

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO EM MECÂNICA

1101
681.31
E5745
TEx/ME

SÍNTESE OTIMIZADA DE MECANISMO DE QUATRO
BARRAS.

Dissertação apresentada por ROBERTO DE ARAÚJO BEZERRA, à
Universidade Federal de Uberlândia, para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica.

DIRBI - UFU MON 00301/97



1000175531

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Mendes Carvalho (Orientador)	UFU
Prof. Dr. Valder Steffen Júnior	UFU
Prof. Dr. Fernando Jorge Rodrigues Neves	UnB

Uberlândia, 12 de dezembro de 1996.

10800

Dedico aos meus pais **Pedro Coelho Bezerra** e **Maria de Lourdes Araújo Coelho**,
aos meus irmãos **Fernanda, Pedro e Verônica** e sobrinhos **Isaac e Samuel**.

AGRADECIMENTOS

Ao professor João Carlos Mendes Carvalho, pelo apoio durante o período de orientação do trabalho.

Ao professor Valder Steffen Júnior, pelo importante auxílio em diversas ocasiões.

Ao professor Fernando Jorge Rodrigues Neves pela participação na Banca Examinadora.

Aos colegas do DEM, que me deram apoio e assumiram as disciplinas por mim lecionadas, permitindo assim o meu afastamento para conclusão do trabalho.

À Cláudia pela sua compreensão e apoio.

Aos companheiros do “Jurassic Park”, com quem convivi durante este período.

Aos meus amigos e todos que contribuíram para este trabalho em especial o colega José Antônio Ferreira Borges, que me deu algumas sugestões valiosas.

“Faça as coisas o mais simples que você
puder, porém não as mais simples”
(*Albert Einstein*)

“... As ameaças
E as guerras
Havemos de atravessá-las
Rompê-las ao meio
Cortando-as
Como uma quilha corta
As ondas.”

(*Maiakóvski, 1927*)

SÍNTESE OTIMIZADA DE MECANISMO DE QUATRO BARRAS

SUMÁRIO

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
LISTA DA FIGURAS	vii
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	ix
INTRODUÇÃO	1
1. ESTUDO DOS MECANISMOS	4
1.1 Graus de Liberdade e Mobilidade	8
1.2 Mecanismos de Quatro Barras	12
2. SÍNTESE DOS MECANISMOS	15
2.1 Mecanismo Plano de Quatro Barras como Gerador de Função	18
2.2 Mecanismo Plano de Quatro Barras como Gerador de Deslocamento	19
2.3 Mecanismo Plano de Quatro Barras como Gerador de Trajetória	21
2.3.1 Teorema de Robert-Chebychev	25
2.3.2 Síntese de Trajetória de um Mecanismo de Quatro Barras	28
3. OTIMIZAÇÃO	32
3.1 Otimização - Problema Geral	33
3.2 Função com Uma Variável	33
3.2.1 Método da Seção Áurea	35
3.2.2 Método da Aproximação Polinomial	39
3.3 Função de Várias Variáveis Sem Restrições	41

3.3.1	Estratégia Geral de Otimização	42
3.3.2	Método de Ordem Zero	42
3.3.3	Método de Primeira Ordem	44
3.3.4	Método de Segunda Ordem	46
3.4	Função de Várias Variáveis Com Restrições	47
3.4.1	Método da Função de Penalização Exterior	47
3.4.2	Método da Função de Penalização Interior	48
3.4.3	Método do Lagrangeano Aumentado	49
3.5	Processo de Solução dos Problemas de Otimização	51
4.	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM PROGRAMA PARA SUA SOLUÇÃO	52
4.1	Descrição do Problema	53
4.2	Formulação do Problema	55
4.2.1	Obtenção da Função Objetivo	55
4.2.2	Obtenção das Funções de Restrição	57
4.3	Problema Descrito Sob Forma de Equação	58
4.4	Implementação de um Programa Computacional para a Solução do Problema	59
4.4.1	Sub-rotina Distância Mínima	59
4.4.2	Program Principal	62
5.	APLICAÇÃO	65
5.1	Primeiro Exemplo	67
5.2	Segundo Exemplo	70
5.3	Conclusões Tiradas a partir dos Resultados	73
6.	CONCLUSÃO E SUGESTÕES	75
6.1	Conclusão	75
6.2	Sugestões	76

BIBLIOGRAFIA	78
ANEXOS	81
ANEXO I - Equacionamento do Teorema de Robert-Chebyshev	82
ANEXO II - ADS (Automated Design Synthesis)	85

BEZERRA, R. A., "Síntese Otimizada de Mecanismo de Quatro Barras", UFU, Uberlândia, 1996.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo da síntese otimizada de mecanismo de quatro barras, utilizando métodos de otimização. No início deste trabalho os mecanismos são tratados de forma sucinta, onde é dado um maior enfoque aos mecanismos de quatro barras. A síntese dos mecanismos de quatro barras é apresentada, sendo obtidas as equações para a síntese da trajetória de um ponto da biela, passando o mais próximo possível de nove pontos dados. Algumas técnicas de otimização são apresentadas. A obtenção da função objetivo que representa o problema de síntese é mostrada. O problema de otimização é resolvido através da criação de uma sub-rotina que gera a função objetivo, sendo a mesma acoplada ao programa de otimização ADS (Automated Design Synthesis). Ao final do trabalho é feita a aplicação do programa a alguns casos, que culminaram em conclusões que demonstram a relevância deste trabalho.

Palavras-Chave: Síntese, Mecanismo, Mecanismo de Quatro Barras, Otimização, Geração de Trajetória.

BEZERRA, R. A., "Optimized Synthesis of Four-bar Mechanisms", UFU, Uberlândia, 1996.

ABSTRACT

This work presents a study of the optimized synthesis of four-bar mechanisms, using optimization methods. In the beginning of this work the mechanisms are treated briefly, where it is given a greater attention to four-bar mechanisms. The four-bar mechanisms synthesis is presented giving the equations of the trajectory synthesis of the couple point, passing nearest of the nine given points. Some optimization techniques are presented. The objective function which represents the problem is shown. The optimization problem is then solved through the construction of a subroutine which generates the objective function and this subroutine is coupled to the optimization program. At last, the program is used to solve some case tests, which results in conclusions concerning relevant aspects of this research work.

Key-Words: Synthesis, Mechanisms, Four-bar Mechanisms, Optimization, Trajectory Generation .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	- Classificação de corpos em função do número de nós	06
Figura 1.2	- Exemplo de graus de liberdade de juntas	06
Figura 1.3	- Classificação de juntas em função do tipo de contato	07
Figura 1.4	- Classificação de juntas em função do tipo de fechamento físico das juntas	07
Figura 1.5	- Ordem das juntas	08
Figura 1.6	- Graus de liberdade de alguns segmentos no plano	09
Figura 1.7	- Paradoxo de Grubler	10
Figura 1.8	- Exemplo de denominação de sistemas através do símbolo do par cinemático	12
Figura 1.9	- Três tipos de mecanismos de quatro barras	12
Figura 1.10	- Mecanismo manivela balancim	13
Figura 1.11	- Mecanismo balancim duplo	13
Figura 1.12	- Mecanismo manivela dupla	14
Figura 2.1	- Esquema do estudo de mecanismos	15
Figura 2.2	- Mecanismo gerador de função, onde $\lambda = f(\theta)$	18
Figura 2.3	- Mecanismo como gerador de deslocamento	20
Figura 2.4	- Mecanismos de quatro barras geradores de deslocamento	21
Figura 2.5	- Mecanismo de quatro barras como traçador de trajetória	22
Figura 2.6	- Mecanismo traçador de trajetória	22
Figura 2.7	- Mecanismo de quatro barras fixo a um referencial móvel	25
Figura 2.8	- Mecanismo de quatro barras com sua trajetória	26
Figura 2.9	- Mecanismo de quatro barras após liberação dos pontos O_A e O_B	26
Figura 2.10	- Obtenção dos mecanismos cognatos	27
Figura 2.11	- Mecanismos cognatos	27
Figura 2.12	- Mecanismos cognatos com suas respectivas trajetórias	28
Figura 2.13	- Trajetória C imposta e mecanismo que a descreve	29

Figura 3.1	-	Função com dois pontos de mínimo e um ponto de máximo	34
Figura 3.2	-	Gráfico da função F e o intervalo de trabalho	35
Figura 3.3	-	Gráfico da função F , intervalo de trabalho e pontos intermediários	36
Figura 3.4	-	Gráfico do novo intervalo de trabalho obtido após escolha de X_3	37
Figura 4.1	-	Sistema cartesiano com nove pontos dados	53
Figura 4.2	-	Trajectoria C de um mecanismo	54
Figura 4.3	-	Distância mínima entre os pontos dados e a trajetória, descrita pelo ponto M do mecanismo	57
Figura 4.4	-	Distâncias calculadas para cada ponto obtido a partir de θ_i	60
Figura 4.5	-	Fluxograma da sub-rotina que gera a função objetivo	61
Figura 4.6	-	Fluxograma do programa principal	62
Figura 5.1	-	Variáveis de projeto	66
Figura 5.2	-	Apresentação dos pontos dados em um plano cartesiano	68
Figura 5.3	-	Apresentação dos pontos fornecidos em um plano cartesiano	71

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

gdl	graus de liberdade
M_0	mobilidade
L	número de segmentos
J	número de pares inferiores
G	número de segmentos fixos
J_1	número de pares inferiores
J_2	número de pares superiores
r	manivela do mecanismo de quatro barras
a	segmento fixo do mecanismo de quatro barras
b	balancim do mecanismo de quatro barras
c	biela do mecanismo de quatro barras
R	segmento fixo à biela que juntamente com φ define o ponto M
φ	ângulo entre a biela e o segmento R
θ	ângulo de entrada da manivela
λ	ângulo de saída no seguidor
M	ponto da biela do mecanismo de quatro barras
X_0, Y_0	variáveis que definem a origem do mecanismo de quatro barras em relação ao sistema inercial
ϕ	ângulo entre o segmento fixo do mecanismo de quatro barras e o sistema inercial
C	curva definida pelo ponto M do mecanismo de quatro barras
\mathbf{X}	vetor variáveis de projeto
$F(\mathbf{X})$	função objetivo
$g_j(\mathbf{X})$	restrições de desigualdade
$h_k(\mathbf{X})$	restrições de desigualdade
X_i	limite inferior de um intervalo
X_f	limite superior do intervalo
τ	taxa de redução percentual do intervalo X_i e X_f
F'	derivada primeira da função F

\mathbf{X}^*	vetor variáveis de projeto que minimiza a função $F(\mathbf{X})$
$\nabla F(\mathbf{X})$	gradiente da função $F(\mathbf{X})$
\mathbf{S}	vetor direção de busca
q	número de iterações
\mathbf{H}	matriz hessiana
DFP	método de Davidon-Fletcher-Powell
BFGS	método de Broydon-Fletcher-Goldfard-Shano
FVVS	função de várias variáveis sem restrição
FVVC	função de várias variáveis com restrição
$\phi(\mathbf{X}, r_p)$	função pseudo-objetivo
$P(\mathbf{X})$	função de penalidade
r_p	parâmetro de penalidade
$A(\mathbf{X}, \lambda, r_p)$	função pseudo-objetivo do método do lagrangeano aumentado
VVP	vetor variáveis de projeto
$P_i = (X_{di}, Y_{di})$	pontos fornecidos
D	distância entre os pontos dados e os pontos que definem a trajetória
D_{mi}	distância mínima entre os pontos dados e os pontos que definem a trajetória

INTRODUÇÃO

Uma das preocupações do homem sempre foi a de buscar alternativas para facilitar o trabalho humano. Daí, o seu grande interesse pelos mecanismos. Muitas vezes, existe a necessidade de substituir o homem na execução de alguns tipos de atividades, por exemplo, em algumas tarefas repetitivas onde as máquinas são mais eficazes. As máquinas, em geral, são compostas de diversos mecanismos. Tais mecanismos tem o objetivo de transmitir movimento. Desta forma, quando se projeta uma máquina, tem-se que definir os tipos de mecanismos que irão compor a máquina e o movimento de cada um. A esta etapa do projeto, dá-se o nome de síntese. Quando, na definição dos mecanismos, deseja-se que um de seus membros percorra uma trajetória preestabelecida, tem-se então um problema de síntese de trajetória. A mesma pode ser de tipo, de número ou dimensional. No primeiro caso, busca-se, dentre os diversos mecanismos conhecidos, um ou mais que realize a trajetória desejada. No segundo caso, busca-se definir o número de segmentos que irão compor este(s) mecanismo(s) e, na última etapa, busca-se definir as dimensões dos segmentos que irão compor o mecanismo. Neste trabalho, será abordado o último caso, ou seja, a síntese dimensional, pois o mecanismo aqui tratado já se encontra definido (mecanismo de quatro barras do tipo manivela balancim). A síntese dimensional pode ser obtida por um dos seguintes processos: através de métodos gráficos, métodos analíticos ou por meio de atlas de curvas. Os dois primeiros processos podem garantir, no máximo, cinco pontos de precisão, enquanto que no atlas não se tem garantias de nenhum ponto de precisão mas, somente, uma aproximação, que dependerá da escolha do projetista. Quem primeiro desenvolveu métodos analíticos, para síntese de mecanismos, foi Burmester, em 1876 (Krishnamurty, 1992; Hartenberg, 1964).

Com o passar do tempo, houve necessidade de mecanismos mais precisos, os quais tinham que passar por um número de pontos superior a cinco, com isso, buscou-se

alternativas para este problema. Uma delas foi associar os processos analíticos a otimização. Tal processo teve grande impulso no final da década de 60, com os trabalhos de Fox e Willmert, em 1967, que trataram do problema de síntese otimizada de mecanismos geradores de função com restrições de desigualdade. Em 1973, Fox e Gupta desenvolveram um trabalho que tratava da tecnologia da otimização aplicada ao projeto de mecanismos. A partir destes trabalhos, vários outros foram desenvolvidos utilizando a síntese otimizada de mecanismos.

Para que haja uma aplicação satisfatória dos processo de otimização, o primeiro passo a ser dado é a formulação do problema, que consiste em definir a função objetivo e as restrições. Estas restrições podem ser de concepção física ou escolhidas pelo projetista, tais como, tamanho do mecanismo, velocidade de um dos membros do mecanismo, etc. Após esta primeira etapa estar satisfeita, escolhe-se uma técnica de otimização para a solução do problema de otimização.

Nestes últimos anos, muitas técnicas de otimização foram desenvolvidas; algumas podem ser encontradas em pacotes comerciais, tais como, ADS (Vanderplaats,1985), OPT3 (Ragsdell,1989), OTIM (Faria,1991), etc. Estes pacotes dão a possibilidade de se escolher uma técnica, considerada adequada, para a solução do problema em mãos.

No desenvolvimento deste trabalho, foi utilizado o ADS (Automated Design Synthesis), que é um pacote já consagrado e já utilizado em vários trabalhos de otimização desenvolvidos nesta Universidade.

O que se busca neste trabalho é desenvolver um programa computacional que possibilite a síntese otimizada de um mecanismo de quatro barras.

No primeiro capítulo deste trabalho, é apresentada uma breve introdução sobre a história dos mecanismos, onde é feita uma diferenciação entre mecanismo e máquina, grau de liberdade e mobilidade. No final deste capítulo, tem-se a definição de mecanismos de Grashoff. Ali, são mostrados diversos tipos de mecanismos de Grashoff que podem ser obtidos através da inversão entre seus segmentos.

No segundo capítulo, é feito um estudo sobre síntese de mecanismos, onde os diversos tipos de síntese são definidos. Será dado um maior destaque à síntese dos mecanismos geradores de trajetórias, que é assunto de estudo deste trabalho. Neste

capítulo, ainda pode ser encontrada a teoria de Robert-Chebychev, que trata dos mecanismos cognatos.

No terceiro capítulo, é feita uma breve explanação sobre a otimização e alguns métodos considerados mais relevantes no contexto desta dissertação. Ao final deste capítulo, é feita uma explicação simplificada de como um pacote de otimização atua em um problema de otimização.

No quarto capítulo, é feita a formulação do problema, ou seja, é obtida a função objetivo e suas restrições. Neste mesmo capítulo, é mostrado o fluxograma do programa usado para gerar a função objetivo, bem como o fluxograma do programa principal do ADS.

No quinto capítulo, são feitas algumas aplicações do programa na síntese de mecanismos, onde as distâncias mínimas são mostradas para cada ponto antes e após a otimização do mecanismo.

No sexto capítulo, são apresentadas algumas conclusões, obtidas a partir deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

O equacionamento da teoria de Robert-Chebychev, para a obtenção de mecanismos cognatos, é apresentada no anexo I; no anexo II deste trabalho, é apresentada uma breve explanação sobre a utilização do ADS.

1 - ESTUDO DOS MECANISMOS

Para melhor entender o significado da palavra Mecanismo é necessário que se faça um breve histórico de sua utilização no decorrer da existência da humanidade.

São dadas algumas definições para que se possa fazer uma diferenciação entre Máquina e Mecanismo, as quais são necessárias, a fim de que se possa situar de forma mais clara na abordagem dos Mecanismos tratados neste trabalho.

Um dos primeiros relatos de que se tem notícia da utilização da palavra Máquina é de 28 A.C. no qual o engenheiro grego Vitruvius definiu máquina como: “Uma combinação de madeiras e juntas, eficaz principalmente no movimento de grandes pesos” (Hartenberg e Denavit, 1964). Um século após, Hero de Alexandria define cinco mecanismos simples para a movimentação de um peso, por uma dada força. Estes mecanismos são: alavanca, guincho (ou cabrestante), parafuso para potência, cunha e cadernal (polias) (Hartenberg e Denavit, 1964).

No ano de 1875 Franz Reuleaux fez algumas observações com relação às Máquinas, onde ele diz que as máquinas são compostas de componentes mecânicos básicos:

- a) Barra de olhal, tipo de membro chamado de manivela;
- b) As rodas, incluindo as engrenagens;
- c) As came em suas várias formas;
- d) As hélices para comunicar movimento e força;
- e) Os mecanismos de movimento intermitente, chamados de catracas;
- f) Órgãos de tensão e compressão, que são componentes que tem rigidez em uma única direção, tais como, correias, correntes e linhas hidráulicas (Hartenberg e Denavit, 1964 ; Norton, 1992).

Marx, em sua obra, O Capital, século 19, diz que toda máquina desenvolvida constitui-se basicamente de três partes essencialmente distintas: a máquina motriz, o mecanismo de transmissão e, finalmente, a máquina-ferramenta ou máquina de trabalho (Marx, 1984).

Coriolis, também no século 19, afirma que uma máquina completa é constituída de três partes ou grupos de partes: receptor de energia, o comunicador ou partes que transmitem movimento e o operador ou partes de trabalho ou ferramentas (Hartenberg e Denavit, 1964).

Por volta de 1954, Denavit e Hartenberg definem Máquina como sendo a associação de membros para o uso e transformação de forças, embora, o movimento em grau variado seja encontrado em uma Máquina, a idéia de força é preponderante. Já o Mecanismo faz aparecer a idéia de movimento como preponderante, enquanto as forças não têm muita importância, quando comparadas com o movimento. Entretanto, Máquina e Mecanismo habitam o mesmo corpo (Hartenberg e Denavit, 1964).

Robert L. Norton define *Mecanismo* como um sistema de elementos arranjados para transmitir movimento em uma forma predeterminada e, Máquina, é definida como sendo um sistema de elementos arranjados para transmitir movimento e energia em uma forma preestabelecida. Norton ainda afirma que não é clara a linha divisória entre Mecanismo e Máquina. Eles diferem mais em grau que em espécie. Se as forças e níveis de energia em um equipamento são significativas então, ele é uma Máquina; caso contrário, ele é considerado um Mecanismo (Norton, 1992).

Para este trabalho usou-se como base as duas últimas definições acima citadas, onde os elementos ou corpos arranjados são rígidos, apesar de sabermos que não existem corpos rígidos, pois os corpos são elásticos ou plásticos e, desta forma, quando submetidos a esforços sofrem deformações. Porém, quando estas deformações são bastante pequenas, pode-se considerar os corpos como sendo *rígidos*. Neste trabalho não há preocupação com os esforços envolvidos no sistema. Estes corpos rígidos possuem pontos ou nós, os quais possibilitam a ligação entre dois ou mais corpos. Os corpos de acordo com o número de nós podem ser classificados em:

- a) *Corpos Binários* - corpo que possui dois nós (fig. 1.1a)
- b) *Corpos Ternários* - corpo que possui três nós (fig. 1.1b)
- c) *Corpos Quaternários* - corpo que possui quatro nós (fig. 1.1c)

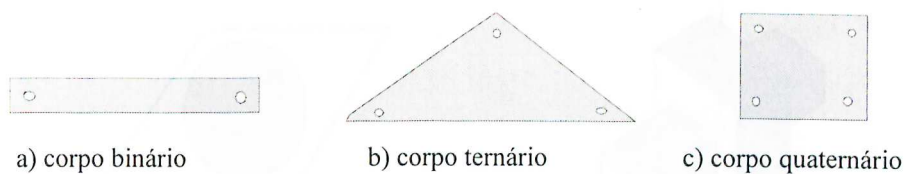


Figura 1.1 - Classificação de corpos em função do número de nós.

