

KAISSAR DE OLIVEIRA NABBOUT

MÉTODOS DE ACOPLAMENTO PARA PROBLEMAS COM  
INTERAÇÃO TÉRMICA ENTRE FLUIDO E SÓLIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2020

KAISSAR DE OLIVEIRA NABBOUT

MÉTODOS DE ACOPLAMENTO PARA PROBLEMAS COM  
INTERAÇÃO TÉRMICA ENTRE FLUIDO E SÓLIDO

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia - MG

2020

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

N114  
2020

Nabbout, Kaissar de Oliveira, 1993-  
Métodos de acoplamento para problemas com interação  
térmica entre fluido e sólido [recurso eletrônico] / Kaissar de  
Oliveira Nabbout. - 2020.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.514>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da ,1955-,  
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação  
em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 566, COPEM				
Data:	31/07/2020	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	11912EMC011				
Nome do Discente:	Kaissar de Oliveira Nabbout				
Título do Trabalho:	Métodos de Acoplamento para Problemas com Interação Térmica entre Fluido e Sólido				
Área de concentração:	Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos				
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: João Marcelo Vedovoto - FEMEC/UFU; Alexandre Megiorin Roma - USP; Aristeu da Silveira Neto - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Aristeu da Silveira Neto, João Marcelo Vedovoto e o Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Alexandre Megiorin Roma desde a cidade de São Paulo/SP, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aristeu da Silveira Neto, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.



Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/07/2020, às 16:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovoto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/07/2020, às 16:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Megiorin Roma, Usuário Externo**, em 31/07/2020, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2168777** e o código CRC **947DC0C3**.

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, que sempre, em todos os momentos, colocou a educação e a formação minha e da minha irmã em primeiro lugar. Infelizmente ela não poderá acompanhar a concretização dessa importante etapa da minha vida, mas tenho certeza que onde ela estiver, ela estará me guiando e olhando por mim.

Que eu consiga transmitir todo o ensinamento que ela me passou, como a mãe, a filha, a esposa, a professora e a mulher forte que ela sempre foi.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto por todo o suporte e atenção que sempre me foi dado, mas principalmente pelo seu entusiasmo e amor pelo que faz, que sempre me serviu de inspiração desde a época de graduação.

Agradeço enormemente ao Mestre Hélio Ribeiro Neto, cuja ajuda foi essencial para a realização deste trabalho. Não tenho palavras para agradecer sua dedicação e paciência. De apenas um colega de trabalho, acabou se tornando um grande amigo.

Sou grato a todos os meus colegas do MFLab por toda a ajuda e momentos que passamos juntos.

Agradeço à minha família por todo o apoio que sempre me deram, meus pais Wajih e Sônia, e minha irmã Kemilly.

À minha noiva Maria Paula, companheira para a vida, que sempre buscou me motivar e me manter focado nos meus/nossos objetivos, mesmo nos momentos mais desanimadores.

Por fim, agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro e à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como um todo por toda a assistência e formação que me foi dada.

NABBOUT, K. O. **Métodos de acoplamento para problemas com interação térmica entre fluido e sólido.** 2020. 105 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## RESUMO

A análise de problemas de interação térmica entre fluido e sólido de maneira acoplada representou um grande avanço para o desenvolvimento de equipamentos e de sistemas térmicos presentes na vida cotidiana de pessoas e empresas. Muitos avanços foram feitos desde que os primeiros trabalhos surgiram na década de 1960, em que soluções analíticas para problemas com geometrias simples surgiram. Com o avanço na capacidade de processamento dos computadores e com o desenvolvimento de novos métodos numéricos, soluções cada vez mais precisas para problemas de CHT (*Conjugate Heat Transfer*) são alcançadas, o que resulta no desenvolvimento de processos cada vez mais eficientes. O objetivo principal do autor do presente trabalho é estudar as principais maneiras de se fazer o acoplamento térmico entre diferentes subdomínios e implementar um código computacional com o qual resolvem-se problemas de transferência térmica de forma conjugada. O problema escolhido foi o escoamento sobre uma placa plana, para o qual é possível encontrar na literatura solução analítica a qual será utilizada para validação dos métodos numérico e computacional utilizados no presente trabalho. Os resultados obtidos com o código desenvolvido pelo autor do presente trabalho foram comparados com o modelo analítico apresentado por Shah e Jain (2015).

*Palavras-Chave:* CHT, Conjugate Heat Transfer, Acoplamento térmico, Sistemas Lineares e não-Lineares.

NABBOUT, K. O. **Coupling methods for problems with thermal interaction between fluid and solid.** 2020. 105 p. Master Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

## ABSTRACT

The analysis of problems of thermal interaction between fluid and solid in a coupled manner represented a major advance for the development of equipment and thermal systems present in the daily lives of people and companies. Many advances have been made since the first works presented in the 1960s, in which analytical solutions to problems with simple geometries emerged. With the advance of the processing capacity of computers and the development of new numerical methods, increasingly accurate solutions to CHT problems (*Conjugate Heat Transfer*) are achieved, which results in the development of increasingly efficient processes . The main objective of the present work is to study ways to make the thermal coupling between different subdomains and to implement a computational code capable of solving a thermal transfer problem in a conjugated manner. The chosen problem was the flow over a flat plate, which has an analytical solution that will be used to validate the numerical and computational methods used. The results obtained were compared with the analytical model presented by Shah e Jain (2015).

*Keywords: CHT, Conjugate Heat Transfer, Thermal Coupling, Linear and Non-Linear Systems.*

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Motivação e objetivo</b>	<b>1</b>
<b>2 Introdução aos problemas térmicos conjugados</b>	<b>5</b>
<b>3 Acoplamento em problemas térmicos conjugados</b>	<b>8</b>
3.1 Acoplamento monolítico e particionado . . . . .	8
3.2 Troca de informação na interface . . . . .	12
<b>4 Métodos iterativos para solução de sistemas lineares</b>	<b>18</b>
4.1 Separação de Matriz . . . . .	18
4.2 Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e Relaxação . . . . .	21
4.3 Métodos do subespaço de Krylov . . . . .	23
4.3.1 Método do Gradiente Conjugado ( <i>CG</i> ) . . . . .	25
4.3.2 Método do Gradiente bi-Conjugado (BiCG) . . . . .	29
4.3.3 Método do Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (BiCGSTAB) . . . . .	31
<b>5 Métodos para solução de sistemas não-lineares</b>	<b>32</b>
5.1 Método de Newton . . . . .	32
5.2 Métodos quase-Newton . . . . .	33
5.2.1 Método das secantes . . . . .	34
5.2.2 Método de Broyden . . . . .	35
<b>6 Metodologia</b>	<b>36</b>
6.1 Modelo Físico . . . . .	36
6.1.1 Modelo físico para o sólido . . . . .	37
6.1.2 Modelo físico para o fluido . . . . .	37
6.2 Modelo matemático diferencial . . . . .	38

6.2.1	Modelo matemático diferencial para o sólido . . . . .	38
6.2.2	Modelos matemáticos diferenciais para o fluido . . . . .	39
6.3	Modelo matemático numérico . . . . .	43
6.3.1	Modelo utilizado para validação . . . . .	43
6.3.2	Modelo em regime transiente . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>65</b>
7.1	Validação . . . . .	65
7.1.1	Comentários gerais sobre a validação . . . . .	73
7.2	Modelos transientes . . . . .	75
7.2.1	Cuidados com o processo transiente . . . . .	76
7.2.2	Verificação do modelo transiente . . . . .	80
7.2.3	Modelos extras para o caso transiente geral . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>89</b>
8.1	Conclusões . . . . .	89
8.2	Trabalhos futuros . . . . .	90
	<b>Referências</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Solução analítica do caso de validação</b>	<b>94</b>
<b>B</b>	<b>Equação de Blasius para camada limite sobre uma placa plana</b>	<b>98</b>

## Lista de Figuras

1.1	Desenvolvimento do perfil de velocidade de um fluido em um canal . . . . .	1
2.1	Análise do perfil de temperaturas do fluxo no interior de um trocador de calor. . . . .	6
3.1	Esquema ilustrativo do método monolítico. . . . .	8
3.2	Esquema ilustrativo do método particionado. . . . .	9
3.3	Esquema ilustrativo para o acoplamento fraco. . . . .	10
3.4	Esquema ilustrativo para o acoplamento forte utilizando-se o método Bloco-Gauss-Seidel. . . . .	12
3.5	Diferentes métodos de acoplamento. . . . .	13
4.1	Esboço gráfico representando o método da Máxima Descida. . . . .	26
4.2	Esboço gráfico representando a combinação linear feita pelo método CG para encontrar a nova direção de busca. . . . .	28
5.1	Representação gráfica do método de Newton para uma função de um variável. . . . .	33
5.2	Representação gráfica do método das secantes para uma função de uma variável. . . . .	34
6.1	Esboço do modelo físico para o problema de interesse (escoamento laminar sobre uma placa plana) . . . . .	36
6.2	Esboço das Práticas A e B utilizadas para discretização dos domínios. . . . .	44
6.3	Esboço ilustrativo da malha utilizada para discretizar o fluido para o caso de validação. . . . .	45
6.4	Esboço ilustrativo da malha utilizada para discretizar o sólido para o caso de validação. . . . .	46
6.5	Representação da notação utilizada para identificar os volumes de controle. . . . .	49
6.6	Esboço ilustrativo da técnica dos volumes fictícios para aplicação das condições de contorno. . . . .	52
6.7	Esboço ilustrativo da segunda malha utilizada para discretizar o fluido para o modelo transiente. . . . .	57
6.8	Esboço ilustrativo da segunda malha utilizada para discretizar o sólido para o modelo transiente. . . . .	58
6.9	Fluxograma para o método do passo fracionado. . . . .	59



7.1	Perfis de velocidade, para diferentes posições da placa obtidos através da solução da equação de Blasius. . . . .	67
7.2	Representação das condições de contorno utilizadas para o modelo de validação do fluido. . . . .	68
7.3	Representação das condições de contorno utilizadas para o modelo de validação do sólido. . . . .	69
7.4	Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada $u_{in} = 0,01m/s$ . . . . .	70
7.5	Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada $u_{in} = 0,05m/s$ . . . . .	71
7.6	Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada $u_{in} = 0,1m/s$ . . . . .	72
7.7	Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada $u_{in} = 0,2m/s$ . . . . .	73
7.8	Fluxo térmico enviado do sólido para o fluido ao longo da interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada $u_{in} = 0,1m/s$ . . . . .	74
7.9	Perfis de velocidade, para diferentes posições da placa obtidos através da solução das equações de Navier-Stokes. . . . .	76
7.10	Camada limite fluidodinâmica laminar sobre uma placa plana, obtida através da solução das equações de Navier-Stokes. A velocidade $u$ é dada em $m/s$ . . . . .	77
7.11	Perfil de temperaturas na interface para o fluido e para o sólido para quatro diferentes malhas: (a) malha A, (b) malha B, (c) malha C e (d) malha D. . . . .	79
7.12	Fluxo térmico calculado no subdomínio fluido para três instantes de tempo diferentes: (a) 2s , (b) 20s e (c) 200s. . . . .	81
7.13	Comparação entre os perfis de temperatura obtidos através do modelo analítico e da simulação com o modelo geral transiente. . . . .	82
7.14	Distribuição de temperaturas para o subdomínio fluido. . . . .	83
7.15	Distribuição de temperaturas para o subdomínio sólido. . . . .	83
7.16	Perfil de temperatura na interface. . . . .	85
7.17	Distribuição de temperaturas para o subdomínio fluido. . . . .	85
7.18	Distribuição de temperaturas para o subdomínio sólido. . . . .	86
7.19	Perfil de temperatura na interface. . . . .	86

7.20	Distribuição de temperaturas para o subdomínio fluido. . . . .	87
7.21	Distribuição de temperaturas para o subdomínio sólido. . . . .	87

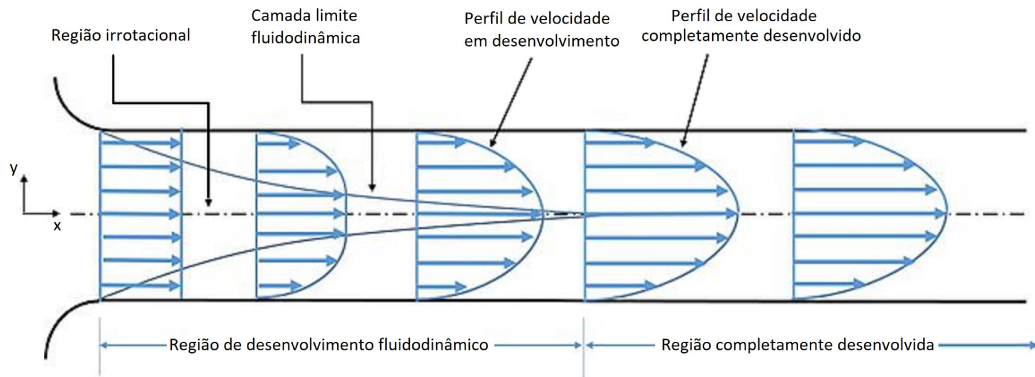
## Lista de Tabelas

1.1	Valores típicos do coeficiente de troca de energia térmica por convecção. . .	4
3.1	Condições de contorno para a i-ésima iteração do método FFTB. . . . .	14
3.2	Condições de contorno para a i-ésima iteração do método TFFB. . . . .	15
6.1	Condições de contorno utilizadas para o subdomínio sólido. . . . .	40
6.2	Condições de contorno para a equação de balanço de quantidade de movimento linear. . . . .	41
6.3	Condições de contorno térmicas para o subdomínio fluido. . . . .	43
6.4	Discretização das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para o caso de validação. . . . .	53
6.5	Discretização das condições de contorno de terceiro tipo para o caso de validação. . . . .	56
6.6	Discretização das condições de contorno de Neumann para a malha da Prática B. . . . .	62
6.7	Discretização das condições de contorno de terceiro tipo para a malha da Prática B. . . . .	63
7.1	Solução obtida por Cengel e Cimbala (2015) para a equação de Blasius para camada limite laminar sobre uma placa plana. . . . .	65
7.2	Solução para a equação de Blasius para camada limite laminar sobre uma placa plana (presente trabalho). . . . .	66
7.3	Comparação entre os resultados obtidos por Cengel e Cimbala (2015) e aqueles obtidos com o presente trabalho. . . . .	67

# 1 Motivação e objetivo

Ao se analisar um escoamento (tanto interno quanto externo) de um fluido, percebe-se que, do ponto de vista fluidodinâmico, as condições de contorno utilizadas são coerentes e representam bem a física do problema. Tomando-se como exemplo o escoamento de um fluido no interior de um canal, como mostrado na Fig. 1.1, tem-se, nas paredes, condição de não deslizamento, ou seja, a velocidade do fluido é a mesma da parede. Essa é uma condição dita de primeiro tipo, ou de Dirichlet, em que a função (no caso a velocidade) assume um valor prescrito. Neste mesmo exemplo, é comum se utilizar condição de Dirichlet na entrada do canal, ao se impor o perfil de velocidades. Na região completamente desenvolvida do escoamento não há mais variação de velocidade na direção  $x$  (horizontal). Dessa forma, utiliza-se, na saída do canal, uma condição dita de segundo tipo, ou de Neumann, em que a derivada da função (no caso a velocidade) assume um valor prescrito. Matematicamente, essas condições de contorno podem ser expressas, para um canal de comprimento  $L$ , altura  $H$  e em regime permanente, da seguinte maneira:  $u(0, y) = \phi_l$ ,  $u(x, +\frac{H}{2}) = \phi_t$ ,  $u(x, -\frac{H}{2}) = \phi_b$  e  $\frac{\partial u(L, y)}{\partial x} = \phi_r$ . Em que  $\phi_l$ ,  $\phi_t$ ,  $\phi_b$  e  $\phi_r$  são funções quaisquer.

Figura 1.1: Desenvolvimento do perfil de velocidade de um fluido em um canal



Fonte: Adaptado de [https://en.wikipedia.org/wiki/Entrance\\_length](https://en.wikipedia.org/wiki/Entrance_length).

As condições de contorno são impostas às Equações Diferenciais Ordinárias ou Parciais de modo a especificar os valores que a função e a derivada da função, respectivamente, assumem nas fronteiras do domínio. Outras formas de condição de contorno podem ser empregadas, como, por exemplo, as condições de Cauchy (Riley, Hobson e Bence (2006)) e as condições de contorno de Robin (Gustafson e Abe (1998)), que consistem, basicamente,

na combinação das condições de contorno de primeiro e de segundo tipo (Dirichlet e Neumann).

Hahn e Özisik (2012) apresentam alguns tipos de condições de contorno para problemas de transferência de energia térmica. Nesses tipos de problema, três abordagens são comumente utilizadas: temperatura prescrita (condição de primeiro tipo, ou Dirichlet), fluxo prescrito (condição de segundo tipo, ou Neumann) ou balanço de energia térmica (condição de terceiro tipo, ou Robin). Essas condições são representadas, respectivamente, pelas equações a seguir:

$$T_{surface} = T_0 \quad \text{ou} \quad T_{surface} = f_1(r, t). \quad (1.1)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{surface} = q_0'' \quad \text{ou} \quad -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{surface} = f_2(r, t). \quad (1.2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{surface} = h(T_{surface} - T_\infty(r, t)). \quad (1.3)$$

Nas equações acima,  $r$  é a posição,  $k$  representa o coeficiente de condutividade térmica do material, com unidades de  $\frac{W}{mK}$  e  $h$  é o coeficiente de convecção térmica, com unidades de  $\frac{W}{m^2K}$ . Na Eq. 1.1,  $T_0$  é uma temperatura prescrita constante e  $f_1(r, t)$  é uma distribuição de temperaturas prescrita, função da posição e do tempo. Na Eq. 1.2,  $q_0''$  representa um fluxo prescrito constante e  $f_2(r, t)$  é uma distribuição prescrita de fluxo de energia térmica função da posição e do tempo. Na Eq. 1.3,  $T_\infty(r, t)$  representa a temperatura ambiente do fluido, que pode ser constante ou variar em função da posição e do tempo.

Do ponto de vista matemático, os tipos de condição de contorno utilizados tanto em problemas fluidodinâmicos quanto em problemas de transferência de energia térmica cumprem o mesmo objetivo, fornecer informações para a solução, na fronteira, da EDO ou EDP que modela o problema de interesse. Entretanto, muitas vezes as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann não representam tão bem a física da grande maioria dos problemas de engenharia que envolvem transferência térmica na forma de calor, diferentemente daqueles problemas de natureza puramente fluidodinâmica, como o exemplo já citado anteriormente.

Imagine o mesmo exemplo do escoamento no interior de um canal, como mostrado na Fig. 1.1, mas desta vez modelando-se o balanço de energia entre as paredes do canal e o fluido que passa em seu interior. Utilizar Dirichlet como condição de contorno para as paredes significaria dizer que elas manteriam a mesma temperatura (ou distribuição de temperaturas) ao longo de todo o canal. Tal condição é um tanto quanto difícil de ser modelada na prática, seria necessária a montagem de um experimento extremamente bem controlado para conseguir tais condições. Considerando-se a realidade cotidiana de indústrias e engenheiros, isso não é algo comum, ou seja, a distribuição de temperatura teria que ser conhecida para ser imposta na simulação. Condições de contorno térmicas de primeiro tipo são fisicamente representativas na maioria dos casos, mas necessita-se conhecer a distribuição espaço-temporal para ser imposta na modelagem. Elas são, no entanto, as mais fáceis de serem aplicadas. Nada impede que elas sejam utilizadas como forma de se obter resultados aproximados para problemas desse tipo, o que é viável, a depender do nível de acurácia desejado. Situações em que as condições de contorno com temperatura prescrita podem ser aplicadas com boa conformidade com a realidade são problemas nos quais ocorrem mudanças de fase como, por exemplo, um spray de resfriamento em que a superfície permanecerá constantemente na temperatura de evaporação do fluido, desde que seja aplicado fluido o bastante para manter a superfície molhada e que o fluxo térmico na forma de calor seja suficiente para manter o processo.

Condições de contorno de segundo tipo podem ser representadas fisicamente por aquecedores, por exemplo, uma fina fita elétrica que, com uma baixa resistência de contato e o devido controle pode fornecer um fluxo de energia térmico prescrito. Contudo, assim como ocorre para a temperatura prescrita, muitas vezes o controle para que se tenha um fluxo prescrito é muito complexo e acaba não sendo algo representativo de muitos problemas de interesse na engenharia.

Condições de contorno de terceiro tipo, ou de balanço de energia térmica, são diferentes das condições de primeiro tipo (temperatura prescrita) e de segundo tipo (fluxo térmico prescrito), uma vez que nem a temperatura e nem o fluxo são conhecidos, mas sim uma combinação entre os dois. Do ponto de vista matemático, condições de contorno de balanço de energia térmica são as que fornecem maior complexidade, entretanto, do ponto de vista físico, elas são as mais fáceis de serem reproduzidas. Esse tipo de condição de contorno fornece boa coerência com a grande maioria dos problemas de engenharia. O grande desafio

para utilizá-las, consiste em encontrar o coeficiente de calor por convecção térmica ( $h$ ), uma vez que ele é função de várias variáveis, algumas delas podendo ser bem complexas, como a geometria e as condições do escoamento. Hahn e Özisik (2012) apresentam alguns valores típicos de  $h$  para algumas aplicações, como pode ser visto na Tab. 1.1.

Percebe-se que o valor de  $h$  é extremamente sensível às condições do escoamento e à geometria. Vários experimentos e estudos foram feitos ao longo do tempo e é possível utilizar valores de  $h$  tabelados em várias aplicações de engenharia, bem como várias correlações matemáticas para problemas específicos. Entretanto, para aplicações que exigem um nível maior de acurácia e representatividade, outros métodos devem ser aplicados.

O foco principal do presente trabalho é apresentar formas de como implementar as condições de contorno de primeiro, segundo e terceiro tipo em problemas conjugados de transferência de energia térmica (*CHT*), do inglês, *Conjugate Heat Transfer* e, em seguida, apresentar resultados de simulações feitas em código próprio utilizando-se alguns dos métodos apresentados.

Tabela 1.1: Valores típicos do coeficiente de troca de energia térmica por convecção.

Type of Flow <sup>a</sup>	$h$ , W/(m <sup>2</sup> · K)
<i>Free Convection, <math>\Delta T = 25</math> K</i>	
0.25-m vertical plate in:	
Atmospheric air	5
Engine oil	40
Water	440
0.02-m (OD) horizontal cylinder in:	
Atmospheric air	10
Engine oil	60
Water	740
<i>Forced Convection</i>	
Atmospheric air at 25 K with $U_{\infty} = 10$ m/s over $L = 0.1$ -m flat plate	40
Flow at 5 m/s across 1-cm (OD) cylinder of:	
Atmospheric air	90
Engine oil	1,800
Water flow at 1 kg/s inside 2.5-cm (ID) tube	10,500
<i>Boiling of Water at 1 atm</i>	
Pool boiling in a container	3,000
Pool boiling at peak heat flux	35,000
Film boiling	300
<i>Condensation of Steam at 1 atm</i>	
Film condensation on horizontal tubes	9,000–25,000
Film condensation on vertical surfaces	4,000–11,000
Dropwise condensation	60,000–120,000

<sup>a</sup>OD = outer diameter and ID = inner diameter.

Fonte: Hahn e Özisik (2012)

## 2 Introdução aos problemas térmicos conjugados

No começo da década de 1960, iniciou-se a solução de problemas de transferência de energia térmica utilizando-se métodos chamados conjugados ou acoplados. Daí o termo *Conjugate Heat Transfer (CHT)*, que se refere a uma classe de problemas que envolve variação de temperatura entre sólido e fluido devido à interação térmica entre eles. Em outras palavras, são problemas contendo dois ou mais subdomínios com fenômenos modelados com diferentes equações diferenciais. Ao se resolver o problema em cada subdomínio, as soluções devem, então, ser conjugadas/acopladas. O mesmo procedimento pode ser utilizado se o problema é modelado com uma única equação diferencial, mas os subdomínios apresentam diferentes propriedades físicas e geométricas.

Em um problema conjugado, a distribuição de temperatura e fluxo de energia térmica ao longo da interface entre um fluido e um sólido é desconhecida. Então, as soluções analíticas de problemas conjugados dependem de métodos que determinam a transferência de energia térmica de superfícies não isotérmicas arbitrárias. Resolvendo-se o sistema de equações para camada limite para uma superfície não isotérmica arbitrária, obtém-se a equação  $q_{w1} = f_1[T_w(x)]$ . A outra relação entre as mesmas variáveis,  $q_{w2} = f_2[T_w(x)]$ , pode ser obtida resolvendo-se a equação de condução para o sólido. Em seguida, utilizando-se a condição conjugada,  $q_{w1} = q_{w2}$ , encontra-se o campo de temperaturas,  $f_1[T_w(x)] = f_2[T_w(x)]$ .

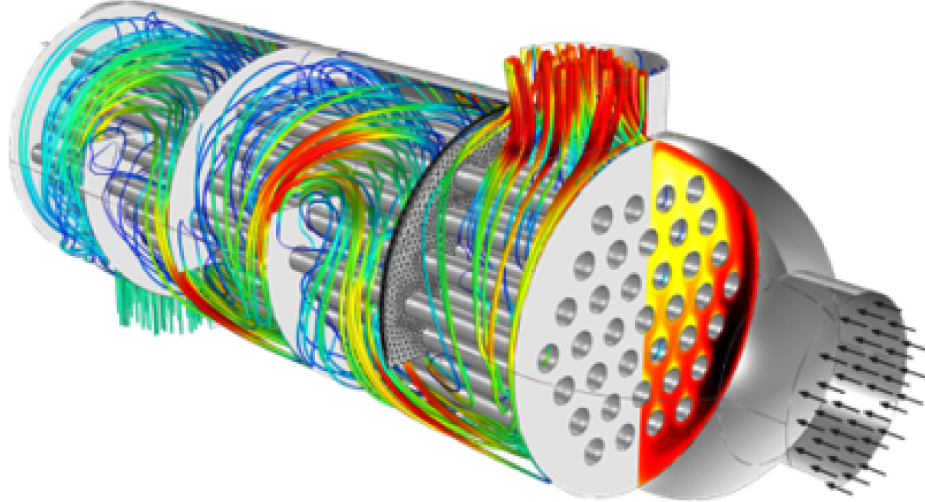
Por exemplo, o fluxo térmico entre um corpo e um fluido passando por ele é um problema conjugado, pois a transferência de energia térmica dentro do corpo é modelada com a equação de condução, enquanto que a transferência de energia térmica no fluido é modelada com a equação de Navier-Stokes/energia térmica ou com uma equação para camada limite.

A transferência de energia térmica conjugada corresponde à combinação da transferência em sólidos e em fluidos, sendo que em sólidos o modo de transferência térmica dominante é a condução, enquanto que em fluidos a convecção é frequentemente dominante. Combinar de maneira eficiente os fenômenos de transferência térmica entre sólidos e fluidos é a chave para o desenvolvimento de melhores projetos de, por exemplo, resfriadores, aquecedores e/ou trocadores térmicos, como pode ser visto na Fig. 2.1. A interação térmica entre fluido e sólido é algo muito comum e está presente na maioria dos problemas de engenharia,



uma vez que em muitos casos há o escoamento de um fluido ao redor de um sólido, ou até mesmo sólidos imersos em um fluido.

Figura 2.1: Análise do perfil de temperaturas do fluxo no interior de um trocador de calor.



Fonte: <https://www.comsol.pt/heat-transfer-module>

No começo da década de 1960, Perelman (1961) iniciou a análise de problemas térmicos conjugados em problemas como o escoamento laminar ao redor de uma placa plana sujeita a processos transformadores de energia, por exemplo o efeito Joule. Em seu trabalho, foi utilizado o método de Lighthill, apresentado por Lighthill (1950), o qual é baseado na distribuição linear de velocidades na camada limite térmica. Segundo Dorfman e Renner (2009), a validade dessa suposição melhora conforme o número de Prandtl do fluido aumenta. Para o caso em que o valor de  $Pr$  é pequeno, a velocidade através da camada limite pode ser considerada igual à velocidade do escoamento externo.

Desde então, novos métodos para solução de problemas de CHT têm sido apresentados, possibilitando a modelagem e a investigação em várias aplicações nas mais diversas áreas da ciência, como, por exemplo, nos setores aeroespacial e nuclear, em componentes eletrônicos e em interações térmicas meteorológicas. Luikov et al. (1970) apresentam a solução na forma de séries de potência para um problema térmico conjugado de um escoamento sobre uma placa plana. No ano seguinte, Luikov, Aleksashenko e Aleksashenko (1971) apresentam métodos para resolver problemas de calor conjugado tanto em escoamentos internos quanto externos. O método desenvolvido para problemas térmicos conjugados internos é baseado na redução do problema em uma única equação integral para a temperatura na superfície. O método permite solução exata para regimes transiente e permanente. Em problemas térmicos conjugados externos, o método é baseado na expansão em séries de potências do

parâmetro da transformada senoidal de Fourier generalizada do perfil de temperaturas do escoamento sobre uma superfície.

Dorfman e Renner (2009) faz um apanhado de quase duzentas publicações sobre o tema e mostra, também, soluções analíticas de problemas de CHT. As técnicas para estudar estes tipos de problemas foram evoluindo com o tempo e hoje é possível substituir a maioria das abordagens empíricas baseadas na obtenção do coeficiente convectivo ( $h$ ), abordagens essas que datam desde a época de Newton, como mostrado por Besson (2012).

A seguir, alguns métodos para abordar e resolver problemas de CHT serão apresentados.

### 3 Acoplamento em problemas térmicos conjugados

A abordagem para se resolver problemas de CHT consiste em resolver simultaneamente a equação de condução de energia térmica para o sólido e Navier-Stokes e energia térmica para o fluido, de modo que o campo de temperaturas e o fluxo térmico na interface entre os subdomínios sejam encontrados com a solução do problema acoplado. Segundo Verstraete e Scholl (2016), desde a segunda metade do século passado, muitos métodos analíticos para lidar com problemas de CHT foram propostos. Duas estratégias principais são utilizadas, dependendo de como a continuidade de temperatura e fluxo térmico é imposta na superfície comum entre sólido e fluido.

#### 3.1 Acoplamento monolítico e particionado

A primeira estratégia integra as equações do fluido e do sólido em um único sistema e trata a continuidade de temperatura e fluxo térmico implicitamente. Esta abordagem, esquematizada na Fig. 3.1, é chamada monolítica e, segundo Verstraete e Scholl (2016), é computacionalmente eficiente, mas requer que todos os subdomínios (sólidos e fluidos) sejam resolvidos de maneira unificada. Nesta abordagem, nenhuma outra restrição é adicionada à solução numérica além daquelas inerentes aos métodos numéricos utilizados em cada subsistema, garantindo robustez numérica.

