

1100
601
3200
RECIMEM

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - CETEC

“Simulação Numérica de Camadas de Mistura em Desenvolvimento Temporal e Espacial, Usando a Técnica Espectral da Colocação”

Dissertação apresentada por Marcelo Fernandes dos Santos à Universidade Federal de Uberlândia para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica aprovada em 08/05/98 pela banca examinadora:

Prof. Dr. Milton Biage, (Orientador) (UFU)

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto (UFU)

Prof. Dr. Mário Mourelle Pérez (UFU)

Prof. Dr. Francisco Ricardo da Cunha (UNB)

DIRBI/UFU



1000187010

Uberlândia, 08 de Maio de 1998

*Dedico este aos meus pais, **Maurélio e Maria Cândida**, pelo apoio, incentivo, amor e carinho constante, e à minha irmã **Maristela**, e ainda à **Mariana**. Enfim àqueles que convivem comigo durante os momentos de tormentas, mas também os momentos de glória.*

Meus agradecimentos

- ao professor Milton Biage, pelas orientações e conhecimentos transmitidos nos momentos corretos, e pela perseverança, apoio e confiança depositadas e ainda pela amizade.
- aos professores Aristeu da Silveira Neto, Marc Mulkens, Gilmar Guimarães, Mário Perez e Ricardo Fortes pelos conhecimentos transmitidos e pela colaboração para a confecção do presente trabalho.
- a Paulo Lopes Júnior e Marcos Alberto Lopes pelo apoio tanto computacional quanto matemático durante o desenvolvimento deste trabalho.
- aos colegas Marcos, Paulo, Adriana, Idalberto, Clever e Aurilo pelo apoio, amizade e descontrações hora e outrora convividas.
- à Eliane pelo amor, carinho e compreensão dos bons e maus momentos.
- e enfim, a todos aqueles que aqui não foram lembrados pelo nome, mas que de uma forma ou de outra contribuíram para o desenvolvimento deste.
- à CAPES pela ajuda financeira atribuída durante o curso.

“Simulação Numérica de Camadas de Mistura em Desenvolvimento Temporal e Espacial, Usando a Técnica Espectral da Colocação”

SUMÁRIO

| | | |
|-------------------|---|----|
| LISTA DE SÍMBOLOS | VII | |
| LISTA DE FIGURAS | XII | |
| RESUMO | XX | |
| ABSTRACT | XXI | |
| | | |
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | A Técnica Espectral | 1 |
| 1.2 | Camada de Mistura: Um problema adequado para calibrar métodos numéricos | 4 |
| 1.2.1 | Aspectos Físicos da Camada de Mistura | 4 |
| 1.2.2 | Comentários Sobre Alguns Estudos de Camadas de Mistura | 13 |
| 1.3 | Objetivos da Pesquisa | |
| 2 | FORMULAÇÃO MATEMÁTICA | 20 |
| 2.1 | Equações Governantes | 20 |
| 2.2 | Adimensionalização das Equações | 26 |
| 2.3 | Condições Iniciais e Limites | 31 |
| 2.3.1 | Camada de Mistura em Desenvolvimento Temporal | 31 |
| 2.3.2 | Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial | 37 |
| 2.4 | Definição do Domínio de Cálculo | 39 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 3 | APROXIMAÇÃO NUMÉRICA | 42 |
| 3.1 | Introdução | 42 |
| 3.2 | Discretização Espacial das Equações | 44 |
| 3.2.1 | Expansão de Fourier Discreta | 45 |
| 3.2.2 | Expansão de Chebyshev Discreta | 47 |
| 3.2.2.1 | Diferenciação | 52 |
| 3.3 | Técnicas de Filtragem | 60 |
| 3.4 | Sensor | 64 |
| 4 | RESULTADOS E ANÁLISE | 66 |
| 4.1 | Introdução | 66 |
| 4.2 | Resultados Quantitativos | 68 |
| 4.2.1 | Camada de Mistura Temporal | 68 |
| 4.2.2 | Camada de Mistura Espacial | 100 |
| 4.3 | Resultados Qualitativos | 110 |
| 5 | CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS | 134 |
| 6 | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 140 |
| 7 | ANEXOS | 145 |
| 7.1 | Anexo I - Acoplamento do Campo Pressão | 145 |
| 7.2 | Anexo II - Descrição e Demonstração de Relações Matemáticas Relacionadas ao Método Espectral da Colocação. | 151 |
| 7.2.1 | Transformada de Fourier | 152 |
| 7.2.1.1 | Transformada Rápida de Fourier | 158 |
| 7.2.2 | Demonstração da Relação Matemática para Cálculo da Derivada | 162 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 7.2.3 | O Processo de Alisamento | 170 |
| 7.3 | Anexo III - Código Computacional das Principais Funções Desenvolvidas | 175 |

Simbologia

letras minúsculas

- c_1, c_2 constantes para cálculo da viscosidade dinâmica;
- c_p calor específico a pressão constante;
- c_v calor específico a volume constante;
- e constante neperiana;
- e energia interna por unidade de massa (Eq. 2.35);
- \vec{f} vetor força de corpo;
- f_i componentes do vetor força de corpo;
- f filtro gaussiano (Eq. 2.56) e função de x discreta (Eq. 3.5);
- \hat{f} coeficientes da função f (Eq. 3.6);
- $\hat{f}_k^{(1)}$ coeficientes de expansão da primeira derivada da função f no espaço Chebyshev;
- \vec{g} vetor força gravitacional;
- g_j função complexa montada com dois conjuntos de dados (Eq. 3.27).
- \hat{g}_j os coeficientes complexos da g_j no espaço de Fourier;
- k condutividade térmica;
- n_i relação entre as perturbações determinísticas e aleatória;
- n_e número de estruturas esperadas na simulação;
- n_p número de emparelhamentos a serem visualizados;
- k_a número de onda do modo fundamental;

| | |
|------------|---|
| x | coordenada cartesiana horizontal; |
| s_1, s_2 | constantes para cálculo da condutividade térmica; |
| y | coordenada cartesiana vertical; |
| p | campo de pressão; |
| t | tempo; |
| w_j | peso para as distribuições de pontos; |
| \bar{q} | vetor fluxo de calor; |
| q_j | componentes do vetor fluxo de calor; |
| u | componente do vetor velocidade na direção x ; |
| \bar{u} | perfil médio da velocidade axial; |
| v | componente do vetor velocidade na direção y . |
| \bar{v} | perfil médio de velocidade transversal; |

letras maiúsculas

| | |
|-------------|--|
| C_{ij} | coeficientes para transformada de Chebyshev; |
| D | derivada substantiva; |
| $(DN)_{ij}$ | matriz contendo os coeficientes de Chebyshev para derivação; |
| \hat{G}_j | os coeficientes complexos da g_j no espaço de Chebyshev; |
| \vec{V} | vetor velocidade; |
| L_x | comprimento do domínio na direção horizontal; |
| L_y | comprimento do domínio na direção vertical; |

| | |
|-------------|--|
| L_w^2 | espaço complexo de Hilbert; |
| M_∞ | número de Mach na corrente livre; |
| P | projeção espectral (Eq. 3.1); |
| Pr | número de Prandtl; |
| Re | número de Reynolds; |
| R | constante particular dos gases; |
| T_k | polinômio de Chebyshev; |
| ET | energia total; |
| T | temperatura e tempo total de aquisição de dados (Eq. 4.6); |
| U | vetor dos valores transientes das variáveis (Eq. 2.48) e diferença de velocidade média (Eq. 2.53); |
| \bar{U} | velocidade média; |
| E | vetor envolvendo os termos convectivos e difusivos na direção x ; |
| F | vetor envolvendo os termos convectivos e difusivos na direção y ; |
| S_N | operador de alisamento; |
| K_N | matriz núcleo para alisamento (Eq. 3.36); |
| F_N | operador de filtragem; |
| N_x | número de pontos de colocação na direção x ; |
| N_y | número de pontos de colocação na direção y ; |
| U_1 | velocidade do fluido na camada superior; |
| U_2 | velocidade do fluido na camada inferior; |
| \hat{V} | perturbação aleatória; |
| \tilde{V} | perturbação determinística; |

R_{xy} inter-correlação
 S_{xy} Densidade espectral bilateral.

subscritos:

∞ infinito, representa as propriedades na corrente livre;
 0 condições iniciais;
 i, j, k índices dos vetores;
 N Matriz $N \times N$;

sobrescritos:

$*$ valores dimensionais.
 \cdot campos transformados;
 \sim valores aproximados aproximação;
 \rightarrow vetor;
 $\bar{}$ valores médios;
 $\dot{}$ primeira derivada.

alfabeto grego

γ coeficiente de expansão térmica;
 μ viscosidade dinâmica;

| | |
|----------------------|--|
| ε_1 | amplitude da perturbação aleatória; |
| ε_2 | amplitude da perturbação determinística; |
| λ_u | comprimento de onda do modo fundamental; |
| θ_c | escala de corte para filtragem exponencial; |
| σ | função filtro; |
| η_T | taxa de temperatura; |
| η_V | taxa de velocidade; |
| τ_{ij} | tensor tensão referente a viscosidade molecular; |
| τ | atraso ou defasagem que caracteriza os níveis de correlação; |
| δ_0 | comprimento característico do número de Reynolds; |
| δ_i | espessura inicial da camada de mistura; |
| ρ | campo de densidade; |
| π | constante pi ; |
| δ_{ij} | delta de Kronecker; |
| δ | espessura da camada de mistura; |
| ∂ | operador derivada parcial; |
| ω | campo de vorticidade; |
| ∇ | operador gradiente; |
| Φ | dissipação viscosa; |
| $\hat{\mathfrak{R}}$ | transformada de Fourier de um conjunto de dados; |
| Π_{ij} | tensor tensão. |

Lista de Figuras

| | | |
|------------|--|----|
| Figura 1.1 | Resultados referentes ao trabalho de Conte <i>et al</i> , (1989), camada de mistura em desenvolvimento temporal. | 17 |
| Figura 1.2 | Resultados referentes ao trabalho de Conte <i>et al</i> , (1989), camada de mistura em desenvolvimento espacial. | 18 |
| Figura 2.1 | Perfil básico inicial para camada de mistura em desenvolvimento temporal. | 32 |
| Figura 2.2 | Perfil básico inicial para camada de mistura em desenvolvimento espacial. | 32 |
| Figura 2.3 | Disposição inicial do escoamento em desenvolvimento temporal com imposição de uma perturbação determinística. | 35 |
| Figura 3.1 | Malha poligonal com a distribuição de pontos utilizando a formulação de Gauss-Lobatto, com $N=64$. | 50 |
| Figura 3.2 | Comparação entre os erros embutidos na derivada da função $f(x) = \text{sen } x$, quando estimado por várias técnicas numéricas. | 57 |
| Figura 3.3 | Comparação entre funções analíticas e funções estimadas pela técnica da colocação espectral. | 57 |
| Figura 3.4 | Comparação entre as derivadas analítica e estimada. | 59 |
| Figura 3.5 | Comportamento das curvas das formulas utilizadas nos cálculos de filtragens e alisamentos. | 62 |
| Figura 3.6 | Comparação entre derivadas de funções estimadas e alisadas com funções analíticas (filtro exponencial de ordem 4). | 64 |

| | | |
|------------|--|----|
| Figura 4.1 | Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 69 |
| Figura 4.2 | Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha malha 128x128, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 72 |
| Figura 4.3 | Evolução dos vórtices apresentado pelas linhas de corrente em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha malha 128x128, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 73 |
| Figura 4.4 | Distribuição da velocidade transversal no domínio em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha malha 128x128, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 74 |
| Figura 4.5 | Distribuição da velocidade axial no domínio em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha malha 128x128, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 75 |
| Figura 4.6 | Distribuição da densidade no domínio em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha malha 128x128, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 76 |
| Figura 4.7 | Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha malha 128x128, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 77 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Figura 4.8 | Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 78 |
| Figura 4.9 | Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 79 |
| Figura 4.10 | Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 81 |
| Figura 4.11 | Evolução dos vortices apresentado pelas linhas de corrente em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 83 |
| Figura 4.12 | Evolução no domínio da velocidade transversal em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 84 |
| Figura 4.13 | Evolução no domínio da velocidade axial em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 84 |
| Figura 4.14 | Evolução no domínio da densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 85 |

- Figura 4.15 Evolução no tempo da camada de mistura temporal do campo de velocidade transversal ($Re_x=3.5 \times 10^5$, $M_x=0.27$, $Pr_x = 0.72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). 86
- Figura 4.16 Evolução no tempo da camada de mistura temporal do campo de velocidade axial ($Re_x=3.5 \times 10^5$, $M_x=0.27$, $Pr_x = 0.72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). 86
- Figura 4.17 Evolução no tempo da camada de mistura temporal do campo de densidade ($Re_x=3.5 \times 10^5$, $M_x=0.27$, $Pr_x = 0.72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). 87
- Figura 4.18 Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=7.02 \times 10^5$, $M_x=0.27$, $Pr_x = 0.72$, $\eta_v = 0.5$ e $\eta_T = 0.285$). 88
- Figura 4.19 Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=7.02 \times 10^5$, $M_x=0.27$, $Pr_x = 0.72$, $\eta_v = 0.5$ e $\eta_T = 0.285$). 89
- Figura 4.20 Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=3.94 \times 10^5$, $M_x=0.29$, $Pr_x = 0.72$, $\eta_v = 0.5$ e $\eta_T = 0$). 91
- Figura 4.21 Distribuição do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=3.94 \times 10^5$, $M_x=0.29$, $Pr_x = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = 0.5$ e $\eta_T = 0$). 91

| | | |
|-------------|--|----|
| Figura 4.22 | Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). | 94 |
| Figura 4.23 | Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). | 95 |
| Figura 4.24 | Evolução no domínio da velocidade transversal em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). | 95 |
| Figura 4.25 | Evolução no domínio da velocidade axial em uma camada de mistura temporal ($Re_x=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). | 96 |
| Figura 4.26 | Evolução no domínio da densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). | 96 |
| Figura 4.27 | Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=1,0 \times 10^3$, $M_\infty=0,29$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,0328$). | 97 |
| Figura 4.28 | Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_x=1,0 \times 10^3$, $M_\infty=0,29$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,0328$). | 99 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figura 4.29 | Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, malha 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$). | 101 |
| Figura 4.30 | Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, malha 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$). | 103 |
| Figura 4.31 | Evolução da velocidade transversal no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, malha 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$). | 104 |
| Figura 4.32 | Evolução da velocidade axial no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, malha 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$). | 105 |
| Figura 4.33 | Evolução da densidade no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, malha 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$). | 105 |
| Figura 4.34 | Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,367$, $Pr_\infty = 0,72$, malha 256×256 , $\eta_v = 0,45$ e $\eta_T = 0,285$). | 107 |
| Figura 4.35 | Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,367$, $Pr_\infty = 0,72$, malha 256×256 , $\eta_v = 0,45$ e $\eta_T = 0,285$). | 108 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figura 4.36 | Evolução da velocidade transversal no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.367$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 256×256 , $\eta_v = 0.45$ e $\eta_T = 0.285$). | 109 |
| Figura 4.37 | Evolução da velocidade axial no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.367$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 256×256 , $\eta_v = 0.45$ e $\eta_T = 0.285$). | 109 |
| Figura 4.38 | Evolução da densidade no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.367$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 256×256 , $\eta_v = 0.45$ e $\eta_T = 0.285$). | 109 |
| Figura 4.39 | Espectros da camada de mistura em desenvolvimento temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M=0.27$, $Pr = 0.72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 111 |
| Figura 4.40 | Inclinações da espessura de vorticidade | 115 |
| Figura 4.41 | Correlações entre os campos na seção transversal, em $x = \frac{1}{3} L_x$ ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 119 |
| Figura 4.42 | Correlações entre os campos na seção transversal, em $x = \frac{1}{2} L_x$ ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 120 |
| Figura 4.43 | Correlações entre os campos na seção transversal, em $x = \frac{2}{3} L_x$ ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). | 121 |
| Figura 4.44 | Espectros, mostrando a redução do número do onda na evolução no tempo de uma simulação de uma camada de mistura em | |

desenvolvimento temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty=0.72$,
malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). 127

Figura 4.45 Espectros, mostrando a redução do número do onda na evolução
no tempo de uma simulação de uma camada de mistura em
desenvolvimento temporal ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty = 0.72$,
malha 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$). 128

Fernandes, M. F. Numerical Simulation of Temporal and Spatial Mixing Layers. Using the Spectral Collocation Technique. UFU, 1998

Abstract: The objective of the present work was computational code developing, applying the Collocation Spectral Technique to simulate the compressible and turbulent mixing layers, in temporal and spatial developments, described by the complete conservative governing equations. It was implemented an explicit formulation for the Chebyshev Collocation Spectral Technique using the Runge-Kutta scheme for the time-stepping integration. The partial derivatives in the governing equations were evaluated using Fast Chebyshev Transform (FCT) that allowed to shrink significantly the processing velocity. The computational code developed was applied to simulated compressible flows under conditions high and low Reynolds numbers ($10^3 \leq Re \leq 7 \times 10^5$), either with or without stratified effect. The results revealed several aspects of the flow structures that in their large part, they accorded with the previous conclusions about the mixing layers. Particularly, it was illustrated the details of density field behavior in temporal and spatial mixing layers, enhanced the density rate effect in the turbulent mixing layers. Other important conclusions were taken, using the quantitative results determined by the thermal and kinetic energy cross-correlations.

KEY WORDS: Collocation spectral method, compressible and turbulent flow, temporal and spatial mixing layers.

Fernandes, M. F. Simulação Numérica de Camadas de Mistura em Desenvolvimento Temporal e Espacial, Usando a Técnica Espectral da Colocação. UFU, 1998

Resumo: O objetivo do presente trabalho foi o de desenvolver um código computacional, utilizando a técnica espectral da colocação, para simular camadas de mistura compressível e turbulenta, em desenvolvimento temporal e espacial, descritas pelas equações governantes completas, na forma conservativa. Para isto, implementou-se o método espectral da colocação de Chebyshev, aliado ao esquema de integração temporal de Runge-Kutta, utilizando uma formulação explícita. Para a discretização das derivadas parciais envolvidas no equacionamento, utilizou-se a Transformada Rápida de Chebyshev (TRC) que permitiu obter um significativo ganho na velocidade de processamento. O código computacional desenvolvido foi aplicado para simular escoamentos compressíveis, em altos e baixos números de Reynolds, compreendidos no intervalo de $10^3 \leq Re \leq 7 \times 10^5$, com e sem efeitos de estratificação. Os resultados revelaram vários aspectos das estruturas dos escoamentos que, na sua grande maioria, concordam com as conclusões apresentadas por várias pesquisas sobre camadas de mistura. Em particular, são ilustrados os detalhes do comportamento do campo de densidade nas camadas de mistura espaciais e temporais, evidenciando os efeitos da taxa de densidade (dos níveis de estratificação) na camada turbulenta. Outras conclusões importantes foram levantadas utilizando informações provenientes das características dos espectros de energia térmica e energia cinética, assim como das funções de intercorrelações.

PALAVRAS CHAVES: Método espectral da colocação, escoamento compressível e turbulento, camada de mistura temporal, camada de mistura espacial.

1 Introdução

1.1 A Técnica Espectral

O sucesso do método espectral na solução de problemas físicos relacionados com a área da dinâmica dos fluidos tem sido apreciável (Cannuto *et al.*, 1988). Entretanto, esta técnica não foi ainda desenvolvida o suficiente para abranger, por completo, todos os tipos de problemas físicos relacionados à Dinâmica dos Fluidos, como é possível tratar usando-se os Métodos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos. Portanto, o desenvolvimento de algoritmos que permitam utilizar as vantagens do método espectral em relação a outros métodos globais (como os métodos de volumes finitos e elementos finitos) constitui um trabalho de grande importância para a solução de problemas de escoamentos laminares ou turbulentos tanto compressíveis, como incompressíveis, permanentes ou transientes.

O método espectral pode ser visto como o máximo de desenvolvimento da classe de esquemas de discretização para equações diferenciais, conhecido genericamente como Método dos Resíduos Ponderados (MWR) (Finlayson e Scriven, 1966). O Método dos Resíduos Ponderados caracteriza-se em estabelecer uma função tentativa, também conhecida como função peso. As funções tentativas são usadas como funções base para uma expansão em série truncada da solução. As funções teste são usadas para garantir que a equação diferencial seja satisfeita com uma precisão adequada pela expansão da série truncada. Isto é alcançado quando se minimiza o resíduo (erro produzido pela truncamento da série). Um procedimento equivalente é aquele em que o resíduo satisfaz uma condição de ortogonalidade entre as funções tentativas e as funções teste (Cannuto *et al.*, 1988).

A escolha das funções tentativa é um dos objetos que distingue o método espectral em relação aos métodos de diferenças finitas e elementos finitos. As funções tentativa do método espectral são funções globais infinitamente diferenciáveis (tipicamente, elas são produtos tensoriais das auto-funções dos problemas singulares de Sturm-Liouville). No caso do método dos elementos finitos, o domínio é dividido em pequenos elementos e uma função tentativa é especificada em cada elemento. As funções tentativa são de característica local, Assim possibilitando trabalhar com geometrias complexas. As funções tentativas no método de diferenças finitas são, também, de caráter local.

A escolha das funções teste caracteriza a distinção entre os principais esquemas espectrais: Galerkin, Colocação e Tau. Na aproximação de Galerkin, as funções testes e funções tentativas são idênticas. Elas são funções infinitamente lisas que satisfazem individualmente às condições de contorno. Na técnica de Colocação, as funções teste são transladadas pelas funções delta de Dirac, centrada em pontos especiais, chamados de pontos de colocação. A técnica espectral de Tau é similar à técnica de Galerkin se considerar que nenhuma das funções teste necessitam satisfazer as condições de contorno. Contudo, um conjunto de equações suplementares é usado para aplicar às condições de contorno.

A técnica espectral da colocação é, talvez, a mais simples das técnicas de resíduos ponderados, neste método é usada uma variedade de funções tentativa (Chebyshev, Legendre, etc.) aplicadas sobre pontos de colocação, distribuídos arbitrariamente. A escolha das funções tentativas e dos pontos de colocação são de fundamental importância para obter uma ótima precisão na solução (Lanczos, 1938).

A técnica espectral de Galerkin é esteticamente, a mais elegante das técnicas resíduos ponderados, considerando-se que as funções tentativa e as funções teste são as

mesmas funções (Cannuto *et al.*, 1988) e o problema físico pode ser discretizado em termos do princípio variacional. No método dos elementos finitos, é comumente adotada esta aproximação. Contudo, a técnica espectral de Galerkin somente consolidou-se na prática para cálculos com alta resolução em problemas não lineares, após Orzag, (1969,1970) e Eliassen. Machenhauer e Rasmussen (1970), que desenvolveram métodos de transformações para calcular as somas de convoluções que apareceram nos termos não-lineares quadráticos (os termos não lineares também aumentam o tempo de processamento no método dos elementos finitos, mas não são aproximados tão bem quanto na técnica espectral de Galerkin). Para problemas contendo termos não lineares de ordem superior a 2, o método espectral de Galerkin torna-se impraticável. Este método é aplicável somente a problemas que apresentam condições de contorno periódicas.

A técnica espectral de Tau pode ser entendida como um método espectral de Galerkin modificado que é aplicável a problemas físicos com condições de contorno não-periódicas.

Os pesquisadores têm concentrado suas atenções na aplicação da teoria dos métodos espectrais para solução de problemas, cujo domínio é único. Recentemente, tem-se realizado estudos a fim de tornar a técnica espectral viável para soluções de problemas com geometrias variadas. A idéia é subdividir o domínio em vários sub-domínios. Neste caso o uso de sub-domínios permite aumentar a precisão da técnica espectral, entretanto, para aumentar a precisão desta técnica basta aumentar a ordem da série truncada ao invés de subdividir o domínio. A subdivisão é necessária dentro das atuais técnicas espectrais propostas somente para adaptar o método às características geométricas do problema físico (Cannuto *et al.*, 1988).

A técnica espectral aplicada no presente estudo foi o método da colocação espectral de Chebyshev, que quando comparado com as outras técnicas, obtém-se as seguintes vantagens: maior facilidade de implementação computacional, maior facilidade de aplicação ao problema (Cannuto *et al.*, 1988) e as condições de contorno não exigem periodicidade.

1.2 Camada de Mistura: Um problema adequado para calibrar métodos numéricos

1.2.1 Aspectos Físicos da Camada de Mistura

Uma região intensamente turbulenta formada no limite entre dois escoamentos paralelos com velocidade diferente foi estudada por muitos anos. Este tipo de escoamento é chamado de camada de mistura. A camada de mistura de um fluido newtoniano, não reativo e compressível, praticamente, é um dos escoamentos turbulentos mais simples. Contudo, apesar desta simplicidade relativa, este escoamento apresenta em sua estrutura um comportamento bastante complexo, possuindo todos os fenômenos característicos da turbulência. O comportamento da camada de mistura depende da condição inicial (escoamento inicial), da condição de contorno (geometria do escoamento), do número de Reynolds e do número de Mach. Considerando-se que a razão entre forças inerciais e forças viscosas é dada pelo número de Reynolds, esta razão é consideravelmente maior no escoamento turbulento. O princípio da similaridade do número de Reynolds indica que os escoamentos cisalhantes turbulentos deveria alcançar um estado de equilíbrio universal. Em particular, em escoamentos de camada de mistura, a taxa de evolução da camada na direção axial é pequena e, conseqüentemente, o princípio de equilíbrio dinâmico sugere que esta camada deveria progressivamente alcançar a independência da condição inicial

(Husain *et al.*, 1979). Apesar desta constatação, estes fatos não têm sido verificados com frequência nos estudos de simulação numérica de escoamentos de camadas de mistura, havendo significativa influência das condições iniciais. Os estudos de Husain *et al.* (1979) mostram forte influência das condições iniciais sobre as características do escoamento na região de saída de jatos quase planos. Este fato sugere que a discrepância nos resultados de estudos da camada de mistura, algumas vezes constatadas, poderia estar relacionada com as condições iniciais. Entretanto, alguns pesquisadores acreditam que, provavelmente, o estado de auto-preservação das estruturas dos escoamentos deve ser independente das condições iniciais. Assim, todos os estudos de escoamentos em cisalhamento livre, camadas de mistura ou em jatos quase planos, deverá, forçosamente, incluir informações sobre as condições iniciais. Os trabalhos dos autores citados acima mostraram que as características da camada de mistura são independentes da espessura no momento inicial, mas são fortemente influenciadas pela características das flutuações iniciais (Hussain *et al.*, 1978a e 1978b).

O escoamento cisalhante livre turbulento parece ser dominado por estruturas coerentes, cuja formação é determinada pela condição inicial que conduz o processo de transição. A estrutura do escoamento é constituída de vórtices em processos de emparelhamento, rotação e coalescência, onde a evolução das estruturas depende das características do escoamento imediatamente anterior. Assim, a condição inicial pode manter controle sobre a estrutura do escoamento por um longo tempo.

A maioria dos estudos em laboratório sobre camadas de mistura são de camadas de mistura desenvolvendo-se espacialmente, devido a facilidade de seu manejo em bancadas. Não obstante, a análise de instabilidade da camada de mistura desenvolvendo-se temporalmente é mais fácil de ser estudada em simulação numérica. Na simulação deste

tipo de problema pode-se evitar a necessidade de imposição de condições de contorno na entrada e saída do escoamento, as quais são essenciais para a simulação de um escoamento de uma camada de mistura desenvolvendo-se espacialmente. A evolução temporal da camada de mistura também pode ser simulada mais facilmente em altos números de Reynolds, envolvendo malhas mais compactas (dimensões menores do domínio), causando uma melhor resolução do que em simulação de escoamentos desenvolvendo-se espacialmente, possibilitando assim, o estudo de camada de mistura em computadores com menos recursos. Contudo, felizmente, existem características dinâmicas lineares e não lineares muito importantes que são comuns tanto à camada de mistura desenvolvendo espacialmente, quanto à camada de mistura desenvolvendo-se temporalmente. Por este fato, uma análise detalhada da simulação numérica da camada de mistura desenvolvendo temporalmente pode conduzir a importantes conclusões, similares àquelas existentes no caso da evolução da camada de mistura desenvolvendo-se espacialmente.

Na camada de mistura turbulenta, as grandes estruturas coerentes tomam a forma de vórtices quase-bidimensionais, alinhados na direção axial do escoamento. Uma grande parte da energia cinética turbulenta está diretamente associada com estes vórtices. As interações entre vórtices são responsáveis pelas transferências de quantidade de movimento transversal nas correntes. Além disso, as propriedades de crescimento e coalescência da camada de mistura, determinadas pelas interações entre os vórtices, podem ser manipuladas efetivamente com perturbações espaciais coerentes muito pequenas (Browand e Chih-Ming Ho, 1983). Este fato pode ser evidenciado pelos dois exemplos de camada de mistura estudados para baixos e altos números de Reynolds, respectivamente. O estudo feito por Winant e Browand (1974), em moderados números de Reynolds, mostrou que a característica mais visível do escoamento são regiões compactas de alta vorticidade. Estas

estruturas de vórtices são alinhadas ao longo da direção axial do escoamento. A camada de mistura cresce em espessura como resultado da coalescência de vórtices vizinhos, através de um mecanismo de interação, denominado emparelhamento de vórtices. Por outro lado, Brown e Roshko (1974) realizaram pesquisas sobre camada de mistura em desenvolvimento espacial, em altos números de Reynolds. Também, a mais importante característica é novamente a presença de estruturas de grandes escalas. O núcleo central das regiões contém um excesso de acúmulo de fluido. Nestes dois estudos, foi observado que o aspecto dinâmico de maior relevância na camada de mistura é a formação e interação dos vórtices bidimensionais. A interação parece ser independente do número de Reynolds e deve, portanto, ser invíscida. Espera-se que estas estruturas tenham as mesmas características, seguindo os mesmos mecanismos de interações, realizem-se em todos números de Reynolds (tanto altos, como em baixos números de Reynolds). Observa-se através da descrição apresentada que existe uma regularidade e uma repetitividade nas estruturas das camadas de mistura, isto sugere que modelos determinísticos poderiam ser mais úteis no cálculo de camada de mistura que as formulações estatísticas tradicionais. A presença de escalas muito pequenas de perturbações não parece destruir a integridade da coerência espacial das grandes escalas. De alguma maneira, grandes e pequenas escalas coexistem de forma não muito bem compreendida ainda. Estudos ricos em visualizações que evidenciam a presença de grandes escalas e outros resultados quantitativos notáveis, contribuíram para suportar esta conclusão. Entre estes trabalhos pode-se citar, Konrad (1976), Breidenthal (1978), Roshko (1980), Bernal *et al.*, (1979) e Bernal (1981), que concentraram seus estudos na descrição das estruturas de pequenas escalas. Dimotakis e Brown (1976), Koochesfahani *et al.*, (1979) estudaram a escala de tempo e orientação das estruturas dos grandes vórtices. Jimenez (1980) e Jimenez, Martinez-val e Rebollo (1979)

BIBLIOTECA

observaram o desenvolvimento das pequenas escalas e em particular, dedicaram a atenção às características das estruturas semi-permanentes e tridimensionais.

É notável que em um escoamento constituído por estruturas organizadas, semelhante a uma camada de mistura instável, apresenta muitos aspectos associados com os escoamentos turbulentos (caracterizados por uma larga banda no espectro). Porém, as medidas de flutuação de densidade realizadas por Rebollo (1973) mostraram que as grandes estruturas presentes na camada de mistura têm um comportamento de auto-preservação. Adicionalmente, o resultado de várias pesquisas mostraram que as estruturas dos vórtices de grandes escalas não se alteram quando o número de Reynolds é incrementado significativamente. Aumentando-se o número de Reynolds, aumenta-se também o número das estruturas de pequenas escalas, fato este explicado pelas escalas de Kolmogorov. Porém, sem mudar a característica das grandes escalas (Brown e Roshko, 1974). Os investigadores estão procurando um mecanismo que permita estabelecer ao escoamento sua característica de um escoamento turbulento, mas que permita, também, entender o comportamento de auto-preservação das grandes estruturas coerentes, em alto número de Reynolds que têm uma influência central na estrutura do escoamento.

A turbulência na camada de mistura pode ser mantida somente se existe um fluxo contínuo de quantidade de movimento para dentro da camada de mistura, proveniente do escoamento da camada de fluido de alta velocidade, que transporta um alta quantidade de movimento e/ou um correspondente fluxo contínuo de quantidade de movimento, também, para dentro da camada de mistura, proveniente do escoamento da camada de fluido de baixa velocidade, com um baixa quantidade de movimento. Com o passar do tempo, as trocas de quantidade de movimento entre estas duas camadas acumulam-se, cujas contribuições constituem as tensões Reynolds, $\overline{u'v'}$. Frequentemente, este transporte

turbulento de quantidade de movimento é caracterizado como um processo aleatório. Para alguns, seria suficiente afirmar que esse transporte é o resultado de uma acumulação de muitos eventos pequenos de transporte, sem conexão. Uma segunda interpretação estabelece que esse transporte pode surgir como resultado de uma sucessão definida de eventos, mas esta sucessão é complexa para ser entendida em detalhes, sendo então, melhor descreve-la como aleatória (Browand e Chih-ming Ho, 1983). Estes autores acreditam que as contribuições do fluxo de quantidade de movimento são responsáveis pela manutenção da turbulência, que surgem de um modo simples e compreensível, causadas por interações entre os vórtices que compõe a estrutura das grandes escalas. Este fluxo que contribui significativamente para o tensor de Reynolds que acontece em curtos momentos de duração (denominados de *pulsos de momento*) comparáveis aos períodos da passagem dos vórtices. A amplitude destes *pulsos de momento* independe da posição vertical na camada de mistura. O sinal da tensão de Reynolds está associado com a orientação das estruturas dos vórtices. Por exemplo, a espessura da camada de mistura mantém uma associação com o sinal da tensões de Reynolds. Numa região do escoamento, cuja espessura da camada de mistura é constante a tensão de Reynolds cruzada é negativa. tanto na região de contato dos vórtices com a camada de fluido alta velocidade, como na região de contato dos vórtices com a camada de fluido de baixa velocidade. Isto significa que a turbulência está perdendo energia pelo transporte excessivo de pulsos de momento para os dois lados da corrente.

A mudança de positivo para negativo no sinal da tensão cruzada de Reynolds está associado com a orientação (ou inclinação) da distribuição de vorticidade. Quando o emparelhamento de vórtices tem uma inclinação favorável (apresentando uma rotação favorável à camada de alta velocidade e desfavorável à camada de baixa velocidade), a tensão cruzada de Reynolds é positiva na região de contato entre os vórtices e a camada de

fluido de alta velocidade, ocorrendo uma transferência de energia do fluido de alta velocidade para os grandes vórtices. Por outro lado, a tensão cruzada de Reynolds é negativa na região de contato entre os vórtices e a camada de fluido de baixa velocidade, ocorrendo uma transferência de energia dos grandes vórtices para a camada de fluido de baixa velocidade.

Os valores decrescentes das tensões de Reynolds quando se aproxima das extremidades laterais da camada de mistura, não surgem devido a diminuição na amplitude das pequenas flutuações, mas sim, devido a diminuição da interferência de eventos de grandes amplitudes que atuam com menos frequência próximo das bordas laterais da camada.

Em camadas de mistura turbulentas espaciais tanto o espaçamento entre os redemoinhos quanto os diâmetros aumentam ao longo da direção do escoamento; isto é, quando se penetra à jusante da borda inicial da camada de mistura (Brown e Roshko, 1974). De forma geral, de acordo com os princípios de similaridade presentes nas camadas de mistura, qualquer escala média tem que aumentar continuamente e linearmente com a direção axial do escoamento, e assim, é necessário que o espaçamento médio e o tamanho médio dos redemoinhos aumentem suavemente e linearmente com a direção axial do escoamento. O que não está claro, a princípio, é que as escalas e os espaçamentos dos redemoinhos individuais não podem aumentar continuamente. A razão é que cada redemoinho é uma entidade identificável que durante seu tempo de vida desloca-se com uma velocidade constante perto da velocidade média do escoamento. Esta velocidade convectiva é independente do tamanho ou localização do redemoinho. Espera-se, então, que a frequência com que os redemoinhos passam por qualquer localização na direção axial deva ser invariante, mas, por outro lado, a exigência de espaçamento crescente requer um

decrécimo na frequência. A vorticidade que constitui um redemoinho não pode simplesmente desaparecer. Assim, como eles são transportados à jusante da borda inicial da camada de mistura, o redemoinho têm que se fundir de algum modo em estruturas maiores, e este processo tem que ocorrer continuamente e periodicamente ao longo da direção axial do escoamento. Este mecanismo de aglutinação foi descrito por Winant & Browand (1974) como um processo de emparelhamento de vórtices, no qual, em algum estágio, dois vórtices sucessivos aproximam-se, tornando-se instável, e passam a girar um ao redor do outro. Em seguida eles se fundem em um único e esta nova estrutura é transportada na direção axial do escoamento. E este processo é repetido sucessivamente. Um mecanismo que permite dar um significado a esta característica de escoamento é a famosa cascata inversa, na qual a energia dos vórtices de pequeno comprimento de onda alimentam os grandes vórtices de grande comprimento de onda. Neste mecanismo as instabilidades internas aos grandes turbilhões, ao invés de destruí-los em partes, constituindo vórtices menores, seguem um processo oposto.

Existem muitas quantidades que são de grande interesse para a compreensão das características das camadas de mistura. Em particular, a medida ou o cálculo da taxa de expansão da camada de mistura é indispensável, principalmente, em escoamentos compressíveis, para compreender os efeitos da densidade sobre a estrutura do escoamento. Brown e Roshko (1974) determinaram a taxa de expansão, a partir da relação entre a velocidade média do escoamento e o módulo da variação da máxima inclinação do perfil de velocidade. Esta taxa de expansão pode, também, ser interpretada como a espessura da vorticidade. Esta espessura é bastante conveniente, sendo apropriada para caracterizar as características de crescimento da camada de mistura turbulenta, o qual é, basicamente, um problema de instabilidade cinemática do movimento, induzido pela vorticidade.

Uma das mais importantes conclusões levantadas pelos pesquisadores, em estudos de camadas de misturas com densidade uniforme, é que qualquer possível contribuição não-linear na formação da estrutura da camada é desprezível. A veracidade deste fato é sustentada por um amplo conjunto de resultados empíricos, obtidos nas mais variadas situações experimentais. Entretanto, deve ser admitido que, de forma geral, os resultados experimentais podem apresentar indesejáveis influências sobre a expansão da camada de mistura devido a interferências das bordas do escoamento, conduzindo a uma camada de mistura não totalmente plana, sobre a qual não se pode observar com precisão os efeitos das interações não-lineares sobre a estrutura do escoamento.

A Camada de Mistura é a melhor maneira de estudar os efeitos dinâmicos provocados pela não uniformidade da densidade em estruturas turbulentas, dentro de um contexto cientificamente simples. Uma motivação adicional para estudar a camada de mistura estratificada é a necessidade de compreender certas características da camada de mistura turbulenta supersônica. A princípio, sabe-se que o aumento do número de Mach de um jato supersônico resulta na diminuição do ângulo expansão da região de mistura na extremidade inicial do jato. Na maioria das experiências o aumento do número de Mach ocorre com a diminuição da temperatura. Em consequência, a densidade do jato aumenta. Estes efeitos foram atribuídos por muitos investigadores como uma consequência do aumento da razão entre a densidade do jato e a densidade da camada externa de gás. Este ponto de vista é resultado da tentativa de estabelecer-se uma relação entre os fenômenos que acontecem na camada de mistura supersônica com os fenômenos que acontecem na zona de baixa velocidade do escoamento, em função da variação da densidade nesta região. Implícito a esta idéia encontra-se o fato de que a camada de mistura supersônica (camada de alta velocidade) teria a mesma taxa de crescimento que a camada de baixa

velocidade do escoamento, quando ambas mantêm a mesma razão de densidade através delas. Portanto, em escoamento de camada de mistura estratificadas, dois assuntos de significativa importância podem ser abordados: um relativo aos efeitos da densidade na estrutura do escoamento turbulenta e o outro relativo aos efeitos de diferença de densidade no escoamento médio.

Os comentários feitos acima sobre camada de mistura apresenta um apanhado de resultados bastante significativos sobre camadas de mistura. Entretanto, ao realizar-se uma revisão mais ampla, poder-se-á observar, ao longo de um amplo conjunto de artigos, que existem muitas discrepâncias com relação aos resultados quantitativos médios, os quais são de importância tecnológicas. Contudo, os resultados qualitativos apresentados são significantes e podem servir como referência para o desenvolvimento de códigos computacionais e para a calibração de modelos em escoamentos turbulentos.

1.2.2 Comentários sobre alguns Estudos de Camadas de Mistura

O problema da instabilidade temporal em camadas de mistura foi primeiramente investigado por Betchov *et al.*, (1963), para um perfil de velocidade $\tanh(y/2)$, onde y é a coordenada do fluxo cruzado. Foi mostrado que a parte real da velocidade de fase é identicamente zero e as ondas são amplificadas em uma faixa finita de número de onda. A análise de instabilidade espacial em camada de mistura foi realizada por Michalke (1965), para o perfil $1+\tanh(y/2)$, isto é, quando a velocidade média é unitária. As ondas instáveis são, neste caso, dispersas, e a camada de cisalhamento é também instável em um intervalo finito de frequências. Por outro lado, a estabilidade temporal e espacial da camada de mistura de Blasius foi estudada por Lessen (1950), Lessen e Ko (1966), Ko e Lessen (1969), utilizando a equação de Orr-Sommerfield completa com a finalidade de definir a

curva neutra para número de Reynolds arbitrário. Em todas estas investigações, assumiu-se que a velocidade média é unitária. Observou-se que o perfil de Blasius é uma complicada função de λ (onde λ é o comprimento de onda), de modo que nenhum resultado simples é válido para quaisquer valores de λ , mesmo para ondas desenvolvendo-se temporalmente.

Os experimentos Browand e Freymuth (1966) em camadas de mistura laminares desenvolvidas, mostraram que o desenvolvimento do escoamento é consistente com a teoria da estabilidade espacial. Browand (1966) analisou a camada de mistura produzida a jusante de um degrau e Freymuth (1966) analisou a região de mistura de um jato circular. Em ambas pesquisas a razão de velocidade, η_v , foi unitária. Os resultados encontrados por estes autores, como: taxa de crescimento da camada de mistura, velocidade de fase e distribuição de velocidade flutuante, concordaram adequadamente com os resultados numéricos de Michalke (1965). Em estudos experimentais mais recentes, tais como: Miksad e Ho (1972) e Huang (1973), estudaram a camada de mistura gerada por dois escoamentos coaxiais para duas razões de velocidade, $\eta_v=0.61$ e $\eta_v=0.31$, respectivamente. Os resultados obtidos por estes autores induzem às mesmas conclusões apresentas no item 1.2.1. Os estudos de Brown e Roshko (1974) e Wygnanski e Oster (1975) mostraram que a taxa de espalhamento da camada de mistura turbulenta decresce com η_v . Estes autores sugerem que é importante desenvolver estudos teóricos envolvendo a teoria de instabilidade linear espacial, a qual é válida para quaisquer valores de η_v . Esta sugestão advém da conclusão que a análise da instabilidade temporal conduz a resultados que não são diretamente aplicáveis as situações experimentais. Portanto, segundo estes autores, somente a análise de instabilidade espacial pode produzir resultados consistentes com os experimentais.

Husain e Hussain (1979) estudaram camadas de misturas para duas condições iniciais diferentes, uma laminar e outra turbulenta, completamente desenvolvida. Estes autores também estudaram os efeitos de duas diferentes condições de saída. Uma, onde não existia nenhum obstáculo situado na saída da camada e outra onde foi posicionada na extremidade de saída da camada um obstáculo que causava uma alteração na estrutura do escoamento nesta região. Baseado neste estudo, os autores chegaram a conclusão de que as discrepâncias constatadas nos resultados publicados, baseadas em pesquisas realizadas ao longo de vários anos sobre escoamentos de camadas em cisalhamento, são, essencialmente, devidos aos efeitos das diferentes condições iniciais e condições limites, existentes em diferentes experiências.

No trabalho de Hussain e Hussain (1979) foram analisadas as características médias de quatro camadas de misturas, envolvendo duas condições iniciais diferentes, uma laminar e outra turbulenta, sendo que em cada uma destas camadas foram analisadas os efeitos das condições limites descritas no parágrafo anterior. Os resultados mostraram que as duas condições limites produziram evoluções essencialmente idênticas nas características médias na região de auto-preservação, independente da camada de mistura ser laminar ou turbulenta. Esses resultados demonstraram que a presença de um obstáculo na região de saída da camada é irrelevante quando se analisa as características médias da camada de mistura na região de auto-preservação. Entretanto, para os casos de camadas de misturas laminares, de forma geral, ocorre um efeito notável sobre a estrutura do escoamento, quando um obstáculo é fixado na saída da camada. Batt (1975) notou em seus experimentos que o comportamento da camada de cisalhamento plana, com ou sem a presença de um obstáculo na extremidade final da camada, foi aproximadamente idêntico.

contudo, este autor não mostrou nenhum resultado com respeito ao estudo e nem discutiu a extensão deste efeito.

A pesquisa de Husain e Hussain (1979) permite concluir que a evolução da camada de mistura depende significativamente do estado inicial ser laminar ou turbulento. As diferenças entre estes dois estados iniciais foram discutidos, contudo sem, apresentar novas descobertas sobre as características das estruturas coerentes, as quais provavelmente controlam a evolução da camada de mistura. Segundo estes autores, não é claro que o conhecimento detalhado das estruturas coerentes em camadas de cisalhamentos possa, um dia, permitir entender as discrepâncias entre os resultados publicados na literatura. Estes mesmos autores afirmam baseados nos tópicos apresentados nos parágrafos acima, muitas discrepâncias em torno de propriedades médias, são fenômenos físicos gerados por particularidades impostas sobre os experimentos, cujos resultados podem servir como referência para desenvolvimento de códigos computacionais e para calibração de modelos em escoamentos turbulentos.

Comte *et al.*, (1989) realizaram algumas simulações numéricas em camada de mistura bidimensional, em desenvolvimento temporal e espacial. Em particular, os autores concluíram que as estruturas coerentes da camada de mistura são originadas da instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Eles observaram que estas estruturas coerentes exibem um comportamento característico de turbulência bidimensional, onde os seguintes aspectos foram observados:

- (i) uma banda larga do espectro de energia cinética seguindo uma cascata semelhante a enstrofia (cascata para a energia térmica);
- (ii) forte transferência inversa de energia, devido a sucessivos emparelhamentos de vórtices;

(iii) Aumento da imprevisibilidade; isto é, as pequenas estruturas não coerentes, geradas através de um ruído branco, crescem exponencialmente com tempo, entre duas realizações decorridas.

A existência de uma banda larga e contínua no espectro de energia, após o primeiro emparelhamento, permite caracterizar que as novas evoluções do escoamento constituem um estágio intermediário que conduz o escoamento, para um caracterizado por uma turbulência bidimensional. Ao mesmo tempo, retorna uma forte transferência de energia cinética, inversa ao modo fundamental (de número de onda k_d); isto é, a energia difunde dos altos números de ondas para os mais baixos, através de várias interações (em particular, emparelhamentos) que alimentam energia para os modos de subharmônicos, k_d/n , sendo n um inteiro. Alguns dos resultados obtidos por Comte *et al.*, (1989) estão dispostos nas Figs 1.1 e 1.2. Dentre uma série de observações que podem ser feitas através destas figuras, é importante ressaltar que existe um forte acoplamento entre os campos de vorticidade e temperatura, onde as estruturas evidenciadas pelos dois campos são bastante semelhantes.

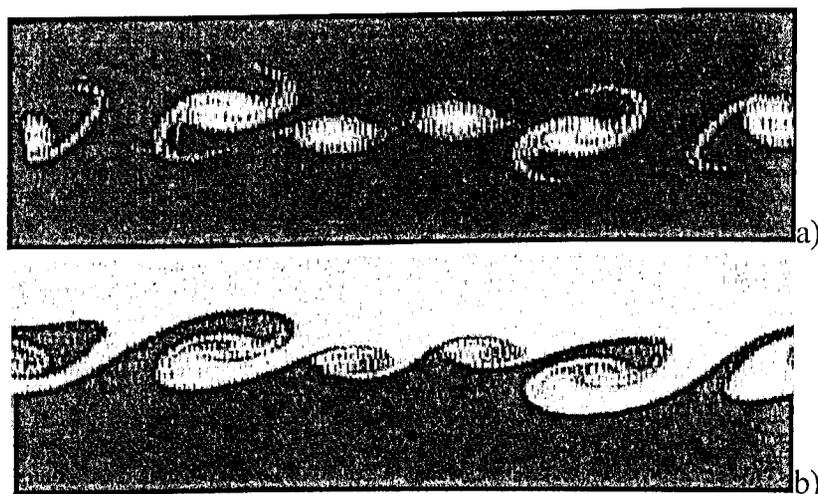


Figura 1.1. (a) Campo de vorticidade da camada de mistura em desenvolvimento temporal. (b) O correspondente campo de temperatura. Fig. extraída do trabalho de Comte *et al.*, (1989).

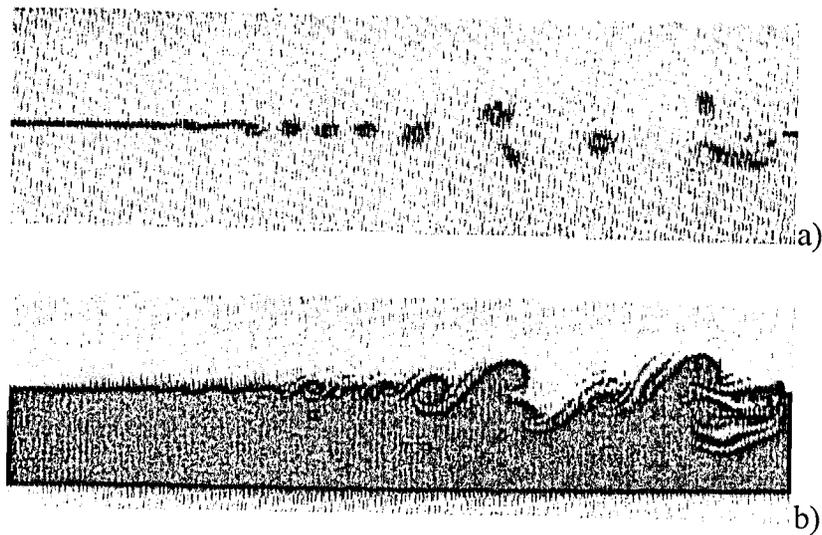


Figura 1.2. (a) Campo de vorticidade na camada de mistura em desenvolvimento espacial, em uma simulação de grandes escalas. (b) O correspondente Campo de temperatura. Fig. extraída do trabalho de Conte *et al.*, (1989).

