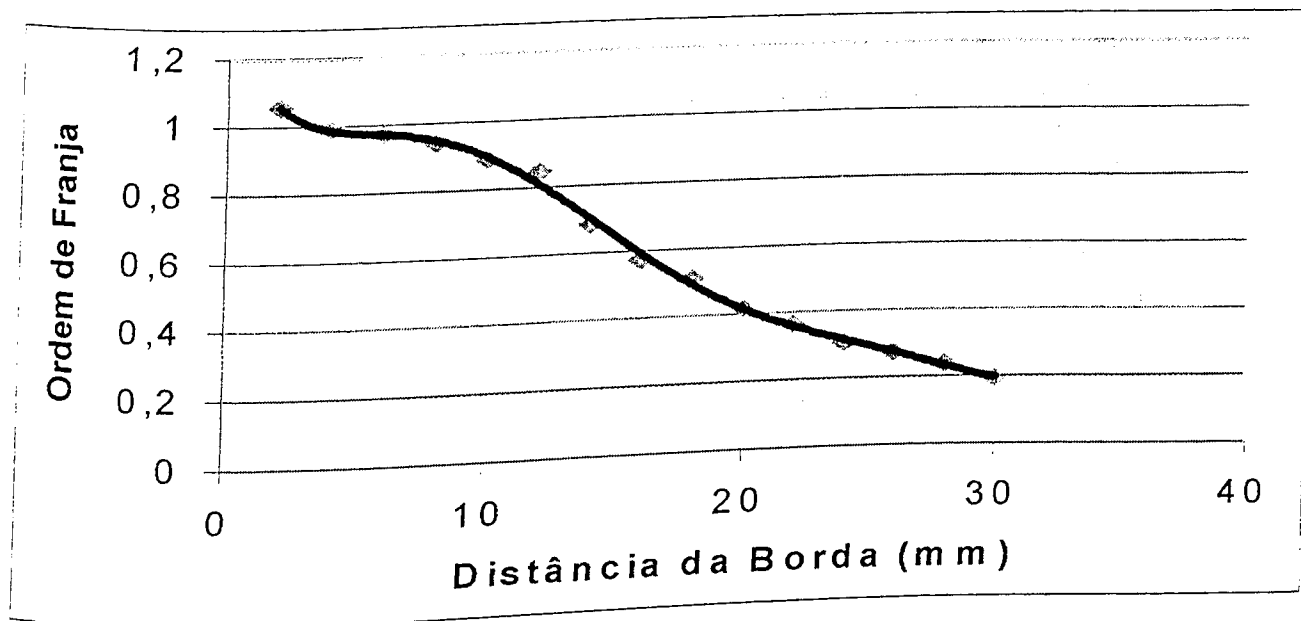


Figura 5.10 – Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura vertical, versão inicial

Quanto à concentração de tensões no raio de curvatura horizontal, verificou-se um valor ligeiramente inferior ao da versão ótima (ordem de franja igual a 1.2548 versus 1.3405).

Tabela 5.5 – Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão inicial:

Distância em mm	Ordem de franja
30,00	0,26
28,00	0,28
26,00	0,30
24,00	0,34
22,00	0,36
20,00	0,39
18,00	0,44
16,00	0,50
14,00	0,54
12,00	0,59
10,00	0,69
8,00	0,76
6,00	0,97
4,00	1,04
2,00	1,10

Extrapolando os dados da tabela exibida acima, resulta o seguinte gráfico com a respectiva ordem de franja máxima no ponto investigado.