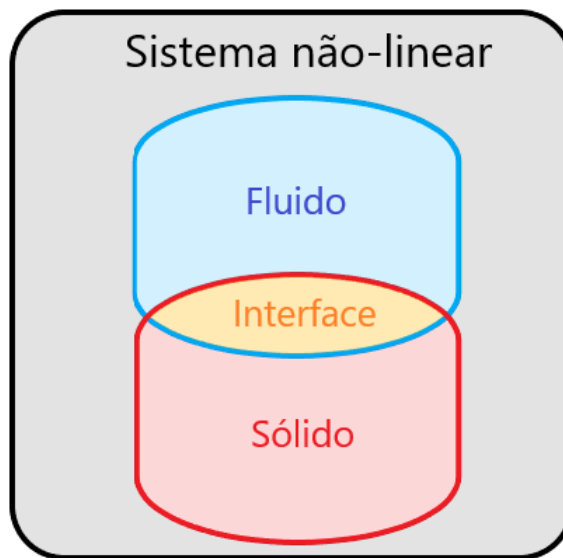
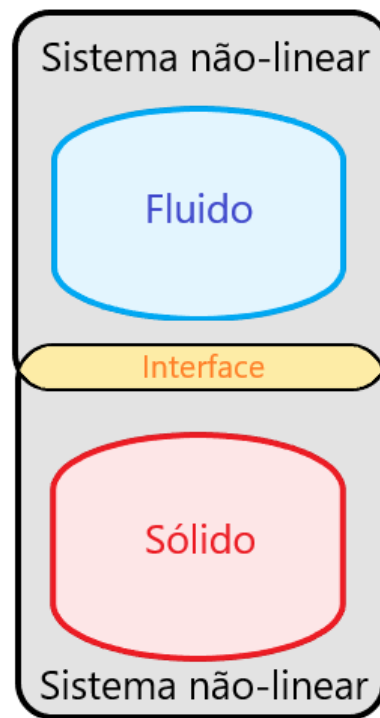


Figura 3.1: Esquema ilustrativo do método monolítico.

Na segunda estratégia, calcula-se separadamente o fluxo e o campo térmicos dos subdomínios sólidos e fluidos fazendo-se um acoplamento através das condições de contorno na interface entre eles. Neste método, esquematizado na Fig. 3.2, comumente chamado de método particionado, pode-se necessitar de iterações sequenciais para obter a continuidade do campo de temperaturas e de fluxo térmico entre os subdomínios, o que pode gerar instabilidades. Verstraete e Scholl (2016) acrescenta ainda que ,em muitos casos, os subdomínios podem apresentar diferenças entre as malhas e as discretizações espaciais, fazendo-se necessárias interpolações nas condições de contorno entre as malhas.

Figura 3.2: Esquema ilustrativo do método particionado.



Fonte: Autoria própria.

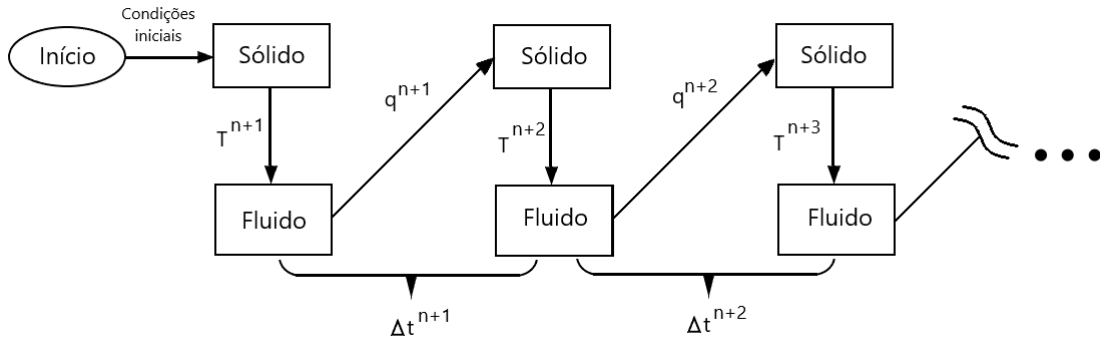
Com a abordagem monolítica, garante-se, intrinsecamente, a continuidade de temperatura e fluxo térmico na interface, não necessitando o uso de condições de interface e interpolações que podem resultar em problemas de estabilidade. Contudo, a abordagem monolítica se torna impraticável em configurações industriais mais complexas, ao contrário do método particionado que, com as estratégias adequadas para problemas multi-físicos, pode ser uma abordagem viável. Isto se deve ao fato de que o acoplamento monolítico necessita de um código construído especificamente para um dado problema, enquanto que com o acoplamento particionado pode-se utilizar códigos e/ou métodos altamente

adequados e eficientes para resolver cada subdomínio.

Dentro do método particionado, existem ainda duas maneiras diferentes, comumente utilizadas na literatura, de se fazer o acoplamento entre os subdomínios. Ribeiro Neto (2016) apresenta as ideias principais nessas formas de acoplamentos.

O primeiro subgrupo do método particionado é chamado de acoplamento fraco. Nesse método, as informações na interface são passadas de um subdomínio para o outro uma única vez a cada passo de tempo. Este método também é conhecido como CSS (*Conventional Sequential Staggered*), que traduzido significa sequência atrasada convencional, e está representado esquematicamente na Fig. 3.3.

Figura 3.3: Esquema ilustrativo para o acoplamento fraco.



Fonte: Adaptado de Ribeiro Neto (2016)

Nesta figura é apresentada uma maneira de se fazer a troca de informações na interface (com fluxo térmico e temperatura), outras formas de troca de informações serão apresentadas na seção seguinte. A seguir é apresentada uma sequência explicativa para o acoplamento apresentado na Fig. 3.3.

1. Fornece-se as condições iniciais e de contorno para o sólido.
2. Efetua-se o cálculo da equação da energia térmica para o sólido com as informações fornecidas.
3. Com os resultados obtidos para o sólido, calcula-se o fluxo térmico na interface.
4. Fornece-se o fluxo térmico calculado anteriormente como condição de contorno para o fluido.
5. Efetua-se o cálculo das equações de Navier-Stokes e energia térmica para o fluido com as informações fornecidas.

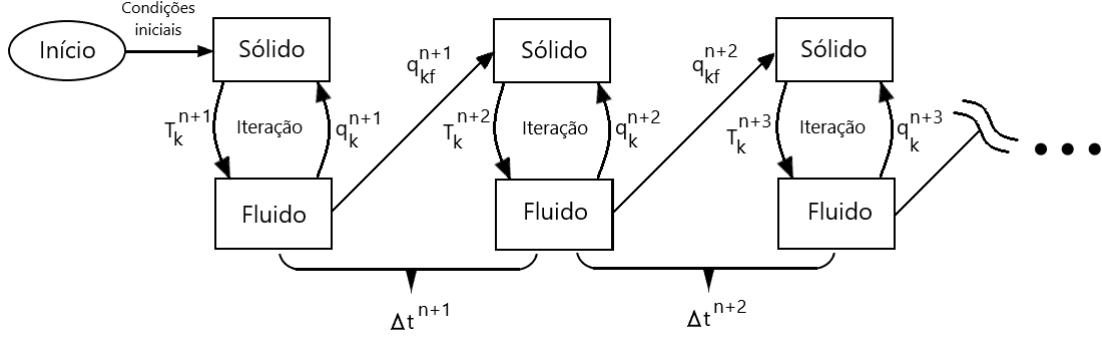
6. Obtém-se um novo campo de temperaturas para o fluido. A distribuição de temperatura na interface é fornecida como condição de contorno para iniciar os cálculos do passo de tempo seguinte relativos ao sólido.
7. O processo é repetido até o fim da simulação.

O segundo subgrupo do método particionado é chamado de acoplamento forte. Nele, as informações na interface são passadas de um subdomínio para o outro até que se alcance a continuidade das condições de contorno ou até um número máximo de iterações para cada passo de tempo. O acoplamento forte pode ser visto como uma tentativa de se obter uma solução monolítica utilizando-se um código particionado, uma vez que ele tende à solução do acoplamento monolítico à medida que mais iterações são feitas. Existem vários métodos para se fazer o acoplamento forte, alguns deles serão apresentados adiante neste trabalho. Na Fig. 3.4 pode-se observar um desses métodos, o método Bloco-Gauss-Seidel não linear, cujo funcionamento é explicado a seguir:

1. Fornece-se as condições iniciais e de contorno para o sólido.
2. Efetua-se a solução da equação da energia térmica para o sólido com as informações fornecidas.
3. Com os resultados obtidos para o sólido, calcula-se o fluxo térmico na interface.
4. Fornece-se o fluxo térmico calculado anteriormente como condição de contorno para o fluido.
5. Efetua-se o cálculo das equações de Navier-Stokes e energia térmica para o fluido com as informações fornecidas.
6. Obtém-se um novo campo de temperaturas para o fluido. A distribuição de temperaturas na interface é fornecida como condição de contorno para o sólido reiniciar os cálculos, no mesmo passo de tempo.
7. Repete-se o processo até o número máximo de iterações ou até que haja convergência, ou seja, continuidade de temperatura e fluxo térmico na interface.
8. Uma vez obtida a convergência, a distribuição de temperaturas do fluido na interface é fornecida como condição de contorno para iniciar os cálculos do passo de tempo seguinte relativos ao sólido.

9. O processo é repetido até o fim da simulação.

Figura 3.4: Esquema ilustrativo para o acoplamento forte utilizando-se o método Bloco-Gauss-Seidel.



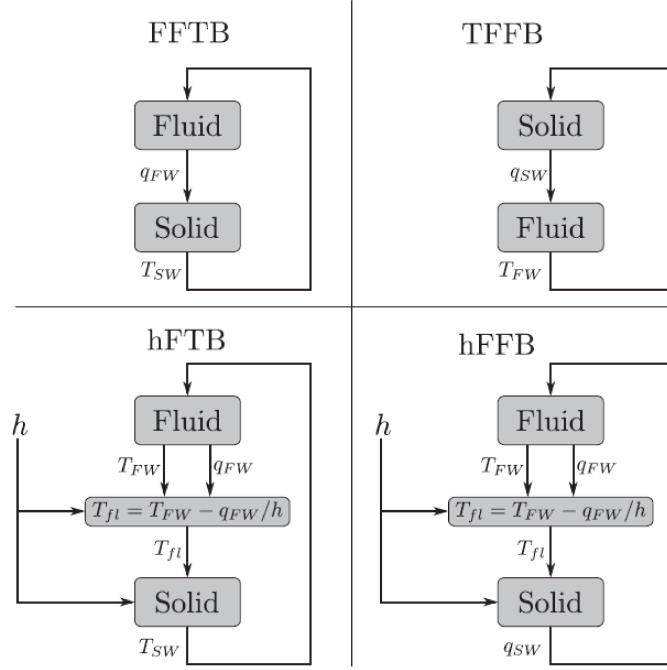
Fonte: Adaptado de Ribeiro Neto (2016)

### 3.2 Troca de informação na interface

A escolha adequada das condições de interface em termos de estabilidade e velocidade de convergência é um dos principais problemas do método particionado. Entretanto, alguns estudos tem sido desenvolvidos para analisar as condições de interface em problemas de CHT. Verstraete e Scholl (2016) faz uma análise de estabilidade para o método particionado e apresenta algumas maneiras de se fazer o acoplamento, como pode ser visto na Fig. 3.5, e que serão explicados a seguir.

A primeira maneira de se fazer o acoplamento é através do método FFTB (*Flux Forward Temperature Back*). Neste método, a distribuição de temperatura na parede é fornecida como condição de contorno para o fluido. Após resolver-se a equação da energia térmica para o fluido, encontra-se o fluxo térmico resultante na interface. Esse fluxo térmico encontrado é, então, utilizado como condição de contorno para o sólido. Após a equação de energia térmica ser resolvida para o sólido com a nova condição de contorno, devolve-se uma nova distribuição de temperatura para o fluido. Este procedimento é repetido até que seja obtida convergência, ou seja, temperatura e fluxo térmico serão contínuos entre os subdomínios sólido e fluido. A estimativa inicial não precisa estar completamente desenvolvida, uma vez que as condições de contorno serão atualizadas iterativamente. Dessa forma, pode-se usar uma distribuição de temperaturas qualquer como condição de contorno inicial na interface, mas quanto mais próxima da condição real, a qual é

Figura 3.5: Diferentes métodos de acoplamento.



Fonte: Verstraete e Scholl (2016)

desconhecida, mais rápida será a convergência. Vale ressaltar que a malha para o fluido pode ser diferente da malha para o sólido, fazendo-se necessário interpolação.

A convergência entre os subdomínios é obtida quando a temperatura e o fluxo térmico na interface sofre alterações menores que uma tolerância (definida pelo usuário) entre duas iterações sucessivas. A continuidade da temperatura e do fluxo é então obtida, uma vez que a distribuição de temperatura utilizada para fluido resultará em um fluxo térmico que, ao ser imposto ao sólido, irá retornar a mesma distribuição de temperaturas para o fluido. Caso haja problemas de convergência, o método pode ser estabilizado usando-se sub-relaxação, como mostrado por Verstraete e Scholl (2016). São apresentadas na Tab. 3.1 as condições de contorno para o método FFTB com e sem sub-relaxação. Com os coeficientes de relaxação  $\beta_T$  e  $\beta_q$  determina-se o peso dado à nova temperatura e fluxo térmico, respectivamente, em relação à condição de contorno anterior. Se  $\beta_T = 0$  e  $\beta_q = 0$ , então não há relaxação e as equações se tornam iguais às do método original.

Com o método FFTB apresentam-se algumas restrições, como por exemplo para o caso de um sólido completamente imerso em um fluido em que todas as condições de contorno térmicas são de segundo tipo (Neumann), então o problema de CHT estará mal condicionado e não poderá ser resolvido em regime permanente, pois a solução da EDP



Tabela 3.1: Condições de contorno para a  $i$ -ésima iteração do método FFTB.

Sem sub-relaxação	Com sub-relaxação
$q_{sw}^i = q_{fw}^i$	$q_{sw}^i = \beta_q q_{sw}^{i-1} + (1 - \beta_q) q_{fw}^i$
$T_{fw}^{i+1} = T_{sw}^i$	$T_{fw}^{i+1} = \beta_T T_{fw}^i + (1 - \beta_T) T_{sw}^i$

Fonte: Autoria própria.

elíptica característica do problema não apresentará a propriedade de unicidade, ou seja, existem várias soluções para o mesmo problema. Neste caso, em que apenas condições de contorno de Neumann foram impostas, a equação da energia para o sólido pode ser resolvida em regime transiente. Dessa forma, ambos os domínios serão resolvidos com métodos de marcha no tempo e com troca de informações na interface em passos de tempos regulares.

Uma alternativa para o método FFTB seria impor como condição de contorno ao fluido não mais a temperatura, mas sim o fluxo térmico, e este, por sua vez, retornaria uma distribuição de temperaturas para o sólido, que após resolvido retornaria um fluxo térmico atualizado para o fluido e esse processo se repetiria até a convergência. Este método é chamado TFFB, do inglês, *Temperature Forward Flux Back*. O esquema deste método pode ser visto no canto superior direito da Fig. 3.5. Com esse método, parte-se de uma estimativa inicial da distribuição de temperatura na parede para a solução da equação da energia térmica para o sólido que iniciará o ciclo de acoplamento. Assim como para o método FFTB, a estimativa inicial pode ser qualquer, uma vez que, caso haja convergência, o método convergirá para a condição de contorno correta iterativamente. Pode-se utilizar o mesmo critério de convergência daquele utilizado para o método FFTB, ficando a critério do usuário/programador de acordo com a sua intenção. Com isso, a continuidade da temperatura e do fluxo é então obtida, uma vez que a distribuição de temperaturas utilizada pelo sólido resultará em um fluxo térmico que ao ser imposto ao fluido irá retornar a mesma distribuição de temperaturas para o sólido. Caso haja problemas de convergência, o método pode ser estabilizado usando-se sub-relaxação, como mostrado na Tab. 3.2.

Com o terceiro método, utiliza-se o conceito de convecção térmica, como mostrado na Eq. 3.1, para atualizar as condições de contorno para o subdomínio sólido, o qual, após

Tabela 3.2: Condições de contorno para a i-ésima iteração do método TFFB.

Sem sub-relaxação	Com sub-relaxação
$q_{fw}^i = q_{sw}^i$	$q_{fw}^i = \beta_q q_{fw}^{i-1} + (1 - \beta_q) q_{sw}^i$
$T_{sw}^{i+1} = T_{fw}^i$	$T_{sw}^{i+1} = \beta_T T_{sw}^i + (1 - \beta_T) T_{fw}^i$

Fonte: Autoria própria.

os cálculos, retornará um campo de temperaturas para o fluido. Este método é chamado *Heat Transfer Coefficient Forward Temperature Back* (hFTB) e está mostrado na parte inferior esquerda da Fig. 3.5. Com esse método, começa-se com uma distribuição de temperatura inicial na interface para se resolver o subdomínio fluido, que após resolvido, fornecerá informações necessárias para o cálculo do coeficiente de convecção térmica  $h$  e da temperatura ambiente do fluido  $T_{fl}$ . Os valores de  $h$  e de  $T_{fl}$  são então substituídos na Eq. 3.1, resultando em uma relação entre  $T_w$  e  $q_w$  que pode ser usada como condição de contorno para o subdomínio sólido:

$$q_w = h(T_w - T_{fl}). \quad (3.1)$$

A vantagem em se usar o conceito expresso com a equação anterior como condição de contorno consiste no fato de que  $q_w$  estará, automaticamente, em função do novo valor de  $T_w$ , o qual retornará como condição de contorno para o fluido, de modo que o loop será repetido até a convergência. O grande desafio consiste no cálculo de  $h$  e de  $T_{fl}$  através da solução da equação da energia. Tanto  $h$  quanto  $T_{fl}$  devem satisfazer a Eq. 3.1, em que  $T_w$  é a condição de contorno imposta e  $q_w$  é o fluxo térmico encontrado após se resolver o fluido. Entretanto, existem duas variáveis para apenas uma equação.

Existem algumas formas de se contornar este problema, a mais simples delas talvez seja, simplesmente, impor um valor positivo constante para  $h$ . Será mostrado a seguir que, mesmo não havendo fluxo térmico entre as interfaces, o método resulta na continuidade de temperatura e fluxo entre os subdomínios. O valor de  $h$  apenas tem influencia na taxa de convergência do problema e não afeta o resultado final. As condições de contorno para a i-ésima iteração deste método são apresentadas a seguir:

$$q_{fw}^i = h(T_{fw}^i - T_{fl}^i). \quad (3.2)$$

$$q_{sw}^i = h(T_{sw}^i - T_{fl}^i). \quad (3.3)$$

$$T_{fw}^{i+1} = T_{sw}^i. \quad (3.4)$$

A Eq. 3.2 é usada para calcular o valor de  $T_{fl}$ , em função do valor de  $T_{sw}$  e  $q_{fw}$  obtidos pela solução do subdomínio fluido. A Eq. 3.3 é a condição de contorno para o sólido. A Eq. 3.4 é a condição de contorno para a próxima iteração do fluido. Subtraindo-se a Eq. 3.2 da Eq. 3.3, obtém-se:

$$q_{sw}^i - q_{fw}^i = h(T_{sw}^i - T_{fw}^i). \quad (3.5)$$

Substituindo-se a Eq. 3.4 na Eq. 3.5, tem-se:

$$q_{sw}^i - q_{fw}^i = h(T_{fw}^{i+1} - T_{fw}^i). \quad (3.6)$$

É possível observar através das Eq. 3.5 e 3.6 que, para  $h > 0$ , se  $|T_{fw}^{i+1} - T_{fw}^i| \longrightarrow 0$ , então  $|q_{sw}^i - q_{fw}^i| \longrightarrow 0$  e  $|T_{sw}^i - T_{fw}^i| \longrightarrow 0$ . Isso mostra que, se a temperatura do fluido não muda de uma iteração para a outra, a continuidade de temperatura e do fluxo térmico através da interface é obtida e o valor de  $h$  não tem influência na solução final, afetando apenas a taxa de convergência. Valores de  $h$  pequenos resultam em grandes diferenças de temperatura entre duas iterações consecutivas, para uma dada diferença de fluxo térmico. O valor escolhido para  $h$  pode tanto acelerar a convergência do método como levá-lo a divergir, sendo necessária uma relação de compromisso entre tempo computacional e estabilidade. Uma vez que o valor de  $h$  pode ser escolhido livremente e não corresponde, necessariamente, ao valor real do coeficiente convecção térmica do problema, ele é chamado de coeficiente convectivo virtual.

O quarto método, postulado por Verstraete e Scholl (2016) como hFFT, do inglês *Heat Transfer Coefficient Forward Flux Back*, é uma alternativa ao hFTB anteriormente visto. A diferença entre os dois é que, o hFFT retorna fluxo térmico como condição de contorno para o fluido, ao contrário do hFTB que retorna uma distribuição de temperaturas.

Assim como no hFTB, o valor de  $h$  não afeta o resultado final, apenas a taxa de convergência. As condições de contorno para a  $i$ -ésima iteração do método hFFT podem

ser descritas como:

$$q_{fw}^i = h(T_{fw}^i - T_{fl}^i). \quad (3.7)$$

$$q_{sw}^i = h(T_{sw}^i - T_{fl}^i). \quad (3.8)$$

$$q_{fw}^{i+1} = q_{sw}^i \quad (3.9)$$

A Eq. 3.7 é usada para calcular, com um valor fixo de  $h$ , o valor de  $T_{fl}$  em função do valor de  $T_{fw}$  e  $q_{fw}$  definidos pela solução da equação da energia térmica para o fluido. A Eq. 3.8 é a condição de contorno para o cálculo da equação da difusão no sólido e resultará em uma nova distribuição de temperaturas  $T_{sw}$  e um novo fluxo térmico  $q_{sw}$  na interface. Com a Eq. 3.9, atualiza-se a condição de contorno utilizada para o fluido na próxima iteração. Subtraindo-se a Eq. 3.7 da Eq. 3.8 e em seguida substituindo-se a Eq. 3.9 no resultado, obtém-se a seguinte equação como resultado:

$$T_{sw}^i - T_{fw}^i = \frac{1}{h}(q_{fw}^{i+1} - q_{fw}^i). \quad (3.10)$$

A Eq. 3.10 implica que, para  $h > 0$ , se  $|q_{fw}^{i+1} - q_{fw}^i| \rightarrow 0$ , então  $|T_{sw}^i - T_{fw}^i| \rightarrow 0$  e  $|q_{sw}^i - q_{fw}^i| \rightarrow 0$ . Logo, assim como para o método hFTB, o valor de  $h$  não afeta a solução final do problema, uma vez que a continuidade de temperatura e de fluxo térmico entre os subdomínios é satisfeita.

## 4 Métodos iterativos para solução de sistemas lineares

Métodos iterativos para solução de sistema lineares são uma alternativa para os chamados métodos diretos, com os quais busca-se a solução de um problema através de métodos matemáticos como, por exemplo, eliminação de Gauss e decomposição LU. Já os métodos iterativos buscam a solução de um sistema linear resolvendo-o iterativamente com aproximações para o vetor solução do sistema. Neste capítulo, o sistema de equações a se resolver é do tipo:

$$Ax = b. \quad (4.1)$$

Em que  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $x$  é o vetor solução e  $b$  é o vetor resultado, também chamado de *rhs*, do inglês, *right hand side*.

Métodos iterativos levam à solução  $x$  de um sistema linear após infinitos passos e em cada passo é necessário o cálculo do resíduo do sistema. Raviart et al. (1998) menciona que para o caso de uma matriz completa, o custo computacional de métodos iterativos é da ordem de  $n^2$  operações para cada iteração, ao passo que o custo total para métodos diretos é da ordem de  $\frac{2}{3}n^3$  operações, em que  $n$  é o tamanho do sistema. Por isso, métodos diretos se tornam proibitivos quando se trata de tempo computacional a medida que  $n$  aumenta. Outra fraqueza em métodos diretos, como a eliminação de Gauss por exemplo, é que normalmente eles requerem o armazenamento de todos os componentes da matriz  $A$ . Isso se torna uma desvantagem, uma vez que em muitas aplicações reais, a matriz  $A$  é esparsa, ou seja, a maioria dos elementos são zeros, o que torna desnecessário o armazenamento desses valores.

### 4.1 Separação de Matriz

Segundo Raviart et al. (1998), uma técnica geral para conceber métodos iterativos lineares consistentes é baseada na separação da matriz  $A$  na diferença entre duas novas matrizes  $S$  e  $T$ , como mostrado na Eq. 4.2:

$$A = S - T. \quad (4.2)$$

Substituindo-se a Eq. 4.2 na Eq. 4.1, obtém-se:

$$Sx = Tx + b. \quad (4.3)$$

Através da Eq. 4.3, pode-se aplicar o método iterativo:

$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b. \quad (4.4)$$

Se este procedimento convergir, ou seja,  $x(k) \rightarrow x$  a medida que  $k \rightarrow \infty$ , então  $x$  é solução do problema original  $Ax = b$ . Entretanto, nem sempre é claro se o método dado pela Eq. 4.4 converge ou não.

Existem várias maneiras possíveis para separar a matriz  $A$ . Algumas opções poderiam levar em consideração dois fatores:

- o novo vetor  $x^{(k+1)}$  deve ser fácil de calcular, ou seja,  $S$  deve ser facilmente inversível (por exemplo  $S$  pode ser diagonal ou triangular);
- o esquema deve convergir o mais rápido possível para a solução.

Estas duas opções são conflitantes, pois a escolha de uma separação que seja fácil de inverter pode não convergir tão rapidamente, ou até mesmo nem converja. No outro extremo, poderia-se convergir para a solução em apenas um passo, fazendo-se  $S = A$  e  $T = 0$ , mas isso tiraria todo o sentido do método de separação.

A Eq. 4.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f. \quad (4.5)$$

Na Eq. 4.5,  $B$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  chamada de matriz de iteração e  $f$  é o vetor obtido através de  $b$  (ou rhs, *right hand side*). Dessa forma, a matriz de iteração da Eq. 4.3 é dada por  $B = S^{-1}T$ , enquanto que  $f = S^{-1}b$ . Alternativamente, a Eq. 4.4 pode ser escrita na forma:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + S^{-1}r^{(k)}. \quad (4.6)$$

Na Eq. 4.6,  $r^{(k)}$  representa o vetor resíduo no passo  $k$  e pode ser calculado da seguinte maneira:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}. \quad (4.7)$$

Vale ressaltar que a matriz  $S$ , além de ser não-singular, deve ser facilmente inversível para que se mantenha baixo custo computacional e que se  $S$  for igual a  $A$  e  $T = 0$ , o método da Eq. 4.6 convergirá em uma única interação, mas ao mesmo custo de um método direto. Raviart et al. (1998) menciona ainda duas propriedades que garantem a convergência da Eq. 4.6, caso sejam cumpridas condições adequadas para a divisão de  $A$ :

- Seja  $A = S - T$ , com  $A$  e  $S$  simétricos e positivos definidos. Se a matriz  $2S - A$  for positiva definida, então o método iterativo da Eq. 4.6 é convergente para qualquer estimativa inicial de  $x_{(0)}$  e  $\rho(B) = \|B\|_A = \|B\|_S < 1$ , onde  $\rho(B)$  representa o raio espectral de  $B$ .
- Seja  $A = S - T$  com  $A$  sendo simétrica e positiva definida. Se a matriz  $S + S^T - A$  é positiva definida, então  $S$  é inversível e o método iterativo da Eq. 4.6 é monotonicamente convergente em relação às normas  $\|\cdot\|_S$  e  $\|\cdot\|_A$ .

Antes de continuar a análise, vale introduzir a seguinte notação:

$$A = L + D + U = S - T. \quad (4.8)$$

Na equação acima,  $L$  é a matriz triangular inferior formada pelos elementos abaixo da diagonal principal de  $A$ ,  $D$  é a matriz formada pelos elementos da diagonal principal de  $A$  e  $U$  é a matriz triangular superior formada pelos elementos acima da diagonal principal de  $A$ .

A seguir, são consideradas três formas de separação, as quais definem os métodos iterativos classicamente utilizados na literatura para se introduzir métodos de solução para sistemas lineares.

1. Método de Jacobi
2. Método de Gauss-Seidel
3. Método de sobre-relaxação sucessiva (SOR)

## 4.2 Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e Relaxação

Os métodos mencionados anteriormente são métodos clássicos para solução de sistemas lineares e é impossível não introduzi-los quando se fala do assunto.

Se a diagonal principal da matriz  $A$  não possuir nenhum termo nulo, pode-se, então, colocar em evidência a variável correspondente de cada equação, obtendo-se o seguinte sistema linear:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

No método de Jacobi, parte-se de uma estimativa inicial para  $x(0)$  e então calcula-se  $x^{(k+1)}$  a partir da seguinte equação:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.10)$$

Com a Eq. 4.10, estabelece-se que a matriz  $A$  foi separada de modo que  $S = D$  e  $T = D - A = L + U$ . Então, a matriz de iteração para o método de Jacobi é dada por:

$$B_J = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A. \quad (4.11)$$

Uma maneira mais geral de se escrever o método de Jacobi é utilizando-se um parâmetro de relaxação  $\omega$ , em que a Eq. 4.10 é substituída pela seguinte equação:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega)x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

Este método é chamado de JOR (*Jacobi Over-Relaxation*) e sua matriz de iteração pode ser reescrita como mostrado na Eq. 4.13 a seguir:

$$B_{J_\omega} = \omega B_J + (1 - \omega)I. \quad (4.13)$$

Da mesma forma, a Eq. 4.6 corresponde a:



$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)}. \quad (4.14)$$

O método apresentado pela Eq. 4.14 é consistente para qualquer  $\omega \neq 0$  e se  $\omega = 1$  ele coincide com o método de Jacobi.

O método de Gauss-Seidel difere do método de Jacobi pelo fato de que, ao invés de se usarem apenas os valores do passo anterior,  $x_i^{(k)}$ , usam-se os valores já disponíveis do no passo atual,  $x_i^{(k+1)}$ . Sendo assim, o método de Gauss-Seidel é pode ser escrito da seguinte maneira:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Este método equivale a dividir  $A$  da seguinte maneira:  $S = D - L$  e  $T = U$ . Dessa forma, a matriz de iteração para o método de Gauss-Seidel pode ser escrita como:

$$B_{GS} = (D - E)^{-1} U. \quad (4.16)$$

Analogamente ao que foi feito para o método de Jacobi, é possível aplicar um coeficiente de relaxação ao método de Gauss-Seidel, o que resultará no seguinte método:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.17)$$

Este método é chamado de SOR (*Successive Over-Relaxation*) e sua matriz de iteração é dada por:

$$B_{SOR} = (I - \omega D^{-1} L)^{-1} [(1 - \omega) I + \omega D^{-1} U]. \quad (4.18)$$

Da mesma forma, a Eq. 4.6 assume a seguinte forma para o método SOR:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left( \frac{1}{\omega} D - L \right)^{-1} r^{(k)}. \quad (4.19)$$

O método apresentado com a Eq. 4.19 é consistente para qualquer  $\omega \neq 0$  e se  $\omega = 1$  ele coincide com o método de Gauss-Seidel. Em particular, se  $\omega \in (0, 1)$  o método é dito de sob-relaxação, enquanto que se  $\omega > 1$  ele é dito de sobre-relaxação.

Uma vez apresentados os métodos, é importante apresentar, mesmo que brevemente, alguns critérios de convergência para eles. Existem algumas classes especiais de matrizes para as quais é possível estabelecer a priori algumas condições de convergência para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel. A seguir, são mostrados alguns teoremas, caso o leitor tenha interesse, Raviart et al. (1998) apresenta a prova de cada um deles:

- Se  $A$  é uma matriz estritamente diagonal dominante por linhas, então os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel são convergentes.
- Se  $A$  e  $2D - A$  são matrizes simétricas e positivas definidas, então o método de Jacobi é convergente e  $\rho(B_J) = \|B_J\|_A = \|B_J\|_D$ , em que  $\rho(B_J)$  é o raio espectral da matriz de iteração para o método de Jacobi.
- Se  $A$  é simétrica positiva definida, então o método JOR é convergente se  $0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$ .
- Se  $A$  é simétrica positiva definida, então o método de Gauss-Seidel é monotonicamente convergente.
- Se o método de Jacobi é convergente, então o método JOR também converge para  $0 < \omega \leq 1$ .