Spencer e Jones (1971), também observaram que as escalas associadas com as estruturas coerentes são dispersadas, mas neste caso, pelos escoamentos médios das camadas planas que constituem a camada de mistura. As medidas realizadas por estes autores mostram que existe um pico largo no espectro de energia referente as flutuações de velocidade que é associado com as grandes estruturas. Adicionalmente, estas medidas mostram uma banda significativa de energia em números de onda muito pequenos. Conjectura-se que as grandes escalas estão associadas com as instabilidades externas, introduzidas pelos escoamentos médios das camadas sobre as estruturas coerentes que causam a reorganização destes vórtices ao longo da camada de mistura. Estas instabilidades são caracterizadas, principalmente, pelo mecanismos de emparelhamento e rotação. Cada um destes mecanismos produz um deslocamento local na esteira de vórtices, os quais acontecem em vários pontos, tanto na parte superior como na parte inferior da esteira. As distâncias entre estes eventos ou os tempos transcorridos entre eles, em uma determinada localização, definem as escalas correspondentes aos números de onda menores.

1.3 Objetivo da Pesquisa

Enquanto a motivação original para este estudo advém de questões de como seria o comportamento do Método Espectral da Colocação explícito para simular escoamentos complexos, como camadas de mistura bidimensionais, compressíveis e turbulentas, em desenvolvimento temporal e espacial, também, deu-se atenção a questões fundamentais sobre as estruturas destes escoamentos, em altos números de Reynolds.

Neste estudo foram reveladas várias facetas das estruturas dos escoamentos que, na sua grande maioria, concordam com as conclusões apresentadas por várias pesquisas sobre camadas de mistura, realizadas ao longo de vários anos. Em particular, são evidenciados detalhes do comportamento do campo de densidade nas camadas de misturas espaciais e temporais, pois, um dos objetivos iniciais deste trabalho foi o de determinar os efeitos da taxa de densidade na camada de mistura turbulenta em escoamentos compressíveis. Algumas outras importantes conclusões foram levantadas com relação às características dos escoamentos, utilizando-se informações provenientes dos espectros de energia térmica e energia cinética, assim como, das funções de inter-correlações.

2 Formulação Matemática

2.1 Equações Governantes

Na solução da grande maioria dos problemas em dinâmica dos fluidos torna-se necessário a utilização das equações de conservação completas, devido neste tipo de problemas ocorrerem fenômenos de instabilidade, tanto espaciais como temporais. Na maiorias das vezes, dependendo das características do problema, faz-se necessário utilizar formulações distintas para escoamentos compressíveis turbulentos e laminares. Ainda, considerando-se que a solução a ser obtida neste estudo envolve a simulação de escoamentos turbulentos compressíveis em baixos números de Mach ($M < 0.5$) e altos números de Reynolds ($Re \geq 1000$), torna-se necessário utilizar malhas suficientemente refinadas, para obter-se soluções satisfatórias para os campos de grandes escalas, quando se utiliza a formulação para escoamentos compressíveis laminares. Assim, aplica-se as equações de conservação regentes, na forma conservativa, para a solução do problema que são escritas abaixo na sua forma reduzida (Anderson et al., 1984):

(i) conservação da massa

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot \rho^* \vec{V}^* = 0 \quad (2.1)$$

(ii) conservação da quantidade de movimento

$$\rho^* \frac{D\vec{V}^*}{Dt^*} = \rho^* \vec{f}^* + \nabla \cdot \Pi_{ij}^* \quad (2.2)$$

(iii) conservação da energia

$$\frac{\partial \rho^* E_t^*}{\partial t^*} = \rho^* \frac{D\bar{V}^{*2}}{Dt^*} - p \nabla \cdot \bar{V}^* - \nabla \cdot \bar{q}^* + \Phi^* \quad (2.3)$$

(iv) Equação da vorticidade (Fridman)

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla \omega^* = \frac{1}{2\rho^*} \nabla \rho^* \times \nabla p^* + \omega^* \cdot \nabla u^* - \omega^* (\nabla \cdot u^*) + \nu \nabla^2 \omega^* \quad (2.4)$$

Acompanhando os termos da Eq. 2.4 da esquerda para a direita, pode-se descreve-los, tais como:

- (i) Variação local da vorticidade;
- (ii) Transporte de vorticidade por convecção;
- (iii) Principal diferença entre um fluido estratificado e um fluido com densidade uniforme. assim, vorticidade pode ser criada quando um fluido não homogêneo é considerado;
- (iv) Deformação e rotação do filamento;
- (v) Expansão do filamento por variação de volume, compressibilidade;
- (vi) Difusão de vorticidade pela ação molecular da viscosidade.

A Eq. 2.4, apesar de ser uma ferramenta econômica para estudo e interpretações físicas dos fenômenos da dinâmica dos fluidos, não foi utilizada neste estudo como equação governante devido a dificuldade em se tratar as condições limites do escoamento. Porém foi introduzida neste capítulo, a

título de informação, para melhor compreensão e interpretação dos fenômenos físicos do problema.

O termo envolvido na Eq 2.2 , Π_{ij}^* , o tensor tensão, para um fluido Newtoniano é definido como segue (Schlichting, 1968):

$$\Pi_{ij}^* = -p^* \delta_{ij} + \tau_{ij}^* \quad (2.5)$$

δ_{ij} é o delta de Kronecker, definido como segue

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.6)$$

τ_{ij}^* representa o tensor tensão referente a viscosidade molecular, dado por

$$\tau_{ij}^* = \mu^* \left[\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \right]; \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.7)$$

onde μ^* é a viscosidade dinâmica, u_1^* e u_2^* são as componentes do vetor velocidade bidimensional,

\vec{V}^* , nas direções x^* e y^* ; e x_1^* e x_2^* representam as direções x^* e y^* . O termo de dissipação viscosa,

Φ^* , existente na Eq. 2.3, é definido no sistema de coordenadas cartesiano como segue:

$$\Phi^* = \mu^* \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right\} \quad (2.8)$$

As demais variáveis existentes nas equações acima são as seguintes:

- a energia total, E_t^* :

$$E_t^* = \left(e^* + \frac{|\vec{V}^*|^2}{2} + \text{energia potencial} + \dots \right) \quad (2.9)$$

- o vetor taxa de calor por unidade de área, \vec{q}^* :

$$\vec{q}^* = -k^* \vec{\nabla} T^* \quad \text{onde} \quad \vec{q}^* = q_x^* \vec{i} + q_y^* \vec{j} \quad (2.10)$$

- força de corpo, \vec{f}^* :

$$\rho^* \vec{f}^* = \rho^* \vec{g}^* \quad (2.11)$$

onde e^* é a energia interna por unidade de massa, k^* é o coeficiente de condutividade térmica do fluido, T^* é o campo temperatura e \vec{g}^* é a força gravitacional.

Estas equações foram aplicadas no presente estudo para simular um escoamento de uma camada de mistura bidimensional, estratificado, desenvolvendo-se no espaço e no tempo. Assim, a fim de facilitar a implementação do código computacional, utiliza-se as equações de conservação na forma bidimensional, agrupando-se respectivamente os termos referentes às direções cartesianas x^* e y^* e separando-se os termos fonte. Este procedimento facilitará a implementação destas equações na

forma vetorial:

(i) equação da conservação da massa

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \rho^* v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.12)$$

(ii) equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \rho^* u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^{*2} + p^* - \tau_{xx}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* u^* v^* - \tau_{xy}^*) = \rho^* f_x^* \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \rho^* v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^* v^* - \tau_{xy}^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^{*2} + p^* - \tau_{yy}^*) = \rho^* f_y^* \quad (2.14)$$

(iii) equação da conservação da energia

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (E_t^* u^* + p^* u^* - u^* \tau_{xx}^* - v^* \tau_{xy}^* + q_x^*) + \\ \frac{\partial}{\partial y^*} (E_t^* v^* + p^* v^* - u^* \tau_{xy}^* - v^* \tau_{yy}^* + q_y^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para obter-se o fechamento do sistema de equações, faz-se necessário estabelecer um relacionamento entre as variáveis termodinâmicas (p^* , ρ^* , T^* , e^*), assim como relacionar os parâmetros de transporte (μ^* , k^*). Portanto, utilizou-se a relação dada pela equação de estado para

gases perfeitos, permitindo o completo equacionamento do problema:

$$p^* = \rho^* R^* T^* \quad (2.16)$$

Pode-se ainda aplicar as seguintes relações termodinâmicas:

$$e^* = c_v^* T^*, \quad \gamma = \frac{c_p^*}{c_v^*}, \quad c_v^* = \frac{R^*}{\gamma - 1} \quad \text{e} \quad c_p^* = \frac{\gamma R^*}{\gamma - 1} \quad (2.17, 18, 19, 20)$$

onde $c_v^* = de/dT$ (gás ideal) é o calor específico a volume constante, $c_p^* = dh/dT$ (gás ideal) o calor específico a pressão constante, γ é a taxa de calor específico e R^* é a constante do gás. Nas condições normais de temperatura e pressão $R^* = 287 \left[\frac{m^2}{s^2 \cdot K} \right]$ e $\gamma = 1,4$ (para o ar).

Para calcular as propriedades de transporte em função da temperatura ao longo do escoamento, utilizou-se a fórmula de Sutherland para a viscosidade dinâmica e para a condutividade térmica empírica, dadas por (White, 1988):

$$\mu^* = c_1^* \frac{T^{*3/2}}{T^* + c_2^*} \quad \text{e} \quad k^* = s_1^* \frac{T^{*3/2}}{T^* + s_2^*} \quad (2.21, 22)$$

onde c_1^* , c_2^* , s_1^* e s_2^* são constantes que para o gás em questão (no caso do ar) assumem os seguintes valores: $c_1^* = 1,458 \times 10^{-6} \left[\frac{kg}{ms^2 K^{1/2}} \right]$, $c_2^* = 110,4 \left[^\circ K \right]$, $s_1^* = 2,863 \times 10^{-2} \left[\frac{kg \cdot m}{s^3 \cdot K^{3/2}} \right]$ e $s_2^* = 194,5 \left[^\circ K \right]$.

2.2 Adimensionalização das equações

As equações governantes são colocadas na sua forma adimensional com a finalidade de deixá-las em função dos parâmetros característicos do escoamento. Tais parâmetros são: número de Mach, número de Reynolds e número de Prandtl. Uma vantagem adicional em utilizar-se as equações adimensionais é o fato de que as variáveis do escoamento são normalizadas, possibilitando, assim, que os seus valores numéricos fiquem entre limites prescritos. Os grupos adimensionais utilizados no presente trabalho foram

$$x = \frac{x^*}{l_x/2}; \quad y = \frac{y^*}{l_y/2}; \quad t = \frac{t^* V_\infty}{l_x/2} \quad (2.23, 24, 25)$$

$$u = \frac{u^*}{V_\infty}; \quad v = \frac{v^*}{V_\infty}; \quad T = \frac{T^*}{T_\infty} \quad (2.26, 27, 28)$$

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}; \quad p = \frac{p^*}{\rho_\infty V_\infty^2}; \quad e = \frac{e^*}{V_\infty^2}; \quad (2.29, 30, 31)$$

$$\mu = \frac{\mu^*}{\mu_\infty}; \quad k = \frac{k^*}{k_\infty} \quad (2.32)$$

onde as variáveis dimensionais são denotadas pelo asterisco, *, sobrescrito e as condições de corrente livre são denotadas pelo símbolo infinito subscrito, ∞ , onde neste estudo foram assumidas como iguais as propriedades médias do escoamento. E L_x e L_y são os comprimentos físicos do domínio do escoamento.

Como pode ser observado nas Eqs. 2.23 e 2.24, os comprimentos característicos nas direções x e y são diferentes. Tal procedimento permite resolver problemas com comprimentos de escalas diferentes nestas direções e em consequência, permite adaptar-se o problema ao domínio espectral dos pontos de quadratura de Gauss-Lobatto utilizado neste estudo que exige um domínio, variando no intervalo de $(-1,1)$.

Portanto, aplicando-se os grupos adimensionais descritos pelas Eqs. 2.23 a 2.32 nas equações de conservação dadas pelas Eqs. 2.12 a 2.15, obtém-se:

(i) conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{Lx}{Ly} \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.33)$$

(ii) conservação do momento linear

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{Lx}{Ly} \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv - \tau_{xy}) = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{Lx}{Ly} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = 0 \quad (2.35)$$

(iii) conservação da energia

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\rho E_t + p - \tau_{xx}) - v\tau_{xy} + q_x] + \\ \frac{Lx}{Ly} \frac{\partial}{\partial y} [v(\rho E_t + p - \tau_{yy}) - u\tau_{xy} + q_y] = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

A equação de estado para um gás perfeito (Eq. 2.16) torna-se

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (2.37)$$

E adimensionalizando-se as Eqs. 2.20 e 2.21 fica

$$\mu = P_1 \frac{T^{3/2}}{T + c_2^*} \quad e \quad k = P_2 \frac{T^{*3/2}}{T^* + s_2^*} \quad (2.38,39)$$

$$\text{onde } c_2 = c_2^*/T_\infty, \quad s_2 = s_2^*/T_\infty, \quad P_1 = \frac{c_1^* T_\infty^{1/2}}{\mu_\infty} \quad e \quad P_2 = \frac{s_1^* T_\infty^{1/2}}{k_\infty}.$$

A energia total adimensional é obtida em função de suas componentes adimensionalizadas da seguinte forma:

$$E_t = \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (2.40)$$

As componentes do tensor tensão devido a viscosidade molecular, nas formas adimensionais, são definidas como segue:

$$\tau_{xx} = \frac{2\delta_0}{Ly} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Lx}{Ly} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.41)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2\delta_0}{Ly} \frac{\mu}{Re} \frac{2}{3} \left(2 \frac{Lx}{Ly} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.42)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2\delta_0}{Ly} \frac{\mu}{Re} \left(\frac{Lx}{Ly} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.43)$$

E as componentes do fluxo de calor devido a condutividade térmica, nas formas adimensionais, são descritos pelas seguintes Equações:

$$q_x = - \frac{2\delta_0}{Ly} \frac{k}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Re Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.44)$$

$$q_y = - \frac{2\delta_0}{Ly} \frac{k}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Re Pr} \frac{Lx}{Ly} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.45)$$

onde os termos adimensionais que aparecem nas Eqs. 2.41 a 2.45 que definem as características do escoamento são:

(i) o número de Reynolds

$$Re = \frac{V_x \rho_x \delta_0}{\mu_x}, \quad (2.46)$$

o qual é um parâmetro que relaciona as forças inerciais com as forças viscosas. Ele constitui uma medida da estrutura do escoamento, isto é; permite caracterizar se os escoamentos são laminares ou turbulentos. δ_0 é a espessura inicial da camada de mistura, definida a partir do perfil inflexional de

velocidade, fixado nas condições iniciais do problema.

(ii) o número de Prandtl

$$\text{Pr} = \frac{c_p^* \mu_\infty}{k_\infty}, \quad (2.47)$$

esse parâmetro é uma propriedade do fluido e relaciona difusividade da quantidade de movimento e difusividade de energia térmica.

(iii) o número de Mach

$$\text{M}_\infty = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty}} \quad (2.48)$$

tal parâmetro relaciona as forças inerciais e forças elásticas. Ele é usado para determinar o regime do escoamento, isto é; se o escoamento é subsônico, transônico, supersônico ou hipersônico.

Com o objetivo de facilitar o tratamento computacional das equações, pode-se reescrever as Eqs. 2.33 a 2.36 na forma vetorial, como segue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{L_x}{L_y} \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2.49)$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E_t \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ u(\rho E_t + p - \tau_{xx}) - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad (2.50,51)$$

e

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ v(\rho E_t + p - \tau_{yy}) - u\tau_{xy} + q_y \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

2.3 Condições Iniciais e Limites

Nesta pesquisa dois casos foram analisados: O primeiro constitui o estudo da camada de mistura em desenvolvimento temporal e o segundo constitui o estudo da camada de mistura em desenvolvimento espacial. Estes escoamentos apresentam comportamentos físicos diferentes, portanto, exigindo condições iniciais e condições limites diferentes.

2.3.1 camada de mistura em desenvolvimento temporal

Este problema envolve a análise da evolução de instabilidades de um escoamento constituído por dois fluxos a contracorrente ou concorrentes, mas com um diferencial de velocidade entre as camadas superior e inferior. A estrutura inicial do escoamento afeta significativamente a formação de

vórtices ao longo do tempo. A fim de provocar a instabilidade do escoamento é estabelecido como condição inicial um perfil de velocidade básico, distribuído em todo o domínio, o qual possui um ponto inflexional do tipo tangente hiperbólica. Distante da região de mistura, este perfil é definido por uma velocidade positiva, U_1^* , e uma velocidade negativa U_2^* (no caso do escoamento ser definido por camadas a contracorrente), as quais possuem os mesmos módulos ou por uma velocidade U_2^* , onde $U_2^* < U_1^*$, caracterizando um diferencial de velocidade (no caso do escoamento ser constituído por camadas concorrentes). Na região da camada de mistura, este perfis são interligado por uma curva inflexional, dado por uma função tangente hiperbólica, definida em função da espessura da camada de mistura inicial (Fig. 2.1 e 2.2). Superposto a este perfil básico é introduzido um modo oscilante no espaço, com um número de onda fundamental e adicionalmente, é introduzido em todo o campo um ruído branco.

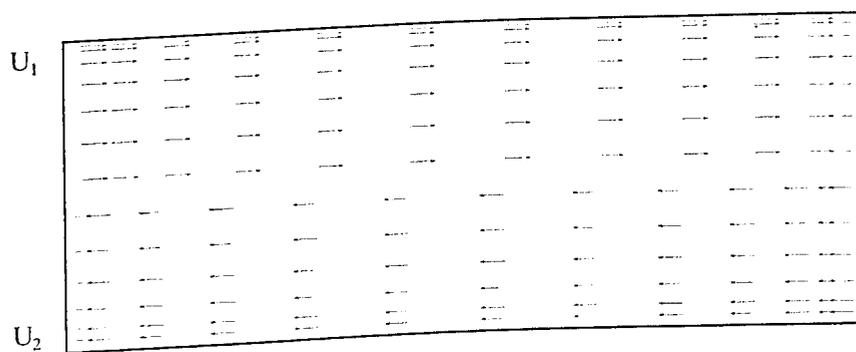


Figura 2. 1. Perfil básico inicial para camada de mistura em desenvolvimento temporal.

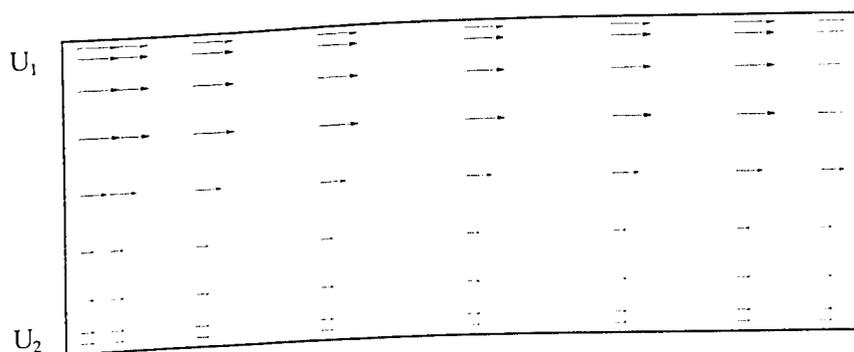


Figura 2. 2. Perfil básico inicial para camada de mistura em desenvolvimento espacial.

O perfil básico do escoamento, mostrado na Figura 2.1, é descrito na forma adimensional a

seguir:

$$\bar{u}(y) = 1 + \underbrace{\frac{U^*}{\bar{U}^*}}_{\eta} \tanh(y/\delta_0) \quad (2.53)$$

$$\bar{v}(x, y) = 0 \quad (2.54)$$

onde

$$U^* = \frac{U_1^* - U_2^*}{2} \quad \text{e} \quad \bar{U}^* = \frac{U_1^* + U_2^*}{2} \quad (2.55,56)$$

Observa-se que no caso, do estudo da camada de mistura em desenvolvimento temporal, de um escoamento plano contracorrente, $\bar{U}^* = 0$, u determinado pela Eq. 2.57, no entanto neste caso considera-se $\bar{U}^* = |U_1^*| + |U_2^*|/2$, $V_\infty = \bar{U}^*$, assim, $U_1 = U_1^*/V_\infty$ e $U_2 = U_2^*/V_\infty$.

Para facilitar a formação das instabilidades de Kelvin Helmholtz no escoamento, é embutido nas condições iniciais do escoamento básico, um modo fundamental oscilante no espaço. Seguindo Conte *et al*, (1989), a seguinte formulação matemática envolvendo as variáveis características do problema, é definida:

$$u(x, y, t = 0) = \bar{u}(y) + f(y) \left[\varepsilon_1 \hat{V}(x, y) - \varepsilon_2 \tilde{V}(x) \right] \quad (2.57)$$

$$v(x, y, t = 0) = f(y) [\varepsilon_1 \hat{V}(x, y) - \varepsilon_2 \tilde{V}(x)] \quad (2.58)$$

onde $\hat{V}(x, y)$ é um número aleatório que constitui um ruído branco, responsável pelo crescimento das instabilidades turbulentas e os demais parâmetros contidos nas Eqs. 2.57 e 2.58, são descritos a seguir.

A função $f(y)$ constitui um filtro gaussiano, a qual confina todas as perturbações na zona rotacional do escoamento básico

$$f(y) = \exp[-0,5(y / \delta_i)^2] \quad (2.59)$$

O parâmetro $\tilde{V}(x)$ constitui uma perturbação determinística, que conduz o escoamento básico para seu modo fundamental, característico da camada de mistura, o qual foi utilizado em alguns cálculos. Assim,

$$\tilde{V}(x) = \cos(k_a x) k_a \quad (2.60)$$

onde k_a representa o número de onda da perturbação determinística superposta ao escoamento básico, o qual foi definido como satisfazendo a seguinte relação: $k_a = 0.4446\delta_0^{-1}$. Este constitui o número de onda mais amplificado que induz as maiores taxas de crescimento das estruturas, segundo a teoria da instabilidade linear (Drazin e Reid, 1981).

A amplitude da perturbação aleatória, ε_1 , é definida da seguinte forma:

$$\varepsilon_1 = 10^{-4} \text{Max} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (2.61)$$

Também, define-se amplitude da perturbação determinística de acordo com a seguinte equação:

$$\varepsilon_2 = n_i \varepsilon_1 \quad (2.62)$$

onde n_i é a relação entre as perturbações determinísticas e aleatória.

Fig. 2.3 evidencia as características da estrutura do escoamento inicial, onde pode-se observar a superposição do modo oscilante determinístico ao escoamento básico.

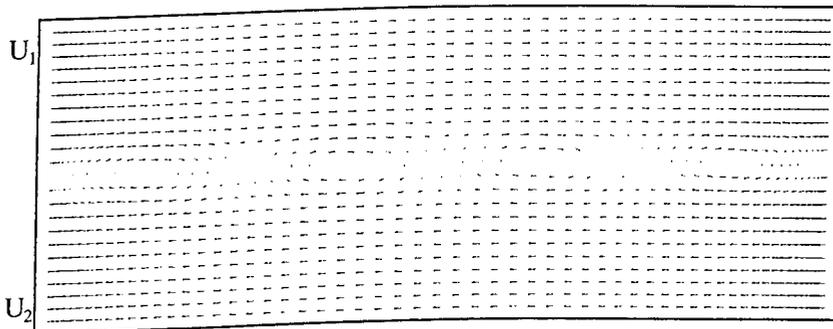


Figura 2.3 Disposição inicial do escoamento em desenvolvimento temporal com imposição de uma perturbação determinística.

O perfil de temperatura é inicializado de forma semelhante ao perfil médio de velocidade, porém, invertido, sendo a maior temperatura introduzida ao escoamento da camada inferior, causando ao escoamento uma condição de escoamento estratificado. Esta distribuição inicial de temperatura permite a formação da camada de mistura, em consequência facilita a visualização do emparelhamento dos vórtices.

Para o cálculo do campo inicial de pressão, usou-se um processo de acoplamento deste

campo às condições impostas para os campos de velocidades e temperatura, baseado nas equações de conservação, como descrito pelo o *Anexo I*. Este procedimento facilita a estabilidade do código computacional e evita perda de tempo na execução da simulação do problema com ajustes dos campos iniciais ao longo do tempo, o que pode causar divergência na solução.

Finalmente, o campo de densidade é obtido através da Eq. 2.37, usando os valores assumidos para o campo de pressão e temperatura.

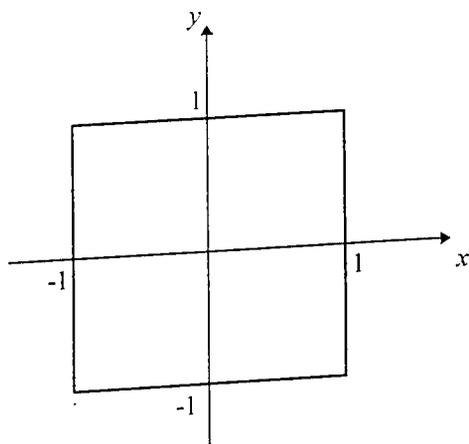


Figura 2.4. Definição do domínio computacional no plano cartesiano.

As condições de contorno para camada de mistura em desenvolvimento temporal são periódicas ao longo da direção x e impostas na direção y conforme Fig 2.4, para todas as variáveis independentes. Assim, na forma adimensional estas Equações são escritas como segue:

- na direção x

$$\begin{aligned}
u(x = -1, y, t) &= u(x = 1, y, t) \\
v(x = -1, y, t) &= v(x = 1, y, t) \\
T(x = -1, y, t) &= T(x = 1, y, t) \\
\rho(x = -1, y, t) &= \rho(x = 1, y, t)
\end{aligned}
\tag{2.63}$$

- na direção y

$$\begin{aligned}
u(x, y = 1, t) &= U_1; & u(x, y = -1, t) &= U_2 \\
v(x, y = 1, t) &= u(x, y = -1, t) & &= 0 \\
T(x, y = 1, t) &= T_1; & T(x, y = -1, t) &= T_2 \\
\rho(x, y = 1, t) &= f(T_1, p_\infty); & \rho(x, y = -1, t) &= f(T_2, p_\infty)
\end{aligned}
\tag{2.64}$$

As outras variáveis, como: viscosidade, condutividade térmica e pressão são calculados, quando necessário, aplicando-se os valores impostos nas Eqs. 2.63 e 2.64, nas Eqs. 2.37, 2.38 e 2.39.

2.3.2 Camada de Mistura em Desenvolvimento Espacial

Para a camada de mistura em desenvolvimento espacial é imposto, tanto na entrada como em todo domínio um perfil de velocidade com um ponto inflexional semelhante, como descrito pelas Eqs. 2.46 e 2.47. Ressalva-se, entretanto, que neste caso as velocidades possuem módulos diferentes mas sentidos iguais, como mostrado na Fig. 2.2.

A fim de instabilizar o escoamento é adicionado em todo momento, um ruído branco na entrada do domínio, superposto ao perfil básico definido pelas Eqs. 2.53 e 2.54. Neste caso, não é introduzida a perturbação determinística, como definido em alguns casos estudados na camada de mistura em desenvolvimento temporal. Assim, com relação a Eqs. 2.57 e 2.58, $\varepsilon_2 = 0$ e as demais variáveis são as mesmas, como definidas pelas Eqs. 2.59 a 2.61.

Semelhante ao caso para a camada de mistura em desenvolvimento temporal, o perfil de temperatura é inicializado de forma similar ao perfil médio de velocidade, porém, também invertido, sendo a maior temperatura introduzida ao escoamento da camada inferior, causando ao escoamento uma condição de escoamento estratificado. Com a mesma finalidade como discutido para o caso em desenvolvimento temporal, esta distribuição inicial de temperatura permite a formação das instabilidades de Kelvin Helmholtz, em consequência facilita a visualização do emparelhamento dos vórtices. Entretanto, neste caso o campo inicial de pressão é assumido constante e igual à pressão de corrente livre.

Finalmente, o campo de densidade é obtido através da Eq. 2.37, usando os valores assumidos para o campo de pressão e temperatura.

As condições de contorno na entrada do domínio para a camada de mistura em desenvolvimento espacial são características de um problema de Dirichlet; isto é, as próprias variáveis são impostas nos contornos do problema. Sendo que para as componentes do vetor velocidade é superposto aos perfis de velocidades básicos, um ruído aleatório em cada passo de tempo. Nas laterais superior e inferior são assumidas as condição de Neuman; ou seja, os gradientes das variáveis independentes são considerados nulos. Entretanto, na saída, numa posição consideravelmente distante da entrada, é assumido uma condição que permite que os turbilhões formados ao longo da esteira da camada de mistura, considerados completamente desenvolvidos, sejam evacuados permanentemente. Para isto, usou-se simplesmente Neuman. Assim, estas condições tornam

- entrada

$$u(x = -1, y, t) = \bar{u}(x) + f(y)\varepsilon_1\hat{V}(y, t) \quad (2.65)$$

$$v(x = -1, y, t) = f(y)\varepsilon_1\hat{V}(y, t) \quad (2.66)$$

onde $f(y)$ e ε_1 são dados pelas Eqs. (2.59) e (2.61), respectivamente e $\hat{V}(y, t)$ é um número aleatório calculado a cada passo de tempo.

- laterais

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y = 1)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, y = -1)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u(x, y = 1)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x, y = -1)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v(x, y = 1)}{\partial y} &= \frac{\partial v(x, y = -1)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v(x, y = 1)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y = -1)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

- saída

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad (2.68)$$

onde $\varphi \in \{u, v, T, \rho\}$ na Eq. 2.68, sendo que a mesma é válida para ondas lineares, perturbações não-lineares, tais como: estruturas coerentes e turbilhões de pequenas escalas.

2.4 Definição do Domínio de Cálculo

Para determinar as dimensões físicas do domínio de cálculo do problema, segue-se os seguintes

passos:

- I. define-se o comprimento de onda fundamental das estruturas determinísticas, λ_a , o qual corresponde ao número de onda mais amplificado, isto é;

$$\lambda_a = \frac{2\pi}{k_a} \quad (2.69)$$

- II. em seguida, define-se o número de estruturas determinísticas, n_e , que se deseja introduzir no domínio;
- III. finalmente calcula-se as dimensões do domínio, utilizando os parâmetros definidos acima.

Assim,

$$Lx = n_e \lambda_a \quad \text{e} \quad Ly = n_p \delta_i \quad (2.70,71)$$

onde n_p é o número de emparelhamentos esperados que é proporcional a um valor máximo previsto para a espessura da camada de mistura, $\delta(t)$, e δ_i é a espessura inicial da camada de mistura. $\delta(t)$ é definido como segue:

$$\delta(t) = \frac{2U}{\text{Max} \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right|} \quad (2.72)$$

e

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x, y) dx \quad (2.73)$$

assim $\delta_i = 2\delta_0$.

3 Aproximação Numérica

3.1 Introdução

Em simulações de problemas de dinâmica dos fluidos, envolvendo transportes de quantidade de movimento, energia e massa, faz-se necessário resolver um conjunto de EDPs (Equações Diferenciais Parciais), não lineares e acopladas, as quais expressam a conservação da massa, quantidade de movimento e energia.

Devido às não linearidades e ao forte acoplamento existente entre estas equações, a solução do problema só é possível através de métodos numéricos apropriados para a solução destas complexas EDPs. Na aplicação de uma técnica numérica qualquer, as equações são discretizadas gerando um conjunto de equações algébricas que mantêm as não linearidades e o acoplamento das equações originais.

No presente trabalho, as EDPs governantes do problema foram discretizadas, utilizando-se a técnica da Colocação Espectral, com distribuição de pontos de quadratura seguindo a formulação de Gauss-Lobatto. Com esta formulação, o método de colocação espectral de Chebyshev adapta-se melhor (Cannuto *et al*, 1988), devido a certos fatores que serão comentados nas seções seguintes.

Para obter-se uma solução estacionária estável, separa-se completamente as discretizações no tempo e no espaço. Primeiro discretiza-se os termos espaciais, obtendo-se uma equação diferencial ordinária (EDO), tendo como variável independente o tempo. Posteriormente, discretiza-se a EDO resultante no tempo. Para isto, neste trabalho foi aplicado o método de Runge-Kutta de ordem s , proposto por Jameson, Schimidt e Turkel (1981), onde a discretização no tempo é obtida por passo de tempo dividido em estágios.

Tomando-se as Equações vetoriais 2.49 a 2.51, é possível definir uma função $P(U)$ que caracteriza a projeção espectral no espaço, obtida a partir do cálculo das derivadas espaciais, tal como:

$$P(U) = -\frac{Ly}{Lx} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \quad (3.1)$$

obtendo-se a seguinte EDOL:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P(U) \quad (3.2)$$

Assim, pode-se aplicar uma discretização no tempo, seguindo o método de Jameson, Schmidt e Turkel (1981) (ver capítulo 3 de Cannuto *et al.*, 1988, para melhor entendimento do método), descrito abaixo:

$$\begin{aligned} &U_f = U^n \\ &\text{para } k = s, (s-1), \dots, 1 \\ &U_f = U^n + \frac{1}{k} \Delta t P(U_f) \\ &\text{fim - para} \\ &U^{n+1} = U_f \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde U^n é o vetor contendo os valores transientes das equações de conservação no instante $t = n$, dados pela Eq. 2.49.

3.2 Discretização Espacial das Equações

Há diversas maneiras de obter-se as equações discretizadas espacialmente. Para escolher uma das técnicas existentes, deve-se levar em consideração os aspectos físicos relevantes do problema em estudo, visando a obtenção de uma melhor formulação para simulações de problemas não lineares, e também, considerando os aspectos computacionais relevantes, como o tempo de processamento, precisão de cálculo e a possibilidade de paralelização. Estes aspectos foram discutidos com detalhes na Introdução. Portanto, como explanado, a técnica numérica empregada neste estudo foi o Método Espectral da Colocação, que se caracteriza na expansão em séries discretas das derivadas espaciais de primeira e segunda ordem, utilizando-se os polinômios ortogonais de Chebyshev. Estes polinômios apresentam as vantagens de não exigir periodicidade nas condições limites e são fáceis de serem implementados computacionalmente. Uma vasta literatura pode ser encontrada, tratando-se tanto da técnica espectral da colocação, como sobre as propriedades dos polinômios de Chebyshev. Algumas referências clássicas com relação a estes tópicos são Fox e Parker (1968) e Rivlin (1974). As técnicas de expansão das variáveis dependentes ou de suas derivadas ou integrais, em séries ortogonais apresentam bons resultados, quando comparados com cálculos obtidos por outras técnicas numéricas clássicas, como os métodos de diferenças finitas ou volumes finitos, como será verificado nos próximos parágrafos. Nos sub-itens subsequentes descreve-se os conceitos, propriedades deste procedimento de discretização de derivadas ou integrais no espaço.

3.2.1 Expansão de Fourier Discreta

As séries de Fourier constitui uma das técnicas para obter-se aproximações numéricas de funções ou derivadas de funções. Porém, existe algumas dificuldades em tratar-se funções desconhecidas em domínios finitos, considerando-se que estas séries exige condições limites periódicas para o domínio, além de, naturalmente, em expansões espaciais, um domínio finito faz com que estas séries sejam truncadas em um número finito de expansões, comprometendo a precisão do cálculo. Essas dificuldades aumentam quando essas funções apresentam não linearidades ou descontinuidades, amplificando os erros de aproximações devido ao truncamento das séries próximos das regiões de descontinuidades ou aumentando a amplitude dos erros devido a interação dos termos não-lineares. Entretanto, com o uso de séries discretas utilizando um número suficientemente grande de pontos na aproximação de funções não-lineares e descontínuas, esses erros de aproximação podem ser minimizados..

Assim para um número inteiro $N > 0$, considera-se um conjunto de pontos

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4)$$

onde os x_j são chamados de nós ou pontos da malha.

Considerando $\hat{f}_k, k=0, 1 \dots, N-1$, como os coeficientes discretos de Fourier de uma função complexa $f \in [0, 2\pi]$, estes coeficientes permitem obter $f(x_j)$ através de uma expansão em séries de Fourier discretas, como segue:

$$f(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{f}_k e^{ikx_j} \quad j=0, \dots, N-1 \quad (3.5)$$

onde \hat{f}_k são definidos da seguinte forma:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ikx_j} \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (3.6)$$

Sabe-se que a transformada discreta de Fourier (DFT) é uma transformação ortogonal no espaço complexo C^N . Do ponto de vista computacional esta pode ser obtido por um algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT) (Cooley e Tukey, 1965).

O algoritmo de FFT, elaborado por Cooley e Tukey (1965), requer simplesmente que N seja uma potência de 2. Se os dados são completamente complexos, este algoritmo requer $5N \log_2 N - 6N$ operações reais, onde a adição e a multiplicação são contadas como operações separadas, enquanto que no procedimento normal de cálculo são utilizadas $2N^2$ operações, número de operações consideravelmente maior que aquele realizado pelo procedimento de cálculo de FFT. Um algoritmo para o cálculo da FFT complexa é discutido no *Anexo II.1*.

Este algoritmo de FFT será utilizado para calcular as derivadas espaciais das variáveis dependentes do problema em estudo, onde estabelece-se uma ligação desta FFT com a transformada de Chebyshev. Este procedimento será explicado no sub-item 3.

3.2.2 Expansão de Chebyshev Discreta

Os polinômios de Chebyshev $\{T_k(x); k = 0, 1, \dots, \infty\}$ são auto-funções de um problema singular de Sturm-Liouville que são dados por

$$T_k(x) = \cos k\theta, \quad \text{onde} \quad \theta = \arccos x \quad (3.7)$$

ou se expandido em série de potência

$$T_k(x) = \frac{k}{2} \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l \frac{(k-l-1)!}{l!(k-2l)!} (2x)^{k-2l} \quad (3.8)$$

onde $[k/2]$ significa usar o maior inteiro, o qual não exceda $k/2$. Se k é par, então $[k/2] = k/2$ e se k é ímpar, $[k/2] = (k-1)/2$.

A expansão de Chebyshev de uma função $f \in L_w^2(-1,1)$ é dada por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k T_k(x) \quad (3.9)$$

onde L_w^2 é o espaço complexo de Hilbert, contendo as funções quadráticas integráveis e \hat{f}_k são os coeficientes de Chebyshev da função f . Em outras palavras, \hat{f}_k é a função f transformada para o espaço Chebyshev. Esta transformação é calculada pela seguinte expressão

$$\hat{f}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) w(x) dx \quad (3.10)$$

onde

$$c_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Definindo-se uma função periódica par, \tilde{f} , por $\tilde{f}(\theta) = f(x = \cos \theta)$, então, aplicando-se a Eq. 3.11, obtendo-se:

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \cos k\theta \quad (3.12)$$

Observa-se através da Eq. 3.12 que a série de Chebyshev para a função f corresponde a uma série de cossenos para a função \tilde{f} . Se $f(x)$ é infinitamente diferenciável em $[-1,1]$, então $\tilde{f}(\theta)$, definida pela Eq. 3.12, é também infinitamente diferenciável e periódica, assim com todas suas derivadas de ordem superior, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Contudo, o interesse é pelas séries de Chebyshev discretas finitas. Portanto, existem as seguintes formulas explícitas para pontos discretos de quadratura e funções pesos discretas:

- Chebyshev-Guass

$$x_j = \frac{\cos(2j+1)\pi}{2N+2} \quad \text{e} \quad w_j = \frac{\pi}{N+1} \quad (3.13)$$

- Chebyshev-Gauss-Radau

$$x_j = \frac{\cos 2\pi j}{2N+1} \quad w_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2N+1} & ; j = 0 \\ \frac{\pi}{N+1} & ; 1 \leq j \leq N \end{cases} \quad (3.14)$$

- Chebyshev-Gauss-Lobatto

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad w_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2N} & ; j = 0, N \\ \frac{\pi}{N} & ; 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad (3.15)$$

para todas as distribuições de pontos, acima indexadas por j , tem-se que $j=0, 1, \dots, N$.

A distribuição de pontos de quadratura mais usada é a Gauss-Lobatto, devido ao erro de *aliasing*, advindos da interpolação, ser de forma muito simples para essa distribuição (Cannuto et al., 1989). Figura 3.1 mostra a disposição de pontos usando a fórmula de Gauss-Lobatto.

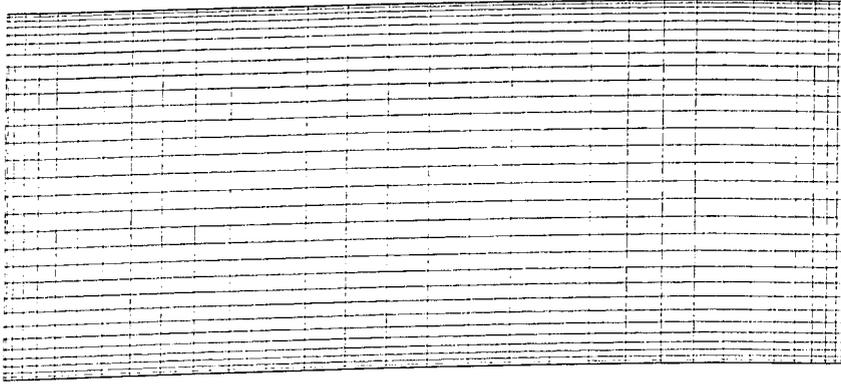


Figura 3.1 Malha poligonal com a distribuição de pontos utilizando a formulação de Gauss-Lobatto, com $N=64$.

Assim, aplicando-se a técnica da quadratura (Cannuto et al, 1988) na Eq. 3.10, a transformação discreta para o espaço de Chebyshev para uma dada distribuição de pontos de quadratura, fica

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_k(x_j) w_j \quad (3.16)$$

onde

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2} c_k & \text{para } k < N, \text{ Gauss} \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } k = N, \text{ Gauss - Radau} \\ \pi & \text{para } k = N, \text{ Gauss - Lobatto} \end{cases} \quad (3.17)$$

e a inversa da Eq. 3.16 pode ser escrita como segue:

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k T_k(x_j) \quad (3.18)$$

A partir de uma análise matemática da Eq. 3.16, pode-se chegar a uma matriz que permite obter a função transformada no espaço de Chebyshev, \hat{f}_k . Esta matriz representada na distribuição de pontos de Gauss-Lobatto pode ser escrita pela seguinte fórmula simplificada

$$C_{kj} = \frac{2}{N\bar{c}_j\bar{c}_k} \cos \frac{\pi j k}{N} \quad (3.19)$$

onde

$$\bar{c}_j = \begin{cases} 2 & ; j = 0, N \\ 1 & ; 1 \leq j \leq N - 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Assim,

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^N C_{kj} f(x_j) \quad (3.21)$$

Também, a inversa da Eq. 3.19, que representada na forma de matriz, permite obter a função f . Esta matriz inversa pode ser escrita através da seguinte simplificação

$$(C^{-1})_{kj} = \cos \frac{\pi j k}{N} \quad (3.22)$$

Assim,

$$f(x_k) = \sum_{j=0}^N (C^{-1})_{kj} \hat{f}_j \quad (3.23)$$

3.2.2.1 Diferenciação

A derivada de uma função f expandida em série de polinômios de Chebyshev, de acordo com Eq. 3.9, pode formalmente ser escrita como segue

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k^{(1)} T_k'(x) \quad (3.24)$$

onde $\hat{f}_k^{(1)}$ são os coeficientes de expansão da primeira derivada da função f no espaço Chebyshev, os quais podem ser obtidos através de operações matemáticas com os coeficientes de expansão \hat{f}_k , dados pela Eq. 3.12. Em outras palavras, $\hat{f}_k^{(1)}$ é a diferenciação de \hat{f}_k . Isso pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\hat{f}_k^{(1)} = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ ímpar}}}^{\infty} p \hat{f}_p \quad (3.25)$$

A Eq. 3.25 é demonstrada no *Anexo II.2*, através de relações de recorrência trigonométrica e de manipulações das propriedades do polinômio de Chebyshev.

Também pode-se demonstrar uma equação recursiva que permite obter $\hat{f}_k^{(1)}$, a partir

de \hat{f}_k , usando as propriedades dos polinômios de Chebyshev (Cannuto *et al.*, 1988). Esta relação na forma recursiva pode ser escrita como segue:

$$\hat{f}_k^{(1)} = (\hat{f}_{k+2}^{(1)} + 2(k+1)\hat{f}_{k+1}^{(1)}) / c_k \quad (3.26)$$

A diferenciação de uma função pode ser obtida, usando-se tanto a Eq. 3.25 quanto a Eq. 3.26. Seguindo-se um destes procedimentos, uma eficiente maneira de obter rapidamente as derivadas é utilizando um código de Transformada Rápida de Chebyshev (TRC). Neste algoritmo, realiza-se uma TRC direta, onde se obtém os coeficientes discretos da expansão em série de Chebyshev, \hat{f}_k , como caracterizado pela Eq. 3.16. Posteriormente, aplica-se a Eq. 3.25 ou a Eq. 3.26, obtendo-se os coeficientes discretos da expansão em série de Chebyshev da derivada da função f . Em seguida, aplica-se uma TRC inversa, obtendo-se a derivada da função f , no espaço físico. O algoritmo usado para calcular a TRC é baseado no algoritmo da FFT, neste caso, o número total de operações para obter-se tal resultado é da ordem de $(5\log_2 N + 8 + 2q)N$ (Cannuto *et al.*, 1988), onde q é a ordem da derivada. Tal algoritmo é apresentado nos parágrafos seguintes.

As equações 3.18 e 3.20 são as transformadas discretas de Chebyshev direta e inversa, respectivamente, para quaisquer pontos de colocação. Supondo-se que deseja computar a transformada de Chebyshev para dois conjuntos reais de dados f_j^1 e f_j^2 , então define-se a seguinte função complexa, g_j , por

$$g_j = \begin{cases} f_j^1 + if_j^2 & ; j = 0, 1, \dots, N \\ g_{2N-j} & ; j = N+1, N+2, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (3.27)$$

O resultado da Eq. 3.27 é uma função complexa e periódica, com período em $2N$. Desta forma pode-se aplicar um algoritmo de FFT complexa sobre este resultado e obter-se os coeficientes \hat{g}_j (os coeficientes complexos da g_j) no espaço Fourier, conforme Eq. 3.6. Os coeficientes das funções reais f_j^1 e f_j^2 retornarão na parte real e imaginária de \hat{g}_j , respectivamente. Para converter estes coeficientes do espaço Fourier para o espaço Chebyshev, aplica-se a seguinte equação:

$$\hat{G}_j = \frac{1}{Nc_j} \hat{g}_j \quad ; j = 0, 1, \dots, N \quad (3.28)$$

Assim, aplica-se a equação 3.25 ou 3.26, separadamente nas partes real e imaginária de \hat{G}_j e obtém-se os coeficientes $\hat{f}_j^{(1)1}$ e $\hat{f}_j^{(1)2}$ das derivadas de f_j^1 e f_j^2 . Em seguida aplica-se a FFT inversa, obtendo a G_j complexa no espaço físico, onde nas partes real e imaginária estão os valores reais das derivadas de f_j^1 e f_j^2 , respectivamente.

Uma comparação detalhada entre as Transformadas Complexas de Fourier Rápida (FFT) e o algoritmo para o cálculo de TRC é demonstrado no em Cannuto *et al*, (1988). Este algoritmo da TRC, utilizando a Eq. 3.26 mostrou ser a técnica mais rápida para o cálculo das derivadas no código computacional elaborado.

Uma outra maneira de calcular as derivadas, no Método da Colocação de Chebyshev é o método de multiplicação de matriz, baseado na técnica de interpolação de

Lagrange (Cannuto et al., 1989). Este procedimento é descrito como segue:

$$f'(x_i) = \sum_{j=0}^N (D_N)_{ij} f(x_j) \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (3.29)$$

onde $(D_N)_{ij}$ é computado pela diferenciação dos polinômios de Lagrange definidos para uma distribuição de pontos de Gauss-Lobatto. Um detalhado desenvolvimento deste método sobre a técnica de diferenciação por multiplicação de matrizes é apresentado em Cannuto *et al.*, (1988).

Assim, obtém-se:

$$(D_N)_{ij} = \begin{cases} \frac{\bar{c}_i (-1)^{i+j}}{\bar{c}_j x_i - x_j} & ; i \neq j \\ \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & ; 1 \leq i = j \leq N-1 \\ \frac{2N^2+1}{6} & ; i = j = 0 \\ -\frac{2N^2+1}{6} & ; i = j = N \end{cases} \quad (3.30)$$

Esta técnica, encontra-se, também, implementado no código computacional desenvolvido neste estudo, o qual é apresentado no *Anexo III*.

O algoritmo de determinação de derivadas através de multiplicação de matrizes foi utilizado, inicialmente, nos cálculos do código computacional, entretanto, apesar de apresentar excelente precisão, o mesmo foi abandonado, devido a sua baixa velocidade de processamento quando se usa um grande número de pontos. Utilizando este algoritmo, o

cálculo de uma derivada de uma função distribuída em N pontos de colocação, é gasto $2N^2$ operações para obter-se os valores de f' .

Uma comparação da velocidade de processamento, utilizando-se os dois procedimentos para o cálculo das derivadas, (Transformada Rápida de Chebyshev, TRC, e Multiplicação de Matrizes, MxM) é apresentado na Tabela 3.1. Para executar estes cálculos foram utilizados alguns processadores especificados na Tabela. Observa-se nesta tabela que a medida que aumenta o número de pontos, o tempo de processamento utilizado pela técnica TRC é substancialmente menor do que o tempo utilizado pela técnica MxM.

Tabela 3.1: Tempo de processamento utilizado no cálculo da derivada de uma senóide usando o método da colocação de Chebyshev, (Tempo em segundos).

| N | Pentium 166Mhz | | DEC3000 | | RISC6000 | |
|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | Matriz | FFT | Matriz | FFT | Matriz | FFT |
| 8 | $3,00 \times 10^{-5}$ | $3,75 \times 10^{-5}$ | $8,67 \times 10^{-6}$ | $3,33 \times 10^{-5}$ | $5,00 \times 10^{-6}$ | $2,00 \times 10^{-5}$ |
| 16 | $7,00 \times 10^{-5}$ | $6,75 \times 10^{-5}$ | $1,67 \times 10^{-5}$ | $6,25 \times 10^{-5}$ | $1,00 \times 10^{-5}$ | $3,50 \times 10^{-5}$ |
| 32 | $1,73 \times 10^{-4}$ | $1,38 \times 10^{-4}$ | $6,67 \times 10^{-5}$ | $1,12 \times 10^{-4}$ | $2,00 \times 10^{-5}$ | $6,00 \times 10^{-5}$ |
| 64 | $7,55 \times 10^{-4}$ | $2,75 \times 10^{-4}$ | $2,50 \times 10^{-4}$ | $2,25 \times 10^{-4}$ | $3,20 \times 10^{-4}$ | $1,30 \times 10^{-4}$ |
| 128 | $3,00 \times 10^{-3}$ | $6,18 \times 10^{-4}$ | $1,10 \times 10^{-3}$ | $5,00 \times 10^{-4}$ | $1,42 \times 10^{-3}$ | $2,70 \times 10^{-4}$ |
| 256 | $1,26 \times 10^{-2}$ | $1,38 \times 10^{-3}$ | $1,06 \times 10^{-2}$ | $1,07 \times 10^{-3}$ | $7,80 \times 10^{-3}$ | $6,10 \times 10^{-4}$ |
| 512 | $5,24 \times 10^{-2}$ | $4,33 \times 10^{-3}$ | $4,38 \times 10^{-2}$ | $3,62 \times 10^{-3}$ | $3,73 \times 10^{-2}$ | $1,65 \times 10^{-3}$ |
| 1024 | $2,35 \times 10^{-1}$ | $9,66 \times 10^{-3}$ | $1,90 \times 10^{-1}$ | $7,12 \times 10^{-3}$ | $1,54 \times 10^{-1}$ | $5,14 \times 10^{-3}$ |

Figura 3.2 mostra algumas comparações entre várias técnicas que permitem calcular derivadas a partir de um conjunto discreto de dados. Também, esta figura mostra um gráfico de erro obtido ao calcular-se a derivada de uma função senóide pelo número de pontos usados na malha. Faz-se uma comparação entre quatro métodos distintos, os quais são: método das diferenças finitas de primeira ordem (FD1O), método das diferenças finitas de quarta ordem (FD4O), método espectral usando um algoritmo de Transformada

Rápida de Fourier (FFT) e método espectral usando multiplicação de matrizes (MxM). Observa-se nesta figura que para relativamente baixos números de pontos, os métodos espectrais apresenta um erro (erro $\approx O(10^{-11})$) consideravelmente menor do que os métodos de diferenças finitas (FD1O erro $\leq O(10^{-1})$ e FD4O erro $\leq O(10^{-7})$).

