JEFFERSON HENRIQUE CANDIDO

ÍNDICE POLINOMIAL NUMÉRICO DE UM ESPAÇO DE BANACH

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2020

JEFFERSON HENRIQUE CANDIDO

ÍNDICE POLINOMIAL NUMÉRICO DE UM ESPAÇO DE BANACH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientadora: Prof. Dra. Elisa Regina dos Santos

UBERLÂNDIA - MG
2020

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C217
2020

Candido, Jéfferson Henrique, 1995-
Índice Polinomial Numérico de um Espaço de Banach [recurso eletrônico] / Jéfferson Henrique Candido. - 2020.

Orientadora: Elisa Regina dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.497
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Santos, Elisa Regina dos,1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Jefferson Henrique Candido.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11822MAT002.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Índice Polinomial Numérico de um Espaço de Banach.

ORIENTADORA: Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos.

Esta dissertação foi **APROVADA** em web conferência pela plataforma Google Meet, em 24 de Julho de 2020, às 14 h 00 min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Elisa Regina dos Santos
Prof. Dr. Fábio José Bertoloto UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Fábio J. Bertoloto
Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço USP - Universidade de São Paulo	

Uberlândia-MG, 24 de Julho de 2020.

Dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus pais e à minha irmã que são meus maiores amores e à minha namorada, Rafaella, que me apoiou durante todo esse processo com todo seu amor.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Mauro e Adriana, e à minha irmã, Jenifer, por sempre me apoiarem nos meus estudos, por serem meu refúgio, por me motivarem nos momentos difíceis e me fazerem acreditar que sempre posso ir além. Por sempre me lembrarem das minhas raízes e de onde eu venho.

Agradeço à Rafaella, meu amor, por sempre ter fé em mim e por todo apoio, amor, carinho que sempre teve comigo durante essa jornada. E agradeço à Mirian, minha sogra, pois quando não tive onde morar durante essa minha breve passagem no mestrado, me acolheu sem exitar.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, Giovanny, Matheus, Elis, Mariane, Walteir e João pela ajuda nos estudos durante o mestrado e pelos momentos de alegria e diversão.

Agradeço à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Agradeço à Elisa, minha orientadora, por toda paciência e compreensão que teve comigo durante essa jornada e por ter se tornado para mim uma referência de profissional no qual me inspiro e quero me tornar um dia.

Por fim, agradeço a Deus por toda a misericórdia e as bençãos que tem derramado sobre mim.

CANDIDO, J. H. *Índice Polinomial Numérico de um Espaço de Banach.* 2020. 73 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é fazer um estudo do índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach. Primeiramente, vamos estudar o índice polinomial numérico para espaços de Banach em geral. Em seguida, vamos calcular e fazer estimativas do índice polinomial numérico de espaços específicos. Começaremos trabalhando com o índice polinomial numérico de ordem k de espaços de funções contínuas e de espaços de funções mensuráveis limitadas quase sempre. Na sequência, estudaremos o índice polinomial numérico de ordem k de espaços lush, CL e C-rich. Por fim, investigaremos o índice polinomial numérico de ordem k de espaços de sequências.

Palavras-chave: espaços de Banach, polinômios homogêneos contínuos, índice polinomial numérico de ordem k.

CANDIDO, J. H. *Polynomial Numerical Index of a Banach Spaces.* 2020. 73 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This dissertation's main purpose is to study of the polynomial numerical index of order k of a Banach space. First, we will examine the polynomial numerical index for Banach spaces in general. Next, we will calculate and estimate the polynomial numerical index of specific spaces. We will begin working with the polynomial numerical index of continuos functions spaces and essentially bounded measurable functions spaces. In sequence, we will study the polynomial numerical index of order k of lush, CL and C-rich spaces. Finally, we will investigate the polynomial numerical index of order k of sequences spaces.

Keywords: Banach spaces, continuos homogeneous polynomials, polynomial numerical index of order k.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$
$E_1, \dots, E_m, E, F$	espaços vetoriais ou espaços normados ou espaços de Banach
$\mathcal{L}_a({}^kE; F)$	espaço das aplicações k-lineares
$\mathcal{L}({}^kE; F)$	espaço das aplicações k-lineares contínuas
$\mathcal{L}^s({}^kE; F)$	espaço das aplicações k-lineares simétricas contínuas
$\mathcal{P}_a({}^kE; F)$	espaço dos polinômios k-homogêneos
$\mathcal{P}({}^kE; F)$	espaço dos polinômios k-homogêneos contínuos
$\mathcal{P}(E; E)$	espaço dos polinômios
$\mathcal{H}(E; E)$	espaço das aplicações holomorfas
$B(a, r)$	bola aberta de centro a e raio r
$S(a, r)$	esfera de centro a e raio r
B_E	bola fechada do espaço normado E com centro na origem e raio 1
$\overset{\circ}{B}_E$	bola aberta do espaço normado E com centro na origem e raio 1
S_E	esfera unitária no espaço normado E
$S(B_E, x^*, \epsilon)$	$\{x \in B_E : Re(x^*(x)) > 1 - \epsilon\}$
c	espaço das sequências de escalares que são convergentes
l_1^m	$\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \\|(x_1, \dots, x_m)\\|_1 = \|x_1\| + \cdots + \|x_m\|\}$
l_∞^m	$\left\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \\|(x_1, \dots, x_m)\\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} \|x_i\|\right\}$
l_1	espaço das sequências de escalares cuja somatória dos módulos dos elementos converge
l_2	espaço das sequências de escalares que são 2-somáveis
$\mathcal{P}(\Omega)$	conjunto das partes de Ω
$sgn(\lambda)$	$\frac{\lambda}{\|\lambda\|}$
$\Pi(E)$	$\{(x, x^*) : x \in S_E, x^* \in S_{E^*}$ e $x^*(x) = 1\}$
$V(P)$	imagem numérica de P
$v(P)$	raio numérico de P
$n^{(k)}(E)$	índice polinomial numérico de ordem k do espaço de Banach E
$\left[\bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right]_{c_0}$	soma c_0 de uma família $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de espaços de Banach

$\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_p}$	soma l_p de uma família $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de espaços de Banach
$\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_\infty}$	soma l_∞ de uma família $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de espaços de Banach
$\mathcal{L}(E, C(K))$	espaço dos operadores limitados de E em $C(K)$
$K(E, C(K))$	espaço dos operadores compactos de E em $C(K)$
$W(E, C(K))$	espaço dos operadores fracamente compactos de E em $C(K)$
$C(K)$	espaço das funções contínuas a valores escalares, onde K é um espaço Hausdorff compacto
$C_b(\Omega, E)$	espaço das funções de Ω em E que são limitadas e contínuas, onde Ω é um espaço completamente regular Hausdorff
$C_0(L, E)$	espaço das funções de L em E que são contínuas e se anulam no infinito, onde L é um espaço localmente compacto Hausdorff
$C(K, E)$	espaço das funções de K em E que são contínuas
$C_w(K, E)$	espaço das funções de K em E que são fracamente contínuas
$C_{w^*}(K, E^*)$	espaço das funções de K em E^* que fracamente* contínuas
$Ker(T)$	núcleo de T
$L_\infty(\mu, E)$	espaço das funções a valores em E mensuráveis e limitadas μ quase-sempre
$co(A)$	envoltória convexa do conjunto A
$\Gamma(A)$	envoltória absolutamente convexa do conjunto A
$E \cong F$	E é isometricamente isomorfo a F
χ_A	para $A \subset \Omega$, a função característica $\chi_A : \Omega \to E$ é dada por $\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in A \\ 0, & \text{se } t \notin A \end{cases}$

Sumário

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Lista de Símbolos **ix**

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Topologia Geral 3
1.2 Análise Funcional 5
1.3 Aplicações Multilineares 7
1.4 Polinômios entre Espaços de Banach 9
1.5 Aplicações Holomorfas 10
1.6 Teoria da Medida 11
1.6.1 O Espaço $L_\infty(\mu, E)$ 11

2 Índice Polinomial Numérico **14**

2.1 Definições e Primeiras Propriedades 14
2.2 Índice Polinomial Numérico em Somas de Espaços de Banach 24

3 Índice Polinomial Numérico de Alguns Espaços de Banach **31**

3.1 Espaços de Funções Contínuas 31
3.2 Espaço $L_\infty(\mu, E)$ 43
3.3 Espaços Lush, CL e C-rich 47
3.4 Espaços de Sequências 55

Introdução

O conceito de imagem numérica foi apresentado pela primeira vez por O. Toeplitz [32] em 1918 para matrizes. Em 1961, G. Lumer [23] introduziu e estudou a teoria sobre imagem numérica de um operador linear contínuo entre espaços de Hilbert. Em seguida, em 1968, o conceito de *índice numérico de um espaço de Banach* foi sugerido por Lumer em uma palestra no Seminário de Análise Funcional no norte da Grã-Bretanha. Porém, somente em 1970 J. Duncan, C. M. McGregor, J. D. Pryce e A. J. White [13] apresentaram um estudo robusto sobre o índice numérico de um espaço de Banach que foi definido por

$$n(E) = \inf\{v(T) \,:\, T : E \to E \text{ é um operador linear contínuo e } \|T\| = 1\},$$

onde $v(T) = \sup\{|x^*(T(x))| \,:\, x \in E, x^* \in E^* \text{ e } x^*(x) = 1\}$. Nesse estudo provaram que um espaço de Hilbert complexo de dimensão maior do que 1 possui índice numérico igual a $\frac{1}{2}$ e que o índice numérico de um espaço de Hilbert real é 0.

Ainda na década de 70, mais especificamente nos anos de 1971 e 1973, motivados pelos trabalhos de Lumer, F. Bonsall e J. Duncan [[3], [4]] estenderam o estudo da imagem numérica e do raio numérico para operadores lineares contínuos entre espaços normados e, ainda mais, para funções contínuas arbitrárias. Esses estudos permitiram ampliar os conhecimento sobre índice numérico de espaços de Banach mais específicos, como pode-se ver em [6] e [27]. Também motivado pelos estudos de Lumer, em 1970, L. Harris [16] generalizou o estudo de imagem numérica de Lumer para funções holomorfas e polinômios homogêneos entre espaços de Banach. A partir do estudo do Harris surgiu um grande interesse em se aprofundar nos conhecimentos sobre a imagem numérica e o raio numérico de um polinômio homogêneo entre espaços de Banach. Recentemente, S. G. Kim, Y. S. Choi, M. Maestre e D. García [11] introduziram o conceito de *índice polinomial numérico de ordem k* generalizando a definição de índice numérico dado por Lumer da seguinte forma: Dados um espaço de Banach E e $k \in \mathbb{N}$, definimos o índice polinomial numérico de ordem k de E por

$$n^{(k)}(E) = \inf\{v(P) \,:\, P : E \to E \text{ polinômio k-homogêneo}, \|P\| = 1\},$$

onde $v(P) = \sup\{|x^*(P(x))| \,:\, x \in S_E, x^* \in S_{E^*} \text{ e } x^*(x) = 1\}$.

O objetivo principal desta dissertação é explorar o índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach baseado na definição dada em [11]. Para isso, estruturamos a dissertação da seguinte forma:

• No primeiro capítulo apresentaremos resultados necessários para uma ótima leitura da dissertação. Esse capítulo será dividido em seis seções. A primeira seção será sobre Topologia Geral e a segunda sobre Análise Funcional. Nelas introduziremos alguns conceitos básicos e teoremas clássicos das áreas. Na terceira seção, vamos apresentar conceitos necessários de Aplicações Multilineares e, em seguida, estabeleceremos resultados de Polinômios entre Espaços de Banach na quarta seção. Com esse embasamento, na quinta seção vamos apresentar conceitos de Aplicações Holomorfas. Para finalizar, apresentaremos resultados e definições de Teoria de Medida.

• O segundo capítulo será dividido em duas seções. Na primeira seção vamos apresentar a definição de imagem e raio numérico de um polinômio homogêneo e, em seguida, o conceito de índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach. Nessa mesma seção, apresentaremos resultados sobre o índice polinomial numérico de espaços de Banach em geral, entre eles, determinaremos estimativas para o índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach e relacionaremos o índice de um espaço de Banach e o índice de seu bidual. Na segunda seção, estudaremos o índice polinomial numérico em somas de espaços de Banach. Primeiramente, desenvolveremos resultados com somas mais gerais, e baseado nessas conclusões, vamos olhar mais especificamente para a soma c_0, a soma l_1 e a soma l_∞ de espaços de Banach.

• O terceiro capítulo será destinado a calcular e estimar o valor do índice polinomial numérico de ordem k de alguns espaços particulares. Esse capítulo será dividido em quatro seções. Primeiramente, faremos estimativas para o índice polinomial numérico de espaços de funções contínuas. De forma mais precisa, estudaremos o índice polinomial numérico de espaços de funções contínuas a valores escalares e a valores vetoriais, de funções contínuas e limitadas a valores vetoriais, de funções contínuas que se anulam no infinito a valores vetoriais, de funções fracamente contínuas e de funções fracamente* contínuas. Além disso, vamos determinar relações interessantes entre o índice polinomial numérico dos espaços dos operadores compactos e dos operadores fracamente compactos e o índice polinomial numérico de certos espaços de funções. Na segunda seção vamos exibir o índice polinomial numérico do espaço $L_\infty(\mu, E)$. Logo após, estudaremos o índice polinomial numérico de espaços lush, CL e C-rich. E para finalizar, na quarta seção investigaremos o índice polinomial numérico dos espaços de sequências c, c_0, l_∞ e l_1.

Jefferson Henrique Candido
Uberlândia-MG, 24 de Julho de 2020.

Capítulo 1

Preliminares

O intuito deste capítulo é apresentar definições e resultados que serão necessários para o desenvolvimento da dissertação. Na primeira seção, apresentaremos resultados básicos de Topologia Geral. Em seguida, na segunda seção, apresentaremos resultados clássicos de Análise Funcional. Na terceira seção, introduziremos conceitos sobre Aplicações Multilineares os quais nos darão embasamento para definir Polinômios entre Espaços de Banach na quarta seção. Para finalizar, na quinta seção vamos introduzir resultados de Teoria de Medida e falaremos sobre o espaço $L_\infty(\mu, X)$.

1.1 Topologia Geral

Nesta seção iremos introduzir alguns conceitos necessários de topologia geral para compreender alguns resultados dessa dissertação. Para se aprofundar um pouco mais nesse assunto indicamos a referência [29].

Teorema 1.1.1 (Lema da Colagem) *Sejam X, Y espaços topológicos e digamos que $X = A \cup B$, onde A e B são conjuntos fechados em X. Sejam $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, então a combinação de f e g nos dá uma função contínua $h : X \to Y$ definida da seguinte forma:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}.$$

Demonstração: Veja a demonstração [[29], Theorem 18.3]. ■

Definição 1.1.2 *Dizemos que um espaço topológico X é* ***localmente compacto em*** *x se existe algum subespaço compacto C de X que contém uma vizinhança de x. Se X é localmente compacto em cada ponto de x, então X é dito* ***localmente compacto****.*

Proposição 1.1.3 *Seja X um espaço de Hausdorff. Então X é localmente compacto se, e somente se, dado $x \in X$ e dada uma vizinhança U de x, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$.*

Demonstração: Veja a demonstração [[29], Theorem 29.2]. ■

Definição 1.1.4 *Seja X um espaço topológico. Suponha que X é um conjunto onde os conjuntos unitários são fechados. Dizemos que X é* ***completamente regular*** *se para cada par consistindo de um ponto x e um conjunto fechado B disjunto de $\{x\}$, existe uma função contínua $\varphi : X \to [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(B) = \{0\}$.*

Definição 1.1.5 *Seja X um espaço topológico. Suponha que X é um conjunto onde os conjuntos unitários são fechados. Dizemos que X é* ***normal*** *se para cada par A,B de conjuntos fechados disjuntos de X, existem conjuntos abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.*

Proposição 1.1.6 *Se X é um espaço Hausdorff compacto, então X é normal.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[29], Theorem 32.3]. ■

Teorema 1.1.7 (Lema de Uryshon) *Seja X um espaço normal. Sejam A e B conjuntos fechados disjuntos de X. Então, existe uma aplicação contínua*

$$f : X \longrightarrow [0, 1]$$

tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.