Tendo sido apresentados alguns teoremas acima sobre a convergência dos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel (com e sem relaxação), vale ressaltar duas coisas. A primeira é que, normalmente, o método de Gauss-Seidel é caracterizado por uma melhor taxa de convergência que o método de Jacobi, com a grande vantagem de não necessitar de um vetor para armazenar os valores do passo anterior,  $x^{(k)}$ . A segunda é que, quando se trata de matrizes gerais, nenhuma conclusão prévia pode ser tirada sobre as propriedades de convergência desses métodos.

### 4.3 Métodos do subespaço de Krylov

Segundo Dongarra e Sullivan (2000), no que diz respeito à influência no desenvolvimento e prática da ciência e engenharia no século XX, os métodos do subespaço de Krylov configuram entre as classes mais importantes de métodos numéricos.

O método foi apresentado por Krylov (1931) e sua base pode ser encontrada no teorema de Cayley-Hamilton, que diz que a inversa de uma matriz  $A$  é expressa em termos de

combinações lineares de potências de  $A$ . Os métodos do subespaço de Krylov compartilham a característica de que a matriz  $A$  é apenas um operador, dessa forma ela não precisa ser armazenada ou formada, apenas uma rotina para o produto matriz-vetor  $Ax$  é necessária. Por essa razão, esses métodos são conhecidos como “*matrix-free methods*”.

Antes de mais nada, vale apresentar o subespaço de Krylov, o qual é definido pela Eq. 4.20, em que o vetor  $v \in \mathbf{R}^N$  e  $n \leq N$ .

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n(A, v) = \text{span}(v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v). \quad (4.20)$$

Segundo Vorst (2003), os métodos do subespaço de Krylov podem ser classificados em quatro diferentes classes:

1. Abordagem de Ritz-Galerkin: constrói o vetor  $r_k$  para o qual o resíduo é ortogonal ao subespaço atual, ou seja,  $b - Ax_k \perp \mathcal{K}_k(A, r_0)$ .
2. Abordagem do mínimo resíduo: identifica o  $x_k$  para o qual a norma Euclidiana  $\|b - Ax_k\|_2$  é mínima em  $\mathcal{K}_k(A; r_0)$ .
3. Abordagem de Petrov-Galerkin: encontra um  $x_k$  de modo que o resíduo  $b - Ax_k$  é ortogonal a algum outro subespaço adequado de dimensão  $k$ .
4. Abordagem do mínimo erro: determina  $x_k$  em  $A^T \mathcal{K}_k(A^T; r_0)$  para o qual a norma Euclidiana  $\|x_k - x\|_2$  é mínima.

A abordagem de Ritz-Galerkin leva a métodos bastante conhecidos como os de Gradientes Conjugados, método de Lanczos, FOM e GENCG. A abordagem do mínimo resíduo leva a métodos como GMRES, MINRES e o ORTHODIR. A principal desvantagem desses dois métodos é que, para a maioria dos sistemas assimétricos, eles levam a longas relações de recorrência para a solução aproximada. Isso pode ser amenizado selecionando-se outros subespaços para a condição de ortogonalidade (condição de Galerkin). Fazendo-se isso, obtém-se a terceira abordagem (Petrov-Galerkin), a qual leva a métodos como o Bi-CG (*Bi-Conjugate Gradient*) e o QMR, os quais, trabalham com recorrências pequenas. A quarta abordagem leva aos métodos SYMMLQ e GMERR. Métodos híbridos também já foram propostos, como por exemplo, CGS, Bi-CGSTAB, Bi-CGSTAB( $l$ ), TFQMR, FGMRES e GMRESR.

A escolha de um método entre os vários citados é um problema muito delicado. Se a matriz  $A$  é simétrica positiva definida, então a escolha é fácil: Gradientes Conjugados. Caso contrário, para outros tipos de matrizes, a situação se torna um pouco mais complexa. Tendo em vista a grande variedade de métodos, será apresentada a seguir uma breve introdução aos principais métodos encontrados pelo autor do presente trabalho. Mas antes, vale relembrar algumas propriedades e definições vistas em Álgebra Linear.

1. O produto interno entre dois vetores  $x$  e  $y$  é escrito como  $x^T y$  e representa a soma escalar  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Note que  $x^T y = y^T x$ .
2. Se  $x$  e  $y$  são ortogonais, então o produto interno entre eles é zero, ou seja,  $x^T y = 0$ .
3. A matriz dos coeficientes  $A$  é dita positiva definida se, para qualquer vetor não nulo  $x$ ,  $x^T A x > 0$ .
4. A matriz dos coeficientes  $A$  é dita simétrica se  $A^T = A$ .
5. A matriz dos coeficientes  $A$  é dita singular se ela não admitir uma inversa, ou seja, ela não é inversível.
6.  $(AB)^T = B^T A^T$  e  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
7. Dois vetores  $x$  e  $y$  são  $A$ -ortogonais, ou conjugados, se  $x^T A y = 0$ .

#### 4.3.1 Método do Gradiente Conjugado (CG)

O método do Gradiente Conjugado (CG) foi formalmente apresentado por Hestenes et al. (1952) e é, provavelmente, um dos melhores métodos para resolver sistemas lineares nos quais a matriz dos coeficientes  $A$  é simétrica positiva definida (SPD). A comunidade matemática da época não deu muita atenção para o método uma vez que erros de arredondamento podem levar o resíduo a perder acurácia gradativamente e também podem fazer com que os vetores de busca percam a propriedade de ortogonalidade em relação à matriz dos coeficientes  $A$ . O interesse pelo método voltou apenas na década de 1970 em que foram publicadas evidências de sua eficácia como método iterativo.

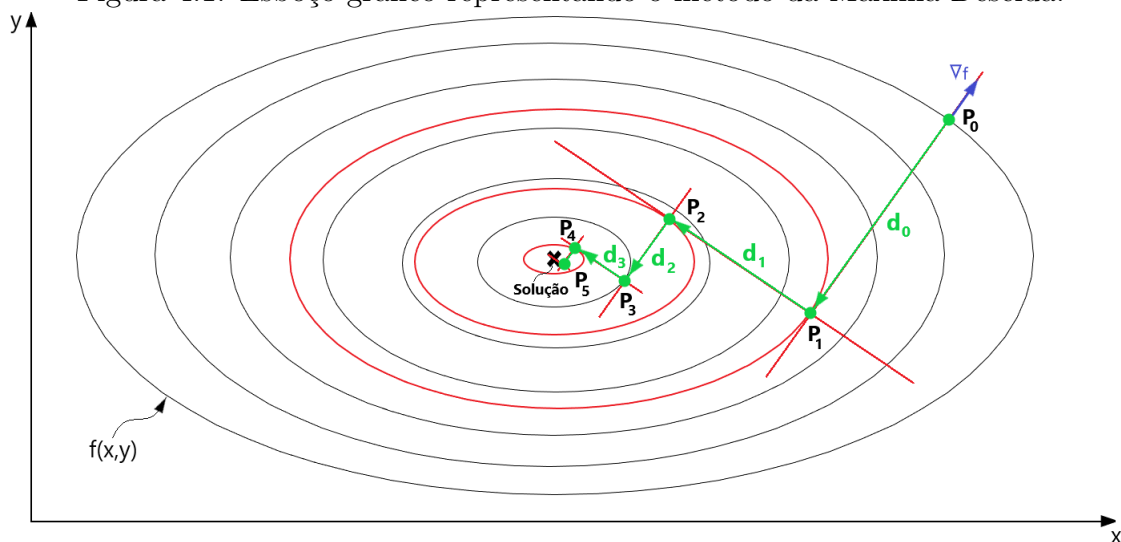
Para entender o método dos Gradientes Conjugados, serão apresentados a seguir, resumidamente, o métodos das Direções Conjugadas (*Conjugate Directions method*) e o método da Máxima Descida (*Steepest Descent method*). Para uma explicação matemática

mais completa, mas ainda sim de fácil entendimento, com representações gráficas de cada método, recomenda-se a leitura do trabalho de Shewchuk et al. (1994).

Buscar-se-á explicar o método da Máxima Descida de forma gráfica e o mais didático possível, evitando todas as formalidades matemáticas, as quais são facilmente encontradas em artigos e livros de métodos numéricos e de otimização. Com base nisso, toma-se a Fig. 4.1 como referência. Nela, pode-se ver, as curvas representativas de uma função  $f(x, y)$  em que a solução encontra-se na posição marcada pelo símbolo  $\times$ .

O método da Máxima Descida busca uma solução a partir de um ponto inicial, representado por  $P_0$  na Fig. 4.1. Mas existem infinitas maneiras de se “caminhar” até essa solução, então como escolher qual direção seguir? O conceito por trás desse método é seguir a direção na qual a função  $f(x, y)$  decresce o mais rápido possível. Voltando às bases do cálculo, pode-se associar essa direção ao gradiente da função aplicada no ponto. Entretanto, o gradiente é um vetor perpendicular à reta tangente naquele ponto e que aponta para fora da curva, como pode ser visto pelo vetor azul saindo do ponto  $P_0$  na Fig. 4.1. Em outras palavras, o vetor gradiente aponta para a direção na qual a função cresce mais rapidamente, e o objetivo é justamente o contrário. Logo, o que se deseja é a direção oposta ao gradiente, ou seja,  $-\nabla f$ .

Figura 4.1: Esboço gráfico representando o método da Máxima Descida.



Fonte: Autoria própria.

Uma vez escolhida a direção de busca (vetor verde que sai de  $P_0$  e chega em  $P_1$ ), outra pergunta deve ser respondida: até onde “andar” nessa direção. Essa distância é chamada de passo e é normalmente representada na literatura pela letra grega  $\alpha$ . A resposta para

essa pergunta é simples: até encontrar um ponto em uma curva de isovalores de  $f(x, y)$  no qual a reta guia da direção de busca seja tangente (estas curvas foram desenhadas em vermelho na Fig. 4.1 para melhor visualização do método). No caso do exemplo dado aqui, este ponto está representado por  $P_1$ . Agora, repete-se o método, mas partindo desta vez de  $P_1$ , até encontrar pontos cada vez mais próximos da solução.

Para maior clareza de como este método se aplica à solução do sistema linear do tipo  $Ax = b$ , apresenta-se a seguir o passo-a-passo do método:

1. Escolher uma estimativa inicial para  $x$ :  $x_i = x_0$ .
2. Calcular o resíduo gerado por  $x_i$ :  $r_i = b - Ax_i$ .
3. Calcular o passo:  $\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{r_i^T A r_i}$ .
4. Calcular o novo valor de  $x$ :  $x_{i+1} = x_i + \alpha_i r_i$ .
5. Repetir os procedimentos de 2 a 4 até convergência, por exemplo,  $\sqrt{[r_k]^T [r_k]} < \varepsilon_{tol}$ .

No método da Máxima Descida, as direções de busca dos novos passos sempre repetem as direções dos passos anteriores, como mostrado na Fig. 4.1. Com isso, a ideia por trás do método das Direções Conjugadas é a seguinte: e se as direções de busca ao invés de serem ortogonais, fossem A-ortogonais, ou conjugadas entre si, ou seja,  $d_i^T A d_j = 0$ , em que  $d$  é o vetor das direções de busca. O método em si, não impõe nenhuma outra restrição, o que o torna não muito preciso, já que nenhuma equação é fornecida para calcular as direções de busca. Apesar disso, o método possui algumas propriedades importantes:

- Os vetores das direções de busca são mutualmente conjugados. O resíduo  $r_i$  é ortogonal a  $d_0, d_1, \dots, d_{i-1}$ . Devido a isso, o produto interno de  $d_i$  com cada vetor de resíduos  $r_0, r_1, \dots, r_i$  é o mesmo, zero.
- O método das Direções Conjugadas é dito um método de  $m$  passos, em que  $m \leq n$ , ou seja, para cálculos exatos (sem erros de aproximação), o método converge em no máximo  $n$  passos, em que  $n$  é quantidade de equações.

Inspirado no método das Direções Conjugadas, surge então o método dos Gradientes Conjugados, em que as direções de busca são construídas através da conjugação dos resíduos. Segundo Shewchuk et al. (1994), essa escolha faz sentido por alguns motivos.

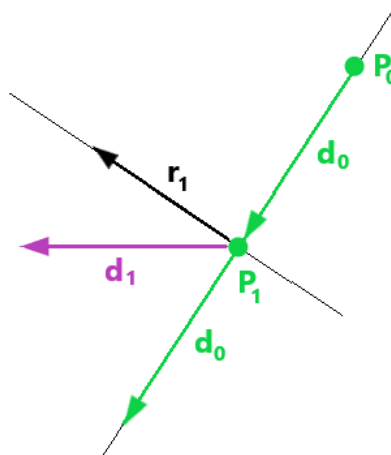
Primeiro, os resíduos funcionaram para o método da Máxima Descida, então por que não funcionariam para o métodos dos Gradientes Conjugados? Segundo, o resíduo tem a conveniente propriedade de ser ortogonal às direções de busca anteriores, então é garantido que sempre serão produzidas direções de busca linearmente independentes, a menos que o resíduo seja zero, para o qual significaria que o problema já estaria resolvido.

A direção de busca inicial do método dos Gradientes Conjugados é a mesma que para o método da Máxima Descida, ou seja,  $-\nabla f$ . É a partir da segunda direção de busca que o método CG se diferencia. O método CG pode ser entendido como uma combinação linear entre os vetores dos resíduos atuais e da direção de busca do passo anterior, como mostrado pela Eq. 4.21.

$$d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k d_k. \quad (4.21)$$

Tomando como referência os vetores  $d_0$  e  $d_1$  da Fig. 4.1, tem-se que o resíduo  $r_1$  aponta na mesma direção de  $d_1$  do método da máxima descida e é portanto perpendicular a  $d_0$ . Dessa forma, a Fig. 4.2 representa graficamente o que está escrito na Eq. 4.21.

Figura 4.2: Esboço gráfico representando a combinação linear feita pelo método CG para encontrar a nova direção de busca.



Fonte: Autoria própria.

O fator de combinação  $\beta_k$  deve ser escolhido de forma a fazer com que as direções de busca  $d_i$  sejam A-ortogonais. Diferentes escolhas de  $\beta_k$  levam a diferentes métodos. O método CG faz uso do chamado processo de conjugação de Gram-Schmidt, o qual é uma maneira simples de gerar vetores que satisfaçam a condição de A-ortogonalidade.

Pulando-se toda a demonstração matemática, com a aplicação do método de Gram-Schmidt para o método dos Gradientes conjugados, encontra-se:

$$\beta_i = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i}. \quad (4.22)$$

Assim sendo, o algoritmo do método dos Gradientes Conjugados é dado a seguir. Vale notar que, como já foi dito, o primeiro passo do método CG coincide com o método da Máxima Descida uma vez que  $d_0 = r_0$  para o cálculo de  $\alpha_0$ .

1. Escolher uma estimativa inicial para  $x$ :  $x_i = x_0$ .
2. Calcular o resíduo gerado por  $x_i$ :  $r_i = b - Ax_i$ .
3. Fazer a direção de busca inicial igual ao resíduo:  $d_i = d_0 = r_0$ .
4. Calcular o passo:  $\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{d_i^T A d_i}$ .
5. Calcular o novo valor de  $x$ :  $x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$ .
6. Calcular o novo resíduo gerado por  $x_{i+1}$ :  $r_{i+1} = r_i - \alpha_i A d_i$ .
7. Calcular o fator de combinação linear:  $\beta_i = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i}$ .
8. Atualizar a direção de busca:  $d_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i d_i$ .
9. Repetir os procedimentos de 4 a 8 até convergência, por exemplo,  $\sqrt{[r_k]^T [r_k]} < \varepsilon_{tol}$ .

#### 4.3.2 Método do Gradiente bi-Conjugado (BiCG)

O método do Gradiente Conjugado foi pensando para resolver sistemas lineares em que a matriz dos coeficientes  $A$  é simétrica e positiva-definida. Nesse caso o método CG cumpre muito bem o seu propósito e seja talvez o método iterativo mais rápido para essa situação. Entretanto, ele não é muito adequado para sistemas não simétricos. Seria ótimo encontrar um método iterativo com propriedades similares para matrizes indefinidas ou não-simétricas. Foi nesse contexto que surgiu o método do Gradiente bi-conjugado (BiCG).

Ocloń, Lopata e Nowak (2013) mostram que a ideia principal desse método é que ao invés de se gerar apenas uma sequência ortogonal de vetores resíduo como no método CG, geram-se duas sequências mutualmente ortogonais de vetores resíduo. Em outras palavras, além de gerar a sequência dada pela Eq. 4.20 baseada na matriz dos coeficientes original  $A$ ,



ele também gera uma outra sequência baseada em  $A^T$  e ao invés de fazer cada uma dessas sequências ortogonais, elas são feitas mutualmente ortogonais entre si, ou bi-ortogonais.

O algoritmo para o método BiCG é dado a seguir:

1. Escolher uma estimativa inicial para  $x$ :  $x_i = x_0$ .
2. Escolher uma estimativa inicial para  $\bar{x}$ :  $\bar{x}_i = \bar{x}_0$ .
3. Calcular o resíduo gerado por  $x_i$ :  $r_i = b - Ax_i$ .
4. Calcular o resíduo gerado por  $\bar{x}_i$ :  $\bar{r}_i = b - A\bar{x}_i$ .
5. Fazer a direção de busca inicial igual ao resíduo:  $d_i = d_0 = r_0$  e  $\bar{d}_i = \bar{d}_0 = \bar{r}_0$ .
6. Calcular o passo:  $\alpha_i = \frac{\bar{r}_i^T r_i}{\bar{d}_i^T A d_i}$ .
7. Calcular o novo valor de  $x$ :  $x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$ .
8. Calcular o novo valor de  $\bar{x}$ :  $\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \alpha_i \bar{d}_i$ .
9. Calcular o novo resíduo gerado por  $x_{i+1}$ :  $r_{i+1} = r_i - \alpha_i A d_i$ .
10. Calcular o novo resíduo gerado por  $\bar{x}_{i+1}$ :  $\bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i - \alpha_i A \bar{d}_i$ .
11. Calcular o fator de combinação linear:  $\beta_i = \frac{\bar{r}_{i+1}^T r_{i+1}}{\bar{r}_i^T r_i}$ .
12. Atualizar a direção de busca:  $d_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i d_i$ .
13. Atualizar a direção de busca:  $\bar{d}_{i+1} = \bar{r}_{i+1} + \beta_i \bar{d}_i$ .
14. Repetir os procedimentos de 6 a 13 até convergência, por exemplo,  $\sqrt{[r_k]^T [r_k]} < \varepsilon_{tol}$ .

Analogamente ao método CG, o escalar  $\alpha$  deve ser escolhido de modo a satisfazer a condição de bi-ortogonalidade entre os vetores resíduo, ou seja,  $r_{i+1}^T \bar{r}_i = \bar{r}_{i+1}^T r_i = 0$  e  $\beta$  é escolhido de modo a satisfazer a condição de bi-conjugação, ou seja,  $\bar{d}_{i+1}^T A d_i = d_{i+1}^T A^T \bar{d}_i = 0$ . É uma característica do algoritmo apresentado que as condições de bi-ortogonalidade e bi-conjugação são válidas para qualquer par de vetores escolhidos, sem que seja explicitamente forçadas. A prova disso pode ser vista em Fletcher (1976).

### 4.3.3 Método do Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (BiCGSTAB)

O método do Gradiente bi-Conjugado Estabilizado foi apresentado por Vorst (1992) e é uma variante do método CGS (*Conjugate Gradient Squared*) que por sua vez é uma variante do método BiCG. Devido à semelhança com o método CGS, à relação com o método BiCG e às propriedades de estabilidade, o método foi então chamado de BiCGSTAB.

A ideia do método é pegar um polinômio da forma

$$Q_i(x) = (1 - \omega_1 x)(1 - \omega_2 x) \dots (1 - \omega_i x) \quad (4.23)$$

e selecionar um valor adequado para a constante  $\omega_j$ . Uma possibilidade óbvia para a escolha de  $\omega_j$  na  $j$ -ésima iteração é um valor que minimize o resíduo  $r_j$ . Esse procedimento leva ao método BiCGSTAB, cujo algoritmo é dado a seguir:

1. Escolher uma estimativa inicial para  $x$ :  $x_i = x_0$ .
2. Calcular o resíduo gerado por  $x_i$ :  $r_i = b - Ax_i$ .
3. Escolher um vetor arbitrário  $\hat{r}_0$  de modo que  $(\hat{r}_0, r_0) \neq 0$ , por exemplo,  $\hat{r}_0 = r_0$ .
4. Atribuir os valores iniciais às constantes  $\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$ .
5. Atribuir os valores iniciais aos vetores  $v_0 = p_0 = 0$ .
6. Calcular:  $\rho_i = (\hat{r}_0, r_{i-1})$ .
7. Calcular:  $\beta = \left( \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}} \right) \left( \frac{\alpha}{\omega_{i-1}} \right)$ .
8. Calcular:  $p_i = r_{i-1} + \beta (p_{i-1} - \omega_{i-1} v_{i-1})$ .
9. Calcular:  $\alpha = \frac{\rho_i}{(\hat{r}_0, v_i)}$ .
10. Calcular:  $s = r_{i-1} - \alpha v_i$ .
11. Calcular:  $t = As$ .
12. Calcular:  $\omega_i = \frac{(t, s)}{(t, t)}$ .
13. Atualizar:  $x_i = x_{i-1} + \alpha p_i + \omega_i s$ .
14. Repetir os procedimentos de 6 a 13 até convergência, por exemplo,  $\sqrt{[r_k]^T [r_k]} < \varepsilon_{tol}$ .

## 5 Métodos para solução de sistemas não-lineares

Quando, em um sistema de equações, a variação do valor da saída ("output") não é proporcional à variação do valor da entrada ("input"), diz-se que esse sistema é não-linear. Em outras palavras, em um sistema não-linear de equações, as equações a serem resolvidas não podem ser escritas como uma combinação linear das variáveis do problema. O estudo de sistemas não-lineares está presente em muitas áreas da ciência, uma vez que a grande maioria dos fenômenos são não-lineares em sua natureza. Neste capítulo, será apresentado um resumo de alguns dos métodos mais comuns encontrados pelo autor para solução de sistemas não-lineares.

### 5.1 Método de Newton

A ideia do método de Newton, também conhecido como método de Newton-Raphson, é encontrar aproximações cada vez melhores para as raízes de uma função. Para um sistema do tipo  $Ax = b$ , tem-se que a solução é dada por:

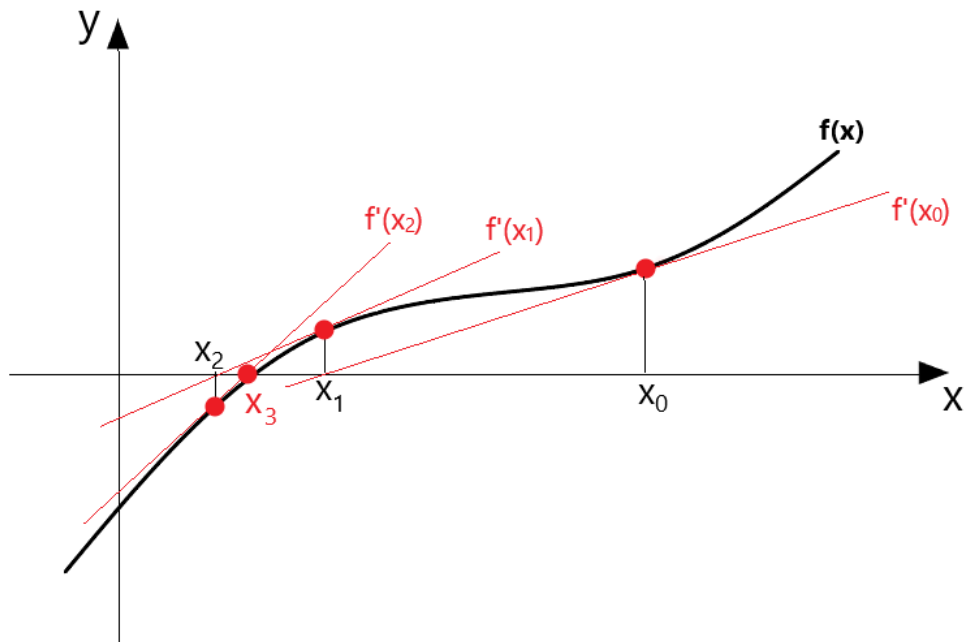
$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1}f(x_k). \quad (5.1)$$

Na equação acima, a função de interesse é dada por  $f(x) = Ax - b$  e  $[f'(x_k)]^{-1}$  representa a matriz Jacobiana da função  $f(x_k)$ .

Na Fig. 5.1 é apresentada de maneira gráfica a ideia por trás do método de Newton para uma única variável. Parte-se de uma estimativa inicial  $x_0$ . A derivada da função neste ponto permite encontrar a reta tangente ao ponto. A interseção da reta tangente com o eixo das abscissas resulta, normalmente, em uma melhor aproximação para a raiz da função em relação ao ponto anterior. Então repete-se o procedimento até se encontrar um valor para  $x$  suficientemente próximo da resposta.

A grande desvantagem do método de Newton consiste na dificuldade de se encontrar a matriz Jacobiana, uma vez que na grande maioria dos problemas de engenharia, encontrar analiticamente a matriz Jacobiana é uma tarefa extremamente difícil e custosa. Para contornar esse problema, métodos para a obtenção de aproximações para a matriz Jacobiana foram propostos ao longo do tempo. Esses métodos são chamados de métodos quase-Newton e alguns deles serão apresentados a seguir.

Figura 5.1: Representação gráfica do método de Newton para uma função de um variável.



Fonte: Autoria própria.

## 5.2 Métodos quase-Newton

Quando não é possível calcular a matriz Jacobiana de uma função ou este cálculo é muito difícil de ser feito, é possível então substituí-la por uma aproximação, resultando nos chamados métodos quase-Newton.

Os métodos quase-Newton podem ser vistos duas maneiras distintas, a primeira é:

$$x_{k+1} = x_k - \left( \hat{f}'_k \right)^{-1} f(x_k). \quad (5.2)$$

Na equação acima,  $\hat{f}'_k$  é uma sequência de aproximações para  $f'(x_k)$ . A segunda maneira é:

$$x_{k+1} = x_k - \left( \hat{F}'_k \right) f(x_k). \quad (5.3)$$

Na Eq. 5.3,  $\hat{F}'_k$  representa a sequência de aproximações para  $[f'(x_k)]^{-1}$ . A segunda maneira de se analisar apresenta a vantagem de não necessitar calcular a inversa da aproximação para a matriz Jacobiana, o que não é nada trivial e representa um ganho em tempo computacional, visto que a solução do sistema linear resultante pode ser caro computacionalmente.

### 5.2.1 Método das secantes

O método das secantes pode ser classificado como um método quase-Newton, como pode ser visto no trabalho de Haelterman (2009), uma vez que a ideia por trás do método é de se aproximar a derivada analítica de  $f(x)$  utilizando-se a razão fundamental:

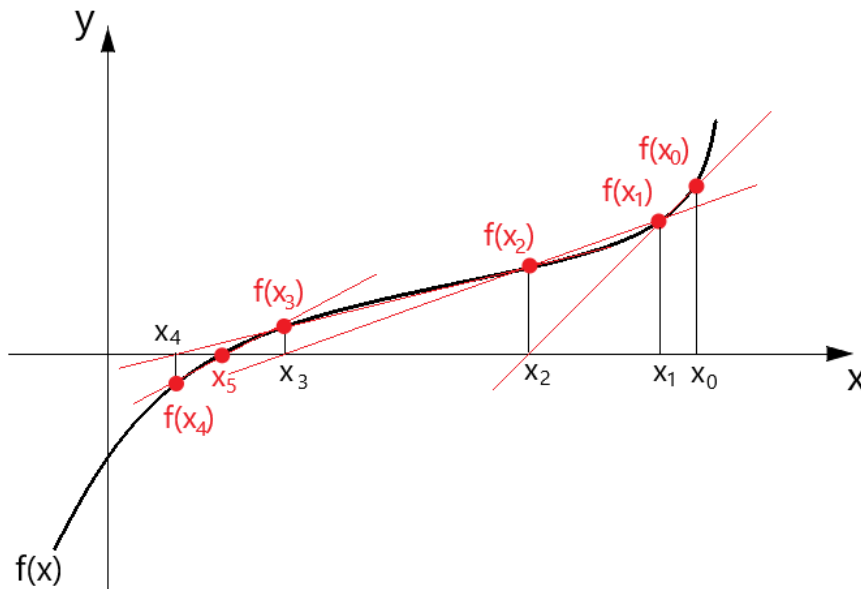
$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \approx x_0. \quad (5.4)$$

Utilizando-se a aproximação dada pela Eq. 5.4 com  $x = x_k$  e  $x_0 = x_{k-1}$  e substituindo-se no método de Newton dado pela Eq. 5.1, obtém-se o chamado método da secante:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k \geq 1. \quad (5.5)$$

Enquanto o método de Newton está relacionado às retas tangentes ao gráfico da função  $f(x)$ , o método das secantes, como o próprio nome indica, está relacionado às retas secantes, como pode ser visto na Fig. 5.2. Inicia-se o método com duas estimativas iniciais  $x_0$  e  $x_1$  próximas uma da outra. Espera-se que a reta que passa por  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  intercepte o eixo das abscissas em um ponto  $x_2$  mais próximo da solução desejada. E então o processo é repetido até que se encontre um valor de  $x$  próximo o suficiente do solução.

Figura 5.2: Representação gráfica do método das secantes para uma função de uma variável.



Fonte: Autoria própria.

### 5.2.2 Método de Broyden

O método de Broyden foi primeiramente apresentado por Broyden (1965) e a ideia principal por trás do método é substituir a matriz Jacobiana do método de Newton por uma matriz Jacobiana aproximada que seja facilmente atualizada a cada iteração. Segundo Burden e Faires (2004), esse método pode ser visto como uma generalização do método das secantes.

Uma desvantagem desse método, e de todos os outros métodos quase-Newton, é a perda da convergência quadrática. Para o caso do método de Broyden, a convergência é, normalmente, superlinear. Entretanto, a redução da taxa de convergência é compensada pela diminuição da quantidade de cálculos necessários. Enquanto que o método de Newton necessita de pelo menos  $n^2 + n$  avaliações de funções além de  $O(n^3)$  operações aritméticas, onde  $n$  é a ordem da matriz dos coeficientes, o método de Broyden necessita de  $O(n^2)$  operações aritméticas.

Na Eq. 5.6 é apresentado o chamado método “bom” de Broyden:

$$\hat{f}'_{k+1} = \hat{f}'_k + \frac{(y_k - \hat{f}'_k)(s_k)^T}{(s_k)^T(s_k)}. \quad (5.6)$$

Na equação acima,  $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$  e  $s_k = x_{k+1} - x_k$ .