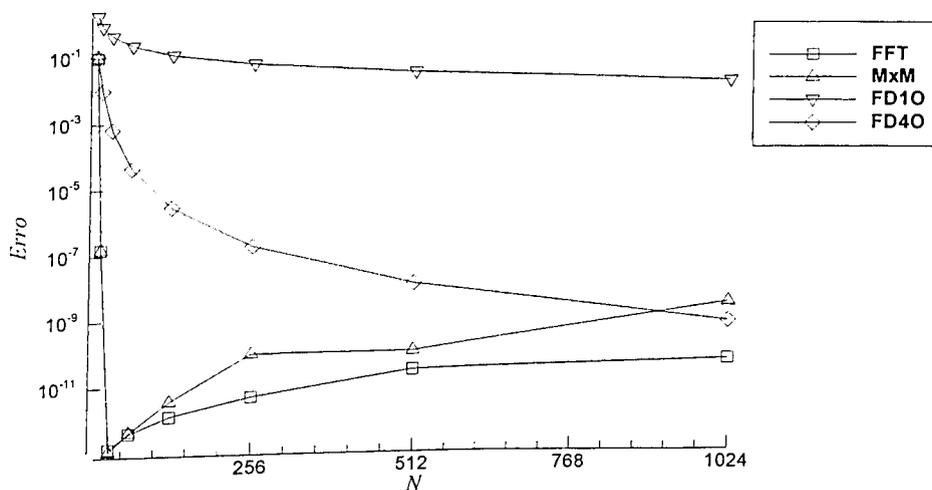


Figura. 3.2. Comparação entre os erros embutidos na derivada da função $f(x) = \text{sen } x$, quando estimado por várias técnicas numéricas.

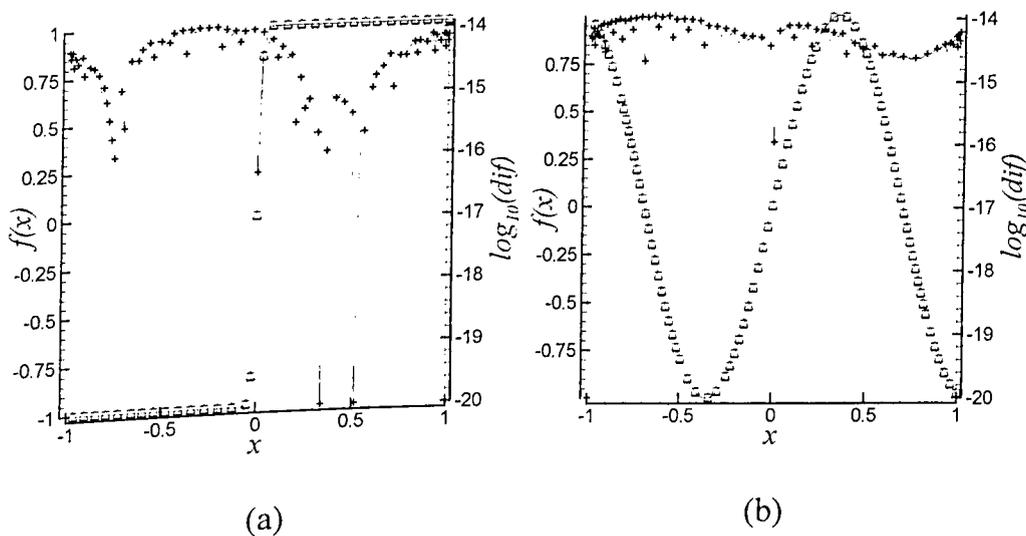


Figura 3.3 Comparação entre funções analíticas e funções estimadas pela técnica da colocação espectral. (a) Função tangente hiperbólica (descontínua). (b) Função senóide (contínua); (os símbolos Δ representa a curva da função analítica, \circ representa a curva aproximada da função e $+$ representa o $\log_{10}(dif)$ entre as duas curvas).

As funções ou derivadas de funções estimadas através de expansões em séries, como descrito acima, apresentam um comportamento oscilatório nos pontos vizinhos às descontinuidades. Este comportamento oscilatório é denominado fenômeno de Gibbs. Estas oscilações aumentam devido a dois fatores: truncamento da série e interpolação. Devido ao erro de interpolação, os valores das funções e de suas derivadas nos pontos extremos do domínio utilizado para o cálculo apresentam oscilações significantes. Estes fatos são evidenciados nas Figs. 3.3 e 3.4. Fig. 3.3a apresenta uma comparação entre uma função tangente hiperbólica (descontínua) e o cálculo estimado desta função através de uma expansão em série, enquanto que a Figura 3.3b mostra uma comparação entre uma função senóide (contínua) e valor estimado desta função através de uma expansão em série. Fig. 3.4a mostra a derivada de uma função tangente hiperbólica (descontínua) obtida analiticamente e a correspondente estimação obtida pela técnica transformada Rápida de Chebyshev (TRC) Eq. 3.26 utilizando 128 pontos de quadratura. Fig. 3.4b mostra o mesmo que a Figura 3.4a, entretanto, a função estimada é a derivada de uma função senóide (contínua). Observa-se facilmente que, as estimações para a função descontínua (tangente hiperbólica Fig. 3.3a), apesar do erro na estimação ser extremamente pequeno, apresentam erros maiores nos pontos próximos das descontinuidades, por outro lado, quando a função estimada é contínua (senóide Fig. 3.3b) os erros mantiveram-se aproximadamente constantes para todos os pontos do domínio. Adicionalmente, observa-se quando se estima a derivada de uma função contínua, os erros relativos mantêm-se na mesma ordem de grandeza que os obtidos para a estimação da função, contudo, no cálculo de uma derivada de uma função descontínua, como uma função tangente hiperbólica, tende a uma função impulso no ponto de descontinuidade, os erros relativos na estimação destas derivadas são

mais significativos. Estes fatos caracterizam o fenômeno de Gibbs estão evidenciados na Figs. 3.4a).

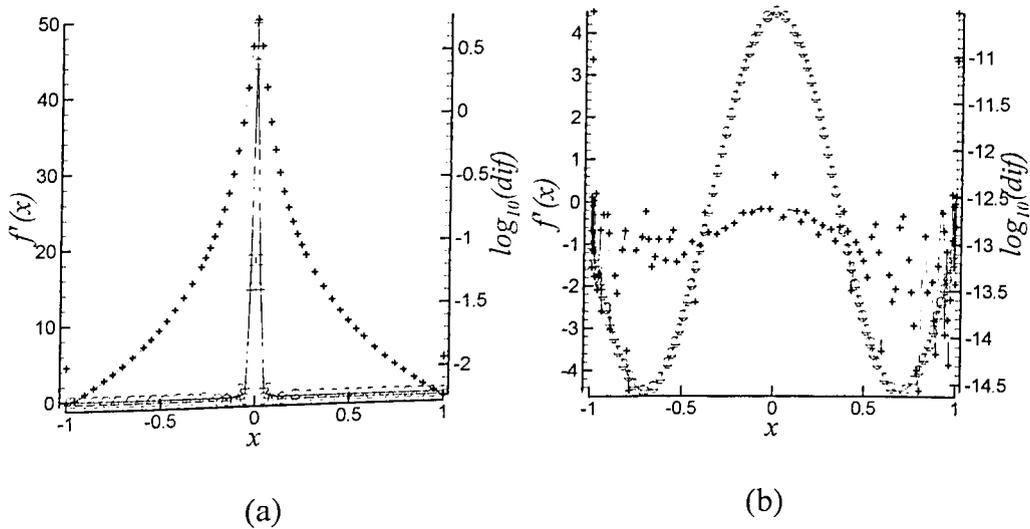


Figura 3.4 Comparação entre as derivadas analítica e estimada. (a) Função tangente hiperbólica (descontínua). (b) Função senóide (contínua); (os símbolos Δ representa a curva da função analítica, \circ representa a curva aproximada da função e $+$ representa o $\log_{10}(dif)$ entre as duas curvas).

Considerando-se o fato que em problemas físicos mistos, dominados pelos efeitos elípticos e hiperbólicos, podem ocorrer nas regiões de escoamentos hiperbólicos, devido a baixa dissipação viscosa, oscilações espúrias nos cálculos com altas frequências, causados pelos erros numéricos, como explicado anteriormente. Este problema torna-se mais complicado, quando se trata de escoamentos com altos números de Mach que ocorrem choques, alterando bruscamente as propriedades do escoamento. Estas bruscas mudanças nas propriedades do escoamento ocorrem em uma região extremamente pequena, da ordem do caminho livre médio das moléculas. Normalmente, as transições ocorridas nas propriedades entre o pré-choque e o pós-choque podem ocorrer, envolvendo somente dois pontos adjacentes da malha. Também, estas descontinuidades produzem fortes oscilações espúrias devido aos erros numéricos nas zonas de alternâncias bruscas nas propriedades do

escoamento. Estes erros produzem uma instabilidade na simulação numérica do problema, causando divergência na solução. Portanto, para manter um controle de instabilidade na solução numérica do problema realiza-se em alguns momentos dos cálculos uma filtragem numérica, a fim de eliminar estas frequências espúrias presentes.

3.3 Técnicas de Filtragem

Devido ao motivo explicado acima existe uma tendência de uso de filtragem ou alisamento que atenuam os comprimentos de ondas de pequenas amplitudes, característicos dos ruídos, introduzidos nos cálculos devidos aos erros numéricos. Assim, as oscilações de pequenos comprimentos de ondas são suavizadas, tendendo a eliminar os fenômenos não característicos do problema físico. Entretanto, deve-se usar um procedimento de filtragem que não deteriore valores significativos da verdadeira função representativa da propriedade do escoamento.

Na aplicação de métodos espectrais para simulação de problemas em dinâmicas dos fluidos, algumas das funções aplicáveis para processos de filtragem ou alisamento de funções foram utilizados, tais como:

- *Lanczos*:

$$\sigma(\theta) = \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \quad (3.31)$$

- *raised cosine*

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (3.32)$$

- *Sharpined raised cosine:*

$$\sigma(\theta) = \sigma_0^4 (35 - 84\sigma_0 + 70\sigma_0^2 - 20\sigma_0^3) \quad (3.33)$$

onde σ_0 presente na Eq. 3.33 é dado por $\sigma_0 = 1/2(1 + \cos \theta)$.

- *Exponential cut-off:*

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} 1 & |\theta| \leq \theta_c \\ e^{-\alpha(|\theta| - \theta_c)^{ordem}} & \theta_c \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.34)$$

onde α é um parâmetro de precisão de cálculo, θ_c é uma escala de corte, *ordem* é a potência que determina o quão rapidamente decai a curva.

Os comportamentos de cada uma das funções filtros dadas pelas Eqs, 3.31 a 3.34 estão dispostos na Fig. 3.5.

Existem dois caminhos para amenizar as oscilações espúrias presentes nos cálculos. Um primeiro caminho, trata-se em obter um alisamento da função através de uma integração singular, detalhado no *Anexo II.3*, como segue:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x-y) f(y) dy \quad (3.35)$$

onde $S_N f(x)$ representa a função alisada, K_N é uma matriz núcleo, dada por

$$K_N(\xi) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N/2} \sigma_k \cos k\xi \quad (3.36)$$

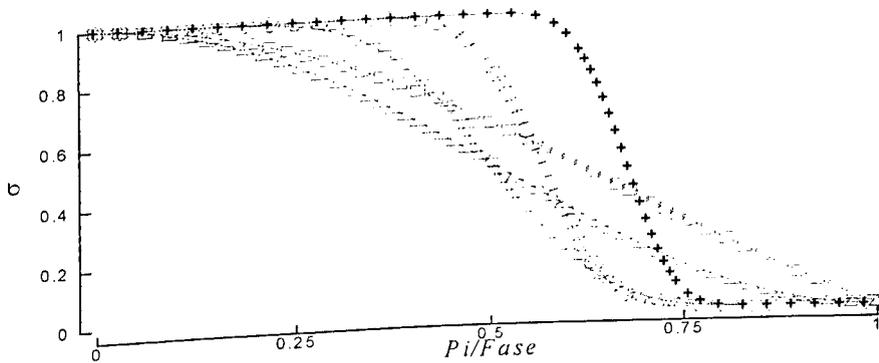


Figura 3.5 Comportamento das curvas das formulas utilizadas nos cálculos de filtragens e alisamentos. \square Lanczos; Δ Raised cosine; ∇ Sharpined raised cosine; \diamond Exponential cut-off (com escala de corte em $\pi/2$); \circ Exponential cut-off (com escala de corte em $\pi/3$). Com Fase = $i\pi/N$.

Um segundo caminho, trata-se em amenizar a presença do fenômeno de Gibbs através da execução de uma filtragem pura. Assim, considerando uma função $f(x)$ qualquer, para se obter a filtragem da mesma, é suficiente aplicar uma das funções de filtragem, dadas pelas Eqs. 3.31 a 3.34, sobre os coeficientes de expansão da função, como segue

$$F_N \hat{f}_k = \hat{f}_k \sigma_k \quad (3.37)$$

onde $F_N \hat{f}_k$ representa a função alisada.

Observando-se a Fig. 3.5, conclui-se que ao executar a função dada pela Eq. 3.36 ocorre

uma gradual redução das amplitudes dos comprimentos de ondas de pequenos valores, tanto os comprimentos de ondas referentes ao problema físico quanto àqueles originados pelos erros numéricos. Assim, para que haja uma redução sistemática dos erros numéricos, torna-se necessário ter um conhecimento prévio da faixa de número de ondas característicos aos erros numéricos embutidos na função. A partir deste dado, pode-se adequar a banda de passagem do filtro para eliminar somente os ruídos. Entretanto, este controle só é possível se utilizar o filtro exponencial, dado pela Eq. 3.34.

Fig. 3.6a mostra a superposição das funções derivada estimada, obtida através de uma série discreta de dados e alisada através da Eq. 3.36 e derivada obtida analiticamente de uma função tangente hiperbólica (que apresenta uma descontinuidade brusca, permitindo, entretanto, obter o seu valor analítico). Fig. 3.6b mostra os resultados da superposição da derivada de uma função senóide (contínua) estimada e alisada, conforme descrito anteriormente sobre a derivada da mesma função obtida analiticamente. Nestes cálculos das derivadas discretas utilizou-se o procedimento da FFT, entretanto, a ordem de erro a ser obtida utilizando a técnica de MxM é semelhante àquela obtida pela FFT. Portanto, não serão apresentados gráficos evidenciando a ordem de erro introduzida pela técnica de MxM. Para os cálculos apresentados nestas figuras, utilizou-se o filtro de Lanczos, dado pela Eq. 3.31. Em particular, observa-se na Fig. 3.6a que há uma redução no valor do pico da derivada da função alisada ou filtrada, com relação ao correspondente valor analítico, o que causa uma alteração significativa do verdadeiro valor da função. Desta forma, para simulação de problemas de dinâmica dos fluidos, esta imprecisão na obtenção da derivada da função pode acarretar erros na evolução da simulação ao longo do tempo, conduzindo a uma instabilidade na solução do problema. Entretanto, quando se trata

de cálculos de derivadas de funções contínuas, o processo de alisamento não afeta o comportamento físico da função (amortecimento de modos flutuantes), conforme mostrado na Fig. 3.6b.

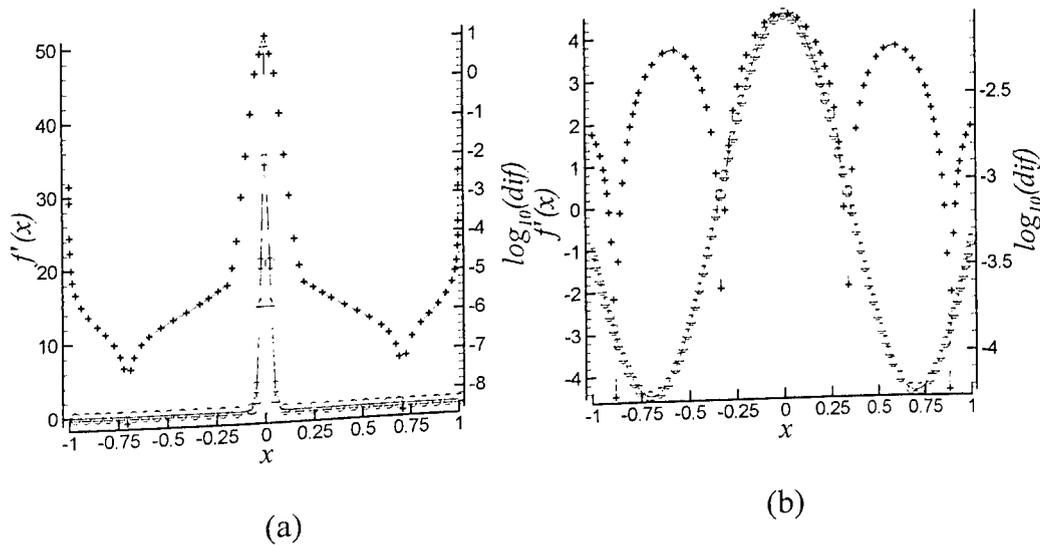


Figura 3.6: Comparação entre derivadas de funções estimadas e alisadas com funções analíticas (filtro exponencial de ordem 4). (a) função com forte descontinuidade (tangente hiperbólica) e (b) função contínua (senóide) (os símbolos: Δ representa a curva da função analítica, \circ representa a curva aproximada da função e $+$ representa o $\log_{10}(dif)$ entre as duas curvas).

3.4 Sensor

No presente trabalho foram utilizadas várias técnicas e sensores para detectar a presença do fenômeno de Gibbs. A princípio foi testado um sensor para o alisamento, usando como critério a positividade da vorticidade; isto é, a filtragem ou alisamento é realizada em todo ponto onde ocorre uma vorticidade significativamente positiva, limitada por um valor previamente fixado de acordo com os testes realizados. Este procedimento de filtragem foi elaborado, considerando-se que, geralmente, a disposição física do escoamento proporciona rotações somente no sentido horário, gerando valores de

vorticidade negativos. Porém, este procedimento foi prejudicado porque o ruído branco superposto ao escoamento (ver seção 2.4), pode aleatoriamente gerar vorticidades positivas. Um outro procedimento realizado como sensor para filtragem constituiu na verificação da mudança do sinal da derivada da função velocidade axial entre três pontos consecutivos da mesma. Esta alternância nos sinais das derivadas entre pontos consecutivos da malha representa uma característica inerente dos erros provenientes do fenômeno de Gibbs. Entretanto, este sensor sempre acusava necessidade de filtragem na região central dos vórtices, devido ao fato das derivadas no centro dos vórtices alternarem os sinais em pontos adjacentes, inviabilizando este procedimento de filtragem. Enfim, o sensor que melhor se adaptou à solução do problema em estudo, baseou-se nos limites máximo e mínimo da variação da energia interna local do escoamento, onde esses limites são ajustáveis de acordo com o problema. Observou-se que os pontos da malha com valores instáveis, geralmente, resultava num acréscimo ou decréscimo mais acentuado da energia interna que as outras variáveis no referido ponto. Este fato, normalmente, ocorre de forma descontínua com relação aos valores dos pontos da malha adjacentes e em regiões onde não havia nenhuma justificativas para acontecer tal fato. Além disso, se acontecesse no escoamento uma oscilação mais expressiva de alguma das variáveis do escoamento, imediatamente tal oscilação era refletida na energia interna. Conseqüentemente, se esta alteração na energia interna ultrapassa um certo limite máximo ou mínimo, um alisamento local é realizado sobre todas as variáveis primárias do problema. Ao evoluir a solução no tempo e se persistir o problema nos próximos passos de tempo, repete-se novamente o processo de filtragem e assim subseqüentemente.

4 Resultados e Análises

4.1 Introdução

Para obter os resultados deste estudo usou-se o método de Colocação Espectral de Chebyshev, conforme descrito no Capítulo 3. Como caracterizado, a maneira conveniente para assegurar uma solução estacionária independente do passo de tempo é separar completamente as discretizações do tempo e do espaço (Jameson, Schimidit e Turkel., 1981). Neste esquema, inicialmente aplica-se uma semi-discretização sobre as equações governantes (as quais são dadas pelas Eqs. 2.33 a 2.36), na qual somente as derivadas espaciais são aproximadas. Resultando em equações diferenciais ordinárias que são então resolvidas por um procedimento multi-estágio de passo de tempo. Neste trabalho foi aplicado o método de Runge-Kutta de ordem s , sugerido por Jameson, Schimidt e Turkel (1981).

A malha do domínio computacional foi obtida, determinando-se o número de pontos, N_x e N_y , de colocação para a formulação de pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto, nas direções x e y , respectivamente. Assumindo-se que as variáveis dependentes são conhecidas em cada ponto da condição inicial, um sistema de equações diferenciais ordinárias é obtido separadamente para cada ponto. O fluxo E e F nas Eqs. 2.51 e 2.52 envolvem ambos os termos convectivos e difusivos nas direções x e y , respectivamente. Estes fluxos são aproximados para cada ponto. As estimativas numéricas dos fluxos E e F , portanto, necessitam de uma aproximação da primeira derivada parcial da velocidade e temperatura para avaliar as componentes do tensor tensão e fluxo de calor. Usou-se a Transformada Rápida de Chebyshev para calcular estas derivadas. Este código é uma

maneira rápida e eficiente de obter as derivadas de primeira ordem, como caracterizado no Capítulo III. Da mesma forma, usou-se este código para calcular as derivadas dos fluxos E e F .

As simulações obtidas com auxílio do termo molecular dissipativo são chamadas de simulações numéricas diretas. Nas simulações numéricas diretas, a escala de corte deve-se igualar à escala dissipativa bidimensional. Neste caso precisa-se limitar os cálculos a um número de Reynolds molecular baixo. Portanto, para simular o campo das grandes escalas em altos números de Reynolds, sem usar uma parametrização para escalas submalha, faz-se necessário usar um filtro para estabilizar o código numérico. As filtragens ou alisamentos visa eliminar os pequenos comprimentos de onda, caracterizando os ruídos introduzidos por erros numéricos. Porém, quando o procedimento de filtragem é aplicado, as pequenas escalas do problema físico também podem ser alisadas. Neste trabalho usou-se um filtro de escala de corte exponencial de quarta ordem (Cannuto *et al.*, 1989) que permite minimizar este fato. Da mesma forma, faz-se necessário usar um sensor de filtragem para selecionar o momento da filtragem e os pontos da malha que devem ser alisados. O melhor sensor que se encontrou para o estudo, foi baseado na fixação de um intervalo de variação, no qual estabelece a variação máxima e mínima para todas as variáveis. Geralmente, instabilidade nas variáveis são causadas por erros numéricos presentes em seus valores, significativamente diferentes quando comparados com valores das mesmas variáveis nos pontos vizinhos. Portanto, se estas discontinuidades extrapolam os limites preestabelecidos pelo sensor, o filtro é aplicado sobre as variáveis em questão, em todo domínio.

O domínio ideal para simular camadas de mistura devem conter um número inteiro de vórtices fundamentais (a periodicidade dimensional do comprimento de onda fundamental é $\lambda_a = 14.13\delta_0$, como sugerido na literatura), satisfazendo a seguinte relação

$L_i^* = m_i \lambda_a$, com $i=x$ ou y (Comte et al. 1989). Este estabelecimento é pertinente porque fixa-se, com antecedência, o comportamento da estrutura do escoamento. Fixando-se $m_y = (1/2)m_x$, é imposta a periodicidade na direção x , sem bloquear a difusão lateral da camada de mistura antes desta atingir um longo período de crescimento. Executou-se a simulação do problema, na maioria dos casos, usando-se uma malha de média resolução (128x128), para uma camada de mistura completamente turbulenta. É instrutivo relacionar-se a evolução destes escoamentos com certos tipos de instabilidades, como será discutido nas seções subsequentes.

4.2 Resultados Qualitativos

4.2.1 Camada de Mistura Temporal

Os resultados apresentados nas Figs. 4.1 a 4.3 foram simulados em um domínio computacional suficientemente grande de forma a permitir quatro emparelhamentos completos ($m_x=8$ e $m_y=4$). O campo de vorticidade transversal apresentado na Fig. 4.1, o campo de densidade transversal mostrado na Fig. 4.2 e as linhas de corrente mostradas na Fig. 4.3, ilustram a clara evidência de estruturas de grandes escalas. Nestas figuras estão apresentados a evolução no tempo da vorticidade, da densidade e as características das linhas de corrente de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal, com número de Reynolds $3,5 \times 10^5$, com uma taxa de velocidade, $\eta_v = U/\bar{U} = \infty$ e uma taxa de temperatura, $\eta_T = T/\bar{T} = 0,285$. Uma comparação das Figuras da vorticidade, da densidade e das linhas de corrente em cada tomada de tempo indicam uma forte coerência dos vórtices, quase regularmente espaçados.

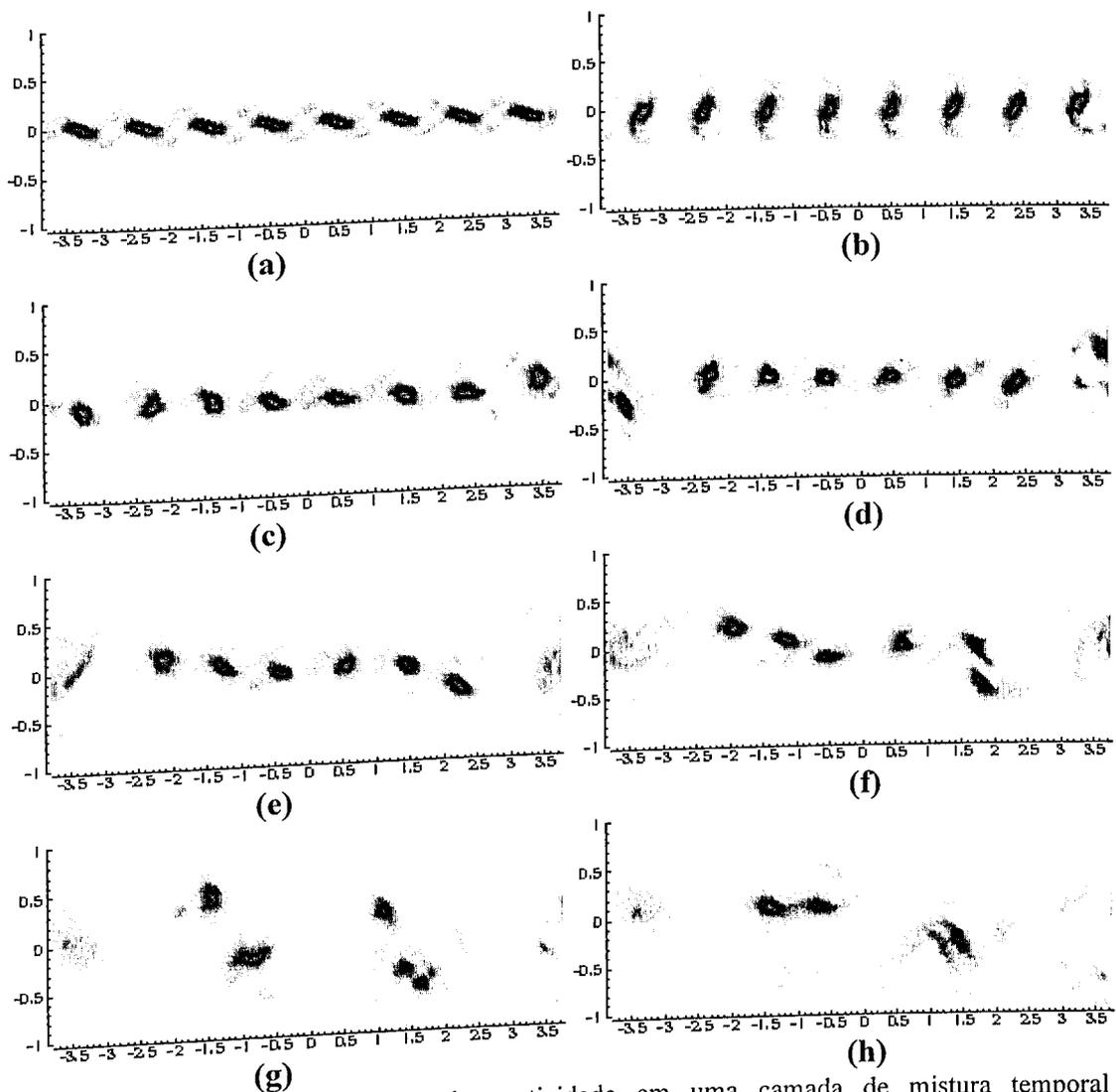


Figura 4.1: Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\omega = 3,5 \times 10^5$, $M_\omega = 0,27$, $Pr_\omega = 0,72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^* = 0,002s$; (b) $t^* = 0,008$ (c) $t^* = 0,015s$; (d) $t^* = 0,023s$; (e) $t^* = 0,030s$; (f) $t^* = 0,038s$; (g) $t^* = 0,049s$ e (h) $t^* = 0,064s$.

As Figs. 4.1 a 4.3 mostram a evolução temporal da vorticidade, da densidade e das linhas de corrente, respectivamente, em uma camada de mistura desenvolvendo temporalmente, onde sobre a condição inicial do mesmo foi imposta uma perturbação determinística com o número de onda mais amplificado k_a , conforme comentado na seção 2.3. Esta simulação foi executada sob as seguintes condições: na parte superior contém um fluido (no caso o ar) deslocando com uma velocidade de $U_1 = 100 \text{ m/s}$ e na parte inferior um fluido (também ar) deslocando com uma velocidade de $U_2 = -100 \text{ m/s}$, gerando um

perfil inflexional. Também foi imposto neste escoamento um efeito de estratificação, estando o fluido da parte superior a uma temperatura de $300K$ e o fluido da parte inferior em uma temperatura de $400K$.

Foi observado neste resultados que ao superpor a perturbação determinística ao escoamento, força-se o escoamento, no estado inicial, a assumir a condição dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz, como evidenciado na figura 4.1.a, onde observa-se a formação de oito vórtices conforme pré-determinado na condição inicial. Portanto, desta forma o escoamento inicia seu desenvolvimento a partir do modo fundamental, de uma maneira forçada e não completamente acoplado.

Nas Figs 4.1b, 4.2b e 4.3b observa-se claramente a formação da camada de mistura, onde os vórtices iniciam os processos de rotação e de crescimento da região de mistura. Na seqüência de quadros dispostos nas Figs 4.1 a 4.2, não se observa de forma evidente um processo natural de penetração de fluidos nas duas camadas, induzidos pelo evolução de estruturas iniciadas por pequenas instabilidades, conforme descrito em estudos experimentais existente na literatura (por exemplo: Brown e Roshko, 1974). De forma diferente, as simulações de camadas de mistura desenvolvendo temporalmente, realizadas neste estudo, sem a introdução das perturbações determinísticas, os quais são apresentadas mais adiante, mostrou resultados fisicamente mais consistentes. Acredita-se que este fato (no caso de simulação introduzindo uma perturbação determinística) acontece devido a perturbação determinística forçar o escoamento para seu modo fundamental, sem entretanto, provocar um acoplamento na região de mistura. Devido a este desacoplamento, o primeiro emparelhamento inicia-se em $t^* \approx 0,023s$, envolvendo os vórtices dos extremos do domínio, conforme destacado nas Figs 4.1c a 4.1e e de forma mais evidente nas Figs. 4.3c a 4.3e. O vórtice da extremidade esquerda inicia um processo de descida, enquanto

que o vórtice próximo da extremidade direita começa a subir, iniciando um processo de coalescência. Este mecanismo, envolvendo estes vórtices extremos, perdura até $t^* \approx 0,038s$ (Fig. 4.1f e 4.3f), quando o mesmo se completa. Em um processo defasado com relação a este primeiro emparelhamento, os dois vórtices posicionados a direita do domínio, entre os seis vórtices fundamentais restantes, inicia-se um segundo processo de emparelhamento, em $t^* \approx 0,030s$ (Fig. 4.1e e 4.3e). Imediatamente posterior, em $t^* \approx 0,038s$ (Fig. 4.1f), os dois vórtices fundamentais centrais entre os quatro restantes, inicia-se um terceiro mecanismo de emparelhamento. Finalmente, os dois vórtices fundamentais que permanecem ainda sem executar o emparelhamento, inicia-se seus processos com os vórtices resultantes da coalescência do segundo e terceiro emparelhamento, imediatamente após estes se concluírem, conforme observado nas Fig. 4.1g e 4.3g ($t^* \approx 0,049s$). Os vórtices resultantes de emparelhamentos, mostrados na Fig. 4.1h e 4.3h ($t^* \approx 0,064s$), apresentam comprimentos de ondas diferentes, onde os dois centrais são sub-harmônicos, cujo comprimento de onda é de $3\lambda_u$ e o vórtice situado mais próximo da extremidade esquerda é um sub-harmônico, cujo comprimento de onda é $2\lambda_u$ (subtende-se que o vórtice situado na extremidade esquerda do domínio tem a sua parte complementar na extremidade direita do domínio, devido o problema ser periódico). Nas simulações de camadas de mistura desenvolvendo-se temporalmente, neste estudo, o processo de emparelhamento e crescimento realiza-se até que um único vórtice resultante seja formado, o qual continua crescendo até sofrer interferências dos limites do domínio, pois o escoamento médio injeta continuamente energia nos vórtices.

Fig. 4.2 mostra a evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal, para as mesmas condições de cálculo que as Figs. 4.1 e 4.3. Observa-se nesta

figura que o processo de coalescência torna-se evidente somente após $t^* \approx 0,049s$. Acredita-se que o acoplamento entre os campos começa a se estabelecer somente a partir deste tempo.

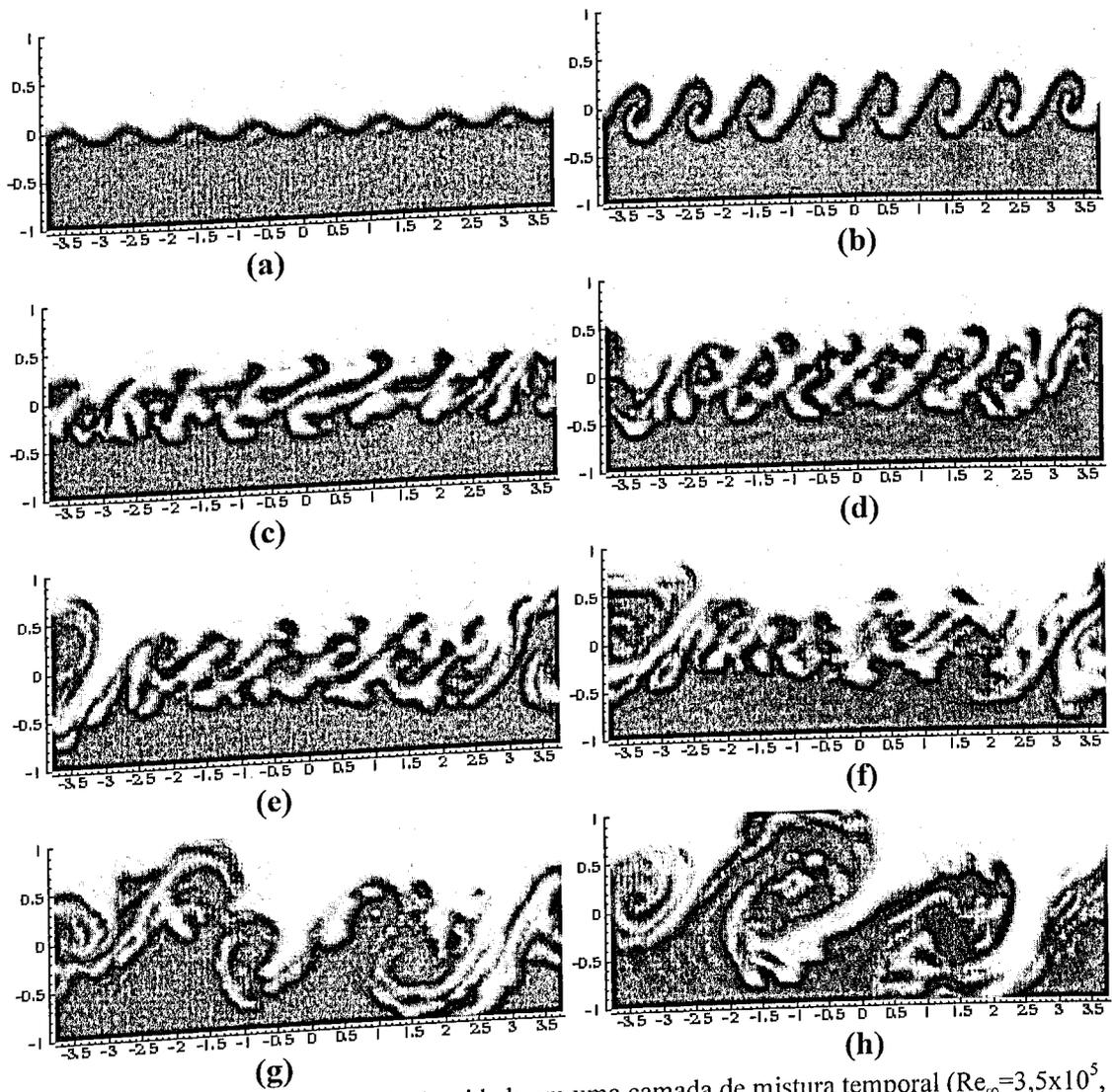


Figura 4.2: Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^* = 0,002s$; (b) $t^* = 0,008$ (c) $t^* = 0,015s$; (d) $t^* = 0,023s$; (e) $t^* = 0,030s$; (f) $t^* = 0,038s$; (g) $t^* = 0,049s$ e (h) $t^* = 0,064s$.

Como a perturbação determinística é imposta somente sobre o campo de velocidade, esta conduz de forma mais rápida os processos de rotação e coalescência dos vórtices no campo de velocidade do que para os outros campos (diferentes do campo de velocidade), os quais executam, com um atraso, os processos de evolução, devido ao

desacoplamento. Por este motivo decidiu-se deixar os vórtices formarem naturalmente, introduzindo somente um ruído branco na condição inicial, como será observado posteriormente. Entretanto, para estes casos a intensidade do ruído branco, assim como a sua distribuição afeta o mecanismo de evolução das estruturas.

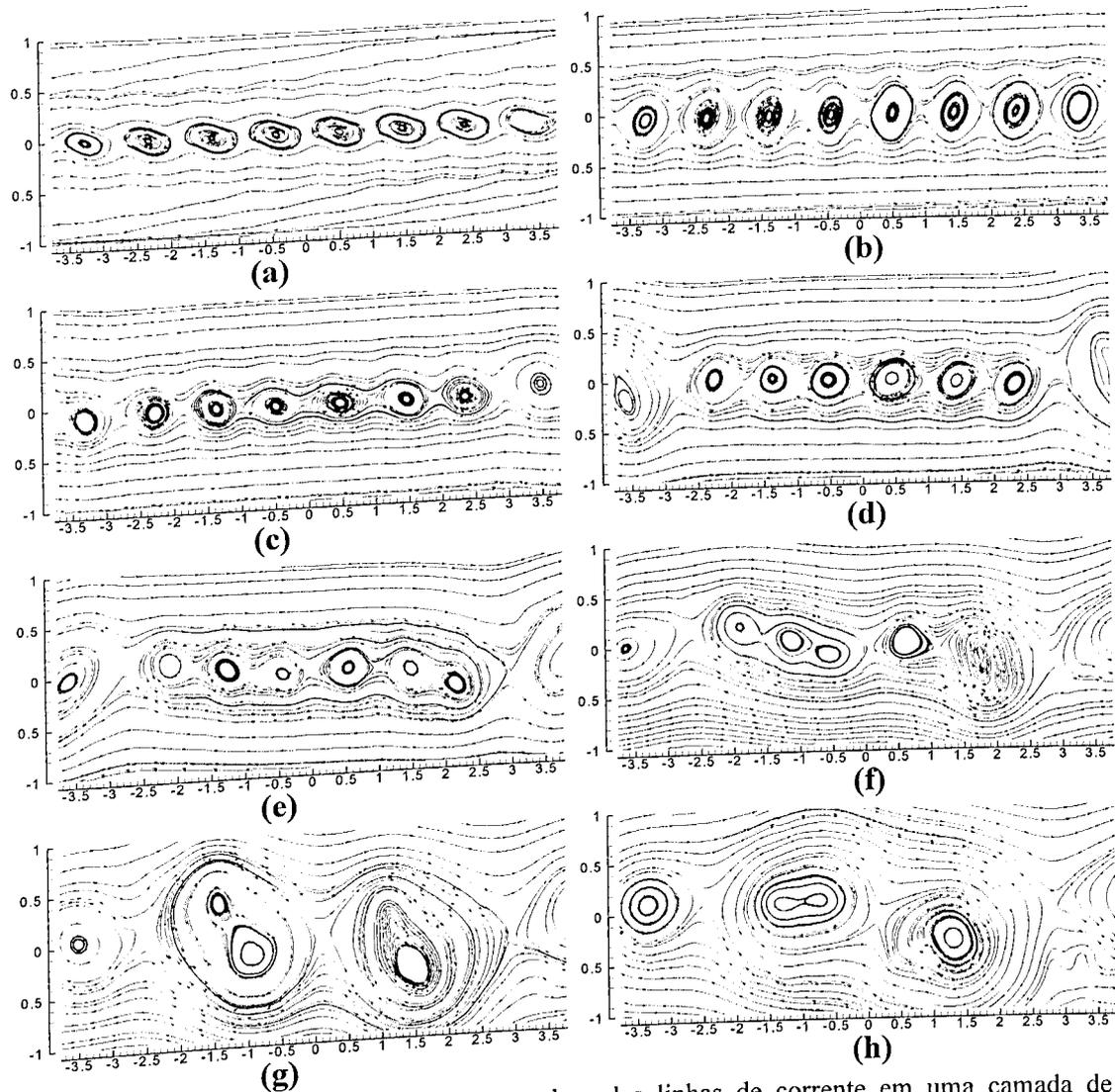


Figura 4.3: Evolução dos vórtices apresentado pelas linhas de corrente em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,002s$; (b) $t^*=0,008$ (c) $t^*=0,015s$; (d) $t^*=0,023s$; (e) $t^*=0,030s$; (f) $t^*=0,038s$; (g) $t^*=0,049s$ e (h) $t^*=0,064s$.

As Figs. 4.4 a 4.6 mostram a distribuição dos campos de velocidades e densidade em uma camada de mistura temporal, em $t^* \approx 0,008s$ e $t^* \approx 0,049s$, para as mesmas

condições de cálculos referentes às Figs. 4.1 a 4.3. Observa-se nas Figs. 4.4 a 4.6 que o processo de coalescência dos vórtices ocorre de forma irregular. Isto é evidente se observar que as estruturas dos campos nos dois tempos distintos são diferentes. Nas Figs. 4.4a e 4.5a observa-se a presença de vórtices regulares, que correspondem tipicamente aos turbilhões de Kelvin-Helmholtz, como pode ser visto nas Figs 4.1.b, 4.2.b e 4.3b. Entretanto, observa-se nas Figs. 4.4b e 4.5b, correspondentes a um tempo relativamente grandes, onde alguns processos de coalescência já ocorreram, as características dos grandes vórtices são bem mais irregulares. Estas irregularidades das grandes estruturas resultantes do processo de coalescência são causadas pelos processos de emparelhamentos defasados, desenvolvido por cada par de turbilhão (Fig. 4.3.b), pois, a coalescência acontece como uma consequência dos processos de emparelhamento e de rotação.

Em particular, observa-se nas Figs. 4.4b e 4.5b a presença de dois vórtices emparelhados, representados por dois picos adjacentes nas velocidades v e u , na direção y , respectivamente. Estas figuras mostram que tanto a velocidade v quanto a velocidade u sofrem um aumento em módulo no interior dos vórtices, causando um aceleração do fluido que arrastado pelo escoamento médio.

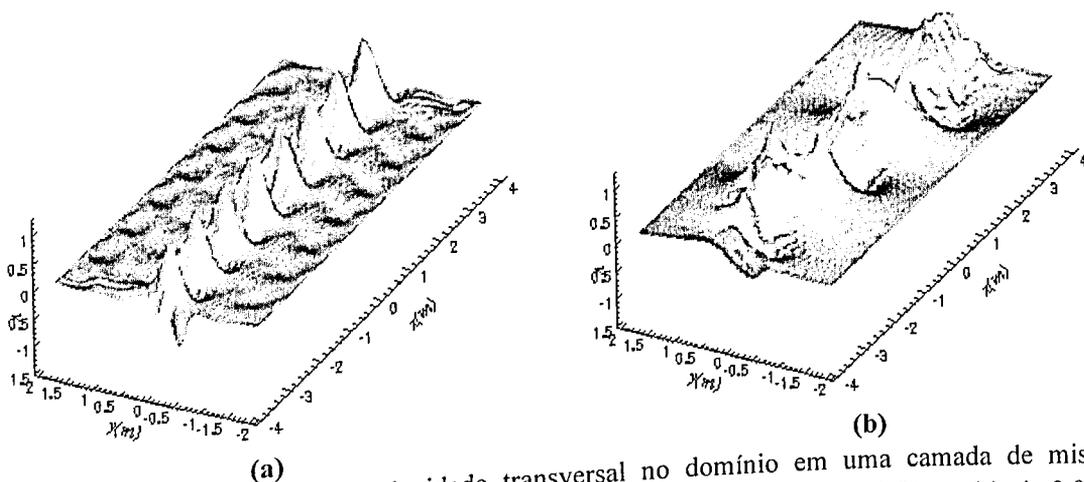


Figura 4.4: Distribuição da velocidade transversal no domínio em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,008s$; (b) $t^*=0,049s$.

Supõe-se que as evoluções de emparelhamentos irregulares ocorrem, essencialmente, devido às interações entre o campo de velocidade e o campo de densidade que causa a estratificação do escoamento. Observa-se claramente nas Figs. 4.5a e 4.5b que as estruturas do campo de densidade apresentam sensivelmente uma estrutura com características bem mais turbulentas.

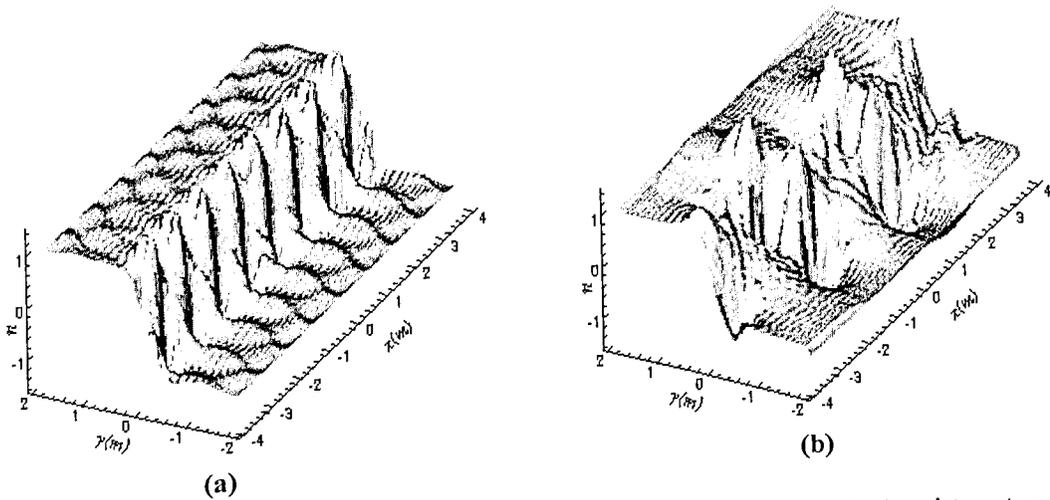


Figura 4.5: Distribuição da velocidade axial no domínio em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,008s$; (b) $t^*=0,049s$.

O uso de um escoamento estratificado no estudo da camada de mistura possibilita fazer algumas observações sobre o processo de mistura do fluido que não são possíveis de ser reveladas quando no escoamento não existe uma mudança de densidade. É conhecido que o fluido de um lado da camada de mistura faz incursões profundas no outro lado. Isso pode ser confirmado no estudo de Brown e Roshko (1974), no qual a região de mistura mostra flutuações de densidade na mesma ordem da diferença de densidade. Este fato é

relacionado ao processo de mistura turbulenta causada pelo fenômeno de arrastamento que representa a taxa de ingestão de fluido não-turbulento na região turbulenta. O processo de arrastamento está associado com a propagação da interface turbulenta no fluido não-turbulento. Este processo interfere primariamente na formação dos turbilhões coerentes de grandes escalas, afetando o processo de emparelhamento através de interações não-lineares. Esta descrição é tipicamente idêntica aquela mostrada nas Fig. 4.4b, 4.5b e 4.6b.

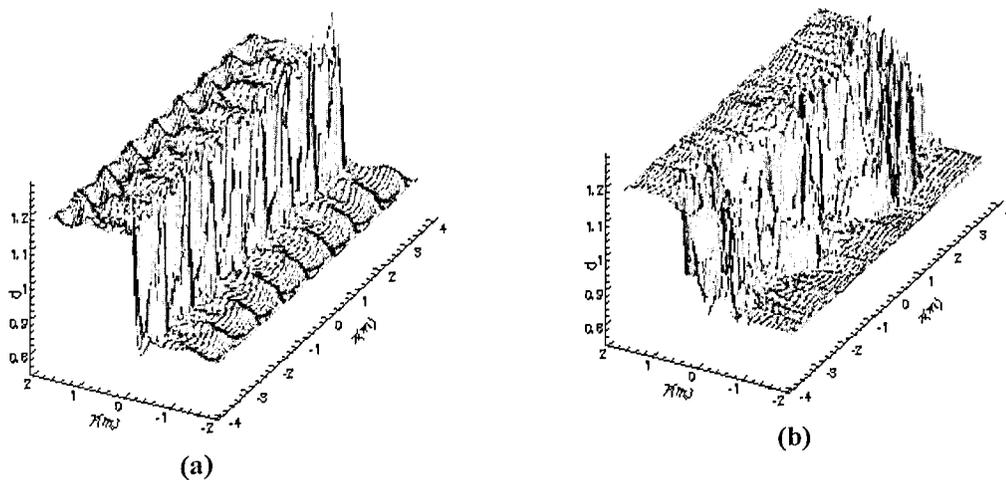


Figura 4.6: Distribuição da densidade no domínio em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,0075s$; (b) $t^*=0,049s$.