Quando dois ou mais corpos estão unidos, o ponto de união é chamado de junta ou par cinemático, o qual pode ser classificado considerando:

- a) O número de graus de liberdade permitido pela junta. As juntas são classificadas como tendo um, dois, três ou mais graus de liberdade (fig.1.2)

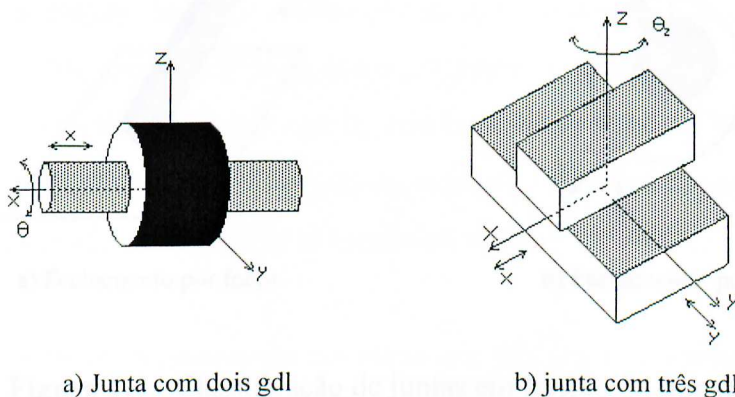


Figura 1.2 - Exemplo de graus de liberdade de juntas.

- b) Pelo tipo de contato entre os corpos que compõem a junta. São classificados como *pares superiores*, quando o contato entre os corpos é feito por meio de um ponto ou linha e, por *pares inferiores*, quando o contato é feito através de uma superfície (fig. 1.3)

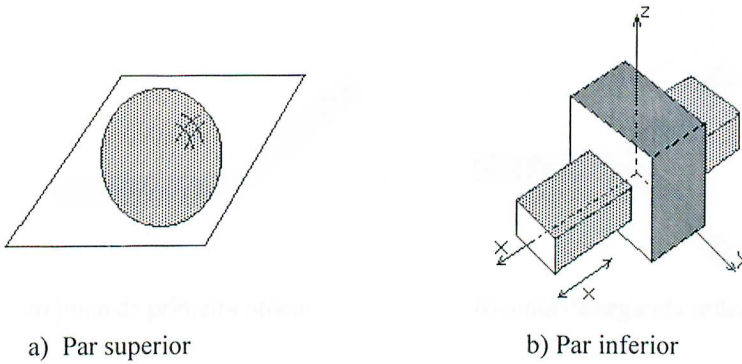


Figura 1.3 - Classificação de juntas em função do tipo de contato.

c) Pelo tipo de fechamento físico da junta que pode ser: ligação por força ou por forma (fig. 1.4)

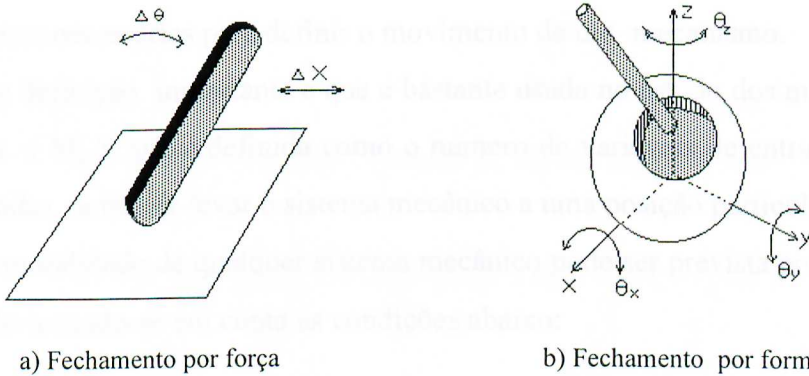


Figura 1.4 - Classificação de juntas em função do tipo de fechamento físico das juntas.

d) Pelo número de corpos unidos, que chamamos de *ordem da junta* (fig. 1.5).

A ordem de uma junta será obtida subtraindo-se uma unidade do número de elementos unidos pela junta:

$$\text{Ordem da Junta} = (\text{Número de Elementos unidos pela junta}) - 1$$

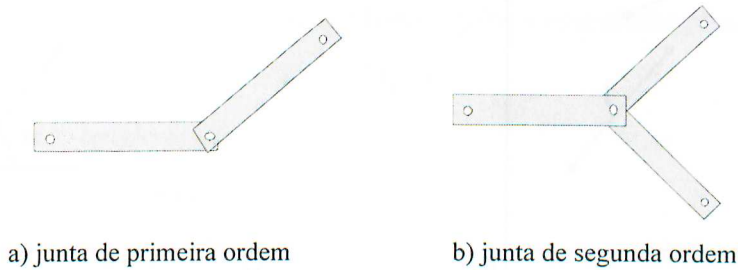


Figura 1.5 - Ordem das juntas.

1.1- Graus de Liberdade e Mobilidade

O número de *Graus de liberdade* é fundamental na análise e síntese de um mecanismo. Pode ser definido como sendo o número de coordenadas linearmente independentes necessárias para definir o movimento de um mecanismo.

Outra definição importante e que é bastante usada no estudo dos mecanismos, é a *Mobilidade* (M_0), que é definida como o número de variáveis de entrada que podem ser controladas, a fim de levar o sistema mecânico a uma posição particular.

A mobilidade de qualquer sistema mecânico pode ser prevista por meio de uma investigação levando-se em conta as condições abaixo:

a)- Qualquer segmento em um plano tem três graus de liberdade (gdl).

Desta forma um sistema com L segmentos não conectados deve ter $3L$ gdl.

b)- A conexão de dois segmentos por um par inferior faz com que sejam reduzidos dois g.d.l.

c)- Ao fixar um segmento do sistema tem-se uma redução de 3gdl.

Para um sistema com dois segmentos, os quais estão livres no plano, tem-se 6gdl. Ao serem conectados, por meio de um par inferior, o conjunto obtido passará a ter 4gdl

As considerações acima estão mostradas na figura 1.6.

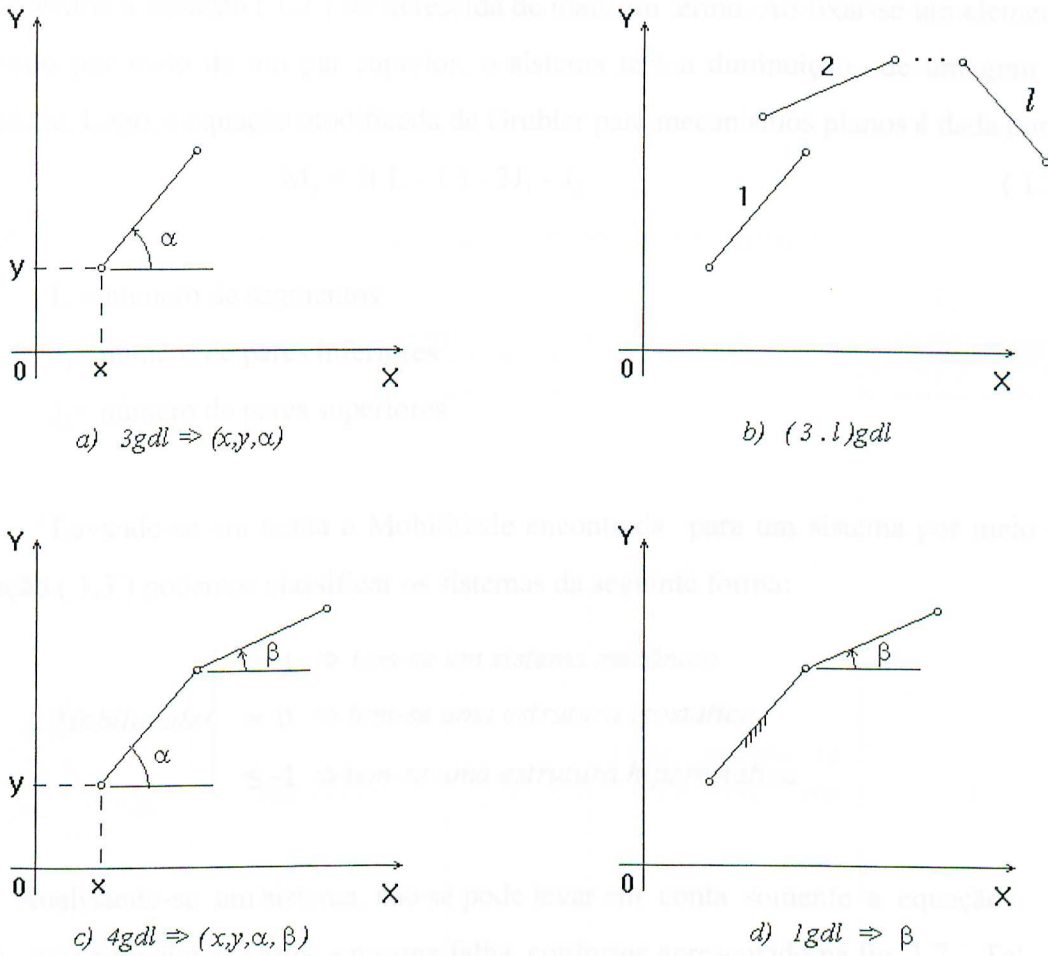


Figura 1.6 - Graus de liberdade de alguns segmentos no plano.

A partir destas considerações, Grubler propôs uma equação para a mobilidade:

$$M_0 = 3L - 2J - 3G \quad (1.1)$$

onde:

L = número de segmentos

J = número de pares inferiores

G = número de segmentos fixos.

Como sempre se tem um membro fixo, a equação torna-se:

$$M_0 = 3(L - 1) - 2J \quad (1.2)$$

Kutzbach (Norton, 1992) fez considerações em relação ao sistema de Grubler no qual ele leva em conta o fato de haver a possibilidade da existência de pares superiores,

o que levaria a equação (1.2) ser acrescida de mais um termo. Ao fixar-se um elemento ao outro por meio de um par superior, o sistema terá a diminuição de um grau de liberdade. Logo, a equação modificada de Grubler para mecanismos planos é dada por:

$$M_0 = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2 \quad (1.3)$$

onde:

L = número de segmentos

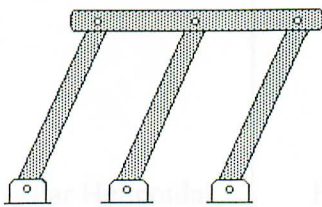
J_1 = número de pares inferiores

J_2 = número de pares superiores

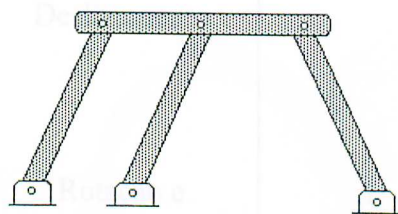
Levando-se em conta a Mobilidade encontrada para um sistema por meio da equação (1.3) podemos classificar os sistemas da seguinte forma:

$$Mobilidade \begin{cases} \geq 1 \Rightarrow \text{tem-se um sistema mecânico} \\ = 0 \Rightarrow \text{tem-se uma estrutura isostática} \\ \leq -1 \Rightarrow \text{tem-se uma estrutura hiperestática} \end{cases}$$

Analisando-se um sistema, não se pode levar em conta somente a equação (1.3), pois para alguns casos, a mesma falha, conforme apresentado na fig. 1.7. Tal fato é conhecido por paradoxo de Grubler.



a) $M_0 = 0$, $gdl = 1$
 ($L = 5$, $J_1 = 6$, $J_2 = 0$)



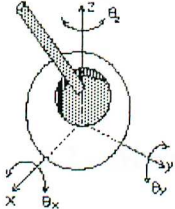
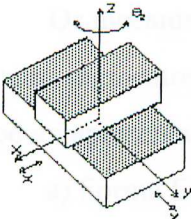
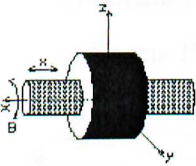
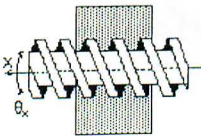
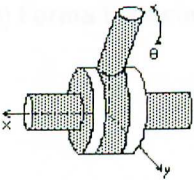
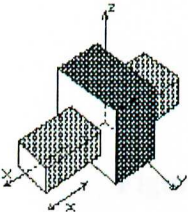
b) $M_0 = 0$, $gdl = 0$
 ($L = 5$, $J_1 = 6$, $J_2 = 0$)

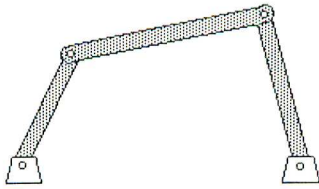
Figura 1.7 - Paradoxo de Grubler.

Como pode ser verificado, o sistema da fig. 1.7 a tem um grau de liberdade, enquanto o sistema da figura 1.7b consiste em uma estrutura isostática, contrariando a classificação apresentada anteriormente.

A tabela 1.1 apresenta uma nomenclatura bastante utilizada para *Pares Inferiores*, e que será adotada no decorrer deste trabalho. Utilizando-se desta nomenclatura, são apresentados exemplos de mecanismos, figura 1.8.

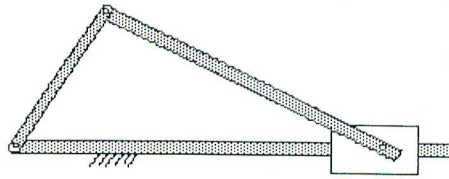
Tabela 1.1 - Representação de alguns pares de elementos.

Rep. Física	Nome	Símbolo	Movimento	Núm. de gdl
	Par Esférico	S	Rotação em torno de x,y e z	3
	Par Plano	E	Deslocamento em x e y e rotação em z	3
	Par Cilíndrico	C	Rotação e Deslizamento	2
	Par Helicoidal	H	Rotação e Translação	1
	Par de Revolução	R	Rotação	1
	Par Prismático	P	Deslizamento	1



a) Mecanismo de Quatro Barras Plano

Nomenclatura: RRRR



b) Mecanismo Manivela Balancim

Nomenclatura: RRRP

Figura 1.8 - Exemplo de denominação de sistemas através do símbolo do par cinemático.

1.2 - Mecanismos de Quatro Barras

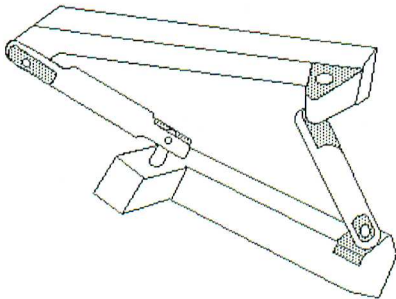
Os mecanismos de quatro barras são mecanismos de cadeia fechada compostos de quatro segmentos, onde as juntas são de primeira ordem e só permitem uma rotação.

Podem apresentarem-se de três formas (figura 1.9):

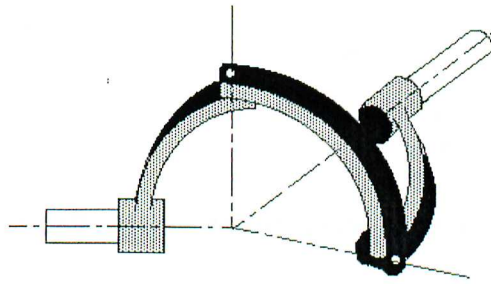
a) Forma Espacial

b) Forma Esférica

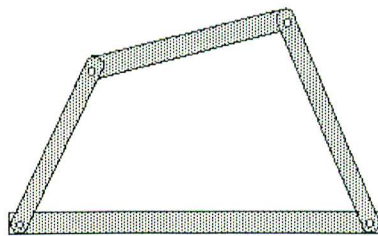
c) Forma Plana



a) Forma Espacial (Mecanismo de Bennett)



b) Forma Esferica



c) Forma Plana

Figura 1.9 - Três tipos de mecanismos de Quatro Barras

O mecanismo espacial de quatro barras, também conhecido como mecanismo de Bennett, e os mecanismos esféricos de quatro barras não serão abordados neste trabalho.

Os mecanismos planos de quatro barras, que serão objeto de nosso estudo, são considerados um caso particular dos mecanismos de quatro barras esféricos, pois, quando o raio da esfera, na qual está inserida o mecanismo, tende ao infinito, o mesmo torna-se um mecanismo plano de quatro barras.

Existem três tipos de mecanismos planos de quatro barras:

- a) Manivela Balancim
- b) Balancim Duplo
- c) Manivela Dupla

Para identificar o tipo de mecanismo é necessário conhecer o comprimento dos segmentos que o compõem bem como qual deles é fixo. De posse dessas informações pode-se utilizar o critério de Grashoff:

Se a soma do comprimento do menor segmento com o maior segmento for menor ou igual a soma dos outros dois segmentos, tem-se um dos seguintes casos:

- 1- *Se a barra adjacente à menor for a fixa, pode-se obter dois mecanismos Manivela Balancim, figura 1.10.*

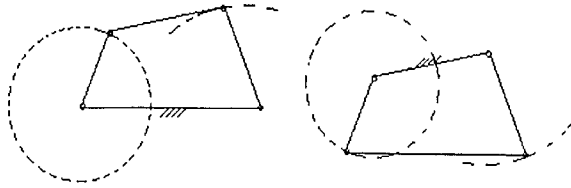


Figura 1.10 - Mecanismo Manivela Balancim

- 2- *Se a barra oposta à menor for a fixa, obtém-se um mecanismo balancim duplo, figura 1.11.*

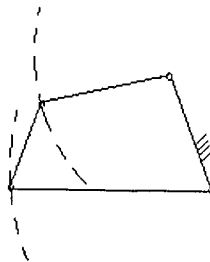


Figura 1.11 - Mecanismo Balancim Duplo

3- Se a barra menor for a fixa obtém-se um mecanismo manivela dupla, figura 1.12.

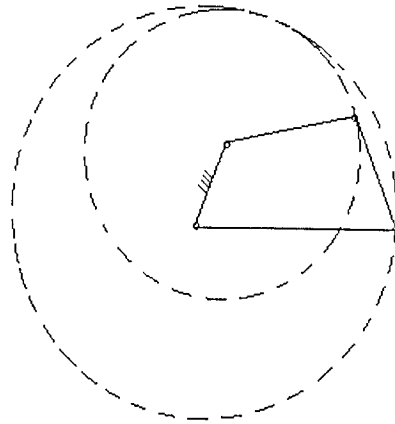


Figura 1.12 - Mecanismo Manivela Dupla

Caso a soma do comprimento do menor segmento com o maior for maior que a soma dos outros dois segmentos, obtém-se somente balancim duplo.

Neste trabalho, só serão considerados os mecanismos de quatro barras planos, que obedeçam a lei de Grashoff, e que gerem um mecanismo *manivela balancim*.

2. SÍNTESE DOS MECANISMOS

Quando se fala em estudo dos mecanismos pode-se abordá-los de duas formas: a *análise* e a *síntese*. Na *análise*, estuda-se o mecanismo já conhecido, podendo ser dividida em duas partes: a *Estática* e a *Dinâmica*. Na *estática*, estuda-se o sistema onde o tempo não é considerado como um fator, ou seja, calcula-se as forças interiores, a deformação, as tensões nos elementos e nas ligações devido a um carregamento estático ou à gravidade; por outro lado, na *dinâmica*, o tempo é um fator importante. A *dinâmica* pode ainda ser dividida em duas partes, que são: a *Cinemática* e a *Cinética*.

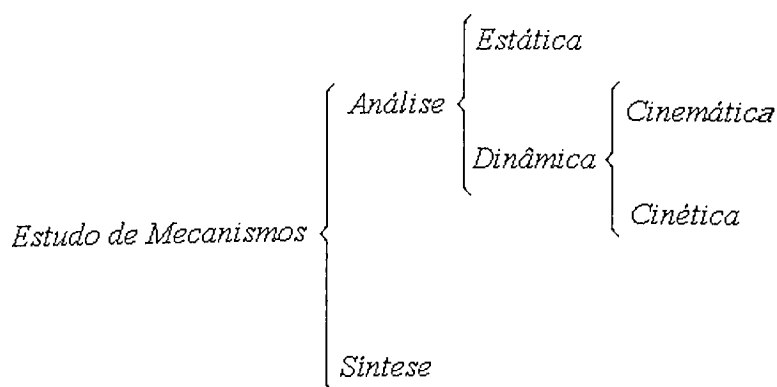


Figura 2.1 - Esquema do estudo de mecanismos.

