

Lucas Henrique de Oliveira

**Matrizes Estocásticas Aleatórias Associadas a  
Grupos de Lie Clássicos e Espaços Simétricos**

Uberlândia

Fevereiro de 2019



Lucas Henrique de Oliveira

# **Matrizes Estocásticas Aleatórias Associadas a Grupos de Lie Clássicos e Espaços Simétricos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Física.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Marcel Novaes

Uberlândia

Fevereiro de 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

O48m  
2019      Oliveira, Lucas Henrique de, 1995-  
            Matrizes estocásticas aleatórias associadas a grupos de lie clássicos e  
            espaços simétricos [recurso eletrônico] / Lucas Henrique de Oliveira. -  
            2019.

            Orientador: Marcel Novaes.  
            Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
            Programa de Pós-Graduação em Física.  
            Modo de acesso: Internet.  
            Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.3017>  
            Inclui bibliografia.  
            Inclui ilustrações.

            I. Física. I. Novaes, Marcel, 1978-, (Orient.). II. Universidade  
            Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Física. III.  
            Título.

---

CDU: 53



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física  
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1A, Sala 213 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4309 - www.infis.ufu.br - cpqgfisica@ufu.br



### ATA

Ata da defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO junto ao Programa de Pós-graduação em Física (PPFIS) do Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia - INFIS/UFU.

Defesa de Dissertação de Mestrado Acadêmico, Número 088/PPFIS.

Data: 20 de Fevereiro de 2019.

Discente: Matrícula Nº **11712FIS003** – **Lucas Henrique de Oliveira**

Título do Trabalho: “*Matrizes estocásticas aleatórias associadas a grupos de Lie clássicos e espaços simétricos*”.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Linha de Pesquisa: Óptica e Fenômenos Quânticos

Projeto Vinculado ao Trabalho: *Aproximações Semiclássicas Para Sistemas Quânticos Caóticos*

Às quatorze horas do dia vinte de fevereiro de 2019, no anfiteatro do Bloco 1X, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, reuniu-se a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física, assim composta: Prof. Dr. Gerson Ferreira Junior – PPFIS/UFU, Natalia Andrea Viana Bedoya- UFSCAR e Marcel Novaes, orientador do candidato. Iniciando os trabalhos, o Presidente da mesa Prof. Dr. Marcel Novaes apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público e concedeu a palavra ao discente para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do aluno e o tempo de arguição e resposta ocorreram conforme as normas do Programa.

O senhor Presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente aos examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu os conceitos finais.

Em face do resultado obtido, a Banca Examinadora considerou a candidata:

( X ) Aprovado                      ( ) Reprovado                      ( ) Aprovado com reformulação.

Sugestões da Banca (se couber):

---

Esta defesa de Dissertação de Mestrado Acadêmico é parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre. O competente diploma será expedido após o cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, legislação e regulamentação internas da Universidade Federal de Uberlândia - UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos às 15 horas e 25 minutos. Foi lavrada a presente ata que após lida e considerada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Prof. Dr. Gerson Ferreira Junior – UFU

Profª. Dra. Natália Andrea Viana Bedoya - UFSCAR

Prof. Dr. Marcel Novaes - UFU - Orientador



Documento assinado eletronicamente por **Gerson Ferreira Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/03/2019, às 10:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Natalia Andrea Viana Bedoya, Usuário Externo**, em 07/03/2019, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcel Novaes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 09/03/2019, às 10:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1060492** e o código CRC **D0625C15**.



*Este trabalho, assim como qualquer outra conquista,  
é dedicado aos meus pais, Newton e Márcia.*





# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus por ter me permitido trilhar essa jornada. E também por ter me dado forças em momentos difíceis.

Agradeço à minha família pelo apoio ao longo dos anos de estudo. Principalmente aos meus pais, Newton e Márcia, ao meu irmão, João Paulo, e avós, Maria, Antônio e Nicanor, por sempre estarem por perto.

Ao meu orientador, Marcel Novaes, sou grato por ter me aceito como aluno, pelos valiosos conselhos e ensinamentos. E também, pela sua dedicação, disponibilidade e paciência.

Aos amigos que estiveram e estão ao meu lado: agradeço pelos bons momentos que compartilhamos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa.



# Resumo

Consideramos matrizes estocásticas aleatórias  $M$  com elementos dados por  $M_{ij} = |U_{ij}|^2$ , com  $U$  sendo uniformemente distribuída em um dos grupos de Lie clássicos ou em um espaço simétrico associado. Observamos numericamente que, para altas dimensões, a estatística espectral de  $M$  (descartando o autovalor de Perron-Frobenius) é similar à do Ensemble Gaussiano Ortogonal para matrizes simétricas e à do ensemble real de Ginibre para matrizes não-simétricas. Nossa abordagem para a estatística espectral é baseada nas funções de Weingarten e na formulação de problemas enumerativos envolvendo permutações.

**Palavras-chave:** matrizes aleatórias, matrizes estocásticas, grupos de Lie, espaços simétricos.



# Abstract

We consider random stochastic matrices  $M$  with elements given by  $M_{ij} = |U_{ij}|^2$ , with  $U$  being uniformly distributed on one of the classical compact Lie groups or some of the associated symmetric spaces. We observe numerically that, for large dimensions, the spectral statistics of  $M$  (discarding the Perron-Frobenius eigenvalue) are similar to those of the Gaussian Orthogonal ensemble for symmetric matrices and to those of the real Ginibre ensemble for nonsymmetric matrices. We compute some spectral statistics using Weingarten functions and establish connections with some difficult enumerative problems involving permutations.

**Keywords:** random matrices, stochastic matrices, Lie groups, symmetrical spaces.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Histograma dos espaçamentos entre níveis de energia comparado com a predição da Teoria de Matrizes Aleatórias (GOE). Adaptado de [1]. . .	20
Figura 2 – Propriedades estatísticas de alguns ensembles gaussianos (GUE e GOE) e de Ginibre (GRE). As matrizes têm ordem 100. . . . .	21
Figura 3 – Pareamentos gerados por quatro permutações: $\sigma_1, \sigma_2 \in H_2$ e $\sigma_3, \sigma_4 \notin H_2$ .	26
Figura 4 – Grafo $\Gamma_\xi$ gerado pela permutação $\xi = (1, 3, 5)(8, 10) \in S_{14}$ . . . . .	27
Figura 5 – Esquema de uma cadeia de Markov estacionária. . . . .	41
Figura 6 – Representação de um centro espalhador. . . . .	43
Figura 7 – Espectros reduzidos para os ensembles de matrizes estocásticas obtidos através do grupos de Lie clássicos. As matrizes têm dimensão 100. . . .	57
Figura 8 – Histogramas dos valores singulares para os ensembles estocásticos $\Sigma_O, \Sigma_U$ e $\Sigma_S$ . . . . .	58
Figura 9 – Histogramas dos espectros reduzidos das matrizes estocásticas obtidas dos ensembles circulares. . . . .	58
Figura 10 – Espectros reduzidos das matrizes estocásticas obtidas dos ensembles quirais. . . . .	59





# Lista de símbolos

$\langle g_1, \dots, g_k \rangle$	Grupo gerado pelos elementos $g_1, \dots, g_k$
$gH$	Coset, ou classe lateral à esquerda, do elemento $g$ com relação ao subgrupo $H$
$S_n$	Grupo simétrico, ou grupo de permutações, de ordem $n$
$\lambda \vdash n$	A sequência $\lambda$ é uma partição de $n$
$ct(\sigma)$	Ciclo-tipo da permutação $\sigma$
$ C_\lambda $	Número de permutações que pertencem à classe $C_\lambda$ , ou seja, o número de permutações com ciclo-tipo $\lambda$
$H_n$	Hiperoctaedro: subconjunto de $S_{2n}$ formado pelas permutações que comutam com $\tau = (1\ 2)(3\ 4)\dots(2n-1\ 2n)$
$\mathcal{M}_n$	Conjunto dos <i>matchings</i> em $S_{2n}$
$\mathbf{m}_\sigma$	<i>Matching</i> associado à permutação $\sigma$
$f(\mathbf{m})$	Involução sem pontos fixos associada ao <i>matching</i> $\mathbf{m}$
$\Gamma_\sigma$	Grafo associado à permutação $\sigma \in S_{2n}$
$[\sigma]$	Coset-tipo da permutação $\sigma$
$l(\sigma)$	Comprimento do coset-tipo da permutação $\sigma$ , ou seja, $l([\sigma])$
$\mathcal{U}(N)$	Grupo Unitário de ordem $N$
$\mathcal{O}(N)$	Grupo Ortogonal de ordem $N$
$\mathcal{S}p(2N)$	Grupo Simplético de ordem $2N$
$GL_k(A)$	Grupo linear geral de ordem $k$ em que as entradas das matrizes pertencem ao conjunto $A$
$\chi^\lambda(\sigma)$	Caractere da classe de conjugação $\sigma$ (ou do elemento $\sigma$ ) na representação irreduzível $\lambda$
$\omega^\lambda(\sigma)$	Função esférica zonal de índice $\lambda$ calculada para a permutação $\sigma$
$\epsilon(\sigma)$	Sinal da permutação $\sigma$

$\psi^\lambda(\sigma)$	Função esférica zonal torcida de índice $\lambda$ calculada para a permutação $\sigma$
$s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$	Função de Schur de índice $\lambda$ nas variáveis $x_1, \dots, x_N$
$h_p(x_1, \dots, x_N)$	Polinômio homogêneo de grau $p$ nas variáveis $x_1, \dots, x_N$
$p_\lambda(x_1, \dots, x_N)$	Série de potências de índice $\lambda$ nas variáveis $x_1, \dots, x_N$
$J_\lambda^\alpha(x_1, \dots, x_N)$	Polinômio de Jack de índice superior $\alpha$ e índice inferior $\lambda$ nas variáveis $x_1, \dots, x_N$
$\Sigma_G$	Ensemble de matrizes estocásticas associado ao conjunto $G$
$dU$	Medida de Haar no grupo Unitário
$dO$	Medida de Haar no grupo Ortogonal
$dS$	Medida de Haar no grupo Simplético
$\langle Q \rangle_G$	Média sobre o conjunto $G$ , equivalente a $\int_G Q dg$
$C_n$	$n$ -ésimo número de Catalan
$\text{tr}M$	Traço reduzido de $M$ : $\text{tr}M = \text{Tr}M - 1$
$\Omega(a, b)$	Número de órbitas do grupo gerado por $a$ e $b$

# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>17</b>
	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b> . . . . .	<b>23</b>
1.1	Grupos . . . . .	23
1.2	Grupos de Permutações . . . . .	24
1.3	Grupos de Matrizes e Espaços Simétricos . . . . .	28
1.4	Teoria de Representações . . . . .	33
1.5	Funções Esféricas . . . . .	35
1.6	Séries de Potências e Polinômios de Jack . . . . .	36
1.7	Cadeias de Markov . . . . .	40
1.8	Matrizes Estocásticas, Grupos de Lie e Espaços Simétricos . . . . .	42
<b>2</b>	<b>INTEGRAIS MATRICIAIS</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1	Medida e distribuições de probabilidade . . . . .	45
2.2	Médias . . . . .	47
2.2.1	Integrais sobre grupos de Lie . . . . .	47
2.2.2	Integrais sobre espaços simétricos . . . . .	50
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>57</b>
3.1	Resultados Numéricos . . . . .	57
3.2	Momentos . . . . .	59
3.3	Grupos de Lie . . . . .	60
3.3.1	Grupo Unitário . . . . .	60
3.3.2	Grupo Ortogonal . . . . .	63
3.3.3	Grupo Simplético . . . . .	65
3.4	Ensembles Circulares . . . . .	66
3.4.1	Espaço Simétrico AI . . . . .	66
3.4.2	Espaço Simétrico AII . . . . .	67
3.5	Ensembles Quirais . . . . .	68
3.5.1	Espaço Simétrico AIII . . . . .	68
3.5.2	Espaço Simétrico BDI . . . . .	70
3.5.3	Espaço Simétrico CII . . . . .	70
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>73</b>

	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>75</b>
	<b>APÊNDICE A – PRODUÇÃO DE MATRIZES ALEATÓRIAS</b> ...	<b>79</b>
<b>A.1</b>	<b>Decomposição <math>QR</math></b> .....	<b>79</b>
<b>A.2</b>	<b>Matrizes aleatórias em <math>\mathcal{U}(N)</math></b> .....	<b>80</b>
<b>A.3</b>	<b>Matrizes aleatórias em <math>\mathcal{S}_p(2N)</math></b> .....	<b>81</b>
	<b>Índice</b> .....	<b>83</b>

# Introdução

Por volta de 1950, Eugene P. Wigner (1902-1995) estava interessado nos espectros de energia de átomos pesados, como o Urânio [2]. Os átomos pesados têm um grande número de níveis de energia, que aparecem nos dados experimentais como picos na taxa de difusão de nêutrons em função da energia [3]. Porém, do ponto de vista teórico, o estudo de tais átomos é muito mais complicado que o do átomo de Hidrogênio. Devido à dificuldade de descrever um núcleo individual, Wigner optou por uma abordagem estatística, estudando, por exemplo, as distribuições do espaçamento entre níveis de energia vizinhos (precisamente, o espaçamento em unidades do espaçamento médio, ou seja, o espaçamento real dividido pelo espaçamento médio). Ele considerou que níveis de energia eram associados a autovalores de matrizes hermitianas aleatórias e, conseqüentemente, a distribuição dos espaçamentos dos níveis de energia estaria relacionada à distribuição dos espaçamentos entre os autovalores de tais matrizes. Os elementos das matrizes aleatórias utilizadas por Wigner possuem distribuição normal:

$$P(H) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}H^2\right) = \prod_{i=1}^N e^{-\frac{|h_{ii}|^2}{2}} \prod_{j \geq i}^N e^{-|h_{ij}|^2}, \quad (1)$$

por isso esses conjuntos de matrizes são chamados ensembles gaussianos. Se o conjunto é invariante por multiplicação por matrizes unitárias (respectivamente, ortogonais, simpléticas), temos o Ensemble Gaussiano Unitário (respectivamente, Ortogonal, Simplético), denotado GUE (respectivamente, GOE, GSE). Os dados experimentais corroboraram a previsão de Wigner: na Fig. 1 um histograma com 1726 espaçamentos é comparado com a previsão da Teoria de Matrizes Aleatórias (GOE). Esta foi uma das primeiras aplicações da Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT) na Física .

Apesar de as matrizes aleatórias terem surgido na Matemática por volta de 1930, com trabalhos de Hsu [4], Wishart [5] e outros, somente depois dos trabalhos de Wigner, na década de 1950, é que a teoria atraiu a atenção dos físicos [6]. Desde então, muito conhecimento na área vem sendo acumulado e muitas aplicações têm surgido. Além dos núcleos pesados, outros sistemas que possuem espectros complicados são os bilhares caóticos em 2D. Formas simples no bilhar podem produzir espectros complicados como o bilhar de Sinai (composto por um quadrado com uma circunferência interna) e o estádio (um retângulo com dois semicírculos). No bilhar a partícula é livre e interage apenas com a superfície na qual é defletida. Se o sistema é classicamente integrável, o espaçamento dos autovalores do hamiltoniano correspondente segue uma distribuição de Poisson, e com muitas degenerescências entre níveis de energia. Entretanto, se é caótico, os níveis possuem a mesma estatística dos autovalores de matrizes aleatórias: sem degenerescências, ou seja, eles se repelem. Este comportamento foi observado pela primeira vez por Berry e Tabor

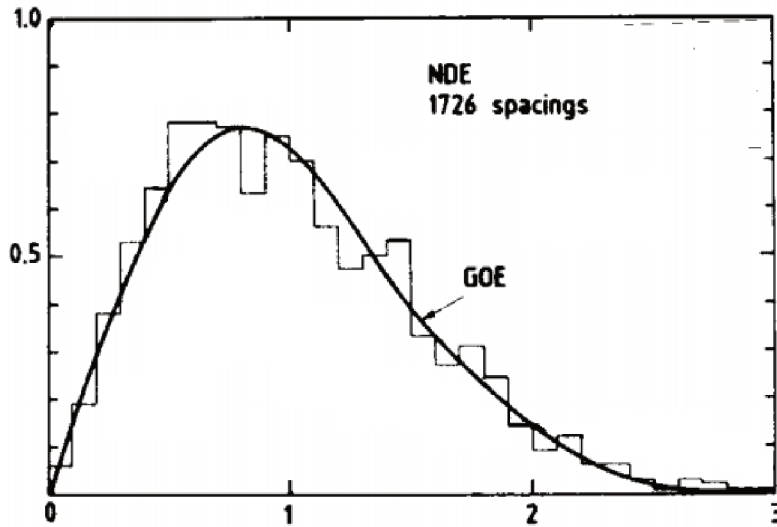


Figura 1 – Histograma dos espaçamentos entre níveis de energia comparado com a predição da Teoria de Matrizes Aleatórias (GOE). Adaptado de [1].

[7] e também estudado por Bohigas, Giannoni e Schmit [8]. A RMT também aparece em vários outros campos de estudo: modelando matrizes de espalhamento para transporte em sistemas desordenados [9]; no estudo de diagramas planares em teoria de cordas [10]; no contexto da Cromodinâmica Quântica (QCD) [11]; além de aplicações em matemática pura, por exemplo em Teoria dos Números [12, 13].

Alguns ensembles de matrizes aleatórias exibem uma propriedade chamada **universalidade**. Ela estabelece que o comportamento das propriedades estatísticas das matrizes, como a distribuição de autovalores, é independente da distribuição individual de seus elementos quando as matrizes são suficientemente grandes. Quando os autovalores são reais, espera-se que as propriedades estatísticas do ensemble sejam correspondentes às dos ensembles gaussianos. Nesses casos, um dos resultados centrais da universalidade é a lei semicircular [14]. Ela estabelece que a distribuição de autovalores corresponde à distribuição semicircular de Wigner [15], que é a distribuição dos autovalores de matrizes do GUE e do GOE, Figs. 2a e 2b. Para matrizes com autovalores complexos, espera-se que as propriedades sejam equivalentes às dos ensembles de Ginibre. Estes ensembles são compostos por matrizes não-hermitianas cujos elementos têm distribuição normal. Se as matrizes são complexas (respectivamente, reais, quaterniônicas) e a medida é invariante por multiplicação por matrizes unitárias (respectivamente, ortogonais, simpléticas), temos o Ensemble de Ginibre Complexo (respectivamente, Real, Quaterniônico), denotado GCE (respectivamente, GRE, GQE) [16]. Nesses casos, espera-se que os autovalores se distribuam de maneira aproximadamente uniforme (exceto por uma pequena concentração, de ordem  $\sqrt{N}$ , de autovalores sobre a reta real [17]) em um círculo no plano complexo (lei circular), Fig. 2c, e que a distribuição dos valores singulares ocorra na forma de um quarto de círculo [18], Fig. 2d.

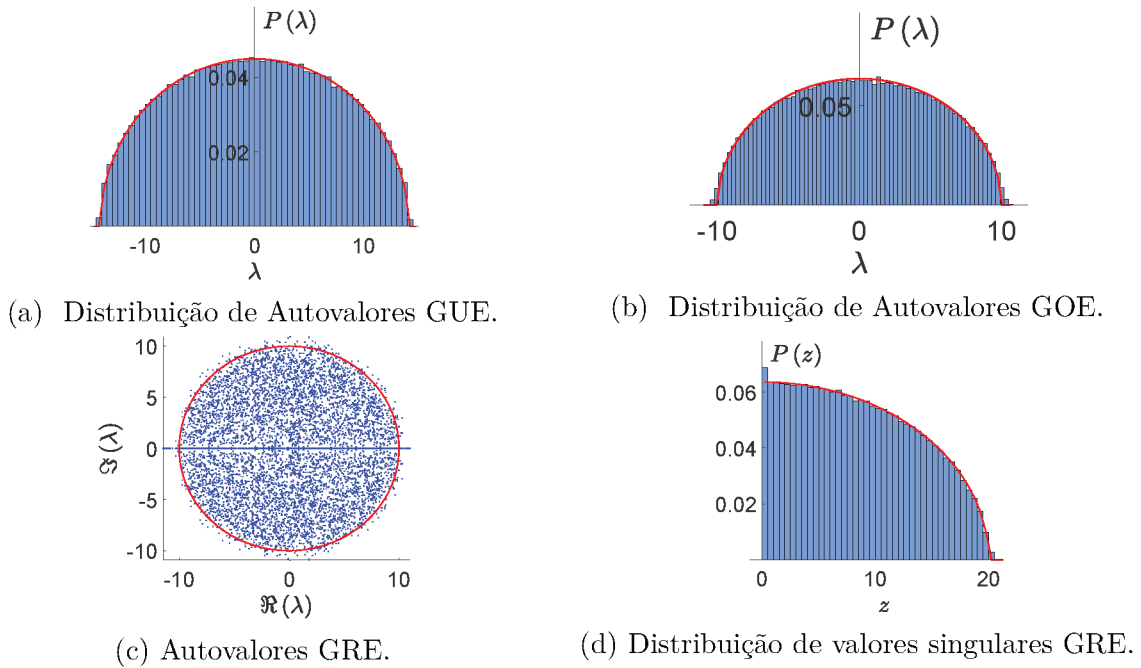


Figura 2 – Propriedades estatísticas de alguns ensembles gaussianos (GUE e GOE) e de Ginibre (GRE). As matrizes têm ordem 100.

Quando a universalidade está presente, as propriedades estatísticas das matrizes dependem apenas das simetrias do ensemble ao qual pertence. Por exemplo, quando o sistema não apresentar nenhuma simetria o ensemble adequado para representar o Hamiltoniano poderia ser o GUE, porém se o sistema apresentar simetria de reversão temporal, o ensemble adequado poderia ser o GOE, e se, além da simetria de reversão temporal, o sistema apresentar spin total semi-inteiro o ensemble adequado poderia ser o GSE.

Também vêm sendo estudados os ensembles de Markov. Esses ensembles são formados por matrizes de Markov (ou estocásticas) que aparecem, por exemplo, em modelagens em Física, Biologia, Ciência da Computação, Engenharia, etc. Essas matrizes são caracterizadas por possuírem elementos reais que satisfazem  $0 \leq M_{ij} \leq 1$  e suas colunas (ou linhas) são normalizadas,  $\sum_{j=1}^N M_{ij} = 1$ . Nesses casos, as colunas obedecem à distribuição de Dirichlet. Foi mostrado que o espectro de matrizes com ordem suficientemente alta é composto pelo número 1 (que sempre é autovalor de uma matriz estocástica) e por um círculo aproximadamente uniforme no plano complexo, obedecendo portanto uma lei circular [19, 20]. E que o segundo maior autovalor (com relação ao módulo) é da ordem de  $N^{-1/2}$  [21]. Portanto, o gap formado pelo número 1 e o segundo maior autovalor de  $M$  é da ordem de  $1 - \mathcal{O}(N^{-1/2})$  [19].

Outra família de matrizes estocásticas são aquelas formadas tomando o módulo quadrado dos elementos de uma matriz unitária  $U$ ,  $M_{ij} = |U_{ij}|^2$ . Essas matrizes podem ser consideradas como as probabilidades associadas ao espalhamento por um vértice de

um grafo (mais detalhes na Seção 1.8) [22, 23]. Foi mostrado que o gap espectral dessas matrizes também é da forma  $1 - \mathcal{O}(N^{-1/2})$  [24]. Zyczkowski et al. investigaram o espectro dessas matrizes (além de matrizes estocásticas obtidas através de matrizes ortogonais,  $M_{ij} = O_{ij}^2$ ), e encontraram resultados interessantes em termos de hipocicloides [25]. Matrizes biestocásticas, que são matrizes estocásticas com linhas e colunas normalizadas, também foram investigadas [26].

Neste trabalho, estendemos a definição dos ensembles de matrizes estocásticas. Definimos um ensemble associado ao grupo de Lie remanescente, o grupo Simplético (que denotamos  $\Sigma_S$ ). E também definimos os ensembles associados aos seguintes espaços simétricos compactos: os ensembles circulares (AI e AII) e os ensembles quirais (AIII, BDI e CII), segundo a classificação de Cartan [27]. Dessa forma, temos os ensembles de matrizes estocásticas  $\Sigma_U$ ,  $\Sigma_O$  e  $\Sigma_S$  associados grupos Unitário, Ortogonal e Simplético, respectivamente; os ensembles  $\Sigma_{AI}$  e  $\Sigma_{AII}$  associados aos ensembles circulares AI e AII; e os ensembles  $\Sigma_{AIII}$ ,  $\Sigma_{BDI}$  e  $\Sigma_{CII}$  associados aos ensembles quirais AIII, BDI e CII. Todos eles com medidas induzidas pela medida de Haar.