As Figs. 4.7 e 4.8 mostram as evoluções dos campos de vorticidade e da densidade em uma camada de mistura temporal, introduzindo sobre os perfis de velocidades uma perturbação determinística e um ruído branco, com intensidade diferente para as amplitude dos modos contidos no ruído; isto com relação ao caso correspondente às Figs. 4.1 a 4.6. Além disso, como observou-se no caso referente às Figs. 4.1 a 4.6 que para o acoplamento dos campos é transcorrido um tempo de simulação consideravelmente grande, realizou-se

um processo iterativo para o acoplamento dos campos de pressão, densidade, temperatura e de velocidade assumidos na condição inicial, conforme descrito no *Anexo I*.

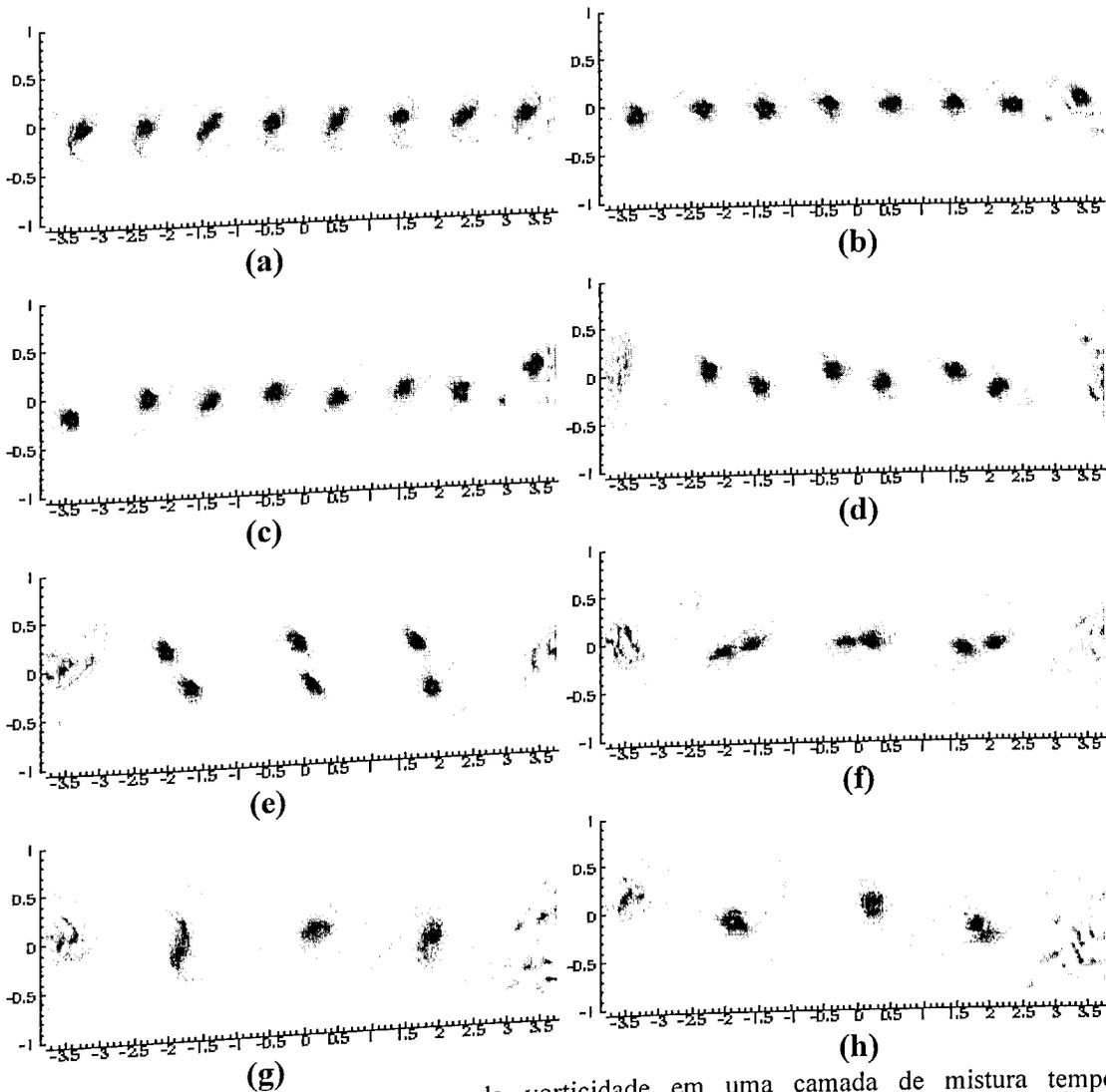


Figura 4.7 Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,008s$; (b) $t^*=0,015s$; (c) $t^*=0,023s$; (d) $t^*=0,030s$; (e) $t^*=0,037s$; (f) $t^*=0,045s$; (g) $t^*=0,053s$ e (h) $t^*=0,058s$.

O fato adicional mostrado nas Figs. 4.7 e 4.8 com relação às Figs. 4.1 a 4.6 é que os processos de rotação, de emparelhamento e de coalescência desenvolvidos pelos vórtices transcorrem de maneira completamente diferente. Em particular, observa-se que ocorre um primeiro emparelhamento dos dois vórtices extremos, em seguida ocorre um emparelhamento uniforme em cada dois vórtices adjacentes, entre os seis restantes,

conforme mostrado nas Figs. 4.7c a 4.7f. Posteriormente, os quatros vórtices resultantes dos emparelhamentos e coalescência, inicia entre os vórtices adjacentes dois pares de emparelhamento e rotação, conforme mostram as Figs. 4.7g e 4.7h, de forma completamente regular; isto é, sem defasagem entre os processos de emparelhamento. Esta característica regular entre os processos de emparelhamento e coalescência entre os pares de vórtices, obviamente, acontece devido ao fato de estabelecer-se um pré-acoplamento dos campos estabelecidos nas condições iniciais, conforme descrito acima. Similares observações descritas, com relação à Fig. 4.7, podem ser obtidas através da Fig. 4.8 referente ao campo de densidade.

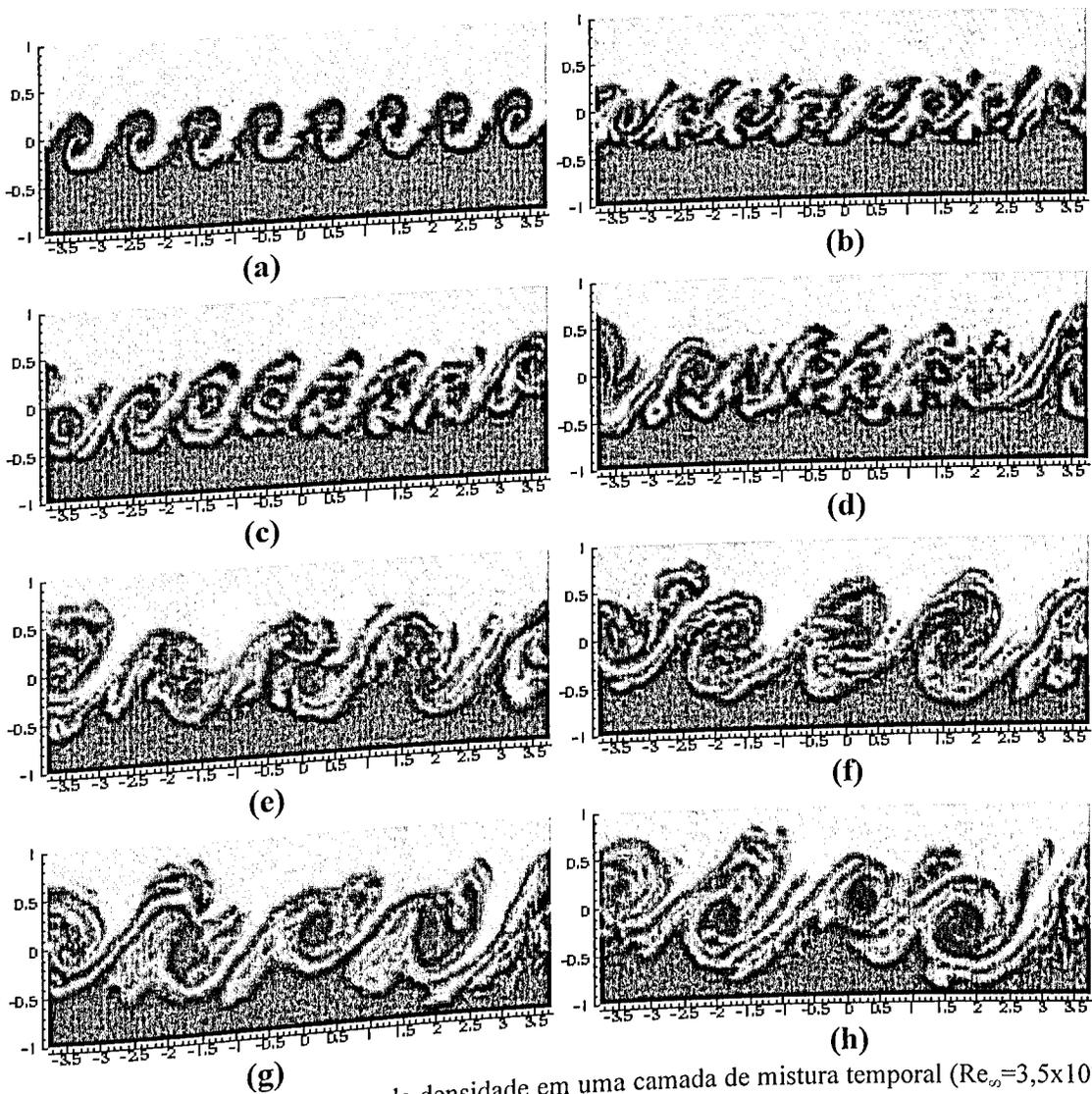


Figura 4.8 Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^* = 0,008s$; (b) $t^* = 0,015s$; (c) $t^* = 0,023s$; (d) $t^* = 0,030s$; (e) $t^* = 0,037s$; (f) $t^* = 0,045s$; (g) $t^* = 0,053s$ e (h) $t^* = 0,058s$.

Os resultados apresentados nas Figs. 4.9, 4.10 e 4.11 foram simulados em um domínio computacional e condições físicas semelhantes ao caso anterior, correspondentes às Figs. 4.1 a 4.6, entretanto, sem a imposição das perturbações determinísticas e sem realizar um prévio acoplamento dos campos, conforme descrito no Anexo I.

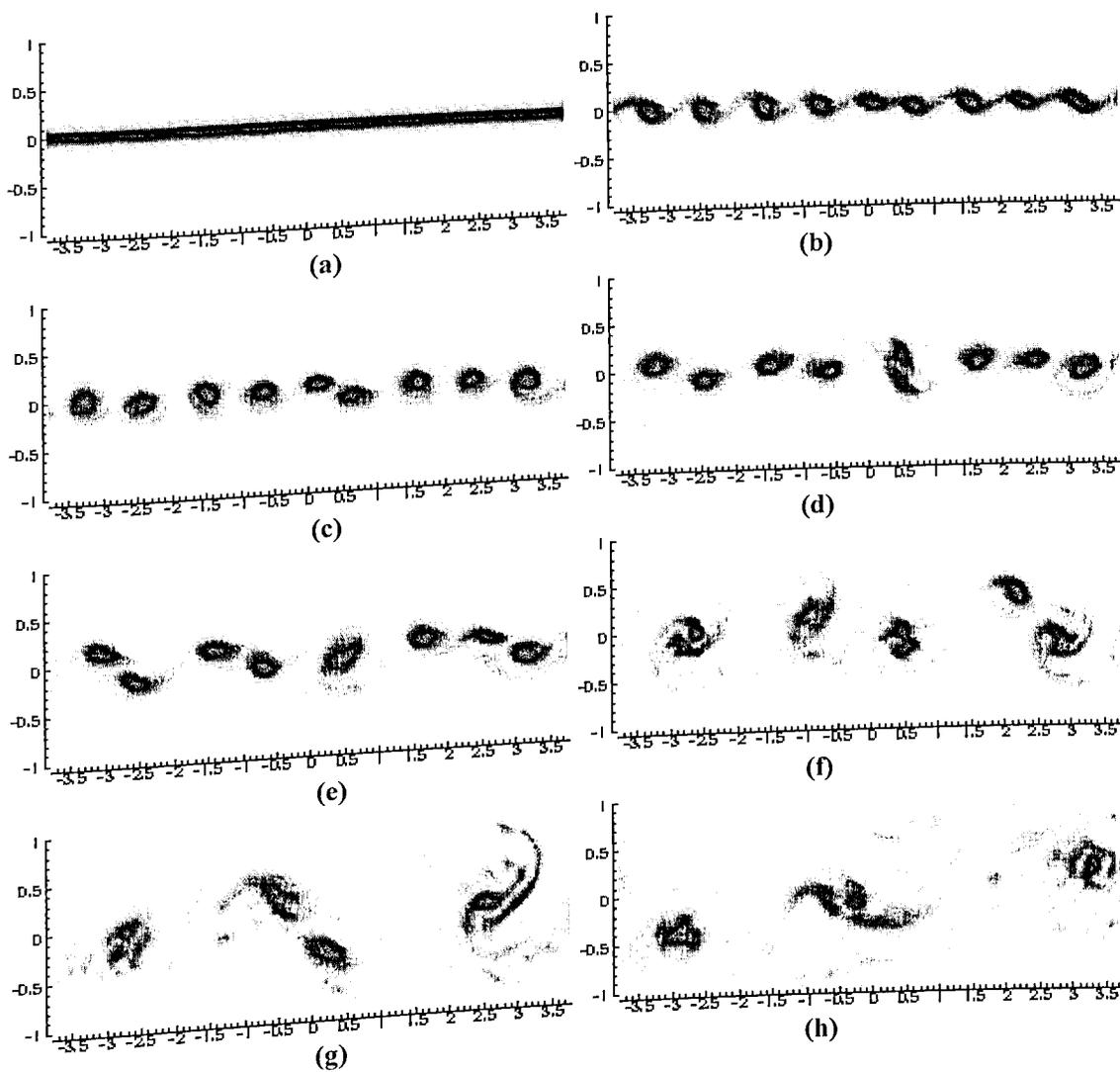


Figura 4.9: Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,030s$; (b) $t^*=0,043s$; (c) $t^*=0,049s$; (d) $t^*=0,055s$; (e) $t^*=0,059s$; (f) $t^*=0,070s$; (g) $t^*=0,081s$ e (h) $t^*=0,103s$.

Fig. 4.9 mostra que o campo de vorticidade é caracterizado por uma zona rotacional de espessura δ_i (onde δ_i é definido pela Eq. 2.72). Também observa-se que a vorticidade

permanece com um sinal negativo constante. Fatos similares são observados sobre os casos anteriormente descritos. O ruído branco contém uma larga banda de modos, os quais são injetados sobre as condições iniciais, que contém o harmônico que corresponde ao modo fundamental que causa a instabilidade e o crescimento da camada de mistura. Assim, a zona inicialmente delimitada pelo perfil hiperbólico para a camada de mistura (igual a $2\delta_0$ ou δ_i) começa a oscilar com um comprimento de onda correspondente ao modo mais amplificado do ruído branco, causando um crescimento da camada (Fig. 4.9b). Quando a amplitude do modo mais amplificado é suficientemente alta, as interações não lineares começam a apresentar uma significativa influência. Este fato corresponde a situação onde o fluido de velocidade U_1 penetra na camada do fluido com velocidade U_2 , gerando esteiras em forma de redemoinhos, dando origem aos vórtices fundamentais. De forma recíproca, a camada de fluido com velocidade U_2 penetra na camada com velocidade U_1 . Fatos semelhantes são descritos por Comte et al. (1989). Portanto, uma coluna de turbilhões de Kelvin-Helmholtz forma-se em $t^* \approx 0,043s$, como mostrado nas Figs. 4.9b, 4.10b e 4.11b. Este comportamento da evolução da estrutura da camada de mistura é completamente similar aos casos descritos anteriormente, onde foi introduzida uma perturbação determinística. Entretanto, nos casos anteriores a formação dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz ocorre em um tempo consideravelmente menor; isto é, $t^* \approx 0,008s$. Isto acontece, evidentemente, devido as perturbações determinísticas apresentarem amplitudes significativamente maiores e por serem introduzidas já com modos fundamentais. Entretanto, no caso referentes às Figs. 4.9 e 4.10, onde a perturbação determinística não é introduzida, um tempo significativo é transcorrido para que haja a evolução das perturbações com os modos fundamentais, como explicado, induzidos por pequenos modos

presentes no ruído branco. A distancia entre os centros dos vórtices é aproximadamente igual ao comprimento de onda fundamental, λ_u , assim a formação de turbilhões com maiores comprimentos de onda só podem resultar da penetração e rotação de uma camada de fluido sobre a outra, externamente à zona rotacional de espessura δ_i . Deste modo, nota-se que as estruturas coerentes resultam do processo de emparelhamento e rotação de vórtices, tendo seu diâmetro aproximadamente igual a $2\delta_i$.

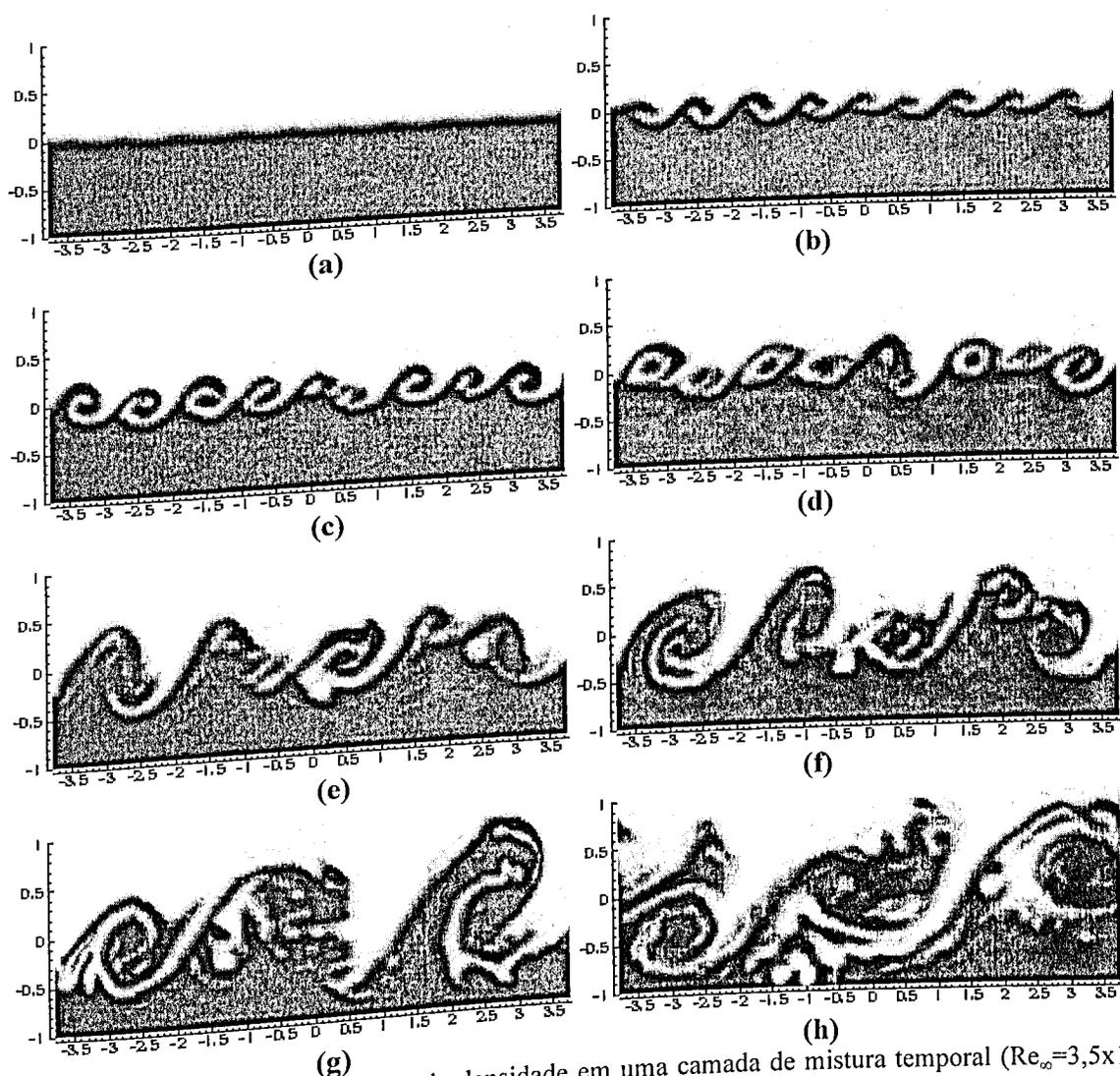


Figura 4.10: Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,030$ s.; (b) $t^*=0,043$ s.; (c) $t^*=0,049$ s.; (d) $t^*=0,055$ s.; (e) $t^*=0,059$ s.; (f) $t^*=0,070$ s.; (g) $t^*=0,081$ s e (h) $t^*=0,103$ s.

No caso em análise, Figs 4.9, 4.10 e 4.11, ocorreu a formação de nove vórtices, sendo que dois deles de diâmetros menores, caracterizando uma amplificação de um vórtice fundamental ligeiramente diferente do que foi preestabelecido (o comprimento de onda fixado foi $\lambda_a = 14,13\delta_0$, onde nestes cálculos $\delta_0 = 0,06667m$, $\delta_0 = \frac{1}{2}\delta_i$). Como pode ser observado na Fig. 4.9, estes vórtices menores são os primeiros a emparelharem e girar, parecendo um mecanismo que tende reduzir o montante de vórtices a um número par, para tornar-se quatro estruturas de comprimento de onda $2\lambda_a$. Os sete vórtices restantes realizam os emparelhamentos atrasados. Quatro deles inicializam seu curso de emparelhamento, formando dois pares e os outros três emparelham juntos (Fig. 4.9c a Fig. 4.9e, ou melhor nas Figs. 4.10c a 4.10e).

Conforme comentado acima, dois daqueles três vórtices que inicializaram seu curso de emparelhamento, desenvolvem mais rápido o processo rotacional e de coalescência do que o terceiro no mesmo curso, resultando na Fig. 4.9f. O vórtice resultante continua o curso rotacional e de coalescência com o terceiro. Essa ação ocorre antes de que os três outros pares de vórtices, em processo de emparelhamento atrasado, conclua seus cursos rotacionais e de coalescência. Portanto, em cada momento ocorre um curso diferente de evolução do emparelhamento para cada par.

Devido às diferenças no processo de evolução do emparelhamento para cada par de vórtices, os comprimentos de onda e espaço entre vórtices não são completamente uniformes. Este mecanismo continua até que o número de vórtices reduza a um. Diferente do encontrado por Comte et al. (1989), no processo final, o vórtice resultante continua crescendo até que os limites do domínio iniba sua evolução. Este fato é consistente com a teoria da camada de mistura desenvolvendo temporalmente, porque o crescimento temporal de um vórtice representa o comportamento de uma camada de mistura crescendo

especialmente, em um posição dada por $x = \partial\delta_i/\partial t^*t$. A conclusão apresentada acima pode ser observada também nas Figs. 4.10 e 4.11, para a evolução do campo de densidade e para as linhas de corrente. Observa-se nas Figs. 4.9, 4.10 e 4.11 uma notável correlação entre os vórtices e os núcleos térmicos.

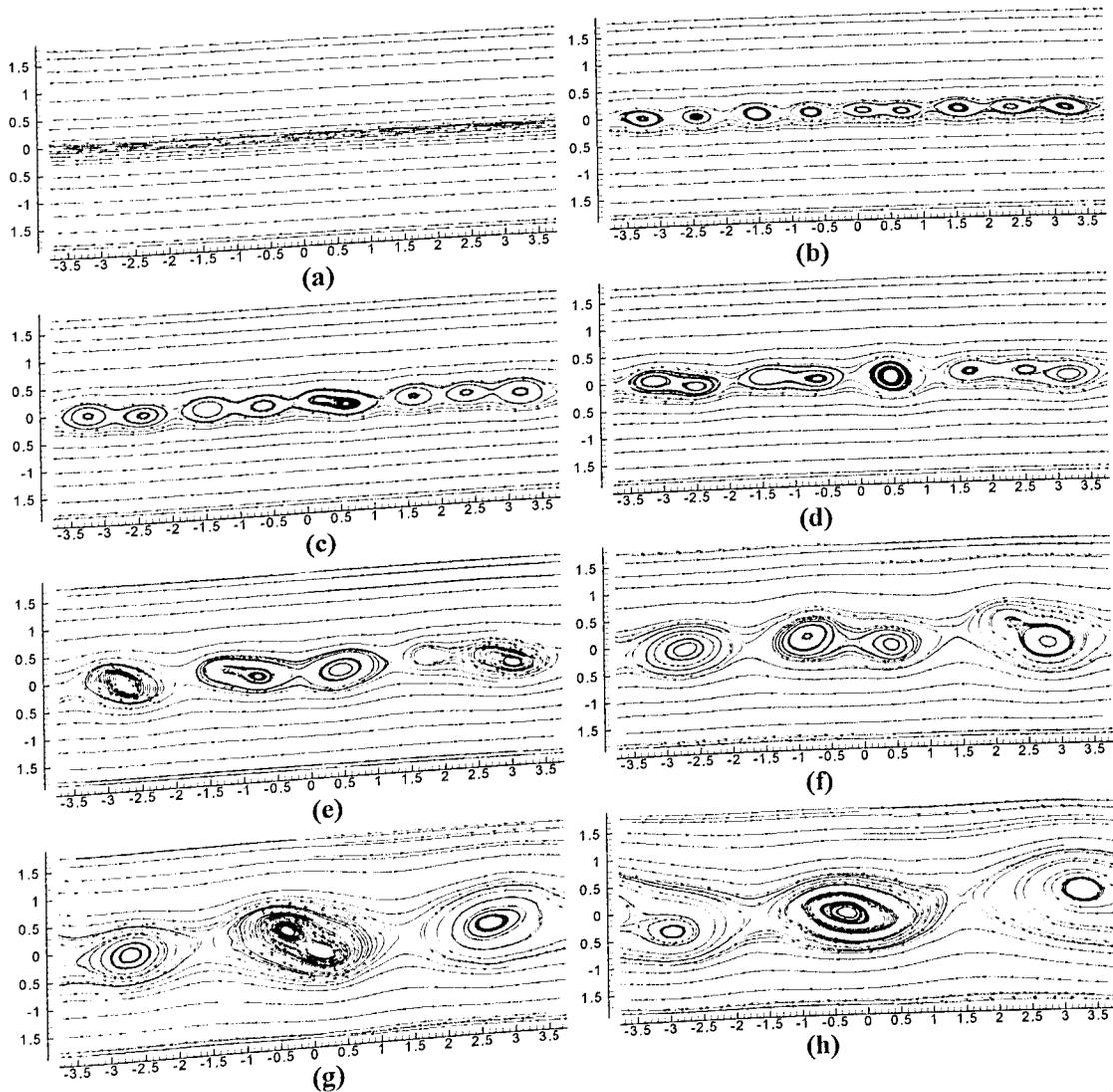


Figura 4.11: Evolução dos vórtices apresentado pelas linhas de corrente em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,030s$.; (b) $t^*=0,043s$.; (c) $t^*=0,049s$.; (d) $t^*=0,055s$.; (e) $t^*=0,059s$.; (f) $t^*=0,070s$.; (g) $t^*=0,081s$ e (h) $t^*=0,103s$.

As Figs. 4.12 a 4.14 mostram, em relevo, os campos de velocidade transversal, velocidade axial e densidade para uma camada de mistura desenvolvendo temporalmente,

para as mesmas condições da simulação numérica das Figs 4.9 a 4.11, em dois tempos diferentes: $t^* \approx 0,043s$ e $t^* \approx 0,075s$. Estas figuras ilustram, como descrito anteriormente, o processo de coalescência dos vórtices, o qual ocorre de forma irregular. Em particular, observa-se nas Figs 4.12b e 4.13b a presença de dois vórtices emparelhando, representados por dois picos adjacentes nas velocidades v e u , na direção y , respectivamente, da mesma forma que foi evidenciado em figuras similares mostradas anteriormente.

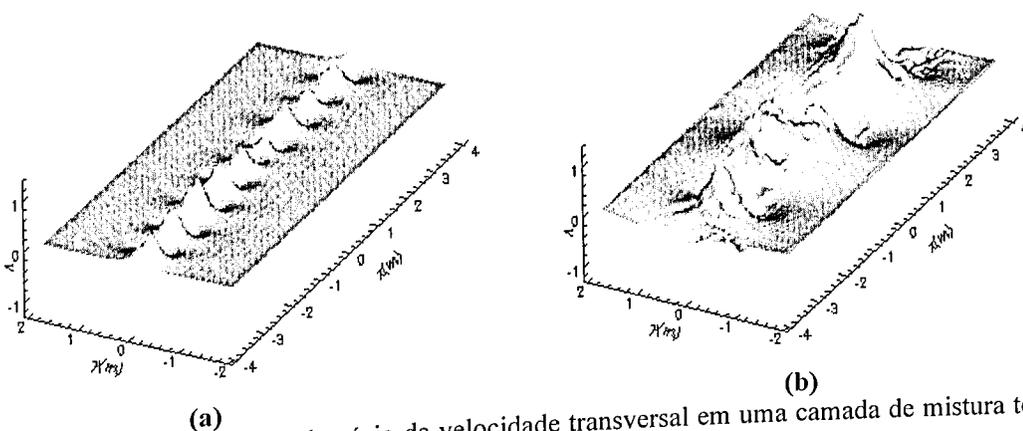


Figura 4.12: Evolução no domínio da velocidade transversal em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,043s$.; (b) $t^*=0,075s$.

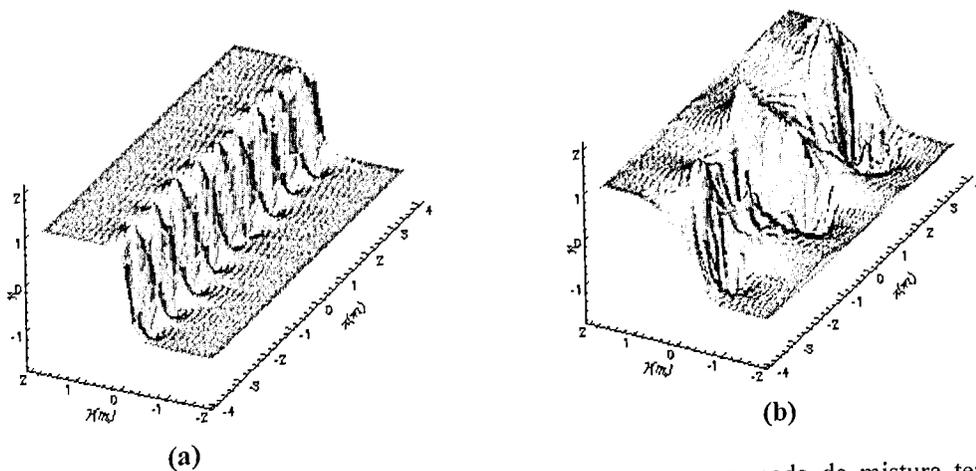


Figura 4.13: Evolução no domínio da velocidade axial em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,043s$.; (b) $t^*=0,075s$.

Também, observa-se na Fig. 4.14 que o campo de densidade apresenta um efeito bem mais turbulento que os outros campos, da mesma forma que para os casos mostrados anteriormente. As justificativas são as mesmas, como descrito anteriormente.

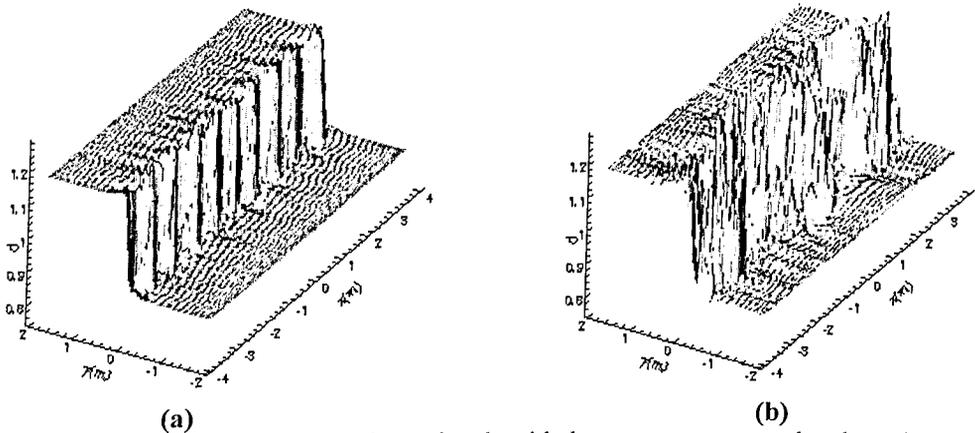


Figura 4.14: Evolução no domínio da densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,043s$.; (b) $t^*=0,075s$.

As Figs. 4.15 a 4.17 mostram a evolução no tempo, dos campos de velocidade transversal, velocidade axial e densidade, respectivamente da camada de mistura desenvolvendo temporalmente, nas seções $x = \frac{1}{2}L_x$ e $x = \frac{2}{3}L_x$, nas mesmas condições de cálculo referentes às figuras apresentadas anteriormente. A evolução no tempo da camada de mistura desenvolvendo temporalmente, em uma posição definida possui um comportamento similar ao de uma camada de mistura desenvolvendo espacialmente.

Observa-se claramente nas Figs 4.15 a 4.17 um aspecto completamente similar ao da aproximação espacial, o que evidencia a relevância do estudo de um camada de mistura temporal, para compreender certos aspectos da camada de mistura espacial. As Figs. de 4.15 a 4.17 foram analisadas, somente com o intuito de realçar este fato. Além deste fato, observa-se na Fig. 4.17, correspondente a evolução no tempo da densidade em duas seções

diferentes, que o uso de um escoamento estratificado no estudo da camada de mistura torna possível observar o comportamento de um intenso processo de mistura, caracterizado pela fortes flutuações em todo o domínio. Este fato não é observado quando no escoamento não é introduzido uma mudança de densidade.

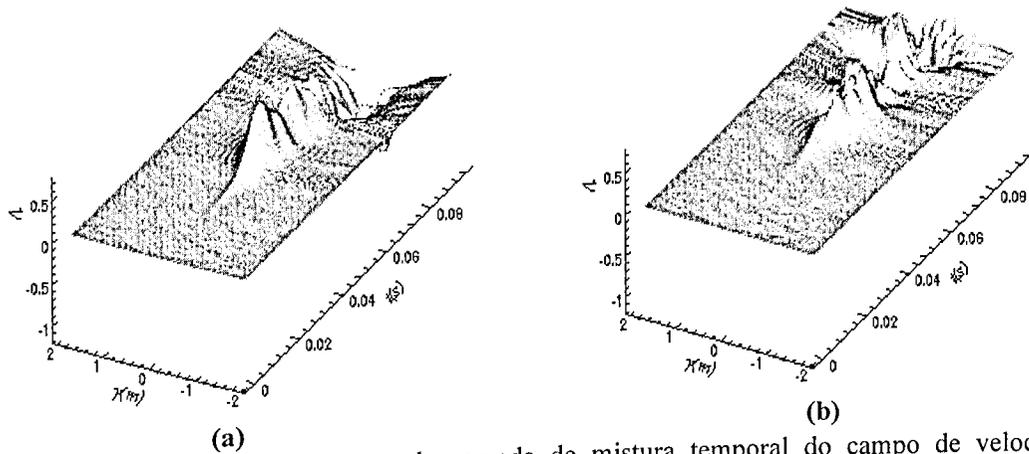


Figura 4.15: Evolução no tempo da camada de mistura temporal do campo de velocidade transversal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) numa posição $x = 2/3 \cdot L_x$ e (b) numa posição $x = 2/3 \cdot L_x$.

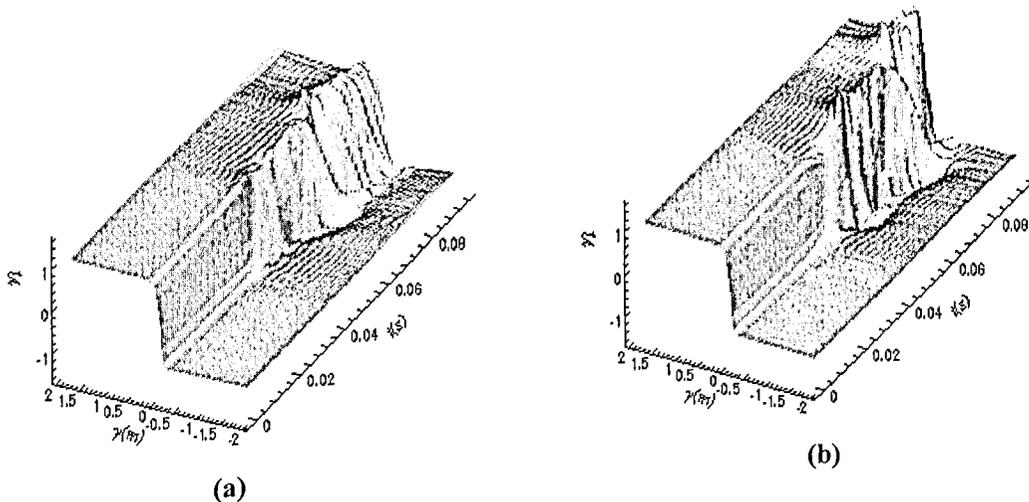


Figura 4.16: Evolução no tempo da camada de mistura temporal do campo de velocidade axial ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) numa posição $x = 2/3 \cdot L_x$ e (b) numa posição $x = 2/3 \cdot L_x$.

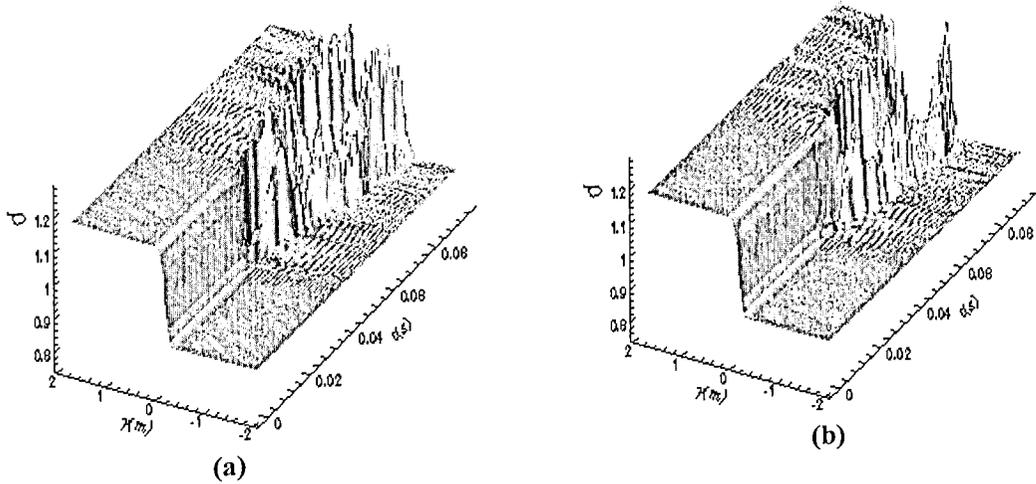


Figura 4.17: Evolução no tempo da camada de mistura temporal do campo de densidade ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) numa posição $x = 2/3 \cdot L_x$ e (b) numa posição $x = 2/3 \cdot L_x$.

As Figs. 4.18 e 4.19 mostram uma simulação de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal sob duas condições diferentes das correspondentes aos casos apresentados nas figuras anteriores. Uma dessas diferenças é o valor da espessura da camada inicial, onde fixou-se $\delta_0 = 0,1334m$ que corresponde a um valor duas vezes maior do que nos casos anteriores estudados. Esta mudança de δ_0 causa uma alteração no número de Reynolds ($7,02 \times 10^5$), porém mantendo o número de Mach constante. Em consequência, como as dimensões do domínio é uma função de δ_0 , assim, altera-se também as dimensões do domínio do problema. A outra diferença é devida ao fato da condição inicial da velocidade u ser concorrente para as camadas inferior e superior (nos casos expostos anteriormente, as velocidades das camadas superior e inferior de fluido eram contracorrente), porém mantendo a velocidade média do escoamento idêntica aos casos

anteriores; isto é, $U_1=150$ m/s e $U_2= 50$ m/s. Nos casos correspondentes às figuras apresentadas anteriormente, as velocidades das camadas superior e inferior foram $U_1=100$ m/s e $U_2=-100$ m/s, respectivamente.

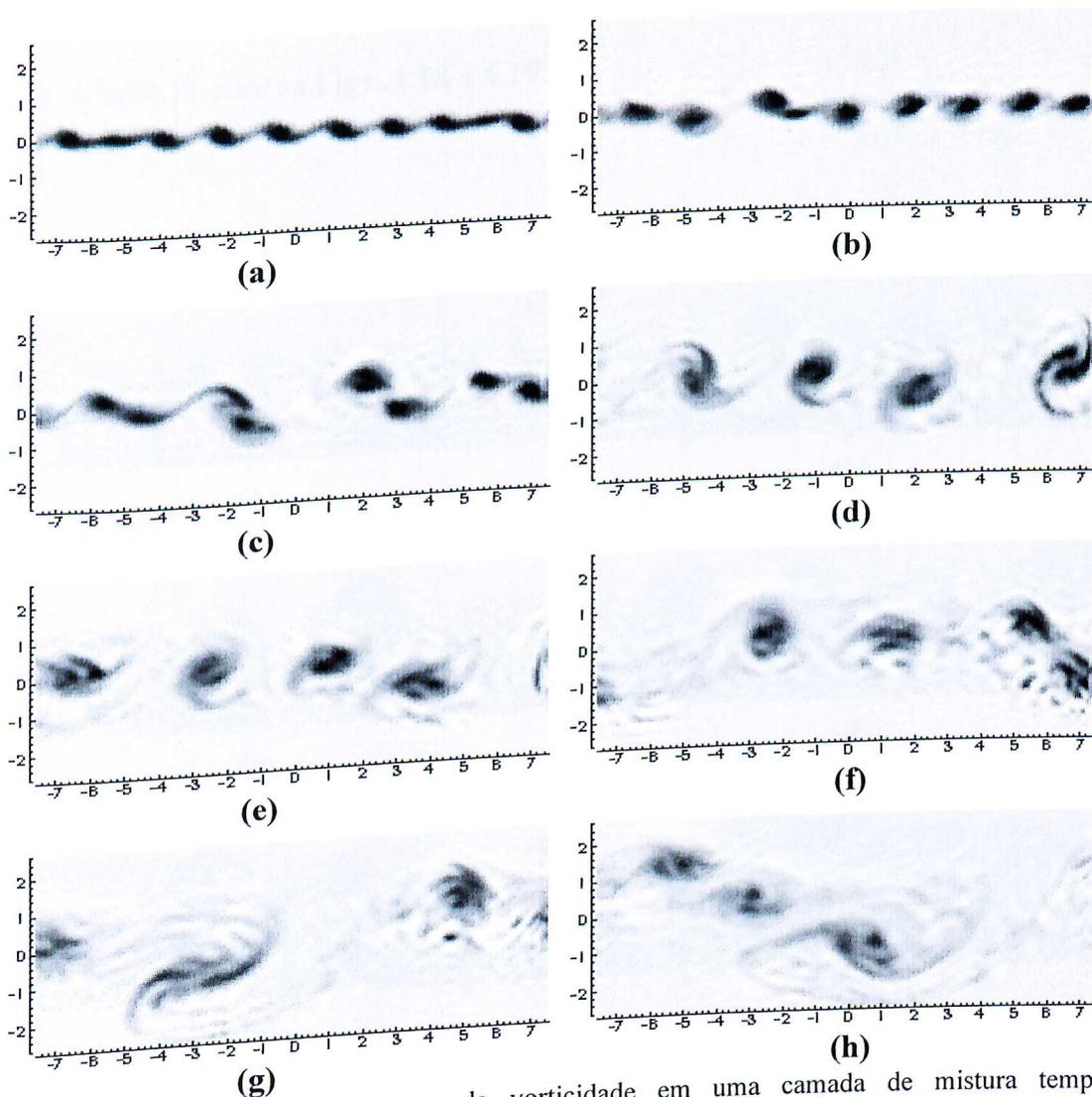


Figura 4.18.: Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\omega=7,02 \times 10^5$, $M_\omega=0,27$, $Pr_\omega=0,72$, $\eta_v=0,5$ e $\eta_T=0,285$). (a) $t^*=0,150s$; (b) $t^*=0,1884s$; (c) $t^*=0,226$ s; (d) $t^*=0,263s$; (e) $t^*=0,283s$; (f) $t^*=0,320s$; (g) $t^*=0,384s$ e (h) $t^*=0,422s$.

Como comentado anteriormente, as características dos processos de emparelhamento, rotação e coalescência sofre influências significativas do nível e da

distribuição do ruído branco, onde neste caso o nível do ruído foi idêntico aos casos correspondentes ao referente às Figs. 4.9 a 4.11. Entretanto, a distribuição dos níveis de cada modo de comprimento de onda segue uma seqüência aleatória, a qual é diferente em cada ruído gerado, causando assim com que os processos de emparelhamento, rotação e coalescência sejam diferentes para cada caso estudado. Isto pode ser observado se comparar as Figs. 4.9 a 4.11 com as Figs. 4.18 e 4.19.

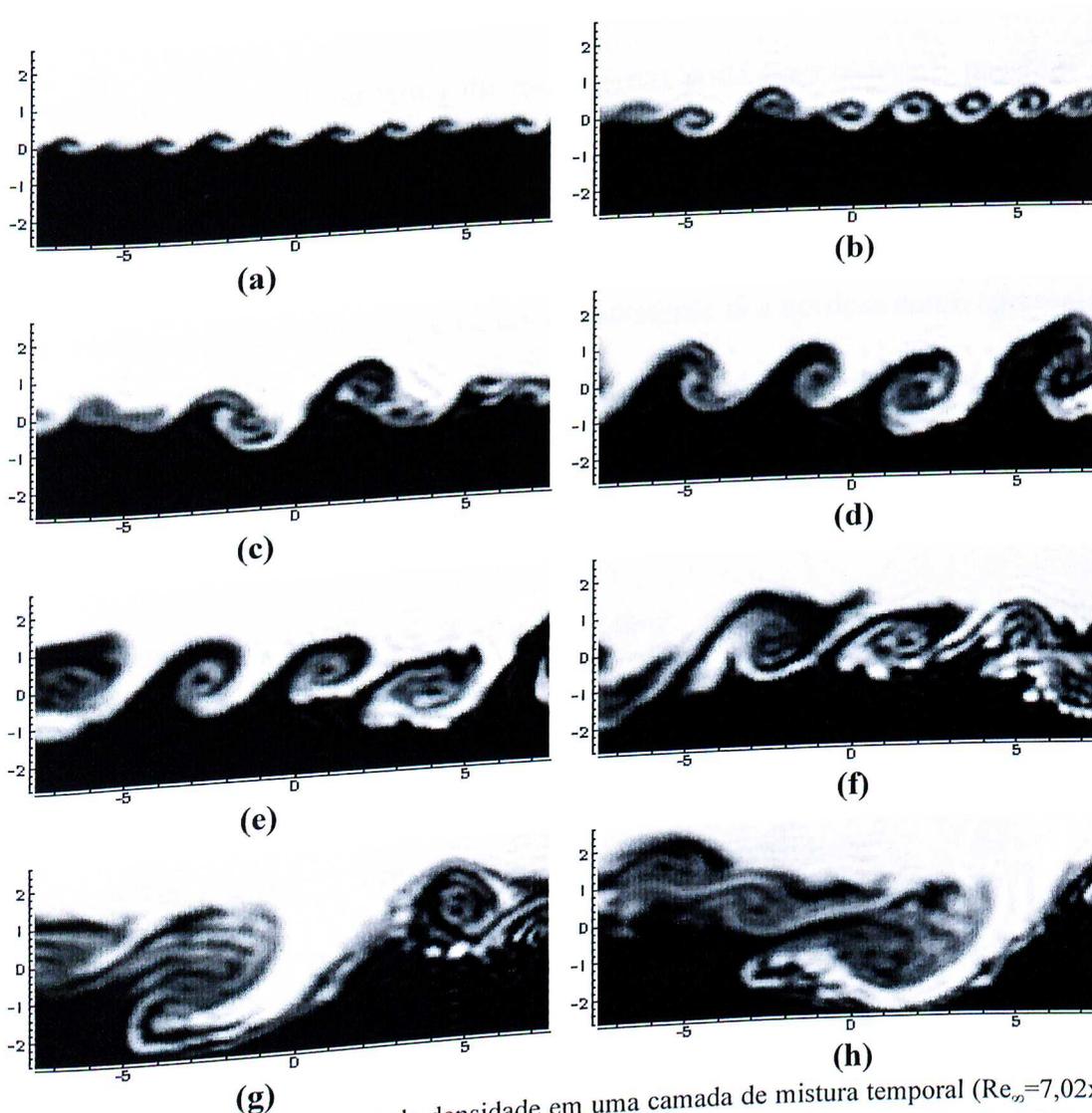


Figura 4.19.: Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_m=7,02 \times 10^5$, $M_m=0,27$, $Pr_m=0,72$, $\eta_v=0,5$ e $\eta_T=0,285$). (a) $t^*=0,150s$; (b) $t^*=0,1884s$; (c) $t^*=0,226 s$; (d) $t^*=0,263s$; (e) $t^*=0,283s$; (f) $t^*=0,320s$; (g) $t^*=0,384s$ e (h) $t^*=0,422s$.

Outro fator a ser observado nas Figs 4.18 e 4.19 é que o desenvolvimento inicial dos vórtices fundamentais ocorreu de forma mais lenta do que nos outros casos anteriores, onde a condição inicial fixada para as duas camadas eram de fluxos a contracorrente. Notou-se ainda que o início do processo de emparelhamento ocorreu retardado, se comparado com os casos de escoamentos a contracorrente. Diferentemente do caso de escoamentos a contracorrente, observou-se nos cálculos realizados com fluxo concorrente que o núcleo dos vórtices deslocam de forma constante da esquerda para a direita do domínio, o que é esperado, devido a resultante do vetor velocidade ser favorável a esta movimentação. Esta característica do escoamento pode ser observada nas Figs. 4.18 e 4.19. Estes resultados mostram de forma interessante que o número de Reynolds não interfere de forma significativa no processo de coalescência das estruturas coerentes de grandes escalas, porém, nota-se que há um achatamento dos vórtices como apresentado nas Figs. 4.18a e 4.19a, onde estes apresentam uma forma mais alongada. Este fato acontece devido ao aumento número de Reynolds que neste caso é praticamente o dobro com relação aos casos mostrados nas figuras anteriores.

