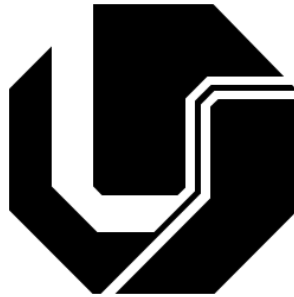


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



**CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS ISOLADOS  
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM  
TRÊS DIMENSÕES**

**ANDRÉ MENDONÇA ALZAMORA**

Uberlândia – Minas Gerais

Agosto de 2020

ANDRÉ MENDONÇA ALZAMORA

CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS ISOLADOS ATRAVÉS DO MÉTODO  
DE ELEMENTOS FINITOS EM TRÊS DIMENSÕES

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Uberlândia  
como requisito parcial para obtenção do  
título de mestre em engenharia elétrica.

Área de concentração: sistemas de  
energia elétrica

Orientador: Hélder de Paula

Uberlândia – Minas Gerais

Agosto de 2020

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A478 Alzamora, André Mendonça, 1991-  
2020 Cálculo de parâmetros de cabos isolados através do método de  
elementos finitos em três dimensões [recurso eletrônico] / André  
Mendonça Alzamora. - 2020.

Orientador: Hélder de Paula.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.578>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia elétrica. I. Paula, Hélder de, 1975-, (Orient.). II.  
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em  
Engenharia Elétrica. III. Título.

CDU: 621.3

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

ANDRÉ MENDONÇA ALZAMORA

CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS ISOLADOS ATRAVÉS DO MÉTODO  
DE ELEMENTOS FINITOS EM TRÊS DIMENSÕES

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Uberlândia  
como requisito parcial para obtenção do  
título de mestre em engenharia elétrica.

Área de concentração: Sistemas de  
Energia Elétrica

Uberlândia, 13 de agosto de 2020

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Hélder de Paula (UFU)

---

Prof. PhD. José Roberto Camacho (UFU)

---

Prof. Dr. Alberto Resende De Conti (UFMG)

---

Prof. Dr. Renato Cardoso Mesquita (UFMG)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Elétrica

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 3N - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP

38400-902

Telefone: (34) 3239-4707 - [www.posgrad.feelt.ufu.br](http://www.posgrad.feelt.ufu.br) - [copel@ufu.br](mailto:copel@ufu.br)



**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Elétrica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 744, PPGEELT				
Data:	Treze de agosto de dois mil e vinte	Hora de início:	13:30	Hora de encerramento:	17:00
Matrícula do Discente:	11822EEL001				
Nome do Discente:	André Mendonça Alzamora				
Título do Trabalho:	Cálculo de parâmetros de cabos isolados através do método de elementos finitos em três dimensões				
Área de concentração:	Sistemas de energia elétrica				
Linha de pesquisa:	Máquinas e aterramentos elétricos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, assim composta: Professores Doutores: José Roberto Camacho - FEELT/UFU; Alberto Resende de Conti - UFMG; Renato Cardoso Mesquita - UFMG; Hélder de Paula - FEELT/UFU, orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). Hélder de Paula, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado(a).

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **José Roberto Camacho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/08/2020, às 18:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Cardoso Mesquita, Usuário Externo**, em 14/08/2020, às 19:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alberto Resende De Conti, Usuário Externo**, em 14/08/2020, às 20:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Hélder de Paula, Professor(a) do Magistério Superior**, em 16/08/2020, às 08:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2146231** e o código CRC **FC269AE4**.

Dedico este trabalho aos meus pais, Rosa e Eugênio, pelos exemplos de vida e formação do meu caráter.

## AGRADECIMENTOS

---

A elaboração desta dissertação somente foi possível devido ao apoio de vários amigos, familiares e professores, incluindo algumas pessoas que conheci ao decorrer da pesquisa, auxiliando com dicas e sugestões.

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador, Prof. Dr. Hélder de Paula, pela oportunidade de trabalharmos juntos, pela sugestão ao tema e pelo apoio irrestrito tanto no âmbito da dissertação em si como também em vários outros contextos no tocante ao mestrado, se mostrando sempre prestativo e pronto para ajudar.

Ao Prof. Dr. Luciano Coutinho Gomes, pelo apoio irrestrito na condução das pesquisas dentro do laboratório de acionamentos elétricos (LACE), se revelando sempre gentil e solícito.

Aos meus pais, Eugênio e Rosa, e aos meus tios Nonoum e Helena, pelo apoio incondicional e ensinamentos de vida.

À Gabriela, sempre disposta a me ouvir, se mantendo confiante e conselheira nos momentos em que mais precisei.

Ao Lucas, que além de irmão, é um amigo.

Aos diversos companheiros do laboratório, em especial ao Vinícius Marcos Pinheiro e Cássio de Oliveira Alves, pelo convívio do dia-a-dia e assistência em muitos momentos ao longo do curso.

Ao Warley Leal de Souza e Marco Túlio Alves Êvo, que sempre se apresentaram prestativos na solução de diversas questões técnicas envolvendo o presente trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E nada aqui seria possível sem Ele.



“Embora ninguém possa voltar atrás e  
fazer um novo começo,  
qualquer um pode começar agora e fazer  
um novo fim..”  
(Hammed)

## RESUMO

---

Neste trabalho é apresentada uma metodologia baseada no método de elementos finitos (FEM) em três dimensões capaz de calcular os parâmetros de cabos isolados em uma ampla faixa de frequências, para diferentes configurações industriais. Diversas técnicas são implementadas a fim de tornar as simulações computacionalmente eficientes, reduzindo o tempo e a memória necessários para finalizá-las. O *software* empregado é o Comsol; contudo, todas as estratégias sugeridas são elucidadas abrangendo também os seus aspectos teóricos, de modo que outro pesquisador possa aplicá-las em programas similares. Cabos dispostos no interior de eletrocalhas perfuradas e leitos metálicos, que são instalações comuns em ambientes industriais, são contemplados nos estudos de caso considerados. Cabe ressaltar que tais métodos de instalação ainda não haviam sido endereçados na literatura devido às limitações intrínsecas das metodologias apresentadas até então, restritas a modelos em duas dimensões. Uma análise detalhada da influência dos novos suportes nos valores de parâmetros de cabos, compreendendo uma ampla faixa de frequências, é desenvolvida. Para se atingir os objetivos principais desta dissertação, um embasamento teórico tanto a respeito dos diversos tópicos relacionados ao cálculo de parâmetros de cabos, como dos procedimentos básicos relacionados ao FEM, é exibido de maneira simples e didática. Os resultados obtidos para tais parâmetros podem ser empregados em modelos computacionais de cabos para estudos de fenômenos de alta frequência, tais como transitórios eletromagnéticos, fluxo de harmônicos, análises de compatibilidade e interferência eletromagnética conduzida, dentre outros.

**Palavras-chave:** parâmetros de cabos, método de elementos finitos, fenômenos de alta frequência, métodos de instalações industriais, efeito proximidade e efeito pelicular.

## ABSTRACT

---

In this research work, a methodology based on the three-dimensional finite element method (FEM) is presented, which is capable of calculating the parameters of isolated cables for a wide range of frequencies, including various industrial configurations. Several techniques are implemented in order to make the simulations more efficient in terms of computational cost, thus reducing the time and memory required to complete them. Comsol is the software employed; however, all the suggested strategies are elucidated covering their theoretical concepts, in such a way that other researcher can utilize them in similar programs. Cables installed on perforated and ladder type trays, which are very common installation methods found in the industry, are included in the case studies performed. It should be stressed that such installation methods had not yet been addressed in the literature, due to the intrinsic limitations of the methodologies presented until now, which are restricted to models in two dimensions. A detailed analysis of the influence of the new supports on the cable parameters values, comprising a wide range of frequencies, is developed. In order to achieve the main objectives of this thesis, a theoretical basis regarding the various topics related to the calculation of cable parameters, as well as the basic procedures related to the FEM, is displayed in a simple and didactic way. The results obtained for such parameters can be used in computational cable models in order to study high frequency phenomena, such as electromagnetic transients, harmonic flow, conducted electromagnetic interference and compatibility, among others.

**Keywords:** cable parameters, finite element method, high frequency phenomena, industrial installation methods, proximity effect and skin effect.

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 2.1 – Cabo formado pelo encordoamento de sete fios. Fonte: adaptado de (Mamede Filho, 2017). .....	11
Figura 2.2 – Tipos de condutores: (a) condutor isolado (b) cabo unipolar e (c) cabo multipolar. Fonte: adaptado de (Mamede Filho, 2017). .....	12
Figura 2.3 - Esquemas ilustrativos de métodos de instalação de cabos: (a) eletrocalha não-perfurada, (b) eletrocalha perfurada e (c) leito. Fonte: (ABNT, 2004). .....	13
Figura 2.4 – Parâmetros presentes nas linhas de transmissão e sua característica distribuída. Fonte: autor (2020). .....	17
Figura 2.5 – Circuito equivalente de uma linha de transmissão considerando um comprimento diferencial $\Delta z$ . Fonte: autor (2020). .....	18
Figura 2.6 - Linhas de fluxo magnético embarcando igualmente todas as espiras de uma bobina. Fonte: autor (2020). .....	27
Figura 2.7 - Fluxo magnético concatenado por um fio retilíneo definido pela parcela que flui através do retângulo formado pelo condutor principal e o condutor de retorno. Fonte: autor (2020). .....	28
Figura 2.8 - Círculo imaginário interno ao condutor que envolve apenas uma parcela da corrente e do fluxo magnético. Fonte: autor (2020). .....	29
Figura 2.9 - Tubo imaginário elementar atravessado por um fluxo magnético incremental no interior do condutor. Fonte: autor (2020). .....	30
Figura 2.10 – Seção transversal de um tubo imaginário elementar atravessado por um fluxo magnético incremental no exterior do condutor. Fonte: autor (2020). .....	32
Figura 2.11 - Fluxo magnético produzido pela corrente $I_2$ enlaçando a região compreendida entre o condutor 1 e o ponto $P$ . Fonte: autor (2020). .....	34
Figura 2.12 - Fluxo magnético concatenado por um condutor principal e seu condutor imagem. Fonte: autor (2020). .....	35
Figura 2.13 - Sistema trifásico composto pelos condutores principais e seus respectivos condutores-imagens. Fonte: autor (2020). .....	37
Figura 2.14 – Superfície gaussiana em torno de um condutor com densidade uniforme de cargas. Fonte: autor (2020). .....	41
Figura 2.15 - Dois pontos definidos em duas superfícies equipotenciais concêntricas ao condutor carregado. Fonte: autor (2020). .....	43
Figura 2.16 – Linha equipotencial que atravessa o condutor $b$ devido à carga do condutor $a$ . Fonte: autor (2020). .....	43
Figura 2.17 - Linhas de fluxo elétrico presentes em um sistema formado por um condutor suspenso sobre o solo. Fonte: autor (2020). .....	45

Figura 2.18 - Linhas de fluxo elétrico presentes em um sistema formado por um condutor e seu condutor imagem. Fonte: autor (2020).....	46
Figura 2.19 - Sistema trifásico composto pelos condutores principais e seus respectivos condutores imagens. Fonte: autor (2020).....	47
Figura 2.20 - Indutâncias das linhas e cabos de transmissão trifásicos: a) próprias e mútuas e b) aparentes. Fonte: autor (2020). ....	59
Figura 2.21 - Capacitâncias das linhas e cabos de transmissão trifásicos: (a) parciais e (b) aparentes. Fonte: autor (2020). ....	62
Figura 2.22 - Campos magnéticos variantes no tempo, produzidos pela corrente alternada que flui pelo condutor, geram correntes parasitas que afetam a distribuição da corrente principal. Fonte: autor (2020). ....	71
Figura 2.23 - Densidade de corrente no condutor para as frequências de: a) 60 Hz b) 1 kHz c) 10 kHz e d) 100 kHz. Fonte: autor (2020). ....	72
Figura 2.24 - Definição dos caminhos retangulares e circulares para aplicação das leis de Faraday e Ampère, respectivamente. Fonte: autor (2020). ....	74
Figura 2.25 - Densidades de correntes nos condutores quando apenas o condutor central está conduzindo a corrente principal do sistema a 1 kHz. Fonte: autor (2020). ....	80
Figura 2.26 - Linhas equipotenciais de um sistema trifásico onde: (a) os cabos estão afastados entre si e (b) próximos entre si. Fonte: autor (2020). ....	81
Figura 2.27 – Sistemas de cabos elétricos considerados em Yin (1990) e as respectivas malhas de elementos finitos elaboradas para: (a) cabos enterrados a 60 Hz (b) cabos no interior de túneis a 60 Hz (c) cabos no interior de tubos metálicos a 6 kHz (d) cabos seccionados a 60 kHz e (d) e cabos encordoados a 60 kHz (seção parcial). Fonte: (Yin, 1990). ....	84
Figura 2.28 – Sistema de transmissão trifásico considerado em Cirino et al. (2009) (fora de escala e malha meramente ilustrativa). Fonte: (Cirino et al., 2009) ....	86
Figura 2.29 – Análises conduzidas para a eletrocalha lisa: (a) linhas de fluxo magnético (condutor central excitado por uma corrente de 10 kHz) e (b) linhas equipotenciais (potencial de 1 V no condutor mais à esquerda). Fonte: (de Souza, 2015) ....	87
Figura 2.30 – Modelo de cabo para análises de fenômenos em alta frequência. Fonte: adaptado de (de Paula et al., 2008a). ....	89
Figura 2.31 – Circuito “n-ramos” empregado para representar a variação dos parâmetros de cabos com a frequência. Fonte: adaptado de (de Paula, 2005). ....	90
Figura 2.32 – Modelo de cabo para análises de fenômenos em alta frequência incluindo o circuito “n-ramos”. Fonte: adaptado de (de Paula, 2005). ....	91
Figura 3.1 – Simulação dos campos eletromagnéticos em um motor de indução a partir de seu modelo bidimensional. Fonte: (Kocman et al., 2018). ....	103
Figura 3.2 – Exemplos de elementos geométricos empregados na discretização de domínios: (a) unidimensionais, (b) bidimensionais e (c) tridimensionais. Fonte: autor (2020). ....	108

Figura 3.3 – Aplicação da técnica de semelhança de triângulos para dedução do polinômio interpolador de primeiro grau. Fonte: autor (2020). .....	111
Figura 3.4 – Elemento triangular com seis nós. Fonte: autor (2020). .....	117
Figura 3.5 – Elemento triangular com dez nós. Fonte: autor (2020). .....	119
Figura 3.6 - Elemento tetraédrico com dez nós. Fonte: autor (2020). .....	121
Figura 3.7 – Elemento tetraédrico com vinte nós. Fonte: autor (2020). .....	122
Figura 3.8 - Modelo discretizado por três elementos finitos. Fonte: autor (2020). .....	131
Figura 3.9 – Sistemas de cabos trifásicos: (a) sem suporte e (b) alojados em uma eletrocalha lisa. A região transparente em torno do suporte também está sob o domínio do ar. Figura fora de escala. Fonte: autor (2020). .....	143
Figura 3.10 – Modelos bidimensionais equivalentes aos sistemas trifásicos mostrados na Figura 3.9 cujos cabos se encontram: (a) sem suporte e (b) alojados em uma eletrocalha lisa. Figura fora de escala. Fonte: autor (2020). .....	144
Figura 3.11 – Concepção dos modelos reduzidos a partir das simetrias dos suportes: (a) eletrocalha perfurada completa e (b) seu modelo reduzido; (c) leito metálico completo e (d) seu modelo reduzido. Fonte: autor (2020). .....	149
Figura 3.12 - Modelo tridimensional com seus respectivos domínios desenvolvido para o cálculo dos parâmetros série de cabos. A região transparente em torno do suporte também está sob o domínio do ar. A figura está fora de escala. Fonte: autor (2020). .....	150
Figura 3.13 - Modelo tridimensional com seus respectivos domínios desenvolvido para o cálculo das capacitâncias de cabos. A região transparente em torno do suporte também está sob o domínio do ar. A figura está fora de escala. Fonte: autor (2020). .....	152
Figura 3.14 - Eliminação do efeito de borda nos problemas magnéticos. Fonte: autor (2020). ....	153
Figura 3.15 - Formas de refinamento de malha: (a) elementos triangulares e (b) camadas paralelas. Fonte: autor (2020). .....	158
Figura 3.16 - Visão seccionada de um condutor cuja seção transversal exibe a densidade de corrente a 10 kHz e, ao longo do eixo longitudinal, é mostrada a malha elaborada (prismas retangulares nas bordas para captar a forte variação dos campos e prismas triangulares no centro). Fonte: autor (2020). .....	159
Figura 3.17 – Efeito da divisão dos prismas triangulares ao longo do eixo longitudinal do condutor: (a) sem divisão e (b) dez divisões. Fonte: autor (2020). .....	160
Figura 3.18 – Efeito da aplicação da função “convert” nos retângulos presentes ao longo da superfície do condutor: (a) sem aplicar a função (elementos retangulares na superfície) e (b) função aplicada (elementos triangulares na superfície). Fonte: autor (2020). .....	160
Figura 3.19 – Malha elaborada para o condutor incluindo o refinamento de malha: os prismas triangulares e retangulares apresentam dez divisões ao longo do seu eixo longitudinal e a superfície do condutor é composta por elementos triangulares. Fonte: autor (2020). .....	161
Figura 3.20 - Penetração dos campos eletromagnéticos na eletrocalha (mais denso na superfície e se reduz à medida que a profundidade aumenta). Fonte: autor (2020). .....	161

Figura 3.21 – Malha concebida (em azul) para conectar a malha interna composta por tetraedros e a externa constituída de prismas triangulares.....	163
Figura 3.22 – Malha elaborada para os domínios do ar e da terra: (a) visão seccionada com os elementos finitos e (b) visão didática. Ambas as imagens estão fora de escala. Fonte: autor (2020). ....	164
Figura 4.1 - Sistemas de cabos trifásicos alojados em uma: (a) eletrocalha lisa, (b) eletrocalha perfurada e em um (c) leito metálico. Fonte: autor (2020).....	172
Figura 4.2 - Cabo unipolar Sintenax Flex 0,6/1kV da Prysmian. Fonte: adaptado de (Prysmian, 2020). ....	173
Figura 4.3 – Vários modelos de eletrocalhas: (a) lisa simples, (b) lisa com virola, (c) perfurada simples e (d) perfurada com virola. Fonte: adaptado de (Valemam, 2020b). ....	175
Figura 4.4 – Referência de medidas para a Tabela 4.3: características dos furos na eletrocalha perfurada. Fonte: autor (2020). ....	177
Figura 4.5 – Referência de medidas para a Tabela 4.4: características geométricas da (a) eletrocalha lisa e da (b) eletrocalha perfurada. Fonte: autor (2020). ....	177
Figura 4.6 – Referência de medidas para a Tabela 4.6: características geométricas do leito metálico. Fonte: autor (2020). ....	178
Figura 4.7 - Densidade de corrente dos condutores e da eletrocalha quando o condutor central está conduzindo uma corrente de 1 kHz. Fonte: autor (2020). ....	185
Figura 4.8 - Linhas de fluxo magnético de um sistema trifásico abrigado pela eletrocalha para duas frequências diferentes: (a) 1 kHz e (b) 100 kHz. Fonte: autor (2020).....	188
Figura 4.9 - Densidade de fluxo magnético quando o condutor central está conduzindo uma corrente de 1 kHz: (a) cabos sem suporte e (b) cabos sobre a eletrocalha lisa (esta foi removida da figura). Fonte: autor (2020). ....	191
Figura 4.10 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para o caso em que os cabos estão sem suporte. Fonte: autor (2020).....	193
Figura 4.11 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para o caso em que os cabos estão sobre a eletrocalha lisa. Fonte: autor (2020). ....	193
Figura 4.12 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central: (a) cabos sem suporte e (b) cabos sobre a eletrocalha lisa. Fonte: autor (2020). ....	194
Figura 4.13 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para um sistema composto por cabos sobre a eletrocalha perfurada. Fonte: autor (2020). ....	200
Figura 4.14 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para um sistema composto por cabos sobre o leito metálico. Fonte: autor (2020). ....	200

## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 2.1 – Aumento percentual da resistência e da indutância de um condutor, para diversas frequências, em relação à resistência e à indutância do mesmo condutor para uma corrente de 60 Hz. ....	73
Tabela 3.1 - Parcelas relativas à impedância interna do condutor e à do solo na composição da impedância própria do condutor central considerando diferentes frequências. ....	146
Tabela 3.2 - Diferenças percentuais das resistências e indutâncias dos cabos obtidas por meio do FEM através de funções interpoladoras lineares em relação aos respectivos valores analíticos calculados pelo ATP. ....	167
Tabela 3.3 - Diferenças percentuais das resistências e indutâncias dos cabos obtidas por meio do FEM através de funções interpoladoras quadráticas em relação aos respectivos valores analíticos calculados pelo ATP. ....	167
Tabela 3.4 - Diferenças percentuais das resistências e indutâncias dos cabos obtidas por meio do FEM através de funções interpoladoras cúbicas em relação aos respectivos valores analíticos calculados pelo ATP. ....	167
Tabela 4.1 - Características geométricas dos cabos unipolares Sintenax Flex 0,6/1kV para as três seções nominais consideradas. ....	174
Tabela 4.2 - Características físicas dos cabos unipolares Sintenax Flex 0,6/1kV consideradas... ..	175
Tabela 4.3 – Características dos furos na eletrocalha perfurada (vide Figura 4.4). ....	176
Tabela 4.4 - Características geométricas da eletrocalha (vide Figura 4.5). ....	177
Tabela 4.5 - Características físicas da eletrocalha. ....	177
Tabela 4.6 – Características geométricas do leito metálico (vide Figura 4.6). ....	178
Tabela 4.7 – Resistências dos cabos instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	181
Tabela 4.8 – Indutâncias dos cabos instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	181
Tabela 4.9 – Capacitâncias dos cabos instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	181
Tabela 4.10 - Diferenças percentuais das resistências dos cabos sem suporte em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	182
Tabela 4.11 - Diferenças percentuais das indutâncias dos cabos sem suporte em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	183
Tabela 4.12 - Diferenças percentuais das capacitâncias dos cabos sem suporte em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	183
Tabela 4.13 - Valores da resistência própria do condutor central e sua respectiva variação quando dois sistemas trifásicos sobre o solo ideal são considerados: cabos sem suporte e cabos instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	185
Tabela 4.14 - Parcelas relativas à resistência interna do condutor e à do solo na composição da resistência própria do condutor central para um sistema trifásico sem suporte. ....	187



Tabela 4.15 - Parcelas relativas à resistência interna do condutor somada à de retorno pela eletrocalha, como também a relativa à resistência do solo, na composição da resistência própria do condutor central para um sistema trifásico instalado sobre a eletrocalha lisa...	187
Tabela 4.16 – Capacitâncias parciais entre cada condutor e o solo para os dois sistemas trifásicos considerados: cabos sem suporte e instalados sobre a eletrocalha lisa. ....	192
Tabela 4.17 - Diferenças percentuais das resistências dos cabos sobre a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3) em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.	195
Tabela 4.18 - Diferenças percentuais das indutâncias dos cabos sobre a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3) em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.	196
Tabela 4.19 - Diferenças percentuais das capacitâncias dos cabos sobre a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3) em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.	196
Tabela 4.20 – Diferenças percentuais das resistências dos cabos de seção única de 50 mm <sup>2</sup> cuja instalação se encontra a 1 cm do solo em relação à instalação a 3 metros de altura para: a eletrocalha lisa (método 1), a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3). ....	202
Tabela 4.21 - Diferenças percentuais das indutâncias dos cabos de seção única de 50 mm <sup>2</sup> cuja instalação se encontra a 1 cm do solo em relação à instalação a 3 metros de altura para: a eletrocalha lisa (método 1), a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3). ....	202
Tabela 4.22 - Diferenças percentuais das capacitâncias dos cabos de seção única de 50 mm <sup>2</sup> cuja instalação se encontra a 1 cm do solo em relação à instalação a 3 metros de altura para: a eletrocalha lisa (método 1), a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3). ....	203

# SUMÁRIO

---

## **CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO..... 1**

<b>1.1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO .....</b>	<b>4</b>
1.2.1. ESTRUTURA DO TRABALHO .....	7

## **CAPÍTULO 2 - TÓPICOS GERAIS SOBRE O CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS..... 9**

<b>2.1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2.2. CONDUTORES, MÉTODOS DE INSTALAÇÃO E NORMAS APLICÁVEIS.....</b>	<b>10</b>
<b>2.3. LINHAS DE TRANSMISSÃO E CABOS INDUSTRIAIS .....</b>	<b>14</b>
2.3.1. EQUAÇÕES CLÁSSICAS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO .....	16
<b>2.4. PARÂMETROS DE CONDUTORES .....</b>	<b>23</b>
2.4.1. RESISTÊNCIA .....	24
2.4.2. INDUTÂNCIA .....	26
2.4.3. CAPACITÂNCIA .....	39
<b>2.5. MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS SÉRIE E DE ADMITÂNCIAS EM PARALELO .....</b>	<b>52</b>
2.5.1. MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS SÉRIE.....	52
2.5.2. MATRIZ DE ADMITÂNCIAS EM PARALELO.....	55
2.5.3. MATRIZES DE SEQUÊNCIA POSITIVA, NEGATIVA E ZERO .....	56
<b>2.6. FENÔMENOS QUE INFLUENCIAM NO CÁLCULO DOS PARÂMETROS.....</b>	<b>70</b>
2.6.1. EFEITO PELICULAR.....	70
2.6.2. EFEITO PROXIMIDADE.....	79
<b>2.7. MÉTODOS PARA CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS .....</b>	<b>82</b>
2.7.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS .....	83
<b>2.8. MODELAGENS DE CABOS.....</b>	<b>87</b>
<b>2.9. CONCLUSÕES.....</b>	<b>94</b>

## **CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA PARA O CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS EMPREGANDO O**

### **FEM 95**

<b>3.1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>95</b>
<b>3.2. O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>96</b>

3.2.1.	DEFINIÇÃO DAS EQUAÇÕES QUE REGEM O SISTEMA .....	97
3.2.2.	DETERMINAÇÃO DA DIMENSIONALIDADE DO MODELO .....	102
3.2.3.	DEFINIÇÃO DOS DOMÍNIOS.....	104
3.2.4.	ESCOLHA DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA.....	105
3.2.5.	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO .....	106
3.2.6.	DESENVOLVIMENTO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	108
3.2.6.1.	Seleção das Funções Interpoladoras .....	109
3.2.6.2.	Ajuste da Equação Diferencial à Função Interpoladora .....	122
3.2.6.3.	Montagem do Sistema de Equações .....	131
3.2.7.	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES .....	133
<b>3.3.</b>	<b>CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS POR MEIO DO FEM.....</b>	<b>134</b>
3.3.1.	DEFINIÇÃO DAS EQUAÇÕES QUE REGEM O SISTEMA .....	135
3.3.2.	DETERMINAÇÃO DA DIMENSIONALIDADE DO MODELO .....	142
3.3.3.	DEFINIÇÃO DOS DOMÍNIOS.....	144
3.3.4.	ESCOLHA DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA.....	152
3.3.5.	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO .....	153
3.3.6.	DESENVOLVIMENTO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	165
3.3.6.1.	Seleção das Funções Interpoladoras .....	165
3.3.6.2.	Ajuste da Equação Diferencial à Função Interpoladora .....	168
3.3.7.	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES .....	168
<b>3.4.</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>170</b>
<b><u>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</u></b>		<b><u>172</u></b>
<b>4.1.</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>172</b>
<b>4.2.</b>	<b>DEFINIÇÕES ACERCA DOS ESTUDOS DE CASO .....</b>	<b>173</b>
4.2.1.	CABOS ELÉTRICOS .....	173
4.2.2.	ELETROCALHA METÁLICA .....	175
4.2.3.	LEITO METÁLICO.....	177
<b>4.3.</b>	<b>ESTUDOS DE CASO .....</b>	<b>179</b>
4.3.1.	MÉTODOS DE INSTALAÇÃO .....	180
4.3.1.1.	Cabos Sobre a Eletrocalha Lisa .....	180
4.3.1.2.	Cabos sobre a Eletrocalha Perfurada e Leito Metálico .....	194
4.3.2.	ALTURA DA INSTALAÇÃO .....	201
<b>4.4.</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>203</b>

<b><u>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE .....</u></b>	<b><u>207</u></b>
<b>5.1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>207</b>
<b>5.2. PROPOSTAS DE CONTINUIDADE: .....</b>	<b>210</b>
<b><u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</u></b>	<b><u>213</u></b>

# CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

---

## 1.1. Introdução

Simulações computacionais representam uma importante ferramenta de análise e projeto no âmbito da engenharia. Mais especificamente, no caso da engenharia elétrica, e considerando a modelagem de cabos isolados, simulações representam uma alternativa concreta e viável para a obtenção dos seus parâmetros, uma vez que esses cabos são mais complexos, devido à sua construção mais elaborada e formas de instalação, do que aqueles de linhas de transmissão aéreas, onde equações analíticas são comumente utilizadas para tal propósito.

O primeiro grande trabalho onde se empregou o método de elementos finitos para o cálculo e parâmetros de cabos apresentou, como justificativa, a necessidade de utilizá-los em modelos matemáticos elaborados no tocante a análises de transitórios em sistemas de transmissão de energia elétrica (Yin, 1990). Essa pesquisa, datada de 1990 e considerada o marco das publicações nesse campo específico, teve enfoque nos cabos elétricos empregados nas linhas de transmissão subterrâneas, argumentando que os métodos analíticos não eram capazes de fornecer com exatidão os valores de parâmetros de cabos nesses sistemas, uma vez que, diferentemente das linhas aéreas, os condutores estavam suficientemente próximo entre si, e o efeito proximidade não poderia ser ignorado. Além do mais, esses cabos poderiam ser constituídos de configurações geométricas arbitrárias, tornando infactíveis as soluções analíticas para tais casos. Outros artigos sobre esse assunto, publicados na mesma época, focaram em cabos blindados compostos por multicondutores, também empregados em linhas subterrâneas e submarinas (Cristina e Feliziani, 1989; Darcherif et al., 1990). Em face do exposto, pode-se asseverar que as primeiras pesquisas acerca da obtenção das matrizes de impedâncias e admitâncias por meio do FEM estavam associadas ao campo de pesquisa de transitórios em linhas de transmissão e sua aplicação em modelos de cabos concernentes a esse campo.

Por outro lado, nos primeiros anos da década de 90, diversos estudos começaram a ser publicados a respeito do surgimento de sobretensões transitórias

em sistemas de acionamentos de motores, associadas ao emprego de conversores de frequência baseados na modulação PWM (Kerkman et al., 1996; Persson, 1992; Saunders et al., 1996). Tal fenômeno estava vinculado às reflexões dos pulsos de tensão PWM nos terminais do motor, cuja magnitude mostrava depender de alguns fatores, tais como: o tempo de subida do pulso, os parâmetros e o comprimento do cabo, as características do motor, dentre outros. O estudo de tal fenômeno apresenta uma característica bastante particular: o espectro de frequência da tensão aplicada ao cabo contempla componentes desde a frequência fundamental, relativa à velocidade de operação da máquina, passa por valores de dezenas e até algumas centenas de kHz, relacionados à presença das componentes harmônicas provenientes do chaveamento do inversor e também das oscilações decorrentes das reflexões dos pulsos nas extremidades do cabo, e atinge a faixa de alguns MHz, sendo tais frequências associadas ao rápido tempo de subida dos pulsos (de Paula, 2005). A partir de então, esforços se concentraram na elaboração de modelos para os diversos componentes do sistema de acionamento a fim de possibilitar a reprodução desses fenômenos em ambientes computacionais. Nesse contexto, os modelos específicos para cabos apresentam dois requisitos principais: (i) a necessidade de refletir, no domínio do tempo, a variação de seus parâmetros com a frequência e (ii) a representação de sua natureza distribuída, de forma a reproduzir a propagação e reflexão das ondas de tensão e corrente. Nesse sentido, muitos modelos de cabos foram propostos na literatura (Chaves et al., 1997; de Paula et al., 2008a; Moreira et al., 2002); com todos esses modelos tendo, em comum, a exigência de incluir, como dados de entrada, os valores das matrizes de impedâncias série dos cabos, em uma ampla faixa de frequências, e também a matriz de capacitâncias.

A demanda para se obter os valores de parâmetros de cabos industriais a fim de alimentar os modelos computacionais pode representar uma etapa laboriosa. A maneira mais exata de realizá-la é através de medições experimentais; contudo, elas dependem de equipamentos específicos, que podem apresentar custo elevado e não estarem disponíveis para o pesquisador. Dessa maneira, recorre-se ao emprego de equações analíticas ou métodos numéricos. Na primeira opção, ressaltam-se as mesmas limitações que motivaram o primeiro emprego do método

de elementos finitos no cálculo de parâmetros de cabos, isto é, o fato de tais equações não serem capazes de determinar, com exatidão, os valores de parâmetros de cabos sob configurações complexas, onde muitas das vezes o efeito proximidade tem considerável influência. Isto posto, métodos numéricos, dentre os quais o método de elementos finitos toma elevado destaque, representam uma escolha viável para obtenção de tais parâmetros. Nesse intuito, grandes avanços foram obtidos nas pesquisas conduzidas em de Souza (2015), onde instalações industriais típicas, tais como aquelas compostas por cabos sobre eletrocalhas lisas, foram consideradas. Em tal trabalho, uma metodologia avançada para a obtenção de parâmetros de cabos em modelos bidimensionais foi apresentada.

Nesse ponto, pode-se efetuar um paralelo interessante entre os estudos desenvolvidos em Yin (1990), comentados no segundo parágrafo, e em de Souza (2015). Enquanto o primeiro estava voltado para o emprego dos parâmetros de cabos em análises de fenômenos transitórios em linhas de transmissão subterrâneas, o segundo, vinte e cinco anos mais tarde, utilizou a mesma técnica, mas incluindo sistemas de instalações industriais cujos fenômenos de alta frequência, associados à operação de IGBTs, só foram reportados anos após a conclusão do primeiro trabalho mencionado. O objetivo que se pretende aqui é mostrar como o campo de pesquisas envolvendo o cálculo de parâmetros de cabos e o método de elementos finitos se tornou abrangente, sendo que sua evolução prossegue a partir das pesquisas conduzidas na presente dissertação.

O emprego do FEM para a obtenção de parâmetros de cabos tinha se expandindo, portanto, ao incluir configurações industriais de baixa tensão. Contudo, a inclusão de novas geometrias de cabo e suportes estava sujeita ainda a algumas restrições de simulação, tais como a consideração de apenas sistemas que poderiam ser representados em domínios bidimensionais. Naquele momento, portanto, não era possível contemplar dois dos métodos de instalação mais comuns em ambientes industriais: cabos alojados sobre eletrocalhas perfuradas e leitos metálicos, cuja simulação exige a elaboração de modelos tridimensionais. Desse modo, algumas questões ainda necessitavam ser compreendidas, tais como: a presença de furos na eletrocalha ou geometrias mais distintas, como a do leito metálico, influenciam de maneira considerável os valores de parâmetros de cabos,

se comparados com o caso da eletrocalha lisa? Isto é, nos casos em que o pesquisador não dispõe de simuladores FEM em 3D, uma simplificação onde tais configurações são substituídas pela consideração da eletrocalha lisa, pode ser realizada com êxito? Como se comporta a distribuição dos campos elétricos e magnéticos dos sistemas nesses casos? Os mecanismos de atuação do efeito proximidade e de blindagem, relacionados ao emprego de cada um desses suportes, se modificam consideravelmente? De maneira geral, essas perguntas motivaram a necessidade de abranger simulações de cabos em modelos tridimensionais e nortearam as pesquisas conduzidas nesta dissertação.

A motivação para se obter valores de parâmetros de cabos cada vez mais exatos está diretamente correlacionada à sua aplicação em modelos de cabos específicos para estudos de fenômenos em alta frequência e a exigência de obtenção de resultados mais fidedignos à realidade. O emprego de tais modelos é bastante abrangente e envolve pesquisas em várias áreas e diferentes aplicações, dentre as quais pode-se citar: transitórios eletromagnéticos, fluxo de harmônicos, análises de compatibilidade e interferência eletromagnética conduzida, entre outras.

## 1.2. Objetivos do Trabalho

Considerando o contexto apresentado, dentre os principais objetivos do trabalho, pode-se citar:

- **Apresentação de uma metodologia avançada, baseada no método de elementos finitos em três dimensões, com o intuito de permitir o cálculo de parâmetros de cabos industriais por meio de simulações computacionalmente eficientes.** Dada a complexidade intrínseca aos modelos 3D, uma série de estratégias foram adotadas a fim de reduzir os custos de memória e tempo computacional relativos à sua simulação, tais como: adoção de simetrias, emprego de técnicas para a redução dos domínios, elaboração de refinamentos de malha efetivos, redução dos domínios computacionais por meio de condições de fronteira, dentre outras. Todos esses procedimentos foram exaustivamente testados e suas



capacidades de simplificar o problema, ao mesmo tempo que melhoravam a exatidão dos resultados, foram devidamente comprovadas por meio de inúmeras simulações. O *software* empregado foi o Comsol e o nome de muitas técnicas adotadas, assim como a maneira de aplicá-las, estão diretamente relacionadas a esse programa. Contudo, os conceitos teóricos pertinentes a todas elas são exibidos de maneira abrangente, possibilitando que outros programas similares sejam adotados, exigindo apenas que o usuário se atente às especificidades de cada um. Dessa forma, a apresentação de todas as estratégias elaboradas, assim como suas discussões detalhadas, é conduzida de modo a permitir que o presente trabalho atue como guia metodológico para outras pesquisas no tocante ao assunto.

- **Análises dos parâmetros de cabos dispostos sobre eletrocalhas perfuradas e leitos metálicos.** Toda a metodologia concebida e apresentada na presente dissertação foi aplicada em estudos de casos contemplando configurações compostas por cabos alojados no interior de eletrocalhas perfuradas e leitos metálicos. Tais sistemas, caracterizados por geometrias mais complexas, não se encaixavam nas limitações impostas pelas metodologias disponíveis na literatura até então, baseadas no método de elementos finitos em duas dimensões. Dessa forma, uma série de análises são conduzidas, como: (i) a avaliação do impacto da presença de perfurações nas eletrocalhas e também do emprego de leitos metálicos sobre os valores de parâmetros de cabo em relação ao caso mais simples, dado pelo emprego de eletrocalhas lisas; (ii) a caracterização da influência dos diâmetros dos cabos nessas variações; (iii) a forma de atuação dos mecanismos associados ao efeito proximidade e de blindagem quando os cabos estão sobre essas estruturas; (iv) a influência da altura da instalação em relação ao solo em cada um dos casos; dentre outras.
- **Fornecimento de embasamento teórico sobre vários tópicos concernentes ao cálculo de parâmetros de cabos, além de conceitos e formulações no tocante ao método de elementos finitos.** Todo o conteúdo necessário ao

entendimento dos principais tópicos abordados nesta dissertação foi reunido e explicitado de maneira simples e didática, incluindo a recomendação de várias bibliografias, caso o leitor deseje um maior aprofundamento em determinado ponto. Pode-se dizer que todo o texto foi fundamentado em dois assuntos principais: (i) os conceitos, formulações e fenômenos físicos associados ao cálculo de parâmetros de cabos e (ii) os procedimentos e formulações referentes ao método de elementos finitos. A apresentação da metodologia proposta e a análise dos resultados obtidos basearam-se no alicerce teórico disposto ao longo dos capítulos.

- **Revisão bibliográfica e comparação da metodologia proposta com as empregadas em estudos anteriores.** Diversas publicações referentes ao emprego do método de elementos finitos para o cálculo de parâmetros de cabos antecederam a presente dissertação. Em face disso, além de uma revisão sobre os principais trabalhos no tocante ao assunto, por diversas vezes um paralelo entre as técnicas aqui estabelecidas e as praticadas nos estudos anteriores é realizado. Grande parte das vezes, estratégias mais avançadas de simulação foram adotadas no presente trabalho em relação aos demais devido ao emprego de modelos tridimensionais. Dessa forma, consegue-se transmitir ao leitor um conceito amplo sobre os procedimentos que tangem uma aplicação do FEM para calcular os parâmetros de cabos.
- **Apresentação de uma grande gama de resultados numéricos relativos a parâmetros de cabos sobre a eletrocalha lisa, perfurada e leito metálico, considerando diferentes seções nominais de cabos e uma ampla faixa de frequências.** Todos os resultados relativos às resistências, indutâncias e capacitâncias para três seções nominais de cabos diferentes ( $10 \text{ mm}^2$ ,  $50 \text{ mm}^2$  e  $240 \text{ mm}^2$ ) e um amplo intervalo de frequências (60 Hz, 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz e 1 MHz) são exibidos de maneira tabelada, seja pelos valores absolutos dos parâmetros propriamente ditos, seja por meio das suas diferenças percentuais em relação a um caso de referência. Vale ressaltar que procurou-se empregar cabos e suportes comerciais,

seguindo as normas de instalações elétricas nacionais vigentes. Dessa forma, tem-se que tais valores podem ser utilizados como referência para outros autores que não possuem acesso a um programa de elementos finitos, subsidiando pesquisas em que os cabos se encontrem em configurações iguais ou similares.

### 1.2.1. Estrutura do Trabalho

Visando estruturar o trabalho da forma mais didática possível, este ficou assim dividido:

- **Capítulo 2: Tópicos gerais sobre o cálculo de parâmetros de cabos.** Nesse capítulo são apresentados diversos tópicos relativos ao cálculo de parâmetros de cabos, desde os conceitos e formulações dos parâmetros em si, até a elucidação de fenômenos que os influenciam, tais como os efeitos pelicular e proximidade. Além disso, o emprego dos valores de resistências, indutâncias e capacitâncias em modelos de cabo para estudos em alta frequência, principal objetivo da metodologia proposta, foi exemplificado através da apresentação de um destes modelos. Também se definiu o conceito de matrizes de impedâncias série e capacitâncias, tanto no domínio das fases como em componentes simétricas, por serem empregadas em tais modelos. As normas aplicáveis às instalações elétricas industriais também foram exibidas para servir de base para a elaboração dos estudos de caso e contextualizar o leitor à aplicabilidade dos métodos de instalação estudados. Por fim, uma revisão bibliográfica acerca de estudos que empregaram o FEM para o cálculo de parâmetros de cabos também foi realizada. Assim, o objetivo desse capítulo foi traçar um panorama geral acerca do cálculo de parâmetros de cabos, atuando como referência para os demais capítulos.
- **Capítulo 3: Metodologia para o cálculo de parâmetros de cabos empregando o FEM.** Todos os procedimentos adotados com o propósito de permitir a simulação eficiente de modelos tridimensionais para o cálculo

de parâmetros de cabos são apresentados nesse capítulo. Dessa maneira, pretende-se que ele sirva de guia metodológico para outros estudos afins. O programa base utilizado foi o Comsol, mas a forma de abordar o assunto, sempre referenciando os aspectos teóricos de cada funcionalidade do programa empregada, permite que outros programas similares sejam utilizados. Aspectos básicos do FEM também são apresentados, de forma a embasar a metodologia proposta.

- **Capítulo 4: Resultados e discussões.** No capítulo 4, a metodologia proposta é empregada em diversos estudos de caso, elaborados a fim de permitir uma série de análises a respeito das configurações mais comuns em ambientes industriais, constituídas de cabos sobre eletrocalhas perfuradas e leitos metálicos. Nesse aspecto, várias questões são discutidas, tais como a influência dos suportes metálicos nos parâmetros de cabos, o quanto os valores de resistências, indutâncias e capacitâncias se alteram ao considerar a eletrocalha perfurada e o leito metálico em relação ao caso mais simples composto pela eletrocalha lisa, a relação dos diâmetros dos cabos com os resultados obtidos e, por último, a avaliação do efeito de blindagem de todos os suportes.
- **Capítulo 5: Conclusões e propostas de continuidade.** Finalmente, nesse capítulo são apresentadas as principais conclusões do trabalho, onde os objetivos inicialmente apresentados são então discutidos e consolidados. Diversas propostas de continuidade para a presente dissertação também são sugeridas.

## CAPÍTULO 2 - TÓPICOS GERAIS SOBRE O CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS

---

### 2.1. Introdução

No presente capítulo objetiva-se fornecer ao leitor um entendimento sucinto sobre os principais tópicos no tocante ao assunto em foco, uma vez que o escopo que compreende o cálculo de parâmetros de cabos é bastante amplo. Procurou-se não só apresentar a teoria acerca do tema, mas também abranger diversos outros aspectos, tais como:

- As normas aplicáveis aos sistemas elétricos industriais com enfoque nos estudos de caso considerados nesta dissertação: cabos sobre a eletrocalha lisa, perfurada e leito metálico. Esse tópico é bastante relevante para contextualizar a aplicabilidade de tais métodos de instalação. Além disso, as informações nele contidas serviram como critério para a escolha dos cabos elétricos empregados nas simulações, tal como comentado no capítulo 4, de forma a representar sistemas reais com a maior fidelidade possível.
- A expansão da teoria clássica das linhas de transmissão, historicamente abordada no âmbito dos sistemas elétricos de potência, para compreender também os fenômenos de alta frequência em cabos isolados. São apresentadas as equações diferenciais que regem as linhas de transmissão, o conceito de parâmetros de linha e a definição das matrizes de impedâncias série e de admitâncias em paralelo.
- Abordagem dos conceitos físicos que envolvem a definição de resistências, indutâncias e capacitâncias de um condutor, incluindo formulações analíticas para um caso bastante simples, composto por cabos sem suportes cuja influência dos efeitos pelicular e proximidade foi desconsiderada. Apesar de tais simplificações, esse tópico foi

extremamente útil para a análise dos resultados apresentados no capítulo 4, representando um *insight* físico para as reflexões efetuadas.

- Obtenção das matrizes de impedâncias série e de capacitâncias tanto no domínio das fases como em componentes simétricas, incluindo interpretações físicas sobre esta última e a relevância de considerar os sistemas transpostos. Esse tópico é importante, pois muitos modelos de cabos requerem, como dados de entrada, os valores de parâmetros de cabos em termos de tais componentes.
- Conceituações, formulações e consequências dos efeitos pelicular e proximidade.
- Apresentação de modelagens de cabos concebidas para estudos de fenômenos em alta frequência a fim de demonstrar como os valores de parâmetros de cabos, tal como os obtidos neste trabalho, podem ser empregados em simulações computacionais, de forma a contextualizar o leitor a respeito da aplicabilidade desses parâmetros.
- Revisão bibliográfica sobre os principais estudos que aplicaram o método de elementos finitos para calcular parâmetros de cabos.

## 2.2. Condutores, Métodos de Instalação e Normas Aplicáveis

Segundo a NBR 5471, o *condutor* é um: “produto metálico, de seção transversal invariável e de comprimento muito maior do que a maior dimensão transversal, utilizado para transportar energia elétrica ou transmitir sinais elétricos”. O termo “condutor” é usado na prática em um sentido bastante amplo, para designar todo elemento utilizado para conduzir energia, tais como fios, cabos e barras (Cotrim, 2009).

O *fio*, por sua vez, é definido pela NBR 5471 como um “produto maciço e flexível, de seção transversal invariável e de comprimento muito maior que a maior dimensão transversal”. Apesar de condutor e fio apresentarem semelhantes definições, o fio refere-se ao caso específico de um condutor elétrico único, sólido e maciço. A disposição de um conjunto de fios de forma helicoidal, também chamado

de encordoamento, isolados ou não entre si, resulta na definição de *cabo*, conforme a NBR 5471. A Figura 2.1 exhibe o encordoamento de sete fios que compõe um cabo.



Figura 2.1 – Cabo formado pelo encordoamento de sete fios. Fonte: adaptado de (Mamede Filho, 2017).

Dentre os elementos mais comuns que constituem um condutor estão a *isolação* e a *cobertura*. A *isolação* é empregada para isolar eletricamente o condutor do ambiente externo e também de outros condutores, podendo ser de PVC, EPR e XLPE. Já a *cobertura* é um invólucro externo não-metálico destinado a proteger o condutor contra influências externas, tais como sol, vento e chuva e qualquer outro elemento que possa ser agressivo ao condutor, provendo a ele maior resistência química e mecânica; a *cobertura* não tem função de *isolação* elétrica e é normalmente constituída de PVC (Cotrim, 2009; Mamede Filho, 2017). A presença ou não de isolantes e coberturas define as nomenclaturas referentes aos principais tipos de condutores citados nas normas brasileiras (ABNT, 1986; Cotrim, 2009; Mamede Filho, 2017):

- O termo *condutor isolado* refere-se ao fio ou ao cabo dotado apenas da *isolação*, podendo esta ser constituída por uma ou mais camadas, sendo bastante comuns em residências.
- *Cabo ou fio coberto* é aquele composto unicamente de *cobertura*, bastante empregado em redes de distribuição aéreas.
- O *cabo unipolar* é o nome dado ao cabo constituído de um único condutor isolado e dotado de no mínimo uma *cobertura*.

- No *cabo multipolar* há a presença de mais de um condutor isolado sendo o conjunto protegido por uma cobertura externa. O interstício entre os condutores é composto por um material chamado de *enchimento*. A nomenclatura desse tipo de cabo depende da quantidade de condutores isolados que o compõem: cabos multipolares com 2, 3 e 4 condutores isolados são chamados, respectivamente, de cabos bipolares, tripolares e tetrapolares, e assim por diante.

A Figura 2.2 exibe os condutores definidos anteriormente.

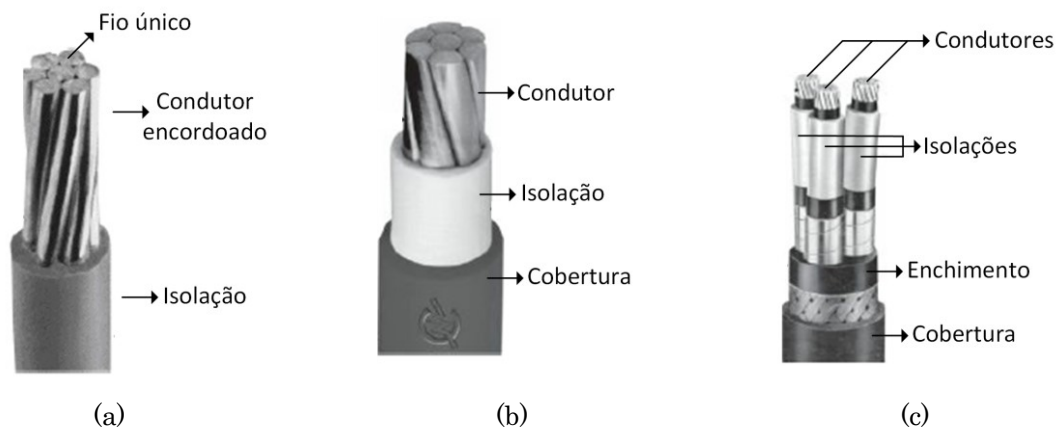


Figura 2.2 – Tipos de condutores: (a) condutor isolado (b) cabo unipolar e (c) cabo multipolar.

Fonte: adaptado de (Mamede Filho, 2017).

Para cabos unipolares de baixa tensão, os valores nominais das tensões entre fase e terra e entre fases, a serem suportadas pela isolação, são padronizados por normas e são iguais a 0,6 kV e 1 kV, respectivamente. Já para os condutores isolados, a tensão suportada pela isolação deve ser de até 750 V entre fases (Mamede Filho, 2017).

Em relação aos métodos de instalação, a NBR 5410 estabelece um conjunto bastante variado de possíveis configurações às quais os cabos podem ser alojados. Dentre as mais utilizadas estão a *eletrocalha não-perfurada* (método de instalação número 12 na tabela 33 da NBR 5410), *eletrocalha perfurada* (número 13) e *leito* (número 16). Segundo essa mesma norma, quando os furos da eletrocalha ocupam menos de 30% de sua área total, ela deve ser considerada, para efeitos de cálculo e consulta à tabelas, como “não-perfurada”. Os leitos e as eletrocalhas, também



denominadas de *bandejas*, são bastante comuns em instalações industriais e comerciais, por serem de fácil aplicação e bastante flexíveis à ampliação do sistema elétrico, permitindo que uma grande quantidade de cabos seja reunida em um dado trajeto (Mamede Filho, 2017). A Figura 2.3 exibe os esquemas ilustrativos, mostrados na NBR 5410, desses métodos de instalação.

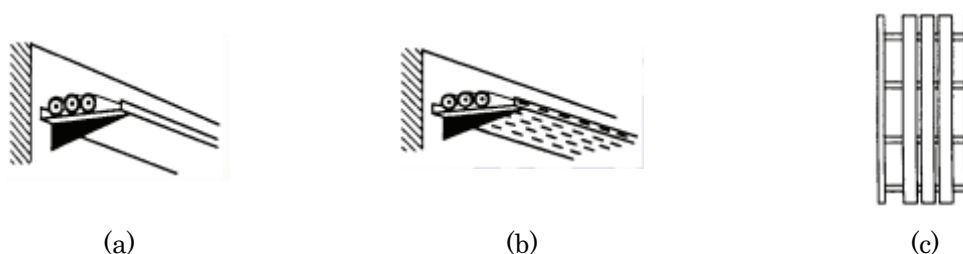


Figura 2.3 - Esquemas ilustrativos de métodos de instalação de cabos: (a) eletrocalha não-perfurada, (b) eletrocalha perfurada e (c) leito. Fonte: (ABNT, 2004).

No que se refere aos tipos de cabos permitidos nos métodos de instalação mostrados na Figura 2.3, a norma NBR 5410 admite a utilização de cabos unipolares ou multipolares, podendo o condutor isolado ser empregado exclusivamente quando sua isolação for de XLPE, pois: “embora desprovidos de cobertura, tais condutores apresentam uma isolação espessa o suficiente para garantir resultado equivalente ao de uma dupla camada, isolação mais cobertura” (ABNT, 2004). Condutores com isolação de XLPE são considerados, para efeito de regulamentação, como cabos unipolares (ABNT, 2004). A norma NBR 5410 também possibilita a disposição dos cabos em várias camadas no interior de leitos e eletrocalhas, desde que algumas exigências relacionadas ao volume de material que possa contribuir para a propagação de incêndios (isolações, capas e coberturas) sejam cumpridas.

Concernente ao material do condutor, ele pode ser de cobre ou alumínio, no entanto, o alumínio pode ser empregado somente sob uma série de condições, explicitadas na NBR 5410. Além disso, é difícil assegurar uma boa conexão dos condutores de alumínio com os terminais dos aparelhos consumidores. Por isso, a maioria absoluta das instalações industriais emprega condutores de cobre (Mamede Filho, 2017).

Cabos de média e alta tensão, como também aqueles destinados a aplicações específicas (cabos submarinos e subterrâneos), podem assumir configurações ainda mais complexas, como a presença de *blindagens* e *armaduras*. Informações aprofundadas sobre esses tipos de cabos podem ser encontradas em Thue (2012).

Por fim, pode-se citar algumas referências importantes no que tange ao assunto sobre condutores, métodos de instalação e as normas brasileiras associadas. Os termos relacionados aos condutores elétricos em geral podem ser encontrados na NBR 5471 (ABNT, 1986), enquanto a NBR 5410 (ABNT, 2004) define as regulamentações referentes às instalações elétricas de baixa tensão. Informações mais detalhadas, comentários e detalhes práticos sobre o tópico atual podem ser encontrados em Cotrim (2009), Creder (2016) e Mamede Filho (2017).

### 2.3. Linhas de Transmissão e Cabos Industriais

A teoria acerca dos mecanismos e fenômenos presentes no transporte de energia por meio de *linhas de transmissão* é apenas uma pequena parcela de um escopo bastante amplo que trata da *propagação de ondas eletromagnéticas*. Esse escopo compreende tanto as *ondas guiadas* como também as *ondas não guiadas*. As ondas guiadas se caracterizam pela presença de um meio físico para a sua condução, onde as *linhas de transmissão* e os *guias de onda* são as estruturas básicas empregadas para este propósito. As *ondas não guiadas*, por sua vez, se propagam através do espaço por extensas áreas a partir da sua irradiação por uma fonte, podendo-se citar, como exemplos práticos, os sistemas de telefonia celular, televisão aberta e rádio.

