621:531.01
B732m
T651/M 6m

Universidade Federal de Uberlândia
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Modelagem Tridimensional Não Linear de Veículos Articulados Pesados do Tipo Cavalo Mecânico - Carreta

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Uberlândia, por José Antônio Ferreira Borges, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora;

Prof. Dr. Valder Steffen Júnior - UFU (Presidente)

Prof. Dr. Francisco Paulo Lépore Neto - UFU (examinador)

Prof Dr. Douglas Eduardo Zampieri - UNICAMP (examinador)

Eng. David Rulevas - Mercedes-Benz do Brasil S.A. (examinador especial)

DIRBI - UFU MON 08342/95

1000175446

Uberlândia, 23 de Fevereiro de 1995.

Aos meus queridos pais

Manuel e Lourdes

Agradecimentos

À minha esposa Marinês, sempre carinhosa e compreensiva, mesmo nas horas mais difíceis.

Aos meus queridos pais Manuel e Lourdes pelo interesse, apoio e infra-estrutura que me permitiram dedicação total ao trabalho.

Ao Prof. Valder Steffen Júnior, orientador desta dissertação, que além de coordenar o desenvolvimento do trabalho foi um grande amigo em todos os momentos.

À Mercedes-Benz do Brasil S.A., pelo suporte técnico e apoio financeiro oferecido graças ao projeto UNI, e em especial à pessoa do Engenheiro David Rulevas, pelo grande empenho na obtenção de preciosas informações e apoio dado durante o trabalho.

A todos os amigos e colegas de mestrado, em especial a Ademyr Gonçalves de Oliveira e Jorge Nei Brito pela amizade sincera.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo apoio financeiro.

A Deus, por ter me concedido saúde e força para a realização deste trabalho.

Modelagem Tridimensional Não Linear de Veículos Articulados Pesados do Tipo Cavalo Mecânico - Carreta

Sumário

LISTA DE FIGURAS x

LISTA DE TABELAS xvi

LISTA DE SÍMBOLOS xvii

1 - INTRODUÇÃO 1

2 - MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS 8

2.1 - Introdução 8

2.2 - Método dos modos assumidos para flexão 8

2.3 - Método dos modos assumidos para torção 13

2.4 - Combinação da Flexão e Torção 17

2.5 - Inclusão da influência de movimentos flexíveis em sistemas discretos através do método dos modos assumidos 17

3 - MODELOS MATEMÁTICOS 19

3.1 - Introdução 19

3.2 - Modelo matemático do caminhão isolado 19

3.2.1 - Energia cinética do chassis do caminhão 21

3.2.2 - Energia cinética da cabine 28

3.2.3 - Energia cinética do conjunto propulsor 35

3.2.4 - Parcelas de energia cinética do eixo dianteiro e do eixo traseiro 41
3.2.5 - Parcela de energia cinética da quinta roda 46
3.2.6 - Cálculo da energia potencial elástica armazenada no veículo 51
3.2.6.1 - Energia potencial elástica associada às molas dos eixos 51
3.2.6.2 - Energia potencial elástica associada à cabine 56
3.2.6.3 - Energia potencial elástica associada ao conjunto propulsor 57
3.2.6.4 - Energia potencial elástica associada à quinta roda 58
3.2.6.5 - Energia potencial elástica associada aos pneus 59
3.2.6.6 - Energia potencial elástica associada às barras estabilizadoras 66
3.2.7 - Cálculo da energia potencial gravitacional do veículo 71
3.2.8 - Função de Dissipação de Rayleigh 75
3.2.9 - Aplicação da Equação de Lagrange 80
3.3 - Modelo matemático do caminhão com carreta 81
3.3.1 - Caminhão com carreta de um eixo 81
3.3.1.1 - Energia cinética do chassis da carreta 81
3.3.1.2 - Energia cinética do eixo da carreta 87
3.3.1.3 - Parcelas de energia potencial 89
3.3.2 - Caminhão com carreta de três eixos 89
3.3.2.1 - Energia cinética de uma balança 91

3.3.3 - Aplicação da Equação de Lagrange aos modelos com carreta 95

4 - MOVIMENTOS FLEXÍVEIS DOS CHASSIS 96

4.1 - Modelos de elementos finitos 96

4.1.1 - Modelo do chassis do caminhão 97

4.1.2 - Modelo do chassis de uma carreta de três eixos 101

4.1.3 - Modelo do chassis de uma carreta de um eixo 104

4.2 - Considerações sobre os modelos de elementos finitos 107

5 - OBTENÇÃO DOS TENSORES DE INÉRCIA E PROPRIEDADES DE ÁREA 108

5.1 - Determinação dos tensores principais de inércia 109

5.2 - Determinação das propriedades de área 112

6 - NÃO LINEARIDADES PARAMÉTRICAS 117

6.1 - Caracterização das molas 118

6.2 - Caracterização das barras estabilizadoras 122

6.3 - Caracterização da rigidez radial dos pneus 122

6.4 - Caracterização dos amortecedores 124

7 - INTERAÇÃO DO VEÍCULO COM O AMBIENTE E GERAÇÃO DO PERFIL DA PISTA 128

7.1 - Geração das irregularidades da pista 128

8 - COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA 133

9 - CONCLUSÕES E SEQUÊNCIA DO TRABALHO 139
9.1 - Conclusões 139
9.2 - Informações sobre a sequência deste trabalho 142

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 144

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA 147

ANEXO 1 - ESCOLHA DOS MOVIMENTOS 152
A1.1 - Movimentos do chassis do caminhão 152
A1.2 - Movimentos da cabine 153
A1.3 - Movimentos do conjunto propulsor 154
A1.4 - Movimentos dos eixos 155
A1.5 - Movimentos da quinta roda 157
A1.6 - Movimentos da carreta 159
A1.7 - Movimentos dos eixos da carreta 159
A1.8 - Movimentos das balanças 160

ANEXO 2 - COORDENADAS GENERALIZADAS RELATIVAS 162
A2.1 - Considerações 162
A2.2 - Sistema de dois graus de liberdade 163
A2.2.1 - Sistema de 2 g.d.l. - Modelagem clássica 163
A2.2.2 - Sistema de 2 g.d.l. - Coordenadas generalizadas relativas 165

ANEXO 3 - MODOS ESCOLHIDOS PARA COMPOR AS FUNÇÕES ADMISSÍVEIS 170

ANEXO 4 - FIGURAS DOS MODELOS SÓLIDOS
DESENVOLVIDOS NO CATIA 180

BORGES, José Antônio Ferreira; "Modelagem Tridimensional Não Linear de Veículos Articulados Pesados do Tipo Cavalo Mecânico - Carreta", Uberlândia, 1995.

RESUMO

Este trabalho de pesquisa trata da modelagem dinâmica de veículos articulados do tipo cavalo-mecânico e carreta. Procurou-se chegar a um modelo bastante completo onde se incluem todos os aspectos mais relevantes do problema, tais como: movimentos tridimensionais, flexibilidade de chassis, não linearidades geométricas e paramétricas. Quanto à flexibilidade do chassis, a inclusão dos graus de liberdade flexíveis foi feita através da técnica dos Modos Assumidos, onde as funções admissíveis para os deslocamentos correspondem às formas modais obtidas pelo Método dos Elementos Finitos. No caso mais sofisticado chegou-se a um modelo com 51 graus de liberdade. O trabalho foi realizado em cooperação com a Mercedes-Benz do Brasil S.A., de forma que todos os dados utilizados são reais. As equações dinâmicas do movimento foram obtidas a partir do formalismo de Lagrange, sendo que a limitação da técnica para tratar problemas complexos foi contornada através de computação simbólica. Para tanto, o programa MATHEMATICA foi usado na obtenção das várias parcelas da equação de Lagrange.

Palavras Chave: *Modelagem não linear, Veículos articulados pesados, Método de Lagrange, Método dos modos assumidos, Computação simbólica.*

BORGES, José Antônio Ferreira; "Non Linear Tridimensional Modelling of Heavy Articulated Vehicles Such as Truck-Trailer", Uberlândia, 1995.

ABSTRACT

This research work is about the modelling of articulated vehicles such as a truck-trailer system. The objective was to obtain a very complete model where all most relevant aspects of the problem are taken into account: tridimensional movements, chassis flexibility, geometrical and parametric non-linearities. Chassis flexibility was included using the Assumed Modes Technique, where the admissible displacement functions corresponding to the chassis mode shapes are obtained through the Finite Element Method. The most sophisticated case studied in this thesis is the one with 51 degrees-of-freedom. This research was conducted in cooperation with Mercedes-Benz of Brazil S.A., and for this reason all the numerical data are those used in practical design situations by Mercedes-Benz. The dynamical equations of motion were obtained using Lagrange's equation and the limitation of this method was surmounted by symbolic computation techniques. For this purpose the program MATHEMATICA was used to obtain all different portions of Lagrange's equation.

Key words: *Nonlinear modelling, Heavy articulated vehicles, Lagrange's method, Assumed modes technique, Symbolic computation.*

Lista de Figuras

2.1 - Modelo simplificado de veículo com dois graus de liberdade equacionado de duas maneiras, como rígido e considerando-se a flexão do chassis 18

3.1 - Modelo esquemático do caminhão isolado, seus referenciais e movimentos analisados 21

3.2 - Referencial inercial e referenciais locais ligados ao chassis do caminhão 22

3.3 - Referenciais intermediários e os g.d.l. de rotação do chassis 23

3.4 - Referenciais locais colocados no chassis e na cabine do caminhão 29

3.5 - Referenciais locais e graus de liberdade de rotação da cabine do veículo 31

3.6 - Referenciais locais colocados no chassis do caminhão e no conjunto propulsor 35

3.7 - Referenciais intermediários e graus de liberdade de rotação do conjunto propulsor 37

3.8 - Representação generalizada dos referenciais locais colocados no chassis do caminhão e nos eixos dianteiro e traseiro 41

3.9 - Representação generalizada dos referenciais intermediários e graus de liberdade de rotação dos eixos dianteiro e traseiro do caminhão 43

3.10 - Referenciais locais posicionados no chassis do caminhão e no centro de gravidade da quinta roda 46

3.11 - Referenciais intermediários e graus de liberdade de rotação da quinta roda 48

3.12 - Esquema da modelagem de uma mola de lâmina 52

3.13 - Representação esquemática das molas da suspensão do caminhão 52

3.14 - Desenho esquemático da cabine e seus elementos de sustentação 57
3.15 - Representação esquemática da fixação do conjunto propulsor 58
3.16 - Esquema da fixação coxinizada da quinta roda ao chassis do caminhão 59
3.17 - Geometria de trabalho de um pneu esquerdo 60
3.18 - Representação esquemática dos pneus do veículo 62
3.19 - Geometria de trabalho de um pneu direito 65
3.20 - Desenho representativo das barras estabilizadoras do veículo 66
3.21 - Representação esquemática dos amortecedores de suspensão 75
3.22 - Representação esquemática dos amortecedores de cabine 76
3.23 - Modelo esquemático do caminhão com carreta de um eixo, seus referenciais e movimentos considerados 82
3.24 - Referenciais locais colocados no chassis da carreta 83
3.25 - Configuração genérica da carreta e seu grau de liberdade 84
3.26 - Desenho esquemático dos referenciais locais colocados no centro de gravidade do eixo da carreta 87
3.27 - Desenho esquemático de um caminhão acoplado a uma carreta de três eixos 90
3.28 - Referenciais locais colocados na balança 91
3.29 - Grau de liberdade de rotação da balança 93
4.1 - Modelo de elementos finitos do chassis do caminhão 97
4.2 - Modelo em elementos finitos do chassis de uma carreta de três eixos 102
4.3 - Terceiro modo de torção do chassis da carreta de três eixos 104
4.4 - Modelo de elementos finitos do chassis da carreta de um eixo 105
4.5 - Obtenção das funções admissíveis para o deslocamento flexível das estruturas a partir das amplitudes dos seus modos de vibração 107

5.1 - Exemplo de cálculo no CATIA 111
5.2 - Esquema do referencial usado pelo CATIA 112
5.3 - Exemplo do cálculo de propriedades de área 114
5.4 - Propriedades de área em função da posição (área) 115
5.5 - Propriedades de área em função da posição (momento de inércia) 115
5.6 - Propriedades de área em função da posição (momento de inércia de massa por unidade de comprimento) 116
5.7 - Propriedades de área em função da posição (momento de inércia polar) 116
6.1 - Suspensão traseira de um veículo com mola de dois estágios 118
6.2 - Curva característica das molas dianteiras do veículo Mercedes-Benz LS-1941 119
6.3 - Curva característica das molas traseiras do veículo Mercedes-Benz LS-1941 119
6.4 - Curva característica da mola de cabine do veículo Mercedes-Benz LS-1941 120
6.5 - Curva característica de uma mola de dois estágios interpolada numericamente por uma SP LINE 121
6.6 - Curva característica de uma mola de dois estágios com efeito de enrigecimento no final do curso 121
6.7 - Curva característica de uma barra estabilizadora interpolada numericamente por uma SP LINE 123
6.8 - Curvas características da rigidez radial do pneu Michelin 225/75 R 17.5 XZA TL 126M operando sob diferentes condições de pressão 123
6.9 - Esquema do dispositivo usado para ensaiar os amortecedores 124
6.10 - Ilustração de um gráfico bolha 125

6.11 - Curva de absorção de energia dos amortecedores dianteiros do veículo Mercedes-Benz LS-1941 126
6.12 - Curva de absorção de energia dos amortecedores traseiros do veículo Mercedes-Benz LS-1941 127
6.13 - Curva de absorção de energia dos amortecedores de cabine do veículo Mercedes-Benz LS-1941 127
7.1 - Perfil de irregularidades geradas para uma pista considerada muito boa 131
7.2 - Perfil de irregularidades geradas para uma pista considerada boa 131
7.3 - Perfil de irregularidades geradas para uma pista considerada muito ruim 132
7.4 - Gráficos das funções densidade espectral definidas na tabela 1 132
A1.1 - Exemplo de chassis utilizado em veículo de carga 152
A1.2 - Posição dos coxins dianteiros de uma cabine 153
A1.3 - Vista geral da suspensão traseira de uma cabine 153
A1.4 - Conjunto propulsor do veículo Mercedes-Benz LS-1941 155
A1.5 - 1) Eixo dianteiro do caminhão
2) Eixo traseiro do caminhão 156
A1.6 - Detalhe da suspensão dianteira do caminhão 157
A1.7 - Quinta roda, responsável pela ligação entre o caminhão e a carreta 158
A1.8 - Desenho esquemático da suspensão de uma carreta 160
A2.1 - Representação esquemática de um sistema dinâmico de 2 g.d.l. 163
A2.2 - Representação esquemática de um sistema dinâmico de 2 g.d.l. 166
A2.3 - Posição das massas m1 e m2 no espaço quando em vibração livre 169

A3.1 - Primeiro modo de flexão do chassis do caminhão 171
A3.2 - Segundo modo de flexão do chassis do caminhão 171
A3.3 - Quarto modo de flexão do chassis do caminhão 172
A3.4 - Segundo modo de torção do chassis do caminhão 172
A3.5 - Terceiro modo de torção do chassis do caminhão 173
A3.6 - Quinto modo de torção do chassis do caminhão 173
A3.7 - Primeiro modo de flexão do chassis da carreta de três eixos 174
A3.8 - Segundo modo de flexão do chassis da carreta de três eixos 174
A3.9 - Terceiro modo de flexão do chassis da carreta de três eixos 175
A3.10 - Sétimo modo de torção do chassis da carreta de três eixos 175
A3.11 - Oitavo modo de torção do chassis da carreta de três eixos 176
A3.12 - Nono modo de torção do chassis da carreta de três eixos 176
A3.13 - Primeiro modo de flexão do chassis da carreta de um eixo 177
A3.14 - Segundo modo de flexão do chassis da carreta de um eixo 177
A3.15 - Terceiro modo de flexão do chassis da carreta de um eixo 178
A3.16 - Quinto modo de torção do chassis da carreta de um eixo 178
A3.17 - Oitavo modo de torção do chassis da carreta de um eixo 179
A3.18 - Décimo modo de torção do chassis da carreta de um eixo 179
A4.1 - Sólido representativo do chassis do caminhão 181
A4.2 - Sólido representativo de uma cabine leito 182
A4.3 - Sólido representativo do conjunto propulsor (motor, embreagem e câmbio) 183
A4.4 - Sólido representativo do eixo dianteiro completo 184
A4.5 - Sólido representativo do eixo dianteiro parcial 185
A4.6 - Sólido representativo do eixo traseiro completo 186
A4.7 - Sólido representativo do eixo traseiro parcial 187
A4.8 - Sólido representativo de uma carreta carregada 188
A4.9 - Seções do chassis do caminhão onde foram avaliadas as propriedades de área 189

A4.10 - Seções do chassis da carreta onde foram avaliadas as propriedades de área 190

Lista de Tabelas

4.1 - Características do modelo de elementos finitos e opções de cálculo utilizadas para o chassis do caminhão 98

4.2 - Modos escolhidos para compor as funções admissíveis do deslocamento flexível do chassis do caminhão 99

4.3 - Valores obtidos para a frequência natural de vibração, na condição de baixa rigidez das molas (translação vertical do chassis do caminhão) 100

4.4 - Modos escolhidos para formar as funções admissíveis para o deslocamento flexível do chassis de uma carreta de três eixos 102

4.5 - Características do modelo de elementos finitos e opções de cálculo utilizadas para o chassis da carreta de três eixos 103

4.6 - Modos escolhidos para formar as funções admissíveis do deslocamento flexível para o chassis da carreta de um eixo 105

4.7 - Características do modelo de elementos finitos e opções de cálculo utilizadas para o chassis da carreta de um eixo 106

5.1 - Propriedades de inércia obtidas através dos modelos sólidos do CATIA 110

5.2 - Propriedades de área calculadas para o chassis do caminhão 113

6.1 - Valores obtidos para a rigidez da barra estabilizadora dianteira do veículo Mercedes-Benz LS-1941 122

7.1 - Valores típicos dos coeficientes C e N 129

8.1 - Mapa do acoplamento das equações do caminhão isolado pela sua matriz massa 138

A2.1 - Auto-valores e auto-vetores do sistema de 2 graus de liberdade modelado da maneira clássica e usando coordenadas generalizadas relativas 168

Lista de Símbolos

A, B, m, n => Índices utilizados para generalizar a nomenclatura da lista de símbolos.

A — Amplitude [m].

a*n*, b*n*, c*n*, d*n*, e*n*, f*n*, g*n*, h*n*, l*n* — Elementos genéricos da matriz de transformação entre os referenciais S*n* e P*n*.

Ci(x) — Função generalizada para o amortecimento.

C*n* — Amortecimento associado ao elemento dissipativo na região q*n*.

E — Módulo de elasticidade de um material [Pascal].

F — Função de dissipação de Rayleigh.

$F^{(qn)}$ — Parcela de energia dissipada na região q*n*.

f_k — Forças atuantes nas ancoragens dos elementos elásticos e dissipativos.

G — Módulo de rigidez torcional de um material [Pascal].

g — Aceleração da gravidade [m/s^2].

I — Indica o referencial inercial.

I(x) — Momento de inércia de área em torno da linha neutra de uma estrutura sob flexão, em função da posição [m^4].

$^{A}I^{(n)}$ — Tensor de inércia do componente *n* em torno dos eixos do sistema de coordenadas *A*.

I*n*x, I*n*y, I*n*z — Momentos principais de inércia do componente *n* nas direções de x, y e z, respectivamente.

$I_\theta(x)$ — Momento de inércia de massa por unidade de comprimento em função da posição [Kg * m].

$\vec{i}n$, $\vec{j}n$, $\vec{k}n$ — Vetores unitários apontados segundo as direções dos eixos de P*n*.

J(x) — Momento de inércia polar em função da posição [m^4].

[K] — Matriz rigidez do movimento flexível.

Ki(x)	Função generalizada para a rigidez.
K***n***	Rigidez associada ao elemento elástico na região q***n***.
k	Rigidez [N/m].
k_{ij}	Elementos da matriz rigidez associada ao movimento flexível do chassis do caminhão e da carreta.
L	Comprimento de uma estrutura considerada flexível [m].
[M]	Matriz massa do movimento flexível.
m	Massa [Kg].
m_{ij}	Elementos da matriz massa associada ao movimento flexível do chassis do caminhão e da carreta.
M***n***	Massa do componente ***n***.
nf	Número de forças externas ao movimento flexível que atuam no chassis do caminhão e da carreta.
o***n***	Centro de massa do componente ***n***.
P***n***	Referencial local com origem no centro de massa do componente ***n*** e orientado segundo suas direções principais de inércia.
P$n^{m'}$	Sistema de eixos coordenados associado a S$n^{m'}$.
p	Número de modos usados para representar o movimento flexível de uma estrutura através de uma solução em série.
[Q]	Vetor das forças generalizadas do movimento flexível.
Q_i	Forças generalizadas atuantes no sistema.
$q_i(t)$	Coordenadas generalizadas introduzidas no sistema devido à flexão do chassis do caminhão e do chassis da carreta.
$\dot{q}_i(t)$	Velocidades associadas às coordenadas generalizadas $q_i(t)$, introduzidas no sistema devido à flexão.
$\ddot{q}_i(t)$	Aceleração associada às coordenadas generalizadas $q_i(t)$, introduzidas no sistema devido à flexão.
q***n***	Região onde é armazenada uma parcela de energia potencial elástica ou onde a energia é dissipada por meio de um elemento viscoso.

R(r,t)	Forma geral da solução em série usada pelo método dos modos assumidos para representar o movimento flexível de uma estrutura como função da posição e do tempo.
${}^{A}\vec{r}^{(m)\to(n)}$	Vetor posição do ponto ***m*** em relação ao ponto ***n***, escrito no referencial ***A***.
${}^{A}\vec{r}^{(on)}$	Vetor posição do centro de massa do componente ***n*** em relação à sua base local, escrito no referencial ***A***.
${}^{A}\vec{r}_{o}{}^{(m)\to(n)}$	Vetor posição inicial do ponto ***m*** em relação ao ponto ***n***, escrito no referencial ***A***.
${}^{I}\vec{r}_{z}{}^{(on)}$	Componente z do vetor posição do centro de massa do componente ***n***, escrito no referencial inercial.
S(x)	Área de seção transversal como função da posição [m^2].
S(Ω)	Função densidade espectral das irregularidades da pista.
S***n***	Referencial local com origem no centro de massa do componente ***n*** e orientado segundo suas direções longitudinal, transversal e vertical.
S***n***'	Referencial local com origem no centro de massa do componente ***n***, obtido pela rotação do sistema S***n*** de αn em torno de XS***n***.
S***n***''	Referencial local com origem no centro de massa do componente ***n***, obtido pela rotação do sistema S***n***' de βn em torno de YS***n***'.
S***n***'''	Referencial local com origem no centro de massa do componente ***n***, obtido pela rotação do sistema S***n***'' de γn em torno de ZS***n***''.
$s_i(t)$	Coordenadas generalizadas introduzidas no sistema devido à torção do chassis do caminhão e do chassis da carreta.
$\dot{s}_i(t)$	Velocidades associadas às coordenadas generalizadas $s_i(t)$, introduzidas no sistema devido à torção.
$\ddot{s}_i(t)$	Aceleração associada às coordenadas generalizadas $s_i(t)$, introduzidas no sistema devido à torção.
$[{}^{A}T^{B}]$	Representa genericamente a matriz de transformação do referencial ***B*** para o referencial ***A***.

$[^{A}\mathrm{Tt}^{B}]$	Representa genericamente a matriz de transformação de translação do referencial ***B*** para o referencial ***A***.
T	Energia cinética associada a um sistema [Joule].
T_{n}	Parcela de energia cinética do componente ***n*** [Joule].
T_{tn}	Parcela de energia cinética de translação do componente ***n*** [Joule].
T_{rn}	Parcela de energia cinética de rotação do componente ***n*** [Joule].
U	Energia potencial associada a um sistema [Joule].
$U^{(qn)}$	Parcela de energia potencial elástica armazenada na região q***n***.
Ug***n***	Energia potencial gravitacional do componente ***n***.
$\vec{u}$	Vetor unitário.
$^{A}\vec{V}^{(n)}$	Vetor velocidade do centro de massa do componente ***n***, escrito no referencial ***A***.
$^{A}\vec{V}^{(nm)\rightarrow(on)}$	Vetor velocidade de translação do ponto ***m*** em relação ao centro de massa do componente ***n*** (ao qual pertence - base local), escrito no referencial ***A***.
$^{A}\vec{V}^{(on)}$	Vetor velocidade do centro de massa do componente ***n*** em relação à sua base local, escrito no referencial ***A***.
$^{A}\vec{W}^{(n)}$	Vetor velocidade de rotação do componente ***n***, escrito no referencial ***A***.
w	Frequência natural [rad/s].
XI, YI, ZI	Eixos do referencial inercial.
XS***n***, YS***n***, ZS***n***	Eixos coordenados correspondentes ao sistema S***n***.
XS***n***', YS***n***', ZS***n***'	Eixos coordenados correspondentes ao sistema S***n***'.
XS***n***", YS***n***", ZS***n***"	Eixos coordenados correspondentes ao sistema S***n***".
XS***n***"', YS***n***"', ZS***n***"'	Eixos coordenados correspondentes ao sistema S***n***"'.
x1, y1, z1	Movimentos de translação do centro de massa do chassis do caminhão.
x3, y3, z3	Movimentos de translação do centro de massa do conjunto propulsor.

x6, z6 Movimentos de translação do centro de massa da quinta roda.

xb$n$, yb$n$, zb$n$ Componentes constantes do vetor posição do centro de massa do componente n em relação ao centro de massa de sua base local (chassis do caminhão ou da carreta).

xbn$m$, ybn$m$, zbn$m$ Componentes do vetor posição do ponto m.

$\dot{x}n$, $\dot{y}n$, $\dot{z}n$ Componentes da velocidade de translação do centro de massa do componente n.

XYZI Sistema inercial de eixos cartesianos.

y(x,t) Solução em série para a flexão de uma estrutura como função da posição e do tempo.

z2 Movimento de translação do centro de massa da cabine.

z4, z5 Movimentos de translação do centro de massa do eixo dianteiro e traseiro do caminhão, respectivamente.

z8, z9, z10 Movimentos de translação do centro de massa dos eixos da carreta.

Θ ângulo de câmber [rad].

Ω Frequência espacial das irregularidades da pista [ciclos/m].

$\Psi_i(x)$ Função admissível para o deslocamento à torção do chassis do caminhão e da carreta.

$\alpha 1$, $\beta 1$, $\gamma 1$ Movimentos de rotação do chassis do caminhão.

$\alpha 2$, $\beta 2$ Movimentos de rotação da cabine.

$\alpha 3$, $\beta 3$, $\gamma 3$ Movimentos de rotação do conjunto propulsor.

$\alpha 4$, $\beta 4$ Movimentos de rotação do eixo dianteiro do caminhão.

$\alpha 5$, $\beta 5$ Movimentos de rotação do eixo traseiro do caminhão.

$\alpha 6$, $\beta 6$ Movimentos de rotação da quinta roda.

$\alpha 8$, $\beta 8$ Movimentos de rotação do primeiro ou único eixo da carreta.

$\alpha 9$, $\beta 9$ Movimentos de rotação do segundo eixo da carreta.

$\alpha 10$, $\beta 10$ Movimentos de rotação do terceiro eixo da carreta.

$\dot{\alpha}n$, $\dot{\beta}n$, $\dot{\gamma}n$ Componentes da velocidade de rotação do componente n.

$\beta 11$, $\beta 12$ Movimentos de rotação das balanças esquerdas da carreta.

$\beta 13$, $\beta 14$	Movimentos de rotação das balanças direitas da carreta.
$\gamma 7$	Movimento de rotação da carreta.
${}^{A}\delta\vec{r}^{(m)\to(n)}$	Vetor variação da posição do ponto ***m*** em relação ao ponto ***n***, escrito no referencial ***A***.
δr_k	Deslocamento virtual.
δw	Trabalho virtual.
$\phi_i(x)$	Função admissível para o deslocamento à flexão do chassis do caminhão e da carreta.
$\varphi(x,t)$	Solução em série para a torção de uma estrutura como função da posição e do tempo.
ρ	Densidade de um material [Kg/m^3].
.	Indica o produto de matrizes, de uma matriz por um vetor ou o produto de constantes.
*	Indica o produto vetorial de dois vetores.

1 - Introdução

Este trabalho foi realizado no **Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia**, juntamente com a **Mercedes-Benz do Brasil S.A.**, dentro do chamado projeto **UNI**.

Atualmente considera-se que o estudo do comportamento dinâmico de veículos seja de vital importância para o seu projeto e desenvolvimento, a fim de que o produto final a ser colocado no mercado seja compatível com as exigências dos consumidores, além de ter condições de enfrentar a concorrência. Esta análise pode ser feita de acordo com dois grandes métodos básicos:

a) Métodos teóricos ou analíticos;

b) Métodos experimentais.

Na indústria nacional, vale-se tradicionalmente dos métodos experimentais. Estes métodos permitem que se obtenha uma previsão confiável dos aspectos característicos do veículo no que diz respeito ao desempenho, ergonomia, segurança, estilo, etc. Suas principais desvantagens estão ligadas ao seu custo. Tal custo é associado à execução dos protótipos, aos equipamentos necessários à instrumentação dos modelos, à análise dos resultados e ao pessoal devidamente qualificado envolvido. Outro aspecto de importância é o tempo necessário para se conduzir os experimentos, que pode entrar em conflito com os prazos de lançamento ou atualização dos veículos para o mercado consumidor.

Devido a estes fatores, tem-se empenhado esforços no sentido de fazer aplicações de métodos teóricos na modelagem e análise do comportamento dinâmico de veículos. O incentivo maior para esta tentativa vem sem dúvida de um recente e significativo avanço da informática, que tem proporcionado aos estudiosos do assunto uma ferramenta indispensável para tanto. Desta forma tem-se, nos últimos anos, dado especial atenção ao desenvolvimento de modelos matemático-computacionais visando a simulação dinâmica de veículos.

A simulação de veículos é entendida neste contexto quando parte-se dos parâmetros básicos de seus componentes (inércia, rigidez, amortecimento, geometria, restrições de movimento, etc) e, através de procedimentos matemáticos resolvidos computacionalmente, obtém-se a resposta do sistema seja no domínio do tempo, seja no domínio da frequência.

Dentre os mais diversos métodos utilizados para se obter as equações do movimento de um sistema dinâmico, pode-se citar o método do equilíbrio de forças [1] onde a análise do movimento dos elementos do sistema se baseia na segunda lei de Newton ou no principio de d'Alembert. A interação dos vários componentes se dá por meio das forças que um componente exerce sobre os demais quando o sistema é deslocado de sua posição de equilíbrio.

Lagrange [1] desenvolveu, a partir da mecânica analítica e dos métodos variacionais, uma metodologia geral para a análise de sistemas dinâmicos baseada nas quantidades escalares de energia cinética, energia potencial e trabalho virtual. A obtenção das equações de movimento através deste procedimento é bastante apropriada para sistemas com vários graus de liberdade, onde a interação dos elementos via forças de ligação torna-se difícil de visualizar. Dentre as vantagens próprias dos métodos de energia destacam-se seu procedimento sistematizado, segurança no equacionamento e a possibilidade de tratamento de não linearidades. Outra característica positiva deste método é que, mesmo para sistemas complicados, é possível identificar os termos das equações quanto ao seu significado físico.

Vários estudos tem sido feitos no sentido de simular o comportamento dinâmico de veículos, ou de seus componentes, a partir de modelos matemáticos simplificados [2, 3, 4]. O autor deste trabalho [5] fez uma abordagem, a partir de um modelo de sete graus de liberdade com tratamento linear e consideração de amortecimento viscoso e de Coulomb. Este modelo não é representativo para aplicações mais sofisticadas, uma vez que os movimentos do veículo foram drasticamente reduzidos.

O constante desenvolvimento dos veículos visando melhorar o seu comportamento quanto ao desempenho e conforto leva os fabricantes a trabalhar cada vez mais sobre novas tecnologias como suspensões ativas e semi-ativas, suspensões com suportes de borracha e amortecedores com não linearidades bem definidas. Devido a este nível de detalhamento e às características do motorista, são necessários modelos tridimensionais complicados e não lineares pois, caso contrário, não se fará uma simulação com o necessário nível de detalhamento, ou ainda, não se conseguirá distinguir o comportamento dinâmico de dois veículos ligeiramente diferentes [6].

Rill [7] descreve os conceitos básicos da modelagem de veículos pelo conceito COMPACT (Computer Simulation of Passenger Cars and Trucks). Este conceito foi desenvolvido para a simulação de veículos em qualquer situação de uso e foi aplicado especificamente no simulador em tempo real da Mercedes-Benz AG. Neste trabalho são mostrados os modelos de um caminhão e de um carro acoplado a um trailer. Sua implementação resulta num código computacional que minimiza o tempo de execução e o torna recomendado para aplicações em tempo real.

Um aspecto importante a ser levado em conta é destacado por Hac [8] e diz respeito à consideração dos movimentos flexíveis dos componentes do sistema que apresentarem amplitudes significativas. Quando se trata de veículos longos, onde a rigidez da estrutura é associada basicamente ao chassis, este geralmente sofre flexão e torção em níveis consideráveis. Neste trabalho acima citado é desenvolvido um sistema vibratório discreto de quatro graus de liberdade movendo-se sobre uma pista de características aleatórias. É considerada no modelo a flexão do chassis associada aos demais graus de liberdade (translação e rotação do chassis e os movimentos verticais dos eixos) pelo Método dos Modos Assumidos [9]. É feito um controle sobre o movimento das suspensões pela introdução de uma força e faz-se a comparação entre o comportamento do sistema controlado e o passivo.

Na simulação dinâmica de veículos tem-se também que definir o perfil da pista sobre a qual o veículo trafega. Rill [10] diz que uma simulação de alta quali-

dade das vibrações de um veículo só pode ser obtida com modelos tridimensionais. As equações de movimento para sistemas com muitos graus de liberdade podem ser obtidas por algorítimos computadorizados que tornam possível uma boa aproximação do sistema dinâmico real. Neste trabalho é mostrado um modelo de veículo com 19 graus de liberdade trafegando sobre diversos tipos de pista cujas irregularidades são geradas de forma a considerar as possíveis correlações entre as excitações nas rodas (de um mesmo eixo ou não). A aceleração vertical da carroceria do veículo é calculada e usada como parâmetro de análise.

Stribersky **[11]** faz uma análise de estabilidade sobre o comportamento de veículos pesados articulados com e sem um segundo trailer. Dependendo das condições de carregamento e velocidade do veículo, verifica-se o aparecimento de movimentos auto excitados. Estes movimentos também podem ter origem em pequenos distúrbios introduzidos na direção pelo próprio motorista e podem comprometer a segurança de tráfego.

O método dos Grafos de Ligação (**"Bond Graphs"**) é também muito usado para análise dinâmica de sistemas. Speranza Neto **[12]** faz uma apresentação detalhada do método e trata de sua aplicação.

Sotelo Júnior **[13]** apresenta a modelagem da suspensão de um veículo através de grafos de ligação. Apresenta também a modelagem de um sistema de controle para esta suspensão e destaca a vantagem de poder trabalhar com sub sistemas que operam com diferentes formas de energia.

Canale **[14]** faz uma análise do desempenho de um veículo rodoviário Kadett GS 2.0 em aceleração e frenagem. Esta análise é baseada em considerações do **"passeio"** do centro de gravidade do veículo e das restrições impostas pelo binômio pneumático X pavimento.

Para finalizar, cita-se o trabalho de Lépore Neto **[15]** onde faz-se a investigação de um veículo com ultra-volante para recuperação da energia de frenagem. Faz-se um estudo da influência da posição do volante em relação ao veículo em termos dos efeitos giroscópicos e dos esforços nos mancais que suportam o volan-

te. Determina-se o seu comportamento dinâmico em função das perturbações induzidas no veículo e nas reações nos mancais devido às irregularidades da pista.

A modelagem proposta no presente trabalho vale-se do método de Lagrange para a determinação das equações não lineares do movimento de três configurações de um veículo articulado pesado. Nestes veículos leva-se em conta os movimentos de flexão e torção do chassis do caminhão e da carreta (caso ela exista), pelo método dos modos assumidos. A determinação das funções admissíveis necessárias à implementação deste método foi feita via Elementos Finitos **[16]**.

Os modelos desenvolvidos apresentam respectivamente 31, 41 e 51 graus de liberdade. A geração das equações não lineares do movimento é feita via computação simbólica, usando o software MATHEMATICA **[17]**.

A determinação das características de inércia dos componentes do sistema é feita por integração numérica, usando como ferramenta o software de CAD CATIA **[18]**, implantado na Mercedes-Benz do Brasil S.A..

O produto deste desenvolvimento é um modelo matemático genérico e não linear, capaz de representar algumas configurações de um veículo articulado pesado e que pode ser usado em um programa de simulação computacional.

Este trabalho está assim constituído:

Capítulo 2: Neste capítulo é apresentado e discutido o Método dos Modos Assumidos, pelo qual se introduz a influência dos movimentos flexíveis junto às equações dos graus de liberdade de corpo rígido. Trata-se de etapa indispensável para o estabelecimento dos modelos matemáticos desenvolvidos neste trabalho.

Capítulo 3: São apresentadas todas as etapas do equacionamento matemático dos modelos tridimensionais, bem como suas demais características. São tratados todos os aspectos que dizem respeito à geometria dos veículos, suas não linearidades geométricas e a inclusão dos movimentos flexíveis do chassis nos graus de liberdade de corpo rígido. Um aspecto que merece destaque é a técnica de mo-

delagem a partir de coordenadas generalizadas relativas.

Capítulo 4: Trata da obtenção das funções admissíveis para o deslocamento flexível do chassis do caminhão e do chassis da carreta. Representa uma etapa básica na implementação do método dos modos assumidos, apresentado no capítulo 2. As funções admissíveis são determinadas através de um cálculo de auto-vetores em modelos de elementos finitos representando os respectivos chassis.

Capítulo 5: Neste capítulo é abordada a obtenção das propriedades de área e inércia necessárias à definição paramétrica dos veículos. Utiliza-se para isto modelos sólidos digitais desenhados através do software de CAD CATIA. Discute-se amplamente as vantagens deste método.

Capítulo 6: São definidos os aspectos relativos às não linearidades paramétricas de alguns componentes do sistema. Discute-se a natureza das não linearidades de molas, amortecedores, coxins e estabilizadores, estabelecendo seus coeficientes de rigidez e amortecimento.

Capítulo 7: Neste capítulo é feito o fechamento do modelo global do veículo através do estabelecimento do comportamento de alguns de seus órgãos que são responsáveis diretos pela sua interação com o ambiente. No escopo deste trabalho foi feito um estudo preliminar das irregularidades da superfície de rodagem.

Capítulo 8: É apresentada a técnica de geração automática das equações do movimento. Os procedimentos aqui descritos permitiram a utilização do método de Lagrange na modelagem de sistemas onde normalmente ele não seria aplicável devido à grande complexidade das equações obtidas. Demonstra-se aqui que a computação simbólica é uma ferramenta poderosa e que abre um novo horizonte aos métodos teóricos de modelagem de sistemas dinâmicos.

Capítulo 9: Neste capítulo são apresentados os comentários e conclusões finais da dissertação, além de informações sobre a continuação deste trabalho.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
BIBLIOTECA

2 - Método dos Modos Assumidos

2.1 - Introdução

O método dos Modos Assumidos nada mais é que uma estratégia para incluir os efeitos da flexibilidade de partes de um sistema mecânico sobre o conjunto de seus graus de liberdade de corpo rígido.

Conforme foi dito na introdução deste trabalho, quando se faz a modelagem de veículos onde determinados componentes, geralmente o chassis, apresentam movimentos flexíveis com amplitudes significativas, a inclusão de sua influência no comportamento dinâmico do sistema assume caráter indispensável.

Esta técnica apresenta uma formulação semelhante à de Rayleigh-Ritz e assume uma solução em série para a resposta do componente flexível no domínio do tempo. A solução em série é composta de duas parcelas, sendo uma função da posição e a outra função somente do tempo, conforme mostrado na equação (2.1).

$$R(r,t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\ \phi_i(r) \tag{2.1}$$

A formulação do método pode ser expandida para os casos onde existem flexão, torção ou uma combinação destes dois movimentos.

2.2 - Método dos Modos Assumidos para Flexão

O método propõe uma solução em série para representar a resposta flexível do sistema no domínio do tempo, associada a um sistema conservativo contínuo, do tipo:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \tag{2.2}$$

A função $\phi_i(x)$ é chamada função admissível, a qual supõe-se seja uma hipótese razoável para o deslocamento. Neste caso, usam-se **p** modos de flexão da estrutura real, obtidos separadamente. Os **p** modos de vibração do chassis podem ser obtidos experimentalmente ou a partir de um modelo de simulação usando a técnica dos Elementos Finitos.

A função $q_i(t)$ representa **p** novas coordenadas generalizadas introduzidas no sistema.

Vale-se da solução em série e de suas derivadas para determinar as expressões da energia cinética e potencial associadas.

Para o sistema contínuo, tem-se a energia cinética na forma da equação (2.3).

$$T = 0.5 \int_0^L \rho S \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \qquad (2.3)$$

Substituindo em (2.3) a solução em série (2.2), e assumindo que a área da seção transversal do chassis, **S**, varia com a posição, tem-se:

$$T = 0.5 \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{p} \phi_i(x) \; q_i(t) \right)^2 dx \qquad (2.4)$$

ou ainda

$$T = 0.5 \int_0^L \rho S(x) \left(\sum_{i=1}^{p} \phi_i(x) \; \dot{q}_i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^{p} \phi_j(x) \; \dot{q}_j(t) \right) dx \qquad (2.5)$$

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \left(\dot{q}_i(t) \; \dot{q}_j(t) \int_0^L \rho S(x) \; \phi_i(x) \; \phi_j(x) \; dx \right) \qquad (2.6)$$

Finalmente, pode-se escrever a expressão da energia cinética como a seguir:

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} \; \dot{q}_i(t) \; \dot{q}_j(t) \qquad (2.7)$$

sendo

$$m_{ij} = \int_0^L \rho \ S(x) \ \phi_i(x) \ \phi_j(x) \ dx \tag{2.8}$$

A energia potencial pode ser determinada a partir da substituição da solução em série na equação (2.9):

$$U = 0.5 \int_0^L E \, I \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \tag{2.9}$$

Substituindo agora na equação (2.9) a solução em série (2.2) e assumindo que o momento de inércia de área , **I**, da seção transversal do chassis em torno de sua linha neutra varia com a posição, tem-se:

$$U = 0.5 \int_0^L E \, I(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=1}^{p} \phi_i(x) \ q_i(t) \right) \right]^2 dx \tag{2.10}$$

ou ainda:

$$U = 0.5 \int_0^L E \ I(x) \left(\sum_{i=1}^{p} q_i(t) \ \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \right) \left(\sum_{j=1}^{p} q_j(t) \ \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right) dx$$

$$U = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \left(q_i(t) \ q_j(t) \int_0^L E \ I(x) \ \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \ \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \ dx \right) \tag{2.11}$$

Finalmente, a expressão da energia potencial pode ser escrita conforme mostra a equação (2.12).

$$U = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} k_{ij} \ q_i(t) \ q_j(t) \tag{2.12}$$

sendo

$$k_{ij} = \int_0^L E \ I(x) \ \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \ \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \ dx \tag{2.13}$$

Uma vez que o sistema contínuo é considerado conservativo, a função de dissipação de Rayleigh é nula, ou seja,

$$F=0 \tag{2.14}$$

Com base nas expressões de **T**, **U**, e **F**, expandidas em série nas equações (2.7), (2.12), e (2.14), pode-se aplicar o método de Lagrange, caracterizado pela equação (2.15), para determinar as **p** equações do movimento associadas às coordenadas generalizadas $\mathbf{q_i}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad \text{com } i=1.....p \tag{2.15}$$

Introduzindo agora as equações (2.7), (2.12) e (2.14) em (2.15), obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}\, \ddot{q}_j(t) \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{p} k_{ij}\, q_j(t) \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{2.19}$$

Uma vez que o chassis se encontra ligado aos outros componentes do veículo através de elementos elásticos (molas, coxins e estabilizadores) e de amortecedores, estes atuam como forças externas, excitando o movimento flexível. Estas forças generalizadas $\mathbf{Q_i}$ podem ser expressas em termos do trabalho virtual realizado pelas forças $\mathbf{f_k}$ atuantes nas ligações. A equação (2.20) expressa o trabalho virtual associado a um sistema submetido a **nf** forças externas correspondentes aos elementos de ligação.

$$\delta w = \sum_{k=1}^{nf} f_k \ \delta r_k \tag{2.20}$$

sendo $\mathbf{f_k}$ as forças externas aplicadas e $\delta\mathbf{r_k}$ o correspondente deslocamento virtual. Como o deslocamento virtual $\delta\mathbf{r_k}$ pode ser escrito:

$$\delta r_k = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \ \delta q_i \tag{2.21}$$

então

$$\delta w = \sum_{k=1}^{nf} f_k \ \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \delta q_i \tag{2.22}$$

Rearranjando a equação (2.22), tem-se:

$$\delta w = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{nf} f_k \ \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i \tag{2.23}$$

ou ainda

$$\delta w = \sum_{i=1}^{p} Q_i \ \delta q_i \tag{2.24}$$

sendo

$$Q_i = \sum_{k=1}^{nf} f_k \ \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \qquad \text{com } i=1.....p \tag{2.25}$$

Neste caso específico, tem-se que $\mathbf{r_k}$ é dado pela solução em série da equação (2.2), então:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{nf} f_k \ \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\phi_i(x) \ q_i(t) \right) \tag{2.26}$$

Da equação (2.26) pode-se determinar a forma final das forças generalizadas $\mathbf{Q_i}$

conforme é mostrado na equação (2.27).

$$Q_i = \sum_{k=1}^{nf} f_k \ \phi_i(x) \tag{2.27}$$

A partir das equações (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) e (2.27), pode-se montar as equações do movimento:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \ \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^{p} k_{ij} \ q_j(t) = Q_i \qquad \text{com } i = 1.....p \tag{2.28}$$

A equação (2.28) também pode ser escrita na forma matricial, o que conduz a:

$$[M]_{pxp} \ \{\ddot{q}\}_{px1} + [K]_{pxp} \ \{q\}_{px1} = \{Q\}_{px1} \tag{2.29}$$

2.3 - Método dos Modos Assumidos para Torção

Partindo do mesmo princípio usado anteriormente, o deslocamento torcional $\varphi(x,t)$ pode ser escrito como:

$$\varphi\ (x,t) = \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x) \ \ s_i(t) \tag{2.30}$$

onde $\psi_i(x)$ é a função admissível para o deslocamento angular e $s_i(t)$ as novas coordenadas generalizadas.

Com base na solução em série e em suas derivadas, pode-se escrever as expressões da energia cinética e potencial associadas à torção.

Para o sistema contínuo e conservativo, tem-se para a energia cinética:

$$T = 0.5 \int_0^L I_0 \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \tag{2.31}$$

onde $\mathbf{I_\theta}$ representa o momento de inércia de massa em torno do eixo de torção por unidade de comprimento ($\mathbf{I_x}$ / **L**). Introduzindo a solução em série (2.30) na equação (2.31) e admitindo que o momento de inércia de massa por unidade de comprimento é função da posição, tem-se:

$$T = 0.5 \int_0^L I_\theta(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x) \; s_i(t) \right)^2 dx \tag{2.32}$$

ou ainda

$$T = 0.5 \int_0^L I_\theta(x) \left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x) \; \dot{s}_i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^{p} \Psi_j(x) \; \dot{s}_j(t) \right) dx \tag{2.33}$$

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \left(\dot{s}_i(t) \; \dot{s}_j(t) \int_0^L I_\theta(x) \; \Psi_i(x) \; \Psi_j(x) \; dx \right) \tag{2.34}$$

Finalmente, a expressão da energia cinética pode ser expressa conforme mostra a equação (2.35).

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} \; \dot{s}_i(t) \; \dot{s}_j(t) \tag{2.35}$$

sendo

$$m_{ij} = \int_0^L I_\theta(x) \; \Psi_i(x) \; \Psi_j(x) \; dx \tag{2.36}$$

A expressão da energia potencial para o sistema contínuo, pode ser expressa pela substituição da solução em série (2.30) na equação (2.37).

$$U = 0.5 \int_0^L G \; J \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \tag{2.37}$$

Fazendo a substituição e admitindo que o momento de inércia polar, **J**, em torno do eixo de torção é função da posição, tem-se:

$$U = 0.5 \int_0^L G\ J(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right)^2 dx \tag{2.38}$$

ou ainda

$$U = 0.5 \int_0^L G\ J(x) \left(\sum_{i=1}^{p} s_i(t)\ \frac{d\Psi_i(x)}{dx} \right) \left(\sum_{j=1}^{p} s_j(t)\ \frac{d\Psi_j(x)}{dx} \right) dx \tag{2.39}$$

$$U = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \left(s_i(t)\ s_j(t) \int_0^L G\ J(x)\ \frac{d\Psi_i(x)}{dx}\ \frac{d\Psi_j(x)}{dx}\ dx \right) \tag{2.40}$$

Finalmente, a expressão da energia potencial pode ser escrita conforme mostra a equação (2.41).

$$U = 0.5 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} k_{ij}\ s_i(t)\ s_j(t) \tag{2.41}$$

sendo

$$k_{ij} = \int_0^L G\ J(x)\ \frac{d\Psi_i(x)}{dx}\ \frac{d\Psi_j(x)}{dx}\ dx \tag{2.42}$$

De forma semelhante ao caso da flexão, a função dissipação de Rayleigh é nula, ou seja,

$$F = 0 \tag{2.43}$$

Com base nas expressões de **T**, **U** e **F**, expandidas em série nas equações (2.35), (2.41) e (2.43), pode-se novamente aplicar o método de Lagrange através da equação (2.15). Com isto, obtém-se as **p** equações do movimento associadas às coordenadas generalizadas $\mathbf{q_i}$. Desta forma, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i} \right) = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}\ \ddot{s}_j(t) \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_i} = 0 \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial U}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{p} k_{ij}\ s_j(t) \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{s}_i} = 0 \tag{2.47}$$

As expressões das forças generalizadas podem ser obtidas de maneira idêntica ao caso desenvolvido para flexão. Sendo assim, pode-se partir da equação (2.25), onde substitui-se $\mathbf{r_k}$ pela solução em série para torção. Fazendo isto, fica:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{nf} f_k\ \frac{\partial}{\partial s_i}\left(\Psi_i(x)\ s_i(t)\right) \tag{2.48}$$

De acordo com (2.48), obtém-se a forma final das forças generalizadas $\mathbf{Q_i}$, conforme é mostrado na equação (2.49):

$$Q_i = \sum_{k=1}^{nf} f_k\ \Psi_i(x) \tag{2.49}$$

Pode-se finalmente, a partir das equações (2.44), (2.45), (2.46), (2.47) e (2.49), montar as equações do movimento:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\ \ddot{s}_j(t) + \sum_{j=1}^{p} k_{ij}\ s_j(t) = Q_i \qquad \text{com } i = 1.....p \tag{2.50}$$

Escrevendo a equação (2.50) na forma matricial, fica:

$$[M]_{pxp}\ \{\ddot{s}\}_{px1} + [K]_{pxp}\ \{s\}_{px1} = \{Q\}_{px1} \tag{2.51}$$

2.4 - Combinação da Flexão e Torção

Em sistemas reais, e principalmente no caso de veículos, ocorre uma combinação dos movimentos de flexão e torção. Para estes casos, considera-se os movimentos desacoplados, e procede-se da maneira descrita anteriormente.

Fazendo isto, são gerados dois conjuntos de equações, cada um relacionado a um tipo de movimento. O número de equações em cada conjunto pode ser diferente, tomado de acordo com a necessidade de se ter uma solução em série que represente de maneira satisfatória os movimentos flexíveis da estrutura.

2.5 - Inclusão da Influência de Movimentos Flexíveis em Sistemas Discretos Através do Método dos Modos Assumidos

Neste trabalho, o Método dos Modos Assumidos é utilizado para incluir a influência dos movimentos flexíveis do chassis do caminhão e do chassis da carreta nos movimentos de corpo rígido.

Este procedimento pode ser dividido em duas partes distintas:

1 - Inclusão da influência dos movimentos flexíveis nas equações do movimento de corpo rígido.

2 - Obtenção das equações do movimento flexível (flexão e torção) através dos procedimentos já expostos nos itens anteriores deste capítulo.

O primeiro item pode ser equacionado, a partir da inclusão da solução em série e de suas derivadas nos deslocamentos e velocidades dos pontos de ancoragem dos elementos elásticos e dos amortecedores. Na figura 2.1, é mostrado como exemplo um modelo simplificado de veículo com dois graus de liberdade. Nas equações do movimento pode-se ver que a energia armazenada nas molas da sus-

pensão é diferente quando se admite o chassis como rígido ou flexível.

O segundo item , que diz respeito à obtenção das equações de movimento associadas aos movimentos flexíveis, é equacionado segundo os itens 2.2, 2.3 e 2.4 deste capítulo. Neste trabalho considera-se que o chassis do caminhão e o chassis da carreta apresentam movimentos de flexão e torção com amplitudes significativas.

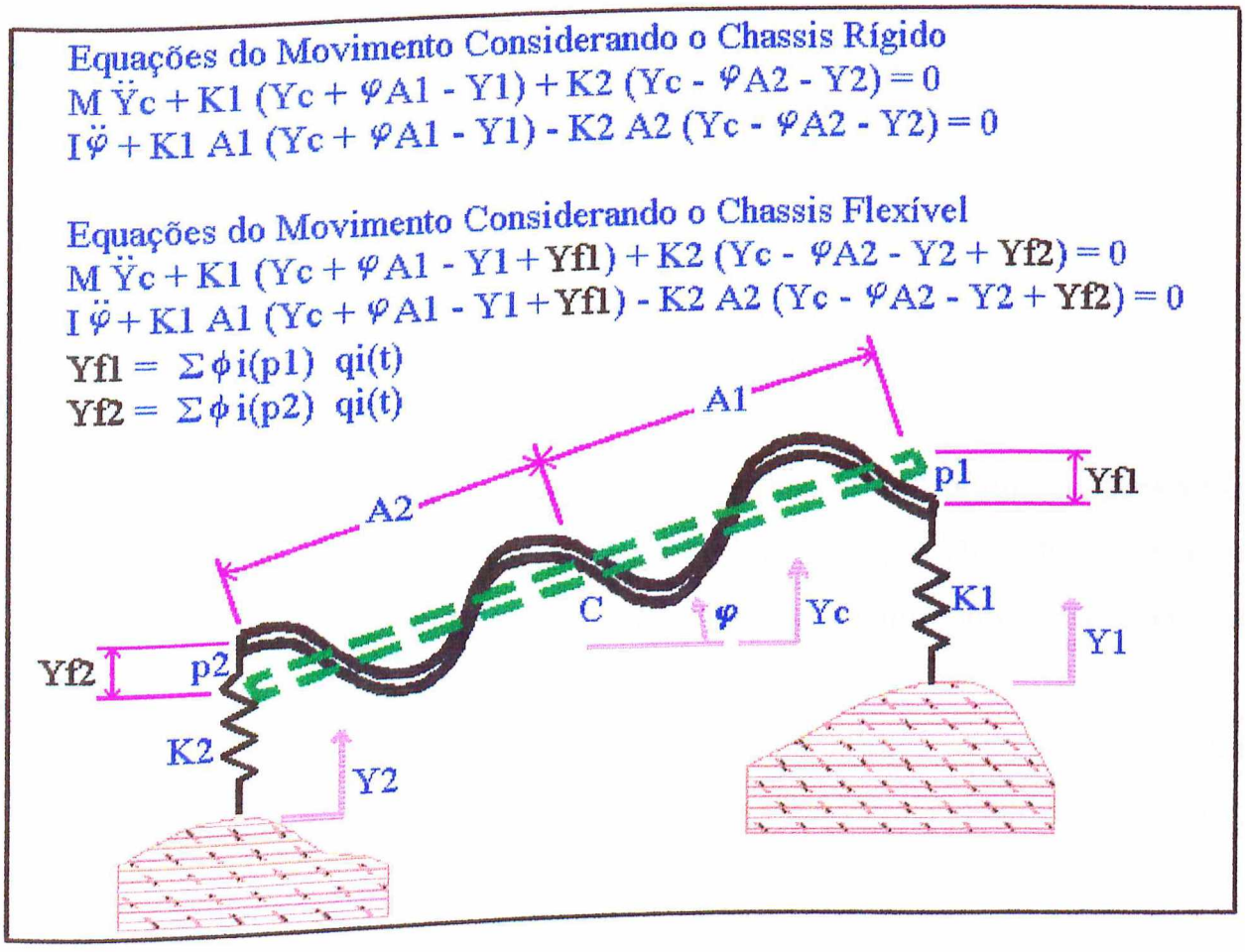

Figura 2.1: Modelo simplificado de veículo com 2 graus de liberdade equacionado de duas maneiras, como rígido e considerando-se a flexão do chassis.

3 - Modelos Matemáticos

3.1 - Introdução

Neste trabalho foram desenvolvidos três modelos matemáticos visando representar as configurações de um veículo articulado pesado da forma a mais realística possível. O veículo utilizado como base foi o caminhão **Mercedes-Benz LS-1941** isolado e acoplado a carretas de um e três eixos. A modelagem é feita por uma técnica refinada que se vale do método de Lagrange e de coordenadas generalizadas relativas para se obter as equações não lineares do movimento.

3.2 - Modelo Matemático do Caminhão Isolado

O modelo do caminhão, aqui tratado isoladamente, é comum aos três veículos. Ele é constituído basicamente de seis componentes que são: Chassis, Cabine, Conjunto Propulsor (motor e câmbio), Eixo Dianteiro (e agregados), Eixo Traseiro (e agregados) e a Quinta Roda.

Para melhor referenciar os movimentos dos componentes do veículo, define-se um sistema de eixos cartesianos inercial **(XYZI)** cuja orientação é definida a seguir:

- Eixo XI: Aponta na direção longitudinal do veículo com sentido positivo da traseira para a dianteira do mesmo;

- Eixo YI: Aponta na direção transversal do veículo com sentido positivo da direita para a esquerda;

- Eixo ZI: Aponta na direção vertical com sentido de baixo para cima.

A origem deste sistema inercial de coordenadas coincide inicialmente com o

centro de massa do chassis do caminhão.

Em todos os demais elementos existe um sistema de eixos cartesianos locais (**xyz i**) cuja origem coincide com o seu centro de massa e seus sentidos positivos dos eixos são inicialmente paralelos aos dos eixos inerciais principais.

Os movimentos de corpo rígido permitidos a este veículo são:

- **Chassis:** Translação longitudinal (**x1**), translação transversal (**y1**), translação vertical (**z1**), rotação em torno do eixo **x1** (α**1**), rotação em torno do eixo **y1** (β**1**) e rotação em torno do eixo **z1** (γ**1**);

- **Cabine:** Translação vertical (**z2**), rotação em torno do eixo **x2** (α**2**) e rotação em torno do eixo **y2** (β**2**);

- **Conjunto Propulsor:** Translação longitudinal (**x3**), translação transversal (**y3**), translação vertical (**z3**), rotação em torno do eixo **x3** (α**3**), rotação em torno do eixo **y3** (β**3**) e rotação em torno do eixo **z3** (γ**3**);

- **Eixo Dianteiro:** Translação vertical (**z4**), rotação em torno do eixo **x4** (α**4**) e rotação em torno do eixo **y4** (β**4**);

- **Eixo Traseiro:** Translação vertical (**z5**), rotação em torno do eixo **x5** (α**5**) e rotação em torno do eixo **y5** (β**5**);

- **Quinta Roda:** Translação longitudinal (**x6**), translação vertical (**z6**), rotação em torno do eixo **x6** (α**6**) e rotação em torno do eixo **y6** (β**6**).

Na figura 3.1 pode-se ver uma representação esquemática do caminhão isolado com seu referencial inercial, referenciais locais e sentidos positivos dos movimentos. Cabe mencionar que, a título de uma melhor visualização, as origens dos sistemas de coordenadas não foram posicionadas, na figura, nos centros de gravidade dos respectivos componentes do sistema.

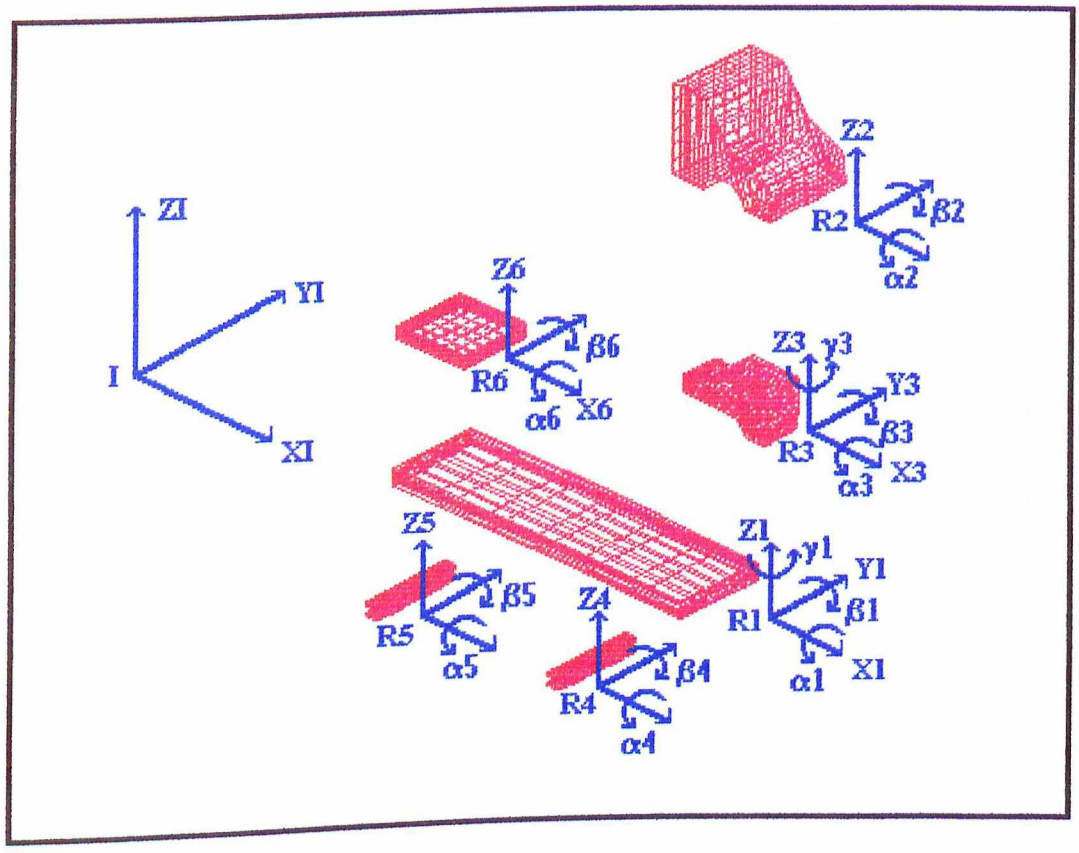

Figura 3.1: Modelo esquemático do caminhão isolado, seus referenciais e movimentos analisados.

3.2.1 - Energia Cinética do Chassis do Caminhão

A determinação da energia cinética do chassis do caminhão pode ser feita com base na figura 3.2. Nesta figura define-se o sistema de eixos inerciais **XYZI** e o centro de massa **o1** do chassis, transladado deste de suas coordenadas generalizadas de translação **x1**, **y1** e **z1**. Define-se também dois outros referenciais locais ligados ao chassis, de denominação **S1** e **P1**. Estes dois referenciais locais estão fixos ao centro de gravidade do chassis, sendo que o referencial de índice **S1** é direcionado paralelamente ao referencial inercial, enquanto que o de índice **P1** é direcionado de acordo com os eixos principais de inércia do chassis.

Uma vez que os momentos principais de inércia dos componentes do veículo podem variar de acordo com sua geometria e principalmente com o carregamen-

to, é interessante estabelecer um modelo genérico que resguarde este aspecto e que permita representar uma configuração qualquer. Sendo assim, adota-se os graus de liberdade de rotação $\alpha 1$, $\beta 1$ e $\gamma 1$ em torno dos eixos do sistema **S1**. Com isto, os movimentos traduzem melhor o significado físico por apresentarem simetria em relação aos ocupantes e à direção de tráfego do veículo.

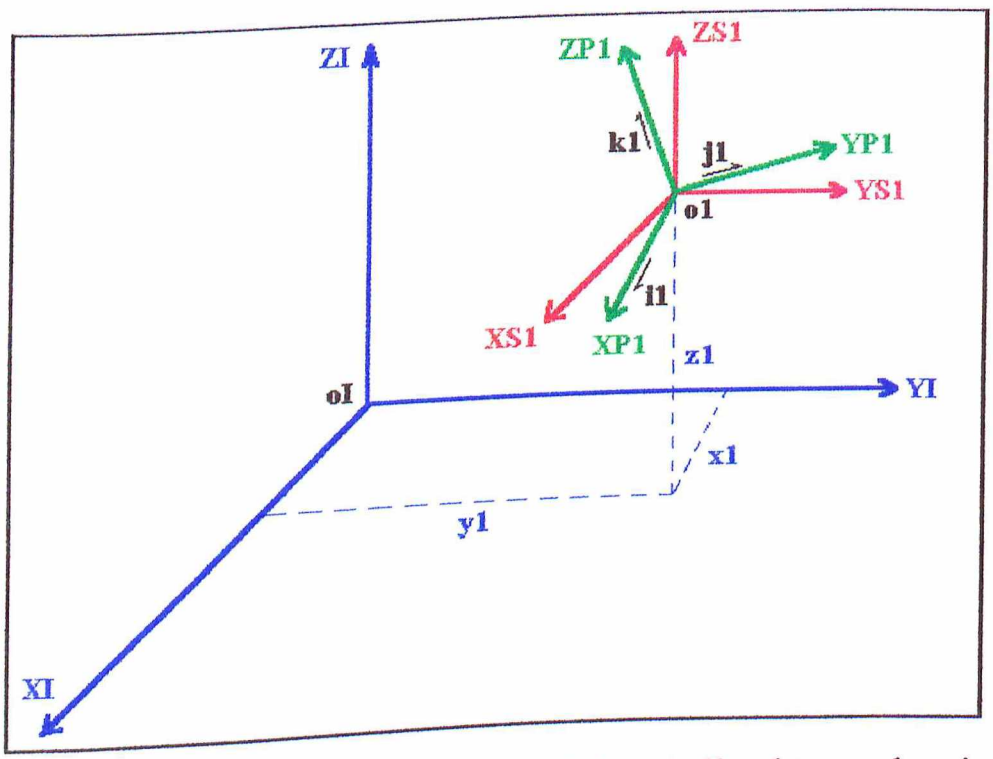

Figura 3.2: Referencial inercial e referenciais locais ligados ao chassis do caminhão.

