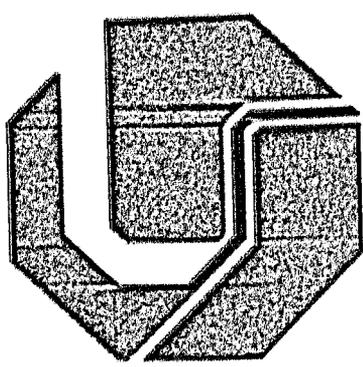


11011  
59.15  
R 9911  
TES/ME 21

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**  
**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**



**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS**  
**A PARTIR DE PROJEÇÕES PARALELAS**

**DIRBI/UFU**



1000187006

**MAURO HEMERLY GAZZANI**

**Fevereiro 1999**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**  
**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS**  
**A PARTIR DE PROJEÇÕES PARALELAS**

Dissertação apresentada por Mauro HEMERLY GAZZANI à  
Universidade Federal de Uberlândia para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Elétrica aprovada em 23/02/99 pela Banca  
Examinadora:

Professora Edna Lúcia Flôres, Dra. (UFU) – Orientadora

Professor Gilberto Arantes Carrijo, Dr. (UFU)

Professor João Baptista Tadanobu Yabu-uti, Dr. (UNICAMP)

**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS  
A PARTIR DE PROJEÇÕES PARALELAS**

**MAURO HEMERLY GAZZANI**

Dissertação apresentada por Mauro HEMERLY GAZZANI à Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

---

Professora Edna Lúcia Flôres, Dra.  
Orientadora

---

Prof. Darizon Alves de Andrade, Dr.  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

À minha esposa Kátia.

## AGRADECIMENTOS

À professora Edna Lúcia Flôres do DEENE-UFU pela orientação.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia pelos recursos oferecidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do Laboratório de Processamento Digital de Sinais pela paciência.

À CAPES pelo suporte financeiro.

À professora Kátia Lopes Silva do DEMAT-UFU pelas críticas e sugestões.

## RESUMO

Em medicina, existe um interesse crescente nas técnicas de exames médicos sem intervenção cirúrgica que auxiliam no estudo de uma estrutura anatômica. Entre esses métodos pode-se citar a Ressonância Magnética (MRI), a Tomografia por Emissão de Positrons (PET) e a Tomografia Computadorizada (CT). Todos esses métodos são baseados em um mesmo princípio: sob um determinado número de ângulos, um conjunto de integrais de linha em um plano é medido resultando em um conjunto de perfis. Este conjunto de perfis é chamado de transformada de Radon do objeto. O problema agora é reconstruir a imagem bidimensional a partir da transformada de Radon.

É possível desenvolver algoritmos de reconstrução a partir do teorema de Fourier slice. Este teorema estabelece uma ligação entre a transformada unidimensional de Fourier de um perfil e a transformada bidimensional de Fourier do objeto a ser reconstruído. Os três métodos diferentes de reconstrução, baseados nesse teorema, são analisados nesta dissertação: Retroprojeção filtrada, filtragem utilizando a convolução e a filtragem após a Retroprojeção.

Neste trabalho é realizada a comparação dos métodos de reconstrução de transformada, quanto a precisão e o tempo de reconstrução. É feita também uma análise de três métodos de interpolação necessários na Retroprojeção: linear, spline e vizinho mais próximo.

Nesta dissertação conclui-se que o método da Retroprojeção filtrada, dentre os métodos analisados quanto ao tempo de reconstrução e a precisão, é o mais conveniente para aplicação em reconstrução de imagens a partir de projeções.

## ABSTRACT

In medicine, there is a still growing interest in non-invasive examination techniques, that can depict anatomical structures. Among these methods, there are Magnetic Resonance Imaging (MRI), Positron Emission Tomography (PET) and Computerized Tomography (CT). All these methods are based on the same principle: for a choice of angles, one measures the line integrals in a plane. This procedure produces a set of profiles, which is called the Radon transform of the object. The next step is to reconstruct a two-dimensional image from its Radon transform.

It is possible to obtain reconstruction algorithms from the so-called Fourier slice theorem. This theorem relates the one-dimensional Fourier transform of a given profile to the two-dimensional Fourier transform of the object which is to be reconstructed. In this work, one considers three different reconstruction methods based on this theorem. The first one is the filtered Backprojection method. The second one is the convolution Backprojection, and the last one is filtering after Backprojection.

This work compares the aforesaid transform reconstruction methods concerning accuracy and time. One analyzes three interpolation methods as well: linear, spline and the nearest neighbor required for the Backprojection.

One concludes that the filtered Backprojection method be more suitable to the application in image reconstruction from projections concerning reconstruction time and accuracy among the three methods analyzed in this work.

## RESUMÉ

En médecine, un intérêt toujours croissant est accordé aux techniques non invasives d'études des structures anatomiques. Parmi ces méthodes on peut citer l'imagerie par Résonance Magnétique (MRI), La Tomographie par Emission de Positrons (PET) et la Tomographie Assisté par Ordinateur (CT). Ces méthodes sont basées toutes sur le même principe: sous certains angles, une série d'intégrales curvilignes sont mesurées dans un plan; le résultat est une série de profils. Cette série de profils est appelée la transformée de Radon de l'objet. Le problème à résoudre devient alors la reconstruction de l'image bidimensionnelle à partir de la transformée de Radon.

Il est possible de développer des algorithmes de reconstruction à partir du théorème de Fourier slice. Ce théorème établit un lien entre la transformée unidimensionnelle de Fourier d'un profil et la transformée bidimensionnelle de Fourier de l'objet à reconstruire. Trois différentes méthodes de reconstruction, basées sur ce théorème de Fourier sont analysées dans le présent travail: l'algorithme de rétroprojection filtrée, la rétroprojection de convolution et la rétroprojection après filtrage.

Dans ce travail nous comparons les méthodes de reconstruction de la transformée, que nous venons d'évoquer, quant à la précision et le temps de reconstruction. Nous analysons également trois méthodes d'interpolation nécessaires à la rétroprojection: interpolations linéaire, spline et de voisinage immédiat.

Nous concluons que la méthode rétroprojection filtrée est plus convenable pour des applications en reconstruction des images à partir de projections quant à le temps de reconstruction et la précision parmi les trois méthodes analysées dans ce travail.

# RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS A PARTIR DE PROJEÇÕES PARALELAS

## SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - TRANSFORMADA DE RADON	8
2.1 - Introdução	8
2.2 - A Transformada de Radon	15
2.3 - Propriedades Básicas da Transformada de Radon	21
2.3.1 - Linearidade	21
2.3.2 - Deslocamento	21
2.3.3 - Rotação	22
2.3.4 - Outras Propriedades	23
2.4 - Transformada de Radon Analítica de Figuras Primitivas	24
2.4.1 - Círculo unitário	24
2.4.2 - Quadrado	26
2.4.3 - Triângulo	29
2.5 - Modelo de Shepp-Logan ("Head Phantom")	32
2.6 - Aproximação Discreta da Transformada de Radon	39
2.7 - Conclusões	45

3 – MÉTODO DA RETROPROJEÇÃO	46
3.1 - Introdução	46
3.2 - Classificação dos Métodos de Reconstrução	47
3.3 - Método da Retroprojeção	48
3.3.1 - Introdução	48
3.3.2 - Descrição do Método	49
3.3.3 - Modelagem Matemática	54
3.3.4 - Implementação do Algoritmo da Retroprojeção	59
3.4 - Resultados Obtidos	60
3.5 - Conclusões	65
4 - MÉTODO DA RETROPROJEÇÃO FILTRADA	66
4.1 - Introdução	66
4.2 - Teorema da Retroprojeção	67
4.3 - Filtragem no Domínio de Fourier	72
4.4 - Filtragem no Domínio de Radon	74
4.5 - Filtragem Utilizando a Convolução	79
4.6 - Implementação dos Métodos: Filtragem Utilizando a Convolução e Filtragem no Domínio de Fourier	82
4.6.1 - Considerações de Amostragem	82
4.6.2 - Escolha dos Filtros de Reconstrução	83
4.6.3 - Filtragem Utilizando a Convolução	86
4.6.4 - Filtragem no Domínio de Fourier	88
4.7 - Resultados Obtidos	93

4.7.1 - Filtragem Utilizando a Convolução	93
4.7.2 - Filtragem no Domínio de Fourier	101
4.8 - Análise Qualitativa dos Resultados Obtidos	110
4.9 - Conclusões	113
5 - MÉTODO DA FILTRAGEM APÓS A RETROPROJEÇÃO	114
5.1 - Introdução	114
5.2 - Descrição Matemática	115
5.3 - Implementação da Filtragem Após a Retroprojeção	123
5.4 - Filtros de Reconstrução	127
5.5 - Resultados Obtidos	129
5.6 - Análise Qualitativa dos Resultados Obtidos	137
5.7 - Conclusões	138
6 - ANÁLISE COMPARATIVA DOS MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO	139
6.1 - Introdução	139
6.2 - Sinograma Sem Ruído	140
6.3 - Sinograma Com Ruído	143
6.4 - Análise do Tempo de Reconstrução	151
6.5 - Métodos de Interpolação Utilizados na Retroprojeção	151
6.6 - Conclusões	153
7 - CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	154
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	158
ANEXO I	161

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

A tomografia computadorizada (CT) é um dos grandes avanços tecnológicos utilizado em medicina no diagnóstico de doenças, embora seja uma técnica de uso em várias outras áreas tais como química, aeroespacial, radioastronomia, etc. Basicamente em CT existem dois tipos diferentes de problemas que devem ser abordados. Um deles é a aquisição das projeções do objeto por meio de dispositivos tais como uma fonte de raios X e detectores. O outro problema é a obtenção da imagem tomográfica a partir de suas projeções.

Embora a CT seja uma técnica de uso geral, seu histórico está estreitamente relacionado com a história da obtenção de imagens em medicina por meio de raios X. Abaixo é descrito um resumo deste histórico:

- 1895** William K. Röntgen descobre a emissão de raios X.
- 1901** Röntgen recebe o prêmio Nobel em física pela sua descoberta.
- 1917** Radon desenvolve uma transformada bidimensional - transformada de Radon.
- 1914-1932** Desenvolvimento da tomografia clássica (sem utilização de computador).
- 1972** Hounsfield registra uma patente do primeiro equipamento de tomografia computadorizada usando o método de reconstrução algébrico.
- 1974** O método da Retroprojeção filtrada é desenvolvido como um substituto do método de reconstrução em tomógrafos comerciais.

- 1978** Aparece a terceira geração de tomógrafos com geometria de feixe de raios X em leque e utilizando o método da Retroprojeção filtrada.
- 1979** Hounsfield e Comark recebem o prêmio Nobel de medicina pelo desenvolvimento do equipamento de tomografia computadorizada.

O histórico descrito acima é um resumo do desenvolvimento da CT, sem nenhum detalhe do estudo do problema básico que é a reconstrução de imagens tomográficas.

Fundamentalmente, a reconstrução tomográfica trata da reconstrução de uma imagem a partir de suas projeções. Basicamente, uma projeção em um dado ângulo é um conjunto de integrais de linha nesta direção. A Figura 1.1 ilustra duas projeções obtidas de um objeto constituído de um par de cilindros.

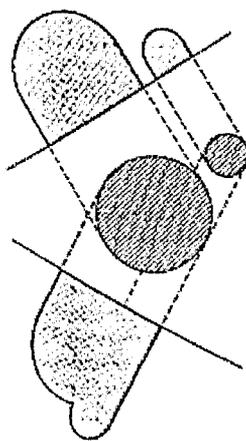


Figura 1.1 - Obtenção de Projeções.

A solução matemática para o problema da reconstrução foi descoberta em 1917 pelo matemático Johann Radon, como mencionado no histórico acima. A solução do problema é a fórmula de inversão de Radon. A dificuldade com a fórmula de inversão de Radon é que a mesma

não fornece uma solução óbvia do problema de reconstrução como um algoritmo a ser implementado em computadores.

Todos os métodos de reconstrução propostos, até a presente data, são implementações para calcular a fórmula de inversão de Radon. Eles podem ser divididos em dois grupos principais: algoritmos de transformada e algoritmos algébricos. Antes de ser descrito o histórico do desenvolvimento desses métodos, uma definição geral dos mesmos é dada abaixo:

- Os métodos de transformada propõem uma solução para o problema de inversão de Radon baseada no teorema da projeção (teorema Fourier "slice"). Exemplos desses métodos: método da Retroprojeção filtrada e o método de Fourier direto. O método do linograma é também um método de transformada. O processamento de sinais multidimensionais é fundamental para o desenvolvimento desses algoritmos. Um excelente resumo dos métodos de transformada pode ser encontrado no artigo de Lewitt (*Lewitt, 1983*).
- Os métodos algébricos são também conhecidos como métodos iterativos. A solução é obtida a partir de uma aproximação inicial e o cálculo é realizado iterativamente até ser atingida a precisão desejada. Embora estes métodos sejam conceitualmente mais simples que os métodos de transformada, esta abordagem é normalmente menos eficiente do ponto de vista computacional.

A primeira implementação de uma solução para a fórmula de inversão de Radon para ser

usada na prática foi realizada em 1956 por Ronald Bracewell no campo da radioastronomia. Foi reconstruída a distribuição de radiação do disco solar a partir das integrais de linha. Este método é conhecido como método de Fourier direto.

B.I.Korenblyum, S.I. Tetelbaum, e A.A. Tyutin, em 1958, escreveram um artigo em Russo onde a solução da inversão de Radon foi encontrada e uma sugestão foi dada para aplicação em CT. Infelizmente, este artigo permaneceu desconhecido à comunidade dos pesquisadores ocidentais até a década de oitenta.

Allan Cormak, em 1963, publicou o método para ser implementado em CT, conhecido como método algébrico. Naquela época nenhuma atenção foi dada a este artigo.

Bracewell e Riddle, em 1967, introduziram o método chamado Retroprojeção filtrada.

Hounsfield, em 1969, registrou a primeira patente de um tomógrafo baseado em CT. Este equipamento representou um grande impacto em diagnóstico radiológico. O método utilizado neste tomógrafo foi o método algébrico proposto por Cormak.

Ramachandran e Lakshminarayanan, em 1971, propuseram o método da Retroprojeção filtrada com alguns melhoramentos e também o método da Retroprojeção filtrada utilizando a convolução. Neste mesmo ano, Gordon e Herman realizaram um estudo detalhado dos métodos algébricos.

Shepp e Logan, em 1974, mostraram a superioridade do método da Retroprojeção filtrada sobre o método algébrico.

Crawford e Kak, em 1979, publicaram um artigo no qual fizeram um estudo sobre os artefatos produzidos por "aliasing" em CT.

A partir de 1980 poucos trabalhos foram publicados neste campo e basicamente todos propuseram apenas melhorias nos métodos já existentes.

Edholm e Herman, em 1988, publicaram um trabalho onde foi proposto o método do

linograma. Este método pode ser considerado como um método de Fourier direto. Ele utiliza a amostragem do linograma em vez da amostragem do sinograma no espaço de Radon e de Fourier, evitando assim os problemas decorrentes da interpolação no domínio de Fourier característicos do método de Fourier direto.

Maria Magnusson, em 1993, estudou a viabilidade dos métodos de Fourier em reconstrução de imagens. Foi realizada uma comparação entre o método do linograma e o método da Retroprojeção filtrada, os quais produziram praticamente o mesmo resultado. Foi proposto neste trabalho uma nova classe de funções de interpolação para ser utilizada no método de Fourier direto.

Em 1996, Peter Toft estudou detalhadamente a transformada de Radon e de Hough e suas aplicações em CT. Foi realizada uma análise comparativa dos métodos de transformada: método de Fourier direto, Retroprojeção filtrada e filtragem após a Retroprojeção e também foi realizada uma análise comparativa dos métodos algébricos. Este trabalho concluiu que o método da Retroprojeção filtrada é normalmente preciso mas de certa forma lento e o método de Fourier direto oferece um algoritmo rápido, porém com problemas de estabilidade numérica devido à interpolação bidimensional.

Michel Westenberg, em 1996, implementou a paralelização dos métodos de transformada e o método de multiresolução baseado na transformada Wavelet em uma máquina CM5 de memória distribuída. Foi mostrado que o método da transformada pode ser facilmente paralelizado na máquina CM5 e que a implementação do método de multiresolução usando a transformada Wavelet fornece um algoritmo eficiente.

Caroline Jacobson, em 1996, avaliou a performance dos métodos de Fourier em reconstrução 3D a partir de projeções "Cone-Beam". Este trabalho concluiu que o método de LINCON, baseado no método do linograma, produz imagens de alta qualidade quando comparadas com dados reais.

Diante desse histórico, esta dissertação tem como objetivo realizar um estudo e apresentação dos fundamentos de reconstrução de imagens a partir de projeções e sua aplicação em tomografia computadorizada. Os métodos de reconstrução: Retroprojeção, Retroprojeção filtrada (filtragem antes da Retroprojeção no domínio de Fourier e no domínio de Radon), filtragem após a Retroprojeção e a sua implementação em um computador digital são apresentados. Um estudo comparativo desses métodos, quanto à qualidade e tempo de reconstrução, é realizado. Além disso, é também realizada uma comparação dos três métodos de interpolação: linear, spline e vizinho mais próximo, os quais são necessários na operação de Retroprojeção.

Os capítulos desta dissertação estão organizados como descrito abaixo:

O Capítulo II descreve a transformada de Radon e suas propriedades básicas. São mostradas duas formas para calcular a transformada de Radon através do método analítico e da aproximação discreta. É realizada uma análise comparativa dos métodos de cálculo da transformada de Radon. O modelo de Shepp-Logan é apresentado como um modelo básico para a análise da precisão dos métodos de reconstrução apresentados neste trabalho.

O Capítulo III mostra a classificação dos algoritmos de reconstrução de imagens mais utilizados. É descrito o método da Retroprojeção e são realizados testes para verificar o desempenho desse método. Finalmente são feitas as conclusões a respeito dos testes realizados.

O Capítulo IV descreve os fundamentos e a implementação do método de reconstrução da Retroprojeção filtrada (filtragem no domínio de Fourier) e do método da filtragem no domínio de Radon (convolução). O teorema da Retroprojeção é também apresentado como uma base para todos os métodos de reconstrução de transformada e são mostrados vários resultados para diferentes tipos de imagens e as conclusões obtidas a partir desses resultados.

O Capítulo V descreve um método de reconstrução onde a filtragem é realizada após a

Retroprojeção e são mostrados os resultados obtidos nos vários testes realizados. Finalmente são realizadas conclusões a respeito desses resultados.

O Capítulo VI apresenta uma análise comparativa dos métodos descritos neste trabalho sob dois aspectos: qualidade e tempo de reconstrução para vários tamanhos de imagem. Os métodos de interpolação necessários na Retroprojeção são também avaliados devido à sua influência nos resultados dos métodos de reconstrução descritos nesta dissertação.

E finalmente, no Capítulo VII, são apresentadas as conclusões sobre os métodos de reconstrução de imagens a partir de projeções paralelas analisados, as contribuições desta dissertação e são propostos alguns trabalhos futuros que podem ser realizados.

## CAPÍTULO II

### TRANSFORMADA DE RADON

Este capítulo descreve a transformada de Radon e suas propriedades básicas. São mostradas duas formas para calcular a transformada de Radon através do método analítico e da aproximação discreta e é realizada uma análise comparativa dos dois métodos.

O modelo de Shepp-Logan é apresentado como um modelo básico para a análise da precisão dos métodos de reconstrução apresentados neste trabalho.

#### 2.1 – Introdução

Antes de apresentar o histórico da tomografia computadorizada (CT), a qual está estreitamente ligada à medicina, uma breve história sobre o descobrimento dos raios X é apresentada com o objetivo de comparar os dois métodos radiológicos (*Fanton, 1990*).

Na tarde de 8 de novembro de 1895, após o trabalho, o físico Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923), reitor da Universidade de Wurzburg, na Alemanha, resolveu continuar alguns experimentos que fazia no laboratório de sua casa. Ele estava com sorte. Antes de cair a noite, um acaso o ajudaria a descobrir os raios X.

Como muitos físicos da época, Röntgen pesquisava o tubo de raios catódicos, inventado pelo inglês William Crookes (1832-1919) anos antes. Era um tubo de vidro, dentro do qual um condutor metálico aquecido emitia elétrons, então chamados raios catódicos, em direção a outro condutor.

Quando Röntgen ligou o tubo, algo muito estranho aconteceu, perto do tubo, um objeto constituído de material fluorescente chamado platino cianeto de bário brilhou. Ele desligou o tubo e o brilho sumiu. Ligou de novo e lá estava ele. O brilho persistiu mesmo quando Röntgen colocou um livro e uma folha de alumínio entre o tubo e a placa. Alguma coisa saía do tubo, atravessava barreiras e atingia o platino cianeto. Pôr seis semanas, o físico ficou estudando intensamente no laboratório, tentando entender o que era aquele fenômeno. No dia 22 de dezembro, fez a radiação atravessar durante 15 minutos a mão da sua mulher Bertha (Figura 2.2), atingindo, o outro lado uma chapa fotográfica. Revelada a chapa, viam-se nela sombras dos ossos de Bertha, na primeira radiografia da história, fascinado, mas mais confuso, Röntgen decidiu chamar de "X", símbolo do desconhecido usado na ciência.

A Figura 2.1 ilustra a criação dos raios X.

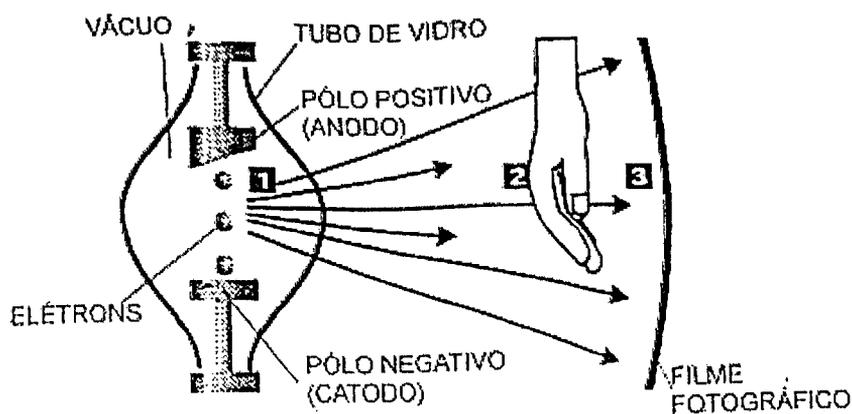


Figura 2.1 – Obtenção de uma imagem através do uso de raios X

Os passos para a obtenção dos raios X são:

1. Aquecido, o pólo negativo emite elétrons em direção ao pólo positivo, liberando os raios X.
2. Os raios atravessam a mão e são absorvidos por ela de formas diferentes. Os ossos, por exemplo, barram grande quantidade de radiação, enquanto a pele deixa passar quase tudo.
3. Filtrada, a radiação atinge o filme fotográfico que, depois de revelado, mostra sombras em tons de cinza. Quanto mais clara a marca, mais denso o tecido atravessado. Por isso os ossos aparecem brancos na radiografia.

No esquema ilustrado pela Figura 2.2, é mostrado o fenômeno físico capaz de dar origem à poderosa radiação e a imagem da primeira radiografia da mão da esposa de Wilhelm Conrad Röntgen.

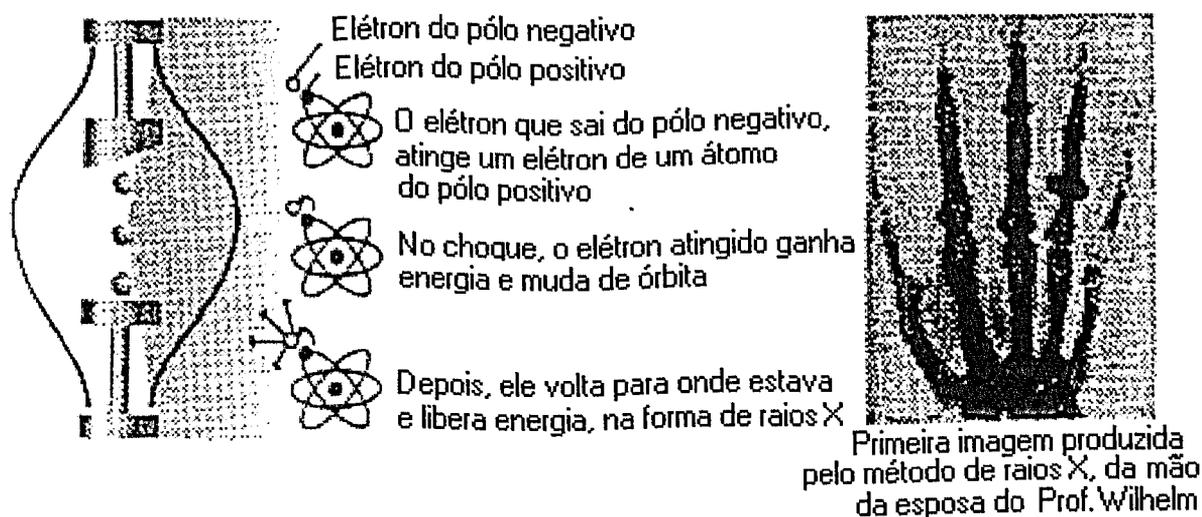


Figura 2.2 – Criação de raios X e primeira radiografia com raios X

Os inventores do "scanner" foram A. M. Comark, físico norte americano, e G. M. Hounsfield, engenheiro inglês.

A partir do descobrimento dos raios X, em 8 de novembro de 1895, foram desenvolvidas várias pesquisas em torno do mesmo.

Em 1963, A. M. Comark demonstrou que se podia determinar os coeficientes de absorção de uma estrutura plana e medir, desde um determinado número de direções, as variações de intensidade dos raios transmitidos.

Em 1967, Hounsfield iniciou suas investigações sobre o reconhecimento de imagens e técnicas de armazenagem de dados em um computador. Como engenheiro, ele dirigia uma seção médica do laboratório central da companhia EMI, utilizou seus conhecimentos para desenvolver alguns projetos partindo de uma idéia principal.

A idéia principal do programa de investigação da EMI, era as medidas de transmissão dos raios X através de um corpo, a partir de todas as direções possíveis, que contém a totalidade de informações sobre os constituintes desse corpo. Baseado nesta idéia, foram elaborados os cálculos necessários para se obter os dados deste corpo (transformada de Fourier), os quais necessitavam de um computador para serem efetuados. Hounsfield teve a idéia genial de detectar os raios X mediante um cristal emissor de luz visível quando se expõe aos raios X.

Em primeiro de outubro de 1971 foi obtido o primeiro "scanner" de um crânio em um hospital de Londres. Em 1973, nos EUA, foram instalados os primeiros "scanners" de crânio, mais tarde conhecidos como tomógrafos. Em 1974, os primeiros equipamentos para exame de corpo já estavam em funcionamento.

Em 1979, os dois cientistas, Cormak e Housfield, receberam o prêmio Nobel pois o seu invento tem importância comparado à descoberta dos raios X.

Os tomógrafos podem ser definidos como um equipamento de medida das densidades

radiológicas dos volumes de um corte. Esse método radiológico precisa ser auxiliado por uma imagem radiológica convencional.

Os tomógrafos estudam as atenuações que os raios X sofrem ao passar pelo corpo. Os estudos das atenuações se realizam sobre um feixe de raios X fino, definido por uma colimação aplicada nos raios X que vai até um detector de raios X.

Os detectores são constituídos de cristais de centilação e câmaras de ionização que permitem quantificar as medidas. Sua sensibilidade é extremamente maior que a película do filme radiográfico. Os detectores e a fonte de raios X estão situados em um equipamento fixo, que define um plano para detectar as ondas de raios X. Quando o objeto a ser estudado é colocado na direção do raio, o dispositivo proporciona uma medida da atenuação radiante desse objeto.

Mediante os detectores é obtida uma série de medidas de atenuações resultantes dos raios X que atravessam o corpo. Uma soma dessas projeções não é suficiente para a reconstrução do corte. São necessárias inúmeras projeções.

Através de um movimento de rotação do conjunto em torno do eixo do objeto examinado, é possível registrar uma série de projeções de atenuações (perfil) que resultam do raio que atravessa o mesmo corte em direções distintas. A Figura 2.3 ilustra um esquema simplificado de tomografia computadorizada.

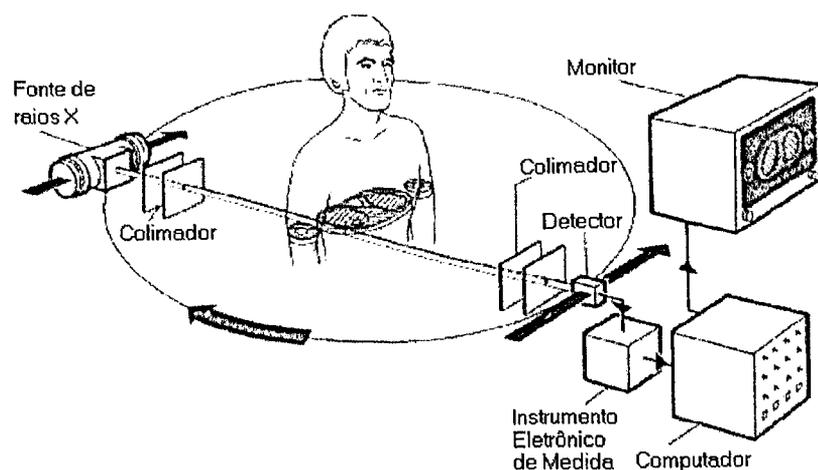


Figura 2.3 – Sistema simplificado de tomografia computadorizada

Em um modelo simplificado, a trajetória dos raios X é considerada como sendo uma reta, e o seu feixe é atenuado ao longo de uma linha com coeficiente de atenuação  $\mu$ . Após a varredura, este coeficiente pode ser encontrado em cada ponto do plano.

Considerando um tomógrafo 2D com somente uma seção transversal do cérebro medido, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de maneira tal que a seção transversal seja o plano  $z = 0$ , como ilustrado na Figura 2.4. Cada linha passando através do objeto a ser analisado é parametrizada com dois parâmetros: distância normal  $s$  de  $(0,0)$  à linha e o ângulo relativo ao primeiro eixo.

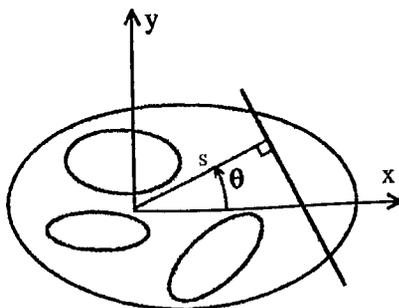


Figura 2.4 – Sistema de coordenadas onde  $z = 0$

Considerando que o objeto a ser analisado não é homogêneo, o coeficiente de atenuação é função de  $x$  e  $y$ , isto é,  $\mu(x, y)$ . A Figura 2.5 ilustra três objetos de diferentes coeficientes de atenuação vistos ao longo de uma linha.

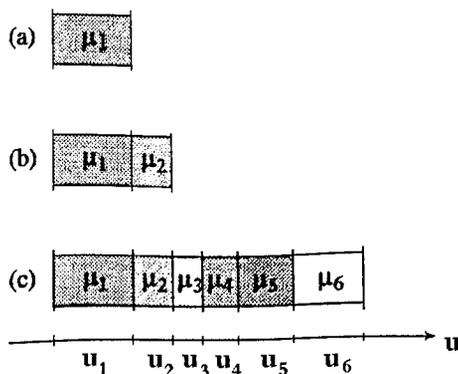


Figura 2.5 - Coeficiente de atenuação para três objetos diferentes

A Figura 2.5(a) mostra que a intensidade recebida segue a lei de decaimento exponencial:

$$I(s, \theta) = I_o e^{-\mu_1 u_1} \quad (2.1)$$

Se dois meios homogêneos diferentes são atravessados como mostrado na Figura 2.5(b), a intensidade recebida é:

$$I(s, \theta) = I_o e^{-\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2} \quad (2.2)$$

Se vários meios homogêneos estão presentes, como ilustrado na Figura 2.2(c), o resultado é simplesmente a soma dos fatores exponenciais de cada camada:

$$I(s, \theta) = I_o e^{-\sum_i \mu_i u_i} \quad (2.3)$$

De maneira geral, a soma na Equação 2.3 torna-se uma integral e  $u$  torna-se o elemento de linha  $du$ , onde o coeficiente de atenuação é função da trajetória da linha:

$$I(s, \theta) = I_o e^{-\int \mu(x, y) du} \quad (2.4)$$

onde :

$I_o$  - intensidade do emissor.

$\mu$  - coeficiente de atenuação.

A projeção  $g(s, \theta)$  é definida como:

$$g(s, \theta) = \ln \frac{I_o}{I(s, \theta)} \quad (2.5)$$

Assim da Equação 2.4, tem-se que:

$$g(s, \theta) = \int \mu(x, y) du = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (2.6)$$

A função  $g(s, \theta)$  é chamada de *transformada de Radon* de  $\mu(x, y)$ . A letra maiúscula é usada para denotar os operadores. Assim,  $\mathcal{R}$  é usado para denotar a transformada de Radon. Se  $f$  é uma função, a sua transformada de Radon é denotada por  $\mathcal{R}f$ . O valor de  $\mathcal{R}f$  no ponto  $(s, \theta)$  em seu domínio é denotado por  $\mathcal{R}f(s, \theta)$ . Portanto, a transformada de Radon de  $\mu(x, y)$  é  $\mathcal{R}\mu(s, \theta)$ .

## 2.2 – A Transformada de Radon

Basicamente uma operação de transformação converte uma expressão matemática definida em um sistema de coordenadas para um outro sistema de coordenadas diferente. Quando as coordenadas são diferentes, o espaço definido pelo sistema de coordenadas é também diferente. No caso da transformada de Radon, ela transforma as coordenadas do domínio espacial para o domínio de Radon, conforme ilustrado na Figura 2.6.

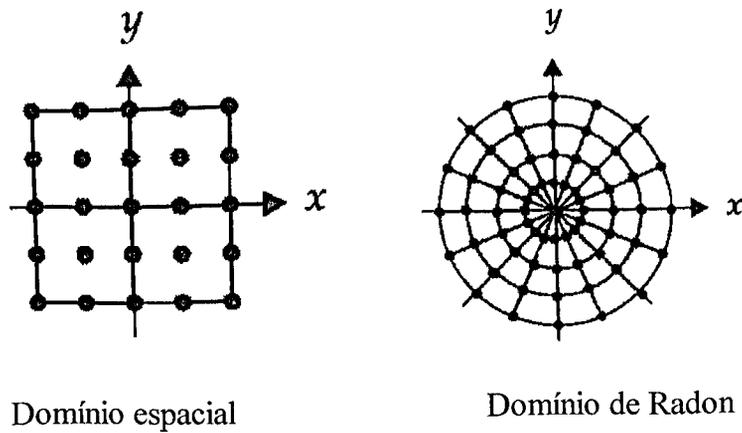


Figura 2.6 – Transformada de Radon

Uma integral de linha, como o próprio nome indica, representa a integral de algum parâmetro de um objeto ao longo de uma linha. Um exemplo típico é a atenuação de raios X ao se propagarem através do tecido biológico como citado na Seção 2.1. Neste caso, o objeto é modelado como uma distribuição bidimensional de atenuação constante de raio X e a integral de linha representa a atenuação total sofrida pelo feixe de raios X a medida que eles passam em linha reta através do objeto.

O sistema de coordenadas definido na Figura 2.7 é adotado para descrever as integrais de linha e as projeções. Neste exemplo, o objeto é representado por uma função bidimensional  $f(x, y)$  e cada integral de linha pelos parâmetros  $(s, \theta)$ .

A equação da linha na Figura 2.7 é  $x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0$  e desse modo a integral de linha  $g(s, \theta)$  é definida como :

$$g(s, \theta) = \int_{\text{linha}(s, \theta)} f(x, y) \, du, \quad -\infty < s < \infty \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (2.7)$$

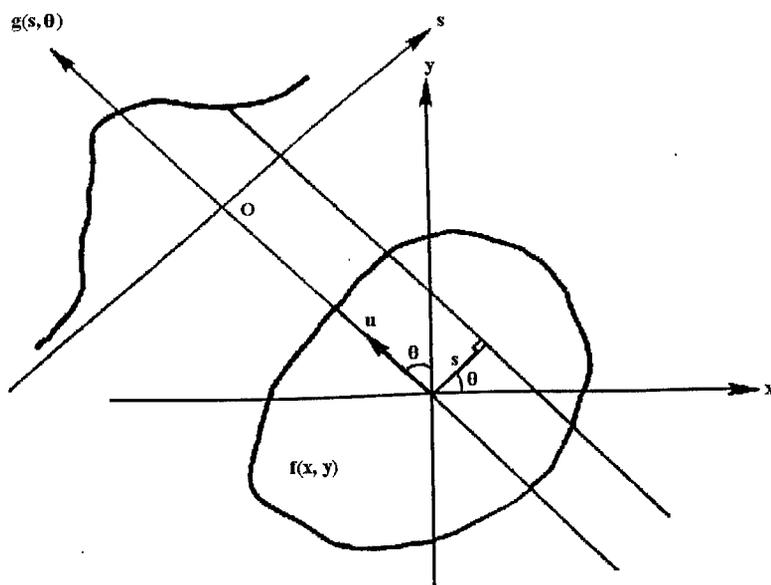


Figura 2.7 – Sistema de coordenadas  $(s, u)$

Usando a função delta de Dirac, definida no Anexo I, a Equação 2.7 pode ser reescrita como:

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy, \quad g(s, \theta) = \int_{\text{linha}(s, \theta)} f(x, y) du \quad (2.8)$$

Pode-se verificar que  $(s, \theta)$  não são as coordenadas polares de  $(x, y)$ .

A função  $g(s, \theta)$ , definida pelo alemão Johan Radon em 1917, é conhecida como a transformada de Radon da função  $f(x, y)$ .

Adotando o sistema de coordenadas  $(s, u)$ , a Equação 2.8 pode ser expressa como:

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} s &= x \cos \theta + y \sin \theta & \text{ou} & & x &= s \cos \theta - u \sin \theta \\ u &= -x \sin \theta + y \cos \theta & & & y &= s \sin \theta + u \cos \theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

A projeção é formada pela combinação de um conjunto de integrais de linha. A projeção mais simples é uma coleção de integrais de raios paralelos dada por  $g_{\theta}(s)$  para um  $\theta$  constante, conhecida como *projeção paralela* conforme ilustra a Figura 2.8. No caso do tomógrafo, as projeções podem ser obtidas movendo-se uma fonte de raio X e detectores em lados opostos com feixes de raios paralelos atravessando o objeto.

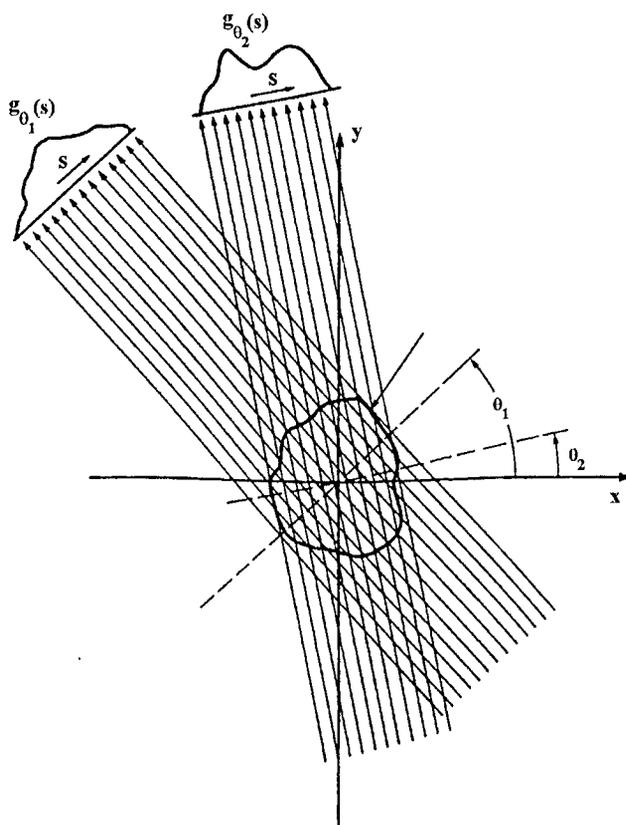


Figura 2.8 – Projeção Paralela

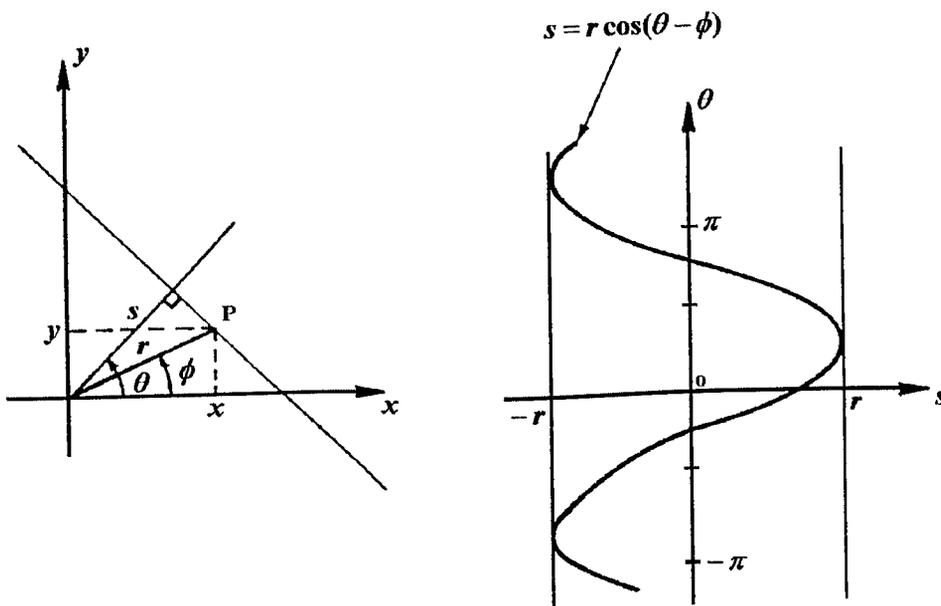
A quantidade  $g(s, \theta)$  é também chamada de raio-soma, desde que ela representa a somatória de  $f(x, y)$  ao longo de um raio à uma distância  $s$  em um ângulo  $\theta$ .

Pode-se verificar que  $(s, \theta)$  não são as coordenadas polares de  $(x, y)$ . Assim, se  $(r, \phi)$  são as coordenadas polares de  $(x, y)$ , isto é,

$$x = r \cos \phi \quad y = r \operatorname{sen} \phi \quad (2.11)$$

então da Figura 2.9 tem-se que:

$$s = r \cos(\theta - \phi) \quad (2.12)$$



(a) Domínio espacial      (b) O ponto P é mapeado em uma senóide no plano  $(s, \theta)$

Figura 2.9 – Domínio espacial e domínio de Radon

O conjunto de projeções paralelas é chamado de **sinograma**. O sinograma da função  $f$  contém exatamente os mesmos dados que a transformada de Radon de  $f$ , porém no sistema de coordenadas  $(s, \theta)$ . Na Figura 2.10(a) um ponto específico  $(x_1, y_1)$  contribui para a transformada de Radon sobre uma circunferência e esta circunferência corresponde à uma senóide no sinograma. A Figura 2.10(b) ilustra a origem do nome sinograma.