As linhas de transmissão são, portanto, um caso particular de estrutura empregada para confinar e orientar ondas eletromagnéticas, estando presente tanto nos sistemas de energia elétrica como também nos de telecomunicações (televisão a cabo, telefonia residencial, entre outros). Constante e velocidade de propagação, impedância característica, reflexão de ondas, entre outros, são definições e fenômenos presentes em todos esses tipos de sistemas, que apesar de parecerem tão distantes em termos de aplicabilidade, estão muito próximos do ponto de vista físico. Genericamente, as linhas de transmissão são definidas como

uma estrutura de guiamento utilizada para conduzir energia ou informação entre fontes e receptores. Em vista disso, a teoria clássica de linhas de transmissão envolve diversos campos de aplicação, muito além do caso específico de sistemas de energia elétrica. Esse tipo de abordagem, mais amplo, é encontrado nos livros de eletromagnetismo, pelo fato das linhas se tratarem de aplicações práticas das leis de Maxwell (Hayt Jr. e Buck, 2013; Sadiku, 2012).

A análise dos fenômenos citados no parágrafo anterior se torna crucial quando o comprimento da linha que liga as fontes aos receptores é da ordem do comprimento de onda. Por isso, estudos mais profundos acerca das linhas de transmissão se originaram na telegrafia e prosseguiram nos sistemas de telecomunicações atuais, visto que em todos eles há a presença de sinais com frequências elevadíssimas associados a comprimentos de ondas muito curtos. No que tange aos sistemas de energia elétrica onde os comprimentos das ondas de tensão e corrente são bastante longos (5000 km para linhas em 60 Hz), a preocupação acerca dos aspectos de regime permanente que envolvem a propagação das ondas de tensão e corrente nos cabos é mais relevante para linhas extensas. Por isso, o estudo das ondas viajantes encontrou considerável aplicação nos sistemas elétricos de potência, cujas linhas possuem dezenas ou centenas de quilômetros (Fuchs, 1977b).

Postas as reflexões conduzidas nos parágrafos anteriores, é possível afirmar que, a princípio, não havia uma grande preocupação acerca da influência dos cabos no contexto da reflexão de ondas e fenômenos de alta frequência em instalações elétricas industriais, uma vez que eles são extremamente curtos se comparados com o comprimento da onda fundamental de 50 Hz ou 60 Hz, e que os eventos de alta frequência se restringiam a ocorrências ocasionais. No entanto, à medida que o emprego da eletrônica de potência foi se desenvolvendo e se tornando cada vez mais presente na indústria, fenômenos associados a ondas de frequências elevadíssimas e comprimentos de ondas curtos, tais como sobretensões transitórias e correntes de modo comum, começaram a ocorrer de maneira constante e impactar seriamente os diversos componentes do sistema elétrico industrial. Por isso, análises que antes abrangiam apenas os longos cabos aéreos e subterrâneos, que

formam as linhas de transmissão dos sistemas elétricos de potência, se ampliaram para os cabos industriais.

O surgimento desses fenômenos está associado à aplicação de conversores de tensão chaveados para o acionamento de cargas industriais. Um estudo bastante interessante, conduzido em de Paula et al. (2008b), exhibe os cálculos para os comprimentos de cabos a partir dos quais as sobretensões transitórias e correntes de modo comum impactam os sistemas compostos por motores acionados por inversores PWM. O tempo de subida do pulso PWM e a velocidade de propagação das ondas nos cabos que, por sua vez, depende dos parâmetros destes, são os principais critérios para calcular tal comprimento.

Pode-se afirmar, portanto, que a teoria de linhas de transmissão, associada ao estudo das ondas viajantes, pode ser aplicada também em instalações de baixa tensão. Nesse sentido, no próximo subtópico são apresentadas as equações clássicas que regem as linhas de transmissão, objetivando também mostrar a origem do conceito de parâmetros de linha ou cabo.

### 2.3.1. Equações Clássicas das Linhas de Transmissão

O conceito de linhas de transmissão, consoante os argumentos apresentados na subseção anterior, pode ser estendido para os cabos industriais. Dessa maneira, a propagação das ondas de tensão e corrente nesses tipos de cabos pode ser analisada através das equações diferenciais clássicas das linhas de transmissão. No subtópico dedicado ao estudo do sistema de transmissão monofásico, o intuito é definir: (i) as equações clássicas das linhas de transmissão no domínio do tempo e da frequência, (ii) o conceito de parâmetros de linha (impedâncias série e admitâncias em paralelo) e, por último, (iii) a equação que correlaciona tensão e corrente em termos dos parâmetros citados anteriormente. O sistema de transmissão trifásico é abordado no subtópico seguinte.

#### i) Sistema de transmissão monofásico

O entendimento das equações que envolvem as linhas de transmissão reais pode ser atingido iniciando o estudo através de um caso mais simples, dado por um sistema monofásico composto por dois condutores, sendo que um deles, chamado de condutor de retorno, pode ser o próprio solo.

O próprio arranjo físico do sistema composto por dois condutores metálicos ou por um condutor metálico e o solo, separados por um dielétrico, o ar, conduz ao surgimento de resistências, indutâncias, capacitâncias e condutâncias ao longo da linha ou cabo. Os dois primeiros parâmetros estão relacionados à presença de uma corrente fluindo pelo sistema, que enxerga uma resistência intrínseca ao material condutor e também gera um fluxo magnético dentro e fora deste. Os dois últimos estão vinculados à presença do material dielétrico entre os condutores. Esses parâmetros estão distribuídos uniformemente ao longo de todo o comprimento da linha ou cabo de transmissão, tal como mostra a Figura 2.4. Todos eles são usualmente definidos por unidade de comprimento, quilômetro ou metro, dependendo das dimensões físicas da linha ou cabo.

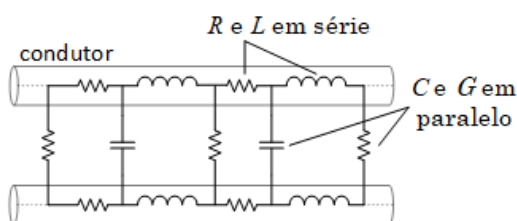


Figura 2.4 – Parâmetros presentes nas linhas de transmissão e sua característica distribuída.

Fonte: autor (2020).

As equações clássicas das linhas de transmissão são obtidas através do seu circuito equivalente considerando um comprimento diferencial  $\Delta z$ , apresentado na Figura 2.5, composto pelos parâmetros distribuídos por unidade de comprimento, comentados anteriormente. A tensão no início e no final da linha é representada por  $V(z, t)$  e  $V(z + \Delta z, t)$ , respectivamente; já a corrente que circula no início do ramo principal é dada por  $I(z, t)$ , onde uma pequena parcela de fuga  $\Delta I$  flui pelo ramo em paralelo, estabelecendo, no fim do trecho considerando, uma corrente indicada por  $I(z + \Delta z, t)$ . Tanto a tensão como a corrente, são variáveis que

dependem da distância  $z$  do local de referência, e de  $t$ , o instante de tempo observado.

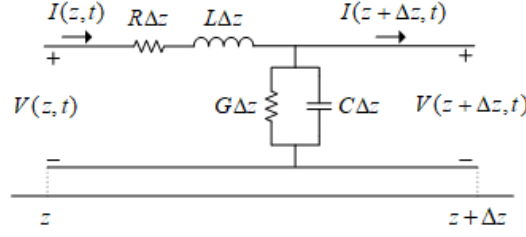


Figura 2.5 – Circuito equivalente de uma linha de transmissão considerando um comprimento diferencial  $\Delta z$ . Fonte: autor (2020).

Aplicando a lei de Kirchhoff de tensão na malha externa do circuito, obtém-se:

$$V(z, t) = R\Delta z I(z, t) + L\Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + V(z + \Delta z, t)$$

ou

$$-\frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = RI(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

Assumindo um tamanho diferencial para o comprimento da linha, de modo que  $\Delta z$  tenda a zero, tem-se:

$$-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = RI(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

Os dois termos do segundo membro da Equação (2.2) representam, respectivamente, as quedas de tensão ôhmica e induzida, esta última gerada pela variação da corrente que flui pela linha.

De forma semelhante, pode-se conduzir a análise para as correntes, aplicando a lei de Kirchhoff no nó principal da Figura 2.5, produzindo a seguinte equação diferencial:

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = GV(z, t) + C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

O primeiro termo do segundo membro da Equação (2.3) representa a fuga de corrente através do dielétrico, enquanto o segundo associa-se à corrente de deslocamento gerada pelas variações de carga nos condutores e do campo elétrico no meio dielétrico, produzidas pela tensão alternada.

Ambas as Equações (2.2) e (2.3) estão descritas sob as variáveis dependentes  $V(z, t)$  e  $I(z, t)$ . Para definir, então, as equações da linha e as expressões específicas para as ondas de tensão e corrente, é necessário reescrevê-las de modo que as funções que as representam não apareçam juntas na mesma equação. Para isso, diferencia-se a Equação (2.2) em relação a  $z$  e a equação (2.3) em relação a  $t$ :

$$-\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} = R \frac{I(z, t)}{\partial z} + L \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial t \partial z} \quad (2.4)$$

$$-\frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z \partial t} = G \frac{V(z, t)}{\partial t} + C \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Substituindo o primeiro termo do segundo membro da Equação (2.4) pela Equação (2.3), e o segundo termo do mesmo membro pela Equação (2.5), obtém-se a equação diferencial para a tensão:

$$\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} = RGV(z, t) + (RC + LG) \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Através de processos similares, concebe-se a equação diferencial para a corrente:

$$\frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z^2} = RGI(z, t) + (RC + LG) \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

As Equações (2.6) e (2.7) são as *equações diferenciais clássicas das linhas de transmissão*, também chamadas de *equações da telegrafia*, pois foram deduzidas

inicialmente para o estudo da propagação de pulsos telegráficos. O próximo passo agora é definir as equações no domínio da frequência.

As análises em regime permanente de sistemas elétricos são processadas, normalmente, no domínio da frequência, uma vez que as ondas senoidais podem ser escritas em termos de fasores, facilitando bastante as soluções. Assumindo, então, a dependência temporal harmônica das ondas de tensão e corrente, tem-se as seguintes expressões:

$$V(z, t) = \text{Re}[V(z)e^{j\omega t}] \quad (2.8)$$

e

$$I(z, t) = \text{Re}[I(z)e^{j\omega t}] \quad (2.9)$$

Ao aplicar as fórmulas fasoriais apresentadas nas duas expressões anteriores nas Equações (2.6) e (2.7), elas tornam-se:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = RGV(z) + (RC + LG)j\omega V(z) + LC(j\omega)^2V(z) \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = RGI(z) + (RC + LG)j\omega I(z) + LC(j\omega)^2I(z) \quad (2.11)$$

Agrupando os termos semelhantes, tem-se:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z) \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I(z) \quad (2.13)$$

As Equações (2.12) e (2.13) são as *equações das linhas de transmissão no domínio da frequência*. Os termos  $(R + j\omega L)$  e  $(G + j\omega C)$  são chamados, respectivamente, de *impedância série* e *admitância em paralelo* da linha ou cabo.



Eles compreendem os chamados parâmetros da linha de transmissão e podem ser simbolizados por  $Z(\omega)$  e  $Y(\omega)$ .

Por último, o objetivo é definir as equações diferenciais que relacionam as tensões com as correntes na linha no domínio da frequência a partir dos parâmetros apresentados no parágrafo anterior. Para tal, aplicam-se as equações (2.2) e (2.3), obtendo-se:

$$-\frac{dV(z)}{dz} = Z(\omega)I(z) \quad (2.14)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = Y(\omega)V(z) \quad (2.15)$$

As equações acima também valem para um sistema polifásico, a diferença é que as tensões e as correntes serão dadas por vetores e os parâmetros por matrizes, conforme indica a próxima subseção.

O intuito principal deste subtópico é apresentar os conceitos por trás das concepções de impedância série e de admitância em paralelo concernentes às linhas de transmissão. Interpretações mais profundas sobre outras definições (como as expressões matemáticas das ondas de tensão e corrente, constante de propagação, comprimento e velocidade de onda, impedância de entrada e característica) e também em relação a alguns fenômenos (como a propagação e reflexões de ondas), podem ser encontradas, do ponto de vista mais físico, em Hayt Jr. e Buck (2013) e Sadiku (2012) e, sob o prisma de sistemas elétricos de potência, em Fuchs (1977b).

## ii) Sistema de transmissão trifásico

Nos sistemas compostos por mais de uma fase, equivalem-se as análises efetuadas anteriormente em relação à forma de conceber as expressões que definem as linhas. Conforme foi visto, as ondas de tensão e corrente nas linhas estão fortemente correlacionadas aos seus parâmetros: impedância série e admitância em paralelo.

A diferença agora reside no fato de que a presença de outros condutores estabelece o surgimento de acoplamentos capacitivos e indutivos entre eles, de modo que além dos parâmetros definidos anteriormente, chamados de próprios, que relacionam as tensões e correntes de um mesmo condutor, ter-se-ão também os parâmetros mútuos, que associam tensões e correntes de condutores diferentes. Desse modo, as equações (2.14) e (2.15) são preferencialmente representadas através de matrizes. Para o caso específico de um sistema trifásico, tem-se:

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$-\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde os termos  $Z_{ii}$  representam a impedância própria de cada condutor  $i$ , enquanto os termos  $Z_{ij}$  retratam as impedâncias mútuas entre os condutores  $i$  e  $j$ . Tais termos são dependentes da frequência, mas a simbolização  $Z_{ii}(\omega)$  e  $Z_{ij}(\omega)$  foi simplificada ocultando-se  $(\omega)$ . Os termos  $Y_{ii}$  e  $Y_{ij}$  seguem a mesma ideia, representando, respectivamente, as admitâncias próprias e mútuas dos condutores.

Escrevendo as duas equações diferenciais anteriores em forma matricial, tem-se:

$$-\frac{d[V(z)]}{dz} = [Z(\omega)][I(z)] \quad (2.18)$$

$$-\frac{d[I(z)]}{dz} = [Y(\omega)][V(z)] \quad (2.19)$$

onde  $[Z(\omega)]$  e  $[Y(\omega)]$  simbolizam, nessa ordem, as matrizes de impedâncias série e de admitâncias em paralelo de um sistema trifásico. As matrizes colunas  $[V(z)]$  e  $[I(z)]$  são os vetores de tensão e corrente, respectivamente.

As matrizes  $[Z(\omega)]$  e  $[Y(\omega)]$  são sempre matrizes quadradas de ordem  $n$ , em que  $n$  é o número de condutores presentes no sistema. Muitos modelos, como será visto, necessitam que tais matrizes sejam de ordem três. O fato é que muitas linhas de transmissão aéreas trifásicas são compostas por três condutores simples, cada um conduzindo uma fase, tornando essas matrizes naturalmente de ordem três. No entanto, existem casos específicos onde há a presença de mais condutores, tais como nas linhas em que os condutores de fase são constituídos por subcondutores, formando os denominados *agrupamentos* (em inglês, *bundles*), e também em linhas trifásicas operando em paralelo e suportadas na mesma estrutura, entre outros. Nesses casos, as matrizes de impedâncias e admitâncias não são de ordem três, de modo que elas podem ser reduzidas para essa ordem através de algumas técnicas, discutidas no capítulo 7 de Fuchs (1977a).

No caso de cabos industriais, a ordem das matrizes de parâmetros pode ser ainda maior, visto que tais cabos são comumente constituídos por vários elementos condutores, tais como blindagens e armaduras, além do condutor principal. Dessa forma, um sistema trifásico composto por cabos industriais constituídos de condutor central, blindagem e armadura, gera matrizes de impedâncias série e de admitâncias em paralelo de ordem nove, conforme mostrado de maneira bastante didática em de Souza (2015). Técnicas de redução de matrizes devem ser aplicadas para torná-las de ordem três, no intuito de serem empregadas em modelos computacionais.

## 2.4. Parâmetros de Condutores

A subseção anterior exibiu a importância que os parâmetros elétricos das linhas de transmissão possuem nas análises dos sistemas de energia elétrica, uma vez que eles ditam o comportamento da tensão e corrente nas linhas tanto em regime transitório como em regime permanente. As definições referentes a eles foram bastante simplificadas, pois o intuito era apenas introduzir o porquê de as linhas serem caracterizadas por resistências, indutâncias, capacitâncias e condutâncias, incluindo a origem das denominações de impedância série e admitância em paralelo e a forma de representá-los em equações matriciais.

O objetivo agora é aprofundar no conceito físico de tais parâmetros, incluindo a apresentação de alguns fenômenos que alteram seus valores de maneira considerável, como os efeitos pelicular e proximidade. Análises para um sistema simples, composto por cabos constituídos de um só elemento condutor e sem suporte, são desenvolvidas de forma que os conceitos empregados nesse caso possam atuar como base para explicações teóricas de fenômenos presentes em sistemas mais complexos, objetos de estudo deste trabalho, relacionados ao emprego de eletrocalhas e leitos metálicos como suporte aos cabos.

As equações analíticas concernentes aos cabos compostos por blindagens e armaduras não são abordadas, uma vez que eles não representam o foco do presente trabalho e também não são empregados nos estudos de caso considerados. Para tal, sugere-se ao leitor o estudo da dissertação de de Souza (2015).

Portanto, as equações para os parâmetros de cabos obtidas nos próximos subtópicos se assemelham bastante a uma linha de transmissão aérea típica, sem a consideração do efeito proximidade, ou seja, tais equações são equivalentes aos de sistemas elétricos de potência. No entanto, sempre que necessário, observações e comentários são realizados à vista de tangenciar o foco para o caso de cabos industriais. Por exemplo, será mostrado que a indutância do cabo sem suporte associa-se aos campos magnéticos dentro e fora do condutor, e também como o efeito proximidade atua no sentido de modificar a distribuição desses campos, em seguida, essa observação é expandida para os casos onde se faz presente suportes metálicos, de modo que o *insight* físico já fora apresentado para o caso sem suporte. No Capítulo 4, quando da apresentação e explicação dos resultados, ficará mais claro ainda o emprego desse tipo de abordagem.

#### 2.4.1. Resistência

A resistência própria é um parâmetro intrínseco a todo cabo, enquanto a resistência mútua surge para sistemas com mais de um condutor, conforme explicado nos próximos subtópicos.

##### i) Resistência própria

A resistência de um condutor é definida como a razão entre a diferença de potencial entre seus dois terminais e a corrente elétrica que o atravessa. Para condutores de seção reta uniforme, a resistência é dada por:

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (2.20)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade do material, dada em siemens por metro (S/m),  $l$  é o comprimento do condutor e  $S$  é a área de sua seção transversal. A resistência é dada em ohms ( $\Omega$ ).

A Equação (2.20) é válida para condutores que transportam corrente contínua, cuja densidade de corrente é uniforme em toda a sua seção transversal. Na condução de correntes alternadas, os condutores estão sujeitos ao efeito pelicular, que altera a distribuição da densidade de corrente no seu interior e, conseqüentemente, aumenta o valor de sua resistência. Esse efeito depende tanto da frequência como das características do material do condutor. Todas as conceituações desse efeito, assim como suas formulações, são apresentadas na subseção 2.6.1.

## ii) Resistência mútua

A circulação de correntes variáveis no tempo em sistemas compostos por condutores suficientemente próximos entre si são condições suficientes para o surgimento da resistência mútua. Esse parâmetro está diretamente relacionado ao surgimento de correntes induzidas em dado condutor devido à presença de correntes alternadas em outros condutores, produzindo perdas ôhmicas no primeiro. Esse fenômeno representa, de fato, o efeito proximidade.

Para as linhas de transmissão aéreas, onde o efeito proximidade entre os condutores é praticamente desprezível, o surgimento da resistência mútua está diretamente relacionado à presença do solo como caminho de retorno das correntes. A penetração de campos eletromagnéticos na terra, produzidos pelas correntes alternadas dos condutores, induzem correntes nesse meio. Essas correntes

produzirão seus próprios campos eletromagnéticos que vão influenciar na distribuição dos campos do sistema. A consequência direta desse fenômeno é a alteração dos valores de resistências e indutâncias dos condutores. Além disso, ocorre o surgimento da resistência mútua, não presente em sistemas aéreos com solos ideais. A quantificação desse fenômeno foi realizada, pela primeira vez, em Carson (1926).

Em sistemas de cabos industriais, a presença de suportes metálicos aterrados, tais como eletrocalhas e leitos, modifica os campos eletromagnéticos do sistema a partir de mecanismos similares aos do solo. Contudo, sua proximidade com os condutores aumenta de maneira considerável seus efeitos. Nesses casos, a quantificação das resistências mútuas a partir de equações analíticas é bastante complexa, ao passo que o emprego de métodos de elementos finitos representa uma solução bastante viável nesse intuito.

#### 2.4.2. Indutância

Sabe-se que um condutor percorrido por uma corrente elétrica  $I$ , produz um campo magnético  $\vec{B}$ , cuja intensidade, direção e sentido podem ser definidos, de maneira geral, pela Lei de Biot-Savart ou, para os casos em que a distribuição da corrente é simétrica, pela Lei de Ampère. Esse campo magnético estabelece um fluxo magnético  $\Phi$  que atravessa a região delimitada por esse condutor. Em materiais lineares, a razão entre esse fluxo e a corrente que o produz define o conceito de *indutância* (ou *indutância própria*).

A indutância é um parâmetro presente em todos os circuitos elétricos, visto que sempre existirá algum fluxo magnético atravessando um caminho condutor fechado. No entanto, os efeitos relacionados à indutância são bastante ampliados quando o condutor é colocado em formato de uma bobina, cujas espiras produzem campos magnéticos individuais.

Fazendo com que a bobina, mostrada na Figura 2.6, seja percorrida por uma corrente, assume-se que as linhas de fluxo magnético produzidas por cada espira envolvam todas as outras. Sendo assim, todas as  $n$  espiras são enlaçadas por  $n$  linhas de fluxo magnético. O fluxo magnético produzido por uma única espira e que

atravessa ela e as demais é dado por  $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , em que  $S$  é a área definida por cada espira; já o fluxo magnético total enlaçado por cada espira ou pela bobina como um todo será  $N\phi$  ou  $\lambda$ , o *fluxo magnético concatenado*, de forma que a indutância  $L$  pode ser definida por:

$$\lambda \propto I$$

$$\lambda = LI$$

ou

$$L = \frac{\lambda}{I} \quad (2.21)$$

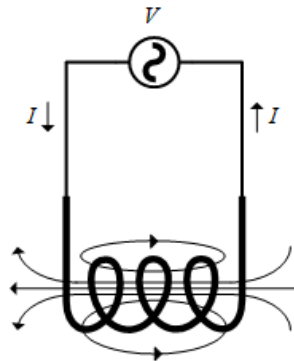


Figura 2.6 - Linhas de fluxo magnético embarcando igualmente todas as espiras de uma bobina.

Fonte: autor (2020).

A unidade de indutância é o henry (H), equivalente a weber-espira por ampère e, no caso de linhas e cabos de transmissão, é comumente definida por unidade de comprimento.

A indutância é uma medida da quantidade de energia magnética que pode ser armazenada dentro um indutor. Esse parâmetro depende apenas de aspectos geométricos da bobina (um fio, toróide, solenóide, etc.) e do meio ao qual ela está inserida.

Em condutores retilíneos, tal como ocorre nas linhas e cabos de transmissão, o caminho fechado para a corrente é estabelecido através do condutor de retorno, estruturando o circuito em formato espiral, conforme mostra a Figura 2.7. O fluxo

magnético que atravessa o retângulo, formado pelo condutor principal e o condutor de retorno, associado com corrente que o produz, define a chamada *indutância externa* do condutor.

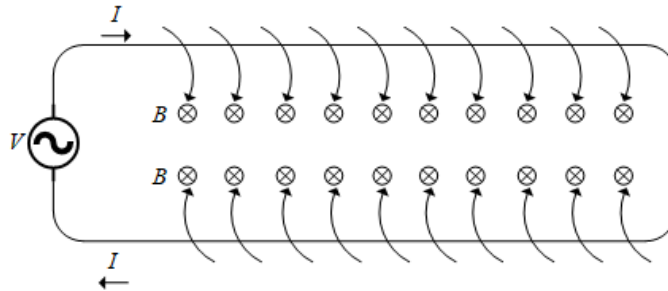


Figura 2.7 - Fluxo magnético concatenado por um fio retilíneo definido pela parcela que flui através do retângulo formado pelo condutor principal e o condutor de retorno. Fonte: autor (2020).

Nas definições de indutância até então, considerou-se um fio extremamente fino, não sendo comentado sobre a disposição de correntes e campos em seu interior. Nos condutores reais empregados em linhas aéreas ou cabos industriais, a distribuição da corrente através da seção transversal do condutor e o respectivo fluxo magnético produzido devem ser levados em conta, de modo que a relação de proporcionalidade entre eles é definida pela chamada *indutância interna* do condutor.

De acordo com o que foi apresentado nos últimos dois parágrafos, a indutância total  $L$  de um condutor é definida pela indutância interna  $L_{in}$  somada à indutância externa  $L_{ext}$ . A fórmula para calcular a parcela interna depende se a corrente e o fluxo magnético estão distribuídos de maneira uniforme ou não ao longo da seção transversal do condutor, de modo que correntes contínuas produzem o primeiro caso, e correntes alternadas, o segundo. Isto posto, a seguir são mostrados os cálculos empregados na obtenção das indutâncias internas e externas para o caso de condutores aéreos (sem suporte) percorridos por corrente contínua, sendo que posteriormente, na subseção 2.6.1, no item que trata a respeito do efeito pelicular, são exibidas as considerações quando correntes alternadas circulam por eles.

### iii) Indutância própria interna



Para calcular o campo magnético interno ao condutor, considera-se um círculo imaginário de raio  $\rho$  no seu interior que envolve apenas uma fração da corrente total  $I$ , conforme exibe a Figura 2.8.

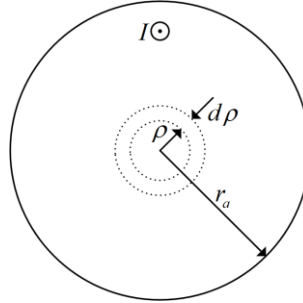


Figura 2.8 - Círculo imaginário interno ao condutor que envolve apenas uma parcela da corrente e do fluxo magnético. Fonte: autor (2020).

Considerando o raio total do condutor igual a  $r_a$  e a corrente distribuída uniformemente em toda a sua seção transversal, a corrente envolvida  $I_{env}$  será:

$$I_{env} = \frac{I\rho^2}{r_a^2} \quad (2.22)$$

A premissa de considerar a densidade de corrente constante em a toda seção transversal do condutor é verdadeira apenas para as correntes contínuas, uma vez que as correntes alternadas sofrem a influência do efeito pelicular, que redistribui essa densidade, como mostrado na subseção 2.6.1.

O campo magnético produzido no interior do condutor por essa porção de corrente é obtido de maneira simples através do emprego da simetria cilíndrica do problema e da Lei de Ampère, sendo assim:

$$\begin{aligned}
I_{env} &= \oint \vec{H} d\vec{l} = \\
&= \oint (H_{\phi} \vec{a}_{\phi})(dl \vec{a}_{\phi}) = H_{\phi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \rho d\phi = \\
&= H_{\phi} 2\pi\rho = I_{env} = \frac{I\rho^2}{r_a^2} \\
H_{\phi} &= \frac{I\rho}{2\pi r_a^2} \\
\vec{H} &= \frac{I\rho}{2\pi r_a^2} \vec{a}_{\phi} \tag{2.23}
\end{aligned}$$

O fluxo magnético no interior do condutor é aquele que atravessa qualquer plano radial que se estende de  $\rho = 0$  até  $\rho = r_a$  em um comprimento  $l$  do cabo. Assume-se então, primeiramente, um tubo imaginário de raio  $\rho$  e espessura diferencial  $d\rho$  que se estende por um comprimento diferencial  $dz$  (Figura 2.9), embarcando uma porção da corrente total e sendo atravessado apenas por um fluxo incremental  $d\phi$ , dado pelo produto de  $BdS$ , em que  $dS = d\rho dz$ .

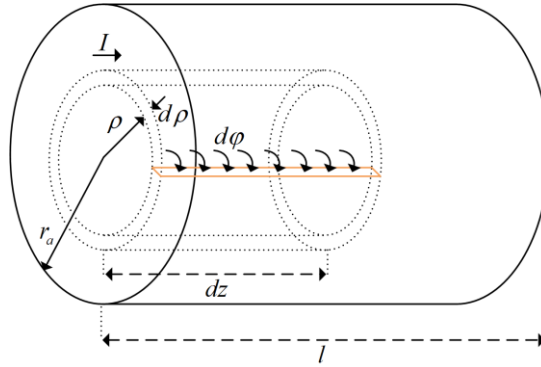


Figura 2.9 - Tubo imaginário elementar atravessado por um fluxo magnético incremental no interior do condutor. Fonte: autor (2020).

Em seguida, o raio desse tubo é estendido de 0 até  $r_a$  e seu comprimento de 0 até  $l$  a fim de considerar toda a corrente e o fluxo magnético confinado, dessa forma:

$$\begin{aligned}
\phi_{in} &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \\
&= \int_S (\mu H_\phi \vec{a}_\phi) (dS \vec{a}_\phi) = \int_{z=0}^l \int_{\rho=0}^{r_a} \mu \frac{I_{env} \rho}{2\pi r_a^2} d\rho dz = \\
&= \int_{z=0}^l \int_{\rho=0}^{r_a} \mu \frac{I \rho^3}{2\pi r_a^4} d\rho dz = \\
\phi_{in} &= \frac{\mu I l}{8\pi}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

A indutância interna do condutor é, portanto, determinada substituindo-se a Equação (2.24) na Equação (2.21), ou seja:

$$\begin{aligned}
L_{in} &= \frac{\phi_{in}}{I} \\
L_{in} &= \frac{\mu l}{8\pi}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

De acordo com a Equação (2.25), é possível afirmar que a indutância interna de um condutor não depende do seu raio, mas apenas do material que o compõe.

## ii) Indutância própria externa

O fluxo magnético externo a um condutor se estende desde a sua superfície, iniciando com intensidades decrescentes, até se tornar nulo no infinito. No entanto, sua determinação depende da definição de uma área finita. Para tal, é comumente estabelecido um ponto genérico  $P$ , muito distante do condutor, empregado para delimitar a área de circulação do fluxo magnético. O afastamento desse ponto em relação ao sistema é equivalente à inclusão de todo o fluxo concatenado pelo condutor.

Similarmente ao que foi feito para o caso da determinação da indutância interna, um tubo de dimensões diferenciais é empregado para se estabelecer a área por onde atravessa um fluxo incremental (Figura 2.10). O fluxo externo total é calculado estendendo-se o raio desse tubo a partir da superfície do condutor até o ponto genérico  $P$ , localizado a uma distância  $d_{aP}$  do condutor, através de um comprimento  $l$ , consoante a Equação (2.26).

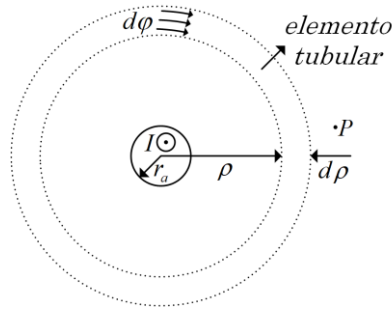


Figura 2.10 – Seção transversal de um tubo imaginário elementar atravessado por um fluxo magnético incremental no exterior do condutor. Fonte: autor (2020).

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ext} &= \int_S \vec{B} \, d\vec{S} = \\
 &= \int_S (\mu H_{\phi} \vec{a}_{\phi}) (dS \vec{a}_{\phi}) = \int_{z=0}^l \int_{\rho=r_a}^{d_{aP}} \mu \frac{I}{2\pi\rho} d\rho dz = \\
 &= \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d_{aP} - r_a}{r_a} \\
 \Phi_{ext} &= \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d_{aP}}{r_a} \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Assumiui-se nos cálculos acima que a distância  $d_{aP}$  é bem maior que  $r_a$ , permitindo que o numerador do  $\ln$  fosse simplificado por  $d_{aP}$ .

A indutância externa total é, pois, definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 L_{ext} &= \frac{\Phi_{ext}}{I} \\
 L_{ext} &= \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d_{aP}}{r_a} \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

### iii) Indutância própria total

O fluxo magnético total associado a um condutor que conduz uma corrente  $I$  é dado pela somatória do fluxo interno desse condutor com o fluxo externo, isto é:

$$\begin{aligned}
\Phi_{aP} &= \Phi_{in} + \Phi_{ext} = \\
&= \frac{\mu l l}{8\pi} + \frac{\mu l l}{2\pi} \ln \frac{d_{aP}}{r_a} \\
\Phi_{aP} &= \frac{\mu l l}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{d_{aP}}{r_a} \right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Normalmente, a expressão anterior é simplificada através da percepção que  $1/4 = \ln e^{1/4}$ . Considerando o meio externo como o ar ( $\mu_r = 1$ ) e fazendo  $l = 1$ , tal expressão pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Phi_{aP} &= \frac{\mu l}{2\pi} \left( \ln e^{1/4} + \ln \frac{d_{aP}}{r_a} \right) = \\
&= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} l \ln \frac{d_{aP}}{r_a e^{-1/4}} \\
\Phi_{aP} &= 2 \cdot 10^{-7} l \ln \frac{d_{aP}}{r_a e^{-1/4}}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Assumindo que  $r_a e^{-1/4} = r'_a$ , tem-se, finalmente:

$$\Phi_{aP} = 2 \cdot 10^{-7} l \ln \frac{d_{aP}}{r'_a} \tag{2.30}$$

O raio  $r'_a$  pode ser interpretado como sendo o raio de um condutor teórico que não produz fluxo interno, mas que seu fluxo total é igual ao que é produzido por um condutor real de raio  $r_a$ . Então, nos cálculos práticos, deve-se multiplicar o raio do condutor real por 0,7788 e aplicar a Equação (2.30).

A indutância própria total desse condutor é, portanto:

$$\begin{aligned}
L_{aP} &= \frac{\Phi_{aP}}{I} \\
L_{aP} &= \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d_{aP}}{r_a}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

iv) Indutância mútua

Quando mais de um condutor está presente, tal como ocorre nos sistemas elétricos trifásicos, o fluxo magnético produzido por um condutor também envolverá os outros condutores, gerando uma interação magnética entre eles. A razão entre o fluxo que flui através da área delimitada por um condutor e a corrente produzida por outro condutor define a chamada *indutância mútua*, dada por uma constante nos casos em que o meio que os envolve é linear.

Conforme exibe a Figura 2.11, que representa um sistema formado por dois condutores e um ponto genérico  $P$ , o fluxo magnético produzido pela corrente  $I_2$ , fluindo pelo condutor 2, enlaça a região compreendida entre o condutor 1 e o ponto  $P$ , onde foi definido o fluxo magnético do condutor 1 produzido por sua própria corrente. Dessa forma, os dois fluxos se somam nessa região, o próprio e o mútuo. A expressão que define o fluxo magnético mútuo  $\Phi_{12}$  pode ser determinada através de processos similares ao que foi conduzido na obtenção da Equação (2.26), modificando os termos referentes às distâncias e à corrente. Dessa maneira, obtém-se:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu I_2 l}{2\pi} \ln \frac{d_{2P}}{d_{12}} \quad (2.32)$$

onde  $d_{2P}$  é a distância entre o condutor 2 e o ponto  $P$ , e  $d_{12}$  é a distância entre os condutores 1 e 2. Essas distâncias são mostradas na Figura 2.11.

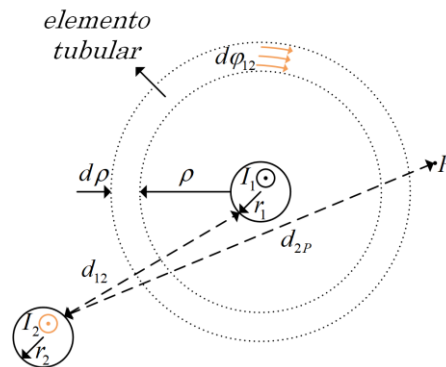


Figura 2.11 - Fluxo magnético produzido pela corrente  $I_2$  enlaçando a região compreendida entre o condutor 1 e o ponto  $P$ . Fonte: autor (2020).

Sendo assim, a indutância mútua  $L_{12}$  entre os condutores 1 e 2 é dada por:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

$$L_{12} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d_{2P}}{d_{12}} \quad (2.33)$$

#### v) Condutores com Retorno pelo Solo

Nos sistemas de solos ideais, caracterizados pela homogeneidade e resistividade nula, a corrente retorna na forma de uma densidade superficial de corrente. A obtenção das indutâncias, neste caso, é realizada mediante a consideração um condutor equivalente, denominado de *condutor* imagem, responsável por conduzir a corrente de retorno. Esse condutor é posicionado a uma profundidade da superfície do solo igual à altura  $h$  do condutor principal e paralelo a ele, conforme exibe a Figura 2.12. Tal artifício matemático é conhecido como método das imagens.

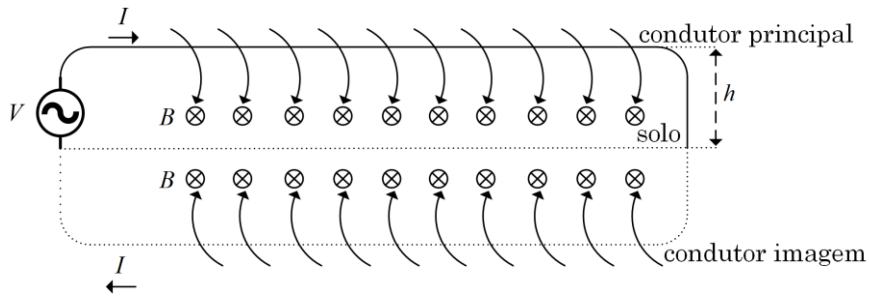


Figura 2.12 - Fluxo magnético concatenado por um condutor principal e seu condutor imagem.

Fonte: autor (2020).

No sistema mostrado na figura anterior, o condutor principal é enlaçado tanto pelo fluxo magnético produzido pela própria corrente como pelo fluxo gerado pela corrente do condutor imagem. Mais uma vez considerando um ponto  $P$  suficientemente distante dos condutores, o fluxo magnético externo enlaçado pelo condutor  $a$  devido à sua própria corrente é dado pela Equação (2.30), ao passo que o fluxo enlaçado por esse condutor devido à corrente produzida pelo condutor imagem ( $\Phi'_{aP}$ ) é dada por:

$$\phi'_{aP} = -\frac{\mu l l}{2\pi} \ln \frac{d'_{aP}}{2h} \quad (2.34)$$

onde  $d'_{aP}$  é a distância entre o condutor imagem de  $a$  e o ponto  $P$ , e  $2h$  é a distância entre os condutores principal e imagem.

O fluxo magnético total que enlaça o condutor principal é, portanto:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \phi_{aP} + \phi'_{aP} \\ \phi_a &= \left( \frac{\mu l l}{2\pi} \ln \frac{d_{aP}}{r_a} \right) - \left( \frac{\mu l l}{2\pi} \ln \frac{d'_{aP}}{2h} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Desdobrando os termos logaritmos e rearranjando os termos de forma conveniente:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \frac{\mu l l}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{r_a} + \ln d_{aP} - \ln \frac{1}{2h} - \ln d'_{aP} \right) = \\ \phi_a &= \frac{\mu l l}{2\pi} \left( \ln \frac{2h}{r_a} + \ln \frac{d_{aP}}{d'_{aP}} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Uma vez que o ponto  $P$  está suficientemente distante do sistema, a relação  $d_{aP}/d'_{aP}$  tende para a unidade. Dessa maneira, a equação anterior se transforma em:

$$\phi_a = \frac{\mu l l}{2\pi} \ln \frac{2h}{r_a} \quad (2.37)$$

#### vi) Indutâncias de um sistema trifásico

Supondo um sistema trifásico com retorno pelo solo ideal, cada condutor apresentará seu próprio condutor imagem, responsável por conduzir a corrente de retorno. Dessa maneira, o fluxo magnético total enlaçado por dado condutor e definido em uma determinada região é estabelecido pelos fluxos produzidos pelo próprio condutor, seu condutor imagem, os dois condutores vizinhos e seus condutores imagem. A referida região é aquela compreendida entre a superfície do



condutor considerado até um ponto  $P$  genérico. A Figura 2.13 mostra o sistema formado.

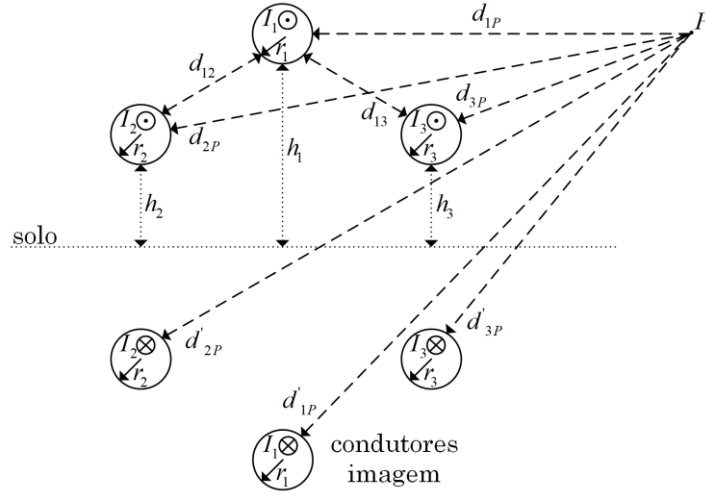


Figura 2.13 - Sistema trifásico composto pelos condutores principais e seus respectivos condutores-imagens. Fonte: autor (2020).

Empregando o mesmo raciocínio e as equações obtidas anteriormente, pode-se conceber o fluxo magnético total enlaçado pelo condutor 1 em relação a um ponto  $P$ , simbolizado por  $\Phi_1$ , pela seguinte expressão:

$$\Phi_1 = \frac{\mu}{2\pi} \left( \underbrace{I_1 \ln \frac{d_{1P}}{r'_1}}_{\text{fluxo próprio}} + \underbrace{I_2 \ln \frac{d_{2P}}{d_{12}} + I_3 \ln \frac{d_{3P}}{d_{13}}}_{\text{fluxo mútuo}} - \underbrace{I_1 \ln \frac{d'_{1P}}{2h_1} - I_2 \ln \frac{d'_{2P}}{d'_{12}} - I_3 \ln \frac{d'_{3P}}{d'_{13}}}_{\text{fluxo devido aos condutores de retorno}} \right) \quad (2.38)$$

onde os termos que representam as distâncias estão mostrados na Figura 2.13.

Considerando o ponto  $P$  bastante distante e realizando manipulações algébricas, pode-se simplificar a expressão anterior e escrevê-la da seguinte maneira:

$$\Phi_1 = \frac{\mu}{2\pi} \left( I_1 \ln \frac{2h_1}{r'_1} + I_2 \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} + I_3 \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \right) \quad (2.39a)$$

A mesma ideia pode ser empregada para expressar os fluxos magnéticos enlaçados pelos condutores 2 e 3, simbolizados por  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$ , tal como:

$$\phi_2 = \frac{\mu}{2\pi} \left( I_1 \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} + I_2 \ln \frac{2h_2}{r'_2} + I_3 \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \right) \quad (2.39b)$$

$$\phi_3 = \frac{\mu}{2\pi} \left( I_1 \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} + I_2 \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} + I_3 \ln \frac{2h_3}{r'_3} \right) \quad (2.39c)$$

Representando as três equações anteriores em formato matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r'_1} & \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \\ \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r'_2} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \\ \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} & \ln \frac{2h_3}{r'_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

As indutâncias do sistema podem ser escritas, então, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r'_1} & \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \\ \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r'_2} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \\ \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} & \ln \frac{2h_3}{r'_3} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

ou

$$[L] = \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r'_1} & \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \\ \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r'_2} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \\ \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} & \ln \frac{2h_3}{r'_3} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

onde  $[L]$  é a *chamada matriz de indutâncias*. De maneira genérica, ela é escrita como:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Os termos da diagonal principal refletem o fluxo magnético produzido pela corrente dos próprios condutores, representando as indutâncias próprias, enquanto os termos fora da diagonal computam a influência do fluxo produzido pelas correntes dos condutores vizinhos, caracterizando as indutâncias mútuas.

As equações analíticas exibidas neste subtópico não consideram a presença do solo não-ideal, a proximidade dos condutores, nem a existência de suportes metálicos, que alterariam de maneira significativa os valores das indutâncias próprias e mútuas. Além do mais, quando blindagens e armaduras estão presentes, as formulações são bastante diferentes das obtidas. Contudo, o *insight físico* dado até esse momento é de extrema relevância para a análise dos resultados obtidos no capítulo 4, onde tais influências são computadas e explicadas.

#### 2.4.3. Capacitância

Dois materiais condutores quaisquer, separados pelo espaço livre ou por um material dielétrico, possuem a capacidade de armazenar energia sob a forma de energia potencial elétrica. Essa energia está relacionada ao campo elétrico existente no espaço entre esses condutores quando eles estão carregados com cargas opostas e de mesma intensidade. A *capacitância* é a grandeza escalar que mede a capacidade de armazenamento de tal energia, sendo calculada pela razão entre a diferença de potencial  $V$  entre os dois condutores e a carga  $Q$  armazenada em um deles. Dessa forma, tem-se:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.44)$$

A capacitância é medida em farads (F), onde um farad é definido como um coulomb por volt. Valores práticos de capacitância são dados em microfarad ( $\mu\text{F}$ ), nanofarad (nF) ou picofarad (pF). O valor da capacitância depende apenas das

dimensões físicas do sistema de condutores e da permissividade do material entre eles.

Em termos gerais, a carga  $Q$  é determinada pelo fluxo elétrico que atravessa uma superfície fechada sobre o condutor positivo (lei de Gauss), enquanto a diferença de potencial é definida considerando o trabalho realizado para deslocar uma carga positiva unitária da superfície negativa até a positiva, isto é:

$$C = \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (2.45)$$

No caso de linhas e cabos de transmissão, quando os condutores são percorridos por correntes elétricas, cargas se acumulam sobre sua superfície, originando um campo elétrico em torno do sistema. Dessa forma, esse sistema se comporta como um capacitor de vários eletrodos, representados pelos próprios condutores e o solo, enquanto o ar é o dielétrico entre eles. Para se determinar as capacitâncias presentes em uma linha ou cabo de transmissão, é necessário se definir o campo elétrico gerado pelos condutores, como também a diferença de potencial associada a esse campo.

#### i) Campo elétrico de um condutor

O campo elétrico produzido por um condutor com uma densidade linear de cargas  $\rho_l$  (coulomb/m) uniforme pode ser determinado através da lei de Gauss aproveitando a simetria cilíndrica presente no problema, conforme mostra a Figura 2.14. Dessa forma, tem-se:

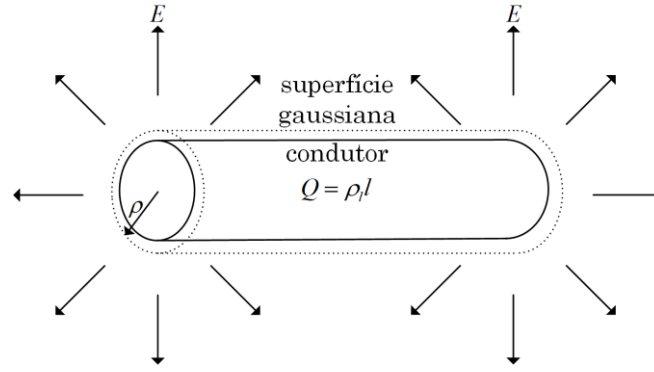


Figura 2.14 – Superfície gaussiana em torno de um condutor com densidade uniforme de cargas.

Fonte: autor (2020).

$$\begin{aligned}
 \rho_l l &= \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \\
 &= \int_{z=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} (D_\rho \vec{a}_\rho) (\rho d\phi dz \vec{a}_\rho) = D_\rho 2\pi \rho l \\
 D_\rho 2\pi \rho l &= \rho_l l \\
 D_\rho &= \frac{\rho_l}{2\pi \rho} \\
 \vec{D} &= \frac{\rho_l}{2\pi \rho} \vec{a}_\rho
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

nos cálculos acima assumiu-se  $Q = \rho_l l$ .

Adotando uma permissividade do meio igual a  $\epsilon$ , o campo elétrico em função da distância radial  $\rho$  da linha é:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon \rho} \vec{a}_\rho \tag{2.47}$$

Pode-se, agora, definir o conceito de diferença de potencial devido ao campo elétrico produzido por um condutor.

## ii) Diferença de potencial associada ao campo elétrico de um condutor

Como o valor do campo elétrico em um ponto em torno do condutor só depende da distância radial entre o condutor e esse ponto, pode-se definir superfícies cilíndricas equipotenciais concêntricas ao condutor, de modo que o

deslocamento de uma carga unitária positiva entre duas dessas superfícies defina a diferença de potencial entre elas. Deslocando essa carga de um ponto mais distante para um ponto mais próximo do condutor, o trabalho é realizado por uma fonte externa e a energia potencial aumenta; mas indo de um ponto mais próximo para um mais distante, há um dispêndio de energia, e o trabalho é realizado pelo campo, definindo a queda de tensão entre esses dois pontos. Assumindo dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  em torno do condutor, conforme mostra a Figura 2.15, tem-se que o trabalho instantâneo realizado para deslocar uma carga unitária positiva de qualquer ponto da superfície equipotencial que passa por  $P_2$  até outro ponto pertencente à superfície equipotencial que passa por  $P_1$ , cujas distâncias ao condutor é  $d_2$  e  $d_1$ , respectivamente, é dado por:

$$\begin{aligned}
 V_{12} &= - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\
 &= - \int_{d_2}^{d_1} (E_\rho \vec{a}_\rho)(d\rho \vec{a}_\rho) = - \int_{d_2}^{d_1} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho} d\rho \\
 &= - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d_1}{d_2} = \\
 V_{12} &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d_2}{d_1} \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

onde  $V_{12}$  indica o deslocamento de uma carga positiva e unitária de 2 para 1, em que  $V_{12} = V_1 - V_2$ . Se  $d_1 > d_2$ , a função  $\ln$  resulta em um valor negativo, indicando que o trabalho é realizado pelo campo, e houve queda de tensão ou de energia potencial; ao passo que quando  $d_2 > d_1$ , o valor positivo da função  $\ln$  implica um trabalho realizado por uma fonte externa, acarretando no aumento da energia potencial. Essa convenção explica porque o denominador da Equação (2.45) foi definido como o trabalho realizado para deslocar uma carga positiva unitária da superfície negativa até a positiva, pois, dessa forma, a fonte externa realiza trabalho e se garante que a capacitância gere um valor positivo, uma vez que o numerador também é positivo (a carga é determinada sobre condutores positivos).

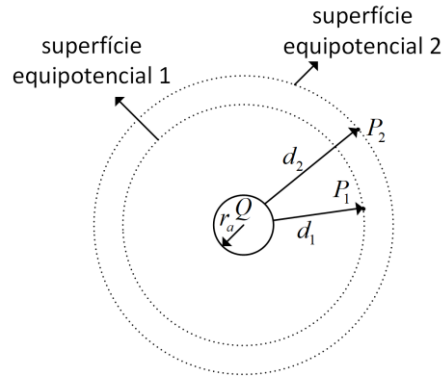


Figura 2.15 - Dois pontos definidos em duas superfícies equipotenciais concêntricas ao condutor carregado. Fonte: autor (2020).

A partir da equação anterior, definida como a diferença de potencial entre dois pontos arbitrários, pode-se determinar o potencial entre quaisquer elementos do sistema de transmissão, desde que as distâncias assumidas sejam aquelas correspondentes a esses elementos.

### iii) Diferença de potencial entre dois condutores carregados

A diferença de potencial entre dois condutores de raios  $r_a$  e  $r_b$ , separados por uma distância  $d$  (Figura 2.16), onde apenas o condutor  $a$  está carregado com uma densidade linear de carga  $\rho_{l_a}$ , pode ser determinada através da Equação (2.48), substituindo-se  $d_2$  por  $d$  e  $d_1$  por  $r_a$ , conforme mostra a Equação (2.49).

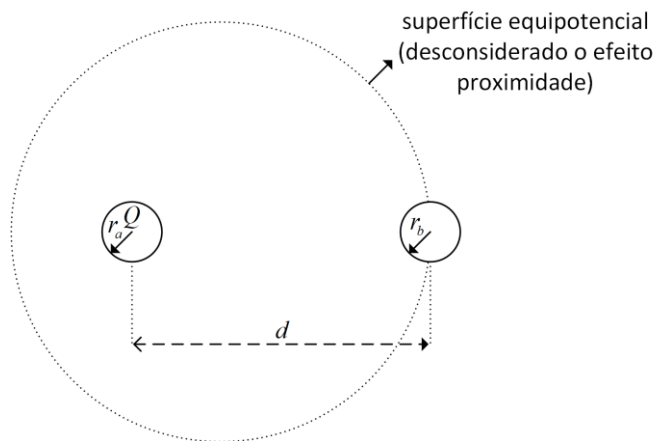


Figura 2.16 – Linha equipotencial que atravessa o condutor  $b$  devido à carga do condutor  $a$ . Fonte: autor (2020).

$$V_{ab} = \frac{\rho_{l_a}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_a} \quad (2.49)$$

É importante ressaltar que na concepção da equação anterior, assumiu-se que a presença do condutor  $b$  não modifica de maneira considerável as superfícies equipotenciais do sistema, associadas ao campo elétrico produzido pelo condutor  $a$ , conforme exhibe a Figura 2.16. Tal consideração pode ser feita quando  $d \gg r_a$ , condição presente em linhas de transmissão aéreas dos sistemas elétricos de potência. No entanto, no caso de cabos de instalações elétricas industriais, onde os condutores e o suporte estão muito próximos entre si, as linhas equipotenciais são fortemente deformadas pela presença desses elementos metálicos, de forma que a expressão do campo elétrico em torno do condutor, definida pela Equação (2.47), não é mais capaz de representar de forma exata o comportamento desse campo em toda a região. Esse fenômeno, chamado de efeito proximidade e explicitado na subseção 2.6.2, faz com que as equações analíticas, tal como as descritas nesta subseção, gerem erros excessivos se utilizadas quando há a distorção do campo elétrico. Por isso, o método de elementos finitos se mostra como uma alternativa viável e interessante para a obtenção de valores exatos para as capacitâncias de cabos em instalações industriais.

Se uma densidade linear de cargas  $\rho_{l_b}$  também for definida para o condutor  $b$ , tem-se que ele também irá contribuir para o campo elétrico presente na região em torno dos condutores. Desse modo, uma carga unitária deslocada novamente do condutor  $b$  ao condutor  $a$ , experimentará, somente devido a esse novo campo, uma diferença de potencial dada por:

$$V_{ab} = \frac{\rho_{l_b}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_b}{d} \quad (2.50)$$

A diferença de potencial devido à atuação simultânea das cargas  $\rho_{l_a}$  e  $\rho_{l_b}$ , será:

$$V_{ab} = \frac{\rho_{l_a}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_a} + \frac{\rho_{l_b}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_b}{d} \quad (2.51)$$



iv) Diferença de potencial entre um condutor e a terra

Nos sistemas de transmissão trifásicos aéreos, a terra tem grande influência no cálculo dos parâmetros, uma vez que ela possui atributos físicos de um condutor. Sendo assim, cada condutor posicionado sobre o solo configura a estrutura de um capacitor formado por um eletrodo cilíndrico longo (o condutor) e um eletrodo plano paralelo ao primeiro (o solo), separados entre si por um dielétrico (o ar). Uma carga  $+Q$  na superfície do condutor induz uma carga  $-Q$  na superfície da terra. Sabendo-se que toda superfície de um condutor é equipotencial e que o campo elétrico é normal a essa superfície em todos os pontos, as linhas de fluxo elétrico presentes entre o condutor e a terra podem ser descritas conforme mostra a Figura 2.17.