Para estabelecer a matriz de transformação entre os referenciais **S1** e **P1** usa-se três vetores unitários $\vec{i}1$, $\vec{j}1$ e $\vec{k}1$ tomados ao longo dos eixos cartesianos **P1**. Escrevendo estes vetores unitários nos sistemas **S1** e **P1**, tem-se:

$$
{}^{S1}\vec{i}1 = \begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{bmatrix} \qquad {}^{P1}\vec{i}1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{S1}\vec{j}1 = \begin{bmatrix} d1 \\ e1 \\ f1 \end{bmatrix} \qquad {}^{P1}\vec{j}1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}
$$

$$ {}^{S1}\vec{k}1 = \begin{bmatrix} g1 \\ h1 \\ l1 \end{bmatrix} \qquad {}^{P1}\vec{k}1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.1} $$

A partir destes três vetores unitários escritos nos dois sistemas, pode-se determinar a matriz de transformação entre **S1** e **P1**. Isto é feito, resolvendo a equação (3.2) para os vetores $\vec{i}1$, $\vec{j}1$ e $\vec{k}1$ simultaneamente.

$$ {}^{S1}\vec{u} = \left[{}^{S1}T^{P1} \right] . {}^{P1}\vec{u} \tag{3.2} $$

Fazendo isto, obtém-se:

$$ \left[{}^{S1}T^{P1} \right] = \begin{bmatrix} a1 & d1 & g1 \\ b1 & e1 & h1 \\ c1 & f1 & l1 \end{bmatrix} = cte \tag{3.3} $$

$$ \left[{}^{P1}T^{S1} \right] = \left[{}^{S1}T^{P1} \right]^t = \begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ d1 & e1 & f1 \\ g1 & h1 & l1 \end{bmatrix} $$

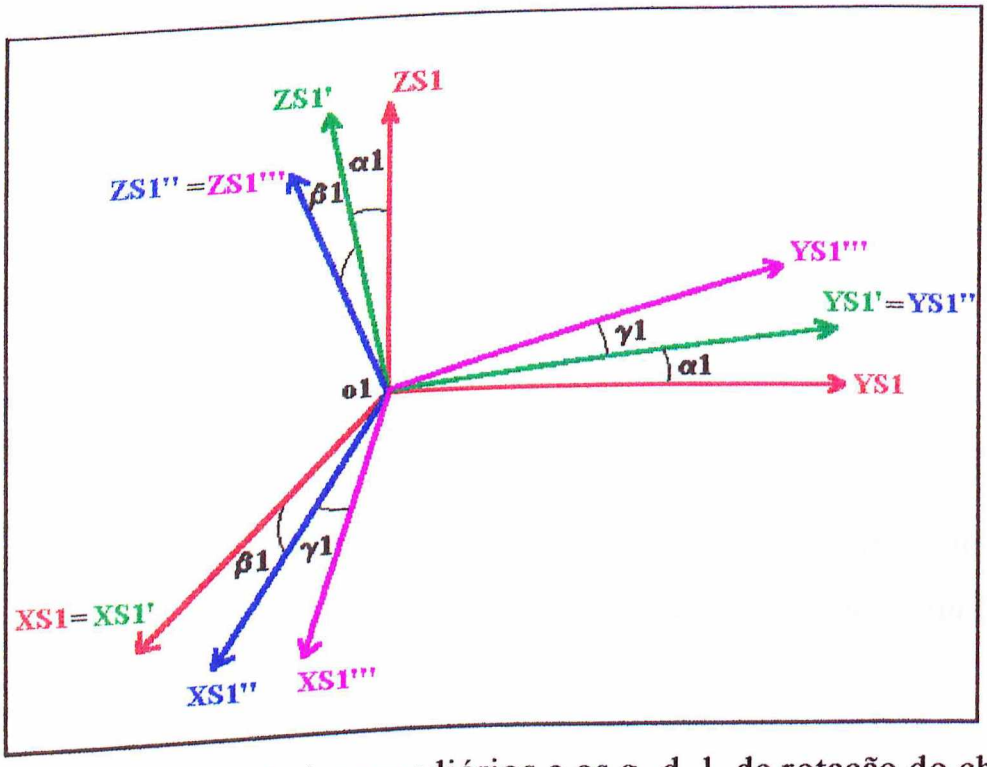

Figura 3.3: Referenciais intermediários e os g. d. l. de rotação do chassis.

Para estabelecer agora os graus de liberdade de rotação do chassis, parte-se do referencial **S1** e obtém-se **S1'** através de uma rotação $\alpha 1$ em torno de **XS1**. Em seguida, obtém-se o sistema **S1''** através de uma rotação $\beta 1$ em torno de **YS1'** e finalmente chega-se à posição genérica do chassis, definida pelo sistema **S1'''**, através de uma rotação $\gamma 1$ em torno de **ZS1''**. Estes referenciais e as respectivas rotações podem ser vistos na figura 3.3.

As matrizes de transformação entre os referenciais intermediários podem ser facilmente obtidas considerando a sequência de rotações conforme apresentado anteriormente. Estas matrizes de transformação podem ser vistas nas equações matriciais (3.4) mostradas abaixo.

$$\left[{}^{S1}T^{S1'}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha 1) & -\text{Sen}(\alpha 1) \\ 0 & \text{Sen}(\alpha 1) & \text{Cos}(\alpha 1) \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{S1'}T^{S1}\right] = \left[{}^{S1}T^{S1'}\right]^t$$

$$\left[{}^{S1'}T^{S1''}\right] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta 1) & 0 & \text{Sen}(\beta 1) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\beta 1) & 0 & \text{Cos}(\beta 1) \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

$$\left[{}^{S1''}T^{S1'}\right] = \left[{}^{S1'}T^{S1''}\right]^t$$

$$\left[{}^{S1''}T^{S1'''}\right] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\gamma 1) & -\text{Sen}(\gamma 1) & 0 \\ \text{Sen}(\gamma 1) & \text{Cos}(\gamma 1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{S1'''}T^{S1''}\right] = \left[{}^{S1''}T^{S1'''}\right]^t$$

A partir destas seis matrizes de transformação, pode-se obter outras que fazem a transformação direta entre dois sistemas não consecutivos, numa única operação. Isto é feito conforme mostram as equações (3.5).

$$\left[{}^{S1''}T^{S1}\right] = \left[{}^{S1''}T^{S1'}\right] \cdot \left[{}^{S1'}T^{S1}\right]$$

$$\left[{}^{S1}T^{S1''}\right] = \left[{}^{S1''}T^{S1}\right]^{t} \tag{3.5}$$

$$\left[{}^{S1'''}T^{S1}\right] = \left[{}^{S1'''}T^{S1''}\right] \cdot \left[{}^{S1''}T^{S1'}\right] \cdot \left[{}^{S1'}T^{S1}\right]$$

$$\left[{}^{S1}T^{S1'''}\right] = \left[{}^{S1'''}T^{S1}\right]^{t}$$

Deve-se ressaltar que, em qualquer posição genérica do chassis, haverá sempre uma diferença de orientação entre o sistema de eixos local atual $\mathbf{S1^{n'}}$ e a direção dos eixos principais de inércia. Esta diferença será sempre constante e poderá ser manipulada a qualquer tempo pelas matrizes de transformação apresentadas nas equações (3.3). Isto quer dizer que pode-se associar a cada referencial intermediário $\mathbf{S1^{n'}}$ um referencial $\mathbf{P1^{n'}}$ que obedece as equações (3.6).

$$\left[{}^{S1}T^{P1}\right] = \left[{}^{S1^{n'}}T^{P1^{n'}}\right]$$

$$\left[{}^{P1}T^{S1}\right] = \left[{}^{S1}T^{P1}\right]^{t} = \left[{}^{P1^{n'}}T^{S1^{n'}}\right] = \left[{}^{S1^{n'}}T^{P1^{n'}}\right]^{t} \tag{3.6}$$

O tensor de inércia do chassis do caminhão, escrito no referencial $\mathbf{P1'''}$ (associado ao referencial genérico $\mathbf{S1'''}$) corresponde aos seus momentos principais de inércia e pode ser representado pela equação (3.7).

$${}^{P1'''}I^{(1)} = \begin{bmatrix} I1x & 0 & 0 \\ 0 & I1y & 0 \\ 0 & 0 & I1z \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Para escrever este tensor no sistema $\mathbf{S1'''}$, que define a posição genérica do chassis, aplica-se a transformação apresentada na equação (3.8).

$${}^{S1'''}I^{(1)} = \left[{}^{S1'''}T^{P1'''}\right] \cdot {}^{P1'''}I^{(1)} \cdot \left[{}^{P1'''}T^{S1'''}\right] \tag{3.8}$$

Representando a velocidade do centro de massa do chassis por $\vec{v}^{(1)}$, tem-se

$$ {}^{I}\vec{v}^{(1)} = {}^{S1}\vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{y}1 \\ \dot{z}1 \end{bmatrix} \tag{3.9} $$

A velocidade angular do chassis pode ser obtida pelo conjunto de suas três componentes $\dot{\vec{\alpha}}1$, $\dot{\vec{\beta}}1$ e $\dot{\vec{\gamma}}1$ que podem ser favoravelmente estabelecidas nos sistemas de coordenadas intermediários. Fazendo isto, tem-se as equações (3.10).

$$ {}^{S1}\dot{\vec{\alpha}}1 = {}^{S1'}\dot{\vec{\alpha}}1 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S1'}\dot{\vec{\beta}}1 = {}^{S1''}\dot{\vec{\beta}}1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.10} $$

$$ {}^{S1''}\dot{\vec{\gamma}}1 = {}^{S1'''}\dot{\vec{\gamma}}1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}1 \end{bmatrix} $$

Transferindo todos os componentes de velocidade de rotação para o referencial genérico **S1'''**, obtém-se as expressões (3.11).

$$ {}^{S1'''}\dot{\vec{\alpha}}1 = \left[{}^{S1'''}T^{S1'} \right] \cdot {}^{S1'}\dot{\vec{\alpha}}1 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}1\ \mathrm{Cos}(\beta 1)\ \mathrm{Cos}(\gamma 1) \\ -\dot{\alpha}1\ \mathrm{Cos}(\beta 1)\ \mathrm{Sen}(\gamma 1) \\ \dot{\alpha}1\ \mathrm{Sen}(\beta 1) \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S1'''}\dot{\vec{\beta}}1 = \left[{}^{S1'''}T^{S1''} \right] \cdot {}^{S1''}\dot{\vec{\beta}}1 = \begin{bmatrix} \dot{\beta}1\ \mathrm{Sen}(\gamma 1) \\ \dot{\beta}1\ \mathrm{Cos}(\gamma 1) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.11} $$

$$ {}^{S1'''}\dot{\vec{\gamma}}1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}1 \end{bmatrix} $$

Após escrever as componentes da velocidade de rotação do chassis do caminhão num único referencial (que neste caso é **S1'''**), pode-se agrupá-las a fim de obter uma única expressão.

$$ {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = {}^{S1'''}\vec{\dot{\alpha}}1 + {}^{S1'''}\vec{\dot{\beta}}1 + {}^{S1'''}\vec{\dot{\gamma}}1 $$

$$ {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}1\ \mathrm{Cos}(\beta 1)\ \mathrm{Cos}(\gamma 1) + \dot{\beta}1\ \mathrm{Sen}(\gamma 1) \\ -\dot{\alpha}1\ \mathrm{Cos}(\beta 1)\ \mathrm{Sen}(\gamma 1) + \dot{\beta}1\ \mathrm{Cos}(\gamma 1) \\ \dot{\alpha}1\ \mathrm{Sen}(\beta 1) + \dot{\gamma}1 \end{bmatrix} \qquad (3.12) $$

Finalmente, a energia cinética do chassis do caminhão pode ser expressa pela equação (3.13).

$$ \mathbf{T_1} = \mathbf{T_{t1}} + \mathbf{T_{r1}} $$

onde

$$ \mathbf{T_{t1}} = 0.5\ \mathrm{M1} \left[{}^{I}\vec{V}^{(1)} \right]^{t} . \left[{}^{I}\vec{V}^{(1)} \right] \qquad (3.13) $$

$$ \mathbf{T_{r1}} = 0.5 \left[{}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} \right]^{t} . {}^{S1'''}I^{(1)} . \left[{}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} \right] $$

3.2.2 - Energia Cinética da Cabine

Uma vez que o sistema completo representativo do caminhão apresenta muitos graus de liberdade e restrições de movimento de um componente em relação aos outros, optou-se por fazer a modelagem dos demais elementos constitutivos do caminhão (cabine, conjunto propulsor, eixos e quinta roda) através de graus de liberdade relativos. Neste caso, isto é feito considerando-se que a cabine (e os demais componentes) se move junto com o chassis do caminhão, podendo apenas efetuar determinados movimentos bem definidos em relação a uma posição genérica deste. Esta forma de modelagem é bastante favorável quando se trata de sistemas dinâmicos associados a veículos, pois é muito difícil descrever os movimentos de seus componentes em relação a um referencial inercial, tendo em vista a sua ampla liberdade de movimento sobre a pista.

Os movimentos a serem considerados como graus de liberdade podem ser estabelecidos pela observação e análise do veículo real. Outro fator que pode ser relevante é a possibilidade de se caracterizar corretamente as inércias, rigidez e amortecimentos envolvidos. Isto é importante, pois o uso de parâmetros muito diferentes dos reais pode induzir a erros maiores do que aqueles obtidos se o movimento for simplesmente desprezado.

No caso específico da cabine, optou-se por analisar três movimentos, sendo um de translação (**z2**) e dois de rotação (α**2** e β**2**). Esta escolha está de acordo com os movimentos principais de uma cabine real [7], ao mesmo tempo em que suas características de inércia, rigidez e amortecimento são parâmetros conhecidos de projeto.

Partindo do mesmo princípio usado na determinação da energia cinética do chassis, tem-se que, a partir de uma posição genérica deste (definida pelo sistema de eixos **S1'''**), o centro de gravidade da cabine pode ser localizado por um vetor posição que possui uma parcela constante somada à translação vertical **z2**, conforme mostra a equação (3.14) e figura 3.4.

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o2)} = \begin{bmatrix} xb2 \\ yb2 \\ zb2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xb2 \\ yb2 \\ zb2 + z2 \end{bmatrix} \quad (3.14 $$

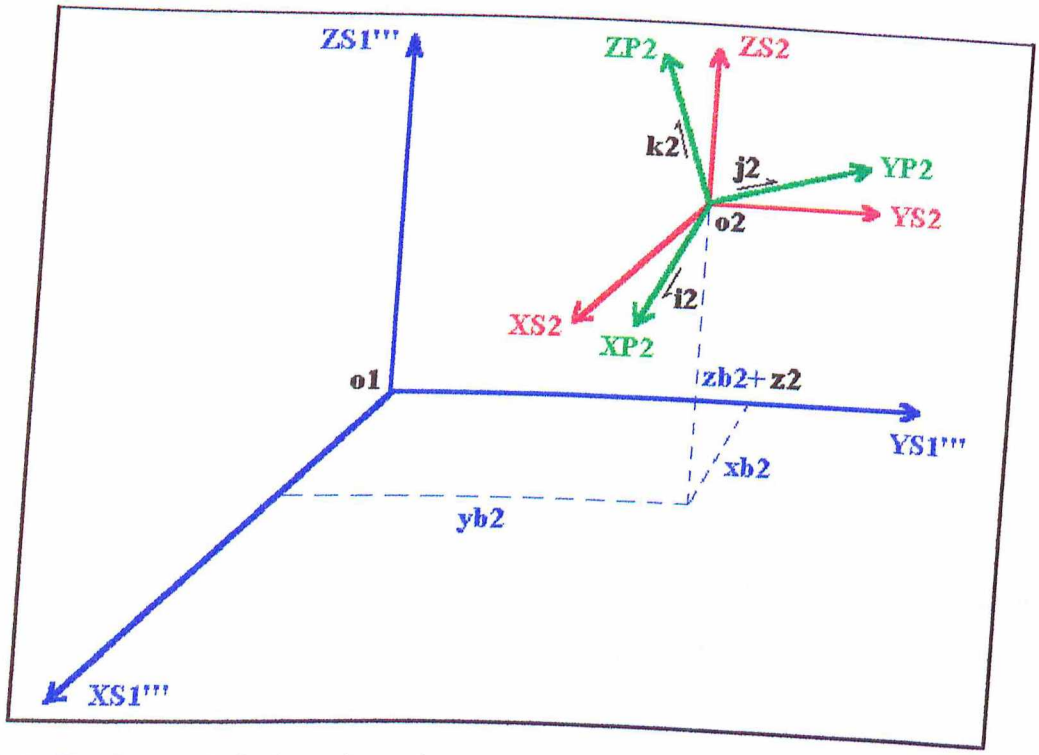

Figura 3.4: Referenciais locais colocados no chassis e na cabine do caminhão.

Aqui também são estabelecidos dois sistemas de eixos coordenados fixos na cabine através de seu centro de gravidade. Estes sistemas, denominados **S2** e **P2**, possuem direções paralelas aos eixos do sistema **S1'''** e aos eixos principais de inércia da cabine, respectivamente. Cabe mencionar que a direção dos eixos de **S2** e **S1'''** são também coincidentes com os eixos longitudinal, transversal e vertical da cabine.

Novamente, nota-se a necessidade de estabelecer uma matriz de transformação entre os sistemas **S2** e **P2**, pois a análise dos movimentos de rotação guarda um melhor significado físico se estes forem definidos em torno de eixos simétricos ao posicionamento dos ocupantes e à direção de tráfego do veículo.

Dando continuidade ao processo de obtenção da energia cinética da cabine, escreve-se os novos vetores unitários $\vec{i}2$, $\vec{j}2$ e $\vec{k}2$ (tomados nas direções dos eixos de **P2**) nos sistemas **S2** e **P2**. Daí obtém-se:

$$
\begin{aligned}
{}^{S2}\vec{i}2 &= \begin{bmatrix} a2 \\ b2 \\ c2 \end{bmatrix} & {}^{P2}\vec{i}2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{S2}\vec{j}2 &= \begin{bmatrix} d2 \\ e2 \\ f2 \end{bmatrix} & {}^{P2}\vec{j}2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{S2}\vec{k}2 &= \begin{bmatrix} g2 \\ h2 \\ l2 \end{bmatrix} & {}^{P2}\vec{k}2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (3.15)
$$

A matriz de transformação que liga **S2** a **P2** pode ser obtida, repetindo-se novamente o procedimento empregado na equação (3.2).

$$
{}^{S2}\vec{u} = \left[{}^{S2}T^{P2}\right] \cdot {}^{P2}\vec{u} \qquad (3.16)
$$

Fazendo isto, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\left[{}^{S2}T^{P2}\right] &= \begin{bmatrix} a2 & d2 & g2 \\ b2 & e2 & h2 \\ c2 & f2 & l2 \end{bmatrix} = cte \\
\left[{}^{P2}T^{S2}\right] &= \left[{}^{S2}T^{P2}\right]^{t} = \begin{bmatrix} a2 & b2 & c2 \\ d2 & e2 & f2 \\ g2 & h2 & l2 \end{bmatrix} = cte
\end{aligned}
\qquad (3.17)
$$

Para estabelecer os graus de liberdade de rotação da cabine, parte-se do sistema de coordenadas **S2** e chega-se a **S2'** através de uma rotação $\alpha 2$ em torno de **XS2**. Em seguida, o sistema **S2''** é obtido girando-se **S2'** de um ângulo $\beta 2$ em torno de **YS2'**, o que configura uma posição genérica para a cabine. Os referenciais locais e intermediários posicionados na cabine podem ser vistos na figura 3.5.

As matrizes de transformação que ligam os referenciais intermediários podem ser obtidas guardando-se para isto a sequência em que foram feitas as rotações. Elas são semelhantes a algumas obtidas para o chassis do caminhão e podem ser vistas nas equações (3.18).

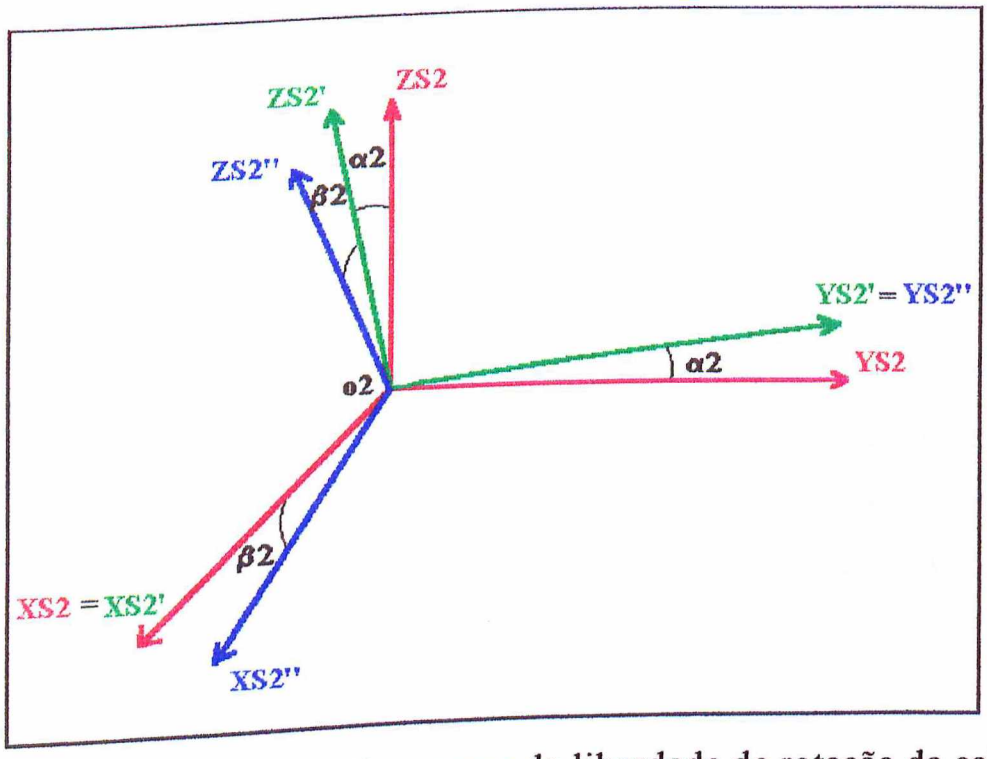

Figura 3.5: Referenciais locais e graus de liberdade de rotação da cabine do veículo.

$$\left[{}^{S2}T^{S2'}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha 2) & -\text{Sen}(\alpha 2) \\ 0 & \text{Sen}(\alpha 2) & \text{Cos}(\alpha 2) \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{S2'}T^{S2}\right] = \left[{}^{S2}T^{S2'}\right]^{t} \qquad (3.18)$$

$$\left[{}^{S2'}T^{S2''}\right] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta 2) & 0 & \text{Sen}(\beta 2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\beta 2) & 0 & \text{Cos}(\beta 2) \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{S2''}T^{S2'}\right] = \left[{}^{S2'}T^{S2''}\right]^{t}$$

Aqui também pode-se obter novas matrizes de transformação que ligam diretamente, numa única operação, os sistemas de eixos coordenados intermediários **S2** e **S2''**. Estas matrizes estão representadas nas equações (3.19) e são semelhantes a algumas das equações (3.5).

$$\left[{}^{S2''}T^{S2}\right] = \left[{}^{S2''}T^{S2'}\right] \cdot \left[{}^{S2'}T^{S2}\right]$$

$$\left[{}^{S2}T^{S2''}\right] = \left[{}^{S2''}T^{S2}\right]^{t} \tag{3.19}$$

Como foi discutido no caso do chassis, haverá sempre uma diferença de orientação, constante para cada elemento, entre o sistema de eixos simétrico genérico e aquele que define os eixos principais de inércia. Devido a isto, será necessário que sempre se faça a transferência do tensor principal de inércia para o referencial simétrico final, que neste caso é **S2''**. De maneira semelhante ao que foi feito para o chassis, pode-se obter a equação (3.21) que executa esta tarefa.

$${}^{P2''}I^{(2)} = \begin{bmatrix} I2x & 0 & 0 \\ 0 & I2y & 0 \\ 0 & 0 & I2z \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$${}^{S2''}I^{(2)} = \left[{}^{S2''}T^{P2''}\right] \cdot {}^{P2''}I^{(2)} \cdot \left[{}^{P2''}T^{S2''}\right] \tag{3.21}$$

A velocidade de translação do centro de massa da cabine pode ser calculada a partir da composição das velocidades do chassis com o vetor velocidade relativa da cabine em relação ao chassis ${}^{S1'''}\vec{v}^{(o2 \to o1)}$, o que é mostrado na equação (3.22).

$${}^{S1'''}\vec{v}^{(2)} = {}^{S1'''}\vec{v}^{(1)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(o2)} + {}^{S1'''}\vec{v}^{(o2 \to o1)} \tag{3.22}$$

Uma vez que o vetor velocidade ${}^{S1'''}\vec{v}^{(o2 \to o1)}$ é dado pela equação (3.23) e todos os demais vetores são conhecidos, pode-se escrever ${}^{S1'''}\vec{v}^{(2)}$ em sua forma final.

$$ {}^{S1'''}\vec{v}^{(o2 \rightarrow o1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}2 \end{bmatrix} \tag{3.23} $$

Para definir as componentes de velocidade de rotação da cabine $\vec{\dot{\alpha}}2$ e $\vec{\dot{\beta}}2$, é novamente necessário que elas sejam escolhidas de maneira favorável nos referenciais intermediários, conforme as equações (3.24).

$$ \begin{aligned} {}^{S2}\vec{\dot{\alpha}}2 &= {}^{S2'}\vec{\dot{\alpha}}2 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^{S2'}\vec{\dot{\beta}}2 &= {}^{S2''}\vec{\dot{\beta}}2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.24} $$

Assim como a velocidade de translação, a velocidade de rotação da cabine deve ser expressa como uma composição da velocidade de rotação do chassis com os graus de liberdade de rotação da própria cabine. Esta composição é mostrada na equação (3.26), onde todas as suas componentes aparecem escritas no referencial que define sua posição genérica (**S2''**).

$$ {}^{S2''}\vec{\dot{\alpha}}2 = \left[{}^{S2''}T^{S2'} \right] \cdot {}^{S2'}\vec{\dot{\alpha}}2 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}2\ \mathrm{Cos}(\beta 2) \\ 0 \\ \dot{\alpha}2\ \mathrm{Sen}(\beta 2) \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S2''}\vec{\dot{\beta}}2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.25} $$

$$ {}^{S2''}\vec{W}^{(2)} = {}^{S2''}\vec{\dot{\alpha}}2 + {}^{S2''}\vec{\dot{\beta}}2 + {}^{S2''}\vec{W}^{(1)} \tag{3.26} $$

O valor de ${}^{S2''}\vec{W}^{(1)}$ foi obtido conforme a equação (3.27).

$$ {}^{S2''}\vec{W}^{(1)} = \left[{}^{S2''}T^{S1'''} \right] \cdot {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = \left[{}^{S2''}T^{S2} \right] \cdot {}^{S2}\vec{W}^{(1)} \tag{3.27} $$

Pode-se fazer ${}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = {}^{S2}\vec{W}^{(1)}$, pois os sistemas **S1'''** e **S2** são paralelos e portanto o vetor velocidade terá as mesmas componentes quando escrito em qualquer um destes dois referenciais.

A partir das equações (3.22) e (3.26), pode-se escrever a parcela de energia cinética correspondente à cabine do caminhão, conforme pode ser visto na equação (3.28).

$$T_2 = T_{t2} + T_{r2} \tag{3.28}$$

onde

$$T_{t2} = 0.5\, M2 \left[{}^{S1'''}\vec{V}^{(2)}\right]^t \cdot \left[{}^{S1'''}\vec{V}^{(2)}\right]$$

$$T_{r2} = 0.5 \left[{}^{S2''}\vec{W}^{(2)}\right]^t \cdot {}^{S2''}I^{(2)} \cdot \left[{}^{S2''}\vec{W}^{(2)}\right]$$

3.2.3 - Energia Cinética do Conjunto Propulsor

A formulação da energia cinética do conjunto propulsor segue os mesmos princípios básicos utilizados no caso da cabine. Devido à maneira como é fixado no chassis do veículo (quatro coxins de borracha), o conjunto propulsor pode vibrar em todas as direções e portanto são considerados todos os seus seis graus de liberdade, tomados em relação ao centro de gravidade do chassis. São estes três translações (**x3**, **y3** e **z3**) e três rotações (α**3**, β**3** e γ**3**).

Na figura 3.6, vê-se que o centro de gravidade do conjunto propulsor pode ser localizado em relação ao sistema **S1'''** por um vetor posição composto de uma parcela constante, acrescida dos próprios graus de liberdade de translação (**x3**, **y3** e **z3**).

$$ {}^{S1'''}\bar{r}^{(o3)} = \begin{bmatrix} xb3 \\ yb3 \\ zb3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x3 \\ y3 \\ z3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xb3 + x3 \\ yb3 + y3 \\ zb3 + z3 \end{bmatrix} \qquad (3.29) $$

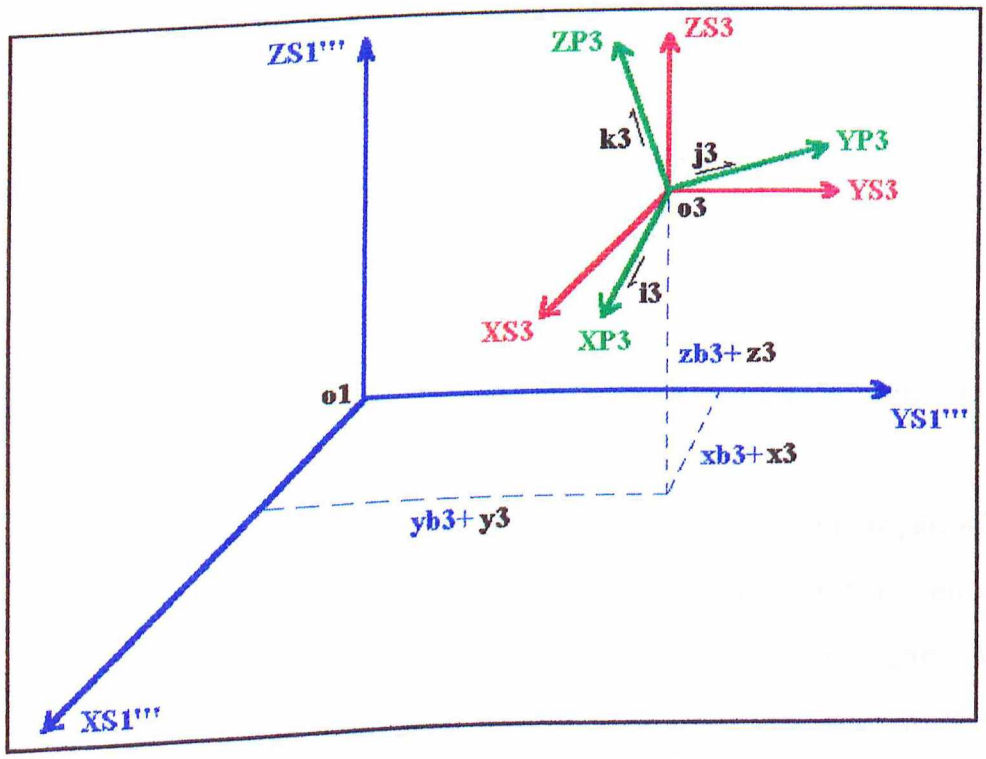

Figura 3.6: Referenciais locais colocados no chassis do caminhão e no conjunto propulsor.

São definidos os referenciais **S3** e **P3** com características semelhantes às de **S2** e **P2** na cabine. As matrizes de transformação entre estes dois sistemas são obtidas pela solução da equação (3.31) para os vetores unitários $\vec{i}3$, $\vec{j}3$ e $\vec{k}3$.

$$
{}^{S3}\vec{i}3 = \begin{bmatrix} a3 \\ b3 \\ c3 \end{bmatrix} \qquad {}^{P3}\vec{i}3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{S3}\vec{j}3 = \begin{bmatrix} d3 \\ e3 \\ f3 \end{bmatrix} \qquad {}^{P3}\vec{j}3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}
$$

$$
{}^{S3}\vec{k}3 = \begin{bmatrix} g3 \\ h3 \\ l3 \end{bmatrix} \qquad {}^{P3}\vec{k}3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{S3}\vec{u} = \left[{}^{S3}T^{P3} \right] . {}^{P3}\vec{u} \tag{3.31}
$$

A solução de (3.31) fornece:

$$
\left[{}^{S3}T^{P3} \right] = \begin{bmatrix} a3 & d3 & g3 \\ b3 & e3 & h3 \\ c3 & f3 & l3 \end{bmatrix} = cte \tag{3.32}
$$

$$
\left[{}^{P3}T^{S3} \right] = \left[{}^{S3}T^{P3} \right]^{t} = \begin{bmatrix} a3 & b3 & c3 \\ d3 & e3 & f3 \\ g3 & h3 & l3 \end{bmatrix}
$$

Na figura 3.7 tem-se os referenciais intermediários e os graus de liberdade de rotação tomados para o conjunto propulsor.

Partindo-se do sistema **S3**, obtém-se **S3'** através de uma rotação $\alpha 3$ em torno de **XS3**. Aplicando agora uma outra rotação $\beta 3$ em torno de **YS3'** encontra-se o sistema **S3''** e, finalmente obtém-se o sistema **S3'''** por uma rotação $\gamma 3$ em torno de **ZS3''**, o que configura uma posição genérica do conjunto propulsor.

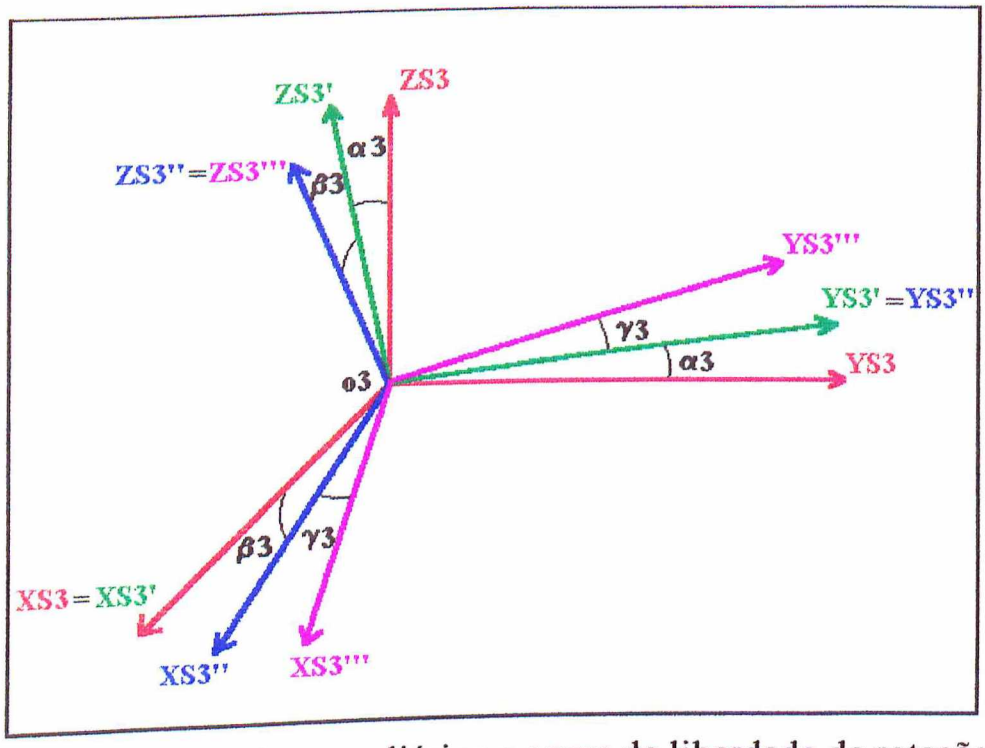

Figura 3.7: Referenciais intermediários e graus de liberdade de rotação do conjunto propulsor.

As matrizes de transformação entre estes sistemas intermediários são semelhantes às obtidas para os elementos anteriores, e ficam conforme as equações (3.33) e (3.34).

$$\left[{}^{S3}T^{S3'}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha 3) & -\text{Sen}(\alpha 3) \\ 0 & \text{Sen}(\alpha 3) & \text{Cos}(\alpha 3) \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{S3'}T^{S3}\right] = \left[{}^{S3}T^{S3'}\right]^t$$

$$\left[{}^{S3'}T^{S3''}\right] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta 3) & 0 & \text{Sen}(\beta 3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\beta 3) & 0 & \text{Cos}(\beta 3) \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

$$\left[{}^{S3''}T^{S3'}\right] = \left[{}^{S3'}T^{S3''}\right]^t$$

$$\left[{}^{S3''}T^{S3'''}\right] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\gamma 3) & -\text{Sen}(\gamma 3) & 0 \\ \text{Sen}(\gamma 3) & \text{Cos}(\gamma 3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{S3'''}T^{S3''}\right] = \left[{}^{S3''}T^{S3'''}\right]^t$$

$$\left[{}^{S3''}T^{S3}\right] = \left[{}^{S3''}T^{S3'}\right] \cdot \left[{}^{S3'}T^{S3}\right]$$

$$\left[{}^{S3}T^{S3''}\right] = \left[{}^{S3''}T^{S3}\right]^{t}$$

$$\left[{}^{S3'''}T^{S3}\right] = \left[{}^{S3'''}T^{S3''}\right] \cdot \left[{}^{S3''}T^{S3'}\right] \cdot \left[{}^{S3'}T^{S3}\right] \qquad (3.34)$$

$$\left[{}^{S3}T^{S3'''}\right] = \left[{}^{S3'''}T^{S3}\right]^{t}$$

O tensor de inércia do conjunto propulsor escrito no referencial **P3'''** (associado ao referencial genérico **S3'''**) corresponde aos seus momentos principais de inércia e pode ser representado pela equação (3.35).

$${}^{P3'''}I^{(3)} = \begin{bmatrix} I3x & 0 & 0 \\ 0 & I3y & 0 \\ 0 & 0 & I3z \end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

Transferindo o tensor principal de inércia para o referencial genérico **S3'''** através da matriz de transformação da equação (3.32), tem-se:

$${}^{S3'''}I^{(3)} = \left[{}^{S3'''}T^{P3'''}\right] \cdot {}^{P3'''}I^{(3)} \cdot \left[{}^{P3'''}T^{S3'''}\right] \qquad (3.36)$$

O vetor velocidade de translação do conjunto propulsor pode ser composto a partir da velocidade do chassis do caminhão e de suas velocidades próprias em relação a este. Na equação (3.37), tem-se o vetor velocidade associado aos graus de liberdade locais do conjunto propulsor, enquanto que na equação (3.38) tem-se a composição final das velocidades.

$${}^{S1'''}\vec{v}^{(o3 \to o1)} = \begin{bmatrix} \dot{x}3 \\ \dot{y}3 \\ \dot{z}3 \end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

$${}^{S1'''}\vec{v}^{(3)} = {}^{S1'''}\vec{v}^{(1)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(o3)} + {}^{S1'''}\vec{v}^{(o3 \to o1)} \qquad (3.38)$$

Tomando as componentes da velocidade de rotação do conjunto propulsor nos referenciais intermediários, tem-se:

$$
\begin{aligned}
{}^{S3}\vec{\dot{\alpha}}3 &= {}^{S3'}\vec{\dot{\alpha}}3 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{S3'}\vec{\dot{\beta}}3 &= {}^{S3''}\vec{\dot{\beta}}3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{S3''}\vec{\dot{\gamma}}3 &= {}^{S3'''}\vec{\dot{\gamma}}3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Transferindo todas estas componentes de velocidade para o referencial genérico final S3''', obtém-se as expressões (3.40).

$$
\begin{aligned}
{}^{S3'''}\vec{\dot{\alpha}}3 &= \left[{}^{S3'''}T^{S3'}\right] \cdot {}^{S3'}\vec{\dot{\alpha}}3 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}3\ \mathrm{Cos}(\beta 3)\ \mathrm{Cos}(\gamma 3) \\ -\dot{\alpha}3\ \mathrm{Cos}(\beta 3)\ \mathrm{Sen}(\gamma 3) \\ \dot{\alpha}3\ \mathrm{Sen}(\beta 3) \end{bmatrix} \\
{}^{S3'''}\vec{\dot{\beta}}3 &= \left[{}^{S3'''}T^{S3''}\right] \cdot {}^{S3''}\vec{\dot{\beta}}3 = \begin{bmatrix} \dot{\beta}3\ \mathrm{Sen}(\gamma 3) \\ \dot{\beta}3\ \mathrm{Cos}(\gamma 3) \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{S3'''}\vec{\dot{\gamma}}3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

O vetor velocidade de rotação completo, para o conjunto propulsor, pode ser então obtido através da equação (3.41) que faz uma composição da velocidade de rotação do chassis e das componentes definidas na equação (3.40).

$$
{}^{S3'''}\vec{W}^{(3)} = {}^{S3'''}\vec{\dot{\alpha}}3 + {}^{S3'''}\vec{\dot{\beta}}3 + {}^{S3'''}\vec{\dot{\gamma}}3 + {}^{S3'''}\vec{W}^{(1)} \tag{3.41}
$$

O valor de ${}^{S3'''}\vec{W}^{(1)}$ foi obtido conforme a equação (3.42).

$$ {}^{S3'''}\vec{W}^{(1)} = \left[{}^{S3'''}T^{S1'''} \right] \cdot {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = \left[{}^{S3'''}T^{S3} \right] \cdot {}^{S3}\vec{W}^{(1)} \qquad (3.42) $$

A relação (3.42) é válida, ou seja, ${}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = {}^{S3}\vec{W}^{(1)}$, pois os sistemas **S1'''** e **S3** são paralelos.

A partir das equações (3.38) e (3.41), pode-se então escrever a parcela de energia cinética correspondente ao conjunto propulsor.

$$ T_3 = T_{t3} + T_{r3} \qquad (3.43) $$

onde

$$ T_{t3} = 0.5 \; M3 \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(3)} \right]^t \cdot \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(3)} \right] $$

$$ T_{r3} = 0.5 \left[{}^{S3'''}\vec{W}^{(3)} \right]^t \cdot {}^{S3'''}I^{(3)} \cdot \left[{}^{S3'''}\vec{W}^{(3)} \right] $$

3.2.4 - Parcelas de Energia Cinética do Eixo Dianteiro e do Eixo Traseiro

Devido às suas características próprias de projeto e montagem, associa-se ao eixo dianteiro e traseiro três graus de liberdade para cada um, que são tomados em relação ao centro de gravidade do chassis do caminhão. Os movimentos considerados são uma translação vertical (**z4** ou **z5**) e duas rotações (**α4** e **β4** ou **α5** e **β5**). Observa-se então que os movimentos considerados nos eixos são equivalentes aos da cabine, o que proporciona a obtenção de formulação semelhante para estes três elementos.

Na figura 3.8 pode-se ver um esquema generalizado do posicionamento dos centros de gravidade dos eixos em relação ao centro de gravidade do chassis. Nota-se que os índices **4** e **5** foram substituídos por um único índice, **n**, a fim de não tornar as expressões repetitivas. Nesta figura tem-se também a definição dos referenciais locais **Sn** e **Pn** (equivalentes a **S2** e **P2** respectivamente).

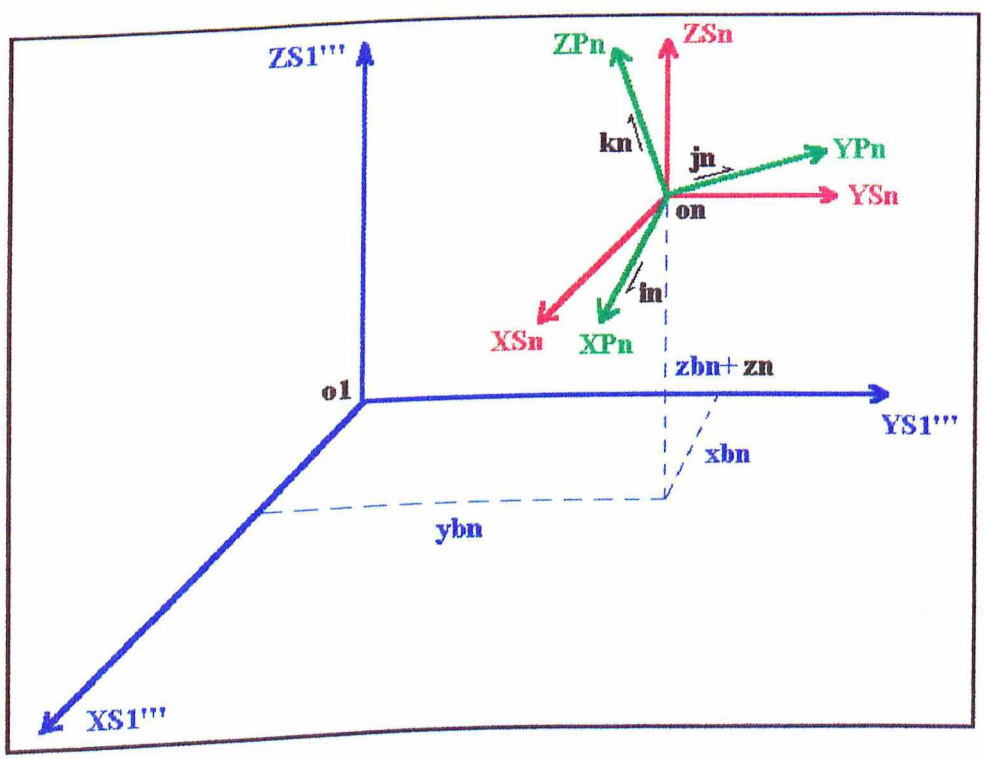

Figura 3.8: Representação generalizada dos referenciais locais colocados no chassis do caminhão e nos eixos dianteiro e traseiro.

Toma-se os vetores unitários $\vec{in}$, $\vec{jn}$ e $\vec{kn}$ ao longo dos eixos coordenados de **Pn** e determina-se as matrizes de transformação que ligam **Pn** a **Sn**. Estes resultados são mostrados nas equações (3.45), (3.46) e (3.47).

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(on)} = \begin{bmatrix} xbn \\ ybn \\ zbn \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ zn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xbn \\ ybn \\ zbn + zn \end{bmatrix} \tag{3.44} $$

$$ {}^{Sn}\vec{in} = \begin{bmatrix} an \\ bn \\ cn \end{bmatrix} \qquad {}^{Pn}\vec{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{Sn}\vec{jn} = \begin{bmatrix} dn \\ en \\ fn \end{bmatrix} \qquad {}^{Pn}\vec{jn} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.45} $$

$$ {}^{Sn}\vec{kn} = \begin{bmatrix} gn \\ hn \\ ln \end{bmatrix} \qquad {}^{Pn}\vec{kn} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{Sn}\vec{u} = \left[{}^{Sn}T^{Pn} \right] . {}^{Pn}\vec{u} \tag{3.46} $$

$$ \left[{}^{Sn}T^{Pn} \right] = \begin{bmatrix} an & dn & gn \\ bn & en & hn \\ cn & fn & ln \end{bmatrix} = cte $$

$$ \left[{}^{Pn}T^{Sn} \right] = \left[{}^{Sn}T^{Pn} \right]^{t} = \begin{bmatrix} an & bn & cn \\ dn & en & fn \\ gn & hn & ln \end{bmatrix} \tag{3.47} $$

Para estabelecer os graus de liberdade de rotação dos eixos, parte-se do sistema de coordenadas **Sn** e chega-se a **Sn'** através de uma rotação αn em torno de **XSn**. Em seguida, o sistema **Sn''** é obtido, girando-se **Sn'** de um ângulo βn em torno de **YSn'**, o que configura uma posição genérica para os eixos dianteiro e traseiro. Os referenciais intermediários **Sn'**, e **Sn''** podem ser vistos na figura 3.9.

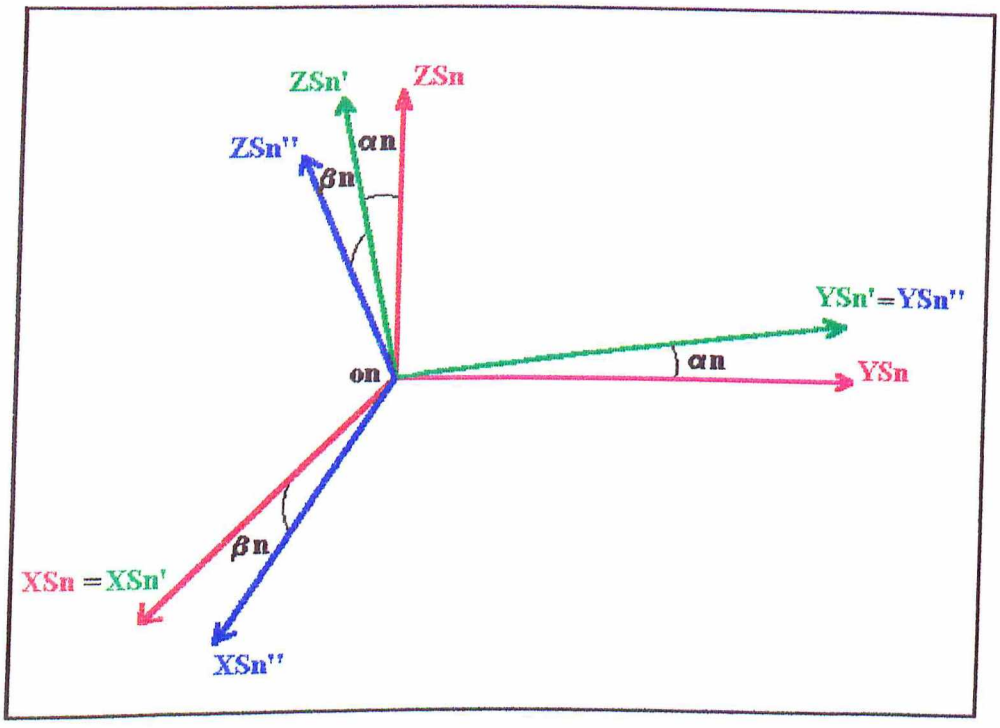

Figura 3.9: Representação generalizada dos referenciais intermediários e graus de liberdade de rotação dos eixos dianteiro e traseiro do caminhão.

As matrizes de transformação que ligam os referenciais intermediários podem ser obtidas, guardando-se para isto a sequência em que foram feitas as rotações. Assim:

$$\left[{}^{Sn}T^{Sn'}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha n) & -\text{Sen}(\alpha n) \\ 0 & \text{Sen}(\alpha n) & \text{Cos}(\alpha n) \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{Sn'}T^{Sn}\right] = \left[{}^{Sn}T^{Sn'}\right]^{t}$$

$$\left[{}^{Sn'}T^{Sn''}\right] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta n) & 0 & \text{Sen}(\beta n) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\beta n) & 0 & \text{Cos}(\beta n) \end{bmatrix} \qquad (3.48)$$

$$\left[{}^{Sn''}T^{Sn'}\right] = \left[{}^{Sn'}T^{Sn''}\right]^{t}$$

$$\left[{}^{Sn''}T^{Sn}\right] = \left[{}^{Sn''}T^{Sn'}\right] \cdot \left[{}^{Sn'}T^{Sn}\right]$$

$$\left[{}^{Sn}T^{Sn''}\right] = \left[{}^{Sn''}T^{Sn}\right]^{t}$$

O tensor de inércia de cada eixo pode ser definido no referencial **Pn''** correspondente e depois transformado para **Sn''** segundo as equações (3.49) e (3.50).

$$ {}^{Pn''}I^{(n)} = \begin{bmatrix} Inx & 0 & 0 \\ 0 & Iny & 0 \\ 0 & 0 & Inz \end{bmatrix} \tag{3.49} $$

$$ {}^{Sn''}I^{(n)} = \left[{}^{Sn''}T^{Pn''} \right] . {}^{Pn''}I^{(n)} . \left[{}^{Pn''}T^{Sn''} \right] \tag{3.50} $$

A velocidade de translação do centro de massa de cada eixo pode ser calculada a partir da composição das velocidades do chassis com o vetor velocidade local de translação. Nas equações (3.51) e (3.52), são definidos os vetores velocidade associados aos graus de liberdade e é feita a composição.

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(on \rightarrow o1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}n \end{bmatrix} \tag{3.51} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(n)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(1)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(on)} + {}^{S1'''}\vec{V}^{(on \rightarrow o1)} \tag{3.52} $$

As componentes de velocidade de rotação $\vec{\alpha}n$ e $\vec{\beta}n$ são escolhidas de maneira favorável nos referenciais intermediários, conforme indicam as equações (3.53).

$$ {}^{Sn}\vec{\alpha}n = {}^{Sn'}\vec{\alpha}n = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{Sn'}\vec{\beta}n = {}^{Sn''}\vec{\beta}n = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.53} $$

Fazendo agora a composição referente às velocidades de rotação dos eixos, obtém-se as equações (3.54) e (3.55). Observa-se aqui, que todas as componentes de velocidade são transformadas para o referencial genérico correspondente **Sn''**.

$$ {}^{Sn''}\vec{\dot{\alpha}}n = \left[{}^{Sn''}T^{Sn'} \right] \cdot {}^{Sn'}\vec{\dot{\alpha}}n = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}n\ Cos(\beta n) \\ 0 \\ \dot{\alpha}n\ Sen(\beta n) \end{bmatrix} $$

$$ {}^{Sn''}\vec{\dot{\beta}}n = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}n \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.54) $$

$$ {}^{Sn''}\vec{W}^{(n)} = {}^{Sn''}\vec{\dot{\alpha}}n + {}^{Sn''}\vec{\dot{\beta}}n + {}^{Sn''}\vec{W}^{(1)} \qquad (5.55) $$

sendo

$$ {}^{Sn''}\vec{W}^{(1)} = \left[{}^{Sn''}T^{S1'''} \right] \cdot {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = \left[{}^{Sn''}T^{Sn} \right] \cdot {}^{Sn}\vec{W}^{(1)} \qquad (3.56) $$

Isto porque os sistemas **S1'''** e **Sn** são paralelos e, portanto, o vetor velocidade terá as mesmas componentes quando escrito em qualquer um destes referenciais.

Com base nas expressões (3.52) e (3.55), pode-se escrever as parcelas de energia cinética referentes aos eixos dianteiro e traseiro, já fazendo a substituição do índice geral, **n**, pelos correspondentes **4** e **5**.

$$ T_4 = T_{t4} + T_{r4} \qquad (3.57) $$

onde

$$ T_{t4} = 0.5\ M4 \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(4)} \right]^t \cdot \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(4)} \right] $$

$$ T_{r4} = 0.5 \left[{}^{S4''}\vec{W}^{(4)} \right]^t \cdot {}^{S4''}I^{(4)} \cdot \left[{}^{S4''}\vec{W}^{(4)} \right] $$

$$ T_5 = T_{t5} + T_{r5} \qquad (3.58) $$

sendo

$$ T_{t5} = 0.5\ M5 \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(5)} \right]^t \cdot \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(5)} \right] $$

$$ T_{r5} = 0.5 \left[{}^{S5''}\vec{W}^{(5)} \right]^t \cdot {}^{S5''}I^{(5)} \cdot \left[{}^{S5''}\vec{W}^{(5)} \right] $$

3.2.5 - Parcela de Energia Cinética da Quinta Roda

A quinta roda é um elemento que, se olhado isoladamente, possui características de inércia muito pequena em relação aos demais componentes do veículo. Isto seria um convite a se fazer uma simplificação na modelagem, de forma a acrescentar a sua massa à do chassis do caminhão ou à da carreta. Porém, isto não é feito, pois a quinta roda é o elemento responsável pela ligação da carreta ao caminhão. A sua consideração como componente do sistema se justifica pela facilidade de definição dos movimentos que ela possui em relação ao chassis e aqueles que a carreta possui em relação a ela. Devido às características deste acoplamento, seria bastante difícil modelar os graus de liberdade da carreta, considerando-a colocada diretamente sobre o chassis do caminhão.

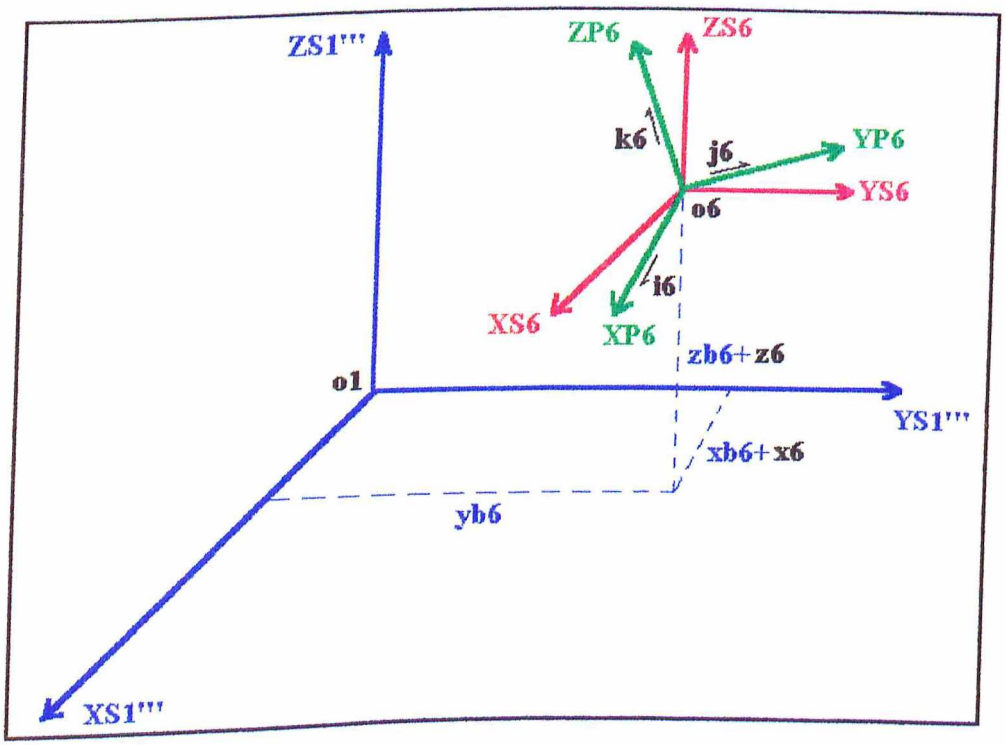

Figura 3.10: Referenciais locais posicionados no chassis do caminhão e no centro de gravidade da quinta roda.

Os movimentos considerados para a quinta roda são duas translações (**x6** e **z6**) e duas rotações (α**6** e β**6**). Esta escolha visa bem representar a articulação real,

pensando na implementação da carreta nos próximos modelos desenvolvidos. A translação **x6** tem aspecto fundamental na dinâmica longitudinal do veículo, visto que, nesta direção, os movimentos são pouco amortecidos e causam desconforto acentuado ao motorista.

Na figura 3.10, pode-se ver os referenciais locais posicionados nos centros de gravidade do chassis do caminhão e da quinta roda.

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o6)} = \begin{bmatrix} xb6 \\ yb6 \\ zb6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x6 \\ 0 \\ z6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xb6 + x6 \\ yb6 \\ zb6 + z6 \end{bmatrix} \tag{3.59} $$

Nesta figura, define-se os sistemas de eixos cartesianos locais **S6** e **P6**, onde são estabelecidos os vetores unitários $\vec{i}6$, $\vec{j}6$ e $\vec{k}6$. As matrizes de transformação que ligam estes referenciais são dadas pelas equações (3.62).

$$ {}^{S6}\vec{i}6 = \begin{bmatrix} a6 \\ b6 \\ c6 \end{bmatrix} \qquad {}^{P6}\vec{i}6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S6}\vec{j}6 = \begin{bmatrix} d6 \\ e6 \\ f6 \end{bmatrix} \qquad {}^{P6}\vec{j}6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.60} $$

$$ {}^{S6}\vec{k}6 = \begin{bmatrix} g6 \\ h6 \\ l6 \end{bmatrix} \qquad {}^{P6}\vec{k}6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S6}\vec{u} = \left[{}^{S6}T^{P6} \right] \cdot {}^{P6}\vec{u} \tag{3.61} $$

$$ \left[{}^{S6}T^{P6} \right] = \begin{bmatrix} a6 & d6 & g6 \\ b6 & e6 & h6 \\ c6 & f6 & l6 \end{bmatrix} = cte $$

$$ \left[{}^{P6}T^{S6} \right] = \left[{}^{S6}T^{P6} \right]^t = \begin{bmatrix} a6 & b6 & c6 \\ d6 & e6 & f6 \\ g6 & h6 & l6 \end{bmatrix} = cte \tag{3.62} $$

Os graus de liberdade de rotação são estabelecidos através de rotações sucessivas. Partindo de **S6**, chega-se a **S6'** por uma rotação **α6** em torno de **XS6**. Em seguida, aplica-se uma rotação **β6** em torno de **YS6'** para obter-se o referencial final genérico **S6''**. Os referenciais intermediários posicionados na quinta roda podem ser vistos na figura 3.11.

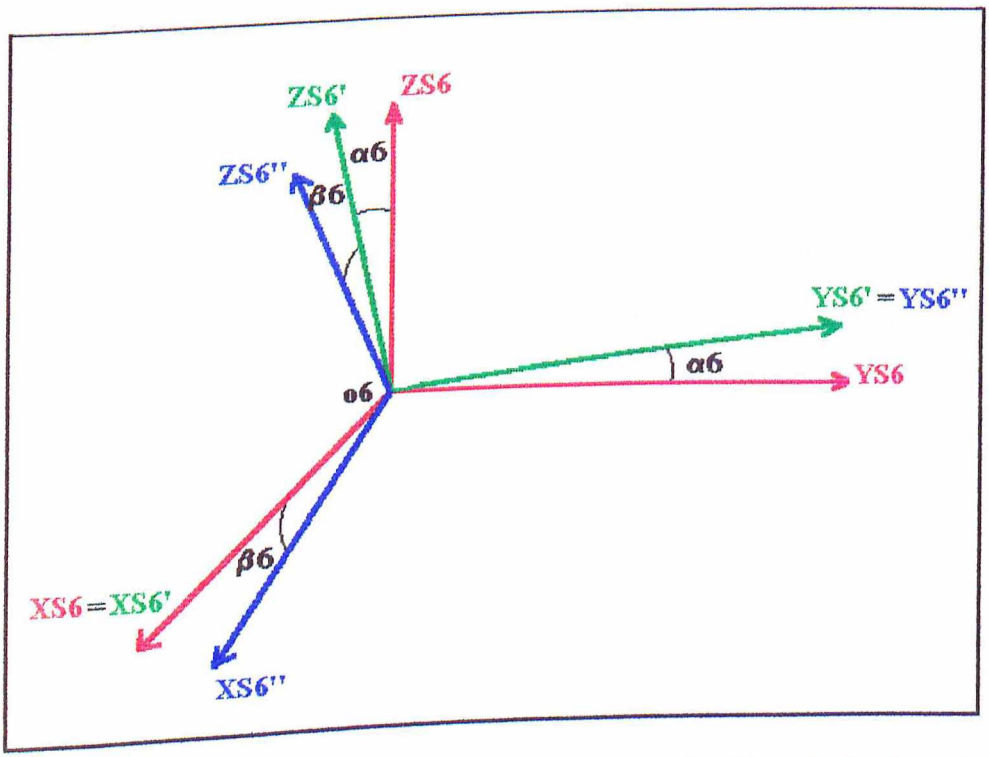

Figura 3.11: Referenciais intermediários e graus de liberdade de rotação da quinta roda.

As matrizes de transformação que ligam estes referenciais intermediários são equivalentes às obtidas para a cabine e para os eixos, sendo assim, elas podem ser representadas pela equações (3.48), onde deve-se substituir o índice geral **n** pelo índice específico **6**.

O tensor principal de inércia da quinta roda é definido no sistema **P6''** e transformado para **S6''** através das matrizes das equações (3.62).

$$ {}^{P6''}I^{(6)} = \begin{bmatrix} I6x & 0 & 0 \\ 0 & I6y & 0 \\ 0 & 0 & I6z \end{bmatrix} \qquad (3.63) $$

$$ {}^{S6''}I^{(6)} = \left[{}^{S6''}T^{P6''} \right] \cdot {}^{P6''}I^{(6)} \cdot \left[{}^{P6''}T^{S6''} \right] \tag{3.64} $$

Fazendo a composição da velocidade de translação da quinta roda a partir das velocidades do chassis e dos seus movimentos relativos de translação, obtém-se:

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(o6 \to o1)} = \begin{bmatrix} \dot{x}6 \\ 0 \\ \dot{z}6 \end{bmatrix} \tag{3.65} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(6)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(1)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(o6)} + {}^{S1'''}\vec{V}^{(o6 \to o1)} \tag{3.66} $$

As componentes da velocidade de rotação da quinta roda ($\dot{\vec{\alpha}}6$ e $\dot{\vec{\beta}}6$) são estabelecidas nos referenciais intermediários, conforme indicam as equações (3.67).

$$ \begin{aligned} {}^{S6}\dot{\vec{\alpha}}6 &= {}^{S6'}\dot{\vec{\alpha}}6 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^{S6'}\dot{\vec{\beta}}6 &= {}^{S6''}\dot{\vec{\beta}}6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.67} $$

Faz-se agora a transformação das componentes de velocidade da equação (3.67) para o referencial genérico final **S6''** e a sua composição com a velocidade de rotação do chassis escrita neste mesmo referencial.

$$ \begin{aligned} {}^{S6''}\dot{\vec{\alpha}}6 &= \left[{}^{S6''}T^{S6'} \right] \cdot {}^{S6'}\dot{\vec{\alpha}}6 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}6\ \mathrm{Cos}(\beta 6) \\ 0 \\ \dot{\alpha}6\ \mathrm{Sen}(\beta 6) \end{bmatrix} \\ {}^{S6''}\dot{\vec{\beta}}6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.68} $$

$$ {}^{S6''}\vec{W}^{(6)} = {}^{S6''}\dot{\vec{\alpha}}6 + {}^{S6''}\dot{\vec{\beta}}6 + {}^{S6''}\vec{W}^{(1)} \tag{3.69} $$

sendo que

$$^{S6''}\vec{W}^{(1)} = \left[^{S6''}T^{S1'''} \right] . \ ^{S1'''}\vec{W}^{(1)} = \left[^{S6''}T^{S6} \right] . \ ^{S6}\vec{W}^{(1)} \qquad (3.70)$$

pois os sistemas **S1'''** e **S6** são paralelos.

