



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**DESENVOLVIMENTO DE UM FRAMEWORK PARA
OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E APLICAÇÃO PARA O
PLANEJAMENTO TÁTICO DE UMA CADEIA DE SUPRIMENTOS
DE ARGÔNIO**

ALEXANDRE CÉSAR BALBINO BARBOSA FILHO

UBERLÂNDIA – MG

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**DESENVOLVIMENTO DE UM FRAMEWORK PARA
OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E APLICAÇÃO PARA O
PLANEJAMENTO TÁTICO DE UMA CADEIA DE SUPRIMENTOS
DE ARGÔNIO**

ALEXANDRE CÉSAR BALBINO BARBOSA FILHO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Mauro da Silva Neiro

UBERLÂNDIA – MG

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B238d Barbosa Filho, Alexandre César Balbino, 1994-
2020 Desenvolvimento de um framework para otimização robusta e
aplicação para o planejamento tático de uma cadeia de suprimentos de
argônio [recurso eletrônico] / Alexandre César Balbino Barbosa Filho. -
2020.

Orientador: Sérgio Mauro da Silva Neiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.3043>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia química. I. Silva Neiro, Sérgio Mauro da, 1973-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Química. III. Título.

CDU: 66.0

Rejâne Maria da Silva – CRB6/19



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1K, Sala 206 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34)3239-4249 - www.ppgqe.ufu.br - secppgeq@feq.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Química			
Defesa de:	Dissertação de Mestrado, 16/2020, PPGQE			
Data:	28 de agosto de 2020	Hora de início:	9:00	Hora de encerramento:
Matrícula do Discente:	11822EQU002			
Nome do Discente:	Alexandre César Balbino Barbosa Filho			
Título do Trabalho:	Desenvolvimento de um framework para otimização robusta e aplicação para o planejamento tático de uma cadeia de suprimentos de argônio			
Área de concentração:	Desenvolvimento de Processos Químicos			
Linha de pesquisa:	Modelagem, Controle e Otimização de Processos Químicos			
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Tecnologias de apoio à decisão para programação de produção em processos químicos			

Reuniu-se por meio de webconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, assim composta: Professores Doutores: Reinaldo Morabito Neto - DEP/UFSCar; Luís Cláudio Oliveira Lopes - PPGQE/UFU e Sérgio Mauro da Silva Neiro - PPGQE/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Prof. Dr. Sérgio Mauro da Silva Neiro, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(as) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Luis Claudio Oliveira Lopes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/08/2020, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sergio Mauro da Silva Neiro, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/08/2020, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Reinaldo Morabito Neto, Usuário Externo**, em 28/08/2020, às 11:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](#), informando o código verificador **2225061** e o código CRC **10210C11**.

RESUMO

Otimização robusta é uma área de grande aplicabilidade e relativamente nova em suas metodologias e filosofias, e por conta disso vem tomando bastante atenção e apreço, tanto na academia quanto nos setores empresariais e industriais que lidam com incertezas em seus processos. O presente trabalho traz como uma nova abordagem, um *framework* de otimização robusta linear e não-linear, sob certos axiomas, ao qual considera-se o uso de distribuições de probabilidade para representação das incertezas, e que não é necessário a geração de cenários em árvore e nem da atrelação da probabilidade de acontecimento a cada um deles. O princípio do presente *framework* é realizar uma otimização robusta através de uma nova abordagem que regula a robustez e conservadorismo conforme vontade do planejador e que também incorpora um modelo de arrependimento específico do presente *framework*. Para realizar este princípio é necessário transformar o modelo determinístico original em outro através da formulação matemática do framework e sintonizar os valores de desvios padrões das incertezas normais e os valores dos fatores de penalidade através de um algoritmo. Vários exemplos foram resolvidos utilizando-se o *framework* desenvolvido, incluindo um estudo de caso referente ao planejamento tático de uma cadeia de suprimentos de argônio em escala industrial real. Os resultados mostram que o *framework* assegura robustez para um modelo determinístico prestes a ser sintonizado, ao mesmo tempo em que as incertezas são tratadas na otimização, e também que a estratégia de sintonia do algoritmo do *framework* diminui a penalização nos resultados almejados do modelo (bem como seu conservadorismo) ao se aproximar de um estado o mais próximo do ideal.

Palavras-chave: Otimização robusta, Otimização sob incerteza, Otimização não-linear, Otimização linear, Cadeia de suprimentos.

ABSTRACT

Robust optimization is an area of great applicability and is relatively new in its methodologies and philosophies, and because of that it has been getting a lot of attention and esteem in academia, but also in business and industrial sectors that cope with uncertainties in their processes. The present work bring as a new approach, a framework of linear and non-linear robust optimization, under certain axioms, in which considers the use of probability distributions for the representation of uncertainties, and that it is not necessary to generate scenarios in tree-based nor the assignment of the probability of occurrence of each one of them. The principle of the present framework is to perform a robust optimization by a new approach that regulates the robustness and the conservatism by planner's will and that also incorporates a regret model specific of the present framework. To perform this principle, it is necessary to transform the original deterministic model into another through the framework's mathematical formulation and then tune the values of the normal uncertainties' standard deviations and the penalty factors' values by an algorithm. Several examples were solved using the developed framework, including a case study regarding a tactical planning of an argon supply chain of real industrial scale. The results show that the framework ensure robustness for the deterministic model that is about to be tuned, at the same time that the uncertainties are taken into account by the optimization, and also show that the framework algorithm's tuning strategy decrease the penalty in the desired results (as well as its conservatism) by getting closer to the ideal state.

Keywords: Robust optimization, Optimization under uncertainty, Non-linear optimization, Linear optimization, Supply Chain.

SUMÁRIO

RESUMO	<i>i</i>
ABSTRACT	<i>ii</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>iii</i>
LISTA DE TABELAS.....	<i>iv</i>
LISTA DE ABREVIATURAS	<i>v</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>vi</i>
1. INTRODUÇÃO	21
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	26
2.1. OTIMIZAÇÃO DE PROCESSOS DE PRODUÇÃO INTENSIVO EM ENERGIA COM INTEGRAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS.....	26
2.2. OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA.....	29
2.2.1. Otimização Determinística	33
2.2.2. Programação estocástica.....	34
2.2.3. Otimização Robusta	40
2.2.4. Otimização robusta ajustável.....	48
2.2.5. Otimização distributivamente robusta.....	49
2.2.6. Otimização <i>fuzzy</i>	50
2.2.7. Otimização <i>distribution-based</i>	51
2.2.8. Otimização sob incerteza aplicada ao planejamento e programação.....	52
3. APRESENTAÇÃO DO FRAMEWORK.....	53
3.1. OBJETIVO, FILOSOFIA E PRIMEIRAS CONSIDERAÇÕES DO FRAMEWORK.....	53
3.2. ALGUNS CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA PARA ENTENDIMENTO DO FRAMEWORK.....	57
3.3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO FRAMEWORK.....	61
3.4. ALGORITMO <i>WHAT-TO-DO</i> DA METODOLOGIA DO FRAMEWORK	68
3.5. Exemplo de aplicação do framework através da aplicação para um modelo linear e outro não-linear	75
4. PROBLEMÁTICA DO ESTUDO DE CASO	102
4.1. MODELO DE OTIMIZAÇÃO PARA A GERAÇÃO DE ROTAS	104
4.1.1. Restrições inseridas no modelo de geração de rotas e que são optativas para aumentar a eficiência computacional.....	109
4.2. MODELO DE OTIMIZAÇÃO DA CADEIA DE SUPRIMENTOS DE ARGÔNIO	111
4.2.1. Modelagem da produção	111
4.2.2. Modelagem da distribuição de argônio	118
4.2.3. Função objetivo	121

4.3. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA FUNÇÃO OBJETIVO DO MODELO DA CADEIA DE SUPRIMENTOS DE ARGÔNIO	122
4.4. APLICAÇÃO DO <i>FRAMEWORK</i> PARA O PROBLEMA ESTUDO DE CASO	123
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	126
5.1. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	126
5.2. SINTONIA DO MODELO DO ESTUDO DE CASO VIA USO DO <i>FRAMEWORK</i>	129
6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	133
APÊNDICES.....	134
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	146

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1.1: Figura de caráter ilustrativo do valor da função objetivo do problema de otimização de cada otimização realizada ao longo da linha do tempo.....	56
Figura 3.2.1: Gráfico ilustrativo da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal para diferentes valores de desvio padrão e média nominal da incerteza igual a μ_{LIRR} , onde é suposto um valor de X_{SPOT} para observância na abscissa.....	57
Figura 3.2.2: Exemplo de função não monotônica que oscila e dificulta o funcionamento do framework caso a quantidade de realizações de otimizações seja pequeno.....	60
Figura 3.4.1: Algoritmo do framework.....	71
Figura 3.5.1: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2$ e $5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$	78
Figura 3.5.2: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10$ e $20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$	79
Figura 3.5.3: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1} (\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$	79
Figura 3.5.4: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2$ e $5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,95$	80
Figura 3.5.5: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10$ e $20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,95$	80

Figura 3.5.6: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1}(\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,95$	81
Figura 3.5.7: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 2,1$	81
Figura 3.5.8: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 2,1$	82
Figura 3.5.9: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1}(\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 2,1$	82
Figura 3.5.10: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 2,5$	83
Figura 3.5.11: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 2,5$	83
Figura 3.5.12: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1}(\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 2,5$	84
Figura 3.5.13: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 1,9$	84

Figura 3.5.14: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 1,9$	85
Figura 3.5.15: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1} (\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 1,9$	85
Figura 3.5.16: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 1,95$	86
Figura 3.5.17: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 1,95$	86
Figura 3.5.18: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1} (\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 1,95$	87
Figura 3.5.19: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 2,1$	87
Figura 3.5.20: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 2,1$	87
Figura 3.5.21: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1} (\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 2,1$	88

- Figura 3.5.22: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 2,5$89
- Figura 3.5.23: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 2,5$89
- Figura 3.5.24: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1} (\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 2,5$90
- Figura 3.5.25: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 100$92
- Figura 3.5.26: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 100$93
- Figura 3.5.27: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1} (\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 100$93
- Figura 3.5.28: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2 e 5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 50$94
- Figura 3.5.29: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 10 e 20 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 50$94

Figura 3.5.30: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1}(\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 50$	95
Figura 3.5.31: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2$ e $5 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.3). $N^{BIG} = 10000$	98
Figura 3.5.32: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 7$ e $10 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.3). $N^{BIG} = 10000$	99
Figura 3.5.33: Gráfico do Arrependimento relativo (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1}(\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.3). $N^{BIG} = 10000$	99
Figura 3.5.34: Gráfico do Arrependimento relativo (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1}(\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.30). $N^{BIG} = 200$	101
Figura 4.1: Cadeia de suprimentos do problema estudo de caso.....	102
Figura 4.1.1: Raio de entrega de uma USA.....	104
Figura 4..1.2: Ilustração da janela de tempo do pré-planejamento de um cliente que é abastecido ao longo de um mês.....	106
Figura 4.2.1.1: Exemplificação do perfil de produção de uma USA durante o mês de operação.....	113
Figura 4.4.1: Distribuição exponencial dos dados históricos de ξ^{PW} na planta A da cadeia de suprimentos de argônio do estudo de caso.....	124

Figura 5.1.1: Análise de sensibilidade da função objetivo e do custo de produção em relação ao preço de energia elétrica, considerando o valor nominal de demanda geral de todos os clientes no problema.....	127
Figura 5.1.2: Análise de sensibilidade do custo de distribuição em relação ao preço de energia elétrica, considerando o valor nominal de demanda geral de todos os clientes no problema....	127
Figura 5.1.3: Análise de sensibilidade da função objetivo e do custo de produção do problema em relação à demanda geral de todos os clientes, considerando os valores nominais de preço da energia elétrica do problema.....	128
Figura 5.1.4: Análise de sensibilidade do custo de distribuição do problema em relação à demanda geral de todos os clientes, considerando os valores nominais de preço da energia elétrica do problema.....	128

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1.1: Esquema exemplar de parametrização da LTRR.....	54
Tabela 3.5.1: Valores dos parâmetros utilizados em todas as ODGRs do exemplo do <i>framework</i>	76
Tabela 3.5.2: Valores nominais dos parâmetros na linha do tempo hipotética da LTRR para todas as instâncias do problema exemplar linear do <i>framework</i> utilizado na otimização robusta.....	77
Tabela 3.5.3: Melhores valores de desvio padrão σ_{ε_1} (valores finais da sintonia) para cada situação de ODGR do problema exemplificado, onde $\alpha_2 = 1$ e $\theta_4 = 100$	90
Tabela 3.5.4: Melhores valores de desvio padrão σ_{ε_1} (valores finais da sintonia) para cada situação de ODGR do problema exemplificado, onde $\alpha_2 = 0,85$ e $\theta_4 = 70$	91
Tabela 3.5.5: Resultados de sintonia para o caso $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$ para a LTRR, e $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ para a ODGR (condições da Figura 3.5.3) para diferentes realizações.....	92
Tabela 3.5.6: Melhoria entre usar o melhor valor contra o pior valor de desvio padrão nas Figuras 3.5.3, 3.5.6, 3.5.9, 3.5.12, 3.5.15, 3.5.18, 3.5.21 e 3.5.24.....	96
Tabela 5.2.1. Valores de ARM^σ para cada desvios padrões e f_{obj}^{ODGR} considerados, no 1º caso de aplicação.....	130
Tabela 5.2.2. Valores de ARM^σ para cada desvios padrões e f_{obj}^{ODGR} considerados, no 2º caso de aplicação.....	131

LISTA DE ABREVIATURAS

AR – Arrependimento relativo

ARM – Arrependimento relativo médio

DRV - Domínio do problema de otimização em que se encontra a região viável

FO – Função objetivo

GAMS – *General Algebraic Modeling System*

IRP – Problema de roteamento veicular baseado em inventário

LGN – Lei dos grandes números

LTRR – Linha de tempo recente de referência

MPCOST – Limite máximo de custo diário de uso de eletricidade em todas as plantas

ODGR – Otimização determinística geral de referência

OR – Otimização robusta

ORA – Otimização robusta ajustável

PDF – Função distribuição de probabilidade

PIDRP - Problema de roteamento integrado de produção-inventário-distribuição

PIE – Produção/processo intensivo em energia

PRVC – Problema de roteamento de veículos capacitados

USA – Unidade de separação de ar

LISTA DE SÍMBOLOS

ÍNDICES

$c \in \mathbf{C}$	Clientes
$g \in \mathbf{G}$	Grupos de clientes
$j \in \mathbf{J}$	Vértices da borda da região convexa viável de operação
$k \in \mathbf{K}$	Produtos
$l \in \mathbf{L}$	Rotas das trilhas de trem
$m \in \mathbf{M}$	Modos de operação
$p \in \mathbf{P}$	Plantas de produção
$r \in \mathbf{R}$	Rotas
$t \in \mathbf{T}$	Períodos de tempo
$u \in \mathbf{U}$	Caminhões

CONJUNTOS

$\mathbf{C}_{p,t}$	Conunto de clientes que podem ser servidos pela planta p no tempo t
\mathbf{C}_p	Conunto de clientes que podem ser servidos pela planta p
\mathbf{C}_t	Conunto de clientes que estão aptos para entrega em t
\mathbf{C}^{ST}	Clientes
$\mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}$	Conunto de clientes que podem ser servidos pela planta p através da rota r no tempo t
$\mathbf{J}_{p,m}$	Conunto de vértices j que estão na borda da região convexa viável de operação da planta p quando operada no modo m
$\mathbf{L}_{p,p'}$	Conjunto que define a existência de uma rota de trilha de trem entre plantas p e p'
\mathbf{M}_p	Conunto de modos de operações de uma planta p
\mathbf{P}^{ST}	Conunto de plantas as quais as entregas podem ser realizadas
\mathbf{P}_p^I	Conunto de plantas que podem enviar Ar líquido para a planta p
\mathbf{P}_p^O	Conunto de plantas que podem receber Ar líquido da planta p
$\mathbf{R}_{p,t}^{ST}$	Conunto de rotas disponíveis da planta p em t
\mathbf{U}^{ST}	Conjunto de caminhões
\mathbf{U}_p^{ST}	Conunto de caminhões disponíveis na planta p

PARÂMETROS

$\alpha_{p,m,k}$	Coeficiente linear do custo de produção do produto k se a planta p é operada no modo m
$\beta_{p,m}$	Coeficiente fixo do custo de produção da planta p se operada no modo m
$\gamma_{c,t}^{Ar}$	Demande de Ar líquido no cliente c em t
$\gamma_{p,k}$	Demande mensal do produto k (N2 e O2) na planta p
δ^{max}	Máxima distância percorrida permitida em um dia
$\delta_{c,c'}^{CC}$	Distância entre um cliente c e um cliente c'
$\delta_{p,c}^{PC}$	Distância entre uma planta p e um cliente c
$\eta_{p,t}^{max}$	Quantidade máxima de rotas disponíveis para a planta p em t , $\min\left(\left\lfloor \frac{\theta_{p,t}}{k^{max}} \right\rfloor + \rho, \mathbf{R} \right)$

$\theta_{p,t}$	Quantidade de clientes aptos para entrega que podem ser servidos pela planta p em t
κ^{max}	Quantidade máxima de clientes a serem incluídos em uma rota
ξ^{PW}	Custo de energia (eletricidade)
ξ^T / ξ^{LT}	Transportação do caminhão/ Custo de carregamento da transportação
ξ_l^{RR}	Custo de transporte através da trilha de trem da rota l – custo por viagem
σ_c^0	Inventário inicial de Ar no cliente c
σ_c^{max}	Capacidade máxima de armazenamento de Ar no cliente c
σ_c^{min}	Capacidade mínima de armazenamento de Ar no cliente c
σ_c^{sf}	Nível de segurança de inventário de Ar no cliente c
$\sigma_{p,k}^{P_0}$	Inventário inicial de produto k na planta p
$\sigma_{p,k}^{P_{min}}$	Capacidade mínima de armazenamento de produto k na planta p
$\sigma_{p,k}^{LO2}$	Quantidade de N2 líquido que precisa evaporar e ser enviado para clientes próximos se a USA é desligada
$\sigma_{pk}^{P_{max}}$	Capacidade máxima de armazenamento de produto k na planta p
τ^E	Quantidade de horas necessárias para completar o desligamento de uma planta
τ^N	Quantidade de horas que representa a duração de um dia
τ^S	Quantidade de horas necessárias para completar a inicialização de uma planta
τ_l^{IT}	Quantidade de dias necessários para um trem realizar uma entrega entre plantas através da rota l
φ_u^{max}	Capacidade de carregamento do caminhão u
$\epsilon_l^{I_{max}} / \epsilon_l^{I_{min}}$	Límite superior/inferior da quantidade de Ar líquido entregue através da rota l por um trem
$\epsilon_u^{C_{min}}$	Límite inferior da quantidade de Ar descarregado em um cliente c
$\epsilon_u^{T_{max}} / \epsilon_u^{T_{min}}$	Límite superior/inferior da quantidade de Ar entregue por um caminhão u
$\vartheta_{p,m,j,k}$	Slate de produção j para produção de k quando uma planta p é operada num modo m
ϕ_c	Taxa determinística diária de consumo de um cliente c
ρ	Quantidade de rotas extras permitidas de serem criadas em adição à quantidade mínima calculada por $\left\lfloor \frac{\theta_{p,t}}{\kappa^{max}} \right\rfloor$

VARIÁVEIS

Variáveis contínuas

$\bar{V}_{p,t,m,k}$	Produção horária desagregada de produto k quando uma planta p é operada num modo m em t
$\bar{V}_{p,t,m,k}^E$	Produção horária desagregada de produto k quando uma planta p é operada num modo m em t quando a planta entra em desligamento
$\bar{V}_{p,t,m,k}^S$	Produção horária desagregada de produto k quando uma planta p é operada num modo m em t quando a planta é inicializada
$\bar{V}_{p,u,t,r,c}^{ST}$	Volume de Ar líquido descarregado de um caminhão u em um cliente c quando o mesmo partiu da planta p pela rota r em t
$F_{p,t,m,j}$	[0,1] Multiplicador fracionário relacionado a um slate j quando uma planta p é operada num modo m em t
$F_{p,t,m,j}^E$	[0,1] Multiplicador fracionário relacionado a um slate j quando uma planta p é operada num modo m em t quando uma planta entra em desligamento
$F_{p,t,m,j}^S$	[0,1] Multiplicador fracionário relacionado a um slate j quando uma planta p é operada num modo m em t quando a planta é inicializada
$I_{c,t}^C$	Inventário de Ar líquido no cliente c em t

$I_{p,t,k}^P$	Inventário de produto k na planta p em t
$R_{p,u,t,r}^{ST}$	Distância percorrida por um caminhão u partindo-se de uma planta p através da rota r em t
$V_{p,l,p',t}^{IT}$	Volume de Ar transferido entre plantas p e p' através da rota l em t
$V_{p,t,k}$	Produção diária de produto k na planta p em t
$V_{p,u,t,r}^{ST}$	Volume de Ar carregado em um caminhão u indo por uma rota r partindo-se de uma planta p em t

Variáveis inteiros

$O_{p,t,r,c}$ Indica a ordem cujo cliente c é servido em uma rota r partindo-se da planta p em t

Variáveis binárias

$\bar{X}_{p,u,t,r,c,c'}^{ST}$	1 se um caminhão u visita um cliente c' depois do cliente c numa rota r partindo-se de uma planta p em t , 0 caso contrário
$\hat{X}_{p,u,t,r,c}^{ST}$	1 se um caminhão u visita um cliente c como primeiro cliente em uma rota r partindo-se de uma planta p em t , 0 caso contrário
$\tilde{X}_{p,u,t,r,c}^{ST}$	1 se o cliente c é o ultimo cliente servido em uma rota r partindo-se de uma planta p em t , 0 caso contrário
$V_{p,t,r,c}$	1 se o cliente c é atribuído à rota r em t partindo-se da planta p
$Y_{p,l,p',t}^{IT}$	1 se Ar é transferido da planta p para a planta p' através da rota l em t
$Y_{p,t,m}^{EM}$	1 se a planta p entra em desligamento num modo m em t , 0 caso contrário
$Y_{p,t,m}^M$	1 se a planta p é operada num modo m em t , 0 caso contrário
$Y_{p,t,m}^{SM}$	1 se a planta p é inicializada no modo m em t , 0 caso contrário
$Y_{p,u,t,r}^{ST}$	1 se um caminhão u de uma planta p realiza uma entrega através da rota r em t
$Z_{p,t,r}$	1 se uma rota r partindo-se de uma planta p é atribuída a qualquer cliente em t
$X_{p,u,t,r,c}^{ST}$	1 se uma planta p envia um caminhão u para o cliente c através da rota r em t , 0 caso contrário
$Y_{p,t}$	1 se uma planta p é operada em t , 0 caso contrário
$Y_{p,t}^E$	1 se uma planta p entra em desligamento em t , 0 caso contrário
$Y_{p,t}^S$	1 se uma planta p se inicializa em t , 0 caso contrário

1. INTRODUÇÃO

Quando uma empresa, instituição, grupo, sociedade, tomador de decisões etc, deseja realizar um planejamento para tempos futuros em suas atividades, ao qual não se sabe o que vai acontecer ou como o processo/operação deve fluir para tomadas de decisões ótimas, soluções robustas resolvem o problema. Tendo isso em vista, a área de otimização sob incerteza é essencial para poder calcular quais serão as tomadas de decisões ótimas quando há incertezas (parâmetros variáveis) no processo, o que acontece basicamente sempre devido a muitos parâmetros de entrada de qualquer que seja o modelo serem suscetíveis a mudanças ocasionadas por distúrbios (e.g., temperatura, umidade etc) ou necessidades de mudanças adaptáveis ao processo (e.g., demanda, preço etc).

Dentro da área de otimização sob incerteza, GOVINDAN e CHENG (2018) divulgaram neste trabalho de revisão bibliográfica, alguns avanços no campo de programação estocástica e otimização robusta (OR) realizados por outros pesquisadores nos últimos tempos acerca de cadeia de suprimentos. Por outro lado, a importância da avaliação das incertezas no campo da otimização levou muitos pesquisadores a explorar parâmetros estocásticos em suas pesquisas de cadeias de suprimentos (GUPTA, *et al.*, 2000; PEIDRO, *et al.*, 2009; CHEN e FAN, 2012; SODHI, 2005; BIDHANDI e YUSUFF, 2011; IVANOV e SOKOLOV, 2012; HEIDARY e AGHAIE, 2019). Há áreas correlatas que também são estudadas com o intuito de predizer o que ocorrerá no futuro, porém que não utilizam abordagens de pesquisa operacional, ao qual um exemplo é a rede neural LSTM (*long short-term memory*) usada, entre várias de suas aplicações, para predizer séries temporais. Há ainda diferentes filosofias no campo da otimização sob incerteza (SAHINIDIS, 2004), ao qual alguns desses avanços são discutidos no capítulo 2 (Revisão bibliográfica) desta dissertação.

IANCU e TRICHAKIS (2013) descobriram através da metodologia de soluções ótimas robustas de Pareto, bem como do próprio conceito de eficiência de Pareto, que realizar uma OR baseada apenas na perspectiva do pior caso, pode levar a decisões que não são ótimas se o pior caso não acontecer. Se o pior caso não acontecer, as tomadas de decisões resultantes de abordagens que consideram metodologia do pior caso estariam sendo menos convenientes do que aquelas resultantes de melhores soluções, pois assim o planejamento seria baseado em decisões menos lucrativas. É importante o avanço de *frameworks* de OR que possam levar a decisões ótimas tratáveis para casos em que não é apenas considerado o pior caso.

Uma otimização sob incerteza mal realizada é muito ruim para a empresa, pois pode resultar em um péssimo planejamento futuro de um processo, de tal maneira que a função

objetivo se dispersse bastante em relação às funções objetivos anteriores dos planejamentos passados que vinham sendo feitos (que já foram realizados) e que portanto são os casos mais factíveis de referência a se repetir ou se aproximar. Usar distribuições de probabilidade (PDF) na abordagem matemática é uma excelente maneira de retratar o histórico acontecido sem precisar gerar a árvore de cenários, evitando que decisões fora do acontecido sejam evitadas, fazendo também com que haja uma distribuição de pesos dos acontecimentos ocorridos de acordo com suas frequências. Por isso é interessante que o planejamento futuro não se disperse da tendência média do que havia sendo feito pela empresa e por isso é interessante considerar PDF no problema de otimização sob incerteza. Apenas com um ajuste de PDF para a potencial predição do futuro de uma incerteza, já evitaria a necessidade de prever cenários discretos e exatos de acontecimentos (GUPTA e MARANAS, 2003). É interessante que haja o avanço de metodologias que consigam prever o fenômeno no futuro para que decisões ótimas possam ser tomadas a fim de mitigar a dispersão entre a realidade de ocorrência de planejamentos anteriores tratáveis.

Uma otimização sob incerteza bem realizada pode realizar o planejamento de forma bem satisfatória e definir o esboço de todo o planejamento de tempos futuros. Baseado em dados históricos passados, é possível montar uma formulação que realize uma predição satisfatória das incertezas no processo. Com essa motivação, metodologias envolvendo a filosofia de arrependimento relativo (e.g., JIANG *et al.* (2013); CHEN *et al.* (2014); XIDONAS *et al.* (2017) etc) continuam sendo desenvolvidas com o objetivo de criar metodologias que diminuam a dispersão entre a solução ideal e a solução sob incerteza, porém nesse ramo as metodologias utilizam a geração de cenários e a perspectiva de pior caso.

As abordagens no campo de otimização sob incerteza podem ou não considerar cenários de acontecimentos para determinação de uma solução do problema estocástico. A dificuldade dos problemas estocásticos que consideram cenários são: i) a tratabilidade das soluções; ii) o tempo de processamento computacional quando se há um número alto de dimensões no problema, e.g. o assim chamado problema SSN exposto em SEN *et al.* (1994) ou qualquer outro problema envolvendo grande presença de variáveis binárias etc; iii) a geração da quantidade certa de cenários no problema e iv) a atribuição de probabilidade de acontecimento a cada um destes cenários, entre outros desafios discutidos no capítulo 2 (revisão bibliográfica).

A OR tem sido muito utilizada na prática devido à sua capacidade de imunizar o modelo contra eventuais intratabilidades causadas por incertezas no processo, e devido a não precisar trabalhar com cenários. Métodos de otimizações robustas mais populares na literatura utilizam abordagens matemáticas funcionais para problemas lineares, ao qual ainda há muito pouco

estudo a respeito de OR não-linear em comparação com linear, especialmente quando a não-linearidade provém da própria incerteza ou da presença de não-convexidade (GABEL *et al.* (2014)). No entanto, quando a imunização do modelo se dá de forma desregulada, o planejador pode se deparar com o ultraconservadorismo ou de resultados que podem não ser as melhores soluções na prática.

Até o momento, não há nenhuma conciliação entre modelos de arrependimento, conservadorismo e robustez. Com essa conciliação é possível obter tomadas de decisões robustas ao mesmo tempo em que se é aproximado de uma idealidade. Dois benefícios mútuos, fazendo com que naturalmente por se aproximar de uma idealidade, o conservadorismo se reduza de forma natural. Se essas tomadas de decisões terem como ponto de partida os acontecimentos mais recentes, a idealidade é atingida sem que a tratabilidade atual de operação seja ignorada. O framework desta presente dissertação concilia os dois através de um algoritmo que sempre força que haja o conservadorismo e robustez regulados de acordo com um risco especificado com a mútua aproximação de uma solução ideal.

As motivações para a realização dessa dissertação foram: i) o objetivo de evitar se deparar com as dificuldades que a otimização sob incerteza que considera geração de cenários em árvore e atribuição de probabilidade apresenta; ii) a grande praticabilidade oferecida pela OR; iii) o desenvolvimento de um framework de OR que não precise inserir restrições probabilísticas do tipo *chance-constrained* no modelo determinístico (diminuiria a robustez); iv) a regulação do conservadorismo e robustez de acordo com a satisfação ou especificação de risco pelo planejador para evitar a utilização apenas de piores casos ou de casos específicos de incertezas com limites fechados ou limitados por valores baseados em alguma geometria do hiperplano; v) os benefícios oferecidos pelo uso de modelos de arrependimento em OR, que no caso do método desta dissertação naturalmente ameniza ainda mais a penalidade na FO enquanto orienta as tomadas de decisões do problema em direção à solução ideal; vi) o vínculo entre tomadas de decisões robustas e as ocorrências médias de acontecimentos passados. O modelo de arrependimento do *framework* desenvolvido independe da seleção do pior caso, i.e. não é uma abordagem *minimax*, e independe do risco de valores incomuns para as incertezas serem indesejáveis.

O principal ponto desta dissertação é o desenvolvimento de um novo *framework* de OR que regula o conservadorismo e robustez do modelo determinístico linear ou não-linear em otimização, e também e que utiliza conceitos provenientes de modelos de arrependimento em OR, os quais visam determinar soluções robustas que se aproximem da idealidade. O princípio do presente *framework* é realizar uma otimização robusta através de uma nova abordagem que

regula a robustez e conservadorismo conforme vontade do planejador e que também incorpora um modelo de arrependimento com definições e conceitos específicos do presente *framework*. Para realizar este princípio é necessário transformar o modelo determinístico original em outro através da formulação matemática do framework e sintonizar os valores de desvios padrões das incertezas normais e os valores dos fatores de penalidade através de um algoritmo. O *framework* leva às tomadas de decisões robustas diante das incertezas ao mesmo tempo em que se alcança uma solução o mais próximo da ideal, quando tem-se em vista que o ponto de partida da OR é uma linha de tempo mais recente tomada como referência (LTRR). O proposto *framework* serve para modelos lineares e não-lineares, sob certos axiomas, ao qual pode haver não-convexidade e não-linearidade nas variáveis de decisões ou na natureza das incertezas (em seus gráficos de PDF), mas é necessário que a função objetivo seja monotônica no domínio do problema de otimização em que se encontra a região viável (DRV). DRV diz respeito ao domínio das variáveis de decisões da região viável delimitada pela fronteira da região convexa.

A aplicação prática do presente *framework* é que ele pode ser utilizado para imunizar o modelo contra possíveis inviabilidades eventualmente causadas por incertezas no processo, através do melhoramento de sua robustez, ao mesmo tempo em que se considera essas incertezas no processo e se alcança um estado o mais próximo do ideal. Isto é importante pois modelos que possuem significado físico podem, às vezes sob certas condições, não apresentar convergência numérica, e este *framework* pode solucionar este problema com um certo preço a se pagar, e alteração de preço esta que é amenizada pelo fato do presente *framework* também adotar a estratégia de ser um modelo de arrependimento. O dito preço a se pagar é o preço da robustez, comumente utilizado em OR (e.g. BERTSIMAS e SIM (2004); WELLONS e REKLAITIS (1989)), ao qual penaliza-se a função objetivo do problema a troco de proporcionar maior robustez ao modelo que considera incertezas.

Para realizar uma otimização robusta através da nova abordagem proposta que regula a robustez e conservadorismo conforme vontade do planejador, o presente *framework* incorpora um algoritmo, um modelo de arrependimento com definições e conceitos específicos que diminui o arrependimento relativo e uma formulação matemática que deixa o modelo determinístico mais robusto à variações paramétricas. Para realizar a OR é necessário transformar o modelo original em outro, um modelo robusto sintonizado com fatores de penalidade, através da formulação matemática do framework, e por fim sintonizar os valores de desvios padrões das incertezas normais através de um algoritmo.

O restante desta dissertação se divide como o seguinte. O capítulo 2 trata de uma revisão bibliográfica sobre os campos mais estudados e citados na otimização sob incerteza, e de

principalmente da OR que é o foco desta dissertação. O capítulo 3 trata da apresentação do *framework* e metodologia do presente trabalho, ao qual é aplicado para exemplos lineares e não-lineares. O capítulo 4 trata da descrição do problema estudo de caso ao qual o *framework* é aplicado para uma cadeia de suprimentos de argônio em escala industrial real. O capítulo 5 se refere aos resultados e discussões da execução dos objetivos gerais e específicos desta dissertação. O capítulo 6 trata sobre as conclusões desta dissertação.

1.1. OBJETIVO GERAL

Apresentar o desenvolvimento de uma nova abordagem que é um *framework* de OR linear e não-linear com critério de modelo de arrependimento específico baseado na representação das incertezas através de distribuições de probabilidade, ao qual não há a necessidade da geração de cenários em árvore e nem da inserção de restrições probabilísticas no modelo matemático.

1.1.1. Objetivos específicos

Os objetivos específicos desta dissertação que vigoram os objetivos gerais são:

- i) Apresentar a formulação matemática do *framework*.
- ii) Apresentar o procedimento algorítmico do *framework*.
- iii) Realizar a resolução de problemas lineares e não-lineares de otimização para uma melhor compreensão do *framework*.
- iv) Realizar uma análise de sensibilidade para cada uma das incertezas do problema de otimização do planejamento tático da cadeia de suprimentos de argônio.
- v) Aplicar o procedimento do *framework* para o planejamento tático de uma cadeia de suprimentos de argônio, pertencente à categoria de processos de produção intensivo em energia (PIE), ao qual a demanda dos clientes é gerada aleatoriamente para o planejamento do estudo de caso.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo há a discussão e fundamentação teórica sobre otimização sob incerteza e seus ramos de estudo. É enfatizado os seus diversos ramos de estudo e mais especificamente citado os campos mais populares no estudo aplicado para planejamento ou pesquisa operacional, que são a programação estocástica e a otimização robusta.

2.1. OTIMIZAÇÃO DE PROCESSOS DE PRODUÇÃO INTENSIVO EM ENERGIA COM INTEGRAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS

O preço de energia elétrica varia conforme a época do ano, de hora em hora, de dia em dia ou de mês em mês, devido a agentes externos ou internos ao processo de geração de energia elétrica, ocasionando uma divisão nos preços de energia ao qual se categorizam em diferentes bandeiras. É por isso que negócios industriais que utilizam muita energia elétrica se preocupam com valores altos e buscam a otimização do processo que reduz significativamente os custos do processo, visando produzir a demanda em horários que a energia está mais barata. Porém como o consumo dos clientes, bem como a disponibilidade de inventário da plantas e dos clientes podem variar estocasticamente, nem sempre a produção de uma fábrica poderá ser feita em sua totalidade nos horários em que a energia se encontra com o menor preço. É devido a esses fatos que uma programação da produção é necessária, e aí é quando entra a importância de fazer uma otimização para encontrar o estado ótimo entre saciação dos clientes e programação do processo produtivo ao qual minimize os custos de produção dentro do possível.

Muitos processos intensivos em energia (PIE) possuem fundamental importância para a humanidade. Entre eles pode-se citar o processo de produção de alumínio, aço, e as USAs (Unidade de Separação de Ar) etc, e como demandam muita energia, recebem grande atenção nas áreas de pesquisas ao qual visam a otimização dos custos diante da programação da produção.

IERAPERITROU *et al.* (2002) propõe em seu artigo uma abordagem estocástica para a otimização da produção em uma USA levando em consideração incertezas como o preço de energia elétrica e a disponibilidade de inventário do cliente. A otimização do planejamento da produção da planta é realizada para que sejam encontrados os melhores modos de operação da planta dentre três disponíveis. O horizonte de tempo do trabalho é dividido em dois estágios, onde o primeiro toma o preço da energia elétrica como determinístico, enquanto que no segundo o preço é estocástico.

YOU *et al.* (2011) propuseram uma formulação MILP para integrar decisões de curto e longo prazo em decisões na distribuição de produtos no problema de roteamentos veiculares baseado em inventário (IRP – *inventory routing problem*) dos tanques de armazenamento dos clientes. Para que um problema grande com muitas variáveis seja resolvido em tempo ameno, o artigo propõe uma estratégia consistida de duas partes, onde a primeira define uma resolução baseada em decomposição e a segunda define uma resolução baseada numa abordagem de aproximação contínua.

MITRA *et al.* (2012) desenvolveram um modelo determinístico com representação discreta do tempo, que leva em consideração os detalhes envolvidos na transição entre os modos de operação da USA. MITRA *et al.* reformularam algumas restrições usadas no trabalho de IERAPERITROU *et al.* (2002) com o objetivo de tornar o modelo mais eficiente.

Dois anos depois, MITRA *et al.* (2014a) propuseram um modelo MILP baseado na representação do tempo em multi-escala com o intuito de estabelecer a integração entre tomada de decisões operacionais de curto prazo e a capacidade de planejamento de longo prazo para PIE. A reformulação baseia-se na consideração dos períodos sazonais de tempo do ano que influenciam no preço da energia elétrica. Algumas incertezas foram levadas em consideração nesse trabalho, tais como a demanda a longo prazo dos clientes, compras de novos equipamentos, atualizações do processo produtivo, níveis do produto na produção e inventários. A abordagem estocástica foi realizada para diferentes cenários para estudar a influência que a demanda dos clientes causaria no custo de produção. Devido a existir variáveis de decisões de escolha dos modos de operações, a resolução do modelo demora muito tempo e foi por isso que o trabalho foi dividido em duas partes, sendo que na segunda, MITRA *et al.* (2014b) desenvolveram um algoritmo híbrido de decomposição de dois níveis para resolver problemas de tamanho industrial em uma quantidade de tempo razoável.

MARCHETTI *et al.* (2014) apresentaram um modelo MILP para descrever o processo integrado de produção-distribuição de uma cadeia de suprimentos, ao qual é considerado a representação discreta do tempo em que há a divisão de cada dia em dois períodos para que sejam captadas as mudanças de pico e amenização no preço da eletricidade. Descrevendo a produção com diferentes modos de operação e transição entre eles, e a distribuição através de um Problema de Roteamento de Veículos Capacitados (PRVC), os autores mostraram através das otimizações de um estudo de caso que este modelo integrado obtém resultados satisfatórios. Neste trabalho, a função objetivo que foi minimizada é o custo integrado de produção e distribuição.

MOONS *et al.* (2017) publicou um artigo que faz uma revisão bibliográfica dos avanços que houve na área de pesquisa operacional que envolve a integração entre o planejamento da produção e o problema de roteamento veicular, ao qual este trabalho aborda processos bateladas e contínuos.

DONG *et al.* (2017) desenvolveram um modelo MILP para descrever um problema de roteamento veicular baseado em inventário (IRP), de uma planta que produz um produto e possui uma rede de clientes que recebe esse produto de veículos que saem desta planta. As restrições matemáticas levam em consideração a quantidade máxima de horas que um motorista de um veículo pode trabalhar e dirigir, a quantidade de horas dirigidas por um motorista, o fato dos motoristas pararem de dirigir para descansar quando o tempo limite de trabalho diário é atingido, entre outras restrições. A ideia do artigo foi fazer um modelo que possua acontecimentos o mais próximo da prática usual. O problema demora a convergir e as soluções podem ser inviáveis matematicamente, estando fora do domínio do possível. Para driblar o problema da inviabilidade, foi proposto uma estratégia de otimização do problema compreendida na resolução alternada entre um subproblema de limite superior e um com um limite inferior, ambos sujeitos a cortes inteiros após cada iteração do método matemático de otimização, para eliminar soluções repetidas. O subproblema de limite superior desconsidera as restrições matemáticas relacionadas aos motoristas para relaxar o problema, e sua otimização gera as rotas que devem ser percorridas e os caminhões usados em cada uma delas; enquanto que no inferior há a consideração total do modelo detalhado que receberá essas informações como dados de entrada e terá como dados de saída todas as informações do cronograma de operação do processo (ótimas tomadas de decisões).

BASAN *et al.* (2018) reformularam as proposições de MITRA *et al.* (2012), introduzindo um novo conceito para descrever a transição entre os modos de operação sem que seja necessário o uso explícito de variáveis binárias. Em MITRA *et al.* (2012) estas variáveis binárias eram decisivas para definir, como resultado de saída, quando que a alternância entre modos de operação seria necessária.

A cadeia de suprimentos relacionada a produtos químicos é um exemplo de complexidade, em que alguns modelos foram criados para descrever alguns processos (LIRA-BARRAGÁN *et al.*, (2016); CHEN e FAN, (2012); TOMASGARD *et al.*, (2007); GUERRA *et al.*, (2016); GRONHAUG e CHRISTIANSEN, (2009)). Particularmente, a indústria de gases atmosféricos tem um grande interesse na otimização da programação de sua cadeia de suprimentos devido ao alto uso de eletricidade.

2.2. OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA

Esta seção faz uma revisão bibliográfica da literatura a respeito do que já foi feito na otimização sob incerteza. As metodologias mais antigas de otimização sob incerteza são a programação estocástica, a otimização robusta (OR) e a otimização fuzzy. Recentemente novas metodologias também foram exploradas na área de planejamento e pesquisa operacional, as quais serão brevemente discutidas nas próximas subseções. Mas antes do entendimento de otimização sob incerteza, é necessário entender as diferentes classificações de parâmetros incertos, comumente chamados de incertezas. Esta primeira parte dessa seção tem a intenção de discutir de uma forma mais geral o assunto, enquanto as próximas sub-secções traz um maior aprofundamento dos assuntos.

Otimização sob incerteza é indicada para os casos em que é necessário lidar com variabilidade nos valores dos parâmetros de entrada cujos dados históricos variam, são incertos ou imprevisíveis. Então uma otimização sob incerteza tem cunho planejador e estimador, diferentemente da otimização determinística que possui seus parâmetros de entrada com valores bem definidos quando o cenário a ser otimizado é perfeitamente previsível. Mesmo que o cenário seja previsível o modelo determinístico pode gerar uma solução inviável, e no campo da otimização sob incerteza, é a otimização robusta que lida com a ideia de corrigir este problema, o qual será mais discutida na seção 2.2.3.

Métodos de otimizações estocásticas generalizam métodos determinísticos para resolver problemas de otimização, ao qual se fundamentam no uso de métodos de otimização que geram e usam variáveis aleatórias, ou seja, os parâmetros incertos são gerados conforme uma parametrização estatística, ou quando necessário por uma parametrização não-estatística (SPALL, 2005).

Há duas categorias diferentes para parâmetros incertos em um modelo, as incertezas: i) aleatórias/irredutíveis, em que essas estão bem definidas como tendo dados históricos e informações suficientes para tratar essas incertezas de forma estatística, e ii) as incertezas que são epistêmicas, i.e. não possuem dados históricos disponíveis para poder prever a variabilidade que estas causam em um processo ou não se adequam a uma distribuição de probabilidade, e se tornam portanto, incertezas subjetivas e redutíveis que podem ter seus valores especificados por estimação (OBERKAMPF *et al.* (2004); YOUN *et al.* (2006); ELDRED *et al.* (2002)), principalmente para fins de design de projeto ou planejamento. Numa otimização sob incerteza, quanto maior for a dimensão do problema, ou seja, quanto maior forem as quantidades de parâmetros e variáveis do problema, maior poderá ser o desvio entre a solução estocástica e a

solução com informação perfeita (solução determinística de referência) (JANAK *et al.* (2007); BERTSIMAS e THIELE (2006)).

Há muitas filosofias diferentes no ramo da otimização sob incerteza, ao qual entre elas estão as otimizações que trabalham sob uma perspectiva de cenários (*scenario-based*), e outras que não consideram cenários (*non-scenario-based*). Dentro dessas perspectivas de resolução existem vários desenvolvimentos de metodologias de otimização sob incerteza, entre elas estão, a programação estocástica, a OR, a otimização robusta ajustável (ORA), a otimização distributivamente robusta, a otimização baseada em distribuição (*distribution-based*), a otimização difusa (*fuzzy*), a otimização baseada em simulação (*simulation-based*), a otimização baseada em controle (*control-based*), a otimização baseada em amostra (*sample-based*), a otimização *surrogate-based*, a otimização baseada em confiabilidade (*reliability-based*), a otimização baseada em possibilidade (*possibility-based*) etc. Várias filosofias acerca desses temas foram abordadas nas revisões bibliográficas de SAHINIDIS (2004), GOVINDAN e CHENG (2018), GORINSEN *et al.* (2015), GROSSMANN *et al.* (2016), GABREL *et al.* (2014), e JANAK e FLOUDAS (2005), ao qual é discutido sobre alguns trabalhos que já foram desenvolvidos no estado da arte do ramo da otimização sob incerteza, mais especificamente em relação à programação estocástica, OR e otimização fuzzy. Com o passar do tempo, mais filosofias são desenvolvidas a fim de que se possam alcançar objetivos de acordo com a necessidade de cada problema.

A programação estocástica lida com otimização estocástica baseada em cenários, em que é necessário a geração de diversos cenários para descrição do problema (ROCKAFELLAR e WETS, 1991), o qual será mais discutida a fundo na subseção 2.2.2. A OR, a qual será mais discutida a fundo na subseção 2.2.3, lida com a otimização sob incerteza baseada em não-cenários ou em cenários, onde nesse último caso pode-se ou não considerar a resolução do problema de pior caso, a depender do método que seja utilizado (GORISSEN *et al.*, 2015). A OR considera que o conjunto de incertezas são expressados por uma região determinada por um polítopo (AYOUB e POSS, 2016), ou seja, seus limites estão bem definidos. A OR é muito usual na aplicação da prática e leva a resultados notórios em problemas reais, visto que é computacionalmente tratável (GORISSEN *et al.*, 2015).

Na otimização sob incerteza baseada em cenários, é necessário resolver o problema de tal maneira que uma incerteza esteja representada em diferentes cenários discretos, que são considerados como possíveis ocorrências no futuro, e nessa categoria de otimização, há ou não a consideração do valor esperado no modelo. Em programação estocástica, existe uma probabilidade de ocorrência, incluída no modelo da formulação estocástica (BIRGE e

LOUVEAUX, 1997), para cada um dos cenários no universo de cenários, ou para cada evento dentro de um cenário contido em um universo de cenários, ao qual o tomador de decisão declara qual é a expectativa de ocorrência de cada um dos cenários nesse universo possível (DEMBO (1991); DEMBO (1992)), e por isso há a otimização do valor esperado da função objetivo levando em conta o valor esperado de cada um desses cenários ou a média entre todas as realizações.

De uma maneira mais geral, a programação estocástica obtém uma solução média ótima do problema, e isso é feito mediante a otimização do valor esperado da função objetivo quando se leva em conta todos os cenários, de condições de acontecimento possível do problema, simultaneamente na matriz de otimização do problema. Como gerar muitos cenários pode aumentar demais o tempo computacional, principalmente quanto maior for a árvore de cenários (influenciada diretamente pela dimensão do problema) em alguns casos é recomendável realizar uma análise de sensibilidade, e depois que sabe-se da influência de cada incerteza, reduzir a dimensão do problema, bem como o número de cenários, conforme algum método de redução da literatura (KOUWENBERG e ZENIOS, (2008); MULVEY e RUSZCZYNSKI, (1995); LINDEROTH e WRIGHT (2003)), de tal maneira que apenas os cenários mais sensíveis ou preponderantes sejam considerados. Porém existe um problema ao reduzir o número de cenários, pois caso algum cenário importante fique de fora da otimização ou não seja incluído porque não foi pensado ou não era conhecido que sua ocorrência era possível de acontecer, as soluções obtidas podem não representar a realidade e podem se desviar bastante, pois na prática pode acontecer algum desses cenários que não foi considerado na otimização.