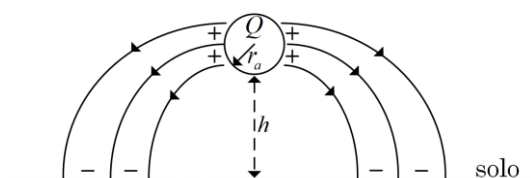


Figura 2.17 - Linhas de fluxo elétrico presentes em um sistema formado por um condutor suspenso sobre o solo. Fonte: autor (2020).

A terra ideal é considerada, em caráter de medições experimentais e análises teóricas, como sendo o potencial de referência nulo para grande parte dos sistemas. Devido a isso e também pela sua dimensão em relação aos condutores, ela pode ser representada por um plano infinito de potencial igual a zero. Essa configuração permite utilizar o método das imagens, onde uma configuração constituída de um condutor posicionado sobre um plano é substituída por uma em que um condutor com carga oposta é posicionado em uma localização simétrica abaixo do plano que é, por sua vez, removido do sistema. Essa configuração nova não modifica a distribuição dos campos elétricos sobre o plano retirado. A Figura 2.18 mostra a aplicação do método das imagens no sistema mostrado na figura anterior. O condutor com carga oposta é chamado de *condutor imagem*.

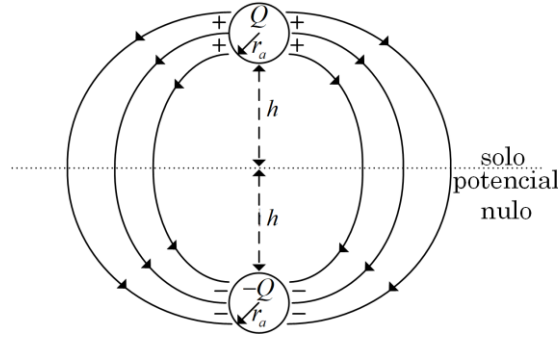


Figura 2.18 - Linhas de fluxo elétrico presentes em um sistema formado por um condutor e seu condutor imagem. Fonte: autor (2020).

Nos sistemas industriais, o suporte metálico aterrado representa, juntamente com o solo, o potencial de referencial nulo do sistema, modificando as linhas equipotenciais do sistema. Essa condição altera de maneira considerável os valores de capacitâncias dos condutores, tal como será visto no Capítulo 4. Todavia, no momento, são obtidas apenas as expressões analíticas para um caso bastante simples, composto por condutores sobre o solo ideal, a fim de se obter uma compreensão física sobre o tema.

A diferença de potencial entre o condutor  $a$  e o solo ( $V_{ao}$ ) é definida a partir da equação (2.48) situando o ponto 2 sobre a superfície do solo e o ponto 1 na superfície desse condutor, sendo ela causada pela atuação simultânea das cargas  $\rho_{l_a}$  e  $-\rho_{l_a}$ . Sendo  $h$  a distância entre o condutor principal e o solo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 V_{ao} &= \frac{\rho_{l_a}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h}{r_a} - \frac{\rho_{l_a}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h}{2h} = \\
 &= \frac{\rho_{l_a}}{2\pi\epsilon} \left( \ln \frac{h}{r_a} - \ln \frac{h}{2h} \right) = \\
 V_{ao} &= \frac{\rho_{l_a}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h}{r_a}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

#### v) Capacitâncias de um sistema trifásico

Ao considerar um sistema trifásico cujos condutores estão dispostos a uma certa altura do solo, tal como o mostrado na Figura 2.19, capacitâncias surgem entre todos os condutores e entre eles e o solo, sendo que estas últimas são definidas através do emprego de condutores imagem. Assumindo-se que todos os condutores

estão carregados, o potencial instantâneo do condutor 1 em relação ao solo é devido ao campo elétrico produzido pela própria carga, pela carga do seu condutor imagem, pela carga dos dois condutores vizinhos e dos seus respectivos condutores imagem. Nessas condições, empregando o mesmo raciocínio e as equações obtidas anteriormente, tem-se a Equação (2.53):

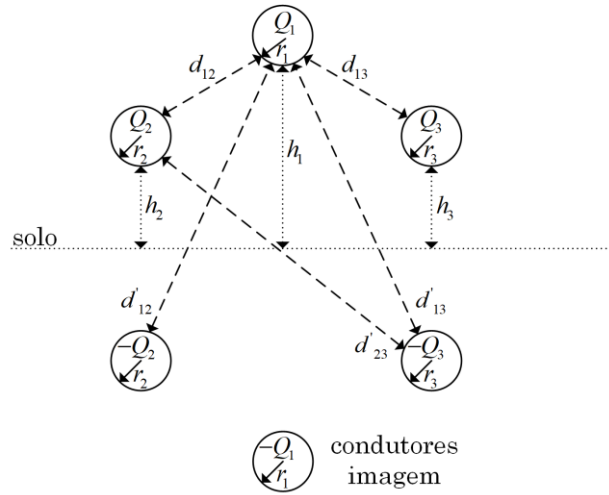


Figura 2.19 - Sistema trifásico composto pelos condutores principais e seus respectivos condutores imagens. Fonte: autor (2020).

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( \underbrace{\rho_{l1} \ln \frac{h_1}{r_1}}_{\text{potencial devido à própria carga}} + \underbrace{\rho_{l2} \ln \frac{r_2}{d_{12}} + \rho_{l3} \ln \frac{r_3}{d_{13}}}_{\text{potencial devido às cargas nos outros condutores}} - \underbrace{\rho_{l1} \ln \frac{h_1}{2h_1} - \rho_{l2} \ln \frac{r_2}{d'_{12}} - \rho_{l3} \ln \frac{r_3}{d'_{13}}}_{\text{potencial devido às cargas nos condutores-imagem}} \right) \quad (2.53)$$

onde  $V_1$  é o potencial instantâneo em relação ao solo.

Realizando manipulações algébricas, pode-se simplificar a expressão anterior e escrevê-la da seguinte maneira:

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( \rho_{l1} \ln \frac{2h_1}{r_1} + \rho_{l2} \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} + \rho_{l3} \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \right) \quad (2.54a)$$

Empregando a mesma ideia para os potenciais dos condutores 2 e 3, dados por  $V_2$  e  $V_3$ , obtém-se:

$$V_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( \rho_{l_2} \ln \frac{2h_2}{r_2} + \rho_{l_1} \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} + \rho_{l_3} \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \right) \quad (2.54b)$$

$$V_3 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( \rho_{l_3} \ln \frac{2h_3}{r_3} + \rho_{l_1} \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} + \rho_{l_2} \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \right) \quad (2.54c)$$

Colocando as três equações anteriores no formato matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r_1} & \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \\ \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r_2} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \\ \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} & \ln \frac{2h_3}{r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{l_1} \\ \rho_{l_2} \\ \rho_{l_3} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Os termos da diagonal principal definem os potenciais devido às cargas dos próprios condutores e de suas imagens, ao passo que os termos fora da diagonal caracterizam a influência das cargas localizadas nos condutores vizinhos e nas respectivas imagens.

Simbolicamente, a equação anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$[V] = [A][\rho_l] \quad (2.56)$$

onde a matriz  $A$  é chamada de *matriz dos coeficientes de potencial* ou *matriz dos coeficientes de campo elétrico* e é dada por:

$$[A] = \frac{1}{2\pi\epsilon} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r_1} & \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \\ \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r_2} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \\ \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} & \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} & \ln \frac{2h_3}{r_3} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Sua forma genérica é:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Uma vez que a capacitância é dada pela razão entre  $Q$  e  $V$ , pode-se afirmar que a matriz  $A$  representa o inverso da matriz de capacitâncias, isto é:

$$[C] = [A]^{-1} \quad (2.59)$$

Sendo, pois, a formação da matriz inversa dos coeficientes de potencial, dada também por:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

onde  $D$  é o determinante da matriz e  $G_{ii}$  e  $G_{ij}$  seus cofatores. Para determinar cada um desses termos, é necessário definir a formação da matriz de capacitâncias de acordo com os procedimentos listados no próximo parágrafo.

Considerando que o sistema é energizado por tensões senoidais, correntes também senoidais irão fluir pelos condutores, de modo que a carga elétrica em qualquer condutor variará de acordo com os valores instantâneos de potencial existente entre este condutor e os demais, e entre este e o solo. Sendo assim, dada as diferenças de potenciais em relação ao solo dos condutores de um sistema trifásico ( $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ ), as densidades de cargas lineares de cada um desses condutores ( $\rho_{l1}$ ,  $\rho_{l2}$  e  $\rho_{l3}$ ) se relacionam com essas tensões através das capacitâncias parciais em relação ao solo ( $C_{10}$ ,  $C_{20}$  e  $C_{30}$ ) e também por meio das capacitâncias parciais entre si ( $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ). Ou seja, as densidades de carga em cada um dos condutores podem ser determinadas em função das capacitâncias parciais e das tensões, tal como é mostrado a seguir, onde as grandezas são consideradas como sendo fasoriais:

$$\begin{aligned}
\rho_{l_1} &= C_{10}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) \\
\rho_{l_2} &= C_{20}V_2 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{23}(V_2 - V_3) \\
\rho_{l_3} &= C_{30}V_3 + C_{13}(V_1 - V_3) + C_{23}(V_2 - V_3)
\end{aligned}$$

ou

$$\rho_{l_1} = (C_{10} + C_{12} + C_{13})V_1 - C_{12}V_2 - C_{13}V_3 \quad (2.61a)$$

$$\rho_{l_2} = (C_{20} + C_{12} + C_{23})V_2 - C_{12}V_1 - C_{23}V_3 \quad (2.61b)$$

$$\rho_{l_3} = (C_{30} + C_{13} + C_{23})V_3 - C_{13}V_1 - C_{23}V_2 \quad (2.61c)$$

Colocando as equações anteriores em formato matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \rho_{l_1} \\ \rho_{l_2} \\ \rho_{l_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \begin{bmatrix} (C_{10} + C_{12} + C_{13}) & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{12} & (C_{20} + C_{12} + C_{23}) & -C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & (C_{30} + C_{13} + C_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

e

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_{10} + C_{12} + C_{13}) & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{12} & (C_{20} + C_{12} + C_{23}) & -C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & (C_{30} + C_{13} + C_{23}) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

onde  $[C]$  é a *matriz de capacitâncias*. Genericamente, ela pode ser expressa como:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Os termos da diagonal principal podem ser definidos como a *capacitância própria* de cada um dos condutores. Ela contabiliza todas as capacitâncias parciais associadas ao respectivo condutor, tanto em relação ao solo como também para os demais condutores. Por outro lado, os termos fora da diagonal principal são denominados de *capacitâncias mútuas*, e representam as capacitâncias parciais entre os condutores.

A Equação (2.62) pode ser escrita simbolicamente da seguinte maneira:

$$[\rho_i] = [C][V]$$

ou

$$[C] = [\rho_i][V]^{-1} \quad (2.65)$$

Dada a igualdade apresentada na Equação (2.59), pode-se determinar os termos da matriz de capacitâncias, exibida na Equação (2.63), através de sua comparação com a matriz inversa dos coeficientes de potencial, mostrada na Equação (2.60), ou seja:

$$\begin{aligned} (C_{10} + C_{12} + C_{13}) &= \frac{G_{11}}{D} \\ (C_{20} + C_{12} + C_{23}) &= \frac{G_{22}}{D} \\ (C_{30} + C_{13} + C_{23}) &= \frac{G_{33}}{D} \end{aligned} \quad (2.66)$$

e

$$\begin{aligned} -C_{12} &= \frac{G_{11}}{D} \\ -C_{13} &= \frac{G_{13}}{D} \\ -C_{23} &= \frac{G_{23}}{D} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Por substituição das Equações (2.67) nas Equações (2.66), obtém-se os valores das capacitâncias parciais entre os condutores e entre eles e o solo:

$$\begin{aligned}
C_{10} &= \frac{G_{11} + G_{12} + G_{13}}{D} \\
C_{20} &= \frac{G_{22} + G_{12} + G_{23}}{D} \\
C_{30} &= \frac{G_{33} + G_{13} + G_{23}}{D} \\
C_{12} &= -\frac{G_{12}}{D} \\
C_{13} &= -\frac{G_{13}}{D} \\
C_{23} &= -\frac{G_{23}}{D}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Os valores do determinante  $D$  e dos cofatores  $G_{ii}$  e  $G_{ij}$  são determinados através da inversão da matriz mostrada na Equação (2.57).

Nesse momento podem ser realizadas as mesmas observações apresentadas no último parágrafo da subseção que definiu as equações analíticas para as indutâncias, ou seja, a influência da proximidade dos condutores e da presença do suporte metálico alterariam bastante os valores analíticos até agora obtidos.

## 2.5. Matriz de Impedâncias Série e de Admitâncias em Paralelo

Os parâmetros de linhas e cabos de sistemas polifásicos são normalmente apresentados em termos de matrizes, definindo as chamadas matrizes de impedâncias série e de admitâncias em paralelo. Neste trabalho, elas foram exibidas, pela primeira vez, nas Equações (2.16) e (2.17), como membros integrantes das equações diferenciais que relacionam as tensões com as correntes da linha ou cabo de transmissão. Nesse momento, elas serão definidas em termos das matrizes de resistências, indutâncias e capacitâncias, obtidas na subseção anterior.

### 2.5.1. Matriz de Impedâncias Série

A matriz de impedâncias série foi apresentada na equação (2.18) para um sistema trifásico. Seus termos são determinados pela soma complexa das



resistências dos condutores com as suas reatâncias indutivas para uma dada frequência angular  $\omega$ . Ou seja, sua completa definição depende da obtenção das matrizes de resistências e reatâncias indutivas, conforme mostrado nos próximos subtópicos.

#### i) Matriz de resistências

A matriz de resistências de um sistema trifásico é dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

onde os termos  $R_{ii}$  representam as resistências próprias e  $R_{ij}$  as mútuas, consoante as definições apresentadas na subseção 2.4.1.

#### ii) Matriz de reatâncias indutivas

A partir da matriz de indutâncias, cujo processo de obtenção foi mostrado na subseção 2.4.2, pode-se formular a matriz de reatâncias indutivas. Para tal, assume-se que o sistema é excitado por correntes senoidais, de sorte que fasores podem ser utilizados para representar as grandezas de tensão e corrente, e que o domínio da frequência seja empregado. Dessa maneira, prossegue-se com os seguintes cálculos:

- Genericamente, a queda de tensão nos condutores devido à circulação de correntes alternadas está diretamente relacionada à lei de Lenz:

$$fem = -\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.70)$$

- Dada a definição de indutância, pode-se substituir o fluxo magnético  $\phi(t)$  por  $Li(t)$ , tal que:

$$fem = - \frac{d[Li(t)]}{dt} \quad (2.71)$$

- Assumindo a definição de fasor e substituindo o conceito de força eletromotriz por queda de tensão, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\Delta V = j\omega LI \quad (2.72)$$

onde a derivada no tempo de  $i(t)$  foi substituída pela multiplicação de sua forma fasorial por  $j\omega$ .

- Escrevendo a equação anterior em termos de matrizes, tem-se:

$$[\Delta V] = j\omega[L][I] \quad (2.73)$$

Portanto, dada a matriz de indutâncias (Equação (2.43)), e considerando a reatância indutiva como a parte imaginária da razão entre  $[\Delta V]$  e  $[I]$ , obtém-se:

$$[X_L] = \omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

ou

$$[X_L] = \begin{bmatrix} X_{L11} & X_{L12} & X_{L13} \\ X_{L21} & X_{L22} & X_{L23} \\ X_{L31} & X_{L32} & X_{L33} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

onde  $[X_L]$  é a *matriz de reatâncias indutivas* e os termos  $X_{Lii}$  e  $X_{Lij}$  correspondem às reatâncias indutivas associadas às indutâncias  $L_{ii}$  e  $L_{ij}$ , nessa ordem.

iii) Matriz de impedâncias série

Definidas as matrizes de resistências e reatâncias indutivas, pode-se determinar a matriz de impedâncias série para um sistema trifásico como:

$$[Z] = [R] + j[X_L]$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} X_{L11} & X_{L12} & X_{L13} \\ X_{L21} & X_{L22} & X_{L23} \\ X_{L31} & X_{L32} & X_{L33} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

onde  $[Z]$  é a *matriz de impedâncias série*, genericamente definida por:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

### 2.5.2. Matriz de Admitâncias em Paralelo

A matriz de admitâncias em paralelo é definida pela soma da matriz de condutâncias com a matriz de susceptâncias. Devido ao fato de a primeira ser considerada nula para as linhas e cabos de transmissão, a matriz de admitâncias pode ser obtida da seguinte maneira:

- Dada a definição de corrente:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2.77)$$

- A partir do conceito de capacitância, pode-se substituir a carga  $Q(t)$ , da expressão anterior, por  $Cv(t)$ , obtendo-se:

$$I(t) = \frac{d(CV(t))}{dt} \quad (2.78)$$

- Assumindo a definição de fasor, a equação anterior pode ser escrita como:

$$I = j\omega CV \quad (2.79)$$

- Obtém-se a equação anterior em termos de matrizes, fazendo:

$$[I] = j\omega[C][V] \quad (2.80)$$

- Sendo a admitância definida como a parte imaginária da razão entre  $[I]$  e  $[V]$ , tem-se:

$$[Y] = j\omega[C]$$

$$[Y] = j\omega \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

ou

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

onde  $[Y]$  é a *matriz de admitâncias em paralelo* e os termos  $Y_{ii}$  e  $Y_{ij}$  correspondem às reatâncias capacitivas associadas às capacitâncias  $C_{ij}$  e  $C_{ij}$ , respectivamente.

### 2.5.3. Matrizes de Sequência Positiva, Negativa e Zero

O método de componentes simétricas, desenvolvido por Fortescue em 1918, é largamente utilizado para a solução de problemas em sistemas de potência polifásicos desequilibrados. No que tange os estudos em alta frequências muitos modelos de cabos, tal como o idealizado em de Paula (2005), requer, como dados de entrada, os valores de parâmetros de cabos em termos das sequências positiva, negativa e zero. Por isso, a obtenção das matrizes de impedâncias e capacitâncias em termos de componentes simétricas é extremamente relevante.

As componentes de sequência podem ser facilmente obtidas através de transformações lineares das matrizes de impedâncias e capacitâncias

desenvolvidas, respectivamente, nas Equações (2.64) e (2.76). No entanto, visando obter um entendimento mais físico de tal representação, incluindo a explicação de algumas considerações comumente utilizadas na obtenção de tais componentes, será mostrada a determinação da componente de sequência positiva tanto para as indutâncias como para as capacitâncias.

i) Interpretação física da indutância de sequência positiva

Ao excitar um sistema trifásico equilibrado ( $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ) através de tensões senoidais, as correntes e os fluxos magnéticos associados a elas também terão comportamento senoidal. Sendo assim, no instante em que  $I_1$  é máximo, os valores instantâneos de  $I_2$  e  $I_3$  serão iguais e equivalentes à metade dos seus picos negativos. Dessa forma, o fluxo magnético total máximo enlaçado pelo condutor 1, dado pela Equação (2.39a), será:

$$\phi_1 = \frac{\mu}{2\pi} I_{máx} \left[ \ln \frac{2h_1}{r'_1} - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} + \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \right) \right] \quad (2.82)$$

onde  $I_{máx}$  é a amplitude da corrente.

A indutância associada a tal fluxo é:

$$L_1 = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \ln \frac{2h_1}{r'_1} - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} + \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} \right) \right] \quad (2.83a)$$

Aplicando o mesmo raciocínio aos demais condutores, tem-se:

$$L_2 = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \ln \frac{2h_2}{r'_2} - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{d'_{12}}{d_{12}} + \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \right) \right] \quad (2.83b)$$

$$L_3 = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \ln \frac{2h_3}{r'_3} - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{d'_{13}}{d_{13}} + \ln \frac{d'_{23}}{d_{23}} \right) \right] \quad (2.83c)$$

As indutâncias definidas nas três equações anteriores são as denominadas *indutâncias aparentes* das três fases da linha ou cabo de transmissão que, apesar de não terem um significado físico propriamente dito, são aquelas que são sentidas pela fonte que alimenta a linha. A Figura 2.20 ilustra tanto as indutâncias próprias e mútuas como as aparentes. A equação genérica para a indutância aparente  $L_i$  para o condutor  $i$  é:

$$L_i = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \ln \frac{2h_i}{r'_i} - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{d'_{ij}}{d_{ij}} + \ln \frac{d'_{ik}}{d_{ik}} \right) \right] \quad (2.84)$$

ou

$$L_i = L_{ii} - \frac{1}{2} (L_{ij} + L_{ik}) \quad (2.85)$$

onde

$$L_{ii} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r'_i} \quad (2.86)$$

e

$$L_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{d'_{ij}}{d_{ij}} \quad (2.87)$$

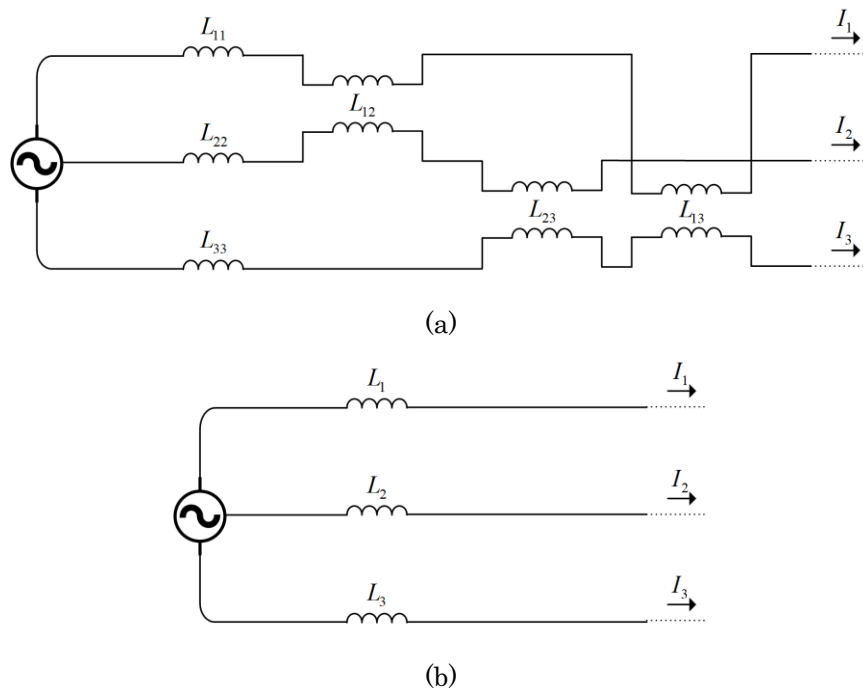


Figura 2.20 - Indutâncias das linhas e cabos de transmissão trifásicos: a) próprias e mútuas e b) aparentes. Fonte: autor (2020).

Para o sistema permanecer equilibrado, é fundamental que as quedas de tensão nas três linhas ou cabos sejam iguais. Assumindo que as características físicas dos três condutores sejam as mesmas, a queda de tensão devido à parcela resistiva da impedância será igual para os três. No entanto, a parcela devido à reatância indutiva vai necessitar que as alturas dos três condutores em relação ao solo, e também a distância entre eles, sejam iguais. Se colocados em formato de um lençol horizontal, a primeira condição é satisfeita, mas a segunda não, se inseridos na disposição de um triângulo equilátero, tem-se o inverso. Ou seja, considerando-se o efeito do solo, onde é necessário incluir um condutor imagem, haverá sempre um certo grau de desequilíbrio eletromagnético nas linhas ou cabos.

Uma forma de equilibrar tais linhas é através da transposição dos condutores, fazendo com que a corrente de uma fase seja transportada de 1/3 do comprimento da linha ou cabo em cada uma das posições nas estruturas. Dessa maneira, tem-se a mesma quantidade de queda de tensão nos três condutores, sendo dadas por:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = j\omega \left\{ \frac{1}{3} [L_{linha\ 1}] + \frac{1}{3} [L_{linha\ 2}] + \frac{1}{3} [L_{linha\ 3}] \right\} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

que desenvolvida, será:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \frac{j\omega}{3} \left\{ \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{33} & L_{31} & L_{32} \\ L_{13} & L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{23} & L_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{22} & L_{23} & L_{21} \\ L_{32} & L_{33} & L_{31} \\ L_{12} & L_{13} & L_{11} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

onde  $L_{ii}$  e  $L_{ij}$  são definidos pelas Equações (2.86) e (2.87).

Fazendo  $L_{ij} = L_{ji}$  e somando as matrizes, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \frac{j\omega}{3} \begin{bmatrix} (L_{11} + L_{22} + L_{33}) & (L_{12} + L_{13} + L_{23}) & (L_{12} + L_{13} + L_{23}) \\ (L_{12} + L_{13} + L_{23}) & (L_{11} + L_{22} + L_{33}) & (L_{12} + L_{13} + L_{23}) \\ (L_{12} + L_{13} + L_{23}) & (L_{12} + L_{13} + L_{23}) & (L_{11} + L_{22} + L_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

A equação matricial anterior pode ser resumida por:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_p & L_m & L_m \\ L_m & L_p & L_m \\ L_m & L_m & L_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

onde

$$L_p = \frac{L_{11} + L_{22} + L_{33}}{3} \quad (2.92)$$

e

$$L_m = \frac{L_{12} + L_{13} + L_{23}}{3} \quad (2.93)$$

onde  $L_p$  e  $L_m$  refletem a média das indutâncias próprias e mútuas quando da consideração de linhas transpostas.

Dessa maneira, após a transposição, pode-se afirmar que a linha se comporta como se todas as indutâncias próprias fossem iguais entre si, assim como as



mútuas. De modo que a matriz de indutâncias, definida na Equação (2.43), admite ser escrita da seguinte maneira:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_p & L_m & L_m \\ L_m & L_p & L_m \\ L_m & L_m & L_p \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

A definição da indutância de sequência positiva advém da Equação (2.85) por meio das novas considerações obtidas para o sistema transposto, isto é,  $L_{ii} = L_p$  e  $L_{ij} = L_{ik} = L_m$ . Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned} L_+ &= L_p - \frac{1}{2}(L_m + L_m) \\ L_+ &= L_p - L_m \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde  $L_+$  é a *indutância de sequência positiva*. Ou seja, ela representa o valor das indutâncias aparentes de cada uma das fases de uma linha ou cabo de transmissão trifásico cujo comportamento se equivale ao de uma linha ou cabo transposto.

## ii) Interpretação física da capacitância de sequência positiva

Similarmente ao que foi realizado para a obtenção da indutância de sequência positiva, pode-se determinar a *capacitância de sequência positiva* a partir das *capacitâncias aparentes*. Estas capacitâncias são capazes de representar a influência de todos os acoplamentos capacitivos existentes entre os condutores e entre eles e o solo, porém, empregando apenas uma capacitância por fase na elaboração do circuito equivalente, apresentado na Figura 2.21.

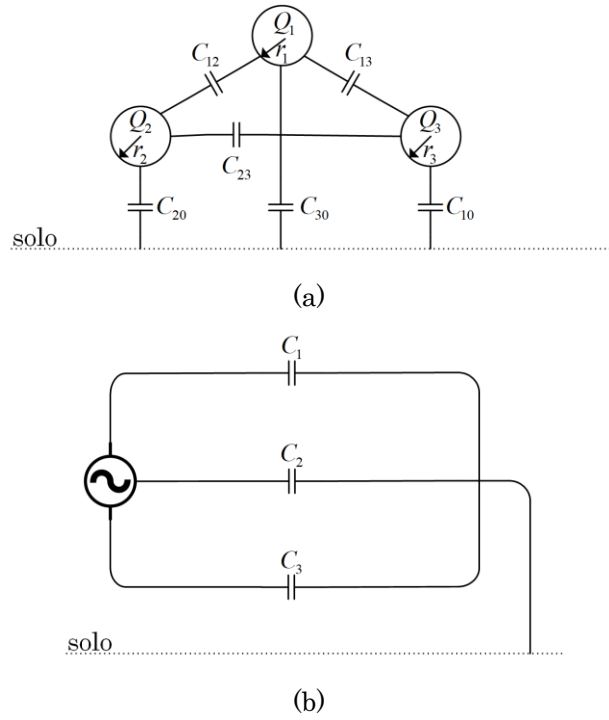


Figura 2.21 - Capacitâncias das linhas e cabos de transmissão trifásicos: (a) parciais e (b) aparentes. Fonte: autor (2020).

Assumindo um sistema trifásico equilibrando, onde  $V_1 + V_2 + V_3 = 0$ , quando a tensão  $V_1$  está no seu máximo,  $V_2$  e  $V_3$  estão na metade dos seus picos negativos. Isto posto, as Equações (2.61), que definem as densidades de cargas lineares em cada um dos condutores, são dadas por:

$$\rho_{l_1 máx} = \left[ (C_{10} + C_{12} + C_{13}) + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{13}) \right] V_{máx}$$

$$\rho_{l_2 máx} = \left[ (C_{20} + C_{12} + C_{23}) + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{23}) \right] V_{máx}$$

$$\rho_{l_3 máx} = \left[ (C_{30} + C_{13} + C_{23}) + \frac{1}{2}(C_{13} + C_{23}) \right] V_{máx}$$

ou

$$\rho_{l_1 máx} = \left[ C_{10} + \frac{3}{2}(C_{12} + C_{13}) \right] V_{máx} \quad (2.96a)$$

$$\rho_{l_2 máx} = \left[ C_{20} + \frac{3}{2}(C_{12} + C_{23}) \right] V_{máx} \quad (2.96b)$$

$$\rho_{l_3 máx} = \left[ C_{20} + \frac{3}{2}(C_{13} + C_{23}) \right] V_{máx} \quad (2.96c)$$

As capacitâncias associadas a tais densidades de cargas lineares são:

$$C_1 = \left[ C_{10} + \frac{3}{2}(C_{12} + C_{13}) \right] \quad (2.97a)$$

$$C_2 = \left[ C_{20} + \frac{3}{2}(C_{12} + C_{23}) \right] \quad (2.97b)$$

$$C_3 = \left[ C_{20} + \frac{3}{2}(C_{13} + C_{23}) \right] \quad (2.97c)$$

As capacitâncias definidas nas Equações (2.97) são as capacitâncias aparentes comentadas anteriormente, cuja fórmula genérica é:

$$C_i = \left[ C_{i0} + \frac{3}{2}(C_{ij} + C_{ik}) \right] \quad (2.98)$$

Uma vez que a definição de capacitância de sequência positiva está diretamente associada a uma linha de transmissão equilibrada, é necessário que as três capacitâncias aparentes sejam iguais entre si. Lembrando que os valores das capacitâncias provêm da matriz  $[A]$ , desenvolvida na Equação (2.57), é imprescindível que ela possua todos os elementos da diagonal principal iguais entre si, assim como os termos fora da diagonal, para que tal condição seja satisfeita. Isso só é obtido, assim como no caso da obtenção da indutância de sequência positiva, através da utilização de condutores iguais e da transposição da linha.

Dessa maneira, tem-se que a diferença de potencial entre os três condutores e o solo será dada por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \left\{ \frac{1}{3} [A_{linha\ 1}] + \frac{1}{3} [A_{linha\ 2}] + \frac{1}{3} [A_{linha\ 3}] \right\} \begin{bmatrix} \rho_{l_1} \\ \rho_{l_2} \\ \rho_{l_3} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

que desenvolvida, será:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{33} & A_{31} & A_{32} \\ A_{13} & A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{23} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{21} \\ A_{32} & A_{33} & A_{31} \\ A_{12} & A_{13} & A_{11} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \rho_{l_1} \\ \rho_{l_2} \\ \rho_{l_3} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Fazendo  $A_{ij} = A_{ji}$  e somando as matrizes, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (A_{11} + A_{22} + A_{33}) & (A_{12} + A_{13} + A_{23}) & (A_{12} + A_{13} + A_{23}) \\ (A_{12} + A_{13} + A_{23}) & (A_{11} + A_{22} + A_{33}) & (A_{12} + A_{13} + A_{23}) \\ (A_{12} + A_{13} + A_{23}) & (A_{12} + A_{13} + A_{23}) & (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{l_1} \\ \rho_{l_2} \\ \rho_{l_3} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

A equação matricial anterior pode ser resumida por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} A_p & A_m & A_m \\ A_m & A_p & A_m \\ A_m & A_m & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{l_1} \\ \rho_{l_2} \\ \rho_{l_3} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

onde

$$A_p = \frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{3} \quad (2.103)$$

e

$$A_m = \frac{A_{12} + A_{13} + A_{23}}{3} \quad (2.104)$$

Efetuada a inversão da matriz  $[A]$  na Equação (2.102) e igualando os termos aos da Equação (2.60), onde a sua inversa foi definida, obtém-se os respectivos valores para o determinante  $D$  e os cofatores  $G_{ii}$  e  $G_{ij}$  da matriz  $[A]^{-1}$ :

$$D = \frac{(A_p - A_m)^2 (A_p + 2A_m)}{3} \quad (2.105)$$

$$G_{ii} = (A_p^2 - A_m^2) \quad (2.106)$$

$$G_{ij} = -A_m(A_p - A_m) \quad (2.107)$$

Pode-se afirmar a partir das expressões anteriores que os elementos da diagonal principal da matriz  $[A]^{-1}$  são iguais entre si quando da consideração da linha ou cabo equilibrado, assim como os que estão fora da diagonal. A matriz  $[C]$ , portanto, apresentará a mesma característica, cujas capacitâncias parciais podem ser definidas para o presente caso aplicando as Equações (2.68) e assumindo  $G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{ii}$  e  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G_{ij}$ , onde  $G_{ii}$  e  $G_{ij}$  foram definidos nas Equações (2.106) e (2.107), respectivamente. Dessa forma, tem-se:

$$C_{i0} = \frac{1}{A_p + 2A_m} \quad (2.108)$$

$$C_m = \frac{A_m}{(A_p - A_m)(A_p - 2A_m)} \quad (2.109)$$

onde  $C_{i0}$  representa a capacitância média entre cada fase e o solo e  $C_m$  é a capacitância média entre fases, ambos verdadeiros para sistemas transpostos.

Portanto, por meio da transposição, garante-se que a linha ou cabo se comporte como se todas as capacitâncias parciais em relação ao solo, como também as definidas entre os condutores, fossem iguais. Podendo a matriz de capacitâncias, definida na Equação (2.63), ser escrita da seguinte:

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_{i0} + 2C_m) & C_m & C_m \\ C_m & (C_{i0} + 2C_m) & C_m \\ C_m & C_m & (C_{i0} + 2C_m) \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Dessa forma, a formulação da capacitância de sequência positiva é obtida por meio da Equação (2.98) e da consideração que  $C_{ij} = C_{ik} = C_m$ , que é verdadeira para um sistema transposto, isto é:

$$\begin{aligned} C_+ &= \left[ C_{i0} + \frac{3}{2}(C_m + C_m) \right] \\ C_+ &= C_{i0} + 3C_m \end{aligned} \quad (2.111)$$

onde  $C_+$  é a *capacitância de sequência positiva*. Essa capacitância é, portanto, capaz de representar os acoplamentos capacitivos existentes entre os condutores e entre eles e o solo através de um único parâmetro capacitivo, cujo real sentido físico baseia-se na consideração de linhas ou cabos transpostos.

A capacitância  $C_{i0}$ , Equação (2.108), por sua vez, representa a *capacitância de sequência zero* de uma linha trifásica simples.

### iii) Impedâncias de sequência positiva, negativa e zero

Através de uma simples operação matricial, as impedâncias de sequência positiva, negativa e zero podem ser obtidas através da matriz de impedâncias série, da seguinte maneira:

$$[Z_s] = [T]^{-1}[Z][T] \quad (2.112)$$

onde  $[Z]$  é a matriz de impedâncias série, mostrada na Equação (2.76),  $[Z_s]$  é a matriz de impedâncias série em componentes simétricas e os termos  $[T]$  e  $[T]^{-1}$  são as matrizes de transformação direta e inversa, definidas pelo Teorema de Fortescue. A matriz  $[Z_s]$  é dada por:

$$[Z_s] = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{0+} & Z_{0-} \\ Z_{+0} & Z_{++} & Z_{+-} \\ Z_{-0} & Z_{-+} & Z_{--} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

em que  $Z_{00}$  é a impedância de sequência zero,  $Z_{++}$  é a impedância de sequência positiva e  $Z_{--}$  é a impedância de sequência negativa, já os termos fora da diagonal

principal correspondem às impedâncias mútuas entre sequências ou impedâncias mútuas intersequenciais.

Os termos  $[T]$  e  $[T]^{-1}$  são, por sua vez, determinados pelas seguintes expressões:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

$$[T]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

onde  $a$  é um operador definido por  $e^{j120^\circ}$ .

Efetuada a operação indicada pela Equação (2.112), tem-se:

$$\begin{aligned} Z_{00} &= \frac{Z_{11} + Z_{22} + Z_{33}}{3} + \frac{2(Z_{12} + Z_{13} + Z_{23})}{3} \\ Z_{++} = Z_{--} &= \frac{Z_{11} + Z_{22} + Z_{33}}{3} - \frac{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}{3} \\ Z_{+-} &= \frac{Z_{11} + a^2 Z_{22} + a Z_{33}}{3} + \frac{2(a Z_{12} + a^2 Z_{13} + Z_{23})}{3} \\ Z_{-+} &= \frac{Z_{11} + a Z_{22} + a^2 Z_{33}}{3} + \frac{2(a^2 Z_{12} + a Z_{13} + Z_{23})}{3} \\ Z_{+0} = Z_{0-} &= \frac{Z_{11} + a Z_{22} + a^2 Z_{33}}{3} - \frac{a^2 Z_{12} + a Z_{13} + Z_{23}}{3} \\ Z_{0+} = Z_{-0} &= \frac{Z_{11} + a^2 Z_{22} + a Z_{33}}{3} - \frac{a Z_{12} + a^2 Z_{13} + Z_{23}}{3} \end{aligned} \quad (2.116)$$

No caso de sistemas transpostos, conforme mostrado no subtópico i), a matriz de impedâncias série é formada por elementos da diagonal principal iguais entre si e dados por  $Z_p$ , do mesmo modo que os elementos fora da diagonal principal são também iguais entre si e determinados por  $Z_m$ , sendo  $Z_p$  e  $Z_m$  definidos pela média das impedâncias próprias e mútuas, respectivamente. Substituindo esses termos nas equações anteriores, obtém-se:

$$Z_{00} = Z_p + 2Z_m \quad (2.117)$$

$$Z_{++} = Z_{--} = Z_p - Z_m \quad (2.118)$$

$$Z_{+-} = Z_{-+} = Z_{+0} = Z_{0-} = Z_{0+} = Z_{-0} = 0 \quad (2.119)$$

A Equação (2.118) está conforme a expressão obtida na equação (2.95), mostrando que a abordagem física, explicitada no subtópico i), está correta e de acordo com as operações matriciais que conduzem ao desenvolvimento das componentes simétricas. As equações anteriores, inseridas na matriz mostrada na Equação (2.113), gera:

$$[Z_s] = \begin{bmatrix} (Z_p + 2Z_m) & 0 & 0 \\ 0 & (Z_p - Z_m) & 0 \\ 0 & 0 & (Z_p - Z_m) \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

iv) Capacitâncias de sequência positiva, negativa e zero

A obtenção das componentes simétricas associadas às capacitâncias, é conduzida de maneira similar ao que foi processado para a matriz de impedâncias série, ou seja:

$$[C_s] = [T]^{-1}[C][T] \quad (2.121)$$

onde  $[C_s]$  é a matriz de capacitâncias em componentes simétricas e  $[C]$  é definida por:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{0+} & C_{0-} \\ C_{+0} & C_{++} & C_{+-} \\ C_{-0} & C_{-+} & C_{--} \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

Assumindo, de pronto, um sistema composto por linhas ou cabos transpostos, a matriz de capacitâncias  $[C]$  assume, como visto, a forma dada pela



Equação (2.110). O resultado esperado para a matriz  $[C_s]$  é, portanto, similar ao obtido nas Equações (2.117), (2.118) e (2.119). Ou seja:

$$\begin{aligned} C_{00} &= (C_{i0} + 2C_m) + 2(-C_m) \\ C_{00} &= C_{i0} \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} C_{++} &= C_{--} = (C_{i0} + 2C_m) - (-C_m) \\ C_{++} &= C_{--} = C_{i0} + 3C_m \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$C_{+-} = C_{-+} = C_{+0} = C_{0-} = C_{0+} = C_{-0} = 0 \quad (2.125)$$

Logo, a matriz de capacitâncias em componentes simétricas é:

$$[C_s] = \begin{bmatrix} C_{i0} & 0 & 0 \\ 0 & (C_{i0} + 3C_m) & 0 \\ 0 & 0 & (C_{i0} + 3C_m) \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

O resultado obtido está conforme a subseção ii), cujo processão de obtenção das componentes de sequência adotou um contexto físico.

#### v) Considerações Finais

Nos estudos apresentados nesta subseção percebeu-se a simplificação obtida para as matrizes de impedâncias série e capacitâncias, assim como as respectivas matrizes de componentes, quando elas apresentam seus elementos próprios e mútuos iguais entre si. Para tal, os sistemas foram considerados como sendo compostos por cabos transpostos, uma vez que não existe configuração geométrica possível que possibilite a todos os três condutores de um sistema trifásico possuir, ao mesmo tempo, tanto os elementos próprios como os mútuos idênticos um ao outro. Em sistemas reais, todavia, não é possível garantir que os cabos estejam transpostos, o que poderia inviabilizar tal consideração.

Quando da determinação das componentes simétricas, a matriz  $[T]$  é capaz de diagonalizar as matrizes de impedâncias série e de capacitâncias, caso estas sejam balanceadas. No caso de sistemas não transpostos, seria necessária uma

matriz adequada a esta finalidade, obtida por meio do cálculo de autovalores e autovetores. Felizmente, na maioria das situações práticas, apesar de não serem iguais, os parâmetros próprios e mútuos apresentam valores muito semelhantes entre si. Dessa maneira, as matrizes de impedâncias série e de capacitâncias podem ser apresentadas com valores iguais para os elementos da diagonal principal, assim como para os elementos fora dessa diagonal, através da aplicação da média aritmética dos parâmetros próprios e mútuos. Essa simplificação não acarreta grandes inexatidões e facilita bastante a obtenção de matrizes balanceadas em relação ao método que envolve o cálculo de autovalores e autovetores.

## 2.6. Fenômenos que Influenciam no Cálculo dos Parâmetros

Todas as equações analíticas obtidas até então, desconsideraram a presença dos efeitos pelicular e proximidade. Nesta subseção são conceituados e formulados tais efeitos, mostrando como eles influenciam nos valores de parâmetros de cabos.

### 2.6.1. Efeito Pelicular

Ao contrário do que acontece na circulação de correntes contínuas, cuja densidade se distribui de maneira uniforme através da seção transversal dos condutores, correntes alternadas tendem a fluir com maior intensidade através de camadas mais próximas da superfície dos condutores. Esse comportamento é denominado de *efeito pelicular* e depende das propriedades do material do condutor e da frequência da corrente imposta.

O efeito pelicular pode ser enunciado da seguinte forma: quando o condutor é percorrido por correntes que variam no tempo, tem-se a produção de campos eletromagnéticos em seu interior que também variam no tempo. Estes, por sua vez, vão dar origem às chamadas correntes parasitas. As correntes parasitas possuem direção e sentido de circulação de tal modo que atuam como incremento à corrente principal nas periferias e a reduz no centro do condutor. A Figura 2.22 melhora a compreensão do que foi exposto.

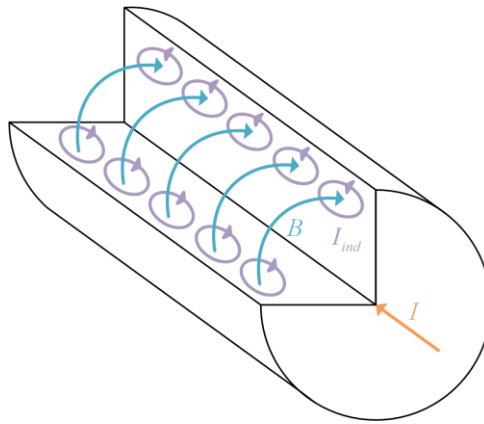


Figura 2.22 - Campos magnéticos variantes no tempo, produzidos pela corrente alternada que flui pelo condutor, geram correntes parasitas que afetam a distribuição da corrente principal. Fonte: autor (2020).

À medida que a frequência da corrente aumenta, mais os campos eletromagnéticos crescem e, assim, também, as correntes parasitas, pronunciando o efeito pelicular. A Figura 2.23 mostra a densidade de corrente na seção transversal de um condutor metálico para quatro frequências diferentes: 60 Hz, 1 kHz, 10 kHz e 100 kHz.

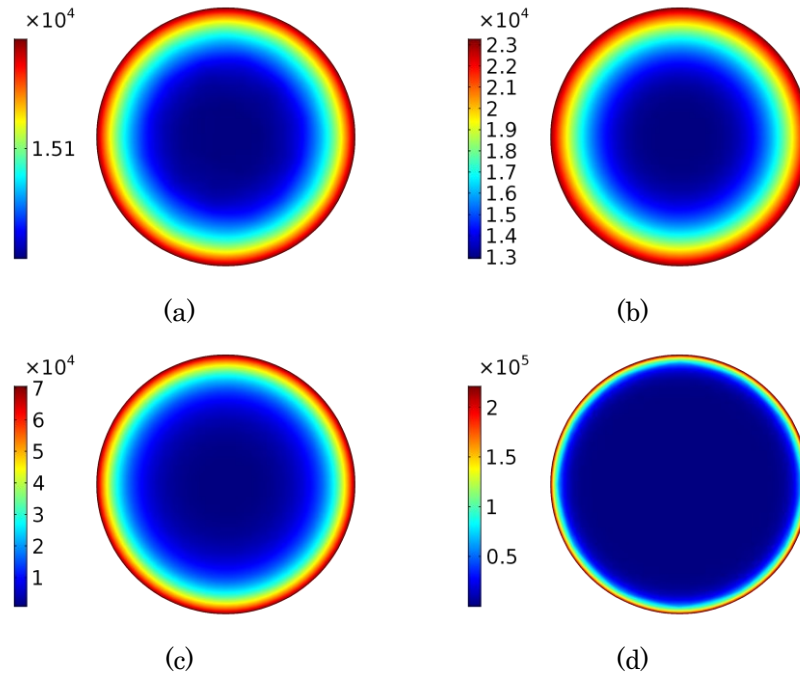


Figura 2.23 - Densidade de corrente no condutor para as frequências de: a) 60 Hz b) 1 kHz c) 10 kHz e d) 100 kHz. Fonte: autor (2020).

Para entender o efeito pelicular sob o ponto de vista de reatâncias internas, basta considerar um tubo elementar no interior do condutor, idêntico ao da Figura 2.9, e calcular o fluxo magnético embarcado por ele. No entanto, ao invés de considerar seu raio variando de 0 até  $r_a$ , a fim de contemplar todo o fluxo produzido, seu raio é estendido de  $r'$  até  $r_a$ . Para isso, é necessário apenas modificar os limites de integração associados ao elemento diferencial  $d\rho$ , presente nos cálculos empregados para a determinação da Equação (2.24). Sendo assim, o fluxo magnético embarcado pelo tubo de raio definido de  $r'$  até  $r_a$ , é:

$$\Phi_{int} = \frac{\mu l (r_a^4 - r'^4)}{8\pi r_a^4} \quad (2.127)$$

A indutância associada a esta equação é dada por:

$$L_{int} = \frac{\mu l (r_a^4 - r'^4)}{8\pi r_a^4} \quad (2.128)$$

De acordo com a Equação (2.128), pode-se afirmar que a indutância interna de um tubo é maior quando ele é caracterizado por pequenos valores de  $r'$  e se aproxima de zero à medida que esses valores se aproximam do raio externo  $r_a$ . Isso significa que, para uma dada frequência, a reatância interna do condutor pode ser enxergada como sendo distribuída ao longo de círculos concêntricos definidos na sua seção transversal, de forma que círculos menores, mais próximos do centro, definam regiões com reatâncias de valores menores em relação àquelas determinadas por círculos mais próximos da periferia.

Se uma tensão alternada é imposta nos terminais do cabo, menos corrente irá fluir na região de alta reatância do centro do condutor em relação a uma de área equivalente, mas de raio maior. A resistência do condutor, associada à área da seção transversal por onde flui a corrente, é, por consequência, também afetada. Dessa maneira, pode-se afirmar que a distribuição da densidade de corrente alternada não é uniforme através da seção do condutor, diferentemente do que acontece quando correntes contínuas fluem por ele, sendo esse efeito tanto maior quanto frequências mais elevadas são consideradas, uma vez que os campos eletromagnéticos e as correntes induzidas no interior do condutor se amplificam.

A consequência do efeito pelicular é, portanto, o aumento da resistência aparente e a diminuição da indutância do condutor à medida que a frequência da corrente que flui por ele também cresce. Como exemplo, a Tabela 2.1 mostra o aumento percentual da resistência e da indutância de um condutor de cobre de 50 mm<sup>2</sup>, cuja condutividade é de 58,14 MS/m, para cinco frequências diferentes, em relação à resistência e à indutância para uma corrente de 60 Hz. O solo foi considerado ideal.

Tabela 2.1 – Aumento percentual da resistência e da indutância de um condutor, para diversas frequências, em relação à resistência e à indutância do mesmo condutor para uma corrente de 60 Hz.

Freq. (Hz)	R (%)	
	$R_a'$	$L_a'$
1k	27,56	-0,55
10k	246,98	-2,44
100k	953,79	-3,19
1M	3429,36	-3,24

Através da análise da tabela anterior, é possível afirmar que o efeito pelicular influencia muito mais a resistência do que a indutância do cabo. Isso ocorre porque a indutância, conforme foi visto anteriormente, é composta por duas parcelas: a indutância interna e a externa, e apenas a primeira é afetada por esse fenômeno. De acordo com Chipman (1968), a indutância interna de um condutor prático normalmente constitui apenas algo em torno de 10% da indutância total, considerando frequências baixas, porcentagem que é reduzida com o aumento da frequência.

As expressões matemáticas que caracterizam o efeito pelicular são concebidas no intuito de descrever o comportamento da densidade de corrente no interior do condutor em função da densidade de corrente em sua superfície. Sua fórmula exata é obtida através da aplicação da lei de Faraday em um caminho fechado retangular, colocado no sentido longitudinal do condutor, e da lei de Ampère ao longo de um círculo definido na seção transversal do mesmo condutor, conforme mostra a Figura 2.24. Uma fonte de tensão externa impondo uma corrente que circula apenas na direção de  $z$  é, então, considerada, de modo que a densidade de corrente resultante em qualquer ponto no interior do condutor dependa apenas da distância  $r$  do seu centro, se mantendo constante em círculos concêntricos definidos em seções transversais do condutor.

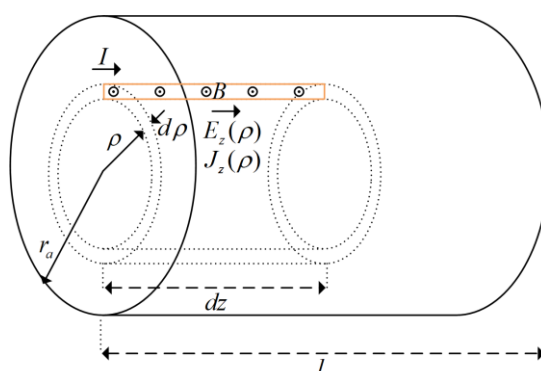


Figura 2.24 - Definição dos caminhos retangulares e circulares para aplicação das leis de Faraday e Ampère, respectivamente. Fonte: autor (2020).

Iniciando os cálculos pela aplicação a lei de Faraday no caminho retangular, obtém-se:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = -j\omega \int_S \vec{B} \, d\vec{S} \quad (2.129)$$

Como foi assumido uma corrente apenas na direção de  $z$ , o campo elétrico que a origina também é considerado apenas nessa direção, de modo que o produto de  $E_\rho d\rho$ , presente nas arestas do retângulo, perpendiculares ao condutor, é igual a zero. Isto posto, tem-se, para o membro do lado esquerdo da equação anterior, a seguinte expressão:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = \underbrace{\left( E_z(\rho) + \frac{\partial E_z(\rho)}{\partial \rho} \right) dz}_{\text{aresta de cima}} - \underbrace{E_z(\rho) dz}_{\text{aresta de baixo}} \quad (2.130)$$

O segundo membro da equação (2.130) representa o fluxo magnético harmônico no tempo que atravessa o retângulo apresentado na Figura 2.24. O campo magnético associado a esse fluxo é produzido por uma densidade de corrente variável, de modo que para calculá-lo, é necessário aplicar a lei de Ampère no caminho circular mostrado na figura anterior. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \, d\vec{l} &= \int_S \vec{J} \, d\vec{S} \\ \oint (H_\phi \vec{a}_\phi) (d\vec{l} \vec{a}_\phi) &= \int_S (J_z(\rho) \vec{a}_z) (dS_z \vec{a}_z) \\ \int_{\phi=0}^{2\pi} H_\phi (\rho d\phi) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho} J_z(\rho) (\rho d\rho d\phi) \\ H_\phi 2\pi\rho &= 2\pi \int_{\rho=0}^{\rho} J_z(\rho) \rho d\rho \\ H_\phi &= \frac{\int_{\rho=0}^{\rho} J_z(\rho) \rho d\rho}{\rho} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Os procedimentos para se obter a equação anterior se diferenciam em relação aos que foram executados na determinação da Equação (2.24) porque, agora, a densidade de corrente não é uniforme na seção transversal do condutor,

não podendo ser considerada constante na integração do elemento diferencial de raio  $d\rho$ .

Aplicando a expressão da intensidade de campo magnético, obtida na equação (2.131), no cálculo do fluxo magnético que atravessa a área retangular, conforme o membro do lado direito da equação (2.129), tem-se:

$$\begin{aligned}
 -j\omega \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= -j\omega \int_S (\mu H_\phi \vec{a}_\phi) (dS \vec{a}_\phi) = \\
 &= -j\omega \int_{z=z}^{z+dz} \int_{\rho=\rho}^{\rho+d\rho} \left[ \mu \left( \frac{\int_{\rho=0}^{\rho} J_z(\rho) \rho d\rho}{\rho} \right) \right] (d\rho dz) = \\
 &= -j\omega \frac{\mu d\rho dz}{\rho} \int_{\rho=0}^{\rho} J_z(\rho) \rho d\rho
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Igualando a Equação (2.130) à Equação (2.132), substituindo  $E_z(\rho)$  por  $J_z(\rho)/\sigma$ , multiplicando ambos os lados por  $\rho/(d\rho dz)$ , diferenciando ambos os lados em relação a  $\rho$  e, finalmente, dividindo todos os termos por  $\rho$ , concebe-se:

$$\frac{\partial^2 J_z(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_z(\rho)}{\partial \rho} - j\omega \mu \sigma J_z(\rho) = 0 \tag{2.133}$$

A solução exata da Equação (2.133) é dada em termos das funções de Bessel que, através de manipulações algébricas e estabelecimento de condições de contorno, conforme mostrado em Chipman (1968), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$J_z(\rho) = J_z(r_a) \frac{\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\delta}\right) + j\text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\delta}\right)}{\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}r_a}{\delta}\right) + j\text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}r_a}{\delta}\right)} \tag{2.134}$$

onde  $J_z(\rho)$  é a densidade de corrente em um raio  $\rho$  no interior do condutor,  $J_{r_a}$  é a densidade de corrente na superfície do condutor, ber e bei, chamadas de funções de Kelvin, são as partes reais e imaginárias da função complexa de Bessel. O termo  $\delta$ ,



chamado de *profundidade de penetração*, é bastante conhecido, e é determinado através da próxima equação:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2.135)$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  são a permeabilidade magnética e a condutividade do condutor e  $\omega$  a frequência angular da corrente.