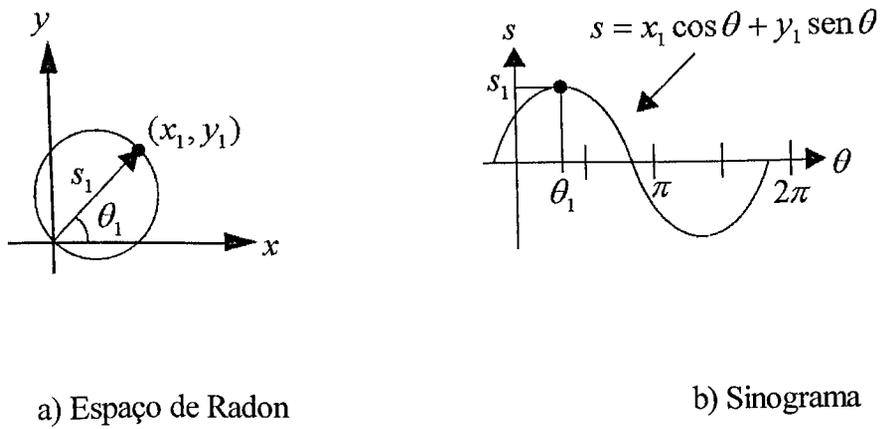


Figura 2.10 – Espaço de Radon e Sinograma

Um outro tipo de projeção possível é quando a fonte é colocada em uma posição fixa relativa a uma linha de detectores, conforme ilustra a Figura 2.11, conhecida como *projeção leque* (“Fan beam”) pois as integrais de linha são calculadas com uma geometria que se assemelha a um leque.

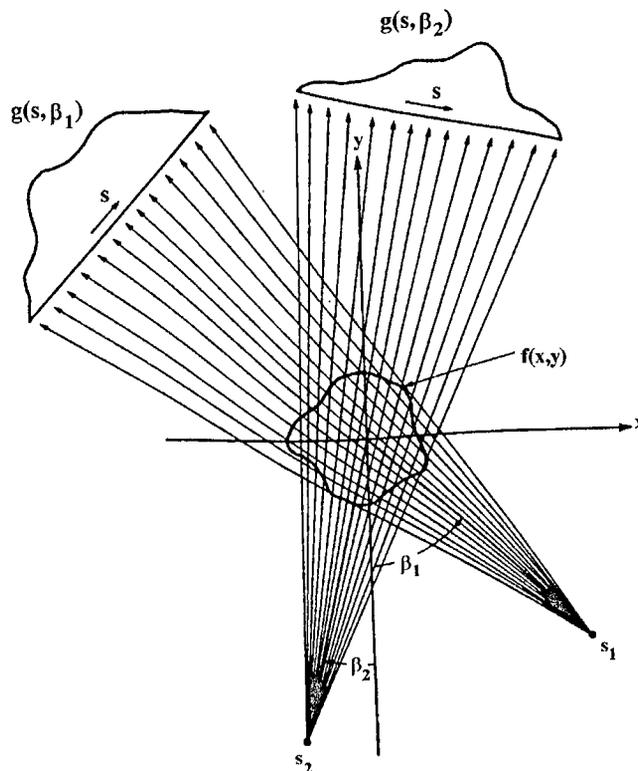


Figura 2.11 – Projeção Leque (“Fan beam”)

## 2.3 – Propriedades Básicas da Transformada de Radon

Nesta seção é mostrada algumas propriedades fundamentais da transformada de Radon que são derivadas a partir da Equação 2.8. O procedimento para a dedução das propriedades de linearidade, deslocamento e rotação é apresentado a seguir. Para as demais propriedades, pode ser aplicado um procedimento análogo.

### 2.3.1 - Linearidade

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} g(s, \theta) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_1 f_1(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_2 f_2(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.3.2 – Deslocamento

Assumindo que a função  $f(x, y)$  é deslocada, isto é,  $h(x, y) = f(x - x_o, y - y_o)$

$$h(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_o, y - y_o) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (2.15)$$

Seja:

$$\begin{aligned} w &= x - x_o & dx &= dw \\ z &= y - y_o & dz &= dy \end{aligned}$$

$$h(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta((w + x_o) \cos \theta + (z + y_o) \sin \theta - s) dw dz \quad (2.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta(w \cos \theta + z \sin \theta - (s - x_o \cos \theta - y_o \sin \theta)) dw dz \quad (2.17)$$

$$h(s, \theta) = g(s - x_o \cos \theta - y_o \sin \theta, \theta) \quad (2.18)$$

Pode-se verificar pela Equação 2.18 que somente a coordenada  $s$  mudou.

### 2.3.3 - Rotação

Expressando  $f(x, y)$  na forma polar, isto é,  $f(x, y) = f_p(r, \phi)$

$$h(r, \phi) = f(r, \phi - \phi_o) \quad (2.19)$$

$$h(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} f(r, \phi - \phi_o) \delta(r \cos \phi \cos \theta + r \sin \phi \sin \theta - s) |r| d\phi dr \quad (2.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} f(r, \phi - \phi_o) \delta(r \cos(\phi - \theta) - s) |r| d\phi dr \quad (2.21)$$

Seja:

$$\alpha = \phi - \phi_0 \quad \text{e} \quad d\phi = d\alpha$$

$$h(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} f(r, \alpha) \delta(r \cos(\alpha - (\theta - \phi_0)) - s) |r| d\alpha dr \quad (2.22)$$

$$h(s, \theta) = g(s, \theta - \phi_0). \quad (2.23)$$

Se o sistema de coordenadas  $(x, y)$  é rotacionado de  $\phi_0$ , a transformada de Radon sofre uma translação na variável  $\theta$ .

### 2.3.4 – Outras propriedades

A Tabela 2.1 ilustra as propriedades da transformada de Radon.

Tabela 2.1 – Propriedades da Transformada de Radon

Propriedade	Função	Transformada de Radon
Simetria	$f(x, y)$	$g(s, \theta) = g(-s, \theta \pm \pi)$
Escalamento	$f(ax, ay)$	$\frac{1}{ a } g(as, \theta)$
Conservação de Massa	$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$	$M = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) ds$
Limitação de Espaço	$f(x, y) = 0,  x  > \frac{D}{2},  y  > \frac{D}{2}$	$g(s, \theta) = 0,  s  > \frac{D\sqrt{2}}{2}$

## 2.4 – Transformada de Radon Analítica de Figuras Primitivas

Nas subseções seguintes é mostrada a transformada de Radon analítica de três figuras denominadas neste trabalho de primitivas pela sua simplicidade: círculo unitário, quadrado e triângulo.

### 2.4.1 – Círculo unitário

Um círculo unitário é definido como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (2.24)$$

Neste caso, conforme ilustra a Figura 2.12, a função  $f(x, y)$  é invariante à rotação em relação à origem do sistema de coordenadas, assim a transformada de Radon não depende de  $\theta$ .

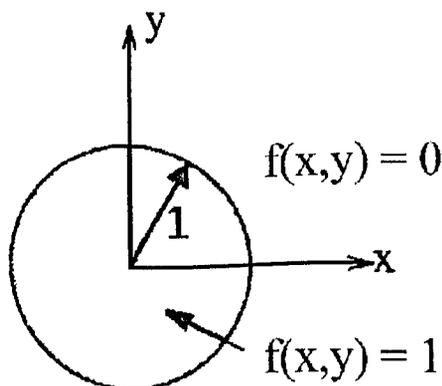


Figura 2.12 – Círculo unitário

A transformada de Radon pode ser calculada, por exemplo, para  $\theta = 0$  rad, como mostra a Figura 2.13. A transformada de Radon é simplesmente o comprimento da reta que cruza o círculo.

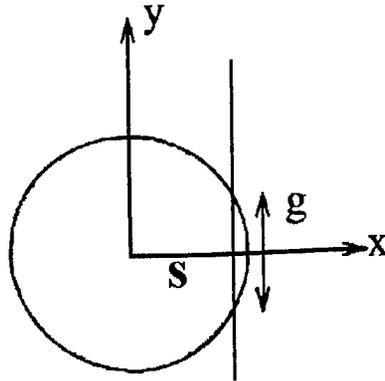


Figura 2.13 – Transformada de Radon para  $\theta = 0$  rad

A Figura 2.14(a) mostra a função círculo unitário e a Figura 2.14(b) ilustra o seu sinograma correspondente. Devido à simetria de rotação, a transformada de Radon não depende de  $\theta$ .

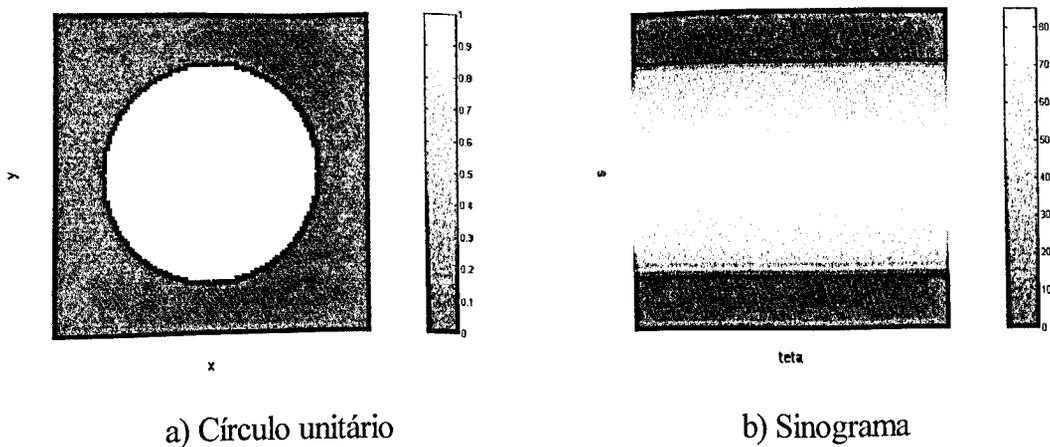


Figura 2.14 – Círculo unitário e o seu sinograma correspondente

## 2.4.2 – Quadrado

Uma outra primitiva útil é o quadrado, ilustrado na Figura 2.15.

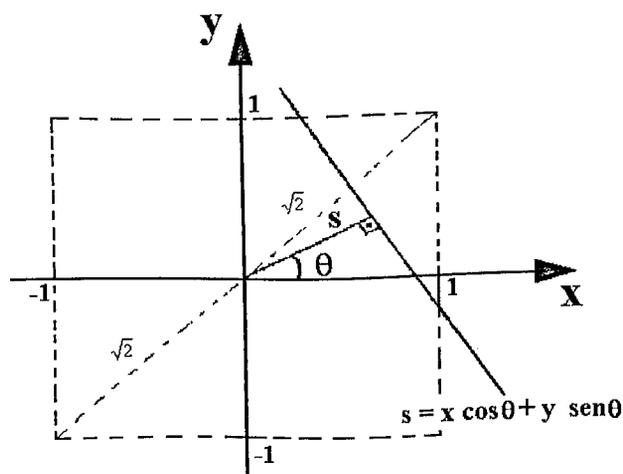


Figura 2.15 - Quadrado

A função da primitiva quadrado pode ser escrita como:

$$f(x, y) = \mu_H(1 - |x|) \mu_H(1 - |y|) \quad (2.25)$$

onde:

$\mu_H(\cdot)$  é a função degrau de Hamilton definida pela Equação 2.26:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

A função do quadrado apresenta simetria em relação ao eixo dos x e ao eixo dos y:

$$f(x, y) = f(|x|, |y|) \quad (2.27)$$

A transformada de Radon da função primitiva do quadrado também apresenta simetria rotacional de  $\pi/2$  e seus c\u00f4ngruos:

$$g(s, \theta) = g\left(s, \theta + k \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.28)$$

$$g(s, \theta) = g\left(s, \frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (2.29)$$

onde  $k$  \u00e9 inteiro.

A Equa\u00e7\u00e3o 2.28 indica que somente \u00e9 necess\u00e1rio calcular a transformada de Radon no intervalo de 0 a  $\pi/2$ . A Equa\u00e7\u00e3o 2.29 diminui o intervalo para 0 a  $\pi/4$ . Sabendo que  $g(s, \theta) = g(-s, \theta + \pi)$ , isto implica juntamente com a Equa\u00e7\u00e3o 2.28 que somente para valores de  $s \geq 0$  \u00e9 que a transformada deve ser calculada. N\u00e3o \u00e9 dif\u00edcil verificar que:

$$g(s, \theta) = 0 \text{ se } s > \sqrt{2} \quad (2.30)$$

Para  $s < \sqrt{2}$  \u00e9 f\u00e1cil verificar que  $g(s, \theta) \neq 0$  em virtude da geometria simples e das interse\u00e7\u00f5es entre a linha de integra\u00e7\u00e3o  $s = x \cos \theta + y \sin \theta$  e os lados do quadrado :

$$y = -1 \Rightarrow x = x_{-1} = \frac{s}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \quad (2.31)$$

$$y = 1 \Rightarrow x = x_1 = \frac{s}{\cos \theta} - \operatorname{tg} \theta \quad (2.32)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = y_1 = \frac{s}{\sin \theta} - \cot g\theta \quad (2.33)$$

onde:

$x_{-1}$  : interseção da reta de integração e a reta  $y = -1$ .

$x_1$  : interseção da reta de integração e a reta  $y = 1$ .

$y_1$  : interseção da reta de integração e a reta  $x = 1$ .

Existem três casos de interseção:

$$x_1 > 0 \Rightarrow g(s, \theta) = 2(\sqrt{2} - s) \quad (2.34)$$

$$x_1 < 1 \text{ e } x_{-1} < 1 \Rightarrow g(s, \theta) = \frac{2}{\cos \theta} \quad (2.35)$$

$$x_1 < 1 \text{ e } x_{-1} > 1 \Rightarrow g(s, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s - \cos \theta - \sin \theta}{\sin 2\theta} \quad (2.36)$$

Usando as Equações 2.34 a 2.36, a transformada de Radon pode ser calculada para as respectivas regiões de validade. A primitiva *quadrado* é ilustrada na Figura 2.16(a) e o seu sinograma correspondente é mostrado na figura 2.16(b).

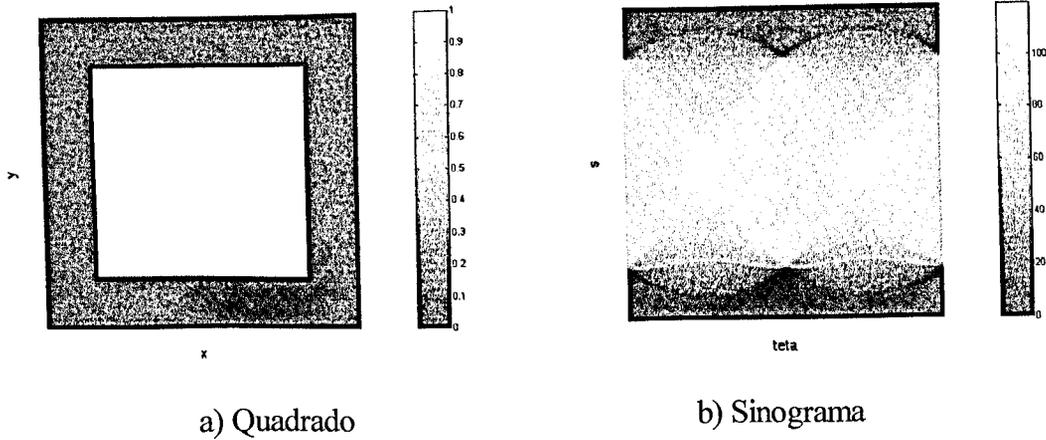


Figura 2.16 – O quadrado e o seu sinograma correspondente

### 2.4.3 – Triângulo

A primitiva triângulo equilátero é ilustrada na Figura 2.17. A transformada de Radon desta primitiva pode também ser calculada analiticamente.

A primitiva triângulo apresenta simetria rotacional:

$$g(s, \theta) = g(s, -\theta) = g\left(s, \theta + k \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2.37)$$

onde  $k$  é inteiro.

As relações do triângulo combinadas com  $g(s, \theta) = g(-s, \theta + \pi)$  implicam que somente é necessário calcular a transformada de Radon para  $s \geq 0$  e  $0 \leq \theta < \pi/3$ . Neste caso existem três linhas a considerar :

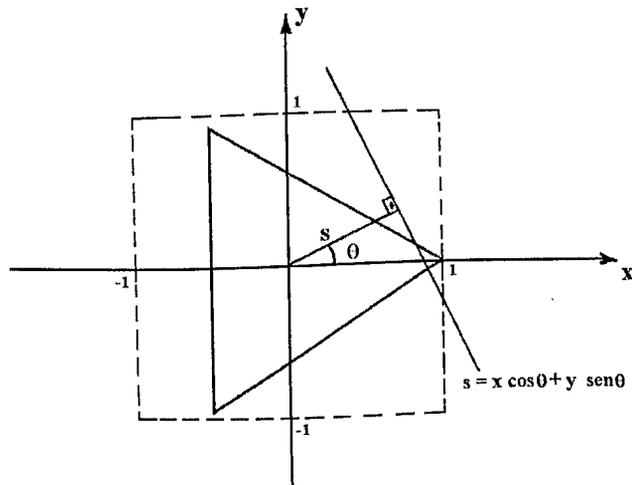


Figura 2.17 - Triângulo

***Linha inclinada superior do triângulo***

$$l_- : y = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x-1) \quad (2.38)$$

***Linha inclinada inferior do triângulo***

$$l_+ : y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \quad (2.39)$$

***Linha de integração (transformação)***

$$l : s = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.40)$$

A primeira interseção a considerar é a interseção entre  $l$  e  $l_-$ :

$$x_+ = \frac{\sin \theta + \sqrt{3} s}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \quad (2.41)$$

$$y_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_+ - 1) \quad (2.42)$$

e a interseção entre  $l$  e  $l_+$ :

$$x_- = \frac{\text{sen } \theta - \sqrt{3} s}{\text{sen } \theta - \sqrt{3} \cos \theta} \quad (2.43)$$

$$y_- = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x_- - 1) \quad (2.44)$$

Uma outra interseção interessante é entre a linha vertical  $x = -\frac{1}{2}$  e a linha de integração. Essa interseção é:

$$y_l = \frac{2s + \cos \theta}{2 \text{sen } \theta} \quad (2.45)$$

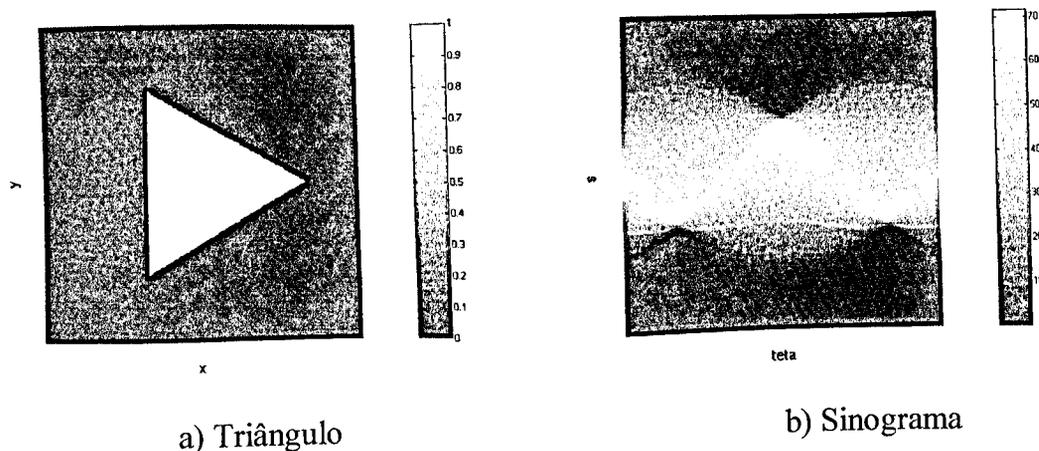
Pode-se concluir que se  $x_+ > 0$  a linha de integração não cruza o triângulo, isto é,  $g(s, \theta) = 0$ .

Todos os casos restantes implicam que a linha de integração intercepta a linha inclinada inferior  $l_+$ :

$$y_l < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow g(s, \theta) = \sqrt{(x_+ + 1/2)^2 + (y_l - y_+)^2} \quad (2.46)$$

$$y_l > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow g(s, \theta) = \sqrt{(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2} \quad (2.47)$$

As Equações 2.46 e 2.47 são usadas para calcular a transformada de Radon em suas respectivas regiões de validade. A Figura 2.18(a) ilustra a primitiva triângulo e a Figura 2.18(b) mostra o seu sinograma correspondente.



a) Triângulo

b) Sinograma

Figura 2.18 – O triângulo e o seu sinograma correspondente

## 2.5 – Modelo de Shepp-Logan (“Head Phantom”)

Como citado por Kak (*Kak, 1989*), o cérebro pode ser considerado como uma das imagens que mais exigem precisão, flexibilidade e complexidade de um algoritmo de reconstrução. O modelo de um cérebro foi idealizado por Shepp-Logan (*Shepp e Logan, 1974*) e é frequentemente utilizado para testar a precisão dos algoritmos de reconstrução. Esse modelo é baseado em um conjunto de 10 elipses. Os parâmetros dessas elipses são descritos na Tabela 2.2. O parâmetro **A** das elipses não equivale exatamente àquele do modelo original. Esta escolha foi realizada com o objetivo de obter um melhor contraste na imagem (*Toft, 1996*). O termo “*phantom*” designa uma imagem sintética.

Tabela 2.2 – Parâmetros para o modelo de Shepp-Logan

A	a	b	$x_o$	$y_o$	$\alpha$
1.0	0.69	0.92	0.0	0.0	0°
-0.8	0.6624	0.874	0.0	-0.0184	0°
-0.2	0.11	0.31	0.22	0.0	-18°
-0.2	0.16	0.41	-0.22	0.0	18°
0.1	0.21	0.25	0.0	0.35	0°
0.1	0.046	0.046	0.0	0.1	0°
0.1	0.046	0.046	0.0	-0.1	0°
0.1	0.046	0.023	-0.08	-0.605	0°
0.1	0.023	0.023	0.0	-0.606	0°
0.1	0.023	0.046	0.06	-0.605	0°

Uma vantagem de se usar uma imagem como a do modelo de Shepp-Logan para simulação em computador é que pode-se ter expressões analíticas para a projeção ou transformada de Radon (*Kak, 1989*). A projeção da imagem composta por um número de elipses é simplesmente a soma das projeções de cada uma das elipses. Isto é devido à linearidade da transformada de Radon. A seguir é apresentada a expressão analítica para as projeções de uma elipse.

Seja  $f(x, y)$  como mostrado na Figura 2.19:

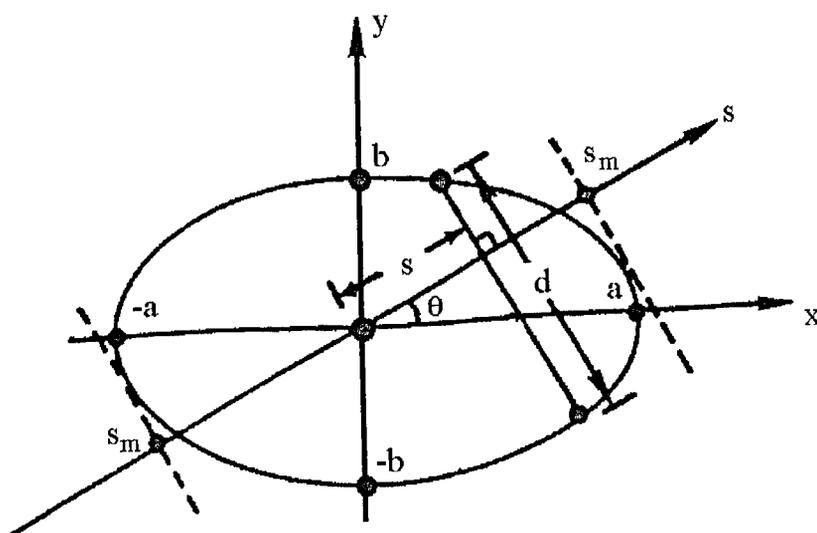


Figura 2.19 – Elipse e seus parâmetros relevantes

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 & (\text{dentro da elipse}) \\ 0, & \text{outros} & (\text{fora da elipse}) \end{cases} \quad (2.48)$$

Para calcular a transformada de Radon da elipse descrita acima, basta calcular a integral de linha para o segmento **d** na Figura 2.19.

A equação da reta na Figura 2.7 é:

$$x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0 \quad (2.49)$$

A equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.50)$$

ou

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (2.51)$$

Da Equação 2.49, tem-se:

$$y = \frac{s - x \cos \theta}{\sin \theta} \quad (2.52)$$

Substituindo a Equação 2.50 na Equação 2.49, tem-se que:

$$b^2 x^2 + \frac{a^2}{\sin^2 \theta} (s - x \cos \theta)^2 = a^2 b^2 \quad (2.53)$$

$$x^2 (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) - 2 a^2 s \cos \theta x + a^2 b^2 \sin^2 \theta - a^2 s^2 \quad (2.54)$$

Chamando  $b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta = K$ , tem-se que:

$$K x^2 - 2 a^2 s \operatorname{cos} \theta x - (a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \theta - a^2 s^2) = 0 \quad (2.55)$$

Resolvendo a Equação 2.55 para  $x$ , tem-se que:

$$x = \frac{a^2 s \operatorname{cos} \theta \pm \sqrt{a^4 s^2 \operatorname{cos}^2 \theta + K a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \theta - K a^2 s^2}}{K} \quad (2.56)$$

$$x = \frac{V \pm W}{K}; \quad x_1 = \frac{V + W}{K} \quad x_2 = \frac{V - W}{K} \quad (2.57)$$

onde :

$$W = \sqrt{a^4 s^2 \operatorname{cos}^2 \theta + K a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \theta - K a^2 s^2} = a b \operatorname{sen} \theta \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos} \theta} \quad (2.58)$$

$$\text{Para } x_1 = \frac{V + W}{K}$$

Substituindo  $x_1$  na Equação 2.52, tem-se que:

$$y_1 = \frac{s - x_1 \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{s - (V + W) / K \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad (2.59)$$

$$\text{Para } x_2 = \frac{V - W}{K}$$

Substituindo  $x_2$  na Equação 2.53, tem-se que:

$$y_2 = \frac{s - x_2 \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{s - (V - W) / K \cos \theta}{\sin \theta} \quad (2.60)$$

*Cálculo dos pontos de interseção da reta com a elipse ( $u_2$  e  $u_1$ )*

Lembrado que:  $u = y \cos \theta - x \sin \theta$ .

Assim:

$$u_1 = \frac{s - (V + W) / K \cos \theta}{\sin \theta} \cos \theta - \frac{V + W}{K} \sin \theta \quad (2.61)$$

$$u_2 = \frac{s - (V - W) / K \cos \theta}{\sin \theta} \cos \theta - \frac{V - W}{K} \sin \theta \quad (2.62)$$

Integrando para os limites  $u_1$  e  $u_2$ :

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du = \int_{u_1}^{u_2} A du = A (u_2 - u_1) \quad (2.63)$$

$$g(s, \theta) = A \left( \frac{2W \cos^2 \theta}{K \sin \theta} + \frac{2W \sin \theta}{K} \right) = \frac{2W}{K} \left( \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \sin \theta \right) \quad (2.64)$$

$$g(s, \theta) = \frac{A2W}{K \sin \theta} \quad (2.65)$$

Mas  $W = ab \operatorname{sen} \theta \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta - s^2}$

$$K = b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta \quad (2.66)$$

$$g(s, \theta) = \frac{2A}{(b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta) \operatorname{sen} \theta} ab \operatorname{sen} \theta \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta - s^2} \quad (2.67)$$

$$g(s, \theta) = \frac{2Aab \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta - s^2}}{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta} \quad (2.68)$$

$$g(s, \theta) = \frac{2ab \sqrt{s_m^2 - s^2}}{s_m^2} \quad (2.69)$$

Sabendo-se que :  $s_m^2 - s^2 \geq 0 \Rightarrow s^2 \leq s_m^2 \Rightarrow |s| \leq s_m$ , tem-se:

$$g(s, \theta) = \begin{cases} \frac{2Aab \sqrt{s_m^2 - s^2}}{s_m^2} & , |s| < s_m \\ 0 & , |s| \geq s_m \end{cases} \quad (2.70)$$

onde:

$$s_m^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \operatorname{cos}^2 \theta .$$

Quando a elipse com centro em  $(x_1, y_1)$  é rotacionada de um ângulo  $\alpha$ , conforme ilustra a Figura 2.20, as propriedades de deslocamento e rotação são utilizadas, e a transformada Radon

da nova elipse, deslocada e rotacionada, é descrita por :

$$g(s, \theta) = \begin{cases} \frac{2 A a b \sqrt{s_m^2 - (s - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2}}{s_m^2} & , |s - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta| < s_m \\ 0 & , \text{outros} \end{cases} \quad (2.71)$$

onde :

$$s_m = a^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 \sin^2(\theta - \alpha).$$

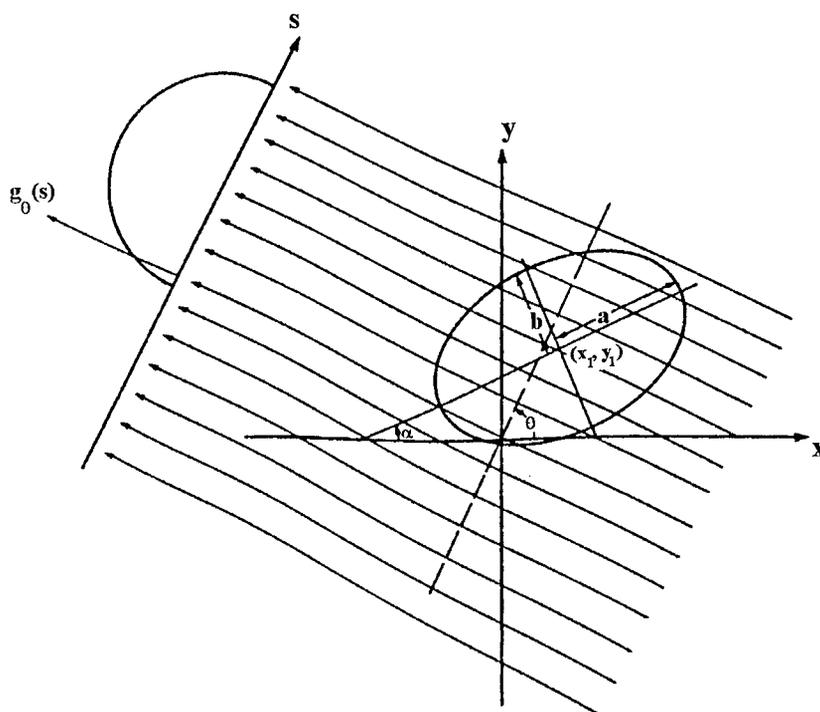


Figura 2.20 – Elipse com centro em  $(x_1, y_1)$  e o eixo maior rotacionado de  $\alpha$

A Figura 2.21(a) ilustra a imagem do modelo de Shepp-Logan e a Figura 2.21(b) mostra o seu correspondente sinograma .

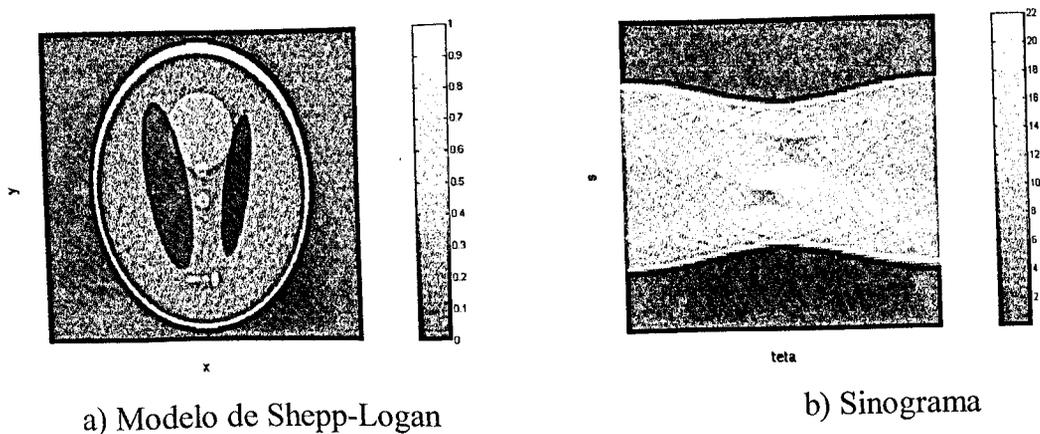


Figura 2.21 – Modelo de Shepp-Logan e o seu sinograma correspondente

## 2.6 – Aproximação Discreta da Transformada de Radon

O cálculo analítico da transformada de Radon de uma função  $f$ , geralmente não é fácil de ser realizado e nem sempre a forma analítica de  $f$  é conhecida.

Basicamente, o número de projeções ( $T$ ) deveria ser aproximadamente igual ao número de raios ( $R$ ) em cada projeção. Porém na prática isto não acontece levando a uma insuficiência de dados, devido a subamostragem da projeção ou devido ter tomado um número muito pequeno de projeções. Esta insuficiência de dados, provoca artefatos “aliasing” tais como o fenômeno de Gibbs, raias ( $T$  muito pequeno) e figuras de Moiré (resolução muito pequena). A relação ideal entre  $T$  e  $R$  pode ser dada por (*Kak & Slaney, 1988*):

$$T = \frac{\pi}{2} R \quad (2.72)$$

onde:

$T$  : número de projeções.

$R$  : número de amostras por projeção.

A Equação 2.72 sugere que o número de projeções deveria ser aproximadamente igual ao número de raios por projeção .

O tipo de aproximação discreta considera uma amostragem linear de todos os parâmetros, conforme ilustra a Figura 2.22. As Equações 2.73, 2.74, 2.75 e 2.76, descrevem os parâmetros amostrados linearmente:

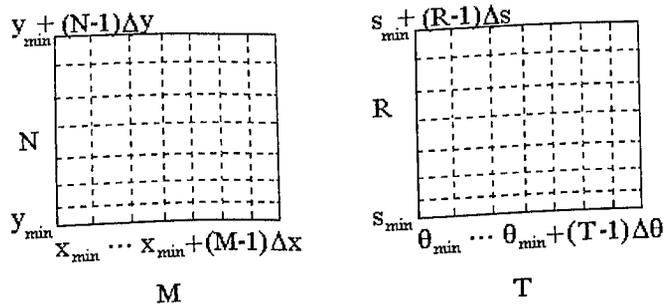


Figura 2.22 – Aproximação discreta

$$x = x_m = x_{\min} + m \Delta x, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (2.73)$$

$$y = y_n = y_{\min} + n \Delta y, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.74)$$

$$\theta = \theta_t = \theta_{\min} + t \Delta \theta, \quad t = 0, 1, \dots, T - 1 \quad (2.75)$$

$$s = s_r = s_{\min} + s \Delta s, \quad s = 0, 1, \dots, R - 1 \quad (2.76)$$

onde:

$M$  - Número de amostras na direção  $x$ .

$N$  - Número de amostras na direção  $y$ .

$T$  - Número de amostras do ângulo  $\theta$ .

$R$  - Número de amostras na direção  $s$ .

Considerando que a imagem seja quadrada:

$$\Delta x = \Delta y \quad (2.77)$$

$$M = N \quad (2.78)$$

Desse modo, os parâmetros são simétricos em relação a zero:

$$x_{\min} = -x_{\max} = -\frac{(M-1)}{2} \Delta x \quad (2.79)$$

$$y_{\min} = x_{\min} = -y_{\max} = -\frac{(M-1)}{2} \Delta x \quad (2.80)$$

$$s_{\min} = -s_{\max} = -\frac{(R-1)}{2} \Delta s \quad (2.81)$$

O segundo tipo de aproximação, considera uma amostragem angular, o ângulo inicial pode ser escolhido como:

$$\theta_{\min} = 0 \quad (2.82)$$

e o intervalo de amostragem deve considerar um faixa igual a  $\pi$ , isto é,

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{T} \quad (2.83)$$

A transformada de Radon discreta pode ser aproximada pela Equação 2.9:

$$g(s_r, \theta_t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s_r \cos\theta_t - u \operatorname{sen}\theta_t, s_r \operatorname{sen}\theta_t + u \cos\theta_t) du \quad (2.84)$$

$$\hat{g}(s, \theta) \approx \Delta u \sum_{j=0}^{J-1} f(s_r \cos\theta_t - u_j \operatorname{sen}\theta_t, s_r \operatorname{sen}\theta_t + u_j \cos\theta_t)$$

onde:

$\hat{g}(s, \theta)$  : aproximação de  $g(s, \theta)$ .

$u_j$  : amostragem linear da variável  $u$  como realizado nas Equações 2.72 a 2.76.

A seguir é descrito dois modos de realizar o cálculo das projeções:

### Primeiro Modo

*para todos pontos  $(x, y)$*

*para todo  $(s, \theta)$  tal que  $x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta = s$*

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \mathcal{R}f(s, \theta) + f(x, y)$$

*fim*

*fim*

## Segundo Modo

para todos pontos  $(s, \theta)$

para todo  $(x, y)$  tal que  $x \cos \theta + y \sin \theta = s$

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \mathcal{R}f(s, \theta) + f(x, y)$$

fim

fim

A diferença entre o primeiro modo e o segundo modo está na ordem de indexação. De acordo com o segundo modo, no laço mais interno todos pontos de contribuição em  $f$  são somados a  $\mathcal{R}f(s, \theta)$ . Por outro lado, no laço mais interno do primeiro modo para cada ponto  $f(x, y)$  todos pontos em  $\mathcal{R}f$  são considerados e incrementados a  $f(x, y)$ .

A matriz de projeção tem suas colunas como a projeção para um dado ângulo  $\theta$  como ilustra a Figura 2.23:

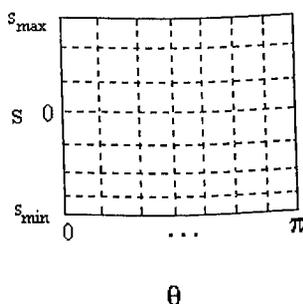


Figura 2.23 - Matriz de projeções

Comparando qualitativamente o cálculo da transformada de Radon analítica, utilizando as Figuras 2.14(b), 2.16(b), 2.18(b) e 2.21(b), com a aproximação discreta da transformada de Radon, utilizando as Figuras 2.24 a 2.27, pode-se verificar que são aproximadamente iguais.

As Figuras 2.24, 2.25, 2.26 e 2.27 mostram a aproximação discreta da transformada de Radon para o círculo, quadrado, triângulo e Shepp-Logan, respectivamente.

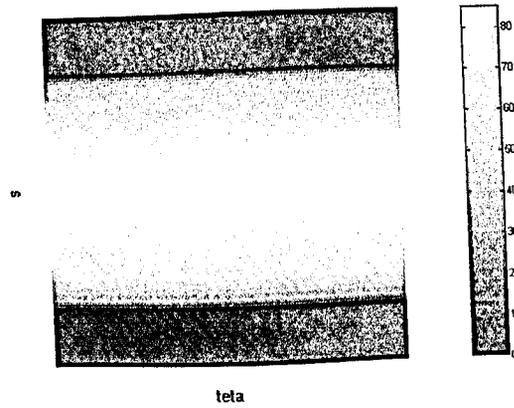


Figura 2.24 – Aproximação discreta da transformada de Radon do Círculo

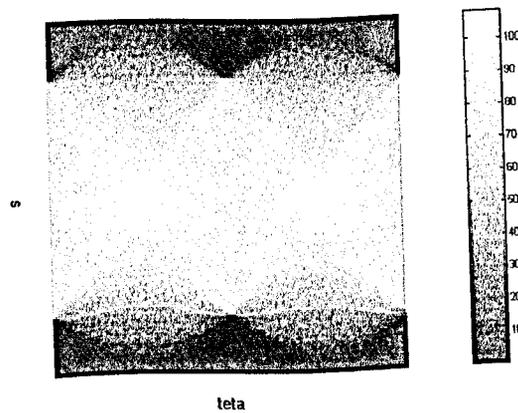


Figura 2.25 - Aproximação discreta da transformada de Radon do Quadrado

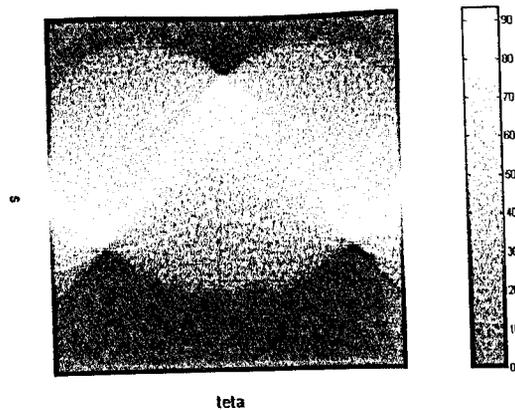


Figura 2.26 - Aproximação discreta da transformada de Radon do Triângulo

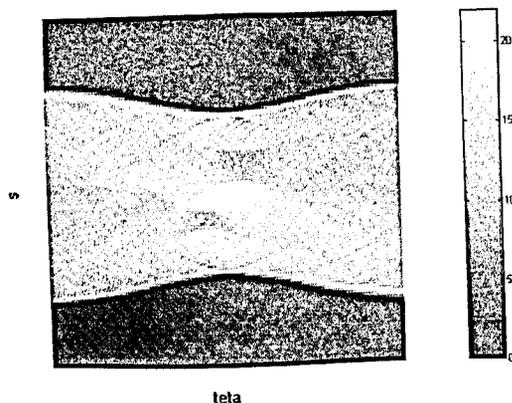


Figura 2.27 – Aproximação discreta da transformada do modelo de Shepp-Logan

## 2.7 – Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma descrição matemática da transformada de Radon e suas propriedades básicas. Foram mostrados o método analítico e a aproximação discreta da transformada de Radon. Uma análise comparativa desses métodos mostrou que ambos são equivalentes.

O modelo de Shepp-Logan foi apresentado para ser utilizada como um modelo básico para a análise da precisão dos algoritmos de reconstrução de imagens em capítulos posteriores deste trabalho.

## CAPÍTULO III

### MÉTODO DA RETROPROJEÇÃO

O objetivo deste capítulo é responder a pergunta “*A Retroprojeção pode ser usada como um método para reconstruir imagens a partir de suas projeções?*”.