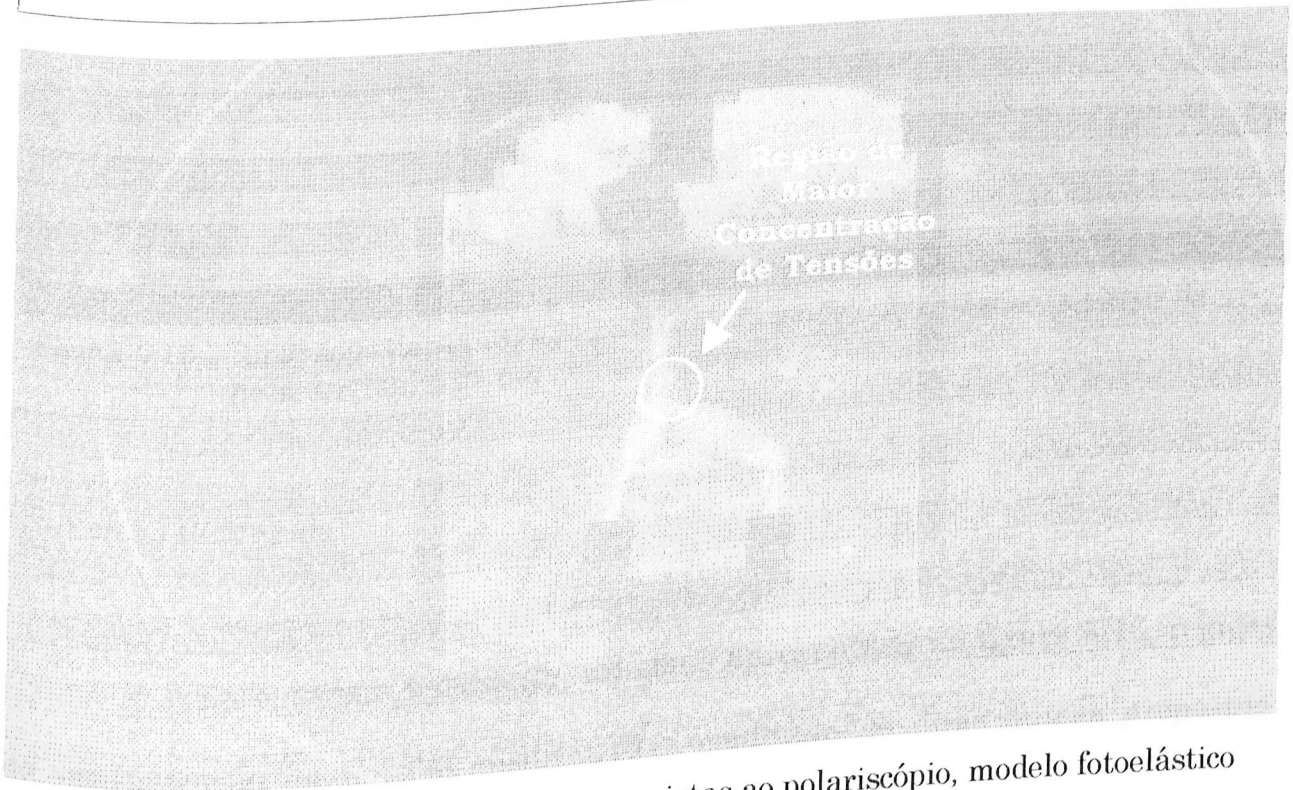
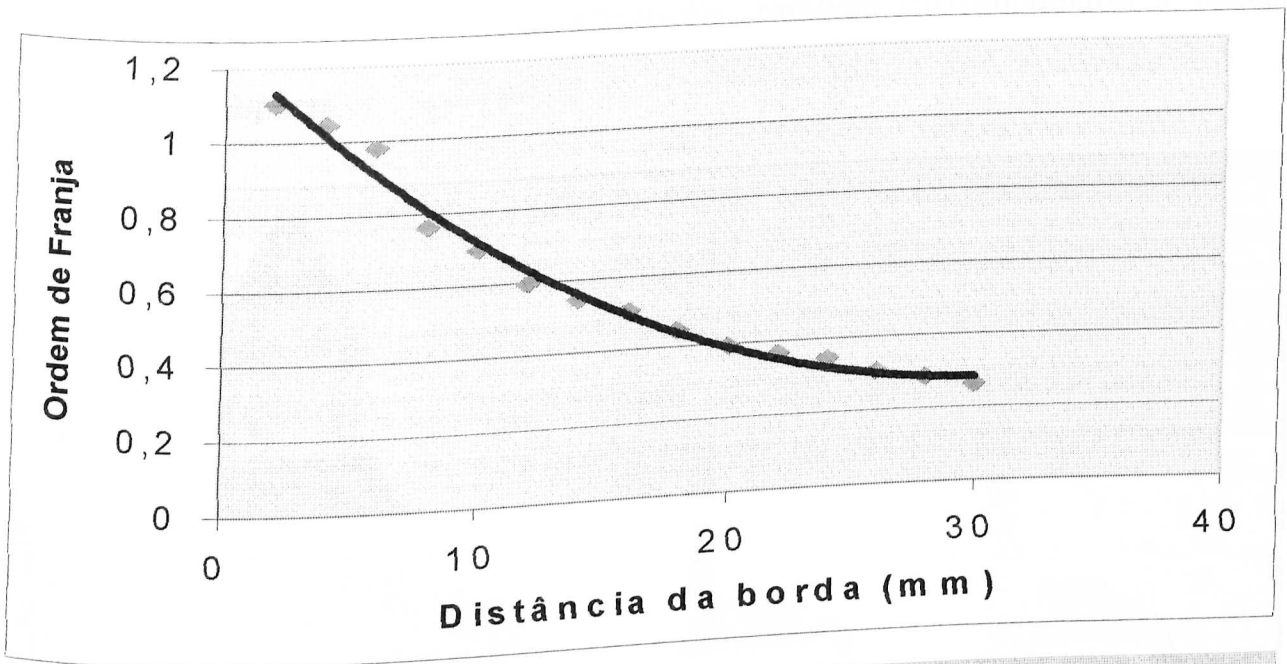


Figura 5.12 – Distribuição geral de tensões vistas ao polariscópio, modelo fotoelástico correspondente à versão inicial

A título de ilustração adicional, são exibidos na figura abaixo:

- Um exemplar da versão inicial da peça;
- Um gabarito de alumínio do perfil da peça, usado para a confecção dos modelos em material fotoelástico;
- Um dos modelos fotoelásticos ensaiados, também correspondente à versão inicial do suporte.