Quando se trabalha com cenários, fica difícil de incluir todos eles porque alguns deles podem não ser conhecidos, principalmente se a dimensão do problema for grande, o que confereria uma estocacidade elevada (KALL *et al.* (1994); BIRGE e LOUVEAUX (1997); CONEJO *et al.* (2010)). A não inclusão de cenários, que de fato acontecem ou podem acontecer na prática, pelo fato do tomador de decisão não saber qual é a probabilidade de acontecimento desse cenário, também é um problema ao se trabalhar com cenários. Em resumo, trabalhar com cenários pode ser desafiador quando o tomador de decisões não conhece todos os cenários possíveis de acontecimento, ou quando se tem uma dimensão grande do problema, que segundo NEMIROVSKI *et al.* (2009), começa a ser a partir de cinco incertezas. Para evitar esses desafios, há a possibilidade de trabalhar com abordagens de otimização que não consideram cenários, e.g. em OR não é necessário trabalhar com cenários.

Quando há a geração de cenários em larga escala, o problema tende a ser tratável quando o foco principal é a análise e não o design ou otimização da formulação. Outro problema em

abordagens que consideram a geração de cenários é que existe uma preocupação a respeito da convergência e da acuracidade dos resultados quando a quantidade de cenários aumenta (AKHAVAN-HEJAZI e MOHSENIAN-RAD, 2016).

A otimização sob incerteza baseada na filosofia de restrições probabilísticas (*chance-constrained*) (e.g., CHARNES e COOPER (1959); CHARNES e COOPER (1963); LIU e IWAMURA (1998); CAO *et al.* (2009)), baseia-se em incluir restrições probabilísticas no modelo, e pode ser incluída na fundamentação de programação estocástica, de OR, de otimização *fuzzy* etc. É uma metodologia *non-scenario-based* que considera restrições ao qual incluem um operador probabilidade de acontecimento que se baseia na função distribuição acumulada de probabilidade, tendo portanto, suas incertezas representadas por funções distribuições de probabilidade. Também são incluídos níveis de confiança nas restrições para ajuste da viabilidade da otimização do problema. Inserir restrições probabilísticas podem tornar o modelo não-linear, fora isso o modelo se torna mais difícil de ser resolvido.

Caso uma otimização seja baseada em cenários, e haja a inclusão de poucos cenários extremos, ou a escolha dos cenários não tenham boa variância sob a totalidade de possíveis cenários, a otimização determinaria uma solução média ótima que tem grande aversão ao risco de valores incomuns para as incertezas serem indesejáveis., ao não considerar que casos extremos, ou aqueles desconsiderados, ou até mesmo os não sabidos, possam acontecer. Também é importante ressaltar que há trabalhos que se trabalha com cenários, porém que não se atrela probabilidades de acontecimentos aos cenários, e.g. como nos trabalhos de OR que se considera o conceito de *robust counterpart* (e.g., SOYSTER (1973), BEN-TAL e NEMIROVSKI (1998) e BECK e BEN-TAL (2009)). Diferentemente da programação estocástica, nesse conceito nenhuma restrição deve ser violada em qualquer que seja o cenário. O primeiro a desenvolver a otimização robusta baseada em *robust counterpart* foi SOYSTER (1973), ao qual o objetivo de seu trabalho foi reformular o modelo linear original de tal maneira que, quando houver variabilidade nos valores dos parâmetros, o modelo fique imune a todas possíveis violações de restrições, até mesmo no pior cenário, e por isso se torna uma metodologia muito conservadora que pode ter as piores soluções em contrapartida à elevada robustez, visto que considera até a imunização da violação das restrições no pior cenário de resolução. BEN-TAL e NEMIROVSKI (2000), EL-GHAOUI e LEBRET (1997), e EL-GHAOUI *et al.* (1998) desenvolveram formulações de OR com conceitos de *robust counterpart* a fim de reformular o balanceamento entre conservadorismo e robustez do trabalho de SOYSTER (1973). Enfim, atrelar probabilidade ao acontecimento de um cenário, incluída no modelo, é mais comum na programação estocástica.

Há diferentes formas de considerar a influência das incertezas diretamente na função objetivo do modelo a ser otimizado, se essa for a ideia do *framework* de otimização em utilização. As mais comuns segundo YAMASHITA *et al.* (2007) são através da consideração do valor esperado, da combinação de média e variância, ou do conceito de arrependimento relativo máximo (a diferença entre a solução ideal e a solução do pior caso).

Há diferentes aplicabilidades nos setores industriais para otimização sob incerteza, ao qual alguns exemplos são:

- Setor de óleo e gás: e.g., MATTHEWS (2018); GEBRESLASSIE *et al.* (2012); GOEL e GROSSMANN (2004).
- Setor de energias renováveis: e.g., CHEN *et al.* (2012); KHODAEI *et al.* (2014);
- Setor de fornecimento de água: e.g., XU *et al.* (2009); CHUNG *et al.* (2009);
- Setor de mineração: e.g., LAGOS *et al.* (2011).
- Setor de plásticos: e.g., YOUSEFI-BABADI *et al.* (2017).
- Setor petroquímico: e.g., AL-QAHTANI *et al.* (2008); RIBAS *et al.* (2010).
- Setor de gases atmosféricos: e.g., MITRA *et al.* (2014).
- Setor alimentício: e.g., VLAJIC *et al.* (2008); VLAJIC *et al.* (2010).
- Planning: e.g., LIU e SAHINIDIS (1996); CHEN *et al.* (2012).
- Scheduling: e.g., LAPPAS e GOUNARIS (2016).
- Serviços de distribuição de matéria: e.g. ESCUDERO *et al.* (1999); AHUMADA *et al.* (2012).
- Desenvolvimento de design em processos: e.g., PISTIKOPOULOS e IERAPETRITOU (1995); KAPELAN *et al.* (2005).

2.2.1. Otimização Determinística

Otimizações determinísticas não são otimizações sob incertezas, mas são utilizadas quando se deseja planejar um processo/operação com desejável exatidão, e também são o ponto de partida para a otimização sob incerteza. O modelo determinístico, por si só, não considera imprevistos (incertezas) no processo/operação, ou seja, sem parâmetros determinísticos de entrada, não há como o modelo ser resolvido e portanto do planejamento ser realizado. O modelo determinístico requer um menor tempo computacional, em relação à sua versão estocástica, para ser resolvido computacionalmente e também requer um tempo menor de

planejamento, haja visto que não é necessário realizar o tratamento estatístico dos dados dos parâmetros que costumam haver variações de tempo em tempo (incertezas) ou a possível consideração de múltiplos cenários e realizações (programação estocástica). Porém o modelo determinístico é muito importante porque os métodos de otimização sob incerteza utilizam dele para desenvolver as metodologias desta área.

Otimizações determinísticas podem resultar em uma solução inviável caso alguma restrição contendo um parâmetro que tem caráter incerto seja violada durante a otimização matemática de um modelo. Claramente, outras restrições que não possuam os parâmetros incertos podem ser violadas para diferentes valores de entrada nesses parâmetros no modelo determinístico. Neste caso a otimização robusta é a formulação adequada para resolver o problema de inviabilidade.

Há métodos de fazer com que a otimização sob incerteza se transforme em um problema ao qual a formulação matemática seja determinística, onde nesses casos não há aleatoriedade de cenários e nem a necessidade de atribuir a probabilidade de ocorrência de cada um deles. Nestes casos há a consideração de valores esperados para as incertezas, descrevendo assim o processo/operação, fruto do planejamento, através da consideração do valor verdadeiro médio da incerteza através da inferência estatística (PISHVAEE *et al.*, 2011; CHARNES e COOPER, 1959).

2.2.2. Programação estocástica

A programação estocástica inclui informações probabilísticas na modelagem do problema de otimização, e um dos primeiros a demonstrar técnicas relacionadas a esta foi MARKOWITZ (1952) seguido de DANTZIG (1955), e BEALE (1955), ao qual as pesquisas foram se estendendo cada vez mais (e.g., WETS (1966); WALKUP e WETS (1967); WETS (1974); WETS (1983)) e vários outros autores continuaram também a contribuir para o avanço e consolidação desse campo estudado até os dias de hoje.

A programação estocástica é um tipo de otimização ao qual geralmente trabalha-se gerando cenários e discretizando qual a probabilidade de acontecimento de cada um deles em uma árvore de cenários, onde cada nó representa um cenário, e com isso o modelo se torna estocástico a fim de que se possa determinar a melhor solução média para o problema. Por exemplo, se um problema considera dois parâmetros incertos, um cenário seria então uma situação ao qual cada uma dessas incertezas assumem um valor definido, logo a quantidade de cenários de um problema é a combinação de todas as possíveis possibilidades de ocorrência de

acontecimentos. A ideia pode ser interessante em alguns casos, mas é uma metodologia que trabalha sob cenários e por isso tem alguns desafios como já discutido, além de que como nessa otimização não há a comparação com um estado de referência nominal (modelo de arrependimento), a solução média pode ser muito pior do que um possível estado de referência. Mesmo que a solução média seja melhor do que se existisse um possível estado de referência, como não há a adoção desse estado em programação estocástica, a solução média encontrada sendo pior ou melhor pode não dar uma ideia do quão bom é a solução (BIRGE e LOUVEAUX (1997); SHAPIRO e NEMIROVSKI (2004)).

Otimizações estocásticas baseadas em cenários geram dados aleatórios ou não para as incertezas do processo/operação descrito através de um modelo matemático, visto que há a possibilidade de especificar cenários com diversos valores combinatoriais para cada uma das incertezas que estão agrupadas em conjuntos. Essa especificação de cenários pode-se dar via a geração aleatória de valores numéricos para as incertezas conforme o calibre de funções densidade de probabilidade (PDF) para cada incerteza baseando-se em dados históricos de cada uma, ou para o cenário em si através do calibre de uma função densidade de probabilidade conjunta. A especificação de cenários, bem como o vínculo da probabilidade de acontecimento, também pode-se dar via a atribuição de valores numéricos especificados para cada incerteza conforme a utilização de loops aninhados para parametrização combinatorial.

A programação estocástica não possui como seu principal foco o conservadorismo e robustez do modelo, pois é a OR que foca na viabilidade da solução, seja através da redução da probabilidade de ocorrer a violação de alguma restrição, geralmente trabalhando neste caso sob a perspectiva de pior cenário, ou através da inclusão de um termo de proteção contra a violação das restrições na formulação matemática do problema etc. Entretanto, a programação estocástica robusta também trabalha com a condição de geração da árvore de cenários e com o viés ideológico de viabilizar a solução do modelo, porém não é comum de trabalhar com o viés ideológico de modelos de arrependimento e por isso não há a comparação com um estado nominal de referência (NEMIROVSKI *et al.* (2009); CHEN *et al.* (2007); CHEN *et al.* (2019); BOZORGI-AMIRI *et al.* (2013)).

Dentro da programação estocástica há várias diferentes abordagens. Entre elas estão a “restrições de chance probabilística” (*chance constrained*), a programação estocástica em dois estágios (*two-stage stochastic programming*), a modelos multiestágios (e.g. quando há indexação de variáveis e parâmetros em um conjunto com elementos finitos), a seleção de portfólio em multiestágio, a programação estocástica em multiestágio (*multistage stochastic programming*) etc. Uma das mais populares é a *two-stage stochastic programming*, e nesta

abordagem as variáveis de decisões de projeto são chamadas decisões de primeiro estágio, enquanto as variáveis de decisões operacionais são chamadas de decisões de segundo estágio, e essas variáveis podem ser binárias ou não. Em geral, no caso em que a função objetivo visar minimizar mais de um estágio, pode ser adequado trabalhar com *multi-stage stochastic programming*.

Em programação estocástica, os métodos mais simples de resolução do problema de otimização sob incerteza podem ser realizados considerando a representatividade dos valores das incertezas através de seus valores esperados (caso imparcial), ou de seus piores valores (caso pessimista), ou de seus melhores valores (caso otimista) ou de uma combinação destes. É fundamental salientar que apesar de serem abordagens simples e práticas por resultarem em abordagens determinísticas, as mesmas são as mais prováveis em não resultar uma melhor solução média ótima do problema.

Se o problema de otimização possuir mais de um estágio, há duas vertentes de resolução em programação estocástica, a abordagem *wait-and-see* e a abordagem *here-and-now*. Quando decisões precisam ser feitas antes da observação ou computação das incertezas no processo, a abordagem se chama *here-and-now*, mas caso contrário a abordagem se chama *wait-and-see* (WETS, 2002). Um exemplo de abordagem *here-and-now* é quando é necessário que se tomem decisões em problemas de produção ou em que há limitação de material, em que nesses casos as incertezas na operação só poderiam ser observadas ou computadas após saber o *modus operandi*. Geralmente as decisões são feitas no primeiro estágio do problema estocástico. Estas variáveis de decisões estão ou não indexadas em conjuntos, como o período de tempo por exemplo, ao qual nesse caso o primeiro e segundo estágio seriam divisões do horizonte de tempo.

Em *two-stage stochastic programming*, o programa visa otimizar um problema ao qual a função objetivo considera os custos de dois estágios, em que as variáveis de decisões do primeiro estágio \mathbf{x} , pelo menos algumas delas, podem ser decisões *here-and-now* caso sejam decididas antes da otimização do problema, ou podem ser decisões *wait-and-see* caso contrário. Por exemplo, a otimização do planejamento de uma cadeia de suprimentos pode visar minimizar uma função objetivo custo total que envolva o custo de investimento ou projeto (seria o primeiro estágio) e o custo operacional (seria o segundo estágio). Nesse método, a função objetivo de forma geral é dada pela Equação 2.2.2.1:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} c^T \mathbf{x} + E[\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \varepsilon)] \quad (2.2.2.1)$$

Onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor contendo os conjuntos de parâmetros do problema, ao qual nestes conjuntos há os parâmetros que são determinísticos e há os que são incertezas, e em que cada parâmetro que seja uma incerteza deve se ajustar a pelo menos uma função distribuição de probabilidade. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis de decisões do problema, ao qual estas variáveis podem estar presentes tanto no custo do primeiro quanto no custo do segundo estágio. $E[\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})]$ é o custo do segundo estágio representado pelo valor esperado das soluções ótimas contidas no vetor contendo as soluções ótimas $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ do segundo estágio para cada cenário (conjunto dos valores combinados) de parâmetros do vetor $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^d$, i.e. cada elemento de $\boldsymbol{\varepsilon} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ é um cenário que contém os parâmetros do problema assumindo valores determinísticos ou aleatórios para estes. O custo do primeiro estágio é dado por $c^T \mathbf{x}$, e c^T é a transposta da matriz contendo os coeficientes atrelados às variáveis de decisões do vetor \mathbf{x} .

Para resolver numericamente a Equação (2.2.2.1), $E[\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})]$ precisa ser discretizado em um número finito de cenários conforme Equação (2.2.2.2), ao qual deve-se ter uma distribuição de probabilidade P atrelada a $\boldsymbol{\varepsilon}$, sabendo-se que cada cenário terá atrelado a si uma probabilidade de ocorrência p_1, \dots, p_k (e.g. ε_1 está atrelado a p_1) e que o somatório dessas probabilidades deve ser igual a um.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})] &= \sum_k^K p_k Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_k), \\ Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_k) &= \inf\{q_k^T \mathbf{y}_k : T_k \mathbf{x} + W_k \mathbf{y}_k \leq h_k, \quad \mathbf{y}_k \geq 0\} \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

Onde $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^n$ é um vetor que contém variáveis de decisões exclusivas do segundo estágio (e.g. na cadeia de suprimentos seria as variáveis relacionadas ao custo operacional), e $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_k)$ é a solução ótima de um cenário do segundo estágio. Desta forma, substituindo a Equação (2.2.2.2) na Equação (2.2.2.1) o problema estocástico pode ser finalmente escrito como sendo um único problema linear grande, chamado de equivalente determinístico de um problema estocástico conforme Equação (2.2.2.3):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K} \quad & c^T \mathbf{x} + \sum_k^K p_k Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_k) = c^T \mathbf{x} + \sum_k^K p_k q_k^T \mathbf{y}_k \\ \text{s.t.} \quad & A \mathbf{x} = b \\ & T_k \mathbf{x} + W_k \mathbf{y}_k \leq h_k \\ & k = 1, \dots, K, \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k \geq 0, x \in X \end{aligned} \quad (2.2.2.3)$$

Onde X é o conjunto de valores viáveis de x . $q_k^T y_k$ é chamado de custo de ação de recurso (ação corretiva); obviamente pode-se considerar também as restrições do tipo $T_k x + W_k y_k = g_k$ na matriz de otimização do problema estocástico, bem como diferentes limites para y_k, x_k , além de que restrições não-lineares também podem ser incorporadas no modelo se necessário, embora não seja matematicamente benéfico (SHAPIRO e PHILPOTT, 2007). Claramente o esforço computacional, bem como a dificuldade de encontrar uma solução ótima aumentará com o aumento da quantidade de cenários e com o aumento das dimensões m, n, d , e caso restrições não-lineares forem adicionadas estas dificuldades aumentam ainda mais. Também é importante ressaltar que mesmo com problemas estocásticos sendo lineares, o equivalente determinístico de um problema estocástico pode ser não-linear caso haja a adição de restrições probabilísticas (*chance-constrained programming*).

Segundo CONEJO *et al.* (2010), o preço que se paga por utilizar a abordagem de programação estocástica é o incremento dramático no tamanho do problema a ser resolvido, ao qual se for planejado sem cuidado pode levar à inviabilidade da solução. Um exemplo é o problema SSN exposto em SEN *et al.* (1994), ao qual tem muitas dimensões, e há aproximadamente 10^{70} cenários de demanda como revisto em NEMIROVSKI *et al.* (2009) e LINDEROTH *et al.* (2006), e por isso, trabalhar com cenários poderia resultar em grandes dificuldades, resultando em grande aumento de esforço computacional e possivelmente a inviabilidade e intratabilidade computacional (esforço intratável). Mais sobre intratabilidade e inviabilidade é discutido em GOH e SIM (2010).

As abordagens estocásticas podem enfrentar alguns problemas, como o exemplo em que as distribuições reais de probabilidade das incertezas não podem ser representadas porque não há muitos dados históricos disponíveis. Além disso, existe uma probabilidade, para cada incerteza, embora pequena, de se classificar os valores mais indesejáveis via amostragem, obtendo portanto, uma solução inviável (PISHVAEE *et al.*, 2011).

Em programação estocástica, a maioria de trabalhos exploram essa área através do uso de programação baseada em cenários, e esses são casos em que geralmente exigem alto esforço e tempo de execução computacional, alguns desses artigos são LISTES e DEKKER, (2005), SALEMA *et al.*, (2007), SANTOSO *et al.* (2005), XU e NOZICK (2009), ALONSO-AVUSO *et al.* (2003), e SCHÜTZ *et al.* (2009). Nesses casos, é recomendado usar alguma estratégia para diminuir a quantidade de otimizações ou/e a quantidade de variáveis/restrições, através da seleção de cenários como a amostragem de hiperplano latina (*LHS*), a amostragem por aproximação média (*SAA- sample average approximation*) ou a aproximação estocástica (*SA*)

etc (NEMIROVSKI *et al.* (2009)). Em contrapartida à abordagem que considera cenários na programação estocástica, alguns estudos que não utilizam cenários nessa área são, e.g., TILL *et al.* (2007), CAO *et al.* (2009), e DERBYSHIRE e WRIGHT (2014).

SANTOSO *et al.* (2005) propuseram um modelo de programação estocástica e um algoritmo de solução, com base na metodologia da estratégia de amostragem, para resolver problemas de design de redes de cadeias de suprimentos em escalas realistas. É utilizado o esquema de aproximação média da amostra (*SAA*) com o auxílio de um algoritmo de decomposição acelerada de Benders para melhorar o tempo de computação a partir da redução da quantidade de cenários. Nesse artigo, um conjunto estocástico funciona como parâmetros de entrada ao qual seus elementos são parâmetros incertos que se referem ao custo de processamento/transporte, demandas, fornecimentos e capacidades, ao qual seus valores são gerados aleatoriamente conforme uma distribuição de probabilidade log-normal contínua. Recentemente, KAMATH e PAKKALA (2002) também fizeram pesquisas baseadas em distribuições log-normais e forneceram algumas evidências de que essa distribuição é adequada para algumas variáveis.

GAO e YOU (2019) propuseram um novo *framework* teórico de jogo estocástico para otimização de cadeias de suprimentos de múltiplos *stakeholders*, abordando incertezas para seleção de contratos, planejamento de transporte, estabelecimento de preços, perfil de produção e gerenciamento de inventário. A distribuição de probabilidade usada para gerar valores para as incertezas foi a distribuição normal de acordo com o estado da arte existente de LIRA-BARRAGÁN *et al.* (2016) e com o uso de uma abordagem amostral de aproximação média (SHAPIRO e HOMEM-DE-MELLO, 1998) para a discretização das funções de distribuição de probabilidade contínua e para a geração de cenários.

2.2.3. Otimização Robusta

A OR é uma otimização que de alguma forma tem o objetivo de realizar uma otimização sob incerteza ao qual o modelo determinístico é alterado com o intuito de deixá-lo mais robusto para proteger o modelo dos casos em que as incertezas façam com que a solução seja inviável. Em outras palavras, a OR tem o objetivo de realizar uma otimização sob incerteza que de alguma forma proteja o modelo de alguma possível inviabilidade na solução, e quanto maior for a proteção, maior será a penalidade no valor da função objetivo. Em resumo, uma OR é uma otimização que considera incertezas ao qual o modelo tende a ser robusto a ponto de assegurar a viabilidade da solução, e por isso também se difere da programação estocástica, ao qual nesta,

poderia haver algum cenário discreto de acontecimento em que o modelo desse uma solução inviável.

Dentro da OR há várias outras diferentes filosofias além da ideia de conservadorismo e robustez que é fruto da abordagem *robust counterpart* primeiramente destacada por SOYSTER (1973), e expandida por BEN-TAL e NEMIROVSKI (1998,1999,2000), EL-GHAOUI e LEBRET (1997) e EL-GHAOUI *et al.* (1998), a qual o foco é a reformulação do modelo determinístico linear a um novo modelo linear chamado de o equivalente determinístico robusto. Assim sendo, outras abordagens são as de modelos de arrependimento (e.g., AISSI *et al.* (2009); LI *et al.* (2009); JIANG *et al.* (2013); NG (2013); BAOHUA e SHIWEI (2009)), modelos de variabilidade (e.g. MULVEY *et al.* (1995); YU e LI (2000); RAHMANI e HEYDARI (2014)), modelos que consideram fatores de penalidade ou proteção (e.g., MULVEY *et al.* (1995); LEE e PARK (2001); BERTSIMAS e SIM, 2004), análise do pior caso (e.g., KOUVELIS e YU (1997); SUH e LEE (2001); EL-GHAOUI *et al.* (2003); SHAPIRO e AHMED (2004); JIANG *et al.* (2013)).

A OR também pode atribuir a filosofia de aversão ao risco ao *framework* que está sendo utilizado, ao considerar medidas de risco ou funções de risco que quando incluídas no modelo, possa-se controlar o risco de valores indesejáveis serem gerados para as incertezas, que por ventura iriam priorizar a solução ou distanciá-la da informação perfeita, ou até mesmo impossibilitar a viabilidade da solução (MARKOWITZ (1952); BAI *et al.* (1997); BROWNE (1999); ARTZNER *et al.* (1999); JORION (2000); ROCKAFELLAR e URYASEV (2000); ACERBI *et al.* (2001); FABOZZI *et al.* (2007); JAMMERNEGGER e KISCHKA (2009); AL-QAHTANI e ELKAMEL (2010)).

O campo de OR é amplo e as oportunidades de pesquisas oferecidas por essa área também, a ponto de haver a possibilidade de integrar as diferentes filosofias, como de também haver a inserção de novas filosofias, a fim de que seja gerado um *framework* para realização de um propósito, e.g. há diversos autores que integraram essas diferentes filosofias em seus trabalhos (e.g., KLAMROTH *et al.* (2013); GHAOUI *et al.* (2003); YAMASHITA *et al.* (2007); COHEN *et al.* (2018); AYOUB e POSS (2016)).

SOYSTER (1973) foi o primeiro a desenvolver uma abordagem de OR ultraconservadora que imuniza completamente um modelo determinístico linear a qualquer perturbação dos parâmetros de entrada, através da determinação de uma solução até para os piores casos, i.e. para os dois cenários que são descritos apenas pelos limites máximos ou apenas pelos limites mínimos dos parâmetros do LP. A garantia de não acontecimento de eventuais inviabilidades causadas por parâmetros de entrada, que são incertos, é assegurada a troco da

alta penalização no valor da função objetivo, a maior penalização possível e distorção que pode haver do LP nominal. Esta abordagem *robust counterpart* transforma um modelo determinístico linear original dado pela Equação (2.2.3.1) para um modelo determinístico linear representado pela Equação (2.2.3.2), i.e. a região viável convexa de otimização é transformada.

$$\sup \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad s.t. f_i(x) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2.3.1)$$

$$\sup \mathbf{c}^T \mathbf{x}, s.t. \mathbf{x}_1 \mathbf{K}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{K}_2 + \dots + \mathbf{x}_n \mathbf{K}_n \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad (2.2.3.2)$$

$\mathbf{K}(\mathbf{b})$ é um conjunto convexo, \mathbf{K}_n é o n^{o} ésimo conjunto convexo de dados referentes aos parâmetros vinculados ao vetor \mathbf{x}_n que contém as variáveis pertencentes à n^{o} ésima coluna da matriz de variáveis \mathbf{x} . A Equação (2.2.3.2) pode ser reescrita como um problema de programação linear de modo geral, e.g. pela Equação (2.2.3.3).

$$\sup \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad s.t. \mathbf{x}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{x}_n \mathbf{a}_n \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_j \geq 0, \mathbf{a}_j \in \mathbf{K}_j \quad (2.2.3.3)$$

\mathbf{a}_j (vetor de atividades) é o vetor de parâmetros vinculados a \mathbf{x}_j . A solução da Equação (2.2.3.3) é a solução da Equação (2.2.3.2), que é a mesma solução $\bar{\mathbf{x}}$ do programa linear auxiliar LP(A) responsável por determinar a solução robusta ultraconservadora que imuniza o modelo para qualquer perturbação de \mathbf{a}_j , i.e. $\bar{\mathbf{x}}$ é a solução robusta desejada de SOYSTER (1973). Para determinar $\bar{\mathbf{x}}$ resolve-se a Equação (2.2.3.4).

$$\max \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}, s.t. \mathbf{x}_1 \sup_{a_1 \in \mathbf{K}_1}(a_1^i) + \dots + \mathbf{x}_n \sup_{a_n \in \mathbf{K}_n}(a_n^i) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2.3.4)$$

a_j^i é a atividade j da restrição i vinculado a x_j . Note que a_j^i pode ser um termo em evidência. Se o problema for de minimização então o usuário deve trocar $\sup_{a_j \in \mathbf{K}_j}(a_j^i)$ por $\inf_{a_j \in \mathbf{K}_j}(a_j^i)$ e “ $\leq b_i$ ” por “ $\geq b_i$ ”. A troca de $\leq b_i$ ou $\geq b_i$ por $= b_i$ também é possível claro, assim como os limites de x_n .

Dado que $K_j = \{a \in \mathbb{R}^m | |a - a_j| \leq \rho_j\}$, o qual a é o valor verdadeiro exato da atividade, a_j é o valor estimado dessa atividade j e ρ_j é a incerteza no valor de a , e dado que K_j representa hiperesferas Euclidianas no espaço euclidiano m , $\sup_{a_j \in \mathbf{K}_j}(a_j^i)$ pode ser facilmente determinado pela sua substituição por $a_j^i + \rho_j \forall i$, e a solução da Equação (2.2.3.5) é a solução da Equação (2.2.3.2) e (2.2.3.4). e é o vetor contendo a unidade, designado de vetor

de “todos os uns”, e geometricamente a_j representa o centro estimado da hiperesfera e ρ_j o seu raio. Nesta abordagem de SOYSTER (1973), as únicas variáveis de decisões permitidas são aquelas em que para qualquer perturbação nos valores de $[a_j^i - \rho_j, a_j^i + \rho_j]$ a solução permanece viável, e para isso $b_i \forall i$ deve ter seu valor paramétrico ajustado de maneira a proporcionar este objetivo, como também pode ser uma variável no problema de otimização para que a robustez total seja garantida.

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}, s.t. \mathbf{x}_1(\mathbf{a}_1 + \rho_1 \cdot \mathbf{e}) + \cdots + \mathbf{x}_n(\mathbf{a}_n + \rho_n \cdot \mathbf{e}) \leq \mathbf{b} \quad (2.2.3.5)$$

Se os conjuntos $K_j \forall j$ não representarem hiperesferas Euclidianas, o problema de OR deve ser resolvido conforme a Equação (2.2.3.4). BEN-TAL e NEMIROVSKI (1998,1999,2000), EL-GHAOUI e LEBRET (1997) e EL-GHAOUI *et al.* (1998) continuaram o desenvolvimento independente de *robust counterpart*, e.g. em BEN-TAL e NEMIROVSKI (1998) os conjuntos de incertezas são elipsóides ao invés de hiperesferas, ao qual o objetivo destes trabalhos foi reduzir o conservadorismo.

Em OR, uma incerteza, seja parâmetro ou restrição, também pode ter a filosofia de ser satisfeita conforme uma certa probabilidade de ocorrência (RAO (2019)). Utilizar métodos que envolvem valores esperados comumente se requer uma probabilidade associada à ocorrência de cada incerteza (SUNDARESAN *et al.*, 1995).

A OR também podem envolver abordagens matemáticas baseadas em cenários, também chamada de programação robusta neste caso, porém não é necessário considerar todas as possíveis realizações entre os cenários de acontecimentos dos dados históricos que representam o conjunto de incertezas (HOSSEINI e DULLAERT (2011)), embora quanto mais cenário seja considerado, maior será a robustez da solução do problema (YIN *et al.* (2009)). Dentro da OR, alguns trabalhos que consideram cenários em suas abordagens matemáticas são e.g. MULVEY *et al.* (1995), LEUNG *et al.* (2007), YIN *et al.* (2009) e JIANG *et al.* (2013). No entanto, ainda há grandes desafios e dificuldades a serem vencidas na otimização (de forma geral) baseada em cenários (YIN *et al.* (2009); HOSSEINI e DULLAERT (2011)), que podem ser grosseiramente resumidos em uma pergunta e uma afirmação: i) Como gerar a quantidade certa e eficiente de cenários? (de tal forma que represente, da forma mais eficiente e realística, todas as possibilidades de acontecimentos discretos do problema, e que ofereça um tempo computacional adequado de resolução do problema de otimização) e ii) Pode haver bastante dificuldade em atribuir probabilidades de acontecimentos para cada um dos cenários específicos

escolhidos para as realizações do problema de otimização. Devido a estes quesitos, mesmo que a literatura apresente algumas abordagens para amenizar esses problemas através da redução da quantidade de cenários e da escolha deles (e.g., REDDI *et al.* (2016); MAK *et al.* (1999); LINDEROTH *et al.* (2006)), há uma vasta quantidade de diferentes abordagens que não consideram cenários (e.g., SOYSTER (1973); EL-GHAOUI *et al.* (1998); BEN-TAL e NEMIROVSKI (1999); BERTSIMAS e SIM (2003); BERTSIMAS e SIM (2004)) como o melhor caminho, para não se deparar com essas dificuldades.

Na OR, há metodologias que consideram níveis de incerteza na formulação matemática do modelo para modificar a robustez do modelo, justamente porque a ideia do surgimento da OR, foi para determinar soluções viáveis para modelos de programação linear com incerteza nos dados, e por isso é muito utilizada na prática devido à facilitação na tratabilidade da solução (e.g., BEN-TAL *et al.* (2011); MAGGIONI *et al.* (2017); YE *et al.* (2014)). Os níveis de incertezas regulam e adequam o nível de conservadorismo, que quanto maior, mais modificado é o valor da função objetivo em relação à do modelo original, o nível de robustez do modelo e/ou a probabilidade de alguma restrição ser violada.

Há várias formas de se tratar as incertezas no modelo, e a forma como elas são tratadas influencia diretamente na robustez e tratabilidade dos resultados. Trabalhar com o valor esperado através de seu cálculo conforme uma função densidade de probabilidade (PDF) é uma excelente alternativa para que o modelo se torne mais robusto, quando as incertezas podem se adequar a uma PDF ajustada, pois dessa maneira o valor incerto para a incerteza no modelo seria o valor esperado da PDF ajustada ou um valor aleatoriamente gerado conforme real chance de ocorrência mais próxima da realidade caso a PDF seja bem ajustada ao conjunto de dados históricos disponíveis. Essa filosofia trata a incerteza no modelo como se tornando um parâmetro determinístico, aumentando a robustez do modelo em relação à sua versão estocástica caso houvesse mudança na natureza da formulação matemática do modelo (KALL, *et al.* 1994; RAO, 2019). Quando se trata uma incerteza, como sendo um parâmetro determinístico no modelo, a intenção é fazer com que a realidade seja representada pelo valor verdadeiro justificado pela inferência estatística ou por algum valor nominal que represente a melhor aproximação da realidade tratável. Quando as incertezas não podem ser descritas por uma PDF, há diferentes formas de se tratar as incertezas no modelo, de tal forma que a otimização se torne robusta ao mesmo tempo em que as incertezas são tratadas conforme uma estatística paramétrica ou não-parâmetrica, mas que em ambos os casos, cada incerteza tenda a se aproximar mais da realidade. Um exemplo de tratamento das incertezas é em BEN-TAL e NEMIROVSKI (2000), ao qual propuseram uma metodologia para soluções robustas de

problemas lineares ao qual as incertezas podem ser tratadas como desconhecidas (sem dados históricos), porém com valores limitados e conhecidos, ou podem ser tratadas como aleatórias.

Segundo JIANG *et al.* (2013), o critério do modelo de arrependimento *minimax* foca em obter uma solução que minimiza o arrependimento do pior caso diante de todos os possíveis cenários discretos de acontecimento, ao mesmo tempo em que a robustez do sistema é assegurada.

Um modelo de arrependimento que tem como foco a minimização do arrependimento relativo máximo, i.e. da diferença entre solução ideal proveniente de uma otimização determinística de referência e solução de um cenário qualquer do problema, é o discutido em KOUVELIS e YU (1997). Como esta abordagem trabalha com cenários, a ideia é minimizar o arrependimento para cada diferente cenário, a qual dita solução ideal proveniente de uma otimização determinística de referência é dada pela Equação (2.2.2.1) em um problema que considera abordagem sob cenários. Tenha como exemplo um modelo matemático simples a seguir, onde seja ξ o vetor referente a um cenário que contém um conjunto de valores dos parâmetros de entrada do problema. Para o exemplo em questão, a Equação (2.2.2.1), o qual comprehende todos os cenários, pode ser simplificada para entendimento através da Equação (2.2.3.6):

$$\begin{aligned} \min_x z(x, \xi) &= c^T x \\ s. a. \quad Ax \leq b, x \geq 0; x \in X \end{aligned} \tag{2.2.3.6}$$

A estratégia matemática discutida por KOUVELIS e YU (1997) é indicada pela Equação (2.2.3.7), onde para cada cenário paramétrico ξ , $z(x_\xi, \xi)$ é a solução robusta (valor ótimo da função objetivo para o cenário ξ) e $z(x, \xi)$ é a solução do modelo determinístico de referência que pode ser uma solução média a qual considera todos os cenários do problema (Equação 2.2.3.6). Obviamente o valor de $z(x, \xi)$ pode ser especificado conforme vontade do planejador.

$$\begin{aligned} \min_\xi f^* \\ s. a. \quad z(x, \xi) - z(x_\xi, \xi) \leq f^* \\ f^* \geq 0; \xi \in E \end{aligned} \tag{2.2.3.7}$$

Esta OR deve ser realizada para todos os cenários, o qual o arrependimento f^* é computado para cada cenário (combinação de decisão), conforme dito no capítulo 1 de KOUVELIS e YU (1997), e depois é selecionado o melhor cenário que possui um f^* menor, para tomadas de decisões por parte do planejador. Em KOUVELIS e YU (1997), a Equação (2.2.3.6) também pode ser um problema de *minimax*. O conceito de robustez nesse modelo é visto como obter um valor de função objetivo de um cenário que mais se aproxime da solução ideal, ao invés de se interessar por imunização contra a violação das restrições. Portanto, nesta abordagem de otimização robusta não há uma reformulação do modelo matemático determinístico original como primeiramente proposto em SOYSTER (1973). Há vários outros trabalhos com formulações de modelo de arrependimento na literatura (e.g., CHEN *et al.*, (2014); JIANG *et al.* (2013); GUTIÉRREZ *et al.* (1996); BAOHUA e SHIWEI (2009); XIDONAS *et al.* (2017)).

A OR também é muito utilizada para a determinação de tolerâncias nas variáveis de projeto ou na tolerância de planejamento/operação de um processo descrito por um modelo, por exemplo, BERNARDO e PEDRO (1998) desenvolveram um framework de OR para parametrização de incertezas no design de uma planta química, onde há como resultado o design da tolerância, do sistema, e dos parâmetros do processo. Há outros trabalhos envolvendo este escopo, e.g. entre eles estão SUNDARESAN *et al.* (1995), LEE e PARK (2001), BEYER e SENDHOFF (2007), KOCH *et al.* (2004).

KOCH *et al.* (2004) fala a respeito da OR aplicada a um projeto baseado em *six sigma* ao qual pode ser aplicado em todos os campos que envolvem estatística, ou seja, que possui alguma variabilidade no processo pertinente a atuação de uma incerteza. Nesta abordagem, é minimizada uma função objetivo contendo as médias e os desvios padrões (que são considerados variáveis de projeto) para cada incerteza considerada como tendo uma distribuição normal, onde a otimização está sujeita a restrições envolvendo estas mesmas variáveis de projeto, e cada uma delas está sujeita a um limite superior e inferior especificados. O que acontece por trás da otimização é o deslocamento e encolhimento da curva de distribuição normal de uma incerteza ao longo dos eixos, ou seja, a ideia específica desta otimização neste trabalho é encontrar uma curva com menor sensibilidade, maior confiabilidade e maior robustez. E quando o valor do desvio padrão é especificado para uma incerteza, é porque uma margem de tolerância de operação/atuação é assumida para essa incerteza.

Dentre os métodos de otimizações robustas, os métodos que se baseiam na perspectiva de pior caso pretendem encontrar uma solução tratável na pior das hipóteses, seja através da sintonia de um fator de proteção contra a violação das restrições ou seja a partir da redução da

probabilidade de violação das restrições. Portanto, segundo ERDOGAN e IYENGAR (2006) uma crítica deste *framework* de OR é que há a chance de haver flexibilidade para violação de alguma restrição, mas isso pode ser mitigado, segundo o mesmo, através da junção do conceito de OR e da otimização *chance-constrained* que considera que parte ou todas as incertezas sejam representadas por distribuições de probabilidade, embora haja dificuldade em resolver numericamente o problema quando haver distribuições não-lineares ou não-normais.

Segundo IANCU e TRICHAKIS (2013), o tipo de abordagem que se baseia na perspectiva de pior caso pode levar a soluções inequívocas (não-ótimas) e precipitadas, e descobriram que a OR em que é apenas considerado o pior caso (método orientado ao pior caso), pode não representar a realidade, visto que os casos que não são os piores, podem gerar decisões não-ótimas sendo fruto da metodologia que só considera o pior caso. Portanto, é interessante que haja a inclusão da filosofia de modelo de arrependimento na OR.

A distribuição normal pode ser um excelente representador de uma incerteza quando não se sabe suas tendências de ocorrência, devido ao teorema do limite central, e a depender do caso, como em um design ou planejamento por exemplo, seu valor pode ser determinado via otimização a fim de sintonizar a tolerância do projeto, ou até mesmo via especificação de projeto. Tendo isso em vista, LEE e PARK (2001) desenvolveram uma técnica de OR que utiliza um algoritmo de programação matemática, ao qual a técnica considera tolerância nas variáveis de projeto do modelo. As incertezas incluem variações ou perturbações, ao qual a função multiobjetivo do problema é influenciada por incertezas de variáveis de projeto que seguem uma distribuição normal de probabilidade com uma certa média μ e desvio padrão σ para cada incerteza. Cada banda da curva da distribuição normal para uma variável de projeto incerta tem um limite de tolerância de valor. Neste método de OR, uma função multiobjetivo é considerada como tendo as médias e os seus desvios padrões da função objetivo original, e é adicionado um fator de penalidade nas restrições. Nesta abordagem, um dos níveis de incerteza de robustez é caracterizado pela adição do fator de penalidade no modelo, ao qual é o tomador de decisão que escolhe o seu valor. O objetivo do método é minimizar a função multiobjetivo, que como os autores mencionaram como motivação, pode ser utilizado em problemas de engenharia para redução de custos de manufatura e de projeto de automação. O método encontra a robustez ótima do problema a fim de minimizar a função multiobjetivo, ao qual os valores ótimos de desvios padrões de cada incerteza são encontrados conjuntamente com as outras variáveis de projeto. Os valores da tolerância das variáveis de projeto são influenciados diretamente pelos valores dos desvios padrões de cada uma dessas incertezas.

PISHVAEE *et al.* (2011) desenvolveram uma formulação robusta do tipo RMIP (*robust mixed-integer programming*), levando em consideração as incertezas do processo, de um projeto de rede de cadeia de suprimentos em *loop* fechado baseado em conceitos de logística reversa de uma rede de vários escalões, ao qual o principal ponto da formulação MILP determinística é evitar o transporte excessivo de produtos devolvidos, bem como a estratégia enviaria esses produtos diretamente para as instalações apropriadas. Nesse artigo, os custos fixos de abertura, custos de transporte, produtos retornados (produtos sucateados) e as demandas são considerados como parâmetros incertos para melhorar a robustez do problema. Foi assumido que estes parâmetros variem em um conjunto de caixa fechada (*closed-box*) especificada, assumindo-se que seus valores sejam gerados conforme valores nominais e de desvios relativos, em que as distribuições de probabilidade dos valores aleatórios destas incertezas são uniforme.

KLAMROTH *et al.* (2017) descreveram propriedades e interpretações para algumas soluções de problemas de otimização estocástica, e também expuseram alguns conceitos de robustez, levando em consideração a unificação de diferentes abordagens de métodos matemáticos para resolver problemas de otimização escalar. Além disso, quando a palavra “estocástico” é citada, logo vem à mente a importância da robustez nesse escopo, uma vez que a complexidade da resolução da otimização é diretamente afetada e pode melhorar ou diminuir o esforço computacional, a depender do caso. Assim, devido à importância de se preocupar com a robustez de um modelo na otimização, a literatura possui muitos estudos sobre esse tema, inclusive da definição de novos conceitos, e.g. a OR com conjuntos de cenários infinitos (KLAMROTH *et al.* (2013, 2017) ou e.g. o conceito de robustez leve para problemas de otimização arbitrária e conjuntos de incerteza arbitrários, definido como robustez leve generalizada (SCHÖBEL, 2014) em continuação do trabalho que definiu o conceito de robustez leve (AHUJA *et al.*, 2009).

Há vários trabalhos de OR que consideram distribuições de probabilidade para incertezas no processo (e.g., JANAK *et al.* (2007); HAN *et al.* (2006)), LI *et al.* (2018), onde se constitui uma excelente maneira de não se deparar com abordagens que necessitam da geração da árvore de cenários. Usar PDF na abordagem matemática é uma excelente maneira de retratar o histórico acontecido sem precisar gerar a árvore de cenários, evitando que decisões fora do acontecido sejam evitadas, fazendo também com que haja uma distribuição de pesos dos acontecimentos ocorridos de acordo com suas frequências. Há diferentes abordagens de se trabalhar com a inclusão de restrições probabilísticas, onde duas abordagens populares são o

método de distribuição de probabilidade e o método de aproximação (NEMIROVSKI e SHAPIRO, 2006), ou até mesmo novas abordagens (e.g. JANAK *et al.*, 2017).

2.2.4. Otimização robusta ajustável

O conceito de robustez ajustável introduzido em BEN-TAL *et al.* (2003) estabelece que a fim de que se possa controlar a relação entre conservadorismo e robustez do modelo, um conjunto de variáveis é dividido entre variáveis que possam realizar decisões *here and now* e em outras variáveis *wait and see*, ao qual essas variáveis sejam suficientes para decidir se o problema considerando o cenário final é realizado. A ideia se baseia em determinar valores para as variáveis *here and now*, de tal maneira que para qualquer que seja o cenário do problema, haja variáveis *wait and see* que possam resultar em soluções viáveis. A partir deste conceito inicial, vários outros autores desenvolveram novas metodologias e diferentes *frameworks* neste campo.

Recentemente, YANIKOGLU *et al.* (2019) publicaram um artigo de revisão bibliográfica referente aos avanços relacionados à otimização robusta ajustável (ORA), ao qual são discutidos sobre os aspectos da metodologia, os procedimentos passo a passo de metodologia, algumas aplicações da metodologia, vantagens e limitações da metodologia. Segundo os autores, a ORA fornece um valor de função objetivo melhor do que em comparação com a OR, devido ao fato de que nesta metodologia algumas variáveis (variáveis *wait and see*) podem ser ajustadas. Ambas metodologias possuem grande praticabilidade em casos reais, devido ao jogo entre tratabilidade e conservadorismo. Ainda segundo os autores, basicamente a metodologia funciona em primeiramente realizar-se a resolução do problema nominal sem a presença de incertezas, e após a inclusão de incertezas verificar a robustez do problema, e caso não seja satisfatoriamente robusto, realizam-se ajustes matemáticos na *robust counterpart* até o alcance satisfatório da robustez.

Assim como a OR, ORA tem sido muito utilizado nos setores industriais de produção (e.g., GORYASHKO e NEMIROVSKI (2014); BABONNEAU *et al.* (2009)), em setores como processamento químico industrial etc, e.g. ZHANG *et al.* (2016) desenvolveram um modelo de agendamento para processos industriais contínuos ao qual possuem carregamento interruptivo. A representatividade das incertezas no modelo de ZHANG *et al.* (2016) é realizada pela utilização de uma abordagem de otimização robusta ajustável desenvolvida por BEN-TAL *et al.* (2004), ao qual decisões recursivas são consideradas.

2.2.5. Otimização distributivamente robusta

A otimização distributivamente robusta adota uma metodologia ao qual resolve-se um modelo de forma robusta, de certa forma que as incertezas podem se encontrar parcialmente caracterizadas. Além disto, esta metodologia de OR considera que as distribuições de probabilidade que governam os conjuntos de dados incertos (incertezas) são em si incertos a ponto de poder haver ambiguidade entre elas em relação à informação dos dados históricos fornecidos pelo tomador de decisão, i.e. os dados históricos podem ser compatíveis com mais de uma distribuição (WIESEMANN *et al.* (2014)). Como parte desta metodologia, as distribuições de probabilidade se encontram inseridas num conjunto de ambiguidade, ao qual popularmente é uma metodologia de otimização linear com a consideração do valor esperado analiticamente na função objetivo do modelo.

Por exemplo, GOH e SIM (2009) desenvolveram um *framework* para OR linear ao qual as incertezas são caracterizadas parcialmente por um espaço de probabilidade ao qual a distribuição de probabilidade conjunta não é conhecida, mas é parte de uma família de distribuições. Na abordagem de GOH e SIM (2009) as incertezas são linearmente transformadas em outras incertezas que possuem componentes independentes e estocásticos, e uma família de distribuições é caracterizada através de desvios direcionais com limites superiores, além disto a estratégia considera covariância, variância e suporte na construção da modelagem da incerteza no *framework*.

Por exemplo, SHANG e YOU (2018) desenvolveram uma abordagem com orientação a dados para construir conjuntos de ambiguidade baseado na análise do componente principal e em funções desvios de primeira ordem, ao qual o direcionamento da pesquisa se dá em relação a planejamento e agendamento. Nesta metodologia, leva-se em consideração a orientação ao pior caso e há a consideração tradicional do valor esperado em parte da função objetivo do problema de otimização que deve ser linear.

2.2.6. Otimização *fuzzy*

Uma variável *fuzzy* segundo NAHMIAS (1978) é uma variável que não necessita assumir um valor numérico necessariamente, embora também possa assumir valores separados por faixas, pois pode assumir valores linguísticos, e.g. de valor linguístico de escala: Pressão alta, média ou baixa, e há a geração de funções membros para as variáveis *fuzzy*. Os primeiros a classificarem uma definição para um conjunto *fuzzy* foram ZADEH (1965) e BELLMAN *et*

al. (1966), ao qual disseram que um conjunto *fuzzy* assume o comportamento de uma função característica variável que trabalha com escalas e varia uniformemente entre o valor 0 e 1, e não apenas 0 e 1, onde isso faz com que o domínio de soluções do problema possa ser dividido em escalas. Porém o conceito *fuzzy* vai muito além da teoria de probabilidade e do espaço amostral, e por isso a teoria *fuzzy* pode trabalhar com a teoria de espaço padrão Γ . NAHMIAS (1978) foi um dos primeiros a introduzir o conceito de variável *fuzzy* que segundo o autor, é uma nova definição para conjunto *fuzzy*, e que seu funcionamento no modelo é igual ao funcionamento de uma variável aleatória como na teoria de probabilidade, porém o valor de uma variável aleatória é visto como um resultado derivado do modelo de espaço padrão Γ .