Mesmo que nossas matrizes,  $M_{ij} = |U_{ij}|^2$ , não possuam elementos independentes podemos esperar universalidade, já que a condição de estocasticidade torna-se mais fraca à medida que a dimensão das matrizes cresce. Numericamente, esta conjectura parece ser verdadeira. Os ensembles de matrizes estocásticas associados aos ensembles quirais apresentam um parâmetro arbitrário  $\alpha$ , e a universalidade parece estar presente quando  $\alpha = 0$ . Para obter informações sobre as distribuições de autovalores e para tentar provar a universalidade, investigamos as médias  $\langle \text{Tr} M^n \rangle$  e  $\langle \text{Tr} (MM^T)^n \rangle$  através do maquinário das funções de Weingarten [28, 29, 30, 31, 32]. Entretanto, não conseguimos caracterizar completamente as distribuições pois nos deparamos com problemas combinatórios complicados envolvendo permutações.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, fazemos uma revisão de conceitos que são requisitados ao longo do trabalho, como grupos de permutação, grupos de Lie e espaços simétricos. Além disso, motivamos e definimos as matrizes estocásticas que serão alvo de nosso estudo. No Capítulo 2, expomos noções da Teoria de Matrizes Aleatórias, como medida e média sobre grupos. No Capítulo 3, exibimos cálculo dos primeiros momentos das distribuições de autovalores das matrizes estocásticas bem como os resultados dos experimentos numéricos. Finalmente, no Capítulo 4, temos as conclusões. A produção de matrizes aleatórias adequadas para conduzir os experimentos numéricos é tratada no Apêndice A.



# 1 Conceitos Fundamentais

Neste capítulo vamos explorar alguns conceitos fundamentais que serão utilizados adiante. Começamos com uma introdução sobre Teoria de Grupos e passamos aos grupos mais pertinentes ao presente trabalho: os grupos de permutações e os grupos de matrizes. Por fim, exploramos conceitos básicos de Teoria das Representações, funções simétricas e cadeias de Markov.

## 1.1 Grupos

Uma **operação**  $(\cdot)$ , sobre um conjunto  $G$  é definida como uma aplicação que tem como domínio  $G \times G$  e  $G$  como contradomínio. Ou seja, quando operamos dois elementos de um conjunto  $G$ , o resultado deve ser um elemento de  $G$ . Como exemplos de operações, temos o produto de matrizes quadradas, a soma de números reais, entre outras.

Se uma operação  $\cdot$  definida sobre o conjunto  $G$

- é associativa:  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$  temos  $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ ;
- admite um elemento neutro: existe um único  $e \in G$  tal que  $g \cdot e = e \cdot g = g, \forall g \in G$ ;
- e admite elemento inverso:  $\forall g \in G$  existe um único  $g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ ;

dizemos que  $(G, \cdot)$  forma um **grupo**. Cabe ressaltar que se  $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$  para quaisquer elementos  $g_1, g_2$ , então  $G$  representa um grupo comutativo ou abeliano. O número de elementos em  $G$  é a ordem do grupo. Por questão de simplicidade, quando não houver risco de ambiguidade, denotaremos um grupo  $(G, \cdot)$  simplesmente por  $G$ , a operação  $\cdot$  fica implícita. Como exemplos de grupos, podemos citar:  $\mathbb{R}$  com a operação de adição usual; o conjunto das matrizes de mesma ordem também com a adição de matrizes usual; o conjunto  $\{1, -1, i, -i\}$  juntamente com o produto usual; as matrizes com determinante não-nulo com o produto usual de matrizes.

Quando um subconjunto  $H$  de  $G$  forma, também, um grupo com a mesma operação de  $(G, \cdot)$ , dizemos que  $(H, \cdot)$  é um subgrupo de  $(G, \cdot)$ . Um exemplo de subgrupo de um grupo qualquer são os **subgrupos gerados** por elementos do grupo. O subgrupo gerado por um único elemento é o conjunto formado por todas as suas potências, dado  $g \in G$ ,  $\langle g \rangle = \{g^m | m \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, g^{-m}, \dots, g^{-1}, e, g, \dots, g^m, \dots\}$ . E o subgrupo gerado por vários elementos,  $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ , é conjunto formado por todos os produtos de potências que podem ser formadas com estes elementos. Uma analogia válida é: o subgrupo gerado por  $k$  elementos de  $G$  é o conjunto de todas as palavras que podem ser formadas com um

alfabeto com  $k$  letras. Por exemplo,  $g_1, g_2, g_1g_2, g_1^2g_2, g_1g_2^2, g_1^2g_2^2, \dots$  são elementos de  $\langle g_1, g_2 \rangle$ . De acordo com o exemplo dado acima  $\langle i \rangle = \{1, -1, i, -i\}$  e  $\langle -1 \rangle = \{1, -1\}$  são subgrupos do grupo  $\{1, -1, i, -i\}$ .

Agora, podemos definir a **conjugação** de  $x \in G$  por um elemento  $g \in G$  como  $gxg^{-1}$ . Dizemos que  $x, y \in G$  estão relacionados se, e somente se,  $\exists g \in G$  tal que  $y = gxg^{-1}$ . Esta relação é uma relação de equivalência. A classe de conjugação de um elemento  $g_1$  de  $G$  é o conjunto de todos os elementos a ele conjugados, ou seja,  $\overline{g_1} = \{gg_1g^{-1} | g \in G\}$ . Se  $H$ , um subgrupo de  $G$ , é invariante por conjugação para todos os elementos de  $G$ , ou seja,  $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$ , dizemos que  $H$  é um subgrupo **normal** de  $G$ .

Podemos ainda definir um **coset** (também chamado classe lateral). Dado  $H$  um subgrupo de  $G$  e  $g \in G$ , definimos um coset à esquerda  $gH = \{gh | h \in H\}$  e os cosets à direita, de forma análoga,  $Hg = \{hg | h \in H\}$ . Observe que o conjunto de cosets forma uma partição do conjunto  $G$ . Se o subgrupo é normal, então os cosets à esquerda coincidem com os cosets à direita. Além disso, cada coset tem a mesma ordem que  $H$ .

O conjunto quociente  $G/H$  é o conjunto dos cosets à esquerda (também podemos definir de maneira análoga como o conjunto dos cosets à direita). Se o subgrupo for normal, o conjunto quociente forma um grupo. E a operação é o produto de cosets: o produto dos cosets dos elementos  $g_1$  e  $g_2$  corresponde ao coset do produto  $g_1g_2$ , isto é, se o coset de  $g_1$  é  $\overline{g_1}$  e de  $g_2$  é  $\overline{g_2}$  o produto dos cosets é  $\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} = \overline{g_1 \cdot g_2}$ . Como exemplo, considere  $(\mathbb{Z}, +)$ , o conjunto dos inteiros com a operação de adição, e um de seus subgrupos  $2\mathbb{Z}$ , o conjunto dos números pares. O quociente  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  é o conjunto  $\{0, 1\}$  com a adição módulo 2.

Um **homomorfismo** de grupos é uma aplicação que respeita as operações dos grupos. Se  $\Psi$  é um homomorfismo que tem como domínio o grupo  $(G_1, *)$  e o grupo  $(G_2, \cdot)$  como contradomínio, então  $\Psi(g_1 * g_2) = \Psi(g_1) \cdot \Psi(g_2), \forall g_1, g_2 \in G_1$ . Como exemplo, podemos citar a função exponencial. Ela tem como domínio o conjunto  $\mathbb{R}$ , que define um grupo com a operação de adição,  $(\mathbb{R}, +)$ , e tem como contradomínio o conjunto dos números reais maiores que zero  $\mathbb{R}_+^*$ , que forma um grupo juntamente com a operação de produto usual,  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ . A propriedade da função exponencial,  $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2)$ , faz dela um homomorfismo entre o grupo  $(\mathbb{R}, +)$  e o grupo  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ .

## 1.2 Grupos de Permutações

Quando embaralhamos um baralho, alteramos a ordem das cartas, mas não retiramos nem colocamos nenhuma carta. A iniciativa de embaralhar pode ser vista como uma função e a posição das cartas pode ser vista sobre o conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Assim, embaralhar é uma função bijetora que tem como domínio e como imagem o conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Tal função recebe o nome de **permutação**. Juntamente com a operação de composição, elas formam o **grupo de permutações**, também chamado grupo simétrico, denotado por

$S_n$ . E sua ordem é  $n!$ , ou seja, o número de maneiras de ordenar o conjunto  $\{1, \dots, n\}$ .

Podemos descrever uma permutação especificando a imagem de cada elemento. Porém, existe uma maneira conveniente de escrever uma permutação, a chamada notação de ciclos. Em um ciclo, o elemento à direita é imagem do elemento à esquerda e o primeiro elemento do ciclo é imagem do último. Assim, escrevemos uma permutação como um produto de ciclos disjuntos (isto é, sem elementos em comum), e os elementos que são omitidos da escrita são pontos fixos. Por exemplo, considere  $\sigma = (1\ 4\ 2)(5\ 6) \in S_6$  temos que  $\sigma(1) = 4$ ,  $\sigma(4) = 2$ ,  $\sigma(2) = 1$ ,  $\sigma(5) = 6$ ,  $\sigma(6) = 5$  e  $\sigma(3) = 3$ . Mas  $\sigma = (1\ 4\ 2)(5\ 6) = (5\ 6)(1\ 4\ 2) = (2\ 1\ 4)(5\ 6) \neq (1\ 2\ 4)(5\ 6)$ : a escrita não depende da ordem dos ciclos e os ciclos permitem outras escritas, desde que a ordem cíclica seja respeitada. O grupo simétrico não é comutativo para  $n \geq 3$ :  $(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2)$  enquanto  $(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3)$ . E, enquanto não houver risco de confusão, continuaremos denotando as permutações sem o uso de vírgulas.

O comprimento de um ciclo consiste no número de símbolos. O **ciclo-tipo** da permutação (denotado  $ct$ ) é a sequência fracamente decrescente dos comprimentos dos ciclos que compõem a permutação. Esta sequência forma uma **partição** de  $n$ , ou seja, se  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$  é uma partição, então  $\sum_i \lambda_i = n$  e  $\lambda_i \geq \lambda_j$ , se  $i < j$ , e o comprimento da partição é  $l(\lambda) = k$ . Denotamos  $\lambda \vdash n$ . Podemos ainda escrever  $\lambda = [1^{\hat{1}}, 2^{\hat{2}}, \dots, n^{\hat{n}}]$ , onde  $\hat{j}$  é o número de vezes que  $j$  aparece em  $\lambda$ . Dessa forma,  $\sum_j \hat{j}j = n$ . Dada uma  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k] \vdash n$  podemos definir  $2\lambda = [2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots, 2\lambda_k]$ , que faz com que  $2\lambda$  seja uma partição de  $2n$ , e ainda  $\lambda \cup \lambda = [\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_k]$ , que também é uma partição de  $2n$ . Por exemplo,  $\sigma = (1\ 4\ 2)(5\ 6) \in S_6$  tem um ciclo de comprimento 3 e um ciclo de comprimento 2, então seu ciclo-tipo é  $ct(\sigma) = [3, 2, 1] \vdash 6$ .

O ciclo-tipo das permutações nos permite particionar o grupo  $S_n$  em tantas classes quantas forem as partições de  $n$ . Mais ainda, se duas partições tiverem o mesmo ciclo-tipo, então elas são conjugadas e vice-versa. Por exemplo,  $(1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)^{-1} = (1\ 2\ 3)$ . Dessa forma, as classes de conjugação de  $S_n$  podem ser indexadas por uma partição de  $n$ , pois todas as permutações ali contidas têm o mesmo ciclo-tipo, denotadas  $C_\lambda$  com  $\lambda \vdash n$ . A ordem da classe de conjugação  $|C_\lambda|$  corresponde, então, ao número de maneiras de impor um dado ciclo-tipo em  $n$  símbolos. Temos  $n!$  maneiras de organizar os  $n$  símbolos. Cada ciclo de comprimento  $j$  pode ser escrito de  $j$  maneiras diferentes, porém equivalentes, totalizando  $j^{\hat{j}}$  escritas. Por outro lado, os ciclos de comprimento  $j$  podem aparecer ordenados de  $j!$  maneiras. Logo, o número de permutações na classe  $C_\lambda$  é

$$|C_\lambda| = \frac{n!}{\prod_{j=1}^n \hat{j}! j^{\hat{j}}}. \quad (1.1)$$

Em  $S_{2n}$ , as permutações que comutam com  $\tau = (1\ 2)(3\ 4) \dots (2n-1\ 2n)$  formam

um subgrupo. Este é chamado **hiperoctaedro**, denotado  $H_n$  e contém  $2^n n!$  elementos. Por exemplo,  $H_2 = \{id, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\}$  tem oito elementos e todos eles comutam com  $(1\ 2)(3\ 4)$ . As permutações do hiperoctaedro também podem ser vistas como as permutações que mantêm invariante o seguinte conjunto de pareamentos  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}\}$ , como na Fig. 3a. As permutações do hiperoctaedro podem modificar o ordenamento dos pares e as posições dos números, mas não modificam os pares propriamente ditos, Fig. 3a e 3b. Entretanto, permutações que não pertencem ao hiperoctaedro modificam tais pares, Fig. 3c e 3d.

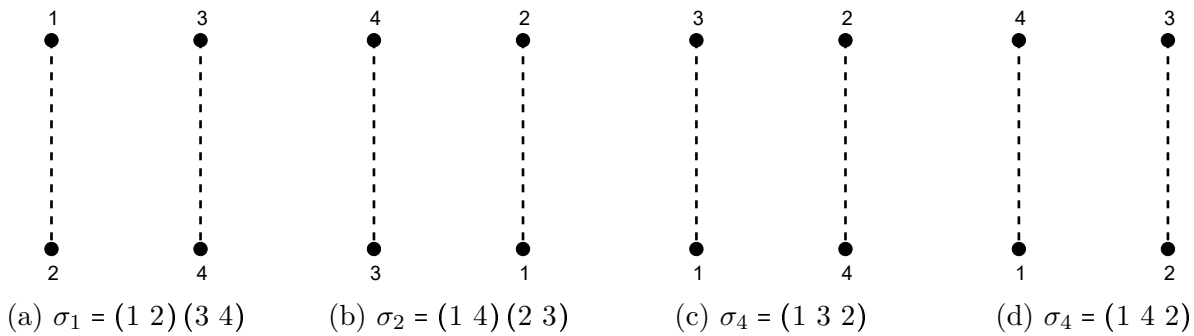


Figura 3 – Pareamentos gerados por quatro permutações:  $\sigma_1, \sigma_2 \in H_2$  e  $\sigma_3, \sigma_4 \notin H_2$ .

O subconjunto de permutações  $\sigma$  de  $S_{2n}$  que satisfazem

$$\sigma(2i-1) < \sigma(2i) \quad \text{e} \quad \sigma(1) < \sigma(3) < \dots < \sigma(2n-1) \quad (1.2)$$

formam o conjunto  $\mathcal{M}_n$ . Este conjunto forma um conjunto completo de representantes das classes em  $S_{2n}/H_n$  [32]. Às vezes os elementos de  $\mathcal{M}_n$  são identificados com *matchings*. *Matching* são partições do conjunto  $\{1, \dots, 2n\}$  em blocos de tamanho dois. O *matching* trivial é  $\mathbf{t} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}\}$ . E podemos associar um *matching* com uma permutação da seguinte maneira:  $\mathbf{m}_\sigma = \{\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \{\sigma(3), \sigma(4)\}, \dots, \{\sigma(2n-1), \sigma(2n)\}\}$ . Dessa forma, permutações que produzem o mesmo *matching* são equivalentes. A classe da permutação  $(2\ 3)$  é  $(2\ 3)H_2 = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 2\ 4\ 3)\}$  e todas as permutações pertencentes à classe geram o *matching*  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ . Para  $n = 2$ , temos três *matchings*:  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in \mathcal{M}_2$ . Eles representam, respectivamente, as classes  $idH_2, (2\ 3)H_2$  e  $(2\ 4\ 3)H_2$ , que formam o conjunto quociente  $S_4/H_2$ . Os *matchings* também podem ser vistos como pareamentos,  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  corresponde ao pareamento das Figs. 3a e 3b,  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$  à Fig. 3c e  $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$  à Fig. 3d.

Assim como podemos associar um *matching* a uma permutação, também podemos associar uma permutação a um *matching*. Isto pode ser feito por meio das **involuções sem pontos fixos**. Estas involuções são constituídas de  $n$  transposições, o resultado são permutações de  $S_{2n}$  com ciclo-tipo  $[2^n]$ . Para construí-las associamos a cada bloco de tamanho 2, em um *matching*, uma transposição com os mesmos índices; e a permutação que

representa o *matching* será o produto dessas  $n$  transposições. E vamos denotá-la por  $f(\mathbf{m})$ . Por exemplo, dado  $\mathcal{M}_3 \ni \mathbf{m}_1 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$ , temos  $f(\mathbf{m}_1) = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) \in S_6$ .

Dada uma permutação  $\sigma \in S_{2n}$ , podemos definir uma propriedade chamada **coset-tipo**. Para definir o coset-tipo de uma permutação, seguimos os seguintes passos. Primeiramente, definimos o grafo  $\Gamma_\sigma$ , com  $2n$  vértices enumerados e em duas fileiras. Os números ímpares na fileira superior e os pares na inferior. A seguir, usando o *matching* trivial como relação de incidência marcamos as arestas tracejadas. Por fim, usando o *matching* gerado por  $\sigma$  como relação de incidência, marcamos as linhas cheias. Tomamos a sequência fracamente decrescente dos graus das componentes conexas do grafo  $\Gamma_\sigma$ . O coset-tipo de  $\sigma$  consiste na metade dessa sequência (observe que cada componente conexa tem grau par, pois cada vértice que a compõe tem grau par resultante da incidência de uma aresta tracejada e uma cheia). Note, portanto, que o coset-tipo de  $\sigma$ , denotado  $[\sigma]$ , consiste em uma partição de  $n$ .

Como exemplo, considere a permutação  $\xi = (1, 3, 5)(8, 10) \in S_{14}$ . O *matching* gerado por  $\xi$  é  $\mathbf{m}_\xi = \{\{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 6\}, \{7, 10\}, \{8, 9\}, \{11, 12\}, \{13, 14\}\}$ . Assim, podemos construir o grafo  $\Gamma_\xi$  (Fig. 4) e concluímos que  $[\xi] = [3, 2, 1^2] \vdash 7$ .

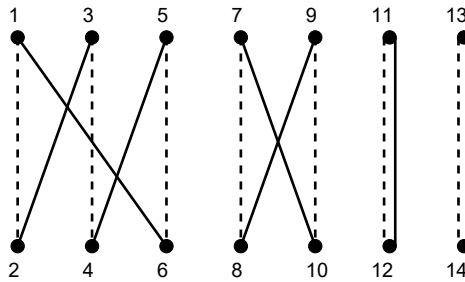


Figura 4 – Grafo  $\Gamma_\xi$  gerado pela permutação  $\xi = (1, 3, 5)(8, 10) \in S_{14}$ .

O coset-tipo distingue os cosets duplos de  $H_n$  em  $S_{2n}$ , mas não os cosets. Os cosets duplos são definidos como  $H_n\sigma H_n = \{h_1\sigma h_2 | h_1, h_2 \in H_n\}$ , e o conjunto de cosets-duplos é  $H_n \backslash S_{2n} / H_n$  [33]. Com efeito, as permutações que pertencem ao coset  $(2\ 3)H_2$  têm coset-tipo  $[2]$  que é o mesmo coset-tipo das permutações que pertencem ao coset  $(2\ 4\ 3)H_2$ . Apesar de pertencerem a cosets diferentes, elas pertencem ao mesmo coset duplo, ou seja,  $H_2(2\ 3)H_2 = H_2(2\ 4\ 3)H_2$ ; de fato  $(2\ 4\ 3) \in (2\ 4\ 3)H_2$  e  $(1\ 3\ 2) \in (2\ 3)H_2$ , mas  $(2\ 4\ 3) = (3\ 4)(1\ 3\ 2)(1\ 2)$  com  $(1\ 2), (3\ 4) \in H_2$ , elas pertencem ao mesmo coset-duplo. E o número de elementos no coset-duplo da permutação  $\sigma$  é dado pelo número de permutações que têm o coset-tipo  $[\sigma]$ , e vale

$$|H_\sigma| = |C_{[\sigma]}| \frac{4^n n!}{2^{l([\sigma])}}. \tag{1.3}$$

Esta expressão pode ser obtida contabilizando o número maneiras de construir grafos  $\Gamma_\sigma$  para um dado coset-tipo, de certa forma, um processo semelhante ao usado para obter a Eq. 1.1 [33].

### 1.3 Grupos de Matrizes e Espaços Simétricos

As matrizes quadradas de ordem  $N$  com determinante não-nulo (ou seja, que têm inversa) juntamente com o produto usual de matrizes formam grupos, os **grupos lineares gerais** de ordem  $N$ ,  $GL_N(\mathbb{C})$  quando as matrizes têm entradas complexas e  $GL_N(\mathbb{R})$  quando as matrizes têm entradas reais. Diferentemente dos grupos encontrados nas seções anteriores, os grupos lineares gerais são grupos com um número não-enumerável de elementos, são grupos contínuos (ou de Lie). Os grupos lineares gerais possuem vários subgrupos, eles são chamados grupos de matrizes. Dentre eles estão os grupos Unitário, Ortogonal e Simplético, sendo estes grupos de Lie compactos [34].

O **grupo Unitário**,  $\mathcal{U}(N)$ , é o conjunto das matrizes com entradas complexas cuja inversa é dada pela conjugada da matriz transposta, ou seja, satisfazem

$$UU^\dagger = I. \quad (1.4)$$

Portanto, o grupo das matrizes unitárias é um subgrupo de  $GL_N(\mathbb{C})$ . Além disso, as matrizes unitárias tem determinante de módulo 1. Tais matrizes preservam a seguinte forma bilinear:

$$\langle u, v \rangle = u^\dagger v = \sum_{i=1}^N u_i^* v_i. \quad (1.5)$$

As matrizes unitárias são comuns na Mecânica Quântica, pois vários operadores têm forma matricial dada por matrizes unitárias.

Quando as matrizes unitárias são reais, elas satisfazem

$$OO^T = I, \quad (1.6)$$

ou seja, a inversa constitui-se na transposta. Esse conjunto de matrizes também forma um grupo, o **grupo Ortogonal**,  $\mathcal{O}(N)$ . Assim, o grupo ortogonal, além de ser subgrupo de  $GL_N(\mathbb{C})$  (ou  $GL_N(\mathbb{R})$ ), é também subgrupo de  $\mathcal{U}(N)$ .

As matrizes que compõem o grupo ortogonal, além de preservar a forma bilinear na Eq. 1.5, também preservam a seguinte:

$$\langle u, v \rangle = u^T v = \sum_{i=1}^N u_i v_i. \quad (1.7)$$

Elas estão associadas com as rotações em  $\mathbb{R}^N$ , já que  $u$  e  $v$  são reais. As matrizes ortogonais tem determinante igual a  $\pm 1$ . Em  $\mathbb{R}^2$ , as matrizes que rotacionam os eixos por um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário são da forma

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Essas matrizes têm como inversa uma rotação no sentido oposto:  $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$ . Mas como  $R(-\theta) = R(\theta)^T$ , temos  $R(\theta)R(\theta)^T = I$ , portanto são matrizes do grupo ortogonal.