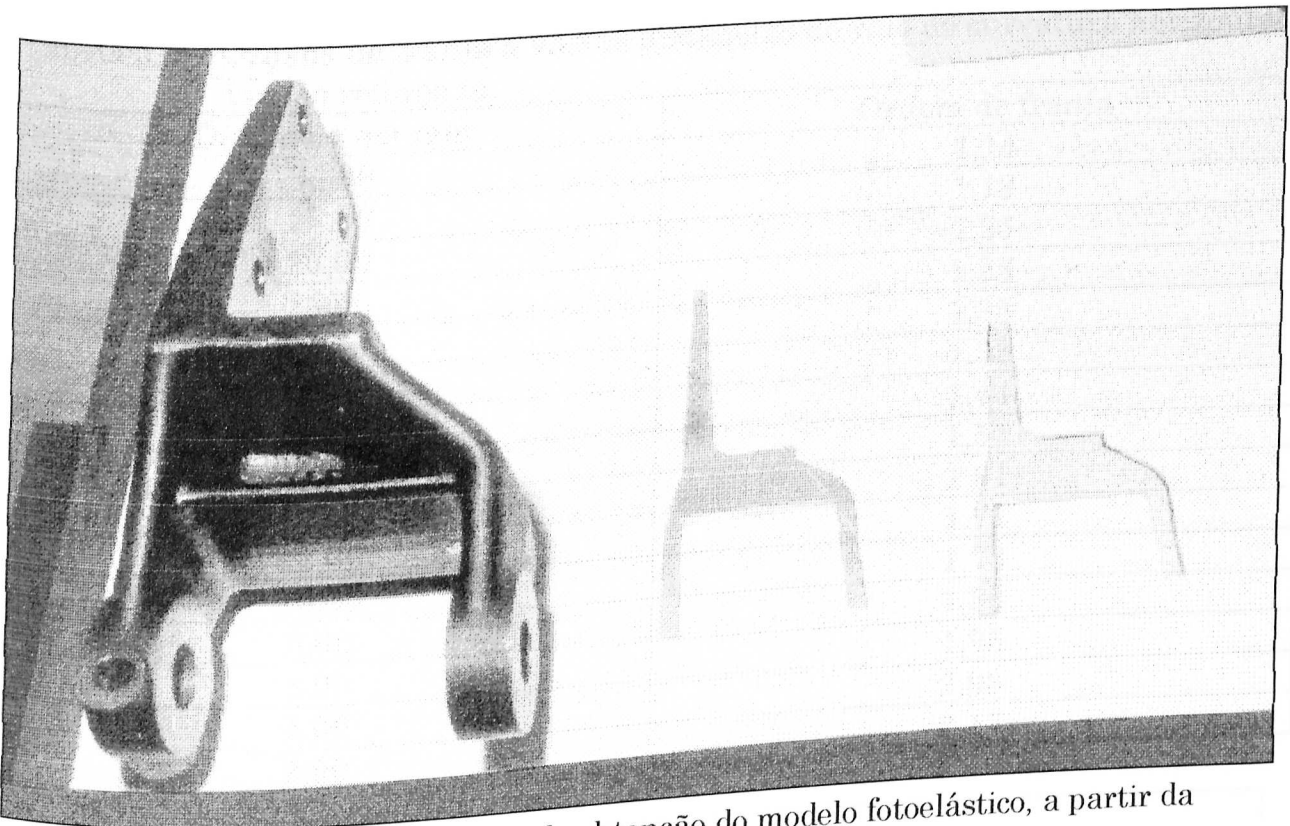


Figura 5.13 – Ilustração das etapas de obtenção do modelo fotoelástico, a partir da peça original e de um gabarito geométrico em alumínio

### C – Versão Reforçada:

Este projeto apresenta, tal como apresentado na figura 5.16, regiões de concentração de tensões posicionadas conforme as duas outras propostas (ótima e inicial).



Conforme se esperava, o material adicional garantiu a esta versão do suporte um fator de concentração de tensões mais baixo no ponto crítico (ordem de franja igual a 2.2952). Por este dado verifica-se imediatamente que, com relação a este ponto crítico, o projeto ótimo aproxima-se bem mais da versão reforçada que da versão inicial:

Tabela 5.6 – Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão reforçada:

Distância em mm	Ordem de franja
30,00	1,14
28,00	1,18
26,00	1,25
24,00	1,28
22,00	1,33
20,00	1,38
18,00	1,44
16,00	1,51
14,00	1,61
12,00	1,71
10,00	1,73
8,00	1,86
6,00	1,95
4,00	2,08
2,00	2,17