Este capítulo mostra a classificação dos algoritmos de reconstrução de imagens mais utilizados. É descrito o método da Retroprojeção e são realizados testes para verificar o desempenho desse método. Finalmente são feitas as conclusões a respeito dos testes realizados.

#### 3.1 – Introdução

Os primeiros métodos de reconstrução de imagem foram desenvolvidos inicialmente, por Bracewell em 1956, para uso em radioastronomia com o propósito de identificar regiões do sol que emitiam radiações na faixa de microondas. Posteriormente, outros métodos continuaram a ser aplicados em radioastronomia. Outros métodos de reconstrução foram também desenvolvidos independentemente para aplicações em ótica (*Brooks & Di Chiro, 1976*).

Em aplicações médicas, as primeiras tentativas em reconstrução de imagem usavam variações de Retroprojeção (“Backprojection”) e produziam imagens de baixa nitidez (embaçadas). Um passo significativo foi dado por Cormak em 1964 (*Cormak, 1964*) que desenvolveu uma técnica

para reconstruir com boa precisão imagens a partir de projeções obtidas com raios X. Os primeiros estudos de Cormak foram realizados na Universidade de Cape Town na África do Sul em 1957. Outros pesquisadores desenvolveram métodos para tomografia reconstitutiva, antes do tomógrafo da empresa EMI em 1972, dentre esses pesquisadores pode-se citar: Tretiak, Eden e Simon em 1969 e Bates e Peters em 1971 (*Brooks & Di Chiro, 1976*).

### **3.2 – Classificação dos Métodos de Reconstrução**

Várias abordagens matemáticas têm sido utilizadas na reconstrução de imagem. Neste trabalho serão descritos somente os métodos utilizados em aplicações médicas. Abaixo descreve-se cada um desses métodos :

#### ***Método da Retroprojeção***

A Retroprojeção (“Backprojection”) é o método de reconstrução mais simples conceitualmente porém produz imagens de baixa qualidade. Este método é abordado neste trabalho, não somente devido à sua importância histórica, mas devido à sua importância no entendimento dos demais métodos de reconstrução. Neste trabalho considera-se que a palavra retroprojeção escrita com a letra r minúscula como um processo de retroprojetar e a palavra escrita com a letra R maiúscula como um método de reconstrução.

#### ***Método da Reconstrução Iterativa***

Neste método é empregado um processo iterativo para a obtenção da imagem. Ele foi empregado por Hounsfield no tomógrafo original da EMI.

## ***Método da Reconstrução Analítica***

Os métodos analíticos são baseados nas soluções exatas das equações da imagem. Um deles, a Retroprojeção filtrada (“Filtered Backprojection”), é utilizado atualmente na maior parte dos equipamentos de tomografia computadorizada comerciais.

### **3.3 – Método da Retroprojeção**

#### **3.3.1 – Introdução**

O método da Retroprojeção é também conhecido como Moiré ou algoritmo do somatório. Ele é o mais simples e também o mais impreciso dos métodos de reconstrução. Esta técnica foi utilizada pela primeira vez pelo Dr. Kuhl (*Brooks & Di Chiro, 1976*), no início dos anos 60, para produzir as primeiras imagens de uma seção transversal de um objeto. Um entendimento dos princípios básicos da Retroprojeção é essencial para entender todos os outros métodos de reconstrução.

O algoritmo inicia com uma matriz de reconstrução nula, ou seja, todos os elementos dessa matriz são iguais a zero. A primeira projeção é obtida da matriz de projeção e cada valor é *retroprojetado* na matriz de reconstrução. Isto é, cada pixel (elemento da matriz) na matriz de reconstrução que fica ao longo de um dado raio recebe um valor igual ao valor do raio-soma. Em seguida, todas as outras projeções são lidas uma de cada vez, retroprojetadas, e somadas aos valores que já estão na matriz de reconstrução. Cada projeção é retroprojetada no mesmo ângulo no qual o dado original foi obtido.

A Figura 3.1 ilustra o princípio básico do método da Retroprojeção para um objeto muito simples, um ponto, sendo sua densidade igual a 1 e a Retroprojeção para 2 projeções do objeto original.

*duas projeções do objeto original*      *primeira Retroprojeção*      *segunda Retroprojeção*

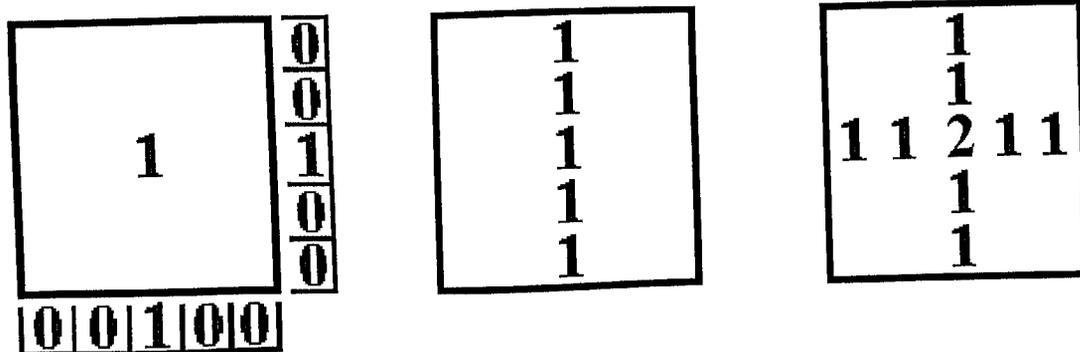


Figura 3.1 – Método da Retroprojeção para um ponto

### 3.3.2 - Descrição do Método

A Figura 3.2 mostra um objeto retangular utilizado como exemplo para explicar o método da Retroprojeção. A reconstrução é realizada retroprojetando cada perfil (projeção) no plano da imagem, isto é, a intensidade de cada *raio-soma* é aplicada sobre todos os pontos por onde passa o raio..

*duas projeções do objeto original*      *primeira Retroprojeção*      *segunda Retroprojeção*

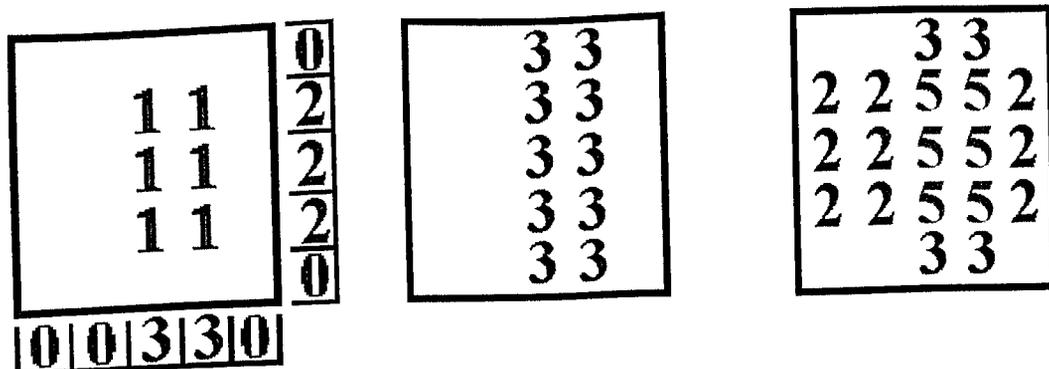


Figura 3.2 – Método da Retroprojeção

Como um outro exemplo do processo de obtenção das projeções e em seguida a sua reconstrução, é utilizada a imagem ilustrada na Figura 3.3 e a sua primeira projeção.

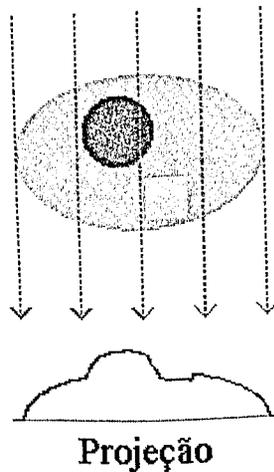


Figura 3.3 – Obtenção de uma projeção

Sendo a projeção um perfil unidimensional da atenuação do feixe de raios X passando através do objeto, várias projeções podem ser obtidas a partir de diferentes ângulos ao redor do objeto. A Figura 3.4 ilustra um conjunto de projeções para oito ângulos diferentes.

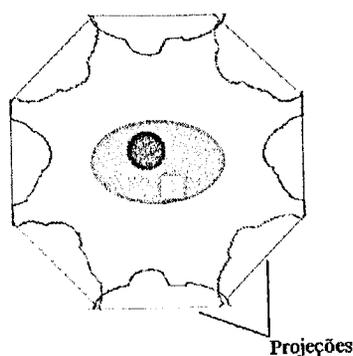


Figura 3.4 – 8 projeções de um objeto

A Figura 3.5 mostra a correspondência entre a projeção e o sinograma para 3 ângulos diferentes.

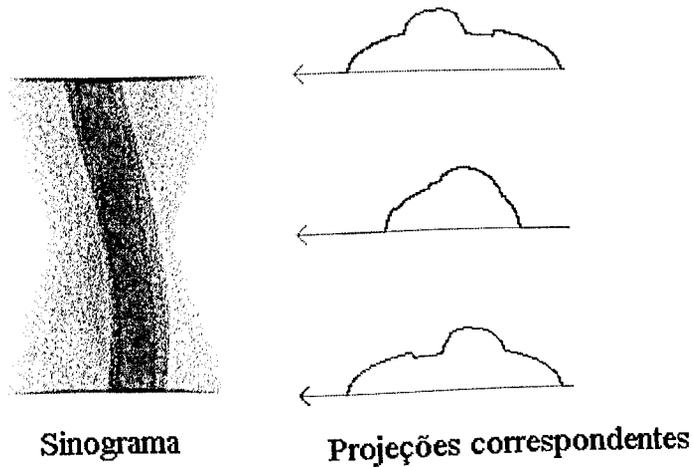


Figura 3.5 – Sinograma e as três projeções correspondentes

Uma vez que as projeções foram obtidas, a tarefa agora é reconstruir a imagem que originou essas projeções. O processo da Retroprojeção é ilustrado na Figura 3.6 para uma projeção.

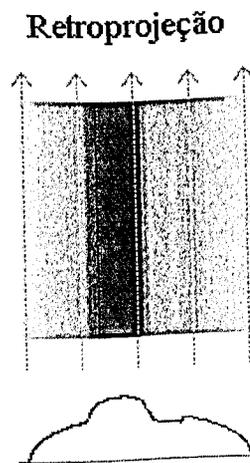


Figura 3.6 – Retroprojeção usando uma projeção

Se a Retroprojeção é realizada usando duas projeções, noventa graus de diferença, obtém-se a imagem reconstruída ilustrada na Figura 3.7. Pode-se verificar com isso que a reconstrução do objeto inicia-se.

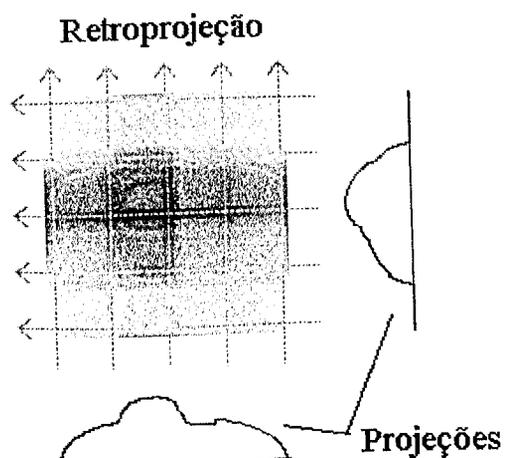


Figura 3.7 – Retroprojção de duas projeções

A Figura 3.8 mostra a reconstrução para quatro retroprojeções. Pode-se verificar que a imagem está começando a se aproximar da original.

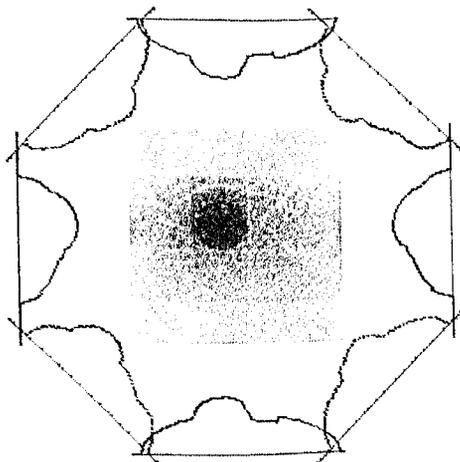


Imagem retroprojetada e Projeções

Figura 3.8 – Imagem reconstruída usando 8 projeções

O processo de reconstrução pode ser descrito pela equação:

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{j=1}^m g(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j, \theta) \Delta\theta \quad (3.1)$$

onde:

$\theta_j$  :  $j$ -ésimo ângulo de projeção.

$\Delta\theta$  : distância angular entre as projeções ( $\Delta\theta = \pi / m$ ).

O somatório é realizado para todas  $m$ 's projeções. O símbolo  $\hat{f}(x, y)$  é usado para enfatizar que os valores encontrados pela Equação 3.1 não são equivalentes a  $f(x, y)$ , sendo  $\hat{f}(x, y)$  apenas uma estimativa (aproximação) para  $f(x, y)$ .

Pode-se verificar que o termo  $x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j$  seleciona os raios (linhas) que passam pelo ponto  $(x, y)$ , conforme a Equação 2.7 do Capítulo II deste trabalho, de tal modo que a intensidade retroprojetada em cada ponto seja simplesmente a soma de todo raio-soma passando pelo ponto. Por essa razão, o método da Retroprojeção é conhecido como o método do somatório.

Deve-se observar que os valores de  $x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j$ , na Equação 3.1, podem não corresponder a um dos valores de  $s$  para o qual  $g(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j, \theta)$  é determinado. Entretanto, o  $g$  para tal  $s$  pode ser aproximado por uma interpolação.

A Retroprojeção não produz uma imagem reconstruída com boa precisão porque cada raio-soma é aplicado não somente aos pontos com alta intensidade, mas em todos os pontos ao longo do raio, conforme ilustra a Figura 3.9(a). Este problema é mais acentuado em áreas discretas de baixa intensidade produzindo um objeto em forma de estrela na imagem reconstruída como mostra a Figura 3.9(b).

Se muitas projeções são utilizadas, raios individuais da estrela tendem a desaparecer, porém

provocando um clareamento generalizado do fundo da imagem. Várias modificações no intuito de atenuar ou eliminar essas dificuldades foram realizadas, por exemplo, Muehlechner e Wetzel (1971) diminuíram parcialmente a forma de estrela, procurando os pontos de baixa intensidade, e calculando a forma de estrela correspondente e subtraindo sua forma da imagem.

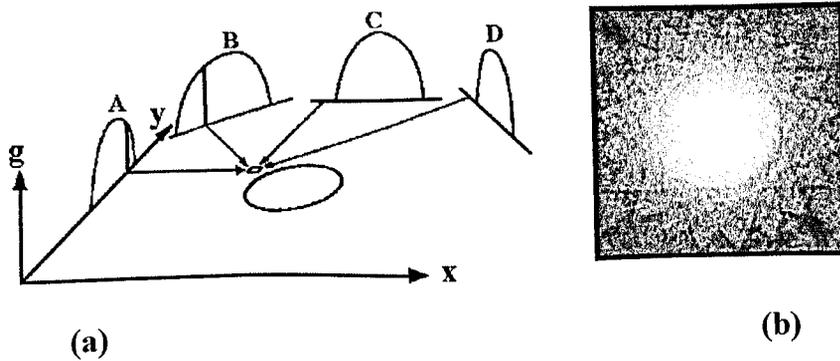


Figura 3.9 – Retroprojeção de um círculo

### 3.3.3 - Modelagem matemática

O operador Retroprojeção  $\mathcal{B}$ , associado com a transformada de Radon, é definido como:

$$b(x, y) = \mathcal{B}g = \int_0^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (3.2)$$

onde  $b(x, y)$  é a retroprojeção de  $g(s, \theta)$ . Em coordenadas polares, a equação 3.2 pode ser escrita como:

$$b(x, y) = b_p(r, \phi) = \int_0^{\pi} g(r \cos(\theta - \phi), \theta) d\theta \quad (3.3)$$

A Retroprojeção representa o somatório dos raios-soma de todos os raios que passam pelo

ponto  $(x, y)$  ou  $(r, \phi)$ . Por exemplo, se:

$$g(s, \theta) = g_1(s) \delta(\theta - \theta_1) + g_2(s) \delta(\theta - \theta_2) \quad (3.4)$$

Então, tem-se somente duas projeções, como mostrado na Figura 3.10, ou:

$$b_p(r, \phi) = g_1(s_1) + g_2(s_2) \quad (3.5)$$

onde:

$$s_1 = r \cos(\theta_1 - \phi) \quad (3.6)$$

$$s_2 = r \cos(\theta_2 - \phi)$$

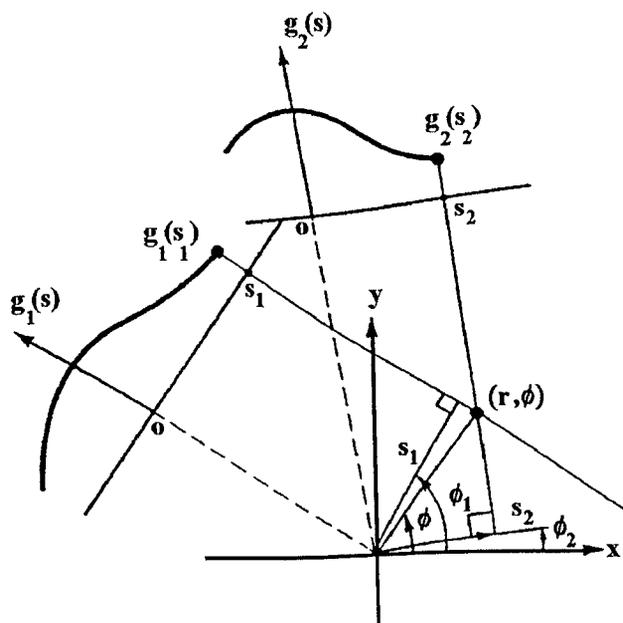


Figura 3.10 – Retroprojeção de  $g_1(s)$  e  $g_2(s)$  em coordenadas polares  $(r, \phi)$

Em geral, para um ponto  $(x, y)$  ou  $(r, \phi)$ , o valor da retroprojeção  $Bg$  é calculado pela

integração de  $g(s, \theta)$  em  $\theta$  para todas linhas que passam através deste ponto. Das Equações 2.13 e 3.3 deste trabalho, a Retroprojeção em coordenadas  $(r, \phi)$  é também a integral de  $g(s, \theta)$  da senoide  $s = r \cos(\theta - \phi)$  no plano  $(s, \theta)$ , conforme mostrado na Figura 2.5 do Capítulo II deste trabalho.

A transformada de Radon retroprojetada é dada por:

$$\hat{f}(x, y) = \mathcal{B}g = \mathcal{B}\mathcal{R}f \quad (3.7)$$

A transformada de Radon pode ser entendida como sendo a imagem de  $f(x, y)$  embaçada pela função PSF ("Point Spread Function")  $1/(x^2 + y^2)^{1/2}$  (Jain, 1989), ou seja,

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) \otimes (x^2 + y^2)^{-1/2} \quad (3.8)$$

onde  $\otimes$  é a convolução bidimensional em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares tem-se que:

$$\hat{f}_p(r, \phi) = f_p(r, \phi) \otimes \frac{1}{|r|} \quad (3.9)$$

Portanto, o operador Retroprojeção  $\mathcal{B}$  não é a inversa de  $\mathcal{R}$ , mas a adjunta de  $\mathcal{R}$  (Jain, 1989).

A transformada inversa de Radon é definida como:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial g(s, \theta) / \partial s}{x \cos \theta + y \sin \theta - s} ds d\theta \quad (3.10)$$

Da Equação 3.10 pode-se afirmar que é possível obter a função original  $f(x, y)$  se todas as suas projeções  $g(s, \theta)$  são conhecidas. Uma implementação em computador digital da Equação 3.10 encontra dificuldades desde que o denominador é zero para  $s = x \cos \theta + y \sin \theta$ .

A transformada inversa de Radon  $\mathcal{R}^{-1}$ , de uma função  $g$  de duas variáveis pode ser calculada pela seqüência de operações descritas a seguir (*Herman, 1980*):

- a) Calcular a derivada parcial da função  $g$  em relação à sua primeira variável obtendo uma nova função;
- b) Calcular a transformada de Hilbert  $\mathcal{H}$  da nova função obtida em (a) em relação à sua primeira variável obtendo uma outra função;
- c) Retroprojetar a função obtida em (b);
- d) Normalizar a função resultante, isto é, multiplicá-la por  $-\frac{1}{2\pi}$ .

Matematicamente tem-se:

$$\mathcal{R}^{-1} = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{B} \mathcal{H} \mathcal{D} \quad (3.11)$$

onde:

$\mathcal{B}$  : operador Retroprojeção.

$\mathcal{H}$  : transformada de Hilbert.

$\mathcal{D}$  : derivada parcial.

$-\frac{1}{2\pi}$  : fator de normalização.

Utilizar somente a Retroprojeção para reconstrução tem pouca aplicação uma vez que a fórmula inversa de Radon não é obedecida, produzindo imagens embaçadas.

A operação  $\hat{f} = \mathcal{B}\mathcal{R}f$  é o algoritmo do somatório, conforme ilustra a Figura 3.11. Para um conjunto de pequenos objetos isolados com um número pequeno de projeções, este método produz imagens reconstruídas com objetos em forma de estrela o que degrada a qualidade da imagem, como ilustrado na Figura 3.9(b) (Jain, 1989).

Pode-se concluir que as duas operações *projeção* e *Retroprojeção* realizadas em seqüência não resultam na função original  $f$  mas em uma outra função  $\hat{f}$  de modo que:

$$\hat{f} = \mathcal{B}\mathcal{R}f \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \neq \mathcal{R}^{-1} \quad (3.12)$$

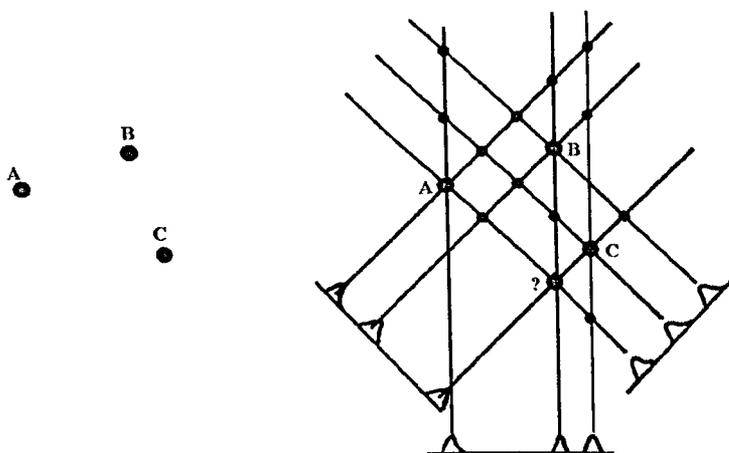


Figura 3.11 – Algoritmo do somatório

### 3.3.4 – Implementação do algoritmo da Retroprojeção

O algoritmo da Retroprojeção pode ser resumido como segue:

*Para todo ponto  $(x, y)$*

*Para todo  $(s, \theta)$  tal que  $x \cos \theta + y \sin \theta = s$*

$$\hat{f}(x, y) = \hat{f}(x, y) + \mathcal{R}f(s, \theta)$$

*Fim*

*Fim*

Ou

*Para todo ponto  $(s, \theta)$*

*Para todo  $(x, y)$  tal que  $x \cos \theta + y \sin \theta = s$*

$$\hat{f}(x, y) = \hat{f}(x, y) + \mathcal{R}f(s, \theta)$$

*Fim*

*Fim*

### 3.4 – Resultados Obtidos

As Figuras 3.12 a 3.15 mostram a imagem original e as imagens reconstruídas para 10, 30 e 60 projeções, para quatro imagens diferentes: um círculo, um triângulo, o logotipo da UFU (Universidade Federal de Uberlândia) e o modelo de Shepp-Logan. Para o círculo e o triângulo, mostrados nas Figuras 3.12 e 3.13 respectivamente, são figuras geométricas simples, com apenas 10 projeções já é possível obter uma aproximação razoável da imagem original. Para essas 2 imagens, a variação da densidade na imagem original não existe, possuindo ambas as figuras apenas uma densidade, mesmo assim, pode-se verificar o aparecimento do clareamento de fundo nas imagens a medida que se aumenta o número de projeções.

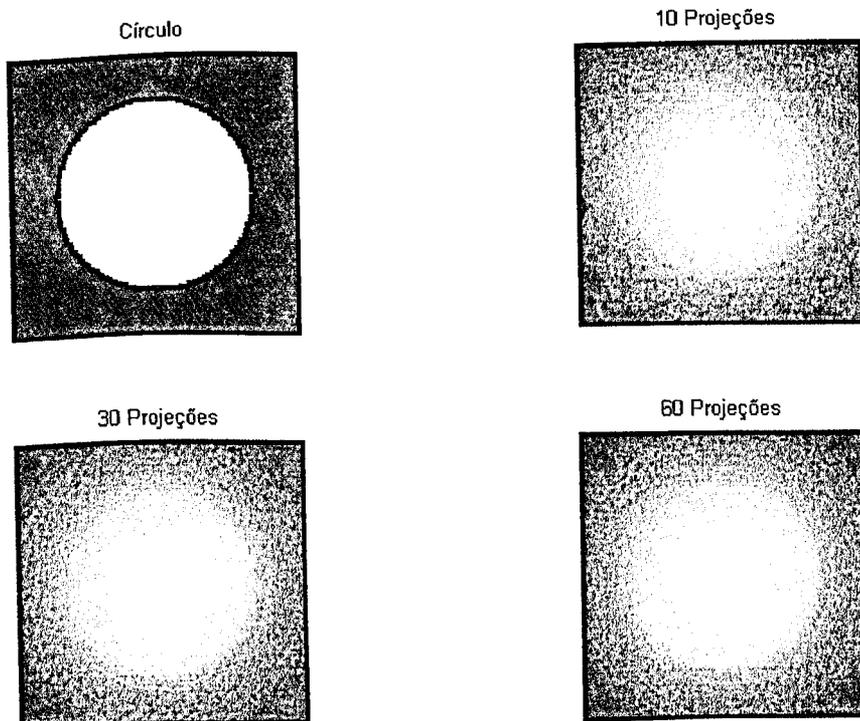


Figura 3.12 – Reconstruções do Círculo para 10, 30 e 60 projeções

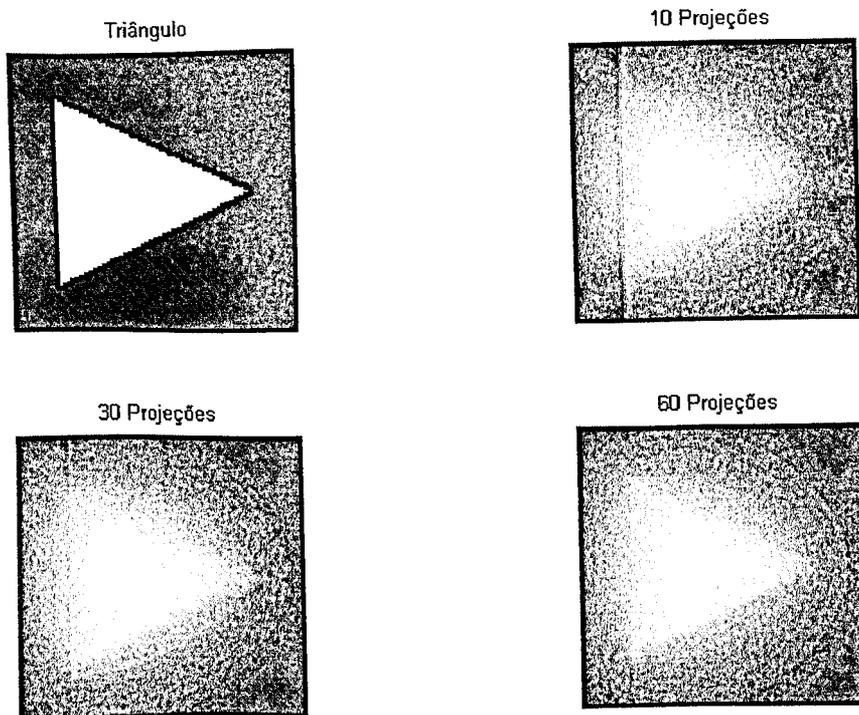


Figura 3.13 - Reconstruções do Triângulo para 10, 30 e 60 projeções

As Figuras 3.14 e 3.15 mostram as reconstruções do modelo de Shepp-Logan e do logotipo da UFU. Pode-se verificar que com o aumento do número de projeções, não existe um melhoramento qualitativo no processo de reconstrução. Pode-se concluir desses testes que o algoritmo da Retroprojeção não é capaz de reconstruir imagens com relativa complexidade.

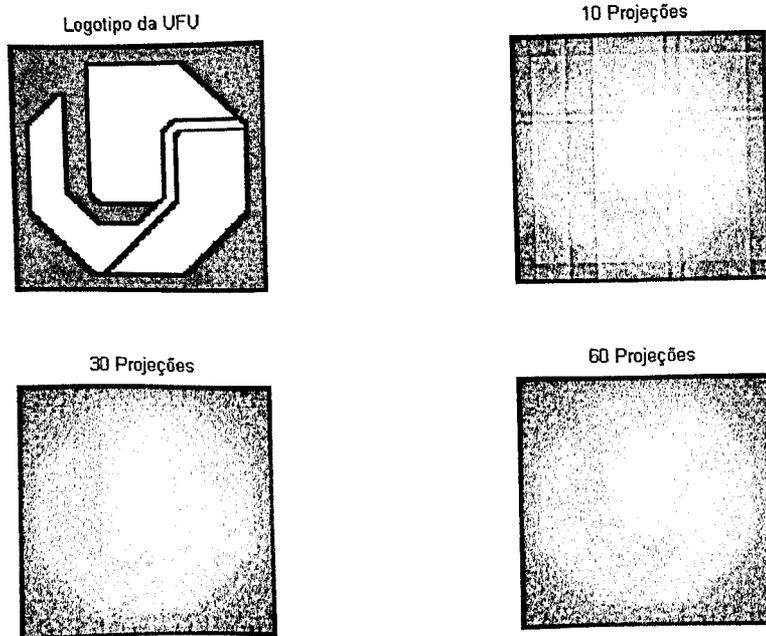


Figura 3.14 - Reconstruções do Logotipo da UFU para 10, 30 e 60 projeções

A imagem original do logotipo da UFU, ilustrada na Figura 3.14, tem uma variação um pouco maior que a imagem original do círculo e do triângulo, o que leva a uma imagem reconstruída de má qualidade, mesmo utilizando-se 60 projeções.

A imagem do modelo de Shepp-Logan, mostrada na Figura 3.15, possui uma grande variação de densidade, neste caso, o método de Retroprojeção é extremamente ineficiente para se obter uma imagem reconstruída do ponto de vista qualitativo e de qualidade razoável. O problema do clareamento do fundo da imagem, inerente ao método, leva a uma imagem reconstruída bem diferente da imagem original

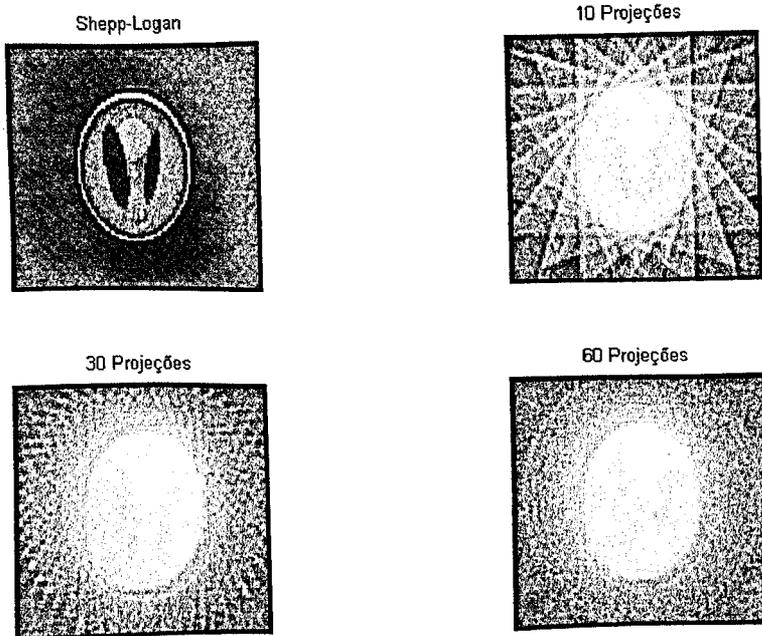


Figura 3.15 - Reconstruções do modelo de Shepp-Logan para 10, 30 e 60 projeções

A projeção seguida de uma Retroprojeção é uma operação que realiza algum tipo de filtragem passa-baixa da imagem, como pode ser observado pelos resultados obtidos na reconstrução de imagens utilizando o método da Retroprojeção.

Lembrando que a função original é denotada por  $f(x, y)$  e a imagem reconstruída com embaçamento por  $\hat{f}(x, y)$ . Desde que o objeto seja um ponto, é fácil ver que  $\hat{f}(x, y)$  não é idêntica a  $f(x, y)$  mas sim convoluída com a função de ponto de espalhamento (“PSF – Point Spread Function”) que é  $\frac{1}{|r|}$ , onde  $|r|$  é a distância radial. Assim, pode-se escrever:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{|r|} \otimes f(x, y) \quad (3.13)$$

A transformada de Fourier de  $\frac{1}{|r|}$  é  $\frac{1}{|\xi|}$ . Aplicando a transformada de Fourier na

Equação 3.13, tem-se que:

$$\hat{F}(\xi_x, \xi_y) = \frac{1}{|\xi|} F(\xi_x, \xi_y) \quad (3.14)$$

Assim, para compensar o embaçamento ocasionado pelo filtro  $1/|\xi|$ , inerente ao método da Retroprojeção, deve-se multiplicar  $\hat{F}(\xi_x, \xi_y)$  por  $|\xi|$ , o inverso de  $1/|\xi|$ . Uma possibilidade para reconstruir  $F(\xi_x, \xi_y)$  é dada por:

$$F(\xi_x, \xi_y) = |\xi| \hat{F}(\xi_x, \xi_y) \quad (3.15)$$

As funções  $1/|r|$ ,  $1/|\xi|$  e  $|\xi|$  são mostradas na Figura 3.16.

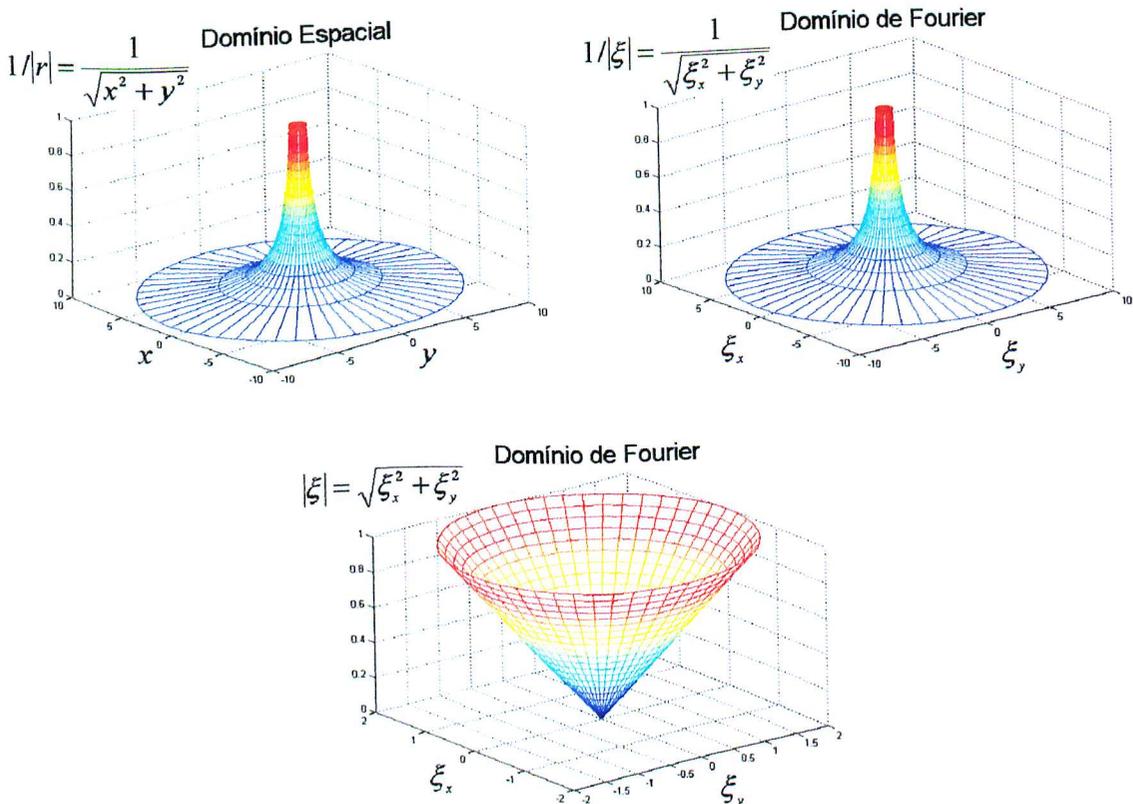


Figura 3.16 – Representação espacial de  $1/|r|$ ,  $1/|\xi|$  e  $|\xi|$

Ao invés de fazer a compensação pela filtragem no domínio de Fourier 2D como indicado pela Equação 3.15, pode-se obter o mesmo resultado pela filtragem de cada projeção pelo filtro  $|\xi|$  no domínio de Fourier ou pela convolução no domínio de Radon. As várias maneiras de filtrar serão assuntos dos próximos três capítulos.

### 3.5 - Conclusões

Este capítulo mostra a classificação dos algoritmos de reconstrução de imagens mais utilizados. É descrito o método da Retroprojeção e são realizados testes para verificar o desempenho desse método. Finalmente são feitas as conclusões a respeito dos testes realizados.

O objetivo deste capítulo foi tentar responder a pergunta “O algoritmo da Retroprojeção pode ser usado para reconstruir imagens a partir de suas projeções?”. A resposta a essa pergunta seria que a Retroprojeção pode ser usada para reconstruir uma aproximação da imagem original, apesar da fórmula inversa de Radon não ser obedecida, porém apenas como um ponto de partida. O problema do clareamento do fundo de imagem (embaçamento) mesmo com o aumento do número de projeções, praticamente inviabiliza a reconstrução de imagens que possuem alta variação de densidade (rica em altas frequências), uma vez que a operação de Retroprojeção realiza inerentemente uma filtragem passa-baixa.

## **CAPÍTULO IV**

### **MÉTODO DA RETROPROJEÇÃO FILTRADA**

O método de reconstrução utilizando a Retroprojeção filtrada (“Filtered Backprojection”) é atualmente o método de reconstrução de imagens usado em equipamentos de tomografia computadorizada.

Este capítulo descreve três variações do método de reconstrução Retroprojeção filtrada, mostra os resultados obtidos para vários testes realizados para duas das três variações e as conclusões obtidas a partir desses resultados.

#### **4.1 – Introdução**

A transformada de Fourier é um método de análise de curvas em termos de suas formas de ondas de frequências individuais. Embora a maior parte das pessoas não esteja acostumada a pensar em objetos sólidos ou mesmo em imagens bidimensionais em termos de formas de onda, isto é perfeitamente válido e freqüentemente utilizado. Pode ser demonstrado matematicamente que qualquer curva pode ser sintetizada por um somatório de uma quantidade

apropriada de ondas senoidais e cossenoidais de frequências diferentes. Se a expressão matemática para uma dada curva é conhecida, as ondas senoidais e cossenoidais necessárias para sintetizar esta curva, podem ser determinadas pela transformada de Fourier dessa expressão matemática. Se a curva de um objeto, como por exemplo uma imagem, é conhecida, a transformada de Fourier dessa imagem pode ser obtida sem a necessidade de conhecer a expressão analítica para o objeto. Se a transformada de Fourier de um objeto é conhecida, é possível reconstruir o objeto através de uma operação conhecida como a transformada inversa de Fourier.

## 4.2 – Teorema da Projeção

O ponto de partida para derivação do algoritmo de reconstrução no domínio de Fourier é a representação da função densidade como uma integral de Fourier 2D (bidimensional):

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_x, \xi_y) e^{2\pi j(\xi_x x + \xi_y y)} d\xi_x d\xi_y \quad (4.1)$$

Na Equação 4.1,  $f(x, y)$  é expressa por uma superposição de ondas senoidais, representada pela exponencial complexa cujas partes real e imaginária são funções cosseno e seno, respectivamente. Os parâmetros  $\xi_x$  e  $\xi_y$  são os números de ondas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os coeficientes de Fourier  $F(\xi_x, \xi_y)$  são calculados pela transformada de Fourier, da seguinte forma:

$$F(\xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi j(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy \quad (4.2)$$

A Equação 4.2 pode ser simplificada se os eixos  $(x, y)$  são rotacionados para novos eixos  $(s, u)$ , como ilustrado na Figura 2.7 do Capítulo II deste trabalho, onde o ângulo de rotação é dado por:

$$\theta = \text{arctg}(\xi_x / \xi_y) \quad (4.3)$$

Através de uma simples transformação geométrica, definida como:

$$\xi = (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2} \quad (4.4)$$

obtem-se:

$$F(\xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi j \xi s} ds du \quad (4.5)$$

Finalmente, mudando a ordem de integração, pode-se verificar que a integral em relação a  $u$  é exatamente o raio de projeção  $g(s, \theta)$ , como dado pela Equação 2.7 no Capítulo II deste trabalho, assim:

$$F(\xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) e^{-2\pi j \xi s} ds = G(\xi, \theta) \quad (4.6)$$

onde:

$G(\xi, \theta)$  - transformada unidimensional de Fourier (TF 1D) de  $g(s, \theta)$  em relação a  $s$ .

A Equação 4.6 é de fundamental importância no método de reconstrução utilizando a transformada inversa de Fourier bidimensional. Ela expressa que cada coeficiente de Fourier, ou amplitude da onda da função densidade é igual ao coeficiente de Fourier correspondente da projeção tomada no mesmo ângulo que a onda de Fourier. A Equação 4.6 é conhecida como *teorema da projeção* (Herman, 1980; Jain, 1989; Toft, 1996; Jacobson, 1996):

$$g(s, \theta) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\xi, \theta) \quad (4.7)$$

Da propriedade de simetria da Tabela 2.1 do Capítulo II deste trabalho, nota-se que a transformada de Fourier das projeções  $G(\xi, \theta)$  também satisfaz uma propriedade similar:

$$G(-\xi, \theta + \pi) = G(\xi, \theta) \quad (4.8)$$

Se  $f(x, y)$  possui banda limitada, então as projeções também o são. Isto vem do teorema da projeção, o qual é ilustrado na Figura 4.1.