Demonstração: Veja a demonstração em [[29], Theorem 33.1]. ■

Proposição 1.1.8 *Se X é localmente compacto e Hausdorff, então X é completamente regular.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[29], Section 33, Exercise 7.]. ■

A partir de agora, vamos definir e enunciar resultados relacionados a redes.

Definição 1.1.9 *Um* ***conjunto dirigido*** *J é um conjunto com uma ordem parcial $\preceq$ tal que para cada par de elementos α, β de J, existe um elemento γ de J com a propriedade de que $\alpha \preceq \gamma$ e $\beta \preceq \gamma$.*

Definição 1.1.10 *Seja X um espaço topológico. Uma* ***rede*** *em X é uma função f de um conjunto dirigido J em X. Se $\alpha \in J$, denotaremos $f(\alpha)$ por x_α. Denotaremos a rede f por $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$.*

Definição 1.1.11 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$* ***converge*** *para um ponto x de X(denotamos por $x_\alpha \to x$) se para cada conjunto aberto U contendo x, existe $\alpha \in J$ tal que*

$$\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

Teorema 1.1.12 *Seja X um espaço topológico. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma rede de pontos de A convergindo para x.*

Demostração: Veja a demonstração em [[5], Teorema B.31]. ■

Teorema 1.1.13 *Sejam X e Y espaços topológicos. Então $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para toda rede convergente $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ em X, convergindo para x, temos que $(f(x_\alpha))_{\alpha \in J}$ converge para $f(x)$.*

Demonstraçao: Veja a demonstração em [[5], Teorema B.31]. ■

1.2 Análise Funcional

Para começarmos, consideraremos $\mathbb{K}$ o corpo do reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Ao longo desta dissertação, o espaço vetorial sempre será sobre o corpo $\mathbb{K}$, a menos de especificação. Vamos definir o que são um seminorma e uma norma.

Definição 1.2.1 *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que a função $p : E \to \mathbb{R}$ é uma **seminorma** se as seguintes condições são satisfeitas:*

S1.) *$p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$.*

S2.) *$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in E$.*

S3.) *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in E$.*

Definição 1.2.2 *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que a função $\| \, . \, \| : E \to \mathbb{R}$ é uma **norma** se é uma seminorma que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$\|x\| = 0 \text{ se, e somente se, } x = \overrightarrow{0}.$$

*Diremos que E é um **espaço normado** se E é um espaço vetorial munido de uma norma.*

Denotaremos por B_E a bola unitária fechada de E, por S_E a esfera unitária e por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos $T : E \to F$, onde E, F são espaços normados. Dito isso, enunciaremos um teorema que nos fornece ferramentas para garantir a continuidade de um operador linear.

Teorema 1.2.3 *Sejam E, F espaços normados. Seja $T : E \to F$ um operador linear contínuo. São equivalentes:*

a.) *T é lipschitziano.*

b.) *T é uniformemente contínuo.*

c.) *T é contínuo.*

d.) *T é contínuo na origem.*

e.) $\sup\{\|T(x)\| \, : \, x \in E, \, \|x\| \leq 1\} < \infty$.

f.) *Existe $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[5], Teorema 2.1.1]. ■

Dado $T : E \to F$ um operador linear contínuo, denotamos $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \, : \, x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$.

Proposição 1.2.4 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a.) *A função $T \in \mathcal{L}(E, F) \longmapsto \|T\| \in \mathbb{R}$ define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.*

b.) *$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e para todo $x \in E$.*

c.) *Se F for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é Banach.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[5], Proposição 2.1.4.]. ■

Quando $F = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(E, F) = E^*$, o qual é chamado de **dual topológico** de E. Além disso, os elementos de E^* são chamados de **funcionais lineares contínuos**.

Teorema 1.2.5 (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E^*}\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in S_{E^*}\}.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [[5], Corolário 3.1.5]. ■

Definamos os seguintes espaços:

$$l_1 = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\},$$
$$l_\infty = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\},$$
$$c_0 = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : x_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

Esses espaços são espaços de Banach com as respectivas normas:

$$\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \text{ e } \|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty = \|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_0 = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|.$$

Essas demonstrações podem ser encontradas em [[5], Exemplo 1.1.7] e [[5], pg.14 e pg.15]. Definidos esses espaços, podemos apresentar o seguinte teorema.

Teorema 1.2.6 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a.) *l_1 e c_0^* são isometricamente isomorfos por meio da correspondência*

$$b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_1 \longrightarrow \varphi_b \in c_0^*, \ \varphi_b((a_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j.$$

b.) *l_∞ e l_1^* são isometricamente isomorfos por meio da correspondência*

$$b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_\infty \longrightarrow \varphi_b \in l_1^*, \ \varphi_b((a_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j.$$

Demonstração: Demostração do item a.) se encontra em [[5], Proposição 4.2.3] e a demonstração do item b.) se encontra em [[5], Proposição 4.2.1]. ■

A partir desse momento, vamos introduzir conceitos e apresentar conclusões sobre topologia fraca e topologia fraca-estrela. Não vamos nos aprofundar nesse assunto, pois o mesmo é extenso e demanda bastante esforço. Todavia, deixamos a referência [5], no qual, nas seções 6.1, 6.2 e 6.3 é feita toda a construção dessas topologias.

Definição 1.2.7 *A **topologia fraca** sobre um espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E^*)$ ou w, é a topologia gerada em E pela família de funcionais lineares contínuos $x^* \in E^*$.*

Teorema 1.2.8 *Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset E$ uma rede, onde E está munido da topologia fraca. Então $x_\lambda \longrightarrow x$ fracamente se, e somente se, $x^*(x_\lambda) \longrightarrow x^*(x)$ para todo $x^* \in E^*$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[5], Proposição 6.2.2]. ■

Definição 1.2.9 *Sejam Z um espaço topológico e E um espaço normado munido da topologia fraca. Dizemos que a função $f : Z \longrightarrow E$ é **fracamente contínua** se para toda rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em Z com $x_\lambda \longrightarrow x \in Z$, temos que $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$ fracamente.*

Dado $x \in E$, considere o funcional linear contínuo

$$\delta_x : E^* \to \mathbb{K} \text{ dado por } \delta_x(x^*) = x^*(x).$$

Definição 1.2.10 *A **topologia fraca-estrela** sobre um dual E^*, denotada por $\sigma(E^*, E)$ ou w^*, é a topologia gerada E^* pela família de funcionais lineares contínuos $(\delta_x)_{x\in E}$.*

Teorema 1.2.11 *Seja $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em $(E^*, \sigma(E^*, E))$. Então, $x^*_\lambda \longrightarrow x^*$ fracamente-estrela se, e somente se, $\delta_x(x^*_\lambda) \longrightarrow \delta_x(x^*)$ para todo $x \in E$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[5], Proposição 6.3.2]. ■

Definição 1.2.12 *Seja Z um espaço topológico. Dizemos que a função $f : Z \to (E^*, \sigma(E^*, E))$ é **fraca-estrela contínua** se para toda rede $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em Z com $z_\lambda \longrightarrow z \in Z$, temos que $f(z_\lambda) \longrightarrow f(z)$ fraca-estrela*

Teorema 1.2.13 (Teorema de Goldstine) *Sejam E um espaço de Banach e $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ o mergulho canônico, ou seja, $J(x) = \delta_x$ para todo $x \in E$. Então $J_E(B_E)$ é denso em $B_{E^{**}}$ na topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$, isto é,*

$$\overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)} = B_{E^{**}}.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [[5], Teorema 6.4.4]. ■

Teorema 1.2.14 (Teorema de Banach-Mazur) *Seja E um espaço de Banach separável. Então E é isometricamente isomorfo a um subespaço de $C(\Delta)$, onde Δ é o conjunto de Cantor.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[33], Theorem II.B.4.]. ■

1.3 Aplicações Multilineares

Nesta seção, E e F denotarão espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

Definição 1.3.1 *Dizemos que uma aplicação $A : E^k \to F$ é k-**linear** (ou **multilinear**) se é linear em cada uma das variáveis, isto é,*

$$A(x_1, \dots, \lambda x_i + x_i', \dots, x_k) = \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) + A(x_1, \dots, x_i', \dots, x_k)$$

para quaisquer $x_i, x_i' \in E$, $i = 1, \dots, k$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{L}_a(^kE; F)$ o espaço das aplicações k-lineares $A : E^k \longrightarrow F$ e denotaremos por $\mathcal{L}(^kE; F)$ o espaço das aplicações k-lineares que são contínuas.

Definição 1.3.2 *Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^kE; F)$ definimos*

$$\|A\| := \sup \left\{ \|A(x_1, \ldots, x_k)\| : (x_1, \ldots, x_k) \in E^k \text{ e } \max_{j=1,\ldots,k} \|x_j\| \leq 1 \right\}.$$

Denotaremos $\mathcal{L}_a(^1E; F) = \mathcal{L}_a(E; F)$, $\mathcal{L}(^1E; F) = \mathcal{L}(E; F)$, $\mathcal{L}_a(^kE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_a(^kE)$, $\mathcal{L}(^kE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^kE)$ e $\mathcal{L}(E) = E^*$.

Teorema 1.3.3 *Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^kE; F)$ as seguintes condições são equivalentes:*

a.) *A é contínua.*

b.) *A é contínua na origem.*

c.) *$\|A\| < \infty$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[28], Proposition 1.2]. ■

Teorema 1.3.4 *O espaço $\mathcal{L}(^kE; F)$ é um espaço de Banach munido da norma $A \longmapsto \|A\|$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[28], Proposition 1.3]. ■

Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por S_k o grupo de todas as permutações de k elementos. Se $\sigma \in S_k$, então $(-1)^\sigma$ denotará o sinal da permutação σ.

Definição 1.3.5 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{L}_a^s(^kE; F)$ o subespaço de todas $A \in \mathcal{L}_a(^kE; F)$ que são* ***simétricas****, isto é, tais que*

$$A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = A(x_1, \ldots, x_k)$$

para todo $x_1, \ldots, x_k \in E$ e $\sigma \in S_k$.

Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{L}_a^s(^mE; F) = \mathcal{L}_a^s(^mE)$.

Por conveniência, para $k = 0$, definiremos $\mathcal{L}_a(^0E; F) = \mathcal{L}_a^s(^0E; F) = \mathcal{L}(^0E; F) = \mathcal{L}^s(^0E; F) = F$. Seja $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Definição 1.3.6 *Seja $A \in \mathcal{L}_a(^kE; F)$. Para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| = k$, definimos*

$$Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1 vezes}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n vezes})$$

se $k \geq 1$ e $Ax_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} = A$ se $k = 0$.

Teorema 1.3.7 (Fórmula do Binômio de Newton) *Seja $A \in \mathcal{L}_a^s(^kE; F)$. Então, para todos $x, y \in E$, temos a fórmula do binômio de Newton*

$$A(x + y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Ax^{k-j} y^j.$$

Demonstração: Veja a demostração em [[28], Corollary 1.9]. ■

1.4 Polinômios entre Espaços de Banach

Nesta seção, E e F denotarão espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

Definição 1.4.1 *Uma aplicação $P : E \to F$ é chamada de **polinômio k-homogêneo** (ou **polinômio homogêneo de grau** k) se existe $A \in \mathcal{L}_a(^kE; F)$ tal que $P(x) = Ax^k$ para todo $x \in E$.*

Denotaremos por $\mathcal{P}_a(^kE; F)$ o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k de E em F. Denotaremos por $\mathcal{P}(^kE; F)$ o espaço vetorial dos polinômios homogêneos contínuos de grau k de E em F.

Definição 1.4.2 *Para cada $P \in \mathcal{P}_a(^kE; F)$, definimos*

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{P}_a(^kE; \mathbb{K}) = \mathcal{P}_a(^kE)$ e $\mathcal{P}(^kE; \mathbb{K}) = \mathcal{P}(^kE)$.

Teorema 1.4.3 *Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^kE; F)$, seja $\widehat{A} \in \mathcal{P}_a(^kE; F)$ dado por $\widehat{A}(x) = Ax^k$ para todo $x \in E$. Então:*

a.) *A aplicação $A \longmapsto \widehat{A}$ induz um isomorfismo entre $\mathcal{L}_a^s(^kE; F)$ e $\mathcal{P}_a(^kE; F)$.*

b.) $\|\widehat{A}\| \leq \|A\| \leq \dfrac{k^k}{k!}\|\widehat{A}\|$ *para todo $A \in \mathcal{L}_a(^kE; F)$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[28], Theorem 2.2]. ■

Corolário 1.4.4 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a.) *Um polinômio $P \in \mathcal{P}_a(^kE; F)$ é contínuo se, e somente se, $\|P\| < +\infty$.*

b.) *$\mathcal{P}(^kE; F)$ é um espaço de Banach com a norma $P \longmapsto \|P\|$.*

c.) *A aplicação $A \longmapsto \widehat{A}$ induz um isomorfismo topológico entre $\mathcal{L}^s(^kE; F)$ e $\mathcal{P}(^kE; F)$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[28], Corollary 2.3]. ■

Dado $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$, denotaremos por $\check{P}$ a aplicação k-linear simétrica associada a P pelo isomorfismo do item c.) do corolário acima.

É possível mostrar para todo $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$ que $\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| = 1\}$.

Proposição 1.4.5 *Para cada $P \in \mathcal{P}_a(^kE; F)$, as seguintes condições são equivalentes:*

a.) *P é contínuo.*

b.) *P é limitado em toda bola com raio finito.*

c.) *P é limitado em alguma bola aberta.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[28], Proposition 2.4]. ■

Definição 1.4.6 *Uma aplicação $P : E \to F$ é dita um **polinômio de grau no máximo** m se essa pode ser representada como uma soma*

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m,$$

onde $P_j \in \mathcal{P}_a(^jE; F)$ para $j = 0, \ldots, m$. Denotaremos por $\mathcal{P}_a(E; F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios de E em F. Denotaremos por $\mathcal{P}(E; F)$ o subespaço de todos os polinômios contínuos de $\mathcal{P}_a(E; F)$.

Proposição 1.4.7 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a.) *$\mathcal{P}_a(E; F)$ é a soma direta algébrica dos subespaços $\mathcal{P}_a(^kE; F)$, com $k \in \mathbb{N}_0$.*

b.) *$\mathcal{P}(E; F)$ é a soma direta algébrica dos subespaços $\mathcal{P}(^kE; F)$, com $k \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[28], Proposition 2.9]. ■

Observação 1.4.8 *Sejam E, F, G e H espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dados $S \in \mathcal{L}_a(E; F)$, $P \in \mathcal{P}_a(^kF; G)$ e $T \in \mathcal{L}_a(G; H)$, é possível mostrar que $P \circ S \in \mathcal{P}_a(^kE; G)$ e $T \circ P \in \mathcal{P}_a(^kF; H)$.*

1.5 Aplicações Holomorfas

Nesta seção, E e F denotarão espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$.