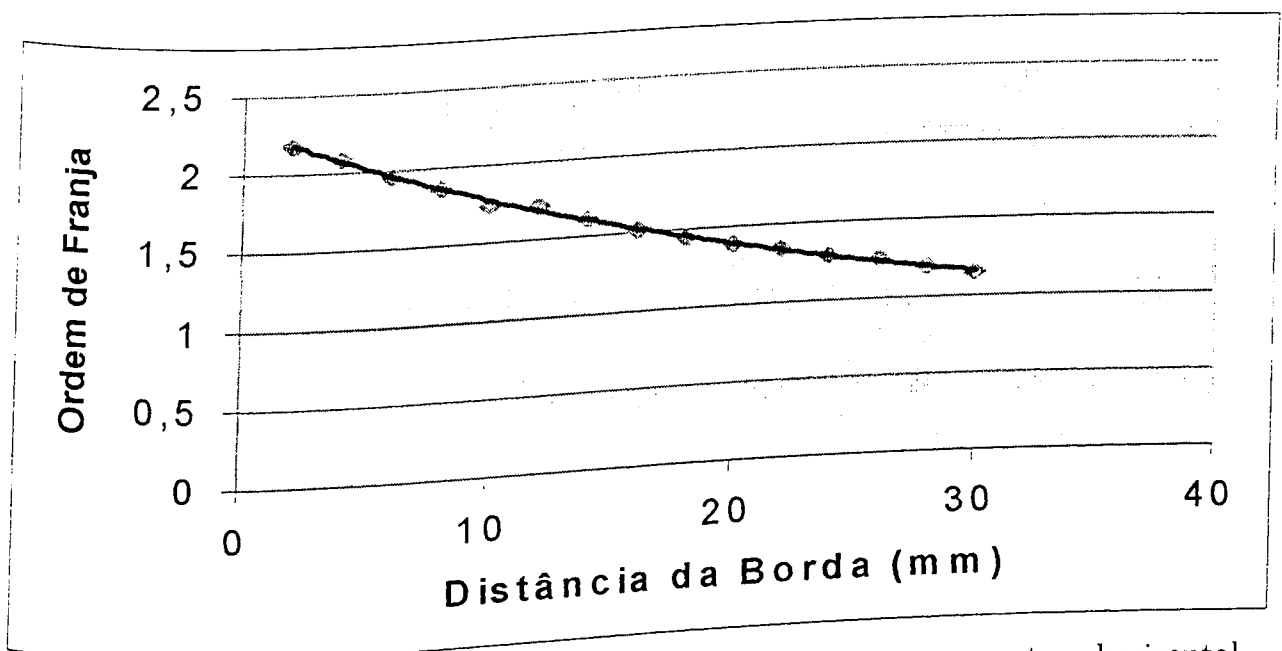


Figura 5.14 – Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura horizontal, versão reforçada

Quanto ao outro ponto de curvatura, o valor atingido máxima ordem de franja foi igual a 1.3059 , tendo ocorrido praticamente uma equivalência em relação ao valor verificado na versão ótima, sendo este último um pouco mais elevado:

Tabela 5.7 – Ordens de franja a várias distâncias do raio de curvatura horizontal, versão reforçada:

Distância em mm	Ordem de franja
30,00	0,19
28,00	0,23
26,00	0,27
24,00	0,30
22,00	0,36
20,00	0,41
18,00	0,51
16,00	0,57
14,00	0,68
12,00	0,84
10,00	0,88
8,00	0,93
6,00	0,97
4,00	0,98
2,00	1,05

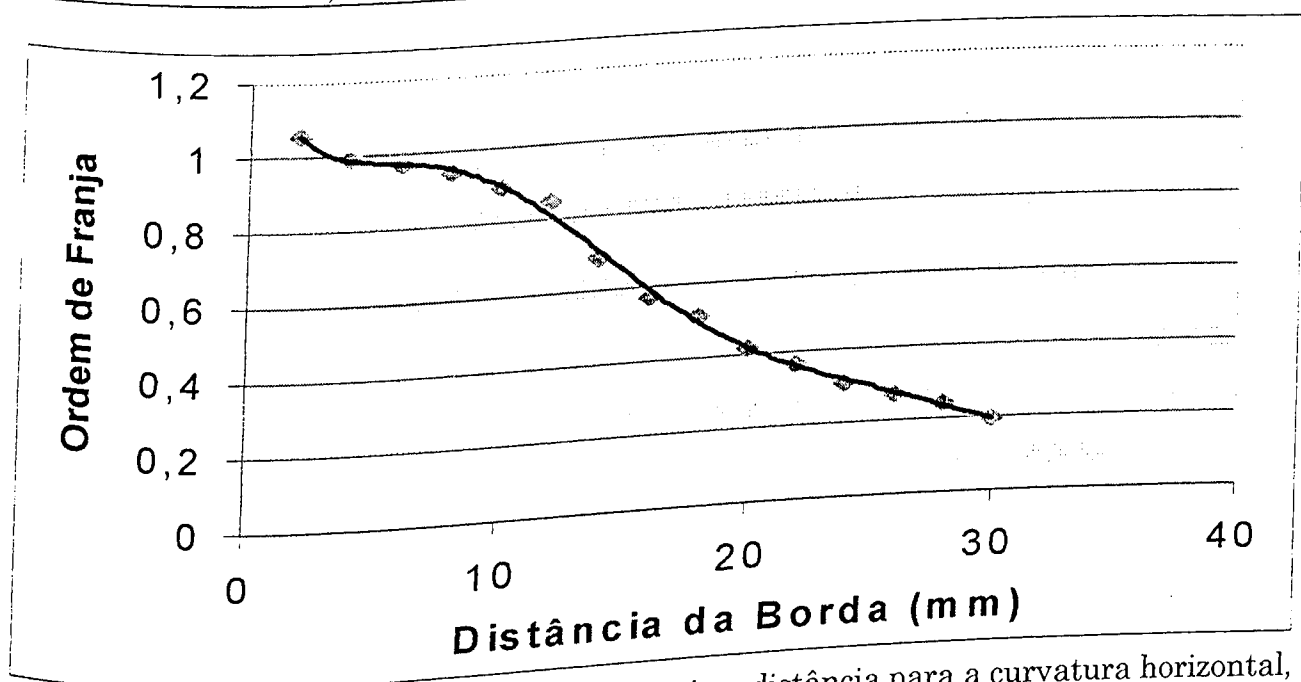


Figura 5.15 – Resultados de ordem de franja x distância para a curvatura horizontal, versão reforçada