Finalmente, pode-se escrever a expressão da parcela de energia cinética referente à quinta roda a partir das equações (3.66) e (3.69).

$$T_6 = T_{t6} + T_{r6} \qquad (3.71)$$

sendo

$$T_{t6} = 0.5 \ M6 \left[^{S1'''}\vec{V}^{(6)} \right]^t . \left[^{S1'''}\vec{V}^{(6)} \right]$$

$$T_{r6} = 0.5 \left[^{S6''}\vec{W}^{(6)} \right]^t . \ ^{S6''}\vec{I}^{(6)} . \left[^{S6''}\vec{W}^{(6)} \right]$$

3.2.6 - Cálculo da Energia Potencial Elástica Armazenada no Veículo

A energia potencial elástica é armazenada em vários órgãos deformáveis que fazem a ligação física entre os componentes do veículo. Neste modelo são considerados como elementos armazenadores de energia potencial elástica os que se seguem:

- 2 molas dianteiras;
- 2 molas traseiras;
- 2 pneus dianteiros;
- 4 pneus traseiros;
- 1 estabilizador dianteiro;
- 1 estabilizador traseiro;
- 2 coxins de cabine;
- 1 mola de cabine;
- 4 coxins de motor;
- 2 coxins de quinta roda.

O equacionamento da energia potencial elástica associada a cada um destes elementos é mostrado a seguir, sendo indicados no texto os procedimentos comuns, particularidades e considerações feitas para cada caso.

3.2.6.1 - Energia Potencial Elástica Associada às Molas dos Eixos

A princípio, todas as molas presentes no veículo são de lâmina. Este tipo de mola pode ser modelado por uma barra rígida que possui duas molas rotuladas nas suas extremidades, conforme figura 3.12. Neste caso, cada mola ligada à extremidade da barra possui rigidez igual à metade da rigidez da mola de lâmina original.

Para equacionar a energia potencial armazenada neste dispositivo, tomemos

como base a mola dianteira esquerda do caminhão, representada esquematicamente na figura 3.13. Nesta figura vê-se que a energia da mola pode ser dividida em duas quantidades, **q1** e **q2**, que são determinadas separadamente.

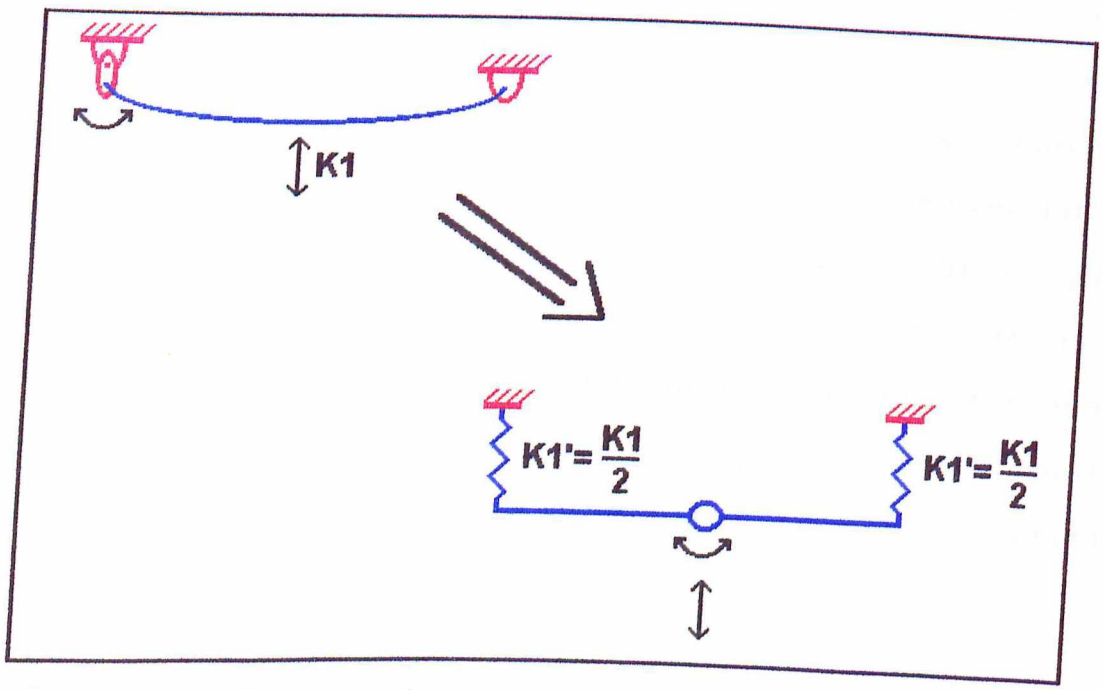

Figura 3.12: Esquema da modelagem de uma mola de lâmina.

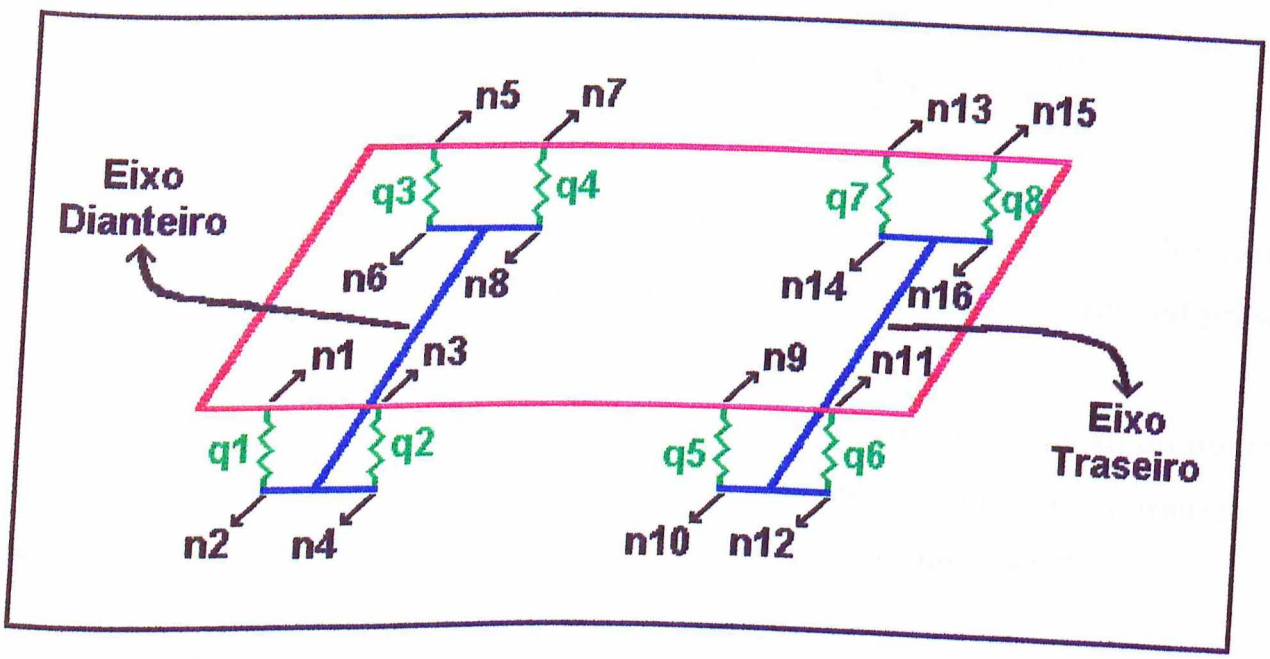

Figura 3.13: Representação esquemática das molas da suspensão do caminhão.

A energia potencial elástica armazenada em **q1** depende da variação da dis-

tância entre os pontos **n1** e **n2**, que representam as ancoragens de uma das extremidades da mola no chassis e no eixo dianteiro, respectivamente. Para a determinação desta variação de distância, deve-se equacionar a posição destes pontos no espaço, expressas num mesmo referencial, e retirar deste valor a sua posição inicial.

Na determinação da posição de **n1**, deve-se levar em conta os movimentos flexíveis do chassis, uma vez que o ponto se encontra fixo neste elemento.

Se o chassis fosse completamente rígido, o ponto **n1** teria três coordenadas constantes quando sua posição fosse escrita através de qualquer referencial preso ao chassis. A torção pode ser associada a uma rotação em torno de **x**, com magnitude variável para cada seção isoladamente. Esta rotação é dada por uma matriz de transformação da posição rotacionada (torcida) para a posição rígida conforme mostra a equação (3.72).

$$\left[{}^{\text{Rigido}}\,T^{\text{Torcido}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\ s_i(t)\right) & -\text{Sen}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\ s_i(t)\right) \\ 0 & \text{Sen}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\ s_i(t)\right) & \text{Cos}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\ s_i(t)\right) \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

A flexão do chassis pode ser representada pelo acréscimo de um valor variável à coordenada **z** da posição de **n1**, quando esta é escrita num referencial preso ao chassis.

Com base no que foi dito acima pode-se então escrever a posição do ponto **n1** em relação ao referencial genérico $\mathbf{S1'''^{torcido}}$ e, utilizando a matriz de transformação da equação (3.72), fazer sua transferência para o sistema **S1'''**.

$${}^{S1'''\ \text{torcido}}\bar{r}^{(n1)} = \begin{bmatrix} xbn1 \\ ybn1 \\ zbn1 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n1)} = \left[{}^{Rígido}\, T^{Torcido} \right] {}^{S1'''torcido}\vec{r}^{(n1)} \tag{3.74} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n1)} = \begin{bmatrix} xbn1 \\ \cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\, s_i(t) \right) ybn1 - \operatorname{Sen}\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\, s_i(t) \right) \left[zbn1 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\, \phi_i(x) \right] \\ \operatorname{Sen}\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\, s_i(t) \right) ybn1 + \cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\, s_i(t) \right) \left[zbn1 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\, \phi_i(x) \right] \end{bmatrix} \tag{3.75} $$

O ponto **n2** encontra-se no eixo dianteiro, que é considerado rígido, e portanto possui coordenadas constantes quando tem sua posição descrita por qualquer referencial fixo a este componente. Escrevendo a posição de **n2** em relação ao referencial genérico final do eixo dianteiro **S4''** obtém-se a equação (3.76).

$$ {}^{S4''}\vec{r}^{(n2)} = \begin{bmatrix} xbn2 \\ ybn2 \\ zbn2 \end{bmatrix} \tag{3.76} $$

Para expressar a distância entre **n1** e **n2**, deve-se transferir estes vetores posição para um mesmo referencial e subtrair suas coordenadas. Para transferir o vetor posição de **n2** do referencial **S4''** para **S1'''** utiliza-se a transformação mostrada na equação (3.77).

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n2)} = \left[{}^{S1'''}Tt^{S4} \right] + \left[{}^{S4}T^{S4''} \right] {}^{S4''}\vec{r}^{(n2)} \tag{3.77} $$

onde a transformação $[{}^{S1'''}\mathbf{Tt}^{S4}]$ representa uma translação, uma vez que os sistemas **S4** e **S1'''** são sistemas de eixos coordenados paralelos.

Desenvolvendo a equação (3.77), tem-se:

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n2)} = \begin{bmatrix} xb4 \\ yb4 \\ zb4 + z4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\beta 4) & 0 & \operatorname{Sen}(\beta 4) \\ \operatorname{Sen}(\alpha 4)\operatorname{Sen}(\beta 4) & \cos(\alpha 4) & -\operatorname{Sen}(\alpha 4)\cos(\beta 4) \\ -\operatorname{Sen}(\beta 4)\cos(\alpha 4) & \operatorname{Sen}(\alpha 4) & \cos(\alpha 4)\cos(\beta 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xbn2 \\ ybn2 \\ zbn2 \end{bmatrix} \tag{3.78} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n2)} = \begin{bmatrix} xb4 + xbn2\cos(\beta 4) + zbn2\operatorname{Sen}(\beta 4) \\ yb4 + xbn2\operatorname{Sen}(\alpha 4)\operatorname{Sen}(\beta 4) + ybn2\cos(\alpha 4) - zbn2\operatorname{Sen}(\alpha 4)\cos(\beta 4) \\ zb4 + z4 - xbn2\operatorname{Sen}(\beta 4)\cos(\alpha 4) + ybn2\operatorname{Sen}(\alpha 4) + zbn2\cos(\alpha 4)\cos(\beta 4) \end{bmatrix} \tag{3.79} $$

O vetor que liga **n1** a **n2** é dado por

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n2)\to(n1)} = {}^{S1'''}\vec{r}^{(n1)} - {}^{S1'''}\vec{r}^{(n2)} \tag{3.80}$$

que quando desenvolvido fornece

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n2)\to(n1)} = \begin{bmatrix} xbn1 - Cos(\beta 4)\ xbn2 - Sen(\beta 4)\ zbn2 - xb4 \\ Cos(tor)\ ybn1 - Sen(tor)\ [zbn1 + flex] - Sen(\alpha 4)\ Sen(\beta 4)\ xbn2 - \\ Cos(\alpha 4)\ ybn2 + Sen(\alpha 4)\ Cos(\beta 4)\ zbn2 - yb4 \\ Sen(tor)\ ybn1 + Cos(tor)\ [zbn1 + flex] + Sen(\beta 4)\ Cos(\alpha 4)\ xbn2 - \\ Sen(\alpha 4)\ ybn2 - Cos(\alpha 4)\ Cos(\beta 4)\ zbn2 - zb4 - z4 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

sendo

$$tor = \varphi(x,t) = \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \qquad e \qquad flex = y(x,t) = \sum_{i=1}^{p} q_i(x)\ \phi_i(t)$$

Tomando a equação (3.81) para o tempo igual a zero e condições iniciais nulas, obtém-se a distância inicial entre os pontos **n1** e **n2**.

$$^{S1'''}\vec{ro}^{(n2)\to(n1)} = \begin{bmatrix} xbn1 - xbn2 - xb4 \\ ybn1 - ybn2 - yb4 \\ zbn1 - zbn2 - zb4 \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

Com base nas equações (3.81) e (3.82) pode-se finalmente obter uma expressão para a variação da distância entre os pontos **n1** e **n2**, conforme é mostrado a seguir.

$$^{S1'''}\delta\,\vec{r}^{(n2)\to(n1)} = {}^{S1'''}\vec{r}^{(n2)\to(n1)} - {}^{S1'''}\vec{ro}^{(n2)\to(n1)} \tag{3.83}$$

$$^{S1'''}\delta\,\vec{r}^{(n2)\to(n1)} = \begin{bmatrix} [1 - Cos(\beta 4)]\ xbn2 - Sen(\beta 4)\ zbn2 \\ [Cos(tor) - 1]\ ybn1 - Sen(tor)\ [zbn1 + flex] - Sen(\alpha 4)\ Sen(\beta 4)\ xbn2 + \\ [1 - Cos(\alpha 4)]\ ybn2 + Sen(\alpha 4)\ Cos(\beta 4)\ zbn2 \\ Sen(tor)\ ybn1 + [Cos(tor) - 1]\ zbn1 + Cos(tor)\ flex + \\ Sen(\beta 4)\ Cos(\alpha 4)\ xbn2 - Sen(\alpha 4)\ ybn2 + [1 - Cos(\alpha 4)\ Cos(\beta 4)]\ zbn2 - z4 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

A parcela de energia potencial elástica **q1**, armazenada na extremidade anterior da mola dianteira esquerda do caminhão, pode então ser expressa conforme a equação (3.85).

$$U^{(q1)} = 0.5 \; K1' \left[{}^{S1'''}\delta \, \vec{r}^{(n2)\to(n1)} \right]^t \left[{}^{S1'''}\delta \, \vec{r}^{(n2)\to(n1)} \right] \qquad (3.85)$$

As demais parcelas de energia potencial elástica associadas às molas dos eixos (**q2**, **q3**, **q4**, **q5**, **q6**, **q7** e **q8**) são determinadas de maneira idêntica à parcela **q1**.

As constantes de elasticidade são tomadas como iguais para molas de um mesmo eixo, ou seja:

- No eixo dianteiro: **K=K1=2 K1'** ==>> Aplicado a **q1**, **q2**, **q3** e **q4**;
- No eixo traseiro: **K=K2=2 K2'** ==>> Aplicado a **q5**, **q6**, **q7** e **q8**.

Estas constantes de elasticidade apresentam características não lineares, tratadas detalhadamente no capítulo 6.

3.2.6.2 - Energia Potencial Elástica Associada à Cabine

A energia potencial elástica armazenada na cabine está associada aos dois coxins laterais e à mola traseira, que são responsáveis pela sua sustentação sobre o chassis. Cada um destes elementos contribui com uma parcela de energia que pode ser equacionada de maneira semelhante ao caso das molas dos eixos, bastando para sua determinação que se utilize os vetores posição e matrizes de transformação correspondentes ao caso. Na figura 3.14 pode-se ver um desenho esquemático da cabine com seus elementos de sustentação.

Os coxins de sustentação da cabine funcionam como se fossem molas, podendo-se associar a eles uma constante de elasticidade que, assim como as molas dos eixos, possui caráter não linear. Apesar dos coxins apresentarem características próprias de amortecimento, estas são desconsideradas uma vez que seus parâ-

metros são desconhecidos. Mais uma vez, optou-se por não utilizar parâmetros estimados onde o erro poderia levar a um resultado pior que aquele obtido através da sua desconsideração.

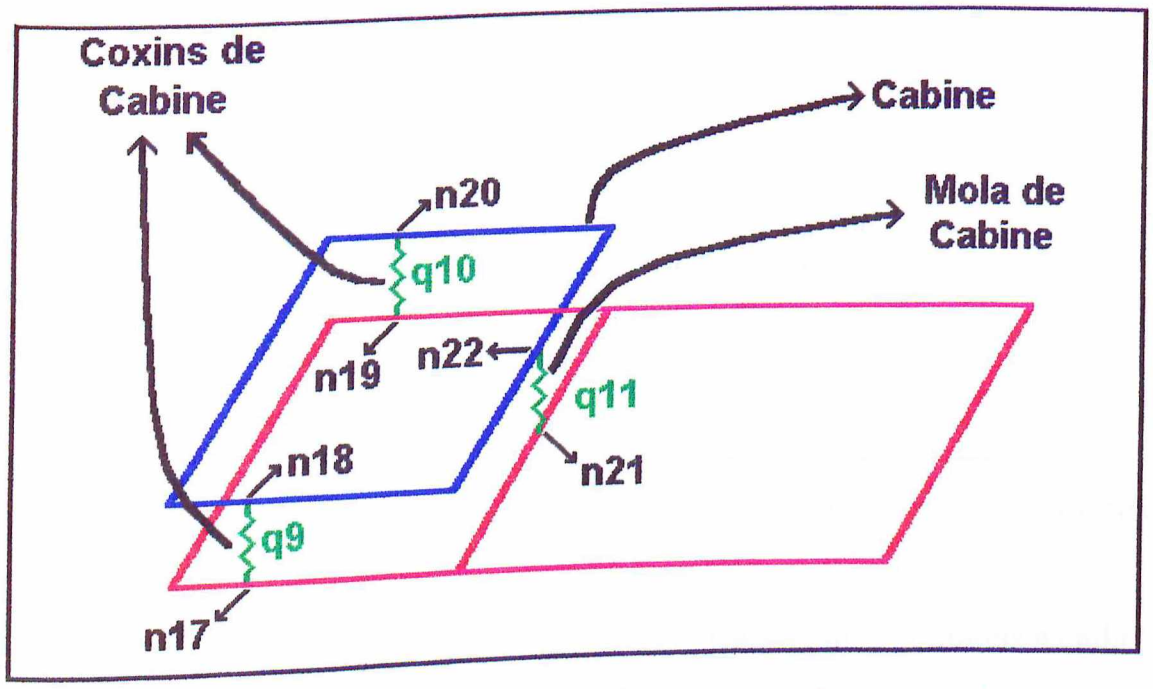

Figura 3.14: Desenho esquemático da cabine e seus elementos de sustentação.

As constantes de elasticidade são também consideradas iguais para os dois coxins, conforme é mostrado a seguir.

- Coxins de cabine: **K=K3** ==>> Aplicado em **q9** e **q10**;
- Mola de cabine: **K=K4** ==>> Aplicado em **q11**.

3.2.6.3 - Energia Potencial Elástica Associada ao Conjunto Propulsor

O conjunto propulsor é preso ao chassis por meio de quatro coxins elásticos que são responsáveis pelo armazenamento de energia potencial. Estes coxins comportam-se de maneira semelhante aos da cabine, sendo também considerados como uma rigidez não linear. Na figura 3.15 pode-se ver a representação esquemática da fixação elástica do conjunto propulsor.

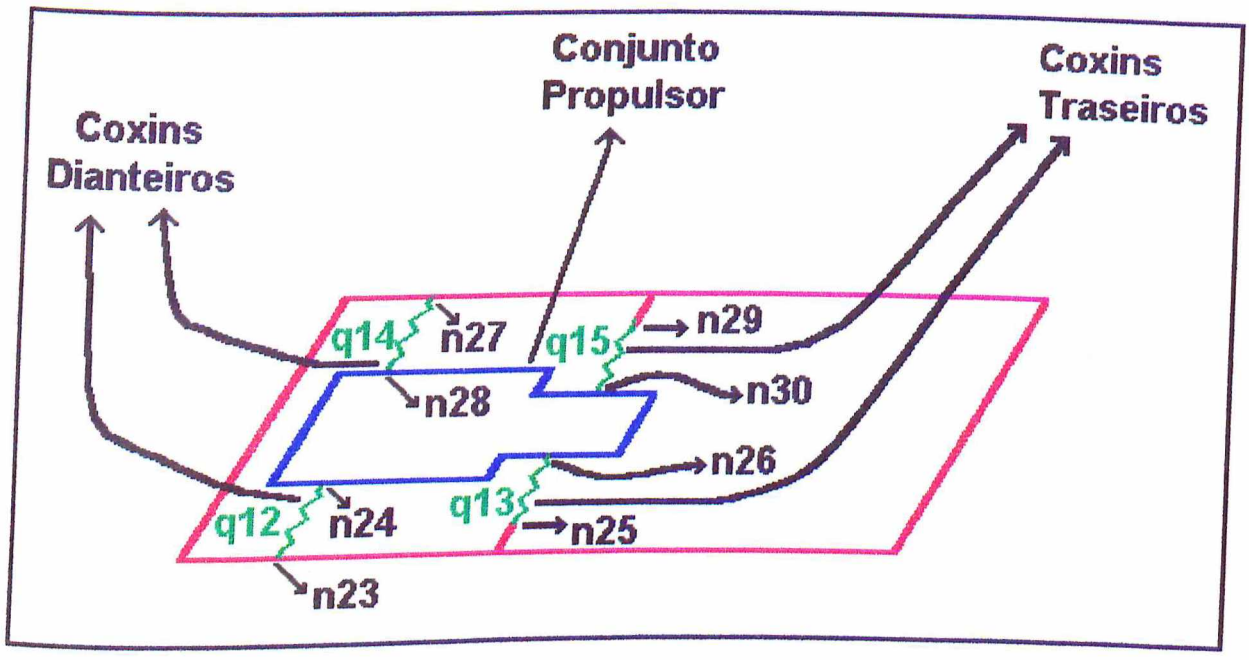

Figura 3.15: Representação esquemática da fixação do conjunto propulsor.

O equacionamento das parcelas de energia potencial associadas a cada coxim é feito da mesma maneira descrita anteriormente, sendo considerada rigidez igual para coxins semelhantes (dianteiros e traseiros).

- Coxins dianteiros: **K=K5** ==>> Aplicado em **q12** e **q14**;
- Coxins Traseiros: **K=K6** ==>> Aplicado em **q13** e **q15**.

3.2.6.4 - Energia Potencial Elástica Associada à Quinta Roda

A quinta roda é o elemento responsável pela ligação entre o caminhão e a carreta. Ela é fixada ao chassis do caminhão por meio de dois mancais coxinizados (ou não) que trabalham radialmente sobre movimentos contidos no plano vertical longitudinal ao veículo (plano **xz**).

Na figura 3.16 é mostrado um esquema da fixação da quinta roda por meio de seus coxins, onde pode-se ver os mesmos deslocados de sua posição inicial.

Apesar do equacionamento das parcelas de energia potencial elástica ser idêntico aos casos apresentados até agora deve-se ter em mente que, devido à ação radial dos coxins, a energia armazenada depende de uma distância dada pela falta de co-axialidade entre os pares de pontos **n31-n32** e **n33-n34**.

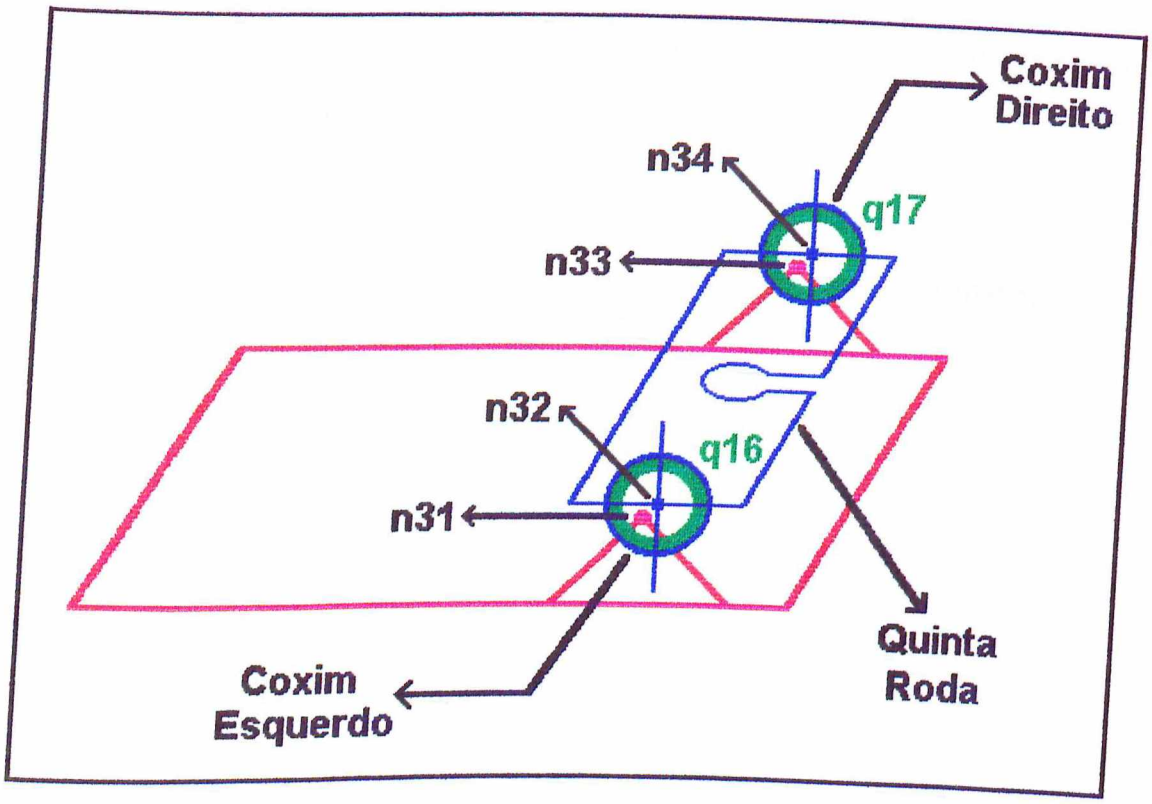

Figura 3.16: Esquema da fixação coxinizada da quinta roda ao chassis do caminhão.

A rigidez radial (não linear) dos coxins é considerada igual em ambas as parcelas de energia (**q16** e **q17**).

- Coxim direito e esquerdo **K=K7** ==>> Aplicado em **q16** e **q17**.

3.2.6.5 - Energia Potencial Elástica Associada aos Pneus

O cálculo das parcelas de energia potencial elástica associadas aos pneus requer um estudo geométrico e algumas considerações que diferem dos cálculos

executados nos itens anteriores.

Considere-se a figura 3.17 como sendo a representação de um pneu esquerdo do veículo em contato com o solo. Com o pneu não deformado, ou seja, na sua posição de equilíbrio estático, o contato pneu - solo se dá pela superfície que contém os pontos **C** e **E**. Ao passar por qualquer obstáculo ou irregularidade da pista, o pneu se deforma e o contato passa a ocorrer numa superfície genérica representada pela linha tracejada que contém os pontos **B** e **D**.

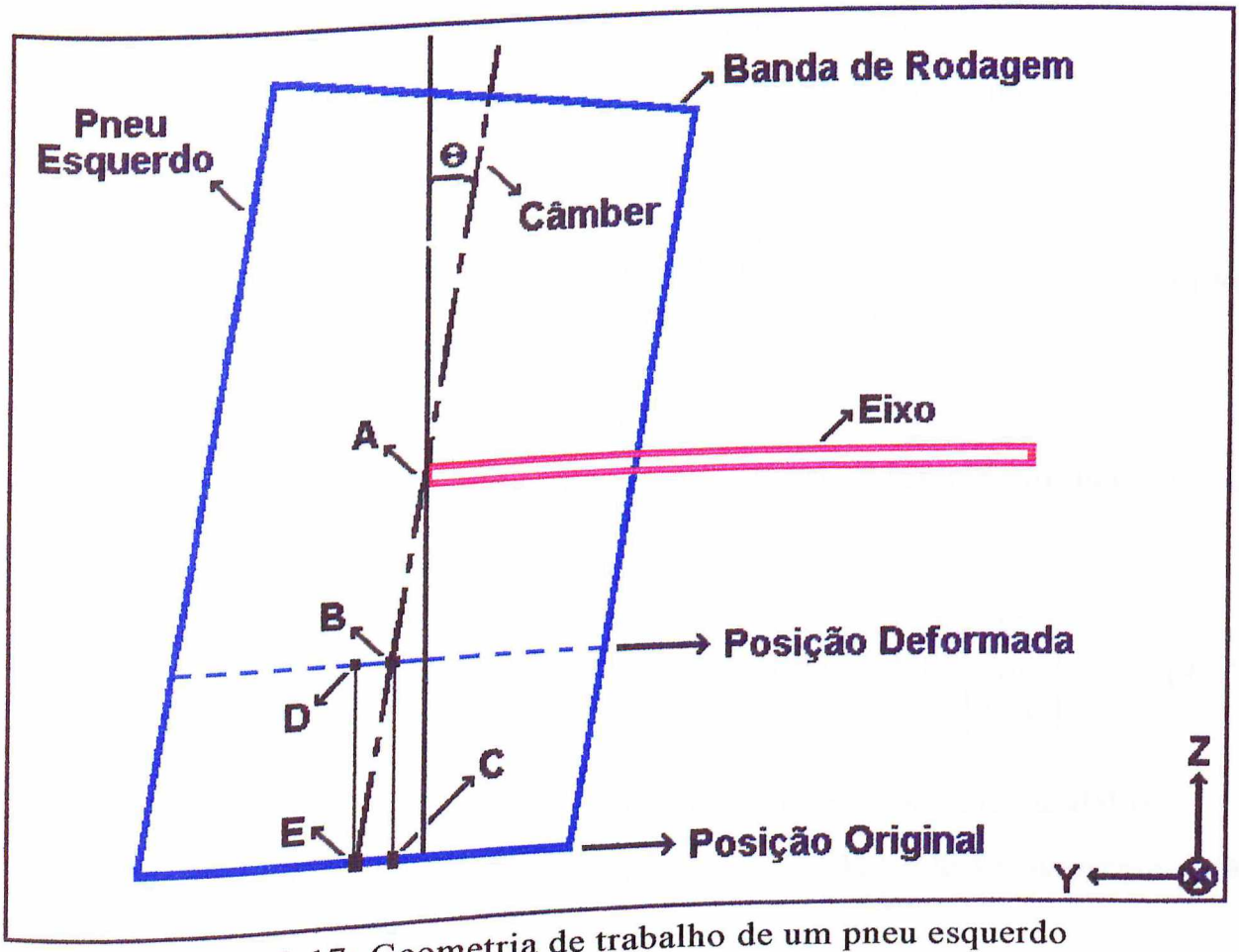

Figura 3.17: Geometria de trabalho de um pneu esquerdo

A energia potencial elástica armazenada no pneu depende da variação de posição da superfície de contato com o solo que vai da posição original à posição genérica deformada. A fim de não tornar esta determinação excessivamente complexa, envolvendo uma superfície de contato variável, optou-se por trabalhar com a variação de posição do ponto central da banda de rodagem, representado na figu-

ra por **B** e **E**.

O ponto **E** encontra-se no pneu, numa posição bem definida pelo raio dinâmico e pelo ângulo de câmber da roda. Já o ponto **B**, representa a posição deformada equivalente, porém localizado na pista. A coordenada **Z** deste ponto depende das irregularidades e obstáculos do pavimento e pode ser localizada como função da posição **X-Y** do veículo e mais especificamente da roda em questão.

Com base nisto, pode-se determinar a expressão da energia potencial armazenada no pneu escrevendo o vetor posição de **E** e **B** nos seus referenciais genéricos e fazendo a sua transferência para um único referencial.

O ponto **E** pode ser localizado a partir de **A** pela relação mostrada na equação (3.86).

$$ {}^{S4'}\vec{r}^{(E)} = \begin{bmatrix} xbA \\ ybA + Rrp\ Sen(\Theta) \\ zbA - Rrp\ Cos(\Theta) \end{bmatrix} = cte = \begin{bmatrix} xbE \\ ybE \\ zbE \end{bmatrix} \qquad (3.86) $$

onde

Rrp = Raio dinâmico do pneu na pressão de uso.

A transferência do vetor posição do ponto **E** para o referencial inercial se dá através das operações mostradas na equação (3.87).

$$ {}^{I}\vec{r}^{(E)} = \left[{}^{I}Tt^{S1}\right] + \left[{}^{S1}T^{S1'''}\right]\left(\left[{}^{S1'''}Tt^{S4}\right] + \left[{}^{S4}T^{S4'}\right]{}^{S4'}\vec{r}^{(E)}\right) = \begin{bmatrix} {}^{I}xbE \\ {}^{I}ybE \\ {}^{I}zbE \end{bmatrix} \qquad (3.87) $$

onde $[{}^{I}Tt^{S1}]$ e $[{}^{S1'''}Tt^{S4}]$ representam translações entre referenciais paralelos.

A variação da posição original para a deformada pode ser expressa então pela equação (3.88).

$$ {}^{I}\delta\,\vec{r}^{(E)\to(B)} = {}^{I}\vec{r}^{(B)} - {}^{I}\vec{r}^{(E)} \qquad (3.88) $$

Uma vez que a cambagem e a deformação dos pneus de um caminhão assumem valores numéricos pequenos, pode-se substituir o vetor posição do ponto **B** pelo do ponto **D**. Esta substituição diminui a complexidade do cálculo, pois as coordenadas **x** e **y** de **D** e **E** são coincidentes. Fazendo esta substituição tem-se

$$ {}^{I}\vec{r}^{(B)} \cong {}^{I}\vec{r}^{(D)} = \begin{bmatrix} {}^{I}xbD \\ {}^{I}ybD \\ zD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{I}xbE \\ {}^{I}ybE \\ zD \end{bmatrix} \qquad (3.89) $$

sendo **zD** = f (^{I}xbE , ^{I}ybE)

No caso dos pneus, não há a necessidade de se calcular uma distância inicial entre os pontos D e E pois na posição original não deformada, estes pontos são coincidentes e levam a uma distância nula.

Finalmente, a energia potencial elástica armazenada num pneu pode ser expressa conforme mostra a equação (3.90).

$$ U^{(pn)} = 0.5 \; Kn \left[{}^{I}\delta \, \vec{r}^{(E)\to(D)} \right]^{t} \left[{}^{I}\delta \, \vec{r}^{(E)\to(D)} \right] \qquad \text{com n} = 18.....23 \qquad (3.90) $$

Para aplicar a equação (3.90) , vale-se da figura (3.18) que mostra um desenho esquemático do veículo e os pontos associados à energia potencial elástica armazenada nos pneus.

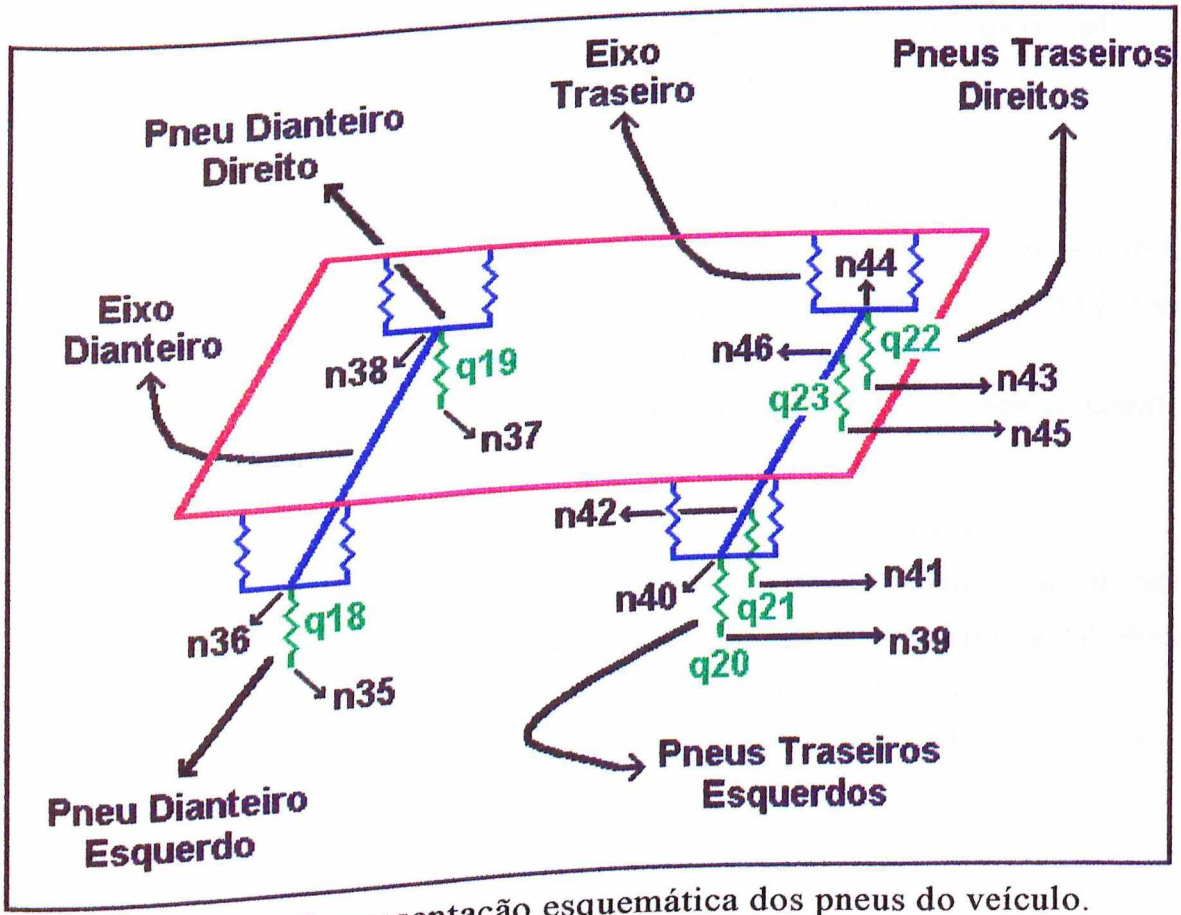

Figura 3.18: Representação esquemática dos pneus do veículo.

Para determinar a energia associada ao pneu dianteiro esquerdo, faz-se

$$\mathbf{D = n35} \quad \text{e} \quad \mathbf{E = n36}$$

Desenvolvendo a equação (3.87) para o ponto **n36**, tem-se

$$
{}^{I}\vec{r}^{(n36)} = \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\beta 1)\cos(\gamma 1) & -\cos(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) & \operatorname{Sen}(\beta 1) \\ \operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\cos(\gamma 1) + \cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) & -\operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) + \cos(\alpha 1)\cos(\gamma 1) & -\operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\beta 1) \\ -\cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\cos(\gamma 1) + \operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) & \cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) + \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\gamma 1) & \cos(\alpha 1)\cos(\beta 1) \end{bmatrix}.
$$

(3.91)

$$
\left(\begin{bmatrix} xb4 \\ yb4 \\ zb4 + z4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha 4) & -\operatorname{Sen}(\alpha 4) \\ 0 & \operatorname{Sen}(\alpha 4) & \cos(\alpha 4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} xbn36 \\ ybn36 \\ ybn36 \end{bmatrix} \right)
$$

$$
{}^{I}\vec{r}^{(n36)} = \begin{bmatrix}
x1 + \cos(\beta 1)\cos(\gamma 1)\, xbn36 + [\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\alpha 4) - \cos(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)\cos(\alpha 4)]\, ybn36 + \\
[\cos(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)\operatorname{Sen}(\alpha 4) + \operatorname{Sen}(\beta 1)\cos(\alpha 4)]\, zbn36 + \cos(\beta 1)\cos(\gamma 1)\, xb4 - \\
\cos(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)\, yb4 + \operatorname{Sen}(\beta 1)\, zb4 + \operatorname{Sen}(\beta 1)\, z4 \\
\\
y1 + [\operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\cos(\gamma 1) + \cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)]\, xbn36 + \\
\{\cos(\alpha 4)\,[\cos(\alpha 1)\cos(\gamma 1) - \operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)] - \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\beta 1)\operatorname{Sen}(\alpha 4)\}\, ybn36 - \\
\{\operatorname{Sen}(\alpha 4)\,[\cos(\alpha 1)\cos(\gamma 1) - \operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)] + \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\beta 1)\cos(\alpha 4)\}\, zbn36 + \\
[\operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\cos(\gamma 1) + \cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)]\, xb4 + \\
[\cos(\alpha 1)\cos(\gamma 1) - \operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1)]\, yb4 - \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\beta 1)\, zb4 - \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\beta 1)\, z4 \\
\\
z1 + [\operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) - \cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\cos(\gamma 1)]\, xbn36 + \\
\{\cos(\alpha 4)\,[\cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) + \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\gamma 1)] + \operatorname{Sen}(\alpha 4)\cos(\alpha 1)\cos(\beta 1)\}\, ybn36 + \\
\{\cos(\alpha 1)\cos(\beta 1)\cos(\alpha 4) - \operatorname{Sen}(\alpha 4)\,[\cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) + \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\gamma 1)]\}\, zbn36 + \\
[\operatorname{Sen}(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) - \cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\cos(\gamma 1)]\, xb4 + \\
[\cos(\alpha 1)\operatorname{Sen}(\beta 1)\operatorname{Sen}(\gamma 1) + \operatorname{Sen}(\alpha 1)\cos(\gamma 1)]\, yb4 + \cos(\alpha 1)\cos(\beta 1)\, zb4 + \cos(\alpha 1)\cos(\beta 1)\, z4
\end{bmatrix}
$$

(3.92)

e a deformação é dada por

$$\delta \vec{r}^{(n36)\to(n35)} = {}^{I}\vec{r}^{(n35)} - {}^{I}\vec{r}^{(n36)} = \begin{bmatrix} {}^{I}xbn36 \\ {}^{I}ybn36 \\ zn35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{I}xbn36 \\ {}^{I}ybn36 \\ {}^{I}zbn36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ zn35 - {}^{I}zbn36 \end{bmatrix} \qquad (3.93)$$

$$ {}^{I}\delta \vec{r}^{(n36)\to(n35)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ zn35 - \{z1 + [Sen(\alpha 1)\ Sen(\gamma 1) - Cos(\alpha 1)\ Sen(\beta 1)\ Cos(\gamma 1)]\ xbn36 + \\ \{Cos(\alpha 4)\ [Cos(\alpha 1)\ Sen(\beta 1)\ Sen(\gamma 1) + Sen(\alpha 1)\ Cos(\gamma 1)] + Sen(\alpha 4)\ Cos(\alpha 1)\ Cos(\beta 1)\}\ ybn36 + \\ \{Cos(\alpha 1)\ Cos(\beta 1)\ Cos(\alpha 4) - Sen(\alpha 4)\ [Cos(\alpha 1)\ Sen(\beta 1)\ Sen(\gamma 1) + Sen(\alpha 1)\ Cos(\gamma 1)]\}\ zbn36 + \\ [Sen(\alpha 1)\ Sen(\gamma 1) - Cos(\alpha 1)\ Sen(\beta 1)\ Cos(\gamma 1)]\ xb4 + \\ [Cos(\alpha 1)\ Sen(\beta 1)\ Sen(\gamma 1) + Sen(\alpha 1)\ Cos(\gamma 1)]\ yb4 + Cos(\alpha 1)\ Cos(\beta 1)\ zb4 + Cos(\alpha 1)\ Cos(\beta 1)\ z4\} \end{bmatrix} \qquad (3.94)$$

Finalmente, a energia potencial elástica armazenada no pneu dianteiro esquerdo pode ser expressa através da equação (3.95)

$$U^{(q18)} = 0.5\ K8 \left[{}^{I}\delta \vec{r}^{(n36)\to(n35)} \right]^{t} \left[{}^{I}\delta \vec{r}^{(n36)\to(n35)} \right] \qquad (3.95)$$

O equacionamento das demais parcelas de energia potencial elástica associadas aos pneus é feito de maneira semelhante, sendo considerado um valor diferente para cada constante de elasticidade. Isto visa fazer com que a modelagem suporte uma pressão diferente para cada pneumático, aumentando a sua generalidade.

- Pneu diant. esquerdo: **K = K8** ==>> Aplicado em **q18**;
- Pneu diant. direito: **K = K9** ==>> Aplicado em **q19**;
- Pneu tras. esq. externo: **K = K10** ==>> Aplicado em **q20**;
- Pneu tras. esq. interno: **K = K11** ==>> Aplicado em **q21**;

- Pneu tras. dir. externo: **K = K12** ==>> Aplicado em **q22**;

- Pneu tras. dir. interno: **K = K13** ==>> Aplicado em **q23**.

No caso dos pneus direitos, deve-se levar em conta que existe uma pequena diferença quanto à determinação do vetor posição do ponto **E**. Esta diferença é devida ao ângulo de câmber da roda e pode ser vista nas equações (3.96) e na figura 3.19.

$$
{}^{S4'}\vec{r}^{(E)} = \begin{bmatrix} xbA \\ ybA + Rrp\ Sen(\Theta) \\ zbA - Rrp\ Cos(\Theta) \end{bmatrix} = cte = \begin{bmatrix} xbE \\ ybE \\ zbE \end{bmatrix} \quad ==>> \text{Para pneu esquerdo}
$$

$$
{}^{S4'}\vec{r}^{(E)} = \begin{bmatrix} xbA \\ ybA - Rrp\ Sen(\Theta) \\ zbA - Rrp\ Cos(\Theta) \end{bmatrix} = cte = \begin{bmatrix} xbE \\ ybE \\ zbE \end{bmatrix} \quad ==>> \text{Para pneu direito} \qquad (3.96)
$$

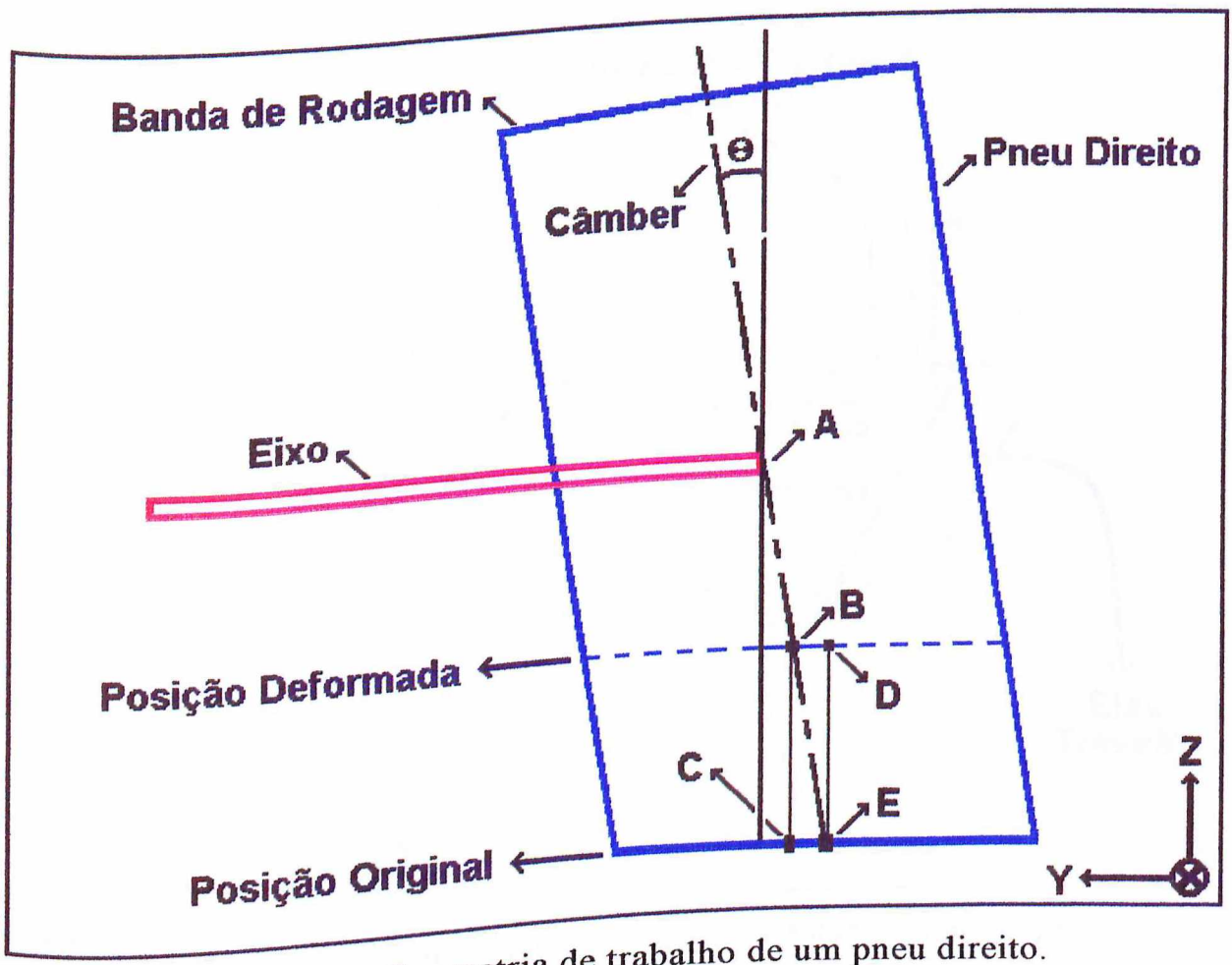

Figura 3.19: Geometria de trabalho de um pneu direito.

3.2.6.6 - Energia Potencial Elástica Associada às Barras Estabilizadoras

As barras estabilizadoras são elementos elásticos que vão presos ao eixo (dianteiro ou traseiro) e ao chassis. Trabalham por torção quando apenas uma das rodas de um eixo muda de posição devido a uma irregularidade da pista, ao passar por um obstáculo ou percorrer uma curva. Sua tendência é estabilizar o veículo tentando anular a defasagem existente entre o movimento vertical das rodas de um mesmo eixo. Quando todas as rodas do eixo movimentam-se igualmente na direção vertical, a barra estabilizadora não trabalha.

Na figura 3.20 pode-se ver um desenho representativo das barras estabilizadoras dianteira e traseira do veículo, bem como seus pontos de ancoragem e a indicação de suas parcelas de energia potencial elástica.

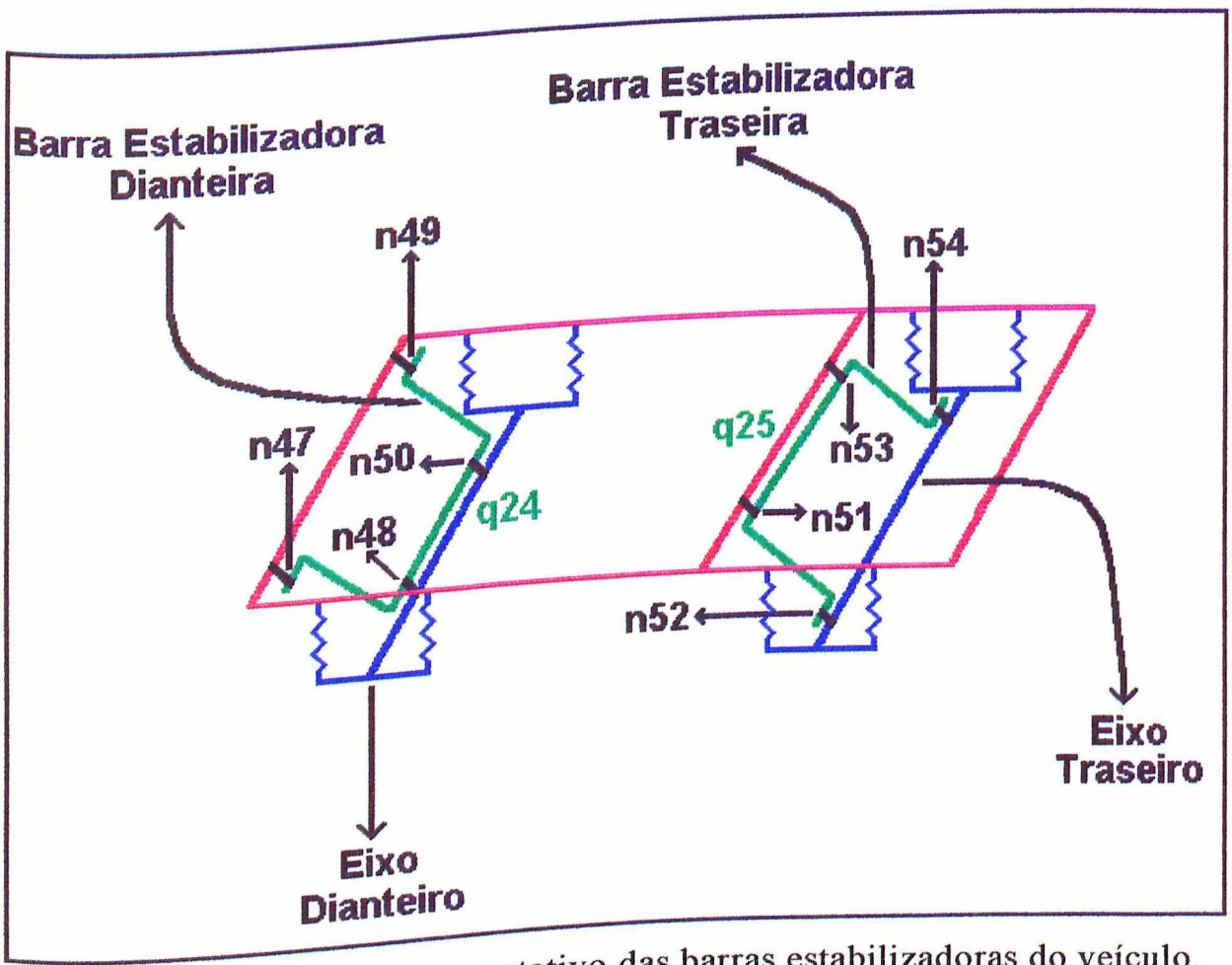

Figura 3.20: Desenho representativo das barras estabilizadoras do veículo.

Para fazer o equacionamento da energia potencial elástica associada a este elemento, tomemos a barra estabilizadora dianteira. Uma vez que a armazenagem da energia se dá por torção, define-se dois vetores ligando as posições de ancoragem referentes a cada braço lateral da barra estabilizadora. Neste caso, os vetores definidos ligam os pontos **n47** a **n48** e **n49** a **n50**. Como os pontos **n48** e **n50** estão fixos ao eixo dianteiro e **n47** e **n49** ao chassis, é necessário fazer uma transformação de coordenadas de forma a escrever todos estes vetores posição num único referencial. Deve-se levar em conta também que os pontos presos ao chassis estão sujeitos aos movimentos flexíveis do mesmo (flexão e torção).

Para os pontos **n47** e **n48** tem-se:

$$ {}^{S1'''\ torcido}\bar{r}^{(n47)} = \begin{bmatrix} xbn47 \\ ybn47 \\ zbn47 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \end{bmatrix} \tag{3.97} $$

$$ {}^{S1'''}\bar{r}^{(n47)} = \left[{}^{Rígido}T^{Torcido} \right] {}^{S1'''torcido}\bar{r}^{(n47)} \tag{3.98} $$

$$ {}^{S1'''}\bar{r}^{(n47)} = \begin{bmatrix} xbn47 \\ Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) ybn47 - Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \left[zbn47 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] \\ Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) ybn47 + Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \left[zbn47 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] \end{bmatrix} \tag{3.99} $$

$$ {}^{S4''}\bar{r}^{(n48)} = \begin{bmatrix} xbn48 \\ ybn48 \\ zbn48 \end{bmatrix} \tag{3.100} $$

$$ {}^{S1'''}\bar{r}^{(n48)} = \left[{}^{S1'''}Tt^{S4} \right] + \left[{}^{S4}T^{S4''} \right] {}^{S4''}\bar{r}^{(n48)} \tag{3.101} $$

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n48)} = \begin{bmatrix} xb4 \\ yb4 \\ zb4 + z4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Cos(\beta 4) & 0 & Sen(\beta 4) \\ Sen(\alpha 4)\ Sen(\beta 4) & Cos(\alpha 4) & -Sen(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \\ -Sen(\beta 4)\ Cos(\alpha 4) & Sen(\alpha 4) & Cos(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xbn48 \\ ybn48 \\ zbn48 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n48)} = \begin{bmatrix} xb4 + xbn48\ Cos(\beta 4) + zbn48\ Sen(\beta 4) \\ yb4 + xbn48\ Sen(\alpha 4)\ Sen(\beta 4) + ybn48\ Cos(\alpha 4) - zbn48\ Sen(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \\ zb4 + z4 - xbn48\ Sen(\beta 4)\ Cos(\alpha 4) + ybn48\ Sen(\alpha 4) + zbn48\ Cos(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Repetindo o mesmo procedimento para os pontos **n49** e **n50** fica

$$^{S1'''\ torcido}\vec{r}^{(n49)} = \begin{bmatrix} xbn49 \\ ybn49 \\ zbn49 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n49)} = \left[^{Rígido}T^{Torcido} \right] {}^{S1'''torcido}\vec{r}^{(n49)} \quad (3.105)$$

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n49)} = \begin{bmatrix} xbn49 \\ Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) ybn49 - Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \left[zbn49 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] \\ Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) ybn49 + Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \left[zbn49 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

$$^{S4''}\vec{r}^{(n50)} = \begin{bmatrix} xbn50 \\ ybn50 \\ zbn50 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n50)} = \left[^{S1'''}Tt^{S4} \right] + \left[^{S4}T^{S4''} \right] {}^{S4''}\vec{r}^{(n50)} \quad (3.108)$$

$$^{S1'''}\vec{r}^{(n50)} = \begin{bmatrix} xb4 + xbn50\ Cos(\beta 4) + zbn50\ Sen(\beta 4) \\ yb4 + xbn50\ Sen(\alpha 4)\ Sen(\beta 4) + ybn50\ Cos(\alpha 4) - zbn50\ Sen(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \\ zb4 + z4 - xbn50\ Sen(\beta 4)\ Cos(\alpha 4) + ybn50\ Sen(\alpha 4) + zbn50\ Cos(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Uma vez que a energia armazenada na barra estabilizadora depende do ângulo formado pelos seus braços laterais, basta que sejam definidos vetores bidimensionais. As coordenadas mantidas são **x** e **z**, pois o movimento lateral (**y**) não contribui para a torção do estabilizador. Fazendo isto, fica

$$
{}^{S1'''}\vec{r}^{(n47)\to(n48)} = \begin{bmatrix} xb4 + \mathrm{Cos}(\beta 4)\, xbn48 + \mathrm{Sen}(\beta 4)\, zbn48 - xbn47 \\ zb4 + z4 - \mathrm{Sen}(\beta 4)\,\mathrm{Cos}(\alpha 4)\, xbn48 + \mathrm{Sen}(\alpha 4)\, ybn48 + \mathrm{Cos}(\alpha 4)\,\mathrm{Cos}(\beta 4)\, zbn48 - \\ \mathrm{Sen}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\, s_i(t)\right) ybn47 - \mathrm{Cos}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\, s_i(t)\right)\left[zbn47 + \sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\, s_i(t)\right] \end{bmatrix}_{(xz)} \tag{3.110}
$$

$$
{}^{S1'''}\vec{r}^{(n49)\to(n50)} = \begin{bmatrix} xb4 + \mathrm{Cos}(\beta 4)\, xbn50 + \mathrm{Sen}(\beta 4)\, zbn50 - xbn49 \\ zb4 + z4 - \mathrm{Sen}(\beta 4)\,\mathrm{Cos}(\alpha 4)\, xbn50 + \mathrm{Sen}(\alpha 4)\, ybn50 + \mathrm{Cos}(\alpha 4)\,\mathrm{Cos}(\beta 4)\, zbn50 - \\ \mathrm{Sen}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\, s_i(t)\right) ybn49 - \mathrm{Cos}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\, s_i(t)\right)\left[zbn49 + \sum_{i=1}^{p}\Psi_i(x)\, s_i(t)\right] \end{bmatrix}_{(xz)} \tag{3.111}
$$

Da álgebra vetorial tem-se que o ângulo entre dois vetores, $\vec{P}$ e $\vec{Q}$, é dado pela equação (3.112).

$$
\mathrm{Cos}(\ \mathrm{Ang}\ \vec{P}\vec{Q}) = \frac{Px\ Qx + Py\ Qy + Pz\ Qz}{\left|\vec{P}\right|\ \left|\vec{Q}\right|} \tag{3.112}
$$

sendo

$$
\vec{P} = \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{Q} = \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \\ Qz \end{bmatrix}
$$

$\left|\vec{P}\right|$ e $\left|\vec{Q}\right|$ = Módulo dos vetores $\vec{P}$ e $\vec{Q}$, respectivamente.

Finalmente, pode-se escrever a equação da energia potencial elástica armazenada na barra estabilizadora dianteira com base na expressão do ângulo entre os vetores definidos sobre os braços laterais.

$$U = 0.5\ K14\ \left(\text{Ang}\ \vec{P}\vec{Q}\right)^2 \tag{3.113}$$

A determinação da parcela de energia potencial associada à barra estabilizadora traseira é feita de maneira semelhante ao caso da barra dianteira. Deve ser ressaltado que a energia armazenada é indiferente ao fato da barra central do estabilizador estar localizada junto ao eixo ou junto ao chassis, sendo esta uma opção ligada basicamente a montagem do dispositivo e ao espaço físico disponível nesta região do veículo.

A constante de rigidez torcional da parte central do estabilizador é considerada não linear e diferente para a dianteira e traseira.

- Estabilizador Dianteiro: **K = K14** ==>> Aplicado em **q24**;
- Estabilizador Traseiro: **K = K15** ==>> Aplicado em **q25**.

3.2.7 - Cálculo da Energia Potencial Gravitacional do Veículo

A energia potencial gravitacional de um veículo pesado do tipo caminhão articulado deve ser considerada pois a massa dos componentes envolvidos é significativa. Devido a esta característica, tem-se uma acumulação considerável de energia mesmo quando os deslocamentos verticais são pequenos.

Para o equacionamento das parcelas de energia potencial gravitacional deve-se definir a variação de posição correspondente ao centro de gravidade de cada componente. Esta variação é definida como sendo a diferença entre a coordenada **z** da posição genérica do componente e sua coordenada **z** inicial (posição de equilíbrio estático). Deve-se destacar que a variação de posição é estabelecida no referencial inercial, uma vez que o campo gravitacional é nele definido.

Começando pelo chassis do caminhão, tem-se que sua posição genérica é dada pela expressão (3.114).

$$ {}^{I}\vec{r}^{(o1)} = \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} \tag{3.114} $$

Para os demais elementos, o centro de gravidade é definido em relação ao referencial genérico do chassis **S1'''**, o que requer o uso de matrizes de transformação de coordenadas para transferir sua posição até o referencial inercial. Este procedimento é mostrado a seguir.

