

SISBI/UFU



1000215046



MON
621
A162P
TES/MEM

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PROJETO ROBUSTO H_{∞} APLICADO NO CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS COM MATERIAIS PIEZELÉTRICOS
INCORPORADOS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Uberlândia por:

GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHÃES DE ABREU

como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia
Mecânica

Aprovada por:

Prof. Dr. José Francisco Ribeiro - (FEMEC/UFU) - Orientador

Prof. Dr. Valder Steffen Jr. - (FEMEC/UFU)

Prof. Dr. Domingos Alves Rade - (FEMEC/UFU)

Prof. Dr. Vicente Lopes Jr. - (FEIS/Ilha Solteira)

Prof. Dr. Luis Carlos Sandoval Góes - (ITA/São José dos Campos)

Uberlândia, dezembro de 2003.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
BIBLIOTECA

D

SISBI/UFU
215046

Aos meus queridos pais **Ronaldo** e **Regina** que proporcionaram, ao longo destes anos, apoio e incentivo para a realização deste trabalho.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
Av. João Naves de Ávila, 2121 - 38400-902 Fone: 0XX(34)32394149 Ramal 42
FAX: 0XX(34)32394282 - Campus Santa Mônica - Uberlândia MG



ALUNO: Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu

NÚMERO DE MATRÍCULA: 5982905-0

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

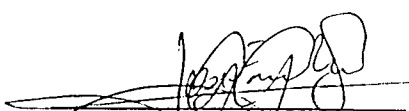
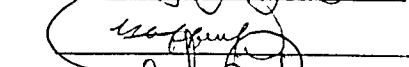
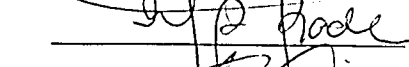

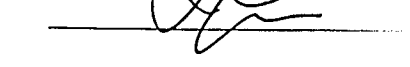
PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL DOUTORADO

TÍTULO DA TESE:

“Projeto Robusto H_{∞} Aplicado no Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezelétricos Incorporados”

ORIENTADOR: Prof. José Francisco Ribeiro

A Tese foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Anfiteatro do Bloco E, do Campus Santa Mônica, em 19 de dezembro de 2003, às 08:30 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
José Francisco Ribeiro, Prof. Dr.	UFU 
Valder Steffen Jr, Prof. Dr.	UFU 
Domingos Alves Rade, Prof. Dr.	UFU 
Prof. Vicente Lopes Jr, Prof. Dr.	FEIS-UNESP 
Luis Carlos Sandoval Góes, Prof. Dr.	ITA 

Uberlândia, 19 de dezembro de 2003.

Agradecimentos

Ao professor Dr. **José Francisco Ribeiro** pelos ensinamentos, incentivo, companheirismo e pela total dedicação com que sempre se dispôs durante todo o período de orientação do trabalho.

A todos os professores do **Departamento de Engenharia Mecânica** pela valiosa colaboração científica.

A todos os colegas do **Laboratório de Vibrações dos Sistemas Mecânicos** pela amizade e pelo apoio concedido durante a realização dos testes experimentais.

Às Secretárias do **Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da UFU**, Inez Vidal Magalhães Guimarães e Luci Rosana de Almeida pelo excelente trabalho realizado.

À **CAPES** (Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Abreu, G. L. C. M., 2003, "Projeto Robusto H_∞ Aplicado no Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezelétricos Incorporados", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo a aplicação da tecnologia de controle ativo, empregando materiais piezelétricos, para o controle de vibrações estruturais em sistemas flexíveis do tipo viga e placa. A técnica de elementos finitos e o método dos modos assumidos são usados na construção do modelo nominal da planta. Tal modelo é reduzido, combinando técnicas de redução modal e análise de controlabilidade e observabilidade de sistemas. Os efeitos provocados por esta redução são criteriosamente avaliados e convenientemente incorporados no modelo de projeto do controlador. O princípio de funcionamento dos materiais piezelétricos é evidenciado a partir dos testes de validação numérica onde os resultados obtidos pelas técnicas de modelagem mencionadas são confrontados com os dados gerados por um programa de simulação. Discute-se também a questão da seleção do número e do posicionamento dos elementos piezelétricos ao longo da estrutura empregando-se uma função de otimização que considera a participação de cada modo de vibrar na resposta do sistema físico. Diante das incertezas inerentes à formulação matemática do sistema propõe-se o uso dos controladores robustos H_∞ para o problema apresentado. A formulação básica para a análise e projeto destes controladores é discutida e analisada através de um conjunto de simulações numéricas efetuado para a avaliação da robustez, estabilidade e desempenho dos mesmos. A bancada experimental, constituída de uma viga flexível, é apresentada e tem seus parâmetros principais identificados. Tal bancada é usada para avaliar a ação de um controlador robusto que atenua suas vibrações via minimização de uma norma infinita espacial. O trabalho termina comentando as potencialidades da metodologia apresentada, discutindo as facilidades e dificuldades encontradas na sua implementação e aponta propostas para a sua continuidade.

Palavras Chave: Controladores Robustos H_∞ ; Estruturas Flexíveis; Materiais Piezelétricos; Técnica de Elementos Finitos e Método dos Modos Assumidos.

Abreu, G. L. C. M., 2003, " H_∞ Robust Design Applied to Vibration Control in Flexible Structures Containing Incorporated Piezoelectric Materials", PhD Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

Abstract

This work focus on the application of active control technology by using piezoelectric materials for the structural vibration control in beam and plate structures. A finite element approach and the assumed modes method are used for constructing the nominal model of the plant. The dimension of the model is then reduced by a combination of modal reduction techniques and system controllability and observability analysis. The effects caused by this reduction are analyzed and incorporated in the mathematical model of the plant used for the controller design. The operation principle of piezoelectric materials is verified by numerical validation tests and the results obtained by the above mentioned modeling techniques are compared with the data generated from simulation software. The problem of choosing the optimum locations along the structure for the piezoelectric elements is solved by an optimization function that considers the participation of each vibration mode in the system response. Due to inherent uncertainties inserted in the mathematical formulation procedure, the present work proposes the H_∞ robust controller design for this control problem. The fundamental formulation of this controller is discussed and its robustness, stability and performance are shown through numeric simulations. An experimental apparatus representing a flexible beam type structure is used to identify the main parameters and to evaluate a robust controller that suppresses the structural vibrations minimizing a spatial infinite norm. This work is concluded presenting the potentialities of the design methodology proposed and future developments to be implemented.

Keywords: H_∞ Robust Controllers; Flexible Structures; Piezoelectric Materials; Finite Element Technique and Assumed Modes Method.

Sumário

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	xi
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
2 Modelagem Matemática por Elementos Finitos do Conjunto Estrutura Flexível e Material Piezelétrico	9
2.1 Efeito do Acoplamento da Estrutura Flexível com o Material Piezelétrico	9
2.1.1 Formulação Matemática para o Potencial Elétrico	11
2.2 Placa de Kirchhoff	12
2.2.1 Relações entre Deformação e Deslocamentos	14
2.2.2 Obtenção das Matrizes Elementares de Rigidez e Massa	19
2.3 Viga de Euler-Bernoulli	23
2.3.1 Relações entre Deformação e Deslocamentos	24
2.3.2 Obtenção das Matrizes Elementares de Rigidez e Massa	27
2.4 Sistema Global de Equações	31
2.4.1 Obtenção do Modelo Global	31
2.4.2 Obtenção da Equação do Sensor e Atuador	33
2.4.3 Redução Pseudo-Modal do Sistema	35
2.4.4 Funções de Transferência do Sistema	37
3 Modelagem por Modos Assumidos de Estruturas Flexíveis Contendo Elementos Piezelétricos Distribuídos	41
3.1 Estrutura Flexível do Tipo Placa	41
3.1.1 Obtenção da Equação do Atuador	43
3.1.2 Obtenção da Equação do Sensor	50

3.1.3	Funções de Transferência do Sistema	53
3.2	Estrutura Flexível do Tipo Viga	57
3.2.1	Obtenção da Equação do Atuador	59
3.2.2	Obtenção da Equação do Sensor	64
3.2.3	Funções de Transferência do Sistema	66
4	Comparação dos Modelos Numéricos Desenvolvidos	71
4.1	Estrutura tipo Viga Flexível	71
4.1.1	Parâmetros do Sistema Dinâmico	71
4.1.2	Análise Estática	74
4.1.3	Análise Dinâmica	78
4.1.4	Funções de Transferência do Sistema	82
4.2	Estrutura Tipo Placa Flexível	86
4.2.1	Parâmetros do Sistema Dinâmico	86
4.2.2	Análise Estática	88
4.2.3	Análise Dinâmica	92
4.2.4	Funções de Transferência do Sistema	96
5	Posicionamento de Sensores e Atuadores em Estruturas Flexíveis e Redução de Modelos	101
5.1	Conceitos de Controlabilidade e Observabilidade	101
5.2	A Função Custo Modal	104
5.3	Técnica de Eliminação de Estados não Observados/Controlados para Redução de Modelos	106
5.4	Aplicações Numéricas	109
5.4.1	Estrutura Flexível do tipo Viga	109
5.4.2	Estrutura Flexível do tipo Placa	113

5.5	Incorporação dos Efeitos da Dinâmica não Considerada no Modelo de Projeto do Controlador	118
5.5.1	Sistema Estrutural do Tipo Viga Flexível	118
5.5.2	Sistema Estrutural do Tipo Placa Flexível	125
6	Controladores Robustos H_∞	135
6.1	Introdução	135
6.2	Formulação Preliminar do Problema de Controle Robusto	136
6.2.1	Análise do Comportamento do Sistema de Controle no Domínio da Frequência	137
6.2.2	Formulação Matemática para o Problema Preliminar de Controle Robusto: Elaboração dos Requisitos de Desempenho do Modelo Nominal	140
6.3	Representação Matemática das Incertezas Presentes no Modelo de Projeto do Controlador	144
6.3.1	Modelo de Incerteza Estruturada	145
6.3.2	Modelo de Incerteza Não-Estruturada	149
6.4	Condições de Robustez às Dinâmicas Não Modeladas	153
6.4.1	Condições de Estabilidade do Sistema Nominal com Incertezas na Forma Multiplicativa	153
6.4.2	Condições de Estabilidade do Sistema Nominal com Incertezas na Forma Aditiva	157
6.5	Definição do Problema de Controle Robusto	159
6.5.1	Condições de Desempenho do Modelo Nominal e Condições de Estabilidade Frente às Dinâmicas Não Modeladas	161
6.5.2	Condições de Estabilidade Frente ao Conjunto de Incertezas Estruturadas	163
6.6	Projeto Robusto Aplicado ao Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis	165
6.6.1	Projeto Robusto Considerando a Estrutura Flexível do Tipo Placa	165
6.6.2	Projeto Robusto Considerando a Estrutura Flexível do Tipo Viga	176

7 Resultados Experimentais	199
7.1 Descrição e Identificação da Bancada de Testes	199
7.2 Projeto do Controlador Robusto	205
7.2.1 Formulação do Problema de Controle	205
7.2.2 Modelo da Incerteza de Alta Frequência	206
7.2.3 Projeto Robusto Considerando Incertezas no Amortecimento do Sistema	207
7.3 Avaliação da Robustez e Desempenho do Controlador	207
7.3.1 Análise no Domínio do Tempo	208
7.3.2 Análise no Domínio da Frequência	212
8 Conclusões e Propostas de Continuidade do Trabalho	215
Referências Bibliográficas	219
Anexo I Princípio Fundamental da Piezeletricidade	229
I.1 O Fenômeno da Piezeletricidade	229
I.2 Relações Constitutivas da Piezoeletricidade Linear	231
Anexo II Princípio Variacional Eletromecânico	235
II.1 Equação Variacional Eletromecânica	235
Anexo III Listagem do Código Computacional Desenvolvido no Programa ANSYS	239
III.1 Listagem das Funções Auxiliares	239
III.2 Programas Principais	250
Anexo IV Conceito de Valores Singulares e Norma Infinita	253
IV.1 Valores Singulares e Norma Infinita de uma Matriz	253
Anexo V Solução Ótima para o Problema de Controle Robusto	257
V.1 Controle por Realimentação do Estado	257

V.2	Controle por Realimentação da Saída	261
V.3	Etapas de Contrução do Controlador Robusto com Realimentação da Saída Visando a Solução Ótima	264
Anexo VI	Descrição da Instrumentação	267
VI.1	Materiais Piezelétricos e Eletrônica associada	267
VI.2	Procedimento de Colagem da Cerâmica	270
VI.3	O Ambiente <i>dSpace</i>	271
VI.4	Características do Filtro Analógico	272

Lista de Figuras

2.1	Estrutura flexível contendo material piezelétrico.	9
2.2	Flexão da estrutura causada pela aplicação de um potencial elétrico na cerâmica.	10
2.3	Configuração esquemática de uma estrutura tipo placa fina com elementos piezelétricos incorporados.	13
2.4	Modelo de elementos finitos para uma placa com elemento piezelétrico incorporado.	14
2.5	Sistema de coordenadas para um elemento de placa com material piezelétrico incorporado.	14
2.6	Deslocamento de um ponto em relação a normal a linha neutra de um elemento de viga.	23
2.7	Modelo de elementos finitos para uma viga com elementos piezelétricos incorporados.	24
2.8	Características dimensionais do <i>k-ésimo</i> elemento viga-piezelétrico.	25
2.9	Elemento de viga com piezelétrico incorporado.	25
2.10	Circuito amplificador de carga para o sensor piezelétrico.	33
3.1	Dimensões da placa e dos elementos piezelétricos e sistema de coordenadas.	43
3.2	Distribuição das tensões no plano xz devido à atuação do elemento piezelétrico.	44
3.3	Região onde o elemento piezelétrico se localiza sobre a superfície da placa.	48
3.4	Viga flexível contendo atuador e sensor piezelétrico.	58
3.5	Distribuição do momento na estrutura devido à atuação do elemento piezelétrico.	63
4.1	Estrutura flexível do tipo viga contendo elementos piezelétricos e com condições de contorno engastada-livre.	72

4.2	Disposição dos materiais piezelétricos distribuídos ao longo da viga flexível.	74
4.3	Distribuição das deflexões estáticas da viga elástica obtida pelo programa de simulação empregado.	76
4.4	Comparação dos resultados obtidos para a deflexão da viga determinada pelas técnicas de modelagem apresentadas.	76
4.5	Comparação entre os resultados obtidos pela formulação contínua (uso do termo C_0^*) e <i>FEM</i> onde os efeitos inerciais e de rigidez dos materiais piezelétricos não foram considerados.	77
4.6	Distribuição das deflexões dinâmicas da viga nos tempos 1 <i>ms</i> , 5 <i>ms</i> e 10 <i>ms</i>	80
4.7	Distribuição das deflexões dinâmicas da viga elástica no tempo 1 <i>ms</i> obtida pelo programa comercial empregado.	80
4.8	Distribuição das deflexões dinâmicas da viga elástica no tempo 5 <i>ms</i> obtida pelo programa comercial empregado.	81
4.9	Distribuição das deflexões dinâmicas da viga elástica no tempo 10 <i>ms</i> obtida pelo programa comercial empregado.	81
4.10	Potenciais elétricos gerados pelos sensores durante o intervalo de tempo de 10 <i>ms</i>	82
4.11	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	83
4.12	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	83
4.13	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	84
4.14	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	84
4.15	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	85
4.16	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	85
4.17	Disposição dos materiais piezelétricos distribuídos sobre a placa flexível.	87
4.18	Comparação dos resultados obtidos para a deflexão estática da placa	

	entre as modelagens (a) FEM , (b) FC e (c) ANSYS	90
4.19	Distribuição das deflexões estáticas da placa ao longo do eixo x e em $\frac{L_y}{2}$	90
4.20	Distribuição das deflexões estáticas da placa ao longo do eixo y e em $\frac{L_x}{2}$	91
4.21	Comparação dos resultados obtidos para a deflexão dinâmica da placa entre as modelagens (a) FEM , (b) FC e (c) ANSYS no instante de tempo 1 ms	93
4.22	Comparação dos resultados obtidos para a deflexão dinâmica da placa entre as modelagens (a) FEM , (b) FC e (c) ANSYS no instante de tempo 5 ms	93
4.23	Comparação dos resultados obtidos para a deflexão dinâmica da placa entre as modelagens (a) FEM , (b) FC e (c) ANSYS no instante de tempo 10 ms	94
4.24	Distribuição das deflexões dinâmicas da placa ao longo do eixo x e em $\frac{L_y}{2}$ e nos tempos 1 ms , 5 ms e 10 ms	94
4.25	Distribuição das deflexões dinâmicas da placa ao longo do eixo y e em $\frac{L_x}{2}$ e nos tempos 1 ms , 5 ms e 10 ms	95
4.26	Potenciais elétricos gerados pelos sensores durante o intervalo de tempo 0.01 s	95
4.27	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	96
4.28	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	97
4.29	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	97
4.30	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	98
4.31	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	98
4.32	Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.	99
5.1	Função custo modal versus localização dos atuadores e sensores piezelétricos.	110

5.2	Modos de vibrar relativos ao movimento transversal da viga.	111
5.3	Função de transferência entre o sensor e atuador piezelétrico para o sistema completo e reduzido a oito modos de vibrar.	112
5.4	Voltagem elétrica produzida pelo sensor piezelétrico devido à uma entrada degrau unitário no atuador para o sistema reduzido a um modelo que contém os dois, quatro, seis, oito e os dez modos de vibrar do sistema original.	112
5.5	Posição ótima dos elementos piezelétricos sobre a placa discretizada pela malha 6×4	114
5.6	Cinto primeiros modos de vibrar relativos ao movimento transversal da placa.	115
5.7	Função de transferência entre o primeiro sensor e atuador piezelétrico para o sistema completo e reduzido a 25 modos de vibrar.	116
5.8	Voltagem elétrica produzida pelo sensor piezelétrico 3 devido à uma entrada degrau unitário no atuador 1 para o sistema reduzido a um modelo que contém os 05, 10, 20, 25 e os 100 primeiros modos de vibrar do sistema original.	117
5.9	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> do sistema dinâmico truncado a três modos de vibrar.	119
5.10	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> do sistema dinâmico completo.	119
5.11	Resposta em frequência para os sistemas truncado e completo.	120
5.12	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para o <i>novo</i> modelo truncado a três modos de vibrar.	123
5.13	Resposta em frequência para o <i>novo</i> sistema truncado e completo.	123
5.14	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência G_{as}^{11} do sistema truncado.	125
5.15	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência G_c^{11} do sistema completo.	126
5.16	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência G_{as}^{12} do sistema truncado.	126
5.17	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência G_c^{12} do sistema completo.	127

5.18	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência G_{as}^{13} do sistema truncado.	127
5.19	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência G_c^{13} do sistema completo.	128
5.20	Resposta em frequência para os sistemas truncado G_{as}^{11} e completo G_c^{11}	128
5.21	Resposta em frequência para os sistemas truncado G_{as}^{12} e completo G_c^{12}	129
5.22	Resposta em frequência para os sistemas truncado G_{as}^{13} e completo G_c^{13}	129
5.23	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência \hat{G}_{as}^{11} do <i>novo</i> sistema truncado.	130
5.24	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência \hat{G}_{as}^{12} do <i>novo</i> sistema truncado.	131
5.25	Localização dos <i>pólos</i> e <i>zeros</i> para a função de transferência \hat{G}_{as}^{13} do <i>novo</i> sistema truncado.	131
5.26	Resposta em frequência para o <i>novo</i> sistema truncado \hat{G}_{as}^{11} e completo G_c^{11}	132
5.27	Resposta em frequência para o <i>novo</i> sistema truncado \hat{G}_{as}^{12} e completo G_c^{12}	132
5.28	Resposta em frequência para o <i>novo</i> sistema truncado \hat{G}_{as}^{13} e completo G_c^{13}	133
6.1	Diagrama de blocos do sistema a ser estudado.	136
6.2	Ganho requerido em frequência das funções de sensibilidade S e complementar de sensibilidade T do sistema controlado.	139
6.3	Diagrama de blocos do sistema realimentado considerando os filtros de projeto $W_1(s)$, $W_2(s)$ e $W_3(s)$	142
6.4	Representação convexa da planta aumentada.	143
6.5	Sistema perturbado pela realimentação adicional na forma convexa.	145
6.6	Diagrama de blocos do sistema massa-mola-amortecedor com incertezas nos parâmetros k e c	146
6.7	Diagrama de blocos do sistema massa-mola-amortecedor com realimentação interna das incertezas.	147

6.8	Diagrama de blocos do sistema massa-mola-amortecedor com realimentação externa das incertezas.	148
6.9	Sistema massa-mola-amortecedor perturbado na forma convexa.	148
6.10	Diagrama de Bode ilustrando a classe de sistemas reais admissíveis.	149
6.11	Diagrama de blocos do sistema de controle ilustrando o modelo do sistema perturbado G_p com incerteza do tipo multiplicativa.	150
6.12	Diagrama de blocos do sistema de controle ilustrando o modelo do sistema perturbado G_p com incerteza do tipo aditiva.	151
6.13	Comportamento típico de $E(\omega)$	152
6.14	Sistema perturbado na forma convexa pelo conjunto de incertezas Δ	152
6.15	Diagrama de blocos da planta aumentada incluindo incertezas paramétricas e não paramétricas.	160
6.16	Definição do problema de controle robusto colocado na forma convexa.	160
6.17	Representação convexa do sistema em malha fechada $T_{v_{10}p_{10}}$ realimentado pela perturbação Δ	163
6.18	Representação convexa da matriz M realimentada pela perturbação Δ	163
6.19	Circuito de controle da placa flexível com elementos piezelétricos incorporados.	165
6.20	Comportamento de $\ S\ _\infty$, $\ T\ _\infty$, W_1^{-1} e W_3^{-1} em função da frequência.	168
6.21	Diagrama de blocos usado para simular o sistema em malha fechada.	169
6.22	Acompanhamento dos sinais de saída dos sensores 1, 2 e 3.	169
6.23	Potenciais elétricos aplicados nos atuadores 1, 2 e 3.	170
6.24	Acompanhamento dos sinais de saída dos sensores 1, 2 e 3 para a planta perturbada.	171
6.25	Resposta em frequência do filtro de projeto W_a e do erro aditivo máximo E_a	172
6.26	Representação convexa do problema de controle robusto aplicado no controle de vibrações da estrutura placa.	173
6.27	Comportamento de $\ S\ _\infty$, $\ T\ _\infty$, $\ R\ _\infty$, W_1^{-1} , W_3^{-1} e W_a^{-1} em função da	

freqüência.	174
6.28 Acompanhamento dos sinais de saída dos sensores 1, 2 e 3 para a planta perturbada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez às dinâmicas não modeladas.	175
6.29 Potenciais elétricos aplicados nos atuadores 1, 2 e 3 para a planta perturbada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez às dinâmicas não modeladas.	175
6.30 Circuito de controle da viga flexível com elementos piezelétricos incorporados.	176
6.31 Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível.	178
6.32 Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível.	178
6.33 Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível.	179
6.34 Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível.	181
6.35 Resposta em freqüência de $\ T_{vp}\ _\infty$ para o sistema em malha aberta e fechada.	182
6.36 Resposta em freqüência do compensador K	182
6.37 Diagrama de blocos usado para simular o sistema em malha aberta e fechada.	183
6.38 Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha aberta e fechada.	183
6.39 Resposta temporal do sinal Φ_a aplicado no atuador.	184
6.40 Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha aberta apresentando 30 modos de vibrar.	185
6.41 Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada apresentando 30 modos de vibrar.	185
6.42 Filtro de projeto W_a e erro aditivo E_a entre o modelo de viga completo e reduzido.	186
6.43 Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível considerando incertezas não paramétricas na forma aditiva.	187
6.44 Resposta em freqüência do compensador K incluindo no projeto a	

condição de estabilidade robusta.	187
6.45 Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez à dinâmica de alta frequência.	188
6.46 Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez à dinâmica de alta frequência.	188
6.47 Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível para a condição de estabilidade robusta incluída no projeto.	189
6.48 Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada como uma excitação p do tipo senoidal numa frequência igual à primeira natural do sistema.	190
6.49 Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada como uma excitação p do tipo senoidal numa frequência igual à primeira natural do sistema.	190
6.50 Diagrama de blocos do sistema dinâmico com incertezas nos parâmetros ζ_k	192
6.51 Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível considerando um conjunto de incertezas Δ (paramétrica e não-paramétrica).	193
6.52 Resposta em frequência do compensador K incluindo no projeto incertezas paramétricas.	194
6.53 Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada incluindo incertezas paramétricas no projeto do controlador.	194
6.54 Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada incluindo incertezas paramétricas no projeto do controlador.	195
6.55 Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada diante de perturbações no sensor e variações no modelo do sistema dinâmico.	196
6.56 Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada diante de perturbações no sensor e variações no modelo do sistema dinâmico.	196
6.57 Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível para a incerteza paramétrica incluída no projeto.	197

7.1	Bancada de testes.	199
7.2	Localização do sensor piezelétrico na estrutura.	200
7.3	Localização do atuador piezelétrico na estrutura.	200
7.4	Diagrama esquemático do experimento de identificação do sistema.	201
7.5	Magnitude da função de transferência do sistema.	202
7.6	Fase da função de transferência do sistema.	202
7.7	Magnitude da função de transferência do sistema com o modelo numérico ajustado.	204
7.8	Fase da função de transferência do sistema com o modelo numérico ajustado.	204
7.9	Esquema de controle empregado para a construção do compensador K	205
7.10	Modelo da incerteza de alta frequência (W_a) e erro aditivo entre o modelo completo e nominal.	206
7.11	Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível considerando um conjunto de incertezas paramétrica e não-paramétrica.	207
7.12	Diagrama esquemático do experimento de controle realizado para a análise no domínio do tempo	208
7.13	Resposta ao impulso para o sistema livre.	209
7.14	Resposta ao impulso para o sistema controlado.	209
7.15	Resposta do sistema livre sujeito à excitação do atuador.	210
7.16	Resposta do sistema sujeito à excitação e controle do atuador.	211
7.17	Voltagem aplicada no atuador durante a excitação e controle.	211
7.18	Diagrama esquemático do experimento de controle realizado para a análise no domínio da frequência.	212
7.19	Funções de resposta em frequência para o sistema em malha aberta e fechada.	213
I.1	Polarização induzida por um forte campo elétrico aplicado em um material piezocerâmico policristalino.	229

I.2	Deformação de um material piezoelétrico sujeito a um campo elétrico.	230
I.3	Campo elétrico gerado pelo material piezoelétrico quando sujeito a uma tensão mecânica.	231
I.4	Sistemas de coordenadas para um elemento piezelétrico.	232
I.5	Deformação de um material piezelétrico submetido a uma tensão mecânica e um campo elétrico aplicado na direção de polarização.	233
II.1	Corpo sólido contendo cargas elétricas e sujeito a forças mecânicas.	235
IV.1	Diagramas de Bode para sistemas multivariáveis.	255
V.1	Diagrama de blocos do procedimento da determinação da melhor solução para o problema H_{∞}	265
VI.1	Sensor piezelétrico tipo <i>PVDF</i>	267
VI.2	Dispositivo eletrônico para medir o potencial elétrico produzido pelo sensor piezelétrico.	268
VI.3	Atuador piezelétrico empregado no controle estrutural.	269
VI.4	Amplificador de voltagem utilizado na alimentação do atuador piezelétrico.	270
VI.5	Circuito de controle implementado no <i>Matlab Simulink</i>	271
VI.6	Filtro analógico empregado nos ensaios experimentais.	272
VI.7	Magnitude da resposta em frequência do filtro construído.	273
VI.8	Fase da resposta em frequência do filtro construído.	273

Lista de Tabelas

2.1	Definição dos vetores e matrizes para a estrutura do tipo placa.	20
2.2	Definição dos vetores e matrizes para a estrutura do tipo viga.	27
4.1	Propriedades físicas e geométricas da viga e dos materiais piezelétricos.	72
4.2	Potenciais elétricos gerados pelos sensores piezelétricos distribuídos ao longo da viga flexível.	78
4.3	Propriedades físicas e geométricas da placa e dos materiais piezelétricos.	86
4.4	Posições dos materiais piezelétricos na placa.	88
4.5	Potenciais elétricos gerados pelos sensores piezelétricos incorporados na placa.	92
5.1	Posições dos sensores e atuadores sobre a placa e os respectivos valores do custo modal V	114
5.2	Posições dos sensores/atuadores sobre a placa e os respectivos valores do custo modal V	115
7.1	Três primeiros modos de flexão da viga.	203
7.2	Comparação entre as amplitudes em $[dB]$ para o sistema livre e controlado.	213
VI.1	Propriedades físicas e geométricas do sensor piezelétrico.	268
VI.2	Propriedades físicas e geométricas do atuador piezelétrico.	269
VI.3	Valores de R e frequências de corte correspondentes.	272

Lista de Símbolos

Letras Latinas

$[A], [B], [C], [D]$	Matrizes de estado do sistema
A	Área da seção transversal
b	Largura
C	Capacitância do material piezelétrico
$\{D\}$	Vetor de deslocamento elétrico
$[d]$ e $[e]$	Matrizes de constantes piezelétricas do material cerâmico
$\{E\}$	Vetor campo elétrico
E	Módulo de elasticidade
$\{F\}$	Vetor de forças
g	Constante de voltagem
G	Função de transferência do modelo nominal
h	Espessura
J	Função custo ou função de otimização
k	Constante
$[k]$ e $[K_g]$	Matrizes de rigidez elementar e global
$[K]$	Matriz do controlador
K_f	Rigidez à flexão da estrutura
L	Comprimento/largura
$[m]$ e $[M]$	Matrizes de massa elementar e global
n e N	Relativo a número
$[N]$	Matriz de funções de interpolação
p	Sinal de perturbação
$\{q\}$	Vetor campo de deslocamentos
q	Carga elétrica por unidade de área
Q	Carga elétrica superficial
r	Sinal de referência

R	Função restrição de energia
s	Operador Laplaciano
S	Função de Sensibilidade
t	Variável tempo
T	Função complementar de sensibilidade
$\{T\}$	Vetor tensão mecânica
$[T_k]$	Matriz de transformação
u	Sinal de controle
v	Sinal de saída regulada
V	Função custo modal
w	Deslocamento transversal da estrutura
W	Filtro de projeto
$\{\bar{x}\}$	Vetor de estados
x, y e z	Direções dos eixos coordenados X, Y e Z

Letras Gregas

α e β	Coeficientes de <i>Rayleigh</i>
γ_{xy}	Deformação transversal
γ	Variável de projeto
δ	Perturbação estruturada
Δ	Conjunto de perturbações estruturadas
ϵ	Deformação induzida no elemento piezelétrico
ε	Deformação mecânica
ε_0	Constante de permissividade do ar
ζ	Coeficiente de amortecimento
η	Função temporal
θ	Rotação
ϑ	Campo de deslocamentos
μ	Valor singular estruturado
ν	Coeficiente de Poisson

ξ	Constante dielétrica do material cerâmico
$\{\xi\}$	Vetor de deslocamentos nodais do sistema
ρ	Densidade do material
σ	Tensão mecânica
ϕ	Formas modais da estrutura
Φ	Potencial elétrico
φ	Coordenadas nodais no espaço modal
ψ	Base modal do sistema
ω	Frequência
Ω	Relativo à área superficial

Subscrito

a	Relativo ao atuador
e	Relativo a elemento
el	Relativo à força elétrica
f	Relativo à força mecânica
$i, j, k \text{ e } l$	Contadores
n	Relativo à nominal
p	Relativo à estrutura placa
pzt	Relativo ao material piezelétrico
s	Relativo ao sensor
v	Relativo à estrutura viga
qq	Relativo ao comportamento mecânico
$q\Phi$	Relativo ao comportamento piezelétrico
$\Phi\Phi$	Relativo ao comportamento dielétrico

Superescrito

E	Relativo a campo elétrico constante
T	Operação de transposição
τ	Relativo a tensão mecânica constante

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas estruturais, sejam manipuladores robóticos, construções civis, veículos de transporte etc., estão freqüentemente sujeitos à excitações externas e internas que provocam vibrações indesejáveis, colocando em risco a própria integridade estrutural do sistema e até mesmo a saúde dos usuários. No âmbito da indústria aeroespacial, por exemplo, a atenuação das vibrações pode permitir aos sistemas aeroespaciais, como antenas e apêndices de veículos espaciais, uma operação mais eficiente e segura, proporcionando manutenções periódicas menos freqüentes evitando com isso gastos dispendiosos. Neste contexto, a necessidade atual de redução de peso para minimizar os custos de lançamento de satélites e o uso de estruturas mais leves e atuadas por motores de baixo torque em robótica, conduz ao projeto de estruturas cada vez mais flexíveis. Por tudo isso, o controle de vibrações tem sido objeto de preocupação de inúmeros centros de pesquisa e a literatura especializada é rica em propostas de soluções para esta questão.

Atualmente, grande parte dos esforços dos pesquisadores tem sido dedicada a redução do ruído causado por vibração estrutural (Elliott e Nelson, 1993). Neste sentido, as soluções propostas para a atenuação de vibrações em sistemas mecânicos vão desde o emprego de mecanismos passivos de absorção de vibrações, que aumentam a massa e/ou o amortecimento da estrutura (Cunha Jr, 1999 e Steffen Jr. e Rade, 1999) até a utilização de propostas baseadas no controle ativo e que empregam materiais ditos "inteligentes" e técnicas de controle moderno.

Os controladores passivos tem seus parâmetros construtivos fixos e por este motivo a sua utilização ótima é restrita a uma determinada condição de operação (ou em uma faixa de frequência bem definida, por exemplo) e quando ocorrem excitações fora desta faixa, como freqüentemente acontece na prática, estes mecanismos perdem grande parte da sua eficiência. Esta limitação fez com que surgissem os absorvedores dinâmicos adaptativos que alteram as suas características (massa, rigidez e amortecimento), adaptando-se às diferentes freqüências de excitação dentro de uma faixa de operação (Sun et al, 1995). Nesta linha de pesquisa, destacam-se os trabalhos de Stephens et al (1991) que propuseram um absorvedor ativo cujo atuador é realimentado por uma combinação de sinais de velocidade e aceleração do sistema primário (sistema estrutural) e Marques (2000) onde é feita uma ampla revisão de vários tipos de absorvedores.

Além dos controladores passivos, há aqueles que utilizam, na sua metodologia de projeto, os materiais ditos "inteligentes" cujas propriedades se modificam mediante uma ação de controle (Rogers et al, 1995; Banks et al, 1996). Destaque especial para os *materiais piezelétricos* que têm possibilitado a concepção de tipos inovadores de sensores e atuadores (PS, 2003). Tais materiais possuem a propriedade de sofrer polarização (surgimento de cargas elétricas) quando são deformados por esforços mecânicos externos (efeito piezelétrico direto). Inversamente, estes materiais tem sua forma alterada quando seus dipolos elétricos se alinham sob a ação de um campo elétrico externo, causando deformação em sua estrutura (efeito piezelétrico inverso). O efeito piezelétrico inverso é explorado na construção de atuadores, ao passo que o efeito direto é utilizado na concepção de sensores. No primeiro caso, os elementos piezelétricos, geralmente dispostos sob a forma de placas finas, são colados rigidamente à estrutura flexível. A aplicação de tensão elétrica ao material piezelétrico gera deformações que são transferidas para a estrutura, provocando nesta o surgimento de deformações mecânicas que, por sua vez, ocasionam variações nas suas características estáticas e dinâmicas (por exemplo: rigidez e frequências naturais de vibração). No segundo caso, os elementos piezelétricos, geralmente dispostos sob a forma de películas finas, são colocados à estrutura e recebem desta as deformações mecânicas geradas por vibrações e/ou carregamentos externos. Estas deformações provocam o surgimento de cargas elétricas no material piezelétrico que constituem o sinal de saída do sensor. A característica que torna extremamente vantajoso o uso dos materiais piezelétricos é a possibilidade que eles oferecem de construção de sensores e atuadores distribuídos ao longo de superfícies relativamente amplas, o que tem importantes implicações no tocante à sensibilidade dos sensores (monitoramento dos níveis de vibração) e à capacidade de aplicação de carga nos atuadores (controle de vibrações).

A utilização dos materiais piezelétricos é, nos dias atuais, uma realidade concreta. Eles têm sido empregados em diversas aplicações de Engenharia, principalmente aquelas que requerem atuações de alta precisão e velocidade, tais como: sistemas de rastreamento óptico, microposicionadores para robôs, impressoras a jato de tinta e auto-falantes. Pesquisas recentes têm sido dedicadas ao uso de atuadores piezelétricos em sistemas de controle de ruído (Fuller et al, 1996) e de monitoramento de danos estruturais (Chaudhry et al, 1995). Vários produtos industriais já incorporam a tecnologia dos materiais piezelétricos, podendo ser mencionados: material esportivo de alto desempenho (raquetes de tênis e bastões de beisebol dotados de dispositivos de absorção de vibrações, skis de neve com características dinâmicas adaptativas, bicicletas com suspensões adaptativas e etc); sensores para aplicações automotivas (sensores

de impacto e de vibrações, sensores para levantamento de tráfego de veículos); equipamentos de áudio (microfones e auto-falantes) e instrumentação médica (ultra-som e exames baseados em imagens) (ACX, 2003).

O crescente interesse na aplicação da tecnologia dos materiais piezelétricos para os problemas de controle de vibrações e acústica levou, nos últimos trinta anos, um grande número de pesquisadores a propor métodos matemáticos que permitissem descrever, de uma forma precisa, o mecanismo de atuação e sensoriamento destes materiais. De todas as técnicas de modelagem matemática hoje conhecidas, o método de *elementos finitos* é, sem dúvida, um dos procedimentos mais eficientes e largamente divulgados (Zienkiewicz e Taylor, 1989). Com este método é possível obter soluções para muitos problemas complexos na Engenharia, sendo a ferramenta de projeto e análise utilizada por muitos pesquisadores, especialmente na área de vibrações (Tzou e Tseng, 1991). Um dos primeiros relatos sobre o emprego do método de elementos finitos para descrever o comportamento dos materiais piezelétricos foi apresentado por Allik e Hughes (1970) que propuseram um método geral de análise estática e dinâmica de estruturas piezelétricas. Com este trabalho foi possível obter o sistema de equações diferenciais dinâmicas da piezeletricidade. Detwiler et al (1995) e Wang et al (1997) aplicaram e validaram, através de dados fornecidos por outros pesquisadores, o método de elementos finitos na modelagem de estruturas tipo placa contendo atuadores e sensores piezelétricos distribuídos. Hansen (1998) e Ray et al (1998) desenvolveram equações exatas para análise dinâmica de placas com materiais piezelétricos distribuídos. Chen et al (1996) e Lin e Huang (1999) apresentaram uma metodologia de formulação do problema de controle de vibrações de uma viga elástica usando atuadores e sensores piezelétricos pelo método de elementos finitos. Reddy (1999) descreveu em detalhes a formulação por elementos finitos aplicada na análise dinâmica de placas compostas por sensores e atuadores piezelétricos. Uma metodologia completa para a modelagem analítica e numérica de estruturas tipo placa e viga com elementos piezelétricos incorporados é apresentada por Lima Jr. (1999).

Dada a simplicidade na formulação, o método dos *modos assumidos* (Junkins e Kim, 1993), por sua vez, tem sido também extensivamente empregado para a modelagem numérica de sistemas contínuos. Neste tipo de abordagem, o comportamento das vibrações estruturais é descrito por funções que dependem de variáveis espaciais e temporais (Fuller et al, 1996). Devido a este tipo de representação matemática, tal método vem se mostrando como uma ferramenta de modelagem atraente e promissora, especialmente no campo do desenvolvimento de novas propostas de controladores (Halim e Moheimani, 2002). Apesar deste atrativo, o uso de tal método

em estruturas complexas torna-se, em muitos casos, proibitivo e em outros impossível (Lima Jr., 1999).

Além do problema da formulação dos modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico e estático das estruturas, uma outra questão importante que deve ser analisada é a escolha da localização dos sensores e atuadores na estrutura. Esta etapa visa a melhoria da capacidade de sensoriamento e atuação do sistema de controle através do *posicionamento ótimo* destes elementos. Existe na literatura um conjunto expressivo de propostas com relação a este problema e algumas questões já foram levantadas e investigadas por vários pesquisadores. Um dos primeiros relatos sobre este tema foi discutido por Skelton et al (1988) que propuseram uma medida quantitativa da controlabilidade e observabilidade baseada na análise de *custo modal* considerando a participação de cada modo de vibrar na resposta do sistema físico. Assim para um conjunto de configurações de sensores e atuadores, o cálculo da função custo modal permite a escolha daquela configuração que *mais contribui* com a função de custo podendo ser usada como um instrumento poderoso na definição do número e da localização de sensores e atuadores na planta (Ribeiro, 1995). Costa e Silva (1998) utilizaram esta metodologia para o posicionamento ótimo de atuadores piezelétricos em estruturas flexíveis do tipo viga e placa.

Uma alternativa atual e bastante atraente para a seleção ótima do posicionamento e do número de atuadores/sensores em estruturas flexíveis é o uso dos *Algoritmos Genéticos*. Neste tipo de enfoque, as posições dos atuadores/sensores são otimizadas via algoritmo genético, observando a minimização de um funcional que considera o esforço/saída (mínima energia de controle/máxima saída) dos elementos participantes que reflete no desempenho ótimo esperado para os atuadores/sensores e também observando a maximização de outro funcional que leva em conta a resposta ótima desejada para o sistema. Geralmente, tal objetivo é sujeito a atender uma série de funções restrições que envolvem variáveis de projeto de grande importância tais como os custos e as limitações geométricas dos atuadores/sensores, as possibilidades construtivas das configurações, a fronteira estabelecida pelas condições de esforço/deformações máximas que os atuadores/sensores estão sujeitos, etc. Sobressaem na literatura os trabalhos de Kirby e Matic (1994), Danuza (2002) e Pereira (2003) que utilizaram estes algoritmos para determinar os tamanhos e as posições ótimas dos elementos piezelétricos incorporados em placas e vigas elásticas.

Para a síntese do controlador e uma vez definida a posição dos sensores e atuadores na estrutura torna-se necessário avaliar a questão da redução do modelo. Muitas vezes para se projetar as leis de controle é imprescindível reduzir os modelos, uma vez que o sistema

flexível, quando formulado, normalmente resulta em modelos de alta ordem. Por outro lado, o procedimento de redução de modelos pode causar alterações no comportamento dinâmico do modelo truncado devido aos modos que foram descartados (Loix e Preumont, 1995). Neste ponto surgem os problemas decorrentes da dinâmica residual não considerada no modelo truncado. Assim, torna-se necessário incorporar, convenientemente estes efeitos no modelo de projeto do controlador (Clark, 1997). Este assunto também é abordado neste documento.

Paralelamente ao desenvolvimento e modelagem numérica dos sistemas que incorporam os materiais "inteligentes", surgiram, nas últimas décadas, novos elementos teóricos para o projeto de controladores. A necessidade de estabelecer instrumentos de análise e síntese voltados para o controle de sistemas complexos fez emergir duas grandes vertentes de pesquisa e desenvolvimento. Uma dedicada aos controladores *robustos* e a outra inserida no campo dos controladores baseados em *Inteligência Artificial*.

A primeira estratégia de controle se apropria dos conceitos matemáticos dos controladores clássicos e os enriquece com uma abordagem estocástica. Neste tipo de abordagem as incertezas presentes nos processos tais como: incertezas decorrentes de variações paramétricas; perturbações dinâmicas; alterações ambientais; ignorância dos modelos, etc e as questões da estabilidade e da convergência das soluções são tratadas dentro de uma metodologia de projeto, baseada num rigoroso formalismo matemático, herdado da teoria clássica de controle. A teoria dos controladores robustos experimentou grande avanço a partir dos anos 80 quando Zames (1981) apresentou uma análise de estabilidade de sistemas realimentados usando algumas propriedades de normas de funções descritas no espaço de Hardy (espaço H_2 e H_∞). Antes predominavam na área as tentativas de generalizações para sistemas multivariáveis dos conceitos de margem de estabilidade do tipo Nyquist (Postlethwaite et al, 1981). Em 1984, Doyle generalizou as idéias de Zames e formulou o problema de controle H_∞ para sistemas multivariáveis. De 1984 aos dias de hoje, os desenvolvimentos têm se concentrado no controle de H_∞ e em tópicos associados (*Linear Quadratic Gaussian / Loop Transfer Recovery - LQR / LTR*). Agora que os computadores digitais vêm se tornando mais baratos e mais compactos, é crescente a sua utilização como parte integrante dos sistemas de controle principalmente no contexto de aplicações industriais (Bates et al, 1997; Lima, 2002).

A estratégia da *Inteligência Artificial*, por sua vez, rompe de uma certa forma com a trajetória clássica e caracteriza-se por uma certa tolerância à imprecisão e ambigüidades decorrentes das incertezas presentes no sistema. É neste contexto que se desenvolveu o conceito dos *Sistemas Híbridos Inteligentes*. Tais sistemas são entendidos como aqueles que

percebem alterações ambientais e/ou de funcionamento e ajustam-se às novas condições de trabalho, servindo-se, nesta adaptação, das denominadas tecnologias de inteligência artificial. São exemplos destas tecnologias: a lógica nebulosa (Fuzzy Logic), as redes neurais artificiais (Artificial Neural Networks) e os algoritmos genéticos (Genetic Algorithm) (Tsoukalas e Uhrig, 1996). Muitas destas tecnologias, curiosamente, tiveram como base a observação de fenômenos biológicos. O controle nebuloso, por exemplo, imita a intuição e/ou a consciência humana a partir do conhecimento heurístico do sistema a ser controlado. As redes neurais artificiais, por sua vez, são baseadas nos modelos da estrutura do córtex cerebral e enquanto que os algoritmos genéticos baseiam-se na teoria Darwiniana da evolução das espécies. Atualmente, muitos pesquisadores investigam a possibilidade de integração de duas ou mais tecnologias de inteligência artificial na construção de controladores aplicados para problemas complexos (Adeli e Hung, 1995). Naturalmente o formalismo matemático, principalmente associado às questões da convergência e estabilidade das soluções, não oferece no momento o mesmo nível de maturidade das ferramentas tradicionais da engenharia de controle. Apesar disso, tais controladores têm apresentado na prática, resultados excepcionais (Abreu e Ribeiro, 2001; Abreu e Ribeiro, 2002), que encorajam as pesquisas, apesar das críticas dos adeptos dos controladores clássicos. Embora a aplicação das técnicas de controle baseadas em inteligência artificial tenha apresentado resultados promissores, muitos aspectos complementares relativos à formulação adequada destes controladores estão ainda em franco desenvolvimento e devem ser estudados, tais como: *a*) construção de algoritmos de controle baseados em inteligência artificial que levem em conta a questão da adaptabilidade da lei de controle; *b*) a comparação das técnicas de controle clássica e de inteligência artificial de modo a permitir a avaliação precisa do desempenho (tempo de resposta, erro em regime e overshoot) do sistema de controle e *c*) a comprovação formal das características de estabilidade e robustez do controlador diante de situações de operação inesperadas para sistemas que apresentam múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Na raiz de toda esta discussão está a dificuldade no estabelecimento de modelos confiáveis e de fácil tratamento matemático especialmente de sistemas complexos. Não se trata apenas do modelo da planta, mas também dos sensores, dos atuadores e freqüentemente da eletrônica de tratamento e processamento dos sinais. Neste cenário, a teoria de controladores robustos torna-se uma escolha natural para tratar problemas desta natureza, devido a sua característica intrínseca de robustez. Tal característica refere-se à capacidade de um sistema de manter suas propriedades de estabilidade e desempenho mesmo na presença de incertezas (erros de modelagem, distúrbios desconhecidos e ruídos nos sensores).

A teoria dos controladores robustos contempla inúmeros atrativos, quais sejam: *a)* apresenta uma formulação matemática concisa e já consolidada na literatura; *b)* está bem situada dentre as aplicações que envolvam o controle de vibrações em estruturas flexíveis e *c)* permite inserir no desenvolvimento do projeto do controlador distintos requisitos de desempenho e estabilidade que levem em conta, por exemplo, incertezas no modelo *d)* é possível obter garantias, através destes controladores, de que o sistema em malha fechada irá permanecer estável (com as especificações de desempenho atendidas) ainda que o sistema em malha aberta esteja sujeito a incertezas; *e)* na sua formulação é possível trabalhar com sistemas multivariáveis de maneira precisa, em termos de um problema de otimização, onde o número de parâmetros de projeto é relativamente pequeno e *f)* ao contrário de alguns métodos clássicos, baseados na "intuição" do projetista, o projeto dos controladores robustos se torna mais sistemático, podendo ser utilizados para o controle de uma "família" de sistemas cujos parâmetros modificados estão dentro das incertezas admissíveis de projeto (repetibilidade).

Este trabalho pretende enfim contribuir com a área de controle de vibrações de estruturas flexíveis, avaliando o desempenho dos controladores robustos H_∞ propostos por Doyle e Stein (1981). Objetiva também reunir de uma forma organizada, sistemática e orientada, especificamente para o problema em questão, algumas ferramentas de construção e redução de modelos e de posicionamento de sensores e atuadores na planta. Além disto, destacam-se duas propostas inovadoras realizadas neste trabalho, quais sejam: a incorporação dos efeitos provocados pelo procedimento de redução modal no modelo de projeto do controlador e a formulação de um controlador robusto capaz de atenuar as vibrações na estrutura inteira através da definição de uma norma espacial.

Para atentar aos objetivos expostos, este trabalho está assim organizado: no Capítulo 2 e 3 discute-se a questão do modelo matemático que descreve os movimentos dos sistemas flexíveis do tipo viga e placa, empregando-se a técnica de elementos finitos e o método dos modos assumidos; no Capítulo 4, os modelos numéricos desenvolvidos são validados entre si e com os resultados obtidos por um programa de simulação; o Capítulo 5 apresenta duas estruturas flexíveis (viga e placa) particulares, onde o modelo, a sua redução e o posicionamento dos sensores/atuadores são avaliados e discutidos. Além disto, neste mesmo capítulo, é realizada a análise e a incorporação dos efeitos provocados pela redução modal no modelo de projeto do controlador; no Capítulo 6 são apresentados os fundamentos teóricos, sob os quais estão sustentados os controladores robustos H_∞ ; o Capítulo 7 descreve o sistema físico real utilizado para testar a eficiência e a potencialidade do controlador robusto, especialmente projetado de

forma a atenuar as vibrações ao longo da estrutura. O trabalho encerra com o Capítulo 8 onde são apresentados os comentários, as conclusões e as perspectivas pertinentes aos assuntos estudados.

Capítulo 2

Modelagem Matemática por Elementos Finitos do Conjunto Estrutura Flexível e Material Piezelétrico

Este capítulo apresenta, de forma detalhada, o modelo de elementos finitos de estruturas flexíveis do tipo placa e viga com material piezelétrico incorporado. Tal modelo, descrito na forma de variáveis de estado, é empregado no estudo do posicionamento ótimo de sensores e atuadores (veja Capítulo 5) e no algoritmo de controle implementado no Capítulo 6.

O capítulo inicia descrevendo o efeito do acoplamento do material piezelétrico na estrutura flexível, evolui para a construção do modelo global do sistema a partir da equação que descreve o *Princípio Variacional Eletromecânico* desenvolvido para meios piezelétricos no Anexo II e encerra apresentando a proposta de redução modal e simplificação deste modelo.

2.1 Efeito do Acoplamento da Estrutura Flexível com o Material Piezelétrico

Sejam duas camadas finas de cerâmica piezelétrica (funcionando como atuador e sensor), axialmente orientadas na direção X , e coladas lado a lado em uma estrutura elástica, com 90 graus de defasagem em relação a direção de polarização (direção Z), como mostra a Fig. 2.1.

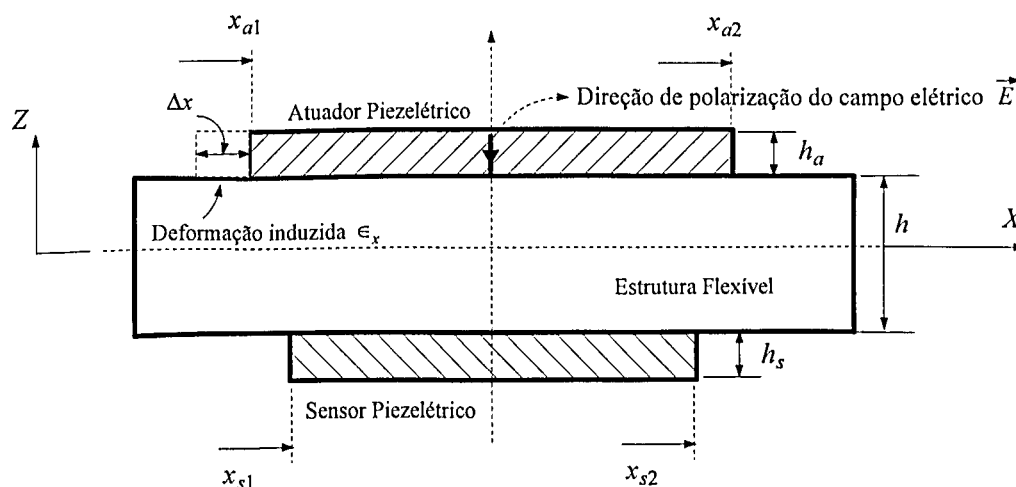


Figura 2.1- Estrutura flexível contendo material piezelétrico.

A contribuição da cerâmica pode ser dividida em duas categorias, chamada interna e externa: a contribuição interna leva em consideração as mudanças nas propriedades do material da estrutura, como massa, rigidez e amortecimento, devido à presença da cerâmica, e está presente, mesmo quando não existe potencial elétrico aplicado ou medido sobre a mesma. A contribuição externa é devida à deformação induzida ϵ pela cerâmica (veja Fig. 2.1), quando um campo elétrico \vec{E} é aplicado e aparece como um momento. Tal deformação pode ser obtida através da Eq. (1.7) (veja Anexo I), assumindo vetor tensão mecânica nulo, isto é: $\{T\} = 0$:

$$\{\epsilon\} = [d] \{E\} \quad (2.1)$$

onde $[d]$ é a matriz de constantes piezelétricas do material cerâmico.

Estas pastilhas piezelétricas assumem o papel de atuadores/sensores de tal forma que receba/forneça potencial elétrico em sua superfície. Pelo efeito inverso da piezeletricidade (veja Anexo I, Seção 1), o atuador piezelétrico produz um movimento de flexão na estrutura, quando um potencial elétrico Φ_a (veja Fig. 2.2) for aplicado na cerâmica. Já o sensor piezelétrico, através do efeito direto da piezeletricidade, produz uma carga ou potencial elétrico Φ_s em sua superfície provocada pela deformação da estrutura flexível.

A aplicação de voltagem no elemento piezelétrico é análoga à aplicação de calor em uma lâmina bimetálica. Quando um potencial elétrico Φ_a é aplicado no material, o elemento piezelétrico força uma camada a se expandir, enquanto a outra contrai, conforme mostra a Fig. 2.2.

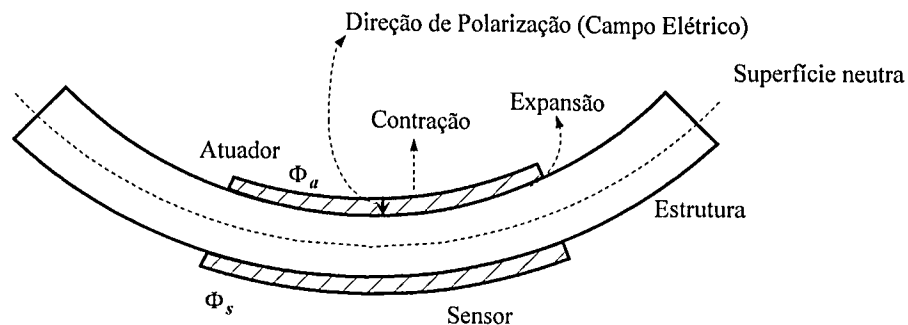


Figura 2.2- Flexão da estrutura causada pela aplicação de um potencial elétrico na cerâmica.

Realizada a fase de entendimento do mecanismo de atuação e sensoriamento dos elementos piezelétricos, passa-se à etapa de formulação do potencial elétrico aplicado Φ_a no material cerâmico. Esta etapa é discutida, em detalhes, na seção seguinte.

2.1.1 Formulação Matemática para o Potencial Elétrico

A formulação matemática para o potencial elétrico aplicado no elemento cerâmico é desenvolvida observando-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

- o potencial elétrico Φ_a ou Φ_s é constante em toda a superfície do elemento piezelétrico e varia linearmente ao longo de sua espessura;
- a espessura da *camada do adesivo* não é considerada nos modelos desenvolvidos, isto é, os elementos piezelétricos (atuador e sensor) estão perfeitamente fixos na estrutura e
- o material do sensor, atuador e estrutura flexível é assumido isotrópico, ou seja, suas propriedades principais (densidade, módulo de elasticidade, etc) são constantes ao longo da largura e comprimento.

Seja o potencial elétrico desenvolvido/aplicado ao longo da espessura do material piezelétrico (sensor/atuador) no elemento considerado na Fig. 2.2 dado por:

$$\Phi_z = \left(\frac{z - \frac{h}{2}}{h_{pzt}} \right) \Phi \quad (2.2)$$

onde Φ é o potencial elétrico máximo presente na superfície externa do material piezelétrico, h_{pzt} e h são as respectivas espessuras do elemento cerâmico e estrutura flexível e z é a coordenada em Z (veja Fig. 2.1) definida no seguinte intervalo (tomando-se o elemento piezelétrico localizado na camada superior da estrutura):

$$\frac{h}{2} \leq z \leq h_{pzt} + \frac{h}{2} \quad (2.3a)$$

Assumindo que o campo elétrico \vec{E} é aplicado ao longo da direção z (direção de polarização), isto é:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_y = 0 \quad (2.4)$$

tem-se que:

$$\{E\} = [0 \quad 0 \quad E_z]^T \quad (2.5)$$

Da mesma forma, o deslocamento elétrico \vec{D} (veja Anexo II ou Anexo I) é descrito como:

$$\{D\} = \{ 0 \quad 0 \quad D_z \} \quad (2.6)$$

Finalmente, o campo elétrico é obtido diferenciando o potencial elétrico Φ_a com relação a z , conforme mostra a Eq. (II.6), dada no Anexo II, resultando em:

$$\{E\} = -\frac{d\Phi_z}{dz} = -B_z\Phi = -\frac{\Phi}{h_{pzt}} \quad (2.7)$$

Por fim, a deformação induzida pelo *elemento atuador* em função do potencial elétrico é obtida substituindo a Eq. (2.7) em (2.1), obtendo-se:

$$[\epsilon] = [d] \frac{\Phi_a}{h_a} \quad (2.8)$$

Uma vez conhecidos os efeitos do acoplamento do material piezelétrico na estrutura, procede-se à fase de modelagem matemática, por elementos finitos, aplicada às estruturas do tipo *placa* e *viga*.

2.2 Placa de Kirchhoff

Neste trabalho, a descrição da placa de Kirchhoff é limitada à discussão de materiais elásticos que apresentam uma relação linear entre tensão e deformação na forma (Bathe, 1982):

$$\{\sigma\} = [K_f] \{\epsilon\} \quad (2.9)$$

onde $\{\sigma\} = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \}$, $\{\epsilon\} = \{ \epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy} \}$ e a matriz $[K_f]$ é dada por:

$$[K_f] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

É considerada uma estrutura tipo *placa fina*¹ como sendo um sólido limitado por duas superfícies² separadas à uma distância h_p (veja Fig. 2.3) e dois elementos de materiais cerâmicos (atuador e sensor) de espessura h_a e h_s perfeitamente fixos nesta estrutura principal.

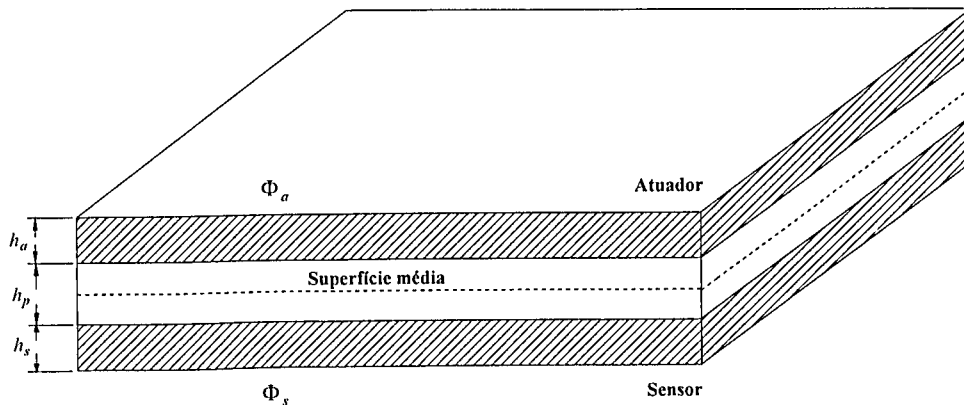


Figura 2.3- Configuração esquemática de uma estrutura tipo placa fina com elementos piezelétricos incorporados.

Os fundamentos da teoria de placa fina ou casca, descrita desta maneira, foi estabelecida por Love (1944). Esta formulação admite algumas considerações (*Postulados de Love*), quais sejam:

1. a espessura h_p da placa é muito pequena em comparação com as outras dimensões (raios de curvatura e comprimentos);
2. as deformações da estrutura considerada ocorrem no campo das pequenas deformações;
3. o problema elástico é tratado bidimensionalmente e
4. as normais à superfície média da placa permanecem normais à mesma durante a deformação, ou seja, os segmentos das normais ficam com os mesmos comprimentos, não havendo, portanto, variação de espessura durante o processo de deformação. Este postulado permite considerar que os efeitos de inércia de rotação e cisalhamento sejam desprezíveis.

As equações que descrevem o movimento de placa de Kirchhoff são obtidas a partir da equação geral de movimento de cascas em coordenadas curvilíneas com a escolha apropriada dos parâmetros de Lamé e dos raios de curvaturas (Timoshenko e Goodier, 1970). Para o modelo de placa de Kirchhoff é considerado todos os quatro postulados de Love.

¹ No caso de placas moderadamente espessas, é preciso recorrer à formulação de modelos de placa *Reissner-Mindlin* que permitem considerar efeitos rotacionais e deformações por cisalhamento (Lima Jr., 1999).

² A superfície média ou plano neutro é definida como sendo a região onde os pontos a ela pertencentes estão na distância média entre as superfícies externas.

2.2.1 Relações entre Deformação e Deslocamentos

Seja um modelo discretizado por elementos finitos de uma placa de Kirchhoff constituída por $N_x \times N_y$ elementos de placa e um elemento piezelétrico incorporado na estrutura flexível conforme ilustra a Fig. 2.4.

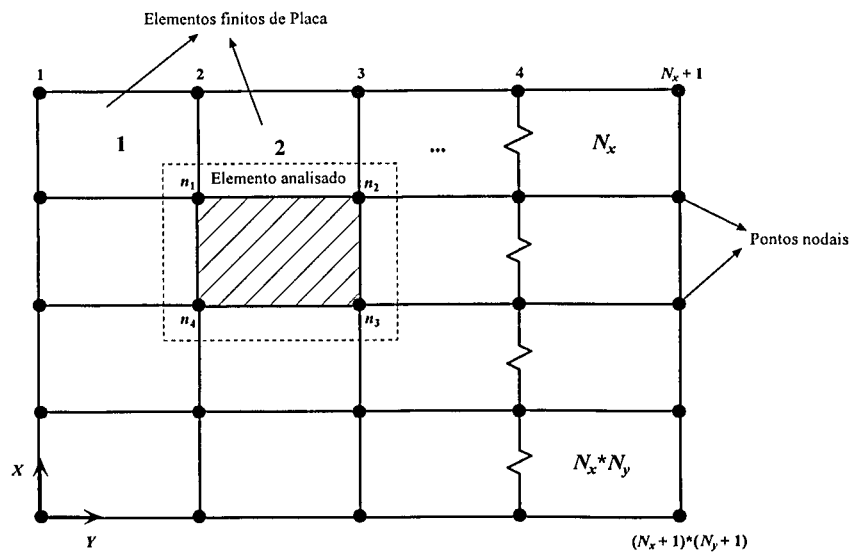


Figura 2.4- Modelo de elementos finitos para uma placa com elemento piezelétrico incorporado.

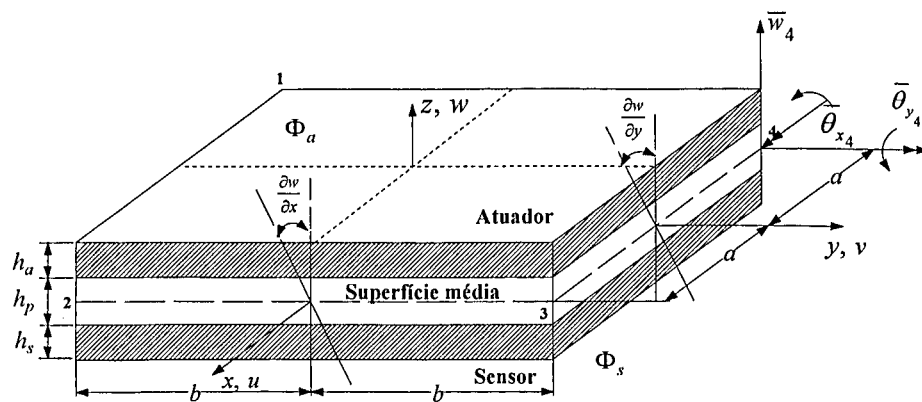


Figura 2.5- Sistema de coordenadas para um elemento de placa com material piezelétrico incorporado.

Segundo a Fig. 2.5 (região pontilhada na Fig. 2.4) e com base na hipótese de Kirchhoff ou quarto postulado de Love, obtém-se as seguintes relações cinemáticas (Reddy, 1999).

$$\vartheta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.11a)$$

$$\vartheta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.11b)$$

$$w = w(x, y) \quad (2.11c)$$

onde x e y são os eixos do plano situados na superfície média (plano neutro da placa), z é o eixo perpendicular à sua espessura, ϑ_x e ϑ_y são os deslocamentos nos eixos x e y , respectivamente e w denota o deslocamento transversal ou deflexão da placa ao longo do eixo z .

Como os efeitos de deformação cisalhantes não são considerados nesta modelagem, o campo de deformação da estrutura $\{\varepsilon\}$ pode ser escrito em termos dos deslocamentos transversais (w), segundo as expressões:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.12a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.12b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.12c)$$

ou

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

Considerando um elemento de placa possuindo 4 nós, conforme ilustra a Fig. 2.5, onde cada nó possui *três graus de liberdade*: um deslocamento (\bar{w}) na direção z ; uma rotação ($\bar{\theta}_x$) em torno do eixo x e uma rotação ($\bar{\theta}_y$) em torno do eixo y , o campo de deslocamentos transversais pode ser representado por uma função de interpolação polinomial com 12 parâmetros na forma (Bathe, 1982):

$$w(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}xy^3 \quad (2.14)$$

onde c_i (para $i = 1, 2, \dots, 12$) são os coeficientes da função polinomial definida na Eq. (2.14) e podendo ser expressos por:

$$\{c\} = \{ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7 \ c_8 \ c_9 \ c_{10} \ c_{11} \ c_{12} \}^T \quad (2.15)$$

O campo de deslocamentos transversais (Eq. (2.13)), por sua vez, pode ser representado pela seguinte relação:

$$w(x, y) = \{P\} \{c\} \quad (2.16)$$

onde $\{P\}$ pode ser obtido diretamente da Eq. (2.14), resultando:

$$\{P\} = \{ 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3 \} \quad (2.17)$$

Definindo o vetor $\{q_k\}$ como sendo o campo de deslocamentos em todos os nós do k -ésimo elemento retangular considerado:

$$\{q_k\} = \{ \bar{w}_1 \ \bar{\theta}_{x_1} \ \bar{\theta}_{y_1} \ \bar{w}_2 \ \bar{\theta}_{x_2} \ \bar{\theta}_{y_2} \ \bar{w}_3 \ \bar{\theta}_{x_3} \ \bar{\theta}_{y_3} \ \bar{w}_4 \ \bar{\theta}_{x_4} \ \bar{\theta}_{y_4} \}^T \quad (2.18)$$

e sabendo que (veja Fig. 2.5):

$$\bar{w}_i = w|_{x_i, y_i} \quad (2.19a)$$

$$\bar{\theta}_{x_i} = \frac{\partial w}{\partial y} |_{x_i, y_i} \quad (2.19b)$$

$$\bar{\theta}_{y_i} = -\frac{\partial w}{\partial x} |_{x_i, y_i} \quad (2.19c)$$

pode-se, desta forma, expressar $\{q_k\}$ em função de $\{c\}$ avaliando as Eqs. (2.16) e (2.18) através de (2.19a), (2.19b) e (2.19c) nos quatro pontos nodais (pontos 1, 2, 3 e 4, veja Fig. 2.5), resultando na seguinte expressão:

$$\{q_k\} = [X] \{c\} \quad (2.20)$$

A matriz $[X]$ é expressa por:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 y_2 & -y_2^2 & 0 & -3x_2^2 y_2 & -y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

e as coordenadas (x_i, y_i) em cada ponto nodal (i) do elemento de placa retangular, conforme ilustrado na Fig. 2.5, são dadas por:

$$(x_1, y_1) = (-a, -b) \quad (2.22)$$

$$(x_2, y_2) = (a, -b)$$

$$(x_3, y_3) = (a, b)$$

$$(x_4, y_4) = (-a, b)$$

Utilizando a Eq. (2.20), os coeficientes do polinômio de interpolação $\{c\}$ podem ser calculados pela seguinte expressão:

$$\{c\} = [X]^{-1} \{q_k\} \quad (2.23)$$

Substituindo a Eq. (2.23) em (2.16), tem-se:

$$w(x, y) = \{P\} [X]^{-1} \{q_k\} = [N_w] \{q_k\} \quad (2.24)$$

onde $[N_w]$ é a função de interpolação para a direção z que pode ser obtida diretamente de (2.24), resultando em:

$$[N_w] = \{P\} [X]^{-1} \quad (2.25)$$

Substituindo a Eq. (2.24) em (2.13), obtem-se:

$$\{\varepsilon\} = -z \left\{ \frac{\partial^2 [P]^T}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 [P]^T}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 [P]^T}{\partial x \partial y} \right\}^T [X]^{-1} \{q_k\} \quad (2.26)$$

A equação (2.26), quando resolvida, é expressa segundo a relação abaixo:

$$\{\varepsilon\} = -z [L_k] [X]^{-1} \{q_k\} \quad (2.27)$$

onde a matriz $[L_k]$ é dada por:

$$[L_k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Seja o vetor $\{q\}$ em função dos deslocamentos ϑ_x , ϑ_y e w dado por:

$$\{q\} = \{ w \quad \vartheta_x \quad \vartheta_y \}^T \quad (2.29)$$

Substituindo as equações (2.11a), (2.11b) e (2.11c) em (2.29), resulta em:

$$\{q\} = \left\{ w \quad -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad -z \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \quad (2.30)$$

Substituindo a Eq. (2.24) em (2.30) obtem-se:

$$\{q\} = [H] [L_m] [X]^{-1} \{q_k\} \quad (2.31)$$

onde as matrizes $[L_m]$ e $[H]$ são dadas, respectivamente, por:

$$[L_m] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \quad (2.32a)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \quad (2.32b)$$

Com base nas relações expressas pelas Eqs. (2.7), (2.27) e (2.31), o capítulo evolui para a obtenção e caracterização das matrizes elementares do k -ésimo elemento finito considerado. Detalhes à parte são discutidos na próxima seção.

2.2.2 Obtenção das Matrizes Elementares de Rigidez e Massa

As matrizes elementares de rigidez e massa desenvolvidas para a placa com material piezelétrico incorporado são obtidas a partir do *Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezelétricos*, conforme apresentado no Anexo II.

A equação que descreve o comportamento eletromecânico do elemento de placa com material piezelétrico incorporado, ao aplicar o Princípio Variacional de *Hamilton* (Anexo II), pode ser escrito, na forma matricial, como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \rho \{\delta q\}^T \{\ddot{q}\} dV + \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [c^E] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \int_V \{\delta E\}^T [e] \{\varepsilon\} dV \right. \quad (2.33)$$

$$\left. - \int_V \{\delta E\}^T [\xi^T] \{E\} dV - \int_V \{\delta q\}^T \{f_v\} dV - \int_{A_\Omega} \{\delta q\}^T \{f_s\} dA + \int_{A_\Omega} \delta \Phi \sigma_q dA \right\} dt = 0$$

onde $[\xi^T]$, $[c^E]$ e $[e]$ são explicitadas no Anexo I. Estas matrizes, equações (I.8), (I.5) e (I.6), respectivamente, são definidas como (assumindo: $e_{32} = e_{31}$):

$$\{e\} = \{ e_{31} \quad e_{31} \quad e_{15} \} \quad (2.34a)$$

$$[\xi^T] = \xi_{33}^T \quad (2.34b)$$

$$[c^E] = [K_f] \quad (2.34c)$$

Substituindo as equações (2.7), (2.27) e (2.31) na Eq. (2.33), obtem-se:

$$\{\delta q_k\}^T \left\{ [m_{qq}] \{\ddot{q}_k\} + [k_{qq}] \{q_k\} + [k_{q\Phi}] \Phi - \{\bar{f}_v\} - \{\bar{f}_s\} \right\} + \quad (2.35)$$

$$+ \delta \Phi \{ [k_{\Phi q}] \{q_k\} + [k_{\Phi\Phi}] \Phi + Q_a \} = 0$$

onde os termos da Eq. (2.35) são definidos na Tab. 2.1.

Tabela 2.1- Definição dos vetores e matrizes para a estrutura do tipo placa.

$[m_{qq}] = \rho \int_V [H]^T [L_m]^T [X]^{-T} [H] [L_m] [X]^{-1} dV$	Matriz de massa elementar
$[k_{qq}] = [X]^{-T} \int_V z^2 [L_k]^T [D] [L_k] [X]^{-1} dV$	Matriz de rigidez elástica elementar
$[k_{q\Phi}] = [k_{\Phi q}]^T = -[X]^{-T} \int_V z [L_k]^T [e]^T B_z dV$	Matriz de rigidez piezoeétrica elementar
$[k_{\Phi\Phi}] = -\int_V B_z^T [\xi^T] B_z dV$	Matriz de rigidez dielétrica elementar
$\{\bar{f}_v\} = \int_V \{f_v\} dV$	Vetor de forças de corpo
$\{\bar{f}_s\} = \int_S \{f_s\} dS$	Vetor de forças superficiais
$Q_a = \int_S \sigma_q dS$	Tensão elétrica aplicada

A identidade na Eq. (2.35) deve valer para quaisquer funções δq_k e $\delta \Phi$. Deste modo, duas equações de equilíbrio (com os termos independentes δq_k e $\delta \Phi$), descritas na forma matricial, satisfazem a Eq. (2.35):

$$[m_{qq}] \{\ddot{q}_k\} + [k_{qq}] \{q_k\} + [k_{q\Phi}] \Phi - \{\bar{f}_v\} - \{\bar{f}_s\} = 0 \quad (2.36)$$

$$[k_{\Phi q}] \{q_k\} + [k_{\Phi\Phi}] \Phi + Q_a = 0 \quad (2.37)$$

No modelo de placa proposto, existem três domínios: o primeiro refere-se ao material estrutural (domínio dV_p) e os demais são relativos aos materiais piezoeletricos incorporados (domínios dV_a e dV_s) de modo que:

$$dV = dV_p + dV_a + dV_s \quad (2.38)$$

onde o volume de um elemento da estrutura dV_p e dos elementos piezoeletricos (dV_a e dV_s) são definidos pelas relações descritas a seguir:

$$dV_p = \int_{-\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx dy dz = \int_{-\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2}} \int_{\Omega} d\Omega dz \quad (2.39a)$$

$$dV_a = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_a} \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx dy dz = \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_a} \int_{\Omega} d\Omega dz \quad (2.39b)$$

$$dV_s = \int_{-\frac{h_p}{2} - h_s}^{-\frac{h_p}{2}} \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx dy dz = \int_{-\frac{h_p}{2} - h_s}^{-\frac{h_p}{2}} \int_{\Omega} d\Omega dz \quad (2.39c)$$

2.2.2.1 Obtenção das Matrizes de Rigidez Elementares

Substituindo as relações (2.39a)-(2.39c) na matriz de rigidez elástica elementar $[k_{qq}]$, mostrada na Tab. 2.1, e integrando-a na direção z , obtém-se:

$$[k_{qq}] = \sum_{i=1}^3 h_i [X]^{-T} \int_{\Omega} [L_k]^T [K_f]_i [L_k] d\Omega [X]^{-1} \quad (2.40)$$

onde:

$$h_1 = h_a \left(\frac{h_p}{2} + \frac{h_a}{2} \right)^2 + \frac{h_a^3}{12} \quad (2.41a)$$

$$h_2 = \frac{h_p^3}{12} \quad (2.41b)$$

$$h_3 = h_s \left(\frac{h_p}{2} + \frac{h_s}{2} \right)^2 + \frac{h_s^3}{12} \quad (2.41c)$$

e $[K_f]_i$ (com $i = 1, 2, 3$) é a matriz genérica definida para $[K_f]_a$, $[K_f]_p$ e $[K_f]_s$. Tais matrizes são calculadas a partir da Eq. (2.10) empregando-se as propriedades do material do atuador (a), estrutura (p) e sensor (s), respectivamente.

A matriz de rigidez piezoeétrica elementar $[k_{q\Phi}]$ ou matriz de acoplamento eletromecânico (veja Tab. 2.1), por sua vez, é integrada na direção z , resultando, respectivamente, nas expressões (onde $dV = dV_a$ ou $dV = dV_s$):

$$[k_{q\Phi}]_a = -\frac{1}{2} (h_p h_a + h_a^2) [X]^{-T} \int_{\Omega} [L_k]^T \{e\}_a^T B_z d\Omega \quad (2.42a)$$

$$[k_{q\Phi}]_s = \frac{1}{2} (h_p h_s + h_s^2) [X]^{-T} \int_{\Omega} [L_k]^T \{e\}_s^T B_z d\Omega \quad (2.42b)$$

As equações (2.40), (2.42a) e (2.42b) podem ser facilmente integradas numericamente, no domínio Ω , utilizando-se o método de quadratura de Gauss (Bathe, 1982).

Segundo a Tab. 2.1, a matriz de rigidez dielétrica $[k_{\Phi\Phi}]$ é obtida a partir das relações (2.39b) ou (2.39c) e do termo B_z utilizado na Eq. (2.7), resultando em:

$$[k_{\Phi\Phi}]_a = -\frac{4ab\xi_{a33}^\tau}{h_a} \quad (2.43a)$$

$$[k_{\Phi\Phi}]_s = -\frac{4ab\xi_{s33}^\tau}{h_s} \quad (2.43b)$$

onde a matriz $[k_{\Phi\Phi}]$ representa a capacitância ou a rigidez dielétrica do material cerâmico para um elemento de placa de Kirchhoff, a parcela $4ab$ denota a área superficial do elemento piezelétrico e ξ_{33}^τ é a sua constante de permissividade.

Assim, a permissividade do material cerâmico ξ_{33}^τ pode ser obtida pela expressão (Halliday e Resnick, 1984):

$$\xi_{33}^\tau = k_d \varepsilon_0 \quad (2.44)$$

onde k_d é conhecida como constante dielétrica do material e ε_0 é a constante de permissividade do vácuo ($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$).

2.2.2.2 Obtenção da Matriz de Massa Elementar

Integrando a matriz de massa elementar $[m_{qq}]$ (veja Tab. 2.1) na direção z para os intervalos expressos em (2.39a)-(2.39c), resulta na seguinte expressão:

$$[m_{qq}] = \sum_{i=1}^3 \rho_i [X]^{-T} \int_{\Omega} [L_m]^T [H_i] [L_m] d\Omega [X]^{-1} \quad (2.45)$$

onde os termos $\rho_1 = \rho_a$, $\rho_2 = \rho_p$, $\rho_3 = \rho_s$ e $[H_i]$ (para $i = 1, 2, 3$) são:

$$[H_1] = [H_a] = \begin{bmatrix} h_a & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 \end{bmatrix} \quad (2.46a)$$

$$[H_2] = [H_p] = \begin{bmatrix} h_p & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} \quad (2.46b)$$

$$[H_3] = [H_s] = \begin{bmatrix} h_s & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \quad (2.46c)$$

Vencida a etapa de modelagem matemática desenvolvida para a estrutura do tipo placa fina, o trabalho evolui para a aplicação da técnica de elementos finitos na estrutura do tipo viga.

2.3 Viga de Euler-Bernoulli

O modelo de viga de Euler-Bernoulli é obtido diretamente do modelo de placa de Kirchhoff³. Com base na quarta hipótese de Kirchhoff (veja Seção 2.2), o campo de deslocamentos longitudinais (ϑ), ilustrado na Fig. 2.6, é dado pela Eq. (2.47).

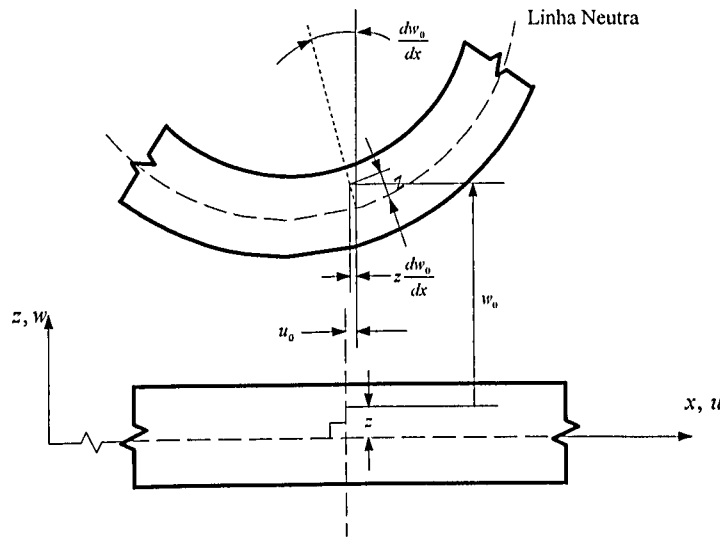


Figura 2.6- Deslocamento de um ponto em relação a normal a linha neutra de um elemento de viga.

$$\vartheta = \vartheta_0 - z \frac{dw_0}{dx} \quad (2.47)$$

onde ϑ_0 e w_0 são os deslocamentos longitudinal e transversal de um ponto ao longo do elemento de viga.

³ Nesta formulação considera-se a flexão pura, isto é, os efeitos de cisalhamento e inércia de rotação na viga foram negligenciados. Para o caso de vigas relativamente espessas, estas considerações devem ser revistas e um modelo de viga de Timoshenko pode ser empregado na análise (Lima Jr., 1999).

A deformação longitudinal ou axial associada ao campo de deslocamentos longitudinais é dada pela Eq. (2.48).

$$\varepsilon_x = \frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta_0' - zw_0'' \tag{2.48}$$

onde o apóstrofo (') representa a derivada (.) em relação a x .

2.3.1 Relações entre Deformação e Deslocamentos

Um modelo de elementos finitos para uma viga de Euler-Bernoulli com elementos piezelétricos incorporados é mostrado na Fig. 2.7.

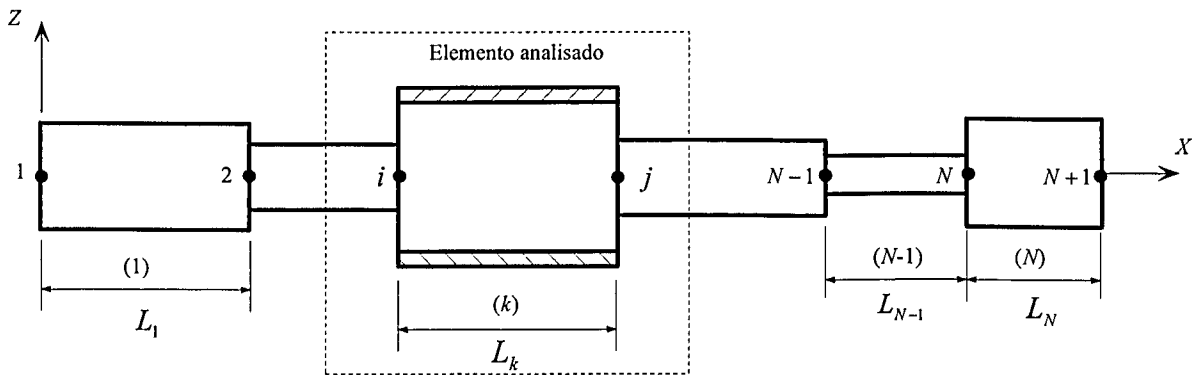


Figura 2.7- Modelo de elementos finitos para uma viga com elementos piezelétricos incorporados.