No entanto, normalmente se dá preferência pela aproximação da inversa da matriz Jacobiana  $\hat{F}'_k$ . Outra maneira de se atualizar a matriz Jacobiana é o chamado de método “mau” de Broyden, o qual é apresentado com a Eq. 5.7:

$$\hat{F}'_{k+1} = \hat{F}'_k + \frac{(s_k - \hat{F}'_k y_k) s_k^T \hat{F}'_k}{s_k^T \hat{F}'_k y_k}. \quad (5.7)$$

Apesar da nomenclatura atribuídas aos métodos, não há evidências de que o método “bom” seja melhor do que o método “mau”.

## 6 Metodologia

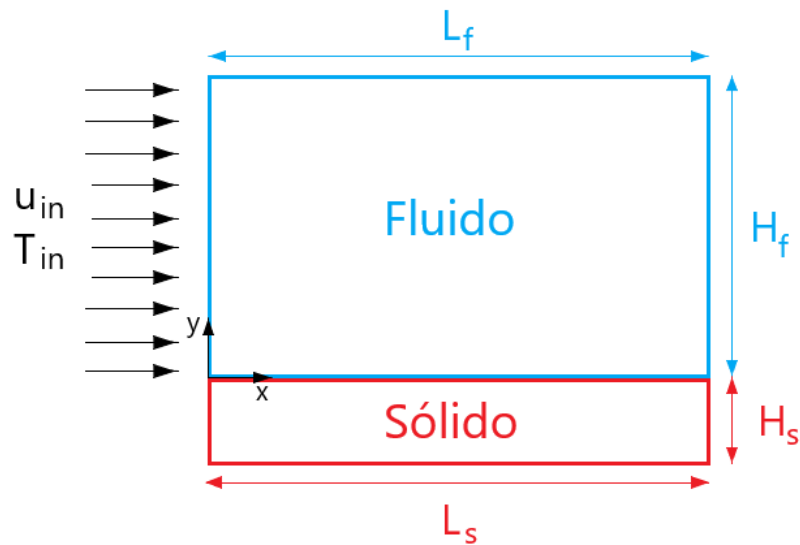
A análise de problemas de transferência de energia térmica na forma de calor entre dois ou mais domínios de maneira conjugada, ou seja, os domínios exercem influência uns sobre os outros, representou um grande avanço para essa área de estudo e para projetos mais eficazes e otimizados nas mais diversas aplicações de engenharia.

O principal objetivo do presente trabalho é adquirir e ampliar a compreensão sobre problemas de CHT. Objetiva-se neste capítulo apresentar os modelos físico, matemático numérico e computacional utilizados para simular o problema de interesse: escoamento laminar sobre uma placa plana.

### 6.1 Modelo Físico

Com o modelo físico, avalia-se o problema de interesse e faz-se suposições físicas como forma de simplificar o problema para que sua solução seja viável. Na Fig. 6.1 está representado um esboço para o modelo físico do problema em questão. Como o problema de interesse envolve a interação entre dois subsistemas (um fluido e um sólido), as suposições para cada subsistema serão feitas separadamente como forma de facilitar o entendimento.

Figura 6.1: Esboço do modelo físico para o problema de interesse (escoamento laminar sobre uma placa plana)



Fonte: Autoria própria.

### 6.1.1 Modelo físico para o sólido

A seguir são mostradas as suposições feitas para o subdomínio sólido quanto às propriedades físicas e à geometria.

- Placa plana bidimensional.
- Propriedades físicas constantes.
- O comprimento é  $L_s = 0,103m$ .
- A altura é  $H_s = 0,03m$ .
- Dois materiais com propriedades físicas constantes serão analisados:

Material 01: Gesso Acartonado (*Drywall*)

Massa específica:  $\rho_{s1} = 1680,0 \frac{W}{m^3}$ .

Condutividade térmica:  $k_{s1} = 0,2 \frac{W}{mK}$ .

Calor específico:  $c_{ps1} = 708 \frac{J}{kgK}$

Material 02: Alumínio puro

Massa específica:  $\rho_{s2} = 2702,0 \frac{W}{m^3}$ .

Condutividade térmica:  $k_{s2} = 237 \frac{W}{mK}$ .

Calor específico:  $c_{ps2} = 903 \frac{J}{kgK}$

### 6.1.2 Modelo físico para o fluido

A seguir são mostradas as suposições feitas para o subdomínio fluido:

- Fluido newtoniano.
- Escoamento laminar bidimensional.
- Escoamento incompressível.
- Desconsiderar os efeitos devido ao empuxo.
- Desconsiderar o termo de transformação de energia cinética em energia térmica devido aos efeitos viscosos.



- O comprimento é  $L_f = 0,103m$ .
- A altura é  $H_f = 0,15m$ .
- O fluido utilizado é o ar e suas propriedades físicas foram consideradas constantes:

Massa específica:  $\rho_f = 1,1614 \frac{W}{m^3}$ .

Condutividade térmica:  $k_f = 26,3 \cdot 10^{-3} \frac{W}{mK}$ .

Calor específico:  $c_{pf} = 1007,0 \frac{J}{kgK}$

Viscosidade dinâmica:  $\mu_f = 18,46 \cdot 10^{-6} \frac{N.s}{m^2}$ .

Viscosidade cinemática:  $\nu_f = 15,89 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ .

## 6.2 Modelo matemático diferencial

Com o modelo matemático diferencial são apresentadas as equações diferenciais com as quais modela-se o problema em estudo levando-se em consideração as simplificações discutidas no modelo físico. A seguir são apresentados os modelos matemáticos utilizados para os subsistemas fluido e sólido.

### 6.2.1 Modelo matemático diferencial para o sólido

Com o modelo matemático diferencial, apresentam-se as equações diferenciais parciais com as quais modela-se o problema em estudo. Para que o modelo possa ser considerado completo, faz-se necessário acrescentar as condições de contorno e as condições iniciais (se o problema for em regime transiente).

Para o subsistema sólido, apenas a equação de balanço de energia térmica foi utilizada. A Eq. 6.1 é a equação diferencial utilizada para modelar uma placa plana bidimensional com propriedades físicas constantes, em regime transiente e com processos transformadores de energia (como, por exemplo, efeito Joule):

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{Q}}{\rho_s c_{ps}}. \quad (6.1)$$

Na equação acima,  $\alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s c_{ps}}$  é a difusividade térmica dada em  $\frac{m^2}{s}$ .

Para validação do método de acoplamento utilizado para fazer a comunicação entre os dois subsistemas, sólido e fluido, simulou-se um problema modelado com a equação diferencial 6.2:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\dot{Q}}{k_s} = 0. \quad (6.2)$$

Com a Equação 6.2, modela-se uma placa plana bidimensional com propriedades físicas constantes em regime permanente e com processos transformadores de energia (como, por exemplo, o efeito Joule). Solução analítica para essa equação é possível, a qual pode ser vista no Apêndice A, utilizando-se os adimensionais propostos por Shah e Jain (2015).

Foram feitas quatro simulações diferentes, duas utilizando-se o material 1 e duas utilizando-se o material 2. Com a Tab. 6.1(a), pode-se ver as condições de contorno utilizadas para o caso de validação (material 1), modelado com a Eq. 6.2. Em seguida, utilizou-se as mesmas condições de contorno e o mesmo material, mas para o modelo transiente, apresentado com a Eq. 6.1, como pode ser visto na Tab. 6.1(b). Nas Tab. 6.1(c) e 6.1(d) podem ser vistas as condições de contorno utilizadas para o modelo transiente para o material 2. Os valores de cada condição de contorno serão apresentados no próximo capítulo ao se apresentarem os resultados.

### 6.2.2 Modelos matemáticos diferenciais para o fluido

Para o subsistema fluido, utilizou-se a equação do balanço de massa, simplificada para escoamentos incompressíveis, a equação do balanço da quantidade de movimento linear, ou segunda lei de Newton, simplificada para escoamentos de fluidos com propriedades físicas constantes e incompressíveis e também a equação para o balanço de energia térmica, simplificada para propriedades físicas constantes e desconsiderando-se o termo de transformação de energia cinética em energia térmica devido aos efeitos viscosos.

A Eq. 6.3 é a equação do balanço de massa simplificada para o caso de escoamentos bidimensionais, incompressíveis e em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.3)$$

Tabela 6.1: Condições de contorno utilizadas para o subdomínio sólido.

Modelo de validação (Material 1)		
Tipo	Condição	Posição
Balanço	$h_{left} , T_{\infty}$	$x = 0$
Balanço	$h_{right} , T_{\infty}$	$x = L_s$
Dirichilet	$q'' = q''_{surf}$	$y = 0$
Balanço	$h_{bottom} , T_{\infty}$	$y = -H_s$

(a)

Modelo Transiente (Material 1)		
Tipo	Condição	Posição
Balanço	$h_{left} , T_{\infty}$	$x = 0$
Balanço	$h_{right} , T_{\infty}$	$x = L_s$
Dirichilet	$q'' = q''_{surf}$	$y = 0$
Balanço	$h_{bottom} , T_{\infty}$	$y = -H_s$

(b)

Modelo Transiente (Material 2)		
Tipo	Condição	Posição
Dirichilet	$T = T_{left}$	$x = 0$
Dirichilet	$T = T_{right}$	$x = L_s$
Neumman	$q'' = q''_{surf}$	$y = 0$
Dirichilet	$T = T_{bottom}$	$y = -H_s$

(c)

Modelo Transiente (Material 2)		
Tipo	Condição	Posição
Neumman	$q'' = q''_{left}$	$x = 0$
Neumman	$q'' = q''_{right}$	$x = L_s$
Neumman	$q'' = q''_{surf}$	$y = 0$
Neumman	$q'' = q''_{bottom}$	$y = -H_s$

(d)

Fonte: Autoria própria.

Na equação acima,  $u$  e  $v$  são as componentes da velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Com a Eq. 6.4 e a Eq. 6.5, representam-se os balanços de quantidade de movimento linear na direção  $x$  e na direção  $y$ , respectivamente, de problemas bidimensionais para fluidos newtonianos, escritas em coordenadas cartesianas, simplificada para o caso de propriedades físicas constantes, sem efeitos de campo e em regime transiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_f \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6.5)$$

Nas Equações 6.4 e 6.5,  $p$  é a pressão,  $t$  é a variável temporal,  $\rho_f$  é a massa específica do fluido e  $\nu_f$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Na Tab. 6.2 estão representadas as condições de contorno utilizadas para a solução das Equações 6.4 e 6.5. O valor para a velocidade de entrada na direção  $x$ ,  $u_{in}$ , será mencionada quando forem mostrados os resultados, pois foram usados valores diferentes de  $u_{in}$  nas simulações. Já os valores das velocidades  $v_{in}$ ,  $u_{placa}$  e  $v_{placa}$  foram mantidos sempre zero.

Tabela 6.2: Condições de contorno para a equação de balanço de quantidade de movimento linear.

Condições de contorno								
Velocidade na direção x			Velocidade na direção y			Pressão		
Tipo	Condição	Posição	Tipo	Condição	Posição	Tipo	Condição	Posição
Dirichilet	$u = u_{in}$	$x = 0$	Dirichilet	$v = v_{in}$	$x = 0$	Neumman	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$x = 0$
Neumman	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$x = L_f$	Neumman	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$x = L_f$	Dirichilet	$p = 0$	$x = L_f$
Dirichilet	$u = u_{placa}$	$y = 0$	Dirichilet	$v = v_{placa}$	$y = 0$	Neumman	$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$	$y = 0$
Neumman	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$y = H_f$	Neumman	$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$	$y = H_f$	Dirichilet	$p = 0$	$y = H_f$

Fonte: Autoria própria.

Com a solução das equações de balanço de movimento linear, obtém-se o campo de velocidade para o fluido, o qual será utilizado no balanço de energia térmica, simplificado para propriedades físicas constantes e desconsiderando-se o termo de transformação de energia cinética em energia térmica devido aos efeitos viscosos, como pode ser visto na Eq. 6.6 a seguir:

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial(uT_f)}{\partial x} + \frac{\partial(vT_f)}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right). \quad (6.6)$$

Para validação, comparou-se os resultados obtidos através do acoplamento térmico utilizado no presente trabalho, com os resultados analíticos mostrados por Shah e Jain (2015). Para isso, a equação utilizada para o balanço de quantidade de movimento linear

foi a equação de Blasius para a camada limite sobre uma placa plana, a qual modela um escoamento sobre uma placa plana semi-infinita em regime permanente, sem turbulência, com propriedades físicas e velocidade de corrente-livre constantes.

A equação de Blasius é apresentada com a Eq. 6.7:

$$\xi''' + \frac{1}{2}\xi\xi'' = 0. \quad (6.7)$$

A equação de Blasius é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem para a qual três condições de contorno devem ser utilizadas:

$$\xi'''(0) = 0, \quad (6.8)$$

$$\xi'(0) = 0, \quad (6.9)$$

$$\xi(0) = 0. \quad (6.10)$$

Para melhor compreensão da equação e das suas condições, recomenda-se a leitura do Apêndice B.

Com a solução da equação de Blasius é possível então determinar o campo de velocidades para  $u$  e para  $v$ , os quais podem ser calculados com as seguintes relações:

$$u(x, y) = u_\infty \xi'(\eta), \quad (6.11)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2} u_\infty Re_x^{-\frac{1}{2}} (\eta \xi'(\eta) - \xi(\eta)). \quad (6.12)$$

A equação para o balanço de energia térmica utilizada para a validação é apresentada como segue:

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_f} \left( u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} \right). \quad (6.13)$$

Com a Eq. 6.13, modela-se o balanço de energia em uma partícula de fluido em regime permanente bidimensional, com efeitos advectivos nas direções  $x$  e  $y$  e difusão apenas na direção  $y$  e sem transformação de energia devido aos efeitos viscosos. A solução analítica

para essa equação, na forma adimensional proposta por Shah e Jain (2015), também pode ser vista no Apêndice A. As condições de contorno térmicas utilizadas para o fluido podem ser vistas na Tab. 6.3.

Tabela 6.3: Condições de contorno térmicas para o subdomínio fluido.

Condição de contorno térmica		
Tipo	Condição	Posição
Dirichlet	$T = T_{in}$	$x = 0$
Neuman	$q'' = 0$	$x = L_f$
Dirichlet	$T = T_{surf}$	$y = 0$
Neuman	$q'' = 0$	$y = H_f$

Fonte: Autoria própria.

## 6.3 Modelo matemático numérico

Com o modelo matemático numérico, apresentam-se as formulações numéricas do problema em estudo, levando-se em consideração as simplificações discutidas no modelo físico e no modelo matemático diferencial. A seguir serão apresentados os métodos numéricos utilizados para se obter as equações discretizadas para ambos os subsistemas, fluido e sólido.

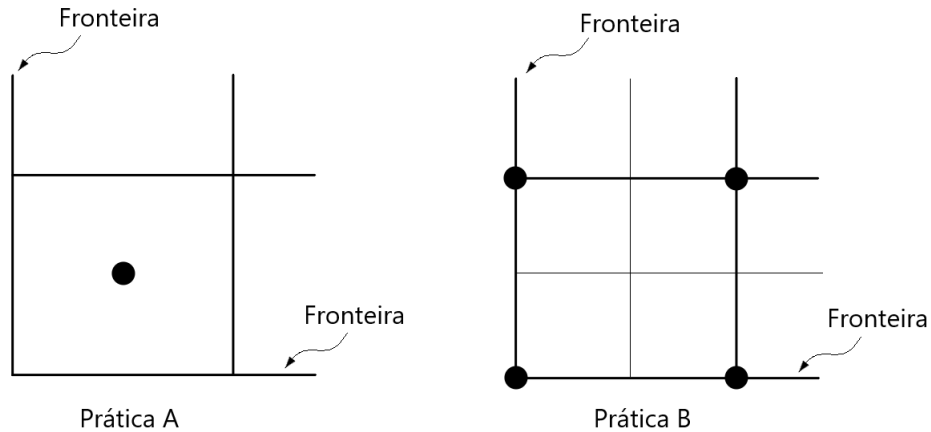
### 6.3.1 Modelo utilizado para validação

Primeiramente, serão mostrados os modelos numéricos para o caso utilizado para validação. Neles serão mostradas as discretizações tanto do domínio fluido, quanto do sólido, bem como as equações diferenciais discretizadas com o método dos volumes finitos.

#### 6.3.1.1 Discretização do domínio

Das várias maneiras possíveis de se discretizar um domínio em coordenadas cartesianas, duas práticas são, comumente, mais utilizadas na literatura, segundo Patankar (2018). Elas serão daqui em diante chamadas de Prática A e Prática B, e podem ser vistas na Fig. 6.2.

Figura 6.2: Esboço das Práticas A e B utilizadas para discretização dos domínios.



Fonte: Autoria própria.

Com a Prática A, posicionam-se os pontos da malha no centro dos volumes de controle de modo que as arestas dos volume de controle coincidam com a fronteira do domínio. Com a Prática B, os pontos da malha são posicionados nos vértices do volume de controle. Dessa forma, os pontos da malha serão coincidentes com as fronteiras do domínio, e não mais as arestas.

Uma atenção extra deve ser dada ao se utilizar a Prática B no que se diz respeito às condições de contorno, uma vez que volumes das laterais terão apenas metade do tamanho dos volumes no interior e os do canto terão um quarto do volume, como pode ser visto na Fig. 6.2 pelas linhas mais finas.

As Prática A e B podem ser utilizadas tanto para o subdomínio do fluido quanto para o do sólido. Entretanto, para o subdomínio do fluido é preciso escolher também se a malha será do tipo co-localizada (*"collocated grid"*) ou do tipo deslocada (*"staggered grid"*).

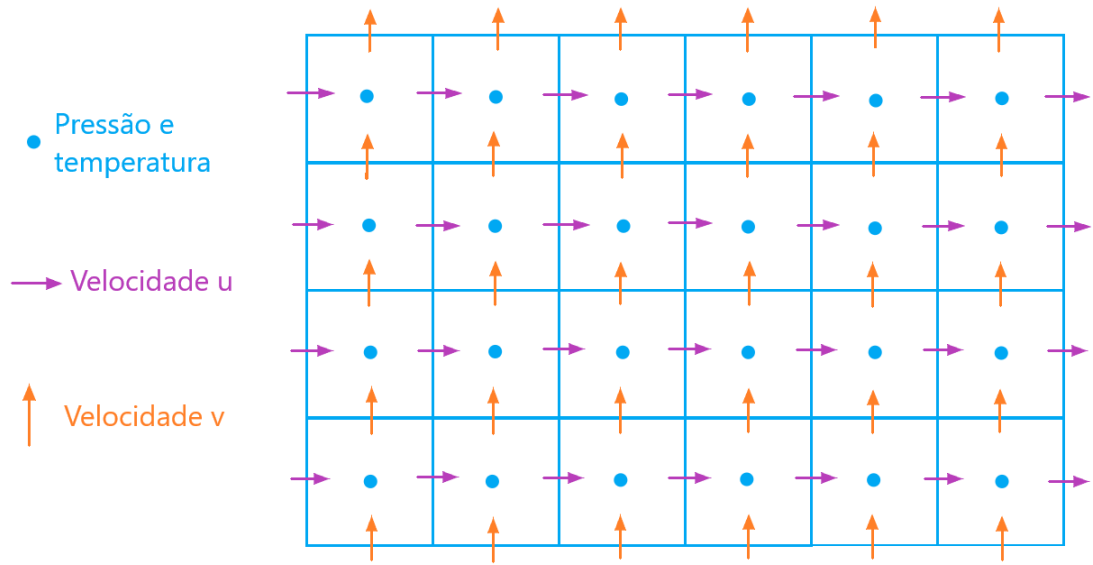
Com a malha co-localizada, todas as informações/variáveis (pressão, velocidades, temperatura, etc.) são analisadas em um único lugar, o ponto central da malha. Segundo Nefedov, Mattheij et al. (1999), este tipo de malha é mais conveniente do ponto de vista de programação, entretanto, necessita um processo de discretização especial para garantir a não-singularidade do sistema, além do inconveniente de necessitar de interpolações para a pressão e para a velocidade, o que na prática, pode levar à perda de acurácia da solução.

Patankar (2018) menciona, também, que a malha co-localizada necessita de interpolações para a pressão e para a velocidade, o que na prática pode levar à perda de acurácia da solução. Por isso, ele sugere o uso da malha deslocada, apresentada por Harlow

e Welch (1965). Nela, as componentes da velocidade são calculadas nas faces do volume de controle, de modo que a componente  $u$  da velocidade é calculada nas faces normais à direção  $x$  e a componente  $v$  nas faces normais à direção  $y$ .

Para a validação, utilizou-se a Prática A para o posicionamento dos pontos centrais da malha tanto para o subsistema sólido quanto para o fluido. Neste último, utilizou-se também a malha deslocada. Os esboços ilustrativos das malhas utilizadas para o fluido e para o sólido podem ser vistos nas Figuras 6.3 e 6.4, respectivamente.

Figura 6.3: Esboço ilustrativo da malha utilizada para discretizar o fluido para o caso de validação.



Fonte: Autoria própria.

### 6.3.1.2 Solução da equação de Blasius

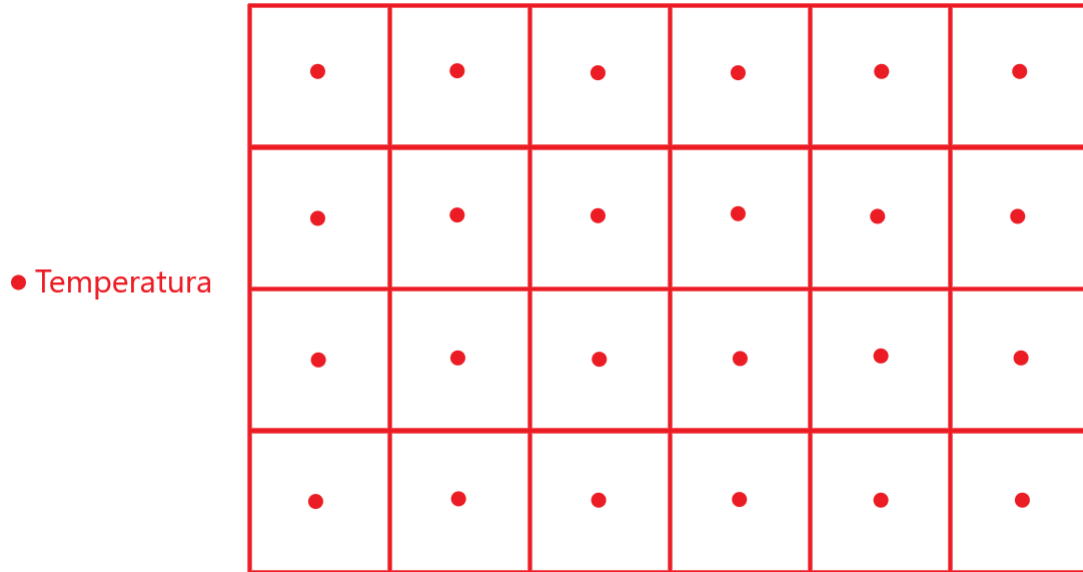
A equação de Blasius, dada pela Eq. 6.7, pode ser resolvida através de vários métodos numéricos, como mostrado por Karabulut e Kılıç (2018). No presente trabalho, o método escolhido para essa finalidade foi o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para facilitar o entendimento do método, fazem-se as seguintes mudanças de notação:

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi(\eta), \\ y_2 &= \xi'(\eta), \\ y_3 &= \xi''(\eta). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Com as mudanças de variáveis mostradas acima, forma-se o seguinte sistema de



Figura 6.4: Esboço ilustrativo da malha utilizada para discretizar o sólido para o caso de validação.



Fonte: Autoria própria.

equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{d\eta} = y_2 \\ \frac{dy_2}{d\eta} = y_3 \\ \frac{dy_3}{d\eta} = -\frac{1}{2}y_1y_3 \end{array} \right. . \quad (6.15)$$

Cujas condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, \\ y_2(\infty) &= 1, \\ y_3(0) &\approx 0,332. \end{aligned} \quad (6.16)$$

A obtenção da última condição de contorno  $y_3(0) \approx 0,332$  é obtida através de um processo iterativo, uma vez que  $y_3(0)$  não é previamente conhecido. O que se faz, basi-

camente, é partir de uma estimativa inicial para o valor de  $y_3(0)$  e comparar o resultado para  $y_2(\infty)$ . Assim que a processo iterativo encontrar um valor para  $y_3(0)$  que satisfaça a condição  $y_2(\infty) = 1$ , este valor será então usado como condição de contorno. Como este valor já é bem conhecido e é facilmente encontrado na literatura, no presente trabalho não utilizou-se do processo iterativo para encontrá-lo.

Para iniciar o método de Runge-Kutta, constrói-se o vetor  $Y$  com as variáveis de interesse, representando o lado esquerdo da Eq. 6.15 e o vetor de resultados,  $f(\eta, Y)$ , representando o lado direito:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

$$f(\eta, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -\frac{1}{2}y_1y_3 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Agora, calculam-se os coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  característicos do método de Runge-Kutta de quarta ordem:

$$k_1 = f(\eta_i, Y_i) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -\frac{1}{2}y_1y_3 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

$$k_2 = f\left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2}, Y_i + k_1 \frac{\Delta\eta}{2}\right) = \begin{bmatrix} y_2 + k_1[2] \frac{\Delta\eta}{2} \\ y_3 + k_1[3] \frac{\Delta\eta}{2} \\ -\frac{1}{2} \left(y_1 + k_1[1] \frac{\Delta\eta}{2}\right) \left(y_3 + k_1[3] \frac{\Delta\eta}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

$$k_3 = f\left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2}, Y_i + k_2 \frac{\Delta\eta}{2}\right) = \begin{bmatrix} y_2 + k_2[2] \frac{\Delta\eta}{2} \\ y_3 + k_2[3] \frac{\Delta\eta}{2} \\ -\frac{1}{2} \left(y_1 + k_2[1] \frac{\Delta\eta}{2}\right) \left(y_3 + k_2[3] \frac{\Delta\eta}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

$$k_4 = f\left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2}, Y_i + k_3 \frac{\Delta\eta}{2}\right) = \begin{bmatrix} y_2 + k_3[2] \frac{\Delta\eta}{2} \\ y_3 + k_3[3] \frac{\Delta\eta}{2} \\ -\frac{1}{2} \left(y_1 + k_3[1] \frac{\Delta\eta}{2}\right) \left(y_3 + k_3[3] \frac{\Delta\eta}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Nas equações acima,  $\Delta\eta = \eta_{i+1} - \eta_i$ . O coeficiente  $K$  resultante, é obtido através de uma média entre os quatro coeficientes, em que maior peso é dado aos coeficientes  $k_2$  e  $k_3$ , como pode ser visto a seguir:

$$K = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (6.23)$$

Com o coeficiente  $K$ , finaliza-se o método calculando:

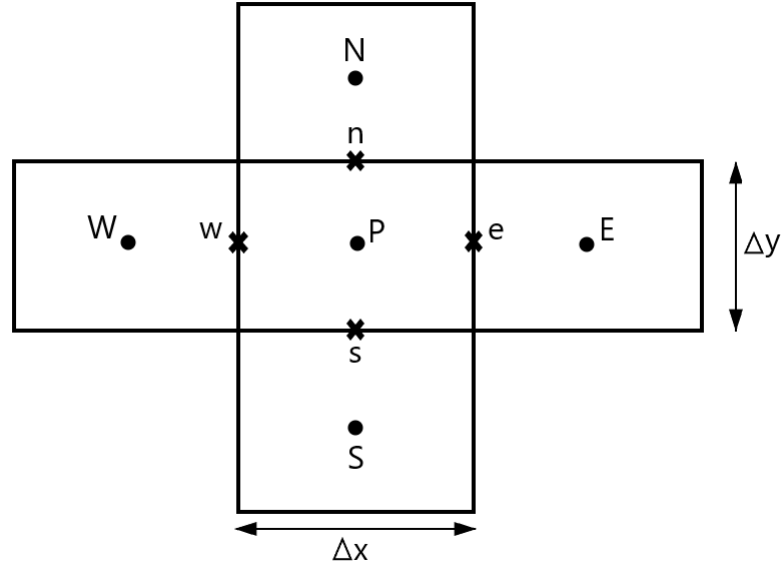
$$Y_{i+1} = Y_i + K\Delta\eta. \quad (6.24)$$

Obtido o vetor  $Y$ , tem-se então os valores para  $\xi$ ,  $\xi'$  e  $\xi''$ , com os quais é possível obter o campo de velocidade através das Equações 6.11 e 6.12.

### 6.3.1.3 Discretização da equação de balanço de energia térmica para o subdomínio fluido

Nessa seção será mostrada a discretização através do método dos volumes finitos, o qual pode ser visto em mais detalhes em Maliska (2017), da equação de balanço de energia para o caso utilizado para a validação. Antes, toma-se como referência as notações para identificar os volumes de controle conforme mostrado na Fig. 6.5.

Figura 6.5: Representação da notação utilizada para identificar os volumes de controle.



Fonte: Autoria própria.

A equação responsável por modelar o problema será repetida a seguir, em sua forma chamada divergente, para facilidade de leitura:

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_f} \left( \frac{\partial(uT_f)}{\partial x} + \frac{\partial(vT_f)}{\partial y} \right). \quad (6.25)$$

Com o método dos volumes finitos, integra-se a Eq. 6.25 no volume de controle dado por  $P$ :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} dx dy = \frac{1}{\alpha_f} \int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial(uT_f)}{\partial x} + \frac{\partial(vT_f)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.26)$$

A discretização resultante da integral acima, utilizando-se o esquema centrado para interpolação da temperatura, é dada por:

$$\alpha \frac{T_{f_N} - 2T_{f_P} + T_{f_S}}{\Delta y^2} = \frac{u_e (T_{f_E} + T_{f_P}) - u_w (T_{f_W} + T_{f_P})}{2\Delta x} + \frac{v_n (T_{f_N} + T_{f_P}) - v_s (T_{f_S} + T_{f_P})}{2\Delta y}. \quad (6.27)$$

Com algumas manipulações, percebe-se que a Eq. 6.27 pode ser reescrita, retirando-se o subscrito  $f$  que mostra que se trata do fluido, na forma:

$$A_P T_P + A_E T_E + A_W T_W + A_N T_N + A_S T_S = B. \quad (6.28)$$

Então, como pode ser visto na Eq. 6.28, a discretização da Eq. 6.25 resulta em um sistema linear cuja matriz dos coeficientes é penta-diagonal e as suas diagonais são dadas pelos termos  $A_P$ ,  $A_E$ ,  $A_W$ ,  $A_N$  e  $A_S$ . O termo  $B$  é o vetor resultado do sistema linear. O fato de a matriz dos coeficientes ser penta-diagonal não é uma coincidência, mas sim uma consequência de se trabalhar com um problema bidimensional. Caso o problema fosse unidimensional ou tridimensional, a matriz seria, respectivamente, tri-diagonal e hepta-diagonal.