- Para a cabine:

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o2)} = \begin{bmatrix} xb2 \\ yb2 \\ zb2 + z2 \end{bmatrix} \quad ==>> \quad {}^{I}\vec{r}^{(o2)} = \left[{}^{I}Tt^{S1}\right] + \left[{}^{S1}T^{S1'''}\right] {}^{S1'''}\vec{r}^{(o2)} $$

$$ {}^{I}\vec{r}^{(o2)} = \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\beta 1)\cos(\gamma 1) & -\cos(\beta 1)\sin(\gamma 1) & \sin(\beta 1) \\ \sin(\alpha 1)\sin(\beta 1)\cos(\gamma 1) + \cos(\alpha 1)\sin(\gamma 1) & -\sin(\alpha 1)\sin(\beta 1)\sin(\gamma 1) + \cos(\alpha 1)\cos(\gamma 1) & -\sin(\alpha 1)\cos(\beta 1) \\ -\cos(\alpha 1)\sin(\beta 1)\cos(\gamma 1) + \sin(\alpha 1)\sin(\gamma 1) & \cos(\alpha 1)\sin(\beta 1)\sin(\gamma 1) + \sin(\alpha 1)\cos(\gamma 1) & \cos(\alpha 1)\cos(\beta 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xb2 \\ yb2 \\ zb2 + z2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{I}\vec{r}^{(o2)} = \begin{bmatrix} B1\ xb2 - B2\ yb2 + B3\ [zb2 + z2] + x1 \\ B4\ xb2 + B5\ yb2 - B6\ [zb2 + z2] + y1 \\ B7\ xb2 + B8\ yb2 + B9\ [zb2 + z2] + z1 \end{bmatrix} \tag{3.115} $$

sendo

$B1 = \cos(\beta 1)\ \cos(\gamma 1);$

$B2 = \cos(\beta 1)\ \mathrm{Sen}(\gamma 1);$

$B3 = \mathrm{Sen}(\beta 1);$

$B4 = \mathrm{Sen}(\alpha 1)\ \mathrm{Sen}(\beta 1)\ \cos(\gamma 1) + \cos(\alpha 1)\ \mathrm{Sen}(\gamma 1);$

$B5 = \cos(\alpha 1)\ \cos(\gamma 1) - \mathrm{Sen}(\alpha 1)\ \mathrm{Sen}(\beta 1)\ \mathrm{Sen}(\gamma 1);$

$B6 = \mathrm{Sen}(\alpha 1)\ \cos(\beta 1);$

$B7 = -\cos(\alpha 1)\ \mathrm{Sen}(\beta 1)\ \cos(\gamma 1) + \mathrm{Sen}(\alpha 1)\ \mathrm{Sen}(\gamma 1);$

$B8 = \cos(\alpha 1)\ \mathrm{Sen}(\beta 1)\ \mathrm{Sen}(\gamma 1) + \mathrm{Sen}(\alpha 1)\ \cos(\gamma 1);$

$B9 = \cos(\alpha 1)\ \cos(\beta 1).$

- Para o conjunto propulsor:

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o3)} = \begin{bmatrix} xb3 + x3 \\ yb3 + y3 \\ zb3 + z3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^{I}\vec{r}^{(o3)} = \left[{}^{I}Tt^{S1}\right] + \left[{}^{S1}T^{S1'''}\right]\ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o3)} $$

$$ {}^{I}\vec{r}^{(o3)} = \begin{bmatrix} B1\ [xb3 + x3] - B2\ [yb3 + y3] + B3\ [zb3 + z3] + x1 \\ B4\ [xb3 + x3] + B5\ [yb3 + y3] - B6\ [zb3 + z3] + y1 \\ B7\ [xb3 + x3] + B8\ [yb3 + y3] + B9\ [zb3 + z3] + z1 \end{bmatrix} \tag{3.116} $$

- Para o eixo dianteiro:

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o4)} = \begin{bmatrix} xb4 \\ yb4 \\ zb4 + z4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^{I}\vec{r}^{(o4)} = \left[{}^{I}Tt^{S1}\right] + \left[{}^{S1}T^{S1'''}\right]\ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o4)} $$

$$ {}^{I}\vec{r}^{(o4)} = \begin{bmatrix} B1\ xb4 - B2\ yb4 + B3\ [zb4 + z4] + x1 \\ B4\ xb4 + B5\ yb4 - B6\ [zb4 + z4] + y1 \\ B7\ xb4 + B8\ yb4 + B9\ [zb4 + z4] + z1 \end{bmatrix} \tag{3.117} $$

- Para o eixo traseiro:

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o5)} = \begin{bmatrix} xb5 \\ yb5 \\ zb5 + z5 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^{I}\vec{r}^{(o5)} = \left[{}^{I}Tt^{S1}\right] + \left[{}^{S1}T^{S1'''}\right] {}^{S1'''}\vec{r}^{(o5)} $$

$$ {}^{I}\vec{r}^{(o5)} = \begin{bmatrix} B1\ xb5 - B2\ yb5 + B3\ [zb5 + z5] + x1 \\ B4\ xb5 + B5\ yb5 - B6\ [zb5 + z5] + y1 \\ B7\ xb5 + B8\ yb5 + B9\ [zb5 + z5] + z1 \end{bmatrix} \qquad (3.118) $$

- Para a quinta roda:

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(o6)} = \begin{bmatrix} xb6 + x6 \\ yb6 \\ zb6 + z6 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^{I}\vec{r}^{(o6)} = \left[{}^{I}Tt^{S1}\right] + \left[{}^{S1}T^{S1'''}\right] {}^{S1'''}\vec{r}^{(o6)} $$

$$ {}^{I}\vec{r}^{(o6)} = \begin{bmatrix} B1\ [xb6 + x6] - B2\ yb6 + B3\ [zb6 + z6] + x1 \\ B4\ [xb6 + x6] + B5\ yb6 - B6\ [zb6 + z6] + y1 \\ B7\ [xb6 + x6] + B8\ yb6 + B9\ [zb6 + z6] + z1 \end{bmatrix} \qquad (3.119) $$

Para a determinação da posição inicial do centro de gravidade de cada componente, basta fazer o tempo igual a zero e condições iniciais nulas nas equações (3.114) a (3.119). Fazendo isto, obtém-se:

$$ {}^{I}\vec{r}_{inicial}^{(o1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{I}\vec{r}_{inicial}^{(o2)} = \begin{bmatrix} xb2 \\ yb2 \\ zb2 \end{bmatrix} \qquad {}^{I}\vec{r}_{inicial}^{(o3)} = \begin{bmatrix} xb3 \\ yb3 \\ zb3 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{I}\vec{r}_{inicial}^{(o4)} = \begin{bmatrix} xb4 \\ yb4 \\ zb4 \end{bmatrix} \qquad {}^{I}\vec{r}_{inicial}^{(o5)} = \begin{bmatrix} xb5 \\ yb5 \\ zb5 \end{bmatrix} \qquad {}^{I}\vec{r}_{inicial}^{(o6)} = \begin{bmatrix} xb6 \\ yb6 \\ zb6 \end{bmatrix} \qquad (3.120) $$

Agora, pode-se finalmente escrever as expressões para as parcelas de energia potencial gravitacional associadas a cada componente do veículo. Elas possuem o formato geral da equação (3.121) e podem ser vistas a seguir.

$$ Ugn = Mn\ g\ \left[{}^{I}\vec{r}_{z}^{(on)} - {}^{I}\vec{r}_{z\ inicial}^{(on)}\right] \qquad (3.121) $$

sendo **g** a aceleração da gravidade e **n** variando de 1 a 6 .

- Para o chassis:

$$Ug1 = M1\ g\ z1 \tag{3.122}$$

- Para a cabine:

$$Ug2 = M2\ g\ \{B7\ xb2 + B8\ yb2 + [B9 - 1]\ zb2 + B9\ z2 + z1\} \tag{3.123}$$

- Para o conjunto propulsor:

$$Ug3 = M3\ g\ \{B7\ [xb3 + x3] + B8\ [yb3 + y3] + [B9 - 1]\ zb3 + B9\ z3 + z1\} \tag{3.124}$$

- Para o eixo dianteiro:

$$Ug4 = M4\ g\ \{B7\ xb4 + B8\ yb4 + [B9 - 1]\ zb4 + B9\ z4 + z1\} \tag{3.125}$$

- Para o eixo traseiro:

$$Ug5 = M5\ g\ \{B7\ xb5 + B8\ yb5 + [B9 - 1]\ zb5 + B9\ z5 + z1\} \tag{3.126}$$

- Para a quinta roda:

$$Ug6 = M6\ g\ \{B7\ [xb6 + x6] + B8\ yb6 + [B9 - 1]\ zb6 + B9\ z6 + z1\} \tag{3.127}$$

3.2.8 - Função de Dissipação de Rayleigh

A função de dissipação de Rayleigh define a energia dissipada no sistema por meio de amortecedores considerados viscosos. No caso do caminhão, os amortecedores são os únicos dispositivos dissipadores de energia levados em conta.

No total, existem seis amortecedores hidráulicos no veículo, sendo dois em cada eixo e dois na parte posterior da cabine. As figuras 3.21 e 3.22 representam esquematicamente o posicionamento, as parcelas de energia dissipada e os pontos de ancoragem de cada amortecedor.

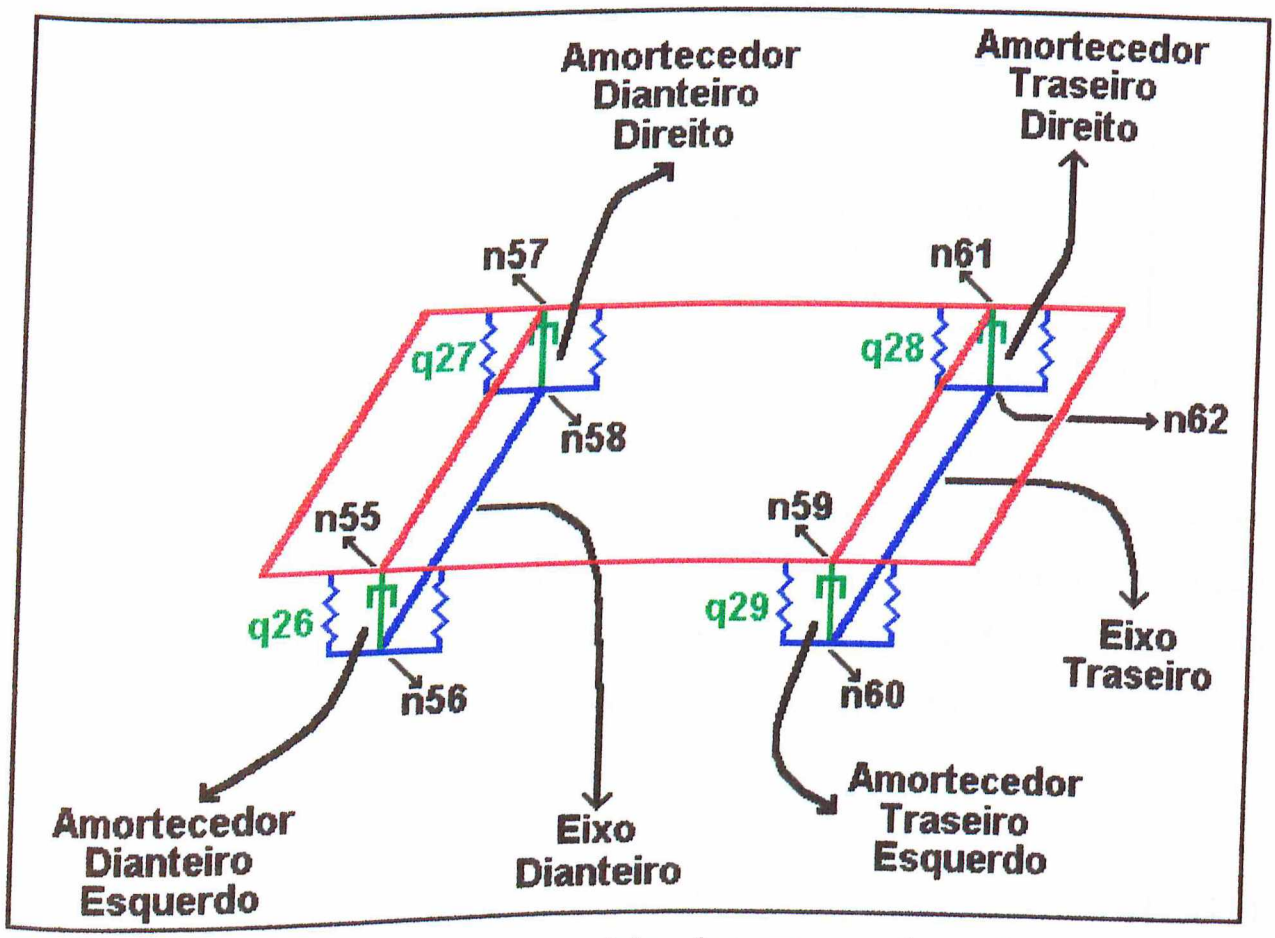

Figura 3.21: Representação esquemática dos amortecedores de suspensão.

A parcela de energia dissipada em cada amortecedor depende da velocidade relativa entre suas extremidades. Como cada amortecedor está sempre ligado ao chassis e a um outro elemento (eixo ou cabine), os vetores velocidade de cada

ancoragem devem ser definidos em seus referenciais locais e depois transferido para um único referencial a fim de estabelecer a velocidade relativa.

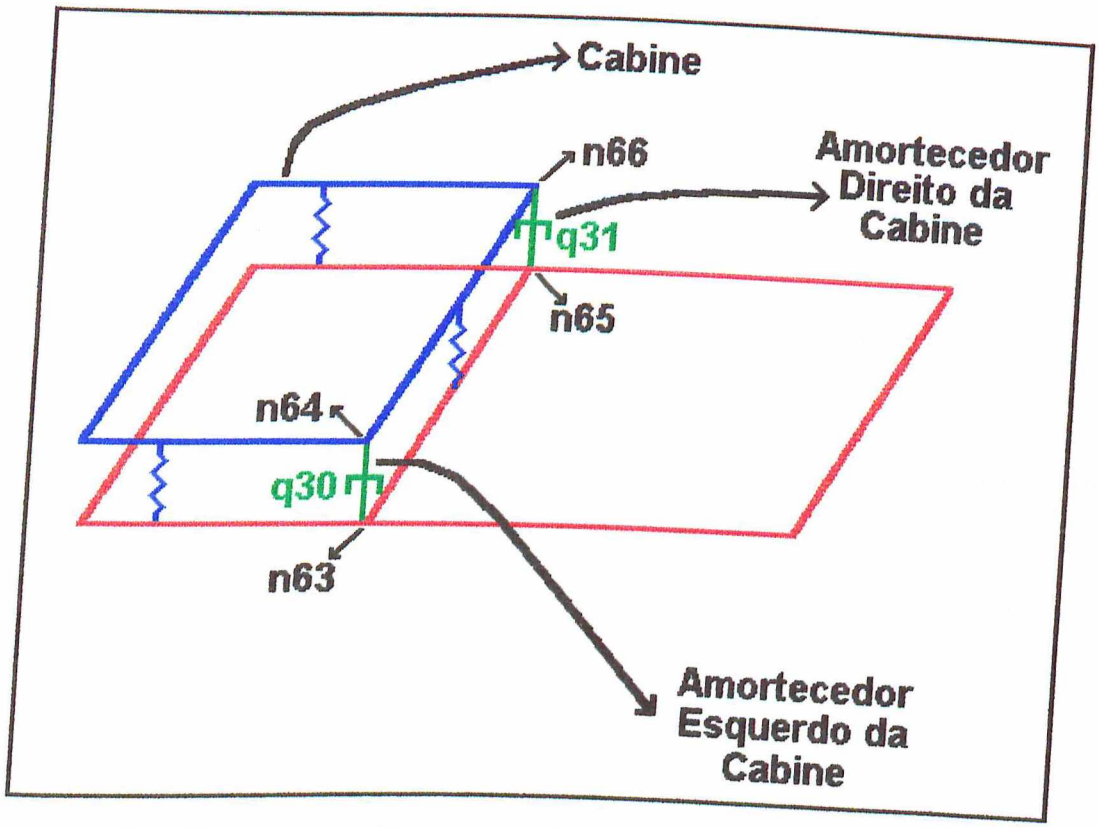

Figura 3.22: Representação esquemática dos amortecedores de cabine.

No caso do amortecedor dianteiro esquerdo, deve-se equacionar o vetor velocidade dos pontos **n55** e **n56** para determinar a parcela de energia dissipada **q26**.

Trabalhando sempre no referencial genérico do chassis **S1'''**, a velocidade relativa de **n56** em relação a **n55** é dada pela equação (3.128)

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(n56)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(n55)} + {}^{S1'''}\vec{V}^{(n56 \rightarrow n55)} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(n56 \rightarrow n55)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(n56)} - {}^{S1'''}\vec{V}^{(n55)} \qquad (3.128) $$

O ponto **n55** pertence ao chassis, e como tal pode ter sua velocidade definida em termos da soma de três componentes básicas, que são: a velocidade de translação do chassis, o produto vetorial da velocidade de rotação do chassis pelo vetor posição do ponto **n55** e a velocidade relativa do ponto **n55** em relação ao próprio

chassis.

$$^{S1'''}\vec{V}^{(n55)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(1)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(n55)} + {}^{S1'''}\vec{V}^{(n55\rightarrow o1)} \qquad (3.129)$$

Cabe notar que apesar do ponto **n55** pertencer ao chassis, ele possui uma velocidade em relação a este elemento, correspondente aos movimentos flexíveis sobrepostos aos movimentos de corpo rígido.

O ponto **n56** pertence ao eixo dianteiro e como tal pode ter também sua velocidade expressa em termos de três componentes básicas: a velocidade de translação do eixo dianteiro, o produto vetorial entre a velocidade de rotação do eixo e o vetor posição do ponto **n56** e a velocidade relativa do ponto **n56** em relação ao próprio eixo. Neste caso, a velocidade do ponto em relação ao eixo é nula pois este elemento é considerado rígido.

$$^{S1'''}\vec{V}^{(n56)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(4)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(4)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)} + \underbrace{{}^{S1'''}\vec{V}^{(n56\rightarrow o4)}}_{0}$$

$$^{S1'''}\vec{V}^{(n56)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(4)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(4)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)} \qquad (3.130)$$

A equação (3.130) pode ter seus componentes desmembrados de acordo com as equações (3.52) e (3.55). Fazendo isto, tem-se

$$^{S1'''}\vec{V}^{(n56)} = \underbrace{{}^{S1'''}\vec{V}^{(1)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(o4)} + {}^{S1'''}\vec{V}^{(o4\rightarrow o1)}}_{{}^{S1'''}\vec{V}^{(4)}} + \underbrace{\left[{}^{S1'''}\dot{\vec{\alpha}}4 + {}^{S1'''}\dot{\vec{\beta}}4 + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)}\right]}_{{}^{S1'''}\vec{W}^{(4)}} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)} \qquad (3.131)$$

Retornando agora as equações (3.129) e (3.131) em (3.128), obtém-se

$$^{S1'''}\vec{V}^{(n56\rightarrow n55)} = {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(o4)} + {}^{S1'''}\vec{V}^{(o4\rightarrow o1)} + \left[{}^{S1'''}\dot{\vec{\alpha}}4 + {}^{S1'''}\dot{\vec{\beta}}4 + {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)}\right] * {}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)} - {}^{S1'''}\vec{W}^{(1)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(n55)} - {}^{S1'''}\vec{V}^{(n55\rightarrow o1)} \qquad (3.132)$$

O vetor posição do ponto **n55** é obtido no referencial genérico do chassis **S1'''** por meio da matriz de transformação da equação (3.72), ou seja

$$ {}^{S1'''\ torcido}\vec{r}^{(n55)} = \begin{bmatrix} xbn55 \\ ybn55 \\ zbn55 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \end{bmatrix} \tag{3.133} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n55)} = \left[{}^{Rígido}\,T^{Torcido} \right] {}^{S1'''torcido}\vec{r}^{(n55)} \tag{3.134} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n55)} = \begin{bmatrix} xbn55 \\ Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) ybn55 - Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \left[zbn55 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] \\ Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) ybn55 + Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \left[zbn55 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] \end{bmatrix} \tag{3.135} $$

A velocidade do ponto **n55** em relação ao chassis, devida aos movimentos flexíveis, é obtida derivando-se o vetor posição da equação (3.135) em relação ao tempo.

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(n55/o1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ \dot{s}_i(t)\ ybn55 - \\ Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ \dot{s}_i(t) \left[zbn55 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] - Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \sum_{i=1}^{p} \dot{q}_i(t)\ \phi_i(x) \\ Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ \dot{s}_i(t)\ ybn55 - \\ Sen\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ \dot{s}_i(t) \left[zbn55 + \sum_{i=1}^{p} q_i(t)\ \phi_i(x) \right] + Cos\left(\sum_{i=1}^{p} \Psi_i(x)\ s_i(t) \right) \sum_{i=1}^{p} \dot{q}_i(t)\ \phi_i(x) \end{bmatrix} \tag{3.136} $$

O vetor posição ${}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)}$ pode ser obtido através de uma transformação de coordenadas que transfere suas componentes (constantes) no referencial genérico do eixo dianteiro **S4''** para o referencial genérico do chassis **S1'''**. Fazendo isto, tem-se

$$ {}^{S4''}\vec{r}^{(n56)} = \begin{bmatrix} xbn56 \\ ybn56 \\ zbn56 \end{bmatrix} \tag{3.137} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)} = \left[{}^{S1'''}Tt^{S4} \right] + \left[{}^{S4}T^{S4''} \right] {}^{S4''}\vec{r}^{(n56)} \tag{3.138} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)} = \begin{bmatrix} xb4 \\ yb4 \\ zb4 + z4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Cos(\beta 4) & 0 & Sen(\beta 4) \\ Sen(\alpha 4)\ Sen(\beta 4) & Cos(\alpha 4) & -Sen(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \\ -Sen(\beta 4)\ Cos(\alpha 4) & Sen(\alpha 4) & Cos(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xbn56 \\ ybn56 \\ zbn56 \end{bmatrix} \tag{3.139} $$

$$ {}^{S1'''}\vec{r}^{(n56)} = \begin{bmatrix} xb4 + xbn56\ Cos(\beta 4) + zbn56\ Sen(\beta 4) \\ yb4 + xbn56\ Sen(\alpha 4)\ Sen(\beta 4) + ybn56\ Cos(\alpha 4) - zbn56\ Sen(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \\ zb4 + z4 - xbn56\ Sen(\beta 4)\ Cos(\alpha 4) + ybn56\ Sen(\alpha 4) + zbn56\ Cos(\alpha 4)\ Cos(\beta 4) \end{bmatrix} \tag{3.140} $$

Os demais componentes da equação (3.132) já foram definidos em itens anteriores.

Com o equacionamento da velocidade do ponto **n56** em relação a **n55**, pode-se finalmente escrever uma expressão para a energia dissipada no amortecedor dianteiro esquerdo.

$$ F^{(q26)} = 0.5\ Cl \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(n56 \to n55)} \right]^t \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(n56 \to n55)} \right] \tag{3.141} $$

As demais parcelas de energia dissipada associadas aos outros amortecedores de suspensão e cabine (**q27**, **q28**, **q29**, **q30** e **q31**) são equacionadas de maneira semelhante ao caso desenvolvido (**q26**).

As constantes de proporcionalidade **Cn** dos amortecedores são tomadas como não lineares e iguais para amortecedores semelhantes, conforme é mostrado a se-

guir.

- No eixo dianteiro: **C = C1** ==>> Aplicado em **q26** e **q27**;
- No eixo traseiro: **C = C2** ==>> Aplicado em **q28** e **q29**;
- Cabine: **C = C3** ==>> Aplicado em **q30** e **q31**.

3.2.9 - Aplicação da Equação de Lagrange

Com a energia total do veículo determinada, parte-se para a aplicação da equação de Lagrange, dada por (3.142), que permite obter as equações não lineares do movimento.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad (3.142)$$

Nota-se que não foi feita nenhuma linearização na modelagem do ponto de vista da consideração de movimentos pequenos. Isto implica em um modelo genérico e completamente não linear do ponto de vista da geometria dos movimentos.

As forças generalizadas **Qi** serão tratadas no capítulo 7, onde são analisados os sub-sistemas que interagem externamente com o veículo (pista, motorista, etc.).

3.3 - Modelo Matemático do Caminhão com Carreta

Foram desenvolvidos dois modelos de veículo onde o caminhão está acoplado a uma carreta. Nestes dois modelos, tem-se que a parte referente ao caminhão é idêntica ao modelo do caminhão isolado já discutido no item 3.2 e seus sub-itens. Sendo assim, serão tratados aqui apenas os aspectos diferenciados e referentes à modelagem das carretas, a fim de não tornar a discussão monótona e repetitiva.

3.3.1 - Caminhão com Carreta de um Eixo

Este modelo é constituído dos seis elementos do caminhão isolado (chassis, cabine, conjunto propulsor, eixo dianteiro, eixo traseiro e quinta roda), que podem descrever exatamente os mesmos movimentos do caso citado. Além destes componentes, existe também o chassis da carreta e o seu único eixo. Os movimentos permitidos aos elementos da carreta são:

- **Chassis da Carreta:** Rotação em torno do eixo **z7'** (γ**7**);

- **Eixo da Carreta:** Translação vertical (**z8**), rotação em torno do eixo **x8** (α**8**) e rotação em torno do eixo **y8** (β**8**).

Na figura 3.23 pode-se ver uma representação esquemática do veículo com sua carreta de um eixo, o referencial inercial e os referenciais locais. Nesta figura, os referenciais locais tem suas origens transladadas dos centros de gravidade dos elementos com a finalidade de melhor visualização.

3.3.1.1 - Energia Cinética do Chassis da Carreta

A formulação que leva à energia cinética do chassis da carreta segue os mes-

mos princípios básicos desenvolvidos para os componentes do caminhão. Neste caso porém, deve-se levar em conta que no veículo real a carreta gira em torno de um eixo vertical que passa pelo pino rei, e não pelo seu centro de gravidade. Sendo assim, deve-se respeitar esta característica durante a modelagem, a fim de que os movimentos analisados tenham significado físico imediato.

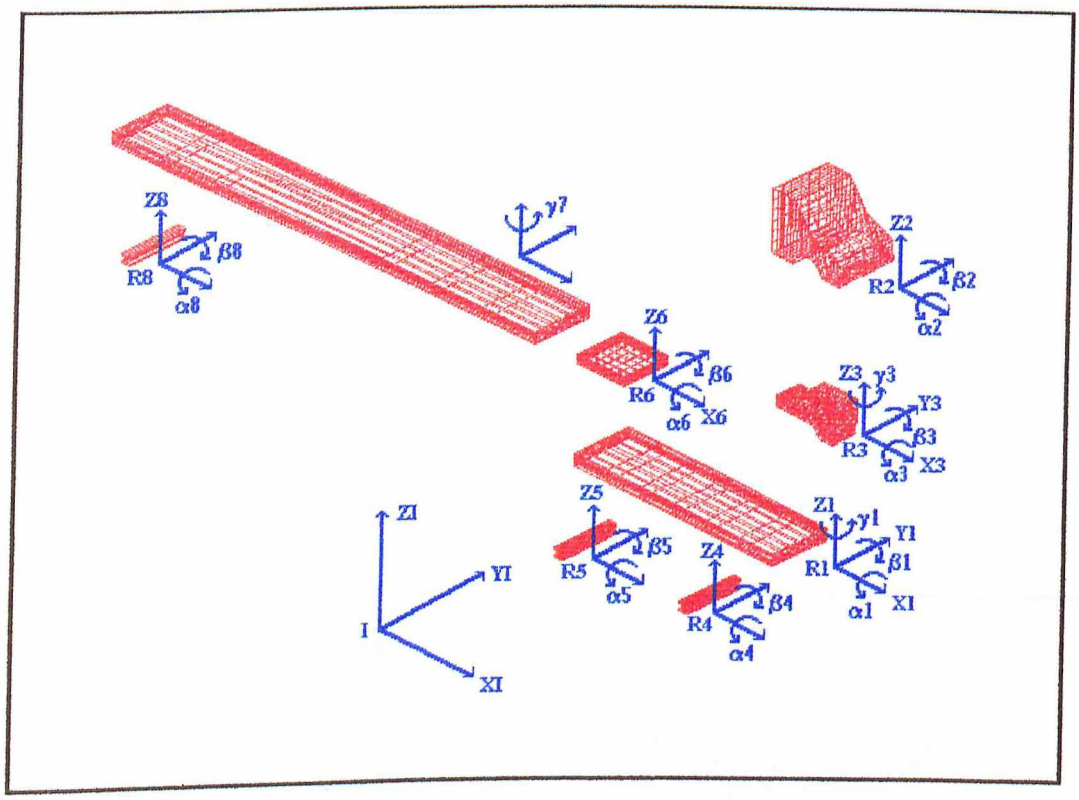

Figura 3.23: Modelo esquemático do caminhão com carreta de um eixo, seus referenciais e movimentos considerados.

Na figura 3.24, são definidos os referenciais **S7** e **P7** que possuem origem coincidente com o centro de gravidade do chassis da carreta e são orientados respectivamente segundo seus eixos de simetria e direções principais de inércia. Inicialmente, a orientação do sistema de eixos **S7** coincide com o referencial genérico final da quinta roda **S6''**.

A matriz de transformação entre os sistemas **S7** e **P7** é obtida pela solução da equação (3.142) para os vetores unitários $\vec{i}7$, $\vec{j}7$ e $\vec{k}7$, conforme mostrado a seguir.

$$ {}^{S7}\vec{u} = \left[{}^{S7}T^{P7} \right] \cdot {}^{P7}\vec{u} \tag{3.142} $$

$$ {}^{S7}\vec{i}7 = \begin{bmatrix} a7 \\ b7 \\ c7 \end{bmatrix} \qquad {}^{P7}\vec{i}7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S7}\vec{j}7 = \begin{bmatrix} d7 \\ e7 \\ f7 \end{bmatrix} \qquad {}^{P7}\vec{j}7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.143} $$

$$ {}^{S7}\vec{k}7 = \begin{bmatrix} g7 \\ h7 \\ l7 \end{bmatrix} \qquad {}^{P7}\vec{k}7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ \left[{}^{S7}T^{P7} \right] = \begin{bmatrix} a7 & d7 & g7 \\ b7 & e7 & h7 \\ c7 & f7 & l7 \end{bmatrix} = cte \tag{3.144} $$

$$ \left[{}^{P7}T^{S7} \right] = \left[{}^{S7}T^{P7} \right]^{t} = \begin{bmatrix} a7 & b7 & c7 \\ d7 & e7 & f7 \\ g7 & h7 & l7 \end{bmatrix} $$

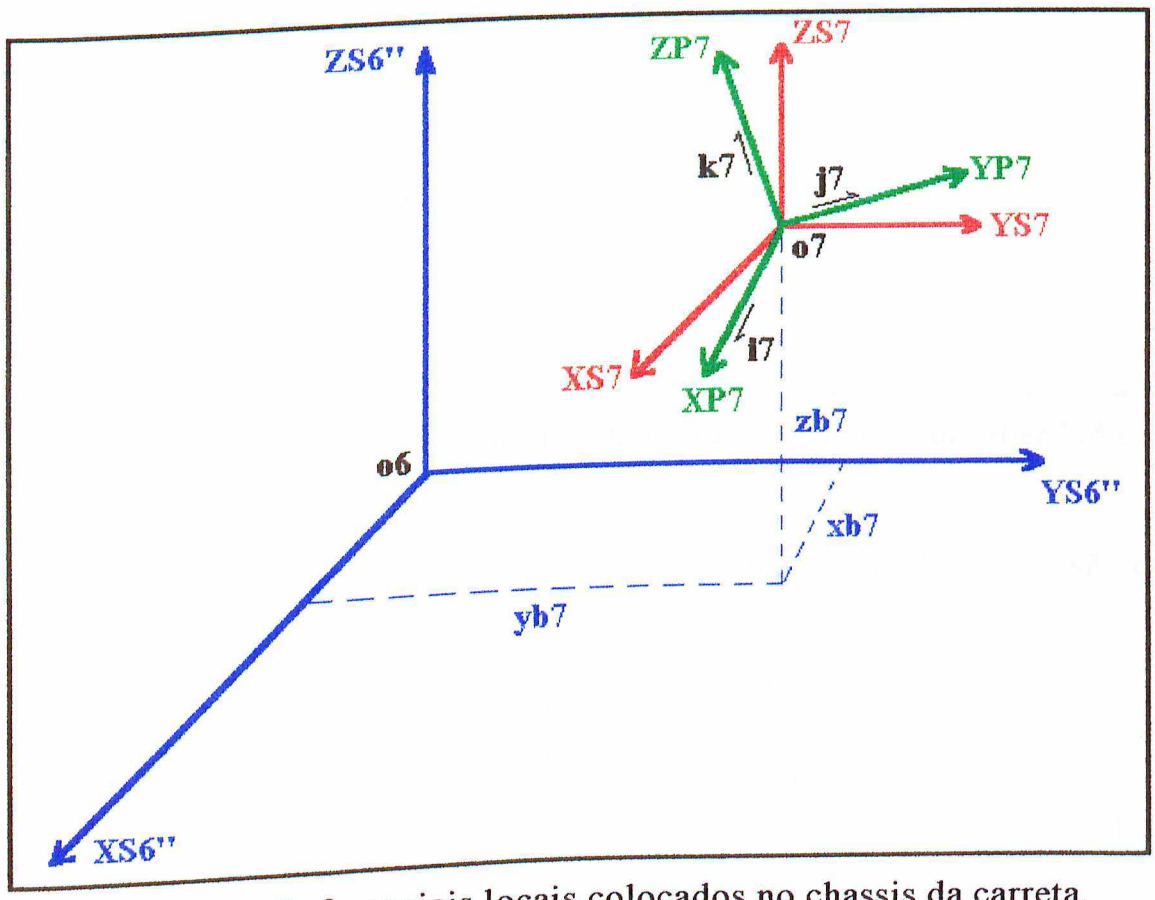

Figura 3.24: Referenciais locais colocados no chassis da carreta.

Uma vez que o movimento de rotação $\gamma 7$ ocorre em torno do pino rei, deve-se guardar o vetor posição de **o7** (centro de gravidade da carreta) em relação a **S6''** para que as propriedades de inércia da carreta sejam avaliadas em torno de **o6**.

Para estabelecer o único grau de liberdade do chassis da carreta parte-se do referencial **S6''** e obtém-se **S7'** através da rotação $\gamma 7$ em trono de **ZS6''**, configurando uma posição genérica para o mesmo. Na figura 3.25 pode-se ver a configuração genérica da carreta, bem como seu único grau de liberdade.

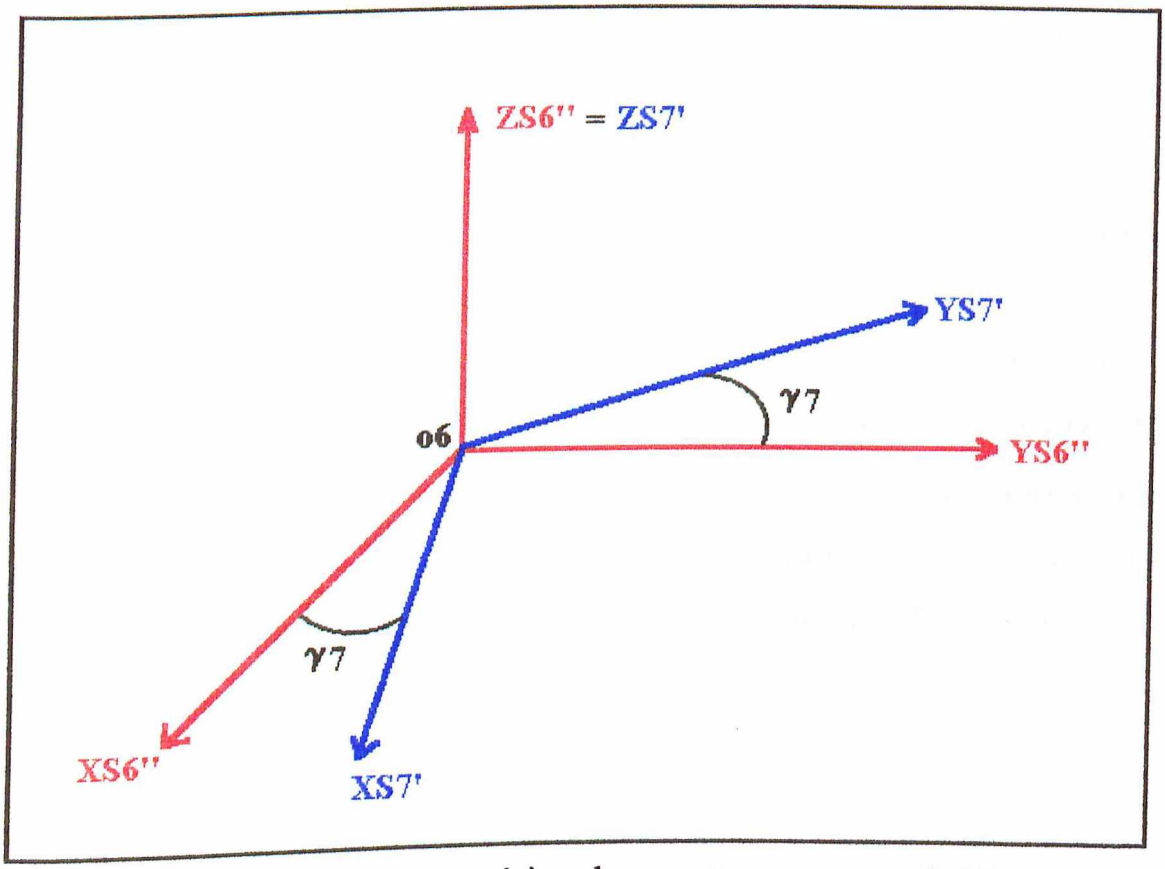

Figura 3.25: Configuração genérica da carreta e seu grau de liberdade.

As matrizes de transformação que ligam os referenciais S6'' e S7' são dadas pelas equações (3.145).

$$\left[{}^{S6''}T^{S7'}\right] = \begin{bmatrix} Cos(\gamma 7) & -Sen(\gamma 7) & 0 \\ Sen(\gamma 7) & Cos(\gamma 7) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.145}$$

$$\left[{}^{S7'}T^{S6''}\right] = \left[{}^{S6''}T^{S7'}\right]^{t}$$

O tensor de inércia da carreta escrito no referencial **P7** corresponde aos seus momentos principais de inércia e é dado pela equação (3.146). Uma vez que os modelos desenvolvidos neste trabalho tem por finalidade cobrir apenas veículos transportando carga seca, considera-se que a mesma é imóvel em relação à carreta e sua inércia já se encontra somada à deste elemento.

$$ {}^{P7}I^{(3)} = \begin{bmatrix} I7x & 0 & 0 \\ 0 & I7y & 0 \\ 0 & 0 & I7z \end{bmatrix} \tag{3.146} $$

O tensor principal de inércia da equação (3.146) é então transferido para o referencial **S7** através da matriz de transformação mostrada em (3.144).

$$ {}^{S7}I^{(7)} = \left[{}^{S7}T^{P7} \right] . {}^{P7}I^{(7)} . \left[{}^{P7}T^{S7} \right] \tag{3.147} $$

Por fim, o tensor de inércia da carreta é transferido para o referencial **S7'** através do teorema dos eixos paralelos, conforme mostra a equação (3.148). Nota-se que a origem do sistema S7' coincide com a de S6". Na verdade, aproxima-se o centro de giro da carreta ao centro de gravidade da quinta roda pois com isto o equacionamento fica mais vantajoso sem introduzir erro significativo na modelagem. Pode-se fazer isto porque a quinta roda é um elemento simétrico e estes dois pontos são praticamente coincidentes.

$$ {}^{S7'}I^{(7)} = {}^{S7}I^{(7)} + \begin{bmatrix} M7\left[yb7^2 + zb7^2\right] & M7\left[xb7\ yb7\right] & M7\left[xb7\ zb7\right] \\ M7\left[yb7\ xb7\right] & M7\left[xb7^2 + zb7^2\right] & M7\left[yb7\ zb7\right] \\ M7\left[zb7\ xb7\right] & M7\left[zb7\ yb7\right] & M7\left[xb7^2 + yb7^2\right] \end{bmatrix} \tag{3.148} $$

O vetor velocidade de translação da carreta é igual ao da quinta roda pois não existe velocidade relativa de translação entre estes dois elementos, além do que seus centros de giro são coincidentes.

$$ {}^{S1'''}\vec{V}^{(7)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(6)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(6)} * \underbrace{{}^{S1'''}\vec{r}^{(7\to o6)}}_{0} + \underbrace{{}^{S1'''}\vec{v}^{(7\to o6)}}_{0} \tag{3.149} $$

A velocidade angular da carreta é composta a partir da velocidade de rotação da quinta roda e de seu grau de liberdade de rotação $\gamma 7$.

$$^{S7'}\vec{W}^{(7)} = {}^{S7'}\vec{W}^{(6)} + {}^{S7'}\dot{\vec{\gamma}}^{(7)} \tag{3.150}$$

$$^{S6''}\dot{\vec{\gamma}}^{(7)} = {}^{S7'}\dot{\vec{\gamma}}^{(7)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}7 \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

$$^{S7'}\vec{W}^{(6)} = \left[{}^{S7'}T^{S6''}\right] {}^{S6''}\vec{W}^{(6)} \tag{3.152}$$

$$^{S7'}\vec{W}^{(7)} = {}^{S7'}\vec{W}^{(6)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}7 \end{bmatrix} \tag{3.153}$$

Com base nas equações (3.149) e (3.153) pode-se finalmente escrever a expressão da energia cinética da carreta.

$$T_7 = T_{t7} + T_{r7} \tag{3.154}$$

onde

$$T_{t7} = 0.5\ M7 \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(7)}\right]^t \cdot \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(7)}\right]$$

$$T_{r7} = 0.5 \left[{}^{S7'}\vec{W}^{(7)}\right]^t \cdot {}^{S7'}I^{(7)} \cdot \left[{}^{S7'}\vec{W}^{(7)}\right]$$

3.3.1.2 - Energia Cinética do Eixo da Carreta

O eixo da carreta possui uma suspensão semelhante à dos eixos do caminhão. Devido a isto, possui também os mesmos movimentos preferenciais. A única diferença do ponto de vista da modelagem é que a base local deste eixo passa a ser o chassis da carreta e não mais o do caminhão.

Os movimentos considerados são uma translação vertical **z8** e duas rotações α**8** e β**8**. Na figura 3.26 pode-se ver um desenho esquemático do posicionamento do centro de gravidade do eixo em relação a uma posição genérica do centro de giro do chassis da carreta. Nesta figura tem-se também a definição dos referenciais locais **S8** e **P8**, orientados segundo os eixos de simetria (longitudinal, transversal e vertical) e direções principais de inércia do eixo da carreta, respectivamente.

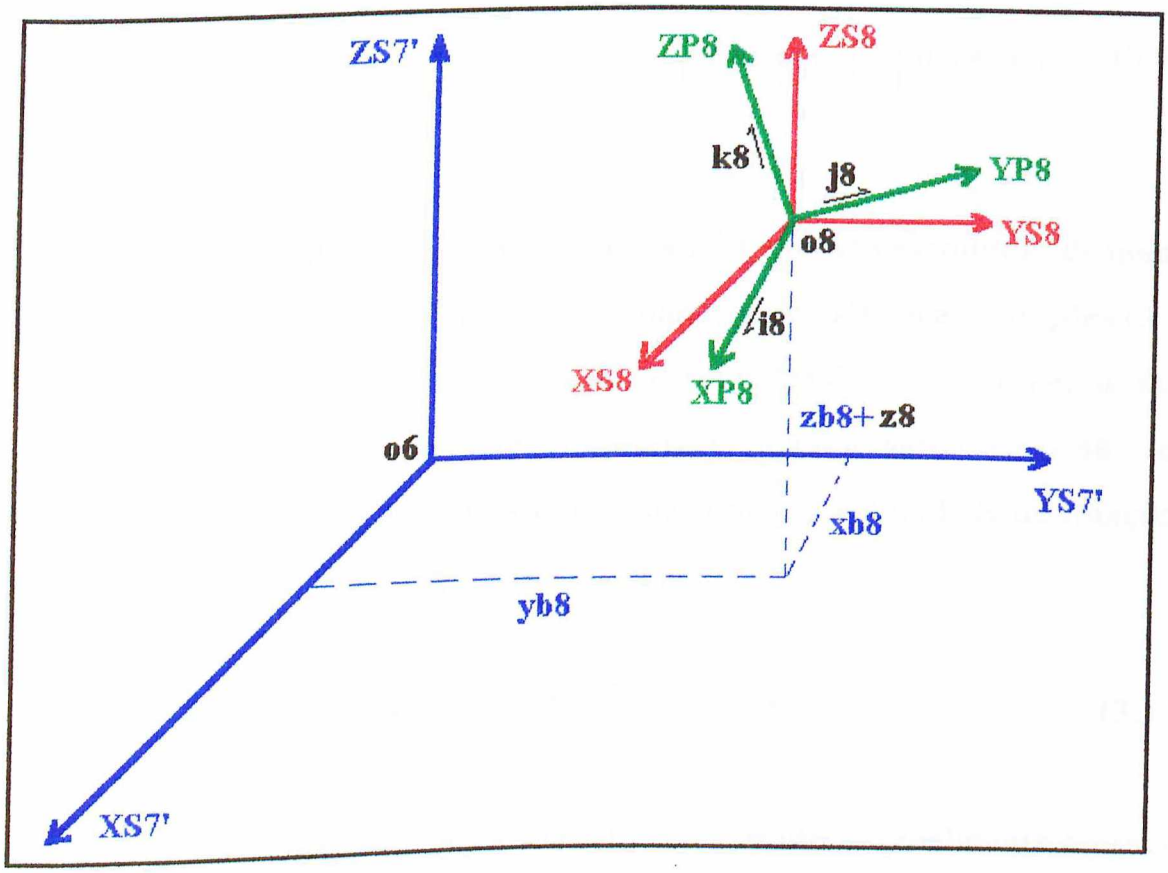

Figura 3.26: Desenho esquemático dos referenciais locais colocados no centro de gravidade do eixo da carreta.

Os procedimentos necessários à definição da energia cinética do eixo da carreta são idênticos aos descritos no caso dos eixos do caminhão. Com base nisto, as equações (3.45) a (3.50) continuam válidas desde que o índice geral **n** seja substituído pelo índice **8**.

A velocidade de translação do centro de massa do eixo deve ser calculada a partir da composição das velocidades do chassis da carreta com o vetor velocidade de translação do eixo em relação à carreta. Na equação (3.155) é feita a composição.

$$^{S1'''}\vec{V}^{(8)} = {}^{S1'''}\vec{V}^{(7)} + {}^{S1'''}\vec{W}^{(7)} * {}^{S1'''}\vec{r}^{(o8 \to o6)} + {}^{S1'''}\vec{V}^{(o8 \to S7')} \qquad (3.155)$$

sendo

$$^{S6''}\vec{V}^{(o8 \to S7')} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}8 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{S1'''}\vec{V}^{(o8 \to S7')} = {}^{S6}\vec{V}^{(o8 \to S7')} = \left[{}^{S6}T^{S6''}\right] {}^{S6''}\vec{V}^{(o8 \to S7')} \qquad (3.156)$$

$$^{S7'}\vec{r}^{(o8 \to o6)} = \begin{bmatrix} xb8 \\ yb8 \\ zb8 + z8 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{S1'''}\vec{r}^{(08 \to o6)} = \left[{}^{S1'''}Tt^{S6}\right] + \left(\left[{}^{S6}T^{S6''}\right]\left[{}^{S6''}T^{S7'}\right] {}^{S7'}\vec{r}^{(08 \to 06)}\right) \qquad (3.157)$$

As componentes de velocidade de rotação $\vec{\alpha}8$ e $\vec{\beta}8$ são escolhidas de maneira idêntica ao caso dos eixos do caminhão, permanecendo válidas as equações (3.53).

Para fazer a composição referente às velocidades de rotação do eixo, faz-se a transformação de suas componentes para o referencial genérico final **S8''**, conforme indicado na equação (3.54). A expressão final da velocidade de rotação do eixo é dada por (3.158).

$$^{S8''}\vec{W}^{(8)} = {}^{S8''}\vec{\alpha}8 + {}^{S8''}\vec{\beta}8 + {}^{S8''}\vec{W}^{(7)} \qquad (3.158)$$

Com base nas expressões (3.155) e (3.158), pode-se finalmente escrever a parcela de energia cinética referente ao eixo da carreta.

$$T_8 = T_{t8} + T_{r8} \tag{3.159}$$

$$T_{t8} = 0.5\ M8 \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(8)} \right]^t \cdot \left[{}^{S1'''}\vec{v}^{(8)} \right] \tag{3.160}$$

$$T_{r8} = 0.5 \left[{}^{S8''}\vec{W}^{(8)} \right]^t \cdot {}^{S8''}I^{(8)} \cdot \left[{}^{S8''}\vec{W}^{(8)} \right] \tag{3.161}$$

3.3.1.3 - Parcelas de Energia Potencial

Os elementos responsáveis pelo armazenamento de energia potencial elástica na carreta são as molas da suspensão e os pneus. A determinação matemática destas quantidades segue os mesmos passos já apresentados na análise do caminhão.

Para as molas, deve-se observar que os vetores posição dos seus pontos de ancoragem devem ser transferidos para um mesmo referencial, a fim de que possa ser estabelecida a variação de sua distância relativa. No caso da carreta o referencial escolhido é o **S7'**, que representa uma base local para o eixo.

Com relação aos pneus, a abordagem também é similar, bastando lembrar que para fazer a transformação do vetor posição de um ponto do pneu para o referencial inercial é necessário um número maior de operações de transformação de coordenadas. O mesmo comentário é válido para o cálculo da energia potencial gravitacional dos componentes da carreta.

3.3.2 - Caminhão com Carreta de Três Eixos

A modelagem de um caminhão acoplado a uma carreta de três eixos é similar ao caso da carreta de um eixo. É claro que existem diferenças quanto ao número de parcelas de energia e quanto aos referenciais usados nas operações, porém os princípios que regem as determinações são rigorosamente os mesmos.

A única diferença significativa deste modelo em relação ao anterior é a presença das balanças na suspensão da carreta. Estes mecanismos são fixos no chassis da carreta e possuem liberdade de girar em torno de um eixo transversal ao veículo. Seus braços servem de apoio para as extremidades das molas e sua função principal é dividir a carga entre as molas de um mesmo lado do veículo, quando uma ou mais rodas passa por um obstáculo.

Na figura 3.27 pode-se ver um desenho esquemático de um caminhão acoplado a uma carreta de três eixos. Nela encontram-se indicados o referencial inercial, os referenciais locais de cada componente, assim como seus graus de liberdade.

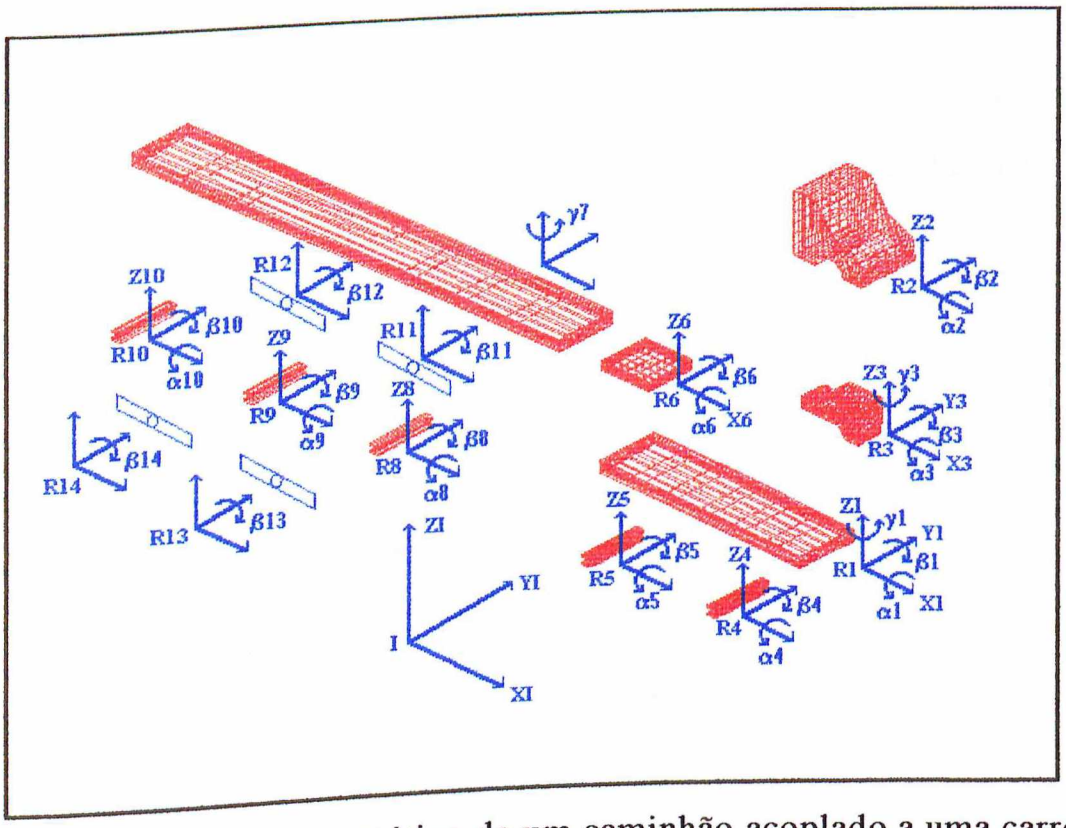

Figura 3.27: Desenho esquemático de um caminhão acoplado a uma carreta de três eixos.

3.3.2.1 - Energia Cinética de Uma Balança

Para efeito de exemplificar a determinação da energia cinética de uma balança, será desenvolvido o cálculo tomando como base a primeira balança esquerda (componente de número 11 na figura 3.27).

Na análise do movimento da balança, deve-se levar em conta que o dispositivo real gira em torno de um eixo transversal ao veículo passando pela sua articulação. Este ponto não coincide necessariamente com o centro de massa do componente.

Na figura 3.28, são definidos os referenciais **S11** e **P11** que possuem origem coincidente com o centro de gravidade da balança, e são orientados respectivamente segundo seus eixos de simetria (longitudinal, transversal e vertical) e direções principais de inércia. Tem-se também a representação do sistema **S11'**, que é paralelo ao sistema **S11**, porém com origem no centro de giro da balança.

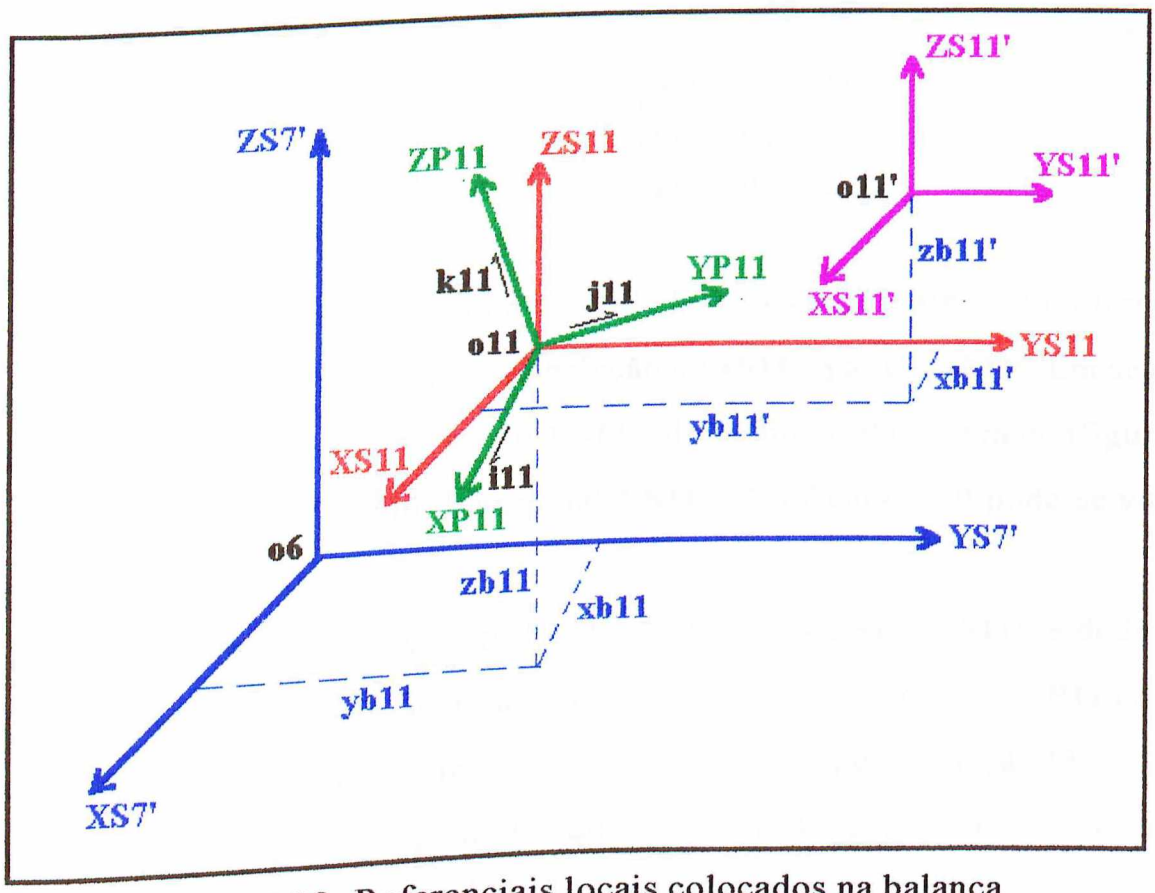

Figura 3.28: Referenciais locais colocados na balança.

A matriz de transformação que liga os sistemas **S11** e **P11** é obtida pela solução da equação (3.162) para os vetores unitários $\vec{i}11$, $\vec{j}11$ e $\vec{k}11$, conforme mostrado em (3.164).

$$^{S11}\vec{u} = \left[{}^{S11}T^{P11}\right] \cdot {}^{P11}\vec{u} \tag{3.162}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{S11}\vec{i}11 &= \begin{bmatrix} a11 \\ b11 \\ c11 \end{bmatrix} & {}^{P11}\vec{i}11 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{S11}\vec{j}11 &= \begin{bmatrix} d11 \\ e11 \\ f11 \end{bmatrix} & {}^{P11}\vec{j}11 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^{S11}\vec{k}11 &= \begin{bmatrix} g11 \\ h11 \\ l11 \end{bmatrix} & {}^{P11}\vec{k}11 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.163}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[{}^{S11}T^{P11}\right] &= \begin{bmatrix} a11 & d11 & g11 \\ b11 & e11 & h11 \\ c11 & f11 & l11 \end{bmatrix} = cte \\
\left[{}^{P11}T^{S11}\right] &= \left[{}^{S11}T^{P11}\right]^{t} = \begin{bmatrix} a11 & b11 & c11 \\ d11 & e11 & f11 \\ g11 & h11 & l11 \end{bmatrix} = cte
\end{aligned}
\tag{3.164}
$$

Para estabelecer o único grau de liberdade da balança parte-se do referencial **S11** e obtém-se **S11'** através de uma translação de **xb11'**, **yb11'** e **zb11'**. Em seguida é aplicada a rotação $\beta 11$ em torno de **YS11'**, de forma a obter uma configuração genérica da balança, dada pelo referencial **XS11''**. Na figura 3.29 pode-se ver um esquema da rotação $\beta 11$.

A matriz de transformação que liga os referenciais **S11'** e **S11''** é dada pela equação (3.165). O tensor de inércia da balança escrito no referencial **P11** corresponde aos seus momentos principais de inércia e é dado pela equação (3.166).

O tensor principal de inércia da equação (3.166) é então transferido para o referencial **S11** através da transformação mostrada em (3.167).

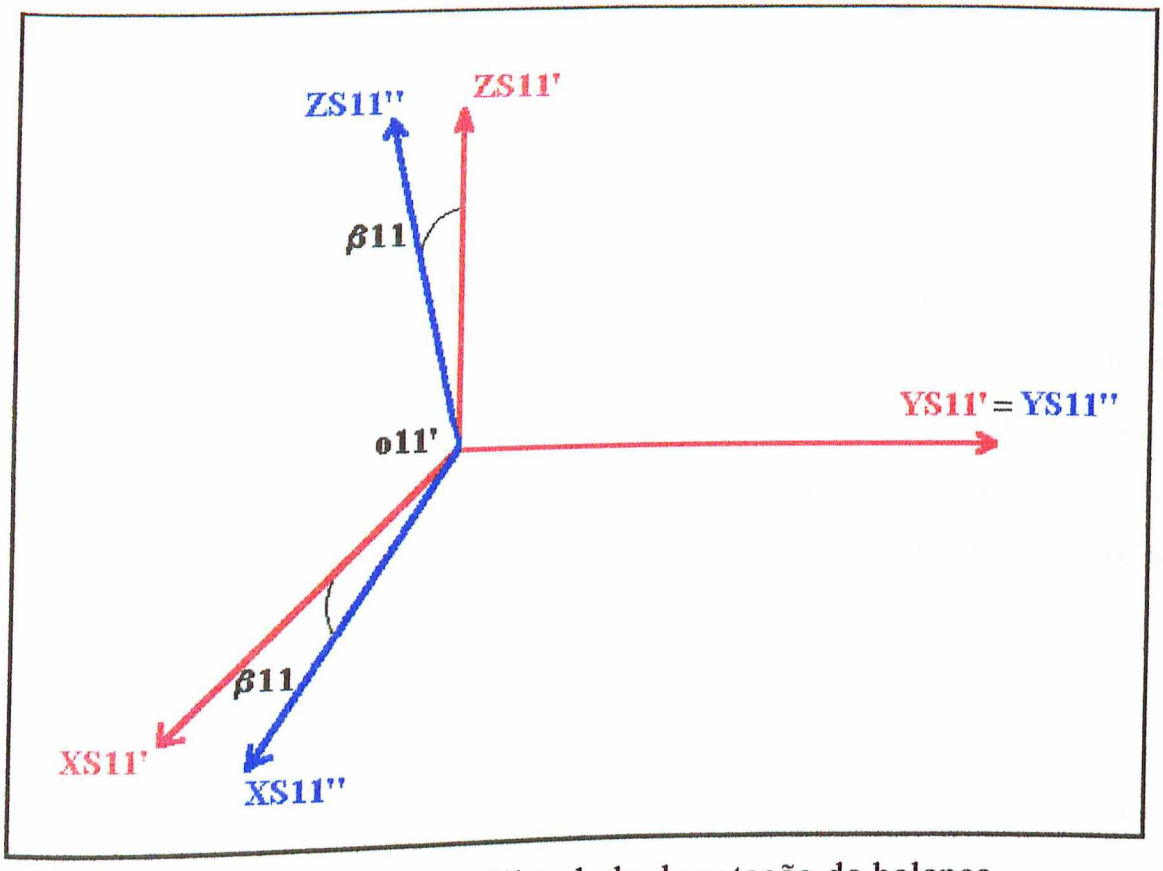

Figura 3.29: Grau de liberdade de rotação da balança.

$$\left[{}^{S11'}T^{S11''}\right] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta 11) & 0 & \text{Sen}(\beta 11) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\beta 11) & 0 & \text{Cos}(\beta 11) \end{bmatrix} \tag{3.165}$$

$$\left[{}^{S11''}T^{S11'}\right] = \left[{}^{S11'}T^{S11''}\right]^{t}$$

$${}^{P11}I^{(11)} = \begin{bmatrix} I11x & 0 & 0 \\ 0 & I11y & 0 \\ 0 & 0 & I11z \end{bmatrix} \tag{3.166}$$

$${}^{S11}I^{(11)} = \left[{}^{S11}T^{P11}\right] \cdot {}^{P11}I^{(11)} \cdot \left[{}^{P11}T^{S11}\right] \tag{3.167}$$

Por fim, o tensor de inércia da carreta é transferido para o referencial **S11''** através do teorema dos eixos paralelos, segundo a equação (3.168).

$$ {}^{s11''}\mathbf{I}^{(11)} = {}^{s11}\mathbf{I}^{(11)} + \begin{bmatrix} M11\,[yb11'^{\,2} + zb11'^{\,2}] & M11\,[xb11'\ yb11'] & M11\,[xb11'\ zb11'] \\ M11\,[yb11'\ xb11'] & M11\,[xb11'^{\,2} + zb11'^{\,2}] & M11\,[yb11'\ zb11'] \\ M11\,[zb11'\ xb11'] & M11\,[zb11'\ yb11'] & M11\,[xb11'^{\,2} + yb11'^{\,2}] \end{bmatrix} \tag{3.168} $$

O vetor velocidade de translação da balança é dado pela composição da velocidade de translação da carreta com a velocidade relativa entre a balança e a carreta. Uma vez que a balança é fortemente ancorada no chassis da carreta, esta acompanha o seu movimento flexível. Sendo assim, considera-se como velocidade relativa entre estes elementos a derivada temporal do seu vetor posição, levando em conta os movimentos flexíveis do chassis da carreta. A composição de velocidades é mostrada na equação (3.169) e (3.170).

$$ {}^{s1'''}\vec{v}^{(11)} = {}^{s1'''}\vec{v}^{(7)} + {}^{s1'''}\vec{W}^{(7)} * {}^{s1'''}\vec{r}^{(o11' \to o6)} + {}^{s1'''}\vec{v}^{(o11' \to o6)} \tag{3.169} $$

$$ {}^{s1'''}\vec{v}^{(o11 \to o6)} = \frac{d}{dt}\,{}^{s1'''}\vec{r}^{(o11' \to o6)} \tag{3.170} $$

A velocidade angular da balança é composta a partir da velocidade de rotação da carreta e de seu grau de liberdade de rotação $\beta 11$, conforme mostra a equação (3.171).

$$ {}^{s11''}\vec{W}^{(11)} = {}^{s11''}\dot{\vec{\beta}}^{(11)} + {}^{s11''}\vec{W}^{(7)} \tag{3.171} $$

Com base nas equações (3.169) e (3.171) pode-se finalmente escrever a expressão da energia cinética da balança.

$$ \mathbf{T}_{11} = \mathbf{T}_{t11} + \mathbf{T}_{r11} \tag{3.172} $$

sendo

$$ \mathbf{T}_{t11} = 0.5\ M11 \left[{}^{s1'''}\vec{v}^{(11)} \right]^t \cdot \left[{}^{s1'''}\vec{v}^{(11)} \right] $$

$$ \mathbf{T}_{r11} = 0.5 \left[{}^{s11''}\vec{W}^{(11)} \right]^t \cdot {}^{s11''}\mathbf{I}^{(11)} \cdot \left[{}^{s11''}\vec{W}^{(11)} \right] $$

3.3.3 - Aplicação da Equação de Lagrange aos Modelos Com Carreta

No caso dos caminhões com carreta, também se utiliza a equação de Lagrange dada por (3.142). Através de sua aplicação às expressões de energia, obtém-se as correspondentes equações não lineares do movimento.