As dimensões principais da estrutura composta pelo elemento de viga e materiais piezelétricos colados na parte superior e inferior (região pontilhada na Fig. 2.7) é ilustrada na Fig. 2.8, onde h representa a espessura, b a largura, L_k é o comprimento do k -ésimo elemento discreto da estrutura e Φ_a e Φ_s são os potenciais elétricos aplicado e medido no atuador e sensor, respectivamente.

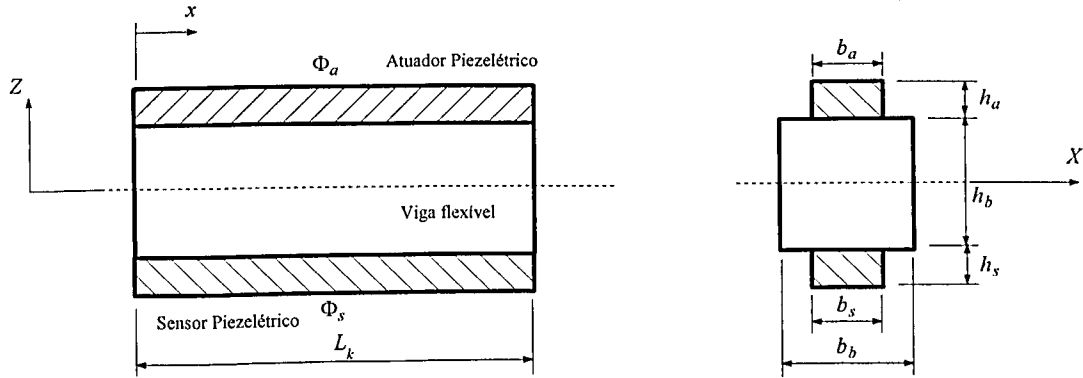


Figura 2.8- Características dimensionais do k -ésimo elemento viga-piezelétrico.

Neste trabalho, a discretização da estrutura é feita com elementos de viga isoparamétricos, com três graus de liberdade por nó (veja Fig. 2.9). O campo de deslocamentos longitudinais no interior do elemento é aproximado por uma função linear, enquanto aos deslocamentos transversais são aproximados por uma função cúbica.

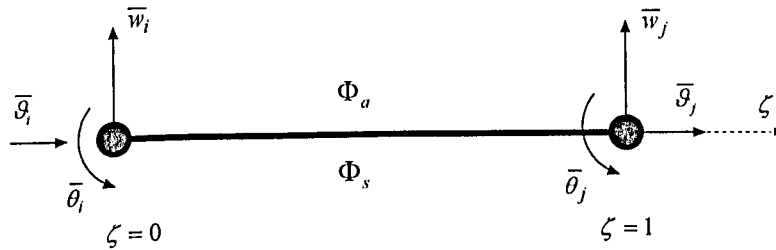


Figura 2.9- Elemento de viga com piezelétrico incorporado.

Seja o vetor de deslocamentos nodais generalizados no k -ésimo elemento finito dado pela seguinte relação (veja Fig. 2.9):

$$\{q_k\} = [\bar{\vartheta}_i \quad \bar{w}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{\vartheta}_j \quad \bar{w}_j \quad \bar{\theta}_j]^T \quad (2.49a)$$

O campo de deslocamentos para cada direção é fornecida pelas igualdades listadas abaixo:

$$\bar{\vartheta} = [N_\vartheta] \{q_k\} \quad (2.50a)$$

$$\bar{w} = [N_w] \{q_k\} \quad (2.50b)$$

$$\bar{\theta} = [N_\theta] \{q_k\} \quad (2.50c)$$

onde as funções de interpolação para os deslocamentos longitudinais, transversais e angulares são respectivamente:

$$[N_\vartheta] = \begin{bmatrix} 1 - \varsigma & 0 & 0 & \varsigma & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$[N_w] = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 3\varsigma^2 + 2\varsigma^3 & 0 & 0 & 3\varsigma^2 - 2\varsigma^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$[N_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\varsigma - 2\varsigma^2 + \varsigma^3) L_k & 0 & 0 & (-\varsigma^2 + \varsigma^3) L_k \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

onde $\varsigma = \frac{x}{L_k}$.

O campo de deslocamento total do k -ésimo elemento pode ser expresso pela relação:

$$\{q\} = [N_q] \{q_k\} \quad (2.54)$$

onde o vetor de funções de interpolação $[N_q]$ é dado por:

$$[N_q] = \begin{bmatrix} N_\vartheta & N_w & N_\theta \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

ou

$$[N_q] = \begin{bmatrix} 1 - \varsigma & 1 - 3\varsigma^2 + 2\varsigma^3 & (\varsigma - 2\varsigma^2 + \varsigma^3) L_k & \varsigma & 3\varsigma^2 - 2\varsigma^3 & (-\varsigma^2 + \varsigma^3) L_k \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Para expressar a deformação longitudinal ε_x , dada pela Eq. (2.48), em termos do campo de deslocamentos $\bar{\vartheta}$ e \bar{w} , basta derivar uma vez em relação a x o deslocamento $\bar{\vartheta}$ e duas vezes o deslocamento \bar{w} , resultando, respectivamente, nas expressões:

$$\bar{\vartheta}' = \frac{d}{dx} [N_\vartheta] \{q_k\} = [B_\vartheta] \{q_k\} = \frac{1}{L_k} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{q_k\} \quad (2.57)$$

$$\bar{w}'' = \frac{d^2}{dx^2} [N_q] \{q_k\} = [B_q''] \{q_k\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{L_k^2} + \frac{12x}{L_k^3} \\ -\frac{4}{L_k} + \frac{6x}{L_k^2} \\ 0 \\ \frac{6}{L_k^2} - \frac{12x}{L_k^3} \\ -\frac{2}{L_k} + \frac{6x}{L_k^2} \end{bmatrix}^T \{q_k\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{L_k^2} + \frac{12\varsigma}{L_k^3} \\ -\frac{4}{L_k} + \frac{6\varsigma}{L_k^2} \\ 0 \\ \frac{6}{L_k^2} - \frac{12\varsigma}{L_k^3} \\ -\frac{2}{L_k} + \frac{6\varsigma}{L_k^2} \end{bmatrix}^T \{q_k\} \quad (2.58)$$

Logo, substituindo as equações (2.57) e (2.58) na Eq. (2.48), tem-se (colocada na forma matricial):

$$\{\varepsilon\} = ([B_\vartheta] - z [B'_q]) \{q_k\} \quad (2.59)$$

onde $[B_\vartheta]$ é obtida diretamente de (2.57).

2.3.2 Obtenção das Matrizes Elementares de Rigidez e Massa

As matrizes de massa e rigidez elementares para o modelo de viga de Euler-Bernoulli são obtidas da mesma forma para o caso da placa de Kirchhoff. Sendo assim, substituindo as equações (2.54), (2.59) e (2.7) na Eq. (2.33), obtém-se, de forma similar às equações (2.35), (2.36) e (2.37), os novos termos definidos pela Tab. 2.2.

Tabela 2.2- Definição dos vetores e matrizes para a estrutura do tipo viga.

$[m_{qq}] = \rho \int_V [N_q]^T [N_q] dV$	Matriz de massa elementar
$[k_{qq}] = \int_V ([B_u] - z [B'_q])^T [c^E] ([B_u] - z [B'_q]) dV$	Matriz de rigidez elástica elementar
$[k_{q\Phi}] = [k_{\Phi q}]^T = \int_V ([B_u] - z [B'_q])^T [e]^T B_z dV$	Matriz de rigidez piezelétrica elementar
$[k_{\Phi\Phi}] = - \int_V B_z^T [\xi^T] B_z dV$	Matriz de rigidez dielétrica elementar
$\{\bar{f}_v\} = \int_V [N_q]^T \{f_v\} dV$	Vetor de forças de corpo
$\{\bar{f}_s\} = \int_S [N_q]^T \{f_s\} dS$	Vetor de forças superficiais
$Q_a = \int_S \sigma_q dS$	Vetor de cargas elétricas

Os termos $[c^E]$, $[\xi^r]$ e $[e]$ são definidos pelas seguintes expressões (onde $e_{31} = Ed_{31}$):

$$[c^E] = E \quad (2.60a)$$

$$[\xi^r] = \xi_{33}^r \quad (2.60b)$$

$$[e] = Ed_{31} \quad (2.60c)$$

Para o modelo de viga proposto, o volume de um elemento da estrutura dV_v e dos elementos piezelétricos (dV_a e dV_s) são definidos pelas relações listadas a seguir:

$$dV_v = b_v L_k \int_0^1 \int_{-\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2}} dz d\zeta \quad (2.61a)$$

$$dV_a = b_a L_k \int_0^1 \int_{\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2} + h_a} dz d\zeta \quad (2.61b)$$

$$dV_s = b_s L_k \int_0^1 \int_{-\frac{h_v}{2} - h_s}^{-\frac{h_v}{2}} dz d\zeta \quad (2.61c)$$

onde b_v , b_a e b_s são as larguras da estrutura e dos materiais piezelétricos, respectivamente e L_k é o comprimento do k -ésimo elemento finito (veja Fig. 2.7).

2.3.2.1 Obtenção das Matrizes de Rigidez Elementares

Substituindo as relações (2.60a), (2.60b), (2.60c), (2.61a)-(2.61c) na matriz de rigidez elástica elementar $[k_{qq}]$, mostrada na Tab. 2.2, e reordenando os termos, chega-se:

$$\begin{aligned} [k_{qq}] = & E_v b_v L_k \int_0^1 \int_{-\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2}} [B_\vartheta]^T [B_\vartheta] dz d\zeta + E_a b_a L_k \int_0^1 \int_{\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2} + h_a} [B_\vartheta]^T [B_\vartheta] dz d\zeta \\ & + E_s b_s L_k \int_0^1 \int_{-\frac{h_v}{2} - h_s}^{-\frac{h_v}{2}} [B_\vartheta]^T [B_\vartheta] dz d\zeta + E_v b_v L_k \int_0^1 \int_{-\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2}} z^2 [B'_q]^T [B'_q] dz d\zeta \\ & + E_a b_a L_k \int_0^1 \int_{\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2} + h_a} z^2 [B'_q]^T [B'_q] dz d\zeta + E_s b_s L_k \int_0^1 \int_{-\frac{h_v}{2} - h_s}^{-\frac{h_v}{2}} z^2 [B'_q]^T [B'_q] dz d\zeta \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde E_v , E_a e E_s são definidos como os módulos de elasticidade da estrutura e dos materiais piezelétricos (atuador e sensor), respectivamente.

Desenvolvendo a Eq. (2.62) e simplificando os termos resultantes, obtém-se:

$$[k_{qq}] = L_k (E_v A_v + E_a A_a + E_s A_s) \int_0^1 [B_\vartheta]^T [B_\vartheta] d\zeta + L_k (E_v I_v + E_a I_a + E_s I_s) \int_0^1 [B'_q]^T [B'_q] d\zeta \quad (2.63)$$

onde A_v , A_a , A_s , I_v , I_a e I_s são as áreas da seção transversal e momentos de inércia da estrutura e dos materiais piezelétricos, respectivamente, dadas por:

$$A_v = b_v h_v \quad (2.64a)$$

$$A_a = b_a h_a \quad (2.64b)$$

$$A_s = b_s h_s \quad (2.64c)$$

$$I_v = \frac{b_v h_v^3}{12} \quad (2.64d)$$

$$I_a = b_a h_a \left(\frac{h_v}{2} + \frac{h_a}{2} \right)^2 + \frac{b_a h_a^3}{12} \quad (2.64e)$$

$$I_s = b_s h_s \left(\frac{h_v}{2} + \frac{h_s}{2} \right)^2 + \frac{b_s h_s^3}{12} \quad (2.64f)$$

Avaliando as integrais inseridas na Eq. (2.63), chega-se, finalmente:

$$[k_{qq}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_k} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_k^3} & \frac{6EI}{L_k^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_k^3} & \frac{6EI}{L_k^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_k^2} & \frac{4EI}{L_k} & 0 & -\frac{6EI}{L_k^2} & \frac{2EI}{L_k} \\ -\frac{EA}{L_k} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_k} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_k^3} & -\frac{6EI}{L_k^2} & 0 & \frac{12EI}{L_k^3} & -\frac{6EI}{L_k^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_k^2} & \frac{2EI}{L_k} & 0 & -\frac{6EI}{L_k^2} & \frac{4EI}{L_k} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

onde os termos EA e EI são dados, respectivamente, por:

$$EA = E_v A_v + E_a A_a + E_s A_s \quad (2.66)$$

$$EI = E_v I_v + E_a I_a + E_s I_s \quad (2.67)$$

A matriz de rigidez piezelétrica ou matriz de acoplamento eletromecânico (veja Tab. 2.2, onde $dV = dV_a$ ou $dV = dV_s$) é obtida substituindo-se as relações (2.61b) e (2.61c) na mesma, resultando, respectivamente (para o atuador e sensor):

$$[k_{q\Phi}]_a = E_a A_a d_{a31} L_k \int_0^1 [B_\vartheta]^T B_z d\zeta - \frac{1}{2} E_a A_a d_{31} L_k (h_v + h_a) \int_0^1 [B'_q]^T B_z dz d\zeta \quad (2.68a)$$

$$[k_{q\Phi}]_s = E_s A_s d_{s31} L_k \int_0^1 [B_\vartheta]^T B_z d\zeta + \frac{1}{2} E_s A_s d_{31} L_k (h_v + h_s) \int_0^1 [B'_q]^T B_z dz d\zeta \quad (2.68b)$$

Substituindo as expressões $[B_\vartheta]$, B_z e $[B'_q]$ nas Eqs. (2.68a) e (2.68b), avaliando as integrais e reagrupando os termos, resulta:

$$[k_{q\Phi}]_a = E_a b_a d_{a31} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T - \frac{1}{2} (h_v + h_a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\} \quad (2.69a)$$

$$[k_{q\Phi}]_s = E_s b_s d_{s31} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \frac{1}{2} (h_v + h_s) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\} \quad (2.69b)$$

A matriz de rigidez dielétrica $[k_{\Phi\Phi}]$ (veja Tab. 2.2) é obtida a partir das relações Eq. (2.61b) e (2.61c) e do termo B_z , utilizado na Eq. (2.7), resultando:

$$[k_{\Phi\Phi}]_a = -\frac{\xi_{a33}^\tau b_a L_k}{h_a} \quad (2.70a)$$

$$[k_{\Phi\Phi}]_s = -\frac{\xi_{s33}^\tau b_s L_k}{h_s} \quad (2.70b)$$

As Equações (2.70a) e (2.70b) denotam, respectivamente, a capacitância dos elementos atuador e sensor, onde $b_a L_k$ e $b_s L_k$ são as áreas superficiais dos materiais e ξ_{a33}^τ e ξ_{s33}^τ representam a permissividade dos elementos que podem ser calculados utilizando-se a Eq. (2.44).

2.3.2.2 Obtenção da Matriz de Massa Elementar

A matriz de massa $[m_{qq}]$ é determinada substituindo as Eqs. (2.61a)-(2.61c) na equação mostrada na Tab. 2.2, de onde se obtém:

$$[m_{qq}] = \rho_v A_v L_k \int_0^1 [N_q]^T [N_q] d\zeta + \rho_a A_a L_k \int_0^1 [N_q]^T [N_q] d\zeta + \rho_s A_s L_k \int_0^1 [N_q]^T [N_q] d\zeta \quad (2.71)$$

Substituindo a Eq. (2.56) em (2.71) e avaliando as integrais, tem-se, finalmente:

$$[m_{qq}] = \rho A L_k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{20} & \frac{L_k}{20} & \frac{1}{6} & \frac{3}{20} & -\frac{L_k}{30} \\ \frac{7}{20} & \frac{13}{35} & \frac{11L_k}{210} & \frac{3}{20} & \frac{9}{70} & -\frac{13L_k}{420} \\ \frac{L_k}{20} & \frac{11L_k}{210} & \frac{L_k^2}{105} & \frac{L_k}{30} & \frac{13L_k}{420} & -\frac{L_k^2}{140} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{20} & \frac{L_k}{30} & \frac{1}{3} & \frac{7}{20} & -\frac{L_k}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{9}{70} & \frac{13L_k}{420} & \frac{7}{20} & \frac{13}{35} & -\frac{11L_k}{210} \\ -\frac{L_k}{30} & -\frac{13L_k}{420} & -\frac{L_k^2}{140} & -\frac{L_k}{20} & -\frac{11L_k}{210} & \frac{L_k^2}{105} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

onde o termo ρA é dado por:

$$\rho A = \rho_v A_v + \rho_a A_a + \rho_s A_s \quad (2.73)$$

2.4 Sistema Global de Equações

Nesta seção as matrizes de cada elemento finito (matrizes elementares) são agrupadas para formar o sistema completo constituído por todos os elementos discretos da estrutura.

2.4.1 Obtenção do Modelo Global

Uma vez construídas as matrizes de massa e de rigidez dos vários elementos presentes na estrutura, integra-se estes elementos para se obter o modelo global ou o sistema global de equações. Para ilustrar este processo de integração, seja o k -ésimo elemento de placa ou viga selecionado, respectivamente, na região pontilhada das Figuras 2.4 e 2.7. Sabendo-se que cada nó admite três graus de liberdade, é possível construir uma matriz de transformação (ou distribuição) T_k , de dimensões: (número de graus de liberdade por elemento) \times (número de graus de liberdade da estrutura), que incorpora todos os graus de liberdade de cada elemento finito na forma (Bathe, 1982):

$$T_k(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i_k(i) \\ 1 & \text{se } j = i_k(i) \end{cases} \quad (2.74)$$

onde i_k expressa o vetor de índices contendo todos os graus de liberdade do n -ésimo nó pertencente ao k -ésimo elemento finito dado como:

$$i_k = 3n_k - 2, \dots, 3n_k \quad (2.75)$$

Para exemplificar o processo de construção de $[T_k]$, seja o elemento de viga selecionado (Seção 2.3) conforme ilustra a Fig. 2.7. Neste caso, i_k pode ser obtido a partir dos nós i e j , resultando num vetor de dimensão *seis* (6 graus de liberdade por elemento) expresso por:

$$i_k = [3i - 2 \quad 3i - 1 \quad 3i \quad 3j - 2 \quad 3j - 1 \quad 3j] \quad (2.76)$$

Utilizando (2.76), a matriz de distribuição T_k pode ser facilmente obtida através da equação (2.74).

Uma vez integrado um elemento de viga, integram-se todos os $N - 1$ elementos da estrutura (Fig. 2.7) até se obter as matrizes globais de massa M e rigidez estrutural K_{qq} dadas a seguir:

$$[M] = \sum_{k=1}^N [T_k]^T [m_{qq}] [T_k] \quad (2.77a)$$

$$[K_{qq}] = \sum_{k=1}^N [T_k]^T [k_{qq}] [T_k] \quad (2.77b)$$

Da mesma forma, as equações (2.77a) e (2.77b) podem ser também aplicadas para a estrutura do tipo placa (Seção 2.2), lembrando-se que, neste caso, cada elemento finito considerado é constituído por quatro nós, resultando num total de 12 graus de liberdade por elemento.

Considerando que n_a atuadores e n_s sensores estejam distribuídos na estrutura, onde cada material cerâmico seja discretizado por n_e elementos finitos, as duas equações de equilíbrio (2.36) e (2.37), em sua forma global, podem ser escritas como:

$$[M] \{\ddot{\xi}\} + [K_{qq}] \{\xi\} + \sum_{k=1}^{n_{e_i}} [T_k]_i^T [k_{q\Phi}]_i \Phi - \{F_v\} - \{F_s\} = 0 \quad (2.78)$$

$$\sum_{k=1}^{n_{e_i}} ([k_{\Phi q}]_i [T_k]_i \{\xi\} + [k_{\Phi\Phi}]_i \Phi + Q_a) = 0 \quad (2.79)$$

onde $[T_k]_i$ é a matriz de distribuição obtida a partir de (2.74) para o k -ésimo elemento estrutural do i -ésimo material piezelétrico incorporado (veja Figuras 2.4 e 2.7) e $\{\xi\}$ é o vetor de deslocamentos nodais do sistema.

A etapa final de obtenção do modelo global do sistema, representativo do modelo físico, visa eliminar, nas matrizes globais, somente aqueles estados⁴ $\{\xi\}$ associados aos pontos nodais onde as condições de contorno (engastada, apoiada, etc.) são válidas.

⁴ A eliminação dos estados não utilizados no modelo global é realizada suprimindo as linhas e as colunas, correspondentes a estes estados, nas matrizes globais do sistema.

2.4.2 Obtenção da Equação do Sensor e Atuador

Isolando o potencial elétrico Φ da Eq. (2.79), tem-se:

$$\Phi = - \sum_{k=1}^{n_{e_i}} [k_{\Phi\Phi}]_i^{-1} (Q_a + [k_{\Phi q}]_i [T_k]_i \{\xi\}) \quad (2.80)$$

onde matriz $[k_{\Phi\Phi}]$ denota a capacitância do elemento piezelétrico discretizado, e a carga elétrica total desenvolvida no elemento é igual a carga elétrica aplicada Q_a adicionada a uma carga gerada a partir de uma deformação mecânica.

Como no sensor não existe carga elétrica aplicada ($Q_a = 0$), a equação (2.80) pode ser reescrita na forma:

$$\{\Phi_s\} = \frac{- \sum_{k=1}^{n_{e_i}} [k_{\Phi q}]_{si} [T_k]_i \{\xi\}}{\sum_{k=1}^{n_{e_i}} [k_{\Phi\Phi}]_{si}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.81)$$

onde $\{\Phi_s\} = \{ \Phi_{s_1} \ \Phi_{s_2} \ \dots \ \Phi_{s_{n_s}} \}^T$, $[k_{\Phi q}]_{si}$ e $[k_{\Phi\Phi}]_{si}$ são as matrizes de rigidez piezelétrica e dielétrica do i -ésimo sensor, dadas respectivamente pelas relações (2.69b) e (2.70b), e n_e é o número de elementos capacitivos ligados em paralelo⁵.

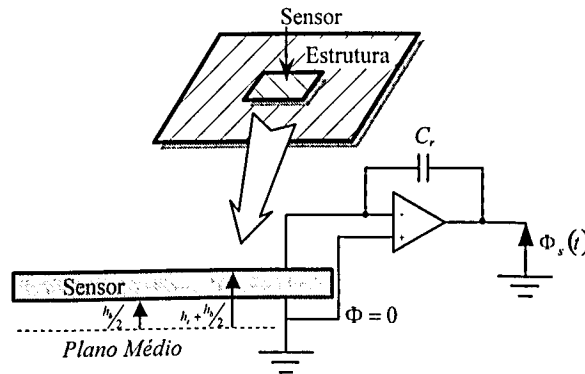


Figura 2.10- Circuito amplificador de carga para o sensor piezelétrico.

Caso o sensor esteja conectado a um amplificador de carga com um capacitor (de capacitância C_r) ligado em paralelo conforme mostra o esquema ilustrado na Fig. 2.10 (Loix e Preumont, 1995; Moreira, 1998; Lima Jr., 1999), a voltagem de saída do sensor Φ_s pode ser

⁵ Nesta configuração, impõe-se um potencial elétrico igual em todos os nós do elemento finito.

também calculada através da seguinte relação⁶:

$$\{\Phi_s\} = -\frac{1}{C_r} \sum_{k=1}^{n_{e_i}} [k_{\Phi q}]_{si} [T_k]_i \{\xi\}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.82)$$

Como há um potencial elétrico Φ_a aplicado no atuador e um aparecimento de um potencial Φ_d gerado por sua deformação mecânica, dada pela Eq. (2.81), a dinâmica envolvida em todo este processo (atuação e sensoramento) é obtida introduzindo a relação $\Phi = \Phi_s + \Phi_d + \Phi_a$ na Eq. (2.78), obtendo-se:

$$[M] \{\ddot{\xi}\} + [K_{qq}] \{\xi\} + \sum_{k=1}^{n_{e_i}} [T_k]_i^T [k_{q\Phi}]_{si} \Phi_{si} + \sum_{k=1}^{n_{e_j}} [T_k]_j^T [k_{q\Phi}]_{aj} \Phi_{aj} + \sum_{k=1}^{n_{e_j}} [T_k]_j^T [k_{q\Phi}]_{aj} \Phi_{aj} = \{F_q\} \quad (2.83)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n_s$, $j = 1, 2, \dots, n_a$ e $\{F_q\} = \{F_v\} + \{F_s\}$.

Substituindo Φ_d e Φ_s , avaliados pela Eq. (2.81), em (2.83) e reordenando os termos, resulta no sistema global de equações dado por:

$$[M] \{\ddot{\xi}\} + [K_g] \{\xi\} = \{F_q\} + \{F_{el}\}_j \quad (2.84)$$

onde:

$$[K_g] = [K_{qq}] - \left\{ \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{n_{e_i}} [T_k]_i^T [k_{q\Phi}]_{si} [k_{\Phi\Phi}]_{si}^{-1} [k_{\Phi q}]_{si} [T_k]_i + \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{k=1}^{n_{e_j}} [T_k]_j^T [k_{q\Phi}]_{aj} [k_{\Phi\Phi}]_{aj}^{-1} [k_{\Phi q}]_{aj} [T_k]_j \right\} \quad (2.85)$$

$$\{F_{el}\}_j = - \sum_{k=1}^{n_{e_j}} [T_k]_j^T [k_{q\Phi}]_{aj} \Phi_{aj}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n_a \quad (2.86)$$

⁶ Neste trabalho, um circuito analógico foi projetado (veja Anexo VI) e utilizado em ensaios experimentais, segundo a configuração mostrada na Fig. 2.10.

2.4.3 Redução Pseudo-Modal do Sistema

A partir da Eq. (2.84) e para um sistema com a presença de amortecimento viscoso dado pela matriz $[C_a]$, o sistema de equações governantes é expresso por:

$$[M] \{\ddot{\xi}\} + [C_a] \{\dot{\xi}\} + [K_g] \{\xi\} = \{F_q\} + \{F_{el}\}_i \quad (2.87)$$

Neste caso, pode-se decompor a matriz de amortecimento em uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez na seguinte forma (Thomson, 1973):

$$[C_a] = \alpha [M] + \beta [K_g] \quad (2.88)$$

onde α e β são os coeficientes de *Rayleigh*, podendo ser obtidos através de ajuste de modelos.

A análise do sistema descrito pela expressão (2.87), isto é, sua estabilidade, freqüências naturais, modos de vibrar, comportamento no transiente, etc, torna-se cada vez mais complexa na medida em que a ordem do sistema cresce, ou seja, na medida em que se eleva o número de nós na tentativa de aproximar a estrutura discretizada da estrutura real contínua. Desta forma, é conveniente reduzir a ordem do modelo para estudá-lo. Uma técnica de redução clássica utilizada em análise estrutural é a chamada técnica pseudo-modal (Thomson, 1973). Esta técnica permite uma economia apreciável de memória e tempo computacional e apresenta resultados muito próximos dos valores verdadeiros obtidos pelos métodos diretos de solução (modelos a parâmetros distribuídos apresentado no Capítulo 3). Para isso é construída a base modal ψ , formada pelos n primeiros autovetores⁷ do sistema, descrito na forma:

$$[M] \{\ddot{\xi}\} + [K_g] \{\xi\} = 0 \quad (2.89)$$

Seja a transformação de variável dada por:

$$\{\xi\} = [\psi] \{\varphi\} \quad (2.90)$$

onde as colunas da matriz modal $[\psi]$ são constituídas pelos n primeiros modos do sistema e $\{\varphi\}$ é o vetor das coordenadas nodais no espaço modal.

⁷ Neste trabalho, a escolha do número n "adequado" é realizada com base na técnica (Moore, 1981) que mede o grau de importância que cada modo de vibrar assume na modelagem do sistema físico. Maiores detalhes são mostrados e discutidos no Capítulo 5, Seção 5.3.

Neste trabalho, a matriz modal é obtida a partir da sua normalização pela massa $[M]$, da seguinte forma:

$$[\phi] = [\psi] \left\{ [\psi]^T [M] [\psi] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.91)$$

Desta maneira, a matriz modal normalizada ϕ satisfaz a relação descrita a seguir:

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \quad (2.92)$$

Portanto, utilizando-se a Eq. (2.92), é possível obter a relação:

$$[\phi]^{-1} = [\phi]^T [M] \quad (2.93)$$

A partir da Eq. (2.90), as coordenadas nodais do espaço modal $\{\varphi\}$ podem ser representadas em função das coordenadas físicas da estrutura $\{\xi\}$ pela expressão:

$$\{\varphi\} = [\phi]^{-1} \{\xi\} \quad (2.94)$$

Substituindo a Eq. (2.93) em (2.94), resulta em:

$$\{\varphi\} = [\phi]^T [M] \{\xi\} \quad (2.95)$$

Substituindo a Eq. (2.91) em (2.87) e pré multiplicando-a por $\{\phi\}^T$, obtem-se:

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{\varphi}\} + [\phi]^T [C_a] [\phi] \{\dot{\varphi}\} + [\phi]^T [K_g] [\phi] \{\varphi\} = [\phi]^T \{F_q\} + [\phi]^T \{F_{el}\} \quad (2.96)$$

Utilizando-se a Eq. (2.92), a Eq. (2.96) pode ser reescrita na forma:

$$\{\ddot{\varphi}\} + [\overline{C}_a] \{\dot{\varphi}\} + [\overline{K}_g] \{\varphi\} = \{\overline{F}_q\} + \{\overline{F}_{el}\} \quad (2.97)$$

onde as novas matrizes \overline{C}_a e \overline{K}_g são de dimensão $n \times n$ e os novos vetores de força são $n \times 1$, todos derivados diretamente de (2.96).

$$[\overline{C}_a] = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & & & 0 \\ & 2\zeta_2\omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.98a)$$

$$[\overline{K}_g] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.98b)$$

e ζ_i e ω_i é, respectivamente, o coeficiente de amortecimento e a frequência natural do i -ésimo modo.

2.4.4 Funções de Transferência do Sistema

Substituindo a Eq. (2.86) na Eq. (2.96) e colocando o sistema descrito pela Eq. (2.97) na forma de variáveis de estado, resulta:

$$\{\dot{\overline{x}}\} = [A] \{\overline{x}\} + [B_1] \{F_q\} + [B_2] \{\Phi_a\} \quad (2.99)$$

onde $\{\Phi_a\} = \{\Phi_{a_1} \ \Phi_{a_2} \ \dots \ \Phi_{a_{n_a}}\}^T$ é o vetor de potenciais elétricos aplicados nos n_a atuadores e $[A]$, $[B_1]$ e $[B_2]$ são as matrizes de estado definidas, respectivamente, por:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -[\overline{K}_g]_{n \times n} & -[\overline{C}_a]_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0_{n \times n_f} \\ [\phi]^T \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 0_{n \times n_a} \\ -[\phi]^T \sum_{k=1}^{n_{e_j}} [T_k]_j^T [k_{q\Phi}]_{aj} \end{bmatrix}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n_a \quad (2.102)$$

onde I é a matriz de identidade, $[T_k]^T$ é a matriz de transformação que estabelece a posição do k -ésimo elemento pizeletrico (atuador) na estrutura (obtida a partir da Eq. (2.74)) e o vetor $\{\overline{x}\}$ (dimensão $2n \times 1$) é definido como $\{\overline{x}\} = [\varphi \ \dot{\varphi}]^T$.

Sejam as observações dos deslocamentos de uma estrutura flexível, instrumentada com um conjunto de n_s sensores *discretos* distribuídos ao longo de seu domínio:

$$\{w\} = [C] \{\xi\} \quad (2.103)$$

onde a matriz $[C]$, de dimensões: (número de sensores: n_s) \times (número de graus de liberdade da estrutura) é constituída pelos valores 0 (ausência do sensor) e 1 (presença).

Usando a transformação (2.90) em (2.103), obtém-se:

$$\{w\} = [C_1] \{\bar{x}\} \quad (2.104)$$

onde a matriz $[C_1]$ é dada por:

$$[C_1] = \begin{bmatrix} [C] [\phi] & 0_{n_s \times n} \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Já para uma estrutura flexível instrumentada por n_s sensores *piezelétricos* distribuídos, a Eq. (2.81) pode ser reescrita em variáveis de estado na forma:

$$\{\Phi_s\} = [C_2] \{\bar{x}\} \quad (2.106)$$

onde:

$$[C_2] = \begin{bmatrix} \frac{-\sum_{k=1}^{n_{e_i}} [k_{\Phi q}]_{si} [T_k]_i [\phi]}{\sum_{k=1}^{n_{e_i}} [k_{\Phi \Phi}]_{si}} & 0_{n_s \times n} \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.107)$$

O sistema constituído pelas equações (2.99), (2.104) e (2.106) representa, sob o ponto de vista de controle e análise, a planta ou a estrutura flexível a ser controlada. A sua solução requer, no entanto, um método de integração numérica que obtenha a resposta no domínio do tempo. Neste trabalho, o método numérico empregado foi o integrador de *Runge-Kutta* de quarta ordem e passo variável (Constantinides, 1987).

Representando o sistema, descrito pelas Eqs. (2.99) e (2.104), no domínio de *Laplace*, resulta na seguinte função de transferência (considerando $\{\bar{F}_q\} = 0$):

$$G_{aw}^{ij}(s) = \frac{w_i(s)}{\Phi_{a_j}(s)} = [C_1]_i (Is - A)^{-1} [B_2]_j \quad (2.108)$$

A equação (2.108) descreve a relação entre a deflexão w no i -ésimo ponto da estrutura flexível e o potencial elétrico Φ_a aplicado no j -ésimo atuador piezelétrico.

Similarmente, para o sistema descrito pelas Eqs. (2.99) e (2.106), a função de transferência será dada por:

$$G_{as}^{ij}(s) = \frac{\Phi_{s_i}(s)}{\Phi_{a_j}(s)} = [C_2]_i (Is - A)^{-1} [B_2]_j \quad (2.109)$$

que denota a relação entre a voltagem medida (Φ_s) no i -ésimo sensor piezelétrico e o potencial elétrico (Φ_a) aplicado no j -ésimo atuador.

Já as funções de transferência que relacionam a força mecânica pontual F_q com a deflexão da estrutura w e com o sinal do sensor Φ_s podem ser expressas, respectivamente, pelas seguintes relações:

$$G_{fw}^{ij}(s) = \frac{w_i(s)}{F_{q_j}(s)} = [C_1]_i (Is - A)^{-1} [B_1]_j \quad (2.110a)$$

$$G_{fs}^{ij}(s) = \frac{\Phi_{s_i}(s)}{F_{q_j}(s)} = [C_2]_i (Is - A)^{-1} [B_1]_j \quad (2.110b)$$

Uma vez desenvolvido o sistema global de equações para a estrutura contendo elementos piezelétricos incorporados, empregando-se a formulação por elementos finitos para uma placa de *Kirchhoff* e para o modelo de viga de *Euler-Bernoulli*, no capítulo seguinte são desenvolvidos os modelos infinito-dimensionais para estas mesmas estruturas contendo elementos piezelétricos distribuídos.

Capítulo 3

Modelagem por Modos Assumidos de Estruturas Flexíveis Contendo Elementos Piezelétricos Distribuídos

Todo sistema estrutural é um sistema contínuo ou dito sistema infinito-dimensional com parâmetros que são funções de variáveis espaciais e temporais (Meirovitch, 1997). Neste capítulo é apresentada a solução das equações diferenciais parciais desenvolvidas para as estruturas flexíveis do tipo placa e viga com materiais piezelétricos incorporados. Estas soluções, também conhecidas como sistemas infinito-dimensionais com parâmetros distribuídos ou modelos de *modos assumidos*, são empregadas para o projeto do controlador apresentado no Capítulo 6.

3.1 Estrutura Flexível do Tipo Placa

A teoria clássica de placas (Timoshenko e Goodier, 1970) baseia-se nas mesmas considerações descritas no Capítulo 2, Seção 2.2, isto é, as tensões normais na direção transversal são desprezíveis e o plano neutro não sofre deformações durante a flexão (*Postulados de Love*).

Assumindo que a equação governante do movimento de flexão de placas elásticas é dada por (Dimitriadis et al, 1991):

$$\rho_p h_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_f \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = f(x, y, t) \quad (3.1)$$

onde $K_f = \frac{E_p h_p^3}{12(1-\nu_p^2)}$ (rigidez à flexão), E_p , h_p , ρ_p e ν_p são o módulo de elasticidade, a espessura, a densidade e o coeficiente de Poisson do material da estrutura, respectivamente, w é a deflexão transversal da estrutura e $f(x, y, t)$ é o carregamento externo distribuído.

Tem-se assim um sistema a parâmetros distribuídos, onde o comportamento das vibrações da estrutura dependem da distribuição de massa da mesma ($\rho_p h_p$), dos esforços externos $f(x, y, t)$ a ela aplicados, dos vínculos físicos (espessura h_p , largura e comprimento) e da maneira como as vibrações se iniciam (condições iniciais).

Considera-se que a solução da Eq. (3.1) ou a função de distribuição de deslocamentos transversais $w(x, y, t)$ da placa possa ser escrita na forma (Reddy, 1999):

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \phi_{kl}(x, y) \eta_{kl}(t) \quad (3.2)$$

onde $\eta_{kl}(t)$ é a função temporal e $\phi_{kl}(x, y)$ são as formas modais da placa que dependem das condições de contorno da estrutura.

Por ser um sistema com propriedades distribuídas, ele tem um número infinito de modos de vibração. Computacionalmente, é impossível trabalhar com este tipo de estrutura, pois implicaria em um modelo de trabalho de ordem infinita. Objetivando analisar o comportamento dinâmico deste sistema, um modelo finito-dimensional deve ser determinado:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \phi_{kl}(x, y) \eta_{kl}(t) \quad (3.3)$$

onde m e n são o número de modos de vibrações considerados na direção x e y , respectivamente.

As formas modais experimentam a condição de ortogonalidade segundo a expressão:

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \phi_{kl}(x, y) \phi_{op}(x, y) dx dy = 0, \text{ para } o \neq k, p \neq l \quad (3.4)$$

e são normalizadas através da relação:

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \phi_{kl}^2(x, y) dx dy = 1 \quad (3.5)$$

onde L_x e L_y denotam as dimensões (comprimento e largura) da estrutura.

A determinação dos números m e n mais adequados para que o sistema *reduzido* (de ordem $m \times n$) seja o mais representativo possível do sistema *completo* (de ordem infinita) normalmente é feita com base numa indicação da importância que cada modo de vibrar assume ao se modelar o sistema físico. Uma técnica já consagrada na literatura e que mede este grau de importância é aquela que emprega o *balanceamento interno* do sistema (Moore, 1981). Tal técnica é discutida em detalhes no Capítulo 5, Seção 5.3.

Para fins de controle, considera-se uma placa submetida a atuação e sensoriamento de elementos piezelétricos *perfeitamente* colados e co-posicionados respectivamente na parte superior e inferior da estrutura (veja Fig. 3.1).

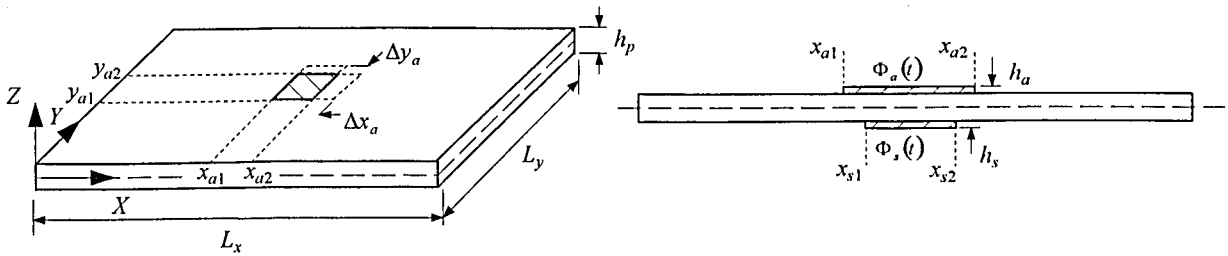


Figura 3.1- Dimensões da placa e dos elementos piezelétricos e sistema de coordenadas.

Da Figura 3.1, têm-se que: (x_1, x_2) e (y_1, y_2) são os limites geométricos ou as coordenadas em x e y dos elementos piezelétricos, h é a espessura dos materiais, $\Phi_a(t)$ é o potencial elétrico aplicado no atuador, $\Phi_s(t)$ é a voltagem de saída do sensor e Δx_a e Δy_a é o alongamento induzido no atuador na direção x e y , respectivamente. As hipóteses assumidas para o comportamento dos elementos piezelétricos empregados como atuadores descritas no Capítulo 2, Seção 2.1.1 são também consideradas aqui nesta exposição.

Uma vez conhecida a solução da Eq. (3.1) dada por (3.3), o capítulo evolui para a obtenção da equação do *atuador* e *sensor* empregada no procedimento de modelagem⁸.

3.1.1 Obtenção da Equação do Atuador

Para a modelagem do atuador, considera-se que a única contribuição do elemento piezelétrico na estrutura é a geração de forças e momentos externos, resultantes da aplicação de um potencial elétrico aplicado sobre o material.

Nesta formulação, quando o elemento piezelétrico é ativado por um potencial elétrico Φ_a aplicado na sua direção de polarização (direção Z - veja Anexo I, Seção 1), deformações lineares na direção X e Y (ϵ_x e ϵ_y) são induzidas *igualmente* (Dimitriadis et al, 1991) ao longo da espessura do elemento piezelétrico (considerando $d_{31} = d_{32}$ - veja Anexo I, Seção 2), segundo a Eq. (2.8), na forma:

$$\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\Delta y_a}{y_{a2} - y_{a1}} = \frac{\Delta x_a}{x_{a2} - x_{a1}} = \frac{d_{31}}{h_a} \Phi_a(t) \quad (3.6)$$

⁸ Para este tipo de formulação os efeitos inerciais e de rigidez dos elementos piezelétricos (sensores e atuadores) envolvidos na análise não são considerados, apenas os efeitos externos do atuador (momentos distribuídos) e deformações dos sensores.

Segundo Dimitriadis et al (1991), a distribuição da deformação desde o plano neutro até a superfície superior do material piezelétrico (incluindo a interface viga-elemento piezelétrico) é contínua e possui um comportamento linear ao longo da espessura do conjunto placa-elemento piezelétrico. Por outro lado, o mesmo autor considera que a tensão mecânica gerada na interface dos elementos placa-atuador é descontínua e varia linearmente ao longo da espessura dos elementos (veja Fig. 3.2).

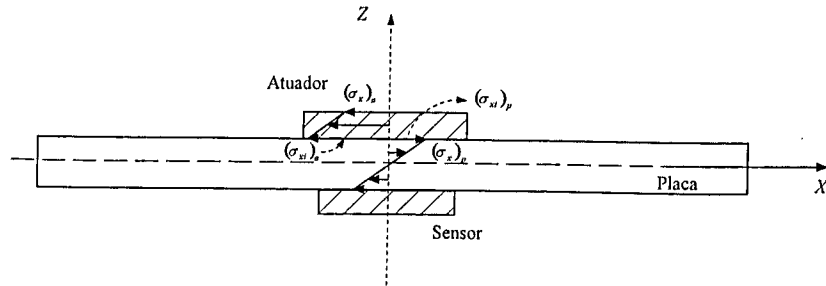


Figura 3.2- Distribuição das tensões no plano xz devido à atuação do elemento piezelétrico.

Na interface (i), a deformação ϵ da placa, nas direções X e Y , é expressa pelas relações:

$$(\epsilon_{xi})_p = \epsilon_{xi} + \nu_p \epsilon_{yi} \quad (3.7a)$$

$$(\epsilon_{yi})_p = \epsilon_{yi} + \nu_p \epsilon_{xi} \quad (3.7b)$$

desta forma, nesta região, a deformação líquida desenvolvida no material piezelétrico nas direções x e y é obtida pela superposição da deformação induzida ϵ (causada pela aplicação do potencial elétrico Φ_a no material cerâmico) com a deformação mecânica (ϵ_{xi} e ϵ_{yi}) na placa (gerada pelo movimento de flexão da estrutura), na forma (Dimitriadis et al, 1991):

$$(\epsilon_{xi})_a = \epsilon_{xi} + \nu_a \epsilon_{yi} - (\epsilon + \nu_a \epsilon) \quad (3.8a)$$

$$(\epsilon_{yi})_a = \epsilon_{yi} + \nu_a \epsilon_{xi} - (\epsilon + \nu_a \epsilon) \quad (3.8b)$$

Admitindo que este mesmo comportamento ocorra também dentro do material piezelétrico e da placa - veja Eqs. (3.7a)-(3.8b) - têm-se:

$$(\varepsilon_x)_p = \varepsilon_x + \nu_p \varepsilon_y \quad (3.9a)$$

$$(\varepsilon_y)_p = \varepsilon_y + \nu_p \varepsilon_x \quad (3.9b)$$

$$(\varepsilon_x)_a = \varepsilon_x + \nu_a \varepsilon_y - (1 + \nu_a) \epsilon \quad (3.9c)$$

$$(\varepsilon_y)_a = \varepsilon_y + \nu_a \varepsilon_x - (1 + \nu_a) \epsilon \quad (3.9d)$$

Assume-se uma relação linear entre as tensões e deformações associadas que aparecem na interface placa-atuador nas direções X e Y (Timoshenko e Goodier, 1970), isto é:

$$(\sigma_{xi})_a = \frac{E_a}{1 - \nu_a^2} [\varepsilon_{xi} + \nu_a \varepsilon_{yi} - (1 + \nu_a) \epsilon] \quad (3.10a)$$

$$(\sigma_{yi})_a = \frac{E_a}{1 - \nu_a^2} [\varepsilon_{yi} + \nu_a \varepsilon_{xi} - (1 + \nu_a) \epsilon] \quad (3.10b)$$

$$(\sigma_{xi})_p = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} (\varepsilon_{xi} + \nu_p \varepsilon_{yi}) \quad (3.10c)$$

$$(\sigma_{yi})_p = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} (\varepsilon_{yi} + \nu_p \varepsilon_{xi}) \quad (3.10d)$$

Considera-se que as deformações dentro da placa (planos xz e yz) se relacionam com as deformações na interface i e variam linearmente ao longo de sua espessura (regime elástico) na forma:

$$(\varepsilon_x)_p = (\varepsilon_{xi})_p \frac{2z}{h_p}, \text{ onde } z \leq \frac{h_p}{2} \quad (3.11)$$

$$(\varepsilon_y)_p = (\varepsilon_{yi})_p \frac{2z}{h_p}, \text{ onde } z \leq \frac{h_p}{2} \quad (3.12)$$

As tensões mecânicas dentro da placa (nas direções X e Y) podem ser escritas, segundo as Eqs. (3.10c) e (3.10d), na forma:

$$(\sigma_x)_p = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} (\varepsilon_x)_p \quad (3.13)$$

$$(\sigma_y)_p = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} (\varepsilon_y)_p \quad (3.14)$$

Substituindo a Eq. (3.7a) em (3.11) e a Eq. (3.7b) em (3.12), e, por sua vez, substituindo as equações resultantes em (3.13) e (3.14) e utilizando as Eqs. (3.10c) e (3.10d), têm-se, respectivamente (veja Fig. 3.2):

$$(\sigma_x)_p = (\sigma_{xi})_p \frac{2z}{h_p} \quad (3.15)$$

$$(\sigma_y)_p = (\sigma_{yi})_p \frac{2z}{h_p} \quad (3.16)$$

que varia de zero (plano neutro indeformável) até um valor máximo (interface).

Assume-se que a distribuição líquida de tensão (em relação à interface i) dentro do elemento piezelétrico e da placa sejam iguais (Dimitriadis et al, 1991):

$$(\sigma_x)_a - (\sigma_{xi})_a = (\sigma_x)_p - (\sigma_{xi})_p \quad (3.17)$$

Substituindo a Eq. (3.15) em (3.17) e reorganizando-se os termos, resulta finalmente:

$$(\sigma_x)_a = (\sigma_{xi})_a - (\sigma_{xi})_p \left(1 - \frac{2z}{h_p}\right) \quad (3.18)$$

Similarmente ao que foi exposto na direção X , a tensão associada à direção Y é dada por:

$$(\sigma_y)_a = (\sigma_{yi})_a - (\sigma_{yi})_p \left(1 - \frac{2z}{h_p}\right) \quad (3.19)$$

O momento resultante na direção X (ou Y) aplicado no plano neutro é nulo, isto é:

$$\int_0^{\frac{h_p}{2}} (\sigma_x)_p z dz + \int_{\frac{h_p}{2}}^{\frac{h_p}{2} + h_a} (\sigma_x)_a z dz = 0 \quad (3.20)$$

Substituindo as Eqs (3.15) e (3.18) em (3.20) e resolvendo as integrais, resulta:

$$h_p^3 (\sigma_{xi})_p + 6h_p h_a^2 (\sigma_{xi})_p + 8h_a^3 (\sigma_{xi})_p + 6h_p^2 h_a (\sigma_{xi})_a + 6h_a^2 h_p (\sigma_{xi})_a = 0 \quad (3.21)$$

Reagrupando os termos da Eq. (3.21), tem-se:

$$(\sigma_{xi})_p = K_a (\sigma_{xi})_a \quad (3.22)$$

onde o parâmetro adimensional K_a é dado por:

$$K_a = \frac{-6h_p h_a (h_p + h_a)}{h_p^3 + 6h_p h_a^2 + 8h_a^3} \quad (3.23)$$

Substituindo as Eqs. (3.10a) e (3.10c) em (3.22) e assumindo que as deformações, na interface, nas direções X e Y são iguais, isto é, $\varepsilon_{xi} = \varepsilon_{yi}$, chega-se:

$$\varepsilon_{xi} = \varepsilon_{yi} = \frac{-P_a (1 + \nu_a)}{(1 + \nu_p) - (1 + \nu_a) P_a} \epsilon \quad (3.24)$$

onde P_a é dado por:

$$P_a = \frac{E_a}{E_p} \frac{1 - \nu_p^2}{1 - \nu_a^2} K_a \quad (3.25)$$

O momento de flexão m_x (por unidade de comprimento) em torno do eixo perpendicular ao eixo x , provocado pela deformação livre induzida no atuador ϵ , pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$m_x = \int_0^{\frac{h_p}{2}} (\sigma_x)_p z dz \quad (3.26)$$

Substituindo a Eq. (3.15) em (3.26), resulta:

$$m_x = \int_0^{\frac{h_p}{2}} (\sigma_{xi})_p \frac{2z^2}{h_p} dz = \frac{1}{12} (\sigma_{xi})_p h_p^2 \quad (3.27)$$

Substituindo a Eq. (3.10c) em (3.27) e assumindo $\varepsilon_{xi} = \varepsilon_{yi}$ dada pela relação (3.24), tem-se finalmente

$$m(t) = m_x(t) = m_y(t) = C_0 \varepsilon(t) \quad (3.28)$$

onde

$$C_0 = -\frac{1}{12} E_p \frac{1 + \nu_a}{1 - \nu_p} \frac{P_a}{1 + \nu_p - (1 + \nu_a) P_a} h_p^2 \quad (3.29)$$

Para uma situação particular, no caso de um outro atuador de tamanho e propriedades físicas idênticas que esteja simetricamente localizado na região oposta do atuador em questão e ativado por um potencial elétrico de igual magnitude Φ_a e sinal contrário, o novo momento m_a é expresso por (Dimitriadis et al, 1991):

$$m_a(t) = 2m(t) \quad (3.30)$$

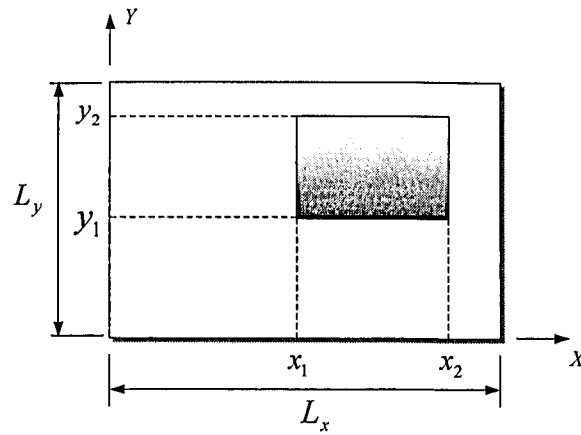


Figura 3.3- Região onde o elemento piezelétrico se localiza sobre a superfície da placa.

No desenvolvimento da força ou carregamento externo $f(x, y, t)$ resultante, devido à ativação do atuador, a expressão (3.28) aplica-se ao atuador cobrindo toda a estrutura⁹. Como geralmente é preferível trabalhar com um elemento atuante de dimensões bem definidas (veja Fig. 3.3), o carregamento externo realizado por este elemento deve ser dado por uma função distribuição cuja magnitude é dada pela Eq. (3.28).

⁹ Não há inconsistência, o atuador é "infinito" apenas para efeito de cálculo e como uma aproximação preliminar.

Assim, definindo-se a função degrau unitário (descontínua e unitária em $x = x_0$) ou função *Heaviside* (utilizada para representar descontinuidades no carregamento externo) na forma (Wang e Rogers, 1989):

$$H(z - z_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \geq z_0 \\ 0, & \text{se } z < z_0 \end{cases} \quad (3.31)$$

a distribuição uniforme de um momento unitário $U(x, y)$, na região definida pelas coordenadas x_{a_1} , x_{a_2} , y_{a_1} e y_{a_2} (veja o gráfico da Fig. 3.3), é representada pela expressão:

$$U(x, y) = [H(x - x_{a_1}) - H(x - x_{a_2})] [H(y - y_{a_1}) - H(y - y_{a_2})] \quad (3.32)$$

Desta forma, o momento distribuído $m(x, y, t)$, devido à atuação de um elemento piezelétrico finito, pode ser escrito como:

$$m(x, y, t) = m_x(t) U(x, y) + m_y(t) U(x, y) \quad (3.33)$$

Neste sentido, o carregamento externo $f(x, y, t)$, propriamente dito, devido à atuação do momento induzido pelo elemento piezelétrico pode ser obtido através da expressão (Bathe, 1982):

$$f(x, y, t) = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = m_x(t) \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + m_y(t) \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} \quad (3.34)$$

ou, utilizando-se a Eq. (3.28):

$$f(x, y, t) = m(t) \left[\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} \right] \quad (3.35)$$

onde os termos $\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2}$ representam duas *linhas* de momentos concentrados nas extremidades (X e Y) do elemento piezelétrico na forma (Wang e Rogers, 1989):

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} = [\delta'(x - x_{a_1}) - \delta'(x - x_{a_2})] [H(y - y_{a_1}) - H(y - y_{a_2})] \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = [H(x - x_{a_1}) - H(x - x_{a_2})] [\delta'(y - y_{a_1}) - \delta'(y - y_{a_2})] \quad (3.37)$$

e δ^{10} denota a função delta de *Dirac* (Ogata, 1998).

¹⁰ O apóstrofo denota a derivada aplicada na função $\delta(x - x_0)$ com respeito a x .

3.1.2 Obtenção da Equação do Sensor

A equação do sensor piezelétrico é obtida com base no efeito direto da piezeletricidade e na relação entre tensão e deformação da placa. Sob este efeito, a deformação do sensor produz uma carga elétrica¹¹ que transita através de sua espessura. Sabe-se que o campo elétrico é função da voltagem elétrica gerada pelo sensor, cuja relação é dada pela Eq. (II.6). Através dela é possível obter a voltagem Φ_s integrando-se o campo elétrico ao longo da espessura h_s do sensor, segundo a expressão descrita a seguir (Tzou, 1989):

$$\Phi_s = - \int_0^{h_s} E_3 dz = -h_s E_3 \quad (3.38)$$

onde E_3 é o campo elétrico resultante na direção de polarização Z (veja Capítulo I, Seção 2).

O campo elétrico E_3 é obtido através da expressão (I.4), resultando:

$$E_3 = \frac{1}{\xi_{s33}^\tau} (D_3 - e_{s31}\varepsilon_{sx} - e_{s32}\varepsilon_{sy} - e_{s36}\varepsilon_{sxy}) \quad (3.39)$$

onde D_3 é o deslocamento da carga elétrica na direção Z , ε_{si} é a deformação do sensor na direção i e ξ_{s33}^τ , e_{s31} e e_{s32} são as constantes dielétrica e piezelétricas do material, respectivamente.

Substituindo a Eq. (3.39) em (3.38) e considerando $e_{s36} = 0$, tem-se:

$$\Phi_s = h_s \left(h_{s31}\varepsilon_{sx} + h_{s32}\varepsilon_{sy} - \frac{1}{\xi_{s33}^\tau} D_3 \right) \quad (3.40)$$

onde $h_{s3i} = \frac{e_{s3i}}{\xi_{s33}^\tau}$ (para $i = 1, 2$), de unidade $[C/Fm]$, e a constante ξ_{s33}^τ pode ser calculada pela Eq. (2.44) (veja Capítulo 2, Seção 2.2.2.1).

Segundo a Eq. (3.40), o deslocamento elétrico D_3 pode ser expresso em termos da voltagem elétrica na forma:

$$D_3 = \xi_{s33}^\tau \left(h_{s31}\varepsilon_{sx} + h_{s32}\varepsilon_{sy} - \frac{\Phi_s}{h_s} \right) \quad (3.41)$$

Integrando-se a Eq. (3.41) sobre a superfície do material resulta:

$$\int_{A_\Omega} D_3 dA_s = \int_{A_\Omega} \xi_{s33}^\tau \left(h_{s31}\varepsilon_{sx} + h_{s32}\varepsilon_{sy} - \frac{\Phi_s}{h_s} \right) dA_s \quad (3.42)$$

¹¹ Admite-se que a carga elétrica resultante é constante em toda a superfície do sensor.

A condição de circuito aberto da voltagem Φ_s pode ser obtida fazendo-se a carga, expressa por $\int_{A_\Omega} D_3 dA_s$, igual a zero, isto é:

$$\Phi_s = \frac{h_s}{A_\Omega} \int_{A_\Omega} (h_{s31}\varepsilon_{sx} + h_{s32}\varepsilon_{sy}) dA_s \quad (3.43)$$

onde $A_\Omega = (x_{s2} - x_{s1})(y_{s2} - y_{s1})$ e as deformações ε_{sx} e ε_{sy} na superfície do sensor são obtidas a partir das Eqs. (2.12a) e (2.12b), respectivamente, resultando nas seguintes expressões:

$$\varepsilon_{sx} = -\bar{z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{sy} = -\bar{z} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.45)$$

onde \bar{z} é a distância do plano neutro da placa até o plano neutro relativo ao sensor, isto é, $\bar{z} = -\frac{1}{2}(h_p + h_s)$.

Substituindo as Eqs. (3.44) e (3.45) em (3.43), a equação do sensor colado numa estrutura tipo placa pode ser reduzida a (Tzou, 1989):

$$\Phi_s(t) = -\bar{z} \frac{h_s}{A_\Omega} \int_{y_{s1}}^{y_{s2}} \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \left(h_{s31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h_{s32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (3.46)$$

Uma outra maneira de determinar a voltagem elétrica Φ_s , desenvolvida pelo sensor, é através do uso da distribuição do deslocamento elétrico D_3 (na direção Z) que é função das deformações mecânicas ε_{sx} , ε_{sy} e ε_{sxy} . Desta forma, a carga elétrica total Q_s , acumulada no material, pode ser obtida integrando-se D_3 sobre a área superficial A da estrutura (Akishita et al, 1995):

$$Q_s(t) = \int_A U(x, y) D_3(x, y, t) dA \quad (3.47)$$

onde a função $U(x, y)$ é utilizada para mapear a distribuição da carga elétrica na região da placa onde o sensor se localiza e $D_3(x, y, t)$ pode ser calculada através da expressão (1.4), resultando:

$$D_3(x, y, t) = e_{s31}\varepsilon_{sx} + e_{s32}\varepsilon_{sy} + 2e_{s36}\varepsilon_{sxy} \quad (3.48)$$

Substituindo as Eqs. (3.44) e (3.45) em (3.48) (assumindo $e_{s36} = 0$), obtem-se:

$$D_3(x, y, t) = -\bar{z} \left(e_{s31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{s32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.49)$$

Substituindo as Eqs. (3.32) e (3.49) em (3.47), tem-se (Fuller et al, 1996):

$$Q_s(t) = -\bar{z} \int_{y_{s1}}^{y_{s2}} \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \left(e_{s31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{s32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (3.50)$$

O comportamento do sensor piezelétrico é similar ao comportamento de um capacitor elétrico. Assim, a voltagem do sensor Φ_s pode ser calculada a partir da expressão (Halliday e Resnick, 1984):

$$\Phi_s(t) = \frac{Q_s(t)}{C_s} \quad (3.51)$$

sendo C_s a capacitância do material piezelétrico dado por (Halliday e Resnick, 1984):

$$C_s = k_d \frac{\varepsilon_0 A_\Omega}{h_s} \quad (3.52)$$

k_d é conhecida como constante dielétrica do sensor, ε_0 é a constante de permissividade do ar ($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$) e A_Ω é a área superficial do sensor.

Caso o sensor esteja conectado a um circuito como aquele ilustrado na Fig. 2.10 (veja Capítulo 2, Seção 2.4.2), a voltagem de saída do mesmo será dada por (Loix e Preumont, 1995; Moreira, 1998; Lima Jr., 1999):

$$\Phi_s(t) = \frac{Q_s(t)}{C_r} \quad (3.53)$$

Vencida a etapa de determinação dos modelos do sensor e atuador passa-se a fase de obtenção das funções de transferência do sistema. Esta discussão é feita, em detalhes, na seção que se segue.

3.1.3 Funções de Transferência do Sistema

As funções de transferência do sistema são obtidas através das equações desenvolvidas para os elementos de atuação e sensoramento. Neste sentido, substituindo as Eqs. (3.35) e (3.3) na Eq. (3.1), resulta no sistema de equações descrito na forma (onde o argumento (x, y) foi omitido na equação resultante):

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left[\rho_p h_p \phi_{kl} \ddot{\eta}_{kl}(t) + K_f \left(\frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial y^4} \right) \eta_{kl}(t) = m(t) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.54)$$

Multiplicando todos os termos da Eq. (3.54) por $\int_A \phi_{kl}(x, y) dA$ (onde $dA = dxdy$), aplicando a propriedade de normalização descrita em (3.5) e substituindo a relação (3.28) na equação resultante, obtem-se a kl -ésima equação discreta na forma:

$$\rho_p h_p \ddot{\eta}_{kl}(t) + K_f \eta_{kl}(t) \int_A \phi_{kl} \left(\frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial y^4} \right) dA = C_0 \epsilon(t) \int_A \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \phi_{kl} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \phi_{kl} \right) dA \quad (3.55)$$

Uma propriedade importante da função delta de *Dirac* é mostrada a seguir (Kwakernaak e Sivan, 1991):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(z - z_0) \phi(x) dx = (-1)^n \phi^{(n)}(z_0) \quad (3.56)$$

onde $(.)^{(n)}$ é a n -ésima derivada de $(.)$.

Aplicando a propriedade descrita em (3.56) na Eq. (3.55), após substituir as relações (3.36) e (3.37) em (3.55), e colocando-a em função do potencial elétrico Φ_a aplicado no elemento piezelétrico - veja relação (3.6) - resulta:

$$\ddot{\eta}_{kl}(t) + \Omega_{n_{kl}}^2 \eta_{kl}(t) = k_a \left(F_x^{kl} + F_y^{kl} \right) \Phi_a(t) \quad (3.57)$$

ou, considerando-se que o kl -ésimo modo seja amortecido com um fator de ζ_{kl} :

$$\ddot{\eta}_{kl}(t) + 2\zeta_{kl}\Omega_{n_{kl}} \dot{\eta}_{kl}(t) + \Omega_{n_{kl}}^2 \eta_{kl}(t) = k_a \left(F_x^{kl} + F_y^{kl} \right) \Phi_a(t) \quad (3.58)$$

Os termos da Eq. (3.58) são dados pelas relações listadas abaixo:

$$\Omega_{n_{kl}}^2 = \frac{K_f}{\rho_p h_p} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \phi_{kl} \left(\frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi_{kl}}{\partial y^4} \right) dx dy \quad (3.59)$$

$$k_a = \frac{C_0 d_{31}}{\rho_p h_p h_a} \quad (3.60)$$

$$F_x^{kl} = \int_0^{L_x} [H(x - x_{a_1}) - H(x - x_{a_2})] \left[\frac{\partial}{\partial y} \phi_{kl}(x, y_{a_2}) - \frac{\partial}{\partial y} \phi_{kl}(x, y_{a_1}) \right] dx \quad (3.61)$$

$$F_y^{kl} = \int_0^{L_y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi_{kl}(x_{a_2}, y) - \frac{\partial}{\partial x} \phi_{kl}(x_{a_1}, y) \right] [H(y - y_{a_1}) - H(y - y_{a_2})] dy \quad (3.62)$$

Dada a notação matemática da função *Heaviside* - Eq. (3.31) - as relações (3.61) e (3.62) passam a admitir a seguinte forma:

$$F_x^{kl} = \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \phi_{kl}(x, y_{a_2}) - \frac{\partial}{\partial y} \phi_{kl}(x, y_{a_1}) \right] dx \quad (3.63)$$

$$F_y^{kl} = \int_{y_{a_1}}^{y_{a_2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi_{kl}(x_{a_2}, y) - \frac{\partial}{\partial x} \phi_{kl}(x_{a_1}, y) \right] dy \quad (3.64)$$

A partir das Eqs. (3.3) e (3.51), o potencial elétrico Φ_s gerado pelo sensor piezelétrico pode ser determinado através da seguinte expressão:

$$\Phi_s(t) = -\frac{\bar{z}}{C_r} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \eta_{kl}(t) \int_{y_{s_1}}^{y_{s_2}} \int_{x_{s_1}}^{x_{s_2}} \left(e_{s31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{kl} + e_{s32} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{kl} \right) dx dy \quad (3.65)$$

ou

$$\Phi_s(t) = -\frac{\bar{z}}{C_r} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \eta_{kl}(t) \int_{A_\Omega} \left(e_{s31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{kl} + e_{s32} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{kl} \right) d\Omega \quad (3.66)$$

onde A_Ω é a área superficial do sensor.

As equações (3.58) e (3.66) representam o sistema eletromecânico a ser utilizado no projeto do controlador, sendo constituído por apenas um elemento sensor e atuador. Assim, admitindo-se superposição de efeitos, estas equações podem ser reescritas em termos de um conjunto de atuadores e sensores (assumindo propriedades físicas idênticas), nas formas:

$$\ddot{\eta}_{kl}(t) + 2\zeta_{kl}\Omega_{n_{kl}}\dot{\eta}_{kl}(t) + \Omega_{n_{kl}}^2\eta_{kl}(t) = k_a \sum_{j=1}^{n_a} \left(F_{x_j}^{kl} + F_{y_j}^{kl} \right) \Phi_{a_j}(t) \quad (3.67)$$

$$\Phi_{s_i}(t) = -\frac{\bar{z}}{C_r} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \eta_{kl}(t) \int_{A_{\Omega_i}} \left(e_{s31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{kl} + e_{s32} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{kl} \right) d\Omega \quad (3.68)$$

onde n_a é o número de atuadores e $i = 1, 2, \dots, n_s$, Φ_{a_j} é o potencial elétrico aplicado no j -ésimo atuador, Φ_{s_i} é a voltagem medida no i -ésimo sensor e (x_{a_j}, y_{a_j}) e (x_{s_i}, y_{s_i}) são, respectivamente, as coordenadas, tomadas ao longo do eixo X e Y , do atuador e sensor.

Aplicando a transformada de Laplace nos termos (3.67) e (3.3), a função de transferência que relaciona o deslocamento de um ponto qualquer da placa $w(x_{w_i}, y_{w_i})$ em função do potencial elétrico aplicado no j -ésimo atuador é dada pela seguinte relação:

$$G_{aw}^{ij}(s) = \frac{w(x_{w_i}, y_{w_i}, s)}{\Phi_{a_j}(s)} = k_a \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\phi_{kl}(x_{w_i}, y_{w_i}) (F_{x_j}^{kl} + F_{y_j}^{kl})}{s^2 + 2\zeta_{kl}\Omega_{n_{kl}}s + \Omega_{n_{kl}}^2} \quad (3.69)$$

De maneira similar, no domínio de Laplace, a função de transferência que relaciona o potencial elétrico gerado pelo sensor a partir de um sinal elétrico aplicado no atuador é expressa por:

$$G_{as}^{ij}(s) = \frac{\Phi_{s_i}(s)}{\Phi_{a_j}(s)} = -\frac{\bar{z}k_a}{C_r} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{(F_{x_j}^{kl} + F_{y_j}^{kl}) \int_{A_{\Omega_i}} \left(e_{s31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{kl} + e_{s32} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{kl} \right) d\Omega}{s^2 + 2\zeta_{kl}\Omega_{n_{kl}}s + \Omega_{n_{kl}}^2} \quad (3.70)$$

Já as funções de transferência que relacionam a força mecânica pontual F_q com a deflexão da estrutura w e com o sinal do sensor Φ_s são expressas pelas seguintes relações:

$$G_{fw}^{ij}(s) = \frac{w(x_{w_i}, y_{w_i}, s)}{F_{q_j}(s)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\phi_{kl}(x_{w_i}, y_{w_i}) \phi_{kl}(x_{f_j}, y_{f_j})}{s^2 + 2\zeta_{kl}\Omega_{n_{kl}}s + \Omega_{n_{kl}}^2} \quad (3.71a)$$

$$G_{fs}^{ij}(s) = \frac{\Phi_{s_i}(s)}{F_{q_j}(s)} = -\frac{\bar{z}}{C_r} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\phi_{kl}(x_{f_j}, y_{f_j}) \int_{A_{\Omega_i}} \left(e_{s31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{kl} + e_{s32} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{kl} \right) d\Omega}{s^2 + 2\zeta_{kl}\Omega_{n_{kl}}s + \Omega_{n_{kl}}^2} \quad (3.71b)$$

Visando o projeto do sistema de controle propriamente dito, o sistema, descrito pelas Eqs. (3.67), (3.3) e (3.68), pode ser reescrito na forma de variáveis de estado, resultando em:

$$\{\dot{\bar{x}}\} = [A] \{\bar{x}\} + [B_1] \{F_q\} + [B_2] \{\Phi_a\} \quad (3.72a)$$

$$\{w\} = [C_1] \{\bar{x}\} \quad (3.72b)$$

$$\{\Phi_s\} = [C_2] \{\bar{x}\} \quad (3.72c)$$

onde os vetores $\{\Phi_a\}$, $\{\Phi_s\}$ e $\{\bar{x}\}$ e as matrizes $[A]$, $[B_1]$, $[B_2]$, $[C_1]$ e $[C_2]$ (assumindo $e_{s31} = e_{s32}$) são dadas, respectivamente por:

$$\{\Phi_a\} = [\Phi_{a_1} \quad \Phi_{a_2} \quad \dots \quad \Phi_{a_{n_a}}]^T \quad (3.73a)$$

$$\{\Phi_s\} = [\Phi_{s_1} \quad \Phi_{s_2} \quad \dots \quad \Phi_{s_{n_s}}]^T \quad (3.73b)$$

$$\{\bar{x}\} = \begin{Bmatrix} \eta_{kl} \\ \dot{\eta}_{kl} \end{Bmatrix} \quad (3.73c)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0_{mn \times mn} & I_{mn \times mn} \\ -\Omega_{n_{kl}}^2 & -2\zeta_{kl}\Omega_{n_{kl}} \end{bmatrix} \quad (3.73d)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0_{mn \times n_f} \\ [\overline{B}_1] \end{bmatrix} \quad (3.73e)$$

$$[B_2] = k_a \begin{bmatrix} 0_{mn \times n_a} \\ [\overline{B}_2] \end{bmatrix} \quad (3.73f)$$

$$[C_1] = [\overline{C}_1 \quad 0_{n_w \times mn}] \quad (3.73g)$$

$$[C_2] = -\bar{z} \frac{e_{s31}}{C_r} [\overline{C}_2 \quad 0_{n_s \times mn}] \quad (3.73h)$$

e as matrizes $[\overline{B}_1]$, $[\overline{B}_2]$, $[\overline{C}_1]$ e $[\overline{C}_2]$ são, respectivamente:

$$[\overline{B}_1] = \begin{bmatrix} \phi_{11}(x_{f_1}, y_{f_1}) & \cdots & \phi_{11}(x_{f_{n_f}}, y_{f_{n_f}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{mn}(x_{f_1}, y_{f_1}) & \cdots & \phi_{mn}(x_{f_{n_f}}, y_{f_{n_f}}) \end{bmatrix} \quad (3.74a)$$

$$[\overline{B}_2] = \begin{bmatrix} F_{x_1}^{11} + F_{y_1}^{11} & \cdots & F_{x_{n_a}}^{11} + F_{y_{n_a}}^{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x_1}^{mn} + F_{y_1}^{mn} & \cdots & F_{x_{n_a}}^{mn} + F_{y_{n_a}}^{mn} \end{bmatrix} \quad (3.74b)$$

$$[\overline{C}_1] = \begin{bmatrix} \phi_{11}(x_{w_1}, y_{w_1}) & \cdots & \phi_{mn}(x_{w_1}, y_{w_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{11}(x_{w_{n_w}}, y_{w_{n_w}}) & \cdots & \phi_{mn}(x_{w_{n_w}}, y_{w_{n_w}}) \end{bmatrix} \quad (3.74c)$$

$$[\overline{C}_2] = \begin{bmatrix} \int_{A_{\Omega_1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{11} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{11} \right) d\Omega & \cdots & \int_{A_{\Omega_1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{mn} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{mn} \right) d\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{A_{\Omega_{n_s}}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{11} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{11} \right) d\Omega & \cdots & \int_{A_{\Omega_{n_s}}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{mn} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{mn} \right) d\Omega \end{bmatrix} \quad (3.74d)$$

3.2 Estrutura Flexível do Tipo Viga

Similarmente às estruturas flexíveis do tipo placa, as vigas são geralmente descritas por equações diferenciais parciais dependentes de variáveis temporal e espaciais que, uma vez linearizadas, são expressas na forma (Fuller et al, 1996):

$$\rho_v A_v \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_v I_v \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (3.75)$$

onde ρ_v e A_v são a densidade e a área da seção transversal da viga ($A_v = b_v h_v$), respectivamente, w é o deslocamento na direção transversal, E_v é o módulo de elasticidade da viga, I_v é o momento de inércia estrutural ($\frac{b_v h_v^3}{12}$) e $f(x, t)$ é o carregamento externo aplicado na viga.

A solução da Eq. (3.75), dada por $w(x, t)$, é obtida pelo produto de duas funções: uma função espacial $\phi_k(x)$ que representa as funções de forma ou formas modais do sistema (dependem das condições de contorno da viga) e uma função temporal denotada por $\eta_k(t)$:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \eta_k(t) \quad (3.76)$$

As formas modais ϕ são normalizadas segundo a relação a seguir:

$$\int_0^L \phi_k^2(x) dx = 1 \quad (3.77)$$

cuja propriedade de ortogonalidade dos modos é descrita por:

$$\int_0^L \phi_k(x) \phi_l(x) dx = 0, \text{ para } k \neq l \quad (3.78)$$

onde L é o comprimento da viga elástica.

Visando trabalhar com um modelo computacionalmente mais adequado, uma representação finito-dimensional deve ser escolhida:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) \eta_k(t) \quad (3.79)$$

onde n é o número de modos de vibrações considerados no modelo em questão.

Neste trabalho, os elementos piezelétricos responsáveis pela atuação e sensoriamento são colados e co-posicionados respectivamente na parte superior e inferior da viga conforme mostra a Fig. 3.4.

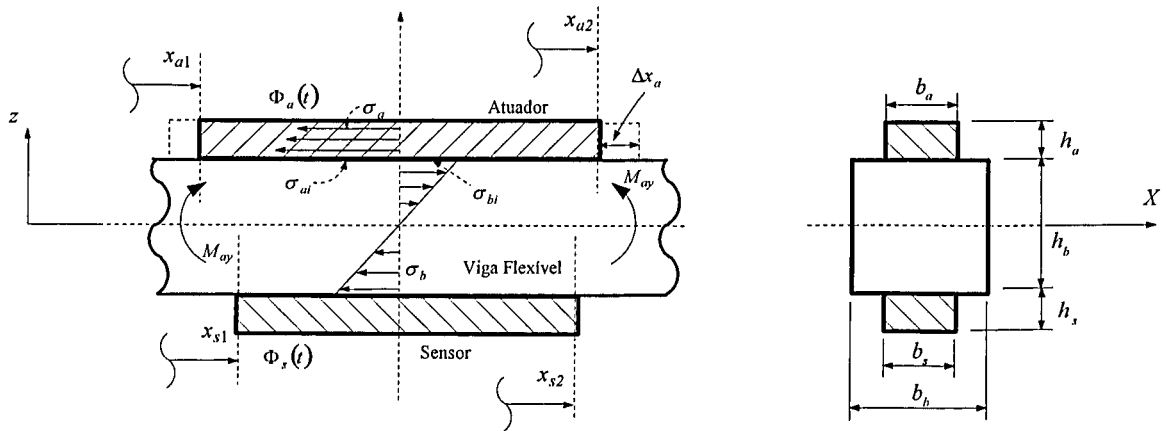


Figura 3.4- Viga flexível contendo atuador e sensor piezelétrico.

Da figura 3.4, (x_1, x_2) são os limites geométricos ou as coordenadas em x dos elementos piezelétricos, h é a espessura dos materiais (viga, sensor e atuador), b é a sua largura, $\Phi_a(t)$ é o potencial elétrico aplicado no elemento atuador, $\Phi_s(t)$ é a voltagem de saída do elemento sensor, Δx_a é o alongamento induzido no atuador na direção x e σ_{ax} e M_{ay} é a tensão (na direção x) e o

momento (em torno do eixo y) gerado pelo atuador, respectivamente. A partir da configuração do sistema estrutural mostrado na Fig. 3.4 é que se obtém as equações que descrevem o mecanismo de atuação e sensoriamento dos materiais piezelétricos incorporados na estrutura.

3.2.1 Obtenção da Equação do Atuador

Considerando que o elemento piezelétrico¹² receba um potencial elétrico de magnitude Φ_a em sua superfície (veja Fig. 2.2) e assumindo $[d] = d_{31}$ (deformação unidirecional), desta forma, a amplitude da deformação livre induzida ϵ pode ser escrita como (Crawley e De Luis, 1987):

$$\epsilon = \frac{\Delta x_a}{x_{a2} - x_{a1}} = \frac{d_{31}}{h_a} \Phi_a(t) \quad (3.80)$$

onde d_{31} é a constante piezelétrica da cerâmica.

As mesmas considerações assumidas sobre o comportamento da distribuição da deformação e tensão da placa são também empregadas nesta exposição. Assim, admite-se que a distribuição da deformação e da tensão na estrutura viga e no material piezelétrico são lineares (veja Fig. 3.4) ao longo da espessura do conjunto viga e atuador (Srinivasan e Mcfarland, 2001).

Considerando-se que, na interface i , haja uma relação linear entre a tensão e a deformação, têm-se:

$$\sigma_{ai} = E_a \epsilon_{ai} \quad (3.81a)$$

$$\sigma_{vi} = E_v \epsilon_{vi} \quad (3.81b)$$

Segundo Srinivasan e Mcfarland (2001), na interface, a deformação líquida gerada no material piezelétrico é dada na forma:

$$\epsilon_{ai} = \epsilon_{vi} - \epsilon \quad (3.82)$$

e também dentro do elemento piezelétrico:

$$\epsilon_a = \epsilon_v - \epsilon \quad (3.83)$$

¹² As mesmas hipóteses que foram levadas em conta para o elemento piezelétrico funcionando como atuador no Capítulo 2, Seção 2.1.1 são também consideradas nesta seção.

Admite-se que a deformação ε_v dentro da viga varia linearmente ao longo de sua espessura (direção Z) na forma (veja Fig. 3.4):

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{vi} \frac{z}{h_v} \quad (3.84)$$

assim, a distribuição de tensão dentro da viga σ_v , gerada pela deformação ε_v , é dada por (válida até $h_v/2$):

$$\sigma_v = E_v \varepsilon_v = E_v \varepsilon_{vi} \frac{2z}{h_v}, \text{ onde } z \leq \frac{h_v}{2} \quad (3.85)$$

ou, substituindo a Eq. (3.81b) em (3.85), resulta:

$$\sigma_v = \sigma_{vi} \frac{2z}{h_v} \quad (3.86)$$

Substituindo a Eq. (3.84) em (3.83), chega-se:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{vi} \frac{2z}{h_v} - \epsilon \quad (3.87)$$

e sua tensão correspondente σ_a (tensão longitudinal - veja Fig. 3.4) é dada por:

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_a = E_a \left(\varepsilon_{vi} \frac{2z}{h_v} - \epsilon \right) \quad (3.88)$$

Na interface i , para $z = \frac{h_v}{2}$, a Eq. (3.88) é reescrita na forma (onde $\sigma_{ai} = \sigma_a|_{z=\frac{h_v}{2}}$):

$$\sigma_{ai} = E_a \varepsilon_{vi} - E_a \epsilon \quad (3.89)$$

ou, isolando o termo $E_a \epsilon$, chega-se:

$$E_a \epsilon = E_a \varepsilon_{vi} - \sigma_{ai} \quad (3.90)$$

Substituindo a Eq. (3.90) em (3.88), resulta na expressão:

$$\sigma_a = \sigma_{ai} - E_a \varepsilon_{vi} \left(1 - \frac{2z}{h_v} \right) \quad (3.91)$$

que descreve uma relação linear entre a tensão gerada dentro do elemento piezelétrico com a deformação da viga e a tensão do material piezelétrico na interface.

Sabe-se que o momento resultante (por unidade de largura) aplicado na linha neutra é nulo (veja Eq.):

$$\int_0^{\frac{h_v}{2}} \sigma_v z dz + \int_{\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2} + h_a} \sigma_a z dz = 0 \quad (3.92)$$

Substituindo as Eqs. (3.86) (após substituir a Eq. (3.81b) em (3.86)) e (3.91) em (3.92) e rearranjando-se os termos, resulta:

$$\sigma_{vi} h_v^3 + 6h_v h_a^2 E_r \sigma_{vi} + 8h_a^3 E_r \sigma_{vi} + 6h_a h_v^2 \sigma_{ai} + 6h_a^2 h_v \sigma_{ai} = 0 \quad (3.93)$$

ou

$$\sigma_{vi} = K_a \sigma_{ai} \quad (3.94)$$

onde K_a é dada por:

$$K_a = \frac{-6h_a h_v (h_v + h_a)}{h_v^3 + 6h_v h_a^2 E_r + 8h_a^3 E_r}, \text{ onde } E_r = \frac{E_a}{E_v} \quad (3.95)$$

Substituindo a Eqs. (3.81a) - após a substituição de (3.82) em (3.81a) - e (3.81b) em (3.94), chega-se:

$$\varepsilon_{vi} = \frac{-K_a E_r}{1 - K_a E_r} \epsilon \quad (3.96)$$

que relaciona a deformação da viga na interface com a deformação livre induzida do elemento piezelétrico.