Quando se tem funções objetivos e restrições matemáticas ao qual possuem naturezas difusas, ou seja, estão definidos em espaços de alternativas, i.e. há conjuntos difusos que representam diferentes intervalos de domínio no problema, pode-se dizer então que as fronteiras do ambiente de tomadas de decisões não estão definidas com precisão, e nem portanto suas funções objetivos e restrições (BELLMAN e ZADEH (1970)).

Quando se há informação incompleta, subjetiva, com falta de acuracidade, ou incerta pode-se usar a otimização *fuzzy* para se determinar a solução mais satisfatória para o problema, tendo em vista que as variáveis difusas serão representadas por conjuntos com diferentes intervalos de valores. Dependendo do sistema a ser modelado, as abordagens dentro da otimização *fuzzy* podem ser adaptadas para cada diferente problema, mas métodos mais populares se distinguem entre otimização *fuzzy* robusta ao qual as estruturas do modelo são incertas (e.g., LIU *et al.* (2003)), programação flexível ao qual as estruturas do modelo são fixas e conhecidas (e.g., MULA *et al.* (2006)) e modelos interativos (e.g., WERNERS (1987)). Revisões bibliográficas sobre os típicos métodos de otimização *fuzzy* foram feitas por INUIGUCHI *et al.* (1990) e LODWICK e KACPRZYK (2010).

Tendo em vista os conceitos de conjuntos e variáveis *fuzzy*, um número alto de autores desenvolveram trabalhos relacionados a este tema, e há aqueles em que utilizaram estes conceitos para desenvolverem metodologias de otimizações sob incerteza baseadas em conceito *fuzzy* (e.g. BELLMAN e ZADEH (1970); BILGEN (2010)).

Em otimização *chance-constrained* há restrições que relacionam o nível de confiança do problema em determinar a viabilidade de uma solução ser viável, e como é possível em todo framework de otimização, há pesquisas que misturam estes conceitos com estruturas *fuzzy* (e.g., LIU e IWAMURA (1998)).

2.2.7. Otimização *distribution-based*

A representatividade de uma incerteza a partir de seu valor esperado através do tratamento de uma distribuição de probabilidade, ou seja, o ato de ter sua representatividade no modelo como sendo a partir da consideração de sua realização a partir de seu valor médio de ocorrência baseado em dados históricos, é uma excelente estratégia. Esta estratégia permite que o modelo não precise resolver integrais complexas que algumas metodologias podem apresentar (e.g. *chance-constrained*), ao mesmo tempo em que não é necessário trabalhar com geração de cenários.

A forma de tratar uma incerteza como tendo sua distribuição especificada é um excelente artifício matemático quando não é desejável ou possível de se trabalhar com cenários (e.g. no caso em que cenários discretos não podem ser ou são difíceis de serem identificados), e deseja-se representar uma incerteza através de uma predição de potenciais valores futuros delimitados por uma variação com faixa contínua tratável de acontecimento (GUPTA e MARANAS, 2003). O teorema central do limite é um grande aliado da presunção de distribuição normal para uma incerteza ao qual não se sabe sua distribuição ou a incerteza não pode ser identificada. Segundo GUPTA e MARANAS (2003), um ponto fraco de se trabalhar com cenários é que na sua prática é uma exigência que o tomador de decisões saiba quais são todos os efeitos possíveis ocasionados por todos os cenários num universo. Trabalhar com cenários aumentaria o esforço computacional, o tempo de planejamento, e haveria a exigência de existir um esforço físico e intelectual para tratar todos os possíveis cenários. Segundo GUPTA e MARANAS (2003), apenas com um ajuste de distribuição de probabilidade para a potencial predição do futuro de uma incerteza, já evitaria a necessidade de prever cenários discretos e exatos de acontecimentos. No trabalho de GUPTA e MARANAS (2003) a demanda de um cliente na cadeia de suprimentos é uma incerteza que tem a distribuição normal como sendo assumida, ao qual o valor da média e do desvio padrão são especificados, e há uma geração de valores de demanda por amostragem de Monte Carlo. GUPTA e MARANAS (2003) não utilizam o operador esperança para cálculo do valor médio de uma incerteza com distribuição normal a partir de sua função densidade de probabilidade, ao invés disso eles calculam o valor médio de todas as realizações de otimizações através do operador esperança, onde cada realização de otimização corresponde a um dado cenário em que os valores das incertezas com distribuição normal são gerados conforme amostragem por Monte Carlo.

A distribuição normal é bastante assumida em outros trabalhos da literatura (e.g., SUNDARESAN *et al.* (1995); NAHMIAS (1989); LEE e PARK (2001); BEYER e

SENDHOFF (2007); WELLONS e REKLAITIS (1989); KOCH *et al.* (2004); YE *et al.* (2014); HAN *et al.* (2006)), pois a mesma apresenta o teorema central do limite como sendo um grande aliado, além de que também pode-se trabalhar com níveis de confiança, e é uma distribuição conveniente e fácil de se trabalhar ao mesmo tempo em que representa características essenciais de uma incerteza com aleatoriedade dispersa tendo como referência uma média populacional dos dados históricos disponíveis ou de especulações da projeção de um futuro desejável. Por destino da natureza, o que é mais um ponto positivo de se utilizar distribuições normais, Walter A. Shewart (1891-1967) descobriu por volta de 1920 (época em que inventou as cartas de controle estatístico de processo) que processos industriais tendem a ter uma distribuição normal para suas incertezas, principalmente por causa do teorema central do limite (WESTERN ELECTRIC COMPANY (1956); BEST e NEUHAUSER (2006)).

2.2.8. Otimização sob incerteza aplicada ao planejamento e programação

O grande objetivo da otimização sob incerteza realizada para um planejamento é realizar um planejamento de acontecimento futuro quando não se sabe quais serão as condições de acontecimentos (incertezas). O planejamento de acontecimento futuro traça as diretrizes das tomadas de decisões conforme resultado das variáveis de decisões como argumento final da otimização do modelo estocástico ou robusto.

No campo de planejamento e programação, distribuições de probabilidade possuem grande significância na representatividade das incertezas de um processo, uma vez que dados históricos começam a estar disponíveis a partir de quando os processos começam a entrar em funcionamento. Por exemplo, ROZENBLIT (2010) realizou uma OR de um planejamento de produção sob incerteza ao qual foi realizado diversas simulações com diferentes níveis de assimetria nas distribuições de probabilidades das incertezas, a fim de se determinar a sensibilidade das incertezas quanto às mudanças nas distribuições.

Demandas incertas em clientes de uma rede de cadeia de suprimentos é uma realidade que as empresas precisam lidar para realizarem seus planejamentos futuros. Por conta disto, muitas pesquisas foram realizadas considerando a demanda como sendo uma incerteza para que melhorias na abordagem do ponto de vista de otimização sob incerteza pudessem ser identificadas, determinadas e analisadas (e.g. WELLONS e REKLAITIS (1989); SCHWARTZ *et al.*(2006); GUPTA e MARANAS (2003); JUNG *et al.* (2004); BALASUBRAMANIAN e GROSSMAN (2004); SUNGUR *et al.* (2008); COHEN *et al.* (2018); YE *et al.* (2014)).

3. APRESENTAÇÃO DO *FRAMEWORK*

3.1. OBJETIVO, FILOSOFIA E PRIMEIRAS CONSIDERAÇÕES DO *FRAMEWORK*

Para realizar uma otimização robusta através desta nova abordagem que regula a robustez e conservadorismo conforme vontade do planejador, o presente *framework* incorpora um algoritmo, um modelo de arrependimento com definições e conceitos próprios que diminui o arrependimento relativo, e uma formulação matemática que deixa o modelo determinístico mais robusto à variações paramétricas. Para realizar a OR é necessário transformar o modelo original em outro, um modelo robusto com fatores de penalidade inseridos, através da formulação matemática do *framework*, e por fim sintonizar os valores de desvios padrões das incertezas normais através de um algoritmo.

A sintonia é executada a fim de que a solução robusta se aproxime o mais próximo de uma solução ideal f_{obj}^{ODGR} . Uma vez que o modelo determinístico original esteja transcrito para a formulação matemática do *framework*, o procedimento passo a passo do algoritmo do *framework* sintonizará o modelo robusto a fim de determinar o melhor valor para o desvio padrão de uma incerteza normal. O conservadorismo e robustez do modelo é regulado através da escolha ou determinação dos valores dos fatores de penalidade α_l , discutidos na seção 3.3. Neste *framework* não é necessário controlar o risco de valores indesejáveis serem gerados para as incertezas, pois o *framework* sintoniza o modelo para que as tomadas de decisões independam da aversão ao risco de valores incomuns gerados para as incertezas normais serem indesejáveis, pois incertezas com valores mais afastados da média podem gerar melhores resultados.

A filosofia do *framework* está baseada em realizar uma OR ao qual não considera cenários discretos e nem uma árvore de cenários, e que tem como fundamento a consideração da representação de incertezas aleatórias através de distribuições de probabilidade, e a consideração de distribuição normal para incertezas normais ou para as incertezas epistêmicas, caso hajam. Para o entendimento do *framework*, é necessário entender definições e conceitos do modelo de arrependimento específico:

- i) ODGR (Otimização Determinística Geral de Referência): É uma otimização guia para se determinar o valor da solução ideal. A ODGR toma como base um valor nominal para cada parâmetro, de tal forma que esse valor nominal é uma média dos valores nominais que já foram utilizados em otimizações realizadas no passado. Os

dados históricos da ODGR são os dados históricos escolhidos para cada parâmetro pelo tomador de decisão, aos quais estão disponíveis na linha do tempo desejada pelo tomador de decisão, e.g. a linha do tempo geral de referência escolhida pode ser os dados históricos de otimizações realizadas nos últimos 2 anos ou todos os dados disponíveis na linha de tempo total etc. A função objetivo (FO) da ODGR é a solução ideal (f_{obj}^{ODGR}) para o problema de otimização do *framework* proposto. Se o tomador de decisão não quiser calcular a f_{obj}^{ODGR} , seu valor pode ser especificado conforme sua vontade do que sabe que seria ideal ou seu valor desejado.

- ii) LTRR (Linha de Tempo Recente de Referência): É a linha de tempo que toma como base um valor nominal para cada parâmetro, de tal forma que esse valor nominal é uma média dos valores nominais que já foram utilizados em otimizações realizadas no passado mais recente. A LTRR diz respeito aos cenários históricos mais recentes ocorridos. Os dados históricos da LTRR são um subconjunto dos dados históricos da linha de tempo da ODGR, ao qual possuem uma linha de tempo mais recente e que foram utilizados nas otimizações que foram realizadas durante essa LTRR, e.g. os dados históricos da otimização do último planejamento mensal ou e.g. os dados históricos utilizados nas duas últimas otimizações dos planejamentos mensais de uma indústria de produtos. O valor nominal de cada parâmetro do modelo, na LTRR, são os que de fato são utilizados na OR. É fundamental lembrar que a linha de tempo dos dados históricos da ODGR deve ser maior que a LTRR, mas não necessariamente a quantidade de dados. A Tabela 3.1.1 mostra um esquema exemplar de parametrização da LTRR.

Tabela 3.1.1: Esquema exemplar de parametrização da LTRR.

Parâmetros	Exemplificação de período da LTRR		
determinísticos ou média da normal	Média na LTRR sendo o inverno passado (3 meses)	Média na LTRR sendo o inverno e primavera passada (6 meses)	Os dois meses passados (2 meses)
Parâmetro 1 (p_1^i)	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=3} p_1^i}{3}$	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=6} p_1^i}{6}$	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=2} p_1^i}{2}$

Parâmetro 2 (p_2^i)	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=3} p_2^i}{3}$	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=6} p_2^i}{6}$	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=2} p_2^i}{2}$
Parâmetro 3 (p_3^i)	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=3} p_3^i}{3}$	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=6} p_3^i}{6}$	$= \frac{\sum_{i=1}^{n=2} p_3^i}{2}$
:	:	:	:

Explicando um exemplo simples entre a filosofia da ODGR e LTRR é o seguinte, suponha que um dos parâmetros do modelo seja o preço de mercado de algo, logo este preço na ODGR seria o preço ideal que levaria à solução ideal, mas como o período de tempo mais próximo é a LTRR, pode não ser factível utilizar o preço da ODGR no período em que se encontra o processo, por isso é mais factível utilizar o preço na LTRR e determinar decisões que leve à solução ideal. Nesse exemplo, a estratégia do presente *framework* realiza uma otimização robusta com os parâmetros da LTRR que leva a uma solução mais próxima da ideal.

- iii) Arrependimento relativo (AR (%)): É o quanto que o valor da FO de uma otimização realizada ($f_{obj}^{rob(LTRR)}$) com dados LTRR, se distancia em módulo, do valor da FO da solução ideal (f_{obj}^{ODGR}). O arrependimento relativo é calculado em termos de desvio percentual conforme a Equação (3.1.1):

$$AR (\%) = \frac{|f_{obj}^{ODGR} - f_{obj}^{rob(LTRR)}|}{f_{obj}^{ODGR}} \quad (3.1.1)$$

- iv) Arrependimento relativo médio (%) (ARM): O ARM é a média aritmética dos arrependimentos relativos. O valor do ARM é utilizado no critério de escolha do valor sintonizado de desvio padrão de uma incerteza que segue uma distribuição normal, como será visto mais à frente no algoritmo do *framework*.

Qual o motivo de haver a ODGR e a LTRR neste *framework* de OR? Tornar a abordagem deste framework, que também é um modelo de arrependimento, em uma que não é baseada em cenários. Esta estratégia permite que seja possível de se trabalhar com modelo de arrependimento sem que seja necessário haver a geração de cenários em árvore para o conjunto de parâmetros do problema e nem da resolução exaustiva de todos eles (em *loops* aninhados ou não) se tivessem sido criados. Fora isto, a ideia é realizar uma OR que considere o histórico das tendências do que vinha ocorrendo recentemente conforme dados históricos da LTRR (cenários

históricos mais factíveis de ocorrência), e que faça com que a FO desta OR se aproxime o máximo possível de uma solução ideal f_{obj}^{ODGR} . Como a LTRR contempla os cenários históricos mais recentes ocorridos, estes são os mais prováveis ou factíveis de serem repetidos ou levemente modificados para acontecerem, então é razoável que as tomadas de decisões partam desta referência, i.e. da média desses cenários históricos recentes, e não de cenários imagináveis, imprevisíveis ou subjetivos. Quando se diz “cenários históricos”, não são os cenários provenientes da geração de cenários com atribuição probabilística de ocorrência em uma árvore de cenários, mas sim situações que já ocorreram. Portanto, o modelo robusto sintonizado pelo *framework* concederá robustez ao problema de otimização sob incerteza e ao modelo, ao mesmo tempo em que estabelecerá tomadas de decisões ótimas, que partindo-se dos dados históricos mais recentes da LTRR, se direcionem (se aproximem) o máximo possível para estabelecer tomadas de decisões que se aproximem da solução ideal, conforme indicado pela seta da Figura 3.1.1. A linha em vermelho na ilustração da Figura 3.1.1, refere-se ao valor da FO hipotético ilustrativo da ODGR.

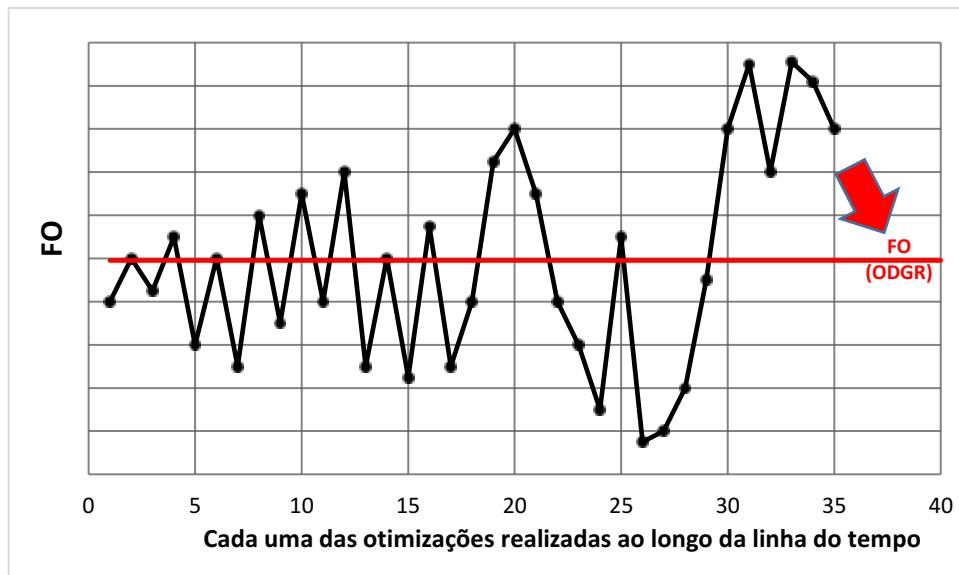


Figura 3.1.1: Figura de caráter ilustrativo do valor da função objetivo do problema de otimização de cada otimização realizada ao longo da linha do tempo.

3.2. ALGUNS CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA PARA ENTENDIMENTO DO *FRAMEWORK*

Nesta seção, serão apresentados conceitos e uma breve fundamentação matemática da probabilidade, estatística e de distribuição normal, os quais são importantes para o entendimento do *framework*, ou seja, pontos essenciais para o entendimento da metodologia empregada no presente trabalho.

A estimativa do valor do desvio padrão, numa distribuição normal para uma incerteza normal, para estabelecimento de projetos ou planejamentos de tomadas de decisões, é muito importante quando se quer estabelecer a estimativa da métrica de como os valores da incerteza podem se afastar da média. Quanto mais haver valores afastados da média é porque há mais pontos de dados históricos afastados do valor médio desses dados, implicando no aumento de probabilidade de valores aleatórios serem gerados nesses pontos mais afastados. Por exemplo, quando se aumenta ou diminui o valor de desvio padrão estimado, a curva *bell* muda o seu comportamento conforme pode ser visto na Figura 3.2.1, e por isso muda-se também o comportamento da curva da função distribuição acumulada (FDA), implicando diretamente na probabilidade de valores serem gerados mais distante ou mais próximo da média da curva (KOCH *et al.* (2004); RACHEV e RÖMISCH (2002); CHUN *et al.* (2000); ŁUKASZYK (2004); LEE e PARK (2001)).

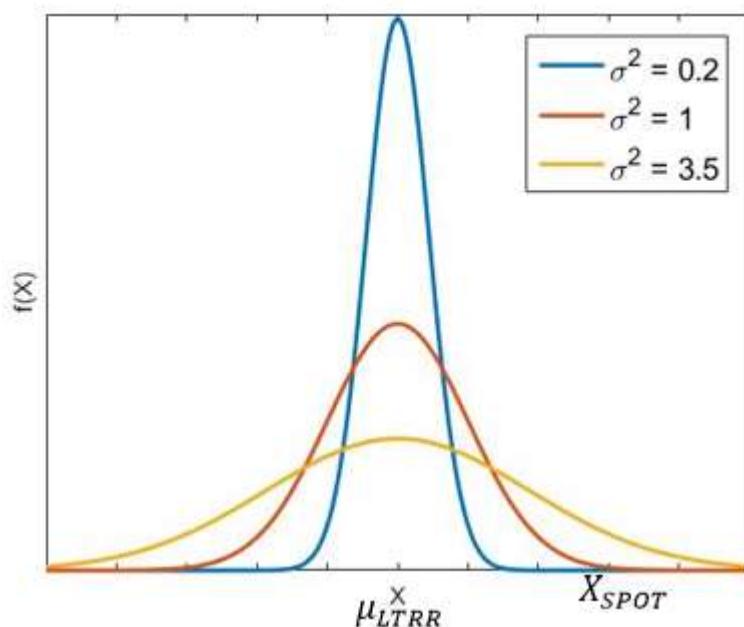


Figura 3.2.1: Gráfico ilustrativo da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal para diferentes valores de desvio padrão e média nominal da incerteza igual a μ_{LIRR} , onde é suposto um valor de X_{SPOT} para observância na abscissa.

Em amostragem via simulação Monte Carlo, a lei dos grandes números (LGN) é o que garante que, quanto maior for a quantidade de amostras geradas, a média dos valores dessas amostras, pertencentes a cada uma das bandas da PDF normal, incidam sobre alguma faixa de valores próxima ao valor esperado da respectiva banda. A melhor curva normal neste *framework* (melhor desvio padrão), é aquela em que os valores esperados da incerteza normal, em cada banda (lado direito e esquerdo) da curva normal estejam os mais próximos de X_{SPOT} , pois é isto que irá fazer a $f_{obj}^{rob(LTRR)}$ se aproximar o máximo possível de f_{obj}^{ODGR} . Em outras palavras, a curva normal que conferir o menor distanciamento líquido entre os valores esperados e o X_{SPOT} é a curva atrelada ao melhor desvio padrão de uma incerteza normal neste *framework*. Ou seja, para execução das etapas do algoritmo (seção 3.4) do *framework*, é necessário realizar um número grande subjetivo de otimizações durante a sintonia do valor de desvio padrão da incerteza normal, para que assim, esse distanciamento líquido seja cada vez mais estatisticamente fiel.

Quando é encontrado a melhor curva *bell* (através da determinação do melhor desvio padrão) para a incerteza que possui uma distribuição normal (conforme critérios de escolha do algoritmo do *framework*), e uma otimização sob incerteza é realizada, implica-se em dizer que a contribuição da incerteza normal resultará na geração de um valor aleatório para esta incerteza que proporcionará mais chance do valor da FO ($f_{obj}^{rob(LTRR)}$) estar mais próximo do valor da FO do estado de referência (f_{obj}^{ODGR}), aproximando as decisões robustas sob incerteza para as decisões do estado de referência. E.g., observando a ilustração da Figura 3.2.1, o valor da incerteza X, que quando substituído no modelo matemático, faria com que $f_{obj}^{rob(LTRR)}$ se aproximasse o máximo possível de f_{obj}^{ODGR} , é X_{SPOT} , e olhando por esta figura, a curva *bell* sintonizada seria a que possui a maior probabilidade desse valor ser gerado aleatoriamente, que nesse caso seria a de $\sigma = \sqrt{3,5}$.

Caso o parâmetro incerto com PDF normal fosse transformado em uma variável na matriz de otimização para determinar o valor ótimo de X_{SPOT} , que minimizasse o AR, o grande desafio seria o aumento da complexidade do modelo, pois dessa forma o modelo provavelmente passaria a ser não-linear (caso fosse antes linear) e mais complexo (mais ainda se já fosse não-linear), pois este parâmetro poderia estar multiplicando/dividindo outra variável ou sendo a base ou expoente de um termo de potência. Neste caso, a robustez do modelo não estaria aumentando, mas sim diminuindo, quebrando a ideia de OR, e além disto se a otimização

fornecesse uma solução inviável, o valor X_{SPOT} não seria determinado, e toda a metodologia analítica daria errado assim como todo o esforço teria sido em vão. A depender do caso, transformar um parâmetro em uma variável pode não ter significado físico no problema, pois parâmetro é a informação que se dispõe e variável é aquilo que se quer determinar. Outro ponto positivo de não calcular o X_{SPOT} analiticamente, é que parâmetros que servem apenas como base para montar o modelo matemático, i.e. o qual este parâmetro não participa diretamente na matriz de otimização, mas que influenciam na ativação de restrições, podem assumir distribuição normal se for o caso.

Neste framework, funções objetivos que são monotônicas crescentes ou decrescentes ao longo da região viável do problema de otimização, terão mais estabilidade no valor ARM associado a cada diferente valor de desvio padrão, isso acontece porque estes tipos de funções não apresentam oscilação e nem mudança da relação de ordem, fazendo com que só exista um valor X_{SPOT} para a incerteza normal que leve a FO a ter o valor f_{obj}^{ODGR} . Logo, só existirá um desvio padrão que apresente a maior chance de essa incerteza assumir um valor esperado que mais seja próximo desse valor X_{SPOT} ou assumir a maior quantidade de valores possíveis próximos de X_{SPOT} , quando o valor dela for aleatoriamente gerado por Monte Carlo. Esses valores próximos de X_{SPOT} também vão estar perto de fazer com que a FO se aproxime do valor de f_{obj}^{ODGR} se a FO é monotônica. Em palavras mais resumidas, o melhor desvio padrão é aquele que confere mais chance para o valor aleatório da incerteza normal ser gerado o mais próximo possível de X_{SPOT} , porque se a função for monotônica, quanto mais próximo o valor aleatório gerado estiver de X_{SPOT} mais o problema de otimização sob incerteza estaria se aproximando da ODGR. A estabilidade dos ARMs diz respeito à grande tendência que cada um tem de permanecer com seu valor aproximadamente o mesmo, caso a sintonia fosse realizada diferentes vezes, e isso se explica justamente pelo fato de que nestas funções, há um valor esperado associado a cada banda de curva *bell* da incerteza normal, e quanto mais esse valor esperado estiver perto do valor X_{SPOT} , menor será o ARM. Se FO é monotônica, a relação de ordem não muda, então a contribuição de um estímulo na FO (e portanto na sintonia) será sempre de mesmo comportamento (i.e. ou só crescente ou só decrescente) e não haverá o risco do estímulo inverter o comportamento da FO e nem da sintonia, e por isso a sintonia do presente *framework* se torna precisa e acurada. Ou seja, para estes tipos de funções, se a sintonia do valor de desvio padrão para a incerteza normal neste *framework* fosse feita diferentes vezes, em todas elas, a sintonia convergeria para o mesmo valor de desvio padrão sem que fossem necessárias muitas realizações de otimizações durante a sintonia.

Caso a FO não seja monotônica crescente ou monotônica decrescente na região viável do problema de otimização, a cada diferente sintonia, o ARM poderá convergir para um valor diferente caso a FO do problema seja muito sensível a variações e caso a quantidade de otimizações feitas para sintonia seja baixa. Este é outro ponto positivo de utilizar funções objetivos monotônicas, pois é uma função que não é oscilatória e por isso tende a ser mais estável, fazendo com que não seja necessário um número muito grande de simulações Monte Carlo para saciar o objetivo do *framework*, como será visto mais à frente. A Figura 3.2.2 mostra uma função não monotônica e bastante sensível a variações, onde neste caso e.g. a alta sensibilidade da FO dificultaria a sintonização do valor de desvio padrão da incerteza X porque haveria vários valores para a incerteza X que fizesse com que a FO $f(X)$ alcançasse o valor de f_{obj}^{ODGR} . Ou seja, provavelmente haveria vários valores de desvio padrão que fosse capaz de fazer a incerteza alcançar um valor que alcançasse f_{obj}^{ODGR} , mas estes diferentes desvios padrões poderiam alcançar isto com menos frequência, e para driblar isso e poder inferir uma tomada de decisão confiável para critério de escolha do melhor desvio padrão seria necessário realizar um número bastante imenso de simulações Monte Carlo. É por isso que quando a função é monotônica na região viável, este problema é driblado e não é necessário um número tão grande de simulações Monte Carlo.

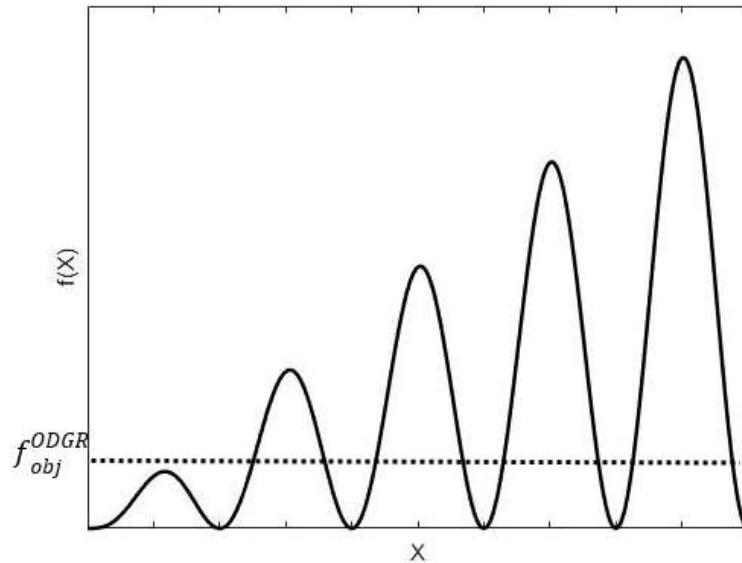


Figura 3.2.2: Exemplo de função não monotônica que oscila e dificulta o funcionamento do *framework* caso a quantidade de realizações de otimizações seja pequeno.

Pesquisa Operacional e muitas outras áreas se deparam praticamente com funções monotônicas, e.g. a FO dos exemplos de aplicação deste *framework* e do modelo da cadeia de

suprimentos como alvo de estudo de caso deste trabalho, principalmente Pesquisa Operacional, porque possui a maioria de sua totalidade como sendo problemas lineares. Além disto, um bom agravante é que qualquer função pode ser transformada em um somatório de funções monotônicas crescentes como mostrado no teorema de Kolmogorov para superposição de funções multivariáveis. O teorema da superposição de KOLMOGOROV (KOLMOGOROV (1957,1963)) é um teorema de decomposição que estabelece que qualquer função contínua com mais de uma variável, pode ser escrita como sendo uma nova função que é o somatório de composições finitas de funções de uma única variável de comportamento monotônico crescente, que podem ser lineares ou não-lineares (LORENTZ (1962); SPRECHER, (1965); NEES, (1994); BRAUN e GRIEBEL (2009); KHAVINSON (1997); KURKOVÁ (1991,1992)).

Este *framework* pode ser aplicado em problemas de ciência, engenharia (e.g., planejamento e programação da produção e/ou da distribuição, design de projetos e de produção etc), controle e automação de processos (e.g., projeto de MPC ao qual a FO é o setpoint de uma variável controlada, ao qual f_{obj}^{ODGR} é o valor setpoint de referência que maximiza o lucro do processo e $f_{obj}^{rob(LTRR)}$ é o setpoint recente mais factível de alcance por conta de causas especiais recentes na planta, X_{SPOT} seria o valor da variável manipulada que fizesse $f_{obj}^{rob(LTRR)}$ mais se aproximar de f_{obj}^{ODGR} e μ_{LTRR} seria o valor médio recente utilizado para a variável manipulada), economia (e.g., otimização de portfólio etc), Pesquisa Operacional, entre várias outras aplicações etc.

3.3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO *FRAMEWORK*

Nesta seção será apresentado a esquematização da formulação matemática do *framework* proposto, ao qual há a transformação do modelo determinístico original para um modelo determinístico que é sintonizado em seguida por um algoritmo, se tornando robusto. Logo em seguida os axiomas necessários para entendimento do funcionamento são apresentados. Na seção 3.5 vários exemplos lineares e não-lineares são resolvidos. Qualquer problema determinístico linear ou não-linear no domínio do problema que tenha pelo menos um parâmetro que possa ser considerado como incerteza que segue uma distribuição normal, pode ser matematicamente escrito da maneira que o proposto *framework* estabelece para o problema de otimização. O problema a ser otimizado é um problema ou apenas de maximização

ou apenas de minimização em que a função objetivo e as restrições são combinações matemáticas de $\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}$:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.3.1)$$

ou

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$$

$$s.t. \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = 0$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U$$

$$\varepsilon_j^L \leq \varepsilon_j \leq \varepsilon_j^U$$

$$x_i \in \mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathcal{X}; \varepsilon_j \in \boldsymbol{\varepsilon}; \varepsilon_j \in A_j; \theta_k \in \boldsymbol{\theta}; \theta_k \in B_k; \alpha_l \in \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^+; \mathcal{X}, A_j, B_k \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i=iN} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_j]; \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \dots \theta_{k=kN}]; \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_{l=lN}];$$

$$\boldsymbol{\xi} = [E\{\xi_1\} \dots E\{\xi_{m=mN}\}]$$

$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$ é a função objetivo (monotônica no DRV) a ser otimizada, \mathbf{x} é o vetor de variáveis de decisão, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor contendo o parâmetro incerto que segue uma distribuição normal e possui seus valores sendo aleatoriamente gerados conforme amostragem de Monte Carlo, $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros exatos e definidos deterministicamente para o problema de otimização, $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor de fatores de penalidade, $\boldsymbol{\xi}$ é o vetor contendo os valores esperados de cada incerteza que é representada por uma distribuição de probabilidade que não seja normal (neste framework, não é obrigatório que existam incertezas do tipo ξ_m). $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$ é o vetor de restrições menores ou iguais a zero, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$ é o vetor de restrições maiores ou iguais a zero, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$ é o vetor de equações iguais a zero, onde o problema de otimização deve ter no mínimo um desses três vetores. x_i é a variável de decisão i , x_i^L é o valor limite mínimo para a variável de decisão i , x_i^U é o valor limite máximo para a variável de decisão i , ε_j é o parâmetro incerto que segue uma distribuição normal e possui seu valor sendo aleatoriamente gerado conforme amostragem de Monte Carlo antes da resolução do problema de otimização (tendo portanto, caráter determinístico no problema de otimização), ε_j^L é o valor limite mínimo para o parâmetro incerto ε_j , ε_j^U é o valor limite máximo para o parâmetro incerto ε_j , θ_k é o parâmetro exato determinístico k , α_l é o fator de penalidade l associado a cada diferente termo

que contenha pelo menos um valor esperado $E\{\xi_m\}$, onde $E\{\xi_m\}$ é o valor esperado da incerteza ξ_m que é representada por uma distribuição de probabilidade estimada não-normal. X é o conjunto de valores possíveis para x_i no domínio dos reais \mathbb{R} , A_j é o conjunto de valores possíveis para ε_j no domínio dos reais \mathbb{R} , B_k é o conjunto de valores possíveis para θ_k nos domínios dos reais \mathbb{R} . iN , kN , lN e mN , são respectivamente, a quantidade de elementos dos vetores \boldsymbol{x} , $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\xi}$. Obs.: não pode haver divisão por zero. As distribuições de probabilidades nesse *framework* não são conjuntas, sendo mais fáceis de estimar não importando a dimensionalidade do problema.

O *framework* pode ser utilizado para problemas com formulação LP, NLP, MILP e MINLP, e alguns axiomas sobre a formulação matemática do *framework* são:

- Axioma i): pode haver termos diferentes com sinais matemáticos diferentes em qualquer que seja a restrição matemática e também na FO. Além disso, o valor da solução ideal (f_{obj}^{ODGR}) deve sempre ter o mesmo sinal matemático do valor ótimo da FO do problema sob incerteza ($f_{obj}^{rob(LTRR)}$). Isso vai impedir que o arrependimento relativo (%) da Equação 3.1.1 seja calculado de forma equivocada por causa da multiplicação de sinais negativos em sua equação de cálculo (Equação 3.1.1). Além disto, o módulo presente na Equação 3.1.1 é fundamental, pois o arrependimento relativo (%) em questão, tem a função de ser uma medida de magnitude de distanciamento.
- Axioma ii): a FO do problema tem que ter comportamento apenas monotônico crescente ou apenas monotônico decrescente, ao longo do DRV, logo as derivadas parciais da FO em relação à(s) incerteza(s) normal(is) e em relação à x_i devem ter os mesmos sinais matemáticos na região viável ativa. Quando a FO é monotônica no DRV, há a preservação da relação de ordem e o problema se torna ou convexo ou estritamente convexo, ou côncavo ou estritamente côncavo, assim para quantidades distintas de realizações de otimizações (N^{BIG}), as concentrações das soluções no gráfico de ARM vs cada realização de N^{BIG} permanecem com faixas de ordem preservada (e.g. ver Figura 3.5.16). Isto favorece que o estímulo de um valor de desvio padrão, sobre a FO, tenha e mantenha características inerentes a cada diferente valor.
- Axioma iii): Deve haver pelo menos uma incerteza normal (ε_1) no problema, e o framework só pode ser utilizado se a atuação do estímulo de cada incerteza normal

no valor da FO, i.e. a influência causada por uma incerteza normal no valor da FO, for independente do estímulo de qualquer outra incerteza normal. Se o(s) termo(s) vinculado(s) a um parâmetro candidato a ser incerteza normal for LI em relação aos outros termos vinculados aos outros parâmetros candidatos a serem incertezas normais do modelo, então de fato este candidato pode ser uma incerteza normal no *framework*, pois assim seu estímulo na FO será exclusivo (não é influenciado por outros termos de outras incertezas normais) e independente (independe da existência de outros termos de outras incertezas normais) aos outros estímulos. Então só é necessário verificar se uma incerteza normal atende a este axioma *iii*) se ela for uma incerteza que esteja multiplicando/dividindo alguma variável de decisão do problema de otimização, ou ainda formando um termo de potência com a variável, i.e. uma incerteza multiplicativa, qualquer outro caso atenderá este axioma sem precisar verificar, e.g. incertezas aditivas no modelo (FO e/ou restrições). Além disso, se o problema só houver uma incerteza normal, não é necessário verificar esse axioma. As incertezas podem aparecer em qualquer lugar do modelo, i.e. na FO e/ou nas restrições, mas não pode haver a multiplicação/divisão/potenciação entre duas incertezas normais diferentes (e.g., $\varepsilon_1 \varepsilon_2$). A não multiplicação entre incertezas normais evita que possa haver a possibilidade de mudança de comportamento da FO de crescente para decrescente ou vice-versa (satisfazendo assim o axioma *ii*) e o *iii*). Se os estímulos de ε_j são independentes, a FO tem um comportamento exclusivo a cada estímulo de ε_j , e pode haver superposição de estímulos independentes para o comportamento da FO em relação às incertezas normais $\varepsilon_j \forall j$. Por exemplo, a Equação 3.3.1 mostra um exemplo de teste de um modelo determinístico para saber se os termos das incertezas multiplicativas são exclusivos e independentes, ao qual ε_1 e ε_2 são exclusivos e independentes pois $\xi_1 x_4$, $\varepsilon_2 x_3$, x_3 e x_4 não estão vinculados a $\varepsilon_1 x_1$, x_1 e x_2 , e por isso podem ser incertezas normais que serão sintonizadas nesse *framework*. Como o termo ε_3 é uma incerteza aditiva no modelo, seu estímulo na FO é exclusivo e independente, i.e. ε_3 é imparcial em relação a $\varepsilon_1 x_1$ e $\varepsilon_2 x_3$, bem como seu estímulo na FO independe da influência de $\varepsilon_1 x_1$ e $\varepsilon_2 x_3$ que são os termos vinculados às outras incertezas normais. Se uma incerteza é independente, os valores dos termos vinculados a esta incerteza não depende dos valores de outros termos não vinculados a esta incerteza.

$$\min_x f = x_1x_2 + \varepsilon_1x_1 + \varepsilon_2x_3 + \varepsilon_3 + \xi_1x_4 \quad (3.3.1)$$

$$\text{s.t. } x_1x_2 \leq A$$

$$x_3 + x_4 \leq B$$

- Axioma iv): Incertezas que se ajustem bem a alguma distribuição de probabilidade que não seja normal (ξ_m), devem ser representadas por seus valores esperados no modelo robusto ($E\{\xi_m\}$), e deve ter um α_l atrelado (multiplicando) a cada valor esperado ($\alpha_l E\{\xi_m\}$) desta incerteza no modelo robusto. Existirá um α_l para cada incerteza dessas que não seja normal (ξ_m), o que é importante pois o conservadorismo e robustez do modelo pode ser regulado. Caso haja a multiplicação, em um termo de inequação ou equação, entre dois ou mais valores esperados que representam diferentes incertezas (e.g. $E\{\xi_1\}E\{\xi_2\}$), terá um novo e exclusivo α_l atrelado a este termo combinado (e.g. $\alpha_3 E\{\xi_1\}E\{\xi_2\}$). Pode haver a multiplicação de uma incerteza normal com algum valor esperado de outra incerteza ou com algum termo contendo valores esperados de incertezas (e.g. $\varepsilon_1 \alpha_1 E\{\xi_1\}$ ou $\varepsilon_1 \alpha_3 E\{\xi_1\}E\{\xi_2\}$).
- Axioma v): É optativo haver a inserção de α_l no modelo referente à ODGR, pois sua solução ideal deve ser viável, mas não há a inserção de $E\{\xi_m\}$ ou aleatoriedade na ODGR, logo se houver α_l na ODGR existiria a multiplicação $\alpha_l \xi_m$ ao invés de $\alpha_l E\{\xi_m\}$.
- Axioma vi): Não é obrigatório que haja alguma incerteza não-normal (ξ_m) no modelo matemático em uso para o problema de otimização do presente *framework*, porém é necessário que haja pelo menos uma incerteza normal (ε_1) para seguir as etapas do algoritmo do *framework*.
- Axioma vii): É razoável colocar valores de α_l que não sejam muito diferentes do valor numérico 1, para que a FO não seja muito penalizada (no sentido de ter seu valor modificado para mais ou para menos), pois é razoável admitir um valor para α_l ao qual a multiplicação deste com o valor esperado de uma incerteza ($\alpha_l E\{\xi_m\}$), resulte em um valor numérico ao qual esteja dentro dos limites inferiores e superiores de valores disponíveis para esta incerteza nos dados históricos, conferindo assim razoabilidade na inferência estatística das incertezas.
- Axioma viii): Caso a incerteza seja epistêmica, ou tenha dados históricos que não se ajustaram bem a alguma distribuição de probabilidade, considera-se que ela tenha

distribuição normal neste *framework*, ou seja, a incerteza será do tipo ε_j . Quanto maior for a quantidade de dados históricos de uma incerteza, mais isso é verdadeiro, devido ao teorema do limite central.

A lógica e objetivo de haver um α_l sendo multiplicado pelo valor esperado de uma incerteza com distribuição não-normal ($\alpha_l E\{\xi_m\}$) é viabilizar a tratabilidade da solução através da modificação de uma estimativa de incerteza (valor esperado). Como o valor esperado de uma incerteza é uma estimativa estatística, seu valor será ou não modificado a fim de se tratar a solução, e.g. isso pode acontecer quando se altera naturalmente as probabilidades de ocorrências de uma variável aleatória em assumir certos valores, logo o α_l funciona como um fator de penalidade para proteger o modelo contra a violação das restrições e deixá-lo mais robusto a preço de penalizar o valor da FO (preço da robustez). Essa filosofia de “preço da robustez” é enfatizada no trabalho de BERTSIMAS e SIM (2004), e considerada em muitos outros trabalhos (e.g. WELLONS e REKLAITIS (1989) também utiliza essa filosofia), pois este é um dos cernes da OR, ao qual foi desenvolvido ao longo da linha do tempo (e.g., SOYSTER (1973); BEN-TAL e NEMIROVSKI (1998,1999,2000); EL-GHAOUI e LEBRET (1997); EL-GHAOUI *et al.* (1998)), ao qual estes autores apresentam metodologias diferentes e fatores de proteção contra a violação de restrições diferentes. As restrições em si, do presente *framework*, não são reformuladas porque como o valor esperado é um número e o α_l também é, o único papel matemático que o α_l desempenha é de modificar o módulo do valor esperado (ou da multiplicação entre valores esperados caso haja), com o objetivo de proteger o modelo contra a violação das restrições, ou seja, a multiplicação de α_l com o valor esperado apenas gerará um novo número que representará a variabilidade de uma dada incerteza (assim como o papel desempenhado pelo valor esperado), mantendo o significado físico dos termos das restrições inalterados.

A formulação matemática do presente *framework* não inclui explicitamente a equação da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal no modelo para cálculo do valor esperado de uma incerteza no modelo matemático. Se fosse incluído, o valor esperado seria sua própria média, ou seja, a média dos valores das incertezas, não computando assim as possíveis variabilidades de cada incerteza com distribuição normal no processo porque a distribuição normal é simétrica, e para evitar essa não consideração de variabilidade a literatura apresenta diferentes abordagens (e.g., MULVEY *et al.* (1995); GUPTA *et al.* (2000); RÖMISCH e SCHULTZ (1991)). A não consideração exclusiva de um valor médio

representativo para o modelo é apropriada para a existência da possibilidade de haver decisões de médio e alto risco, quando se há incertezas no processo (MULVEY *et al.* (1995)). Além de que a inclusão analítica do desvio padrão provavelmente tornaria o modelo não-linear caso o desvio padrão fosse uma variável de decisão no modelo ao invés de ser especificado, dificultando a tratabilidade da solução, podendo deixar o modelo insolvível, e aumentaria desnecessariamente o tempo computacional de resolução da otimização do modelo. Se o seu modelo fosse linear, considerar o desvio padrão como sendo uma variável de decisão, só iria deixar ele não-linear desnecessariamente, aumentando o tempo de processamento da otimização e dificultando a convergência para uma solução tratável, principalmente em modelos matemáticos que fossem necessário o cálculo de integrais, e.g. *chance-constrained optimization* (HENRION, 2004).

A inclusão da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal no modelo, e caso as etapas do algoritmo do *framework* proposto não fossem seguidas, faria com que não fosse computada a chance de uma incerteza com distribuição normal ter seu valor gerado próximo ao valor X_{SPOT} (mostrado hipoteticamente na Figura 3.2.1). Se fosse considerado o valor esperado da função densidade de probabilidade para uma incerteza com distribuição normal, o valor “incerto” da incerteza seria a própria média da curva μ_{LIRR} , e daí o problema não seria flexível a ponto de poder escolher qual o comportamento da incerteza para fazer com que $f_{obj}^{rob(LIRR)}$ se aproxime o máximo possível de f_{obj}^{ODGR} . Por isso considera-se uma distribuição normal para geração aleatória do valor da incerteza por amostragem de Monte Carlo antes da otimização ser realizada, ao invés de incluir analiticamente a função densidade de probabilidade no modelo, além de que essa metodologia faz com que o modelo continue tendo uma natureza determinística sem ser necessário resolver integrais. Há também outros trabalhos que consideram geração de valores através de amostragem para as incertezas com distribuição normal ou que não consideram a inclusão da PDF normal no modelo matemático (e.g., BEN-TAL *et al.* (2005); GUPTA e MARANAS (2003); BERTSIMAS e SIM (2004); BARON *et al.* (2011); LIST *et al.* (2003); CAPOLEI *et al.* (2015)). Esta estratégia de Monte Carlo permite que a FO possa ser descontínua em relação a ε_j , além de que possibilita que ε_j seja linear ou não-linear por natureza.

Para problemas não-lineares que sejam não-convexos (levando em consideração uma visão geral do domínio do problema), seria interessante utilizar um método de otimização global para programação não-linear para que a sintonia desse resultados verdadeiramente confiáveis, i.e. para que a sintonia fosse realizada com os resultados mais expressivos obtidos nas

otimizações realizadas durante o procedimento passo a passo do algoritmo do *framework*. No entanto, o fato da FO ser monotônica na região viável do problema de otimização, já garante sua convexidade nesta região, e nesse caso, não seria necessário utilizar um método de otimização global. Logo podem ser usados métodos de programação matemática convencionais para realização do *framework*.

As propriedades matemáticas do *framework* para proteção contra a violação das restrições são:

- i) Quando algum α_l aparecer em restrições do tipo $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$, e o termo que envolve o α_l do lado esquerdo da presente restrição for matematicamente positivo, diminuir o valor de α_l aumentará a robustez do modelo.
- ii) Quando algum α_l aparecer em restrições do tipo $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$, e o termo que envolve o α_l do lado esquerdo da presente restrição for matematicamente negativo, aumentar o valor de α_l aumentará a robustez do modelo.
- iii) Quando algum α_l aparecer em restrições do tipo $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$, e o termo que envolve o α_l do lado esquerdo da presente restrição for matematicamente positivo, aumentar o valor de α_l aumentará a robustez do modelo.
- iv) Quando algum α_l aparecer em restrições do tipo $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$, e o termo que envolve o α_l do lado esquerdo da presente restrição for matematicamente negativo, diminuir o valor de α_l aumentará a robustez do modelo.

O valor de α_l não é determinado por nenhuma equação, ele é especificado dentro de um loop no algoritmo do framework ou o planejador pode especificá-lo por tentativa e erro através do conhecimento das propriedades acima. Em ambos os casos, o valor de α_l deve seguir o axioma *vii*).