Para uma função  $f$ , pode-se escrever:

$$\mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_2 f = \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_2^{-1} f = f \quad (4.9)$$

O teorema da projeção pode ser descrito como uma equação de operador:

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \mathcal{R} \quad (4.10)$$

Em outras palavras, calcular a transformada bidimensional de Fourier é o mesmo que calcular a transformada de Radon e em seguida calcular a transformada de Fourier em relação à primeira variável.

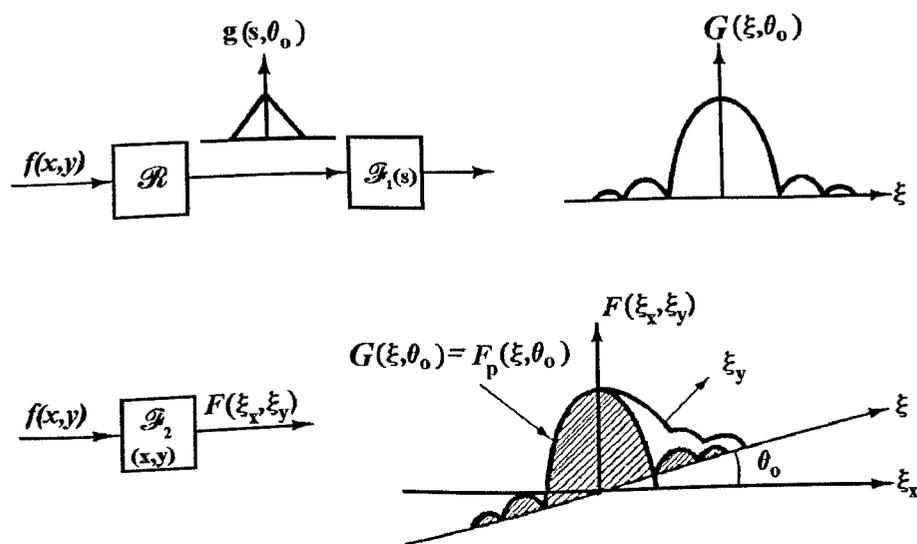


Figura 4.1 – Teorema da projeção  $G(\xi, \theta) = F_p(\xi, \theta)$

Das Equações 4.6 e 4.8, pode-se observar que para uma função,  $f$  é calculada por:

$$f = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_1 \mathcal{R} f \quad (4.11)$$

A Equação 4.11 leva a uma idealização matemática do método de reconstrução utilizando a transformada de Fourier. Para qualquer função  $g$ , representando as projeções de uma imagem, pode-se estimar esta imagem por:

$$\mathcal{R}^{-1} g = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_1 g \quad (4.12)$$

Do exposto acima, o teorema da projeção pode ser enunciado (Kak & Slaney, 1996) como:

“A transformada de Fourier de uma projeção paralela de uma imagem  $f(x,y)$  calculada em um dado ângulo  $\theta$  resulta em um “slice” da transformada de Fourier 2D,  $F(\xi_x, \xi_y)$ , subentendido um ângulo  $\theta$  com o eixo  $\xi_x$ . Em outras palavras, a transformada de Fourier de  $g_\theta(s)$  produz os valores de  $F(\xi_x, \xi_y)$  ao longo da linha  $BB$ , como ilustrado na Figura 4.2”.

A definição dada no parágrafo anterior é conhecida como **teorema “Fourier slice”** ou **teorema da Projeção**.

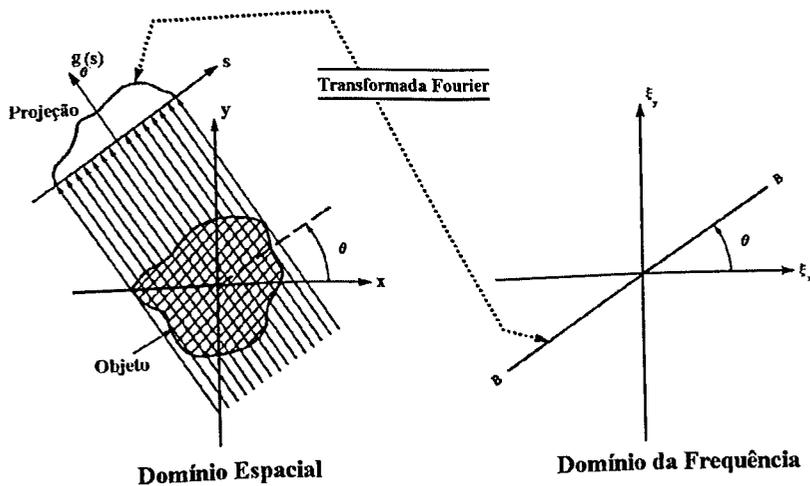


Figura 4.2 – Teorema Fourier Slice

A Equação 4.11 sugere que a retroprojeção pode ser realizada se as projeções são convenientemente modificadas, ou filtradas, antes de serem retroprojetadas. Tal abordagem é chamada de *Retroprojeção filtrada* (“Filtered Backprojection”), a Figura 4.3 ilustra a Retroprojeção filtrada de um objeto circular. Nesta figura pode-se verificar que as projeções filtradas contém componentes negativas e positivas que se cancelam quando retroprojetadas para

pontos que se encontram fora do objeto original, eliminando assim o artefato em forma de uma estrela.

Na Figura 4.3, as projeções filtradas  $\hat{g}$  são retroprojetadas para reconstruir o objeto circular original e um ponto fora do círculo recebe contribuições positivas das projeções filtradas de A e B e negativas de C e D, que se cancelam.

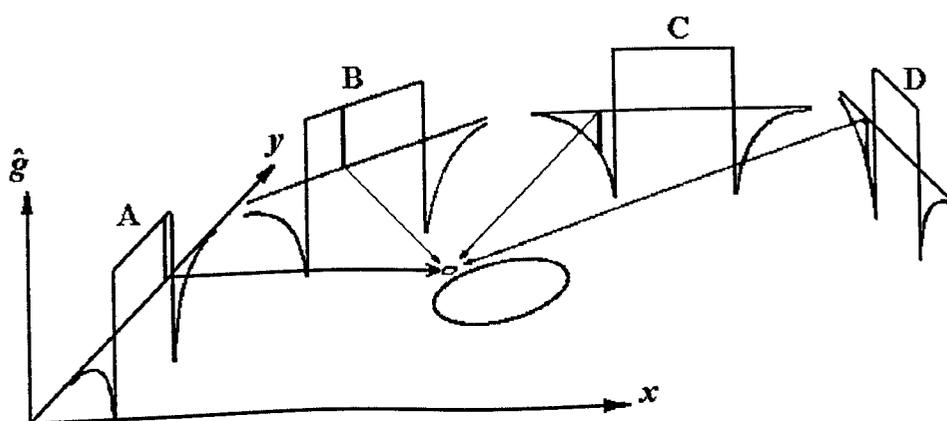


Figura 4.3 – Retroprojeção filtrada

Pode-se derivar três variações da Retroprojeção filtrada (Brooks & Di Chiro, 1976), dependendo da fórmula de filtragem utilizada. Estas variações são: filtragem de Fourier, filtragem de Radon e filtragem utilizando a convolução. A seguir descreve-se cada uma dessas variações.

### 4.3 - Filtragem no Domínio de Fourier

A expressão integral de Fourier da Equação 4.2 pode ser escrita em coordenadas polares:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_x, \xi_y) e^{2\pi j \xi (x \cos \theta + y \sin \theta)} |\xi| d\xi d\theta \quad (4.13)$$

onde  $\theta$  e  $\xi$  são encontrados pelas Equações 4.3 e 4.4. A faixa de  $\xi$  está no intervalo de  $-\infty$  a  $\infty$  de maneira que a integral mais interna é a transformada de Fourier 1D e os limites de integração para  $\theta$  são 0 e  $\pi$ . Substituindo  $F(\xi_x, \xi_y)$  por  $G(\xi, \theta)$  e utilizando-se a Equação 4.6, tem-se:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (4.14)$$

onde:

$$\hat{g}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G(\xi, \theta) e^{2\pi j \xi s} d\xi \quad (4.15)$$

Escrevendo a Equação 4.14 como uma equação de operadores, tem-se:

$$f(x, y) = \mathcal{B} \mathcal{H} g \quad (4.16)$$

onde  $\mathcal{H}$  é um filtro unidimensional cuja resposta de frequência é  $|\xi|$ , isto é,

$$\hat{g}(s, \theta) = \mathcal{H} g = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G(\xi, \theta) e^{j2\pi \xi s} ds = \mathcal{F}^{-1} \{ |\xi| [\mathcal{F} g] \} \quad (4.17)$$

Portanto:

$$f(x, y) = \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ |\xi| [\mathcal{F}_1 g] \right\} \quad (4.18)$$

A Equação 4.18 pode ser implementada filtrando as projeções no domínio de Fourier e retroprojetando a transformada inversa de Fourier do resultado. A Figura 4.4 mostra como esta equação pode ser obtida.

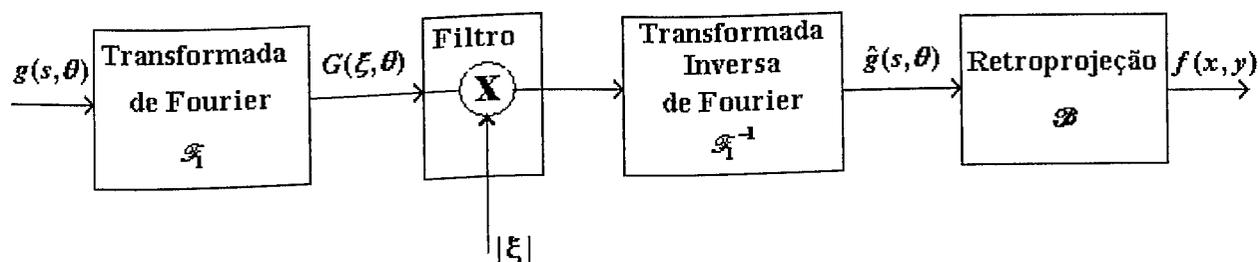


Figura 4.4 – Filtragem no domínio de Fourier

O filtro  $|\xi|$  mostrado na Figura 4.4 pode ser implementado na prática. Alguns desses filtros encontrados na literatura (Jain, 1989) são descritos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Filtros 1D de reconstrução

Filtro	Resposta de Freqüência $H(\xi)$	Resposta impulsiva $h(s)$	Resposta impulsiva discreta $\hat{h}(m) = w h(mw)$
Ram-Lak	$H_{RL} =  \xi  \text{rect}(\xi w)$	$h_{RL}(s) = \xi_m [2 \text{sinc}(2\xi_m s) - \sin^2(\xi_m s)]$	$h_{RL}(m) = \begin{cases} \frac{1}{4w}, & m = 0 \\ -\frac{\sin^2(\pi m/2)}{\pi^2 m^2 w}, & m \neq 0 \end{cases}$
Shepp-Logan	$ \xi  \text{sinc}(\xi w) \text{rect}(\xi w)$	$\frac{2[1 + \text{sen}(2\pi\xi_m s)]}{\pi^2(d^2 - 4s^2)}$	$\frac{2}{\pi^2 w(1 - 4m^2)}$
Cosseno passa-baixa	$ \xi  \cos(\pi\xi w) \text{rect}(\xi w)$	$\frac{1}{2} \left[ h_{RL} \left( s - \frac{w}{2} \right) + h_{RL} \left( s + \frac{w}{2} \right) \right]$	$\frac{1}{2} \left[ h_{RL} \left( m - \frac{1}{2} \right) + h_{RL} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right]$
Hamming generalizada	$ \xi  [\alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi\xi w)] \text{rect}(\xi w)$ $0 \leq \alpha \leq 1$	$\alpha h_{RL}(s) + \frac{1 - \alpha}{2} [h_{RL}(s - w) + h_{RL}(s + w)]$	$\alpha h_{RL}(m) + \frac{1 - \alpha}{2} [h_{RL}(m - 1) + h_{RL}(m + 1)]$

Na prática, os valores típicos de  $\alpha$  são 0,5-0,54 (Toft, 1996).

O resultado da Equação 4.14 é essencialmente o mesmo que o resultado da Equação 4.11.

Na prática, a Equação 4.14 é discretizada através do somatório, como mostra a Equação 4.19 a seguir:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^m \hat{g}(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j, \theta_j) \Delta \theta \quad (4.19)$$

onde:

$m$  - número de projeções.

$\Delta \theta$  - intervalo entre as projeções.

A Equação 4.19 é similar à Equação 3.1 do Capítulo III deste trabalho, exceto que  $\hat{g}$  é retroprojetada ao invés de  $g$ . A mudança de  $g$  para  $\hat{g}$  é uma consequência da operação de

filtragem das componentes de alta frequência. A forma de  $\hat{g}$  para um objeto circular é ilustrada na Figura 4.3.

Uma versão simplificada do método é dada abaixo:

Passo 1 – Calcular a transformada de Fourier de uma projeção usando a Equação 4.7.

Passo 2 – Multiplicar cada coeficiente de  $G(\xi, \theta)$  por  $|\xi|$  e calcular a transformada inversa usando a Equação 4.15.

Passo 3 – Retroprojetar no plano da imagem usando interpolação linear conforme a Equação 4.19.

Passo 4 – Repetir os passos acima para todas as projeções.

Contudo, existe uma complicação, pois  $\hat{g}$ , ao contrário de  $g$ , não é espacialmente limitado, e assim não pode ser expresso como uma série de Fourier. Essa dificuldade pode ser superada, modificando  $\hat{g}$  de modo que ela seja zero fora do domínio de reconstrução. Isso requer que o domínio espacial seja dobrado.

Existem duas aproximações envolvidas quando a Retroprojeção filtrada é implementada de maneira usual. A substituição da integral por uma soma discreta, é uma das aproximações. A outra aproximação surge quando, para um dado ângulo de projeção,  $\hat{g}$  é calculado somente em  $n$  pontos discretos, então esses valores não estão disponíveis em valores arbitrários de  $s$ , como

exigido pela Equação 4.19. Enquanto a interpolação exata poderia ser feita usando o teorema da amostragem (Jain, 1989), métodos aproximados geralmente são usados. Estes métodos são: a escolha de um valor mais próximo de  $\hat{g}$  ou interpolação linear entre dois valores mais próximos.

A aproximação da Retroprojeção filtrada é conhecida na literatura como "Filtered Backprojection" (Herman, 1980; Jain, 1989; Kak & Slaney, 1989);

#### 4.4 - Filtragem no Domínio de Radon

A Equação 4.15 representa a transformada de Fourier do produto de duas funções,  $|\xi|$  e  $G(\xi, \theta)$ . O teorema da convolução afirma que a transformada de Fourier do produto de duas funções é igual à convolução das transformadas inversas de Fourier individuais das funções (Bracewell, 1965). A transformada inversa de Fourier de  $G(\xi, \theta)$  é  $g(s, \theta)$  e a transformada inversa de Fourier de  $|\xi|$  é  $-1/2\pi^2 s^2$  (Brooks & Di Chiro, 1976). Escrevendo  $|\xi| G(\xi, \theta)$  como  $\xi G(\xi, \theta) \text{sgn}(\xi)$  e aplicando o teorema da convolução na Equação 4.15, obtém-se:

$$\hat{g}(s, \theta) = \left[ \mathcal{F}_1^{-1} \{ \xi G(\xi, \theta) \} \right] \otimes \left[ \mathcal{F}_1^{-1} \{ \text{sgn}(\xi) \} \right] \quad (4.20)$$

$$\hat{g}(s, \theta) = \left[ \left( \frac{1}{j2\pi} \right) \frac{\partial g}{\partial s}(s, \theta) \right] \otimes \left( \frac{-1}{j\pi s} \right) \quad (4.21)$$

$$\hat{g}(s, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(s', \theta) / \partial s'}{s - s'} ds' \quad (4.22)$$

onde:

⊗ : operação de convolução.

$$\text{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi = 0 \\ -1, & \xi < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{j2\pi} \frac{\partial g(s, \theta)}{\partial s} = \mathcal{F}_1^{-1} \{ \xi G(\xi, \theta) \} \quad (4.24)$$

$$-\frac{1}{j2\pi s} = \mathcal{F}_1^{-1} \{ \text{sgn}(\xi) \} \quad (4.25)$$

As questões de precisão como: a) a singularidade em  $s = s'$ , b) aproximação das derivadas e c) substituição da integral por um somatório, surgem quando a Equação 4.22 é implementada em computadores digitais. Respostas a essas questões não são encontradas facilmente na literatura, embora Beattie (*Beattie, 1975*) tenha utilizado um “somatório por partes” durante sua implementação, ele propôs o método da convolução descrito na próxima seção deste capítulo.

As Equações. 4.14 e 4.22 foram derivadas por Radon em 1917 para a solução de equações gravitacionais (*Jain, 1989*). Na década de 70 o método foi redescoberto e aplicado na obtenção de imagens utilizando raios X por Cormack em 1973 e Beattie em 1975 (*Brooks & Di Chiro, 1972*).

#### 4.5 – Filtragem Utilizando a Convolução

A divergência da Equação 4.22 é causada pelo fator  $|\xi|$  na Equação 4.15, cuja transformada de Fourier contém um termo no elevado ao quadrado no denominador  $(-1/2\pi^2 s^2)$ . A divergência pode ser evitada se  $|\xi|$  for substituído por uma função igual a  $|\xi|$  para  $|\xi| \leq \xi_m$  mas zero para  $|\xi| > \xi_m$ , onde  $\xi_m$  é a maior frequência espacial no objeto. Esta substituição não afetará a Equação 4.15 porque  $G(\xi, \theta)$  é zero para  $|\xi| > \xi_m$ , graças à hipótese de limitação em faixa. A transformada de Fourier desta versão limitada por  $|\xi|$  é:

$$\int_{-\xi_m}^{\xi_m} |\xi| e^{2\pi j \xi s} ds = \frac{\xi_m}{\pi s} \text{sen}(2\pi \xi_m s) - \frac{\text{sen}^2(\pi \xi_m s)}{\pi^2 s^2} \quad (4.26)$$

Portanto, se  $|\xi|$  for substituído na Equação 4.15 por sua versão limitada, e aplicando o teorema da convolução como antes, obtém-se:

$$\hat{g}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s', \theta) \left( \frac{\xi_m \text{sen}(2\pi \xi_m (s - s'))}{\pi (s - s')} - \frac{\text{sen}^2(\pi \xi_m (s - s'))}{\pi^2 (s - s')^2} \right) ds' \quad (4.27)$$

A Equação 4.27 pode ser simplificada. O primeiro termo, exceto pelo fator  $2\xi_m$ , é a conhecida função *sinc* que tem o efeito de remover as componentes de frequência superior a  $\xi_m$  (Bracewell, 1965), na integral de convolução. Desde que não existem tais componentes em  $g(s, \theta)$ , a projeção não é modificada, e tem-se que:

$$\hat{g}(s, \theta) = \xi_m g(s, \theta) - \int_{-\infty}^{\infty} g(s', \theta) \frac{\sin^2(\pi \xi_m (s - s'))}{\pi^2 (s - s')^2} ds' \quad (4.28)$$

A Equação 4.28 é de fácil implementação. Desde que o integrando não contém frequências maiores do que  $\xi_m$ , a integral pode ser substituída por um somatório com pontos espaçados em intervalos  $w = 1/(2\xi_m)$  (Bracewell, 1956). Além disso, o valor de  $\sin^2(\pi \xi_m (s - s'))$  é 0 ou 1, dependendo se  $s - s'$  é um múltiplo par ou ímpar de  $w$ .

Assim, a Equação 4.27 torna-se:

$$\hat{g}(s_i) = \frac{g(s_i)}{4w} - \frac{1}{\pi^2 w} \sum_{j=1, \text{ímpar}}^n \frac{g(s_j)}{(i-j)^2} \quad (4.29)$$

onde o somatório é calculado para todo  $j$  para o qual  $i - j$  é ímpar.

O processo de reconstrução utilizando a convolução pode ser descrito como:

Passo 1 – Filtrar uma projeção usando a Equação 4.29.

Passo 2 – Retroprojetar usando a Equação 4.19.

Passo 3 – Repetir os passos 1 e 2 para todas as projeções.

A Figura 4.5 ilustra a filtragem utilizando a convolução.

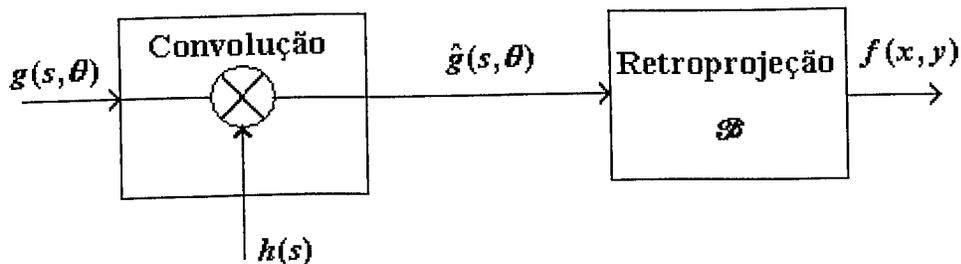


Figura 4.5 – Filtragem utilizando a convolução

O método da filtragem utilizando a convolução é similar ao método de Radon, exceto que a derivada não é necessária e as questões de imprecisão não aparecem. O método da filtragem utilizando a convolução foi derivado por Bracewell e Riddle em 1967, e foi largamente usado em radiografia (Ramachandran e Lakshminarayanan em 1971; Cho, Ahn, Bohm e Huth em 1974; Lees, Keyes e Simon em 1974; Shepp e Logan em 1974). O método foi usado primeiro em um equipamento de tomografia por Leddley, Di Chiro, Luessenhop e Twigg em 1974 e agora é usado em equipamentos de tomografia utilizando raios X (Brooks & Di Chiro, 1972).

A operação de filtragem neste método é realizada no domínio de Radon, isto é, no domínio  $s$ .

## 4.6 – Implementação dos Métodos: Filtragem Utilizando a Convolução e Filtragem no Domínio de Fourier

### 4.6.1 – Considerações de Amostragem

Na prática, as projeções são disponíveis em um número finito, isto é, tem-se disponível:

$$g_n(m) = g(s_m, \theta_n) = \mathcal{Rf}(s_m, \theta_n) \quad (4.30)$$

onde:

$$-\frac{M}{2} \leq m \leq \frac{M}{2} - 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (4.31)$$

$M$  : número de amostras por projeção.

$N$  : número de projeções.

Tipicamente:

$$s_m = m w \quad \theta_n = n \Delta \quad \Delta = \pi / N \quad (4.32)$$

Assim tem-se  $N$  projeções consideradas em ângulos igualmente espaçados, cada uma amostrada uniformemente com intervalo de amostragem  $w$ . Se  $\xi_m$  é a maior frequência espacial no objeto, então  $w$  não deve exceder o intervalo de Nyquist, isto é,  $w \leq 1/(2\xi_m)$ . Se o objeto é limitado no espaço, isto é,  $f_p(r, \phi) = 0$ ,  $|r| > D/2$ , então  $D = M w$ , e o número de amostras por projeção deve satisfazer:

$$M \geq 2 \xi_m D \quad (4.33)$$

#### 4.6.2 – Escolha dos Filtros de Reconstrução

A função do filtro  $|\xi|$  enfatiza as altas frequências. Desde que a maior parte das imagens práticas tem uma baixa relação sinal-ruído (SNR) nas altas frequências, o uso desta função do filtro resulta na amplificação de ruído. Para limitar a natureza ilimitada da resposta em frequência de  $|\xi|$ , um filtro limitado em faixa foi proposto, chamado filtro de Ram-Lak (*Jain, 1989*):

$$H(\xi) = H_{RL}(\xi) = |\xi| \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_m}\right) \quad (4.34)$$

onde:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_m}\right) = \begin{cases} 1 & , \left| \frac{\xi}{2\xi_m} \right| \leq 1 \\ 0 & , \left| \frac{\xi}{2\xi_m} \right| > 1 \end{cases} \quad (4.35)$$

Na prática, a maior parte dos objetos são limitados no espaço e um filtro limitado em faixa com uma frequência de corte  $\xi_m$  não é conveniente, especialmente na presença de ruído. Um valor pequeno de  $\xi_m$  resulta em uma resolução pobre e um valor grande amplifica o ruído. Uma generalização da Equação 4.34 é a seguinte classe de filtros:

$$H(\xi) = |\xi| W(\xi) \quad (4.36)$$

$W(\xi)$  é uma janela limitada em faixa onde é escolhida para moderar a resposta de alta frequência de modo a obter um melhor compromisso entre o filtro passa-faixa (isto é, resposta de alta-

frequência) e a supressão de ruído. A Tabela 4.1 descreve vários filtros que são normalmente usados. A Figura 4.6 mostra a resposta de frequência e a Figura 4.7 ilustra a resposta impulsiva desses filtros, considerando  $w = 1$ .

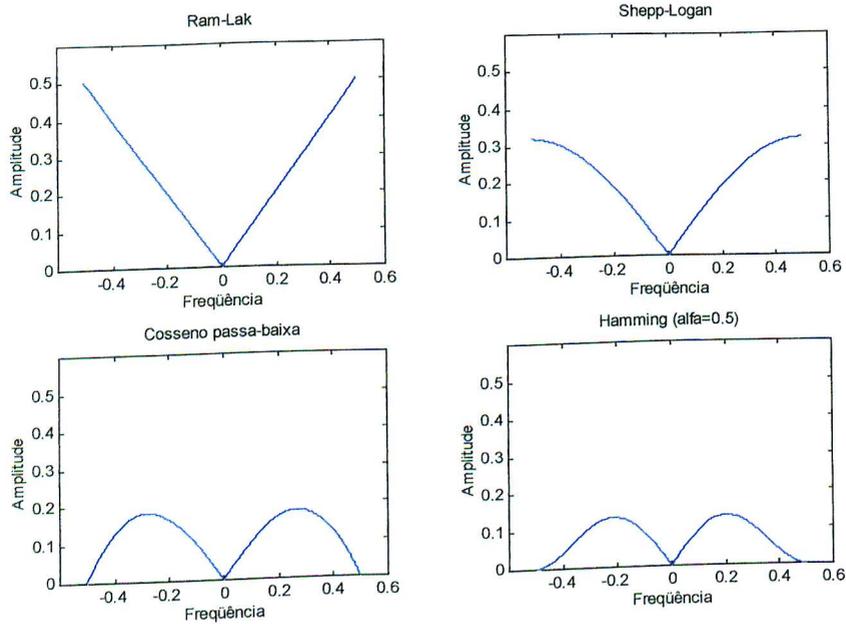


Figura 4.6 Resposta de frequência  $H(\xi)$  dos filtros de reconstrução

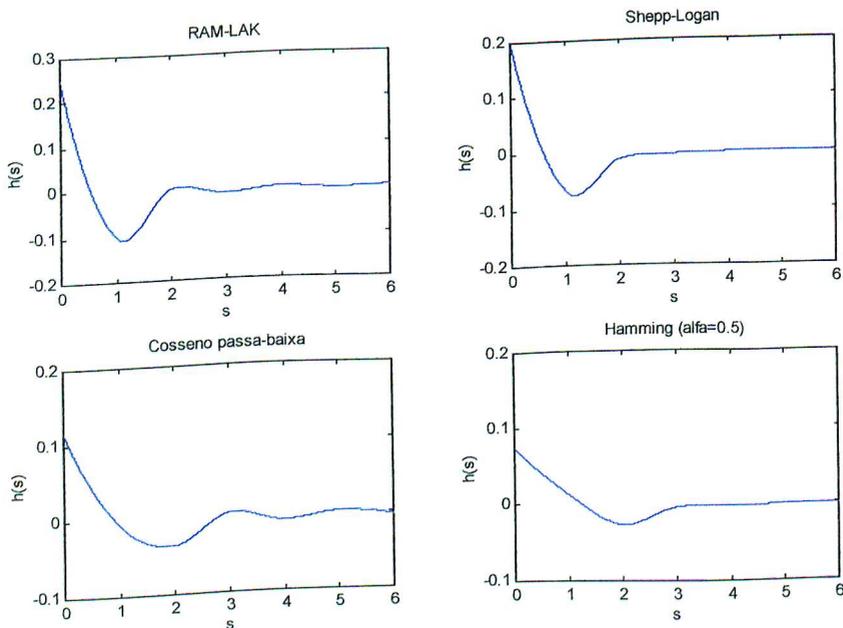


Figura 4.7 – Resposta impulsiva  $h(s)$  dos filtros de reconstrução

A única característica que esses filtros têm em comum é que eles se aproximam de  $|\xi|$  em baixas frequências, e a diferença se pronuncia a medida que a frequência  $\xi$  se aproxima da metade da frequência de amostragem, dado por:

$$\xi_m = \frac{1}{2\Delta s} \quad (4.37)$$

A Figura 4.8 mostra a amplitude dos filtros da Tabela 4.1, sendo  $\alpha = 0.5$ , e todos eles normalizados pela frequência superior  $\xi_m$ .

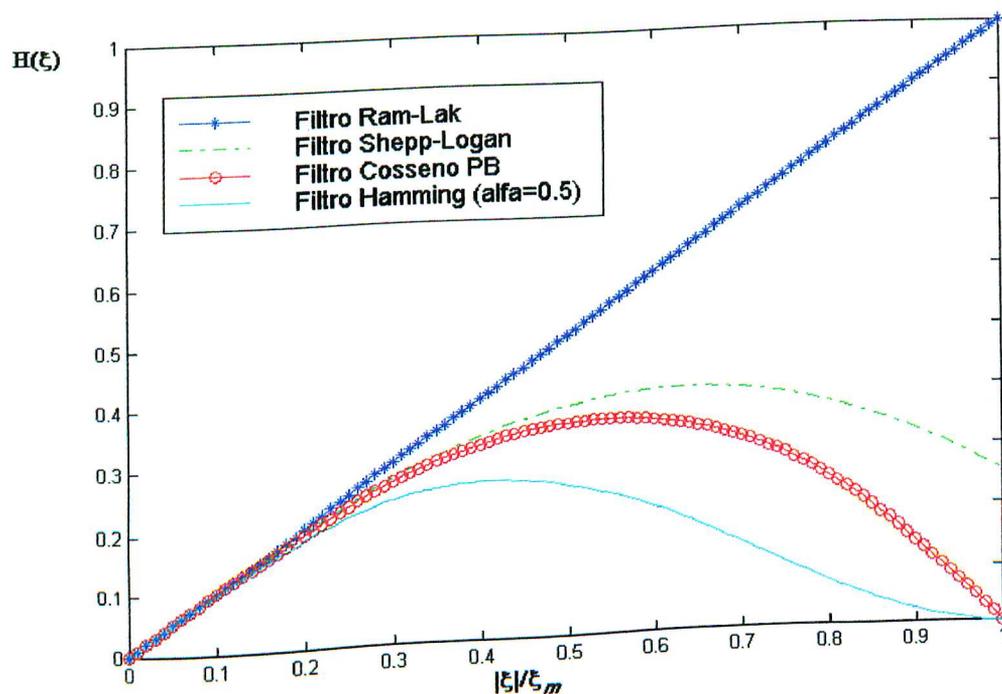


Figura 4.8 – Frequência normalizada pelo limite de frequência superior  $\xi_m$  ( $|\xi|/\xi_m$ )

Uma vez que o filtro foi escolhido, o algoritmo prático de reconstrução tem dois passos importantes:

**Passo 1:** Para cada  $\theta$ , filtrar as projeções  $g(s, \theta)$  por um filtro unidimensional cuja resposta em frequência é  $H(\xi)$  ou resposta impulsiva é  $h(s)$ .

**Passo 2:** Retroprojetar as projeções filtradas,  $\hat{g}(s, \theta)$ .

Dependendo do método de implementação da filtragem, pode-se obter dois algoritmos distintos. Em ambos os casos, a integral da Retroprojeção é implementada por uma aproximação de diferenças finitas conveniente. Os passos necessários para implementar os dois algoritmos são apresentados nas Seções 4.6.3 e 4.6.4 a seguir.

### 4.6.3 – Filtragem utilizando a Convolução

As equações implementadas no algoritmo de filtragem utilizando a convolução são:

Convolução: 
$$\hat{g}(s, \theta) = g(s, \theta) \otimes h(s) \quad (4.38)$$

Retroprojeção: 
$$f(x, y) = \mathcal{B} \hat{g} \quad (4.39)$$

A operação de filtragem é implementada por uma convolução direta no domínio  $s$ . Os passos para implementação digital são:

**Passo 1:** Calcular a convolução discreta como uma aproximação dos valores amostrados das

projeções filtradas:

$$\hat{g}(mw, n\Delta) \cong \hat{g}_n(m) = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} g_n(k) \hat{h}(m-k) \quad (4.40)$$

onde:

$\frac{-M}{2} \leq m \leq \frac{M}{2} - 1$  e  $\hat{h}(m) = wh(mw)$  são obtidos por amostragem e escalamento de  $h(s)$ . A Tabela 4.1 mostra  $\hat{h}(m)$  para vários filtros. A convolução pode ser implementada diretamente ou utilizando a transformada rápida de Fourier (FFT).

**Passo 2:** Interpolar linearmente  $\hat{g}_n(m)$  para obter uma aproximação contínua de  $\hat{g}(s, n\Delta)$  como:

$$\hat{g}(s, n\Delta) \cong \hat{g}_n(m) + \left( \frac{s}{w} - m \right) [\hat{g}_n(m+1) - \hat{g}_n(m)] \quad (4.41)$$

onde:

$$mw \leq s \leq (m+1)w \quad (4.42)$$

**Passo 3:** Aproximar a integral de retroprojeção por:

$$f(x, y) \cong \hat{f}(x, y) = \mathcal{B}_N \hat{g} = \Delta \sum_{n=0}^{N-1} \hat{g}(x \cos n\Delta + y \sin n\Delta, n\Delta) \quad (4.43)$$

onde  $\mathcal{B}_N$  é o operador Retroprojeção discreto.

Devido à operação de Retroprojeção é necessário interpolar as projeções filtradas  $\hat{g}_n(m)$ .

#### 4.6.4 – Filtragem no Domínio de Fourier

A operação de filtragem é realizada no domínio da frequência de acordo com a seguinte equação:

$$\hat{g}(s, \theta) = \mathcal{F}_1^{-1} [G(\xi, \theta) H(\xi)] \quad (4.44)$$

Dado  $H(\xi)$ , a resposta de frequência do filtro é implementada aproximadamente usando uma aproximação amostrada de  $G(\xi, \theta)$  e uma FFT conveniente para substituir a transformada inversa de Fourier. Os passos deste algoritmo são:

**Passo 1:** Estender a seqüência  $g_n(m)$ ,  $-M/2 \leq m \leq (M/2) - 1$  acrescentando zeros e obtendo a seqüência  $g_n(m)_c$ ,  $0 \leq m \leq K - 1$ . Calcular a FFT desta seqüência para obter  $G_n(K)$ ,  $0 \leq k \leq K - 1$ . A escolha de  $K$  determina a resolução de amostragem no domínio da frequência. Tipicamente  $K \cong 2M$  se  $M$  é grande, por exemplo,  $K = 512$  se  $M = 256$ .

**Passo 2:** Amostrar  $H(\xi)$  para obter  $\hat{H}(k) = H(k \Delta \xi)$ ,  $\hat{H}(K - k) = H^*(k)$ ,  $0 \leq k < K/2$ , onde \* representa o conjugado complexo.

**Passo 3:** Multiplicar as seqüências  $\hat{G}_n(k)$  e  $\hat{H}(k)$ ,  $0 \leq k \leq K - 1$  e calcular a FFT inversa do produto. Uma extensão periódica do resultado produz  $\hat{g}_n(m)$ ,  $-K/2 \leq m \leq (K/2) - 1$ .

A imagem reconstruída é obtida usando as Equações 4.41 e 4.43.

A Figura 4.9 ilustra a implementação discreta do método da Retroprojeção filtrada.

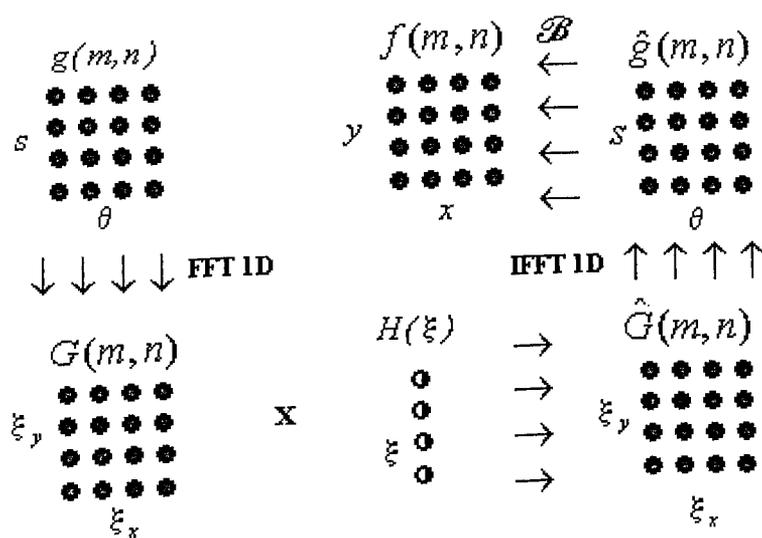


Figura 4.9 – Retroprojeção filtrada (discreta)

Na Figura 4.9, partindo de cima a esquerda para baixo, o espectro discreto é calculado. Em seguida, cada coluna da matriz do espectro é multiplicada por um filtro discreto unidimensional. E em seguida, a transformada inversa de Fourier discreta unidimensional é calculada, e finalmente, é realizada a Retroprojeção discreta para se obter a imagem discreta reconstruída.

A Figura 4.10 mostra uma linha da imagem reconstruída do modelo de Shepp-Logan para  $y = 0$  e a posição  $x$  variável, com o filtro de Ram-Lak, usando a relação ideal, 127 amostras por projeção e 127 projeções.

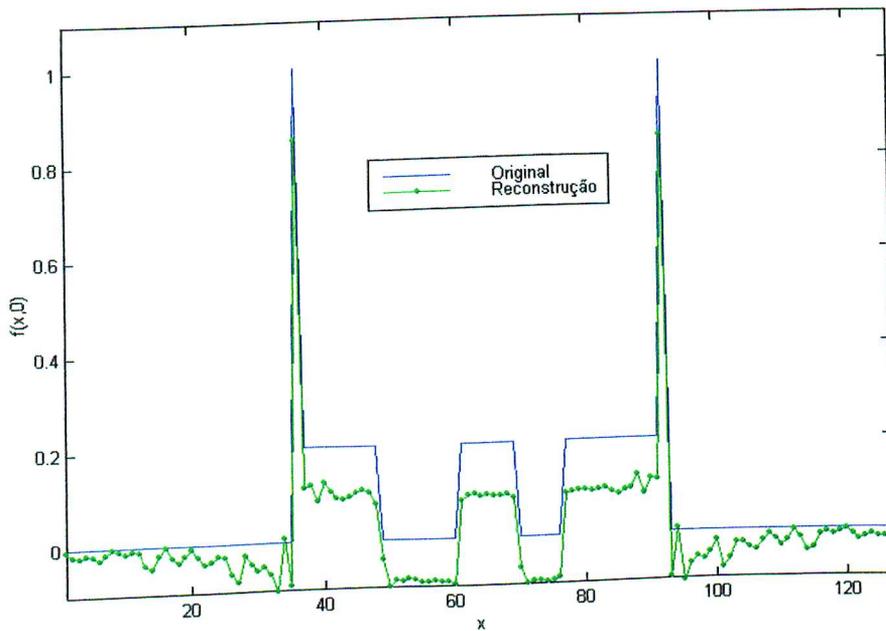


Figura 4.10 – Linha da imagem reconstruída x linha da imagem original

Pode-se notar a existência de artefatos: o deslocamento da linha reconstruída em relação à linha da imagem original e as oscilações. O primeiro é devido ao comportamento cíclico da DFT, e o último é devido ao fenômeno de Gibbs (*Toft, 1996*).

A Figura 4.11, na parte inferior, mostra a resposta impulsiva do filtro de Ram-Lak com 51 amostras, e, na parte superior, a resposta de frequência. Nota-se que a resposta impulsiva tem longas oscilações o que implica em um grande número de zeros. Em princípio este número é infinito, e deve ser acrescentado ao sinal para evitar que o comportamento cíclico da DFT influencie no sinal filtrado (*Toft, 1996*).

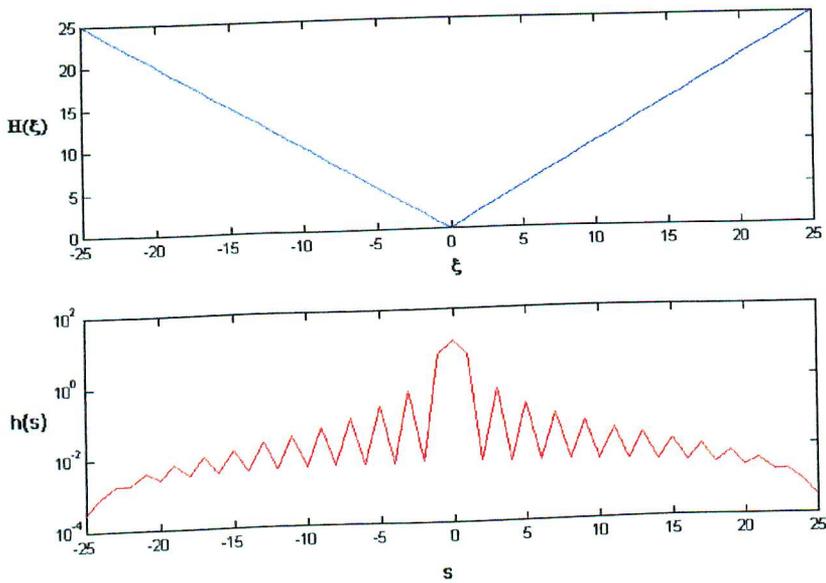


Figura 4.11 – Resposta de frequência e resposta impulsiva do filtro de Ram-Lak

A Figura 4.12 mostra a mesma linha da imagem da Figura 4.11, porém com o acréscimo de zeros às projeções. Pode-se verificar a diminuição do deslocamento da linha devido ao nível DC na linha da imagem reconstruída. Porém, as oscilações devido ao fenômeno de Gibbs não desaparecem.