Desta forma, o momento de flexão por unidade de largura m_x aplicado em torno do eixo perpendicular ao eixo x (eixo y) e provocado pela deformação livre induzida no atuador ϵ pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$m_x = \int_0^{\frac{h_v}{2}} \sigma_v z dz \quad (3.97)$$

Substituindo a Eq. (3.86) em (3.97), tem-se:

$$m_x = \int_0^{\frac{h_v}{2}} \sigma_{vi} \frac{2z^2}{h_v} dz = \frac{1}{12} \sigma_{vi} h_v^2 \quad (3.98)$$

A equação que descreve o momento de flexão total M_x ($M_x = b_a m_x$) em função da deformação induzida ϵ é obtida pela substituição da Eq. (3.96) em (3.81b) e desta dentro da Eq. (3.98), resultando finalmente na expressão:

$$M_x = C_0 \epsilon \quad (3.99)$$

onde

$$C_0 = -E_v \frac{K_a E_r}{1 - K_a E_r} \frac{1}{12} b_a h_v^2 \quad (3.100)$$

Uma formulação bastante empregada na literatura atual (Pota e Alberts, 1995; Gopinathan e Pajunen, 1995; Lima Jr., 1999; Steffen Jr. e Inman, 1999; Moheimani, 2000; Abreu et al, 2003) é a que descreve o momento induzido pelo elemento piezelétrico na forma¹³ (obtido através da integral: $M_x = b_a \int_{\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2} + h_a} \sigma_a z dz$, onde $\sigma_a = E_a \epsilon$):

$$M_x = \frac{1}{2} E_a b_a h_a (h_v + h_a) \epsilon = C_0^* \epsilon \quad (3.101)$$

Seguindo os procedimentos descritos na Seção 3.1.1, a força ou carregamento externo $f(x, t)$ resultante, proporcionada pela ativação do atuador piezelétrico (de dimensões finitas), é expresso em termos de uma função distribuição $U(x)$ que mapeia a área de atuação do elemento piezelétrico na estrutura (veja o gráfico da Fig. 3.5). Assim, utiliza-se a função *Heaviside*, dada pela Eq. (3.31), para definir a distribuição uniforme $U(x)$ entre x_{a1} e x_{a2} (veja o gráfico da Fig. 3.5) como:

$$U(x) = H(x - x_{a1}) - H(x - x_{a2}) \quad (3.102)$$

¹³ Nesta formulação admite-se que a tensão gerada σ_a no material piezelétrico é constante ao longo de sua espessura h_a .

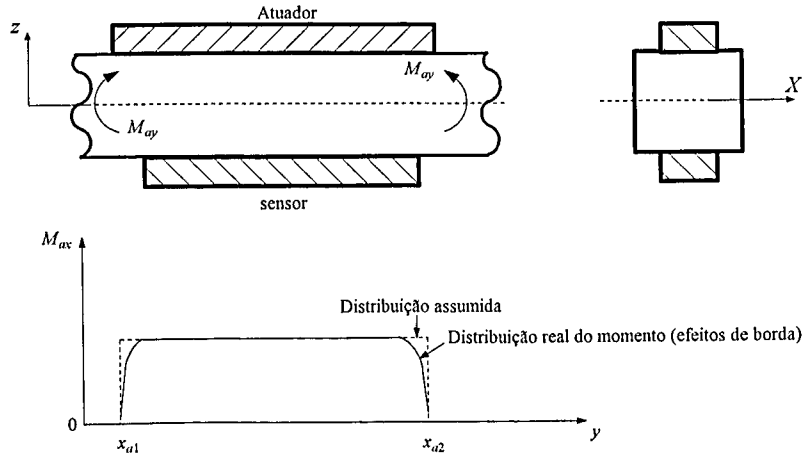


Figura 3.5- Distribuição do momento na estrutura devido à atuação do elemento piezelétrico.

Desta forma, o momento distribuído $M(x, t)$, devido à ativação do atuador finito (onde os efeitos de borda foram ignorados, veja Fig. 3.5), pode ser escrito como:

$$M(x, t) = M_x(t) U(x) \quad (3.103)$$

O carregamento externo $f(x, t)$ por sua vez é determinado similarmente à Eq. (3.34), obtendo-se:

$$f(x, t) = M_x(t) \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \quad (3.104)$$

onde o termo $\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}$ descreve matematicamente dois momentos concentrados (dois conjugados iguais e de sentidos contrários) em x_{a1} e x_{a2} na forma (Wang e Rogers, 1989):

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = \delta'(x - x_{a1}) - \delta'(x - x_{a2}) \quad (3.105)$$

e δ denota a função delta de Dirac (Ogata, 1998).

Como pode ser observado pela Eq. (3.104), a atuação do elemento piezelétrico pode ser representada como um carregamento externo constituído por um par de momentos de sinais opostos M_x localizados nas extremidades do atuador conforme ilustra a Fig. 3.4 ou 3.5.

3.2.2 Obtenção da Equação do Sensor

As mesmas hipóteses assumidas para o comportamento do material piezelétrico empregado como sensor na estrutura do tipo placa (veja Seção 3.1.2) são também consideradas neste contexto. Assim, a deformação do elemento piezelétrico ε_{sx} (na direção x) em sua superfície pode ser escrita, segundo a Eq. (3.44), como:

$$\varepsilon_{sx}(x, t) = \varepsilon_s(x, t) = -\bar{z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.106)$$

onde \bar{z} é a distância da linha neutra da viga até a linha neutra correspondente ao elemento sensor, isto é, $\bar{z} = -\frac{1}{2}(h_v + h_s)$.

A voltagem desenvolvida pelo sensor Φ_s pode ser determinada através da Eq. (3.43), onde $\varepsilon_{sy} = 0$:

$$\Phi_s = \frac{h_s}{A_\Omega} \int_{A_\Omega} h_{s31} \varepsilon_{sx} dA_s \quad (3.107)$$

e $A_\Omega = b_s(x_{s2} - x_{s1})$.

Substituindo a Eq. (3.106) em (3.107), a equação do sensor colado numa viga flexível pode ser reduzida a:

$$\Phi_s(t) = -\bar{z} \frac{h_s}{x_{s2} - x_{s1}} \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} h_{s31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (3.108)$$

ou

$$\Phi_s(t) = -\bar{z} h_s \frac{h_{s31}}{x_{s2} - x_{s1}} \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_{s1}}^{x_{s2}} \quad (3.109)$$

Dada uma carga elétrica total desenvolvida Q_s no sensor, segundo a Eq. (3.50), é possível determinar a voltagem elétrica dada pela relação (3.51), (onde $e_{s32} = 0$):

$$\Phi_s(t) = -\bar{z} \frac{b_s e_{s31}}{C_s} \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_{s1}}^{x_{s2}} \quad (3.110)$$

onde C_s é a capacitância do sensor dada pela Eq. (3.52) e e_{s31} pode ser obtido a partir de d_{s31} , utilizando-se a Eq. (1.8).

A carga total acumulada no material Q_s pode ser obtida integrando-se D_3 sobre a superfície do sensor segundo a Eq. (3.47):

$$Q_s(t) = \int_A U(x) D_3(x, t) dA \quad (3.111)$$

onde A é a área da estrutura e $U(x)$ - veja Eq. (3.102) - é uma função que mapeia a distribuição da carga elétrica na região da viga onde se localiza o sensor.

A equação (3.111), calculada a partir da Eq. (3.50), é expressa por (onde $e_{s32} = 0$):

$$Q_s = -\bar{z}e_{s31} \int_A U(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \quad (3.112)$$

que quando avaliada, pode ser reescrita como:

$$Q_s(t) = -\bar{z}b_s e_{s31} \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_{s1}}^{x_{s2}} \quad (3.113)$$

Uma outra maneira de determinar a voltagem elétrica Φ_s desenvolvida pelo sensor é através do uso da distribuição da carga elétrica q_s (por unidade de área) que é função da deformação mecânica ε_{sx} na forma (Pota e Alberts, 1995):

$$q_s(x, t) = \frac{k_{s31}^2}{g_{s31}} \varepsilon_{sx}(x, t) \quad (3.114)$$

onde k_{s31} (medida adimensional) é o fator de acoplamento eletromecânico e g_{s31} (unidade: $[Vm/N]$ ou $[m^2/C]$) é a constante de voltagem piezelétrica.

Substituindo a Eq. (3.106) em (3.114) e integrando o resultado ao longo da área superficial do sensor A_Ω , chega-se:

$$Q_s(t) = -\bar{z}b_s \frac{k_{s31}^2}{g_{s31}} \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_{s1}}^{x_{s2}} \quad (3.115)$$

Desta forma, a voltagem de saída Φ_s do sensor é calculada através da expressão (3.51). Para o caso do sensor conectado a um circuito (Loix e Preumont, 1995; Moreira, 1998; Lima Jr, 1999) mostrado no esquema ilustrado na Fig. 2.10 (veja Capítulo 2, Seção 2.4.2), a voltagem Φ_s pode ser então calculada através da relação (3.53), resultando para o problema exposto:

$$\Phi_s(t) = \frac{k_s}{C_r} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_{s1}}^{x_{s2}} \quad (3.116)$$

onde $k_s = -\bar{z}b_s \frac{k_{s31}^2}{g_{s31}}$, se for obtida a partir de (3.115) ou $k_s = -\bar{z}b_s e_{s31}$, dada pela Eq. (3.113).

Como pode ser observado na Eq. (3.116), a voltagem gerada pelo sensor depende das condições de contorno da estrutura e da área efetiva da camada do sensor. Ela mostra também que o sinal de saída do sensor é proporcional à inclinação das extremidades do mesmo (termo $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_{s1}}^{x_{s2}}$). Consequentemente, o sinal do sensor é igual a zero se a inclinação na extremidade $x = x_{s1}$ for igual à inclinação na extremidade oposta ($x = x_{s2}$).

3.2.3 Funções de Transferência do Sistema

As funções de transferência do sistema podem ser determinadas a partir das equações desenvolvidas para o sensor e atuador mostradas nos tópicos anteriores. Assim, substituindo as Eqs. (3.104) e (3.79) na Eq. (3.75), resulta no sistema de equações descrito na forma:

$$\sum_{k=1}^n \left[\rho_v A_v \phi_k(x) \ddot{\eta}_k(t) + E_v I_v \phi_k''''(x) \eta_k(t) \right] = M_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.117)$$

Multiplicando a Eq. (3.117) por $\int_0^L \phi_k(x) dx$ e reescrevendo-a em termos da k -ésima equação, obtém-se (omitindo o somatório):

$$\left(\rho_v A_v \int_0^L \phi_k^2(x) dx \right) \ddot{\eta}_k(t) + \left(E_v I_v \int_0^L \phi_k(x) \phi_k''''(x) dx \right) \eta_k(t) = M_x \int_0^L \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \phi_k(x) dx \quad (3.118)$$

Aplicando a propriedade (3.56) no termo $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ - veja Eq. (3.36) - e em seguida empregando a relação (3.77) na Eq. (3.118), resulta:

$$\ddot{\eta}_k(t) + \left(\frac{E_v I_v}{\rho_v A_v} \int_0^L \phi_k(x) \phi_k''''(x) dx \right) \eta_k(t) = \frac{M_x}{\rho_v A_v} [\phi_k'(x_{a2}) - \phi_k'(x_{a1})] \quad (3.119)$$

Substituindo a Eq. (3.99) em (3.119), a mesma pode ser reescrita em função do potencial elétrico Φ_a aplicado no atuador, na forma:

$$\ddot{\eta}_k(t) + \omega_{n_k}^2 \eta_k(t) = k_a [\phi_k'(x_{a2}) - \phi_k'(x_{a1})] \Phi_a(t) \quad (3.120)$$

ou, considerando-se que o k -ésimo modo seja amortecido com um fator de ζ_k :

$$\ddot{\eta}_k(t) + 2\zeta_k\omega_{n_k}\dot{\eta}_k(t) + \omega_{n_k}^2\eta_k(t) = k_a [\phi'_k(x_{a_2}) - \phi'_k(x_{a_1})] \Phi_a(t) \quad (3.121)$$

onde $\omega_{n_k}^2$ é a k -ésima frequência natural da viga e k_a é uma constante, escritas segundo as expressões (empregando-se o termo C_0 da Eq. (3.99)):

$$k_a = \frac{C_0 d_{31}}{\rho_v A_v h_a} \quad (3.122a)$$

$$\omega_{n_k}^2 = \frac{E_v I_v}{\rho_v A_v} \int_0^L \phi_k(x) \phi_k'''(x) dx \quad (3.122b)$$

Substituindo a Eq. (3.79) na Eq. (3.116), o sinal do sensor Φ_s pode ser então relacionado com a variável η_k na forma (omitindo o somatório):

$$\Phi_s(t) = \frac{k_s}{C_r} [\phi'_k(x_{s_2}) - \phi'_k(x_{s_1})] \eta_k(t) \quad (3.123)$$

Para um conjunto de atuadores e sensores (assumindo propriedades físicas idênticas), as Eqs. (3.121) e (3.123) podem ser reescritas, respectivamente, como (Fuller et al, 1996):

$$\ddot{\eta}_k(t) + 2\zeta_k\omega_{n_k}\dot{\eta}_k(t) + \omega_{n_k}^2\eta_k(t) = k_a \sum_{j=1}^{n_a} [\phi'_k(x_{a_{j2}}) - \phi'_k(x_{a_{j1}})] \Phi_{a_j}(t) \quad (3.124)$$

$$\Phi_{s_i}(t) = \frac{k_s}{C_r} \sum_{k=1}^n [\phi'_k(x_{s_{i2}}) - \phi'_k(x_{s_{i1}})] \eta_k(t) \quad (3.125)$$

onde n_a é o número de atuadores e $i = 1, 2, \dots, n_s$, Φ_{a_j} e Φ_{s_i} são os potenciais elétricos aplicado no j -ésimo atuador e medido no i -ésimo sensor, e x_{a_j} e x_{s_i} são as coordenadas (tomadas ao longo do eixo X) do atuador e sensor.

Reorganizando as Eqs. (3.124) e (3.125) em termos do j -ésimo atuador, aplicando a transformada de Laplace nas equações resultantes (assumindo condições iniciais nulas) e colocando η_k como função de w - veja Eq. (3.79) - chega-se:

$$G_{aw}^{ij}(s) = \frac{w(x_{w_i}, s)}{\Phi_{a_j}(s)} = k_a \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k(x_{w_i}) [\phi'_k(x_{a_{j2}}) - \phi'_k(x_{a_{j1}})]}{s^2 + 2\zeta_k\omega_{n_k}s + \omega_{n_k}^2} \quad (3.126)$$

A equação (3.126) descreve a relação entre a deflexão da viga w em um ponto localizado em x_{w_i} (i -ésimo sensor discreto) e o potencial elétrico Φ_{a_j} aplicado no j -ésimo atuador piezelétrico.

Aplicando a transformada de Laplace nas Eqs. (3.125) e (3.124) e isolando Φ_{a_j} , é possível obter uma relação entre Φ_{s_i} e Φ_{a_j} escrita na forma:

$$G_{as}^{ij}(s) = \frac{\Phi_{s_i}(s)}{\Phi_{a_j}(s)} = \frac{k_a k_s}{C_r} \sum_{k=1}^n \frac{[\phi'_k(x_{s_{i2}}) - \phi'_k(x_{s_{i1}})] [\phi'_k(x_{a_{j2}}) - \phi'_k(x_{a_{j1}})]}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2} \quad (3.127)$$

que descreve a relação entre a voltagem induzida Φ_{s_i} pelo i -ésimo sensor piezelétrico e o potencial elétrico Φ_{a_j} aplicado no j -ésimo atuador.

As funções de transferência que relacionam a força mecânica F_q com a deflexão w e com o sinal do sensor Φ_s podem ser expressas, respectivamente, pelas relações:

$$G_{fw}^{ij}(s) = \frac{w(x_{w_i}, s)}{F_{q_j}(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k(x_{w_i}) \phi_k(x_{f_j})}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2} \quad (3.128a)$$

$$G_{fs}^{ij}(s) = \frac{\Phi_{s_i}(s)}{F_{q_j}(s)} = \frac{k_s}{C_r} \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k(x_{f_j}) [\phi'_k(x_{s_{i2}}) - \phi'_k(x_{s_{i1}})]}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2} \quad (3.128b)$$

O sistema, representado pelas Eqs. (3.124), (3.79) e (3.125), pode também ser descrito em espaço de estados na forma:

$$\{\dot{\bar{x}}\} = [A] \{\bar{x}\} + [B_1] \{F_q\} + [B_2] \{\Phi_a\} \quad (3.129a)$$

$$\{w\} = [C_1] \{\bar{x}\} \quad (3.129b)$$

$$\{\Phi_s\} = [C_2] \{\bar{x}\} \quad (3.129c)$$

onde:

$$\{\Phi_a\} = [\Phi_{a_1} \quad \Phi_{a_2} \quad \dots \quad \Phi_{a_{n_a}}]^T \quad (3.130a)$$

$$\{\Phi_s\} = [\Phi_{s_1} \quad \Phi_{s_2} \quad \dots \quad \Phi_{s_{n_s}}]^T \quad (3.130b)$$

$$\{\bar{x}\} = \begin{Bmatrix} \eta_k \\ \dot{\eta}_k \end{Bmatrix} \quad (3.130c)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -\omega_{n_k}^2 & -2\zeta_k \omega_{n_k} \end{bmatrix} \quad (3.130d)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0_{n \times n_f} \\ [\bar{B}_1] \end{bmatrix} \quad (3.130e)$$

$$[B_2] = k_a \begin{bmatrix} 0_{n \times n_a} \\ [\bar{B}_2] \end{bmatrix} \quad (3.130f)$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} [\bar{C}_1] & 0_{n_w \times n} \end{bmatrix} \quad (3.130g)$$

$$[C_2] = \frac{k_s}{C_r} \begin{bmatrix} [\bar{C}_2] & 0_{n_s \times n} \end{bmatrix} \quad (3.130h)$$

e as matrizes $[\bar{B}_1]$, $[\bar{B}_2]$, $[\bar{C}_1]$ e $[\bar{C}_2]$ são, respectivamente:

$$[\bar{B}_1] = \begin{bmatrix} \phi_1(x_{f_1}) & \cdots & \phi_1(x_{f_{n_f}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(x_{f_1}) & \cdots & \phi_n(x_{f_{n_f}}) \end{bmatrix} \quad (3.131a)$$

$$[\bar{B}_2] = \begin{bmatrix} \phi'_1(x_{a_{12}}) - \phi'_1(x_{a_{11}}) & \cdots & \phi'_1(x_{a_{n_a 2}}) - \phi'_1(x_{a_{n_a 1}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'_n(x_{a_{12}}) - \phi'_n(x_{a_{11}}) & \cdots & \phi'_n(x_{a_{n_a 2}}) - \phi'_n(x_{a_{n_a 1}}) \end{bmatrix} \quad (3.131b)$$

$$[\bar{C}_1] = \begin{bmatrix} \phi_1(x_{w_1}) & \phi_2(x_{w_1}) & \cdots & \phi_n(x_{w_1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_{w_{n_w}}) & \phi_2(x_{w_{n_w}}) & \cdots & \phi_n(x_{w_{n_w}}) \end{bmatrix} \quad (3.131c)$$

$$[\bar{C}_2] = \begin{bmatrix} \phi'_1(x_{s_{12}}) - \phi'_1(x_{s_{11}}) & \cdots & \phi'_n(x_{s_{12}}) - \phi'_n(x_{s_{11}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'_1(x_{s_{n_s 2}}) - \phi'_1(x_{s_{n_s 1}}) & \cdots & \phi'_n(x_{s_{n_s 2}}) - \phi'_n(x_{s_{n_s 1}}) \end{bmatrix} \quad (3.131d)$$

Realizada a etapa de modelagem e caracterização das matrizes de estado do sistema estrutural contendo atuadores e sensores piezelétricos distribuídos, passa-se à fase de validação das técnicas apresentadas.

Capítulo 4

Comparação dos Modelos Numéricos Desenvolvidos

Neste capítulo, os resultados obtidos a partir dos modelos desenvolvidos utilizando-se a técnica de elementos finitos para a estrutura do tipo viga de *Euler-Bernoulli* e os modelos que empregam elementos de placa de *Kirchhoff* são comparados com os resultados determinados pela formulação *infinito-dimensional* disponível e com os dados gerados pelo programa de simulação *ANSYS*[®]. Um conjunto de testes numéricos é realizado no sentido de comprovar a aproximação das técnicas de modelagem mencionadas. As análises estática e dinâmica e as funções resposta em frequência do sistema constituem o meio de validação empregado.

4.1 Estrutura tipo Viga Flexível

Inicialmente o modelo determinado através da técnica de elementos finitos ou *FEM*, desenvolvida para vigas esbeltas contendo elementos piezelétricos distribuídos (veja Capítulo 2, Seção 2.3), é validado com a formulação contínua ou *FC* (Capítulo 3, Seção 3.2) e com os resultados obtidos pelo programa *ANSYS*[®]. A descrição detalhada do modelo empregado nas simulações numéricas e a validação das técnicas de modelagem mencionadas são mostradas nas seções que se seguem.

4.1.1 Parâmetros do Sistema Dinâmico

Uma viga de alumínio contendo materiais piezelétricos distribuídos, com condições de contorno engastada-livre, é utilizada como o exemplo de validação. A Figura 4.1 ilustra o exemplo de configuração utilizado.

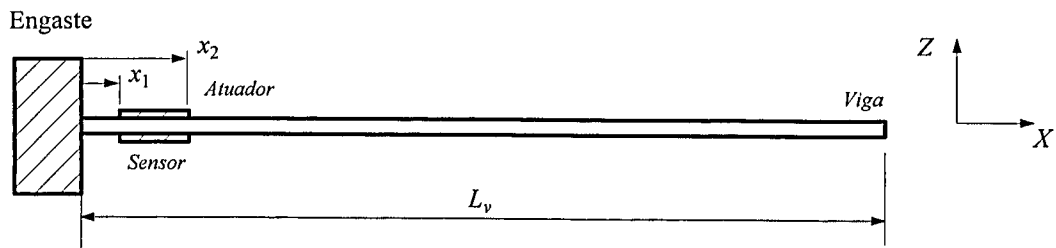


Figura 4.1- Estrutura flexível do tipo viga contendo elementos piezelétricos e com condições de contorno engastada-livre.

As características físicas e geométricas da estrutura flexível e dos elementos cerâmicos (veja Anexo VI) são descritas na Tab. 4.1.

Tabela 4.1- Propriedades físicas e geométricas da viga e dos materiais piezelétricos.

Propriedades	Unidades	Piezelétrico		
		Sensor	Atuador	Viga
E (Módulo de Young)	GPa	2	69	65
ρ (Densidade)	kg/m^3	1780	7700	2711
h (Espessura)	$m \times 10^{-3}$	0.205	0.254	3.4
b (Largura)	$m \times 10^{-3}$	10	20	30
L (Comprimento)	$m \times 10^{-3}$	30	50	700
d_{31} (Constante piezelétrica)	$C/N \times 10^{-12}$	23	-179	--
g_{31} (Constante de voltagem)	$mV/N \times 10^{-3}$	216	-11	--
k_d (Constante dielétrica)	--	12	1800	--
k_{31} (Fator de acoplamento)	--	0.12	0.30	--

Os parâmetros principais dos modelos são apresentados nos itens relacionados a seguir:

I) *Modelo Discretizado (FEM)*

A estrutura do tipo viga, aqui descrita, é modelada utilizando-se 70 elementos finitos¹⁴ idênticos e dispostos ao longo de seu comprimento.

¹⁴ Outras configurações para o número de elementos finitos utilizados na discretização da estrutura foram também testadas, mas esta em particular mostrou-se mais adequada com relação à precisão dos resultados obtidos.

II) Modelo Contínuo (FC)

Nesta abordagem, as formas modais $\phi_k(x)$, obtidas para as condições de contorno especificadas, são formuladas segundo a expressão (Dimarogonas, 1996):

$$\phi_k(x) = a_k \cosh(\beta_k x) + b_k \sinh(\beta_k x) + c_k \cos(\beta_k x) + d_k \sin(\beta_k x)$$

onde β_k , a_k , b_k , c_k e d_k são os coeficientes, determinados a partir das seguintes condições:

$$w(0, t) = 0 \quad (4.1a)$$

$$E_v I_v \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.1b)$$

$$E_v I_v \frac{\partial^2 w(L_v, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1c)$$

$$E_v I_v \frac{\partial^3 w(L_v, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (4.1d)$$

e $w(x, t)$ é dado pela Eq. (3.76).

Aplicando as condições de contorno, descritas pelas relações (4.1a)-(4.1d), resulta, finalmente:

$$\phi_k(x) = d_k \{ \sin(\beta_k x) - \sinh(\beta_k x) + \alpha_k [\cos(\beta_k x) - \cosh(\beta_k x)] \} \quad (4.2)$$

onde os coeficientes β_k e α_k são obtidos, respectivamente, através das expressões:

$$\alpha_k = \frac{\cos(\beta_k L_v) + \cosh(\beta_k L_v)}{\sin(\beta_k L_v) - \sinh(\beta_k L_v)} \quad (4.3)$$

$$1 + \cosh(\beta_k L_v) \cos(\beta_k L_v) = 0 \quad (4.4)$$

d_k são determinados empregando-se a condição descrita pela Eq. (3.77) e os termos β_k da equação transcendental (4.4) podem ser obtidos utilizando-se um método iterativo de solução, como por exemplo, o algoritmo de Newton-Raphson (Chapra e Canale, 1991).

III) Modelo utilizado no Software ANSYS®

Conforme apresentado no Anexo III, empregam-se, respectivamente, para a caracterização dos materiais piezelétricos e da estrutura: um elemento tridimensional com 8 nós possuindo até 6 graus de liberdade por nó e um elemento tridimensional estrutural, com 3 graus de liberdade em cada nó. Uma malha 140×6 é utilizada para a discretização da estrutura (elemento *SOLID45*) e para os materiais piezelétricos (*SOLID5*) empregam-se as malhas: 40×3 para o atuador e 12×3 para o sensor.

No decorrer do procedimento de validação, a configuração utilizada para a distribuição de três pares de materiais piezelétricos idênticos (1, 2 e 3), dispostos ao longo da estrutura (posição x_1), é fornecida pela Fig. 4.2.

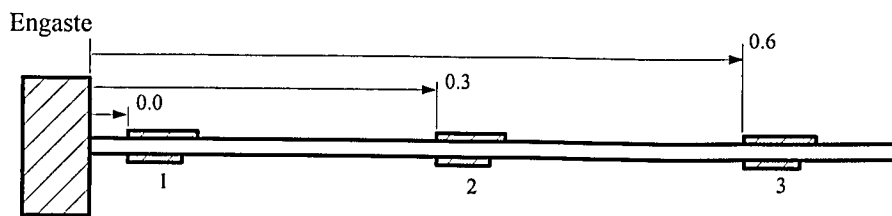


Figura 4.2- Disposição dos materiais piezelétricos distribuídos ao longo da viga flexível.

A posição x_2 (Fig. 4.1) relativa a cada elemento piezelétrico é obtida através da seguinte relação:

$$x_2 = x_1 + L \quad (4.5)$$

onde os valores para o comprimento L estão disponíveis na Tab. 4.1.

4.1.2 Análise Estática

Nesta seção são apresentados alguns resultados obtidos para a distribuição das deflexões transversais da estrutura e sensoriamento dos materiais piezelétricos para o sistema dinâmico, ilustrado pela Fig. 4.2, sujeito a um carregamento constante provocado pelos atuadores.

Nas simulações numéricas efetuadas, os atuadores são alimentados por um vetor de potenciais elétricos (em *Volts*) dado por:

$$\{\Phi_a\} = \{ -1.0 \quad 1.0 \quad -1.0 \}^T \quad (4.6)$$

As soluções obtidas para a distribuição da deflexão estática da viga a partir das formulações matemáticas desenvolvidas e do programa *ANSYS*[®] são descritas nos itens apresentados a seguir:

- I) A distribuição das deflexões estáticas da estrutura flexível, determinada a partir da técnica *FEM*, pode ser obtida utilizando a expressão (2.86), que substituída na Eq. (2.84), resulta na seguinte solução (admitindo $\{F_q\} = 0$):

$$\{\xi\} = -[K_g]^{-1} \sum_{k=1}^{n_{e_j}} [T_k]_j^T [k_{q\Phi}]_{aj} \Phi_{a_j}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n_a \quad (4.7)$$

onde n_{e_j} representa o número de elementos finitos utilizados na discretização do j -ésimo atuador (neste caso $n_e = 5$ para $j = 1, 2$ e 3), $[T_k]$ é determinada pela relação (2.74) e $[k_{q\Phi}]$ é dada pela Eq. (2.69a).

- II) Na técnica *FC*, a mesma resposta pode ser obtida a partir da solução da Eq. (3.124) que substituída na Eq. (3.76), resulta na seguinte expressão:

$$w(x) = k_a \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k(x)}{\omega_{n_k}^2} \sum_{j=1}^{n_a} [\phi'_k(x_{a_{j2}}) - \phi'_k(x_{a_{j1}})] \Phi_{a_j} \quad (4.8)$$

onde $x_{a_{j1}}$ e $x_{a_{j2}}$ são os limites geométricos do j -ésimo atuador distribuído na estrutura flexível (veja Fig. 4.1).

- III) No ambiente *ANSYS*[®], o código empregado para efetuar a análise estática está disponível no Anexo III, Seção III.2.1.

As Figuras 4.3 e 4.4 ilustram, respectivamente, os resultados obtidos pelo programa *ANSYS*[®] e a comparação da deflexão da viga determinada pelas técnicas de modelagem apresentadas.

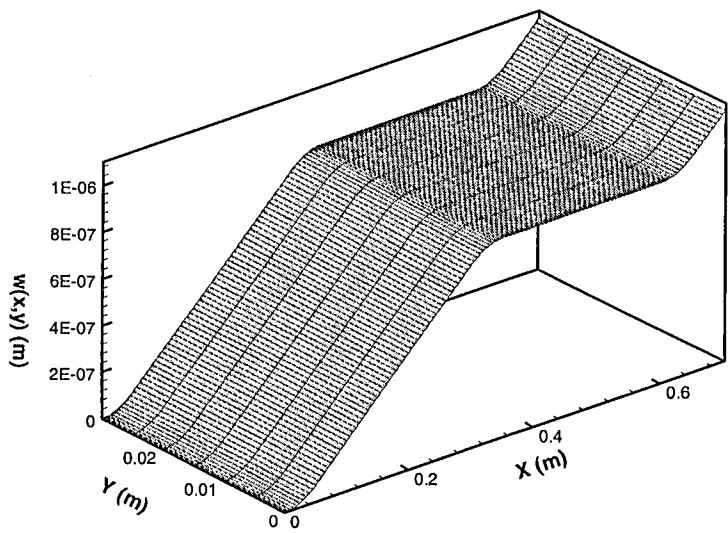


Figura 4.3- Distribuição das deflexões estáticas da viga elástica obtida pelo programa de simulação empregado.

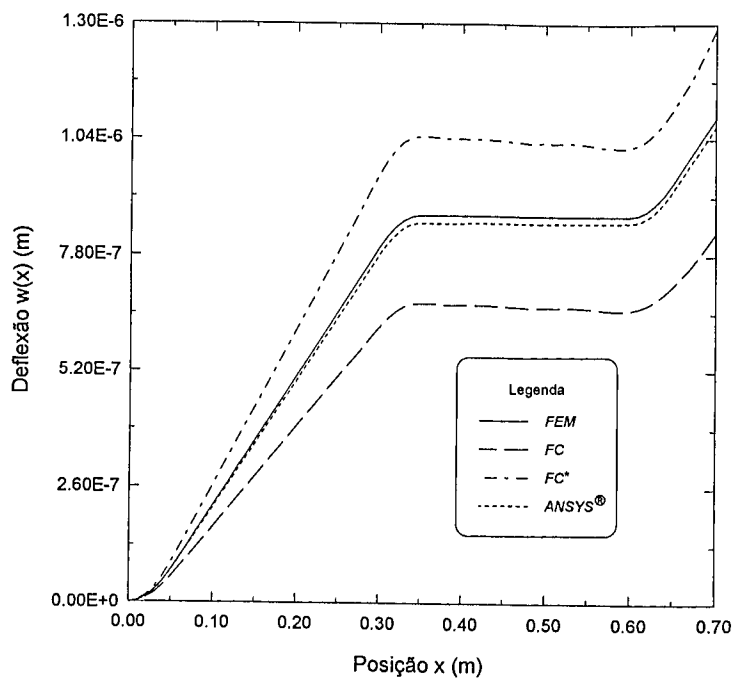


Figura 4.4- Comparação dos resultados obtidos para a deflexão da viga determinada pelas técnicas de modelagem apresentadas.

Observa-se claramente, na figura precedente, a excelente concordância entre os resultados apresentados para a formulação *FEM* e *ANSYS*[®] (obtido a partir do gráfico ilustrado na Fig. 4.3). Entretanto, na formulação contínua (*FC*), quando se utiliza a Eq. (3.99) (uso do termo C_0), o resultado obtido mostra que a amplitude da deflexão da viga é ligeiramente menor em relação aos casos anteriormente mencionados. Isto se deve ao fato da técnica *FEM* utilizar, em sua formulação, a tensão induzida constante ao longo da espessura do material piezelétrico o que resulta num aumento da deflexão da viga em relação ao resultado obtido pela Eq. (3.99). Ao se empregar a Eq. (3.101) (termo C_0^*), fato semelhante ocorre em relação à discussão precedente. Nesta nova situação, os efeitos de rigidez, que aparecem devido à presença dos materiais piezelétricos na estrutura principal, não são considerados. Este fato pode ser comprovado através do gráfico mostrado na Fig. 4.5 que ilustra o resultado de uma simulação numérica realizada para a formulação *FEM* onde estes efeitos foram omitidos.

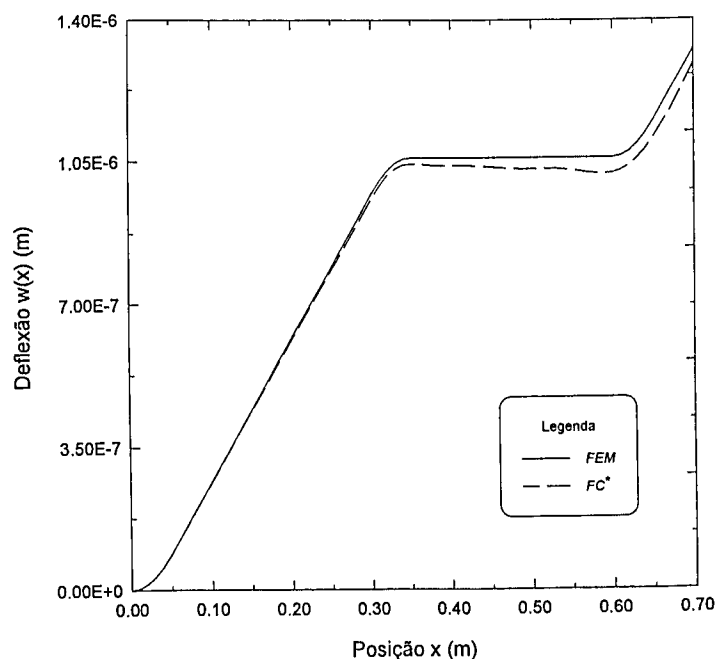


Figura 4.5- Comparação entre os resultados obtidos pela formulação contínua (uso do termo C_0^*) e *FEM* onde os efeitos inerciais e de rigidez dos materiais piezelétricos não foram considerados.

Sob uma análise conclusiva, verificou-se que os resultados ilustrados nas figuras apresentadas foram quase idênticos. Apesar da não consideração dos efeitos da incorporação destes elementos na estrutura principal, a influência dos mesmos foi bem caracterizada pela técnica *FC* desenvolvida.

Numa segunda etapa deste mesmo procedimento de validação, os potenciais elétricos, gerados pelos sensores piezelétricos, são determinados pelas técnicas de modelagem apresentadas e pelo programa *ANSYS*[®]. Tais respostas são calculadas pelas equações já desenvolvidas e mais uma vez reveladas a seguir.

- I) Na técnica *FEM*, os valores para os potenciais elétricos são determinados a partir da Eq. (2.81).
- II) Na técnica *FC*, a mesma solução pode ser determinada utilizando a Eq. (3.109) ou (3.110).
- III) O código do programa, construído em ambiente *ANSYS*[®], é fornecido no Anexo III, Seção III.2.1.

A tabela a seguir mostra os potenciais elétricos desenvolvidos pelos sensores e obtidos a partir dos métodos de solução apresentados.

Tabela 4.2- Potenciais elétricos gerados pelos sensores piezelétricos distribuídos ao longo da viga flexível.

Sensor	Potencial Elétrico (Volts)			
	FEM	FC	FC*	ANSYS [®]
1	+0.0062220	+0.0071888	+0.0111460	+0.0064081
2	-0.0062220	-0.0070922	-0.0109960	-0.0063942
3	+0.0062220	+0.0054905	+0.0085128	+0.0063942

Observa-se através da Tab. 4.2 que os resultados obtidos quando se utiliza a técnica *FEM* e o programa *ANSYS*[®] são muito próximos e isto comprova, mais uma vez, a veracidade da formulação matemática desenvolvida. Nota-se ainda que os valores dos potenciais elétricos gerados pelos sensores, utilizando-se a técnica *FC*, se afasta dos outros restantes. Fato este deve-se a não inclusão dos efeitos de rigidez dos materiais piezelétricos na formulação.

4.1.3 Análise Dinâmica

A distribuição das deflexões da viga flexível sujeita à atuação intermitente dos elementos piezelétricos (posicionados segundo a configuração mostrada na Fig. 4.2) é obtida pelos métodos de solução apresentados e cujos resultados são confrontados aqui nesta seção.

Um conjunto de testes numéricos são conduzidos na busca pela comparação da resposta dinâmica da viga sujeita à atuação de perturbações periódicas cujas amplitudes são fornecidas pela relação (4.6). Tais perturbações são aplicadas nos elementos cerâmicos em três frequências distintas¹⁵: 20 *Hz*, 65 *Hz* e 145 *Hz* e em diferentes instantes de tempo: 1 *ms*, 5 *ms* e 10 *ms*. Os principais parâmetros empregados nos métodos numéricos apresentados são descritos nos itens relacionados a seguir:

- I) Na técnica *FEM*, a resposta dinâmica do sistema (admitindo perturbações externas desprezíveis) é obtida integrando-se o conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, representado em termos das variáveis de estado e dado pela Eq. (2.99). Assumindo amortecimentos modais nulos, as matrizes $[A]$ e $[B]$ são determinadas a partir de $[M]$ e $[K_g]$ reduzidas a 15 modos de vibração. O número de modos escolhido foi tomado por tentativa e erro até que, no final da busca, uma resposta satisfatória tenha sido atingida. Uma solução alternativa e atraente que possibilita contornar este problema é a técnica do *balanceamento interno* do sistema que, uma vez empregada, fornece a indicação da utilização de um número finito de modos para que o sistema reduzido seja o mais representativo possível do sistema contendo todos os modos. Este e outros aspectos importantes são apresentados e discutidos no Capítulo 5.
- II) Com relação à técnica *FC*, a resposta do sistema dinâmico, sujeito às excitações piezelétricas, pode ser obtida utilizando a Eq. (3.129a). Neste caso o número de modos empregados na montagem das matrizes de estado é idêntico à situação apresentada no item anterior.
- III) No ambiente de simulação *ANSYS*[®], a mesma resposta é determinada a partir do código fornecido no Anexo III, Seção III.2.2.

Para as técnicas *FEM* e *FC*, o sistema dinâmico foi simulado integrando-se as Eqs. (2.99) e (3.129a) a partir do método de Runge-Kutta de 4ª ordem e passo variável. O tempo de discretização escolhido foi de 0.1 *ms* e as condições iniciais foram estabelecidas nulas. A partir do instante de tempo inicial, os atuadores piezelétricos foram acionados por um potencial elétrico variável nas frequências de excitação já mencionadas. A Figura 4.6 mostra os resultados obtidos nos instantes de tempo 1 *ms*, 5 *ms* e 10 *ms*.

¹⁵ As frequências de excitação foram escolhidas entre duas frequências naturais do sistema obtidas pela Eq. (3.122b).

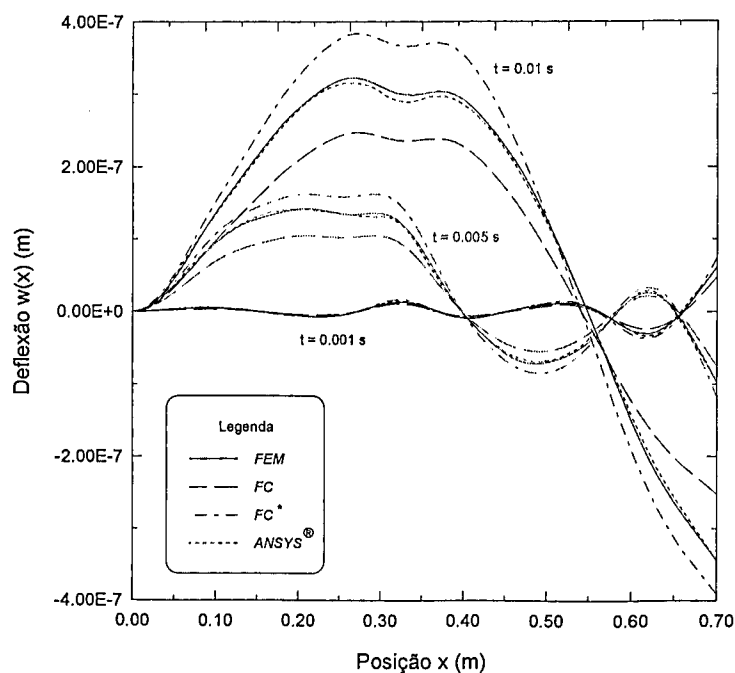


Figura 4.6- Distribuição das deflexões dinâmicas da viga nos tempos 1 *ms*, 5 *ms* e 10 *ms*.

Os gráficos obtidos pelo programa *ANSYS*®, ilustrados na Fig. 4.6, foram extraídos a partir dos gráficos mostrados nas figuras que se seguem.

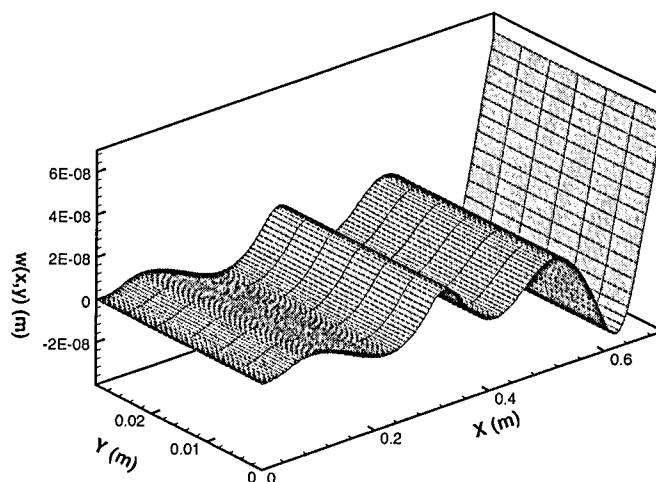


Figura 4.7- Distribuição das deflexões dinâmicas da viga elástica no tempo 1 *ms* obtida pelo programa comercial empregado.

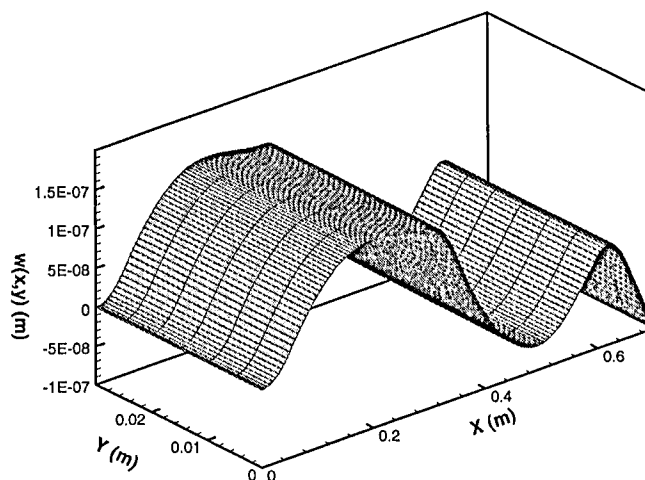


Figura 4.8- Distribuição das deflexões dinâmicas da viga elástica no tempo 5 *ms* obtida obtida pelo programa comercial empregado.

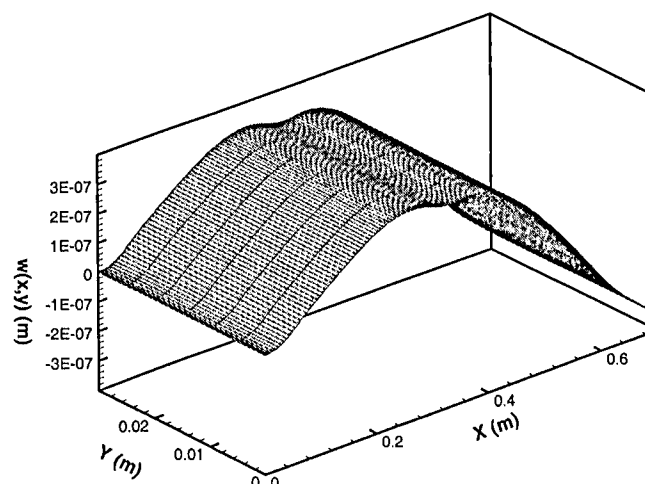


Figura 4.9- Distribuição das deflexões dinâmicas da viga elástica no tempo 10 *ms* obtida pelo programa comercial empregado.

Na fase final deste procedimento de validação, os potenciais elétricos gerados pelos sensores, no intervalo de 10 *ms*, e determinados pelas técnicas apresentadas a partir das Eqs. (2.106) (*FEM*) e (3.129c) (*FC*) e do programa *ANSYS*[®] (veja Anexo III, Seção III.2.2), são aqui validados. A Figura 4.10 ilustra os resultados obtidos.

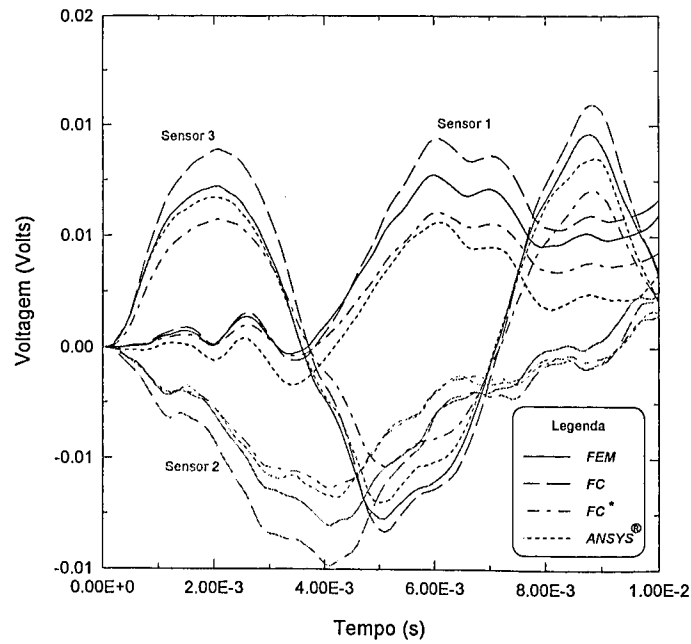


Figura 4.10- Potenciais elétricos gerados pelos sensores durante o intervalo de tempo de 10 *ms*.

Observa-se, mais uma vez, que os resultados, apresentados nas figuras precedentes, confirmam a eficiência das técnicas de modelagem desenvolvidas quando comparadas com o programa de simulação utilizado.

4.1.4 Funções de Transferência do Sistema

Nesta seção, as funções de transferência do sistema, isto é, as respostas em frequência do modelo estrutura-materiais piezelétricos (configuração ilustrada pela Fig. 4.2) são determinadas a partir das técnicas de modelagem desenvolvidas.

O procedimento de validação é dividido em duas etapas: Na primeira, a resposta em frequência do sistema¹⁶ é obtida utilizando-se as Eqs. (2.108) e (3.126) e na segunda etapa, a função de transferência é determinada empregando as Eqs. (2.109) e (3.127). Assim, obtém-se, respectivamente, as funções resposta em frequência $G_{aw}^{ij}(s)$ ou $G_{as}^{ij}(s)$, relacionando os *j*-ésimos sinais de entrada (Φ_a) com os *i*-ésimos sinais medidos (w e Φ_s). As Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 ilustram, respectivamente, as funções $G_{aw}^{11}(s)$, $G_{aw}^{12}(s)$ e $G_{aw}^{13}(s)$ que relacionam os sinais dos atuadores 1, 2 e 3 (veja Fig. 4.2) com o sinal do sensor *discreto* posicionado próximo à extremidade livre da estrutura (posição $x = 0.69$ m).

¹⁶ Um total de 15 modos foram empregados para compor o sistema reduzido.

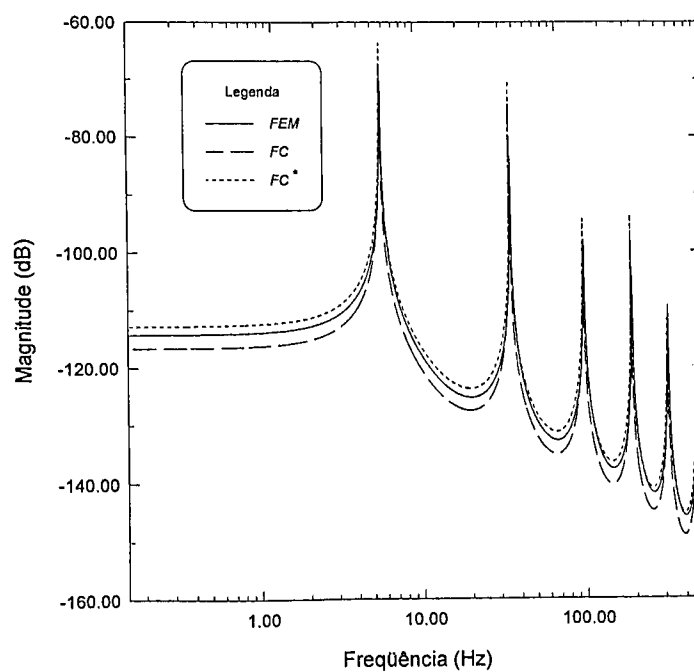


Figura 4.11- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

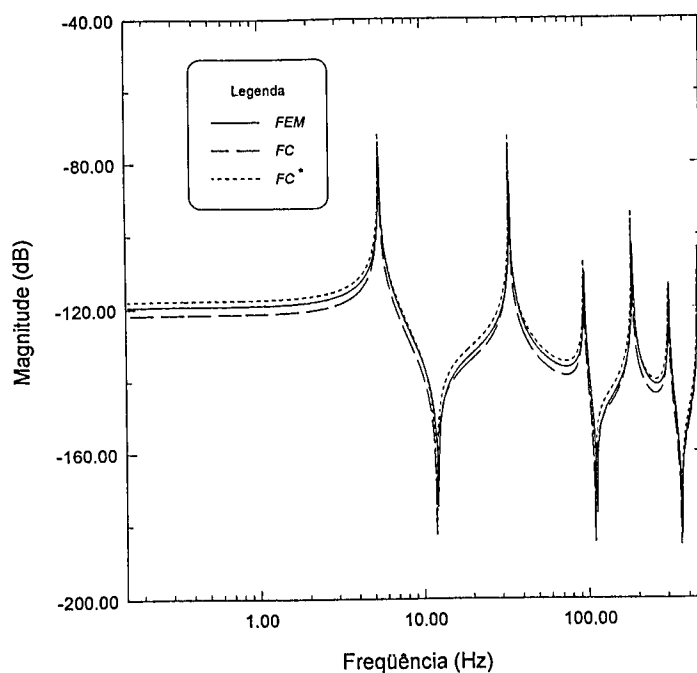


Figura 4.12- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

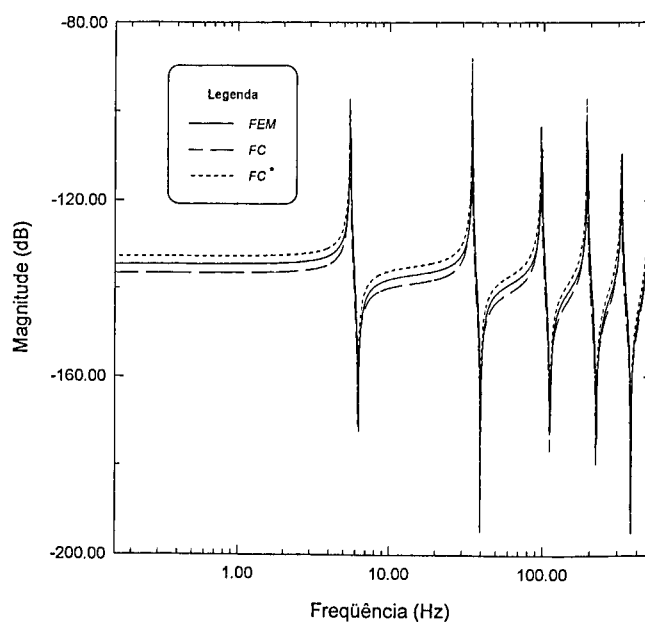


Figura 4.13- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

Finalmente, as funções de transferência $G_{as}^{11}(s)$, $G_{as}^{12}(s)$ e $G_{as}^{13}(s)$, relacionando os sinais dos atuadores (1, 2 e 3) com o sinal do primeiro sensor 1 (veja Fig. 4.2), são ilustradas pelas Figs. 4.14, 4.15 e 4.16.

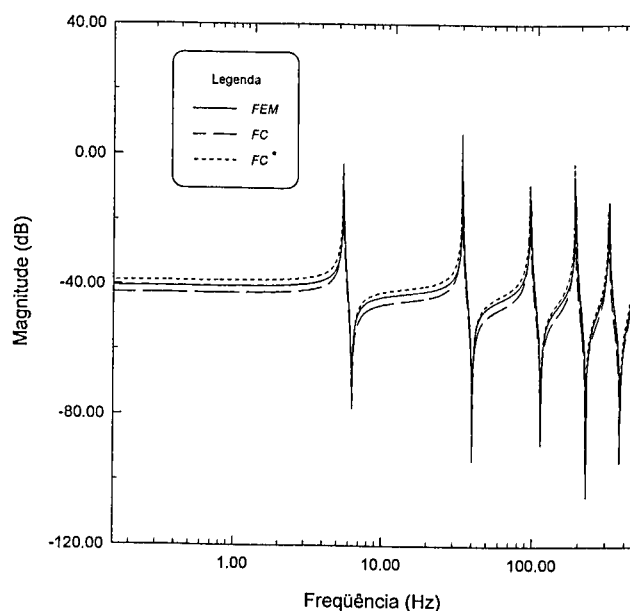


Figura 4.14- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

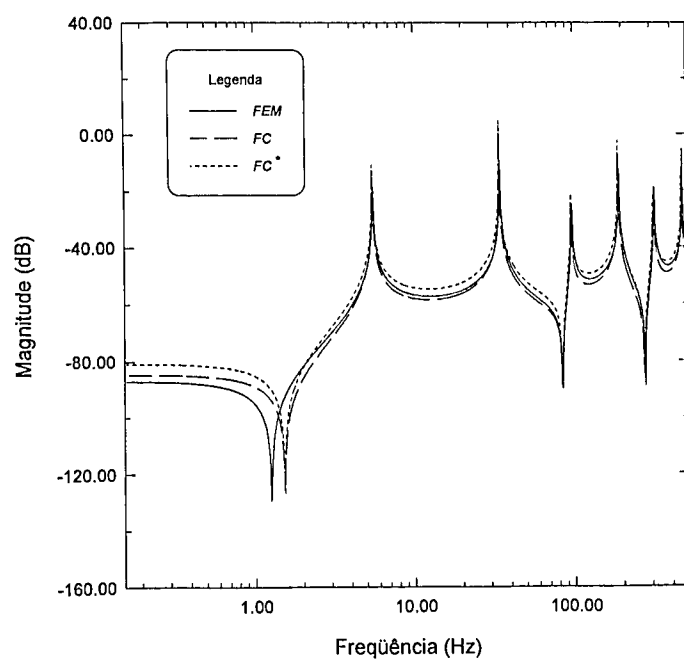


Figura 4.15- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

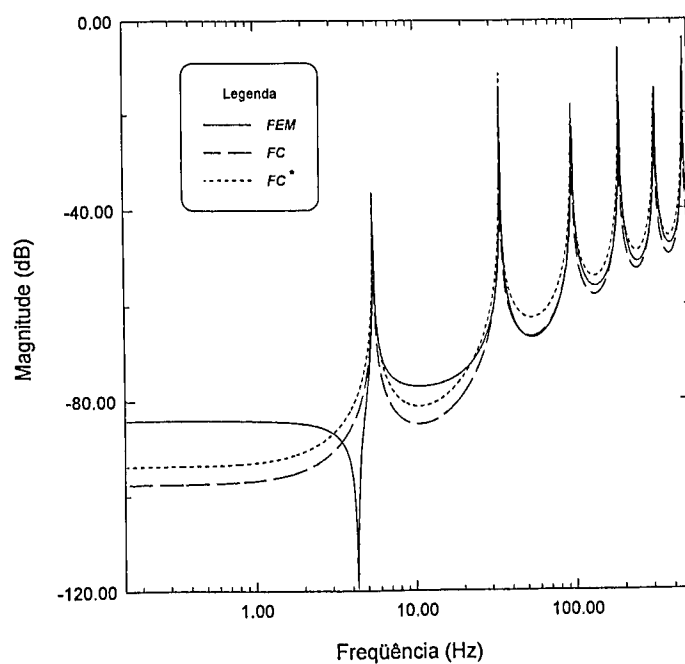


Figura 4.16- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

Observa-se claramente, através dos gráficos ilustrados, a boa concordância dos resultados numéricos obtidos pelas técnicas de modelagem apresentadas. Pequenas discordâncias são verificadas com relação à magnitude das funções de transferência e frequências do sistema e como já afirmado, a não inclusão dos efeitos inerciais e de rigidez dos materiais piezelétricos ocasiona estes erros relativamente pequenos.

4.2 Estrutura Tipo Placa Flexível

A validação dos modelos desenvolvidos para este tipo de estrutura, comparando-se com os dados gerados pelo programa *ANSYS*[®] (veja Anexo III), é realizada em detalhes nas seções que se seguem.

4.2.1 Parâmetros do Sistema Dinâmico

Para a realização dos testes numéricos comparativos, o sistema dinâmico escolhido consiste numa placa de aço flexível apoiada em seus quatro lados. A descrição completa das propriedades físicas e geométricas da estrutura e dos materiais piezelétricos incorporados é fornecida pela Tab. 4.3.

Tabela 4.3- Propriedades físicas e geométricas da placa e dos materiais piezelétricos.

Propriedades	Unidades	Piezelétrico		Placa
		Sensor	Atuador	
E (Módulo de Young)	GPa	2	69	207
ρ (Densidade)	kg/m^3	1780	7700	7870
h (Espessura)	$m \times 10^{-3}$	0.205	0.254	1.0
ν (Poisson)	--	0.30	0.30	0.29
L_y (Largura)	$m \times 10^{-3}$	100	100	400
L_x (Comprimento)	$m \times 10^{-3}$	100	100	600
d_{31} (Constante piezelétrica)	$C/N \times 10^{-12}$	23	-179	--
k_d (Constante dielétrica)	--	12	1800	--

Os parâmetros demandados pelas técnicas de solução mencionadas são brevemente descritos nos ítems relacionados a seguir.

I) Modelo Discretizado (FEM)

A placa é discretizada pela técnica *FEM* utilizando-se uma malha constituída por 24×16 elementos finitos dispostos ao longo de seu comprimento L_x e largura L_y , respectivamente.

II) Modelo Contínuo (FC)

Na presente formulação, as funções modais $\phi_{kl}(x, y)$, determinadas a partir das condições de contorno pré-estabelecidas, são formuladas segundo a expressão (Dimitriadis et al, 1991):

$$\phi_{kl}(x, y) = \sin(\gamma_k x) \sin(\gamma_l y) \quad (4.9)$$

onde $\gamma_k = \frac{k\pi}{L_x}$ e $\gamma_l = \frac{l\pi}{L_y}$, para $k = 1, 2, \dots, m$ e $l = 1, 2, \dots, n$.

III) Programa de Simulação ANSYS®

Neste programa (veja Anexo III, Seções III.2.3 e III.2.4) empregou-se um elemento tridimensional com 8 nós possuindo até 6 graus de liberdade por nó, para a caracterização dos materiais piezelétricos e um elemento tridimensional estrutural com 3 graus de liberdade em cada nó, representativo da placa flexível. Discretizou-se a estrutura utilizando uma malha 60×40 e para os materiais piezelétricos empregou-se uma malha 10×10 para cada atuador e sensor.

Nos testes numéricos efetuados, os pares de materiais piezelétricos (sensores e atuadores) foram posicionados na placa segundo mostra a Fig. 4.17.

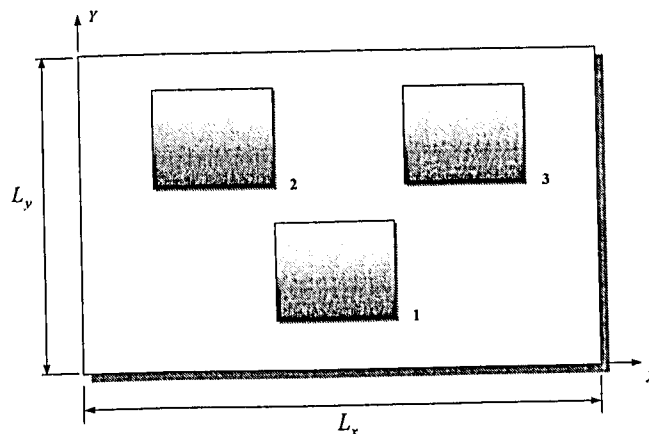


Figura 4.17- Disposição dos materiais piezelétricos distribuídos sobre a placa flexível.

As posições x_1 e y_1 referentes a cada material piezelétrico são apresentadas pela Tab. 4.4.

Tabela 4.4- Posições dos materiais piezelétricos na placa.

Posições (m)	Material		
	1	2	3
x_1	0.25	0.15	0.35
y_1	0.05	0.25	0.25

4.2.2 Análise Estática

A primeira etapa de validação dos modelos construídos (*FEM* e *FC*) com o modelo implementado no programa *ANSYS*[®] consiste na comparação da distribuição das deflexões da placa sujeita a um carregamento constante provocado pelos elementos piezelétricos. Estes elementos são alimentados por um vetor de potenciais elétricos descrito na forma:

$$\{\Phi_a\} = \{ -1.0 \quad 1.0 \quad 1.0 \}^T \quad (4.10)$$

A distribuição das deflexões estáticas é obtida mediante a execução de alguns procedimentos específicos empregados para cada tipo de modelagem apresentada, quais sejam:

- I) Na técnica *FEM*, a resposta pretendida pode ser obtida utilizando a Eq. (4.7), onde foram empregados $n = 50$ modos no procedimento de redução do modelo.
- II) Utilizando a técnica de modelagem *FC*, a mesma solução pode ser obtida empregando as Eqs. (3.3) e (3.57), resultando na seguinte expressão:

$$w(x, y) = k_a \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\phi_{kl}(x, y)}{\Omega_{n_{kl}}^2} \sum_{j=1}^{n_a} (F_{x_j}^{kl} + F_{y_j}^{kl}) \Phi_{a_j} \quad (4.11)$$

onde

$$\Omega_{n_{kl}}^2 = \frac{L_x L_y}{4} \omega_{n_{kl}}^2 \quad (4.12a)$$

$$F_{x_j}^{kl} = \frac{\gamma_l}{\gamma_k} [\cos \gamma_k x_{a_{j2}} (\cos \gamma_l y_{a_{j1}} - \cos \gamma_l y_{a_{j2}}) - \cos \gamma_k x_{a_{j1}} (\cos \gamma_l y_{a_{j1}} - \cos \gamma_l y_{a_{j2}})] \quad (4.12b)$$

$$F_{y_j}^{kl} = \frac{\gamma_k}{\gamma_l} [\cos \gamma_k x_{a_{j2}} (\cos \gamma_l y_{a_{j1}} - \cos \gamma_l y_{a_{j2}}) - \cos \gamma_k x_{a_{j1}} (\cos \gamma_l y_{a_{j1}} - \cos \gamma_l y_{a_{j2}})] \quad (4.12c)$$

A equação (4.11) pode ser expressa numa forma mais estendida, substituindo-se os termos acima listados na mesma (Dimitriadis et al, 1991):

$$w(x, y) = \frac{4k_a}{L_x L_y} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\phi_{kl}(x, y)}{\omega_{n_{kl}}^2} \sum_{j=1}^{n_a} \Upsilon_{a_j} \Phi_{a_j} \quad (4.13)$$

onde $m = n = 50$, k_a é dada pela Eq. (3.60) e $\omega_{n_{kl}}$ e Υ_{a_j} ($F_{x_j}^{kl} + F_{y_j}^{kl}$) denotam, respectivamente, as freqüências naturais da placa e a função localização do j -ésimo atuador, sendo determinadas a partir das seguintes expressões:

$$\omega_{n_{kl}} = \sqrt{\frac{K_f}{\rho_p h_p}} (\gamma_k^2 + \gamma_l^2) \quad (4.14)$$

$$\Upsilon_{a_j} = \frac{\gamma_k^2 + \gamma_l^2}{\gamma_k \gamma_l} (\cos \gamma_l y_{a_{j1}} - \cos \gamma_l y_{a_{j2}}) (\cos \gamma_k x_{a_{j2}} - \cos \gamma_k x_{a_{j1}}) \quad (4.15)$$

III) A distribuição das deflexões estáticas da placa, obtida mediante testes numéricos realizados em ambiente *ANSYS*[®], é fornecida no Anexo III, Seção III.2.3.

A comparação dos resultados obtidos para a distribuição das deflexões estáticas da estrutura, determinadas a partir das técnicas de modelagem apresentadas, é realizada nos gráficos ilustrados pelas Figs. 4.18, 4.19 e 4.20.

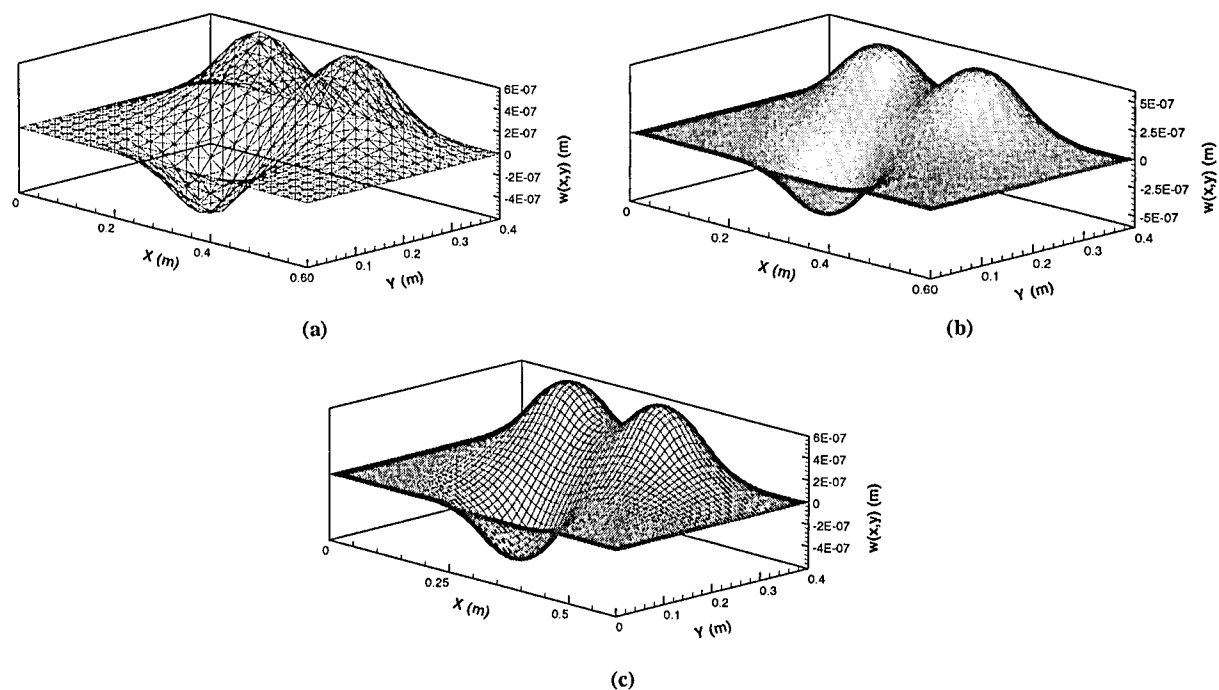


Figura 4.18- Comparação dos resultados obtidos para a deflexão estática da placa entre as modelagens (a) *FEM*, (b) *FC* e (c) *ANSYS*.

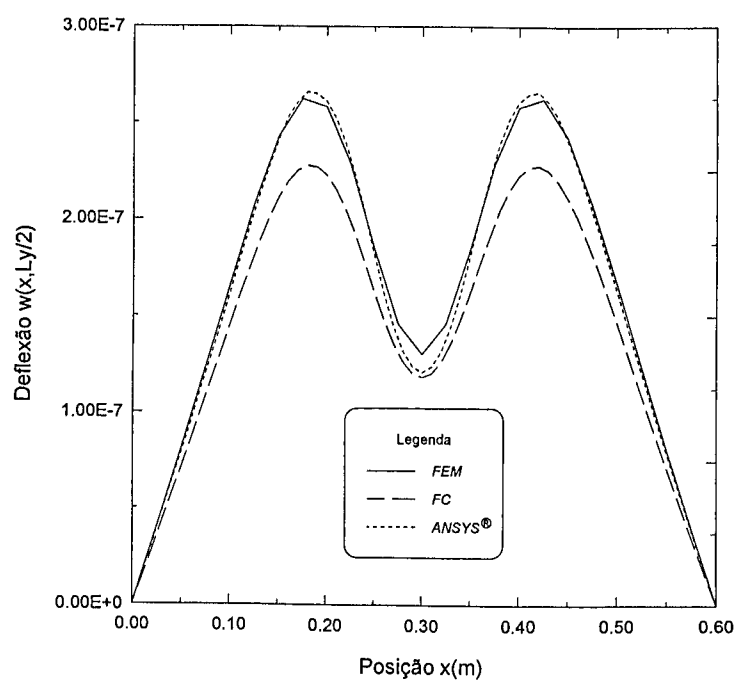


Figura 4.19- Distribuição das deflexões estáticas da placa ao longo do eixo x e em $\frac{L_y}{2}$.

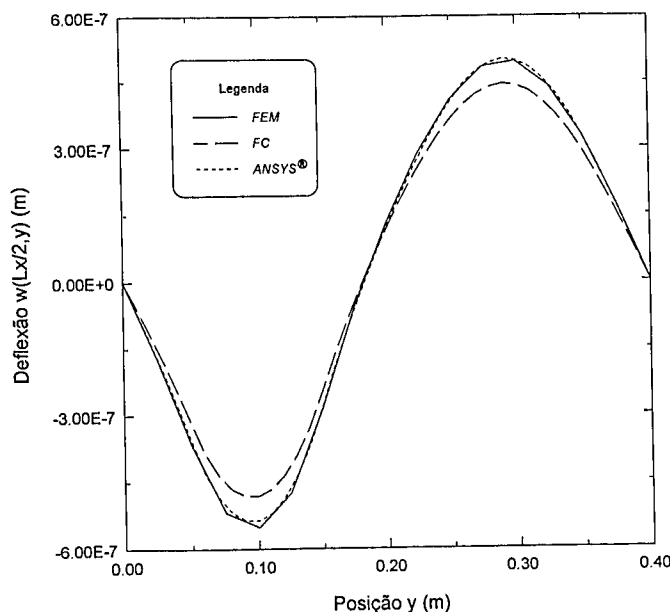


Figura 4.20- Distribuição das deflexões estáticas da placa ao longo do eixo y e em $\frac{L_x}{2}$.

Através da análise dos gráficos mostrados nas figuras precedentes, comprova-se a excelente concordância entre os resultados obtidos utilizando-se a técnica *FEM* e o pacote de simulação. Por outro lado, os resultados determinados a partir da formulação contínua (*FC*) se afastaram ligeiramente dos outros restantes. Isto se deve ao fato da técnica *FC* não considerar, na sua formulação, efeitos de rigidez e inércia provocados pela incorporação dos materiais piezelétricos na estrutura principal.

Na sequência, os potenciais elétricos gerados pelos sensores piezelétricos são avaliados com base nos resultados apresentados.

- I) Na técnica de solução *FEM* os potenciais elétricos são determinados pela Eq. (2.81).
- II) Na técnica *FC*, estes mesmos resultados são auferidos utilizando, por exemplo, a Eq. (3.65) que, uma vez avaliada (assumindo $e_{s31} = e_{s32}$), resulta na seguinte expressão:

$$\Phi_{s_i} = -\frac{2e_{s31}k_a}{C_s L_x L_y} (h_p + h_s) \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\Upsilon_{s_i}}{\omega_{nkl}^2} \sum_{j=1}^{n_a} \Upsilon_{a_j} \Phi_{a_j} \quad (4.16)$$

onde $m = n = 50$, C_s é a capacitância do material piezelétrico fornecida pela Eq. (3.52) e Υ_{s_i} é a função localização do i -ésimo sensor na placa, dada por:

$$\Upsilon_{s_i} = \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_l} + \frac{\gamma_l}{\gamma_k} \right) (\cos \gamma_k x_{s_{i2}} - \cos \gamma_k x_{s_{i1}}) (\cos \gamma_l y_{s_{i2}} - \cos \gamma_l y_{s_{i1}}) \quad (4.17)$$

- III) Em ambiente *ANSYS*[®], um código numérico foi construído para computar tal solução. Este código encontra-se no Anexo III, Seção III.2.3.

Os resultados obtidos são apresentados pela Tab. 4.5.

Tabela 4.5- Potenciais elétricos gerados pelos sensores piezelétricos incorporados na placa.

Sensor	Potencial Elétrico (Volts)		
	FEM	FC	ANSYS [®]
1	+0.0162178	+0.0139268	+0.0116576
2	-0.0162150	-0.0139280	-0.0115743
3	-0.0162150	-0.0139280	-0.0115743

4.2.3 Análise Dinâmica

A presente validação visa a realização da análise dinâmica da estrutura sujeita à atuação dos três elementos piezelétricos empregando-se os modelos numéricos desenvolvidos. Estes elementos excitadores (elementos 1, 2 e 3) são alimentados por sinais periódicos em três frequências distintas: 30 Hz, 50 Hz e 70 Hz e em diferentes instantes de tempo: 1 ms, 5 ms e 10 ms. As frequências de excitação, calculadas pela Eq. (4.14), foram escolhidas entre duas frequências naturais dos seguintes modos (k, l): (1, 1) e (2, 1) para a primeira frequência de excitação, (2, 1) e (1, 2) para a segunda e (1, 2) e (3, 1) para a terceira.

- I e II) Para as formulações *FEM* e *FC*, a solução pretendida pode ser alcançada utilizando as matrizes de estado do sistema (A, B e C). Tais matrizes são obtidas a partir das Eqs. (2.100)-(2.102) e (3.73d)-(3.73h). Assim, para simular o sistema dinâmico (reduzido à 50 modos de vibrar), o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é empregado. O tempo de discretização utilizado foi de 0.1 ms e as condições iniciais foram admitidas nulas. A partir deste instante de tempo, os três atuadores piezelétricos foram acionados pelo potencial elétrico variável.
- III) No modelo construído em ambiente *ANSYS*[®], o sistema em questão é simulado nos tempos já mencionados a partir do código numérico fornecido no Anexo III, Seção III.2.4.

As Figuras 4.21, 4.22 e 4.23 apresentam os resultados finais obtidos a partir das simulações numéricas efetuadas.

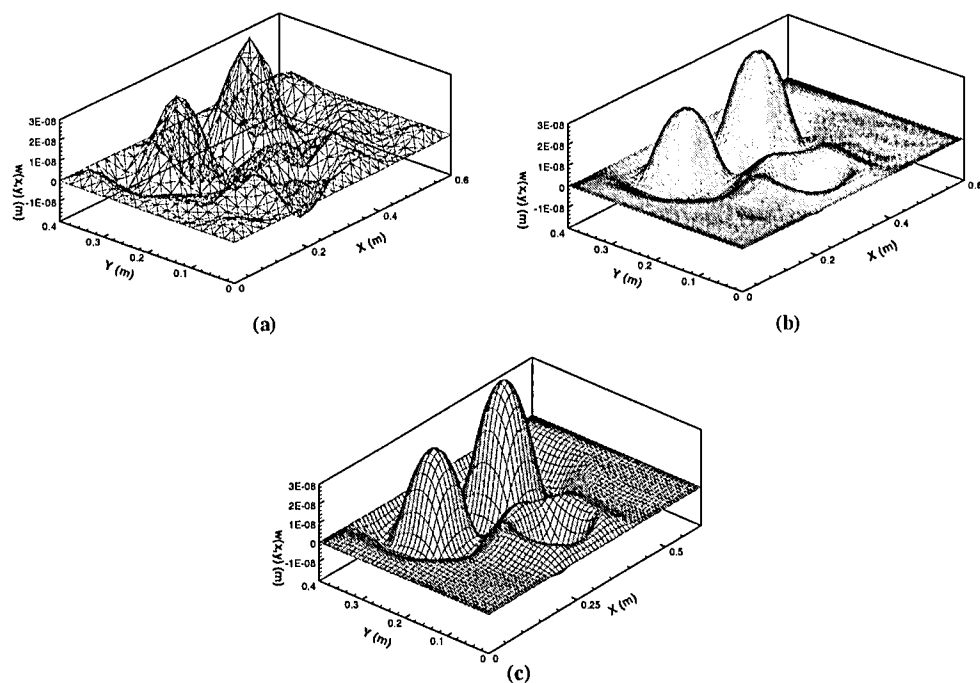


Figura 4.21- Comparação dos resultados obtidos para a deflexão dinâmica da placa entre as modelagens (a) *FEM*, (b) *FC* e (c) *ANSYS* no instante de tempo 1 *ms*.

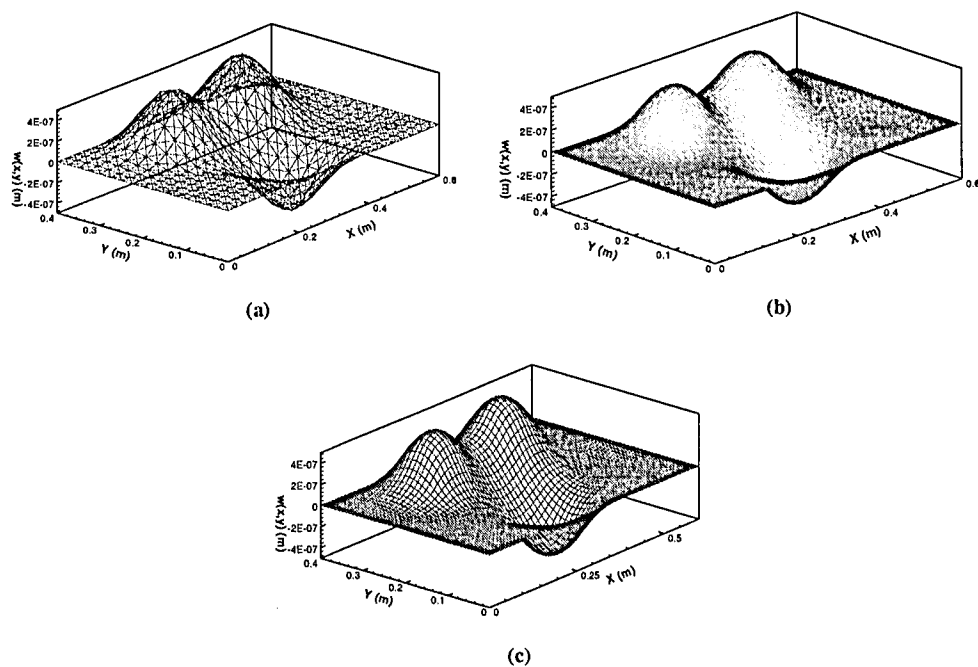


Figura 4.22- Comparação dos resultados obtidos para a deflexão dinâmica da placa entre as modelagens (a) *FEM*, (b) *FC* e (c) *ANSYS* no instante de tempo 5 *ms*.

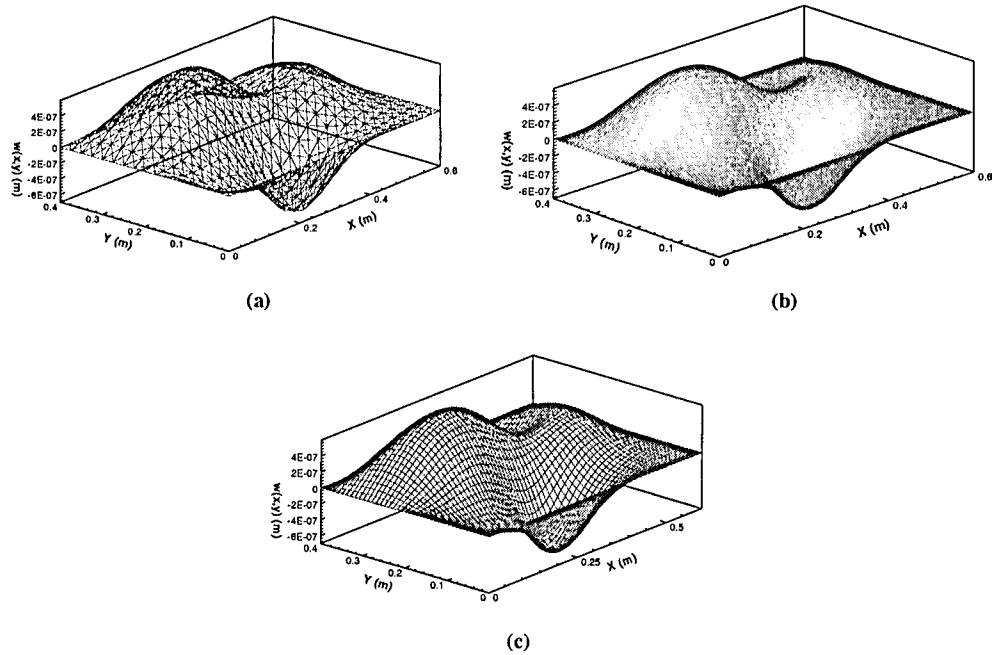


Figura 4.23- Comparação dos resultados obtidos para a deflexão dinâmica da placa entre as modelagens (a) *FEM*, (b) *FC* e (c) *ANSYS* no instante de tempo 10 *ms*.

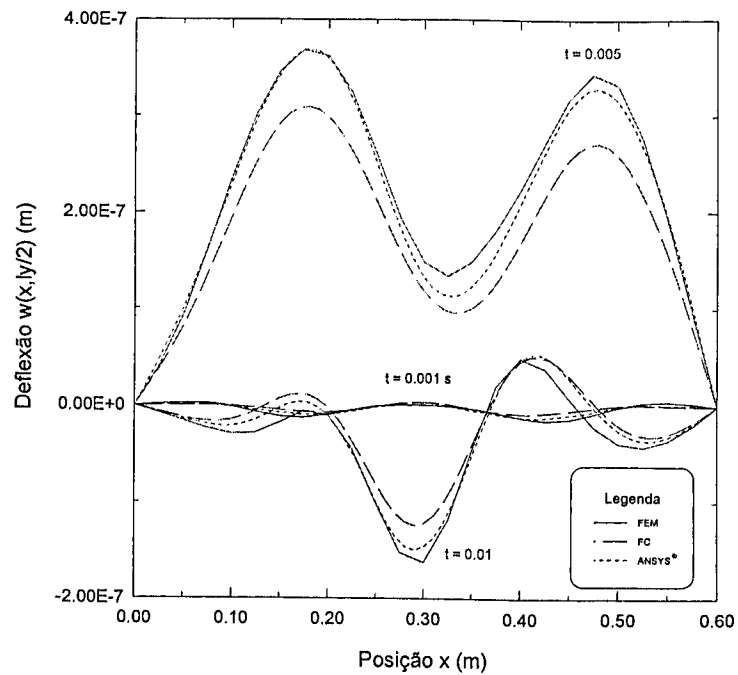


Figura 4.24- Distribuição das deflexões dinâmicas da placa ao longo do eixo x e em $\frac{L_y}{2}$ e nos tempos 1 *ms*, 5 *ms* e 10 *ms*.

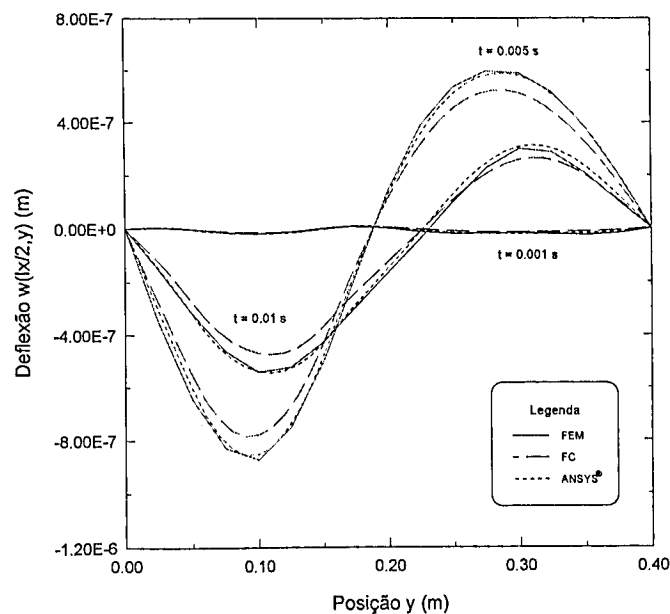


Figura 4.25- Distribuição das deflexões dinâmicas da placa ao longo do eixo y e em $\frac{L_x}{2}$ e nos tempos 1 ms, 5 ms e 10 ms.