Observa-se ainda nas Figs. 4.18 e 4.19 uma grande coerência entre os campos de vorticidade e de densidade, como evidenciado para os casos anteriores. Os mesmos fatos descritos acima, referente ao campo de vorticidade é ilustrado na Fig. 4.18, são caracterizados na Fig. 4.19, correspondente ao campo de densidade.

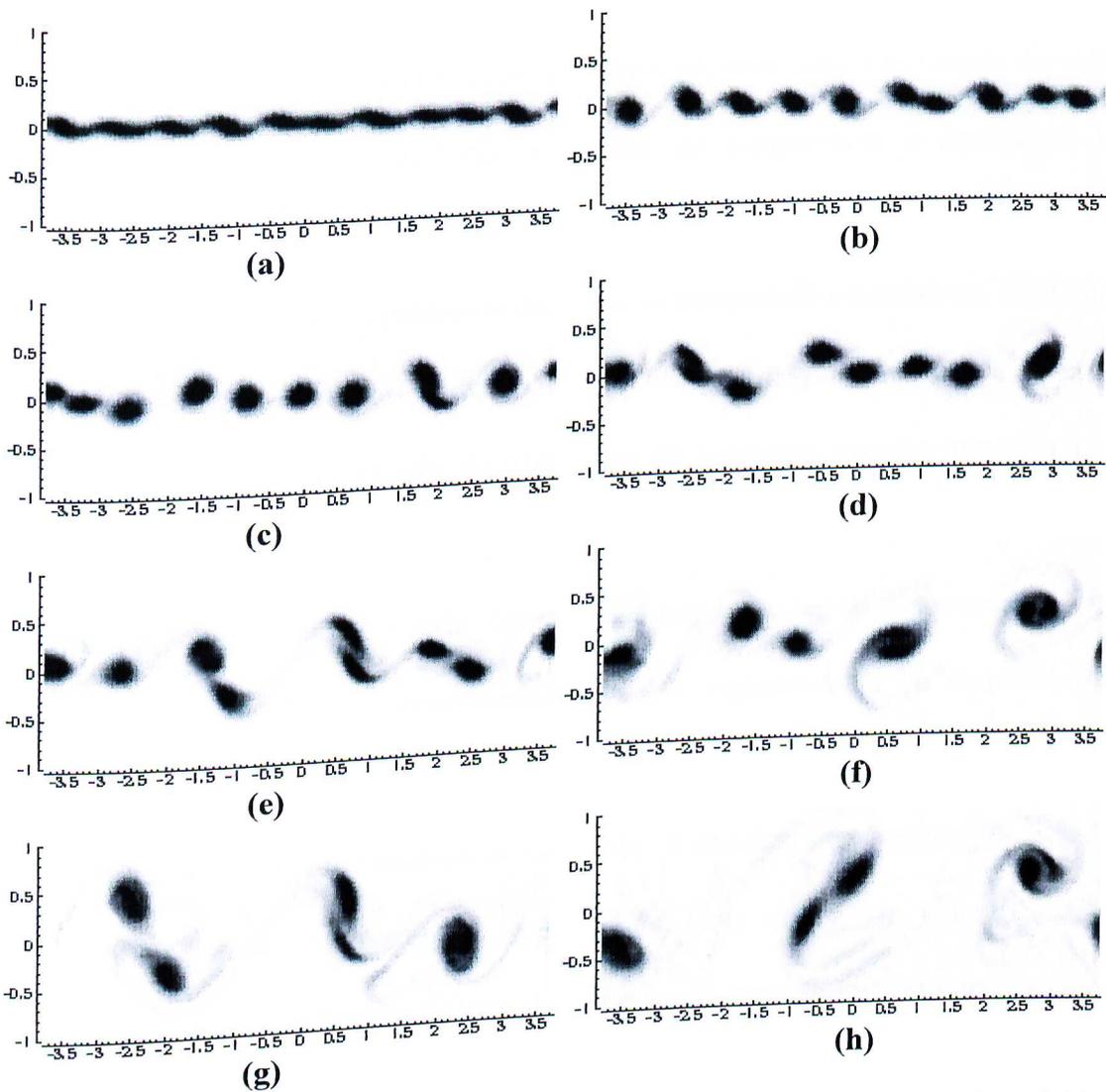


Figura 4.20. Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\omega = 3,94 \times 10^5$, $M_\omega = 0,29$, $Pr_\omega = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0$). (a) $t^* = 0,075s$; (b) $t^* = 0,084s$; (c) $t^* = 0,094s$; (d) $t^* = 0,105s$; (e) $t^* = 0,113s$; (f) $t^* = 0,131s$; (g) $t^* = 0,151s$ e (h) $t^* = 0,169s$.

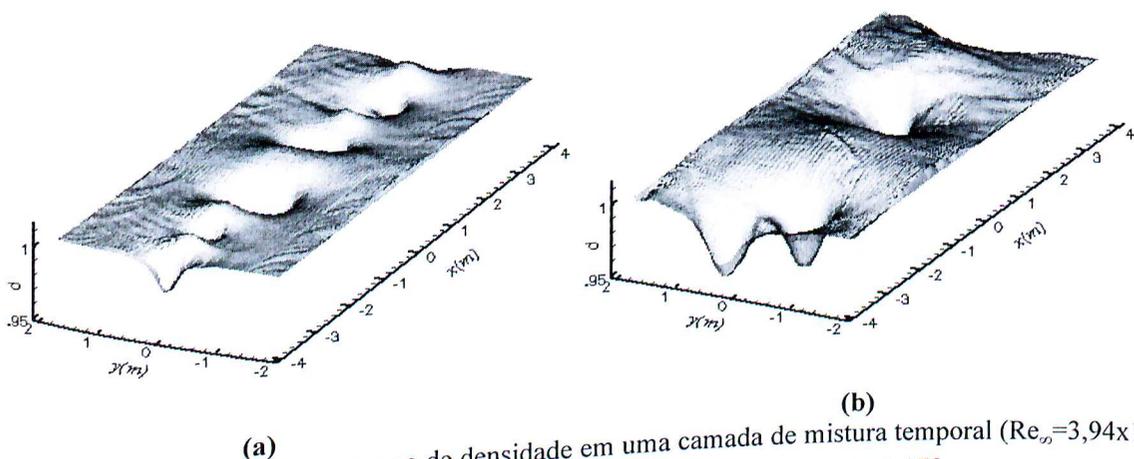


Figura 4.21: Distribuição do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\omega = 3,94 \times 10^5$, $M_\omega = 0,29$, $Pr_\omega = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0$). (a) $t^* = 0,113s$; (b) $t^* = 0,179s$.

A Fig. 4.20 apresenta o campo de vorticidade para uma camada de mistura temporal, simulada para um perfil hiperbólico inicial, com uma velocidade $U_1=150m/s$ e $U_2=50m/s$, e sem estratificação; isto é, perfis de temperatura e densidade iniciais constantes. A mudança básica a ser analisada nestes cálculos é interferência da distribuição do campo de densidade no acoplamento de todos os campos do escoamento. Neste caso em estudo, conforme pode ser observado na Fig. 4.20, a formação dos vórtices acontece de forma mais suave, sem a geração de flutuações de pequenas escalas que aparecem nos campos de velocidade e densidade, para os quais os escoamentos foram submetidos a graus de estratificação acentuados, como apresentado para os casos anteriores. Este fato concorda com as conclusões apresentadas sobre os experimentos de Brown e Roshko, (1974), onde estes autores notaram que quanto mais estratificado é o escoamento, modos cada vez menores de comprimentos de onda são formados no escoamento, devido uma maior turbulência do escoamento, causado por um efeito de mistura, devido a estratificação. Esta estratificação produz maiores gradientes de temperaturas na região de mistura, produzindo uma estrutura para a turbulência, na qual os grandes vórtices coerentes coexistem com as finas escalas da turbulência (este aspecto de escoamento é evidenciado de forma mais clara nas Figs. 4.22 a 4.26. A Fig. 4.21 mostra Distribuição do campo de densidade em uma camada de mistura temporal, para as mesmas condições de cálculo da Fig. 4.20. Observa-se nesta figura que o escoamento apresenta estruturas de um escoamento compressível, onde os vórtices coerentes de grandes escalas podem ser observados de forma bem definida.

Na Fig. 4.20 os processos de coalescência, rotação e emparelhamento aparecem de forma evidente, podendo ser observados com muita clareza. Porém, nota-se que estes processos dinâmicos, para as estruturas coerentes de grandes escalas, acontecem de

maneira semelhante aos casos estratificados, como pode ser verificado ao comparar as Figs 4.18 e 4.20.

As Figs 4.22 e 4.23 mostram os campos de vorticidade e densidade para uma camada de mistura temporal, os quais são resultados de uma simulação executada com condições iniciais semelhantes às adotadas para o caso da Figs. 4.20 e 4.21, porém sob fortes efeitos de estratificação; isto é, com $T_1 = 500^\circ K$ e $T_2 = 300^\circ K$. Os resultados mostrados nas Figs. 4.22 e 4.23 evidenciam o aparecimento de pequenos modos turbulentos, caracterizando uma fina escala de turbulência. Este fato torna claro se comparar estes resultados com os resultados apresentados da Fig. 4.20 e 4.23, onde não é possível observar a presença destas finas escalas da turbulência. As Figs. 4.24 a 4.26 ilustram os campos da velocidade transversal, da velocidade axial e da densidade, respectivamente, para dois tempos diferentes. Os comentários apresentados com relação às Figs. 4.22 e 4.23, podem ser evidenciados com maior clareza nestas figuras (Figs. 4.24 a 4.26). Como descrito ao longo deste capítulo, nota-se que os modos turbulentos presentes no caso das Figs. 4.22 a 4.26 são de maior intensidade que os resultados obtidos com fracos efeitos de estratificação, evidenciando que a estratificação causa um forte efeito de mistura, o que reforça as conclusões de Brown e Roshko, (1974).

Observa-se nas Figs. 4.22 e 4.23 que as estruturas coerentes de grandes escalas prevalecem no escoamento, porém, elas interagem com flutuações de pequenas escalas presentes em toda região de mistura. Por este fato, as grandes estruturas coerentes no escoamento não apresentam uma aparência completamente nítida nas Figs. 4.22 e 4.23, conforme mostrados em outras figuras similares apresentadas anteriormente, para outros casos estudados com menor estratificação. Entretanto, as estruturas coerentes de grandes escalas estão presentes neste escoamento e também, elas seguem seus cursos de

coalescência e emparelhamento, de forma totalmente semelhante aos apresentados nos casos das figuras anteriores (com menor estratificação), assim o processo de crescimento da espessura da camada ocorre de maneira totalmente semelhante para todos os casos, sem modificações significativas que alterem completamente a estrutura da camada de mistura.. Também, observa-se neste caso que há um forte acoplamento entre os campos de vorticidade e densidade, como fica evidenciado ao se comparar as Figs 4.22 e 4.23.

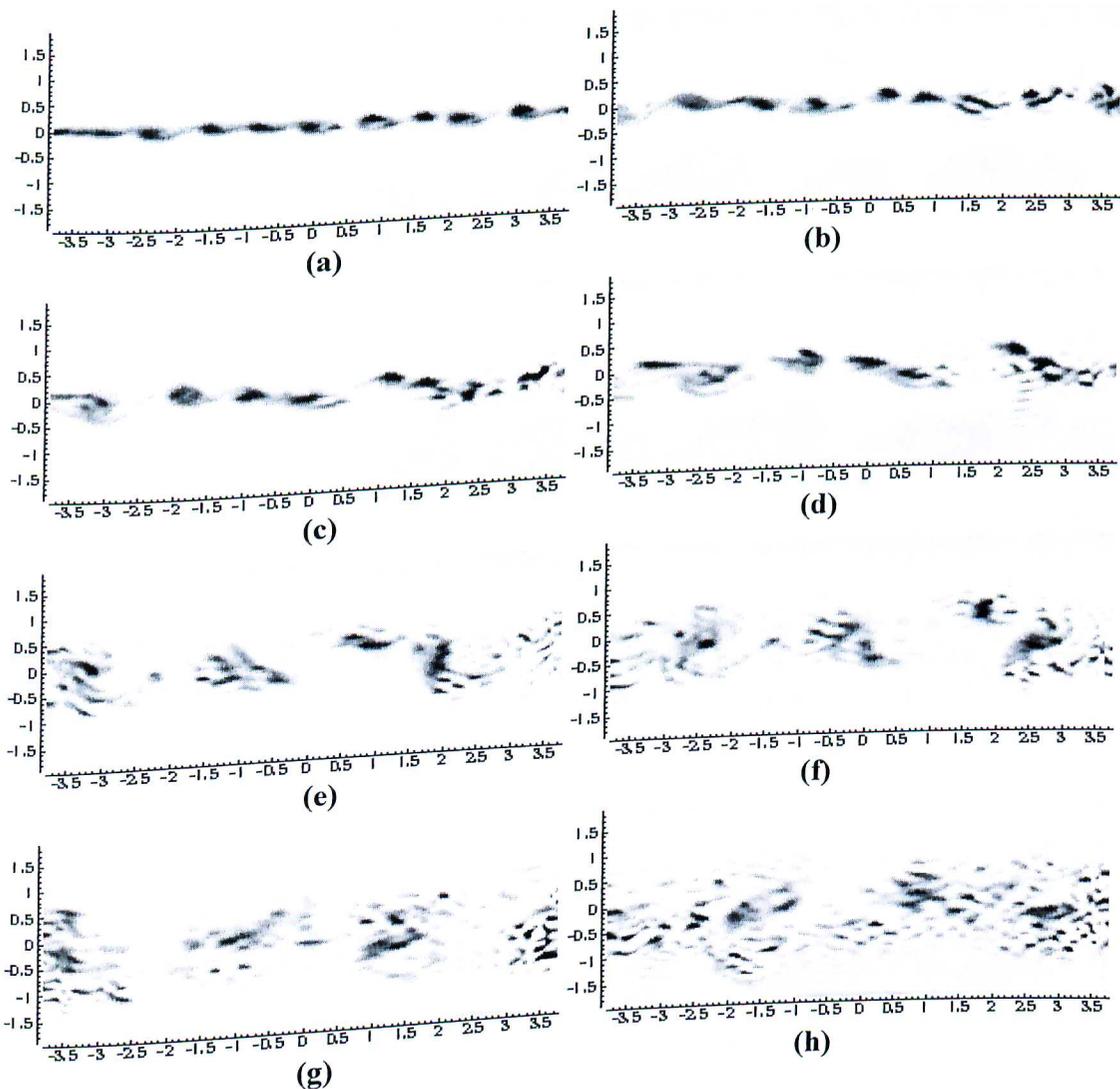


Figura 4.22. Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty = 3,18 \times 10^5$, $M_\infty = 0,25$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). (a) $t^* = 0,090s$; (b) $t^* = 0,106s$; (c) $t^* = 0,113s$; (d) $t^* = 0,121s$; (e) $t^* = 0,136s$; (f) $t^* = 0,143s$; (g) $t^* = 0,158s$ e (h) $t^* = 0,175s$.

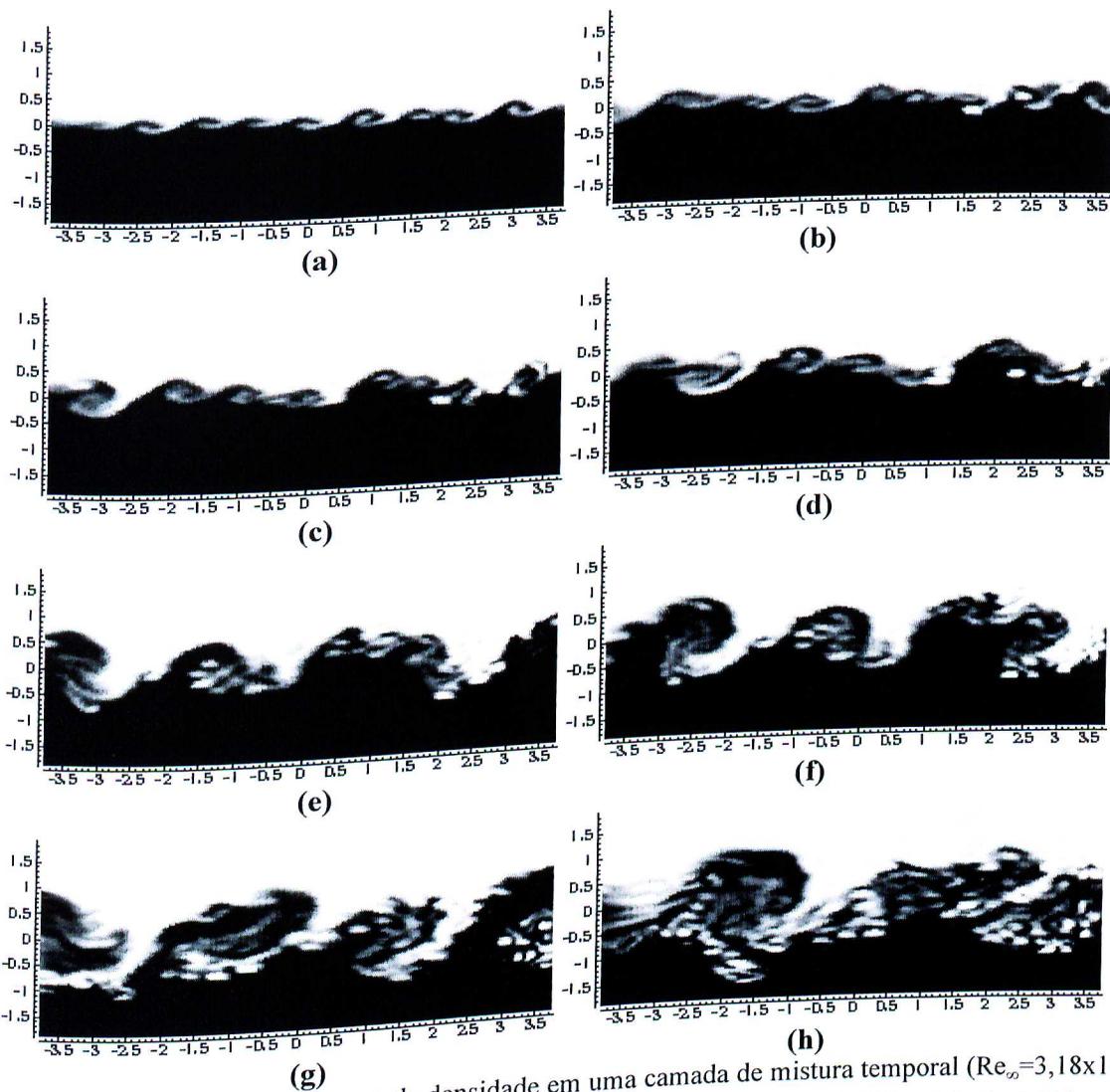


Figura 4.23. Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_o = 3,18 \times 10^5$, $M_o = 0,25$, $Pr_o = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). (a) $t^* = 0,090s$; (b) $t^* = 0,106s$; (c) $t^* = 0,113s$; (d) $t^* = 0,121s$; (e) $t^* = 0,136s$; (f) $t^* = 0,143s$; (g) $t^* = 0,158s$ e (h) $t^* = 0,175s$.

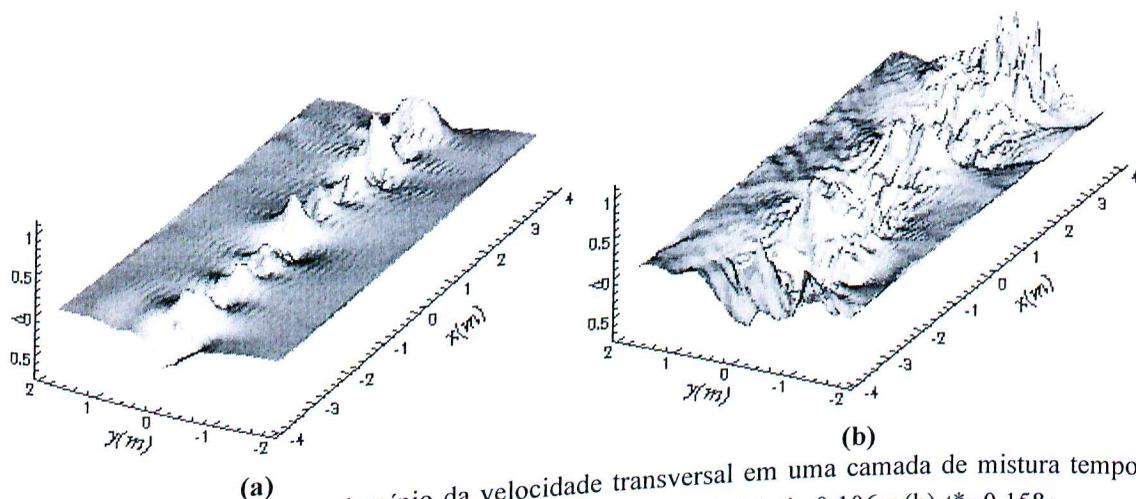


Figura 4.24: Evolução no domínio da velocidade transversal em uma camada de mistura temporal ($Re_o = 3,18 \times 10^5$, $M_o = 0,25$, $Pr_o = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,5$). (a) $t^* = 0,106s$; (b) $t^* = 0,158s$.

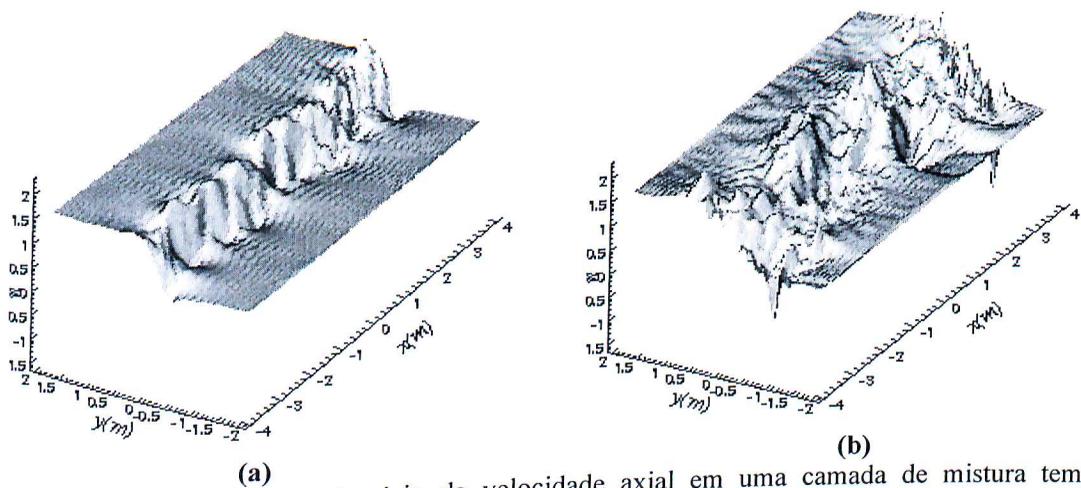


Figura 4.25: Evolução no domínio da velocidade axial em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty=0,72$, $\eta_v=0,5$ e $\eta_T=0,5$). (a) $t^*=0,106s$; (b) $t^*=0,158s$.

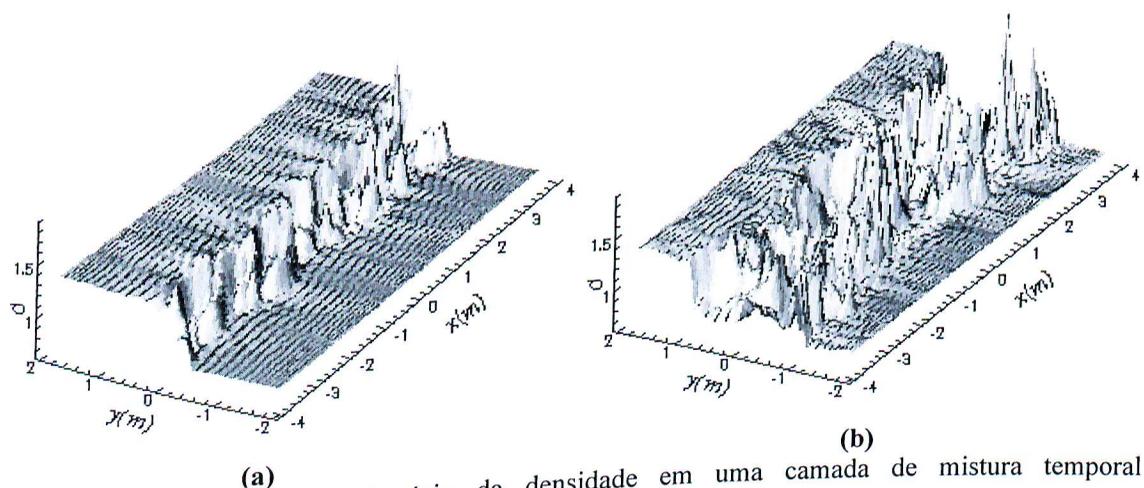


Figura 4.26: Evolução no domínio da densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty=0,72$, $\eta_v=0,5$ e $\eta_T=0,5$). (a) $t^*=0,106s$; (b) $t^*=0,158s$.

Nas Figs. 4.27 e 4.28 estão dispostas as evoluções dos campos de vorticidade e densidade, respectivamente, para uma camada de mistura temporal, com as seguintes condições de cálculo: $Re_\infty=1,0 \times 10^3$, $M_\infty=0,29$, $Pr_\infty=0,72$, $\eta_v=0,5$ e $\eta_T=0,0328$. Estes resultados, correspondentes a um baixo número de Reynolds, foram obtidos, reduzindo a espessura inicial da camada de mistura a um comprimento ínfimo, da ordem de $\delta_0 = 3,3 \times 10^{-4} m$, o qual constitui o comprimento característico do número de Reynolds

utilizado neste estudo. Como neste cálculo, a espessura de vorticidade (espessura da camada de mistura) é muito pequena, uma forte descontinuidade é gerada no ponto de inflexão da camada de mistura. Por esse motivo, algumas oscilações aparecem nas vizinhanças da região de mistura, as quais podem ser observadas com mais clareza na Fig. 4.28. (Não preocupou-se em apresentar esta figura em uma forma alisada, por pretender evidenciar este aspecto.)

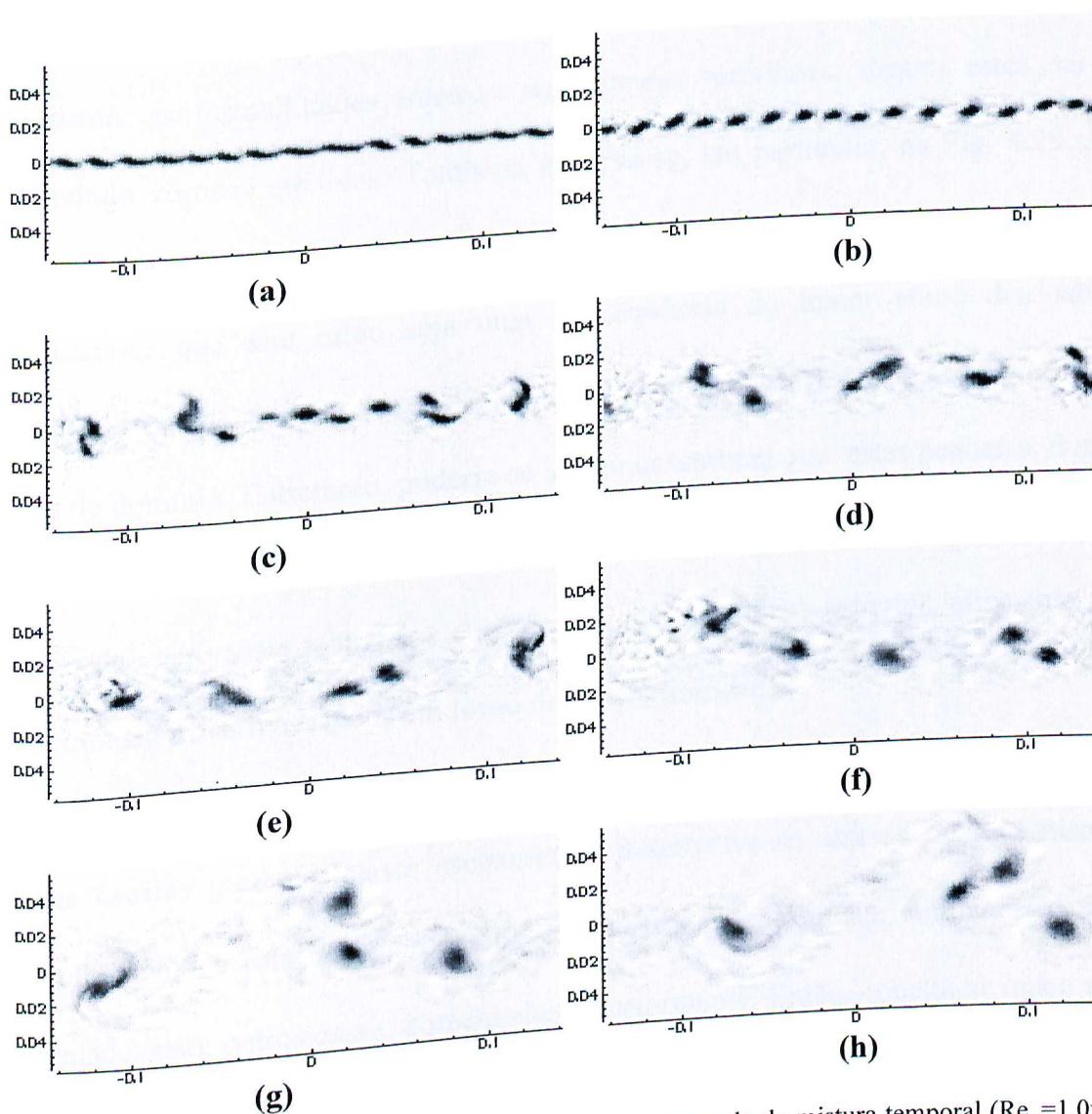


Figura 4.27. Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\omega = 1,0 \times 10^3$, $M_\omega = 0,29$, $Pr_\omega = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,0328$). (a) $t^* = 0,0028s$; (b) $t^* = 0,0032s$; (c) $t^* = 0,0038s$; (d) $t^* = 0,0042s$; (e) $t^* = 0,0049s$; (f) $t^* = 0,0056s$; (g) $t^* = 0,0063s$ e (h) $t^* = 0,0067s$.

Acredita-se que as intensas flutuações de pequenas escalas presentes na região de mistura, como pode ser observado nas Figs. 4.27 e 4.28, caracterizam um efeito forte devido a viscosidade presente neste escoamento, na região de mistura, devido o escoamento ser de baixo número de Reynolds ($Re=1000$). Um mecanismo, que permite dar um significado para esta característica do escoamento, é o de uma cascata de energia, na qual a energia dos vórtices de pequenos comprimento de ondas são gerados por um efeito dissipação de energia dos grandes vórtices, de grande comprimento de onda. Neste mecanismo, as instabilidades internas aos grandes turbilhões, destroem estes em parte, constituindo vórtices menores. Também, observa-se, em particular, na Fig. 4.28 que um ruído de significativa amplitude estende-se até próximo das bordas do domínio. Conjectura-se que este ruído seja uma consequência do maior efeito dissipativo do escoamento em baixo número de Reynolds, estendendo até regiões mais próximas das bordas do domínio. Entretanto, poderia-se imaginar também que estas pequenas flutuações nas regiões próximas das bordas do domínio, sejam uma consequência de imprecisões nos cálculos das derivadas, realizados com um técnica de ordem superior, altamente precisa que geram significativos ruídos em torno de descontinuidades .

Em particular, observa-se nas Figs. 4.27 e 4.28 que a evolução das estruturas de grandes escalas presentes neste escoamento, desenvolve-se através de mecanismos de emparelhamento e rotação, e processo de coalescência totalmente similar às descrições apresentadas para outros casos, comentadas anteriormente. Então, conclui-se que o número de Reynolds não afeta os processos e mecanismos de evolução das grandes estruturas, conforme já evidenciado em trabalhos anteriores. Contudo, as estruturas turbilhonares são

confinadas em uma camada de mistura extremamente fina, gerada por um perfil de velocidade com um grande grau de inflexão.

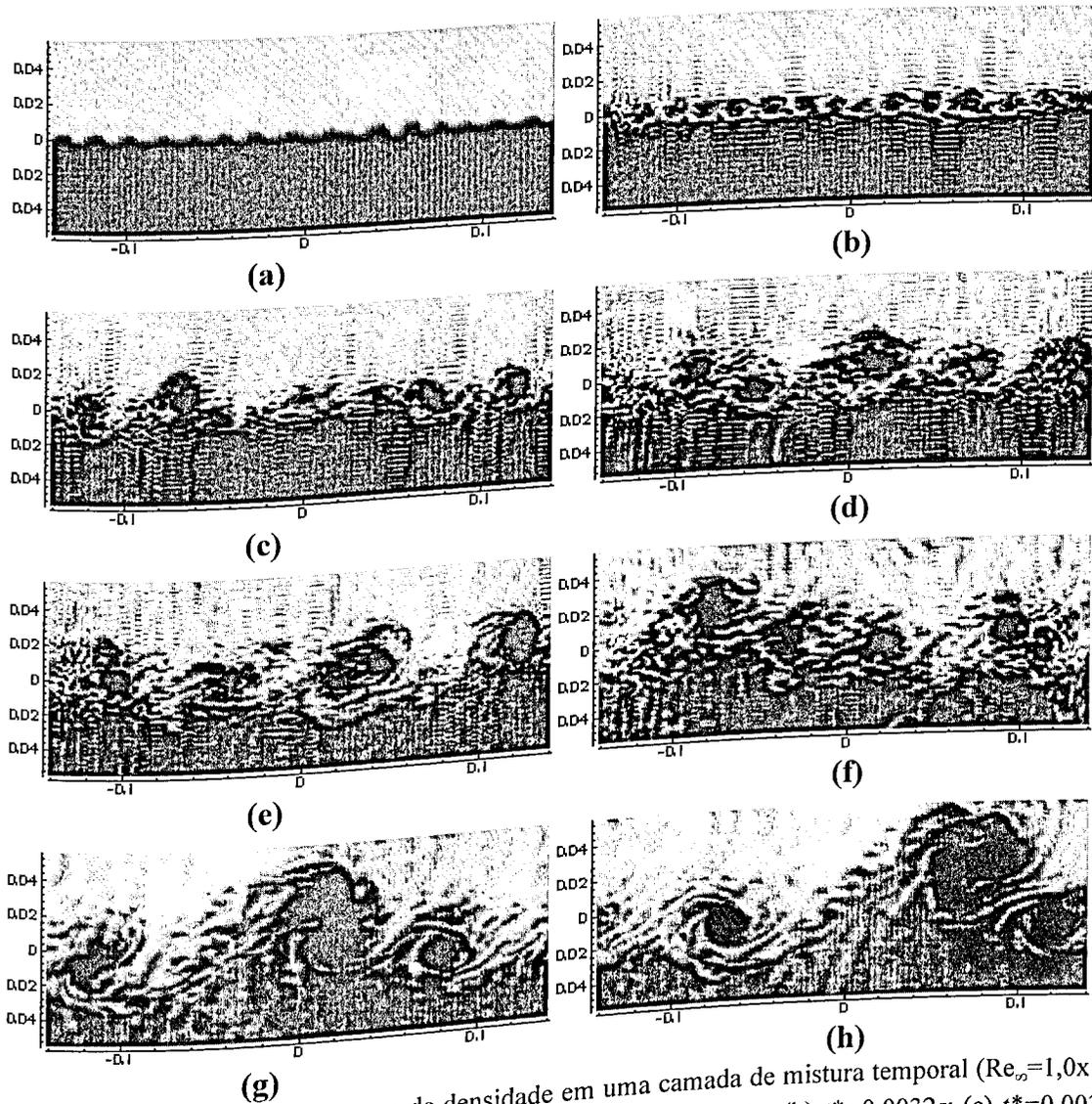


Figura 4.28. Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura temporal ($Re_\infty = 1,0 \times 10^3$, $M_\infty = 0,29$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,0328$). (a) $t^* = 0,0028s$; (b) $t^* = 0,0032s$; (c) $t^* = 0,0038s$; (d) $t^* = 0,0042s$; (e) $t^* = 0,0049s$; (f) $t^* = 0,0056s$; (g) $t^* = 0,0063s$ e (h) $t^* = 0,0067s$.

4.2.2 Camada de Mistura Espacial

A camada de mistura desenvolvendo espacialmente é o escoamento em cisalhamento livre mais estudado em laboratório. Portanto, a simulação deste tipo de escoamento, apesar de apresentar maior dificuldade que a simulação de camada de mistura desenvolvendo temporalmente, os seus resultados podem fornecer importantes conclusões, permitindo comparações diretas com resultados empíricos, pois uma gama muito grande de dados experimentais podem ser encontrados na literatura.

Os resultados apresentados nas Figs 4.29 e 4.30 ilustram a distribuição dos campos de vorticidade e densidade, respectivamente, para uma camada de mistura desenvolvendo espacialmente, para os parâmetros de cálculos: $Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, malha= 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$. Os resultados apresentados nas Figs. 4.29 e 4.30 foram simulados em um domínio computacional suficientemente grande para permitir a evolução de uma camada de mistura espacial e sendo claramente evidenciado nestas figuras as estruturas de grandes escalas, tanto no campo de vorticidade (Fig. 4.29), quanto no campo de densidade (Fig. 4.30). A mesma descrição apresentada anteriormente para camada de mistura desenvolvendo temporalmente, sobre os mecanismos de emparelhamento e rotação de vórtices, assim como sobre o processo de coalescência, prevalecem para camada de mistura espacial. As características destes mecanismos e processos podem ser vistas nas Figs. 4.29 e 4.30. Entretanto, pode-se salientar que na aproximação espacial, os mecanismos de emparelhamento e rotação parecem ser mais regulares, como pode ser observado ao comparar-se as Figs. 4.29 a 4.33, com as Figs. 4.15 a 4.17, referentes à simulação da camada de mistura temporal, determinadas nas mesmas condições de cálculos que as camada de mistura espacial em análise. Supõe-se que este fato ocorre como consequência de efeitos convectivos, os

quais fazem com que ocorra uma predominância de evolução das grandes e pequenas estruturas na direção axial do escoamento, confinando interações entre os fenômenos de grandes e pequenas escalas numa região de mistura mais estreita. Por isto, os mecanismos de emparelhamento e rotação e processo de coalescência ocorrem com menos interferência no espaço entre dois eventos sucessivos. Em particular, observa-se nas Figs. 4.29 e 4.30 que na camada de mistura espacial ocorre dois tipos de instabilidades: absolutas e convectivas.

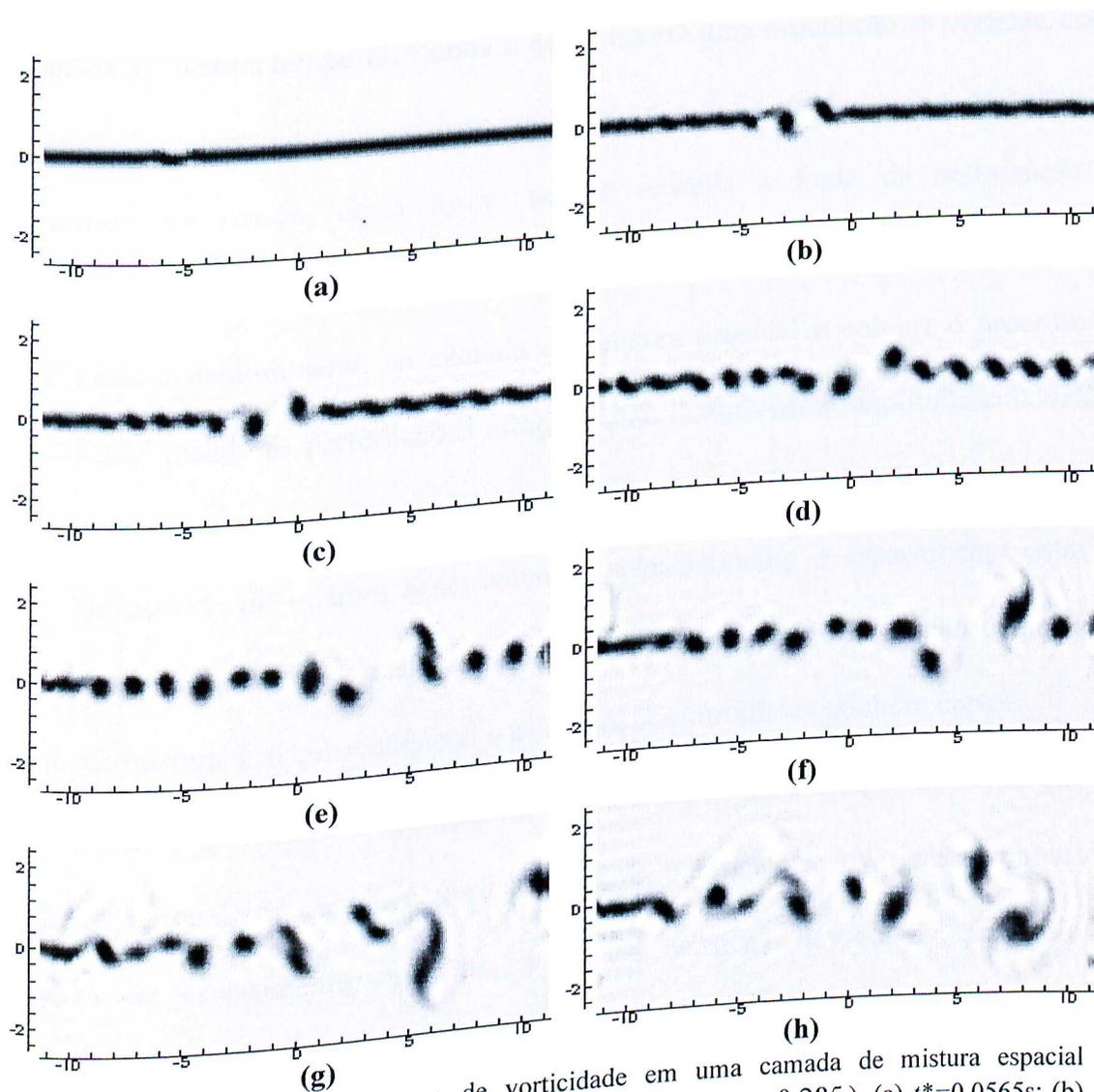


Figura 4.29: Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\omega=3,5 \times 10^5$, $M_\omega=0,27$, $Pr_\omega=0,72$, 128×128 , $\eta_v=0,5$ e $\eta_T=0,285$). (a) $t^*=0,0565s$; (b) $t^*=0,0848s$; (c) $t^*=0,0960s$; (d) $t^*=0,113s$; (e) $t^*=0,141s$; (f) $t^*=0,158s$; (g) $t^*=0,186s$ e (h) $t^*=0,209s$.

A *instabilidade absoluta* é típica da camada de mistura temporal, constituindo uma instabilidade local que caracteriza o crescimento no tempo das perturbações, uma vez iniciada pode-se retirar a fonte da perturbação que mesmo assim ela subsistirá. Este tipo de instabilidade que ocorre no início da evolução da camada de mistura espacial (Fig. 4.29 e 4.30), pode ser causado por um ruído branco introduzido nas condições iniciais, causando uma evolução inicial para a camada de mistura espacial semelhante ao processo realizado para a camada de mistura temporal ou pode ser causado pelo próprio perfil inflexional de velocidade assumido na condição inicial, o qual é típico para estudo da camada de mistura temporal. Contudo como ocorre uma evacuação de vórtices, assim *instabilidade convectiva* caracteriza-se pelo crescimento das perturbações, quando estas deslocam-se no espaço, desta forma se for retirada a fonte da perturbação as instabilidades são transportadas e o escoamento volta à condição estável. Este tipo de instabilidade é predominante na camada de mistura espacial e conduz o processo de instabilidade quando as perturbações atingem uma determinada amplitude conduzindo os mecanismos de emparelhamentos e rotação e o processo de coalescência.

Na camada de mistura desenvolvendo espacialmente o espaçamento entre os vórtices aumenta quando se desloca na direção axial no sentido da região de saída da camada de mistura. Em conseqüência, o diâmetro dos turbilhões também cresce.

Ainda com relação à camada de mistura espacial, a freqüência com que os turbilhões passam em qualquer posição x deve permanecer invariante, contudo, a exigência de espaçamento crescente entre os vórtices devido ao processo de coalescência destes requer uma freqüência decrescente, devido ao aumento do comprimento de onda dos vórtices. Esta inconsistência entre os dois fatos explanados no parágrafo anterior é explicado por Brown e Roshko, (1974). Estes autores afirmam que a

quantidade de vorticidade existente em um turbilhão não pode simplesmente desaparecer, portanto, concluindo-se que os turbilhões devem aglutinar-se de algum modo em estruturas maiores, de forma que possam preservar a sua energia, sem ocorrer uma dissipação desta pelo escoamento médio. Então, processo de coalescência deve ocorrer conjuntamente com o deslocamento dos vórtices na direção à jusante da camada, permitindo manter as frequências em determinado local aproximadamente constante. Este mecanismo deve acontecer continuamente ao longo da direção x , permitindo maiores vórtices, com frequência menores quando se distancia da extremidade inicial da camada de mistura.

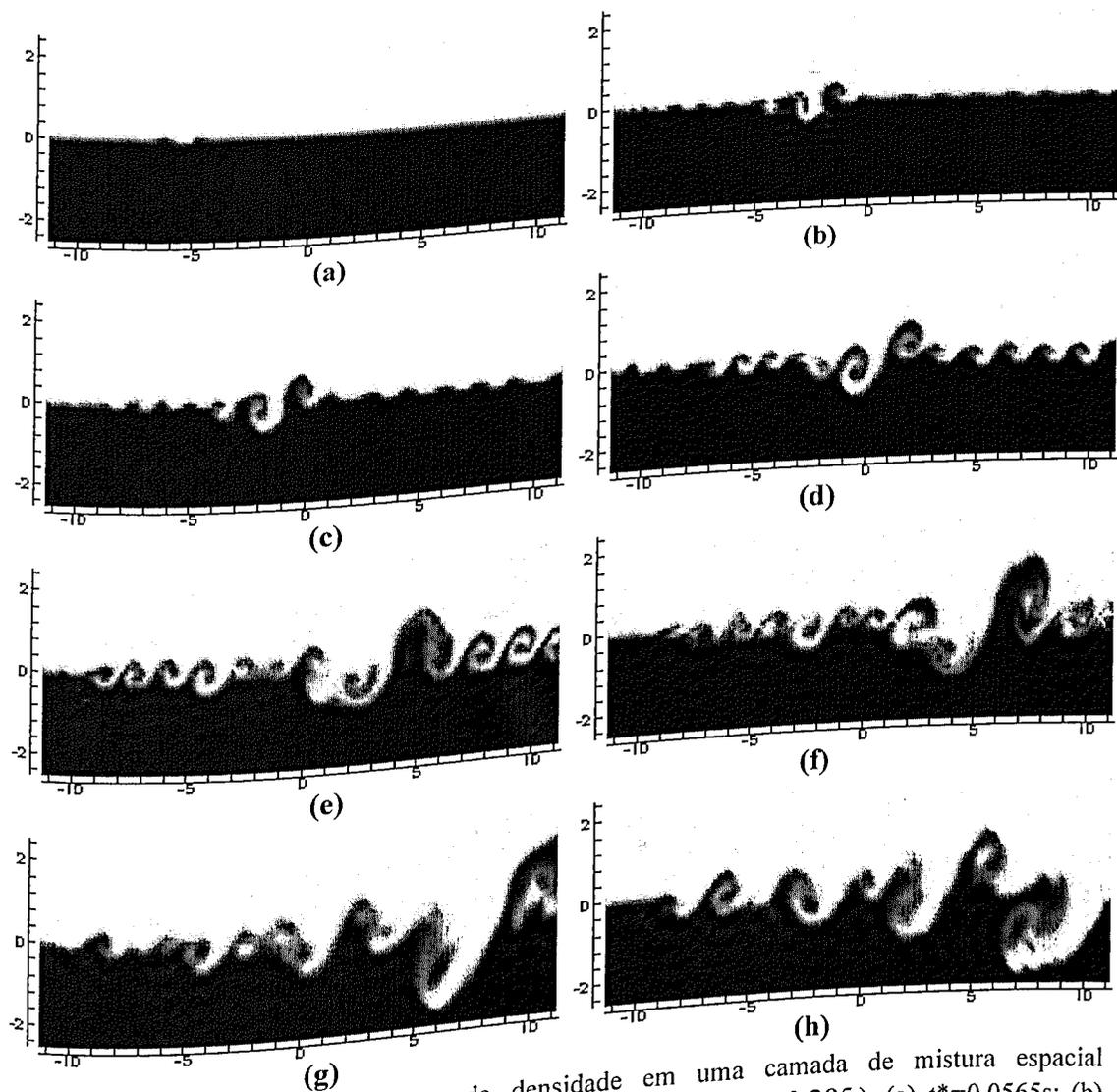


Figura 4.30: Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^* = 0,0565s$; (b) $t^* = 0,0848s$; (c) $t^* = 0,0960s$; (d) $t^* = 0,113s$; (e) $t^* = 0,141s$; (f) $t^* = 0,158s$; (g) $t^* = 0,186s$ e (h) $t^* = 0,209s$.

O processo de coalescência foi descrito por Winant e Browand (1974) como um mecanismo de emparelhamento de vórtices, no qual, em algum estágio dois vórtices sucessivos tornam-se instáveis e giram um ao redor, tornando-se um único. Esta nova estrutura é, então, transportada à jusante da camada de mistura até que um novo processo de emparelhamento ocorra. Esta evolução da estrutura da camada de mistura permite com que ocorra nas camadas de misturas espaciais os fenômenos de redução da frequência dos vórtices e a permanência da frequência aproximadamente constante numa posição fixa da camada de mistura, como explanado acima.

A Figs. 4.31 a 4.33 mostram, em forma de relevo, a distribuição da velocidade transversal, da velocidade axial e da densidade no domínio, respectivamente, em uma camada de mistura em desenvolvimento espacial, determinada com as mesmas condições de cálculos dos resultados apresentados nas Figs. 4.29 e 4.30, para dois tempos diferentes.

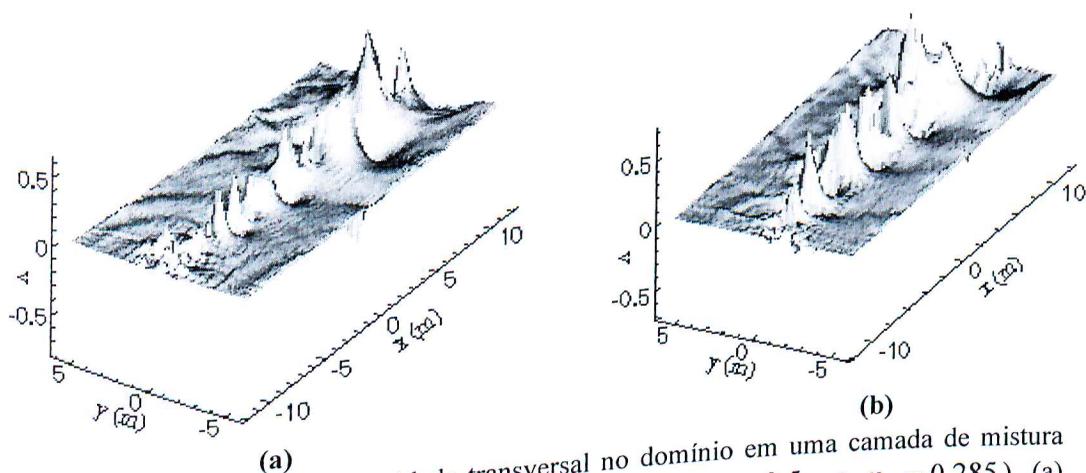


Figura 4.31: Evolução da velocidade transversal no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty = 3.5 \times 10^5$, $M_\infty = 0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, 128×128 , $\eta_v = 0.5$ e $\eta_T = 0.285$). (a) $t^* = 0.158s$.; (b) $t^* = 0.209s$.