3.4. ALGORITMO *WHAT-TO-DO* DA METODOLOGIA DO *FRAMEWORK*

Diferentemente dos modelos de variabilidade, este *framework* não controla a variabilidade da solução, mas sim encontra uma curva *bell* de operação que seja a melhor para atingir o objetivo do *framework*. Ao final da sintonia do modelo robusto, seguindo as etapas do algoritmo do *framework*, o objetivo não é encontrar uma solução com FO melhor ou pior, mas sim realizar uma sintonia do modelo em que possa-se encontrar um resultado robusto

$(f_{obj}^{rob(LTRR)})$ que mais se aproxime da própria informação perfeita (f_{obj}^{ODGR}). A seguir, será apresentado o algoritmo do *framework* que diz respeito a como sintonizar o valor do desvio padrão de uma incerteza normal (ε_1), em consonância com a regulação do conservadorismo e da robustez do modelo para realização da otimização robusta do presente *framework*. No caso em que o problema de otimização possua mais de uma incerteza normal, conforme *axioma iii*), o funcionamento do algoritmo do *framework* exposto a seguir seria o mesmo, porém primeiro seria sintonizado e.g. ε_1 e depois seria sintonizado ε_2 e assim por diante, salientando que ao sintonizar uma incerteza normal (ε_j), as outras permanecem com seus valores fixados e constantes, cada um equivalente à sua média dos dados da LTRR. O algoritmo do *framework* é compreendido pelas seguintes etapas passo a passo:

- **Passo i):** Realize uma ODGR que seja tratável (tenha solução) e armazene f_{obj}^{ODGR} para cálculo do arrependimento relativo (%) conforme a Equação 3.1.1, ou simplesmente especifique diretamente a f_{obj}^{ODGR} .
- **Passo ii):** Transforme a modelagem matemática do modelo determinístico em uso para a formulação matemática do presente *framework* conforme os axiomas. Especifique valores para cada α_l existente, caso hajam incertezas não-normais (ξ_m). Caso o tomador de decisão mude de ideia e queira modificar algum valor de α_l , em qualquer que seja o momento (ou até mesmo se o α_l estiver em *loop*), é necessário realizar uma nova sintonia do problema de otimização a partir do Passo *iii*).
- **Passo iii):** Defina valores nominais fixos de cada parâmetro incerto (ξ_m) e dos outros parâmetros que não sejam incertezas, como sendo os nominais da LTRR, fixando seus valores, até mesmo para todas as incertezas normais a menos de uma. O valor da incerteza normal em sintonia (ε_1), cujo valor não foi fixado, será aleatoriamente gerado por amostragem via simulação Monte Carlo (nas otimizações do Passo *iv*)), que entrará como dado de entrada no modelo, e que a média nominal de ε_1 é a da LTRR μ_{LTRR} e o desvio padrão é uma porcentagem de μ_{LTRR} , conforme média ilustrada na Figura 3.2.1. Os valores nominais fixos dos parâmetros determinísticos e das outras incertezas normais, são suas médias da LTRR. As incertezas do tipo ξ_m terão como valores nominais fixados os próprios valores esperados ($E\{\xi_m\}$) de seus dados históricos na LTRR.
- **Passo iv):** Assuma diferentes valores de desvio padrão (σ) para a incerteza ε_1 e realize um número grande subjetivo N^{BIG} (a depender do caso 50 é o bastante,

conforme Figura 3.5.30) de otimizações robustas tratáveis para cada um dos valores de desvio padrão assumido, onde ao final de cada realização de OR, o arrependimento relativo (%) conforme a Equação 3.1.1 é calculado e armazenado. Caso o conjunto de otimizações realizadas não foram satisfatoriamente robustas de acordo com a subjetividade do tomador de decisão (análise em offline do algoritmo), i.e. de acordo com o que o planejador julga/aceita ser robusto, ou de acordo com um contador de risco percentual Γ (declaração condicional dentro do algoritmo), retorne para o Passo *ii*) e especifique novos α_l . Γ e α_l são especificados de acordo com a vontade do planejador, mas os α_l podem ser postos para variar em *loop* caso não sejam especificados (como dito no Passo *ii*). Γ é a razão percentual entre a quantidade de otimizações que deram soluções viáveis e a quantidade de otimizações realizadas.

- **Passo v):** Calcule, conforme a Equação 3.4.1, o arrependimento relativo médio (%) para cada um dos valores de desvios padrões assumidos (ARM^σ) para a incerteza ε_1 , e armazene os valores calculados para futura comparação no Passo *vi*). Onde, N^{BIG} é o número de realizações de otimizações robustas para cada valor de desvio padrão σ assumido para a incerteza ε_1 , e AR_n^σ é o valor do arrependimento relativo (%) da otimização da n realização para um valor assumido de desvio padrão σ , ao qual AR_n^σ é calculado durante a execução do Passo *iv*) conforme Equação 3.1.1.

$$ARM^\sigma (\%) = \sum_{n=1}^N AR_n^\sigma \cdot \frac{1}{N^{BIG}} \quad (3.4.1)$$

- **Passo vi):** O desvio padrão σ que está atrelado ao menor valor de ARM^σ , corresponderá ao valor de desvio padrão σ sintonizado para a incerteza ε_1 , ao qual levará a uma solução robusta média que mais se aproxima de f_{obj}^{ODGR} .
- **Passo vii):** A sintonia para ε_1 está completa. Escolha outra incerteza normal ε_j e realize o procedimento novamente a partir do passo *iii*), sob as mesmas condições parâmetricas de sintonia das incertezas normais passadas, até todos os σ_j de $\varepsilon_j \forall j$ estarem sintonizados. Quando todos $\varepsilon_j \forall j$ forem sintonizados, basta agora realizar a OR algumas vezes conforme vontade do planejador, gerando aleatoriamente valores para todos $\varepsilon_j \forall j$ com seus σ_j sintonizados, e escolher aquela otimização que conceda o menor valor de AR (%) conforme a Equação 3.1.1, ao qual será a OR que

descreverá as melhores tomadas de decisões para melhor se aproximar do problema de otimização nominal de referência geral (ODGR).

A sintonia ajusta a influência individual de cada incerteza normal do modelo, para determinar o valor de desvio padrão de cada incerteza normal, o qual este valor tem que implicar numa média de soluções que mais chegue próximo ao valor de solução ideal. Depois da sintonia, basta apenas realizar a OR algumas vezes levando em consideração todos os valores sintonizados de cada desvio padrão de cada incerteza normal e escolher a melhor OR (menor AR (%)) para tomar as decisões. Estas etapas podem ser resumidas na seguinte Figura 3.4.1:

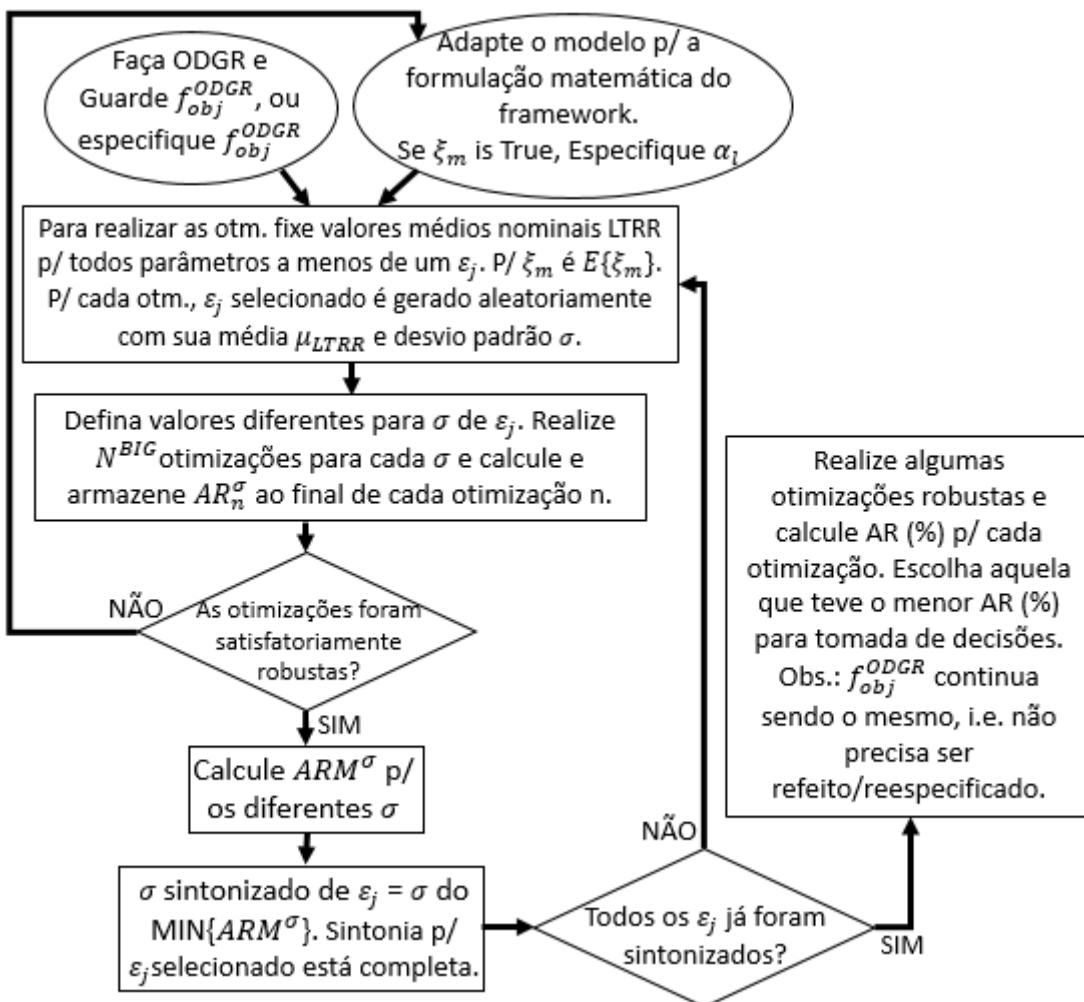


Figura 3.4.1: Algoritmo do framework.

Na execução da sintonia, o risco de uma otimização dar inviável ($1 - \Gamma$) já é um parâmetro condicional especificado pelo planejador ao invés de ser calculado. Neste framework não é necessário fazer a análise custo-risco porque o risco já é imbutido como condicionamento alvo

no algoritmo (a sintonia é realizada e a condição escolhida é satisfeita), e o α_l pode não ser o mesmo em diferentes sintonias, então a análise de sensibilidade do custo-risco seria diferente para cada sintonia, para cada modelo e para cada conjunto de valores de entrada dos parâmetros. Além disso, se Γ muda, α_l pode mudar, então não faria sentido fazer a curva de sensibilidade custo-risco, uma vez que α_l e outros parâmetros de sintonia podem não ser mantidos constantes para diferentes situações de risco especificado.

A estratégia da última etapa (Passo *vii*) é mais eficiente do que calcular o valor esperado de todas as realizações de um conjunto de cenários se tivessem sido gerados para representação da otimização sob incerteza, pois esse valor esperado poderia se afastar do valor de referência geral nominal mais do que o resultado escolhido no Passo *vii*). Ela é mais eficiente porque quando se faz várias otimizações robustas já com os valores ótimos sintonizados do desvio padrão das incertezas normais ε_j , e se escolhe o melhor valor do AR (%) dentre essas otimizações realizadas, implica-se em dizer que os resultados desta otimização sob incerteza irão ser as melhores tomadas de decisões sob incerteza que o tomador de decisão pode planejar para se aproximar mais do estado ideal (ODGR - f_{obj}^{ODGR}). Considerar o valor esperado de todas as realizações (comum na literatura que considera o uso de cenários na otimização) é menos eficiente porque resultados menos desejáveis causados por cenários indesejáveis e pouco comuns, porém factíveis, e portanto incluídos, estariam influenciando negativamente no resultado das tomadas de decisões, podendo gerar tomadas de decisões “não-ótimas” (raciocínio este, similar com o de IANCU e TRICHAKIS (2013)) que não sejam as mais próximas do ideal, haja visto que o objetivo do *framework* não é obter uma solução média. Além disso, as etapas do algoritmo do *framework* desenvolvido fazem com que a robustez e o conservadorismo sejam controlados pelo planejador, diferente do caso em que se a abordagem considerasse o cenário de pior caso, ou até mesmo casos selecionados. Como o passo *v*) calcula uma média, obviamente quanto maior for N^{BIG} mais preciso é a sintonia. A estocacidade no passo *vii*) evita a necessidade de haver uma varredura exaustiva (busca por força bruta) das incertezas normais se as tomadas de decisões fossem determinísticas. As tomadas de decisões finais provenientes da OR neste *framework*, as quais o planejador deve tomar, são aquelas do melhor caso da estocacidade do passo *vii*) (o que possui menor AR(%)).

Alguns pontos importantes do *framework* são:

- i) O contador de risco percentual Γ é adequado quando o planejador quer se alinhar a métricas padronizadas de qualidade de otimização conforme um plano empresarial.
- ii) Se α_l é igual a 1, pode ser que o modelo tenda a se aproximar mais da realidade, haja visto que o valor esperado estimado $E\{\xi_m\}$ não sofrerá mudança, então é recomendado que o valor padrão para α_l das incertezas não-normais sejam iguais a 1 primeiramente. Caso o modelo dê inviável no Passo iv) do algoritmo do *framework*, o usuário pode mudar o valor de α_l conforme as propriedades para proteção contra a violação das restrições do *framework* para deixar o modelo robusto, porém a multiplicação $\alpha_l E\{\xi_m\}$ não pode dar um valor fora dos limites dos dados históricos de ξ_m , justamente para que o conservadorismo seja factível na prática.
- iii) O *framework* é condizente com o teorema central do limite, haja visto que incertezas epistêmicas se adequam bem à distribuição normal. e.g. a demanda é um ótimo candidato a ser uma incerteza epistêmica, quando: i) Os níveis de produção ou consumo não seguem um padrão variável fixo, ou ii) quando não há uma tendência de produção ou consumo a ser seguida, e mesmo que tenha dados históricos disponíveis para a demanda, a turbulência nos valores dos dados causadas por esses dois itens, dificultarão o ajuste dos dados a uma distribuição de probabilidade, afinal de contas o mercado é muito estocástico (e.g. bolsa de valores).
- iv) O *framework* não trabalha com cenários, e dessa forma não será necessário saber qual a probabilidade conjunta de acontecimento de cada evento dentro de um cenário, bem como não será necessário realizar a otimização para cada diferente cenário ou saber a probabilidade de ocorrência do cenário dentro da árvore de cenários, e nem é necessário se dar ao trabalho de gerar cenários.
- v) Desvios padrões com valores próximos podem disputar bastante na determinação do melhor valor de sintonia (e.g. Figura 3.5.15), haja visto que as soluções sairão parecidas no cálculo da média do arrependimento relativo, pois os comportamentos das curvas normais serão parecidos. A Figura 3.5.15 mostra que a função objetivo é *smooth* em intervalos de desvio padrão entre 2 e 5% para a incerteza normal do problema. Desta maneira, no exemplo de utilização do *framework*, mais à frente, é considerado valores de 2, 5, 10 e 20% do valor da média, pois essa estratégia diminui o tempo de sintonia do modelo em uso e acolhe comportamentos de curva bem distintos e amplos. Não é recomendável que o valor de desvio padrão ultrapasse o valor de 20% da média, para que não se corra o risco de gerar aleatoriamente valores

que não tenham significado físico (possivelmente valores negativos). Também não é recomendável haver valores de desvios padrões muito baixos, para que as tomadas de decisões não tenham uma aversão ao risco muito grande, logo os valores recomendáveis são de 2 a no máximo 20% do valor da média.

- vi) O valor do arrependimento relativo (%) também varia de modelo para modelo, ocorrendo casos em que o arrependimento relativo tenha uma grande, média ou pouca sensibilidade aos diferentes valores de desvios padrões para uma incerteza. Isso é natural porque os modelos matemáticos diferem entre si, logo os resultados também devem diferir.
- vii) Caso os dados históricos da LTRR sejam exatamente iguais aos da linha do tempo da ODGR, nos casos em que f_{obj}^{ODGR} é calculada, o melhor valor sintonizado para o desvio padrão de uma incerteza ε_j será sempre o menor valor possível, pois μ_{LTRR} seria igual a X_{SPOT} . Por isso que a LTRR não pode ser igual à linha do tempo da ODGR, conforme mencionado no conceito de ambos, justamente porque μ_{LTRR} deve ser diferente de X_{SPOT} .
- viii) Os valores de α_l também influenciam no valor de ARM e portanto também influenciam na sintonia do desvio padrão.
- ix) Caso não exista ou não foi assumido a incerteza ε_j , mas exista a incerteza do tipo ξ_m , o tomador de decisão pode usar a formulação matemática do framework sem utilizar o algoritmo do *framework*, porém nesse caso só seria ajustada a robustez do problema.
- x) Se a variação entre valores de ARM^σ for pequena, é porque a FO deve ter patamares relevantes (apresenta poucas sensibilidades em relação às variáveis) para alguns intervalos das variáveis, mas caso a variação entre valores de ARM^σ for alta, é porque em outros intervalos da região viável (do problema de otimização) há comportamento exponencial ou de relação de ordem elevada para a FO.
- xi) Se f_{obj}^{ODGR} se encontra atrelado a uma região *smooth* da FO, então haverá pouca variação nos valores de ARM^σ , porém se f_{obj}^{ODGR} se encontra numa região *non-smooth*, haverá variações consideráveis entre os valores de ARM^σ .
- xii) O presente *framework* não engloba restrições probabilísticas (*chance constrained*), o que torna a resolução mais fácil, aumentando naturalmente a robustez do problema.

3.5. Exemplo de aplicação do *framework* através da aplicação para um modelo linear e outro não-linear

A intenção desta seção é facilitar o entendimento do leitor através da aplicação do *framework* a um exemplo simples, porém que contenha as exigências estabelecidas nos axiomas do *framework* para sua utilização. O problema simples exemplificado a ser otimizado é um problema de um vendedor de peças mecânicas que sai de casa com peças de dois diferentes tipos para vender porta a porta na casa das pessoas, ao qual o vendedor trabalha para uma empresa e ganha tanto pela venda direta como através de comissão por venda. O exemplo é a aplicação do *framework* para sintonizar a incerteza normal ε_1 de um problema de um planejamento para maximizar o lucro diário $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$, sabendo que há limites para ganho por venda de peça do tipo 1 e por peça do tipo 2, devido a limitações de produção por parte da empresa, e que os preços de venda dos tipos de peça são incertezas. O preço de venda por peça do tipo 1 segue uma distribuição normal, enquanto o preço de venda por peça do tipo 2 segue uma distribuição exponencial. A formulação matemática do exemplo, conforme formulação matemática do *framework*, é descrita pela Equação (3.5.1):

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = x_1\varepsilon_1 + x_2\alpha_2E\{\xi_2\} + x_1\theta_1 + x_2\theta_2 - \theta_3 \quad (3.5.1)$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 - UB \leq 0$$

$$x_1 + x_2 - LB \geq 0$$

$$x_2\alpha_2E\{\xi_2\} - \theta_4 \leq 0$$

$$x_1\varepsilon_1 - \theta_5 \leq 0$$

$$x_1 - 20 \geq 0; x_2 - 20 \geq 0; x_1, x_2 \in \mathbb{I}$$

$$0,5 \leq \varepsilon_1 \leq 3,5$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1]; \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5]; \ \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_2]; \ \boldsymbol{\xi} = [E\{\xi_2\}]$$

Onde, x_1 é a quantidade de peças do tipo 1 vendidas, ε_1 é o preço de venda por peça do tipo 1, x_2 é a quantidade de peças do tipo 2 vendidas, α_2 é o fator de penalidade do termo que aparece $E\{\xi_2\}$, $E\{\xi_2\}$ é o valor esperado do preço de venda por peça do tipo 2, θ_1 é o ganho de comissão por venda de peça do tipo 1, θ_2 é o ganho de comissão por venda de peça do tipo 2, θ_3 é o custo devido à utilização de um veículo transportador, LB é o valor limite inferior que a soma $(x_1 + x_2)$ pode assumir, UB é o valor limite superior que a soma $(x_1 + x_2)$ pode assumir,

θ_4 é o valor limite de ganho por venda de peça do tipo 2, θ_5 é o valor limite de ganho por venda de peça do tipo 1.

Conforme as etapas do algoritmo do *framework*, é necessário realizar primeiramente uma ODGR para que se possa haver uma comparação como critério de sintonia do problema (já que f_{obj}^{ODGR} não está sendo especificado no exemplo, mas sim calculado), e para a realização da ODGR, os parâmetros incertos se tornam determinísticos. No exemplo proposto, foi realizado oito diferentes ODGRs para duas diferentes abordagens (quatro para cada abordagem), para que o procedimento do algoritmo do *framework* pudesse ser realizado diferentes vezes a fim de que o modelo pudesse ser sintonizado para diferentes situações e com isso observar o comportamento dos AR, e consequentemente do ARM e da seleção do melhor valor de desvio padrão para cada situação. A primeira abordagem leva em consideração $\alpha_2 = 1$ (para a ODGR e LTRR) e $\theta_4 = 100$ (para ODGR e LTRR), enquanto que a segunda abordagem leva em consideração $\alpha_2 = 0,85$ (para a ODGR e LTRR) e $\theta_4 = 70$ (para ODGR e LTRR). Ambas abordagens dão viáveis, mas a razão de haver elas é que quando se altera o valor de θ_4 de 100 para 70, o modelo se torna inviável no caso em que $\alpha_2 = 1$ e por isso foi necessário mudar o valor do fator de penalidade, e o valor adotado foi de $\alpha_2 = 0,85$ para deixar o modelo mais robusto conforme a propriedade matemática *i*) do presente *framework*. Os valores dos parâmetros utilizados em todas as ODGRs do exemplo são os que seguem na Tabela 3.5.1.

Tabela 3.5.1: Valores dos parâmetros utilizados em todas as ODGRs do exemplo do *framework*.

Valores para as ODGR considerando o par de casos (1ºcaso:[$\alpha_2 = 1$ e $\theta_4 = 100$] e 2ºcaso:[$\alpha_2 = 0,85$ e $\theta_4 = 70$]) [‡]				
Parâmetros determinísticos da ODGR	Primeira dupla de instância de resolução (uma para cada caso)	Segunda dupla de instância de resolução (uma para cada caso)	Terceira dupla de instância de resolução (uma para cada caso)	Quarta dupla de instância de resolução (uma p/ cada caso)
	1ºCaso (Figura 3.5.3)	1ºCaso (Figura 3.5.6)	1ºCaso (Figura 3.5.9)	1ºCaso (Figura 3.5.12)
	2ºCaso (Figura 3.5.15)	2ºCaso (Figura 3.5.18)	2ºCaso (Figura 3.5.21)	2ºCaso (Figura 3.5.24)
ε_1	1,9 \$/peça 1	1,95 \$/peça 1	2,1 \$/peça 1	2,5 \$/peça 1
ξ_2	1,9 \$/peça 2	1,95 \$/peça 2	2,1 \$/peça 2	2,5 \$/peça 2

θ_1	3 \$/peça 1	3 \$/peça 1	3 \$/peça 1	3 \$/peça 1
θ_2	2,5 \$/peça 2	2,5 \$/peça 2	2,5 \$/peça 2	2,5 \$/peça 2
θ_3	100 \$	100 \$	100 \$	100 \$
θ_5	100 \$/peça 1	100 \$/peça 1	100 \$/peça 1	100 \$/peça 1
LB	70 peças	70 peças	70 peças	70 peças
UB	100 peças	100 peças	100 peças	100 peças

‡: Par de casos = Realização de uma ODGR para o 1º caso ($\alpha_2 = 1$ e $\theta_4 = 100$) e outra para o 2º caso ($\alpha_2 = 0,85$ e $\theta_4 = 70$).

Ou seja, para o problema linear, são resolvidos 8 instâncias de sintonia, 4 para cada caso. Os valores nominais dos parâmetros na linha de tempo hipotética da LTRR do exemplo, e portanto utilizados nas otimizações robustas de sintonia são os que seguem na Tabela 3.5.2.

Tabela 3.5.2: Valores nominais dos parâmetros na linha do tempo hipotética da LTRR para todas as instâncias do problema exemplar linear do *framework* utilizado na otimização robusta.

Parâmetros	Valores nominais
ε_1 (gerado aleatoriamente conforme distribuição normal)	($\mu = 2 \$$; $\pm\sigma = Z\%\mu$) [No exemplo, foi assumido que Z pode ter valores iguais a 2, 5, 10 ou 20% μ]
$E\{\xi_2\}$	2 \$
θ_1	3 \$/peça 1
θ_2	2,5 \$/peça 2
θ_3	100 \$
θ_4	O mesmo valor do θ_4 da ODGR para a respectiva instância
θ_5	100 \$/peça 1
LB	70 peças
UB	100 peças

Observe que pelas Tabelas 3.5.1 e 3.5.2, ε_1 possui valores nominais diferentes para a LTRR e para a ODGR. Seguindo-se as etapas do algoritmo do *framework*, o modelo do exemplo foi resolvido no software MATLAB® (R2019b, Mathworks, Natick, MA, USA), dentro de dois loops, ou seja, são loops aninhados, ao qual o primeiro diz respeito ao valor de desvio padrão

assumido e o segundo diz respeito à quantidade de vezes que a otimização é realizada para cada valor assumido de desvio padrão para a incerteza normal ε_1 , ou vice-versa. O método de otimização matemática utilizado para resolver o modelo é um método de varredura exaustiva para otimização global. Na última linha de código da programação do loop mais interno dos loops aninhados, os valores da FO devem ser armazenados para que se possa realizar o cálculo dos arrependimentos relativos (%) AR_n^σ conforme Equação 3.1.1, para que depois seja calculado cada ARM^σ , afim de que se possa executar o Passo vi) de comparação do algoritmo do framework para tomada de decisão de qual deve ser o σ sintonizado de ε_1 . Todos os algoritmos estão no Apêndice.

Os gráficos referentes à primeira abordagem (linha de tempo da LTRR com $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$) são dados pelas Figuras (3.5.1 – 3.5.12). Os gráficos da segunda abordagem (linha de tempo da LTRR com $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$) são dados pelas Figuras (3.5.13 – 3.5.24). Entre estas figuras, conforme referenciados nas legendas de cada, há as figuras que dizem respeito ao valor do arrependimento relativo (%) referente a cada OR realizada, e há as figuras que dizem respeito ao valor do arrependimento relativo médio (%) atrelado aos diferentes valores utilizados de desvio padrão nas otimizações robustas. As linhas de códigos utilizadas estão disponíveis no Apêndice A.

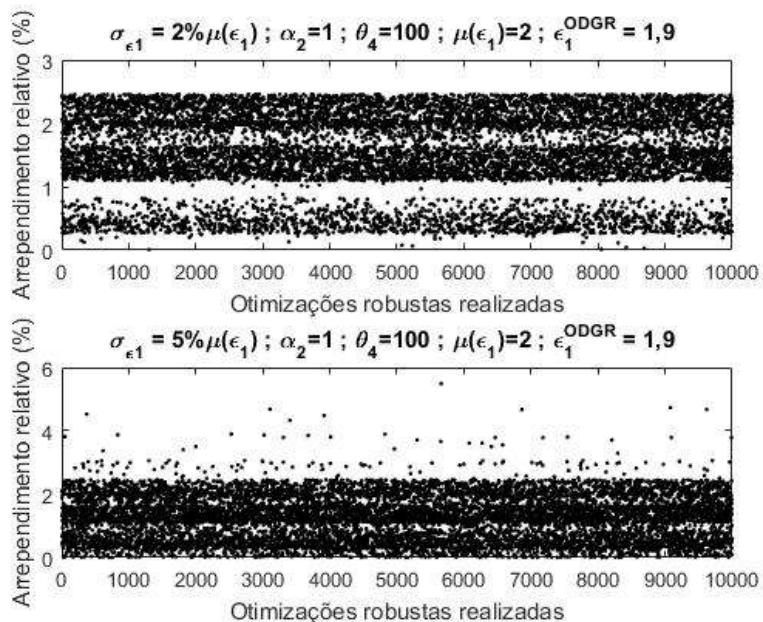


Figura 3.5.1: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2$ e $5 \% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$.

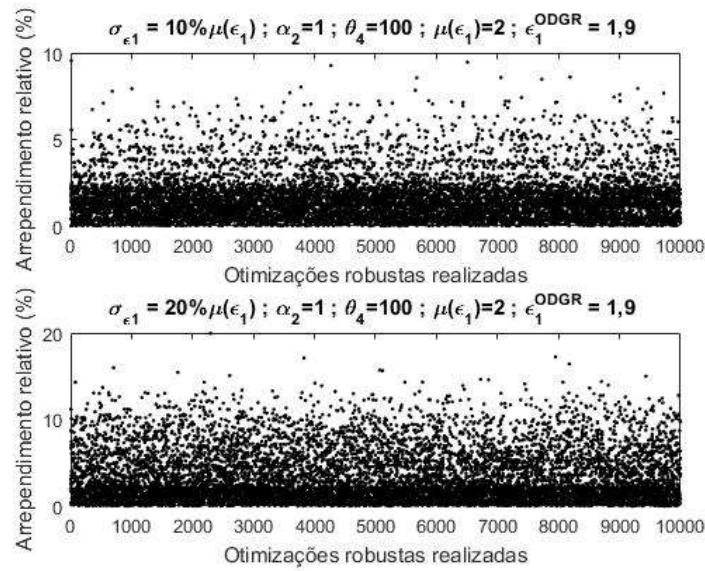


Figura 3.5.2: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20 \% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9$.

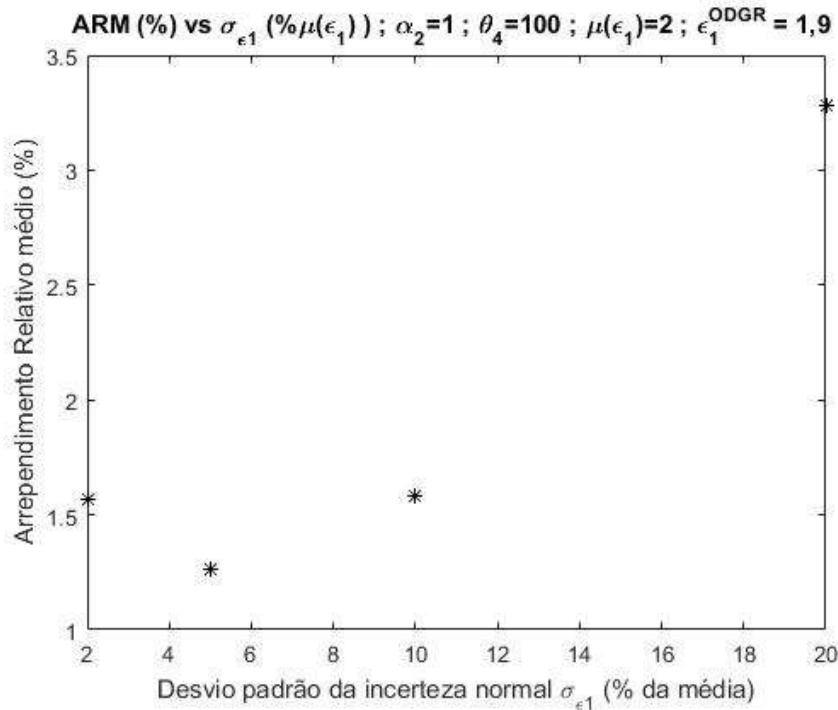


Figura 3.5.3: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9$.

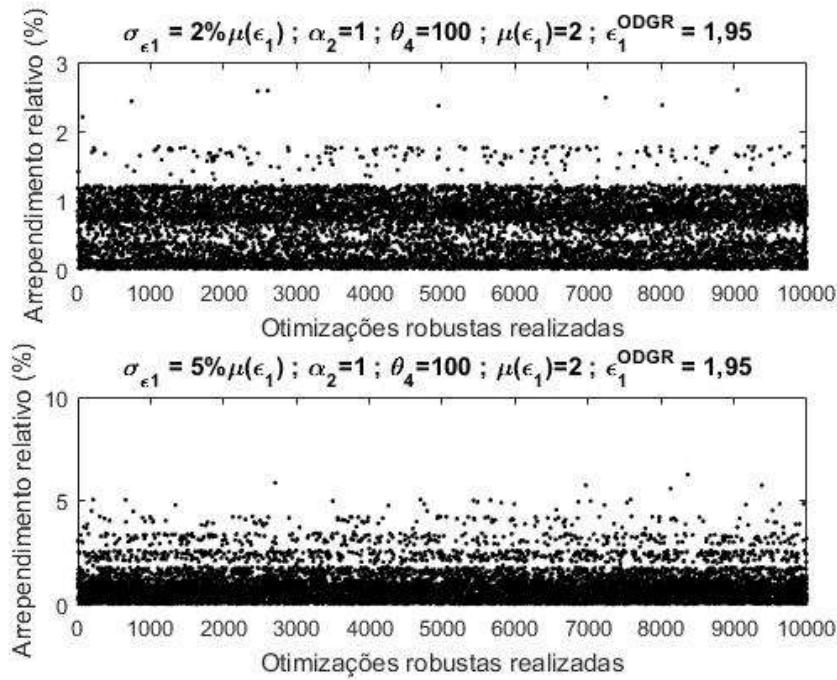


Figura 3.5.4: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,95$.

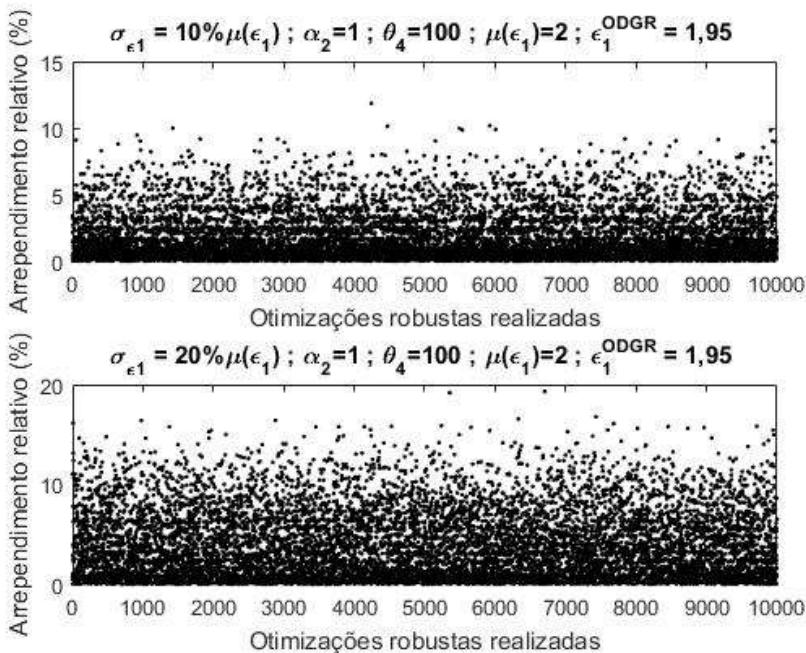


Figura 3.5.5: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,95$.

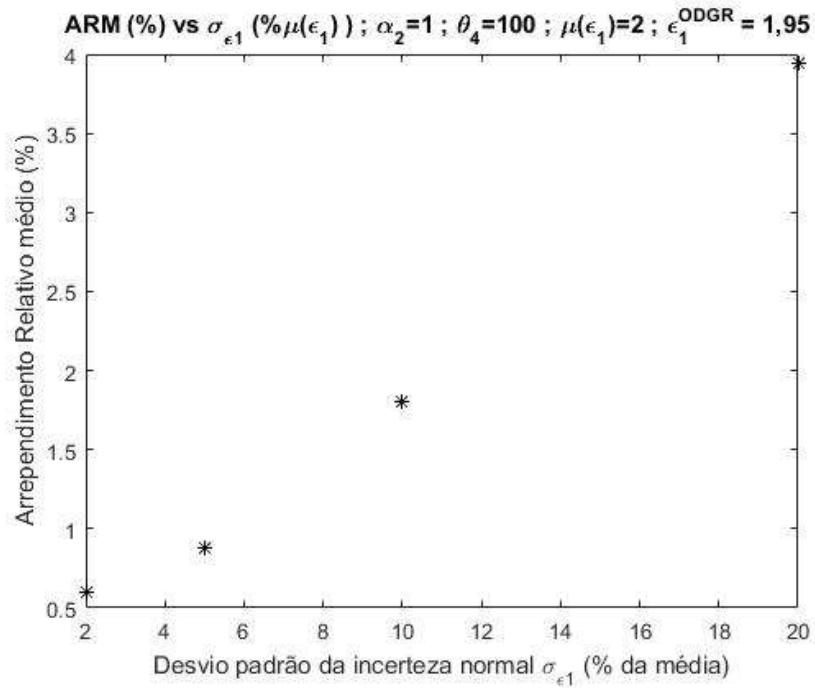


Figura 3.5.6: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,95$.

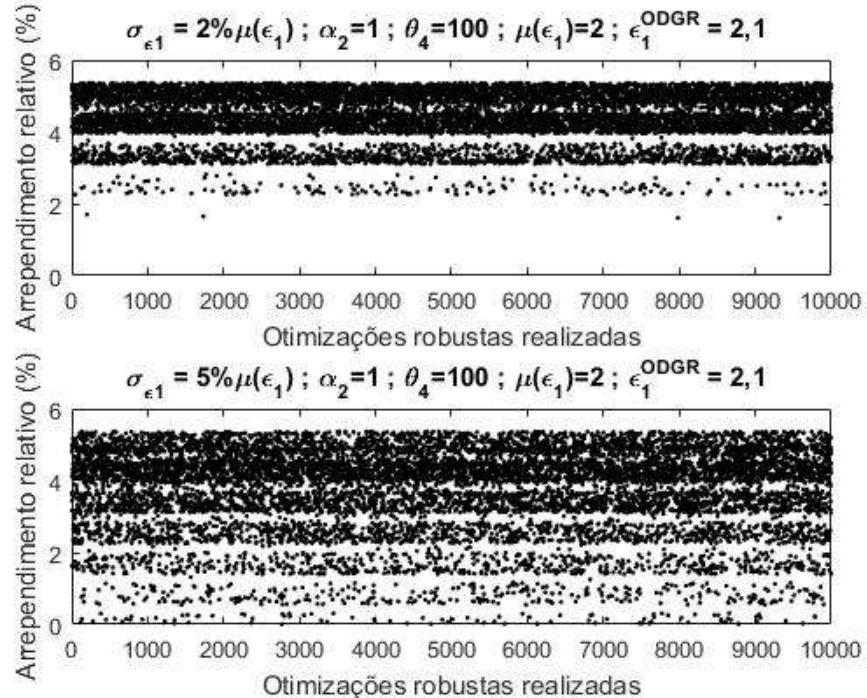


Figura 3.5.7: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5 \% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 2,1$.

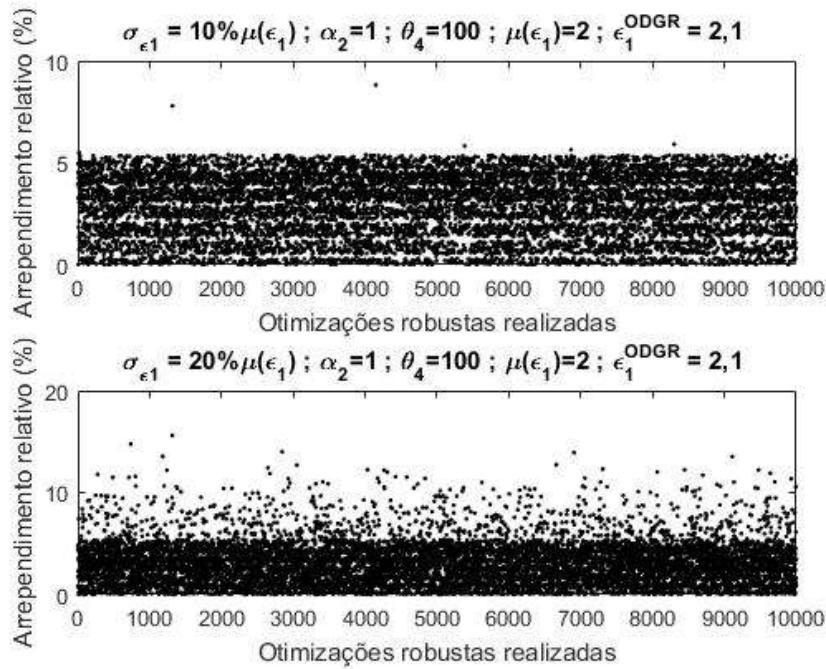


Figura 3.5.8: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 2,1$.

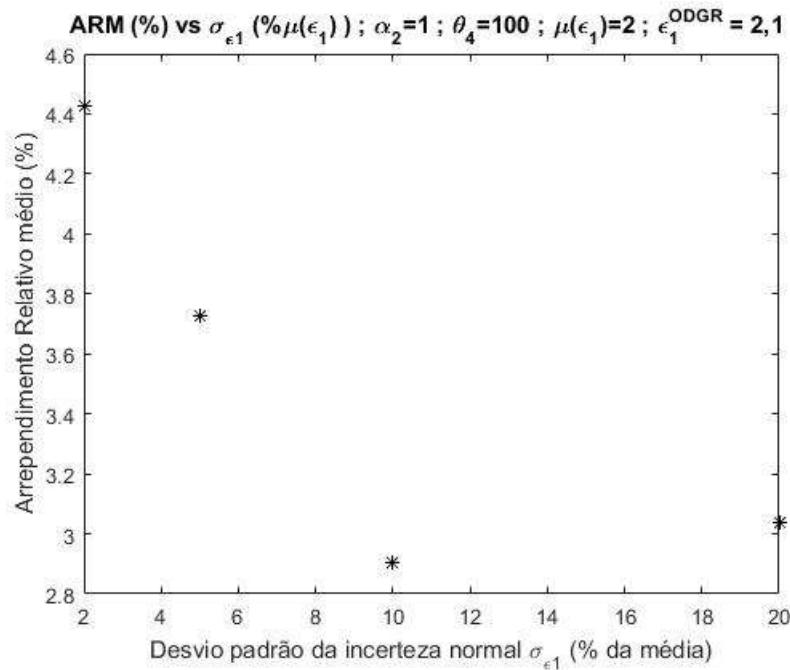


Figura 3.5.9: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 2,1$.

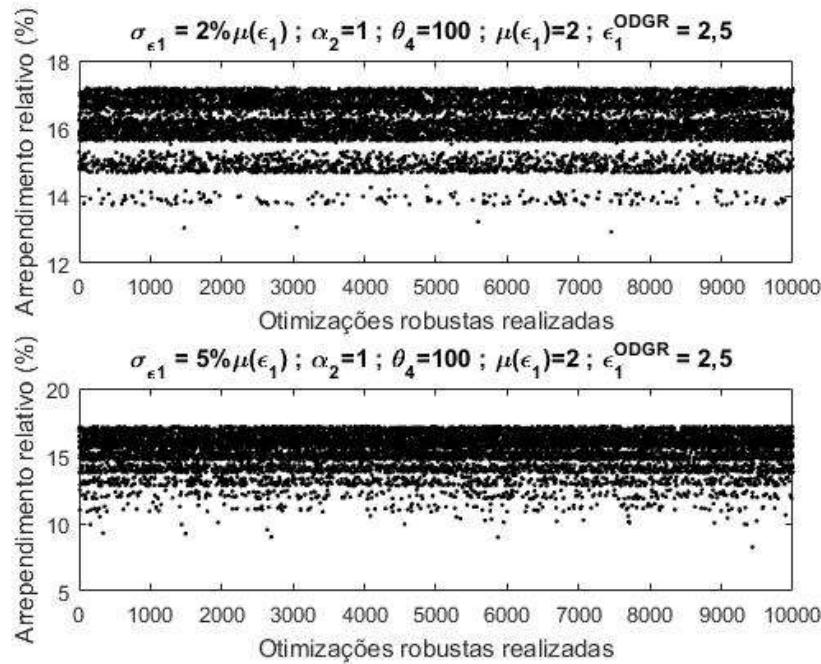


Figura 3.5.10: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 2,5$.

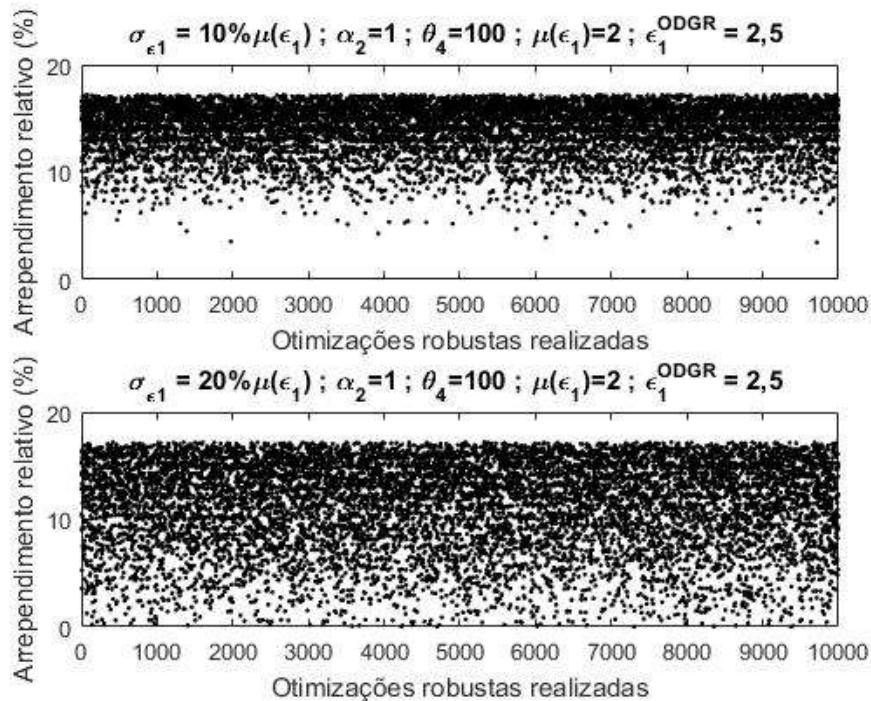


Figura 3.5.11: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 2,5$.

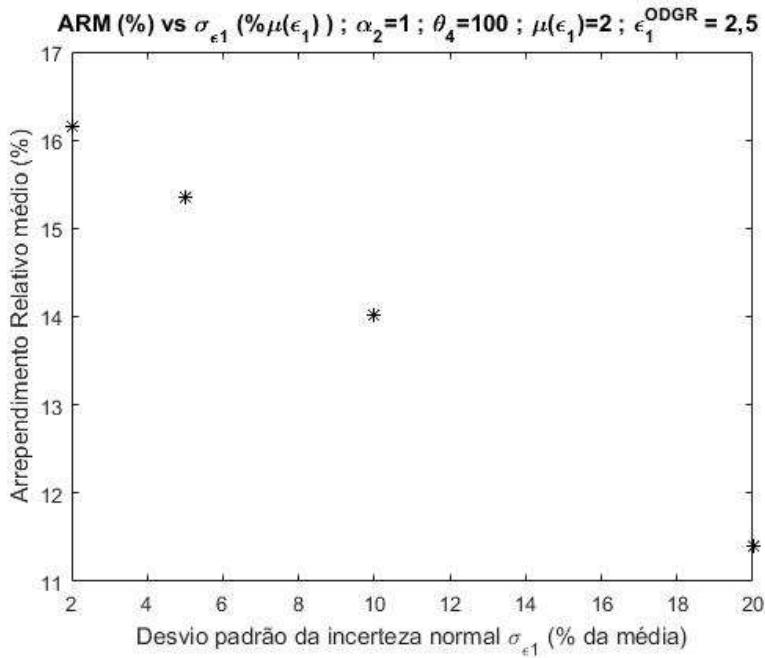


Figura 3.5.12: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 2,5$.

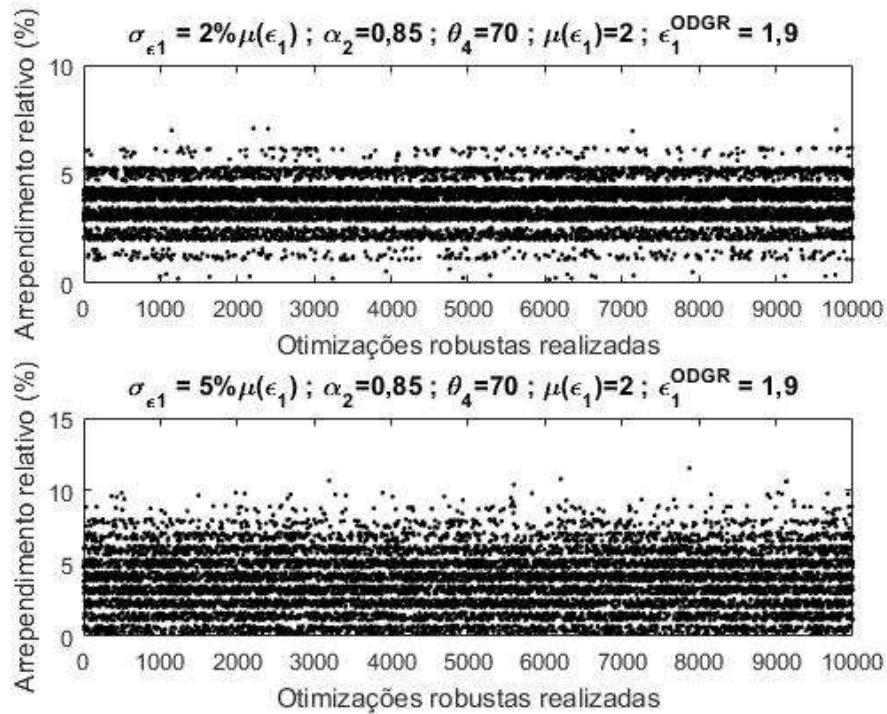


Figura 3.5.13: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5 \% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 1,9$.