Finalmente, os potenciais elétricos gerados pelos sensores, no intervalo de tempo de 1 ms, fornecidos pelas Eqs. (2.106) e (3.72c) (FC) e obtidos através do programa ANSYS® (veja Anexo III, Seção III.2.4), são aqui confrontados. A Figura 4.26 ilustra estes resultados.

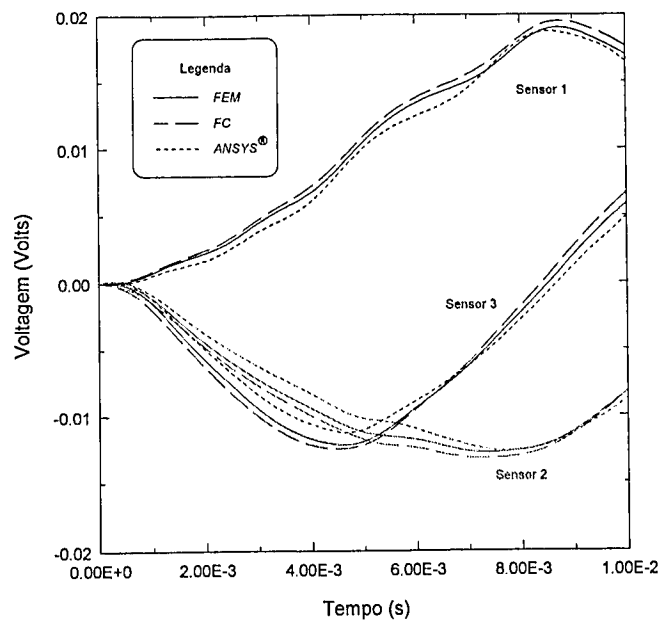


Figura 4.26- Potenciais elétricos gerados pelos sensores durante o intervalo de tempo 0.01 s.

Pode-se observar, nas figuras apresentadas, a boa aproximação dos resultados obtidos em todos os testes numéricos realizados. Este fato comprova a eficiência das técnicas de modelagem desenvolvidas quando comparadas com o programa de simulação utilizado.

4.2.4 Funções de Transferência do Sistema

Nesta seção as respostas em frequência do sistema são determinadas a partir das técnicas de modelagem desenvolvidas. Este tipo de validação consiste na caracterização das funções de transferência do sistema $G_{aw}^{ij}(s)$ e $G_{as}^{ij}(s)$ que relacionam os j -ésimos sinais de entrada (Φ_a) com os i -ésimos sinais medidos (w e Φ_s). A função $G_{aw}^{ij}(s)$ é obtida utilizando as Eqs. (2.108) e (3.69) e $G_{as}^{ij}(s)$ é determinada pelas Eqs. (2.109) e (3.70).

As Figuras 4.27, 4.28 e 4.29 ilustram, respectivamente, as funções resposta em frequência $G_{aw}^{11}(s)$, $G_{aw}^{12}(s)$ e $G_{aw}^{13}(s)$ relacionando os sinais dos atuadores 1, 2 e 3 (veja Fig. 4.17) com o sinal do sensor *discreto* posicionado no ponto central da placa (posição $x = 0.3\text{ m}$ e $y = 0.2\text{ m}$).

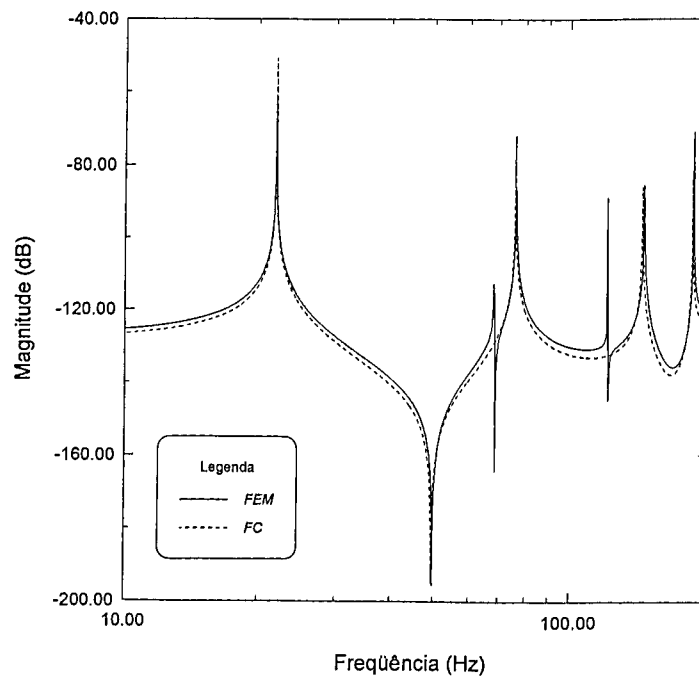


Figura 4.27- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

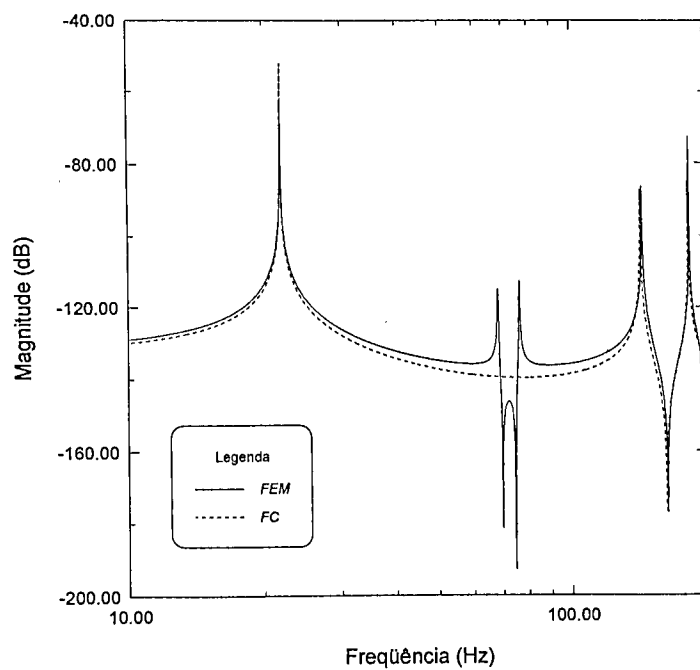


Figura 4.28- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

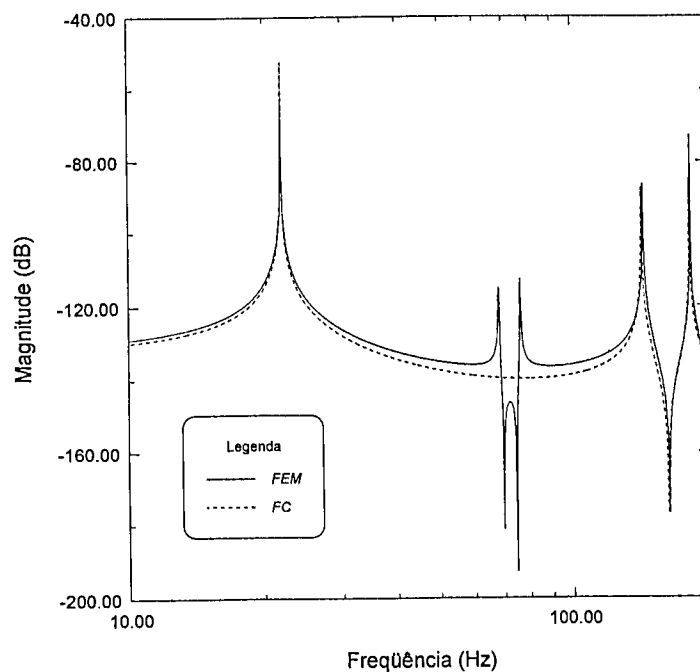


Figura 4.29- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{aw}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

Já as funções de transferência $G_{as}^{11}(s)$, $G_{as}^{12}(s)$ e $G_{as}^{13}(s)$, relacionando os sinais dos atuadores (1, 2 e 3) com o sinal do primeiro sensor piezelétrico (veja Fig. 4.17), são mostradas, respectivamente, pelas Figs. 4.30, 4.31 e 4.32.

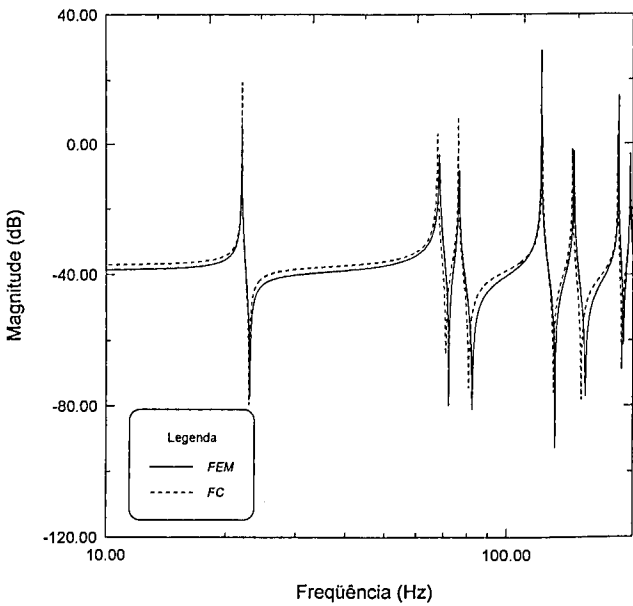


Figura 4.30- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{11}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

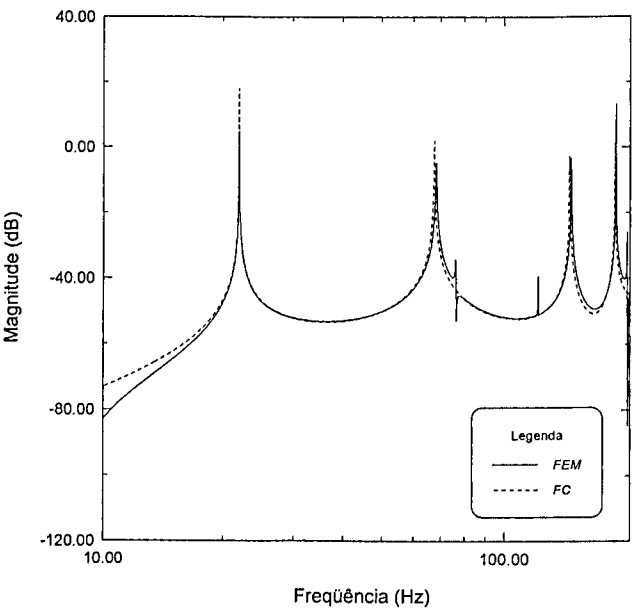


Figura 4.31- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{12}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

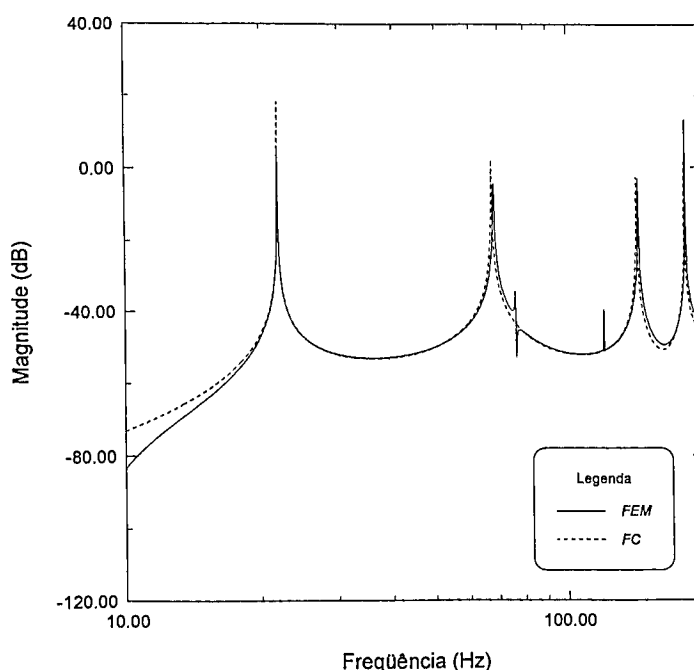


Figura 4.32- Comparação da resposta em frequência do sistema (G_{as}^{13}) entre os modelos numéricos desenvolvidos.

Comprova-se mais uma vez, a partir dos resultados apresentados, a excelente aproximação das técnicas de modelagem desenvolvidas. Pequenos desvios são percebidos com relação principalmente ao valor das frequências naturais da estrutura e isto se deve ao fato da não consideração dos efeitos inerciais e de rigidez provocados pela incorporação dos materiais piezelétricos na estrutura principal.

Os resultados determinados a partir dos modelos apresentados, propiciaram não só a compreensão do comportamento da interação entre a estrutura e os elementos piezelétricos, como também permitiram que se fizesse uma análise detalhada sobre as diferentes abordagens para o tratamento do problema exposto. No capítulo seguinte é realizado um estudo do posicionamento destes elementos na estrutura utilizando-se a técnica do *custo modal* desenvolvida por Skelton e Yousuff (1983). Uma outra técnica que visa a eliminação de estados não observados/controlados para a redução de modelos (Moore, 1981) é também discutida em detalhes.

Capítulo 5

Posicionamento de Sensores e Atuadores em Estruturas Flexíveis e Redução de Modelos

Este capítulo trata de algumas etapas fundamentais a serem empregadas no projeto de um sistema de controle, quais sejam: **a)** escolha do número de sensores e atuadores a serem utilizados; **b)** escolha da localização destes elementos na estrutura; **c)** procedimento de redução de modelos e **d)** incorporação dos efeitos provocados pelo procedimento de redução no modelo de projeto do controlador. Em determinados problemas, como por exemplo, o controle de grandes estruturas espaciais (Skelton e DeLorenzo, 1984), o número e a localização de atuadores e sensores são variáveis de projeto de fundamental importância pois exigem-se dentre outros requisitos: um rigoroso controle no tocante ao desempenho dos atuadores/sensores, segurança, versatilidade e custo dos sistemas estruturais envolvidos neste tipo de projeto. Também neste caso, vale ressaltar que o tamanho do modelo da planta, assim como os efeitos provocados pela redução de modelos precisam ser criteriosamente avaliados.

Este capítulo inicia apresentando os conceitos fundamentais de controlabilidade e observabilidade do sistema, evolui apresentando a forma de análise de custo modal, proposta por Skelton e Yousuff (1983) e uma técnica de *eliminação de estados* não observados/controlados (Moore, 1981) que visa a redução de modelos ilustrando-se, inclusive, dois estudos de casos que objetiva a aplicação das técnicas apresentadas. O capítulo encerra avaliando e incorporando-se, convenientemente, os efeitos provocados pela dinâmica não considerada no modelo de projeto do controlador.

5.1 Conceitos de Controlabilidade e Observabilidade

O conceito de controlabilidade está associado à possibilidade de uma lei de controle atender determinados requisitos de desempenho a partir de diferentes condições iniciais para as variáveis de estado do sistema. Já a observabilidade trata da capacidade de se estimarem ou reconstruírem variáveis de estado não mensuráveis a partir de variáveis mensuráveis no menor intervalo de tempo possível.

Seja o sistema linear descrito por:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \quad (5.1a)$$

$$y(t) = C\bar{x}(t) \quad (5.1b)$$

onde:

\bar{x} é o estado do sistema (n - dimensional),

u é o sinal de controle (m - dimensional),

A é a matriz do sistema $n \times n$,

B é a matriz de controle $n \times m$ e

C é a matriz de observação $p \times n$

O estado do sistema linear descrito por (5.1a) é dito controlável em $t = t_0$ se for possível construir um sinal de controle limitado $u(t)$ capaz de transferir o sistema do estado inicial arbitrário $\bar{x}(t_0)$ para a origem em t_1 num intervalo de tempo finito ($t_0 \leq t \leq t_1$). Se todos os estados forem controláveis, então o sistema é dito de estados completamente controláveis.

Formalmente, o sistema descrito em (5.1a) é dito completamente controlável:

- se a matriz de controlabilidade C_0 de dimensões $n \times nm$ (Eq. (5.2)) tiver posto n ou que contenha nm vetores coluna linearmente independentes.

$$C_0 = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (5.2)$$

- ou se a matriz gramiano de controlabilidade W_c for não-singular (determinante da matriz diferente de zero) (Ogata, 1998).

$$W_c = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (5.3)$$

onde o gramiano W_c satisfaz a equação de Lyapunov:

$$W_c A^T + A W_c + B B^T = 0 \quad (5.4)$$

Analogamente, diz-se que o sistema é completamente observável se qualquer estado $\bar{x}(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação de $y(t)$, durante um intervalo de tempo finito ($t_0 \leq t \leq t_1$).

Desta forma, o sistema descrito por (5.1a) é dito completamente observável:

- se a matriz de observabilidade O de dimensões $np \times n$ (Eq. (5.5)) tiver posto n ou que contenha np vetores linhas linearmente independentes:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

- ou se a matriz graminiiano de observabilidade for não-singular (Ogata, 1998).

$$W_o = \int_0^\infty e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (5.6)$$

onde o graminiiano W_o satisfaz a equação de Lyapunov:

$$W_o A + A^T W_o + C^T C = 0 \quad (5.7)$$

Na formulação das condições de controlabilidade/observabilidade nota-se o caráter binário das mesmas, ou seja, segundo as definições acima mencionadas, um sistema é ou *não* é controlável/observável. No entanto, é desejável que se estabeleça não somente esta análise, mas deve-se buscar também um mecanismo que quantifique a controlabilidade/observabilidade do mesmo, permitindo assim que se eleja entre uma configuração ou outra de atuadores/sensores *a mais* controlável/observável. O modo de vibrar de uma estrutura flexível, por exemplo, é não observável por um sensor que estiver precisamente posicionado em um nó deste modo. Em contrapartida, se o mesmo estiver ligeiramente deslocado do nó, este modo já será observado pelo mesmo. Naturalmente é de se esperar que uma configuração onde o sensor está mais distante de um nó é *melhor observável* que outra configuração que apresente este sensor próximo do nó.

5.2 A Função Custo Modal

Para analisar o efeito do posicionamento de sensores/atuadores na planta, Skelton e Yousuff (1983) sugeriram o cálculo da *função custo modal*. A idéia básica é construir uma função de custo quadrática resultante da contribuição individual de cada sensor/atuador para a saída do sistema. Deste modo, aquele atuador/sensor que mais contribui com a função de custo deve ser mantido e aquele que contribui muito pouco deve ser reposicionado ou simplesmente eliminado.

Seja V uma função custo que representa a medida de desempenho do sistema dinâmico descrito por (Skelton e Yousuff, 1983):

$$V = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} y^{iT}(t) Q y^i(t) dt \quad (5.8)$$

onde Q é uma matriz de peso que pondera a importância de cada componente da saída e $y^i(t)$ é a saída do sensor na variável de estado i , devido uma entrada impulsiva $u_i(t)$ (supondo estado inicial nulo).

Substituindo (5.1b) em (5.8), obtem-se:

$$V = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \bar{x}^{iT}(t) C^T Q C \bar{x}^i(t) dt \quad (5.9)$$

A resposta do sistema devido a uma entrada impulsiva na i -ésima direção, considerando condições iniciais nulas, é (Ogata, 1998):

$$\bar{x}^i(t) = e^{At} \bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_i(\tau) d\tau = e^{At} B \quad (5.10)$$

onde $u_i(t) = \delta(t)$ é uma entrada impulsiva para $u_j(t) = 0$, $i \neq j$.

Substituindo (5.10) em (5.9), resulta em:

$$V = Q C \left[\sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \right] C^T \quad (5.11)$$

A função custo modal V é obtida substituindo-se a Eq. (5.3) em (5.11), resultando na expressão:

$$V = \text{tr} [Q C W_c C^T] \quad (5.12)$$

ou

$$V = \sum_{i=1}^m V_i = \sum_{i=1}^m [QCW_c C^T]_{ii} \quad (5.13)$$

onde o gramiano de controlabilidade W_c é obtido utilizando-se a Eq. (5.4), V_i é a contribuição de cada componente \bar{x}^i em V e ii representa o i -ésimo índice da diagonal da matriz $QCW_c C^T$.

Nesse sentido, a partir do cálculo da função custo modal V é possível comparar configurações distintas $\{ I \ II \ \dots \ N \}$ de sensores/atuadores - veja Eq. (5.14) - e escolher aquela que mais contribui¹⁷ (maior valor de V) com a função de custo V e também analisar a importância de cada estado ou o custo de cada modo¹⁸ (V_i) na função V .

$$V^{(I)} \geq V^{(II)} \geq \dots \geq V^{(N)} \quad (5.14)$$

Na prática, as configurações possíveis são limitadas por razões físicas/construção e pelo número de sensores/atuadores disponíveis, assim tais configurações devem ser analisadas e as de maior contribuição na função custo modal podem ser empregadas para os testes das leis de controle (Skelton e DeLorenzo, 1984).

Na seção seguinte é apresentada uma técnica de eliminação de estados não observados e controlados baseada no trabalho de Moore (1981), objetivando a redução de modelos. É importante deixar claro que o método de redução de modelos aqui discutido é construído em termos das entradas e saídas do sistema, ou seja, além da dinâmica, representada pela matriz A , importa saber onde estão os sensores/atuadores (matrizes C e B). Assim, por exemplo, se o quinto modo de vibrar de um sistema mecânico não é detectado pelos sensores e não é afetado pelos atuadores, não há razão de conservá-lo no modelo da planta. Por outro lado, o método pseudo-modal de redução, apresentado no Capítulo 2 e Seção 2.4.3, não aborda o problema em termos das entradas e saídas do sistema, ou seja, tal método é construído exclusivamente a partir das informações da dinâmica da planta (matriz A) e o que este método faz é truncar o modelo da planta em malha aberta a partir de um determinado modo de vibrar.

¹⁷ Para um conjunto de configurações possíveis de posicionamento de sensores e/ou atuadores, o maior valor de V está associado aquela posição onde é possível atingir máxima energia de saída do sensor e/ou mínimo esforço do atuador.

¹⁸ Além de permitir que se escolha as configurações ótimas de sensores/atuadores na estrutura (Yousuff e Skelton, 1984), uma outra possibilidade de utilização deste mecanismo de análise é servir como um critério de redução do tamanho do modelo, eliminando as variáveis de estado (empregando-se a medida V_i) que contribuem menos na função custo modal V , segundo algum *critério de corte* definido (Ribeiro, 1995).

5.3 Técnica de Eliminação de Estados não Observados/Controlados para Redução de Modelos

Para a avaliação e testes das leis de controle em estruturas flexíveis, os modelos estruturais são normalmente de ordem bastante elevada. Em muitos casos, para avaliar controladores, como por exemplo, LQR/LTR e H_∞ , torna-se imprescindível reduzir o modelo da planta. Esta questão já foi levantada nos Capítulos 2 e 3 e é aplicada e estudada neste trabalho.

A questão sobre o que realmente é relevante no sistema físico e o que precisa ser modelado foi bastante explorada por Moore (1981) que apresentou o conceito de *balanceamento interno* de sistemas dinâmicos, objetivando a redução de modelos. Moore elegeu para esta análise, as matrizes do gramiano de controlabilidade e gramiano de observabilidade. Os resultados obtidos por Moore foram elaborados a partir da idéia de que os estados não observados e não controlados podem ser eliminados dos modelos, sem alterar as características de entrada e saída do sistema. Este conceito é chamado de *realização mínima* ou modelo de ordem mínima que contém um número finito de estados (por exemplo, modos de vibração associados à uma estrutura flexível) preservando as propriedades do modelo completo. Moore propôs ainda um algoritmo para encontrar a matriz de transformação, que aplicada ao sistema, desde que assintoticamente estável (sistema amortecido), transforma num sistema *internamente balanceado*, ou seja, aquele cujas matrizes dos gramianos de controlabilidade \widehat{W}_c e observabilidade \widehat{W}_0 são iguais e diagonais, isto é:

$$\widehat{W}_c = \widehat{W}_0 = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

onde $\text{diag}(\Sigma) = \{ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n \}$ são conhecidos como valores singulares do sistema internamente balanceado ou valores singulares de *Hankel*¹⁹ (Glover, 1984).

A partir daí é possível ordenar os estados *mais* observáveis e controláveis (maiores valores de σ_i), permitindo, com isso, identificar aqueles *menos* observáveis e controláveis (menores valores de σ_i), candidatos naturais a serem eliminados no processo de redução do modelo.

¹⁹ Neste caso, os valores singulares de *Hankel* medem a contribuição da relação entrada-saída dos elementos atuadores/sensores no sistema dinâmico considerado.

Para o sistema dinâmico descrito pelas Eqs. (5.1a) e (5.1b) e os gramínicos de controlabilidade e observabilidade dados em (5.3) e (5.6), segundo Moore (1981), a transformação do sistema dinâmico para um sistema internamente balanceado é realizada mediante a execução do algoritmo descrito a seguir.

Algoritmo Seja um sistema constituído pelas matrizes de estado A , B , C definidas em (5.1a) e (5.1b). Então, o sistema internamente balanceado, descrito pelas matrizes \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , é obtido da seguinte forma:

Passo 1: Calcule os gramínicos de controlabilidade W_c e observabilidade W_o , mediante a solução das equações de *Lyapunov* descritas em (5.4) e (5.7), respectivamente.

Passo 2: Obtenha a decomposição em *valores singulares* de W_c e a particione na forma:

$$W_c = V_c S_c U_c^T \quad (5.16)$$

encontre

$$P_1 = V_c S_c^{\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

e em seqüência

$$\widetilde{W}_o = P_1^T W_o P_1 \quad (5.18)$$

Passo 3: Calcule a decomposição por valores singulares do gramíniano \widetilde{W}_o e a particione da seguinte forma:

$$\widetilde{W}_o = \widetilde{V}_o \widetilde{S}_o \widetilde{U}_o^T \quad (5.19)$$

e encontre

$$P_2 = \tilde{V}_o \tilde{S}_o^{-\frac{1}{4}} \quad (5.20)$$

Passo 4: Assim, aplicando-se a seguinte transformação do sistema:

$$\hat{A} = P_2^{-1} P_1^{-1} A P_1 P_2 \quad (5.21a)$$

$$\hat{B} = P_2^{-1} P_1^{-1} B \quad (5.21b)$$

$$\hat{C} = C P_1 P_2 \quad (5.21c)$$

resulta finalmente no sistema *internamente balanceado* representado pelas matrizes \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} .

O sistema internamente balanceado, desde que assintoticamente estável, é aquele que a diagonal do gramiano de controlabilidade é igual a diagonal do gramiano de observabilidade, conforme mostra a Eq. (5.15), onde Σ é obtido a partir equações descritas a seguir:

$$\Sigma \hat{A}^T + A \Sigma + \hat{B} \hat{B}^T = 0 \quad (5.22a)$$

$$\Sigma \hat{A} + \hat{A}^T \Sigma + \hat{C}^T \hat{C} = 0 \quad (5.22b)$$

Assim, o vetor $\text{diag}(\Sigma)$ reflete o índice de controlabilidade (observabilidade) conjunta dos estados. Desta maneira, aqueles estados que apresentarem baixos valores de σ_i são menos observáveis e controláveis. No procedimento de redução de modelos, portanto, tais estados podem ser eliminados²⁰, uma vez que as características mais importantes, sob o ponto de vista de entrada e saída, são preservadas nos estados retidos que apresentam maiores valores de σ_i . Neste sentido, a matriz Σ pode ser particionada na forma (Glover, 1984):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_m & 0 \\ 0 & \Sigma_d \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

onde $\text{diag}(\Sigma_m) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ e $\text{diag}(\Sigma_d) = \{\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_k\}$ são formados pelos valores singulares de *Hankel* a serem mantidos (*m*) e descartados (*d*), respectivamente.

²⁰ A eliminação dos estados no modelo é realizada suprimindo-se as linhas e as colunas, correspondentes a estes estados, nas matrizes do sistema.

Além deste método de balanceamento interno das matrizes de estado A , B e C , destaca-se a técnica que emprega o método de *Schur* e cujo algoritmo é descrito em Laub et al (1987).

As técnicas apresentadas para a análise do posicionamento de sensores/atuadores e redução de modelos dão condições necessárias para se efetuar alguns testes numéricos em dois estudos de caso mostrados na seção seguinte.

5.4 Aplicações Numéricas

Nesta seção é realizada, num primeiro momento, a análise do posicionamento dos sensores/atuadores em estruturas flexíveis do tipo viga e placa utilizando-se o cálculo da função custo modal V e por fim, o uso da técnica apresentada na Seção 5.3 para a seleção da ordem dos modelos reduzidos.

Para efetuar o cálculo de V - veja Eq. (5.12)²¹ - é necessário estar de posse das matrizes de estado $[A]$ ²², $[B]$ e $[C]$, representativas do sistema dinâmico. Para a obtenção destas matrizes, optou-se por utilizar a técnica de elementos finitos - *FEM* - (desenvolvida no Capítulo 2), pois comprovou-se, durante os testes numéricos realizados no procedimento de validação, que os resultados obtidos por esta técnica aproximou-se mais daqueles determinados pelo programa de simulação *ANSYS*[®]. Com relação aos parâmetros dos sistemas físicos em estudo, seus valores são apresentados no Capítulo 4, Seções 4.1.1 e 4.2.1.

5.4.1 Estrutura Flexível do tipo Viga

A análise do posicionamento de sensores e atuadores para a estrutura do *tipo viga* é elaborada considerando apenas *um par* de materiais piezelétricos (um sensor e um atuador) incorporados na estrutura principal. Esta decisão foi tomada buscando principalmente a viabilidade do projeto experimental com relação aos custos dos elementos participantes (estrutura flexível e materiais piezelétricos).

Antes de proceder o cálculo da função custo modal V , torna-se conveniente que o modelo do sistema, representado pelas matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$, seja reduzido, uma vez que o tamanho do sistema completo é muito elevado (210 graus de liberdade), isto é, para fins de controle, este

²¹ Em todos os casos estudados, empregou-se uma matriz Q igual à matriz identidade.

²² Para a construção da matriz de estado $[A]$ considerou-se um sistema apresentando um amortecimento estrutural $[C_a]$ determinado a partir da Eq. (2.88), onde $\alpha = 0.5$ e $\beta = 5.10^{-5}$ foram escolhidos arbitrariamente.

modelo discretizado tem mais modos do que o necessário para projetar um controlador.

Para isto, faz-se necessário a redução *pseudo-modal* do sistema (veja Capítulo 2, Seção 2.4.3) utilizando-se os seus *três primeiros modos de vibrar* (condição de observabilidade e controlabilidade satisfeitas). De posse com as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ do modelo reduzido, o estudo do posicionamento dos sensores e atuadores, realizado a partir da função de Skelton dada pela Eq. (5.12), pode ser efetivamente avaliado. A Figura 5.1 ilustra um gráfico representando o valor de V em função de algumas posições para o sensor e atuador.

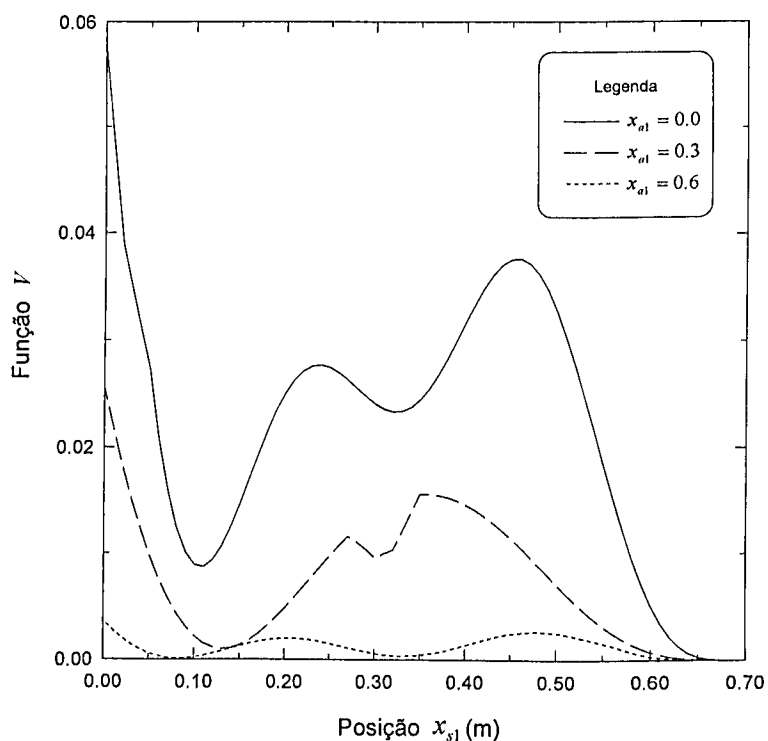


Figura 5.1- Função custo modal versus localização dos atuadores e sensores piezelétricos.

A análise dos resultados obtidos revela uma predominância dos elementos piezelétricos posicionados próximos ao ponto de engastamento da viga, isto é, dentre as posições mostradas, a de *maior valor* do custo modal e que satisfaz a condição de controlabilidade/observabilidade completa do sistema é aquela que prevê o sensor e atuador co-posicionados nesta região. A Fig. 5.2 mostra apenas os três primeiros modos de vibrar e as respectivas freqüências naturais da estrutura na direção transversal.

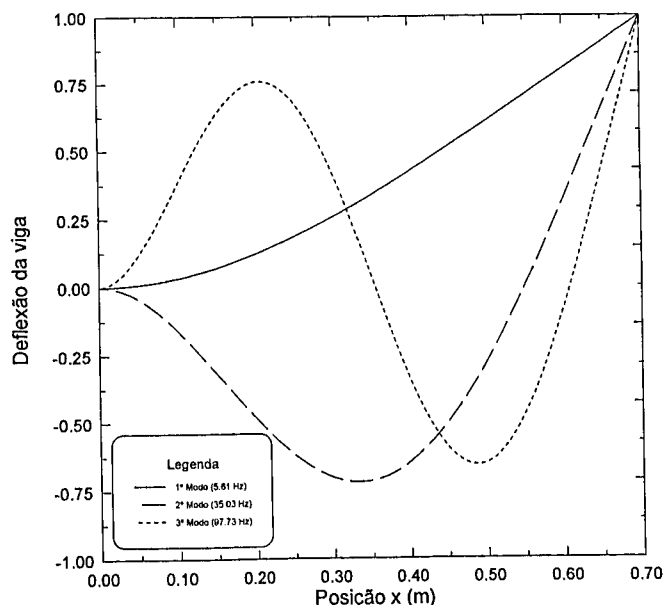


Figura 5.2- Modos de vibrar relativos ao movimento transversal da viga.

Nota-se, através da Fig. 5.2, que as *maiores curvaturas* (maiores deformações) ocorrem na região próxima ao ponto de engastamento da viga e esta particularidade implica num comportamento mais eficiente do sensor (máxima saída) e do atuador (mínima energia), uma vez que o princípio de operação dos mesmos está ligado às deformações geradas/induzidas nestes elementos (veja Capítulo 2, Seção 2.2) o que leva consequentemente a contribuir, de maneira significativa, no cálculo da função custo modal V .

Definida a posição do sensor e atuador, ou seja, determinadas as matrizes de estado do sistema completo (210 graus de liberdade), convém reanalisar a questão da redução do modelo via os gramínicos de observabilidade W_0 , dados pela Eq. (5.7), e controlabilidade W_c fornecidos pela Eq. (5.4), proposto por Moore (1981) e já apresentado na Seção 5.3. Desta forma, aplicando os procedimentos necessários para se efetuar o *balanceamento interno* das matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$, obtem-se, para a estrutura em questão, a diagonal do gramíniano Σ :

$$\Sigma = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 7.002 & 6.720 & 2.539 & 1.097 & 0.524 & 0.252 & 0.105 & 0.031 & 0.008 & 0.0009 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

A diagonal do gramíniano Σ (são mostrados apenas os 10 primeiros elementos) do sistema balanceado fornece uma indicação da importância que cada modo de vibrar assume ao se modelar o sistema físico, ou seja, o resultado, dado em (5.24), mostra a predominância dos **oito** primeiros modos frente aos demais. Este resultado pode ser comprovado nas Figs. 5.3 e 5.4 que

mostram, respectivamente, a função resposta em frequência do sistema balanceado (matrizes \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} reduzidas a 8 modos) dada pela Eq. (2.109) e a resposta do sensor piezelétrico a uma excitação tipo degrau unitário proporcionado pelo atuador considerando um modelo reduzido à vários modos de vibrar.

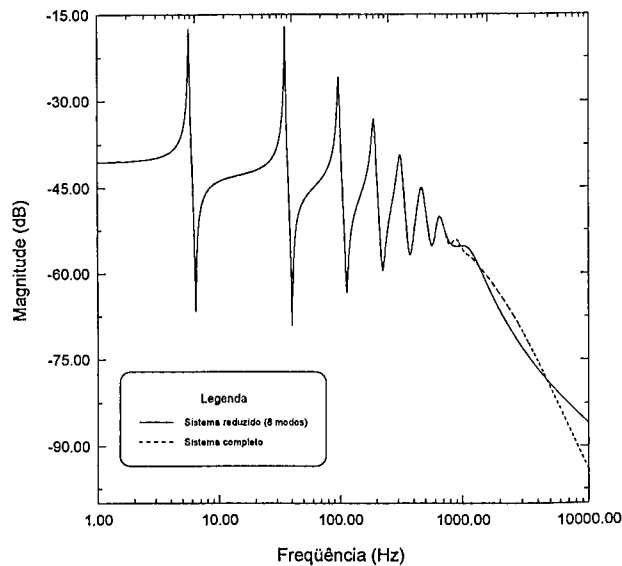


Figura 5.3- Função de transferência entre o sensor e atuador piezelétrico para o sistema completo e reduzido a oito modos de vibrar.

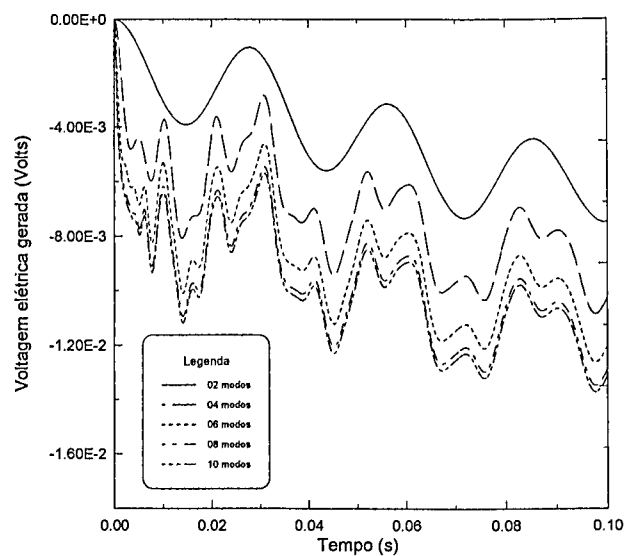


Figura 5.4- Voltagem elétrica produzida pelo sensor piezelétrico devido à uma entrada degrau unitário no atuador para o sistema reduzido a um modelo que contém os dois, quatro, seis, oito e os dez modos de vibrar do sistema original.

Além da situação anteriormente ilustrada, outras foram estudadas, todas elas revelaram, no entanto, que um modelo com apenas os **oito** primeiros modos de vibrar poderia representar adequadamente o *sistema original*. Sob o ponto de vista computacional, o ganho em se utilizar o modelo reduzido é bastante alto em termos de velocidade de processamento, estabilidade dos resultados, demanda de memória, etc.

É importante que se tenha claro que toda esta discussão aborda o problema da representação do sistema físico utilizando-se um modelo reduzido a **oito** modos de vibrar, visto que ela é feita independentemente se o sistema é controlável/observável ou não, ou seja, o projeto do controlador pode ser feito empregando-se um modelo reduzido a número menor de modos de vibrar (3 modos) daquele utilizado para representar adequadamente o sistema original (8 modos).

5.4.2 Estrutura Flexível do tipo Placa

A análise do posicionamento dos elementos piezelétricos (sensores e atuadores) realizada a partir da função custo modal de Skelton e Yousuff (1983) é, por fim, avaliada para uma estrutura do tipo *placa fina*.

Para o cálculo da função de Skelton, a busca pelo posicionamento ótimo dos sensores e atuadores é realizada admitindo-se que se possa usar três atuadores e sensores co-posicionados, desde não estejam naturalmente distribuídos na mesma área de atuação/sensoriamento. Sob esta ótica e tendo em vista o número bastante elevado de posições possíveis para estes elementos, é preciso que seja escolhida uma malha de discretização adequada sem elevar muito o esforço computacional. Sob este aspecto, elegeu-se, numa fase preliminar, a malha $N_x \times N_y$ de 6×4 elementos finitos, o que resultou num modelo global de 85 graus de liberdade.

Visando a execução do projeto do controlador robusto a partir da técnica H_∞ (veja Capítulo 6), é de primordial importância que o modelo em questão seja reduzido de tal forma que se tenha um sistema dito completamente controlável e observável, ou seja, torna-se conveniente considerar apenas as posições dos elementos piezelétricos para as quais esta condição é válida. Neste sentido, tal sistema dinâmico é reduzido levando-se em conta os seus *cinco primeiros modos de vibrar*. Uma vez definido o número de modos a serem considerados no modelo reduzido e as localizações possíveis para os elementos piezelétricos, ou seja, definido o conjunto de matrizes de estado do sistema (A , B e C), procede-se então o cálculo da função custo modal V .

A tabela 5.1 mostra, dentre as 2024 posições possíveis, as 10 posições mais adequadas (x_1, y_1) (veja Fig. 4.17) com os respectivos valores de V .

Tabela 5.1- Posições dos sensores e atuadores sobre a placa e os respectivos valores do custo modal V .

Posição (x_1, y_1) dos piezelétricos			Função V
1	2	3	
0.1; 0.1	0.1; 0.2	0.4; 0.2	0.47689
0.1; 0.1	0.4; 0.1	0.1; 0.2	0.47689
0.4; 0.1	0.1; 0.2	0.4; 0.2	0.47689
0.1; 0.1	0.4; 0.1	0.4; 0.2	0.47689
0.1; 0.1	0.3; 0.1	0.4; 0.2	0.40887
0.4; 0.1	0.1; 0.2	0.3; 0.2	0.40887
0.2; 0.1	0.4; 0.1	0.1; 0.2	0.40887
0.1; 0.1	0.2; 0.2	0.4; 0.2	0.40887
0.1; 0.1	0.4; 0.1	0.3; 0.2	0.40785
0.3; 0.1	0.1; 0.2	0.4; 0.2	0.40785

Dentre os valores apresentados, o de maior valor e que satisfaz todos os vínculos de projeto, é aquela que prevê a utilização dos atuadores e sensores co-localizados em $(0.1; 0.1)$, $(0.1; 0.2)$ e $(0.4; 0.2)$ conforme ilustra a Fig. 5.5.

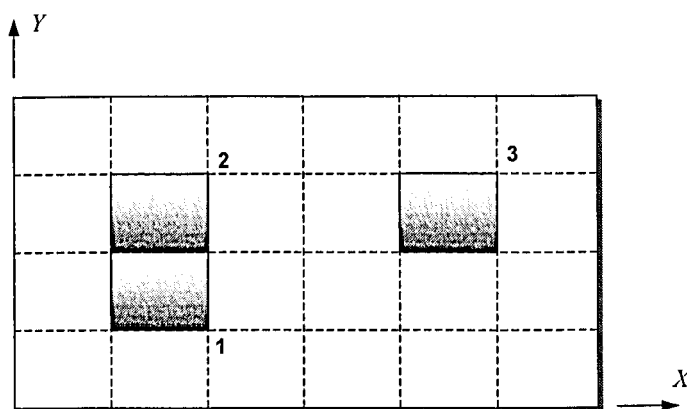


Figura 5.5- Posição ótima dos elementos piezelétricos sobre a placa discretizada pela malha 6×4 .

A análise do posicionamento dos elementos piezelétricos sobre a estrutura foi feita, como já mencionado, num modelo construído a partir de uma malha 6×4 . Visando trabalhar com um modelo mais preciso, nesta etapa é realizado um processo de refinamento do modelo discretizado mediante a utilização de uma nova malha $N_x \times N_y$ possuindo 24×16 elementos finitos (modelo global contendo 1195 graus de liberdade). Desta maneira, torna-se necessário efetuar o

reposicionamento destes materiais a partir da posição ótima determinada na fase inicial. A tabela 5.2 mostra as 5 primeiras posições mais favoráveis com os respectivos valores de V para a nova malha de discretização empregada.

Tabela 5.2- Posições dos sensores/atuadores sobre a placa e os respectivos valores do custo modal V .

Posição (x_1, y_1) dos piezelétricos			Função V
1	2	3	
0.075; 0.075	0.075; 0.225	0.425; 0.225	0.48554
0.125; 0.075	0.125; 0.225	0.375; 0.225	0.47408
0.075; 0.075	0.125; 0.225	0.425; 0.225	0.46197
0.075; 0.075	0.125; 0.225	0.375; 0.225	0.45888
0.125; 0.075	0.125; 0.225	0.425; 0.225	0.45572
0.100; 0.100	0.100; 0.200	0.400; 0.200	0.44881

Por fim, segundo a Tab. 5.2, a posição ótima é aquela que apresenta os sensores e atuadores co-localizados em $(0.075; 0.075)$, $(0.075; 0.225)$ e $(0.425; 0.225)$. Assim como foi verificado no caso da estrutura do tipo viga (engastada livre) onde o atuador e sensor foram distribuídos nas regiões próximas à área de grandes curvaturas (grandes deformações) da estrutura, este fato pode ser mais uma vez comprovado através da distribuição dos 5 primeiros modos de vibrar da estrutura em questão (veja Fig. 5.6).

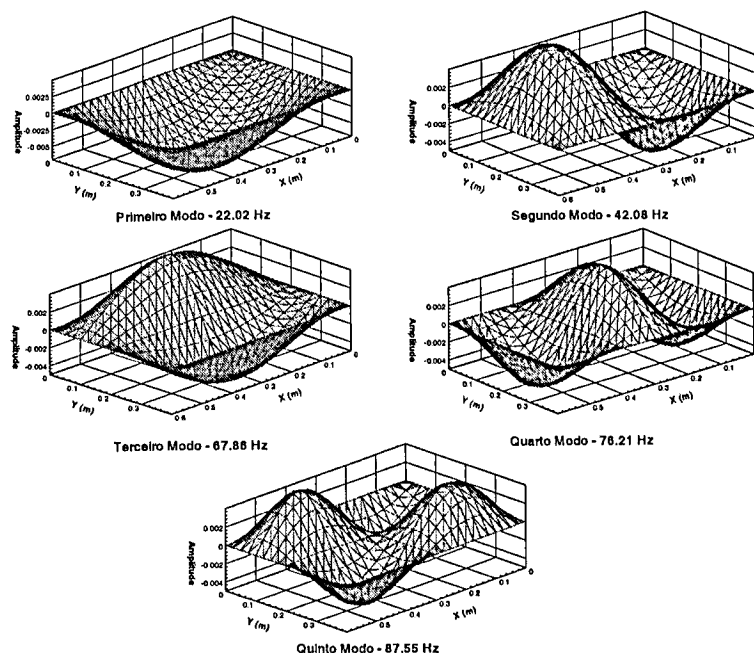


Figura 5.6- Cinto primeiros modos de vibrar relativos ao movimento transversal da placa.

Para efeitos de simulação da dinâmica da estrutura, sem que seja preciso utilizar o modelo completo, torna-se conveniente, no momento, analisar a questão da redução deste modelo através dos graminianos de controlabilidade W_c e observabilidade W_0 (veja Seção 5.3). Após seguir as etapas descritas na referida seção, a diagonal do graminiano W_c ou W_0 do sistema balanceado é automaticamente determinada para o modelo completo, resultando em (são apresentados apenas os 30 primeiros elementos da diagonal):

$$\Sigma = 10^{-1} \times \begin{bmatrix} 1.332 & 0.796 & 0.775 & 0.680 & 0.484 & 0.413 & 0.119 & 0.103 & 0.097 & 0.085 \\ 0.081 & 0.066 & 0.043 & 0.039 & 0.025 & 0.022 & 0.020 & 0.013 & 0.009 & 0.007 \\ 0.006 & 0.004 & 0.003 & 0.002 & 0.001 & 0.0004 & 0.0001 & 0.00009 & 0.00001 & 0.00001 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

O resultado obtido demonstra a predominância dos 25 primeiros modos de vibrar frente aos demais. Este resultado pode ser comprovado nas próximas figuras que ilustram, respectivamente, a resposta em frequência $G_s^{11}(s)$, dada pela Eq. (2.109), do sistema balanceado e a resposta do sensor piezelétrico 3 a uma excitação tipo degrau unitário efetuado pelo atuador 1.

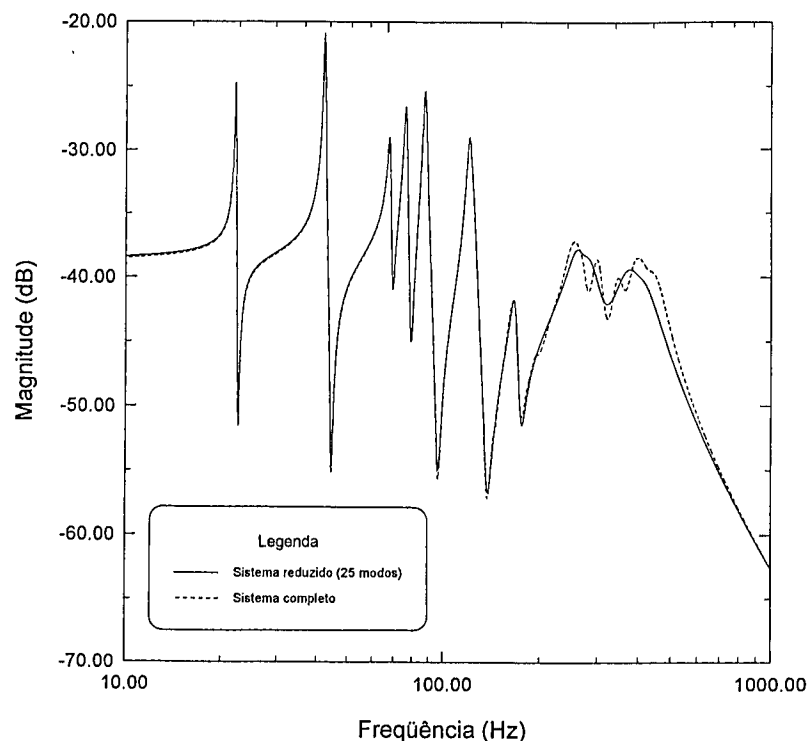


Figura 5.7- Função de transferência entre o primeiro sensor e atuador piezelétrico para o sistema completo e reduzido a 25 modos de vibrar.

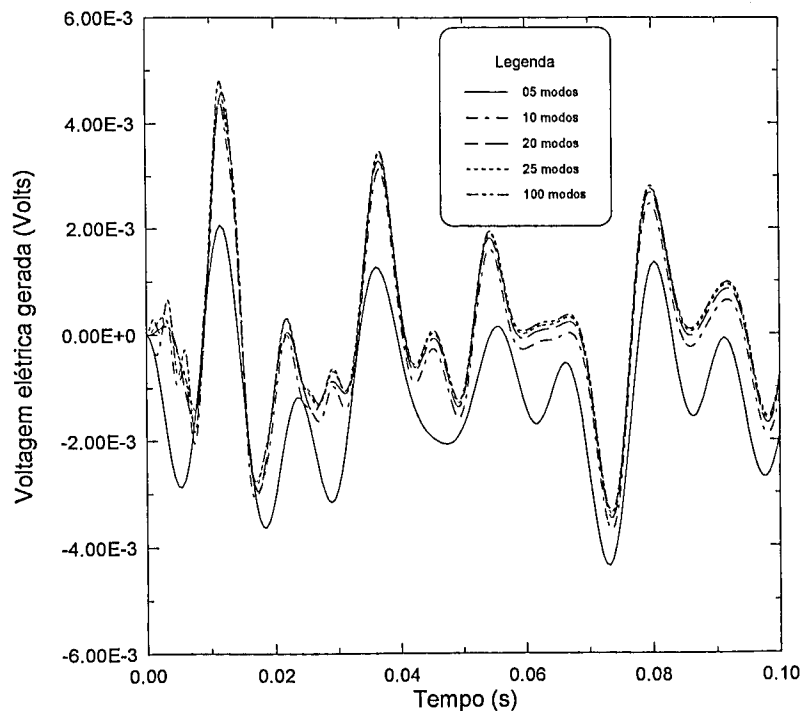


Figura 5.8- Tensão elétrica produzida pelo sensor piezelétrico 3 devido à uma entrada degrau unitário no atuador 1 para o sistema reduzido a um modelo que contém os **05**, **10**, **20**, **25** e os **100** primeiros modos de vibrar do sistema original.

Vencida a etapa de determinação das posições mais adequadas para os elementos piezelétricos passa-se a fase de implementação do controlador robusto aplicado no controle de vibrações em estruturas flexíveis. Antes, porém, convém analisar os efeitos provocados pela redução do modelo utilizado no projeto do controlador. Tais efeitos introduzem uma *perturbação* no modelo truncado que é resultante da não consideração da dinâmica de *alta frequência*. O efeito desta perturbação aparece como uma *distorção da localização dos zeros* associados ao sistema em malha aberta (Loix e Preumont, 1995). Assim torna-se necessário o entendimento de todo este mecanismo que tende a deteriorar, inevitavelmente, o desempenho esperado do sistema de controle (Ogata, 1998). Estas e outras questões relevantes são tratadas, em detalhes, na próxima seção.

5.5 Incorporação dos Efeitos da Dinâmica não Considerada no Modelo de Projeto do Controlador

O problema causado pelo truncamento de um sistema dinâmico é tratado em detalhes na presente seção. Os aspectos relevantes a este problema são levados em julgamento nas seções seguintes que abordam a questão da incorporação dos efeitos causados pela não inclusão da *dinâmica de alta frequência* no modelo de projeto do controlador.

5.5.1 Sistema Estrutural do Tipo Viga Flexível

Antes de proceder qualquer tipo de análise de caráter mais geral, tome-se, como exemplo, uma estrutura flexível do *tipo viga* cuja representação contínua admite uma função de transferência dada pela relação (3.127) e podendo ser reescrita na forma:

$$G_{as}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2} \quad (5.26)$$

onde o termo F_k representa o parâmetro que depende da localização e das características físicas e geométricas dos elementos piezelétricos incorporados na estrutura principal.

A *dinâmica residual* G_r , que não foi considerada no modelo truncado, é expressa segundo a relação abaixo:

$$G_r(s) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2} \quad (5.27)$$

e o sistema completo, por sua vez, é descrito por:

$$G_c(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2} \quad (5.28)$$

A necessidade de se quantificar o *resíduo* G_r para saber seu efeito exato no comportamento dinâmico do sistema truncado despertou o interesse de alguns pesquisadores na área (Loix e Preumont, 1995 e Clark, 1997). Loix e Preumont (1995) demonstraram que quando se realiza o truncamento do modelo, a parte residual G_r , não considerada, provoca uma alteração na localização dos *zeros* no modelo truncado em malha aberta (G_{as}).

Neste trabalho, tal afirmação é verificada a partir da determinação da localização dos *pólos* (\times) e *zeros* (\circ) do sistema dinâmico (empregado na Seção 5.4.1) em malha aberta, cuja representação gráfica é ilustrada nas figuras que se seguem.

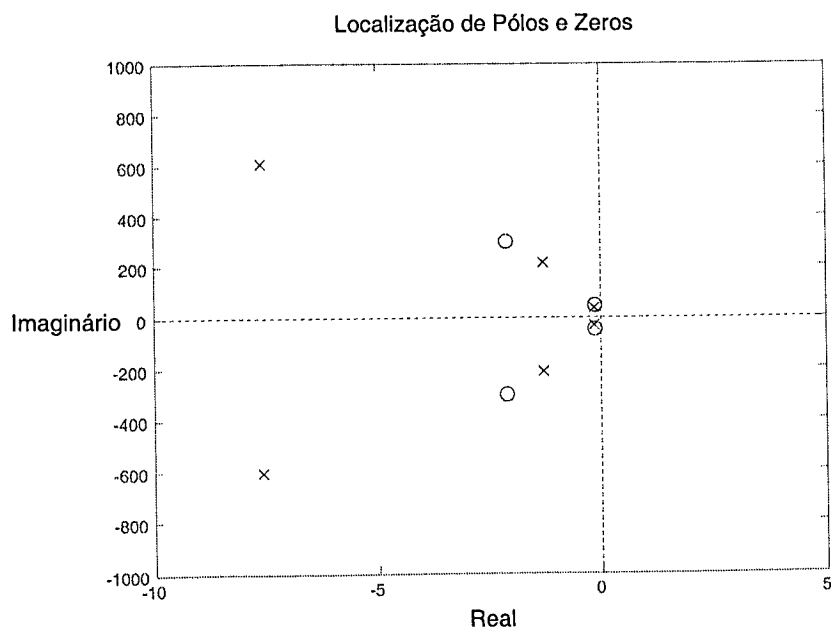


Figura 5.9- Localização dos *pólos* e *zeros* do sistema dinâmico truncado a três modos de vibrar.

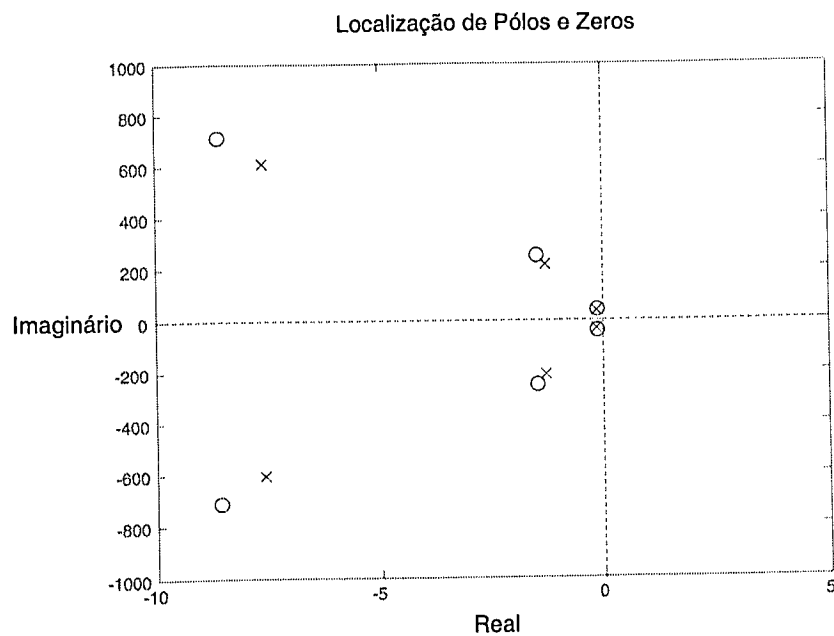


Figura 5.10- Localização dos *pólos* e *zeros* do sistema dinâmico completo.

Nota-se, a partir das figuras apresentadas, que o procedimento de truncamento do modelo, para fins de controle, ocasiona alterações na localização dos *zeros* do sistema em malha aberta, podendo acarretar mudanças drásticas na performance do sistema em malha fechada (Loix e Preumont, 1995). Uma análise mais detalhada nos gráficos 5.9 e 5.10 revela que a mudança da localização dos zeros apresentados é a responsável pela distorção da distribuição de alguns pólos do sistema, ou seja, quanto menor o valor de n , empregado no procedimento de truncamento modal, maior será a "distância" entre pólos e zeros do modelo utilizado para o projeto do controlador. Isto significa, em termos práticos, que o *ganho do sistema* em malha aberta se altera consideravelmente (Ogata, 1998). Assim, no caso de se projetar um controlador para o sistema truncado, estas informações equivocadas irão se refletir, automaticamente, no desempenho esperado do sistema físico em que se deseja efetivamente controlar, isto é, o controlador será projetado para um outro tipo de sistema possuindo características particulares que não correspondem exatamente aquelas associadas ao sistema completo $G_c(s)$ na faixa de frequência considerada.

Percebe-se também que a resposta em frequência do sistema, obtida pela Eq. (5.26), é também "distorcida" pelo procedimento de truncamento modal efetuado. A Fig. 5.11 ilustra este comportamento.

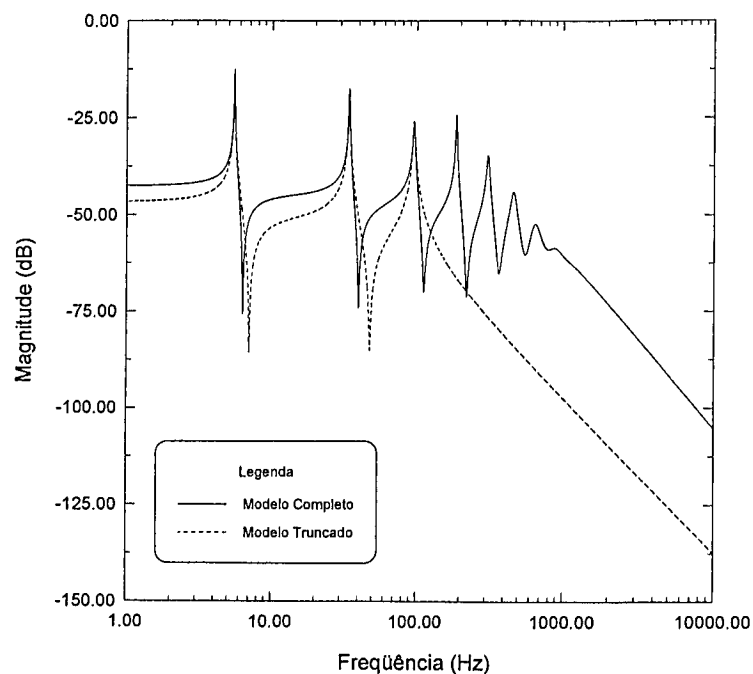


Figura 5.11- Resposta em frequência para os sistemas truncado e completo.

Clark (1997) propôs uma forma alternativa de contornar este problema e evitar quaisquer tipos de situações recorrentes do procedimento inevitável de truncamento modal. Nesta solução alternativa um *novo* modelo truncado é obtido, adicionando-se um *termo constante* D_{as} (ou de ordem zero²³) na Eq. (5.26), substituindo-se, desta forma, os modos residuais $G_r(s)$ que tendem a aumentar a ordem do sistema.

$$\hat{G}_{as}(s) = G_{as}(s) + D_{as} \quad (5.29)$$

A idéia de se utilizar este termo no intuito de corrigir ou "reconstruir" o sistema truncado é motivada pelo comportamento dos modos residuais que corroboram com um efeito *quase estático* sobre o referido modelo (Loix e Preumont, 1995). Entretanto, o processo de obtenção deste termo não é trivial, pois demanda de um procedimento de otimização no qual a função objetivo é a distância (em termos da magnitude) entre os modelos truncado e completo. Visando simplificar o problema e evitar o emprego de técnicas numéricas de otimização, reintroduz-se, inicialmente, o conceito de norma dada pela relação (IV.8) (veja Anexo IV), de onde se define uma função custo J ²⁴ descrita na forma (Moheimani, 1999):

$$J = \left\| \left(G_c(s) - \hat{G}_{as}(s) \right) W(s) \right\|_2^2 \quad (5.30)$$

onde $W(s)$ é uma função de ponderação ou um *filtro ideal* cujo comportamento é ditado pela relação abaixo²⁵ (onde $s = j\omega$):

$$|W(j\omega)| = \begin{cases} 1, & \text{para } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.31)$$

para uma frequência de corte ω_c escolhida²⁶ dentro do intervalo ω_n a ω_{n+1} .

Assim, tem-se uma função de otimização na qual a constante D_{as} é a variável a ser otimizada de tal forma a minimizar J . Neste sentido, substituindo-se as relações $G_c(s)$ e $\hat{G}_{as}(s)$ em (5.30) e aplicando-se a norma (IV.8), resulta na seguinte expressão, (onde os amortecimentos modais ζ_k foram omitidos na análise):

²³ Moheimani e Clark (2000) sugeriram a utilização de um termo de *segunda ordem* para a correção do modelo truncado.

²⁴ Moheimani e Heath (2002) propuseram a utilização da norma *infinita* para definir a função custo J .

²⁵ O fato de $W(s)$ ser escolhido desta forma garante que a função custo $J(s)$ permaneça sempre finita.

²⁶ Geralmente esta escolha é feita tomando-se $\omega_c = \frac{\omega_n + \omega_{n+1}}{2}$.

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} - \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} - D_{as} \right|^2 d\omega \quad (5.32)$$

ou ainda:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} - D_{as} \right|^2 d\omega \quad (5.33)$$

Desenvolvendo-se a Eq. (5.33), tem-se:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} \right|^2 - 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} D_{as} + D_{as}^2 \right\} d\omega \quad (5.34)$$

O valor de D_{as} que minimiza J pode ser determinado a partir da seguinte relação:

$$\frac{\partial J}{\partial D_{as}} = 0 \quad (5.35)$$

resultando em:

$$D_{as} = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} d\omega \quad (5.36)$$

Avaliando-se a integral da Eq. (5.36), chega-se, finalmente:

$$D_{as} = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k}{\omega_{n_k}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.37)$$

ou para um sistema *internamente balanceado* (veja Seção 5.3):

$$D_{as} = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{n_{\min}} \frac{F_k}{\omega_{n_k}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.38)$$

onde n_{\min} denota a *realização mínima* do sistema reduzido para a qual o modelo completo possa ser adequadamente representado.

É com base no valor de D_{as} que o *novo* modelo truncado (\hat{G}_{as}), representado pela Eq. (5.29), é novamente analisado. Deste modo, nas figuras que se sequeem são apresentados os gráficos que mostram, respectivamente, o lugar das raízes e a função de transferência para o sistema modificado, onde $D_{as} = -3.1525 \times 10^{-3}$.

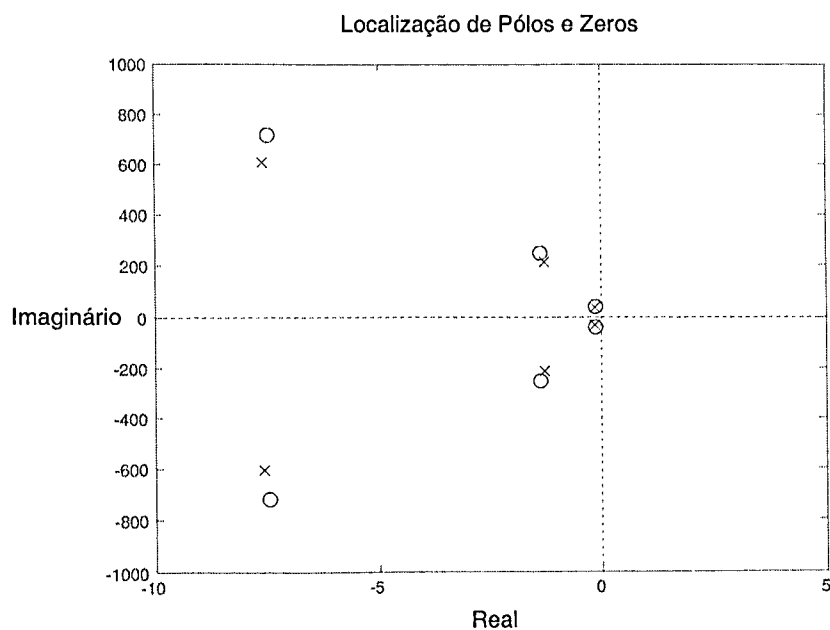


Figura 5.12- Localização dos *pólos* e *zeros* para o *novo* modelo truncado a três modos de vibrar.

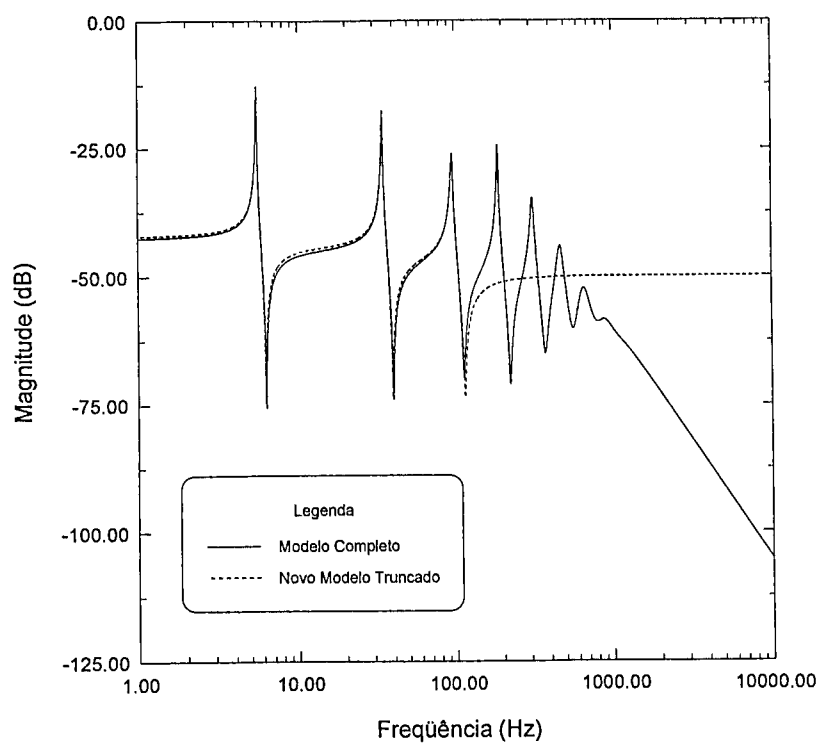


Figura 5.13- Resposta em frequência para o *novo* sistema truncado e completo.

Quando se realiza o procedimento descrito para a "reconstrução" do *novo* sistema truncado, os zeros, distribuídos segundo a Fig. 5.9, são *realocados* (veja Fig. 5.12) de tal forma a resultar numa distribuição similar ao que acontece com aquela associada ao sistema completo mostrado na Fig. 5.10. Isto faz com que as características dinâmicas deste novo modelo sejam preferencialmente concordantes com as características dinâmicas do sistema completo $G_c(s)$. Já na Fig. 5.13, observa-se, claramente, a boa concordância, em termos da magnitude, entre os modelos truncado e completo, o que demonstra a eficiência do procedimento descrito.

A partir do mecanismo de reconstrução do modelo truncado, é possível resolver o problema no que tange à *correção* das funções de transferência descritas pelas Eqs. (3.128a), (3.126) e (3.128b). Neste caso, tal análise é feita da mesma maneira com o que foi exposto anteriormente. Assim, os novos termos de correção, associados às estas equações, são listados a seguir (Moheimani, 2000):

$$D_{fw}(x) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\phi_k(x) \phi_k(x_f)}{\omega_{n_k}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.39)$$

$$D_{aw}(x) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi_k(x) \frac{F_k^{aw}}{\omega_{n_k}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.40)$$

$$D_{fs} = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi_k(x_f) \frac{F_k^{fs}}{\omega_{n_k}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.41)$$

onde F_k^{aw} e F_k^{fs} são funções que dependem das características físicas e geométricas do material piezelétrico (atuador ou sensor).

Desta forma, para adequar este tipo de descrição do sistema ao projeto do controlador, as funções de transferência corrigidas devem ser representadas em espaço de estados. Partindo-se do modelo do sistema na forma geral de equações de estado dada por (3.129a)-(3.129c), o *novo* modelo truncado é descrito como (Moheimani, 2000):

$$\left\{ \dot{\bar{x}} \right\} = [A] \{ \bar{x} \} + [B_1] \{ F_q \} + [B_2] \{ \Phi_a \} \quad (5.42)$$

$$w(x) = [C_1] \{ \bar{x} \} + D_{fw}(x) \{ F_q \} + D_{aw}(x) \{ \Phi_a \} \quad (5.43)$$

$$\{ \Phi_s \} = [C_2] \{ \bar{x} \} + D_{fs} \{ F_q \} + D_{as} \{ \Phi_a \} \quad (5.44)$$

5.5.2 Sistema Estrutural do Tipo Placa Flexível

A análise precedente pode ser estendida para o caso da estrutura flexível do *tipo placa* cuja representação matemática é fornecida no Capítulo 3, Seção 3.1. O presente problema é analisado empregando-se a estrutura descrita na Seção 5.4.2, onde, durante a caracterização do modelo truncado, considerou-se apenas os 5 primeiros modos de vibrar²⁷. Assim, tal modelo pode ser descrito, segundo a *formulação contínua*, como:

$$G_{as}^{ij}(s) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{F_{kl}^{ij}}{s^2 + 2\zeta_{kl}\omega_{n_{kl}}s + \omega_{n_{kl}}^2} \quad (5.45)$$

onde F_{kl}^{ij} é um termo que depende das características físicas e geométricas dos materiais piezelétricos.

Uma análise preliminar no lugar das raízes, ilustrado nos gráficos apresentados a seguir, revela, para o caso da função de transferência G_{as}^{ij} , fornecida pela Eq. (3.70), uma pequena distorção da localização dos *zeros* (e conseqüentemente dos *pólos*) correspondentes ao modelo reduzido em relação ao modelo completo.

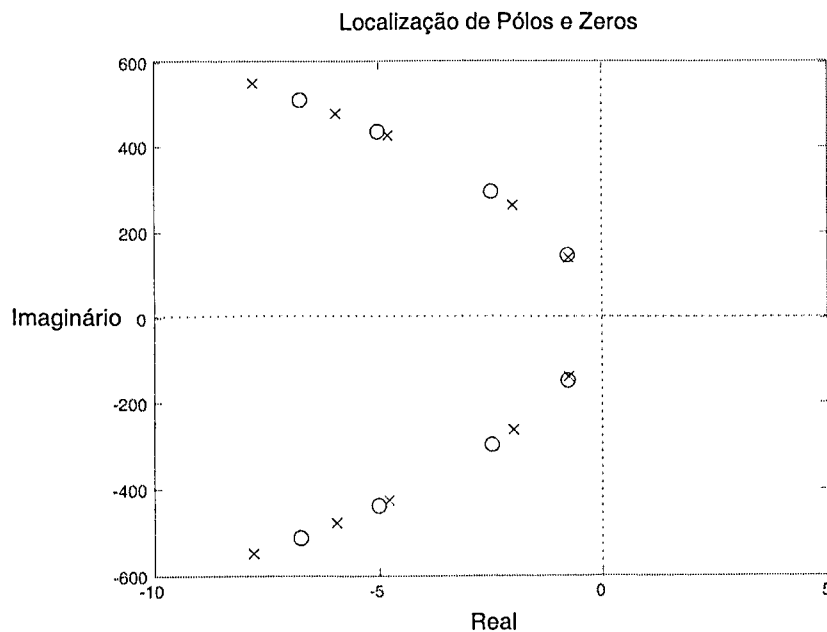


Figura 5.14- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência G_{as}^{11} do sistema truncado.

²⁷ Na formulação contínua (FC), os cinco modos mais baixos correspondem, em ordem crescente a: $\omega_{n_{11}}$, $\omega_{n_{21}}$, $\omega_{n_{12}}$, $\omega_{n_{31}}$ e $\omega_{n_{22}}$.

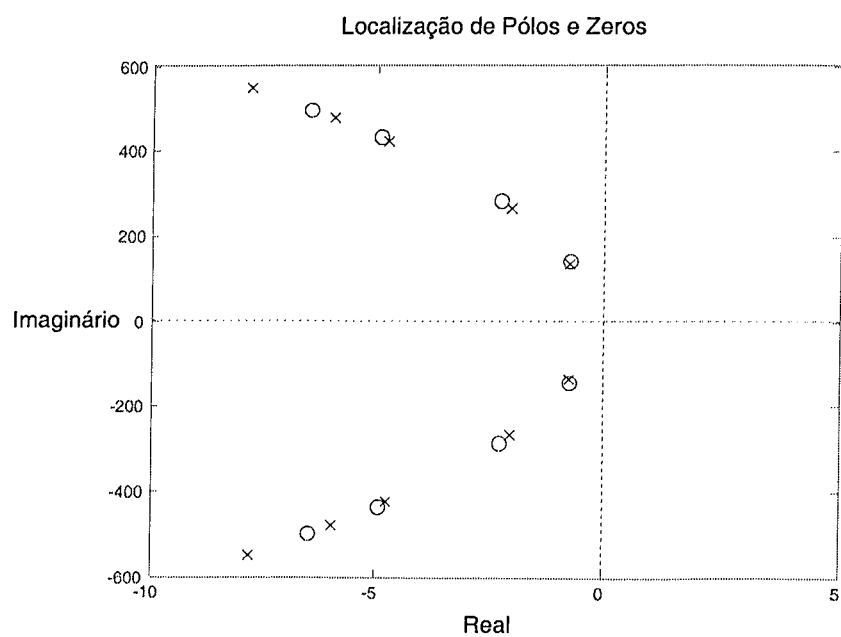


Figura 5.15- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência G_c^{11} do sistema completo.

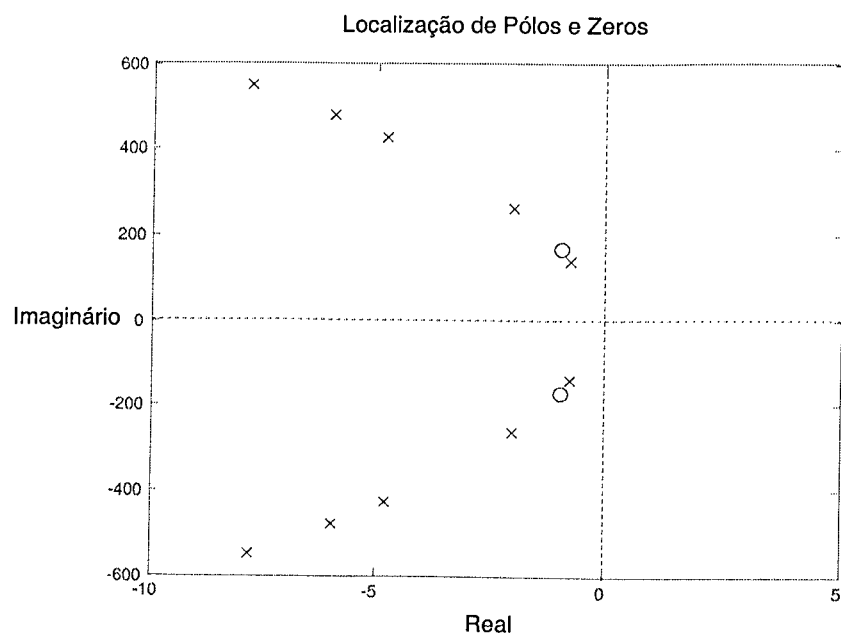


Figura 5.16- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência G_{as}^{12} do sistema truncado.

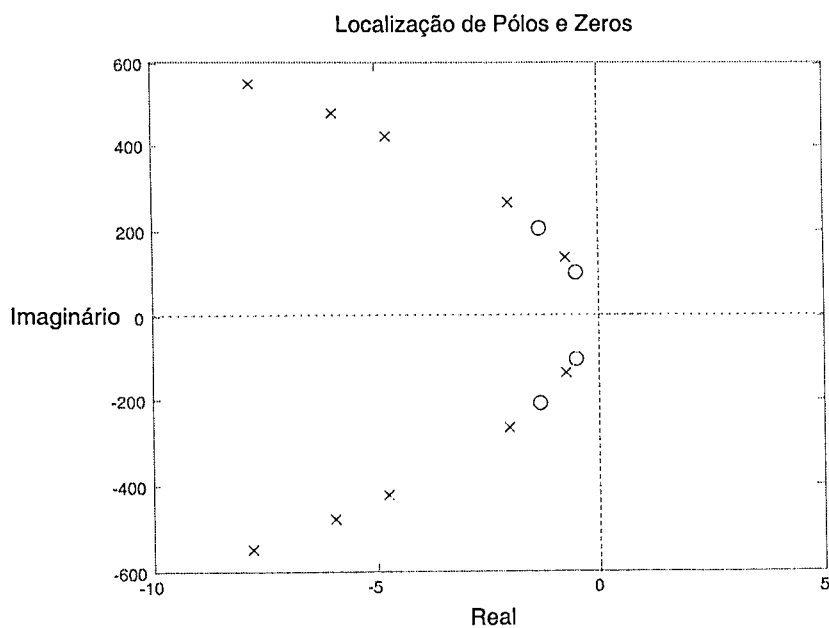


Figura 5.17- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência G_c^{12} do sistema completo.

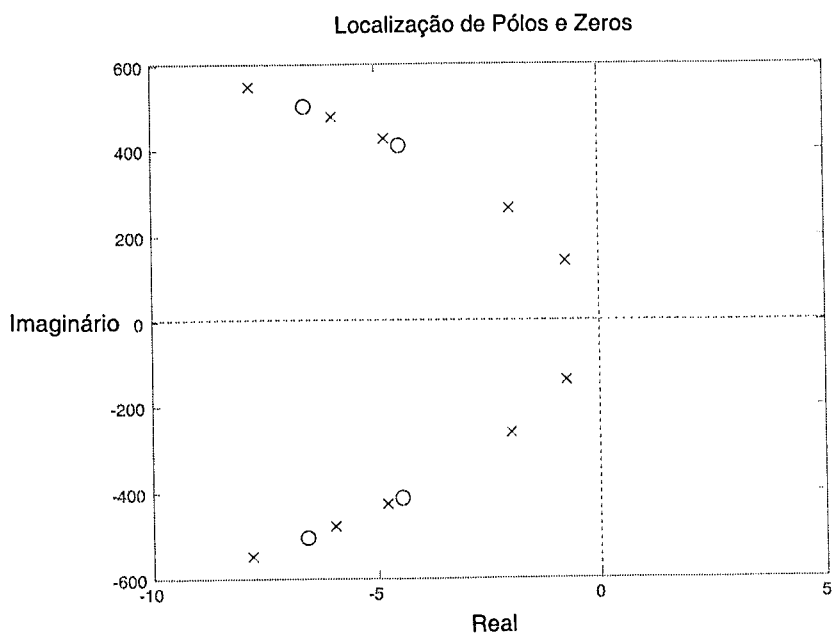


Figura 5.18- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência G_{as}^{13} do sistema truncado.

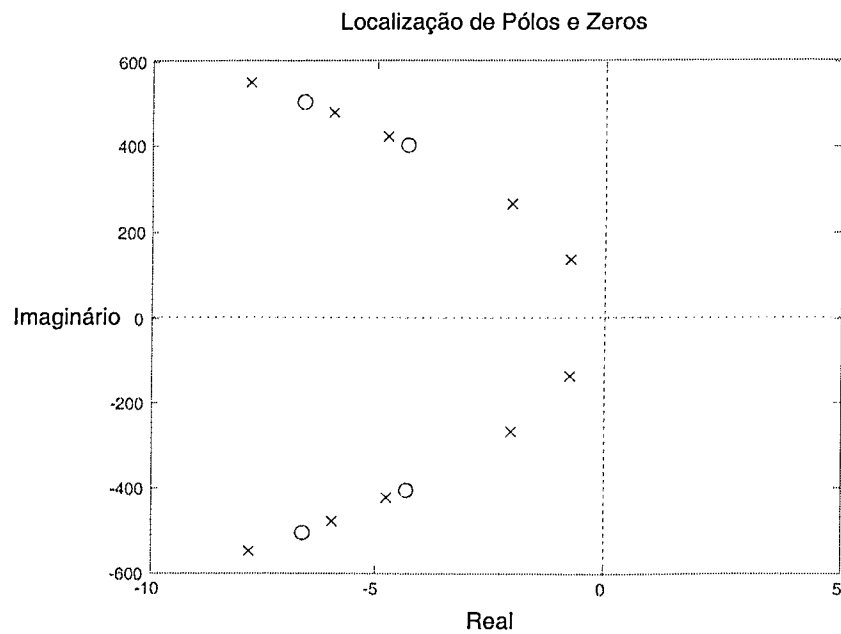


Figura 5.19- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência G_c^{13} do sistema completo.

Tais distorções podem ser verificadas nas funções resposta em frequência do sistema cujos comportamentos são ilustrados nos gráficos mostrados pelas Figs. 5.20, 5.21 e 5.22.