Quando a malha é uniforme e as propriedades físicas são constantes em todo o domínio, os valores de  $A_P$ ,  $A_E$ ,  $A_W$ ,  $A_N$ ,  $A_S$  e  $B$  são os mesmos para todos volumes internos e podem ser vistos na Eq. 6.29. Atenção especial deve ser dada para os volumes que estão nas fronteiras, especialmente os volumes dos cantos, pois com as condições de contorno alteraram-se os valores dos termos da matriz dos coeficientes e também dos termos do vetor resultado.

$$\begin{aligned}
A_P &= \frac{u_e - u_w}{2\Delta x} + \frac{v_n - v_s}{2\Delta y} + \frac{2\alpha}{\Delta y^2} \\
A_E &= \frac{u_e}{2\Delta x} \\
A_W &= -\frac{u_w}{2\Delta x} \\
A_N &= \frac{v_n}{2\Delta y} - \frac{\alpha}{\Delta y^2} \\
A_S &= -\frac{v_s}{2\Delta y} - \frac{\alpha}{\Delta y^2} \\
B &= 0
\end{aligned} \tag{6.29}$$

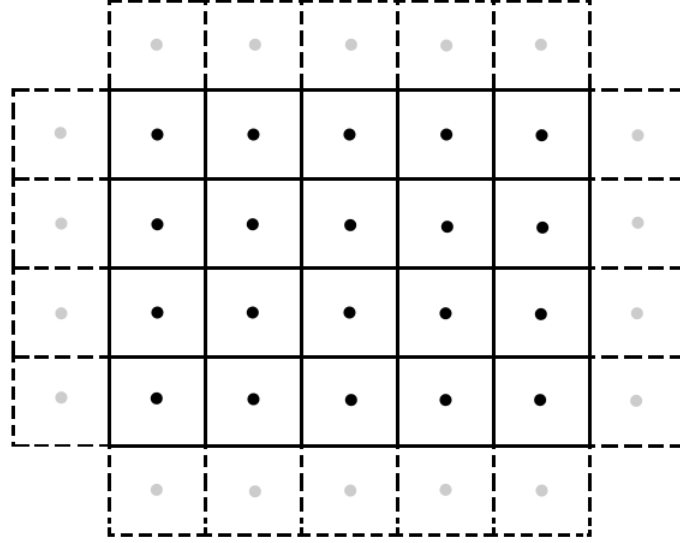
Com a equação acima fica clara a principal vantagem de se usar a malha deslocada para este caso, uma vez que as velocidades resultantes da integração pelo método dos volumes finitos são justamente as velocidades nas faces, as quais já foram calculadas, tornando-se desnecessárias as interpolações.

Existem várias técnicas para se aplicarem as condições de contorno a um domínio de interesse, uma delas é através da utilização de volumes fictícios, também conhecidos por *ghost*. Esta foi a técnica utilizada no presente trabalho e um esquema ilustrativo dela é apresentado na Fig. 6.6. A criação desses volumes se deve ao fato de que quando se está analisando um volume da malha nas fronteiras do domínio, um ou mais volumes não estarão fisicamente presentes, por exemplo, um volume na fronteira esquerda não possui o volume  $W$  real para se “comunicar”, por isso é criado um volume  $W$  fictício, para o qual as condições de contorno naquele local ficam atendidas.

Os diversos tipos de condições de contorno fornecerão diferentes coeficientes para a Eq. 6.28. A seguir, é feita uma análise utilizando-se as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para um volume de controle na fronteira esquerda. As análises para as demais fronteiras seguem um procedimento análogo e, portanto, não serão apresentadas. Para condição de Dirichlet, ou seja, temperatura prescrita, a temperatura da fronteira,  $T_{front}$ , é conhecida e pode ser escrita como:

$$T_{front} = \frac{T_P + T_W}{2}. \tag{6.30}$$

Figura 6.6: Esboço ilustrativo da técnica dos volumes fictícios para aplicação das condições de contorno.



Fonte: Autoria própria.

É importante ressaltar que a Eq. 6.28 é válida para todo e qualquer volume de controle do domínio. Entretanto, um volume de controle na fronteira esquerda, não possui um volume vizinho  $W$ , logo necessita-se de uma equação que relacione a temperatura  $T_W$  com alguma(s) das outras temperaturas. Essa equação é justamente a Eq. 6.30 obtida através da condição de contorno, uma vez que  $T_W$  é facilmente isolado:

$$T_W = 2T_{front} - T_P. \quad (6.31)$$

Substituindo-se a relação acima na Eq. 6.28, obtém-se um novo coeficiente  $A_P$  e um novo valor de  $B$  para esse volume de controle. Nota-se ainda que o termo em  $W$  desaparece da equação, portanto  $A_W$  passa a ser zero.

Para uma condição de contorno do tipo Neumann, o fluxo térmico,  $q''_{front}$  é fornecido na fronteira, levando à seguinte relação:

$$q''_{front} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{front} = -k \frac{T_P - T_W}{\Delta x}. \quad (6.32)$$

Repete-se o procedimento mostrado para o caso de condição de contorno de Dirichlet, ou seja, primeiro isola-se  $T_W$  conforme pode ser visto pela Eq. 6.33, e em seguida substitui-se na Eq. 6.28:

$$T_W = T_P + \frac{q''_{front}\Delta x}{k}. \quad (6.33)$$

Uma vez entendido o procedimento para a condição de contorno em uma das fronteiras, a obtenção das condições para as outras fronteiras podem ser obtidas de forma análoga. As condições de contorno de Dirichlet e Neumann para todas as fronteiras podem ser vistas na Tab. 6.4. Nela não estão representados os volumes de controle localizados nos cantos do domínio, pois as condições de contorno para esses pontos consistem em combinações das condições apresentadas.

Tabela 6.4: Discretização das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para o caso de validação.

Condição	Dirichlet	Neumann
Fronteira esquerda	$T_W = 2T_{front,esq} - T_P$	$T_W = T_P + \frac{q''_{front,esq}\Delta x}{k}$
Fronteira direita	$T_E = 2T_{front,dir} - T_P$	$T_E = T_P + \frac{q''_{front,dir}\Delta x}{k}$
Fronteira superior	$T_N = 2T_{front,sup} - T_P$	$T_N = T_P + \frac{q''_{front,sup}\Delta y}{k}$
Fronteira inferior	$T_S = 2T_{front,inf} - T_P$	$T_S = T_P + \frac{q''_{front,inf}\Delta y}{k}$

Fonte: Autoria própria.



#### 6.3.1.4 Discretização da equação de balanço de energia térmica para o subdomínio sólido

Nesta seção será feita a discretização da equação de balanço de energia térmica com a qual se modela o sólido para o caso da validação. Essa equação é frequentemente chamada na literatura de equação da difusão em regime permanente. O procedimento é bastante similar àquele feito para o fluido, integrando-se para um volume de controle:

$$\int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\dot{Q}}{k_s} \right) dx dy = 0. \quad (6.34)$$

A discretização resultante da integral acima, utilizando-se o esquema centrado para interpolação da temperatura é dada por:

$$\frac{T_{s_E} - 2T_{s_P} + T_{s_W}}{\Delta x^2} + \frac{T_{s_N} - 2T_{s_P} + T_{s_S}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{Q}}{k_s} = 0. \quad (6.35)$$

Assim como para o fluido, quando a malha é uniforme e as propriedades físicas são constantes em todo o domínio, os valores de  $A_P$ ,  $A_E$ ,  $A_W$ ,  $A_N$ ,  $A_S$  e  $B$  são os mesmos para todos volumes internos e podem ser vistos na Eq. 6.36. Atenção especial deve ser dada para os volumes que estão nas fronteiras, especialmente os volumes dos cantos, pois com as condições de contorno alteram-se os valores dos termos da matriz dos coeficientes e também dos termos do vetor resultado.

$$\begin{aligned}
A_P &= \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \\
A_E &= -\frac{1}{\Delta x^2} \\
A_W &= -\frac{1}{\Delta x^2} \\
A_N &= -\frac{1}{\Delta y^2} \\
A_S &= -\frac{1}{\Delta y^2} \\
B &= \frac{\dot{Q}}{k_s}
\end{aligned} \quad . \tag{6.36}$$

A discretização das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann utilizadas para o sólido é idêntica à discretização utilizada para o fluido, e pode ser vista na Tab. 6.4. A única diferença entre sólido e fluido é que para o sólido também se utiliza condições de contorno de terceiro tipo, ou de balanço de energia térmica. A seguir, é feita uma análise utilizando-se esse tipo de condição de contorno para um volume de controle na fronteira esquerda. As análises para as demais fronteiras seguem um procedimento análogo e, portanto, não serão apresentadas.

Com a condição de contorno de terceiro tipo, faz-se um balanço de energia térmica na fronteira, igualando-se o fluxo térmico advectivo com o difusivo, levando à seguinte relação:

$$\begin{aligned}
h(T_\infty - T_{front,esq}) &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{front} \\
h \left( T_\infty - \frac{T_P + T_W}{2} \right) &= -k \frac{T_P - T_W}{\Delta x}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Isolando-se a variável  $T_W$ , tem-se:

$$T_W = \frac{2k - h\Delta x}{2k + h\Delta x} T_P + \frac{2h\Delta x}{2k + h\Delta x} T_\infty. \tag{6.38}$$

Uma vez encontrado o valor para  $T_W$ , basta substituí-lo na Eq. 6.35. Fazendo-se isso, obtém-se valores diferentes, naquela posição, para os coeficientes e para o vetor resultado  $B$ . Com a Tab. 6.5, pode-se ver as discretizações para todas as fronteiras, sendo que para os volumes nos cantos, basta utilizar as condições para as respectivas fronteiras.

Tabela 6.5: Discretização das condições de contorno de terceiro tipo para o caso de validação.

Condição	Balanco de energia térmica
Fronteira esquerda	$T_W = \frac{2k - h\Delta x}{2k + h\Delta x}T_P + \frac{2h\Delta x}{2k + h\Delta x}T_\infty$
Fronteira direita	$T_E = \frac{2k - h\Delta x}{2k + h\Delta x}T_P + \frac{2h\Delta x}{2k + h\Delta x}T_\infty$
Fronteira superior	$T_N = \frac{2k - h\Delta y}{2k + h\Delta y}T_P + \frac{2h\Delta y}{2k + h\Delta y}T_\infty$
Fronteira inferior	$T_S = \frac{2k - h\Delta y}{2k + h\Delta y}T_P + \frac{2h\Delta y}{2k + h\Delta y}T_\infty$

Fonte: Autoria própria.

### 6.3.2 Modelo em regime transiente

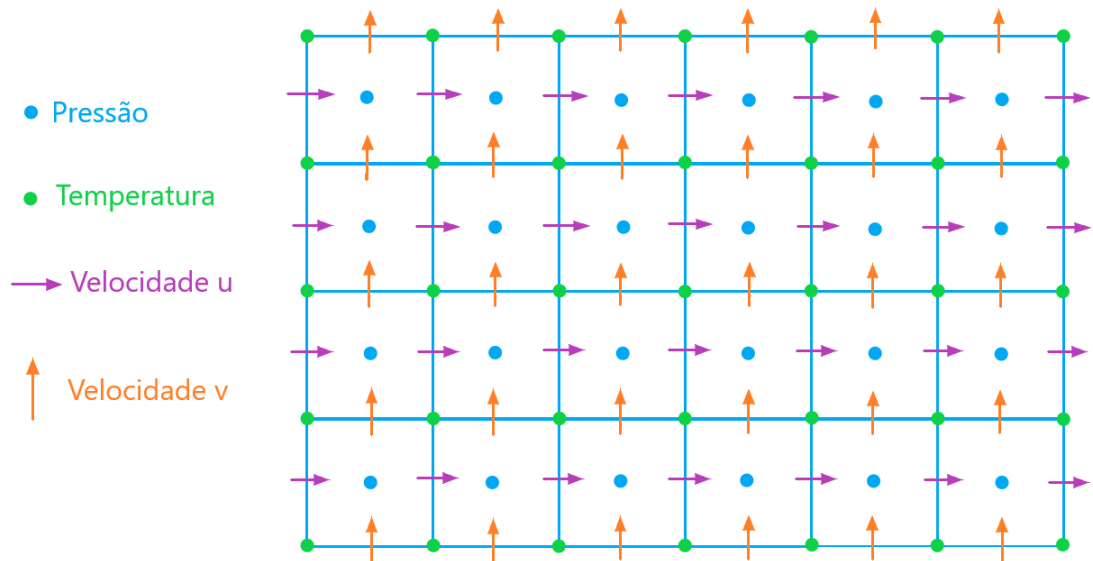
Uma vez apresentados os modelos matemáticos numéricos para o caso utilizado para a validação dos métodos de acoplamento, agora serão apresentados os modelos matemáticos numéricos utilizados para o caso mais geral em regime transiente.

#### 6.3.2.1 Discretização do domínio

Para o modelo em regime transiente, o domínio fluido foi, inicialmente, discretizado utilizando-se a Prática A, na qual os pontos da malha são posicionados no centro dos volumes de controle, juntamente com a malha deslocada, exatamente como foi feito para o caso utilizado para validação. Logo, a malha pode ser visualizada segundo o mesmo esquema ilustrativo apresentado na Fig. 6.3.

Entretanto, por motivos que serão melhor explicados na próxima seção quando forem apresentados os resultados, decidiu-se utilizar uma segunda configuração de malha tanto para o domínio fluido quanto para o sólido. A nova discretização do domínio fluido está representada pela Fig. 6.7 a seguir.

Figura 6.7: Esboço ilustrativo da segunda malha utilizada para discretizar o fluido para o modelo transiente.



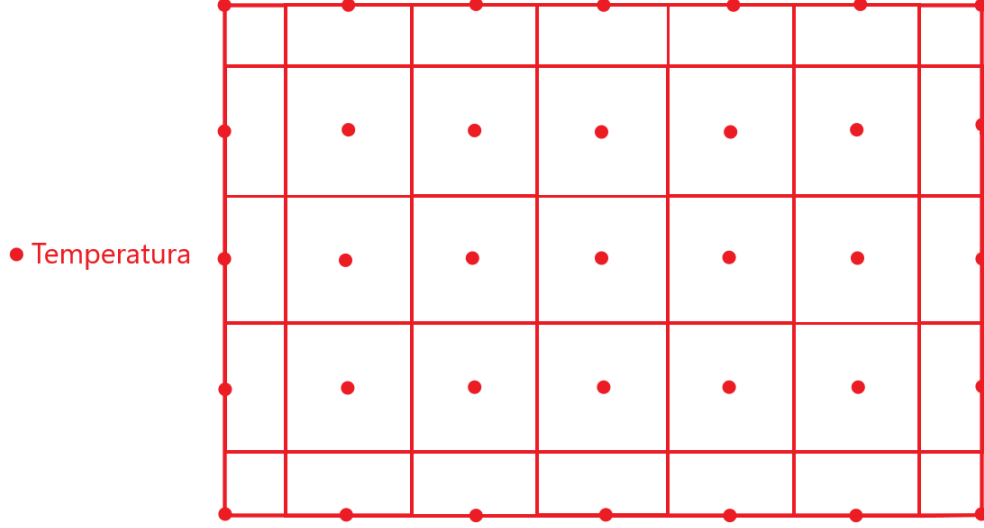
Fonte: Autoria própria.

Como pode ser visto na figura acima, passou-se a avaliar a temperatura nos vértices dos volumes de controle, como descrito com a Prática B. É importante notar que apenas a temperatura é analisada nos vértices, a pressão continua posicionada no centro dos volumes de controle. Isso pode ser feito, pois a pressão e a temperatura não estão matematicamente acopladas para o caso analisado. Esse procedimento foi adotado devido à facilidade de desenvolvimento do modelo computacional para resolver as equações de Navier-Stokes. No entanto, talvez o mais indicado seria mover, também, a pressão para os vértices e, conseqüentemente, as componentes das velocidades. Dessa forma, não seria necessário fazer interpolações para as velocidades.

Para o subdomínio sólido também foi utilizada a Prática B para uma segunda malha, conforme pode ser visto com a Fig. 6.8. É importante ressaltar que a Prática B resulta em tamanhos de volumes diferentes nas fronteiras (tanto para o subdomínio sólido quanto para o fluido), sendo que os volumes internos são inteiros, os volumes das fronteiras são meio volume e os dos cantos são um quarto de volume (isso para o caso bidimensional). Tal característica deve ser levada em consideração cuidadosamente no momento de se

aplicarem as condições de contorno.

Figura 6.8: Esboço ilustrativo da segunda malha utilizada para discretizar o sólido para o modelo transiente.



Fonte: Autoria própria.

### 6.3.2.2 Solução das equações de Navier-Stokes simplificadas

Com as equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da continuidade, consegue-se modelar qualquer tipo de escoamento, seja ele turbulento ou laminar. Nesta seção será apresentado um método, entre os vários existentes, para se resolver as equações da continuidade e de balanço de quantidade de movimento linear para um problema bidimensional com propriedades físicas constantes, sem efeitos de campo e em regime transiente. Essas equações já foram apresentadas (Eq. 6.3, 6.4 e 6.5) e serão aqui repetidas por comodidade de leitura:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.39)$$

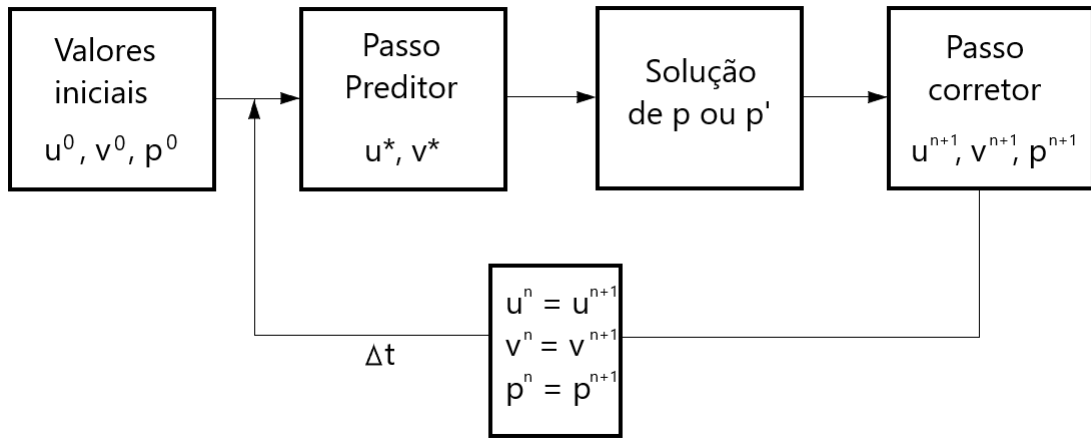
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu_f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu_f \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (6.41)$$

Nota-se que existem três incógnitas ( $u$ ,  $v$  e  $P$ ) e três equações. Entretanto, a equação da continuidade, Eq. 6.39, não possui a variável  $P$  explícita, o que levou ao desenvolvimento de vários métodos de acoplamento entre pressão e velocidades. Entre esses vários métodos vale destacar dois:

- SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), apresentado por Caretto et al. (1973).
- Método do Passo Fracionado, apresentado por Chorin (1968).

Figura 6.9: Fluxograma para o método do passo fracionado.



Fonte: Autoria própria.

Com o método SIMPLE, originaram-se vários outros métodos (SIMPLEC, SIMPLER, PISO, etc.) com características semelhantes e que trazem modificações a fim de melhorar o método original. No presente trabalho foi utilizado o método do passo fracionado com aproximação de primeira ordem para o termo temporal, cuja ideia principal é apresentada com o fluxograma da Fig. 6.9 e o passo-a-passo do equacionamento é apresentado a seguir.

1. Resolvem-se as equações do passo predictor para  $u^*$  e  $v^*$ , em que os termos  $H$  engloba os termos difusivos e advectivos para as variáveis  $u$  e  $v$ :

$$\begin{cases} \frac{u^* - u^n}{\Delta t} = H(u^n) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} \\ \frac{v^* - v^n}{\Delta t} = H(v^n) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial y} \end{cases} \quad (6.42)$$

2. Com a solução de  $u^*$  e  $v^*$ , calcula-se  $p'$  através da equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right). \quad (6.43)$$

3. Com a solução de  $u^*$ ,  $v^*$  e  $p'$ , é possível encontrar  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ :

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \end{cases}. \quad (6.44)$$

4. Atualiza-se o campo de pressão:

$$p^{n+1} = p^n + p'. \quad (6.45)$$

5. Verifica-se o balanço de massa através da equação da continuidade para o novo campo de velocidade obtido.

### 6.3.2.3 Discretização do balanço de energia térmica para o subdomínio fluido

Assim como foi feito para o modelo usado para validação, aplica-se o método dos volumes finitos para discretizar a equação com a qual modela-se o balanço de energia térmica para um fluido em regime transiente, Eq. 6.6, como apresentado a seguir:

$$\int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right) dx dy = \frac{1}{\alpha_f} \int_s^n \int_w^e \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial(uT_f)}{\partial x} + \frac{\partial(vT_f)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.46)$$

O resultado dessa integral, aplicando-se média para interpolar as temperaturas nas faces dos volumes de controle, juntamente com o método de Euler de primeira ordem para discretizar o termo temporal, resulta nos seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned}
A_P &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_e - u_w}{2\Delta x} + \frac{v_n - v_s}{2\Delta y} + \frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \frac{2\alpha}{\Delta y^2} \\
A_E &= \frac{u_e}{2\Delta x} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\
A_W &= -\frac{u_w}{2\Delta x} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\
A_N &= \frac{v_n}{2\Delta y} - \frac{\alpha}{\Delta y^2} \\
A_S &= -\frac{v_s}{2\Delta y} - \frac{\alpha}{\Delta y^2} \\
B &= \frac{T_P^n}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Os valores mostrados na Eq. 6.47 são válidos para todos os volumes internos do subdomínio fluido, tanto para a malha com os pontos no centro do volume de controle (Prática A) quanto para a malha com os pontos centrados nos vértices do volume de controle (Prática B).

Para o caso de se utilizar a malha da Prática A, o procedimento mostrado para o modelo de validação pode ser utilizado sem problemas, inclusive a discretização para as condições de contorno são as mesmas daquelas mostradas pela Tab. 6.4. Por outro lado, para a malha da Prática B, um pouco mais de atenção e trabalho extra são necessários, uma vez que com a Eq. 6.46, integra-se a equação diferencial em um volume de controle inteiro, mas a malha da Prática B possui metade de um volume de controle nas fronteiras e apenas um quarto de volume nos cantos. Logo, para a discretização via volumes finitos nessas regiões deve-se levar isso em consideração.

Outra diferença que surge ao se utilizar a malha da Prática B é quanto às condições de contorno. Para o caso em que a temperatura na fronteira é conhecida, condição de Dirichlet, não é necessário desenvolver uma equação para a fronteira. Segundo Maliska (2017), a aparente vantagem em não ser necessário criar uma equação para o volume de fronteira, já que a temperatura é conhecida, traduz-se na não-observância dos balanços para os volumes das fronteiras.

As condições de contorno de Neumann para todas as fronteiras e cantos, para a malha da prática B, podem ser vistas na Tab. 6.6. As condições de contorno de Dirichlet não são mostradas uma vez que para esse caso elas são triviais. Observa-se que para os cantos,



as condições de contorno são um pouco diferentes em relação às fronteiras.

Tabela 6.6: Discretização das condições de contorno de Neumann para a malha da Prática B.

Condição	Neumann	Neumann (canto)
Fronteira esquerda	$T_W = T_E + \frac{2q''_{front,esq}\Delta x}{k}$	$T_W = T_E + \frac{4q''_{front,esq}\Delta x}{k}$
Fronteira direita	$T_E = T_W + \frac{2q''_{front,dir}\Delta x}{k}$	$T_E = T_W + \frac{4q''_{front,dir}\Delta x}{k}$
Fronteira superior	$T_N = T_S + \frac{2q''_{front,sup}\Delta y}{k}$	$T_N = T_S + \frac{4q''_{front,sup}\Delta y}{k}$
Fronteira inferior	$T_S = T_N + \frac{2q''_{front,inf}\Delta y}{k}$	$T_S = T_N + \frac{4q''_{front,inf}\Delta y}{k}$

Fonte: Autoria própria.

#### 6.3.2.4 Discretização da equação de balanço da energia térmica para o subdomínio sólido

Aplicando-se o método dos volumes finitos para discretizar a equação diferencial dada pela Eq. 6.1, tem-se:

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial T_s}{\partial t} dx dy = \alpha_s \int_s^n \int_w^e \left[ \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{Q}}{\rho_s c_{p_s}} \right] dx dy. \quad (6.48)$$

O resultado da integral acima, aplicando-se média para determinar as temperaturas nas faces dos volumes de controle, juntamente com o método de Euler de primeira ordem para discretizar o termo temporal, resulta nos seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned}
A_P &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \frac{2\alpha}{\Delta y^2} \\
A_E &= -\frac{\alpha}{\Delta x^2} \\
A_W &= -\frac{\alpha}{\Delta x^2} \\
A_N &= -\frac{\alpha}{\Delta y^2} \\
A_S &= -\frac{\alpha}{\Delta y^2} \\
B &= \frac{T_P^n}{\Delta t} + \frac{\dot{Q}}{\rho c_p}
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Os valores apresentados na Eq. 6.47 são válidos para todos os volumes internos do subdomínio fluido, tanto para a malha com os pontos no centro do volume de controle (Prática A) quanto para a malha com os pontos centrados nos vértices do volume de controle (Prática B).

Tabela 6.7: Discretização das condições de contorno de terceiro tipo para a malha da Prática B.

Condição	Balanco de energia térmica
Fronteira esquerda	$T_W = T_E + \frac{2h\Delta x}{k} (T_\infty - T_P)$
Fronteira direita	$T_E = T_W + \frac{2h\Delta x}{k} (T_\infty - T_P)$
Fronteira superior	$T_N = T_S + \frac{2h\Delta y}{k} (T_\infty - T_P)$
Fronteira inferior	$T_S = T_N + \frac{2h\Delta y}{k} (T_\infty - T_P)$

Fonte: Autoria própria.

Para o caso de se utilizar a malha da Prática A, o procedimento apresentado para o modelo de validação para o subdomínio sólido pode ser utilizado sem problemas, inclusive a discretização para as condições de contorno são as mesmas daquelas mostradas pela Tab.

6.5. Já para a malha da Prática B, as condições de contorno do tipo Dirichlet são triviais, uma vez que a temperatura no ponto da fronteira já é conhecido e, portanto, não precisa ser calculado. Para as condições de contorno de Neumann, as equações apresentadas na Tab. 6.6 são válidas para o subdomínio sólido.

O subdomínio sólido pode também ser modelado com condições de contorno de terceiro tipo, ou de balanço de energia térmica. Essas condições podem ser vistas na Tab. 6.7.

## 7 Resultados

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados obtidos utilizando-se o código desenvolvido pelo próprio autor para se fazer o acoplamento térmico entre fluido e sólido para o caso de interesse: escoamento laminar sobre uma placa plana.

### 7.1 Validação

Primeiramente, antes de se validar o método de acoplamento utilizado no código, é preciso verificar se a solução obtida para a equação de Blasius está correta. Para isso, comparou-se os valores para  $\xi(\eta)$ ,  $\xi'(\eta)$  e  $\xi''(\eta)$  encontrados no presente trabalho utilizando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com os valores encontrados na literatura. Com a Tab. 7.1, pode-se ver o resultado obtido por Cengel e Cimbala (2015).

Tabela 7.1: Solução obtida por Cengel e Cimbala (2015) para a equação de Blasius para camada limite laminar sobre uma placa plana.

$\eta$	$f''$	$f'$	$f$	$\eta$	$f''$	$f'$	$f$
0.0	0.33206	0.00000	0.00000	2.4	0.22809	0.72898	0.92229
0.1	0.33205	0.03321	0.00166	2.6	0.20645	0.77245	1.07250
0.2	0.33198	0.06641	0.00664	2.8	0.18401	0.81151	1.23098
0.3	0.33181	0.09960	0.01494	3.0	0.16136	0.84604	1.39681
0.4	0.33147	0.13276	0.02656	3.5	0.10777	0.91304	1.83770
0.5	0.33091	0.16589	0.04149	4.0	0.06423	0.95552	2.30574
0.6	0.33008	0.19894	0.05973	4.5	0.03398	0.97951	2.79013
0.8	0.32739	0.26471	0.10611	5.0	0.01591	0.99154	3.28327
1.0	0.32301	0.32978	0.16557	5.5	0.00658	0.99688	3.78057
1.2	0.31659	0.39378	0.23795	6.0	0.00240	0.99897	4.27962
1.4	0.30787	0.45626	0.32298	6.5	0.00077	0.99970	4.77932
1.6	0.29666	0.51676	0.42032	7.0	0.00022	0.99992	5.27923
1.8	0.28293	0.57476	0.52952	8.0	0.00001	1.00000	6.27921
2.0	0.26675	0.62977	0.65002	9.0	0.00000	1.00000	7.27921
2.2	0.24835	0.68131	0.78119	10.0	0.00000	1.00000	8.27921

Fonte: Cengel e Cimbala (2015)

Na Tab. 7.1,  $f(\eta)$ ,  $f'(\eta)$  e  $f''(\eta)$  são as funções da equação de Blasius correspondentes a  $\xi(\eta)$ ,  $\xi'(\eta)$  e  $\xi''(\eta)$ , respectivamente. Os resultados obtidos no presente trabalho para a solução de Blasius podem ser vistos na Tab. 7.2.

Nota-se, tanto com os resultados obtidos por Cengel e Cimbala (2015), Tab. 7.1, quanto com os resultados obtidos no presente trabalho, Tab. 7.2, que para valores grandes de  $\eta$ , a função  $\xi(\eta)$  (ou  $f(\eta)$  na notação da Tab. 7.1) pode ser aproximada por:  $\xi(\eta) \approx \eta - 1,72$ . Essa aproximação é importante uma vez que dispensa a necessidade de resolver a equação de Blasius para valores muito grandes de  $\eta$ . No presente trabalho, foram calculados os

Tabela 7.2: Solução para a equação de Blasius para camada limite laminar sobre uma placa plana (presente trabalho).

$\eta$	$\xi''(\eta)$	$\xi'(\eta)$	$\xi(\eta)$	$\eta$	$\xi''(\eta)$	$\xi'(\eta)$	$\xi(\eta)$
0.0	0.3320573	0.0000000	0.0000000	5.2	0.0113418	0.9942455	3.4818676
0.2	0.3319838	0.0664078	0.0066410	5.4	0.0079277	0.9961553	3.6809190
0.4	0.3314698	0.1327642	0.0265599	5.6	0.0054320	0.9974778	3.8802906
0.6	0.3300791	0.1989373	0.0597346	5.8	0.0036484	0.9983755	4.0798819
0.8	0.3273893	0.2647091	0.1061082	6.0	0.0024020	0.9989729	4.2796209
1.0	0.3230071	0.3297800	0.1655717	6.2	0.0015502	0.9993625	4.4794572
1.2	0.3165892	0.3937761	0.2379487	6.4	0.0009806	0.9996117	4.6793566
1.4	0.3078654	0.4562618	0.3229816	6.6	0.0006080	0.9997679	4.8792957
1.6	0.2966635	0.5167568	0.4203208	6.8	0.0003696	0.9998638	5.0792597
1.8	0.2829310	0.5747581	0.5295180	7.0	0.0002202	0.9999216	5.2792387
2.0	0.2667515	0.6297657	0.6500244	7.2	0.0001286	0.9999557	5.4792268
2.2	0.2483509	0.6813104	0.7811933	7.4	0.0000736	0.9999755	5.6792201
2.4	0.2280918	0.7289819	0.9222901	7.6	0.0000413	0.9999866	5.8792164
2.6	0.2064546	0.7724550	1.0725060	7.8	0.0000227	0.9999929	6.0792144
2.8	0.1840066	0.8115096	1.2309773	8.0	0.0000122	0.9999963	6.2792133
3.0	0.1613603	0.8460444	1.3968082	8.2	0.0000065	0.9999981	6.4792128
3.2	0.1391281	0.8760814	1.5690949	8.4	0.0000034	0.9999990	6.6792125
3.4	0.1178763	0.9017612	1.7469501	8.6	0.0000017	0.9999995	6.8792124
3.6	0.0980863	0.9233297	1.9295251	8.8	0.0000009	0.9999998	7.0792123
3.8	0.0801259	0.9411180	2.1160298	9.0	0.0000004	0.9999999	7.2792123
4.0	0.0642341	0.9555182	2.3057464	9.2	0.0000002	0.9999999	7.4792123
4.2	0.0505198	0.9669571	2.4980396	9.4	0.0000001	1.0000000	7.6792122
4.4	0.0389726	0.9758708	2.6923609	9.6	0.0000000	1.0000000	7.8792122
4.6	0.0294838	0.9826835	2.8882479	9.8	0.0000000	1.0000000	8.0792122
4.8	0.0218712	0.9877895	3.0853206	9.9	0.0000000	1.0000000	8.1792122
5.0	0.0159068	0.9915419	3.2832736	10.0	0.0000000	1.0000000	8.2792122

Fonte: Autoria Própria.

valores de  $\xi(\eta)$ ,  $\xi'(\eta)$  e  $\xi''(\eta)$  até  $\eta = 20, 0$ , para valores maiores do que isso foi utilizada a aproximação mencionada anteriormente.