Cabe lembrar que nos modelos que possuem carreta, são formados dois conjuntos de equações referentes aos movimentos flexíveis (um para o chassis do caminhão e outro para o chassis da carreta). Estas equações são obtidas através do Método dos Modos Assumidos, conforme mostrado no capítulo 2 desta dissertação.

4 - Movimentos Flexíveis dos Chassis

A definição de funções admissíveis para o deslocamento flexível do chassis do caminhão e da carreta pode ser feita de duas maneiras básicas: de forma experimental ou através de modelagem via método dos elementos finitos.

A obtenção experimental implica primeiramente na disponibilidade de um protótipo. Além disto, é necessária uma grande infra-estrutura no que diz respeito a sensores, condicionadores de sinal, registradores, excitadores, bancadas e pessoal qualificado. No entanto, sua maior limitação está no fato de que qualquer alteração do projeto estrutural do componente implica, a rigor, numa nova bateria de ensaios.

A modelagem por elementos finitos se mostra mais vantajosa, uma vez que podem ser obtidos modelos bastante detalhados da estrutura de interesse sem a necessidade de gastos com material ou protótipos. Considerando-se também o parâmetro tempo, a modelagem computacional leva nítida vantagem. Além disto, pode-se introduzir modificações no modelo e avalia-lo novamente sem implicar em custo elevado ou atraso significativo no cronograma. Deve-se levar em conta também que é possível ensaiar um chassis já existente da mesma forma que um modelo novo, do qual ainda não se tem um protótipo.

Evidentemente, os ensaios experimentais tem seu lugar garantido na validação de modelos, no estudo do comportamento global do veículo sob diferentes condições, etc.

4.1 - Modelos de Elementos Finitos

Para a confecção e solução dos modelos via elementos finitos foi utilizado o software comercial **SAP90**, instalado em plataforma IBM PC 80486 DX 33 MHz. A principio, foram elaborados três modelos geométricos representando o chassis

do caminhão, o chassis de uma carreta de um eixo e o chassis de uma carreta de três eixos. Estes modelos foram submetidos ao cálculo de auto-valores e auto-vetores, conforme os itens a seguir.

4.1.1 - Modelo do Chassis do Caminhão

O chassis do caminhão foi modelado usando-se exclusivamente elementos do tipo SOLID. Este elemento isoparamétrico espacial é definido por oito nós situados nos seus vértices.

A base geométrica do modelo foram os desenhos do chassi do veículo Mercedes-Benz LS-1941 cujos números são: **388 310 70 01** e **388 311 70 01**. Este chassis tem como principais componentes duas longarinas e sete travessas que foram modeladas procurando respeitar ao máximo possível a geometria e as fixações do componente real.

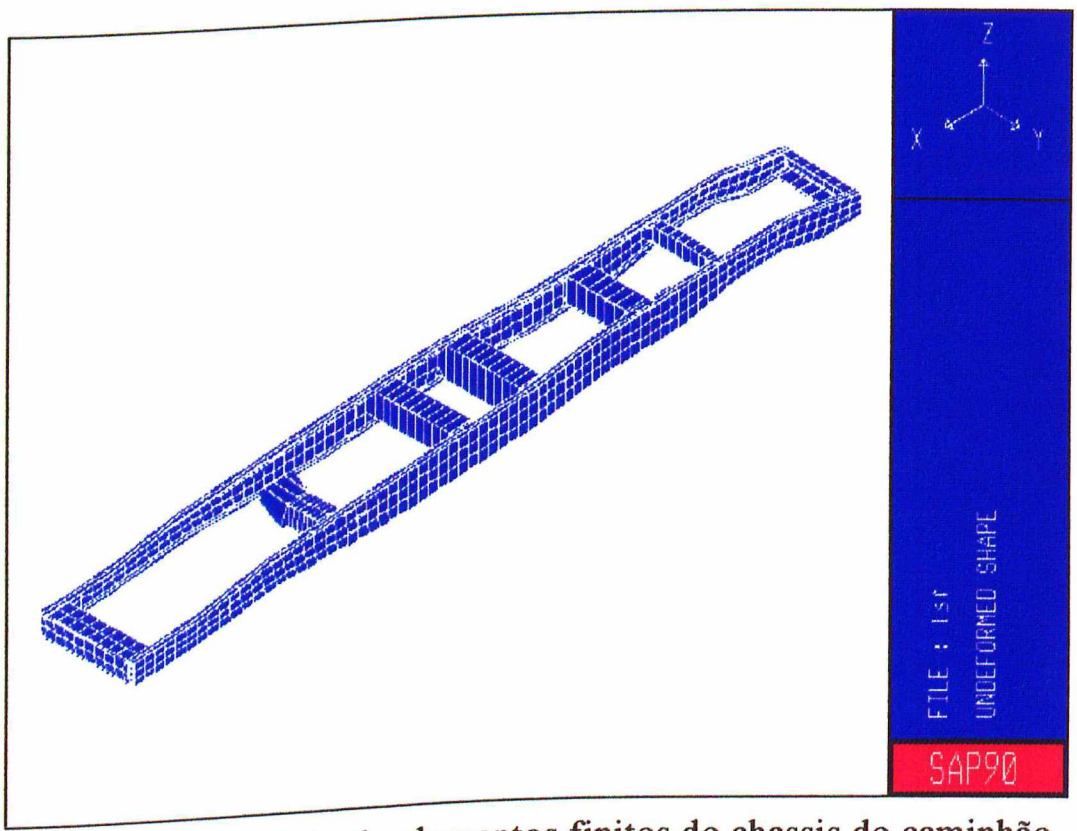

Figura 4.1: Modelo de elementos finitos do chassis do caminhão.

Na figura 4.1 tem-se o modelo em elementos finitos do chassis do caminhão, que possui 3344 nós e 1308 elementos SOLID. Após serem feitas as restrições de movimento referentes às fixações das travessas nas longarinas, tem-se um número total de 5816 graus de liberdade. Para efeito do cálculo dos auto-valores e auto-vetores, foi considerado apenas o chassis, suportado por molas cuja rigidez é correspondente à das molas reais do veículo (mola traseira trabalhando apenas no primeiro estágio). Na tabela 4.1 são mostradas com mais detalhes as características do modelo e as opções de cálculo utilizadas.

Tabela 4.1: Características do modelo de elementos finitos e opções de calculo utilizadas para o chassis do caminhão.

Número de Nós	3344
Número de Elementos SOLID	1308
Número de Graus de Liberdade	5816
Número de Auto-Valores a Serem Calculados	5
Tolerância no Cálculo dos Auto-Valores	1 E-4
Material	Aço
Densidade [Kg / m^3]	7747
Peso Específico [N / m^3]	76000
Módulo de Elasticidade [Pascal]	207 E+9
Módulo de Rigidez Torcional [Pascal]	79,3 E+9
Coeficiente de Poisson	0,3
Massa do Chassis [Kg]	463,28
Peso do Chassis [N]	4544,81
Rigidez das Molas Dianteiras [N / m]	0,116 E+8
Rigidez das Molas Traseiras [N / m]	0,280 E+9

Segundo Hac [8], considerando 3 modos flexíveis para cada movimento da estrutura (flexão e torção) obtém-se uma boa representação do mesmo. Experiências foram feitas onde a consideração de mais modos praticamente não alterou o resultado final da simulação.

Com base nesta informação, considerou-se três modos de flexão e três de torção para compor a solução em série das equações (2.2) e (2.30). Na tabela 4.2 tem-se a indicação dos modos escolhidos para representar cada movimento, bem como o número da figura onde o mesmo está representado graficamente. As figuras mostrando os modos escolhidos encontram-se no Anexo 3.

Uma vez que o interesse desta análise é determinar apenas uma função admissível para o deslocamento flexível da estrutura, o valor das frequências naturais correspondentes aos modos adotados não são relevantes. Além disto, nota-se que os valores das frequências naturais mudam bastante com a condição de carregamento do veículo.

Tabela 4.2: Modos escolhidos para compor as funções admissíveis do deslocamento flexível do chassis do caminhão.

Flexão			Torção		
Número do Modo	Frequência Natural [Hz]	Figura	Número do Modo	Frequência Natural [Hz]	Figura
1	95,8	A3.1	2	232,1	A3.4
2	179,5	A3.2	3	246,6	A3.5
4	257,5	A3.3	5	372,9	A3.6

Deve ser destacado que na análise via elementos finitos não foram obtidos modos de corpo rígido para flexão do chassis. Isto se deve à rigidez das molas ser muito elevada, o que, na situação sem carga, faz com que a flexão do chassis seja preferencial em relação à deflexão das molas. Para comprovar este fato, o modelo

foi alterado de forma a reduzir em dois níveis diferentes a rigidez das molas. Nestas condições, observa-se que os modos de corpo rígido aparecem nas frequências esperadas, aproximadas pela equação (4.1). Na tabela 4.3 tem-se um resumo dos cálculos realizados para a translação vertical do chassis do caminhão em condição de baixa rigidez das molas.

$$w = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

Tabela 4.3: Valores obtidos para a frequência natural de vibração, na condição de baixa rigidez das molas (translação vertical do chassis do caminhão).

Flexão					
Rigidez da Mola Dianteira [N/m]	Rigidez da Mola Traseira [N/m]	Massa do Chassis [Kg]	Frequência Natural Teórica [Hz]	Frequência Natural Calculada [Hz]	Diferença Relativa [%]
0,2 E+4	0,6 E+4	463,28	0,9353	0,9347	0,06
0,2 E+7	0,6 E+7	463,28	29,5773	23,4942	20,57
0,116 E+9	0,28 E+9	463,28	208,0947	-----	-----
Torção					
Rigidez da Mola Dianteira [N/m]	Rigidez da Mola Traseira [N/m]	Massa do Chassis [Kg]	Frequência Natural Teórica [Hz]	Frequência Natural Calculada [Hz]	Diferença Relativa [%]
0,2 E+7	0,6 E+7	463,28	29,5773	29,3427	0,79
0,116 E+9	0,28 E+9	463,28	208,0947	170,5839	18,03

No caso da torção observou-se o aparecimento dos modos de corpo rígido na análise por elementos finitos. Isto ocorre devido à geometria do chassis, uma vez que a distância transversal entre as molas de um mesmo eixo é muito menor

que a distância entre os eixos. Esta condição geométrica faz com que a rigidez à flexão do chassis na direção transversal seja grande. Um indicativo deste fato pode ser visto na tabela 4.3, onde observa-se uma grande redução na diferença relativa entre a frequência natural teórica e a calculada via elementos finitos.

A forma geral dos modos selecionados se encontra compatível com os obtidos por Geiβler [19] que trabalhou com modelos da ordem de 65000 graus de liberdade.

4.1.2 - Modelo do Chassis de Uma Carreta de Três Eixos

O modelo de elementos finitos representando a carreta de três eixos foi construido a partir de elementos de barra (FRAME) e elementos sólidos (SOLID). Neste modelo foram introduzidos os elementos de barra, uma vez que a estrutura da carreta é composta de vários perfis comerciais soldados. Optou-se por representar os perfis de menor seção transversal com elementos de barra.

O modelo foi feito tendo como base uma carreta rodoviária de três eixos da marca RANDON (número 00426, placa NQ 2638 de São Bernardo do Campo) de 12 metros e 30 centímetros de comprimento total e 2 metros e 50 centímetros de largura. O chassis é constituído de duas longarinas centrais de grande porte, 23 travessas e um perfil circundante de toda a estrutura. Deve ser levado em conta que as travessas possuem seção transversal variável, sendo maior na região entre as longarinas às quais são soldadas. Além dos componentes principais, o chassis da carreta possui uma estrutura dianteira onde fica o pino rei, responsável pelo seu acoplamento ao caminhão, e 4 estruturas traseiras bastante rígidas onde são posicionadas as balanças e os suportes de mola.

Na figura 4.2 pode-se ver o modelo gerado, que possui 3621 nós, 185 elementos FRAME e 1474 elementos SOLID. Após o estabelecimento das restrições de movimento o sistema fica com 7096 graus de liberdade.

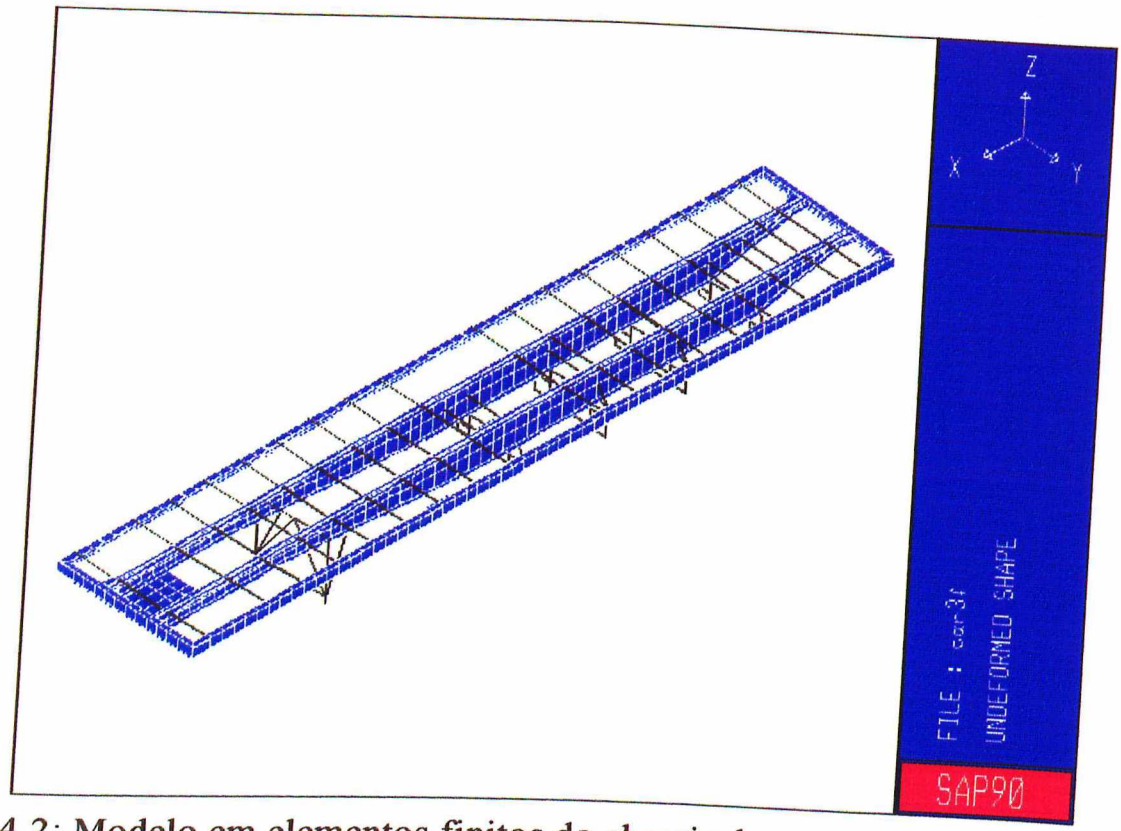

Figura 4.2: Modelo em elementos finitos do chassis de uma carreta de três eixos.

Na tabela 4.4 tem-se os modos escolhidos para flexão e torção do chassis da carreta, além dos números das figuras onde eles são apresentados no Anexo 3. Na tabela 4.5 tem-se os detalhes e opções de cálculo utilizadas para a solução do problema de auto-valores no caso da carreta de três eixos.

Tabela 4.4: Modos escolhidos para formar as funções admissíveis para o deslocamento flexível do chassis de uma carreta de três eixos.

Flexão			Torção		
Número do Modo	Frequência Natural [Hz]	Figura	Número do Modo	Frequência Natural [Hz]	Figura
1	30,9	A3.7	7	146,2	A3.10
2	54,8	A3.8	8	172,9	A3.11
3	88,3	A3.9	9	199,9	A3.12

Tabela 4.5: Características do modelo de elementos finitos e opções de cálculo utilizadas para o chassis da carreta de três eixos.

Número de Nós	3621
Número de Elementos FRAME	185
Número de Elementos SOLID	1474
Número de Graus de Liberdade	7096
Número de Auto-Valores a Serem Calculados	5 para flexão
	10 para torção
Tolerância no Cálculo dos Auto-Valores	1 E-4
Material	Aço
Densidade [Kg / m^3]	7747
Peso Específico [N / m^3]	76000
Módulo de Elasticidade [Pascal]	207 E+9
Módulo de Rigidez Torcional [Pascal]	79,3 E+9
Coeficiente de Poisson	0,3
Massa do Chassis da Carreta [Kg]	3096,71
Peso do Chassis da Carreta [N]	30378,7
Rigidez das Molas [N / m]	0,280 E+9

Para a seleção dos três modos de torção foi necessário analisar os primeiros 10. Isto ocorreu devido aos primeiros modos estarem associados ao movimento flexível de apenas alguns perfis, não caracterizando o movimento da estrutura como

um todo. Para ilustrar este fato tem-se a figura 4.3 onde pode-se ver o terceiro modo de vibração, segundo o qual a estrutura principal da carreta praticamente não sofre torção, enquanto que o perfil circundante do chassis se movimenta com grande amplitude.

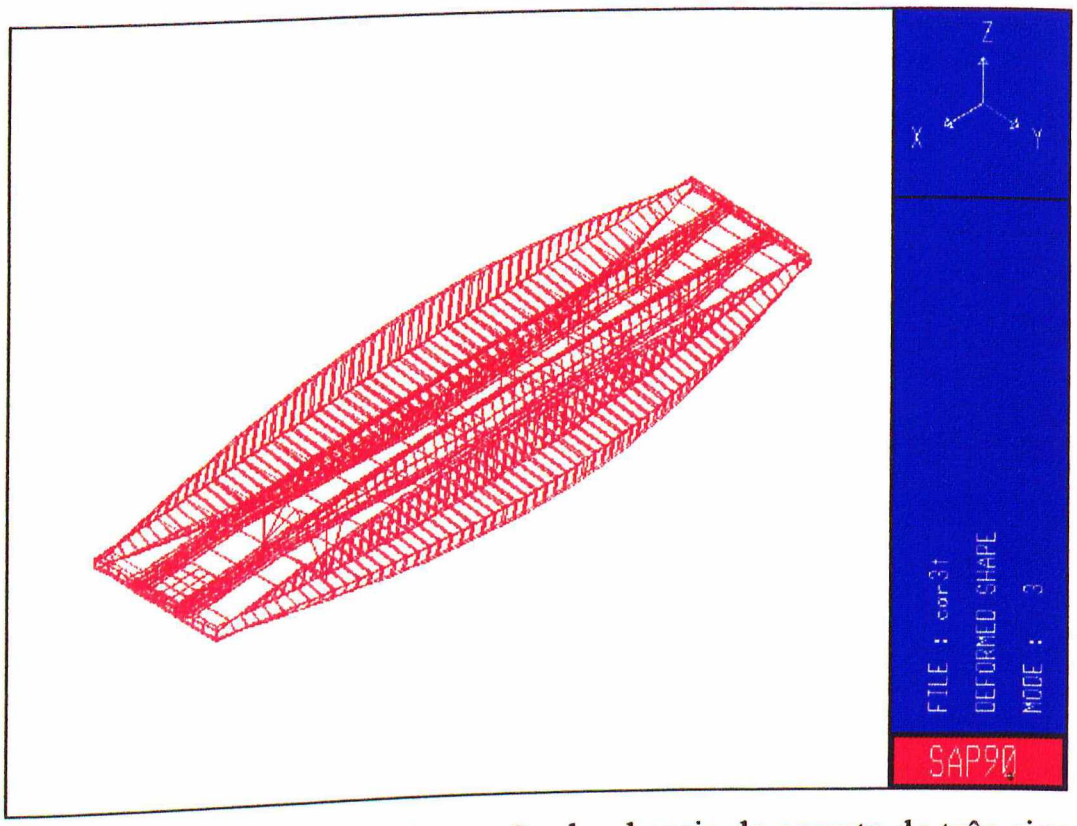

Figura 4.3: Terceiro modo de torção do chassis da carreta de três eixos.

4.1.3 - Modelo do Chassis de Uma Carreta de Um Eixo

O modelo representativo da carreta de um eixo foi obtido diretamente da simplificação do caso anterior. Isto foi feito mediante a retirada de duas das quatro estruturas traseiras que tem por finalidade fixar as balanças. Como resultado, restaram as estruturas necessárias ao suporte das suas duas únicas molas. Neste caso, assim como no anterior, foi considerada a rigidez das molas da carreta como sendo iguais às das molas traseiras do caminhão.

Na figura 4.4 pode-se ver o modelo de elementos finitos referente à carreta

de um eixo. Na tabela 4.6 pode-se ver os modos selecionados para formar as funções admissíveis e os números das figuras correspondentes no Anexo 3. Na tabela 4.7 tem-se o detalhamento das características do modelo e suas opções de cálculo.

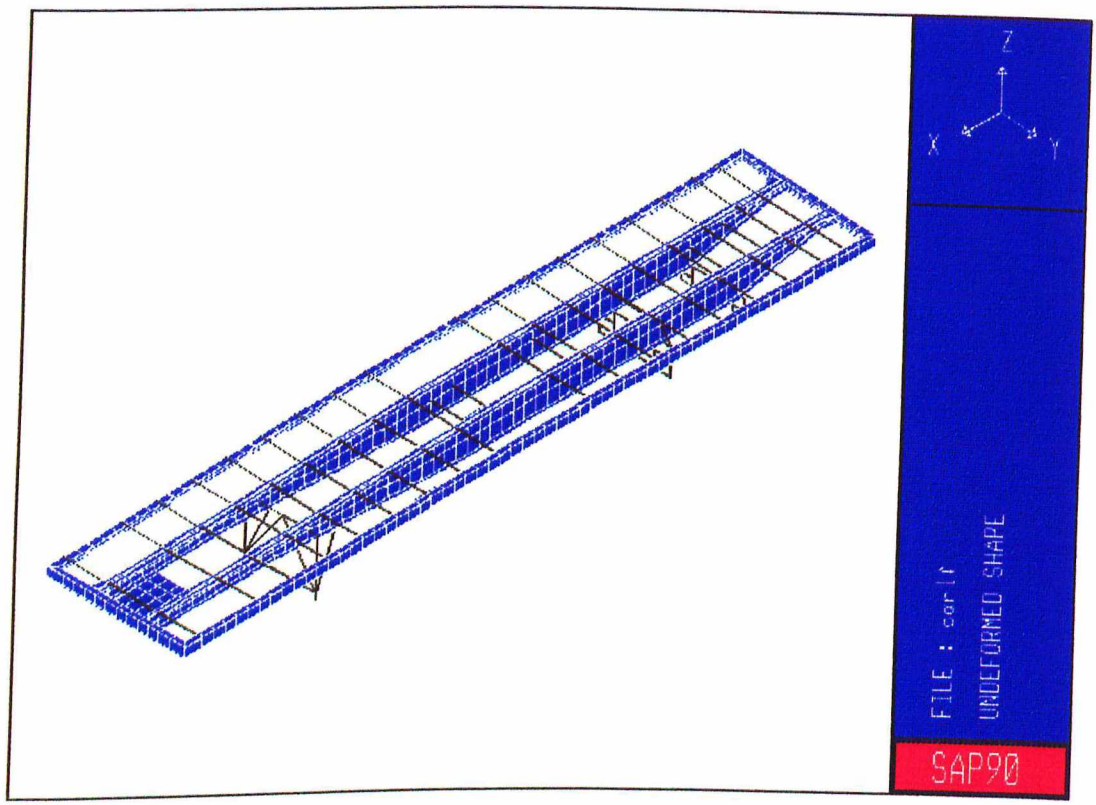

Figura 4.4: Modelo de elementos finitos do chassis da carreta de um eixo.

Tabela 4.6: Modos escolhidos para formar as funções admissíveis do deslocamento flexível para o chassis da carreta de um eixo.

Flexão			Torção		
Número do Modo	Frequência Natural [Hz]	Figura	Número do Modo	Frequência Natural [Hz]	Figura
1	18,1	A3.13	5	121,7	A3.16
2	48,2	A3.14	8	162,4	A3.17
3	60,1	A3.15	10	194,1	A3.18

Tabela 4.7: Características do modelo de elementos finitos e opções de cálculo utilizadas para o chassis da carreta de um eixo.

Número de Nós	3621
Número de Elementos FRAME	129
Número de Elementos SOLID	1474
Número de Graus de Liberdade	7034
Número de Auto-Valores a Serem Calculados	5 para flexão
	10 para torção
Tolerância no Cálculo dos Auto-Valores	1 E-4
Material	Aço
Densidade [Kg / m^3]	7747
Peso Específico [N / m^3]	76000
Módulo de Elasticidade [Pascal]	207 E+9
Módulo de Rigidez Torcional [Pascal]	79,3 E+9
Coeficiente de Poisson	0,3
Massa do Chassis da Carreta [Kg]	2892,86
Peso do Chassis da Carreta [N]	28379,01
Rigidez das Molas [N / m]	0,280 E+9

4.2 - Considerações Sobre os Modelos de Elementos Finitos

Uma vez estabelecidos os modelos e obtidos os auto-vetores, encontram-se disponíveis as informações necessárias ao cálculo dos termos $\mathbf{m}_{ij}$ e $\mathbf{k}_{ij}$ das equações (2.8), (2.13), (2.36) e (2.42).

Para o cálculo correto dos termos de massa e rigidez, associa-se as amplitudes dos auto-vetores nos nós às funções $\phi_i(x)$ e $\Psi_i(x)$, conforme é mostrado na figura 4.5.

Como observação final, é importante notar que as massas obtidas via elementos finitos encontram-se compatíveis com as estruturas reais.

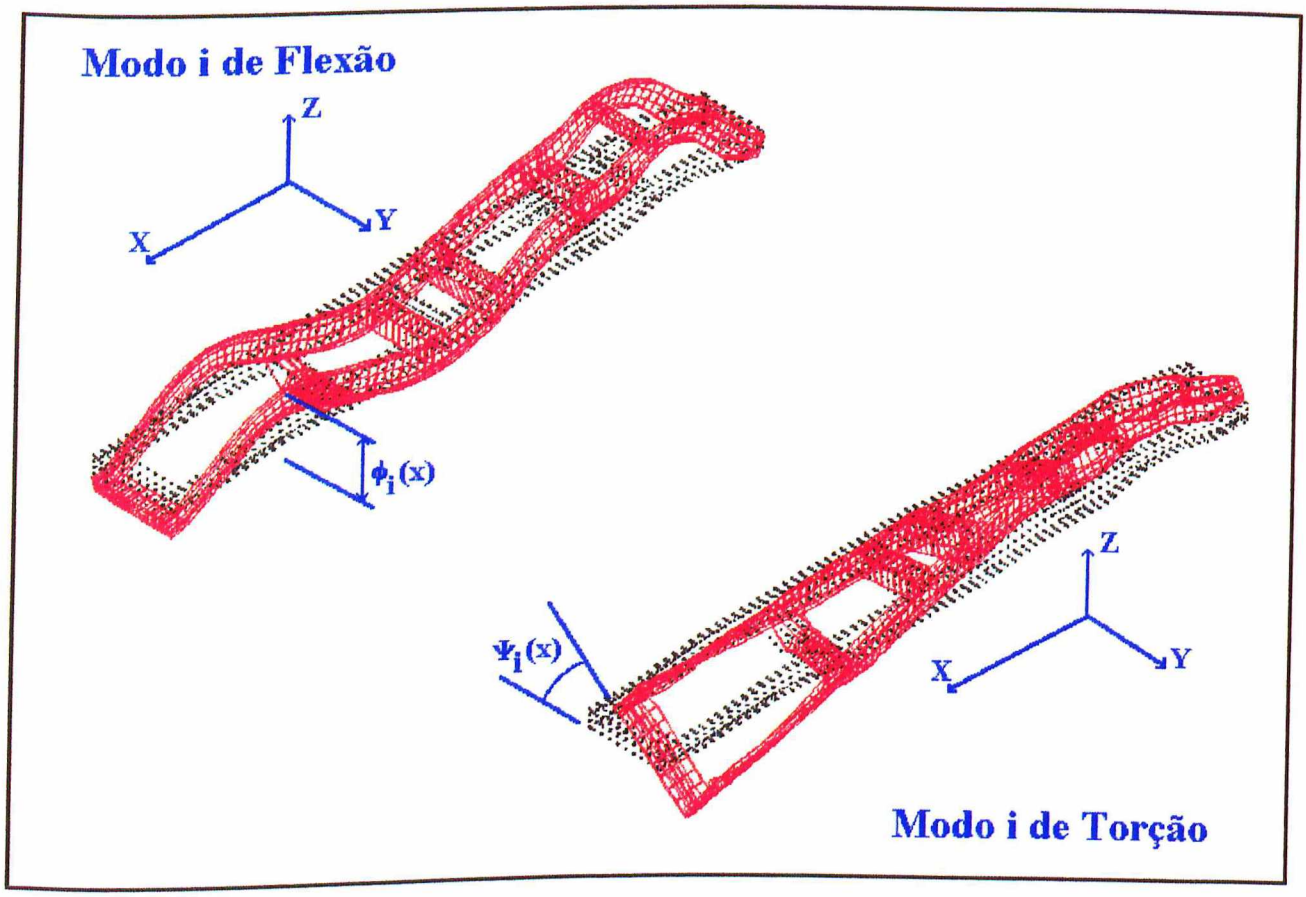

Figura 4.5: Obtenção das funções admissíveis para o deslocamento flexível das estruturas a partir das amplitudes dos seus modos de vibração.

5 - Obtenção dos Tensores de Inércia e Propriedades de Área

A determinação dos tensores de inércia dos componentes do veículo é tradicionalmente feita através de procedimentos experimentais. Estes experimentos são geralmente muito trabalhosos e de execução complicada.

Devido à assimetria de alguns componentes como o conjunto propulsor e à ampla liberdade de posicionamento da carga no veículo, tem-se também o problema de estabelecer as direções dos eixos principais de inércia para cada caso de interesse.

Outro aspecto que deve ser levado em conta é a necessidade de protótipos para as determinações experimentais, o que dificulta sobremaneira o trabalho com componentes em fase de projeto. Além disto, qualquer modificação introduzida num componente implica, a rigor, em um novo ensaio.

Somado aos problemas citados, tem-se ainda o problema do custo elevado e o grande tempo exigido por um procedimento deste porte.

Com base em todas estas dificuldades, propôs-se a construção de modelos computacionais sólidos utilizando um software de CAD. No caso específico desta dissertação, foi utilizado o software CATIA instalado na Mercedes-Benz do Brasil S.A..

A determinação das propriedades de área da seção transversal do chassis (quer seja do caminhão ou da carreta) apresenta as mesmas dificuldades enumeradas para a determinação dos momentos de inércia.

O uso de aproximações matemáticas é desaconselhado pois o chassis do caminhão apresenta seção transversal extremamente variável. Além de uma grande variação numérica das propriedades, observa-se que ela ocorre de forma brusca na região das travessas.

A solução encontrada para este problema foi utilizar novamente o software de CAD CATIA para fazer estas determinações através de uma varredura de seções transversais ao longo do comprimento do chassis.

5.1 - Determinação dos Tensores Principais de Inércia

Para a determinação dos tensores de inércia foram construidos modelos sólidos a partir do desenho de projeto de cada componente, tomando-se sempre o cuidado de preservar ao máximo possível a sua geometria real.

No Anexo 4, pode-se ver as figuras correspondentes a cada modelo construido. As plotagens foram feitas no modo de sombreamento, de forma a dar uma maior percepção espacial da figura. Cabe citar no entanto, que todos os modelos desenhados possuem geometria interna compatível com os componentes reais. Isto é de grande importância no caso do motor, diferencial do eixo traseiro, pneus e etc, onde existem grandes volumes internos sem material. No caso da cabine, foi desenvolvido um sólido semelhante a uma casca, respeitando a sua geometria original.

Com os modelos prontos, bastou utilizar o comando ANALYSIS - INERTIA do CATIA para obter, de forma praticamente instantânea, os valores de massa, volume, posição do centro de gravidade, orientação espacial dos eixos principais de inércia e momentos principais de inércia.

Na tabela 5.1 tem-se os valores obtidos para todas as propriedades acima citadas, além do número da figura correspondente ao sólido no Anexo 4. Na figura 5.1, pode-se ver uma cópia da tela do CATIA no momento do cálculo das propriedades de inércia do chassis do caminhão. Nota-se por esta figura que os eixos de referência possuem orientação diferente da utilizada até agora neste trabalho.

No sistema de referência do CATIA, o eixo **X** é longitudinal ao veículo, porém apontando para trás. O eixo **Y** é transversal ao veículo, apontando da es-

querda para a direita e o eixo Z permanece vertical, apontando para cima. A origem deste sistema se localiza a 160 [mm] atrás do eixo dianteiro e 221,3 [mm] acima da parte interna da aba superior da longarina, conforme pode ser visto na figura 5.2.

Tabela 5.1: Propriedades de inércia obtidas através dos modelos sólidos do CATIA.

Componente	Figura em que Aparece no Anexo 4	Volume [m^3]	Massa [Kg]	Posição do Centro de Gravidade [m]	Orientação Espacial dos Eixos Principais de Inércia			Momentos Principais de Inércia [Kg * m^2]		
					Eixo I1	Eixo I2	Eixo I3	Eixo I1	Eixo I2	Eixo I3
Chassis do Caminhão	A4.1	0,05213	409,23	x= 2,225	1	0	0	59,32	1760,86	1811,95
				y= 0	0	-1	0			
				z= -0,363	0	0	-1			
Cabine	A4.2	0,05216	409,43	x= 0,403	0,939	0	0,344	450,57	725,49	850,33
				y= 0	0	-1	0			
				z= 0,592	0,344	0	-0,939			
Conjunto Propulsor	A4.3	0,1718	1348,63	x= 0,092	0,989	0,02	-0,145	86,63	605,51	647,13
				y= 0,012	-0,146	0,056	-0,988			
				z= -0,209	-0,012	0,998	0,058			
Eixo Dianteiro Completo	A4.4	0,06748	529,72	x= -0,160	0	1	0	37,65	469,28	471,16
				y= 0	-0,014	0	-0,998			
				z= -0,723	-0,998	0	0,014			
Eixo Dianteiro Parcial	A4.5	0,02117	166,19	x= -0,162	0	1	0	0,0008	62,2	62,46
				y= 0	0	0	-1			
				z= -0,805	-1	0	0			
Eixo Traseiro Completo	A4.6	0,1922	1508,9	x= 4,440	0	1	0	169,22	874,54	874,54
				y= 0	0	0	-1			
				z= -0,718	-1	0	0			
Eixo Traseiro Parcial	A4.7	0,06446	506	x= 4,440	0	1	0	16,71	96,94	96,97
				y= 0	0	0	-1			
				z= -0,718	-1	0	0			
Carreta Carregada (Placa de Aço com 20 [cm] de espessura)	A4.8	4,67998	36740	x= 7,859	1	0	0	21147	237460	257480
				y= 0	0	-1	0			
				z= 0,369	0	0	-1			

Apesar do grande volume de trabalho e tempo investido na elaboração dos modelos, os resultados desejados foram obtidos a um custo relativamente baixo.

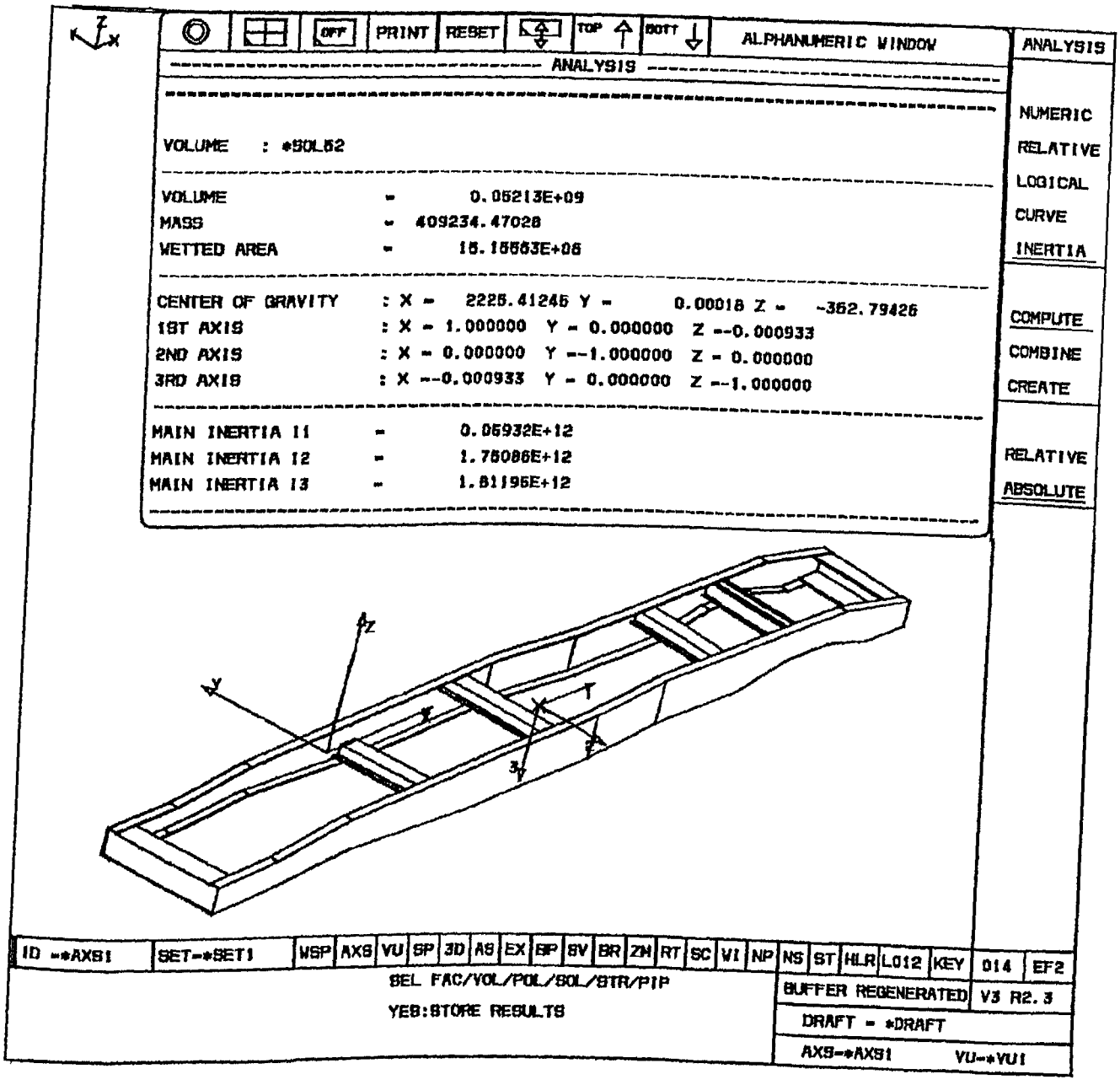

Figura 5.1: Exemplo de cálculo no CATIA.

8342/95

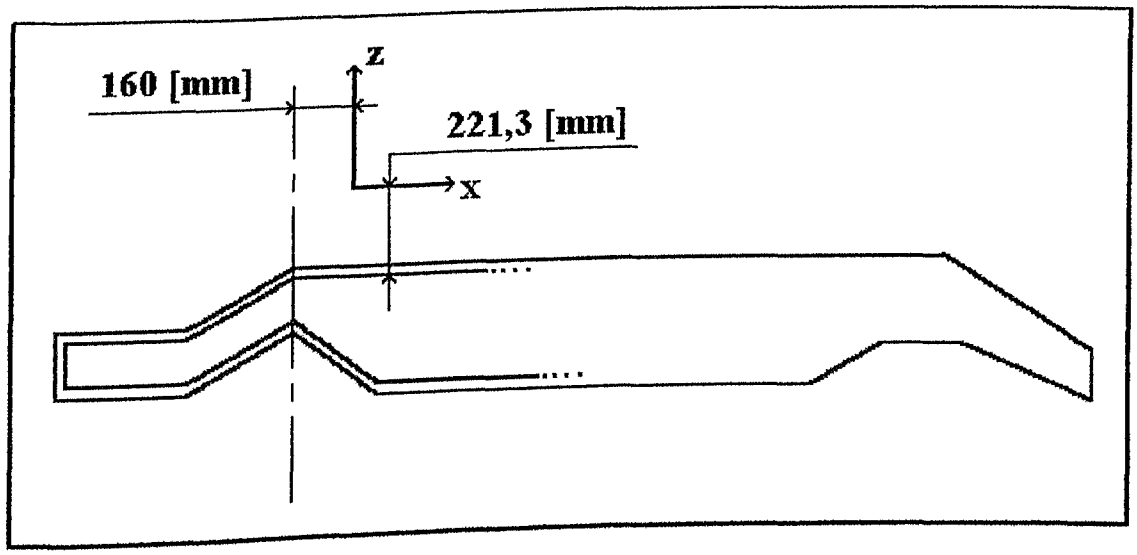

Figura 5.2: Esquema do referencial usado pelo CATIA.

5.2 - Determinação das Propriedades de Área

A determinação das propriedades de área da seção transversal dos chassis, considerados flexíveis, é necessária para avaliação das expressões (2.8), (2.13), (2.36) e (2.42). Nestas equações define-se as matrizes massa e rigidez correspondentes ao movimento flexível do sistema.

As propriedades que devem ser determinadas em função da posição são: Área da seção transversal (**S(x)**), momento de inércia de área em torno da linha neutra (**I(x)**), momento de inércia de massa por unidade de comprimento ($\mathbf{I_\theta(x)}$) e momento de inércia polar (**J(x)**).

Partindo do desenho de projeto do chassis do caminhão, foram feitos vários cortes em posições estratégicas, visando capturar os valores das propriedades e a sua tendência de variação em função da posição. O cálculo é praticamente instantâneo a partir do momento em que se tem disponível o desenho e o corte.

Na tabela 5.2 pode-se ver os valores calculados para 28 seções transversais diferentes do chassis do caminhão. Nas figuras A4.9 e A4.10 do anexo 4 pode-se ver um desenho indicativo dos cortes feitos no chassis do caminhão e da carreta, respectivamente.

Tabela 5.2: Propriedades de área calculadas para o chassis do caminhão.

Número do Corte	Posição em X [m]	Área da Seção Transversal [m^2 * 10^-3]	Momento de Inércia de Área [m^4 * 10^-3]	Momento de Inércia de Massa por Unidade de Comprimento [Kg * m]	Momento de Inércia Polar [m^4 * 10^-3]
1	-1,43	16,158	0,10513	15,10545	1,92426
2	-1,19	6,627	0,03441	9,89788	1,26088
3	-0,81	4,631	0,02623	6,91993	0,88152
4	-0,16	5,006	0,0356	7,5779	0,96534
5	0,49	9,184	0,07929	14,15484	1,80316
6	0,581	25,309	0,44075	34,49	4,39319
7	0,706	37,651	0,42312	57,05	7,26795
8	0,83	25,857	0,32549	37,96	4,83533
9	1,19	6,236	0,07953	9,83992	1,25349
10	1,575	15,154	0,12454	16,68699	2,12573
11	1,66	15,864	0,15337	18,12796	2,30929
12	1,745	15,154	0,12454	16,68699	2,12573
13	2,253	18,885	0,14347	19,63104	2,50077
14	2,34	18,076	0,17176	19,83056	2,52619
15	2,427	20,222	0,1521	20,96813	2,6711
16	2,54	8,537	0,10742	12,2836	1,56479
17	3,26	9,214	0,11647	11,23269	1,43092
18	3,395	18,623	0,14314	18,23731	2,32322
19	3,49	50,308	0,25766	71,2	9,06984
20	3,83	9,214	0,11647	11,23269	1,43092
21	4,065	8,46	0,07297	10,05144	1,28044
22	4,13	8,234	0,06249	9,71953	1,23816
23	4,17	8,096	0,05654	9,51921	1,21264
24	4,21	7,957	0,05096	9,32181	1,18749
25	4,44	6,978	0,03918	8,12233	1,03469
26	4,785	4,847	0,03111	5,20652	0,66325
27	5,14	19,61	0,07904	24,80599	3,16
28	5,485	29,555	0,1282	23,02583	2,93323

A figura 5.3 mostra um exemplo de tela do CATIA no momento do cálculo das propriedades de área de uma seção do chassis do caminhão. Observa-se que o referencial usado nesta figura é o mesmo apresentado na figura 5.2. Nas figuras 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 são mostradas as curvas das propriedades de área em função da posição em X. Nota-se um significativo aumento nos valores na região de cada travessa.

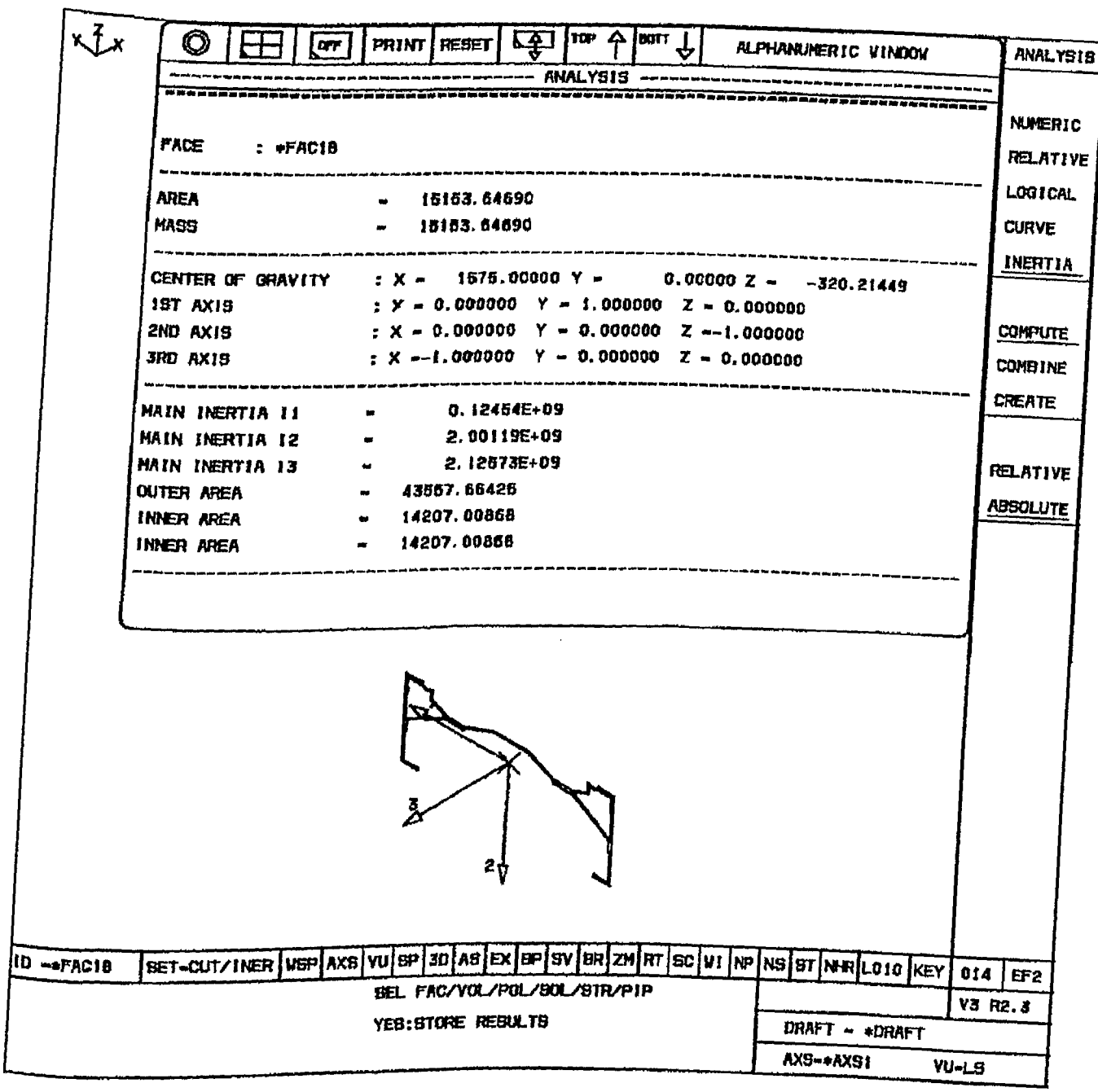

Figura 5.3: Exemplo do cálculo de propriedades de área.

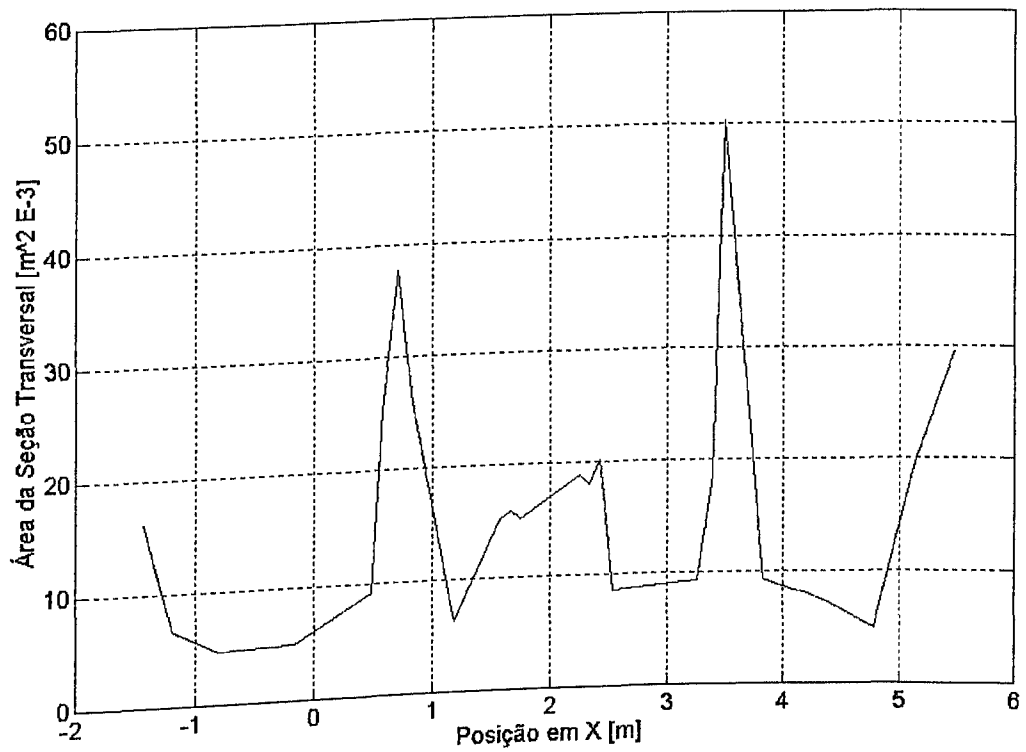

Figura 5.4: Propriedades de área em função da posição (área).

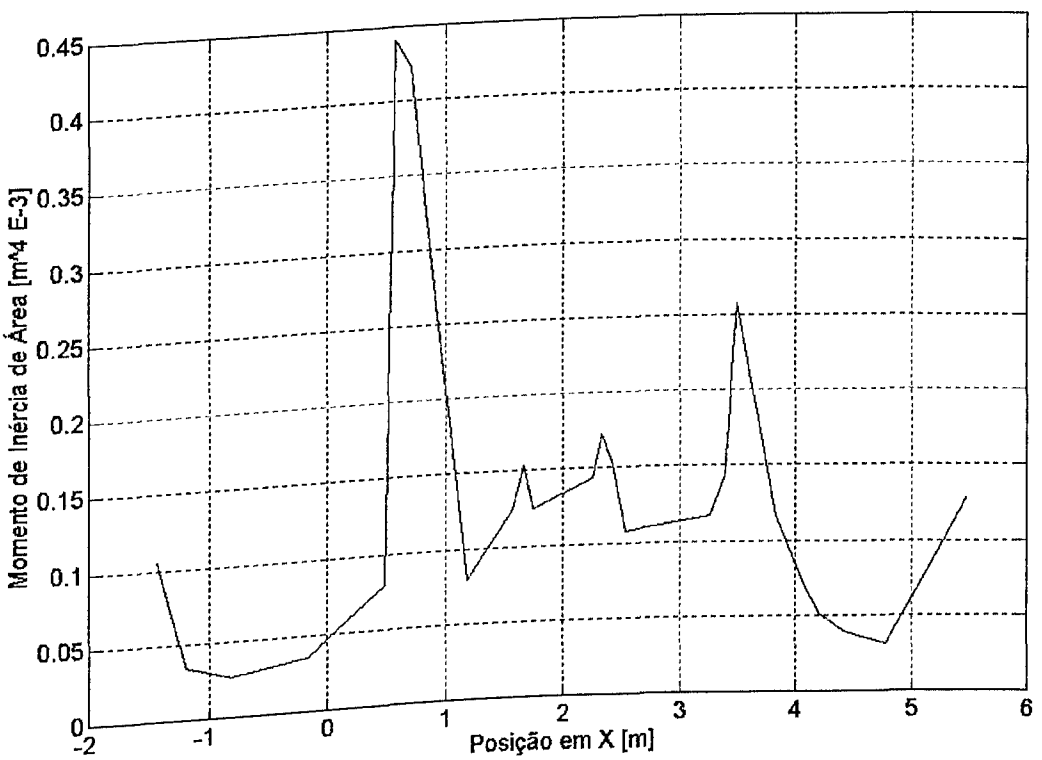

Figura 5.5: Propriedades de área em função da posição (momento de inércia).

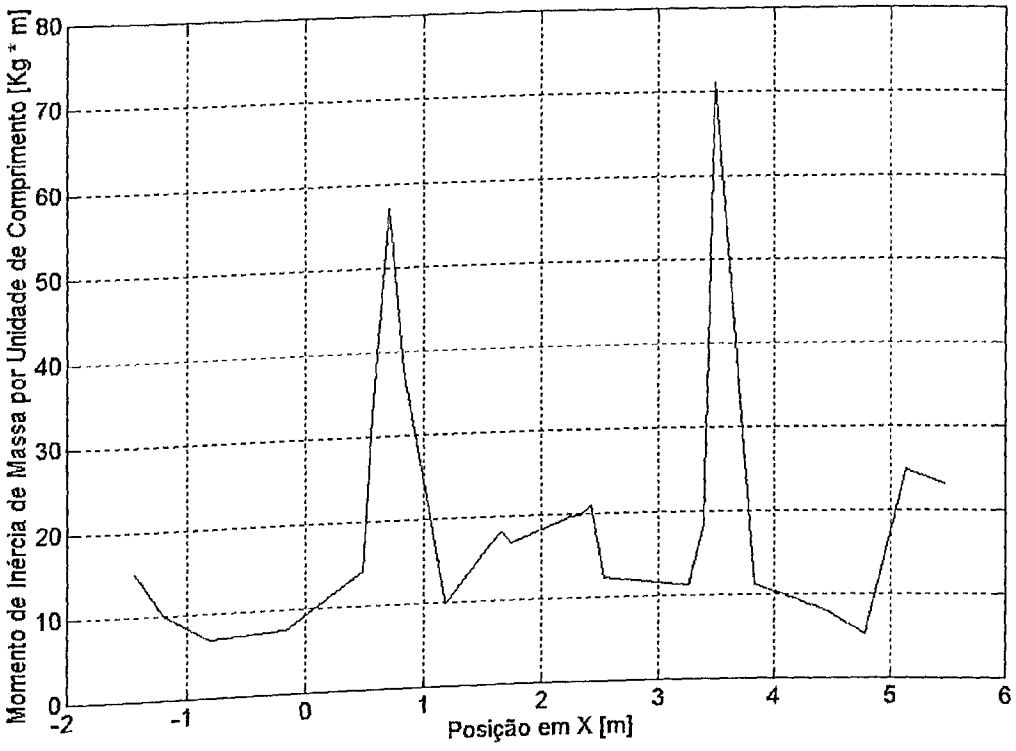

Figura 5.6: Propriedades de área em função da posição (momento de inércia de massa por unidade de comprimento).

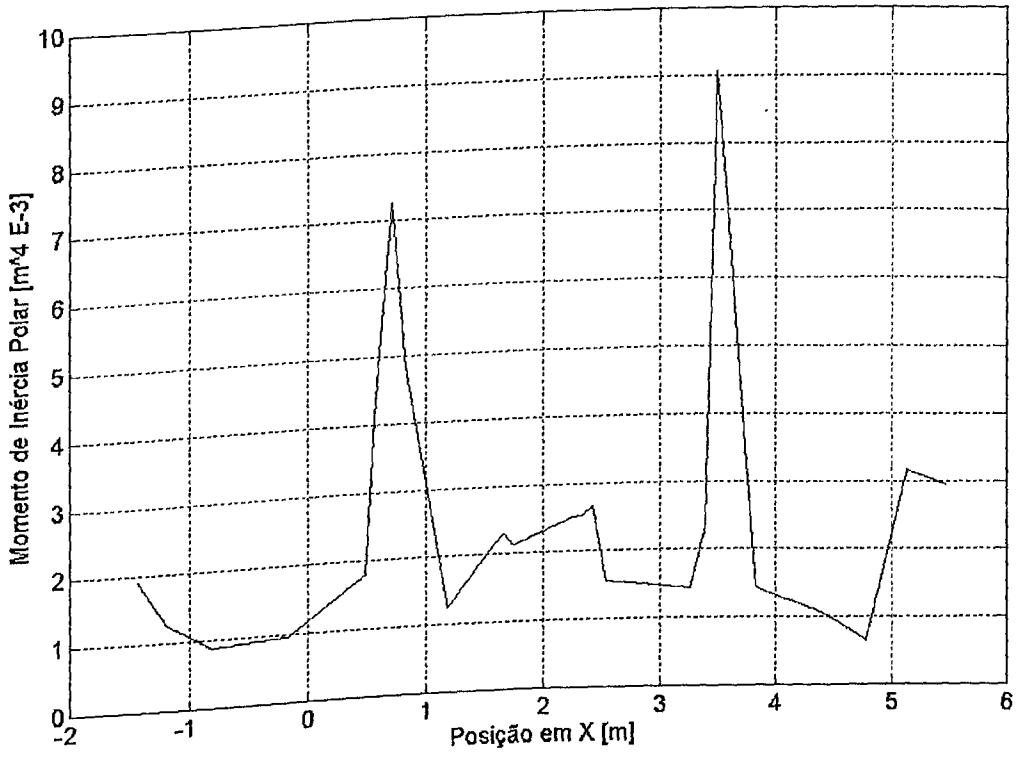

Figura 5.7: Propriedades de área em função da posição (momento de inércia polar).

6 - Não Linearidades Paramétricas

Quando tem-se por objetivo fazer a modelagem detalhada de um sistema dinâmico, e mais especificamente de um veículo, não se pode desprezar as características não lineares de seus elementos elásticos e dissipativos.

A princípio, considerou-se que toda mola, coxim, estabilizador, amortecedor e pneu tem comportamento não linear, dependente do deslocamento ou velocidade a que estão submetidos. No modelo matemático, os parâmetros **Ki** e **Ci**, associados à rigidez e ao amortecimento são tratados, a nível de computação simbólica, como funções genéricas. Estas funções devem ser definidas numericamente através de curvas características, fornecidas quando da sua utilização em aplicações de simulação.

A caracterização do comportamento não linear de componentes é uma tarefa árdua e que envolve tecnologias distintas para cada caso, uma vez que os dispositivos de interesse possuem natureza diferente (molas metálicas, coxins de borracha, estabilizadores que trabalham por torção, amortecedores viscosos e pneus que podem operar dentro de uma faixa variável de pressão e velocidade).

Com base nos aspectos apresentados, optou-se por trabalhar no sentido de obter as informações desejadas diretamente do fabricante de cada componente, que a princípio possui a necessária tecnologia e equipamentos adequados às determinações. Este trabalho foi efetuado através da Mercedes-Benz do Brasil S.A., que colocou à disposição todos os dados disponíveis de seus veículos, além de intervir junto aos fabricantes de auto-peças para conseguir o material restante. Em alguns casos a serem apresentados, as características do componente são obtidas através de softwares específicos, devidamente validados, e que se encontram disponíveis na Mercedes-Benz do Brasil S.A..

O procedimento adotado permite trabalhar com parâmetros próximos dos reais, uma vez que os componentes são construidos e testados de forma a respeitar suas especificações de projeto.

6.1 - Caracterização das Molas

As molas são tradicionalmente caracterizadas nos modelos matemáticos por uma rigidez constante e linear, dada por uma força resistiva por unidade de deflexão. Observa-se na prática que as molas de lâmina apresentam um comportamento compatível com esta consideração.

Levando em conta que um veículo articulado pesado pode ser submetido a uma grande variação de massa entre as condições de carga máxima e vazio, fica difícil encontrar uma mola de comportamento linear que represente uma boa solução de compromisso quanto ao conforto e estabilidade nestas duas condições.

Para contornar esta situação de conflito, utiliza-se molas de dois estágios na suspensão traseira do caminhão. Na figura 6.1, pode-se ver a montagem de uma mola deste tipo onde nota-se que:

1) Se o veículo trafega com pouca ou nenhuma carga, apenas o primeiro estágio, de rigidez relativamente baixa, irá trabalhar.

2) Em situações de carga elevada, os dois feixes de mola irão trabalhar em paralelo, proporcionando uma alta rigidez. Observa-se que o segundo estágio da mola só começa a trabalhar depois que a suspensão do veículo atinge um determinado curso. No caso do veículo Mercedes-Benz LS-1941, esta distância corresponde a 77,8 [mm].

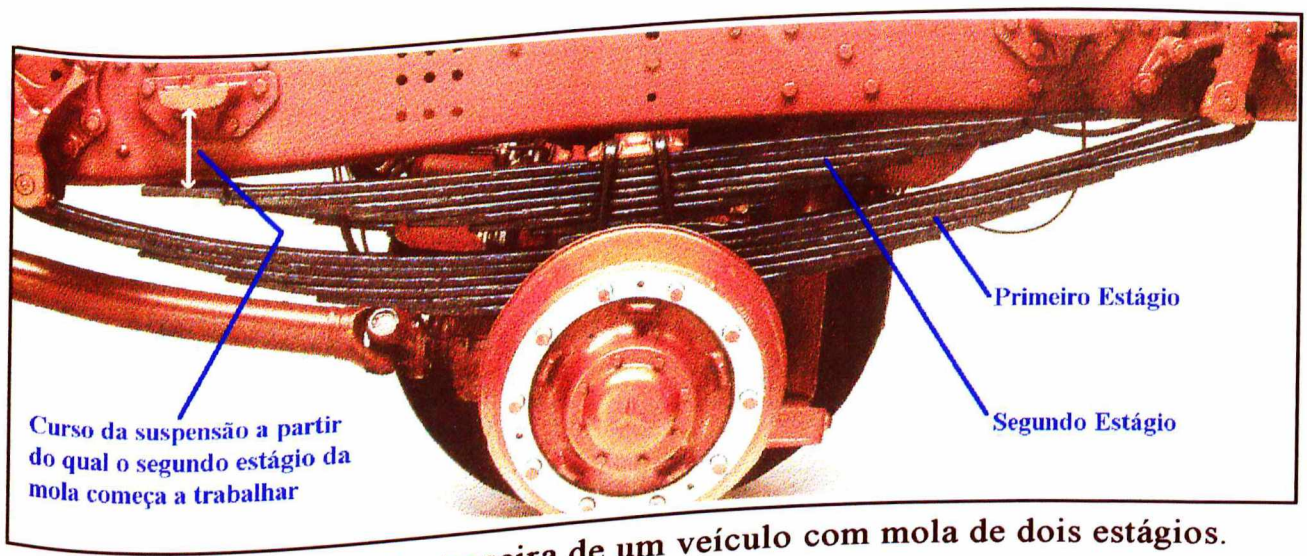

Figura 6.1: Suspensão traseira de um veículo com mola de dois estágios.