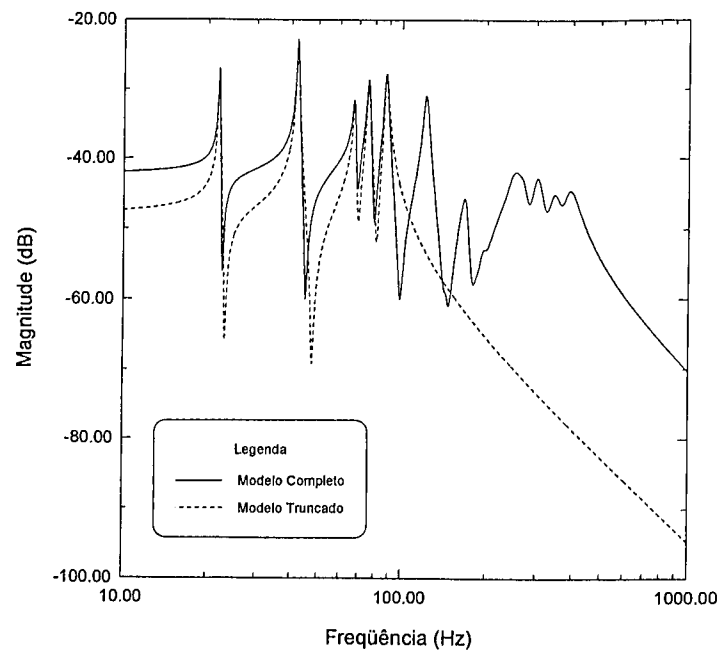


Figura 5.20- Resposta em frequência para os sistemas truncado G_{as}^{11} e completo G_c^{11} .

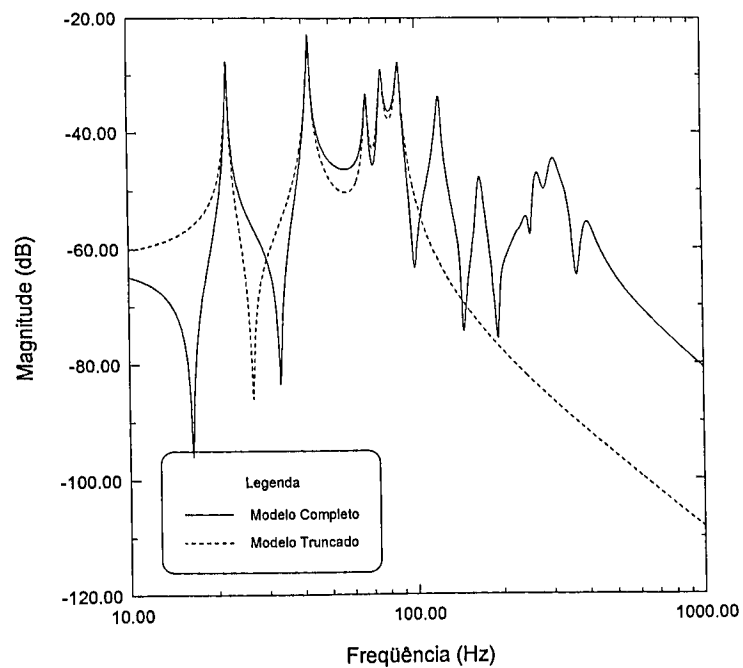


Figura 5.21- Resposta em frequência para os sistemas truncado G_{as}^{12} e completo G_c^{12} .

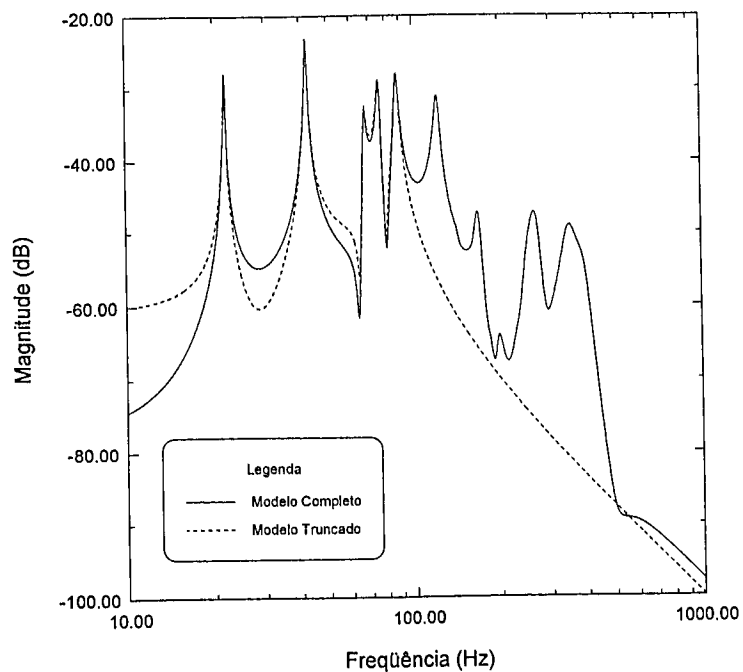


Figura 5.22- Resposta em frequência para os sistemas truncado G_{as}^{13} e completo G_c^{13} .

A visível distorção é corrigida pelo procedimento de "reconstrução" do modelo truncado a partir da constante D_{as} . Tal constante é determinada de forma similar ao que foi exposto no caso da estrutura flexível do tipo viga, resultando:

$$D_{as}^{ij} = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{F_{kl}^{ij}}{\omega_{nkl}} \ln \left(\frac{\omega_{nkl} + \omega_c}{\omega_{nkl} - \omega_c} \right) \quad (5.46)$$

Neste sentido, a localização dos *pólos* e *zeros* e as funções resposta em freqüência do *novo* sistema truncado \hat{G}_{as}^{ij} são adequadamente modificadas pela adição, na equação (5.45), do termo D_{as}^{ij} , resultando finalmente em:

$$\hat{G}_{as}^{ij}(s) = G_{as}^{ij}(s) + D_{as}^{ij} \quad (5.47)$$

cujos comportamentos são ilustrados nas figuras que se seguem, onde $D_{as}^{11} = -4.4297 \cdot 10^{-3}$, $D_{as}^{12} = 1.5528 \cdot 10^{-3}$ e $D_{as}^{13} = 8.2331 \cdot 10^{-4}$.

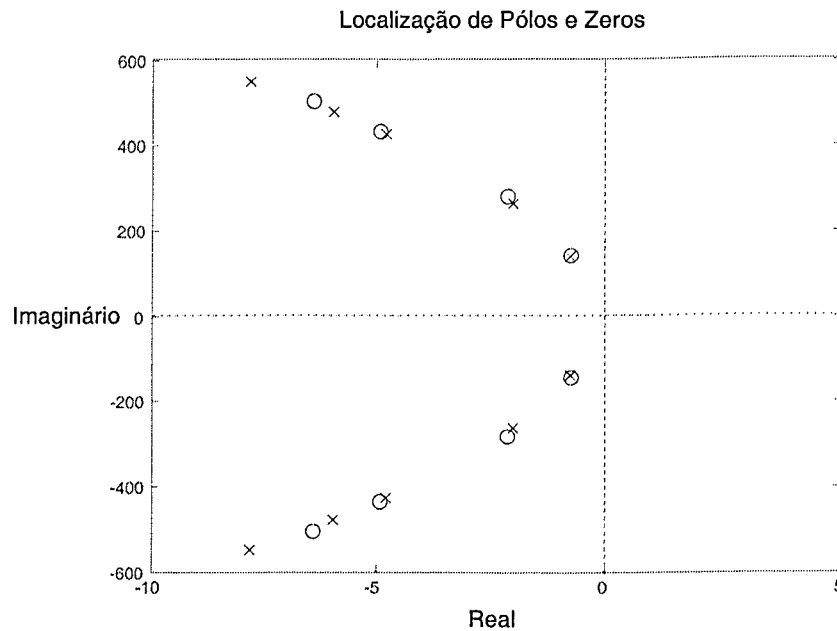


Figura 5.23- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência \hat{G}_{as}^{11} do *novo* sistema truncado.

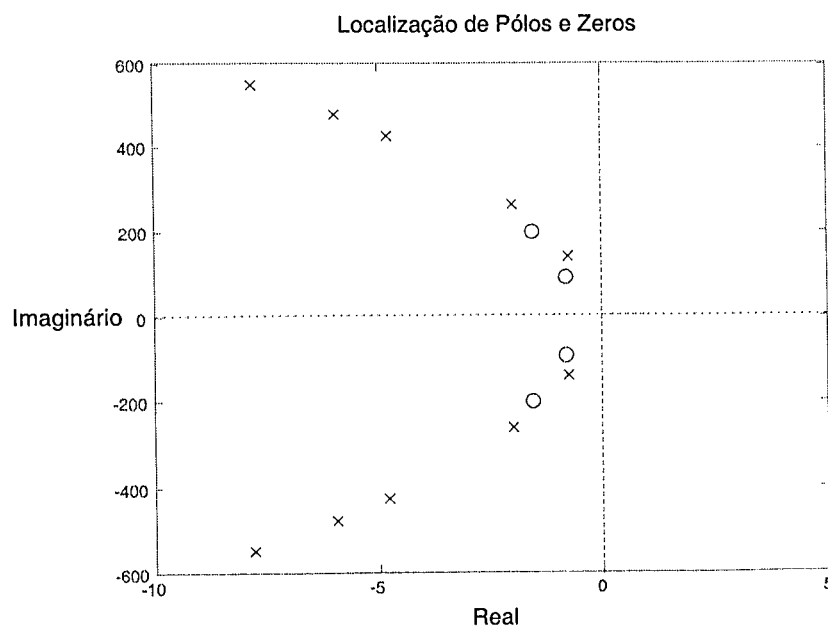


Figura 5.24- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência \hat{G}_{as}^{12} do *novo* sistema truncado.

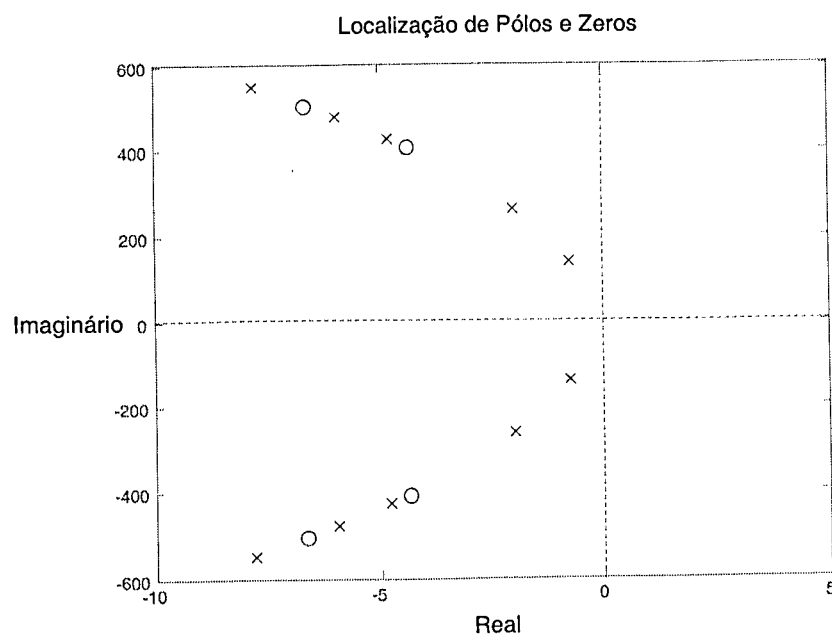


Figura 5.25- Localização dos *pólos* e *zeros* para a função de transferência \hat{G}_{as}^{13} do *novo* sistema truncado.

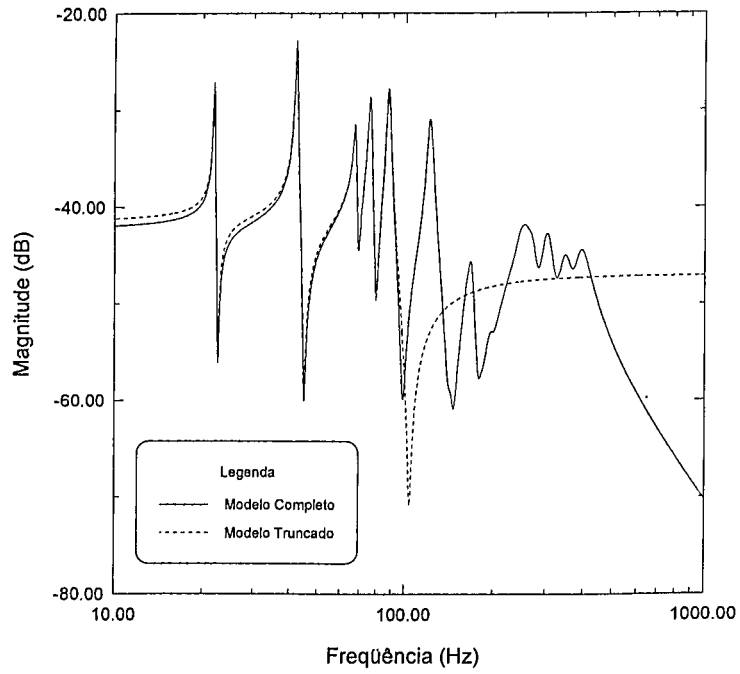


Figura 5.26- Resposta em frequência para o *novo* sistema truncado \hat{G}_{as}^{11} e completo G_c^{11} .

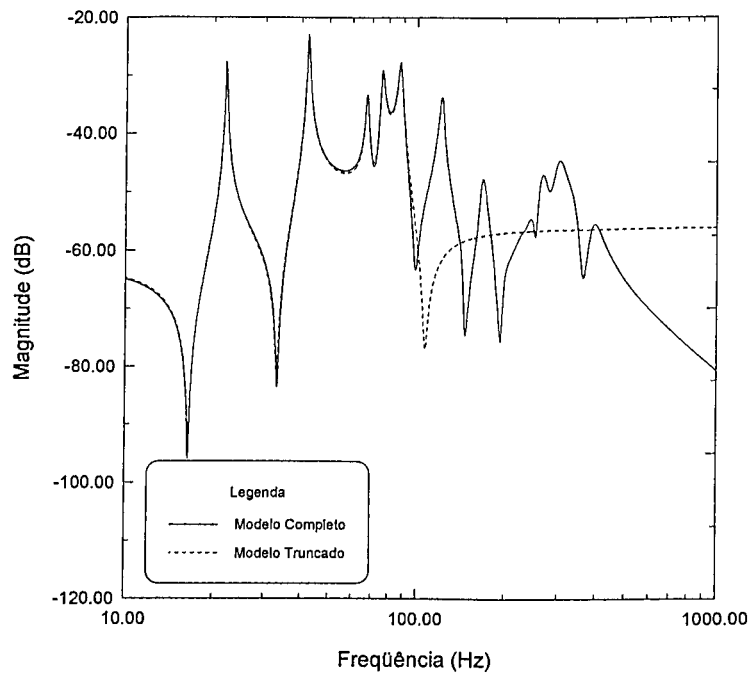


Figura 5.27- Resposta em frequência para o *novo* sistema truncado \hat{G}_{as}^{12} e completo G_c^{12} .

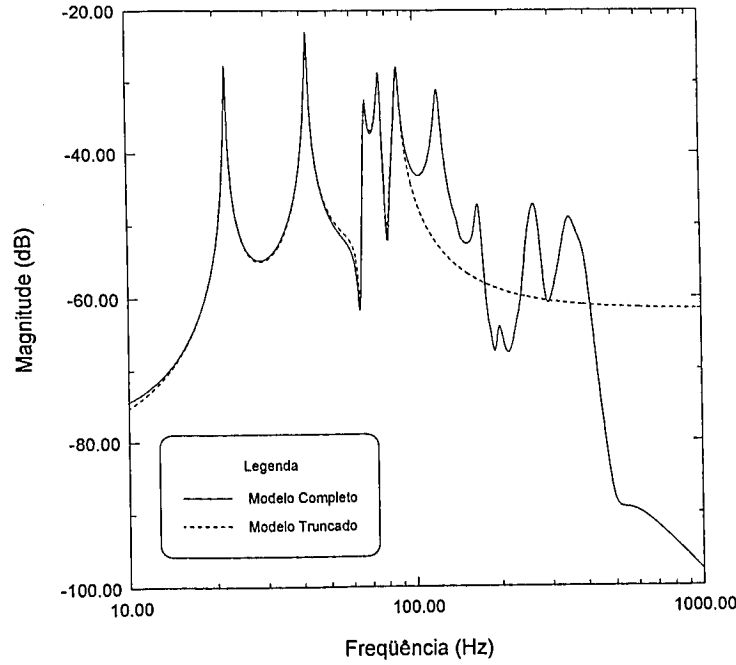


Figura 5.28- Resposta em frequência para o *novo* sistema truncado \hat{G}_{as}^{13} e completo G_c^{13} .

É com base na dedução de D_{as}^{ij} que os termos de correção das funções de transferência, apresentadas pelas Eqs. (3.71a), (3.69) e (3.71b), são determinados. Estes termos são listados a seguir:

$$D_{fw}(x, y) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} \phi_{kl}(x, y) \frac{\phi_{kl}(x_f, y_f)}{\omega_{n_{kl}}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.48a)$$

$$D_{aw}(x, y) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} \phi_{kl}(x, y) \frac{F_{kl}}{\omega_{n_{kl}}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.48b)$$

$$D_{fs} = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=n+1}^{\infty} \phi_{kl}(x_f, y_f) \frac{F_{kl}}{\omega_{n_{kl}}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right) \quad (5.48c)$$

onde F_{kl} é uma função que depende das características físicas e geométricas do material piezelétrico.

Assim, a realização do *novo* sistema, descrito em espaço de estados, é apresentado de forma similar ao sistema apresentado pelas Eqs. (5.42)-(5.44), isto é:

$$\{\dot{\bar{x}}\} = [A] \{\bar{x}\} + [B_1] \{F_q\} + [B_2] \{\Phi_a\} \quad (5.49)$$

$$w(x, y) = [C_1] \{\bar{x}\} + D_{fw}(x, y) \{F_q\} + D_{aw}(x, y) \{\Phi_a\} \quad (5.50)$$

$$\{\Phi_s\} = [C_2] \{\bar{x}\} + D_{fs} \{F_q\} + D_{as} \{\Phi_a\} \quad (5.51)$$

Neste ponto, algumas definições podem ser realizadas para o caso da formulação por *elementos finitos (FEM)* cuja representação matemática é descrita pelas Eqs. (2.99), (2.104) e (2.106), ou similarmente às Eqs. (5.49)-(5.51), têm-se:

$$\{\dot{\bar{x}}\} = [A] \{\bar{x}\} + [B_1] \{F_q\} + [B_2] \{\Phi_a\} \quad (5.52)$$

$$\{w\} = [C_1] \{\bar{x}\} + [D_{fw}] \{F_q\} + [D_{aw}] \{\Phi_a\} \quad (5.53)$$

$$\{\Phi_s\} = [C_2] \{\bar{x}\} + [D_{fs}] \{F_q\} + [D_{as}] \{\Phi_a\} \quad (5.54)$$

Do equacionamento (5.52)-(5.54), os termos de correção foram propositalmente introduzidos de forma a considerar o efeito dos modos residuais no modelo truncado. No entanto, quando se emprega a técnica de elementos finitos para a modelagem do sistema, os termos de correção devem ser determinados via procedimentos numéricos de otimização (Moheimani, 1999).

Para atentar aos conceitos expostos, na etapa seguinte, são apresentados os fundamentos teóricos sob os quais estão sustentados os controladores robustos H_∞ que, neste trabalho, se aplicam ao controle de vibrações em estruturas flexíveis.

Capítulo 6

Controladores Robustos H_∞

6.1 Introdução

O objeto fundamental da teoria de controle é estudar, propor e avaliar metodologias que permitam alterar as características dinâmicas de um determinado sistema para satisfazer um conjunto de requisitos de desempenho, estabilidade e robustez.

Tipicamente, o projeto de um controlador, ou seja, a aplicação de uma metodologia de modificação das características físicas de um processo visando determinados objetivos, envolve o cumprimento das seguintes etapas:

- a determinação de um modelo matemático do sistema a ser controlado;
- a escolha de uma estrutura para o controlador e dos seus parâmetros;
- a verificação do atendimento das especificações de projeto a partir da simulação numérica do sistema;
- a validação dos modelos desenvolvidos numericamente com os modelos experimentais e
- a implementação do controlador no sistema dinâmico *real* para avaliar se os requisitos de projeto foram atendidos.

O sucesso desta metodologia é determinado pela qualidade dos modelos adotados para o sistema dinâmico real e para o controlador. Os modelos, freqüentemente, são imperfeitos e imprecisos, assim, *a análise e o projeto de sistemas de controle na presença de incertezas define o que se denomina controle robusto*. A idéia é que se as incertezas não podem ser evitadas elas devem ser consideradas no projeto do controlador.

Neste capítulo, pretende-se apresentar a metodologia de projeto de controladores robustos do tipo H_∞ aplicados no controle de vibrações em estruturas flexíveis acionadas por atuadores piezelétricos.

6.2 Formulação Preliminar do Problema de Controle Robusto

Considere o diagrama de blocos de um sistema mostrado na Fig.6.1.

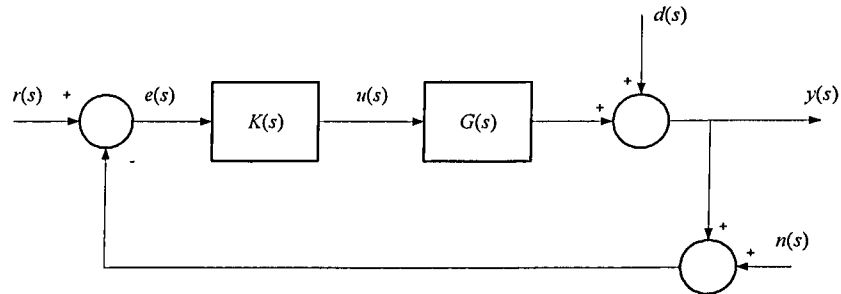


Figura 6.1- Diagrama de blocos do sistema a ser estudado.

No domínio de Laplace, tal sistema, a ser estudado, é submetido a uma perturbação $d(s)$, uma referência $r(s)$ e a um ruído $n(s)$. $G(s)$ é a função de transferência da planta (modelo nominal) e $K(s)$ é a função de transferência do controlador, todos admitidos lineares e invariantes no tempo.

No processo ilustrado na Fig. 6.1, é considerado que o modelo $G(s)$, usado para o projeto do controlador, inclui a dinâmica nominal²⁸ do sistema *real*. Na prática, contudo, o modelo dinâmico, representativo do sistema *real*, não é conhecido com exatidão pois:

- a dinâmica do sistema é conhecida apenas de maneira aproximada;
- a dinâmica do sistema, se bem conhecida, é complexa demais para ser usada na síntese do controlador $K(s)$;
- não se conhece o valor exato dos parâmetros do sistema real;
- alguns parâmetros do sistema (massa, rigidez, etc.) podem se modificar ligeiramente com o tempo e
- os parâmetros do controlador podem sofrer pequenas variações que são provocadas por ruídos que alteram a forma dos sinais de controle.

Neste último item, cabe lembrar que, em algumas situações, há reais possibilidades de ocorrer a instabilidade do sistema devido à pequenas variações (*fragilidade*) nos parâmetros do controlador (Moreira, 2002).

²⁸ Entende-se por modelo nominal ou planta aquele que descreve, de uma maneira simplificada, o comportamento de um sistema real.

A partir da Fig. 6.1, pode-se formular o problema de controle robusto que consiste essencialmente em se encontrar um compensador $K(s)$ de tal forma que:

- a) o sistema nominal realimentado $G(s) K(s) [I + G(s) K(s)]^{-1}$ seja estável;
- b) o sistema perturbado²⁹ realimentado $G_p(s) K(s) [I + G_p(s) K(s)]^{-1}$ seja estável para todo $G_p(s)$ possível, segundo um modelo definido para as incertezas e
- c) os objetivos de desempenho relativos ao acompanhamento da referência r , à rejeição dos ruídos n dos sensores, à rejeição das perturbações externas d e à variação dos parâmetros da planta sejam atendidos para os possíveis $G_p(s)$.

6.2.1 Análise do Comportamento do Sistema de Controle no Domínio da Frequência

Para o projeto do controlador é interessante investigar, numa fase preliminar, o comportamento do sistema, no domínio da frequência, a partir das relações de entrada-saída do mesmo. Com base no diagrama da Fig. 6.1, têm-se:

- Saída da planta

$$y(s) = T(s) [r(s) - n(s)] + S(s) d(s) \quad (6.1)$$

- Sinal de erro

$$e(s) = S(s) [r(s) - d(s) - n(s)] \quad (6.2)$$

- Sinal de controle

$$u(s) = R(s) [r(s) - d(s) - n(s)] \quad (6.3)$$

onde a função $S(s)$ é chamada de função de *sensibilidade* na saída da planta, a função $T(s)$ é

²⁹ O sistema perturbado é constituído por um elemento de uma "família" de sistemas lineares e invariantes no tempo inserida dentro de uma região de incertezas (formada por possíveis sistemas) cujo limite será definido posteriormente.

conhecida como função *complementar de sensibilidade* e corresponde a função de transferência de malha fechada do sistema e $R(s)$ é denominada de função *restrição de energia* e representa uma medida do esforço de controle. Estas funções são definidas como:

$$S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (6.4)$$

$$T(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (6.5)$$

$$R(s) = K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (6.6)$$

onde I é a matriz identidade de dimensões apropriadas.

A partir da definição de $S(s)$ e $T(s)$, tem-se a seguinte propriedade:

$$T(s) + S(s) = I \quad (6.7)$$

Uma vez definidas as funções descritas em (6.4)-(6.6), podem ser estabelecidas condições importantes que dizem respeito ao *desempenho* do sistema controlado. Para sistemas multivariáveis, estas funções são matriciais e o comportamento delas no domínio da frequência pode ser caracterizado pela *norma* da matriz ou pelo seu *valor singular* (veja Anexo IV). A norma está relacionada com os ganhos principais do sistema multivariável que são limitados pelo maior e pelo menor valor singular das *matrizes de transferência*.

Assim, para que a saída y do sistema acompanhe a referência r ou o erro e tenda a zero:

$$y \simeq r \quad (6.8)$$

$$e \simeq 0 \quad (6.9)$$

torna-se necessário que a norma de T esteja mais próxima possível da unidade e a norma de S seja a menor possível, segundo mostram as relações abaixo (onde a variável s foi omitida):

$$y = T(r - n) + Sd \quad (6.10a)$$

$$e = S(r - d - n) \quad (6.10b)$$

Como pode ser observado na Eq. (6.10a), quando T se aproxima da identidade, o ruído no

sensor também se manifesta na saída do sistema. Neste caso, há, portanto, um *conflito* entre os requisitos: seguir a referência r e atenuar o ruído de medida n .

Ao se fazer S "pequeno", escolhendo adequadamente K , provoca-se um "aumento" em R , conforme mostra as Eqs. (6.4) e (6.6). Por sua vez, o aumento em R implica no aumento nos níveis de controle e uma maior manifestação das perturbações d no sistema. Desta forma, deve haver um compromisso entre atender aos requisitos expostos e manter o sinal de controle u dentro de limites pré-fixados de energia. Na maioria dos problemas práticos, felizmente, a região de *baixas frequências* é onde o sinal de referência r e as perturbações d tem a parte mais significativa de suas energias, enquanto que a energia do sinal de ruído n é grande nas regiões de *alta frequência*. A estratégia é definir, portanto, regiões cujas fronteiras dependam do comportamento das referências, das perturbações e dos ruídos de medida, diferentemente para cada planta ou modelo nominal a ser controlado. Desta forma, este compromisso conflitante é resolvido *atribuindo pesos* ou ponderações diferentes a T e a S em regiões de frequência específicas conforme mostra a Fig. 6.2.

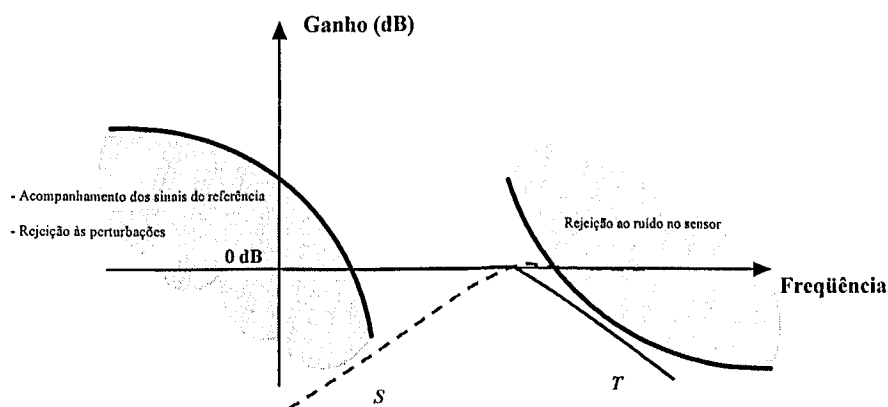


Figura 6.2- Ganho requerido em frequência das funções de sensibilidade S e complementar de sensibilidade T do sistema controlado.

Tal figura mostra, em linhas gerais, que a função T (função de transferência de malha fechada) deve ter um alto ganho em baixas frequências e baixo ganho em altas frequências, o contrário acontecendo com a função S . Com relação à função R , a ponderação sobre ela limita o ganho do sinal de controle, restringindo com isso o nível de energia nos atuadores. Esta condição está ligada à saturação dos atuadores cujo valor não deve ultrapassar um certo limite pré-estabelecido de projeto. Visando adequar o problema de controle na forma desejada, pretende-se, na seção seguinte, formalizar matematicamente estes conceitos e estabelecer apropriadamente os requisitos de comportamento (*critérios de desempenho*) especificados.

6.2.2 Formulação Matemática para o Problema Preliminar de Controle Robusto: Elaboração dos Requisitos de Desempenho do Modelo Nominal

Uma forma de descrever matematicamente os requerimentos de projeto discutidos na seção anterior, usando valores singulares ou norma infinita (veja Anexo IV), é dada a partir das relações:

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty \leq 1 \quad (6.11a)$$

$$\|W_2(s)R(s)\|_\infty \leq 1 \quad (6.11b)$$

$$\|W_3(s)T(s)\|_\infty \leq 1 \quad (6.11c)$$

Nestas desigualdades, os filtros W_1 , W_2 e W_3 são elementos de projeto³⁰, ou seja, são filtros escolhidos pelo projetista de tal forma a definir um *perfil* adequado para estas funções de ponderação no domínio da frequência, isto é:

- W_1 com alto ganho na região de baixas frequências e um ganho baixo em altas frequências;
- W_2 com ganho baixo na região de baixas frequências e um ganho adequadamente alto na região de altas frequências;
- W_3 com baixo ganho na região de baixas frequências e um alto ganho na faixa correspondente às altas frequências.

Assim, se tais filtros incorporarem as especificações demandadas de projeto as desigualdades descritas em (6.11a)-(6.11c) podem ser condensadas na forma:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)R(s) \\ W_3(s)T(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1S \\ W_2KS \\ W_3GKS \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \quad (6.12)$$

Estabelece-se assim um acoplamento entre os requerimentos apresentados numa única norma. Este problema, também conhecido como projeto misto da função sensibilidade (*Mixed Sensitivity Design*), deve ser tratado com particular atenção, uma vez que o cumprimento simultâneo dos três requisitos de projeto só é permitido pelo uso de técnicas específicas do projeto de controle robusto (Doyle e Stein, 1981).

Então, o problema de controle robusto pode ser expresso como a construção ou síntese de um controlador K de tal forma que a norma infinita de todos os requisitos expostos seja menor

³⁰ A escolha das funções de ponderação W_1 , W_2 e W_3 será realizada apropriadamente nas seções que se seguem.

que a unidade. Para atingir tais especificações, agrupadas dentro da norma dada pela relação (6.12), definem-se as seguintes relações de entrada/saída a *regular*:

$$v_1(s) = W_1(s) e(s) \quad (6.13a)$$

$$v_2(s) = W_2(s) u(s) \quad (6.13b)$$

$$v_3(s) = W_3(s) y(s) \quad (6.13c)$$

de maneira que se tenha explicitamente (apareçam os termos W_1S , W_2R e W_3T), a partir das Eqs. (6.1)-(6.3), a relação definida em (6.12):

$$v_1(s) = W_1(s) S(s) [r(s) - d(s) - n(s)] \quad (6.14)$$

$$v_2(s) = W_2(s) R(s) [r(s) - d(s) - n(s)] \quad (6.15)$$

$$v_3(s) = W_3(s) \{T(s) [r(s) - n(s)] + S(s) d(s)\} \quad (6.16)$$

Como W_3 é um filtro passa alta e as perturbações estão presentes normalmente na região de baixas frequências, a quantidade W_3Sd pode ser desprezada da relação (6.16). Assim as relações (6.14)-(6.16) podem ser reescritas como:

$$T_{v_1p_1}(s) = W_1(s) S(s) \quad (6.17)$$

$$T_{v_2p_2}(s) = W_2(s) R(s) \quad (6.18)$$

$$T_{v_3p_3}(s) = W_3(s) T(s) \quad (6.19)$$

onde $T_{v_1p_1}(s)$ e $T_{v_2p_2}(s)$ são as matrizes de funções de transferência das saídas v_1 e v_2 em relação às entradas $p_1 = p_2 = r - d - n$ e $T_{v_3p_3}(s)$ é a matriz de funções de transferência da saída v_3 com relação à entrada $p_3 = r - n$.

Neste sentido, deve-se determinar um controlador $K(s)$ de forma que a norma das matrizes de funções de transferência $T_{v_i p_i}(s)$ satisfaça a seguinte desigualdade:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)R(s) \\ W_3(s)T(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} T_{v_1 p_1}(s) \\ T_{v_2 p_2}(s) \\ T_{v_3 p_3}(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \|T_{vp}(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad (6.20)$$

O diagrama do sistema na sua configuração final, incluindo as funções de ponderação necessárias, é apresentado na Figura 6.3. Esta figura descreve o que se denomina *planta aumentada* usada como modelo de projeto para a síntese do controlador.

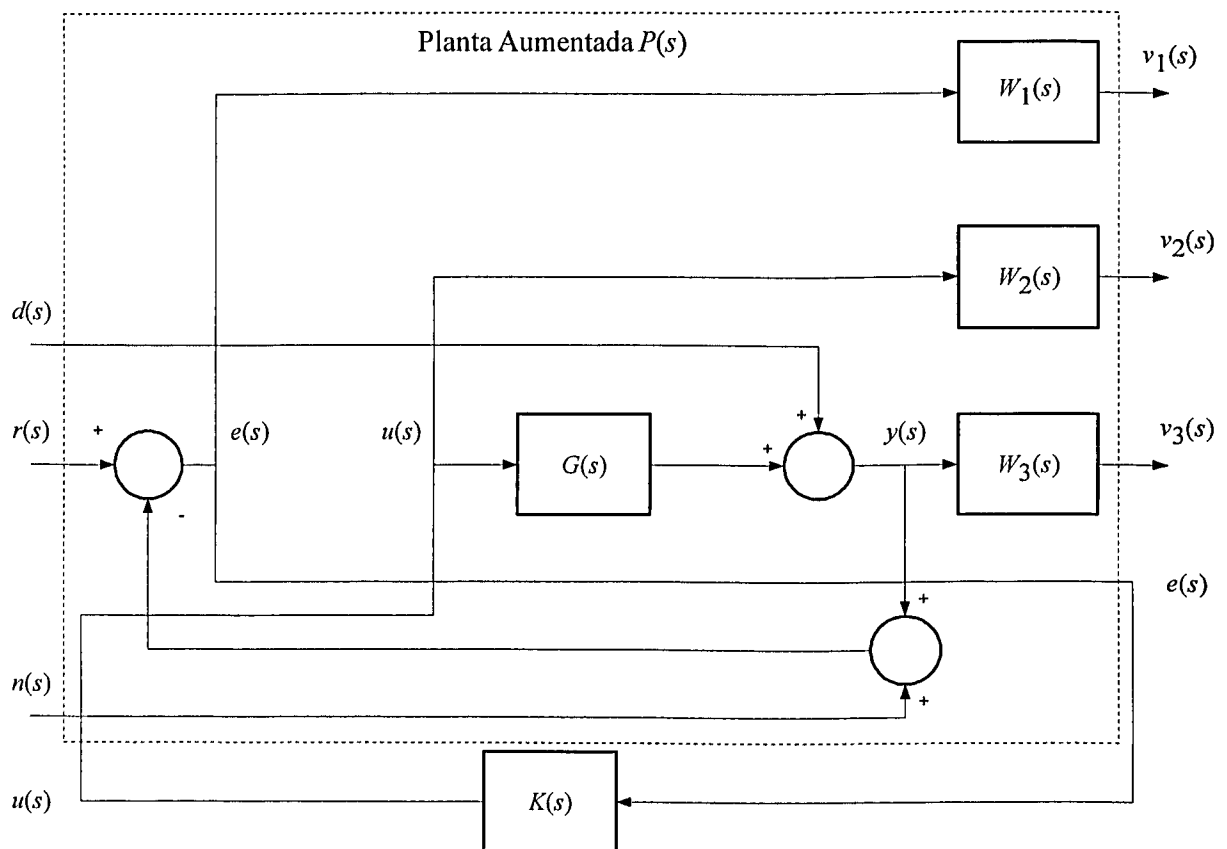


Figura 6.3- Diagrama de blocos do sistema realimentado considerando os filtros de projeto $W_1(s)$, $W_2(s)$ e $W_3(s)$.

O projeto do controlador para uma determinada aplicação prática, no entanto, não se restringe à garantia das especificações de projeto anunciadas. Assim como foram definidas as saídas $v_1(s)$, $v_2(s)$ e $v_3(s)$ no diagrama da Fig. 6.3, pode-se, no presente problema, definir outras variáveis de saída. Para isto, torna-se necessário introduzir especificações de projeto que sejam relevantes para o problema de controle robusto, como será visto mais adiante.

Em variáveis de estado, o diagrama da Fig. 6.3 gera um conjunto de equações que pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ p \\ u \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

onde \bar{x} é o vetor de estado do sistema nominal G e dos filtros W_1 , W_2 e W_3 ; p é o vetor das entradas (d , r e n) e v é o vetor das saídas (v_1 , v_2 e v_3).

Neste cenário todas as entradas do sistema (d , r e n) são reunidas em um vetor de *entradas exógenas* p . A saída se divide em um vetor de erros medidos e usados para realimentar o sistema, e um vetor de *saídas reguladas* v , contendo os sinais a serem controlados (v_1 , v_2 e v_3) e por fim, tem-se o vetor de sinais de controle u . Desta forma, segundo este enfoque, um sistema linear, como ilustrado na Figura 6.3 e representado pela Eq. (6.21), pode ser convertido em uma outra forma de representação. Esta representação alternativa se aplica a uma larga classe de problemas de controle (*SISO* ou *MIMO*) e denomina-se de *representação convexa* (veja Fig. 6.4).

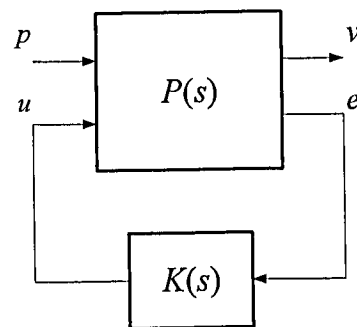


Figura 6.4- Representação convexa da planta aumentada.

Aplicando a transformada de Laplace na Eq. (6.21) e reescrevendo-a em termos somente de p e u , tem-se:

$$\begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(sI - A)^{-1}B_1 + D_{11} & C_1(sI - A)^{-1}B_2 + D_{12} \\ C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21} & C_2(sI - A)^{-1}B_2 + D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

ou

$$\begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

onde as matrizes P_{11} , P_{12} , P_{21} e P_{22} são obtidas diretamente de (6.22).

Assim, a matriz $P(s)$, mostrada na Fig. 6.4, é dada pela seguinte relação:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array} \right] \quad (6.24)$$

No domínio convexo, a matriz de funções de transferência de *malha fechada* T_{vp} é dada por:

$$T_{vp}(s) = \frac{v(s)}{p(s)} = P_{11}(s) + P_{12}(s) K(s) [I - P_{22}(s) K(s)]^{-1} P_{21}(s) \quad (6.25)$$

Desta forma, o problema de controle robusto resume-se em encontrar um controlador $K(s)$ tal que a lei de controle associada *minimize* a norma infinita da função de transferência $T_{vp}(s)$, ou seja:

$$\min_{K(s)} \|T_{vp}(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad (6.26)$$

Uma vez descrito e colocado o problema na sua forma preliminar, ou seja, definidos os requisitos de desempenho do modelo nominal, discute-se, a seguir, a *incorporação de incertezas* no modelo de projeto do controlador para a definição, em caráter geral, do problema de controle robusto. Tais incertezas, inerentes a todo sistema físico, são apresentadas e discutidas em detalhes na seção seguinte.

6.3 Representação Matemática das Incertezas Presentes no Modelo de Projeto do Controlador

Entre a representação matemática da dinâmica de um sistema e seu comportamento real, inevitavelmente existirá alguma discrepância. A representação deste *erro*, quando expressa num *modelo de incertezas*, deve refletir o conhecimento que se tem dos mecanismos que os provocam e devem apresentar uma estrutura matemática conveniente para manipulações (Doyle e Stein, 1981).

Uma planta pode apresentar incertezas de várias ordens, sobretudo devido à impossibilidade de se modelar exatamente o sistema dinâmico em questão e, na tentativa de especificar o sistema *real*, as incertezas são definidas, segundo a teoria de controle robusto, como: *incertezas estruturadas e não-estruturadas*.

6.3.1 Modelo de Incerteza Estruturada

O modelo de *incerteza estruturada* está associado a uma classe de incerteza que é função de um parâmetro específico do *modelo nominal* G . É o caso, por exemplo, da incerteza no amortecimento (ζ) dos modos de vibração de uma estrutura. Os valores do amortecimento não são conhecidos exatamente, mas é sabida a sua faixa de variação ($0 < \zeta < 1$).

Uma forma de lidar com a incerteza estruturada é modelá-la, segundo a descrição *convexa*, como um laço de *realimentação adicional externa*, além do laço de controle, o que permite *isolá-la* do modelo nominal P aproveitando, com isso, sua estrutura ao máximo. A Figura 6.5 ilustra a configuração utilizada para este tipo de representação.

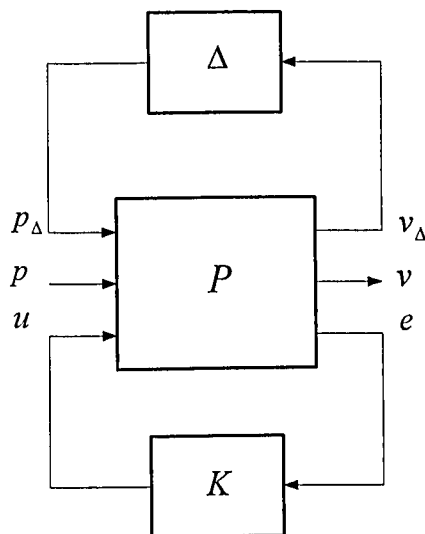


Figura 6.5- Sistema perturbado pela realimentação adicional na forma convexa.

A idéia básica, quando se emprega tal representação, é *separar* o que é "conhecido" do modelo nominal (por exemplo: parâmetros da estrutura, dos atuadores e sensores, etc) daquilo que é "desconhecido" (por exemplo: incertezas no amortecimento, frequências naturais, módulo de elasticidade, etc). Desta forma qualquer variação paramétrica Δ (limitada dentro de um intervalo conhecido) aparece como uma perturbação p_Δ , inserida no modelo nominal P .

Para se chegar neste tipo de *realização*, a técnica empregada é a chamada *Transformação Fracionária Linear* (Balas, 2001) que objetiva formular o problema de controle robusto em uma *forma algébrica padronizada*, capaz de lidar com sistemas em malha fechada de diferentes configurações e capaz de descrever a interconexão de um número arbitrário de subsistemas (Balas et al, 1994; Balas e Doyle, 1994).

Para exemplificar a aplicação desta técnica, considere um sistema de segunda ordem constituído por uma massa (m), uma mola (k) e um amortecedor (c) dado pela relação:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = u \quad (6.27)$$

Suponha que os coeficientes k e c não sejam conhecidos exatamente, mas sabe-se que variam em um dado intervalo, ou seja:

$$k = k_0 (1 + a_k \delta_k) \quad (6.28a)$$

$$c = c_0 (1 + a_c \delta_c) \quad (6.28b)$$

onde a_k e a_c denotam a *amplitude* da incerteza (podendo serem expressas percentualmente) relativas aos coeficientes k_0 e c_0 , respectivamente, e δ_k e δ_c representam os elementos *desconhecidos* e limitados no intervalo de $[-1, 1]$. A representação gráfica, em diagrama de blocos, para o sistema descrito pela Eq. (6.27) com incertezas, é mostrada na Fig. 6.6.

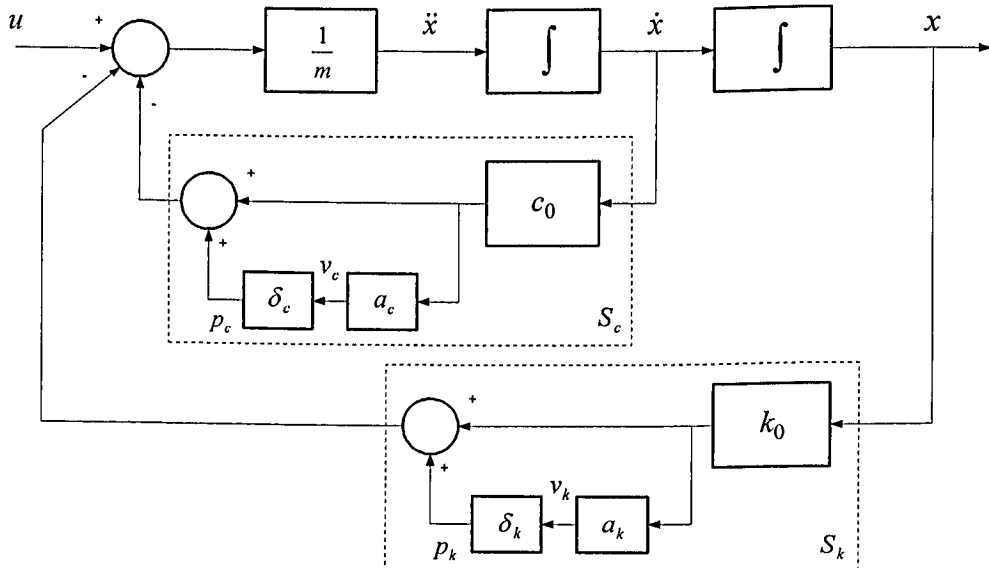


Figura 6.6- Diagrama de blocos do sistema massa-mola-amortecedor com incertezas nos parâmetros k e c .

Com relação à Fig. 6.6, é possível simplificar ou transformar os subsistemas S_k e S_c , substituindo-os por *matrizes* (M_k e M_c) contendo somente *elementos constantes* (Balas, 2001). Assim, tais matrizes são *realimentadas* pelos parâmetros desconhecidos δ_k e δ_c , conforme ilustra a Fig. 6.7.

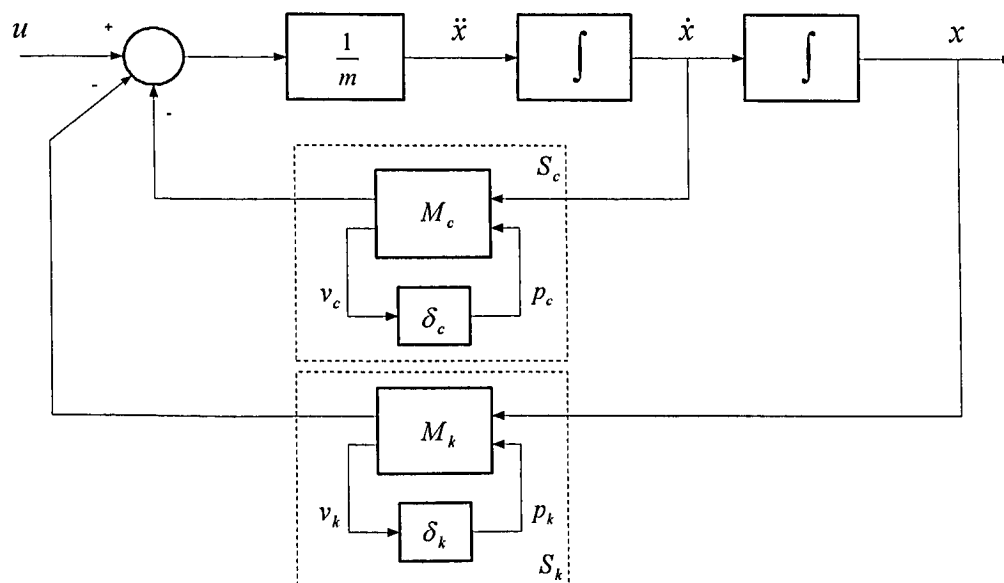


Figura 6.7- Diagrama de blocos do sistema massa-mola-amortecedor com realimentação interna das incertezas.

Nesta nova configuração as matrizes M_k e M_c são expressas, respectivamente, pelas relações a seguir:

$$M_k = \begin{bmatrix} k_0 & a_k k_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29a)$$

$$M_c = \begin{bmatrix} c_0 & a_c c_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29b)$$

Assim, o sistema transformado, descrito pela Fig. 6.7, pode ser finalmente *convertido* na forma convexa mostrada na Fig. 6.5, separando-se os elementos desconhecidos (δ_k e δ_c) daqueles inseridos na dinâmica nominal P (veja Fig. 6.8).

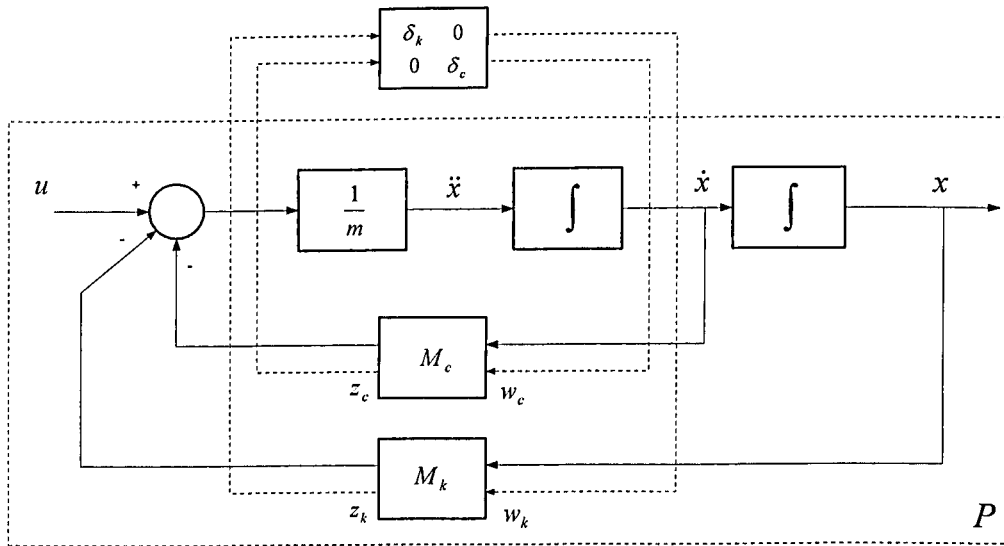


Figura 6.8- Diagrama de blocos do sistema massa-mola-amortecedor com realimentação externa das incertezas.

Agrupando os elementos δ_k e δ_c dentro de um bloco Δ na forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_k & 0 \\ 0 & \delta_c \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

o sistema ilustrado na Fig. 6.8 pode ser então representado pela Fig. 6.9.

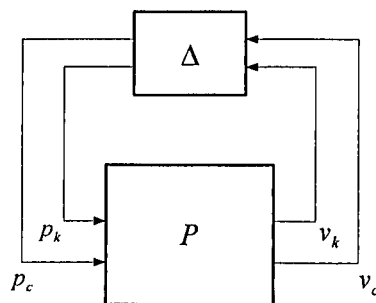


Figura 6.9- Sistema massa-mola-amortecedor perturbado na forma convexa.

Assim, têm-se o que se denomina *sistema perturbado na forma convexa*, onde as incertezas, representadas pelos parâmetros δ_k e δ_c (ou Δ), aparecem como perturbações (p_k e p_c) inseridas na dinâmica nominal P . Neste sentido, tais perturbações podem ser incorporadas dentro de um determinado projeto de controle robusto (como mostrado na Fig. 6.4) como sendo as *novas entradas exógenas* (p_k e p_c) e *saídas reguladas* (v_k e v_c) e o problema passa a ser tratado na forma descrita na Seção 6.2.2.

6.3.2 Modelo de Incerteza Não-Estruturada

Outra maneira de se tratar os erros é admiti-los *não-estruturados*, ou seja, os mesmos não podem ser visualizados na estrutura do modelo. Na prática os erros representados por estruturas altamente parametrizadas são erros de *baixa frequência* (dinâmica do modelo nominal), enquanto que os erros de *alta frequência* (dinâmicas não modeladas devido ao truncamento modal) são melhor representados na forma de incertezas não estruturadas.

Assim, as incertezas *não-estruturadas* podem ser representadas da maneira como é mostrada na Fig. 6.10, onde se observa a planta *nominal* G e a planta *perturbada* G_p inseridas dentro de uma região limitada.

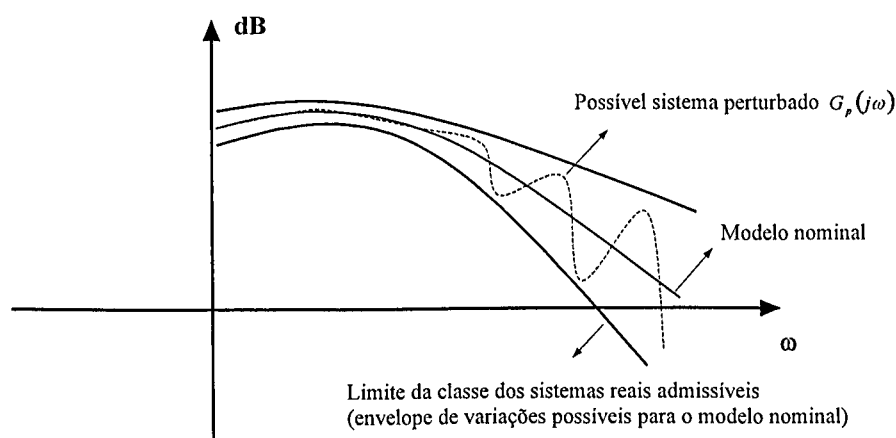


Figura 6.10- Diagrama de Bode ilustrando a classe de sistemas reais admissíveis.

A amplitude desta região é dada pela *forma* (perfil admitido para as incertezas em função da frequência) e pela *norma* das incertezas (amplitude das incertezas). Admite-se ainda que a planta perturbada G_p representa "exatamente" o *sistema físico real* em estudo. Existe, portanto, uma *diferença* entre as duas representações (G e G_p) e é interessante, do ponto de vista de projeto, que se represente matematicamente essa diferença, que a partir de agora é denominada de *erro de modelagem* ou *incerteza residual* $E(s)$.

As incertezas *não-estruturadas* admitem dois tipos predominantes de representação: a *incerteza multiplicativa* e a *incerteza aditiva*.

- Incerteza Multiplicativa

Este tipo de representação³¹ é ilustrado, em diagramas de bloco, pela Fig. 6.11.

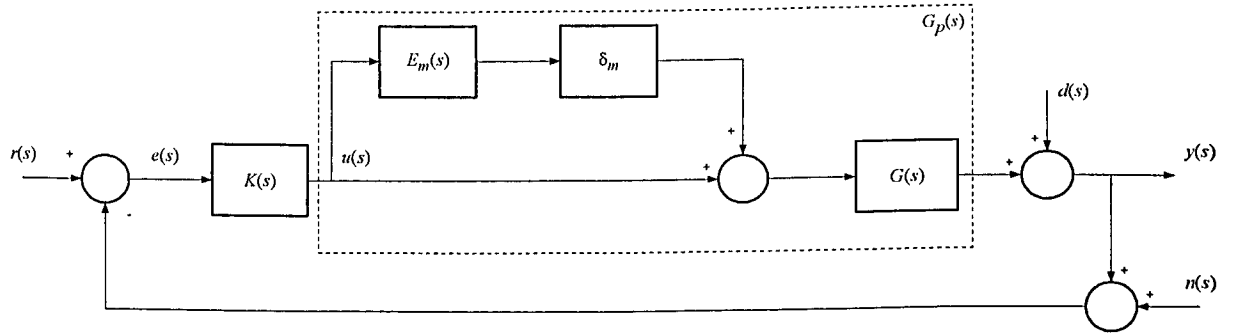


Figura 6.11- Diagrama de blocos do sistema de controle ilustrando o modelo do sistema perturbado G_p com incerteza do tipo multiplicativa.

e a sua descrição matemática é dada por:

$$G_p(s) = G(s) [I + E_m(s) \delta_m] \quad (6.31)$$

onde δ_m é uma *função desconhecida* limitada no intervalo de -1 a 1 e cuja norma infinita é, por definição:

$$\|\delta_m\|_{\infty} \leq 1, \quad \forall \omega \quad (6.32)$$

Para este tipo de representação da incerteza, o módulo do erro E_m pode ser interpretado como sendo a *percentagem de incerteza* ou incerteza relativa presente no modelo para uma determinada frequência ω . Desta forma, E_m representa o *perfil da incerteza* em função da frequência ω e cuja amplitude é dada pela função δ_m :

$$E_m(s) \delta_m = \frac{G_p(s) - G(s)}{G(s)} \quad (6.33)$$

³¹ Existe uma outra configuração equivalente disponível para este tipo de representação de incerteza e denomina-se *incerteza multiplicativa de saída* (Balas et al, 1994; Balas e Doyle, 1994).

- Incerteza Aditiva

O diagrama de blocos associado a este tipo de representação é ilustrado pela Fig. 6.12.

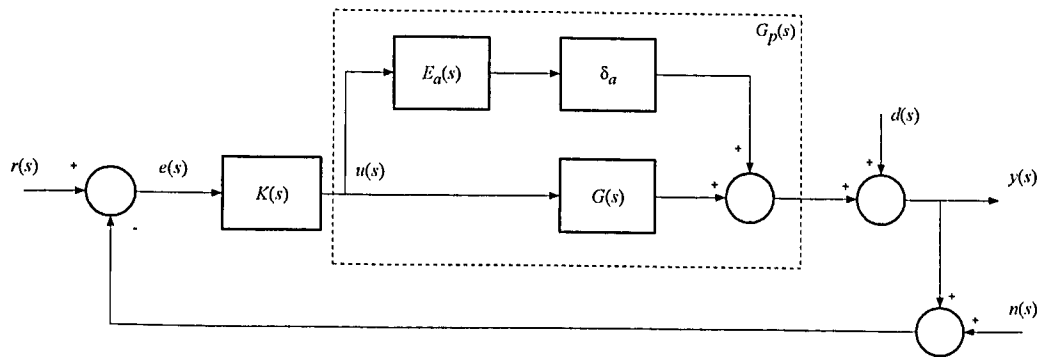


Figura 6.12- Diagrama de blocos do sistema de controle ilustrando o modelo do sistema perturbado G_p com incerteza do tipo aditiva.

e a representação matemática associada é descrita através da seguinte relação:

$$G_p(s) = G(s) + E_a(s) \delta_a \quad (6.34)$$

onde a norma infinita da função δ_a é definida como:

$$\|\delta_a\|_\infty \leq 1, \quad \forall \omega \quad (6.35)$$

Neste tipo de incerteza o erro E_a é entendido como sendo a *amplitude absoluta* da incerteza entre os modelos nominal (G) e perturbado (G_p), isto é:

$$E_a(s) \delta_a = G_p(s) - G(s) \quad (6.36)$$

Seja na representação aditiva ou multiplicativa, tipicamente, a magnitude de $E(s)$ é pequena em baixas frequências, onde em geral os modelos são fiéis, e grande em altas frequências (veja Fig. 6.13), cujos erros grosseiros podem estar associados, por exemplo, à dinâmicas desprezadas de atuadores, interações não-lineares não consideradas no modelo, dinâmicas não modeladas devido à redução de modelos ou outros elementos de efeito significativo em altas frequências (Ribeiro, 1995).

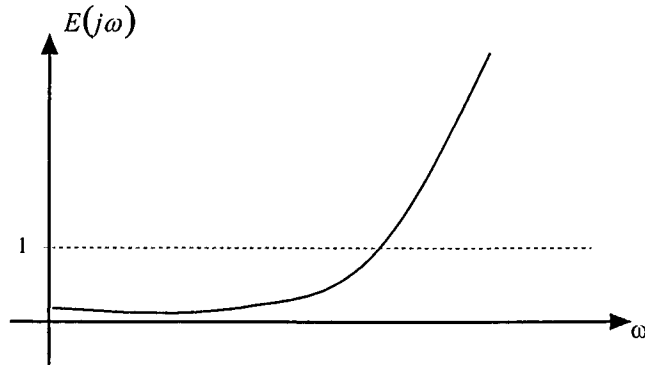


Figura 6.13- Comportamento típico de $E(\omega)$.

Assim, de uma forma qualitativa, as incertezas *não-estruturadas* podem ser estimadas (pelo menos no tocante ao seu comportamento) na medida em que se estabelece ou adota-se um modelo nominal caracterizado dentro de um intervalo de frequências de interesse.

Conforme descrito na Seção 6.3.1, a incerteza contida em δ_m ou δ_a (veja Figs. 6.11 e 6.12) pode ser então *isolada* da malha de controle. Desta forma o conjunto das incertezas *estruturadas* (δ_e) e *não-estruturadas* (δ_{ne}) formam o conjunto de perturbações Δ escrita como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_e & 0 \\ 0 & \delta_{ne} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Assim, qualquer variação paramétrica ou não-paramétrica aparece como uma perturbação p_Δ inserida na dinâmica nominal G (veja Fig. 6.14).

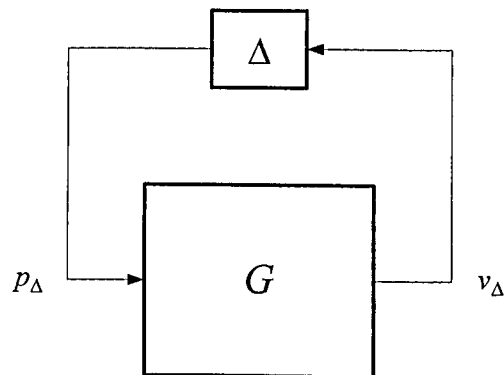


Figura 6.14- Sistema perturbado na forma convexa pelo conjunto de incertezas Δ .

É requisito fundamental que tanto o sistema nominal G realimentado como o sistema perturbado G_p sejam estáveis. Para isto, torna-se necessário estabelecer um critério de estabilidade que toque na questão da robustez às dinâmicas não-modeladas. Na seção seguinte, discute-se, em detalhes, esta questão a partir da descrição matemática desenvolvida para as incertezas não-estruturadas.

6.4 Condições de Robustez às Dinâmicas Não Modeladas

Nesta seção as condições de estabilidade do modelo perturbado G_p frente às dinâmicas desconhecidas são estabelecidas dentro de um rigoroso formalismo matemático construído a partir do conhecimento das propriedades dos valores singulares apresentadas no Anexo IV.

6.4.1 Condições de Estabilidade do Sistema Nominal com Incertezas na Forma Multiplicativa

Seja a descrição matemática da incerteza do tipo multiplicativa dada pela relação (6.31), ou ainda:

$$G_p(s) = G(s) [I + E_m(s)] \quad (6.38)$$

O sistema perturbado realimentado $G_p(s) K(s) [I + G_p(s) K(s)]^{-1}$ é estável se o determinante de $I + G_p(s) K(s)$ não se anular ou se esta matriz for *não singular* para qualquer frequência $\omega > 0$.

Assim substituindo $G_p(s)$, obtido a partir da equação (6.38), em $I + G_p(s) K(s)$, obtem-se:

$$I + [I + E_m(s)] G(s) K(s) \quad (6.39)$$

que deve ser não singular.

A equação (6.39) pode ser reescrita na forma:

$$I + G(s) K(s) + E_m(s) G(s) K(s) \quad (6.40)$$

Como $I + G(s) K(s)$ é não singular, pois o sistema nominal é por hipótese *estável*, então pré

multiplicando a Eq. (6.40) por $[I + G(s) K(s)]^{-1}$, resulta:

$$[I + G(s) K(s)]^{-1} [I + G(s) K(s) + E_m(s) G(s) K(s)] \quad (6.41)$$

que deve ser também não singular.

Reagrupando os termos da Eq. (6.41), tem-se:

$$I + E_m(s) \left\{ [I + G(s) K(s)]^{-1} G(s) K(s) \right\} \quad (6.42)$$

Utilizando-se do seguinte resultado (Cruz, 1996): "Sejam A e B matrizes complexas, com A não singular. Então $A + B$ é não singular se $\underline{\sigma}(A) > \overline{\sigma}(B)$ ", assim, pode-se afirmar que a Eq. (6.42) é não singular se:

$$\underline{\sigma}(I) > \overline{\sigma}[E_m(s) C(s)] \quad (6.43)$$

onde $C(s)$ é igual a $[I + G(s) K(s)]^{-1} G(s) K(s)$.

Aplicando a desigualdade dada pela Eq. (IV.5b) no segundo membro da relação (6.43), tem-se que a não singularidade de $I + E_m(s) C(s)$ - veja Eq. (6.42) - estará garantida se:

$$\overline{\sigma}[E_m(s) C(s)] \leq \overline{\sigma}[E_m(s)] \overline{\sigma}[C(s)] < 1.0 \quad (6.44)$$

ou

$$\overline{\sigma}[C(s)] < \frac{1}{\overline{\sigma}[E_m(s)]} \quad (6.45)$$

Aplicando a propriedade da norma definida pela relação (IV.5e) em $\overline{\sigma}[C(s)]$, resulta em:

$$\overline{\sigma}[C(s)] = \frac{1}{\underline{\sigma} \left\{ [G(s) K(s)]^{-1} [I + G(s) K(s)] \right\}} \quad (6.46)$$

Substituindo a Eq. (6.46) em (6.45), obtém-se:

$$\frac{1}{\underline{\sigma} \left\{ [G(s) K(s)]^{-1} [I + G(s) K(s)] \right\}} < \frac{1}{\overline{\sigma}[E_m(s)]} \quad (6.47)$$

ou de maneira aproximada (para $G(s) K(s)$ muito menor que a identidade I):

$$\frac{1}{\underline{\sigma} \{ [G(s) K(s)]^{-1} + I \}} < \frac{1}{\overline{\sigma} [E_m(s)]} \quad (6.48)$$

Empregando a propriedade da norma definida em (IV.5g) da seguinte forma:

$$\underline{\sigma} (X + Y) \geq \underline{\sigma} (X) - \overline{\sigma} (Y) \quad (6.49)$$

no primeiro membro da equação (6.48) (onde $X = [G(s) K(s)]^{-1}$ e $Y = I$), resulta:

$$\frac{1}{\underline{\sigma} \{ [G(s) K(s)]^{-1} \} - 1} < \frac{1}{\overline{\sigma} [E_m(s)]} \quad (6.50)$$

ou

$$\underline{\sigma} \{ [G(s) K(s)]^{-1} \} - 1 > \overline{\sigma} [E_m(s)] \quad (6.51)$$

Usando a propriedade (IV.5d) em (6.51), resulta:

$$\frac{1}{\overline{\sigma} [G(s) K(s)]} > \overline{\sigma} [E_m(s)] + 1 \quad (6.52)$$

A equação (6.52) pode ser reescrita na forma final:

$$\overline{\sigma} [G(s) K(s)] < \frac{1}{\overline{\sigma} [E_m(s)] + 1} \quad (6.53)$$

É necessário que a estabilidade seja averiguada considerando principalmente a região de freqüências onde limitante superior das incertezas seja muito grande ($\overline{\sigma} [E_m(s)] \gg 1$), ou seja, a estabilidade do sistema perturbado é analisada, preponderantemente, na região de freqüências onde o erro de modelagem é grande ($\omega \in \Omega_{\text{erros grandes}}$), uma vez que não há garantia nenhuma de estabilidade do sistema nesta região até porque não há descrição matemática do comportamento do mesmo na faixa considerada. Neste sentido a Eq. (6.53) pode ser reescrita na forma:

$$\overline{\sigma} [G(s) K(s)] < \frac{1}{\overline{\sigma} [E_m(s)]}, \text{ para } \omega \in \Omega_{\text{erros grandes}} \quad (6.54)$$

que é denominada, na literatura de condição de *robustez da estabilidade* e tem a função de *assegurar* a estabilidade do sistema em malha fechada frente às incertezas não modeladas descritas na forma multiplicativa.

A partir da desigualdade (6.48) é possível obter uma outra forma de representação da relação descrita em (6.54), utilizando-se a relação (6.5), resultando em:

$$\bar{\sigma}[T(s)] < \frac{1}{\bar{\sigma}[E_m(s)]}, \text{ para } \omega \in \Omega_{\text{erros grandes}} \quad (6.55)$$

ou ainda (introduzindo o operador $\|\cdot\|_\infty$):

$$\|T(s)\|_\infty < \frac{1}{\|W_m(s)\|_\infty}, \text{ para } \omega \in \Omega_{\text{erros grandes}} \quad (6.56)$$

onde $W_m(s)$ é uma função limitante superior que envolve o espectro definido por $E_m(s)$.

Observando a relação (6.55), nota-se que a função sensibilidade complementar $T(s)$ pode ser usada no lugar de $G(s)K(s)$ para especificar a condição de robustez da estabilidade do modelo nominal admitindo incertezas do tipo multiplicativa.

A condição descrita em (6.56) estabelece que para uma dada incerteza proveniente de erros de modelagem (dinâmicas não consideradas no modelo nominal) e definida pela envoltória $W_m(s)$, o conjunto de todos os sistemas reais admissíveis (dentro do envelope de incertezas consideradas) será estável se o maior valor singular da matriz de funções de transferência de malha fechada $T(s)$ estiver abaixo do inverso da curva definida por $W_m(s)$. Assim, e a partir desta afirmação, pode-se concluir que se a dinâmica da região de frequências do processo a controlar não for conhecida (dinâmicas não modeladas), é desejável manter baixo o valor do ganho $\|T(s)\|_\infty$ nestas regiões de modo que se possa *suprimir quaisquer fenômenos* nas regiões de frequências não consideradas no modelo nominal (*Teorema do Ganho Pequeno - Small Gain Theorem*). É oportuno lembrar que este tipo de instabilidade é causada pela existência de sinais perturbadores vindos de dinâmicas não modeladas que podem aparecer no sinal do(s) sensor(es) e/ou no sinal do(s) atuador(es) na forma de ruídos indesejáveis. Deste modo, a robustez à dinâmica residual não considerada no modelo nominal é assegurada pela *diminuição* do ganho de $\|T(s)\|_\infty$ nas regiões onde não há segurança sobre o comportamento do sistema.

6.4.2 Condições de Estabilidade do Sistema Nominal com Incertezas na Forma Aditiva

Seja a descrição matemática da incerteza do tipo aditiva definida pela relação (6.34), ou melhor:

$$G_p(s) = G(s) + E_a(s) \quad (6.57)$$

Desta forma, seguindo os mesmos procedimentos descritos na seção anterior, a estabilidade do sistema perturbado $G_p(s)$ estará assegurada se o determinante da matriz, mostrada a seguir, não se anular:

$$I + [E_a(s) + G(s)] K(s) \quad (6.58)$$

ou

$$I + G(s) K(s) + E_a(s) K(s) \quad (6.59)$$

Como $I + G(s) K(s)$ é não singular, pois o sistema nominal é por hipótese *estável*, então pré-multiplicando a Eq. (6.59) por $[I + G(s) K(s)]^{-1}$, resulta:

$$[I + G(s) K(s)]^{-1} [I + G(s) K(s) + E_a(s) K(s)] \quad (6.60)$$

ou ainda

$$I + E_a(s) K(s) [I + G(s) K(s)]^{-1} \quad (6.61)$$

que deve também ser não singular.

A partir da relação (6.43) tem-se que:

$$\underline{\sigma}(I) > \bar{\sigma}[E_a(s) C(s)] \quad (6.62)$$

onde $C(s)$ é igual a $[I + G(s) K(s)]^{-1} K(s)$.

Aplicando a desigualdade dada pela Eq. (IV.5b) no segundo termo da relação (6.62), a não singularidade de $I + E_a(s) C(s)$ estará garantida se:

$$\bar{\sigma}[C(s)] < \frac{1}{\bar{\sigma}[E_a(s)]} \quad (6.63)$$

ou

$$\bar{\sigma}\{[I + G(s)K(s)]^{-1}K(s)\} < \frac{1}{\bar{\sigma}[E_a(s)]} \quad (6.64)$$

ou de maneira aproximada (para GK "muito menor" que a identidade I):

$$\bar{\sigma}[K(s)] < \frac{1}{\bar{\sigma}[E_a(s)]}, \text{ para } \omega > 0 \quad (6.65)$$

Substituindo a relação (6.6) em (6.64), tem-se finalmente a seguinte relação:

$$\bar{\sigma}[R(s)] < \frac{1}{\bar{\sigma}[E_a(s)]}, \text{ para } \omega > 0 \quad (6.66)$$

ou (introduzindo o operador $\|\cdot\|_\infty$):

$$\|R(s)\|_\infty < \frac{1}{\|W_a(s)\|_\infty}, \text{ para } \omega > 0 \quad (6.67)$$

onde $W_a(s)$ é uma função limitante que envolve o espectro definido por $E_a(s)$.

Segundo a desigualdade descrita em (6.66), nota-se que não há restrição nenhuma quanto à faixa de frequências onde o erro E_a é válido. Deste modo, esta condição é *mais geral* em relação à desigualdade dada por (6.55), uma vez que a última é válida somente na região onde os erros de modelagem são grandes ($E_m(s) \gg 1$). A partir da relação (6.67), observa-se também que a envoltória W_a (dinâmica residual não modelada) está associada à função restrição de energia R . Isto explica o fato da incerteza aditiva estar ligada à entrada do sistema nominal G (sinal de controle). A restrição sobre R garante a robustez frente à dinâmica não considerada no modelo nominal que pode levar à instabilidade do sistema, caso a condição descrita em (6.67) não for satisfeita. Esta instabilidade é causada preponderantemente por sinais perturbadores vindos de dinâmicas não modeladas que podem aparecer no sinal de comando do(s) atuador(es). Como no caso anterior (incerteza multiplicativa), isto explica porque *diminuir* o ganho de $\bar{\sigma}[K(s)]$ - veja Eq. (6.65) - nas regiões onde não há segurança sobre o comportamento do sistema (*Teorema do Ganho Pequeno - Small Gain Theorem*).

As relações descritas pelas Eqs. (6.56) e (6.67) contém informações muito importantes com respeito à robustez frente as *dinâmicas desconhecidas* e especifica a restrição do nível do sinal de controle a despeito destas dinâmicas. Toda esta discussão está relacionada à instabilidade causada por sinais perturbadores vindos de dinâmicas não modeladas que podem aparecer no sinal de comando do(s) atuador(es) e/ou no sinal de medição do(s) sensor(es). Para o caso do controle de vibrações em estruturas flexíveis, este problema está associado ao fenômeno do *spillover*³² que pode conduzir uma estrutura flexível à instabilidade principalmente aquelas pouco amortecidas (Moreira, 1998; Valer, 1999; Lima Jr., 1999).

Sob o ponto de vista de projeto, é de extrema relevância discutir o impacto que estas definições provocam na norma das funções de transferência definida pela relação (6.20). Esta discussão é feita em detalhes na seção que se segue.

6.5 Definição do Problema de Controle Robusto

A partir da representação do problema preliminar de controle ilustrado na Fig. 6.1 e das incertezas que podem estar presentes no modelo nominal, o problema de controle robusto, na sua *configuração final*, pode ser reapresentado através do diagrama de blocos ilustrado na Fig. 6.15. Neste diagrama, foram incluídos os filtros de projeto W_1 , W_2 e W_3 , o conjunto de incertezas Δ (*paramétricas e não paramétricas*) em torno da planta nominal G e os filtros de projeto W_a e W_m representando as funções erro aditivo (E_a) e multiplicativo (E_m), respectivamente.

³² Fenômeno de excitação de modos de vibração indesejáveis causado pelo efeito da dinâmica não considerada no modelo nominal (dinâmica residual) que aparecem como um sinal de distúrbio externo.

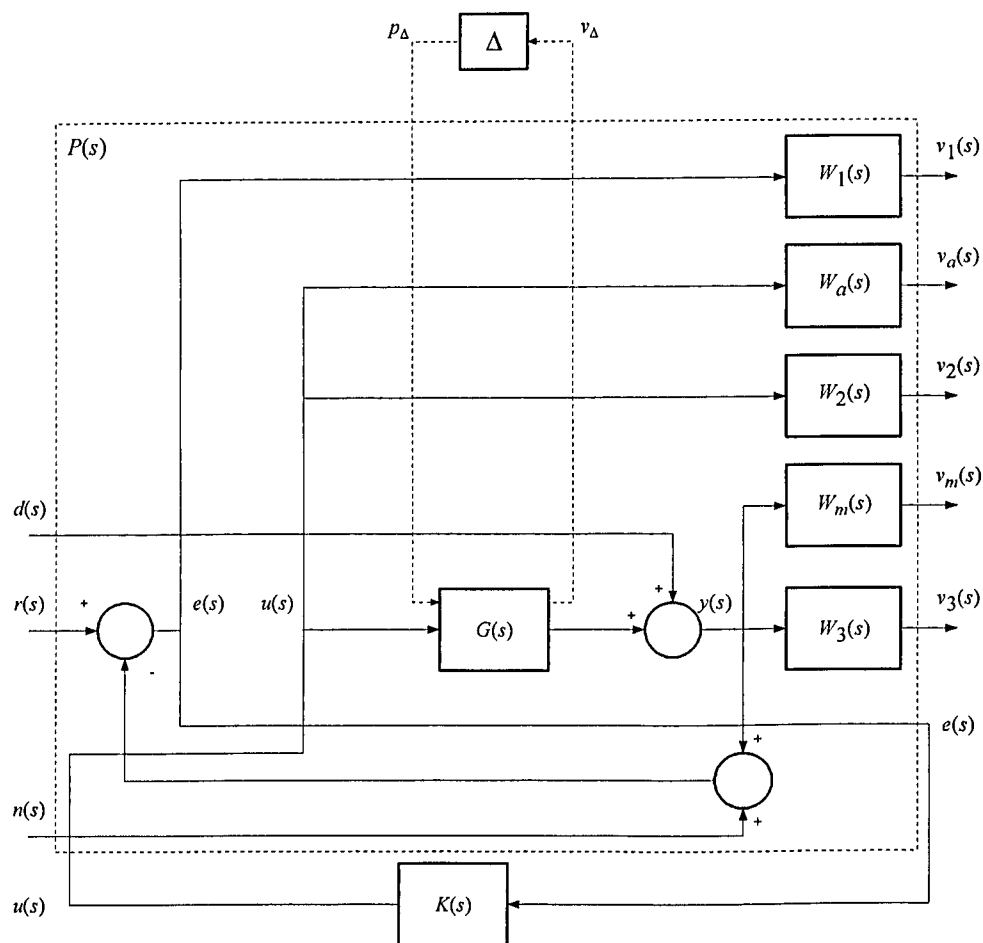


Figura 6.15- Diagrama de blocos da planta aumentada incluindo incertezas paramétricas e não paramétricas.

Assim, este mesmo diagrama é representado, sob a ótica convexa, pela Fig. 6.16.

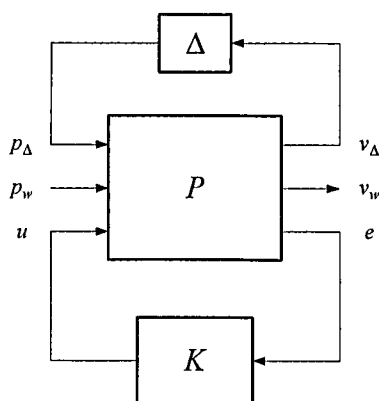


Figura 6.16- Definição do problema de controle robusto colocado na forma convexa.

Do diagrama ilustrado pela Fig. 6.16, o sistema nominal P é constituído pela dinâmica da planta, por filtros de projeto (W_1 , W_2 , W_3 , W_a e W_m - variáveis p_w e v_w) e por incertezas paramétricas e não paramétricas (p_Δ e v_Δ) que são inseridas como perturbações na entrada de P .

Assim, a partir da representação convexa do problema de controle robusto, condições importantes que dizem respeito ao desempenho e estabilidade do sistema em malha fechada podem ser definidas. Tais condições são apresentadas a seguir.

6.5.1 Condições de Desempenho do Modelo Nominal e Condições de Estabilidade Frente às Dinâmicas Não Modeladas

No problema de controle robusto posto na sua forma preliminar (veja Seção 6.2.2), os requisitos de *desempenho* do sistema nominal G foram estabelecidos a partir de desigualdades envolvendo as matrizes de sensibilidade S , sua complementar T e a função restrição de energia R e os requisitos de *estabilidade* frente às dinâmicas não modeladas do tipo multiplicativa e aditiva (veja Seção 6.4) foram definidos, respectivamente, pelas relações (6.56) e (6.67). Neste sentido, todos estes requisitos podem ser agrupados, convenientemente, na forma:

$$\left\| \begin{array}{c} W_1(s) S(s) \\ W_2(s) R(s) \\ W_3(s) T(s) \\ W_m(s) T(s) \end{array} \right\|_\infty \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{array}{c} W_1(s) S(s) \\ W_2(s) R(s) \\ W_3(s) T(s) \\ W_a(s) R(s) \end{array} \right\|_\infty = \|T_{v_w p_w}(s)\|_\infty \quad (6.68)$$

onde W_m e W_a são filtros de projeto escolhidos de tal forma a envolverem os espectros definidos por E_m e E_a , respectivamente.

Desta maneira inclui-se em uma norma infinita os requisitos de desempenho e estabilidade frente às dinâmicas não modeladas gerando com isso uma nova *planta aumentada* P que pode ser descrita pela Eq. (6.21) ou (6.23). A nova planta P é então empregada como modelo de projeto para a síntese do compensador K . Assim, o que se deseja é encontrar um controlador K que minimize a norma infinita de $T_{v_w p_w}$, dada pela relação (6.25), ou mais formalmente:

$$\min_{K(s)} \|T_{v_w p_w}(s)\|_\infty \leq 1 \quad (6.69)$$

ou ainda garanta que a norma infinita de T_{vp} permaneça até um valor γ pré-estabelecido de projeto:

$$\|T_{vp}(s)\|_{\infty} \leq \gamma \quad (6.70)$$

onde γ é uma variável de projeto associada ao *desempenho esperado* para o sistema de controle.

A variável γ mede o fator de atenuação das perturbações p para o sistema em malha fechada, ou seja, deseja-se o menor valor possível para γ , isto é, a maior robustez possível mesmo na presença de dinâmicas não modeladas que podem admitir a forma multiplicativa ou aditiva³³. Este é o significado da desigualdade (6.70) e a solução para este problema de otimização encontra-se disponível no Anexo V que apresenta a solução para o problema colocado através da desigualdade (6.70).

Deve-se ressaltar ainda que o controlador $K(s)$ final sintetizado, tem a ordem (ou tamanho das matrizes) igual à do modelo de projeto, que inclui o modelo nominal e os filtros que são inseridos dentro das matrizes A , B_1 , B_2 , C_1 e C_2 descritas pela Eq. (6.21). Portanto, o controlador obtido será de ordem consideravelmente superior à da dinâmica que se deseja efetivamente controlar (modelo nominal) conforme mostra a Eq. (V.41) (veja Anexo V). Toma-se como exemplo um caso particular onde se deseja controlar uma faixa de frequências que englobe os *três primeiros modos* de vibração de uma estrutura flexível, por exemplo. Neste caso, o modelo nominal inclui os três primeiros modos, o que equivale a uma dinâmica de 6^a ordem que representa o tamanho da matriz dinâmica do modelo nominal. Suponha que as funções de ponderação referentes ao desempenho e estabilidade (W_1 , W_2 , W_3 e W_m ou W_a) sejam todas de 2^a ordem, tem-se, assim um modelo de projeto, ou planta aumentada, de 14^a ordem (6 do modelo nominal mais 8 das funções de ponderação). Assim, o sistema terá um controlador de 14^a ordem enquanto a dinâmica correspondente ao modelo a controlar é de 6^a ordem. É com base nesta situação crítica que uma redução do modelo do controlador é necessária. Tal redução é realizada³⁴, neste trabalho, através do truncamento balanceado que é a técnica comumente utilizada na redução de modelos. Sua realização consiste em se medir os *graminianos* de *controlabilidade* e *observabilidade* dos estados de um sistema e, em seguida, eliminar aqueles estados pouco controláveis ou pouco observáveis através da técnica desenvolvida para a redução de modelos conforme descrita no Capítulo 5, Seção 5.3.