O entendimento do comportamento da densidade de corrente em um condutor a partir da Equação (2.134) não é intuitivo, necessitando que gráficos sejam utilizados, como os apresentados em Chipman (1968). Devido a isso, grande parte dos livros e artigos empregam uma solução aproximada, em que a distribuição da densidade de corrente é tomada como sendo a mesma encontrada na penetração de campos eletromagnéticos em bons condutores. Basicamente, as equações que definem a densidade de corrente no condutor, nesses dois casos, se diferenciam apenas em relação às coordenadas espaciais empregadas: enquanto no efeito pelicular são adotadas coordenadas cilíndricas; no estudo da penetração de ondas eletromagnéticas nos condutores são normalmente empregadas coordenadas cartesianas. O tipo de coordenada escolhido está relacionado à configuração geométrica do problema.

Seguindo o que foi comentado no parágrafo anterior, será mostrado agora como determinar a expressão que descreve o efeito pelicular a partir das equações diferenciais de Maxwell na forma diferencial e como as duas soluções comentadas em tal parágrafo se diferenciam.

Partindo da terceira e da quarta equação de Maxwell, definidas para o caso de ondas ou campos harmônicos no tempo, tem-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.136)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \quad (2.137)$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados da Equação (2.136), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{\nabla} \times \vec{H} \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{\nabla} \times \vec{H} \\
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= j\omega\mu\vec{\nabla} \times \vec{H}
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Nos cálculos mostrados acima, assumiu-se uma identidade vetorial na resolução do membro do lado esquerdo da equação.

Em seguida, substituindo  $\vec{J}$  por  $\sigma\vec{E}$  e  $\vec{D}$  por  $\epsilon\vec{E}$  na Equação (2.137), concebe-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \tag{2.139}$$

Considerando que  $\sigma \gg j\omega\epsilon$ , substituindo a Equação (2.139) na Equação (2.138) e trocando  $\sigma\vec{E}$  por  $\vec{J}$ , é possível determinar a equação resultante em termos apenas da densidade de corrente:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{J} = j\omega\mu\sigma\vec{J} \tag{2.140}$$

Primeiramente, assume-se a corrente circulando na direção de  $z$ , sem variações nas coordenadas  $z$  e  $\phi$ . Dessa forma, o sistema está definido em coordenadas cilíndricas e o laplaciano da Equação (2.140) é dado por:

$$\frac{\partial^2 J_z(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_z(\rho)}{\partial \rho} - j\omega\mu\sigma J_z(\rho) = 0 \tag{2.141}$$

A equação anterior é exatamente a mesma obtida na Equação (2.133), conforme esperado, e sua solução está exibida na Equação (2.134).

Agora, negligenciando a curvatura do condutor, e considerando um campo elétrico polarizado na direção de  $z$ , se propagando na direção de  $x$ , e incidindo em um condutor semi-infinito preenchendo o espaço  $x > 0$ , tem-se para o laplaciano da Equação (2.140), a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 J_z(x)}{\partial x^2} - j\omega\mu\sigma J_z(x) = 0 \quad (2.142)$$

onde empregaram-se coordenadas cartesianas.

A solução da equação anterior é (Ramo et al., 1998):

$$J_z(x) = J_z(x=0)e^{-x/\delta} \quad (2.143)$$

Ao comparar as soluções das Equações (2.141) e (2.142), dadas pelas Equações (2.134) e (2.143), respectivamente, é possível afirmar que a segunda apresenta uma formulação muito mais simples e intuitiva: o decaimento da densidade de corrente em direção ao centro do condutor é exponencial e depende da profundidade de penetração  $\delta$ ; para  $r = \delta$ , sendo  $r$  o raio medido a partir da superfície do condutor, tem-se um valor de densidade de corrente equivalente a 37% em relação à que circula na borda e, para  $r = 5\delta$ , esse valor é de 0,67%. Já a primeira, dada em termos das funções de Bessel, é bastante complexa.

Segundo Ramo et al. (1998), se a razão entre o raio do condutor e a profundidade de penetração é alta ( $r_a/\delta$ ), representando os casos em que o efeito pelicular afeta fortemente a distribuição das correntes, o erro em utilizar a expressão para coordenadas planas ao invés de cilíndricas é bastante pequeno. Por essa razão, a Equação (2.143) é utilizada em grande parte dos livros e artigos que tratam do efeito pelicular, no entanto, quase sempre, não se explicam essas questões de aproximação aqui abordadas. A profundidade de penetração  $\delta$  irá servir como o principal parâmetro de referência para o refinamento da malha dos condutores.

### 2.6.2. Efeito Proximidade

Outro fenômeno de especial interesse quando se estuda os parâmetros de cabos elétricos é o efeito proximidade. Enquanto o efeito pelicular é responsável por redistribuir a densidade de corrente do próprio condutor; o efeito proximidade é responsável por alterar a densidade de corrente de um condutor vizinho.

O efeito proximidade pode ser explicitado da seguinte forma: quando dois condutores estão próximos entre si e circula corrente alternada pelo primeiro, campos eletromagnéticos variantes no tempo induzem correntes no segundo. Essas correntes induzidas possuem direção e sentido de circulação de modo a aumentar a densidade de corrente do segundo condutor na região mais próxima ao primeiro. Essas correntes parasitas produzem seus próprios campos magnéticos que, em um efeito proximidade de resposta, também influenciam na densidade de corrente do primeiro condutor. Para bons condutores, os impactos do efeito proximidade são sentidos até que os campos magnéticos não consigam mais penetrar nos condutores, consequência da atenuação dos campos, quantificada pela profundidade de penetração.

Uma forma de demonstrar a presença do efeito proximidade é através da visualização das densidades de corrente presentes nos condutores quando apenas um deles está conduzindo a corrente principal do sistema, tal como mostra a Figura 2.25. É possível perceber através dessa figura que o efeito proximidade causa uma distribuição assimétrica das densidades de correntes em todos os condutores, cujas regiões mais influenciadas são aquelas mais próximas aos condutores vizinhos.

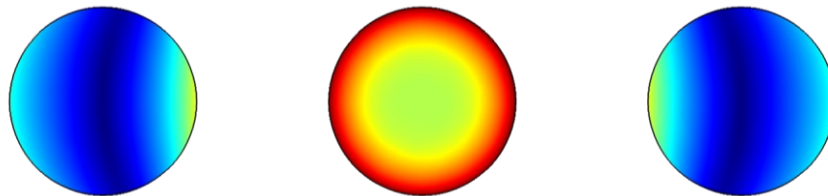


Figura 2.25 - Densidades de correntes nos condutores quando apenas o condutor central está conduzindo a corrente principal do sistema a 1 kHz. Fonte: autor (2020).

A consequência do efeito proximidade está no acréscimo da resistência aparente e na redução da indutância do condutor, além daquela experimentada quando apenas o efeito pelicular está presente. Além disso, esse efeito é capaz também de modificar as linhas equipotenciais do sistema em problemas eletrostáticos. A Figura 2.26 mostra as linhas equipotenciais de dois sistemas trifásicos: o primeiro é caracterizado por uma distância entre os condutores de dez diâmetros, enquanto no segundo os condutores estão bastante próximos entre si (um diâmetro de distância).

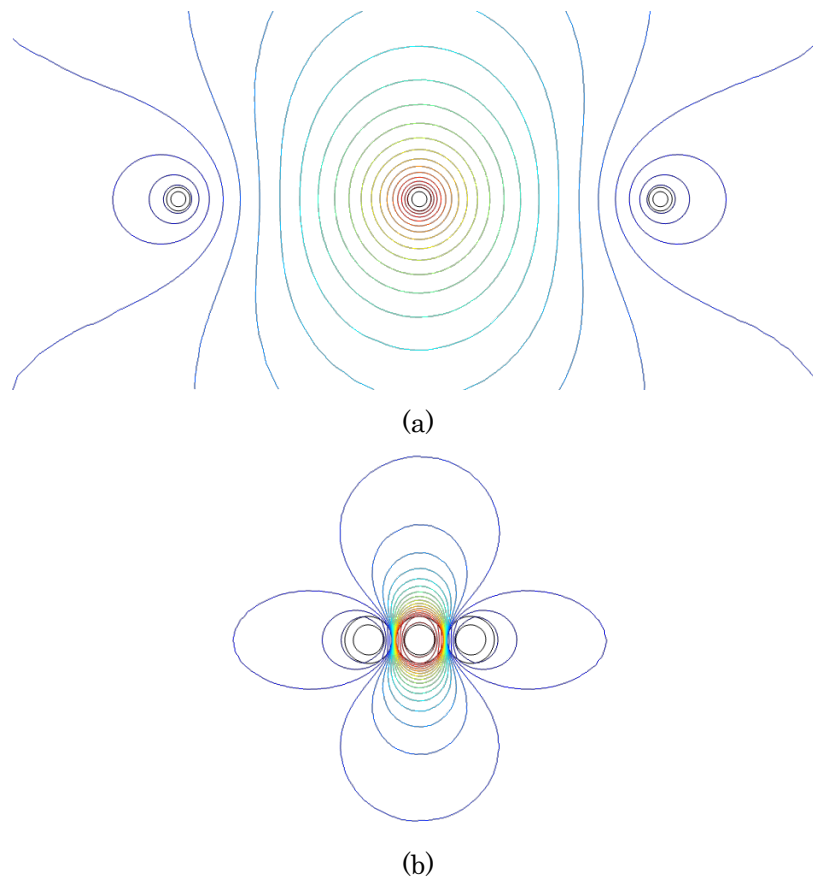


Figura 2.26 - Linhas equipotenciais de um sistema trifásico onde: (a) os cabos estão afastados entre si e (b) próximos entre si. Fonte: autor (2020).

Um estudo bastante interessante que trata do impacto do efeito proximidade nos parâmetros de condutores de um sistema trifásico aéreo com o solo ideal foi realizado em Cirino *et al.* (2009). Outro estudo que analisa o mesmo fenômeno, mas considerando também a influência de um solo não-ideal, com diferentes resistividades, foi executado em de Souza (2015). Esses estudos empregaram o método de elementos finitos, uma vez que expressões analíticas são difíceis de serem concebidas para representar o efeito proximidade, conforme será discutido no próximo parágrafo.

Diferentemente do que acontece para o efeito pelicular, onde equações analíticas exatas conseguem retratar tal fenômeno, incluindo a concepção de fórmulas para o cálculo das resistências e das indutâncias de condutores quando tal efeito está presente; no caso do efeito proximidade, essa tarefa se torna bem mais complexa. Essa dificuldade existe porque esse efeito depende dos campos

eletromagnéticos produzidos em todo sistema, onde a quantidade e a disposição geométrica dos condutores, a presença de outros elementos metálicos, como suportes, e a frequência considerada, afetam diretamente a maneira como os campos eletromagnéticos e as densidades de corrente do sistema se comportarão. Uma maneira de se considerar a presença do efeito proximidade, para qualquer tipo de sistema, é através do emprego do método de elementos finitos, razão pela qual esse método é aqui empregado.

## 2.7. Métodos para Cálculo de Parâmetros de Cabos

A necessidade de se determinar os valores de parâmetros de cabos é muito antiga e diversos autores realizaram avanços nesse sentido ao longo do tempo. Inicialmente, os esforços se concentravam em obter equações analíticas capazes de calcular os parâmetros de linhas e cabos sob determinadas configurações, onde se fazia necessário pré-estabelecer uma série de condições a fim de possibilitar o emprego de métodos analíticos. Porém, mais tarde, com a evolução dos métodos numéricos e dos computadores, casos mais complexos puderam ser considerados e as simplificações requeridas por métodos analíticos foram superadas.

Deve-se ressaltar, contudo, que as expressões analíticas ainda são muito comuns, principalmente para configurações mais simples e conhecidas, tais como aquelas presentes em sistemas de transmissão aéreos. Tais equações apresentam a vantagem de serem rapidamente calculadas, principalmente quando se emprega algum *software* para essa função, onde o usuário precisa apenas alimentar o programa com as informações concernentes à geometria do sistema e aos materiais empregados. Tal é a importância desses programas que se pode mencionar as rotinas *Line Constants* e o *Cable Constants* do ATP (Can/Am EMPT User Group, 1995), empregadas desde a década de 80 até os dias atuais para calcular os parâmetros de linhas e cabos sob algumas configurações.

Por outro lado, em configurações mais complexas, principalmente quando o efeito proximidade se faz presente, o emprego de equações analíticas se torna infactível. Para tal, a aplicação de métodos numéricos representa uma alternativa concreta, onde o método de elementos finitos toma elevado destaque. As mais

variadas configurações de sistemas e condutores podem ser consideradas com altíssimo grau de exatidão nos parâmetros de cabos calculados.

#### 2.7.1. Método de Elementos Finitos Para o Cálculo de Parâmetros de Cabos

Um breve compêndio de alguns estudos baseados no método de elementos finitos é citado a seguir.

##### a) (Yin, 1990)

A primeira aplicação do método de elementos finitos para o cálculo de parâmetro de cabos foi reportada em 1989 em um artigo publicado por Yanan Yin e Hermann Dommel (Yin e Dommel, 1989). Esse artigo é fruto de tese de doutorado do primeiro autor cuja publicação se deu um ano depois (Yin, 1990). Nos agradecimentos dessa tese, se nota o vínculo de autores reconhecidamente importantes no que tange à pesquisa sobre cálculos de parâmetros de cabos, tais como Dr. Hermann Dommel (orientador), Dr. Martin Wedepohl, Dr. Jose Marti e Dr. Luis Marti.

Essa pesquisa, referida como o marco das publicações nesse assunto, teve como foco sistemas de transmissão trifásicos subterrâneos compostos por cabos coaxiais enterrados, instalados no interior de túneis e dispostos no interior de tubos metálicos. Tais cabos eram constituídos de dois elementos metálicos, o condutor maciço propriamente dito e uma blindagem externa. Outras configurações de condutores foram consideradas, como cabos seccionados e também encordoados. A Figura 2.27 exhibe os casos estudados na referida tese.

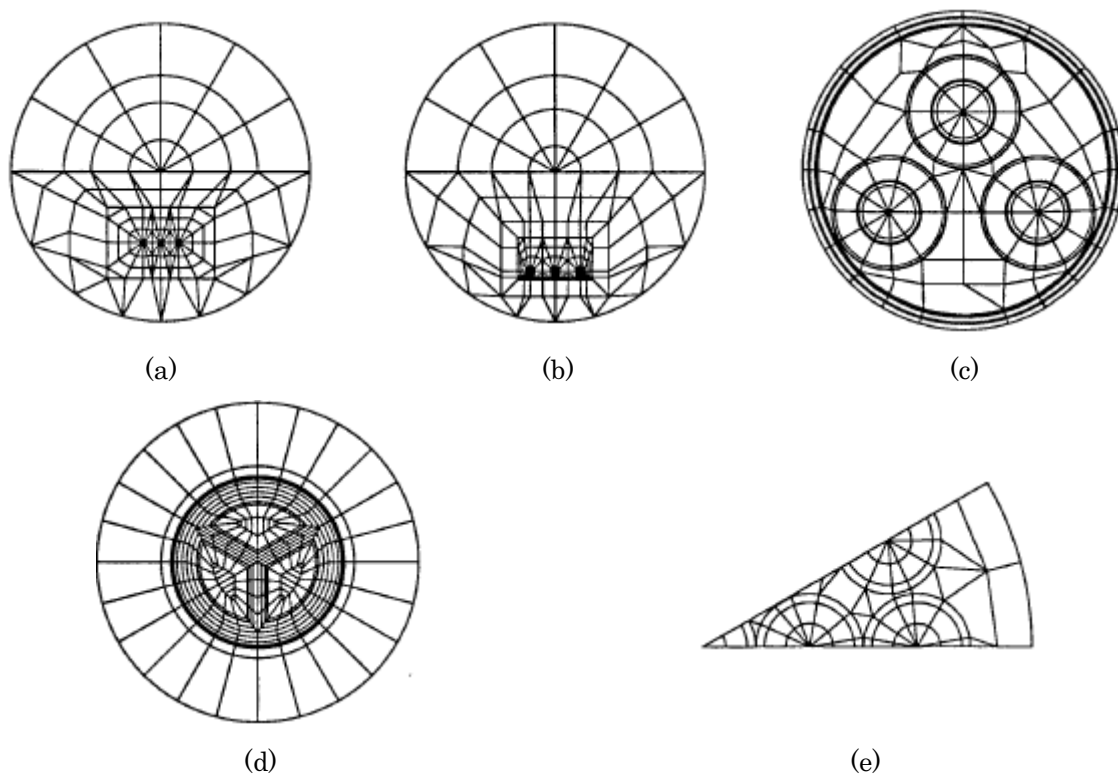


Figura 2.27 – Sistemas de cabos elétricos considerados em Yin (1990) e as respectivas malhas de elementos finitos elaboradas para: (a) cabos enterrados a 60 Hz (b) cabos no interior de túneis a 60 Hz (c) cabos no interior de tubos metálicos a 6 kHz (d) cabos seccionados a 60 kHz e (e) cabos encordoados a 60 kHz (seção parcial). Fonte: (Yin, 1990).

Diversas análises foram conduzidas, porém o autor focou, principalmente, na avaliação dos erros percentuais concernentes às equações analíticas existentes para os diversos casos considerados utilizando os valores calculados pelo FEM como referência, e na validação de uma técnica de redução do tamanho do domínio computacional proposta por ele. Em relação aos parâmetros considerados, ele estudou resistências e indutâncias, considerando uma ampla faixa de frequências (de 60 Hz até 600 kHz), e também as capacitâncias.

Investigações sob o ponto de vista mais físico ficaram em segundo plano. Por exemplo, apesar de a presença do efeito proximidade ser citada algumas vezes e sua correlação com os erros encontrados nas equações analíticas (uma vez que elas não o consideram) ser reconhecida, principalmente, quando das análises efetuadas para o caso de cabos dispostos no interior de um tubo metálico, não houve um estudo aprofundado nos seus mecanismos de atuação.



Diferentemente dos estudos mais atuais, onde se emprega *softwares* comerciais baseados no FEM para realizar as simulações, o estudo analisado concebeu todo o algoritmo computacional, incluindo as formulações físicas e matemáticas. Análises sobre o desempenho de diferentes métodos para o cálculo de parâmetros de cabos e da ordem dos elementos finitos foram realizadas. A concepção do refinamento da malha através da consideração da profundidade de penetração como parâmetro foi também abordada. Não é o objetivo, no momento, dar maior profundidade a esses aspectos, contudo, no próximo capítulo, quando da apresentação da metodologia do presente trabalho, por diversas vezes o trabalho conduzido por Yanan Yin é referido, seja para citar técnicas por ele empregadas, seja para utilizá-lo como critério de referência.

b) (Cirino et al., 2009)

Em Cirino et al. (2009), o impacto do efeito proximidade foi analisado de maneira mais detalhada, incluindo análises sobre a influência da distância e o tamanho dos cabos nesse efeito. Naquele momento, o emprego de *softwares* de simulação específicos para o método de elementos finitos já era bastante comum, e o autor empregou o FEMM (Meeker, 2020a) para a condução das simulações.

Em relação à configuração estudada, apenas um sistema trifásico em arranjo triangular sobre a terra ideal foi considerado (Figura 2.28). Devido a isso, a interferência das características do solo nos mecanismos de atuação do efeito proximidade quando do cômputo das resistências e indutâncias não foi examinada. Por outro lado, no que se refere às capacitâncias, a distância para o solo foi levada em conta. Várias conclusões do ponto de vista físico foram elaboradas, tais como: o efeito proximidade é mais proeminente em cabos de seções maiores e sua influência se reduz à medida que a distância entre os cabos vai se tornando maior, para todos os parâmetros considerados, e, quanto maior a frequência, mais a resistência se eleva devido ao efeito proximidade.

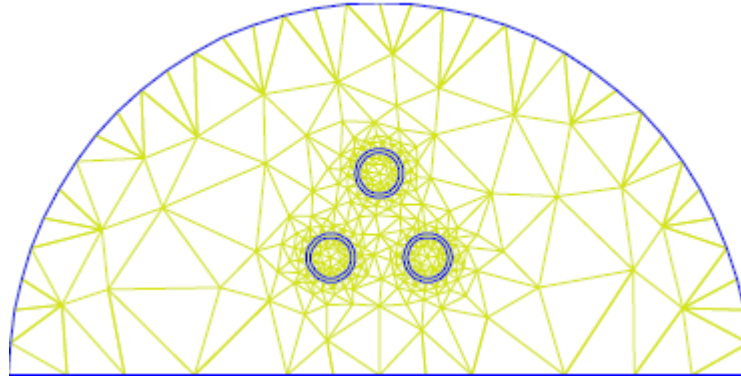


Figura 2.28 – Sistema de transmissão trifásico considerado em Cirino et al. (2009) (fora de escala e malha meramente ilustrativa). Fonte: (Cirino et al., 2009)

Nesse estudo, algumas observações a respeito do refinamento da malha para os condutores foram realizadas. Assim como nos estudos realizados por Yanan Yin, a profundidade de penetração foi o parâmetro para se determinar tanto a região de refinamento como o tamanho dos elementos triangulares. No próximo capítulo, essa abordagem será comentada.

c) (de Souza, 2015)

Grandes avanços no campo de pesquisas relativo ao cálculo de parâmetros foram atingidos com a publicação do artigo de de Souza et al. (2018), que representa uma síntese dos trabalhos desenvolvidos na dissertação do primeiro autor (de Souza, 2015).

Esse trabalho se caracteriza pela apresentação de uma série de procedimentos para a elaboração dos domínios e dos refinamentos de malha necessários para uma adequada simulação. Algoritmos que levam em conta a geometria e a frequência do sistema foram construídos no intuito de se conceber um programa genérico capaz de calcular os parâmetros de cabos sob algumas configurações pré-estabelecidas. O *software* utilizado como base foi o FEMM.

Pela primeira vez na literatura, uma instalação industrial típica, composta por cabos inseridos sobre uma eletrocalha lisa, foi estudada. Além disso, uma série de investigações foram conduzidas para os casos de cabos instalados acima do solo e também no interior de tubos metálicos. Neste último caso, cabos constituídos de

blindagem e armaduras também foram considerados, nos demais, o cabo era composto apenas do condutor propriamente dito e de uma camada isolante.

No referido trabalho, a relação da resistividade do solo com o efeito proximidade no que tange aos parâmetros série do cabo foi examinada de maneira profunda, completando os estudos iniciados em Cirino et al. (2009). Além disso, o efeito de blindagem da eletrocalha lisa aterrada também foi investigada. A Figura 2.29 apresenta algumas imagens empregadas pelo autor nessas análises.

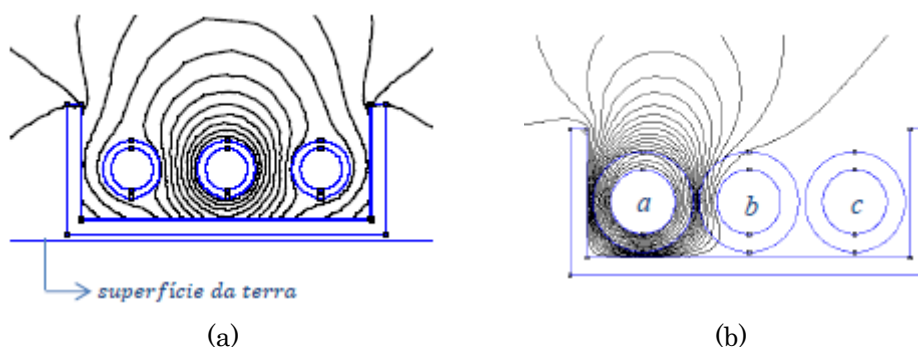


Figura 2.29 – Análises conduzidas para a eletrocalha lisa: (a) linhas de fluxo magnético (condutor central excitado por uma corrente de 10 kHz) e (b) linhas equipotenciais (potencial de 1 V no condutor mais à esquerda). Fonte: (de Souza, 2015)

#### d) Outros trabalhos

As pesquisas citadas anteriormente serviram como as principais bases teóricas para o presente trabalho, no entanto, diversos outros estudos foram publicados no tocante ao assunto em questão. Dentre eles, pode-se citar: Cristina e Feliziani (1989), Darcherif et al. (1990), Satsios et al. (1998), Triantafyllidis et al. (1999) e Papagiannis et al. (2003).

## 2.8. Modelagens de Cabos

A obtenção dos parâmetros de cabos em instalações industriais típicas para diversas frequências, objeto de estudo deste trabalho, encontra larga aplicação nos estudos de fenômenos em alta frequência, principalmente para sistemas de acionamentos de motores. Para tal, é necessário empregar os parâmetros em modelos de cabos específicos cuja aplicação em ambientes computacionais permite

ao pesquisador simular de maneira fidedigna o comportamento das ondas de tensão e corrente.

As principais características requeridas para um modelo de cabo se referem (i) à necessidade de refletir, no domínio do tempo, a variação de seus parâmetros em uma larga faixa de frequências e (ii) a representação de sua natureza distribuída, permitindo a reprodução da maneira como as ondas se propagam. Várias modelagens de cabos têm sido propostas na literatura (Chaves et al., 1997; de Paula et al., 2008a; Moreira et al., 2002). Outras podem ser encontradas em um estudo da arte bastante completo realizado em de Paula (2005).

A título de exemplo, será mostrado brevemente um dos modelos cuja aplicação tem sido reportada em vários estudos nos últimos anos, conforme as citações a ele exibidas na plataforma IEEE Xplore. O modelo escolhido é o proposto em de Paula et al. (2008a).

A apresentação desse modelo constitui uma forma de exemplificar o emprego dos valores de parâmetros de cabos em uma larga faixa de frequências, assim como das componentes simétricas, cuja apresentação no presente trabalho recebeu relativa importância, justamente pela sua aplicabilidade em modelagens de cabos.

#### i) Exemplo de modelo (de Paula et al., 2008a)

O modelo exemplificado possui como aspecto singular e vantajoso a capacidade de determinação tanto das grandezas de modo comum como diferencial em um único circuito, além de ser bastante simples e eficiente. Ele se baseia no conhecido modelo “pi” e sua forma de obtenção é mostrada com maiores detalhes na tese de doutorado que originou o artigo (de Paula, 2005). A Figura 2.30 apresenta esse modelo.

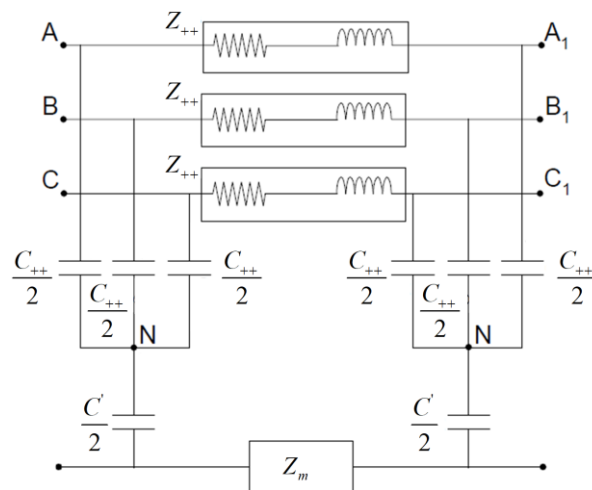


Figura 2.30 – Modelo de cabo para análises de fenômenos em alta frequência. Fonte: adaptado de (de Paula et al., 2008a).

Conforme mostra a figura anterior, esse modelo depende dos valores de impedância de sequência positiva ( $Z_{++}$ ) e de fase mútua ( $Z_m$ ). Além deles, no que tange às capacitâncias do cabo, é necessário empregar a capacitância de sequência positiva ( $C_{++}$ ) como também um novo termo, denominado de  $C'$ , que depende tanto de  $C_{++}$  como também de  $C_{00}$  (a capacitância de sequência zero). O termo  $C'$  é dado por:

$$C' = \frac{C_{00} \cdot C_{++}}{C_{++} - C_{00}} \quad (2.144)$$

Consoante o último parágrafo, compreende-se a importância da obtenção das componentes simétricas para os parâmetros de cabos, apresentada na subseção 2.5.3. Além disso, a consideração de cabos transpostos mais uma vez se mostrou necessária, onde as observações realizadas no subtópico v) da subseção 2.5.3 é extremamente relevante.

#### a) Variação dos parâmetros com a frequência

Até agora nada foi citado sobre a dependência dos parâmetros de cabos com a frequência. Para tanto, o autor sugeriu o emprego de um modelo denominado de

“n-ramos” para representar tanto a impedância de sequência positiva do cabo ( $Z_{++}$ ) como a impedância de fase mútua ( $Z_m$ ). Esse modelo é capaz de contemplar a variação dos parâmetros série do cabo com a frequência por meio de um circuito composto por “n” ramos, onde cada ramo é constituído por uma resistência e uma indutância definidas para uma única frequência. A associação de forma conveniente dos vários ramos, como ilustrada na Figura 2.31, resulta numa impedância equivalente que, por sua vez, é variável com a frequência.

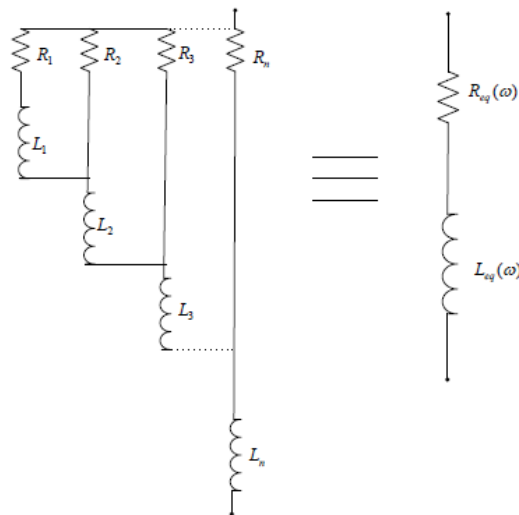


Figura 2.31 – Circuito “n-ramos” empregado para representar a variação dos parâmetros de cabos com a frequência. Fonte: adaptado de (de Paula, 2005).

Nesse contexto, cada um dos quatro ramos série presentes no circuito do modelo de cabo exibido na Figura 2.30 é substituído pelo seu circuito equivalente “n-ramos” (apresentado na Figura 2.31), tal como exhibe a Figura 2.32.

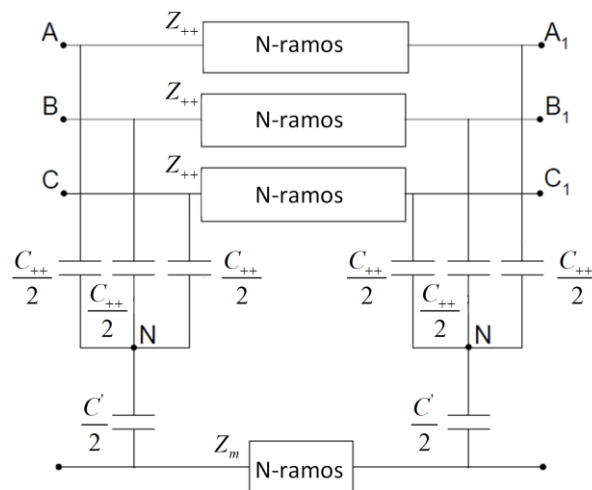


Figura 2.32 – Modelo de cabo para análises de fenômenos em alta frequência incluindo o circuito “n-ramos”. Fonte: adaptado de (de Paula, 2005).

Dessa forma, os valores de parâmetros de cabos calculados por meio do método de elementos finitos para diversas frequências, tal como realizado nesta dissertação e apresentados numericamente no Capítulo 4, são inclusos no modelo de cabos através de um circuito “n-ramos”, onde cada ramo representa uma frequência.

#### b) Natureza distribuída do cabo

Quando se deseja analisar fenômenos transitórios, tais como aqueles associados a fenômenos de propagação e reflexões de ondas em cabos, é imprescindível que a natureza distribuída de seus parâmetros seja levada em conta. O termo “natureza distribuída” se refere à distribuição real dos parâmetros ao longo do cabo.

Nesse intuito, normalmente se recorre ao emprego de um número relativamente grande de células ligadas em série, em que cada célula representa o circuito equivalente de um trecho de comprimento fixo do cabo. Esse circuito equivalente nada mais é que o modelo empregado para representação do cabo e é definido por parâmetros concentrados. Resumindo, vários circuitos construídos através de parâmetros concentrados, definidos por unidade de comprimento, e colocados em série, reproduzem o comportamento distribuído do cabo. Outras

alternativas, associadas ao emprego de modelos com parâmetros realmente distribuídos, tornam a consideração da dependência com a frequência extremamente complexa de ser implementada (de Paula et al., 2008a).

A grande questão concernente a esse tipo de abordagem é a escolha do número de células necessárias para a representação do cabo, a depender do fenômeno de interesse. Idealmente, quanto maior a quantidade de células empregadas, mais fidedigna é a representação da natureza distribuída do cabo e, conseqüentemente, melhor é a exatidão atingida na representação do comportamento das ondas de tensão e corrente. Todavia, o emprego de um número grande de células implica elevado esforço computacional para execução da simulação associada. Portanto, deve-se atingir um equilíbrio entre a exatidão requerida e o esforço computacional.

Um método bastante interessante para se determinar o número otimizado de células a serem empregadas para estudos de fenômenos em alta frequência é apresentado em Moreira (2002), onde maiores detalhes podem ser encontrados. Aqui, de maneira resumida, afirma-se que esse método se baseia no comprimento de onda que se estabelece no condutor, de modo que o comprimento representado por cada uma das células deve ser tal que a variação de tensão em cada uma delas seja razoavelmente pequena.

A definição do comprimento de onda depende do fenômeno a qual ele está associado. Por exemplo, no caso de sistemas de acionamento de motores onde se deseja calcular as sobretensões transitórias resultantes do emprego de inversores, o comprimento de onda analisado é aquele associado à tensão PWM. Nesse caso, o respectivo comprimento de onda é dado por:

$$\lambda = \frac{v}{f_{eq}} \quad (2.145)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda,  $v$  é a velocidade de propagação da onda e  $f_{eq}$  é a frequência equivalente considerada.

A velocidade de propagação  $v$  é calculada por:



$$v = \frac{1}{\sqrt{L_{++} \cdot C_{++}}} \quad (2.146)$$

onde os termos  $L_{++}$  e  $C_{++}$  se referem à indutância e à capacitância de sequência positiva. A equação anterior se baseia na teoria de propagação de ondas eletromagnéticas em linhas de transmissão.

Já em relação à frequência equivalente da onda, deve-se ter em mente que a tensão PWM é composta pela somatória de componentes harmônicas de várias frequências, cada uma contribuindo para a formação do campo elétrico. É sugerido, então, que a frequência de referência empregada seja aquela devido ao pulso de maior frequência. Esse pulso está relacionado ao tempo de subida da tensão PWM. Tal frequência é dada, portanto, da seguinte maneira:

$$f_{eq} = \frac{1}{\pi \cdot t_s} \quad (2.147)$$

onde  $t_s$  é o tempo de subida do pulso PWM.

Obtido o comprimento de onda, o próximo passo é definir sua relação com o comprimento de cabo representado por uma única célula. Segundo de Paula (2005), nas simulações concernentes ao referido trabalho, uma relação de 0,01 foi o suficiente para se obter bons resultados. Esse valor de relação indica que para um pulso cujo tempo de subida equivale a um comprimento de onda de 50 m, por exemplo, cada célula pode ser empregada para representar no máximo 50 cm de cabo. Um cabo de 10 metros, por exemplo, precisaria de, no mínimo, 20 células. Com esses cálculos, se assegura que variação do campo elétrico em uma única célula seja suficientemente pequena, possibilitando a captura do fenômeno de reflexão de ondas com maior exatidão. De maneira geral, para análise de fenômenos em alta frequência para sistemas de acionamento de motores, uma relação entre 0,01 e 0,02 é o suficiente para garantir resultados satisfatórios com um número mínimo de células (de Paula et al., 2008a).

Empregando o modelo mostrado na Figura 2.32 para representar cada uma das células colocadas em série, consegue-se, simultaneamente, reproduzir tanto a

natureza distribuída do cabo como a variação dos seus parâmetros com a frequência.

## 2.9. Conclusões

Este capítulo conceituou, elucidou e apresentou formulações a respeito dos principais tópicos correlacionados ao cálculo de parâmetros de cabos, a fim de atuar como embasamento teórico para todo o restante da dissertação.

Os itens referentes às normas aplicáveis aos sistemas elétricos industriais, às definições físicas e formulações dos parâmetros, e, por último, à elucidação dos efeitos proximidade e pelicular, são de extrema relevância para o capítulo 4, sendo o primeiro item consultado no momento da elaboração dos estudos de caso e os demais na explicação dos resultados obtidos. É importante ressaltar que a não consideração de blindagens e armaduras nas formulações apresentadas para os cabos se deu porque esse caso não foi considerado na metodologia apresentada no capítulo 3 e nas simulações conduzidas no capítulo 4 devido ao fato de a maioria das instalações industriais de baixa tensão, tal como as aqui estudadas, ser constituída majoritariamente de cabos compostos apenas do condutor propriamente dito e das camadas isolantes.

A aplicabilidade dos valores de parâmetros de cabos para diversas frequências, principal finalidade desta dissertação, foi exemplificada para análises de fenômenos em alta frequência presentes em sistemas de acionamento de motores. Apresentaram-se as principais características de um dos modelos propostos na literatura, capaz de representar o comportamento de cabos em tais circunstâncias. A partir dele, foi possível compreender a maneira como tais parâmetros são inseridos como dados de entrada nesses modelos e a relevância do emprego de componentes simétricas.

Por último, uma revisão na literatura de diversos artigos que se referem ao mesmo tema, objeto de estudo deste trabalho, foi apresentada, incluindo seus principais aspectos e estudos de caso abordados.

## CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA PARA O CÁLCULO DE PARÂMETROS DE CABOS EMPREGANDO O FEM

---

### 3.1. Introdução

O capítulo atual destina-se à apresentação de todo o conteúdo necessário ao entendimento das estratégias adotadas no âmbito das simulações elaboradas para o cálculo de parâmetros de cabos por meio do método de elementos finitos (FEM) em três dimensões. O propósito é permitir que a presente dissertação valha como referência metodológica para futuros trabalhos concernentes ao tema. Dessarte, todas as técnicas e procedimentos adotados são profundamente explicitados, tanto no âmbito do *software* empregado (o Comsol) quanto em suas bases teóricas, a fim de trazer uma abordagem mais abrangente e possibilitar que outros programas possam ser utilizados, requerendo somente que o pesquisador pondere as especificidades de cada um.

A compreensão da metodologia concebida depende de um conhecimento prévio dos fundamentos teóricos pertinentes ao FEM. Devido a isso, uma visão sucinta sobre os principais tópicos acerca desse método é exibida. Por se tratar de um assunto bastante amplo e, até certo ponto, complexo, diversas referências bibliográficas são sugeridas ao longo do texto, caso um maior aprofundamento em determinado conteúdo seja desejado.

Com o intuito de promover uma melhor organização hierárquica, o capítulo é dividido em duas grandes subseções, sendo elas:

- A subseção 3.2 exibe uma visão mais generalizada do FEM, focando nos seus conceitos e nos principais pontos que norteiam sua aplicação. Ela é dividida em seis tópicos principais, que podem ser entendidos como os passos necessários para a elaboração de um modelo a ser resolvido pelo FEM, são eles: definição das equações que regem o sistema, determinação da dimensionalidade do modelo, definição dos domínios, escolha das condições de fronteira, discretização do modelo, desenvolvimento do

sistema de equações e solução do sistema de equações. Definições teóricas, formulações matemáticas e comentários gerais são exibidos.

- A subseção 3.3 concentra-se na apresentação da metodologia proposta, sendo discutidas todas as escolhas e considerações empregadas nas simulações, utilizando o Comsol como *software* base. Com esse fim, a subseção 3.2 serve como referência teórica, sendo que a estrutura dos tópicos principais, citadas anteriormente, é mantida a mesma, com o intuito de promover uma fácil correlação entre as duas subseções.

Alguns conceitos apresentados no Capítulo 2 também são bastante importantes em determinados tópicos do presente capítulo, tal como os efeitos proximidade e pelicular.

### 3.2. O Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos (FEM) divide os domínios de um modelo em uma grande quantidade de porções reduzidas (denominadas de elementos), que representam as menores regiões onde as equações diferenciais parciais, que regem o comportamento físico do sistema, são aproximadas. A combinação das equações individuais aproximadas de todos esses elementos gera um sistema matricial de equações que, uma vez resolvido, permite a aproximação da solução sobre todos os domínios do problema.

A principal característica do FEM é de apresentar uma sistemática generalista que permite solucionar uma grande quantidade de aplicações através da adoção de uma sequência de procedimentos específicos e pré-estabelecidos. Essa característica também flexibiliza a elaboração de um único algoritmo ou programa de computador capaz de aplicar o referido método em muitos tipos de problemas diferentes dependendo apenas da inserção e elaboração, por parte do usuário, das informações essenciais à simulação. Cada problema pode estar associado a infinitas combinações diferentes de geometrias e tipos de materiais. Um *software* simples e gratuito, como o FEMM (Meeker, 2020a), por exemplo, é capaz de resolver cinco diferentes tipos de problemas: eletrostático, magnetostático,

eletrocinético (fluxo de corrente contínua), eletromagnético harmônico no tempo e fluxo de calor. Outros *softwares* comerciais, como o Comsol (Comsol, 2020b) ou Ansys (Ansys, 2020), resolvem aplicações em um número ainda maior de problemas englobando várias áreas em diferentes engenharias.

A sequência de passos associada à resolução de uma aplicação por meio do FEM envolve: a definição das equações que regem o sistema, a determinação da dimensionalidade do modelo, a definição dos domínios, a escolha das condições de fronteira, a discretização do modelo e o desenvolvimento e solução do sistema de equações. Na presente subseção, cada procedimento específico é detalhado a fim de servir como referência para embasar a metodologia proposta para o cálculo de parâmetros de cabos em três dimensões, apresentada na subseção 3.3.

### 3.2.1. Definição das Equações que Regem o Sistema

O primeiro passo é definir o tipo de problema a ser solucionado, isto é, as equações matemáticas que regem as leis físicas associadas aos fenômenos em foco. Para os casos envolvendo o cálculo de parâmetros de cabos, dois tipos de problemas são analisados: eletrostático e eletromagnético harmônico no tempo.

Uma vez que todos os fenômenos eletromagnéticos são regidos pelas equações de Maxwell, estas são apresentadas em sua forma diferencial através das Equações (3.1) a (3.4), para serem depois desenvolvidas no que concerne aos dois problemas específicos anteriormente explicitados.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.4)$$

Essas quatro equações diferenciais parciais relacionam os campos elétricos e magnéticos um com o outro e com suas fontes (carga e densidade de corrente). No entanto, a definição completa das equações de Maxwell depende das relações constitutivas associadas às propriedades do meio sujeito aos campos, conforme as Equações (3.5) a (3.7).

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.7)$$

Por último, determinam-se os potenciais, que apesar de não serem estritamente necessários do ponto de vista físico, são extremamente úteis, principalmente no que tange à solução de problemas através de soluções numéricas. Isto posto, os potenciais escalar elétrico e vetorial magnético podem ser definidos por meio das Equações (3.8) e (3.9).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.9)$$

Os próximos subtópicos desenvolvem as formulações referentes aos problemas eletrostático e eletromagnético harmônico no tempo a partir das equações exibidas anteriormente.

#### i) Problema eletrostático

Considerando que os campos elétricos não variam com o tempo e que não há a presença de campos magnéticos, tem-se o caso específico de um problema do tipo eletrostático. Campos eletrostáticos são usualmente gerados por cargas elétricas estáticas ou estacionárias e são descritos através da Equação (3.1), mostrada

anteriormente e que permanece inalterada, e da Equação (3.10), apresentada em seguida, e que representa um desenvolvimento da Equação (3.3) para o caso em que  $-\partial\vec{B}/\partial t = 0$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.10)$$

Para a obtenção da solução desse problema, isto é, para encontrar os valores de  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  e  $Q$  na região de interesse, é vantajoso determinar, primeiramente, o valor do potencial escalar elétrico  $V$  em todo o domínio, tornando-o a incógnita inicial do sistema de equações a ser elaborado posteriormente. Sendo assim, é necessário obter, a princípio, uma equação diferencial parcial, associada ao comportamento físico do sistema, cujo único valor desconhecido é o do potencial escalar. Para isso, são realizadas algumas manipulações algébricas nas Equações (3.1), (3.5) e (3.8), conforme descritas a seguir:

- Primeiramente, emprega-se a Equação (3.5) na Equação (3.1), obtendo-se:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_v \quad (3.11)$$

- Em seguida, substituindo-se a Equação (3.8) na Equação (3.11), e sabendo-se que  $\partial\vec{A}/\partial t = 0$  para o caso eletrostático, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot [\epsilon(-\vec{\nabla}V)] = \rho_v \quad (3.12)$$

- Para um meio homogêneo, a Equação (3.12) pode ser reescrita através da seguinte forma:

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3.13)$$

A Equação (3.13), mais comumente conhecida como *equação de Poisson*, é definida para uma região homogênea na qual a permissividade elétrica  $\epsilon$  é

constante e uniforme, permitindo encontrar o valor do potencial escalar elétrico em determinada região limitada por condições de fronteira especificadas. A forma mais geral da Equação (3.13), representada pela Equação (3.12), é utilizada quando o meio é não-homogêneo.

É importante salientar que os elementos finitos discretizam os domínios de um problema no FEM de modo que cada um desses elementos corresponda a uma única região com propriedades físicas homogêneas, sendo assim, na formulação de problemas eletrostáticos no FEM é empregada a Equação (3.13).

Quando a região é livre de cargas ( $\rho_v = 0$ ), pode-se definir a chamada *equação de Laplace*, apresentada a seguir:

$$\vec{\nabla}^2 V = 0 \quad (3.14)$$

Outras informações sobre o problema eletrostático podem ser consultadas em Jian-Ming (2014). Uma abordagem interessante acompanhada da solução de um problema eletrostático bidimensional bastante simples por meio do FEM é exibida em Sadiku (2019).

## ii) Problema eletromagnético harmônico no tempo

Uma forma de facilitar as análises de campos variantes no tempo é assumi-los como harmônicos, isto é, variando senoidalmente com o tempo. Essa análise tem alto valor prático em si, uma vez que a maioria das formas de onda podem ser representadas por senoides através do uso da transformada de Fourier. Tais campos são representados de maneira bastante conveniente através de fasores.

Em face disso, assume-se implicitamente, a partir de agora, que as grandezas presentes nas equações definidas neste capítulo até então sejam variáveis no tempo e estejam representadas na forma fasorial. Dessa forma, subtende-se o fator temporal  $e^{j\omega t}$  em tais equações, sendo  $\omega$  a frequência angular que determina a oscilação dos campos no tempo. Devido ao fato de que a derivada no tempo de uma grandeza instantânea é equivalente a multiplicar sua forma



fasorial por  $j\omega$ , as Equações (3.3), (3.4) e (3.8) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \quad (3.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \quad (3.16)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - j\omega\vec{A} \quad (3.17)$$

Assim como no caso do problema eletrostático, é interessante trabalhar em termos de potencial como incógnita inicial do problema, sendo este, no presente caso, representado pelo potencial vetor magnético. Para esse fim, utiliza-se como base as Equações (3.6), (3.7), (3.9), (3.16) e (3.17). Em seguida, adota-se os seguintes passos para se obter uma equação da forma almejada:

- A penetração de campos eletromagnéticos variantes no tempo em um material condutor induz correntes neste meio que, uma vez estabelecidas, produzem seus próprios campos eletromagnéticos. À vista disso, o lado direito da Equação (3.16) pode ser reescrito especificando três termos: (i) um associado à densidade de corrente que produz os campos principais ( $\vec{J}_{\text{fonte}}$ ), (ii) um outro relacionado à densidade de corrente induzida em determinado meio condutor ( $\vec{J}_{\text{ind}}$ ) e, por último, (iii) um termo consoante à corrente de deslocamento, que permanece inalterado ( $j\omega\vec{D}$ ). Isto posto e valendo-se da relação constitutiva mostrada na Equação (3.6) a fim de escrever a próxima expressão em termos do vetor densidade de fluxo magnético, obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}_{\text{fonte}} + \vec{J}_{\text{ind}} + j\omega\vec{D} \\ \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu}\vec{B} &= \vec{J}_{\text{fonte}} + \vec{J}_{\text{ind}} + j\omega\vec{D} \end{aligned} \quad (3.18)$$

- Em seguida, substitui-se a Equação (3.9) na equação (3.18) no intuito de se trabalhar com o potencial vetor magnético ao invés do vetor densidade de fluxo magnético, originando a seguinte expressão:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{J}_{\text{fonte}} + \vec{J}_{\text{ind}} + j\omega \vec{D} \quad (3.19)$$

- Por outro lado, o vetor densidade de corrente induzida pode ser expresso através dos potenciais escalar e vetorial através da substituição da Equação (3.17) na Equação (3.7), gerando a próxima equação:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{ind}} &= \sigma \vec{E}_{\text{ind}} \\ \vec{J}_{\text{ind}} &= \sigma (-\vec{\nabla} V - j\omega \vec{A}) \\ \vec{J}_{\text{ind}} &= -\sigma \vec{\nabla} V - j\omega \sigma \vec{A} \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Por fim, a equação diferencial parcial de segunda ordem que caracteriza o comportamento de determinado domínio homogêneo sob campos eletromagnéticos harmônicos é obtida através da substituição da Equação (3.20) na Equação (3.19). Dessa forma, tem-se:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{J}_{\text{fonte}} - \sigma \vec{\nabla} V - j\omega \sigma \vec{A} + j\omega \vec{D} \quad (3.21)$$

A Equação (3.21) é, portanto, a expressão final aplicada em problemas magnéticos harmônicos no tempo no FEM.

Mais detalhes sobre os conceitos e formulações acerca desse tipo de problema podem ser encontrados em Silvester e Ferrari (1996) e Jian-Ming (2014). A solução de um exemplo bastante elementar associado a esse caso é exibida em Salon (1995).

### 3.2.2. Determinação da Dimensionalidade do Modelo

Todos os fenômenos físicos encontrados no mundo real são tridimensionais. No entanto, grande parte dos problemas podem ser aproximados por modelos que

variam apenas em uma ou duas coordenadas espaciais. A escolha da dimensionalidade de um problema a ser resolvido pelo FEM deve levar em conta alguns fatores como: presença de simetrias, exatidão desejada e esforço computacional.

Muitos dispositivos ou equipamentos apresentam geometrias tridimensionais naturalmente simétricas ao longo de um dos eixos espaciais. Esse tipo de simetria pode ser constatado quando seções transversais paralelas do sistema se repetem de maneira idêntica ao longo do seu eixo longitudinal. Somada a essa condição, para simular determinado problema através de um modelo em duas dimensões, é fundamental que as grandezas físicas em estudo também variem, majoritariamente, em apenas dois eixos. Tal é o que ocorre com as máquinas elétricas rotativas, possibilitando, por exemplo, que um motor de indução seja simulado através de sua seção transversal equivalente com vistas à aplicação em problemas eletromagnéticos, tal como exhibe a Figura 3.1. Essa representação não acarreta em perdas significativas de informação em relação à sua geometria ou dos valores das grandezas físicas presentes no sistema.

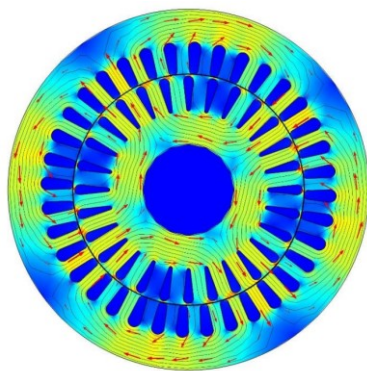


Figura 3.1 – Simulação dos campos eletromagnéticos em um motor de indução a partir de seu modelo bidimensional. Fonte: (Kocman et al., 2018).

Por outro lado, quando o sistema não apresenta simetria em nenhum dos eixos ou quando as grandezas físicas em estudo também precisam ser determinadas para todas as componentes espaciais é fundamental que modelos tridimensionais sejam empregados. De fato, modelos 3D implicam maiores custos computacionais, relacionados à memória e ao tempo de solução, para serem solucionados pelo FEM. Muitas das vezes, o pesquisador pode decidir por

aproximar a solução de um problema 3D para o 2D mesmo que todos os requisitos de simetria não sejam satisfeitos. No entanto, ele deve ponderar se o ganho computacional compensa a perda de exatidão nos resultados, dependendo também se a aplicação final requer um maior ou menor teor de fidelidade das soluções.

### 3.2.3. Definição dos Domínios

Todos os problemas a serem resolvidos pelo FEM devem possuir domínios e limites bem definidos. Os domínios estão associados às diversas regiões com propriedades materiais específicas que influenciam na solução do problema; a união dos diversos domínios origina o modelo completo. Os limites estão relacionados à necessidade do problema em apresentar uma região de solução fechada para a qual as grandezas físicas devem ser determinadas.

Em alguns casos, como aqueles envolvendo máquinas elétricas rotativas, a própria geometria da máquina representa os limites do modelo visto que todos os fenômenos físicos de interesse estão circunscritos ao seu interior. No entanto, na maioria das vezes, os problemas não apresentam limites especificados, como nos casos em que os campos oriundos de determinada fonte se propagam ao longo do ar e solo, tal como ocorre nas linhas de transmissão de energia elétrica. Nessas situações, é necessário incluir uma fronteira artificial para o modelo cuja característica principal é simular a natureza “infinita” do problema de maneira a não influenciar nos resultados da região de interesse.

A forma mais simples de realizar tal procedimento é colocar os limites dos domínios em posição “suficientemente distante” da região de interesse e inserir condições de contorno nas linhas (em modelos 2D) ou superfícies (em modelos 3D) que delimitam o modelo, sendo essa técnica chamada de *truncamento*. Nesses casos, tais condições de contorno são definidas, normalmente, pela atribuição de valores nulos para os potenciais escalar elétrico e magnético vetorial nos problemas eletrostáticos e magnéticos harmônicos no tempo, respectivamente. O termo “suficientemente distante” deve ser entendido como o tamanho mínimo do domínio em que, a partir dele, não há mudanças significativas nos valores da solução da região de interesse, mesmo após a atribuição de extensões maiores para ele. Tais

locais podem ser discretizados por malhas formadas por elementos finitos bem maiores que os utilizados na região de interesse, pois a taxa de variação das grandezas nesses locais é geralmente pequena, no entanto, mesmo assim, esse tipo de abordagem pode gerar um custo computacional excessivo devido às dimensões que esses domínios podem atingir.

Outras técnicas mais elaboradas podem ser empregadas com o mesmo objetivo, como a utilização de funções de mapeamento que reproduzem a característica de domínios “infinitos” através da mudança das coordenadas espaciais das funções interpoladoras (esse tipo função e sua aplicabilidade no FEM é explicada na subseção 3.2.6.1). Um compêndio de várias dessas técnicas é encontrado em Qiushi e Konrad (1997). Os programas de FEM mais robustos, como o Comsol, já apresentam recursos como os de mapeamento capazes de fornecer ao usuário a capacidade de simular tais tipos de domínios sem a necessidade de aplicar a técnica de truncamento, que pode ser bastante onerosa, conforme já explicitado.

Em síntese, a definição dos domínios é uma etapa importante na modelagem de determinado problema pelo FEM visto algumas especificidades, principalmente no que tange à reprodução de domínios naturalmente sem fronteiras ou “infinitos”.

#### 3.2.4. Escolha das condições de fronteira

A análise de um problema a partir do FEM consiste, essencialmente, na transformação de um sistema de equações diferenciais que descrevem determinado fenômeno físico em um sistema de equações cuja solução é bastante próxima da solução do primeiro nos nós da malha de elementos finitos. Desse modo, assim como na análise de equações diferenciais, onde é necessário o estabelecimento de condições de fronteira ou contorno a fim de restringir o número de soluções possíveis ao problema, no FEM também é necessário especificar os valores que a solução do sistema necessita obedecer em determinados locais.