Para estabelecer numericamente a rigidez das molas do veículo, foi utilizado um software específico e devidamente validado, disponível no departamento de cálculo estrutural e dimensionamento da Mercedes-Benz do Brasil S.A.. Nas figuras 6.2, 6.3 e 6.4 são mostradas as curvas características das molas dianteiras, traseiras e da cabine do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

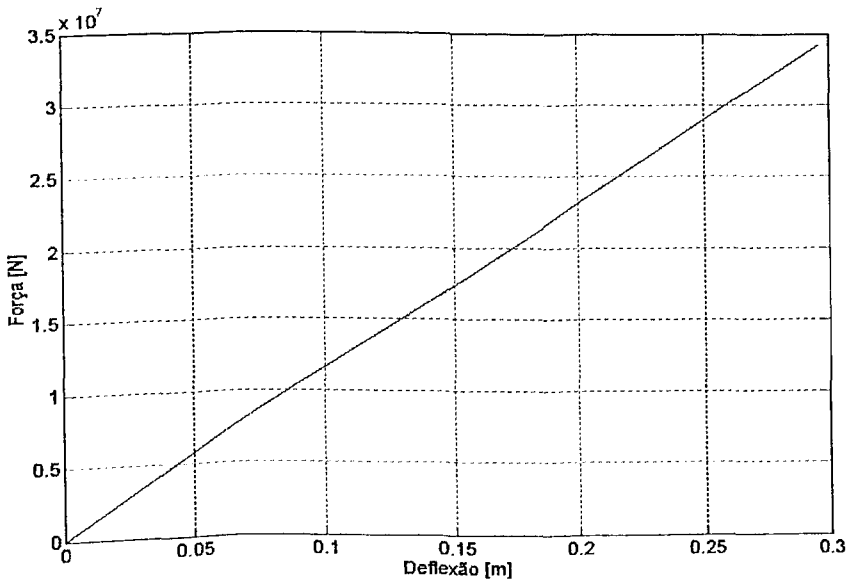

Figura 6.2: Curva característica das molas dianteiras do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

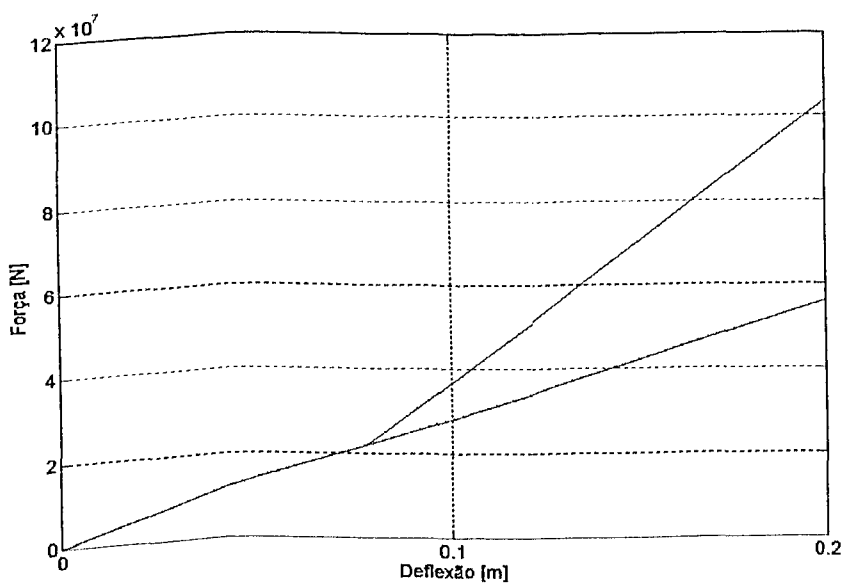

Figura 6.3: Curva característica das molas traseiras do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

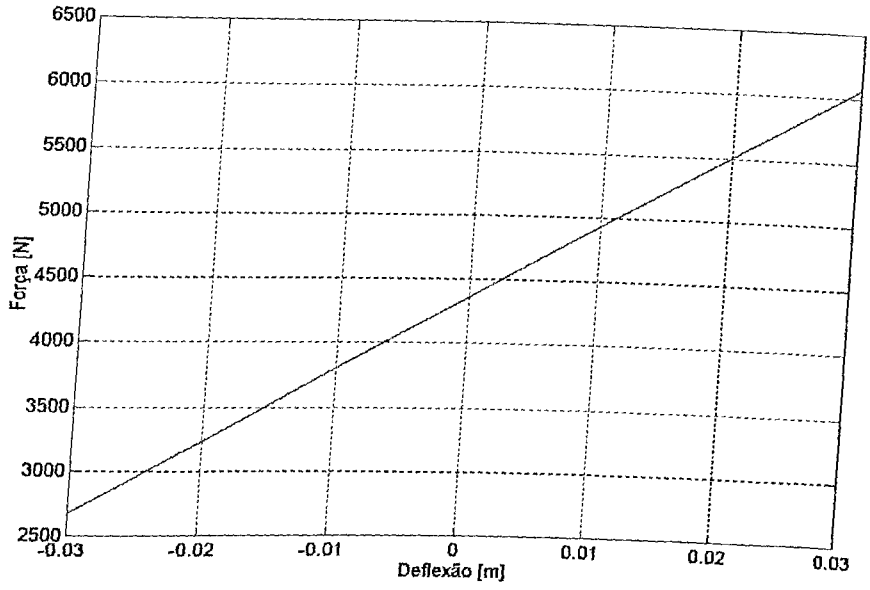

Figura 6.4: Curva característica da mola de cabine do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

Para efeito de melhor representar o comportamento real das molas, foi implementado um programa computacional capaz de interpolar matematicamente as curvas características a partir de seus pontos chave. Com isto, obtém-se uma curva de derivada contínua na passagem do primeiro para o segundo estágio de rigidez de uma mola que o contenha. Além disto, este procedimento torna possível a inclusão de efeitos de fim de curso na rigidez.

Os efeitos de fim de curso ocorrem quando a suspensão atinge o seu curso máximo e toca o batente metálico, enrijecendo drasticamente o sistema. No caso do eixo dianteiro do caminhão, antes de ocorrer o contato metálico, a suspensão encontra um coxim que suaviza o impacto.

O procedimento de interpolação das curvas, bem como a inclusão de efeitos de fim de curso é de especial interesse quando se tem em mente a utilização do modelo matemático em um programa de simulação computacional de veículos.

Na figura 6.5 pode-se ver um gráfico com pontos interpolados, gerado a partir da curva característica da mola de dois estágios da suspensão traseira do veículo Mercedes-Benz LS-1941. Na figura 6.6 tem-se a mesma curva, modificada de forma a obter o seu enrigecimento no final do curso.

A curva usada na interpolação é do tipo **SP LINE** e a função genérica que descreve a rigidez da mola **Ki(x)** é dada pela sua derivada.

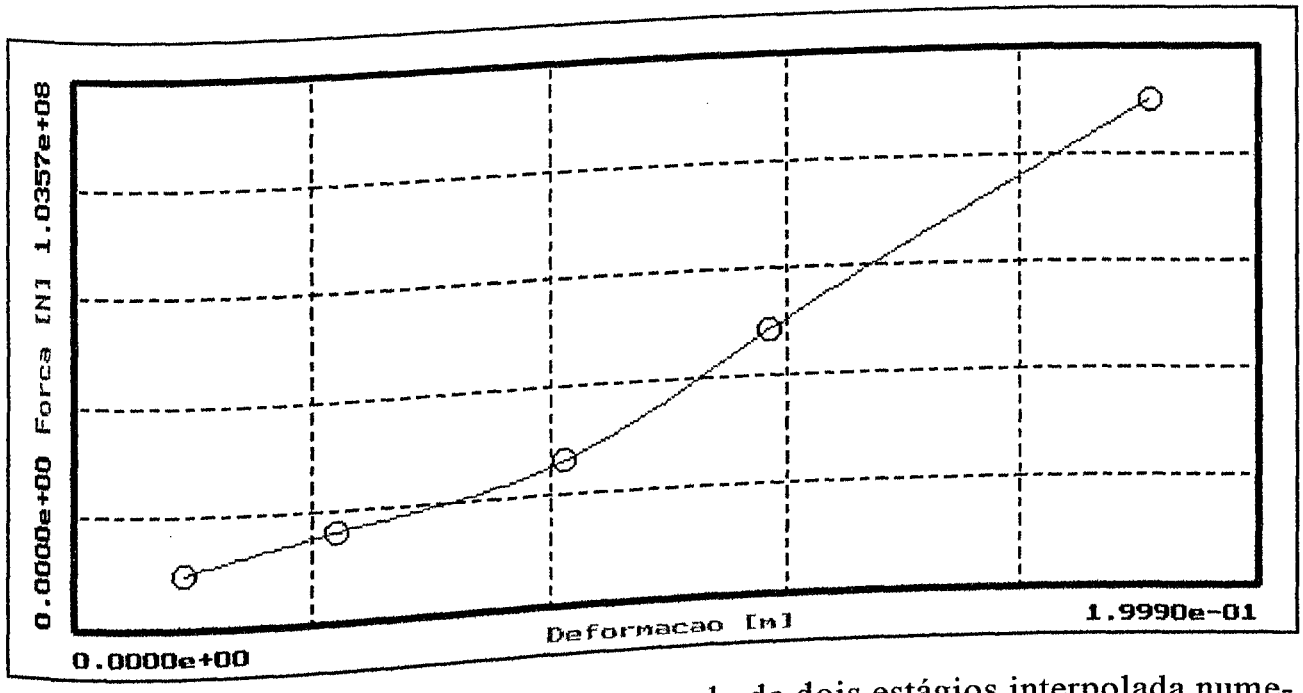

Figura 6.5: Curva característica de uma mola de dois estágios interpolada numericamente por uma SP LINE.

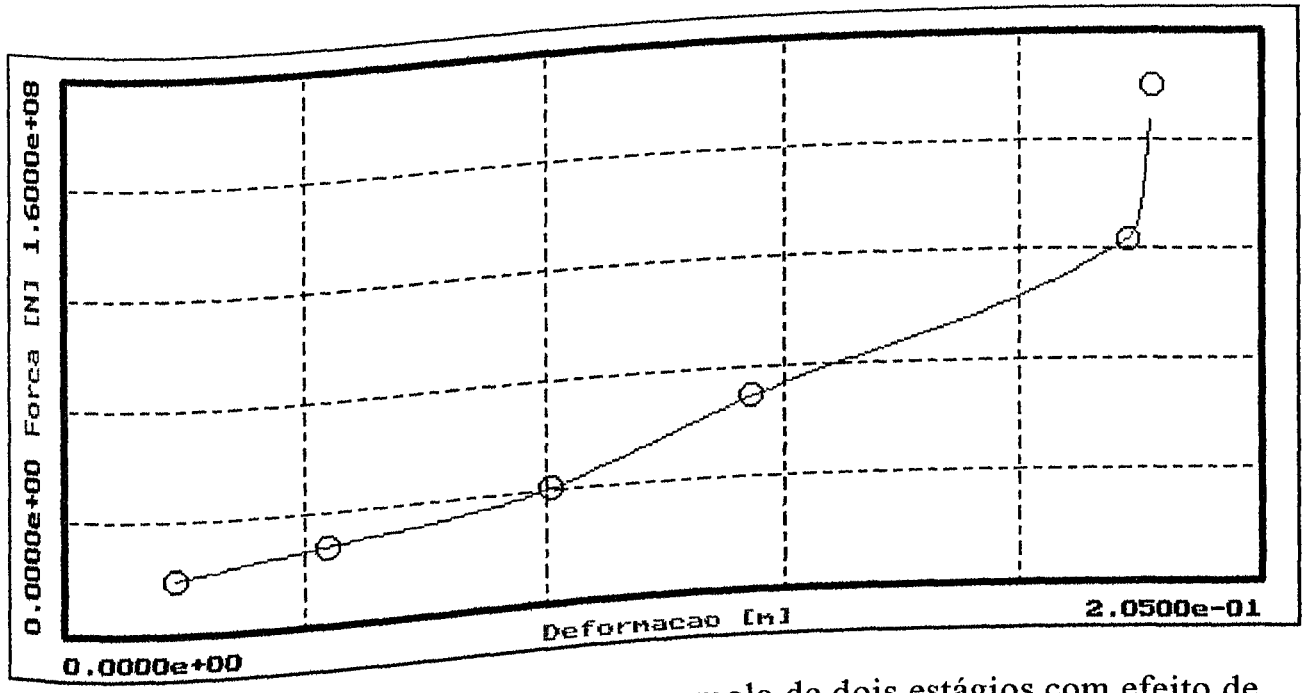

Figura 6.6: Curva característica de uma mola de dois estágios com efeito de enrigecimento no final do curso.

6.2 - Caracterização das Barras Estabilizadoras.

As barras estabilizadoras são elementos elásticos para os quais também existe na Mercedes-Benz do Brasil S.A. um software de cálculo específico. Este software permite obter de forma precisa as suas características de rigidez torcional, fazendo todo o dimensionamento do componente. Como resultado, obtém-se uma tabela de valores do momento estabilizador em função da deflexão angular da barra.

Na tabela 6.1 pode-se ver os resultados obtidos para a barra estabilizadora dianteira do veículo Mercedes-Benz LS-1941. Os valores obtidos também são interpolados numericamente, dando origem à curva da figura 6.7. A derivada desta curva representa a função genérica que descreve a rigidez torcional da barra estabilizadora **Ki(Ang)**.

Tabela 6.1: Valores obtidos para a rigidez da barra estabilizadora dianteira do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

Ângulo de Torção [Rad]	Momento Estabilizador [N * m]
0,0175	1068,5
0,0873	8664,4
0,1745	20812
0,2618	34041,4

6.3 - Caracterização da Rigidez Radial dos Pneus

Os pneus são elementos cujo comportamento é de difícil descrição do ponto de vista da modelagem matemática. Estes componentes possuem uma estrutura física complicada, que pode variar muito de um modelo para outro. Além disto, seus parâmetros de operação podem variar dentro de faixas muito amplas. Sendo assim,

as características de rigidez radial dos pneus devem ser obtidas por meio de ensaios controlados.

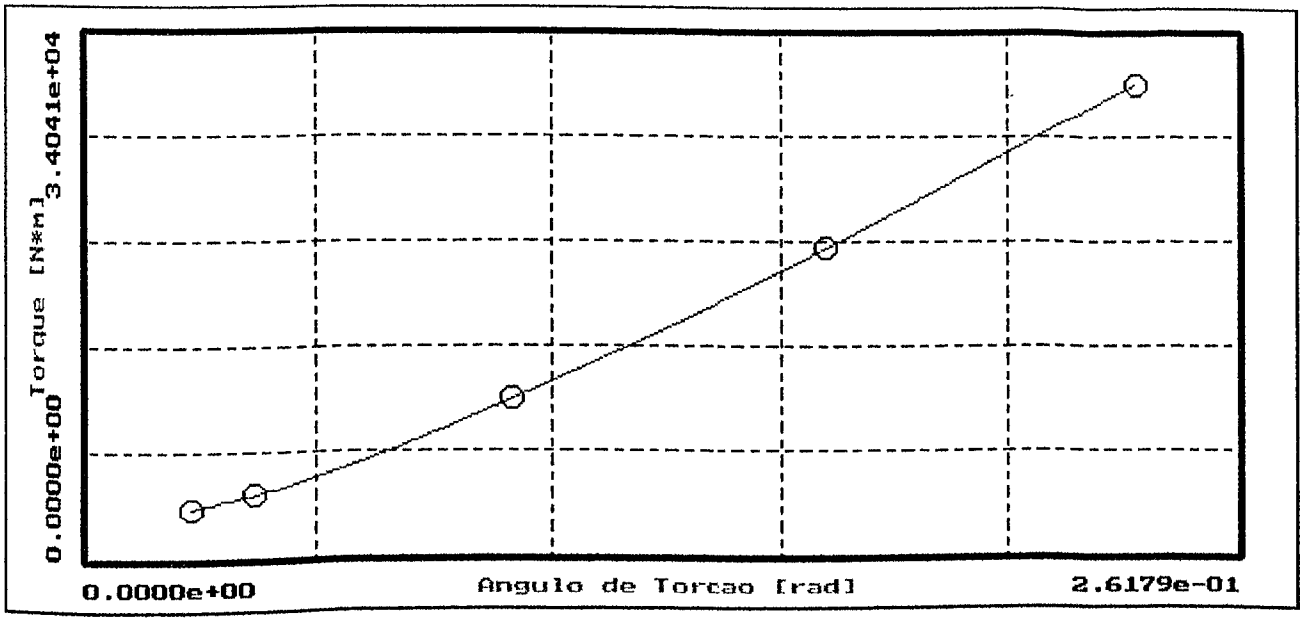

Figura 6.7: Curva característica de uma barra estabilizadora interpolada numericamente por uma SP LINE.

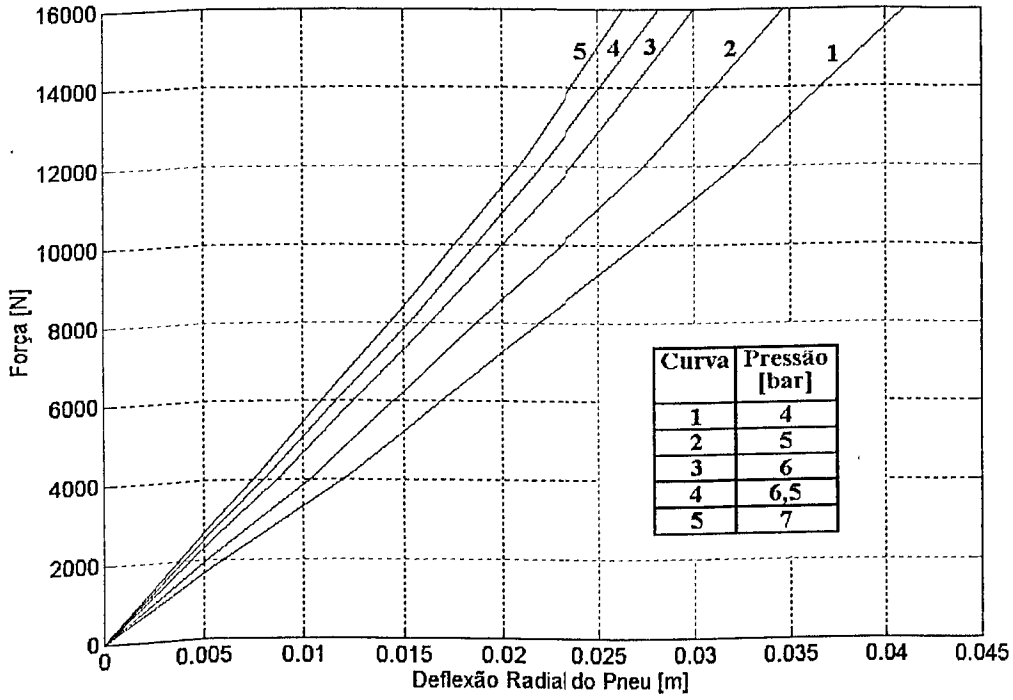

Figura 6.8: Curvas características da rigidez radial do pneu Michelin 225/75 R 17.5 XZA TL 126M operando sob diferentes condições de pressão.

No caso específico desta dissertação foram obtidos junto ao fabricante as características do pneu Michelin 225/75 R 17.5 XZA TL 126M e 295/80 R 22.5 PXZA 152M. Na figura 6.8, tem-se o conjunto de curvas da carga em função da deflexão radial para 5 condições diferentes de pressão do pneu 225/75. As derivadas destas curvas representam a função genérica que descreve a rigidez radial dos pneus **Ki(x)**.

6.4 - Caracterização dos Amortecedores

Os amortecedores são os componentes do veículo responsáveis pela dissipação da energia. Seu principio de funcionamento se baseia na passagem de um fluido (óleo hidráulico) através de micro-furos, válvulas e canais. Por se tratar de um mecanismo que funciona à base de um fluido viscoso, pode-se esperar que ele apresente comportamento não linear. Além disto, a atuação dos amortecedores é diferenciada, sendo que a maior resistência ao movimento, e consequentemente a maior parcela de dissipação de energia, ocorre quando ele se distende.

Os amortecedores estão presentes nas suspensões dianteira e traseira, e também na suspensão da cabine.

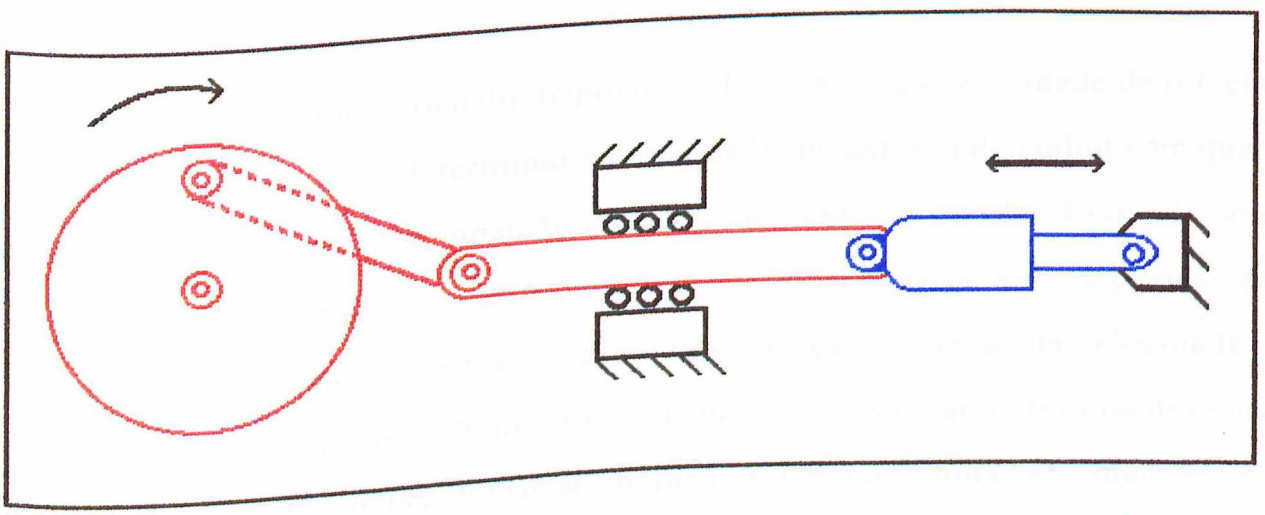

Figura 6.9: Esquema do dispositivo usado para ensaiar os amortecedores.

Devido à sua complexidade construtiva e comportamento não linear, os amortecedores são caracterizados por meio de um ensaio experimental que dá origem a duas curvas. O ensaio dos amortecedores é feito numa máquina que possui um dispositivo do tipo biela-manivela com guia na haste, conforme mostra o esquema da figura 6.9.

O ensaio é realizado a uma velocidade constante de **100** rotações por minuto e com curso variável de **5** a **100 [mm]**. A temperatura é mantida em **20** °C durante o ensaio. Para a aquisição dos valores de força, coloca-se o dispositivo para girar e ao iniciar o **6°** ciclo é feita uma medição da força desenvolvida ao longo do curso, dando origem a um gráfico bolha conforme esquema da figura 6.10.

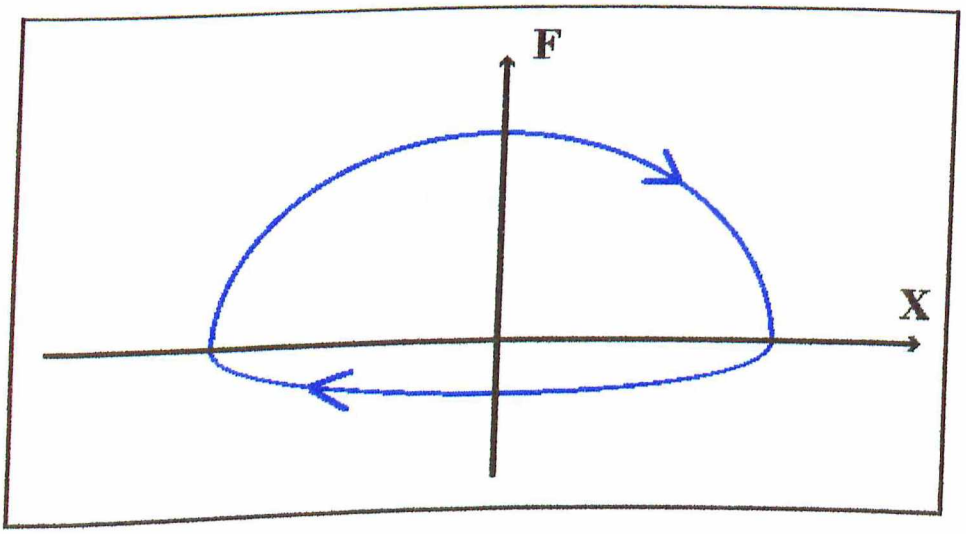

Figura 6.10: Ilustração de um gráfico bolha.

Com base na cinemática do dispositivo de ensaio, sua velocidade de rotação e curso utilizado, pode-se determinar a velocidade instantânea do êmbolo em qualquer ponto, como função da posição ao longo do curso permitido. Tomando-se o valor da força máxima em tração e compressão, pode-se associa-los à posição de velocidade máxima e construir um gráfico desta força em função da velocidade.

Para efeito de projeto de um amortecedor, as curvas são determinadas para um curso máximo de apenas **100 [mm]**, o que corresponde a uma velocidade máxima de **0.56 [m/s]**. Quanto aos testes de resistência dos componentes internos dos

amortecedores, faz-se um ensaio semelhante atinjindo uma velocidade máxima de **5.1 [m/s]**.

Nas figuras 6.11, 6.12 e 6.13, pode-se ver as curvas de absorção de energia (Força x Curso) para os amortecedores dianteiros, traseiros e os da cabine do veículo Mercedes-Benz LS-1941. Tais curvas foram obtidas diretamente do fabricante dos componentes (Cofap) e permitem calcular facilmente a função genérica que descreve a dissipação de energia no amortecedor $Ci(\dot{x})$. Para isto, basta transformar a informação do curso na velocidade máxima correspondente e a seguir derivar a força em relação a esta velocidade.

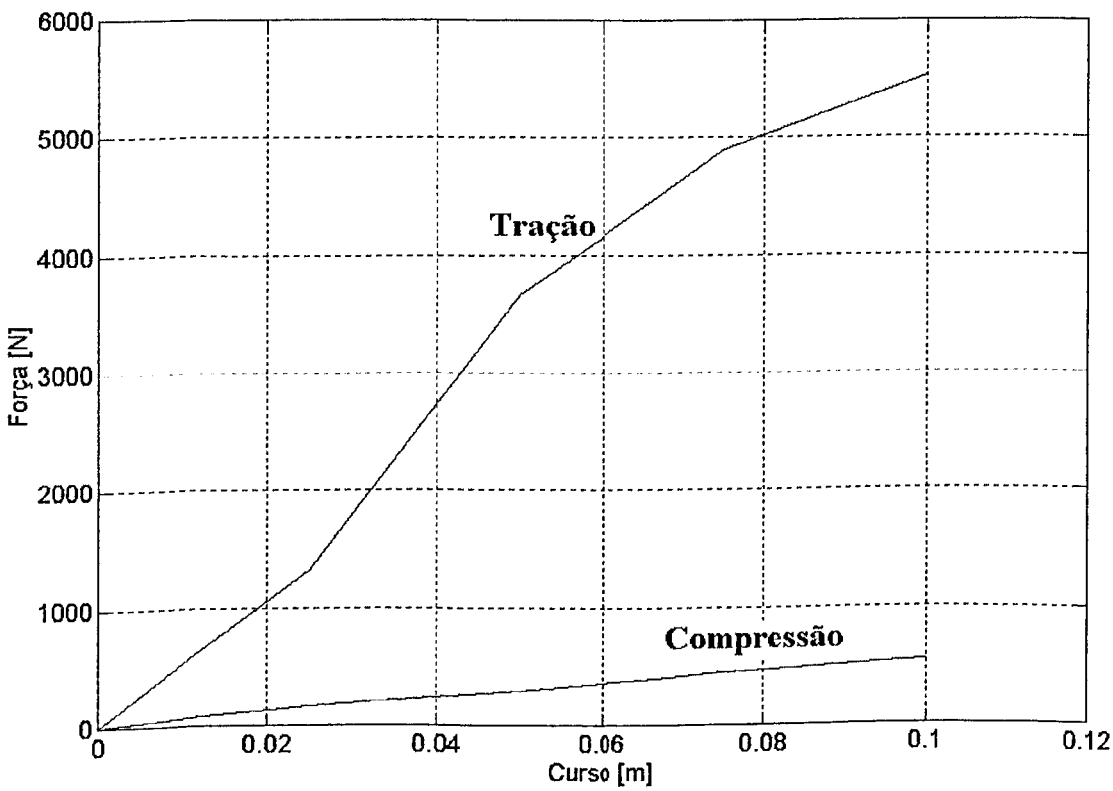

Figura 6.11: Curva de absorção de energia dos amortecedores dianteiros do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

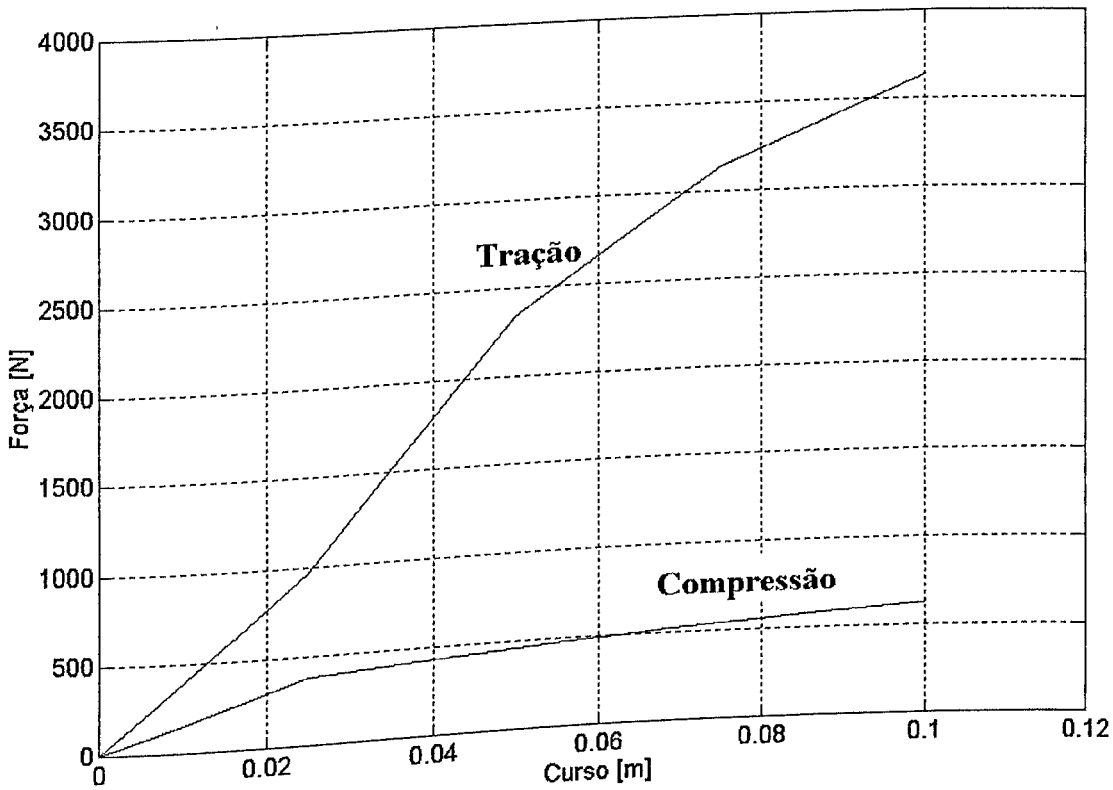

Figura 6.12: Curva de absorção de energia dos amortecedores traseiros do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

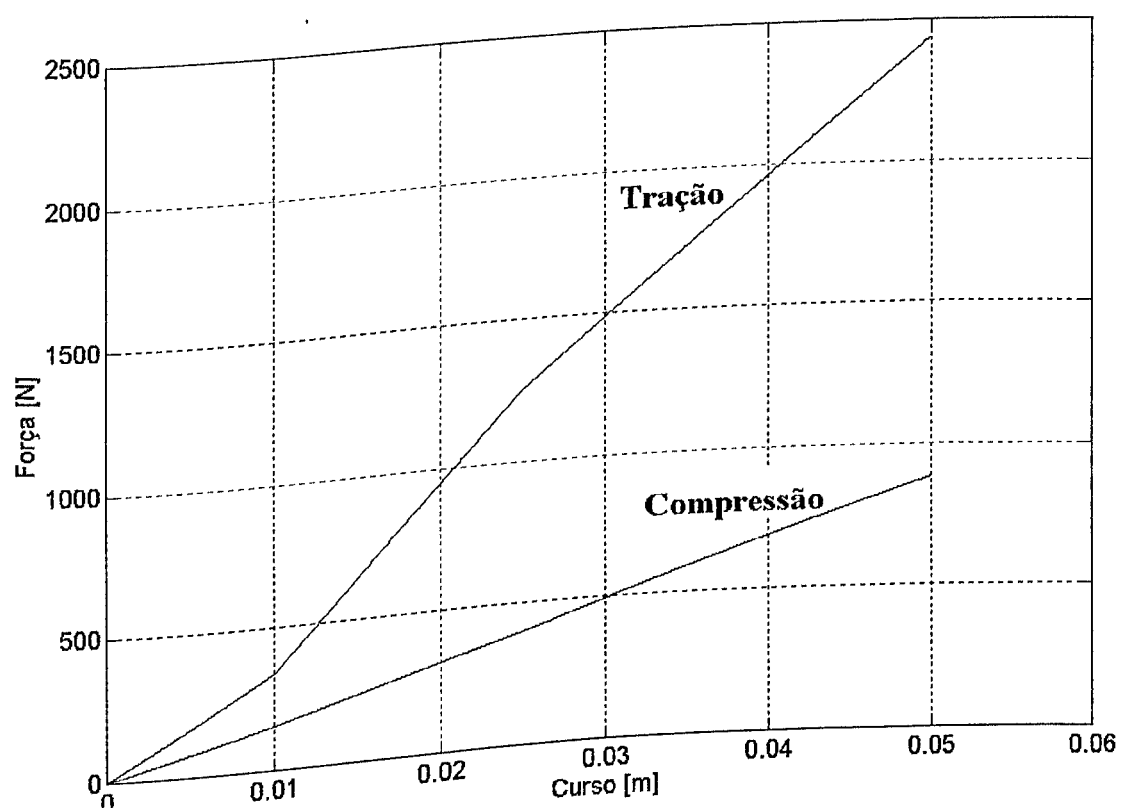

Figura 6.13: Curva de absorção de energia dos amortecedores de cabine do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

7 - Interação do Veículo com o Ambiente e Geração do Perfil da Pista

A interação do veículo com o ambiente se dá de diversas maneiras. Matematicamente, esta interação é introduzida nas equações do movimento na forma de forças generalizadas **Qi** ou de uma excitação pela base (no caso das irregularidades da pista). Os principais fatores externos de influência são:

=> Irregularidades do pavimento;
=> Forças de origem aerodinâmica;
=> Atuação do motorista;
=> Comportamento direcional dos pneus;
=> Comportamento dos pneus em aceleração e frenagem;
=> Disponibilidade de torque motriz.

Neste trabalho será dada atenção aos aspectos que dizem respeito às irregularidades da pista, ficando a abordagem dos demais fatores de influência para trabalhos futuros.

7.1 - Geração das Irregularidades da Pista

As irregularidades da pista apresentam comportamento aleatório. Geralmente, a sua caracterização é feita em termos da função densidade espectral das ondulações. Observa-se que esta função varia de acordo com o tipo de pista que se deseja representar.

A determinação numérica das amplitudes das irregularidades é dada por uma série de harmônicos conforme mostra a equação (7.1).

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{n} A_n \ \mathrm{Sen}(\Omega_n \ x) \qquad (7.1)$$

Cada amplitude A_n, correspondente a uma frequência espacial Ω_n, é calculada a partir da função densidade espectral $S(\Omega)$.

A bibliografia mostra que a função densidade espectral das ondulações de uma pista pode ser representada como sendo proporcional ao inverso da frequência. Na equação (7.2) tem-se a forma geral de uma função densidade espectral deste tipo. Na tabela 1 são mostrados alguns valores típicos usados para os parâmetros **C** e **N**.

$$S(\Omega) = C \ \Omega^{-N} \qquad (7.2)$$

Tabela 7.1: Valores típicos dos coeficiente C e N.

Qualidade da Pista	C [m^3]	N
Pista Muito Boa	0,6 E-6	2,29
Pista Boa	6,0 E-6	2,18
Pista Muito Ruim	56,3 E-6	1,72

Sabe-se que a amplitude média quadrática de uma variável aleatória pode ser calculada integrando-se a sua função densidade espectral ao longo de todo o domínio de frequências, conforme mostrado na equação (7.3).

$$\overline{A}^2 = \int_0^{\infty} S(\Omega) \, d\Omega \qquad (7.3)$$

A raiz quadrada da média quadrática do sinal fornece a sua amplitude RMS. Quando se deseja calcular a amplitude média quadrática de um sinal ou seu valor

RMS dentro de uma banda limitada de frequência, deve-se modificar os limites de integração da equação (7.3) conforme é mostrado na equação (7.4).

$$\overline{A}_{\Omega 1\,\Omega 2}{}^{2} = \int_{\Omega 1}^{\Omega 2} S(\Omega)\, d\Omega \qquad (7.4)$$

Para a aplicação desenvolvida nesta dissertação, foi implementada uma rotina computacional que usa como dados de entrada os coeficientes **C** e **N**, as frequências espaciais mínima (Ω_{min}) e máxima (Ω_{max}) que definem uma banda de interesse e o número de harmônicos (**n**) necessários à composição de **Z(x)**.

Fornecidos os dados de entrada, o programa sorteia aleatoriamente **n** frequências contidas na banda Ω_{min}-Ω_{max} e resolve a integral da equação (7.4) em torno de cada frequência sorteada **Ωi**. Os limites de integração são tomados de forma a delimitar um terço de oitava em torno de cada frequência central. Resolvida a integral, extrai-se a raiz quadrada do valor obtido, definindo com isto a amplitude **Ai** RMS correspondente à frequência **Ωi**. Este procedimento é mostrado nas equação (7.5) e (7.6).

$$Ai^2 = \int_{0,89\,\Omega i}^{1,12\,\Omega i} C\,\Omega^{-N}\, d\Omega \qquad (7.5)$$

$$Ai_{RMS} = \left[\frac{C}{N-1}\,\Omega i^{1-N}\left(0,89^{1-N} - 1,12^{1-N}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7.6)$$

Nas figuras 7.1, 7.2 e 7.3 são mostrados três exemplos de superfície gerada através do procedimento descrito neste item. Os valores de **C** e **N** utilizados são os citados na tabela 1. Neste exemplo de aplicação, utilizou-se **15 harmônicos** na composição de **Z(x)**. A frequência mínima foi fixada em Ω_{min} **= 0,12 [ciclos / m]** e a máxima em Ω_{max} **= 1,1 [ciclos / m]**.

Na figura 7.4 pode-se ver as curvas correspondentes às funções densidade espectral **S(Ω)** definidas pelos parâmetros da tabela 1.

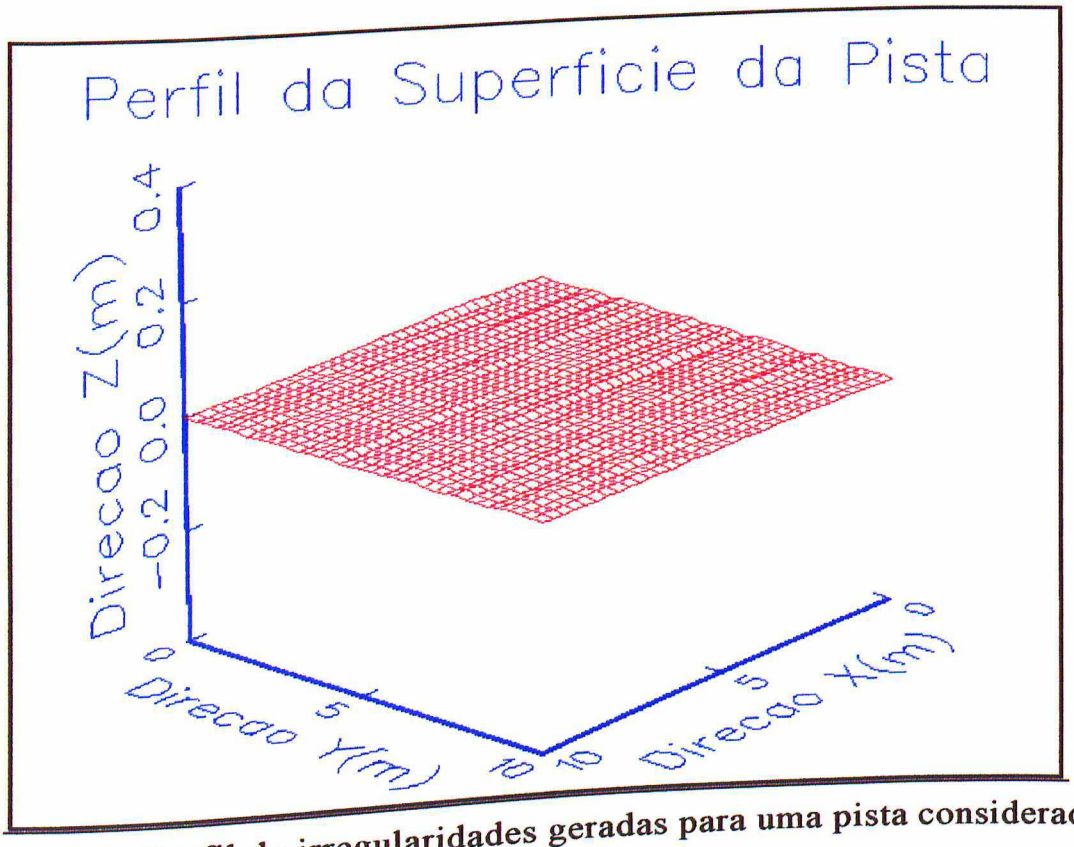

Figura 7.1: Perfil de irregularidades geradas para uma pista considerada muito boa.

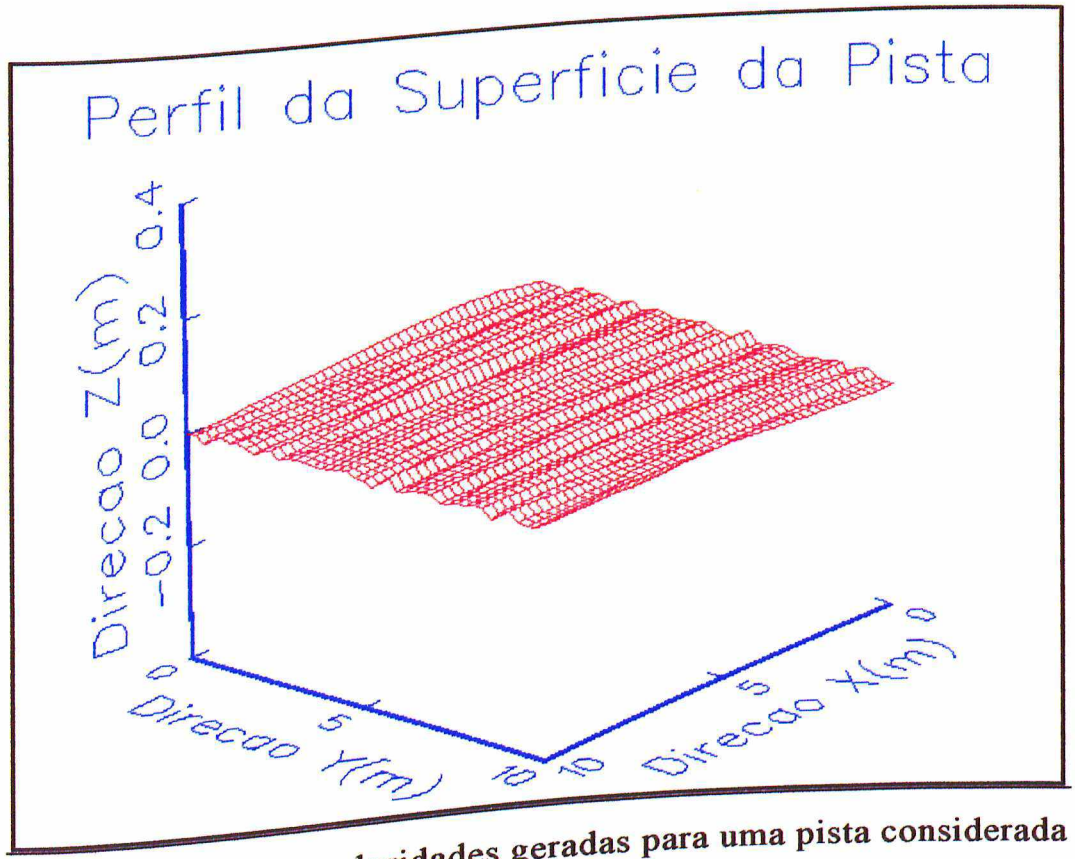

Figura 7.2: Perfil de irregularidades geradas para uma pista considerada boa.

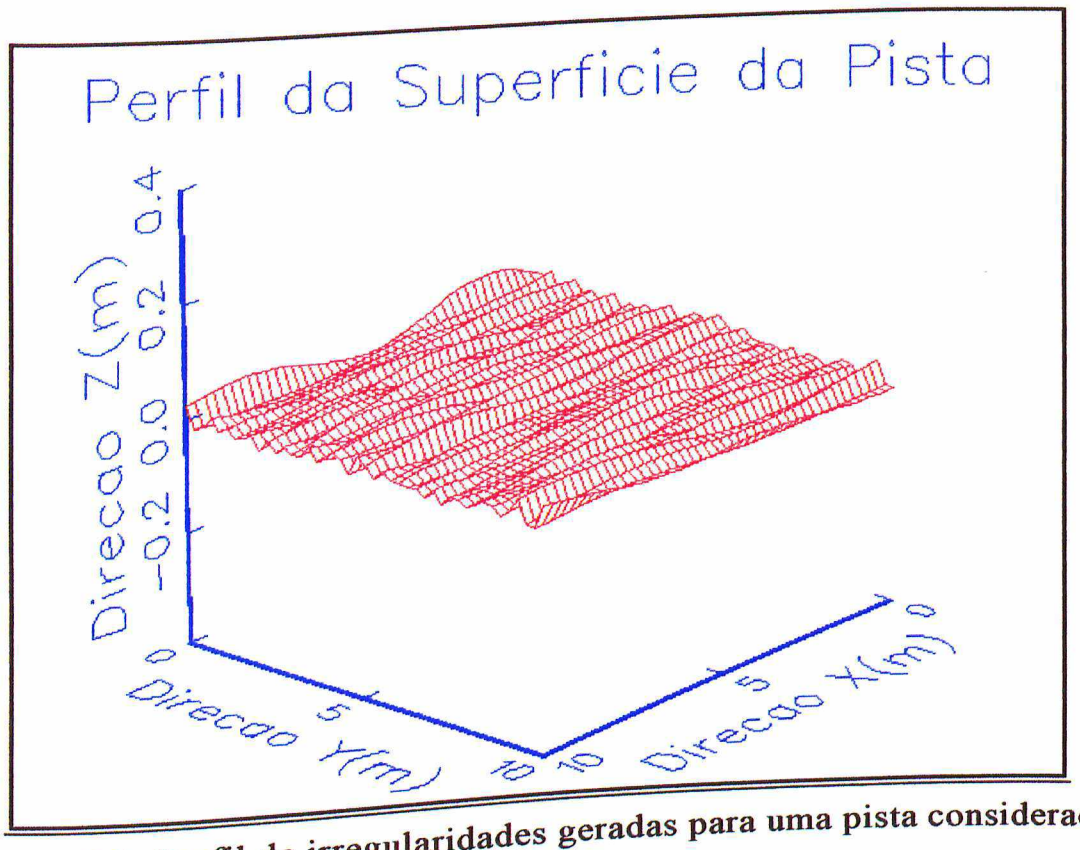

Figura 7.3: Perfil de irregularidades geradas para uma pista considerada muito ruim.

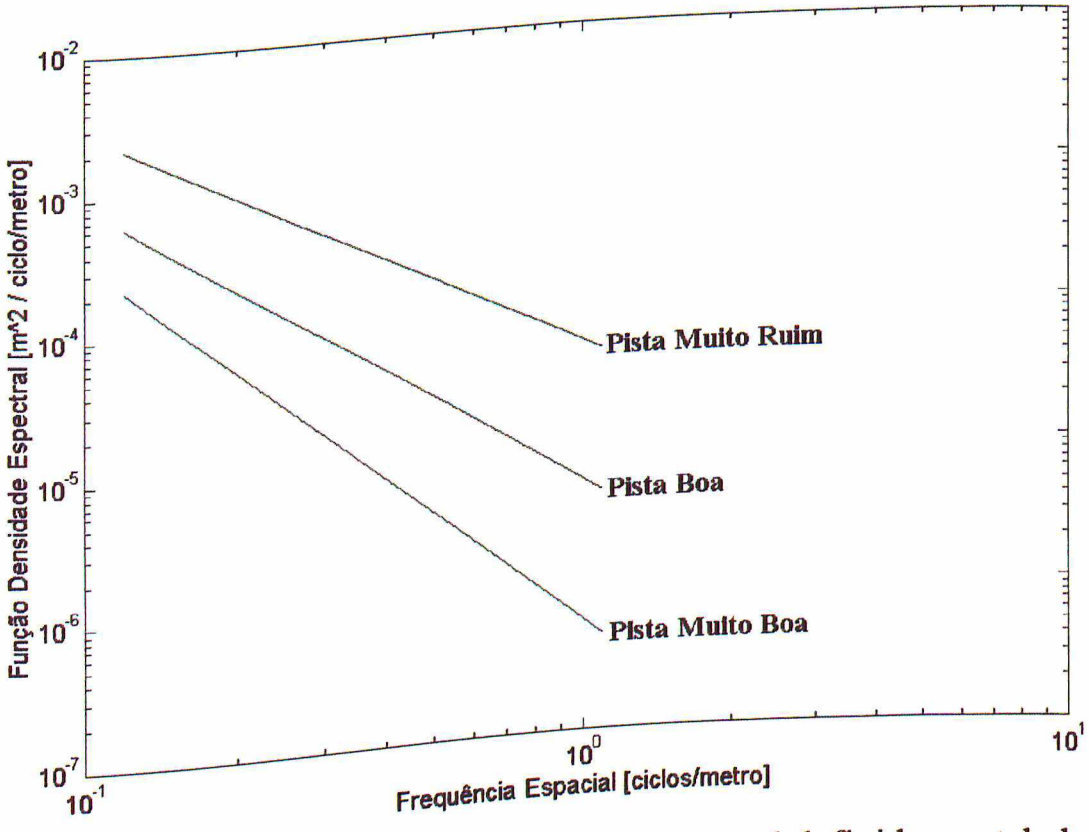

Figura 7.4: Gráficos das funções densidade espectral definidas na tabela 1.

8 - Computação Simbólica

A computação simbólica é sem dúvida uma das áreas de desenvolvimento de software que se apresenta mais promissora. Seu poder como ferramenta de modelagem é muito significativo, uma vez que permite estender a aplicação de métodos analíticos a casos onde isto seria desaconselhável ou até mesmo impossível. Neste trabalho, utilizou-se o software comercial MATHEMATICA [17] para fazer a implementação dos modelos e a obtenção das suas equações do movimento. Este software destaca-se como sendo um dos mais poderosos e confiáveis, além de ser largamente utilizado por renomadas instituições científicas.

O modelo matemático foi equacionado, de forma completamente genérica e não linear, através do método de Lagrange conforme discutido no capítulo 3. Os procedimentos necessários à obtenção das equações do movimento foram vencidos passo a passo por um programa computacional escrito na linguagem própria do MATHEMATICA. O programa elaborado permite a impressão de todos os resultados intermediários, para verificação de sua correção, desde a definição dos movimentos, estabelecimento dos referenciais locais e intermediários, matrizes de transformação, obtenção das equações de energia do sistema até as equações do movimento na sua forma final. Pensando numa futura utilização destes modelos em aplicações de simulação, fez-se uso da propriedade do software de fornecer uma saída formatada segundo a sintaxe da linguagem C.

Do ponto de vista da implementação computacional, deve-se acrescentar que as aplicações desenvolvidas foram realizadas em microcomputador 80486 DX 33 MHz compatível com IBM PC, contando com 8 Mbytes de memória RAM. Devido ao considerável nível das complicações geométricas e paramétricas (não linearidades e restrições cinemáticas) é necessário um grande tempo para que todo o processo se complete.

Durante a implementação do modelo de computação simbólica observou-se uma alta sensibilidade do tempo de processamento com o tamanho do arquivo tem-

porário utilizado. Conseguiu-se uma redução drástica do tempo de processamento através da divisão do programa de cálculo simbólico em diversas etapas. Como exemplo disto, pode-se citar que a geração de uma única equação do movimento para o caminhão isolado levava 40 minutos quando a aplicação da equação de Lagrange era comandada pelo mesmo programa que gera as equações de energia do sistema. Separando estes procedimentos em dois programas distintos, a mesma operação leva agora 40 segundos. O responsável por este fato é provavelmente a baixa eficiência do sistema de acesso ao arquivo temporário (em disco) quando este se torna grande.

Apesar do trabalho empenhado visando reduzir o tempo total de geração das equações do movimento, o processo total requer aproximadamente 48 horas de CPU para se completar. Observou-se que a parte mais pesada do processamento é a separação dos coeficientes das acelerações necessárias à montagem da matriz massa do sistema.

Em termos do armazenamento em disco, obteve-se arquivos temporários da ordem de 120 Mbytes, sendo que os arquivos dos resultados aceitam compressão significativa.

Um aspecto de vital importância quando se trata da realização de um equacionamento através de computação simbólica é a sua segurança. Em procedimentos complicados, longos ou repetitivos, tem-se uma grande chance de cometer erros no equacionamento manual. Este tipo de erro é praticamente eliminado no caso da computação simbólica, uma vez que o desenvolvimento do programa que irá realizar o cálculo é muito mais simples do que o equacionamento em si.

Outra característica de destaque do software MATHEMATICA é a sua capacidade de aprender. Isto é de especial interesse quando se definem regras de derivação onde o usuário diz qual variável corresponde à derivada temporal (ou parcial) de outra. Com isto é possível utilizar uma nomenclatura clara e compatível com a que seria usada em um desenvolvimento matemático manual.

Para efeito de validação dos modelos, foram feitos vários testes em pontos diferentes do equacionamento, onde as expressões eram desenvolvidas de forma genérica e depois simplificadas, ou restritas, e comparadas com expressões encontradas na bibliografia. Em todos os casos, os resultados obtidos foram corretos. Além disto, foi feito o equacionamento parcial dos modelos de forma manual, e todos os resultados obtidos foram confirmados.

Para ilustrar o processo simbólico de obtenção das equações do movimento, tem-se um pequeno trecho de programa com seu respectivo resultado. Observa-se que a nomenclatura utilizada está compatível com a do capítulo 3.

Trecho 1: Etapas necessárias à obtenção da energia cinética do chassis do caminhão.

```
(* Estabelecimento das matrizes de transformacao *)
s1tp1={{a1,d1,g1},{b1,e1,h1},{c1,f1,l1}};
p1ts1=Transpose[s1tp1];
s1ts1'={{1,0,0},{0,Cos[al1],-Sin[al1]},{0,Sin[al1],Cos[al1]}};
s1'ts1=Transpose[s1ts1'];
s1'ts1"={{Cos[be1],0,Sin[be1]},{0,1,0},{-Sin[be1],0,Cos[be1]}};
s1"ts1'=Transpose[s1'ts1"];
s1"ts1'"={{Cos[ga1],-Sin[ga1],0},{Sin[ga1],Cos[ga1],0},{0,0,1}};
s1'"ts1"=Transpose[s1"ts1'"];
s1"ts1=s1"ts1' . s1'ts1;
s1ts1"=Transpose[s1"ts1];
s1'"ts1=s1'"ts1" . s1"ts1;
s1ts1'"=Transpose[s1'"ts1];
* Definicao da matriz de inercia do chassis do caminhao *)
p1'"i1={{i1x,0,0},{0,i1y,0},{0,0,i1z}};
"Matriz de inercia do chassis do caminhao">>caminhao.sai;
s1'"i1=s1tp1 . p1'"i1 . p1ts1>>>caminhao.sai;
s1'"i1eq={{i1xx,i1xy,i1xz},{i1yx,i1yy,i1yz},{i1zx,i1zy,i1zz}};
(* Formacao da velocidade de translacao do chassis do caminhao *)
"Velocidade tangencial do chassis do caminhao">>>caminhao.sai;
s1vv1={x1p,y1p,z1p}>>>caminhao.sai;
(* Formacao da velocidade de rotacao do chassis do caminhao *)
s1val1={al1p,0,0};
```

```
s1"vbe1={0,be1p,0};
s1'''vga1={0,0,ga1p};
s1'''val1=s1'''ts1 . s1val1;
s1'''vbe1=s1'''ts1" . s1"vbe1;
"Velocidade de rotacao do chassis do caminhao">>>caminhao.sai;
s1'''w1=s1'''val1+s1'''vbe1+s1'''vga1>>>caminhao.sai;
(* Parcela de energia cinetica do chassis do caminhao *)
"Parcela de energia cinetica do chassis do caminhao">>cincha.sai;
enci1=0.5 * ( s1'''w1 . s1'''i1eq . s1'''w1 ) +
0.5 * m1 * ( s1vv1 . s1vv1 )>>>cincha.sai;
```

Saída referente ao trecho 1

```
"Matriz de inercia do chassis do caminhao"
{{a1^2*i1x+d1^2*i1y+g1^2*i1z , a1*b1*i1x+d1*e1*i1y+g1*h1*i1z ,
a1*c1*i1x+d1*f1*i1y+g1*i1z*l1},

{a1*b1*i1x+d1*e1*i1y+g1*h1*i1z , b1^2*i1x+e1^2*i1y+h1^2*i1z ,
b1*c1*i1x+e1*f1*i1y+h1*i1z*l1},

{a1*c1*i1x+d1*f1*i1y+g1*i1z*l1 , b1*c1*i1x+e1*f1*i1y+h1*i1z*l1 ,
c1^2*i1x+f1^2*i1y+i1z*l1^2}}

"Velocidade tangencial do chassis do caminhao"
{x1p, y1p, z1p}

"Velocidade de rotacao do chassis do caminhao"
{ a1p*Cos[be1]*Cos[ga1] + be1p*Sin[ga1] ,
  be1p*Cos[ga1] - a1p*Cos[be1]*Sin[ga1] ,
  ga1p + a1p*Sin[be1]  }

"Parcela de energia cinetica do chassis do caminhao"
0.5*m1*(x1p^2 + y1p^2 + z1p^2) +
   0.5*((a1p*Cos[be1]*Cos[ga1] + be1p*Sin[ga1])*
          (i1zx*(ga1p + a1p*Sin[be1]) +
             i1yx*(be1p*Cos[ga1] - a1p*Cos[be1]*Sin[ga1]) +
             i1xx*(a1p*Cos[be1]*Cos[ga1] + be1p*Sin[ga1])) +
        (be1p*Cos[ga1] - a1p*Cos[be1]*Sin[ga1])*
```

```
(i1zy*(ga1p + all p*Sin[be1]) +
   i1yy*(be1p*Cos[ga1] - all p*Cos[be1]*Sin[ga1]) +
   i1xy*(all p*Cos[be1]*Cos[ga1] + be1p*Sin[ga1])) +
(ga1p + all p*Sin[be1])*
  (i1zz*(ga1p + all p*Sin[be1]) +
   i1yz*(be1p*Cos[ga1] - all p*Cos[be1]*Sin[ga1]) +
   i1xz*(all p*Cos[be1]*Cos[ga1] + be1p*Sin[ga1])))
```

Para finalizar, na tabela 8.1 tem-se um mapa do acoplamento das equações através da matriz massa, obtidas para o modelo do caminhão isolado. Como pode-se ver, as equações estão acopladas da maneira prevista, ou seja, movimentos que se influenciam estão acoplados.

Pela observação do mapa, nota-se que:

=> Os movimentos dos componentes do veículo sempre estão acoplados aos movimentos do chassis (base local).

=> A rotação α**1** do chassi em torno de **x1** independe da sua translação neste sentido.

=> As translações verticais dos componentes do veículo são desacopladas da rotação γ**1** do chassis em torno de **z1**.

=> As rotações de um determinado componente do veículo são acopladas entre si e às rotações do chassis, sendo independentes das rotações dos demais componentes.

=> A matriz massa obtida é simétrica em relação à sua diagonal principal.

Tabela 8.1: Mapa do acoplamento das equações do caminhão isolado pela sua matriz massa.

	x1	y1	z1	α1	β1	γ1	z2	α2	β2	x3	y3	z3	α3	β3	γ3	z4	α4	β4	z5	α5	β5	x6	z6	α6	β6
x1	⊗	⊗	⊗		⊗	⊗	⊗			⊗	⊗	⊗				⊗			⊗			⊗	⊗		
y1	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗			⊗	⊗	⊗				⊗			⊗			⊗	⊗		
z1	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗			⊗	⊗	⊗				⊗			⊗			⊗	⊗		
α1		⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
β1	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
γ1	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		⊗	⊗	⊗	⊗		⊗	⊗	⊗		⊗	⊗		⊗	⊗	⊗		⊗	⊗
z2	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		⊗																		
α2				⊗	⊗	⊗		⊗	⊗																
β2				⊗	⊗	⊗		⊗	⊗																
x3	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗				⊗															
y3	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗					⊗														
z3	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗							⊗													
α3				⊗	⊗	⊗							⊗	⊗	⊗										
β3				⊗	⊗	⊗							⊗	⊗	⊗										
γ3				⊗	⊗	⊗							⊗	⊗	⊗										
z4	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗											⊗									
α4				⊗	⊗	⊗											⊗	⊗							
β4				⊗	⊗	⊗											⊗	⊗							
z5	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗														⊗						
α5				⊗	⊗	⊗														⊗	⊗				
β5				⊗	⊗	⊗														⊗	⊗				
x6	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗																⊗			
z6	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗																		⊗		
α6				⊗	⊗	⊗																		⊗	⊗
β6				⊗	⊗	⊗																		⊗	⊗

9 - Conclusões e Sequência do Trabalho

9.1 - Conclusões

Por tudo que foi feito neste trabalho pode-se concluir que:

=> O método dos modos assumidos mostrou-se adequado à inclusão dos efeitos da flexibilidade de alguns componentes do sistema nos seus movimentos de corpo rígido.

=> Os modelos de elementos finitos desenvolvidos com a finalidade de caracterizar as funções admissíveis para o deslocamento flexível dos chassis apresentaram auto-vetores cuja forma é compatível com a bibliografia.

=> A massa dos modelos obtidos é compatível com a dos sistemas reais que eles representam.

=> A determinação das funções admissíveis para o deslocamento flexível através de análise por elementos finitos apresenta uma série de vantagens quando comparado com o procedimento experimental equivalente. Dentre elas destacam-se o baixo custo e a rapidez na execução.

=> A modelagem dos chassis flexíveis por elementos finitos independe da existência de um protótipo. Isto significa que o modelo pode ser alterado e novamente submetido ao cálculo num intervalo de tempo que depende somente do nível de complexidade geométrica das mudanças desejadas.

=> A facilidade de alteração dos modelos, bem como a rapidez no cálculo dos auto-vetores, habilita este procedimento a ser aplicado em situações de simulação onde se deseja modificar um chassis existente com a finalidade de desenvolvimento de um novo produto ou otimização da sua forma atual.

=> O uso de coordenadas generalizadas relativas facilitou o estabelecimento dos movimentos dos componentes do sistema, mostrando-se uma ferramenta eficiente para a modelagem de veículos.

=> A modelagem dos veículos foi feita de forma tridimensional, genérica e não linear, o que a torna apropriada a uma futura aplicação na simulação dinâmica de veículos.

=> O uso da computação simbólica na implementação do método de Lagrange ampliou sua utilização a níveis muito superiores aos normalmente obtidos em desenvolvimentos manuais.

=> Apesar do tempo de CPU envolvido na obtenção das equações do movimento através de computação simbólica ser grande, deve-se levar em conta que ele é irrisório quando comparado ao tempo normalmente necessário a um desenvolvimento teórico manual.

=> O tempo necessário à execução dos procedimentos literais resolvidos por computação simbólica apresentou grande sensibilidade à divisão do cálculo em programas menores.

=> Existe a possibilidade concreta de se reduzir os tempos de processamento a partir do uso de computadores mais rápidos ou com mais memória RAM disponível.

=> A capacidade de aprendizado do software MATHEMATICA mostrou-se de grande utilidade na modelagem, uma vez que permitiu estabelecer regras de derivação que tornam o equacionamento mais lógico e fácil de ser compreendido.

=> Em se tratando de um procedimento extremamente longo, a segurança na manipulação de expressões oferecida pelo MATHEMATICA assume caráter fundamental na obtenção das equações do movimento.

=> As equações obtidas foram validadas por meio de comparação com resultados da bibliografia e equacionamento manual.

=> O mapa de acoplamento das equações pela matriz massa, mostrado na tabela 8.1, encontra-se de acordo com o esperado.

=> A obtenção das propriedade de inércia e de área dos componentes do veículo através da modelagem de sólidos no software de CAD CATIA mostrou-se bastante eficiente quando comparada ao procedimento experimental equivalente. Suas principais vantagens são a rapidez na obtenção dos resultados e o seu baixo custo operacional.

=> A definição dos modelos sólidos a partir dos desenhos de projeto dos componentes forneceu valores de inércia e propriedades de área compatíveis com as estruturas reais.

=> A modelagem de componentes por sólidos obtidos em software de CAD independe da existência de protótipos da estrutura. Sendo assim, o modelo pode ser facilmente alterado visando experimentar novas configurações com a finalidade de desenvolvimento ou de otimização.

=> O uso dos parâmetros de projeto para caracterizar o comportamento não linear de molas, amortecedores, estabilizadores e coxins contribui para aumentar a fidelidade do modelo em relação ao sistema real.

=> De forma geral, pode-se dizer que a metodologia empregada nesta dissertação mostrou-se adequada aos fins a que se propôs e que foram obtidos modelos matemáticos complexos que representam três configurações de um veículo articulado pesado do tipo cavalo mecânico - carreta.

=> A interação Universidade - Indústria mostrou-se muito interessante para ambos os lados pois permitiu a troca de experiências e o desenvolvimento de um trabalho aplicável.

=> Os vários procedimentos desenvolvidos e relatados nesta dissertação geraram os seguintes trabalhos científicos:

1) BORGES, J.A.F.; STEFFEN Jr., V. e RULEVAS, D.; "Simulação Dinâmica de Veículos Articulados do Tipo Cavalo Mecânico-Carreta"; Anais do VII SIMEA (Simpósio de Engenharia Automotiva); São Paulo; SP; Setembro 1993; pp 343-348.

2) BORGES, J.A.F.; STEFFEN Jr., V. e RULEVAS, D.; "Simulação Dinâmica de Veículos Articulados do Tipo Cavalo Mecânico-Carreta"; XII COBEM; Vol. 3; Dezembro 1993; Brasília - DF; pp 1197-1200.

3) BORGES, J.A.F.; STEFFEN Jr., V. and RULEVAS, D.; "Dynamic Simulation of a Heavy Articulated Truck"; Proceedings of the XII IMAC (Intenational Modal Analysis Conference); Honolulu; Hawaii; January 1994; pp 1448-1453.

4) BORGES, J.A.F.; STEFFEN Jr., V. e RULEVAS, D.; "Estudo do Comportamento Dinâmico de Veículos Articulados - Modelagem e Simulação"; Primeiro Encontro de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica; Escola Politécnica da Universidade de São Paulo; São Paulo; SP; Setembro 1994.

5) BORGES, J.A.F.; STEFFEN Jr., V. e RULEVAS, D.; "Modelagem de Sistemas Mecânicos Multicorpos Pelo Método de Lagrange Utilizando Computação Simbólica"; XV CILAMCE (Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia); Belo Horizonte; MG; Dezembro 1994.

9.2 - Informações Sobre a Sequência Deste Trabalho

A pesquisa apresentada nesta dissertação está sendo continuada a nível de Doutorado na Universidade Federal de Uberlândia com o objetivo de utilizar os modelos obtidos num programa de simulação computacional de veículos.