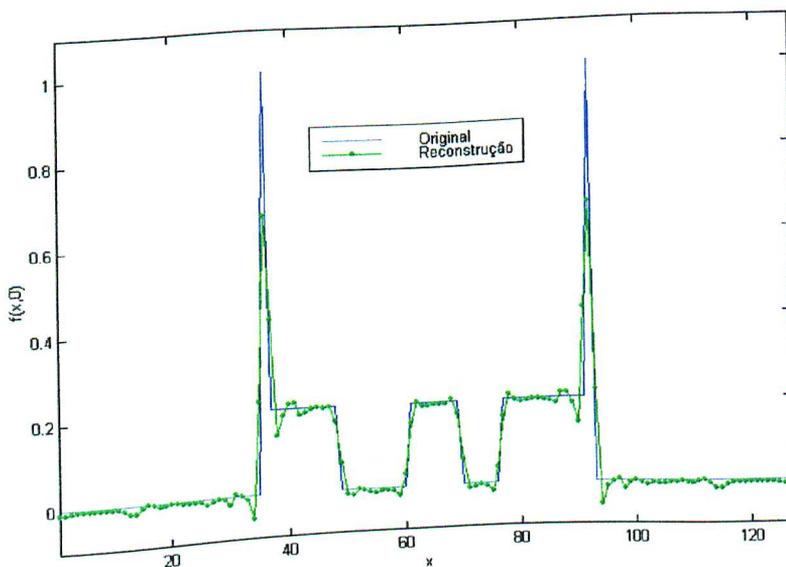


Figura 4.12 – Linha da imagem reconstruída pelo acréscimo de zeros às projeções

O filtro de Ram-Lak apresenta em sua resposta de frequência uma descontinuidade na frequência de corte. Esta descontinuidade tem como consequência as oscilações apresentadas nas Figuras 4.11 e 4.12. Para minimizar o artefato devido à essa característica do filtro, multiplica-se o filtro por uma janela para que a resposta de frequência do filtro seja suavizada. A Tabela 4.1 deste capítulo apresenta algumas janelas. A Figura 4.13 mostra a mesma linha da imagem reconstruída da Figura 4.10, mas desta vez com o uso de uma janela de Hamming.

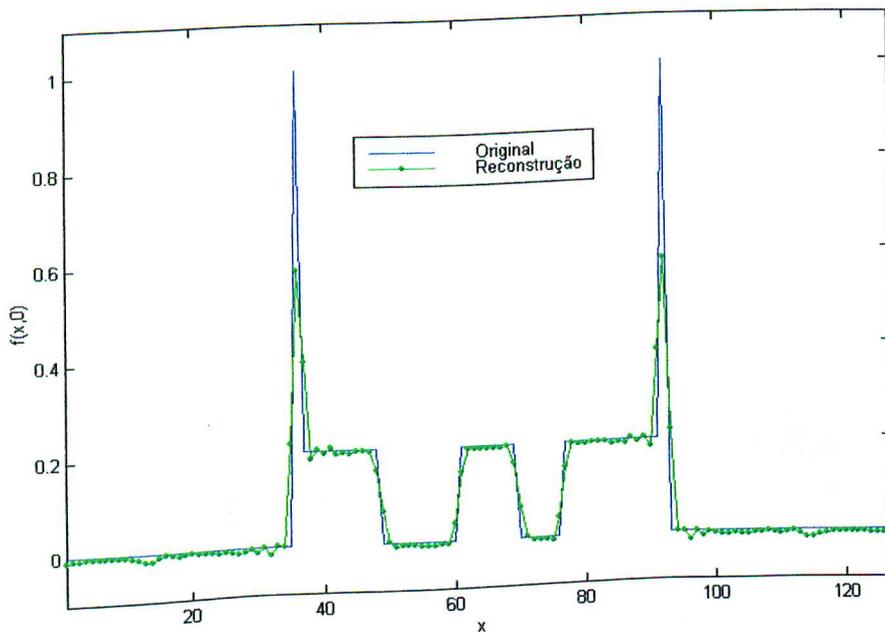


Figura 4.13 – Linha da imagem reconstruída utilizando janela de Hamming

Pode-se verificar que os artefatos citados anteriormente diminuíram consideravelmente. Essa diminuição foi possível devido ao acréscimo de zeros às projeções e a multiplicação do filtro pela janela de Hamming.

## 4.7 – Resultados Obtidos

### 4.7.1 – Filtragem Utilizando a Convolução

As Figuras 4.14 a 4.29 mostram a imagem original e as imagens reconstruídas usando quatro filtros diferentes: Ram-Lak, Shepp-Logan, Cosseno passa-baixa e Hamming generalizado, conforme a Tabela 4.1 deste capítulo. As imagens originais consideradas são: um círculo, um triângulo, o logotipo da UFU (Universidade Federal de Uberlândia) e o modelo de Shepp-Logan.

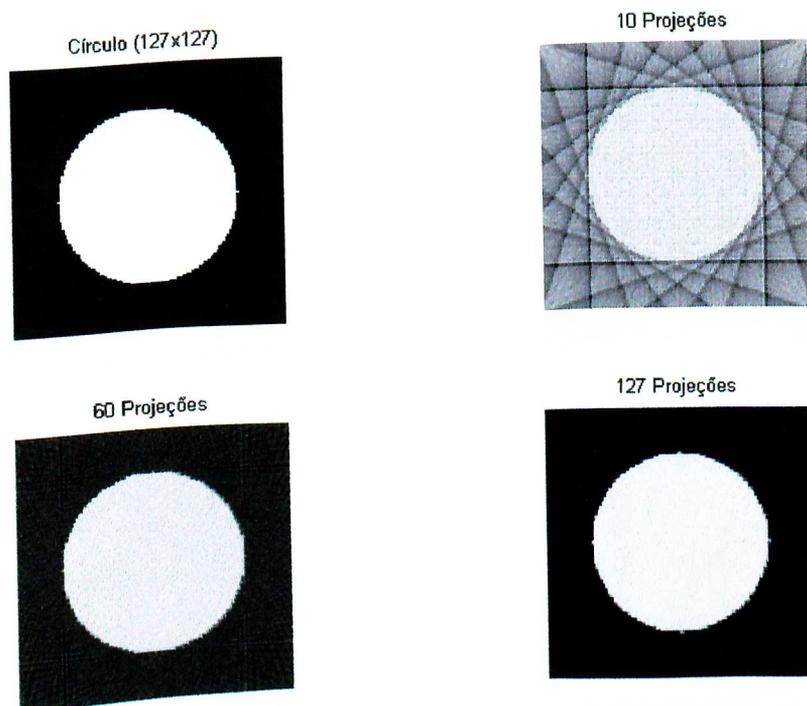


Figura 4.14 – Reconstrução do Círculo usando o filtro de Ram-Lak

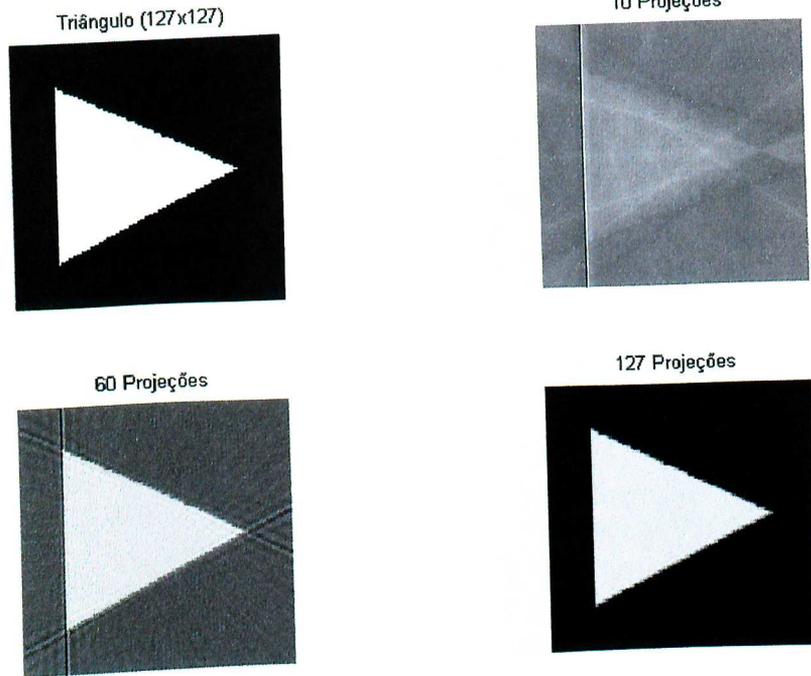


Figura 4.15 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Ram-Lak

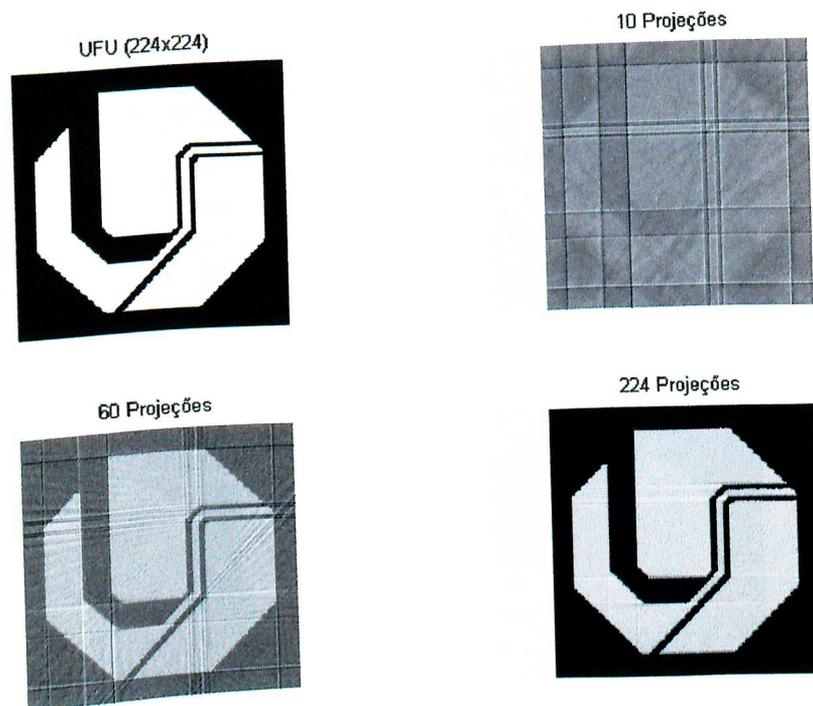


Figura 4.16 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Ram-Lak

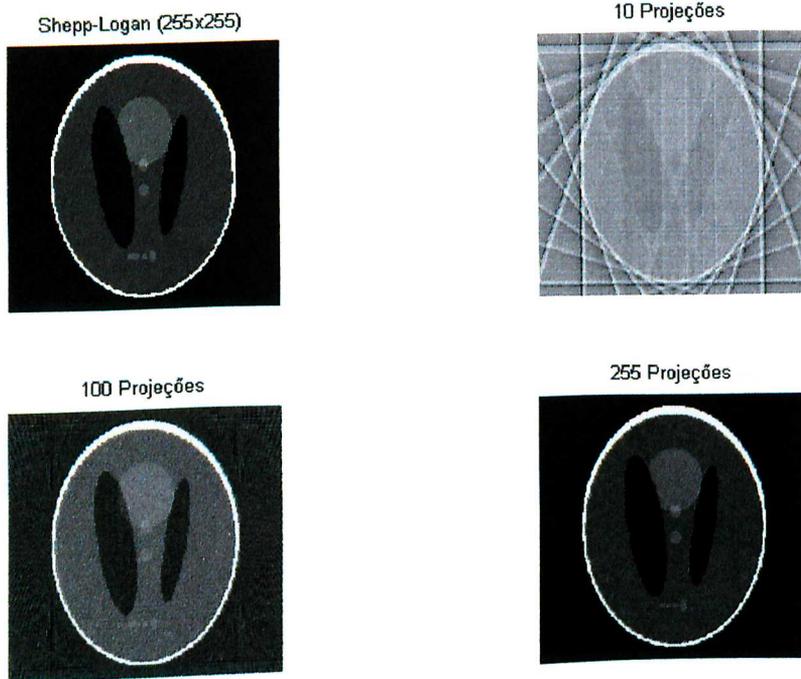


Figura 4.17 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Ram-Lak

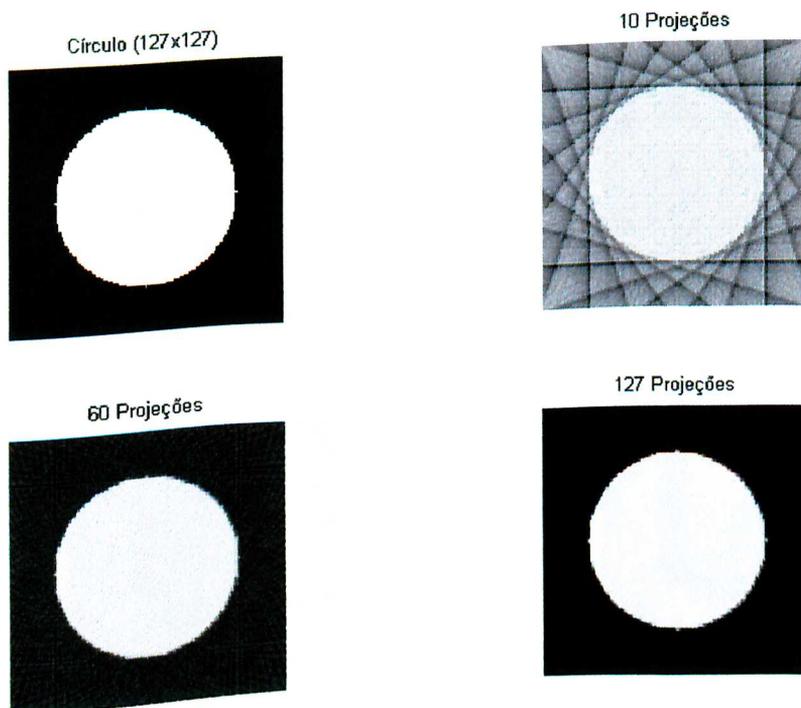


Figura 4.18 - Reconstrução do Círculo usando o filtro de Shepp-Logan

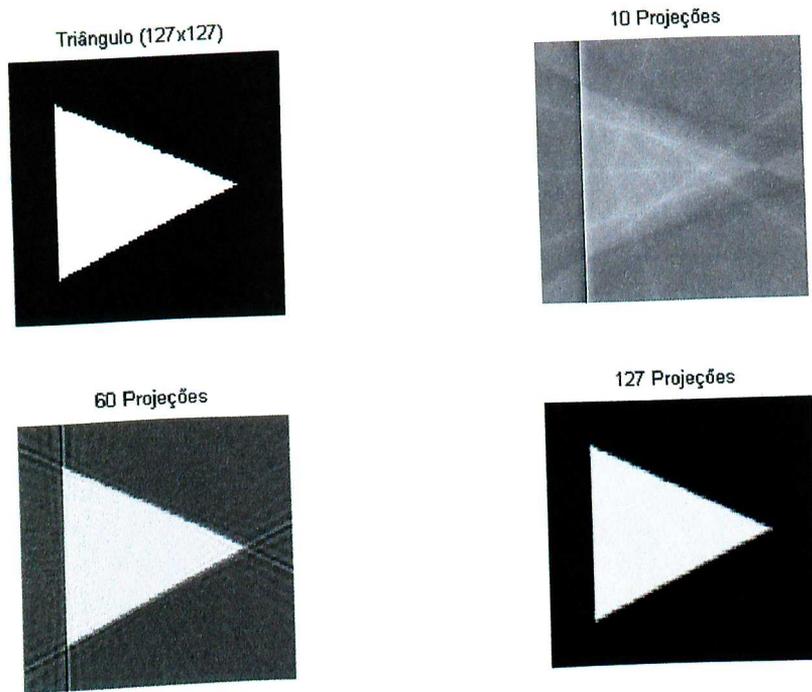


Figura 4.19 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Shepp-Logan

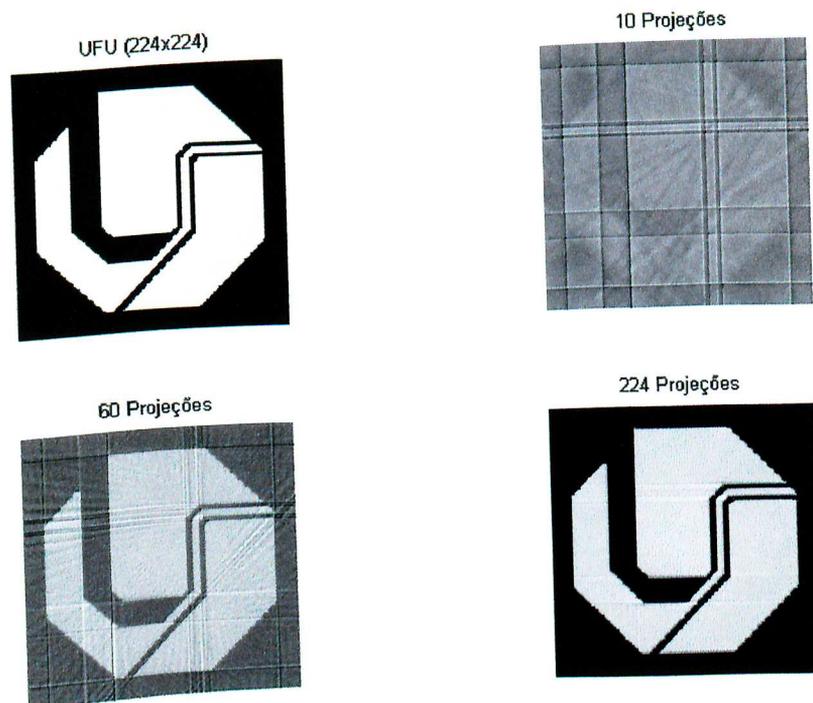


Figura 4.20 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Shep-Logan

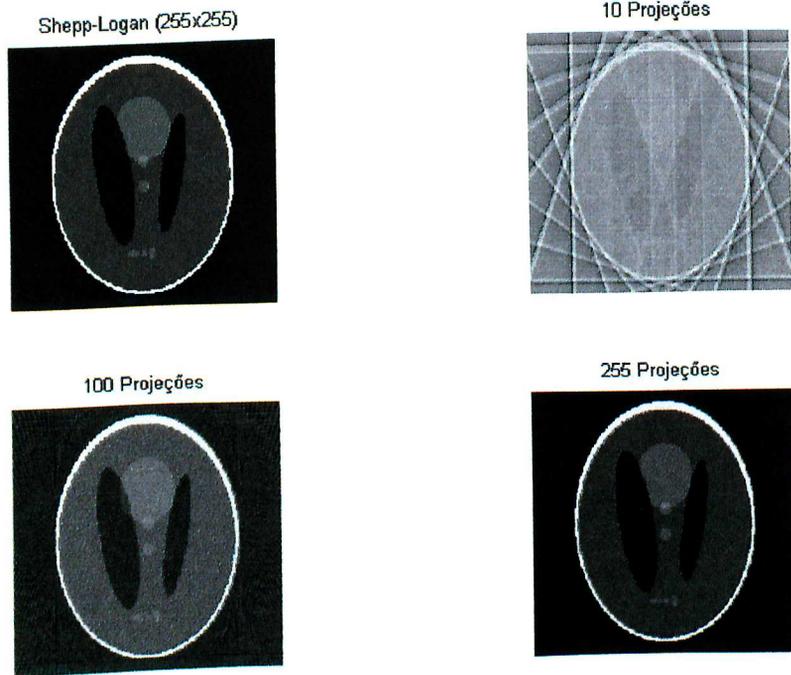


Figura 4.21 - Reconstrução do Modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Shepp-Logan

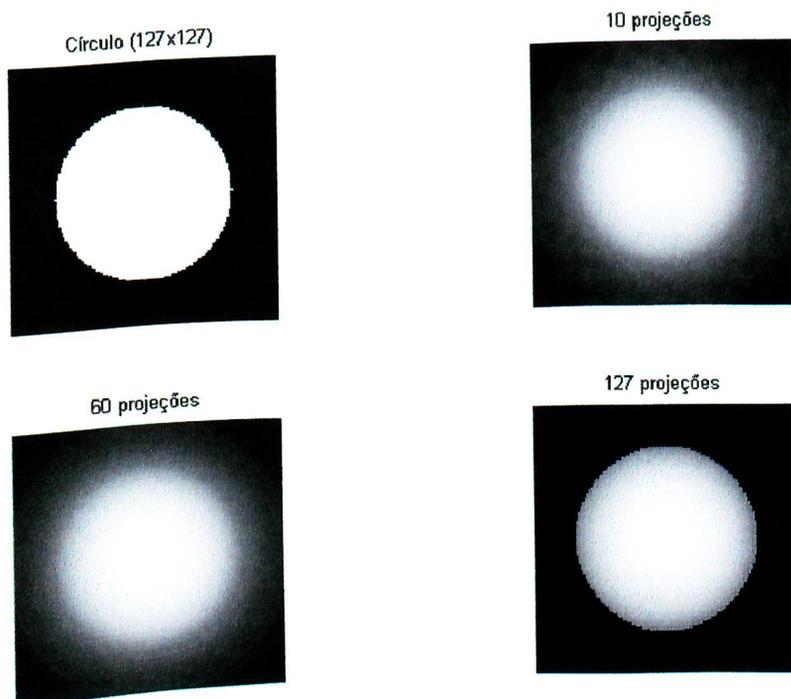


Figura 4.22 - Reconstrução do Círculo usando o filtro Cosseno

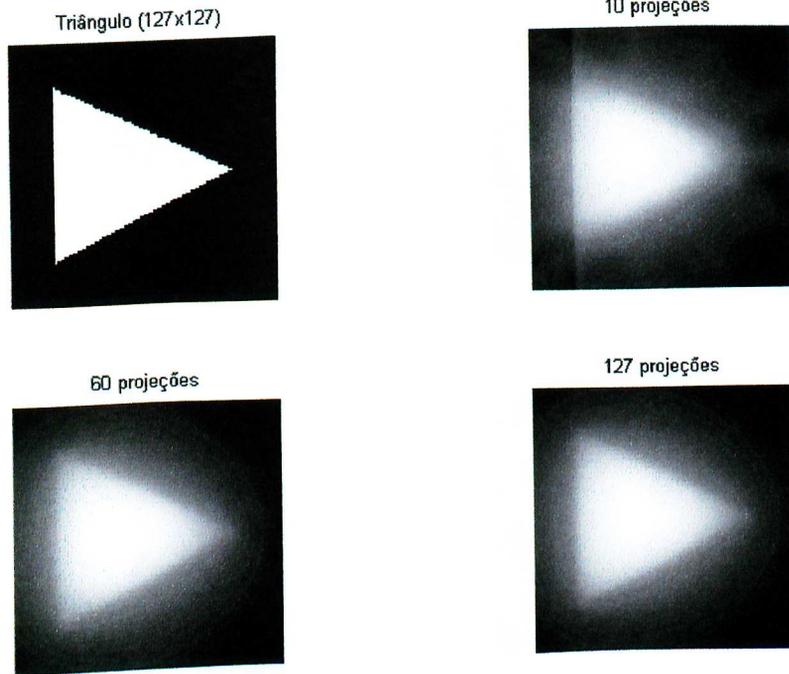


Figura 4.23 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro Cosseno

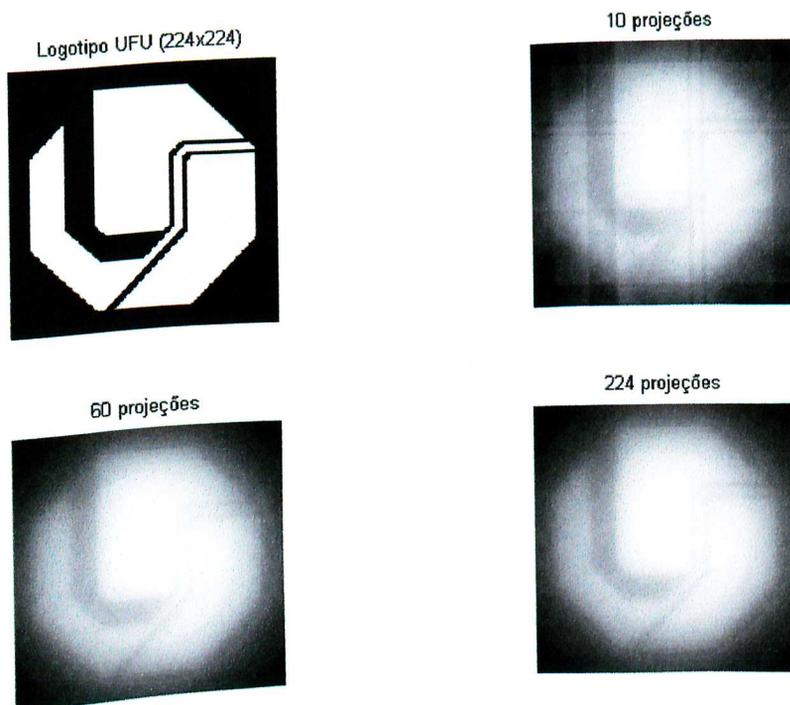
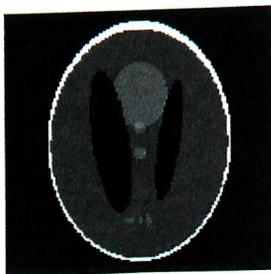
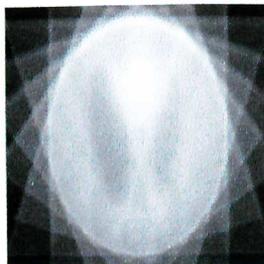


Figura 4.24 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro Cosseno

Modelo Shepp-Logan (255x255)



10 projeções



100 projeções



127 projeções

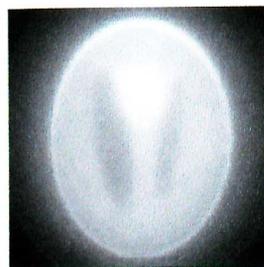
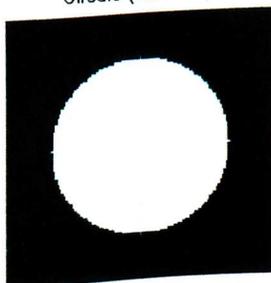
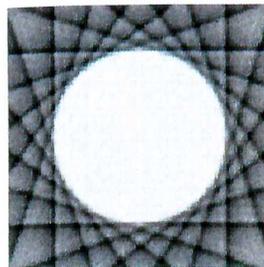


Figura 4.25 - Reconstrução do Modelo Shepp-Logan usando o filtro Cosseno

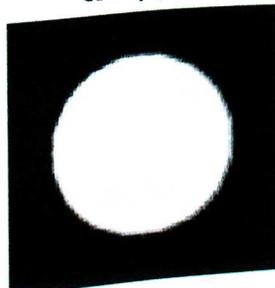
Círculo (127x127)



10 Projeções



60 Projeções



127 Projeções

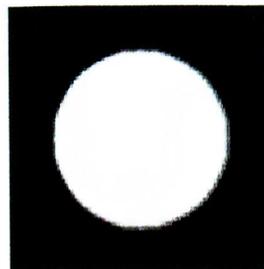


Figura 4.26 - Reconstrução do Círculo usando o filtro de Hamming

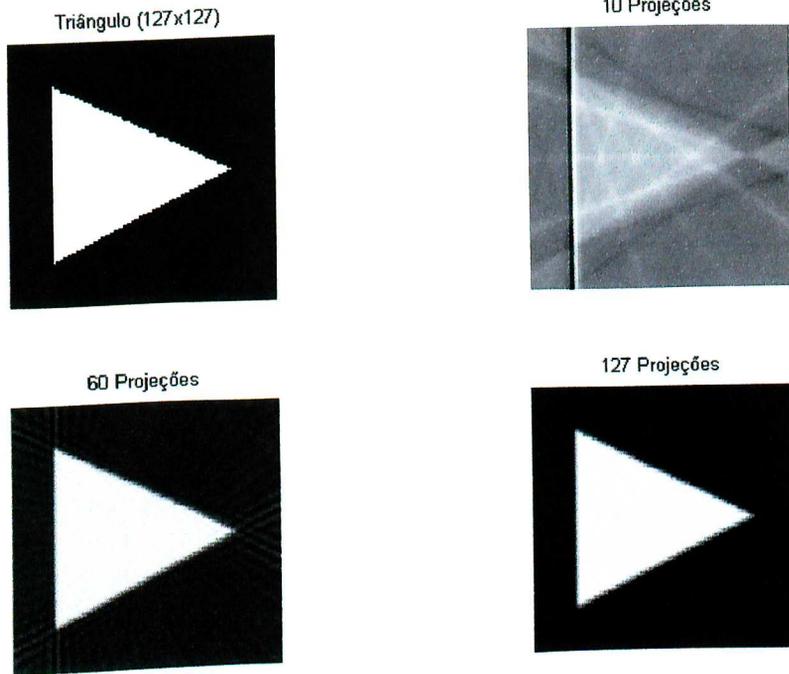


Figura 4.27 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Hamming

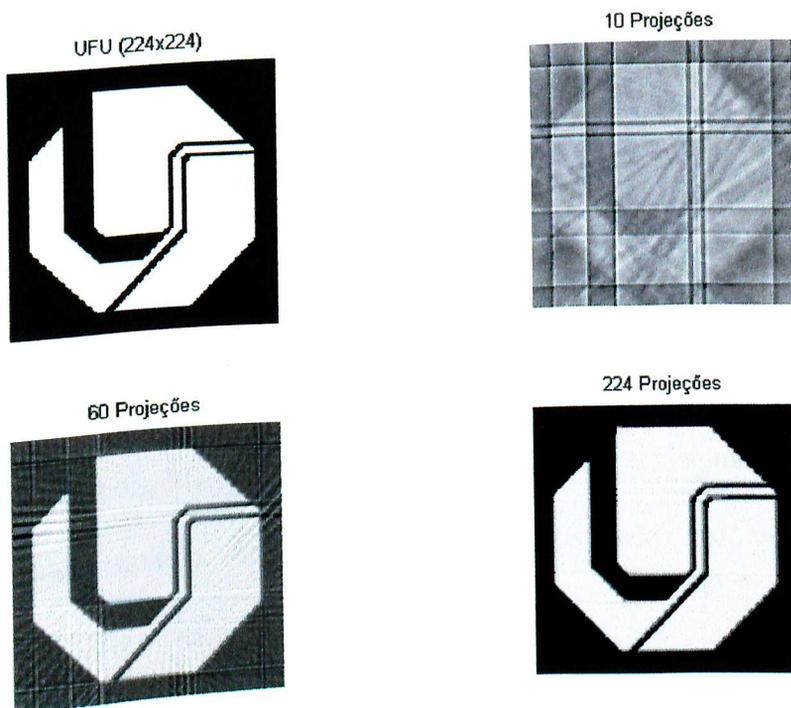


Figura 4.28 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Hamming

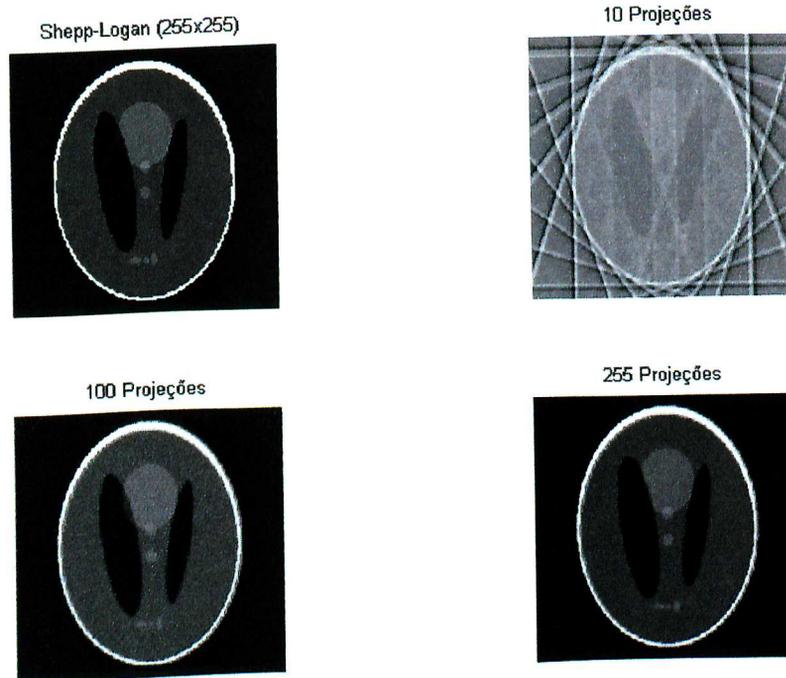


Figura 4.29 - Reconstrução do Modelo Shepp-Logan usando o filtro de Hamming

#### 4.6.2 – Filtragem no Domínio de Fourier

As Figuras de 4.30 a 4.45 mostram a imagem original e as imagens reconstruídas usando quatro filtros diferentes: Ram-Lak, Shepp-Logan, Cosseno passa-baixa e Hamming generalizado, conforme a Tabela 4.1 deste capítulo. As imagens originais consideradas são: um círculo, um triângulo, o logotipo da UFU e o modelo de Shepp-Logan.