Os aspectos do escoamento descritos acima podem ser observados com detalhe nestas figuras. Elas constituem uma outra forma de evidenciar os aspectos descritos

anteriormente, permitindo detalhar, principalmente o processo de coalescência e as características de uma camada de mistura menos perturbada que o caso de camada limite temporal, com a mesmas condições de cálculo, como explicado acima.

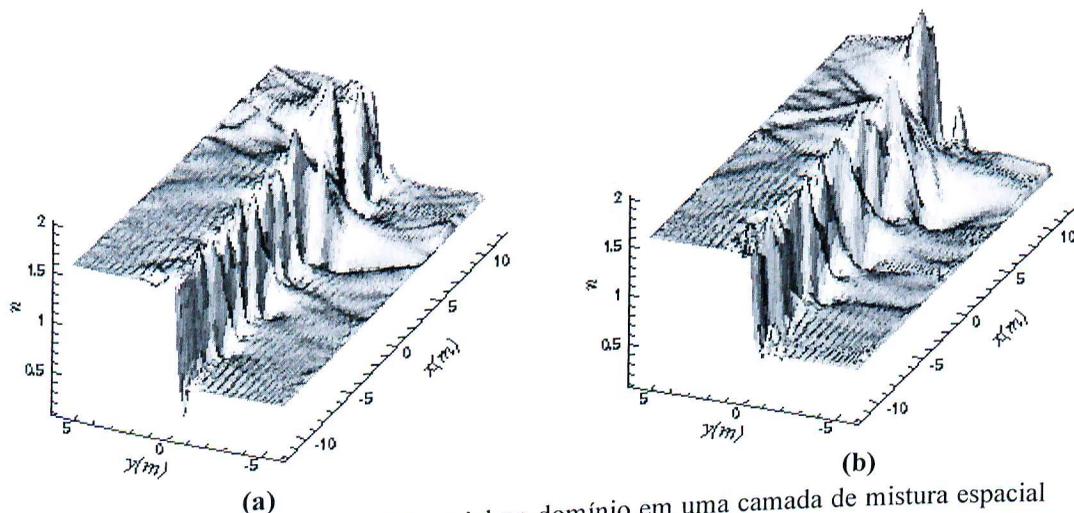


Figura 4.32: Evolução da velocidade axial no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty=0.72$, 128×128 , $\eta_v=0.5$ e $\eta_T=0.285$). (a) $t^*=0.158s$; (b) $t^*=0.209s$.

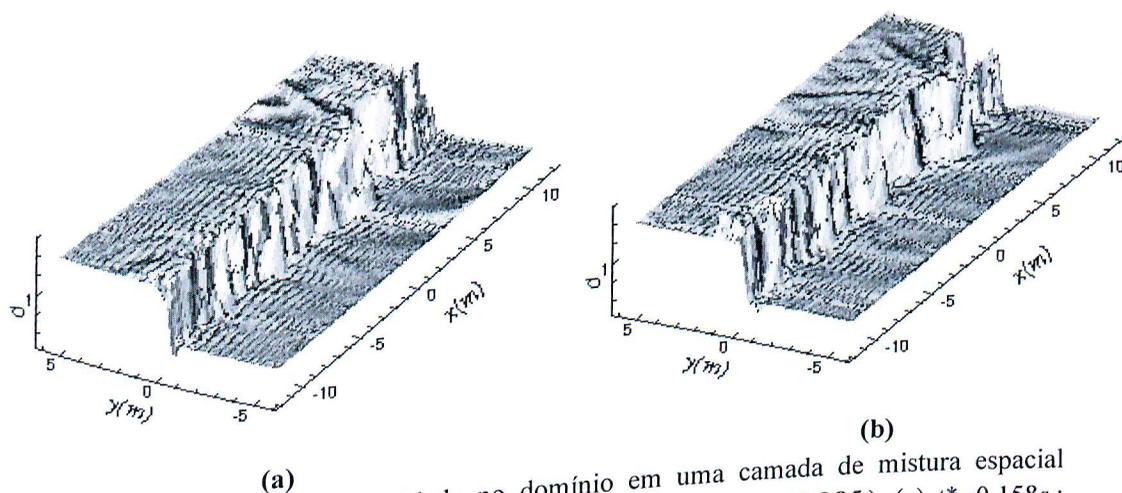


Figura 4.33: Evolução da densidade no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0.27$, $Pr_\infty=0.72$, 128×128 , $\eta_v=0.5$ e $\eta_T=0.285$). (a) $t^*=0.158s$; (b) $t^*=0.209s$.

As Figs. 4.34 e 4.35 apresentam os campos de vorticidade e de densidade, respectivamente para camada de mistura espacial, para condições semelhantes de cálculos referentes às Figs. 4.29 e 4.30, porém com uma malha mais refinada (256×256), com um domínio modificado; isto é, com maiores dimensões, para comportar o dobro

de turbilhões ($L_x = 48\lambda_a$ e $L_y = 24\lambda_a$). Também, neste caso, o ruído branco foi introduzido somente na entrada do domínio, diferente do caso anterior onde este ruído foi introduzido, nas condições iniciais, em todo o domínio. Devido a este último fato, pode-se observar nestas figuras que não ocorre a instabilidade absoluta, característica de instabilidade temporal, como evidenciado no caso anterior, causado essencialmente devido a presença de ruído branco nas condições iniciais. Portanto, é observado somente instabilidade convectiva, característica do desenvolvimento de camada de mistura espacial. Um outro fato importante a ser observado nestas figuras, trata-se do fato de que em malhas mais refinadas ocorre uma formação bem definida dos vórtices, evidenciando uma maior precisão do método aplicado para a solução do problema. Neste caso, as descontinuidades nas propriedades são melhores representadas pelo esquema numérico quando aumenta-se o número de pontos da malha de cálculo, conforme comentado e demonstrado no Capítulo 3.

Como pode ser observado na Fig. 4.34b, os vórtices iniciam o processo de rotação, dando origem às estruturas coerentes (turbilhões de Kelvin Helmholtz), em uma posição situada por volta de $\frac{1}{3}L_x$, à jusante da entrada do domínio do problema. Os primeiros emparelhamentos completam-se em uma posição média próxima da metade do domínio, como evidenciado pela Fig. 4.34e a 4.34h.

Notou-se, também, nas Figs. 4.34 e 4.35 que quando um grupo de vórtices atinge a região de saída, para serem evacuados, um reflexo do vórtice situado na região de saída aparece na entrada do domínio. Evidentemente, isto caracteriza erros numéricos provenientes dos cálculos das derivadas. A Fig. 4.34h evidencia este fato, onde conjectura-se que isto ocorre devido a transformada de Chebyshev ser o procedimento utilizado para determinar as derivadas nas direções x e y nestes cálculos. Esta

transformada, como evidenciado no Capítulo III, utiliza a transformada de Fourier para o seu cálculo, a qual se aplica somente para sinais periódicos, por isto ela preserva em seu sinal os fenômenos de maior comprimento de onda, neste caso o comprimento do domínio que caracteriza a periodicidade da transformada de Fourier. A imagem do vórtice que esta sendo evacuado, situada na entrada do domínio, é uma característica peculiar de erros introduzidos por esta técnica de calcular derivadas.

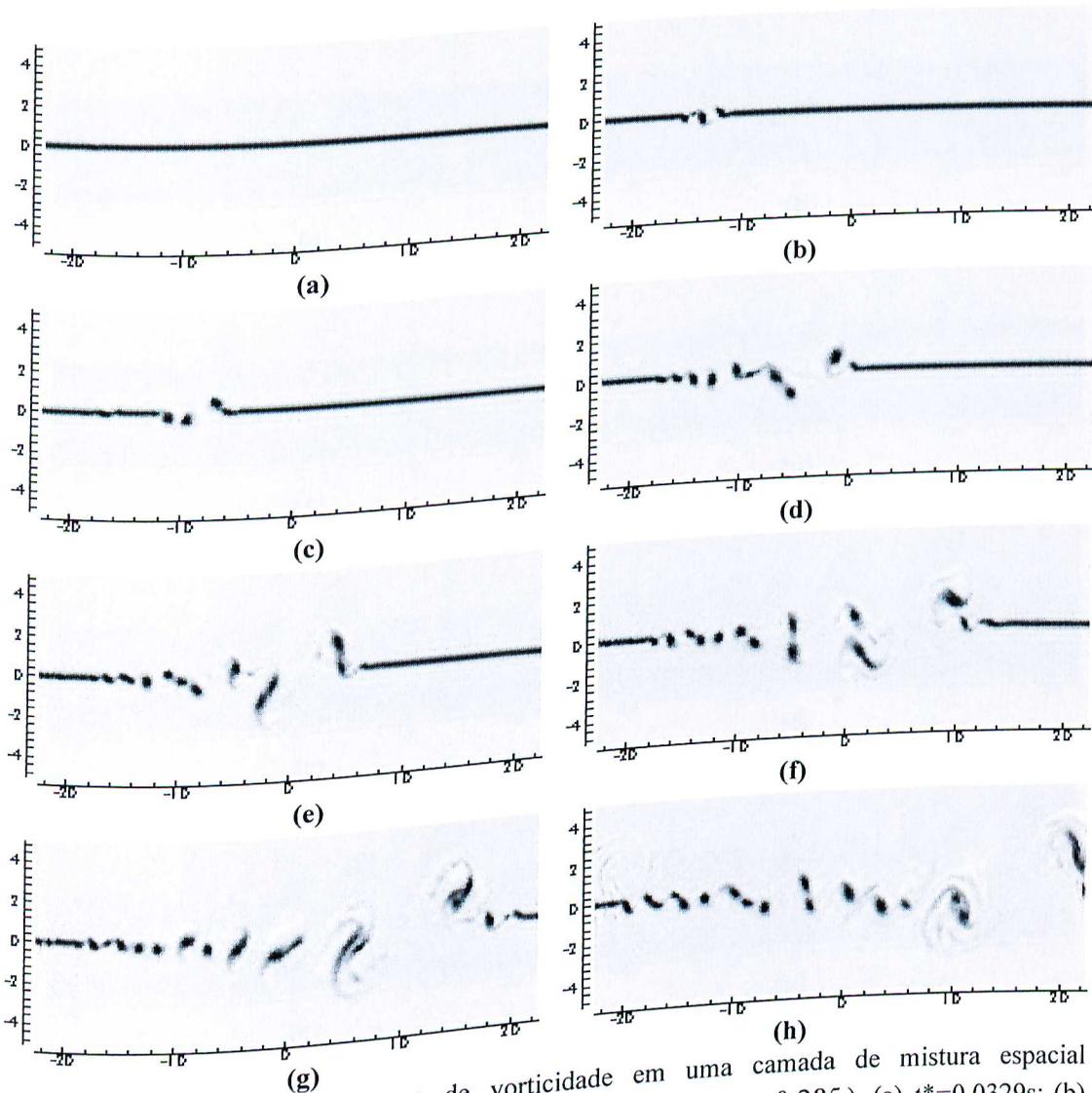


Figura 4.34: Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,367$, $Pr_\infty = 0,72$, 256×256 , $\eta_v = 0,45$ e $\eta_r = 0,285$). (a) $t^* = 0,0329s$; (b) $t^* = 0,0658s$; (c) $t^* = 0,0987s$; (d) $t^* = 0,131s$; (e) $t^* = 0,164s$; (f) $t^* = 0,197s$; (g) $t^* = 0,230s$ e (h) $t^* = 0,263s$.

A Figs. 4.36 a 4.38 mostram, em forma de relevo, a distribuição da velocidade transversal, da velocidade axial e da densidade no domínio, respectivamente, em uma camada de mistura em desenvolvimento espacial, para as mesmas condições de cálculo que as referentes das Figs. 4.34 e 4.35. Estas figuras conduzem às mesmas conclusões que as apresentadas pelas Figs. 4.31 a 4.33, com condições de cálculos semelhantes.

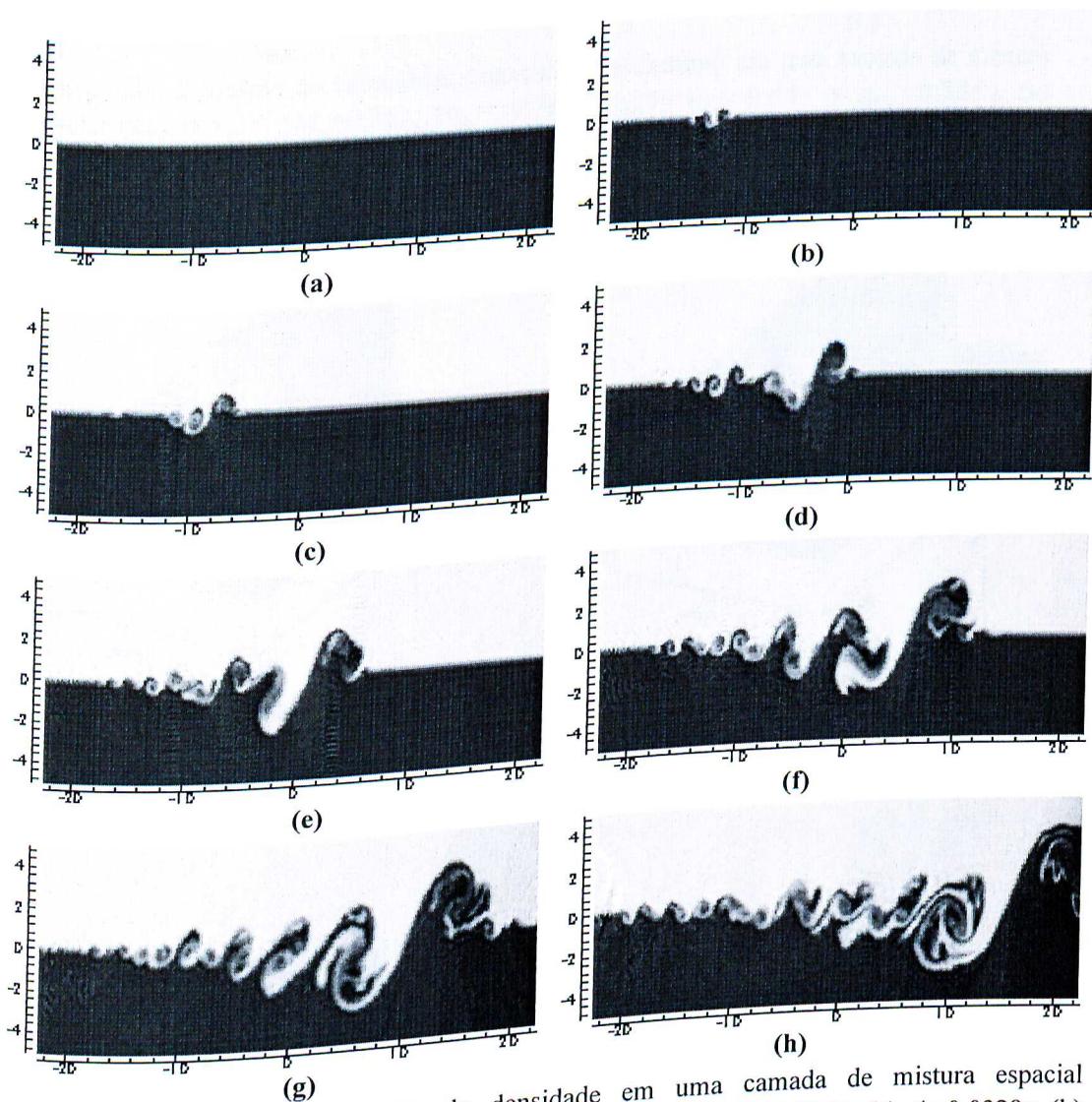


Figura 4.35: Evolução do campo de densidade em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,367$, $Pr_\infty = 0,72$, 256×256 , $\eta_v = 0,45$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^* = 0,0329s$; (b) $t^* = 0,0658s$; (c) $t^* = 0,0987s$; (d) $t^* = 0,131s$; (e) $t^* = 0,164s$; (f) $t^* = 0,197s$; (g) $t^* = 0,230s$ e (h) $t^* = 0,263s$.

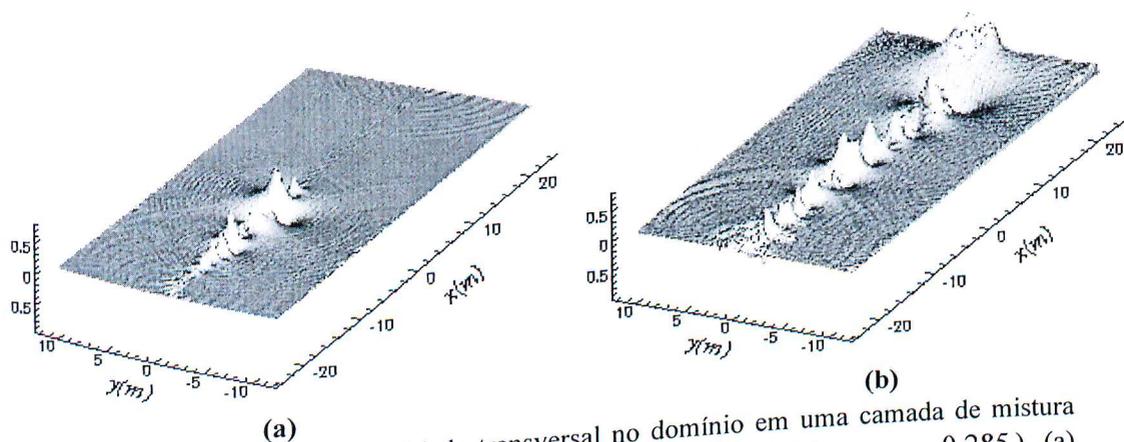


Figura 4.36: Evolução da velocidade transversal no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0,367$, $Pr_\infty = 0,72$, 256×256 , $\eta_v = 0,45$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0.0658s$ e (b) $t^*=0.263s$.

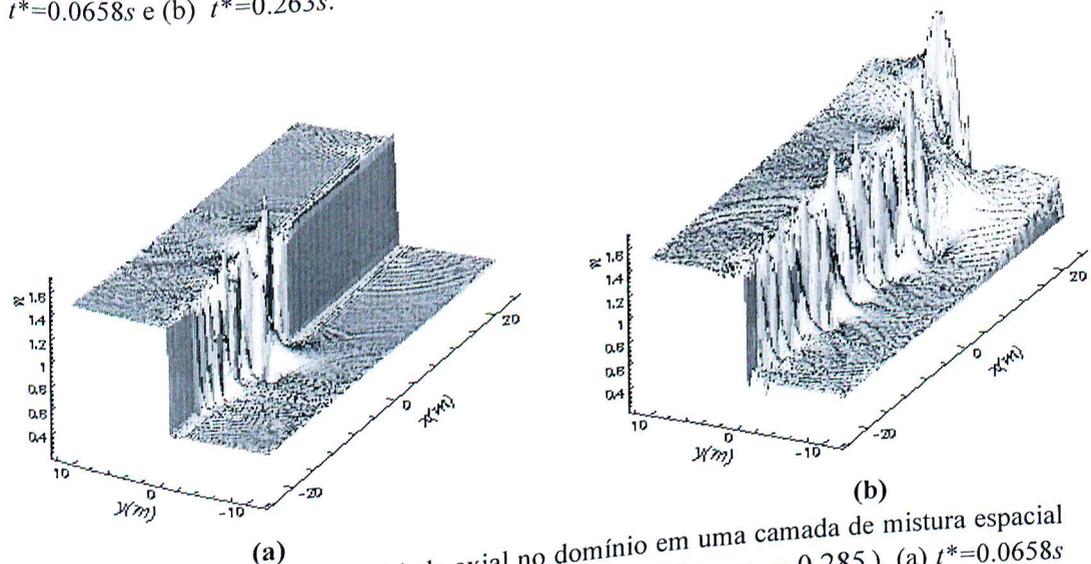


Figura 4.37: Evolução da velocidade axial no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0,367$, $Pr_\infty = 0,72$, 256×256 , $\eta_v = 0,45$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0.0658s$ e (b) $t^*=0.263s$.

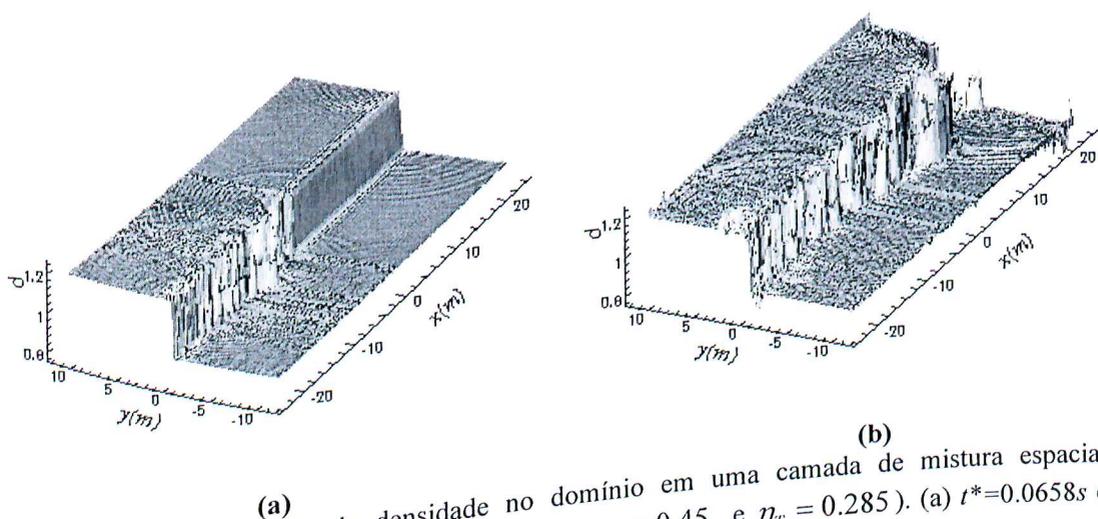


Figura 4.38: Evolução da densidade no domínio em uma camada de mistura espacial ($Re_\infty=3.5 \times 10^5$, $M_\infty=0,367$, $Pr_\infty = 0,72$, 256×256 , $\eta_v = 0,45$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0.0658s$ e (b) $t^*=0.263s$.

4.3 Resultados Quantitativos

Pretende-se nesta subsecção determinar alguns resultados quantitativos que permitam comparar os cálculos realizados neste estudo com outros resultados existentes na literatura. Inicialmente, calculou-se os espectros médios espaciais unidimensionais, na direção axial, de temperatura e energia cinética, os quais foram mediados ao longo da espessura de vorticidade. Estes espectros são calculados, aplicando-se a Transformada Rápida de Fourier (FFT) sobre os resultados numéricos para temperatura adimensional e energia cinética, também, adimensional (definida como $k = \frac{1}{2} |\vec{V}|^2$, onde \vec{V} é o vetor velocidade), em uma determinada posição transversal, y , e em um dado instante de tempo, t , como:

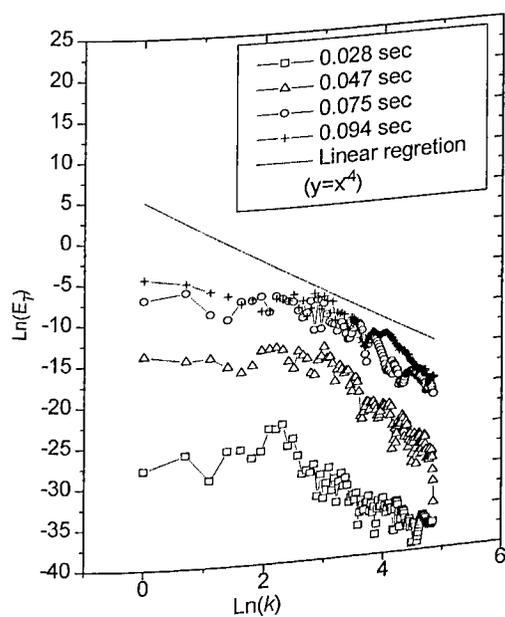
$$\hat{\mathfrak{R}}(k_x, y_i, t_k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi(x, y_i, t_k) e^{-ik_x x} dx ; \quad \text{com } i=0,1,\dots,N_y \text{ e } k=1,2,\dots \quad (4.1)$$

onde $\hat{\mathfrak{R}}(k_x, y_i, t_k)$ é a transformada de Fourier para um específico conjunto de dados, $\xi(x, y_i, t_k)$, que pode ser tanto a temperatura, como a energia cinética, em uma direção transversal y_i definida, para um determinado tempo t_k e k_x é o número de onda local.

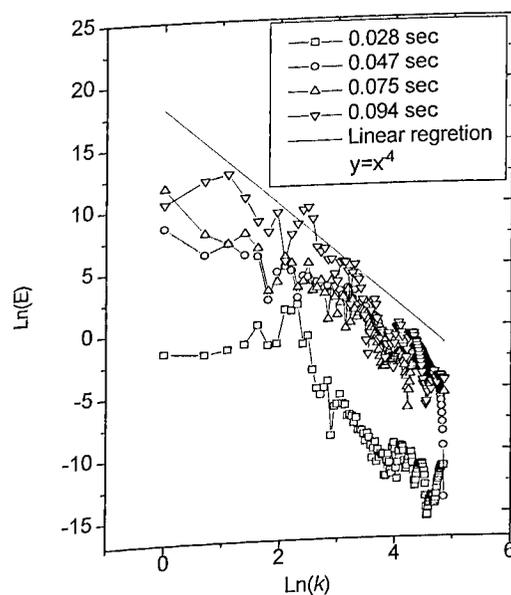
Os espectros médios são obtidos integrando os resultados da Eq. 4.1 ao longo da espessura de vorticidade, tal como:

$$E_0(k_x, t_k) = \frac{1}{2} \int_{-\delta(t)/2}^{\delta(t)/2} \left| \hat{\mathfrak{R}}(k_x, y_i, t_k) \right|^2 dy \quad \text{com } k=1,2,\dots \quad (4.2)$$

Os espectros de energia cinética e de energia térmica adimensionais estão mostrados nas Figs. 4.39.a e 4.39.b, respectivamente, como uma função do número de onda adimensional, para várias tomadas de tempo, entre os quais encontra-se incluso o tempo referente à camada de mistura completamente desenvolvida. Os cálculos destes espectros de energia, usando as propriedades nas formas adimensionais não afetam a característica do espectro. Os resultados referente a estas figuras foram obtidos, a partir dos cálculos da simulação de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal, com número de Reynolds $3,5 \times 10^5$, com uma taxa de velocidade de $\eta_v = \infty$ e com uma taxa de temperatura de $\eta_T = 0,285$ (os quais são similares ao resultados apresentados nas Figs. 4.9 a 4.11).



(a)



(b)

Figure 4.39: Espectros da camada de mistura em desenvolvimento temporal ($Re_\infty = 3.5 \times 10^5$, $M = 0,27$, $Pr = 0,72$, $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) Espectro de energia térmica para várias tomadas de tempo e (b) Espectro de energia cinética para várias tomadas de tempo.

Como pode ser visto nas Figs. 4.39a e 4.39b, as regiões inerciais da energia térmica e da energia cinética estendem sobre o mesmo intervalo de números de onda. Este fato apresenta uma característica diferente daquela evidenciada por Comte *et al.*, (1989), onde estes autores encontraram que a região inercial térmica estende sobre um intervalo de números de onda maior do que aquele correspondente da energia cinética. A argumentação apresentada pelos autores para esta diferença na estrutura inercial dos espectros de energia térmica e energia cinética, caracteriza-se no fato da espessura de temperatura ser mais larga do que a espessura de vorticidade. Neste estudo, isto também não ocorre, tendo as espessuras de vorticidade, de temperaturas e de densidades as mesmas amplitudes (ver Figs. 4.9 a 4.11). Além disso, o número de Prandtl nos dois trabalhos foram diferentes (neste estudo o número de Prandtl foi igual a 0.72 e no estudo dos autores citados, este número foi igual a 1). Considerando-se que o número de Prandtl estabelece a razão de difusibilidade entre velocidade e temperatura, existe uma razão mais forte para esperar que a espessura de temperatura seja igual a espessura de vorticidade, no estudo de Comte *et al.* (1989) do que neste estudo. Entretanto, o número de Prandtl não interfere na distribuição final dos campos na camada de mistura, após estes alcançarem o estágio completamente desenvolvido. Por isto, no estágio após o desenvolvimento da camada de mistura, os campos de velocidade, de temperatura e densidade deverão estar completamente acoplados. Portanto, nota-se nas Figs. 4.9 a 4.11 que ocorre fortes interações entre os campos de velocidade e densidade (e em consequência, entre os campos de temperatura e de pressão) na camada de mistura completamente desenvolvida, portanto, estes campos deverão ser correlatos. Este acoplamento entre os campos constitui um fato bastante consistente, assim, uma coerência forte entre os campos deve ser esperada. Observa-se, também, nos espectros de energia térmica e de energia cinética da camada de mistura em

desenvolvimento temporal, expostos na Fig. 4.39, que ambos espectros seguem num mesmo intervalo de número de onda uma lei igual a k_x^{-4} , aproximadamente de acordo com a lei $k_x^{-11/3}$, caracterizando que a estrutura do escoamento segue a lei da cascata inversa de energia cinética da turbulência isotrópica bidimensional. Este fato mostra de forma clara que a estrutura de uma camada de mistura temporal é constituída, predominantemente, por vórtices quase-bidimensionais, como constantemente evidenciado na literatura (Browand e Winant). Esta semelhança entre as leis que regem os espectros de temperatura e energia cinética caracteriza uma outra discordância entre nosso trabalho e o de Comte *et al*, (1989). Estes autores concluíram em seus cálculos que o espectro de energia térmica, diferentemente da conclusão obtida neste estudo, segue uma lei de $k_x^{-5/3}$, característica de uma turbulência tridimensional.

A Fig. 4.40a. mostra a inclinação da espessura de vorticidade determinado para uma camada de mistura desenvolvendo espacialmente, em $t^* \approx 0,158s$ e $t^* \approx 0,207s$, respectivamente. Observa-se nesta figura que ocorre uma evolução diferente para $\delta_x(x)$, quando os tempos considerados são diferentes. Observa-se na Fig. 4.40a, quando $t^* \approx 0,158s$, no qual a camada de mistura não se encontrava completamente desenvolvida, portanto, a taxa de dispersão espacial da camada não havia alcançado o seu valor universal. Por outro lado, observa-se na Fig. 4.40a, quando $t^* \approx 0,207s$, no qual a camada de mistura já se encontra completamente desenvolvida, em consequência, a taxa de dispersão espacial da camada alcançou um valor aproximadamente constante, caracterizando um crescimento linear de $\delta_x(x)$ com x , ou melhor, caracterizando um crescimento linear da camada de mistura. Neste estudo, as taxas de dispersão espacial dimensional e

adimensional são as mesmas; isto é, igual a 0,0184 (como ajustado no gráfico). Esta taxa pode ser representada seguindo a lei de dispersão espacial, como segue

$$\frac{\partial \delta_x}{\partial x} = 0.0814 \underbrace{\frac{\bar{U}}{U}}_{=\alpha_1} \underbrace{\frac{U}{\bar{U}}}_{=\eta_v} = 0.162\eta_v \quad (4.3)$$

onde $\alpha_1 = 0,162$ é a constante denominada de constante universal que foi encontrada experimentalmente como sendo $\alpha_1 = 0,181$ (Bernal *et al*, 1979).

A Fig. 4.40.b mostra o crescimento da espessura da vorticidade adimensional, como uma função do tempo adimensional, determinado para uma camada de mistura temporal, para $\eta_v = 0,5$ e $\eta_v = \infty$, respectivamente. Observa-se nesta figura que as taxas de dispersão temporal, representada pela inclinação das curvas, são diferentes para as duas camadas de mistura em desenvolvimento temporal; por exemplo, para $\eta_v = 0,5$ e $\eta_v = \infty$, os quais são 0,033 e 0,0634, respectivamente (como ajustado no gráfico). Colocando-se estas taxas de dispersão temporal na forma dimensional, encontra-se as seguintes relações:

$$\frac{\partial \delta_t}{\partial t} = 0,033\bar{U} = \underbrace{0,033 \frac{\bar{U}}{U}}_{=\alpha_2} U = 0,066U \quad \text{e} \quad \frac{\partial \delta_t}{\partial t} = 0,0634\bar{U} \quad (4.4,5)$$

Nestes estudos, com $\eta_v = 0,5$ e $\eta_v = \infty$, respectivamente, as velocidades \bar{U} e U são iguais assim conduzindo a um coeficiente α_2 idêntico nos dois casos.

A taxa de dispersão para a camada de mistura temporal, com $\eta_v = \infty$ não pode ser representada na forma dada pela Eq. 4.4, de forma similar aquela representada para a

camada de mistura temporal, com $\eta_v = 0,5$, porque esta camada de mistura temporal é referente a um escoamento contracorrente, portanto $U = 0$. A partir da Eq. 4.4 encontrou-se que $\alpha_2 = 0,066$. Se considera que as estruturas coerentes têm a mesma celeridade nos dois problemas (temporal x espacial), as quais deverão ser aproximadamente igual \bar{U} (Lesier, 1989), para que haja uma equivalência exata entre os dois problemas, a seguinte relação deverá prevalecer, $\alpha_1 = \alpha_2$, o que não foi o caso neste estudo. No cálculo da taxa de dispersão foi realizada uma média da espessura de vorticidade em todo o domínio para cada tomada de tempo. Acredita-se que este procedimento não seja o melhor caminho para determinar a taxa de dispersão, a “cross-correlation” para amostras temporais de dados, em duas diferentes posições pode dar melhores resultados.

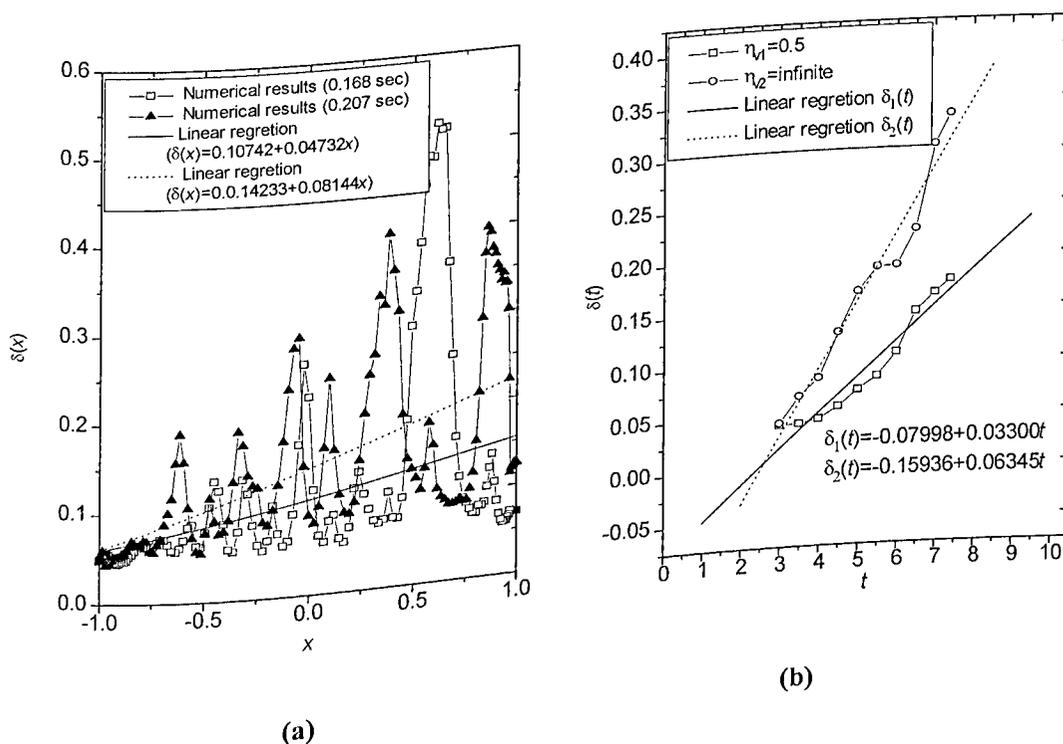


Figure 4.40: (a) Inclinação da espessura de vorticidade para uma camada de mistura espacial ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0,285$). e (b) Inclinação da espessura de vorticidade para uma camada de mistura temporal ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$ e $\eta_T = 0,285$).

As Figs. 4.41 a 4.43 ilustram as inter-correlações entre os campos de velocidades, em três seções transversais (isto é, em $x = \frac{1}{3}L_x$, $x = \frac{1}{2}L_x$ e $x = \frac{2}{3}L_x$, respectivamente), para uma camada de mistura temporal, cujos cálculos foram realizados, utilizando os seguintes parâmetros: $Re_\infty = 3.5 \times 10^5$, $M_\infty = 0.27$, $Pr_\infty = 0.72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0.285$. Os resultados mostrados nestas figuras envolveram cálculos, onde se aplicou os conceitos de Inter-correlação (“Cross-correlation”), definida como segue:

$$R_{xy}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) y_k(t + \tau) dt \quad (4.6)$$

onde $x_k(t)$ e $y_k(t)$ representa dois conjunto de dados, evoluindo no tempo, com $k=1,2,3,\dots$, onde o índice inferior k representa eventos diferentes, $R_{xy}(\tau, k)$ representa a inter-correlação entre dois eventos, T é o tempo total de aquisição e τ representa o atraso ou a defazagem que permite caracterizar os níveis de correlação entre as flutuações correlatas do sinal.

Observa-se que se considerar $\tau=0$ na Eq. 4.6, obtém-se a seguinte relação:

$$R_{xy}(\tau = 0, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) y_k(t) dt = \overline{x_k(t) y_k(t)} \quad (4.7)$$

a qual fornece a variância média no tempo entre os sinais.

Neste estudo aplicou-se as Eqs. 4.6 e 4.7 para gerar as Figs. 4.41 a 4.43, utilizando os campos das componentes de velocidades, $u(t)$ e $v(t)$, respectivamente e o campo de densidade, $\rho(t)$. Para tanto, considerou-se os seguintes conjuntos de dados:

$$x_1(t) = \rho(t)u'(t), \quad y_1(t) = u'(t), \quad (4.8)$$

$$x_2(t) = \rho(t)u'(t), \quad y_2(t) = v'(t) \quad (4.9)$$

e

$$x_3(t) = \rho(t)v'(t), \quad y_3(t) = v'(t) \quad (4.10)$$

onde, $u'(t)$ e $v'(t)$ representam as flutuações dos campos de velocidades axiais e transversais. As relações entre as flutuações dos campos de velocidade com os respectivos campos são dados como segue:

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \quad \text{e} \quad v(t) = \bar{v} + v'(t), \quad (4.11)$$

onde \bar{u} e \bar{v} são as médias no tempo que para um T , a média no tempo e a média estatística converge para um mesmo valor e os sinais flutuantes no tempo assumem um caráter de fenômeno estacionário.

Portanto, aplicando-se na Eq. 4.6, os sinais $x_1(t)$ e $y_1(t)$, $x_2(t)$ e $y_2(t)$ e $x_3(t)$ e $y_3(t)$, definidos pelas Eqs. 4.8 a 4.10, obtém-se a inter-correlação para as seguintes variáveis: $\rho u'u'$, $\rho u'v'$ e $\rho v'v'$. E em particular, conforme descrito pela Eq. 4.7, quando $\tau=0$, obtém-se as respectivas tensões de Reynolds; isto é, $\overline{\rho u'u'}$, $\overline{\rho u'v'}$ e $\overline{\rho v'v'}$. A inter-correlação, determinada a partir de um par de sinais aleatório, fornece importantes conclusões sobre as propriedades fundamentais contidas nos sinais. Entre as típicas propriedades de um par de sinais que podem determinadas, a partir da inter-correlação, pode-se citar detecção de periodicidade, predição de ruídos no sinal, medidas do tempo de retardamento entre os

sinais, o que conduz a identificação da frequência fundamental predominante no sinal. Entretanto, neste trabalho, o objetivo principal foi o de identificar o comportamento das tensões de Reynolds em algumas seções do escoamento.

O mais preciso e o mais rápido procedimento para calcular a inter-correlação é utilizando as transformadas de Fourier, determinadas através de algum algoritmo de FFT (Fast Fourier Transform), contidas em vários códigos comerciais. Neste estudo utilizou-se as ferramentas disponíveis no MATLAB (Mathematics of Laboratory). A determinação da inter-correlação, utilizando a FFT é possível, introduzindo o conceito de Densidade Espectral Bilateral, $S_{xy}(f)$, dada como segue:

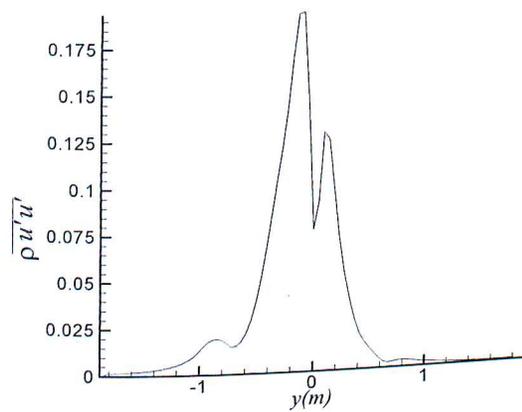
$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (4.12)$$

ou

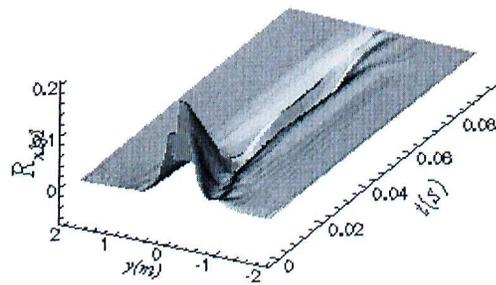
$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (4.13)$$

Portanto, a partir das Eqs. 4.12 e 4.13, conhecendo-se $S_{xy}(f)$ é possível conhecer $\hat{R}_{xy}(\tau)$ ou vice-versa. Assim, considerando-se $\tilde{S}_{xy}(f)$ como o valor estimado $S_{xy}(f)$, o qual é determinado pela seguinte equação:

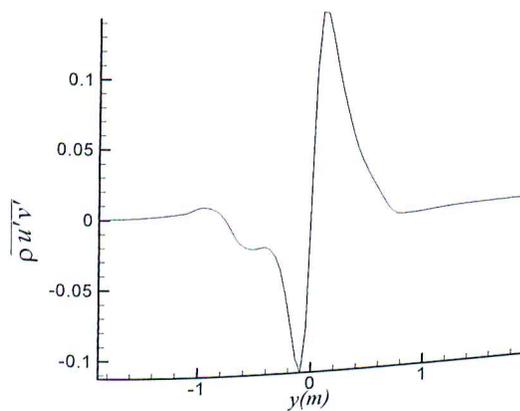
$$\tilde{S}_{xy}(f_k) = \frac{1}{N\Delta t} [X^*(f_k)Y(f_k)] \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (4.14)$$



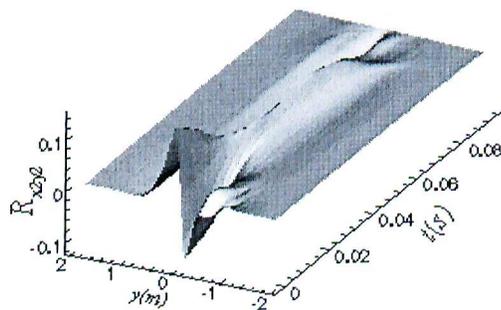
(a)



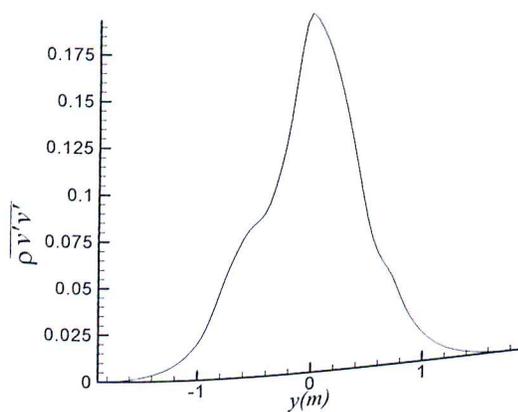
(b)



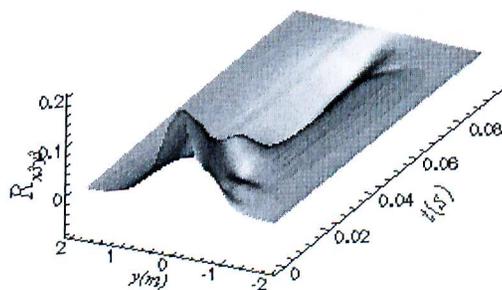
(c)



(d)

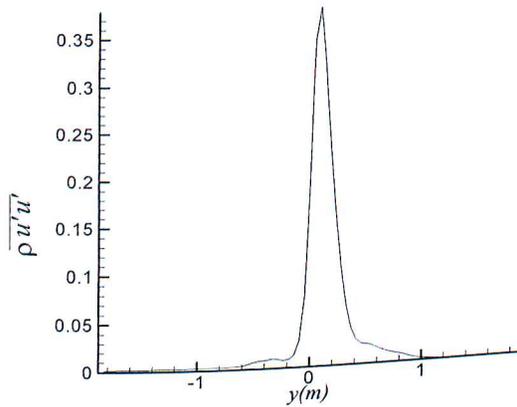


(e)

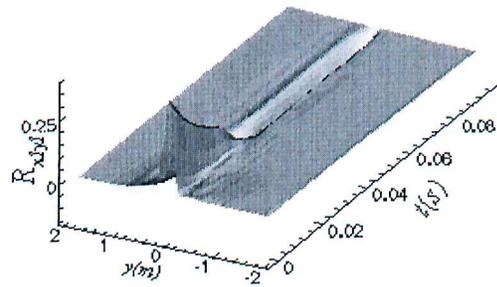


(f)

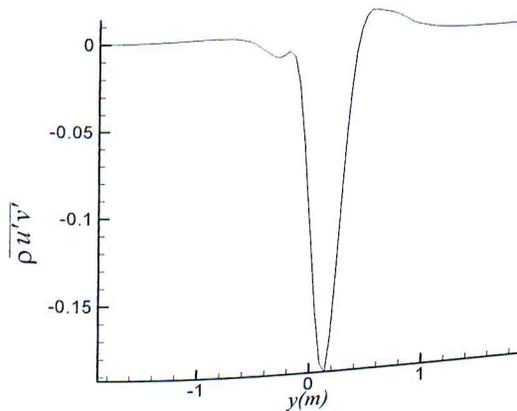
Figura 4.41. Correlações entre os campos na seção transversal, em $x = \frac{1}{3} L_x$ ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) Distribuição das tensões axiais de Reynolds ao longo de y , (b) auto-correlação do campo de velocidade axial; (c) Distribuição das tensões cruzadas de Reynolds ao longo de y , (d) inter-correlação entre os campos de velocidades axiais e transversais; (e) Distribuição das tensões transversais de Reynolds ao longo de y , (f) auto-correlação do campo de velocidade transversal.



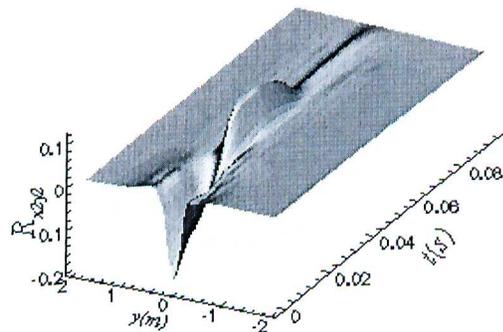
(a)



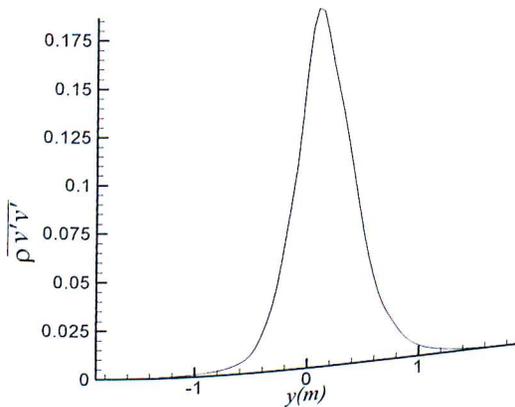
(b)



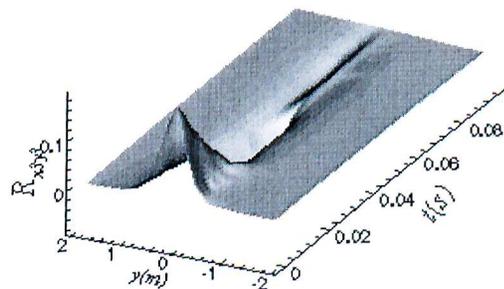
(c)



(d)

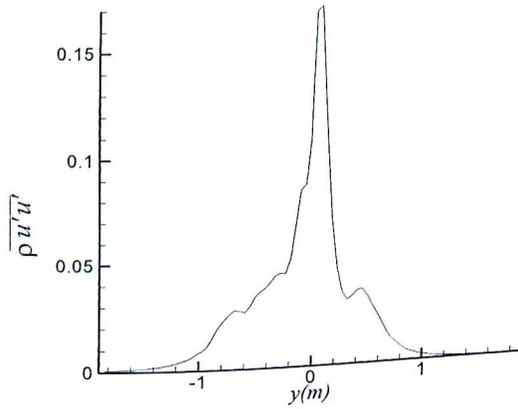


(e)

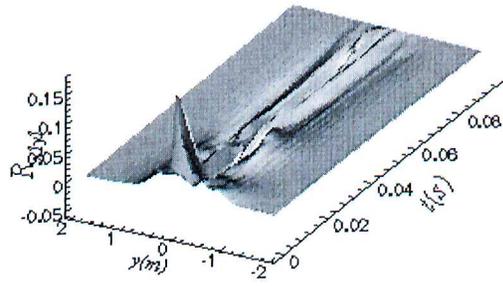


(f)

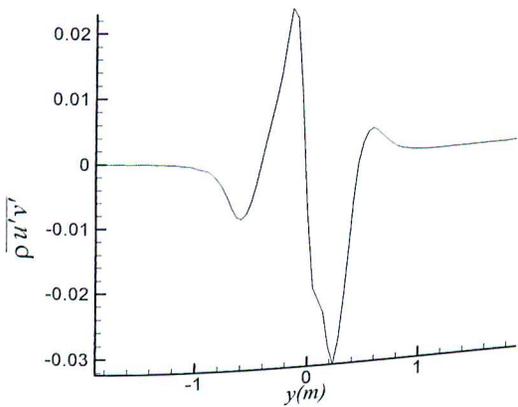
Figura 4.42. Correlações entre os campos na seção transversal, em $x = \frac{1}{2} L_x$ ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) Distribuição das tensões axiais de Reynolds ao longo de y , (b) auto-correlação do campo de velocidade axial; (c) Distribuição das tensões cruzadas de Reynolds ao longo de y , (d) inter-correlação entre os campos de velocidades axiais e transversais; (e) Distribuição das tensões transversais de Reynolds ao longo de y , (f) auto-correlação do campo de velocidade transversal.