Os dois tipos de condições de fronteira mais comumente empregados em aplicações envolvendo o FEM, são:

- Condição de fronteira de Dirichlet: no denominado *contorno de Dirichlet*, os valores da incógnita principal do problema são explicitamente definidos em determinadas fronteiras. Nos problemas magnéticos e eletrostáticos, essa condição implica o estabelecimento dos valores dos potenciais vetoriais magnéticos ( $A$ ) e escalares elétricos ( $V$ ) em dado local, respectivamente. Nos primeiros, o contorno Dirichlet é comumente utilizado para definir  $A$  igual a zero nos limites dos domínios do problema, a fim de manter todo o fluxo magnético confinado na sua região interna (Meeker, 2020b; Salon, 1995). Nos segundos, essa condição é bastante empregada para fixar um valor de tensão sobre a superfície de determinado condutor (Cardoso, 2016; Meeker, 2020b).
- Condição de fronteira de Neumann: quando as condições de fronteira são definidas por valores atribuídos às derivadas de primeira ordem das incógnitas e não pelos valores dela em si, tem-se o chamado *contorno de Neumann*. Nos problemas magnéticos, essa condição é dada por  $\partial A / \partial n = 0$  e estabelece que o fluxo magnético é normal à fronteira (Meeker, 2020b). Nos problemas eletrostáticos, o contorno de Neumann define que o campo elétrico é tangencial à fronteira (Bastos e Sadowski, 2003).

Outras condições de fronteira, tais como a *mista* e a *periódica*, podem ser utilizadas (Meeker, 2020b).

Mais informações sobre as condições de fronteira aplicadas no FEM podem ser encontradas em Cardoso (2016), Jian-Ming (2014) e Bastos e Sadowski (2003).

### 3.2.5. Discretização do Domínio

Após a definição dos domínios do modelo, o próximo passo é discretizá-los por meio de regiões menores chamadas de elementos, formando a denominada malha de elementos finitos. A exatidão da solução obtida através de simulações baseadas no FEM está diretamente relacionada à qualidade e à quantidade dos elementos finitos que discretizam as diferentes regiões que compõem o problema, ou seja, há uma relação direta entre o perfil da malha e a exatidão dos resultados.

O processo de discretização dos domínios que pertencem ao modelo pode ser resumido em duas etapas:

- Escolha do tipo geométrico de cada elemento: cada região deve ser dividida em elementos geométricos específicos escolhidos dentro de um conjunto de opções associadas diretamente à dimensionalidade do modelo (1D, 2D ou 3D). Essa escolha é realizada analisando-se a geometria do domínio e a forma de variação das grandezas no local. Cada elemento deve estar associado a um único meio homogêneo e não pode haver regiões vazias, isto é, sem elementos.
- Refinamento da malha: nas regiões onde ocorrem maiores variações das grandezas intrínsecas ao problema, é necessário o emprego de uma quantidade maior de elementos finitos no intuito de captar de maneira mais exata tais alterações. Essa etapa é essencial, pois, como será visto, os valores das grandezas no interior de um elemento geométrico são obtidos por meio de aproximações realizadas através de funções interpoladoras que utilizam os valores dos nós dos elementos como referência. Sendo assim, elementos muito grandes em regiões de maiores variações das grandezas podem gerar erros excessivos na solução obtida para aquele local. Por outro lado, quanto mais refinada for determinada malha, maior é o tempo e o custo de memória computacional necessários para a obtenção da resposta. Dessa maneira, o refinamento da malha deve ser conduzido de maneira otimizada e se concentrar apenas nas regiões em que as variações das grandezas físicas do problema são mais fortes, de modo que elementos maiores sejam empregados nos locais em que elas variam mais suavemente.

Conforme explicitado, o conjunto de opções de elementos geométricos está associado à dimensionalidade do modelo. Para o caso mais simples, de modelos de uma única dimensão, apenas uma opção é possível: elementos lineares, conforme mostra a Figura 3.2(a). Para um domínio 2D, os elementos podem ser triângulos ou retângulos (apresentados na Figura 3.2(b)), entre outros, como quadriláteros e

paralelogramos. Por último, em domínios tridimensionais, as opções de elementos para a malha podem ser: tetraedros, hexaedros, prismas ou pirâmides, exibidos na Figura 3.2(c), e suas diversas variações.

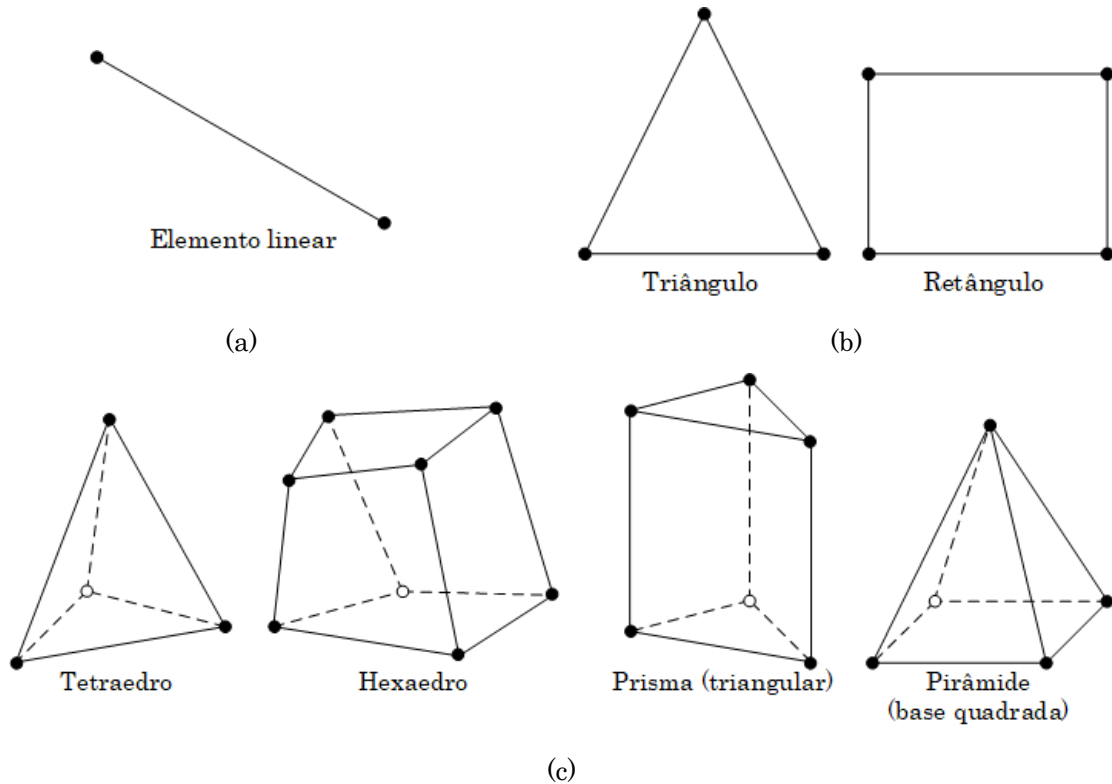


Figura 3.2 – Exemplos de elementos geométricos empregados na discretização de domínios: (a) unidimensionais, (b) bidimensionais e (c) tridimensionais. Fonte: autor (2020).

### 3.2.6. Desenvolvimento do Sistema de Equações

Um dos procedimentos mais laboriosos no que tange à solução de um problema através do FEM é o desenvolvimento das equações associadas aos elementos que compõem a malha que discretiza os domínios. Entender essa etapa é crucial para quem deseja elaborar o próprio algoritmo para o FEM. Por outro lado, quando o usuário apenas manipula o problema através de determinado *software*, como o FEMM ou o Comsol, esse procedimento fica oculto, sendo o próprio programa responsável por desenvolver tais equações a partir dos problemas, domínios e malha de elementos finitos definidos pelo usuário. Alguns programas mais sofisticados, como o Comsol ou o Ansys, permitem ao usuário algumas configurações mais restritas como a escolha da ordem das equações associadas aos



elementos finitos. Contudo, outros programas mais simples, como o FEMM, não permitem esses tipos de definições, vindo todas já estabelecidas e não são modificáveis.

Esse procedimento envolve três etapas: (i) determinação das funções interpoladoras, (ii) ajuste dessa função à equação diferencial através de métodos específicos e (iii) montagem do sistema de equações. Essas três etapas são explicitadas nas subseções seguintes.

#### 3.2.6.1. Seleção das Funções Interpoladoras

Todos os elementos mostrados na Figura 3.2 apresentam dois tipos de entidades geométricas: vértices e arestas. Os vértices, utilizados para conectar as arestas, se configuram como um dos locais para os quais os valores desconhecidos ou as incógnitas do problema devem ser, primeiramente, encontrados. Esses locais específicos são denominados *nós* e sempre estão em um número igual ou superior à quantidade de vértices. Por exemplo, seja o triângulo, mostrado na Figura 3.2(b), um único elemento dentre todos os que formam uma malha de elementos finitos que discretiza dado domínio bidimensional. Supondo esse domínio associado a um problema eletrostático, tal triângulo representa a menor região para a qual são resolvidas as equações do sistema, e seus nós são os locais onde os valores dos potenciais escalares elétricos  $V$  devem ser encontrados.

Assume-se, por ora, que o problema fora resolvido e os valores dos potenciais escalares nos nós do elemento triangular, anteriormente citado, foram encontrados. Uma vez que apenas os valores nos nós foram obtidos, a pergunta a ser feita é: quais são os valores dos potenciais no interior do triângulo? Para responder a essa questão, são utilizadas as chamadas *funções interpoladoras*.

Funções interpoladoras são utilizadas quando se tem um conjunto de pontos com valores definidos e, a partir deles, se deseja encontrar os valores de outros pontos. Tais funções devem ser concebidas de modo a reproduzir o valor exato nos pontos já definidos e gerar estimativas para os demais pontos. No exemplo citado anteriormente, interpolar significa encontrar o potencial escalar elétrico na região no interior do triângulo a partir do conhecimento desse potencial nos seus nós. Essa

definição pode ser estendida para todos os outros problemas resolvidos pelo FEM. No caso de um problema magnético harmônico no tempo, a grandeza a ser estimada é o potencial vetor magnético  $A$ .

As funções interpoladoras são, em sua maioria, polinomiais, apesar de que outras possam ser utilizadas, como as trigonométricas e exponenciais. A preferência pelos polinômios se dá pelo fato de que eles são facilmente determinados a partir de dados discretos, sua formulação é bastante adequada a algoritmos de computador e suas derivadas e integrais são facilmente obtidas. Além disso, como será visto, os polinômios permitem que uma melhora na exatidão dos resultados seja atingida através do aumento do grau da função associada a eles.

Uma característica importante dos polinômios interpoladores é que existe um e somente um polinômio de grau  $n$  capaz de passar por  $n + 1$  pontos. No entanto, há várias fórmulas matemáticas diferentes capazes de expressar esse polinômio, tais como a forma de Lagrange e de Newton, cada uma mais apropriada para determinado fim. No FEM, por exemplo, a forma de Lagrange é mais interessante por expressar a função interpoladora como uma somatória de produtos dos seus nós. Já em alguns casos de diferenciação numérica de dados discretos, a forma de Newton é mais conveniente.

Dessa forma, as funções interpoladoras empregadas no FEM são quase sempre um polinômio de Lagrange, cuja expressão depende diretamente do tipo e da ordem do elemento geométrico. Como existem muitos tipos de elementos diferentes, a seguir são apresentados apenas os equacionamentos dos elementos básicos para os modelos 1D, 2D e 3D que são, respectivamente, os elementos lineares, triangulares e tetraédricos. A definição de ordem do elemento também é encontrada mais adiante.

#### i) Elementos lineares

Para problemas em uma única dimensão, isto é, para aqueles cujas grandezas variam em apenas um eixo espacial, os domínios podem ser

discretizados por elementos lineares formado por dois nós, tal como o mostrado na Figura 3.2(a).

Nesse caso, a função interpoladora polinomial deve ser uma equação do primeiro grau, representando uma reta que passa por esses dois nós ou pontos, nos moldes da seguinte equação:

$$f(x) = a + bx \quad (3.22)$$

onde  $f(x)$  é a variável dependente,  $a$  e  $b$  são constantes e  $x$  é a variável independente. No intuito de encontrar as constantes  $a$  e  $b$  dessa equação, várias técnicas podem ser utilizadas, uma delas consiste em escrever essa expressão para cada um dos seus nós, conforme mostram as Equações (3.23), em seguida, aplicar a regra de Cramer. Essa técnica é aplicada para outros elementos.

$$f(x_1) = a + bx_1 \quad (3.23a)$$

$$f(x_2) = a + bx_2 \quad (3.23b)$$

Outra técnica possível é aplicar o conceito de semelhança de triângulos no elemento linear exibido na Figura 3.3, concebendo a Equação (3.24).

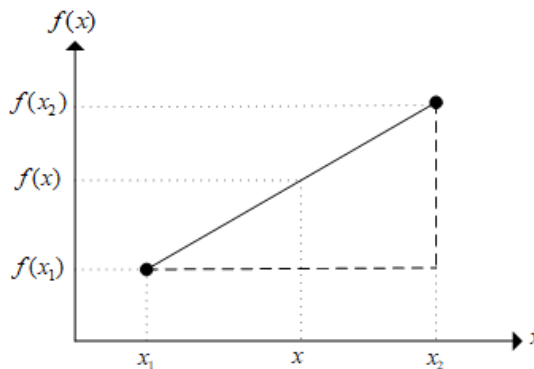


Figura 3.3 – Aplicação da técnica de semelhança de triângulos para dedução do polinômio interpolador de primeiro grau. Fonte: autor (2020).

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3.24)$$

Rearranjando os termos, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad (3.25)$$

Essa última equação é conhecida como *polinômio interpolador de Lagrange* e permite encontrar os valores da função em pontos intermediários do elemento linear a partir do conhecimento dos valores dos seus nós. Essa equação poderia ser reescrita de outras maneiras, como através do *polinômio interpolador de Newton*. No FEM, a forma de Lagrange é mais interessante por expressar a função interpoladora em função dos valores nos nós.

A fórmula geral empregada para aproximação de funções por meio de outras funções é mostrada na Equação (3.26), sendo conhecida *função de aproximação*.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i(x) f(x_i) \quad (3.26)$$

A função  $N_i(x)$  é conhecida como *função de forma* e  $n$  é o grau da equação quando se tem apenas uma variável independente. A seguir é apresentada a conceituação referente ao grau da equação.

#### a) Ordem dos elementos

No exemplo mostrado anteriormente, empregaram-se equações de primeiro grau para as funções de forma, no entanto, polinômios de expoentes superiores podem ser utilizados, definindo o grau da função interpoladora. A utilização de equações lineares tem algumas vantagens como a simplicidade de sua formulação e a geração de matrizes com largura de banda menor. Essas matrizes são aquelas resultantes do sistema de equações produzido a partir das equações dos elementos individuais, etapa mostrada na subseção 3.2.6.3. A grande desvantagem de tais equações reside na menor exatidão associada às estimativas dos valores interpolados e na convergência lenta da solução em relação ao número de nós (Jian-

Ming, 2014). Uma forma de contornar essas desvantagens é aumentar o número de elementos finitos que discretizam dada região, aumentando, também, o esforço computacional. Em modelos unidimensionais, esse aumento quase não traz grandes custos. No entanto, para modelos em duas e, principalmente, em três dimensões, o aumento excessivo de elementos pode gerar simulações bastante onerosas sob o ponto de vista de memória e tempo de processamento.

O emprego de polinômios de graus superiores representa uma alternativa em relação ao aumento do número de elementos finitos, apresentando uma relação de custo-benefício bastante interessante, isto é, um vantajoso ganho de exatidão em função do aumento do custo computacional. Portanto, equações quadráticas e cúbicas, ou até mesmo de graus superiores, podem ser utilizadas na formulação das funções interpoladoras. Nesses casos, além dos nós associados aos vértices dos elementos geométricos, nós extras são inseridos.

Quando o polinômio interpolador é de grau um, os elementos são comumente chamados de *simplex*, de modo que o número de nós associado a eles é sempre igual à sua dimensionalidade espacial mais um, isto é, os elementos de uma, duas e três dimensões, possuem dois, três e quatro nós, respectivamente, sendo esses nós localizados exatamente nos vértices dos elementos. Já os elementos associados às funções interpoladoras de segundo e terceiro grau são chamados de *elementos de segunda e terceira ordem*. Tal nomenclatura segue para os elementos de ordens superiores.

Para o caso de domínios unidimensionais, o emprego de equações quadráticas, como a mostrada na Equação (3.27), permite atribuir três nós para um único elemento linear, ao invés de apenas dois nós quando da utilização de equações lineares. Isto se deve pela propriedade dos polinômios comentada anteriormente e que pode ser resumida da seguinte forma: um polinômio de grau  $n$  é capaz de passar por  $n + 1$  pontos. O terceiro nó é colocado, usualmente, no centro do elemento linear.

$$f(x) = a + bx + cx^2 \quad (3.27)$$

Considerando que essa equação é definida nos três nós pertencentes ao elemento linear, pode-se definir as próximas equações:

$$f(x_1) = a + bx_1 + cx_1^2 \quad (3.28a)$$

$$f(x_2) = a + bx_2 + cx_2^2 \quad (3.28b)$$

$$f(x_3) = a + bx_3 + cx_3^2 \quad (3.28c)$$

Aplicando a regra de Cramer e manipulando os termos de forma conveniente, pode-se escrever a função interpoladora de segunda grau no formato da Equação (3.26), cujas funções de forma são dadas pelas seguintes expressões:

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad (3.29a)$$

$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad (3.29b)$$

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \quad (3.29c)$$

Seguindo a mesma ideia, polinômios de terceiro grau podem ser utilizados para as funções de forma, sendo que sua formulação completa pode ser encontrada em Rao (2018).

É importante lembrar que as funções interpoladoras encontradas até então são definidas apenas no intervalo compreendido entre os nós das extremidades do elemento linear considerado. Para obter a discretização completa de um problema unidimensional, vários elementos lineares são utilizados, de modo que cada um tem sua própria equação.

## ii) Elementos triangulares

A forma geométrica básica para discretizar domínios bidimensionais é o triângulo, como o mostrado na Figura 3.2(b). Percebe-se que, agora, diferentemente do caso anterior representado pelo elemento linear, cada ponto é definido por duas coordenadas espaciais,  $x$  e  $y$ , as variáveis independentes, que possuem um valor de função calculado através de  $f(x, y)$ , a variável dependente. O objetivo é encontrar

uma função interpoladora capaz de estimar o valor de  $f(x, y)$  em qualquer ponto no interior do triângulo a partir dos valores conhecidos em seus nós.

Assim como explicitado para o domínio unidimensional, os elementos triangulares podem ser de diferentes ordens, de acordo com o grau do polinômio interpolador utilizado.

#### a) Triângulos de primeira-ordem

Os triângulos de primeira-ordem são aqueles cujas funções interpoladoras são do primeiro grau, podendo representá-las da seguinte forma:

$$f(x, y) = a + bx + cy \quad (3.30)$$

Uma vez que essa equação tem que passar pelos nós do triângulo, elabora-se o conjunto de equações mostrado a seguir:

$$f(x_1, y_1) = a + bx_1 + cy_1 \quad (3.31a)$$

$$f(x_2, y_2) = a + bx_2 + cy_2 \quad (3.31b)$$

$$f(x_3, y_3) = a + bx_3 + cy_3 \quad (3.31c)$$

As equações anteriores podem ser escritas em formato matricial, tal como:

$$\begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

A fim de encontrar a equação do elemento através da formulação apresentada na Equação (3.26) deve-se, primeiramente, determinar os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Para tal, procede-se isolando o vetor coluna referente a esses coeficientes, produzindo a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Substituindo a Equação (3.33) nos coeficientes das Equações (3.30) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$f(x, y) = [1 \ x \ y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

O termo  $2A$  é dado pela seguinte equação:

$$2A = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (3.35)$$

Percebe-se que a Equação (3.34) tem o formato da equação (3.26), podendo então ser reescrita através da Equação (3.36), cujos termos são definidos pelo conjunto de Equações (3.37) e (3.38).

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) f(x_i, y_i) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A} [\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y] \\ N_2 &= \frac{1}{2A} [\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y] \\ N_3 &= \frac{1}{2A} [\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y] \end{aligned} \quad (3.37)$$



$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\
\alpha_2 &= (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\
\alpha_3 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
\beta_1 &= (y_2 - y_3) \\
\beta_2 &= (y_3 - y_1) \\
\beta_3 &= (y_1 - y_2) \\
\gamma_1 &= (x_3 - x_2) \\
\gamma_2 &= (x_1 - x_3) \\
\gamma_3 &= (x_2 - x_1)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Uma característica importante da função de forma  $N_i(x_j, y_j)$  é que ela é igual a 1 para  $i = j$  e igual a 0 para  $i \neq j$ . Essa propriedade faz com que a função interpoladora gere o valor exato nos vértices definidos pelos pontos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ , conforme requerido, e nos outros pontos, uma estimativa é obtida por meio da combinação linear das funções de forma.

#### b) Triângulos de segunda-ordem

No caso de triângulos associados a funções interpoladoras de segundo grau, a exatidão dos resultados é melhorada em relação ao triângulo de primeira-ordem, no entanto, a consideração de uma maior quantidade de nós também gera um maior custo computacional, conforme já comentado. Em síntese, os triângulos de segunda-ordem são definidos por seis nós, posicionados nos vértices e no centro de cada aresta, conforme exhibe a Figura 3.4. A Equação (3.39) apresenta a forma do polinômio interpolador de segundo grau.

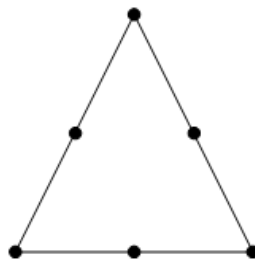


Figura 3.4 – Elemento triangular com seis nós. Fonte: autor (2020).

$$f(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 \quad (3.39)$$

Supondo que essa equação passe exatamente pelos seis nós que concebem o elemento triangular e rearranjando os termos, exatamente como foi feito nos casos anteriores, tem-se a função interpoladora definida pela Equação (3.40) cujas funções de forma são dadas pelas Equações (3.41).

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i(x, y) f(x_i, y_i) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} N_j(x, y) &= (2L_j - 1)L_j, j = 1, 2, 3 \\ N_4(x, y) &= 4L_1L_2 \\ N_5(x, y) &= 4L_2L_3 \\ N_6(x, y) &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

O termo  $L_j$  é definido em função das coordenadas dos pontos, de acordo com a seguinte expressão:

$$L_j(x, y) = \frac{1}{2A} (a_j + \beta_j x + \gamma_j y), j = 1, 2, 3 \quad (3.42)$$

O termo  $2A$  e  $a_j$ ,  $\beta_j$  e  $\gamma_j$  são os mesmos definidos anteriores pelas Equações (3.35) e (3.38), respectivamente..

#### c) Triângulos de terceira-ordem

Os triângulos de terceira-ordem são definidos por dez nós, conforme exige a Figura 3.5. As formulações relacionadas à função interpoladora cúbica associada a tal triângulo podem ser encontradas em Rao (2018).

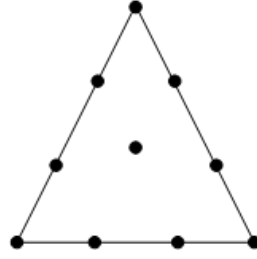


Figura 3.5 – Elemento triangular com dez nós. Fonte: autor (2020).

### iii) Elementos tetraédricos

O tetraedro é o elemento básico capaz de discretizar os domínios tridimensionais, onde os valores da variável dependente são definidos em função dos três eixos espaciais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Assim como foi realizado para o triângulo no caso de domínios 2D, o intuito é encontrar o polinômio interpolador capaz de estimar o valor de determinada função em qualquer ponto no interior do tetraedro a partir do conhecimento dos valores em seus nós.

A seguir são apresentadas as formulações do tetraedro em função do grau do polinômio interpolador utilizado.

#### a) Tetraedros de primeira-ordem

O polinômio interpolador de primeiro grau associado ao tetraedro definido por quatro nós possui a forma a mostrada na Equação (3.43). Conforme pode ser verificado pela Figura 3.2(c), esses nós estão localizados nas mesmas posições que os vértices.

$$f(x, y, z) = a + bx + cy + dz \quad (3.43)$$

As mesmas manipulações algébricas realizadas para o caso do triângulo podem ser realizadas para o presente caso, de modo que, ao final, a equação interpoladora para o tetraedro é definida pelas Equações (3.44) e (3.45).

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y, z) f(x_i, y_i, z_i) \quad (3.44)$$

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{6V} [a_i + b_i x + c_i y + d_i z] \quad (3.45)$$

Os coeficientes da Equação (3.45) são dados por:

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

e

$$\begin{aligned} a_1 &= \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \\ b_1 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \\ c_1 &= -\det \begin{bmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{bmatrix} \\ d_1 &= -\det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

As outras constantes são definidas através da permutação cíclica dos subscritos 1, 2, 3 e 4.

#### b) Tetraedros de segunda-ordem

Os tetraedros de segunda-ordem são definidos por um conjunto de dez nós, posicionados conforme mostra a Figura 3.6. A forma do polinômio interpolador quadrático é exibida na Equação (3.48).

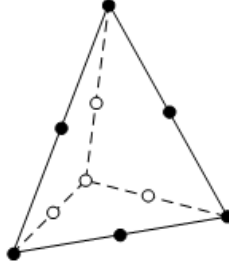


Figura 3.6 - Elemento tetraédrico com dez nós. Fonte: autor (2020).

$$f(x, y, z) = a + bx + cy + dz + ex^2 + fy^2 + gz^2 + hxy + iyz + jxz \quad (3.48)$$

Reescrevendo a equação anterior na forma de Lagrange, obtém-se a Equação (3.49), sendo as funções de forma definidas pelas Equações (3.50).

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 N_i(x, y) f(x_i, y_i) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} N_j(x, y) &= (2L_j - 1)L_j, j = 1, 2, 3 \\ N_5(x, y) &= 4L_1L_2 \\ N_6(x, y) &= 4L_2L_3 \\ N_7(x, y) &= 4L_1L_3 \\ N_8(x, y) &= 4L_1L_4 \\ N_9(x, y) &= 4L_2L_4 \\ N_{10}(x, y) &= 4L_3L_4 \end{aligned} \quad (3.50)$$

O termo  $L_j$  é determinado de acordo com as coordenadas dos pontos, como mostra a Equação (3.51).

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

O termos  $6V$  e  $a_i, b_i, c_i$  e  $d_i$  são os mesmos definidos anteriormente pelas Equações (3.46) e (3.47), respectivamente..

### c) Tetraedros de terceira-ordem

As formulações concernentes aos tetraedros determinados por funções interpoladoras cúbicas podem ser encontradas em Rao (2018). Ele é composto por vinte nós, consoante a Figura 3.7.

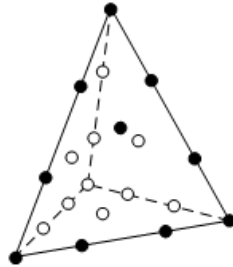


Figura 3.7 – Elemento tetraédrico com vinte nós. Fonte: autor (2020).

### iv) Elementos isoparamétricos

Elementos definidos por arestas retas, tais como os mostrados nas figuras anteriores, não são capazes de modelar satisfatoriamente regiões do problema caracterizadas pela presença de geometrias curvas. Para tal, são normalmente empregados os chamados *elementos isoparamétricos*, cujas funções de forma que os definem são as mesmas empregadas para interpolar os valores das incógnitas no interior do elemento. Tal estratégia permite a geração de elementos com arestas curvas, que conseguem representar de forma mais exata as geometrias com essa característica. Formulações e informações mais detalhadas sobre esses tipos de elementos podem ser encontradas em Rao (2018), não sendo aqui abordadas.

#### 3.2.6.2. Ajuste da Equação Diferencial à Função Interpoladora

Durante a elucidação dos procedimentos para a escolha da função interpoladora foi assumido que os valores de determinada grandeza nos nós de dado elemento geométrico eram conhecidos. Nesta subseção são exibidos alguns possíveis procedimentos para calcular tais valores.

Nesse contexto, a ideia é desenvolver uma equação para cada elemento finito através da combinação, por meio de algum método matemático específico, da equação diferencial associada à solução do problema com a função interpoladora relacionada ao tipo geométrico do elemento. Em relação a tais métodos, os mais utilizados são a abordagem variacional e o método dos resíduos ponderados (MRP). A reunião das equações de todos os elementos, por fim, gera um sistema de equações que, uma vez resolvido, resulta no valor da grandeza incógnita nos nós de todos elementos geométricos. A função interpoladora é utilizada, então, para encontrar os valores da função de interesse no interior desses elementos, conforme já explicitado.

#### i) Método dos Resíduos Ponderados

No intuito de definir o método dos resíduos ponderados, é necessário, primeiro, conceituar a noção de resíduo. Para isso, considere uma equação diferencial, definida em um domínio  $D$ , dada pela próxima equação:

$$\mathcal{L}f = g \quad (3.52)$$

em que  $\mathcal{L}$  é o operador diferencial,  $f$  representa a função associada à grandeza desconhecida e  $g$  é comumente conhecida por função excitante ou fonte. Quando  $f$  retrata o valor exato da grandeza, pode-se reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}f - g = 0 \quad (3.53)$$

Para compreender melhor a Equação (3.53), pode-se considerar, por exemplo, o problema eletrostático, definido anteriormente pela equação de Poisson:  $\vec{\nabla}^2 V = -\rho_v/\epsilon$ . Nesse caso, o operador diferencial  $\mathcal{L}$  se torna o operador laplaciano  $\vec{\nabla}^2$ ,  $V$  é a função desconhecida e  $-\rho_v/\epsilon$  é a função excitante, cujo valor é conhecido.

Na maioria das vezes, não se pode obter o valor exato de  $f$ , mas apenas uma aproximação deste, denotada por  $\hat{f}$ . Quando  $\hat{f}$  é empregado na Equação (3.53), a

igualdade não pode ser mais colocada, visto que a não utilização do valor exato de  $f$  gera um pequeno erro ou resíduo, denominado de  $R$ , conforme exibido a seguir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\hat{f} - g &\cong 0 \\ \mathcal{L}\hat{f} - g &= R\end{aligned}\tag{3.54}$$

Na análise de problemas por meio de métodos numéricos, a solução encontrada é apenas uma aproximação ótima da solução real ou verdadeira, portanto, aplica-se, nesses casos, a Equação (3.54). No FEM mais especificamente, a função  $\hat{f}$  seria a função polinomial interpoladora, que representa uma aproximação da função exata  $f$  no domínio considerado.

Introduzido o conceito de resíduo, pode-se definir então o *método dos resíduos ponderados (MRP)*. O MRP estabelece que a integral da projeção do resíduo  $R$  sobre as funções peso linearmente independentes  $W_i$  deve ser zero em um domínio  $D$  especificado, conforme a Equação (3.55). Diversas formulações existem para representar a função peso e essas opções determinam os tipos de MRP.

$$\int_D RW_i dD = 0, i = 1, 2, \dots, N\tag{3.55}$$

No contexto do método de elementos finitos, a opção mais comum é empregar as funções de forma  $N_i$ , definidas anteriormente, como funções peso, resultando na seguinte expressão:

$$\int_D RN_i dD = 0\tag{3.56}$$

Essa alternativa representa a *abordagem de Galerkin* para o método dos resíduos ponderados e estabelece que a projeção do resíduo sobre cada função de forma deve ser igual a zero, isto é, o resíduo é ortogonal às funções de forma. Essa equação é escrita para cada um dos nós dos elementos que compõe a malha de elementos finitos.



Após definir o método dos resíduos ponderados e um dos seus casos especiais, a abordagem de Galerkin, pode-se enunciar de maneira sucinta as etapas que envolvem a solução de um problema eletrostático ou magnético harmônico no tempo através do FEM: dada a equação diferencial associada ao problema, deve-se substituir a função desconhecida  $f$  por uma função interpoladora polinomial  $\hat{f}$ , associada à forma geométrica do elemento finito, um resíduo  $R$  é então introduzido. Aplica-se, em seguida, a abordagem de Galerkin para o MRP, através de uma integral do produto escalar de  $R$  e  $N$  em cada nó, substituindo  $R$  pela equação diferencial que o define. O resultado é, de maneira geral, uma integral sobre uma equação diferencial de segunda ordem. Através da integração por partes com a consideração correta dos termos, a ordem dessa integral pode ser reduzida para uma derivada de primeira ordem, que rearranjada de maneira específica, gera uma equação para cada nó associado a um único elemento finito. Expandindo essa ideia para todos os outros elementos finitos, ter-se-á um sistema de equações geral associado a todos os domínios do problema que, uma vez resolvido, resulta nos valores desconhecidos das incógnitas nos nós. A função interpoladora é utilizada, então, para encontrar os valores da função de interesse no interior desses elementos, conforme já explicitado. O subtópico seguinte exhibe a aplicação dessa estratégia em um problema magnético harmônico no tempo para o caso de domínios bidimensionais.

a) Abordagem de Galerkin para o problema magnético harmônico no tempo

Com o objetivo de exemplificar a aplicação da abordagem de Galerkin, são apresentados os procedimentos básicos empregados pelos algoritmos do FEM para atingir o sistema de equações algébricas correspondente a um problema magnético harmônico no tempo em duas dimensões. A malha foi considerada como sendo constituída por um elemento triangular de primeira-ordem.

Para facilitar os equacionamentos, a Equação (3.21), tomada como base, é simplificada desconsiderando os termos referentes à corrente de deslocamento e ao gradiente do potencial escalar elétrico. Postas todas as observações, essa equação pode ser escrita como:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{J}_{\text{fonte}} - j\omega\sigma\vec{A} \quad (3.57)$$

Considerando o meio homogêneo e aplicando a identidade vetorial referente ao produto vetorial duplo do operador nabla, tem-se:

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{\mu} \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{J}_{\text{fonte}} - j\omega\sigma\vec{A} \quad (3.58)$$

Assumindo o calibre de Coulomb em que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , obtém-se a equação desejada:

$$-\frac{1}{\mu} \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{J}_{\text{fonte}} - j\omega\sigma\vec{A} \quad (3.59)$$

No caso de domínios bidimensionais em um plano cartesiano, o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  se reduz a uma única componente perpendicular ao plano de estudo que, neste exemplo, será considerada  $A_z$ . Sendo assim, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\vec{J}_{\text{fonte}} + j\omega\sigma\vec{A} \quad (3.60)$$

Ao substituir o valor exato da componente  $A_z$  do vetor potencial magnético por um valor aproximado  $\hat{A}$ , pode-se escrever a Equação (3.61), em que  $R$  é o resíduo resultante dessa aproximação.

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} - j\omega\sigma\hat{A} + \vec{J}_{\text{fonte}} = R \quad (3.61)$$

Aplicando a abordagem de Galerkin na equação anterior, tem-se:

$$\iint_D \left[ \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} - j\omega\sigma\hat{A} + \vec{J}_{\text{fonte}} \right) N \right] dxdy = 0 \quad (3.62)$$

em que  $D$  é o domínio associado ao elemento finito considerando e  $N$  é a função de forma. Essa equação é escrita para cada um dos nós pertencentes a esse elemento.

Desenvolvendo a equação anterior, pode-se escrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) - j\omega\sigma\hat{A} + \vec{J}_{\text{fonte}} \right] N dxdy = \\ & = \underbrace{\iint_D \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) N dxdy}_1 - \underbrace{\iint_D j\omega\sigma\hat{A} N dxdy}_2 + \underbrace{\iint_D \vec{J}_{\text{fonte}} N dxdy}_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Aplicando a integral por partes no termo 1 da equação anterior a fim de reduzir a ordem da derivada de segunda para primeira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \left[ \iint_D \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right)}_{dv} \underbrace{N}_u dxdy \right] &= \frac{1}{\mu} \left[ \underbrace{N \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right)}_v - \iint_D \underbrace{\left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right)}_v \underbrace{\frac{\partial N}{\partial x \partial y}}_{du} \right] = \\ &= \frac{1}{\mu} \left[ \oint_F N \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{n}} df - \iint_D \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Substituindo a equação anterior no termo 1 da Equação (3.63) e rearranjando os termos, elabora-se a Equação (3.65), que descreve o comportamento do elemento finito de domínio  $D$ .

$$\underbrace{\frac{1}{\mu} \iint_D \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \right) dxdy}_1 + \underbrace{j\omega\sigma \iint_D \hat{A} N dxdy}_2 = \underbrace{\frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{n}} \oint_F N df}_3 + \underbrace{\vec{J}_{\text{fonte}} \iint_D N dxdy}_4 \quad (3.65)$$

Uma vez obtida a equação que aproxima a solução para o elemento, deve-se obter as expressões matemáticas para cada um dos nós.

A função interpoladora polinomial, associada a um elemento triangular de primeira-ordem, é definida pela Equação (3.66), cujos termos foram apresentados anteriormente pelas Equações (3.37) e (3.38).

$$\hat{A}(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \hat{A}(x_i, y_i) \quad (3.66)$$

O primeiro passo é resolver o termo 1 da Equação (3.65), para isso, desenvolve-se, primeiramente, as derivadas de primeira ordem que aparecem nesse termo (rever as Equações (3.37) e (3.38)), conforme se apresenta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \beta_1 \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \beta_2 \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \beta_3 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \gamma_1 \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \gamma_2 \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \gamma_3 \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} &= \frac{1}{2A} (\beta_1 \hat{A}_1 + \beta_2 \hat{A}_2 + \beta_3 \hat{A}_3) \\ \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} &= \frac{1}{2A} (\gamma_1 \hat{A}_1 + \gamma_2 \hat{A}_2 + \gamma_3 \hat{A}_3) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Agora o termo 1 é resolvido para cada um dos nós. Para o nó 1:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu} \iint_D \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy = \\
& = \frac{1}{4A^2\mu} [(\beta_i^2 + \gamma_i^2)\hat{A}_1 + (\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j)\hat{A}_2 + (\beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k)\hat{A}_3] \iint_D dx dy = \\
& = \frac{1}{4A\mu} [(\beta_i^2 + \gamma_i^2)\hat{A}_1 + (\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j)\hat{A}_2 + (\beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k)\hat{A}_3] \quad (3.69a)
\end{aligned}$$

Para o nó 2:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu} \iint_D \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy = \\
& = \frac{1}{4A^2\mu} [(\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j)\hat{A}_1 + (\beta_j^2 + \gamma_j^2)\hat{A}_2 + (\beta_j\beta_k + \gamma_j\gamma_k)\hat{A}_3] \iint_D dx dy = \\
& = \frac{1}{4A\mu} [(\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j)\hat{A}_1 + (\beta_j^2 + \gamma_j^2)\hat{A}_2 + (\beta_j\beta_k + \gamma_j\gamma_k)\hat{A}_3] \quad (3.69b)
\end{aligned}$$

Para o nó 3:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu} \iint_D \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) dx dy = \\
& = \frac{1}{4A^2\mu} [(\beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k)\hat{A}_1 + (\beta_j\beta_k + \gamma_j\gamma_k)\hat{A}_2 + (\beta_k^2 + \gamma_k^2)\hat{A}_3] \iint_D dx dy = \\
& = \frac{1}{4A\mu} [(\beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k)\hat{A}_1 + (\beta_j\beta_k + \gamma_j\gamma_k)\hat{A}_2 + (\beta_k^2 + \gamma_k^2)\hat{A}_3] \quad (3.69c)
\end{aligned}$$

O termo 1 da Equação (3.65) é então dado por:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu} \iint_D \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \\
& = \frac{1}{4A\mu} \begin{bmatrix} (\beta_i^2 + \gamma_i^2) & (\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j) & (\beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k) \\ (\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j) & (\beta_j^2 + \gamma_j^2) & (\beta_j\beta_k + \gamma_j\gamma_k) \\ (\beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k) & (\beta_j\beta_k + \gamma_j\gamma_k) & (\beta_k^2 + \gamma_k^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Seguindo a mesma ideia para o termo 2 da Equação (3.65), é possível defini-lo como se segue:

$$\begin{aligned}
& j\omega\sigma \iint_D \hat{A} N dx dy = \\
& = \frac{j\omega\sigma A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

O termo 4 pode ser obtido considerando a densidade de corrente constante sobre o elemento triangular analisado, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
& \vec{J}_{fonte} \iint_D N dx dy = \\
& = \frac{\vec{J}_{fonte} A}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Através dos equacionamentos mostrados neste subtópico pode-se compreender como um problema complexo governando por equações diferenciais é escrito em termos de equações algébricas matriciais, possibilitando sua solução através de algoritmos computacionais. Para isso, empregou-se a abordagem de Galerkin. A aplicação das formulações apresentadas em um exemplo simples pode ser encontrada em Salon (1995).

No momento, apenas a equação de um único elemento finito foi obtida, mas todo e qualquer elemento vai obedecer aos mesmos procedimentos. A montagem do sistema completo de equação é mostrada na próxima subseção.

Mais detalhes sobre abordagem de Galerkin e outros métodos, pode-se recorrer ao livro de Jian-Ming (2014), Silvester e Ferrari (1996) e Rao (2018).

### 3.2.6.3. Montagem do Sistema de Equações

Uma vez deduzidas as expressões matemáticas associadas a cada elemento finito, deve-se agrupá-las em um sistema de equações capaz de caracterizar o comportamento do modelo como um todo. Ao final dessa etapa, ter-se-á o sistema inteiro expresso na forma matricial que poderá ser resolvido para o vetor de incógnitas por alguma técnica de solução.

O ponto chave desse procedimento é definir numerações locais e globais para todos os nós que formam a malha de elementos finitos. A numeração local se repete de 1 até  $n$  para todo elemento, em que  $n$  é o número de nós de cada um. A numeração global, por sua vez, apresenta uma sequência contínua de 1 até  $N$ , em que  $N$  é o número total de nós do modelo. Sendo assim, cada nó é identificado por dois números, um local e um global. Enquanto a numeração global pode ser realizada de maneira arbitrária, a local tem que ser sempre crescente no sentido anti-horário. A Figura 3.8 mostra um exemplo de modelo discretizado por apenas três elementos finitos cujas numerações locais e globais são exibidas.

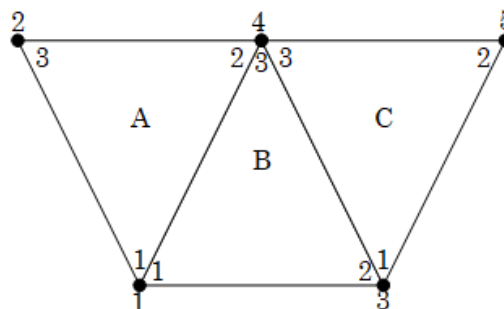


Figura 3.8 - Modelo discretizado por três elementos finitos. Fonte: autor (2020).

Para montar o sistema de equações global é necessário, primeiro, definir as expressões matemáticas de cada elemento no formato da Equação (3.73):

$$[K][x] = [b] \quad (3.73)$$

em que  $[K]$  é a matriz de propriedade local dos elementos,  $[x]$  e  $[b]$  são os vetores coluna das incógnitas e da função excitante, respectivamente.

Isto posto, as expressões matemáticas que governam os elementos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dadas pelas Equações (3.74), (3.75) e (3.76), cuja numeração do vetor coluna de incógnitas obedece à notação global e a do vetor coluna de excitação obedece à local.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

A partir dessas equações, monta-se então, a Equação (3.77), que representa o comportamento completo do sistema.

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{13} & B_{12} & A_{12} + B_{13} & 0 \\ A_{31} & A_{33} & 0 & B_{32} & 0 \\ B_{21} & 0 & B_{22} + C_{11} & B_{23} + C_{13} & C_{12} \\ A_{21} + B_{31} & A_{23} & B_{32} + C_{31} & A_{22} + B_{33} + C_{33} & C_{32} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{23} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_3 \\ b_2 + c_1 \\ a_2 + b_3 + c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Conforme pode ser verificado pelo exemplo anterior, se  $N$  é o número de nós totais da malha, os vetores colunas sempre vão possuir  $N$  linhas e a matriz de propriedade global vai ser uma matriz quadrada de ordem  $N$ . Outras características inerentes à matriz de propriedade são:



- Cada termo  $K_{ii}$  contabiliza a contribuição de coeficientes de todos os elementos finitos que compartilham o nó  $i$ . O nó 4, por exemplo, é compartilhado pelos elementos A, B e C, sendo assim, o termo  $K_{44}$  apresenta uma somatória de três coeficientes:  $A_{22} + B_{33} + C_{33}$ , cujos subíndices provém da notação local.
- Cada termo  $K_{ij}$  representa o acoplamento entre os nós  $i$  e  $j$ , sendo que a contribuição para esse acoplamento provém de todos os elementos que compartilham as arestas que ligam esses nós. Conforme pode ser verificado pela Figura 3.8, o termo  $K_{14}$ , por exemplo, representa o acoplamento entre os nós globais 1 e 4 através de uma aresta compartilhada pelos elementos A e B. O resultado para esse termo é a soma dos coeficientes  $A_{12}$  e  $B_{13}$ , em que os subíndices decorrem da numeração local.
- Os nós  $i$  e  $j$  que não estão ligados por arestas implicam o valor de  $K_{ij}$  igual a zero, ou seja, não há acoplamento entre esses nós. Essa característica indica que para uma malha com grande número de elementos finitos, muitos nós não estarão acoplados entre si, tornando a matriz dos coeficientes esparsa, isto é, com uma grande quantidade de zeros.
- Ela é simétrica, ou seja,  $K_{ij} = K_{ji}$ , por razões óbvias.

### 3.2.7. Solução do Sistema de Equações

Após obter o sistema de equações matricial global, é necessário resolvê-lo através de algum método numérico para encontrar os valores das incógnitas nos nós da malha de elementos finitos. Tais métodos se dividem em dois grupos: *métodos diretos* e *métodos iterativos*.

Os métodos diretos consistem em aplicar uma série de operações matemáticas nas linhas das matrizes ou decompô-las em outras, de forma que o novo sistema matricial resultante seja equivalente ao original, mas cuja solução é obtida mais facilmente. Tais procedimentos são realizados em um número finito de passos e a resposta só não é exata devido aos erros de arredondamento. São

exemplos de métodos diretos: *eliminação de Gauss*, *decomposição LU*, *decomposição de Cholesky*, entre outros.

Os métodos iterativos obtêm a solução aproximada do sistema através de iterações fazendo com que um palpite inicial se aproxime da resposta verdadeira a cada repetição do algoritmo. As iterações continuam até que o número máximo pré-definido para elas seja atingido ou que um determinado critério de parada seja satisfeito. Alguns métodos iterativos são: *método de Gauss-Seidel*, *método dos Gradientes Conjugados*, entre outros.

As matrizes resultantes da aplicação do FEM são quase sempre esparsas, simétricas e de banda. Devido a isso, muitos algoritmos destinados à solução de tais matrizes podem adotar uma série de técnicas para melhor aproveitar essas características. Em relação aos métodos possíveis de solução, não existem regras claras capazes de determinar quando um ou outro deve ser utilizado.

Uma compilação dos principais métodos de solução aplicados ao FEM e suas características pode ser encontrada em Jian-Ming (2014).

### 3.3. Cálculo de Parâmetros de Cabos por Meio do FEM

O primeiro emprego do método de elementos finitos (FEM) em aplicações envolvendo o cálculo de parâmetros de cabos ocorreu há 30 anos, em um trabalho desenvolvido por Yanan Yin (Yin, 1990). Desde então, diversos autores publicaram estudos tendo em vista diferentes casos e abordagens, gerando contribuições expressivas nesse tema, conforme explicitado na subseção 2.7.1.

Se, inicialmente, os pesquisadores elaboravam os próprios algoritmos e tinham grandes preocupações acerca das limitações computacionais da época, hoje há diversos *softwares* que permitem a solução de aplicações através do FEM sem a necessidade de o usuário se aprofundar nos aspectos matemáticos por trás desse método. Além disso, a alta capacidade de processamento dos computadores atuais permite a consideração de geometrias mais complexas, como as estudadas neste trabalho, que envolvem modelos em três dimensões.

Mesmo com a evolução dos computadores modernos, é imprescindível que diversas técnicas de simplificação sejam empregadas em modelos complexos,

visando reduzir o custo de memória e tempo computacional. Além disso, muitos outros aspectos como: estratégias para se obter os parâmetros de cabos, definição dos domínios do modelo, refinamento da malha, escolha das condições de fronteira, entre outros, devem ser profundamente estudados e as alternativas mais eficientes selecionadas, no intuito de otimizar as simulações.

Dentre o conjunto de *softwares* disponíveis, optou-se pela utilização do Comsol (Comsol, 2020b), programa bastante robusto capaz de resolver aplicações em diversas áreas da ciência e da engenharia. Seu emprego em problemas abrangendo condutores elétricos e, mais especificamente, o cálculo de parâmetros de cabos, é bastante difundido, podendo ser encontrado em diversos tutoriais do programa (Comsol, 2020a; Comsol, 2020d) e em pesquisas publicadas nos últimos anos (del Pino et al., 2018), fatores que contribuíram para a sua seleção.

Sendo assim, nas próximas subseções são discutidas todas as escolhas e considerações realizadas nas simulações a fim de calcular os parâmetros de cabos em modelos tridimensionais, tanto no âmbito do Comsol como no da estrutura do problema em si. O objetivo principal é que a presente dissertação atue como guia metodológico para outros estudos cujo escopo é similar, incluindo os que empregam outros programas de FEM, visto que muitas técnicas e funcionalidades são comuns a todos os *softwares* mais robustos.

Nesse propósito, a subseção 3.2 é utilizada como referência teórica e todos os procedimentos anteriormente explicitados são abordados sob uma nova perspectiva: o cálculo de parâmetros de cabos em três dimensões utilizando o Comsol. A estrutura dos tópicos principais é mantida a mesma de forma a facilitar a correlação entre as subseções. Sempre que necessário, a forma de se definir determinada entidade no Comsol e como esse programa lida com algumas definições do FEM são apresentadas e discutidas, com o intuito facilitar o entendimento da metodologia proposta.

### 3.3.1. Definição das Equações que Regem o Sistema

A definição dos problemas a serem resolvidos pelo Comsol é realizada pela combinação de interfaces físicas (“*Physics Interfaces*”) com determinado estudo (“*Study*”).

#### i) Interface física

As interfaces físicas determinam as equações diferenciais parciais, propriedades de materiais, condições de fronteira, grandezas físicas, entre outras características específicas, a serem consideradas pelo programa. As interfaces que se assemelham sob a mesma área específica, são reunidas nos chamados *grupos* e *módulos*.

No programa base do Comsol, somente as interfaces mais comuns, divididas em grupos, estão disponíveis para o usuário, sendo que a inclusão de mais interfaces é realizada mediante a aquisição de módulos. Tanto os grupos como os módulos representam uma reunião de interfaces físicas, se diferenciando pela expansão de funcionalidades deste último. Por exemplo, as simulações de problemas envolvendo fenômenos eletromagnéticos governados pelas equações de Maxwell se dão através de interfaces físicas pertencentes ao grupo ou módulo *AC/DC*. Quando empregado somente o programa base, o Comsol refere-se ao *AC/DC* como grupo e as interfaces disponíveis são: “*Electrostatics*”, “*Electric Currents*” e “*Magnetic Fields*”. Ao adquirir o pacote de funcionalidades extras associado a este grupo, o *AC/DC* é então referido como módulo, e muitas interfaces são incluídas, tais como: “*Electrical Circuit*”, “*Magnetic and Electric Fields*”, “*Rotating Machinery Magnetic*”, entre outras. O Comsol permite também que múltiplas interfaces físicas sejam adicionadas ao mesmo problema, incluindo acoplamento entre elas; essa característica o torna bastante atrativo para diversas aplicações, tanto em ambientes comerciais como acadêmicos.

#### ii) Estudo

Os estudos, por sua vez, representam a abordagem a ser dada para o problema e dependem das características das grandezas e do tipo de investigação requerido pelo usuário. Dentre alguns tipos de estudos, pode-se citar:

- Estacionários (*“Stationary”*): utilizados quando as grandezas não variam com o tempo. Os problemas eletrostáticos e magnetostáticos têm essa característica.
- Dependentes do tempo (*“Time Dependent”*): aplicados nas situações em que as grandezas variam com o tempo de forma arbitrária, tal como ocorre nas investigações de transitórios eletromagnéticos.
- No domínio da frequência (*“Frequency Domain Model”*): as grandezas variam de forma periódica com o tempo como, por exemplo, nos problemas magnéticos harmônicos no tempo.

Outros tipos de estudos são apresentados no capítulo 20 (*Studies and Solvers*) do *Comsol Reference Manual* (Comsol, 2017c).

Os dois próximos subtópicos mostram qual interface física e estudo são empregados para a obtenção dos parâmetros série (resistência e indutância) e da capacitância de cabos através do Comsol, além da estratégia empregada para sua extração.

### iii) Parâmetros série (resistências e indutâncias)

Os parâmetros série podem ser obtidos através da quantificação dos campos elétricos e magnéticos presentes nas diversas regiões do sistema assumindo a injeção de uma corrente de maneira conveniente. Por outro lado, sabe-se que a resistência e a indutância são parâmetros extremamente dependentes da frequência dos sinais de excitação. Tal fato se deve à presença de fenômenos físicos como os efeitos pelicular e proximidade que alteram sobremaneira a distribuição dos campos eletromagnéticos do sistema e cujas intensidades variam proporcionalmente a  $\omega$ , conforme discutido na subseção 2.6.

Em face disso, a obtenção dos parâmetros série a partir da quantificação dos campos deve ser feita considerando grandezas harmônicas sob frequências específicas, permitindo sua representação através de fasores. Essa análise é, de fato, um problema magnético harmônico no tempo, tal como discutido e formulado no subtópico ii) da subseção 3.2.1.

No Comsol, esse tipo de problema é resolvido por meio de uma interface física chamada de “*Magnetic Field (mf)*” através de um estudo no domínio da frequência (“*Frequency Domain Model*”). Os principais conceitos teóricos, formulações e funcionalidades dessa interface física podem ser consultados em Comsol (2017a). Uma abordagem bastante interessante acerca do mesmo conteúdo está presente em um dos estudos de caso apresentados como exemplo, podendo ser encontrado em Comsol (2017e).

Dadas as considerações iniciais, os parâmetros série podem ser calculados da seguinte forma:

- Uma corrente elétrica é imposta em um dos condutores enquanto todos os outros são mantidos em circuito aberto. Na etapa de pós-processamento do Comsol, as tensões complexas nesses condutores são extraídas. Dessa maneira, para uma dada frequência angular  $\omega$ , o valor da impedância  $Z_{ij}(\omega)$  é calculado através da determinação da queda de tensão complexa  $V_i$  ao longo do  $i$ -ésimo condutor devida a uma excitação de corrente senoidal  $I_j$  no  $j$ -ésimo condutor, mantendo-se todos os outros condutores desenergizados. Pode-se sintetizar essa relação através da seguinte equação:

$$Z_{ij}(\omega) = \frac{V_i}{I_j} \quad (3.78)$$

A indutância e a resistência correspondentes a essa impedância são obtidas através das próximas expressões:

$$R_{ij}(\omega) = \text{Re}[Z_{ij}(\omega)] \quad (3.79)$$

$$L_{ij}(\omega) = \frac{\text{Im}[Z_{ij}(\omega)]}{\omega} \quad (3.80)$$

caso  $i = j$ , ou seja, se a queda de tensão está sendo determinada para o mesmo condutor sujeito à excitação de corrente senoidal, obtêm-se os valores de resistência e indutância próprias; por outro lado, se  $i \neq j$ , tem-se os valores de resistência e indutância mútuas entre os condutores  $i$  e  $j$ . Para a obtenção da matriz de impedâncias completa é necessário que várias simulações em uma quantidade igual ao número de condutores sejam realizadas, visto que apenas um condutor é excitado por simulação.

A excitação do sistema, seja ela por tensão ou corrente, é realizada no Comsol através de um nó chamado de “*Coil*” adicionado sob a interface “*Magnetic Field (mf)*”.

#### iv) Capacitância

A obtenção da matriz de capacitâncias envolve um problema do tipo eletrostático cujos campos elétricos são gerados por cargas elétricas estacionárias. Essa concepção se dá pela própria natureza física associada à definição da capacitância, consoante a base teórica explicitada na subseção 2.4.3. No FEM, esse problema é formulado tal como apresentado no subtópico i) da subseção 3.2.1.