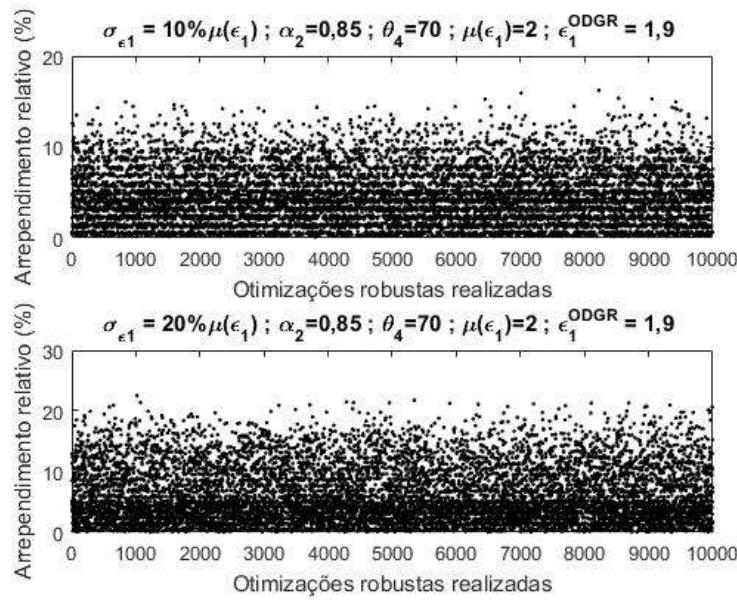


Figura 3.5.14: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 1,9$.

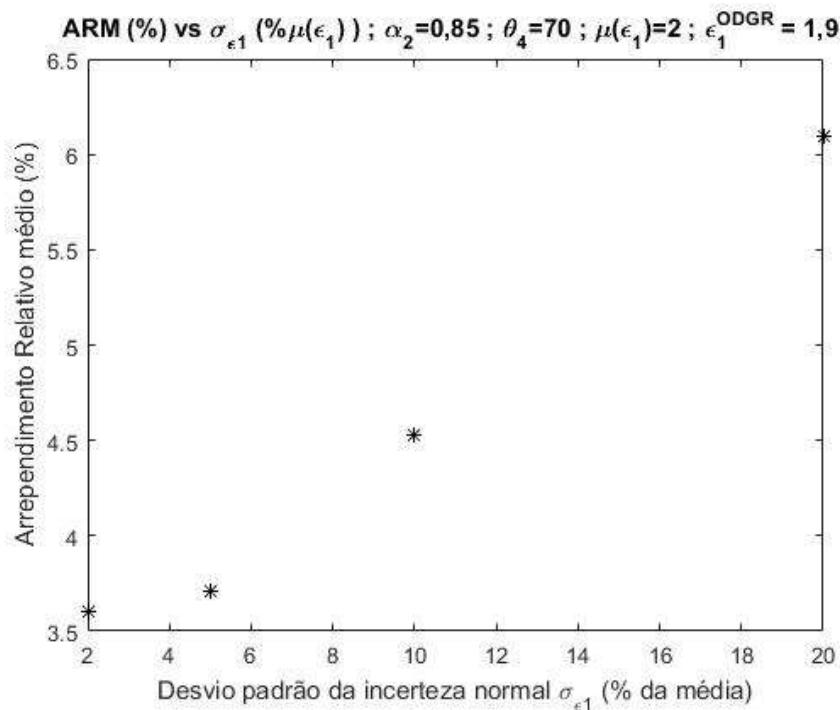


Figura 3.5.15: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 1,9$.

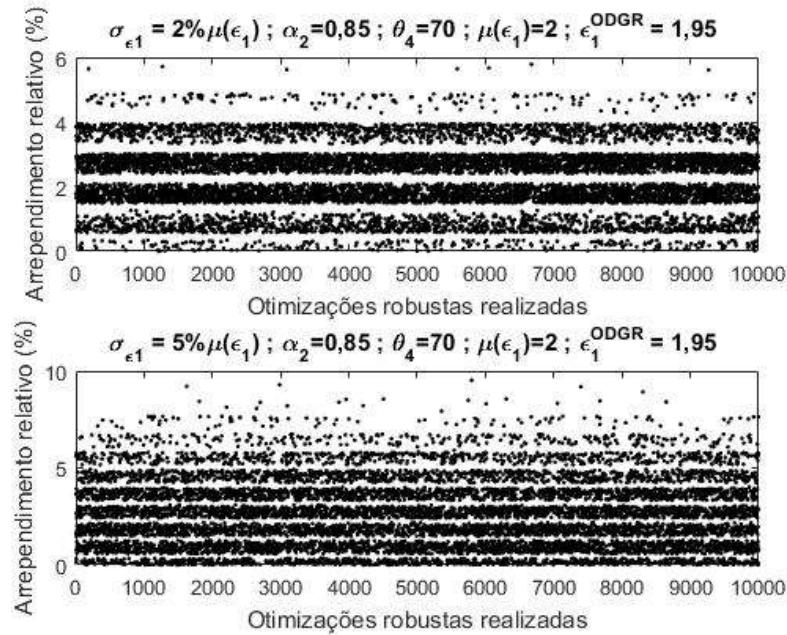


Figura 3.5.16: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 1,95$.

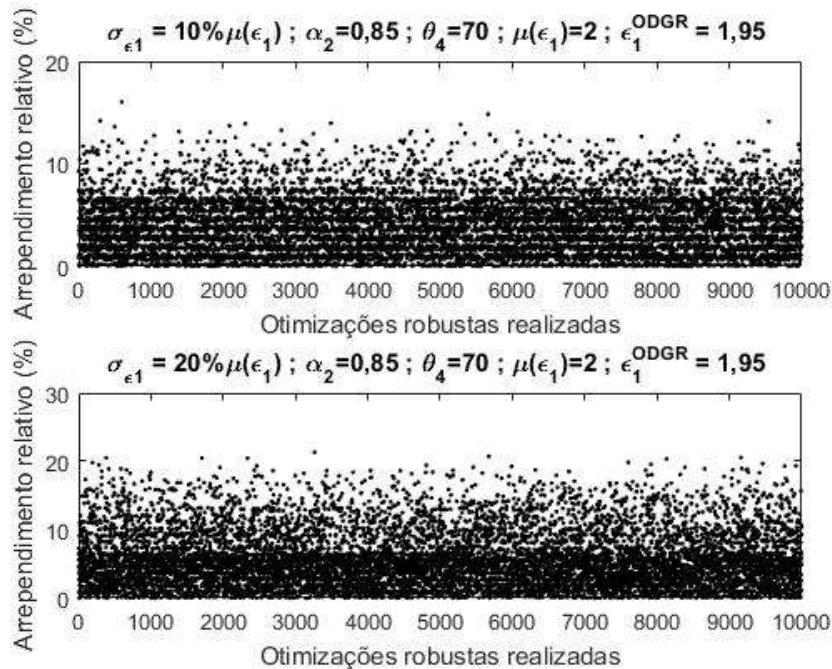


Figura 3.5.17: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 1,95$.

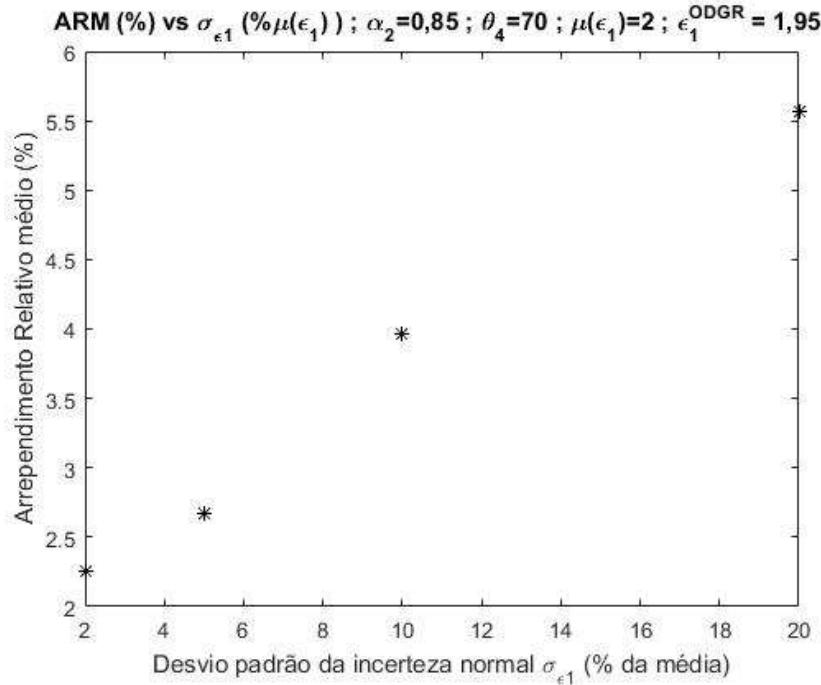


Figura 3.5.18: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85$, $\theta_4 = 70$, $\mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70$, $\epsilon_1 = 1,95$.

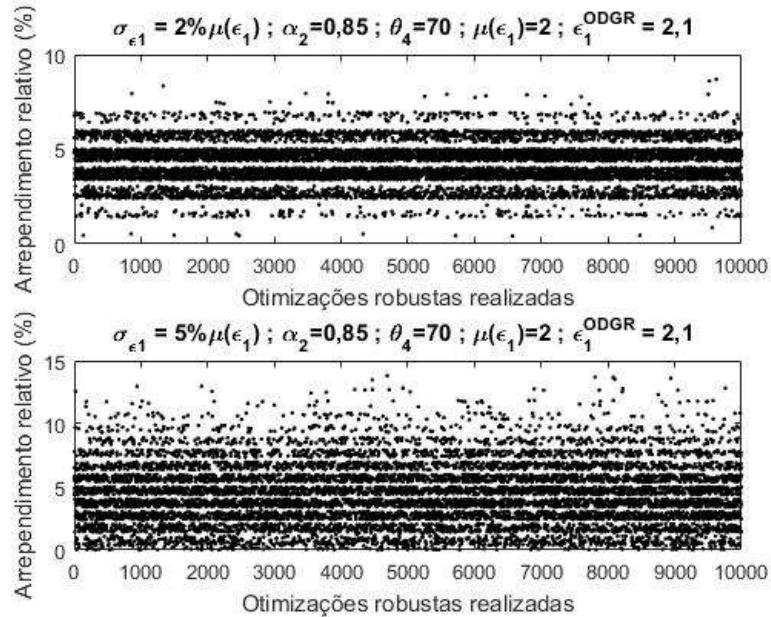


Figura 3.5.19: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85$, $\theta_4 = 70$, $\mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70$, $\epsilon_1 = 2,1$.

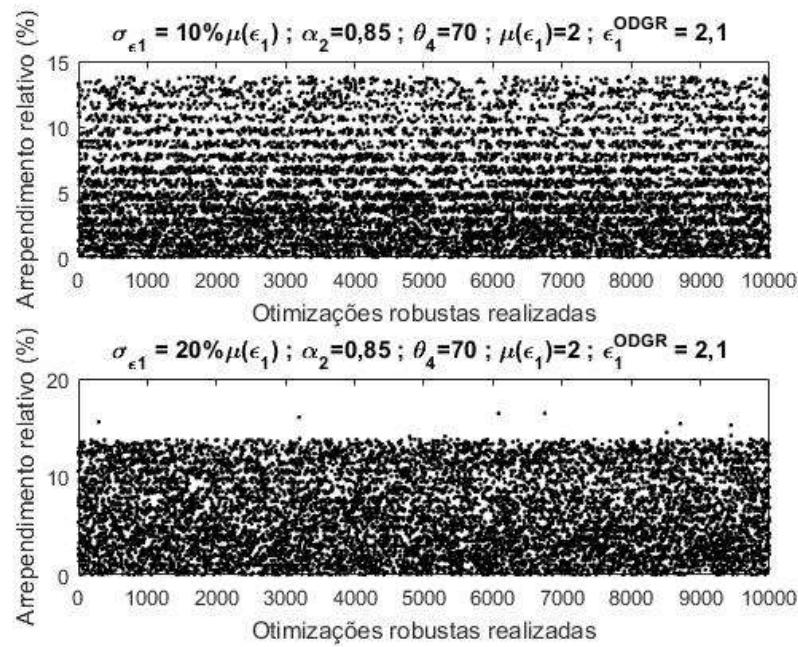


Figura 3.5.20: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 2,1$.

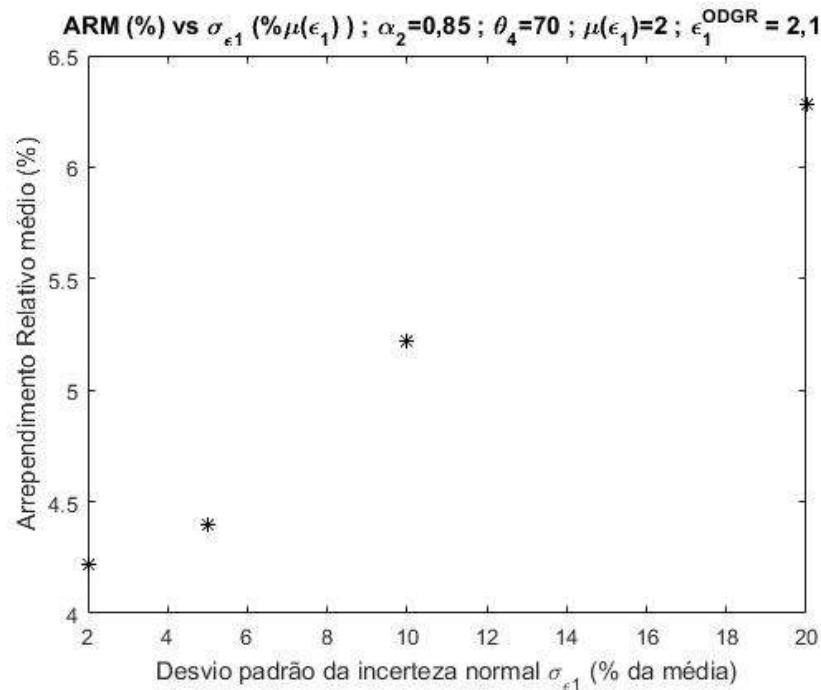


Figura 3.5.21: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 2,1$.

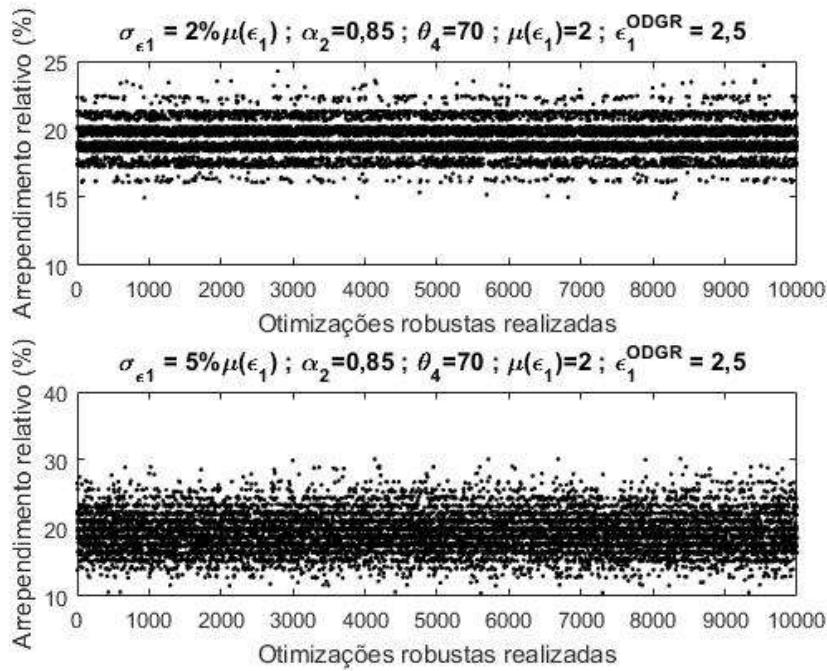


Figura 3.5.22: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5 \% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 2,5$.

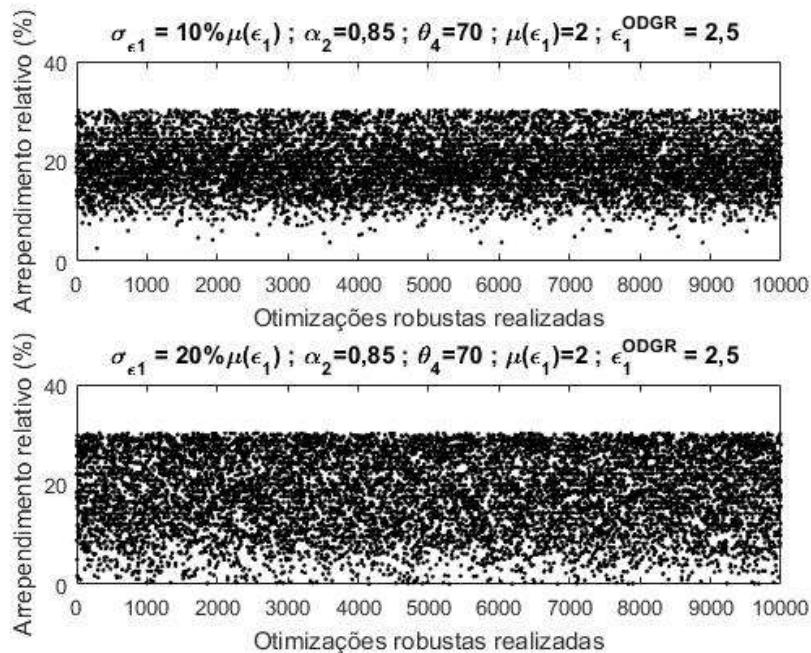


Figura 3.5.23: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20 \% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \epsilon_1 = 2,5$.

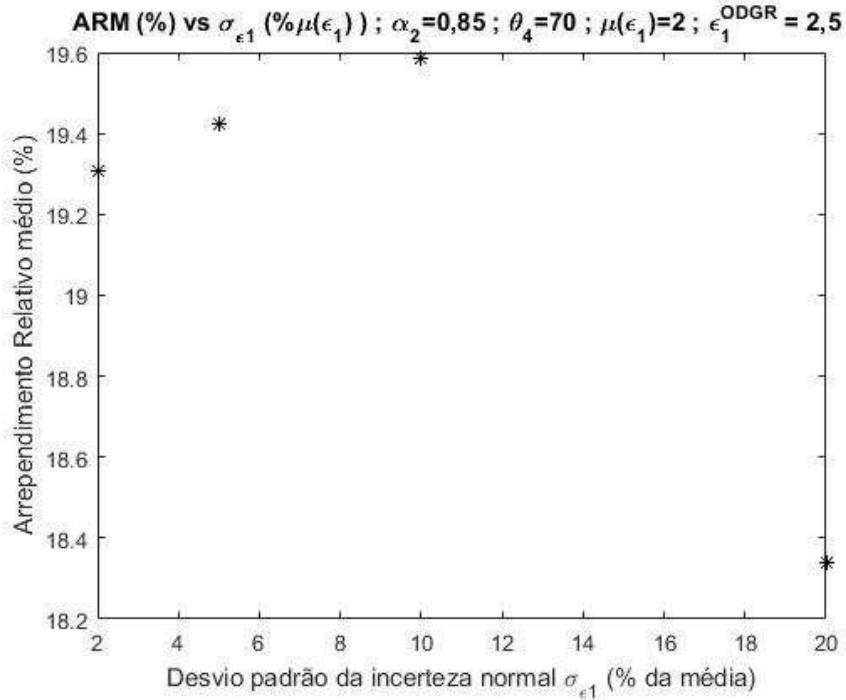


Figura 3.5.24: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\varepsilon_1} (\% \mu(\varepsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 0,85, \theta_4 = 70, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 70, \varepsilon_1 = 2,5$.

Os resultados da Tabela 3.5.3, interpretados pela leitura dos gráficos das Figuras (3.5.1 - 3.5.24), indicam os melhores valores de desvio padrão, para cada situação de ODGR, para o preço da peça 1 (ε_1), quando $\alpha_2 = 1$ e $\theta_4 = 100$, para que o planejamento de venda ótimo sob incerteza possa alcançar o melhor estado da OR, ou seja, se aproximar mais da ODGR, ao qual estes são os valores ótimos sintonizados para cada diferente situação de ODGR. A Tabela 3.5.4 mostra os melhores valores de desvio padrão quando $\alpha_2 = 0,85$ e $\theta_4 = 70$. O critério de escolha dos melhores valores de desvio padrão é aquele que apresenta o menor ARM conforme estabelecido no passo vi) do algoritmo do *framework*.

Tabela 3.5.3: Melhores valores de desvio padrão σ_{ε_1} (valores finais da sintonia) para cada situação de ODGR do problema exemplificado, onde $\alpha_2 = 1$ e $\theta_4 = 100$.

Situação de ODGR	$\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$	σ_{ε_1} sintonizado
Para $\varepsilon_1 = 1,9$	2	5% $\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$ (Figura 3.5.3)
Para $\varepsilon_1 = 1,95$	2	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$ (Figura 3.5.6)
Para $\varepsilon_1 = 2,1$	2	10% $\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$ (Figura 3.5.9)
Para $\varepsilon_1 = 2,5$	2	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$ (Figura 3.5.12)

Tabela 3.5.4: Melhores valores de desvio padrão σ_{ε_1} (valores finais da sintonia) para cada situação de ODGR do problema exemplificado, onde $\alpha_2 = 0,85$ e $\theta_4 = 70$.

Situação de ODGR	$\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	σ_{ε_1} sintonizado
Para $\varepsilon_1 = 1,9$	2	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$ (Figura 3.5.15)
Para $\varepsilon_1 = 1,95$	2	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$ (Figura 3.5.18)
Para $\varepsilon_1 = 2,1$	2	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$ (Figura 3.5.21)
Para $\varepsilon_1 = 2,5$	2	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$ (Figura 3.5.24)

A tendência de cada curva *Bell* ter de gerar mais valores em certas faixas inerentes a cada desvio padrão pode ser vista nos gráficos de “Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas” contidos entre as Figuras (3.5.1 – 3.5.24) (e.g. Figuras 3.5.19, 3.5.22 etc), ao qual há uma maior frequência de pontos sendos gerados nessas faixas (devido à área abaixo da curva normal ser maior), e portanto uma maior frequência de soluções obtidas ligadas a essas faixas. Como pode ser visto nestas figuras mencionadas, as faixas e as frequências mudam para cada diferente valor de desvio padrão, bem como para cada conjunto de especificações dos parâmetros do problema.

Os números das Tabelas 3.5.3 e 3.5.4 mostram que a metodologia do *framework* também podem levar a resultados de sintonia para o desvio padrão que provam que não é necessário que se tenha aversão ao risco, para se obter os melhores resultados para modelos de arrependimento em OR quando a filosofia ODGR e LIRR do *framework* é considerada.

Foi realizado duas outras sintonias para o problema exemplificado quando $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$ para a LIRR, e $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ para a ODGR (mesmas condições da Figura 3.5.3), onde mostra-se através das Figuras (3.5.25 a 3.5.30) que o número grande subjetivo mencionado no Passo *iv*) do algoritmo do *framework*, não precisa ser necessariamente muito grande como a quantidade de otimizações realizadas na sintonia mostrada pelas Figuras (3.5.1-3.5.24), quando o problema é linear e a FO é monotônica. A quantidade de otimizações realizadas para cada valor de desvio padrão assumido na sintonia das Figuras (3.5.1 a 3.5.24) foi de 10000, enquanto a da sintonia das Figuras (3.5.25 a 3.5.27) foi de 100, enquanto a da sintonia das Figuras (3.5.28 a 3.5.30) foi de 50. Como pode-se ver nas Figuras 3.5.3, 3.5.27 e 3.5.30, o valor do desvio padrão sintonizado é o mesmo (5% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$), os valores de ARM^σ (%) são bem parecidos e as tendências são as mesmas. O Passo *v*) do algoritmo do *framework*, favorece que o número grande subjetivo de otimizações realizadas não precise ser

exageradamente grande, pois a tomada de decisão para escolha do desvio padrão sintonizado é baseada numa média, ou seja, através do cálculo de ARM^σ conforme Equação 3.5.1, ao qual o significado físico de ARM^σ pode ser o distanciamento médio das soluções das realizações em relação à solução ideal. No entanto, se a FO não fosse monotônica, esse distanciamento médio não seguiria uma relação de ordem, fazendo com que fosse necessário realizar muito mais otimizações para obter uma sintonia com caráter estatisticamente verdadeiro (confiança estatística).

Tabela 3.5.5: Resultados de sintonia para o caso $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$ para a LTRR, e $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ para a ODGR (condições da Figura 3.5.3) para diferentes realizações.

Quantidade de realizações de otimizações [‡]	Valor de σ_{ε_1} resultante da sintonia
10000	5% $\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$ (Figura 3.5.3)
100	5% $\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$ (Figura 3.5.27)
50	5% $\mu(\varepsilon_1)_{LTRR}$ (Figura 3.5.30)

[‡]: Assim como qualquer outra sintonia, a sintonia deste caso foi realizada diversas vezes para cada uma destas quantidades, e o resultado permanece inalterado.

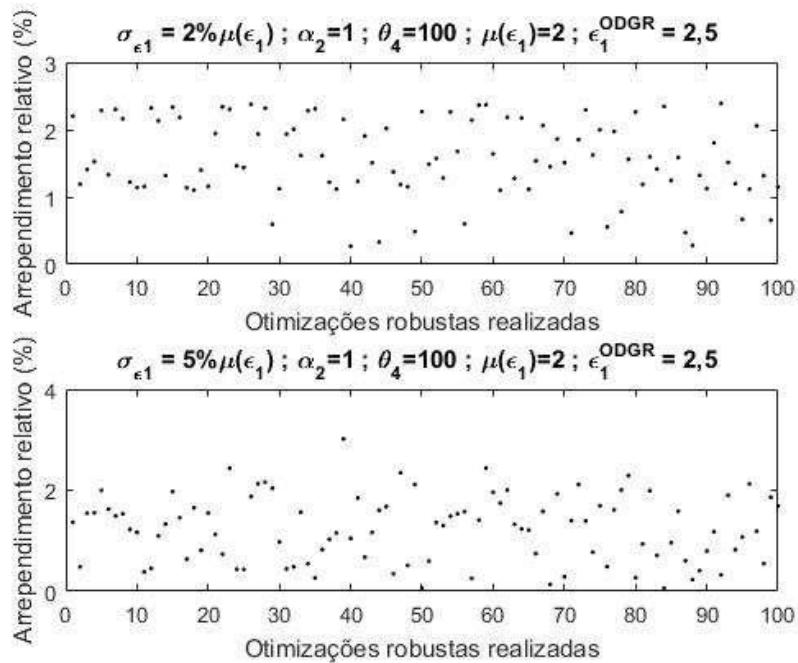


Figura 3.5.25: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2$ e $5 \% . \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$.

$$N^{BIG} = 100.$$

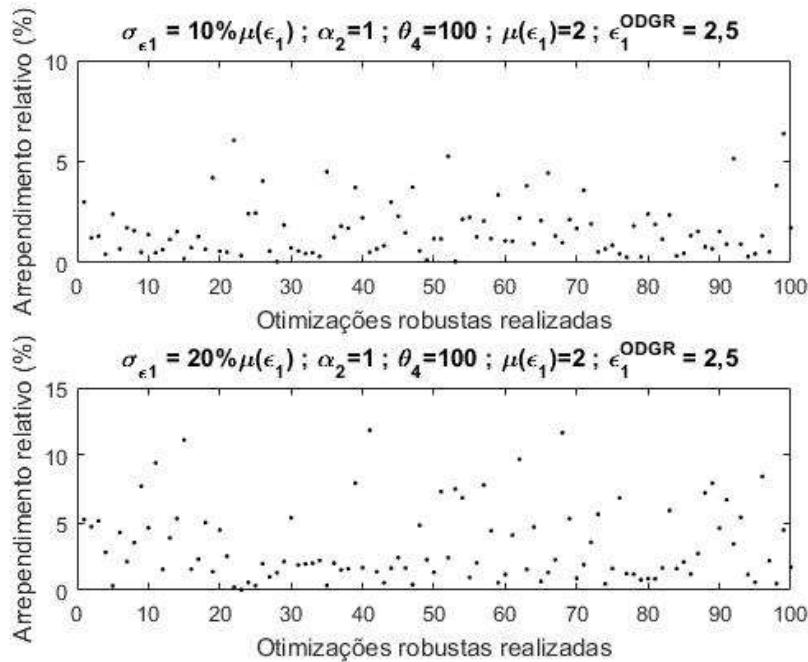


Figura 3.5.26: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20 \% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 100$.

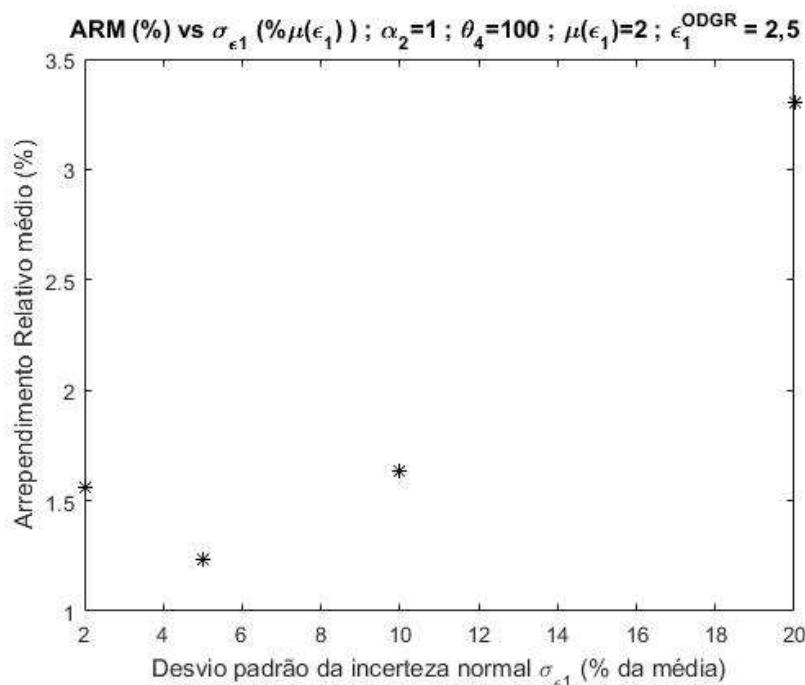


Figura 3.5.27: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 100$.

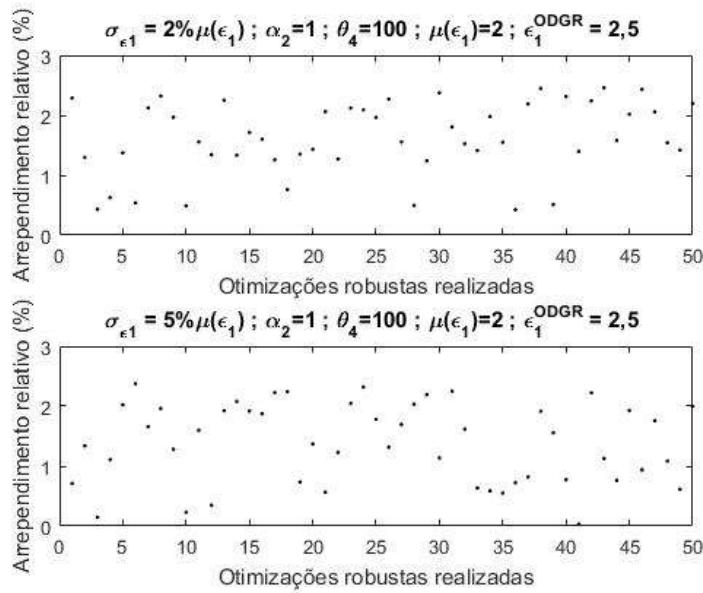


Figura 3.5.28: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 2$ e $5\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 50$.

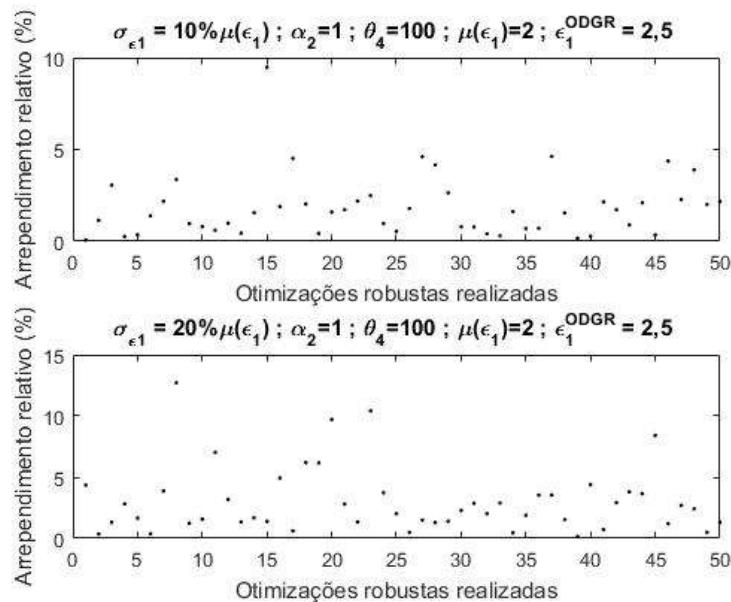


Figura 3.5.29: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 10$ e $20\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9, N^{BIG} = 50$.

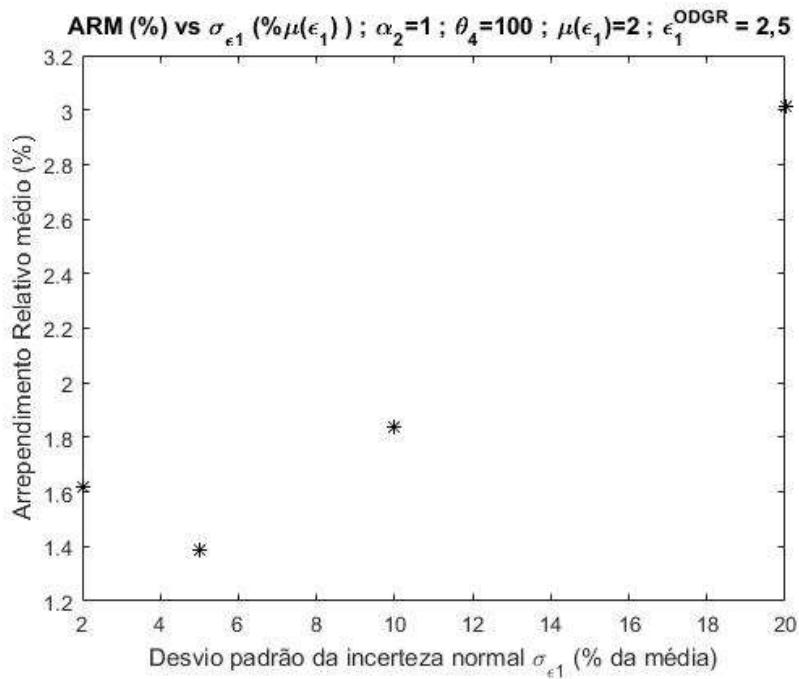


Figura 3.5.30: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} / \mu(\epsilon_1)$ %, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1$, $\theta_4 = 100$, $\mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100$, $\epsilon_1 = 1,9$. $N^{BIG} = 50$.

Geração de números aleatórios via simulação Monte Carlo confere duas propriedades para o desvio padrão de uma incerteza normal: i) Alcance e ii) Concentração de população. Estas propriedades são concebidas pelo formato da curva normal. É por isso que precisa-se de poucas otimizações para sintonizar o modelo, pois o $AR(\%)$ terá alcances exclusivos e altas concentrações exclusivas, em funções objetivos monotônicas na região viável, para diferentes valores de desvio padrão. Fora isto tudo, quanto menos horizontal for a curva da FO (menos *smooth* for a função na região viável), também serão necessárias menos otimizações porque as maiores concentrações de população de $AR(\%)$ terão alcances mais distintos e separados umas das outras, logo maior será a diferença entre valores de ARM^σ (e.g. Figuras 3.5.13 e 3.5.14). Além disto, quanto maior for a diferença de valor entre os ARM^σ , menor é o número necessário de realizações N^{BIG} porque mais *non-smooth* é a FO.

O valor de desvio padrão igual a 5% $\mu(\epsilon_1)_{LTRR}$, no exemplo das Figuras 3.5.3, 3.5.27 e 3.5.30, representa uma melhoria (o quanto a mais se aproximará da solução ideal) de aproximadamente 114% em comparação com o valor de desvio padrão igual a 20% $\mu(\epsilon_1)_{LTRR}$, e uma melhoria de aproximadamente 14% comparado ao de 2% $\mu(\epsilon_1)_{LTRR}$. A Tabela 3.5.6 mostra a melhoria entre usar o melhor valor contra o pior valor de desvio padrão nas Figuras

3.5.3, 3.5.6, 3.5.9, 3.5.12, 3.5.15, 3.5.18, 3.5.21 e 3.5.24. O cálculo da melhoria é feito pela subtração, em módulo, do valor de ARM do pior valor de desvio padrão pelo valor de ARM do melhor desvio padrão, com a posterior divisão pelo ARM do melhor valor do desvio padrão e a multiplicação por cem (%).

Tabela 3.5.6: Melhoria entre usar o melhor valor contra o pior valor de desvio padrão nas Figuras 3.5.3, 3.5.6, 3.5.9, 3.5.12, 3.5.15, 3.5.18, 3.5.21 e 3.5.24.

Figuras	Melhor valor de σ_{ε_1}	Pior valor de σ_{ε_1}	Melhoria
3.5.3	5% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 1,25 - 3,23 }{1,25} \cdot 100 \approx 159\%$
3.5.6	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 0,6 - 3,86 }{0,6} \cdot 100 \approx 543\%$
3.5.9	10% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 2,89 - 4,43 }{2,89} \cdot 100 \approx 53\%$
3.5.12	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 11,39 - 16,14 }{11,39} \cdot 100 \approx 417\%$
3.5.15	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 3,6 - 6 }{3,6} \cdot 100 \approx 667\%$
3.5.18	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 2,24 - 5,65 }{2,24} \cdot 100 \approx 152\%$
3.5.21	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 4,22 - 6,34 }{4,22} \cdot 100 \approx 50\%$
3.5.24	20% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	2% $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$	$\frac{ 18,5 - 19,64 }{18,5} \cdot 100 \approx 6\%$

Agora suponha que o modelo matemático do mesmo exemplo fosse hipoteticamente não-linear (obs.: O objetivo desta sintonia é mostrar o funcionamento para problemas não-lineares em situações que obedecam os axiomas do *framework*):

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{4x_1^2}{x_2} \varepsilon_1 + x_2 \alpha_2 E\{\xi_2\} + x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 - \theta_3 \quad (3.5.2)$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 - UB \leq 0$$

$$x_1 + x_2 - LB \geq 0$$

$$x_2 \alpha_2 E\{\xi_2\} - \theta_4 \leq 0$$

$$\frac{4x_1^2}{x_2} \varepsilon_1 - \theta_5 \leq 0$$

$$x_1 - 20 \geq 0; x_2 - 20 \geq 0; x_1, x_2 \in \mathbb{I}$$

$$0,5 \leq \varepsilon_1 \leq 3,5$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1]; \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5]; \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_2]; \boldsymbol{\xi} = [E\{\xi_2\}]$$

Primeiramente é necessário fazer o teste de monotonicidade para avaliar se essa FO não-linear é monótona na região viável do problema de otimização para cada e todos x_i e ε_1 , para que dessa forma não sejam necessárias realizar muitas otimizações durante a sintonia. Esse teste não foi feito para a versão linear deste exemplo pois era óbvio que a FO era monotônica, haja visto que era linear e todos os termos contendo x_i e ε_1 eram matematicamente positivos, e não havia divisão de algum termo por algum x_i ou ε_1 . As derivadas parciais desta função não-linear são dadas pelas Equações (3.5.3) a (3.5.5):

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_1} = \frac{8x_1\varepsilon_1}{x_2} + \theta_1 \quad (3.5.3)$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_2} = \alpha_2 E\{\xi_2\} + \theta_2 - \frac{4\varepsilon_1 x_1^2}{x_2^2} \quad (3.5.4)$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \varepsilon_1} = \frac{4x_1^2}{x_2} \quad (3.5.5)$$

Todos os termos envolvendo as variáveis x_1 e x_2 e as incertezas ε_1 das Equações (3.5.3) e (3.5.5) são positivos, logo a função é estritamente crescente e portanto é monótona para x_1 e ε_1 , mas já a Equação (3.5.4) possui um termo negativo e outro positivo e por causa disso é necessário verificar se haverá ou não a preservação da relação de ordem da função para x_2 na região viável do problema de otimização. Há várias maneiras de se testar monotonicidade na literatura, e cabe ao usuário saber administrar como que realizará o teste. Para o setor de pesquisa operacional, a maioria dos modelos são propícios a terem funções objetivos monotônicas que naturalmente obedecem aos axiomas do *framework*. Foi criado e executado um algoritmo no MATLAB® (R2019b, Mathworks, Natick, MA, USA) para verificação de monotonia desta função e pode ser visto no Apêndice B, ao qual a função também mostrou ser monótona para x_2 na região viável do problema de otimização.

Fazendo a sintonia deste problema para a mesma situação de sintonia do caso da Figura 3.5.3 só que para valores de 2, 5, 7 e 10%. $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$ para σ_{ε_1} e sabendo que a FO da ODGR é a mesma da Equação 3.5.2, tem-se os resultados expostos nas Figuras 3.5.31 a 3.5.33. Foi realizado essa sintonia inúmeras vezes e os comportamentos de σ_{ε_1} e de ARM^σ (da Figura 3.5.33) permanecem os mesmos. Onde o valor sintonizado de σ_{ε_1} é igual a 10 % . $\mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$.

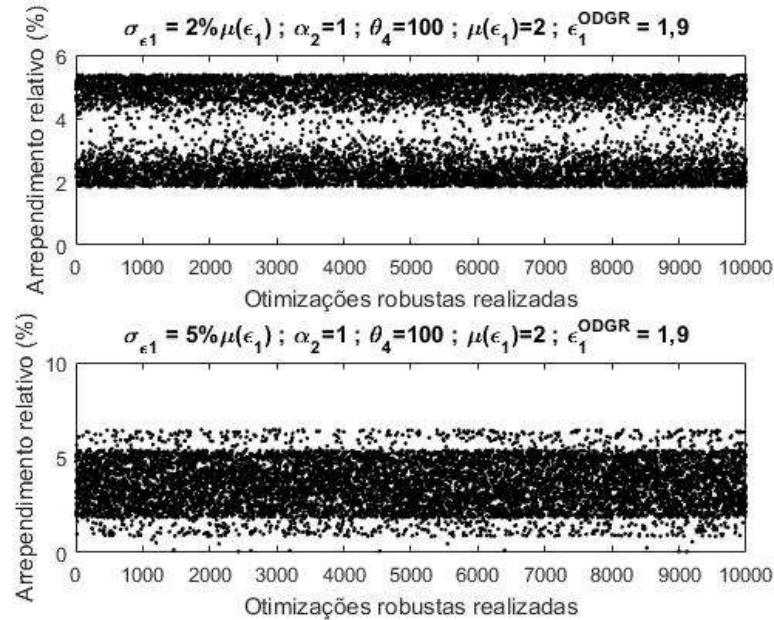


Figura 3.5.31: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\varepsilon_1} = 2$ e $5\% \cdot \mu(\varepsilon_1)$, onde a linha de tempo da LIRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\varepsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \varepsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.3). $N^{BIG} = 10000$.

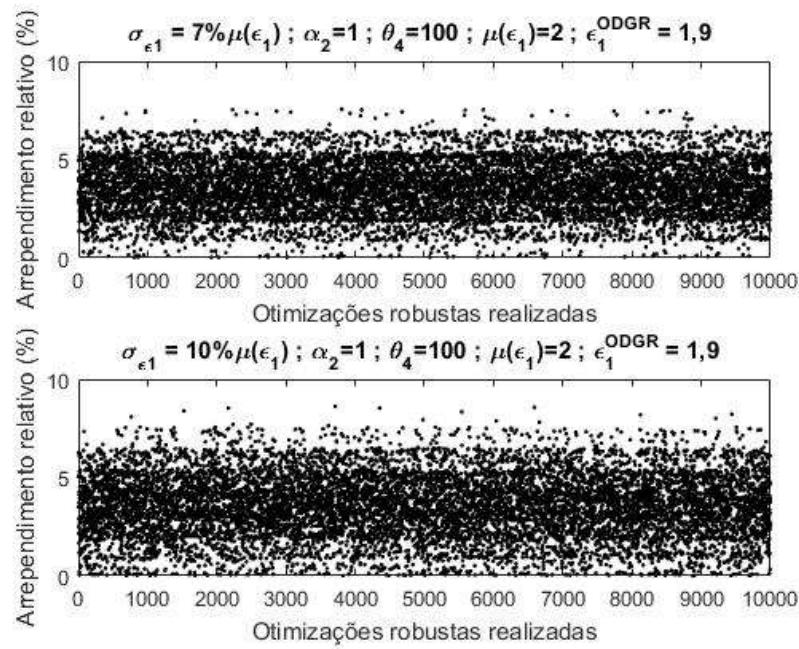


Figura 3.5.32: Gráficos do Arrependimento relativo (%) vs Otimizações robustas realizadas para $\sigma_{\epsilon_1} = 7$ e $10\% \cdot \mu(\epsilon_1)$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.3). $N^{BIG} = 10000$.

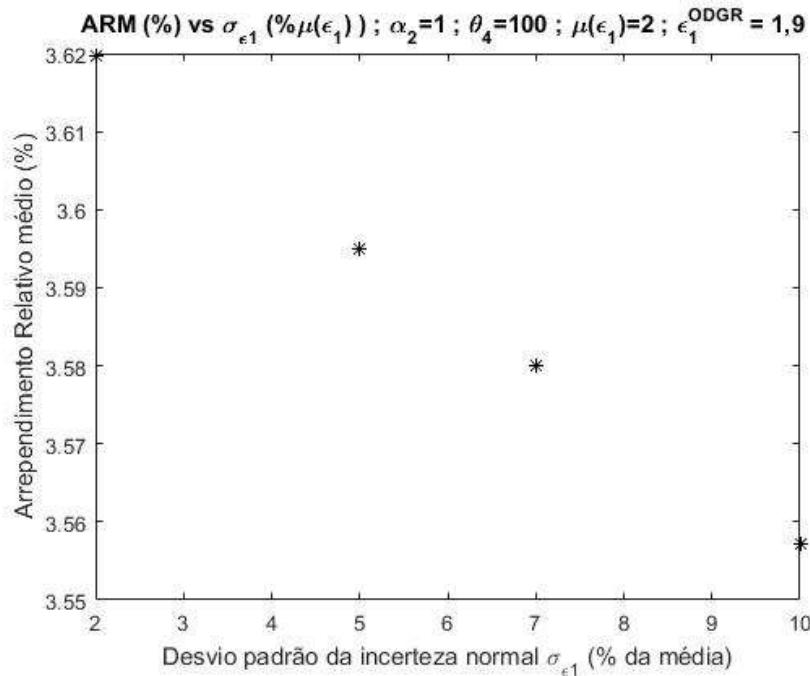


Figura 3.5.33: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1, \theta_4 = 100, \mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100, \epsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.3). $N^{BIG} = 10000$.

Devido às baixas variações de AR (%) na Figura 3.5.33, pode-se inferir que esta FO tem alguns patamares relevantes para alguns intervalos das variáveis do problema na região viável do problema de otimização e ela demonstra ser uma *smooth* function no DRV (tem um platô no DRV) e no intervalo de variação de ε_1 . Implicando portanto, em ter poucas variações entre ARM^σ e em necessitar de um N^{BIG} maior do que se fosse linear para sintonizar com confiança estatística. O algoritmo se encontra no Apêndice C.