Na *cinemática*, estuda-se o movimento do sistema, ou seja: deslocamento, velocidade e aceleração, sem que haja uma preocupação com as forças que produzem o movimento ou dela decorrentes. Na *cinética*, estas forças são consideradas.

Na *Síntese*, procura-se encontrar um sistema que satisfaça alguns requisitos pré-estabelecidos. O processo de síntese pode ser dividido em:

- a) *Síntese de Tipo*
- b) *Síntese de Número*
- c) *Síntese Dimensional*

Na *Síntese de Tipo*, busca-se encontrar os tipos de mecanismos que atendam aos requisitos anteriormente estabelecidos.

Na *Síntese de Número*, será estabelecido o número de membros, que irá compor o sistema, e os tipos de juntas, com suas respectivas restrições, de modo que atendam os requisitos estabelecidos.

Na *Síntese Dimensional*, determina-se o comprimento dos elementos que irão compor o nosso sistema. A síntese dimensional pode ser obtida por meio de um dos três procedimentos abaixo:

- a) *Métodos Gráficos*
- b) *Utilização de Atlas de Curvas*
- c) *Métodos Analíticos*

Os *Métodos Gráficos de Síntese* apresentam a vantagem de facilitar a visualização do mecanismo, porém, são de pouca precisão e sua solução torna-se às vezes muito complexa, pois, para se obter um mecanismo o mais próximo possível do desejado, tem-se que repetir várias vezes a construção geométrica.

Os *Atlas de Curvas*, na síntese de mecanismos, são de fácil utilização, porém, de pouca precisão. Eles apresentam um conjunto de trajetórias e respectivos mecanismos traçadores.

Os atlas são bastante úteis no processo de síntese analítica, pois servem como uma primeira aproximação, para a inicialização do processo.

Os *Métodos Analíticos*, apesar de serem muito complexos, apresentam uma precisão superior a dos outros processos acima citados. Este método permite obter as equações que permite obter a síntese do mecanismo. Para até no máximo cinco pontos da trajetória, pode-se obter a equação que fornece os parâmetros do mecanismo (Hartenberg e Denavit, 1964).

Quando o número de pontos é superior a cinco, utiliza-se métodos numéricos para a solução do problema.

É bom atentar-se para o fato que neste trabalho, será utilizado o Método Analítico, pois, além de possibilitar a utilização de programa computacional na sua solução é bem mais preciso que os outros dois. Este método será tratado com mais detalhe adiante.

As definições tratadas até o momento, neste capítulo, só se aplicam aos sistemas cujos elementos componentes dos mesmos são considerados corpos rígidos. Porém, algumas vezes, há a necessidade de estudarmos sistemas que não são rígidos, desta forma pode-se ter:

a) *Análise elástica*

b) *Análise Elasto-dinâmica*

c) *Análise Cineto-Elasto-dinâmica*

Análise Elástica : Calcula-se as tensões e as deformações provocadas pela força estática de um sistema elástico a fim de determinar a rigidez do sistema.

Análise Elasto-dinâmica : Calcula-se a aceleração, a velocidade, o deslocamento, a deformação e as tensões para um mecanismo elástico em movimento. A força de inércia é determinada, supondo que todos os elementos do mecanismo são rígidos.

Análise Cineto-elasto-dinâmica : Calcula-se a aceleração, a velocidade, o deslocamento, a deformação e a tensão para um mecanismo elástico em movimento. O efeito da deformação elástica sobre a força de inércia é levada em conta.

Do mesmo modo, o estudo da síntese de um mecanismo pode também aplicar-se a sistemas cujos elementos que compõem o mesmo não são considerados corpos rígidos. Neste caso tem-se:

a) *Síntese Cineto-elasto-estática*

b) *Síntese Cineto-elasto-dinâmica*

Síntese Cineto-elasto-estática : determina um mecanismo satisfazendo às condições impostas de posição, de velocidade, de aceleração, de esforços, de transmissão, de tensão e de deformação. Tal mecanismo é considerado elástico e as inércias são negligenciadas.

Síntese Cineto-elasto-dinâmica : determina um mecanismo satisfazendo às condições impostas de posição, de velocidade, de aceleração, de tensão e de deformação. O mecanismo é considerado elástico e as inércias não são negligenciadas.

Os mecanismos planos de quatro barras podem ser classificados em função da sua aplicação:

- a) *Geradores de Função*
- b) *Geradores de Deslocamento*
- c) *Geradores de Trajetória*

e que serão apresentados a seguir.

2.1 Mecanismo Plano de Quatro Barras como Gerador de Função

Os mecanismos planos de quatro barras, atuando como *Geradores de função*, são mecanismos que relacionam o ângulo de entrada θ_1 , que é uma variável independente, com um ângulo de saída λ_1 , os quais estão relacionados sob a forma de uma função $\lambda=f(\theta)$, figura 2.2.

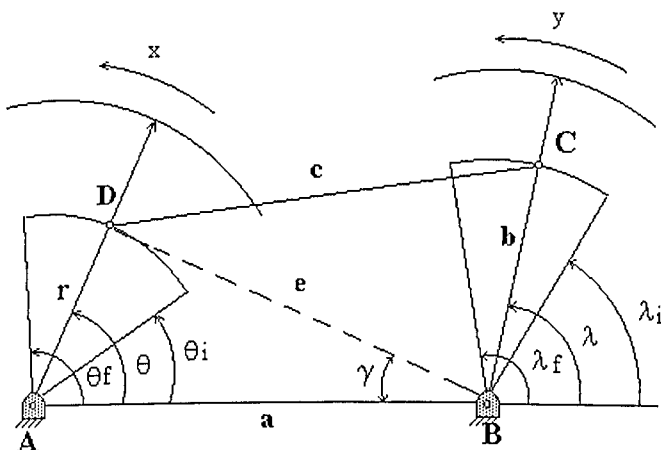


Figura 2.2 - Mecanismo gerador de função, onde $\lambda = f(\theta)$.

A relação $\lambda = f(\theta)$ pode ser explicitada por meio de relações trigonométricas, ou seja:

$$\lambda = \gamma + \cos^{-1}\left(\frac{b^2 - c^2 + e^2}{2be}\right) \quad (2.1)$$

onde:

$$e^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta$$

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{r \cdot \sin \theta}{e}\right) \quad \text{ou,}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a - r \cdot \cos \theta}{e}\right) \quad \text{ou,}$$

$$\gamma = \text{tg}^{-1}\left(\frac{r \cdot \sin \theta}{a - r \cdot \cos \theta}\right)$$

Logo, no caso de *Síntese de um Mecanismo Plano de Quatro Barras Gerador de Função*, deve-se encontrar as dimensões dos elementos que compõem o sistema, de tal forma que, uma função $\lambda = f(\theta)$, dada como requisito, seja atendida pelo mecanismo.

2.2 Mecanismo Plano de Quatro Barras como Gerador de Deslocamento

Nos mecanismos *planos de quatro barras como geradores de deslocamento*, o interesse reside no estudo do movimento da biela ao longo de uma trajetória, ou seja, o ângulo α descrito pela reta formada pelos pontos D e C, conforme figura 2.3. Como a reta está presa à biela, tem-se uma relação entre o ângulo α , formado pela linha DC e o eixo X, como função do ângulo θ .

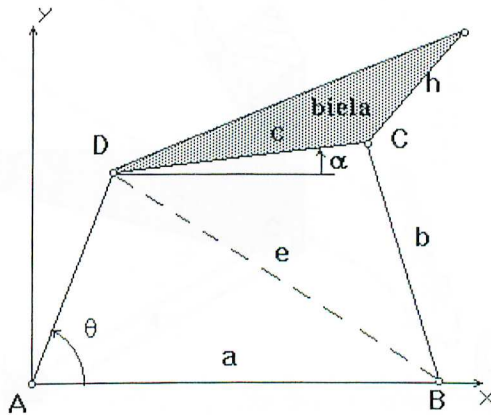
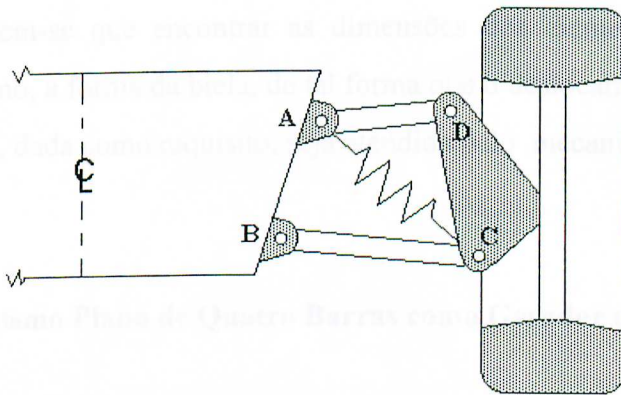


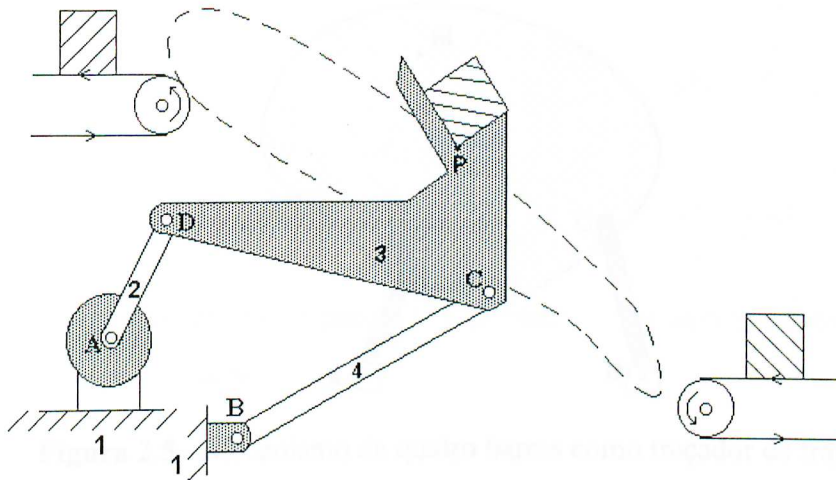
Figura 2.3 - Mecanismo como gerador de deslocamento.

Na fig. 2.4, pode-se observar dois exemplos de aplicação dos mecanismos geradores de deslocamento.



a) Mecanismo de quatro barras como gerador de deslocamento da suspensão de um automóvel.

Figura 2.4 - Mecanismos de quatro barras geradores de deslocamento (Norton, 1992).



b) Mecanismo de quatro barras como gerador de deslocamento utilizado em um transportador industrial.

Figura 2.4 - Mecanismos de quatro barras geradores de deslocamento (Norton, 1992).

Desta forma, na *Síntese de um Mecanismo de Quatro Barras Gerador de Deslocamento*, tem-se que encontrar as dimensões dos elementos que compõem o sistema, bem como, a forma da biela, de tal forma que o deslocamento da biela ao longo de uma trajetória, dada como requisito, seja atendida pelo mecanismo.

2.3 Mecanismo Plano de Quatro Barras como Gerador de Trajetória

Considerando-se um ponto qualquer M da biela, mostrada na fig. 2.5, e fazendo com que a barra AD gire em torno de A, o ponto escolhido na biela irá traçar uma curva no plano. Cabe observar que o mecanismo proposto é um mecanismo de quatro barras do tipo manivela balancim, então o elemento AD pode girar em torno de A e nos pontos A, B, C e D tem-se juntas de rotação R.

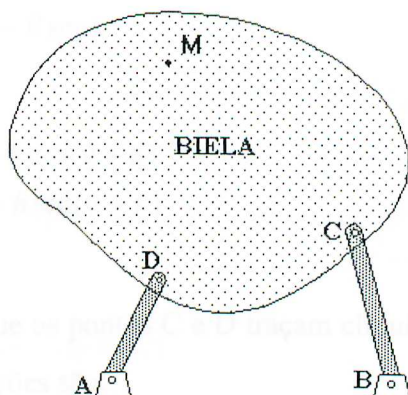


Figura 2.5 - Mecanismo de quatro barras como traçador de trajetória.

Escolhido o ponto M a biela será um triângulo formado pelos pontos C, D e M de tal forma que a curva gerada pelo ponto M é obtida por meio de algumas relações trigonométricas. Na figura 2.6, são apresentadas as notações geométricas que serão usadas no equacionamento da curva traçada pelo ponto M.

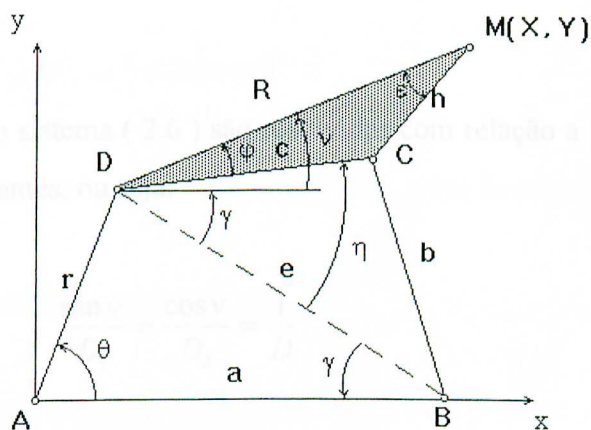


Figura 2.6 - Mecanismo traçador de trajetória.

Considerando (x_C, y_C) e (x_D, y_D) as coordenadas dos pontos C e D e, (x, y) as coordenadas do ponto M, tem-se:

$$\begin{cases} x_D = x - R \cos v \\ y_D = y - R \operatorname{sen} v \end{cases} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{cases} x_C = x - h \cos(v + \varepsilon) \\ y_C = y - h \operatorname{sen}(v + \varepsilon) \end{cases} \quad (2.3)$$

Pode-se ainda observar que os pontos C e D traçam círculos com centros em B e A respectivamente, cujas equações são:

$$x_D^2 + y_D^2 = r^2 \quad (2.4)$$

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = b^2 \quad (2.5)$$

Substituindo a eq. (2.2) na eq. (2.4) e a eq. (2.3) na eq. (2.5), obtém-se após desenvolvimento:

$$\begin{cases} 2Ry \operatorname{sen} v + 2Rx \cos v + r^2 - (x^2 + y^2 + R^2) = 0 \\ 2h[y \cos \varepsilon - (x - a) \operatorname{sen} \varepsilon] \operatorname{sen} v + 2h[y \operatorname{sen} \varepsilon + (x - a) \cos \varepsilon] \cos v + b^2 - [(x - a)^2 + y^2 + h^2] = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

As equações do sistema (2.6) são resolvidas com relação a $\operatorname{sen} v$ e $\cos v$, pelo método dos determinantes, ou seja:

$$\frac{\operatorname{sen} v}{D_1} = \frac{\cos v}{D_2} = \frac{1}{D} \quad (2.7)$$

Aplicando-se a identidade matemática $\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1$, obtém-se a equação da curva da biela:

$$D_1^2 + D_2^2 = D^2 \quad (2.8)$$

Onde:

$$D_1 = Rx\{b^2 - [(x-a)^2 + y^2 + h^2]\} - h[y \operatorname{sen} \varepsilon + (x-a) \operatorname{cos} \varepsilon].[r^2 - (x^2 + y^2 + R^2)]$$

$$D_2 = h[y \operatorname{cos} \varepsilon - (x-a) \operatorname{sen} \varepsilon].[r^2 - (x^2 + y^2 + R^2)] - Ry\{b^2 - [(x-a)^2 + y^2 + h^2]\}$$

$$D = 2hR\{[x(x-a) + y^2] \operatorname{sen} \varepsilon - ay \operatorname{cos} \varepsilon\}$$

A equação descrita pelo ponto M da biela pode ser obtida como função de θ , cuja forma paramétrica é:

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{e} \quad (2.9)$$

$$\operatorname{cos} \eta = \frac{e^2 + c^2 - b^2}{2ec} \quad (2.10)$$

onde:

$$e^2 = a^2 + r^2 - 2ar \operatorname{cos} \theta \quad (2.11)$$

Desta forma, as coordenadas do ponto M podem ser dadas por:

$$x = r \operatorname{cos} \theta + R \operatorname{cos}(\eta - \gamma + \varphi) \quad (2.12)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen}(\eta - \gamma + \varphi) \quad (2.13)$$

A fim de aumentar ainda mais a possibilidade de geração de curvas, pode-se considerar que o sistema encontra-se preso a um referencial que é móvel em relação a um referencial inercial, como mostrado na figura 2.7.

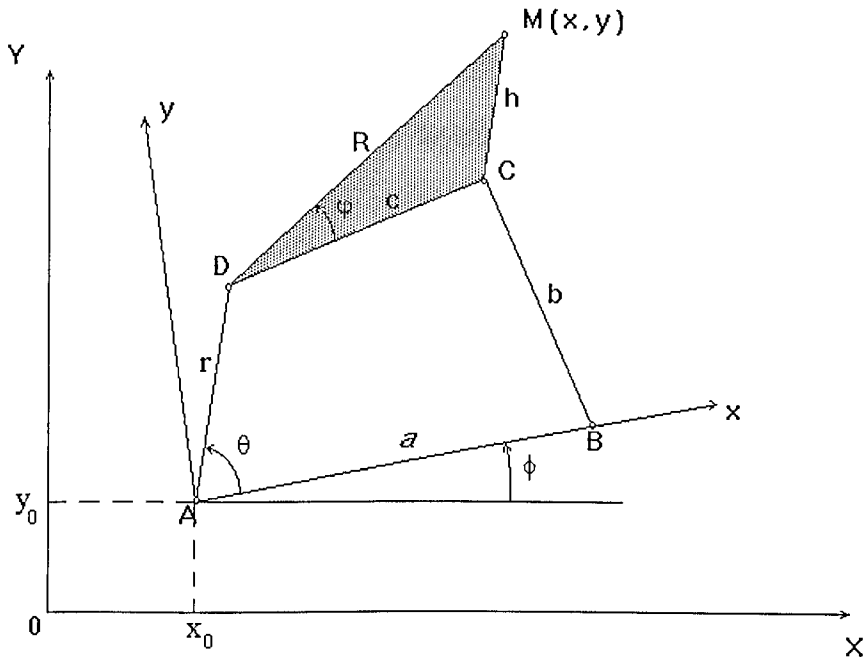


Figura 2.7 - Mecanismo de quatro barras fixo a um referencial móvel.

Desta forma, o ponto $M(x, y)$ pode ser dado em relação ao referencial fixo, considerando que o sistema móvel sofreu uma translação e uma rotação.

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

2.3.1 Teorema de Robert-Chebychev

Uma importante propriedade dos mecanismos de quatro barras foi enunciada, independentemente, por Robert (1875) e por Chebychev (1878), tendo ambos chegado à mesma conclusão: *existem três diferentes mecanismos planos de quatro barras que traçam a mesma trajetória*, o que passou a ser chamado de teorema de Robert-Chebychev.

Os mecanismos diferentes que traçam a mesma curva foram chamados de *Cognatos*, termo usado por Hartenberg e Denavit (1965). Eles também apresentaram

extensões do teorema de Robert-Chebyshev para *mecanismos pistão manivela* e para os *mecanismos de seis barras*, os quais foram enunciados da seguinte forma:

- a- Dois diferentes mecanismos pistão manivela podem traçar trajetórias idênticas.
- b- A trajetória traçada por um mecanismo plano de quatro barras é também descrita pela junta de dois segmentos de um apropriado mecanismo de seis barras (Norton, 1992).

Como o interesse deste trabalho é pelos mecanismos planos de quatro barras, é mostrado como se pode obter os mecanismos cognatos de quatro barras. Na fig. 2.8, tem-se um mecanismo de quatro barras, com sua respectiva trajetória, e se deseja encontrar os outros dois mecanismos que são seus cognatos.

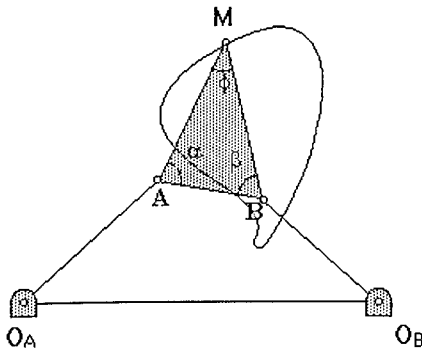


Figura 2.8 - Mecanismo de quatro barras com sua trajetória.