O Comsol resolve o problema eletrostático através de uma interface chamada de “*Electrostatics*” associada a um estudo estacionário (“*Stationary*”). Mais informações sobre essa interface e suas características podem ser exploradas em Comsol (2017a).

Existem três possibilidades para se obter as capacitâncias intrínsecas aos elementos condutores do sistema:

- A primeira alternativa é atribuir um potencial escalar elétrico diferente de zero na superfície de um dos condutores enquanto todos os outros são

mantidos sob potencial nulo. Após a simulação da aplicação no FEM, as cargas induzidas nesses condutores são examinadas. Dessa maneira, o valor da capacitância  $C_{ij}$  pode ser calculado através da razão da carga induzida  $Q_i$  sobre o  $i$ -ésimo condutor quando uma diferença de potencial  $V_j$  é imposta para o  $j$ -ésimo condutor, mantendo-se todos os demais elementos com potenciais nulos. Pode-se resumir essa relação através da próxima equação:

$$C_{ij} = \frac{Q_i}{V_j} \quad (3.81)$$

caso  $i = j$ , ou seja, se as cargas induzidas estão sendo determinadas para o mesmo condutor sujeito à diferença de potencial em relação à referência de potencial nulo, obtém-se o valor da capacitância própria, por outro lado, se  $i \neq j$ , tem-se o valor da capacitância mútua entre os condutores  $i$  e  $j$ . A definição de capacitâncias próprias e mútuas está conforme a apresentada na subseção 2.4.3. Para a obtenção da matriz de capacitâncias completa é necessário que várias simulações em uma quantidade igual ao número de condutores sejam realizadas, visto que apenas um condutor é excitado por simulação.

- A segunda opção é aplicar a ideia inversa em relação à anteriormente citada, ou seja, define-se uma quantidade de carga elétrica sobre a superfície de um dos condutores ao passo que todos os outros são mantidos com carga nula. Na fase de pós-processamento do FEM, os valores de potenciais nesses condutores são avaliados. Dessa forma, pode-se conceber a matriz dos coeficientes de potencial, tal como definida na subseção 2.4.3. Cada elemento dessa matriz é obtido através da seguinte relação:

$$A_{ij} = \frac{V_j}{Q_i} \quad (3.82)$$



Deve-se adotar esse procedimento para cada um dos condutores, de forma que, no final, a matriz gerada, cujos elementos são  $A_{ij}$ , é o inverso da matriz de capacitâncias desejada. Invertendo-a, tem-se o resultado esperado, conforme mostra a Equação (3.83), que representa um exemplo para um sistema trifásico.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.83)$$

- A última opção é utilizar o conceito de energia eletrostática. Para isso, aplica-se um potencial não-nulo em apenas um dos condutores e a densidade de energia resultante ( $W_e$ ) é analisada na fase de pós-processamento. As capacitâncias podem então ser calculadas de acordo com as Equações (3.84) e (3.85) para seus valores próprios e mútuos, respectivamente.

$$C_{ii} = \frac{2}{V_i^2} W_e \quad (3.84)$$

$$C_{ij} = \frac{2}{V_i V_j} W_e - \frac{1}{2} \left( \frac{V_i}{V_j} C_{ii} + \frac{V_j}{V_i} C_{jj} \right) \quad (3.85)$$

Como a capacitância mútua é obtida apenas após a obtenção das capacitâncias próprias dos condutores envolvidos, o número de simulações necessárias para a obtenção da matriz completa de capacitâncias é igual a  $2k$ , em que  $k$  é o número de condutores do sistema.

No Comsol, a atribuição de potencial ou carga é realizada através de uma condição de fronteira incluída mediante um nó chamado de “*terminal*” sob a interface “*Electrostatics*”. Esse tipo de nó é empregado quando se deseja especificar determinado valor de potencial (em volts) ou carga (em coulombs) para dada linha (modelos 2D) ou superfície (modelos 3D).

Uma diferença importante entre obter os parâmetros de cabos por meio de algoritmos próprios, como acontecia nas primeiras pesquisas (Yin, 1990), em relação à utilização de *softwares* atuais, como o Comsol, é que antes o pesquisador necessitava escrever suas próprias linhas de código a fim de obter a quantidade de cargas induzidas ou de energia eletrostática a partir dos valores dos potenciais escalares elétricos, que representam a resposta inicial do problema. Por isso, muitas das vezes, escolhia-se apenas uma opção dentre as três mostradas anteriormente e implementava-a no código. Nos programas atuais mais avançados, todas as grandezas associadas ao problema são calculadas, independentemente da escolha do usuário. Dessa maneira, na fase de pós-processamento, ele já tem posse de todos os valores, e a escolha de obter as capacitâncias por meio das opções citadas anteriormente é feita de maneira rápida, apenas selecionando as grandezas de interesse e aplicando as relações específicas. Lógico que essa escolha depende também da característica inicial imposta pelo usuário ao problema, como, por exemplo: se ele decidiu especificar o potencial nos condutores, a primeira e a terceira opção podem ser utilizadas na fase de pós-processamento para se obter as capacitâncias dos cabos; se a decisão foi por especificar a carga nos condutores, apenas a segunda opção é possível. Nesse trabalho optou-se por utilizar a primeira alternativa, que é a mais simples e direta.

### 3.3.2. Determinação da Dimensionalidade do Modelo

No contexto do cálculo de parâmetros de cabos, algumas configurações permitem que modelos em apenas duas dimensões sejam empregados, tais como: cabos sem suporte (aéreos) e cabos sobre eletrocalhas lisas. Essa redução na dimensionalidade do modelo real, naturalmente tridimensional, pode ser concebida devido à presença de duas condições associadas a esses casos: (i) as geometrias são longitudinalmente homogêneas e (ii) as grandezas físicas intrínsecas aos problemas eletrostáticos e magnéticos harmônicos no tempo variam, predominantemente, apenas em dois eixos espaciais.

A primeira condição citada anteriormente pode ser verificada através da Figura 3.9, que exhibe sistemas trifásicos compostos por cabos sem suporte e por

cabos alojados no interior de uma eletrocalha lisa. Os domínios referentes ao ar e ao solo, necessários à simulação, também são mostrados. Pode ser constatado nessa figura que seções transversais paralelas de ambos os sistemas se repetem de maneira idêntica ao longo dos seus eixos longitudinais justificando, assim, a consideração da simetria geométrica. Deve-se ressaltar também que a condição de isotropia de todos os materiais que compõem o sistema é imprescindível para a concepção de tal afirmação. Em relação à segunda condição, a própria natureza espacial dos campos gerados por cargas elétricas estacionárias e por correntes elétricas estabelecidas nos cabos sob as configurações citadas e definidos, respectivamente, pelas Lei de Coulomb e de Biot-Savart, permite afirmar que esses campos variam muito pouco no terceiro eixo ortogonal. Logo, os modelos exibidos na Figura 3.9 podem ser reproduzidos por seus equivalentes em apenas duas dimensões, conforme fora proposto em de Souza (2015), e retratados na Figura 3.10.

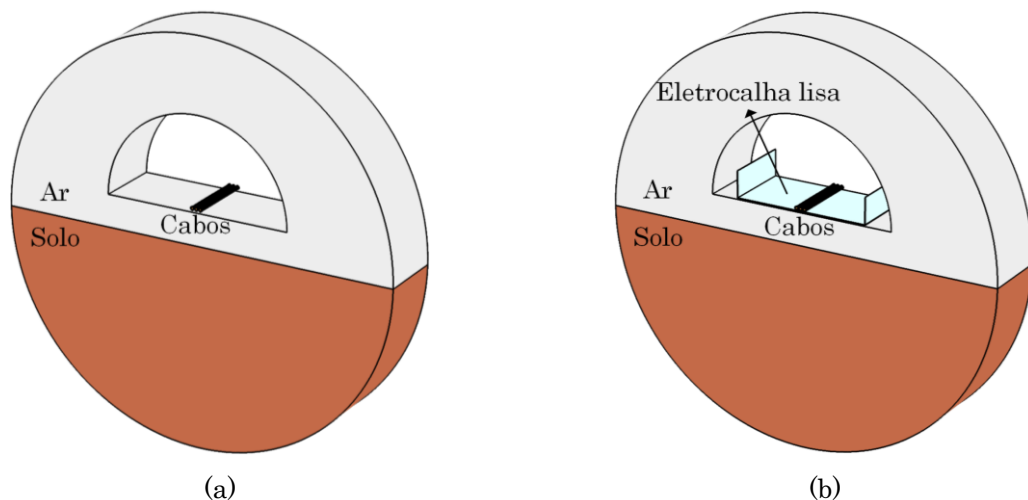


Figura 3.9 – Sistemas de cabos trifásicos: (a) sem suporte e (b) alojados em uma eletrocalha lisa. A região transparente em torno do suporte também está sob o domínio do ar. Figura fora de escala.

Fonte: autor (2020).

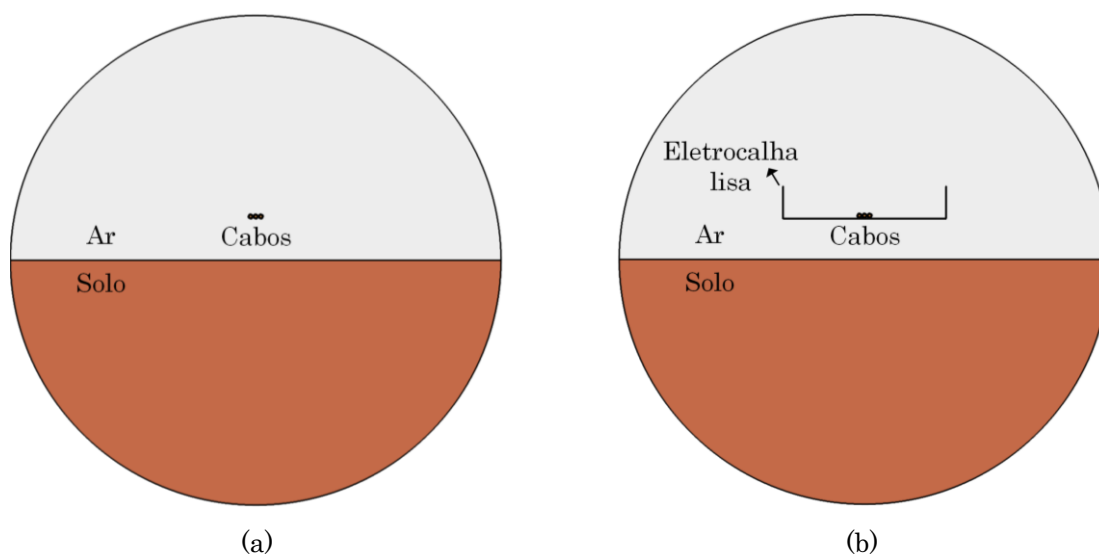


Figura 3.10 – Modelos bidimensionais equivalentes aos sistemas trifásicos mostrados na Figura 3.9 cujos cabos se encontram: (a) sem suporte e (b) alojados em uma eletrocalha lisa. Figura fora de escala. Fonte: autor (2020).

Apesar dos grandes avanços obtidos em de Souza (2015) ao considerar a presença de cabos sobre eletrocalhas lisas, sua metodologia restrita a modelos bidimensionais não possibilitou considerar duas das instalações industriais mais comuns, tais como aquelas compostas por cabos alojados no interior de eletrocalhas perfuradas ou sobre leitos metálicos. A presença de furos na eletrocalha e da estrutura do leito em si tornam essas geometrias não longitudinalmente homogêneas, de forma que a simulação de tais configurações no FEM requer modelos tridimensionais. Conforme mencionado na subseção 3.2.2, a simulação de tais modelos torna-se muito mais onerosa em relação aos modelos 2D no que tange aos custos de memória e tempo de processamento. Isto posto, uma série de técnicas visando reduzir o tamanho do problema foram adotadas e são exibidas na próxima subseção.

### 3.3.3. Definição dos Domínios

Os domínios são definidos de acordo com as características físicas de cada problema, conforme apresentado nas próximas duas subseções.

#### i) Parâmetros série (resistências e indutâncias)

Como se sabe, nos sistemas elétricos trifásicos convencionais, o solo atua como caminho de retorno para as correntes quando esses sistemas se encontram desequilibrados, sendo que a presença de correntes alternadas nos condutores implica o surgimento de uma impedância relativa a esse caminho de retorno e também entre os condutores adjacentes, chamada de impedância mútua. Isto posto, percebe-se a influência do solo no cômputo das resistências e indutâncias dos cabos, mostrando a necessidade de incluí-lo como um dos domínios do modelo. O domínio referente ao ar que envolve os cabos e o suporte também deve estar presente e ser concebido de forma a confinar todo o fluxo magnético produzido no sistema. Nos modelos 2D, esses domínios são representados por semicírculos que dão origem a um círculo cujo raio deve ser suficientemente grande para contemplar todas as grandezas que influenciam o cálculo dos parâmetros série de cabos, conforme comentado no próximo parágrafo.

Analisando sob o ponto de vista físico, o solo caracterizado pela sua condutividade finita atua como um meio condutor onde correntes são induzidas quando campos eletromagnéticos variantes no tempo penetram através de sua superfície, originando a impedância que o define. Tais campos são gerados pelas correntes alternadas que fluem pelos cabos localizados acima da terra. Nos casos envolvendo instalações elétricas industriais, estando os cabos instalados sobre estruturas metálicas aterradas, tais como eletrocalhas e leitos, tem-se que estas representam um caminho alternativo de elevada condutividade para as correntes de retorno, ocorrendo também a penetração de campos e indução de correntes. Em frequências mais altas, as correntes do sistema retornam majoritariamente por esses elementos metálicos. No entanto, para frequências mais próximas da fundamental, onde o efeito de blindagem eletromagnética dessas estruturas metálicas é menos pronunciado e a profundidade de penetração dos campos eletromagnéticos na terra é maior, não se pode desconsiderar a presença do solo como um meio paralelo para a condução dessas correntes, sendo necessário incluí-lo nas modelagens realizadas. O tamanho da região associada à terra deve ser suficientemente grande para que as correntes induzidas nela, oriundas da penetração dos campos eletromagnéticos, sejam totalmente contempladas,

acarretando num aumento excessivo das dimensões dos domínios a serem definidos no modelo.

A fim de corroborar o que foi exposto no último parágrafo, duas simulações de um sistema trifásico com cabos alojados no interior de uma eletrocalhas lisa foram elaboradas: uma com o solo caracterizado por uma condutividade finita ( $\rho = 100 \Omega/m$ ) e outra com o solo ideal (resistividade igual a zero). A Tabela 3.1 mostra as parcelas relativas à impedância interna do condutor e também à impedância do solo na composição da impedância própria do cabo para diferentes frequências. Para se obter os valores dessa tabela, calcularam-se primeiro os valores de impedância do condutor através da consideração do solo ideal, de modo que a penetração de campos eletromagnéticos nesse meio possa ser considerada nula; nesse caso, os valores obtidos se referem apenas à impedância interna do condutor, não havendo contribuição da parcela relativa ao solo sobre a composição da impedância própria do cabo. Ao realizar novas simulações considerando o solo com resistividade finita tem-se o valor da impedância total com ambas as parcelas, realizando a diferença entre esta impedância e a obtida anteriormente, obtém-se a parcela referente ao solo.

Tabela 3.1 - Parcelas relativas à impedância interna do condutor e à do solo na composição da impedância própria do condutor central considerando diferentes frequências.

Frequência (Hz)	Parcela da Resistência Total (%)		Parcela da Indutância Total (%)	
	Condutor e Eletrocalha	Solo	Condutor e Eletrocalha	Solo
60	93,8	6,2	98,8	1,2
1 k	98,6	1,4	100,0	0,0
10 k	99,8	0,2	100,0	0,0
100 k	100,0	0,0	100,0	0,0
1 M	100,0	0,0	100,0	0,0

Conforme pode ser verificado pela tabela anterior, à medida que a frequência aumenta, a contribuição da parcela referente ao solo sobre a impedância total diminui gradualmente até se tornar praticamente nula. No entanto, até a

frequência de 1 kHz, ela tem uma contribuição que não pode ser desconsiderada, corroborando a necessidade da inclusão do solo nas simulações. Além disso, para o caso de cabos sobre leitos metálicos, essa contribuição é relativamente maior devido ao menor efeito de blindagem proporcionado por esse suporte.

Em síntese, a profundidade de penetração ( $\delta$ ) dos campos eletromagnéticos na terra se estabelece como parâmetro de referência para a obtenção do diâmetro mínimo da semicircunferência que a representa. Para uma frequência de 60 Hz e resistividade do solo de  $100 \Omega/\text{m}$ , a profundidade de penetração dos campos na terra é de 625 m.

Em Yin (1990), cujo foco é cabos subterrâneos, é sugerido adotar um raio para a terra na ordem de  $10\delta$ , obtendo-se, para o exemplo mostrado, um valor de 6250 m. Nesse mesmo artigo é mostrada uma técnica para reduzir o tamanho da terra através do estabelecimento de uma condição de fronteira do tipo Dirichlet, cujos valores para o potencial vetor magnético são definidos em função do campo elétrico na terra que, por sua vez, é dado por métodos analíticos. Já em de Souza (2015), onde é contemplado também o caso da eletrocalha lisa, o tamanho da terra é definido por meio de um algoritmo que leva em conta a disposição geométrica dos cabos e a profundidade de penetração. Apesar de otimizado para a maioria dos casos, existem condições que implicam um tamanho da terra de até  $30\delta$ . Essa estratégia nada mais é que a aplicação do método do truncamento exposto na subseção 3.2.3.

A necessidade de incluir o domínio que representa a terra, cujo diâmetro pode chegar a centenas de metros, é factível apenas em modelos 2D, visto que modelos tridimensionais conduziriam a um problema de alta complexidade computacional, demandando elevados custos de memória e tempo para a execução das simulações. Assim sendo, para o cálculo das resistências e indutâncias de cabos em modelos 3D, foram adotadas diversas estratégias para a redução dos domínios no intuito de assegurar a viabilidade das simulações sem o comprometimento de sua exatidão. Dentre elas, pode-se destacar:

- De acordo com o explicitado na subseção 3.2.3, a concepção de domínios sem fronteiras ou “infinitos” é realizada por meio de técnicas que

consistem em simular uma fronteira artificial de forma a não influenciar na solução do problema. Para reduzir consideravelmente o raio do ar e da terra modelados, empregou-se o acréscimo de uma camada em torno do domínio do problema que aplica uma escala numérica nas coordenadas do sistema de modo que a coordenada radial dentro dos elementos finitos seja muito maior que a coordenada radial geométrica. Tal método é denominado no Comsol de “*Infinite Element Domain*” e foi abordado na literatura, pela primeira vez, em Zienkiewicz et al. (1983).

- Conforme comentado anteriormente, quando o cálculo de parâmetros de cabos é realizado por meio de modelos em duas dimensões, os domínios do ar e da terra são representados por semicírculos, o que se deve à característica circular dos campos presentes no sistema tanto no problema eletrostático como magnético. Em modelos tridimensionais, a escolha mais natural para representar tais domínios é através de esferas. No entanto, através da análise da configuração espacial dos campos produzidos em ambos os problemas, é possível afirmar que eles variam muito pouco no sentido longitudinal, mesmo o sistema não sendo geometricamente homogêneo. Dessa forma, pode-se considerar a simetria cilíndrica para a concepção do modelo de forma que os domínios possam ser representados por um cilindro dividido ao centro e delimitado da seguinte forma: o hemisfério superior correspondendo ao espaço aéreo onde estão presentes os cabos e o suporte metálico e o hemisfério inferior constituído pela região associada à terra homogênea com condutividade finita. Essa geometria possibilita a redução do domínio de forma significativa se comparada com a utilização de outras que não consideram a simetria cilíndrica, como no caso da esfera.

Outra inconveniência de se utilizar esferas para representar os domínios referentes ao ar e à terra se deve ao fato de que a influência dos campos nas bordas do suporte pode se tornar significativa ao empregar modelos simétricos reduzidos, de modo que essa influência só seria atenuada ao considerar modelos maiores. Já no caso do emprego de cilindros, uma vez escolhidas as corretas condições de fronteira, o efeito de borda é



suprimido, permitindo a utilização de modelos reduzidos, conforme mostrado no próximo ponto.

- O modelo também pode ser reduzido através da consideração de sua simetria longitudinal que permite a simulação do sistema considerando apenas uma pequena porção de sua geometria, gerando os mesmos resultados que seriam obtidos analisando a geometria completa, representada por um metro de cabo alojado no suporte metálico. A Figura 3.11 ilustra como foram concebidos os modelos reduzidos de acordo com as simetrias dos suportes. É possível perceber que, se colocados de maneira contígua, os pequenos trechos geométricos resultam na estrutura completa da eletrocalha ou leito metálico.

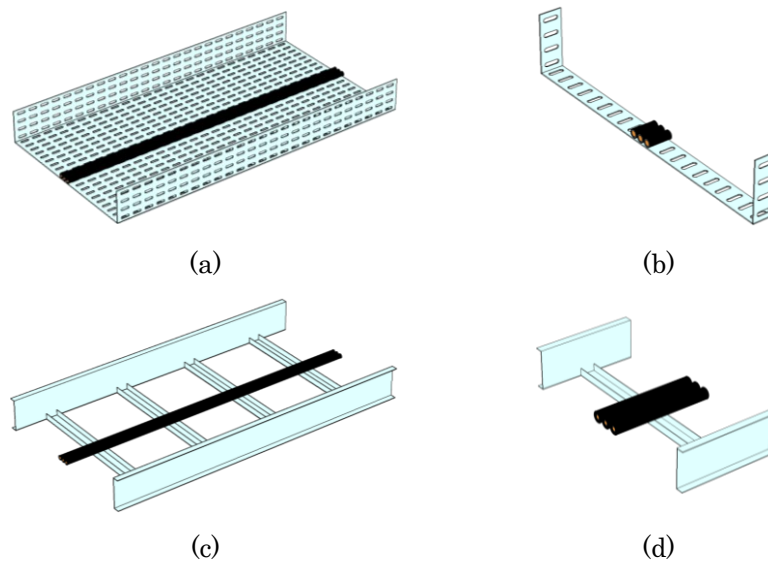


Figura 3.11 – Concepção dos modelos reduzidos a partir das simetrias dos suportes: (a) eletrocalha perfurada completa e (b) seu modelo reduzido; (c) leito metálico completo e (d) seu modelo reduzido. Fonte: autor (2020).

- Consideração apenas dos elementos condutores nas geometrias dos cabos, não sendo necessário incluir suas camadas isolantes, visto que suas propriedades magnéticas são as mesmas que a do ar.

As estratégias expostas acima dependem da correta seleção das condições de fronteira associadas às superfícies que delimitam o volume dos semicilindros que

representam os domínios do ar e terra. Tais escolhas são mostradas na subseção 3.3.4.

Concluídas as discussões a respeito do modelo concebido para o cálculo dos parâmetros série de cabos, a Figura 3.12 apresenta-o com o intuito de se obter melhor compreensão dos seus domínios.

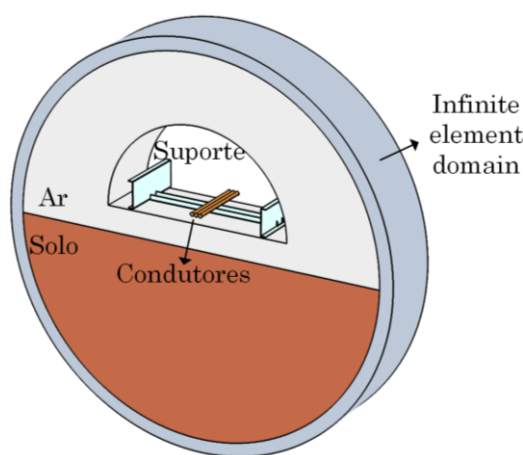


Figura 3.12 - Modelo tridimensional com seus respectivos domínios desenvolvido para o cálculo dos parâmetros série de cabos. A região transparente em torno do suporte também está sob o domínio do ar. A figura está fora de escala. Fonte: autor (2020).

Os tamanhos referentes aos domínios do ar e da terra são definidos por meio do aumento contínuo dos raios dos seus semicírculos através de sucessivas simulações até que os valores obtidos para os parâmetros série do cabo se estabilizem. Para realizar esse procedimento, deve-se, primeiramente, fixar o valor do raio relativo à coroa circular que define a região onde se estabelece o “*Infinite Element Domain*”. Nas simulações elaboradas, fixou-se um valor de 50 m para esta região (medido a partir da borda do modelo), e o valores de parâmetros série se estabilizaram a partir de um raio de 250 m para os domínios do ar e da terra.

Outra possível simplificação, associada ao emprego da condição de fronteira de impedância na superfície da terra, poderia ser utilizada nas situações em que esse meio pouco influencia no cômputo dos parâmetros de cabos. Tais situações ocorrem particularmente para frequências mais elevadas, sendo dependentes do nível de blindagem oferecido pelo suporte metálico empregado. No caso da eletrocalha lisa (Tabela 3.1), por exemplo, tal condição de fronteira poderia ser empregada sem prejuízo à exatidão dos resultados a partir de 10 kHz. Dessa

maneira, a determinação da frequência a partir da qual a condição de fronteira de impedância pode ser utilizada, é feita por meio de testes e simulações sucessivas, no intuito de verificar em que ponto a terra deixa de influenciar o problema. Por outro lado, o ganho computacional com essa técnica não é tão relevante, visto que o emprego do “*Infinite Element Domain*” já reduz bastante o tamanho do domínio da terra. Portanto, visando gerar técnicas mais diretas e gerais, sem a necessidade de múltiplos testes, tal condição de fronteira não foi empregada nas simulações conduzidas.

## ii) Capacitância

Em relação ao cálculo das capacitâncias, a terra se apresenta como um elemento condutor para o qual se atribui potencial nulo, sendo que a distribuição das cargas induzidas neste meio se dá exclusivamente sobre a sua superfície. Por conseguinte, a região de solução pode ser descrita por um cilindro semicircular, cujo volume representa o espaço de ar onde se encontram os cabos e o suporte e cuja superfície horizontal caracteriza o efeito da presença da terra. As camadas isolantes dos cabos, com suas respectivas permissividades elétricas, também foram incluídas no modelo.

Apesar do domínio ser bem menor em relação ao utilizado no cálculo dos parâmetros série, também foram adotadas técnicas para reduzi-lo, dentre elas a consideração das simetrias cilíndrica e longitudinal do problema. Consequentemente, apenas uma porção da estrutura completa do sistema precisou ser simulada (ver Figura 3.11) e pôde-se utilizar um cilindro semicircular para a representação do domínio do ar, conforme já comentado. O modelo completo elaborado para o cálculo das capacitâncias de cabos é exibido na Figura 3.13.

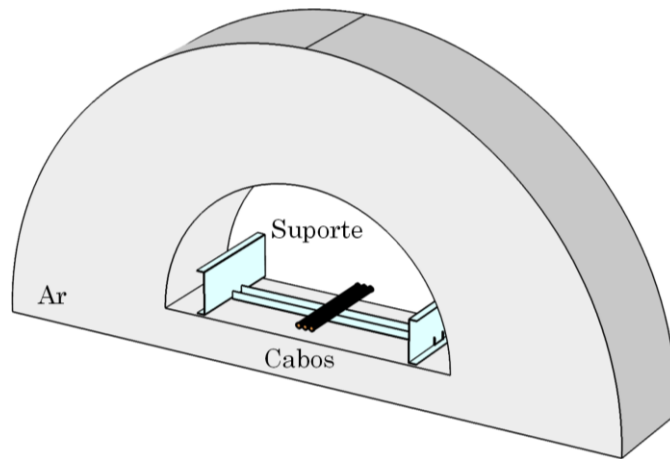


Figura 3.13 - Modelo tridimensional com seus respectivos domínios desenvolvido para o cálculo das capacitâncias de cabos. A região transparente em torno do suporte também está sob o domínio do ar. A figura está fora de escala. Fonte: autor (2020).

Diferentemente das simulações elaboradas para o cálculo dos parâmetros série, o domínio referente ao ar para o cálculo das capacitâncias tem dimensões bastante reduzidas. Um cilindro semicircular de raio de 10 m foi escolhido para representá-lo.

#### 3.3.4. Escolha das condições de fronteira

No problema magnético harmônico no tempo, a condição de fronteira de Dirichlet, descrita por um potencial vetor magnético nulo, foi imposta em todas as superfícies que delimitam o problema. Essa condição força as linhas de fluxo magnético a se manterem tangenciais a essas superfícies, resultando no confinamento de todo o fluxo magnético no interior da região de solução. No Comsol, o contorno de Dirichlet é imposto através de uma condição de fronteira chamada de “*Magnetic Insulation*”. Uma comparação bastante interessante entre o emprego dessa condição e a de Neumann, com o propósito de delimitar o espaço em torno de uma bobina, é conduzida em Comsol (2016a).

Para o problema eletrostático estabeleceu-se um contorno de Dirichlet, caracterizado por um potencial escalar elétrico nulo, nas superfícies que delimitam a terra e os suportes metálicos. Dessa forma, é estabelecido que tais superfícies sejam os referenciais de potencial nulo para o problema, além de permitir a indução de cargas nesses meios. No Comsol essa condição de fronteira é denominada de

“Ground”. Todas as outras superfícies que delimitam o domínio do problema foram submetidas ao contorno de Neumann, chamada no Comsol de “Zero Charge”. Essa condição impõe que todas as linhas de fluxo elétrico se mantenham tangenciais a tais superfícies. Detalhes sobre a condição “Zero Charge” em um problema eletrostático são exibidos, por meio de um exemplo, em Comsol (2017b).

A condição de fronteira de Dirichlet nas superfícies verticais do problema magnético harmônico no tempo elimina os efeitos de borda que poderiam influenciar nos campos do sistema, permitindo que a simetria longitudinal seja empregada. Se ao invés do emprego de um cilindro para representar os domínios do ar e da terra, fosse utilizada uma esfera, não seria possível forçar o campo magnético a se manter tangente em torno das extremidades dos cabos e dos suportes, resultando no surgimento de componentes normais, representando, de fato, o efeito de borda. Para reduzir sua influência, seria necessária a simulação de uma porção bem maior do sistema, aumentando o custo computacional. A Figura 3.14 resume o que foi exposto. Portanto, o emprego da simetria cilíndrica em conjunto com o contorno de Dirichlet permite a redução do sistema ser simulado, tal como mostrou a Figura 3.11.

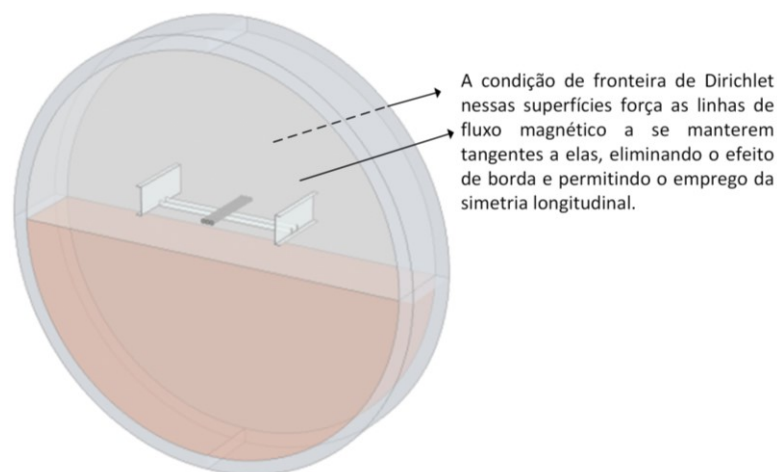


Figura 3.14 - Eliminação do efeito de borda nos problemas magnéticos. Fonte: autor (2020).

Para o problema eletrostático, os efeitos de borda são eliminados através do emprego da condição de fronteira de Neumann nas superfícies verticais do modelo.

### 3.3.5. Discretização do Domínio

Uma vez definidos os domínios que compõem os modelos associados aos dois tipos de problemas em estudo, pode-se prosseguir com a concepção das malhas de elementos finitos para ambos os casos.

No Comsol, existem duas opções de elementos para modelos em duas dimensões: triângulos e quadriláteros; e quatro opções para modelos tridimensionais: tetraedros, hexaedros, prismas triangulares e pirâmides.

Os tetraedros são os elementos básicos para modelos 3D, sendo capazes de se encaixarem nos mais variados tipos de geometrias. Apesar de serem extremamente úteis, sua utilização indiscriminada pode gerar uma malha extremamente densa cuja solução se torna computacionalmente onerosa. Por isso, muitas das vezes, se opta pela utilização de hexaedros e prismas triangulares. Estes possuem a capacidade de gerar elementos de malha mais compridos ao longo de determinado eixo, acarretando numa redução de nós a serem considerados pelo simulador. Dessa forma, nas regiões em que as grandezas variam menos ao longo de dado eixo, é preferível utilizar hexaedros ou prismas triangulares a fim de reduzir a densidade da malha.

Os hexaedros e prismas não são elementos primários do Comsol, sendo resultados da utilização de alguma função como a “*swept*” ou a “*boundary layer mesh*”. A primeira é capaz de estender uma figura geométrica bidimensional ao longo de um eixo, de forma que triângulos e quadriláteros estendidos dão origem aos prismas triangulares e retangulares, respectivamente. Já a segunda função é utilizada para formar camadas paralelas para captar a rápida variação de uma grandeza na direção normal a essas camadas, sendo que sua utilização em domínios 3D dá origem aos hexaedros.

Por último, as pirâmides são utilizadas pelo algoritmo do Comsol como forma de estabelecer conexões entre figuras geométricas diferentes, como nos casos em que duas malhas diferentes, uma formada por hexaedros e outra com tetraedros, se encontram.

Mais informações a respeito das diversas propriedades que compõem a função de malha do Comsol podem ser encontradas no capítulo 8 (*Meshing*) do *Comsol Reference Manual* (Comsol, 2017c). Dicas e sugestões acerca dessa etapa

são encontradas em várias publicações no blog oficial do referido programa (Comsol, 2013a; Comsol, 2013b; Comsol, 2015; Comsol, 2019).

Os tópicos a seguir comentam explicitamente as malhas utilizadas nos modelos para o cálculo dos parâmetros série e também das capacitâncias.

#### i) Parâmetros série (resistência e indutância)

De acordo com as observações realizadas na subseção 3.2.5, o processo de discretização envolve duas etapas: escolha dos elementos geométricos e refinamento da malha, sendo esses procedimentos extremamente dependentes das características de variação das grandezas físicas presentes na região considerada. Por conseguinte, a seguir são apresentadas e discutidas as estratégias adotadas na geração da malha de elementos finitos consoante as diversas regiões que compõe o modelo associado ao cálculo dos parâmetros série de cabos.

#### a) Condutores

A concepção da malha de elementos finitos nos condutores deve levar em conta, principalmente, a presença do efeito pelicular, uma consequência direta da circulação de correntes alternadas por eles. Conforme exposto no capítulo anterior, na subseção 2.6.1, à medida que a frequência da corrente elétrica que circula pelo condutor aumenta, mais fina é a camada da seção transversal do cabo pela qual essa corrente se estabelece. O decaimento da densidade de corrente em direção ao centro do condutor é exponencial e depende da profundidade de penetração  $\delta$ . Para  $r = \delta$ , sendo  $r$  o raio medido a partir da superfície do condutor, tem-se um valor de densidade de corrente equivalente a 37% em relação à que circula na borda e, para  $r = 5\delta$ , esse valor é de 0,67%. Portanto, a malha de elementos finitos gerada no condutor deve ser mais refinada no círculo que compreende sua superfície até uma espessura de  $5\delta$ , pois é nessa região em que ocorre uma maior variação da densidade de corrente e, conseqüentemente, da densidade de fluxo magnético produzido por ela.

Uma vez estabelecido o local de refinamento, deve-se determinar os elementos geométricos a serem empregados. Apesar de existir uma convicção comum sobre a utilização da profundidade de penetração  $\delta$  como referência para definir tanto a região de refinamento como também o tamanho dos elementos finitos na malha dos condutores, diversos autores empregam técnicas diferentes para concebê-los. Um compêndio de alguns estudos é apresentado a seguir:

- Nas pesquisas conduzidas em Yin (1990), é proposta uma malha formada por elementos triangulares inseridos em subdivisões radiais cujo espaçamento entre elas é definido pelo produto de um fator com a profundidade de penetração  $\delta$ . Esse fator é determinado através de múltiplas simulações por meio das quais se verifica qual valor de fator implica o menor erro para a densidade de corrente e impedância calculadas; análises são realizadas considerando diferentes ordens de elementos triangulares e também elementos isoparamétricos. Em síntese, o autor monta uma tabela com os valores ótimos de fatores encontrados, sendo que na maioria dos casos a divisão se dá até uma região menor que  $5\delta$ , apresentando quatro subdivisões radiais para elementos triangulares de primeira ordem, duas para os de segunda e isoparamétricos, e uma para os de ordens superiores.
- Nas pesquisas conduzidas em Cirino et al. (2009) e de Souza (2015) são utilizados apenas elementos triangulares na concepção da malha de elementos finitos dos condutores. No primeiro, os triângulos são definidos com arestas de comprimento máximo igual a  $0,5\delta$  e empregados na região compreendida entre a borda do condutor até uma espessura de  $5\delta$ . Já no segundo, onde os triângulos também tem arestas cujos tamanhos são dependentes de  $\delta$ , um estudo mais minucioso é realizado, chegando à conclusão de que para frequências bastante altas, onde a profundidade de penetração é muito pequena, estabelecer a região de refinamento até  $5\delta$  pode tornar o esforço computacional excessivamente alto, dado o aumento da densidade da malha de elementos finitos a ser concebida na região de refinamento, visto o tamanho da aresta estar relacionado ao



pequeno valor de  $\delta$ . Com isso, o autor realizou adaptações no método, reduzindo a região de refino e aumentando o tamanho do triângulo à medida que a frequência dos campos ia se tornando mais alta. A tarefa de encontrar um equilíbrio entre custo computacional, tamanho do triângulo, dimensão da região de refinamento e exatidão dos resultados, é bastante laboriosa e pode variar caso a caso, por depender da frequência de cálculo e das geometrias envolvidas. Tal referência elaborou um algoritmo através de testes exaustivos a fim de realizar um refinamento de malha automático para qualquer configuração genérica dentro dos casos estudados. Contudo, mesmo assim, algumas combinações de frequências e geometrias podem tornar a simulação proibitiva e o programa simplesmente não ser capaz de finalizar a aplicação.

Os estudos comentados anteriormente estão associados a domínios em duas dimensões, de fato que cuidados maiores em relação ao custo computacional relativo ao refinamento da malha devem ser tomados para considerar modelos tridimensionais, naturalmente mais onerosos sob o ponto de vista de memória e tempo de processamento.

Visando elaborar uma malha eficiente para modelos 3D, estudaram-se algumas opções de elementos geométricos a serem utilizados na região de refinamento, tais como: elementos tetraédricos e prismas triangulares. Essas alternativas apresentaram as mesmas desvantagens obtidas com os métodos que empregam triângulos, isto é, custos computacionais proibitivos para frequências muito altas.

Em face disso, verificou-se a aplicação de uma nova abordagem, relacionada à utilização de camadas paralelas espaçadas entre si de  $\delta$  na região compreendida entre a superfície do condutor até uma espessura de  $5\delta$ , tal estratégia é conhecida mais comumente como “*boundary layer mesh*” e é bastante empregada em problemas de viscosidade. Programas mais robustos, como o Comsol, já possuem essa opção de malha pré-definida. A justificativa para a aplicação desse tipo de malha está relacionada ao comportamento físico da densidade de corrente, que é de variar fortemente na direção normal à fronteira do condutor e muito pouco ao longo de

linhas circulares concêntricas ao condutor. A Figura 3.15 exibe o refinamento de um condutor utilizando elementos triangulares ou camadas paralelas para uma seção transversal em duas dimensões. É possível perceber nessa figura que o primeiro caso apresenta muito mais elementos e, portanto, mais equações a serem resolvidos pelo FEM, resultando em um maior esforço para o computador.

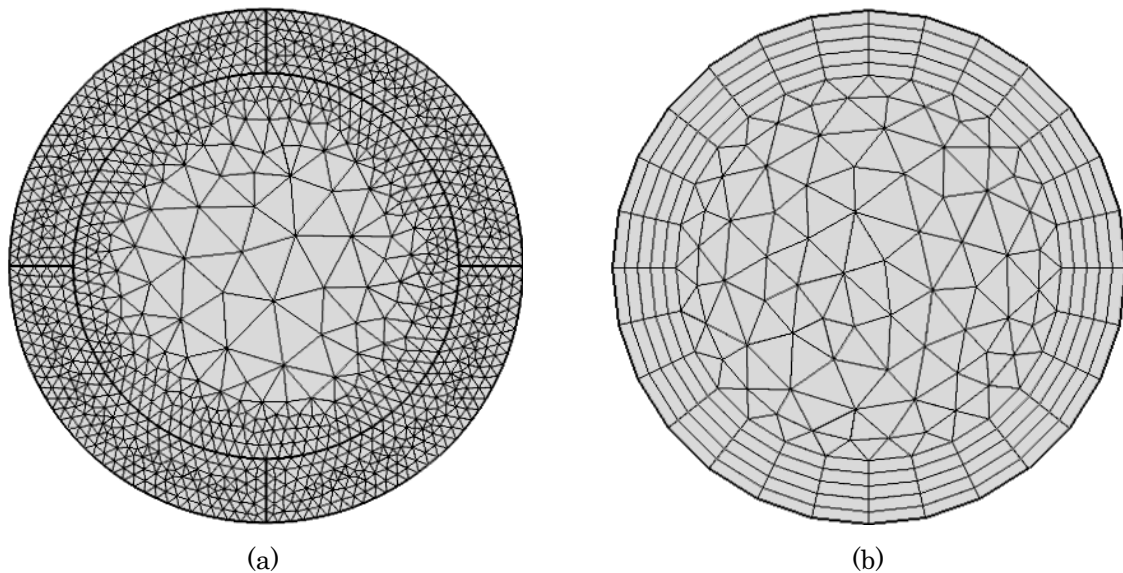


Figura 3.15 - Formas de refinamento de malha: (a) elementos triangulares e (b) camadas paralelas. Fonte: autor (2020).

As camadas paralelas formam em 3D prismas retangulares ao longo da superfície do condutor cujo interior pode ser preenchido por prismas triangulares. Essa estrutura caracteriza uma malha otimizada que consegue captar as fortes variações de densidade de corrente com um número menor de elementos. A Figura 3.16 apresenta um condutor seccionado cuja seção transversal exibe a densidade de corrente para uma frequência de 10 kHz e, ao longo do eixo longitudinal, é mostrada a malha tridimensional elaborada.

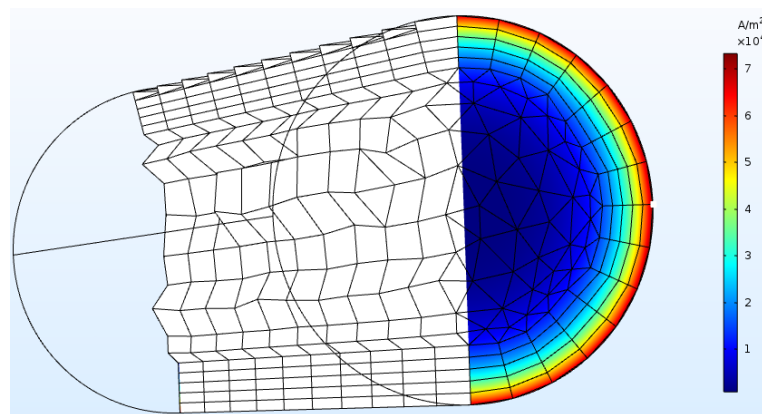


Figura 3.16 - Visão seccionada de um condutor cuja seção transversal exhibe a densidade de corrente a 10 kHz e, ao longo do eixo longitudinal, é mostrada a malha elaborada (prismas retangulares nas bordas para captar a forte variação dos campos e prismas triangulares no centro). Fonte: autor (2020).

Vale ressaltar que foi empregada a mesma concepção de malha nos condutores não excitados pela corrente senoidal devido ao fato de estarem sujeitos à penetração de campos eletromagnéticos, caracterizados por apresentarem também fortes variações na direção normal à borda do condutor.

Por último, algumas observações podem ser realizadas a respeito da malha concebida para os condutores:

- Nos casos em que o quádruplo da profundidade de penetração gera um valor maior que o raio do condutor, não é necessário conceber o refinamento da malha, sendo ela, portanto, elaborada unicamente com prismas triangulares. Essa situação ocorre, geralmente, para frequências até poucos quilohertz, dependendo, é claro, da geometria e da condutividade dos condutores.
- Os prismas triangulares são obtidos no Comsol por meio da concepção de elementos triangulares bidimensionais na seção transversal de uma das extremidades do condutor e, em seguida, expandindo esses elementos por meio de uma função chamada “*swept*”. Esses triângulos foram definidos com uma aresta de tamanho máximo igual à metade do raio do condutor.
- A função “*swept*” permite dividir os elementos geométricos, resultantes de sua utilização, ao longo de seus eixos longitudinais. A quantidade de

divisões é definida por meio de uma propriedade chamada “*distribution*” que, neste caso, foi estabelecida igual a dez, conforme mostra a Figura 3.17.

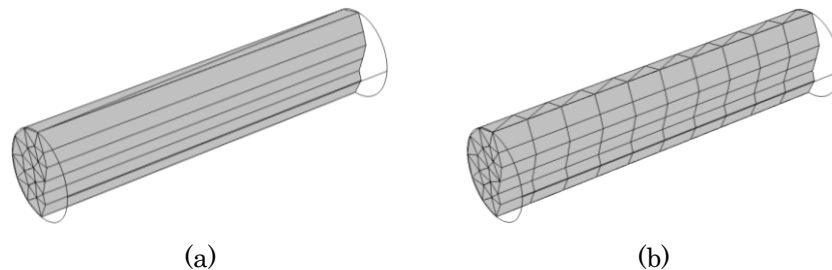


Figura 3.17 – Efeito da divisão dos prismas triangulares ao longo do eixo longitudinal do condutor: (a) sem divisão e (b) dez divisões. Fonte: autor (2020).

- A superfície externa ao longo do eixo longitudinal do condutor, naturalmente formada por quadriláteros devido à presença dos prismas triangulares ou retangulares, foi convertida em triângulos através de uma função chamada “*convert*”, tal como exhibe a Figura 3.18. O presente procedimento, assim como o anterior, facilita o encaixe dos elementos tetraédricos utilizados em torno do condutor com a respectiva malha deste. O emprego desses tetraedros é elucidado quando da explicação da malha elaborada para o domínio do ar.

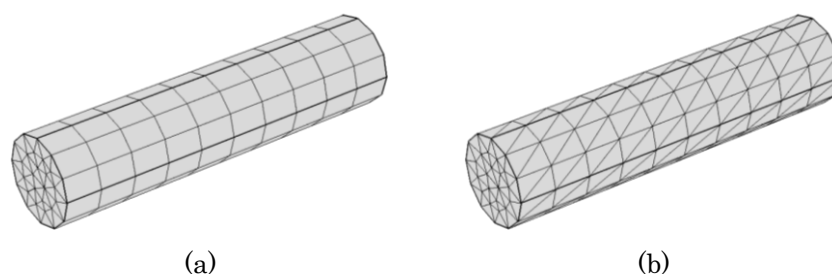


Figura 3.18 – Efeito da aplicação da função “*convert*” nos retângulos presentes ao longo da superfície do condutor: (a) sem aplicar a função (elementos retangulares na superfície) e (b) função aplicada (elementos triangulares na superfície). Fonte: autor (2020).

Nas duas últimas figuras apresentadas, o refinamento de malha do condutor, dado por prismas retangulares, não está presente. Ao inseri-lo,

tais elementos assumem as mesmas características definidas para os prismas triangulares, tal como mostra a Figura 3.19.

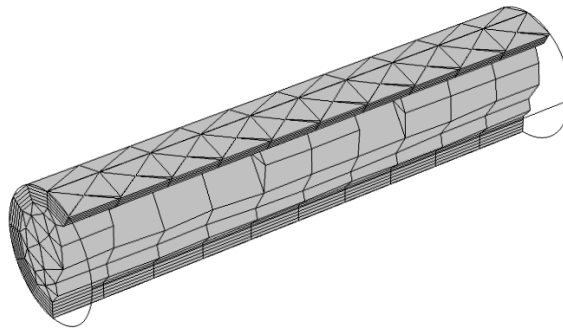


Figura 3.19 – Malha elaborada para o condutor incluindo o refinamento de malha: os prismas triangulares e retangulares apresentam dez divisões ao longo do seu eixo longitudinal e a superfície do condutor é composta por elementos triangulares. Fonte: autor (2020).

#### b) Suportes metálicos

Tanto a eletrocalha como o leito estão sujeitos à penetração dos campos eletromagnéticos variantes no tempo produzidos pelas correntes alternadas que circulam nos condutores. Esses campos, por sua vez, induzem correntes nessas estruturas. A profundidade de penetração ( $\delta$ ) determina o quanto os campos conseguem permear os suportes. Devido à alta condutividade desses elementos metálicos aliada a frequências mais altas, tais campos se estabelecem com maior intensidade numa camada muito fina da eletrocalha e do leito, conforme exhibe a Figura 3.20. Dessa maneira, é necessário um refinamento de malha nessa região.

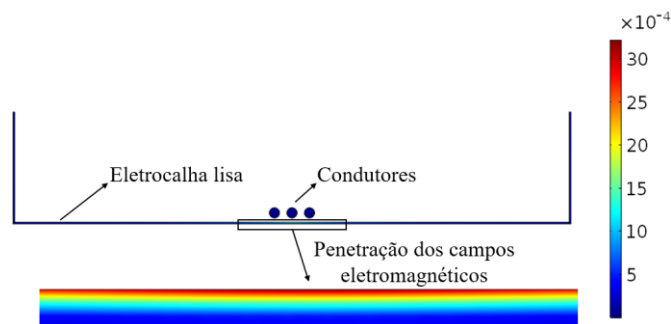


Figura 3.20 - Penetração dos campos eletromagnéticos na eletrocalha (mais denso na superfície e se reduz à medida que a profundidade aumenta). Fonte: autor (2020).

Em de Souza (2015) se abordou, no âmbito de simulações bidimensionais, esses tipos de instalações elétricas. Nesse estudo, onde um dos casos se refere à presença de cabos sobre eletrocalhas lisas, o refinamento de malha desse suporte é empregado na sub-região de sua seção transversal cuja espessura, medida a partir da superfície superior da eletrocalha, é igual a  $5\delta$ . Elementos triangulares, cujas arestas apresentam comprimentos em função de  $\delta$ , são empregados nesse refinamento. Mais uma vez, como aconteceu com os condutores, precauções em relação ao surgimento de elementos extremamente pequenos foram tomadas, de forma que em frequências mais altas, a relação entre o tamanho da aresta e a profundidade de penetração é modificada.

No presente trabalho, no intuito de empregar a mesma ideia utilizada para os condutores, verificou-se a utilização de camadas paralelas espaçadas de  $\delta$  entre as superfícies do suporte até uma região de espessura  $5\delta$ . A utilização de prismas triangulares ou tetraedros foi prontamente descartada, visto o custo computacional associado a tais abordagens. No entanto, a utilização de camadas paralelas também se mostrou proibitiva devido à complexidade geométrica dos suportes considerados e a quantidade de elementos finitos gerados nessas estruturas em modelos tridimensionais. Outra escolha teve que ser analisada.

Com o objetivo de se buscar uma estratégia otimizada para representar a penetração dos campos e a indução de correntes nos elementos metálicos, uma vasta análise em bibliografias, que estudam o problema de caracterizar a propagação de campos em regiões de alta condutividade, foi realizada. Um método bastante interessante empregado em vários trabalhos consiste em excluir o interior da estrutura de condutividade elevada do domínio computacional e aplicar uma condição de fronteira nas superfícies dessa estrutura. A aplicação de tal estratégia é capaz de reproduzir a transmissão dos campos através dela, sem a necessidade de realizar malhas no seu interior (Eriksson, 2007; Van den Berghe et al., 1998). Tal condição de fronteira é concebida mediante o cálculo das impedâncias de superfície e de transferência do metal, assim como as densidades de correntes superficiais em ambos os seus lados, suas formulações correspondentes podem ser encontradas nos dois últimos artigos citados, como também em Comsol (2017a). No Comsol, essa condição é chamada de “*Transition Boundary Condition*”.

Tal estratégia foi testada nos casos concernentes ao cálculo de parâmetros de cabos, gerando resultados mais precisos e com menor custo computacional em relação à aplicação de camadas paralelas ou prismas triangulares no suporte metálico, sendo acrescentada na metodologia proposta

### c) Ar e Terra

No tocante aos modelos tridimensionais, duas opções de elementos geométricos capazes de compor a malha referente aos domínios do ar e da terra foram analisadas: tetraedros e prismas triangulares.

Em relação ao domínio do ar, associado ao semicilindro superior do modelo, duas regiões diferentes foram concebidas para a caracterização da malha: a região mais interna que envolve o suporte e os cabos foi composta por elementos tetraédricos (necessários para estabelecer as conexões entre as malhas dos condutores, do suporte e da região externa), enquanto a externa foi composta por prismas triangulares. A união entre essas duas regiões se deu por meio de uma malha retangular chamada, no Comsol, de “*mapped*”. A Figura 3.21 exhibe essa malha retangular.

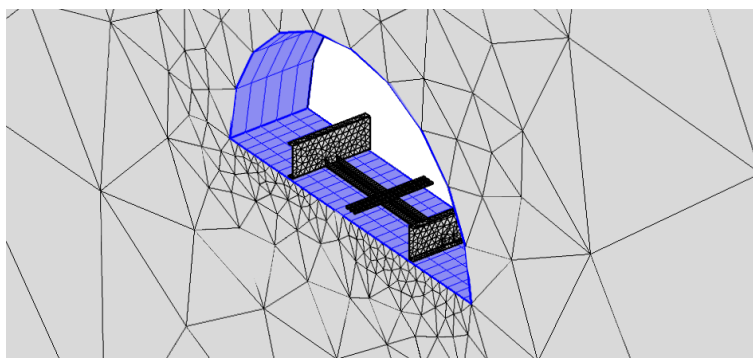


Figura 3.21 – Malha concebida (em azul) para conectar a malha interna composta por tetraedros e a externa constituída de prismas triangulares.

A terra, definida no hemisfério inferior do cilindro, foi malhada através de prismas triangulares, pois estes, após inúmeros testes de simulação realizados, representaram melhor o decaimento exponencial dos campos eletromagnéticos à

medida que eles se estabelecem na terra, inclusive requerendo um número inferior de nós em comparação à utilização de elementos tetraédricos.

Não foi necessário conceber refinamento de malha nas regiões do ar e da terra, sendo a dimensão dos prismas triangulares gerada automaticamente pelo Comsol escolhendo-se uma de suas nove configurações pré-estabelecidas para tamanho dos elementos, que variam de “*extremely fine*” a “*extremely coarse*”. Tal escolha se deu pela opção “*normal*”. Dessa forma, o Comsol atualiza de forma automática suas relações de tamanho do elemento de malha em função do tamanho das geometrias consideradas.

Por último, a coroa circular que define o “*Infinite Element Domain*” para os domínios do ar e da terra foi malhada através de prismas retangulares gerados pela função “*swept*” com cinco divisões.

A Figura 3.22(a) exhibe, através do modelo seccionado, as malhas concebidas para ambos os domínios. É possível visualizar através dela a presença das duas regiões presentes no domínio do ar, a mais interna com tetraedros e a mais externa com prismas triangulares. A Figura 3.22(b) mostra de forma mais didática as principais regiões do modelo elaborado e os tipos de elementos finitos que compõe a malha em cada uma delas.