Por fim temos o **grupo Simplético**, que aparece sob três formas  $\mathcal{S}p(2N, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}p(2N, \mathbb{C})$  e  $\mathcal{S}p(2N)$  [35]. O grupo  $\mathcal{S}p(2N, \mathbb{C})$  (respectivamente,  $\mathcal{S}p(2N, \mathbb{R})$ ) é um subgrupo de  $GL_{2N}(\mathbb{C})$  (respectivamente,  $GL_{2N}(\mathbb{R})$ ). As matrizes que compõem o grupo  $\mathcal{S}p(2N, \mathbb{C})$  (respectivamente,  $\mathcal{S}p(2N, \mathbb{R})$ ) são aquelas que mantêm invariante a seguinte forma bilinear em  $\mathbb{C}^{2N}$  (respectivamente,  $\mathbb{R}^{2N}$ )

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = \sum_{i=1}^N (u_i v_{i+N} - u_{i+N} v_i), \quad (1.9)$$

na forma matricial escrevemos

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = u^T J v, \quad (1.10)$$

em que

$$J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Isto nos diz que as matrizes simpléticas  $S$  devem satisfazer  $S^T J S = J$ , o que pode ser reescrito como  $S^{-1} = J S^T J^T$ , visto que  $J^T = -J$ . A matriz  $S^D = J S^T J^T$  é chamada matriz dual de  $S$ . Portanto, as matrizes simpléticas satisfazem uma relação semelhante à das matrizes unitárias:

$$S S^D = I. \quad (1.12)$$

Em particular, observe que a Eq. 1.10 tem as seguintes propriedades, em primeiro lugar  $\langle\langle u, S v \rangle\rangle = \langle\langle S^D u, v \rangle\rangle$  e, em segundo lugar,  $\langle\langle u, v \rangle\rangle = -\langle\langle v, u \rangle\rangle$  (é uma forma bilinear antissimétrica). Os elementos da matriz  $S^D$  podem ser escritos com base nos elementos da matriz  $S$ :

$$S_{ij}^D = \begin{cases} S_{j+N, i+N}, & \text{se } 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq N \\ -S_{j-N, i+N}, & \text{se } 1 \leq i \leq N \text{ e } N < j \leq 2N \\ -S_{j+N, i-N}, & \text{se } N < i \leq 2N \text{ e } 1 \leq j \leq N \\ S_{j-N, i-N}, & \text{se } N < i \leq 2N \text{ e } N < j \leq 2N \end{cases}. \quad (1.13)$$

Se escrevemos  $S$  com blocos de dimensão  $N$ , a matriz dual pode ser construída como segue:

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow S^D = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Também é interessante notar que

$$S J = \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix} \text{ e } J S = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

A álgebra das matrizes simpléticas pode ser formulada em termos dos quatérnios de Hamilton [36], que são generalizações dos números complexos. Um quatérnio  $q \in \mathbb{H}$  é dado por:

$$q = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad (1.16)$$

onde  $i_1, i_2$  e  $i_3$  são as unidades quaterniônicas e satisfazem

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1. \quad (1.17)$$

O conjugado de  $q$  é

$$q^* = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3. \quad (1.18)$$

Assim como  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathbb{C}^N$ , também podemos estudar  $\mathbb{H}^N$ : o conjunto das  $N$ -uplas de quatérnios,  $\vec{q} \in \mathbb{H}^N$  com  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_N)$  e  $q_i \in \mathbb{H}$ . Dessa forma,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^N u_i^* v_i, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{H}^N \quad (1.19)$$

é o análogo de  $\mathbb{H}^N$  ao produto interno de  $\mathbb{C}^N$ . E a norma de um quatérnio é  $|\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$ .

Eles admitem uma representação em termos de matrizes de ordem 2:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

onde  $i_l \mapsto K_l$ . Dessa forma um quatérnio pode ser representado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

onde  $z = a_0 + ia_1$  e  $w = a_2 + ia_3$ . E seu conjugado é dado por  $q^* \mapsto A^\dagger$ . Essa representação pode ser estendida para uma matriz quaterniônica  $\mathcal{Q}$  de ordem  $N$ . Ela pode ser representada por uma matriz complexa de ordem  $2N$ :

$$\mathcal{Q} \mapsto Q = Q_0 \otimes K_0 + Q_1 \otimes K_1 + Q_2 \otimes K_2 + Q_3 \otimes K_3 \quad (1.22)$$

onde  $Q_0, Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são matrizes reais.

Analogamente,  $GL_N(\mathbb{H})$  é o grupo das matrizes inversíveis de ordem  $N$  cujas entradas são quatérnios. E  $\mathcal{S}p(2N) = \mathcal{S}p(2N, \mathbb{C}) \cap \mathcal{U}(2N)$  é o subgrupo de  $GL_{2N}(\mathbb{C})$  (note que, devido à Eq.1.21, uma matriz quaterniônica de ordem  $N$  deve ser representada por uma matriz complexa de ordem  $2N$ ) em que as matrizes simpléticas satisfazem  $\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = \mathcal{S} \mathcal{S}^\dagger = \mathcal{I}$ . E com o auxílio da álgebra dos quatérnios, podemos mostrar que

$$\mathcal{U}(N, \mathbb{H}) \simeq \mathcal{S}p(2N), \quad (1.23)$$

ou seja, o grupo  $\mathcal{S}p(2N)$  é isomorfo ao grupo Unitário quaterniônico de ordem  $N$ ,  $\mathcal{U}(N, \mathbb{H})$  [36]. Para visualizar o isomorfismo, devemos aplicar uma transformação unitária na matriz  $J$ , apenas uma permutação de suas linhas (observe que essa transformação sempre pode ser feita), a fim de obter a matriz

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_N \otimes K_2. \quad (1.24)$$



Essa transformação mantém a representação complexa da matriz  $S$  inalterada. Mas a matriz dual de  $S$  torna-se  $J_1 S^T J_1^T$ . Devido à álgebra dos quatérnios e à representação complexa, nas Eqs. 1.21 e 1.22, podemos concluir que  $S^D = S^\dagger$ . Dessa forma  $S$  é uma matriz unitária de ordem  $2N$ . Para  $N = 2$ , uma matriz  $S$  em  $\mathcal{Sp}(N)$ , na representação complexa, é dada por

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \mapsto S = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 & z_2 & w_2 \\ -w_1^* & z_1^* & -w_2^* & z_2^* \\ z_3 & w_3 & z_4 & w_4 \\ -w_3^* & z_3^* & -w_4^* & z_4^* \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

E a matriz  $J$  é transformada pela matriz  $L$  na matriz  $J_1$ :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_1 = L J L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

E a matriz dual de  $S$  é dada por

$$S^D = J_1 S^T J_1 = \begin{pmatrix} z_1^* & -w_1 & z_3^* & -w_3 \\ w_1^* & z_1 & w_3^* & z_3 \\ z_2^* & -w_2 & z_4^* & -w_4 \\ w_2^* & z_2 & w_4^* & z_4 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Visivelmente,  $S^D = S^\dagger$ . Isto significa que  $S$  é uma matriz unitária de ordem  $2N$ .

As matrizes simpléticas aparecem de maneira natural no contexto da Mecânica Clássica. Alguns métodos de estudos das equações de Hamilton abordam matrizes simpléticas [37]. Por exemplo, o parêntese de Poisson de duas funções é calculado por

$$\{f, g\} = \vec{\nabla} f J \vec{\nabla} g \text{ onde } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla_{\vec{x}} \\ \nabla_{\vec{p}} \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Em resumo, o grupo Simplético aparece sob três conjuntos:  $\mathcal{Sp}(2N, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{Sp}(2N, \mathbb{C})$  e  $\mathcal{Sp}(2N)$ . Das propriedades topológicas, apenas  $\mathcal{Sp}(2N)$  é compacto, mas os três são conexos. Aplicando o determinante na Eq. 1.12, vemos que  $\det S = \pm 1$ , mas como os três são conexos, devemos ter  $\det S = 1$ , para os três casos [38].

Agora passemos ao estudo dos espaços simétricos.

Geralmente, um espaço simétrico é da forma  $G/K$ . Em sete casos, listados na Tab. 1,  $G$  e  $K$  correspondem a um dos grupos de Lie: Unitário, Ortogonal e Simplético.

Nos casos aqui estudados,  $G$  é um grupo de Lie enquanto  $K$  é um subgrupo de  $G$  consistindo do conjunto de pontos fixos de uma involução sobre  $G$ . De maneira formal,

$\mathcal{U}(N)/\mathcal{O}(N)$	AI	Ensemble Circular Ortogonal
$\mathcal{U}(2N)/Sp(2N)$	AII	Ensemble Circular Simplético
$\mathcal{U}(N)/(\mathcal{U}(a) \times \mathcal{U}(b))$	AIII	Ensembles Quirais
$\mathcal{O}(N)/(\mathcal{O}(a) \times \mathcal{O}(b))$	BDI	
$Sp(2N)/(Sp(2a) \times Sp(2b))$	CII	
$Sp(2N)/\mathcal{U}(N)$	CI	Ensembles de Bogoliubov-de Gennes
$\mathcal{O}(2N)/\mathcal{U}(N)$	DIII	

Tabela 1 – Espaços simétricos compactos estudados. Nos ensembles quirais,  $a + b = N$ .

seja  $\Omega : G \rightarrow G$  é uma involução (um homomorfismo que é sua própria inversa, ou seja,  $\Omega^{-1} = \Omega$ ; por exemplo, a conjugação  $((A)^*)^* = A$ ) e  $K$  o conjunto de pontos fixos de  $\Omega$  (Ou seja,  $K = \{g \in G | \Omega(g) = g\}$ , no exemplo anterior,  $K$  consiste das matrizes  $A$  reais). Um representante dos cosets à esquerda é dado por  $g\Omega(g)^{-1}$ . De fato, podemos verificar que é um representante bem definido, pois é invariante por uma transformação da forma  $g \rightarrow gk$ , com  $k \in K$ :

$$(gk)\Omega(gk)^{-1} = gk (\Omega(g)\Omega(k))^{-1} \quad (1.29)$$

$$= gk (\Omega(g)k)^{-1} \quad (1.30)$$

$$= g(kk^{-1})\Omega(g)^{-1} = g\Omega(g)^{-1} \quad (1.31)$$

Em 1927, Élie Cartan (1869-1951) classificou pela primeira vez os espaços simétricos [27]. Os espaços simétricos compactos compõem-se de sete séries infinitas. As classes AI e AII são ditos ensembles circulares. As classes AIII, BDI e CII são os ensembles quirais. E as classes CI e DIII, os ensembles de Bogoliubov-de Gennes.

Quando  $G = \mathcal{U}(N)$ ,  $K = \mathcal{O}(N)$  e  $\Omega(g) = g^*$  o espaço simétrico  $\mathcal{S}$  associado a  $G/K$  consiste das matrizes unitárias simétricas. E um representante de coset de  $U \in \mathcal{U}(N)$  é dado por:

$$V = U\Omega(U)^{-1} \quad (1.32)$$

$$= U(U^*)^{-1} \quad (1.33)$$

$$= UU^T \quad (1.34)$$

Este ensemble também é chamado Ensemble Circular Ortogonal (COE, a sigla em inglês).

Se  $G = \mathcal{U}(2N)$  e  $K = Sp(2N)$  e  $\Omega(g) = (g^D)^{-1}$ , o espaço consiste no conjunto de matrizes  $V$  auto-duais,  $V^D = V$ . E um representante de coset de  $U \in \mathcal{U}(2N)$  é da forma

$$V = U\Omega(U)^{-1} \quad (1.35)$$

$$= U \left( (U^D)^{-1} \right)^{-1} \quad (1.36)$$

$$= UU^D \quad (1.37)$$

Este ensemble é chamado Ensemble Circular Simplético (CSE, a sigla em inglês).

Os ensembles quirais, são da forma  $G(N)/[G(a) \times G(b)]$ , com  $\Omega(g) = I_{ab}gI_{ab}$ . Onde  $N = a + b$ ,  $a \geq b \geq 1$ , e  $I_{ab} = I_a \oplus (-I_b)$  ( $I_a$  é a matriz identidade de ordem  $a$ ). E os representantes de coset são da forma

$$V = U\Omega(U)^{-1} \quad (1.38)$$

$$= UI_{ab}U^\dagger I_{ab} \quad (1.39)$$

O ensemble AIII é obtido fazendo  $G = \mathcal{U}$  e o ensemble BDI é obtido fazendo  $G = \mathcal{O}$ . Para obter o ensemble CII, fazemos  $G = \mathcal{S}p$ ,  $N \rightarrow 2N$ ,  $a \rightarrow 2a$ ,  $b \rightarrow 2b$  e  $I_{ab} \rightarrow I'_{ab}$ , onde  $I'_{ab} = I_{ab} \oplus I_{ab}$ . E o representante de coset é da forma  $V = UI'_{ab}U^D I'_{ab}$ .

O ensemble CI é obtido fazendo  $G = \mathcal{S}p(2N)$ ,  $K = \mathcal{U}(N)$  e  $\Omega(g) = I_{NN}gI_{NN}$ . Na verdade, conjunto de pontos fixos de  $\Omega$  em  $G$  é dado por

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} U & 0_N \\ 0_N & U^* \end{array} \right) \middle| U \in \mathcal{U}(N) \right\}, \quad (1.40)$$

que é isomorfo a  $\mathcal{U}(N)$ . E os representantes de coset são

$$V = U\Omega(U)^{-1} \quad (1.41)$$

$$= U(I_{NN}UI_{NN})^{-1} \quad (1.42)$$

$$= UI_{NN}U^{-1}I_{NN} = UI_{NN}U^D I_{NN} \quad (1.43)$$

E o ensemble DIII é realizado fazendo  $G = \mathcal{O}(2N)$ ,  $K = \mathcal{O}(2N) \cap \mathcal{S}p(2N) \simeq \mathcal{U}(N)$  e  $\Omega(g) = (g^D)^{-1}$ . Assim, os representantes de coset ficam dados por

$$V = O\Omega(O)^{-1} \quad (1.44)$$

$$= O\left((O^D)^{-1}\right)^{-1} = OO^D, \quad (1.45)$$

são matrizes reais auto-duais.

## 1.4 Teoria de Representações

O grupos diedrais, por exemplo, que são os grupos de simetria dos polígonos, têm como elementos rotações por certos eixos e reflexões em relação a certos planos. Estes elementos são altamente visuais, o que facilita sua manipulação. Entretanto, estes não são os únicos casos, e existem grupos com elementos muito abstratos.

Assim, é interessante trazer esses elementos para um grupo no qual estejamos familiarizados com sua estrutura. Isto é o que uma **representação** faz. Uma representação consiste de um isomorfismo entre o grupo e um subgrupo do grupo Unitário. Se  $D$  é

uma representação do grupo  $G$ , então se  $a, b \in G$ , temos  $D(a)D(b) = D(ab)$ . Nesse caso, a operação abstrata no grupo original consiste em um produto de matrizes no grupo Unitário. E, pode se mostrar que para qualquer grupo finito existe um subgrupo de  $\mathcal{U}(N)$  (com  $N$  suficientemente grande) que o representa [39]. A **dimensão** da representação é a ordem das matrizes da representação.

Dentre as diversas representações, existem aquelas para as quais uma mesma transformação unitária (na verdade, uma transformação de similaridade) é capaz de decompor simultaneamente todas as matrizes que compõem a representação na forma bloco-diagonal,  $D = D_1 \oplus D_2$ . Estas são chamadas **reduzíveis**. Os blocos nos quais as representações reduzíveis são decompostas formam representações que não podem ser decompostas, por isso são chamadas **representações irreduzíveis**. E as representações que diferem apenas por uma transformação de similaridade,  $D'(g) = FD(g)F^{-1}$ , dizemos que são **equivalentes**.

Como exemplo, considere o subgrupo de  $S_3$  formado pelas permutações  $\sigma_0 = id$ ,  $\sigma_1 = (1\ 2\ 3)$  e  $\sigma_2 = (1\ 3\ 2)$ . Podemos representar este subgrupo usando a representação trivial, em que  $D^t(\sigma) = 1 \ \forall \sigma$ . Também podemos representá-lo pela representação definidora, onde  $D^d(\sigma)_{ij} = 1$  se  $\sigma(i) = j$  e  $D^d(\sigma)_{ij} = 0$  caso contrário:

$$D^d(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^d(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D^d(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

E também podemos utilizar as matrizes de rotação da Eq. 1.8, com  $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ :

$$D^r(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^r(\sigma_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D^r(\sigma_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Temos então três diferentes representações. Entretanto, apenas  $D^r$  e  $D^t$  são irreduzíveis. Além disso, a representação  $D^d$  pode ser decomposta na soma direta dessas representações,  $D^d = D^r \oplus D^t$ .

Os elementos de matriz das matrizes da representação obedecem ao Grande Teorema da Ortogonalidade: para duas representações irreduzíveis  $D^\alpha$  e  $D^\beta$  de um grupo  $G$  de dimensões  $d_\alpha$  e  $d_\beta$ , respectivamente, vale

$$\sum_{g \in G} D^\alpha(g)_{ij} D^\beta(gh)_{km} = \frac{|G|}{d_\beta} D^\beta(h)_{jm} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik}. \quad (1.48)$$

Estabelecida uma representação irreduzível,  $D^\alpha$ , podemos definir o **caractere** de um elemento naquela representação. O caractere é o traço das matrizes da representação:

$$\chi^\alpha(g) = \text{Tr}(D^\alpha(g)). \quad (1.49)$$

Com isso, a dimensão de uma representação irredutível,  $D^\alpha$ , é dada pelo caractere da identidade,  $d_\alpha = \chi^\alpha(id)$ . Devido às propriedades do traço, os caracteres são invariantes por permutações cíclicas,

$$\chi^\alpha(g_1g_2g_3) = \chi^\alpha(g_2g_3g_1) = \chi^\alpha(g_3g_1g_2). \quad (1.50)$$

Em particular, são invariantes por conjugação,

$$\chi^\alpha(hgh^{-1}) = \chi^\alpha(g). \quad (1.51)$$

Portanto, devido às suas propriedades, os caracteres podem ser especificados pela representação irredutível e pela classe de conjugação do elemento. Eles também obedecem a uma relação de ortogonalidade, que é consequência do Grande Teorema da Ortogonalidade,

$$\sum_{g \in G} \chi^\alpha(g) \chi^\beta(gh) = \frac{|G|}{d_\beta} \delta_{\alpha\beta} \chi^\beta(h), \quad (1.52)$$

basta aplicar o traço na Eq. 1.48.

$\chi$	$[1^3]$	$[2, 1]$	$[3]$
$[3]$	1	1	1
$[2, 1]$	2	0	-1
$[1^3]$	1	-1	1

Tabela 2 – Tabela de caracteres de  $S_3$ .

As relações de ortogonalidade de caracteres podem ser vistas na Tab. 2, a tabela de caracteres, para o grupo  $S_3$ . Nela, as representações irredutíveis são organizadas nas linhas e as classes de conjugação nas colunas. No caso do grupo simétrico, tanto as classes de conjugação quanto as representações irredutíveis são indexados por partições. Podemos ver que a representação trivial (ou totalmente simétrica), corresponde à representação  $[3]$ ; a representação de matrizes, da qual as matrizes de rotação da Eq. 1.47 fazem parte (note que ainda faltam três matrizes de reflexão), corresponde à representação  $[2, 1]$  (note que essas matrizes têm dimensão 2 e  $\chi^{[2,1]}([1^3]) = 2$ ); e a representação  $[1^3]$  corresponde à representação alternada (ou totalmente antissimétrica), que pode ser encontrada aplicando o determinante nas matrizes da representação  $[2, 1]$ .

## 1.5 Funções Esféricas

Com o auxílio do hiperoctaedro e dos caracteres irredutíveis de  $S_{2n}$ , podemos definir a seguinte média

$$\omega^\lambda(\sigma) = \frac{1}{|H_n|} \sum_{\xi \in H_n} \chi^{2\lambda}(\sigma\xi). \quad (1.53)$$

Elas são chamadas **funções esféricas zonais**. Observe que essa função é invariante por ação do hiperoctaedro tanto á esquerda quanto à direita. Por isso, depende apenas do coset-tipo de  $\sigma$  e segue uma relação de ortogonalidade semelhante à Eq. 1.52,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{M}_n} \omega^\lambda(\sigma) \omega^\mu(\sigma\tau) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{\omega^\mu(\tau)}{d_{2\lambda}} \delta_{\lambda\mu}. \quad (1.54)$$

Observe que  $|\mathcal{M}_n| = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ , análogo à Eq. 1.52.

O **sinal** de uma permutação  $\epsilon$  corresponde à seguinte função

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-l(\text{ct}(\sigma))}, \quad \sigma \in S_n, \quad (1.55)$$

ou seja, depende do comprimento do ciclo-tipo da permutação. Também pode ser formulado como o número de transposições em uma fatoração (apenas com transposições) da permutação.

Utilizando o sinal de uma permutação, podemos definir outra média sobre o hiperoctaedro,

$$\psi^\lambda(\sigma) = \frac{1}{|H_n|} \sum_{\xi \in H_n} \epsilon(\xi) \chi^{\lambda \cup \lambda}(\sigma\xi). \quad (1.56)$$

Esta é chamada **função esférica zonal torcida**. Nesse caso, a ação do hiperoctaedro por  $\xi$  resulta em um sinal a mais,  $\psi^\lambda(\sigma\xi) = \epsilon(\xi) \psi^\lambda(\sigma)$ , o mesmo ocorre para a ação à esquerda. E, assim como as funções zonais esféricas, as funções zonais esféricas torcidas também obedecem a uma relação de ortogonalidade análoga

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{M}_n} \psi^\lambda(\sigma) \psi^\mu(\sigma\tau) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{\psi^\mu(\tau)}{d_{\lambda \cup \lambda}} \delta_{\lambda\mu}. \quad (1.57)$$

## 1.6 Séries de Potências e Polinômios de Jack

As **funções de Schur** podem ser definidas, por exemplo, através de uma das identidades de Jacobi-Trudi [40]. Dada  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_k]$  uma partição de  $n$  e  $\{x_1, \dots, x_N\}$  o conjunto de autovalores da matriz  $X$ , a função de Schur é dada pelo seguinte determinante

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1}(x_1, \dots, x_N) & h_{\lambda_1+1}(x_1, \dots, x_N) & \cdots & h_{\lambda_1+k-1}(x_1, \dots, x_N) \\ h_{\lambda_2-1}(x_1, \dots, x_N) & h_{\lambda_2}(x_1, \dots, x_N) & \cdots & h_{\lambda_2+k-2}(x_1, \dots, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_k-k+1}(x_1, \dots, x_N) & h_{\lambda_k-k+2}(x_1, \dots, x_N) & \cdots & h_{\lambda_k}(x_1, \dots, x_N) \end{vmatrix}, \quad (1.58)$$

onde  $h_p(x_1, \dots, x_N)$  é um polinômio homogêneo completo de grau  $p$  nas variáveis  $x_1, \dots, x_N$  definido por

$$h_p(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq N} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p}, \quad (1.59)$$

ou seja,  $h_p(x_1, \dots, x_N)$  é a combinação linear de todos os monômios de grau  $p$  que podem ser formados com as variáveis  $x_1, \dots, x_N$ . Caso  $p < 0$ , temos  $h_p(x_1, \dots, x_N) = 0$ . Para  $N = 3$ , temos os seguintes polinômios homogêneos completos:

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \quad (1.60)$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad (1.61)$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_1x_2x_3. \quad (1.62)$$

Assim, para  $\lambda = [1, 1], [2] \vdash 2$  temos

$$s_{[1,1]}(x_1, x_2, x_3) = h_1(x_1, x_2, x_3)^2 - h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad (1.63)$$

$$s_{[2]}(x_1, x_2, x_3) = h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3. \quad (1.64)$$

Os polinômios homogêneos completos assim como as funções de Schur formam um base para o anel das funções simétricas [40]. Mas existe ainda outra base conveniente: as **séries de potências**. Estas podem ser definidas em termos dos autovalores de uma matriz  $X$ ,

$$p_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} (x_1^{\lambda_i} + x_2^{\lambda_i} + \dots + x_N^{\lambda_i}). \quad (1.65)$$

Por exemplo, considere as partições de 3 e  $N = 2$ , temos

$$p_{[3]}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 \quad (1.66)$$

$$p_{[2,1]}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) = x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \quad (1.67)$$

$$p_{[1^3]}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 \quad (1.68)$$

E podem ser generalizadas de maneira natural para ter como argumento a matriz  $X$ ,

$$p_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \text{Tr}(X^{\lambda_i}). \quad (1.69)$$

Podemos também escrevê-la como  $p_\pi(X)$ , em termos de  $\pi \in S_n$  e elementos de  $X$ .

$$p_\pi(X) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N \prod_{k=1}^n X_{i_k i_{\pi(k)}}, \text{ com } \pi \in S_n. \quad (1.70)$$

Se  $\text{ct}(\pi) = \lambda$ , podemos verificar que  $p_\pi(X) = p_\lambda(X)$ .

As funções de Schur e as séries de potências estão relacionadas por meio das seguintes expressões

$$s_\lambda(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} |C_\mu| \chi^\lambda(\mu) p_\mu(X), \quad (1.71)$$

e esta relação pode ser invertida,

$$p_\mu(X) = \sum_{\rho \vdash n} \chi^\rho(\mu) s_\rho(X), \quad (1.72)$$

aqui o caractere  $\chi^\rho(\mu)$  é dado em termos de uma partição  $\mu$  de  $n$ , uma vez que os caracteres do grupo simétrico só dependem do ciclo-tipo da permutação.