No caso em que o valor de f_{obj}^{ODGR} seja especificado como sendo igual a e.g. 335 \$, e a sintonia tenha as mesmas condições da Figura 3.5.33, porém a FO seja dada pela Equação 3.5.6, não haveria baixas variações de AR(%) (comprovado na Figura 3.5.34) porque essa nova FO dada pela Equação 3.5.6 é menos *smooth* que a dada pela Equação 3.5.2, e portanto necessita de um número menor para N^{BIG} , que neste caso foi igual a 200, e mesmo que a sintonia seja feita severas vezes, o resultado de sintonia é o mesmo, ao qual o algoritmo pode ser encontrado no Apêndice D. A melhoria entre pior valor ($\sigma_{\varepsilon_1} = 2\% \mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$) e melhor valor ($\sigma_{\varepsilon_1} = 10\% \mu(\varepsilon_1)_{LIRR}$) de desvio padrão da sintonia da Figura 3.5.34 é de aproximadamente 7%.

$$\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{x_1^2}{x_2} \varepsilon_1 + x_2 \alpha_2 E\{\xi_2\} + \frac{x_1^2}{x_2} \theta_1 + \frac{x_2^2}{x_1} \theta_2 - \theta_3 \quad (3.5.6)$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 - UB \leq 0$$

$$x_1 + x_2 - LB \geq 0$$

$$x_2 \alpha_2 E\{\xi_2\} - \theta_4 \leq 0$$

$$\frac{x_1^2}{x_2} \varepsilon_1 - \theta_5 \leq 0$$

$$x_1 - 20 \geq 0; x_2 - 20 \geq 0; x_1, x_2 \in \mathbb{I}$$

$$0,5 \leq \varepsilon_1 \leq 3,5$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1]; \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5]; \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_2]; \boldsymbol{\xi} = [E\{\xi_2\}]$$

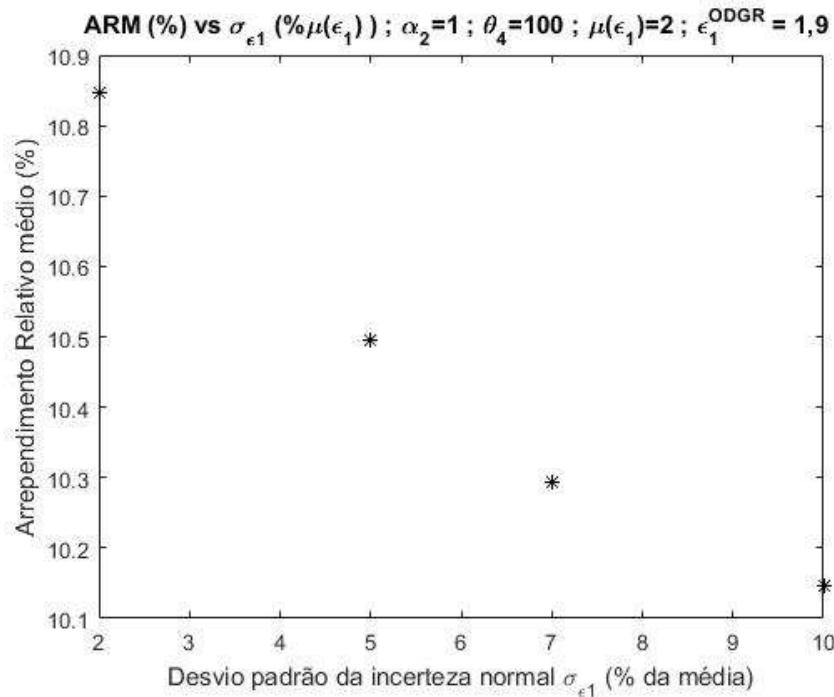


Figura 3.5.34: Gráfico do Arrependimento relativo médio (%) vs $\sigma_{\epsilon_1} (\% \mu(\epsilon_1))$, onde a linha de tempo da LTRR para otimização robusta considera $\alpha_2 = 1$, $\theta_4 = 100$, $\mu(\epsilon_1) = 2$, ao qual a ODGR é realizada com $\theta_4 = 100$, $\epsilon_1 = 1,9$ (mesmas condições da Figura 3.5.30). $N^{BIG} = 200$.

4. PROBLEMÁTICA DO ESTUDO DE CASO

Em resumo, o modelo matemático da cadeia de suprimentos (Sergio *et al.* 2020 – a ser submetido) da problemática do estudo de caso considera o planejamento tático de 6 plantas de produção de oxigênio, nitrogênio e argônio. A essência do modelo é determinar o melhor conjunto de decisões relacionadas às condições ótimas de operação tática que definem quanto de argônio precisa ser produzido em um dia por uma determinada planta, e como e quando o argônio deve ser entregue a partir das USAs para os clientes. Este modelo é um problema de roteamento integrado de produção-inventário-distribuição (PIDRP – *Production-Inventory-Distribution-Routing problem*). A produção de nitrogênio e oxigênio também são consideradas nos cálculos, haja visto que para produzir argônio estes componentes também são produzidos. A Figura 4.1 abaixo mostra a cadeia de suprimentos do problema estudo de caso.

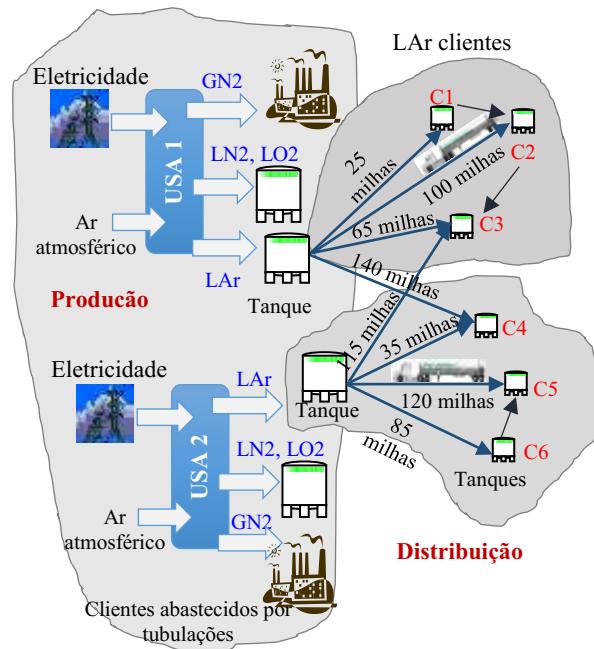


Figura 4.1. Cadeia de suprimentos do problema estudo de caso.

Adaptado de Sergio *et al.* (2020) – a ser submetido.

O problema de otimização é dividido em dois modelos. No primeiro modelo há a otimização da geração de rotas, i.e. nessa etapa determina-se as rotas de entrega entre plantas e clientes que possuem os deslocamentos minimizados. No segundo modelo há a minimização da FO (custo operacional) desta cadeia de suprimentos, i.e. inclui os custos de produção e de distribuição. O custo de produção depende da quantidade de eletricidade utilizada na produção nas USAs, enquanto o custo de distribuição engloba todos os custos relacionados com a

distribuição dos produtos. As rotas geradas no primeiro modelo são decisões importadas para o segundo modelo para que este possa incluir elas como condição restritiva na otimização.

Para incluir matematicamente os pontos operacionais viáveis de produção de cada USA, o segundo modelo usa um casco convexo 3D para cada USA para representar o perfil de produção, no qual cada coordenada define o domínio de produção dos produtos líquidos que são nitrogênio, oxigênio e argônio nesse estudo de caso. Esse “envelope” convexo é identificado no modelo através da inclusão das equações do casco convexo (BARBER *et al.*, 1996), e os dados contendo pontos operacionais reais de vazão de produção de nitrogênio, oxigênio e argônio são incluídos nessas equações no modelo para estabelecer o domínio em que a produção é viável para cada USA. O modelo também inclui equações e restrições que descrevem a distribuição dos produtos de uma USA para um cliente. O estudo de caso é a aplicação do *framework* desenvolvido a um exemplo de tamanho industrial da rede de clientes da Praxair Inc. com dados privados, e as otimizações foram realizadas utilizando o software GAMSTM versão 24.3.3 (GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA).

Seja dado um horizonte de tempo discreto para o planejamento, a programação da produção e distribuição é feita dividindo o horizonte de tempo num conjunto de períodos de tempo discretos. As tomadas de decisões são variáveis de decisões estabelecidas nesses períodos de tempo discretos, em que é a otimização que decide se a produção ou distribuição neste período de tempo irá acontecer ou não.

A cada cliente é atribuído apenas uma rota em um determinado período de tempo discreto, em que cada cliente precisa ser abastecido com argônio somente quando seu inventário se aproxima do nível de segurança. Este nível de segurança é definido pelo planejador na parametrização de cada um dos dois modelos e é necessário realizar um balanço de massa para cada cliente, ao qual o balanço inclui a demanda de cada cliente, antes de executar o modelo, para prever quando um cliente precisará ser abastecido. Uma rota será atribuída a um cliente somente se este precisar ser abastecido em um determinado período de tempo, ao qual é através do balanço de massa que esta informação é calculada.

Uma mesma rota não é executada repetidas vezes em um determinado período de tempo, mas pode ser executada em diferentes períodos de tempo. A quantidade máxima de clientes que pode ser visitado por rota por um veículo é definido pelo planejador, e o veículo que executa a rota deve primeiramente partir de uma USA e deve terminar sua rota nesta mesma USA. Deve existir uma quantidade máxima de rotas que podem ser realizadas por período de tempo ou em todo o horizonte de tempo, e cada uma dessas rotas só podem ser executadas se a quantidade de milhas percorridas não for superior a um limite superior definido por dia.

As USAs estão interconectadas por trilhos ferroviários, para que produtos possam ser entregues entre uma e outra, caso seja necessário, e que esta decisão é decidida pela otimização. No que remete à produção das USAs, é estabelecido que a planta pode operar de três maneiras, sob inicialização, em estado estacionário ou sob desligamento. A planta deve operar em apenas um desses modos em cada período de tempo. Decisões de curto prazo sobre a transição entre inicialização, estado estacionário ou desligamento da planta não são abordadas. Além disso, por motivos técnicos de disponibilidade de liquefatores dos gases atmosféricos, existem dois modos de operação em cada planta (m_1 e m_2).

Por motivos técnicos, o argônio só é produzido 24 horas depois da inicialização da planta, e só existe produção de argônio se a USA opera em estado estacionário ou em desligamento. No entanto, há produção de oxigênio e nitrogênio quando a planta opera durante a inicialização, no estado estacionário ou no modo de desligamento. O tempo de operação para a inicialização ou para o desligamento de uma USA tem duração de duas horas, portanto o tempo diário de operação da USA se ela está inicializando ou desligando em um dia é de 22 horas. Se não houver um desligamento ou uma inicialização em uma USA, o tempo disponível para produção usual de operação no estado estacionário da produção é de 24 horas.

4.1. MODELO DE OTIMIZAÇÃO PARA A GERAÇÃO DE ROTAS

A entrega para um cliente deve ser realizada conforme um veículo que sai de uma USA, porém esse veículo só sairá de uma USA se o cliente estiver dentro do raio de entrega desta USA. Todos os clientes devem ser abastecidos por pelo menos alguma USA. A Figura 4.2 mostra essa estratégia.

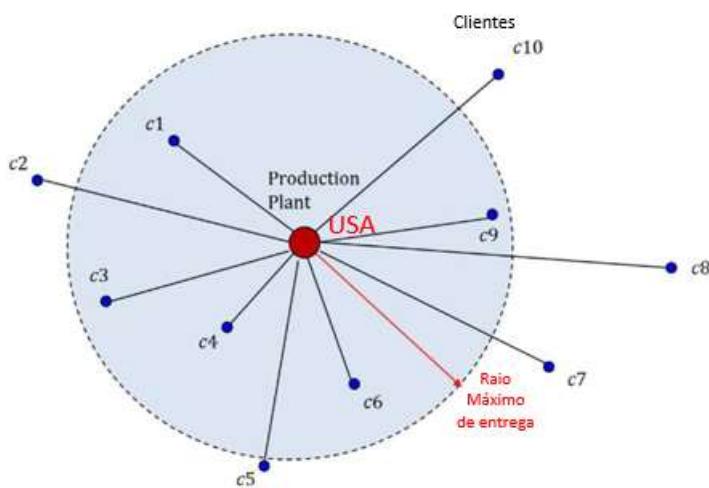


Figura 4.1.1. Raio de entrega de uma USA.

Adaptado de Sergio *et al.* (2020) – a ser submetido.

Um cliente pode ser abastecido por veículos que partem de diferentes USA, e se um destes veículos é atribuído a uma rota, este deve ser carregado com uma quantidade mínima de produto a ser entregue a cada cliente atribuído a esta rota, e quantidade esta que não exceda a capacidade máxima do veículo. A rota deve começar e ser finalizada em um período de tempo, não sendo permitido a execução da realização da rota durante mais de um período de tempo.

O modelo matemático que descreve o estudo de caso estabelece a necessidade de que haja um cálculo do perfil de inventário de cada cliente baseado no consumo diário de cada cliente, a partir da resolução dos balanços de massa, para que o algoritmo saiba quando será necessário o envio de produto (argônio) de uma certa planta para um certo cliente através de um veículo. Esta etapa é necessária pois a otimização do modelo só será feita tendo como base a premissa da real necessidade de entrega de produto, que é programada conforme critério do planejador. Nesse estudo de caso a necessidade de entrega é realizada tendo como referência o consumo diário de cada cliente, o nível atual de produto no reservatório do cliente, e o nível de segurança ao qual se faz necessário a entrega. Para cálculo no balanço de massa de cada cliente, o planejador deve especificar o nível de segurança, e deve especificar o consumo diário de cada cliente de tal maneira que o consumo total de cada cliente ao longo do mês seja igual à sua demanda.

Na Figura 4.3 é mostrado o perfil de inventário de um cliente que está sendo abastecido ao longo do horizonte de tempo. O reabastecimento total do inventário do cliente (até MAX) ocorre quando o nível do inventário cai para o nível mínimo (MIN), e na Figura 4.3 o nível do inventário de um cliente ao final de um dia ao longo dos dias do mês de planejamento é representado pela curva verde. Os retângulos cinzas representam as janelas de tempo que são os intervalos de tempo em que o cliente tem o seu nível de inventário passando o nível de segurança (SEG) e atingindo o nível MIN para que seja reabastecido até MAX ao final de qualquer dia dentro da janela. O ponto máximo da curva verde diz respeito ao nível de inventário de um cliente ao final de um dia considerando que ele receba um carregamento capaz de completar o tanque., ou seja, o nível máximo menos o que foi consumido ao longo deste dia. O cálculo que determina as janelas de tempo é o balanço de massa de inventário de cada cliente, ao qual o nível de inventário inicial (INV_0 – linha vermelha pontilhada) é um parâmetro levado em consideração para este cálculo, então a janela de tempo é uma função do nível do inventário inicial e do consumo de argônio do cliente. No final do horizonte de tempo do problema estudo de caso, o nível de inventário de um cliente deve ser maior ou igual ao seu inventário inicial.

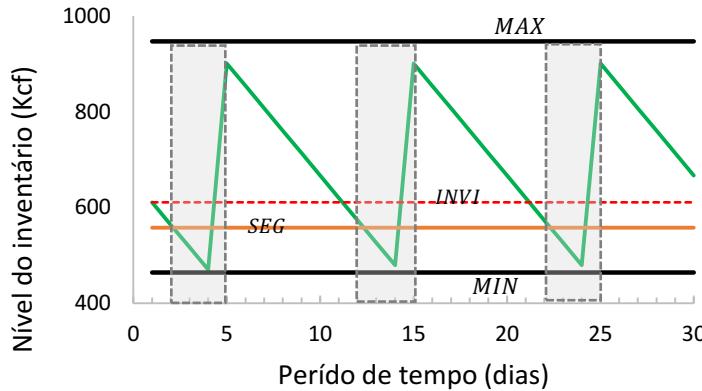


Figura 4.1.2: Ilustração da janela de tempo do pré-planejamento de um cliente que é abastecido ao longo de um mês.

Adaptado de Sergio *et al.* (2020) - a ser submetido.

Levando-se em consideração que as rotas são geradas por planta e por período de tempo, as restrições que são apresentadas a seguir, a planta e o dia estão fixos respectivamente em $p = \pi, t = \tau$. A FO a ser minimizada no modelo de geração de rotas é dada pela Equação 4.1.1:

Min

Distância entre clientes:

$$\sum_{p=\pi} \sum_{t=\tau} \sum_{c \in C_{p,t}} \sum_{c' \in C_{p,t}} \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} \delta_{c,c'}^{CC} \cdot X_{p,t,r,c,c'} +$$

Distância entre a planta e o primeiro cliente visitado

$$\sum_{p=\pi} \sum_{t=\tau} \sum_{c \in C_{p,t}} \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} \delta_{p,c}^{PC} \cdot \hat{X}_{p,t,r,c} +$$

Distância entre a planta e o último cliente visitado

$$\sum_{p=\pi} \sum_{t=\tau} \sum_{c \in C_{p,t}} \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} \delta_{p,c}^{PC} \cdot \tilde{X}_{p,t,r,c} +$$

(4.1.1)

Termo de penalidade por alocar uma nova rota

$$\sum_{p=\pi} \sum_{t=\tau} \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} r \cdot Z_{p,t,r}$$

c e c' são clientes de $C_{p,t}$, o conjunto de clientes que podem ser servidos pela planta p no tempo t . r é uma determinada rota. $\eta_{p,t}^{\max}$ é a quantidade máxima de rotas disponíveis para a planta p em t , e é igual a $\min\left(\left\lfloor \frac{\theta_{p,t}}{\kappa^{\max}} \right\rfloor + \rho, |\mathbf{R}|\right)$, onde $\theta_{p,t}$ é a quantidade de clientes aptos para entrega que podem ser servidos pela planta p em t , κ^{\max} é a quantidade máxima de clientes a serem

incluídos em uma rota, e ρ é a quantidade de rotas extras permitidas de serem criadas em adição à quantidade mínima calculada por $\left\lfloor \frac{\theta_{p,t}}{\kappa^{max}} \right\rfloor$, e $|\mathbf{R}|$ é o cardinal do conjunto de rotas. $\delta_{c,c'}^{CC}$ é a distância entre um cliente c e um cliente c' . $X_{p,t,r,c,c'}$ é uma variável binária que é igual a 1 se um caminhão realiza o percurso saindo do cliente c e indo para o cliente c' , 0 caso contrário. $\delta_{p,c}^{PC}$ é a distância entre uma planta p e um cliente c . $\hat{X}_{p,t,r,c}$ é uma variável binária igual a 1 se um caminhão u visita um cliente c como primeiro cliente em uma rota r partindo-se de uma planta p em t , 0 caso contrário. $\tilde{X}_{p,t,r,c}$ é uma variável binária igual a 1 se o cliente c é o último cliente servido em uma rota r partindo-se de uma planta p em t , 0 caso contrário. $Z_{p,t,r}$ é uma variável binária igual a 1 se a rota r em t está vinculada a uma dada planta p , 0 caso contrário.

O último somatório da Equação 4.1.1 acima é referente a um termo de penalidade com o intuito de forçar a alocação nas primeiras rotas e evitar a busca por soluções simétricas. As restrições matemáticas referentes ao modelo de otimização para geração de rotas são definidas a seguir. Se uma rota não é atribuída a uma planta em um dado dia, nenhum cliente pode estar associado a esta rota, onde esta restrição está representada pela Inequação (4.1.2) abaixo:

$$\sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t}} V_{p,t,r,c} \leq \kappa^{max} \cdot Z_{p,t,r} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{max} \quad (4.1.2)$$

$V_{p,t,r,c}$ é 1 se o cliente c é atribuído à rota r em t partindo-se da planta p e κ^{max} é a quantidade máxima de clientes a serem incluídos em uma rota. Se um cliente está atribuído a uma rota, então é porque o veículo que deve entregar produto a este cliente, fará a entrega após sua saída da USA ou logo após sua saída de outro cliente. A restrição (4.1.3a) garante que haja uma única conexão de entrada em cada cliente:

$$V_{p,t,r,c} = \sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} X_{p,t,r,c',c} + \hat{X}_{p,t,r,c} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{max}, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.3a)$$

Se um cliente está atribuído a uma rota, então é porque o veículo que entregou produto a este cliente, voltará à USA ou irá visitar outro cliente. A restrição (4.1.3b) garante que haja uma única conexão de saída em cada cliente:

$$V_{p,t,r,c} = \sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} X_{p,t,r,c,c'} + \tilde{X}_{p,t,r,c} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max}, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.3b)$$

Se existir uma rota num determinado dia, atrelada a uma determinada planta, só pode haver um cliente desta rota que seja visitado logo após a saída do veículo da USA (Equação 4.1.4a) e um cliente que tenha o veículo saindo dele para a USA (Equação 4.1.4b):

$$\sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t}} \hat{X}_{p,t,r,c} = Z_{p,t,r} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max} \quad (4.1.a)$$

$$\sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t}} \tilde{X}_{p,t,r,c} = Z_{p,t,r} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max} \quad (4.1.b)$$

A Inequação (4.1.5) enumera a ordem de cada cliente visitado e diz que a ordem do cliente c tem que ser menor do que a ordem do cliente c' .

$$O_{p,t,r,c} - O_{p,t,r,c'} + \theta_{p,t} \cdot X_{p,t,r,c,c'} \leq \theta_{p,t} - 1 \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max}, c, c' \in \mathbf{C}_{p,t}, c' \neq c \quad (4.1.5)$$

$O_{p,t,r,c}$ indica a ordem cujo cliente c é servido em uma rota r partindo-se da planta p em t . $O_{p,t,r,c'}$ indica a ordem cujo cliente c' é servido em uma rota r partindo-se da planta p em t . A restrição imposta pela Inequação (4.1.6) estipula o limite superior para $O_{p,t,r,c}$, e estipula que se um cliente não está atribuído a uma rota, a variável que designa a ordem do cliente deve ser nula:

$$O_{p,t,r,c} \leq \kappa^{\max} \cdot V_{p,t,r,c} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max}, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.6)$$

A Inequação (4.1.7) impõe que cada cliente numa rota ativa deve possuir uma ordem e deve ser ordenado conforme o valor de ordem maior ou igual a 1, $O_{p,t,r,c} \geq 1$:

$$O_{p,t,r,c} \geq V_{p,t,r,c} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max}, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.7)$$

A Inequação (4.1.8) restringe o valor da ordem de um cliente em uma rota ativa para que esteja entre 1 e $\sum_{c \in C_{p,t}} V_{p,t,r,c}$ ao qual elimina soluções simétricas no caso em que $\sum_{c \in C_{p,t}} V_{p,t,r,c} < \kappa^{max}$.

$$O_{p,t,r,c} \leq \sum_{c' \in C_{p,t}} V_{p,t,r,c'} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{max}, c \in C_{p,t} \quad (4.1.8)$$

O veículo com produto para abastecimento só pode sair de um cliente e ir para outro, em uma rota, se a distância entre eles for menor ou igual a um valor definido:

$$\delta_{c,c'}^{CC} \cdot X_{p,t,r,c,c'} \leq \delta^{CC_{max}} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{max}, c, c' \in C_{p,t}, c' \neq c \quad (4.1.9)$$

$\delta_{c,c'}^{CC}$ é a distância entre o cliente c e o cliente c' . $\delta^{CC_{max}}$ é a distância máxima permitida entre clientes numa rota. Se a rota $r+1$ existir é porque a rota r existe, e logo, as rotas devem estar alocadas de maneira ordenada:

$$Z_{p,t,r+1} \leq Z_{p,t,r} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r < \eta_{p,t}^{max} \quad (4.1.10)$$

Um cliente só pode estar atribuído a uma única rota:

$$\sum_{r \leq \eta_{p,t}^{max}} V_{p,t,r,c} = 1 \quad \forall p = \pi, t = \tau, c \in C_{p,t} \quad (4.1.11)$$

4.1.1. Restrições inseridas no modelo de geração de rotas e que são optativas para aumentar a eficiência computacional

A seguir são mostradas algumas restrições que foram inseridas no modelo de otimização para aumentar a eficiência computacional, com o objetivo de reduzir o tempo de execução da otimização. Uma outra maneira de dizer que um cliente só pode estar atribuído a uma única rota, e que força que um veículo abasteça ele, vindo da USA ou de outro cliente é através da Inequação (4.1.1.1a):

$$\sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} X_{p,t,r,c',c} + \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} \hat{X}_{p,t,r,c} = 1 \quad \forall p = \pi, t = \tau, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.1.1a)$$

Uma outra maneira de dizer que um cliente só pode estar atribuído a uma única rota, e que força que um veículo que o visitou saia para abastecer outro cliente , ou que simplesmente retorne à USA é através da Inequação (4.1.1.1b):

$$\sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} X_{p,t,r,c,c'} + \sum_{r \leq \eta_{p,t}^{\max}} \tilde{X}_{p,t,r,c} = 1 \quad \forall p = \pi, t = \tau, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.1.1b)$$

Se uma rota não é atribuída a um cliente, o veículo não abastece o cliente e muito menos sairá deste cliente para abastecer outro cliente ou simplesmente voltar à USA:

$$\sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} X_{p,t,r,c',c} + \hat{X}_{p,t,r,c} \leq Z_{p,t,r} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max}, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.1.2a)$$

$$\sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} X_{p,t,r,c,c'} + \tilde{X}_{p,t,r,c} \leq Z_{p,t,r} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max}, c \in \mathbf{C}_{p,t} \quad (4.1.1.2b)$$

A Inequação (4.1.1.3) garante que o número de entrada de veículos no cliente seja igual ao número de saídas de veículos, onde só haverá uma entrada e uma saída por cliente devido às Inequações (4.1.3a), (4.1.3b), (4.1.1.2a) e (4.1.1.2b).

$$\sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} X_{p,t,r,c',c} + \hat{X}_{p,t,r,c} = \sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t} \\ c' \neq c}} X_{p,t,r,c,c'} + \tilde{X}_{p,t,r,c} \quad (4.1.1.3)$$

Se o veículo sai da USA para executar uma rota, ele deve retornar à USA para finalizar esta rota:

$$\sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t}} \hat{X}_{p,t,r,c} = \sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t}} \tilde{X}_{p,t,r,c} \quad \forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{\max} \quad (4.1.1.4)$$

A restrição (4.1.1.5) pode ser optativamente inserida para limitar a quantidade máxima permitida de distância percorrida em uma rota. Onde δ^{max} é a máxima distância percorrida permitida em um dia.

$$\sum_{c \in C_{p,t}} \sum_{\substack{c' \in C_{p,t} \\ c' \neq c}} \delta_{c,c'}^{CC} \cdot X_{p,t,r,c,c'} + \sum_{c \in C_{p,t}} \delta_{p,c}^{PC} \cdot \hat{X}_{p,t,r,c} + \sum_{c \in C_{p,t}} \delta_{p,c}^{PC} \cdot \tilde{X}_{p,t,r,c} \leq \delta^{max} \quad (4.1.1.5)$$

$$\forall p = \pi, t = \tau, r \leq \eta_{p,t}^{max}$$

4.2. MODELO DE OTIMIZAÇÃO DA CADEIA DE SUPRIMENTOS DE ARGÔNIO

Primeiramente é discutido a parte da produção de oxigênio, nitrogênio e argônio líquido nas USAs, e logo em seguida se discute a distribuição de argônio na cadeia de suprimentos da Praxair Inc.

4.2.1. Modelagem da produção

As principais decisões que a formulação MILP do estudo de caso retorna como resultado da otimização são:

- i) O quanto deve ser produzido de produtos líquidos em cada planta e em cada dia.
- ii) Em qual maneira a planta operará em um determinado período de tempo. Se a planta opera sob inicialização, estado estacionário ou sob desligamento.
- iii) Em qual modo de operação a planta operará.
- iv) Se haverá entrega de produtos líquidos em um certo dia, com o caminhão partindo de uma certa planta e visitando certos clientes utilizando uma das rotas geradas previamente pelo modelo de geração de rotas.
- v) O quanto que tem que ser carregado de produto líquido no caminhão que sairá para executar alguma rota.
- vi) O quanto que o caminhão descarrega em cada cliente.
- vii) Níveis dos tanques de produtos líquidos de cada cliente e cada planta.

A produção é inserida no modelo através de equações que representam a região viável convexa de operação em que os vértices do *simplex* são obtidos através do algoritmo *The Quickhull Algorithm for Convex Hulls* (BARBER et al., 1996), ao qual neste caso é um

envelope 3D ao qual os eixos representam a vazão volumétrica de oxigênio, nitrogênio e argônio líquidos. Neste caso, estas equações expandem o domínio possível de operação da USA, configurando possíveis pontos de operação que não foram os pontos com dados coletados para a construção do envelope. Na otimização do modelo, estas equações possuem um papel fundamental para auxiliar na decisão de como a produção vai ser efetuada, isto é, qual será a vazão de produção para cada um dos componentes ao longo dos dias do mês de planejamento, para que os custos de produção e distribuição sejam mínimos. Os pontos que são inseridos nestas equações de envelope convexo são os *slates*, os quais representam a vazão de produção de cada um dos componentes em cada modo de operação, e que servem para cálculo dos pontos extremos que definem a região convexa de operação da planta. Estes *slates* são expressos na unidade de Kcf.h^{-1} . Então como o modelo é discretizado em dias, é necessário suas multiplicações por um fator de tempo de operação da planta por dia, igual a 24 horas se opera em estado estacionário ou de 22 horas se opera sob inicialização ou desligamento.

O *slate* também representa indiretamente a quantidade de energia elétrica consumida para haver tal produção indicada pelo *slate*, e através de uma regressão multilinear é possível encontrar os coeficientes, que junto com os valores de um dado *slate*, quando todos são substituídos nas equações lineares da regressão multilinear, descrevem a quantidade de energia elétrica gasta na produção dos componentes líquidos. Cada USA terá um envelope convexo para cada modo de operação, ao qual é explicado a seguir.

USAs podem diferir na maneira como é realizada sua produção, e.g. em algumas USAs da Praxair Inc. há um liquefator extra de nitrogênio, em que usualmente há a produção utilizando apenas um liquefator. Então, em outras palavras, pode-se dizer que uma USA pode operar diferentemente, ou seja, com diferentes modos de operação, ao qual esses modos de operação ($m \in \mathbf{M}_p$) são imbutidos no modelo de produção. No modelo foram inseridos dois modos de operação para uma planta, ao qual o primeiro se refere ao uso de apenas um liquefator, e outro se refere à produção utilizando dois liquefatores. Cada modo de operação possui diferentes *slates* com diferentes gastos de energia elétrica. Logo, o modo de operação também é uma variável de decisão para as plantas que possuem a oportunidade de trabalhar com os dois liquefatores, isto é, apenas para as que possuem dois liquefatores.

O ideal da produção é desligar a planta quando o preço de energia elétrica estiver alto, porém nem sempre isso é possível, por questões de saciamento da demanda de cada cliente. É assumido para a produção que a planta não pode inicializar num dia e se desligar nesse mesmo dia, ou ela se inicializa ou se desliga em um determinado dia. Por motivos técnicos, o argônio só começa a ser produzido dois dias depois do dia em que a planta é desligada, ou seja, um dia

depois do dia em que a planta é inicializada. A inicialização ou desligamento da USA dura em média 2 horas e a Figura 4.2.1.1 abaixo ilustra um exemplo de como poderia ser a produção durante um mês com este esquema de produção:

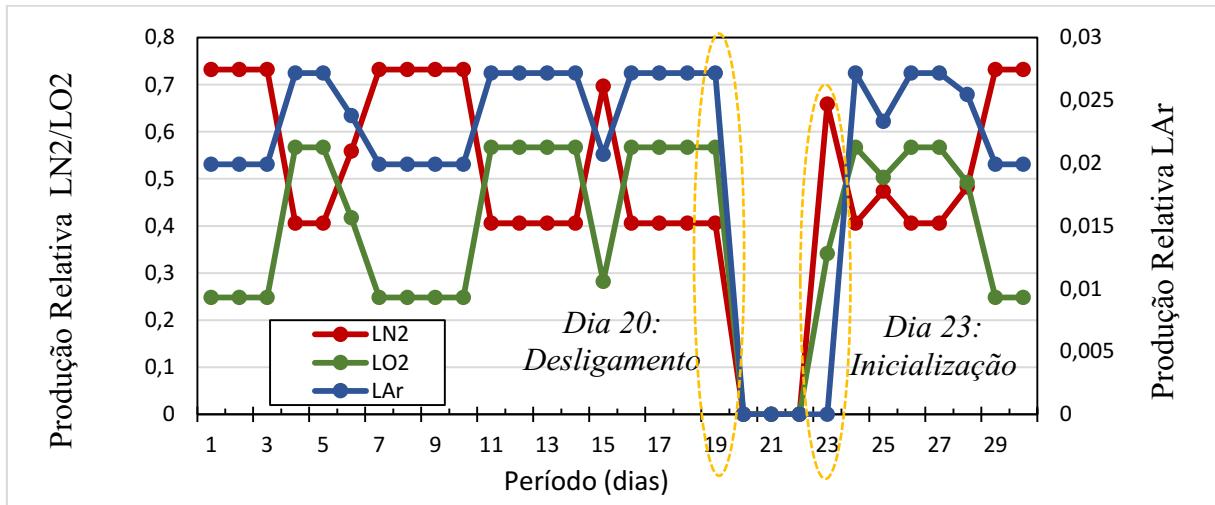


Figura 4.2.1.1: Exemplificação do perfil de produção de O₂, N₂ e Ar líquidos em uma USA durante o mês de operação.

Adaptado de Sergio *et al.* (2020)

Se uma planta está operando em estado estacionário em um determinado dia, somente um modo de operação pode estar atribuído a ela:

$$Y_{p,t} = \sum_{m \in \mathbf{M}_p} Y_{p,t,m}^M \quad \forall p, t \quad (4.2.1.1)$$

$Y_{p,t}$ é uma variável binária e é igual a 1 se uma planta p é operada em t , 0 caso contrário. $Y_{p,t,m}^M$ é uma variável binária e é igual a 1 se a planta p é operada num modo m em t , 0 caso contrário. \mathbf{M}_p é o conjunto de modos de operações de uma planta p . O ponto de operação atual de uma planta que está operando em um determinado dia é uma combinação convexa dos pontos extremos que definem a região convexa de operação da planta para um determinado modo de operação m , ao qual o somatório desses fatores de multiplicação do envelope convexo é igual a 1 por definição:

$$Y_{p,t,m}^M = \sum_{j \in J_{p,m}} F_{p,t,m,j} \quad \forall p, t, m \in \mathbf{M}_p \quad (4.2.1.2)$$

$F_{p,t,m,j}$ [0,1] é o multiplicador fracionário relacionado a um *slate* j quando uma planta p é operada num modo m em t . $\mathbf{J}_{p,m}$ é o conjunto de vértices j da região convexa viável de operação da planta p quando operada no modo m . A vazão de produção dos produtos líquidos em cada modo de operação é expressado pela Equação (4.2.1.3), ao qual $\vartheta_{p,m,j,k}$ representa a vazão do produto no *slate*:

$$\bar{V}_{p,t,m,k} = \sum_{j \in \mathbf{J}_{p,m}} F_{p,t,m,j} \cdot \vartheta_{p,m,j,k} \quad \forall p, t, k, m \in \mathbf{M}_p \quad (4.2.1.3)$$

$\bar{V}_{p,t,m,k}$ é a produção horária desagregada de produto k quando uma planta p é operada num modo m em t . Da mesma forma que no estado estacionário, no dia em que há inicialização ou desligamento da planta, só pode haver um modo de operação (Inequações 4.2.1.4 e 4.2.1.5), e a produção deve ser representada pelas Equações (4.2.1.6 a 4.2.1.9) do envelope convexo, ao qual o lado esquerdo das Equações (4.2.1.3, 4.2.1.7 e 4.2.1.9) representam as vazões volumétricas desagregadas do estado estacionário, da inicialização e do desligamento, respectivamente, para cada produto:

$$Y_{p,t}^S = \sum_{m \in \mathbf{M}_p} Y_{p,t,m}^{SM} \quad \forall p, t \quad (4.2.1.4)$$

$$Y_{p,t}^E = \sum_{m \in \mathbf{M}_p} Y_{p,t,m}^{EM} \quad \forall p, t \quad (4.2.1.5)$$

$$Y_{p,t,m}^{SM} = \sum_{j \in \mathbf{J}_{p,m}} F_{p,t,m,j}^S \quad \forall p, t, m \in \mathbf{M}_p \quad (4.2.1.6)$$

$$\bar{V}_{p,t,m,k}^S = \sum_{j \in \mathbf{J}_{p,m}} F_{p,t,m,j}^S \cdot \vartheta_{p,m,j,k} \quad \forall p, t, k, m \in \mathbf{M}_p \quad (4.2.1.7)$$

$$Y_{p,t,m}^{EM} = \sum_{j \in \mathbf{J}_{p,m}} F_{p,t,m,j}^E \quad \forall p, t, m \in \mathbf{M}_p \quad (4.2.1.8)$$

$$\bar{V}_{p,t,m,k}^E = \sum_{j \in \mathbf{J}_{p,m}} F_{p,t,m,j}^E \cdot \vartheta_{p,m,j,k} \quad \forall p, t, k, m \in \mathbf{M}_p \quad (4.2.1.9)$$

$Y_{p,t}^S$ é 1 se uma planta p se inicializa em t , 0 caso contrário. $Y_{p,t}^E$ é 1 se uma planta p entra em desligamento em t , 0 caso contrário. $Y_{p,t,m}^{EM}$ é 1 se a planta p entra em desligamento num

modo m em t , 0 caso contrário. $Y_{p,t,m}^{SM}$ é 1 se a planta p é inicializada no modo m em t , 0 caso contrário. $\bar{V}_{p,t,m,k}^S$ é a produção horária desagregada de produto k quando uma planta p é operada num modo m em t quando a planta é inicializada. $F_{p,t,m,j}^S$ [0,1] é o multiplicador fracionário relacionado a um *slate* j quando uma planta p é operada num modo m em t quando a planta é inicializada. $F_{p,t,m,j}^E$ [0,1] é o multiplicador fracionário relacionado a um *slate* j quando uma planta p é operada num modo m em t quando uma planta entra em desligamento. Para garantir que não haja a produção de argônio líquido neste modelo quando a planta é inicializada em algum dia, é incluído a condição neste modelo de que para o argônio, $\vartheta_{p,m,j,k} = 0$. Se uma planta é inicializada em um dia t ou opera em estado estacionário neste dia, no próximo dia $t+1$ ela deve operar em estado estacionário ou deve ser desligada, assim como nunca poderá haver duas inicializações em dias consecutivos:

$$Y_{p,t+1} + Y_{p,t+1}^E = Y_{p,t} + Y_{p,t}^S \quad \forall p, t \quad (4.2.1.10)$$

Em um dia, uma planta deve estar em estado estacionário, sob inicialização ou sob desligamento:

$$Y_{p,t} + Y_{p,t}^E + Y_{p,t}^S \leq 1 \quad \forall p, t \quad (4.2.1.11)$$

A produção total de uma planta em unidade de volume (kcf) para cada produto líquido em cada dia é expressa pela Equação (4.2.1.12), ao qual como a unidade da vazão volumétrica desagregada é em kcf.h^{-1} , é necessário a multiplicação pela quantidade de horas do dia que a planta opera para obter a vazão total no dia, tendo $\tau^N = 24$ horas de funcionamento da planta em um dia que ela opera em estado estacionário, $\tau^S = 22$ horas para o dia em que ela tem a sua inicialização, e $\tau^E = 22$ horas para o dia em que ela tem o seu desligamento.

$$V_{p,t,k} = \tau^N \sum_{m \in M_p} \bar{V}_{p,t,m,k} + \tau^S \sum_{m \in M_p} \bar{V}_{p,t,m,k}^S + \tau^E \sum_{m \in M_p} \bar{V}_{p,t,m,k}^E \quad \forall p, t, k \quad (4.2.1.12)$$

$V_{p,t,k}$ é a produção diária de produto k na planta p em t . Como já visto anteriormente, cada USA possui tanques de armazenamento de argônio, nitrogênio e oxigênio, onde seus inventários são descritos através dos balanços de massa descrito pelas Equações (4.2.1.13 e 4.2.1.14). O inventário de argônio (Equação 4.2.1.13) em uma planta p num certo dia t é

influenciado pelo inventário do dia passado, pela quantidade recebida e/ou transferida de argônio de/para outra planta, pela quantidade de argônio que sai pra executar as entregas para os clientes, e pela quantidade produzida de argônio na planta. Os inventários de oxigênio e nitrogênio são descritos através da Equação (4.2.1.14). A restrição (4.2.1.15) limita o valor do inventário da planta entre limites mínimos e máximos que são definidos pelo usuário.

$$I_{p,t,k}^P = \sigma_{p,k}^{P_0}|_{t=1} + I_{p,t-1,k}^P|_{t>1} + V_{p,t,k} + \sum_{p' \in \mathbf{P}_p^I} \sum_{l \in \mathbf{L}_{p',p}} V_{p,l,p',t-\tau_l^{IT}}^{IT} - \sum_{p' \in \mathbf{P}_p^O} \sum_{l \in \mathbf{L}_{p,p'}} V_{p,l,p',t}^{IT} - \sum_{u \in \mathbf{U}_p^{SD}} \sum_{\mathbf{R}_{p,t}^{SD}} V_{p,u,t,r}^{ST} \quad \forall p, t; k = \text{LAr} \quad (4.2.1.13)$$

$$I_{p,t,k}^P = \sigma_{p,k}^{P_0}|_{t=1} + I_{p,t-1,k}^P|_{t>1} + V_{p,t,k} - \gamma_{p,t,k} \quad \forall p, t; k = \text{LO2/LN2} \quad (4.2.1.14)$$

$$\sigma_{pk}^{P_{min}} \leq I_{p,t,k}^P \leq \sigma_{pk}^{P_{max}} \quad \forall p, t, k \quad (4.2.1.15)$$

$I_{p,t,k}^P$ é o inventário de produto k na planta p em t . $\sigma_{p,k}^{P_0}|_{t=1}$ é o inventário inicial de produto k na planta p . $V_{p,l,p',t}^{IT}$ é o volume de Ar transferido entre plantas p e p' através da rota l em t . $V_{p,u,t,r}^{ST}$ é o volume de Ar carregado em um caminhão u indo por uma rota r partindo-se de uma planta p em t . $\gamma_{p,t,k}$ é a demanda mensal do produto k (N_2 e O_2) na planta p . Como o escopo deste modelo é incluir a distribuição de argônio para os clientes, e cada cliente possui seu próprio inventário de argônio (tanques de armazenamento), o balanço de massa de argônio é descrito pela Equação (4.2.1.16), ao qual inclui a contribuição do inventário do dia anterior, a quantidade de argônio entregue pelos veículos, e o consumo diário de argônio pelo cliente. O inventário do cliente deve permanecer entre um valor mínimo e máximo definido pelo usuário (Restrição 4.2.1.17).

$$I_{c,t}^C = \sigma_c^o|_{t=1} + I_{c,t-1}^C|_{t>1} + \sum_p \sum_{u \in \mathbf{U}_p^{ST}} \sum_{r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}} \bar{V}_{p,u,t,r,c}^{ST} - \gamma_{c,t}^{Ar} \quad \forall c, t \quad (4.2.1.16)$$

$$\sigma_c^{C_{min}} \leq I_{c,t}^C \leq \sigma_c^{C_{max}} \quad \forall c, t \quad (4.2.1.17)$$

$I_{c,t}^C$ é o inventário de Ar líquido no cliente c em t . σ_c^0 é o inventário inicial de Ar no cliente c . $\bar{V}_{p,u,t,r,c}^{ST}$ é o volume de Ar líquido descarregado de um caminhão u em um cliente c quando o mesmo partiu da planta p pela rota r em t . $\gamma_{c,t}^{Ar}$ é a demanda de Ar líquido no cliente c em t . É necessário haver restrições que limitam os valores de algumas variáveis, aos quais são representadas pelas Restrições (4.2.1.18 – 4.2.1.24):

$$Y_{p,t}^S = 0 \quad \forall p, t = 1 \quad (4.2.1.18)$$

$$Y_{p,t}^E = 0 \quad \forall p, t = |T| \quad (4.2.1.19)$$

$$I_{p,t,k}^P \geq \sigma_{p,k}^{P_0} \quad \forall p, t = |T|, k \quad (4.2.1.20)$$

$$I_{c,t}^C \geq \sigma_c^{C_0} \quad \forall c, t = |T|, k \quad (4.2.1.21)$$

$$0 \leq Y_{p,t}, Y_{p,t}^S, Y_{p,t}^E \leq 1 \quad \forall p, t \quad (4.2.1.22)$$

$$\epsilon_l^{I_{min}} Y_{p,l,p',t}^{IT} \leq V_{p,l,p',t}^{IT} \leq \epsilon_l^{I_{max}} Y_{p,l,p',t}^{IT} \quad \forall p, p' \in \mathbf{P}_p^O, l \in \mathbf{L}_{p,p'}, t \quad (4.2.1.23)$$

$$0 \leq F_{p,t,m,j}, F_{p,t,m,j}^S, F_{p,t,m,j}^E \leq 1 \quad \forall p, t, m \in \mathbf{M}_p, j \in \mathbf{J}_{p,m} \quad (4.2.1.24)$$

$\epsilon_l^{I_{max}} / \epsilon_l^{I_{min}}$ limite superior/inferior da quantidade de Ar líquido entregue através da rota l por um trem. $Y_{p,l,p',t}^{IT}$ é igual a 1 se Ar é transferido da planta p para a planta p' através da rota l em t , 0 caso contrário. \mathbf{P}_p^O é o conjunto de plantas que podem receber Ar líquido da planta p . $\mathbf{L}_{p,p'}$ é o conjunto que define a existência de uma rota de trilha de trem entre plantas p e p' . $\mathbf{J}_{p,m}$ é o conjunto de vértices j que estão na borda da região convexa viável de operação da planta p quando operada no modo m . A restrição (4.2.1.25) impõe um limite máximo de produção diária em todas as plantas, ao qual o critério de restrição é o custo do uso de energia elétrica para produção, i.e. o custo ocasionado pela produção diária em todas as plantas não pode exceder um valor definido $MPCOST$. Este limite na produção acontece porque se o custo é limitado, então a quantidade de energia gasta também será indiretamente limitada, e por isso a produção também. Esta restrição (4.2.1.25) pode flexibilizar a produção do modelo, i.e. evitar o sobrecarregamento da produção diária, podendo melhorar a viabilidade do problema através do relaxamento do modelo. α_1 é o fator de penalidade que penaliza a função objetivo a troco de regular a robustez do problema com incerteza.

Custo de produção num dia se a USA opera em Estado Estacionário:

$$\sum_p \left(\alpha_1 E\{\xi^{PW}\} \cdot \tau^N \sum_{m \in \mathbf{M}_p} \left(\left(\sum_k \alpha_{p,m,k} \cdot \bar{V}_{p,t,m,k} \right) + \beta_{p,m} \cdot Y_{p,t,m}^M \right) \right) +$$

Custo de produção num dia se a USA tem a sua inicialização:

$$\sum_p \left(\alpha_1 E\{\xi^{PW}\} \cdot \tau^S \sum_{m \in \mathbf{M}_p} \left(\left(\sum_k \alpha_{p,m,k} \cdot \bar{V}_{p,t,m,k}^S \right) + \beta_{p,m} \cdot Y_{p,t,m}^{SM} \right) \right) +$$

Custo de produção num dia se a USA tem o seu desligamento:

$$\sum_p \left(\alpha_1 E\{\xi^{PW}\} \cdot \tau^E \sum_{m \in \mathbf{M}_p} \left(\left(\sum_k \alpha_{p,m,k} \cdot \bar{V}_{p,t,m,k}^E \right) + \beta_{p,m} \cdot Y_{p,t,m}^{SE} \right) \right) \leq MPCOST \quad (4.2.1.25)$$

ξ^{PW} é o preço de energia elétrica e $E\{\xi^{PW}\}$ é o valor esperado de ξ^{PW} . α_1 é o fator de penalidade atrelado a $E\{\xi^{PW}\}$. τ^N , τ^S e τ^E são respectivamente, a quantidade de horas que representa a duração de um dia, a quantidade de horas necessárias para completar a inicialização de uma planta, e a quantidade de horas necessárias para completar o desligamento de uma planta. $\alpha_{p,m,k}$ é o coeficiente linear do custo de produção do produto k se a planta p é operada no modo m . $\beta_{p,m}$ é o coeficiente fixo do custo de produção da planta p se operada no modo m .

4.2.2. Modelagem da distribuição de argônio

O conjunto de rotas geradas $\mathbf{R}_{p,t}^{ST}$ pelo primeiro modelo de otimização de rotas para minimização da distância de entrega são introduzidos nesse segundo modelo (modelo da cadeia de suprimentos de argônio), e estas rotas são introduzidas como um conjunto de rotas com clientes associados a cada rota. A decisão no modelo integrado (o referente a esta seção) é usar ou não usar a rota. É possível que um subconjunto dos clientes seja visitado em cada rota. Assim sendo, as equações aqui apresentadas são semelhantes às apresentadas no modelo de geração de rotas, mas admitem que as rotas sejam conhecidas, ou seja, em cada rota, se conhece os clientes e a ordem de visita.