Definição 1.5.1 *Uma **série de potência** de E em F em torno do ponto $a \in E$ é uma série de aplicações da forma $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x - a)$, onde $P_k \in \mathcal{P}_a(^kE; F)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.*

Definição 1.5.2 *Seja U um conjunto aberto de E. Uma aplicação $f : U \to F$ é chamada de **aplicação holomorfa** ou **analítica** se para cada $a \in U$, existe uma bola $B(a; r) \subset U$ e uma sequência de polinômios $P_k \in \mathcal{P}(^kE; F)$ tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x - a)$$

*converge uniformemente para todo $x \in B(a; r)$. A série é chamada **série de Taylor** de f em a. Denotaremos por $\mathcal{H}(U; F)$ o espaço das aplicações holomorfas de U em F. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}(U; \mathbb{C}) = \mathcal{H}(U)$.*

Observação 1.5.3 *É fácil provar que $\mathcal{P}(E; F) \subset \mathcal{H}(E; F)$. Veja [[28], Example 5.3].*

Proposição 1.5.4 *Sejam U um subconjunto aberto de E e $f \in \mathcal{H}(U; F)$. Então:*

a.) *f é contínua.*

b.) *f é localmente limitada.*

c.) *Para cada $a \in U$, $b \in E$ e $\psi \in F^*$ a função $\lambda \longmapsto \psi \circ f(a + \lambda b)$ é holomorfa no conjunto aberto $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in U\}$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[28], Lemma 5.6]. ■

Teorema 1.5.5 (Teorema do Módulo Máximo) *Sejam U aberto e limitado em $\mathbb{C}$ e $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ contínua em $\overline{U}$ e holomorfa em U. Então:*

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{U}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial U\}.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [[1], Corolário 3.23]. ■

1.6 Teoria da Medida

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos básicos de Teoria de Medida. Sugerimos a referência [2] caso o leitor queira aprimorar os conhecimentos neste assunto.

Definição 1.6.1 *Seja Ω um conjunto. Uma coleção Σ de subconjuntos de Ω é uma **álgebra** se:*

i.) $\emptyset \in \Sigma$ *e* $\Omega \in \Sigma$.

ii.) *Se* $A \in \Sigma$, *então* $A^c \in \Sigma$.

iii.) *Se* $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$, *então* $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \Sigma$.

*Dizemos que Σ é uma σ-**álgebra** se também satisfaz:*

iv.) *Se* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, *então* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Definição 1.6.2 *Seja Σ uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. O par (Ω, Σ) é chamado de **espaço mensurável**. Os elementos de Σ são chamados de conjuntos Σ-**mensuráveis** ou simplesmente **mensuráveis**.*

Definição 1.6.3 *Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. Uma **medida** em (Ω, Σ) é uma função $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz as seguintes condições:*

i.) $\mu(A) \geq 0$ *para todo* $A \in \Sigma$.

ii.) $\mu(\emptyset) = 0$.

iii.) *Se* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ *são 2 a 2 disjuntos, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

*Dizemos que μ é σ-**finita** se existem conjuntos mensuráveis $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ e } \mu(A_n) < +\infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.6.4 *Um **espaço de medida** é um espaço mensurável (Ω, Σ) munido de uma medida μ definida sobre Ω. Denotamos o espaço de medida por (Ω, Σ, μ).*

1.6.1 O Espaço $L_\infty(\mu, E)$

Para finalizar esta seção vamos apresentar o espaço $L_\infty(\mu, E)$. Não iremos nos aprofundar no tema, porém indicamos a referência [17] para mais detalhes.

Para iniciar, precisaremos de algumas definições.

Definição 1.6.5 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Dizemos que uma função $\varphi : \Omega \to E$ é μ-**simples** se φ é da seguinte forma:*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j,$$

onde $x_n \in E$ e $A_n \in \Sigma$, com $\mu(A_n) < \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Quando não houver confusão, diremos simplesmente que φ é simples.

Definição 1.6.6 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Dizemos que uma função $f : \Omega \to E$ é **fortemente μ-mensurável** se existe uma sequência de funções μ-simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convergem para f μ-quase sempre, isto é, existe um conjunto $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tal que $\varphi_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in N^c$.*

Considerando (Ω, Σ, μ) um espaço de medida, definimos a integral de uma função simples $\varphi = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j$ por

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) x_j.$$

Definição 1.6.7 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Dizemos que uma função $f : \Omega \to E$ é **Bochner integrável** se existe uma sequência de funções μ-simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|\varphi_n - f\| d\mu = 0.$$

Nesse caso, definimos $\displaystyle\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n d\mu$.

Com essas definições podemos começar a construção do espaço $L_\infty(\mu, X)$.

Definição 1.6.8 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Dizemos que uma função fortemente mensurável $f : \Omega \to E$ é **limitada μ-quase sempre** se existe $c > 0$ e $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tais que $\|f(x)\| \leq c$ para todo $x \in N^c$.*

Definição 1.6.9 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Diremos que duas funções fortemente mensuráveis $f, g : \Omega \to E$ são **equivalentes** se $f = g$ μ-quase sempre, isto é, existe um conjunto $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in N^c$.*

A definição acima nos permite definir a seguinte relação de equivalência:

$$f \text{ se relaciona com } g \text{ se, e somente se, } f = g \ \mu\text{-quase sempre.}$$

A partir disso, podemos considerar a seguinte classe de equivalência:

$$[f] = \{g : \Omega \to E \,:\, f = g \ \mu\text{-quase sempre}\}.$$

Agora, consideremos o seguinte espaço:

$$\mathcal{L}_\infty(\mu, E) = \{f : \Omega \to E \,:\, f \text{ é fortemente mensurável e limitada } \mu\text{-quase sempre}\}.$$

Com isso, definimos o seguinte espaço:

$$L_\infty(\mu, E) = \{[f] \,:\, f \in \mathcal{L}_\infty(\mu, E)\}.$$

Esse espaço é um espaço vetorial com as seguintes operações:

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } \alpha[f] = [\alpha f].$$

Além disso, é um espaço de Banach com a seguinte norma:

$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 \,:\, \|f(x)\| \leq c, \forall\, x \in N^c;\; N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\}.$$

Temos que o espaço $L_\infty(\mu, E)$ pode ser também denotado por $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu, E) := L_\infty(\mu, E)$ onde $\|\,.\,\|_\Omega := \|\,.\,\|_\infty$.

Proposição 1.6.10 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita, E um espaço de Banach, $f \in L_\infty(\mu, E)$ e $\alpha > 0$. Se $\|f\|_\infty > \alpha$, então existe um conjunto $V \in \Sigma$ com $\mu(V) > 0$ tal que $\|f(t)\| > \alpha$ para todo $t \in V$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que para todo $V \in \Sigma$ com $\mu(V) > 0$, temos que $\|f(t)\| \leq \alpha$ para todo $t \in V$. Como $\|f\|_\infty > \alpha$, pelo conceito de ínfimo existe um conjunto $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ e $\|f(t)\| \leq \|f\|_\infty$ para todo $t \in N^c$. Uma vez que $\mu(N^c) > 0$, concluí-se da suposição que $\|f(t)\| \leq \alpha$ para todo $t \in N^c$. Segue disso que $\alpha < \|f\|_\infty \leq \alpha$. Isso contraria a hipótese. Portanto, existe um conjunto $V \in \Sigma$ com $\mu(V) > 0$ tal que $\|f(t)\| > \alpha$ para todo $t \in V$. ■

Capítulo 2

Índice Polinomial Numérico

Com o conhecimento adquirido nas Preliminares sobre aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach e, tendo a informação de que os polinômios são objetos fundamentais para o nosso estudo, neste capítulo, vamos definir índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach. Na primeira seção, apresentaremos as definições básicas, assim como enunciaremos e demonstraremos resultados para espaços de Banach em geral. Na segunda seção, provaremos resultados sobre somas de espaços de Banach. Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos por Choi et al. [8] e por Choi et al. [11].

2.1 Definições e Primeiras Propriedades

Para definir índice polinomial numérico de um espaço de Banach de ordem k são necessárias algumas definições. Consideremos o conjunto

$$\Pi(E) = \{(x,\, x^*) \,:\, x \in S_E,\, x^* \in S_{E^*}\, e\, x^*(x) = 1\}.$$

A partir disso, vamos para as definições.

Definição 2.1.1 *Para cada $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$, definimos a **imagem numérica** de P por*

$$V(P) = \{x^*(P(x)) \,:\, (x,\, x^*) \in \Pi(E)\}.$$

Definição 2.1.2 *Para cada $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$, definimos o **raio numérico** de P por*

$$v(P) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in V(P)\}.$$

Com essas definições, conseguimos algumas propriedades relacionando imagem numérica e raio numérico de um polinômio.

Proposição 2.1.3 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a.) *$v(P) \leq \|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$.*

b.) *A função $v : \mathcal{P}(^kE; E) \to \mathbb{R}$ dada por $v(P) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in V(P)\}$ é uma seminorma.*

Demonstração:
a.) Seja $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$. Dado $\lambda \in V(P)$, temos que $\lambda = x^*(P(x))$ para algum $(x, x^*) \in \Pi(E)$, e então

$$|\lambda| = |x^*(P(x))| \leq \|x^*\|\|P(x)\| = \|P(x)\| \leq \|P\|\|x\|^k = \|P\|.$$

Como isso é válido para qualquer $\lambda \in V(P)$, concluímos que $v(P) \leq \|P\|$.
b.) Vamos mostrar que a função v é uma seminorma.

1.) Observe que $v(P) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in V(P)\} \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$.

2.) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$. Temos que

$$V(\alpha P) = \{x^*(\alpha P(x)) \,:\, (x,\, x^*) \in \Pi(E)\} = \alpha\{x^*(P(x)) \,:\, (x, x^*) \in \Pi(E)\} = \alpha V(P).$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} v(\alpha P) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in V(\alpha P)\} &= \sup\{|\alpha\beta| \,:\, \beta \in V(P)\} \\ &= |\alpha| \sup\{|\beta| \,:\, \beta \in V(P)\} \\ &= |\alpha| v(P). \end{aligned}$$

3.) Sejam $P, Q \in \mathcal{P}(^kE;E)$, temos que

$$\begin{aligned} V(P+Q) &= \{x^*((P+Q)(x)) \,:\, (x,\, x^*) \in \Pi(E)\} \\ &= \{x^*(P(x)) + x^*(Q(x)) \,:\, (x,\, x^*) \in \Pi(E)\} \\ &\subseteq \{x^*(P(x)) \,:\, (x,\, x^*) \in \Pi(E)\} + \{y^*(Q(y)) \,:\, (y,\, y^*) \in \Pi(E)\} \\ &= V(P) + V(Q). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} v(P+Q) &= \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in V(P+Q)\} \\ &\leq \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in V(P) + V(Q)\} \\ &= \sup\{|x^*(P(x)) + y^*(Q(y))| \,:\, (x,x^*), (y,y^*) \in \Pi(E)\} \\ &\leq \sup\{|x^*(P(x))| \,:\, (x,x^*) \in \Pi(E)\} + \sup\{|y^*(Q(y))| \,:\, (y,y^*) \in \Pi(E)\} \\ &= v(P) + v(Q). \end{aligned}$$

Portanto, v é seminorma. ■

Observação 2.1.4 *Note que v nem sempre é uma norma. Por exemplo, considere o espaço*

$$l_2^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x,y)\|_2 = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Considerando o polinômio $P \in \mathcal{P}(^1l_2^2; l_2^2)$, dado por $P(x,y) = (-y,x)$, e observando que l_2^2 é isometricamente isomorfo a $(l_2^2)^*$ pelo operador

$$\varphi : l_2^2 \to (l_2^2)^*, \text{ onde } \varphi(x,y) : l_2^2 \to \mathbb{K} \text{ é dado por } \varphi(x,y)(u,v) = xu + yv,$$

provemos que $v(P) = 0$ embora $P \neq 0$. De fato, dado $(x,y) \in S_{l_2^2}$, observe que $\varphi(x,y) \in S_{(l_2^2)^*}$ e

$$\varphi(x,y)(x,y) = x^2 + y^2 = 1.$$

Logo, $((x,y), \varphi(x,y)) \in \Pi(l_2^2)$. Agora,

$$\varphi(x,y)(P(x,y)) = \varphi(x,y)(-y,x) = -xy + xy = 0.$$

Portanto, $v(P) = 0$.

Adquirido o conhecimento sobre imagem numérica e raio numérico de um polinômio k-homogêneo, vamos definir índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach.

Definição 2.1.5 *Seja* $k \in \mathbb{N}$. *Definimos o* ***índice polinomial numérico de ordem*** k *de um espaço de Banach* E *por*

$$n^{(k)}(E) = \inf\{v(P) \, : \, P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}\}.$$

Como consequência da Definição 2.1.5 e da Proposição 2.1.3, temos os seguintes resultados.

Proposição 2.1.6 *Seja* E *um espaço de Banach. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a.) $n^{(k)}(E) = \inf\{v(P) \, : \, P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}\}$ *é a maior constante* $c \geq 0$ *tal que* $c\|P\| \leq v(P)$ *para todo* $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$.

b.) $0 \leq n^{(k)}(E) \leq 1$.

c.) $n^{(k)}(E) > 0$ *se, e somente se,* v *e* $\|.\|$*(norma polinomial) são equivalentes em* $\mathcal{P}(^kE;E)$.

Demonstração:
a.) Seja $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$ tal que $P \neq 0$. Então $\dfrac{P}{\|P\|} \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}$ e, assim,

$$n^{(k)}(E) \leq v\left(\frac{P}{\|P\|}\right) = \frac{1}{\|P\|}v(P)$$

que implica que $n^{(k)}(E)\|P\| \leq v(P)$. Observe que tal desigualdade é trivial quando $P = 0$. Agora, seja $c \geq 0$ uma constante tal que $c\|P\| \leq v(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$. Temos que $c \leq v(P)$ para todo $P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}$. Portanto, $c \leq n^{(k)}(E)$.
b.) Temos que $n^{(k)}(E) = \inf\{v(P) \, : \, P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}\} \geq 0$. Por outro lado, $n^{(k)}(E) \leq v(P_1) \leq \|P_1\| = 1$, onde $P_1 \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}$.
c.)($\Rightarrow$) Suponha que $n^{(k)}(E) > 0$. De $n^{(k)}(E)\|P\| \leq v(P) \leq \|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$, segue que v é uma norma, pela Proposição 2.1.3 (b), e v e $\| \, . \, \|$ são equivalentes.
($\Leftarrow$) Suponha que v e $\|.\|$ são equivalentes. Logo, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1\|P\| \leq v(P) \leq c_2\|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$. Segue do item a.) desta proposição que $n^{(k)}(E) \geq c_1 > 0$. ■

Exemplo 2.1.7 *Vejamos que* $n^{(k)}(\mathbb{K}) = 1$ *para* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Seja* $P \in \mathcal{P}(^k\mathbb{K};\mathbb{K})$ *com* $\|P\| = 1$. *Então existe* $a \in S_{\mathbb{K}}$ *tal que* $P(x) = ax^k$. *Como* $\|P\| = 1$, *existe* $x_0 \in B_{\mathbb{K}}$ *tal que* $1 = |P(x_0)| = |ax_0^k| = |x_0|^k$. *Assim,* $|x_0| = 1$. *Considere* $x_0^* \in \mathbb{K}^*$ *com* $\|x_0^*\| = 1$ *e* $x_0^*(x_0) = 1$. *Daí,* $x_0^*(x) = bx$ *com* $b \in S_{\mathbb{K}}$ *e* $bx_0 = 1$. *Dessa forma,*

$$|x_0^*(P(x_0))| = |x_0^*(ax_0^k)| = |bax_0^k| = 1.$$

Logo,

$$v(P) = \sup\{|x^*(P(x))| \, : \, (x, x^*) \in \Pi(\mathbb{K})\} \geq |x_0^*(P(x_0))| = 1.$$

Como $P \in \mathcal{P}(^k\mathbb{K};\mathbb{K})$ *é qualquer, temos*

$$1 \leq n^{(k)}(\mathbb{K}).$$

Pelo item b.) da Proposição 2.1.6, segue que

$$n^{(k)}(\mathbb{K}) = 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

A seguir respondemos o questionamento: Os índices polinomiais numéricos de ordem k de dois espaços isometricamente isomorfos são iguais? A resposta para essa pergunta é sim e encontramos sua demonstração no teorema abaixo.