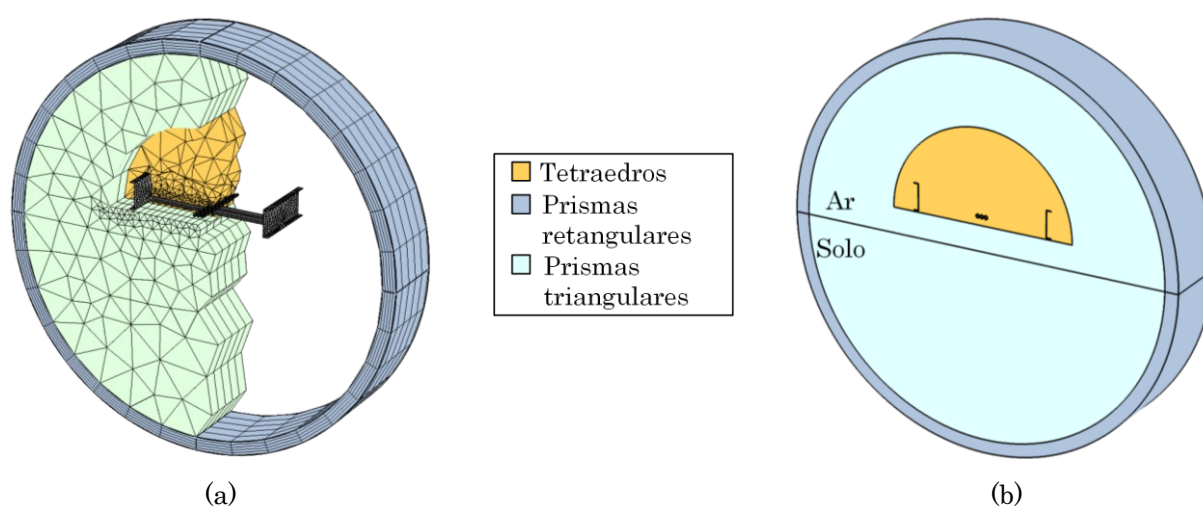


Figura 3.22 – Malha elaborada para os domínios do ar e da terra: (a) visão seccionada com os elementos finitos e (b) visão didática. Ambas as imagens estão fora de escala. Fonte: autor (2020).

## ii) Capacitância



O processo de discretização dos domínios pertencentes ao modelo elaborado para o cálculo das capacitâncias é muito mais simples que o realizado para o cálculo dos parâmetros série, uma vez que as grandezas físicas associadas ao problema eletroestático não apresentam a característica de elevada variação ao longo de determinadas regiões, como acontece nos problemas magnéticos harmônicos no tempo.

Desse modo, não é necessário conceber refinamentos de malha para o presente caso, sendo que a maioria dos domínios comuns a ambos os modelos foram submetidos à mesma concepção de malha. A exceção ocorreu para os domínios referentes às camadas isolantes dos cabos, não presente no problema magnético, e ao suporte, onde, no caso anterior, uma condição de fronteira foi utilizada. Para esses domínios, estabeleceu-se prismas triangulares construídos pela função “*swept*”.

### 3.3.6. Desenvolvimento do Sistema de Equações

Conforme discorrido na subseção 3.2.6, a etapa relacionada ao desenvolvimento do sistema de equações é realizada com interferência mínima do usuário, sendo o simulador de FEM responsável por gerar tal sistema de acordo com as definições dos problemas, domínios e malha de elementos finitos previamente inseridos. Após a apresentação da base teórica geral na referida subseção, o intuito agora é limitar esse escopo no que tange às definições utilizadas pelo Comsol e, mais especificamente, às empregadas nas simulações. De acordo com o que foi apresentado, tal etapa se divide em três procedimentos: (i) determinação das funções interpoladoras, (ii) ajuste dessa função à equação diferencial através de métodos específicos e (iii) montagem do sistema de equações.

#### 3.3.6.1. Seleção das Funções Interpoladoras

As funções interpoladoras, uma vez relacionadas às formas geométricas dos elementos, são geradas de acordo com a malha de elementos finitos elaborada pelo usuário. Conforme a última subseção, empregaram-se, na metodologia

apresentada, quatro das formas geométricas possíveis para modelos tridimensionais: tetraedros, prismas triangulares, prismas retangulares (hexaedros) e pirâmides, sendo esta última utilizada apenas para estabelecer conexões entre as demais. Apenas o tetraedro foi explicitamente abordado na subseção 3.2.6.1, de modo que as formulações dos outros elementos podem ser encontradas no capítulo 19 (*Elements and Shape Functions*) do *Comsol Reference Manual* (Comsol, 2017c).

Em relação ao grau das funções interpoladoras, o Comsol permite escolher entre polinômios lineares, quadráticos e cúbicos. Para exemplificar como essa escolha pode impactar tanto na exatidão dos resultados como no custo computacional, simulou-se um sistema elétrico aéreo formado por três condutores de 50 mm<sup>2</sup> dispostos em arranjo planar separados entre si e do solo ideal de dez diâmetros, sendo esse diâmetro concernente ao condutor com a cobertura isolante. Tal configuração reduz consideravelmente a influência do efeito proximidade e permite que comparações com equações analíticas, tomadas como referências, sejam realizadas.

As Tabelas 3.2 a 3.4 mostram as diferenças percentuais obtidas para os parâmetros série do cabo central  $a$  e do cabo mais à esquerda  $b$ , em função da frequência e do grau das funções interpoladoras, ao se comparar os resultados oriundos do FEM em cada um dos casos com os valores analíticos calculados pelo ATP. Os valores relativos ao cabo  $c$  ficaram subentendidos por serem muito semelhantes aos exibidos. Tais tabelas exibem também o número de graus de liberdade (*degrees of freedom* (DOF)) gerados pelo Comsol em cada caso. As simulações foram conduzidas a partir de modelos bidimensionais, dada a simetria do problema. Além disso, a malha foi composta majoritariamente por elementos triangulares, exceto nas frequências a partir de 1 kHz, onde camadas paralelas, obtidas pela função “*boundary layer mesh*”, foram inseridas na superfície do condutor para efetuar o refinamento necessário.

Tabela 3.2 - Diferenças percentuais das resistências e indutâncias dos cabos obtidas por meio do FEM através de funções interpoladoras lineares em relação aos respectivos valores analíticos calculados pelo ATP.

Graus de liberdade	Freq. (Hz)	Funções interpoladoras lineares			
		R (%)		L (%)	
		$R_a'$	$R_{ab}'$	$L_a'$	$L_{ab}'$
22672	60	3,56	-2,54	-0,19	-0,15
22852	1 k	0,67	-0,17	-0,13	-0,12
22852	10 k	0,47	-0,08	-0,14	-0,12
22852	100 k	0,42	0,09	-0,14	-0,11
22852	1 M	9,27	9,29	0,38	0,80

Tabela 3.3 - Diferenças percentuais das resistências e indutâncias dos cabos obtidas por meio do FEM através de funções interpoladoras quadráticas em relação aos respectivos valores analíticos calculados pelo ATP.

Graus de liberdade	Freq. (Hz)	Funções interpoladoras quadráticas			
		R (%)		L (%)	
		$R_a'$	$R_{ab}'$	$L_a'$	$L_{ab}'$
90376	60	0,04	0,10	0,00	-0,01
91096	1 k	0,07	0,03	-0,01	0,00
91096	10 k	0,07	0,04	-0,01	0,00
91096	100 k	0,62	0,57	0,00	0,02
91096	1 M	7,39	7,35	0,41	0,78

Tabela 3.4 - Diferenças percentuais das resistências e indutâncias dos cabos obtidas por meio do FEM através de funções interpoladoras cúbicas em relação aos respectivos valores analíticos calculados pelo ATP.

Graus de liberdade	Freq. (Hz)	Funções interpoladoras cúbicas			
		R (%)		L (%)	
		$R_a'$	$R_{ab}'$	$L_a'$	$L_{ab}'$
203116	60	0,01	0,10	0,00	0,00
204736	1 k	0,06	0,02	-0,01	0,00
204736	10 k	0,09	0,08	-0,01	0,00
204736	100 k	0,37	0,39	0,00	0,02
204736	1 M	3,82	4,00	0,28	0,52

Analisando as tabelas anteriores, pode-se concluir que os polinômios cúbicos geram os resultados mais precisos, mas através de um número muito maior graus de liberdade, sendo que os polinômios de segundo grau apresentam um equilíbrio bastante interessante entre exatidão e graus de liberdade gerados. De maneira geral, é possível afirmar que quanto maior o grau da função interpoladora utilizada

para conceber as equações do sistema, mais preciso é o resultado, em detrimento de um maior custo computacional. Em domínios tridimensionais, tal como nas simulações conduzidas nesta dissertação, o emprego de funções interpoladoras com grau acima de dois tornaria o esforço computacional excessivamente alto.

O Comsol, em um dos documentos oficiais publicados no seu blog (Comsol, 2016b), cujo tema é a ordem dos elementos, elabora sugestões em relação ao grau da função interpoladora a ser utilizada pelo usuário. Nesse documento, ele afirma que para problemas definidos por funções governadas por equações diferenciais parciais de segunda ordem, tais como são os casos aqui estudados, elementos de segunda ordem são definidos por padrão e representam a escolha mais natural. Portanto, dadas as razões mencionadas, escolheram-se funções interpoladoras quadráticas em todas as simulações performadas neste trabalho.

#### 3.3.6.2. Ajuste da Equação Diferencial à Função Interpoladora

A formação das equações dos elementos a partir das funções interpoladoras associadas a eles e das equações diferenciais do problema é uma etapa praticamente oculta para o usuário, sendo que a teoria por trás dela é explicitada entre as páginas 479 e 493 do *Comsol Reference Guide* (Comsol, 2012). Documentos extras no blog oficial também ajudam a entender as técnicas utilizadas pelo programa (Comsol, 2017d).

Em síntese, o Comsol emprega a abordagem de Galerkin do Método dos Resíduos Ponderados, explicitado na subseção 3.3.6.2, a fim de produzir as equações dos elementos.

#### 3.3.7. Solução do Sistema de Equações

O Comsol permite que o usuário defina uma série de configurações avançadas acerca do método de solução numérica a ser empregado para resolver o sistema de equações, tais como: o método numérico, pré-condicionadores, algoritmos de pré-ordenamento, formas de alocação na memória do computador, entre outras. Todas essas funções são explicitadas no *Comsol Reference Manual* a

partir do tópico *Solution Attribute Nodes* (páginas 1165 a 1235) referente ao capítulo 20 (*Studies and Solvers*) (Comsol, 2017c).

De maneira geral, o usuário pode escolher entre métodos diretos e iterativos. Dentre os primeiros, existem quatro opções: MUMPS (*multifrontal massively parallel sparse direct solver*), PARDISO (*parallel sparse direct solver*), SPOOLES (*sparse object oriented linear equations solver*) e Dense Matrix, todos eles baseados na decomposição LU. Para os segundos, são: GMRES, FGMRES, Conjugate Gradients e BIGCGStab. O GMRES se refere ao método residual mínimo generalizado (generalized minimum residual), o FGMRES ao método residual mínimo generalizado flexível (flexible generalized minimum residual), o Conjugate Gradients ao método do gradiente conjugado e, por último, o BIGCGStab diz respeito ao método do gradiente bi-conjugado estabilizado (biconjugate gradient stabilized). Documentos no seu blog oficial auxiliam o usuário a entender e selecionar o melhor método numérico para resolver determinada aplicação (Comsol, 2013c; Comsol, 2020e).

Uma vez elaborados os modelos para o cálculo de parâmetros de cabos a serem simulados, os métodos de solução numéricos abordados no parágrafo anterior foram testados. Nenhum dos métodos iterativos foi capaz de atingir a solução do problema, dadas as características do sistema de equações gerado. Por outro lado, os métodos diretos alcançaram a resposta. Dentre eles, optou-se pela escolha do MUMPS devido à sua capacidade de armazenar a solução de maneira distribuída entre a memória RAM e o disco rígido.

Nas simulações elaboradas para o cálculo de parâmetros série foi necessário incluir no domínio referente ao ar uma condição de calibre de Coulomb, denominada no Comsol de “*gauge fixing for A-field*”, a fim de se obter a solução numérica para o problema. Mais informações sobre essa condição podem ser encontradas em Comsol (2017a) e Comsol (2020f).

No computador o qual as simulações foram conduzidas, caracterizado por um processador Intel Core i7-3770 3,40 GHz e memória RAM de 16 GB, o modelo mais complexo, composto pelos cabos sobre o leito metálico, levou em torno de dois minutos para finalizar a aplicação. É importante ressaltar que esse tempo só foi atingindo após inúmeros testes e consolidação das técnicas de simplificação

adotadas nas simulações e explicitadas ao longo deste capítulo. Sem aplicar nenhuma dessas técnicas, a simulação pode demorar várias horas para ser finalizada.

### 3.4. Conclusões

Ao longo deste capítulo, foi apresentada toda a metodologia empregada nas simulações, a fim de permitir o cálculo de parâmetros de cabos por meio do método de elementos finitos em três dimensões. O objetivo principal foi não só fornecer detalhes a respeito dos aspectos construtivos da simulação em si, mas também apresentar uma base teórica acerca do FEM a fim de sedimentar e corroborar as escolhas concernentes à sua aplicação. Para esse fim, o capítulo foi dividido em duas grandes subseções, a primeira focada na teoria geral do FEM e a segunda nos detalhes das simulações. A estrutura hierárquica dos tópicos principais de ambas as subseções foi mantida a mesma de forma a facilitar a correlação entre elas. Além disso, por diversas vezes, foi conduzido um paralelo entre as técnicas aqui empregadas e as utilizadas por outros estudos, a fim de contextualizar o leitor aos procedimentos do FEM por meio de uma abordagem mais ampla.

Empregando essa abordagem, foi possível apresentar ao leitor todas as técnicas e funcionalidades utilizadas para a elaboração de modelos 3D computacionalmente eficientes para o cálculo de parâmetros de cabos, com o intuito que o pesquisador possa reproduzi-las em suas próprias aplicações, através do mesmo *software* (Comsol) ou similares. Em síntese, pode-se listar as estratégias empregadas: adoção de simetrias, emprego de técnicas para redução dos domínios, elaboração de refinamentos de malha efetivos, redução dos domínios computacionais por meio de condições de fronteira, entre outras.

Diversos outros detalhes concernentes à simulação também foram expostos ao decorrer do capítulo, como as maneiras de se obter os parâmetros de cabos e o método numérico de solução empregado.

Portanto, o presente capítulo atua como referência metodológica para outras pesquisas acerca do tema e a aplicação das técnicas sugeridas torna a simulação de um modelo 3D associado ao cálculo de parâmetros de cabos, naturalmente

complexa e bastante onerosa sob o ponto de vista computacional, em algo bem mais simples e que pode ser solucionada em alguns minutos a partir de computadores razoavelmente bons. Todos os procedimentos sugeridos foram exaustivamente testados e a aplicação dos modelos elaborados se deu nos estudos de caso apresentados no capítulo 4.

## CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

---

### 4.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados uma série de estudos de caso que refletem sistemas elétricos industriais típicos a fim de se analisar como diferentes condições de instalação podem influenciar no comportamento de parâmetros de cabos, tais como:

- Métodos de instalação: são considerados sistemas trifásicos de cabos alojados em eletrocalhas lisas, eletrocalhas perfuradas e leitos metálicos, que correspondem aos tipos de suporte mais comuns em instalações industriais (Figura 4.1).
- Diâmetros dos cabos: a influência da geometria do condutor é examinada através do emprego de três seções transversais de cabos unipolares: 10 mm<sup>2</sup>, 50 mm<sup>2</sup> e 240 mm<sup>2</sup>.
- Altura da instalação: a variação da distância dos suportes metálicos em relação ao solo e a resultante alteração nos parâmetros dos cabos é um importante critério para se analisar o efeito de blindagem dessas estruturas. São considerados suportes suficientemente próximos ao solo (1 mm) e a 3 m deste.

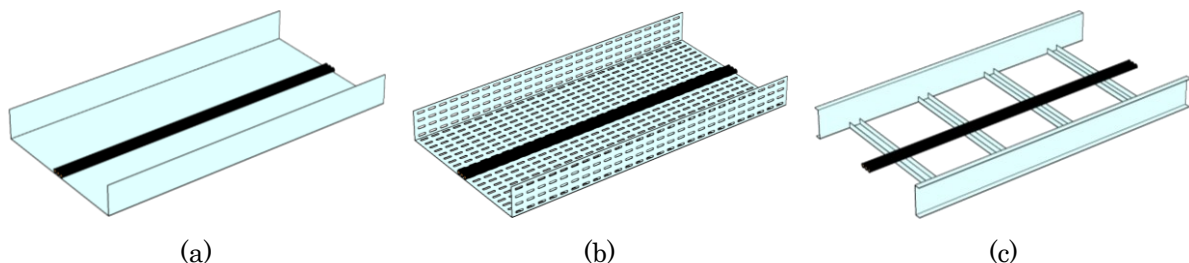


Figura 4.1 - Sistemas de cabos trifásicos alojados em uma: (a) eletrocalha lisa, (b) eletrocalha perfurada e em um (c) leito metálico. Fonte: autor (2020).

A teoria desenvolvida no capítulo 2 é bastante útil no que tange às análises dos resultados obtidos e exibidos no capítulo atual, incluindo sua forma de



apresentação. Em relação às simulações, toda metodologia explicitada no capítulo 3 é empregada nos estudos de caso considerados.

## 4.2. Definições Acerca dos Estudos de Caso

Com o objetivo de se definir estudos de casos capazes de refletir instalações elétricas reais, todas as normas referentes aos respectivos métodos de instalação foram consideradas. Também se optou por empregar modelos cuja aplicação em ambientes industriais e comerciais são mais comuns. As duas próximas subseções trazem mais detalhes sobre as características dos cabos e suportes selecionados.

### 4.2.1. Cabos Elétricos

A escolha dos cabos elétricos a serem empregados nos estudos de caso adotou como critério todas as informações contidas na subseção 2.2. Sendo assim, optou-se pelo emprego de cabos unipolares de cobre devido à sua grande aplicabilidade nas indústrias. Dentre as opções de marcas disponíveis no mercado, o cabo unipolar Sintenax Flex 0,6/1kV da Prysmian (Prysmian, 2020) foi escolhido devido à sua grande popularidade. A isolação desse cabo é de PVC/A e a cobertura é de PVC tipo ST1, conforme exhibe a Figura 4.2. Três diferentes seções nominais foram consideradas: 10 mm<sup>2</sup>, 50 mm<sup>2</sup> e 240 mm<sup>2</sup>. As informações geométricas dos cabos para essas diferentes seções nominais estão mostradas na Tabela 4.1.



Figura 4.2 - Cabo unipolar Sintenax Flex 0,6/1kV da Prysmian. Fonte: adaptado de (Prysmian, 2020).

Tabela 4.1 - Características geométricas dos cabos unipolares Sintenax Flex 0,6/1kV para as três seções nominais consideradas.

Seção nominal (mm <sup>2</sup> )	Diâmetro nominal do condutor (mm)	Espessura nominal da isolamento (mm)	Espessura nominal da cobertura (mm)	Diâmetro nominal externo (mm)
10	3,9	1,0	1,0	8,0
50	9,2	1,4	1,2	14,7
240	20	2,2	1,6	29,1

Em relação às características físicas dos materiais que compõe o cabo, os valores da condutividade do cobre e da permissividade dos materiais isolantes foram estabelecidos de acordo com padrões internacionais e dados de catálogo. A condutividade do cobre é definida pela norma IEC 60028 e foi corrigida nos estudos de caso de acordo com a temperatura de operação. Esse documento define uma resistividade de  $1,724 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$  para o cobre recozido a 20 °C (IEC, 1925). Segundo a NBR 5410 e o catálogo do fabricante, a temperatura máxima a ser suportada por cabos com isolamento de PVC operando em serviço contínuo é de 70 °C. Portanto, assumindo que os sistemas elétricos dos estudos de caso estejam operando em suas máximas capacidades de condução de corrente, realizou-se a correção da resistividade do cobre para a temperatura de 70 °C de acordo com a Equação (4.1):

$$\rho_{\theta} = \rho_{20} \cdot [1 + \alpha_{20} \cdot (\theta - 20)] \quad (4.1)$$

onde  $\rho_{\theta}$  é a resistividade do material à temperatura  $\theta$ ,  $\rho_{20}$  é a resistividade do material à temperatura de 20 °C,  $\alpha$  é o coeficiente de temperatura em relação à temperatura de 20° C, sendo seu valor também definido pela IEC 60028, e  $\theta$  é a temperatura em que se deseja calcular a nova resistividade. Dados os valores de  $\rho_{20} = 1,724 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ ,  $\alpha_{20} = 3,93 \cdot 10^{-3}$  e  $\theta = 70$  °C, obtém-se um valor de resistividade para o cobre corrigida a 70 °C ( $\rho_{70}$ ) de  $2,06 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ , que equivale a uma condutividade de 48,47 MS/m. No que se refere à permissividade dos materiais de PVC que compõem a isolamento e a cobertura, diferentes fabricantes de cabos e materiais isolantes adotam valores distintos para essa grandeza. Para cabos Prysmian, o valor da permissividade do PVC é definido em 5,0 (Prysmian, 2012). A Tabela 4.2 resume as características físicas consideradas para os cabos.

Tabela 4.2 - Características físicas dos cabos unipolares Sintenax Flex 0,6/1kV consideradas.

Material do condutor	Condutividade do condutor (MS/m)	Material da isolamento e cobertura	Permissividade relativa da isolamento
Cobre	48,47	PVC	5,0

#### 4.2.2. Eletrocalha Metálica

Existe uma diversidade de modelos de eletrocalha, que incluem variações desde as dimensões de altura e largura, até a presença ou não de virolas e perfurações. Virolas são abas voltadas para a parte interna da eletrocalha utilizadas para atingir maior resistência à flexão-torção, enquanto as perfurações são obtidas através de furos oblongos que se distribuem ao longo da base dessa estrutura, tanto na direção transversal como na longitudinal, no intuito de oferecer maior ventilação aos cabos ali distribuídos (Valemam, 2020a). Furos também podem ser realizados nas laterais da eletrocalha. A Figura 4.3 mostra diversos modelos de eletrocalha.

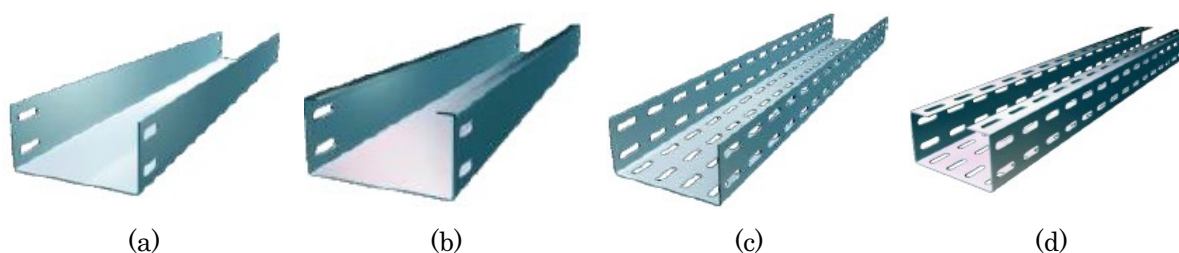


Figura 4.3 – Vários modelos de eletrocalhas: (a) lisa simples, (b) lisa com virola, (c) perfurada simples e (d) perfurada com virola. Fonte: adaptado de (Valemam, 2020b).

Eletrocalhas não-perfuradas são utilizadas em ambientes cuja preocupação com a temperatura e, conseqüentemente, com a ventilação dos condutores, é reduzida. Muitas das vezes, são associadas às instalações de cabos cujos circuitos são de potências menores. Além disso, em locais sujeitos à presença de pessoas comuns e não capacitadas, como no caso de aeroportos, o projetista frequentemente utiliza eletrocalhas não-perfuradas, mais comumente conhecidas como lisas, oferecendo maior segurança às pessoas. Quando a eletrocalha não apresenta

perfurações, a simetria longitudinal pode ser considerada e a obtenção dos parâmetros de cabos sobre eletrocalhas através do método de elementos finitos pode ser realizada utilizando modelagens em apenas duas dimensões (de Souza, 2015). No entanto, quando essas estruturas metálicas são perfuradas, é necessário que modelagens em três dimensões sejam empregadas, sendo que a principal questão a ser respondida é se a presença dos furos influencia ou não de maneira significativa nos parâmetros de cabos.

Dentre os diversos fabricantes de estruturas metálicas para suporte de cabos, definiu-se que os estudos de caso se baseariam nas eletrocalhas produzidas pela Valemam. Há muitas opções de altura e largura disponíveis no catálogo da empresa (Valemam, 2020b), optando-se então pela utilização de uma eletrocalha de proporções intermediárias: 500 mm de largura e 100 mm de altura. Essas eletrocalhas são fabricadas em chapas de aço carbono conforme normas SAE 1008/1010, NBR 11888/2 e NBR 7013. A Valemam não especifica a espessura do metal, no entanto, de maneira geral, os fabricantes utilizam chapas de aço que variam do calibre 12 ao 26 (Elecon, 2020; Neppe, 2020a), medida que se relaciona diretamente ao peso máximo de cabos suportado por essas estruturas (Neppe, 2020c). Os estudos de casos foram elaborados considerando a chapa de calibre 16 sem acabamento especial, que corresponde a uma espessura de 1,52 mm (Neppe, 2020c).

As eletrocalhas perfuradas da Valemam apresentam furos oblongos de 7x25 mm, espaçados entre si de 25 mm no sentido transversal e 38 mm no sentido longitudinal (ver Tabela 4.3 e Figura 4.4). Ao analisar outros fabricantes desse tipo de suporte, percebe-se um padrão em relação a essas medidas, variando muito pouco de um para outro (Neppe, 2020a; Valemam, 2020b). A Tabela 4.4 resume as informações geométricas da eletrocalha empregada, cuja referência de medidas é a Figura 4.5. As propriedades físicas da eletrocalha são apresentadas na Tabela 4.5.

Tabela 4.3 – Características dos furos na eletrocalha perfurada (vide Figura 4.4).

a (mm)	b (mm)	c (mm)	d (mm)
25	7	38	25

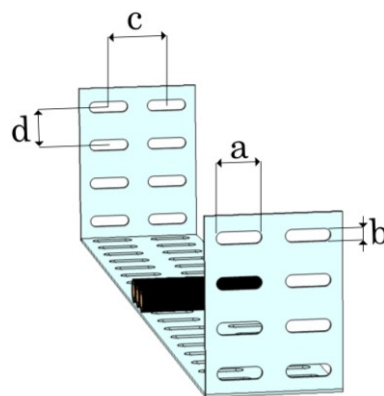


Figura 4.4 – Referência de medidas para a Tabela 4.3: características dos furos na eletrocalha perfurada. Fonte: autor (2020).

Tabela 4.4 - Características geométricas da eletrocalha (vide Figura 4.5).

a (mm)	b (mm)	Espessura (mm)
100	500	1,52

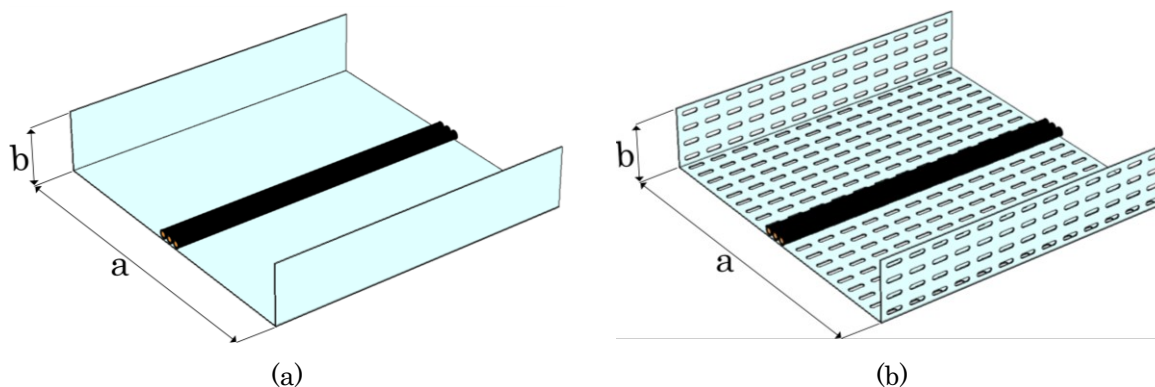


Figura 4.5 – Referência de medidas para a Tabela 4.4: características geométricas da (a) eletrocalha lisa e da (b) eletrocalha perfurada. Fonte: autor (2020).

Tabela 4.5 - Características físicas da eletrocalha.

Material	Condutividade (MS/m)	Permeabilidade magnética relativa
Aço carbono SAE 1008/1010	8,41	1220,7

#### 4.2.3. Leito Metálico

Assim como as eletrocalhas, os leitos metálicos (ou escadas) são bastante comuns em ambientes industriais e comerciais. Sua grande vantagem é permitir

ventilação completa aos cabos, visto que sua estrutura é praticamente aberta. Por outro lado, esse tipo de suporte não é recomendável em lugares em que há a preocupação com a estética ou circulação de pessoas comuns. De maneira geral, os mesmos fabricantes de eletrocalhas produzem leitos metálicos, portanto, escolheu-se um leito também produzido pela Valemam para ser empregado nos estudos de caso (Valemam, 2020b). Existe uma variedade de tamanhos disponíveis e optou-se pela utilização de um leito cuja altura e largura fossem equivalentes aos da eletrocalha. As informações geométricas do leito são mostradas na Tabela 4.6, que utiliza a Figura 4.6 como referência de medidas. As abas laterais em forma de “U” são denominadas de *longarinas*, enquanto as barras transversais são conhecidas como *travessas*.

Tabela 4.6 – Características geométricas do leito metálico (vide Figura 4.6).

a (mm)	b (mm)	c (mm)	d (mm)	e (mm)	f (mm)
500	100	19	250	38	19

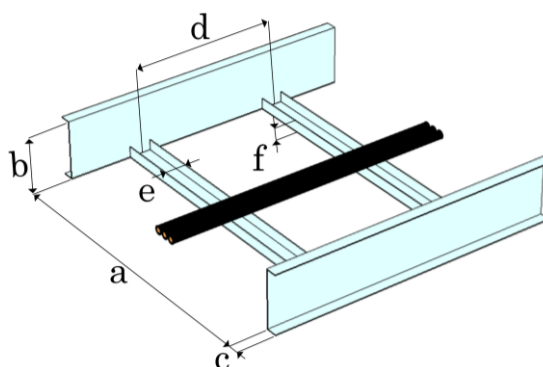


Figura 4.6 – Referência de medidas para a Tabela 4.6: características geométricas do leito metálico. Fonte: autor (2020).

Por empregar o mesmo material utilizado nas eletrocalhas, as características de condutividade e permeabilidade do metal que constitui o leito são aquelas apresentadas na Tabela 4.5. De maneira geral, os fabricantes utilizam chapas de calibres de 12 a 18 para os leitos metálicos (Neppe, 2020b). Nos estudos de caso, considerou-se a chapa de calibre 16 sem acabamento especial, correspondendo a uma espessura de 1,52 mm, igual à da eletrocalha.

#### 4.3. Estudos de Caso

Os estudos de caso foram elaborados no intuito de compreender algumas questões que envolvem o cálculo de parâmetros de cabos industriais, tais como:

- Avaliar como a presença de um elemento metálico aterrado de alta permeabilidade magnética atuando como suporte aos cabos e de dimensões maiores em relação a estes modifica a distribuição dos campos elétricos e magnéticos do sistema e os valores dos parâmetros dos condutores. Para isso, dois sistemas trifásicos, um composto por cabos alojados no interior de uma eletrocalha lisa e outro de configuração bastante similar, exceto pela ausência da eletrocalha, foram comparados entre si. Essa comparação, apesar de não ser relevante do ponto de vista prático, é extremamente útil para entender os mecanismos físicos que ditam a distribuição dos campos eletromagnéticos associada ao cálculo dos parâmetros série, assim como a distribuição dos campos eletrostáticos concernente ao cômputo das capacitâncias, além dos reflexos dessas distribuições nos valores de tais parâmetros.
- Avaliar se as perfurações na eletrocalha ou geometrias mais distintas, como a do leito metálico, alteram de forma significativa os valores dos parâmetros de cabos em comparação com a eletrocalha lisa, a fim de se verificar se a simulação desta última pode ser empregada para representar as outras formas de instalação, principalmente quando o usuário não dispõe de *softwares* de simulação 3D.
- Ampliar as duas discussões anteriores através da consideração de diferentes seções transversais de cabos.
- Analisar o efeito de blindagem magnética proporcionado por cada um dos suportes através da variação da altura da instalação e verificação do consequente impacto nos parâmetros dos cabos.

Em todos os casos foi considerado um sistema trifásico de cabos dispostos em um arranjo planar no centro dos suportes metálicos, espaçados entre si e do

suporte de 1 mm. Os cabos, as eletrocalhas e o leito empregados estão conforme as discussões realizadas na subseção 4.2.

#### 4.3.1. Métodos de Instalação

Neste subtópico, o intuito é analisar o efeito que a inclusão da eletrocalha lisa tem sobre os valores de parâmetros de cabos e também verificar o quanto tais valores se diferenciam quando esses cabos se encontram sobre a eletrocalha perfurada e o leito metálico em relação ao sistema constituído pela eletrocalha lisa.

##### 4.3.1.1. Cabos Sobre a Eletrocalha Lisa

O objetivo neste momento é mostrar os resultados obtidos para o caso em que os cabos se encontram dispostos no interior da eletrocalha lisa, incluindo análises dos fenômenos físicos associados à presença desta.

##### a) Valores dos parâmetros

Os valores das resistências, indutâncias e capacitâncias, próprias e mútuas, para cabos alojados no interior da eletrocalha lisa disposta a 3 m de altura do solo são exibidos, respectivamente, nas Tabelas 4.7 a 4.9. Três seções nominais de cabos ( $10 \text{ mm}^2$ ,  $50 \text{ mm}^2$  e  $240 \text{ mm}^2$ ) e cinco valores de frequência (60 Hz, 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz e 1 MHz) são considerados. Optou-se por mostrar esses valores com o intuito de utilizá-los como referência para os demais casos, que são exibidos através de diferenças percentuais em relação ao presente sistema.



Tabela 4.7 – Resistências dos cabos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	$R$ ( $\Omega$ )	Frequência (Hz)				
		60	1 k	10 k	100 k	1 M
10	$R_a'$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$
	$R_b'$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$
	$R_{ab}'$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-1}$
	$R_{bc}'$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$
50	$R_a'$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$
	$R_b'$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$
	$R_{ab}'$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$
	$R_{bc}'$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$
240	$R_a'$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$
	$R_b'$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$
	$R_{ab}'$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$
	$R_{bc}'$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-2}$

Tabela 4.8 – Indutâncias dos cabos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	$L$ (H)	Frequência (Hz)				
		60	1 k	10 k	100 k	1 M
10	$L_a'$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$
	$L_b'$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$8,8 \cdot 10^{-7}$	$5,9 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$
	$L_{ab}'$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$8,6 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$
	$L_{bc}'$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$6,5 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$
50	$L_a'$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$9,9 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$
	$L_b'$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$6,5 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$
	$L_{ab}'$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$6,7 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$
	$L_{bc}'$	$9,7 \cdot 10^{-7}$	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$9,6 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-8}$
240	$L_a'$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$
	$L_b'$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$7,4 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$
	$L_{ab}'$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$7,2 \cdot 10^{-8}$
	$L_{bc}'$	$7,5 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$5,6 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$

Tabela 4.9 – Capacitâncias dos cabos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	$C$ (F)			
	$C_a'$	$C_b'$	$C_{ab}'$	$C_{bc}'$
10	$8,8 \cdot 10^{-11}$	$7,5 \cdot 10^{-11}$	$2,3 \cdot 10^{-11}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$
50	$1,2 \cdot 10^{-10}$	$9,9 \cdot 10^{-11}$	$3,2 \cdot 10^{-11}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$
240	$1,4 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^{-10}$	$3,5 \cdot 10^{-11}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$

## b) Efeito da inclusão da eletrocalha lisa

Objetivando estudar o efeito que a inclusão de suportes metálicos tem sobre as distribuições dos campos elétricos e magnéticos e a consequente variação nos

valores dos parâmetros de cabos, elaborou-se um sistema sem suporte cujos cabos estão na mesma posição referente ao sistema anterior, isto é, eles se diferenciam apenas pela ausência da eletrocalha lisa. Todos os resultados são exibidos nas Tabelas 4.10 a 4.12, em termos de diferenças percentuais. Esses valores são calculados através da Equação (4.2), tomando como valor referencial o caso composto pelos cabos sobre a eletrocalha lisa. Valores percentuais positivos indicam, portanto, que houve uma redução no valor do parâmetro associado quando a eletrocalha lisa foi considerada no sistema.

$$\text{Variação percentual (\%)} = \frac{\text{Valor atual} - \text{Valor referencial}}{\text{Valor referencial}} \cdot 100 \quad (4.2)$$

Tabela 4.10 - Diferenças percentuais das resistências dos cabos sem suporte em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	R (%)	Frequência (Hz)				
		60	1 k	10 k	100 k	1 M
10	$R_a'$	-4,4	-21,4	-26,5	-12,9	15,7
	$R_b'$	-4,4	-21,3	-26,7	-13,3	14,6
	$R_{ab}'$	-57,7	-41,7	-28,0	-1,9	51,0
	$R_{bc}'$	-57,2	-38,7	-18,9	26,4	141,3
50	$R_a'$	-17,6	-30,6	-17,1	12,0	65,6
	$R_b'$	-17,6	-30,7	-17,6	10,5	61,0
	$R_{ab}'$	-56,6	-35,6	-12,7	32,9	127,9
	$R_{bc}'$	-55,9	-30,3	1,2	80,6	283,5
240	$R_a'$	-37,2	-24,4	4,5	60,7	163,8
	$R_b'$	-37,2	-24,6	3,7	55,9	150,8
	$R_{ab}'$	-54,7	-23,7	16,3	104,0	290,7
	$R_{bc}'$	-53,2	-16,0	42,2	203,8	608,4

Tabela 4.11 - Diferenças percentuais das indutâncias dos cabos sem suporte em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	L (%)	Frequência (Hz)				
		60	1 k	10 k	100 k	1 M
10	$L_a'$	47,1	88,0	143,2	225,4	316,2
	$L_b'$	47,2	88,0	142,0	222,3	311,8
	$L_{ab}'$	65,0	135,2	251,4	490,5	915,9
	$L_{bc}'$	84,2	188,7	383,5	902,9	2088,2
50	$L_a'$	60,6	120,7	202,5	313,6	424,4
	$L_b'$	60,6	119,0	197,8	304,0	410,9
	$L_{ab}'$	83,8	183,2	348,5	685,3	1212,9
	$L_{bc}'$	111,0	256,6	544,6	1326,4	2864,5
240	$L_a'$	81,6	172,8	283,1	416,0	517,2
	$L_b'$	81,1	168,2	271,5	395,4	493,7
	$L_{ab}'$	114,8	264,3	515,3	988,9	1553,0
	$L_{bc}'$	155,7	376,6	864,6	2106,0	3868,8

Tabela 4.12 - Diferenças percentuais das capacitâncias dos cabos sem suporte em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	C (%)			
	$C_a'$	$C_b'$	$C_{ab}'$	$C_{ac}'$
10	-31,4	-48,8	25,7	336,7
50	-30,9	-50,1	26,2	323,5
240	-34,3	-53,1	24,0	315,9

#### i) Análise das resistências

Através do exame da Tabela 4.10, verifica-se um comportamento bastante interessante das resistências próprias e mútuas dos cabos devido à presença da eletrocalha lisa: nas primeiras faixas de frequência, seus valores apresentam uma considerável elevação em relação aos obtidos quando os cabos se encontram sem suporte. No entanto, para frequências mais altas, o resultado verificado é o oposto, tais parâmetros começam a exibir valores cada vez menores em relação à mesma referência. Quanto maior a seção do cabo, menor é a frequência para a qual se verifica essa mudança no perfil dos parâmetros. Esse comportamento se deve à atuação de dois fenômenos em concomitância que influenciam de maneira bastante distinta os valores de resistências: o efeito proximidade e a blindagem eletromagnética.

## I. Efeito proximidade

O efeito proximidade, agindo isoladamente, é responsável pelo aumento dos valores de resistências dos condutores, conforme explicitado na subseção 2.6.2. No sistema analisado, campos eletromagnéticos produzidos pelos cabos induzem correntes parasitas na eletrocalha lisa, sendo que estas, por sua vez, dão origem a novos campos eletromagnéticos que, atingindo o condutor, redistribuem a corrente ao longo de sua seção transversal, alterando sua resistência.

Para compreender melhor o impacto que a presença da eletrocalha lisa tem sobre os valores de resistências dos cabos, dois sistemas trifásicos bastante similares aos que estão sendo objetos de análise foram simulados, no entanto, a terra caracterizada pela condutividade finita foi substituída pela presença de uma terra ideal, no intuito de isolar a influência que o caminho de retorno pela terra tem sobre a composição da resistência total do cabo. A Tabela 4.13 exhibe os valores e a variação da resistência própria do condutor central concernente aos dois sistemas analisados. As mesmas seções nominais de cabos e frequências empregadas nas simulações anteriores foram consideradas.

Tabela 4.13 - Valores da resistência própria do condutor central e sua respectiva variação quando dois sistemas trifásicos sobre o solo ideal são considerados: cabos sem suporte e cabos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	Frequência (Hz)	R (Ω)		R (%)
		Sem suporte (terra ideal)	Eletrocalha lisa (terra ideal)	Variação percentual
10	60	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	6,5
	1 k	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	94,4
	10 k	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	425,1
	100 k	$9,2 \cdot 10^{-3}$	$9,8 \cdot 10^{-2}$	968,5
	1 M	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$	1660,8
50	60	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$	35,3
	1 k	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	327,7
	10 k	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	795,9
	100 k	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	1553,3
	1 M	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	2264,2
240	60	$7,2 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	150,6
	1 k	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	588,8
	10 k	$6,9 \cdot 10^{-4}$	$9,2 \cdot 10^{-3}$	1246,6
	100 k	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	2093,7
	1 M	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	2716,0

Pode-se observar através da tabela anterior que o efeito proximidade associado à presença da eletrocalha lisa tem grande impacto nos valores da resistência própria do cabo, principalmente para frequências e seções de cabos maiores, atuando no sentido de aumentar seus valores. A Figura 4.7 exemplifica o fenômeno exposto ao mostrar as densidades de correntes nos condutores e na eletrocalha lisa considerando a excitação do condutor central por uma corrente de 1 kHz. Os cabos são de 50 mm<sup>2</sup>.

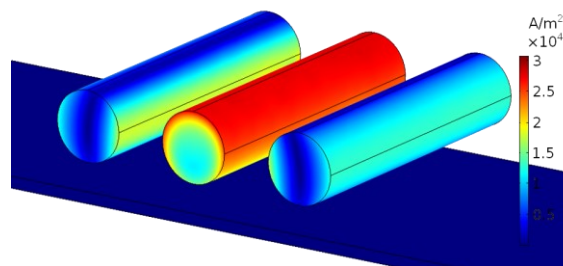


Figura 4.7 - Densidade de corrente dos condutores e da eletrocalha quando o condutor central está conduzindo uma corrente de 1 kHz. Fonte: autor (2020).

Conforme exhibe a figura anterior, a distribuição da densidade corrente no interior do condutor central é fortemente afetada pela presença da eletrocalha lisa. A deformação dessa densidade na parte inferior do condutor, na região mais próxima ao suporte, é responsável pelo aumento da resistência verificado.

## II. O efeito de blindagem eletromagnética

Ao contrário do efeito proximidade, o efeito de blindagem eletromagnética atua no sentido de reduzir o valor da resistência dos condutores. Isto se deve pelo fato de que a resistência própria de um condutor é definida pela somatória de sua resistência interna com a resistência do caminho de retorno da corrente (solo e/ou suporte metálico), de modo que a presença da eletrocalha afeta de sobremaneira esta última parcela.

Para corroborar o que foi exposto no parágrafo anterior, a Tabela 4.14 mostra as parcelas relativas à resistência interna do condutor e à resistência do solo na composição da resistência própria do cabo para diferentes frequências de um sistema trifásico sem suporte. Para obter os valores dessa tabela, calcularam-se primeiro os valores de resistências do condutor através da consideração do solo ideal, de modo que a penetração dos campos eletromagnéticos nesse meio pode ser considerada nula; neste caso, os valores obtidos se referem apenas à resistência interna do condutor, não havendo a contribuição da parcela relativa ao solo sobre a composição da resistência própria do cabo. Ao realizar novas simulações considerando o solo com resistividade finita ( $100 \Omega.m$ ), tem-se o valor da resistência total com ambas as parcelas, realizando a diferença entre esta resistência e a obtida anteriormente, obtém-se a parcela referente ao solo.

A Tabela 4.15, por sua vez, exhibe as mesmas parcelas, mas considerando a presença da eletrocalha lisa. A parcela que não se refere ao solo agora é composta pela resistência interna do condutor somada à resistência de retorno da corrente pela eletrocalha. A mesma faixa de frequências analisadas nos estudos anteriores foi considerada e manteve-se a seção dos cabos de  $50 \text{ mm}^2$  para todas as simulações.

Tabela 4.14 - Parcelas relativas à resistência interna do condutor e à do solo na composição da resistência própria do condutor central para um sistema trifásico sem suporte.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	Frequência (Hz)	Parcela da Resistência total (%)	
		Resistência interna do condutor	Resistência do solo
10	60	96,7	3,3
	1 k	64,9	35,1
	10 k	25,8	74,2
	100 k	10,7	89,3
	1 M	4,9	95,1
50	60	84,1	15,9
	1 k	33,1	66,9
	10 k	13,4	86,6
	100 k	5,4	94,6
	1 M	2,6	97,4
240	60	54,9	45,1
	1 k	18,7	81,3
	10 k	7,1	92,9
	100 k	2,8	97,2
	1 M	1,4	98,6

Tabela 4.15 - Parcelas relativas à resistência interna do condutor somada à de retorno pela eletrocalha, como também a relativa à resistência do solo, na composição da resistência própria do condutor central para um sistema trifásico instalado sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	Frequência (Hz)	Parcela da Resistência total (%)	
		Resistência interna do condutor e de retorno pela eletrocalha	Resistência do solo
50	60	93,8	6,2
	1 k	98,6	1,4
	10 k	99,8	0,2
	100 k	100	0
	1 M	100	0

Consultando a Tabela 4.14, referente a um sistema sem suporte, pode-se afirmar que a parcela associada ao solo se torna cada vez mais dominante na resistência própria do condutor à medida que a frequência aumenta. Além disso,

pode-se aferir que quanto maior a seção nominal do cabo, maior é a contribuição do solo na composição da resistência própria do condutor, para todas as frequências consideradas.

Por outro lado, quando a eletrocalha lisa está presente (Tabela 4.15), o suporte atua quase que exclusivamente como caminho de retorno para as correntes, cuja participação do solo é relevante apenas em frequências próximas da industrial (60 Hz). Esse fenômeno se deve ao efeito de blindagem eletromagnética proporcionado pela eletrocalha lisa.

Em síntese, para frequências mais elevadas, grande parte da resistência própria dos condutores de um sistema sem suporte se deve à parcela relativa ao solo; quando a eletrocalha se faz presente, atuando como blindagem, essa parcela é fortemente afetada, sendo substituída pela atuação do suporte metálico como caminho de retorno para as correntes. Devido ao fato de que o suporte possui resistência assaz inferior em relação ao solo, o valor da resistência própria do condutor é reduzido substancialmente.

O efeito de blindagem pode ser compreendido também através da exibição das linhas de fluxo magnético presentes no sistema composto pela eletrocalha lisa. Sendo assim, a Figura 4.8 exibe essas linhas para duas frequências de corrente diferentes: 1 kHz e 100 kHz, mostrando como a blindagem da eletrocalha confina as linhas de fluxo magnético em seu interior.

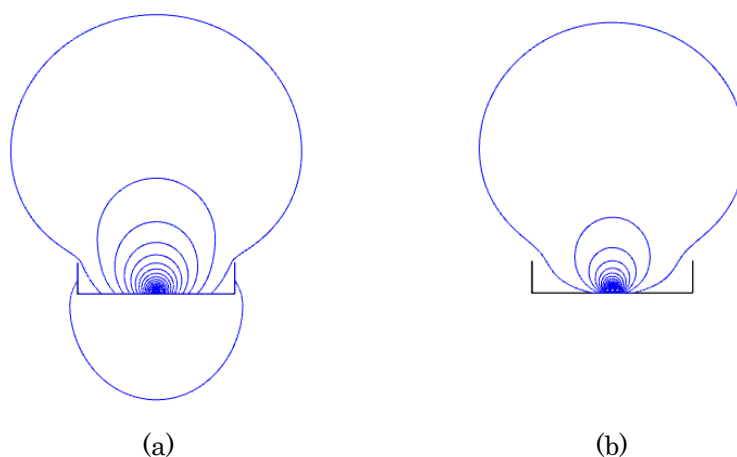


Figura 4.8 - Linhas de fluxo magnético de um sistema trifásico abrigado pela eletrocalha para duas frequências diferentes: (a) 1 kHz e (b) 100 kHz. Fonte: autor (2020).



### III. Resultado de ambos os efeitos

Conforme verificado nos dois tópicos anteriores, os efeitos proximidade e de blindagem eletromagnética associados à presença da eletrocalha lisa atuam de maneira oposta nos valores de resistências do cabo. Enquanto o primeiro é responsável pelo aumento desse parâmetro, o segundo concorre no sentido de reduzi-lo. Simulações foram realizadas no sentido de isolar cada um dos fenômenos a fim de corroborar as análises efetuadas.

Quando os fenômenos estão atuando em conjunto, os valores de resistências dos cabos do sistema sem suporte em relação ao composto pela eletrocalha lisa vão ser maiores ou menores entre si a depender da frequência das correntes e da seção nominal dos cabos, isto porque essas características influenciam de maneira direta no quanto cada um dos efeitos vai alterar o valor da resistência total dos condutores, conforme mostraram os estudos anteriores. Para frequências menores, onde a maior parcela da resistência própria dos cabos em um sistema sem suporte é composta pela resistência interna do condutor (Tabela 4.14), o efeito proximidade tem mais influência que o efeito de blindagem, principalmente para seções de cabos maiores (Tabela 4.13), fazendo com que os valores de resistência verificados após o emprego da eletrocalha lisa aumentem substancialmente. No entanto, à medida que a frequência das correntes aumenta, e o solo se torna o principal componente da resistência própria do condutor para sistemas sem suporte, o efeito de blindagem produzido pela introdução da eletrocalha supera o efeito proximidade também oferecido por ela. Tal é a influência desse efeito de blindagem que o caminho de retorno da corrente, antes estabelecido pelo solo, agora é realizado pela própria eletrocalha que, caracterizada por valores menores de resistência, resulta na diminuição da resistência própria do cabo. Essa mudança de perfil nos parâmetros é acelerada para seções nominais de cabo maiores, uma vez que quanto maior o cabo, maior é a contribuição da parcela referente ao solo, para todas as frequências analisadas (Tabela 4.14).

Todo o conteúdo explicitado no parágrafo anterior pode ser demonstrado pelos valores quantitativos exibidos na Tabela 4.10. Para a frequência de 60 Hz, por exemplo, como o efeito proximidade tem maior influência, todos os cabos

apresentam uma elevação nos valores de resistência devido à presença da eletrocalha lisa, principalmente os de seções maiores: -4,4% para os condutores centrais de 10 mm<sup>2</sup>, -17,6% para os de 50 mm<sup>2</sup> e -37,2% para os de 240 mm<sup>2</sup> (como os valores de referência adotados são os do sistema sobre a eletrocalha lisa, diferenças negativas indicam maiores valores de parâmetros deste sistema em relação ao que não possui suporte). No entanto, a mudança de perfil dos parâmetros, isto é, a primeira frequência em que se verifica uma diminuição nos valores de resistência ao inserir a eletrocalha, é tanto menor quanto é maior a seção do cabo: 10 kHz para os condutores centrais de 240 mm<sup>2</sup>, 100 kHz para os de 50 mm<sup>2</sup> e 1 MHz para os de 10 mm<sup>2</sup>. Isto se deve à característica da resistência própria do condutor, mais influenciada pela parcela da resistência interna para condutores de menor seção e, portanto, mais sujeito ao efeito proximidade.

Após as análises conduzidas nesta subseção, pode-se compreender o porquê da consideração de um sistema sem suporte e um composto pela eletrocalha lisa: os mecanismos físicos que influenciam nos valores dos parâmetros são mais facilmente compreendidos por meio da comparação desses sistemas. No entanto, do ponto de vista prático, tal comparação não é tão relevante, uma vez que instalações industriais sempre são compostas por suportes.

## ii) Análise das indutâncias

No que se refere às indutâncias próprias e mútuas (Tabela 4.11), pode-se constatar que a presença da eletrocalha lisa reduz significativamente os valores desses parâmetros em relação ao sistema sem suporte. Esse efeito é pronunciado à medida que a frequência das correntes aumenta, bem como as seções nominais dos cabos.

Esse resultado está diretamente relacionado à alteração do fluxo magnético concatenado pelo cabo, que é fortemente afetado pela presença do suporte metálico. Esse material, caracterizado por uma baixíssima profundidade de penetração, atua como blindagem para o campo magnético produzido pelo cabo, reduzindo o fluxo magnético em torno dos condutores e também atenuando a parcela relativa ao solo

na composição da indutância total em relação ao sistema onde a eletrocalha lisa não se faz presente.

Além disso, as correntes induzidas nesse suporte produzem seus próprios campos eletromagnéticos, distorcendo o campo magnético na região compreendida entre o condutor e o suporte. A Figura 4.9 exibe a densidade de fluxo magnético em torno dos cabos quando uma corrente de 1 kHz excita o condutor central para os casos em que os cabos estão sem suporte e sobre a eletrocalha lisa.

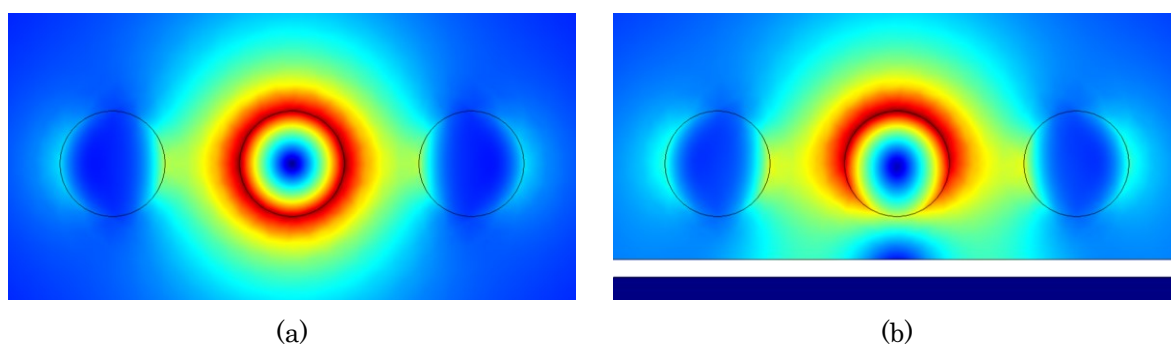


Figura 4.9 - Densidade de fluxo magnético quando o condutor central está conduzindo uma corrente de 1 kHz: (a) cabos sem suporte e (b) cabos sobre a eletrocalha lisa (esta foi removida da figura). Fonte: autor (2020).

Analisando a figura anterior, pode-se notar que a distribuição do campo magnético em torno do condutor é bastante modificada quando se insere a eletrocalha lisa, principalmente na região mais próxima a ela. Os condutores adjacentes ao condutor central também são responsáveis por modificar o arranjo espacial desse campo. Os fenômenos citados neste parágrafo e no anterior, incluindo suas implicações representam, de fato, o efeito proximidade, cujo surgimento no sistema analisado está associado à presença de condutores próximos entre si, sendo acentuado pela introdução da eletrocalha lisa.