Com a Tab. 7.3 são apresentadas as diferenças entre os valores obtidos por Cengel e Cimbala (2015) e o pelo presente trabalho. Percebe-se através da análise dos valores, que os resultados estão em excelente acordo, dessa forma a solução para a equação de Blasius está validada. Uma vez obtidos os valores de  $\xi(\eta)$ ,  $\xi'(\eta)$  e  $\xi''(\eta)$ , as componentes da velocidade para qualquer ponto do domínio podem ser facilmente calculadas através das Equações 6.11 e 6.12, uma vez que  $\eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} y$ .

Na Fig. 7.1 são mostrados quatro perfis de velocidades para a direção  $x$ . Cada curva representa a velocidade  $u$  para diferentes posições da placa, sendo elas:  $0, 25L_f$ ,  $0, 5L_f$ ,

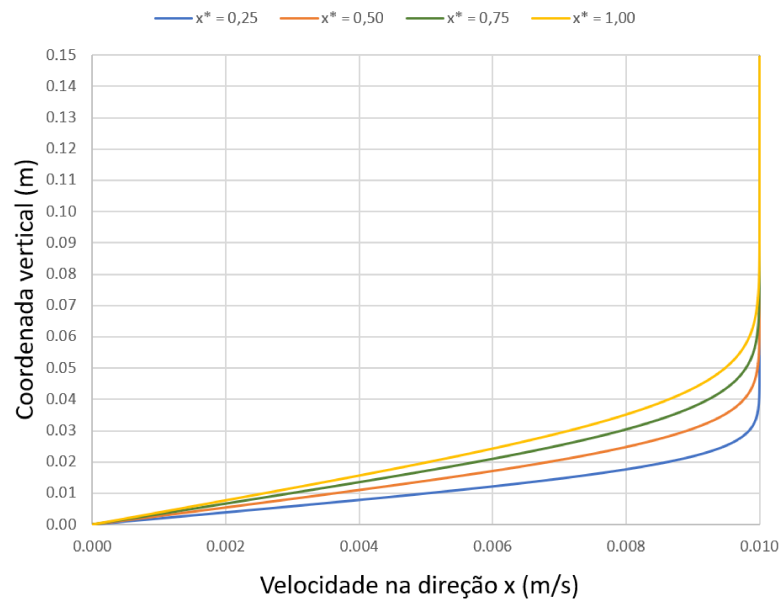
Tabela 7.3: Comparação entre os resultados obtidos por Cengel e Cimbala (2015) e aqueles obtidos com o presente trabalho.

$\eta$	$\left  \frac{\xi''(\eta) - f''}{\xi''(\eta)} \right $	$\left  \frac{\xi'(\eta) - f'}{\xi'(\eta)} \right $	$\left  \frac{\xi(\eta) - f}{\xi(\eta)} \right $	$\eta$	$\left  \frac{\xi''(\eta) - f''}{\xi''(\eta)} \right $	$\left  \frac{\xi'(\eta) - f'}{\xi'(\eta)} \right $	$\left  \frac{\xi(\eta) - f}{\xi(\eta)} \right $
0.0	0.000804%	-	-	2.4	0.000772%	0.000263%	0.000012%
0.1	0.000560%	0.013552%	0.016865%	2.6	0.002238%	0.000649%	0.000556%
0.2	0.001154%	0.003328%	0.015058%	2.8	0.001853%	0.000048%	0.000221%
0.3	0.000199%	0.001406%	0.009771%	3.0	0.000198%	0.000524%	0.000128%
0.4	0.000048%	0.003133%	0.000452%	3.5	0.002450%	0.000041%	0.000078%
0.5	0.000287%	0.002863%	0.006796%	4.0	0.006414%	0.000186%	0.000277%
0.6	0.000267%	0.001382%	0.007768%	4.5	0.002619%	0.000437%	0.000154%
0.8	0.000226%	0.000329%	0.001678%	5.0	0.020117%	0.000191%	0.000110%
1.0	0.000895%	0.000009%	0.001039%	5.5	0.021433%	0.000119%	0.000049%
1.2	0.000256%	0.000990%	0.000542%	6.0	0.084928%	0.000286%	0.000020%
1.4	0.001497%	0.000386%	0.000486%	6.5	0.530932%	0.000094%	0.000047%
1.6	0.001166%	0.000625%	0.000181%	7.0	0.077213%	0.000159%	0.000165%
1.8	0.000357%	0.000325%	0.000372%	8.0	18.300654%	0.000374%	0.000053%
2.0	0.000577%	0.000678%	0.000671%	9.0	-	0.000012%	0.000031%
2.2	0.000366%	0.000054%	0.000425%	10.0	-	0.000001%	0.000027%

$0,75L_f$  e  $L_f$ , em que  $L_f$  é o comprimento do domínio fluido que, por sua vez, é do mesmo comprimento da placa.

A velocidade de entrada do fluido para esse caso foi  $u_{in} = 0,01m/s$  para uma placa de  $L_s = 0,103m$  de comprimento. O domínio do fluido tem o mesmo comprimento da placa,  $L_f = L_s$  e altura  $H_f = 0,15m$ .

Figura 7.1: Perfis de velocidade, para diferentes posições da placa obtidos através da solução da equação de Blasius.

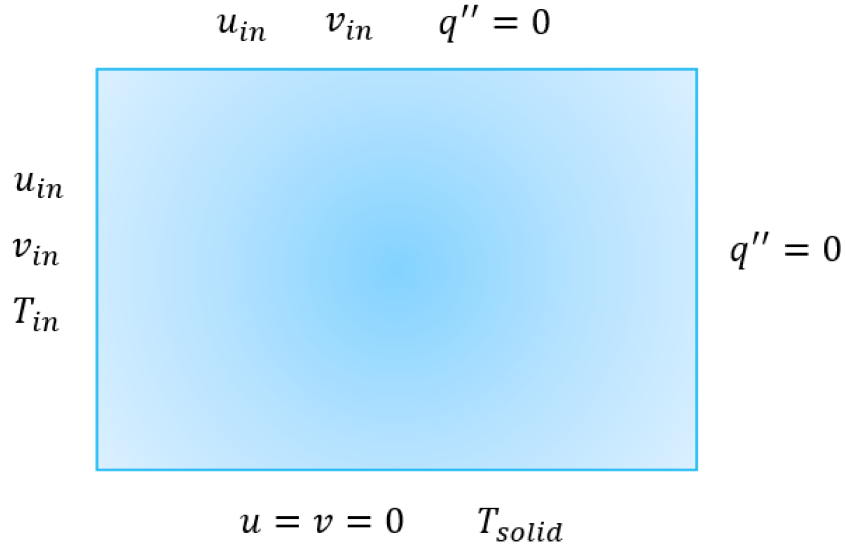


Fonte: Autoria própria.

Com a equação de Blasius validada e, consequentemente, o campo de velocidade, faz-se necessário, então, validar o acoplamento térmico para o problema térmico conjugado. O método utilizado foi o acoplamento forte do tipo Gauss-Seidel, como mostrado na Fig. 3.3. Este método foi escolhido por ser robusto o suficiente e, ao mesmo tempo, intuitivo e simples de se implementar.

Os tipos de condições de contorno térmicas utilizadas para o fluido podem ser vistos na Fig. 7.2, em que a temperatura de entrada utilizada foi  $T_{in} = 300K$ . Como já mencionado, o comprimento e altura do domínio fluido são, respectivamente,  $L_f = 0,103m$  e  $H_f = 0,15m$ . Foi utilizada uma malha com  $150 \times 250$  volumes (comprimento  $\times$  altura).

Figura 7.2: Representação das condições de contorno utilizadas para o modelo de validação do fluido.

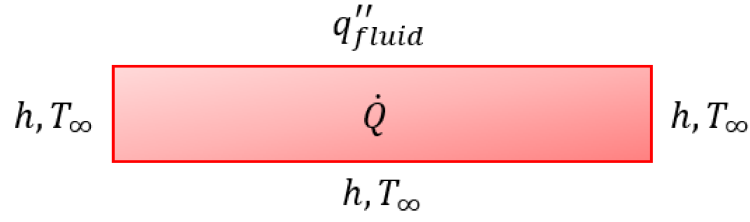


Fonte: Autoria própria.

Para a validação, os tipos de condições de contorno térmicas utilizadas para o sólido podem ser vistos na Fig. 7.3, em que os coeficientes de convecção térmica e temperaturas para os três lados da placa são iguais e valem, respectivamente,  $h = 50 \frac{W}{m^2K}$  e  $T_{\infty} = 300K$ . Foram considerados, também, processos internos transformadores de energia no valor de  $Q = 30kW$  para todo o sólido.

Com a Fig. 7.4 é possível ver uma comparação entre os resultados obtidos com o modelo analítico utilizado por Shah e Jain (2015), o qual pode ser visto no Apêndice A, e a simulação numérica no presente trabalho, para uma velocidade de entrada constante de  $u_{in} = 0,01m/s$ , o que resulta em um número de Reynolds, baseado no comprimento da placa, de  $Re = \frac{u_{in}L_s}{\nu_f} = 65$ .

Figura 7.3: Representação das condições de contorno utilizadas para o modelo de validação do sólido.



Fonte: Autoria própria.

A posição adimensional (eixo das abcissas) e a temperatura adimensional (eixo das coordenadas) foram calculadas como se segue:

$$x^+ = \frac{x}{L_s}, \quad (7.1)$$

$$T_{wall}^+ = \frac{T_{wall}}{\frac{\dot{Q}L_s^2}{k_s}}. \quad (7.2)$$

Nas Equações 7.1 e 7.2,  $x$  representa a posição ao longo da interface e  $L_s$  representa o comprimento total da placa, que por sua vez é o mesmo do comprimento dos domínios fluido e sólido. Na Eq. 7.2,  $\dot{Q}$  é a taxa de energia térmica por unidade de volume, oriunda de processos transformadores, como por exemplo o efeito Joule. Sua unidade é o  $\frac{W}{m^3}$  e seu valor pode ser calculado pela seguinte relação:

$$\dot{Q} = \frac{Q}{H_s L_s (1)}. \quad (7.3)$$

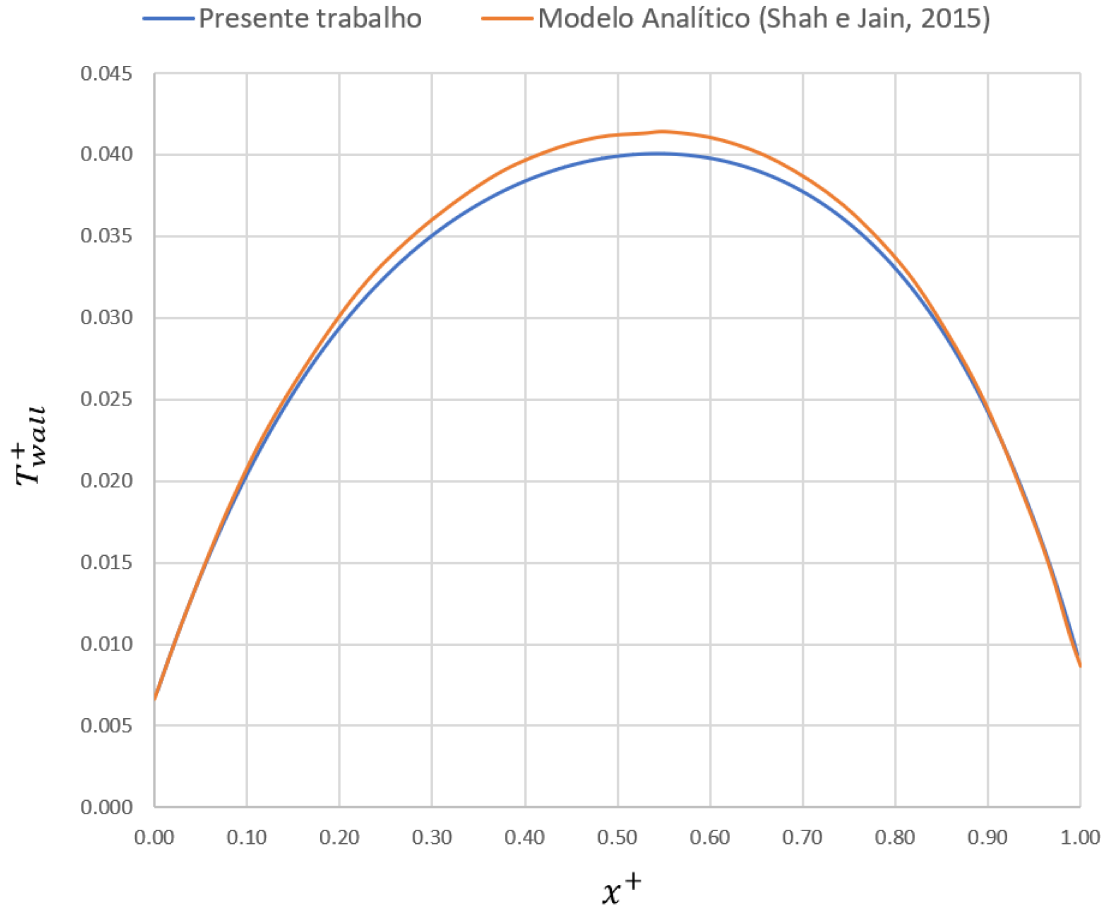
Onde  $H_s$  e  $L_s$  são a altura e o comprimento da placa (subdomínio sólido), respectivamente.

Foram comparados, também, os perfis de temperatura na interface para mais três diferentes valores de velocidade de entrada. Na Fig. 7.5 são mostrados os resultados para velocidade de entrada  $u_{in} = 0,05m/s$  ( $Re = 324$ ).

Na Fig. 7.6, além dos resultados obtidos no presente trabalho e com o modelo analítico, também é mostrado o resultado obtido por Shah e Jain (2015) através de simulação numérica utilizando-se o método dos elementos finitos com o programa ANSYS-CFX. Esses resultados foram obtidos para uma velocidade de entrada  $u_{in} = 0,1m/s$  ( $Re = 648$ ).



Figura 7.4: Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada  $u_{in} = 0,01m/s$



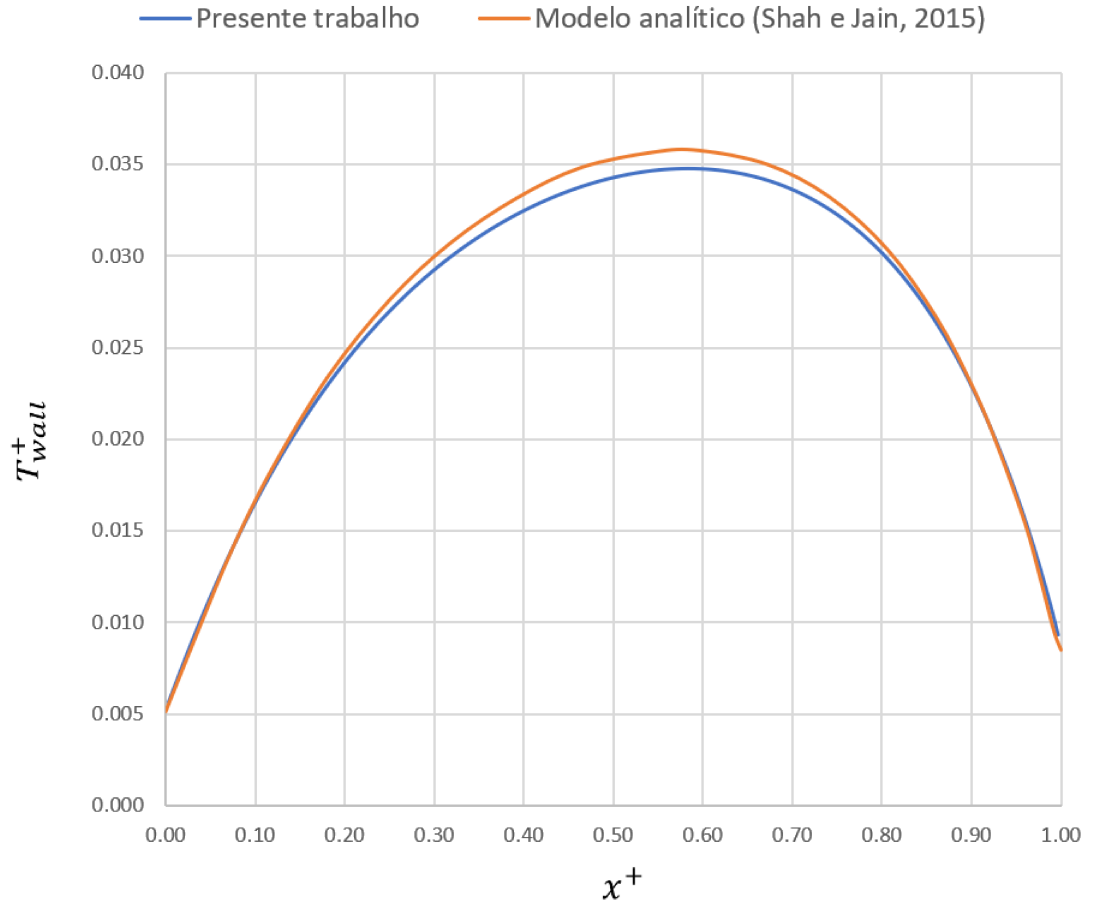
Fonte: Autoria própria.

Vale notar que o presente trabalho obteve resultados mais próximos do modelo analítico se comparado ao ANSYS-CFX, entretanto a malha utilizada para a simulação via método dos elementos finitos não foi fornecida pelo autor.

A última comparação entre perfis de temperatura na interface é mostrada na Fig. 7.7. A velocidade de entrada utilizada foi  $u_{in} = 0,2m/s$  ( $Re = 1295$ ).

Além da temperatura, o fluxo térmico também foi avaliado. Com a Fig. 7.8 comparam-se os fluxos térmicos obtidos pelo modelo analítico e pelo modelo computacional utilizado no presente trabalho para uma velocidade de entrada  $u_{in} = 0,01m/s$  e para três malhas diferentes. Os valores apresentados são para os fluxos térmicos que o sólido envia para o fluido ao longo de toda a superfície e foram calculados em sua forma adimensional como se segue:

Figura 7.5: Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada  $u_{in} = 0,05m/s$



Fonte: Autoria própria.

$$q_{wall}^+ = \frac{q_{wall}}{\frac{QL^2}{H}} \quad (7.4)$$

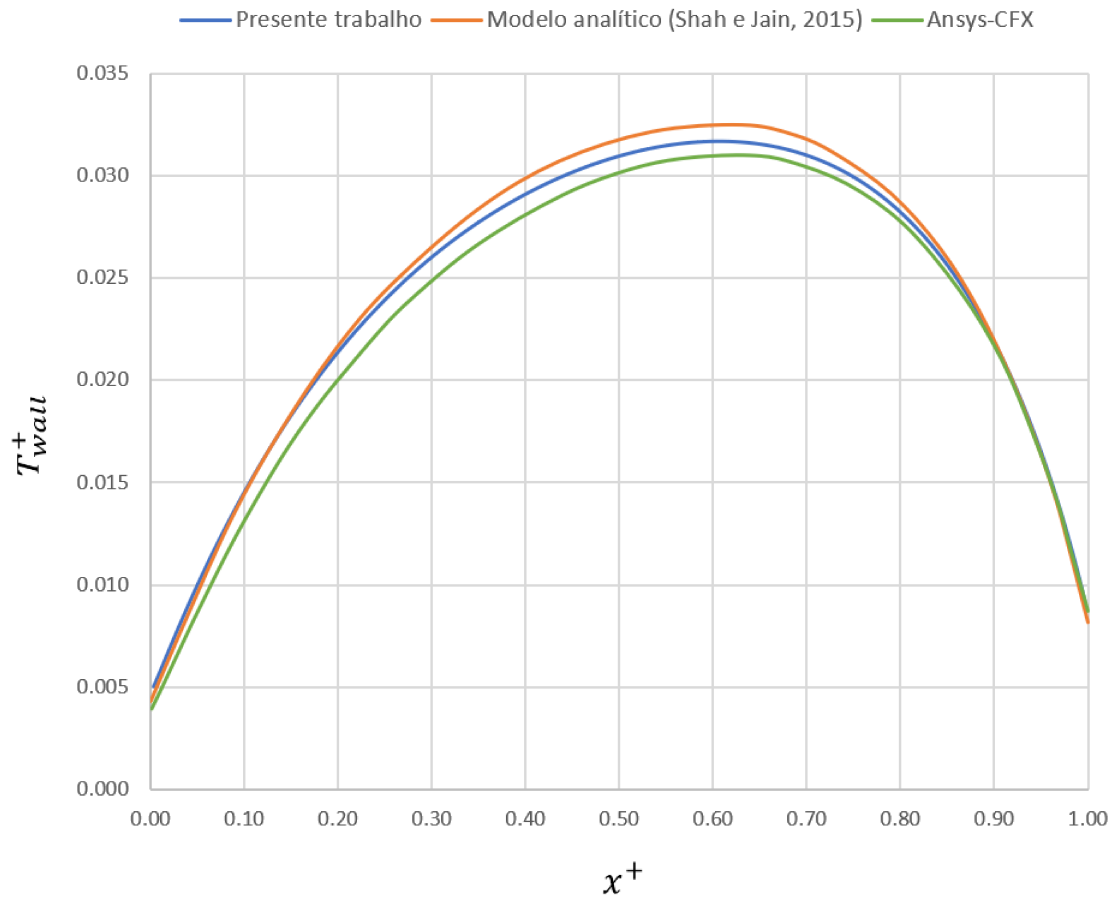
Vale ressaltar que as malhas dos subdomínios sólido e fluido são construídas de modo que o tamanho dos volumes em ambos os subdomínios seja sempre o mesmo, ou seja, o comprimento  $dx$  e  $dy$  dos volumes são os mesmos tanto para o sólido quanto para o fluido. Com isso em mente, a seguir são apresentadas a quantidade de volumes utilizados para cada malha nos resultados exibidos na Fig. 7.8.

- Malha 1:

Sólido:  $90 \times 30$

Fluido:  $90 \times 150$

Figura 7.6: Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada  $u_{in} = 0,1m/s$



Fonte: Autoria própria.

- Malha 2:

Sólido:  $120 \times 40$

Fluido:  $120 \times 200$

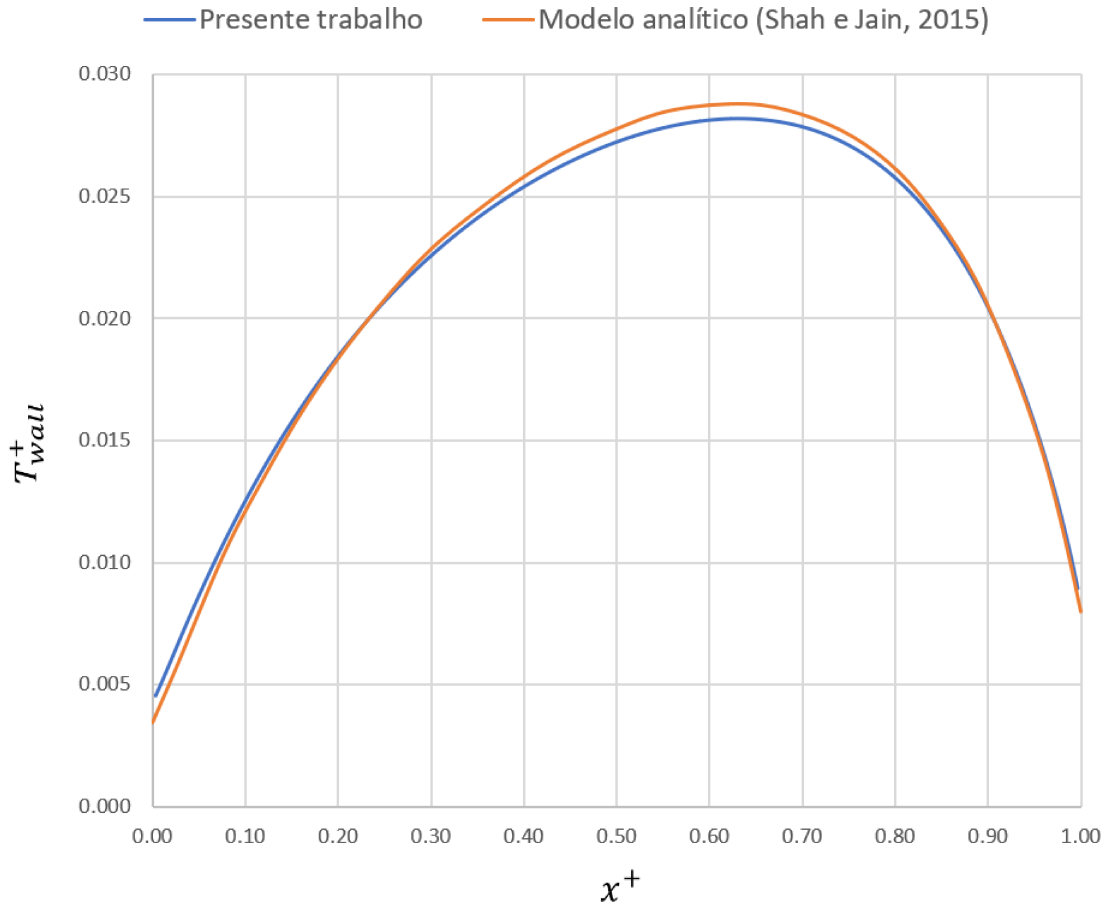
- Malha 3:

Sólido:  $150 \times 50$

Fluido:  $150 \times 250$

Com os resultados apresentados na Fig. 7.8 e analisando-se as malhas utilizadas, percebe-se uma tendência de melhora dos resultados à medida que a malha vai sendo refinada. A direção  $y$ , por ser a direção dos fluxos térmicos na interface, tem maior influência nos resultados do que a direção  $x$ , ou seja, refinando-se a malha na direção  $y$  obtém-se resultados melhores se comparados aos resultados obtidos para o mesmo refinamento na direção  $x$ .

Figura 7.7: Perfil de temperaturas na interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada  $u_{in} = 0,2m/s$



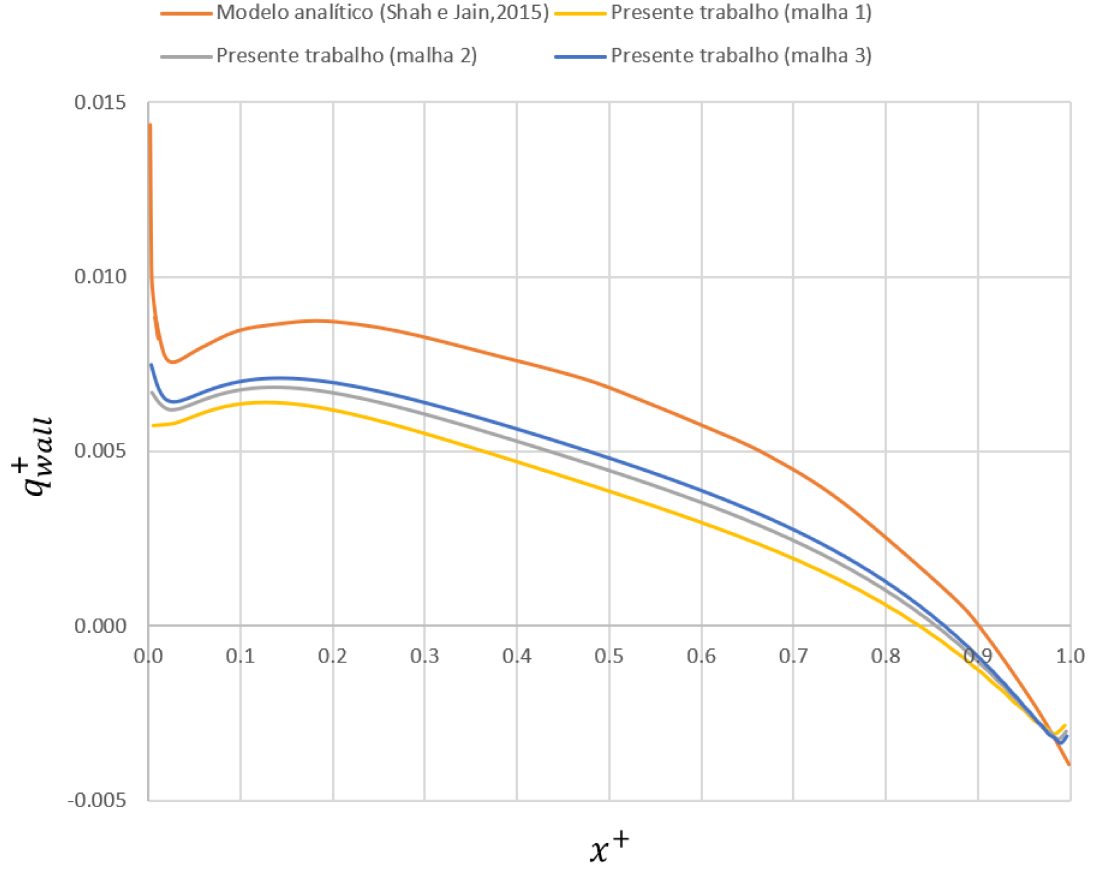
Fonte: Autoria própria.

Analisando do ponto de vista da física do problema analisado, percebe-se com os resultados apresentados na Fig. 7.8 que até uma certa posição da placa, o fluido recebe energia da placa (região em que o fluxo térmico é positivo), ou seja, o fluido é aquecido pela placa. Entretanto, a partir de uma certa posição, o fluido passa ceder energia para a placa (região em que o fluxo térmico é negativo), ou seja, a placa que é aquecida pelo fluido. Esse fenômeno é bastante interessante e é explicado devido às condições de contorno de terceiro tipo (balanço de energia) utilizadas para as outras três fronteiras da placa.

### 7.1.1 Comentários gerais sobre a validação

Foi utilizado o acoplamento forte com o método Bloco-Gauss-Seidel e, de maneira geral, os resultados encontrados com o método numérico utilizado no presente trabalho apresentaram boa concordância com o modelo analítico utilizado para validação. A seguinte relação foi utilizada como critério de convergência para o acoplamento forte:

Figura 7.8: Fluxo térmico enviado do sólido para o fluido ao longo da interface fluido-sólido para uma velocidade de entrada  $u_{in} = 0,1 m/s$



Fonte: Autoria própria.

$$||T_{wall}^{k+1} - T_{wall}^k|| < tol. \quad (7.5)$$

A tolerância utilizada foi  $tol = 10^{-8}$ . Basicamente, o que se faz com esse critério de convergência é parar as iterações do acoplamento quando a temperatura na interface parar de variar entre uma iteração e outra.