O primeiro passo a ser tomado é liberar o mecanismo nas juntas O_A e O_B , de modo que se tenha uma reta como mostra a fig. 2.9.

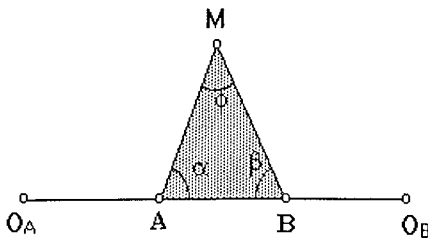


Figura 2.9 - Mecanismo de quatro barras após liberação dos pontos O_A e O_B .

A partir do mecanismo mostrado na figura 2.9, pode-se construir mais dois mecanismos, conforme a figura 2.10, de modo que o segmento definido por O_A e O_C seja

paralelo ao segmento definido por A e C_2 , e de forma similar $O_C O_B // B C_1$ e $A_1 B_2 // O_A O_B$.

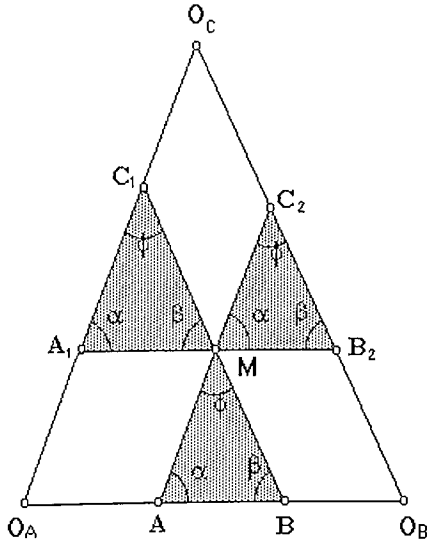


Figura 2.10 - Obtenção dos mecanismos cognatos.

A partir do sistema mostrado na figura 2.10, é necessário retornar as juntas O_A e O_B para a posição inicial, conforme a figura 2.8. Desta feita, obtém-se um sistema cuja a configuração está mostrada na figura 2.11. Cabe salientar que os ângulos \hat{O}_A , \hat{O}_B e \hat{O}_C , obtidos na construção da figura 2.10 são os mesmos do triângulo $O_A O_B O_C$ da fig. 2.11.

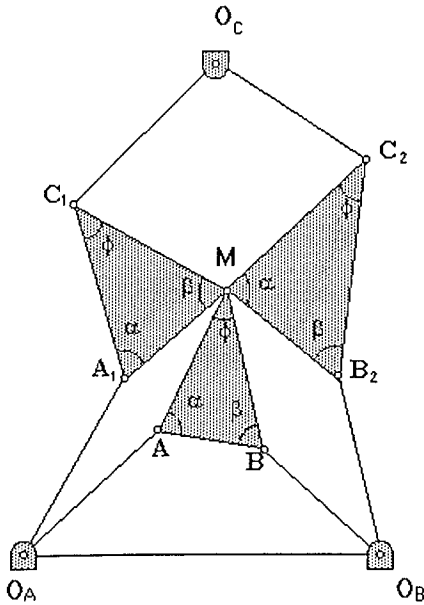


Figura 2.11 - Mecanismos cognatos.

Os sistemas cognatos podem agora ser separados. Assim, obtém-se os três mecanismos cognatos, conforme mostrados na figura 2.12.

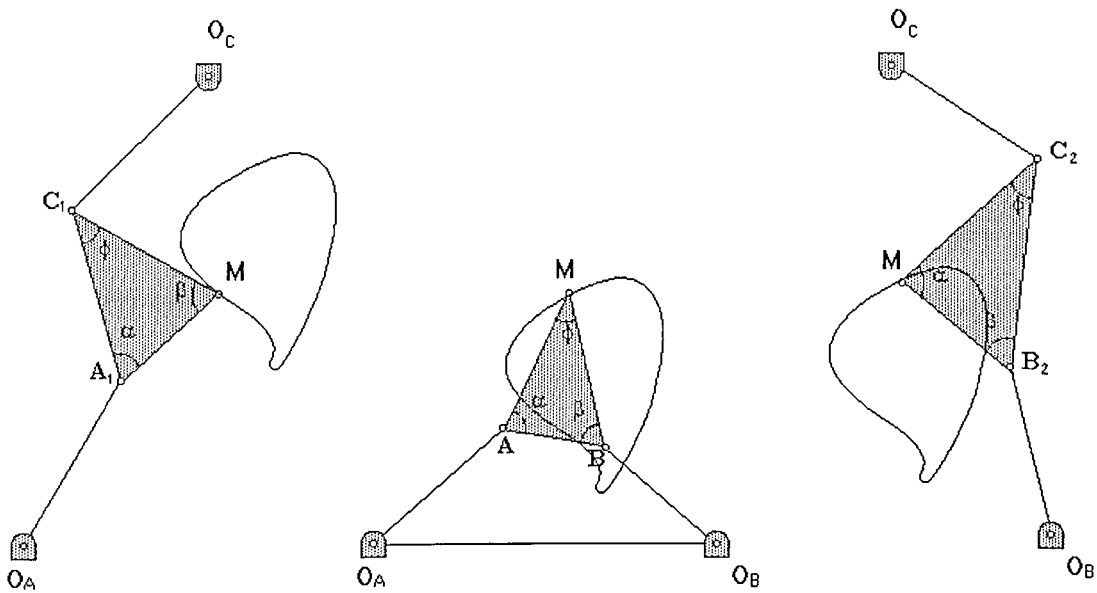


Figura 2.12 - Mecanismos cognatos com suas respectivas trajetórias.

2.3.2 Síntese de Trajetória de um Mecanismo de Quatro Barras

Quando uma certa trajetória em um plano OXY está definida e se quer encontrar o mecanismo que a gerou tem-se o problema conhecido por *Síntese de Trajetória*. O que interessa neste caso é definir o comprimento dos elementos que compõe o mecanismo, bem como a posição desse mecanismo em relação ao sistema de eixos OXY , de tal forma que o mesmo descreva a trajetória estabelecida. Como já mencionado, o mecanismo em estudo é do tipo manivela balancim, o que permite estabelecer uma relação entre os membros que o compõe, considerando a lei de Grashoff, devendo a mesma ser levada em consideração durante o processo de Síntese desenvolvido. O problema pode ser resumido da seguinte forma: dada uma trajetória C ou um conjunto de pontos M_1, M_2, \dots, M_n , encontrar o mecanismo que a descreve, figura 2.13.

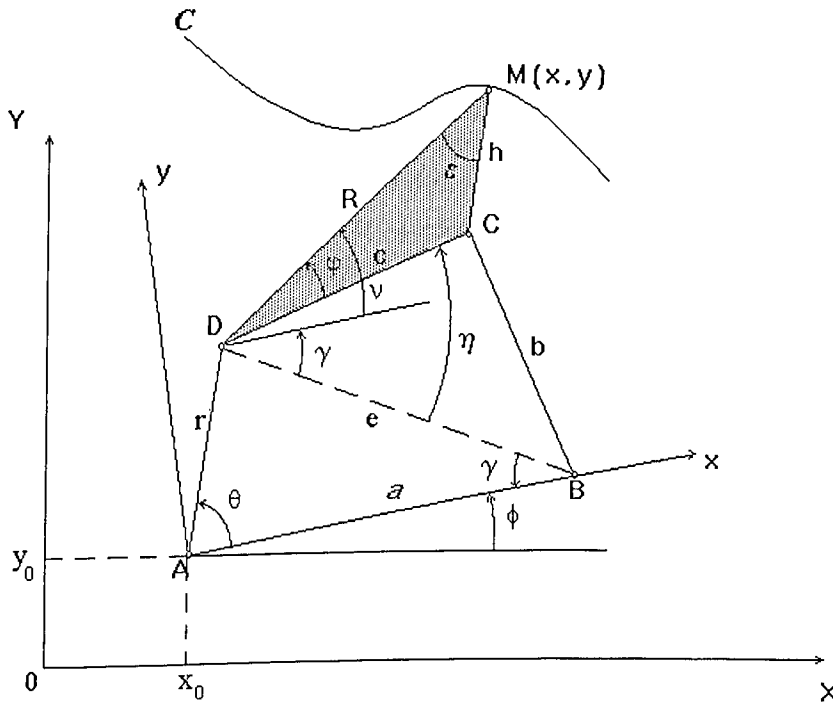


Figura 2.13 - Trajetória C imposta e mecanismo que a descreve.

Observando a figura 2.13, pode-se concluir que o sistema mecânico procurado é função de dez parâmetros, ou seja, as coordenadas X e Y que definem o ponto $M(X, Y)$, em relação ao referencial inercial, podem ser expressos sob forma de funções paramétricas dadas por:

$$X = f(x_0, y_0, a, b, c, r, R, \varphi, \phi, \theta) \quad (2.15)$$

e

$$Y = g(x_0, y_0, a, b, c, r, R, \varphi, \phi, \theta) \quad (2.16)$$

Então, quando se fala em síntese de trajetória de um mecanismo de quatro barras, o problema consiste em definir os parâmetros acima de tal forma que o sistema descreva uma trajetória idêntica à trajetória preestabelecida. As equações que definem X e Y podem ser expressas a partir das equações (2.12), (2.13) e (2.14), ou seja:

$$x = r \cos \theta + R \cos (\eta - \gamma + \varphi)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen} (\eta - \gamma + \varphi)$$

onde:

x e y são as coordenadas do ponto M em relação ao sistema móvel

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r \cos \theta + R \cos(\eta - \gamma + \varphi) \\ r \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen}(\eta - \gamma + \varphi) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi [r \cos \theta + R \cos(\eta - \gamma + \varphi)] & -\operatorname{sen} \phi [r \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen}(\eta - \gamma + \varphi)] \\ \operatorname{sen} \phi [r \cos \theta + R \cos(\eta - \gamma + \varphi)] & +\cos \phi [r \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen}(\eta - \gamma + \varphi)] \end{bmatrix}$$

$$X = X_0 + \cos \phi [r \cos \theta + R \cos (\eta - \gamma + \varphi)] - \operatorname{sen} \phi [r \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen} (\eta - \gamma + \varphi)] \quad (2.17)$$

$$Y = Y_0 + \operatorname{sen} \phi [r \cos \theta + R \cos (\eta - \gamma + \varphi)] + \cos \phi [r \operatorname{sen} \theta + R \operatorname{sen} (\eta - \gamma + \varphi)] \quad (2.18)$$

Os termos η e γ podem ser obtidos através das equações:

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{a - r \cos \theta}{e} \right)$$

$$\gamma = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{r \operatorname{sen} \theta}{e} \right)$$

$$\gamma = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r \operatorname{sen} \theta}{a - r \cos \theta} \right) \quad (2.19)$$

$$e^2 = r^2 + c^2 - 2r \cdot a \cdot \cos \theta$$

$$b^2 = e^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot e \cdot \cos \eta$$

$$\eta = \cos^{-1} \left[\frac{a^2 - b^2 + c^2 + r^2 - 2ra \cos \theta}{2c(r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cdot \cos \theta)^{1/2}} \right] \quad (2.20)$$

Pela substituição das equações (2.19) e (2.20) nas equações (2.17) e (2.18) obtém-se as funções paramétricas de X e Y como função dos dez parâmetros, conforme as equações (2.15) e (2.16).

O caso em estudo, neste trabalho, consiste na *síntese de um mecanismo de quatro barras manivela balancim*, para o qual será estabelecido um conjunto de nove pontos, de tal forma que a trajetória descrita pelo mecanismo passe pelos pontos ou o mais próximo possível dos mesmos. A fim de alcançar o objetivo proposto, lança-se mão de *processos de otimização*, os quais já vêm sendo largamente utilizados, conforme pode-se constatar em muitos trabalhos apresentados nestes últimos anos, nesta área do conhecimento.

3. OTIMIZAÇÃO

Quando se fala em otimização não se pode dissociar esta palavra do nosso dia a dia pois, não só em problemas complexos da área de engenharia, bem como em diversas outras áreas do conhecimento humano, a otimização pode ser utilizada, desde que se possa expressar matematicamente o problema. Como exemplo, pode-se imaginar que se deseja ir, de automóvel, de uma cidade A para uma cidade B e tem-se diversas opções de estradas e que o objetivo consiste em escolher uma, que proporcione um menor custo. Desta forma, pode-se levar em conta alguns fatores tais como: estado de conservação da estrada, distância entre os pontos de apoio que não devem ser superior a 100 km, que o percurso não deva ser superior a 3.000 km e que a última parada para abastecer seja a 200 km da cidade B. Estes fatores impostos devem ser levados em conta durante o processo de escolha. Além destes, pode-se considerar também outros que sejam pertinentes. Além disso, pode-se atribuir peso aos diversos fatores. Com o problema definido, deve-se expressá-lo na forma de equações lineares ou não lineares.

De uma forma geral, seja qual for a área em que se deseja aplicar a otimização, os passos a serem tomados são os seguintes:

- a) Definição do problema, caracterizando a função objetivo, suas variáveis de projeto e restrições envolvidas;
- b) Representar matematicamente a referida função;
- c) Escrever as equações representativas das várias restrições impostas.

Então, quando se fala em *otimização*, o que se procura é maximizar ou minimizar um função, podendo a mesma estar sujeita a restrições.

3.1 - Otimização - Problema Geral

O problema Geral de otimização pode ser expresso da seguinte forma:

Minimizar: $F(\mathbf{X})$

Função objetivo

Sujeita a:

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, m \quad \text{Restrições de desigualdade}$$

$$h_k(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1, l \quad \text{Restrições de Igualdade}$$

$$X'_i \leq X_i \leq X''_i \quad i = 1, n \quad \text{Restrições laterais}$$

$$\text{Onde: } \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad \text{Variáveis de projeto}$$

Apesar de existirem inúmeras técnicas de otimização, busca-se neste capítulo mostrar algumas que são bastante consagradas pela sua eficácia e facilidade de utilização, além de existir vários pacotes computacionais de otimização que as utilizam.

3.2 Funções com Uma Variável

Como o próprio nome já diz, estas funções tem somente uma variável independente, e o que se busca é otimizar esta função em relação a sua variável independente, ou seja, a função deverá ser minimizada ou maximizada. Cabe salientar

que quando se procura o mínimo de uma função $F(x)$ é o mesmo que buscar o máximo da função $-F(x)$.

Obter o mínimo de uma função $F(x)$ qualquer significa procurar o ponto em que:

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad (3.1)$$

de forma que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\frac{d^2F}{dx^2} > 0 \quad (3.2)$$

Apesar de satisfeitas as duas equações acima, o ponto encontrado, que está contido na região de interesse, pode tratar-se de um mínimo local e não de um mínimo global, conforme exemplificado na figura 3.1.

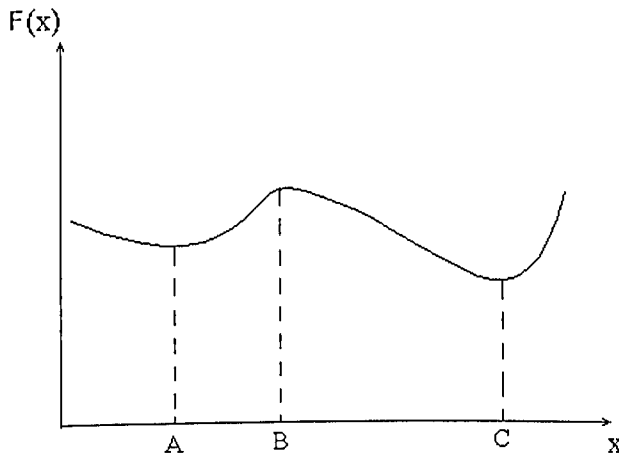


Figura 3.1 Função com dois pontos de mínimo e um ponto de máximo

Da análise da fig. 3.1, pode-se ver que o ponto A satisfaz às equações (3.1) e (3.2). Porém, o mesmo é um ponto de mínimo local, pois o ponto C satisfaz as duas condições e corresponde a um valor menor do que aquele encontrado em A. Logo, o ponto C será chamado de mínimo global da função. Na figura é também mostrado o ponto B que é um ponto de máximo, o qual satisfaz a eq. (3.1), porém não satisfaz a eq. (3.2).

As funções que serão tratadas neste capítulo serão consideradas uni-modais na região de interesse ou seja, possuem apenas um mínimo na região de interesse.

Para as funções uni-modais tem-se alguns métodos de obtenção do mínimo na busca unidimensional, dois dos quais serão tratados neste capítulo: o método da *seção áurea* e o método da *aproximação polinomial*. Tais métodos são bastante eficazes e têm particular interesse em nosso trabalho.

3.2.1 Método da Seção Áurea

O principal objetivo deste método é reduzir o intervalo de incerteza no qual encontra-se um ponto de mínimo de uma função uni-modal. Pode-se ainda ressaltar, que para uma determinada taxa, de redução do intervalo de incerteza, o número de avaliações da função F é reduzido. O que é uma grande vantagem, pois a avaliação da função F , em geral, é bastante complexa.

Para explicitar o método, considere o intervalo dado por X_i e X_f , conforme figura 3.2, cujos valores da função nos respectivos pontos são dados por F_i e F_f . Em seguida, escolhe-se pontos internos de tal forma que o intervalo seja reduzido. Tais pontos, devem obedecer as relações dadas pelas equações (3.3) e (3.4).

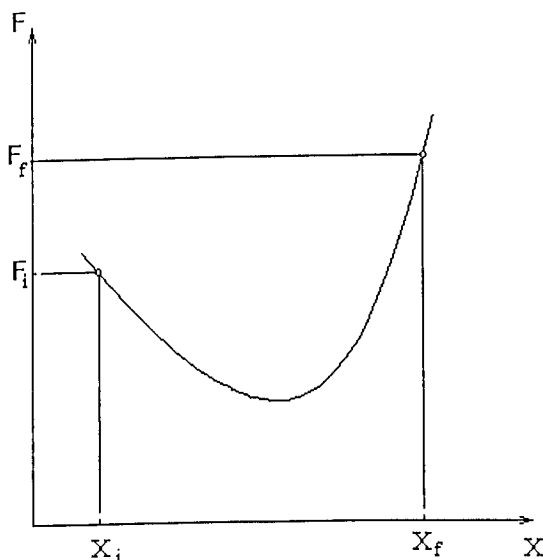


Figura 3.2 Gráfico da função F e o intervalo de trabalho.

Relações obedecidas por X_1 e X_2 ,

$$X_f - X_2 = X_1 - X_i \quad (3.3)$$

e

$$\frac{X_1 - X_i}{X_f - X_i} = \frac{X_2 - X_1}{X_f - X_1} \quad (3.4)$$

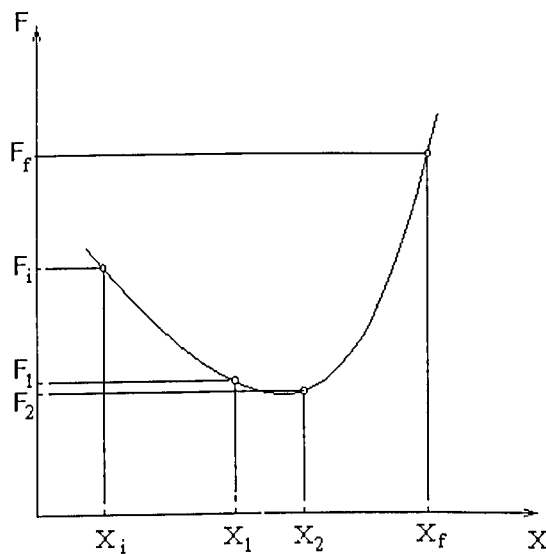


Figura 3.3 Gráfico da função F , intervalo de trabalho e pontos intermediários.

Observando-se os valores de F_1 e F_2 no gráfico acima, constata-se que o valor de F_1 é maior que o valor de F_2 . Deste modo, o ponto X_1 passa a ser considerado o limite inferior do intervalo. Agora, tem-se um intervalo definido por X_1 e X_f e um ponto intermediário dado por X_2 . Repete-se o processo, escolhendo um ponto X_3 , entre X_2 e X_f , de tal modo que as relações dadas pelas eq. (3.3) e (3.4) sejam obedecidas.

Logo, a figura 3.4 mostra o intervalo obtido após esta redução.