Funções de Schur são os caracteres irredutíveis do grupo unitário. E, assim como no caso dos grupos finitos, seguem uma relação de ortogonalidade, mas agora, como o grupo é contínuo, a soma é substituída por uma integral

$$\int_{U(N)} dU s_\mu(A^\dagger U) s_\lambda(BU^\dagger) = \frac{J_\lambda^1(A^\dagger B)}{J_\lambda^1(1^N)} \delta_{\mu,\lambda}, \quad (1.73)$$

onde  $A$  e  $B$  são matrizes de ordem  $N$  e  $J_\lambda^1$  é um **polinômio de Jack**.

Os polinômios de Jack podem ser escritos em termos das funções de Schur e, por consequência da Eq. 1.71, em termos das séries de potências

$$J_\lambda^1(X) = \frac{n!}{d_\lambda} s_\lambda(X) = \frac{1}{d_\lambda} \sum_{\mu \vdash n} |C_\mu| \chi^\lambda(\mu) p_\mu(X). \quad (1.74)$$

Observe que esta soma percorre o conjunto das diferentes permutações que têm o mesmo ciclo-tipo (ou seja, onde  $\chi^\lambda$  é invariante), e tem  $|C_\mu|$  como termo de multiplicidade. Podemos então escrever  $J_\lambda^1$  (e, conseqüentemente,  $s_\lambda$ ) como uma soma sobre  $S_n$

$$J_\lambda^1(X) = \frac{1}{d_\lambda} \sum_{\pi \in S_n} \chi^\lambda(\pi) p_\pi(X). \quad (1.75)$$

Para o grupo Ortogonal, temos uma relação semelhante a Eq. 1.53,

$$\int_{O(N)} dO s_\mu(AO) = \frac{J_\lambda^2(A^T A)}{J_\lambda^2(1^N)} \delta_{\mu,2\lambda}. \quad (1.76)$$

Novamente, note que a integral é o análogo da soma. O termo  $\delta_{\mu,2\lambda}$  nos diz que  $\mu$  deve ser uma partição que corresponde ao dobro de outra, assim, se  $\lambda \vdash n$ , então  $\mu \vdash 2n$ .

O termo  $J_\lambda^2$  é outro polinômio de Jack. E também pode ser escrito como combinação linear de séries de potências,

$$J_\lambda^2(X) = \sum_{\mu \vdash n} 2^{n-l(\mu)} |C_\mu| \omega^\lambda(\mu) p_\mu(X), \quad (1.77)$$

e também podemos expressar uma série de potências como combinação linear de polinômios  $J_\lambda^2$ ,

$$p_{[\tau]}(X) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} J_\lambda^2(X) \omega^\lambda(\tau). \quad (1.78)$$

Observe que a soma na Eq. 1.77 percorre os diferentes coset-tipo (ou seja, onde  $\omega^\lambda$  é invariante). Dessa forma podemos converter a soma na equação anterior para uma soma sobre  $S_{2n}$  usando também o número de permutações com mesmo coset-tipo,

$$J_\lambda^2(X) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \omega^\lambda(\sigma) p_{[\sigma]}(X), \quad (1.79)$$



onde  $[\sigma]$  representa o coset-tipo da permutação  $\sigma$ .

Para o grupo Simplético, temos uma relação semelhante à Eq. 1.76,

$$\int_{Sp(2N)} dS_{S_\mu}(AS) = 2^{-l(\lambda)} \frac{J_\lambda^{1/2}(A^D A)}{J_\lambda^{1/2}(1^N)} \delta_{\mu, \lambda \cup \lambda}, \quad (1.80)$$

onde  $\delta_{\mu, \lambda \cup \lambda}$  nos diz que a partição  $\mu$  deve ser a união de uma partição com ela mesma. Logo, se  $\lambda \vdash n$ , devemos ter  $\mu \vdash 2n$ . Note que da mesma forma que a Eq. 1.76 é semelhante à Eq. 1.53, a Eq. 1.80 é semelhante à Eq. 1.56.

Podemos também escrever  $J_\lambda^{1/2}$  como combinação linear de séries de potências, onde aparecem as funções esféricas zonais torcidas,

$$J_\lambda^{1/2}(X) = (-1)^n \sum_{\mu \vdash n} |C_\mu| \psi^\lambda(\tilde{\pi}) p_\mu(X). \quad (1.81)$$

Onde  $\tilde{\pi}$  é um mapeamento de  $\pi \in S_n$  para  $\tilde{\pi} \in S_{2n}$ . O mapeamento é feito da seguinte maneira, para cada ciclo  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$  na decomposição de  $\pi$  associamos o ciclo  $(2i_1 - 1, 2i_1, 2i_2 - 1, 2i_2, \dots, 2i_r - 1, 2i_r)$ . Dessa forma, se o ciclo-tipo de  $\pi$  é  $\lambda$ , o ciclo-tipo de  $\tilde{\pi}$  será  $2\lambda$  e seu coset-tipo será  $\lambda$ . Entretanto o sinal de  $\tilde{\pi}$  é idêntico ao sinal de  $\pi$ , pois o mapeamento não altera o comprimento do ciclo-tipo.

Até agora, escrevemos os polinômios de Jack em termos dos elementos de matriz, nas Eqs. 1.74, 1.77 e 1.81. Mas de acordo com a Eq. 1.65, podemos escrevê-los em termos dos autovalores da matriz. Quando todos os autovalores são iguais a 1, a expressão é simples [33],

$$J_\lambda^\alpha(1^N) = \alpha^n \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda_i + \frac{N-i+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{N-i+1}{\alpha})}, \text{ com } \lambda \vdash n, \quad (1.82)$$

onde  $\Gamma(x)$  é a função Gama de Euler. Para  $\alpha = 1, 2$  e  $1/2$ , podemos escrevê-los diretamente

$$J_\lambda^1(1^N) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (N - i + j) \quad (1.83)$$

$$J_\lambda^2(1^N) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (N - i + 2j - 1) \quad (1.84)$$

$$J_\lambda^{1/2}(1^N) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (2N - 2i + j + 1), \quad (1.85)$$

A seguir alguns valores especiais dos polinômios de Jack,

$$J_{[1]}^\alpha(1^N) = N \quad (1.86)$$

$$J_{[12]}^\alpha(1^N) = N(N - 1) \quad (1.87)$$

$$J_{[2]}^1(1^N) = N(N + 1) \quad (1.88)$$

$$J_{[2]}^2(1^N) = N(N + 2) \quad (1.89)$$

$$J_{[2]}^{1/2}(1^N) = \frac{N}{2}(2N + 1). \quad (1.90)$$

## 1.7 Cadeias de Markov

Um **processo estocástico** pode ser entendido como a evolução temporal de uma variável aleatória que está associada a uma amostra. Sendo assim, podemos classificar os processos estocásticos de acordo com os valores que a variável aleatória e o tempo podem assumir. Temos

- Processos contínuos com tempo contínuo. Como exemplo, podemos citar a evolução temporal da posição de uma partícula que se move na superfície de um líquido.
- Processos contínuos com tempo discreto. Suponha que no exemplo anterior, só possam ser realizadas medidas da posição da partícula a cada cinco minutos, isto faz com que o parâmetro temporal seja discreto.
- Processos discretos com tempo contínuo. Como exemplo de tal processo, podemos citar o número de ligações telefônicas que uma operadora de telemarketing recebe ao longo do tempo.
- Processos discretos com tempo discreto. Para ilustrar esse processo, considere um rato em um labirinto com  $N$  células. O rato pode se mover para cada uma das células e observamos o labirinto a cada cinco minutos. Dessa forma temos estados discretos, o rato ocupando determinada célula, e tempo discreto, uma observação a cada cinco minutos.

Os processos estocásticos podem apresentar uma propriedade chamada **memória**. A assinatura de memória em um processo estocástico se dá através da dependência do estado atual de estados anteriores, isto é, se um processo apresenta memória, os estados futuros dependem dos estados passados. Os processos estocásticos sem memória são chamados **processos de Markov**, assim chamados devido ao matemático russo Andrey Andreyevich Markov (1856 – 1922) que estudou tais processos ao longo de sua carreira. Podemos ter processos de Markov contínuos ou discretos e também com tempo discreto ou contínuo.

Quando um processo de Markov apresenta um conjunto de estados discretos, dizemos que forma uma **cadeia de Markov**. Mas apenas as cadeias de Markov em tempo discreto são de nosso interesse.

A cada conjunto de estados de uma cadeia de Markov está associado um conjunto de probabilidades. São as probabilidades de transição, que correspondem à probabilidade de, na passagem de tempo,  $k$  pra  $k + 1$ , o estado  $i$  passe para  $j$ , denotado  $P_{ij}^{(k)}$ . Note que a probabilidade  $P_{ij}^{(k)}$  pode depender do tempo  $k$ . Caso não dependa, o processo é chamado estacionário.

É comum esquematizarmos uma cadeia de Markov através de um grafo. Os vértices do grafo correspondem ao conjunto de estados e as arestas do grafo são orientadas e possuem pesos. Os pesos correspondem às probabilidades de transição entre os estados definidos pelos vértices. Uma cadeia estacionária está esquematizada na Fig. 5, nesse caso, as probabilidades são constantes ao longo do tempo.

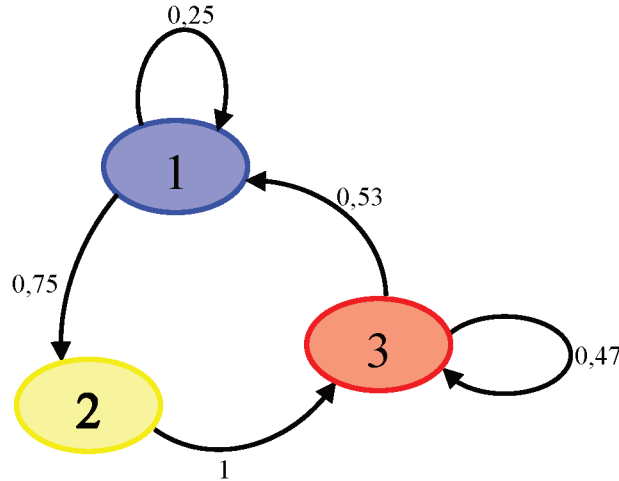


Figura 5 – Esquema de uma cadeia de Markov estacionária.

Podemos arranjar as probabilidades de transição na forma de uma matriz. Tal matriz é convenientemente chamada **matriz de transição**. Nela, o elemento  $P_{ij}$  representa a probabilidade de ocorrer uma transição do estado  $i$  para o estado  $j$  [41]. A matriz de transição associada à cadeia de Markov da Fig. 5 é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,53 & 0 & 0,47 \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Dessa forma, a evolução da cadeia fica codificada na matriz de transição. Ao aplicar a matriz de transição sobre um vetor,  $\vec{v}^{(0)}$ , que contém o estado inicial do sistema, obtemos um vetor com as probabilidades de o sistema se encontrar em cada um dos estados, depois de um passo no tempo,  $\vec{v}^{(1)}$ . Indutivamente, ao aplicar a  $k$ -ésima potência de  $P$  no vetor com o estado inicial do sistema obtemos um vetor com as probabilidades de o sistema se encontrar em cada um dos estados no  $k$ -ésimo passo de tempo:

$$\vec{v}^{(k)} = \vec{v}^{(0)} P^k. \quad (1.92)$$

Como esperado, a soma das entradas em cada linha da matriz de transição,  $P$ , vale 1, devido à conservação da probabilidade. Dizemos que  $P$ , nesse caso, é **linha-normalizada**. Poderíamos também, definir  $P$  de forma que a soma das entradas em cada coluna valesse 1. Dessa forma,  $P$  seria **coluna-normalizada**. Além disso, também esperamos que as potências de  $P$  sejam linha-normalizadas (ou coluna-normalizadas). Este fato pode ser

facilmente verificado de maneira indutiva. Sabemos que a normalização das linhas vale para  $k = 1$ , então, como hipótese de indução suponha válido para  $k \leq p$ , logo

$$\sum_j [P^{p+1}]_{ij} = \sum_{j,l} [P^p]_{il} P_{lj} \quad (1.93)$$

$$= \sum_l [P^p]_{il} \left( \sum_j P_{lj} \right) \quad (1.94)$$

$$= \sum_l [P^p]_{il} = 1. \quad (1.95)$$

A normalização das linhas também impõe que o vetor com todas as componentes iguais a 1 é um autovetor de  $P$  e o autovalor correspondente é 1. Quando uma matriz, com entradas não-negativas, apresentar as linhas (ou as colunas) normalizadas, diremos que essa matriz é **estocástica**.

A matriz  $P$ , na Eq. 1.91, apresenta quatro elementos nulos. Entretanto, ao tomar a tomar sua terceira potência, todos os seus elementos serão diferentes de zero. Pelo fato de  $P$  ter essa propriedade, é dita **primitiva**. Rigorosamente, a matriz  $P$  é dita primitiva quando existir um inteiro  $m$  tal que  $[P^m]_{ij} > 0$  para todo  $i$  e  $j$ , ou seja, existe um inteiro  $m$  tal que todas as entradas da matriz  $P^m$  são positivas.

As matrizes estocásticas são não-negativas e quase todas são primitivas. Essas propriedades fazem com que essas matrizes obedeçam ao Teorema de Perron-Frobenius. Este teorema (para matrizes primitivas) garante que existe um único autovalor com módulo estritamente maior que o dos demais e que está associado a um autovetor com todas as componentes positivas.

Assim, o Teorema de Perron-Frobenius garante que o autovalor 1 é único e maximal, pois é o autovalor associado ao autovetor com todas as componentes iguais a 1. Logo, os autovalores de uma matriz estocástica residem no interior de um círculo de raio 1 no plano complexo e apenas o autovalor 1 se encontra na borda deste círculo.

## 1.8 Matrizes Estocásticas, Grupos de Lie e Espaços Simétricos

Considere, por exemplo, uma impureza em uma rede cristalina. Ela atua como um centro espalhador. Portanto, em cada centro, teremos ondas incidentes e ondas transmitidas, Fig. 6. Com isso, podemos definir uma matriz de espalhamento,  $\mathbb{S}$ , cujos elementos são amplitudes de probabilidade, e seus módulos quadrados nos dão as probabilidades de reflexão e transmissão. Dessa forma, podemos construir uma matriz com as probabilidades de transmissão e reflexão:  $P_{ij} = |\mathbb{S}_{ij}|^2$ . Como os elementos de  $P$  são probabilidades, os elementos em suas linhas (ou colunas) devem somar 1, portanto  $P$  é estocástica. Mais ainda,  $P$  é uma matriz estocástica obtida a partir de uma matriz unitária.

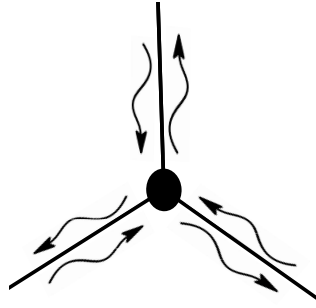


Figura 6 – Representação de um centro espalhador.

Nesse mesmo sentido, definimos as entradas de  $M$  como  $M_{ij} = |U_{ij}|^2$  para  $U \in \mathcal{U}(N)$ , como feito por Tanner [22], Zyczkowski et al. [25] e Tanner [23]. Matrizes desse tipo são empregadas no estudo de grafos quânticos [42, 22, 23]. Podemos verificar facilmente que as matrizes  $M$ , assim definidas, são estocásticas.

$$UU^\dagger = I \Rightarrow \sum_j U_{ij}U_{jk}^\dagger = \delta_{ik} \quad (1.96)$$

$$\sum_j U_{ij}U_{ji}^\dagger = 1 \quad (1.97)$$

$$\sum_j U_{ij}U_{ij}^* = 1 \quad (1.98)$$

$$\sum_j |U_{ij}|^2 = 1 \quad (1.99)$$

$$\sum_j M_{ij} = 1. \quad (1.100)$$

Também podemos definir  $M$  com  $M_{ij} = |U_{ij}|^2$  para  $U$  pertencente a um dos espaços simétricos que são quocientes do grupo Unitário, ou seja, para AI, AII e AIII. Para o grupo Ortogonal, a definição é automaticamente estendida, pois é um subgrupo do grupo Unitário:  $M_{ij} = O_{ij}^2$  para  $O$  pertencente ao grupo Ortogonal e ao espaço simétrico BDI. A estocasticidade dessas matrizes segue de forma análoga à das Eqs. 1.96 a 1.100. Com isso, podemos definir os ensembles de matrizes estocásticas  $\Sigma_U$ ,  $\Sigma_O$ ,  $\Sigma_{AI}$ ,  $\Sigma_{AII}$ ,  $\Sigma_{AIII}$  e  $\Sigma_{BDI}$ . Na verdade, para definir um ensemble de matrizes precisamos de um conjunto de matrizes e um medida de probabilidade sobre ele. Aqui definimos os conjuntos de matrizes; enquanto a medida de probabilidade será discutida no próximo capítulo.

No grupo Simplético, e seus quocientes, também definimos  $M_{ij} = |S_{ij}|^2$  para  $S \in \mathcal{Sp}(2N)$ . E assim construímos os ensembles  $\Sigma_S$  e  $\Sigma_{CII}$ . Lembrando que consideramos o grupo Simplético como subgrupo do grupo Unitário, temos  $S^\dagger = S^D$ . Isto nos permite escrever  $M_{ij} = S_{ij}S_{ji}^D$ , e, assim, verificar facilmente a estocasticidade de  $M$ :

$$SS^D = I \Rightarrow \sum_j S_{ij} S_{jk}^D = \delta_{ik} \quad (1.101)$$

$$\sum_j S_{ij} S_{ji}^D = 1 \quad (1.102)$$

$$\sum_j M_{ij} = 1. \quad (1.103)$$

Note que nas Eqs. 1.96 a 1.100 e nas Eqs. 1.101 a 1.103 usamos as relações das inversas das matrizes  $U$  e  $S$ , respectivamente, para verificar que as matrizes  $M$  eram, de fato, estocásticas. Ou seja, verificamos que as matrizes  $M$  eram linha-normalizadas. Entretanto, as matrizes  $U$  e  $S$  também possuem inversas à esquerda,  $U^\dagger U = I$  e  $S^D S = I$ . Usando estas relações e seguindo um processo análogo ao descrito nas Eqs. 1.96 a 1.100 e nas Eqs. 1.101 a 1.103, verificaremos que as matrizes  $M$  são, também, coluna-normalizadas. Dessa forma, dizemos que as matrizes  $M$  são **biestocásticas**.

## 2 Integrais matriciais

Neste capítulo vamos complementar os conjuntos de matrizes vistos no Capítulo 1 tornando-os ensembles de matrizes. A seguir definimos a noção de uma integral sobre um ensemble. Por fim, fornecemos resultados importantes sobre algumas integrais sobre estes ensembles.

### 2.1 Medida e distribuições de probabilidade

Para construir um ensemble de matrizes, precisamos especificar um conjunto de matrizes juntamente com a distribuição de probabilidade de seus elementos. No Capítulo 1, estudamos os conjuntos de matrizes: os grupos de Lie, Unitário, Ortogonal e Simplético; e os espaços simétricos: AI, AII, AIII, BDI e CII. Agora vamos dar atenção à distribuição dos elementos das matrizes oriundas desses conjuntos.

Para ilustrar alguns conceitos, começamos com o Ensemble de Ginibre Complexo [16]. Este ensemble está definido sobre o conjunto de matrizes inversíveis com entradas complexas, o grupo  $GL_N(\mathbb{C})$ , com os elementos,  $Z_{jk}$ , independentes e com distribuição normal:

$$p(Z_{jk}) = \frac{1}{\pi} e^{-|Z_{jk}|^2}. \quad (2.1)$$

Como os elementos são independentes, a distribuição de probabilidade conjunta é o produto das distribuições de probabilidade individuais<sup>1</sup>

$$P(Z) = \frac{1}{\pi^{N^2}} \prod_{j,k=1}^N p(Z_{jk}) \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{\pi^{N^2}} \prod_{j,k=1}^N e^{-|Z_{jk}|^2} \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{\pi^{N^2}} \exp\left(-\sum_{j,k=1}^N |Z_{jk}|^2\right) \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{\pi^{N^2}} \exp\left(-\sum_{j,k=1}^N Z_{jk}^\dagger Z_{kj}\right) \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{\pi^{N^2}} e^{-\text{Tr}(Z^\dagger Z)}. \quad (2.6)$$

Também temos normalização,

$$\int_{\mathbb{C}^{N^2}} P(Z) dZ = 1, \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> De maneira análoga, a distribuição de probabilidade conjunta do Ensemble de Ginibre Real (GRE) é  $P(Z) = \frac{1}{\pi^{N^2/2}} e^{-\text{Tr}(Z^T Z)}$  e do Ensemble de Ginibre Quaterniônico (GQE) é  $P(Z) = \frac{1}{\pi^{2N^2}} e^{-\text{Tr}(Z^D Z)}$

onde  $dZ = \prod_{j,k=1}^N dX_{jk} dY_{jk}$  com  $Z_{jk} = X_{jk} + iY_{jk}$ .

O termo  $P(Z)dZ$  é a medida no ensemble de Ginibre. Vamos usar a seguinte notação para a medida

$$d\mu_G(Z) = P(Z)dZ, \quad (2.8)$$

$d\mu_G$  é análogo a um volume infinitesimal em  $\mathbb{C}^{N \times N}$ .

Se  $f$  é um mapeamento de  $\mathbb{C}^{N \times N}$  em  $\mathbb{C}^{N \times N}$  e

$$d\mu_G(f(Z)) = d\mu_G(Z), \quad (2.9)$$

dizemos que  $d\mu_G$  é invariante por  $f$ . Por exemplo, a medida do ensemble de Ginibre  $d\mu_G(Z)$  é invariante pelo mapeamento  $Z \mapsto ZU$  (respectivamente,  $Z \mapsto UZ$ ), ou seja, multiplicação pela direita (respectivamente, pela esquerda) por uma matriz unitária. De fato,

$$\text{Tr}((ZU)^\dagger(ZU)) = \text{Tr}((U^\dagger Z^\dagger ZU)) = \text{Tr}(UU^\dagger Z^\dagger Z) = \text{Tr}(Z^\dagger Z) \quad (2.10)$$

e

$$\text{Tr}((UZ)^\dagger(UZ)) = \text{Tr}(Z^\dagger U^\dagger UZ) = \text{Tr}(Z^\dagger Z), \quad (2.11)$$

logo,  $P(UZ) = P(ZU) = P(Z)$ . E o Jacobiano da transformação é  $U \oplus U \oplus \dots \oplus U$  ( $N$  vezes), pois  $\mathbb{C}^{N \times N}$  é isomorfo a  $\mathbb{C}^{N^2}$ , e seu determinante tem, portanto, módulo 1. Dessa forma, concluímos que  $d\mu_G(ZU) = d\mu_G(UZ) = d\mu_G(Z)$ .

No grupo Unitário, os elementos não são independentes, devido à condição  $UU^\dagger = I$ . Por isso, escrever uma forma explícita para uma medida em  $\mathcal{U}(N)$  é mais difícil que no ensemble de Ginibre. Porém, todo grupo de Lie possui uma única medida (a menos de uma constante) que é invariante por multiplicação à esquerda e à direita. Ela é conhecida como **medida de Haar**,  $d\mu_H$ . No grupo Unitário, temos

$$d\mu_H(VU) = d\mu_H(UV) = d\mu_H(U), \text{ para } V \in \mathcal{U}(N). \quad (2.12)$$

Uma expressão para a medida de Haar em termos das coordenadas locais de  $\mathcal{U}(N)$  foi obtida por [Zyczkowski e Kus \[43\]](#).

A medida de Haar é uma escolha natural para medida em um grupo compacto, pois, devido à invariância por multiplicação, todas as regiões de  $\mathcal{U}(N)$  têm o mesmo peso em uma média sobre o grupo. Essa medida é análoga à distribuição uniforme em um intervalo fechado da reta real (que também é compacto): cada parte do intervalo tem peso igual em uma média.

O grupo Ortogonal é um subgrupo do grupo Unitário, por isso a medida de Haar do grupo Unitário é automaticamente induzida. Assim como no grupo Simplético que é isomorfo ao grupo Unitário (Eq. 1.23).