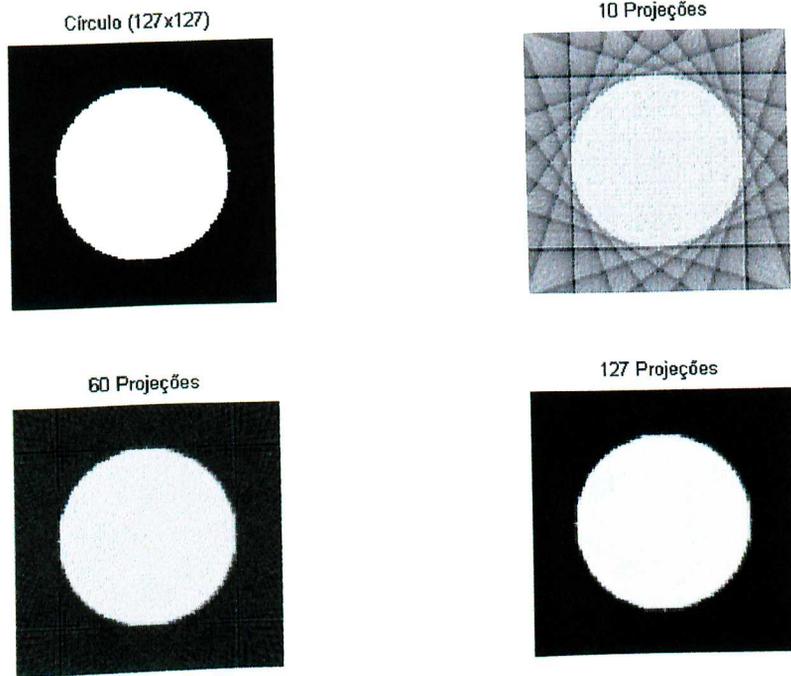


Figura 4.30 – Reconstrução do Círculo usando o filtro de Ram-Lak

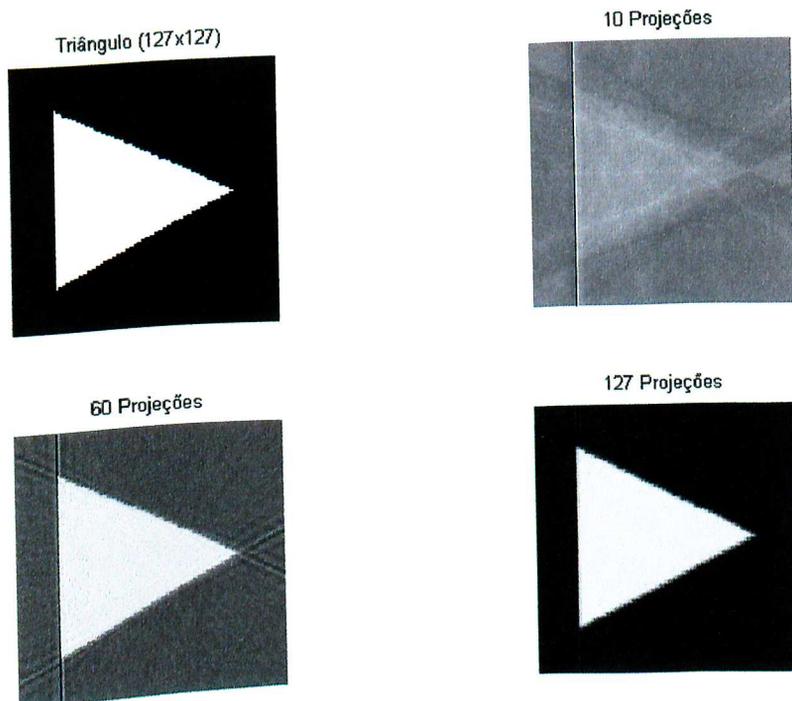


Figura 4.31 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Ram-Lak

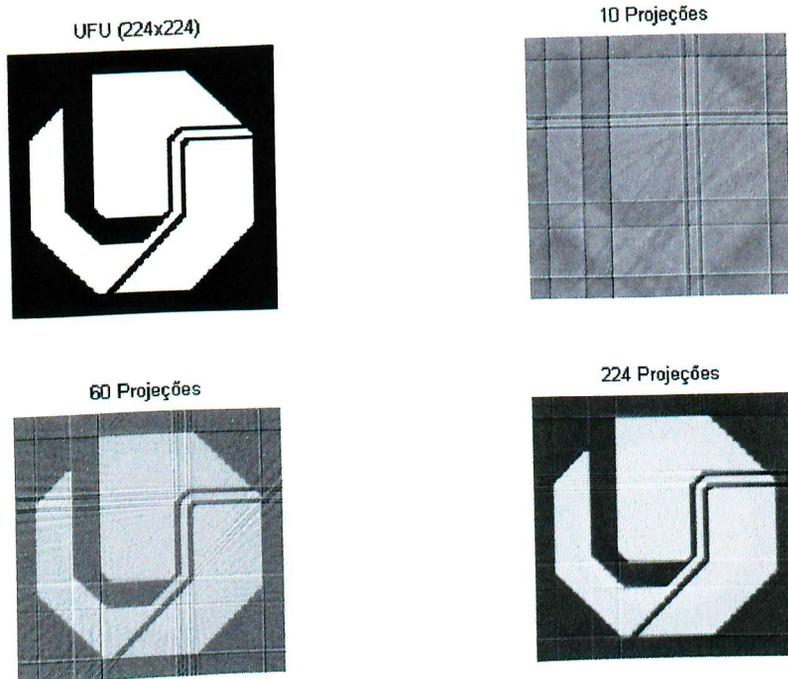


Figura 4.32 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Ram-Lak

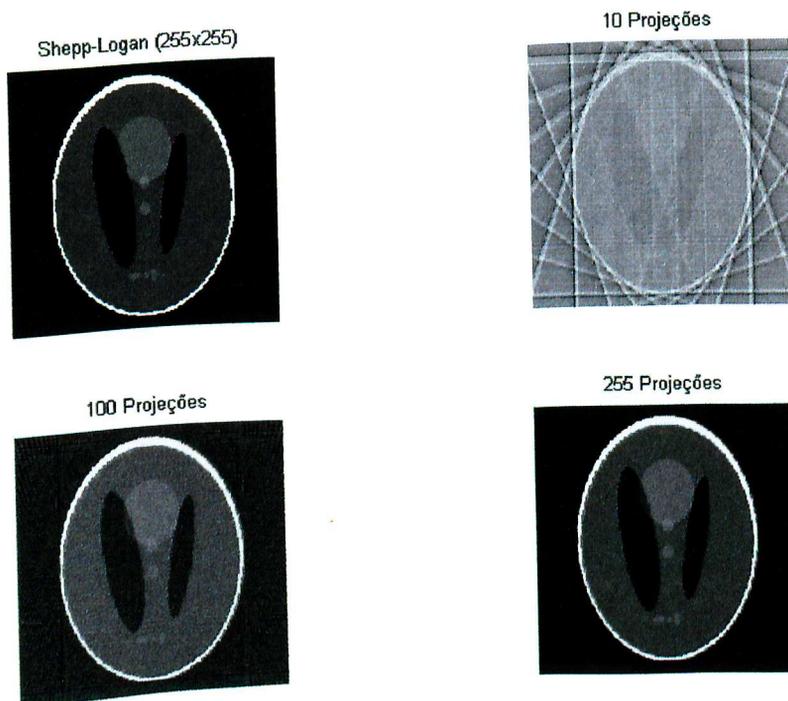


Figura 4.33 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Ram-Lak

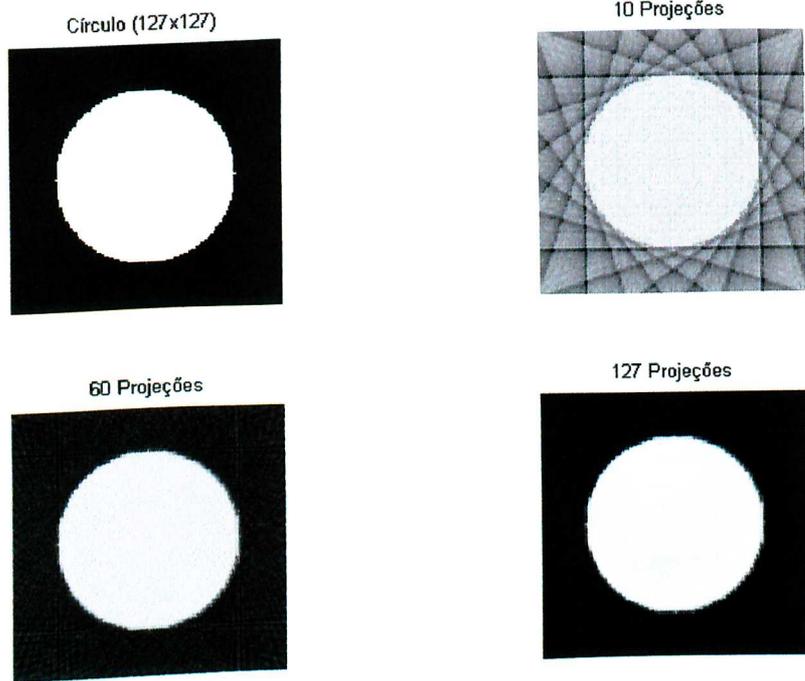


Figura 4.34 - Reconstrução do Círculo usando o filtro de Shepp-Logan

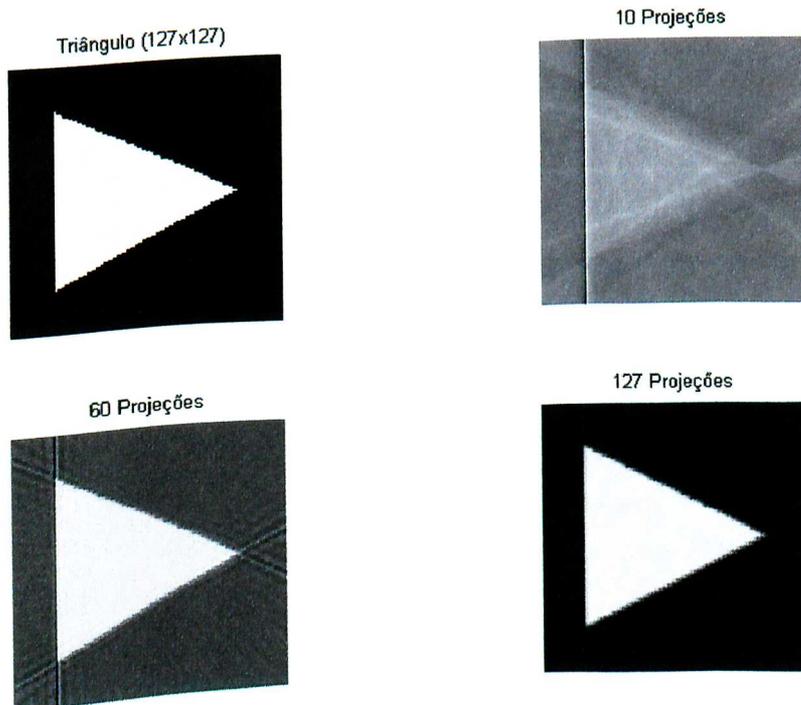


Figura 4.35 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Shepp-Logan

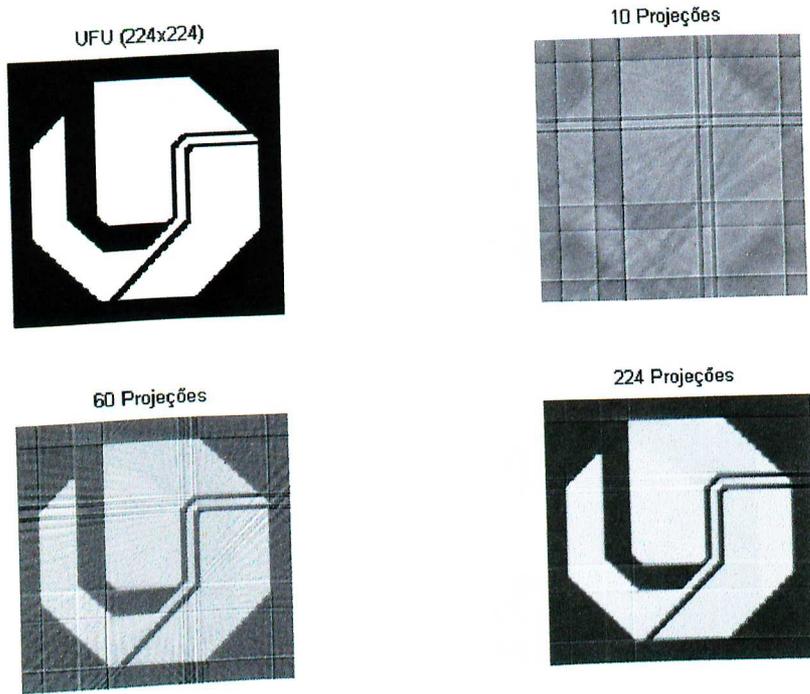


Figura 4.36 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Shepp-Logan

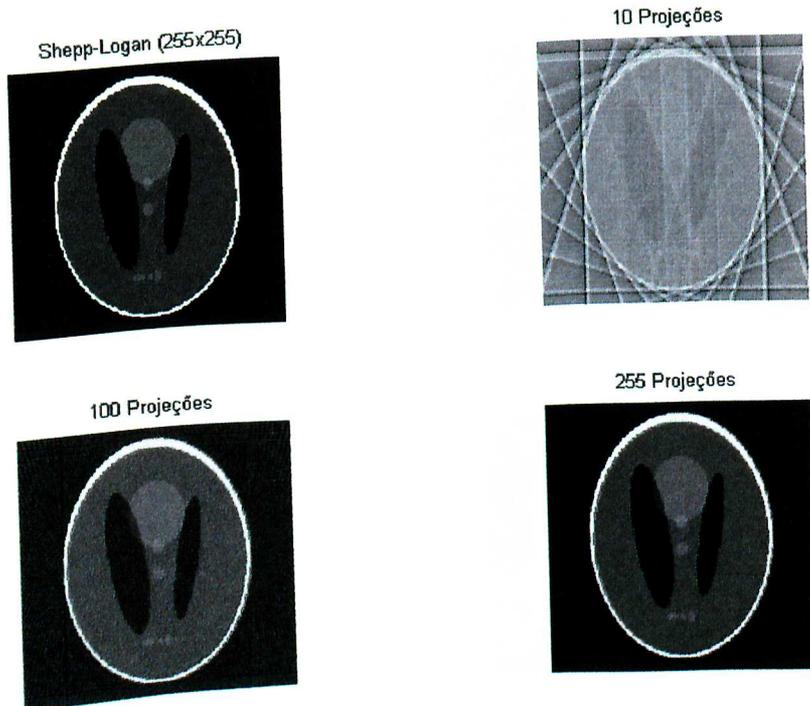


Figura 4.37 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Shepp-Logan

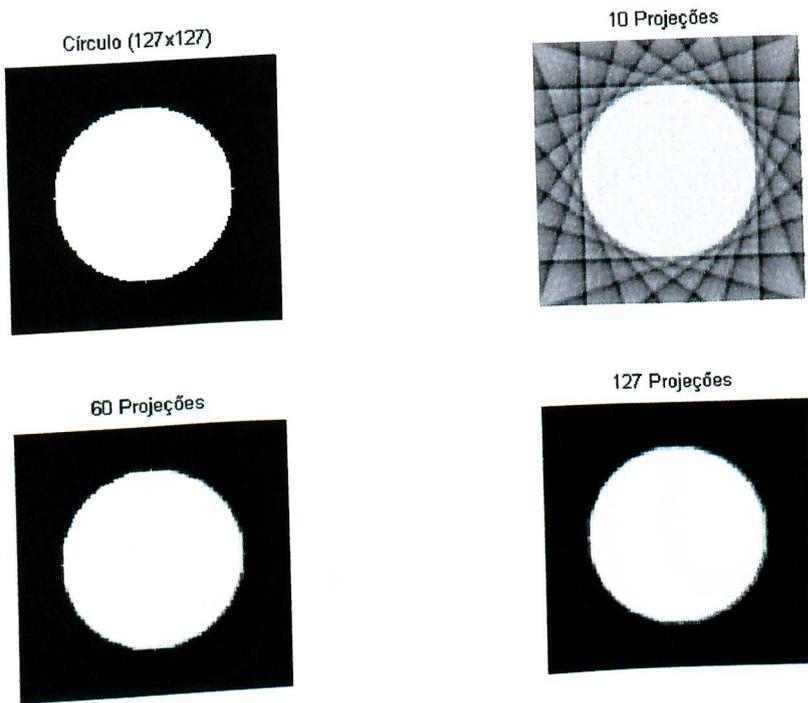


Figura 4.38 - Reconstrução do Círculo usando o filtro Cosseno

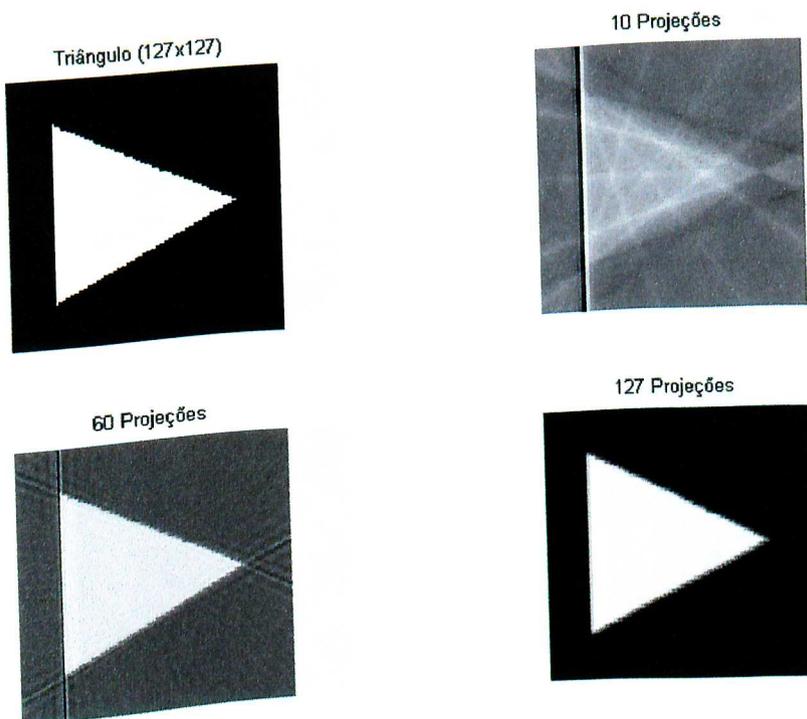


Figura 4.39 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro Cosseno

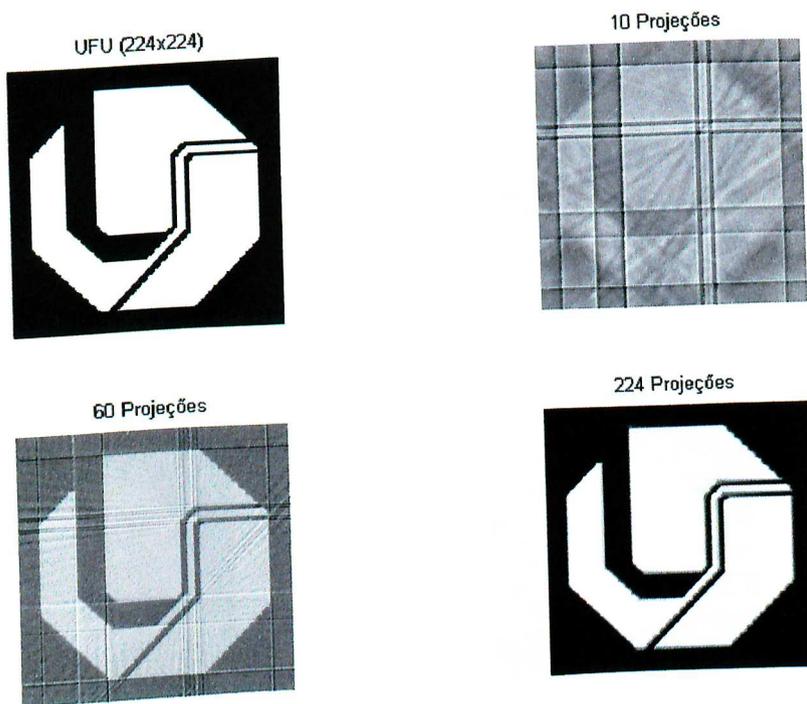


Figura 4.40 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro Cosseno

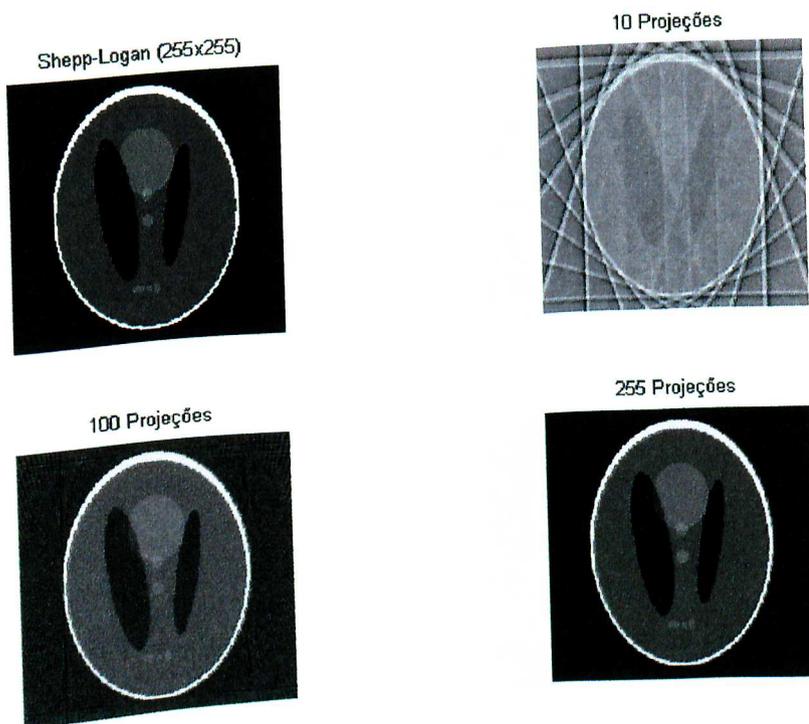


Figura 4.41 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro Cosseno

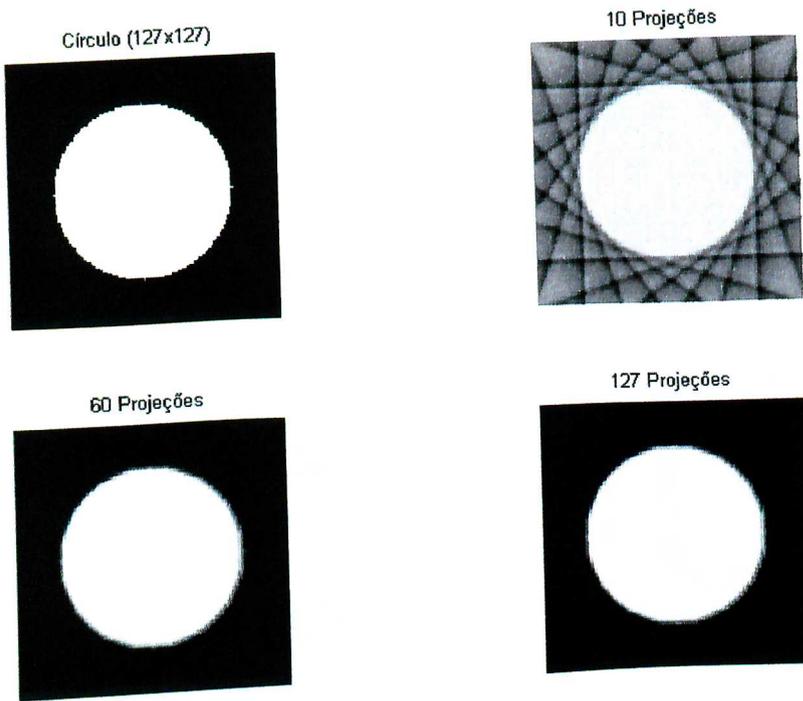


Figura 4.42 - Reconstrução do Círculo usando o filtro de Hamming

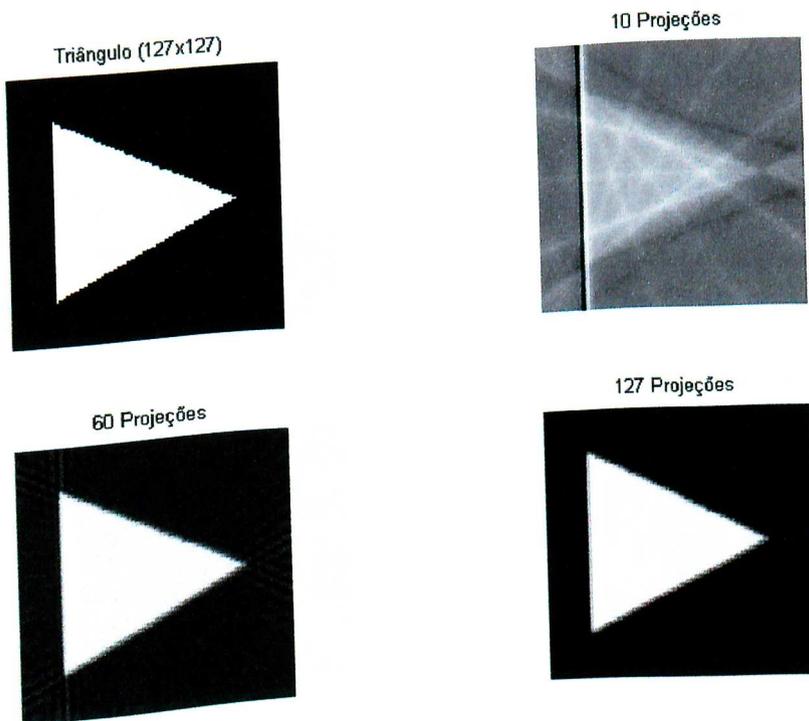


Figura 4.43 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Hamming

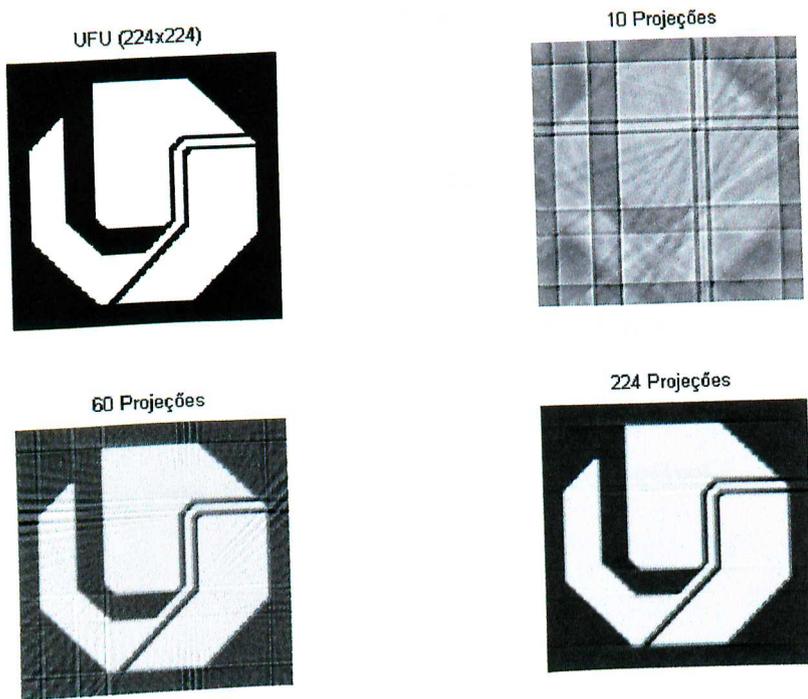


Figura 4.44 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Hamming

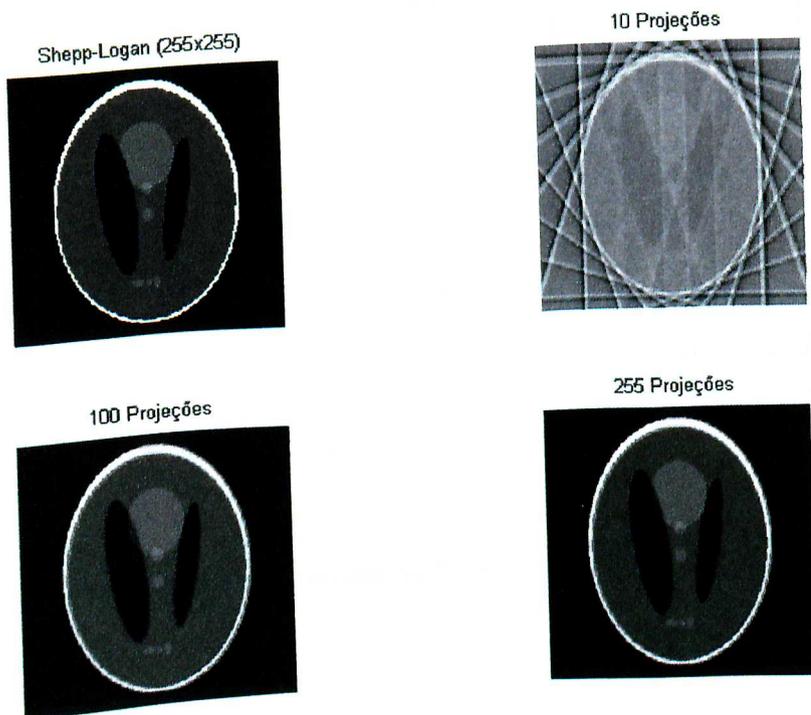


Figura 4.45 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Hamming

## 4.8 – Análise Qualitativa dos Resultados Obtidos

Nas Figuras 4.46 e 4.47 é mostrado uma comparação dos vários filtros utilizados neste trabalho, definidos na Tabela 4.1, para o modelo de Shepp-Logan com  $127 \times 127$  pixels, usando a relação ideal 127 amostras/projeção e 127 projeções de acordo com a Equação 2.72 do Capítulo II deste trabalho, tanto para a filtragem de Fourier como para a convolução. O gráfico é plotado para  $f(x,0)$  versus  $x$ , isto é, os níveis de cinza,  $f(x,y)$ , para  $y = 0$  e a posição  $x$  variável.

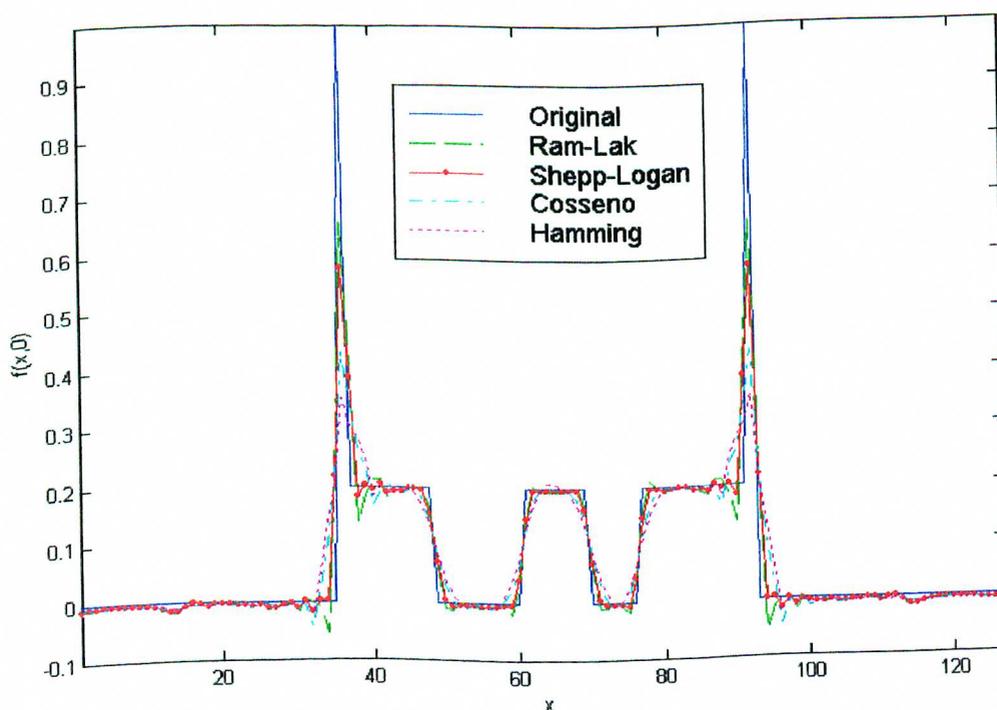


Figura 4.46 – Comparação dos filtros de reconstrução (Filtragem no Domínio de Fourier)

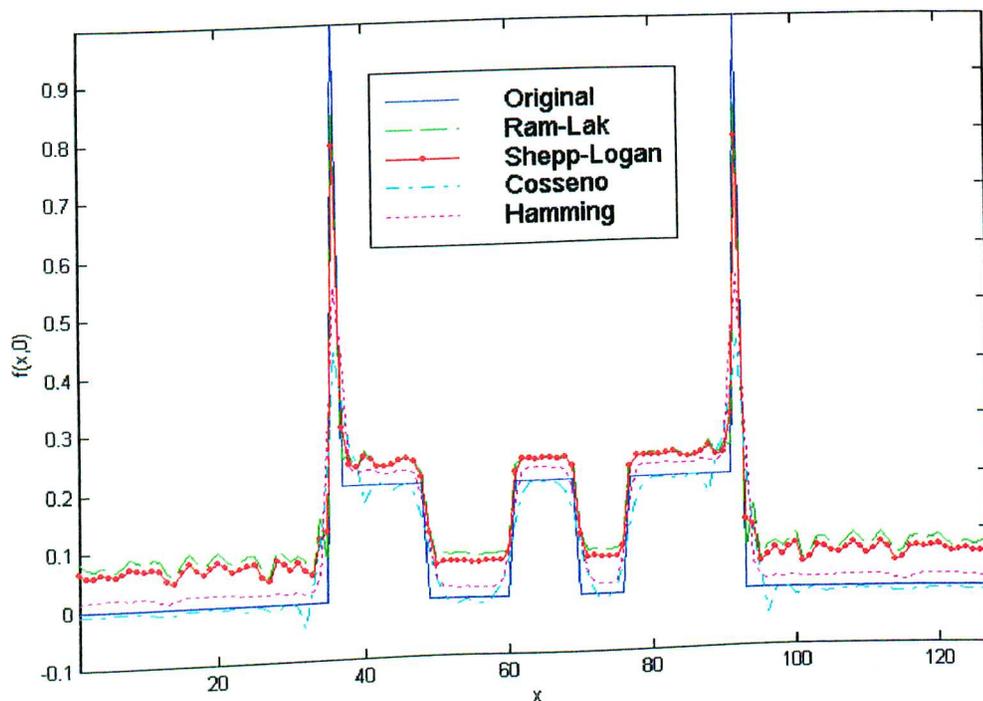


Figura 4.47 – Comparação dos filtros de reconstrução (Filragem utilizando a Convolação)

Como pode ser observado, as reconstruções têm uma aproximação razoável da imagem original. O filtro de Ram-Lak não minimiza o artefato provocado pelo fenômeno de Gibbs, como já foi analisado na Seção 4.6 deste capítulo.

A Figura 4.48 mostra a comparação entre a filragem no domínio de Fourier (filragem de Fourier) e a filragem no domínio espacial (filragem utilizando a convolação) para a reconstrução da imagem do modelo de Shepp-Logan, utilizando o filtro de Hamming.

Na reconstrução de imagens prefere-se utilizar a filragem no domínio de Fourier do que a filragem no domínio espacial, pois se consegue uma maior eficiência usando a FFT (Transformada Rápida de Fourier) ao invés de calcular diretamente a convolação.

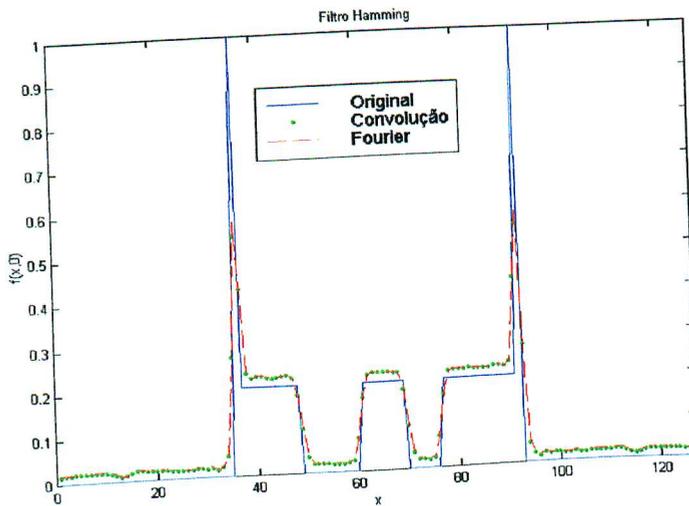


Figura 4.48 – Filtragem no domínio de Fourier x Filtragem utilizando a Convolução

Para o cálculo dos resultados apresentados na Figura 4.48, a reconstrução utilizando a convolução foi realizada em 120 segundos, enquanto que a reconstrução utilizando a filtragem no domínio de Fourier foi realizada em 108 segundos. Os dois testes de reconstrução foram realizados em um microcomputador Pentium 166 MHz.

A Figura 4.49 mostra o tempo de processamento em cada fase do método da Retroprojeção filtrada (= *Filtragem* + *Retroprojeção*) para várias projeções utilizando o filtro de Hamming.

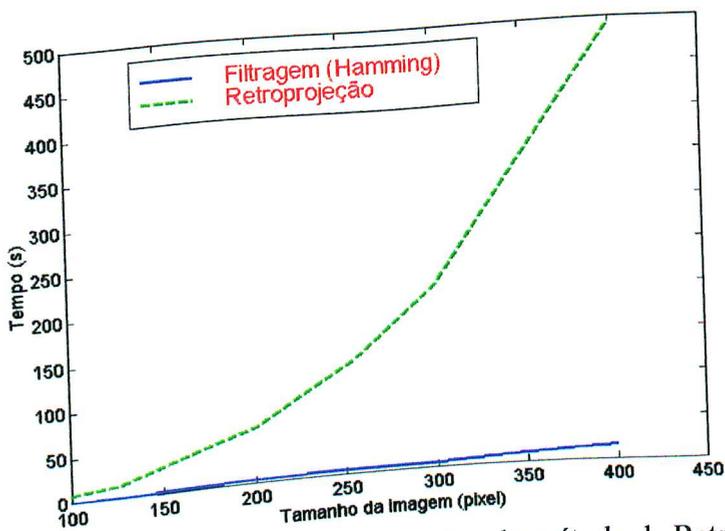


Figura 4.49 – Tempo de processamento em cada fase do método da Retroprojeção filtrada

Pode-se concluir, analisando a Figura 4.50, que a fase de Retroprojeção representa em média 96% do tempo total de reconstrução do método da Retroprojeção filtrada.

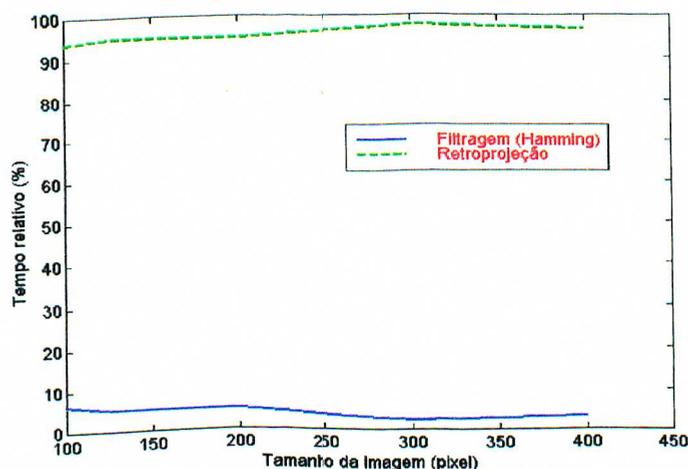


Figura 4.50 – Tempo de processamento em cada fase do método da Retroprojeção filtrada relativo ao tempo total de reconstrução

## 4.9 – Conclusões

Neste capítulo foi mostrado o método de reconstrução utilizando a *Retroprojeção Filtrada*, onde as projeções são filtradas antes da Retroprojeção. A filtragem pode ser realizada no domínio do parâmetro, fazendo a convolução da resposta impulsiva do filtro com as projeções, ou pode também ser realizada no domínio de Fourier. Neste caso, a filtragem é realizada fazendo o produto da resposta de frequência do filtro com cada projeção.

Foi mostrado também que os artefatos decorrentes do comportamento cíclico da DFT e o fenômeno de Gibbs podem ser minimizados pelo acréscimo de zeros às projeções e multiplicando o filtro por uma janela para suavizar a sua curva de resposta de frequência.

Ao analisar o tempo de cálculo para o método da Retroprojeção filtrada, verificou-se que a Retroprojeção é a fase do método que representa a maior parcela do tempo de reconstrução.

## CAPÍTULO V

### MÉTODO DA FILTRAGEM APÓS A RETROPROJEÇÃO

Este capítulo descreve o método de reconstrução onde a retroprojeção é filtrada e mostra os resultados obtidos nos vários testes realizados. Finalmente são realizadas conclusões a respeito desses resultados.

#### 5.1 – Introdução

O método de reconstrução utilizando a Retroprojeção filtrada (“Filtered Backprojection”), mostrado no Capítulo IV deste trabalho, deveria ser chamado de *método de reconstrução utilizando filtragem antes da Retroprojeção*, uma vez que na verdade as projeções é que são filtradas e não as retroprojeções.

Este capítulo apresenta um método em que a filtragem é realizada após a Retroprojeção. Portanto, o *método de reconstrução da filtragem após a Retroprojeção*.

O método pode ser resumido na seguinte equação de operadores:

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{H}_2 \mathcal{F}_2 [\mathcal{B}g] \quad (5.1)$$

onde:

- $g$  : Transformada de Radon.       $\mathcal{F}_2$  : Transformada bidimensional de Fourier.  
 $\mathcal{H}_2$  : Filtro bidimensional.       $\mathcal{F}_2^{-1}$  : Transformada inversa bidimensional de Fourier.  
 $\mathcal{B}$  : Operador Retroprojeção.

A Figura 5.1 ilustra o diagrama de blocos da Equação 5.1:

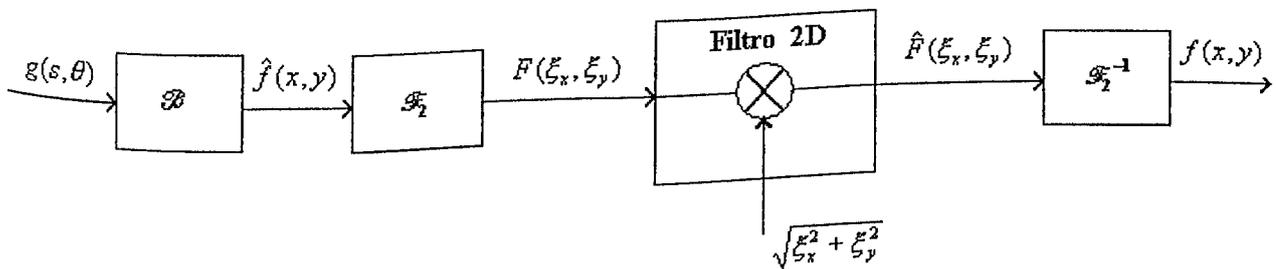


Figura 5.1 – Filtragem após a Retroprojeção

## 5.2 – Descrição matemática

Pode-se também fazer a Retroprojeção, isto é, a transformada adjunta de Radon antes da filtragem (Jain, 1989).

Antes de explicar a transformada de Radon adjunta é necessário introduzir o conceito de *fonte pontual* que é utilizado neste capítulo.

Uma fonte pontual é modelada (Toft, 1996) como o produto de duas funções Delta. Inicialmente a fonte pontual é posicionada na origem do sistema de coordenadas:

$$f(x, y) = \delta(x) \delta(y). \quad (5.2)$$

A fonte pontual pode ser colocada em qualquer posição, isto é:

$$f(x, y) = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (5.3)$$

Isto é bastante interessante, porque qualquer função pode ser escrita como uma integral ponderada das fontes pontuais:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x - x') \delta(y - y') dx' dy' \quad (5.4)$$

Aplicando a transformada de Radon em  $f(x, y)$ , na Equação 5.3, tem-se:

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (5.5)$$

Da definição da função Delta, conclui-se que:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1, & x = x' \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\delta(y - y') = \begin{cases} 1, & y = y' \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (5.7)$$

Assim, calcula-se  $g(s, \theta)$  na Equação 5.5:

$$g(s, \theta) = \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - s) \quad (5.8)$$

A Figura 5.2 ilustra uma fonte pontual e a sua transformada de Radon.

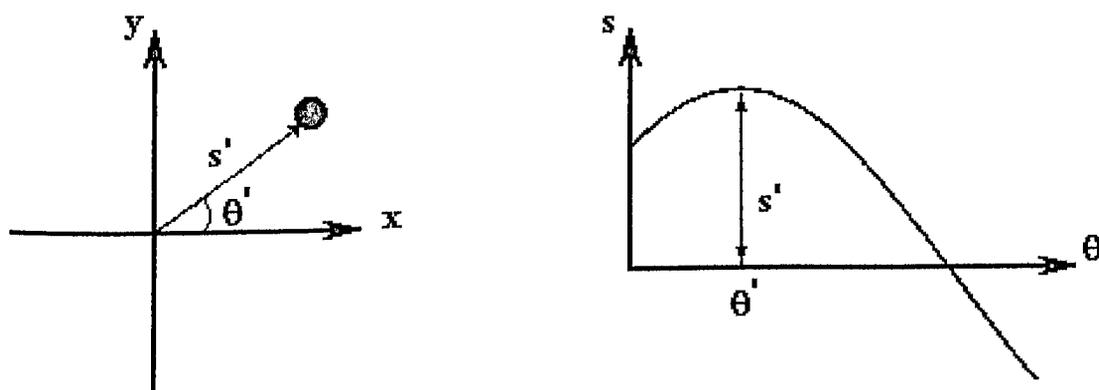


Figura 5.2 – Fonte pontual e a sua transformada de Radon

Da Equação 5.8 e da Equação 5.4, pode-se dizer que para qualquer função  $f(x, y)$ , a transformada de Radon é dada por:

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - s) dx' dy' \quad (5.9)$$

Obtém-se da Figura 5.2 que:

$$x' = s' \cos \theta' \quad y' = s' \sin \theta' \quad (5.10)$$

Substituindo a Equação 5.10 na Equação 5.9, tem-se que:

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(s' \cos(\theta' - \theta) - s) dx' dy' \quad (5.11)$$

A Equação 5.11 mostra que um ponto é transformado em uma senóide no domínio do parâmetro, e a transformada de Radon de uma fonte pontual é confinada em um domínio do parâmetro limitado:

$$f(x, y) = 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} > s_{\text{máx}} \quad (5.12)$$

$$g(s, \theta) = 0, \quad |s| > s_{\text{máx}} \quad (5.13)$$

A Equação 5.9 mostra que cada ponto  $(x', y')$  é transformado em uma curva senoidal no domínio de Radon. A transformada de Radon de  $f(x, y)$  é a soma (integral) de todas as curvas senoidais no domínio de Radon.

Resolvendo a Equação 5.9 para  $f(x, y) = \delta(x - x') \delta(y - y')$  e lembrando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \text{ tem-se:}$$

$$g(s, \theta) = \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - s) \quad (5.14)$$

Observa-se que as integrações sobre  $x'$  e  $y'$  foram omitidas. Isto se deve à linearidade das transformações usadas.

Para uma fonte pontual, a transformada de Radon adjunta (operador Retroprojeção) é aplicada antes da filtragem, isto é:

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (5.15)$$

Substituindo  $g(s, \theta)$  da Equação 5.14 na Equação 5.15, tem-se:

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^{\pi} \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - x \cos \theta - y \sin \theta) d\theta \quad (5.16)$$

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^{\pi} \delta((x'-x) \cos \theta + (y'-y) \sin \theta) d\theta \quad (5.17)$$

Resolvendo a Equação 5.17 utilizando a propriedade da função Delta, Equação 1.3 no Anexo I deste trabalho, tem-se:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{|(x-x') \sin \theta - (y-y') \cos \theta|} \Big|_{(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta = 0} \quad (5.18)$$

$$(-x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = \arctg \left( \frac{x-x'}{y-y'} \right) \quad (5.19)$$

Substituindo a Equação 5.19 na Equação 5.18, tem-se que:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{\left| -(x-x') \operatorname{sen} \operatorname{arctg} \left( \frac{x-x'}{y-y'} \right) - (y-y') \cos \operatorname{arctg} \left( \frac{x-x'}{y-y'} \right) \right|} \quad (5.20)$$

Fazendo  $\operatorname{arctg} \left( \frac{x-x'}{y-y'} \right) = \psi$ , obtém-se a Figura 5.3:

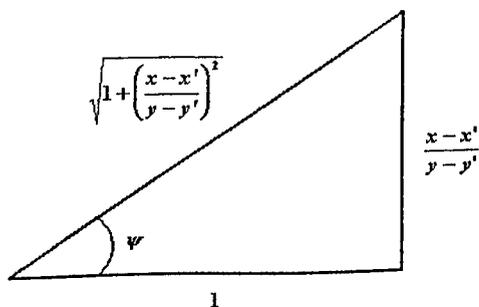


Figura 5.3 – Triângulo retângulo com um ângulo de  $\psi$

Reescrevendo a Equação 5.20, tem-se:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{\left| (x-x') \operatorname{sen} \psi + (y-y') \cos \psi \right|} \quad (5.21)$$

Da Figura 5.3, pode-se escrever:

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{\left( \frac{x-x'}{y-y'} \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{x-x'}{y-y'} \right)^2}} \quad (5.22)$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-x'}{y-y'}\right)^2}} \quad (5.23)$$

Substituindo as Equações 5.22 e 5.23 na Equação 5.21 e simplificando, tem-se:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x-x'}{y-y'}\right)^2}}{\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{y-y'}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (5.24)$$

Por definição, a *convolução bidimensional contínua* é dada por:

$$f(x, y) \otimes h(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x-x', y-y') h(x, y) dx' dy' \quad (5.25)$$

A Equação 5.24 pode ser reconhecida como a *convolução bidimensional*. Assim:

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y) \quad (5.26)$$

onde:

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5.27)$$

Aplicando o *teorema da convolução* à Equação 5.26, tem-se:

$$\hat{F}(\xi_x, \xi_y) = F(\xi_x, \xi_y) H(\xi_x, \xi_y) \quad (5.28)$$

$$F(\xi_x, \xi_y) = \frac{\hat{F}(\xi_x, \xi_y)}{H(\xi_x, \xi_y)} \quad (5.29)$$

Das tabelas de transformada de Fourier bidimensional, pode-se encontrar que:

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leftrightarrow H(\xi_x, \xi_y) = \frac{1}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \quad (5.30)$$

Isto significa que  $f(x, y)$  pode ser calculada como:

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta, \theta) d\theta \quad (5.31)$$

$$\hat{F}(\xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, y) e^{-j2\pi(x \xi_x + y \xi_y)} d\xi_x d\xi_y \quad (5.32)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \hat{F}(\xi_x, \xi_y) e^{j2\pi(x \xi_x + y \xi_y)} d\xi_x d\xi_y \quad (5.33)$$

O método de reconstrução apresentado aqui, para calcular  $f(x, y)$ , pode ser visto como

uma seqüência de operações de Retroprojeção, seguido de uma transformação de Fourier bidimensional, em seguida por uma filtragem bidimensional e finalmente por uma transformação inversa de Fourier bidimensional. Isto vem de encontro à Equação 5.1, escrita como uma equação de operadores no início deste capítulo.

### 5.3 – Implementação da Filtragem Após a Retroprojeção

A implementação do método da filtragem após a Retroprojeção requer a implementação discreta do operador Retroprojeção, como mostrado no Capítulo II deste trabalho. Após a Retroprojeção, a matriz  $\hat{f}(m, n)$  deve ser filtrada por um filtro passa-alta conforme a Equação 5.33. A implementação é parecida com a da Seção 5.5 do Capítulo V deste trabalho, mas estendida à duas dimensões.