Os resultados apresentados nas Figuras 7.4, 7.5, 7.6 e 7.7 foram obtidos após 17, 35, 48 e 87 iterações, respectivamente, para o acoplamento forte. Com isso, percebe-se que, para uma mesma malha, ao se aumentar a velocidade de entrada  $u_{in}$ , mais iterações foram necessárias para se alcançar a tolerância desejada para o acoplamento. Vale notar também que os valores máximos de temperatura diminuíram à medida que a velocidade de entrada  $u_{in}$  aumentou, o que é um resultado intuitivo e fisicamente esperado.

Por fim, mas não menos importante, o autor do presente trabalho gostaria de salientar

que o código desenvolvido para solução de sistemas lineares utilizando-se o método BiCGSTAB não converge para o sistema linear resultante da Eq. 6.13, após feita as discretizações via método dos volumes finitos. Como alternativa, utilizou-se a função do MatLab chamada *mldivide*. Com essa função analisam-se as características da matriz dos coeficientes e escolhe, entre os vários métodos disponíveis para solução de sistemas lineares, o mais adequado. A utilização dessa função trouxe grande comodidade quanto à não necessidade de se procurar e implementar um método para resolver o sistema linear, por outro lado, impossibilitou o uso de malhas mais refinadas, devido ao consumo de memória decorrente do uso desse software.

## 7.2 Modelos transientes

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos através da simulação do mesmo tipo de problema (escoamento sobre uma placa plana), mas desta vez em regime transiente e, também, para diferentes tipos de condição de contorno para a placa. O objetivo é avaliar a coerência dos resultados, obtidos com o código desenvolvido para problemas transientes, com aquilo que se espera fisicamente.

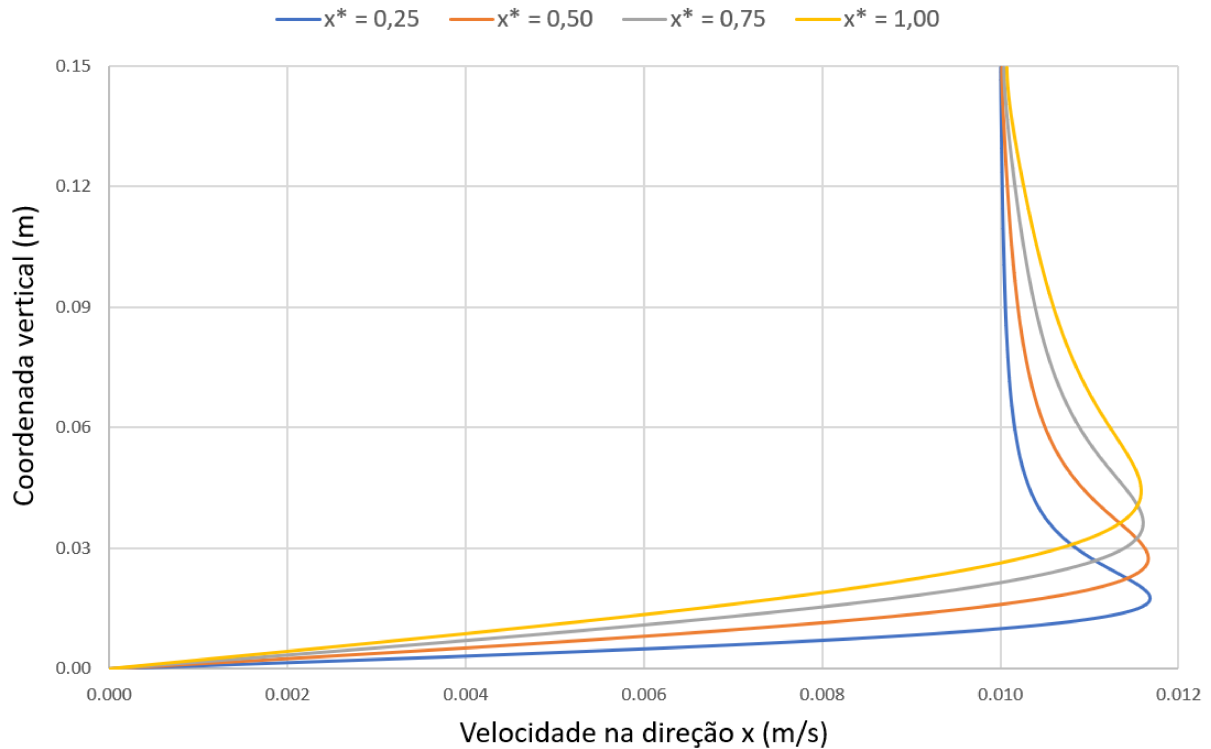
Para começar, o escoamento será modelado não mais com a equação de Blasius, mas sim com as equações de Navier-Stokes para regime transiente e propriedades físicas constantes, como pode ser visto com a Eq. 6.3 (equação da continuidade), Eq. 6.4 (balanço da quantidade de movimento linear na direção  $x$ ) e Eq. 6.5 (balanço da quantidade de movimento linear na direção  $y$ ).

Resolvendo-se as equações de Navier-Stokes, percebe-se uma região do perfil de velocidades em que o fluido apresenta velocidade maior do que a velocidade de entrada e depois tende a ela. Segundo Dou, Xu e Khoo (2018), esse fenômeno é chamado de *overshoot* e pode ser visto na Fig. 7.9. A velocidade de entrada utilizada foi  $u_{in} = 0,01m/s$  e as posições mostradas são  $x^+ = 0,25$ ,  $x^+ = 0,50$ ,  $x^+ = 0,75$  e  $x^+ = 1,00$ , em que  $x^+ = \frac{x}{L}$ .

Esse comportamento não é observado através da teoria da camada limite de Blasius e pode ser fisicamente explicado. Uma vez que o fluido é repentinamente freado pela placa, as camadas de fluido logo acima da placa sofrem uma aceleração, e conseqüentemente aumento de velocidade, devido à necessidade de se respeitar o balanço de quantidade de movimento linear.

Esse fenômeno é observado ao longo de toda a camada limite, como pode ser observado

Figura 7.9: Perfis de velocidade, para diferentes posições da placa obtidos através da solução das equações de Navier-Stokes.



Fonte: Autoria própria.

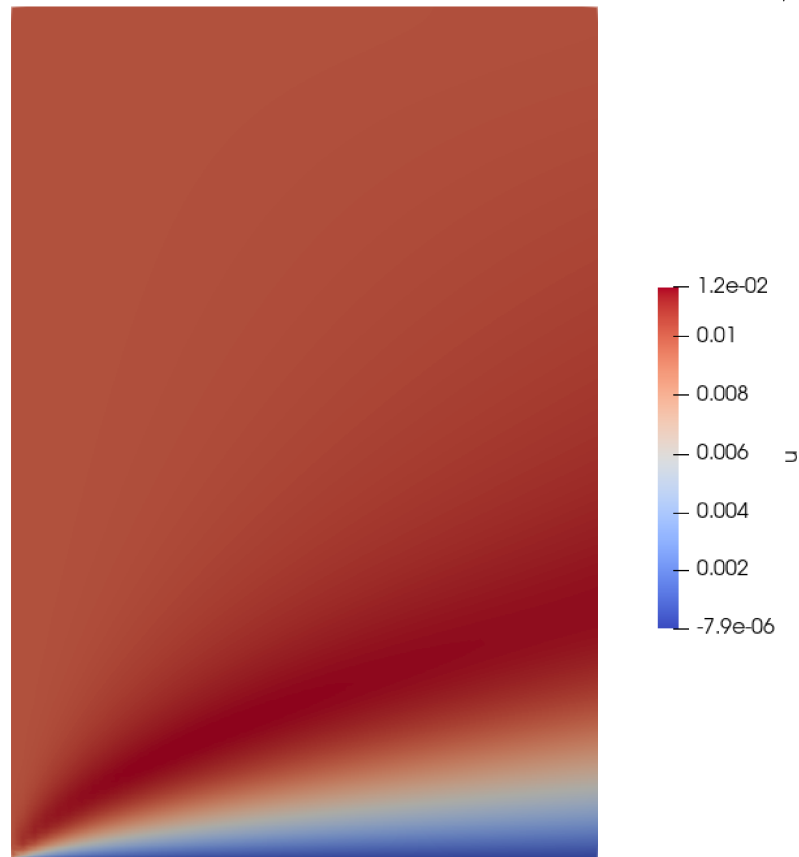
com a região mais avermelhada na Fig. 7.10, de modo que, à medida que se afasta da entrada, ele vai sendo atenuado. Pode-se perceber essa atenuação através das velocidades máximas atingidas para as diferentes posições ao longo da interface conforme apresentado na Fig. 7.9. Caso a placa fosse suficientemente longa, o perfil de velocidades seria bem semelhante ao perfil obtido através da solução da equação de Blasius.

Diferentemente do modelo utilizado para validação, em que o campo de velocidade é obtido em regime permanente através da equação de Blasius, no modelo transiente ele deve ser calculado a cada passo de tempo, caso os passos de tempo para o subdomínio fluido e sólido sejam os mesmos, ou de tempos em tempos caso os passos de tempo para os subdomínios sejam diferentes.

### 7.2.1 Cuidados com o processo transiente

Quando se trabalha com modelos em regime transiente de convecção conjugada, alguns cuidados devem ser tomados de modo a garantir que os fenômenos que ocorrem durante o processo transiente mais intenso, no começo da simulação para o caso do presente trabalho, sejam devidamente capturados e levem à solução correta do problema.

Figura 7.10: Camada limite fluidodinâmica laminar sobre uma placa plana, obtida através da solução das equações de Navier-Stokes. A velocidade  $u$  é dada em  $m/s$ .



Fonte: Autoria própria.

A título de exemplo, imagina-se o mesmo problema, escoamento sobre uma placa plana com balanço de energia térmica como condição de contorno para as laterais da placa e para a parte inferior, com a diferença que na interface fluido-sólido ao invés de se analisar de forma conjugada, utiliza-se condição de Dirichlet, ou seja, a temperatura para o fluido e para o sólido é conhecida naquela região. A qualidade do refinamento da malha utilizada para o fluido e da malha utilizada para o sólido afetará a acurácia da solução para cada subdomínio, mas o problema a ser resolvido continua a ser o mesmo, uma vez que os subdomínios não interagem entre si.

Entretanto, analisando-se o problema de forma conjugada, a qualidade do refinamento da malha de um subdomínio não apenas afeta a acurácia da solução daquele subdomínio, mas também influencia na solução do outro subdomínio, uma vez que os subdomínios interagem entre si através da troca de informações na interface via condições de contorno. Com isso, deve-se tomar cuidado com o cálculo dos fluxos térmicos na interface, os quais estarão devidamente calculados se:



- A malha for suficientemente fina a ponto de permitir que a temperatura na interface seja calculada corretamente utilizando-se métodos de extrapolação de baixa ordem.
- Forem utilizados métodos de extrapolação mais robustos que consigam estimar adequadamente a temperatura na interface, mesmo para malhas menos refinadas.
- Utiliza-se a condição de contorno já fornecida pelo outro subdomínio, evitando-se a necessidade de extrapolações.

A terceira opção foi a opção utilizada no presente trabalho uma vez que ela é a mais fácil de ser implementada. O que foi dito anteriormente pode ser melhor compreendido analisando-se os resultados mostrados na Fig. 7.11. Nela são mostrados os perfis de temperatura para quatro diferentes malhas em um mesmo instante, no começo da simulação, decorridos apenas 0,05s (5 iterações). Esses resultados foram obtidos através da simulação da placa sujeita à condição inicial de temperatura constante,  $T_{s_{ini}} = 700K$  e o fluido com temperaturas inicial e de entrada também constantes,  $T_{f_{ini}} = T_{in} = 300K$ .

As malhas utilizadas para a comparação foram:

- Malha A:

Sólido:  $50 \times 15$

Fluido:  $50 \times 75$

- Malha B:

Sólido:  $50 \times 30$

Fluido:  $50 \times 150$

- Malha C:

Sólido:  $50 \times 40$

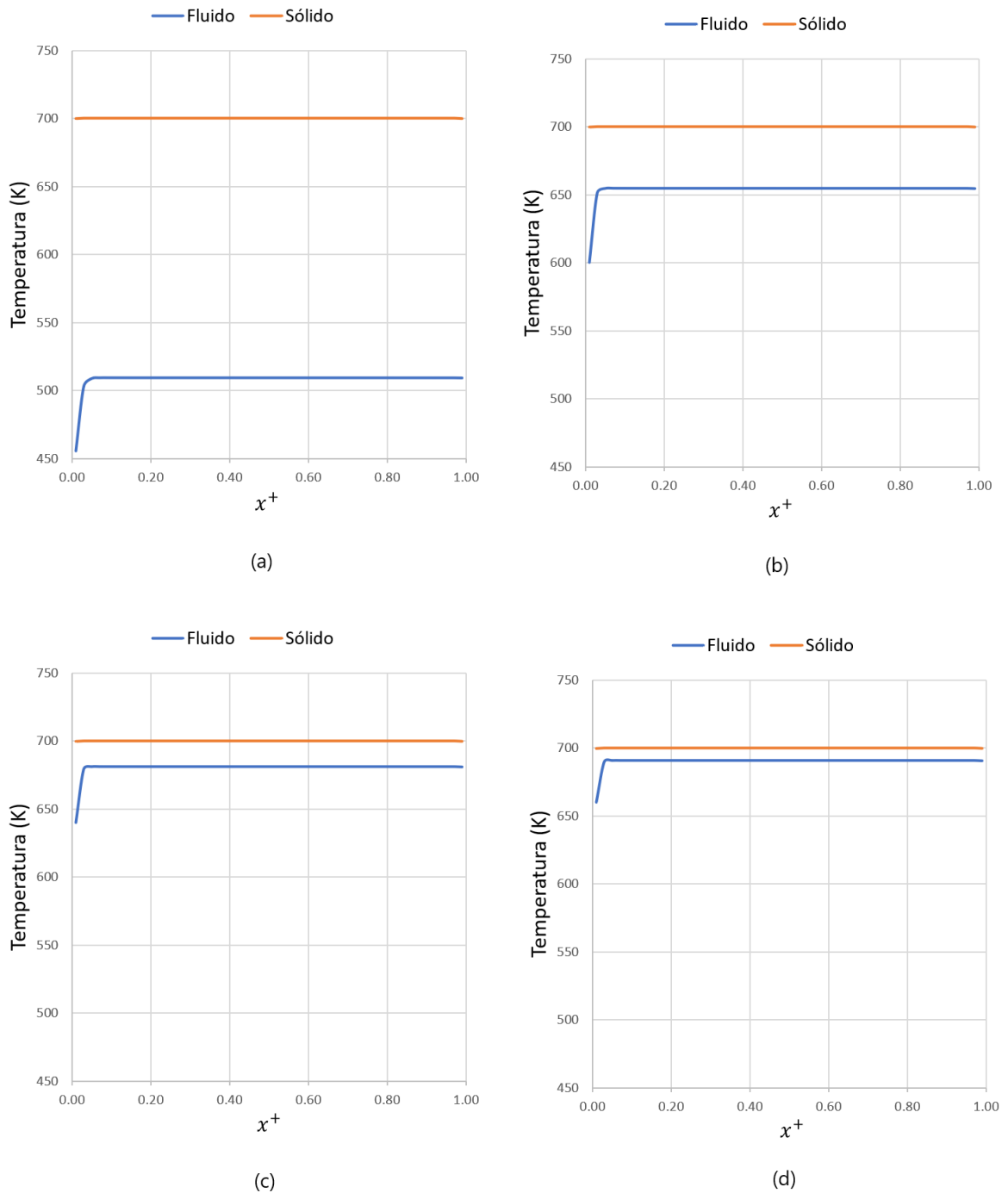
Fluido:  $50 \times 200$

- Malha D:

Sólido:  $50 \times 50$

Fluido:  $50 \times 250$

Figura 7.11: Perfil de temperaturas na interface para o fluido e para o sólido para quatro diferentes malhas: (a) malha A, (b) malha B, (c) malha C e (d) malha D.



Fonte: Autoria própria.

Esses tipos de erros ocorrem, principalmente, no começo da simulação devido aos elevados gradientes. À medida que a simulação avança, os gradientes de temperatura vão sendo suavizados devido às trocas térmicas na interface e a descontinuidade das temperaturas não é mais observada, uma vez que os erros de extrapolação gerados pela

má qualidade da malha não são tão acentuados devido aos valores menores dos gradientes.

Para o caso analisado, o erro no cálculo dos fluxos devidos às extrapolações e/ou à falta de refinamento da malha pode passar despercebido, uma vez que os elevados gradientes desaparecem rapidamente devido às trocas térmicas. Entretanto, em problemas altamente transientes e com variações grandes nas condições de contorno, a propagação desses erros se torna notável e compromete fortemente os resultados.

Como forma de se buscar uma outra abordagem para o problema, utilizou-se uma malha com os pontos da malha para as temperaturas posicionados nas fronteiras dos subdomínios (Prática B), conforme apresentado nas Figuras 6.5 e 6.6. Com essa abordagem, esperava-se conseguir uma melhora no cálculo dos fluxos térmicos na interface, porém, como pode ser visto na Fig. 7.12, não houve grandes mudanças.

### 7.2.2 Verificação do modelo transiente

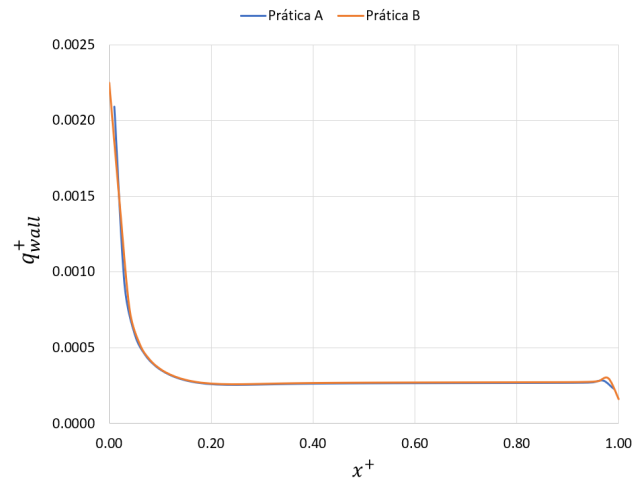
Analisando-se os resultados apresentados na Fig. 7.12, optou-se por utilizar a malha da Prática A, uma vez que ela foi a malha inicialmente utilizada e a Prática B não trouxe ganhos relevantes que justificasse o seu uso.

Uma das maneiras para se verificar os resultados obtidos com o código geral implementado é comparar os resultados obtidos através de uma simulação em regime transiente, tão longa quanto necessário para que se atinja o regime permanente, com os resultados obtidos com o modelo analítico já apresentado.

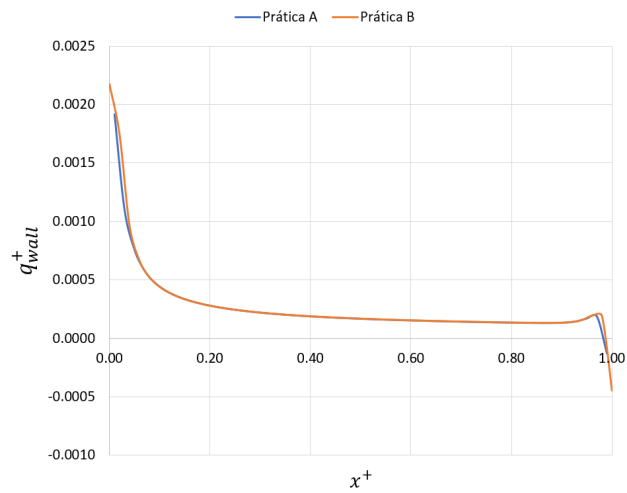
Para se fazer a verificação, foi utilizada a malha B, que apresenta um bom custo benefício entre o tempo computacional e a acurácia da solução. O tempo simulado para que se atingisse o regime permanente foi de aproximadamente 15000 segundos, a partir das condições iniciais de  $T_{sini} = 700K$  e  $T_{fini} = 300K$ . O resultado obtido para o perfil de temperatura na interface é apresentado na Fig. 7.13.

É importante salientar uma diferença importante entre os modelos: para o modelo analítico, como ele é baseado na equação de balanço de energia térmica em regime permanente, a única propriedade física utilizada para o subdomínio sólido é a condutividade térmica,  $k_s$ , já para o modelo em regime transiente são necessários, também, a massa específica  $\rho_s$  e o calor específico  $c_{p_s}$  do sólido. Essas duas últimas propriedades não foram fornecidas no trabalho utilizado como referência para validação. O que foi feito, então, foi procurar na literatura um material com o calor específico  $k_s$  o mais próximo possível

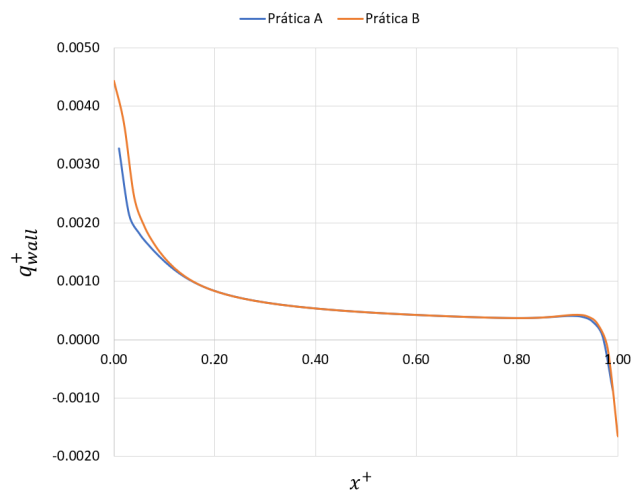
Figura 7.12: Fluxo térmico calculado no subdomínio fluido para três instantes de tempo diferentes: (a) 2s , (b) 20s e (c) 200s.



(a)



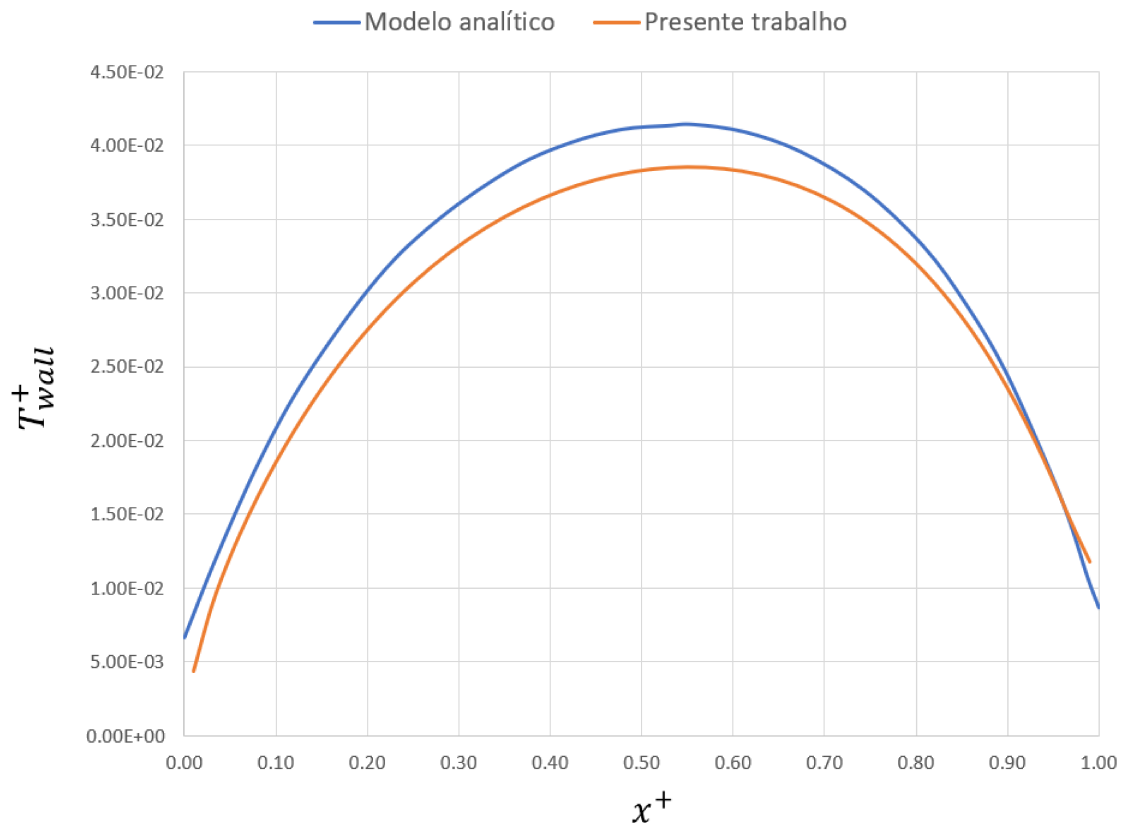
(b)



(c)

Fonte: Autoria própria.

Figura 7.13: Comparação entre os perfis de temperatura obtidos através do modelo analítico e da simulação com o modelo geral transiente.



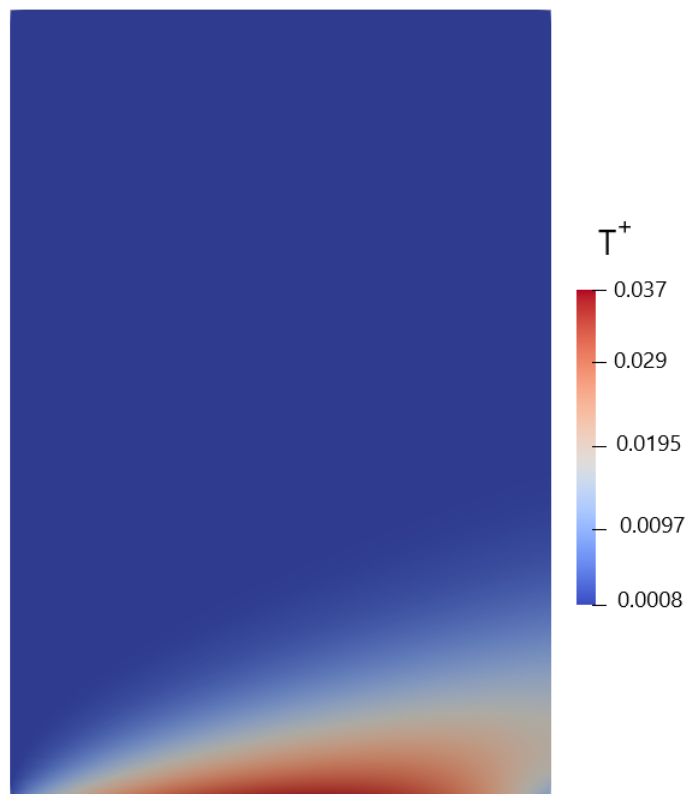
Fonte: Autoria própria.

do valor utilizado no trabalho de referência. Uma vez encontrado o material, no caso o gesso acartonado (também conhecido como *drywall*), utilizou-se, portanto, as propriedades físicas desse material.

Nas Figuras 7.14 e 7.15 são apresentadas as distribuições de temperatura para os subdomínios fluido e sólido, respectivamente. Nelas é possível perceber a importância de se analisar os problemas de maneira acoplada, ou conjugada, uma vez que distribuição de temperaturas obtida é bem mais complexa e, com certeza, completamente diferente da distribuição de temperaturas que seria obtida analisando o problema de maneira desacoplada, ou seja, impondo as condições de contorno (a não ser que essas fossem fornecidas como uma função do tempo, o que é inviável na prática).

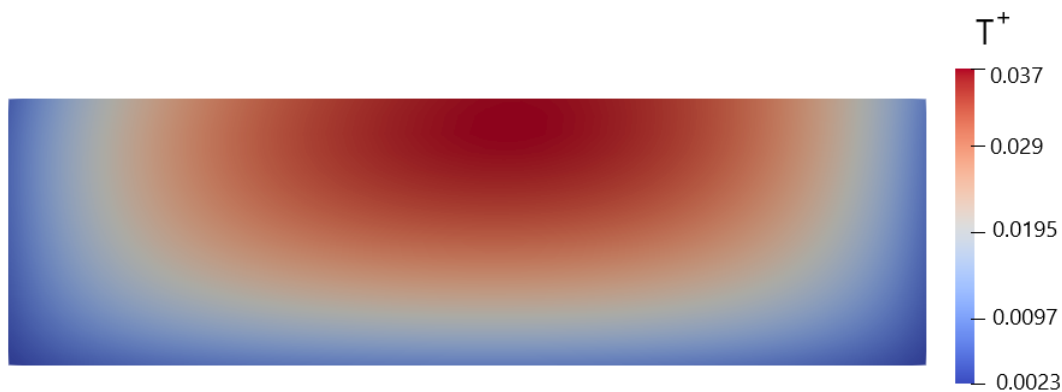
Com a Fig. 7.14 observa-se a influência que a condição de contorno de terceiro tipo (balanço de energia) da fronteira direita do subdomínio sólido exerce sobre o subdomínio fluido, uma vez que, como já foi dito, a partir de uma certa posição, o fluxo térmico passa a ser na direção do fluido para o sólido, o que explica a região com menores temperaturas

Figura 7.14: Distribuição de temperaturas para o subdomínio fluido.



Fonte: Autoria própria.

Figura 7.15: Distribuição de temperaturas para o subdomínio sólido.



Fonte: Autoria própria.

(em azul claro) ao final da camada limite térmica.

### 7.2.3 Modelos extras para o caso transiente geral

O código utilizado para resolver o modelo transiente foi implementado de modo a permitir que os três tipos de condições de contorno (Dirichlet, Neumann e balanço de energia térmica) sejam utilizadas nas fronteiras esquerda, direita e inferior do subdomínio

sólido. Além disso, é possível, também, informar se há ou não difusão e/ou advecção nas direções  $x$  e  $y$ . Assim sendo, serão mostrados a seguir dois casos para analisar as condições de contorno para as fronteiras do subdomínio sólido que ainda não foram analisadas, ou seja, Dirichlet e Neumann. Os resultados aqui mostrados servem apenas para mostrar/testar a versatilidade do código, necessitando estudos complementares para verificação da confiabilidade como, por exemplo, um estudo de independência de malha e do passo de tempo.

### 7.2.3.1 Modelo extra com condição de contorno do tipo Dirichlet

A seguir serão apresentados os resultados de uma simulação teste utilizando condições de contorno de primeiro tipo, ou Dirichlet, para as três faces do subdomínio sólido que não estão em contato com o subdomínio fluido. Nas simulações a seguir, o material utilizado agora é o alumínio (material 02) o qual possui condutividade térmica aproximadamente 1000 vezes maior do que o material 01.

As condições de contorno utilizadas foram  $T_{left} = 500K$  para a fronteira esquerda,  $T_{right} = 300K$  para a fronteira direita e  $T_{bottom} = 1000K$  para a fronteira inferior. As condições iniciais foram as mesmas daquelas utilizadas anteriormente,  $T_{sini} = 700K$  e  $T_{fini} = 300K$ . A malha escolhida, novamente, foi a malha B.

Na Fig. 7.16 é apresentado o perfil de temperaturas para o tempo  $t = 30s$ .