³³ Visando o projeto do controlador K , em termos práticos, escolhe-se um tipo de representação da incerteza (multiplicativa ou aditiva) e com isso define-se a condição de estabilidade associada.

³⁴ Para efetuar a redução do controlador o mesmo deve ser estável.

6.5.2 Condições de Estabilidade Frente ao Conjunto de Incertezas Estruturadas

Nesta análise, procura-se verificar se, para um dado controlador K projetado, o sistema em malha fechada $T_{v_w p_w}$ ainda mantém a estabilidade mesmo na presença do conjunto de incertezas estruturadas Δ .

Para verificar esta condição, seja o sistema em malha fechada $T_{v_w p_w}$ (região pontilhada) realimentado pela perturbação Δ conforme ilustra a Fig. 6.17.

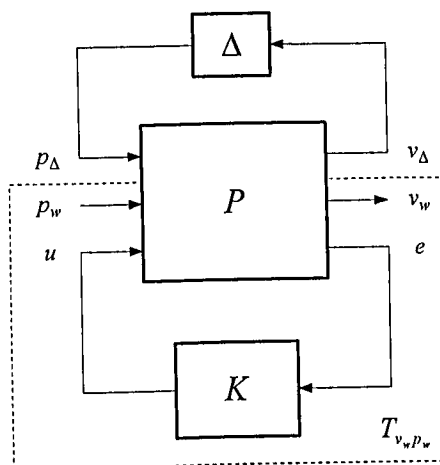


Figura 6.17- Representação convexa do sistema em malha fechada $T_{v_w p_w}$ realimentado pela perturbação Δ .

Descrivendo-se o sistema em malha fechada $T_{v_w p_w}(s)$ por uma matriz de funções de transferência $M(s)$, particionada segundo a relação a seguir:

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

o diagrama convexo, ilustrado na Fig. 6.17, pode ser rerepresentado pela Fig. 6.18.

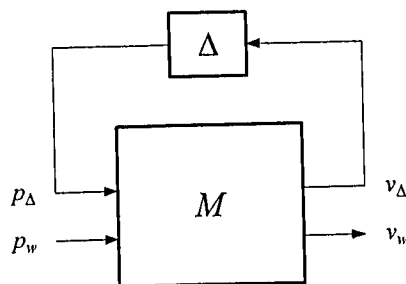


Figura 6.18- Representação convexa da matriz M realimentada pela perturbação Δ .

Esta nova representação para o sistema tem a seguinte matriz função de transferência:

$$T_{v_{\Delta}p_{\Delta}}(s) = M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21} \quad (6.72)$$

Uma questão muito importante neste ponto é o conhecimento de *quão alta* pode ser a perturbação Δ tal que o sistema em malha fechada $T_{v_{\Delta}p_{\Delta}}$ ainda seja estável, isto é, que o determinante do termo $(I - M_{22}\Delta)^{-1}$ seja não singular.

Estendendo-se o *Teorema do Pequeno Ganho* apresentado na Seção 6.4, a condição suficiente para que o sistema realimentado por um conjunto de incertezas Δ seja *estável* é verificada pela seguinte relação:

$$\|M(s)\|_{\infty} < \frac{1}{\|\Delta\|_{\infty}} \quad (6.73)$$

Para encontrar o "tamanho" da *menor perturbação* Δ para a qual o sistema $T_{v_{\Delta}p_{\Delta}}$ ainda seja estável, a teoria de *valores singulares estruturados* (Doyle e Stein, 1981) pode ser então empregada. Esta teoria baseia-se numa medida μ_{Δ} que é uma generalização dos valores singulares de matrizes constantes descrita na forma:

$$\mu_{\Delta}[M(s)] = \frac{1}{\min \|\Delta\|_{\infty} : \det(I - M_{22}\Delta) = 0} \quad (6.74)$$

onde μ_{Δ} é o valor singular estruturado de $M(s)$ com relação à perturbação Δ .

Desta forma, para um dado valor de pico igual a μ_{\max} localizado na frequência ω , o sistema é estável se a seguinte condição for satisfeita (Doyle, 1982):

$$\max_{\omega} \|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\mu_{\max}}, \text{ para } \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (6.75)$$

onde o termo $\frac{1}{\mu_{\max}}$ é conhecido como *margem de estabilidade robusta*.

Para uma perturbação μ_{\max} maior que a unidade, o sistema em malha fechada será instável e um novo controlador estabilizável deve ser determinado. Um dos métodos para se resolver este problema é o chamado μ -*Synthesis* via enfoque *Iteração D-K* (Balas et al, 1994; Lind et al, 1994). Entretanto, ele requer um pesado esforço computacional e normalmente inflaciona a ordem do controlador, isto é, gera um controlador de ordem maior que a planta aumentada (Xie, 1996).

A partir dos aspectos teóricos apresentados, procede-se então à fase de implementação numérica dos controladores robustos que, neste trabalho, são aplicados para o *controle de vibrações* em estruturas flexíveis do tipo *placa* e *viga*.

6.6 Projeto Robusto Aplicado ao Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis

Uma vez elaborados os modelos das estruturas flexíveis contendo materiais piezelétricos incorporados (veja Capítulos 2 e 3) e definida a estratégia de controle apresentada, resta aplicar o procedimento de controle robusto para o controle de vibrações em estruturas flexíveis. Na caracterização dos modelos nominais relacionados aos sistemas flexíveis em estudo, é empregada a técnica de elementos finitos, onde optou-se por utilizar os mesmos parâmetros físicos e geométricos disponíveis no Capítulo 4, Seções 4.1.1 e 4.2.1. Já para a definição do posicionamento dos materiais piezelétricos, o Capítulo 5 (Seções 5.4.1 e 5.4.2) descreve, em detalhes, o procedimento utilizado na seleção da *localização ótima* destes materiais.

6.6.1 Projeto Robusto Considerando a Estrutura Flexível do Tipo Placa

O sistema a ser controlado consiste em uma placa de aço, apoiada em seus quatro lados, contendo três pares de materiais piezelétricos (atuadores e sensores) posicionados segundo a configuração mostrada na Tab. 5.2 (veja Capítulo 5, Seção 5.4.2). A Figura 6.19 ilustra o circuito de controle empregado na análise.

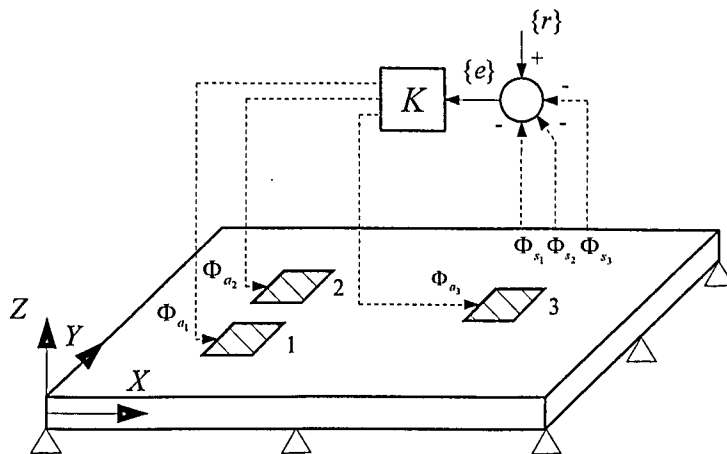


Figura 6.19- Circuito de controle da placa flexível com elementos piezelétricos incorporados.

Neste projeto, pretende-se garantir que os sinais dos sensores $\{\Phi_s\}$ acompanhem um conjunto de referências $\{r\}$ e que o controlador K assegure robustez à dinâmica não modelada de alta frequência. As seções que se seguem mostram as etapas de projeto construídas de modo a atingir tal objetivo³⁵.

6.6.1.1 Projeto do Controlador Robusto Aplicado ao Modelo Nominal

Para a construção do compensador K , considere que a dinâmica do *modelo nominal*, associado ao sistema apresentado, seja descrita pelas seguintes equações:

$$\left\{ \dot{\bar{x}} \right\} = [A_n] \{\bar{x}\} + [B_n^2] \{\Phi_a\} \quad (6.76)$$

$$\{\Phi_s\} = [C_n^2] \{\bar{x}\} + [D_n^{as}] \{\Phi_a\} \quad (6.77)$$

onde \bar{x} é o vetor de estado do sistema e A_n , B_n^2 e C_n^2 são as matrizes de estado relacionadas, respectivamente, ao comportamento dinâmico do sistema, à localização dos atuadores (Φ_a) e dos sensores piezelétricos (Φ_s) e D_n^{as} é o *termo de correção* do modelo truncado (obtido via procedimentos de otimização) que levam em conta os efeitos da dinâmica de alta frequência não modelada (veja Capítulo 5, Seção 5.5.2).

Assim, o que se deseja é encontrar um controlador K tal que a lei de controle:

$$\{\Phi_a\} = K(\{r\} - \{\Phi_s\}) = K\{e\} \quad (6.78)$$

garanta a minimização, num menor tempo possível, dos sinais de erro $\{e\}$.

Antes de iniciar a construção do controlador robusto, propriamente dito, é necessário definir alguns requisitos de *desempenho*³⁶ a serem satisfeitos. Conforme visto na Seção 6.2, para que o sistema nominal acompanhe a referência r é necessário que a condição estabelecida pela Eq. (6.11a) seja obedecida. Neste sentido, o filtro W_1 tem sua escolha associada ao erro de medida e . Esta ponderação exibe um peso alto na região de baixa frequência e um peso baixo na região de alta frequência. Isto porque a característica requerida do sistema é que tenha uma resposta

³⁵ Com o arranjo da Fig. 6.19, que envolve três sensores e três atuadores, o requisito posto se aplica aos cinco primeiros modos de flexão da placa, uma vez que além destes modos o sistema deixa de ser completamente controlável e observável.

³⁶ A análise de desempenho do sistema é feita com relação ao acompanhamento dos sinais de referência r e atenuação dos ruídos nos sensores.

transitória que siga a referência r com um erro pequeno. Tal característica é alcançada com uma função de sensibilidade S que apresente baixo ganho na região de baixas frequências (veja Fig. 6.2). No tocante ao ruído nos sensores, a condição de robustez ao ruído na medida requer que a condição descrita em (6.11c) também seja satisfeita. A escolha do filtro W_3 está associada à atenuação de ruído de alta frequência (comportamento requerido para T) e apresenta um peso baixo na região de baixa frequência e um peso alto na região de alta frequência.

Desta forma, relaciona-se W_1 e W_3 com as funções³⁷ S e T desejadas para cada malha³⁸, independentemente, e espera-se que, em baixas e altas frequências, respectivamente, sejam satisfeitas as seguintes relações:

$$\|S(s)\|_{\infty} \leq \|W_1^{-1}(s)\|_{\infty} \quad (6.79)$$

$$\|T(s)\|_{\infty} \leq \|W_3^{-1}(s)\|_{\infty} \quad (6.80)$$

Sendo assim, os filtros de projeto W_1 foram escolhidos de forma a assegurar uma atenuação máxima do erro e (em relação à referência r) na ordem de 100 : 1 (atenuação de 40 dB) na faixa de frequência de 0 a 25 Hz, conforme mostra a relação seguinte:

$$W_1(s) = \frac{10^{-5}s + 158.7}{s + 1.587} [I]_{3 \times 3} \quad (6.81)$$

Já os filtros W_3 foram selecionados de maneira a proporcionar uma atenuação de 40 dB na faixa de frequência de 0 a 100 Hz, com uma taxa de crescimento, a partir desta frequência, de 20 dB por década:

$$W_3(s) = \frac{s + 6.347}{10^{-5}s + 634.7} [I]_{3 \times 3} \quad (6.82)$$

Usando estes filtros, conforme diagrama ilustrado na Fig. 6.3 (veja Seção 6.2.2) e incorporando a dinâmica dos mesmos à dinâmica do modelo nominal, descrito pelas Eqs. (6.76)-(6.77), é possível obter a matriz aumentada P , dada pela Eq. (6.21). A partir da representação convexa do problema (veja Fig. 6.4) e da transformação de P , para o domínio de Laplace, o sistema em malha fechada T_{vp} pode ser definido, conforme mostra a Eq. (6.25). Desta forma,

³⁷ Para que o problema tenha solução, os filtros de projeto W_1 e W_3 devem satisfazer a relação estabelecida em (6.7).

³⁸ Neste caso, as funções S e T e as ponderações W_1 e W_3 são matrizes de dimensão 3×3 .

utilizando-se os procedimentos de cálculo para a obtenção do compensador robusto (de 16ª ordem) (veja Anexo V), o valor do parâmetro γ que melhor atende às especificações do projeto é $\gamma_{\min} = 0.996$. A figura seguinte mostra os resultados obtidos (respostas em frequência) para as funções $\|S\|_{\infty}$ e $\|T\|_{\infty}$ e para os filtros descritos em (6.81) e (6.82).

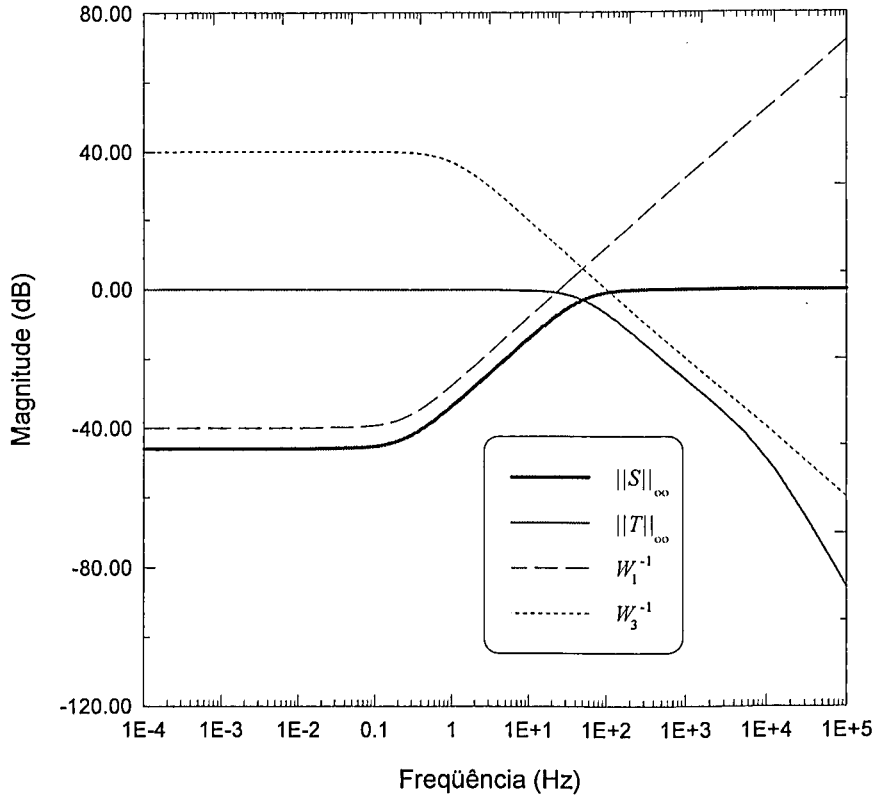


Figura 6.20- Comportamento de $\|S\|_{\infty}$, $\|T\|_{\infty}$, W_1^{-1} e W_3^{-1} em função da frequência.

Como pode ser observado no gráfico apresentado na Fig. 6.20, o comportamento do sistema controlado satisfaz os requisitos de projeto estabelecidos e obedece as condições expressas em (6.79) e (6.80).

Projetado o controlador no domínio da frequência, resta executar a simulação numérica do sistema e avaliar o seu comportamento no domínio do tempo. O modelo nominal é simulado em ambiente *Matlab Simulink*® e durante a simulação, o sistema foi submetido ao acompanhamento de três sinais de referências distintas (respectivamente para os sensores 1, 2 e 3): uma do tipo degrau e as outras senoidais, de amplitudes: 1, 1.5 e 2 *Volts* e frequências: 1, 5 e 10 *Hz* e a um ruído aleatório n (branco, gaussiano de média nula e variância igual a 10^{-4} *V*) adicionado aos sinais de saída dos sensores (veja Fig. 6.21).

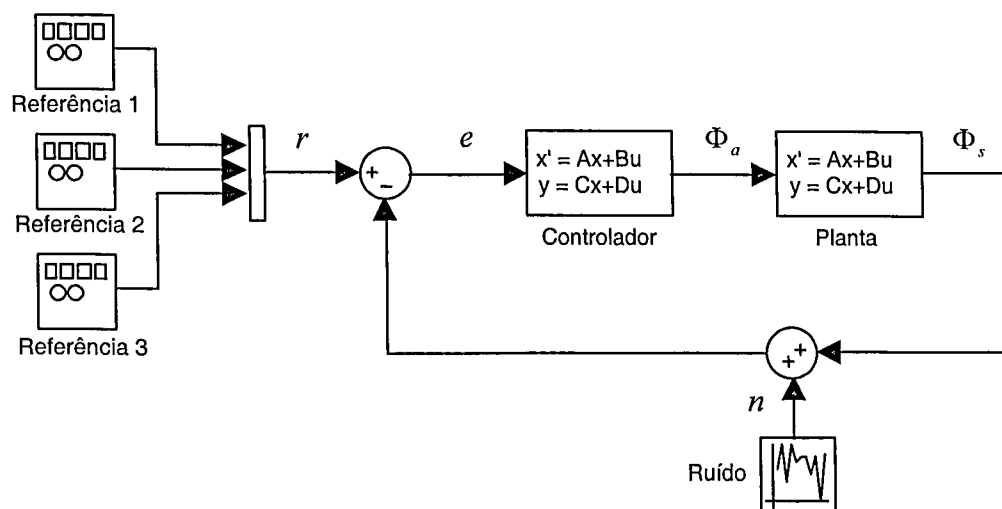


Figura 6.21- Diagrama de blocos usado para simular o sistema em malha fechada.

Os gráficos ilustrados a seguir mostram os resultados finais (sinais dos sensores e atuadores) transcorrido um segundo de simulação.

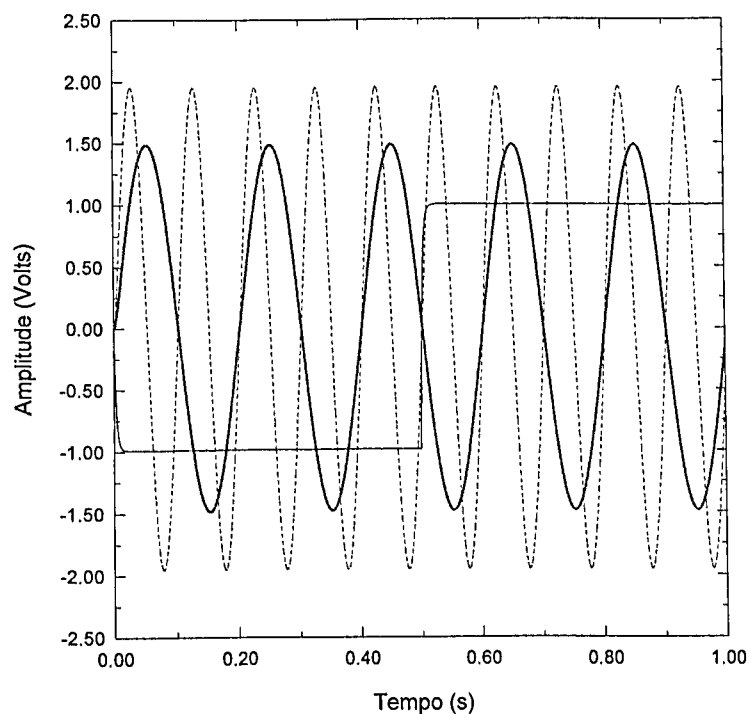


Figura 6.22- Acompanhamento dos sinais de saída dos sensores 1, 2 e 3.

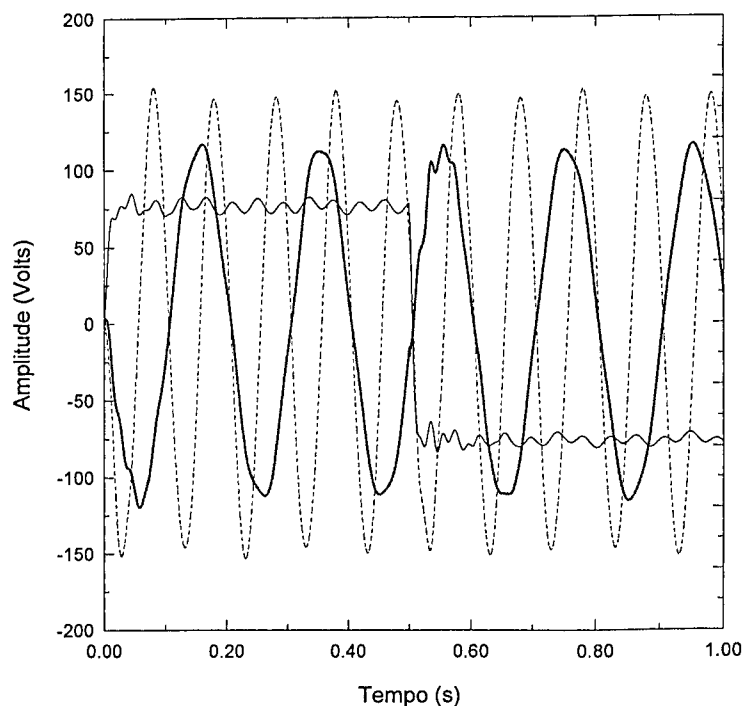


Figura 6.23- Potenciais elétricos aplicados nos atuadores 1, 2 e 3.

Fica evidente a partir do gráfico acima ilustrado o excelente desempenho, no domínio do tempo, do controlador robusto H_∞ com realimentação do erro e .

6.6.1.2 Projeto do Controlador Robusto Aplicado ao Modelo Perturbado

Para verificar a robustez do controlador construído diante da dinâmica desconhecida de alta frequência, admite-se que seja utilizada uma *planta perturbada* contendo um número maior de modos de vibrar: *vinte e cinco* (modelo de ordem mínima fornecido pelo Capítulo 5, Seção 5.4.2). A Figura 6.24 ilustra as respostas no domínio do tempo, obtidas para os sinais dos sensores empregando-se o diagrama de blocos ilustrado pela Fig. 6.21.

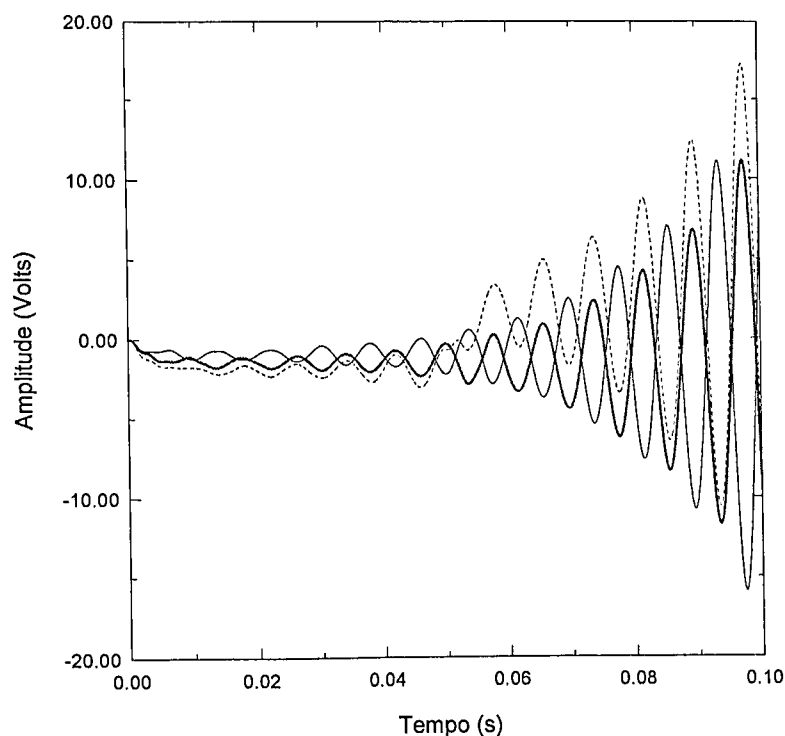


Figura 6.24- Acompanhamento dos sinais de saída dos sensores 1, 2 e 3 para a planta perturbada.

Diante do resultado ilustrado, conclui-se que o controlador projetado não apresenta a característica desejada de robustez às *dinâmicas não modeladas*. Neste sentido, para que estes efeitos sejam evitados torna-se necessário incluir, no projeto do controlador, a condição de *robustez da estabilidade*, descrita na Seção 6.4 (*Teorema do Pequeno Ganho*) e rerepresentada pela Eq. (6.68).

Para esta situação, as incertezas presentes no modelo serão tratadas como incertezas *não paramétricas do tipo aditiva*, conforme mostra a relação (6.31). No presente problema, o modelo nominal contém apenas os *cinco* primeiros modos de vibração da estrutura. Assim, para uma planta perturbada contendo *vinte e cinco* modos de vibrar, a medida E_a denota o erro absoluto entre o modelo perturbado e a planta nominal. A Figura 6.25 mostra (em pontilhado) o comportamento de $\|E_a\|_\infty$, em função da frequência, e a curva contínua é o limitante superior aditivo W_a (filtro de projeto) associado.

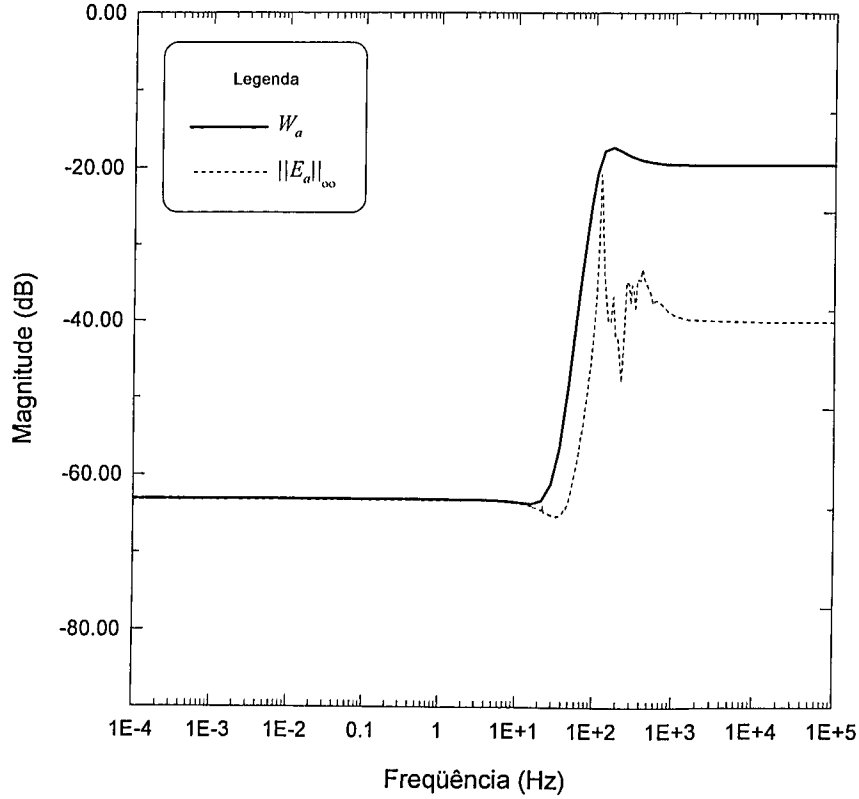


Figura 6.25- Resposta em frequência do filtro de projeto W_a e do erro aditivo máximo E_a .

Sendo assim, o filtro de projeto (W_a) associado ao atendimento deste requisito em específico é descrito pela seguinte relação³⁹:

$$W_a(s) = 7 \times 10^{-4} \left(\frac{s^2/\omega_1^2 + 2\zeta_1/\omega_1 s + 1}{s^2/\omega_2^2 + 2\zeta_2/\omega_2 s + 1} \right)^2 [I]_{3 \times 3} \quad (6.83)$$

onde $\omega_1 = 200 \text{ rad/s}$, $\zeta_1 = 0.6$, $\omega_2 = 700 \text{ rad/s}$ e $\zeta_2 = 0.5$.

Como já era esperado, nota-se que o erro E_a cresce com a frequência a partir do *sexto* modo de vibrar. Desta forma, espera-se, com o novo filtro incluído, que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\|R(s)\|_\infty \leq \|W_a^{-1}(s)\|_\infty \quad (6.84)$$

³⁹ Em Miranda et al (2002) soluciona-se o problema da escolha dos filtros de projeto para a construção do controlador robusto através do uso de algoritmos genéticos.

A representação convexa associada a este problema é ilustrada pela Fig. 6.16 (onde $\Delta = \delta_a$). Desta forma, o controlador, de 28ª ordem, é construído a partir dos procedimentos descritos na Seção 6.5.1.

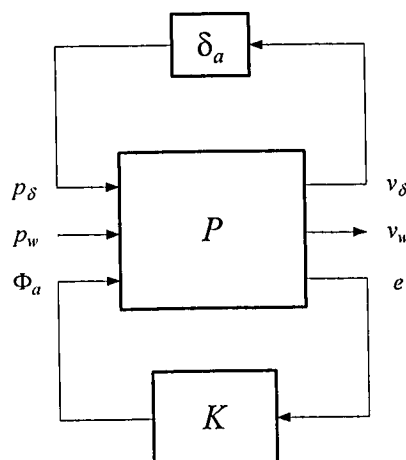


Figura 6.26- Representação convexa do problema de controle robusto aplicado no controle de vibrações da estrutura placa.

Na análise em questão, o compensador projetado apresenta um tamanho bastante elevado, isto é, para fins de controle, o mesmo possivelmente traria dificuldades ao ser implementado na prática. Assim, convém analisar a questão da redução do modelo do controlador via os gramínicos de observabilidade e controlabilidade, proposto por Moore (1981). Neste sentido, aplicando o algoritmo, apresentado no Capítulo 5, Seção 5.3, para se efetuar o *balanceamento interno* das matrizes de estado do compensador, obtém-se, a diagonal do gramíniano Σ dada pela seguinte relação:

$$\Sigma = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.4118 & 4.3673 & 4.2964 & 0.7229 & 0.7207 & 0.0768 & 0.0767 & 0.0235 & 0.0210 & 0.0196 \\ 0.0131 & 0.0113 & 0.0091 & 0.0068 & 0.0058 & 0.0043 & 0.0037 & 0.0031 & 0.0021 & 0.0018 \\ 0.0005 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & & \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

A diagonal do gramíniano Σ do sistema balanceado fornece a indicação de que os *vinete primeiros estados* do controlador predominam frente aos demais. Desta maneira, o compensador empregado para a análise será reduzido a vinte estados. Assim, o desempenho e a estabilidade do *novo* controlador são avaliadas mediante a análise das respostas em frequência de S , T e R obtidas e dos filtros descritos em (6.81), (6.82) e (6.83).

A Figura 6.27 ilustra estes resultados, onde $\gamma_{\min} = 0.993$.

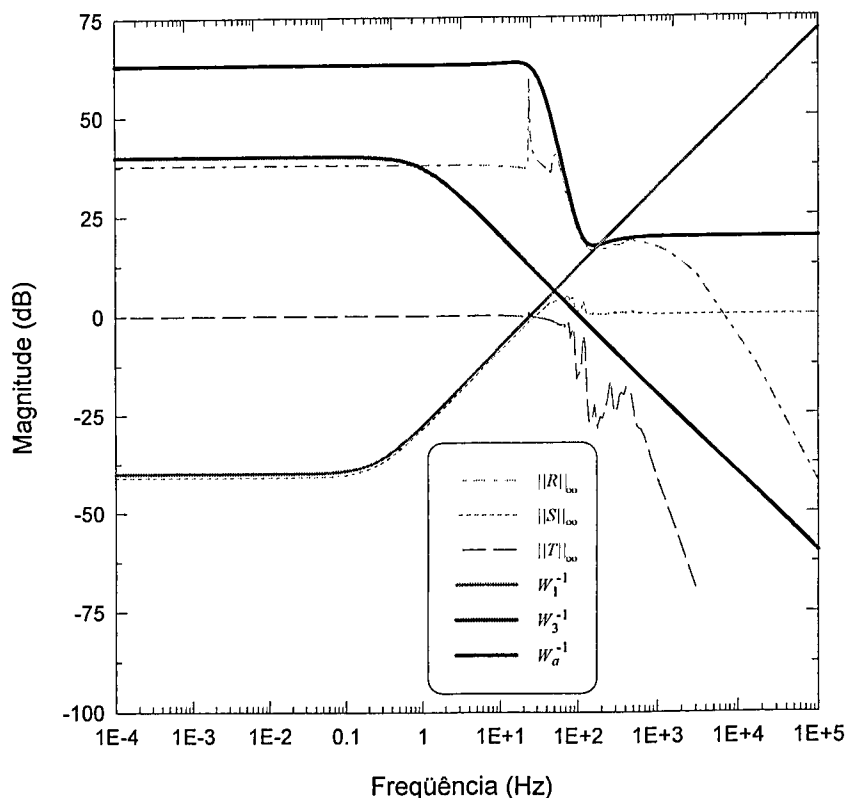


Figura 6.27- Comportamento de $\|S\|_{\infty}$, $\|T\|_{\infty}$, $\|R\|_{\infty}$, W_1^{-1} , W_3^{-1} e W_a^{-1} em função da frequência.

Percebe-se pela análise da figura precedente que o comportamento do sistema controlado satisfaz todos os requisitos de projeto especificados. Além disso, nota-se que o nível do sinal de controle (representado por R) é restringido pelo filtro W_a .

Para checar se o sistema em malha fechada apresentado ainda mantém a estabilidade mesmo diante da incerteza δ_a (veja Fig. 6.43) os procedimentos matemáticos, descritos na Seção 6.5.2, são então avaliados. Os valores obtidos⁴⁰ para μ_{δ_a} , em função da frequência, indica que todos eles são iguais a zero ($\mu_{\max} = 0$). Com este dado, comprova-se, através da relação (6.75), que o sistema irá permanecer estável para qualquer variação de δ_a , com $\|\delta_a\|_{\infty} \leq 1$.

A robustez do controlador frente à dinâmica não modelada é finalmente avaliada quando o sistema é mais uma vez simulado de acordo com o diagrama ilustrado na Fig. 6.21. As Figuras 6.28 e 6.23 apresentam, respectivamente, os sinais obtidos para os sensores e atuadores.

⁴⁰ Neste trabalho, o valor singular estruturado μ_{δ} é determinado através de pacotes numéricos disponíveis no Matlab[®] (Balas, 2001).

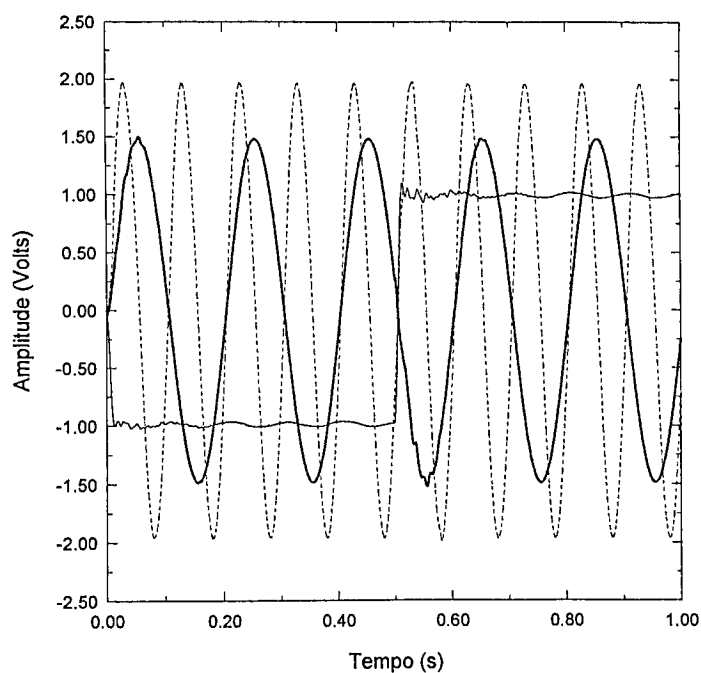


Figura 6.28- Acompanhamento dos sinais de saída dos sensores 1, 2 e 3 para a planta perturbada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez às dinâmicas não modeladas.

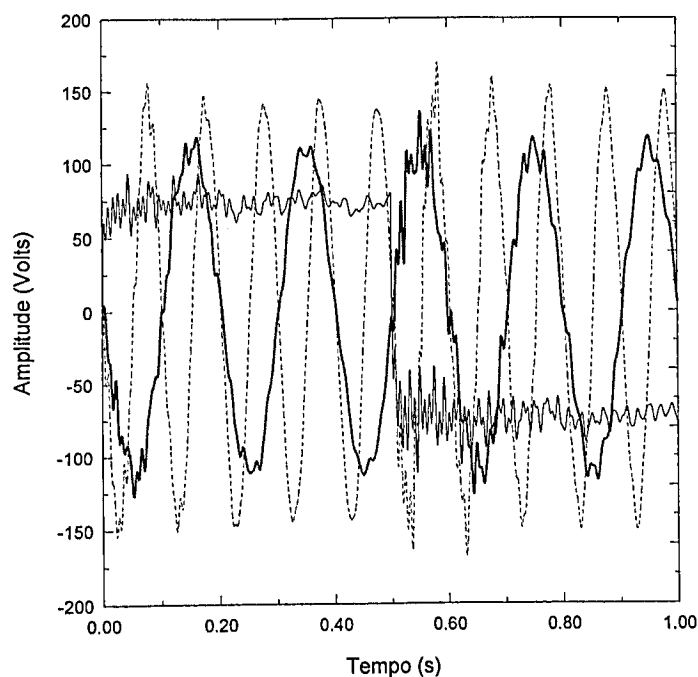


Figura 6.29- Potenciais elétricos aplicados nos atuadores 1, 2 e 3 para a planta perturbada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez às dinâmicas não modeladas.

Constata-se, a partir das figuras precedentes, que o compensador K funciona adequadamente para diferentes tipos de referência avaliados. A característica de robustez do mesmo, frente às dinâmicas não modeladas, fica evidente nos resultados apresentados. Entretanto, há um ligeiro emprobecimento no desempenho do sistema e isto se deve ao cumprimento da exigência de robustez mencionada.

6.6.2 Projeto Robusto Considerando a Estrutura Flexível do Tipo Viga

O sistema dinâmico, a ser analisado, consiste numa estrutura de alumínio do tipo viga flexível contendo materiais piezelétricos (um atuador e um sensor) co-posicionados próximos ao seu ponto de engastamento (veja Capítulo 5, Seção 5.4.1) conforme esquema⁴¹ ilustrado na Fig. 6.30.

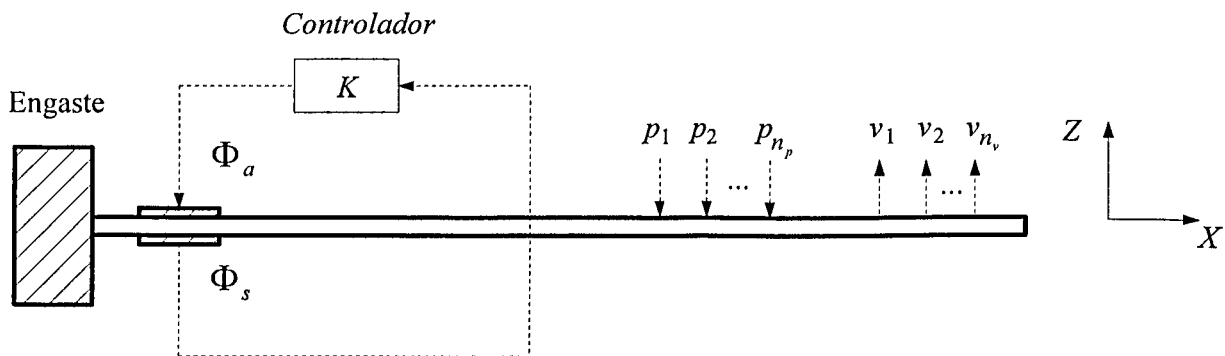


Figura 6.30- Circuito de controle da viga flexível com elementos piezelétricos incorporados.

Admite-se que o sistema flexível seja perturbado pelas entradas p_i ($i = 1$ a n_p) e que se deseja atenuar as vibrações nos pontos v_j ($j = 1$ a n_v) utilizando o controlador K ou mais formalmente: *pretende-se aumentar o amortecimento da estrutura, assegurando ao sistema controlado robustez à dinâmica não modelada e à variação paramétrica. As seções que se seguem objetivam alcançar este propósito.*

⁴¹ Com apenas um sensor e um atuador, o controle se aplica à atenuação dos *três primeiros modos* de flexão.

6.6.2.1 Projeto do Controlador Robusto Aplicado ao Modelo Nominal

Para a construção do controlador K , considera-se que a dinâmica associada ao *modelo nominal* do sistema⁴², em espaço de estados, seja descrita pelas relações (5.52)-(5.54), ou:

$$\left\{ \dot{\bar{x}} \right\} = [A_n] \{ \bar{x} \} + [B_n^1] \{ p \} + [B_n^2] \Phi_a \quad (6.86)$$

$$\{ v \} = [C_n^1] \{ \bar{x} \} + [D_n^{pv}] \{ p \} + D_n^{av} \Phi_a \quad (6.87)$$

$$\Phi_s = [C_n^2] \{ \bar{x} \} + [D_n^{ps}] \{ p \} + D_n^{as} \Phi_a \quad (6.88)$$

onde \bar{x} é o vetor de estado do sistema e A_n , B_n^1 , B_n^2 , C_n^1 e C_n^2 são as matrizes de estado relacionadas, respectivamente, ao comportamento dinâmico do sistema, à localização das perturbações p_i , do atuador (Φ_a), dos deslocamentos pontuais (v_i) e do sensor piezelétrico (Φ_s) e D_n^{pv} , D_n^{ps} , D_n^{av} e D_n^{as} são os *termos de correção* do modelo truncado (determinados por procedimentos de otimização) que levam em conta os efeitos da dinâmica de alta frequência não modelada (veja Capítulo 5, Seção 5.5.1).

Ao aplicar a transformada de Laplace no conjunto de equações (6.86)-(6.88), é possível descrever o sistema em termos das saídas v e Φ_s em relação às entradas p e Φ_a na mesma notação apresentada pela Eq. (6.22). Assim, o sistema em malha fechada T_{vp} pode ser definido conforme mostra a Eq. (6.25). Desta maneira, o objetivo do projeto é encontrar um controlador K tal que a lei de controle:

$$\Phi_a(t) = K \Phi_s(t) \quad (6.89)$$

minimize os efeitos provocados pelas perturbações p na saída v da viga flexível conforme descreve a relação (6.70).

⁴² Para o modelo nominal construído, todos os amortecimentos modais ζ foram tomados serem iguais a 10^{-3} .

A representação *convexa* associada a este problema é ilustrada pela Fig. 6.31.

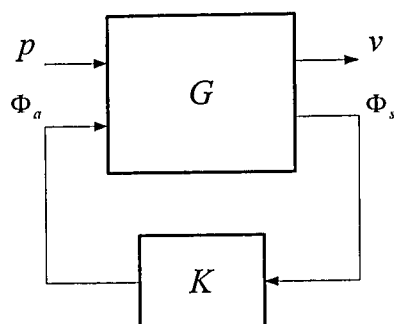


Figura 6.31- Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível.

Neste sentido, para uma dada configuração de perturbação (p) e deslocamento pontual (v), localizados, por exemplo, em $x_p = 0.1 \text{ m}$ e $x_v = 0.3 \text{ m}$ (tomados a partir do ponto de engastamento), o controlador K é construído, no domínio contínuo, utilizando-se os procedimentos matemáticos descritos⁴³ no Anexo V. Para verificar o desempenho do controlador K projetado, a norma infinita de T_{vp} é avaliada em vários pontos da estrutura. A Figura 6.32 ilustra a configuração final atingida.

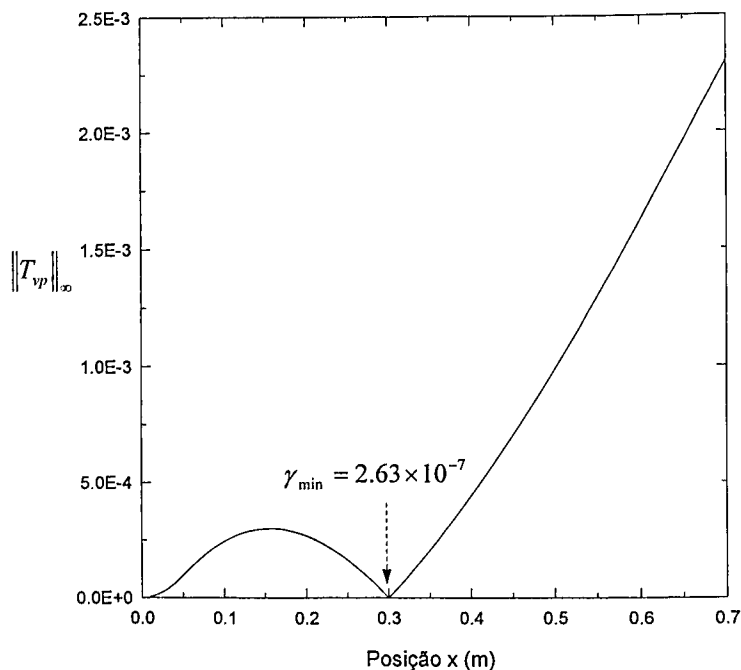


Figura 6.32- Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível.

⁴³ Na fase final do projeto do controlador K , atingiu-se um fator de atenuação *mínimo* de $\gamma_{\min} = 2.63 \times 10^{-7}$.

Conforme pode ser visto na figura precedente, o controlador K mostra-se eficiente diante da perturbação p em relação ao deslocamento v , garantindo que o nível de atenuação de T_{vp} no ponto indicado mantenha-se no patamar γ_{\min} .

Considerando-se ainda que seja minimizado mais um ponto da viga, localizado em $x_v = 0.6$, neste caso, a norma infinita de T_{vp} , avaliada ao longo da estrutura, é ilustrada pela Fig. 6.33, onde $\gamma_{\min} = 9.44 \times 10^{-7}$.

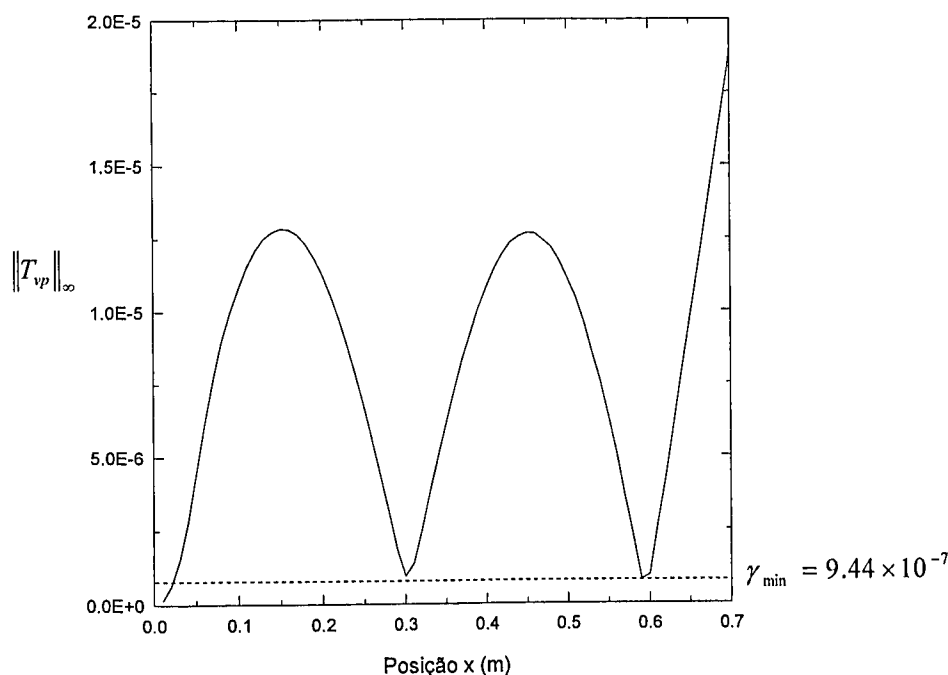


Figura 6.33- Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível.

Por ora, o que se tem é um controlador K projetado para assegurar a minimização da norma infinita de T_{vp} em dois pontos determinados da viga. Suponha que se queira *atenuar as vibrações não em dois pontos apenas mas ao longo da estrutura*. Neste caso, é necessário incorporar, no projeto de controle, todas as saídas v disponíveis no *modelo discretizado*. No entanto, quando se emprega a técnica de elementos finitos para a modelagem do sistema, os termos de correção D_n^{fv} , D_n^{fs} , D_n^{av} e D_n^{as} são determinados via procedimentos numéricos de otimização que são de custo computacional elevado. Uma alternativa é a *formulação contínua* dos modelos com os termos de correção determinados conforme as expressões analíticas já conhecidas (veja Capítulo 5, Seção 5.5.1). Tal modelo admite que a saída v seja representada em função da posição x na forma:

$$v(x, t) = C_n^1(x) \bar{x}(t) + D_n^{pv}(x) p(t) + D_n^{av}(x) \Phi_a(t) \quad (6.90)$$

onde $v(x, t)$ corresponde ao deslocamento espacial ocorrido no tempo t ; $C_n^1(x)$ denota a função de localização e $D_n^{fv}(x)$ e $D_n^{av}(x)$ representam os termos de correção obtidos, respectivamente, pelas expressões (5.39) e (5.40).

Com a nova descrição de v , dada pela Eq. (6.90), o problema de controle robusto pode ser então reformulado como a *minimização dos efeitos que as perturbações p provocam na estrutura inteira*. Entretanto, a questão que se coloca é como tratar este problema utilizando a mesma notação apresentada pela Eq. (6.21) não considerando, portanto, a dependência de x pela variável v . Uma alternativa é incorporar várias saídas v , tomadas ao longo da estrutura, no projeto do controlador. A outra solução possível e menos onerosa que a primeira é *definir a norma infinita espacial de T_{vp} a partir da Eq. (IV.7) (Moheimani, 2000)*:

$$\|T_{vp}\|_\infty = \frac{\|v(x, t)\|_2}{\|p(t)\|_2} = \frac{\int_0^\infty \int_{\mathcal{R}} v(x, t)^T v(x, t) dx dt}{\int_0^\infty p(t)^T p(t) dt} \quad (6.91)$$

Observe que na definição da norma espacial, os deslocamentos v são integrados⁴⁴ ao longo da estrutura (domínio \mathcal{R}).

A partir da definição da *norma infinita espacial*, apresentada pela relação (6.91), é que se propõe investigar o problema de controle robusto colocado na notação matemática desejável, dada pela Eq. (6.21). Partindo-se deste princípio, é possível mostrar que tal problema pode ser definido empregando-se as relações apresentadas a seguir⁴⁵ (Moheimani, 2000):

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_n \bar{x}(t) + B_n^1 p(t) + B_n^2 \Phi_a(t) \quad (6.92)$$

$$\tilde{v}(t) = \Pi \bar{x}(t) + \Theta \Phi_a(t) \quad (6.93)$$

$$\Phi_s(t) = C_n^2 \bar{x}(t) + D_n^{fs} p(t) + D_n^{as} \Phi_a(t) \quad (6.94)$$

onde as matrizes Π e Θ são descritas, respectivamente, por:

$$\Pi = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{(n+1) \times n} & 0_{(n+1) \times n} \end{bmatrix}_{(2n+1) \times 2n} \quad (6.95a)$$

⁴⁴ Nesta integral pode-se ainda incorporar um filtro espacial $Q(x)$ que especifica em que região \mathcal{R} da estrutura deve-se minimizar a norma infinita de T_{vp} (Moheimani, 2000).

⁴⁵ A matriz $D_n^{11}(x)$ não foi considerada nos cálculos algébricos no intuito de facilitar o desenvolvimento dos resultados.

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0_{2n \times n} \\ \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} D_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}_{(2n+1) \times 1} \quad (6.95b)$$

e n é o número de modos e D_k é a função correção obtida a partir da Eq. (5.40) e descrita por:

$$D_k = \frac{F_k^{aw}}{2\omega_c\omega_{n_k}} \ln \left(\frac{\omega_{n_k} + \omega_c}{\omega_{n_k} - \omega_c} \right).$$

Estabelecidas estas equações, o projeto do controlador K é efetuado seguindo os procedimentos matemáticos apresentados no Anexo V, obtendo-se um fator de atenuação mínimo $\gamma_{\min} = 2.12 \times 10^{-6}$. Assim sendo, a avaliação do desempenho de K para o modelo nominal pode ser efetuada calculando-se a norma infinita de T_{vp} ao longo da estrutura (veja Fig. 6.34).

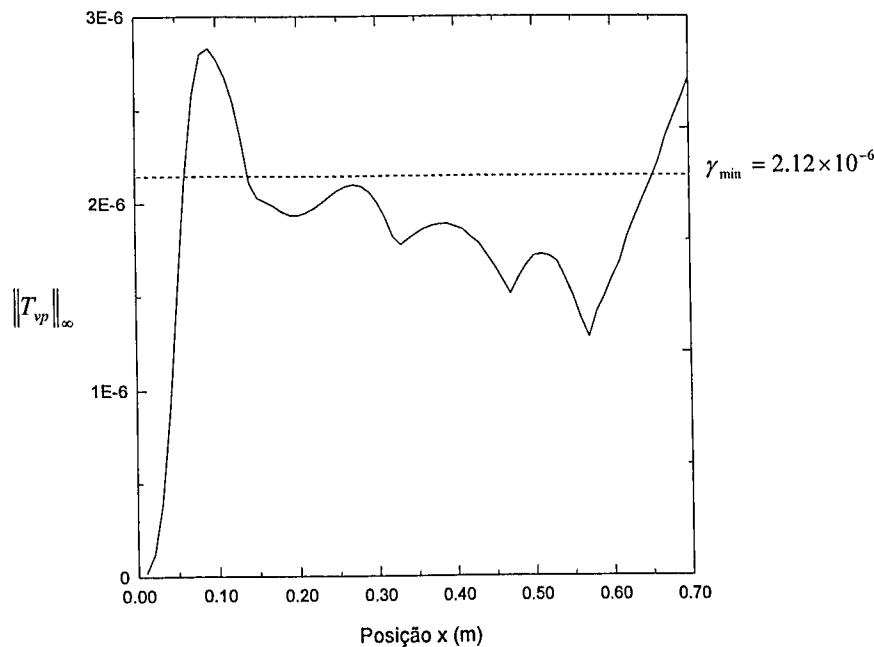


Figura 6.34- Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível.

A partir da Fig. 6.34, observa-se claramente a eficiência do controlador projetado na atenuação dos níveis de vibração em toda a estrutura quando comparada ao caso ilustrado na Fig. 6.32. Além disso, os resultados demonstram que os níveis de atenuação de T_{vp} mantêm-se em torno do patamar γ_{\min} .

No domínio da frequência, o comportamento da norma infinita de T_{vp} (para o sistema em malha aberta e fechada) pode ser verificado a partir do gráfico ilustrado pela Fig. 6.35. Como pode ser observado na Fig. 6.35, o controlador K é capaz de amortecer as vibrações causadas pela perturbação p ao longo da estrutura a um nível γ_{\min} na faixa de frequência correspondente aos seus três primeiros modos de vibrar.

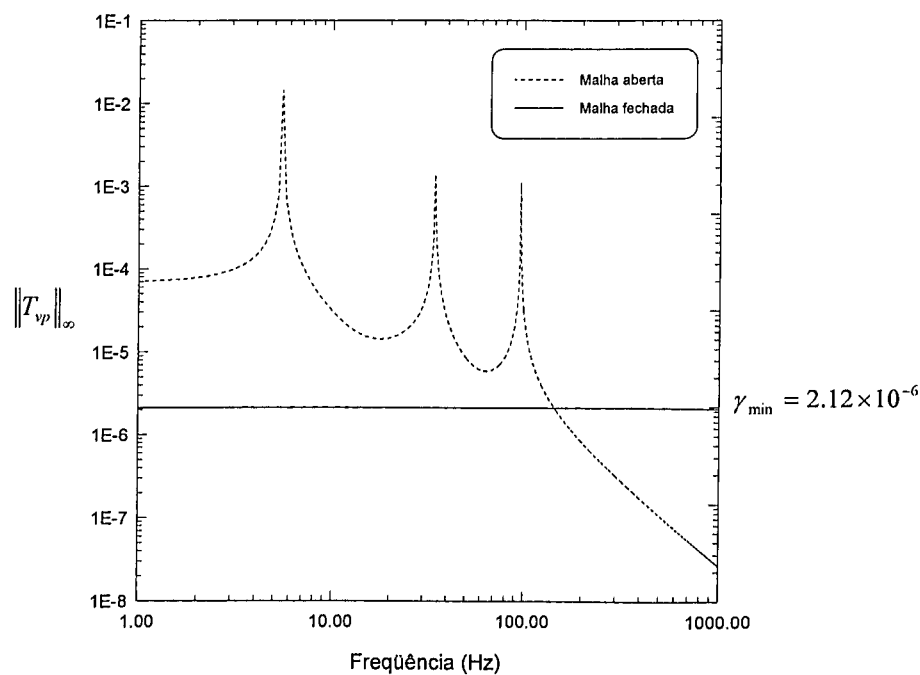


Figura 6.35- Resposta em frequência de $\|T_{vp}\|_{\infty}$ para o sistema em malha aberta e fechada.

A resposta em frequência do compensador K (de 6ª ordem) é ilustrada pela Fig. 6.36.

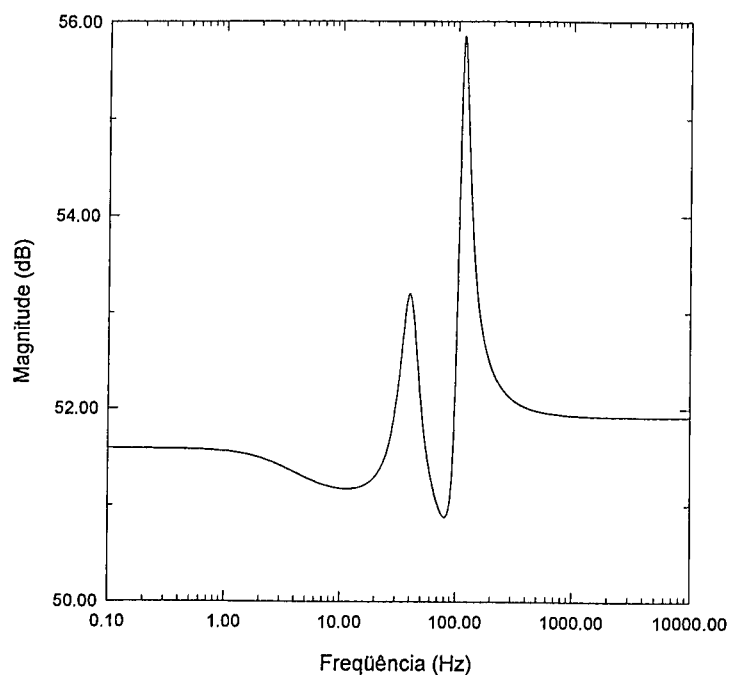


Figura 6.36- Resposta em frequência do compensador K .

Para analisar o comportamento do compensador no domínio do tempo, o sistema é simulado numericamente (em malha aberta e fechada) em ambiente *Matlab Simulink*® considerando uma excitação p do tipo degrau unitário localizada no ponto x_p conforme ilustra a Fig. 6.37.

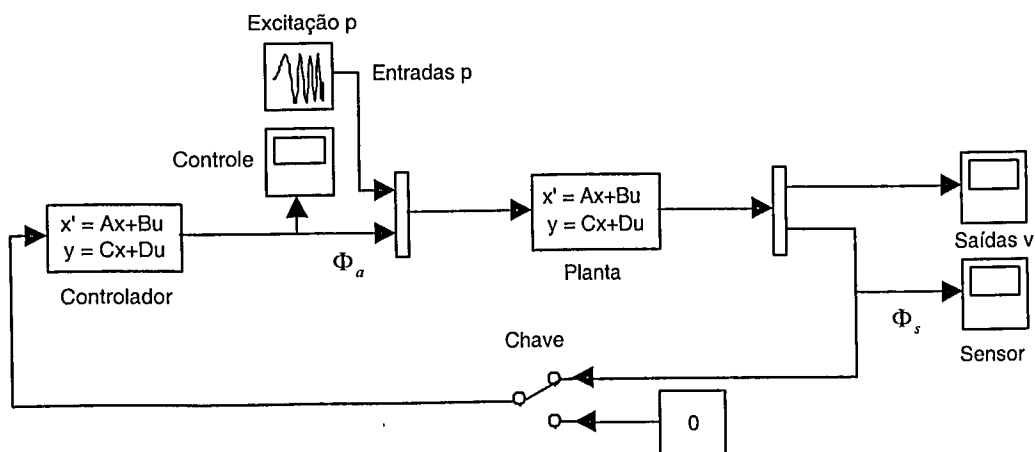


Figura 6.37- Diagrama de blocos usado para simular o sistema em malha aberta e fechada.

As Figuras 6.38 e 6.39 mostram, respectivamente, as respostas temporais obtidas para os sinais Φ_s (sensor piezelétrico) e Φ_a (atuador piezelétrico).

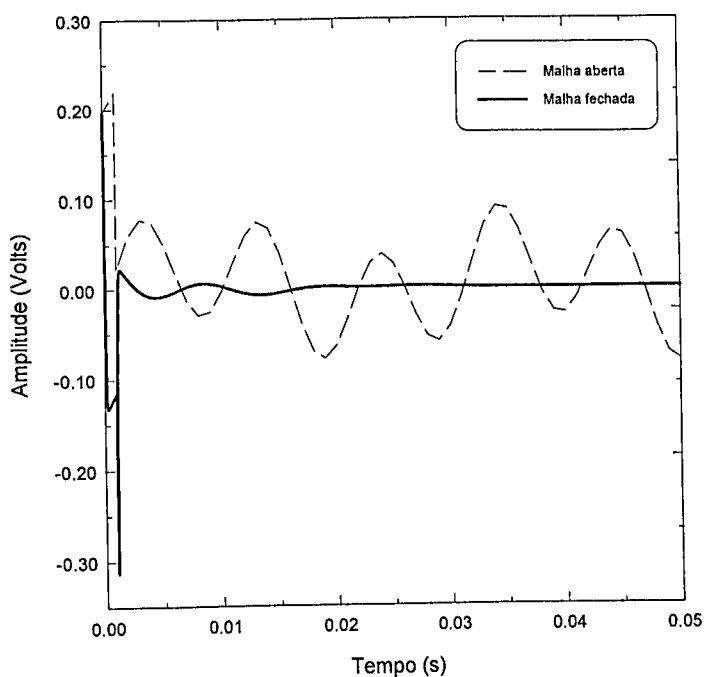


Figura 6.38- Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha aberta e fechada.

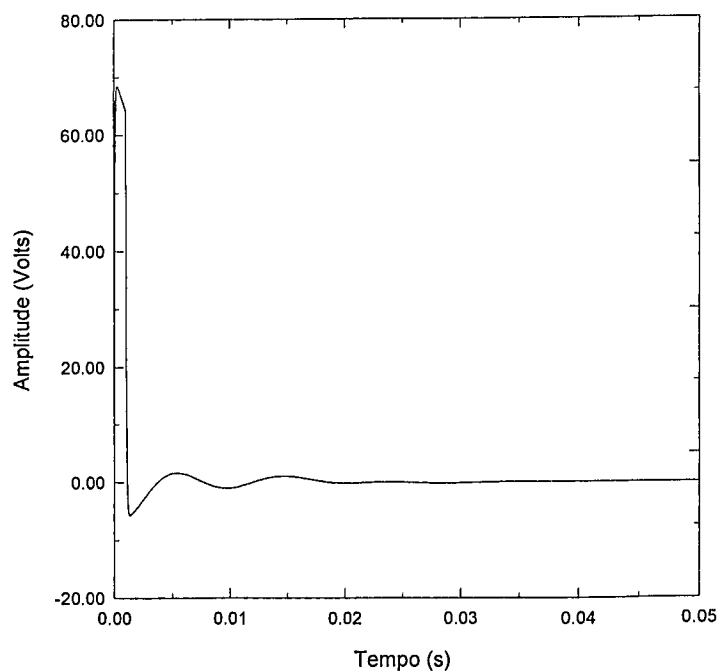


Figura 6.39- Resposta temporal do sinal Φ_a aplicado no atuador.

Fica evidente, a partir dos gráficos precedentes, que o desempenho do controlador K é bastante satisfatório, reduzindo os níveis de vibrações estruturais num tempo muito pequeno (em torno de 0.02 s).

6.6.2.2 Projeto do Controlador Robusto Aplicado ao Modelo Perturbado

Para efeito de análise da robustez do controlador projetado, admite-se que seja utilizada uma *planta perturbada* contendo um número maior de modos de vibrar: *trinta*⁴⁶. As Figuras 6.40 e 6.41 ilustram as respostas no domínio do tempo, em malha aberta e fechada, obtida para o sinal Φ_s considerando-se as mesmas condições de simulação empregadas no caso anterior.

⁴⁶ O número de modos selecionado (modelo de ordem mínima) foi obtido a partir do balanceamento interno do sistema completo (veja Capítulo 5, Seção 5.4).

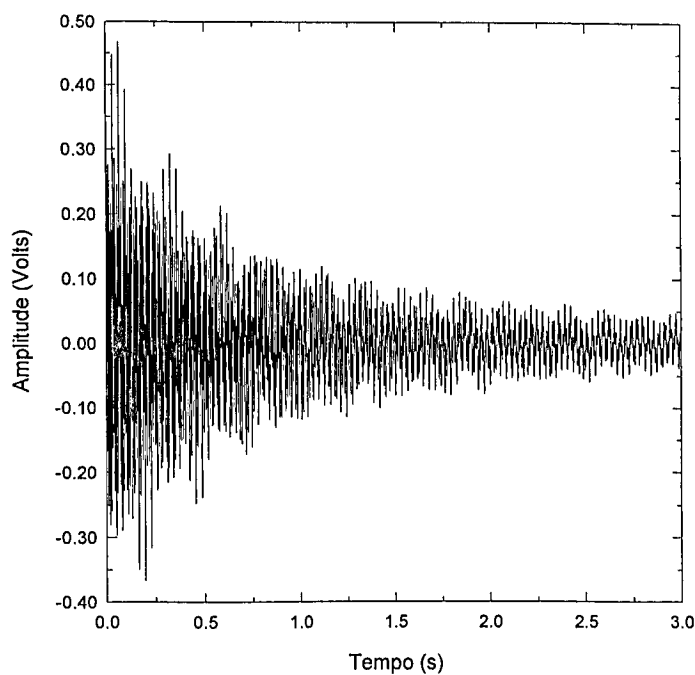


Figura 6.40- Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha aberta apresentando 30 modos de vibrar.

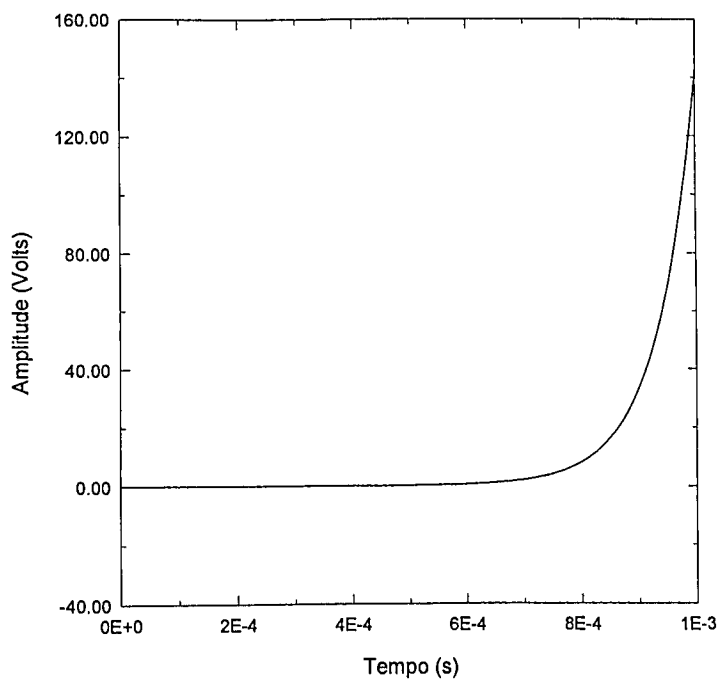


Figura 6.41- Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada apresentando 30 modos de vibrar.

Neste ponto, conclui-se que o controlador em questão não apresenta nenhuma característica de robustez às *dinâmicas não modeladas*, o que era naturalmente esperado, uma vez que o controlador K foi projetado sem incluir tal requisito. Esta notória instabilidade é causada por sinais perturbadores vindos de dinâmicas não modeladas que podem aparecer no sinal de comando do atuador. Como o controle possui energia suficiente para excitar os modos superiores aos controlados (veja Fig. 6.36), os efeitos perturbadores resultantes levam o sistema à instabilidade. Assim, para que estes efeitos sejam minimizados é necessário diminuir o ganho do controlador K na região de frequências onde a dinâmica é desconhecida (*Teorema do Pequeno Ganho*). Diante deste fato, a condição de *robustez da estabilidade*, descrita na Seção 6.4, é incorporada na metodologia de projeto (veja Seção 6.5.1).

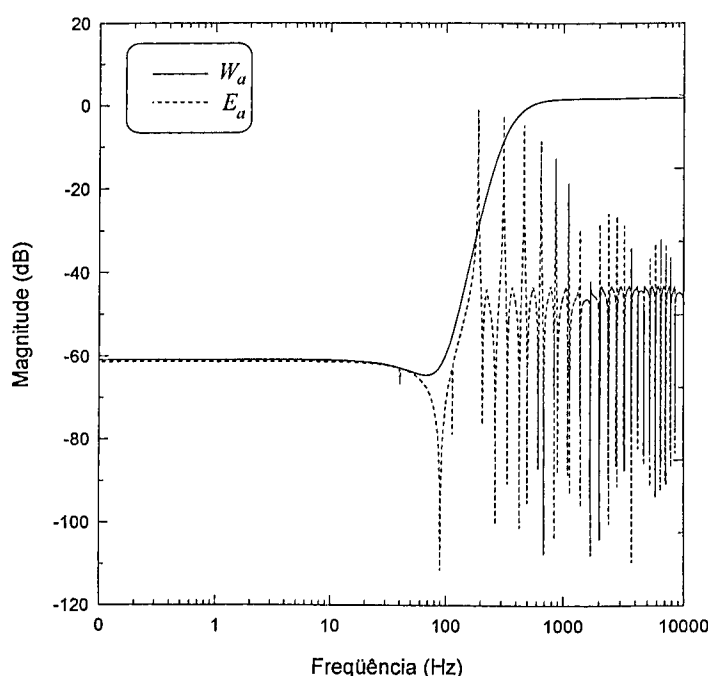


Figura 6.42- Filtro de projeto W_a e erro aditivo E_a entre o modelo de viga completo e reduzido.

Neste caso, as incertezas do modelo serão tratadas como incertezas *não estruturadas do tipo aditiva*. No problema em questão, o modelo nominal é fruto de uma redução modal onde conservou-se apenas os *três* primeiros modos de vibração da estrutura. Assim, admitindo-se que a planta perturbada seja o modelo completo com seus *trinta* modos de vibrar, E_a representa a *distância* entre o modelo completo e a planta nominal. A Figura 6.42 mostra em pontilhado o comportamento de E_a em função da frequência e a curva contínua é o filtro de projeto W_a , definido pela relação:

$$W_a(s) = 9 \times 10^{-4} \left(\frac{s^2/\omega_1^2 + 2\zeta_1/\omega_1 s + 1}{s^2/\omega_2^2 + 2\zeta_2/\omega_2 s + 1} \right)^2 \quad (6.96)$$

onde $\omega_1 = 600 \text{ rad/s}$, $\zeta_1 = 0.5$, $\omega_2 = 2000 \text{ rad/s}$ e $\zeta_2 = 0.7$.

A representação convexa associada a este problema é mostrada pela Fig. 6.43.

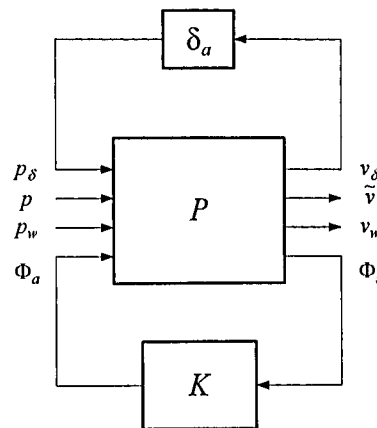


Figura 6.43- Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível considerando incertezas não paramétricas na forma aditiva.

A resposta em frequência do controlador K gerado (de 10^a ordem) é ilustrada pela Fig. 6.44, onde $\gamma_{\min} = 3.11 \times 10^{-3}$.

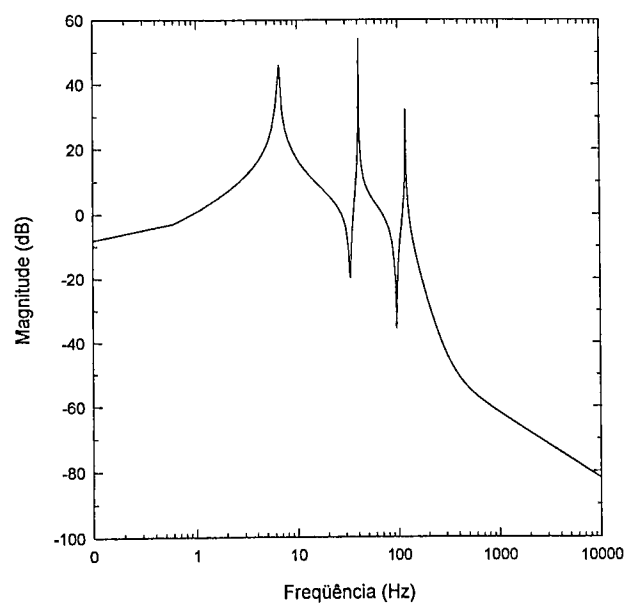


Figura 6.44- Resposta em frequência do compensador K incluindo no projeto a condição de estabilidade robusta.

Nota-se, pelas Figs. 6.36 e 6.44, que a magnitude do novo controlador é atenuada a partir do *quarto modo* de vibrar da estrutura. Para avaliar a robustez do controlador à dinâmica de alta frequência não modelada, o sistema é simulado, em malha fechada, conforme esquema mostrado na Fig. 6.37, onde o modelo completo é empregado para a caracterização da planta. As Figuras 6.45 e 6.46 apresentam, respectivamente, os sinais obtidos para o sensor e atuador.

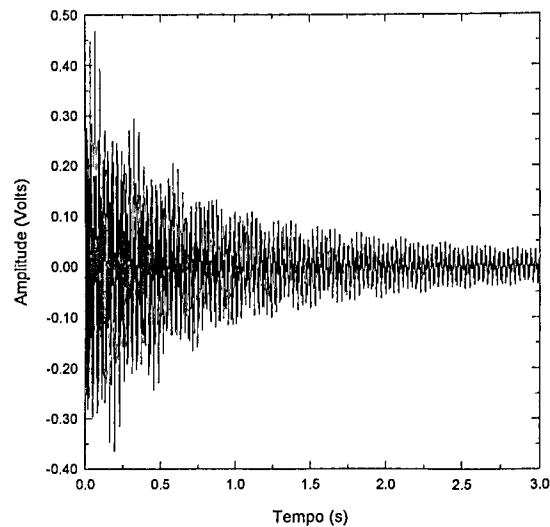


Figura 6.45- Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez à dinâmica de alta frequência.

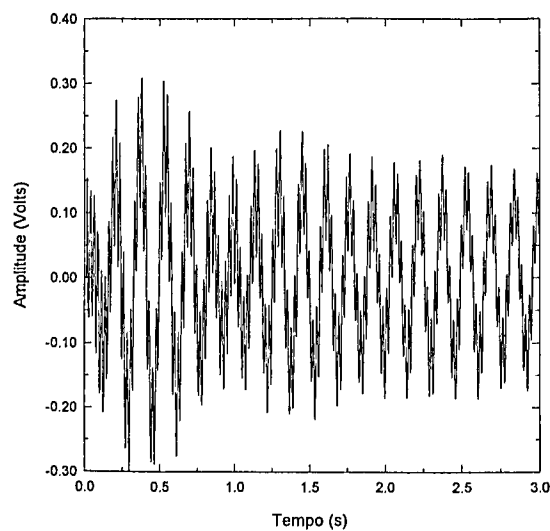


Figura 6.46- Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada considerando no projeto do controlador o requisito de robustez à dinâmica de alta frequência.

Comprova-se pelas figuras precedentes que o novo compensador K mantém níveis reduzidos de controle quando as altas frequências são preferencialmente excitadas por p .

Uma outra forma de avaliar o desempenho do controlador construído, é calculando a norma infinita de T_{vp} ao longo da estrutura (modelo completo). A Figura 6.47 mostra este comportamento.

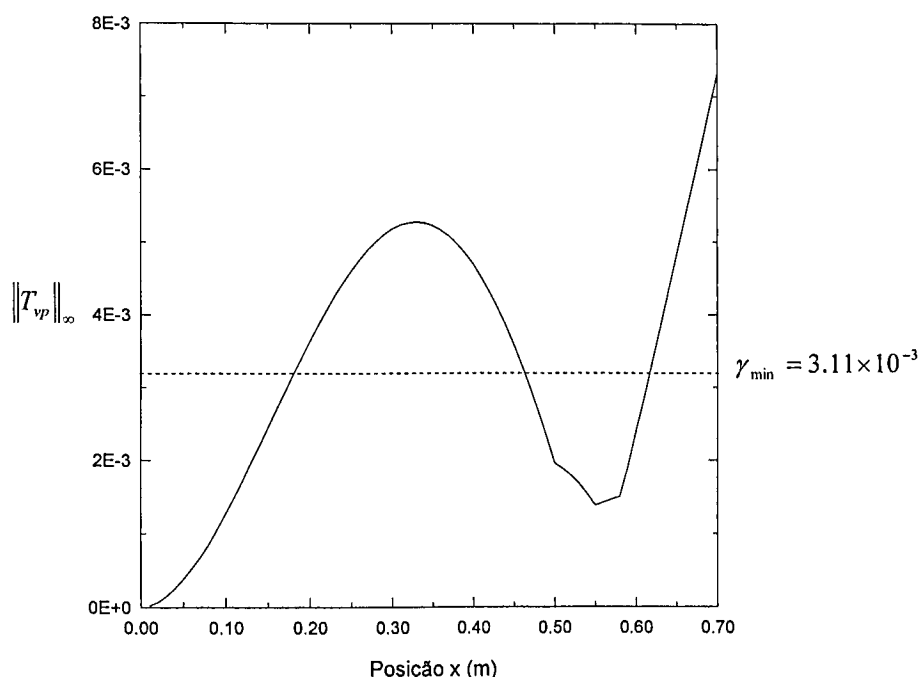


Figura 6.47- Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível para a condição de estabilidade robusta incluída no projeto.

Observa-se, a partir das Figs. 6.34 e 6.47, que quando se exige robustez à dinâmica desconhecida (relativa à estabilidade), leva-se a deterioração do desempenho da planta controlada (Cerna et al, 2002). O impacto desta afirmação pode ser melhor avaliado quando se observa a resposta do sistema controlado.

Tal resposta pode ser obtida a partir do diagrama mostrado na Fig. 6.37, onde considerou-se uma excitação⁴⁷ p do tipo senoidal de amplitude unitária e frequência igual à primeira natural do sistema (veja Figs. 6.48 e 6.49).

⁴⁷ Além deste teste, foram realizados vários outros, considerando diferentes tipos de frequência de excitação e em todos os casos os resultados sempre foram similares à situação aqui descrita.

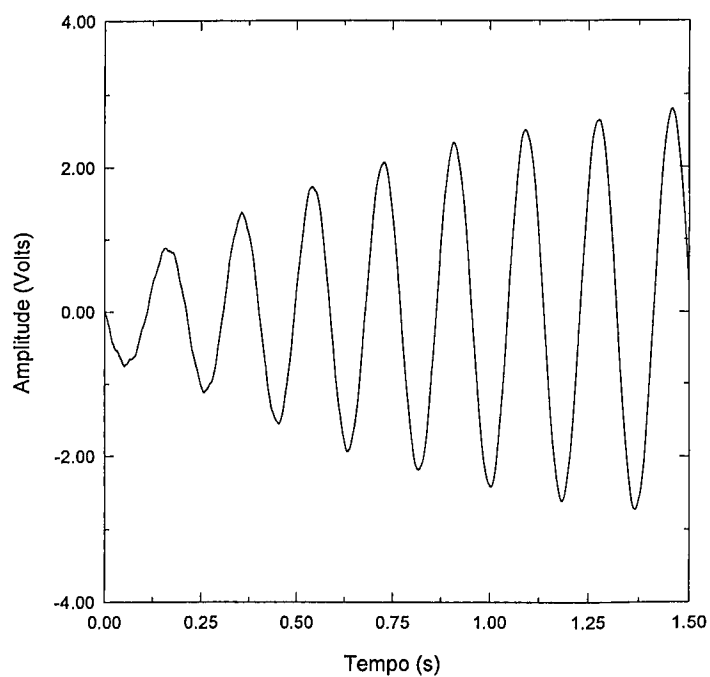


Figura 6.48- Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada como uma excitação p do tipo sensoidal numa freqüência igual à primeira natural do sistema.

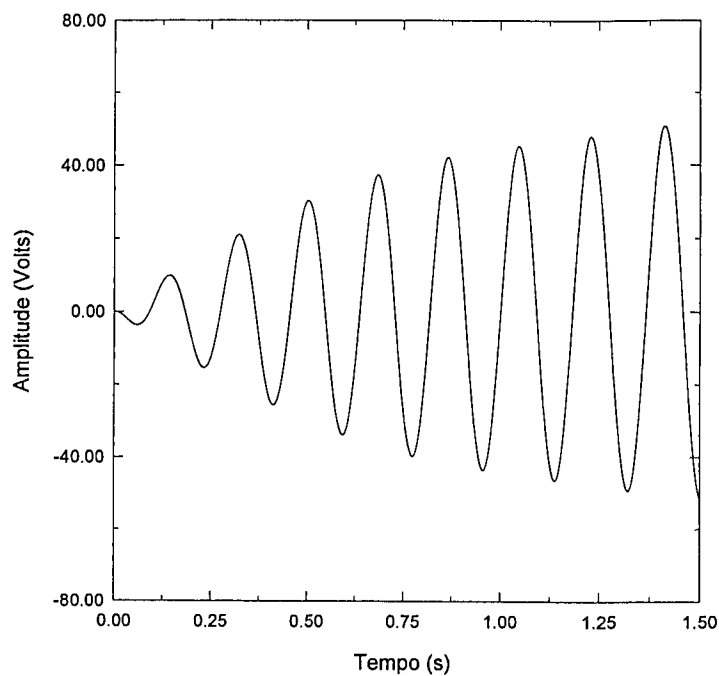


Figura 6.49- Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada como uma excitação p do tipo sensoidal numa freqüência igual à primeira natural do sistema.

6.6.2.3 Projeto do Controlador Robusto Aplicado ao Modelo Perturbado Considerando Incertezas nos Parâmetros Nominais

Uma vez apresentados os resultados auferidos pelo controlador com relação ao seu desempenho e à sua robustez frente à dinâmica não modelada e às variações em torno desta dinâmica, procede-se a fase de verificação destas propriedades diante de *incertezas nos parâmetros nominais*, em torno dos quais foi construído todo o procedimento de controle. Na presente análise, o amortecimento do sistema (c) é elegido como o parâmetro incerto. O objetivo é avaliar o desempenho do controlador face à incerteza neste parâmetro⁴⁸. Para atentar ao objetivo proposto, a incerteza em c (do tipo paramétrica) será introduzida, como um laço de realimentação externa (veja Seção 6.3.1) no diagrama apresentado pela Fig. 6.43. Assim, espera-se que o problema de controle robusto, na sua configuração final, possa resultar num controlador mais eficiente com relação ao desempenho do sistema em malha fechada apresentado pelas Figs. 6.48 e 6.49.