O espectro da imagem pode ser obtido de duas maneiras. A primeira seria usando o algoritmo da FFT bidimensional, e a segunda seria usando a FFT unidimensional sobre todas as linhas e em seguida sobre todas as colunas da imagem (propriedade da separabilidade), isto é possível porque o espectro pode ser escrito como:

$$F(\xi_x, \xi_y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(m, n) e^{-2\pi j(m\xi_x / M + n\xi_y / N)} \quad (5.34)$$

$$F(\xi_x, \xi_y) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(m, n) e^{-2\pi j n \xi_y / N} \right] e^{-2\pi j m \xi_x / M} \quad (5.35)$$

Pode-se notar que a imagem é considerada periódica e o espectro tem um conjugado complexo simétrico para um sinal real:

$$\hat{f}(m, n) = \hat{f}(m + M, n) = \hat{f}(m, n + N) \quad (5.36)$$

$$\hat{F}(\xi_x, \xi_y) = \hat{F}(m + M, N) = \hat{F}(m, n + N) \quad (5.37)$$

$$\hat{f}(m, n) = \hat{f}(m, n)^* \Rightarrow \hat{F}(\xi_x, \xi_y) = \hat{F}(-\xi_x, -\xi_y)^* = \hat{F}(M - \xi_x, N - \xi_y)^* \quad (5.38)$$

A filtragem bidimensional é muito fácil de se realizar se o espectro for devidamente calculado. O espectro complexo é multiplicado por uma versão discreta do filtro  $\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$ :

$$\xi_x \rightarrow \frac{\xi_x}{M \Delta x}, \quad \xi_y \rightarrow \frac{\xi_y}{M \Delta x} \quad (5.39)$$

$$\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{\xi_x}{M \Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{M \Delta x}\right)^2} \quad (5.40)$$

Levando-se em consideração as frequências negativas,  $\xi_x < 0$ , na Equação 5.37,

$\xi_x$  deve ser substituída por  $\xi_x - M$  e se  $\xi_y < 0$ ,  $\xi_y$  deve ser substituída por  $\xi_y - N$ . A simetria pode ser usada de modo que aproximadamente metade do espectro complexo seja multiplicada pelo filtro e a outra metade seja multiplicada a partir da primeira metade devido à simetria do conjugado complexo. Após a multiplicação pelo filtro, a DFT inversa bidimensional (ou preferivelmente FFT)

é utilizada, onde a parte real do resultado é extraída, e a parte imaginária deve ser zero, ou melhor, deve ser desconsiderada.

A implementação da DFT bidimensional do filtro passa alta deve ser multiplicada por uma janela, de modo a reduzir os efeitos de borda, devido ao comportamento periódico do espectro. Existe na literatura várias janelas disponíveis, mas para este trabalho, as janelas utilizadas são as mesmas do Capítulo IV deste trabalho (Jain, 1989).

A Figura 5.4 ilustra o que foi explicado nesta seção.

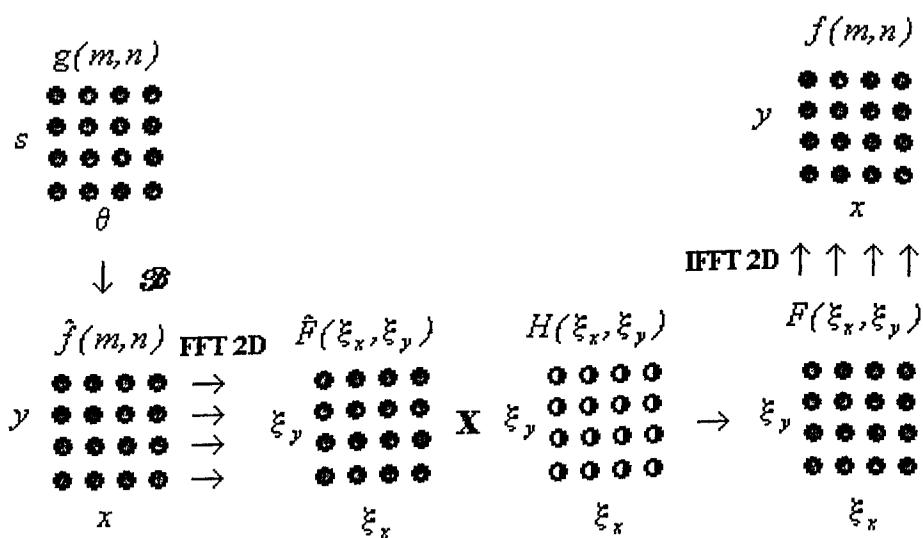


Figura 5.4 – Filtragem após a Retroprojeção (discreta)

Na Figura 5.4, partindo-se de cima a esquerda para baixo. A Retroprojeção discreta é calculada. Em seguida, o espectro discreto bidimensional é calculado, e após ele é multiplicado pela versão discreta do filtro. Finalmente, a transformada discreta inversa bidimensional é calculada para se obter a imagem discreta reconstruída.

O sinograma retrojetado,  $\mathcal{B}g$ , possui valores diferentes próximos às bordas da imagem (Jain, 1989), como pode ser visto na Figura 5.5, isso ocorre devido à convolução conforme a

Equação 5.26. Isto implica que a filtragem no domínio da imagem encontra problemas com o comportamento cíclico da DFT (ou FFT). Esses problemas podem ser resolvidos se a Retroprojeção for realizada resultando em uma imagem maior que as dimensões necessárias, se isso ocorrer é necessário filtrar a imagem expandida, e em seguida truncar a imagem para o seu tamanho normal, como pode ser mostrado na Figura 5.6.

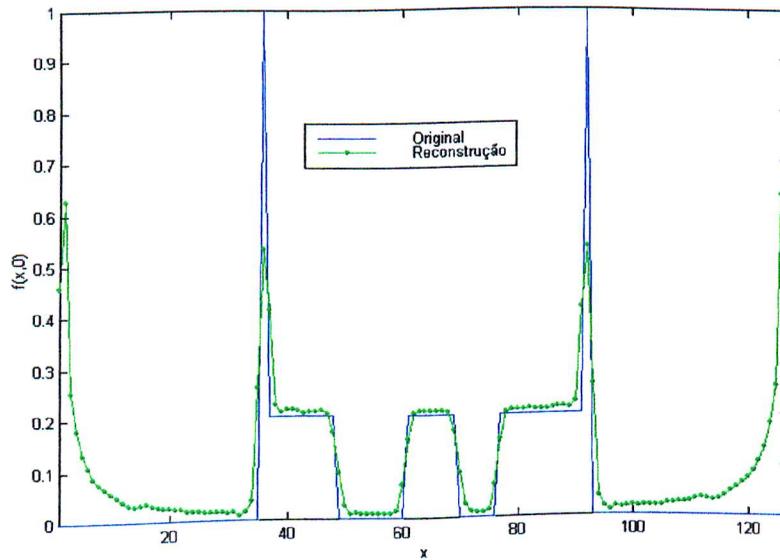


Figura 5.5 – Reconstrução sem a expansão e o truncamento

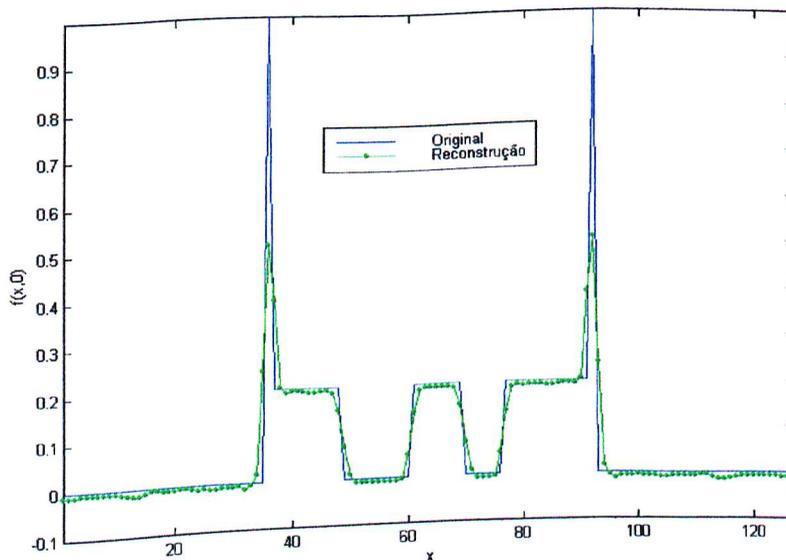


Figura 5.6 – Reconstrução com a expansão e o truncamento

Comparando as Figuras 5.6 e 5.5, pode-se comprovar que o tempo de reconstrução com a expansão foi 4 vezes maior do que o tempo de reconstrução sem a expansão e o truncamento.

## 5.4 – Filtros de Reconstrução

Os filtros de reconstrução são os mesmos apresentados no Capítulo 4, exceto que, agora, eles são bidimensionais. A Tabela 5.1 apresenta a resposta de frequência dos filtros 2D.

Tabela 5.1 – Filtros 2D de reconstrução

Filtro	Resposta de Frequência $H(\xi_x, \xi_y)$
Ram-Lak	$H(\xi_x, \xi_y)_{RL} = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \text{rect}(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} w)$
Shepp-Logan	$\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \text{sinc}(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} w) \text{rect}(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} w)$
Cosseno Passa-baixa	$\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \cos(\pi \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} w) \text{rect}(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} w)$
Hamming generalizado	$\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} [\alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} w)] \text{rect}(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} w)$ $0 < \alpha < 1$

onde:

$$w = \frac{1}{2\xi_m} \quad (5.41)$$

$$\text{rect}\left(\frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{2\xi_m}\right) = \begin{cases} 1 & , \left| \frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{2\xi_m} \right| \leq 1 \\ 0 & , \left| \frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{2\xi_m} \right| > 1 \end{cases} \quad (5.42)$$

$\xi_m$  : Freqüência de corte

A Figura 5.7 mostra os gráficos da resposta de freqüência dos filtros 2D de reconstrução listados na Tabela 5.1.

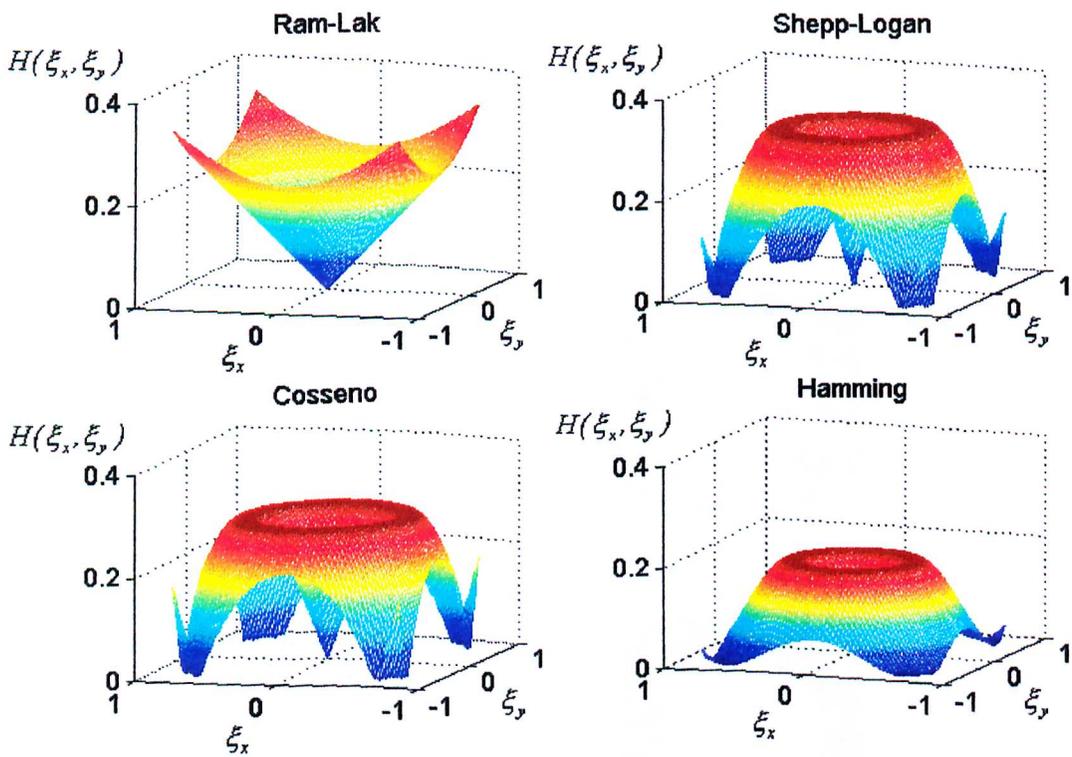


Figura 5.7 – Resposta de freqüência dos filtros 2D de reconstrução

## 5.5 – Resultados obtidos

As Figuras 5.8 a 5.23 mostram a imagem e as imagens reconstruídas usando os quatro filtros 2D: Ram-Lak, Shepp-Logan, Cosseno passa-baixa e Hamming generalizado, cujas respostas em frequência foram mostradas na Tabela 5.1, para as quatro imagens originais: um círculo, um triângulo, o logotipo da UFU (Universidade Federal de Uberlândia) e o modelo de Shepp-Logan.

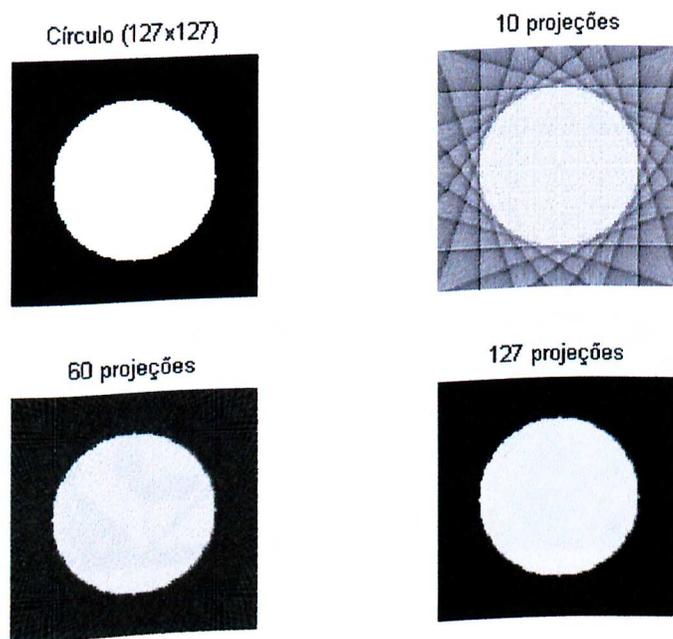


Figura 5.8 - Reconstrução do Círculo usando o filtro de Ram-Lak

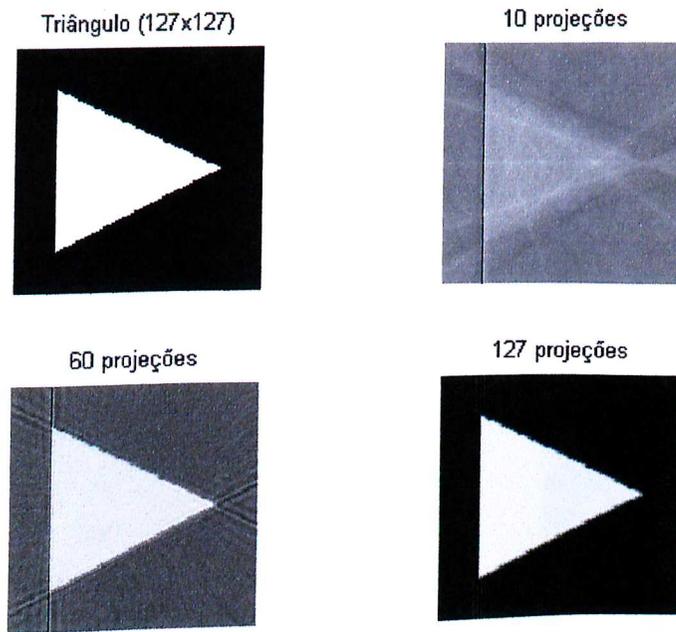


Figura 5.9 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Ram-Lak

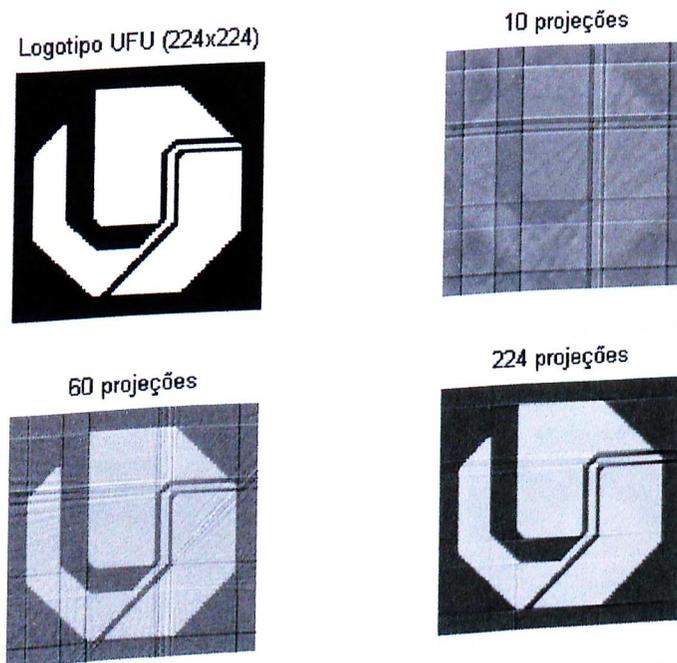


Figura 5.10 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Ram-Lak

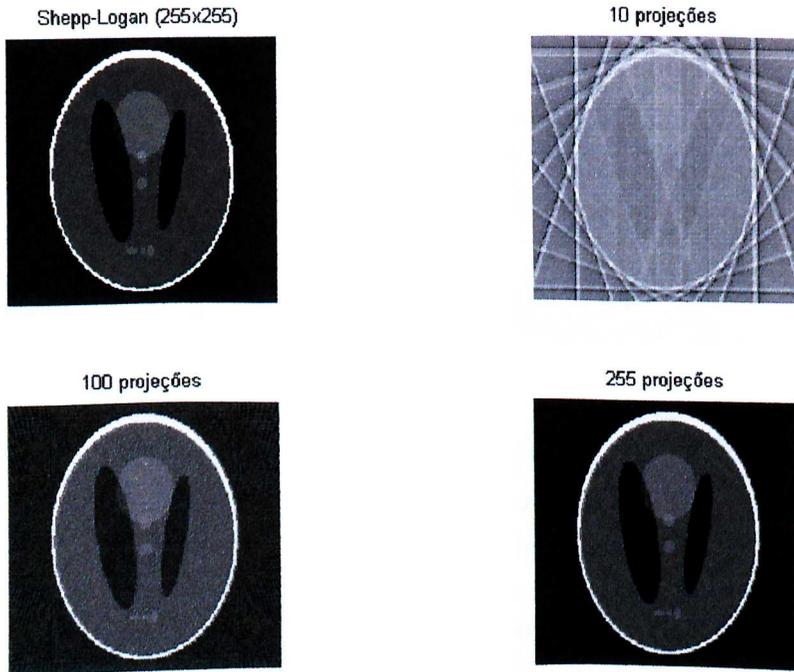


Figura 5.11 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Ram-Lak

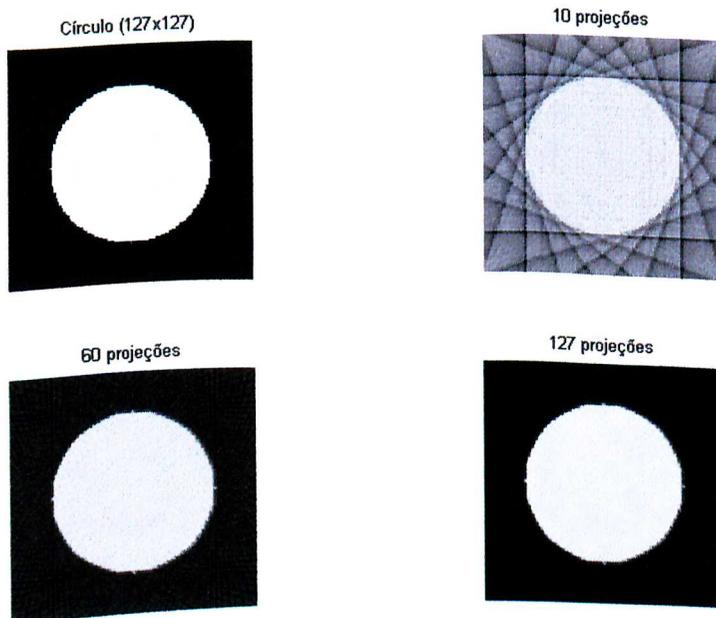


Figura 5.12 - Reconstrução do Círculo usando o filtro de Shepp-Logan

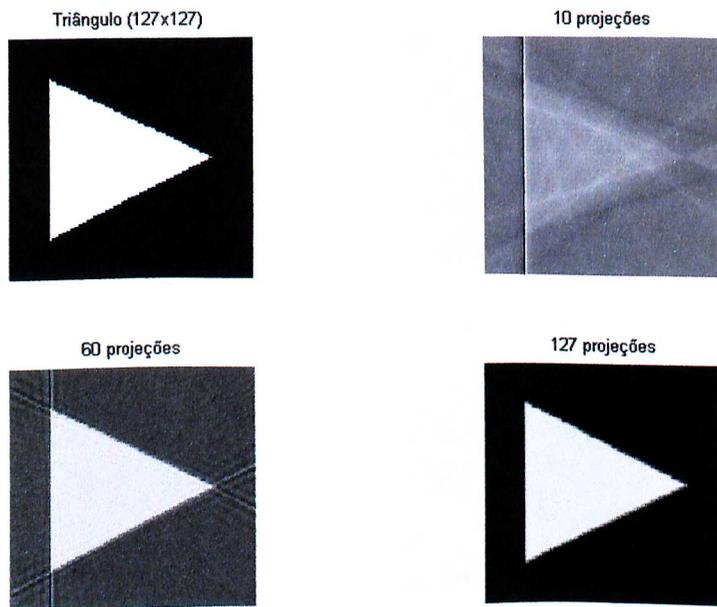


Figura 5.13 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Shepp-Logan

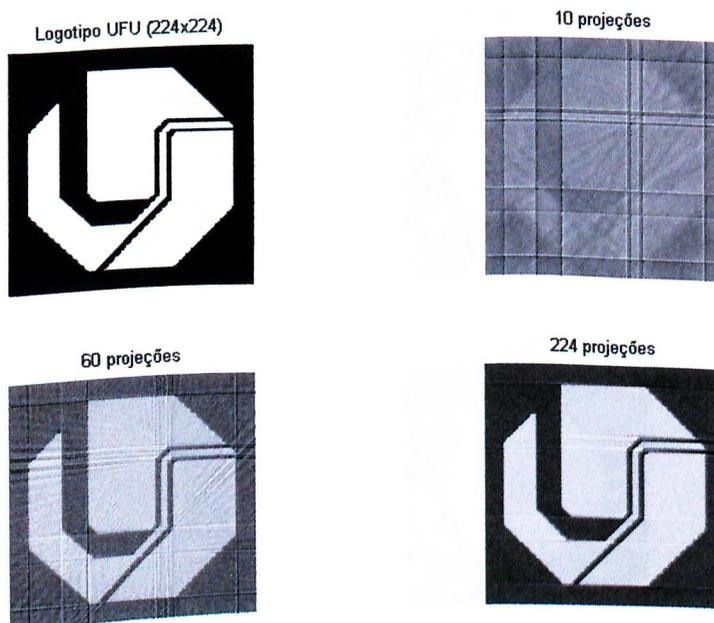


Figura 5.14 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Shepp-Logan

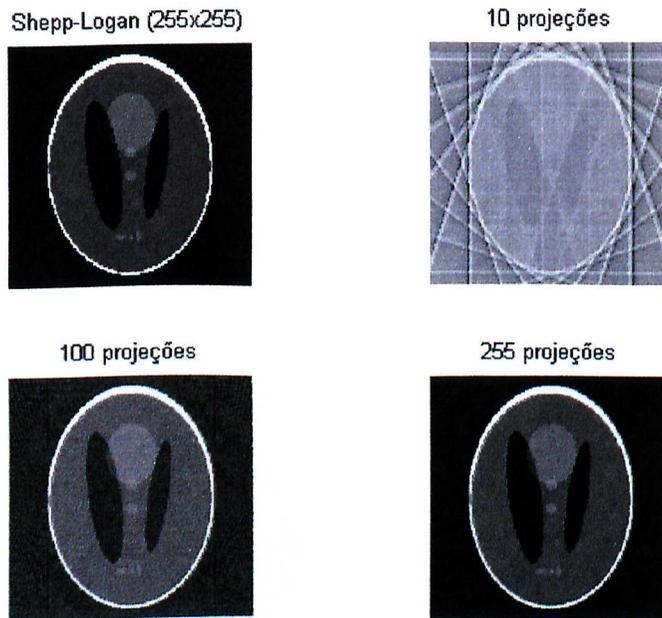


Figura 5.15 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Shepp-Logan

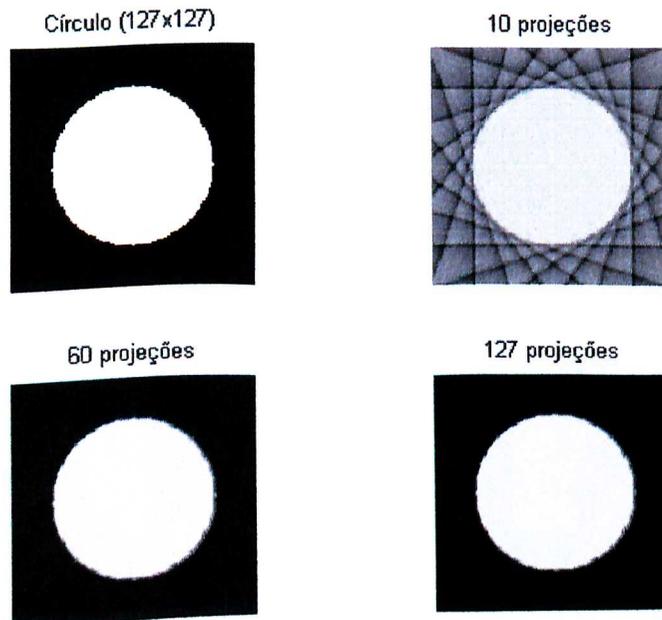


Figura 5.16 - Reconstrução do Círculo usando o filtro Cosseno

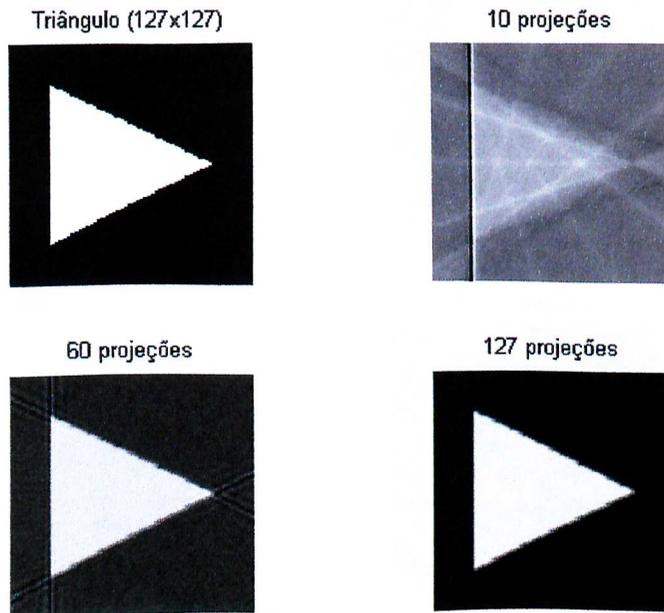


Figura 5.17 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro Cosseno

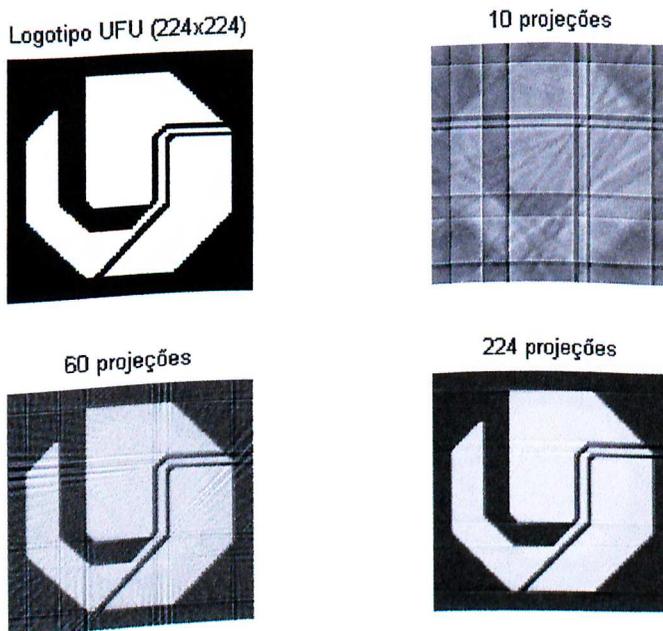
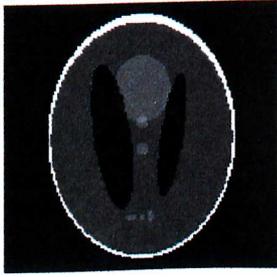
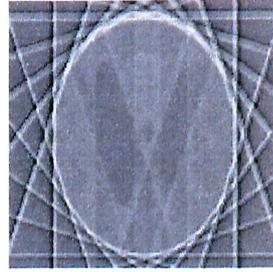


Figura 5.18 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro Cosseno

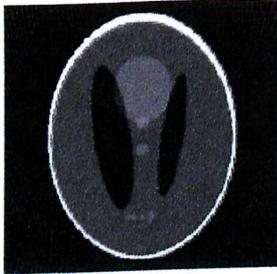
Modelo Shepp-Logan (255x255)



10 projeções



100 projeções



255 projeções

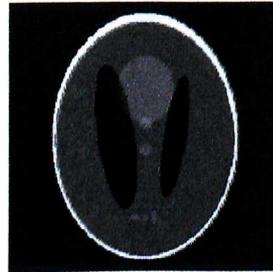
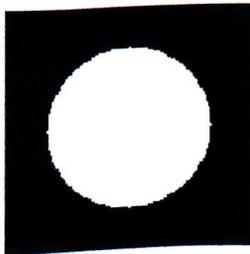
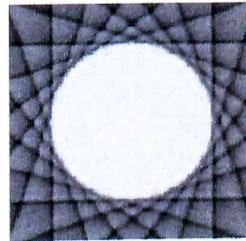


Figura 5.19 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro Cosseno

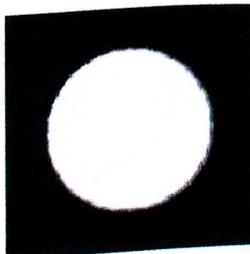
Círculo (127x127)



10 projeções



60 projeções



127 projeções

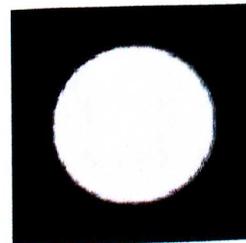


Figura 5.20 - Reconstrução do Círculo usando o filtro de Hamming

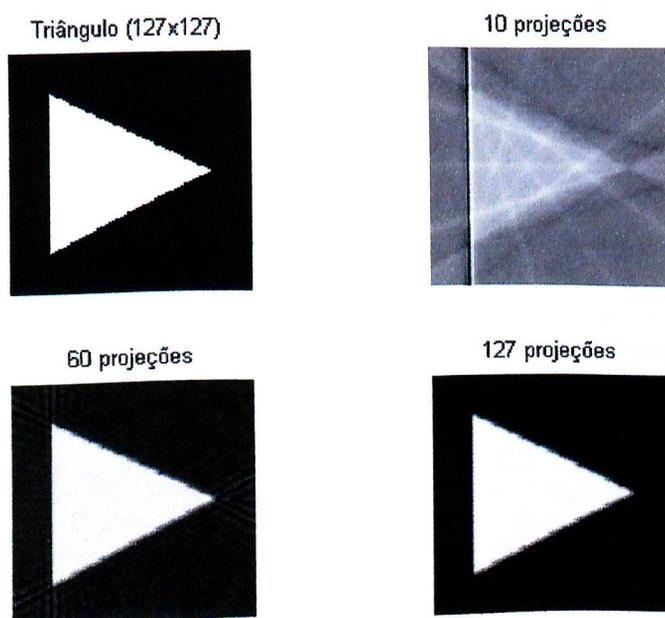


Figura 5.21 - Reconstrução do Triângulo usando o filtro de Hamming

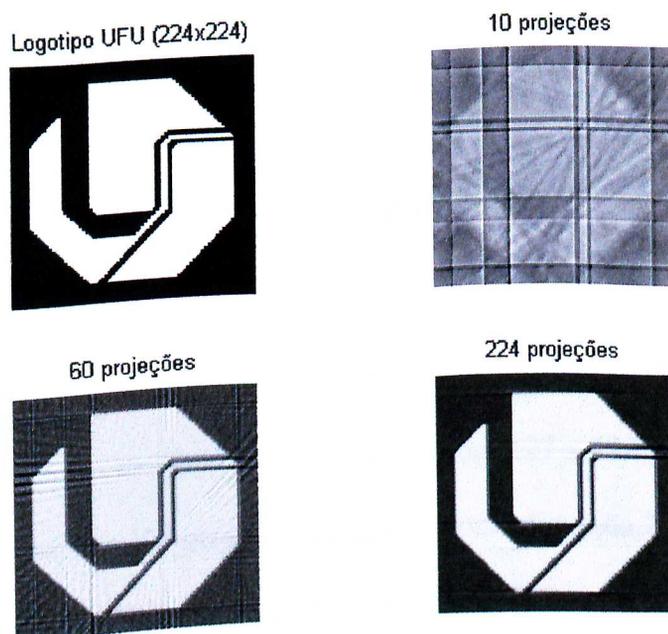


Figura 5.22 - Reconstrução do Logotipo da UFU usando o filtro de Hamming

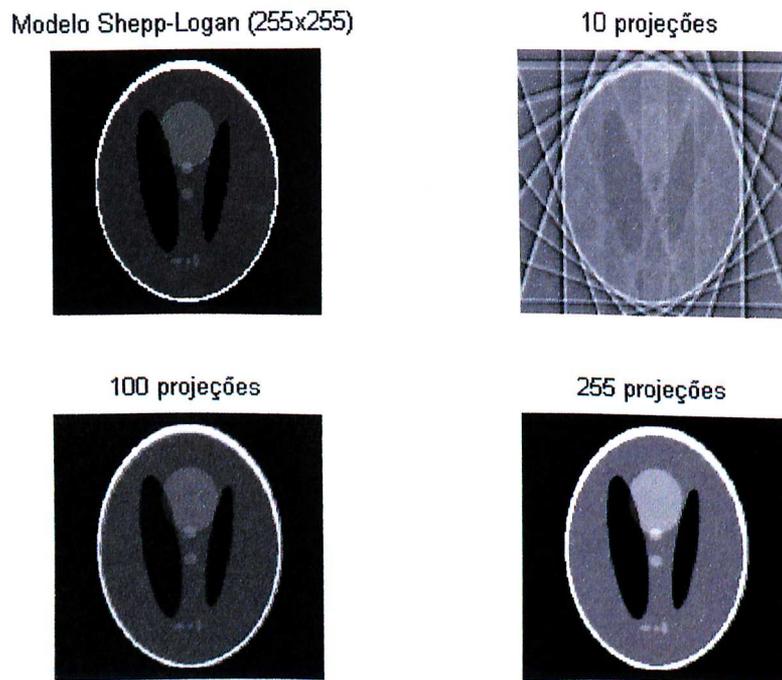


Figura 5.23 - Reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o filtro de Hamming

## 5.6 – Análise Qualitativa dos Resultados Obtidos

Na Figura 5.24 é mostrado uma comparação dos vários filtros utilizados neste trabalho, definidos na Tabela 5.1, para o modelo de Shepp-Logan com  $127 \times 127$  pixels, usando a relação ideal de 127 amostras/projeção e 127 projeções de acordo com a Equação 2.72 do Capítulo II deste trabalho. O gráfico é mostrado para  $f(x,0)$  versus  $x$ , isto é, os níveis de cinza,  $f(x,y)$ , para  $y = 0$  e  $x$  variável.

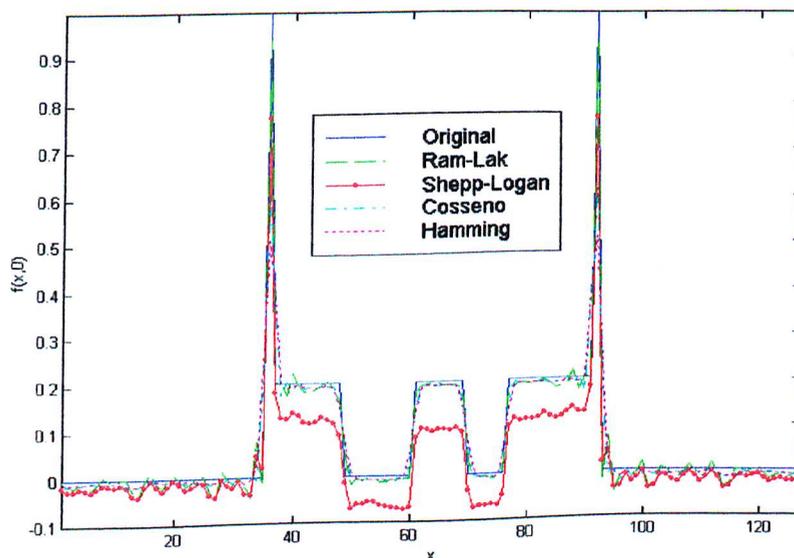


Figura 5.24 – Comparação dos filtros de reconstrução

Como pode ser observado na Figura 5.24, as reconstruções apresentam uma aproximação razoável da imagem original. Por uma avaliação visual, a reconstrução utilizando o filtro de Shepp-Logan, como mostra a Figura 5.15, se aproximou menos da imagem original, enquanto a reconstrução utilizando o filtro de Hamming, como mostra a Figura 5.23, apresentou a melhor qualidade de reconstrução.

## 5.7 – Conclusões

Neste capítulo foi mostrado o método de reconstrução *utilizando a Filtragem após a Retroprojeção*. Foi mostrado também que os artefatos decorrentes do comportamento cíclico da DFT podem ser reduzidos retroprojetando em uma imagem bem maior que as dimensões originais, e após a filtragem realizando um truncamento para as dimensões originais da imagem. Ao retroprojetar em uma imagem bem maior, o tempo despendido na reconstrução é bem maior que o tempo sem a expansão.

## **CAPÍTULO VI**

### **ANÁLISE COMPARATIVA DOS MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO**

Este capítulo realiza uma comparação dos métodos: Retroprojeção filtrada, filtragem após a Retroprojeção, filtragem utilizando a convolução apresentados neste trabalho, do ponto de vista do módulo do erro relativo e do tempo de reconstrução de cada método. Outro ponto analisado é qual o tipo de interpolação a ser utilizado na operação de Retroprojeção.

#### **6.1 – Introdução**

A análise comparativa dos métodos de reconstrução: Retroprojeção filtrada, filtragem após a Retroprojeção, filtragem utilizando a convolução, apresentados neste trabalho, é realizada de forma quantitativa neste capítulo. A comparação é feita analisando a norma do erro relativo calculado entre a imagem reconstruída e a imagem original e analisando também o tempo de reconstrução. Inicialmente essas análises são feitas com as projeções livres de ruído e em seguida é adicionado ruído às projeções.

Na Seção 6.5 é realizada uma análise da influência do tipo de interpolação, usada na operação de Retroprojeção que aparece nos três métodos apresentados neste trabalho, na precisão e o tempo despendido na reconstrução dos métodos de reconstrução.

A comparação da qualidade de reconstrução de cada método é realizada considerando a norma do erro relativo. A norma do erro relativo é dada por:

$$\frac{\sum_{x,y} |O(x,y) - R(x,y)|^2}{\sum_{x,y} |O(x,y)|^2} \quad (6.1)$$

onde:

$O(x,y)$  : representa a imagem original.

$R(x,y)$  : representa a imagem reconstruída.

O erro relativo deve ser sempre considerado juntamente com uma avaliação visual, porque somente ele não é uma boa medida para avaliação da reconstrução (*Westenberg, 1996*).

## 6.2 – Sinograma Sem Ruído

A imagem utilizada para comparação entre os métodos de reconstrução é o modelo de Shepp-Logan. Na Figura 6.1 é mostrado o sinograma sem ruído correspondente à imagem mostrada na Figura 6.2.

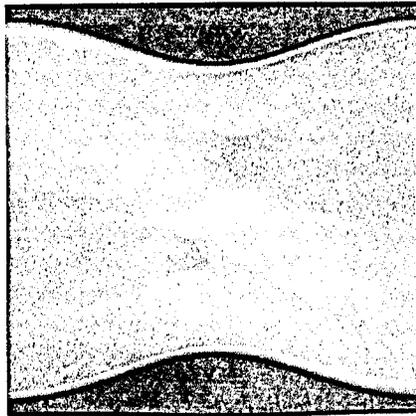


Figura 6.1 – Sinograma do modelo de Shepp-Logan

A Figura 6.3 mostra a reconstrução de Shepp-Logan utilizando o método da Retroprojeção filtrada, onde a filtragem é realizada antes da Retroprojeção no domínio de Fourier (utilizando o filtro de reconstrução unidimensional).

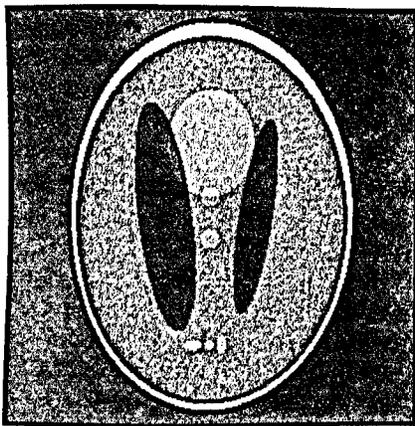


Figura 6.2 – Imagem Original

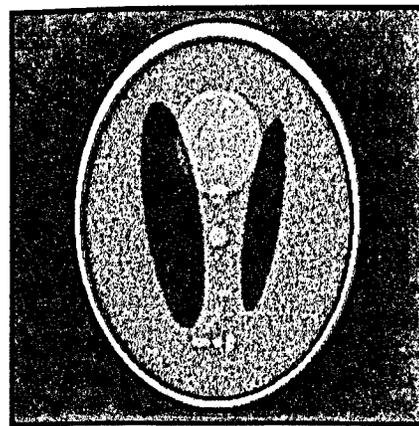


Figura 6.3 – Método da Retroprojeção filtrada

A Figura 6.4 mostra a reconstrução do modelo de Shepp-Logan pelo método da filtragem utilizando a convolução, onde a filtragem é realizada antes da Retroprojeção mas no domínio do parâmetro  $s$ .

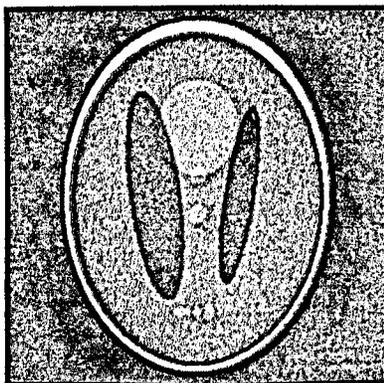


Figura 6.4 – Filtragem utilizando a convolução

A Figura 6.5 mostra a reconstrução do modelo de Shepp-Logan utilizando o método da filtragem após a Retroprojeção, onde a filtragem é realizada no domínio de Fourier (filtro de reconstrução 2D).