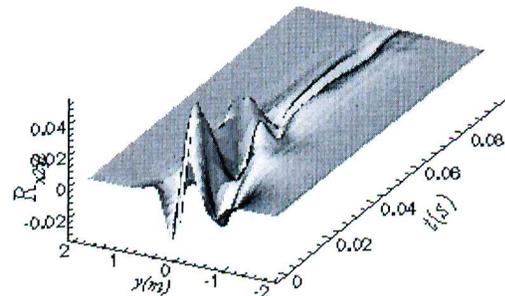
(a)



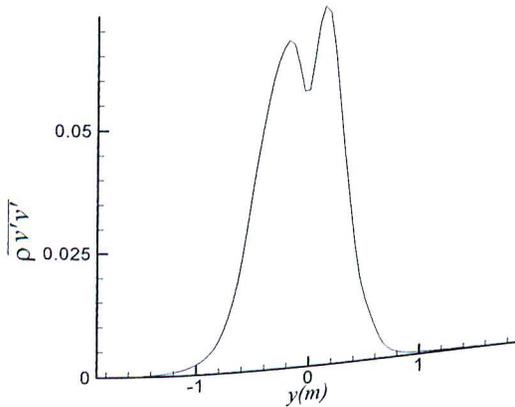
(b)



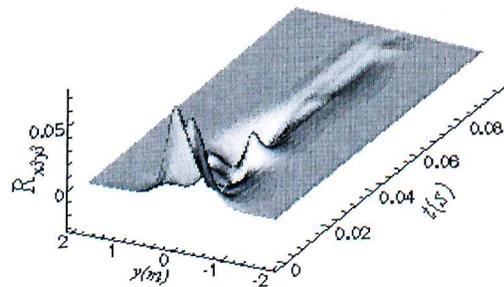
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.43. Correlações entre os campos na seção transversal, em $x = \frac{2}{3} L_x$ ($Re_\infty = 3,5 \times 10^5$, $M_\infty = 0,27$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) Distribuição das tensões axiais de Reynolds ao longo de y , (b) auto-correlação do campo de velocidade axial; (c) Distribuição das tensões cruzadas de Reynolds ao longo de y , (d) inter-correlação entre os campos de velocidades axiais e transversais; (e) Distribuição das tensões transversais de Reynolds ao longo de y , (f) auto-correlação do campo de velocidade transversal.

onde $X^*(f_k)$ é o conjugado da transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ e $Y(f_k)$ é a transformada de Fourier de um sinal $y(t)$. Os sinais $x(t)$ e $y(t)$ são definidos em conformidade com as Eq. 4.8 a 4.10.

A inter-correlação, $\hat{R}_{xy}(\tau)$, é determinada através da transformada inversa de Fourier, usando o algoritmo de FFT, da Densidade Espectral Bilateral estimada, $\tilde{S}_{xy}(f)$, donde obtém uma inter-correlação, sem erros sistemáticos, pelas relações abaixo:

$$R_{xy}(r\Delta t) = \begin{cases} \frac{(N-r)}{N} \hat{R}_{xy}(r\Delta t) & r = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{(r-N)}{N} \hat{R}_{xy}[(2N-r)\Delta t] & r = N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (4.15)$$

A descrição apresentada acima permite compreender os resultados apresentados nas Figs. 4.41 a 4.43. Em cada uma destas figuras, correspondentes à sessões diferentes do domínio, estão representadas as seguintes propriedades: (a) Distribuição das tensões axiais de Reynolds ao longo de y , (b) inter-correlação do campo de velocidade axial; (c) Distribuição das tensões cruzadas de Reynolds ao longo de y , (d) inter-correlação entre os campos de velocidades axiais e transversais; (e) Distribuição das tensões transversais de Reynolds ao longo de y , (f) inter-correlação do campo de velocidade transversal.

Como explicado na introdução deste estudo, a turbulência na camada de mistura pode ser mantida somente se existe um fluxo contínuo de momento para dentro da camada de mistura, proveniente do escoamento da camada de fluido de alta velocidade, que transporta um alto momento e/ou um correspondente fluxo contínuo de momento, também, para dentro da camada de mistura, proveniente do escoamento da camada de fluido de baixo

velocidade, com um baixo momento. Com o passar do tempo, as trocas de momento entre estas duas camadas acumulam-se, cujas contribuições constituem as tensões Reynolds, $\overline{u'v'}$. Frequentemente, este transporte turbulento de momento é caracterizado como um processo aleatório, constituindo um ponto de vista entre outros. Para alguns, seria suficiente afirmar que o transporte de momento é o resultado de uma acumulação de muitos pequenos eventos de transporte, sem conexão. Uma segunda interpretação estabelece que o transporte de momento, realmente, pode surgir como resultado de uma sucessão definida de eventos, mas esta sucessão é complexa para ser entendida em detalhes, sendo, então, melhor descreve-la como aleatória (Browand e Chih-ming Ho, 1983). Estes autores pensam que as contribuições do fluxo de momento são responsáveis pela manutenção da turbulência, que surgem de um modo simples e compreensível, através do resultado das interações entre os vórtices que compõe a estrutura das grandes escalas. O fluxo de momento que contribui significativamente para o tensor de Reynolds acontece em curtos momentos de duração (denominado de *pulso de momento*) comparável ao período da passagem dos vórtices. A amplitude destes pulsos de momento independe da posição vertical na camada de mistura. O sinal da tensão de Reynolds está associado com a orientação das estruturas dos vórtices. Por exemplo, a espessura da camada de mistura mantém uma associação com o sinal das tensões de Reynolds. Numa região do escoamento, cuja espessura da camada de mistura é constante, então, a tensão de Reynolds cruzada é negativa, tanto na região de contato dos vórtices com a camada de fluido alta velocidade, como na região de contato dos vórtices com a camada de fluido de baixa velocidade (este fato pode ser verificado na Fig. 4.46c). Isto significa que a turbulência está perdendo energia pelo transporte excessivo de pulsos de momento para os dois lados da corrente. A mudança de positivo para negativo no sinal da tensão cruzada de Reynolds está associado

com a orientação (ou inclinação) da distribuição de vorticidade. Quando o emparelhamento de vórtices tem uma inclinação favorável (apresentando uma rotação favorável à camada de alta velocidade e desfavorável à camada de baixa velocidade), a tensão cruzada de Reynolds é positiva na região de contato entre os vórtices e a camada de fluido de alta velocidade, ocorrendo uma transferência de energia do fluido de alta velocidade para os grandes vórtices. Por outro lado, a tensão cruzada de Reynolds é negativa na região de contato entre os vórtices e a camada de fluido de baixa velocidade, ocorrendo uma transferência de energia dos grandes vórtices para a camada de fluido de baixa velocidade. Esta descrição é caracterizada de forma evidente nas Figs. 4.41c e 4.43c.

Os valores decrescentes das tensões de Reynolds, quando se aproxima das extremidades laterais da camada de mistura, não surgem devido a diminuição na amplitude das pequenas flutuações, mas sim, devido a diminuição da interferência de eventos de grandes amplitudes que atuam com menos frequências próximo das bordas laterais da camada.

Normalmente, a função de inter-correlação para fenômenos correlatos deve apresentar um pico bem definido, caracterizando a periodicidade destes fenômenos. Contudo, como em uma camada de mistura temporal, devido aos mecanismos de emparelhamento e rotação, os vórtices embuidos neste mecanismo sofre um processo de coalescência. A seção escolhida para observar a evolução no tempo das grandezas do escoamento, nem sempre coincidirá com uma posição, na qual pode caracterizar a evolução de um vórtice ao longo do tempo; isto é, ela poderá estar situada em posição entre dois vórtices. Por este fato, as Figs. 4.41b, d e f e 4.42b, d e f, referentes às seções $x = \frac{1}{3}L_x$ e $x = \frac{1}{2}L_x$, não evidencia algum pico, devido a este fato. Contudo, na Fig. 4.43b, d e f,

referente à $x = \frac{2}{3}L_x$, observa-se um pico bem definido nas três figuras, o qual apresenta um tempo de atraso $\tau^* = 0.028$ segundos. Conjetura-se que este tempo de atraso refere-se ao período fundamental médio descrito pela evolução dos vórtices localizados na referida sessão, o qual induz uma frequência $f = \frac{1}{\tau} = 36.24$ Hz. Assim, utilizando a seguinte relação $\lambda_a f_a = C$, onde C é a velocidade de propagação das perturbações. Assim $C = 36,24$, ou de uma forma melhor:

$$\frac{\partial \delta_t}{\partial t} = C \frac{\partial \delta_x}{\partial x} = \frac{C}{U} \frac{\partial \delta_x}{\partial x} U = \frac{36,24}{100} * 0,0814U = 0,03U \quad (4.16)$$

onde $\frac{\partial \delta_x}{\partial x} = 0,0814$, conforme dado pela Eq. 4.3, comparando os valor obtido pela Eq. 4.16 com o valor obtido na Eq. 4.4, observa-se que estes estão bastante próximos, os quais foram calculados por procedimentos diferentes.

As Fig. 4.44 e 4.45 mostram, com $\eta_v = \infty$ e $\eta_v = 0,5$, respectivamente, a transformada de Fourier para a componente da velocidade transversal em função de x (onde x é a direção axial do escoamento), em $y=0$ e para várias tomadas de tempo. Os gráficos contidos nestas figuras têm como ordenada o número de onda, k_x . Os sinais referentes à componente de velocidade transversal utilizados no cálculo da transformada de Fourier foram tomados nas suas formas adimensionais, produzindo, assim, uma transformada de Fourier adimensional. Contudo, para melhor ilustrar os resultados, colocou-se a ordenada de cada gráfico na forma dimensional; isto é, a ordenada esta representada pelo número de

onda dimensional. Para aqueles que gostariam de verificar o valor da transformada de Fourier na sua forma dimensional, é suficiente aplicar a seguinte relação:

$$\hat{V}^*(K_x) = V_\infty \frac{L_x}{2} \hat{V}(K_x) \quad (4.17)$$

onde $\hat{V}^*(K_x)$ é a transformada de Fourier da componente de velocidade transversal na forma dimensional, $\hat{V}(K_x)$ é a transformada de Fourier da componente de velocidade transversal na forma adimensional. O valor de L_x utilizado nestes cálculos foi de 7,538m e o valor de V_∞ é de 100m/s.

Para melhor compreender os gráficos mostrados nas Fig. 4.44 e 4.45, é apresentado um desenvolvimento matemático nos próximos parágrafos, estabelecendo uma relação entre as amplitudes dos modos espaciais e a transformada de Fourier. Para tanto, considere-se uma amostragem de dados aleatórios, neste caso, representado pela componente de velocidade transversal em função de x , cuja média deste sinal é zero. A transformada de Fourier deste sinal é representada por

$$\hat{V}(K_x) = \int_0^L v(x) e^{-j2\pi K_x x} dx \quad (4.18)$$

onde o número de onda adimensional é dado por $K_x = 2k$, com $k=1,2, \dots, N_x/2$, ou na forma dimensional $K_x^* = \frac{2K_x}{L_x}$, com $k=1,2, \dots, N_x$,

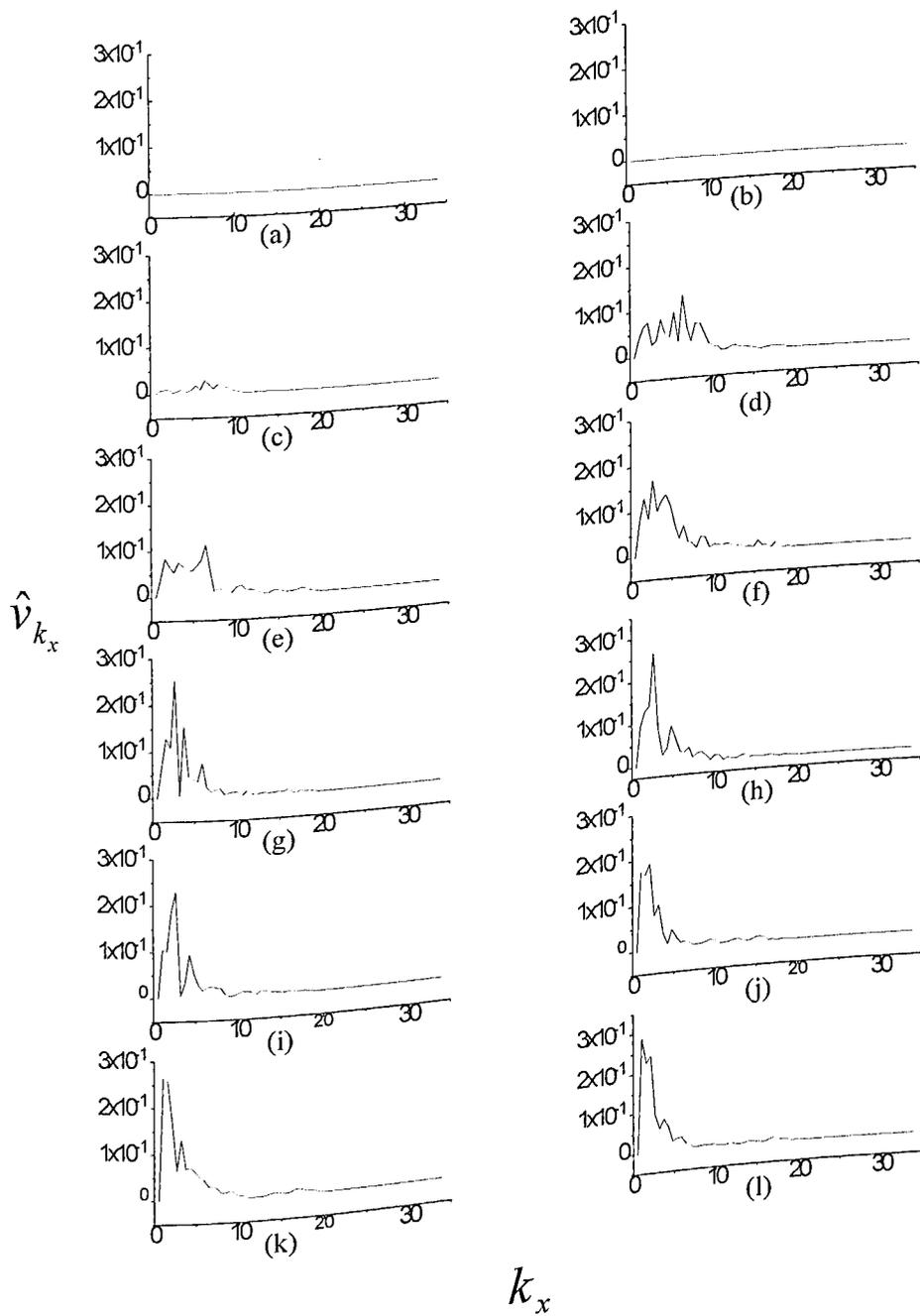


Figura 4.44. Espectros, mostrando a redução do número de onda na evolução no tempo de uma simulação de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal ($Re_\infty=3,5 \times 10^5$, $M_\infty=0,27$, $Pr_\infty=0,72$, 128×128 , $\eta_v = \infty$ e $\eta_T = 0,285$). (a) $t^*=0,009s$; (b) $t^*=0,028s$; (c) $t^*=0,038s$; (d) $t^*=0,047s$; (e) $t^*=0,057s$; (f) $t^*=0,066s$; (g) $t^*=0,075s$; (h) $t^*=0,085s$; (i) $t^*=0,094s$; (j) $t^*=0,104s$; (k) $t^*=0,113s$ e (l) $t^*=0,122s$.

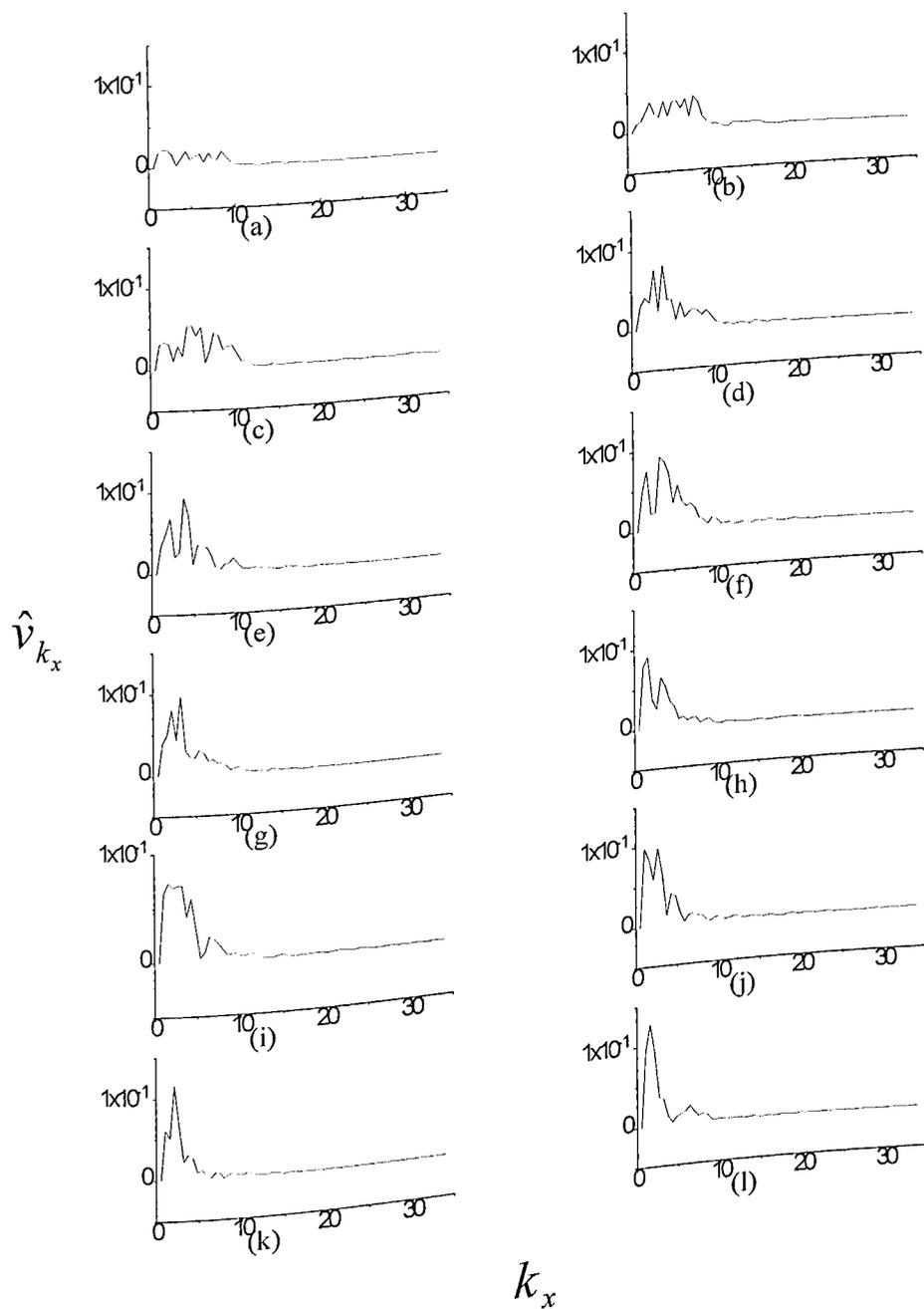


Figura 4.45. Espectros, mostrando a redução do número de onda na evolução no tempo de uma simulação de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal ($Re_\infty=3,18 \times 10^5$, $M_\infty=0,25$, $Pr_\infty = 0,72$, 128×128 , $\eta_v = 0,5$ e $\eta_T = 0$). (a) $t^*=0,075s$; (b) $t^*=0,084s$; (c) $t^*=0,094s$; (d) $t^*=0,105s$; (e) $t^*=0,113s$; (f) $t^*=0,122s$; (g) $t^*=0,131s$; (h) $t^*=0,141s$; (i) $t^*=0,151s$; (j) $t^*=0,160s$; (k) $t^*=0,169s$ e (l) $t=0,178s$.

Por outro lado, qualquer sinal, mesmo sendo completamente aleatório, pode ser representado por uma série de Fourier, cuja ordem de expansão depende do grau de

aleatoriedade do sinal. Assim, pode-se representar a componente de velocidade transversal na forma adimensional, como segue:

$$v(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\pi x} \quad (4.19)$$

onde A_n representa a amplitude de cada modo espacial contido no sinal (componente de velocidade transversal), definido por:

$$A_n = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} v(x) e^{-jn\pi x/L_x} dx \quad (4.20)$$

Observa-se através das Eqs. 4.19 e 4.20 que existe uma relação entre a transformada de Fourier e as amplitudes dos modos espaciais contidos no sinal da velocidade transversal, utilizada nestes cálculos, a qual é dada por:

$$A_n = \frac{\hat{V}(K_x)}{L_x} \quad (4.21)$$

Os gráficos apresentados na Fig. 4.44 foram efetuados, utilizando os cálculos referentes à simulação apresentada nas Figs. 4.9 a 4.17. Na Fig. 4.44a, observa-se um espectro representado por uma linha reta, isto significa que os modos espaciais presentes no sinal são desprezíveis, caracterizando o fato de que no escoamento existe somente a presença de um ruído branco aleatório. Já no gráfico apresentado na Fig. 4.44b aparecem as primeiras perturbações com amplitudes significativas, na ordem de 3×10^{-3} , com um pico

bem definido em um número de onda aproximadamente de $K_x = 6,37m^{-1}$. Estas perturbações são quase imperceptíveis visualmente. devido a escala do gráfico da Fig. 4.44b não ser apropriada, tendo em vista da necessidade manter uma escala homogênea para todos os gráficos contidos da Fig. 4.44. Considerando-se o número de onda referente ao modo fundamental mais amplificado, constatado em estudos experimentais, dado em Conte *et al.* (1989) como sendo $K_a = 0,4446/\delta_0$ (onde $\delta_0 = 0,06667m$), obtém-se o número de onda fundamental igual a $K_a = 6,667m^{-1}$. Por outro lado, comparando-se com o valor obtido nos cálculos (dado na Fig. 4.44b, como sendo $K_x = 6,37m^{-1}$), observa-se uma boa aproximação do número de onda fundamental, determinado na simulação, com aquele determinado experimentalmente (com um erro relativo de 4,45%). Observa-se que o tempo referente a Fig. 4.9a, onde é visual o início da formação dos vórtices, é muito próximo do tempo referente ao gráfico da Fig. 4.44b. Estas duas figuras (4.9a e 4.44b) ilustram de forma complementar os aspectos da instabilidade de Kelvin-Helmoltz que predomina no estágio inicial da camada de mistura temporal. O pico referente ao modo fundamental, constatado na Fig. 4.44b torna mais evidente nas figuras subsequentes, devido a considerável amplificação deste modo. Contudo, observa-se, também, que ocorre em paralelo a esta amplificação, um alargamento da banda de número de onda. Estes fatos são evidenciados nas Figs. 4.44c e 4.44d, onde os valores dos picos mais significativos, são da ordem de $1,3 \times 10^{-1}$. Este aumento da amplitude do pico é devido ao fato das estruturas coerentes já estarem completamente formadas, como pode ser constatado na Fig. 4.9c, a qual possui um tempo de tomada de dados próximo ao da Fig. 4.44d. Contudo, o alargamento da banda de número de onda, conforme descrito acima, ocorre devido ao processo de emparelhamento, iniciado pelos vórtices, no estágio caracterizado pelas Figs. 4.44c a 4.44f.

Observa-se na Fig. 4.44g que o número de onda mais amplificado, definido pelo pico com maior amplitude, assume um valor de aproximadamente $K_x = \frac{K_a}{2} = 3,327m^{-1}$, que é exatamente a metade do número de onda fundamental. Se comparar a Fig. 4.44g com a Fig. 4.9g, as quais correspondem as mesmas tomadas de tempo, observa-se nesta última figura que os número de vórtices reduziu à metade devido ao processo de coalescência, em consequência, os vórtices aumentaram em tamanho, assumindo um comprimento de onda de aproximadamente, o dobro do comprimento de onda fundamental. Como os processos de emparelhamento e rotação, continuam a ocorrer no escoamento, induzindo a coalescência das estruturas de grandes escalas, até que os vórtices reduzem a um único. Este processo de coalescência de vórtices ocorre simultaneamente a uma progressiva redução no número de onda. Este aspecto pode ser evidenciado nas Figs. 4.44g a 4.44i, confirmando estas observações que são seguidamente comprovadas nos resultados experimentais.

A Fig. 4.45 apresenta o resultados dos mesmos cálculos efetuados na Fig. 4.44, porém, sobre os dados da Fig. 4.20. Nesta figura são observados os mesmos comportamentos descritos para a Fig. 4.44, para os processos de formação dos vórtices e coalescência.

Este comportamento descrito acima, correspondente às camadas de mistura temporal, é similar ao comportamento da evolução de camadas de misturas espaciais. Este comportamento foi comprovado inúmeras vezes em estudos experimentais, como em Brown e Roshko (1974). Estes autores descrevem que em camadas de mistura turbulentas espaciais, tanto o espaçamento entre os redemoinhos quanto os diâmetros destes aumentam ao longo da direção do escoamento. De forma geral, de acordo com os princípios de

similaridade presentes nas camadas de misturas, qualquer escala média tem que aumentar continuamente e linearmente com a direção axial do escoamento, e assim, é necessário que espaçamento médio e o tamanho médio dos redemoinhos aumentem suavemente e linearmente com a direção axial do escoamento. O que não está claro, a princípio, é que as escalas e os espaçamentos dos redemoinhos individuais, possivelmente, não podem aumentar continuamente. A razão é que cada redemoinho é uma entidade identificável que durante seu tempo de vida viaja a uma velocidade constante perto da velocidade média do escoamento. Esta velocidade convectiva é independente do tamanho ou localização do redemoinho. Espera-se, então, que a frequência com que os redemoinhos passam por qualquer localização na direção axial deve ser invariante, mas, por outro lado, a exigência de espaçamento crescente requer um decréscimo na frequência. A vorticidade que constitui um redemoinho não pode simplesmente desaparecer; assim, conclui-se que, como eles são transportados à jusante da borda inicial da camada de mistura, o redemoinho tem que se fundir de algum modo em estruturas maiores. Este processo ocorre continuamente e periodicamente ao longo da direção axial do escoamento. O processo de aglutinação foi descrito por Winant & Browand (1974) como uma consequência do mecanismo de emparelhamento de vórtices, no qual, em algum estágio, dois vórtices sucessivos aproximam-se, tornando instável, e passam a girar um ao redor do outro. Em seguida, eles se fundem em um único e esta nova estrutura é transportada na direção axial do escoamento. Sendo este processo repetido sucessivamente.

Um mecanismo, que permite dar um significado para esta característica do escoamento descrita acima, é a famosa cascata inversa, na qual a energia dos vórtices de pequenos comprimento de ondas alimenta os grandes vórtices, de grande comprimento de onda. Neste mecanismo, as instabilidades internas aos grandes turbilhões, ao invés de

destruí-los em partes, constituindo vórtices menores, ocorre um processo totalmente oposto, onde os pequenos vórtices são absorvidos pelas estruturas de grandes escalas.

5 Conclusões e Comentários Finais

Nesta seção são salientados os fatos mais significativos que caracterizam as contribuições do estudo realizado. Em função das conclusões extraídas no trabalho são feitas também algumas sugestões que poderão subsidiar idéias para futuras pesquisas, envolvendo tanto a técnica numérica utilizada como o problema físico estudado.

O principal objetivo do presente trabalho foi o desenvolvimento de um código computacional, utilizando a técnica espectral da colocação no estudo de camadas de mistura compressível e turbulenta, em desenvolvimento temporal e espacial, descritas pelas equações diferenciais governantes completas, na forma conservativa. O objetivo secundário da pesquisa seria analisar o comportamento das estruturas do escoamento. Contudo, tendo em vista a boa qualidade destes resultados e características físicas interessantes reveladas, concentrou-se também, grandes esforços na análise dos resultados, a fim de obter significativas conclusões com relação ao aspecto físico do problema estudado.

A metodologia espectral, apesar de ser extremamente precisa, tem sido pouco empregada para a solução de problemas regidos por equações diferenciais parciais complexas, principalmente, aqueles relacionados com a dinâmica dos fluidos. Um fator primário que tem contribuído para este fato é a complexidade de implementação computacional envolvida. Outros fatores a serem evidenciados, os quais com certeza, limita a aplicação da técnica espectral, trata-se da inviabilidade do uso desta técnica, quando considerada sobre um único domínio, em soluções implícitas, devido ela gerar matrizes cheias de grandes dimensões e com isso a velocidade de cálculo torna bastante baixa. Contudo, esta técnica tem sido pouco explorada e grandes evoluções podem ser atingidas que permitem otimiza-la e torna-la praticável para simular problemas complexos. Um procedimento a ser seguido que fará com que a técnica seja utilizável com eficiência é

a sua evolução para aplicação em elementos espectrais. Entretanto, os estudos realizados neste sentido foram, até o momento, limitados, mas este aspecto não será tratado aqui, pois a linha do trabalho dirigiu-se nesta primeira etapa em outro sentido. Com relação ao uso da técnica em soluções explícitas existem dois inconvenientes. Um primeiro é que a técnica é bastante instável, se utilizada em um procedimento de cálculo explícito, por tratar-se de um técnica de alta precisão, livre de dissipação numérica, gerando com isso flutuações numéricas indesejáveis que são amplificadas ao longo do tempo, causando divergências na solução. Um segundo inconveniente é que mesmo em procedimentos de cálculos explícitos, a técnica se aplicada sobre um único domínio, ainda continua com baixa velocidade de cálculo, devido as etapas de integração e diferenciação, necessárias para a solução de EDPS, serem realizadas, utilizando todos os pontos de colocação do domínio. Contudo, estes dois fatores negativos da técnica, quando aplicada em procedimento de cálculo explícito, podem ser sensivelmente melhorados, o quais constituíram os objetivos básicos deste estudo.

Portanto, neste estudo implementou-se o método espectral da colocação de Chebyshev aliado ao esquema de integração temporal de Runge-Kutta,, utilizando uma formulação discreta completamente explícita. Para a discretização das derivadas parciais envolvidas no equacionamento foram desenvolvidos e testados dois métodos de cálculo para as mesmas, sendo um deles a técnica de multiplicação de matrizes e um outro, utilizando a transformada rápida de Chebyshev (TRC). Nos testes efetuados sobre estas duas técnicas foi possível concluir que ambas apresentam resultados numéricos extremamente precisos. Entretanto, outros fatores que foram relevados permitiu caracterizar qual é a melhor técnica a ser implementada no esquema espectral em cálculos explícitos, quando se usa um único domínio de cálculo. Os fatores considerados foram a

velocidade de cálculo e a complexidade de implementação. A técnica da multiplicação de matrizes apresentou grande facilidade de implementação, porém, quando o número de pontos de colocação cresce a velocidade de cálculo decresce de forma exponencial, desta forma inibindo a simulação de casos com malhas mais refinadas. Já na técnica TRC, as dificuldades se invertem, sendo que esta técnica apresentou grande dificuldade de implementação, mas por outro lado, demonstrou ser extremamente rápida nos cálculos, com um tempo de processamento crescendo de forma logarítmica com relação ao aumento do número de pontos de colocação. A técnica TRC devido a sua dificuldade de implementação tem sido raro o seu uso na simulação de trabalhos em dinâmicas dos fluidos, contudo, ela foi escolhida para executar os cálculos neste estudo, devido a necessidade do uso de um número razoável de pontos de colocação para obter-se uma boa aproximação nos resultados. Em resumo, observou-se que a técnica TRC possibilitou tornar mais rápido o procedimento de cálculo explícito com o método espectral. Apesar de não ter sido realizada uma comparação de velocidade de cálculo com relação ao uso de outras técnicas clássicas de discretização, como diferenças finitas e volumes finitos, a velocidade atingida na implementação realizada, se não superou aquelas de outros esquemas, pelo menos aproximou bastante delas.

A instabilidade do procedimento de cálculo explícito relaciona-se com os cálculos das derivadas contidas nas equações governantes. As técnicas espectrais para cálculos das derivadas apresentaram ótimas aproximações para cálculos de derivadas, tanto para funções contínuas, quanto para funções descontínuas. Entretanto, em cálculos de derivadas para funções que apresentam descontinuidades, as aproximações, apesar de manter uma ótima definição da descontinuidade, apresentaram instabilidades oscilantes próximos dos pontos de descontinuidades, conhecidas como fenômeno de Gibbs. A fim de minimizar

este efeito e estabilizar a solução, foi implementado procedimentos de filtragem e alisamento no código computacional. Para tanto, realizou-se vários testes com vários tipos de funções filtro para montar os procedimentos de filtragens e/ou alisamentos, donde obteve significativas informações sobre o comportamento de vários filtros existentes na literatura. Entre outros, o filtro exponencial foi utilizado nestes cálculos, por ser mais versátil, permitindo variar a escala de corte, o que permite estabelecer um controle do nível de ruído do sinal que se deseja eliminar, sem entretanto, eliminar flutuações dos fenômenos físicos, compreendidos no mesmo intervalo de comprimentos de onda dos ruídos. Adicionalmente, elaborou-se sensores de filtragem e/ou alisamento que permitisse definir o momento de filtragem, os campos a serem filtrados e os locais da malha a ser filtrado. Assim, testou-se uma série de sensores, baseados nas propriedades do escoamento. Para o caso de escoamento estudado, o qual é constituído de regiões de intensas circulações, o sensor que melhor adaptou-se; isto é, que melhor detectou a influência dos erros provenientes do fenômeno de Gibbs, foi um sensor utilizando valores limites para a variação da energia interna local em um ponto de colocação.

Observa-se ao longo desta exposição que um árduo trabalho de implementação da técnica foi realizado, a fim de torná-la aplicável para simular escoamentos complexos. Os estudos realizados nesta pesquisa, com relação desenvolvimento da técnica, constitui objetivos do trabalho em grandes centros de pesquisas, e as conclusões obtidas são completamente originais.

O código computacional desenvolvido foi aplicado para simular escoamentos compressíveis, em altos e baixos números de Reynolds com e sem efeitos de estratificação. Contudo, é importante ressaltar que o código implementado comporta-se melhor para a simulação de escoamentos em altos números de Reynolds, devido o sistema de equações de

conservação utilizado estar na forma conservativa, sendo apropriado para simular escoamentos compressíveis, em altas velocidades. Entretanto, o código foi aplicado para simular escoamentos em baixos números de Reynolds ($Re=1000$), e com baixa estratificação, produzindo resultados satisfatórios. Geralmente, os códigos computacionais elaborados, usando os métodos espectrais, na sua grande maioria foram testados para simular escoamentos incompressíveis. O fato de elaborar um código espectral para simular escoamentos compressíveis, em alto número de Reynolds, constitui um fato novo e de interesse.

Neste trabalho concentrou-se a atenção na simulação de camada de mistura em desenvolvimento temporal, contudo, todas as conclusões obtidas na simulação deste problema servem de base para a compreensão das características da camada de mistura em desenvolvimento espacial, devido os mecanismos de emparelhamento e rotação, assim como o processo de coalescência serem completamente similar nas duas camadas. Em particular, simulou-se camadas de mistura em desenvolvimento temporal, com as camadas de alta e baixa velocidades concorrentes, onde os perfis de velocidades são totalmente semelhantes àqueles de uma camada de mistura espacial. Este tipo de estudo, dentro do nosso conhecimento, não são encontrados na literatura, acreditando-se que seja devido ao fato da maior dificuldade de desenvolvimento de instabilidades absolutas em camadas concorrentes, exigindo uma maior eficiência da técnica numérica. Estes resultados foram importantes para estabelecer uma relação entre as taxas de expansão da camada de mistura temporal com a taxa de crescimento da camada de mistura espacial, característica freqüentemente procuradas por outros pesquisadores.

A maioria das simulações apresentadas neste estudo foram efetuadas com altos números de Reynolds para camadas de mistura em desenvolvimento temporal, porém, os

resultados experimentais encontrados na literatura, são na maioria referentes à camadas de mistura espaciais e para baixos números de Reynolds, o que dificulta a comparação dos resultados deste estudo. Também, as simulações numéricas realizadas por outros pesquisadores, sobre camadas de mistura em desenvolvimento temporal, na sua maioria, são para baixos números de Reynolds, utilizando sistemas de equações invíscidas e incompressíveis, tais como as equações simplificadas de Orr-Sommerfeld utilizando um esquema (ψ, ω) , diferente do estudo em questão, onde o sistema de equação é completo e compressível. Estas formulações simplificadas têm mostrado ser deficientes para evidenciar os complexos aspectos do escoamento. Contudo, os resultados obtidos no atual estudo sobre os desenvolvimentos dos campos de velocidades e vorticidade neste estudo mostram grande semelhança, principalmente, com os resultados experimentais encontrados na literatura, e em particular, reforçando a idéia de que os processos de coalescência e emparelhamentos são independentes do número de Reynolds, ou seja, são invíscidos. Porém, uma significativa discrepância é observada quando se trata da análise da distribuição da energia térmica, onde na grande maioria dos outros estudos, a temperatura e a densidade são consideradas como escalares passivos, apresentando uma fraca interação dos campos de densidade e temperatura com o campo de velocidade. Estes fatos são observados através da distribuição da energia térmica, em função do número de onda. Os resultados obtidos neste estudo são perfeitamente concordante com uma cascata bidimensional em escoamentos convectivos, conforme descrito em Arpaci e Larsen. (1984).

Um fato importante observado nos resultados obtidos na simulação de camada de mistura estratificada, habitualmente pouco estudada, caracteriza-se que quando se aumenta os efeitos de estratificação aumenta também a intensidade da mistura. Em outras palavras,

ocorre um aumento das flutuações de pequenos comprimentos de onda na região de mistura, intensificando a turbulência. Este fato, também foi observado por Brown e Roshko, (1974), em seus estudos experimentos.

Tem sido ressaltado ao longo desta conclusão que concentrou-se grande parte da pesquisa na simulação de camadas de mistura temporal, contudo, os poucos resultados sobre simulação de camadas de misturas espaciais mostraram que a técnica pode simular com precisão tanto camadas de misturas temporais, como camadas de misturas espaciais.

Um outro ponto relevante que deve ser ressaltado, trata-se da questão do número de pontos da malha computacional. Com a utilização da técnica espectral na aproximação das derivadas existentes no sistema de equações de conservação, o número de pontos necessários para obter uma boa precisão são significativamente menor se comparados com o número de pontos das malhas das simulações de problemas semelhantes para obter níveis de precisão iguais, utilizando outros esquemas de aproximação numérica, tais como, diferenças finitas e elementos finitos. Isto deve-se ao fato do método espectral produzir boas aproximações mesmo com poucos pontos na malha do domínio computacional.

Baseado na exposição apresentada nos parágrafos descritos acima, é sugerido como subsídios para trabalhos futuros para continuação de estudo relacionados com a técnica espectral, a pesquisa de novas metodologias de sensores, para detecção da presença do fenômeno de Gibbs nos resultados, possibilitando a realização de filtragens, sem entretanto, afetar as pequenas escalas da turbulência. Também, como base para continuidade, deve-se introduzir ao código computacional a concepção de elementos espectrais, com intuito de melhorar a velocidade de processamento, tanto em procedimentos implícitos quanto em procedimentos explícitos, e ainda possibilitar a implementação de processamento paralelo. Além destas vantagens, a técnica de elementos

espectrais permite a adaptação da malha às irregularidades de geometria complexas, moldando cada parte do problema com um elemento de cálculo. Mas, a grande vantagem da técnica de elementos espectrais constitui na possibilidade de refinamento da malha em pontos estratégicos do escoamento.

Com relação ao prosseguimento de estudos relacionados às camadas de mistura, é importante introduzir no código computacional a terceira dimensão, possibilitando simular os efeitos de turbulência tridimensional sobre a estrutura do escoamento. Um outro aspecto interessante a ser pesquisado em escoamentos em cisalhamento livre constitui em introduzir modelos de turbulência para verificar as diferenças obtidas ao simular escoamento, utilizando processos de filtragem que realiza, além de eliminar as frequências espúrias originárias de erros numéricos, também exerce uma função de dissipação semelhante aos modelos de turbulência, sem contudo introduzir os efeitos das pequenas escalas sobre as grandes estruturas.

6 Referências Bibliográficas

- [1] -Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
- [2] -Anderson, J. D. R.; "Computational Fluid Dynamics"; McGraw-Hill, New-York; 1995.
- [3] -Arpaci, S. V., Larsen S. P.; "Convection Heat Transfer"; Prentice Hall, Inc; Englewood Cliffs, New Jersey; 1984
- [4] -Bendat, J. S., Piersol, A. G.; "Random Data: Analysis and Measurements Procedures"; John Wiley & Sons, 2nd Edition, 1986.
- [5] -Bernal, L. P.; "The Coherent Structure of Turbulent Mixing-Layers: I. Similarity of the Primary Vortex Structure, II. Secondary Streamwise Vortex Structure"; CAITECH Report; 1981.
- [6] -Breidenthal, R. E.; "A Chemically Reacting Turbulent Shear Layer"; Ph.D. Thesis. California Institute of Technology, 1978.
- [7] -Browand, F. K., Chih-Ming Ho; "The Mixing Layer: An Example of Quasi Two-Dimensional Turbulence"; Journal de Mécanique théorique et appliquée; Numéro spécial, pp. 99 à 120; 1983.
- [8] -Browand, F. K., Weidman, P. D.; "Large Scales in The Developing Mixing Layer"; Journal Fluid Mechanics, vol 76, part 1, pp. 127-144; 1976.
- [9] -Brown, G. L., Roshko, A.; "On density Effects and Large Structures in Turbulent Mixing Layers"; Journal Fluid Mechanic, vol 64, pp. 775-816, 1974.
- [10] -Cannuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A.: "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer-Verlag, 1988.

- [11]-Conte, P., Lesieur, M., Laroche, H. and Normand, X.; "Numerical Simulations of Turbulent Plane Shear Layers", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 360-380; 1989.
- [12]-Dimotakis, P., Brown, G. L., "The Mixing Layer at High Reynolds Number: Large-structure Dynamics and Entrainment"; Journal Fluid Mechanic, vol 78, pp. 535-560, 1976.
- [13]-Jameson, A., Schimidt, H. and Turkel, E.; "Numerical Solution of the Euler Equation by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Steppin Schemes", AIAA Pap. 81-1259; 1981.
- [14]-Jimenez, J.; "On the Visual Growth of a Turbulent Mixing Layer"; Journal Fluid Mechanic, vol 96, pp. 447-460; 1980.
- [15]-Konrad, J. H.; "An Experimental Investigation of Mixing in Two-dimensional Turbulent Shear Flow with Applications to Diffusion-Limited Chemical Reactions"; Project SQUID Report CIT-8-PU; 1976.
- [16]-Lesieur, M., 1990, "Turbulence in Fluids", Second revised edition, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- [17]-Maliska, C. R., 1995, " Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional ", Livros técnicos e científicos.
- [18]-Mulken, M.J.M., da Silveira Neto, A., Biage, M.: Spectral Methods for Solving Partial Differential Equations. To be published at the ENCIT / LATCYM congress in November 1996 in Florianópolis / SC / Brazil.
- [19]-Orlanski, I.; "A simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows"; J. Comp. Phys., vol 21, pp. 251-269, 1976.

- [20] -Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- [21] -Pierrehumbert, R. T., Widnall, S. E.; "The Two- and Three-dimensional Instabilities of a Spatial Periodic Shear Layer"; Journal Fluid Mechanics, vol 114, pp. 59-82; 1982.
- [22] -Press, W. H. *et al*; "Numerical Recipes in C: Concepts, Algorithms and Scientific Applications"; Cambridge University Pr.; 1993.
- [23] -Roshko, A.; "The Plane Mixing Layer Flow Visualization Results and Three-dimensional Effects"; Lectures Notes in Physics Springer Pub. Co.; 1980.
- [24] -Silveira Neto, A., Grand, D., Metais, O. e Lesieur, M., 1993, " Numerical Investigation of the Coherent Structures of Turbulence Behind a Backward-Facing Step", Journal of Fluids Mechanics, Vol. 256, pp, 1-25.
- [25] -White, F. M.; "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill, New-York; 1974.
- [26] -Winant, C. D., Browand, F. K.; "Vortex Pairing: The Mechanism of Turbulent Mixing-Layer Growth at Moderate Reynolds Number"; Journal Fluid Mechanics, vol 63, pp. 237-255, 1974.

ANEXO I

ACOPLAMENTO DOS CAMPOS DE PRESSÃO, DENSIDADE E VELOCIDADE.

I. EQUACIONAMENTO PARA O ACOPLAMENTO DOS CAMPOS DO ESCOAMENTO.

Considerando-se as seguintes equações de conservação numa forma simplificada, onde desprezou-se os termos de fluxos viscosos e de calor, têm-se:

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (I.1)$$

$$\frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (I.2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (I.3)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} \quad (I.4)$$

Adicionalmente, considera-se a equação de estado para gases perfeitos

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (I.5)$$

então, podendo transcreve-la na seguinte forma:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

(I.6)

Portanto, se aplicar a Eq. I.6 na Eq. I.1, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{RT} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{RT} uv \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

(I.7)

desenvolvendo-se a Eq. I.7, esta torna

$$p \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{RT} \right) + \frac{u^2}{RT} \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{uv}{RT} \right) + \frac{uv}{RT} \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

(I.8)

ou em uma melhor forma:

$$- \left(\frac{u^2}{RT} + 1 \right) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{RT} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{uv}{RT} \right) \right] + \frac{uv}{RT} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y}$$

(I.9)

Por outro lado, substituindo-se a Eq. I.6 na Eq. I.3, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{RT} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{RT} v \right) = 0$$

(I.10)

donde, obtém-se

$$p \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT} \right) + \frac{u}{RT} \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT} \right) + \frac{v}{RT} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.11})$$

ou em uma melhor forma:

$$\frac{1}{p} \frac{v}{RT} \frac{\partial p}{\partial y} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT} \right) \right] - \frac{u}{RT} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{I.12})$$

Substituindo-se a Eq. I.12 na Eq. I.9, obtém:

$$- \left(\frac{u^2}{RT} + 1 \right) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{RT} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{uv}{RT} \right) \right] - u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT} \right) \right] - \frac{u^2}{RT} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{I.13})$$

Reorganizado a Eq. I.13, tem-se

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{RT} \right) - u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{uv}{RT} \right) + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT} \right) \right] \quad (\text{I.14})$$

e integrando esta de um ponto de referência até um ponto considerado, obtém-se:

$$\int_x^x \frac{1}{p} dp = \int_x^x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{RT} \right) - u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{uv}{RT} \right) + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT} \right) \right] dx \quad (\text{I.15})$$

onde E identifica um valor de referência e x o ponto da malha, no qual se pretende determinar os valores das propriedades do escoamento.

Portanto, se realizar a integração, a Eq. I.15, obtém-se:

$$\ln\left(\frac{p(x, y)}{p_E}\right) = \frac{u^2}{RT}\Big|_E^x - \int_E^x u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT}\right) dx + \frac{uv}{RT}\Big|_E^x - \int_E^x u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT}\right) dx \quad (I.16)$$

ou numa melhor forma:

$$p(x, y) = e^{\left[\frac{u^2}{RT}\Big|_E^x - \int_E^x u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT}\right) dx + \frac{uv}{RT}\Big|_E^x - \int_E^x u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT}\right) dx \right]} p_E \quad (I.17)$$

Definindo a seguinte relação:

$$f(x, y) = e^{\left[\frac{u^2}{RT}\Big|_E^x - \int_E^x u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{RT}\right) dx + \frac{uv}{RT}\Big|_E^x - \int_E^x u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{RT}\right) dx \right]} \quad (I.18)$$

então

$$p(x, y) = f(x, y) p_E \quad (I.19)$$

Desta forma, ao proceder os cálculos descritos pela Eq. (I.19), obtém-se novos valores para o campo de pressão, os quais permitem obter os novos campos de velocidades transversais e axiais, e os campos de temperatura e densidade, utilizando-se as Eqs. (I.6), (I.9) e (I.12). Logicamente, no uso da Eq. I.6 é necessário utilizar o campo de densidade

anterior, o qual é atualizado após o uso das Eqs. (I.6), (I.9) e (I.12), pela Eq. (I.3). Repetindo-se novamente este processo de cálculo, é possível obter-se uma convergência aproximada para os campos, os quais deverão ser assumidos como condição do problema em estudo.

ANEXO II

DESCRIÇÃO E DEMONSTRAÇÃO DE RELAÇÕES MATEMÁTICAS RELACIONAS
AO MÉTODO ESPECTRAL DA COLOCAÇÃO

II. DESCRIÇÃO E DEMONSTRAÇÃO DE RELAÇÕES MATEMÁTICAS RELACIONAS AO MÉTODO ESPECTRAL DA COLOCAÇÃO

II.1 Transformada de Fourier

Uma gama numerosa de problemas importantes de engenharia envolvem a utilização de transformadas de Fourier em sua análise, tanto em pesquisas experimentais como em simulações numéricas. Mais recentemente, tem-se voltado os interesses no uso dos métodos espectrais na simulação de problemas de engenharia. Em alguns desses problemas a transformada de Fourier não é mais do que uma ferramenta para manipulação de dados. Em outros casos, a transformada de Fourier é de interesse intrínseco; isto é, sendo a ferramenta principal utilizado no estudo. Para um maior entendimento desta metodologia, serão introduzidos abaixo alguns comentários sobre o desenvolvimento desta técnica, caracterizando a sua fundamental importância.

Um processo físico descrito por uma função h pode ser representado tanto no domínio do tempo, t , quanto no espaço, x . Esta função h pode ser transformada para o espaço de Fourier, descrito por um domínio da frequência, f , quando h é uma função do tempo ou no domínio de números de ondas, quando h é uma função do espaço. Esta representação de h no espaço de Fourier é dada por uma função representativa das amplitudes dos fenômenos em cada frequência ou número de onda, denominada função amplitude, H (geralmente, uma função complexa, representada por um módulo e uma fase que caracteriza a velocidade de propagação do fenômeno). Por vários propósitos é útil interpretar $h(t)$ e $H(f)$ como representações distintas da mesma função. A relação entre estas duas representações é obtida pelas equações de Fourier, as quais caracterizam a comutação entre os dois espaços. Assim, as transformações direta e inversa são dadas pelas equações

da transformada de Fourier, descritas como segue:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi ift} dt \quad (\text{II.1.1})$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi ift} df \quad (\text{II.1.2})$$

onde se a unidade de t é segundos, então a unidade de f na Eq. II.1.1 e II.1.2 é em [ciclos]/[segundo], denominado por Hertz, ou se h é uma função da posição x [metros], H será uma função inversa do comprimento de onda [ciclos]/[metro].