Por fim, pode-se afirmar que, no caso das indutâncias, os efeitos de proximidade e de blindagem eletromagnética atuam em conjunto no sentido de reduzir as indutâncias dos cabos, diferentemente do que foi visto para as resistências, onde tais efeitos atuavam em sentidos opostos.

### iii) Análise das capacitâncias

Analizando a Tabela 4.12, verifica-se que as capacitâncias próprias e mútuas são influenciadas de maneira bastante distinta ao se comparar os dois sistemas: enquanto as próprias apresentam uma elevação nos seus valores quando a eletrocalha lisa está presente, as mútuas são reduzidas, principalmente para o parâmetro “ac”. Uma vez que capacitância própria de um condutor refere-se à somatória da capacitância parcial entre ele e o solo com as capacitâncias parciais mútuas entre ele e os demais condutores, é preciso compreender que esse parâmetro carrega consigo a redução do parâmetro mútuo, no entanto, o aumento do primeiro termo citado é tão significativo que o valor total se eleva.

Para entender melhor o que foi comentado no parágrafo anterior, a Tabela 4.16 apresenta a variação das capacitâncias parciais entre os condutores e o solo para as três seções de cabo consideradas. Os valores de referência para o cálculo da variação percentual são os do sistema com a eletrocalha lisa, conforme estabelecido anteriormente.

Tabela 4.16 – Capacitâncias parciais entre cada condutor e o solo para os dois sistemas trifásicos considerados: cabos sem suporte e instalados sobre a eletrocalha lisa.

Cabo (mm <sup>2</sup> )	C (F)				C (%)	
	Sem suporte		Eletrocalha lisa		Variação percentual	
	C <sub>10</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>20</sub>
10	1,6.10 <sup>-12</sup>	3,3.10 <sup>-12</sup>	4,1.10 <sup>-12</sup>	5,0.10 <sup>-12</sup>	-96,0	-93,4
50	1,7.10 <sup>-12</sup>	3,7.10 <sup>-12</sup>	5,6.10 <sup>-12</sup>	6,6.10 <sup>-12</sup>	-96,9	-94,5
240	1,9.10 <sup>-12</sup>	4,1.10 <sup>-12</sup>	6,6.10 <sup>-12</sup>	7,7.10 <sup>-12</sup>	-97,1	-94,7

Consoante os resultados mostrados na tabela anterior, chega-se à conclusão que a capacitância parcial entre os condutores e o solo é consideravelmente elevada para o caso em que o suporte metálico está presente. Tal resultado se deve à alteração do plano de referência de potencial nulo produzida pela inserção da eletrocalha lisa no sistema, visto que ela se encontra aterrada. Esse plano, mais próximo aos condutores, diminui a diferença de potencial entre eles e, portanto, aumenta o acoplamento capacitivo correspondente. Todas as variações percentuais exibidas na tabela anterior são superiores às das capacitâncias próprias mostradas na Tabela 4.12, isto se deve à presença das capacitâncias mútuas parciais na composição da capacitância própria, conforme já comentado.

A variação da capacitância mútua está intimamente relacionada à distorção das linhas equipotenciais que a presença da eletrocalha provoca, representando, de fato, o efeito proximidade. Esse efeito já estava presente no sistema sem suporte, tal como apresenta a Figura 4.10, que apresenta as linhas equipotenciais quando é imposto um potencial não nulo no condutor central. No entanto, o acréscimo do suporte, modifica ainda mais essas linhas, como observa-se na Figura 4.11. Por último, a Figura 4.12 exibe os mesmos sistemas, mas sob uma perspectiva diferente, mais distante, para melhorar a compreensão do comportamento das linhas equipotenciais.

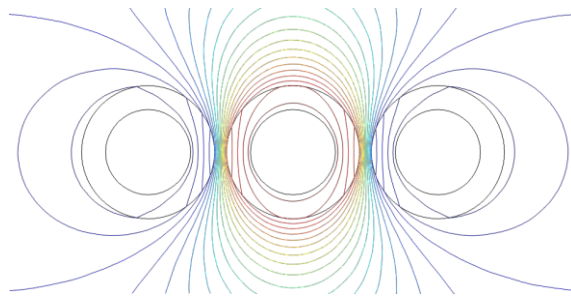


Figura 4.10 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para o caso em que os cabos estão sem suporte. Fonte: autor (2020).

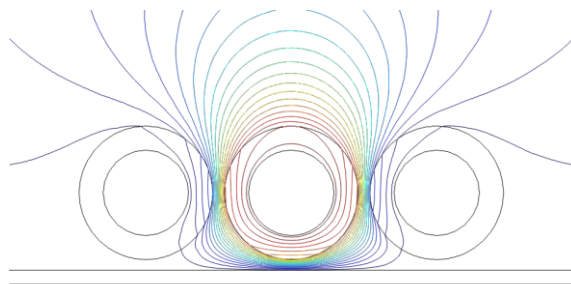


Figura 4.11 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para o caso em que os cabos estão sobre a eletrocalha lisa. Fonte: autor (2020).

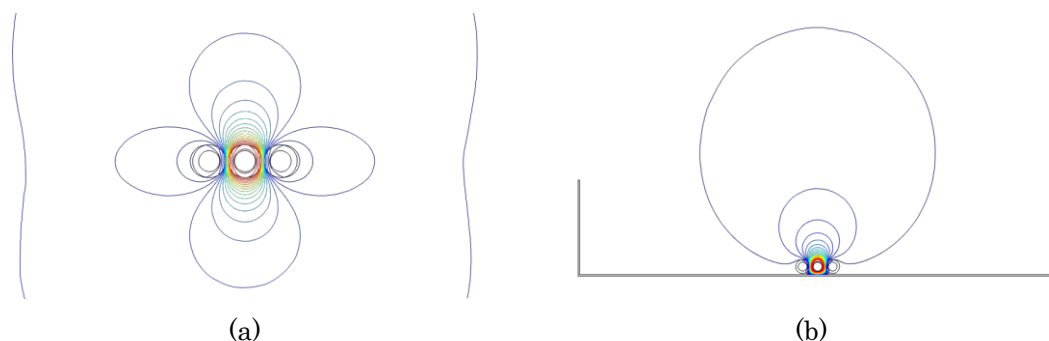


Figura 4.12 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central: (a) cabos sem suporte e (b) cabos sobre a eletrocalha lisa. Fonte: autor (2020).

Em relação à seção nominal dos cabos, percebe-se que esse parâmetro pouco influenciou nos resultados obtidos para as capacitâncias. De fato, apesar de existir uma elevação nas diferenças percentuais obtidas para as capacitâncias próprias e uma redução nas capacitâncias mútuas quando se aumenta a bitola dos cabos empregados, as variações são muito pequenas. É importante ressaltar que a baixa influência que a seção dos cabos teve nos resultados conferidos se deve à preponderância da eletrocalha na modificação das linhas equipotenciais, uma vez que outros estudos, tais como aqueles realizados por de Souza (2015) e Cirino et al. (2009), mostraram que o efeito proximidade tem forte dependência com a seção nominal dos cabos quando não há a presença de suportes metálicos.

#### 4.3.1.2. Cabos sobre a Eletrocalha Perfurada e Leito Metálico

No intuito de se verificar o quanto os valores dos parâmetros de cabos sobre a eletrocalha perfurada e o leito metálico se diferenciam em relação ao sistema em que os cabos estão sobre a eletrocalha lisa, simulações considerando as mesmas seções nominais de cabos e frequências foram realizadas. As diferenças percentuais mostradas nas Tabelas 4.17 a 4.19 consideram como valores de referência os parâmetros apresentados nas Tabelas 4.7 a 4.9. O método de instalação número 2 se refere ao caso em que os cabos estão sobre a eletrocalha perfurada, ao passo que o método 3 se refere ao sistema formado por cabos sobre o leito metálico.

Tabela 4.17 - Diferenças percentuais das resistências dos cabos sobre a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3) em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Método	Cabo (mm <sup>2</sup> )	R (%)	Frequência (Hz)				
			60	1 k	10 k	100 k	1 M
2	10	$R_a'$	0,8	-1,0	-8,5	-8,9	-3,3
		$R_b'$	1,0	0,0	-8,6	-13,4	-12,6
		$R_{ab}'$	12,5	-1,6	-11,2	-12,3	-7,0
		$R_{bc}'$	12,5	-2,3	-12,9	-14,0	-7,2
	50	$R_a'$	3,7	-2,1	-9,6	-9,4	-4,1
		$R_b'$	3,7	-1,3	-9,5	-11,8	-10,6
		$R_{ab}'$	12,0	-2,3	-11,1	-11,5	-7,0
		$R_{bc}'$	11,9	-2,7	-12,4	-12,5	-6,4
	240	$R_a'$	7,0	-2,1	-9,5	-9,5	-5,2
		$R_b'$	7,2	-1,8	-9,3	-10,1	-6,6
		$R_{ab}'$	10,8	-2,5	-10,6	-10,4	-5,4
		$R_{bc}'$	11,4	-2,9	-11,6	-10,3	-4,6
3	10	$R_a'$	0,7	-16,1	-44,3	-51,8	-53,8
		$R_b'$	1,0	-15,7	-44,7	-52,6	-55,3
		$R_{ab}'$	9,8	-31,0	-52,3	-53,1	-46,5
		$R_{bc}'$	10,8	-27,8	-48,5	-43,2	-20,1
	50	$R_a'$	2,3	-22,6	-41,4	-43,8	-41,2
		$R_b'$	2,2	-22,5	-42,1	-45,3	-44,0
		$R_{ab}'$	8,0	-25,6	-43,7	-38,9	-24,6
		$R_{bc}'$	10,0	-20,3	-38,1	-22,4	18,0
	240	$R_a'$	3,5	-15,6	-31,5	-29,3	-23,0
		$R_b'$	4,4	-15,4	-32,3	-32,6	-28,5
		$R_{ab}'$	8,8	-14,1	-28,8	-16,0	7,5
		$R_{bc}'$	14,4	-7,2	-17,7	16,3	79,7

Tabela 4.18 - Diferenças percentuais das indutâncias dos cabos sobre a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3) em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Método	Cabo (mm <sup>2</sup> )	L (%)	Frequência (Hz)				
			60	1 k	10 k	100 k	1 M
2	10	$L_a'$	-1,7	-5,5	-4,3	-0,9	0,9
		$L_b'$	-1,9	-6,6	-6,4	-3,1	1,3
		$L_{ab}'$	-2,3	-8,7	-8,4	-3,7	1,9
		$L_{bc}'$	-2,6	-10,9	-10,9	-4,4	4,5
	50	$L_a'$	-1,7	-6,1	-4,9	-1,3	0,9
		$L_b'$	-1,7	-6,6	-6,0	-2,5	1,2
		$L_{ab}'$	-1,9	-8,7	-8,1	-3,0	2,6
		$L_{bc}'$	-2,0	-10,5	-10,2	-3,3	5,2
	240	$L_a'$	-1,3	-5,9	-4,4	-0,9	1,1
		$L_b'$	-1,3	-6,0	-4,8	-1,4	0,9
		$L_{ab}'$	-1,4	-8,2	-7,1	-1,6	2,4
		$L_{bc}'$	-1,2	-9,9	-8,8	-1,0	3,8
3	10	$L_a'$	6,9	12,8	39,7	85,9	141,4
		$L_b'$	6,6	12,2	38,4	83,7	137,6
		$L_{ab}'$	13,0	24,7	74,8	191,8	409,3
		$L_{bc}'$	21,6	41,9	120,3	351,5	897,7
	50	$L_a'$	11,7	23,2	58,0	114,0	175,3
		$L_b'$	11,8	22,5	56,1	110,5	170,4
		$L_{ab}'$	19,9	39,6	104,1	251,3	494,1
		$L_{bc}'$	31,2	60,9	165,1	472,7	1101,3
	240	$L_a'$	20,2	37,5	77,9	137,1	189,8
		$L_b'$	20,0	35,8	73,8	130,0	182,4
		$L_{ab}'$	31,8	60,5	143,9	320,3	546,3
		$L_{bc}'$	47,3	89,3	236,9	640,0	1240,0

Tabela 4.19 - Diferenças percentuais das capacitâncias dos cabos sobre a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3) em relação aos instalados sobre a eletrocalha lisa.

Método	Cabo (mm <sup>2</sup> )	C (%)			
		$C_a'$	$C_b'$	$C_{ab}'$	$C_{ac}'$
2	10	-0,3	-4,1	-0,2	1,0
	50	-0,1	-3,7	0,3	0,3
	240	-0,4	-1,2	0,4	0,1
3	10	-25,2	-40,4	26,5	156,5
	50	-28,4	-43,0	19,8	124,8
	240	-30,5	-43,8	16,3	90,8

i) Análise das resistências



Todas as discussões realizadas anteriormente no que tange às alterações nos valores de resistências, quando se compara um sistema sem suporte com um composto pela eletrocalha lisa, podem ser estendidas aos resultados obtidos na Tabela 4.17, ou seja, as variações encontradas nos valores de resistências de acordo com o tipo de suporte se devem às alterações dos mecanismos de atuação dos efeitos proximidade e de blindagem eletromagnética. Como esperado, devido à similaridade das geometrias, a presença de perfurações na eletrocalha alterou de modo menos significativo os valores de resistências dos cabos em relação ao verificado para o leito metálico.

No caso da eletrocalha perfurada, as resistências próprias e mútuas foram influenciadas de maneiras distintas de acordo com a frequência considerada: enquanto a primeira apresentou valores bem próximos aos da eletrocalha lisa para as frequências de até 1 kHz, a segunda exibiu diferenças acima de 10% já para a frequência de 60 Hz. Além disso, o perfil de variação não se mostrou monotônico: a diferença percentual entre frequências sucessivas, ora aumenta, ora diminui, tal como pode ser visto nas frequências de 1 kHz e 1 Mhz para as resistências mútuas, que, diferentemente das demais, reduz bruscamente em relação às frequências imediatamente anteriores para todas as seções nominais de cabo. Esse mesmo comportamento é percebido entre as frequências de 100 kHz e 1 Mhz para as resistências próprias. Outro ponto interessante é que quanto maior a seção do cabo, maiores são as diferenças percentuais entre as resistências próprias para a mesma frequência, no entanto, o perfil oposto ocorre para as resistências mútuas. A maior diferença percentual encontrada para a resistência própria foi de -13,4%, associada ao cabo “b” de 10 mm<sup>2</sup> e frequência de 100 kHz, enquanto para a resistência mútua, a maior diferença se deu no parâmetro correspondente “bc” (-14%), também para o cabo de 10 mm<sup>2</sup> e frequência de 100 kHz.

Na presença do leito metálico, as diferenças percentuais dos valores de resistências se mostraram bastante elevadas: a maior diferença para a resistência própria se deu para o cabo “b” de 10 mm<sup>2</sup> a 1 MHz (-55,3%), ao passo que a resistência mútua apresentou a maior variação para o respectivo parâmetro “bc”, também a 1 MHz e seção de 240 mm<sup>2</sup> (79,7%). As diferenças percentuais das resistências próprias para a frequência de 60 Hz exibiram valores pequenos para

todos os cabos, no entanto, houve um aumento considerável já para a frequência de 1 kHz. Essas diferenças exibiram um comportamento progressivo de elevação até atingir um pico e depois começaram a caminhar no sentido oposto das diferenças percentuais. Esse mesmo perfil pode ser constatado para as resistências mútuas, exceto que estas já apresentam elevada variação desde a primeira frequência considerada (60 Hz).

De maneira geral, a ausência de padrão na variação das diferenças percentuais vistas quando comparadas as resistências dos novos suportes em relação à eletrocalha lisa é explicada pela alteração dos mecanismos complexos associados aos efeitos proximidade e de blindagem, a depender da geometria do suporte, da frequência e das seções nominais dos cabos. Por isso, a comparação entre um sistema sem suporte e um com a eletrocalha lisa foi utilizada para sustentar os argumentos ora estabelecidos, uma vez que nesse caso é mais fácil verificar a atuação e o respectivo impacto de cada um dos efeitos citados, ao passo que a introdução de perfurações na eletrocalha e a presença do leito ofuscam e dificultam a maneira de isolar e entender a influência de cada um deles.

## ii) Análise das indutâncias

À maneira do que foi realizado para as resistências, as análises no que tange à variação das indutâncias próprias e mútuas quando se emprega a eletrocalha perfurada ou o leito metálico em relação ao caso da eletrocalha lisa, se baseiam nos argumentos tecidos quando se explicou a variação desses parâmetros ao se introduzir a eletrocalha lisa em um sistema sem suporte.

A introdução de perfurações na eletrocalha pouco influenciou os valores de indutâncias dos cabos, principalmente para a frequência de 60 Hz (Tabela 4.18). Todas as diferenças percentuais apresentaram um perfil progressivo de elevação até atingir um pico e, em seguida, caminharam no sentido oposto de variação. As maiores diferenças encontradas foram de -6,6% para a indutância própria (cabo “b” de 10 mm<sup>2</sup> a 1 kHz e cabo “b” de 50 mm<sup>2</sup> na mesma frequência) e -10,9% para a indutância mútua (parâmetro “bc” de 10 mm<sup>2</sup> e frequências de 1 kHz e 10 kHz). De maneira geral, a seção do cabo pouco influenciou nos resultados verificados.

Concernente ao sistema composto pelo leito metálico, as diferenças percentuais encontradas foram expressivas, aumentando progressivamente à medida que maiores seções nominais de cabos e valores de frequência eram considerados: atingindo 189,8% para a indutância própria e 1240,0% para a indutância mútua para cabos de 240 mm<sup>2</sup> a 1 MHz. O fato de todas as diferenças serem positivas indica que os valores de indutância para o caso do leito metálico são superiores em relação aos da eletrocalha lisa. Tal resultado se deve à menor capacidade de blindagem dos campos eletromagnéticos pelo leito metálico e, portanto, o campo magnético em torno do condutor consegue se redistribuir numa região maior do que ocorre quando o sistema é composto pela eletrocalha lisa.

### iii) Análise das capacitâncias

No tocante ao cálculo das capacitâncias (Tabela 4.19), pode-se afirmar que a presença dos furos na eletrocalha pouco modificou os valores obtidos para este parâmetro. As maiores diferenças percentuais encontradas são para o cabo “b”, fato explicado pelo posicionamento desse condutor no sistema, localizado praticamente sobre uma das perfurações. À medida que a bitola do condutor aumenta, tal influência vai se tornando praticamente inexpressiva (para a seção de 240 mm<sup>2</sup>, a diferença percentual máxima encontrada foi de -1,2% para o cabo “b”).

A Figura 4.13 mostra as linhas equipotenciais do sistema trifásico sobre a eletrocalha perfurada cujo condutor central foi submetido a um potencial não nulo. Comparando as linhas dessa figura com as da Figura 4.12b, percebe-se um perfil de distribuição bastante similar.

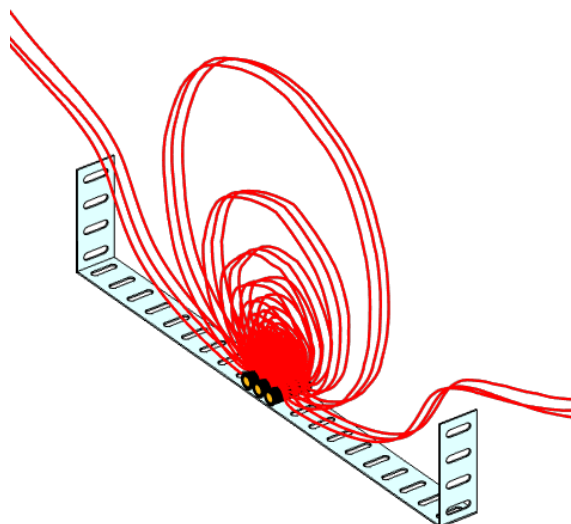


Figura 4.13 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para um sistema composto por cabos sobre a eletrocalha perfurada. Fonte: autor (2020).

Por outro lado, as capacitâncias calculadas para o caso do leito metálico se mostraram bastante diferentes daquelas obtidas para a eletrocalha lisa. Isto se deve às suas geometrias bastante distintas, modificando profundamente a forma pela qual as linhas equipotenciais do sistema se estabelecem e, conseqüentemente, a indução de cargas nos condutores. A Figura 4.14 mostra algumas linhas equipotenciais do sistema composto por cabos sobre o leito metálico.

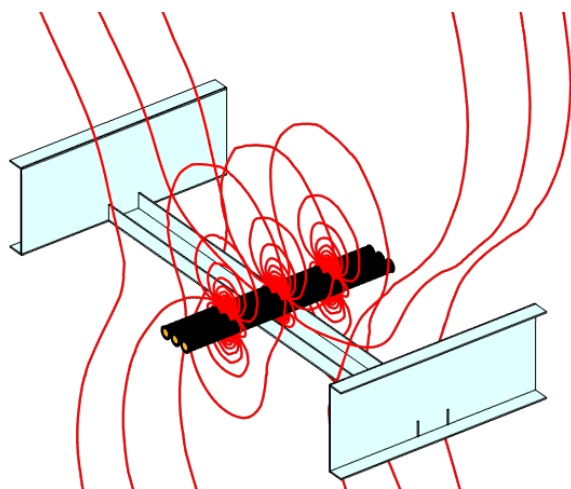


Figura 4.14 - Linhas equipotenciais causadas pela imposição de um potencial não nulo no condutor central para um sistema composto por cabos sobre o leito metálico. Fonte: autor (2020).

Percebe-se, através da Tabela 4.19, que as capacitâncias próprias dos cabos sobre o leito metálico sofreram forte redução quando comparadas com o sistema composto pela eletrocalha lisa. Tal resultado está associado à alteração da capacitância parcial dos condutores em relação ao plano de referência, uma vez que a eletrocalha lisa oferece uma superfície de aterramento integral sob os condutores, ao passo que o leito metálico é montado por meio de travessas. As capacitâncias mútuas, a seu turno, apresentaram uma elevação nos seus valores.

Em relação à influência dos cabos, a capacitância mútua  $C_{ac}$  se mostrou fortemente dependente da bitola do condutor (diferença percentual de 156,5% para a seção de 10 mm<sup>2</sup> e 90,8% para a seção de 240 mm<sup>2</sup>), enquanto as outras capacitâncias mantiveram suas diferenças percentuais em relação à eletrocalha lisa praticamente constantes para as diferentes seções de cabos. Como explicado anteriormente, quando da comparação dos sistemas sem suporte com o composto pela eletrocalha lisa, a presença do suporte diminui a influência que a seção dos cabos tem sobre o cálculo dos parâmetros. No entanto, pelo fato do leito se tratar de uma estrutura composta por travessas e os cabos “a” e “c” estarem mais distantes entre si, houve uma influência do tamanho do cabo neste parâmetro específico.

#### 4.3.2. Altura da Instalação

Nesta subseção objetiva-se analisar a respeito da influência que a altura de cada um dos três métodos de instalação considerados tem sobre os parâmetros de cabos. Para isso, tais parâmetros foram calculados considerando os condutores com uma seção transversal de 50 mm<sup>2</sup> a uma distância de 1 cm do solo e foram comparados, através de diferenças percentuais, com o caso em que eles se encontravam a 3 m do solo. As Tabelas 4.20 a 4.22 exibem os resultados obtidos. O método de instalação número 1 associa-se ao sistema composto por cabos sobre a eletrocalha lisa, o método 2 refere-se ao caso de cabos sobre a eletrocalha perfurada e o método 3 ao do leito metálico.

Tabela 4.20 – Diferenças percentuais das resistências dos cabos de seção única de 50 mm<sup>2</sup> cuja instalação se encontra a 1 cm do solo em relação à instalação a 3 metros de altura para: a eletrocalha lisa (método 1), a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3).

Método	R (%)	Frequência (Hz)				
		60	1 k	10 k	100 k	1 M
1	$R_a'$	0,0	0,1	0,0	-0,1	0,1
	$R_b'$	0,0	0,1	0,0	-0,1	-0,1
	$R_{ab}'$	0,0	0,1	0,0	-0,1	-0,1
	$R_{bc}'$	0,0	0,1	-0,1	-0,1	0,3
2	$R_a'$	-0,6	-2,0	-0,9	-0,3	0,1
	$R_b'$	-0,6	-1,9	-0,6	-0,5	0,2
	$R_{ab}'$	-1,7	-2,7	-0,9	-0,4	0,1
	$R_{bc}'$	-1,8	-3,1	-1,2	-0,4	0,0
3	$R_a'$	0,6	3,2	3,4	4,0	8,6
	$R_b'$	0,6	3,1	3,2	4,0	8,7
	$R_{ab}'$	2,0	4,4	4,0	4,2	9,3
	$R_{bc}'$	2,0	4,5	4,1	4,5	10,2

Tabela 4.21 - Diferenças percentuais das indutâncias dos cabos de seção única de 50 mm<sup>2</sup> cuja instalação se encontra a 1 cm do solo em relação à instalação a 3 metros de altura para: a eletrocalha lisa (método 1), a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3).

Método	L (%)	Frequência (Hz)				
		60	1 k	10 k	100 k	1 M
1	$L_a'$	0,0	0,0	-0,1	-0,1	0,1
	$L_b'$	0,0	-0,1	-0,2	-0,1	0,2
	$L_{ab}'$	0,0	-0,1	-0,2	-0,1	0,2
	$L_{bc}'$	0,0	-0,1	-0,2	-0,1	0,3
2	$L_a'$	-0,7	-0,8	0,1	0,1	0,0
	$L_b'$	-0,7	-0,7	0,1	-0,1	-0,1
	$L_{ab}'$	-0,9	-1,1	0,1	0,1	0,0
	$L_{bc}'$	-1,1	-1,6	0,1	0,2	-0,1
3	$L_a'$	1,9	1,0	0,4	0,1	-0,2
	$L_b'$	1,9	0,9	0,3	0,0	-0,4
	$L_{ab}'$	2,3	1,3	0,6	0,2	-0,4
	$L_{bc}'$	2,6	1,4	0,7	0,3	-0,6

Tabela 4.22 - Diferenças percentuais das capacitâncias dos cabos de seção única de 50 mm<sup>2</sup> cuja instalação se encontra a 1 cm do solo em relação à instalação a 3 metros de altura para: a eletrocalha lisa (método 1), a eletrocalha perfurada (método 2) e o leito metálico (método 3).

Método	C (%)			
	$C_a'$	$C_b'$	$C_{ab}'$	$C_{bc}'$
1	0,0	0,0	0,0	-0,2
2	0,0	-0,1	0,1	-0,2
3	0,6	2,9	-1,9	-29,2

Como pode ser verificado pela Tabela 4.20, o sistema formado por cabos dispostos na eletrocalha lisa apresenta praticamente os mesmos valores de resistências independentemente da altura de sua instalação, o que indica que a maior parte dos campos eletromagnéticos fica confinada na região interna ao suporte e que o caminho de retorno das correntes se constitui, majoritariamente, por esta estrutura. Este fato é confirmado pela Tabela 4.15, obtida anteriormente quando da análise da influência da eletrocalha lisa no cômputo das resistências próprias e mútuas. O resultado obtido nesta tabela mostrou que, mesmo para o caso da frequência industrial (60 Hz), onde o efeito de blindagem é menor, a parcela relativa ao solo na composição da resistência própria do condutor central é de apenas 6,2%, reduzindo-se para praticamente zero em frequências acima de 10 kHz. Ou seja, a parcela da resistência de retorno referente ao solo é muito pequena, de modo que a altura do sistema pouco influencia o valor da resistência própria. A presença de furos na eletrocalha pouco altera este fato. Os resultados relativos às indutâncias e às capacitâncias (Tabelas 4.21 e 4.22) seguiram o mesmo comportamento das resistências.

No caso do leito metálico, as diferenças percentuais dos parâmetros, ao se comparar os sistemas em ambas as alturas, foram relativamente maiores, principalmente no que se refere às capacitâncias mútuas entre os condutores não adjacentes. Como exemplo, cita-se a capacitância mútua  $C_{bc}'$ , para a qual obteve-se uma variação de -29,2% em seu valor ao se instalar o leito mais próximo do solo.

#### 4.4. Conclusões

Tanto o conteúdo teórico acerca de diversos tópicos que envolvem o cálculo de parâmetros de cabos, explicitado no capítulo 2, assim como a metodologia proposta para a simulação de tal problema, apresentada no capítulo 3, foram aplicados em conjunto no capítulo 4, a fim de elaborar, simular e explicar os resultados concernentes a três estudos de caso: cabos sobre a eletrocalha lisa, eletrocalha perfurada e leito metálico; que representam configurações bastante comuns em sistemas elétricos industriais, mas ainda não contempladas na literatura devido à ausência de uma metodologia baseada no método de elementos finitos em 3D, tal como a aqui apresentada.

Dentre os objetivos principais do capítulo, as simulações foram conduzidas para responder os seguintes questionamentos: como a presença dos suportes metálicos influenciam os parâmetros de cabos; se a presença de furos ou geometrias mais distintas, como a do leito, alteram de maneira considerável os valores de tais parâmetros em comparação com o caso composto pela eletrocalha lisa (factível em modelos bidimensionais); verificar a influência dos diâmetros dos cabos em tais análises; e avaliar o efeito de blindagem dos suportes através da variação de sua altura em relação ao solo.

Primeiramente, a influência dos suportes foi analisada a partir da comparação dos valores de parâmetros entre um sistema trifásico composto por cabos sobre a eletrocalha lisa e outro sem suporte. A partir dos resultados obtidos e das análises conduzidas, foi possível concluir que o efeito proximidade e de blindagem eletromagnética se combinam e afetam de sobremaneira o cálculo das resistências quando o suporte metálico está presente. Enquanto o primeiro atua no sentido de aumentá-las, o segundo as reduzem. A frequência das correntes e a seção dos cabos influenciam na intensidade de cada um desses efeitos. No que tange às indutâncias, o suporte metálico atua como blindagem para o campo magnético e atenua o fluxo magnético em torno dos condutores, por conseguinte, tal parâmetro também é reduzido. Em relação às capacitâncias, as próprias se elevam e as mútuas se reduzem quando a eletrocalha lisa é inserida. Uma vez que a comparação de tais sistema não tem extrema relevância do ponto de vista prático, ela se deu com o propósito de permitir um entendimento dos mecanismos físicos



que afetam os valores de parâmetros de cabos e serviu como referência teórica para a análise dos resultados dos demais casos.

Na comparação entre a eletrocalha perfurada e a lisa, as maiores diferenças encontradas foram -13,4% para a resistência própria (cabo de 10 mm<sup>2</sup> e frequência de 100 kHz) e -14% para a resistência mútua (para a mesma bitola de cabo e frequência). Acerca da indutância, as maiores diferenças encontradas foram de -6,6% para a indutância própria (cabos de 10 mm<sup>2</sup> e 50 mm<sup>2</sup> a 1 kHz) e -10,9% para a indutância mútua (cabo de 10 mm<sup>2</sup> e frequências de 1 kHz e 10 kHz). No que tange às capacitâncias, os valores deste parâmetro pouco se modificaram com a presença das perfurações. Contudo, na comparação entre o leito metálico e a eletrocalha lisa, diferenças percentuais extremamente elevadas para os três parâmetros foram encontradas.

No tocante à influência da altura em relação ao solo, pode-se afirmar que os parâmetros de cabos sobre a eletrocalha lisa e a perfurada quase não são influenciados por essa característica, demonstrando que a maior parte dos campos elétricos e magnéticos ficam confinados na região interna ao suporte e que a terra pouco influencia em tais resultados. Diferentemente do que acontece para o leito metálico, onde diferenças percentuais maiores foram encontradas a depender de sua altura, principalmente para a capacitância mútua entre os cabos não adjacentes e para as resistências nas frequências mais elevadas.

A partir dos comentários realizados nos últimos parágrafos, conclui-se que todas as questões inicialmente abordadas foram respondidas. Contudo, uma das principais perguntas, concernente à possibilidade do emprego da eletrocalha lisa para representar os demais casos quando o pesquisador não dispõe de programas de simulação FEM em 3D, deve ser respondida com ressalvas: caso o sistema analisado seja composto por cabos sobre leitos metálicos, é imprescindível que simulações específicas para este caso sejam empregadas, tendo em vista a obtenção de resultados mais fidedignos. Por outro lado, no caso de eletrocalhas perfuradas, percebeu-se que a variação dos parâmetros em relação à lisa não foi tão expressiva. As diferenças percentuais das resistências próprias e mútuas não passaram de 14% e 11%, respectivamente, para todas as frequências e seções de cabos analisadas, sendo menores para as indutâncias e ínfimas para as capacitâncias. O fato é que a

possibilidade do emprego dessa simplificação vai depender do nível de exatidão desejada pelo pesquisador e o tipo de fenômeno o qual está sob análise.

## CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

---

### 5.1. Introdução

Nesta dissertação foi apresentada uma metodologia avançada, baseada no método de elementos finitos em três dimensões, capaz de calcular os parâmetros de cabos em uma ampla faixa de frequências. Tais parâmetros são empregados em modelagens de cabos cuja aplicabilidade reside na análise de fenômenos em alta frequência, tais como transitórios eletromagnéticos, fluxo de harmônicos, análises de compatibilidade e interferência eletromagnética conduzida, entre outros.

A metodologia proposta foi aplicada para os casos de cabos instalados em leitos metálicos e eletrocalhas perfuradas, que representam os métodos de instalação mais comuns em ambientes industriais, mas que, até então, não haviam sido contemplados na literatura.

Em síntese, os principais objetivos do trabalho compreendem: a exibição dos detalhes relativos à elaboração das simulações; a condução de diversas análises a respeito do comportamento dos parâmetros de cabos sob as novas configurações consideradas; a realização de um paralelo entre a metodologia apresentada e as existentes até então; e, por último, fornecer um embasamento teórico para a compreensão dos diversos tópicos relativos ao tema, tanto acerca dos parâmetros de cabo, como referente ao método de elementos finitos (FEM). Para isso, o conteúdo principal da dissertação foi dividido em três capítulos, cada qual com um enfoque determinado, além dos capítulos referentes à introdução e à conclusão.

Através do Capítulo 2 foi possível obter um alicerce teórico acerca dos mecanismos físicos associados ao cálculo de parâmetros de cabos, fundamentando todo o restante da dissertação. Compreendeu-se como os efeitos pelicular e proximidade impactam na distribuição dos campos do sistema e no cálculo das resistências, indutâncias e capacitâncias. Além disso, o emprego dos parâmetros de cabos em uma ampla faixa de frequências foi exemplificado através da

apresentação de um modelo de cabo utilizado em simulações de alta frequência, onde foi possível compreender melhor a aplicabilidade do presente estudo.

As técnicas e procedimentos empregados nas simulações foram amplamente abordadas no Capítulo 3, onde pôde-se concluir que para elaborar um modelo 3D no FEM computacionalmente eficiente é imprescindível que o pesquisador empregue diversas estratégias. A partir delas, foi possível finalizar as simulações em poucos minutos. Dentre tais estratégias, pode-se citar:

- Aplicação da técnica chamada de “*Infinite Element Domain*” em uma camada em torno do modelo associado ao cálculo dos parâmetros série, a fim de reproduzir a natureza “infinita” do problema, possibilitando a redução dos domínios referentes ao ar e à terra;
- Consideração das simetrias cilíndrica e longitudinal para a concepção do modelo, permitindo a redução da porção do sistema a ser simulada.
- Refinamento de malha otimizado através do emprego de prismas retangulares para captar a rápida variação dos campos nos condutores, decorrente dos efeitos pelicular e proximidade;
- Substituição da malha interna dos suportes metálicos pela aplicação de uma condição de fronteira chamada de “*Transition Boundary Condition*”, com o objetivo de reproduzir a penetração dos campos e a indução de correntes nestes meios;
- Utilização de prismas triangulares para as malhas dos domínios do ar e da terra, mais eficientes que o emprego de tetraedros;
- Uso de funções interpoladoras quadráticas, menos onerosas que as de ordens superiores.
- Seleção de condições de fronteira específicas para os problemas eletrostáticos e magnéticos harmônicos no tempo, a fim de eliminar os efeitos de borda e permitir o emprego das condições de simetria citadas.

Além disso, ainda no Capítulo 3, o conceito teórico por trás do FEM, que à primeira vista é bastante complexo e amplo, foi exposto por meio de passos bem definidos, facilitando sua compreensão.

Por fim, o capítulo 4 empregou todos os recursos apresentados pela dissertação até então, por meio da elaboração, simulação e explicação dos resultados obtidos para os estudos de caso considerados. Sendo os pontos mais relevantes, apresentados a seguir:

- Os efeitos proximidade e de blindagem associados à presença de um suporte metálico aterrado influenciam de maneira considerável os parâmetros de cabos. A intensidade de cada um desses fenômenos depende da seção nominal dos cabos e da frequência considerada.
- Os parâmetros de cabos obtidos para os casos em que eles se encontram sobre a eletrocalha lisa em relação ao leito metálico, se mostraram bastante distintos. Portanto, o pesquisador que esteja analisando instalações elétricas compostas por cabos sobre leitos metálicos, deve conduzir simulações específicas para este caso, a fim de obter resultados fidedignos.
- Por outro lado, as perfurações na eletrocalha não modificaram de maneira significativa os parâmetros de cabos quanto o caso anterior; as diferenças percentuais das resistências próprias e mútuas não passaram de 14% e 11%, respectivamente, para todas as frequências e seções de cabos analisadas, sendo menores para as indutâncias e irrisórias para as capacitâncias. No entanto, a simplificação de uma instalação composta por uma eletrocalha perfurada a partir da consideração de uma similar, mas lisa, vai depender no nível de exatidão requerido e do fenômeno sob análise. Essa simplificação possibilitaria o emprego de modelos em apenas duas dimensões, mais fáceis de serem elaborados, e cuja disponibilidade de *softwares* gratuitos é maior.
- O efeito de blindagem eletromagnética fornecido pelas eletrocalhas lisas e perfuradas praticamente elimina a influência do solo no cálculo dos parâmetros de cabos em tais configurações. Por outro lado, no caso do leito metálico, tal influência ainda é relevante.

Todos os parâmetros de cabos sobre a eletrocalha lisa foram exibidos de maneira tabelada, sendo os outros casos exibidos a partir de diferenças percentuais em relação a este caso. Dessa maneira, a depender do objetivo principal de determinada pesquisa, qualquer autor pode utilizar tais valores como referência para seus respectivos trabalhos, de acordo com o tipo de instalação em exame.

Por fim, o principal objetivo para a presente dissertação é que ela atue como referência metodológica para diversos outros estudos concernentes ao tema. Dessa forma, possibilita-se que futuros pesquisadores empreguem as estratégias apresentadas para a elaboração de suas próprias simulações, com o intuito de calcular os parâmetros de cabos em uma ampla faixa de frequências. Tais parâmetros podem ser empregados em modelos computacionais para estudos de fenômenos em alta frequência, fomentando diversas pesquisas nessa área.

## 5.2. Propostas de continuidade:

Dentre as possíveis sugestões para a continuidade do presente trabalho, pode-se citar:

- **Ampliar a presente discussão a fim de considerar cabos compostos por mais de um elemento metálico, tais como aqueles constituídos de blindagens e armaduras.** A elaboração desses modelos, do ponto de vista de simulação, não apresenta grandes considerações em relação às estratégias aqui apresentadas, uma vez que é necessário apenas incluir tais elementos e realizar o refinamento de malha, similar ao que foi proposto para os condutores. No entanto, o comportamento dos parâmetros pode ser substancialmente modificado.
- **Consideração de outros métodos de instalação.** Definida a metodologia para a elaboração de modelos em três dimensões para o cálculo de parâmetros de cabos, outros métodos de instalações podem ser considerados, tais como perfilados, eletrocalhas aramadas, dutos e calhas. Apesar de serem menos comuns em relação aos métodos aqui

apresentados, eles são também utilizados em ambientes industriais e comerciais.

- **Elaboração de algoritmos próprios para o cálculo de parâmetros de cabos em três dimensões.** A presente dissertação empregou o Comsol, um *software* comercial, para conduzir as simulações e empregar as técnicas e procedimentos sugeridos. Contudo, muita das vezes, esse programa ou outro similar, não está disponível ao pesquisador, sendo que a concepção de um algoritmo próprio, com o mesmo objetivo, seria extremamente útil para evitar a obrigatoriedade do emprego de programas comerciais, muita das vezes caros e dependentes de licenças periódicas. Devido a isso, todas as estratégias empregadas também foram abordadas no seu caráter teórico, a fim de facilitar seu entendimento no âmbito do FEM em si, e não de um *software* em particular, auxiliando na elaboração de um possível algoritmo que empregue as mesmas técnicas aqui sugeridas. Outra alternativa mais simples e direta seria o emprego de *softwares* FEM gratuitos capazes de resolver problemas em três dimensões; dentre eles, pode-se citar o GetDP (GetDP, 2020), *software* solucionador numérico, associado ao gerador de malhas Gmsh (Gmsh, 2020).
- **Validação dos resultados/modelos a partir de medições experimentais.** Uma das principais motivações acerca do emprego do FEM em qualquer aplicação está na capacidade desta ferramenta de promover uma alternativa dinâmica e de elevada precisão para se obter resultados fidedignos acerca de análises, modelagens ou projetos de sistemas. Nesse contexto, a obtenção de parâmetros de cabos através do FEM é uma alternativa bastante interessante e viável nos casos em que o pesquisador precisa estudar determinado fenômeno associado a um sistema real já instalado, mas não dispõe de equipamentos específicos para medições experimentais. Por outro lado, caso tais equipamentos estejam disponíveis, sugere-se para futuros trabalhos e pesquisas a validação dos resultados obtidos nesta dissertação por meio de medições realizadas em campo, de forma a corroborar experimentalmente tanto a metodologia proposta como as análises físicas conduzidas.

- **Avaliar a possibilidade de emular os modelos 3D através do fatiamento dos seus domínios em modelos 2D.** Considerando a simplicidade, menor custo computacional e a maior disponibilidade de *softwares* para domínios bidimensionais, sugere-se a verificação da viabilidade do fatiamento dos modelos em três dimensões, tais como aqueles aqui apresentados, em modelos em duas dimensões; por meio de simulações sucessivas, considerando as diferentes seções transversais geométricas possíveis do modelo tridimensional, o comportamento do sistema completo poderia ser reproduzido agrupando as matrizes de parâmetros resultantes de cada uma dessas seções. Análises no tocante ao ganho computacional em prejuízo da exatidão dos resultados deve corroborar o emprego ou não de tal estratégia.



## Referências Bibliográficas

---

- ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1986). *NBR 5471 - Condutores elétricos*. Rio de Janeiro.
- ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2004). *NBR 5410 - Instalações elétricas de baixa tensão*. Rio de Janeiro.
- Ansys (2020). Ansys - Home Page. Disponível em: <https://www.ansys.com/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Bastos, J. P. A. e Sadowski, N. (2003). *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. 1ª ed., Nova Iorque: Marcel Dekker. <https://doi.org/10.1201/9780203911174>
- Can/Am EMPT User Group (1995). ATP Rule Book.
- Cardoso, J. R. (2016). *Electromagnetics through the Finite Element Method: A Simplified Approach Using Maxwell's*. 1ª ed., Boca Raton: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315366777>
- Carson, J. R. (1926). Wave propagation in overhead wires with ground return. *The Bell System Technical Journal*, Vol. 5, no. 4, pp. 539-554. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1926.tb00122.x>
- Chaves, M. L. R., et al. (1997). Time Domain Cable Modeling with Frequency Dependent Parameters. *IPST '97 - International Conference on Power System Transients*, pp. 275-279.
- Chipman, R. A. (1968). *Theory and Problems of Transmission Lines*. 1ª ed., Nova Iorque: McGraw-Hill.
- Cirino, A. W., et al. (2009). Cable parameter variation due to skin and proximity effects: Determination by means of Finite Element Analysis. *2009 35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*, pp. 4073-4079. <https://doi.org/10.1109/IECON.2009.5415128>
- Comsol (2012). COMSOL Multiphysics Reference Guide (versão 4.2a). [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2013a). Meshing Considerations for Linear Static Problems. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/meshing-considerations-linear-static-problems/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2013b). Meshing Your Geometry: When to Use the Various Element Types. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/meshing-your-geometry-various-element-types/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2013c). Solutions to Linear Systems of Equations: Direct and Iterative Solvers. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/solutions-linear-systems-equations-direct-iterative-solvers/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2015). Improving Your Meshing with Swept Meshes. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/improving-your-meshing-with-swept-meshes/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2016a). How to Choose Between Boundary Conditions for Coil Modeling. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/how-to-choose-between-boundary-conditions-for-coil-modeling/> [Acessado em: 13/07/2020].

- Comsol (2016b). Keeping Track of Element Order in Multiphysics Models. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/keeping-track-of-element-order-in-multiphysics-models/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2017a). AC/DC Module User's Guide (versão 5.3a). Disponível em: <https://doc.comsol.com/5.3/doc/com.comsol.help.acdc/ACDCModuleUsersGuide.pdf> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2017b). Computing the Effect of Fringing Fields on Capacitance. Disponível em: [https://br.comsol.com/model/download/451441/models.acdc.capacitor\\_fringing\\_fields.pdf](https://br.comsol.com/model/download/451441/models.acdc.capacitor_fringing_fields.pdf) [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2017c). COMSOL Multiphysics Reference Manual (versão 5.3a). Disponível em: [https://doc.comsol.com/5.3a/doc/com.comsol.help.comsol/COMSOL ReferenceManual.pdf](https://doc.comsol.com/5.3a/doc/com.comsol.help.comsol/COMSOL_ReferenceManual.pdf) [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2017d). The Finite Element Method (FEM). Disponível em: <https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2017e). Submarine Cable 4 — Inductive Effects. Disponível em: [https://br.comsol.com/model/download/453951/models.acdc.submarine\\_cable\\_04\\_inductive\\_effects.pdf](https://br.comsol.com/model/download/453951/models.acdc.submarine_cable_04_inductive_effects.pdf) [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2019). Best Practices for Meshing Domains with Different Size Settings. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/best-practices-for-meshing-domains-with-different-size-settings/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2020a). Cable Tutorial Series. Disponível em: <https://br.comsol.com/model/cable-tutorial-series-43431> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2020b). Comsol - Home page. Disponível em: <https://br.comsol.com/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2020c). How Do I Use Gauge Fixing in COMSOL Multiphysics? Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/how-do-i-use-gauge-fixing-in-comsol-multiphysics/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2020d). Self Inductance and Mutual Inductance Between Single Conductors. Disponível em: <https://br.comsol.com/model/self-inductance-and-mutual-inductance-between-single-conductors-12653> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2020e). Understanding the Fully Coupled vs. Segregated approach and Direct vs. Iterative linear solvers. Disponível em: <https://br.comsol.com/support/knowledgebase/1258> [Acessado em: 13/07/2020].
- Comsol (2020f). What Is Gauge Fixing? A Theoretical Introduction. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/what-is-gauge-fixing-a-theoretical-introduction/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Cotrim, A. A. M. B. (2009). *Instalações elétricas*. 5ª ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Creder, H. (2016). *Instalações elétricas*. 16ª ed., Rio de Janeiro: LTC.
- Cristina, S. e Feliziani, M. (1989). A finite element technique for multiconductor cable parameters calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, no. 4, pp. 2986-2988. <https://doi.org/10.1109/20.34346>

- Darcherif, A., et al. (1990). New techniques in FEM field calculation applied to power cable characteristics computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, no. 5, pp. 2388-2390. <https://doi.org/10.1109/20.104740>
- de Paula, H. (2005). Uma Nova Metodologia para a Determinação dos Fenômenos de Alta Frequência em Sistemas de Acionamento de Motores de Indução Através de Inversores PWM. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia - MG.
- de Paula, H., et al. (2008a). Methodology for Cable Modeling and Simulation for High-Frequency Phenomena Studies in PWM Motor Drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 23, no. 2, pp. 744-752. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2007.915759>
- de Paula, H., et al. (2008b). Novas Contribuições ao Estudo das Sobretensões Transitórias e Correntes de Modo Comum em Sistemas de Acionamento de Motores por Inversores. *Induscon - VIII Conferência Internacional de Aplicações Industriais*.
- de Souza, W. L. (2015). Cálculo de Parâmetros de Cabos Isolados por meio da Análise de Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte - MG.
- de Souza, W. L., et al. (2018). Cable Parameter Calculation for Typical Industrial Installation Methods and High-Frequency Studies. *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 54, no. 4, pp. 3919-3927. <https://doi.org/10.1109/TIA.2018.2811382>
- del Pino, J. C. L., et al. (2018). On Simplified 3D Finite Element Simulations of Three-Core Armored Power Cables. *Energies*, Vol. 11, no. 11, pp. 3081. <https://doi.org/10.3390/en11113081>
- Elecon (2020). Produtos - Eletrocalhas. Disponível em: <http://elecon.com.br/produto/eletrocalhas/> [Acessado em: 18/06/2020].
- Eriksson, G. (2007). Efficient 3D Simulation of Thin Conducting Layers of Arbitrary Thickness. *2007 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pp. 1-6. <https://doi.org/10.1109/ISEMC.2007.110>
- Fuchs, R. D. (1977a). *Transmissão de Energia Elétrica*. 1ª ed., Volume 2, Rio de Janeiro: LTC / EFEI.
- Fuchs, R. D. (1977b). *Transmissão de Energia Elétrica*. 1ª ed., Volume 1, Rio de Janeiro: LTC / EFEI.
- GetDP (2020). GetDP - Home Page. Disponível em: <https://getdp.info/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Gmsh (2020). Gmsh - Home Page. Disponível em: <https://gmsh.info/> [Acessado em: 13/07/2020].
- Hayt Jr., W. H. e Buck, J. A. (2013). *Eletromagnetismo*. 8ª ed., São Paulo: McGraw-Hill.
- IEC - INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION (1925). *IEC 60028: International standard of resistance for copper*.
- Jian-Ming, J. (2014). *The Finite Element Method in Electromagnetic*. 3ª ed., New Jersey: John Wiley & Sons.
- Kerkman, R., et al. (1996). Interaction of drive modulation and cable parameters on AC motor transients. *IAS '96. Conference Record of the 1996 IEEE*

- Industry Applications Conference Thirty-First IAS Annual Meeting*, Vol. 1, pp. 143-152. <https://doi.org/10.1109/IAS.1996.557008>
- Kocman, S., et al. (2018). Simulation of Selected Induction Motor Operating Conditions Using COMSOL Software. *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, Vol. 16, no. 3, pp. 275-279. <https://doi.org/10.15598/aece.v16i3.2824>
- Mamede Filho, J. (2017). *Instalações elétricas industriais*. 9ª ed., Rio de Janeiro: LTC.
- Meeker, D. (2020a). Finite Element Method Magnetic - Home Page. Disponível em: <http://www.femm.info/wiki/HomePage> [Acessado em: 13/07/2020].
- Meeker, D. (2020b). Finite Element Method Magnetics - User's Manual (versão 4.2). Disponível em: <http://www.femm.info/wiki/Files/files.xml?action=download&file=manual.pdf> [Acessado em: 13/07/2020].
- Moreira, A. F. (2002). Modeling and Design of Filter Networks for High Power Converters Utilizing Fast Hard Switching Devices. Ph. D. Thesis, University of Wisconsin-Madison, Madison - Wisconsin.
- Moreira, A. F., et al. (2002). High-frequency modeling for cable and induction motor overvoltage studies in long cable drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 38, no. 5, pp. 1297-1306. <https://doi.org/10.1109/TIA.2002.802920>
- Neppe (2020a). Produtos - Eletrocalha Tipo “U” sem Virola. Disponível em: <http://neppe.com.br/site/portfolio/comprar-eletrocalhas-sem-virola-abc/> [Acessado em: 18/06/2020].
- Neppe (2020b). Produtos - Leitões para Cabos. Disponível em: <http://neppe.com.br/site/comprar-leitoes-para-cabos-no-abc/> [Acessado em: 18/06/2020].
- Neppe (2020c). Tabela Técnica. Disponível em: <http://neppe.com.br/site/wp-content/uploads/2016/10/Pgs42-47.pdf> [Acessado em: 18/06/2020].
- Papagiannis, G. K., et al. (2003). Earth return path impedances of underground cables for the multi-layer case: a finite element approach. *2003 IEEE Bologna Power Tech Conference Proceedings*, Vol. 3, pp. 7 <https://doi.org/10.1109/PTC.2003.1304514>
- Persson, E. (1992). Transient effects in application of PWM inverters to induction motors. *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 28, no. 5, pp. 1095-1101. <https://doi.org/10.1109/28.158834>
- Prysmian (2012). Cabos Energia - Construção e Dimensionamento. Disponível em: [https://br.prysmiangroup.com/sites/default/files/atoms/files/Cabos\\_Energia\\_Construcao\\_Dimensionamento.pdf](https://br.prysmiangroup.com/sites/default/files/atoms/files/Cabos_Energia_Construcao_Dimensionamento.pdf) [Acessado em: 18/06/2020].
- Prysmian (2020). Cabo Sintenax Flex 0,6/1kV. Disponível em: <https://br.prysmiangroup.com/sites/default/files/atoms/files/07.Sintenax%201kV.pdf> [Acessado em: 17/06/2020].
- Qiushi, C. e Konrad, A. (1997). A review of finite element open boundary techniques for static and quasi-static electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, no. 1, pp. 663-676. <https://doi.org/10.1109/20.560095>
- Ramo, S., et al. (1998). *Fields and Waves in Communication Electronics*. 3ª ed., Nova Iorque: John Wiley & Sons.

- Rao, S. S. (2018). *The Finite Element Method in Engineering*. 6<sup>a</sup> ed., Burlington: Elsevier.
- Sadiku, M. N. O. (2012). *Elementos de Eletromagnetismo*. 5<sup>a</sup> ed., Bookman.
- Sadiku, M. N. O. (2019). *Computational Electromagnetics with MATLAB*. 4<sup>a</sup> ed., Boca Raton: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315151250>
- Salon, S. J. (1995). *Finite Element Analysis of Electrical Machines*. 5<sup>a</sup> ed., Nova Iorque: Springer Science+Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-2349-9>
- Satsios, K. J., et al. (1998). Finite element computation of field and eddy currents of a system consisting of a power transmission line above conductors buried in nonhomogeneous earth. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 13, no. 3, pp. 876-882. <https://doi.org/10.1109/61.686987>
- Saunders, L. A., et al. (1996). Riding the reflected wave-IGBT drive technology demands new motor and cable considerations. *Proceedings of 1996 IAS Petroleum and Chemical Industry Technical Conference*, pp. 75-84. <https://doi.org/10.1109/PCICON.1996.564866>
- Silvester, P. P. e Ferrari, R. L. (1996). *Finite elements for electrical engineers*. 3<sup>a</sup> ed., Cambridge: Cambridge University Press.
- Thue, W. (2012). *Electrical Power Cable Engineering*. 3<sup>a</sup> ed., Boca Raton: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b11507>
- Triantafyllidis, D. G., et al. (1999). Calculation of overhead transmission line impedances a finite element approach. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 14, no. 1, pp. 287-293. <https://doi.org/10.1109/61.736740>
- Valemam (2020a). Eletrocalhas. Disponível em: <http://valemam.com.br/down2018/catalogo-eletrocalha.pdf> [Acessado em: 18/06/2020].
- Valemam (2020b). Linha Aérea. Disponível em: [http://www.valemam.com.br/uploads/linha\\_aerea.pdf](http://www.valemam.com.br/uploads/linha_aerea.pdf) [Acessado em: 18/06/2020].
- Van den Berghe, S., et al. (1998). Accurate modeling of thin conducting layers in FDTD. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 8, no. 2, pp. 75-77. <https://doi.org/10.1109/75.658646>
- Yin, Y. (1990). Calculation of Frequency-dependent Parameters of Underground Power Cables with Finite Element Method. Ph. D. Thesis, The University of British Columbia, Vancouver - Canada.
- Yin, Y. e Dommel, H. W. (1989). Calculation of frequency-dependent impedances of underground power cables with finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, no. 4, pp. 3025-3027. <https://doi.org/10.1109/20.34358>
- Zienkiewicz, O. C., et al. (1983). A novel boundary infinite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 393-404. <https://doi.org/10.1002/nme.1620190307>