Devido à fatoração de um elemento do ensemble circular ortogonal (AI), dada na Eq. 1.34, e à invariância por multiplicação, a medida de Haar do grupo Unitário é induzida em AI. O mesmo ocorre para o ensemble circular simplético (AII), pela Eq. 1.37. Nos ensembles quirais (AIII, BDI e CII), apenas cabe ressaltar que as matrizes  $I_{ab}$  e  $I'_{ab}$  (Eqs. 1.39) são também unitárias. Dessa forma, pelo mesmo argumento, a medida de Haar do grupo Unitário também é induzida sobre os ensembles quirais.

## 2.2 Médias

Várias integrais matriciais podem ser reduzidas a integrais sobre produtos de elementos de matriz. Estas integrais são da forma

$$\int_G dg \, g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n}, \quad (2.13)$$

onde  $g_{i_k j_k}$  é uma entrada de  $g \in G$  e  $dg$  é a medida de Haar induzida sobre  $G$ . Essa integral será denotada na forma de uma média:

$$\langle g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n} \rangle_G = \int_G dg \, g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n}. \quad (2.14)$$

### 2.2.1 Integrais sobre grupos de Lie

No grupo Unitário, queremos calcular

$$\left\langle \prod_{k=1}^n U_{a_k b_k} U_{c_k d_k}^* \right\rangle_{U(N)}. \quad (2.15)$$

Para isso, utilizamos um truque com a derivada para poder expressar o produto de elementos de matriz na expressão acima em termos de séries de potências:

$$\prod_{k=1}^n U_{a_k b_k} = \frac{1}{n!} \left( \prod_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial A_{a_k b_k}^*} \right) \left( \sum_{i,j} \prod_{k=1}^n A_{i_k j_k}^* U_{i_k j_k} \right) = \frac{1}{n!} \left( \prod_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial A_{a_k b_k}^*} \right) p_{1^n}(A^\dagger U). \quad (2.16)$$

A seguir, substituímos a Eq. 2.16 numa integral sobre o grupo Unitário, e obtemos

$$\left\langle \prod_{k=1}^n U_{a_k b_k} U_{c_k d_k}^* \right\rangle_{U(N)} = \frac{1}{n!^2} \left( \prod_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial A_{a_k b_k}^*} \frac{\partial}{\partial B_{c_k d_k}} \right) \int_{U(N)} dU p_{1^n}(A^\dagger U) p_{1^n}(BU^\dagger). \quad (2.17)$$

Com o auxílio da Eq. 1.72 escrevemos as séries de potências em termos de funções de Schur. A integral resultante fica na forma da Eq. 1.73. E obtemos

$$\frac{1}{n!^2} \left( \prod_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial A_{a_k b_k}^*} \frac{\partial}{\partial B_{c_k d_k}} \right) \sum_{\mu, \lambda \vdash n} \chi^\lambda(1^n) \chi^\mu(1^n) \frac{J_\lambda^1(A^\dagger B)}{J_\lambda^1(1^N)} \delta_{\mu, \lambda}. \quad (2.18)$$

Identificando a dimensão da representação irredutível,  $d_\lambda = \chi^\lambda(1^n)$ , e com o auxílio da Eq. 1.75 obtemos

$$\frac{1}{n!^2} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_\lambda}{J_\lambda^1(1^N)} \sum_{\pi \in S_n} \chi^\lambda(\pi) \left( \prod_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial A_{a_k b_k}^*} \frac{\partial}{\partial B_{c_k d_k}} p_\pi(A^\dagger B) \right). \quad (2.19)$$

Observemos que

$$p_\pi(A^\dagger B) = \sum_{\vec{i}} \prod_{k=1}^n (A^\dagger B)_{i_k i_{\pi(k)}}, \text{ com } \vec{i} = (i_1, \dots, i_n) \quad (2.20)$$

$$= \sum_{\vec{i}, \vec{j} \in [N]^n} \prod_{k=1}^n A_{i_k j_k}^\dagger B_{j_k i_{\pi(k)}}, \text{ com } \vec{j} = (j_1, \dots, j_n) \quad (2.21)$$

$$= \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \prod_{k=1}^n A_{j_k i_k}^* B_{j_k i_{\pi(k)}}. \quad (2.22)$$

Note que a soma na Eq. 2.19 produz muitos termos nulos. Os termos não nulos ocorrem quando o produto que é derivado é uma permutação das variáveis de derivação. Dessa forma, a lista dos primeiros índices (respectivamente, segundos índices) da matriz  $A$  no numerador deve ser uma permutação da lista dos primeiros índices (respectivamente, segundos índices),  $j_k = a_{\theta(k)} \forall k$  (respectivamente,  $i_k = b_{\theta(k)} \forall k$ ) para algum  $\theta \in S_n$ . Analogamente, para a matriz  $B$ , temos  $j_k = c_{\rho(k)} \forall k$  e  $i_{\pi(k)} = d_{\rho(k)} \forall k$  para algum  $\rho \in S_n$ .

Substituindo os elementos das listas  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , temos  $a_k = c_{\rho\theta^{-1}(k)} \forall k$  e  $b_k = d_{\rho\pi^{-1}\theta^{-1}(k)} \forall k$ . Fazendo uma mudança de variáveis,  $\rho = \sigma\theta$  e  $\tau = \rho\pi^{-1}\theta^{-1}$ , o termo entre parênteses na Eq. 2.19 vale

$$\sum_{\rho, \theta \in S_n} \prod_{k=1}^n \delta_{a_k c_{\rho\theta^{-1}(k)}} \delta_{b_k d_{\rho\pi^{-1}\theta^{-1}(k)}} = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \prod_{k=1}^n \delta_{a_k c_{\sigma(k)}} \delta_{b_k d_{\tau(k)}} \quad (2.23)$$

$$= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \delta_\sigma(\vec{a}, \vec{c}) \delta_\tau(\vec{b}, \vec{d}). \quad (2.24)$$

onde

$$\delta_\sigma(\vec{a}, \vec{c}) = \prod_{k=1}^n \delta_{a_k c_{\sigma(k)}} \quad (2.25)$$

compara as listas de índices  $\vec{a}$  e  $\vec{c}$  e verifica se a lista  $\vec{a}$  é resultado de permutar a lista  $\vec{c}$  conforme  $\sigma$ .

Devido à mudança de variáveis introduzida, podemos ver que  $\pi$  e  $\sigma^{-1}\tau$  têm o mesmo ciclo-tipo, pois são conjugados,  $\sigma^{-1}\tau = \theta\pi^{-1}\theta^{-1}$ . Assim, podemos substituir  $\chi^\lambda(\pi)$  por  $\chi^\lambda(\sigma^{-1}\tau)$ , e a soma sobre  $\pi$  resulta em  $n!$ . Rearranjando os termos da Eq. 2.19 juntamente com a Eq. 2.24 obtemos

$$\left\langle \prod_{k=1}^n U_{a_k b_k} U_{c_k d_k}^* \right\rangle_{\mathcal{U}(N)} = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{Wg}^U(\sigma^{-1}\tau, N) \delta_\sigma(\vec{a}, \vec{c}) \delta_\tau(\vec{b}, \vec{d}), \quad (2.26)$$

em que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$  são as listas dos índices em  $[N]^n$  (o conjunto das listas de comprimento  $n$ , cujas componentes têm valor entre 1 e  $N$ ); e  $\text{Wg}^U(\sigma^{-1}\tau, N)$  é a função de Weingarten unitária, dada por [44]:

$$\text{Wg}^U(\sigma, N) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_\lambda}{J_\lambda^1(1^N)} \chi^\lambda(\sigma). \quad (2.27)$$

Dessa forma, podemos calcular médias no grupo Unitário utilizando essas expressões, por exemplo,

$$\langle |U_{12}|^2 \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad \langle |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 \rangle_{\mathcal{U}(N)} = \frac{1}{N(N+1)}.$$

Para o grupo Ortogonal, temos um resultado semelhante. Dadas duas listas de índices  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  e  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{2n})$  em  $[N]^{2n}$ , temos

$$\left\langle \prod_{k=1}^{2n} O_{a_k b_k} \right\rangle_{\mathcal{O}(N)} = \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{M}_n} \text{Wg}^O(\sigma^{-1}\tau, N) \Delta_\sigma(\vec{a}) \Delta_\tau(\vec{b}) \quad (2.28)$$

onde

$$\text{Wg}^O(\sigma, N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_{2\lambda}}{J_\lambda^2(1^N)} \omega^\lambda(\sigma), \quad (2.29)$$

é a função de Weingarten ortogonal [44]. Ela está escrita em termos de  $J_\lambda^2(1^N)$  e de  $\omega^\lambda(\sigma)$ , por isso depende apenas do coset-tipo de  $\sigma$ . Observe que agora as somas percorrem o conjunto dos *matchings* e surgem as funções  $\Delta_\sigma$ , dadas por

$$\Delta_\sigma(\vec{a}) = \prod_{k=1}^n \delta_{a_{\sigma(2k-1)}, a_{\sigma(2k)}}. \quad (2.30)$$

Ela verifica se a lista  $\vec{a}$  satisfaz o *matching* gerado por  $\sigma$ . Por depender apenas do *matching* gerado por  $\sigma$ , elas são invariantes por ação do hiperoctaedro:

$$\Delta_{\sigma\xi}(\vec{a}) = \Delta_\sigma(\vec{a}) \quad \text{para } \xi \in H_n. \quad (2.31)$$

Com isso, podemos calcular, por exemplo,

$$\langle U_{12}^2 \rangle_{\mathcal{O}(N)} = \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad \langle U_{11}^2 U_{12}^2 \rangle_{\mathcal{O}(N)} = \frac{1}{N(N+2)}.$$

Para o grupo Simplético, dadas duas listas de índices  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_{2n})$  e  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_{2n})$  em  $[2N]^{2n}$ , temos

$$\left\langle \prod_{k=1}^{2n} S_{a_k b_k} \right\rangle_{Sp(2N)} = \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{M}_n} \text{Wg}^S(\sigma^{-1}\tau, N) \Delta'_\sigma(\vec{a}) \Delta'_\tau(\vec{b}) \quad (2.32)$$

onde

$$\text{Wg}^S(\sigma, N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_{\lambda \cup \lambda}}{J_\lambda^{1/2}(1^N)} \psi^\lambda(\sigma), \quad (2.33)$$

é a função de Weingarten simplética [44]. Ela não depende apenas do coset-tipo da permutação, depende também de seu sinal, e pode ser dada pela função de Weingarten ortogonal,

$$\text{Wg}^S(\sigma, N) = (-1)^n \epsilon(\sigma) \text{Wg}^O(\sigma, -2N). \quad (2.34)$$

Assim como no caso ortogonal, as somas correm sobre o conjunto de *matchings*, e surgem as funções  $\Delta'_\sigma$ , ligeiramente diferentes de  $\Delta_\sigma$ , dadas por

$$\Delta'_\sigma(\vec{a}) = \prod_{k=1}^n \langle \langle \hat{e}_{a_\sigma(2k-1)}, \hat{e}_{a_\sigma(2k)} \rangle \rangle, \quad (2.35)$$

em que  $\hat{e}_l$  é um vetor da base canônica de  $\mathbb{C}^{2N}$ , e sua  $k$ -ésima componente é  $[\hat{e}_l]_k = \delta_{kl}$ . E vale

$$\langle \langle \hat{e}_k, \hat{e}_l \rangle \rangle = \delta_{k+N,l} - \delta_{k,l+N}. \quad (2.36)$$

Nesse caso, a ação de uma permutação do hiperoctaedro sobre  $\Delta'_\sigma$  produz um sinal:

$$\Delta'_{\sigma\xi}(\vec{a}) = \epsilon(\xi) \Delta'_\sigma(\vec{a}). \quad (2.37)$$

Como exemplos temos,

$$\langle U_{12} U_{1+N,2+N} \rangle_{\mathcal{S}p(2N)} = \frac{1}{2N} \quad \text{e} \quad \langle U_{11} U_{1+N,1+N} U_{12} U_{1+N,2+N} \rangle_{\mathcal{S}p(2N)} = \frac{1}{2N(2N+1)}.$$

## 2.2.2 Integrais sobre espaços simétricos

No caso dos espaços simétricos, temos relações análogas às médias sobre os grupos de Lie. Além disso, é possível obter expressões fechadas para as funções de Weingarten dos ensembles aqui estudados, AI, AII, AIII, BDI e CII. Nos ensembles CI e DIII, não temos uma expressão fechada para a função de Weingarten, mas [Matsumoto \[32\]](#) fornece um expressão para calculá-las.

Para calcular uma média sobre AI,

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI}, \quad (2.38)$$

substituímos a representação do coset,  $V = UU^T$ , na integral, e obtemos

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^*, \quad (2.39)$$

observe que a medida de Haar do ensemble é induzida pela medida de Haar do grupo unitário. Então,

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{p=1}^n \left( \sum_{k_p} U_{k_p, i_{2p-1}} U_{k_p, i_{2p}} \right) \left( \sum_{l_p} U_{l_p, j_{2p-1}}^* U_{l_p, j_{2p}}^* \right). \quad (2.40)$$

Como as somas são simétricas, o produto de somas pode ser reescrito como uma soma de produtos sobre todas as listas de índices, da seguinte maneira:

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \sum_{\vec{k}, \vec{l} \in [N]^n} \int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{p=1}^n U_{k_p, i_{2p-1}} U_{k_p, i_{2p}} U_{l_p, j_{2p-1}}^* U_{l_p, j_{2p}}^*. \quad (2.41)$$

Definindo  $\vec{k}' = \vec{k} \cup \vec{k} = (k_1, k_1, k_2, k_2, \dots, k_n, k_n)$  e  $\vec{l}' = \vec{l} \cup \vec{l}$  de modo análogo, temos:

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \sum_{\vec{k}, \vec{l} \in [N]^n} \int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{p=1}^{2n} U_{k'_p i_p} U_{l'_p j_p}^* \quad (2.42)$$

A integral pode ser convertida numa soma de funções de Weingarten do grupo Unitário:

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \sum_{\vec{k}, \vec{l} \in [N]^n} \sum_{\sigma, \tau \in S_{2n}} \delta_{\sigma}(\vec{i}, \vec{j}) \delta_{\tau}(\vec{k}', \vec{l}') \text{Wg}_{(2n)}^U(\sigma^{-1}\tau, N). \quad (2.43)$$

Definindo

$$\Lambda(\tau) = \sum_{\vec{k}, \vec{l} \in [N]^n} \delta_{\tau}(\vec{k}', \vec{l}') \quad (2.44)$$

temos,

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \sum_{\sigma, \tau \in S_{2n}} \Lambda(\tau) \delta_{\sigma}(\vec{i}, \vec{j}) \text{Wg}_{(2n)}^U(\sigma^{-1}\tau, N) \quad (2.45)$$

Note que  $\Lambda(\tau)$  contabiliza o número de pares de listas  $\vec{k}$  e  $\vec{l}$  em que  $\vec{k}'$  é resultado de permutar os índices de  $\vec{l}'$  segundo  $\tau$ . Como  $\vec{k}'$  é completamente determinada por  $\vec{l}'$  (e vice-versa), o número de pares corresponde ao número de símbolos independentes em  $\vec{k}'$ . Relembrando a definição do grafo  $\Gamma_{\tau}$  a condição  $k'_{2p-1} = k'_{2p}$  (da própria definição de  $\vec{k}'$ ) leva à presença do matching trivial; e quando  $k'_p = l'_{\tau(2p)} = l'_{\tau(2p-1)}$  leva ao matching devido a  $\tau$ . Assim, o número de símbolos independentes em  $\vec{k}'$  vale  $l'(\tau)$ , o comprimento do coset-tipo de  $\tau$ , ou seja, o número de componentes conexas em  $\Gamma_{\tau}$ . Assim, o número total de listas é  $N^{l'(\tau)}$

Mas sabemos que

$$N^{l'(\tau)} = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} J_{\lambda}^2(1^N) \omega^{\lambda}(\tau), \quad (2.46)$$

basta tomar  $X = I_N$  na Eq. 1.78 e perceber que  $p_{[\tau]}(I_N) = N^{l'(\tau)}$ .

E obtemos

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \delta_{\sigma}(\vec{i}, \vec{j}) \frac{2^n n!}{(2n)!} \left[ \sum_{\tau \in S_{2n}} \text{Wg}_{(2n)}^U(\sigma^{-1}\tau, N) J_{\lambda}^2(N) d_{2\lambda} \omega^{\lambda}(\tau) \right].$$

O termo entre colchetes pode ser trabalhado expandindo a função de Weingarten como na Eq. 2.27 e utilizando a relação de ortogonalidade entre caracteres. Olhemolo

com detalhes

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in S_{2n}} \text{Wg}_{(2n)}^U(\sigma^{-1}\tau, N) J_\lambda^2(1^N) d_{2\lambda} \omega^\lambda(\tau) &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash 2n} \sum_{\tau \in S_{2n}} \frac{J_\lambda^2(1^N) d_\mu}{J_\mu^1(1^N)} \chi^\mu(\sigma^{-1}\tau) d_{2\lambda} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\xi \in H_n} \chi^{2\lambda}(\tau\xi) \\
&= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash 2n} \frac{d_\mu d_{2\lambda} J_\lambda^2(1^N)}{J_\mu^1(1^N)} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\xi \in H_n} \left[ \sum_{\tau \in S_{2n}} \chi^\mu(\sigma^{-1}\tau) \chi^{2\lambda}(\tau\xi) \right] \\
&= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\mu \vdash 2n} \frac{d_\mu d_{2\lambda} J_\lambda^2(1^N)}{J_\mu^1(1^N)} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\xi \in H_n} \frac{(2n)!}{d_{2\lambda}} \chi_{2\lambda}(\sigma\xi) \delta_{\mu, 2\lambda} \\
&= \sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \frac{J_\lambda^2(1^N)}{J_{2\lambda}^1(1^N)} \omega^\lambda(\sigma).
\end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$J_{2\lambda}^1(1^N) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{2\lambda_i} (N - i + j) \quad (2.47)$$

$$= \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \left[ \prod_{p=1}^{\lambda_i} (N - i + 2p) \prod_{q=1}^{\lambda_i} (N - i + 2q - 1) \right] \quad (2.48)$$

$$= J_\lambda^2(1^{N+1}) J_\lambda^2(1^N). \quad (2.49)$$

Substituindo-as e rearranjando os termos encontramos

$$\left\langle \prod_{k=1}^n V_{i_{2k-1}, i_{2k}} V_{j_{2k-1}, j_{2k}}^* \right\rangle_{AI} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{j}) \text{Wg}^{AI}(\sigma, N) \quad (2.50)$$

donde concluímos que [32]

$$\text{Wg}^{AI}(\sigma, N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_{2\lambda}}{J_\lambda^2(1^{N+1})} \omega^\lambda(\sigma). \quad (2.51)$$

Note que  $\text{Wg}^{AI}(\sigma, N) = \text{Wg}^O(\sigma, N+1)$ . Dessa forma  $\text{Wg}^{AI}(\sigma, N)$  depende apenas do coset-tipo de  $\sigma$ .

Por exemplo,

$$\langle |U_{12}|^2 \rangle_{AI} = \frac{1}{N+1} \quad \text{e} \quad \langle |U_{11}|^2 |U_{12}|^2 \rangle_{AI} = \frac{2}{(N+1)(N+3)}.$$

Em AII, ao invés de escolher  $V' = UU^D$ , como representante de coset, como na Eq. 1.37, escolhemos  $V = V'J = UJU^T$ . Primeiramente, note que  $V$  também pertence a este espaço simétrico. Com efeito, suponha uma transformação de  $U$  por uma matriz  $S \in \mathcal{Sp}(2N)$ , para  $V$  temos:

$$\begin{aligned}
(US)J(US)^T &= USJS^T U^T \\
&= USJS^T (J^T J) U^T \\
&= U(SS^D)JU^T \\
&= UJU^T = V
\end{aligned}$$

Em segundo lugar, podemos constatar que  $V$  é antissimétrica.

$$\begin{aligned} V^T &= (UJU^T)^T \\ &= UJ^T U^T \\ &= -UJU^T = -V, \text{ pois } J^T = -J \end{aligned}$$

Dadas duas seqüências de índices  $\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{2n})$  e  $\vec{j} = (j_1, j_2, \dots, j_{2n})$  em  $[2N]^{2n}$ , uma média sobre AII é dada por

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V_{i_{2p-1}, i_{2p}} V_{j_{2p-1}, i_{2p}} \right\rangle_{AII} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \delta_{\sigma}(\vec{i}, \vec{j}) \text{Wg}^{AII}(\sigma, N), \quad (2.52)$$

onde

$$\text{Wg}^{AII}(\sigma, N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_{\lambda \cup \lambda}}{J_{\lambda}^{1/2} (1^{N-\frac{1}{2}})} \psi^{\lambda}(\sigma) \quad (2.53)$$

é a função de Weingarten associada a AII [32]. Note que  $\text{Wg}^{AII}(\sigma, N) = \text{Wg}^S(\sigma, N - \frac{1}{2})$ , por isso  $\text{Wg}^{AII}$  pode ser escrita como  $\text{Wg}^{AII}(\sigma, N) = (-1)^n \epsilon(\sigma) \text{Wg}^O(\sigma, 1 - 2N)$ .

Por exemplo,

$$\langle |U_{11}|^2 \rangle_{AII} = \frac{1}{2N-1} \quad \text{e} \quad \langle |U_{12}|^2 |U_{34}|^2 \rangle_{AII} = \frac{N-1}{N(2N-1)(2N-3)}.$$

Nos espaços simétricos AIII e BDI consideraremos como representante de coset  $V = UI_{ab}U^{\dagger}$ , ao invés de  $UI_{ab}U^{\dagger}I_{ab}$ , como na Eq. 1.39. Além disso, é fácil ver que  $V$  é uma matriz hermitiana:  $V^{\dagger} = (UI_{ab}U^{\dagger})^{\dagger} = UI_{ab}U^{\dagger} = V$ . Olhemos agora as entradas da matriz  $V$ :

$$V_{ij} = \sum_k (UI_{ab})_{ik} U_{kj}^{\dagger} \quad (2.54)$$

$$= \sum_{k,l} U_{il} (I_{ab})_{lk} U_{kj}^{\dagger} \quad (2.55)$$

$$= \sum_{k,l} U_{il} (t_k \delta_{lk}) U_{jk}^*, \text{ pois } I_{ab} \text{ é diagonal, e } t_k = [I_{ab}]_{kk} = \pm 1 \quad (2.56)$$

$$= \sum_k t_k U_{ik} U_{jk}^* \quad (2.57)$$

Para duas seqüências de índices  $\vec{i} = (i_1, \dots, i_n)$  e  $\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$ , uma média sobre AIII é dada por

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V_{i_p j_p} \right\rangle_{AIII} = \int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{p=1}^n V_{i_p j_p}. \quad (2.58)$$

Substituindo a Eq. 2.57 na integral obtemos

$$\int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{p=1}^n \left( \sum_{k_p} t_{k_p} U_{i_p k_p} U_{j_p k_p}^* \right). \quad (2.59)$$

Novamente, argumentando em favor das somas simétricas, podemos reescrever a expressão por uma soma sobre todas as sequências em  $[N]^n$ :

$$\int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{p=1}^n \left( \sum_{k_p} t_{k_p} U_{i_p k_p} U_{j_p k_p}^* \right) = \sum_{\vec{k} \in [N]^n} \int_{\mathcal{U}(N)} dU \prod_{p=1}^n t_{k_p} U_{i_p k_p} U_{j_p k_p}^* \quad (2.60)$$

$$= \sum_{\vec{k} \in [N]^n} \left( \prod_{p=1}^n t_{k_p} \right) \int_{\mathcal{U}(N)} dU U_{i_p k_p} U_{j_p k_p}^* \quad (2.61)$$

$$= \sum_{\vec{k} \in [N]^n} \left( \prod_{p=1}^n t_{k_p} \right) \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \delta_\tau(\vec{k}, \vec{k}) \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{j}) \text{Wg}(\tau^{-1}\sigma, N) \quad (2.62)$$

$$= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \left( \sum_{\vec{k} \in [N]^n} \delta_\tau(\vec{k}, \vec{k}) \prod_{p=1}^n t_{k_p} \right) \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{j}) \text{Wg}(\tau^{-1}\sigma, N) \quad (2.63)$$

Note que  $\delta_\tau(\vec{k}, \vec{k})$  verifica se  $\vec{k}$  é invariante por  $\tau$ . Isto só acontece quando os  $k'_s$  correspondentes a um ciclo de  $\tau$  coincidirem. Assim, há tantos símbolos na soma quanto o comprimento do ciclo-tipo de  $\tau$ ,  $\mu$ .

$$\sum_{\vec{k} \in [N]^n} \delta_\tau(\vec{k}, \vec{k}) \prod_{p=1}^n t_{k_p} = \sum_{r_1, \dots, r_{l(\mu)}} \prod_{q=1}^{l(\mu)} t_{r_q}^{\mu_q} \quad (2.64)$$

$$= \sum_{r_1, \dots, r_{l(\mu)}} \prod_{q=1}^{l(\mu)} (I_{ab})_{r_q r_q}^{\mu_q} \quad (2.65)$$

Novamente, temos uma soma simétrica, então podemos rearranjá-la como

$$\sum_{r_1, \dots, r_{l(\mu)}} \prod_{q=1}^{l(\mu)} t_{r_q}^{\mu_q} = \prod_{q=1}^{l(\mu)} \sum_{\alpha} (I_{ab}^{\mu_q})_{\alpha\alpha} \quad (2.66)$$

$$= \prod_{q=1}^{l(\mu)} \text{Tr}((I_{ab})^{\mu_q}) = p_\tau(I_{ab}) \quad (2.67)$$

Note que se  $\mu_j$  for par, então  $\text{Tr}(I_{ab}^{\mu_j}) = (a+b)$ , mas se  $\mu_j$  for ímpar,  $\text{Tr}(I_{ab}^{\mu_j}) = (a-b)$ . Logo, de definimos  $l^o(\mu)$  o número de ciclos em  $\tau$  com comprimento ímpar e  $l^e(\mu)$  o número de ciclos em  $\tau$  com comprimento par, ficamos com:

$$p_\tau(I_{ab}) = (a+b)^{l^e(\mu)} (a-b)^{l^o(\mu)}. \quad (2.68)$$

As séries de potências  $p_\tau(I_{ab})$  podem ser escritas como combinação linear das funções  $J_\lambda^1$  como segue:

$$p_\tau(I_{ab}) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \vdash n} d_\lambda \chi^\rho(\tau) J_\rho^1(1^a, (-1)^b). \quad (2.69)$$

Agora, podemos voltar à Eq. 2.63 e usar a relação de ortogonalidade de caracteres.