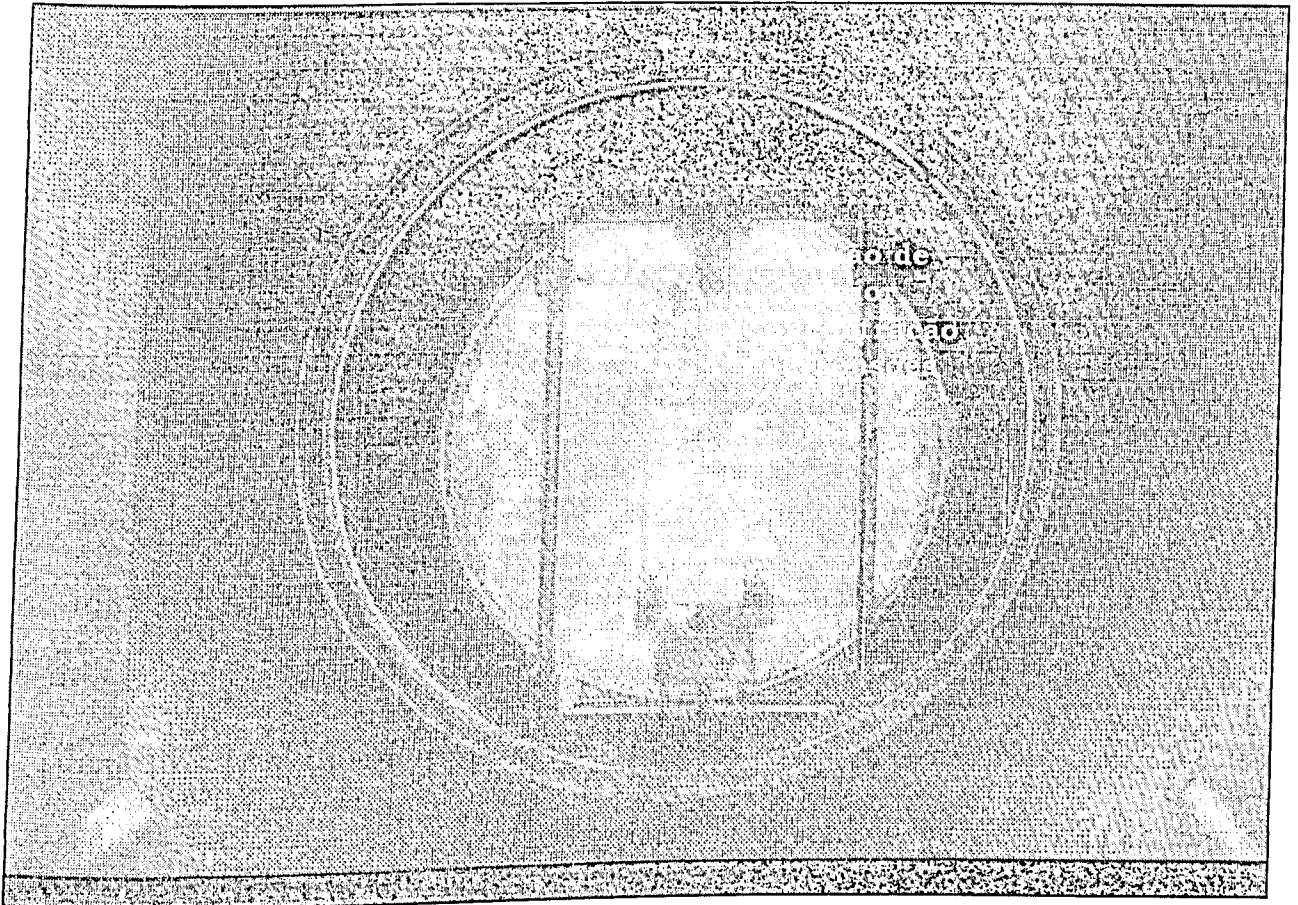


Figura 5.16 – Distribuição geral de tensões vistas ao polariscópio, modelo fotoelástico correspondente à versão reforçada

#### 5.4 - CONCLUSÕES DOS ENSAIOS FOTOELÁSTICOS:

De forma geral, pode-se dizer que o procedimento de otimização de forma realizado sobre o suporte do feixe de molas da suspensão dianteira do veículo LS 1935 produziu uma nova versão da peça que guarda as seguintes relações com as duas anteriores:

- Mesma distribuição geral de tensões: verificada visualmente através da inspeção da peça inteira carregada no polariscópio. A importância deste dado

reside no fato de que a região crítica não foi deslocada para outro local menos reforçado;

- Fator de concentração de tensões máximo mais próximo do existente na versão reforçada que o da versão inicial: a redução de massa da ordem de 22% não acarretou comprometimento da resistência da peça a níveis de falha;
- Distribuição das tensões entre os dois raios de curvatura da região de máxima concentração de tensões: isto se verifica pela diferença entre as máximas ordens de franja nestes dois pontos, que é sensivelmente menor na versão ótima que na inicial (e praticamente igual à da versão reforçada), demonstrando que o procedimento de otimização de forma resultou em redistribuição das tensões do ponto mais solicitado para o outro, menos carregado.