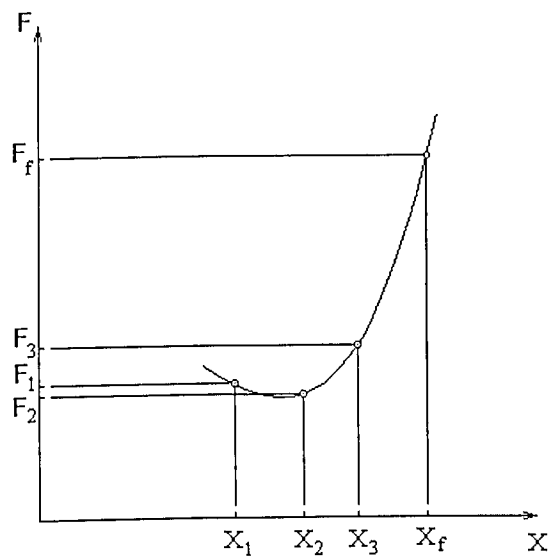


Figura 3.4 Gráfico do novo intervalo obtido após escolha de X_3 .

Considerando-se que o intervalo foi escolhido de tal forma que o ponto inicial é a origem e que o ponto final do intervalo é dado por 1, tem-se então:

$$X_i = 0 \text{ e } X_f = 1$$

Substituindo os respectivos pontos nas equações (3.3) e (3.4), obtém-se as seguintes equações:

$$1 - X_2 = X_1 - 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{X_1 - 0}{1} = \frac{X_2 - X_1}{1 - X_1} \quad (3.6)$$

Tirando-se o valor de X_2 , a partir da equação (3.5) e substituindo na equação (3.6), obtém-se uma equação do segundo grau dada por:

$$X_1^2 - 3X_1 + 1 = 0 \quad (3.7)$$

Cujas raízes são:

$$X_1 = 0,38197$$

$$X_1 = 2,61803$$

Destes valores, obtidos para X_1 , somente o primeiro será utilizado pois, o intervalo de interesse é $(0,1)$. Ao substituir o valor de X_1 , na equação (3.5), obtem-se o valor de X_2 , então:

$$X_1 = 0,38197$$

e

$$X_2 = 0,61803$$

Define-se um número τ que é dado por uma das raízes da equação (3.7):

$$\tau = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38197$$

Este número representa uma taxa percentual de redução do intervalo X_i e X_f . Este intervalo não é necessariamente igual a um, e X_1 e X_2 são números intermediários deste intervalo, dados por:

$$X_1 = (1-\tau)X_i + \tau X_f \quad (3.8)$$

$$X_2 = \tau X_i + (1-\tau)X_f \quad (3.9)$$

Feita esta redução, pelo método da seção áurea, pode-se em seguida aplicar um outro processo, encontrando-se assim o ponto de mínimo. Uma técnica bastante utilizada, para encontrar o ponto de mínimo do intervalo, é a da aproximação polinomial, que é apresentada a seguir.

3.2.2 Método da Aproximação Polinomial

Em algumas situações a função $F(X)$ que se deseja minimizar é difícil de ser tratada matematicamente de forma que busca-se aproximar esta função por meio de um polinômio $P(X)$, dado por:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.9)$$

onde,

$a_i \quad i = 0 \dots n$ são os coeficientes do polinômio

n o grau do polinômio.

Tal aproximação tem a vantagem de requerer poucas avaliações da função $F(X)$, quando feita a aproximação polinomial. Por outro lado, quando a função é altamente não linear, a aproximação polinomial pode ser pouco precisa. O grau do polinômio depende da amplitude do intervalo de incerteza e da natureza da função. Estes fatores são preponderantes na escolha do grau do polinômio de aproximação.

Para uma grande maioria das funções, usadas em problemas de engenharia, a aproximação da função por polinomial cúbica da função será satisfatória quando o intervalo de incerteza for pequeno. O intervalo de incerteza ao qual aplica-se a aproximação é considerado pequeno porque é consequência da utilização de uma técnica de redução do intervalo, aplicada preliminarmente.

O polinômio de terceiro grau que aproxima $F(X)$ em um intervalo $[X_i, X_f]$, pode ser obtido utilizando-se os pontos $x_1 = X_i$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$ e $x_4 = X_f$. Logo, busca-se os coeficientes a_0 , a_1 , a_2 e a_3 do polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

de modo que:

$$P(x_m) = F(X_m) \quad m = 1, 2, 3, 4$$

sendo que a_0, a_1, a_2 e a_3 são as soluções do sistema linear dado por

$$\sum = \begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = F(X_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = F(X_2) \\ a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = F(X_3) \\ a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 + a_3x_4^3 = F(X_4) \end{cases} \quad (3.10)$$

Logo, a matriz dos coeficientes

$$a = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

é conhecida como de Vandermonde, cujo determinante é dado por

$$\det a = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad (3.12)$$

Como x_1, x_2, x_3 e x_4 são pontos distintos do intervalo $[x_i, x_f]$, o determinante é não nulo.

Além de serem obtidos pelo processo acima, os coeficientes a_0, a_1, a_2 e a_3 podem ser obtidos pelo método de interpolação polinomial de Lagrange ou Newton.

Com a determinação dos coeficientes do polinômio $P(x)$ pode-se determinar o ponto de mínimo \bar{x} , ou seja:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 0 \quad (3.13)$$

para que o ponto determinado a partir da equação (3.13) seja um mínimo, é necessário que:

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3x > 0 \quad (3.14)$$

Logo, o ponto de mínimo x^* da função $F(X)$ pode ser aproximado por

$$x^* \cong \bar{x} = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{3a_3} \quad (3.15)$$

3.3 Funções de Várias Variáveis Sem Restrições

Quando se fala em otimizar uma função de várias variáveis sem restrições deseja-se encontrar um vetor \mathbf{X}^* que faça com que o gradiente da função objetivo torne-se nulo, ou seja:

$$\nabla F(\mathbf{X}^*) = 0$$

Onde o gradiente da função $\nabla F(\mathbf{X})$ é um vetor obtido a partir das primeiras derivadas parciais da função $F(\mathbf{X})$, ou seja:

$$\nabla F(\mathbf{X}) = [\partial F(\mathbf{X}) / \partial X_1, \partial F(\mathbf{X}) / \partial X_2, \dots, \partial F(\mathbf{X}) / \partial X_n]^T$$

onde,

$$\mathbf{X} = \{ X_1, X_2, \dots, X_n \}^T$$

Os métodos de otimização de funções de várias variáveis podem ser divididos em três grupos:

- a) *Métodos de Ordem Zero*
- b) *Métodos de Primeira Ordem*
- c) *Métodos de Segunda Ordem*

Nos métodos de ordem zero não se tem necessidade de utilizar nenhuma derivada da função, mas somente os valores da própria função, enquanto que nos demais

métodos, tem-se necessidade de utilizar a primeira ou a segunda derivadas da função objetivo.

3.3.1 Estratégia Geral de Otimização

Para se iniciar um processo de otimização, define-se um ponto de partida a partir do qual será escolhida uma direção de busca. Deste modo, tem-se a estratégia geral de otimização dada por:

$$\mathbf{X}^q = \mathbf{X}^{q-1} + \alpha^*_q \cdot \mathbf{S}^q \quad (3.16)$$

q = número de iterações

\mathbf{X} = vetor das variáveis de projeto

\mathbf{S} = vetor direção de busca

α^* = escalar que determina o passo a ser dado na direção de busca.

Desta forma a aplicação da equação (3.16) consiste do seguinte:

- a) Determinação da direção de busca.
- b) Determinação de α^* .

Ao atingir-se o ponto em que α^* minimiza a função $F(\mathbf{X})$, determina-se outra direção de busca e repete-se o processo, até que nenhuma melhora seja constatada. O escalar α^* é determinado na chamada busca unidimensional. Em qual, o método da seção áurea seguido de uma aproximação polinomial é usado nesta fase.

3.3.2 Métodos de Ordem Zero

Existem vários métodos de ordem zero, dos quais pode-se citar:

- a) *Busca Aleatória*
- b) *Método de Powell*

No método da *Busca Aleatória*, o primeiro passo consiste usualmente na definição dos limites para o vetor \mathbf{X} . Em seguida é escolhido um vetor de variáveis de projeto para dar início ao processo, o qual deve estar contido no domínio, que é: $\mathbf{X}^i \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^f$. Em seguida, vários valores do domínio são escolhidos para que seja calculado o valor de $F(\mathbf{X})$, sendo escolhido o menor deles.

Este método é bastante fácil de ser implementado porém, é um dos métodos mais ineficientes (Vanderplaats, 1984).

O método de Powell, juntamente com algumas modificações, torna-se um método eficiente e confiável. Este método baseia-se no conceito de direção conjugada, ou seja, se \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j são conjugados tem-se:

$$(\mathbf{S}_i)^T \mathbf{H} \mathbf{S}_j = 0, \text{ para todo } i \neq j$$

Onde \mathbf{H} é a matriz hessiana, dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

O conceito de direção conjugada serve de base para a maioria dos mais poderosos algoritmos de busca.

Como o método de Powell é de ordem zero, usa-se um artifício bastante interessante, que consiste em criar uma matriz \mathbf{H} dada por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

que é uma matriz $n \times n$ onde n é o número de variáveis de projeto. Após a criação desta matriz o processo se inicia com a determinação de \mathbf{X}^q conforme equação (3.16), onde o número de iterações será igual a n . A direção de busca para cada iteração, de 1 até n , é escolhida na direção crescente de cada vetor unitário das variáveis de projeto. E vai-se carregando a matriz \mathbf{H} , de modo que, cada coluna da matriz inicial será substituída $\alpha_q^* \mathbf{S}^q$, onde a iteração q corresponde à matriz q . Ao final das n primeiras iterações a matriz \mathbf{H} será

$$\mathbf{H} = [\alpha_1^* \mathbf{S}^1 \quad \alpha_2^* \mathbf{S}^2 \quad \dots \quad \alpha_n^* \mathbf{S}^n] \quad (3.19)$$

A próxima iteração irá gerar uma direção conjugada dada por

$$\mathbf{S}^{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \mathbf{S}^i = \text{a soma das colunas de } \mathbf{H} \quad (3.20)$$

Nesta direção de busca será encontrado o escalar α_{n+1}^* de modo que a coluna n da matriz \mathbf{H} será substituída por $\alpha_{n+1}^* \mathbf{S}^{n+1}$, sendo eliminada a primeira coluna da matriz \mathbf{H} de modo a manter a matriz \mathbf{H} com dimensão n . O processo será continuado até que uma das situações ocorram:

- a) $\alpha_q^* = 0$, que implica que as direções subsequentes não são conjugadas;
- b) as direções de busca tornam-se paralelas.

3.3.3 Métodos de Primeira Ordem

Os métodos de *primeira ordem* são mais eficientes que os métodos de ordem zero. A informação do gradiente da função objetivo, nos métodos de primeira ordem, acrescenta eficiência ao procedimento. O gradiente pode ser calculado analiticamente ou por diferenças finitas. Estes métodos podem ser agrupados em três tipos:

- a) - *Método da Máxima Descida*

b) - *Método das Direções Conjugadas*

c) - *Métodos da Métrica Variável*

Um dos métodos de primeira ordem bastante conhecidos todavia, de baixa performance, é o Método do *Máximo Declive*. Este baseia-se no gradiente negativo da função objetivo, que é escolhido como direção de busca, desde que tal direção seja factível, sendo expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{S}^q = -\nabla F(\mathbf{X}^q) \quad (3.21)$$

onde

q = número de iterações

\mathbf{S}^q = direção de busca

$\nabla F(\mathbf{X}^q)$ = gradiente da função em \mathbf{X}^q .

Sendo \mathbf{X}^q dado pela equação (3.16).

O *Método das Direções Conjugadas* de Fletcher e Reeves requer somente uma pequena modificação no método de *Máximo Declive*. Tal modificação acarreta uma melhora na taxa de convergência do processo de otimização. Este método tem sua direção de busca dada por (Vanderplaats, 1984):

$$\mathbf{S}^q = -\nabla F(\mathbf{X}^q) + \beta_q \mathbf{S}^{q+1} \quad (3.22)$$

onde

$$\beta_q = \frac{|\nabla F(\mathbf{X}^q)|^2}{|\nabla F(\mathbf{X}^{q+1})|^2}$$

Dentre os diversos *Métodos da Métrica Variável* pode-se citar dois, o método de *Davidon-Fletcher-Powell* (DFP) e o método *Broydon-Fletcher-Goldfard-Shano* (BFGS), que são bastante eficientes. Estes métodos consideram as informações das iterações anteriores (os β 's), alocando-as em um vetor. Estes métodos são portanto mais eficientes que o método Fletcher e Reeves, que considera somente a informação anterior.

Estes métodos tem como idéia básica a criação de um vetor que aproxime a matriz Hessiana inversa, à medida que a otimização avança. Sendo S^q dado por

$$S^q = -H \nabla F(X^q) \quad (3.23)$$

para a iteração q . A matriz H que aparece na equação (3.23) não é propriamente a matriz Hessiana porém, aproxima-se da inversa da matriz Hessiana durante o processo de otimização.

Com S^q definido, faz-se uma busca unidimensional. Considera-se $H=I$ ($n \times n$) e a direção de busca inicial é dada pela descida máxima. Ao final da q -ésima iteração faz-se

$$H^{q+1} = H^q + D^q$$

Onde D é uma matriz simétrica de atualização. Dada por:

$$D^q = \frac{\sigma + \theta\tau}{\sigma^2} pp^T + \frac{\theta - 1}{\tau} H^q y (H^q y)^T - \frac{\theta}{\sigma} [H^q y p^T + p (H^q y)^T] \quad (3.24)$$

Tem-se que:

$\theta = 0 \rightarrow$ método de *Davidon-Fletcher-Powell* (DFP)

$\theta = 1 \rightarrow$ método de *Broydon-Fletcher-Goldfard-Shano* (BFGS)

3.3.4 Métodos de Segunda Ordem

São aqueles que utilizam, na solução do problema de otimização, a matriz hessiana da função objetivo (3. 17). Baseiam-se em uma expansão da série de Taylor da função objetivo. Para tanto, as funções objetivo as quais este método pode ser utilizado necessitam ser diferenciáveis até segunda ordem. O método de Newton é considerado o mais simples destes métodos.

3.4 Funções de Várias Variáveis Com Restrições

As funções de várias variáveis com restrições FVCCR quando no seu processo de otimização podem ser tratadas como funções de várias variáveis sem restrições FVCSR, para tanto, é necessário transformá-las em FVCSR. Com isso lança-se mão de técnicas de otimização. Tais técnicas baseiam-se em encontrar uma função, chamada de pseudo-objetivo, que engloba as restrições em sua expressão.

A função pseudo-objetivo pode ser representada da seguinte forma:

$$\Phi (\mathbf{X}, r_p) = F(\mathbf{X}) + r_p P(\mathbf{X}) \quad (3.25)$$

Onde:

$\Phi (\mathbf{X}, r_p)$ = função pseudo-objetivo

$F(\mathbf{X})$ = Função objetivo

$P(\mathbf{X})$ = função de penalidade

r_p = parâmetro de penalidade

p = subscrito que representa o número de minimizações irrestritas

Levando-se em conta a equação que representa a função de penalidade $P(\mathbf{X})$, os métodos de transformação de FVCCR em FVCSR podem ser:

a) *Método da função de penalidade exterior*

b) *Método da função de penalidade interior*

3.4.1 Método da Função de Penalidade Exterior

Neste método não há penalidade quando todas as restrições são atendidas. A função de penalidade é dada por:

$$P(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^m \{\max[0, g_j(\mathbf{X})]\}^2 + \sum_{k=1}^l [h_k(\mathbf{X})]^2 \quad (3.26)$$

onde:

$P(\mathbf{X})$ = Função de penalidade

$g_j(\mathbf{X})$ = Funções de restrição de desigualdade

$h_k(\mathbf{X})$ = Funções de restrição de igualdade

e a função pseudo-objetivo terá a seguinte forma:

$$\Phi(\mathbf{X}, r_p) = F(\mathbf{X}) + r_p \sum_{j=1}^m \{\max[0, g_j(\mathbf{X})]\}^2 + r_p \sum_{k=1}^l [h_k(\mathbf{X})]^2 \quad (3.27)$$

Logo, analisando-se a equação (3.27), pode-se concluir que, quando os critérios de restrições são atendidos, a função de penalidade, eq. (3.26), assume o valor zero. Por outro lado, quando as funções de restrições não são atendidas, a função de penalização, elevada ao quadrado, será somada a função objetivo de tal forma que a função pseudo-objetivo será penalizada. À medida que r_p cresce, durante o processo de otimização, a função torna-se mal condicionada (Vanderplaats, 1984).

3.4.2 Método da Função de Penalidade Interior

Neste método há penalização quando a função aproxima-se das restrições, sem nunca permitir a violação das mesmas. $P(\mathbf{X})$ é comumente mais utilizada sob a seguinte forma:

$$P(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{X})} \quad (3.28)$$

Logo, a função pseudo-objetivo terá sua forma dada pela equação:

$$\Phi(\mathbf{X}, r_p', r_p) = F(\mathbf{X}) + r_p' \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{X})} + r_p \sum_{k=1}^l [h_k(\mathbf{X})]^2 \quad (3.29)$$

Na equação (3.22), o termo que traz as funções de restrição de igualdade tem o parâmetro r_p que tem característica semelhante ao parâmetro da eq. (3.21), ou seja: cresce durante o processo de otimização, enquanto isso o parâmetro r_p' decresce durante o processo de otimização.

3.4.3 Método do Lagrangeano Aumentado

Um dos principais motivos de utilizar-se o Método do Lagrangeano Aumentado (MLA) é reduzir a dependência do algoritmo da escolha e maneira pela qual parâmetro de penalidade é atualizado, eliminando-se assim o problema de mal condicionamento da função pseudo-objetivo.

Este processo foi originalmente desenvolvido para *problemas com restrições de igualdade* e cujo número de restrições l não é superior ao número de variáveis. Ou seja, para um problema de otimização apresentado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(\mathbf{X}) \\ \text{Sujeita a} & h_k(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1 \dots l \end{array}$$

de modo que a função pseudo-objetivo obtida seja dada por:

$$A(\mathbf{X}, \lambda, r_p) = F(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^l \{\lambda_k h_k(\mathbf{X}) + r_p [h_k(\mathbf{X})]^2\} \quad (3.30)$$

Para o caso em que tem-se um *problema com restrição de desigualdade*, exposto da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(\mathbf{X}) \\ \text{Sujeita a} & g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1 \dots m \end{array}$$

usa-se o artifício da transformar a restrição de desigualdade em uma restrição de igualdade, ou seja:

$$g_j(\mathbf{X}) + Z_j^2 = 0 \quad j = 1, m \quad (3.31)$$

Na equação (3.24) o termo Z_j^2 é utilizado por conveniência matemática pois o mesmo será sempre positivo, independente do sinal de Z_j . Desta forma, a função pseudo-objetivo é dada por:

$$A(\mathbf{X}, \lambda, Z, r_p) = F(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m \{ \lambda_j (g_j(\mathbf{X}) + Z_j^2) + r_p [g_j(\mathbf{X}) + Z_j^2]^2 \} \quad (3.32)$$

Para o problema mais geral em que se tem restrições de igualdade e de desigualdade, o problema será dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & F(\mathbf{X}) \\ \text{Sujeita a} & g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1 \dots m \\ & h_k(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1 \dots l \end{array}$$

e a função pseudo-objetivo será dada por:

$$A(\mathbf{X}, \lambda, r_p) = F(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m [\lambda_j \psi_j + r_p \psi_j^2] + \sum_{k=1}^l \{ \lambda_{k+m} h_k(\mathbf{X}) + r_p [h_k(\mathbf{X})]^2 \} \quad (3.33)$$

Onde:

$$\psi_j = \max \left[g_j(\mathbf{X}), \frac{-\lambda_j}{2r_p} \right]$$

3.5 Processo de Solução dos Problemas de Otimização

Em geral as técnicas de minimização sequencial podem ser descritas de forma simplificada como se segue: inicialmente o usuário define um vetor de variáveis de projeto (VVP), a partir do qual o processo será inicializado; em seguida, analisa-se a função objetivo, observando se a mesma está sujeita a restrições ou não; no caso positivo, a primeira providência é transformar a FVCCR em FVCSR criando-se uma função pseudo-objetivo. Existem vários métodos de obtenção da função pseudo-objetivo, sendo que alguns foram mostrados anteriormente neste capítulo.