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V_{i_p j_p} \right\rangle_{AIII} = \sum_{\sigma \in S_n} \left[ \frac{1}{n!^2} \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\lambda, \rho \vdash n} d_\rho d_\lambda \frac{J_\rho^2(1^a, (-1)^b)}{J_\lambda^2(1^N)} \chi^\rho(\tau) \chi^\lambda(\tau^{-1}\sigma) \right] \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{j}) \quad (2.70)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \left[ \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \frac{J_\lambda^1(1^a, (-1)^b)}{J_\lambda^1(1^N)} \chi^\lambda(\sigma) \right] \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{j}). \quad (2.71)$$



Portanto,

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V_{i_p, j_p} \right\rangle_{AIII} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Wg}^{AIII}(\sigma, a, b) \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{j}), \quad (2.72)$$

onde

$$\text{Wg}^{AIII}(\sigma, a, b) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \frac{J_\lambda^1(1^a, (-1)^b)}{J_\lambda^1(1^N)} \chi^\lambda(\sigma) \quad (2.73)$$

é a função de Weingarten associada ao espaço simétrico AIII [32].

Por exemplo,

$$\langle U_{11} \rangle_{AIII} = \frac{a-b}{N} \quad \text{e} \quad \langle U_{12}^2 \rangle_{AIII} = \frac{(a-b)^2 - 1}{(N-1)(N+1)}.$$

Para uma sequência  $\vec{i} = (i_1, \dots, i_{2n})$  de índices, uma média sobre BDI é dada por

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V_{i_{2p-1}, i_{2p}} \right\rangle_{BDI} = \sum_{\sigma \in \mathcal{M}_n} \Delta_\sigma(\vec{i}) \text{Wg}^{BDI}(\sigma, a, b), \quad (2.74)$$

onde

$$\text{Wg}^{BDI}(\sigma, a, b) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} d_{2\lambda} \frac{J_\lambda^2(1^a, (-1)^b)}{J_\lambda^2(1^N)} \omega^\lambda(\sigma) \quad (2.75)$$

é a função de Weingarten associada ao espaço simétrico BDI [32].

Por exemplo,

$$\langle U_{11} \rangle_{BDI} = \frac{a-b}{N} \quad \text{e} \quad \langle U_{12}^2 \rangle_{BDI} = \frac{4ab}{N(N-1)(N+2)}.$$

Em CII, vamos considerar  $V = SI'_{ab} S^D$  no lugar do representante análogo da Eq. 1.39. Este representante é auto-dual e também está bem definido.

Para uma sequência  $\vec{i} = (i_1 + N, i_2, i_3 + N, i_4, \dots, i_{2n-1} + N, i_{2n})$ , onde a adição de  $N$  é feita de maneira modular, uma média sobre CII é dada por

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V_{i_{2p-1}+N, i_{2p}} \right\rangle_{CII} = \sum_{\sigma \in \mathcal{M}_n} \Delta'_\sigma(\vec{i}) \text{Wg}^{CII}(\sigma, a, b), \quad (2.76)$$

com

$$\text{Wg}^{CII}(\sigma, a, b) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} d_{\lambda \cup \lambda} \frac{J_\lambda^{1/2}(1^a, (-1)^b)}{J_\lambda^{1/2}(1^N)} \psi^\lambda(\sigma) \quad (2.77)$$

é a função de Weingarten associada ao espaço simétrico CII [32].

Por exemplo,

$$\langle U_{1+N,1} \rangle_{CII} = -\frac{a-b}{N} \quad \text{e} \quad \langle U_{1+N,2} U_{2+N,1} \rangle_{CII} = -\frac{4ab}{N(N-1)(2N+1)}.$$

Nas Eqs. 2.73, 2.75 e 2.77, o polinômio  $J_\lambda^\alpha(1^a, (-1)^b)$  pode ser calculado a partir da Eq. 1.74 para  $\alpha = 1$ ; da Eq. 1.77 para  $\alpha = 2$  colocando  $I_{ab}$  como argumento de  $p_\mu$ ; e da

Eq. 1.81 para  $\alpha = 1/2$  colocando  $I'_{ab}$  como argumento de  $p_\mu$ . Para  $\lambda = [1^2], [2]$  temos os seguintes polinômios

$$J_{[1]}^\alpha(1^a, (-1)^b) = a - b \quad (2.78)$$

$$J_{[1^2]}^1(1^a, (-1)^b) = J_{[1^2]}^2(1^a, (-1)^b) = (a - b)^2 - (a + b) \quad (2.79)$$

$$J_{[2]}^1(1^a, (-1)^b) = (a - b)^2 + (a + b) \quad (2.80)$$

$$J_{[2]}^2(1^a, (-1)^b) = (a - b)^2 + 2(a + b) \quad (2.81)$$

$$J_{[1^2]}^{1/2}(1^a, (-1)^b) = 4(a - b)^2 - 2(a + b) \quad (2.82)$$

$$J_{[2]}^{1/2}(1^a, (-1)^b) = 4(a - b)^2 + (a + b). \quad (2.83)$$

## 3 Resultados

### 3.1 Resultados Numéricos

Estamos interessados no comportamento assintótico do espectro das matrizes,  $N \gg 1$ . Matrizes aleatórias oriundas de grupos de Lie clássicos, uniformemente distribuídas de acordo com a medida de Haar, são geradas usando a decomposição QR, como descrito no Apêndice A.

Além disso, como mencionado na Seção 1.8, as matrizes estocásticas obedecem ao Teorema de Perron-Frobenius e, portanto, possuem 1 como autovalor. Esse autovalor é não-degenerado. Por isso, definimos o **espectro reduzido**,  $\mathcal{E}(M)$ , como sendo o conjunto de autovalores de  $M$  que são diferentes de 1. Conseqüentemente, o traço reduzido de uma matriz  $M$ ,  $\text{tr}M$ , é a soma sobre o espectro reduzido de  $M$ :

$$\text{tr}M = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}(M)} \lambda. \quad (3.1)$$

Os valores singulares de  $M$  correspondem aos autovalores de  $MM^T$ . Dessa forma, 1 também é um valor singular. Por isso definimos o espectro singular como conjunto dos valores singulares de  $M$  diferentes de 1.

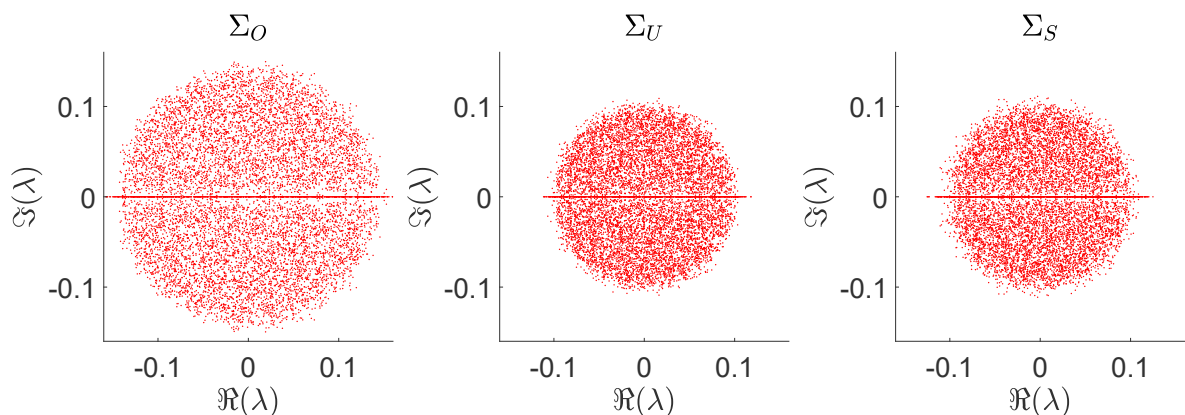


Figura 7 – Espectros reduzidos para os ensembles de matrizes estocásticas obtidos através do grupos de Lie clássicos. As matrizes têm dimensão 100.

Na Fig. 7, temos os espectros reduzidos de matrizes estocásticas aleatórias oriundas dos grupos de Lie clássicos. Sorteamos 1000 matrizes  $100 \times 100$  uniformemente distribuídas. Observamos que os autovalores se distribuem de maneira aproximadamente uniforme (a não ser por uma pequena concentração sobre o eixo real, que parece conter aproximadamente  $\sqrt{N}$  autovalores, como discutido em [17] para o GRE) em um disco de raio  $\sqrt{\frac{2}{\beta N}}$ , onde  $\beta$  é o fator de Dyson, e vale 1 para o grupo  $\mathcal{O}(N)$ , 2 para o grupo  $\mathcal{U}(N)$  e 4 para o

grupo  $\mathcal{Sp}(2N)$ . De fato, os espectros reduzidos aqui obtidos nos levam a concluir que os autovalores são de ordem  $N^{-1/2}$ .

Os histogramas dos valores singulares encontram-se na Fig. 8. Novamente, as matrizes têm dimensão 100. Os espectros apresentam boa concordância com a distribuição de quarto de círculo, em consistência com a universalidade. O maior valor singular vale aproximadamente o dobro do módulo do maior autovalor (no espectro reduzido), como acontece para o ensemble real de Ginibre.

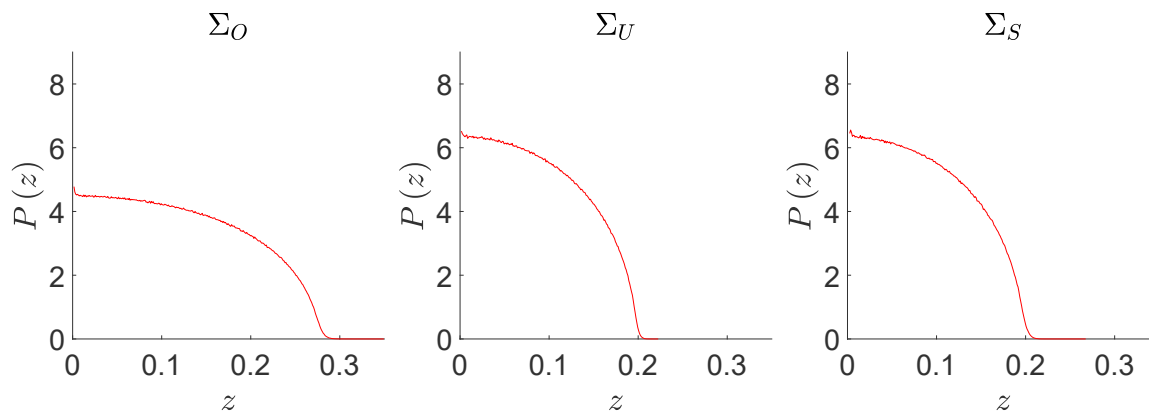


Figura 8 – Histogramas dos valores singulares para os ensembles estocásticos  $\Sigma_O, \Sigma_U$  e  $\Sigma_S$ .

Também obtivemos o espectro reduzido de matrizes nos ensembles  $\Sigma_{AI}$  e  $\Sigma_{AII}$ . Nesses casos, como já foi dito, as matrizes são reais e simétricas, logo os autovalores são também reais. Os histogramas encontram-se na Fig. 9. Com exceção de um ligeiro deslocamento para a direita em  $\Sigma_{AI}$  e para a esquerda em  $\Sigma_{AII}$ , os histogramas são bem descritos por uma distribuição semicircular. Estes resultados não são triviais. A distribuição semicircular que aparece aqui é uma assinatura da universalidade. Entretanto as matrizes não têm elementos independentes, uma hipótese que aparece muitas vezes em provas de ocorrência de universalidade.

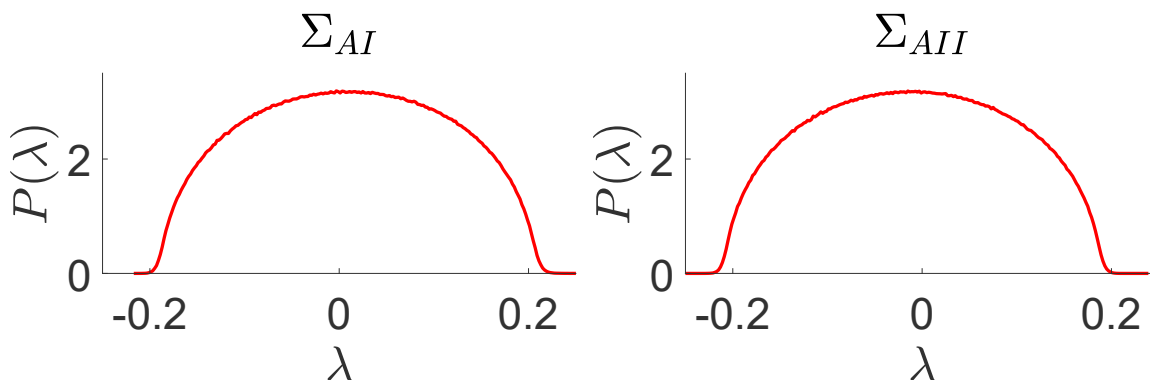


Figura 9 – Histogramas dos espectros reduzidos das matrizes estocásticas obtidas dos ensembles circulares.

Por fim, na Fig. 10 encontram-se os histogramas de autovalores dos ensembles quirais,  $\Sigma_{AIII}$ ,  $\Sigma_{BDI}$  e  $\Sigma_{CII}$ , também reais. Aqui, utilizamos o parâmetro  $\alpha$  como critério de comparação que é definido como  $\alpha = \frac{a-b}{N}$ , e é proporcional à diferença de termos positivos e negativos em  $I_{ab}$ , Eq.1.39. Usamos três valores de  $\alpha$ : 0, 0,4 e 0,8. Como pode ser observado, a forma da distribuição depende do valor de  $\alpha$ . Se  $\alpha = 0$ , as distribuições são aparentemente semicirculares; entretanto, para outros valores de  $\alpha$  não identificamos as distribuições. Mas, para  $\alpha \rightarrow 1$  todos os autovalores convergem para 1.

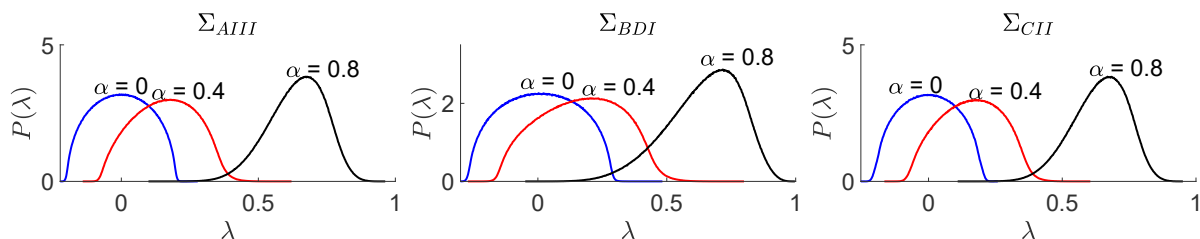


Figura 10 – Espectros reduzidos das matrizes estocásticas obtidas dos ensembles quirais.

## 3.2 Momentos

Dadas as observações numéricas de indícios na seção anterior (por exemplo, distribuições semicirculares e quarto de círculo), gostaríamos de provar algebricamente que a universalidade está presente. Para isso vamos utilizar o método dos momentos, que são dados por

$$\mathbb{M}_n^f = \int x^n f(x) dx, \quad (3.2)$$

para uma distribuição  $f(x)$ . O método dos momentos nos permite afirmar que duas distribuições são iguais se, e somente se, possuem os mesmos momentos. Por exemplo, no caso da distribuição semicircular de raio  $R$  dada por

$$f_{SC}(x) = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2}, \text{ com } x \in [-R, R], \quad (3.3)$$

seus momentos de ordem ímpar são nulos e os de ordem par são

$$\mathbb{M}_{2n}^{SC} = \left(\frac{R}{2}\right)^{2n} C_n \quad (3.4)$$

em que  $C_n$  são os números de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (3.5)$$

Os primeiros números de Catalan, para  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  são 1, 1, 2, 5, 14, 42. Para a distribuição quarto de círculo, dada por

$$f_{QC}(x) = \frac{4}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2}, \text{ com } x \in [0, R], \quad (3.6)$$

os momentos pares são  $\mathbb{M}_{2n}^{QC} = 2m_{2n}^{SC}$  e os momentos ímpares são  $\mathbb{M}_{2n+1}^{QC} = \frac{2^n}{\pi(2n+1)!!} R^{2n+1}$ .

Para uma distribuição de autovalores  $\rho(\lambda)$ , temos

$$\mathbb{M}_n^G = \int \lambda^n \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.7)$$

Mas devido à construção da distribuição de autovalores, a média  $\mathbb{M}_n^G$  corresponde  $\langle \bar{\lambda}^n \rangle_G$ , em que  $\bar{\lambda}^n$  é a média dos autovalores de  $M^n$ . Como  $\bar{\lambda}^n = \frac{1}{N} \text{Tr} M^n$  temos, portanto,

$$\mathbb{M}_n^G = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} M^n \right\rangle_G = \int_G \frac{1}{N} \text{Tr} M^n dg = \frac{1}{N} m_n^G. \quad (3.8)$$

### 3.3 Grupos de Lie

Nas seções a seguir, vamos calcular de forma exata alguns dos momentos das densidades de valores singulares para os ensembles  $\Sigma_U$ ,  $\Sigma_O$  e  $\Sigma_S$  e vamos compará-los aos momentos da distribuição quarto de círculo. Veremos que há concordância. Da mesma maneira, obteremos alguns dos momentos das densidades de autovalores para os outros ensembles e veremos que coincidem com os momentos da distribuição semicírculo.

#### 3.3.1 Grupo Unitário

Estamos interessados em calcular a média de  $\text{Tr} M^n$  sobre o grupo unitário. Podemos escrever

$$\text{Tr} M^n = \sum_{\vec{i}} M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \dots M_{i_n i_1} \quad (3.9)$$

$$= \sum_{\vec{i}} |U_{i_1 i_2}|^2 |U_{i_2 i_3}|^2 \dots |U_{i_n i_1}|^2 \quad (3.10)$$

Esta expressão está na forma da Eq. 2.26 tomando  $\vec{a} = \vec{c}$  e  $\vec{b} = \vec{d} = \pi_U(\vec{a}) = (i_2, i_3, \dots, i_n, i_1)$ , com  $\pi_U = (1 \ 2 \ \dots \ n) \in S_n$ . Então, temos

$$\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_U} = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{Wg}^U(\sigma^{-1} \tau, N) \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{i}) \delta_\tau(\pi_U(\vec{i}), \pi_U(\vec{i})) \quad (3.11)$$

Ao trocar a ordem das somas, a quantidade,

$$\sum_{\vec{i}} \delta_\sigma(\vec{i}, \vec{i}) \delta_\tau(\pi_U(\vec{i}), \pi_U(\vec{i})), \quad (3.12)$$

contabiliza quantas listas em  $[N]^n$  são simultaneamente invariantes sob as permutações  $\sigma$  e  $\pi_U^{-1} \tau \pi_U$ . Se denotarmos  $\langle a, b \rangle$  o grupo gerado pelas permutações  $a, b \in S_n$  e  $\Omega(a, b)$  o número de órbitas desse grupo atuando no conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , então a quantidade na Eq. 3.12 é igual a  $N^{\Omega(\sigma, \pi_U^{-1} \tau \pi_U)}$ . Logo,

$$\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_U} = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{Wg}^U(\sigma^{-1} \tau, N) N^{\Omega(\sigma, \pi_U^{-1} \tau \pi_U)} \quad (3.13)$$

Já que a função de Weingarten unitária depende apenas do ciclo-tipo da permutação, devido aos caracteres do grupo simétrico, podemos fazer uma mudança de variáveis na soma e obtemos

$$\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_U} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{m=1}^n F_n^U(\lambda, m) \text{Wg}^U(\lambda, N) N^m, \quad (3.14)$$

onde

$$F_n^U(\lambda, m) = \# \{ (\sigma, \tau) \in S_n \times S_n \mid \pi_U^{-1} \sigma^{-1} \pi_U \tau \in C_\lambda, \Omega \langle \sigma, \tau \rangle = m \}, \quad (3.15)$$

é o número de pares  $(\sigma, \tau)$  que geram um grupo com  $m$  órbitas e  $\pi_U^{-1} \sigma^{-1} \pi_U \tau$  tem ciclo-tipo  $\lambda$ .

O termo mais simples da soma na Eq. 3.14 surge quando  $\lambda = [1^n]$  e  $m = n$ . Este termo é o resultado de  $\sigma = \tau = id$ , assim  $F_n^U(1^n, n) = 1$ . E, já que,  $\text{Wg}^U(id, N) \propto \frac{1}{N^n}$ , temos  $\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_U} = 1 + O(N^{-1})$ . As contribuições de ordem mais alta podem ser obtidas resolvendo este problema combinatório em um computador. Dessa forma, é possível obter tabelas para  $F_n^U(\lambda, m)$ :

$$F_2^U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3^U = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_4^U = \begin{pmatrix} 16 & 112 & 50 & 144 & 104 \\ 7 & 20 & 20 & 44 & 40 \\ 0 & 12 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

A soma das entradas corresponde à ordem de  $S_n \times S_n$ ,  $n!^2$ ; e cada coluna representa uma classe  $C_\lambda$ , com  $\lambda \vdash n$ . Nas colunas das tabelas  $F_n^U$  (assim como nas análogas a seguir), as partições estão em ordem “alfabética”. Por exemplo, para  $n = 3$ , a ordem é  $[1^3], [2, 1]$  e  $[3]$ ; e para  $n = 4$  temos:  $[1^4], [2, 1^2], [2^2], [3, 1]$  e  $[4]$ .

Usando as tabelas, podemos calcular médias dos traços reduzidos  $m_n^U = \langle \text{tr} M^n \rangle_{\Sigma_U}$ :

$$m_2^U = \frac{1}{N+1} \sim \frac{1}{N}, \quad (3.17)$$

$$m_3^U = \frac{2}{(N+1)(N+2)} \sim \frac{2}{N^2}, \quad (3.18)$$

$$m_4^U = \frac{N^2 + 12N + 6}{N(N+1)(N+2)(N+3)} \sim \frac{1}{N^2}, \quad (3.19)$$

$$m_5^U = \frac{34}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)} \sim \frac{34}{N^4} \quad (3.20)$$

Para os valores singulares, temos

$$\text{Tr}(M M^T)^n = \sum_{i, j} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_1} M_{i_2 j_2} M_{i_3 j_2} \dots M_{i_n j_n} M_{i_1 j_n}. \quad (3.21)$$

Aplicando a média sobre o grupo Unitário, obtemos

$$\langle \text{Tr}(MM^T)^n \rangle_{\Sigma_U} = \sum_{\vec{i}, \vec{j}} |U_{i_1 j_1}|^2 |U_{i_2 j_1}|^2 |U_{i_2 j_2}|^2 |U_{i_3 j_2}|^2 \dots |U_{i_n j_n}|^2 |U_{i_1 j_n}|^2 \quad (3.22)$$

$$= \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \sum_{\sigma, \tau \in S_{2n}} \text{Wg}^U(\sigma^{-1}\tau, N) \delta_\tau(\vec{p}, \vec{p}) \delta_\sigma(\vec{q}, \vec{q}), \quad (3.23)$$

com  $\vec{p} = (i_1, i_2, i_2, \dots, i_n, i_n, i_1)$  e  $\vec{q} = (j_1, j_1, j_2, j_2, \dots, j_n, j_n)$ .