O programa em desenvolvimento é escrito na linguagem C++ e apresenta estrutura modular, ou seja, a partir do núcleo do programa podem ser introduzidos novos módulos responsáveis pela implementação de novas classes de modelos. A inclusão destes novos modelos é possível sem que haja necessidade de alterações nos módulos já existentes.

A filosofia de trabalho do programa de simulação parte da confecção de uma biblioteca de componentes. Estes componentes podem ser criados ou alterados de forma independente e depois selecionados para compor o veículo desejado. Em caso de modificação, pode-se optar por alterar o componente selecionado ou escolher outro a partir da biblioteca.

Do ponto de vista da utilização, tem-se uma interface gráfica que permite gerenciar todas as etapas da simulação de forma simples. Os valores a serem fornecidos ao programa devem ser digitados conforme estão disponíveis na Mercedes-Benz do Brasil S.A.. Eventuais conversões são feitas sem a intervenção do usuário. O programa contará também com um sistema de ajuda "on line", acionado por uma tecla chave. Isto vem incrementar a facilidade do seu uso, visando proporcionar uma interface amigável com o usuário.

Nas primeiras implementações, o software foi escrito para trabalhar em ambiente DOS, porém não foi possível tratar adequadamente as equações do movimento dos veículos por elas serem muito grandes. Optou-se então por uma nova implementação sob ambiente UNIX, que contará também com um módulo de animação gráfica.

Na sua versão acabada, o programa de simulação será colocado à disposição do departamento de cálculo da Mercedes-Benz do Brasil S.A..

São previstas etapas de validação dos resultados de simulação, quer seja por análise experimental ou comparação com outros softwares comerciais comprovadamente testados.

O comportamento do motorista, bem como sua interação com o sistema de direção, conjunto propulsor e freios será objeto de estudo específico.

Referências Bibliográficas

[1] THOMSON, W.T.; Teoria da Vibração; Rio de Janeiro - RJ; Editora Interciência Ltda.; 1978; 462 p.

[2] BORGES, J.A.F. e STEFFEN JR., V.; "Simulação Dinâmica de Veículos"; CICTE - Congresso de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia; São Carlos - SP; 1989.

[3] BORGES, J.A.F. e LÉPORE NETO, F.P.; "Estudo Experimental do Comportamento Dinâmico de um Veículo"; Anais do SEMEC - Seminário de Engenharia Mecânica; Uberlândia - MG; 1992.

[4] BORGES, J.A.F. e STEFFEN JR., V.; "Estudo do Comportamento Dinâmico de Veículos Articulados - Aplicação a Caminhões com Carreta"; Anais do SEMEC - Seminário de Engenharia Mecânica; Uberlândia - MG; 1992.

[5] BORGES, J.A.F. e STEFFEN JR., V.; "Estudo da Simulação Dinâmica de Veículos"; Relatório Final de Trabalho de Iniciação Científica; CNPq Proc. Nº: 800967/87-9; 1991; 81 p.

[6] RILL, G.; "Demands on Vehicle Modeling"; The Dynamics of Vehicles on Roads and on Trucks; Ed. Anderson R. Swets Zeitlinger; Amsterdam; Lisse; p. 451-460; 1989.

[7] RILL, G.; "Vehicle Dynamics in Real-Time Simulation"; IASD Symposium; Praha; 1987.

[8] HAC, A.; "Stochastic Optimal Control of Vehicles With Elastic Body and Active Suspension"; Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control; Vol. 108; p. 106-110; June 1986.

[9] MEIROVITCH, L.; Elements of Vibration Analysis; Singarope; McGraw-Hill; 1986; 560 p.

[10] RILL, G.; "The Influence of Correlated Random Road Excitation Processes on Vehicle Vibration"; Proceedings of 8th IASVD Symposium; MIT; Cambridge - MA; p. 449-459; August 1983.

[11] STRIBERSKY, A. and FANCHER, P.S.; "The Nonlinear Behavior of Heavy-Duty Truck Combinations With Respect to Straightline Stability"; Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control; Vol. 111; p. 577-582; December 1989.

[12] SPERANZA NETO, M. e MARTINEZ, J.F.; Introdução à Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação; Apostila do Curso de Modelagem de Sistemas Dinâmicos; Associação Brasileira de Engenharia Automotiva - AEA; 85 p.; Julho 1992.

[13] SOTELO JR., J. e TAMAI, E.H.; "Modelagem da Suspensão de Veículos Usando Bond Graphs"; Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM; p. 89-92; Dezembro 1993.

[14] CANALE, A.C.; Estudo do Desempenho de Autoveículos Rodoviários Considerando o Passeio do Centro de Gravidade e Restrições Impostas Pelo Binômio Pneumático x Pavimento; Tese de Doutorado; Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos; 1991; 294 p.

[15] LÉPORE NETO, F.P.; Comportamento Dinâmico de um Veículo com Ultravolante para Armazenamento de Energia; Tese de Doutorado; UNICAMP; 1979; 128 p.

[16] WILSON, E.L. and HABIDULLAH, A.; SAP90 Users Manual - A Series of Computer Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures; Computers & Structures, Inc.; Berkeley; California; 1988;

[17] WOLFRAM, S.; MATHEMATICA - A System for Doing Mathematics by Computer; Addison-Wesley Publishing Company, Inc.; Redwood City; California; 1988; 749 p.

[18] CATIA Users Manual; Dassault Systèmes, Inc.

[19] GEIβLER, H. und JASCHKE, K.; "Rahmenschwingungen und Fahrkomfort bein Lastkraftwagen"; VDI BERICHTE; Nº 744; p. 395-415; Germany; 1989.

Bibliografia Consultada

NORMAS PARA APRESENTAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO; Universidade Federal de Uberlândia; Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica; 1986.

LALANNE, M., BERTHIER, P. and HAGOPIAN, J.D.; Mechanical Vibrations for Engineers; Wiley-Interscience; Belfast; Ireland; 266 p; 1984.

BEER, F.P. e JOHNSTON JR., E.R.; Mecânica Vetorial para Engenheiros; McGraw-Hill; São Paulo; 545 p.; 1980.

LAVILLE, P. et NOFAL, B.; Identification et Simulation du Comportement Vibratoire d'un Vehicule; Laboratoire de Structures; I.N.S.A.; Lyon; 77 p.; 1987.

RILL, G.; Lectures in Vehicle Dynamics; Apostila do Curso de Instrumentação em Veículos, Vibrações e Dinâmica de Sistemas; Associação Brasileira de Engenharia Automotiva - AEA; 122 p.; Setembro 1992.

CANALE, A.C.; Automobilística, Dinâmica, Desempenho; Livros Érica Editora Ltda.; São Paulo; 125 p.; 1989.

TABOREK, J.J.; Mechanics of Vehicles; Penton Education Division; Cleveland; 93 p.; 1957.

UHL, R; Simulationsprogramm zur Berechnung der Fahrzeuglängsdynamik; Diplomarbeit; Universität Stuttgart; Stuttgart; 118 p.; 1990.

RILL, G.; "Steady State Cornering on Uneven Roadways"; SAE Technical Paper Series; N° 860575.

RILL, G., SALG, D. und WILKS E.; "Improvement of Dynamical Wheel Loads and Ride Quality of Heavy Agricultural Tractors by Suspending Front Axles"; Symposium on Heavy Vehicle Weights and Dimensions; Cambridge; U.K.; 1992.

RILL, G.; Simulation von Fahrzeugschwingungen; 18 p.

RODI, P.A. e SOTELO JR., J.; Síntese da Curva de Amortecedor Segundo Critério de Desempenho Ótimo para Suspensão Veicular Passiva Não-Linear; Escola Politécnica da Universidade de São Paulo; Departamento de Engenharia Mecânica; p. 720-732.

MARCZAK, R.J.; Alguns Resultados Relativos a Suspensões Hidro-Pneumáticas, Modeladas por Sistemas Discretos, Utilizando Nitrogênio; GRANTE - Grupo de Análise de Tensões; Departamento de Engenharia Mecânica; UFSC; Florianópolis.

MARCZAK, R.J., PEREIRA, S.C. e ROSA, E.; Projeto de uma Suspensão Hido-Pneumática de Dois Estágios, para Veículos Fora-de-Estrada; GRANTE - Grupo de Análise de Tensões; Departamento de Engenharia Mecânica; UFSC; Florianópolis.

CRONIN, D.L.; "MacPherson Strut Kinematics"; Mechanism and Machine Theory; Vol. 16; N° 6; p. 631-644; 1981.

RANGANATHAN, R., RAKHEJA, S. and SANKAR s.; "Steady Turning Stability of Partially Filled Tank Vehicles With Arbitrary Tank Geometry"; Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control; Vol. 111; p. 481-489; September 1989.

LEESE, G.E and MULLIN, R.L.; "The Role of Fatigue Analysis in the Vehicle Test Simulation Laboratory"; SAE Technical Paper Series Nº 910166; International Congress and Exposition; Detroit; Michigan; February 1991.

GROTE, P and FASH, J.; "Integration of Structural Dynamics Testing and Durability Analysis"; Sound and Vibration; April 1987.

GEIβLER, H., BRAUN, H. and SMYTH, W.B.; "Commercial Vehicle Ride Comfort"; SAE Technical Paper Series Nº 841714; Truck and Bus Meeting & Exposition; Deaborn; Michigan; December 1984.

MASSAGLIA, F. and VASCHETTO, L.; "Methods of Testing Vehicle Body Structures"; Associazione Tecnica dell' Automobile Giornale; p. 571; Jul/Aug 1982.

BERNARD, J., VANDERPLOEG, M. and SHANNAN, J; "Recent Developments in Vehicle Dynamics"; The Shock and Vibration Digest; Vol. 19; no 4; p. 10-16; April 1987.

HAC, A. and YOUN, I.; "Optimal Semi-Active Suspension With Preview Based on a Quarter Car Model"; Journal of Vibration and Acoustics; Vol. 114; p. 84-92; January 1992.

KORTÜM, W. and SCHIEHLEN, W.; "General Purpose Vehicle System Dynamics Software Based on Multibody Formalisms"; Vehicle System Dynamics; N° 14; p. 229-263; 1985.

HARRISON, R.F. and HAMMOND, J.K.; "Analysis of the Nonstationary Response of Vehicles With Multiple Wheels"; Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control; Vol. 108; p. 69-73; March 1986.

ANEXOS

Anexo 1
Escolha dos Movimentos

A escolha dos movimentos tomados como graus de liberdade seguiu alguns critérios, os quais serão discutidos.

A1.1 - Movimentos do Chassis do Caminhão

O chassis do caminhão é a peça básica de todo o conjunto, uma vez que sobre ele são montados todos os demais elementos que permitem ao veículo uma ampla liberdade de movimentação. Com base nisto, adotou-se todos os seus seis movimentos de corpo rígido possíveis (três translações e três rotações). Além disto, devido ao chassis estar sujeito a esforços dinâmicos muito intensos quando o veículo está trafegando carregado, é necessário que se considere também seus movimentos flexíveis que aparecem na forma de flexão e torção. Na figura A1.1 pode-se ver um exemplo de chassis utilizado em veículo de carga.

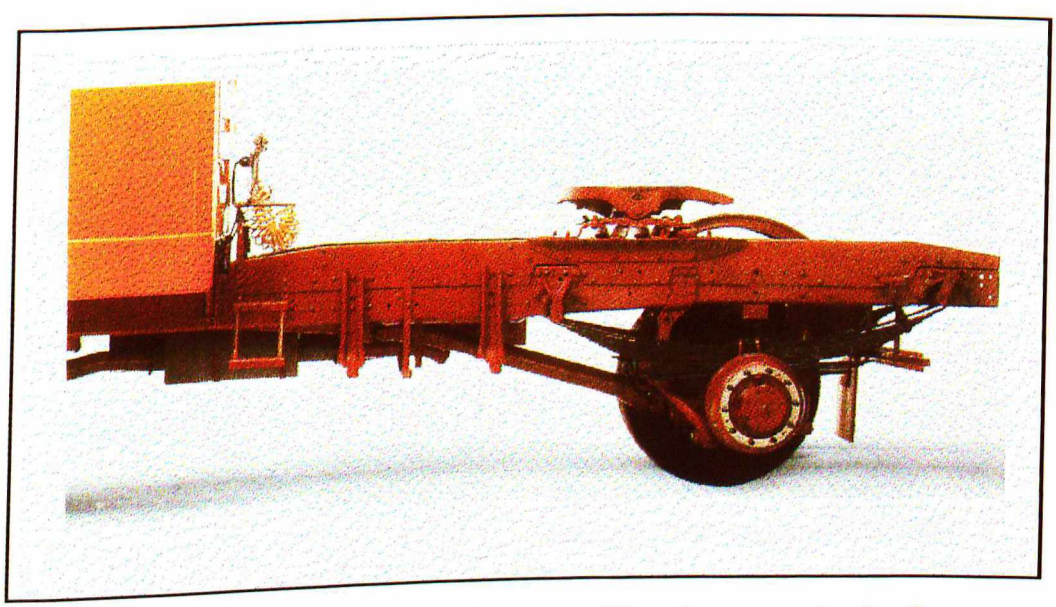

Figura A1.1: Exemplo de chassis utilizado em veículo de carga.

A1.2 - Movimentos da Cabine

A cabine é montada no chassis por meio de dois coxins verticais na dianteira (na altura do eixo dianteiro) e por uma mola de lâmina e dois amortecedores hidráulicos na traseira. Na figura A1.2 pode-se ver uma cabine montada sobre o chassis de um caminhão, onde é ressaltada a posição dos coxins dianteiros. Na figura A1.3 tem-se uma vista geral da suspensão traseira de uma cabine com seus elementos elásticos.

Figura A1.2: Posição dos coxins dianteiros de uma cabine.

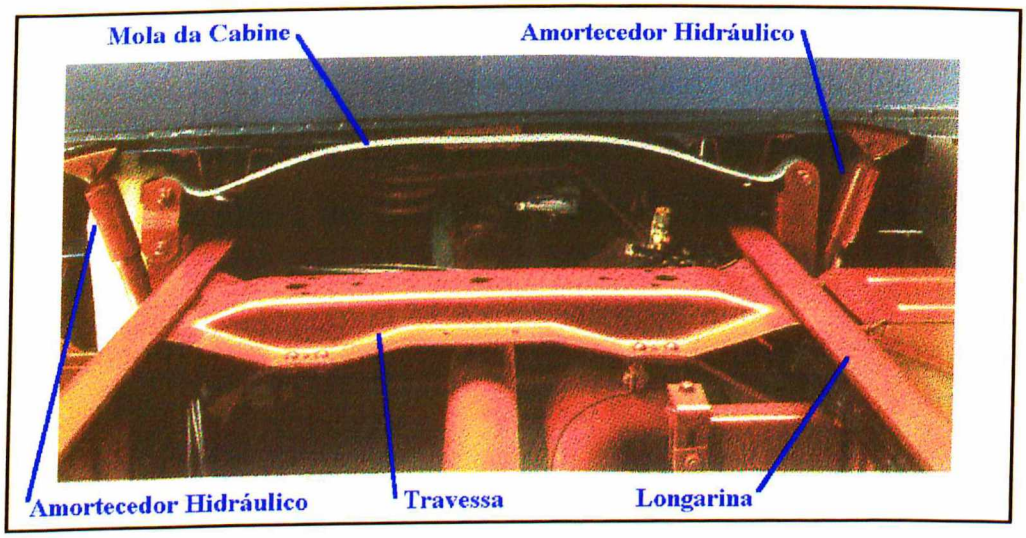

Figura A1.3: Vista geral da suspensão traseira de uma cabine.

A fixação da cabine privilegia seus movimentos verticais, uma vez que a rigidez de todos os elementos elásticos enrijece o movimento nas demais direções. O movimento vertical nas ancoragens pode ser defasado, ocasionando duas rotações. Sendo assim, foram adotados como graus de liberdade da cabine a translação vertical em **z** e as rotações α e β em torno de **x** e **y**, respectivamente.

Um outro motivo que nos leva a não considerar os deslocamentos transversais em relação aos coxins e mola (e consequentemente a rotação γ em torno de **z**) é o fato de não se ter disponível no momento as características dinâmicas de rigidez destes elementos nestas direções. Uma vez que estes movimentos são de pequena amplitude, prefere-se desconsiderá-los a trabalhar com parâmetros inseguros (estimados), que iriam incrementar ainda mais o esforço computacional durante todo o trabalho, além de poder induzir a erros maiores do que aqueles obtidos caso estes movimentos sejam desprezados. Para trabalhos posteriores pode-se pensar na determinação destes parâmetros desconhecidos experimental ou analiticamente, a fim de investigar sua influência no comportamento de todo o conjunto.

A1.3 - Movimentos do Conjunto Propulsor

O conjunto propulsor é composto basicamente do motor, embreagem e caixa de câmbio. Estes elementos são bastante rígidos e unidos solidariamente uns nos outros. O conjunto completo é montado no chassis do caminhão por meio de quatro coxins, sendo dois inclinados na dianteira (na altura do alternador) e dois verticais na traseira (na altura do volante do motor). Devido a esta disposição dos coxins e à natureza vibratória do conjunto propulsor, optou-se por considerar todos os seus seis movimentos possíveis como graus de liberdade (três translações e três rotações).

Na figura A1.4 pode-se ver uma vista em corte do motor OM-447 LA usado no veículo Mercedes-Benz LS-1941.

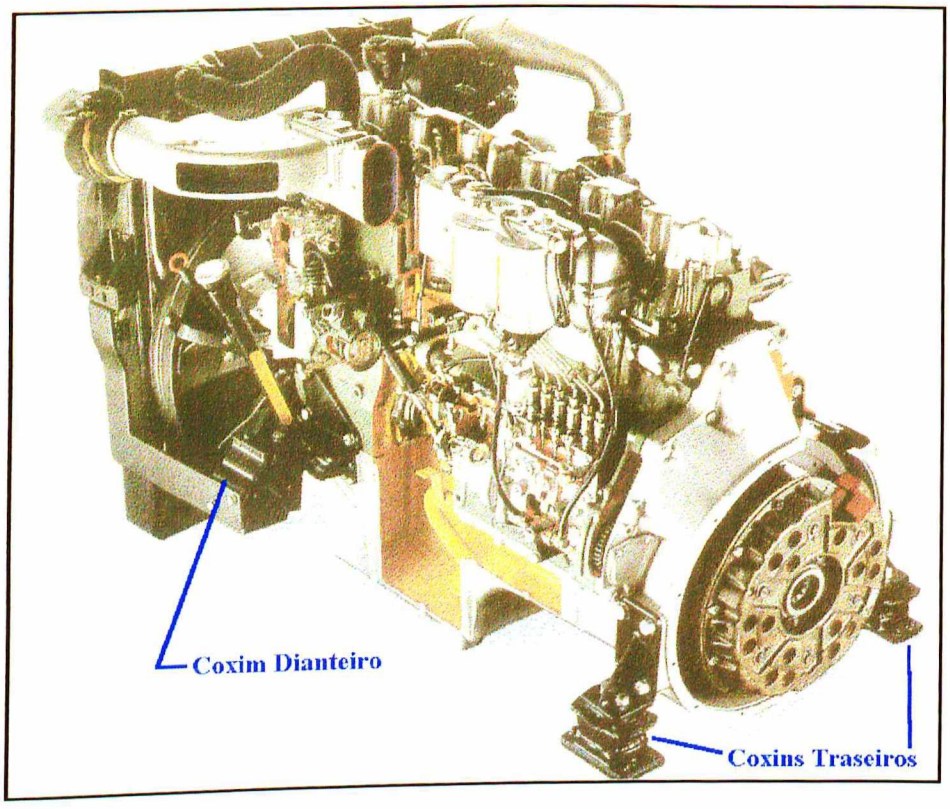

Figura A1.4: Conjunto propulsor do veículo Mercedes-Benz LS-1941.

A1.4 - Movimentos dos Eixos

Os eixos dianteiro e traseiro do caminhão podem ser vistos na figura A1.5. Nesta figura vê-se que os eixos são fixados ao chassis por meio de molas de lâmina, amortecedores hidráulicos e barras estabilizadoras. Esta fixação privilegia , como no caso da cabine, os movimentos verticais e as rotações a eles associadas.

No caso dos eixos, adota-se como graus de liberdade a translação vertical em **z** e as rotações α e β em torno de **x** e **y**, respectivamente. A rotação em torno de **y** pode parecer sem importância, mas deve ser considerada a fim de proporcionar uma melhor correspondência com o caso real onde o chassis sofre flexão e torção, conforme mostrado no capítulo 2.

A translação em **y** não é considerada pois os parâmetros de rigidez das molas não são conhecidos nesta direção. Para sua inclusão seria necessário um traba-

lho específico para sua determinação. Um aspecto tecnológico que reduz a influência de deslocamentos laterais dos eixos é o fato das lâminas constituintes da mola serem nervuradas na direção longitudinal. Este detalhe pode ser melhor visualizado na figura A1.6.

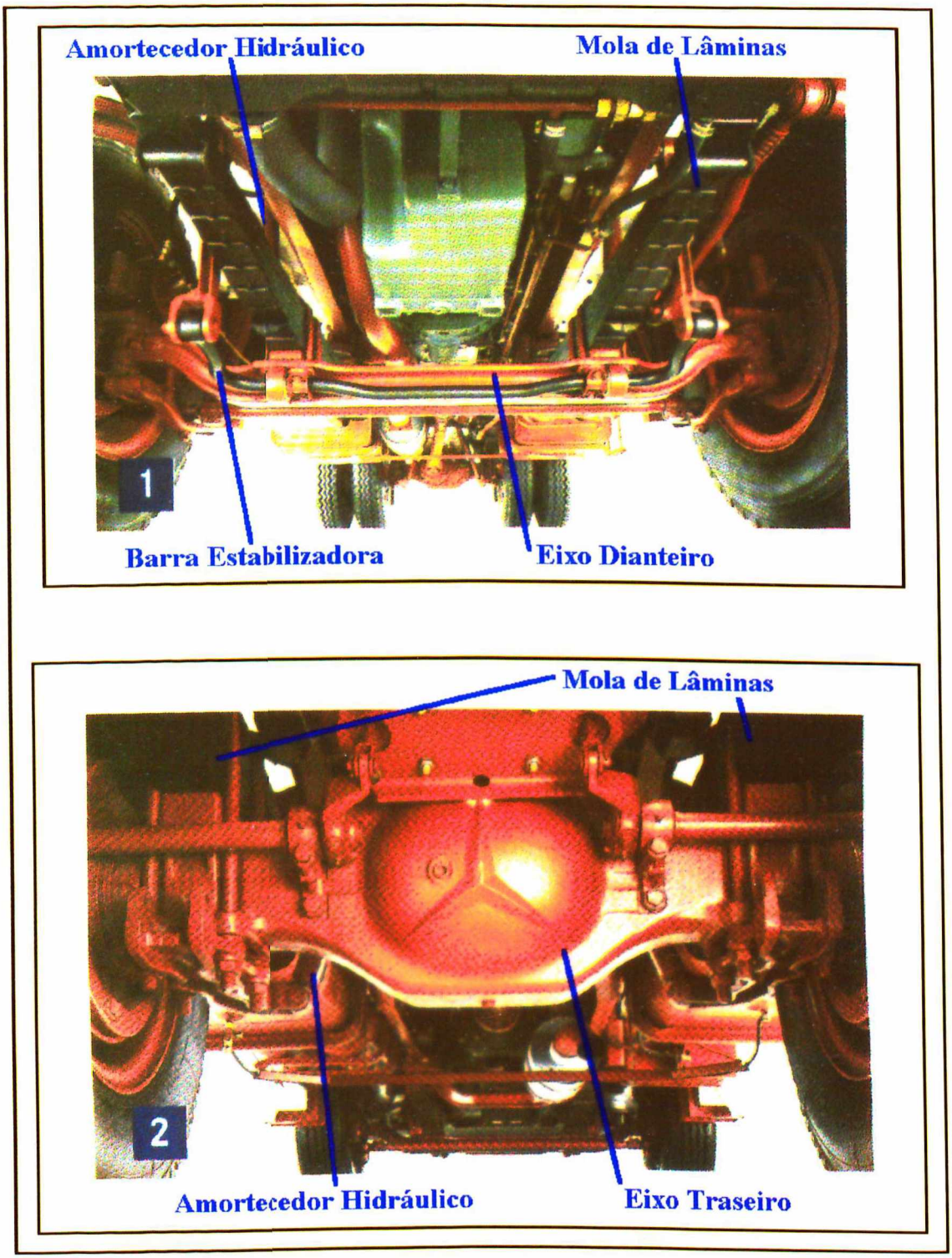

Figura A1.5: 1) Eixo dianteiro do caminhão. 2) Eixo traseiro do caminhão.

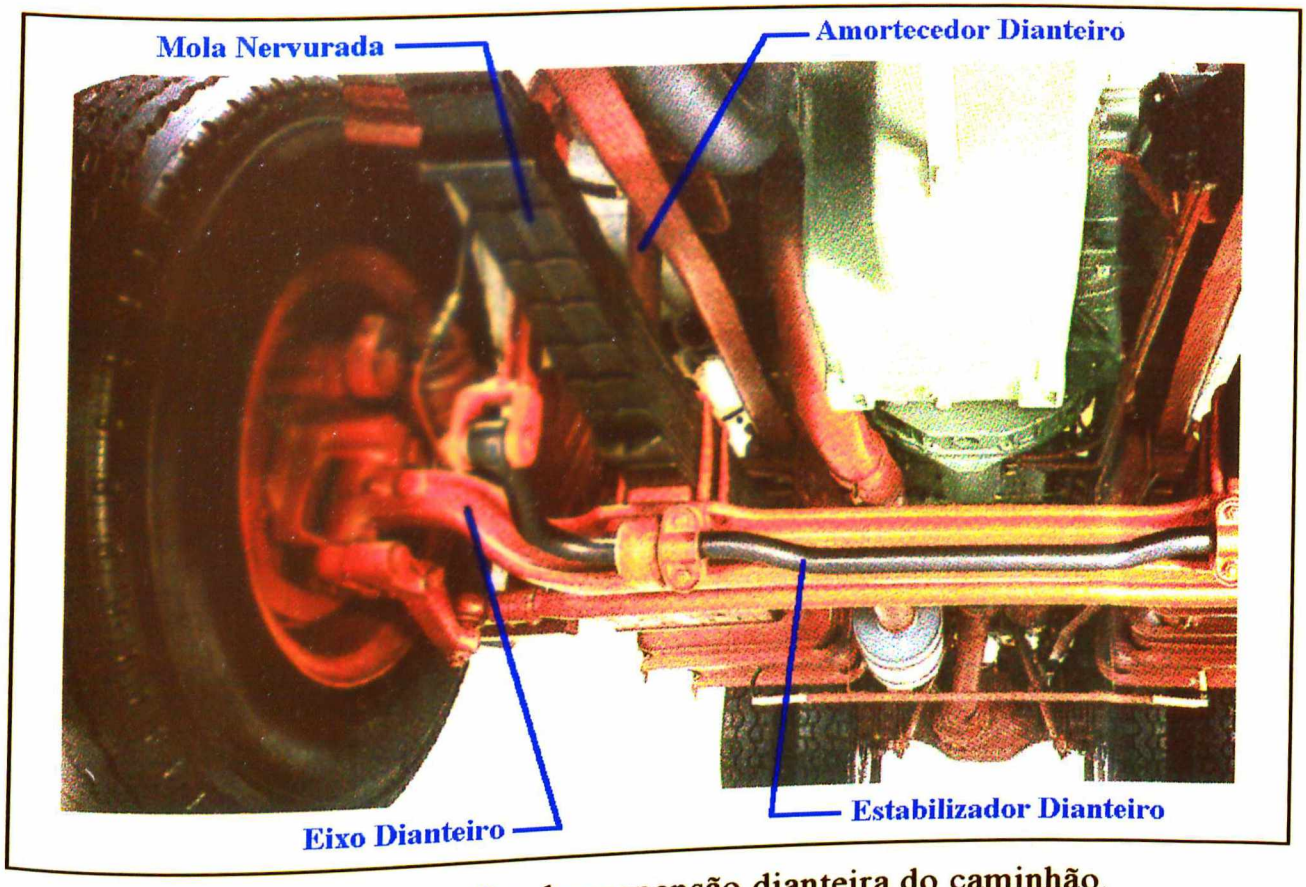

Figura A1.6: Detalhe da suspensão dianteira do caminhão.

Um outro aspecto observado é o cálculo dos momentos principais de inércia de massa dos eixos em duas etapas. Na primeira etapa, para determinação da massa e das inércias principais em torno de **x** e **z**, são incluídos no modelo todos os agregados do eixo. Na segunda etapa, obtém-se o momento principal de inércia em torno de **y** sem levar em conta a inércia das rodas e pneus, pois quando o eixo gira em torno de **y** as rodas não o acompanham por estarem montadas nele através de rolamentos.

A1.5 - Movimentos da Quinta Roda

A quinta roda é o elemento responsável pela ligação entre o caminhão e a carreta. Conforme pode ser visto na figura A1.7, a quinta roda é constituída basicamente de um disco metálico robusto, articulado por dois mancais cujo eixo de

giro é alinhado com a direção y. Nos mancais, pode ou não existir um coxim de borracha extremamente dura. Os movimentos considerados como graus de liberdade deste elemento são as translações nas direções de x e z, e as rotações α e β em torno de x e y, respectivamente.

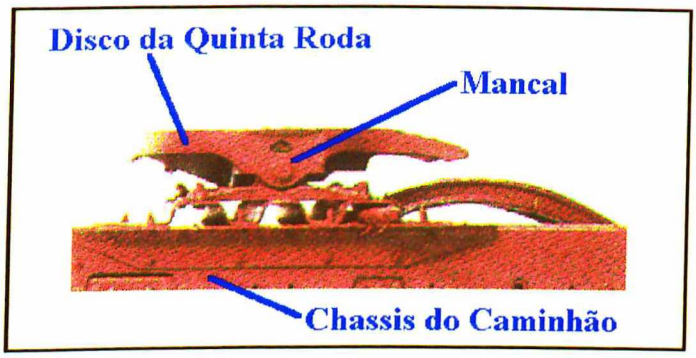

Figura A1.7: Quinta roda, responsável pela ligação entre o caminhão e a carreta.

A translação da quinta roda na direção x desempenha um papel muito importante em termos da modelagem de um veículo de carga pois as forças de inércia nesta direção, principalmente durante operações de aceleração e frenagem, são muito grandes. Aliado a este fato, tem-se que os elementos elásticos e dissipativos do veículo atuam preferencialmente na direção vertical e consequentemente as vibrações longitudinais são fracamente absorvidas antes de serem transmitidas ao condutor. Como efeito desta vibração, tem-se desconforto acentuado após um longo período de condução.

Não se considera a translação em y, pois a própria construção dos mancais impede este movimento. No caso da rotação em torno de z, ela não é considerada, pois a ligação entre o caminhão e a carreta é feita por meio do chamado pino rei, que se comporta como um eixo de rotação vertical (alinhado com a direção z). Além disto, a superfície de contato entre a quinta roda e a carreta trabalha sempre com bastante lubrificação, o que permite desconsiderar a transmissão de torque em torno de z nesta interface.

A1.6 - Movimentos da Carreta

Nos modelos desenvolvidos, atribui-se à carreta, quer seja de 1 ou de 3 eixos, somente o movimento de rotação em torno do pino rei. Este pino é articulado na quinta roda e fica direcionado verticalmente ao longo de **z**.

Devido ao fato do pino rei estar posicionado próximo à extremidade anterior do chassis da carreta, o eixo de giro por ele definido dificilmente passa pelo seu centro de gravidade. Sendo assim, é necessário realizar uma transferência das propriedades de inércia da carreta carregada para a posição do pino rei. Esta transferência se dá em duas etapas. Na primeira, parte-se do tensor principal de inércia da carreta carregada e faz-se uma rotação de forma a obter um novo tensor que se relaciona com as suas direções de simetria. Isto visa preservar um melhor significado físico entre os movimentos do modelo e aqueles do sistema real. Na segunda etapa, as propriedades de inércia são transferidas por translação do centro de gravidade da carreta carregada até uma posição genérica correspondente ao pino rei.

Nota-se que a descrição do movimento da carreta como o resultado da combinação dos movimentos da quinta roda com a rotação da própria carreta em relação a esta, permite equacionar o movimento relativamente amplo e complicado do conjunto como dois grupos de movimentos simples e bem definidos. Fica assim evidenciada uma das vantagens de se usar graus de liberdade relativos (movimentos de um elemento do sistema em relação a outro) numa aplicação onde seria muito difícil descrever ou transferir os movimentos segundo um referencial inercial.

A1.7 - Movimentos dos Eixos da Carreta

Independente do número de eixos existentes na carreta, são considerados os mesmos movimentos tomados no caso dos eixos dianteiro e traseiro do caminhão (translação vertical em **z** e as rotações α e β em torno de **x** e **y** , respectivamente).

Isto pode ser feito pois o funcionamento da suspensão dos eixos da carreta é praticamente o mesmo dos outros dois casos.

No que diz respeito aos elementos elásticos, nota-se que os eixos da carreta não possuem amortecedores nem barras estabilizadoras. Quanto às molas, existem duas configurações distintas para a sua fixação. No caso de carreta com um único eixo, sua fixação é idêntica às molas dos eixos do caminhão, porém, sempre com um só estágio de rigidez. No caso de uma carreta de dois ou três eixos, pelo menos uma de suas extremidades é ancorada numa balança, que têm por finalidade fazer a distribuição da carga entre as molas de um mesmo lado do veículo quando este passa por um obstáculo. Na figura A1.8 pode-se ver a configuração típica dos eixos de uma carreta.

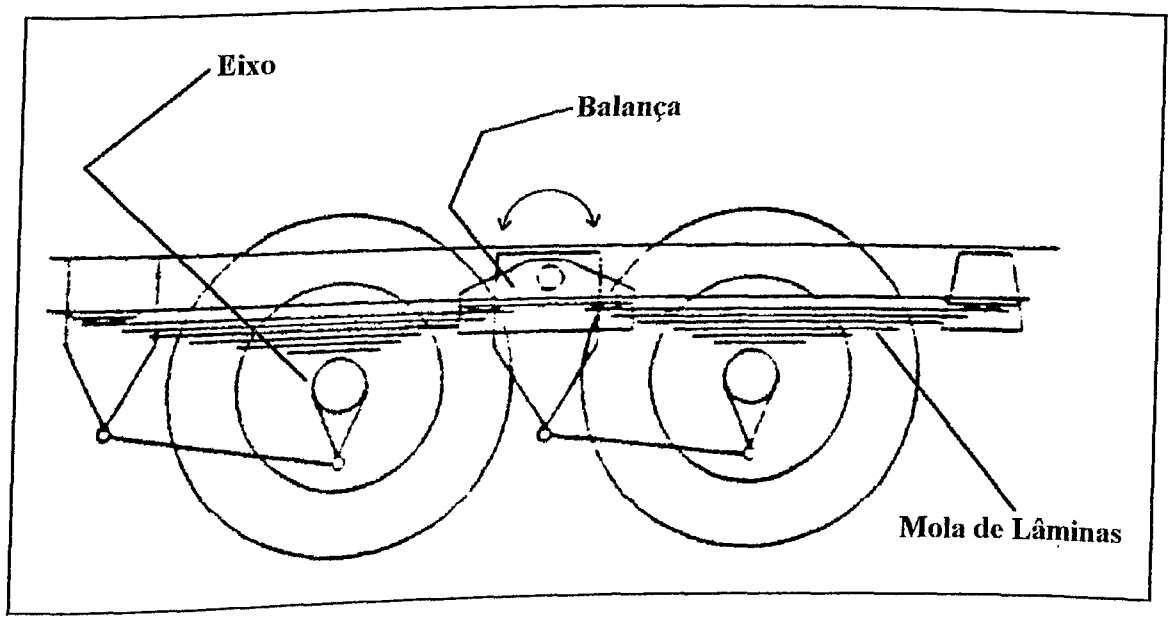

Figura A1.8: Desenho esquemático da suspensão de uma carreta.

A1.8 - Movimentos das Balanças

As balanças aparecem, nos modelos desenvolvidos, somente na carreta de

três eixos. Elas são elementos bastante rígidos fixados ao chassis da carreta por meio de um mancal robusto. Seu único movimento possível é uma rotação β em torno do seu eixo de fixação, que é alinhado com a direção y. Deve-se lembrar que, assim como na carreta, esta rotação não se realiza necessariamente em torno do centro de gravidade do elemento. Na modelagem, esta generalização aparece como uma translação das propriedades de inércia para um ponto genérico em torno do qual se dá a rotação.

Uma vez que pelo menos uma das extremidades de cada mola é apoiada numa balança, esta trabalha como uma alavanca que distribui a carga de uma mola com as outras duas de um mesmo lado da carreta. Este efeito é desejado por diversos motivos, dentre eles o de reduzir a possibilidade de quebra de uma mola por sobrecarga, quando o veículo carregado passa sobre um obstáculo ou irregularidade na pista. Na figura A1.8 pode-se ver um desenho esquemático de uma balança.

Anexo 2
Coordenadas Generalizadas Relativas

O uso intensivo de coordenadas generalizadas relativas durante a modelagem apresentada, justifica uma breve discussão sobre sua validade e aspectos característicos de seu equacionamento.

A2.1 - Considerações

O fato que incentivou uma pesquisa da validade de se usar coordenadas generalizadas relativas na descrição dos modelos, foi o desacoplamento dos movimentos dos componentes mecânicos do veículo em relação ao chassis na matriz rigidez e na matriz de amortecimento viscoso.

Tome-se por exemplo o movimento vertical, **z2**, da cabine. Este deslocamento é definido a partir de uma posição genérica do chassis descrita pelo referencial **S1'''**. Uma vez que o deslocamento vertical da cabine é medido em relação ao chassis, o seu equacionamento independe dos movimentos **x1**, **y1**, **z1**, α**1**, β**1** e γ**1**. É de se esperar então, que a expressão da energia potencial elástica armazenada neste elemento mecânico seja função somente de **z2**, α**2** e β**2**. Pode-se fazer uma analogia de forma que (do ponto de vista da rigidez e da dissipação viscosa) o chassis funcione como uma **base local**, ou seja, **pseudo inercial**.

Neste caso, o acoplamento dos movimentos é sempre transferido para a matriz massa pois, ao se equacionar as velocidades dos componentes, sempre leva-se em conta a velocidade do chassis (base local) acrescida da velocidade do elemento em relação ao próprio chassis.

Para melhor demonstrar este fato, apresenta-se a seguir a modelagem e o cálculo de auto-valores e auto-vetores para um sistema dinâmico didático. A modelagem é feita pelo método de Lagrange e as coordenadas generalizadas (graus de liberdade) são escolhidas de duas maneiras. Na primeira utiliza-se coordenadas generalizadas absolutas (método clássico) e, na segunda, relativas. Demonstra-se que os resultados obtidos são idênticos.

A2.2 - Sistema de Dois Graus de Liberdade

O sistema de dois graus de liberdade em estudo é representado por duas massas **m1** e **m2**, que possuem liberdade para transladar na direção **x** de um plano **xy**. O sistema é considerado conservativo.

A2.2.1 - Sistema de 2 G.D.L. - Modelagem Clássica

O sistema de 2 g.d.l. em estudo é mostrado esquematicamente na figura A2.1. Como pode-se ver, as massas **m1** e **m2** podem transladar na direção de **x**, considerando-se que não há perdas por atrito e que os roletes que suportam as massas possuem inércia desprezível.

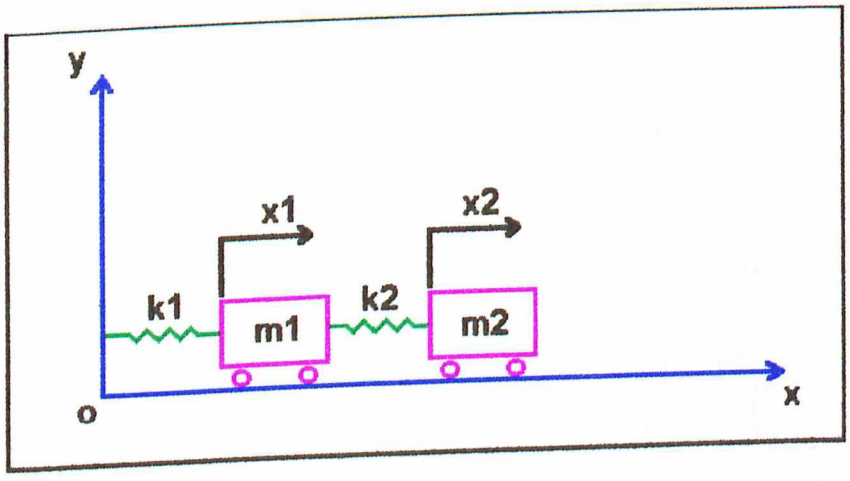

Figura A2.1: Representação esquemática de um sistema dinâmico de 2 g.d.l..

Define-se as coordenadas generalizadas como sendo **x1** e **x2**, tomadas em relação ao referencial inercial **oxy**. Escrevendo-se então as expressões da energia cinética e potencial armazenadas no sistema quando este é deslocado de sua posição de equilíbrio estático, tem-se:

$$T = \frac{m1\ \dot{x}1^2}{2} + \frac{m2\ \dot{x}2^2}{2}$$
$$U = \frac{k1\ x1^2}{2} + \frac{k2\ (x2 - x1)^2}{2} \qquad \text{(A2.1)}$$

Substituindo as expressões (A2.1) na equação de Lagrange (2.15), obtém-se:

Para x1:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}1} = m1\ \dot{x}1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}1}\right) = m1\ \ddot{x}1 \qquad \text{(A2.2)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x1} = k1\ x1 - k2\ (x2 - x1) \qquad \text{(A2.3)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}1} = 0 \qquad \text{(A2.4)}$$

Para x2:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}2} = m2\ \dot{x}2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}2}\right) = m2\ \ddot{x}2 \qquad \text{(A2.5)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x2} = k2\ (x2 - x1) \qquad \text{(A2.6)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x2} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}2} = 0 \qquad \text{(A2.7)}$$

Escrevendo as equações do movimento na forma matricial, encontra-se:

$$\begin{bmatrix} m1 & 0 \\ 0 & m2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}1 \\ \ddot{x}2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k1 + k2 & -k2 \\ -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x1 \\ x2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(A2.8)}$$

Para a cálculo dos auto-vetores, admite-se uma solução harmônica como mostrado nas equações (A2.9).

$$\begin{aligned} x1 &= X1\, e^{iwt} & x2 &= X2\, e^{iwt} \\ \dot{x}1 &= X1\, i\, w\, e^{iwt} & \dot{x}2 &= X2\, i\, w\, e^{iwt} \\ \ddot{x}1 &= -X1\, w^2\, e^{iwt} & \ddot{x}2 &= -X2\, w^2\, e^{iwt} \end{aligned} \qquad \text{(A2.9)}$$

Substituindo (A2.9) em (A2.8), fica:

$$\begin{cases} -m1\, X1\, w^2\, e^{iwt} + (k1+k2)\, X1\, e^{iwt} - k2\, X2\, e^{iwt} = 0 \\ -m2\, X2\, w^2\, e^{iwt} - k2\, X1\, e^{iwt} + k2\, X2\, e^{iwt} = 0 \end{cases} \qquad \text{(A2.10)}$$

Eliminando os termos comuns e fazendo o agrupamento dos restantes, tem-se

$$\begin{cases} (-m1\, w^2 + k1 + k2)\, X1 - k2\, X2 = 0 \\ -k2\, X1 + (-m2\, w^2 + k2)\, X2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(A2.11)}$$

$$\begin{bmatrix} -m1\, w^2 + k1 + k2 & -k2 \\ -k2 & -m2\, w^2 + k2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(A2.12)}$$

Para calcular os auto-valores **w**, basta igualar a zero o determinante da matriz dinâmica da equação (A2.12).

$$Det1 = \begin{vmatrix} -m1\, w^2 + k1 + k2 & -k2 \\ -k2 & -m2\, w^2 + k2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(A2.13)}$$

$$Det1 = (-m1\, w^2 + k1 + k2)\,(-m2\, w^2 + k2) - (-k2)\,(-k2) = 0 \qquad \text{(A2.14)}$$

$$Det1 = m1\, m2\, w^4 + (-m1\, k2 - m2\, k1 - m2\, k2)\, w^2 + k1\, k2 = 0 \qquad \text{(A2.15)}$$

A2.2.2 - Sistema de 2 G.D.L. - Coordenadas Generalizadas Relativas

Para fazer a modelagem a partir de coordenadas generalizadas relativas parte-se do mesmo sistema mecânico mostrado na figura A2.1, com todas as conside-

rações feitas anteriormente, porém as coordenadas generalizadas são tomadas de forma diferente.

Neste caso, define-se as coordenadas generalizadas **x1** e **x3**, sendo **x1** tomado em relação ao referencial inercial **oxy** e **x3** medido em relação à massa **m1**. A nova configuração do sistema pode ser vista na figura A2.2.

Escrevendo-se as novas expressões da energia cinética e potencial armazenadas no sistema deslocado de sua posição de equilíbrio estático, obtém-se as equações (A2.16).

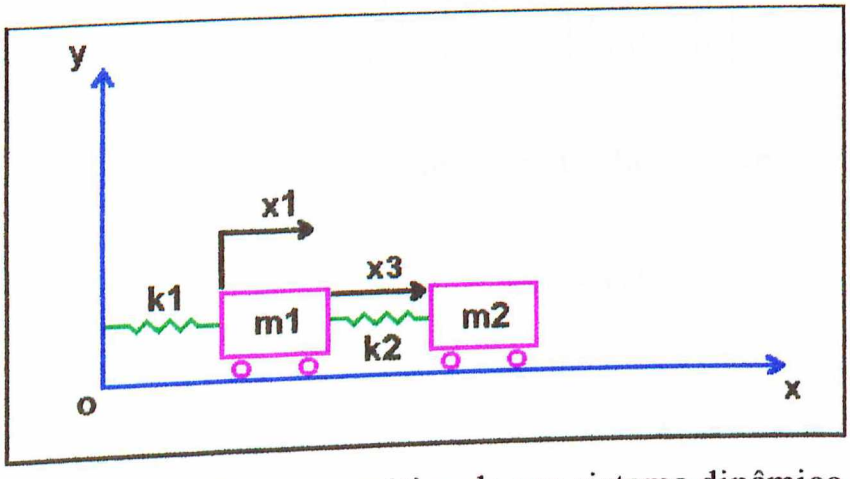

Figura A2.2: Representação esquemática de um sistema dinâmico de 2 g.d.l..

$$T = \frac{m1\ \dot{x}1^2}{2} + \frac{m2\ (\dot{x}1 + \dot{x}3)^2}{2} \qquad (A2.16)$$

$$U = \frac{k1\ x1^2}{2} + \frac{k2\ x3^2}{2}$$

Introduzindo as expressões (A2.16) na equação de Lagrange (2.15), obtém-se as novas equações do movimento.

Para x1:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}1} = m1\ \dot{x}1 + m2\ (\dot{x}1 + \dot{x}3) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}1}\right) = m1\ \ddot{x}1 + m2\ \ddot{x}1 + m2\ \ddot{x}3 \qquad (A2.17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x1} = k1\ x1 \qquad (A2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}1} = 0 \qquad (A2.19)$$

Para x3:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}3} = m2\,(\dot{x}1 + \dot{x}3) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}3}\right) = m2\,\ddot{x}1 + m2\,\ddot{x}3 \tag{A2.20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x3} = k2\,x3 \tag{A2.21}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x3} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}3} = 0 \tag{A2.22}$$

Escrevendo as equações do movimento na forma matricial, fica

$$\begin{bmatrix} m1+m2 & m2 \\ m2 & m2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}1 \\ \ddot{x}3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x1 \\ x3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A2.23}$$

Assim como no caso anterior, admite-se uma solução harmônica semelhante à das equações A2.9

$$\begin{aligned} x1 &= X1\,e^{iwt} & x3 &= X3\,e^{iwt} \\ \dot{x}1 &= X1\,i\,w\,e^{iwt} & \dot{x}3 &= X3\,i\,w\,e^{iwt} \\ \ddot{x}1 &= -X1\,w^2\,e^{iwt} & \ddot{x}3 &= -X3\,w^2\,e^{iwt} \end{aligned} \tag{A2.24}$$

Substituindo a solução das equações (A2.24) em (A2.23) e agrupando os termos comuns, fica

$$\begin{cases} \left[-(m1+m2)\,w^2 + k1\right] X1 - m2\,w^2\,X3 = 0 \\ -m2\,w^2\,X1 + \left[-m2\,w^2 + k2\right] X3 = 0 \end{cases} \tag{A2.25}$$

$$\begin{bmatrix} -(m1+m2)\,w^2 + k1 & -m2\,w^2 \\ -m2\,w^2 & -m2\,w^2 + k2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1 \\ X3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{A2.26}$$

Igualando a zero o determinante da matriz dinâmica da equação (A2.26) obtém-se a expressão para os novos auto-valores

$$Det2 = \begin{vmatrix} -(m1+m2)\,w^2 + k1 & -m2\,w^2 \\ -m2\,w^2 & -m2\,w^2 + k2 \end{vmatrix} \tag{A2.27}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA BIBLIOTECA

$$Det2 = m1\ m2\ w^4 + [-m1\ k2 - m2\ k1 - m2\ k2]\ w^2 + k1\ k2 = 0 \qquad (A2.28)$$

Como pode-se notar, as equações (A2.15) e (A2.28) são idênticas e conduzem aos mesmos auto-valores **w**.

A fim de ilustrar numericamente a comparação pretendida neste Anexo, adotam-se valores arbitrários para os parâmetros de massa e rigidez, como se segue.

m1 = 120 [Kg] **m2 = 30 [Kg]**

k1 = 800 [N/m] **k2 = 700 [N/m]**

Substituindo os dados acima nas equações (A2.15) e (A2.28) e resolvendo, encontra-se os auto-valores **w**.

w1 = 5.54792 [rad/s]

w2 = -5.54792 [rad/s]

w3 = 2.24808 [rad/s]

w4 = -2.24808 [rad/s]

Para obter os auto-vetores correspondentes a cada caso, basta substituir novamente **m1**, **m2**, **k1**, **k2**, **w1**, **w2**, **w3** e **w4** em uma das equações (A2.12) e (A2.26). Fazendo esta substituição, obtém-se os resultados mostrados na Tabela A2.1.

Tabela A2.1: Auto-valores e auto-vetores do sistema de 2 graus de liberdade modelado da maneira clássica e usando coordenadas generalizadas relativas.

w	Modelagem Clássica		Usando Coord. Gen. Relativas	
	x1	x2	x1	x3
2,24808 / -2,24808	1	1,2765	1	0,2765
5,54792 / -5,54792	1	-3,1336	1	-4,1336

Na figura A2.3, pode-se ver que as massas **m1** e **m2** ocupam a mesma posição no espaço quando em vibração livre. Fica evidenciado então que a descrição deste movimento independe do sistema de coordenadas generalizadas adotado.

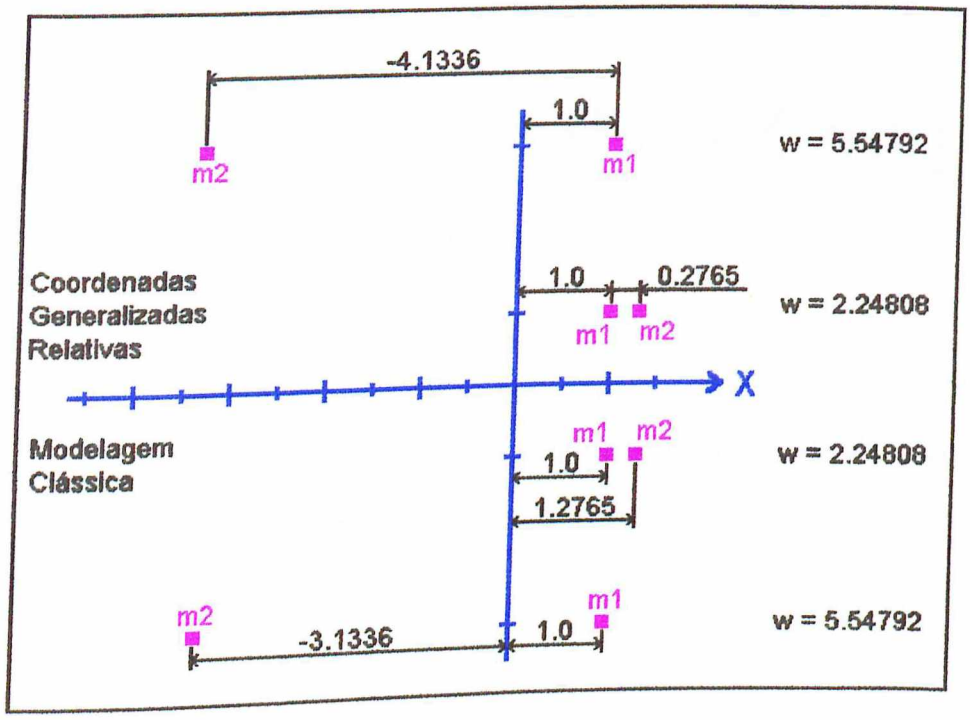

Figura A2.3: Posição das massas **m1** e **m2** no espaço quando em vibração livre.

Anexo 3
Modos Escolhidos Para Compor as Funções Admissíveis

Neste anexo, são apresentadas as figuras ilustrativas dos modos de flexão e torção, escolhidos para compor as funções admissíveis do deslocamento flexível do chassis do caminhão, da carreta de três eixos e da carreta de um eixo.

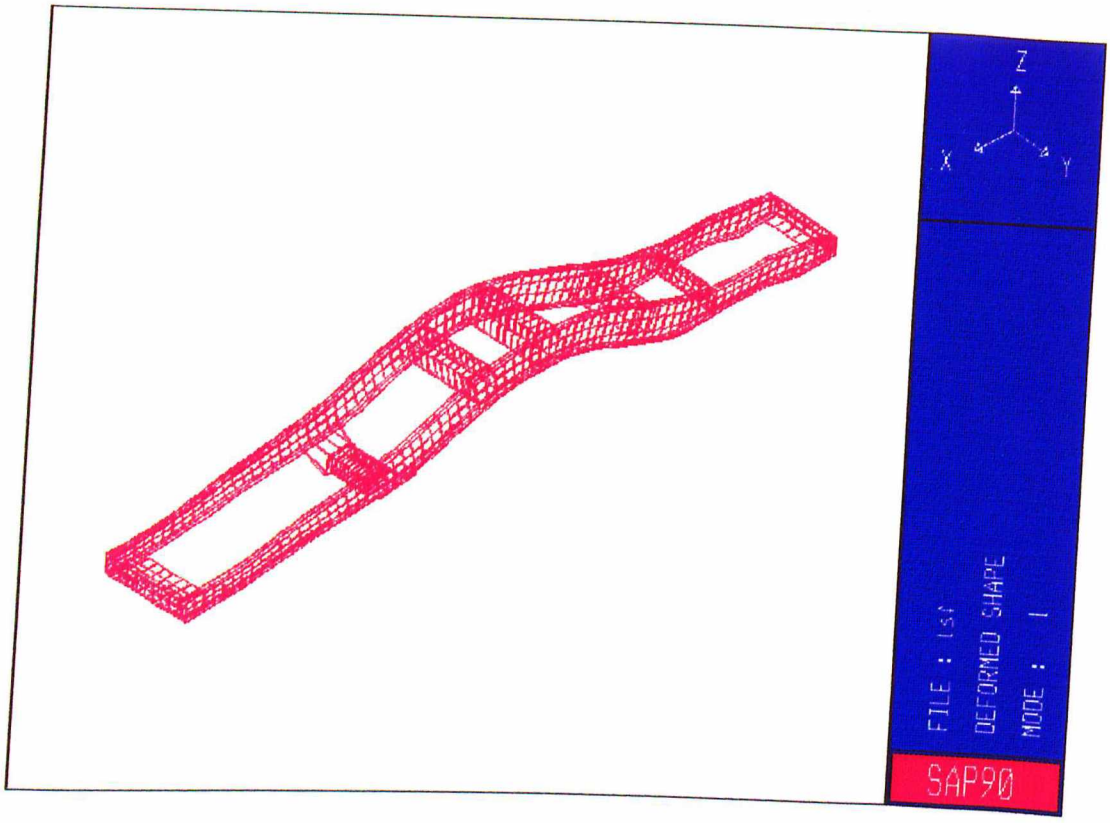

Figura A3.1: Primeiro modo de flexão do chassis do caminhão.

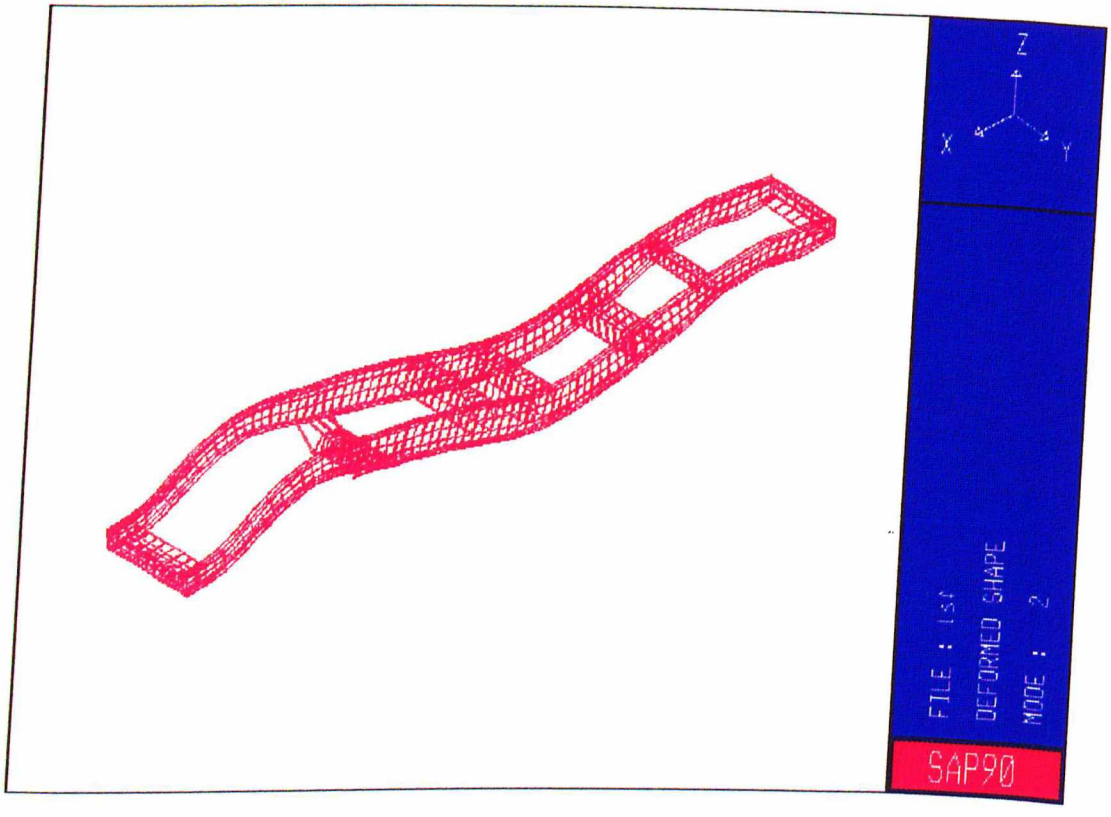

Figura A3.2: Segundo modo de flexão do chassis do caminhão.

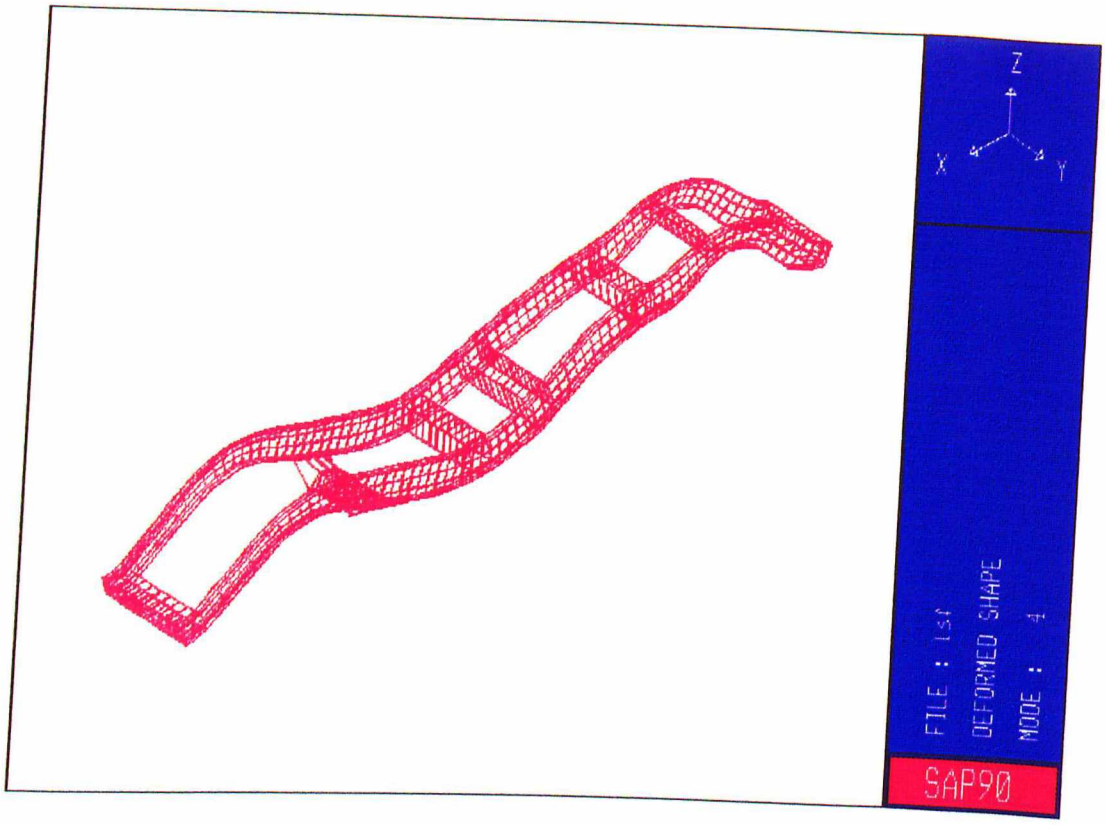

Figura A3.3: Quarto modo de flexão do chassis do caminhão.

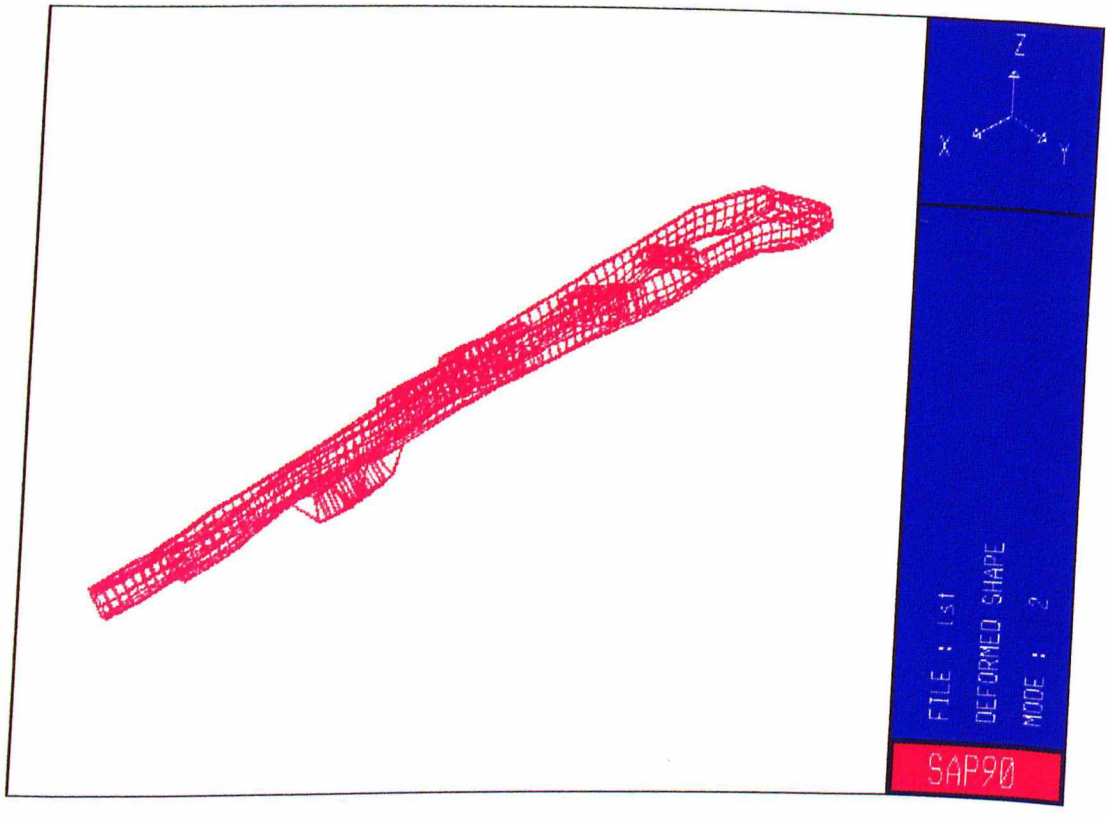

Figura A3.4: Segundo modo de torção do chassis do caminhão.