## 6 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

### 6.1 - CONCLUSÕES GERAIS:

Sobre a prática de projetos automatizados via síntese estrutural, pode-se dizer que trata-se de algo muito mais abrangente que uma técnica apenas. Constitui, na verdade, uma metodologia cujo escopo vai além das implementações numéricas/computacionais, definindo toda uma postura perante a tarefa da execução do projeto de engenharia.

Desta forma, o pleno aproveitamento de seu enorme potencial dá-se em ambientes multidisciplinares em que a filosofia da engenharia concorrente possa ser aplicada. Com a participação de todos os elementos responsáveis por cada etapa do ciclo de vida do produto, desde a concepção básica até as fases posteriores de manutenção, é possível definir uma configuração em que se tenha um ótimo no sentido mais amplo: um produto que agrega máximo valor ao usuário final, tecnologicamente superior e economicamente competitivo do ponto de vista de quem o fabrica. As ferramentas computacionais de síntese estrutural constituem poderoso recurso para a obtenção de tais predicados.

Segundo bibliografia recente (Vanderplaats e Gosh, 1997), existe no mercado de software para engenharia uma forte tendência no sentido de desenvolvimento de aplicações voltadas à síntese estrutural combinando otimizadores numéricos com os mais diversos campos de análise. Na essência, tais ferramentas, além de popularizar o emprego da otimização como prática corriqueira de projeto, têm o potencial de automatizar sobremaneira as

atividades de engenharia em relação ao paradigma atual, o que sem dúvida facilitará o trabalho do profissional que estiver adaptado à nova mentalidade. Na forma, tratam-se de programas com elevado grau de integração entre seus componentes principais (módulo de análise e otimizadores), tornando quase imperceptíveis as interfaces entre elementos muitas vezes dissimilares sob os aspectos de concepção, finalidades e implementação.

Um outro aspecto importante diz respeito à preparação da malha do modelo de elementos finitos para fins de otimização. Em primeiro lugar, uma discretização coerente com a realidade física (e não necessariamente mais fina) da peça levará a melhores resultados. Além disso, grande economia de esforço computacional pode ser obtida caso se opte por refinar a malha somente nas regiões do modelo que efetivamente serão afetadas pelo procedimento de otimização a ser desenvolvido. Tais cuidados prévios devem levar a um uso mais racional dos recursos computacionais, que tendem a ser extremamente exigidos nas aplicações de síntese estrutural.

Finalmente, embora todo este quadro reforce a já prestigiada posição do desenvolvimento virtual de produtos como opção de engenharia, o bom senso indica que a verificação experimental é e continuará sendo imprescindível para a validação dos resultados computacionais, tanto mais em produtos que envolvam segurança e/ou grandes riscos econômicos. A contínua melhoria das técnicas numéricas apenas contribui para a redução dos custos envolvidos com experimentação, fato que constitui preciosa oportunidade para o aperfeiçoamento desta última.

## 6.2 - CONCLUSÕES ESPECÍFICAS:

### 6.2.1 - APLICATIVOS EMPREGADOS:

Quanto aos programas computacionais utilizados e casos estudados durante o desenvolvimento do presente trabalho, cabe tecer os seguintes comentários:

#### A) MSC/NASTRAN:

Como ferramenta de análise, este programa é um dos mais tradicionais e confiáveis, graças a seu pioneirismo e qualidade intrínseca. Sua adaptação a tarefas de síntese estrutural, entretanto, parece um pouco dificultada em virtude de sua concepção básica: trata-se de um programa de análise com otimizador acoplado a posteriori, numa seqüência de solução separada. Isto penaliza sobretudo a flexibilidade, levando a complicações de pré-processamento.

#### B) VMA/GENESIS:

Basicamente, GENESIS é um programa de otimização estrutural que se utiliza do método dos elementos finitos para avaliar as funções implícitas cujos valores são necessários ao funcionamento dos algoritmos de otimização.

Este enfoque especializado representa um grande poder na realização de projetos ótimos automatizados, de forma flexível e facilitada.

Além disso, cabe salientar que o método de otimização de forma mostrou-se bastante estável quanto a problemas de distorção de malha. A assistência técnica prestada pelo fornecedor durante o desenvolvimento dos trabalhos foi exemplar.

#### 6.2.2 - CASOS ESTUDADOS:

Todos os problemas abordados foram bastante interessantes e construtivos do ponto de vista de formação e acumulação de conhecimentos específicos sobre minúcias pertinentes à engenharia automobilística.

O suporte do feixe de molas da suspensão dianteira permitiu a exploração dos recursos de otimização de forma mediante reposicionamento dos nós. Tais técnicas revelaram um enorme potencial, sobretudo para peças fundidas (que permitem uma maior liberdade geométrica quanto a detalhes de fabricação) modeladas por elementos sólidos.