De posse do vetor de variáveis de projeto (que é um ponto no domínio da função) e da função pseudo-objetivo, o passo seguinte será iniciado. A partir do ponto definido pelo VVP, uma direção de busca será selecionada por meio de um dos métodos: método de ordem zero, método de primeira ordem ou método de segunda ordem, de acordo com a escolha do usuário.

Com o vetor variáveis de projeto e a direção de busca definidos e substituindo ambos na função pseudo-objetivo, obtém-se uma função de uma variável. Esta função obtida será minimizada por um dos métodos de minimização de função de uma variável ou uma combinação dos mesmos. Uma combinação bastante utilizada, é a aplicação do método da seção áurea seguido de uma aproximação polinomial. O primeiro processo reduz o intervalo de incerteza e o segundo leva ao mínimo aproximado, naquela intervalo.

Partindo-se do ponto de mínimo encontrado naquela direção, um novo vetor direção de busca será definido e um novo ponto de mínimo será calculado . O processo será encerrado quando não houver mais alteração no mínimo da função, ou ainda pelo número de iterações. Vários critérios de interrupção do processo de otimização são mencionados na literatura.

Com o objetivo de constatar se o ponto de ótimo obtido é um mínimo global ou um mínimo local, o processo é repetido várias vezes, mudando-se somente o ponto de inicialização do processo (VVP). Caso o ponto de mínimo obtido seja o mesmo, tudo indica que se trata do *mínimo global*. Algumas vezes entretanto, chega-se a pontos distintos, os quais caracterizam pontos de *mínimo local*.

4 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM PROGRAMA PARA SUA SOLUÇÃO

Como foi dito anteriormente, o objetivo deste trabalho é fazer a síntese otimizada da trajetória de um mecanismo de quatro barras. Assim sendo, como foi visto, no capítulo 3, o primeiro passo será definir o problema e, em seguida, colocá-lo sob a forma de uma expressão matemática, que será a função objetivo que se busca minimizar. Além disso, pode haver a necessidade de satisfazer algumas imposições de ordem física, e/ou outras impostas pelo projetista. Estas imposições são chamadas de *funções de restrição*, e podem ser de igualdade e/ou de desigualdade. As restrições geram barreiras no domínio da função, de forma a dividi-lo em duas regiões, uma chamada de *factível* e outra de *não factível*. Na região factível, as restrições não são violadas, logo, a mesma será a região onde se busca encontrar o ponto de mínimo do problema (Fox e Willmert, 1967).

De forma sucinta, este problema pode ser dividido em passos, os quais foram seguidos e culminaram na obtenção das *funções objetivo* e de sua(s) *restrição(ões)*, de maneira que a solução será buscada através de um programa computacional.

- a) - *Primeiro passo*: O problema de otimização deverá ser enunciado;
- b) - *Segundo passo*: De posse do enunciado anterior, faz-se uma análise, a fim de achar as expressões matemáticas que representam o problema. Obtendo-se assim, a função objetivo e a(s) função(ões) de restrição.
- c) - *Terceiro passo*: Implementação de um programa computacional para a solução do problema.

4.1 Descrição do Problema

Enunciado: *Dados nove pontos quaisquer no plano cartesiano, achar um mecanismo de quatro barras que obedeça a lei de Grashoff, sendo do tipo manivela balancim, cuja trajetória, descrita pelo ponto de acoplamento, passe o mais próximo possível dos pontos dados.*

Logo, o problema consiste em se ter, em um plano cartesiano, um conjunto de nove pontos, figura 4.1; e o que se deseja, é encontrar um mecanismo plano de quatro barras, cujo ponto de acoplamento passe o mais próximo possível destes pontos.

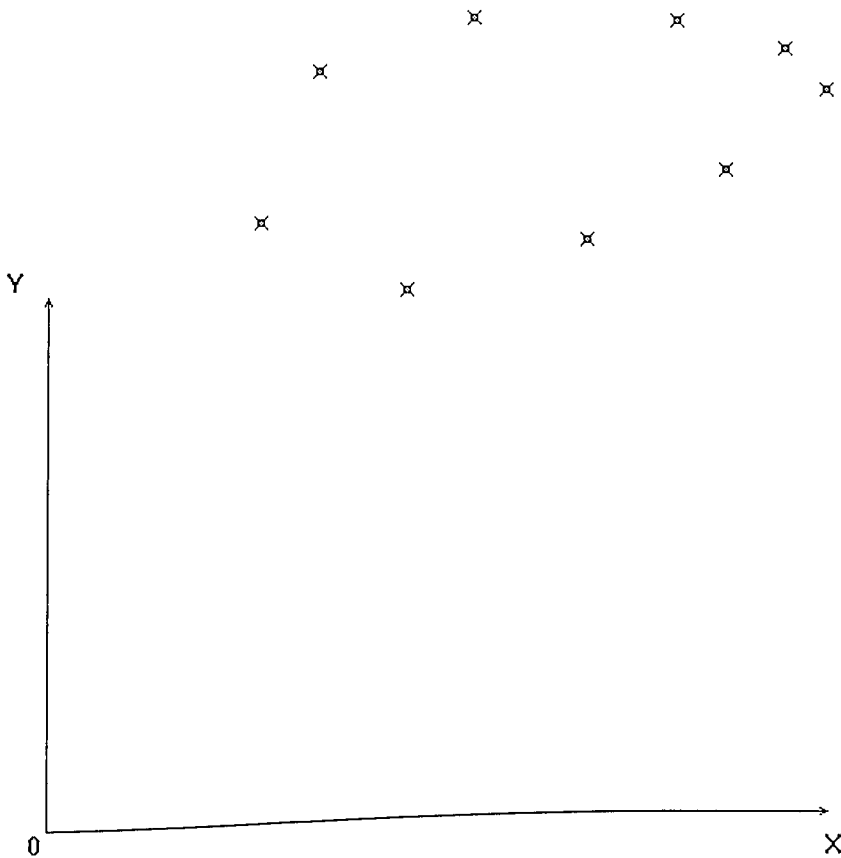


Figura 4.1 - Sistema cartesiano com nove os pontos dados.

Pode-se constatar, pelo enunciado do problema, que a *síntese de tipo* e a *síntese de número* já foram contempladas, pois o mecanismo deve ser plano de quatro barras, restando a *síntese dimensional*. Desta forma, o mecanismo procurado será representado no sistema cartesiano, conforme a figura 4.2. Com a síntese dimensional, as variáveis x_0 , y_0 , a , b , c , r , R , φ e θ , da figura 4.2, serão definidas.

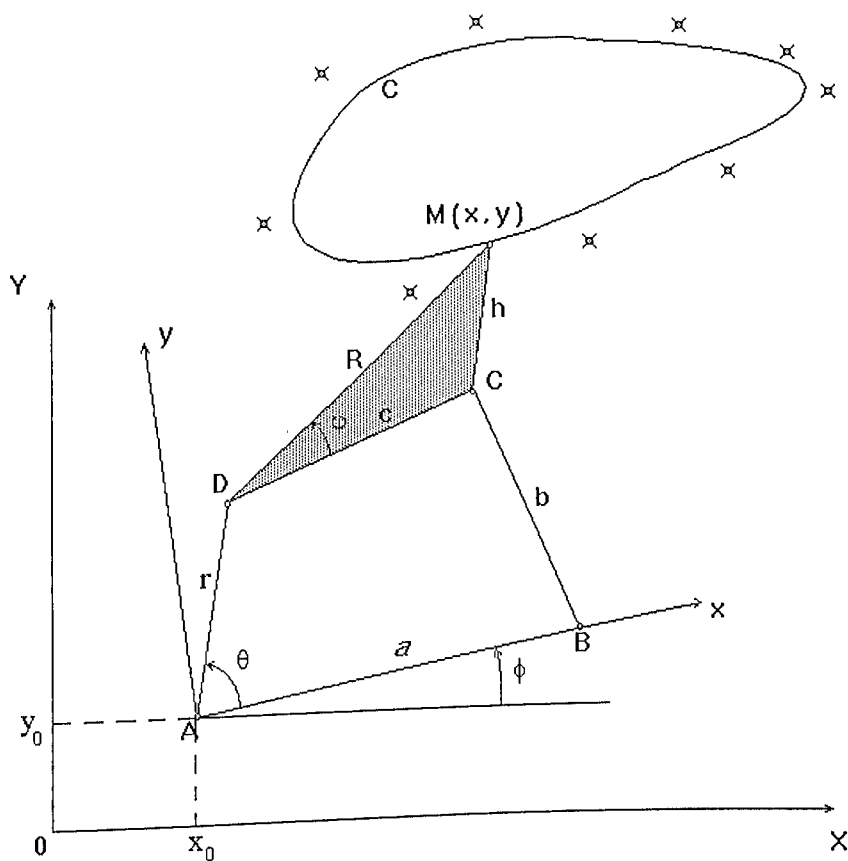


Figura 4.2 - Trajetória C de um mecanismo.

4.2 Formulação do Problema

Nesta etapa, busca-se representar o problema sob a forma de uma expressão matemática. Ao final desta etapa, as funções objetivo e de restrição, que representam o problema, estarão definidas.

4.2.1 Obtenção da Função Objetivo

Como o objetivo é achar um mecanismo que passe o mais próximo possível dos pontos dados, pode-se concluir que: a função objetivo consiste em uma função que é o somatório das distâncias mínimas dos pontos dados à trajetória descrita pelo mecanismo. Esta função depende dos pontos X e Y, que são as coordenadas do ponto M da biela, definidas como funções paramétricas de dez variáveis (capítulo 2), ou seja:

$$X = f(x_0, y_0, a, b, c, r, R, \varphi, \phi, \theta) \quad \text{ou,}$$

$$X = X_0 + \cos\phi [r\cos\theta + R\cos(\eta - \gamma + \varphi)] - \text{sen}\phi [r\text{sen}\theta + R\text{sen}(\eta - \gamma + \varphi)] \quad (4.1)$$

e

$$Y = g(x_0, y_0, a, b, c, r, R, \varphi, \phi, \theta) \quad \text{ou,}$$

$$Y = Y_0 + \text{sen}\phi [r\cos\theta + R\cos(\eta - \gamma + \varphi)] + \cos\phi [r\text{sen}\theta + R\text{sen}(\eta - \gamma + \varphi)] \quad (4.2)$$

Desta forma, a função objetivo será função de dez variáveis, das quais, nove são variáveis de decisão e uma que não é de decisão, θ . Assim, \mathbf{X} é um vetor que tem como componentes as variáveis de decisão, ou seja: $\mathbf{X} = (x_0, y_0, a, b, c, r, R, \varphi, \phi)$. Os pontos dados serão simbolizados por $P_i = (X_{di}, Y_{di})$ no sistema inercial. D será a distância entre o ponto dado e um ponto qualquer da trajetória, descrita pelo ponto M , e, D_{mi} é a distância mínima de um ponto dado à trajetória, figura 4.3.

$$P_i = (X_{di}, Y_{di}) \quad i = (1 \dots 9)$$

$$D = \sqrt{(X_{di} - x)^2 + (Y_{di} - y)^2} \quad (4.3a)$$

$$D_{mi} = \sqrt{(X_{di} - x)^2 + (Y_{di} - y)^2} \quad i = (1 \dots 9) \quad (4.3a)$$

$$\text{Obj} = F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^9 (D_{mi})^2 \quad (4.4)$$

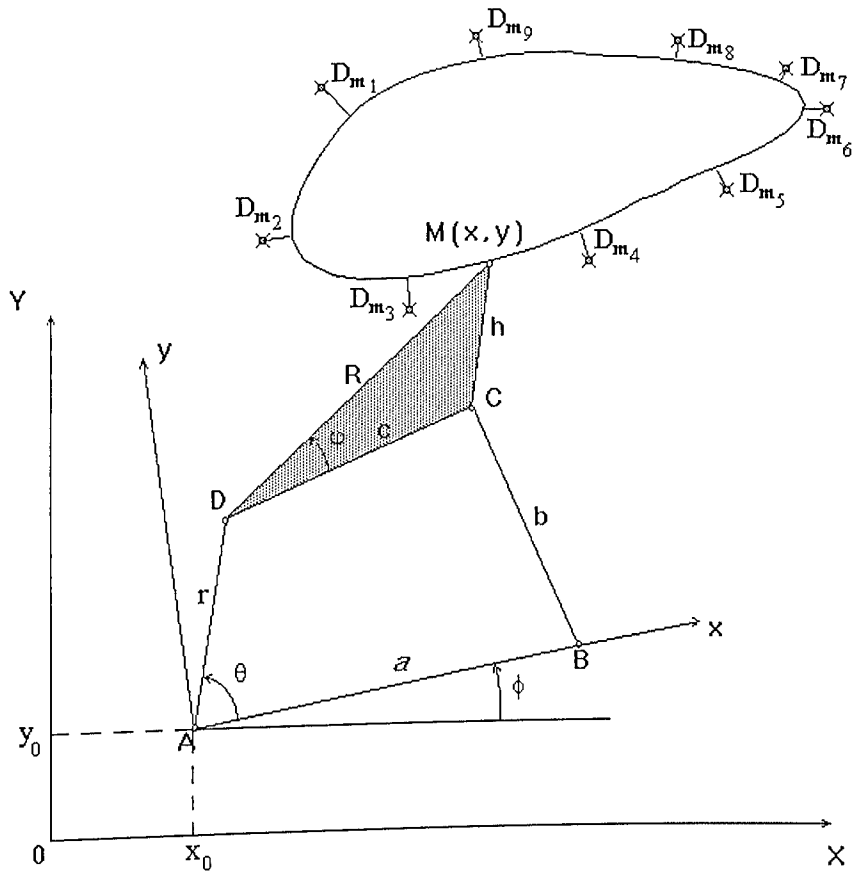


Figura 4.3 - Distância mínima entre os pontos dados e a trajetória descrita pelo ponto M do mecanismo

4.2.2 Obtenção das Funções de Restrição

Nesta etapa, busca-se uma formulação para a(s) função(ões) de restrição. Como enunciado inicialmente, o mecanismo deve ser do tipo manivela balancim, portanto, o mesmo terá que obedecer a lei de *Grashoff* e *um dos seus segmentos, adjacente ao menor, terá que ser o membro fixo*.

Do exposto acima, pode-se criar duas funções de restrição de tal forma que, a primeira é de desigualdade e, a segunda, de igualdade. A primeira garantirá que o

mecanismo obtido obedeça a lei de *Grashoff*, enquanto a segunda garantirá que o menor membro do quadrilátero r , a , b , e c , será r , satisfazendo assim a condição de que o mecanismo obtido seja do tipo manivela balancim. As equações que representam estas imposições são representadas por $G(\mathbf{X})$ e $h(\mathbf{X})$ respectivamente.

$$G(\mathbf{X}) = -r + a + b + c - 2 \cdot \text{AMAX1}(a, b, c) \geq 0 \quad (4.5)$$

$$h(\mathbf{X}) = r - \text{AMIN1}(r, a, b, c) = 0 \quad (4.6)$$

sendo

$\text{AMAX1}(a, b, c)$ função do FORTRAN que encontra o maior valor entre os argumentos reais a , b e c .

$\text{AMIN1}(r, a, b, c)$ função do FORTRAN que encontra o menor valor entre os argumentos reais r , a , b e c .

4.3 Problema Descrito Sob Forma de Equação

Assim, o problema estará representado pelas expressões matemáticas dadas por:

$$\text{Minimizar: } F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^9 (D_{mi})^2 \quad i = 1, \dots, 9 \quad (4.7)$$

$$\text{Sujeito às restrições: } h(\mathbf{X}) = r - \text{AMIN1}(r, a, b, c) = 0 \quad (4.8)$$

$$g(\mathbf{X}) = -r + a + b + c - 2 \cdot \text{AMAX1}(a, b, c) \geq 0 \quad (4.9)$$

Outras restrições, ainda, serão impostas às variáveis de decisão; as mesmas, estão relacionadas com os valores que as variáveis podem assumir durante o processo de otimização. Tais valores serão definidos no capítulo seguinte.

4.4 Implementação de um Programa Computacional para Solução do Problema

Este item tratará da implementação de um programa computacional para a solução do problema de otimização. O problema é composto de uma função objetivo com duas restrições, das quais, uma é de igualdade e a outra de desigualdade. A formulação do problema está apresentada no item 4.3. Uma sub-rotina foi criada com o objetivo de calcular a função objetivo e funções de restrição. Em seguida, o programa é implementado. Neste, usa-se o ADS (Automated Design Synthesis) que é um pacote computacional destinado à otimização. Este pacote é composto por um conjunto de sub-rotinas e um programa principal que irá chamá-las, quando necessário, durante o processo de otimização. O mesmo, foi desenvolvido pelo Prof. Garret N. Vanderlaaps, da Universidade da Califórnia (USA), em FORTRAN 77. As sub-rotinas, para a geração da função objetivo, foram desenvolvidas no FORTAN Power Station.

4.4.1 Sub-rotina Distância Mínima

A sub-rotina calcula um conjunto de nove distâncias mínimas que irão compor a função objetivo, dada por:

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^9 (D_{mi})^2 \quad i = 1, \dots, 9$$

Estas distâncias são obtidas a partir do cálculo da distância de cada ponto obtido, para cada θ_i , nas equações (2.17) e (2.18), aos nove pontos dados conforme figura 4.4. A medida que estas distâncias vão sendo calculadas, são comparadas com as que haviam

sido calculadas para θ_{i-1} ; e as menores vão sendo armazenadas em um vetor. Ao final do processo, um vetor composto de nove variáveis contém as menores distâncias que compõem a função objetivo. É importante salientar que, a variação imposta à variável θ foi pequena, de modo a garantir que se pudesse gerar as distâncias mínimas o mais próximo possível do ideal.

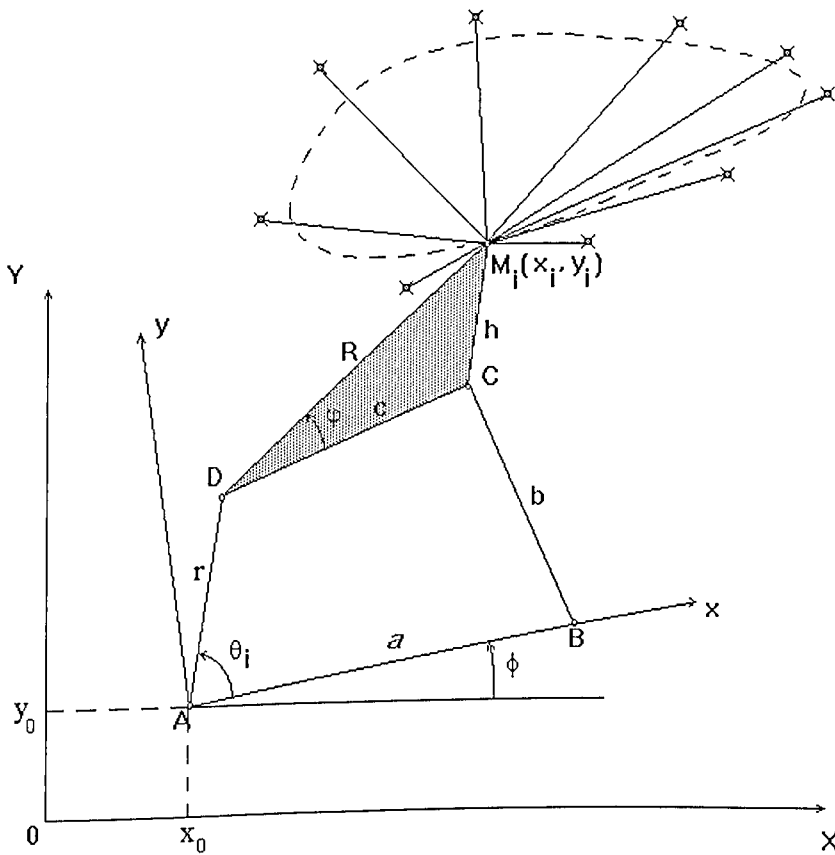


Figura 4.4 - Distâncias calculadas para cada ponto obtido a partir da θ_i .

Como não causaria nenhum problema ao processo de otimização, as funções de restrição foram embutidas nesta sub-rotina. A figura 4.5, apresenta o fluxograma correspondente.