Teorema 2.1.8 *Se E_1 e E_2 são isometricamente isomorfos, então $n^{(k)}(E_1) = n^{(k)}(E_2)$.*

Demonstração: Como E_1 e E_2 são isometricamente isomorfos, existe uma aplicação $T : E_1 \to E_2$ tal que T é um isomorfismo isométrico. Agora, dado $P \in S_{\mathcal{P}(^k E_1; E_1)}$, temos que $Q = T \circ P \circ T^{-1} : E_2 \to E_2$ é um polinômio k-homogêneo, ou seja, $Q \in \mathcal{P}(^k E_2; E_2)$. Ainda,

$$\begin{aligned}
\|Q\| = \sup\{\|Q(y)\| : y \in B_{E_2}\} &= \sup\{\|(T \circ P \circ T^{-1})(y)\| : y \in B_{E_2}\} \\
&= \sup\{\|T(P(T^{-1}(y)))\| : y \in B_{E_2}\} \\
&= \sup\{\|P(T^{-1}(y))\| : y \in B_{E_2}\} \\
&= \sup\{\|P(x)\| : x \in B_{E_1}\} \\
&= \|P\|.
\end{aligned}$$

Assim, $\|Q\| = \|P\| = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
v(Q) = \sup\{|y^*(Q(y))| : (y, y^*) \in \Pi(E_2)\} &= \sup\{|y^*((T \circ P \circ T^{-1})(y))| : (y, y^*) \in \Pi(E_2)\} \\
&= \sup\{|(y^* \circ T)(P(T^{-1}(y)))| : (y, y^*) \in \Pi(E_2)\}.
\end{aligned}$$

Como $y^* \circ T \in E_1^*$, $\|T^{-1}(y)\| = \|y\| = 1$ e $(y^* \circ T)(T^{-1}(y)) = y^*(y) = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
v(Q) = \sup\{|(y^* \circ T)(P(T^{-1}(y)))| : (y, y^*) \in \Pi(E_2)\} &\leq \sup\{|x^*(P(x))| : (x, x^*) \in \Pi(E_1)\} \\
&= v(P).
\end{aligned}$$

De tudo que foi provado, resulta que para todo $P \in S_{\mathcal{P}(^k E_1; E_1)}$, temos que $Q \in S_{\mathcal{P}(^k E_2; E_2)}$ e, também, que $n^{(k)}(E_2) \leq v(Q) \leq v(P)$. Portanto, $n^{(k)}(E_2) \leq n^{(k)}(E_1)$. Analogamente, concluímos que $n^{(k)}(E_1) \leq n^{(k)}(E_2)$. ■

Ao estudar o índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach, percebe-se que calcular o seu valor pode ser muito difícil, porém podemos fazer estimativas. Dessa forma, nosso objetivo nos próximos resultados é fazer uma estimativa para o índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach qualquer. Para alcançar o nosso propósito, precisaremos do seguinte teorema.

Teorema 2.1.9 *Sejam $h : \overset{\circ}{B}_E \to E$ uma função holomorfa e P_m o m-ésimo termo da série de Taylor de h em 0. Então*

$$\|P_m\| \leq k_m v(h),$$

onde $k_0 = 1$, $k_1 = e$, $k_m = m^{\frac{m}{m-1}}$ para $m \geq 2$ e $v(h) = \sup\{|x^*(h(x))| : (x, x^*) \in \Pi(E)\}$.

Demonstração: Veja a demonstração em [[16], Theorem 1]. ■

Teorema 2.1.10 *Seja E um espaço de Banach complexo. Para todo inteiro positivo $k \geq 2$, temos $n^{(k)}(E) \geq k^{\frac{k}{1-k}}$.*

Demonstração: Como $\mathcal{P}(E;E) \subset \mathcal{H}(E;E)$ (Observação 1.5.3), temos que $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$ é uma função holomorfa. Pelo Teorema 2.1.9, temos $\|P\| \leq k^{\frac{k}{k-1}}v(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$. Assim, $\|P\|k^{\frac{k}{1-k}} \leq v(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$. Pelo item a.) da Proposição 2.1.6, concluímos que $n^{(k)}(E) \geq k^{\frac{k}{1-k}}$. ∎

Dados $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$ e $1 \leq m < k$, definamos $\widehat{D}^m P(x) \in \mathcal{P}(^{k-m}E;E)$ por

$$\widehat{D}^m P(x)(y) = \frac{k!}{(k-m)!}\check{P}(x^m,\, y^{k-m}), \text{ para todos } x, y \in E.$$

Lema 2.1.11 *Sejam E, F espaços normados complexos e $P : E \to F$ um polinômio de grau k. Então*

$$\|\widehat{D}^m P(x)\| \leq \frac{k^k m!}{m^m(k-m)^{k-m}}\|P\| \text{ quando } \|x\| \leq 1,$$

$$\|\widehat{D}^m P(x)\| \leq \frac{k^k m!}{m^m(k-m)^{k-m}}\|P\|\|x\|^{k-m} \text{ quando } \|x\| \geq 1,$$

para $0 \leq m \leq k$ e $x \in E$.

Demonstração: Veja a demonstração em [[15], Corollary 3]. ∎

Lema 2.1.12 *Sejam E um espaço de Banach complexo, $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$ e $x \in B_E$. Para $1 \leq m < k$, temos*

$$v(\widehat{D}^m P(x)) \leq \frac{k^{\left(k+\frac{k}{k-1}\right)}m!}{(k-m)^{k-m}m^m}v(P).$$

Demonstração: Sejam $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$, $x \in B_E$ e $1 \leq m < k$. Pelo Lema 2.1.11, temos que

$$v(\widehat{D}^m P(x)) \leq \|\widehat{D}^m P(x)\| \leq \frac{k^k m!}{m^m(k-m)^{k-m}}\|P\|.$$

Visto que, pelo Teorema 2.1.10, $\|P\| \leq k^{\frac{k}{k-1}}v(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$. Segue que

$$v(\widehat{D}^m P(x)) \leq \frac{k^k m!}{m^m(k-m)^{k-m}}\|P\| \leq \frac{k^k m!}{m^m(k-m)^{k-m}}k^{\frac{k}{k-1}}v(P) = \frac{k^{\left(k+\frac{k}{k-1}\right)}m!}{m^m(k-m)^{k-m}}v(P).$$

∎

Nosso objetivo agora é conseguir uma relação entre os índices polinomiais numéricos de ordem k e de ordem $k-1$.

Proposição 2.1.13 *Seja E um espaço de Banach complexo. Para todo inteiro positivo $k \geq 2$, temos que*

$$n^{(k-1)}(E) \leq \frac{k^{\left(k+\frac{1}{k-1}\right)}}{(k-1)^{k-1}}n^{(k)}(E).$$

Demonstração: Sejam $P \in \mathcal{P}(^kE;E)$ e $x \in S_E$. Pelo Lema 2.1.12, tomando $m = 1$, segue que

$$n^{(k-1)}(E) \leq v\left(\frac{\widehat{D}P(x)}{\|\widehat{D}P(x)\|}\right) = \frac{1}{\|\widehat{D}P(x)\|}v(\widehat{D}P(x)) \leq \frac{k^{k+\frac{k}{k-1}}}{(k-1)^{(k-1)}}\frac{v(P)}{\|\widehat{D}P(x)\|}.$$

Afirmamos que

$$\inf\left\{\frac{v(P)}{\|\widehat{D}P(x)\|} \ : \ P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)} \ \text{ e } \ x \in S_E\right\} \leq \frac{1}{k}n^{(k)}(E).$$

De fato, seja $I = \inf\left\{\dfrac{v(P)}{\|\widehat{D}P(x)\|} \ : \ P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)} \ \text{ e } \ x \in S_E\right\}$. Então,

$$I = \inf_{P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}}\left\{v(P)\inf_{x \in S_E}\left(\frac{1}{\|\widehat{D}P(x)\|}\right)\right\} = \inf_{P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}}\left\{v(P)\frac{1}{\sup_{x \in S_E}\|\widehat{D}P(x)\|}\right\}.$$

Mostremos que $\sup\limits_{x \in S_E}\|\widehat{D}P(x)\| \geq k$. Veja que

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in S_E}\|\widehat{D}P(x)\| = \sup_{x \in S_E}\left(\sup_{y \in S_E}\|\widehat{D}P(x)(y)\|\right) &= \sup_{x \in S_E}\left(\sup_{y \in S_E}\left\|\frac{k!}{(k-1)!}\widehat{P}(x, y^{k-1})\right\|\right) \\
&= k\sup_{x,y \in S_E}\|\widehat{P}(x^{k-1}, y)\| \geq k\sup_{x \in S_E}\|P(x)\| = k.
\end{aligned}$$

Então, temos que $I \leq \inf\limits_{P \in S_{\mathcal{P}(^kE:E)}}\left\{v(P)\dfrac{1}{k}\right\} = \dfrac{1}{k}n^{(k)}(E)$. Portanto,

$$n^{(k-1)}(E) \leq \frac{k^{k+\frac{k}{k-1}}}{(k-1)^{k-1}}I \leq \frac{k^{k+\frac{k}{k-1}}}{(k-1)^{k-1}}\frac{n^{(k)}(E)}{k} = \frac{k^{k+\frac{1}{k-1}}}{(k-1)^{k-1}}n^{(k)}(E).$$

■

Proposição 2.1.14 *Seja E um espaço de Banach. Para todo inteiro positivo $k \geq 2$, temos que*

$$n^{(k)}(E) \leq n^{(k-1)}(E).$$

Demonstração: Sejam $\alpha = n^{(k)}(E)$ e $Q \in S_{\mathcal{P}(^{k-1}E;E)}$. Considere $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset S_E$ tal que $\|Q(x_i)\| \to 1$ quando $i \to +\infty$. Defina $P_i(x) = x_i^*(x)Q(x)$ para $x \in E$, onde $x_i^* \in E^*$, com $\|x_i^*\| = 1$ e $x_i^*(x_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $P_i \in \mathcal{P}(^kE;E)$. Observe que $\|P_i\| \to 1$ quando $i \to +\infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|P_i\| = \sup\{\|P_i(x)\| \ : \ x \in B_E\} &= \sup\{\|x_i^*(x)Q(x)\| \ : \ x \in B_E\} \\
&= \sup\{|x_i^*(x)|\|Q(x)\| \ : \ x \in B_E\} \\
&\leq \sup\{\|x_i^*\|\|x\|\|Q\|\|x\|^{k-1} \ : \ x \in B_E\} \\
&= \|Q\| = 1, \forall\, i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Assim, $\|P_i\| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, para cada i, temos que $P_i(x_i) = x_i^*(x_i)Q(x_i) = Q(x_i)$, o que implica, $\|P_i(x_i)\| = \|Q(x_i)\|$. Como $\|P_i(x_i)\| \leq \|P_i\|$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\|Q(x_i)\| \leq \|P_i\| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo,

$$1 = \lim_{i \to \infty} \|Q(x_i)\| \leq \lim_{i \to \infty} \|P_i\| \leq 1.$$

Portanto, $\|P_i\| \to 1$. Como $v\left(\dfrac{P_i}{\|P_i\|}\right) \geq \alpha$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha\|P_i\| \leq v(P_i) &= \sup\{|x^*(P_i(x))| \,:\, (x, x^*) \in \Pi(E)\} \\ &= \sup\{|x^*(x_i^*(x)Q(x))| \,:\, (x, x^*) \in \Pi(E)\} \\ &= \sup\{|x_i^*(x)||x^*(Q(x))| \,:\, (x, x^*) \in \Pi(E)\} \\ &\leq \sup\{|x^*(Q(x))| \,:\, (x, x^*) \in \Pi(E)\} = v(Q), \, \forall\, i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Fazendo $i \to +\infty$, segue que $\alpha \leq v(Q)$ para todo $Q \in S_{\mathcal{P}(^{k-1}E:E)}$. Portanto, $\alpha \leq n^{(k-1)}(E)$, ou seja, $n^{(k)}(E) \leq n^{(k-1)}(E)$. ■

Exemplo 2.1.15 *Lembremos que o índice numérico de um espaço de Hilbert complexo de dimensão maior que 1 é igual $\frac{1}{2}$ e o índice numérico de um espaço de Hilbert real é igual a 0. Assim, se l_2 é o espaço de Hilbert real, então $n^{(k)}(l_2) \leq n^{(1)}(l_2) = 0$ para todo $k \geq 2$. E se l_2 é o espaço de Hilbert complexo, então $n^{(k)}(l_2) \leq n^{(1)}(l_2) = \frac{1}{2}$ para $k \geq 2$.*

Para falar do próximo resultado, precisamos da definição de extensão de Aron-Berner de um polinômio k-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$. Primeiramente, precisamos compreender a extensão de Aron-Berner para aplicações multilineares. Seja $A \in \mathcal{L}(^kE)$. Fixando $z_k \in E^{**}$, defina a função $\overline{z_k} : \mathcal{L}(^kE) \to \mathcal{L}(^{k-1}E)$ dada por $\overline{z_k}(M)(x_1, \ldots, x_{k-1}) = z_k(M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,))$, onde $M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,) : E \to \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo dado por

$$M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,)(x_k) = M(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k).$$

É fácil mostrar que $\overline{z_k}$ é linear e contínua. De fato, sejam $M_1, M_2 \in \mathcal{L}(^kE)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Com facilidade mostra-se que

$$(M_1 + \lambda M_2)(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,) = M_1(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,) + \lambda M_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,).$$