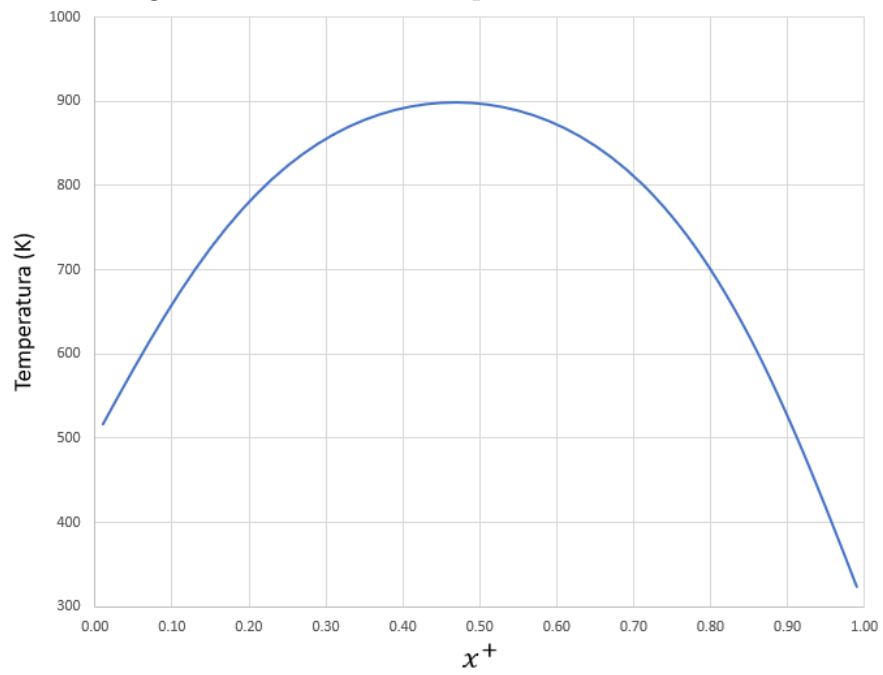
Nas Figuras 7.17 e 7.18 são apresentadas as distribuições de temperatura para os subdomínios fluido e sólido, respectivamente.

Devido à condutividade térmica elevada e ao tipo de condições de contorno utilizadas, mesmo para um tempo físico relativamente baixo, de 30 segundos, os resultados já podem ser considerados em regime permanente. Maiores testes para validação são importantes, porém os resultados, à primeira vista, apresentam boa coerência com a física do problema. Além disso, o balanço de energia está na ordem de  $10^{-8}$ , o que já é um bom indicativo.

### 7.2.3.2 Modelo extra com condição de contorno do tipo Neumann

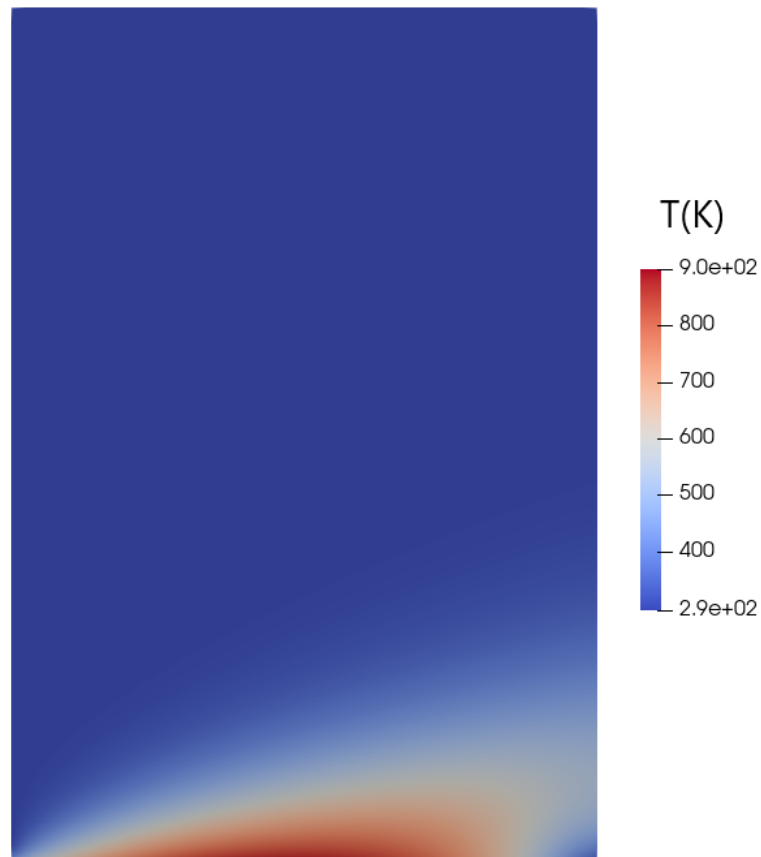
A seguir serão apresentados os resultados de uma simulação teste utilizando condições de contorno de segundo tipo, ou Neumann, para as três faces do subdomínio sólido que não estão em contato com o subdomínio fluido. Nas simulações a seguir, o material utilizado também foi o alumínio (material 02).

Figura 7.16: Perfil de temperatura na interface.



Fonte: Autoria própria.

Figura 7.17: Distribuição de temperaturas para o subdomínio fluido.



Fonte: Autoria própria.



Figura 7.18: Distribuição de temperaturas para o subdomínio sólido.

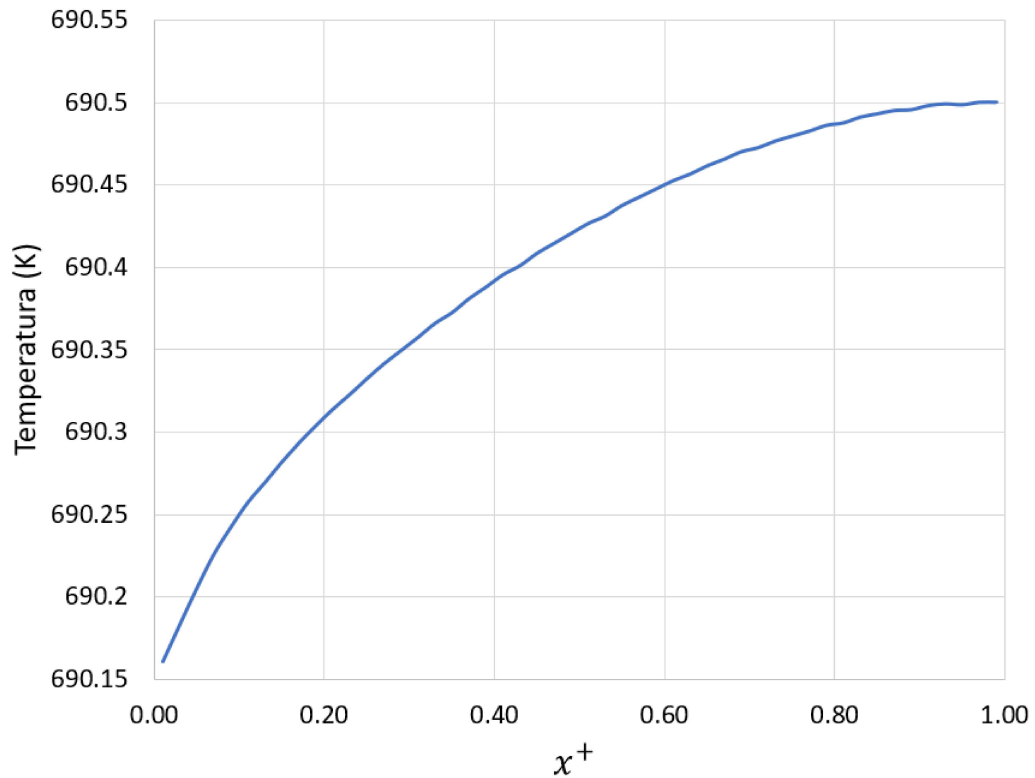


Fonte: Autoria própria.

Como condição de contorno utilizou-se isolamento, ou seja, fluxo térmico nulo, para todas as três fronteiras do subdomínio sólido. As condições iniciais foram as mesmas daquelas utilizadas anteriormente,  $T_{sini} = 700K$  e  $T_{fini} = 300K$ . A malha escolhida, novamente, foi a malha B.

Na Fig. 7.16 é apresentado o perfil de temperaturas para o tempo  $t = 50s$ .

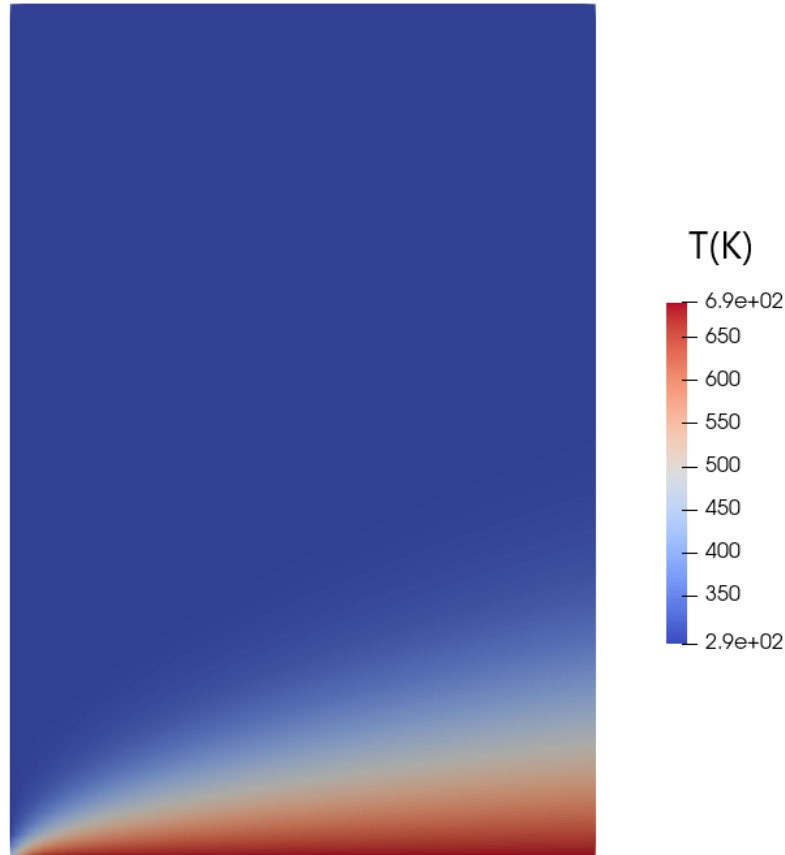
Figura 7.19: Perfil de temperatura na interface.



Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 7.20 e 7.21 são apresentadas as distribuições de temperatura para os subdomínios fluido e sólido, respectivamente.

Figura 7.20: Distribuição de temperaturas para o subdomínio fluido.



Fonte: Autoria própria.

Figura 7.21: Distribuição de temperaturas para o subdomínio sólido.



Fonte: Autoria própria.

Como pode-se perceber pelos valores de temperatura apresentados na Fig. 7.21, os resultados estão coerentes com a física transiente do problema, uma vez que na região de entrada as temperaturas são menores. Isso ocorre pois à medida que o fluido avança ao

longo da placa, mais energia térmica é trocada na interface, de modo que ao chegar ao final da placa, o fluido estará mais quente em relação à sua temperatura de entrada. O balanço de energia térmica da ordem de  $10^{-8}$  também pode ser considerado como um bom indicativo para a confiabilidade da solução.

O resultado foi obtido para uma simulação de 1000 segundos. Percebe-se que nesse tempo, a temperatura do sólido saiu dos  $700K$  iniciais e foi para cerca de  $690K$ . Caso o tempo de simulação fosse longo o suficiente, o resultado esperado para o regime permanente seria toda placa com o mesmo valor de temperatura  $T_{in}$  de entrada do fluido. Entretanto, esse não seria um resultado interessante de ser apresentado, diferentemente do resultado em regime transiente visto anteriormente.

## 8 Conclusões e trabalhos futuros

### 8.1 Conclusões

O presente trabalho foi proposto com o intuito de inserir uma nova linha de pesquisa no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia, passando a analisar problemas térmicos através de uma perspectiva diferente, tratando os problemas de forma acoplada. O autor dessa dissertação, encara o trabalho feito como um primeiro passo (ou uma primeira contribuição) em direção à implementação de sub-rotinas a serem utilizadas no código MFSim desenvolvido pelo próprio laboratório.

O código MFSim vem sendo construído e aprimorado ao longo dos anos pelos alunos, pesquisadores e professores do MFLab e já possibilita, atualmente, simular problemas de engenharia de alta complexidade.

Com base nisso, objetivou-se com o presente trabalho, contribuir sobretudo em dois aspectos:

- Com a revisão bibliográfica dos métodos utilizados na solução de problemas de CHT.
- Com a solução de um problema que possibilitou introduzir na prática a implementação de um dos vários métodos de acoplamento existentes.

Foi obtida boa concordância com os modelos analíticos utilizados para validação. Além disso, com o código implementado resolvem-se problemas relativamente gerais no que diz respeito às condições de contorno e às características da equação com a qual modela-se o problema (regime transiente/permanente, difusão e advecção nas direções  $x$  e  $y$ ).

Os resultados mostrados com as simulações extras para o modelo transiente geral, também apresentaram coerência com o que era esperado da física do problema e com bons valores para o balanço de energia térmica, na ordem de  $10^{-8}$ , o que não valida a simulação, mas é um indicativo.

Com tudo o que foi exposto, acredita-se que a principal contribuição feita com o presente trabalho foi a abertura de uma nova linha de pesquisa no MFLab.

## 8.2 Trabalhos futuros

Apesar dos bons resultados obtidos, ainda há muito a se explorar e também a ser melhorado. Algumas sugestões para trabalhos futuros são:

- Comparação entre os resultados obtidos utilizando-se os acoplamentos fraco e forte.
- Comparação entre diferentes métodos de acoplamento como, por exemplo, os métodos quase-Newton.
- Levar em consideração a variação das propriedades físicas com a temperatura.
- Implementação do refinamento de malha adaptativo.
- Implementação de modelos de turbulência, uma vez que a turbulência é um fenômeno extremamente importante em processos de transferência de energia térmica.
- Extensão para problemas em que ambos subdomínios sejam fluidos, de modo que a interface não mais seria estática, havendo a necessidade de rastreá-la, o que aumentaria consideravelmente a complexidade do problema.
- Solução de problemas tridimensionais.
- Solução de problemas com sólidos imersos em movimento trocando energia com o fluido.

## Referências

- BESSON, U. The history of the cooling law: when the search for simplicity can be an obstacle. *Science & Education*, Springer, v. 21, n. 8, p. 1085–1110, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11191-010-9324-1>.
- BROYDEN, C. G. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of computation*, JSTOR, v. 19, n. 92, p. 577–593, 1965. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1965-0198670-6>.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. *Numerical analysis*. [S.l.]: Cengage Learning, 2004.
- CARETTO, L. et al. Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. In: SPRINGER. *Proceedings of the third international conference on numerical methods in fluid mechanics*. 1973. p. 60–68. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BFb0112677>.
- CENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos-3*. [S.l.]: Amgh Editora, 2015.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1968-0242392-2>.
- DONGARRA, J.; SULLIVAN, F. Guest editors' introduction: The top 10 algorithms. *Computing in Science & Engineering*, IEEE Computer Society, v. 2, n. 1, p. 22–23, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/MCISE.2000.814652>.
- DORFMAN, A.; RENNER, Z. Conjugate problems in convective heat transfer. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2009, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2009/927350>.
- DOU, H.-S.; XU, W.; KHOO, B. C. Stability of boundary layer flow based on energy gradient theory. *Modern Physics Letters B*, World Scientific, v. 32, n. 12n13, p. 1840003, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0217984918400031>.
- FLETCHER, R. Conjugate gradient methods for indefinite systems. In: *Numerical analysis*. Springer, 1976. p. 73–89. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BFb0080116>.
- GUSTAFSON, K.; ABE, T. The third boundary condition - was it robin's? *The Mathematical Intelligencer*, Springer, v. 20, n. 1, p. 63–71, 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF03024402>.
- HAELTERMAN, R. *Analytical study of the least squares quasi-Newton method for interaction problems*. Tese (Doutorado) — Ghent University, 2009.
- HAHN, D. W.; ÖZISIK, M. N. *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/9781118411285>.
- HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The physics of fluids*, American Institute of Physics, v. 8, n. 12, p. 2182–2189, 1965. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1761178>.

HESTENES, M. R. et al. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, v. 49, n. 6, p. 409–436, 1952. Disponível em: <https://doi.org/10.6028/jres.049.044>.

KARABULUT, U. C.; KILIÇ, A. Various techniques to solve blasius equation. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, v. 20, n. 3, p. 129–142, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.25092/baunfbed.483084>.

KRYLOV, A. On the numerical solution of the equation by which in technical questions frequencies of small oscillations of material systems are determined. *Izvestiya AN SSSR (News of Academy of Sciences of the USSR), Otdel. mat. i estest. nauk*, v. 7, n. 4, p. 491–539, 1931.

LIGHTHILL, M. J. Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 202, n. 1070, p. 359–377, 1950. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0106>.

LUIKOV, A.; ALEKSASHENKO, V.; ALEKSASHENKO, A. Analytical methods of solution of conjugated problems in convective heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 14, n. 8, p. 1047–1056, 1971. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(71\)90203-1](https://doi.org/10.1016/0017-9310(71)90203-1).

LUIKOV, A. et al. Heat transfer from a plate in a compressible gas flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 13, n. 8, p. 1261–1270, 1970. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(70\)90067-0](https://doi.org/10.1016/0017-9310(70)90067-0).

MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2017.

NEFEDOV, V.; MATTHEIJ, R. M. M. et al. *Simulation of flow in a glass tank*. [S.l.]: Eindhoven University of Technology, Department of Mathematics and Computing ..., 1999.

OCLÓN, P.; LOPATA, S.; NOWAK, M. Comparative study of conjugate gradient algorithms performance on the example of steady-state axisymmetric heat transfer problem. *Archives of Thermodynamics*, v. 34, n. 3, p. 15–44, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.2478/aoter-2013-0013>.

PATANKAR, S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9781482234213>.

PERELMAN, T. On conjugated problems of heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 3, n. 4, p. 293–303, 1961. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(61\)90044-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(61)90044-8).

RAVIART, P.-A. et al. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. [S.l.]: Dunod Paris, 1998. v. 2.

Ribeiro Neto, H. Modelagem matemática para a interação fluido-estrutura acoplando escoamentos incompressíveis e viga de timoshenko. Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. Cambridge university press, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511810763>.

SHAH, K.; JAIN, A. An iterative, analytical method for solving conjugate heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 90, p. 1232–1240, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.056>.

SHEWCHUK, J. R. et al. *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain*. [S.l.]: Carnegie-Mellon University. Department of Computer Science, 1994.

VERSTRAETE, T.; SCHOLL, S. Stability analysis of partitioned methods for predicting conjugate heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 101, p. 852–869, 2016.

VORST, H. A. Van der. Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, SIAM, v. 13, n. 2, p. 631–644, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0913035>.

VORST, H. A. Van der. *Iterative Krylov methods for large linear systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. v. 13.



## A Solução analítica do caso de validação

Shah e Jain (2015) apresentam a solução analítica para a Eq. 6.2 e para a Eq. 6.25 em suas formas adimensionais. Os adimensionais propostos por eles são:

$$T_f^+ = \frac{T_f}{\frac{QL^2}{k_s}}, \quad (\text{A.1})$$

$$T_s^+ = \frac{T_s - T_\infty}{\frac{QL^2}{k_s}}, \quad (\text{A.2})$$

$$x^+ = \frac{x}{L}, \quad (\text{A.3})$$

$$y^+ = \frac{y}{H}, \quad (\text{A.4})$$

$$L^+ = \frac{H}{L}. \quad (\text{A.5})$$

O procedimento para resolver o problema conjugado começa pela solução da equação diferencial para o subdomínio fluido, que em sua forma adimensional é dada por:

$$\frac{\partial^2 T_f^+}{\partial y^{+2}} = u^+ \frac{\partial T_f^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial T_f^+}{\partial y^+}. \quad (\text{A.6})$$

As condições de contorno para a Eq. A.6 são:

$$T_f^+ = T_{in}^+, \quad em \quad x^+ = 0. \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial T_f^+}{\partial x^+} = 0, \quad em \quad x^+ = 1. \quad (\text{A.8})$$

$$T_f^+ = T_{wall}^+, \quad em \quad y^+ = 0. \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial T_f^+}{\partial y^+} = 0, \quad em \quad y^+ = 1. \quad (\text{A.10})$$

Nas Eq. A.7 e Eq. A.9,  $T_{in}^+$  e  $T_{wall}^+$  são, respectivamente, as temperaturas de entrada

do fluido e a distribuição de temperaturas na interface fluido-sólido em suas formas adimensionais. Elas são dadas por:

$$T_{wall}^+ = \frac{T_{wall}}{\frac{QL^2}{k_s}}, \quad (\text{A.11})$$

$$T_{in}^+ = \frac{T_{in}}{\frac{QL^2}{k_s}}. \quad (\text{A.12})$$

A solução da Eq. A.6 para as condições de contorno descritas acima é dada por:

$$\begin{aligned} T_f^+(x^+, y^+) - T_{in}^+ &= \int_0^{x^+} [1 - \theta(\xi^+, x^+, y^+)] \frac{dT_{wall}^+}{d\xi^+} d\xi^+ + \\ &+ \sum_{i=1}^k [1 - \theta(\xi_i^+, x^+, y^+)] (T_{wall}^+(i) - T_{in}^+). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Na equação acima,  $\theta(\xi^+, x^+, y^+)$  é dado por:

$$\theta(\xi^+, x^+, y^+) = \frac{0,331Pr^{1/3}Re_x^{1/2}y^+H}{x^+L \left[1 - \left(\frac{\xi^+}{x^+}\right)^{3/4}\right]^{1/3}} - \frac{0,005405PrRe_x^{3/2}y^{+3}H^3}{x^{+3}L^3 \left[1 - \left(\frac{\xi^+}{x^+}\right)^{3/4}\right]}. \quad (\text{A.14})$$

Com a solução do subdomínio fluido, pode-se calcular o fluxo térmico que será usado como condição de contorno para o sólido na interface:

$$\begin{aligned} q_{wall}^+(x^+) &= \frac{q_{wall}(x^+)}{\frac{QL^2}{H}} = -K \frac{\partial T_f^+}{\partial y^+} \Big|_{y^+=0} \\ &= K \left[ \int_0^{x^+} \theta_{y^+}(\xi^+, x^+, 0) \frac{dT_{wall}^+}{d\xi^+} d\xi^+ + \sum_{i=1}^k \theta_{y^+}(\xi_i^+, x^+, 0) (T_{wall}^+(i) - T_{in}^+) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Na Eq. A.15,  $\theta_{y^+}$  é a derivada em relação a  $y^+$  de  $\theta(\xi^+, x^+, y^+)$  dado pela Eq. A.14 e  $K = \frac{k_f}{k_s}$ .

A equação diferencial para uma placa plana bidimensional com propriedades físicas constantes, em regime transiente e com processos transformadores de energia em sua forma adimensional é dada por:

$$\frac{\partial^2 T_s^+}{\partial x^{+2}} + L^{+2} \frac{\partial^2 T_s^+}{\partial y^{+2}} + 1 = 0. \quad (\text{A.16})$$

As condições de contorno para a Eq. A.16 são:

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial x^+} = Bi_L T_s^+, \quad em \quad x^+ = 0. \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial x^+} = -Bi_L T_s^+, \quad em \quad x^+ = 1. \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial y^+} = Bi_H T_s^+, \quad em \quad y^+ = -1. \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial T_s^+}{\partial y^+} = -q_{wall}^+(x^+), \quad em \quad y^+ = 0. \quad (\text{A.20})$$

A solução da Eq. A.16 pode ser encontrada separando  $T_s^+(x^+, y^+)$  em duas componentes, como mostrado a seguir:

$$T_s^+(x^+, y^+) = A^+(x^+) + B^+(x^+, y^+). \quad (\text{A.21})$$

As duas componentes da distribuição de temperatura são dadas por:

$$A^+(x^+) = \frac{1}{2} \left[ x^+ (1 - x^+) + \frac{1}{Bi_L} \right]. \quad (\text{A.22})$$

$$B^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n^+ \cosh(\mu_n H y^+) + D_n^+ (\beta_n \cosh(\mu_n H y^+)) + \sinh(\mu_n H y^+) \right] \cdot \left[ \mu_n L \cosh(\mu_n L x^+) + Bi_L \sin(\mu_n L x^+) \right]. \quad (\text{A.23})$$

Os coeficientes  $C_n^+$ ,  $D_n^+$  e  $\beta_n^+$  na Eq. A.23 são dados por:

$$C_n^+ = \frac{-Bi_H \int_0^1 A^{+(x^+)} \cdot [\mu_n L \cos(\mu_n L x^+) + Bi_L \sin(\mu_n L x^+)] dx^+}{\frac{1}{2} \cdot \left[ (\mu_n^2 L H + Bi_H Bi_L) \left( 1 + \frac{Bi_L}{(\mu_n L)^2 + Bi_L^2} \right) + Bi_H \right] \cdot [\mu_n L \sinh(\mu_n H) + Bi + L \cosh(\mu_n H)]}. \quad (\text{A.24})$$

$$D_n^+ = \frac{\int_0^1 q_{wall}^+(x^+) \cdot [\mu_n L \cos(\mu_n L x^+) + Bi_L \sin(\mu_n L x^+)] dx^+}{\frac{1}{2} \cdot (\mu_n L) \left[ (\mu_n^2 L H + Bi_H Bi_L) \left( 1 + \frac{Bi_L}{(\mu_n L)^2 + Bi_L^2} \right) + Bi_H \right]}. \quad (A.25)$$

$$\beta_n = \frac{(\mu_n L) \cosh(\mu_n H) - Bi_L \cdot \sinh(\mu_n H)}{(\mu_n L) \sinh(\mu_n H) + Bi_L \cdot \cosh(\mu_n H)}. \quad (A.26)$$

Os autovalores  $\mu_n$  podem ser obtidos através das raízes da equação transcendental:

$$\tan(\mu L) = \frac{2Bi_L \cdot (\mu L)}{(\mu L)^2 - Bi_L^2}. \quad (A.27)$$

Nas equações acima,  $Bi_H = \frac{hH}{k}$  e  $Bi_L = \frac{hL}{k}$ .

Com essa metodologia, pode-se encontrar a solução para o problema. Basta repetir o processo iterativamente até a convergência.

## B Equação de Blasius para camada limite sobre uma placa plana

Analisando-se um escoamento em regime permanente sem turbulência sobre uma placa plana semi-infinita alinhada com o escoamento. A velocidade de corrente livre  $u_\infty$  é constante, bem como as propriedades do fluido. Ao se utilizar condição de não deslizamento na superfície da placa, ou seja, a velocidade do fluido é a mesma da velocidade da placa, diga-se nula para simplificar a de análise. A equação de balanço de quantidade de movimento linear para esse caso, juntamente com a equação da continuidade, são dadas por:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Posicionando os eixos de referência como mostrado na Fig. 6.1, tem-se que as condições de contorno para a Eq. B.1 são:

$$u = v = 0, \quad \text{em } y = 0. \quad (\text{B.3})$$

$$u \rightarrow u_\infty, \quad \text{em } y \rightarrow \infty. \quad (\text{B.4})$$

$$u = u_\infty, \quad \text{em } x = 0. \quad (\text{B.5})$$

A seguir, faz-se a seguinte suposição:

$$u = f(\eta), \quad \text{onde } \eta = y \cdot g(x). \quad (\text{B.6})$$

Adotando-se a nomenclatura  $f' = \frac{df}{d\eta}$  e  $g' = \frac{dg}{dx}$ , tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = f' y g'. \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = f' g. \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = f'' g^2. \quad (\text{B.9})$$

Agora, substituindo-se os resultados acima na equação para camada limite, Eq. B.1, e na equação da continuidade, Eq. B.2, obtém-se, respectivamente:

$$\nu f'' g^2 = f f' y g' + \nu f' g. \quad (\text{B.10})$$

$$f' y g' + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Combinando-se as Equações B.10 e B.11 de modo a eliminar  $v$ , e rearranjando as variáveis, obtém-se:

$$\frac{1}{f} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{f''}{f'} \right) = \frac{1}{\nu} \frac{g'}{g^3}. \quad (\text{B.12})$$

Nota-se que o lado esquerdo da Eq. B.12 é função apenas de  $\eta$  e que o lado direito é função apenas de  $x$ . Como  $x$  e  $\eta$  são independentes, então cada lado deve ser igual a uma constante, ou seja, o problema foi reduzido para a solução de duas equações diferenciais ordinárias.

Fazendo-se o lado direito da equação igual a uma constante qualquer  $-k$ , tem-se:

$$\frac{dg}{g^3} = -k\nu dx. \quad (\text{B.13})$$

Integrando a Eq. B.13, tem-se:

$$-\frac{1}{2g^2} = -k\nu x + C \quad (\text{B.14})$$

Aplicando-se as condições de contorno dadas pelas Equações B.4 e B.5, tem-se que  $g(0) \rightarrow \infty$ , logo  $C = 0$ . Assim sendo, tem-se:

$$g = \frac{1}{\sqrt{2k\nu x}}, \quad \eta = yg = \frac{y}{\sqrt{2k\nu x}}. \quad (\text{B.15})$$

Agora, analisando-se o lado esquerdo da Eq. B.12:

$$\frac{1}{f} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{f''}{f'} \right) = -k. \quad (\text{B.16})$$

$$d\left(\frac{f''}{f'}\right) = -k f d\eta. \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{f''}{f'} = -k \int f d\eta + C. \quad (\text{B.18})$$

Como, em  $y = 0$ , tem-se que  $\eta = u = v = f = 0$ , então é possível encontrar a constante de integração com auxílio da Eq. B.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = f''. \quad (\text{B.19})$$

Logo,  $C = 0$  e:

$$\frac{f''}{f'} = -k \int_0^\eta f d\eta. \quad (\text{B.20})$$

Agora, a fim de se eliminar a integral na equação acima, define-se uma velocidade adimensional como sendo a derivada de uma função de  $\eta$ :

$$\xi'(\eta) = \frac{u}{u_\infty} = \frac{f}{u_\infty}. \quad (\text{B.21})$$

Então:

$$\begin{aligned} f &= u_\infty \xi' \\ f' &= u_\infty \xi'' \\ f'' &= u_\infty \xi''' \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Substituindo-se as Eq. B.22 na Eq. B.20, tem-se:

$$\frac{\xi'''}{\xi''} = -k \int_0^\eta u_\infty \frac{d\xi}{d\eta} d\eta = -k u_\infty \xi. \quad (\text{B.23})$$

Reescrevendo-se:

$$\xi''' + k u_\infty \xi \xi'' = 0. \quad (\text{B.24})$$

Como  $k$  é uma constante qualquer, mas  $k u_\infty$  deve ser adimensional, pode-se fazer então  $k u_\infty = \frac{1}{2}$ . Logo:

$$\xi''' + \frac{1}{2}\xi\xi'' = 0 \quad (\text{B.25})$$

A Eq. B.25 é a equação de Blasius, uma equação diferencial ordinária com as seguintes condições de contorno:

$$\xi(0) = 0. \quad (\text{B.26})$$

$$\xi'(0) = 0. \quad (\text{B.27})$$

$$\xi'(\infty) = 1. \quad (\text{B.28})$$

$$\xi'''(0) = 0. \quad (\text{B.29})$$