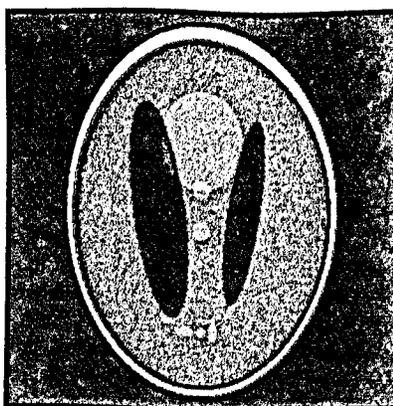


Figura 6.5 – Filtragem após a Retroprojeção

As reconstruções mostradas nas Figuras 6.3 a 6.5 foram realizadas a partir de um sinograma com 301 projeções e 301 amostras/projeção (relação ideal).

A Figura 6.6 ilustra a comparação dos métodos mostrando o erro relativo para várias reconstruções variando o número de projeções.

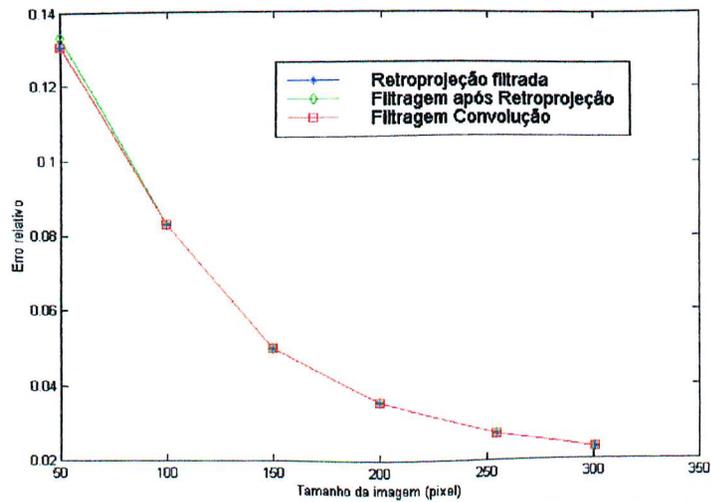


Figura 6.6 – Erro relativo dos métodos para vários tamanhos de imagens

### 6.3 – Sinograma Com Ruído

A Figura 6.7 mostra o sinograma, do modelo de Shepp-Logan, com ruído branco gaussiano com média igual a zero e variância igual a 0.01.

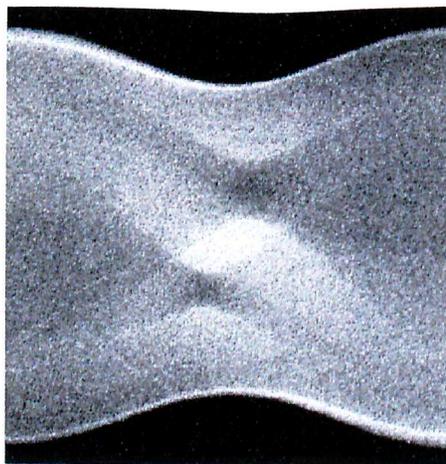


Figura 6.7 – Sinograma do modelo de Shepp-Logan com ruído

A Figura 6.8 mostra a imagem original do modelo de Shepp-Logan e a Figura 6.9 mostra a reconstrução do modelo de Shepp-Logan usando o método da Retroprojeção filtrada, onde a filtragem é realizada antes da Retroprojeção no domínio de Fourier (filtro de reconstrução 1D).

A Figura 6.10 mostra a reconstrução do modelo de Shepp-Logan pelo método da filtragem utilizando a convolução, onde a filtragem é realizada antes da Retroprojeção mas no domínio do parâmetro  $s$ .

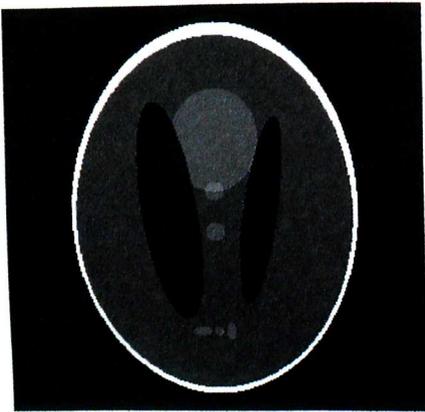


Figura 6.8 – Imagem Original

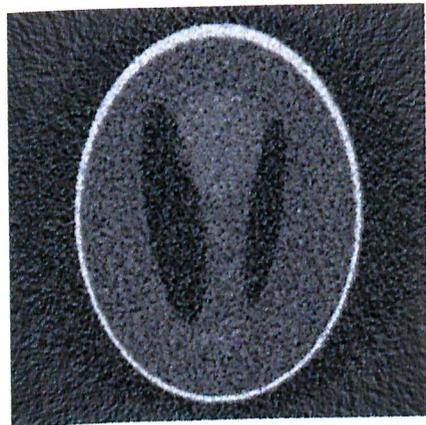


Figura 6.9 – Retroprojeção filtrada

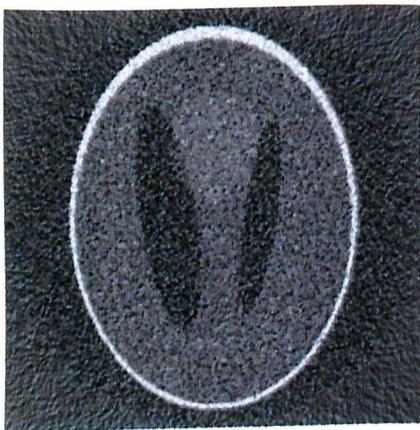


Figura 6.10 – Filtragem utilizando a convolução

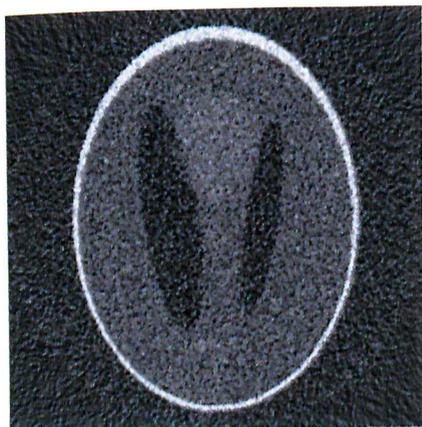


Figura 6.11 – Filtragem após a Retroprojeção

A Figura 6.11 mostra a reconstrução do modelo de Shepp-Logan utilizando o método da filtragem após a Retroprojeção, onde a filtragem é realizada no domínio de Fourier (filtro de reconstrução 2D).

As reconstruções mostradas nas Figuras 6.9 a 6.11 foram realizadas a partir de um sinograma com 301 projeções e 301 amostras/projeção (relação ideal).

A Figura 6.12 ilustra a comparação dos métodos do ponto de vista do módulo do erro relativo para várias reconstruções variando o tamanho da imagem.

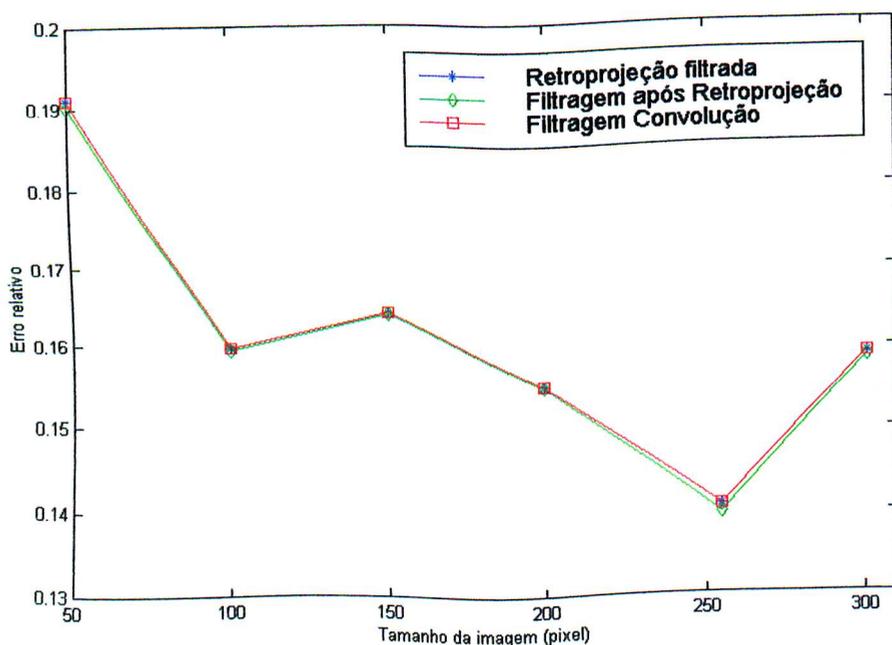


Figura 6.12 – Erro relativo dos métodos para vários tamanhos de imagem

As Figuras 6.13 a 6.15 mostram a comparação do erro relativo com e sem ruído para os métodos de reconstrução utilizando a Retroprojeção filtrada, a filtragem utilizando a Convolação e filtragem após a Retroprojeção, respectivamente, para vários tamanhos de imagens.

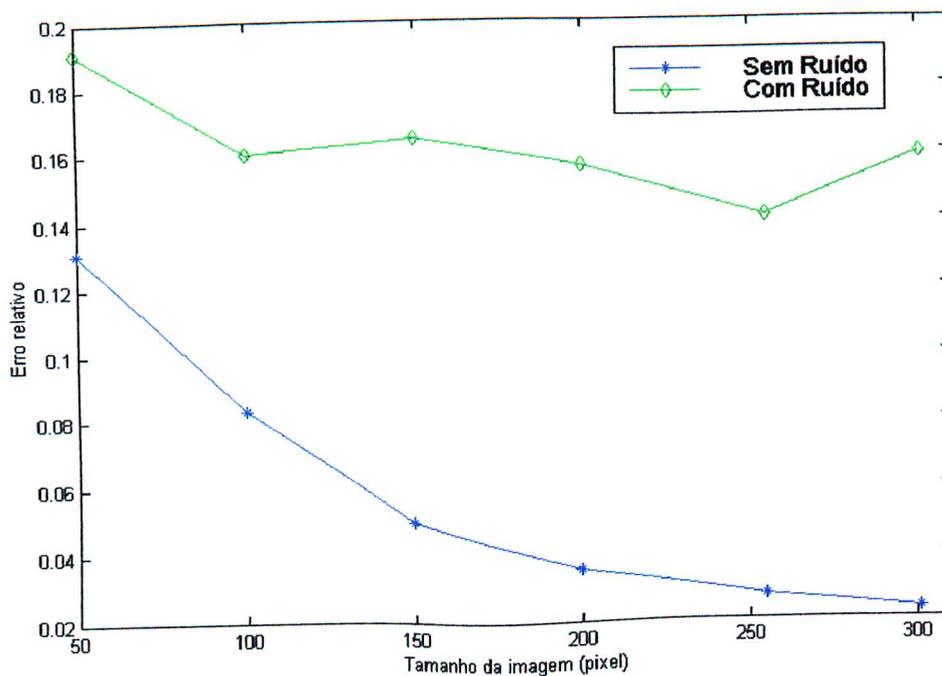


Figura 6.13 – Retroprojeção filtrada com e sem ruído

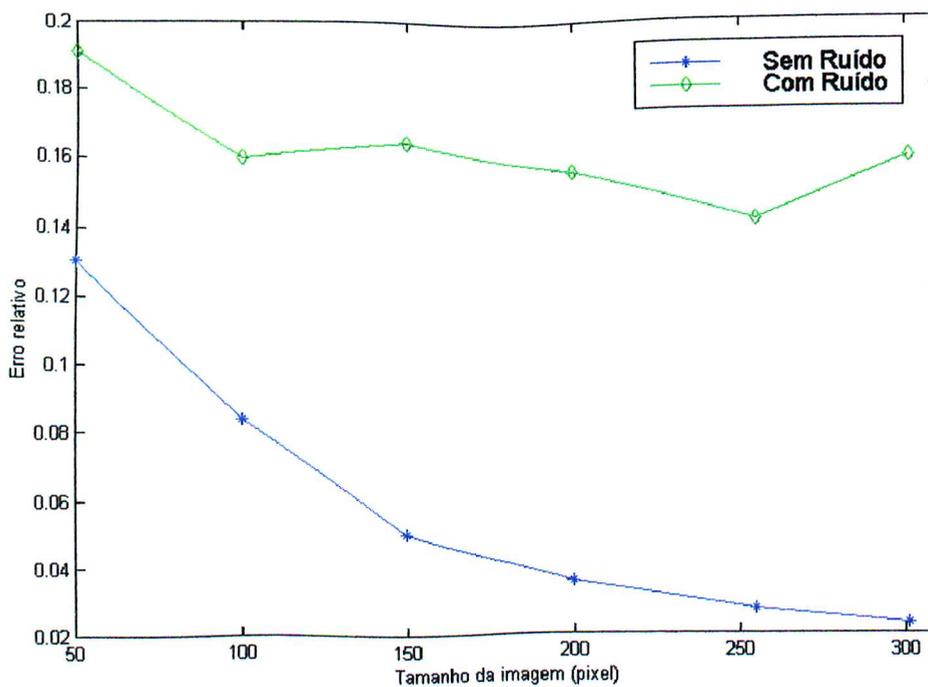


Figura 6.14 – Filtragem utilizando a convolução com e sem ruído

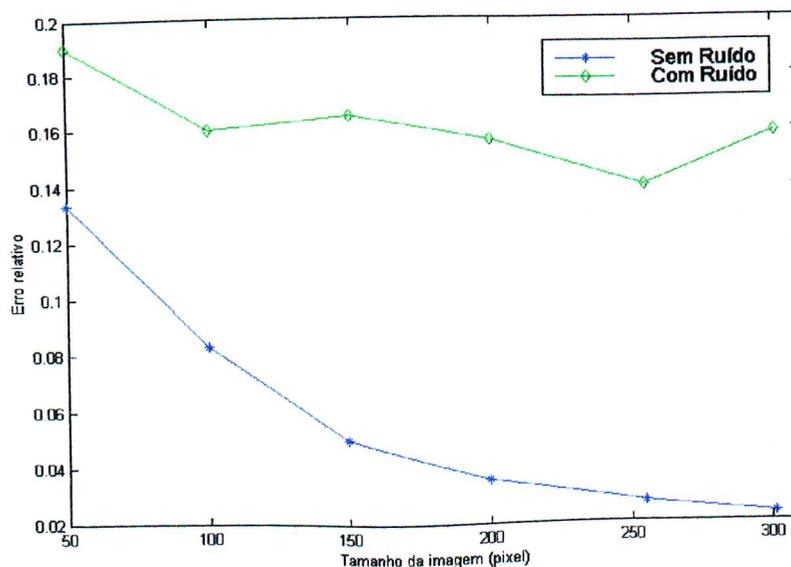


Figura 6.15 – Filtragem após a Retroprojeção com e sem ruído

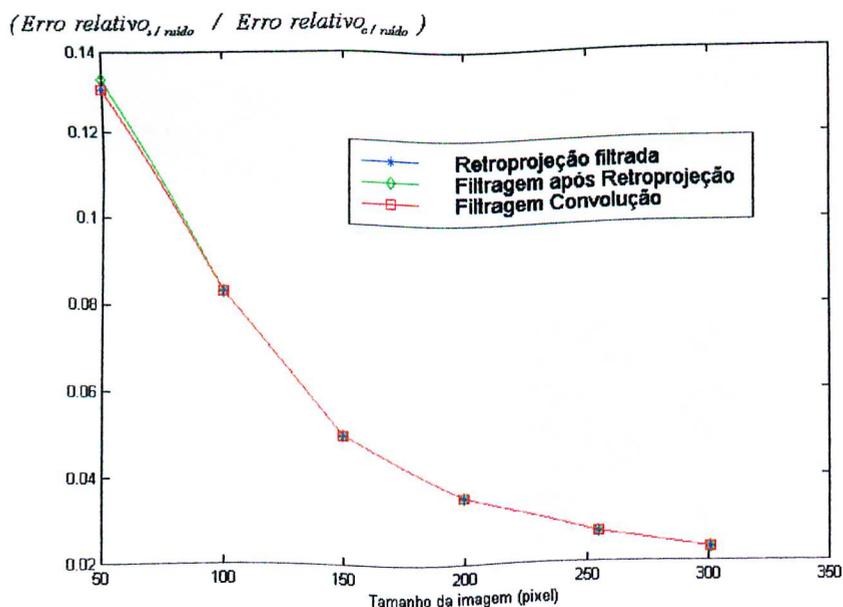


Figura 6.16 -  $(\text{Erro relativo}_{s/\text{ruído}} / \text{Erro relativo}_{c/\text{ruído}})$  x tamanho da imagem

A Figura 6.16 mostra a relação entre o erro relativo sem ruído e o erro relativo com ruído para os métodos da Retroprojeção filtrada, filtragem utilizando a convolução e filtragem após a Retroprojeção para vários tamanhos de imagens. Nesta figura, o eixo vertical representa a relação

entre os erros relativo: sem ruído e com ruído.

Os três métodos apresentados neste trabalho, Retroprojeção filtrada, filtragem utilizando a convolução e filtragem após a Retroprojeção, apresentam aproximadamente o mesmo erro relativo para a reconstrução a partir de projeções com e sem ruído para vários tamanhos de imagens. Pode-se observar que o erro relativo diminui com o aumento do tamanho da imagem, mesmo para a relação ideal entre o número de projeções e número de amostras por projeção.

A Figura 6.17 mostra quatro reconstruções do modelo de Shepp-Logan com tamanho  $255 \times 255$  pixels utilizando o método da Retroprojeção filtrada com variação da frequência de corte relativa do filtro de Hamming. A variação da frequência de corte relativa foi de 0.6, 0.5, 0.4 e 0.3.

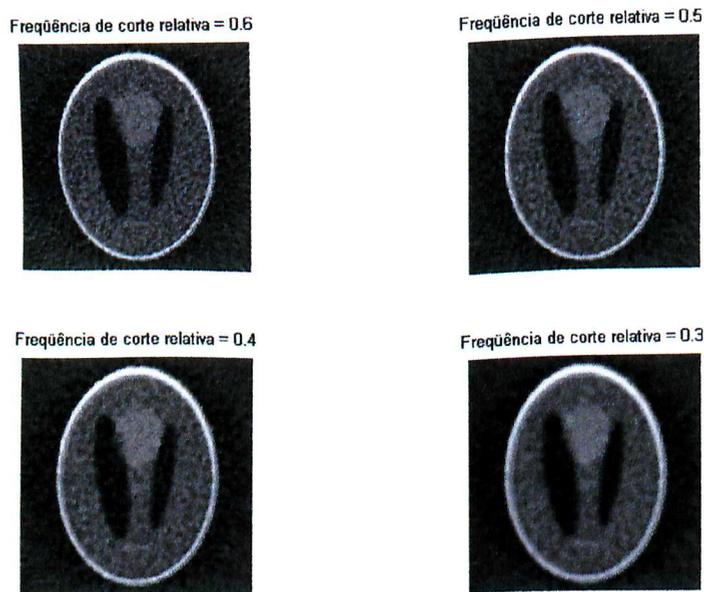


Figura 6.17 – Reconstruções utilizando a Retroprojeção filtrada para vários valores de frequência de corte relativa do filtro de Hamming

Pode-se verificar na Figura 6.17 que um decréscimo da frequência de corte diminui a presença de ruído, mas em consequência ocorre um embaçamento da imagem. Portanto, existe um

compromisso entre a diminuição de ruído e a perda de resolução da imagem reconstruída.

Na Figura 6.18 é mostrada uma comparação do erro relativo versus a frequência de corte relativa da reconstrução do modelo de Shepp-Logan para os filtros de Ram-Lak, Cosseno, Shepp-Logan e Hamming. O erro relativo foi calculado para frequências de corte relativa na faixa de 0.1 a 1.0. Pode-se verificar nesta figura que existe um ponto de mínimo do erro relativo para um dado valor de frequência de corte relativa.

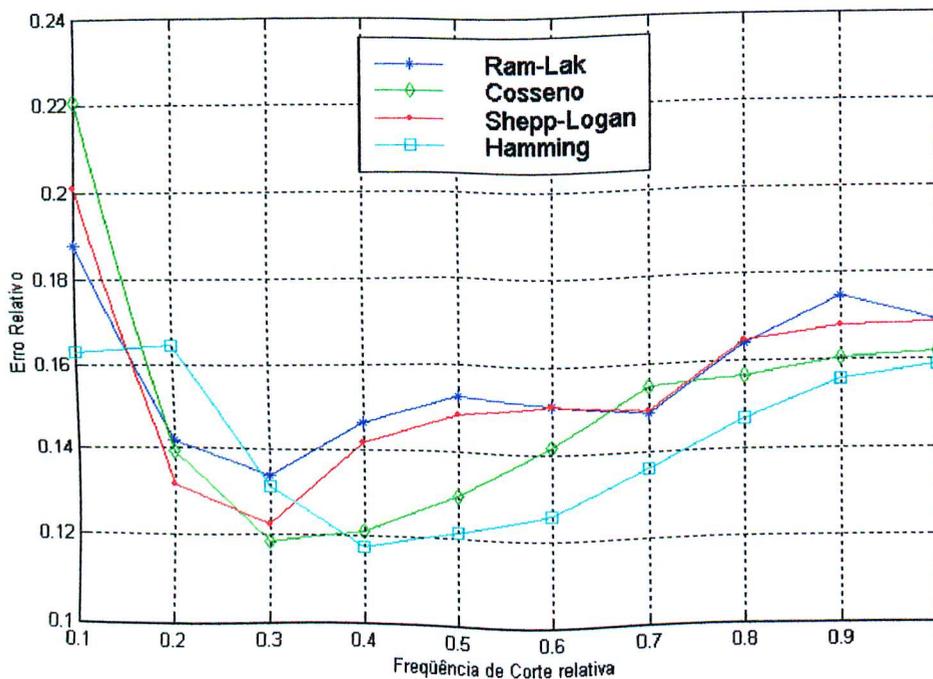


Figura 6.18 – Erro relativo x frequência de corte relativa para vários filtros

Após o cálculo do erro relativo em função da variação da frequência de corte relativa para várias distribuições de ruído, com a mesma média e variância citadas anteriormente, nota-se que o ponto de mínimo do erro relativo ocorre na faixa de 20% a 50% da frequência máxima existente na imagem para os filtros considerados neste trabalho.

## 6.4 – Análise do Tempo de Reconstrução

A Figura 6.19 mostra a comparação do tempo de reconstrução dos métodos: Retroprojeção filtrada, filtragem utilizando a convolução e filtragem após a Retroprojeção para vários tamanhos de imagem. Pode-se verificar que o tempo de reconstrução para o método de filtragem após a Retroprojeção é maior do que o tempo de reconstrução para os outros métodos. Para a imagem de tamanho 301 x 301 pixels, o tempo de reconstrução utilizando a filtragem após Retroprojeção é aproximadamente 3 vezes maior que o tempo de reconstrução para os outros métodos. Isto se deve a necessidade de retroprojetar em uma imagem bem maior, conforme discutido na Seção 5.3 do Capítulo V deste trabalho.

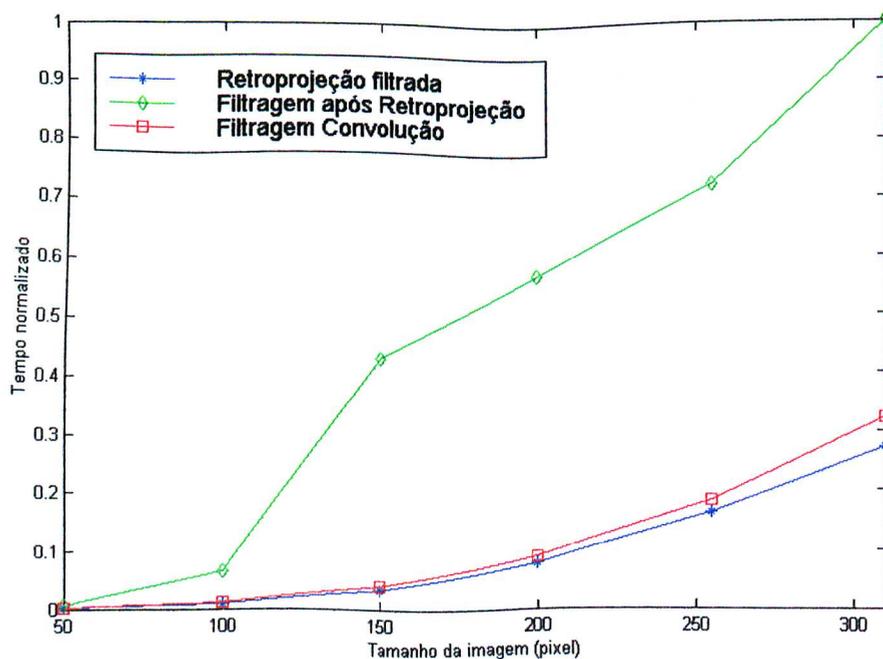


Figura 6.19 – Tempo de reconstrução normalizado

## 6.5 – Métodos de Interpolação utilizados na Retroprojeção

Os três métodos de reconstrução apresentados neste trabalho, têm a operação de Retroprojeção como uma das fases do método. Na operação de Retroprojeção, é necessário usar a interpolação em virtude da Equação 3.1 do Capítulo III deste trabalho. Nesta dissertação foi utilizado três métodos de interpolação: linear, vizinho mais próximo e spline. Nesta seção é mostrado a influência da interpolação quanto ao tempo de reconstrução e à precisão. O método de reconstrução usado para analisar a interpolação é o método da Retroprojeção filtrada.

A Figura 6.20 mostra o erro relativo normalizado para vários tamanhos de imagens para cada um dos tipos de interpolação citados no parágrafo anterior.

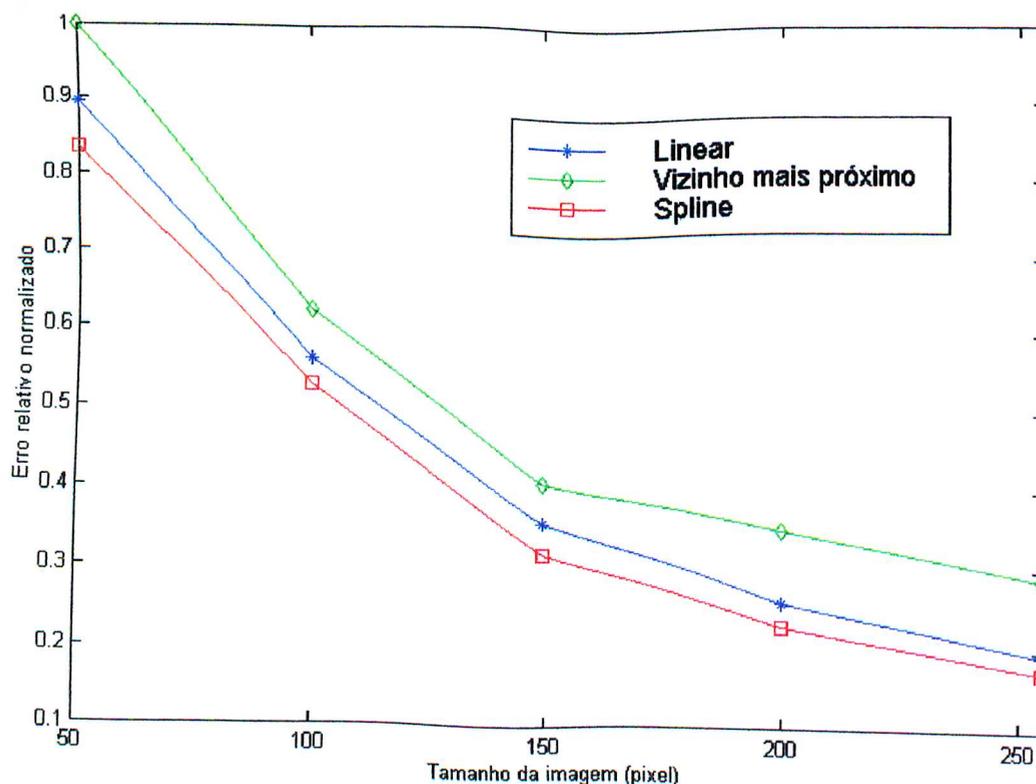


Figura 6.20 – Erro relativo normalizado para os três tipos de interpolação

Pode-se observar da Figura 6.20 que a diferença do erro relativo referente a cada tipo de interpolação se mantém aproximadamente constante diminuindo o erro relativo a medida que aumenta o tamanho da imagem. Sendo que a interpolação spline, o método que apresenta o menor erro relativo para cada tamanho de imagem, e a interpolação pelo vizinho mais próximo apresenta o maior erro relativo para cada tamanho de imagem.

A Figura 6.21 mostra o tempo de reconstrução do método da Retroprojeção filtrada para vários tamanhos de imagens para cada um dos métodos de interpolação.

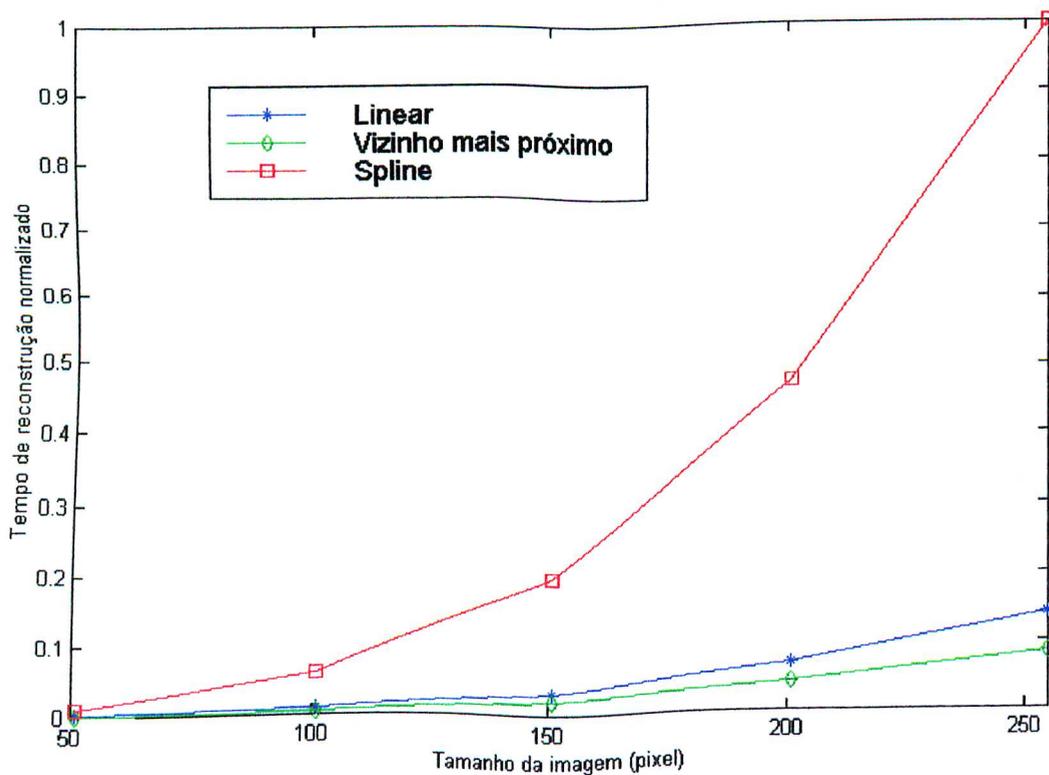


Figura 6.21 – Tempo de reconstrução normalizado para os três tipos de interpolação

Na Figura 6.21 pode-se observar que o tempo de reconstrução aumenta com o aumento do tamanho da imagem a ser reconstruída e dentre os três métodos de interpolação, a interpolação vizinho mais próximo é o que depende o menor tempo de reconstrução. Sendo a interpolação

spline a que despende o maior tempo de reconstrução. Para uma imagem de tamanho de 255 x 255 pixels, utilizando a interpolação spline, o tempo de reconstrução da imagem é 10 vezes maior que o tempo de reconstrução dos outros dois métodos de interpolação.

Analisando as Figura 6.20 e 6.21, pode-se concluir que a escolha da interpolação linear em relação às outras duas interpolações não é a pior escolha. Por um lado, tem-se um erro relativo próximo dos outros métodos, da ordem de 1,2 vezes. Do outro lado, tem-se um ganho considerável no tempo de reconstrução, da ordem de 5 vezes para uma imagem de tamanho 200 x 200 pixels. Portanto, a escolha do método de interpolação a ser usado na operação de Retroprojeção é um compromisso entre a precisão e o tempo de reconstrução. Neste trabalho, pode-se concluir que a melhor opção de escolha é a interpolação linear.

## 6.6 – Conclusões

Neste capítulo foi realizada uma análise comparativa dos três métodos de reconstrução : Retroprojeção filtrada, filtragem utilizando a convolução e filtragem após a Retroprojeção, apresentados neste trabalho, bem como uma análise do método de interpolação usado na Retroprojeção e a sua influência no tempo de reconstrução e precisão do método de reconstrução.

Pode-se concluir deste capítulo que os três métodos de reconstrução apresentam pequenas diferenças na precisão da reconstrução, mas uma grande diferença aparece no tempo de reconstrução e implementação do método. O método que apresenta um pequeno tempo de reconstrução relativo e facilidade de implementação foi o método da Retroprojeção filtrada. Comprovando dessa maneira a utilização deste método nos tomógrafos comerciais.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Neste trabalho foi investigado, três métodos analíticos para reconstrução de imagens a partir de projeções, tais como: Retroprojeção filtrada, filtragem utilizando a convolução e filtragem após a Retroprojeção. Foi verificado o desempenho para cada um dos métodos quanto à precisão e quanto ao tempo de reconstrução. Este trabalho procurou responder a seguinte pergunta: *“Qual o método mais indicado para aplicação em reconstrução de imagens a partir de projeções?”*

O cálculo da transformada analítica de Radon foi mostrado como um exemplo para ilustrar o conceito matemático da transformada e a sua relação com a tomografia. A transformada direta de Radon  $\mathcal{R}$  não possui nenhuma utilização prática em reconstrução de imagens, uma vez que não se dispõe da função  $f(x, y)$  para o seu cálculo e o objetivo da reconstrução é justamente obter a função  $f(x, y)$  a partir de um conjunto de projeções,  $g(s, \theta)$ , da seção transversal de um objeto. Todos os métodos de reconstrução de imagens são implementações de  $\mathcal{R}^{-1}$ , isto é, a inversa de  $\mathcal{R}$ . A reconstrução é um problema de inversão.

A Retroprojeção pode ser usada para reconstruir uma aproximação da imagem original, apesar da fórmula inversa de Radon não ser obedecida, porém ela é apenas um ponto de partida. Os métodos de reconstrução utilizando transformada, apresentados neste trabalho, têm a Retroprojeção como uma de suas etapas.

Dentre os métodos de reconstrução utilizando transformada, os três mostrados e analisados neste trabalho, apresentam aproximadamente a mesma qualidade de reconstrução. A diferença entre os três métodos é o tempo de reconstrução e a facilidade de implementação em um computador digital. A Retroprojeção filtrada possui comparativamente os três fatores citados: pequeno tempo de reconstrução, boa qualidade de reconstrução e facilidade de implementação. O que vem de encontro com o que ocorre na prática, atualmente a Retroprojeção filtrada é o método escolhido para ser utilizado nos tomógrafos comerciais.

A filtragem após a Retroprojeção apresenta o inconveniente da necessidade de retroprojetar em uma dimensão bem maior que a dimensão original da imagem, conforme analisado no Capítulo 5 deste trabalho, e também o inconveniente do cálculo da resposta em frequência do filtro 2D.

A filtragem no domínio do parâmetro  $s$ , domínio de Radon, é realizada pela convolução da resposta impulsiva do filtro com as projeções. Para evitar o cálculo da convolução, a filtragem pode ser realizada no domínio da frequência, pela multiplicação da resposta em frequência do filtro 1D com as projeções (teorema da convolução). A Retroprojeção filtrada faz exatamente essa filtragem.

Os métodos apresentados neste trabalho utilizam a operação Retroprojeção, e nesta operação faz-se necessário realizar uma interpolação. Foi observado que a interpolação linear é a mais indicada, uma vez que a mesma apresentou o melhor compromisso entre o tempo e a qualidade de reconstrução com o aumento do tamanho da imagem reconstruída.

Pode-se concluir que entre os três métodos apresentados, a Retroprojeção filtrada apresenta

o melhor compromisso entre a qualidade e o tempo de reconstrução em relação aos outros dois métodos.

Os métodos utilizando transformada sofrem do problema do tempo despendido na reconstrução, devido à etapa de Retroprojeção. Em sistemas modernos de tomografia computadorizada, a Retroprojeção é implementada diretamente em hardware, sendo seu custo entre 20% e 40% do custo total do tomógrafo (*Magnusson, 1993*). Esta porcentagem é significativa e deve ser levada em consideração quando uma nova geração de sistemas de tomografia forem projetados.

A questão do tempo de reconstrução continua a ser um fator importante, sendo necessário continuar a investigação para desenvolver novos métodos ou melhorar os já existentes. Para tanto, não se deve abandonar outros métodos de reconstrução, tais como: o método de Fourier direto e o método algébrico, uma vez que esses métodos não fazem uso da Retroprojeção, mas apresentam problemas na qualidade da imagem reconstruída (*Magnusson, 1993*).

Desse modo, as principais contribuições deste trabalho são: proporcionar um maior esclarecimento dos métodos de reconstrução de imagens a partir de projeções paralelas, visto que nem sempre é fácil e claro entender os princípios nos quais os métodos são baseados. E, também, foi realizado uma análise comparativa dos métodos Retroprojeção filtrada, filtragem utilizando a convolução e filtragem após a Retroprojeção, o que não está disponível na literatura de forma explícita.

As sugestões para futuros trabalhos a serem desenvolvidos são:

- Implementação e comparação dos métodos que utilizam a transformada de Fourier, tais como: método de Fourier direto, linograma e Retroprojeção filtrada ;

- Estudo dos métodos de reconstrução paralelizados e comparação desses métodos com os métodos de reconstrução não paralelizados ;
- Utilização da transformada wavelet em problemas de reconstrução tomográfica. Um dos tópicos atualmente estudados é a tomografia local, onde o objetivo é reconstruir somente uma parte da imagem de tal modo que a exposição à radiação seja reduzida significativamente;
- Estudo dos problemas físicos e matemáticos envolvidos na aquisição de projeções e a consequência desses problemas na reconstrução de imagens aplicadas à tomografia computadorizada ;
- Implementação dos métodos algébricos (iterativos) em reconstrução de imagens e comparação quantitativa/qualitativa com o método da Retroprojeção filtrada .
- Realizar um estudo estatístico das imagens reconstruídas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRACEWELL, R.N. Strip Integration in Radio Astronomy. Australian Journal of Physics, v.9, p.198-217, 1956.

BRIGHAM, E.O. The Fast Fourier Transform and Its Applications. New Jersey:Prentice Hall,1988.

BROOKS, R. A. & DI CHIRO, G. Principles of Computer Assited Tomography (CAT) in Radiographic and Radioisotopic Imaging. Phys Med. Biol., v.21, n.5, p.689-732, 1976.

BUTKOV, E. Física Matemática. Guanabara Dois, 1983.

FANTON, R.F.Q. Manual Básico Introdutório à Tomografia Computadorizada. São Paulo: INCOR, vol. 1, 1990.

HERMAN, G. T. Image Reconstruction from Projections. Flórida: Academic Press, Inc., 1980.

HERMAN, G. T. & ROWLAND, S. W. Three Methos for Reconstruction Objects from X-Rays : A Comparative Study. Computer Graphics and Image Processing, v.2, p. 151-178, 1973.

JAIN, A. K. Fundamentals of Digital Image Processing. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1989.

JACOBSON, C. Fourier Methods in 3D-Reconstruction from Cone-Beam Data. PhD Thesis.

Linköping: Linköping University, Department of Electrical Engineering, 1996.

KAK, A. C. & ROSENFELD, A. Digital Picture Processing. Second Edition. Florida: Academic Press, Inc., 1982

KAK, A. C. & SLANEY, M. Principles of Computerized Tomographic Imaging. New York: IEEE Press, Inc., 1988.

LEWITT, R.M. Reconstruction Algorithms: Transform Methods. Proceedings of the IEEE, v.71, n.3, p.390-408, March 1983.

LOUIS, A. K. & NATTERER, F. Mathematical Problems of Computerized Tomography. Proceedings of the IEEE, v.71, n.3, p.379-389, March 1983.

MAGNUSSON, M.. Linogram and Other Direct Fourier Methods for Tomographic Reconstruction. PhD Thesis. Linköping: Linköping University, Department of Electrical Engineering, 1993.

MACOVSKI, A. Physical Problems of Computerized Tomography. Proceedings of the IEEE, v.71, n.3, p.373-378, March 1983.

ROERDINK, J.B.T.M. Computerized Tomography and Its Applications : A Guided Tour. University of Groningen, Department of Computing Science, November 1992.

- SCUDDER, H.J. Introduction to Computer Aided Tomography. Proceedings of the IEEE, v.66, n.6, p.628-637, June 1978.
- SEGER, M.M. & PER-ERIK, D. Algorithms for Reconstruction from Projections. Linköping: Linköping University, Department of Electrical Engineering, 1996.
- SHEPP, L.A. & LOGAN, B.F. The Fourier Reconstruction of a Head Section. IEEE Transactions on Nuclear Science, v.NS\_21, p.21-43, June 1974.
- TOFT, P. The Radon Transform. Theory and Implementation. PhD Thesis. Denmark : Technical University of Denmark, Department of Mathematical Modelling, Section for Digital Signal Processing, 1996.
- TRUSSEL, H. J. Processing of X-Ray Images. Proceedings of the IEEE, v. 69, n.5, p. 615-625, May 1981.
- TSUI, E.T. & BUDINGER, T.F. A Stochastic Filter for Transverse Section on Nuclear Science, v.NS-26, n.2, April 1979.
- WESTEMBERG, M. A. Parallelisation of Tomographic Reconstruction Methods. Master Thesis. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen, Department of Computing Science, 1996.

## ANEXO I

### A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

A função delta  $\delta$  foi introduzida por Dirac (*Butkov, 1983*). Esta função faz parte de uma nova classe de funções conhecida como funções generalizadas.

A função delta é definida como:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad (1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad x = 0 \quad (1.2)$$

A propriedade mais importante da função delta é dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax + b) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \delta(x) dx = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{-b}{a}\right) \quad (1.3)$$

A Equação 1.3 mostra que a função delta é uma função par,  $\delta(x) = \delta(-x)$ .

Se a função delta tem uma função geral como seu argumento, ela pode ser reescrita como (Butkov, 1983):

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^l \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (1.4)$$

onde  $x_i$  são os zeros da função  $f(x)$ . Assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \delta(f(x)) dx = \sum_{i=1}^l \frac{h(x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (1.5)$$

**A IMAGEM DO LOGOTIPO DA UFU QUE SE ENCONTRA NA FOLHA DE ROSTO DESTA DISSERTAÇÃO, FOI RECONSTRUÍDA COM O MÉTODO DA RETROPROJEÇÃO FILTRADA (FILTRAGEM NO DOMÍNIO DE FOURIER), UTILIZANDO FILTRO DE HAMMING.**