A partir daí, dado $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in E^{k-1}$, segue que

$$\begin{aligned} \overline{z_k}(M_1 + \lambda M_2)(x_1, \ldots, x_{k-1}) &= z_k((M_1 + \lambda M_2)(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,)) \\ &= z_k(M_1(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,)) + \lambda z_k(M_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, \,\cdot\,)) \\ &= \overline{z_k}(M_1)(x_1, \ldots, x_{k-1}) + \lambda\overline{z_k}(M_2)(x_1, \ldots, x_{k-1}) \\ &= (\overline{z_k}(M_1) + \lambda\overline{z_k}(M_2))(x_1, \ldots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{z_k}(M_1 + \lambda M_2) = \overline{z_k}(M_1) + \lambda\overline{z_k}(M_2)$ para todos $M_1, M_2 \in \mathcal{L}(^kE)$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\overline{z_k}\| = \sup_{\|M\|\leq 1} \|\overline{z_k}(M)\| &= \sup_{\|M\|\leq 1}\left\{ \sup_{\max\{\|x_1\|,\ldots,\|x_{k-1}\|\}\leq 1} \|z_k(M(x_1,\ldots,x_{k-1},\,\cdot\,))\| \right\} \\
&\leq \sup_{\|M\|\leq 1}\left\{ \sup_{\max\{\|x_1\|,\ldots,\|x_{k-1}\|\}\leq 1} \|z_k\|\|M(x_1,\ldots,x_{k-1},\,\cdot\,)\| \right\} \\
&= \|z_k\| \sup_{\|M\|\leq 1}\left\{ \sup_{\max\{\|x_1\|,\ldots,\|x_{k-1}\|\}\leq 1} \left\{ \sup_{\|x_k\|\leq 1} \|M(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k)\| \right\}\right\} \\
&\leq \|z_k\| \sup_{\|M\|\leq 1}\left\{ \sup_{\max\{\|x_1\|,\ldots,\|x_{k-1}\|\}\leq 1} \left\{ \sup_{\|x_k\|\leq 1} \|M\|\|x_1\|\ldots\|x_{k-1}\|\|x_k\| \right\}\right\} \\
&\leq \|z_k\| < \infty.
\end{aligned}
$$

Agora, fixado $z_{k-1} \in E^{**}$, definamos $\overline{z_{k-1}} : \mathcal{L}({}^{k-1}E) \to \mathcal{L}({}^{k-2}E)$ dado por $\overline{z_{k-1}}(M)(x_1,\ldots,x_{k-2}) = z_{k-1}(M(x_1,\ldots,x_{k-2},\,\cdot\,))$, onde $M(x_1,\ldots,x_{k-2},\,\cdot\,) : E \to \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo dado por

$$M(x_1,\ldots,x_{k-2},\,\cdot\,)(x_{k-1}) = M(x_1,\ldots,x_{k-2},x_{k-1}).$$

De forma análoga, verifica-se que $\overline{z_{k-1}}$ é linear e contínua. Como esse processo é finito, tomando $z_1 \in E^{**}$, definamos $\overline{z_1} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ dado por $\overline{z_1}(T) = z_1(T)$. É óbvio que $\overline{z_1}$ é linear e contínua. A partir disso, podemos definir uma aplicação $\overline{A} : (E^{**})^k \to \mathbb{K}$ dada por

$$\overline{A}(z_1,z_2,\ldots,z_k) = \overline{z_1}\circ\overline{z_2}\circ\cdots\circ\overline{z_{k-1}}\circ\overline{z_k}(A).$$

Não é difícil ver que $\overline{z_j+\lambda w_j} = \overline{z_j}+\lambda\overline{w_j}$ para $j=1,\ldots,k$. Segue disso que $\overline{A}$ é linear em cada entrada. Além disso, dado $(z_1,\ldots,z_k)\in E^{**}$, temos que

$$\|\overline{A}(z_1,z_2,\ldots,z_k)\| = \|\overline{z_1}\circ\overline{z_2}\circ\cdots\circ\overline{z_{k-1}}\circ\overline{z_k}(A)\| \leq \|\overline{z_1}\|\ldots\|\overline{z_k}\|\|A\| \leq \|z_1\|\ldots\|z_k\|\|A\|.$$

Logo, $\overline{A}$ é contínua e concluímos que $\overline{A}\in\mathcal{L}({}^kE^{**})$. Chamamos $\overline{A}$ de **extensão de Aron-Berner de** A.

Assim, dado $P\in\mathcal{P}({}^kE)$. Seja $A\in\mathcal{L}({}^kE)$ a aplicação multilinear simétrica associada a P. Pelo que vimos acima, podemos estender A para uma aplicação k-linear $\overline{A}$ sobre o bidual E^{**}. Então a restrição $\overline{P}(z) = \overline{A}(z,\ldots,z)$ é chamada de **extensão de Aron-Berner do polinômio** P. Além disso, Davie-Gamelin [12] provaram que $\|P\| = \|\overline{P}\|$.

A seguir vamos apresentar uma relação entre o índice polinomial numérico de ordem k de um espaço de Banach E e seu bidual E^{**}. Desse modo, introduziremos conceitos e, enunciaremos e demonstraremos resultados para atingir tal feito.

Definição 2.1.16 *Seja $P\in\mathcal{P}({}^kE;F)$. A **extensão de Aron-Berner** $\overline{P}\in\mathcal{P}({}^kE^{**},F^{**})$ é definida da seguinte forma: dados $z\in E^{**}$ e $w\in F^*$,*

$$\overline{P}(z)(w) = \overline{w\circ P}(z).$$

Lembremos que para $x\in E$, definimos $\delta_x : E^*\to\mathbb{C}$ por $\delta_x(x^*) = x^*(x)$ para cada $x^*\in E^*$.

Definição 2.1.17 *Sejam $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em E e $x_0^{**}\in E^{**}$. Dizemos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **converge polinomial*** para x_0^{**} se, para todo $P\in\mathcal{P}({}^kE)$, temos que $(P(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge para $\overline{P}(x_0^{**})$, onde $\overline{P}$ é a extensão de Aron-Berner de P.*

Definição 2.1.18 *Uma função $f : E^{**} \to F^*$ é dita (pol^*, w^*)-**contínua** se para $x_0^{**} \in E^{**}$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset E$ tal que (x_λ) converge polinomial* para x_0^{**}, tem-se que $(f(\delta_{x_\lambda}))_{\lambda\in\Lambda}$ converge fraca* para $f(x_0^{**})$.*

Teorema 2.1.19 (Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás) *Sejam E um espaço de Banach e $0 < \delta < 1$. Dados $x \in B_E$ e $x^* \in S_{E^*}$ com $|x^*(x) - 1| < \dfrac{\delta^2}{4}$, existem $y \in S_E$ e $y^* \in S_{E^*}$ tais que $y^*(y) = 1$, $\|x^* - y^*\| < \delta$ e $\|x - y\| < \delta$.*

Demonstração: Veja a demonstração em [[4], Section 16, Theorem 1]. ∎

Teorema 2.1.20 *Sejam E um espaço de Banach e $P \in \mathcal{P}(^kE^{**}; E^{**})(k \geq 1)$ (pol^*, w^*)-contínuo. Considere*

$$LV(P) = \{P(x^{**})(x^*) \,:\, (x^*, x^{**}) \in \Pi(E^*)\} \text{ e } lV(P) = \{\delta_{x^*}(P(\delta_x)) \,:\, (x, x^*) \in \Pi(E)\}.$$

Então, $lV(P) \subset V(P) \subset \overline{lV(P)}$, e daí, $\overline{V(P)} = \overline{lV(P)}$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $\|P\| = 1$. É claro que $lV(P) \subset V(P)$. De fato, seja $\lambda \in lV(P)$, logo $\lambda = \delta_{x^*}(P(\delta_x))$, onde $(x, x^*) \in \Pi(E)$. Temos que $\delta_{x^*} \in E^{***}$ e $\delta_x \in E^{**}$, além do mais, $\|\delta_{x^*}\| = \|\delta_x\| = 1$ e $\delta_{x^*}(\delta_x) = 1$. Portanto, $(\delta_x, \delta_{x^*}) \in \Pi(E^{**})$, e assim $\lambda \in V(P)$. Deste modo, $lV(P) \subset V(P)$.

Mostremos que $V(P) \subset \overline{LV(P)}$. Seja $\lambda \in V(P)$. Então $\lambda = x_0^{***}(P(x_0^{**}))$ para algum $(x_0^{**}, x_0^{***}) \in \Pi(E^{**})$. Seja $0 < \epsilon < 1$. Pela continuidade uniforme de P sobre $B_{E^{**}}$, existe $0 < \delta < \dfrac{\epsilon}{3}$ tal que para $x^{**}, y^{**} \in B_{E^{**}}$ com $\|x^{**} - y^{**}\| < \delta$, temos que $\|P(x^{**}) - P(y^{**})\| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Como, pelo Teorema 1.2.13, B_{E^*} é w^*-denso em $B_{E^{***}}$, existe $x_0^* \in B_{E^*}$ tal que

$$|\delta_{x_0^*}(P(x_0^{**})) - x_0^{***}(P(x_0^{**}))| = |\lambda - \delta_{x_0^*}(P(x_0^{**}))| < \delta$$

e

$$|\delta_{x_0^*}(x_0^{**}) - x_0^{***}(x_0^{**})| = |x_0^{**}(x_0^*) - 1| < \frac{\delta^2}{4}.$$

Pelo Teorema 2.1.19, existe $(y_0^*, y_0^{**}) \in \Pi(E^*)$ tal que $\|x_0^* - y_0^*\| < \delta$ e $\|x_0^{**} - y_0^{**}\| < \delta$. Então, $\delta_{y_0^*}(P(y_0^{**})) \in LV(P)$. Segue que

$$\begin{aligned}
|\lambda - \delta_{y_0^*}(P(y_0^{**}))| &\leq |\lambda - \delta_{x_0^*}(P(x_0^{**}))| + |P(x_0^{**})(x_0^*) - P(x_0^{**})(y_0^*)| + |\delta_{y_0^*}(P(x_0^{**})) - \delta_{y_0^*}(P(y_0^{**}))| \\
&< \delta + \|P(x_0^{**})\|\|x_0^* - y_0^*\| + \|P(x_0^{**}) - P(y_0^{**})\|\|y_0^*\| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda \in \overline{LV(P)}$. Então, $V(P) \subset \overline{LV(P)}$.

Agora, mostremos que $LV(P) \subset \overline{lV(P)}$. Seja $\beta \in LV(P)$. Então $\beta = P(x_0^{**})(x_0^*) = \delta_{x_0^*}(P(x_0^{**}))$ para algum $(x_0^*, x_0^{**}) \in \Pi(E^*)$. Seja $0 < \epsilon < 1$. Pelo Teorema de David-Gamelin ([[12], Theorem 2]), existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que δ_{x_λ} converge polinomial* para x_0^{**}. Então $\delta_{x_0^*}(\delta_{x_\lambda}) = x_0^*(x_\lambda)$ converge para $\delta_{x_0^*}(x_0^{**}) = 1$. Seja $Q = \delta_{x_0^*} \circ P \in \mathcal{P}(^kE^{**})$. Como $P \in \mathcal{P}(^kE^{**}; E^{**})$ é (pol^*, w^*)-contínuo, $Q(\delta_{x_\lambda}) = \delta_{x_0^*}(P(\delta_{x_\lambda}))$ converge para $Q(x_0^{**}) = \delta_{x_0^*}(P(x_0^{**})) = \beta$. Escolha x_{λ_0} tal que

$$|\beta - \delta_{x_0^*}(P(\delta_{x_{\lambda_0}}))| < \delta \text{ e } |x_0^*(x_{\lambda_0}) - 1| < \frac{\delta^2}{4}.$$

Pelo Teorema 2.1.19, existe $(y_0, y_0^*) \in \Pi(E)$ tal que $\|x_0 - y_0\| < \delta$ e $\|x_0^* - y_0^*\| < \delta$. Então, $\delta_{y_0^*}(P(\delta_{y_0})) \in lV(P)$ e $\|\delta_{x_0} - \delta_{y_0}\| = \|\delta_{(x_0-y_0)}\| = \|x_0 - y_0\| < \delta$. Temos, pela continuidade uniforme de P, que

$$\begin{aligned}
|\beta - \delta_{y_0^*}(P(\delta_{y_0}))| &\leq |\beta - \delta_{x_0^*}(P(\delta_{x_0}))| + |\delta_{x_0^*}(P(\delta_{x_0})) - \delta_{x_0^*}(P(\delta_{y_0}))| + |\delta_{x_0^*}(P(\delta_{y_0})) - \delta_{y_0^*}(P(\delta_{y_0}))| \\
&< \delta + \|P(\delta_{x_0}) - P(\delta_{y_0})\| + \|P(\delta_{y_0})\|\|x_0^* - y_0^*\| \\
&< 3\delta < \epsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\beta \in \overline{lV(P)}$. Então $LV(P) \subset \overline{lV(P)}$. Portanto, $V(P) \subset \overline{lV(P)}$. ■

Corolário 2.1.21 *Sejam E um espaço de Banach e k um inteiro positivo. Seja $Q \in \mathcal{P}(^kE; E)$. Então $\overline{V(Q)} = \overline{V(\overline{Q})}$, onde $\overline{Q}$ é a extensão de Aron-Berner de Q.*

Demonstração: Vejamos que $lV(\overline{Q}) = V(Q)$. Temos que $lV(\overline{Q}) = \{\delta_{x^*}(\overline{Q}(\delta_x)) : (x, x^*) \in \Pi(E)\}$. Seja $\beta = \delta_{x^*}(\overline{Q}(\delta_x))$, onde $(x, x^*) \in \Pi(E)$. Então,

$$\beta = \delta_{x^*}(\overline{Q}(\delta_x)) = \overline{Q}(\delta_x)(x^*) = \overline{x^* \circ Q}(\delta_x) = (x^* \circ Q)(x) = x^*(Q(x)) \in V(Q).$$

Portanto, $lV(\overline{Q}) = V(Q)$. Agora, seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset E$ uma rede que converge polinomial* para x_0^{**}. Então

$$\begin{aligned}
\delta_{x^*}(\overline{Q}(\delta_{x_\lambda})) &= \overline{Q}(\delta_{x_\lambda})(x^*) \\
&= \overline{x^* \circ Q}(\delta_{x_\lambda}) \\
&= x^*(Q(x_\lambda)) = (x^* \circ Q)(x_\lambda) \longrightarrow \overline{x^* \circ Q}(x_0^{**}) = \overline{Q}(x_0^{**})(x^*) = \delta_{x^*}(\overline{Q}(x_0^{**})).
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{Q}$ é (pol^*, w^*)-contínuo. Segue disso tudo e do Teorema 2.1.20 que $\overline{V(\overline{Q})} = \overline{lV(\overline{Q})} = \overline{V(Q)}$. ■

Corolário 2.1.22 *Seja E um espaço de Banach. Para todo inteiro positivo k, temos que*

$$n^{(k)}(E^{**}) \leq n^{(k)}(E).$$

Demonstração: Seja $Q \in \mathcal{P}(^kE; E)$ com $\|Q\| = 1$. Considere a extensão de Aron-Berner $\overline{Q} \in \mathcal{P}(^kE^{**} : E^{**})$. Temos que $\|Q\| = \|\overline{Q}\| = 1$. Mostremos que $v(Q) = v(\overline{Q})$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Logo, existe $\lambda \in V(Q)$ tal que $v(Q) - \epsilon < |\lambda|$. Por outro lado, como $\lambda \in V(Q) \subset \overline{V(\overline{Q})}$ pelo Corolário 2.1.21, existe $\beta \in V(\overline{Q})$ tal que $|\lambda - \beta| < \epsilon$. Daí,

$$|\lambda - \beta| < \epsilon \Rightarrow |\lambda| - |\beta| < \epsilon \Rightarrow |\lambda| - \epsilon < |\beta| \leq v(\overline{Q}).$$

Segue daí que $v(Q) - 2\epsilon < |\lambda| - \epsilon \leq v(\overline{Q})$. Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, temos que $v(Q) \leq v(\overline{Q})$. Analogamente, temos que $v(\overline{Q}) \leq v(Q)$. Portanto, $v(Q) = v(\overline{Q})$.