Vemos que  $\vec{p}$  deve ser invariante pelas permutações  $\varphi_U = (2\ 3)(4\ 5)\dots(2n\ 1)$  e  $\tau$ . Da mesma forma, a lista  $\vec{q}$  deve ser invariante pelas permutações  $\sigma$  e  $\phi_U = (1\ 2)(3\ 4)\dots(2n-1\ 2n)$ . Portanto, podemos escrever as somas em função do número de órbitas dos grupos gerados:

$$\sum_{\vec{i}} \delta_\tau(\vec{p}, \vec{p}) = N^{\Omega(\tau, \varphi_U)} \quad (3.24)$$

$$\sum_{\vec{j}} \delta_\sigma(\vec{q}, \vec{q}) = N^{\Omega(\sigma, \phi_U)}. \quad (3.25)$$

Portanto,

$$\langle \text{Tr}(MM^T) \rangle_{\Sigma_U} = \sum_{\tau, \sigma \in S_{2n}} \text{Wg}^U(\sigma^{-1}\tau, N) N^{\Omega(\tau, \varphi_U) + \Omega(\sigma, \phi_U)}. \quad (3.26)$$

Novamente, podemos contabilizar as permutações que geram um certo número de órbitas de acordo com o ciclo-tipo de  $\sigma^{-1}\tau$ , e obtemos,

$$\langle \text{Tr}(MM^T) \rangle_{\Sigma_U} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{k, m=1}^n G_n^U(\lambda, k, m) N^{m+k} \text{Wg}^U(\sigma^{-1}\tau, N) \quad (3.27)$$

onde

$$G_n^U(\lambda, k, m) = \# \{ (\sigma, \tau) \in S_{2n} \times S_{2n} \mid \sigma^{-1}\tau \in C_\lambda, \Omega(\tau, \varphi_U) = m, \Omega(\sigma, \phi_U) = k \}, \quad (3.28)$$

é o número de pares ordenados  $(\sigma, \tau)$  tais que  $\sigma^{-1}\tau$  tem ciclo-tipo  $\lambda$  e os grupos  $\langle \tau, \varphi_U \rangle$  e  $\langle \sigma, \phi_U \rangle$  tenham, respectivamente,  $m$  e  $k$  órbitas.

Resolvendo este problema combinatório em um computador, obtemos as expressões para os traços reduzidos  $s_n^U = \langle \text{tr}(MM^T)^n \rangle$ :

$$s_1^U = \frac{N-1}{N+1} \sim 1 - \frac{2}{N}, \quad (3.29)$$

$$s_2^U = \frac{2(N-1)(N+4)}{(N+3)(N+2)(N+1)} \sim \frac{2}{N}, \quad (3.30)$$

$$s_3^U = \frac{5N^4 + 60N^3 + 217N^2 - 46N - 256}{(N+5)(N+4)(N+3)(N+2)(N+1)^2} \sim \frac{5}{N^2}. \quad (3.31)$$

Devido à Eq. 3.8,  $s_n$  está relacionado com o  $n$ -ésimo momento da distribuição de autovalores de  $(MM^T)^n$ , chamemo-los  $\nu$ . Por outro lado, os valores singulares correspondem à raiz quadrada dos autovalores de  $(MM^T)^n$ ,  $z = \sqrt{\lambda}$ . Então, como  $s_n = \langle \text{Tr}(MM^T)^n \rangle =$



$\langle \sum_i \nu_i^n \rangle$  temos  $s_n = \langle \sum_i z_i^{2n} \rangle$ . Logo  $s_n$  está relacionado com os momentos de ordem par da distribuição de valores singulares.

Dessa forma, os números 1, 2 e 5 que aparecem como coeficientes nas ordens relevantes são os primeiros três números de Catalan. Este resultado é consistente com a distribuição dos valores singulares sendo uma distribuição quarto de círculo.

### 3.3.2 Grupo Ortogonal

Para o grupo Ortogonal, já que as matrizes são reais, temos

$$\text{Tr}M^n = \sum_{\vec{i}} O_{i_1 i_2}^2 O_{i_2 i_3}^2 \cdots O_{i_n i_1}^2. \quad (3.32)$$

Podemos aplicar a Eq. 2.28 e obter a média sobre o grupo Ortogonal,

$$\langle \text{Tr}M^n \rangle_{\Sigma_O} = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{M}_n} \text{Wg}^O(\sigma^{-1}\tau, N) \Delta_{\tau}(\vec{p}) \Delta_{\sigma}(\pi_O(\vec{p})) \quad (3.33)$$

onde  $\pi_O$  é o quadrado de um ciclo longo,  $\pi_O = (1 \ 2 \ \cdots \ 2n)^2 = (1 \ 3 \ 5 \ \cdots) (2 \ 4 \ 6 \ \cdots) \in S_{2n}$  e a lista  $\vec{p}$  é da forma  $\vec{p} = (i_1, i_1, i_2, i_2, \dots, i_n, i_n)$ . A segunda condição pode ser implementada impondo que a lista  $\vec{p}$  deve ser invariante pela permutação  $\phi_U$  que corresponde a  $f(id)$ , onde  $f(\sigma)$  é uma involução sem pontos fixos, associada ao matching  $\sigma(t)$ .

A quantidade

$$\sum_{\vec{i}} \Delta_{\tau}(\vec{p}) \Delta_{\sigma}(\pi_O(\vec{p})) = N^{\Omega(f(\tau), f(\pi_O\sigma), \phi_U)}, \quad (3.34)$$

é calculada em termos do número de órbitas do grupo gerado pelas involuções sem pontos fixos associadas aos *matchings*  $\tau$ ,  $\pi_O$  e  $\phi_U$ . Logo,

$$\langle \text{Tr}M^n \rangle_{\Sigma_O} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{m=1}^n F_n^O(\lambda, m) \text{Wg}^O(\lambda, N) N^m, \quad (3.35)$$

onde  $F_n^O(\lambda, m)$  é o número de pares  $(\sigma, \tau)$  em  $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$  tais que  $\langle f(\tau), f(\pi_O\sigma), \phi_U \rangle$  tem  $m$  órbitas e  $\sigma^{-1}\tau$  tem coset-tipo  $\lambda$ .

Novamente, resolvendo este problema combinatório em um computador, podemos obter as tabelas para  $F_n^O(\lambda, m)$ :

$$F_2^O = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3^O = \begin{pmatrix} 14 & 78 & 108 \\ 0 & 12 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

e

$$F_4^O = \begin{pmatrix} 88 & 1136 & 1112 & 3072 & 4576 \\ 16 & 100 & 140 & 272 & 464 \\ 0 & 24 & 8 & 16 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

A soma das entradas é  $(2n-1)!!^2$ , como esperado. E a soma das entradas em cada coluna corresponde ao número de pares tais que  $\sigma^{-1}\tau$  tem coset-tipo  $\lambda$ .

Assim, obtemos os traços reduzidos:

$$m_2^O = \frac{2}{N+2} \sim \frac{2}{N}, \quad (3.38)$$

$$m_3^O = \frac{8}{(N+2)(N+4)} \sim \frac{8}{N^2}, \quad (3.39)$$

$$m_4^O = \frac{4(N^2+23N+36)}{(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)} \sim \frac{4}{N^2}, \quad (3.40)$$

$$m_5^O = \frac{16(29N+24)}{(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N+8)} \sim \frac{464}{N^4}. \quad (3.41)$$

Para os valores singulares, temos:

$$\langle \text{Tr}(MM^T)^n \rangle_{\Sigma_O} = \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \langle M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_1} \dots M_{i_n j_n} M_{i_1 j_n} \rangle \quad (3.42)$$

$$= \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \langle O_{i_1 j_1} O_{i_1 j_1} O_{j_1 i_2} O_{j_1 i_2} \dots O_{i_n j_n} O_{i_n j_n} O_{i_1 j_n} O_{i_1 j_n} \rangle \quad (3.43)$$

$$= \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{M}_n} \text{Wg}^O(\sigma^{-1}\tau, N) \Delta_\tau(\vec{p}) \Delta_\sigma(\vec{q}), \quad (3.44)$$

onde a lista  $\vec{p}$  é da forma  $\vec{p} = (i_1, i_1, i_2, i_2, i_2, i_2, \dots, i_n, i_n, i_n, i_n, i_1, i_1)$  e  $\vec{q}$  é da forma  $\vec{q} = (j_1, j_1, j_1, j_1, \dots, j_n, j_n, j_n, j_n)$ . Note que  $\vec{p}$  é invariante por  $\varphi_O = (1\ 2\ 4n-1\ 4n)(3\ 4\ 5\ 6)\dots$  e  $\vec{q}$  é invariante por  $\phi_O = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)\dots$ . Assim, podemos escrever as somas sobre as listas  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  como função do número de órbitas dos grupos gerados pelas involuções sem pontos fixos:

$$\sum_{\vec{i}} \Delta_\tau(\vec{p}) = N^{\Omega(f(\tau), \varphi_O)} \quad (3.45)$$

$$\sum_{\vec{j}} \Delta_\sigma(\vec{q}) = N^{\Omega(f(\sigma), \phi_O)}. \quad (3.46)$$

Podemos, então, escrever

$$\langle \text{Tr}(MM^T)^n \rangle_{\Sigma_O} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{k, m=1}^n G_n^O(\lambda, k, m) N^{k+m} \text{Wg}^O(\lambda, N), \quad (3.47)$$

onde  $G_n^O(\lambda, k, m)$  é o número de pares  $(\tau, \sigma)$  em  $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$  em que o coset-tipo de  $\sigma^{-1}\tau$  é  $\lambda$  e o os grupos  $\langle f(\tau), \varphi_O \rangle$  e  $\langle f(\sigma), \phi_O \rangle$  têm, respectivamente,  $m$  e  $k$  órbitas.

Resolvendo o problema em um computador e calculando explicitamente os traços reduzidos, obtemos

$$s_1^O = \frac{2N-2}{N+2} \sim 2 - \frac{6}{N}, \quad (3.48)$$

$$s_2^O = \frac{(4N-4)(2N^2+17N+12)}{(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)} \sim \frac{8}{N}, \quad (3.49)$$

com  $s_n^O = \langle \text{tr}(MM^T)^n \rangle_{\Sigma_O}$ .

Os coeficientes 2 e 8 são consistentes com a distribuição dos valores singulares sendo um quarto de círculo de raio  $2\sqrt{2/N}$ .

### 3.3.3 Grupo Simplético

No ensemble simplético,  $\Sigma_S$ , temos

$$\text{Tr}M^n = \sum_{\vec{i}} S_{i_1 i_2} S_{i_2 i_1}^D S_{i_2 i_3} S_{i_3 i_2}^D \dots S_{i_n i_1} S_{i_1 i_n}^D \quad (3.50)$$

$$= \sum_{\vec{i}} S_{i_1 i_2} S_{i_1+N, i_2+N} S_{i_2 i_3} S_{i_2+N, i_3+N} \dots S_{i_n i_1} S_{i_n+N, i_1+N}, \quad (3.51)$$

onde a lista  $\vec{i}$  pertence a  $[2N]^n$  e a soma é módulo  $2N$  (Por exemplo, se  $i_1 = 2N - 2$ , então  $i_1 + N = 3N - 2 \equiv N - 2$ ).

Usando a relação para médias no grupo Simplético, na Eq. 2.32, obtemos

$$\langle \text{Tr}M^n \rangle_{\Sigma_S} = \sum_{\vec{i}} \text{Wg}^O(\sigma^{-1}\tau, N) \Delta'_\tau(\vec{p}) \Delta'_\sigma(\pi_O(\vec{p})) \quad (3.52)$$

onde  $\vec{p} = (i_1, i_1 + N, i_2, i_2 + N, \dots, i_n, i_n + N)$  e  $\pi_O = (1, 2, \dots, 2n)^2$ .

A quantidade  $\sum_{\vec{i}} \Delta'_\tau(\vec{p}) \Delta'_\sigma(\pi_O(\vec{p}))$  é, a menos de sinal, igual a  $(2N)^{\Omega(f(\tau), f(\pi_O\sigma), \phi_U)}$  e é quase igual à que aparece para o grupo Ortogonal. Esse sinal depende dos coset-tipos de  $\tau$  e  $\pi_O\sigma$  e também da sequência  $\vec{p}$ . Essa dificuldade nos impediu de calcular traços de potências de ordem mais alta. Sendo possível calcular apenas o seguinte traço reduzido:

$$m_2^S = \frac{2}{2N+1} \sim \frac{1}{N}. \quad (3.53)$$

Para os valores singulares, temos

$$\langle \text{Tr}(MM^T)^n \rangle_{\Sigma_S} = \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \langle M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_1} \dots M_{i_n j_n} M_{i_1 j_n} \rangle \quad (3.54)$$

$$= \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \langle S_{i_1 j_1} S_{i_1+N, j_1+N} S_{i_2 j_1} S_{i_2+N, j_1+N} \dots S_{i_n j_n} S_{i_n+N, j_n+N} S_{i_1 j_n} S_{i_1+N, j_n+N} \rangle \quad (3.55)$$

$$= \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{M}_{2n}} \text{Wg}^S(\sigma^{-1}\tau, N) \Delta'_\tau[\vec{p}] \Delta'_\sigma[\vec{q}], \quad (3.56)$$

onde  $\vec{p} = (i_1, i_1 + N, \dots, i_n, i_n + N, i_1, i_1 + N)$  e  $\vec{q} = (j_1, j_1 + N, j_1, j_1 + N, \dots, j_n, j_n + N, j_n, j_n + N)$ . Calculamos apenas o primeiro traço reduzido:

$$s_1^S = \frac{2N^2 + N + 1}{(N-1)(2N+1)} \sim 1 + \frac{1}{N}. \quad (3.57)$$

## 3.4 Ensembles Circulares

### 3.4.1 Espaço Simétrico AI

No espaço simétrico AI, temos

$$\mathrm{Tr} M^n = \sum_{\vec{i}} U_{i_1 i_2} U_{i_2 i_3} \cdots U_{i_n i_1} U_{i_1 i_2}^* U_{i_2 i_3}^* \cdots U_{i_n i_1}^*, \quad (3.58)$$

onde  $U$  é simétrica, e por consequência, também o é  $M$ . Usando a Eq. 2.50, segue que

$$\langle \mathrm{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_{AI}} = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{Wg}^{AI}(\sigma, N) \delta_{\sigma}(\vec{p}, \vec{p}), \quad (3.59)$$

com  $\vec{p} = (i_1, i_2, i_2, \dots, i_n, i_n, i_1)$ .

Já que a função de Weingarten para o espaço simétrico AI depende apenas do coset-tipo do argumento, podemos escrever

$$\langle \mathrm{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_{AI}} = \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{m=1}^n F_n^{AI}(\lambda, m) \mathrm{Wg}^{AI}(\lambda, N) N^m, \quad (3.60)$$

onde

$$F_n^{AI}(\lambda, m) = \#\{\sigma \in S_{2n} \mid [\sigma] = \lambda, \Omega\langle \sigma, \varphi_U \rangle = m\} \quad (3.61)$$

é o número de permutações em  $S_{2n}$  que têm coset-tipo  $\lambda$  e o grupo  $\langle \sigma, \varphi_U \rangle$  tem  $m$  órbitas.

O termo com  $\lambda = [1^n]$  e  $m = n$  resulta em  $\langle \mathrm{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_{AI}} = 1 + O(N^{-1})$  refletindo o autovalor de Perron-Frobenius. Contribuições de ordem mais alta podem ser obtidas resolvendo o problema combinatório em um computador. E, com isso, podemos obter as seguintes tabelas para as funções  $F_n^{AI}(\lambda, N)$ :

$$F_2^{AI} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F_3^{AI} = \begin{pmatrix} 38 & 234 & 320 \\ 9 & 51 & 60 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

e

$$F_4^{AI} = \begin{pmatrix} 306 & 3800 & 3862 & 10312 & 15608 \\ 67 & 724 & 689 & 1820 & 2636 \\ 10 & 80 & 54 & 152 & 184 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

A soma das entradas vale  $(2n)!$ . E a soma das entradas em cada coluna corresponde ao número de permutações com um dado coset-tipo.

Usando as tabelas, podemos calcular os traços reduzidos:

$$m_1^{AI} = \frac{N-1}{N+1} \sim 1 - \frac{2}{N}, \quad (3.64)$$

$$m_2^{AI} = \frac{(N-1)(N+5)}{(N+1)(N+3)} \sim 1 - \frac{8}{N^2}, \quad (3.65)$$

$$m_3^{AI} = \frac{3N^2 + 22N - 29}{(N+1)(N+3)(N+5)} \sim \frac{3}{N} - \frac{5}{N^2}, \quad (3.66)$$

$$m_4^{AI} = \frac{2(N^4 + 20N^3 + 146N^2 + 92N - 323)}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+5)(N+7)} \sim \frac{2}{N} + \frac{4}{N^2}, \quad (3.67)$$

A existência de uma densidade contínua de autovalores de ordem  $1/\sqrt{N}$  implica que  $\frac{1}{N} \langle \text{tr} M^n \rangle \sim \frac{1}{N^{n/2}}$  e conseqüentemente  $N^{n/2-1} m_n^{AI}$  deve ter um valor finito quando  $N \rightarrow \infty$ . Vemos que isto é verdade para os momentos pares e aparecem os primeiros números de Catalan, 1 e 2, em concordância com os momentos da distribuição semicircular. Os momentos ímpares desaparecem no limite, o que indica uma distribuição par.

Não obstante, observe que o primeiro momento é positivo, para  $N$  finito. Isto explica o ligeiro deslocamento da distribuição no sentido dos números reais positivos visto na Fig. 9.

### 3.4.2 Espaço Simétrico AII

No ensemble AII, temos matrizes antissimétricas. Além disso,

$$\text{Tr} M^n = \sum_{\vec{i}} U_{i_1 i_2} U_{i_2 i_3} \dots U_{i_n i_1} U_{i_1 i_2}^* U_{i_2 i_3}^* \dots U_{i_n i_1}^*. \quad (3.68)$$

Nas condições da Eq. 2.52, podemos escrever

$$\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_{AII}} = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{Wg}^{AII}(\sigma, N) \delta_{\sigma}(\vec{p}, \vec{p}), \quad (3.69)$$

onde  $\vec{p} = (i_1, i_2, i_2, \dots, i_n, i_n, i_1)$ . Observe que  $\vec{p}$  é invariante pela ação de  $\varphi_U$ . A função de Weingarten  $\text{Wg}^{AII}(\sigma, N)$  depende do coset-tipo de  $\sigma$  e também de seu sinal,  $\epsilon(\sigma)$ . Então podemos escrever

$$\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_{AII}} = (-1)^n \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{m=1}^n F_n^{AII}(\lambda, m) \text{Wg}^O(\lambda, 1-2N) N^m, \quad (3.70)$$

onde  $F_n^{AII}(\lambda, m) = F_{n,+}^{AII}(\lambda, m) - F_{n,-}^{AII}(\lambda, m)$  é a diferença entre os resultados de dois problemas combinatórios,

$$F_{n,\pm}^{AII}(\lambda, m) = \#\{\sigma \in S_{2n} \mid [\sigma] = \lambda, \Omega(\sigma, \varphi_U) = m, \epsilon(\sigma) = \pm 1\}, \quad (3.71)$$

isto é, o número de permutações com que têm sinal positivo (respectivamente, negativo), com coset-tipo  $\lambda$  tais que  $\langle \sigma, \varphi_U \rangle$  tenha  $m$  órbitas.

As tabelas geradas são

$$F_2^{AII} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad F_3^{AII} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 3 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

e

$$F_4^{AII} = \begin{pmatrix} -14 & 72 & -42 & -88 & 72 \\ 11 & -44 & 33 & 44 & -44 \\ 2 & -24 & 6 & 40 & -24 \\ 1 & -4 & 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

Isso nos permite calcular os seguintes traços parciais:

$$m_1^{AII} = -1, \quad (3.74)$$

$$m_2^{AII} = 1, \quad (3.75)$$

$$m_3^{AII} = \frac{-3}{2N+1} \sim -\frac{3}{2N} + \frac{3}{(2N)^2}, \quad (3.76)$$

$$m_4^{AII} = \frac{2N+5}{(2N+1)(N+1)} \sim \frac{2}{2N} + \frac{4}{(2N)^2}. \quad (3.77)$$

Similarmente ao que ocorre com o ensemble  $\Sigma_{AI}$ , isso indica uma distribuição contínua de autovalores de ordem  $1/\sqrt{N}$ , simétrica, com momentos pares consistentes com uma distribuição semicircular de raio  $2/\sqrt{N}$ . Observe que para  $N$  finito, o primeiro momento da distribuição é negativo, o que explica o pequeno deslocamento da distribuição no sentido negativo do eixo real, como visto na Fig. 9.

## 3.5 Ensembles Quirais

### 3.5.1 Espaço Simétrico AIII

No ensemble AIII, temos matrizes hermitianas. E escrevemos

$$\text{Tr} M^n = \sum_{\vec{i}} U_{i_1 i_2} U_{i_2 i_1} U_{i_2 i_3} U_{i_3 i_2} \cdots U_{i_n i_1} U_{i_1 i_n}. \quad (3.78)$$

Nas condições da Eq. 2.72, ficamos com

$$\text{Tr} M^n = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{Wg}^{AIII}(\sigma, a, b) \delta_{\sigma}(\vec{p}, \phi_U(\vec{p})), \quad (3.79)$$

onde  $\vec{p} = (i_1, i_2, i_2, \dots, i_n, i_n, i_1)$  é invariante por  $\varphi_U$ .

A função de Weingarten  $\text{Wg}^{AIII}(\sigma, N)$  depende apenas do ciclo-tipo da permutação  $\sigma$ , então

$$\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_{AIII}} = \sum_{\lambda \vdash 2n} \sum_{m=1}^n F_n^{AIII}(\lambda, m) \text{Wg}^{AIII}(\lambda, a, b) N^m, \quad (3.80)$$

onde  $F_n^{AIII}(\lambda, m)$  é o número de permutações em  $S_{2n}$  com ciclo-tipo  $\lambda$  tais que o grupo  $\langle \sigma\phi_U, \varphi_U \rangle$  tem  $m$  órbitas.

De posse desse problema combinatório, podemos gerar para as funções  $F_n^{AIII}(\lambda, m)$  as seguintes tabelas:

$$F_1^{AIII} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2^{AIII} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

e

$$F_3^{AIII} = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 39 & 11 & 40 & 96 & 30 & 84 & 66 & 120 & 90 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 24 & 9 & 6 & 21 & 24 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Em termos do parâmetro  $\alpha = (a - b)/N$  de ordem 1, os primeiros traços reduzidos são

$$m_1^{AIII} = \frac{N^2\alpha^2 - 1}{N + 1} \sim \alpha^2(N - 1), \quad (3.83)$$

$$m_2^{AIII} = \frac{\alpha^4 N^3 + (2\alpha^2 + 1)N^2 - (4\alpha^2 - 3)N - 3}{(N + 1)(N + 3)} \sim \alpha^4 N - (4\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1). \quad (3.84)$$

As expressões exatas para os próximos momentos são bastante complicadas, no limite de  $N$  grande, temos

$$m_3^{AIII} \sim \alpha^6 N - \alpha^2(10\alpha^4 - 6\alpha^2 - 3) + \frac{1}{N}\alpha^2(\alpha^2 - 1)(72\alpha^2 - 1) \quad (3.85)$$

$$m_4^{AIII} \sim \alpha^8 N - \alpha^4(19\alpha^4 - 12\alpha^2 - 6) + \frac{2}{N}(\alpha^2 - 1)(124\alpha^6 - 16\alpha^4 - 5\alpha^2 - 1). \quad (3.86)$$

Nós conjecturamos que  $m_n^{AIII} \sim \alpha^{2n} N$ .