Para atingir a realização pretendida, o sistema dinâmico em questão deve ser descrito em termos do parâmetro c , isto é, na forma apresentada pelas Eqs. (3.121), (6.87) e (6.88), ou ainda (onde a variável t foi omitida):

$$\ddot{\eta}_k = c_k \dot{\eta}_k - \omega_{n_k}^2 \eta_k + b_n^1 p + b_n^2 \Phi_a \quad (6.97)$$

$$\tilde{v} = c_n^1 \eta_k + d_n^{pv} p + d_n^{av} \Phi_a \quad (6.98)$$

$$\Phi_s = c_n^2 \eta_k + d_n^{ps} p + d_n^{as} \Phi_a \quad (6.99)$$

onde b_n^1 , b_n^2 , c_k , c_n^1 e c_n^2 são dados por:

$$b_n^1 = [0 \quad \phi_k(x_p)]^T \quad (6.100a)$$

$$b_n^2 = k_a [0 \quad \phi'_k(x_{a2}) - \phi'_k(x_{a1})]^T \quad (6.100b)$$

$$c_k = -2\zeta_k \omega_{n_k} \quad (6.100c)$$

$$c_n^1 = [\phi_k(x_v) \quad 0] \quad (6.100d)$$

$$c_n^2 = k_s [\phi'_k(x_{s2}) - \phi'_k(x_{s1}) \quad 0] \quad (6.100e)$$

e k_a e k_s são constante do atuador e sensor (veja Capítulo 3, Seção 3.2) e d_n^{pv} , d_n^{ps} , d_n^{av} e d_n^{as} são

⁴⁸ Alazard (2002) e Kron et al (2003) afirmaram que variações nos amortecimentos modais (para uma estrutura pouco amortecida) podem levar desde a deterioração do desempenho até problemas de instabilidade do sistema controlado.

obtidos, respectivamente, pelas expressões (5.39), (5.40), (5.41) e (5.38).

Neste novo projeto, admite-se que o amortecimento c_k varia segundo o intervalo:

$$c_k = c_{n_k} (1 + a_c \delta_c) \quad (6.101)$$

onde a_c denota a *amplitude* da incerteza (expressa percentualmente) relativa ao parâmetro nominal c_{n_k} e δ_c representa o elemento *desconhecido*.

A representação gráfica, em diagrama de blocos, para o sistema descrito pelas Eqs. (6.97)-(6.99) com incertezas em c_k , é mostrada pela Fig. 6.50.

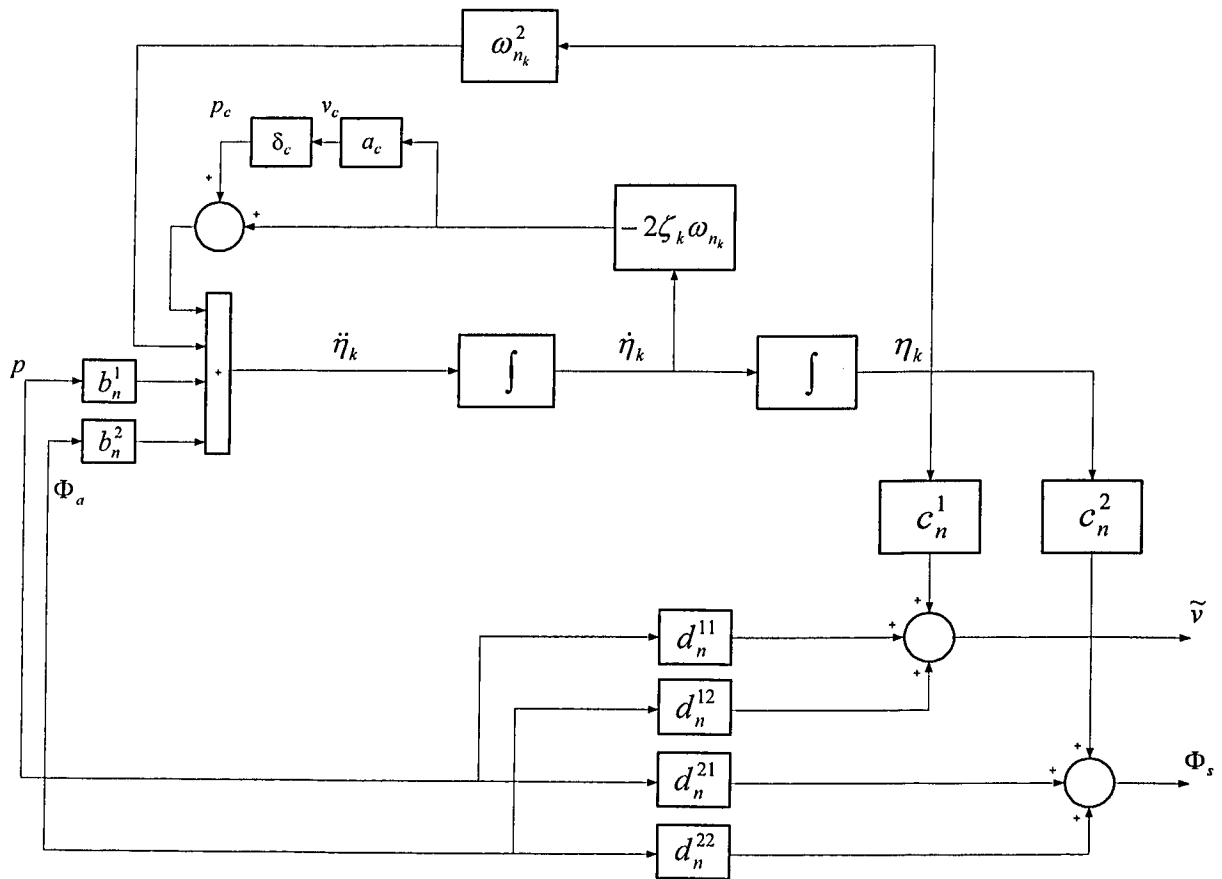


Figura 6.50- Diagrama de blocos do sistema dinâmico com incertezas nos parâmetros ζ_k .

Com relação à figura precedente, é possível, através dos passos descritos na Seção 6.3.1, isolar o parâmetro desconhecido δ_c do diagrama mostrado. Similarmente à Eq. (6.29a) ou (6.29b), nesta configuração, a matriz M_c , contendo somente elementos constantes, é expressa pela relação:

$$M_c = \begin{bmatrix} c_{n_k} & a_c c_{n_k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.102)$$

Desta forma, considera-se, no presente projeto, o sistema dinâmico descrito modo a modo, diferentemente daquele representado, em espaço de estados, pelas Eqs. (6.86)-(6.88).

Definindo Δ como o conjunto de perturbações descrita por:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_a & 0 \\ 0 & \delta_c \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

tem-se, assim, o sistema perturbado P (veja Fig. 6.43) pelas incertezas δ_a e δ_c (inserida na dinâmica nominal). A Figura 6.51 apresenta a configuração convexa final atingida.

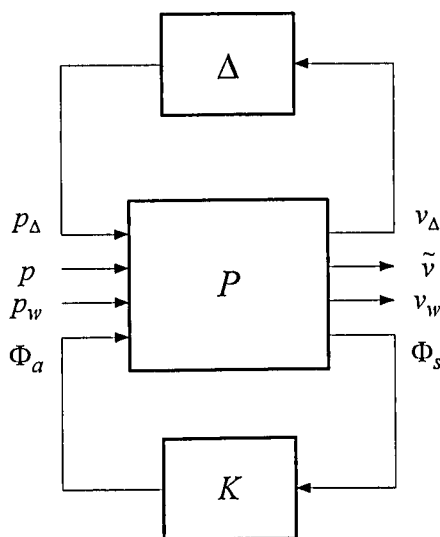


Figura 6.51- Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível considerando um conjunto de incertezas Δ (paramétrica e não-paramétrica).

Assumindo incerteza em c_{n_k} de 30 % ($a_c = 0.3$) em cada modo k , o projeto do compensador K (de 10ª ordem) é mais uma vez realizado⁴⁹ a partir do diagrama ilustrado pela Fig. 6.51. A resposta em frequência de K é mostrada pela Fig. 6.52 (onde $\gamma_{\min} = 1.83 \times 10^{-4}$).

⁴⁹ Para a configuração convexa descrita, o projeto do controlador é realizado utilizando-se o pacote numérico *Matlab*® *μ-Synthesis* (Balas, 2001) que oferece recursos numéricos bastante interessantes.

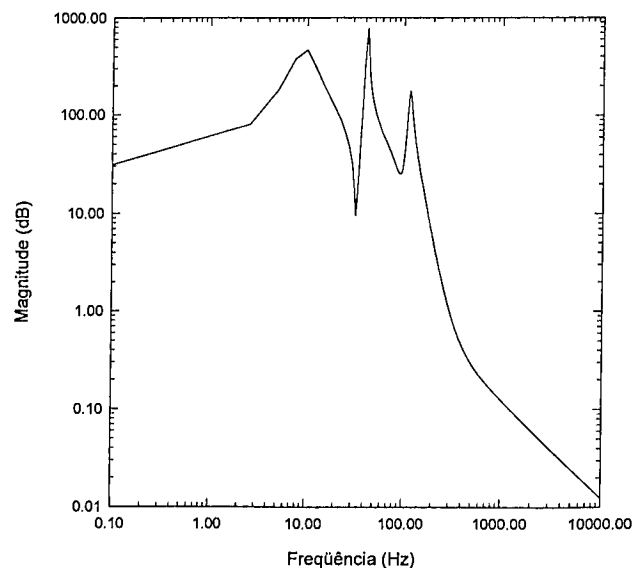


Figura 6.52- Resposta em frequência do compensador K incluindo no projeto incertezas paramétricas.

Com o controlador gerado, o comportamento do sistema completo em malha fechada pode ser então avaliado, através do esquema⁵⁰ mostrado na Fig. 6.37. As Figs. 6.53 e 6.54 ilustram este comportamento (sinais Φ_s e Φ_a).

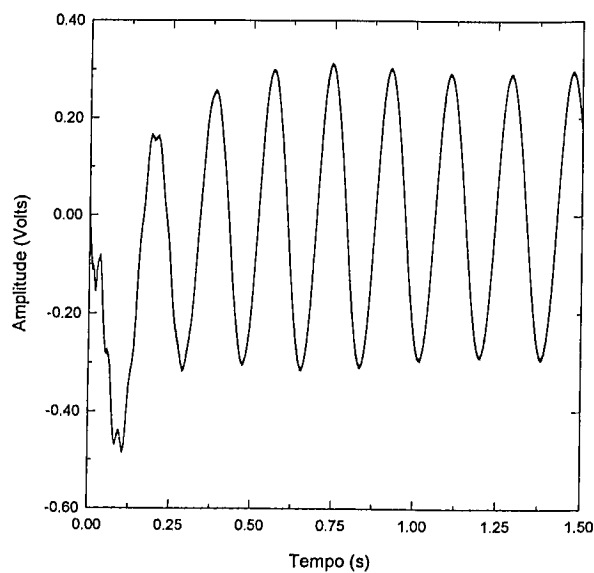


Figura 6.53- Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada incluindo incertezas paramétricas no projeto do controlador.

⁵⁰ Na simulação em questão considerou-se os mesmos parâmetros empregados no projeto anterior.

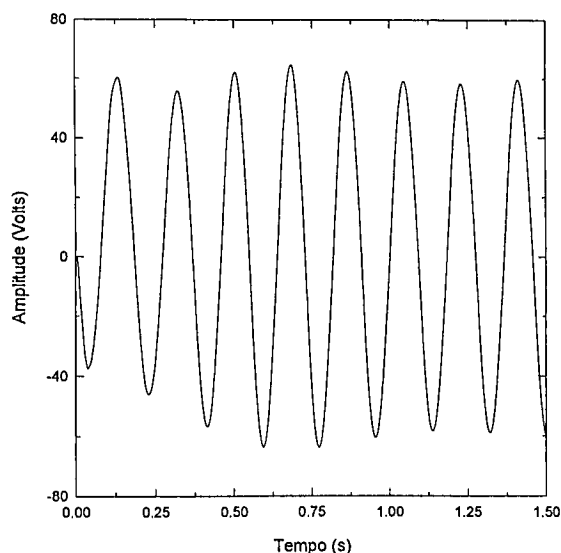


Figura 6.54- Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada incluindo incertezas paramétricas no projeto do controlador.

Ao se observar as Figs. 6.48, 6.49, 6.53 e 6.54, verifica-se o excelente desempenho do controlador frente à excitação p avaliada na primeira freqüência natural do sistema. Este comportamento foi também verificado para várias outras freqüências de excitação aplicadas. Para analisar o preço desta excelência, o sistema dinâmico em questão é submetido às seguintes perturbações⁵¹:

- o sinal do sensor é corrompido por um ruído branco, gaussiano de média nula e variância igual a $0.1 \mu V$ e
- os amortecimentos modais do sistema completo c_{n_k} têm seus valores alterados em $\pm 30 \%$.

As Figuras 6.55 e 6.56 ilustram o comportamento do sistema dinâmico submetido à excitação senoidal p avaliada na primeira freqüência natural do sistema.

⁵¹ Certamente estas variações atendem à interesses práticos que é exatamente o assunto do capítulo seguinte onde são confirmados estes resultados.

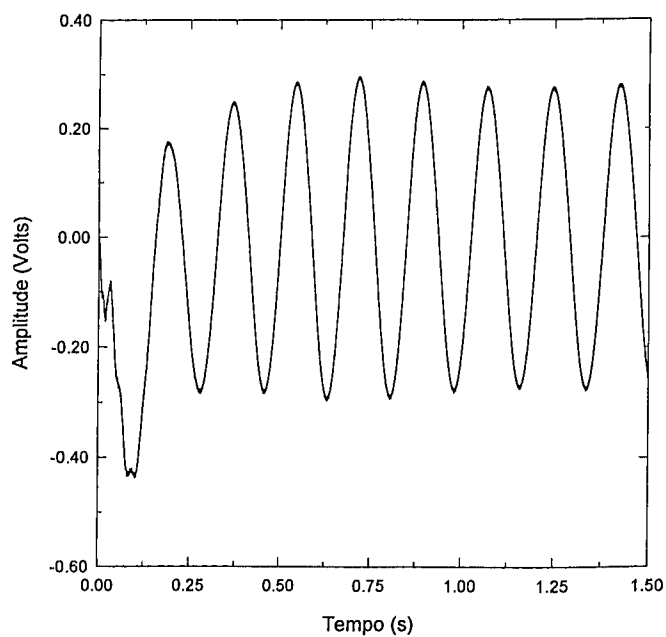


Figura 6.55- Resposta temporal do sinal de saída do sensor (Φ_s) para o sistema em malha fechada diante de perturbações no sensor e variações no modelo do sistema dinâmico.

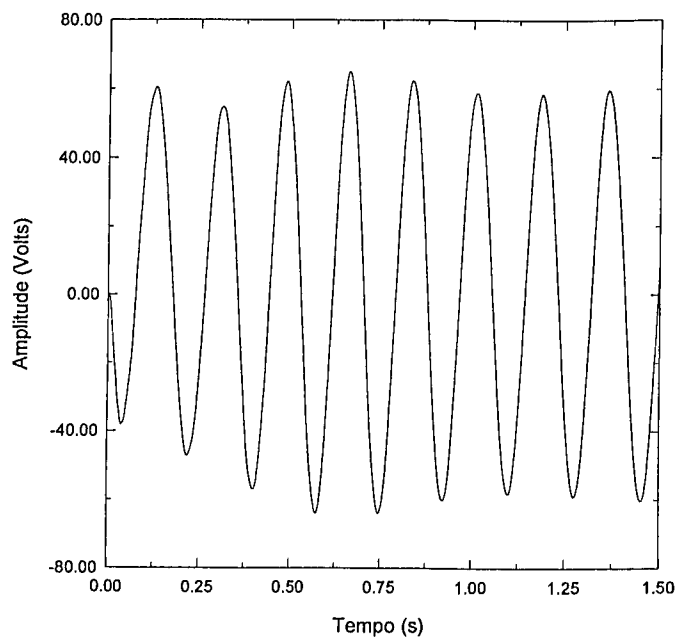


Figura 6.56- Resposta temporal do sinal do atuador (Φ_a) para o sistema em malha fechada diante de perturbações no sensor e variações no modelo do sistema dinâmico.

Como pode ser visto nas Figs. 6.55 e 6.56, o controlador mostrou-se bastante robusto⁵² diante das perturbações e variações produzidas⁵³ e, a despeito das mesmas, manteve os sinais do sensor e atuador em patamares quase idênticos aos níveis apresentados pelas Figs. 6.53 e 6.54.

Finalmente, o desempenho do controlador gerado é avaliado ao longo da estrutura. A Figura 6.57 mostra a norma infinita de T_{vp} computada em toda a estrutura.

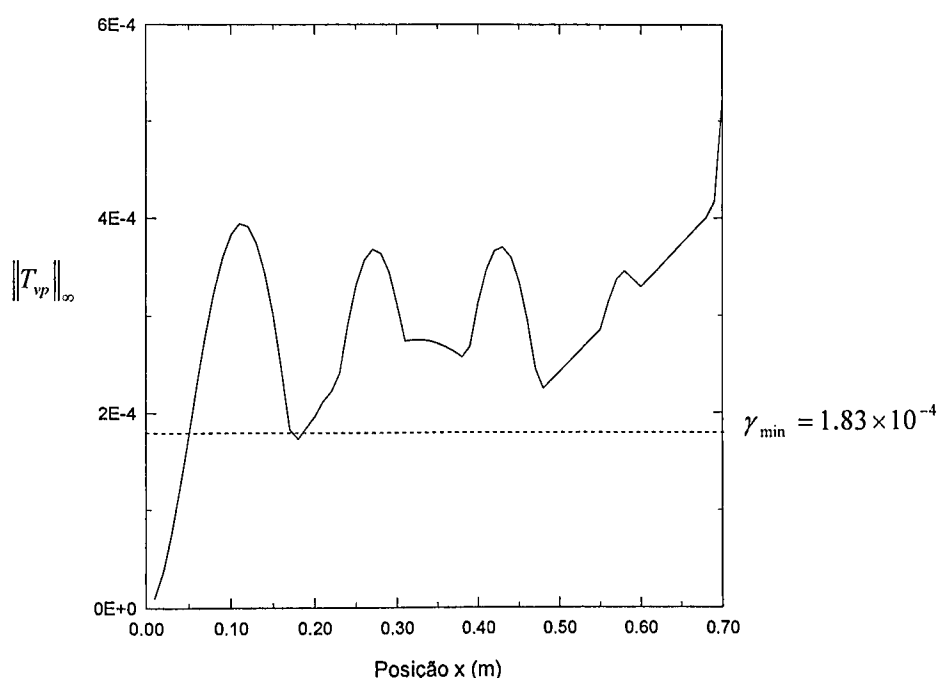


Figura 6.57- Norma infinita de T_{vp} avaliada ao longo da viga flexível para a incerteza paramétrica incluída no projeto.

Como se pode observar, os níveis de vibrações são fortemente atenuados em relação ao resultado ilustrado pela Fig. 6.47. Além disto, o compensador projetado apresentou dimensões (10^{a} ordem) bem razoáveis, uma vez que incluiu-se no projeto somente um filtro (associado à estabilidade). Diante deste dado e dos testes efetuados, comprova-se que a metodologia de controle apresentada representa teoricamente uma ferramenta eficiente na redução dos níveis de vibração da estrutura flexível considerada.

⁵² Diante da variação δ_c , comprovou-se, através do cálculo de μ_{δ_c} (veja Seção 5.4.2) que o sistema é estável para qualquer variação deste parâmetro ($\mu_{\max} = 0$).

⁵³ Foram realizados inúmeros testes, considerando outros tipos de excitação e em todos os casos estudados, os resultados foram bastante satisfatórios e o controlador revelou-se robusto e estável.

Uma vez estabelecidas as ferramentas fundamentais para o projeto de controladores robustos aplicados no controle de vibrações em estruturas flexíveis, passa-se à etapa motivadora deste trabalho, qual seja o de controlar de forma ativa as vibrações numa viga flexível construída.

Capítulo 7

Resultados Experimentais

Neste capítulo é apresentada a bancada de testes utilizada na avaliação dos procedimentos teóricos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Inicialmente é descrita a estrutura flexível, o atuador e o sensor. Em seguida procura-se verificar a aproximação entre os modelos experimentais e aqueles formulados analiticamente. O capítulo termina apresentando um conjunto de testes que buscam avaliar as características de robustez e desempenho do sistema em malha fechada.

7.1 Descrição e Identificação da Bancada de Testes

A bancada de testes é constituída por uma viga de alumínio com condição de contorno pretendida: engastada livre (veja Fig. 7.1). A viga é instrumentada com um sensor *PVDF* (veja Fig. 7.2) e um atuador piezelétrico (veja Fig. 7.3), colados lado a lado e co-posicionados⁵⁴ próximos ao ponto de engastamento do sistema. Os dados principais dos materiais piezelétricos são apresentados no Anexo VI e da estrutura no Capítulo 4, Seção 4.1.1.

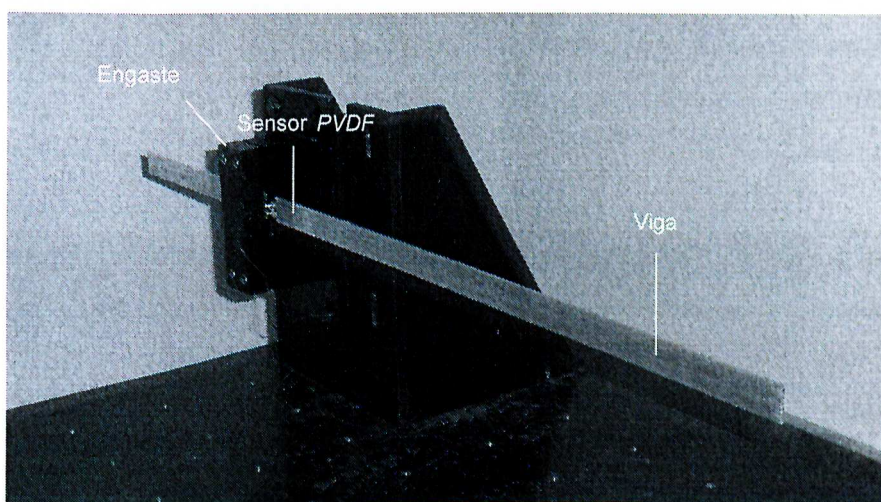


Figura 7.1- Bancada de testes.

⁵⁴ O posicionamento ótimo do atuador e sensor utiliza o critério de mínimo esforço do controlador e máxima energia de saída, através dos gramínicos de controlabilidade e observabilidade do sistema (veja Capítulo 5).

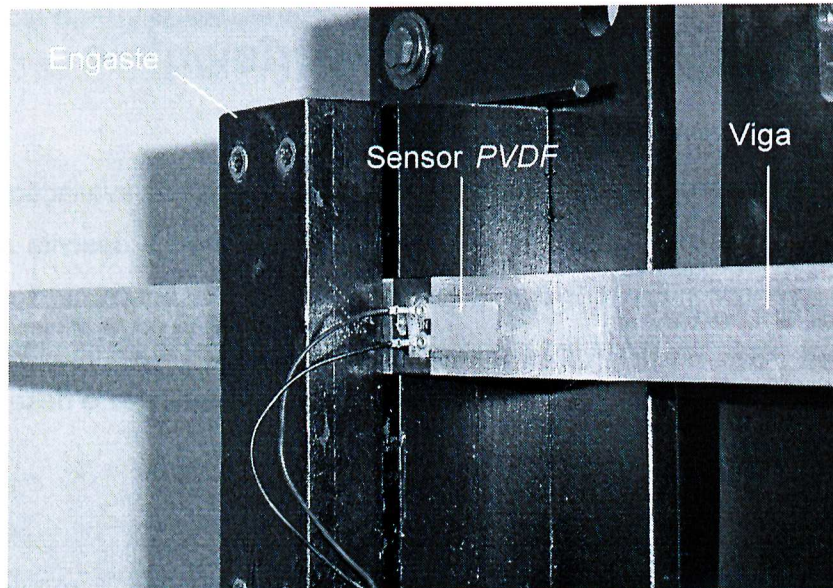


Figura 7.2- Localização do sensor piezelétrico na estrutura.

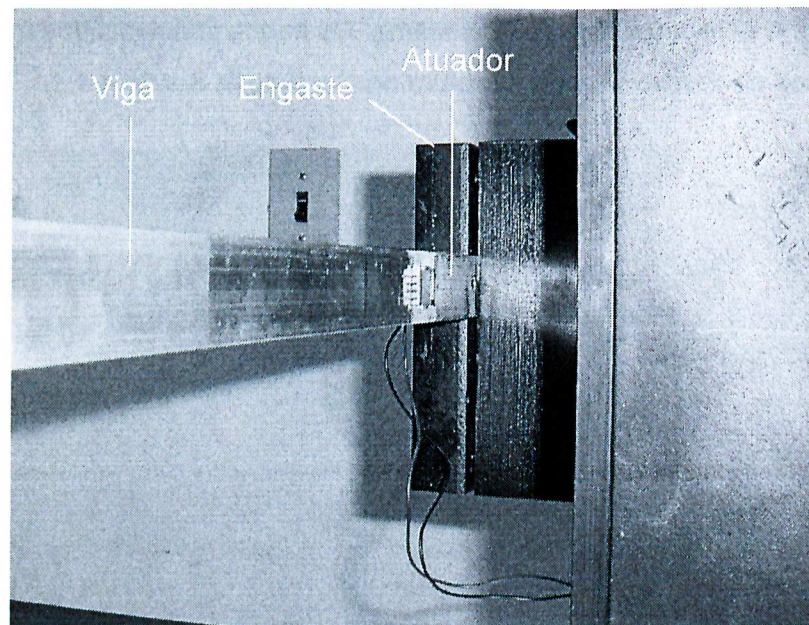


Figura 7.3- Localização do atuador piezelétrico na estrutura.

A determinação experimental da resposta em frequência do sistema em malha aberta é realizada a partir do diagrama esquemático mostrado na Fig. 7.4.

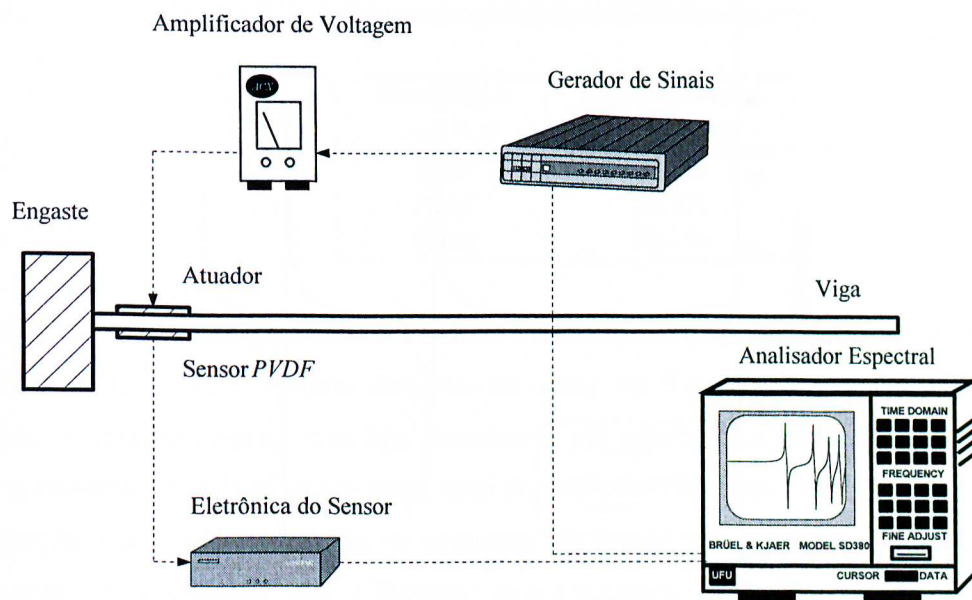


Figura 7.4- Diagrama esquemático do experimento de identificação do sistema.

Segundo este diagrama, um gerador de sinais produz um sinal de ruído de banda limitada (0-100 Hz) que alimenta o amplificador de voltagem (ganho 20 V/V) e, por sua vez, excita o atuador piezelétrico (veja modelos no Anexo VI). Os movimentos da estrutura, gerados pelo atuador, são captados pelo sensor PVDF através do dispositivo eletrônico apresentado no Anexo VI (onde empregou-se $C_r = 1 \text{ nF}$). Assim, os sinais de entrada (gerador de sinais) e saída (sensor) são adquiridos e processados pelo analisador espectral de sinais⁵⁵ (Scientific Atlanta, modelo SD380) que fornece a função de transferência correspondente.

Numericamente, o sistema é modelado a partir da formulação contínua, apresentada no Capítulo 3, onde empregou-se, para o cálculo da função de transferência⁵⁶ associada ao circuito mostrado na Fig. 7.4, a Eq. (3.127). Para a caracterização do modelo nominal⁵⁷, conservou-se apenas os *três primeiros modos de vibrar* do modelo completo uma vez que além destes modos o sistema deixa de ser completamente controlável e observável.

⁵⁵ Ajustou-se o analisador espectral com uma média de vinte ensaios.

⁵⁶ Os amortecimentos modais foram admitidos todos iguais a 5×10^{-3} . Esta hipótese está dentro do conjunto de incertezas consideradas no modelo de projeto do controlador.

⁵⁷ A influência do amplificador de voltagem e o efeito dos modos residuais no modelo truncado foram considerados no cálculo da resposta em transferência do sistema. O ganho do amplificador foi multiplicado pela constante k_a , fornecida pela Eq. (3.122a), e um total de 20 modos foram empregados para o cálculo do termo de correção D , dado pela Eq. (5.38), resultando em $D = -3.1525 \times 10^{-3}$.

As Figuras 7.5 e 7.6 ilustram as funções de transferência do sistema (magnitude e fase) na faixa de frequência correspondente aos três primeiros modos de vibração da estrutura⁵⁸.

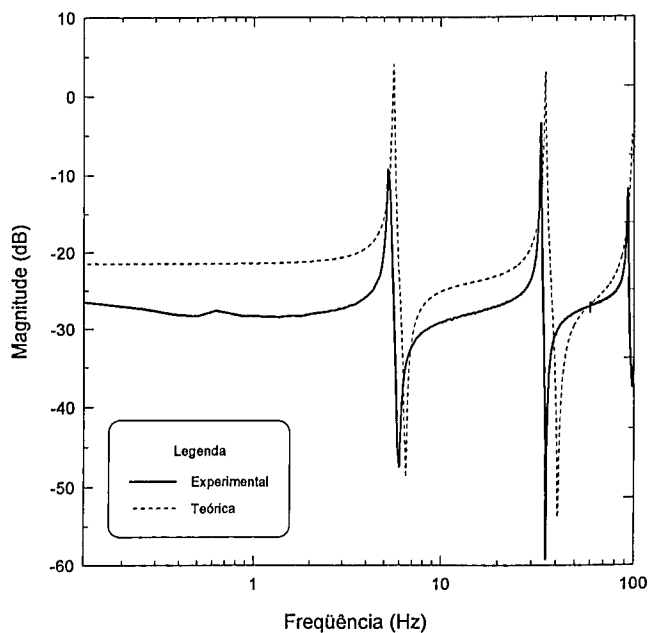


Figura 7.5- Magnitude da função de transferência do sistema.

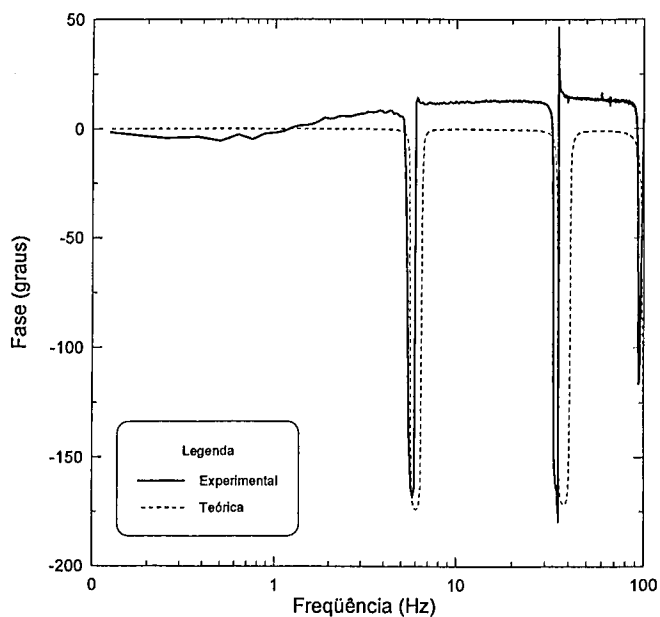


Figura 7.6- Fase da função de transferência do sistema.

⁵⁸ Na identificação realizada, a precisão em frequência do analisador (0.125 Hz) é função da frequência máxima ajustada (100 Hz) e da resolução utilizada (800 linhas).

A Tabela 7.1 apresenta os três primeiros modos de flexão numérico e experimentalmente obtidos.

Tabela 7.1- Três primeiros modos de flexão da viga.

Modo i	Numérico $\omega_{n_i}(Hz)$	Experimental $\omega_{n_i}(Hz)$
1	5.59	5.375
2	35.07	33.375
3	98.21	93.125

Os dados apresentados pela Tab. 7.1 demonstram uma boa aproximação entre os resultados experimentais e teóricos. Alguns desvios de valor na frequência natural são devidos a imperfeições no modelo teórico que não considera, por exemplo, o engastamento inadequado existente no sistema físico real. Além disto, uma análise preliminar das Figs. 7.5 e 7.6, revela uma visível distorção verificada na função de resposta em frequência numérica quando comparada com o resultado experimental. Há, entretanto, que considerar efeitos "desconhecidos" que não são levados em consideração no modelo teórico desenvolvido. Um destes efeitos parece apontar para a influência da camada de adesivo que é utilizada na fixação dos materiais piezelétricos na estrutura principal. Neste trabalho, a espessura da camada do adesivo, não foi considerada no modelo, isto é, o elemento piezelétrico está perfeitamente fixo na estrutura. Entretanto, a presença do adesivo altera as propriedades de interfaceamento do material piezelétrico-estrutura, como rigidez e amortecimento (Crawley e De Luis, 1987). Neste sentido, visando aproximar o modelo experimental com aquele obtido analiticamente, um método de ajuste de modelos, construído a partir de pacotes numéricos de otimização (*Matlab*®), é empregado. O objetivo é determinar o *módulo de elasticidade equivalente* (E_a) do conjunto elemento piezelétrico e adesivo. Para isto, a função de transferência numérica é ajustada a partir da seguinte função de otimização:

$$J(\omega) = \sum_{i=1}^{n_\omega} [G(\omega_i) - G_{\text{exp}}(\omega_i)]^2 \quad (7.1)$$

onde G e G_{exp} são as funções resposta em frequência numérica e experimental, respectivamente.

Através da Eq. (7.1), o módulo de elasticidade equivalente do conjunto material piezelétrico e adesivo é então obtido resultando em: $E_a = 25 \text{ GPa}$. Observa-se a redução deste parâmetro físico, fornecido inicialmente pela Tab. VI.2. Assim, para a situação conforme colocada, o resultado apresentado demonstra o efeito da incorporação da camada de adesivo na estrutura. Isto tem como consequência inevitável, a diminuição da capacidade do atuador na geração do

momento (Lima Jr., 1999). As Figuras 7.5 e 7.8 ilustram as funções de transferência (magnitude e fase) correspondentes aos modelos: teórico ajustado e experimental.

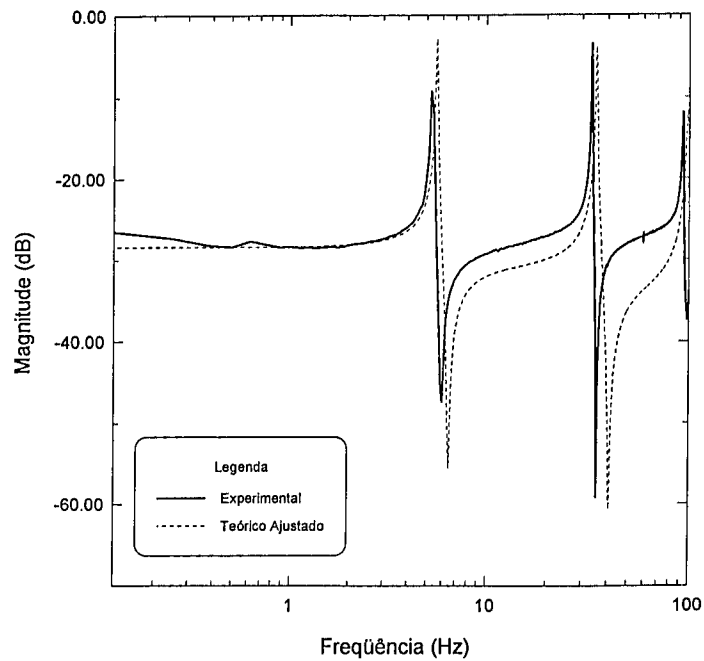


Figura 7.7- Magnitude da função de transferência do sistema com o modelo numérico ajustado.

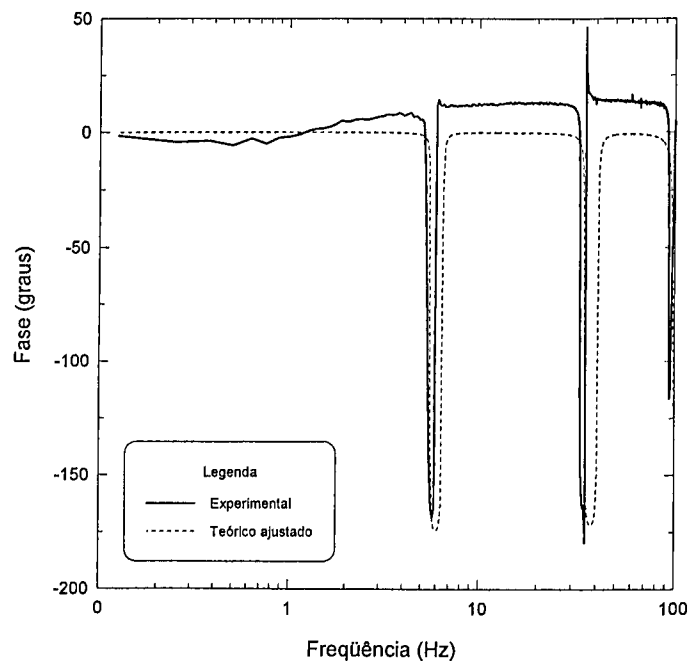


Figura 7.8- Fase da função de transferência do sistema com o modelo numérico ajustado.

Uma vez definido o modelo nominal ajustado (utilizado no projeto do compensador) procede-se à fase de construção, na seção seguinte, do controlador robusto que, neste trabalho, é aplicado na atenuação das vibrações presentes na estrutura construída.

7.2 Projeto do Controlador Robusto

O projeto do controlador é realizado de maneira similar ao que foi exposto no Capítulo 6, Seção 6.6.2. Assim, para atentar ao objetivo proposto, a seção seguinte descreve, em detalhes, as etapas de construção do compensador.

7.2.1 Formulação do Problema de Controle

Para a síntese do controlador robusto, considera-se que a dinâmica associada ao modelo nominal ajustado, em espaço de estados, seja descrita pelas relações (6.86)-(6.88). Admite-se ainda que as perturbações p entram no sistema através do próprio atuador⁵⁹ (veja Fig. 7.9).

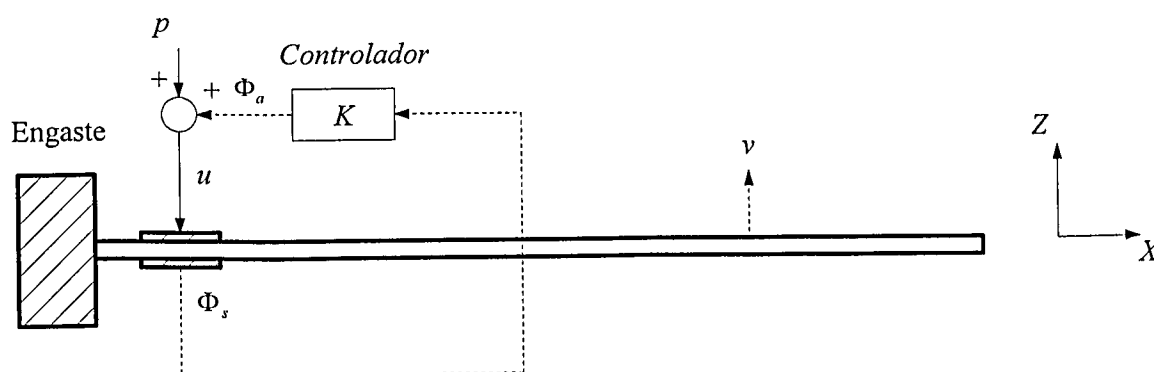


Figura 7.9- Esquema de controle empregado para a construção do compensador K .

Desta maneira, o objetivo do projeto é encontrar um controlador K tal que a lei de controle, dada pela Eq. (6.89), minimize os efeitos provocados pelas perturbações p nos deslocamentos v presentes em toda a estrutura, assegurando ao sistema controlado robustez à dinâmica de alta frequência desconhecida e à variação no amortecimento do sistema. As seções que se seguem descrevem, em detalhes, os procedimentos numéricos necessários para atingir tal propósito.

⁵⁹ Neste caso, as matrizes B_n^1 , D_n^{fv} , D_n^{fs} são respectivamente iguais à B_n^2 , D_n^{av} e D_n^{as} .

7.2.2 Modelo da Incerteza de Alta Frequência

Neste trabalho, o modelo da incerteza de alta frequência, descrito na forma aditiva, é obtido subtraindo-se a resposta em frequência do modelo real daquela determinada analiticamente (modelo nominal ajustado). Para isto, o sistema dinâmico real é mais uma vez identificado, a partir dos procedimentos descritos na Seção 7.1, até a frequência de 10 *KHz*. A Figura 7.10 ilustra o erro aditivo (curva pontilhada) e o filtro W_a associado, descrito por:

$$W_a(s) = 1.5 \times 10^{-2} \left(\frac{s^2/\omega_1^2 + 2\zeta_1/\omega_1 s + 1}{s^2/\omega_2^2 + 2\zeta_2/\omega_2 s + 1} \right)^2 \quad (7.2)$$

onde $\omega_1 = 700 \text{ rad/s}$, $\zeta_1 = 0.6$, $\omega_2 = 1600 \text{ rad/s}$ e $\zeta_2 = 0.7$.

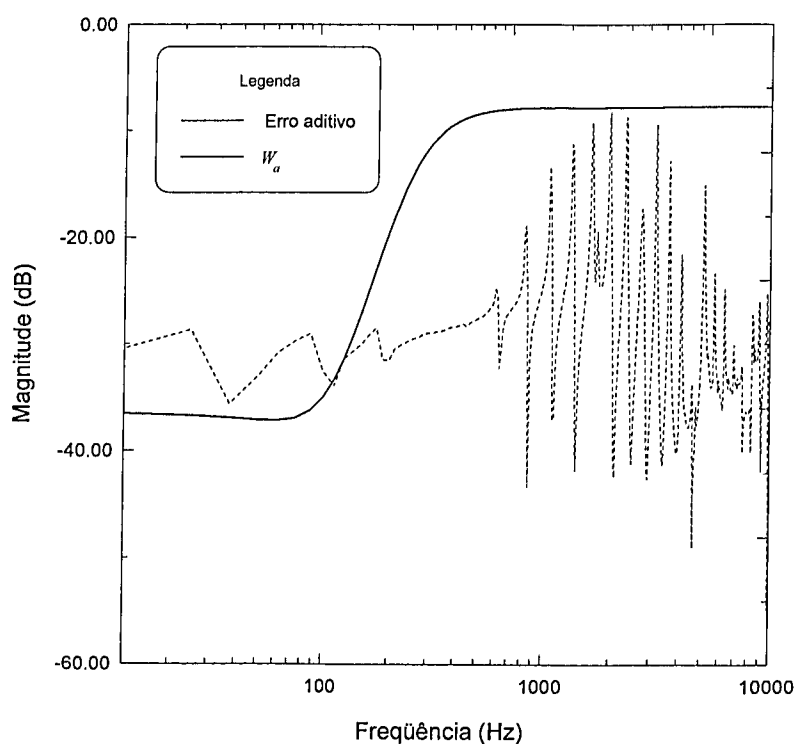


Figura 7.10- Modelo da incerteza de alta frequência (W_a) e erro aditivo entre o modelo completo e nominal.

Como já era esperado, nota-se que o erro cresce com a frequência, sendo que em 2 *KHz* o mesmo atinge seu valor máximo.

7.2.3 Projeto Robusto Considerando Incertezas no Amortecimento do Sistema

Uma vez definidos os modelos nominal e da incerteza de alta frequência, o compensador é construído incorporando-se, no projeto, incertezas no amortecimento do sistema. A Figura 7.11 ilustra a representação convexa associada ao problema.

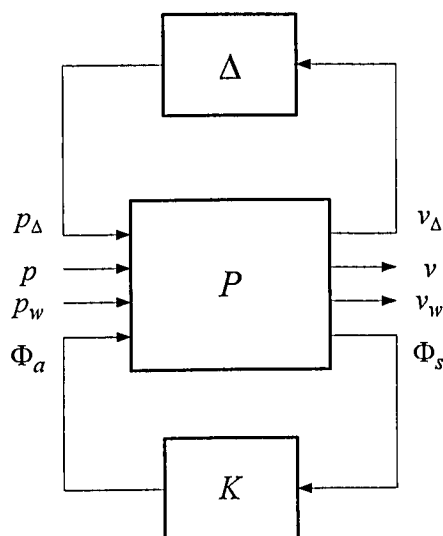


Figura 7.11- Representação convexa para o problema de controle robusto da viga flexível considerando um conjunto de incertezas paramétrica e não-paramétrica.

Na figura precedente, o sistema nominal P é constituído pela dinâmica da planta, pelo filtro W_a (variáveis p_w e v_w), pelas perturbações p e deslocamentos v (tomados ao longo da estrutura) e por incertezas paramétricas e não paramétricas (p_Δ e v_Δ), onde Δ é dado pela Eq. (6.103). Desta forma, assumindo incerteza no amortecimento de 30 %, o controlador K é finalmente determinado a partir dos procedimentos descritos no Capítulo 6, Seção 6.6.2.3. Assim, para verificar a robustez e desempenho do controlador projetado, o sistema dinâmico foi submetido a um conjunto de testes que são descritos a seguir.

7.3 Avaliação da Robustez e Desempenho do Controlador

A robustez e o desempenho do controlador robusto são verificados através de testes avaliativos no domínio do tempo e da frequência e são apresentados nas seções que se seguem.

7.3.1 Análise no Domínio do Tempo

Para a verificação da eficiência do compensador construído, é apresentado na Fig. 7.12, o diagrama esquemático empregado para a realização dos testes experimentais.

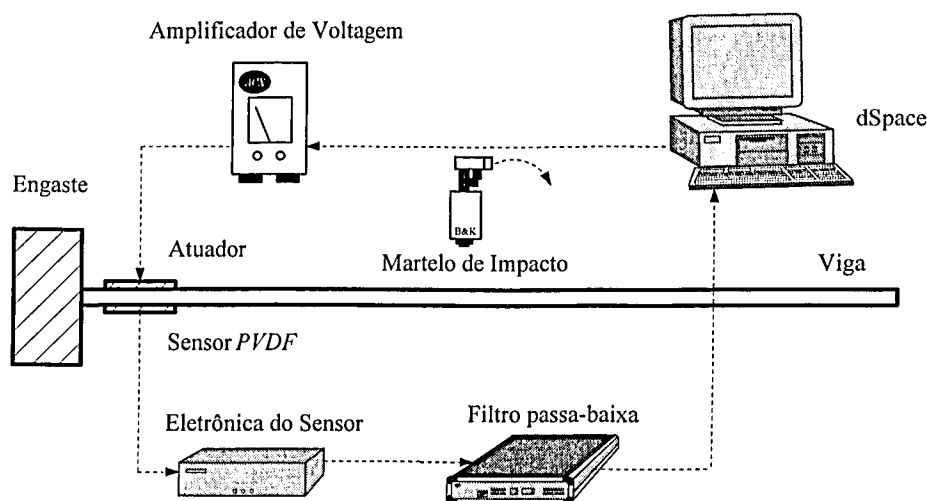


Figura 7.12- Diagrama esquemático do experimento de controle realizado para a análise no domínio do tempo .

Segundo este diagrama, o controlador robusto (construído no *Matlab Simulink*[®]) é implementado em ambiente *dSpace* (veja Anexo VI) que faz o interfaceamento entre o atuador e o amplificador de voltagem num tempo de amostragem de 1 *ms*. As vibrações da estrutura são captadas pelo sensor piezelétrico cujo sinal é conduzido à um filtro passa-baixa (veja descrição no Anexo VI) e este, por sua vez, à placa *dSpace*[®] que computa o sinal de controle.

7.3.1.1 Resposta ao Impulso

Para avaliar a robustez do compensador, a viga é submetida à uma *entrada impulsiva* aplicada por um martelo de impacto (veja Fig. 7.12) na posição 0.1 *m* a partir do ponto de engastamento. As Figuras 7.13 e 7.14 mostram os sinais do sensor piezelétrico para o sistema livre e controlado, respectivamente.

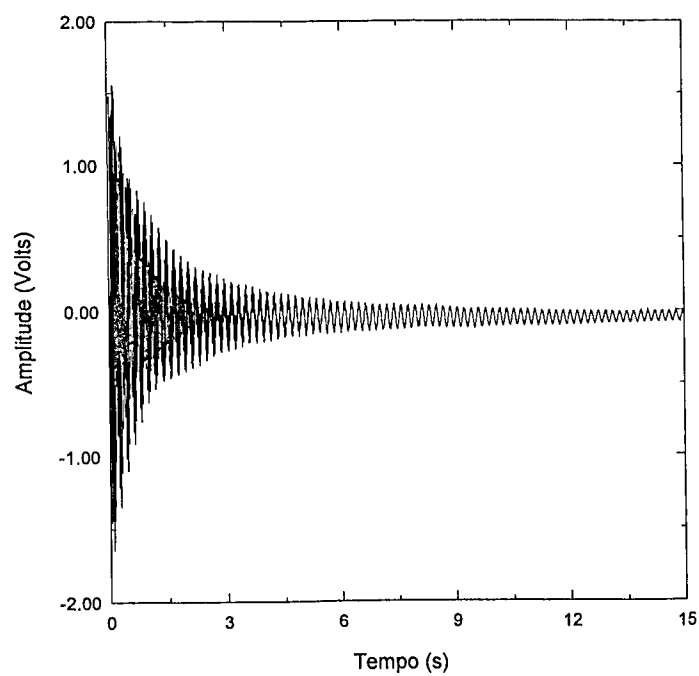


Figura 7.13- Resposta ao impulso para o sistema livre.

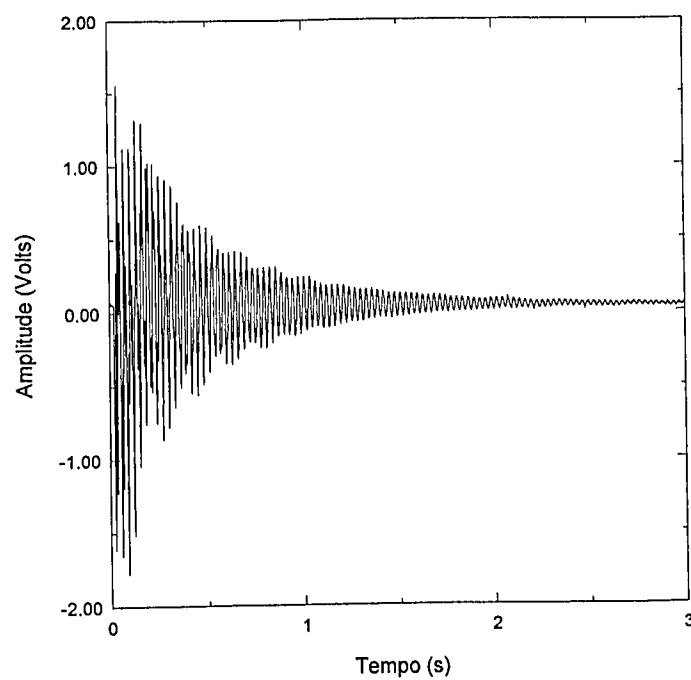


Figura 7.14- Resposta ao impulso para o sistema controlado.

Como pode ser observado, o controle conferiu ao sistema um tempo de acomodação menor e um amortecimento bem acentuado e proporcionou uma característica desejada de robustez às altas frequências presentes no sinal.

7.3.1.2 Resposta a uma Excitação do Atuador

Neste teste, a estrutura é excitada pelo atuador numa frequência próxima à sua primeira natural (veja Tab. 7.1) num tempo de aproximadamente *dois segundos*. A partir deste instante, a excitação foi suspensa e o controlador foi acionado. As Figuras 7.16 e 7.15 ilustram a resposta do sensor e atuador respectivamente obtidas para o sistema sem controle e controlado e a Fig. 7.17 mostra a voltagem aplicada no atuador.

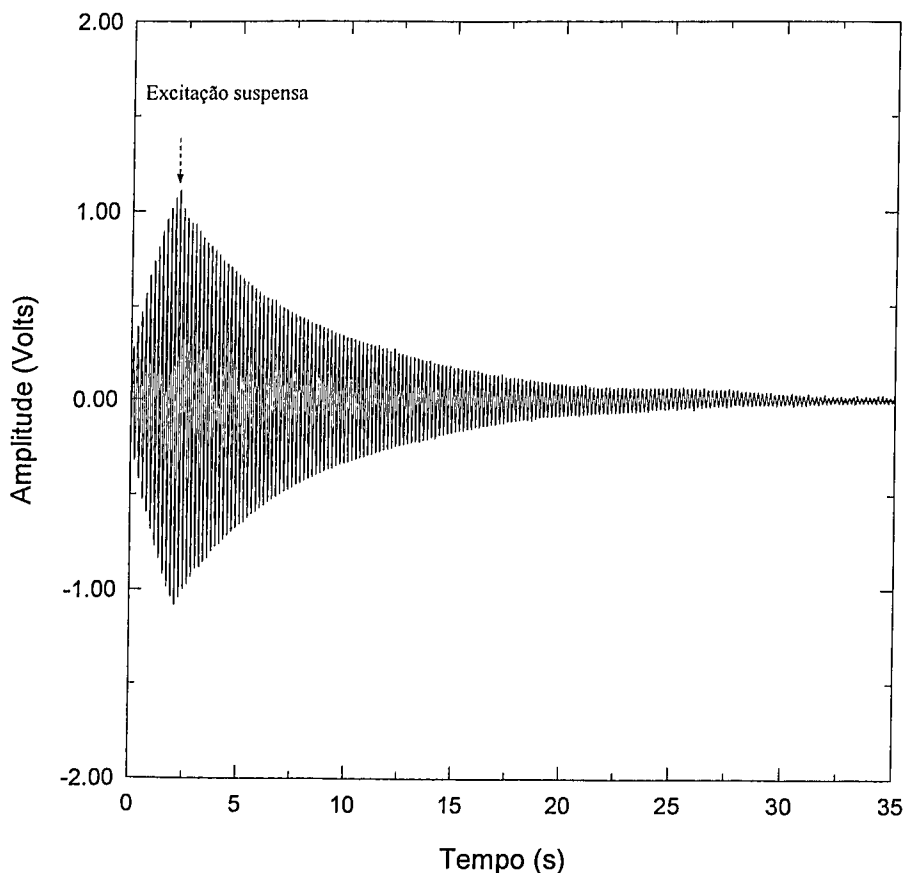


Figura 7.15- Resposta do sistema livre sujeito à excitação do atuador.

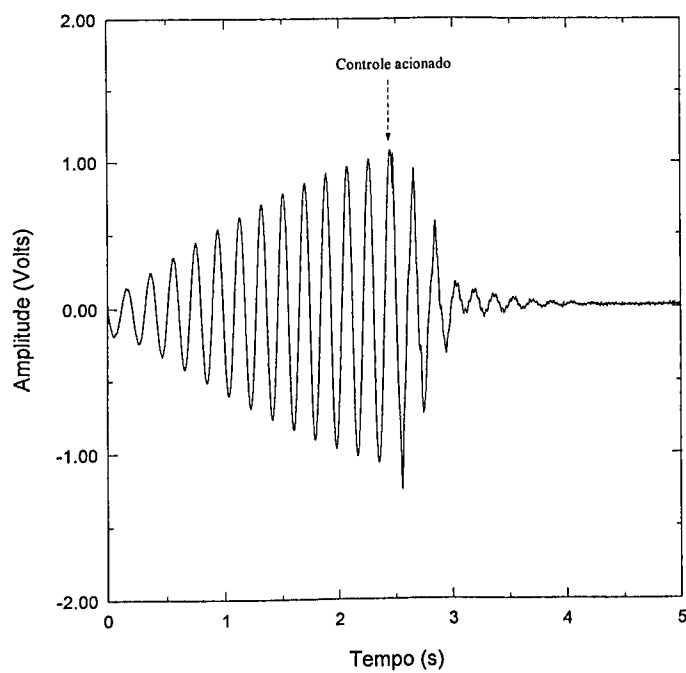


Figura 7.16- Resposta do sistema sujeito à excitação e controle do atuador.

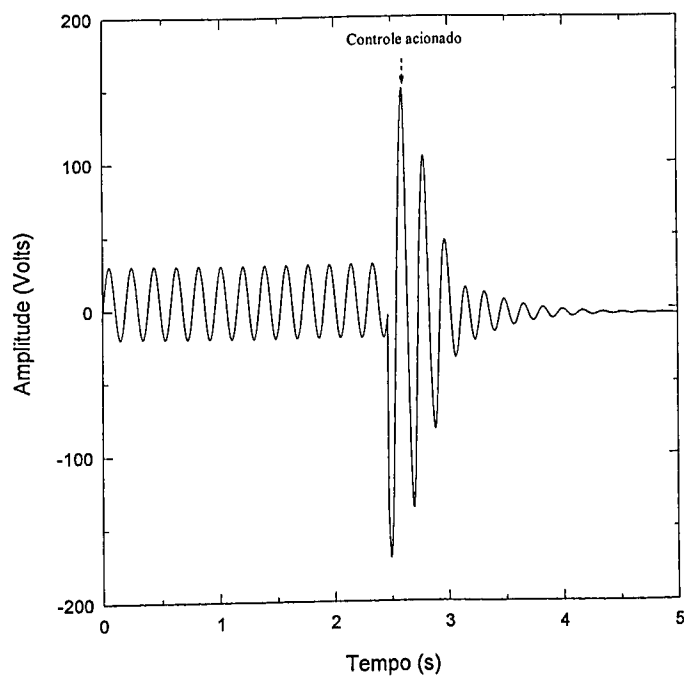


Figura 7.17- Tensão aplicada no atuador durante a excitação e controle.

Observa-se claramente na figura sem o controle (Fig. 7.15) um comportamento pouco amortecido do sistema que continua oscilando depois de transcorridos 35 segundos. Nas demais figuras apresentadas verifica-se o excelente desempenho do controlador implementado, reduzindo os níveis de vibrações estruturais num tempo bem menor (em torno de 1.5 s).

7.3.2 Análise no Domínio da Frequência

Nesta etapa, o desempenho do controlador é avaliado no domínio da frequência de acordo com o diagrama ilustrado na Fig. 7.18.

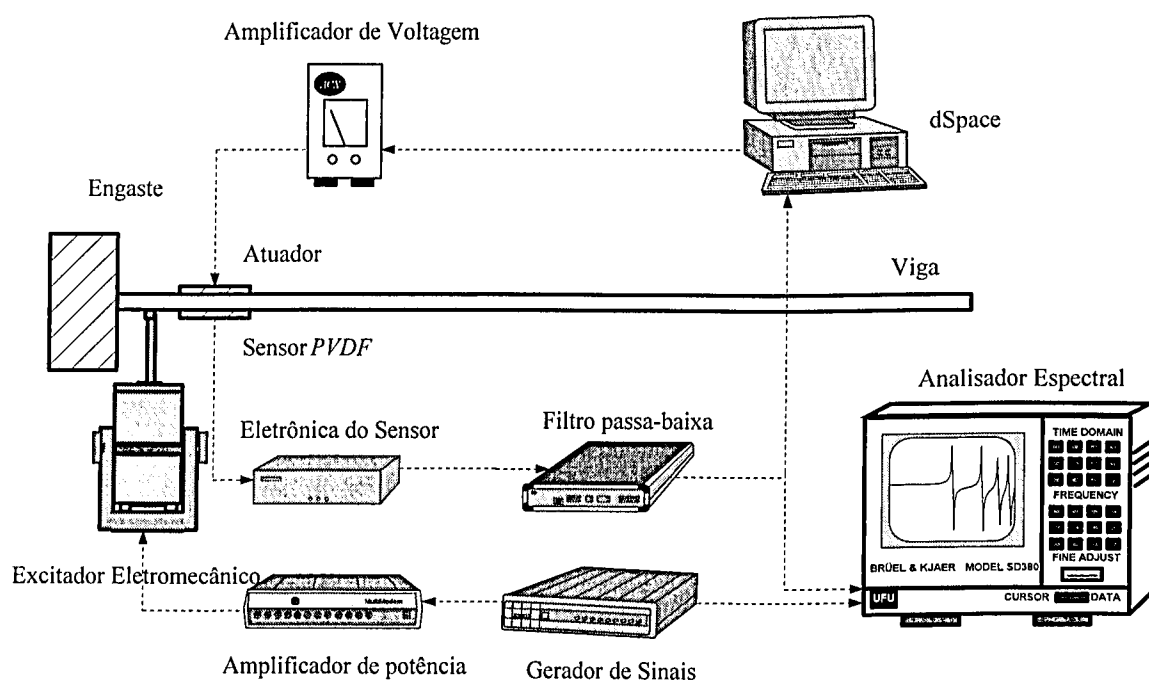


Figura 7.18- Diagrama esquemático do experimento de controle realizado para a análise no domínio da frequência.

Conforme ilustrado, a estrutura é perturbada, próxima ao seu ponto de engastamento (em 0.1 m), por um *excitador eletromecânico* que é acionado pelo amplificador de potência a partir de um gerador de sinais que produz um sinal de ruído de banda limitada (0-100 Hz). As vibrações decorrentes desta excitação são captadas pelo sensor piezelétrico cujo sinal é conduzido à placa *dSpace*[®] que calcula o sinal de controle. Assim, o analisador espectral, por sua vez, processa os dados de entrada e saída do sistema e fornece a resposta em frequência correspondente. A Figura 7.19 mostra as funções de transferência obtidas para o sistema livre e controlado.

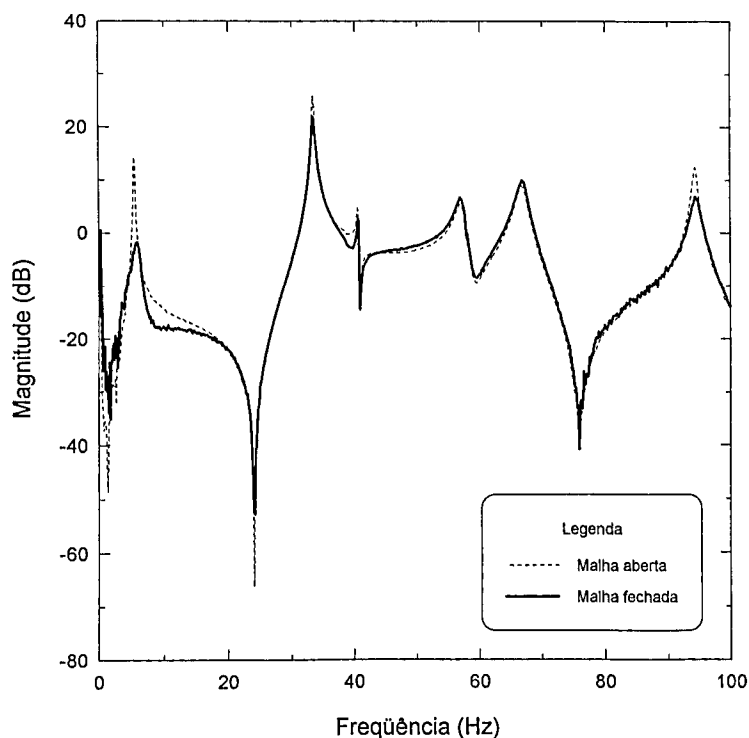


Figura 7.19- Funções de resposta em frequência para o sistema em malha aberta e fechada.

A partir dos resultados apresentados na Fig. 7.19, construiu-se a Tabela 7.2 que compara as amplitudes (em *dB*) correspondentes às *três primeiras frequências naturais* para o sistema livre e controlado.

Tabela 7.2- Comparação entre as amplitudes em [*dB*] para o sistema livre e controlado.

Modo	Frequência [<i>Hz</i>]	Amplitude [<i>dB</i>] Sistema Livre	Amplitude [<i>dB</i>] Sistema Controlado	Atenuação [<i>dB</i>]
1	5.375	14.35	-1.84	16.19
2	33.375	25.85	21.85	4.00
3	93.125	12.36	6.75	5.61

Pode-se constatar, através da Tab. 7.2, que houve uma boa redução dos níveis de vibração, especialmente na primeira frequência natural.

De uma maneira geral e à luz dos testes realizados e tendo em vista o propósito de limitar as vibrações na estrutura inteira, o controle revelou-se bastante eficiente, estável e robusto, permitindo ao sistema atingir características desejadas de amortecimento e estabilidade.

Capítulo 8

Conclusões e Propostas de Continuidade do Trabalho

Neste trabalho foi apresentada, de forma sistemática e organizada, uma metodologia completa para o problema de controle de vibrações em estruturas flexíveis contendo materiais piezelétricos incorporados. A interação entre a estrutura e o elemento piezelétrico foi modelada pela técnica de elementos finitos e pelo método dos modos assumidos. A partir dos modelos desenvolvidos, as equações de movimento do sistema foram validadas com os resultados fornecidos pelo programa de simulação *ANSYS*[®]. Os resultados obtidos comprovaram a eficiência das técnicas de modelagem elaboradas e propiciaram a compreensão da interação estrutura-material piezelétrico.

As estruturas flexíveis estudadas, por serem sistemas dinâmicos normalmente empregados em aplicações que envolvem requerimentos de projeto cada vez mais exigentes (em áreas como: aeroespacial e robótica, por exemplo), são plantas típicas dos controladores robustos. Tais controladores têm como objetivo garantir a estabilidade e a robustez do sistema em malha fechada e atender a um conjunto de requisitos de desempenho pré-estabelecidos que envolvem dentre outros aspectos: a capacidade de rejeição dos ruídos nos sensores, a robustez diante das variações paramétricas do sistema físico e de acompanhamento dos sinais de referência. Assim em função destas características, foi explorada a proposta de controladores robustos H_∞ para o problema em questão.

Além da síntese dos controladores, este trabalho ateve-se à questão da redução dos modelos, apresentando a técnica de redução pseudo-modal para a planta em malha aberta e também a técnica do balanceamento interno de sistemas dinâmicos (Moore, 1981) visando a redução de modelos. Fez-se uma análise da controlabilidade, da observabilidade e da localização dos sensores e atuadores na planta através do cálculo da função custo modal de Skelton e Yousuff (1983). Associado ao procedimento de truncamento modal, o efeito resultante foi analisado e convenientemente incorporado no modelo de projeto do controlador. Todos estes procedimentos apresentados foram avaliados em dois estudos de caso: viga e placa.

O trabalho evoluiu para a investigação numérica dos procedimentos teóricos discutidos. Nesta etapa, simulações numéricas foram efetuadas para avaliar a eficiência e a potencialidade do controlador robusto projetado. Experimentos foram elaborados para a confirmação dos resultados teóricos previstos. Nesta fase, a bancada de testes construída teve os

seus parâmetros principais experimentalmente identificados e uma série de ensaios foram realizados para verificar a aproximação entre os modelos experimentais e aqueles formulados analiticamente. Testes foram conduzidos com o objetivo de avaliar a ação do controlador robusto proposto tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. Os resultados obtidos permitiram a elaboração das seguintes conclusões:

- *Quanto a obtenção dos modelos*

A técnica de elementos finitos empregada mostrou-se atrativa na análise do problema em questão. É uma técnica consagrada em análise de vibrações e não apresentou dificuldades na sua implementação. Os modelos obtidos por esta técnica apresentaram resultados compatíveis com os modelos desenvolvidos em ambiente *ANSYS*[®]. Por não considerar os efeitos passivos (de massa e rigidez) decorrentes da presença do material cerâmico na estrutura, os resultados auferidos pelo método dos modos assumidos se desviaram dos outros restantes. Apesar disto, tal método mostrou-se como uma ferramenta matemática bastante interessante quanto à sua aplicação na metodologia de controle apresentada, pois tornou-se possível construir, de maneira simples e direta, um compensador que atenuasse as vibrações ao longo da estrutura.

- *Quanto à redução dos modelos*

A abordagem apresentada para a redução do modelo revelou-se adequada nos testes efetuados durante a construção dos modelos reduzidos, propriamente ditos. A partir do balanceamento interno de sistemas dinâmicos, proposto por (Moore, 1981), foi possível reduzir o modelo dos sistemas dinâmicos estudados preservando as propriedades do modelo completo. Um procedimento numérico de otimização foi elaborado no intuito de incluir os efeitos provocados pela dinâmica de alta frequência não modelada no modelo de projeto do controlador. Através de testes numéricos realizados pode-se constatar a eficiência do procedimento descrito e da técnica de redução de modelos em dois estudos de caso: viga e placa.

- *Quanto ao posicionamento dos sensores e atuadores*

A escolha do índice proposto por Skelton e Yousuff (1983), como instrumento de seleção das configurações mais adequadas para a localização de sensores e atuadores na planta, mostrou-se intuitivo e simples de ser aplicado. Os resultados obtidos revelaram-se em perfeita consonância com a análise dos modos de vibrar efetuada para as estruturas estudadas.

- *Quanto à construção do controlador Robusto*

Foi avaliado no trabalho o controlador robusto H_∞ proposto por Doyle e Stein (1981) cujo projeto sistemático não apresentou dificuldades maiores. Mostrou-se eficiente para o problema em questão e comprovou-se, através dos testes numéricos, características de desempenho e robustez bastante satisfatórias. Durante os testes efetuados, uma nova proposta para o projeto de controladores robustos foi apresentada. Com base nesta proposta, pode-se constatar, que tais controladores são capazes de atenuar os níveis de vibrações ao longo da estrutura. O fato da inclusão do filtro ter aumentado a ordem do sistema, não acarretou, para o problema estudado, dificuldades na implementação experimental. Nos ensaios realizados tal controlador demonstrou, no domínio do tempo e da frequência, excelentes propriedades de desempenho e estabilidade quando aplicado ao sistema dinâmico construído.

- *Quanto à utilização dos materiais piezelétricos*

Neste estudo, os elementos piezelétricos foram empregados como sensor e atuador e a espessura da camada do adesivo não foi considerada nos modelos desenvolvidos, isto é, tais elementos foram admitidos perfeitamente fixos na estrutura. De forma a aproximar o modelo experimental com aquele obtido analiticamente, o elemento piezelétrico, utilizado como atuador, teve seu módulo de elasticidade equivalente numericamente identificado através de dados experimentais. Para medir o potencial elétrico produzido pelo sensor, construiu-se um dispositivo eletrônico, constituído por um amplificador operacional e um capacitor conectado em paralelo. Assim, a eficiência, durante a operação dos elementos piezelétricos, foi constatada a partir dos sinais coletados/enviados na bancada de testes construída, não apresentando, no entanto, dificuldades na utilização dos mesmos.

Sob o ponto de vista prático, a metodologia de projeto apresentada revelou-se acertada e promissora para a solução do problema de controle de vibrações em estruturas flexíveis. Todos os objetivos, postos inicialmente, foram alcançados e dentre os principais resultados deste trabalho destacam-se: a descrição detalhada de algumas ferramentas matemáticas de construção de modelos para estruturas flexíveis com materiais piezelétricos operando como sensores e atuadores e a apresentação de um novo enfoque para a descrição do problema de controle de vibrações, usando compensadores robustos H_∞ , via minimização de uma norma espacial.

Assim, a despeito do sucesso e da eficiência de toda a formulação apresentada, alguns desafios são postos para o futuro, quais sejam:

- i. incorporação do efeito da camada do adesivo nos modelos matemáticos;
- ii. inclusão do módulo de elasticidade equivalente do atuador como incerteza no projeto do controlador;
- iii. escolha dos filtros de projeto através de procedimentos de otimização (por ex.: Algoritmos Genéticos);
- iv. implementação experimental de controladores robustos em *Processadores Digitais de Sinais (DSP's)* e
- v. avaliação experimental do comportamento dinâmico de estruturas flexíveis do tipo placa e a aplicação de controladores robustos para o controle de vibrações estruturais;

Referências Bibliográficas

Abreu, G. L. C. M., 1998, "Controle Ativo de Vibrações Laterais em Rotores Flexíveis Usando Atuadores Magnéticos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 97p.

Abreu, G. L. C. M. e Ribeiro, J. F., 2001. "Active Control of Vibrations in Flexible Structures using Piezoelectric Actuators and Fuzzy Logic Controller", *IX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - IX DINAME*, Florianópolis, Santa Catarina, 5-9 de março, pp. 373-378.

Abreu, G. L. C. M. e Ribeiro, J. F., 2001. "Investigação Experimental da Atenuação de Vibrações em Estruturas Inteligentes Usando Controladores Nebulosos Adaptativos", *V Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - V SBAI*, Canela, Rio Grande do Sul.

Abreu, G. L. C. M. e Ribeiro, J. F., 2002. "A Self-Organizing Fuzzy Logic Controller for the Active Control of Flexible Structures Using Piezoelectric Actuators", *Applied Soft Computing*, Vol. 1, pp. 271-283.

Abreu, G. L. C. M., Ribeiro, J. F. e Steffen Jr., V., 2003. "Experiments on Optimal Vibration Control of a Flexible Beam Containing Piezoelectric Sensors and Actuators", *Aceito para publicação na Revista Shock and Vibration*.

ACX, 2003. *Active Control eXperts*, Inc. All rights reserved, <http://www.acx.com>.

Adeli, H. e Hung, S. L., 1995. "Machine Learning - Neural Networks, Genetic Algorithms and Fuzzy Systems", John Wiley & Sons, New York.

Akishita, S., Aoyama, S. e Yokoi, K., 1995. "Simultaneous Use of Piezoelectric Ceramics as Sensor and Actuator for Through-Plate Sound Transmission Control", *Design Engineering Technical Conferences*, Vol. 3, Part C, pp. 649-656.

Alazard, D., 2002. "Robust H_2 Design for Lateral Flight Control Laws of a Highly Flexible Aircraft", *J. Guid. Control Dyn. (AIAA)*, Vol. 25, N° 3, pp. 502-509.

- Allik, H. e Hughes, T.J.R., 1970. "Finite Method for Piezoelectric Vibration", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, pp. 151-157.
- Balas, G. J. e Doyle, J. C., 1994. "Robustness and Performance Trade-Offs in Control Design for Flexible Structures", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 2, N° 4, pp. 352-361.
- Balas, G. J., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A. E. e Smith, R., 1994. " μ -Analysis and Synthesis Toolbox", The Matworks, Inc., Natick, MA.
- Balas, G. J., 2001. " μ -Analysis and Synthesis Toolbox for Use with *Matlab*[®]", MathWorks, Natick, Massachusetts.
- Banks, H.T., Smith, R.C. e Wang, Y., 1996. "Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control", Wiley Masson Research in Applied Mathematics Series.
- Bates, D. G., Ringwood, J. V. e Holohan, A. M., 1997. "Robust Shape Control in a Sendzimir Cold-Rolling Steel Mill", Journal of Control Engineering and Practice, Vol. 5, N° 12, pp. 1647-1652.
- Bathe, K. J, 1982. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall.
- Cady, W. G., 1946. "Piezoelectricity - An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals", McGraw-Hill, p806.
- Cerna, E. V., Silveira, M. e Sampaio, R., 2002. "Deterioração do Desempenho Frente à Robustez: O Caso do Controle Dinâmico de Vibrações de uma Viga", XIV Congresso Brasileiro de Automática - XIV CBA, Natal, RN.
- Chapra, S. C. e Canale, R. P., 1991. "Numerical Methods for Engineers", McGraw-Hill, Segunda Edição, Publishing Company.
- Chaudhry, Z., Joseph, T., Sun, F. e Rogers, C., 1995. "Local-Area Health Monitoring of Aircraft via Piezoelectric Actuator/Sensor Patches", Proc. North Am. Conf. on Smart Struc. and Mat., Paper N° 2443-29.
- Chen, C., Wang, X. e Shen, Y., 1996. "Finite Element Approach of Vibration Control Using Self-Sensing Piezoelectric Actuators", Computers & Structures, Vol. 60, N° 3, pp. 505-512.

- Clark, R. L., 1997. "Accounting for Out-of-Bandwidth Modes in the Assumed Modes Approach: Implications on Colocated Output Feedback Control", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 119, pp. 390-395.
- Constantinides, A., 1987. "Applied Numerical Methods with Personal Computers", McGraw-Hill, Nova York.
- Costa e Silva, V. M., 1998. "Posicionamento Ótimo de Sensores e Atuadores Piezelétricos", Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP.
- Cunha Jr., S. S., 1999. "Estudo Numérico e Teórico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, p99.
- Crawley, E. F. e De Luis, J., 1987. "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures", *AIAA Journal*, Vol. 25, Nº 10, pp. 1373-1385.
- Cruz, J. J., 1996. "Controle Robusto Multivariável", *Edusp*, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, p163.
- Detwiler, D. T., Shen, M. H. H. e Venkayya, V. B., 1995. "Finite Element Analysis of Laminated Composite Structures Containing Distributed Piezoelectric Actuators and Sensors", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 20, pp. 87-100.
- Dimarogonas, A. D., 1996. "Vibration for Engineers", Prentice-Hall, New Jersey, Upper Saddle River, p825.
- Dimitriadis, E. K., Fuller, C. R. e Rogers, C. A., 1991. "Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates", *Transactions of the ASME*, Vol. 113, pp. 100-107.
- Doyle, J. C. e Stein, G., 1981. "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Nº 26, Vol. 1, pp. 4-16.
- Doyle, J. C., 1982. "Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties", *IEE Proc.*, Vol. 133, pp. 45-56.
- Doyle, J. C., 1984. "Lecture Notes in Advances in Multivariable Control In: ONR/Honeyweel Workshop, Minneapolis, MN.

- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., Francis, B. A., 1989. "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problem", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, N° 8, pp. 831-847.
- Elliott, S. J. e Nelson, P. A., 1993. "Active Noise Control", IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 10, N° 4, pp.12-35.
- Fuller, C. R., Elliott, S. J. e Nelson, P. A., 1996. "Active Control of Vibration", Academic Press, San Diego, Califórnia, p332.
- Glover, K., 1984. "All Optimal Hankel-norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their L^∞ Error Bounds", International Journal of Control, Vol. 39, N° 6, pp. 1115-1193.
- Glover, K. e Doyle, J. C., 1988. "State-Space Formulae For All Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity", Systems & Control Letters, pp. 167-172.
- Gopinathan, M. e Pajunen, G. A., 1995. "Model Reference Control of Vibrations in Flexible Smart Structures", Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, LA, pp. 3551-3556.
- Halliday, D. e Resnick, R., 1984. "Física 4", Livros Técnicos e Científicos, Editora Ltda, 4ª edição, p353.
- Halim, D. e Moheimani, S. O., 2002. "Experimental Implementation of Spatial H_∞ Control on a Piezoelectric-Laminate Beam", IEEE Transactions on Mechatronics, Vol. 7, N° 3, pp. 346-356.
- Hansen, S., 1998. "Analysis of a Plate with a Localized Piezoelectric Patch", Conference on Decisison & Control, Tampa, Flórida, pp. 2952-2957.
- Hernández, J. M. C. e Hayward, V., 1998. "An Approach to Reduction of Hysteresis in Smart Materials", International Conference on Robotics & Automation, Leuven, Bélgica, pp. 1510-1515.
- Hwang, W. S. e Park, H. C., 1993. "Vibration Control of a Laminated Plate with Piezoelectric Sensor/Actuator: Finite Element Formulation and Modal Analysis", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 4, pp. 317-329.

Janocha, H. e Kuhnen, K., 2000. "Real-time Compensation of Hysteresis and Creep in Piezoelectric Actuators", *Sensors and Actuators*, Vol. 79, pp. 83-89.

Junkins, J. L. e Kim, Y., 1993. "Introduction to Dynamic and Control of Flexible Structures", AIAA Education Series, AIAA Inc., Washington.

Kirby, G. C. e Matic, P., 1994. "Optimal Actuator Size and Location Using Genetic Algorithms for Multivariable Control", *ASME Adaptive Structures and Composite Materials: Analysis and Application*, Vol. 45, pp. 325-335.

Kron, A., Lafontaine, J. e Alazard, D., 2003. "Robust 2-DOF H-Infinity Controller for Highly Flexible Aircraft: Design Methodology and Numerical Results", *Canadian Aeronautics and Space Journal*, Vol. 49, N° 1, pp. 19-29.

Kwakernaak, H. e Sivan, R., 1991. "Modern Signals and Systems", Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Laub, A. J., Heath, M. T., Paige, C. C. e Ward, R. C., 1987. "Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, N° 2, pp. 115-122.

Lente, M. H., Póvoa, J. M. e Eiras, J. A., 2000. "O Processo de Polarização em Cerâmicas de PZT", *Cerâmica*, Associação Brasileira de Cerâmica, Vol. 46, pp. 61-66.

Lewis, F. L. e Syrmos, V. L., 1995. "Optimal Control", John Wiley & Sons Inc., p541.

Lima Jr., J. J., 1999. "Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas", Tese de Doutorado, INICAMP - Campinas, SP, p209.

Lima, F. A. O., 2002. "Controle Robusto Aplicado a um Sistema de Bobinamento de Tiras de Aço", 14th Congresso Brasileiro de Automática XIV CBA, Natal, RN, pp. 2865-2871.

Lin, C. e Huang, H., 1999. "Vibration Control of Beam-Plates with Bonded Piezoelectric Sensors and Actuators", *Computers and Structures*, Vol. 73, pp. 239-248.

Lind, R., Balas, G. J. e Packard, A., 1994. "Evaluating D - K Iteration for Control Design", *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, pp. 2792-2797.

Loix, N. e Preumont, A., 1995. "Remarks on the Modeling of Active Structures with Colocated Piezoelectric Actuators and Sensors", Design Engineering Technical Conferences, Vol. 3, pp. 335-339.

Love, A. E. H., 1944. "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications, p643.

Marques, R. F. A., 2000. "Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, MG, Brasil, p106.

Meirovitch, L., 1997. "Principles and Techniques of Vibrations", Prentice-Hall, New Jersey.

Moheimani, S. O. R., 1999. "Minimizing the Effect of Out of Bandwidth Modes in the Truncated Assumed Modes Models of Structures", Proceedings of the American Control Conference, San Diego, CA, pp. 2718-2722.

Moheimani, S. O. R., 2000. "Experimental Verification of the Corrected Transfer Function of a Piezoelectric Laminate Beam", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 8, N° 4, pp. 660-666.

Moheimani, S. O. R., 2000. "Minimizing the Effect of Out-of-Bandwidth Dynamics in the Models of Reverberant Systems that Arise in Modal Analysis: Implications on Spatial H_∞ Control", Automatica, Vol. 36, pp. 1023-1031.

Moheimani, S. O. R. e Clark, R. L., 2000. "Minimizing the Truncation Error in Assumed Modes Models of Structures", Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois, pp. 2398-2402.

Moheimani, S. O. R. e Heath, W. P., 2002. "Model Correction for a Class of Spatio-Temporal Systems", Automatica, Vol. 38, pp. 147-155.

Moore, B. C., 1981. "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability and Observability and Model Reduction", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, N° 1, pp. 17-32.

Moreira, F. J. O., 1998. "Um Controlador H_∞ de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibração Estrutural", Tese de Doutorado, UNICAMP - Campinas, SP, p247.

Moreira, M. V. B., 2002. "Controladores Robustos H_∞ Não Frágeis", Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, p112.