Daí, $n^{(k)}(E^{**}) \leq v(\overline{Q}) = v(Q)$. Como isso vale para todo $Q \in S_{\mathcal{P}(^kE:E)}$, concluímos que $n^{(k)}(E^{**}) \leq n^{(k)}(E)$. ■

2.2 Índice Polinomial Numérico em Somas de Espaços de Banach

Nesta seção, estudaremos a relação entre o índice polinomial numérico das somas c_0, l_1 e l_∞ de espaços de Banach e o índice polinomial numérico dos espaços. Para isso são precisos alguns resultados e conceitos básicos sobre normas absolutas. Para mais informações sobre tal tema sugerimos as referências [4] e [30].

Definição 2.2.1 *Uma norma $|\,.\,|_a$ em $\mathbb{R}^2$ se chama **absoluta** se $|(x,y)|_a = |(|x|,|y|)|_a$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $|(1,0)|_a = |(0,1)|_a = 1$.*

Exemplo 2.2.2 *As normas clássicas em $\mathbb{R}^2$ são todas normas absolutas. Para essas normas usaremos as nomenclaturas abaixo. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $|\,.\,|_p$ a norma em $\mathbb{R}^2$ dada por:*

$$|(x,y)|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty;$$

$$|(x,y)|_\infty = \max\{|x|,|y|\}, \text{ quando } p = \infty.$$

Definição 2.2.3 *Dados dois espaços de Banach W e Z e uma norma absoluta $|\,.\,|_a$, a **soma absoluta** de W e Z com respeito a $|\,.\,|_a$, denotada por $W \oplus_a Z$, é o espaço de Banach $W \times Z$ munido da norma*

$$\|(w,z)\|_a = |(\|w\|,\|z\|)|_a.$$

Definição 2.2.4 *Seja E um espaço de Banach. Dizemos que um espaço de Banach $W \subset E$ é **somando absoluto** de E, se existe um outro espaço de Banach $Z \subset E$ e uma norma absoluta $|\,.\,|_a$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $E = W \oplus_a Z$.*

Quando $E = W \oplus_a Z$ com $|\,.\,|_a = |\,.\,|_1$, dizemos que W é um L-somando de E, e quando $E = W \oplus_a Z$ com $|\,.\,|_a = |\,.\,|_\infty$, dizemos que W é um M-somando de E.

Definição 2.2.5 *Seja $|\,.\,|$ uma norma absoluta. Cada par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser considerado como um funcional linear contínuo dado por*

$$\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax + by, \; \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

*que tem como norma: $\sup\{|ax+by| : |(x,y)| \leq 1\}$. Assim, definimos $|(a,b)|^* = \sup\{|ax+by| : |(x,y)| \leq 1\}$. Tal norma é uma norma absoluta chamada **norma dual**.*

Sejam W, Z espaços de Banach e seja $|\,.\,|_a$ uma norma absoluta. Segundo, [[10], Section 1.1], existe um isomorfismo isométrico entre $[W \oplus_a Z]^*$ e $W^* \oplus_{a^*} Z^*$, onde $|\,.\,|_{a^*}$ é a norma dual associada a $|\,.\,|_a$. A ação do funcional $(w^*, z^*) \in W^* \oplus_{a^*} Z^*$ em um ponto $(w,z) \in W \oplus_a Z$ é dada por $\langle (w,z),(w^*,z^*)\rangle = w^*(w) + z^*(z)$.

Proposição 2.2.6 *Sejam E um espaço de Banach e F um somando absoluto de E. Então, $n^{(k)}(E) \leq n^{(k)}(F)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Como F é um somando absoluto de E, existem um espaço de Banach $G \subset E$ e uma norma absoluta $|\,.\,|_a$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $E = F \oplus_a G$ munido da norma $\|(y,z)\|_a = |(\|y\|,\|z\|)|_a$. Seja $P \in \mathcal{P}(^kF;F)$ com $\|P\| = 1$. Seja $Q \in \mathcal{P}(^kE;E)$ tal que $Q(y,z) = (P(y),0)$. Então $\|Q\| = 1$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|Q\| = \sup\{\|Q(y,z)\|_a \,:\, \|(y,z)\|_a \leq 1\} &= \sup\{\|(P(y),0)\|_a \,:\, \|(y,z)\|_a \leq 1\} \\
&= \sup\{\|P(y)\||(1,0)|_a \,:\, |(\|y\|,\|z\|)|_a \leq 1\} \\
&= \sup\{\|P(y)\| \,:\, |(\|y\|,\|z\|)|_a \leq 1\} \\
&= \sup\{\|P(y)\| \,:\, \|y\| \leq 1\} = \|P\| = 1.
\end{aligned}
$$

Como $n^{(k)}(E) = \inf\{v(P) \,:\, P \in S_{\mathcal{P}(^kE;E)}\}$, dado $\epsilon > 0$, existe $(x,x^*) \in \Pi(E)$ tal que $n^{(k)}(E) - \epsilon \leq |x^*(Q(x))|$. Como existe um isomorfismo isométrico entre $[F \oplus_a G]^*$ e $F^* \oplus_{a^*} G^*$, onde $|\,.\,|_{a^*}$ é a norma dual associada a $|\,.\,|_a$, existe $(y^*,z^*) \in S_{F^* \oplus_{a^*} G^*}$ tal que $x^* = (y^*,z^*)$. Além disso, temos que $1 = x^*(x) = y^*(y) + z^*(z)$, onde $x = (y,z)$. Daí, $\|z^*\|\|z\| + \|y^*\|\|y\| = y^*(y) + z^*(z) = 1$, pois

$$
\begin{aligned}
1 = |y^*(y) + z^*(z)| \leq |y^*(y)| + |z^*(z)| &\leq \|y^*\|\|y\| + \|z^*\|\|z\| \\
&= \langle(\|y^*\|,\|z^*\|),(\|y\|,\|z\|)\rangle \\
&\leq |(\|y^*\|,\|z^*\|)|_{a^*}|(\|y\|,\|z\|)|_a \\
&= \|(y^*,z^*)\|_{a^*}\|(y,z)\|_a \\
&= \|x^*\|\|x\| = 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, $|z^*(z)| = \|z^*\|\|z\|$, $|y^*(y)| = \|y^*\|\|y\|$, $\|y^*\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$. Segue de tudo isso que

$$
\begin{aligned}
n^{(k)}(E) - \epsilon \leq |x^*(Q(x))| &= |(y^*,z^*)(Q(y,z))| \\
&= |(y^*,z^*)(P(y),0)| = |y^*(P(y))| \\
&\leq \frac{1}{\|y^*\|\|y\|^k}|y^*(P(y))| \\
&= \frac{y^*}{\|y^*\|}\left(P\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right) \leq v(P).
\end{aligned}
$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $n^{(k)}(E) \leq v(P)$ para todo $P \in S_{\mathcal{P}(^kF;F)}$. Portanto, $n^{(k)}(E) \leq n^{(k)}(F)$. ■

Para o próximo resultado, vamos introduzir alguns conceitos. Seja $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de espaços de Banach. Definimos

$$
\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{c_0} = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \,:\, x_\lambda \in E_\lambda, x_\lambda \to 0\},
$$

munido da norma

$$
\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_0 = \sup_{\lambda\in\Lambda}\|x_\lambda\|.
$$

Para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$
\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_p} = \left\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \,:\, x_\lambda \in E_\lambda \text{ e } \sum_{\lambda\in\Lambda}\|x_\lambda\|^p < \infty\right\},
$$

munido da norma

$$
\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_p = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\|x_\lambda\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Por fim, para $p = \infty$, definimos

$$\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_\infty} = \left\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \,:\, x_\lambda \in E_\lambda \text{ e } \sup_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\| < \infty\right\},$$

munido da norma $\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|_\infty = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|$. É fácil ver que esses espaços são espaços de Banach. A partir disso, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.7 *Seja* $\{E_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ *uma família de espaços de Banach. Então*

$$n^{(k)}\left(\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{c_0}\right) \leq \inf_\lambda n^{(k)}(E_\lambda) \text{ e } n^{(k)}\left(\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_p}\right) \leq \inf_\lambda n^{(k)}(E_\lambda)$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ *e para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $1 \leq p < \infty$. Consideremos

$$E = \left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_p}.$$

Seja $\lambda_0 \in \Lambda$. Então E_{λ_0} é somando absoluto de E. De fato, $\left[\bigoplus_{\lambda\neq\lambda_0} E_\lambda\right]_{l_p}$ é Banach e a norma $|\,.\,|_p$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $|(x,y)|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ é norma absoluta. Daí,

$$E = \left[\bigoplus_{\lambda\neq\lambda_0} E_\lambda\right]_{l_p} \oplus_p E_{\lambda_0}$$

munido da norma absoluta $\|(\alpha,\beta)\|_p = |(\|\alpha\|, \|\beta\|)|_p = (\|\alpha\|^p + \|\beta\|^p)^{\frac{1}{p}}$. Segue da proposição anterior que $n^{(k)}(E) \leq n^{(k)}(E_{\lambda_0})$. Como λ_0 é arbitrário, temos que $n^{(k)}(E) \leq \inf_\lambda n^{(k)}(E_\lambda)$.

Seja $p = \infty$. Consideremos

$$E = \left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_\infty}$$

Seja $\lambda_0 \in \Lambda$. Então E_{λ_0} é somando absoluto de E. De fato, $\left[\bigoplus_{\lambda\neq\lambda_0} E_\lambda\right]_{l_\infty}$ é Banach e a norma $|\,.\,|_\infty$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $|(x,y)|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ é norma absoluta. Daí,

$$E = \left[\bigoplus_{\lambda\neq\lambda_0} E_\lambda\right]_{l_\infty} \oplus_\infty E_{\lambda_0}$$

munido da norma absoluta $\|(\alpha,\beta)\|_\infty = |(\|\alpha\|, \|\beta\|)|_\infty = \max\{\|\alpha\|, \|\beta\|\}$. Segue da proposição anterior que $n^{(k)}(E) \leq n^{(k)}(E_{\lambda_0})$. Como λ_0 é arbitrário, temos que $n^{(k)}(E) \leq \inf_\lambda n^{(k)}(E_\lambda)$. O caso c_0 é análogo ao caso $p = \infty$. Assim, concluímos a demonstração. ■

Observação 2.2.8 *Para $1 < p < \infty$, a igualdade no Corolário 2.2.7 não ocorre em geral. De fato, $n^{(k)}(l_p) \leq n^{(1)}(l_p) < 1$ enquanto $n^{(k)}(\mathbb{K}) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $p = 1$, a igualdade ocorre quando $k = 1$, mas não é verdadeira para $k \geq 2$. Mostraremos que $n^{(2)}(l_1) \leq \frac{1}{2}$ para l_1 real. De fato, seja $P \in \mathcal{P}(^2l_1; l_1)$ definido por*

$$P(x) = \left(\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2,\, -\frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2,\, 0,\, 0, \ldots\right);\ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1.$$

É claro que P é polinômio, pois está associado a aplicação multilinear $A \in \mathcal{L}(^2l_1; l_1)$ dada por

$$A((x_i)_{i\in\mathbb{N}},\, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{x_1y_1}{2} + 2x_1y_2,\, -\frac{x_2y_2}{2} - x_1y_2,\, 0,\, 0, \ldots\right)$$

Vamos mostrar que $\|P\| = 1$ e $v(P) = \dfrac{1}{2}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|P\| &= \sup\{\|P(x)\|_1 : x \in B_{l_1}\}\\
&= \sup\left\{\left\|\left(\frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_2,\, \frac{-x_2^2}{2} - x_1x_2,\, 0,\, 0, \ldots\right)\right\|_1 : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{l_1}\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_2\right| + \left|-\frac{x_2^2}{2} - x_1x_2\right| : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{l_1}\right\}.
\end{aligned}$$

Veja que, para $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{l_1}$,

$$\left|\frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_2\right| + \left|-\frac{x_2^2}{2} - x_1x_2\right| \leq \frac{|x_1|^2}{2} + 2|x_1||x_2| + \frac{|x_2|^2}{2} + |x_1||x_2| = \frac{1}{2}\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 + 2|x_1||x_2|.$$

Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_1 \leq 1$, temos que $|x_1| + |x_2| \leq 1$ e assim $(|x_1| + |x_2|)^2 \leq 1$. Retomando as contas, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 + 2|x_1||x_2| \leq \frac{1}{2} + 2|x_1||x_2| &\leq \frac{1}{2} + 2(1 - |x_2|)|x_2|\\
&= \frac{1}{2} + 2(|x_2| - |x_2|^2)\\
&= \frac{1}{2} - 2\left[\left(|x_2| - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\\
&= 1 - 2\left(|x_2| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1.
\end{aligned}$$

Como isso vale para qualquer $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{l_1}$, temos que

$$\|P\| = \sup\left\{\left|\frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_2\right| + \left|-\frac{x_2^2}{2} - x_1x_2\right| : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{l_1}\right\} \leq 1.$$

Por outro lado, tome a sequência $\xi = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right)$. É claro que $\xi \in B_{l_1}$. Além do mais, $\|P(\xi)\| = 1$. Logo, $1 = \|P(\xi)\| \leq \|P\| \leq 1$. Portanto, $\|P\| = 1$.

Mostremos que $v(P) = \dfrac{1}{2}$. Seja $e_1^* : l_1 \to \mathbb{K}$ dado por $e_1^*((\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \xi_1$. É fácil ver que $e_1^* \in S_{l_1^*}$. Além do mais, tomando $e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \in S_{l_1}$ temos que $e_1^*(e_1) = 1$. Logo, $(e_1, e_1^*) \in \Pi(l_1)$. Segue de tudo isso que,

$$v(P) \geq |e_1^*(P(e_1))| = \left|e_1^*\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Lembre-se que l_1^* é isometricamente isomorfo à l_∞ pelo operador $T : l_\infty \to l_1^*$ dado por $T(b) = \varphi_b$, $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, onde $\varphi_b : l_1 \to \mathbb{K}$ é dado por $\varphi_b((a_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ (Teorema 1.2.6).

Seja $(x, x^*) \in \Pi(l_1)$. Então $x = (x_j)_{jj\in\mathbb{N}} \in S_{l_1}$, $x^* \in S_{l_1^*}$ e $x^*(x) = 1$. Como $x^* \in S_{l_1^*}$, existe $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ tal que $x^*((a_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ para todo $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Além disso, temos que $1 = \|x^*\| = \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_\infty$. Sabemos que $x^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b_j = 1$. Daí,

$$1 = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j b_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j||b_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j||b_j| = 1.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = 1$ e $|b_j| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que $|b_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Vamos fazer uma breve análise. Temos que $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $x^* = (b_1, b_2, \dots)$. Se $x_1 = x_2 = 0$, então $P(x) = (0, 0, \dots)$ e isto implica que $x^*(P(x)) = 0$. Assim, $|x^*(P(x))| = 0 \leq \frac{1}{2}$. Suponha que $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$. Se $b_1 = b_2 = 1$, então

$$\begin{aligned}
|x^*(P(x))| = \left|\left(\frac{x_1^2}{2} + 2x_1x_2\right) + \left(-\frac{x_2^2}{2} - x_1x_2\right)\right| &= \left|\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_1x_2\right| \\
&\leq \frac{1}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2|) \\
&= \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|)^2 \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos o mesmo resultado para $b_1 = b_2 = -1$.