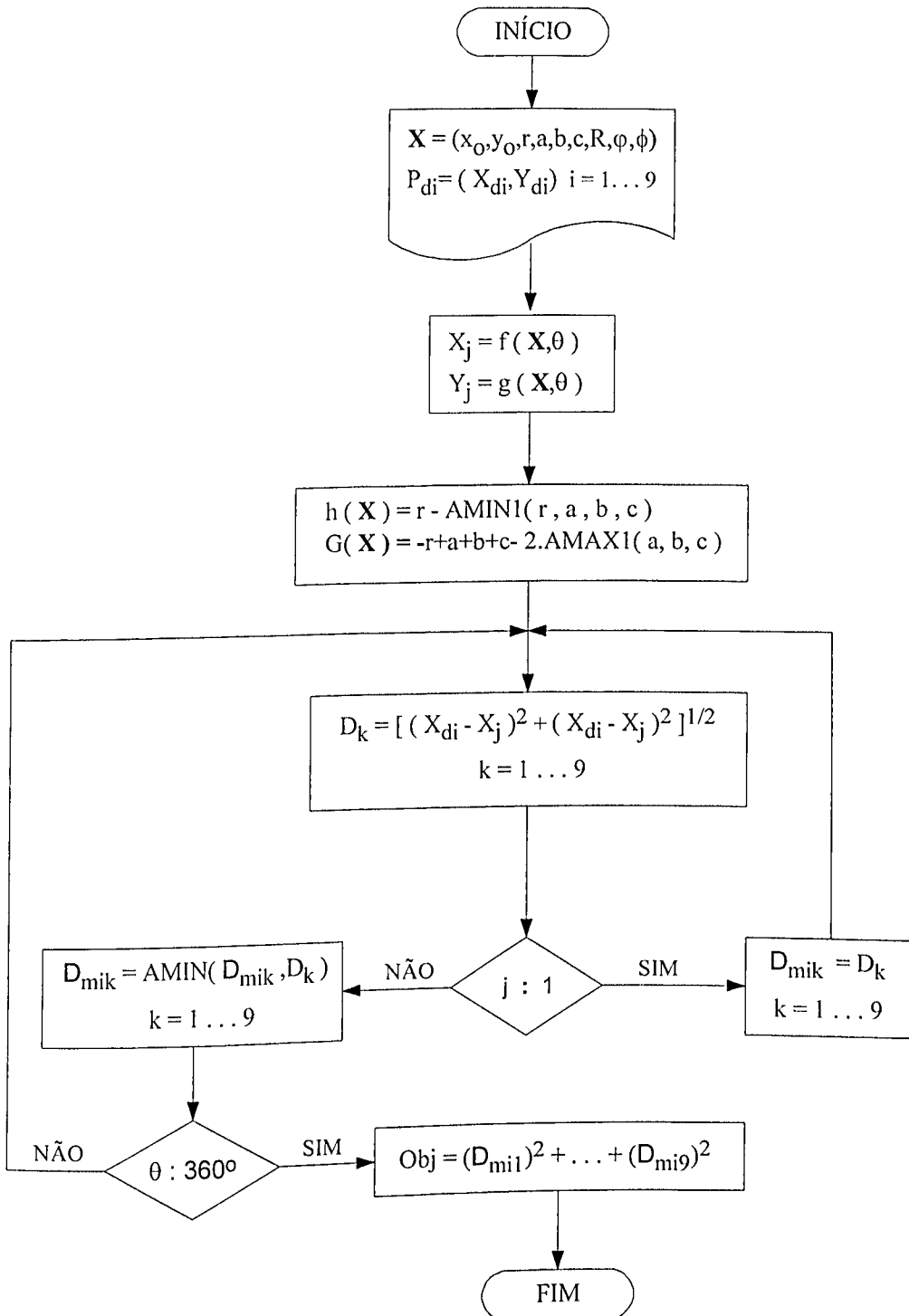


Figura 4.5 - Fluxograma da subrotina que gera a função objetivo

4.4.2 Programa Principal

O programa principal utilizado é o mesmo que vem sugerido no pacote ADS, ao qual serão fornecidos alguns valores de controle, que irão definir: a estratégia a ser usada, o otimizador e o método de uni-direcional que serão usados durante o processo de otimização.

Logo, a sub-rotina, mostrada no item anterior, irá funcionar juntamente com as sub-rotinas existentes neste pacote. O programa principal é mostrado de forma simplificada na figura 5.2.

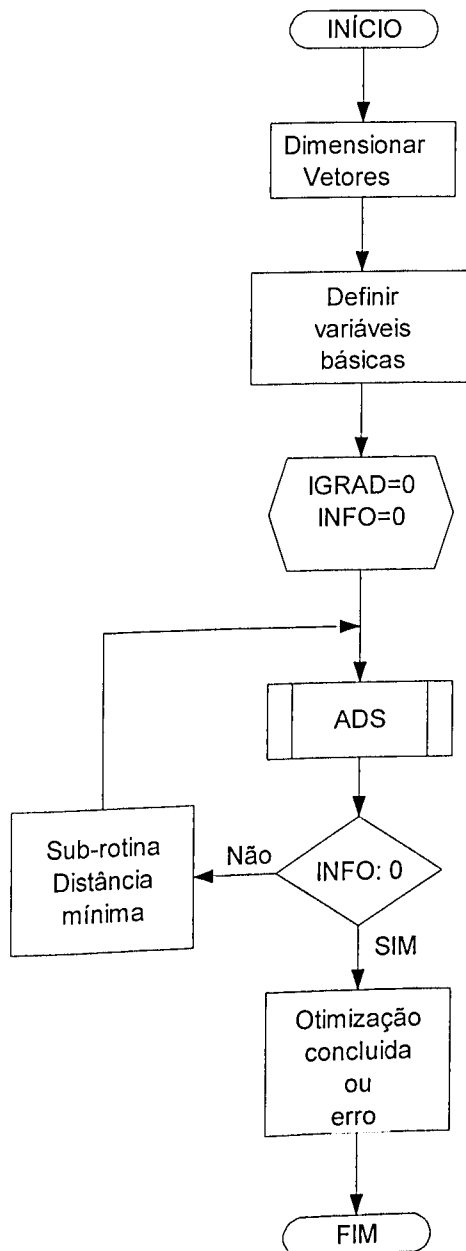


Figura 4.5 - Fluxograma do programa principal

O programa principal em sua forma simplificada é dado por:

```

C   USO SIMPLIFICADO DO PROGRAMA ADS DE OTIMIZAÇÃO
      DIMENSION X(10),VLB(10),VUB(10),G(2),IDG(2),IC(2),DF(10),
      &A(10,18),WK(1000),IWK(500)
      NRA=10
      NCOLA=18
      NRWK=1000
      NRIWK=500
C   INICIALIZAÇÃO
      IGRAD =0
      NDV=9
      NCON=2
      X(I)=?, I=1,NDV
      VIB=?, I=1,NDV
      VUB=?, I=1,NDV
      IDG=?, I=1,NCON
      ISTRAT=?
      IOPT=?
      IONED=?
      IPRINT=?
      INFO=0
10  CALL ADS (INFO,ISTRAT,IOPT,IONED,IPRINT,IGRAD,NDV,NCON,X,
      &VLB,VUB,OBJ,G,IDG,NGT,IC,DF,A,NRA,NCOLA,WK,NRWK,IWK,NRIWK)
      CALL EVAL (OBJ,X,G)
      IF (INFO.GT.0) GO TO 10
C   OTIMIZAÇÃO CONCLUÍDA. IMPRESSÃO DE RESULTADOS.
      STOP
      END

```

Onde:

X = vetor variáveis de projeto

IGRAD = ? irá informar ao programa principal se o gradiente será fornecido pelo usuário ou calculado pelo programa principal.

ISTRAP = ? irá fornecer ao programa principal qual a estratégia escolhida

IOPT= ? irá fornecer ao programa principal qual o otimizador escolhido

IONED=? irá fornecer ao programa principal qual o minimizador unidimensional escolhido

IPRINT= ? irá informar ao programa qual a forma de apresentação dos resultados.

EVAL (OBJ, X , G) = irá chamar a sub-rotina da função objetivo.

Estas variáveis serão especificadas no capítulo seguinte, de acordo com a escolha feita para a otimização do problema abordado neste capítulo.

5 - APLICAÇÃO

Neste capítulo, serão mostradas algumas aplicações a fim de poder-se observar o desempenho do programa utilizado na obtenção do mecanismo otimizado. Para os exemplos aqui apresentados seguiu-se um mesmo roteiro, ou seja:

- a)- Define-se os nove pontos pelo quais deseja-se que o mecanismo passe o mais próximo possível.
- b)- Com os nove pontos definidos procura-se, no atlas de curvas, um mecanismo que gere uma curva o mais próximo possível dos nove pontos dados.
- c)- Com o mecanismo escolhido dentre os observados nas diversas famílias inicializa-se o processo de otimização.

Na utilização do ADS escolheu-se uma seqüência que é bastante utilizada, em trabalhos desenvolvidos nesta universidade, que é adequada para o problema em questão. Esta seqüência é dada por:

ISTRAT = 5 Indica para o programa que será utilizado o Método dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado na obtenção da função pseudo-objetivo.

IOPT = 2 Indica que o otimizador a ser usado na indicação da direção de busca é o método da variável métrica de Davidon-Fletcher-Powell (DFP).

IONED = 2 Indica ao programa que, na busca do mínimo da função irrestrita na direção de busca, utiliza-se o método da seção áurea seguido de uma interpolação polinomial.

Na otimização do mecanismo, o que se deseja obter são os parâmetros que irão compor o vetor das variáveis de decisão. Estas variáveis são: X_0 , Y_0 , r , α , b , c , R , φ e ϕ conforme a figura 5.1.

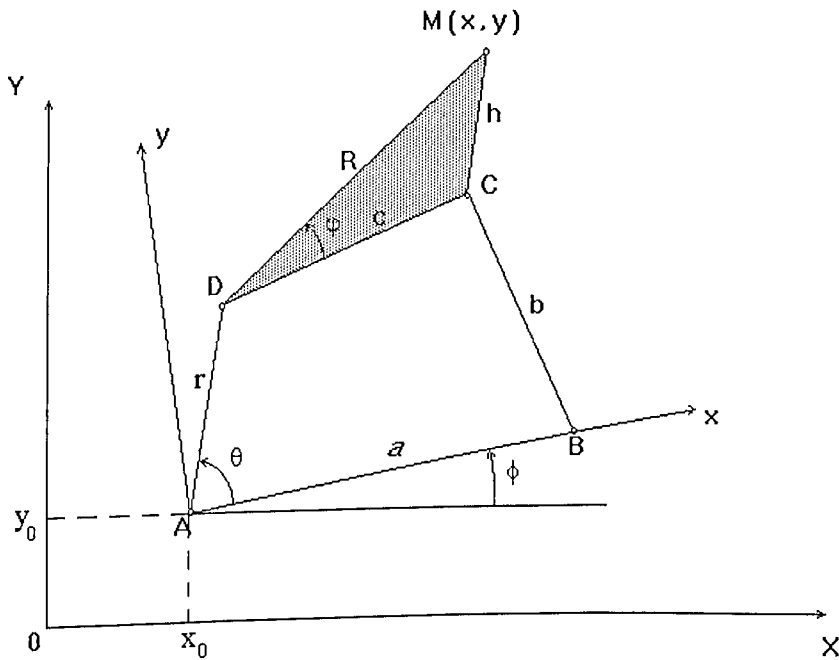


Figura 5.1 - Variáveis de projeto

A fim de poder-se comparar os resultados entre o mecanismo inicial e o mecanismo obtido após o processo de otimização, foi utilizado um programa que calcula o valor da distância mínima de cada ponto à trajetória do mecanismo escolhido através do atlas, como aproximação inicial; em seguida, o mesmo programa foi utilizado para calcular a distância mínima da trajetória do mecanismo obtido após a otimização.

Todos os casos aqui apresentados tiveram os seus parâmetros iniciais escolhidos a partir do atlas de curvas. As restrições de lateralidade foram escolhidas de modo a proporcionar um maior número de mecanismos que satisfaçam as condições.

5.1 - Primeiro Exemplo

Para este exemplo foi utilizado o roteiro acima indicado. Os pontos impostos foram (Kimbrell, 1991):

i	X(m _i) mm	Y(m _i) mm
1	4,912302	8,469459
2	4,660502	9,920283
3	3,007439	10,39746
4	0,963645	9,870361
5	-0,765150	8,450906
6	-1,760519	6,494262
7	-1,880051	4,482668
8	-1,222553	2,884131
9	-0,047108	2,061726

Estes pontos foram plotados em um sistema cartesiano e traçada uma polinomial ligando os pontos, com o objetivo de se ter uma visão aproximada da trajetória que seria escolhida como ponto de partida no atlas de curvas.

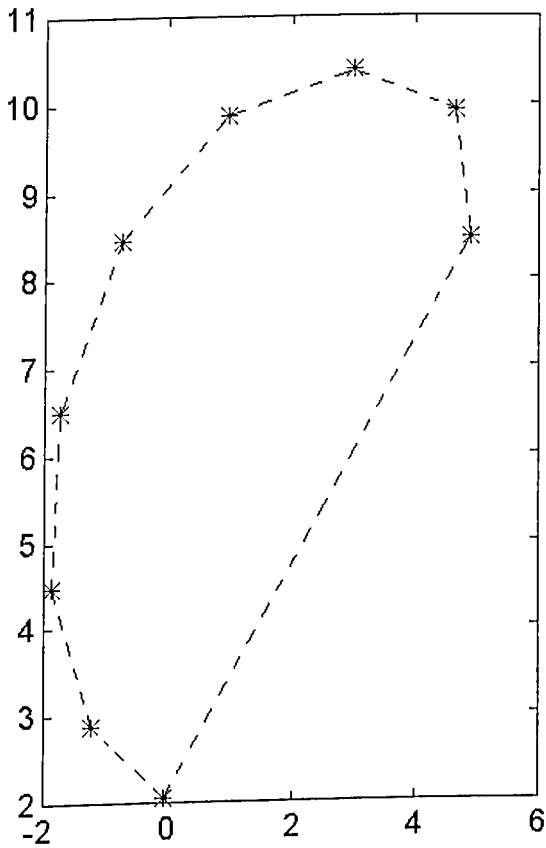


Figura 5.2 - Apresentação dos pontos dados em um plano cartesiano.

Após observar-se o atlas de curvas, foi obtido um mecanismo cujas variáveis de projeto são dadas por:

$$X_0 = 0,01; \quad Y_0 = 0,01; \quad r = 4; \quad a = 12; \quad b = 8; \quad c = 12; \quad R = 6;$$

$$\varphi = 35^\circ \text{ e } \phi = 10^\circ$$

Para este mecanismo foram calculadas as distâncias mínimas entre a trajetória e os pontos fornecidos, obtendo-se então:

--Distâncias Mínimas--

DM1= 1.2081140000
 DM2= 1.2880580000
 DM3= .8450310000
 DM4= .6818224000
 DM5= .5496600000
 DM6= .3598727000
 DM7= .1192538000
 DM8= .1173192000
DM9= .0523078400

--Valor da Fun. Objetivo--

OBJ = 4.7599470000

Soma= 5.2214380000

Ao final do processo de otimização obteve-se:

 optimization results

objective function value .15626E+00

design variables

variable	lower bound	value	upper bound
1	.10000E-02	.28505E+00	.50000E+02
2	.10000E-02	.80124E+00	.50000E+02
3	.10000E-02	.45719E+01	.50000E+02
4	.10000E-02	.11825E+02	.50000E+02
5	.10000E-02	.78519E+01	.50000E+02
6	.10000E-02	.12266E+02	.50000E+02
7	.10000E-02	.57535E+01	.50000E+02
8	.10000E-02	.34937E+02	.36000E+03
9	.10000E-02	.10023E+02	.36000E+03

design constraints

1) .0000E+00 -.2839E+01

function evaluations = 257

Com os dados acima pode-se observar que o mecanismo otimizado é dado por:

$$X_0 = 0,28505 ; Y_0 = 0,80124; r = 4,5719 ; a = 11,825; b = 7,8519;$$

$$c = 12,266; R = 5,7535; \varphi = 34,937E^0 \text{ e } \phi = 10,023^0$$

Para este mecanismo, obtido após a otimização as distâncias mínimas foram mais uma vez calculadas, obtendo-se então:

--Distâncias Mínimas--

DM1= .3434916000
 DM2= .1043434000
 DM3= .0856434000
 DM4= .0222024000
 DM5= .0710782900
 DM6= .0581906400
 DM7= .0112505400
 DM8= .0853383500
 DM9= .0607845500
 Soma= .8423231000

--Valor da Fun. Objetivo--

OBJ = .1562440000

5.2 - Segundo Exemplo

Neste exemplo, tem-se alguns pontos que são descritos pela trajetória da pista de um transportador vibratório. O que se deseja, neste caso, é obter um mecanismo que, durante o seu movimento, um ponto ligado à biela, descreva uma trajetória que aproxime-se ao máximo dos pontos dados. O único interesse no momento é com a

trajetória descrita pelo mecanismo. Apesar de serem importantes para este caso, a velocidade e a aceleração não serão tratadas.

Os pontos dados são:

i	X(m _i) mm	Y(m _i) mm
1	0	0
2	11,9805. 10 ⁻²	2,7695. 10 ⁻²
3	26,7747. 10 ⁻²	9,5960. 10 ⁻²
4	42,1032. 10 ⁻²	18,4433. 10 ⁻²
5	51,7733. 10 ⁻²	26,5303.10 ⁻²
6	42,1575. 10 ⁻²	26,5845.10 ⁻²
7	28,6693. 10 ⁻²	21,9814. 10 ⁻²
8	14,6498.10 ⁻²	13,5972. 10 ⁻²
9	98,8066.10 ⁻³	1,43180. 10 ⁻²

Plotando-se os pontos em um sistema cartesiano obtem-se então:

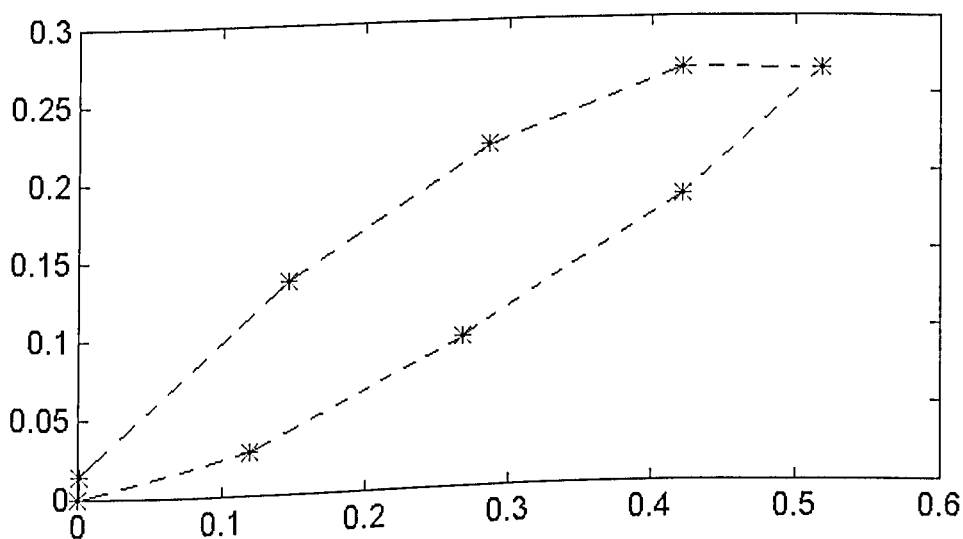


Figura 5.3 - Apresentação dos pontos fornecidos em um plano cartesiano.

Após analisar-se a poligonal tracejada, obtida a partir dos pontos dados, observou-se o atlas de Hrones e Nelson a fim de encontrar um mecanismo cuja trajetória aproxima-se da poligonal acima. O mecanismo que foi obtido tem como variáveis:

$$X_0 = 0,01; \quad Y_0 = 0,01; \quad r = 0,2; \quad a = 0,6; \quad b = 0,6; \quad c = 0,4; \quad R = 0,65;$$

$$\varphi = 22^\circ \text{ e } \phi = 1^\circ$$

Para este mecanismo foram calculadas as distâncias mínimas entre sua trajetória e os pontos fornecidos, obtendo-se então:

--Distancias Mínimas--

DM1= .4572865000
 DM2= .4668204000
 DM3= .4747927000
 DM4= .5116862000
 DM5= .5432910000
 DM6= .4622419000
 DM7= .3898497000
 DM8= .3785989000
DM9= .4436133000
Soma= 4.1281810000

--Valor da Fun. Objetivo--

OBJ= 1.9152280000

Em seguida foi inicializado o processo de otimização com as variáveis que foram anteriormente obtidas, a partir do atlas de curvas. Ao final do processo obteve-se então:

 optimization results

objective function value .18609E+01

design variables

variable	lower bound	value	upper bound
1	.10000E-02	.10000E-01	.50000E+02
2	.10000E-02	.10000E-01	.50000E+02
3	.10000E-02	.20000E+00	.50000E+02
4	.10000E-02	.60000E+00	.50000E+02
5	.10000E-02	.60000E+00	.50000E+02
6	.10000E-02	.40000E+00	.50000E+02
7	.10000E-02	.65000E+00	.50000E+02
8	.10000E-02	.22000E+02	.36000E+03
9	.10000E-02	.10000E+01	.36000E+03

design constraints

$$1) \ .0000E+00 \ - .2000E+00$$

function evaluations = 52

Dos dados acima pode-se observar que o mecanismo otimizado é dado por:

$$X_0 = 0,01; \quad Y_0 = 0,01; \quad r = 0,2; \quad a = 0,6; \quad b = 0,6; \quad c = 0,2; \quad R = 0,65;$$

$$\phi = 22^\circ \text{ e } \varphi = 35^\circ$$

5.3 - Conclusões Tiradas a partir dos Resultados

Aqui serão apresentadas algumas conclusões que puderam ser tiradas a partir dos exemplos acima.