No caso do conjunto suporte/tubagem/silencioso, foram enfrentadas severas limitações espaciais e posicionais relativas à montagem dos componentes envolvidos. Matematicamente e numericamente, isto se refletiu sob a forma de estreitas restrições impostas ao otimizador. Para superá-las, foram testadas diversas formas de acoplamento entre análise dinâmica e otimização, revelando prós e contras de cada uma delas. A grande conclusão a que se chegou reforça uma



recomendação corrente nos meios de análise: em problemas dinâmicos executar, antes de mais nada, uma análise modal do sistema, obtendo as informações mais importantes sobre seu comportamento vibratório.

Finalmente, o problema da mola Zeta permitiu comparar, num mesmo sistema mecânico, as técnicas de otimização dimensional e de forma.

### 6.3 - SUGESTÕES:

- Realizar procedimentos de otimização estrutural num aplicativo de processamento gráfico que parametrize a geometria;
- Explorar variações dos parâmetros do otimizador em relação aos valores “default”;
- Usar técnicas de otimização vinculadas à inteligência artificial. Em diversas aplicações, métodos pertencentes a esta classe (sobretudo os de redes neurais e algoritmos genéticos) têm se mostrado eficazes e robustos em uma série de aplicações envolvendo a busca automática de projetos ótimos. Segundo informação do fabricante, o otimizador D.O.T., utilizado pelos programas testados neste trabalho, deve incorporar otimização genética em sua próxima versão comercial;
- Empregar a diretiva DMATCH presente em VMA/GENESIS para ajustar, de forma automática, modelos de elementos finitos em função de valores obtidos experimentalmente. O ajuste baseia-se na minimização de uma função erro definida entre os valores experimentais e os numéricos. O aproveitamento

desta alternativa seria bastante interessante, pois permitiria explorar princípios de planejamento estatístico de experimentos (métodos estocásticos), além de ter aplicações na solução de problemas inversos e manutenção preditiva;

- Proceder a verificação experimental do suporte do feixe de molas ótimo mediante fotoelasticidade tridimensional, aprofundando o estudo abordado no quinto capítulo deste trabalho.

## 7 – BIBLIOGRAFIA:

- ARAKAKI, FRANCISCO K., HONDA, FELIPE K. E SALOMÃO, MARIA LUCI P., “EMB – 145 Landing Gear Door Stress Analysis”, Proc. do MSC World User’s Conference, 1996;
- “Integrating Functional Simulation Into INDYCAR Design”, Automotive Engineering, SAE International, December/1996, pp. 100 – 102;
- BEDI, P., DEDE, M. E MOORE, G., “Practical Global - Local Design Optimization of Vehicle Body-in-White Structures”, Proc. do MSC World User’s Conference, 1996;
- BLAKELY, KEN, “Updating MSC/NASTRAN Models to Match Test Data”, Proc. do MSC World User’s Conference, 1991;
- BOX, M. J., “A New Method of Constrained Optimization and Comparison with Other Methods”, Computer J., vol 8, 1965, pp. 42 – 52;
- BUTKEWITSCH, S., STEFFEN JR, V., ARGENTINO, M. A. E WILDMANN, U. R., “Otimização Estrutural de Componentes Automotivos: Estudo de Caso”, Proc. do “VI Congresso e Exposição Internacionais da Tecnologia da Mobilidade”, SAE - Brasil, São Paulo, SP, 27-29/outubro 1997;
- CANFIELD, R. A., “High - Quality Approximation of Eigenvalues in Structural Optimization”, AIAA Journal, Vol. 28, nº 6, junho, 1990, Pp. 1116 – 1122;
- CLARKSON, MARC, “FEA TODAY: Trends in Finite Element Analysis”, Desktop Engineering BPA International, Dezembro, 1996, pp. 12 – 15;
- COLLIER, C. S. “An Integrated FEA and Design Optimization System for Composite Structures”, Proc. do MSC World User’s Conference, 1996;

- DALLY, JAMES W. and RILEY, WILLIAM F., "Experimental Stress Analysis", McGraw-Hill, 2<sup>ND</sup> edition, 1978;
- DIMARAGONAS, ANDREW, "Vibration For Engineers", 2<sup>nd</sup> Edition, Prentice Hall, 1996;
- DURELLI, A. J. and RILEY, W. F., "Introduction to Photomechanics", Prentice - Hall, 1965;
- EIZADIAN, DJALALEDDIN, "Optimization de Forme des Structures Bidimensionnelles par la Méthode des Equations Integrales", Tese de Doutorado, INSA, Lyon, França, 1984;
- FEMB Version 26.5 User's Manual, Engineering Technology Associates, MI, USA, 1996;
- FERRETI, MARC, "CFAO: ENFIN L'OPTIMIZATION", Sciences & Techniques, n° 27, junho/1986, pp. 30-36;
- GENESIS USER'S MANUAL, Vols. I, II and III, VMA Engineering, Colorado Springs, CO, EUA, 1996;
- GONÇALVES, W. G., "Rigidez Equivalente Obtida por Processo de Otimização com a Utilização da Solução 200 do MSC/NASTRAN", 3° Encontro Brasileiro de Usuários MSC/NASTRAN, 1984;
- HOLZMANN, W. A. E WAGNER, V..J. "Shape Optimization of a Cast Turbine Manifold", Proc. do MSC World User's Conference, 1996;
- HOOKE, R. E JEEVES, T. A., "Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems", J. Assoc. Computer Mach., vol 8, 1961, pp. 212 - 229;
- INMAN, DANIEL J., "Engineering Vibration", 2<sup>ND</sup> Edition, Prentice-Hall, 1994;