MS, 2003. Measurement Specialties, Inc. All rights reserved, <http://www.msiousa.com>.

Noble, B. & Daniel, J. W., 1986. "Álgebra Linear Aplicada", Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ.

Ogata, K., 1998. "Engenharia de Controle Moderno", Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, Brasil, 813p.

Pereira, C. B., 2003. "Técnicas de Otimização Discreto-Contínuas Aplicadas ao Controle de Vibração de Estruturas Inteligentes", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

PS, 2003. Piezo System, Inc. All rights reserved, <http://www.piezo.com>.

Postlethwaite, I., Edmunds, J. M. e MacFarlane, A. G. J., 1981. "Principal Gains and Principal Phases in the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, N° 1, pp. 32-46.

Pota, H. R. e Alberts, T. E., 1995. "Multivariable Transfer Functions for a Slewing Piezoelectric Laminate Beam", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 117, pp. 353-359.

Ray, M. C., Bhattacharya, R. e Samanta, B., 1998. "Exact Solutions for Dynamic Analysis of Composite Plates with Distributed Piezoelectric Layers", Computers & Structures, Vol. 66, N° 6, pp. 737-743.

Reddy, J. N., 1999. "On Laminated Composite Plates with Integrated Sensors and Actuators", Engineering Structures, Vol. 21, pp. 568-593.

Ribeiro, J. F., 1995. "Controle Robusto aplicado ao Problema de Vibrações em Rotores Flexíveis", Tese de Doutorado, INPE - São José dos Campos, SP, p181.

- Rogers, C.A., Liang, C. e Zhou, S., 1995. "Integration and Design of Piezoceramic Elements in Intelligent Structures", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 6, pp. 733-743.
- Santana, D. C., 2002. "Controle Ativo de Ruído Empregando Placas Retangulares com Atuadores Piezelétricos", *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.*
- Skelton, R. E. e Yousuff, A., 1983. "Component Cost Analysis of Large Scale System", *International Journal of Control*, Vol. 37, N° 2, pp. 285-304.
- Skelton, R. E. e DeLorenzo, M., 1984. "Space Structure Control Design by Variance Assignment", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc.*, pp. 454-462.
- Skelton, R. E., Singh, R. e Ramakrishnan, J., 1988. "Component Model Reduction by Component Cost Analysis", *AIAA Guidance Navigation and Control Conference*, Paper 88-4086, Mineapolis, MN.
- Spiegel, M. R., 1975. "Análise Vetorial com Introdução a Análise Tensorial", 5ª edição, McGraw-Hill, p300.
- Srinivasan, A. V. e McFarland, D. M., 2001. "Smart Structures-Analysis and Design", *Cambridge University Press*, p228.
- Steffen Jr, V. e Rade, D. A., 1999. "Optimization of Dynamic Vibration Absorbers over a Frequency Band", 17th International Modal Analysis Conference - *XVII IMAC*, Kissimmee, Flórida, 8-11 de Fevereiro, pp. 188-193.
- Steffen Jr, V. e Inman, D. J., 2000. "On the Optimization of Piezoelectric Actuators for Thin Plates Excitation", *ICONNE* 2000.
- Stephens, L. S., Rouch, K. E. and Tewani, S. G., 1991. "Theory for an Active Dynamic Vibration Absorber", *Structural Vibration and Acoustics*, Vol. 34, pp. 89-94.
- Sun, J. Q., Jolly, M. R. e Norris, M. A., 1995. "Passive, Adaptive and Active Tuned Vibration Absorber - A Survey", *Transactions of the ASME*, vol. 117, pp. 234-242.
- Taylor, G.W., Gagnepain, J.J., Meeker, T.R., Nakamura, T. e Shuvalov, L. A., 1985. "Piezoelectricity - Ferroelectricity and Related Phenomena", *Gordon and Breach Science Publishers*, Vol. 4, p406.

Thomson, W. T., 1973. "Theory of Vibration with Applications", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, p462.

Tiersten, H. F., 1969. "Linear Piezoelectric Plate Vibrations", Plenum New York.

Timoshenko, S. P. e Goodier, J. N., 1970. "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 3ª Edição, p591.

Tsoukalas, L. H. e Uhrig, R. E., 1997. "Fuzzy and Neural Approaches in Engineering", John Wiley & Sons, Inc., p587.

Tzou, H. S., 1989. "Integrated Distributed Sensing and Active Vibration Suppression of Flexible Manipulators Using Distributed Piezoelectrics", Journal of Robotic Systems, Vol. 6, pp. 745-767.

Tzou, H. S. e Tseng, C. I., 1991. "Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Systems: Finite Element Formulation and Applications", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 5, Nº 3, pp. 215-231.

Valer, C. E. I., 1999. "Uma Introdução ao Controle Robusto com Aplicações a Estruturas Flexíveis", Dissertação de Mestrado, PUC/RJ, Rio de Janeiro, RJ, p160.

Wang, B-T e Rogers, C. A., 1989. "Laminate Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuator", Journal of Composite Materials, Vol. 25, pp 433-452.

Wang, Z., Chen, Su-Huan e Han, W., 1997. "The Static Shape Control for Intelligent Structures", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 26, pp. 303-314.

Xie, L., 1996. "Output Feedback H_∞ Control Systems with Parametric Uncertainty", International Journal of Control, Vol. 63, Nº 4, pp. 741-750.

Yousuff, A. e Skelton, R. E., 1984. "Controller Reduction by Component Cost Analysis", IEEE Transactions of Automatic Control, Vol. 29, Nº 6, pp. 520-530.

Zames, G., 1981. "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, pp. 301-320.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., 1989. "The Finite Element Method", Basic Formulation and Linear Problems, McGraw-Hill International Editions, 4th edição, Vol. 1.

ANEXO I

Princípio Fundamental da Piezeletricidade

O presente anexo aborda os princípios básicos do comportamento dos materiais que exibem propriedades piezelétricas quando sujeitos a aplicação de campos elétricos e tensões mecânicas. É apresentada a equação da piezoeletricidade linear que é usada no desenvolvimento dos modelos matemáticos utilizados na técnica de elementos finitos.

I.1 O Fenômeno da Piezeletricidade

A piezoeletricidade, descoberta a mais de um século por Pierre e Jacques Curie, é uma propriedade presente em certos tipos de materiais (ex.: cristais de quartzo naturais, polímeros semi cristalinos, piezocerâmico policristalino e outros) e que apresenta dois efeitos bem característicos: o primeiro, denominado efeito piezelétrico direto, caracteriza-se pela produção de carga elétrica na superfície do material quando sujeito a uma deformação mecânica e o segundo efeito - efeito piezelétrico inverso - consiste na deformação física do material quando sujeito a um campo elétrico. Tais efeitos - direto e inverso - resultam em um acoplamento eletromecânico que propicia aos materiais piezelétricos grande aplicabilidade em diversas áreas da ciência (Taylor et al, 1985) e principalmente na área de controle de estruturas flexíveis (Lima Jr., 1999).

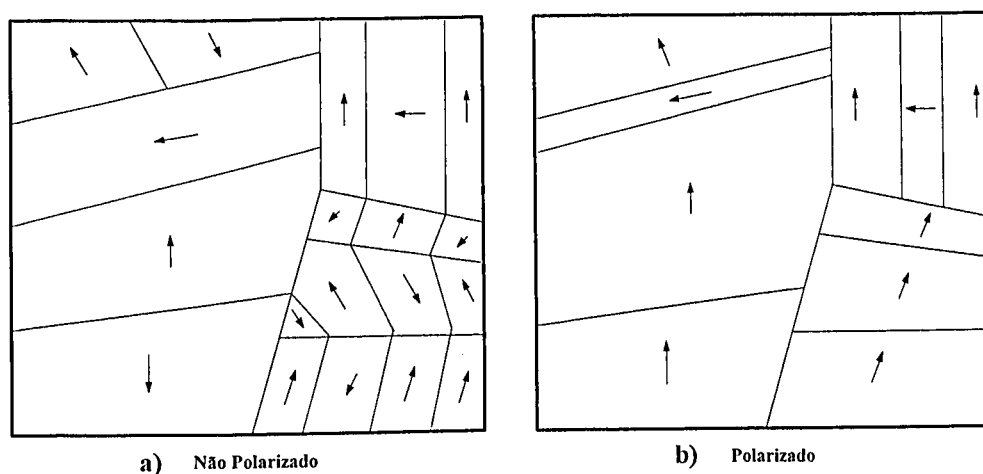


Figura I.1- Polarização induzida por um forte campo elétrico aplicado em um material piezocerâmico policristalino.

O fenômeno da piezoelectricidade ocorre devido a uma separação espontânea de carga elétrica dentro de algumas estruturas cristalinas do material. Esta separação conhecida como polarização espontânea é causada pelo deslocamento dos íons positivos e negativos dentro das células cristalinas. O efeito resultante é denominado de *dipolo elétrico*.

Os materiais piezelétricos são formados por pequenos cristais orientados aleatoriamente. Cada cristal é dividido por *domínios* ou regiões que apresentam arranjos de dipolo elétrico bem parecidos, conforme mostra a Fig. 1.1a. O efeito global destes domínios polares orientados de forma aleatória caracteriza-se por uma deficiência do fenômeno da piezoelectricidade (material não polarizado). Todavia, estes materiais podem exibir uma polarização macroscópica (material polarizado) ao aplicar um forte campo elétrico numa certa direção (direção de polarização) do material, induzindo momentos de dipolos, como ilustra a Fig. 1.1b. Detalhes sobre o processo de polarização em cerâmicas piezelétricas podem ser encontrados em Lente et al (2000).

Durante a polarização elétrica, o material piezelétrico torna-se permanentemente *esticado* na direção do campo de polarização (eixo polar P) e comprimido na direção transversal. Quando uma voltagem V é aplicada na mesma direção de polarização, haverá um acréscimo no esticamento ao longo do eixo polar e uma contração transversal no material, conforme mostra a Fig. 1.2b. O efeito inverso é verificado quando uma voltagem aplicada é oposta à direção de polarização (veja Fig. 1.2c). O material retorna a sua posição inicial (não deformado) quando a voltagem é removida (Fig. 1.2a).

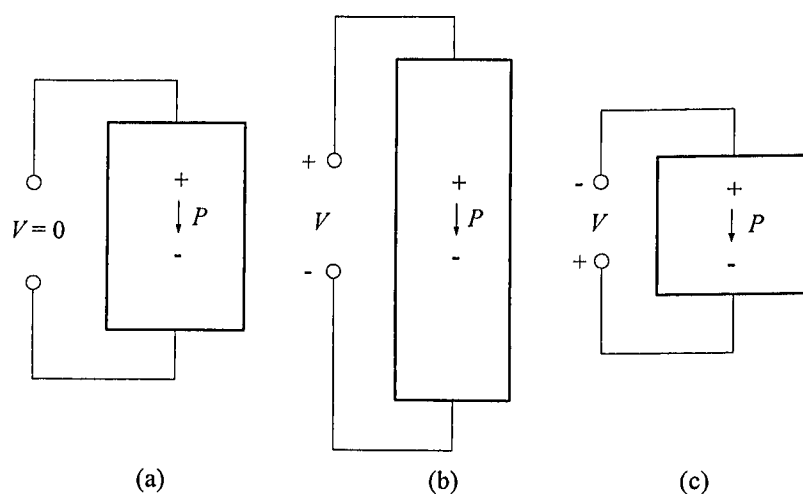


Figura 1.2- Deformação de um material piezoelétrico sujeito a um campo elétrico.

Quando uma tensão mecânica é aplicada ao longo do eixo polar P , um campo elétrico é desenvolvido dentro do material e se opõe, neste caso, à força que age sobre o mesmo. Tensões

compressivas geram campos elétricos com a mesma orientação do campo de polarização original, induzindo o material a se alongar na direção oposta à direção das forças aplicadas, conforme mostra a Fig. 1.3c. O material retorna a sua posição inicial (não deformado) quando a tensão é removida (Fig. 1.3a). Por outro lado, tensões de tração geram campos elétricos com uma orientação oposta ao campo de polarização original (veja Fig. 1.3b).

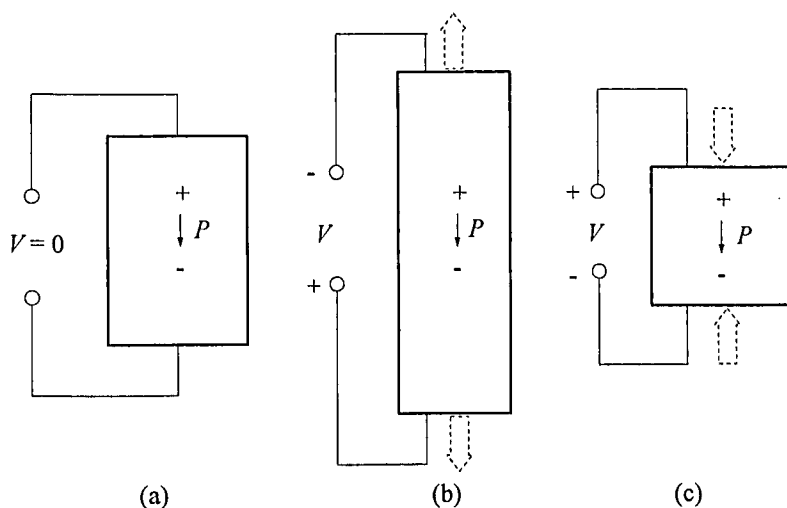


Figura 1.3- Campo elétrico gerado pelo material piezoelétrico quando sujeito a uma tensão mecânica.

Para elevados níveis de tensões aplicadas e longos períodos de operação, os elementos piezoelétricos podem exibir efeitos não lineares tais como: histerese e fadiga. Tais fenômenos são de difícil modelagem, embora existam trabalhos que buscam compensar este problema utilizando-os em aplicações de controle (Janocha e Kuhnen, 2000). Uma metodologia para a redução do efeito de histerese em materiais com características piezoelétricas é discutida por Hernández e Hayward (1998).

1.2 Relações Constitutivas da Piezoeletricidade Linear

Em sistemas estruturais onde, em geral, o nível das tensões mecânicas envolvidas não contribui para o aparecimento de efeitos não lineares, as relações constitutivas eletro-elásticas para os materiais piezoelétricos apresentam um comportamento linear (Cady, 1946). Este efeito linear pode ser expresso pelas equações piezoelétricas direta e inversa descritas pelas relações listadas abaixo, respectivamente.

$$\{T\} = [c^E] \{\epsilon\} - [e] \{E\} \quad (1.1)$$

$$\{D\} = [e]^T \{\varepsilon\} + [\xi^T] \{E\} \quad (1.2)$$

onde:

$\{T\}$ é o tensor tensão mecânica $[N/m^2]$

$\{D\}$ é o vetor de deslocamento elétrico $[C/m^2]$

$\{\varepsilon\}$ é o vetor deformação $[m/m]$

$\{E\}$ é o vetor campo elétrico $[N/C]$

$[c^E]$ é a matriz de elasticidade para campo elétrico constante $[N/m^2]$

$[e]$ é a matriz de permissividade elétrica constante ou matriz de constantes de tensões piezelétricas $[N/Vm \text{ ou } C/m^2]$ e

$[\xi^T]$ é a matriz de permissividade dielétrica para tensão mecânica constante $[N/V^2 \text{ ou } F/m]$.

Os operadores superescritos $(.)^T$ e $(.)^E$ significam que o valor entre parênteses é medido para tensão mecânica T constante e para campo elétrico E constante, respectivamente e as letras entre colchêtes indicam as unidades das variáveis no sistema de unidades SI com N , m , V e C representando Newton, metro, Volts e Coulomb, respectivamente.

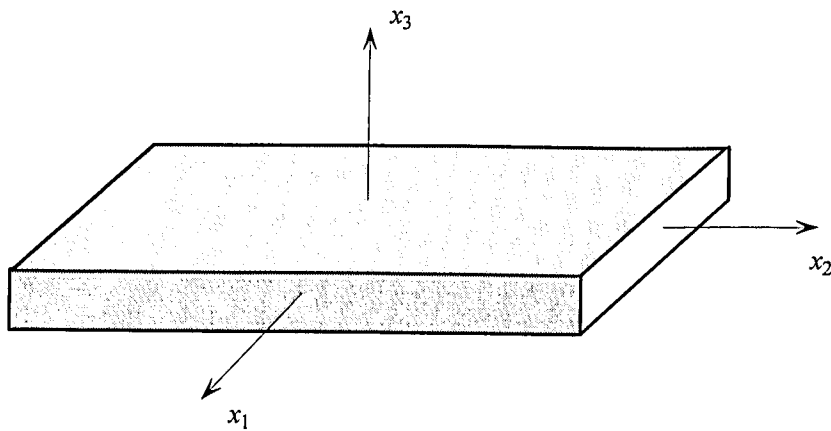


Figura 1.4- Sistemas de coordenadas para um elemento piezelétrico.

As equações (1.1) e (1.2) podem ser reescritas na forma tensorial (Tiersten, 1969), na forma:

$$T_{ij} = c_{ij}^E \varepsilon_i - e_{ji} E_j \quad (1.3)$$

$$D_i = e_{ij}\varepsilon_j + \xi_{ij}^T E_j \quad (1.4)$$

Para o sistema de coordenadas ilustrado na Fig. 1.4, seja um elemento da matriz de constante de tensões piezelétricas $[e]$ representada por e_{31} , onde o índice 3 corresponde a 3ª linha da matriz e 1 a 1ª coluna. Dessa maneira, o elemento e_{31} corresponde a tensão gerada na direção x_1 devido um campo elétrico aplicado na direção x_3 .

Normalmente a direção x_3 é associada à direção de polarização sendo o material isotrópico nas outras duas direções, como ilustra a Fig. 1.5.

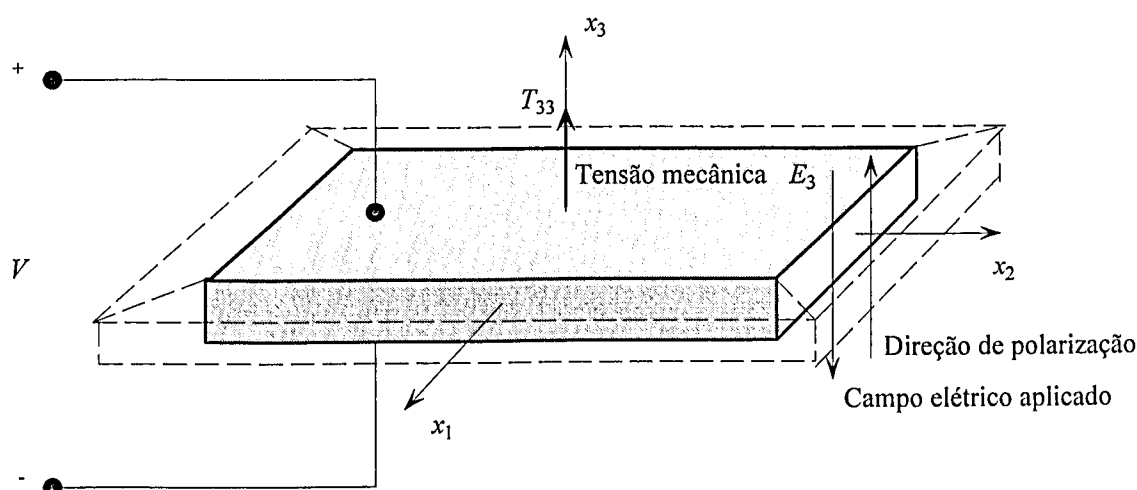


Figura 1.5- Deformação de um material piezelétrico submetido a uma tensão mecânica e um campo elétrico aplicado na direção de polarização.

Desta forma, a matriz que relaciona o deslocamento elétrico e o campo elétrico (matriz de constantes dielétricas) é dada pela relação (1.5).

$$[\xi^T] = \begin{bmatrix} \xi_1^T & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1^T & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^T \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Admitindo simetria do material piezelétrico nas direções x_1 e x_2 (Fig. 1.5), ou seja, propriedades mecânicas idênticas nestas direções, a matriz de elasticidade $[c^E]$ avaliada para campo elétrico constante é dada pela igualdade (1.6).

$$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Multiplicando $[c^E]^{-1}$ na Eq. (1.1) é possível expressar o vetor de deformação mecânica $\{\varepsilon\}$ por:

$$\{\varepsilon\} = [c^E]^{-1} \{T\} + [d]\{E\} \quad (1.7)$$

onde a matriz de constantes de tensões piezelétricas $[e]$ é obtida a partir da relação escrita na forma:

$$[e] = [c^E] [d] \quad (1.8)$$

sendo $[d]$ dada pela igualdade:

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & d_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (1.9)$$

onde o elemento d_{ij} $[m/V]$ da matriz de constantes de deformação piezelétrica relaciona a voltagem aplicada na i -ésima direção com uma deformação gerada na j -ésima direção.

ANEXO II

Princípio Variacional Eletromecânico

Neste anexo é apresentada a equação variacional que considera o acoplamento dos efeitos mecânicos e elétricos em materiais piezelétricos obtida a partir do Princípio Variacional de Hamilton aplicado para um sistema eletromecânico.

II.1 Equação Variacional Eletromecânica

Seja um sólido deformável constituído por um material piezelétrico contendo cargas elétricas q e sujeito a forças mecânicas f . O campo de deslocamentos assumido dentro do corpo elástico e o campo de potenciais elétricos serão combinados para formar um conjunto de equações de movimento eletromecânicas acopladas.

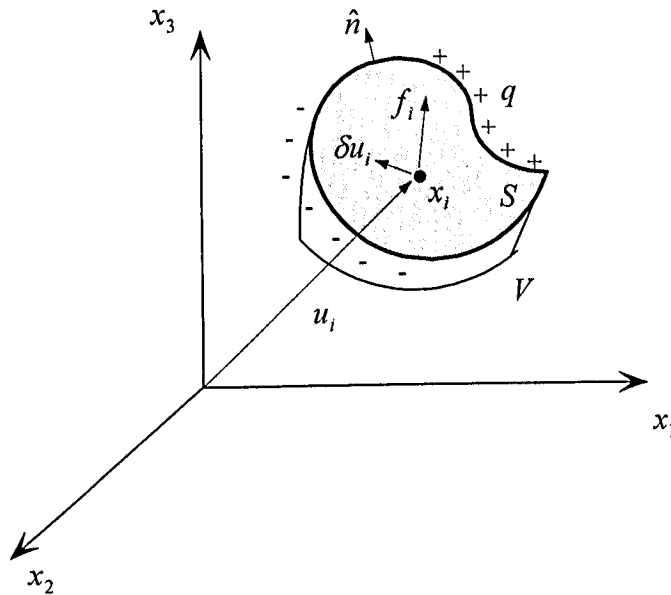


Figura II.1- Corpo sólido contendo cargas elétricas e sujeito a forças mecânicas.

O Princípio Variacional de Hamilton estendido para um sistema eletromecânico é dado por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U + W_e + W_m + W] dt = 0 \quad (II.1)$$

onde:

t_1 e t_2 são dois instantes arbitrários,

T é a energia cinética,

U é a energia potencial,

W_e é o trabalho realizado pelas forças elétricas,

W_m é o trabalho desenvolvido pelas forças magnéticas

W é o trabalho realizado pelas forças externas.

Usando notação tensorial, as equações de movimento quando o sólido é submetido à ação de forças de corpo e carregamento dinâmico são descritas pela Eq. (II.2).

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_{vi} = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.2})$$

onde T_{ij} , f_{vi} , ρ , \ddot{u}_i são tensões, forças de corpo, densidade e acelerações, respectivamente.

Multiplicando a Eq. (II.2) pelo deslocamento virtual δu_i e integrando a equação resultante sobre o volume V tem-se:

$$\int_V (T_{ij,j} + f_{vi}) \delta u_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \quad (\text{II.3})$$

Admitindo equilíbrio de forças nas fronteiras da superfície do sólido, o trabalho realizado pelas forças aplicadas na superfície é dado por:

$$\delta W_{f_s} = \int_S f_{si} \delta u_i dS \quad (\text{II.4})$$

Para problemas de piezeletricidade (meios dielétricos), o efeito elétrico de um campo magnético variável no tempo é desprezível ($W_m = 0$). Deste modo, partindo da eletrostática, temos que o divergente ($\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$) da densidade de fluxo elétrico e o rotacional do campo elétrico são nulos (Halliday e Resnick, 1984):

$$\text{div } D = \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{II.5a})$$

$$\text{rot } E = \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{II.5b})$$

onde o campo elétrico \vec{E} é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi \quad (\text{II.6})$$

e Φ é o potencial elétrico aplicado (ou gerado) na superfície do material.

Aplicando o operador variacional (δ) na energia potencial dielétrica, armazenada pelo material, tem-se a seguinte relação:

$$\delta U_d = \int_V \delta \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (\text{II.7})$$

Substituindo a igualdade (II.6) na Eq. (II.7), tem-se:

$$\delta U_d = - \int_V \delta \nabla \Phi \cdot \vec{D} dV \quad (\text{II.8})$$

Aplicando o Teorema da Divergência estendido (Spiegel, 1975) na Eq. (II.8) resulta em:

$$- \int_V \delta \nabla \Phi \cdot \vec{D} dV = - \int_S \delta \Phi \vec{D} \cdot \hat{n} dS - \int_V \delta \Phi \nabla \cdot \vec{D} dV \quad (\text{II.9})$$

onde \hat{n} é um vetor normal à superfície S .

Substituindo a Eq. (II.5a) em (II.9), tem-se:

$$\int_V \delta \nabla \Phi \cdot \vec{D} dV = \int_S \delta \Phi \vec{D} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{II.10})$$

A Lei de Gauss aplicada para um sólido dielétrico e condutor (Halliday e Resnick, 1984) é dada por:

$$\vec{D} \cdot \hat{n} = \sigma_q \quad (\text{II.11})$$

onde σ_q é a densidade superficial de carga elétrica.

Substituindo a relação (II.11) em (II.10), obtem-se:

$$\int_V \delta \nabla \Phi \cdot \vec{D} dV = \int_S \delta \Phi \sigma_q dS \quad (\text{II.12})$$

Da equação (II.6), tem-se finalmente:

$$\int_V \delta \vec{E} \cdot \vec{D} dV + \int_S \delta \Phi \sigma_q dS = 0 \quad (\text{II.13})$$

ou em notação tensorial:

$$\int_V D_i \delta E_i dV + \int_S \delta \Phi \sigma_q dS = 0 \quad (II.14)$$

Deste modo, o variacional das energias cinética e potencial e do trabalho realizado pelas forças de corpo, superficiais (forças externas) e carga elétrica externa podem ser obtidas a partir das equações (II.3), (II.7), (II.4) e (II.14) que resultam, respectivamente:

$$\delta T = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \quad (II.15)$$

$$\delta U = - \int_V (T_{ij,j} \delta u_i - D_i \delta E_i) dV \quad (II.16)$$

$$\delta W = \int_V f_{vi} \delta u_i dV + \int_S f_{si} \delta u_i dS \quad (II.17)$$

$$\delta W_e = \int_S \sigma_q \delta \Phi dS \quad (II.18)$$

Para representar o comportamento do material piezoeletrico, onde existem os efeitos elétricos e mecânicos, deve-se substituir os termos citados anteriormente na Eq. (II.1), resultando em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V (T_{ij,j} \delta u_i - D_i \delta E_i) dV + \int_V f_{vi} \delta u_i dV + \int_S f_{si} \delta u_i dS + \int_S \sigma_q \delta \Phi dS \right] = 0 \quad (II.19)$$

Colocando a Eq. (II.19) na forma matricial e utilizando a relação entre deformação e deslocamento igual a $\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta (u_{i,j} + u_{j,i})$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{T\} dV - \int_V \{\delta E\}^T \{D\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{f_v\} dV \right. \\ \left. - \int_S \{\delta u\}^T \{f_s\} dS + \int_S \delta \Phi \sigma_q dS \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (II.20)$$

Substituindo as equações constitutivas da piezeletricidade linear, equações (I.1) e (I.2), na Eq. (II.20), obtem-se, finalmente, o *Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezoeletricos* dado por:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{c^E\} \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \int_V \{\delta E\}^T [e] \{\varepsilon\} dV \\ - \int_V \{\delta E\}^T [\xi^T] \{E\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f_v\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{f_s\} dS - \int_S \delta \Phi \sigma_q dS \end{aligned} \quad (II.21)$$

ANEXO III

Listagem do Código Computacional

Desenvolvido no Programa *ANSYS*

Neste anexo é apresentada a listagem dos programas computacionais desenvolvidos em código *ANSYS*[®] e utilizados nas simulações numéricas realizadas no Capítulo 4 para a validação das técnicas de modelagem apresentadas nos Capítulos 2 e 3.

III.1 Listagem das Funções Auxiliares

***CREATE,BEAM**

/UNITS,SI

/PREP7

NPZT=6

*DIM,LOCPZT,4,NPZT

*DIM,VPZT,,NPZT

! Voltagem estática aplicada

VPZT(1)=-1.0

VPZT(2)= 1.0

VPZT(3)=-1.0

! Posição do primeiro par de materiais piezelétricos

! Atuador

LOCPZT(1,1)=0.00

LOCPZT(2,1)=0.05

LOCPZT(3,1)=0.005

LOCPZT(4,1)=0.025

! Sensor

LOCPZT(1,2)=0.00

LOCPZT(2,2)=0.03

LOCPZT(3,2)=0.01

LOCPZT(4,2)=0.02

! Posição do segundo par de materiais piezelétricos

! Atuador

LOCPZT(1,3)=0.30

LOCPZT(2,3)=0.35

LOCPZT(3,3)=0.005

LOCPZT(4,3)=0.025

! Sensor

LOCPZT(1,4)=0.30

LOCPZT(2,4)=0.33

LOCPZT(3,4)=0.01

LOCPZT(4,4)=0.02

! Posição do terceiro par de materiais piezelétricos

! Atuador

LOCPZT(1,5)=0.60

LOCPZT(2,5)=0.65

LOCPZT(3,5)=0.005

LOCPZT(4,5)=0.025

! Sensor

LOCPZT(1,6)=0.60

LOCPZT(2,6)=0.63

LOCPZT(3,6)=0.01

LOCPZT(4,6)=0.02

*USE,PROPERTIES

*USE,MODEL,3.4E-3,0.7,0.03,0.254E-3,0.205E-3,0.005

*USE,CCBEAM

***END**

***CREATE,PLATE**

/UNITS,SI

/PREP7

NPZT=6

*DIM,LOCPZT,,4,NPZT

*DIM,VPZT,,NPZT

! Voltagem estática aplicada

VPZT(1)=-1.0

VPZT(2)= 1.0

VPZT(3)= 1.0

! Posição do primeiro par de materiais piezelétricos

! Atuador

LOCPZT(1,1)=0.25

LOCPZT(2,1)=0.35

LOCPZT(3,1)=0.05

LOCPZT(4,1)=0.15

! Sensor

LOCPZT(1,2)=0.25

LOCPZT(2,2)=0.35

LOCPZT(3,2)=0.05

LOCPZT(4,2)=0.15

! Posição do segundo par de materiais piezelétricos

! Atuador

LOCPZT(1,3)=0.15

LOCPZT(2,3)=0.25

LOCPZT(3,3)=0.25

LOCPZT(4,3)=0.35

! Sensor

LOCPZT(1,4)=0.15

LOCPZT(2,4)=0.25

LOCPZT(3,4)=0.25

LOCPZT(4,4)=0.35

! Posição do terceiro par de materiais piezelétricos

! Atuador

LOCPZT(1,5)=0.35

LOCPZT(2,5)=0.45

LOCPZT(3,5)=0.25

LOCPZT(4,5)=0.35

! Sensor

LOCPZT(1,6)=0.35

LOCPZT(2,6)=0.45

LOCPZT(3,6)=0.25

LOCPZT(4,6)=0.35

*USE,PROPERTIES

*USE,MODEL,1.0E-3,0.6,0.4,0.254E-3,0.205E-3,0.01

*USE,CCPLATE

***END**

***CREATE,PROPBEAM**

! Propriedades principais do material do atuador

ET,1,5

MP,PERX,1,1.5930E-8

MP,DENS,1,7700

MP,EX,1,69E9

MP,NUXY,1,0.0

MP,KXX,1,1

TB,PIEZ,1

TB,DATA,3,-12.351

! Propriedades principais do material do sensor

ET,2,5

MP,PERX,2,1.062E-10

MP,DENS,2,1780

MP,EX,2,2E9

MP,NUXY,2,0.0

MP,KXX,2,1

TB,PIEZ,2

TB,DATA,3,-4.6E-2

! Propriedades principais do material da viga

ET,3,45

MP,DENS,3,2711

MP,EX,3,6.5E10

MP,NUXY,3,0.0

***END**

***CREATE,PROPPLATE**

! Propriedades principais do material do atuador

ET,1,5

MP,PERX,1,1.5930E-8

MP,DENS,1,7700

MP,EX,1,69E9

MP,NUXY,1,0.30

MP,KXX,1,1

TB,PIEZ,1

TB,DATA,3,-12.351

TB,DATA,6,-12.351

TB,DATA,9,0.0

! Propriedades principais do material do sensor

ET,2,5

MP,PERX,2,1.062E-10

MP,DENS,2,1780

MP,EX,2,2E9

MP,NUXY,2,0.30

MP,KXX,2,1

TB,PIEZ,2

TB,DATA,3,-4.6E-2

TB,DATA,6,-4.6E-2

TB,DATA,9,0.0

! Propriedades principais do material da placa

ET,3,45

MP,DENS,3,7870

MP,EX,3,2.07E11

MP,NUXY,3,0.29

***END**

***CREATE,PZTGEN**

la=0

ls=0

*DO,I,1,ARG1,1

! Cálculo do número de divisões do PZT

NPZTX(I)=NINT((LOCPZT(2,I)-LOCPZT(1,I))/DL)*DL

NPZTY(I)=NINT((LOCPZT(4,I)-LOCPZT(3,I))/DL)*DL

DPZTX(I)=NINT(LOCPZT(1,I)/DL)*DL

DPZTY(I)=NINT(LOCPZT(3,I)/DL)*DL

! Geração do volume PZT

*IF,MOD(I,2),EQ,1,THEN

! Atuadores

la=la+1

P1(la)=NODE(DPZTX(I),DPZTY(I),TB/2)

BLOCK,NX(P1(la)),NX(P1(la))+NPZTX(I),NY(P1(la)),NY(P1(la))+NPZTY(I),TB/2,TB/2+TA

MAT,1

ESIZE,DL

VMESH,I+1

*ELSE

! Sensores

ls=ls+1

P2(ls)=NODE(DPZTX(I),DPZTY(I),-TB/2)

BLOCK,NX(P2(ls)),NX(P2(ls))+NPZTX(I),NY(P2(ls)),NY(P2(ls))+NPZTY(I),-TB/2-TS,-TB/2

MAT,2

ESIZE,DL

VMESH,I+1

*ENDIF

*ENDDO

***END**

***CREATE,PZTVOLT**

la=0

ls=0

```

*DO,I,1,ARG1,1
! Uniao dos keypoints, linhas, areas e volumes duplicados
NUMMRG,ALL
! Atuadores
*IF,MOD(I,2),EQ,1,THEN
Ia=Ia+1
NSEL,S,LOC,Y,NY(P1(Ia)),NY(P1(Ia))+NPZTY(I)
NSEL,R,LOC,Z,TB/2
NSEL,R,LOC,X,NX(P1(Ia)),NX(P1(Ia))+NPZTX(I)
CP,NEXT,VOLT,ALL
CM,SIC,NODE
*GET,N1(Ia),NODE,,NUM,MIN
NSEL,S,LOC,Y,NY(P1(Ia)),NY(P1(Ia))+NPZTY(I)
NSEL,R,LOC,Z,TB/2+TA
NSEL,R,LOC,X,NX(P1(Ia)),NX(P1(Ia))+NPZTX(I)
CP,NEXT,VOLT,ALL
CM,SEC,NODE
*GET,N2(Ia),NODE,,NUM,MIN
! Sensores
*ELSE
Is=Is+1
NSEL,S,LOC,X,NX(P2(Is)),NX(P2(Is))+NPZTX(I)
NSEL,R,LOC,Z,-TB/2
NSEL,R,LOC,Y,NY(P2(Is)),NY(P2(Is))+NPZTY(I)
CP,NEXT,VOLT,ALL
CM,SIB,NODE
*GET,N3(Is),NODE,,NUM,MIN
NSEL,S,LOC,Y,NY(P2(Is)),NY(P2(Is))+NPZTY(I)
NSEL,R,LOC,Z,-TB/2-TS
NSEL,R,LOC,X,NX(P2(Is)),NX(P2(Is))+NPZTX(I)
CP,NEXT,VOLT,ALL
CM,SEB,NODE
*GET,N4(Is),NODE,,NUM,MI

```

*ENDIF

*ENDDO

***END**

***CREATE,MODEL**

/VIEW,,1,-1,1

/VUP,Z

! Espessura da estrutura em [m]

TB=ARG1

! Comprimento da estrutura [m]

LX=ARG2

! Profundidade da estrutura [m]

LY=ARG3

! Espessura do atuador piezoceramico [m]

TA=ARG4

! Espessura do sensor piezoceramico [m]

TS=ARG5

! Tamanho do Elemento Finito [m]

DL=ARG6

! Correção de LY

LY=NINT(LY/DL)*DL

! Define o volume da estrutura

BLOCK,0,LX,0,LY,-TB/2,TB/2

! Geração dos volumes finitos para a estrutura

MAT,3

ESIZE,DL

VMESH,1

*DIM,NPZTX,,NPZT

*DIM,NPZTY,,NPZT

*DIM,DPZTX,,NPZT

*DIM,DPZTY,,NPZT

*DIM,P1,,NPZT/2

*DIM,P2,,NPZT/2

*DIM,N1,,NPZT/2

*DIM,N2,,NPZT/2

*DIM,N3,,NPZT/2

*DIM,N4,,NPZT/2

! Geração dos volumes finitos para o PZT

*USE,PZTGEN,NPZT

/PNUM,VOLU,1

*USE,PZTVOLT,NPZT

EPLO

***END**

***CREATE,CCBEAM**

! Condição de engastamento na extremidade da estrutura

NSEL,S,LOC,X,0

D,ALL,UX,,,,,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ

NSEL,ALL

! Uniao dos keypoints, linhas, areas e volumes duplicados

NUMMRG,ALL

NSEL,ALL

***END**

***CREATE,CCPLATE**

! Travamento das extremidades da estrutura

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,A,LOC,X,LX

NSEL,A,LOC,Y,0

NSEL,A,LOC,Y,LY

D,ALL,UZ

NSEL,ALL

! Uniao dos keypoints, linhas, areas e volumes duplicados

NUMMRG,ALL

NSEL,ALL

***END**

***CREATE,SSTATIC**

/SOLU

ANTYPE,STATIC,NEW

PSTRES,ON

OUTPR,BASIC,1

CNVTOL,F,,,1E-5

CNVTOL,AMPS

*DO,I,1,NPZT/2

! Atuadores

D,N1(I),VOLT,0.0

D,N2(I),VOLT,VPZT(I)

! Sensores

D,N3(I),VOLT,0.0

*ENDDO

SAVE

SOLVE

/POST1

PLDI,1

PRNSOL,VOLT,0,1

PLNSOL,U,Z,0,1

***END**

***CREATE,STRANS**

/SOLU

DT=ARG1

TF=ARG2

PI=ACOS(-1)

ANTYPE,TRANS,NEW

TRNOPT,FULL

CNVTOL,F,,,1E-5

CNVTOL,AMPS

DELTIM,DT

PSTRES,ON


```
TINTP,0.25,0.5,0.5
OUTPR,NSOL,1
OUTRES,NSOL,1
TIME,DT
KBC,1
*DO,I,1,NPZT/2,1
D,N2(I),VOLT,VPZT(I)*SIN(2*PI*OMEGA(I)*DT)
D,N1(I),VOLT,0.0
D,N3(I),VOLT,0.0
*ENDDO
SOLVE
*DO,T,2*DT,TF,DT
TIME,T
*DO,I,1,NPZT/2
D,N2(I),VOLT,VPZT(I)*SIN(2*PI*OMEGA(I)*T)
*ENDDO
SOLVE
*ENDDO
/POST1
PLDI, ,
ANMODE,100,DT, ,0
*END
*CREATE,MCLEAR
LOCPZT(1) =
NPZTX (1) =
NPZTY (1) =
DPZTX (1) =
DPZTY (1) =
VPZT (1) =
P1 (1) =
P2 (1) =
N1 (1) =
```

250

N2 (1) =

N3 (1) =

N4 (1) =

! Apaga os arquivos em disco

/DELETE,BEAM

/DELETE,PLATE

/DELETE,PROPBEAM

/DELETE,PROPPLATE

/DELETE,PZTGEN

/DELETE,PZTVOLT

/DELETE,MODEL

/DELETE,CCBEAM

/DELETE,CCPLATE

/DELETE,SSTATIC

/DELETE,STRANS

***END**

III.2 Programas Principais

III.2.1 Análise Estática da Estrutura Flexível do Tipo Viga

*USE,BEAM /TITLE, DEFLEXAO ESTATICA DE UMA VIGA DE ALUMINIO CONTENDO TRES PARES DE PZTs

*USE,SSTATIC

*USE,MCLEAR

III.2.2 Análise Transiente da Estrutura Flexível do Tipo Viga

*USE,BEAM /TITLE, ANALISE TRANSIENTE DE UMA VIGA DE ALUMINIO CONTENDO TRES PARES DE PZTs

*USE,STRANS,1E-4,0.01

*USE,MCLEAR

III.2.3 Análise Estática da Estrutura Flexível do Tipo Placa

```
*USE,PLATE /TITLE, DEFLEXAO ESTATICA DE UMA PLACA DE AÇO CONTENDO TRES PARES DE PZTs  
*USE,SSTATIC  
*USE,MCLEAR
```

III.2.4 Análise Transiente da Estrutura Flexível do Tipo Placa

```
*USE,PLATE /TITLE, ANALISE TRANSIENTE DE UMA PLACA DE AÇO CONTENDO TRES PARES DE PZTs  
*USE,STRANS,1E-4,0.01  
*USE,MCLEAR
```

ANEXO IV

Conceito de Valores Singulares e Norma Infinita

Neste anexo é mostrado como os sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (*MIMO*) são tratados. Para isto é introduzido um conceito de resposta em frequência para o contexto multivariável. A ferramenta utilizada são os valores singulares de matrizes e a sua escolha está baseada no fato de que eles representam uma maneira natural e imediata de estender o conceito de ganho em função da frequência (diagramas de Bode) para sistemas de uma entrada e uma saída (*SISO*).

IV.1 Valores Singulares e Norma Infinita de uma Matriz

Definem-se valores singulares (σ_i) de uma matriz X , a norma *euclidiana* de X dada por:

$$\|X\| = \sigma_i(X) = \sqrt{\lambda_i(X^T X)} \quad (\text{IV.1})$$

onde $\lambda_i(\cdot)$ representa o i -ésimo autovalor de (\cdot) e $(\cdot)^T$ denota a transposição de uma matriz.

Os valores singulares σ_i de X são os ganhos principais do sistema que quando ordenados são representados na forma:

$$\sigma_1(X) \geq \sigma_2(X) \geq \dots \geq \sigma_m(X) \geq 0 \quad (\text{IV.2})$$

O máximo valor singular $\sigma_1(X)$ é denotado por $\bar{\sigma}(X)$ e o mínimo $\sigma_m(X)$ por $\underline{\sigma}(X)$. Deste modo tem-se que:

$$\underline{\sigma}(X) \leq \sigma_i(X) \leq \bar{\sigma}(X) \quad (\text{IV.3})$$

i.e., os ganhos de uma matriz X ou de um sistema multivariável (matriz de funções de transferência) são limitados pelo maior e pelo menor valor singular do sistema. Como consequência, os valores singulares extremos podem ser usados para análise do sistema.

Neste ponto é possível introduzir o conceito de *norma infinita* $\|\cdot\|_\infty$ de uma matriz X , dada por:

$$\|X\|_{\infty} = \bar{\sigma}(X) \quad (\text{IV.4})$$

Os valores singulares $\bar{\sigma}(\cdot)$ e $\underline{\sigma}(\cdot)$ tem como propriedades importantes as relações descritas a seguir:

$$\bar{\sigma}(X + Y) \leq \bar{\sigma}(X) + \bar{\sigma}(Y) \quad (\text{IV.5a})$$

$$\bar{\sigma}(XY) \leq \bar{\sigma}(X)\bar{\sigma}(Y) \quad (\text{IV.5b})$$

$$\underline{\sigma}(XY) \geq \underline{\sigma}(X)\underline{\sigma}(Y) \quad (\text{IV.5c})$$

$$\underline{\sigma}(X) = \frac{1}{\bar{\sigma}(X^{-1})} \quad (\text{IV.5d})$$

$$\bar{\sigma}(X) = \frac{1}{\underline{\sigma}(X^{-1})} \quad (\text{IV.5e})$$

$$\bar{\sigma}(\alpha X) = |\alpha| \bar{\sigma}(X) \quad (\text{IV.5f})$$

$$\underline{\sigma}(X) - \bar{\sigma}(Y) \leq \underline{\sigma}(X + Y) \leq \underline{\sigma}(X) + \bar{\sigma}(Y) \quad (\text{IV.5g})$$

$$\left| \underline{\sigma}(X) - 1 \right| \leq \underline{\sigma}(I + Y) \leq \underline{\sigma}(X) + 1 \quad (\text{IV.5h})$$

$$\left| \bar{\sigma}(X) - 1 \right| \leq \bar{\sigma}(I + X) \leq \bar{\sigma}(X) + 1 \quad (\text{IV.5i})$$

onde I é a matriz identidade, Y é uma matriz e α é um escalar.

Encarando-se a matriz X como uma função de transferência que opera sobre um conjunto de vetores complexos ($j\omega = s$), a norma infinita pode ainda ser escrita como:

$$\|X\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[X(j\omega)], \quad 0 \leq \omega < \infty \quad (\text{IV.6})$$

onde X é uma função estável e própria⁶⁰ e $\sup_{\omega}(\cdot)$ representa o operador *máximo valor* de (\cdot) para um dado ω .

A norma infinita $\|X\|_{\infty}$ de uma função de transferência X é portanto definida como um escalar que representa o maior ganho possível em energia entre um sinal de entrada p e um sinal de saída v .

$$\|X\|_{\infty} = \max \frac{\|v\|_2}{\|p\|_2} \quad (\text{IV.7})$$

onde a norma-2 ou $\|\cdot\|_2$ de um vetor de sinais v no tempo é dado por (Glover, 1984):

⁶⁰ Uma função $X(j\omega)$ é própria quando ela é finita para $\omega = \infty$.

$$\|v(t)\|_2 = \left[\int_0^\infty v^T(t) \times v(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.8})$$

ou no domínio da frequência:

$$\|v(s)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty v^T(\omega) \times v(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.9})$$

onde $(.)^T$ significa a transposição de um vetor.

Assim, por definição, os diagramas de Bode que descrevem o comportamento dos sistemas multivariáveis (matriz X), em função da frequência angular ω , consistem nos gráficos de $\bar{\sigma}[X(j\omega)]$ e $\underline{\sigma}[X(j\omega)]$. Usualmente marca-se nas ordenadas os valores em dB e, nas abscissas, as frequências em escala logarítmica, conforme ilustra a Fig. IV.1.

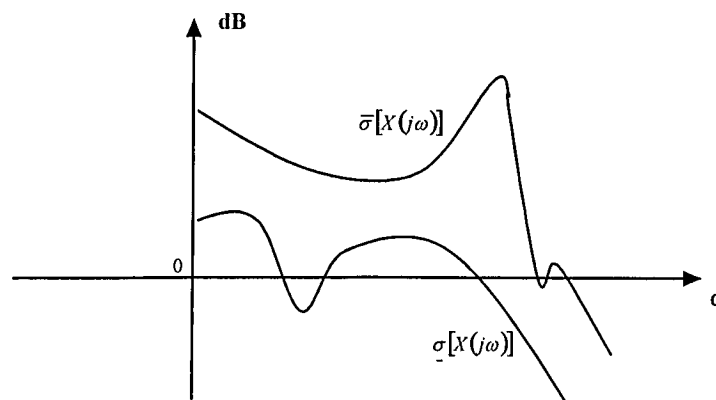


Figura IV.1- Diagramas de Bode para sistemas multivariáveis.

A representação dos ganhos do sistema multivariável através dos diagramas de Bode fornece uma interpretação simples sobre o comportamento dos valores singulares (máximos e mínimos) em função da frequência. De maneira geral, esta interpretação é mais genérica daquela tratada (um único diagrama de Bode) para sistemas *SISO* já que *várias* funções de transferência (conjunto de ganhos principais) estão envolvidas neste contexto (Noble & Daniel, 1986).

ANEXO V

Solução Ótima para o Problema de Controle Robusto

O presente anexo aborda a questão da determinação da solução ótima para o problema de controle robusto que consiste em encontrar um controlador $K(s)$ que *minimize* a norma infinita da função de transferência $T_{vp}(s)$:

$$\min_{K(s)} \|T_{vp}(s)\|_{\infty} \leq 1 \quad (\text{V.1})$$

ou ainda:

$$\|T_{vp}(s)\|_{\infty} \leq \gamma \quad (\text{V.2})$$

onde γ é uma variável de projeto que representa o nível de robustez do sistema em malha fechada. A solução para este problema é apresentada em duas etapas: a primeira fornece um controlador realimentando o estado do sistema e a outra visa encontrar um controlador que realimente a saída. A solução ótima propriamente dita é determinada a partir de um algoritmo descrito na fase final do anexo.

V.1 Controle por Realimentação do Estado

Aplicando o conceito de norma infinita apresentada pela relação (IV.7) (veja Anexo IV) em (V.2), a função de transferência T_{vp} que relaciona os sinais $v(s)$ e $p(s)$ pode também ser expressa por:

$$\|T_{vp}(s)\|_{\infty} = \max \frac{\|v(s)\|_2}{\|p(s)\|_2} \quad (\text{V.3})$$

Substituindo a Eq. (V.3) em (6.26), tem-se:

$$\max \frac{\|v(s)\|_2}{\|p(s)\|_2} \leq \gamma \quad (\text{V.4})$$

ou

$$\max \frac{\|v(s)\|_2^2}{\|p(s)\|_2^2} \leq \gamma^2 \quad (\text{V.5})$$

A equação (V.5) pode ser reescrita na forma (Lewis e Syrmos, 1995):

$$\|v(s)\|_2^2 - \gamma^2 \|p(s)\|_2^2 \leq -\epsilon \|p(s)\|_2^2, \text{ para } \epsilon > 0 \quad (\text{V.6})$$

A partir da relação (V.6) define-se a *função custo* ou um índice de performance J_γ como:

$$J_\gamma = \|v(s)\|_2^2 - \gamma^2 \|p(s)\|_2^2 \quad (\text{V.7})$$

Utilizando-se o modelo de projeto do controlador descrito pela Eq. (6.21) (veja Capítulo 6, Seção 6.2.2) ou:

$$\dot{x} = Ax + B_1 p + B_2 u \quad (\text{V.8})$$

$$v = C_1 x + D_{11} p + D_{12} u \quad (\text{V.9})$$

define-se a função *Hamiltoniana*:

$$H = J_\gamma + \lambda (Ax + B_1 p + B_2 u) \quad (\text{V.10})$$

e substituindo (V.9) em (V.7), tem-se:

$$H = \|C_1 x + D_{11} p + D_{12} u\|_2^2 - \gamma^2 \|p(s)\|_2^2 + \lambda (Ax + B_1 p + B_2 u) \quad (\text{V.11})$$

onde λ é o multiplicador de *Lagrange* utilizado no problema de minimização de J_γ cuja restrição é dada pela Eq. (V.8).

Empregando a relação (IV.8) (veja Anexo IV) na Eq. (V.11), resulta:

$$H = \int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T D_{12} \\ D_{12}^T C_1 & D_{12}^T D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\} dt - \gamma^2 \|p(s)\|_2^2 + \lambda (Ax + B_1 p + B_2 u) \quad (\text{V.12})$$

onde a matriz D_{11} foi assumida nula no intuito de simplificar os cálculos algébricos facilitando, com isso o desenvolvimento dos resultados.

As condições necessárias para a determinação do ponto mínimo de J_γ são as seguintes (Lewis e Syrmos, 1995):

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + B_1 p + B_2 u, \text{ para } x(0) = 0 \quad (\text{V.13a})$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = C_1^T C_1 x + C_1^T D_{12} u + A^T \lambda, \text{ para } \lambda(\infty) = 0 \quad (\text{V.13b})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = D_{12}^T C_1 x + D_{12}^T D_{12} u + \lambda B_2 = 0 \quad (\text{V.13c})$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = -\gamma^2 p + \lambda B_1 = 0 \quad (\text{V.13d})$$

De (V.13c) e (V.13d), obtém-se, respectivamente, as relações (omitindo a variável tempo):

$$u = -R^{-1} P^T x - R^{-1} B_2^T \lambda \quad (\text{V.14})$$

$$p = \gamma^{-2} B_1^T \lambda \quad (\text{V.15})$$

onde as matrizes P e R são dadas, respectivamente, por:

$$P = C_1^T D_{12} \quad (\text{V.16})$$

$$R = D_{12}^T D_{12} \quad (\text{V.17})$$

Assumindo que $\lambda(t)$ é linearmente dependente de $x(t)$ segundo a relação (Lewis e Syrmos, 1995):

$$\lambda(t) = X(t) x(t) \quad (\text{V.18})$$

deste modo, as Eqs. (V.14) e (V.15) podem ser reescritas na forma:

$$u = -R^{-1} P^T x - R^{-1} B_2^T X x \quad (\text{V.19})$$

$$p = \gamma^{-2} B_1^T X x \quad (\text{V.20})$$

Diferenciando a Eq. (V.18) em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\lambda} = \dot{X} x + X \dot{x} \quad (\text{V.21})$$

Substituindo as Eqs. (V.13a) e (V.13b) em (V.21), chega-se:

$$-C_1^T C_1 x - Pu - A^T \lambda = \dot{X} x + X (Ax + B_1 p + B_2 u) \quad (\text{V.22})$$

ou, substituindo as Eqs. (V.19) e (V.20) em (V.22), resulta:

$$-Q + PR^{-1}P^T + PR^{-1}B_2^T X - A^T X = \dot{X} + X (A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X - B_2 R^{-1} P^T - B_2 R^{-1} B_2^T X) \quad (\text{V.23})$$

onde $Q = C_1^T C_1$.

Reorganizando os termos da Eq. (V.23), obtém-se, finalmente:

$$-\dot{X} = (A^T - PR^{-1}B_2^T) X + X (A - B_2 R^{-1} P^T) + X (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 R^{-1} B_2^T) X + Q - PR^{-1}P^T \quad (\text{V.24})$$

Como, neste trabalho, as matrizes A , B_1 , B_2 e C_1 são admitidas fixas e invariantes no tempo ($\dot{X} = 0$), a Eq. (V.24) torna-se:

$$(A^T - PR^{-1}B_2^T) X + X (A - B_2 R^{-1} P^T) - X (B_2 R^{-1} B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X + Q - PR^{-1}P^T = 0 \quad (\text{V.25})$$

que denomina-se *Equação Algébrica de Riccati (EAR)* cuja solução é a matriz X_∞ que é semi definida positiva.

A matriz *Hamiltoniana* associada à Eq. (V.25) é dada por:

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A - B_2 R^{-1} P^T & B_2 R^{-1} B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T \\ -Q & -A^T + PR^{-1} B_2^T \end{bmatrix} \quad (\text{V.26})$$

cujas soluções X_∞ pode ser obtida através do cálculo dos autovalores⁶¹ e autovetores da matriz H_∞ (Lewis e Syrmos, 1995).

⁶¹ A solução X_∞ existe e é única se os autovalores associados à matriz *Hamiltoniana* não estiverem sobre o eixo imaginário $j\omega$.

Assim, dada uma matriz X_∞ (positiva semi definida), obtida a partir da equação de *Riccati*, descrita em (V.25), o controle por realimentação do estado x que assegura a norma infinita de T_{vp} menor que 1 para um dado valor de γ , é dado por (substituindo X por X_∞ em (V.19)):

$$u(t) = -R^{-1} (B_2^T X_\infty + P^T) x(t) \quad (V.27)$$

ou

$$u(t) = K_\infty x(t) \quad (V.28)$$

O controlador descrito por (V.28) atinge o critério estabelecido em (V.2) para o pior caso de entrada da perturbação $p(t)$ - veja Eq. (V.20) - dada por:

$$p(t) = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty x(t) \quad (V.29)$$

que é uma combinação linear do estado $x(t)$, ponderado pelo fator γ^{-2} . Neste sentido, quando γ é pequeno, o controlador associado é capaz de atenuar as entradas perturbadoras $p(t)$ de grandes magnitudes, ou seja, o seu nível de robustez em relação às entradas p é medida através do parâmetro γ . Por isto, é preferível, no projeto dos controladores robustos, um menor valor possível de γ , ou seja, a maior a robustez possível.

V.2 Controle por Realimentação da Saída

O problema de controle mais geral, aqui colocado, é aquele que estabelece uma lei de controle realimentando a saída⁶² $e(t)$ e ainda garanta que a norma infinita de T_{vp} seja menor que a unidade. Na construção do controlador com realimentação da saída, é necessário projetar, numa fase preliminar, a dinâmica do observador de estados para que realimente o estado como um todo conforme mostra a Eq. (V.28). O observador de estados apresenta uma estrutura semelhante ao sistema dado em (V.8) e tem um parâmetro adicional: o erro na estimativa entre o estado real x e o estado estimado \hat{x} (Doyle et al, 1989):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 p + B_2 u + L_\infty (C_2 \hat{x} - e) \quad (V.30)$$

⁶² Além dos dois tipos de realimentação descritos, existem mais dois outros casos especiais: ação completa do controle e realimentação positiva das perturbações (Ribeiro, 1995).

onde a matriz C_2 é dada em (6.21), $e(t)$ é a saída medida, L_∞ é o ganho ótimo do observador de estados e p e u são fornecidos pela Eqs. (V.29) e (V.28), avaliados em relação ao estado estimado \hat{x} .

Além das Eqs. (V.8) e (V.9), nesta situação é utilizada mais uma expressão que relaciona a saída medida dada pela relação (6.21):

$$e = C_2 x + D_{21} p \quad (\text{V.31})$$

onde a matriz D_{22} foi assumida nula no intuito de simplificar os cálculos algébricos.

A condição necessária e suficiente para se determinar a matriz de ganho do observador L_∞ é que as condições de observabilidade e controlabilidade sejam satisfeitas, ou seja, se o sistema for de estados completamente observáveis (ou detetáveis) e controláveis (ou estabilizáveis) (Ogata, 1998):

$$(A, B_2) \text{ são estabilizáveis} \quad (\text{V.32})$$

e

$$(A, C_2) \text{ são detetáveis} \quad (\text{V.33})$$

Estabelecidas estas definições e hipóteses, a solução do problema em questão é construída em torno das matrizes que descrevem o problema (matrizes A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , D_{12} e D_{21}), isto é, na realização da matriz $P(s)$ descrita por:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (\text{V.34})$$

Baseada na solução do problema de controle robusto para a realimentação do estado $x(t)$, conforme descrita na seção anterior, a solução do problema para realimentação da saída é finalmente determinada a partir dos resultados obtidos no trabalho de Glover e Doyle (1988) (onde é feita esta demonstração de maneira detalhada e rigorosa) e é dada pela matriz de ganho $K(s)$ do controlador descrita na forma⁶³:

$$K(s) = \left[\frac{A + B_2 K_\infty + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - L_\infty (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty)}{K_\infty} \mid \frac{L_\infty}{0} \right] \quad (\text{V.35})$$

onde K_∞ é fornecido pela Eq. (V.27), L_∞ (ganho do observador de estados) é dado por:

$$L_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} (Y_\infty C_2^T + L) N^{-1} \quad (\text{V.36})$$

as matrizes L e N são dadas, respectivamente, por:

$$L = B_1 D_{21}^T \quad (\text{V.37})$$

$$N = D_{21} D_{21}^T \quad (\text{V.38})$$

e Y_∞ é a solução da equação de *Riccati* descrita a seguir (similar àquela obtida em (V.25)):

$$(A^T - C_2^T N^{-1} L^T) Y + Y (A - L N^{-1} C_2) - Y (C_2^T N^{-1} C_2 - \gamma^{-2} Q) Y + B_1^T B_1 - L N^{-1} L^T = 0 \quad (\text{V.39})$$

A matriz *Hamiltoniana* associada a Eq. (V.39) é a seguinte:

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A^T - C_2^T N^{-1} L^T & C_2^T N^{-1} C_2 - \gamma^{-2} Q \\ L N^{-1} L^T - B_1^T B_1 & -A + L N^{-1} C_2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.40})$$

A matriz de ganho $K(s)$ corresponde à dinâmica do controlador é dada pela relação:

$$K(s) = \left[\frac{A_k}{C_k} \mid \frac{B_k}{D_k} \right] = \left[\frac{A + B_2 K_\infty + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - L_\infty (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty)}{K_\infty} \mid \frac{L_\infty}{0} \right] \quad (\text{V.41})$$

⁶³ Em Doyle et al (1989), o mesmo controlador é obtido assumindo-se algumas hipóteses, quais sejam: $D_{11} = 0$, $C_1^T D_{12} = 0$ e $D_{12}^T D_{12} = I$. Neste caso particular, a hipótese que se faz com relação às matrizes C_1^T e D_{12} é que elas são ortogonais, ou seja, o acoplamento entre o estado $x(t)$ (associado a C_1^T) e o controle $u(t)$ (associado a D_{12}) não existe para o caso em questão. Já a ponderação da energia de entrada $u(t)$ é normalizada, segundo a relação $D_{12}^T D_{12} = I$.

deste modo, a dinâmica do controlador com o estado associado $x_k(t)$ faz o papel de um estimador do estado $x(t)$. Estabelecidos estes conceitos relevantes, os passos que envolvem a construção do controlador robusto visando a solução ótima, propriamente dita, são definidos a seguir.

V.3 Etapas de Construção do Controlador Robusto com Realimentação da Saída Visando a Solução Ótima

Como visto, o objetivo de projeto é encontrar um controlador descrito pela matriz $K(s)$ tal que, a função de transferência entre as saídas $v(s)$ e as entradas $p(s)$ obedeça a desigualdade mostrada em (V.2), isto é, garanta que:

$$\|T_{vp}(s)\|_{\infty} \leq \gamma < 1 \quad (\text{V.42})$$

O problema colocado através da desigualdade (V.42) tem como solução uma característica *sub-ótima* (solução obtida por meio dos procedimentos descritos na Seção 2). Para obter uma matriz de ganho $K(s)$ que minimize a relação (V.42) e que alcance a solução *ótima* desejada (γ_{\min}), é necessário construir um algoritmo⁶⁴ iterativo. As etapas descritas a seguir visam alcançar este objetivo.

- Etapa a:** construir o modelo nominal representativo do sistema que se deseja controlar;
- Etapa b:** escolher os filtros de projeto de forma a adequar-se aos requisitos pré-estabelecidos de desempenho e ao requisito de estabilidade frente às incertezas não modeladas;
- Etapa c:** incorporar à planta nominal, a dinâmica dos filtros escolhidos na etapa **b**, gerando o sistema aumentado;
- Etapa d:** escolher um valor para γ menor que a unidade;
- Etapa e:** resolver o problema de controle robusto, ou seja, determinar as soluções das equações de *Riccati* H_{∞} (solução X_{∞}) e J_{∞} (solução Y_{∞}) e encontrar o compensador $K(s)$ substituindo as soluções obtidas em (V.41).
- Etapa f:** verificar se a condição descrita em (V.42) é satisfeita. Em caso afirmativo encerra-se o procedimento, caso contrário retorna-se à etapa **d** e escolhe-se um novo valor para γ .

⁶⁴ O *Toolbox* de controle robusto do *Matlab*® fornece automaticamente a solução ótima desejada.

Tais etapas podem ser melhor representadas através do diagrama de blocos ilustrado na Figura V.1.

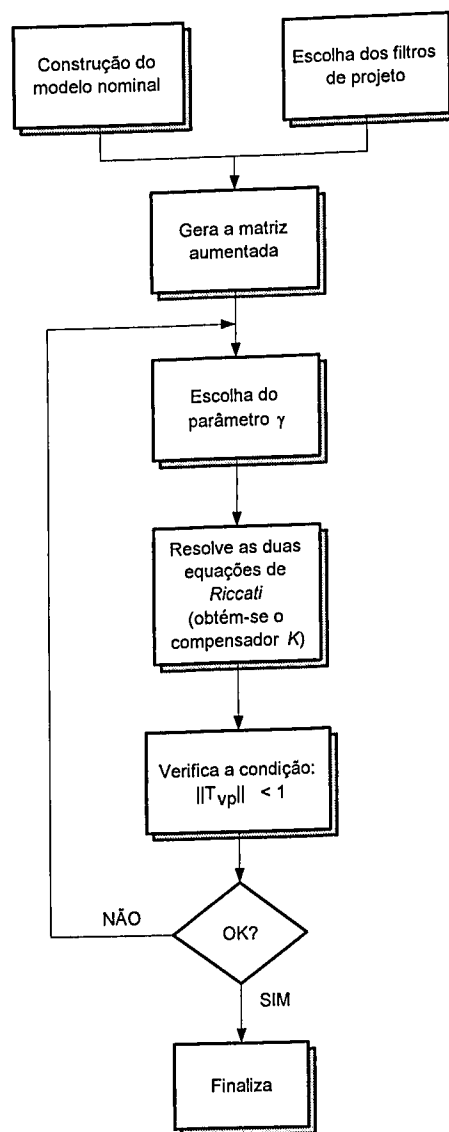


Figura V.1- Diagrama de blocos do procedimento da determinação da melhor solução para o problema H_∞ .

ANEXO VI

Descrição da Instrumentação

No presente anexo, descrevem-se a instrumentação utilizada nos ensaios realizados na bancada de testes apresentada no Capítulo 7 e os procedimentos empregados na colagem dos materiais piezelétricos na estrutura principal.

VI.1 Materiais Piezelétricos e Eletrônica associada

Para medir as vibrações mecânicas da estrutura, utilizou-se um sensor piezelétrico capaz de produzir carga elétrica quando sujeito a uma tensão mecânica. Tal sensor (tipo *PVDF*⁶⁵) é ilustrado através da Fig. VI.1.

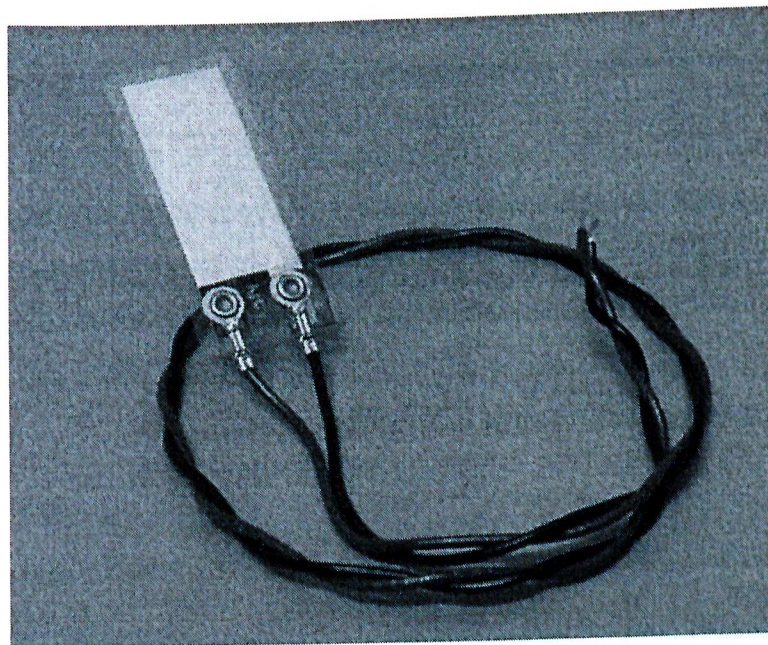


Figura VI.1- Sensor piezelétrico tipo *PVDF*.

⁶⁵ Fluorido de Polivinilideno.

As características físicas e geométricas principais do sensor são apresentadas na Tab. VI.1 (MS, 2003).

Tabela VI.1- Propriedades físicas e geométricas do sensor piezelétrico.

Propriedades	Unidades	Sensor
E (Módulo de Young)	GPa	2
ρ (Densidade)	kg/m^3	1780
h (Espessura)	$m \times 10^{-3}$	0.205
b (Largura)	$m \times 10^{-3}$	10
L (Comprimento)	$m \times 10^{-3}$	30
d_{31} (Constante piezelétrica)	$C/N \times 10^{-12}$	23
g_{31} (Constante de voltagem)	$mV/N \times 10^{-3}$	216
k_d (Constante dielétrica)	--	12
k_{31} (Fator de acoplamento)	--	0.12

Um dispositivo eletrônico foi projetado para medir o potencial elétrico produzido pelo sensor e seu esquema elétrico (Lima Jr., 1999) é mostrado na Fig. VI.2.

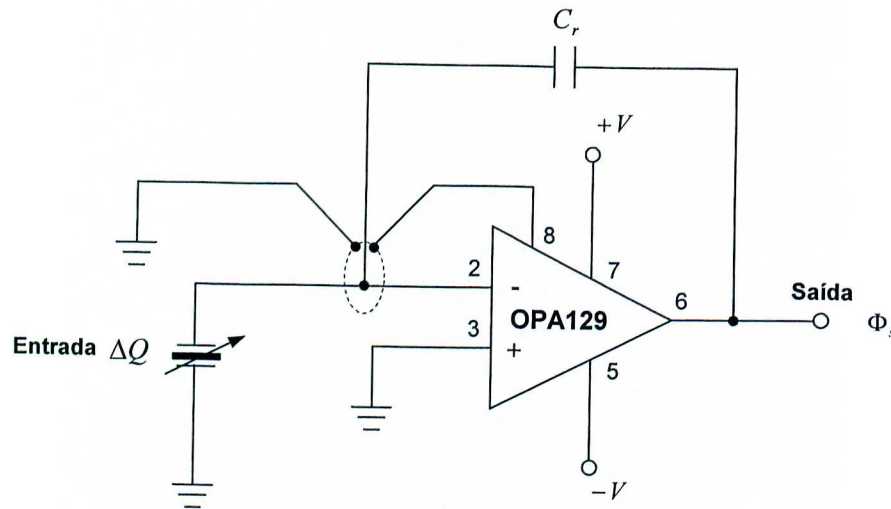


Figura VI.2- Dispositivo eletrônico para medir o potencial elétrico produzido pelo sensor piezelétrico.

Empregando-se o amplificador operacional OPA129 BURR-BROWN⁶⁶ e um capacitor C_r conectado em paralelo, o circuito mostrado na Fig. VI.2 converte a carga ΔQ , produzida pelo sensor, em voltagem elétrica Φ_s . Para diminuir as interferências externas, recomenda-se o uso de cabos blindados na montagem da instrumentação.

⁶⁶ Este amplificador operacional apresenta alta impedância e baixa corrente de entrada.

O elemento piezelétrico, empregado como atuador no controle estrutural (ACX, 2003), é mostrado através da Fig. VI.3.

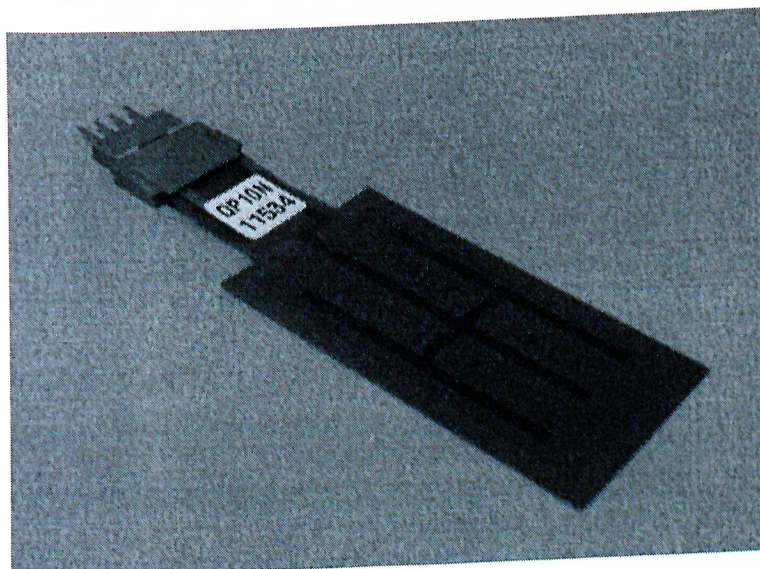


Figura VI.3- Atuador piezelétrico empregado no controle estrutural.

Segundo ilustra a Fig. VI.3, o elemento piezelétrico é revestido por uma proteção isolante e flexível que assegura confiabilidade e segurança durante a operação. Tal dispositivo ainda incorpora trilhas de material condutor cujos terminais elétricos se encontram disponíveis em sua extremidade. As dimensões principais e constantes físicas deste elemento são apresentadas pela Tab. VI.2 (ACX, 2003).

Tabela VI.2- Propriedades físicas e geométricas do atuador piezelétrico.

Propriedades	Unidades	Atuador
E (Módulo de Young)	GPa	69
ρ (Densidade)	kg/m^3	7700
h (Espessura)	$m \times 10^{-3}$	0.254
b (Largura)	$m \times 10^{-3}$	20
L (Comprimento)	$m \times 10^{-3}$	50
d_{31} (Constante piezelétrica)	$C/N \times 10^{-12}$	-179
g_{31} (Constante de voltagem)	$mV/N \times 10^{-3}$	-11
k_d (Constante dielétrica)	--	1800
k_{31} (Fator de acoplamento)	--	0.30

O amplificador de voltagem da ACX, que alimenta o atuador com um ganho de 20 V/V e atinge uma voltagem de pico de ± 200 V, é mostrado na Fig. VI.4.

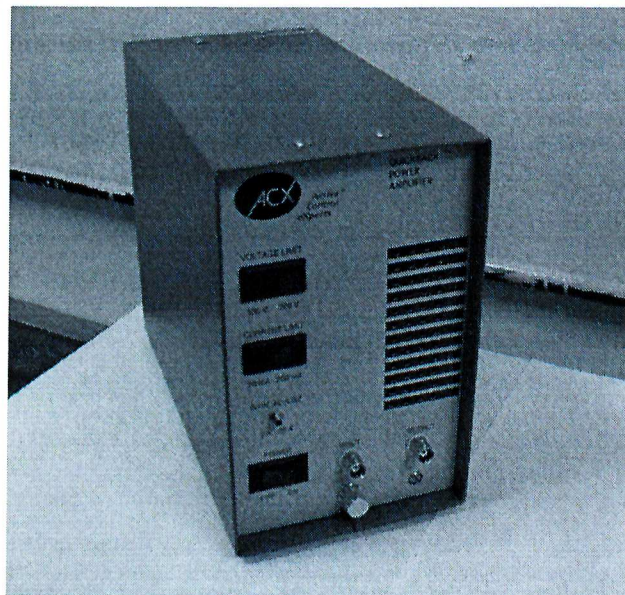


Figura VI.4- Amplificador de voltagem utilizado na alimentação do atuador piezelétrico.

Para realizar a colagem das cerâmicas na estrutura, recomenda-se efetuar alguns procedimentos básicos descritos na seção que se segue.

VI.2 Procedimento de Colagem da Cerâmica

A colagem dos materiais piezelétricos na estrutura flexível é feita mediante a realização de algumas etapas:

- limpar mecanicamente a superfície para a retirada de resíduos sólidos e poeira;
- limpar quimicamente a superfície, através de um solvente (por ex.: *álcool isopropílico*) para a retirada de graxas, gorduras e óleos;
- marcar, com um lápis, o perímetro da cerâmica na superfície da estrutura, na posição onde se deseja colar a cerâmica;
- demarcar, com uma fita adesiva, a área externa ao perímetro selecionado;
- espalhar, ao longo da superfície demarcada, uma camada fina e uniforme de adesivo (por ex.: *Adesivo Epóxi Araldite Professional*);

- colocar a cerâmica sobre a superfície demarcada e usar um bloco de material isolante para pressionar a cerâmica sobre a estrutura até que ocorra a sua fixação e
- aguardar o tempo de cura do adesivo e proceder a limpeza final do conjunto estrutura e cerâmica piezelétrica.

VI.3 O Ambiente *dSpace*

O ambiente *dSpace*[®] é uma interface inteiramente integrada ao *Matlab Simulink*[®] que reúne ferramentas de projeto e análise de sistemas de controle com um software de implementação em tempo real. A arquitetura deste ambiente dispõe de algumas ferramentas/dispositivos, quais sejam⁶⁷:

- uma placa de processamento dos dados (*DS1104*) com um *DSP* (*Digital Signal Processor*) integrado;
- uma placa de conversores *A/D* e *D/A* com 32 canais e resolução de 16 *bits* e
- um barramento de comunicação (banco de conectores) entre o computador e o sistema a ser controlado;

Nos ensaios experimentais efetuados, implementou-se, no *Matlab Simulink*[®], o circuito de controle ilustrado na Fig. VI.5.

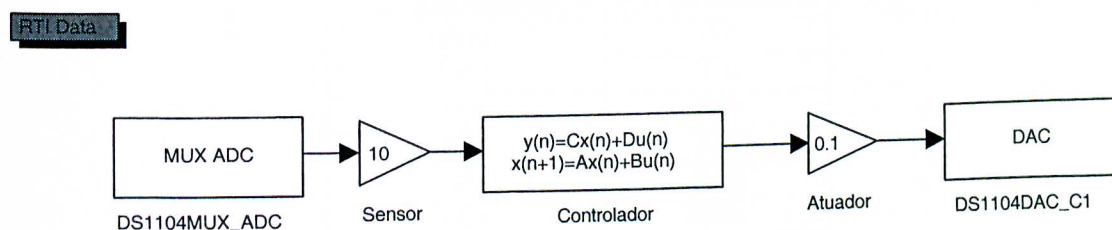


Figura VI.5- Circuito de controle implementado no *Matlab Simulink*.

Assim, este circuito foi utilizado pelo *dSpace*[®] para gerar o código responsável pela execução do controle em tempo real.

⁶⁷ Maiores informações referentes ao equipamento *dSpace*[®] podem ser obtidas no site do fabricante: <http://www.dspace.de>.

VI.4 Características do Filtro Analógico

Nos testes realizados em laboratório, empregou-se um filtro analógico na saída do sensor piezelétrico no intuito de evitar a presença do fenômeno *Aliasing*⁶⁸. Para isto, utilizou-se o filtro *Butterworth passa baixa de quinta ordem* (decaimento de 100 dB/Década) com frequência de corte ajustável (ajuste realizado pelo resistor *R*), conforme mostra o diagrama esquemático da Fig. VI.6.

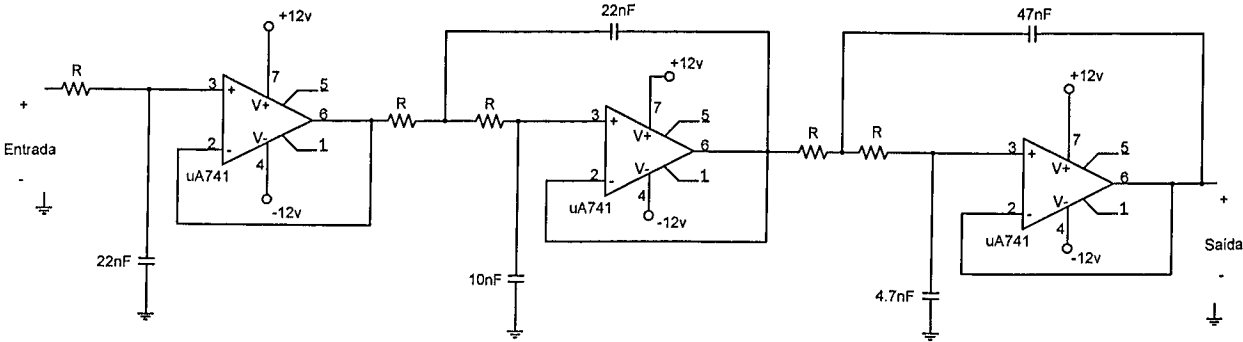


Figura VI.6- Filtro analógico empregado nos ensaios experimentais.

A seleção da frequência de corte é efetuada através do resistor *R*. A Tabela VI.3 apresenta alguns valores de *R* e frequências de corte correspondentes.

Tabela VI.3- Valores de *R* e frequências de corte correspondentes.

Resistores (Ω)	Frequências (Hz)
1K	10000
10K	1000
20K	500
30K	320
50K	195
100K	100

Nos ensaios experimentais efetuados, a frequência de corte selecionada foi de 1 KHz. As Figuras VI.7 e VI.8 ilustram as respostas em frequência (magnitude e fase) do filtro construído.

⁶⁸ Este fenômeno é causado quando a taxa de amostragem está abaixo da frequência mínima do sinal original. Por isto, torna-se necessário o uso de filtros passa-baixa para evitar que ruídos de alta frequência sejam convertidos em ruídos de baixa frequência.

49374

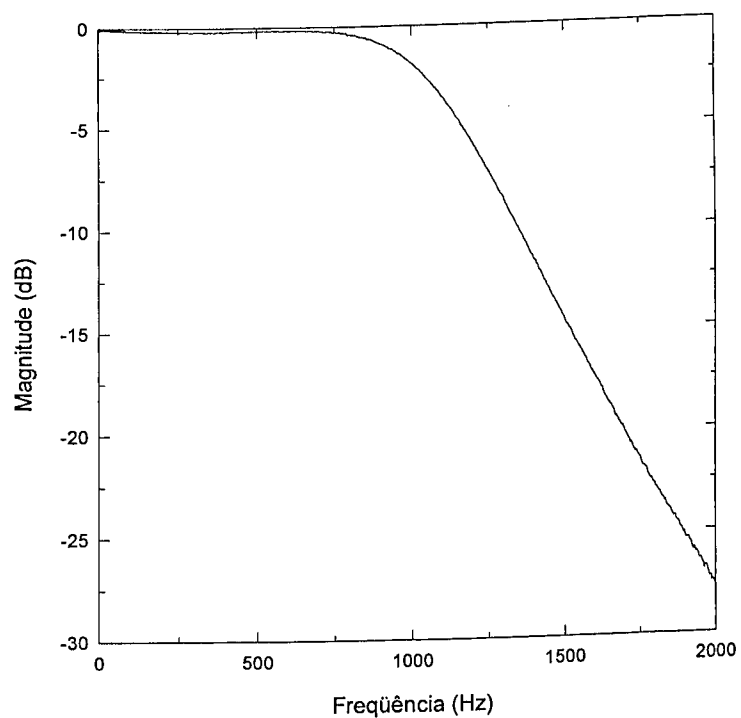


Figura VI.7- Magnitude da resposta em frequência do filtro construído.

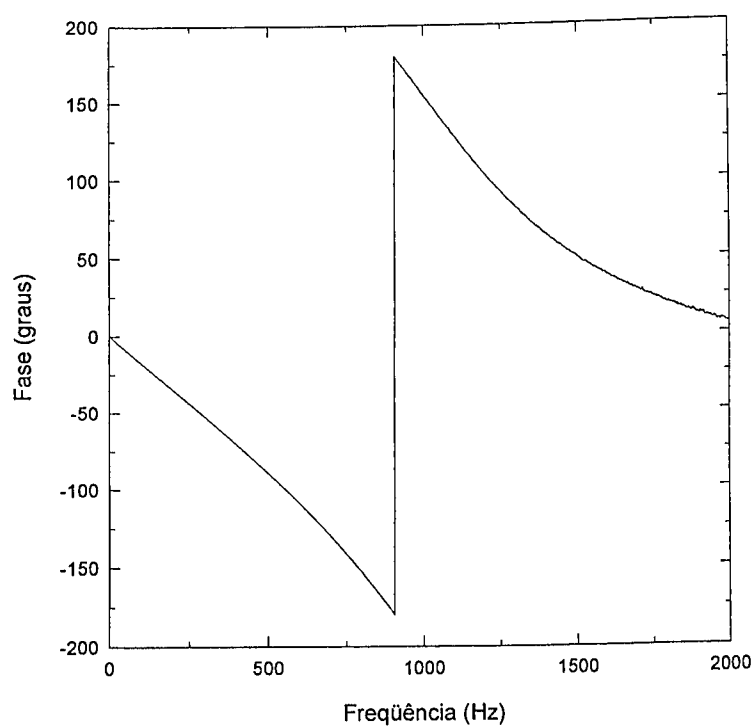


Figura VI.8- Fase da resposta em frequência do filtro construído.