A Restrição (4.2.2.1) impõe que cada veículo de entrega possui naturalmente um limite máximo de capacidade, e impõe que o modelo de distribuição neste segundo algoritmo estabeleça que haja um limite mínimo para a quantidade de argônio que deve ser entregue a um cliente.

$$\epsilon_u^{T_{min}} Y_{p,u,t,r}^{ST} \leq V_{p,u,t,r}^{ST} \leq \epsilon_u^{T_{max}} Y_{p,u,t,r}^{ST} \quad \forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, t \quad (4.2.2.1)$$

$\epsilon_u^{T_{min}}/\epsilon_u^{T_{max}}$ são respectivamente, os limites inferior e superior da quantidade de Ar entregue por um caminhão u . $Y_{p,u,t,r}^{ST}$ é igual a 1 se um caminhão u de uma planta p realiza uma entrega através da rota r em t , 0 caso contrário. $V_{p,u,t,r}^{ST}$ é o volume de Ar carregado em um caminhão u indo por uma rota r partindo-se de uma planta p em t . \mathbf{P}^{ST} é conjunto de plantas as quais as entregas podem ser realizadas. \mathbf{U}_p^{ST} é o conjunto de caminhões disponíveis na planta p . Se um veículo está atribuído a uma rota, ele deve partir de uma planta para executar a rota e ao final retornar a esta planta depois de ter visitado todos os clientes atribuídos a esta rota, sendo que um caminhão deve estar atribuído a uma rota. O somatório do lado esquerdo das Equações (4.2.2.2) e (4.2.2.3) garantem que o modelo inclua todos os clientes que pertençam a $\mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}$, ou seja, apenas os clientes que foram colocados em uma rota pelo modelo de geração de rotas, para que a otimização possa encontrar a melhor combinação de clientes para cada rota.

$$\sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}} \hat{X}_{p,u,t,r,c}^{ST} = Y_{p,u,t,r}^{ST} \quad \forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, t \quad (4.2.2.2)$$

$$\sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{SD}} \tilde{X}_{p,u,t,r,c}^{ST} = Y_{p,u,t,r}^{ST} \quad \forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, t \quad (4.2.2.3)$$

$\hat{X}_{p,u,t,r,c}^{ST}$ é igual a 1 se um caminhão u visita um cliente c como primeiro cliente em uma rota r partindo-se de uma planta p em t , 0 caso contrário. $Y_{p,u,t,r}^{ST}$ é igual a 1 se um caminhão u de uma planta p realiza uma entrega através da rota r em t , 0 caso contrário. $\tilde{X}_{p,u,t,r,c}^{ST}$ é igual a 1 se o cliente c é o ultimo cliente servido em uma rota r partindo-se de uma planta p em t , 0 caso contrário. Se um cliente é atribuído a uma rota, é porque o veículo que visita ele provém da planta ou de outro cliente (Equação 4.2.2.4), e porque o veículo sairá dele e irá para outro cliente ou retornará à planta (Equação 4.2.2.5):

$$X_{p,u,t,r,c}^{ST} = \sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST} \\ o_{p,t,r,c'} < o_{p,t,r,c}}} \bar{X}_{p,u,t,r,c',c}^{ST} + \hat{X}_{p,u,t,r,c}^{ST}$$

$$\forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}, t \quad (4.2.2.4)$$

$$X_{p,u,t,r,c}^{ST} = \sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST} \\ o_{p,t,r,c'} > o_{p,t,r,c}}} \bar{X}_{p,u,t,r,c,c'}^{ST} + \hat{X}_{p,u,t,r,c}^{ST}$$

$$\forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}, t \quad (4.2.2.5)$$

$\mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}$ é o conjunto de clientes que podem ser servidos pela planta p através da rota r no tempo t . $X_{p,u,t,r,c}^{ST}$ é igual a 1 se uma planta p envia um caminhão u para o cliente c através da rota r em t , 0 caso contrário. Se um veículo é atribuído a uma rota, sua carga com produto líquido deve ser totalmente entregue para os clientes envolvidos nesta rota (Equação 4.2.2.6), assim como deve estar dentro de um valor limite mínimo e máximo (Restrição 4.2.2.7):

$$V_{p,u,t,r}^{ST} = \sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}} \bar{V}_{p,u,t,r,c}^{ST} \quad \forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, t \quad (4.2.2.6)$$

$$\epsilon_u^{C_{min}} X_{p,u,t,r,c}^{ST} \leq \bar{V}_{p,u,t,r,c}^{ST} \leq \epsilon_u^{T_{max}} X_{p,u,t,r,c}^{ST} \quad \forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}, t \quad (4.2.2.7)$$

$V_{p,u,t,r}^{ST}$ é o volume de Ar carregado em um caminhão u indo por uma rota r partindo-se de uma planta p em t . $\bar{V}_{p,u,t,r,c}^{ST}$ é o volume de Ar líquido descarregado de um caminhão u em um cliente c quando o mesmo partiu da planta p pela rota r em t . $\epsilon_u^{C_{min}}$ é o limite inferior da quantidade de Ar descarregado em um cliente c . As Restrições (4.2.2.8) e (4.2.2.9) aumentam a eficiência da execução do algoritmo, reduzindo o tempo computacional, e impõe a mesma lógica que as Equações (4.2.2.4) e (4.2.2.5), e implica que se um caminhão não está atrelado a uma rota, é porque não há viagem nem de ida e nem de volta de um veículo pra planta na rota. Elas simplesmente dizem que não haverá viagem deste veículo na rota se o mesmo não estiver atribuído a ela.

$$\sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST} \\ o_{p,t,r,c'} < o_{p,t,r,c}}} \bar{X}_{p,u,t,r,c',c}^{ST} + \hat{X}_{p,u,t,r,c}^{ST} \leq Y_{p,u,t,r}^{ST} \quad (4.2.2.8)$$

$$\forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}, t$$

$$\sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST} \\ o_{p,t,r,c'} > o_{p,t,r,c}}} \bar{X}_{p,u,t,r,c,c'}^{ST} + \tilde{X}_{p,u,t,r,c}^{ST} \leq Y_{p,u,t,r}^{ST} \quad (4.2.2.9)$$

$\forall p \in \mathbf{P}^{ST}, u \in \mathbf{U}_p^{ST}, r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}, c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}, t$

A Equação (4.2.2.10) mede a distância de cada rota ótima executada por um veículo, através da soma entre as distâncias de cada trecho da rota percorrida entre cliente-planta e cliente-cliente. Vale ressaltar que neste segundo algoritmo não há a variável de decisão ordem de visita de cada cliente, pois esta variável já é definida no primeiro algoritmo, ao qual as rotas são otimizadas. A ordem de visita $o_{p,t,r,c}$ é encontrada na otimização do primeiro algoritmo e é utilizada como um conjunto no segundo algoritmo, ao qual este conjunto é utilizado como condição de uso da equação, como visto nos termos de condição da Equação (4.2.2.10).

$$R_{p,u,t,r}^{ST} = \sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}} \sum_{\substack{c' \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST} \\ o_{p,t,r,c'} > o_{p,t,r,c}}} \delta_{c,c'}^{CC} \cdot \bar{X}_{p,u,t,r,c,c'}^{ST} + \sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}} \delta_{p,c}^{PC} \cdot \hat{X}_{p,u,t,r,c}^{ST} + \sum_{c \in \mathbf{C}_{p,t,r}^{ST}} \delta_{p,c}^{PC} \cdot \tilde{X}_{p,u,t,r,c}^{ST} \quad (4.2.2.10)$$

$R_{p,u,t,r}^{ST}$ é a distância percorrida por um caminhão u partindo-se de uma planta p através da rota r em t . $\delta^{ST_{max}}$ é a máxima distância percorrida em um dia. Um veículo pode realizar uma rota apenas se esta possuir uma distância de arco menor ou igual a um valor definido pelo usuário:

$$\sum_{r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}} R_{p,u,t,r}^{ST} \leq \delta^{ST_{max}} \quad (4.2.2.11)$$

4.2.3. Função objetivo

A função objetivo (Equação 4.2.3.1) comprehende os custos de produção (gastos com energia elétrica) e distribuição de argônio líquido para os clientes. α_1 é o fator de penalidade que penaliza a função objetivo a troco de regular a robustez do problema com incerteza.

Custo de produção nos dias que a USA opera em Estado Estacionário:

$$\sum_t \sum_p \left(\alpha_1 E\{\xi^{PW}\} \cdot \tau^N \sum_{m \in \mathbf{M}_p} \left(\left(\sum_k \alpha_{p,m,k} \cdot \bar{V}_{p,t,m,k} \right) + \beta_{p,m} \cdot Y_{p,t,m}^M \right) \right) +$$

Custo de produção nos dias que a USA tem a sua inicialização:

$$\sum_t \sum_p \left(\alpha_1 E\{\xi^{PW}\} \cdot \tau^S \sum_{m \in \mathbf{M}_p} \left(\left(\sum_k \alpha_{p,m,k} \cdot \bar{V}_{p,t,m,k}^S \right) + \beta_{p,m} \cdot Y_{p,t,m}^{SM} \right) \right) +$$

Custo de produção nos dias que a USA tem o seu desligamento:

$$\sum_t \sum_p \left(\alpha_1 E\{\xi^{PW}\} \cdot \tau^E \sum_{m \in \mathbf{M}_p} \left(\left(\sum_k \alpha_{p,m,k} \cdot \bar{V}_{p,t,m,k}^E \right) + \beta_{p,m} \cdot Y_{p,t,m}^{SE} \right) \right) +$$

Custo envolvido no transporte de argônio líquido entre duas USAs

$$\sum_t \sum_p \sum_{p' \in \mathbf{P}_p^O} \sum_{l \in \mathbf{L}_{p,p'}} \xi_l^{RR} \cdot Y_{p,l,p',t}^{IT} +$$

Custo envolvido no transporte de argônio líquido para os clientes (milhas percorridas + custo com carregamento dos veículos):

$$\xi^T \cdot \sum_{p \in \mathbf{P}^{ST}} \sum_{u \in \mathbf{U}_p^{ST}} \sum_t \sum_{r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}} R_{p,u,t,r}^{ST} + \xi^{LT} \cdot \sum_{p \in \mathbf{P}^{ST}} \sum_{u \in T} \sum_t \sum_{r \in \mathbf{R}_{p,t}^{ST}} Y_{p,u,t,r}^{ST} \quad (4.2.3.1)$$

ξ_l^{RR} é o custo de transporte através da trilha de trem da rota l – custo por viagem. ξ^T / ξ^{LT} são respectivamente o custo de transportação do caminhão/custo de carregamento da transportação.

4.3. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA FUNÇÃO OBJETIVO DO MODELO DA CADEIA DE SUPRIMENTOS DE ARGÔNIO

Nesta seção é comentado sobre a elaboração da análise de sensibilidade que foi realizada para a função objetivo da Equação (4.2.3.1) para analisar a relação de ordem do comportamento desta função, para poder observar graficamente a monotonicidade e o grau de suavidade da função. Os resultados estão na seção 5.1 do capítulo 5. Todos os termos da Equação (4.2.3.1) referente à FO só podem ser matematicamente positivos após a substituição dos valores das variáveis e parâmetros, logo ela só poderia ser uma função monótona ou estritamente monótona,

além de que é uma equação linear e por natureza é convexa no domínio das variáveis reais. Os resultados são discutidos na seção 5.1.

4.4. APLICAÇÃO DO FRAMEWORK PARA O PROBLEMA ESTUDO DE CASO

Nesta seção é discutido sobre como foi realizada a aplicação do *framework* para o problema estudo de caso da cadeia de suprimentos de argônio. Os resultados estão expostos e discutidos na seção 5.2 do capítulo 5. Na cadeia do problema existem 6 plantas e 84 clientes, dentre estas plantas há entrega de argônio para os 84 clientes através de veículos que saem de 4 dessas plantas (plantas A, B, C e D), enquanto as outras 2 plantas (plantas E e F) são responsáveis pela entrega de argônio para as outras 4 plantas (A, B, C e D) através da entrega via trilhos ferroviários. A cadeia de suprimentos possui 6 caminhões em funcionamento, aos quais dois são da planta A, um é da planta B, dois são da planta C, e outro é da planta D.

Para o problema estudo de caso, os parâmetros do modelo do estudo de caso em que são considerados incertezas, são o preço diário de energia elétrica (ξ^{PW}) de cada planta industrial e a demanda de argônio nos clientes $\gamma_{c,t}^{Ar}$ (incerteza aditiva no modelo) da Equação (4.2.1.16). Foi realizado duas aplicações do framework em dois casos diferentes para a incerteza na demanda: o 1º caso considera a incerteza como sendo a demanda mensal geral de argônio de todos os clientes (o valor aleatório é gerado para o somatório da demanda individual de cada cliente) que tem metade do valor nominal integral, em que cada cliente tem sua própria demanda e que diferem entre si em porcentagem nominal da demanda geral incerta; o 2º caso de aplicação considera as incertezas como sendo as demandas mensais individuais de cada cliente (os valores são aleatoriamente gerados para cada indivíduo e não para o somatório deles), ao qual a demanda total (o somatório da demanda de cada indivíduo) possui valor nominal integral. Para determinar os valores de $f_{obj}^{rob(LTRR)}$ ao longo da realização do algoritmo do *framework*, o valor nominal do ξ^{PW} conforme formulação matemática do *framework* é o valor esperado dos dados históricos, enquanto que o valor da demanda é gerado aleatoriamente conforme distribuição normal uma única vez antes de cada realização de otimização.

Houve várias pesquisas envolvendo distribuições exponenciais para a representação de incertezas num processo (e.g., ZHOU e DISNEY, 2006; SAJADIEH *et al.*, 2009; KIM *et al.*, 2014; CHEN *et al.*, 2015; LARIVIERI, 1999; RYU e LEE, 2003). Neste estudo de caso o ξ^{PW} de cada planta industrial é uma incerteza que teve a distribuição exponencial como função de densidade de probabilidade. Por exemplo, a Figura 4.4.1 mostra a distribuição exponencial dos

dados históricos do ξ^{PW} de uma das plantas do estudo de caso. Em relação à natureza da distribuição de probabilidade da demanda geral de todos os clientes, foi assumido distribuição normal assim como é altamente invocado na literatura.



Figura 4.4.1: Distribuição exponencial dos dados históricos de ξ^{PW} na planta A da cadeia de suprimentos de argônio do estudo de caso.

O modelo determinístico do estudo de caso foi sintonizado (sintonia dos desvios padrões e fatores de penalidade) considerando valores nominais factíveis para os parâmetros relacionados à produção de planta e distribuição para clientes, e o α_1 das Equações 4.2.1.25 e 4.2.3.1 foi considerado como tendo o valor padrão igual a 1. O valor numérico dos parâmetros do modelo do estudo de caso, bem como o valor da função objetivo oriundo da otimização, não podem ser apresentados por questões de sigilo por se tratar de dados reais de plantas.

Foram especificados valores de 75, 90 e 115% do valor nominal considerado do problema para a f_{obj}^{ODGR} a fim de poder analisar o problema diante de várias possibilidades de ocorrência. Além disso foram considerados três valores para o desvio padrão da demanda geral dos clientes (para sintonia), 5, 10 e 15 % do valor da demanda geral dos clientes do problema nominal (determinístico). Para cada valor de desvio padrão foram realizados 100 otimizações para o 1º caso de aplicação e 100 otimizações para o 2º caso. No entanto, para o 1º caso cada ARM^σ é baseado na média de 100 valores obtidos de $f_{obj}^{rob(LTRR)}$ atrelado a cada valor de desvio padrão, enquanto que para o 2º caso cada ARM^σ é baseado na média de 50 valores obtidos de $f_{obj}^{rob(LTRR)}$, essa diferença é devido ao fato que no 2º caso nem todas soluções dão viáveis, então só faz sentido calcular a média em relação aos valores que deram viáveis. Todos os

resultados desta seção 4.4, seguindo as etapas do algoritmo do *framework*, são mostrados na seção 5.2 do capítulo 5.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados das seções 4.3 e 4.4 são apresentados neste capítulo. A seção 5.1 deste capítulo contempla gráficos que mostram a monotonicidade da FO do problema estudo de caso. Além disto a seção 5.2 mostra os resultados referentes aos dois casos de sintonia dos valores dos desvios padrões da demanda no modelo do problema estudo de caso e mostra os valores do ARM que inferem diretamente em quanto que as soluções robustas se aproximam da solução ideal (f_{obj}^{ODGR}) em média.

5.1. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A análise de sensibilidade do estudo de caso é mostrada nas Figuras 5.1.1 a 5.1.4, ao qual a Figura 5.1.1 diz respeito à análise de sensibilidade da função objetivo e do custo de produção do problema em função da variação do preço de energia elétrica médio dos dias, considerando o valor nominal de demanda geral de todos os clientes no problema, e a Figura 5.1.2 diz respeito à análise de sensibilidade do custo de distribuição do problema em função da variação do preço de energia elétrica sob as mesmas condições. A Figura 5.1.3 diz respeito à análise de sensibilidade da função objetivo e do custo de produção do problema em função da variação da demanda geral de todos os clientes, considerando os valores nominais do preço de energia elétrica do problema, enquanto que a Figura 5.1.4 diz respeito à análise de sensibilidade do custo de distribuição do problema em função da variação da demanda geral de todos os clientes sob as mesmas condições. Os eixos das abscissas das Figuras 5.1.1 a 5.1.4 dizem respeito ao fator de multiplicação do valor nominal. Já os eixos das ordenadas destas figuras, estão normalizados em relação percentual (e.g o valor 1,4 significa: 40% maior do que o valor mínimo da análise) ao valor mínimo dos dados plotados (fator de multiplicação do custo). A normalização é necessária para proteger informações sigilosas da empresa.

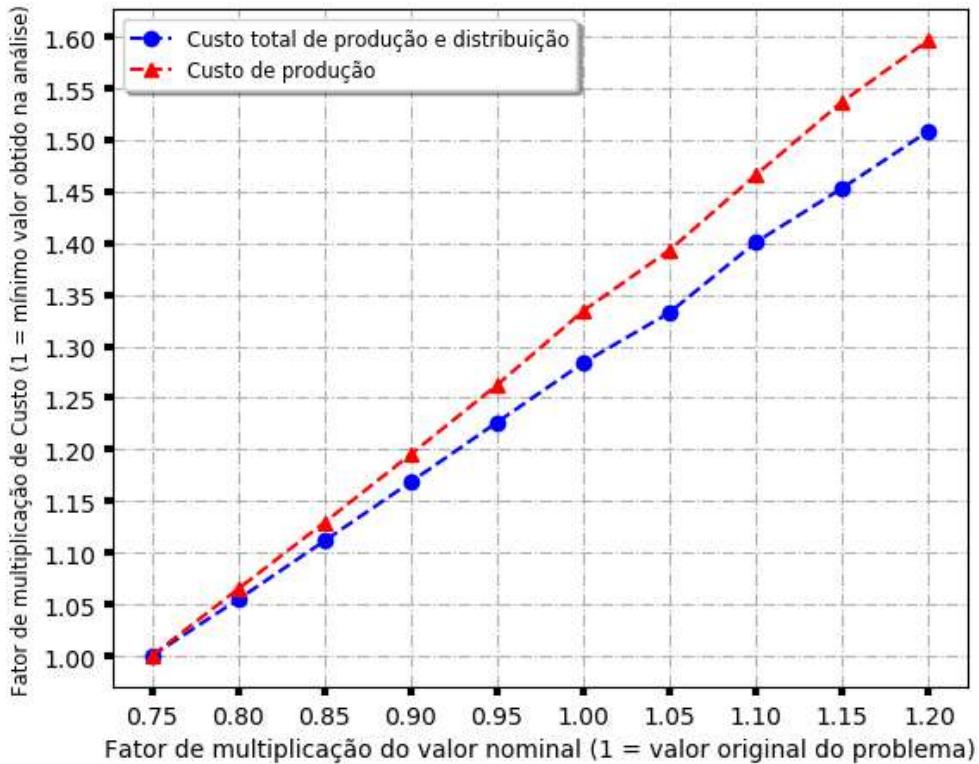


Figura 5.1.1: Análise de sensibilidade da função objetivo e do custo de produção em relação ao preço de energia elétrica, considerando o valor nominal de demanda geral de todos os clientes no problema.

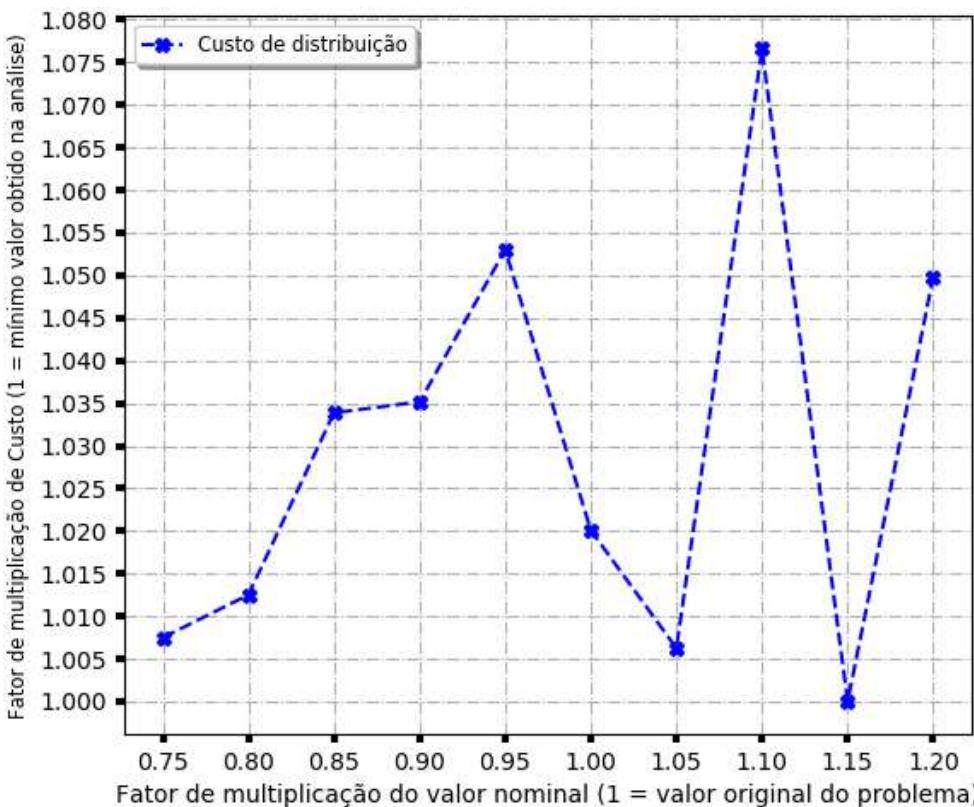


Figura 5.1.2: Análise de sensibilidade do custo de distribuição em relação ao preço de energia elétrica, considerando o valor nominal de demanda geral de todos os clientes no problema.

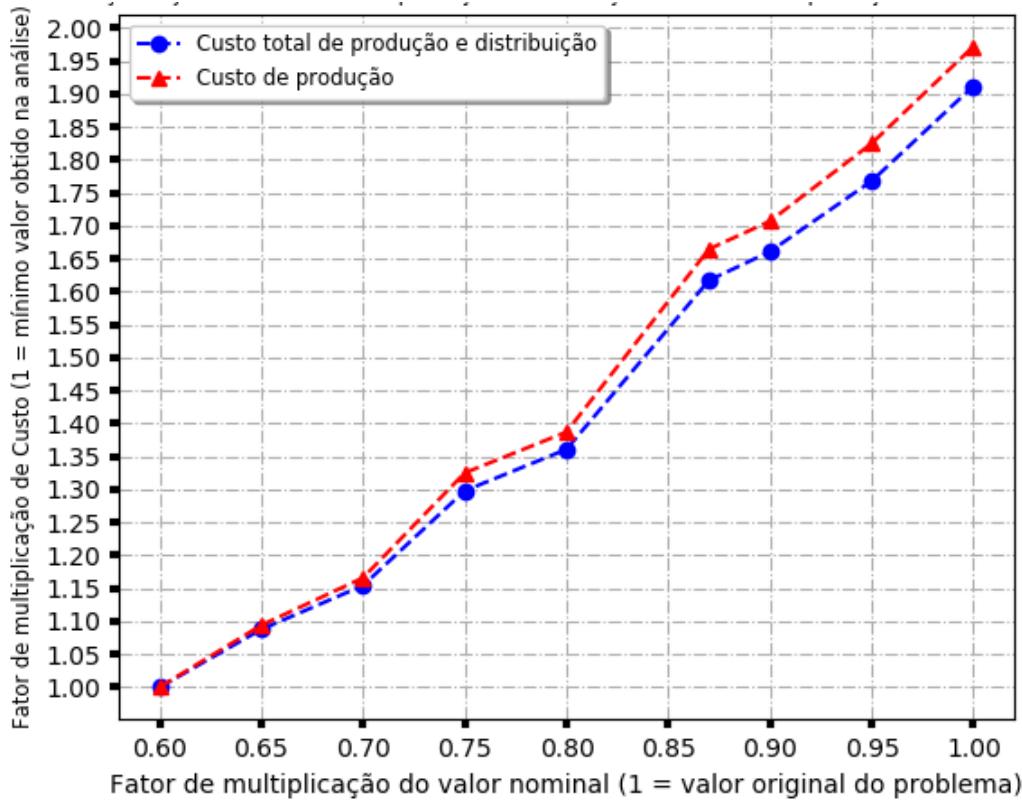


Figura 5.1.3: Análise de sensibilidade da função objetivo e do custo de produção do problema em relação à demanda geral de todos os clientes, considerando os valores nominais de preço da energia elétrica do problema.

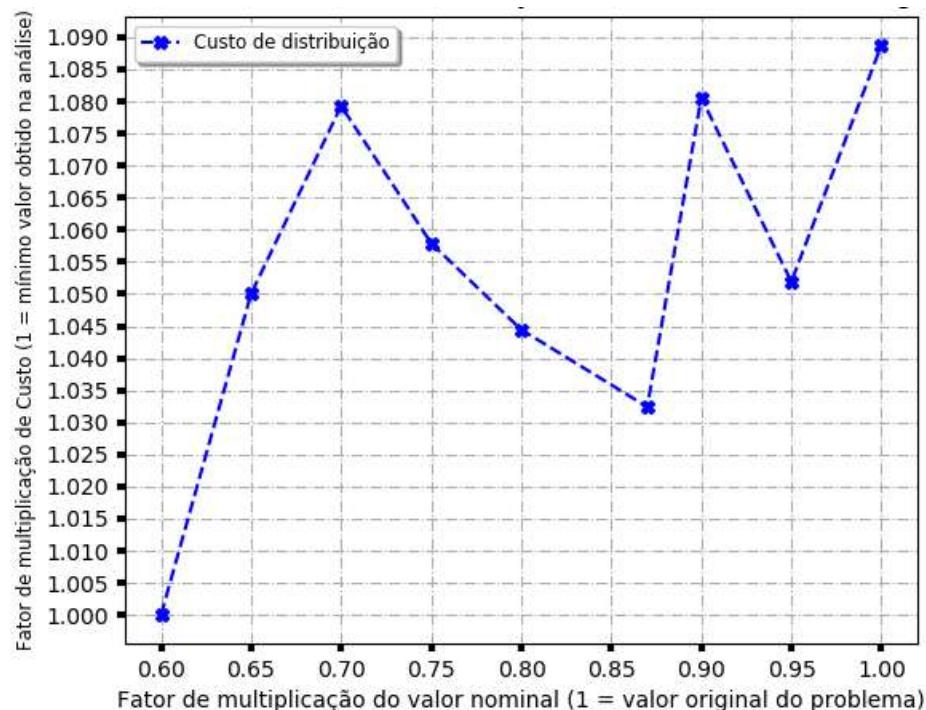


Figura 5.1.4: Análise de sensibilidade do custo de distribuição do problema em relação à demanda geral de todos os clientes, considerando os valores nominais de preço da energia elétrica do problema.

A seguir será discutido como pode ser realizada a interpretação dos gráficos. Em relação à Figura 5.1.1, quando se aumenta em 20% o valor nominal de ξ^{PW} (valor igual a 1,2 no eixo da abscissa), a FO aumenta em aproximadamente $(\frac{1,5}{1,28} - 1) \cdot 100\% = 17,18\%$ em relação ao valor da FO que considera o valor nominal de ξ^{PW} (ponto referente ao valor igual a 1 no eixo da abscissa). Em relação à Figura 5.1.2 e 5.1.4, o comportamento não-linear individual do custo de distribuição é explicado pelo fato de que a distribuição de produtos ao longo da cadeia de suprimentos não é uniforme, decisão esta existente devido às variáveis binárias de decisões. Em relação à Figura 5.1.3, quando se diminui em 40% o valor da demanda geral de todos os clientes (o somatório das demandas individuais mensais de cada um) a FO diminui $(\frac{1,96}{1} - 1) \cdot 100\% = 96\%$ em relação ao valor da FO que considera o valor nominal para a demanda geral.

Como pode ser observado nas Figuras 5.1.1 e 5.1.3, a função objetivo do problema de otimização do estudo de caso, possui comportamento apenas crescente em relação às incertezas do processo. O axioma *ii*) está sendo respeitado pois a incerteza do tipo normal que é a demanda geral dos clientes, mostrou ter relação de ordem monótona. A plotagem do gráfico serve apenas como caráter de observação, pois a partir da observância da equação da função objetivo já é possível identificar o comportamento da função em relação ao exigido no axioma *ii*). Ressaltando que pela forma como estes gráficos da seção 5.1. foram normalizados, o fato da curva do custo de produção estar acima do custo total, não quer dizer que ela seja maior.

5.2. SINTONIA DO MODELO DO ESTUDO DE CASO VIA USO DO *FRAMEWORK*

O modelo determinístico do estudo de caso foi transformado para a formulação matemática do *framework*, e o algoritmo do *framework* foi implementado em um arquivo do tipo .gms com linguagem própria do software GAMS® 24.3.3 (GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA), ao qual as otimizações foram realizadas através do solver CPLEX (IBM ILOG CPLEX, Armonk, NY, USA). Segundo os passos do algoritmo do *framework*, e após finalizada as etapas, os valores de cada ARM^σ relacionados a cada valor de desvio padrão para cada diferente f_{obj}^{ODGR} do 1º caso de aplicação são mostrados na Tabela 5.2.1, enquanto a Tabela 5.2.2 mostra os resultados do 2º caso de aplicação.

Tabela 5.2.1. Valores de ARM^σ para cada desvios padrões e f_{obj}^{ODGR} considerados, no 1º caso de aplicação.

f_{obj}^{ODGR}	Desvio padrão	$ARM^\sigma(\%)$	$\Gamma(\%)$
	5% do valor nominal	4,79	100
75% do valor nominal	10% do valor nominal	4,65	100
	15% do valor nominal	4,617	100
	5% do valor nominal	12,902	100
90% do valor nominal	10% do valor nominal	13,027	100
	15% do valor nominal	13,043	100
	5% do valor nominal	31,659	100
115% do valor nominal	10% do valor nominal	31,750	100
	15% do valor nominal	31,771	100

Pela própria definição, o $ARM^\sigma(\%)$ informa o quanto que as soluções robustas ($\sum_{N^{BIG}} f_{obj}^{rob(LTRR)}$) se aproximam da solução ideal (f_{obj}^{ODGR}) em média. Pela Tabela 5.2.1 pode-se observar os melhores valores de desvios padrões sintonizados, destacados em vermelho, para a demanda geral dos clientes em cada diferente situação de valor de f_{obj}^{ODGR} . Para uma f_{obj}^{ODGR} igual a 75% do valor nominal considerado, o melhor desvio padrão foi o de 15% do valor nominal de demanda, já para as f_{obj}^{ODGR} iguais a 90 e 115% do valor nominal foi o desvio padrão de 5% do valor nominal de demanda.

No 1º caso de aplicação, se for utilizado o desvio padrão de 15 % ao invés de 5% na f_{obj}^{ODGR} igual a 75% do valor nominal considerado, a melhoria no processo é de aproximadamente 4% conforme Equação 5.2.1, enquanto para os outros casos são de aproximadamente 1%.

$$Melhoria = \frac{4,617 - 4,79}{4,617} \approx 4 \quad (5.2.1)$$

Como visto, além da possibilidade do *framework* fornecer o controle de conservadorismo e robustez em otimizações sob incertezas de modelos matemáticos, a utilização do *framework* no problema estudo de caso, promoveu os seguintes melhores desvios (%) em relação ao estado ideal dos f_{obj}^{ODGR} considerados, 4,617, 12,902 e 31,659, respectivamente, conforme Tabela 5.2.1. Como já visto anteriormente, pode-se ver novamente, através da Tabela 5.2.1, que o valor de ARM^σ também depende do valor de f_{obj}^{ODGR} e do modelo matemático utilizado.

Tabela 5.2.2. Valores de ARM^σ para cada desvios padrões e f_{obj}^{ODGR} considerados, no 2º caso de aplicação.

f_{obj}^{ODGR}	Desvio padrão	$ARM^\sigma(%)$	$\Gamma(%)$
	5% do valor nominal	37,15	64
75% do valor nominal	10% do valor nominal	32,67	57
	15% do valor nominal	33,38	50
90% do valor nominal	5% do valor nominal	46,49	64
	10% do valor nominal	42,97	57
	15% do valor nominal	44,7	50
115% do valor nominal	5% do valor nominal	57,22	64
	10% do valor nominal	54,35	57
	15% do valor nominal	56,72	50

Como pode-se ver na Tabela 5.2.2, para os três valores de f_{obj}^{ODGR} , i.e. 75%, 90% e 115% do valor nominal, o desvio padrão sintonizado é o de 10% do valor nominal de demanda. Neste caso, a melhoria entre pior e melhor valor de desvio padrão (valor sintonizado) sobre os valores de ARM^σ no caso da $f_{obj}^{ODGR}=75\%$ do valor nominal é de 13,71%, enquanto no caso da $f_{obj}^{ODGR}=90\%$ do valor nominal é de 8,18%, e no caso da $f_{obj}^{ODGR}=115\%$ do valor nominal é de 5,29%.

A viabilidade de uma solução depende fundamentalmente do modelo em uso. Claramente, modelos diferentes terão robustez naturais diferentes, e para cada parametrização do modelo, também haverá uma dada robustez vinculada ao modelo e parametrização. Toda essa discussão pode ser constatada pelas terceiras colunas da direita das Tabelas 5.2.1 e 5.2.2 que dizem respeito aos valores de Γ . Como pode-se constatar na Tabela 5.2.2, o valor do desvio padrão influencia diretamente na quantidade de soluções que dão viáveis, conforme discutido no capítulo 3. No caso da abordagem da Tabela 5.2.2, quanto maior for o valor do desvio padrão da demanda no modelo, maior serão os limites de geração de valores, e portanto há a oportunidade para valores maiores de demanda serem gerados, em comparação a valores inferiores de desvios padrões, e isso naturalmente aumentará o grau de complexidade do modelo da cadeia de suprimentos. No caso específico da abordagem da Tabela 5.2.1, a diferença de valores entre os desvios padrões não influenciou na robustez do modelo porque o valor nominal da demanda é metade do valor do caso da Tabela 5.2.2, i.e. é um caso com uma demanda 100% menor, tendo portanto uma parametrização menos complexa, e sendo por consequência naturalmente mais robusto. Uma constatação a mais sobre a parametrização do caso da Tabela 5.2.1 que pode explicar o porquê que teve a maior robustez dos casos, é o fato do tempo de resolução do modelo ter sido em média 7 vezes mais rápido do que o tempo do caso da Tabela 5.2.2, pois se o modelo resolve mais rápido é porque ele tem uma resolução mais fácil (menos variáveis, menos equações e inequações) e por isso é mais robusto.

O *framework* do presente trabalho determina o desvio padrão que faz a solução robusta mais se aproximar da idealidade (f_{obj}^{ODGR}), ao mesmo tempo em que naturalmente diminui-se a penalização do valor da FO do problema robusto enquanto regula a robustez do modelo, ao invés de depender apenas do cenário de pior caso ou de casos limitados. Isto é, além de aumentar a robustez do modelo através do aumento do conservadorismo, neste *framework* também haverá, paralelamente, uma diminuição da penalização na FO por conta da estratégia de sintonia do *framework* que considera a aproximação a uma solução ideal através do modelo de arrependimento sem a atribuição da árvore de cenários.

6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Otimização robusta é um campo de alta flexibilidade a respeito de como a tratabilidade das soluções em uma otimização sob incerteza serão lidadas, e com isso diferentes *frameworks* foram desenvolvidos ao longo da linha do tempo. Neste trabalho, foi desenvolvido um *framework* para otimização robusta que considera o conceito de arrependimento relativo máximo e uma estratégia numérica estocástica e algorítmica para fazer a solução robusta melhor se aproximar à solução ideal, ao mesmo tempo em que a otimização considera as incertezas no processo, sendo que ao menos uma delas deve ser normalmente distribuída. Além disso, o *framework* desenvolvido tem a robustez e o conservadorismo sendo regulado pelo planejador através do ajuste de valores dos fatores de penalidade. Os resultados dos exemplos aplicados da metodologia (e.g. Tabela 3.5.6, Figuras 3.5.33 e 3.5.34) e do problema estudo de caso (Tabelas 5.2.1 e 5.2.2) mostraram que a depender da filosofia do *framework* de otimização robusta utilizado, e.g. do presente *framework*, a aversão ao risco de escolher valores de incertezas perto da média nem sempre é a melhor opção para se alcançar o melhor interesse (ou resposta).

Baseado na discussão da aplicabilidade do *framework* em modelos não-lineares, como no modelo dos exemplos resolvidos das Equações 3.5.2 e 3.5.6, há o interesse de primeiro se criar um modelo não-linear para cadeia de suprimentos de problemas *PDIRP*, que considere as variáveis de decisões carga que um veículo deve levar em uma rota e a quantidade de vezes que essa rota deva ser executada, com a possível redução da quantidade de variáveis binárias. Finalmente com o modelo determinístico em mãos, há o segundo interesse de aplicar o presente *framework* para a realização da sintonia dos desvios padrões de possíveis incertezas normais atreladas aos parâmetros desse modelo, para realizar a execução da otimização robusta.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Linhas de códigos das sintonias de todas as abordagens para a exemplificação do *framework* no problema exemplar linear, ao qual basta apenas adaptar a parametrização para cada um dos casos sintonizados:

```

clear;
close all;
clc;

average_eps_2_det_ref_geral = 2.5;
theta_1 = 3;
theta_2 = 2.5;
theta_3 = 100;
theta_4 = 70;
theta_5 = 100 ;
x1_passo =1;
x2_passo = 1;
UPPER_BOUND_RESTRICTION = 100;
LOWER_BOUND_RESTRICTION = 70;
mu_eps_1_ODGR = average_eps_2_det_ref_geral;
alfa2 = 0.85;
%COMEÇO----- OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA
GERAL DE REFERÊNCIA-----
eps_1 = mu_eps_1_ODGR;
FUNCMAX = 10^(-10);
for x1= 0:x1_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
    for x2= 0:x2_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
        if x1>=20
            if x2>=20
                if (x1+x2) <= UPPER_BOUND_RESTRICTION
                    if (x1+x2) >= LOWER_BOUND_RESTRICTION %
                        if x2*average_eps_2_det_ref_geral*alfa2 <= theta_4
                            if x1*eps_1<= theta_5
                                FOBJ = x1*eps_1 +
x2*average_eps_2_det_ref_geral*alfa2 + x1*theta_1 + x2*theta_2 -theta_3 ;
                                if FOBJ<0
                                    disp('Fobj is negative, the result
is wrong, hence the relative regret will be a sum, and is wrong');
                                    disp('ODGR is not tractable, change
the parameters of the ODGR, and try again')
                                    return
                                end
                            end
                            if FOBJ > FUNCMAX
                                FUNCMAX = FOBJ;
                                x1_otimo = x1;
                                x2_otimo=x2;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
end
end
if FUNCMAX == 10^(-10);
    disp('ODGR is not tractable, change the parameters of the ODGR, and
try again')
end
FOBJ_DET_REF_GERAL = FUNCMAX;
%FIM----- OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA
GERAL DE REFERÊNCIA-----


%COMEÇO----- OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA-
-----OTIMIZAÇÃO ROBUSTA-----


N_iteracoes = 2000;
alfa2 = 0.85;
expectance_eps_2_LTRR = 2;
theta_1 = 3 ;
theta_2 = 2.5;
theta_4 = 70;
theta_5 = 100 ;
i = 0;
j = 0;
x1_passo =1;
x2_passo = 1;
UPPER_BOUND_RESTRICTION = 100;
LOWER_BOUND_RESTRICTION = 70;
mu_eps_1_LTRR = expectance_eps_2_LTRR;
DP = zeros(4,N_iteracoes);
DP_modulo = zeros(4,N_iteracoes);
for sigma_porcentagem_media = [2/100 5/100 10/100 20/100]
    i = i + 1;
    for j = 1:N_iteracoes
%----- RESOLVE-SE O
PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO -----
        eps_1 = normrnd(mu_eps_1_LTRR,sigma_porcentagem_media *
mu_eps_1_LTRR);
        FUNCMAX = 10^(-10);
        for x1= 0:x1_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
            for x2= 0:x2_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
                if x1>=20
                    if x2>=20
                        if (x1+x2) <= UPPER_BOUND_RESTRICTION
                            if (x1+x2) >= LOWER_BOUND_RESTRICTION
                                if x2*expectance_eps_2_LTRR*alfa2 <= theta_4
                                    if x1*eps_1<= theta_5
                                        FOBJ = x1*eps_1 +
x2*expectance_eps_2_LTRR*alfa2 + x1*theta_1 + x2*theta_2 -100 ;
                                        if FOBJ<0
                                            disp('Fobj is negative, the result
is wrong, remake the operation by changing the LTRR parameters');
                                            return
                                        end
                                        if FOBJ > FUNCMAX
                                            FUNCMAX = FOBJ;
                                            x1_otimo = x1;
                                            x2_otimo=x2;
                                        end
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```



```

plot(k, DP_modulo(3,k),'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo (%)');
title('\sigma_\epsilon_1 = 10\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=0,85 ; \theta_4=70 ;
; \mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 2,5 ');

subplot(2,1,2)
plot(k, DP_modulo(4,k),'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo (%)');
title('\sigma_\epsilon_1 = 20\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=0,85 ; \theta_4=70 ;
; \mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 2,5 ');

%FIM -----GRÁFICOS DOS ARREPENDIMENTOS
RELATIVOS PARA CADA OTIMIZAÇÃO COM UM DADO VALOR FIXO DE DESVIO PADRÃO-----
-----

-----CÁLCULO DAS MÉDIAS DOS ARREPENDIMENTOS
RELATIVOS-----

media_rel_regret_sigma_2 = mean(DP_modulo(1,k));
media_rel_regret_sigma_5 = mean(DP_modulo(2,k));
media_rel_regret_sigma_10 = mean(DP_modulo(3,k));
media_rel_regret_sigma_20 = mean(DP_modulo(4,k));
xx=[2 5 10 20];
yy(1)= media_rel_regret_sigma_2;
yy(2)= media_rel_regret_sigma_5;
yy(3)= media_rel_regret_sigma_10;
yy(4)= media_rel_regret_sigma_20;

figure(3)
plot(xx,yy,'k*')
xlabel('Desvio padrão da incerteza normal \sigma_\epsilon_1 (% da média)');
ylabel('Arrependimento Relativo médio (%)');
title('ARM (%) vs \sigma_\epsilon_1 (%\mu(\epsilon_1)) ; \alpha_2=0,85 ;
\theta_4=70 ; \mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 2,5 ')

```

APÊNDICE B

Algoritmo criado no MATLAB® (R2019b, Mathworks, Natick, MA, USA) para teste de monotonicidade da função objetivo não-linear do exemplo da função objetivo da Equação (3.5.2) ao qual o *framework* desenvolvido foi utilizado:

```

expectance_eps_2_LTRR = 2;
theta_2 = 2.5;
positive_count = 0;
negative_count = 0;
for x1 = 20:100
    for x2 = 20:100
        for eps_1 = 0.5:0.01:3.5
            if x1>=20
                if x2>=20
                    if (x1+x2) <= UPPER_BOUND_RESTRICTION
                        if (x1+x2) >= LOWER_BOUND_RESTRICTION
                            if x2*expectance_eps_2_LTRR*alfa2 <= theta_4
                                if 4*x1*(x1/x2)*eps_1 <= theta_5
                                    DERIVATIVE_FOBJ_X2 = -4*x1*(x1/(x2^2))*eps_1
                                    +expectance_eps_2_LTRR*alfa2 + theta_2 ;
                                if DERIVATIVE_FOBJ_X2>0
                                    positive_count = positive_count + 1;
                                end
                                if DERIVATIVE_FOBJ_X2<0
                                    negative_count = negative_count + 1;
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
if positive_count >0 ee negative_count>0
    disp('The function is not monotone in the feasible region')
end
if (positive_count >0 ee negative_count==0)
    disp('The function is a monotonically increasing function in the
feasible region')
end
if (positive_count==0 ee negative_count>0)
    disp('The function is a monotonically decreasing function in the
feasible region')
end

```

APÊNDICE C

Algoritmo criado no MATLAB® (R2019b, Mathworks, Natick, MA, USA) para a sintonia do problema não-linear referente à função objetivo da Equação (3.5.2) através da utilização do *framework* desenvolvido:

```

clear;
close all;
clc;
average_eps_2_det_ref_geral = 1.9;
theta_1 = 3 ;
theta_2 = 2.5;
theta_3 = 100;
theta_4 = 100;
theta_5 = 100 ;
x1_passo =1;
x2_passo = 1;
UPPER_BOUND_RESTRICTION = 100;
LOWER_BOUND_RESTRICTION = 70;
mu_eps_1_ODGR = 1.9;
alfa2 = 1;
%COMEÇO----- OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA
GERAL DE REFERÊNCIA-----
eps_1 = mu_eps_1_ODGR;
FUNCMAX = 10^(-10);
for x1= 0:x1_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
    for x2= 0:x2_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
        if x1>=20
            if x2>=20
                if (x1+x2) <= UPPER_BOUND_RESTRICTION
                    if (x1+x2) >= LOWER_BOUND_RESTRICTION
                        if x2*average_eps_2_det_ref_geral*alfa2 <= theta_4
                            if 4*x1*(x1/x2)*eps_1<= theta_5
                                FOBJ = 4*x1*(x1/x2)*eps_1 +
x2*average_eps_2_det_ref_geral*alfa2 + x1*theta_1 + x2*theta_2 -theta_3;
                                if FOBJ<0
                                    disp('Fobj is negative , the result
is wrong, hence the relative regret will be a sum, and is wrong');
                                    disp('ODGR is not tractable, change
the parameters of the ODGR, and try again')
                                    return
                                end
                            end
                            if FOBJ > FUNCMAX
                                FUNCMAX = FOBJ;
                                x1_otimo = x1;
                                x2_otimo=x2;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
end

```

```

if FUNCMAX == 10^(-10);
    disp('ODGR is not tractable, change the parameters of the ODGR, and
try again')
end
FOBJ_DET_REF_GERAL = FUNCMAX;
N_iteracoes = 10000;
alfa2 = 1;
expectance_eps_2_LTRR = 2;
theta_1 = 3 ;
theta_2 = 2.5;
theta_3 = 100;
theta_4 = 100;
theta_5 = 100 ;
i = 0;
j = 0;
x1_passo =1;
x2_passo = 1;
UPPER_BOUND_RESTRICTION = 100;
LOWER_BOUND_RESTRICTION = 70;
mu_eps_1_LTRR = expectance_eps_2_LTRR;
DP = zeros(4,N_iteracoes);
DP_modulo = zeros(4,N_iteracoes);
for sigma_porcentagem_media = [2/100 5/100 7/100 10/100]
    i = i + 1;
    for j = 1:N_iteracoes

%----- RESOLVE-SE O
PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO -----
    eps_1 = normrnd(mu_eps_1_LTRR,sigma_porcentagem_media *
mu_eps_1_LTRR);
    if eps_1<0.5 || eps_1>3.5
        disp('the program is not in the monotonic region, the tuning
cannot be made')
    end
    FUNCMAX = 10^(-10);
    for x1= 0:x1_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
        for x2= 0:x2_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
            if x1>=20
                if x2>=20
                    if (x1+x2) <= UPPER_BOUND_RESTRICTION
                        if (x1+x2) >= LOWER_BOUND_RESTRICTION
                            if x2*expectance_eps_2_LTRR*alfa2 <= theta_4
                                if 4*x1*(x1/x2)*eps_1 <= theta_5
                                    FOBJ = 4*x1*(x1/x2)*eps_1 +
x2*expectance_eps_2_LTRR*alfa2 + x1*theta_1 + x2*theta_2 -theta_3;
                                    if FOBJ<0
                                        disp('Fobj is negative, the result
is wrong, remake the operation by changing the LTRR parameters');
                                        return
                                    end
                                    if FOBJ > FUNCMAX
                                        FUNCMAX = FOBJ;
                                        x1_otimo = x1;
                                        x2_otimo=x2;
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
***** AS LINHAS
DE CÓDIGO DA OTIMIZAÇÃO TERMINA AQUI
*****
FUNC_ESTOC_OTIMO = FUNCMAX;
    rel_regret = (FOBJ_DET_REF_GERAL -
FUNC_ESTOC_OTIMO)*100/(FOBJ_DET_REF_GERAL);
    rel_regret_modulo = abs(rel_regret);
    DP_modulo(i,j) = rel_regret_modulo;
    if rel_regret_modulo >= 99.99
        disp('One optimization is not robust, are you satisfied? If not
remake the operation')
        return
    end
end
if length(DP_modulo(1,:)) < N_iteracoes
    disp('Some optimizations were infeasible for \sigma = 2%')
end
if length(DP_modulo(2,:)) < N_iteracoes
    disp('Some optimizations were infeasible for \sigma = 5%')
end
if length(DP_modulo(3,:)) < N_iteracoes
    disp('Some optimizations were infeasible for \sigma = 7%')
end
if length(DP_modulo(4,:)) < N_iteracoes
    disp('Some optimizations were infeasible for \sigma = 10%')
end
%FIM----- OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA-----
-----OTIMIZAÇÃO ROBUSTA-----

%COMEÇO -----GRÁFICOS DOS ARREPENDIMENTOS
RELATIVOS PARA CADA OTIMIZAÇÃO COM UM DADO VALOR FIXO DE DESVIO PADRÃO-----
-----


k=1:N_iteracoes;
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(k, DP_modulo(1,k), 'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo
(%)');
title('\sigma_\epsilon_1 = 2\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=1 ; \theta_4=100 ;
\mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ');
subplot(2,1,2)
plot(k, DP_modulo(2,k), 'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo
(%)');
title('\sigma_\epsilon_1 = 5\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=1 ; \theta_4=100 ;
\mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ');

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(k, DP_modulo(3,k), 'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo
(%)');
title('\sigma_\epsilon_1 = 7\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=1 ; \theta_4=100 ;
\mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ');

```