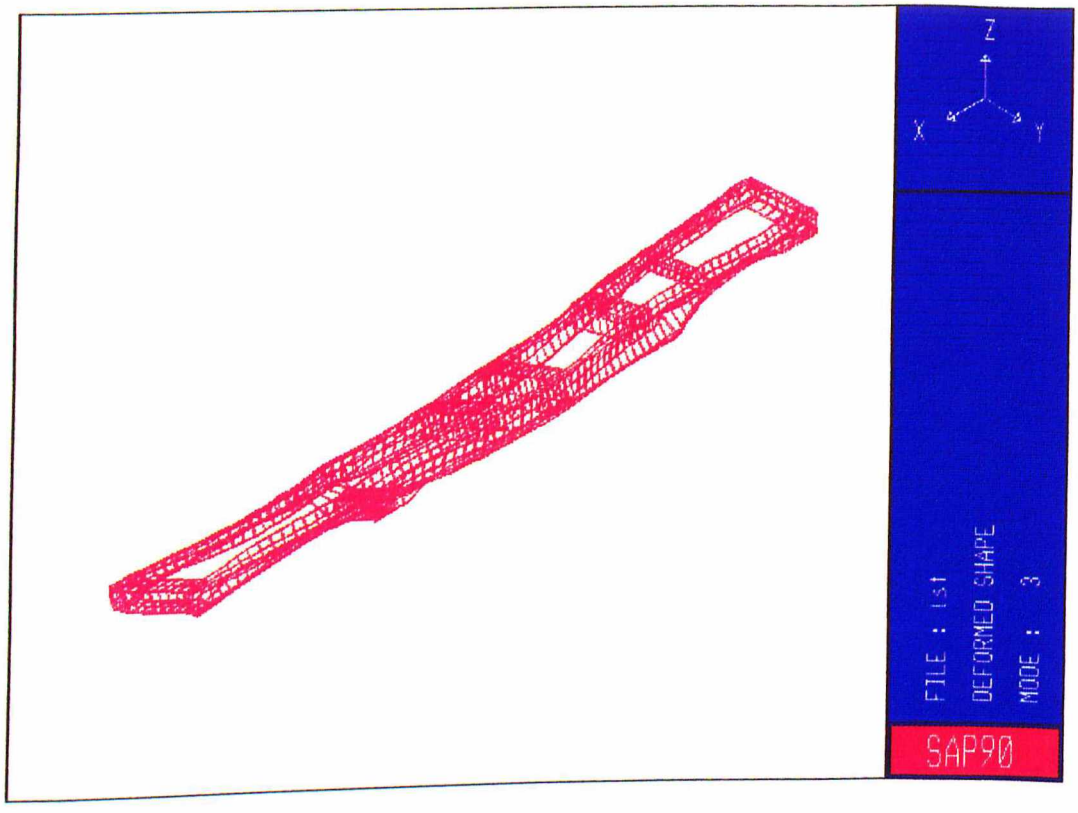

Figura A3.5: Terceiro modo de torção do chassis do caminhão.

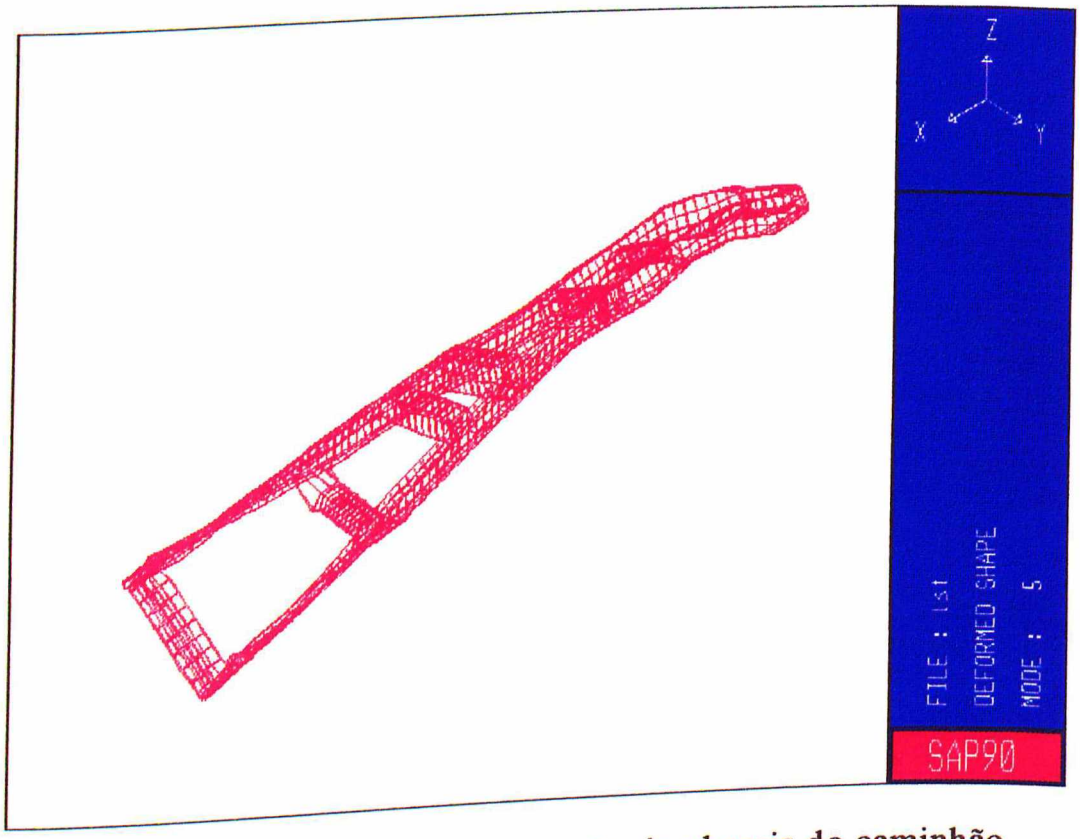

Figura A3.6: Quinto modo de torção do chassis do caminhão.

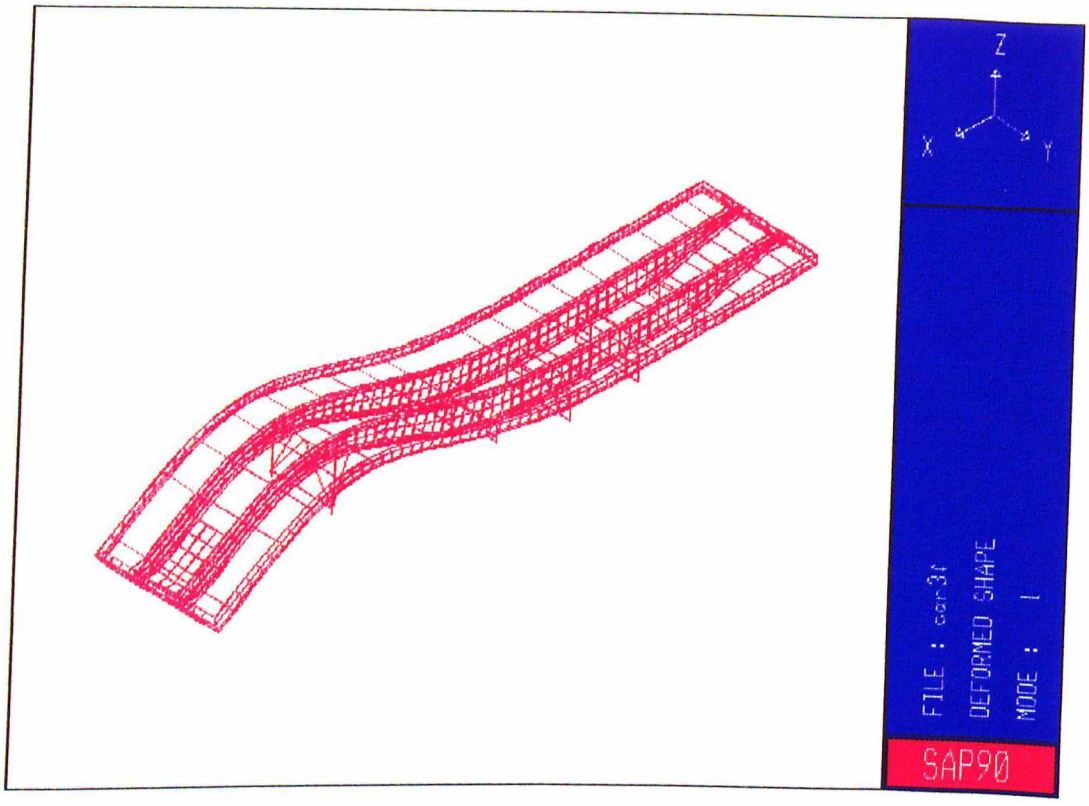

Figura A3.7: Primeiro modo de flexão do chassis da carreta de três eixos.

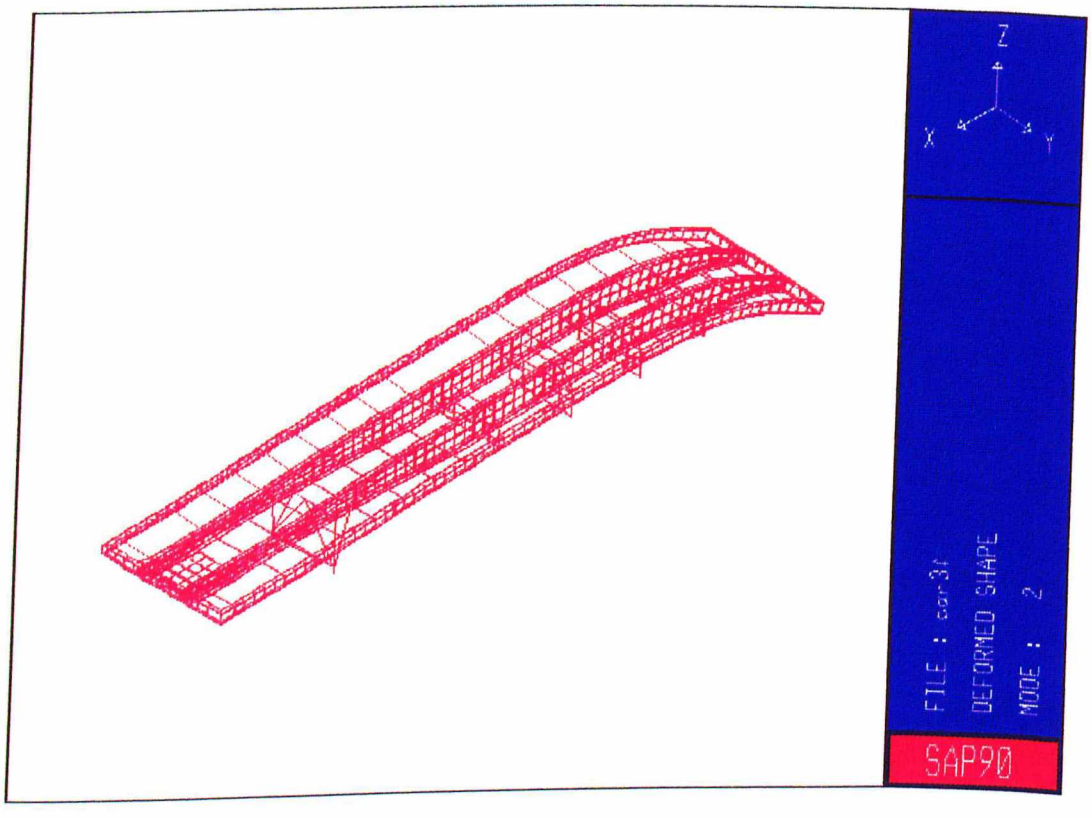

Figura A3.8: Segundo modo de flexão do chassis da carreta de três eixos.

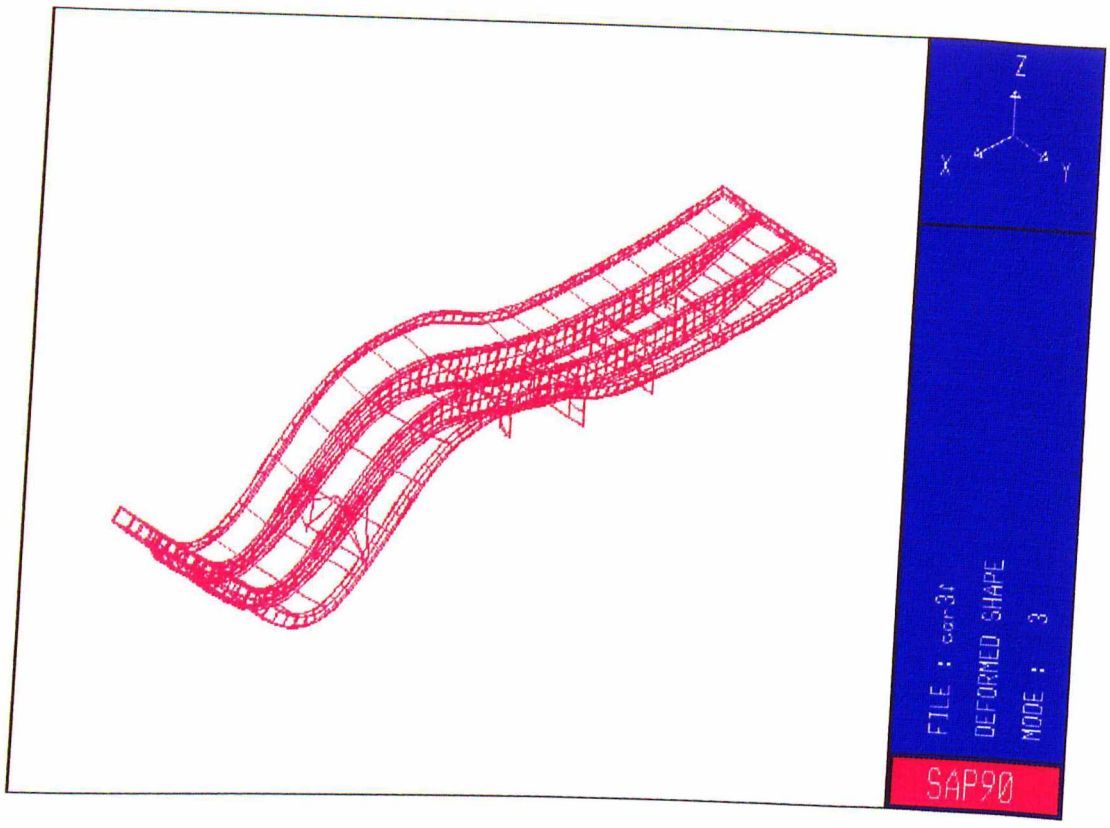

Figura A3.9: Terceiro modo de flexão do chassis da carreta de três eixos.

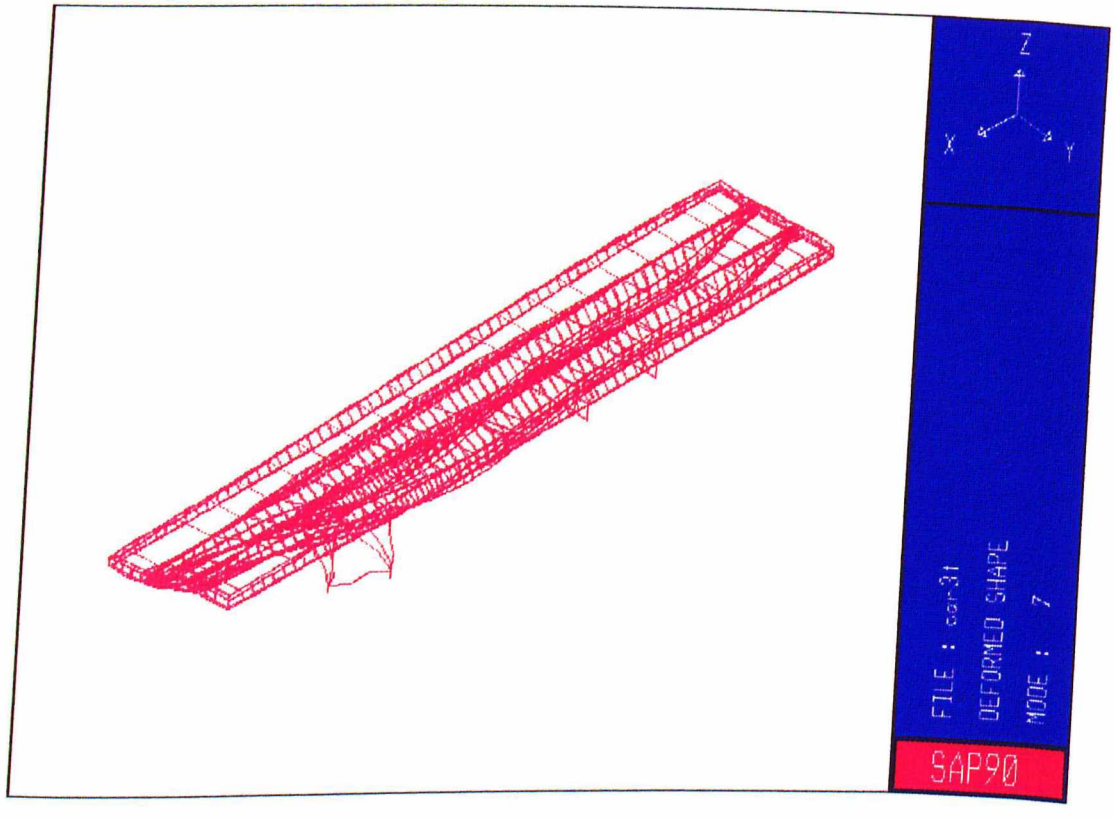

Figura A3.10: Sétimo modo de torção do chassis da carreta de três eixos.

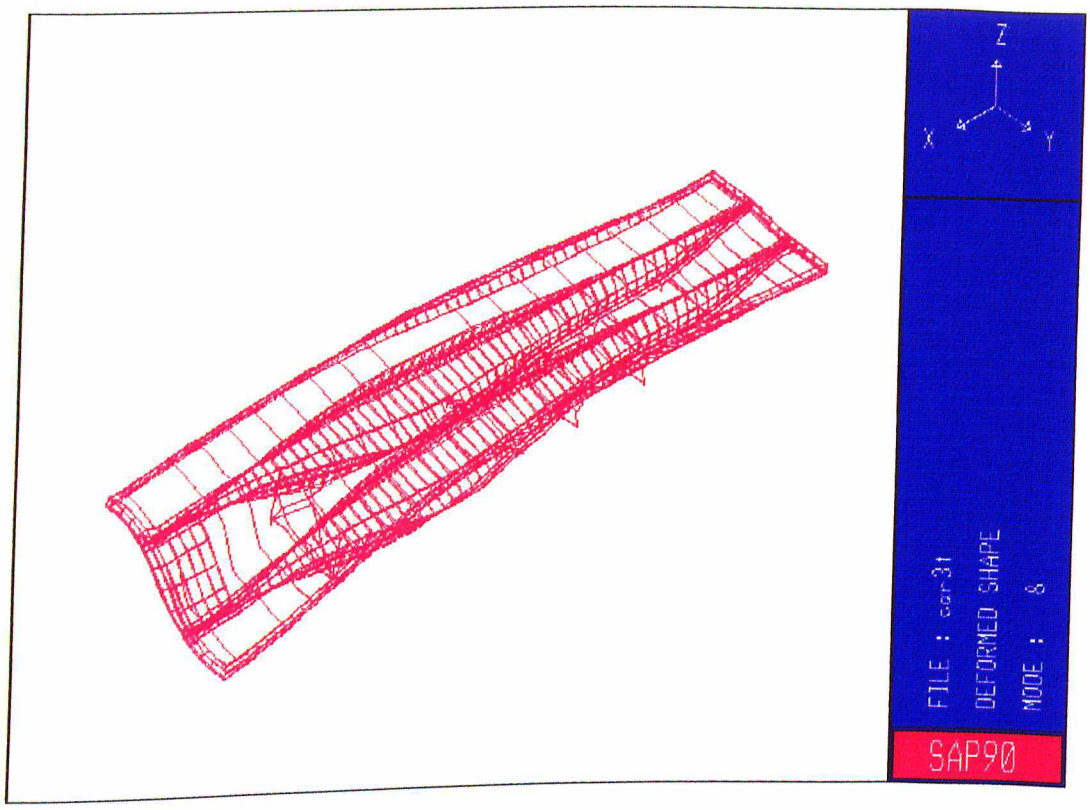

Figura A3.11: Oitavo modo de torção do chassis da carreta de três eixos.

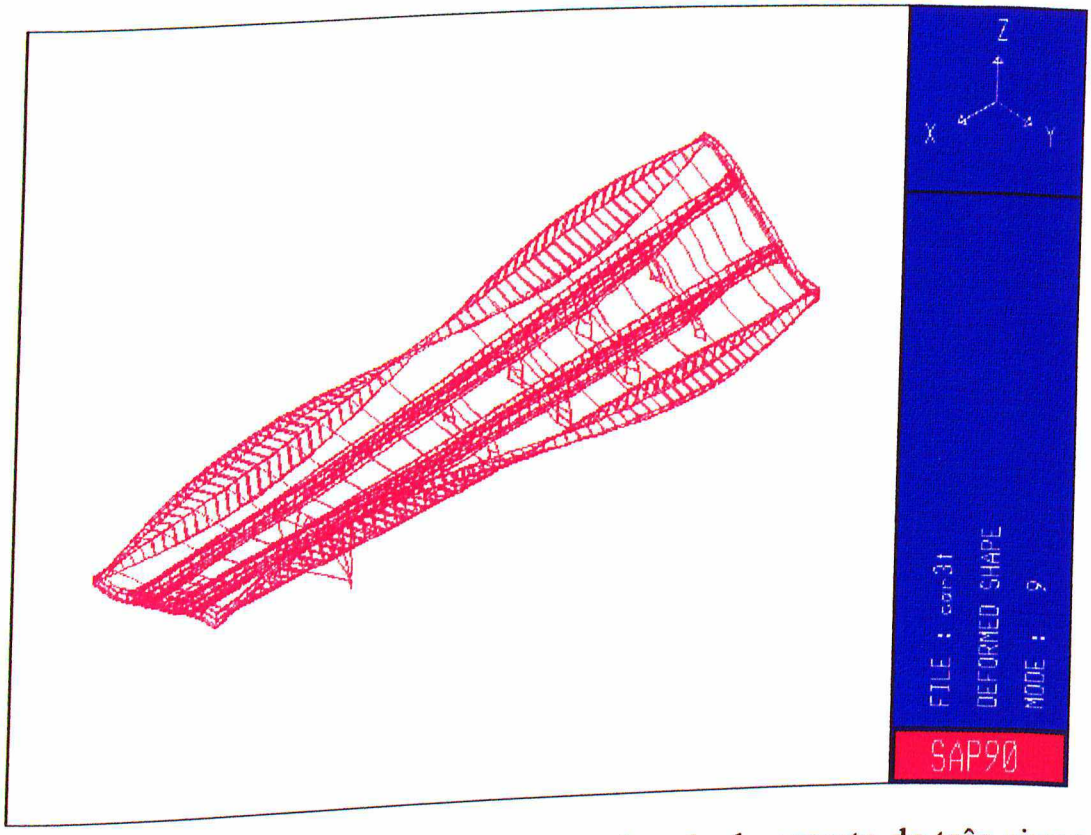

Figura A3.12: Nono modo de torção do chassis da carreta de três eixos.

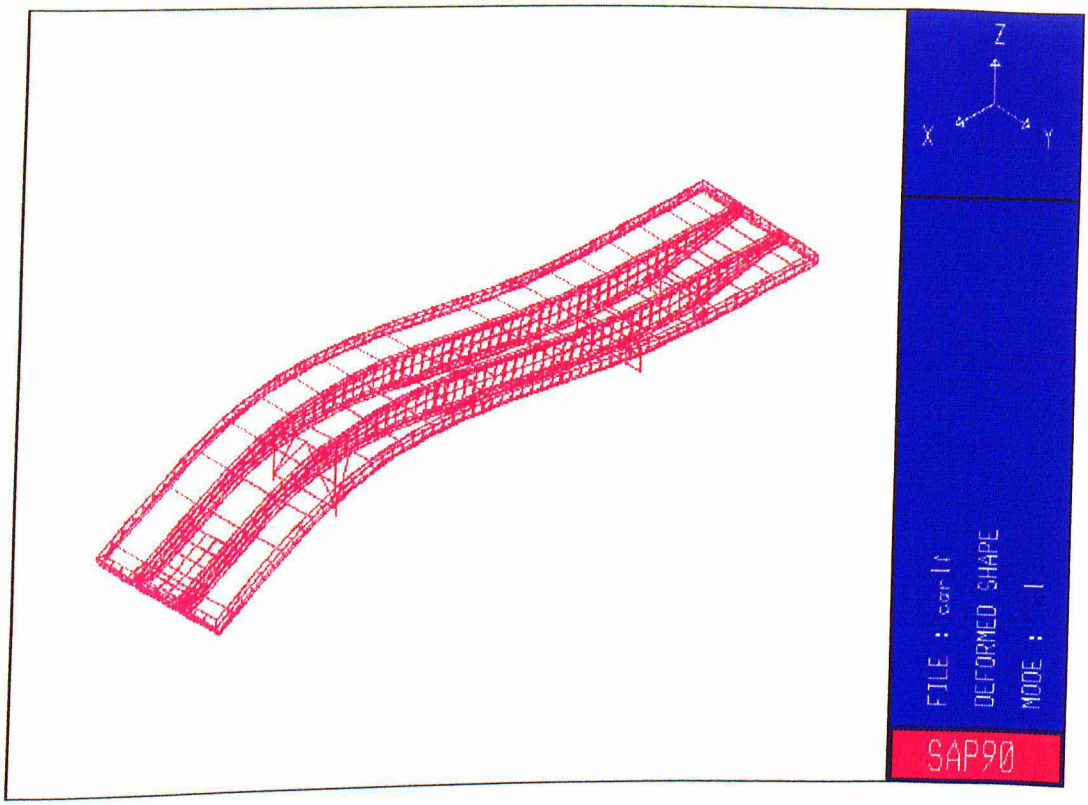

Figura A3.13: Primeiro modo de flexão do chassis da carreta de um eixo.

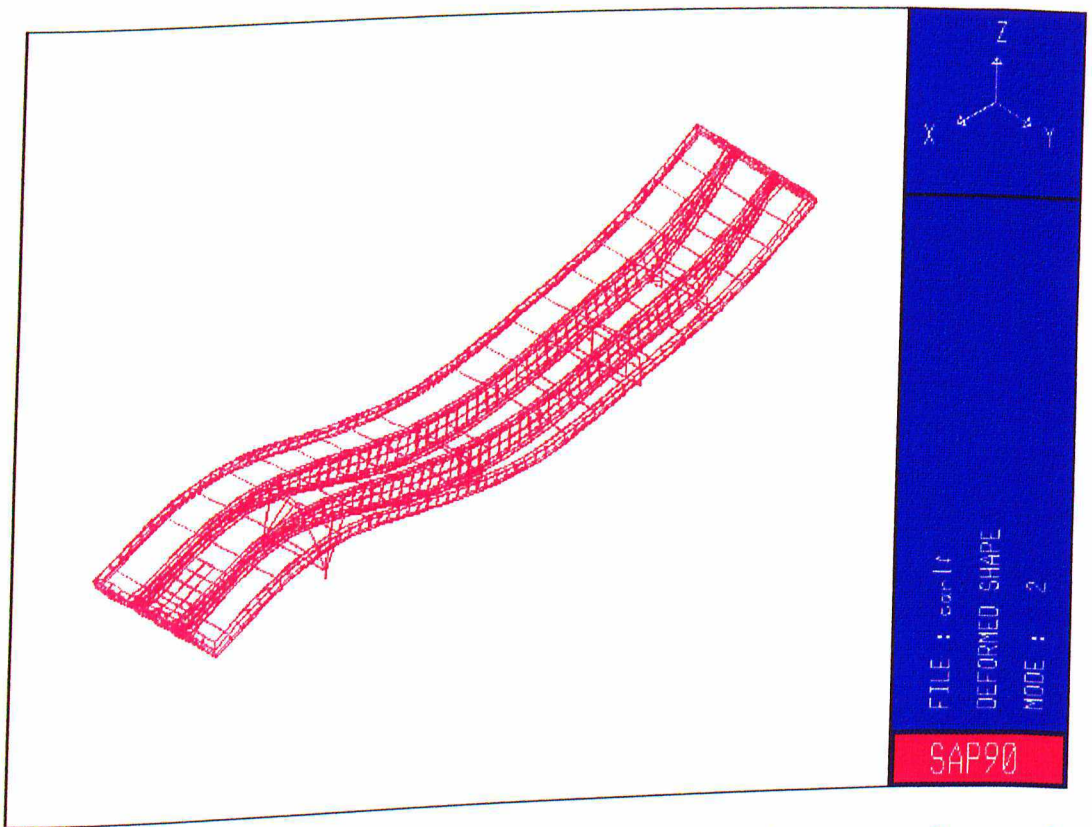

Figura A3.14: Segundo modo de flexão do chassis da carreta de um eixo.

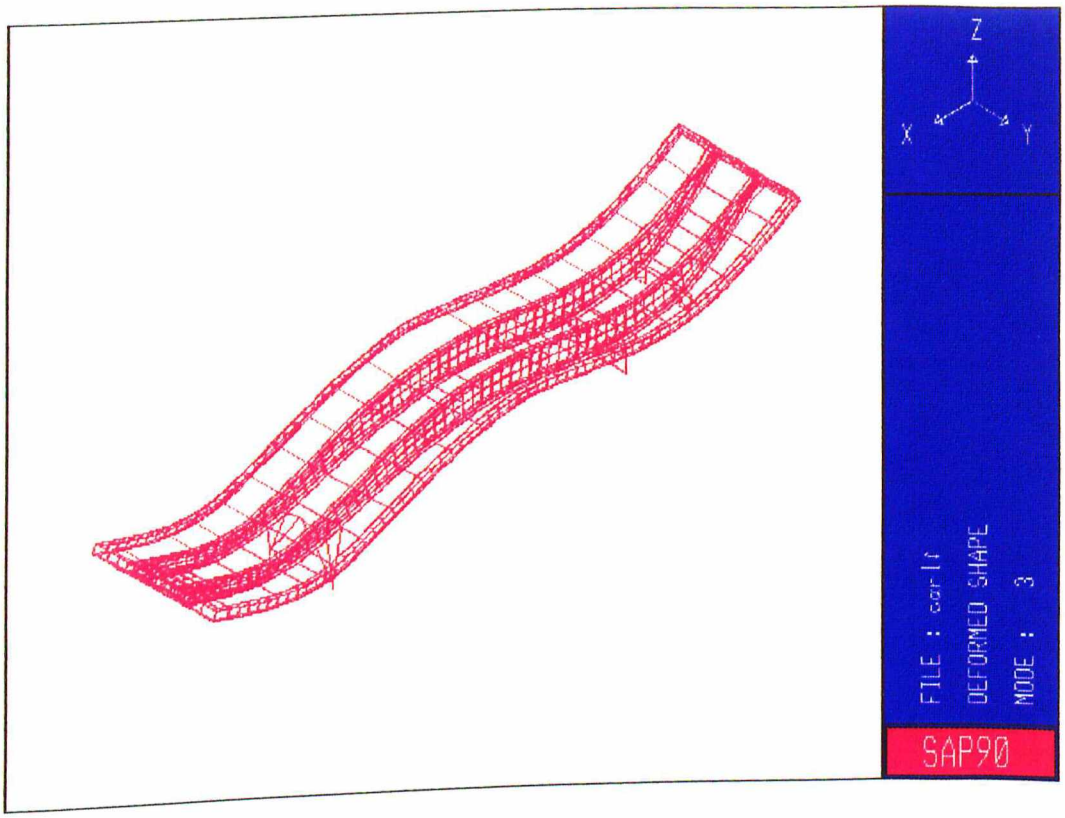

Figura A3.15: Terceiro modo de flexão do chassis da carreta de um eixo.

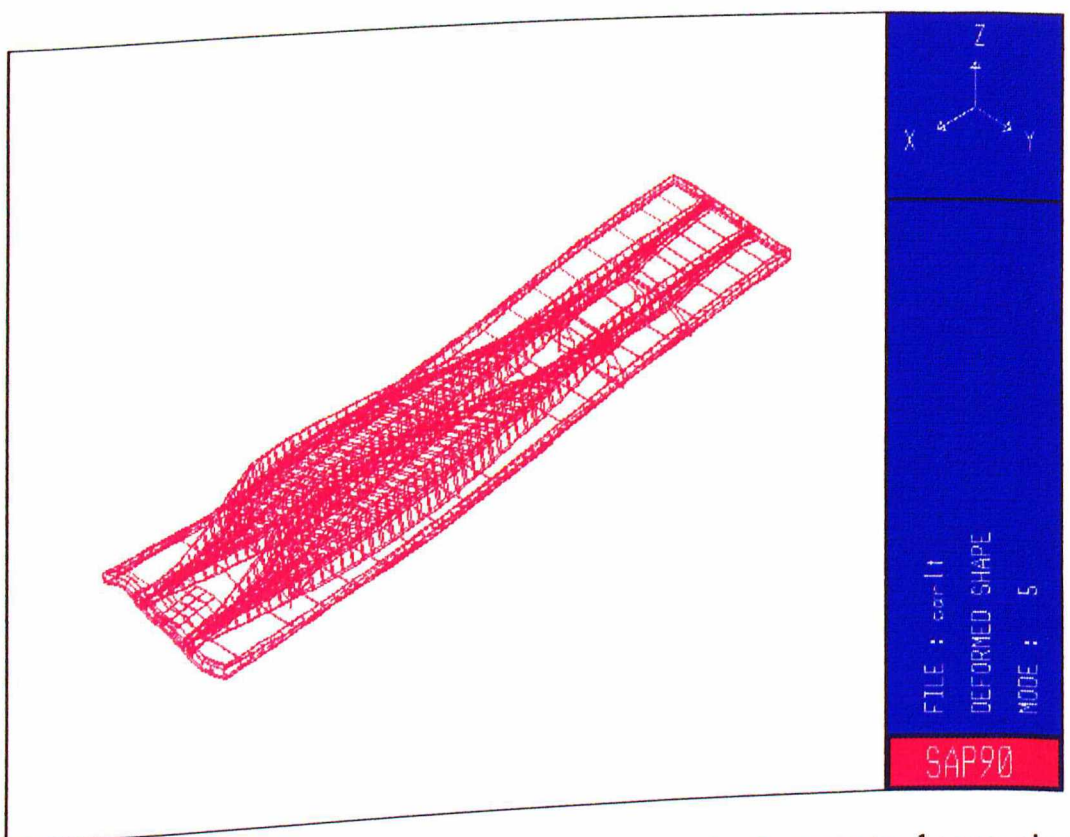

Figura A3.16: Quinto modo de torção do chassis da carreta de um eixo.

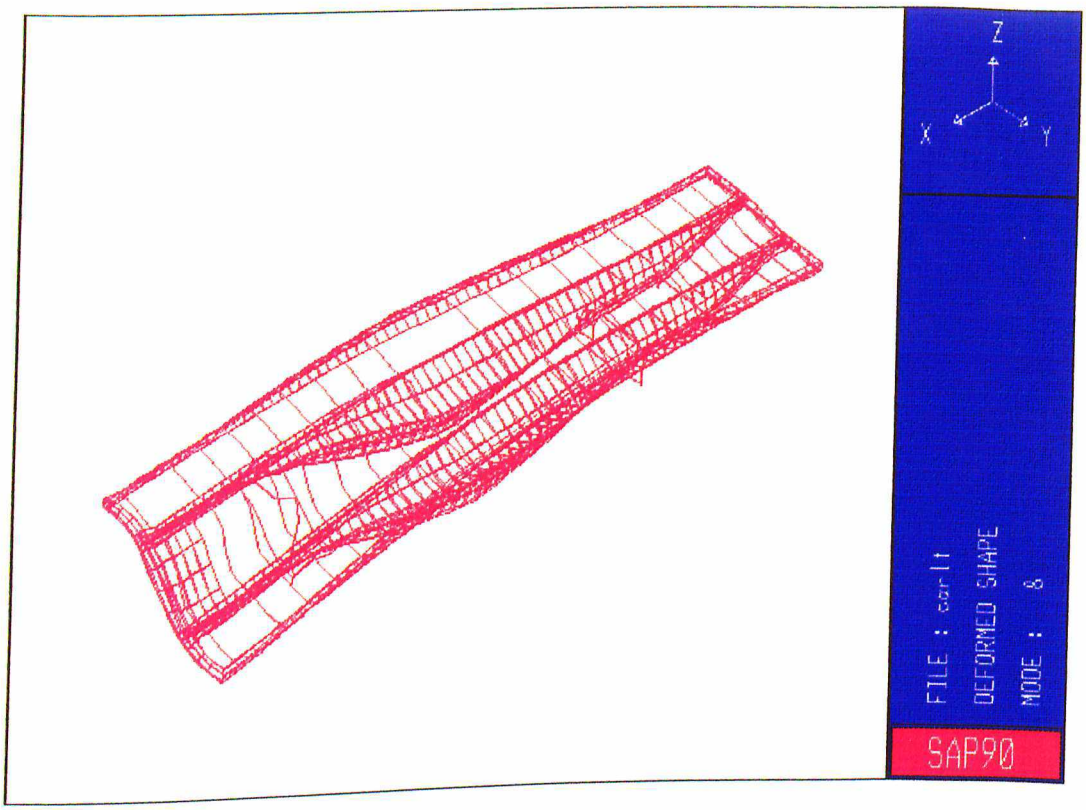

Figura A3.17: Oitavo modo de torção do chassis da carreta de um eixo.

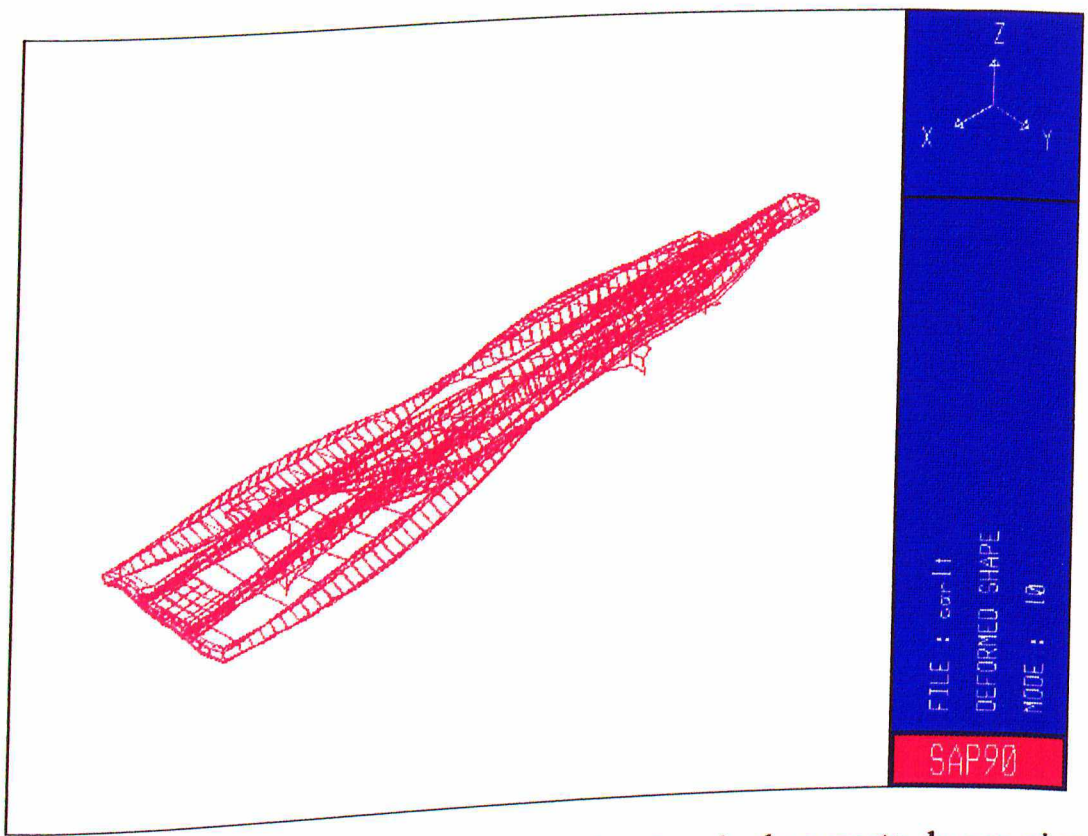

Figura A3.18: Décimo modo de torção do chassis da carreta de um eixo.

Anexo 4
Figuras dos Modelos Sólidos Desenvolvidos no CATIA

Figura A4.1: Sólido representativo do chassis do caminhão.

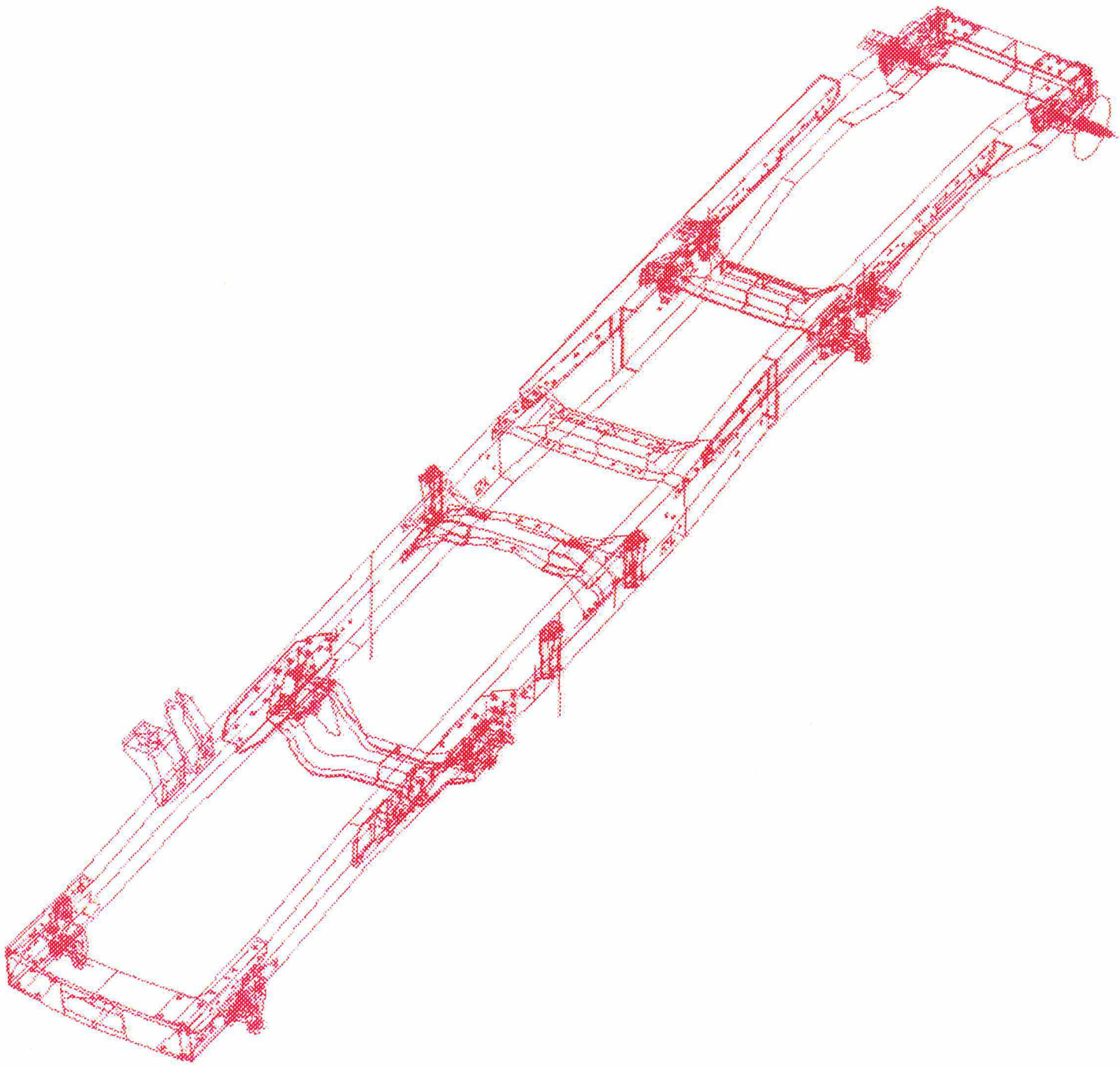

Figura A4.2: Sólido representativo de uma cabine leito.

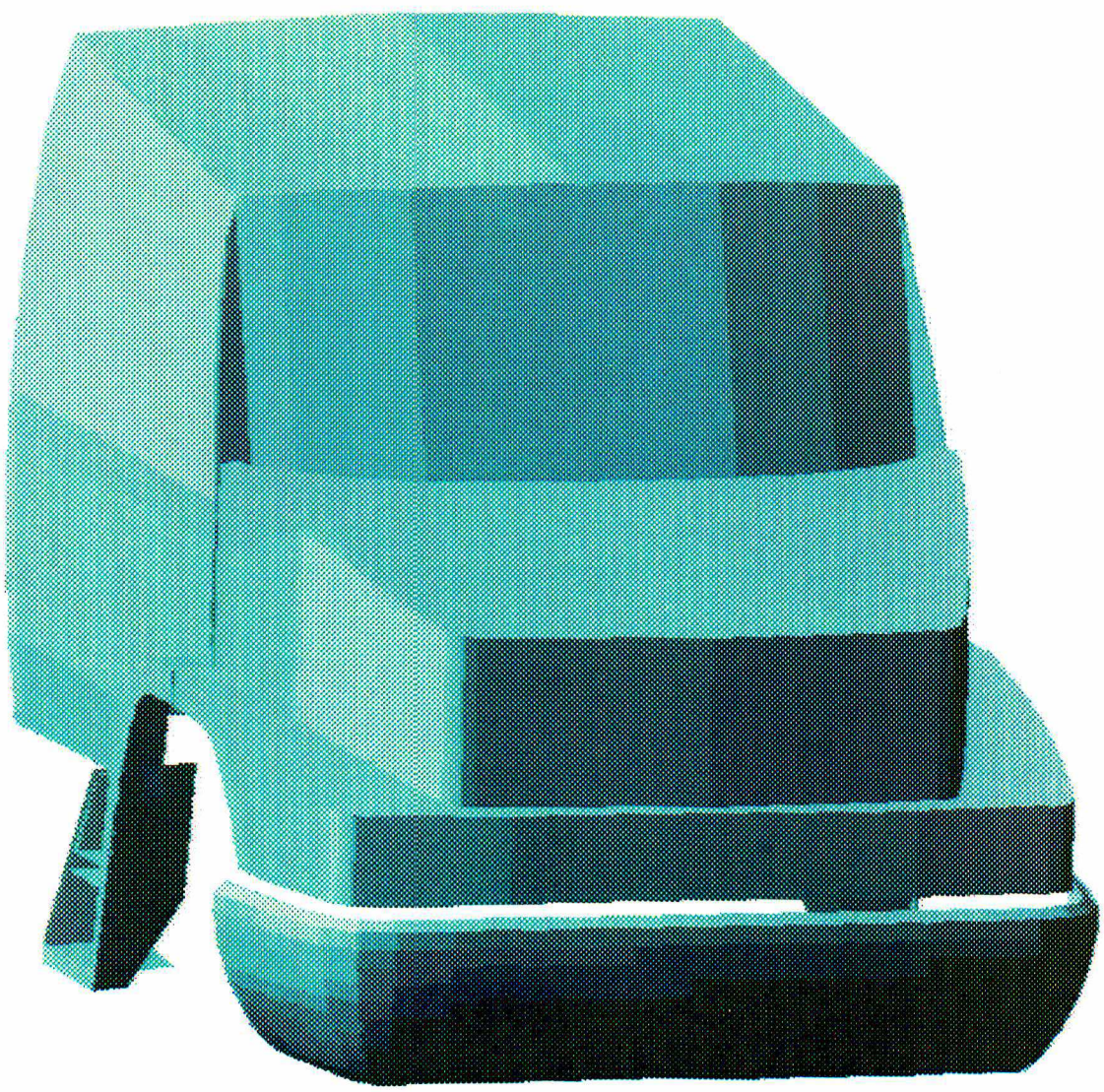

Figura A4.3: Sólido representativo do conjunto propulsor (motor, embreagem e câmbio.

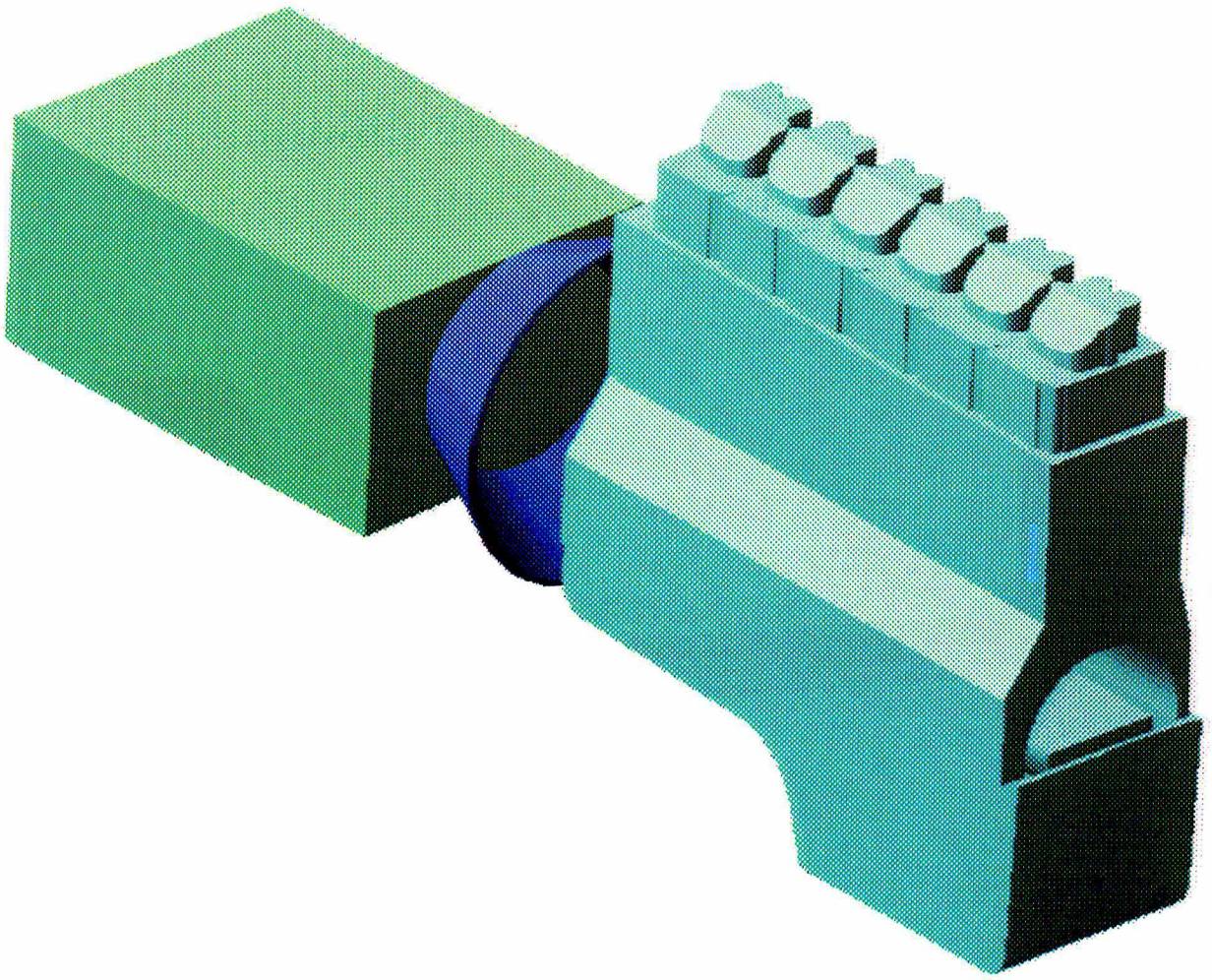

Figura A4.4: Sólido representativo do eixo dianteiro completo.

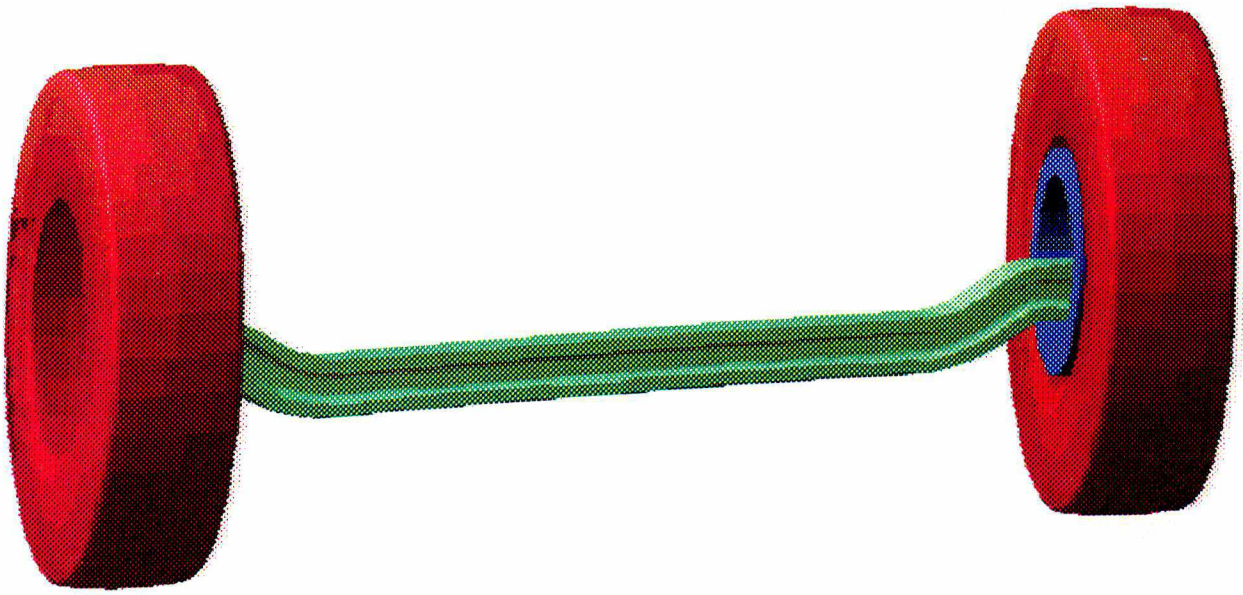

Figura A4.5: Sólido representativo do eixo dianteiro parcial.

Figura A4.6: Sólido representativo do eixo traseiro completo.

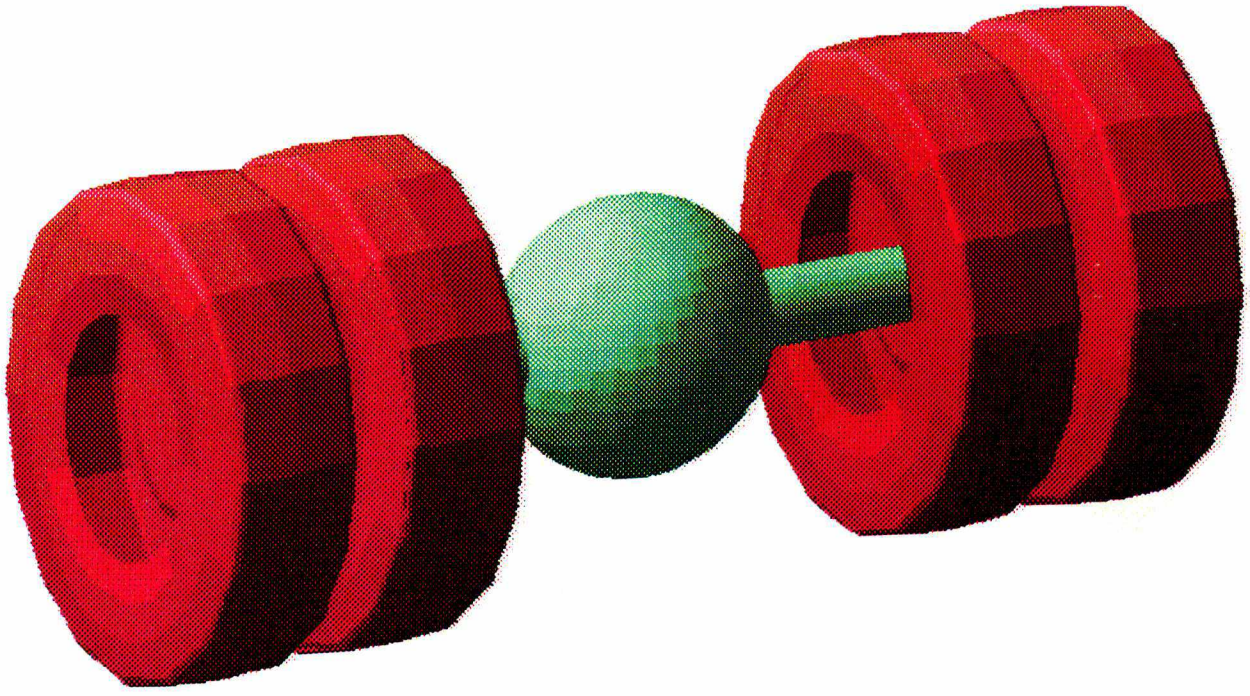

Figura A4.7: Sólido representativo do eixo traseiro parcial.

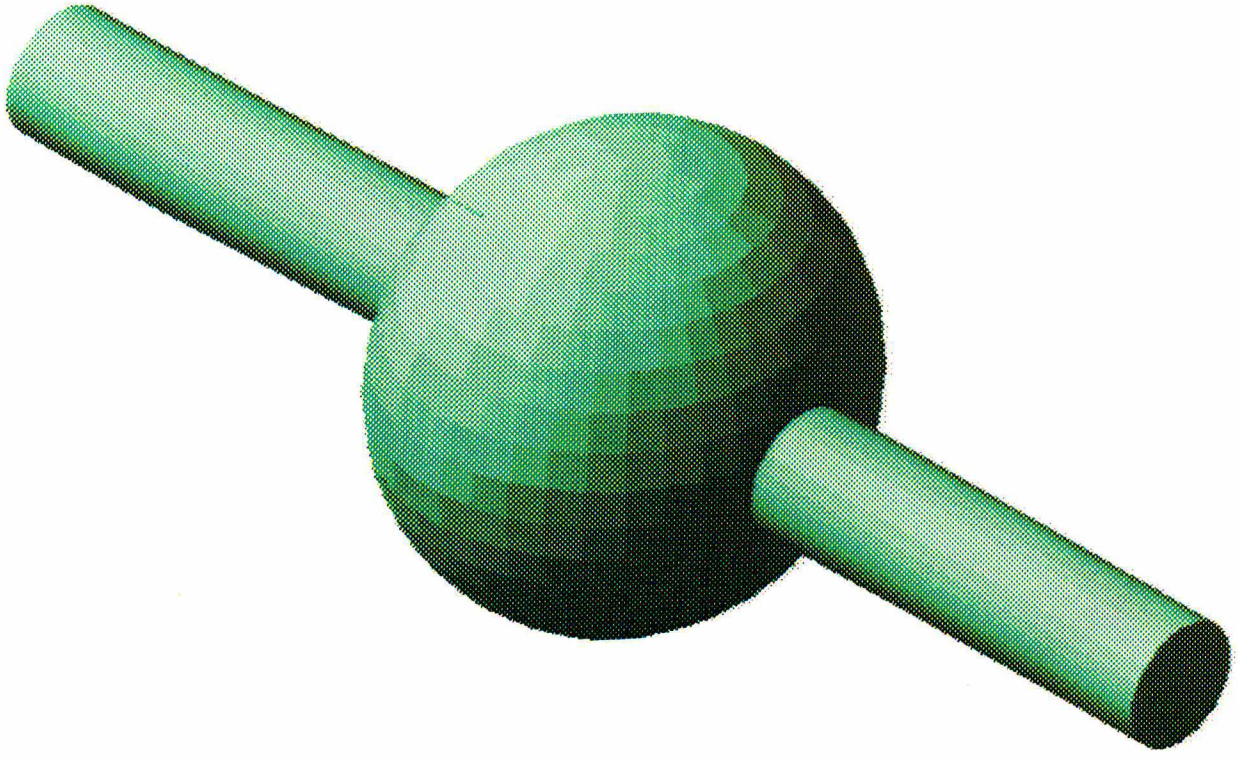

Figura A4.8: Sólido representativo de uma carreta carregada.

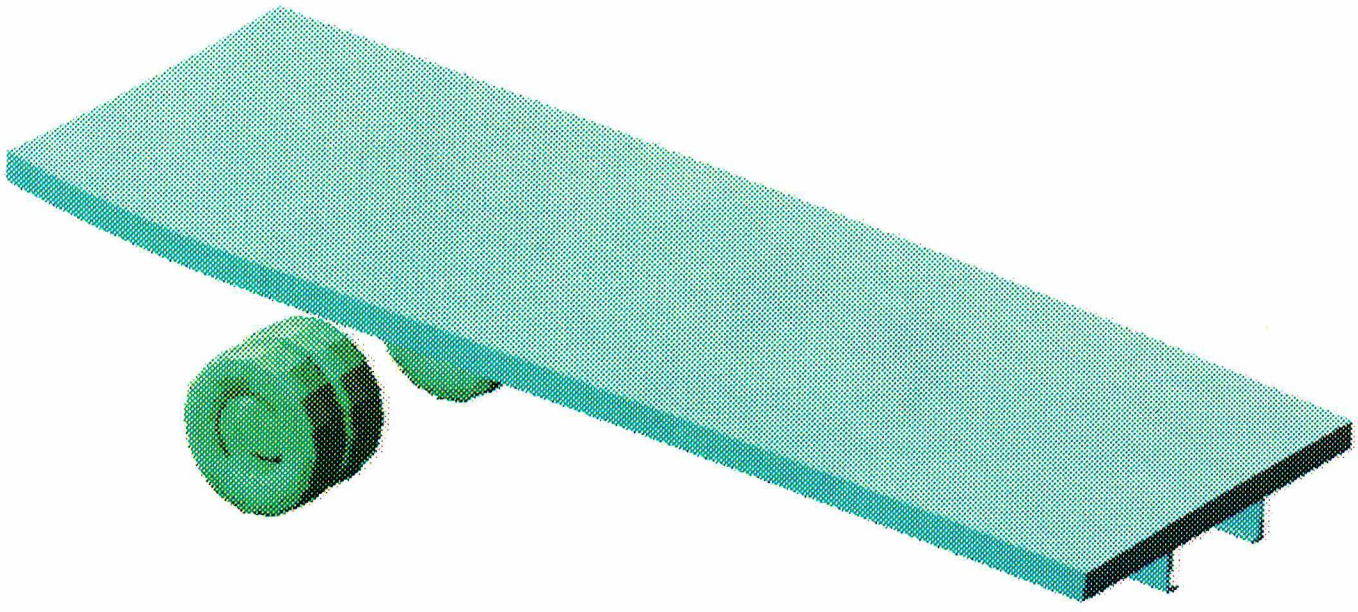

Figura A4.9: Seções do chassis do caminhão onde foram avaliadas as propriedades de área.

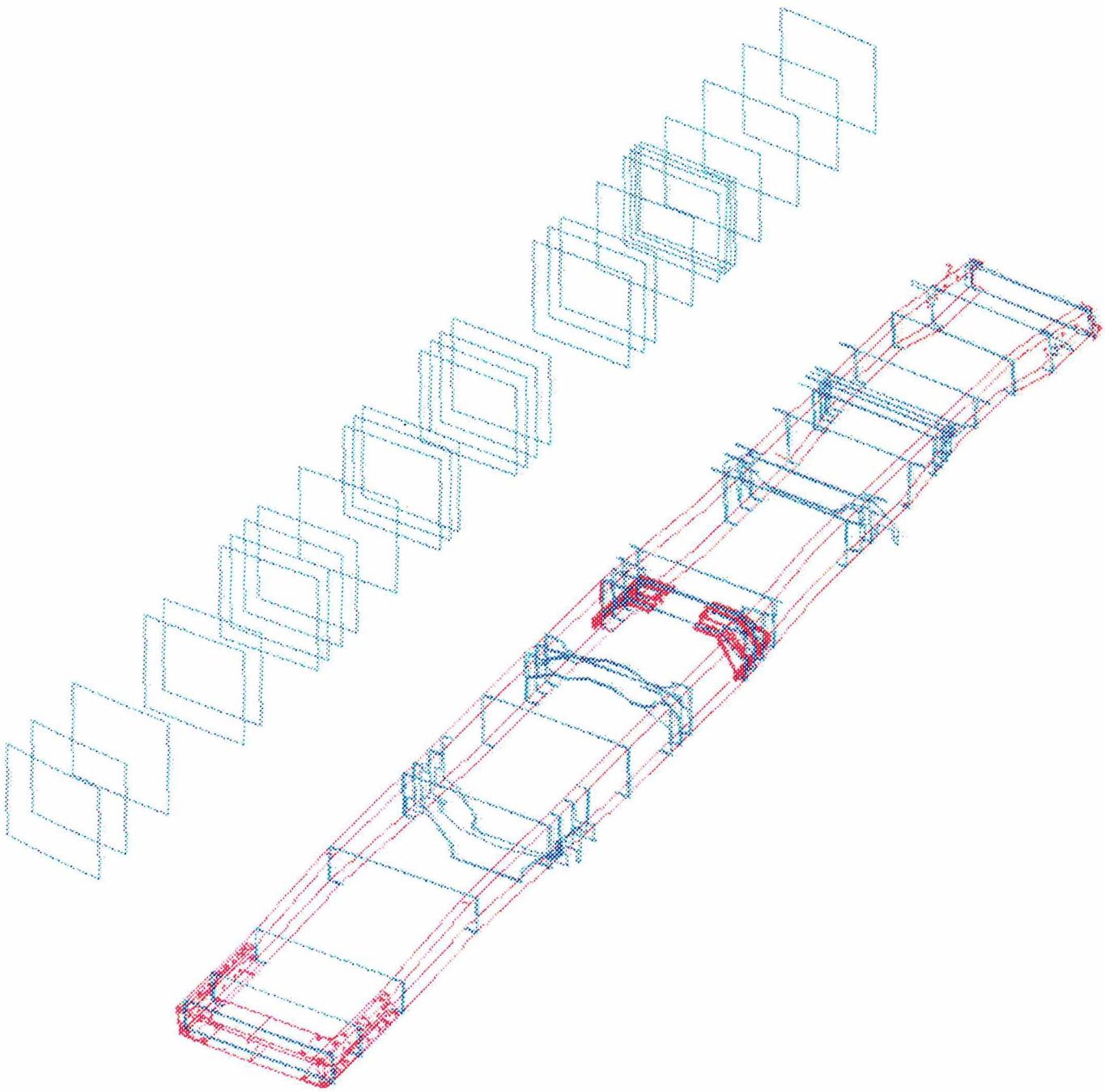

Figura A4.10: Seções do chassis da carreta onde foram avaliadas as propriedades de área.