- a) - *Primeiro exemplo*: pode-se observar que o programa teve um bom desempenho, pois ao final do processo de otimização foi obtido um mecanismo cuja trajetória aproxima-se bastante dos pontos dados. Ao

observar-se os resultados obtidos para as distâncias, pode-se constatar que todas tiveram os seus valores diminuídos.

- b) - *Segundo exemplo:* ao final do processo de otimização observou-se que o mecanismo obtido tem suas variáveis idênticas às obtidas a partir do atlas de curva. Do exposto, pode-se concluir que o ponto dado para a inicialização do processo encontra-se muito próximo de um mínimo.

6. CONCLUSÃO E SUGESTÕES

6.1 Conclusão

O objetivo deste trabalho consiste em obter a síntese otimizada de um mecanismo plano de quatro barras, utilizando-se programação computacional. Para que este objetivo fosse atingido, houve a necessidade de se definir uma função objetivo e funções de restrição, que melhor representem o problema. Após esta etapa, foi criada uma subrotina computacional que foi acoplada a um programa de otimização (ADS, Vanderplaats, G. N./ NASA-EUA). A utilização do ADS justifica-se pela sua grande versatilidade em problemas de otimização de funções de várias variáveis com restrição, e, nas possibilidades oferecidas para escolha de um método que se adeque ao problema em questão.

No decorrer deste trabalho, chegou-se a algumas conclusões, que encontram-se apresentadas a seguir.

- 1- Um pequeno número de pontos de um trajetória acarretará um maior número de mecanismos que podem satisfazer a solução do problema.
- 2- A forma como estes pontos estão dispostos no sistema cartesiano, acarretará uma variação no número de mecanismos que atendem a solução do problema.
- 3- Em aplicações não apresentadas neste trabalho, foram escolhidos vários pontos (vetor variáveis de decisão) para a inicialização do processo de otimização, sendo observado que, ao final do processo, a função objetivo sempre era minimizada e o ponto sofria uma pequena alteração, em relação aos parâmetros iniciais; o que mostra que várias famílias de mecanismos atendem a solução do problema.

- 4- Com base no item anterior, pode-se concluir que, quando se deseja otimizar um mecanismo com o objetivo que o mesmo passe mais próximo possível de pontos preestabelecidos, é importante que se utilize um atlas de curvas. O atlas de curvas é uma boa alternativa para escolha das variáveis de projeto, que irão inicializar o processo de otimização.
- 5- Utilizou-se o método multi objetivo, a fim de observar, se haveria uma diminuição no mínimo encontrado, por outro processo, porém, este processo, não apresentou nenhuma melhora, em relação aos demais.

6.2 Sugestões

Apresenta-se, a seguir, algumas sugestões que podem ser utilizadas para trabalhos futuros.

- 1 - Neste trabalho, só foram levadas em consideração restrições que dizem respeito ao atendimento da lei de Grashoff e que o mecanismo deveria ser do tipo manivela balancim. Outras restrições poderiam ser acrescentadas a estas, tais como:
 - a) - Delimitação de uma região, onde estariam localizadas algumas variáveis de projeto, restringindo-se, assim, o número de mecanismos que satisfariam a solução do problema.
 - b) - Delimitação entre o ângulo máximo e mínimo, que o balancim poderia fazer com a biela.
 - c) - Consideração de folgas nas juntas que unem os segmentos do mecanismo.
- 2- Utilizando o ADS, fazer uma escolha de outras opções que o programa oferece, fazendo-se, ao final, uma comparação entre os diversos métodos utilizados para a solução do problema.

- 3- Utilizar outros pacotes de otimização e fazer uma comparação entre os diversos resultados obtidos na solução do problema.
- 4 - Aumentar o número de restrições a fim de utilizar o método direto para a solução deste problema, e fazer uma comparação entre o desempenho do método direto e do método seqüencial.
- 5 - Fazer um programa, que utilizando cinco dos nove pontos dados ache, de forma analítica, um mecanismo que passe pelos cinco pontos escolhidos. Este mecanismo será uma aproximação inicial, que irá compor o vetor das variáveis de projeto para a inicialização do processo de otimização.
- 6 - Utilizar o método dos Mínimos quadrados para observar, se, este, apresenta uma solução satisfatória para problema.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

00301/97

BIBLIOGRAFIA

ANGELES, JORGE (1982)

“Spatial Kinematic Chains. Analysis, Synthesis and Optimization” ; Springer-Verlag, New York.

ARTOBOLEVSKI, I. (1977)

“Théorie des Mécanismes et des Machines”, Mir, Moscou .

BEVERRIDGE, G. S. G. ; SCHECHTER, R. S. (1970)

“Optimization: Theory and Practice”, McGraw-Hill, New York.

CARNAHAN, B. ; LUTHER, H. A. ; WILKES, J. O. (1969)

“Applied Numerical Methods”, John Wiley & Sons, New York.

CARVALHO, J. C. M. (1991)

“Transporteurs Vibrants à Déplacement Imposé: Modelisation et Aplications”,
Tese de Doutorado, Univ. Franche Comté, Besançon, França.

ERDMAN, A. G. ET ALI (1993)

“Modern Kinematics: Developments in The Last Forty Years”, John Wiley & Sons, New York.

FARIA, MÁRIO LUIZ DE MENDONÇA (1991)

“Uma Contribuição aos Procedimentos de Otimização Aplicados a Sistemas Mecânicos”, Dissertação de Mestrado, Univ. Federal de Uberlândia, Uberlândia.

FOX, R. L. ; WILLMERT, K. D. (1967)

“Optimum Design of Curve-Generating Linkages With Inequality Constraints”,
Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, pp. 144-152.

FOX, R. L. ;GUPTA, K. C. (1973)

“Optimization Technology as Applied to Mechanism Design”, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, pp. 657-663.

FOX, R. L. (1971)

“Optimization Methods for Engineering Design”, Addison-Wesley, New York.

GROSJEAN, J. (1991)

“Kinematics and Dynamics of Mechanisms”, McGraw-Hill, Singapore.

HARTENBERG, R. S. ; DENAVIT, J. (1964)

“Kinematic Synthesis of Linkages”, McGraw-Hill, New York.

HEHL, MAXIMILIAN EMIL (1987)

“Linguagem de Programação Estruturada FORTRAN 77”, McGraw-Hill, São Paulo.

HERNANDEZ, A.; AMEZAU, E.; AJURIA, M. B. and LLORENT, J. I. (1994)

“Multiple Points on The Coupler Curve of Transitional Four-Hinge Planar Linkages”; Mech. Mach. Theory, Vol. 29 N^o 7, pp. 1015 - 1032.

HIMMELBLAU, M. D.; EDGAR, T. F. (1988)

“Optimization of Chemical Processes”, McGraw-Hill, New York.

HUNT, K. H. (1978)

“Kinematics Geometry of Mechanisms”, Oxford Univ. Press, Oxford, USA.

KLATT, M. A. ; REINHOLTZ, C. F. (1987)

“Mechanism Optimization Using Zero-Order Methods and Penalty Function: a Comparison of Incremented Versus Nonincremented Penalty Parameter”, Advances In Design Automation, Vol. 01, pp. 205 - 213.

KIMBRELL, JACK T. (1991)

“Kinematics Analysis and Synthesis”, McGraw-Hill, Singapore.

KRISHNAMURTY, S.; TURCIC, D. A. (1992)

“Optimal Synthesis of Mechanisms Using Nonlinear Goal Programming Techniques”; Mech. Mach. Theory, Vol. 27 N^o 5, pp. 599 -612 .

MABIE, H. H.; REINHOLTS, C. F. (1987)

“Mechanisms and Dynamics of Machinery”, John Wiley & Sons, Singapore.

MARX, KARL (1984)

“O Capital: Critica de Economia Politica”; Nova Cultura, São Paulo.

NORTTON, R. L. (1992)

“Design of Machinery”, McGraw-Hill, Singapore.

OSYCZKA, ANDREZJ (1984)

“Multicriterion Optimization in Engineering”, John Wiley & Sons, N. York.

RAGSDELL, K. M., GABRIELE, G. A. (1989)

“OPT3.2 - User's Manual”, University of Missouri - Rolla.

SANDOR, G. N.; ERDMAN, A. G. (1984)

“Mechanism Design: Analysis and Synthesis”, vol. 1, Prentice-Hall, New York.

SKARSKI, B. (1980)

“Síntese Cinemática dos Mecanismos”, Publicação CT n^o 8 , Campinas - SP.

SUTHERLAND, G. H. ; KARWA, N. R. (1978)

“Ten-Design-Parameter Four-Bar Synthesis With Tolerance Considerations”,
Mech. and Mach. Theory, vol.13, pp:311-327.

VANDERPLAATS, G. N. (1984)

“Numerical Optimization Techniques For Engineering Design”, McGraw-Hill,
New York.

VANDERPLAATS, G. N. (1985)

“ADS - A FORTRAN Program for Automated Design Synthesis” Versão 1.1.

ZANINI, JOSÉ C. (1991)

“Investigation of Methods of Linzages Synthesis”, Tese de Doutorado, Univ. of
Manchester, Inglaterra, junho.

ANEXOS

ANEXO I

EQUACIONAMENTO DO TEOREMA DE ROBERT-CHEBYSHEV

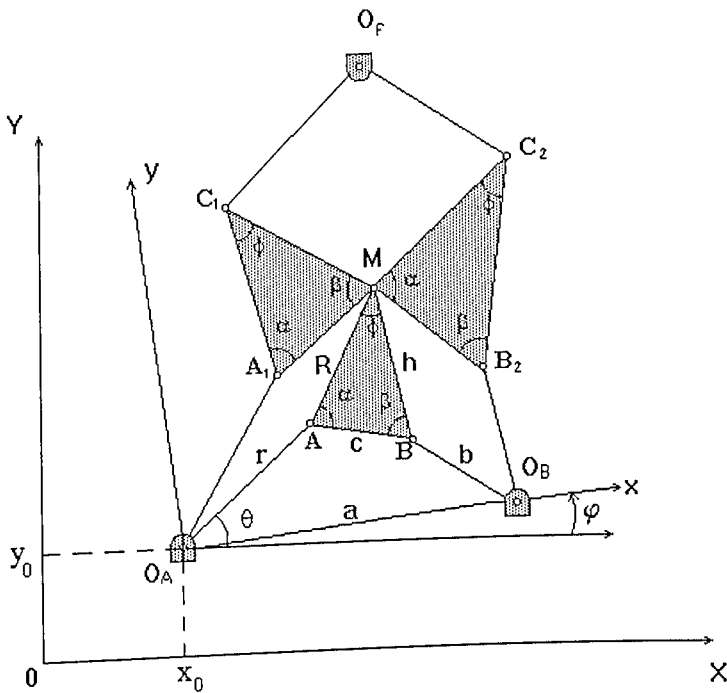


Figura 1 - Mecanismos cognatos.

Os outros dois mecanismos cognatos ao mecanismo formado pelos membros r , a , b , c , R e α podem ter seu pontos determinados pelas equações abaixo mostradas (Kimbrel, 1991):

$$O_a O_f = a \frac{R}{c}$$

$$x_{O_f} = a \frac{R}{c} \cos(\alpha)$$

$$y_{O_f} = a \frac{R}{c} \text{sen}(\alpha)$$

$$X_{O_f} = X_0 + x_{O_f} \cos(\varphi) - y_{O_f} \text{sen}(\varphi)$$

$$Y_{O_f} = Y_0 + x_{O_f} \text{sen}(\varphi) + y_{O_f} \cos(\varphi)$$

$$O_a A_1 + A_1 C_1 + C_1 O_f = FA = \frac{R(r + c + b)}{c}$$

$$O_a A_1 = R$$

$$O_a A = r \frac{R}{c}$$

$$C_1 O_f = FA - O_a A_1 - A_1 C_1$$

$$h = c^2 + R^2 - 2.R.c.\cos(\alpha)$$

$$O_b B_2 + B_2 C_2 + C_2 O_f = FB = \frac{h(r + c + b)}{c}$$

$$O_b B_2 = h$$

$$B_2 C_2 = h \frac{b}{c}$$

$$C_2 O_f = FB - O_b B_2 - B_2 C_2$$

$$X_b = X_0 + a.\cos(\varphi)$$

$$Y_b = Y_0 + a \cdot \text{sen}(\varphi)$$

$$\phi = ar \cos\left(\frac{R^2 + h^2 - c^2}{2 \cdot R \cdot h}\right)$$

$$\beta = ar \cos\left(\frac{c^2 + h^2 - R^2}{2 \cdot c \cdot h}\right)$$

ANEXO II

ADS (Automated Design Synthesis)

O ADS é um pacote computacional , para solução seqüencial de problemas de otimização, com uma grande variedade de algoritmos.

Na utilização do ADS, para a solução de um problema geral, pode-se separar o problema em três níveis básicos, os quais serão escolhidos pelo usuário, Estratégia, Otimizador e a Busca Unidimensional.

Na tabela 01 tem-se listadas as estratégias (ISTRAT) que podem ser utilizadas pelo ADS. ISTRAT é o parâmetro usado para indicar a estratégia desejada.

Tabela 01 - Opções de Estratégia

ISTRAT	ESTRATÉGIA A SER USADA
0	Nenhuma. Vai direto para o Otimizador
1	Minimização seqüencial irrestrita usando o método da função de penalização exterior.
2	Minimização seqüencial irrestrita usando o método da função de penalização interior linear estendida.
3	Minimização seqüencial irrestrita usando o método da função de penalização interior quadrática estendida.
4	Minimização seqüencial irrestrita usando o método da função de penalização interior cúbica estendida.
5	Método dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado
6	Problema Seqüencial Linear.
7	Método dos Centros (método das hiperesferas inscritas).
8	Problema Seqüencial Quadrático.
9	Problema Seqüencial Convexo.

A tabela 02 fornece uma lista com os otimizadores permitidos pelo ADS. IOPT é o parâmetro usado para indicar o otimizador desejado.

Tabela 02 - Opções de Otimizador

IOPT	OTIMIZADOR A SER USADA
0	Nenhuma. Vai direto para a Busca Unidimensional. Esta opção deverá ser somente usada para o desenvolvimento do programa.
1	Algoritmo de Fletcher-Reeves para minimização irrestrita
2	Método da variável métrica de Davidon-Fletcher-Powell (DFP), para minimização irrestrita.
3	Método da variável métrica de Broydon- Fletcher-Goldfard-Shanno (BFGS), para minimização irrestrita.
4	Método das Direções Permitidas (MFD) para minimizações com restrições.
5	Método Modificado das Direções Permitidas para minimização com restrições.

Na tabela 03 temos listadas as várias opções de busca unidimensional. IONED identifica o algoritmo a ser usado.

Tabela 03 - Opções de Busca Unidimensional.

IONED	OPÇÃO DE BUSCA UNIDIMENSIONAL
1	Encontrar o mínimo de uma função irrestrita utilizando o método da Seção Áurea
2	Encontrar o mínimo de uma função irrestrita utilizando o método da Seção Áurea seguido de uma interpolação polinomial.
3	Encontrar o mínimo de uma função irrestrita, primeiro encontrando os contornos e então utilizando interpolação polinomial.
4	Encontrar o mínimo de uma função irrestrita por uma interpolação /extrapolação polinomial sem primeiramente encontrar os contornos na solução.
5	Encontrar o mínimo de uma função restrita usando o método da Seção Áurea.
6	Encontrar o mínimo de uma função restrita usando o método da Seção Áurea seguido de uma interpolação polinomial.
7	Encontrar o mínimo de uma função restrita, primeiro encontrando os contornos e então utilizando interpolação polinomial.
8	Encontrar o mínimo de uma função restrita por uma interpolação /extrapolação polinomial sem primeiramente encontrar os contornos na solução.

Na tabela 04 tem-se uma mostra das diversas combinações que podem ser feitas com as tabelas 01, 02 e 03. Nesta tabela um X é usado para denotar uma combinação aceitável de estratégia, otimização e de busca unidimensional.

Nem todas as combinações de estratégias, otimização e de busca unidimensional fazem sentido.

Tabela 04 - Combinações Permitidas

ESTRATÉGIA	OTIMIZAÇÃO				
	1	2	3	4	5
0	X	X	X	X	X
1	X	X	X	O	O
2	X	X	X	O	O
3	X	X	X	O	O
4	X	X	X	O	O
5	X	X	X	O	O
6	O	O	O	X	X
7	O	O	O	X	X
8	O	O	O	X	X
9	O	O	O	X	X
BUSCA UNIDIM.					
1	X	X	X	O	O
2	X	X	X	O	O
3	X	X	X	O	O
4	X	X	X	O	O
5	O	O	O	X	X
6	O	O	O	X	X
7	O	O	O	X	X
8	O	O	O	X	X

A figura 1 mostra um fluxograma simplificado do uso do ADS. O usuário pode definir parâmetros básicos de controle e arrays (descrito na seção 4) . O parâmetro computacional do Gradiente, IGRAD, é o zero para indicar que o gradiente a ser usado será obtido por meio de diferenças finitas. O parâmetro de informação, INFO, é inicializado com zero e o ADS é chamado para a otimização. Quando os valores do

objetivo, OBJ, e restrições, $G(I)$, $I=1, NCON$, são requeridos, o controle retorna para o usuário com $INFO=1$. A função é então avaliada e o ADS é chamado novamente. Quando $INFO=0$ é retornada para usuário, a otimização esta completa.

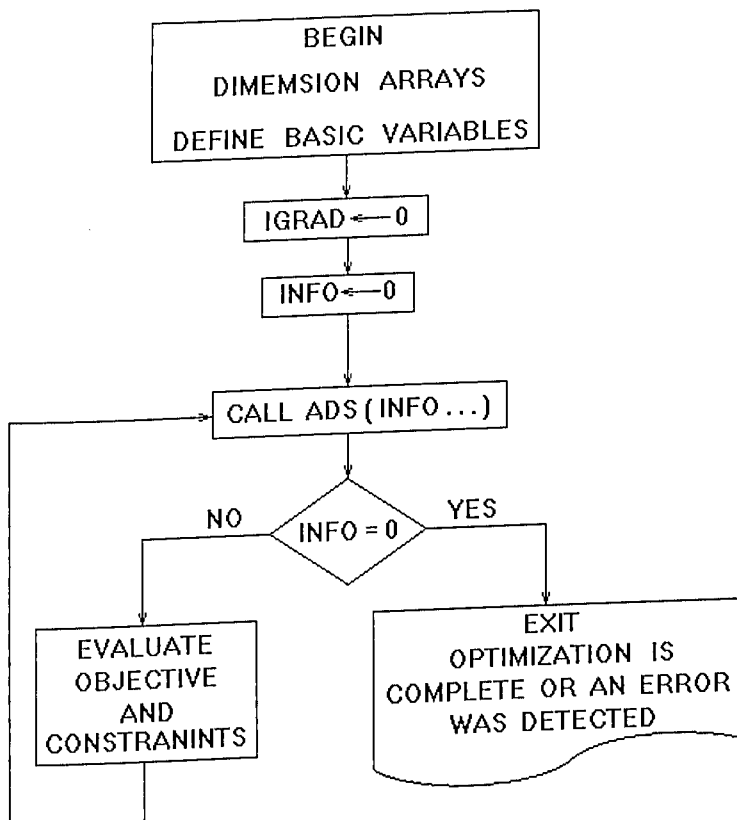


Figura 2 - Uso de Programa Simplificado; Todos os parâmetros são "Default" e o gradiente é calculado por diferenças finitas