```

subplot(2,1,2)
plot(k, DP_modulo(4,k), 'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo (%)');
title('\sigma_\epsilon_1 = 10%\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=1 ; \theta_4=100 ;
\mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ');

%FIM -----GRÁFICOS DOS ARREPENDIMENTOS
RELATIVOS PARA CADA OTIMIZAÇÃO COM UM DADO VALOR FIXO DE DESVIO PADRÃO-----
-----

%-----CÁLCULO DAS MÉDIAS DOS ARREPENDIMENTOS
RELATIVOS-----
media_rel_regret_sigma_2 = mean(DP_modulo(1,k));
media_rel_regret_sigma_5 = mean(DP_modulo(2,k));
media_rel_regret_sigma_7 = mean(DP_modulo(3,k));
media_rel_regret_sigma_10 = mean(DP_modulo(4,k));

xx=[2 5 7 10];
yy(1)= media_rel_regret_sigma_2;
yy(2)= media_rel_regret_sigma_5;
yy(3)= media_rel_regret_sigma_7;
yy(4)= media_rel_regret_sigma_10;

figure(3)

plot(xx,yy, 'k*')
xlabel('Desvio padrão da incerteza normal \sigma_\epsilon_1 (% da média)');
ylabel('Arrependimento Relativo médio (%)');
title('ARM (%) vs \sigma_\epsilon_1 (%\mu(\epsilon_1) ) ; \alpha_2=1 ;
\theta_4=100 ; \mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ')

```

APÊNDICE D

Algoritmo criado no MATLAB® (R2019b, Mathworks, Natick, MA, USA) para a sintonia do problema não-linear referente à função objetivo da Equação (3.5.6) através da utilização do *framework* desenvolvido:

```

clear;
close all;
clc;

FOBJ_DET_REF_GERAL = 335;%FUNCMAX;%3000;%FUNCMAX;
N_iteracoes = 200;
alfa2 = 1;
expectance_eps_2_LTRR = 2;
theta_1 = 3 ;
theta_2 = 2.5;
theta_3 = 100;
theta_4 = 100;
theta_5 = 100 ;
i = 0;
j = 0;
x1_passo =1;
x2_passo = 1;
UPPER_BOUND_RESTRICTION = 100;
LOWER_BOUND_RESTRICTION = 70;
mu_eps_1_LTRR = expectance_eps_2_LTRR;
DP = zeros(4,N_iteracoes);
DP_modulo = zeros(4,N_iteracoes);
for sigma_porcentagem_media = [2/100 5/100 7/100 10/100]
    i = i + 1;
    for j = 1:N_iteracoes

%----- RESOLVE-SE O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO -----
        eps_1 = normrnd(mu_eps_1_LTRR,sigma_porcentagem_media *
mu_eps_1_LTRR);
        if eps_1<0.5 || eps_1>3.5
            disp('the program is not in the monotonic region, the tuning
cannot be made')
            end
        FUNCMAX = 10^(-10);
        for x1= 0:x1_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
            for x2= 0:x2_passo:UPPER_BOUND_RESTRICTION
                if x1>=20
                    if x2>=20
                        if (x1+x2) <= UPPER_BOUND_RESTRICTION
                            if (x1+x2) >= LOWER_BOUND_RESTRICTION
                                if x2*expectance_eps_2_LTRR*alfa2 <= theta_4
                                    if x1*(x1/x2)*eps_1 <= theta_5
                                        FOBJ = x1*(x1/x2)*eps_1 +
x2*expectance_eps_2_LTRR*alfa2 + (x1*x1/x2)*theta_1 + x2^2*theta_2/x1 -
theta_3;
                                        if FOBJ<0
                                            disp('Fobj is negative, the result
is wrong, remake the operation by changing the LTRR parameters');
                                            return
                                        end
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```



```

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(k, DP_modulo(3,k), 'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo (%)');
title('\sigma_1 = 7%\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=1 ; \theta_4=100 ; \mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ');

subplot(2,1,2)
plot(k, DP_modulo(4,k), 'k.' )
xlabel('Otimizações robustas realizadas'); ylabel('Arrependimento relativo (%)');
title('\sigma_1 = 10%\mu(\epsilon_1) ; \alpha_2=1 ; \theta_4=100 ; \mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ');

%FIM -----GRÁFICOS DOS ARREPENDIMENTOS
RELATIVOS PARA CADA OTIMIZAÇÃO COM UM DADO VALOR FIXO DE DESVIO PADRÃO-----
-----


-----CÁLCULO DAS MÉDIAS DOS ARREPENDIMENTOS
RELATIVOS-----

media_rel_regret_sigma_2 = mean(DP_modulo(1,k));
media_rel_regret_sigma_5 = mean(DP_modulo(2,k));
media_rel_regret_sigma_7 = mean(DP_modulo(3,k));
media_rel_regret_sigma_10 = mean(DP_modulo(4,k));

xx=[2 5 7 10];
yy(1)= media_rel_regret_sigma_2;
yy(2)= media_rel_regret_sigma_5;
yy(3)= media_rel_regret_sigma_7;
yy(4)= media_rel_regret_sigma_10;

figure(3)
plot(xx,yy, 'k*')
xlabel('Desvio padrão da incerteza normal \sigma_1 (% da média)');
ylabel('Arrependimento Relativo médio (%)');
title('ARM (%) vs \sigma_1 (%\mu(\epsilon_1)) ; \alpha_2=1 ;
\theta_4=100 ; \mu(\epsilon_1)=2 ; \epsilon_1^{0^D^G^R} = 1,9 ')

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACERBI, Carlo; NORDIO, Claudio; SIRTORI, Carlo. Expected shortfall as a tool for financial risk management. **arXiv preprint cond-mat/0102304**, 2001.
- AISSI, Hassene; BAZGAN, Cristina; VANDERPOOTEN, Daniel. Min–max and min–max regret versions of combinatorial optimization problems: A survey. **European journal of operational research**, v. 197, n. 2, p. 427-438, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.09.012>
- AHUJA, Ravindra K.; MÖHRING, Rolf H.; ZAROLIAGIS, Christos D. (Ed.). **Robust and online large-scale optimization: models and techniques for transportation systems**. Springer, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05465-5>
- AHUMADA, Omar; VILLALOBOS, J. Rene; MASON, A. Nicholas. Tactical planning of the production and distribution of fresh agricultural products under uncertainty. **Agricultural Systems**, v. 112, p. 17-26, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.agsy.2012.06.002>
- AKHAVAN-HEJAZI, Hossein; MOHSENIAN-RAD, Hamed. Energy storage planning in active distribution grids: A chance-constrained optimization with non-parametric probability functions. **IEEE Transactions on Smart Grid**, v. 9, n. 3, p. 1972-1985, 2016. <https://doi.org/10.1109/TSG.2016.2604286>
- AL-QAHTANI, K.; ELKAMEL, Ali. Robust planning of multisite refinery networks: Optimization under uncertainty. **Computers e chemical engineering**, v. 34, n. 6, p. 985-995, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2010.02.032>
- AL-QAHTANI, K.; ELKAMEL, A.; PONNAMBALAM, K. Robust optimization for petrochemical network design under uncertainty. **Industrial e engineering chemistry research**, v. 47, n. 11, p. 3912-3919, 2008. <https://doi.org/10.1021/ie0713184>
- ARTZNER, Philippe *et al.* Coherent measures of risk. **Mathematical finance**, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>

AYOUB, Josette; POSS, Michael. Decomposition for adjustable robust linear optimization subject to uncertainty polytope. **Computational Management Science**, v. 13, n. 2, p. 219-239, 2016. <https://doi.org/10.1007/s10287-016-0249-2>

BABONNEAU, F.; VIAL, J.-P.; APPARIGLIATO, R. Robust optimization for environmental and energy planning. In: **Uncertainty and environmental decision making**. Springer, Boston, MA, 2009. p. 79-126. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1129-2_3

BAI, Dawei; CARPENTER, Tamra; MULVEY, John. Making a case for robust optimization models. **Management science**, v. 43, n. 7, p. 895-907, 1997. <https://doi.org/10.1287/mnsc.43.7.895>

BALASUBRAMANIAN, J.; GROSSMANN, I. E. Approximation to multistage stochastic optimization in multiperiod batch plant scheduling under demand uncertainty. **Industrial e engineering chemistry research**, v. 43, n. 14, p. 3695-3713, 2004. <https://doi.org/10.1021/ie030308+>

BAOHUA, Wang; SHIWEI, H. E. Robust optimization model and algorithm for logistics center location and allocation under uncertain environment. **Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology**, v. 9, n. 2, p. 69-74, 2009. [https://doi.org/10.1016/S1570-6672\(08\)60056-2](https://doi.org/10.1016/S1570-6672(08)60056-2)

BARBER, C. Bradford; DOBKIN, David P.; HUHDANPAA, Hannu. The quickhull algorithm for convex hulls. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 22, n. 4, p. 469-483, 1996. <https://doi.org/10.1145/235815.235821>

BARON, Opher; MILNER, Joseph; NASERALDIN, Hussein. Facility location: A robust optimization approach. **Production and Operations Management**, v. 20, n. 5, p. 772-785, 2011. <https://doi.org/10.1111/j.1937-5956.2010.01194.x>

BASÁN, Natalia P. *et al.* Novel milp scheduling model for power-intensive processes under time-sensitive electricity prices. **Industrial e Engineering Chemistry Research**, v. 57, n. 5, p. 1581-1592, 2018. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.7b04435>

BEALE, Evelyn ML. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, v. 17, n. 2, p. 173-184, 1955.
<https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1955.tb00191.x>

BECK, Amir; BEN-TAL, Aharon. Duality in robust optimization: primal worst equals dual best. **Operations Research Letters**, v. 37, n. 1, p. 1-6, 2009.
<https://doi.org/10.1016/j.orl.2008.09.010>

BELLMAN, Richard; KALABA, Robert; ZADEH, L. Abstraction and pattern classification. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 13, n. 1, p. 1-7, 1966.
[https://doi.org/10.1016/0022-247X\(66\)90071-0](https://doi.org/10.1016/0022-247X(66)90071-0)

BELLMAN, Richard E.; ZADEH, Lotfi Asker. Decision-making in a fuzzy environment. **Management science**, v. 17, n. 4, p. B-141-B-164, 1970.
<https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141>

BEN-TAL, Aharon *et al.* Robust optimization for emergency logistics planning: Risk mitigation in humanitarian relief supply chains. **Transportation research part B: methodological**, v. 45, n. 8, p. 1177-1189, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2010.09.002>

BEN-TAL, Aharon; EL GHAOUI, Laurent; NEMIROVSKI, Arkadi. Robustness. In: **Handbook of semidefinite programming**. Springer, Boston, MA, 2000. p. 139-162.
https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4381-7_6

BEN-TAL, Aharon *et al.* Retailer-supplier flexible commitments contracts: A robust optimization approach. **Manufacturing e Service Operations Management**, v. 7, n. 3, p. 248-271, 2005. <https://doi.org/10.1287/msom.1050.0081>

BEN-TAL, Aharon *et al.* Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. **Mathematical programming**, v. 99, n. 2, p. 351-376, 2004.
<https://doi.org/10.1007/s10107-003-0454-y>

BEN-TAL, Aharon; NEMIROVSKI, Arkadi. Robust convex optimization. **Mathematics of operations research**, v. 23, n. 4, p. 769-805, 1998. <https://doi.org/10.1287/moor.23.4.769>

BEN-TAL, Aharon; NEMIROVSKI, Arkadi. Robust solutions of uncertain linear programs. **Operations research letters**, v. 25, n. 1, p. 1-13, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(99\)00016-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(99)00016-4)

BEN-TAL, Aharon; NEMIROVSKI, Arkadi. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. **Mathematical programming**, v. 88, n. 3, p. 411-424, 2000. <https://doi.org/10.1007/PL00011380>

BERTSIMAS, Dimitris; SIM, Melvyn. Robust discrete optimization and network flows. **Mathematical programming**, v. 98, n. 1-3, p. 49-71, 2003. <https://doi.org/10.1007/s10107-003-0396-4>

BERTSIMAS, Dimitris; SIM, Melvyn. The price of robustness. **Operations research**, v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004. <https://doi.org/10.1287/opre.1030.0065>

BERTSIMAS, Dimitris; THIELE, Aurélie. Robust and data-driven optimization: modern decision making under uncertainty. In: **Models, methods, and applications for innovative decision making**. INFORMS, 2006. p. 95-122. <https://doi.org/10.1287/educ.1063.0022>

BERNARDO, Fernando P.; SARAIVA, Pedro M. Robust optimization framework for process parameter and tolerance design. **AIChE Journal**, v. 44, n. 9, p. 2007-2017, 1998. <https://doi.org/10.1002/aic.690440908>

BEST, Mark; NEUHAUSER, Duncan. Walter A Shewhart, 1924, and the Hawthorne factory. **BMJ Quality e Safety**, v. 15, n. 2, p. 142-143, 2006. <https://doi.org/10.1136/qshc.2006.018093>

BEYER, Hans-Georg; SENDHOFF, Bernhard. Robust optimization—a comprehensive survey. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 196, n. 33-34, p. 3190-3218, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.03.003>

BIDHANDI, Hadi Mohammadi; YUSUFF, Rosnah Mohd. Integrated supply chain planning under uncertainty using an improved stochastic approach. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 6, p. 2618-2630, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.11.042>

BILGEN, Bilge. Application of fuzzy mathematical programming approach to the production allocation and distribution supply chain network problem. **Expert Systems with Applications**, v. 37, n. 6, p. 4488-4495, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.12.062>

BIRGE, John R.; LOUVEAUX, Francois. **Introduction to stochastic programming**. Springer Science e Business Media, 2011. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0237-4>

BOZORGI-AMIRI, Ali; JABALAMELI, Mohamad Saeed; AL-E-HASHEM, SMJ Mirzapour. A multi-objective robust stochastic programming model for disaster relief logistics under uncertainty. **OR spectrum**, v. 35, n. 4, p. 905-933, 2013. <https://doi.org/10.1007/s00291-011-0268-x>

BRAUN, Jürgen; GRIEBEL, Michael. On a constructive proof of Kolmogorov's superposition theorem. **Constructive approximation**, v. 30, n. 3, p. 653, 2009. <https://doi.org/10.1007/s00365-009-9054-2>

BROWNE, Sid. The risk and rewards of minimizing shortfall probability. **The Journal of Portfolio Management**, v. 25, n. 4, p. 76-85, 1999. <https://doi.org/10.3905/jpm.1999.319754>

CAO, Cuiwen; GU, Xingsheng; XIN, Zhong. Chance constrained programming models for refinery short-term crude oil scheduling problem. **Applied Mathematical Modelling**, v. 33, n. 3, p. 1696-1707, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.03.022>

CAPOLEI, Andrea *et al.* A mean-variance objective for robust production optimization in uncertain geological scenarios. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 125, p. 23-37, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2014.11.015>

CHARNES, Abraham; COOPER, William W. Chance-constrained programming. **Management science**, v. 6, n. 1, p. 73-79, 1959. <https://doi.org/10.1287/mnsc.6.1.73>

CHARNES, Abraham; COOPER, William W. Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints. **Operations research**, v. 11, n. 1, p. 18-39, 1963. <https://doi.org/10.1287/opre.11.1.18>

CHEN, Bokan *et al.* Robust optimization for transmission expansion planning: Minimax cost vs. minimax regret. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 29, n. 6, p. 3069-3077, 2014. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2014.2313841>

CHEN, Chien-Wei; FAN, Yueyue. Bioethanol supply chain system planning under supply and demand uncertainties. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v. 48, n. 1, p. 150-164, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2011.08.004>

CHEN, C. *et al.* An inexact robust nonlinear optimization method for energy systems planning under uncertainty. **Renewable energy**, v. 47, p. 55-66, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2012.04.007>

CHEN, Haoxun *et al.* Modeling and performance evaluation of supply chains using batch deterministic and stochastic Petri nets. **IEEE Transactions on Automation Science and Engineering**, v. 2, n. 2, p. 132-144, 2005. <https://doi.org/10.1109/TASE.2005.844537>

CHEN, Xin; SIM, Melvyn; SUN, Peng. A robust optimization perspective on stochastic programming. **Operations Research**, v. 55, n. 6, p. 1058-1071, 2007. <https://doi.org/10.1287/opre.1070.0441>

CHEN, Zhi; SIM, Melvyn; XIONG, Peng. Robust stochastic optimization: the synergy of robust optimization and stochastic programming. 2019. URL http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2017/06/6055.pdf.

CHOI, Kyung; DU, Liu; YOUN, Byeng. A new fuzzy analysis method for possibility-based design optimization. In: **10th AIAA/ISSMO multidisciplinary analysis and optimization conference**. 2004. p. 4585. <https://doi.org/10.2514/6.2004-4585>

CHUN, Moon-Hyun; HAN, Seok-Jung; TAK, Nam-IL. An uncertainty importance measure using a distance metric for the change in a cumulative distribution function. **Reliability Engineering e System Safety**, v. 70, n. 3, p. 313-321, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0951-8320\(00\)00068-5](https://doi.org/10.1016/S0951-8320(00)00068-5)

CHUNG, Gunhui; LANSEY, Kevin; BAYRAKSAN, Güzin. Reliable water supply system design under uncertainty. **Environmental Modelling e Software**, v. 24, n. 4, p. 449-462, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2008.08.007>

COHEN, Maxime C.; LOBEL, Ruben; PERAKIS, Georgia. Dynamic pricing through data sampling. **Production and Operations Management**, v. 27, n. 6, p. 1074-1088, 2018. <https://doi.org/10.1111/poms.12854>

CONEJO, Antonio J. *et al.* **Decision making under uncertainty in electricity markets**. New York: Springer, 2010. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7421-1>

DANTZIG, George B. Linear programming under uncertainty. In: **Stochastic programming**. Springer, New York, NY, 2010. p. 1-11. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1642-6_1

DEMBO, Ron S. Scenario optimization. **Annals of Operations Research**, v. 30, n. 1, p. 63-80, 1991. <https://doi.org/10.1007/BF02204809>

DEMBO, Ron S. **Scenario optimization**. U.S. Patent n. 5,148,365, 15 set. 1992.

DERBYSHIRE, James; WRIGHT, George. Preparing for the future: development of an ‘antifragile’ methodology that complements scenario planning by omitting causation. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 82, p. 215-225, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2013.07.001>

DONG, Yachao *et al.* Solution methods for vehicle-based inventory routing problems. **Computers e Chemical Engineering**, v. 101, p. 259-278, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2017.02.036>

ELDRED, Michael *et al.* Formulations for surrogate-based optimization under uncertainty. In: **9th AIAA/ISSMO symposium on multidisciplinary analysis and optimization**. 2002. p. 5585. <https://doi.org/10.2514/6.2002-5585>

EL GHAOUI, Laurent; LEBRET, Hervé. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. **SIAM Journal on matrix analysis and applications**, v. 18, n. 4, p. 1035-1064, 1997. <https://doi.org/10.1137/S0895479896298130>

EL GHAOUI, Laurent; OUSTRY, Francois; LEBRET, Hervé. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. **SIAM Journal on Optimization**, v. 9, n. 1, p. 33-52, 1998. <https://doi.org/10.1137/S1052623496305717>

GHAOUI, Laurent El; OKS, Maksim; OUSTRY, Francois. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach. **Operations research**, v. 51, n. 4, p. 543-556, 2003. <https://doi.org/10.1287/opre.51.4.543.16101>

ERDOĞAN, Emre; IYENGAR, Garud. Ambiguous chance constrained problems and robust optimization. **Mathematical Programming**, v. 107, n. 1-2, p. 37-61, 2006. <https://doi.org/10.1007/s10107-005-0678-0>

ESCUDERO, Laureano F.; QUINTANA, Francisco J.; SALMERÓN, Javier. CORO, a modeling and an algorithmic framework for oil supply, transformation and distribution optimization under uncertainty. **European Journal of Operational Research**, v. 114, n. 3, p. 638-656, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00261-6](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00261-6)

FABOZZI, Frank J. *et al.* Robust portfolio optimization. **The Journal of portfolio management**, v. 33, n. 3, p. 40-48, 2007. <https://doi.org/10.3905/jpm.2007.684751>

GABEL, Virginie; MURAT, Cécile; THIELE, Aurélie. Recent advances in robust optimization: An overview. **European journal of operational research**, v. 235, n. 3, p. 471-483, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.09.036>

GAO, Jiyao; YOU, Fengqi. A stochastic game theoretic framework for decentralized optimization of multi-stakeholder supply chains under uncertainty. **Computers e Chemical Engineering**, v. 122, p. 31-46, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2018.05.016>

GEBRESLASSIE, Berhane H.; YAO, Yuan; YOU, Fengqi. Design under uncertainty of hydrocarbon biorefinery supply chains: multiobjective stochastic programming models, decomposition algorithm, and a comparison between CVaR and downside risk. **AIChE Journal**, v. 58, n. 7, p. 2155-2179, 2012. <https://doi.org/10.1002/aic.13844>

GOEL, Vikas; GROSSMANN, Ignacio E. A stochastic programming approach to planning of offshore gas field developments under uncertainty in reserves. **Computers e chemical engineering**, v. 28, n. 8, p. 1409-1429, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2003.10.005>

GOH, Joel; SIM, Melvyn. Distributionally robust optimization and its tractable approximations. **Operations research**, v. 58, n. 4-part-1, p. 902-917, 2010. <https://doi.org/10.1287/opre.1090.0795>

GOVINDAN, Kannan; CHENG, T. C. E. Advances in stochastic programming and robust optimization for supply chain planning. **Computers e Operations Research**, v. 100, p. 262-269, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.07.027>

GORISSEN, Bram L.; YANIKOĞLU, İhsan; DEN HERTOG, Dick. A practical guide to robust optimization. **Omega**, v. 53, p. 124-137, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2014.12.006>

GORYASHKO, Alexander P.; NEMIROVSKI, Arkadi S. Robust energy cost optimization of water distribution system with uncertain demand. **Automation and Remote Control**, v. 75, n. 10, p. 1754-1769, 2014. <https://doi.org/10.1134/S000511791410004X>

GU, Xiaoyu *et al.* Worst case propagated uncertainty of multidisciplinary systems in robust design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 20, n. 3, p. 190-213, 2000. <https://doi.org/10.1007/s001580050148>

GUERRA, Omar J. *et al.* An optimization framework for the integration of water management and shale gas supply chain design. **Computers e Chemical Engineering**, v. 92, p. 230-255, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2016.03.025>

GUPTA, Anshuman; MARANAS, Costas D. Managing demand uncertainty in supply chain planning. **Computers e chemical engineering**, v. 27, n. 8-9, p. 1219-1227, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(03\)00048-6](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(03)00048-6)

GUPTA, Anshuman; MARANAS, Costas D.; MCDONALD, Conor M. Mid-term supply chain planning under demand uncertainty: customer demand satisfaction and inventory management. **Computers e Chemical Engineering**, v. 24, n. 12, p. 2613-2621, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(00\)00617-7](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(00)00617-7)

GUTIÉRREZ, Genaro J.; KOUVELIS, Panagiotis; KURAWARWALA, Abbas A. A robustness approach to uncapacitated network design problems. **European Journal of Operational Research**, v. 94, n. 2, p. 362-376, 1996. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(95\)00160-3](https://doi.org/10.1016/0377-2217(95)00160-3)

GRØNHAUG, Roar; CHRISTIANSEN, Marielle. Supply chain optimization for the liquefied natural gas business. In: **Innovations in distribution logistics**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. p. 195-218. https://doi.org/10.1007/978-3-540-92944-4_10

GROSSMANN, Ignacio E. *et al.* Recent advances in mathematical programming techniques for the optimization of process systems under uncertainty. **Computers e Chemical Engineering**, v. 91, p. 3-14, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2016.03.002>

HAN, Jinil *et al.* Robust optimization approach for a chance-constrained binary knapsack problem. **Mathematical Programming**, v. 157, n. 1, p. 277-296, 2016. <https://doi.org/10.1007/s10107-015-0931-0>

HEIDARY, M. Hajian; AGHAIE, Abdollah. Risk averse sourcing in a stochastic supply chain: A simulation-optimization approach. **Computers e Industrial Engineering**, v. 130, p. 62-74, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.02.023>

HENRION, Rene. Introduction to chance-constrained programming. **Tutorial paper for the Stochastic Programming Community home page**, 2004.

HOSSEINI, Sara; DULLAERT, Wout. Robust optimization of uncertain logistics networks. **Logistics Operations and Management: Concepts and Models**, v. 359, 2011. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385202-1.00017-7>

IANCU, Dan A.; TRICHAKIS, Nikolaos. Pareto efficiency in robust optimization. **Management Science**, v. 60, n. 1, p. 130-147, 2014. <https://doi.org/10.1287/mnsc.2013.1753>

IERAPETRITOU, M. G. *et al.* Cost minimization in an energy-intensive plant using mathematical programming approaches. **Industrial e engineering chemistry research**, v. 41, n. 21, p. 5262-5277, 2002. <https://doi.org/10.1021/ie011012b>

INUIGUCHI, M.; ICHIHASHI, H.; TANAKA, H. Fuzzy programming: a survey of recent developments. In: **Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty**. Springer, Dordrecht, 1990. p. 45-68. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2111-5_4

IVANOV, Dmitry; SOKOLOV, Boris. Dynamic supply chain scheduling. **Journal of scheduling**, v. 15, n. 2, p. 201-216, 2012. <https://doi.org/10.1007/s10951-010-0189-6>

JAMMERNEGG, Werner; KISCHKA, Peter. Risk preferences and robust inventory decisions. **International Journal of Production Economics**, v. 118, n. 1, p. 269-274, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2008.08.023>

JANAK, Stacy L.; FLOUDAS, Christodoulos A. Advances in robust optimization approaches for scheduling under uncertainty. In: **Computer Aided Chemical Engineering**. Elsevier, 2005. p. 1051-1056. [https://doi.org/10.1016/S1570-7946\(05\)80017-3](https://doi.org/10.1016/S1570-7946(05)80017-3)

JANAK, Stacy L.; LIN, Xiaoxia; FLOUDAS, Christodoulos A. A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty: II. Uncertainty with known probability

distribution. **Computers e chemical engineering**, v. 31, n. 3, p. 171-195, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2006.05.035>

JIANG, Ruiwei *et al.* Two-stage minimax regret robust unit commitment. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 3, p. 2271-2282, 2013. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2013.2250530>

JORION, Philippe. Risk management lessons from long-term capital management. **European financial management**, v. 6, n. 3, p. 277-300, 2000. <https://doi.org/10.1111/1468-036X.00125>

JUNG, June Young *et al.* A simulation based optimization approach to supply chain management under demand uncertainty. **Computers e chemical engineering**, v. 28, n. 10, p. 2087-2106, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2004.06.006>

KAUT, Michal; WALLACE, Stein W. Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming. 2003.

KAMATH, K. Rajashree; PAKKALA, T. P. M. A Bayesian approach to a dynamic inventory model under an unknown demand distribution. **Computers e Operations Research**, v. 29, n. 4, p. 403-422, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0305-0548\(00\)00075-7](https://doi.org/10.1016/S0305-0548(00)00075-7)

KAPELAN, Zoran S.; SAVIC, Dragan A.; WALTERS, Godfrey A. Multiobjective design of water distribution systems under uncertainty. **Water Resources Research**, v. 41, n. 11, 2005. <https://doi.org/10.1029/2004WR003787>

KIM, Taebok; GLOCK, Christoph H.; KWON, Yongjang. A closed-loop supply chain for deteriorating products under stochastic container return times. **Omega**, v. 43, p. 30-40, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2013.06.002>

KHAVINSON, S. IA. **Best approximation by linear superpositions (approximate nomography)**. American Mathematical Soc., 1997. <https://doi.org/10.1090/mmono/159>

KHODAEI, Amin; BAHRAMIRAD, Shay; SHAHIDEHPOUR, Mohammad. Microgrid planning under uncertainty. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 30, n. 5, p. 2417-2425, 2014. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2014.2361094>

KLAMROTH, Kathrin *et al.* A unified approach for different concepts of robustness and stochastic programming via non-linear scalarizing functionals. **Optimization**, v. 62, n. 5, p. 649-671, 2013. <https://doi.org/10.1080/02331934.2013.769104>

KLAMROTH, Kathrin *et al.* A unified approach to uncertain optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 260, n. 2, p. 403-420, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.12.045>

KOCH, Patrick N.; YANG, R.-J.; GU, Lei. Design for six sigma through robust optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 3-4, p. 235-248, 2004. <https://doi.org/10.1007/s00158-003-0337-0>

KOLMOGOROV, Andrei Nikolaevich. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. In: **Doklady Akademii Nauk**. Russian Academy of Sciences, 1957. p. 953-956.

KOLMOGOROV, Andrei Nikolaevich. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. **Translations American Mathematical Society**, v. 2, n. 28, p. 55-59, 1963. <https://doi.org/10.1090/trans2/028/04>

KOUVELIS, Panos; YU, Gang. Easily Solvable Cases of Robust Discrete Optimization Problems. In: **Robust Discrete Optimization and Its Applications**. Springer, Boston, MA, 1997. p. 116-152. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2620-6_4

KOUWENBERG, Roy; ZENIOS, Stavros A. Stochastic programming models for asset liability management. In: **Handbook of asset and liability management**. North-Holland, 2008. p. 253-303. <https://doi.org/10.1016/B978-044453248-0.50012-5>

KŮRKOVÁ, Věra. Kolmogorov's theorem is relevant. **Neural computation**, v. 3, n. 4, p. 617-622, 1991. <https://doi.org/10.1162/neco.1991.3.4.617>

KŮRKOVÁ, Věra. Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks. **Neural networks**, v. 5, n. 3, p. 501-506, 1992. [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(92\)90012-8](https://doi.org/10.1016/0893-6080(92)90012-8)

LAGOS, Guido *et al.* Robust planning for an open-pit mining problem under ore-grade uncertainty. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 37, p. 15-20, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2011.05.004>

LAPPAS, Nikolaos H.; GOUNARIS, Chrysanthos E. Multi-stage adjustable robust optimization for process scheduling under uncertainty. **AICHE Journal**, v. 62, n. 5, p. 1646-1667, 2016. <https://doi.org/10.1002/aic.15183>

LARIVIERE, Martin A. Supply chain contracting and coordination with stochastic demand. In: **Quantitative models for supply chain management**. Springer, Boston, MA, 1999. p. 233-268. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4949-9_8

LEE, Kwon-Hee; PARK, Gyung-Jin. Robust optimization considering tolerances of design variables. **Computers e Structures**, v. 79, n. 1, p. 77-86, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00117-6)

LEUNG, Stephen CH *et al.* A robust optimization model for multi-site production planning problem in an uncertain environment. **European journal of operational research**, v. 181, n. 1, p. 224-238, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.011>

LI, Bin *et al.* Robust chance-constrained secure transmission for cognitive satellite–terrestrial networks. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, v. 67, n. 5, p. 4208-4219, 2018. <https://doi.org/10.1109/TVT.2018.2791859>

LINDEROTH, Jeff; SHAPIRO, Alexander; WRIGHT, Stephen. The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming. **Annals of Operations Research**, v. 142, n. 1, p. 215-241, 2006. <https://doi.org/10.1007/s10479-006-6169-8>

LINDEROTH, Jeff; WRIGHT, Stephen. Decomposition algorithms for stochastic programming on a computational grid. **Computational Optimization and Applications**, v. 24, n. 2-3, p. 207-250, 2003. <https://doi.org/10.1023/A:1021858008222>

LIU, Baoding; IWAMURA, Kakuzo. Chance constrained programming with fuzzy parameters. **Fuzzy sets and systems**, v. 94, n. 2, p. 227-237, 1998. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(96\)00236-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00236-9)

LIU, L. *et al.* A fuzzy-stochastic robust programming model for regional air quality management under uncertainty. **Engineering Optimization**, v. 35, n. 2, p. 177-199, 2003. <https://doi.org/10.1080/0305215031000097068>

LIU, Ming Long; SAHINIDIS, Nikolaos V. Optimization in process planning under uncertainty. **Industrial e Engineering Chemistry Research**, v. 35, n. 11, p. 4154-4165, 1996. <https://doi.org/10.1021/ie9504516>

LIRA-BARRAGÁN, Luis Fernando *et al.* Optimal water management under uncertainty for shale gas production. **Industrial e Engineering Chemistry Research**, v. 55, n. 5, p. 1322-1335, 2016. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.5b02748>

LIST, George F. *et al.* Robust optimization for fleet planning under uncertainty. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v. 39, n. 3, p. 209-227, 2003. [https://doi.org/10.1016/S1366-5545\(02\)00026-1](https://doi.org/10.1016/S1366-5545(02)00026-1)

LODWICK, Weldon A.; KACPRZYK, Janusz (Ed.). **Fuzzy optimization: Recent advances and applications**. Springer, 2010. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-13935-2>

LORENTZ, G. G. Metric entropy, widths, and superpositions of functions. **The American Mathematical Monthly**, v. 69, n. 6, p. 469-485, 1962. <https://doi.org/10.1080/00029890.1962.11989915>

ŁUKASZYK, Szymon. A new concept of probability metric and its applications in approximation of scattered data sets. **Computational Mechanics**, v. 33, n. 4, p. 299-304, 2004. <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0532-2>

MAGGIONI, Francesca; POTRA, Florian A.; BERTOCCHI, Marida. A scenario-based framework for supply planning under uncertainty: stochastic programming versus robust optimization approaches. **Computational Management Science**, v. 14, n. 1, p. 5-44, 2017. <https://doi.org/10.1007/s10287-016-0272-3>

MAK, Wai-Kei; MORTON, David P.; WOOD, R. Kevin. Monte Carlo bounding techniques for determining solution quality in stochastic programs. **Operations research letters**, v. 24, n. 1-2, p. 47-56, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(98\)00054-6](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(98)00054-6)

MARCHETTI, Pablo A. *et al.* Simultaneous production and distribution of industrial gas supply-chains. **Computers e Chemical Engineering**, v. 69, p. 39-58, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.06.010>

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio selection: Efficient diversification of investments**. New York: John Wiley, 1959.

MATTHEWS, Logan R. *et al.* Natural gas to liquid transportation fuels under uncertainty using robust optimization. **Industrial e Engineering Chemistry Research**, v. 57, n. 32, p. 11112-11129, 2018. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.8b01638>

MITRA, Sumit; PINTO, Jose M.; GROSSMANN, Ignacio E, 2014a. Optimal multi-scale capacity planning for power-intensive continuous processes under time-sensitive electricity prices and demand uncertainty. Part I: Modeling. **Computers e Chemical Engineering**, v. 65, p. 89-101, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.01.016>

MITRA, S., PINTO, J. M. & GROSSMANN, I. E., 2014b. Optimal multi-scale capacity planning for powerintensive continuous processes under time-sensitive electricity prices and demand uncertainty. Part II: Enhanced hybrid bi-level decomposition.. **Computers & Chemical Engineering**, Volume 65, pp. 102-111. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.02.012>

MITRA, Sumit *et al.* Optimal production planning under time-sensitive electricity prices for continuous power-intensive processes. **Computers e Chemical Engineering**, v. 38, p. 171-184, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2011.09.019>

MOONS, Stef *et al.* Integrating production scheduling and vehicle routing decisions at the operational decision level: a review and discussion. **Computers e Industrial Engineering**, v. 104, p. 224-245, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.12.010>

MULA, Josefa; POLER, Raul; GARCIA, J. P. MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach. **Fuzzy sets and systems**, v. 157, n. 1, p. 74-97, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.05.045>

MULVEY, John M.; RUSZCZYŃSKI, Andrzej. A new scenario decomposition method for large-scale stochastic optimization. **Operations research**, v. 43, n. 3, p. 477-490, 1995. <https://doi.org/10.1287/opre.43.3.477>

MULVEY, John M.; VANDERBEI, Robert J.; ZENIOS, Stavros A. Robust optimization of large-scale systems. **Operations research**, v. 43, n. 2, p. 264-281, 1995. <https://doi.org/10.1287/opre.43.2.264>

NAHMIAS, Steven. Fuzzy variables. **Fuzzy sets and systems**, v. 1, n. 2, p. 97-110, 1978. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(78\)90011-8](https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8)

NAHMIAS, S. Production and Operations Analysis, Homewood, IL: Richard D. Irwin. 1989.

NEES, Manuela. Approximative versions of Kolmogorov's superposition theorem, proved constructively. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 54, n. 2, p. 239-250, 1994. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)90179-1](https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)90179-1)

NEMIROVSKI, Arkadi *et al.* Robust stochastic approximation approach to stochastic programming. **SIAM Journal on optimization**, v. 19, n. 4, p. 1574-1609, 2009. <https://doi.org/10.1137/070704277>

NEMIROVSKI, Arkadi; SHAPIRO, Alexander. Convex approximations of chance constrained programs. **SIAM Journal on Optimization**, v. 17, n. 4, p. 969-996, 2007. <https://doi.org/10.1137/050622328>

NG, Tsan Sheng. Robust regret for uncertain linear programs with application to co-production models. **European Journal of Operational Research**, v. 227, n. 3, p. 483-493, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.014>

OBERKAMPF, William L. *et al.* Challenge problems: uncertainty in system response given uncertain parameters. **Reliability Engineering e System Safety**, v. 85, n. 1-3, p. 11-19, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2004.03.002>

PEIDRO, David *et al.* Quantitative models for supply chain planning under uncertainty: a review. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 43, n. 3-4, p. 400-420, 2009. <https://doi.org/10.1007/s00170-008-1715-y>

PISHVAEE, Mir Saman; RABBANI, Masoud; TORABI, Seyed Ali. A robust optimization approach to closed-loop supply chain network design under uncertainty. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 2, p. 637-649, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.013>

PISTIKOPOULOS, E. N.; IERAPETRITOU, M. G. Novel approach for optimal process design under uncertainty. **Computers e Chemical Engineering**, v. 19, n. 10, p. 1089-1110, 1995. [https://doi.org/10.1016/0098-1354\(94\)00093-4](https://doi.org/10.1016/0098-1354(94)00093-4)

RACHEV, Svetlozar T.; RÖMISCH, Werner. Quantitative stability in stochastic programming: The method of probability metrics. **Mathematics of Operations Research**, v. 27, n. 4, p. 792-818, 2002. <https://doi.org/10.1287/moor.27.4.792.304>

RAHMANI, Donya; HEYDARI, Mahdi. Robust and stable flow shop scheduling with unexpected arrivals of new jobs and uncertain processing times. **Journal of Manufacturing Systems**, v. 33, n. 1, p. 84-92, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2013.03.004>

RAO, Singiresu S. **Engineering optimization: theory and practice**. John Wiley e Sons, 2019.

REDDI, Sashank J. *et al.* Stochastic variance reduction for nonconvex optimization. In: **International conference on machine learning**. 2016. p. 314-323.

RIBAS, Gabriela P.; HAMACHER, Silvio; STREET, Alexandre. Optimization under uncertainty of the integrated oil supply chain using stochastic and robust programming. **International Transactions in Operational Research**, v. 17, n. 6, p. 777-796, 2010. <https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2009.00756.x>

ROCKAFELLAR, R. Tyrrell *et al.* Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of risk**, v. 2, p. 21-42, 2000. <https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038>

ROCKAFELLAR, R. Tyrrell; WETS, Roger J.-B. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. **Mathematics of operations research**, v. 16, n. 1, p. 119-147, 1991. <https://doi.org/10.1287/moor.16.1.119>

RÖMISCH, Werner; SCHULTZ, Rüdiger. Distribution sensitivity in stochastic programming. **Mathematical Programming**, v. 50, n. 1-3, p. 197-226, 1991. <https://doi.org/10.1007/BF01594935>

ROZENBLIT, Michal. **Robust optimization of a multi-period production planning problem under uncertainty**. Technion-Israel Institute of Technology, Faculty of Industrial and Management Engineering, 2010.

RYU, Si Wook; LEE, Kyung Keun. A stochastic inventory model of dual sourced supply chain with lead-time reduction. **International Journal of Production Economics**, v. 81, p. 513-524, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(02\)00294-3](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(02)00294-3)

SAJADIEH, Mohsen S.; JOKAR, Mohammad R. Akbari; MODARRES, Mohammad. Developing a coordinated vendor-buyer model in two-stage supply chains with stochastic lead-times. **Computers e Operations Research**, v. 36, n. 8, p. 2484-2489, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.10.001>

SAHINIDIS, Nikolaos V. Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities. **Computers e Chemical Engineering**, v. 28, n. 6-7, p. 971-983, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2003.09.017>

SCHÖBEL, Anita. Generalized light robustness and the trade-off between robustness and nominal quality. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 80, n. 2, p. 161-191, 2014. <https://doi.org/10.1007/s00186-014-0474-9>

SCHWARTZ, Jay D.; WANG, Wenlin; RIVERA, Daniel E. Simulation-based optimization of process control policies for inventory management in supply chains. **Automatica**, v. 42, n. 8, p. 1311-1320, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.03.019>

SEN, Suvrajeet; DOVERSPIKE, Robert D.; COSARES, Steve. Network planning with random demand. **Telecommunication systems**, v. 3, n. 1, p. 11-30, 1994. <https://doi.org/10.1007/BF02110042>

SHANG, Chao; YOU, Fengqi. Distributionally robust optimization for planning and scheduling under uncertainty. **Computers e Chemical Engineering**, v. 110, p. 53-68, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2017.12.002>

SHAPIRO, Alexander; AHMED, Shabbir. On a class of minimax stochastic programs. **SIAM Journal on Optimization**, v. 14, n. 4, p. 1237-1249, 2004. <https://doi.org/10.1137/S1052623403434012>

SHAPIRO, Alexander; HOMEM-DE-MELLO, Tito. A simulation-based approach to two-stage stochastic programming with recourse. **Mathematical Programming**, v. 81, n. 3, p. 301-325, 1998. <https://doi.org/10.1007/BF01580086>

SHAPIRO, Alexander; NEMIROVSKI, Arkadi. On complexity of stochastic programming problems. In: **Continuous optimization**. Springer, Boston, MA, 2005. p. 111-146. https://doi.org/10.1007/0-387-26771-9_4

SHAPIRO, Alexander; PHILPOTT, Andy. A tutorial on stochastic programming. **Manuscript. Available at www2. isye. gatech. edu/ashapiro/publications. html**, v. 17, 2007.

SODHI, ManMohan S. Managing demand risk in tactical supply chain planning for a global consumer electronics company. **Production and Operations management**, v. 14, n. 1, p. 69-79, 2005. <https://doi.org/10.1111/j.1937-5956.2005.tb00010.x>

SOYSTER, Allen L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. **Operations research**, v. 21, n. 5, p. 1154-1157, 1973. <https://doi.org/10.1287/opre.21.5.1154>

SPALL, James C. **Introduction to stochastic search and optimization: estimation, simulation, and control**. John Wiley e Sons, 2005.

SPRECHER, David A. On the structure of continuous functions of several variables. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 115, p. 340-355, 1965. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0210852-X>

SUH, Min-ho; LEE, Tai-yong. Robust optimization method for the economic term in chemical process design and planning. **Industrial e engineering chemistry research**, v. 40, n. 25, p. 5950-5959, 2001. <https://doi.org/10.1021/ie0005147>

SUNDARESAN, Sivakumar; ISHII, Kosuke; Houser, Donald R. A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints. **Engineering Optimization+ A35**, v. 24, n. 2, p. 101-117, 1995. <https://doi.org/10.1080/03052159508941185>

SUNGUR, Ilgaz; ORDÓNEZ, Fernando; DESSOUKY, Maged. A robust optimization approach for the capacitated vehicle routing problem with demand uncertainty. **IIE Transactions**, v. 40, n. 5, p. 509-523, 2008. <https://doi.org/10.1080/07408170701745378>

TILL, Jochen *et al.* A hybrid evolutionary algorithm for solving two-stage stochastic integer programs in chemical batch scheduling. **Computers e Chemical Engineering**, v. 31, n. 5-6, p. 630-647, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2006.09.003>

TOMASGARD, Asgeir *et al.* Optimization models for the natural gas value chain. In: **Geometric modelling, numerical simulation, and optimization**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. p. 521-558. https://doi.org/10.1007/978-3-540-68783-2_16

VLAJIC, Jelena V.; HENDRIX, E. M. T.; VAN DER VORST, J. G. A. J. **Food supply chain network robustness: a literature review and research agenda**. Wageningen University, 2008.

VLAJIC, J. V. *et al.* On robustness in food supply chain networks. **Trienekens, et al.(Eds.). Towards Effective Food Supply Chains.**, Wageningen Academic Publishers, The Netherlands, p. 63-82, 2010.

WALKUP, David W.; WETS, Roger J.-B. Stochastic programs with recourse. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 15, n. 5, p. 1299-1314, 1967. <https://doi.org/10.1137/0115113>

WELLONS, Helen Stoyell; REKLAITIS, G. V. The design of multiproduct batch plants under uncertainty with staged expansion. **Computers e Chemical Engineering**, v. 13, n. 1-2, p. 115-126, 1989. [https://doi.org/10.1016/0098-1354\(89\)89012-X](https://doi.org/10.1016/0098-1354(89)89012-X)

WERNERS, Brigitte. An interactive fuzzy programming system. **Fuzzy sets and systems**, v. 23, n. 1, p. 131-147, 1987. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(87\)90105-9](https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90105-9)

WESTERN ELECTRIC COMPANY. **Statistical quality control handbook**. Western Electric Company, 1956.

WETS, Roger J.-B. Programming under uncertainty: the equivalent convex program. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 14, n. 1, p. 89-105, 1966. <https://doi.org/10.1137/0114008>

WETS, Roger J.-B. Stochastic programs with fixed recourse: The equivalent deterministic program. **SIAM review**, v. 16, n. 3, p. 309-339, 1974. <https://doi.org/10.1137/1016053>

WETS, Roger J.-B. Solving stochastic programs with simple recourse. **Stochastics**, v. 10, n. 3-4, p. 219-242, 1983. <https://doi.org/10.1080/17442508308833274>

WETS, Roger JB. Stochastic programming models: wait-and-see versus here-and-now. In: **Decision Making Under Uncertainty**. Springer, New York, NY, 2002. p. 1-15. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9256-9_1

WIESEMANN, Wolfram; KUHN, Daniel; SIM, Melvyn. Distributionally robust convex optimization. **Operations Research**, v. 62, n. 6, p. 1358-1376, 2014. <https://doi.org/10.1287/opre.2014.1314>

XIDONAS, Panos *et al.* Robust multiobjective portfolio optimization: A minimax regret approach. **European Journal of Operational Research**, v. 262, n. 1, p. 299-305, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.03.041>

XU, Ye; HUANG, Guohe; QIN, Xiaosheng. Inexact two-stage stochastic robust optimization model for water resources management under uncertainty. **Environmental Engineering Science**, v. 26, n. 12, p. 1765-1776, 2009. <https://doi.org/10.1089/ees.2009.0212>

LI, Bo Hu *et al.* Robust balancing of mixed model assembly line. **COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering**, 2009.

YAMASHITA, Denise Sato; ARMENTANO, Vinícius Amaral; LAGUNA, Manuel. Robust optimization models for project scheduling with resource availability cost. **Journal of Scheduling**, v. 10, n. 1, p. 67-76, 2007. <https://doi.org/10.1007/s10951-006-0326-4>

YANIKOĞLU, İhsan; GORISSEN, Bram L.; DEN HERTOG, Dick. A survey of adjustable robust optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 277, n. 3, p. 799-813, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.08.031>

YE, Yun *et al.* Robust optimization and stochastic programming approaches for medium-term production scheduling of a large-scale steelmaking continuous casting process under demand uncertainty. **Computers e chemical engineering**, v. 66, p. 165-185, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.02.028>

YIN, Yafeng; MADANAT, Samer M.; LU, Xiao-Yun. Robust improvement schemes for road networks under demand uncertainty. **European Journal of Operational Research**, v. 198, n. 2, p. 470-479, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.09.008>

YOU, Fengqi *et al.* Optimal distribution-inventory planning of industrial gases. I. Fast computational strategies for large-scale problems. **Industrial e Engineering Chemistry Research**, v. 50, n. 5, p. 2910-2927, 2011. <https://doi.org/10.1021/ie1017578>

YOUN, Byeng D. *et al.* Integration of possibility-based optimization and robust design for epistemic uncertainty. 2007.

YOUSEFI-BABADI, A. *et al.* Designing a reliable multi-objective queuing model of a petrochemical supply chain network under uncertainty: a case study. **Computers e Chemical Engineering**, v. 100, p. 177-197, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2016.12.012>

YU, Chian-Son; LI, Han-Lin. A robust optimization model for stochastic logistic problems. **International journal of production economics**, v. 64, n. 1-3, p. 385-397, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(99\)00074-2](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(99)00074-2)

ZADEH, Lotfi A. Fuzzy sets. **Information and control**, v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965. [https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(65)90241-X)

ZHANG, Qi *et al.* An adjustable robust optimization approach to scheduling of continuous industrial processes providing interruptible load. **Computers e Chemical Engineering**, v. 86, p. 106-119, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2015.12.018>

ZHOU, Li; DISNEY, Stephen M. Bullwhip and inventory variance in a closed loop supply chain. **Or Spectrum**, v. 28, n. 1, p. 127-149, 2006. <https://doi.org/10.1007/s00291-005-0009-0>