Para  $N$  grande, o autovalor médio é simplesmente  $\alpha^2$ , e somos levados a crer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} m_n^{AIII} = \alpha^{2n}$ . Isto sugere uma convergência para uma distribuição dada pela função  $\delta$  de Dirac. Assim, é interessante calcular os momentos deslocados  $\mu^{AIII} = \langle \text{tr}(M - \alpha^2)^n \rangle$ .

O primeiro é

$$\mu_1^{AIII} = \frac{\alpha^2 - 1}{N + 1}, \quad (3.87)$$

e os momentos de ordem mais alta têm as seguintes expansões assintóticas

$$\mu_2^{AIII} \sim -(\alpha^2 - 1)(3\alpha^2 + 1) + \frac{(\alpha^2 - 1)(11\alpha^2 - 1)}{N} \quad (3.88)$$

$$\mu_3^{AIII} \sim \frac{(\alpha^2 - 1)(36\alpha^4 - 4\alpha^2)}{N} \quad (3.89)$$

$$\mu_4^{AIII} \sim \frac{2(\alpha^2 - 1)^2(17\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1)}{N}. \quad (3.90)$$

Estes resultados sugerem que os autovalores escalam como  $1/\sqrt{N}$  ao redor da média. Além disso, no ponto de simetria,  $\alpha = 0$ , surge a distribuição semicircular, baseado nesse fato, pelo menos para  $n = 1$  e  $n = 2$ , temos  $\frac{1}{N} \mu_n^{AIII} \sim C_n/N^n$ , onde  $C_n$  são os números de Catalan.

### 3.5.2 Espaço Simétrico BDI

No ensemble BDI, temos matrizes reais e simétricas. E escrevemos

$$\text{Tr}M^n = \sum_i O_{i_1 i_2}^2 O_{i_2 i_3}^2 \cdots O_{i_n i_1}^2. \quad (3.91)$$

Nas condições da Eq. 2.74, temos

$$\langle \text{Tr}M^n \rangle_{\Sigma_{BDI}} = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma \in \mathcal{M}_{2n}} \text{Wg}^{BDI}(\sigma, a, b) \Delta_{\sigma}(\vec{p}), \quad (3.92)$$

onde  $\mathcal{M}_{2n} = S_{4n}/H_{2n}$  e  $\vec{p} = (i_1, i_2, i_1, i_2, i_2, i_3, i_2, i_3, \dots)$  que é invariante sob a ação de  $\pi_{BDI} = (2\ 4\ 5\ 7) \cdots (4k-2\ 4k\ 4k+1\ 4k+3) \cdots$ .

Já que a função de Weingarten  $\text{Wg}^{BDI}(\sigma, a, b)$  depende apenas do coset-tipo da permutação  $\sigma$ , podemos escrever

$$\langle \text{Tr}M^n \rangle_{\Sigma_{BDI}} = \sum_{\lambda \vdash 2n} \sum_{m=1}^n F_n^{BDI}(\lambda, m) \text{Wg}^{BDI}(\lambda, a, b) N^m, \quad (3.93)$$

onde  $F_n^{BDI}(\lambda, m)$  corresponde ao número de matchings  $\sigma$  em  $\mathcal{M}_{2n}$  com coset-tipo  $\lambda$  e tal que o grupo  $\langle \sigma, \pi_{BDI} \rangle$  tenha  $m$  órbitas.

As primeiras soluções deste problema combinatório são dadas por

$$F_1^{BDI} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F_2^{BDI} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 9 & 32 & 42 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Em termos do parâmetro  $\alpha = (a-b)/N$ , os primeiros traços reduzidos são:

$$m_1^{BDI} = \frac{N^2 \alpha^2 + N - 2}{N + 2} \sim \alpha^2 (N - 2) + 1 + \frac{4(\alpha^2 - 1)}{N}, \quad (3.95)$$

$$m_2^{BDI} \sim (N - 9) \alpha^4 + 6\alpha^2 + 2 + \frac{(\alpha^2 - 1)(61\alpha^2 + 3)}{N}. \quad (3.96)$$

O autovalor médio é, novamente,  $\alpha^2$ . E os primeiros momentos deslocados são

$$\mu_1^{BDI} = -\frac{(\alpha^2 - 1)(N - 2)}{N + 2} \sim -(\alpha^2 - 1) + \frac{4(\alpha^2 - 1)}{N}, \quad (3.97)$$

$$\mu_2^{BDI} \sim -(\alpha^2 - 1)(6\alpha^2 + 2) - \frac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 15)}{N}. \quad (3.98)$$

### 3.5.3 Espaço Simétrico CII

No ensemble CII, temos matrizes auto-duais. E escrevemos

$$\text{Tr}M^n = \sum_{\vec{i}} U_{i_1 i_2} U_{i_2 + N i_1 + N} U_{i_2 i_3} U_{i_3 + N i_2 + N} \cdots U_{i_n i_1} U_{i_1 + N i_n + N}, \quad (3.99)$$



Nas condições da Eq. 2.76, temos

$$\langle \text{Tr} M^n \rangle_{\Sigma_{CII}} = \sum_{\vec{i}} \sum_{\sigma \in \mathcal{M}_n} \text{Wg}^{CII}(\sigma, a, b) \Delta'_\sigma(\vec{i}). \quad (3.100)$$

A partir da expressão acima, calculamos diretamente o primeiro momento

$$m_1^{CII} = \frac{4N^3\alpha^2 - 4N^2 - N + 1}{(N-1)(2N+1)} \sim \alpha^2(2N) + \alpha^2 - 2 + \frac{3}{2} \frac{(\alpha^2 - 1)}{N} \quad (3.101)$$

e o primeiro momento deslocado é

$$\mu^{CII} = \frac{(\alpha^2 - 1)(4N^2 + N - 1)}{(N-1)(2N+1)} \sim 2(\alpha^2 - 1) + \frac{3}{2} \frac{(\alpha^2 - 1)}{N}. \quad (3.102)$$



## 4 Conclusões

No presente trabalho, realizamos uma revisão de alguns tópicos em Teoria de Grupos e sobre o grupo de permutações. Ademais, vimos alguns conceitos sobre Teoria das Representações e caracteres e funções simétricas. A seguir, exploramos os processos estocásticos a fim de definir as matrizes estocásticas associadas a grupos de Lie e espaços simétricos. Por fim, fizemos uma breve discussão sobre integrais matriciais e a produção de matrizes aleatórias.

Definimos ensembles de matrizes estocásticas associados ao grupo Simplético e aos espaços simétricos AI, AII, AIII, BDI e CII. Além disso também estudamos os ensembles associados aos grupos Unitário e Ortogonal, que já vêm sendo estudados [25]. As matrizes estocásticas aqui estudadas podem ser divididas em dois grupos: as associadas aos grupos de Lie, que não são simétricas e possuem autovalores complexos; e as associadas aos espaços simétricos, que são simétricas e possuem autovalores reais.

Sorteamos conjuntos de matrizes estocásticas e observamos numericamente que suas propriedades estatísticas macroscópicas estão de acordo com os resultados universais esperados: aqueles do Ensemble de Ginibre Real (GRE) para os grupos de Lie e aqueles do Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE) para os espaços simétricos. Entretanto, nesse caso universalidade é apenas uma conjectura, pois os elementos de nossas matrizes não são independentes.

Investigamos as médias dos invariantes,  $\langle \text{Tr} M^n \rangle$  e  $\langle \text{Tr} (MM^T)^n \rangle$ , através das funções de Weingarten. Cálculos explícitos só são possíveis para os primeiros casos e concordam com a conjectura de universalidade. Um entendimento profundo dessas quantidades pode levar a resultados exatos na estatística dos espectros dessas matrizes. Porém, para obtê-las nos deparamos com problemas combinatórios envolvendo permutações. Tais problemas são difíceis, pois precisamos conhecer o número de órbitas de um grupo gerado por certos elementos, que já é uma questão não-trivial, além disso adicionam-se condições envolvendo o ciclo-tipo ou o coset-tipo dos geradores.

No regime de grandes valores de  $N$  somos levados a considerar o comportamento assintótico das funções de Weingarten, que estão relacionados com fatorações de permutação. A conjectura de universalidade para a estatística do espectro é transferida para relações sutis entre esses dois tipos de problemas.



# Referências

- 1 BOHIGAS, O.; HAQ, R.; PANDEY, A. Fluctuation properties of nuclear energy levels and widths: comparison of theory with experiment. In: SPRINGER. *Nuclear data for science and technology*. 1983. p. 809–813. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-94-009-7099-1\\_179](https://doi.org/10.1007/978-94-009-7099-1_179)>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.
- 2 WIGNER, E. P. On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 47, n. 4, p. 790–798, 1951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0305004100027237>>. Citado na página 19.
- 3 EYNARD, B.; KIMURA, T.; RIBAUT, S. Random matrices. *arXiv preprint arXiv:1510.04430*, 2015. Citado na página 19.
- 4 HSU, P. On the distribution of roots of certain determinantal equations. *Annals of Eugenics*, v. 9, n. 3, p. 250–258, 1939. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1939.tb02212.x>>. Citado na página 19.
- 5 WISHART, J. The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika*, p. 32–52, 1928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/20A.1-2.32>>. Citado na página 19.
- 6 MEHTA, M. L. *Random matrices*. [S.l.]: Elsevier, 2004. v. 142. Citado na página 19.
- 7 BERRY, M. V.; TABOR, M. Level clustering in the regular spectrum. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 356, n. 1686, p. 375–394, 1977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0140>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- 8 BOHIGAS, O.; GIANNONI, M. J.; SCHMIT, C. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, v. 52, n. 1, p. 1, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.1>>. Citado na página 20.
- 9 BEENAKKER, C. W. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics*, v. 69, n. 3, p. 731, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.731>>. Citado na página 20.
- 10 BRÉZIN, E. et al. Planar diagrams. In: *The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*. [s.n.], 1993. p. 567–583. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/1208>>. Citado na página 20.
- 11 't HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. In: *The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*. [s.n.], 1993. p. 80–92. Disponível em: <[https://doi.org/10.1142/9789814365802\\_0007](https://doi.org/10.1142/9789814365802_0007)>. Citado na página 20.
- 12 MONTGOMERY, H. L. The pair correlation of zeros of the zeta function. In: *Proc. Symp. Pure Math.* [s.n.], 1973. v. 24, p. 181–193. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/pspum/024/9944>>. Citado na página 20.

- 13 ODLYZKO, A. M. On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. *Mathematics of Computation*, v. 48, n. 177, p. 273–308, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1987-0866115-0>>. Citado na página 20.
- 14 TAO, T. *Topics in random matrix theory*. American Mathematical Soc., 2012. v. 132. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/gsm/132>>. Citado na página 20.
- 15 MEHTA, M. *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*. [S.l.]: Academic Press, 1967. Citado na página 20.
- 16 GINIBRE, J. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *Journal of Mathematical Physics*, v. 6, n. 3, p. 440–449, 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1704292>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 45.
- 17 EDELMAN, A.; KOSTLAN, E.; SHUB, M. How many eigenvalues of a random matrix are real? *Journal of the American Mathematical Society*, v. 7, n. 1, p. 247–267, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0894-0347-1994-1231689-0>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 57.
- 18 MARČENKO, V. A.; PASTUR, L. A. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, v. 1, n. 4, p. 457, 1967. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070/SM1967v001n04ABEH001994>>. Citado na página 20.
- 19 CHAFAÏ, D. The Dirichlet Markov ensemble. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 101, n. 3, p. 555–567, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmva.2009.10.013>>. Citado na página 21.
- 20 BORDENAVE, C.; CAPUTO, P.; CHAFAÏ, D. Circular law theorem for random Markov matrices. *Probability Theory and Related Fields*, v. 152, n. 3-4, p. 751–779, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00440-010-0336-1>>. Citado na página 21.
- 21 HORVAT, M. The ensemble of random Markov matrices. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2009, n. 07, p. P07005, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/07/P07005>>. Citado na página 21.
- 22 TANNER, G. Spectral statistics for unitary transfer matrices of binary graphs. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 33, n. 18, p. 3567, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/18/304>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 43.
- 23 TANNER, G. Unitary-stochastic matrix ensembles and spectral statistics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 34, n. 41, p. 8485, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/41/307>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 43.
- 24 BERKOLAIKO, G. Spectral gap of doubly stochastic matrices generated from equidistributed unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 34, n. 22, p. L319, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/22/101>>. Citado na página 22.
- 25 ZYCZKOWSKI, K. et al. Random unistochastic matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, n. 12, p. 3425, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/12/333>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 43 e 73.

- 26 CAPPELLINI, V. et al. Random bistochastic matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 36, p. 365209, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/36/365209>>. Citado na página 22.
- 27 CARTAN, É. Sur une classe remarquable d'espaces de riemann. ii. *Bull. Soc. Math. France*, v. 55, p. 114–134, 1927. Disponível em: <<https://doi.org/10.24033/bsmf.1113>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 32.
- 28 COLLINS, B. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson–Zuber integral, and free probability. *International Mathematics Research Notices*, v. 2003, n. 17, p. 953–982, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S107379280320917X>>. Citado na página 22.
- 29 COLLINS, B.; ŚNIADY, P. Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. *Communications in Mathematical Physics*, v. 264, n. 3, p. 773–795, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00220-006-1554-3>>. Citado na página 22.
- 30 BANICA, T.; COLLINS, B.; SCHLENKER, J.-M. On polynomial integrals over the orthogonal group. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 118, n. 3, p. 778–795, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcta.2010.11.015>>. Citado na página 22.
- 31 MATSUMOTO, S. General moments of matrix elements from circular orthogonal ensembles. *Random Matrices: Theory and Applications*, v. 1, n. 03, p. 1250005, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S2010326312500050>>. Citado na página 22.
- 32 MATSUMOTO, S. Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces. *Random Matrices: Theory and Applications*, v. 2, n. 02, p. 1350001, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S2010326313500019>>. Citado 6 vezes nas páginas 22, 26, 50, 52, 53 e 55.
- 33 MACDONALD, I. G. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/ulect/012/03>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 39.
- 34 ZILLER, W. *Lie groups. representation theory and symmetric spaces*. [S.l.]: Citeseer, 2010. Citado na página 28.
- 35 HALL, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Springer, 2013. v. 222. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5_16)>. Citado na página 29.
- 36 MEZZADRI, F. How to generate random matrices from the classical compact groups. *arXiv preprint math-ph/0609050*, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 79.
- 37 ARNOLD, V. I. *Methods of Classical Mechanics (Graduate Texts in Mathematics, vol 60)*. New York: Springer, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1>>. Citado na página 31.
- 38 MILLER, W. *Symmetry groups and their applications*. [S.l.]: Academic Press, 1973. v. 50. Citado na página 31.
- 39 TINKHAM, M. *Group theory and quantum mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2003. Citado na página 34.

- 40 SAGAN, B. E. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 203. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- 41 KARLIN, S. *A first course in stochastic processes*. [S.l.]: Academic Press, 2014. Citado na página 41.
- 42 KOTTOS, T.; SMILANSKY, U. Quantum chaos on graphs. *Phys. Rev. Lett.*, v. 79, n. 24, p. 4794, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.4794>>. Citado na página 43.
- 43 ZYCZKOWSKI, K.; KUS, M. Random unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 27, n. 12, p. 4235, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/27/12/028>>. Citado na página 46.
- 44 NOVAES, M. Elementary derivation of Weingarten functions of classical Lie groups. *arXiv preprint arXiv:1406.2182*, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.



# APÊNDICE A – Produção de Matrizes Aleatórias

Neste capítulo, vamos discutir como produzir matrizes estocásticas aleatórias. Vamos seguir os métodos expostos por Mezzadri [36], discutir e reproduzir alguns pontos. Para produzir as matrizes estocásticas, precisamos de matrizes aleatórias com elementos devidamente distribuídos e oriundas dos grupos de Lie. A partir dessas matrizes, podemos construir as matrizes estocásticas  $M$  ou construir os representantes de coset e depois construir  $M$ , no caso dos espaços simétricos.

## A.1 Decomposição $QR$

Sortear uma matriz de elementos com distribuição normal é relativamente simples. Pois nesse caso, os elementos são independentes. À medida que vínculos são adicionados, o sorteio se torna cada vez mais complexo.

Matrizes unitárias satisfazem  $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ . Em termos das entradas, temos

$$\sum_k U_{ik} U_{jk}^* = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_k U_{ki}^* U_{jk} = \delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

Observe que as relações na Eq. A.1 estabelecem, respectivamente, que as linhas e as colunas de uma matriz unitária são ortonormais segundo a forma bilinear da Eq. 1.5. Assim, podemos obter uma matriz unitária tomando  $N$  vetores de  $\mathbb{C}^N$  ortonormais entre si.

Por outro lado, uma matriz inversível pode ser entendida como  $N$  vetores geradores de  $\mathbb{C}^N$ . Podemos então, ortogonalizar tais vetores para, assim, obter uma matriz unitária. É dessa forma que procede a decomposição  $QR$ . Toda matriz inversível pode ser decomposta no produto de uma matriz unitária  $Q$  e uma matriz triangular superior  $R$ .

Dados  $N$  vetores do espaço  $\mathbb{C}^N$ ,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$ , podemos ortogonalizá-los segundo o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. O método consiste em normalizar e subtrair as componentes nas direções dos outros vetores de maneira recursiva. Sejam  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$

os vetores ortogonais, temos

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} - \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2)}{|\vec{v}_2|} \vec{u}_1 \quad (\text{A.3})$$

$$\vdots \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{u}_N = \frac{\vec{v}_N}{|\vec{v}_N|} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\vec{u}_i \cdot \vec{v}_N)}{|\vec{v}_N|} \vec{u}_i. \quad (\text{A.5})$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{N1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1N} & u_{2N} & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{N1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1N} & v_{2N} & \cdots & v_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{|\vec{v}_1|} & -\frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2)}{|\vec{v}_2|} & \cdots & -\frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_N)}{|\vec{v}_N|} \\ 0 & \frac{1}{|\vec{v}_2|} & \cdots & -\frac{(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_N)}{|\vec{v}_N|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{|\vec{v}_N|} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

E ao considerar as colunas de  $Z$  como  $N$  vetores,  $Z = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_N \end{pmatrix}$ , e aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos uma matriz unitária  $Q$  formada por  $N$  vetores ortonormais,  $Q = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_N \end{pmatrix}$ , e uma matriz triangular superior  $R'$ . Dessa forma, obtemos a fatoração  $Z = QR$ , observando que  $R = (R')^{-1}$ .

## A.2 Matrizes aleatórias em $\mathcal{U}(N)$

As matrizes geradas pela decomposição  $QR$  são de fato unitárias. Porém, queremos que as matrizes geradas sejam distribuídas segundo a medida de Haar, e tais matrizes não o são. O problema decorre do fato da fatoração  $Z = QR$  não ser única. Por exemplo, considere a matriz unitária diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Dessa forma  $Q\Lambda^{-1}$  é uma matriz unitária e  $\Lambda R$  é uma matriz diagonal, pondo  $Q' = Q\Lambda^{-1}$  e  $R' = \Lambda R$ , temos também,  $Z = Q'R'$ . Na verdade, pode ser mostrado que a fatoração não é única realmente devido às matrizes unitárias diagonais.

Para contornar o problema da unicidade da fatoração, devemos fixar os argumentos dos elementos da diagonal principal de  $R$ . Isto pode ser feito escolhendo os argumentos iguais a zero, ou seja, escolhendo os elementos da diagonal principal todos reais e positivos. Para fazer isso, usamos a matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{R_{11}}{|R_{11}|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{R_{NN}}{|R_{NN}|} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

e fazemos  $Q' = Q\Lambda$  e  $R' = \Lambda^{-1}R$ . Note que, por construção, os elementos na diagonal da matriz  $R'$  são estritamente positivos. Dessa forma, conseguimos  $Z = Q'R'$  uma fatoração única para  $Z$ , com  $Q' \in \mathcal{U}(N)$  distribuída segundo a medida de Haar.

E o algoritmo para obter matrizes unitárias distribuídas segundo a medida de Haar é o seguinte

1. Sorteamos duas matrizes reais com elementos seguindo a distribuição normal e construímos uma matriz complexa de ordem  $N$ .
2. Alimentamos a rotina  $QR$  com a matriz anterior e obtemos  $Q$ , uma matriz unitária, e  $R$  uma matriz triangular superior.
3. Com a matriz  $R$  construímos a matriz  $\Lambda$ .
4. Por fim, obtemos  $U = Q\Lambda$  uma matriz unitária distribuída segundo a medida de Haar.

Como o grupo Ortogonal é subgrupo do grupo Unitário, o processo para obter matrizes ortogonais aleatórias é automático: basta sortear uma matriz com elementos reais que seguem a distribuição normal e seguir o algoritmo acima a partir do segundo passo. Com isso, obtemos matrizes ortogonais aleatórias com elementos distribuídos segundo a medida de Haar.

### A.3 Matrizes aleatórias em $\mathcal{Sp}(2N)$

Para as matrizes simpléticas, podemos seguir um caminho praticamente idêntico ao caso unitário. Lembremos da Eq. 1.23 que estabelece a relação entre  $\mathcal{U}(2N)$  e  $\mathcal{Sp}(2N)$ . Dessa forma a medida de Haar induzida sobre  $\mathcal{U}(N)$  pelo ensemble de Ginibre é agora induzida sobre  $\mathcal{Sp}(2N)$  pelo isomorfismo da Eq. 1.23.

Para utilizar a decomposição  $QR$  como descrito na seção anterior, basta escrevermos

$$Z = Q_0 \otimes K_0 + Q_1 \otimes K_1 + Q_2 \otimes K_2 + Q_3 \otimes K_3 \quad (\text{A.9})$$

com  $K_i$ 's dados pela Eq. 1.20.

Podemos então sintetizar o algoritmo:

1. Sorteamos quatro matrizes reais cujos elementos seguem a distribuição normal,  $Q_0, Q_1, Q_2$  e  $Q_3$ .
2. Alimentamos a rotina  $QR$  com  $Q = Q_0 \otimes K_0 + Q_1 \otimes K_1 + Q_2 \otimes K_2 + Q_3 \otimes K_3$  e obtemos  $Q$ , uma matriz unitária, e  $R$  uma matriz triangular superior.

3. Com a matriz  $R$  construímos a matriz  $\Lambda$ .
4. Por fim, obtemos  $S = Q\Lambda$  uma matriz simplética (e unitária) distribuída segundo a medida de Haar.

# Índice

- matchings*, 18
- cadeia de Markov, 32
- caracteres
  - definição, 26
  - ortogonalidade entre, 27
  - tabela de, 27
- ciclo
  - comprimento do, 17
  - notação de, 17
- ciclo-tipo, 17
- conjugação
  - classe de, 16
  - definição, 16
- conjunto quociente, 16
- coset, 16
- coset-tipo, 19
- ensemble
  - circular, 24
  - de Bogoliubov-de Gennes, 25
  - de matrizes estocásticas, 35
  - quiral, 24
- espectro reduzido, 49
- espectro singular, 49
- função de Weingarten
  - do ensemble AI, 44
  - do ensemble AII, 45
  - do ensemble AIII, 47
  - do ensemble BDI, 47
  - do ensemble CII, 47
  - ortogonal, 41
  - simplética, 41
  - unitária, 40
- funções de Schur, 28
- funções esféricas zonais
  - definição, 28
  - ortogonalidade entre, 28
- funções zonais esféricas torcidas
  - definição, 28
  - ortogonalidade entre, 28
- grupo
  - de Lie, 20
  - de matrizes, 20
  - de permutações, 16
  - definição, 15
  - Ortogonal, 20
  - Simplético, 21
  - simétrico, 16
  - Unitário, 20
- hiperoctaedro, 18
- homomorfismo, 16
- involuções sem pontos fixos, 18
- matriz
  - biestocástica, 36
  - de transição, 33
  - dual, 21
  - estocástica, 34
  - linha-normalizada, 33
  - primitiva, 34
- medida de Haar, 38
- operação, 15
- partição
  - comprimento da, 17
  - definição, 17
- polinômio de Jack, 30
- processo
  - de markov, 32

estacionário, 32

estocástico, 32

representações

definição, 25

dimensão das, 26

irredutíveis, 26

ortogonalidade entre, 26

reduzíveis, 26

sinal de uma permutação, 28

subgrupo

definição, 15

gerado, 15

normal, 16

séries de potências, 29

Teorema de Perron-Frobenius, 34

universalidade, 12