- KUO, E. Y. et alii, "Design Sensitivity Analysis for Durability Design of Body Structures", Proc. do MSC World User's Conference, 1995;
- LALLANE, M., BERTHIER, P., DER HAGOPIAN, J., "Mechanical Vibrations for Engineers", John Wiley and Sons, Belfast, 1983;
- LAMMENS, STEFAN et alii, "Application of a FRF Based Model Updating Technique for the Validation of Finite Element Models of Components of the Automotive Industry", Proc. do MSC World User's Conference, 1995;
- MEIROVITCH, LEONARD, "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill, New York, 1975;
- MOHANTY et alii, "Truck Interior Noise Prediction by FEM and BEM", Proc. do MSC World User's Conference, 1996;
- MOON, Y. I. et alii, "A Vulnerability Map of a Commercial Aircraft", Proc. do MSC World User's Conference, 1996;
- MOORE, GREGORY J., "Design Sensitivity and Optimization, MSC/ NASTRAN USER'S GUIDE, V68", The McNeal - Schwendler Corp., Los Angeles, CA, EUA, 1992;
- OLIVEIRA, S. A. G., "Desenvolvimento de Materiais para Fotoelasticidade de Reflexão", Dissertação De Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 1988;
- Relatório de Cálculo RC - 005.93, Humaitá Informática e Tecnologia, HCAE, São Paulo, SP, 08 novembro 1993;
- Relatório de Cálculo N1001 035, Humaitá Informática e Tecnologia, HCAE, São Paulo, SP, 08 maio 1996;
- Relatório de Cálculo N1001 003, Humaitá Informática e Tecnologia, HCAE, São Paulo, SP, 02 outubro 1996;

- REYMOND, MICHAEL E MILLER, MARK, "MSC/NASTRAN Version 68 Quick Reference Guide", The McNeal-Schwendler Corp., Los Angeles, CA, EUA, 1993;
- RIBEIRO, CARLOS R., Notas de aula, mini - curso sobre o Método dos Elementos Finitos, DINAME, 1985;
- RODRIGUES, ROGÉRIO L., "Estudo para Otimização Estrutural de Rotores Flexíveis em Sistemas Mecânicos", Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital, INPE, São José dos Campos, SP, 1991;
- ROOTS et alii, "The Contribution of Passenger Safety Measures to the Structural Performance in Sports Racing Cars", Proc. do MSC World User's Conference, 1996;
- ROSE, TED, "Using Optimization in MSC/NASTRAN to Minimize Response to a Rotating Imbalance", Proc. do MSC World User's Conference, 1995;
- ROSENBROCK, H. H., "An Automated Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function", Computer J., vol. 3, 1960, pp. 175 – 184;
- SARAMAGO, S. F. P. E STEFFEN JR., V., "Aspectos Fundamentais ao Usar Técnicas de Otimização no Projeto de Sistemas Mecânicos", Proc. IV Congresso de Eng. Mecânica – NNE, V.1, Recife, Brasil, junho/1996, pp. 421 – 426;
- SCHMIDT, LUCIEN A., "Structutal Design By Systemathic Synthesis", Proc. 2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation, American Society Of Civil Engineers, New York, 1960, Pp. 105-132;
- SILVA, ROUVERSON P. DA, "Determinação da Concentração de Tensões em Furos Circulares de Placas Cisalhadas", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 1995;
- SPYRAKOS, CONSTANTINE C., "Finite Element Modelling in Engineering Practice", Algor Publishing Division, Pittsburgh, PA, EUA, 1996;

- STEFFEN JR., VALDER, Notas de aula – “Otimização de Sistemas Mecânicos”, Curso de Pós – Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 1996;
- STEFFEN JR., VALDER, “Tecnicas de Optimizacion Aplicadas a la Solución de Problemas de Dinamica de Rotores”, Información Tecnológica, Santiago, Chile, Vol. 8, n° 1, 1997, pp. 11 – 16;
- THOMSON, WILLIAM T., “Teoria da Vibração: com aplicações”, Ed. Interciência, Rio de Janeiro, 1978;
- TSUTSUI, KEUCHIRO et alii, “Development of a Nonlinear Frequency Response Program for Simulating Vehicle Ride Comfort”, Proc. do MSC World User’s Conference, 1995;
- VANDERPLAATS, Garret N., “Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications”, McGRAW – HILL BOOK COMPANY, 1984;
- VANDEPLAATS, GARRET N. E GOSH, DIPANKAR K., “Development of a Flexible Design Optimization Capability”, Vanderplaats Research and Development, 1987;
- VANDEPLAATS, GARRET N. E GOSH, DIPANKAR K., “Development of a Design Optimization Interface to ABAQUS”, Vanderplaats Research and Development, 1987
- VANDERPLAATS, GARRET N. E SALAJEGHEH, E., “A New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis”, AIAA Journal, Vol. 27, n° 3, Março, 1989, pp. 352-358;
- WEST, THIMOTY, “Approximate Dynamic Model Sensitivity Analysis for Large, Complex Space Structures”, Proc. do MSC World User’s Conference, 1996;