Seja $b_1 = 1$ e $b_2 = -1$. Como $x^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b_j = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
1 = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j b_j\right| = \left|x_1 - x_2 + \sum_{j=3}^{\infty} x_j b_j\right| \leq |x_1 - x_2| + \sum_{j=3}^{\infty} |x_j||b_j| &= |x_1 - x_2| + \sum_{j=3}^{\infty} |x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|x_1 - x_2| + \sum_{j=3}^{\infty} |x_j| = 1 &\Rightarrow |x_1 - x_2| + \sum_{j=3}^{\infty} |x_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \\
&\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| - \sum_{j=3}^{\infty} |x_j| = |x_1| + |x_2|.
\end{aligned}$$

Assim, $|x_1 - x_2| = |x_1| + |x_2|$. Segue disso que $x_1x_2 = -|x_1x_2|$, pois

$$
\begin{aligned}
(|x_1 - x_2|)^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 \;\; &\Rightarrow \;\; x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2| \\
&\Rightarrow \;\; -x_1x_2 = |x_1x_2|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|x^*(P(x))| = \left|\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + 3x_1x_2\right| = \frac{1}{2}|x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2| &= \frac{1}{2}||x_1|^2 + |x_2|^2 - 6|x_1||x_2|| \\
&= \frac{1}{2}|(|x_1| - |x_2|)^2 - 4|x_1||x_2|| \\
&\leq \frac{1}{2}\left[(|x_1| - |x_2|)^2 + 4|x_1||x_2|\right] \\
&= \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|)^2 \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, temos o mesmo resultado para $b_1 = -1$ e $b_2 = 1$. Portanto, concluímos que $v(P) \leq \frac{1}{2}$. Dessa maneira $v(P) = \frac{1}{2}$ e obtemos que $n^{(2)}(l_1) \leq \frac{1}{2}$.

Portanto, concluímos que $n^{(2)}(l_1) \leq \frac{1}{2}$, enquanto que $n^{(2)}(\mathbb{R}) = 1$.

Proposição 2.2.9 *Seja $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de espaços de Banach complexos. Então:*

$$
n^{(k)}\left(\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{c_0}\right) = n^{(k)}\left(\left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_\infty}\right) = \inf_\lambda n^{(k)}(E_\lambda)
$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Vamos fazer somente o caso l_∞. Seja $E = \left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]_{l_\infty}$ e $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$ com $\|P\| = 1$. Podemos escrever $P = (P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, onde $P_\beta \in \mathcal{P}(^kE : E_\beta)$ é dado por $P_\beta = \pi_\beta \circ P$ com $\pi_\beta : E \to E_\beta$ dado por $\pi_\beta((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = x_\beta$, para todo $\beta \in \Lambda$. Dado $0 < \epsilon < 1$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|P_{\lambda_0}\| > 1 - \epsilon$. De fato,

$$
\begin{aligned}
1 = \|P\| = \sup\{\|P(x)\|_\infty : \|x\| \leq 1\} &= \sup\{\|(P_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}\|_\infty : \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\sup_\lambda \|P_\lambda(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup_\lambda\{\sup\{\|P_\lambda(x)\| : \|x\| \leq 1\}\} \\
&= \sup_\lambda \|P_\lambda\|.
\end{aligned}
$$

Daí, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|P_{\lambda_0}\| > 1 - \epsilon$. Escreva

$$
E = E_{\lambda_0} \oplus_\infty F, \text{ onde } F = \left[\bigoplus_{\lambda\neq\lambda_0} E_\lambda\right]_{l_\infty}.
$$

Escolha $(x_0, y_0) \in S_E$ tal que $x_0 \in E_{\lambda_0}, y_0 \in F$ e $\|P_{\lambda_0}(x_0, y_0)\| > 1-\epsilon$. Mostremos que podemos supor que $\|x_0\| = 1$. De fato, tomemos $x_1 \in S_E$ tal que $\|x_0\|x_1 = x_0$ e tomemos $x^*_{\lambda_0} \in S_{E^*_{\lambda_0}}$ tal que $|x^*_{\lambda_0}(P_{\lambda_0}(x_0, y_0))| > 1 - \epsilon$. Agora, definamos a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$
g(z) = x^*_{\lambda_0}(P_{\lambda_0}(zx_1, y_0)).
$$

Considere a transformação linear contínua $T : \mathbb{C} \to E$ por $T(z) = (zx_1, y_0)$. Então $g = x^*_{\lambda_0} \circ P_{\lambda_0} \circ T$ é um polinômio homogêneo, em particular, uma função analítica. Como g é uma função analítica na bola unitária aberta e contínua na bola unitária fechada, segue do Teorema do Módulo Máximo (Teorema 1.5.5) que

$$\max\{|g(z)| : z \in B_{\mathbb{C}}\} = \max\{|g(z)| : z \in S_{\mathbb{C}}\}.$$

Segue daí que

$$1 - \epsilon < |x^*_{\lambda_0}(P_{\lambda_0}(x_0, y_0))| = |g(\|x_0\|)| \leq |g(z_0)|,$$

para algum $z_0 \in \mathbb{C}$ com $|z_0| = 1$. Então, trocando x_0 por $z_0 x_1$, concluímos o que queríamos.

Agora, pelo Teorema de Hahn-Banach, escolha $x^*_0 \in E^*_{\lambda_0}$ tal que $\|x^*_0\| = 1$ e $x^*_0(x_0) = 1$. Tomando a transformação linear contínua $S : E_{\lambda_0} \to E_{\lambda_0} \oplus_\infty Y$ dada por $S(u) = (u, x^*_0(u)y_0)$, definamos $Q \in \mathcal{P}(^k E_{\lambda_0}; E_{\lambda_0})$ por

$$Q(u) = P_{\lambda_0}(u, x^*_0(u)y_0) = P_{\lambda_0} \circ S(u).$$

Temos, $\|Q(u)\| \leq \|P_{\lambda_0}\|\|S\|\|u\|$, em que $\|P_{\lambda_0}\| \leq 1$, $\|S\| \leq 1$ e $\|y_0\| \leq 1$. Assim,

$$1 \geq \|Q\| \geq \|Q(x_0)\| = \|P_{\lambda_0}(x_0, y_0)\| > 1 - \epsilon.$$

Assim, podemos encontrar $(u_0, u^*_0) \in \Pi(E_{\lambda_0})$ tal que

$$|u^*_0(Q(u_0))| > (n^{(k)}(E_{\lambda_0}) - \epsilon)(1 - \epsilon),$$

pois $n^{(k)}(E_{\lambda_0})(1 - \epsilon) < n^{(k)}(E_{\lambda_0})\|Q\| \leq v(Q)$. Seja $x = (u_0, x^*_0(u_0)y_0) \in E$ e $x^* = (u^*_0, 0) \in E^* = E^*_{\lambda_0} \oplus_{\infty^*} F^*$. Então $(x, x^*) \in \Pi(E)$, pois

$$\begin{aligned}
&\|x\| = \max\{\|u_0\|, \|x^*_0(u_0)y_0\|\} = 1,\\
&\|x^*\| = \sup\{|u^*_0(u)| : \|u\| \leq 1\} = \|u^*_0\| = 1 \text{ e}\\
&x^*(x) = u^*_0(u_0) = 1.
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
v(P) \geq |x^*(P(x))| &= |(u^*_0, 0)(P(u_0, x^*_0(u_0)y_0))|\\
&= |(u^*_0, 0)((P_\lambda(u_0, x^*_0(u_0)y_0))_{\lambda \in \Lambda})|\\
&= |u^*_0(P_{\lambda_0}(u_0, x^*_0(u_0)y_0))| = |u^*_0(Q(u_0))|\\
&> (n^{(k)}(E_{\lambda_0}) - \epsilon)(1 - \epsilon)
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, temos que $v(P) \geq n^{(k)}(E_{\lambda_0})$. Ou seja, mostramos que para qualquer $P \in S_{\mathcal{P}(^k E;E)}$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $v(P) \geq n^{(k)}(E_\lambda)$. Dessa forma, podemos dizer que $v(P) \geq \inf_\lambda n^{(k)}(E_\lambda)$ para todo $P \in S_{\mathcal{P}(^k E;E)}$ e, dessa maneira, concluímos que $n^{(k)}(E) \geq \inf_\lambda n^{(k)}(E_\lambda)$. A desigualdade inversa decorre do Corolário 2.2.7 . ■

Observação 2.2.10 *A proposição acima não é verdadeira no caso real. Veremos mais adiante que* $n^{(2)}(c_0) = \frac{1}{2}$ *e* $n^{(2)}(l_\infty) = \frac{1}{2}$ *no caso real.*

Capítulo 3

Índice Polinomial Numérico de Alguns Espaços de Banach

Este capítulo será destinado a calcular e estimar o índice polinomial numérico de alguns espaços de Banach, entre eles estão o espaço $C(K,E)$, o espaço $L_\infty(\mu,E)$ e os espaços c_0, c, l_∞ e l_1. Os resultados apresentados aqui foram essencialmente retirados de Choi et al. [8], Choi et al. [11] e Kim et al. [20].

3.1 Espaços de Funções Contínuas

O objetivo desta é seção é fazer um estudo do índice polinomial numérico de ordem k de alguns espaços de funções contínuas a valores escalares e de funções contínuas a valores vetoriais. Além disso, vamos obter informação sobre o índice polinomial numérico de ordem k dos espaços de operadores complexos $\mathcal{L}(E,C(K))$, $K(E,C(K))$ e $W(E,C(K))$, onde $C(K)$ denota o espaço das funções escalares contínuas com domínio K, sendo K um espaço Hausdorff compacto.

Para começar iremos encontrar o valor do índice polinomial numérico de ordem k do espaço das funções contínuas $C(K)$, onde K é um conjunto Hausdorff compacto disperso. Para isso, vamos precisar de alguns conceitos.

Definição 3.1.1 *Sejam X um espaço localmente convexo e K um subconjunto convexo não vazio de X. Um subconjunto M de K é um **subconjunto extremo** de K se ele é não vazio, fechado, convexo e se para qualquer $x \in M$ que é uma combinação convexa de $u, v \in K$ tem-se $u, v \in M$.*

Definição 3.1.2 *Sejam X um espaço vetorial localmente convexo e K um subconjunto convexo não vazio de X. Um ponto $x \in K$ é um **ponto extremo** de K se $\{x\}$ é um subconjunto extremo de K.*

Definição 3.1.3 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço disperso** se todo subconjunto não vazio $H \subset X$ contém pelo menos um ponto isolado em X.*

Introduzidos esses conceitos, vamos agora enunciar dois lemas que serão úteis.

Dado um espaço de Banach E, lembremos que $\mathcal{H}(B_E)$ denota o espaço de Banach das funções $f : B_E \to \mathbb{C}$ que são holomorfas em $\overset{\circ}{B}_E$ e uniformemente contínuas em B_E, munido com a norma do supremo.

Lema 3.1.4 *Seja K um espaço Hausdorff compacto disperso. Se T é um elemento de $\mathcal{H}(B_{C(K)})$, então*

$$\|T\| = \sup\{|T(f)| \,:\, f \in ext(B_{C(K)})\},$$

onde $ext(B_{C(K)})$ *é o conjunto de todos os pontos extremos de* $B_{C(K)}$.

Demonstração: Veja a demonstração em [[7], Theorem 3.3]. ■

Lema 3.1.5 *Seja* K *um espaço Hausdorff compacto. Se* $g_0 \in ext(B_{C(K)})$, *então* $|g_0(t)| = 1$ *para todo* $t \in K$.

Demonstração: É claro que $g_0 \in B_{C(K)}$. Vamos dividir a demonstração em 3 casos.

1º Caso: Suponha $\|g_0\| = 0$. Como $\|g_0\| = 0$, então $g_0(t) = 0$ para todo $t \in K$. Tomando $h \in B_{C(K)}$, com $\|h\| = 1$, podemos tomar o segmento ligando h e $-h$ dado por $\varphi(\lambda) = \lambda h + (1-\lambda)(-h)$, onde $\lambda \in [0,1]$. Quando $\lambda = \dfrac{1}{2}$, temos que $\varphi(\lambda) = 0 = g_0$. Mas claramente, $h, -h \notin \{g_0\}$, e então g_0 não é ponto extremo de $B_{C(K)}$. Mas isso contradiz a hipótese. Logo, esse caso não pode acontecer.

2º Caso: Suponha $0 < \|g_0\| < 1$. Logo, existe $t_0 \in K$ tal que $0 < |g_0(t_0)| < 1$. Vamos considerar o segmento ligando f e $\dfrac{g_0}{|g_0(t_0)|}$, onde f é a função identicamente nula, dado por $\varphi(\lambda) = \lambda \dfrac{g_0}{|g_0(t_0)|}$, onde $\lambda \in [0,1]$. Quando $\lambda = |g_0(t_0)|$, temos que $\varphi(\lambda) = g_0$. Porém, $f, \dfrac{g_0}{|g_0(t_0)|} \notin \{g_0\}$. Portanto, g_0 não é ponto extremo de $B_{C(K)}$. Mas isso contradiz a nossa hipótese. Logo, esse caso não pode acontecer.