As Eq. II.1.1 e II.1.2 é uma operação linear. Assim, a transformada da soma de duas funções é igual à soma das transformadas. Também, a transformação de uma função constante no tempo ou no espaço é a mesma constante no tempo ou no espaço.

A função $h(t)$, no domínio do tempo ou do espaço, pode ter uma ou mais simetrias especiais. Ela é puramente real quando representando um fenômeno físico. Entretanto, a transformada de Fourier direta ou inversa pode ser obtidas a partir de funções puramente real ou puramente imaginária ou complexas, construídas a partir da função $h(t)$ ou a partir de duas funções $h_1(t)$ e $h_2(t)$ representativas de dois fenômenos físicos diferentes. Neste estudo a função ser transformada será denotada por $h^*(t)$ que pode ter ser par; isto é, $h^*(t)=h^*(-t)$, ou impar, $h^*(t)=-h^*(-t)$. No domínio da frequência, estas simetrias definem as relações entre $H(f)$ e $H(-f)$. A Tabela (II.1.1) dá a correspondência entre simetrias nos domínios:

Tabela II.1.1. Simetrias correspondentes nos domínios.

| Se... | Então... |
|-------------------------------|--|
| $h^*(t)$ é real | $H(-f)=[H(f)]^*$ |
| $h^*(t)$ é imaginária | $H(-f)=-[H(f)]^*$ |
| $h^*(t)$ é par | $H(-f)=H(f)$ [isto é, $H(f)$ é par] |
| $h^*(t)$ é ímpar | $H(-f)=-H(f)$ [isto é, $H(f)$ é ímpar] |
| $h^*(t)$ é real e par | $H(f)$ é real e par |
| $h^*(t)$ é real e ímpar | $H(f)$ é imaginária e ímpar |
| $h^*(t)$ é imaginária e par | $H(f)$ é imaginária e par |
| $h^*(t)$ é imaginária e ímpar | $H(f)$ é real e ímpar |

Estas simetrias podem ser usadas para aumentar a eficiência computacional de métodos relacionados com essas transformações de domínios, como será mostrado nas seções subsequentes.

Abaixo estão dispostas algumas propriedades elementares da transformada de Fourier, onde o símbolo \Leftrightarrow indica a relação entre as transformadas diretas e inversas, denominada de pares de transformadas. Se

$$h^*(t) \Leftrightarrow H(f)$$

é um certo par, então outros pares transformados podem ser definidos, como uma extensão conceitual, assim

$$h^*(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} H\left(\frac{f}{a}\right), \quad \text{escala de tempo} \quad (\text{II.1.3})$$

$$\frac{1}{b} h^*\left(\frac{t}{b}\right) \Leftrightarrow H(bf), \quad \text{escala de frequência} \quad (\text{II.1.4})$$

$$h^*(t-t_0) \Leftrightarrow H(f)e^{2\pi jft_0}, \quad \text{mutação de tempo} \quad (\text{II.1.5})$$

$$h^*(t)e^{-2\pi jft_0} \Leftrightarrow H(f-f_0), \quad \text{mutação de frequência} \quad (\text{II.1.6})$$

Com duas funções $h^*(t)$ e $g^*(t)$ e as correspondentes transformadas $H(f)$ e $G(f)$, pode-se formar duas combinações de interesse especial, denominada convolução. A convolução das duas funções, denotada por g^*h^* , é definida da seguinte forma :

$$g^* * h^* \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h^*(t - \tau)d\tau \quad (\text{II.1.7})$$

Nota-se que $g^* * h^*$ é uma função no domínio de tempo e que $g^* * h^* = h^* * g^*$. Mostra-se que a função $g^* * h^*$ é um membro de um par transformado simples

$$g^* * h^* \Leftrightarrow G(f)H(f), \quad \text{Teorema da convolução} \quad (\text{II.1.8})$$

Em outras palavras, a transformada de Fourier da convolução é igual ao produto da transformadas de Fourier individuais, conforme descrito por (II.1.8). Fisicamente, a transformada de Fourier de uma série de dados discretos limitada representa a transformada do sinal físico do problema, definido por $h(t)$, com um número infinito de pontos, multiplicado por uma janela unitária de amplitude 1, definida por $g(t)$, conforme mostrado na Fig. II.1.1.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{II.1.9})$$

Em outras palavras, a amostra de dados limitada no tempo $x(t)$ pode ser considerada como o produto

(II.1.10)

$$x(t) = g(t)h(t)$$

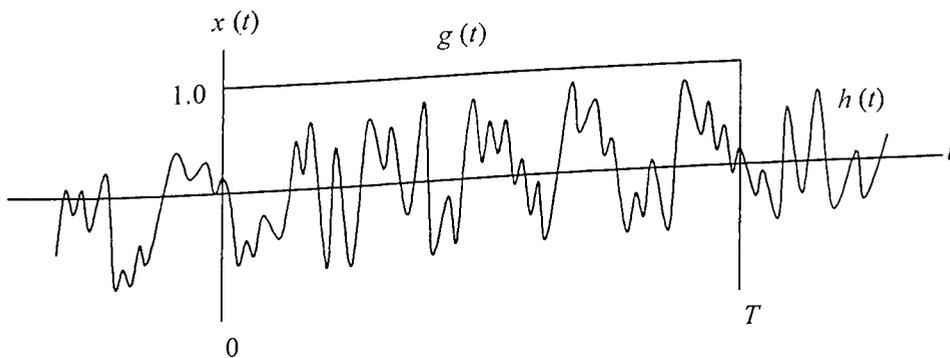


Figura II.1.1. Ilustração da janela de tempo inerente na análise espectral.

Conforme ilustrado na Fig. II.1.1. Segue que transformada de Fourier de $x(t)$ é a convolução das transformadas de $g(t)$ e $h(t)$, como segue

(II.1.11)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)H(f - \alpha)d\alpha$$

Para o caso onde $g(t)$ é a função retangular definida pela Equação II.1.9, sua transformada de Fourier é

(II.1.12)

$$G(f) = T \left(\frac{\text{sen } \pi f T}{\pi f T} \right) e^{-j\pi f T}$$

Uma representação gráfica de $|G(f)|$ está disposta na Fig. II.1.2. Note que o primeiro lobe lateral é amortecido significativamente com relação ao lobe principal, e os demais lobes laterais decaem, com relação ao lobe secundário adjacente, numa taxa que diminui gradativamente tendendo a zero. Esta função constitui a “janela espectral” básica da análise. Os maiores lobes laterais de $|G(f)|$, com freqüências bem maiores que as

freqüências próximas da do lobe principal possui uma diferença (lacuna) significativa de potência com relação ao lobe principal (esta diferença é caracterizada pela relação entre o lobe principal e os lobes secundários). Este fato introduz distorções significantes no espectro estimado, particularmente, quando os dados são representados por uma banda-estreita de freqüência. Este problema de lacuna não aparece na análise de dados periódicos, com período T_p , se o comprimento do registro T é um número exato de períodos; isto é, $T = kT_p$, $k=1,2,3,\dots$. Neste caso, os componentes de Fourier em $f = kf_p = (k/T_p)$ não podem causar falhas dentro do lobe principal, porque $G(f)$ na Equação II.1.12 é sempre zero nestas freqüências. Contudo, se $T \neq kT_p$, então estes erros podem ocorrer também na análise de dados periódicos.

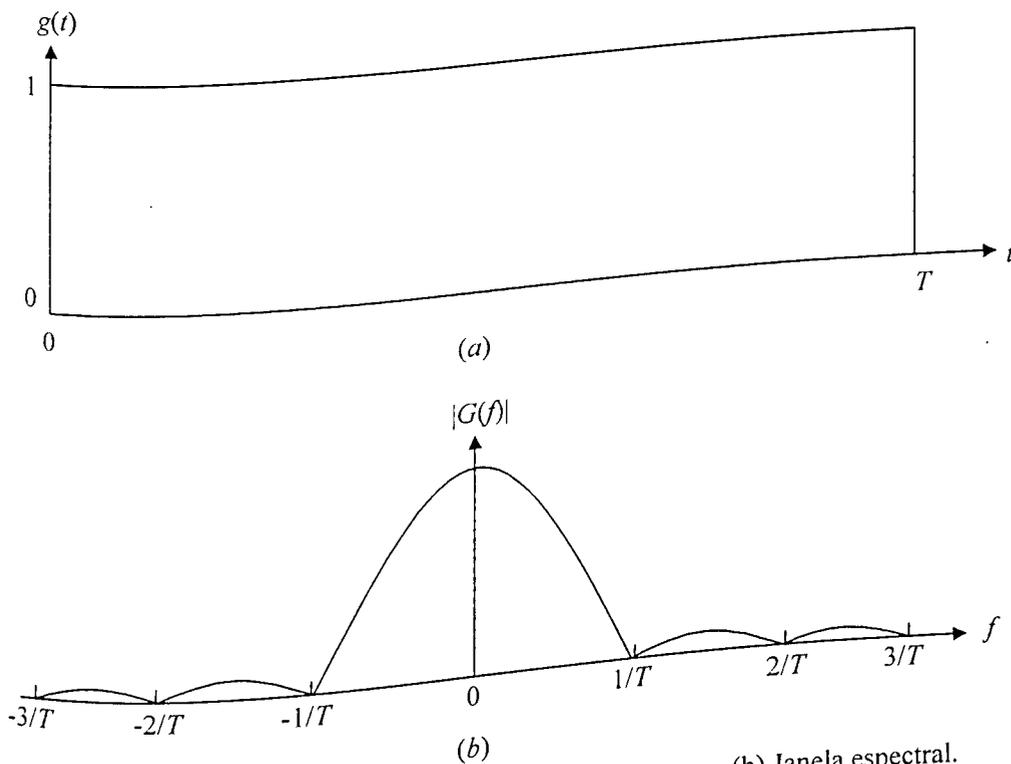


Figura II.1.2. Janela de análise retangular. (a) Janela de tempo. (b) Janela espectral.

Com esta descrição observa-se que os cálculos realizados através de FFT introduz erros, as vezes significativos, dependendo das características do sinal. Entretanto, estes

erros poderão ser amenizados, aplicando janelas com características que melhor adapte ao sinal a ser tratado. Existe uma infinidade de tipos de janelas que podem ser introduzidas no sinal, substituindo a janela retangular dada pela Eq. (II.1.9). Entretanto, tal estudo não foi realizado neste trabalho e poderá ser objetivo de pesquisas futuras.

Com o conteúdo disposto acima é possível compreender o formalismo analítico da transformada de Fourier. Entretanto em trabalhos computacionais, especialmente, quando se utiliza dados experimentais, quase sempre não é usado funções contínuas, mas sim é utilizado séries discretas de dados, representados pela função $h(t_i)$, onde t_i , com $i=1,2, \dots$. No próximo item será caracterizado as propriedades das séries de Fourier discretas.

II.1.1 Transformada Rápida de Fourier

A transformada de Fourier discreta de N pontos dada pela Eq. 3.5 (capítulo 3) é ser reescrita como segue:

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i kn / N} \quad (\text{II.1.13})$$

A principal questão com relação a Eq. II.1.13 é saber a quantidade de processamento envolvida em sua determinação. Tal questão pode ser respondida, definindo-se a variável W como um número complexo

$$W \equiv e^{2\pi i / N} \quad (\text{II.1.14})$$

Assim, Eq. II.1.13 pode ser escrito como:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} h_k$$

Em outras palavras, o vetor h_k , com k elementos, é multiplicado por uma matriz cujo (nk) -ésimo elemento é a constante W elevado à potência nk . A multiplicação de matriz, como caracterizado pela Eq. II.1.5, produz um vetor resultante cujas componentes são as transformadas de Fourier discretas, dadas por H_n . Esta multiplicação de matriz requer N^2 multiplicações complexas, adicionada de mais um pequeno número de operações para gerar a desejada potência de W . Assim, a transformada discreta de Fourier parece ser um processo $O(N^2)$. Entretanto, esta aparência é enganosa, porque a transformada discreta de Fourier pode ser computada em $O(M \log_2 N)$ operações, com um algoritmo chamado *fast Fourier transforming*, ou FFT. A diferença entre $O(M \log_2 N)$ e $O(N^2)$ é imensa. Com um número de pontos $N=10^6$, por exemplo, a diferença entre os tempos de processamento é de 30 segundos de CPU e 2 semanas de CPU, respectivamente, em um computador com tempo de ciclo de um microsegundo. A existência de algoritmos para o cálculo de FFTs só tornou conhecida nos meados dos anos 60, através do trabalho de J. W. Cooley e J. W. Tukey. Contudo, sabe-se que já tinha sido descobertos outros métodos eficientes para computar a DFT, os quais foram implementados em vários casos, já em 1805, por Gauss.

O algoritmo para o cálculo de FFT de Danielson e Lanczos (1942) possibilita obter esta transformada de forma mais clara. Estes autores mostraram que uma transformada discreta de Fourier de comprimento N pode ser reescrita como a soma de duas transformadas discretas de Fourier, cada uma de comprimento $N/2$. Uma das duas é formada pelos pontos pares dos N originais e a outra pelos pontos ímpares. A prova

simplesmente é isto:

$$\begin{aligned}
 F_k &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi ijk/N} f_j \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ik(2j)/N} f_{2j} + \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ik(2j+1)/N} f_{2j+1} \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ikj/(N/2)} f_{2j} + \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ikj/(N/2)} f_{2j+1} \\
 &= F_k^e + W^k F_k^o
 \end{aligned}
 \tag{II.1.16}$$

Na equação acima W é o mesmo número complexo descrito na Eq. II.1.14, F_k^e denota a k -ésima componente da transformada de Fourier de comprimento $N/2$, formada pelos componentes pares do f_j 's originais dados, enquanto que F_k^o é a correspondente transformada de comprimento $N/2$, formada pelos componentes ímpares, também dos dados originais. Note-se que k , na última linha da Eq. II.1.16, varia com comprimento $N/2$. Não obstante, as transformadas F_k^e e F_k^o são periódicas em k , com comprimento $N/2$. Assim, repetindo-se a cada dois ciclos, na determinação de F_k .

O interessante sobre o Lema de Danielson-Lanczos (1942), é que este algoritmo pode ser usado recursivamente. A determinação de F_k é reduzida ao cálculo de F_k^e e F_k^o , o mesmo pode-se fazer para reduzir o cálculo de F_k^e , determinando a transformada de seus $N/4$ dados de entrada, localizados nas posições pares do vetor de dados e $N/4$ dados localizados nas posições ímpares. Em outras palavras, pode-se definir F_k^{ee} e F_k^{eo} como sendo a transformada discreta de Fourier dos pontos localizados nas posições pares do vetor de dados par e posições ímpares do vetor de dados par, respectivamente, nas subdivisões sucessivas dos dados.

Ainda que haja outros modos de determinar a FFT, o caso mais simples é aquele no

qual o número N de pontos do vetor de dados originais é um inteiro, cujo valor é uma potência de 2. Se o comprimento do conjunto de dados não é uma potência de dois, preencha o com zeros até a potência de dois mais próxima seja atingida. Com esta restrição em N , é evidente que pode-se continuar aplicando o Lema de Danielson-Lanczos até que seja subdividido todos os dados de modo que a transformada tenha o comprimento igual a 1. A transformada de Fourier de comprimento um é uma operação de identidade que copia um número lido na entrada para uma abertura de saída. Em outras palavras, para todo padrão existe uma transformada de um-ponto que seja justamente aquele dos números lidos de f_n , assim

$$(II.1.17)$$

$$F_k^{e^{j2\pi k n}} = f_n \quad \text{para algum } n$$

Esta transformada de um-ponto não depende de k , desde que ela é periódica em k , com período 1. O próximo truque é identificar qual valor de n corresponde para qual padrão.

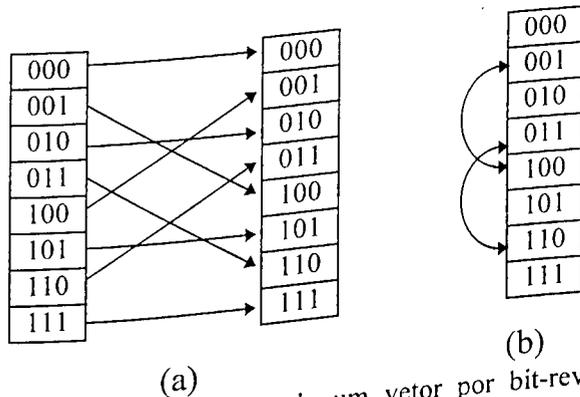


Figura II.1.3. Reordenando um vetor por bit-reverso, (a) entre dois vetores, versus (b) no mesmo. Reordenação por bit-reverso é uma parte necessária do algoritmo da FFT.

II.2 Demonstração da Relação Matemática para Cálculo da Derivada

Neste item está demonstrado como pode se calcular a derivada de uma dada função, pela manipulação apenas dos coeficientes de expansão da mesma, utilizando como recorrência algumas relação trigonométricas.

Supõe-se uma função $u(x) \in L_w^2(-1,1)$, tal que a sua expansão em série do polinômio de Chebyshev é dada por

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x) \quad (\text{II.2.1})$$

onde

$$\hat{u}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 u(x) T_k(x) w(x) dx \quad (\text{II.2.2})$$

com

$$c_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{II.2.3})$$

e

$$T(x) = \cos(k\theta) \text{ e } \theta = \arccos(x) \quad (\text{II.2.4})$$

assim pode-se escrever a derivada de $u(x)$ como se segue

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k'(x) \quad (\text{II.2.5})$$

ou, podemos representa-la formalmente como

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} T_k(x) \quad (\text{II.2.6})$$

desta forma pode-se igualar as Eqs II.2.5 e II.2.6, obtendo-se

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m^{(1)} T_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k'(x) \quad (\text{II.2.7})$$

Utilizando-se a Eq. II.2.3 e a seguinte relação trigonométrica:

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2 \cos \theta \cos k\theta \quad (\text{II.2.8})$$

obtem-se a seguinte relação de recorrência:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad (\text{II.2.9})$$

onde $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

Algumas das propriedades do polinômio de Chebyshev são:

$$|T_k(x)| \leq 1 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{II.2.10})$$

$$T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k \quad (\text{II.2.11})$$

$$|T'_k(x)| \leq k^2 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{II.2.12})$$

$$T'_k(\pm 1) = (\pm 1)^k k^2 \quad (\text{II.2.13})$$

$$\int_{-1}^1 T_k(x)T_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq k \\ c_k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{II.2.14})$$

Por outro lado, multiplicando-se as Eqs. II.2.6 e II.2.7 por $T_m w(x)$ e integrando de -1 até 1 ambos lados das equações resultantes, igualando-as e invertendo o símbolos de integração tem-se como resultado:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} \int_{-1}^1 T_k(x)T_m(x)w(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k \int_{-1}^1 T'_k(x)T_m(x)w(x)dx, \quad m = 0, \dots, \infty \quad (\text{II.2.15})$$

aplicando-se a Propriedade II.2.14 na Eq. II.2.15 resulta:

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k \int_{-1}^1 T'_k(x)T_m(x)w(x)dx, \quad m = 0, \dots, \infty \quad (\text{II.2.16})$$

e utilizando a relação trigonométrica descrita abaixo

$$2 \operatorname{sen} \theta \cos k \theta = \operatorname{sen}(k+1) \theta - \operatorname{sen}(k-1) \theta$$

(II.2.17)

obtem-se uma nova relação de recorrência, como se segue

$$2T_k(x) = \frac{1}{k+1} T'_{k+1}(x) - \frac{1}{k-1} T'_{k-1}(x), \quad k \geq 1$$

(II.2.18)

sendo $T'_k(x) = \frac{k \operatorname{sen} k \theta}{\operatorname{sen} \theta}$.

Assim, reorganizando a Eq. II.2.18, tem-se a seguinte relação modificada

$$T'_{k+1}(x) = 2(k+1)T_k(x) + \frac{k+1}{k-1} T'_{k-1}(x), \quad k \geq 1$$

(II.2.19)

fazendo-se $l = k + 1$, tem-se

$$T'_l(x) = 2lT_{l-1}(x) + \frac{l}{l-2} T'_{l-2}(x), \quad l \geq 2$$

(II.2.20)

substituindo-se a Eq. II.2.20 na Eq. II.2.16, e reorganizando a equação resultante, obtém-se:

se:

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = \hat{u}_0 \int_{-1}^1 T_0'(x) T_m(x) w(x) dx + \sum_{l=2}^1 \hat{u}_l \int_{-1}^1 \left[2l T_{l-1}(x) + \frac{l}{l-2} T_{l-2}'(x) \right] T_m(x) w(x) dx, \quad (II.2.21)$$

$$m = 1, \dots, \infty$$

sabendo que $T_0(x) = 1$ então $T_0'(x) = 0$, logo pode-se reescrever a Eq. II.2.21 como segue

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = 2 \sum_{l=2}^1 \hat{u}_l l \int_{-1}^1 T_{l-1}(x) T_m(x) w(x) dx + \sum_{l=2}^1 \hat{u}_l \frac{l}{l-2} \int_{-1}^1 T_{l-2}'(x) T_m(x) w(x) dx, \quad (II.2.22)$$

$$m = 1, \dots, \infty$$

Fazendo-se $m = l - 2$ e aplicando a Propriedade II.2.14, pode-se desenvolver o primeiro termo do lado direito da Eq. II.2.22, obtendo

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = (m+1) \hat{u}_{m+1} \pi + \sum_{l=2}^1 \hat{u}_l \frac{l}{l-2} \int_{-1}^1 T_{l-2}'(x) T_m(x) w(x) dx, \quad (II.2.23)$$

$$m = 1, \dots, \infty$$

fazendo agora $j = l - 2$ e substituindo na Eq. II.2.23, tem-se

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = (m+1) \hat{u}_{m+1} \pi + \sum_{j=0}^1 \hat{u}_{j+2} \frac{j+2}{j} \int_{-1}^1 T_j'(x) T_m(x) w(x) dx, \quad (II.2.24)$$

$$m = 1, \dots, \infty$$

reorganizando a Eq. II.2.24, de forma que seja possível aplicar a Eq. II.2.20, tem-se

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = (m+1)\hat{u}_{m+1}\pi + 3\hat{u}_3 \int_{-1}^1 T_1'(x)T_m(x)w(x)dx + \sum_{j=2}^1 \hat{u}_{j+2} \frac{j+2}{j} \int_{-1}^1 T_j'(x)T_m(x)w(x)dx, \quad (II.2.25)$$

$$m = 1, \dots, \infty$$

onde, como já explicado, para $j = 0$, $T_0'(x) = 0$, que conduz o segundo termo do lado direito da Eq. II.2.25 ser nulo. Desenvolvendo-se, em seguida, o terceiro termo do lado direito da Eq. II.2.25 e sabendo-se que $T_1(x) = x$, donde resulta que $T_1'(x) = 1$ e considerando as seguintes definições

$$T_k(x) = \cos k\theta; \quad x = \cos \theta; \quad dx = -\text{sen } \theta d\theta; \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\text{sen } \theta} \quad (II.2.26, II.2.27 \text{ e } II.2.28)$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} 3\hat{u}_3 \int_{-1}^1 T_m(x)w(x)dx &= 3\hat{u}_3 \int_{\pi}^0 \cos m\theta \frac{1}{\text{sen } \theta} (-\text{sen } \theta) d\theta \\ &= -3\hat{u}_3 \int_{\pi}^0 \cos m\theta d\theta \\ &= -3\hat{u}_3 \left[\frac{1}{m} \text{sen } m\theta \right]_{\pi}^0 = 0 \end{aligned} \quad (II.2.29)$$

Novamente, substituindo-se a Eq. II.2.20 na Eq. II.2.25, tem-se

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = (m+1)\hat{u}_{m+1}\pi + \sum_{j=2}^1 2\hat{u}_{j+2}(j+2) \int_{-1}^1 T_{j-1}(x)T_m(x)w(x)dx +$$

$$\sum_{j=2}^1 \hat{u}_{j+2} \frac{j+2}{j-2} \int_{-1}^1 T'_{j-2}(x)T_m(x)w(x)dx,$$

$$m = 1, \dots, \infty$$
(II.2.30)

aplicando-se a Propriedade II.2.14 no segundo termo do lado direito da Eq. II.2.30, obtém-se

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = (m+1)\hat{u}_{m+1}\pi + (m+3)\hat{u}_{m+3}\pi +$$

$$\sum_{j=2}^1 \hat{u}_{j+2} \frac{j+2}{j-2} \int_{-1}^1 T'_{j-2}(x)T_m(x)w(x)dx,$$

$$m = 1, \dots, \infty$$
(II.2.31)

Repetindo-se todo o procedimento descrito acima por número relativamente grande de vezes, observa-se que a série tende para

$$\hat{u}_m^{(1)} c_m \frac{\pi}{2} = (m+1)\hat{u}_{m+1}\pi + (m+3)\hat{u}_{m+3}\pi + \dots + (m+N_{imp})\hat{u}_{m+N_{imp}}\pi +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k+N_{imp}+1} \frac{k+N_{imp}+1}{k-2} \int_{-1}^1 T'_k(x)T_m(x)w(x)dx,$$

$$m = 1, \dots, \infty$$
(II.2.32)

onde N_{imp} é um número impar natural.

Conclui-se que a Eq. II.2.32 pode ser representada pela seguinte série

$$\hat{u}_m^{(1)} = \frac{2}{c_m} \sum_{\substack{i=m+1 \\ i \rightarrow m=\text{impar}}}^{N_{\text{imp}}} i \hat{u}_i + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k+N_{\text{imp}}+1} \frac{k + N_{\text{imp}} + 1}{k - 2} \int_{-1}^1 T_k'(x) T_m(x) w(x) dx, \quad (\text{II.2.33})$$

$$m = 1, \dots, \infty$$

A série descrita pela Eq. II.2.33 pode ser limitada por um número N de termos, porque o termo \hat{u}_m decresce exponencialmente, e quando m tende ao infinito \hat{u}_m tende a zero. Assim para $m \geq N$, $\hat{u}_m^{(1)} \approx 0$ e como consequência o último termo da Eq. II.2.33 tende a zero.

Rescrevendo a Eq. II.2.33 com as simplificações descritas no parágrafo acima, tem-se

$$\hat{u}_m^{(1)} = \frac{2}{c_m} \sum_{\substack{i=m+1 \\ i \rightarrow m=\text{impar}}}^N i \hat{u}_i, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (\text{II.2.34})$$

Concluindo, observa-se que pode ser calculada a derivada de uma dada função $u(x)$, previamente conhecida, com apenas manipulações dos coeficientes de expansão da mesma. Conhecendo-se os coeficientes \hat{u}_k , determinados a partir da Eq. II.2.2 ou através de através da FFT, pode-se obter a derivada da função $u(x)$, calculando os coeficientes $\hat{u}_k^{(1)}$, através das Equação de recorrência dada por (II.2.34), e usando a Eq. (II.2.6) ou aplicando a inversa da FFT sobre os coeficientes $\hat{u}_m^{(1)}$.

II.3 O Processo de Alisamento

Neste item é demonstrado o processo de alisamento de uma função $f(x)$, utilizando uma matriz núcleo. Como evidenciado no item II, $f(x)$ pode ser expandida em uma série finita, utilizando os polinômios de Chebyshev, como segue:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) \quad (\text{II.3.1})$$

onde $\tilde{f}(x)$ é a função estimada de $f(x)$, utilizando uma série truncada de polinômios de Chebyshev, onde

$$a_j = \frac{2}{\pi \bar{c}_j} \int_{-1}^1 f(y) T_j(y) w(y) dy \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II.3.2})$$

onde \bar{c}_j é dado pela Eq. 3.13 e y é uma variável independente, similar a x , a qual foi denominada diferente para definir pontos de integração diferente de x , incluídos no mesmo intervalo.

Substituindo a Eq. II.3.2 em Eq. II.3.1, obtém-se:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{2}{\pi \bar{c}_k} \left(\int_{-1}^1 f(y) T_k(y) w(y) dy \right) T_k(x) \quad (\text{II.3.3})$$

ou melhor

$$\tilde{f}(x) = \int_{-1}^1 \underbrace{\sum_{k=0}^N \frac{2}{\pi \bar{c}_k} T_k(y) T_k(x) w(y)}_{D_N(x,y)} f(y) dy \quad (\text{II.3.4})$$

onde $D_N(x, y)$ é chamado de núcleo, dado por

$$D_N(x, y) = \sum_{k=0}^N \frac{2}{\pi \bar{c}_k} T_k(y) T_k(x) w(y) \quad (\text{II.3.5})$$

Assim, a Eq. II.3.4 pode ser escrita como segue

$$\tilde{f}(x) = \int_{-1}^1 D_N(x, y) f(y) dy \quad (\text{II.3.6})$$

O valor estimado de $f(x)$, dado por $\tilde{f}(x)$, será idêntico ao valor de $f(y)$ somente se:

$$D_N(x, y) = \delta(x - y), \quad (\text{II.3.7})$$

onde $\delta(x - y)$ é a função Delta de Dirac que tem as seguintes propriedades:

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (\text{II.3.8})$$

donde conclui-se que

$$\int_{-1}^1 \delta(x-y) f(y) dy = f(x) \quad (\text{II.3.9})$$

Entretanto, o núcleo $D_N(x, y)$ tem um comportamento oscilatório, em torno do valor zero para $x \neq y$ e para $x = y$ ela aproxima de um impulso, similar ao dada pela função $\delta(x - y)$. A Figura II.3.1 mostra este efeito.

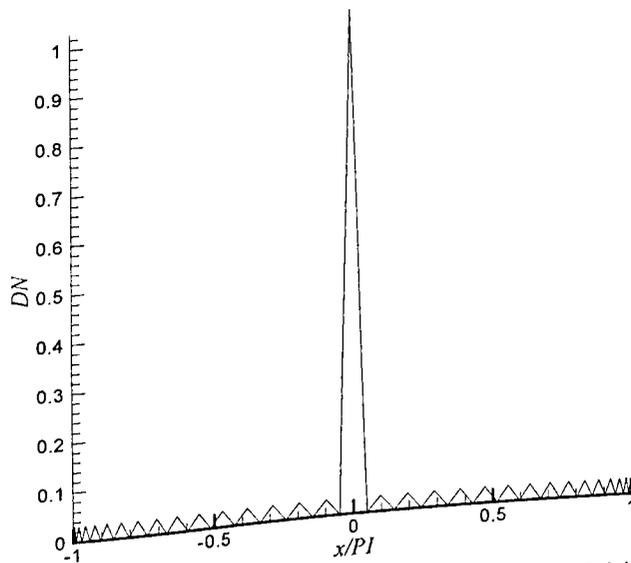


Figura II.3.1. Comportamento da função núcleo de Dirichlet.

O gráfico de $D_N(x, y)$ mostra que os lobes secundários decaem rapidamente com relação ao lobe principal, tendendo a zero. A largura do lobe principal está diretamente

relacionado com o amortecimento da concentração da energia da função impulso no número de onda em análise e possibilita a introdução de efeitos de outros comprimentos de onda na resposta em x/π , conduzindo a presença de erros significativos na resposta.

Quando os comprimentos de onda dos fenômenos presentes no sinal são múltiplos do comprimento do intervalo que envolve o sinal em análise, os erros são minimizados, pois os núcleos se anulam sobre todos os múltiplos dos números de onda que compõem o sinal, caso contrário, erros significativos serão introduzidos.

Para minimizar estes erros é comum na prática introduzir uma janela envolvendo o sinal de análise, de forma a filtrar os números de onda maiores, características dos erros introduzidos pelo fenômeno de Gibbs.

Assim tem-se que o núcleo filtrado pode ser definido como segue:

$$\bar{D}_N(x, y) = \sum_{k=0}^N \frac{2}{\pi \bar{c}_k} \sigma_k T_k(y) T_k(x) w(y) \quad (\text{II.3.10})$$

onde σ_k é uma função filtro qualquer, dadas pelas Eqs. 3.30 a 3.33. As figuras II.3.2 e II.3.3 mostram o comportamento do núcleo de Dirichlet para cada uma das funções filtro.

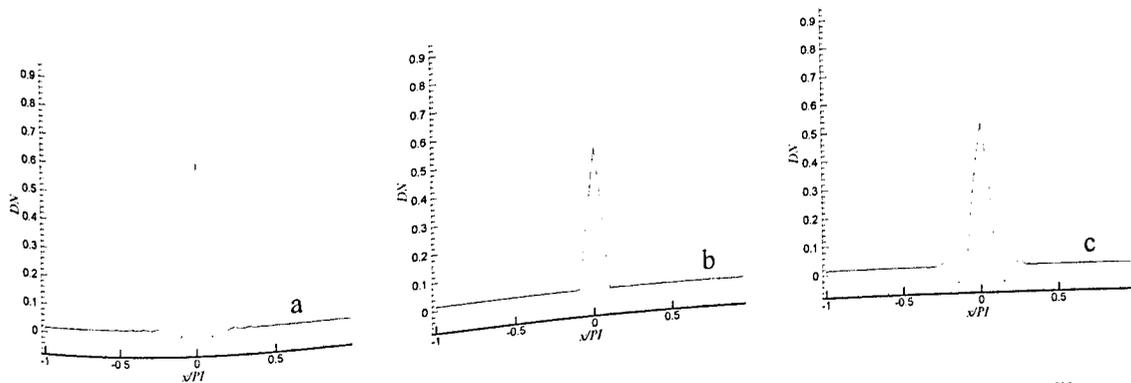


Figura II.3.2 Comportamento do núcleo de Dirichlet alisado pelas seguintes funções filtro: a) Lanczos; b) raised cosine; c) sharpined raised cosine.

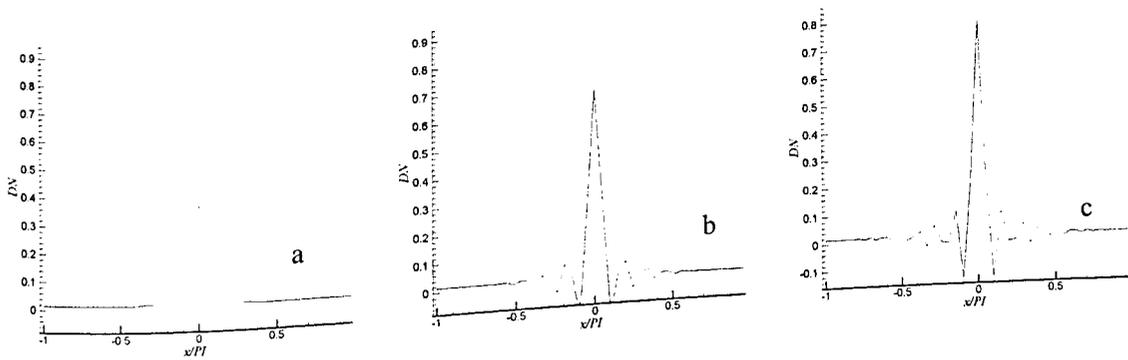


Figura II.3.3 Comportamento do núcleo de Dirichlet alisado sob várias configurações da função filtro exponencial; (a) Escala de corte em 0; (b) Escala de corte em $\pi/2$; (c) Escala de corte em $2\pi/3$.

O resultado da função filtrado $\bar{f}(x)$ é obtido com segue

$$\bar{f}(x) = \int_{-1}^1 \bar{D}_N(x, y) u(y) dy$$

(V.11)

A função filtrada elimina as oscilações epúrias, entretanto, amortece a energia do lobe principal, assim qualquer procedimento de filtragem tem que ser realizado, considerando o efeito uma relação entre o alisamento efetuado e as distorções introduzidas nos cálculos das variáveis físicas do problema.

ANEXO III

CÓDIGO COMPUTACIONAL

III. Código Computacional

Neste anexo é apresentado o código computacional, envolvendo as principais etapas do programa.

Nas subrotinas a seguir é apresentado o cálculo de derivadas, utilizando o método de multiplicação de matrizes de Chebyshev, descrito pela Equação 3.27 e 3.29. São apresentadas as rotinas de cálculos tanto para derivadas na direção x , quanto para direção y . O código foi escrito em linguagem de programação C. Assim

```
double DfDx_C(int xp,int yp,D2_Var f,D2_Var DNx,int N)
/* Calculo da primeira derivada em x da funcao f
```

Entrada :

xp : índice do ponto onde se deseja calcular a derivada;
yp : índice do ponto y ;
f : função qual se deseja derivar;
DNx : matriz com os coeficientes de Chebyshev(3.29) em x ;
N : Número de pontos na direção x .

Retorno :

Retorna o valor da derivada com relação a x da função f no ponto xp,yp .

```
*/
{
    double df=0.0; //declaração de um acumulador
    int j; //declaração de um índice
    for(j=0;j<=N;j++) //cálculo da derivada (3.27)
        df += DNx[xp][j] * f[j][yp]; //resultado
    return df;
}
```

```
double DfDy_C(int xp,int yp,D2_Var f,D2_Var Dny,int N)
/* Calculo da primeira derivada em y da função f
```

Entrada :

xp : índice do ponto x ;
yp : índice do ponto onde se deseja calcular a derivada;
f : função qual se deseja derivar;
DNx : matriz com os coeficientes de Chebyshev(3.29);
N : Numero de pontos na direção y .

Retorno :

Retorna o valor da derivada com relação a y da função f no ponto xp,yp .

```
*/
{
    double df=0.0; //declaração de um acumulador
    int j; //declaração de um índice
    for(j=0;j<=N;j++) //cálculo da derivada (3.27)
        df += Dny[yp][j] * f[xp][j]; //resultado
    return df;
}
```

As rotinas de cálculo de alisamentos e filtragens sobre funções são apresentadas. A implementada a seguir é baseada nas equações descritas na seção 3.2.

```
void Flip_Up(int N,D2_Var Dvar)
/*
```

Procedimento que rebate os valores de uma matriz da metade superior para a metade inferior, gerando uma matriz simétrica, ressaltando que esta função não é chamada diretamente pelo usuário.

```
*/
{
  int N2=N/2,k,j;
  if(N%2 == 0)
  {
    for(k=0;k<=N2-1;k++)
      for(j=0;j<=N;j++)
        Dvar[k][j] = -Dvar[N-k][N-j];
    for(j=0;j<=N2-1;j++)
      Dvar[N2][j] = Dvar[N2][N-j];
  }
  else
  {
    for(k=0;k<=N2;k++)
      for(j=0;j<=N;j++)
        Dvar[k][j] = -Dvar[N-k][N-j];
  }
}
```

```
void Flip_Down(int N,D2_Var Dvar)
/*
```

Procedimento que rebate os valores de uma matriz da metade inferior para a metade superior, gerando uma matriz simétrica, ressaltando também que esta função não é chamada diretamente pelo usuário.

```
*/
{
  int N2 = N/2,k,j;
  if(N%2 == 0)
  {
    for(k=0;k<=N2-1;k++)
      for(j=0;j<=N;j++)
        Dvar[N-k][N-j] = -Dvar[k][j];
    for(j=0;j<=N2-1;j++)
      Dvar[N2][N-j] = -Dvar[N2][j];
  }
  else
  {
    for(k=0;k<=N2;k++)
      for(j=0;j<=N;j++)
        Dvar[N-k][N-j] = -Dvar[k][j];
  }
}
```

```
double Calc_c(int i,int N)/*
```

Função (3.22) usada no cálculo da derivação de Chebyshev. Nunca e usada diretamente pelo usuário.

Entrada :
 i : índice do ponto de quadratura;
 N : número de pontos da matriz.

Retorno :

```

        Retorna 2 se  $i = 0$  ou se  $i = N$ ;
*/
{
    if (i==0 || i==N)
        return 2.0; return 1.0;
}

void Calc_DN(int N, D2_Var Dvar)
/*
    Cálculo da matriz dos coeficientes de derivação de Chebyshev, conforme a equação
(3.29).

```

Entrada :

N : Número de pontos na direção a ser derivada.

Retorno :

Dvar : matriz com os coeficientes de derivação de Chebyshev.

```

*/
{ double cl, cj, DIFx, PIN=M_PI/N, PINH = PIN*.5;
  int l, j; for (j=0; j<=N; j++)
  for (l=0; l<=N; l++)
  {
    cl = Calc_c(l, N);
    cj = Calc_c(j, N);
    if (j!=1)
    {
      DIFx = -2.0*sin(PINH*(1+j))*sin(PINH*(1-j)); // = x;-xj
      Dvar[l][j] = (cl/cj)*pow(-1.0, l+j)/DIFx;
    }
    else
    if (j==0)
      Dvar[0][0] = (2.0*N*N+1.0)/6.0;
    else
    if (j==N)
      Dvar[N][N] = -(2.0*N*N+1.0)/6.0;
    else
      Dvar[l][j] = -cos(j*PIN)/(2.0*pow(sin(j*PIN), 2.0));
  }
}

```

```

double Precisao_Maq(void)
/*

```

Cálculo da precisão da máquina, esta função serve de parâmetro para cálculo da função de filtragem exponencial com escala de corte. Retorno : Retorna a precisão da máquina.

```

*/
{
  double Um = 1.0, Um_aux = 1.0, Prec = 0.1;
  while (Um < (Um_aux+Prec))
  {
    Prec /= 2.0;
  }
  return Prec;
}

```

```

void Filtro(int Esc, int N, int M_Corte, double alfa,
double Ordem, D1_Var Sigma)
/*

```

Módulo de Montagem da função filtro, referente às Eqs. 3.30 a 3.33.

Entrada :

Esc : Parâmetro de escolha da função;
 = 1 *Lanczos*;
 = 2 *Raised cossine*;
 = 3 *Sharpened raised cossine*;
 = 4 *Exponential cut-off*.

N : Número de pontos na função;
 M_Corte : Índice do início do corte, caso Esc = 4;
 alfa : Precisão da máquina (escala log.), caso Esc=4;
 Ordem : Ordem de decaimento da curva, caso Esc = 4;Saída :
 Sigma : Endereço do vetor a armazenar a função.

```

*/
{
  int i; double epsilon, Arg, PiN=M_PI/N;
  Sigma[0] = 1.0;
  switch(Esc)
  { case 1: //Lanczos
    for(i=1;i<=N;i++)
    {
      Arg = i*PiN;
      Sigma[i] = sin(Arg)/Arg;
    }
    break; //Raised cossine
  case 2:
    for(i=1;i<=N;i++)
    {
      Arg = i*PiN;
      Sigma[i] = 0.5*(1.0+cos(Arg));
    }
    break; //Sharpened raised cossine
  case 3:
    for(i=1;i<=N;i++)
    {
      Arg = 0.5*(1.0+cos(i*PiN));
      Sigma[i] = pow(Arg, 4)*(35-84*Arg+70*Arg*Arg-20*pow(Arg, 3));
    }
    break; //Exponential cut-off
  case 4:
    if(alfa == 0.0)
    {
      epsilon = Precisao_Maq();
      alfa = -log(epsilon);
    }
    for(i=1;i<=M_Corte;i++)
      Sigma[i] = 1.0;
    for(i=M_Corte+1;i<=N;i++)
    {
      Arg = (i-M_Corte)*1.0/(M_Corte-N+M_Corte);
      Sigma[i] = exp(-alfa*pow(Arg, Ordem));
    }
    break;
  }
}

void Calc_SN(int Esc, int N, int M_Corte, double alfa, double Ordem, D1_Var
Sigma, D2_Var SN)
/*

```

Modulo de cálculo da matriz núcleo, referente à Eq 3.35.

Entrada :
 Esc : Parâmetro de escolha da função filtro;

= 1 *Lanczos*;
 = 2 *Raised cossine*;
 = 3 *Sharpened raised cossine*;
 = 4 *Exponential cut-off*.

N : Número de pontos na função;
 M_Corte : Índice do início do corte, caso Esc = 4;
 alfa : Precisão da máquina (escala log.), caso Esc=4;
 Ordem : Ordem de decaimento da curva, caso Esc = 4;

Saída :

Sigma : Endereço do vetor a armazenar a função filtro.
 SN : Endereço onde armazenar matriz.

```

*/
{
  int N2 = N/2, k, j, i;
  double PiN = M_PI/N, TwoN = 2.0/N, x_j, x_k, S_kj;
  Filtro(esc, N, M_Corte, alfa, Ordem, Sigma);
  for(j=0; j<=N; j++)
  {
    SN[j][0] = Sigma[j];
    SN[N][j] = SN[j][0];
  }
  for(k=0; k<=N2; k++)
  {
    x_k = PiN*k;
    for(j=0; j<=N; j++)
    {
      x_j = PiN*j;
      S_kj = .5*(1.0+SN[N][N]*pow(-1.0, k+j));
      for(i=1; i<=N-1; i++)
        S_kj += SN[N][i]*cos(i*x_k)*cos(i*x_j);
      SN[k][j] = S_kj*TwoN;
    }
  }
  for(k=0; k<=N2; k++)
  {
    SN[k][0] = .5*SN[k][0];
    SN[k][N] = .5*SN[k][N];
  }
  if(N%2 == 0)
  {
    for(k=0; k<=N2-1; k++)
      for(j=0; j<=N; j++)
        SN[N-k][N-j] = SN[k][j];
    for(j=0; j<=N2-1; j++)
      SN[N2][N-j] = SN[N2][j];
  }
  else
  {
    for(k=0; k<=N2; k++)
      for(j=0; j<=N; j++)
        SN[N-k][N-j] = SN[k][j];
  }
}

```

```

double Alisa_x(D2_Var f, D2_Var SNx, int xp, int yp, int Nx)
/*

```

Procedimento que executa um alisamento sobre um ponto de uma função f , com relação aos pontos na direção x .

Entrada :

f : vetor com os valores da função;
 SNx : matriz núcleo para direção x ;
 xp : índice do ponto na direção x ;
 yp : índice do ponto na direção y ;
 Nx : número de pontos na direção x ;

Retorno :

Retorna o valor do ponto xp, yp alisado.

```

*/
{
  double soma=0.0;
  int i;
  for(i=0;i<=Nx;i++)
    soma += f[i][yp]*SNx[xp][i];
  return soma;
}

```

```

double Alisa_y(D2_Var f, D2_Var SNy, int xp, int yp, int Ny)
/*

```

Procedimento que executa um alisamento sobre um ponto de uma função f , com relação aos pontos na direção y .

Entrada :

f : vetor com os valores da função;
 SNy : matriz núcleo para direção y ;
 xp : índice do ponto na direção x ;
 yp : índice do ponto na direção y ;
 Ny : número de pontos na direção x ;

Retorno :

Retorna o valor do ponto xp, yp alisado.

```

*/
{
  double soma=0.0;
  int i;
  for(i=0;i<=Ny;i++)
    soma += f[xp][i]*SNy[yp][i];
  return soma;
}

```

```

void Alisa_Varx(D2_Var f, D2_Var SN_x, int xi, int xf, int Nx, int Ny)
/*

```

Procedimento que executa um alisamento em uma função f qualquer numa região de pontos, na direção x , delimitada pelos índices xi e xf ;

Entrada :

f : vetor com os valores da função;
 SN_x : matriz núcleo para direção x ;
 xi : índice inicial da região;
 xf : índice final da região;
 Nx : número de pontos na direção x ;
 Ny : número de pontos na direção y ;

Saída :

f : vetor com os valores da função alisada;

```

*/
{

```

```

register int i, j;
D2_Var Temp = Mem_D2_Var(Nx, Ny);
for(i=xi; i<=xf; i++)
    for(j=0; j<=Ny; j++)
        Temp[i][j] = Alisa_x(f, SN_x, i, j, Nx);
for(i=xi; i<=xf; i++)
    for(j=0; j<=Ny; j++)
        f[i][j] = Temp[i][j];
Mem_Free_D2_Var(Temp, Nx, Ny);
}

```

void Filtra_Vary(D2_Var f, int yi, int yf, int Nx, int Ny)
/* Procedimento que executa um alisamento em uma função f qualquer numa região de pontos, na direção x , delimitada pelos índices xi e xf ;

Entrada :

f : vetor com os valores da função;
 SN_x : matriz núcleo para direção x ;
 xi : índice inicial da região;
 xf : índice final da região;
 Nx : número de pontos na direção x ;
 Ny : número de pontos na direção y ;

Saída :

f : vetor com os valores da função alisada;

```

*/
{
register int i, j;
D2_Var Temp = Mem_D2_Var(Nx, Ny);
for(i=0; i<=Nx; i++)
    for(j=yi; j<=yf; j++)
        Temp[i][j] = Alisa_y(f, SN_y, i, j, Ny);
for(i=0; i<=Nx; i++)
    for(j=yi; j<=yf; j++)
        f[i][j] = Temp[i][j];
Mem_Free_D2_Var(Temp, Nx, Ny);
}

```

A seguir é apresentado as rotinas de cálculo das derivadas, utilizando um algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT) e o algoritmo de derivação baseado na Eq 3.26.

```

void calc_fder(D2_Var fr, D2_Var fi, D2_Var dfx, D2_Var dfy, int Nx, int Ny)
/*

```

Cálculo da primeira derivada de duas funções, uma com relação a x e outra com relação a y , simultaneamente, utilizando um algoritmo de transformada rápida de Fourier, aplicando o método recursivo descrito pela Eq. 3.26. Entretanto, da forma que está disposto, este algoritmo somente funcionará se o número de pontos na direção x for igual ao número de pontos na direção y .

Entrada :

fr : uma função qualquer a ser derivada em x ;
 fi : uma função qualquer a ser derivada em y ;
 Nx : número de pontos na direção x ;
 Ny : número de pontos na direção y .

Saída :

dfx : derivada com relação a x de fr;
dfy : derivada com relação a y de fi.

```

*/
{
  unsigned long int i,j, n = Nx,nn;
  Dl_Var du = Mem_Dl_Var(n*4+2),
          tmp = Mem_Dl_Var(n*4+2);
  double fat;
  nn = 2*n;
  for(j=0;j<=Ny;j++)
  {
    du[0] = fr[0][j];
    du[1] = fi[j][0];
    for(i=1;i<=n-1;i++)
    {
      du[(i<<1)] = fr[i][j];
      du[(i<<1)+1] = fi[j][i];
      du[(n+i)<<1] = fr[n-i][j];
      du[((n+i)<<1)+1] = fi[j][n-i];
    }
    du[nn] = fr[n][j];du[nn+1]=fi[j][n];
    du--;
    four1(du,nn,1);
    du++;
    du[0] /= 2.0;du[1] /= 2.0;
    du[nn] /= 2.0;du[nn+1] /= 2.0;
    tmp[nn] = 0.0;
    tmp[nn+1] = 0.0;
    tmp[nn-2] = tmp[nn+2] = (nn*du[nn]);
    tmp[nn-1] = tmp[nn+3] = (nn*du[nn+1]);
    for(i=n-2;i>=1;i--)
    {
      tmp[i<<1] = tmp[(nn-i)<<1] = (tmp[(i+2)<<1]+((i+1)<<1)*
      du[(i+1)<<1]);
      tmp[(i<<1)+1] = tmp[((nn-i)<<1)+1] = (tmp[((i+2)<<1)+1]+
      ((i+1)<<1)*du[((i+1)<<1)+1]);
    }
    tmp[0] = (tmp[4]+2*du[2]);
    tmp[1] = (tmp[5]+2*du[3]);
    tmp--;
    four1(tmp,nn,1);
    tmp++; fat = nn;
    for(i=0;i<=Nx;i++)
    {
      dfx[i][j] = tmp[i<<1]/fat;
      dfy[j][i] = tmp[(i<<1)+1]/fat;
    }
  }
  free(tmp);
  free(du);
}

```