3º Caso: Suponha $\|g_0\| = 1$. Suponha que exista $x \in K$ tal que $|g_0(x)| < 1$. Vamos considerar duas situações.

i.) Suponha $|g_0(t)| > 0$ para todo $t \in K$. Considere $f(t) = 2g_0(t) - \dfrac{g_0(t)}{|g_0(t)|}$ e $h(t) = \dfrac{g_0(t)}{|g_0(t)|}$. É claro que $f, h \in C(K)$. Temos que

$$0 \leq |g_0(t)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2|g_0(t)| \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2|g_0(t)| - 1 \leq 1 \Rightarrow |2|g_0(t)| - 1| \leq 1$$

Daí,

$$|f(t)| = \left|2g_0(t) - \frac{g_0(t)}{|g_0(t)|}\right| = \left|\frac{2g_0(t)|g_0(t)| - g_0(t)}{|g_0(t)|}\right| = \left|\frac{g_0(t)}{|g_0(t)|}\right| |2|g_0(t)| - 1| \leq 1, \forall\, t \in K.$$

Portanto, $\|f\| \leq 1$. Além disso, temos que $\|h\| = 1$. Considerando o segmento $\varphi(\lambda) = \lambda f + (1-\lambda)h$, para $\lambda \in [0,1]$, e tomando $\lambda = \dfrac{1}{2}$, temos que $\varphi(\lambda) = \dfrac{1}{2}f + \dfrac{1}{2}h = g_0$. Porém, $h, f \notin \{g_0\}$, pois existe $x \in K$ tal que $|g_0(x)| < 1$. Portanto, g_0 não é ponto extremo de $B_{C(K)}$. Mas isso contradiz a hipótese. Portanto, esse caso não pode ocorrer.

ii.) Suponha que exista $s \in K$ tal que $g(s) = 0$. Considere o conjunto $C = \left\{t \in K \,:\, |g_0(t)| = \dfrac{1}{4}\right\}$. Se $C \neq \emptyset$, defina

$$h(t) = \begin{cases} 4g_0(t), & se\, |g_0(t)| \leq \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{g_0(t)}{|g_0(t)|}, & se\, |g_0(t)| \geq \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

e $f(t) = 2g_0(t) - h(t)$. Então, $f, h \in C(K)$, pelo Teorema 1.1.1, e $f, h \neq g_0$. Além disso,

$$|f(t)| = \begin{cases} 2|g_0(t)|, & \text{se } |g_0(t)| \leq \dfrac{1}{4} \\ |2|g_0(t)| - 1|, & \text{se } |g_0(t)| \geq \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Logo, $|f(t)| \leq 1$ para todo $t \in K$, ou seja, $\|f\| \leq 1$. E,

$$|h(t)| = \begin{cases} 4|g_0(t)|, & \text{se } |g_0(t)| \leq \dfrac{1}{4} \\ 1, & \text{se } |g_0(t)| > \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Segue disso que $|h(t)| \leq 1$ para todo $t \in K$, isto é, $\|h\| \leq 1$. Considere o segmento $\varphi(\lambda) = \lambda f + (1-\lambda)h$, onde $\lambda \in [0,1]$. Temos que, para $\lambda = \frac{1}{2}$, $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}h = g_0$. Porém, $f, h \notin \{g_0\}$. Portanto, g_0 não é ponto extremo de $B_{C(K)}$. Mas isso contradiz a nossa hipótese. Logo, esse caso não pode ocorrer.
Se $C = \emptyset$, tome

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{se } |g_0(t)| < \dfrac{1}{4} \\ g_0(t), & \text{se } |g_0(t)| > \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

e $f(t) = 2g_0(t) - h(t)$. Então $f, h \in C(K)$ e $f, h \neq g_0$, pois existe $s \in K$ tal que $g_0(s) = 0$. Daí,

$$|f(t)| = \begin{cases} \left|2g_0(t) - \dfrac{1}{4}\right|, & \text{se } |g_0(t)| < \dfrac{1}{4} \\ |g_0(t)|, & \text{se } |g_0(t)| > \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Logo, $|f(t)| \leq 1$ para todo $t \in K$, ou seja, $\|f\| \leq 1$. E como $|h(t)| \leq 1$ para todo $t \in K$, temos que $\|h\| \leq 1$. Considerando o segmento $\varphi(\lambda) = \lambda f + (1-\lambda)h$, onde $\lambda \in [0,1]$, e tomando $\lambda = \frac{1}{2}$, temos que $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}h = g_0$. Porém, $f, h \notin \{g_0\}$. Portanto g_0 não é ponto extremo de $B_{C(K)}$. Mas isso contradiz a nossa hipótese. Logo, esse caso não pode ocorrer. Portanto, temos que $|g_0(t)| = 1$ para todo $t \in K$. ■

Por fim, temos o seguinte o resultado.

Teorema 3.1.6 *Seja K um espaço Hausdorff compacto disperso. Para todo inteiro positivo k, temos que $n^{(k)}(C(K)) = 1$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $v(P) = \|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}({}^kC(K); C(K))$. Seja $P \in \mathcal{P}({}^kC(K); C(K))$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\|P\| = \sup\{\|P(f)\| : \|f\| \leq 1\}$, podemos escolher $f_0 \in B_{C(K)}$ e $t_0 \in K$ tal que $|P(f_0)(t_0)| > \|P\| - \epsilon$. Defina o polinômio k-homogêneo contínuo $Q : C(K) \to \mathbb{C}$ dado por $Q(f) = P(f)(t_0) = \delta_{t_0} \circ P(f)$, onde $f \in C(K)$. Pelo Lema 3.1.4, existe $g_0 \in ext(B_{C(K)})$ tal que $|Q(g_0)| > \sup_{f \in B_{C(K)}} |Q(f)| - \epsilon$. Como $g_0 \in ext(B_{C(K)})$, segue do Lema 3.1.5 que $|g_0(t)| = 1$ para todo $t \in K$. Assim,

$$\begin{aligned} \|P\| - 2\epsilon < |P(f_0)(t_0)| - \epsilon \leq \sup_{f \in B_{C(K)}} |P(f)(t_0)| - \epsilon &= \sup_{f \in B_{C(K)}} |Q(f)| - \epsilon \\ &< |Q(g_0)| \\ &= |P(g_0)(t_0)| \\ &= |sgn(\delta_{t_0}(g_0))\delta_{t_0}(P(g_0))| \leq v(P), \end{aligned}$$

pois $g_0 \in S_{C(K)}$, $sgn(\delta_{t_0}(g_0))\delta_{t_0} \in S_{C(K)^*}$ e $sgn(\delta_{t_0}(g_0))\delta_{t_0}(g_0) = 1$. Fazendo $\epsilon \to 0$, temos pela Proposição 2.1.3 que $\|P\| \leq v(P) \leq \|P\|$. Portanto, $v(P) = \|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kC(K); C(K))$. Daí, concluímos que $n^{(k)}(C(K)) = 1$. ■

A seguir vamos verificar a vericidade de alguns lemas que serão ferramentas importantes para os próximos resultados. Primeiramente vamos definir alguns espaços de funções contínuas a valores vetoriais. Sejam Ω um espaço Hausdorff completamente regular, L um espaço Hausdorff localmente compacto, K um espaço Hasdorff compacto e E um espaço de Banach. Definimos

$$\begin{aligned} C_b(\Omega, E) &= \{f : \Omega \to E \,:\, f \text{ é contínua e limitada}\}; \\ C_0(L, E) &= \{f : L \to E \,:\, f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}; \\ C(K, E) &= \{f : K \to E \,:\, f \text{ é contínua}\}. \end{aligned}$$

Esses espaços são espaços de Banach, pois são subespaços fechados do espaço das funções limitadas munido da norma do supremo.

Lema 3.1.7 *Seja E um espaço de Banach. Sejam Ω um espaço Hausdorff completamente regular, L um espaço Hausdorff localmente compacto e K um espaço Hausdorff compacto. Então os conjuntos* $\{f \in S_{C_b(\Omega,E)} : f \text{ atinge a norma}\}$, $\{f \in S_{C_0(L,E)} : f \text{ atinge a norma}\}$ *e* $\{f \in S_{C(K,E)} : f \text{ atinge a norma}\}$ *são densos em $S_{C_b(\Omega,E)}$, $S_{C_0(L,E)}$ e $S_{C(K,E)}$, respectivamente.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração somente para $C_b(\Omega, E)$. De forma análoga, temos o resultado para os outros casos bastando utilizar a Proposição 1.1.6 , Teorema 1.1.7 e a Proposição 1.1.8 . Seja $f \in S_{C_b(\Omega,E)}$. Dado $0 < \epsilon < 1$, podemos encontrar um $t_0 \in \Omega$ tal que $\|f(t_0)\| > 1 - \epsilon$. Escrevendo $x_0 = \dfrac{f(t_0)}{\|f(t_0)\|}$, temos que o ponto t_0 não pertence ao conjunto $F = \{t \in \Omega \,:\, \|f(t) - x_0\| \geq \epsilon\}$. O conjunto F é fechado, pois $F = f^{-1}(B(x_0, \epsilon)^c)$. Como Ω é completamente regular, existe uma função contínua $\varphi : \Omega \to [0, 1]$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e $\varphi(F) = \{0\}$. Defina $g : \Omega \to E$ por

$$g(t) = (1 - \varphi(t))f(t) + \varphi(t)x_0, \; t \in \Omega.$$

É claro que g é contínua. Vejamos que g é limitada. Observe que

$$\|g(t)\| = \|(1 - \varphi(t))f(t) + \varphi(t)x_0\| \leq 1, \, \forall t \in \Omega,$$

e temos que $\|g(t_0)\| = 1$. Portanto, temos que $\|g\| = \|g(t_0)\| = 1$. Assim, $g \in S_{C_b(\Omega,X)}$ e atinge a sua norma. Além disso, temos que

$$\|f - g\| = \sup_{t\in\Omega} \|f(t) - g(t)\| \leq \sup_{t\in\Omega} \varphi(t)\|f(t) - x_0\| < \epsilon.$$

Logo, o conjunto $\{f \in S_{C_b(\Omega,E)} : f \text{ atinge a norma}\}$ é denso $S_{C_b(\Omega,X)}$. ■

Para o próximo teorema, definimos $v(f)$, para $f : S_E \to E$, de forma análoga ao que foi a apresentado nas definições 2.1.1 e 2.1.2.

Teorema 3.1.8 *Seja E um espaço de Banach. Se Γ é um subconjunto de $\Pi(E)$ cuja projeção na primeira coordenada é densa em S_E, então*

$$v(f) = \sup\{|x^*(f(x))| \,:\, (x, x^*) \in \Gamma\}$$

para toda função limitada uniformemente contínua $f : S_E \to E$.

Demonstração: Veja a demonstração em [[31], Theorem 2.5]. ■

Lema 3.1.9 *Sejam Ω um espaço Hausdorff completamente regular, E um espaço de Banach e k um inteiro positivo. Seja $P \in \mathcal{P}({}^kC_b(\Omega, E); C_b(\Omega, E))$. Então*

$$v(P) = \sup\{|x^*(P(f)(t))| \,:\, f \in S_{C_b(\Omega,\,E)},\, t \in \Omega,\, x^* \in S_{E^*},\, x^*(f(t)) = 1\}.$$

Demonstração: Seja

$$\Gamma = \{(f,\, x^* \circ \delta_t) \,:\, f \in S_{C_b(\Omega,\,E)},\, t \in \Omega,\, x^* \in S_{E^*}, x^*(f(t)) = 1\}.$$

Observe que $\Gamma \subset \Pi(C_b(\Omega,\, E))$. Mostremos que $\pi_1(\Gamma)$ é denso em $S_{C_b(\Omega,\,E)}$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada. Como o conjunto das funções em $S_{C_b(\Omega,\,E)}$ que atingem a norma é denso em $S_{C_b(\Omega,\,E)}$, pelo Lema 3.1.7, basta mostrar que tais funções pertencem a $\pi_1(\Gamma)$.

Seja $f \in S_{C_b(\Omega,\,E)}$ uma função que atinge a norma. Então, existe $t \in \Omega$ tal que $\|f(t)\| = \|f\| = 1$. Daí, pelo Teorema de Hahn-Banach existe $x^* \in S_{E^*}$ tal que $x^*(f(t)) = \|f(t)\| = 1$. Assim, $(f,\, x^* \circ \delta_t) \in \Gamma$. Logo, $f \in \pi_1(\Gamma)$.

Como Γ é um subconjunto de $\Pi(C_b(\Omega,\, E))$ com $\Pi_1(\Gamma)$ denso em $S_{C_b(\Omega,\,E)}$, pelo Teorema 3.1.8, temos que

$$\begin{aligned} v(P) &= \sup\{|y^*(P(y))| \,:\, (y, y^*) \in \Gamma\} \\ &= \sup\{|(x^* \circ \delta_t)(P(f))| \,:\, f \in S_{C_b(\Omega,\,E)},\, t \in \Omega,\, x^* \in S_{E^*}, x^*(f(t)) = 1\} \\ &= \sup\{|x^*(P(f)(t))| \,:\, f \in S_{C_b(\Omega,\,E)},\, t \in \Omega,\, x^* \in S_{E^*}, x^*(f(t)) = 1\}. \end{aligned}$$

E assim, concluímos a demonstração. ■

Lema 3.1.10 *Sejam K um espaço Hausdorff compacto e k um inteiro positivo. Seja $P \in \mathcal{P}({}^kC(K, E); C(K, E))$. Então*

$$v(P) = \sup\{|x^*(P(f)(t))| \,:\, f \in S_{C(K,E)},\, t \in K,\, x^* \in S_E^*,\, x^*(f(t)) = 1\}.$$

Demonstração: Análogo ao Lema 3.1.9, porém, usando o fato de que $\{f \in S_{C(K,E)} : f$ atinge a norma$\}$ é denso em $S_{C(K,E)}$ como foi demonstrado no Lema 3.1.7. ■

Lema 3.1.11 *Sejam L um espaço Hausdorff localmente compacto e k um inteiro positivo. Seja $P \in \mathcal{P}({}^kC_0(L, E); C_0(L, E))$. Então*

$$v(P) = \sup\{|x^*(P(f)(t))| \,:\, f \in S_{C_0(L;E)},\, t \in K,\, x^* \in S_E^*,\, x^*(f(t)) = 1\}.$$

Demonstração: Análogo ao Lema 3.1.9, porém, usando o fato de que $\{f \in S_{C_0(L,E)} : f$ atinge a norma$\}$ é denso em $S_{C_0(L,E)}$ como foi demonstrado no Lema 3.1.7. ■

Proposição 3.1.12 *Seja Ω um espaço Hausdorff completamente regular. Para todo inteiro positivo k, temos que $n^{(k)}(C_b(\Omega, E)) \leq n^{(k)}(E)$.*

Demonstração: Seja $P \in \mathcal{P}({}^kE; E)$ com $\|P\| = 1$. Defina $Q \in \mathcal{P}({}^kC_b(\Omega, E); C_b(\Omega, E))$ por $(Q(f))(t) = P(f(t))$, para todo $t \in \Omega$ e $f \in C_b(\Omega, E)$. É claro que $Q \in \mathcal{P}({}^kC_b(\Omega, E); C_b(\Omega, E))$. De fato, uma vez que $P \in \mathcal{P}({}^kE; E)$, existe $A \in \mathcal{L}^s({}^kE; E)$ tal que $P(x) = Ax^k$. Assim, definamos a seguinte aplicação:

$$\varphi : C_b(\Omega, E)^k \to C_b(\Omega, E) \text{ dada por } \varphi(f_1, \ldots, f_k) = A \circ (f_1, \ldots, f_k).$$

Não é difícil mostrar que φ está bem definida, é k-linear e é contínua. Daí, segue que $\varphi \in \mathcal{L}(^k C_b(\Omega, E); C_b(\Omega, E))$. Como

$$A \circ (f, f, \ldots, f)(t) = A(f(t), f(t), \ldots, f(t)) = P(f(t)) = (P \circ f)(t), \ \forall \, t \in \Omega,$$

decorre que $\varphi(f, \ldots, f) = A \circ (f, \ldots, f) = P \circ f = Q(f)$. Portanto, $Q \in \mathcal{P}(^k C_b(\Omega, E); C_b(\Omega, E))$. Mostremos que $\|Q\| = 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|Q\| = \sup\{\|Q(f)\| \, : \, \|f\| \leq 1\} &= \sup\{\|P \circ f\| \, : \, \|f\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\, \sup\{\|P(f(t))\| \, : \, t \in \Omega\} \, : \, \|f\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\big\{\, \sup\{\|P\|\|f(t)\|^k \, : \, t \in \Omega\} \, : \, \|f\| \leq 1\big\} \\
&= \|P\| = 1.
\end{aligned}$$

Como $\|P\| = 1$, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_E$ tal que $\|P(x_n)\| \to 1$. Definamos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_{C_b(\Omega, E)}$, onde $f_n : \Omega \to E$ é dada por $f_n(t) = x_n$. Veja que $Q(f_n)(t) = P(f_n(t)) = P(x_n)$ para todo $t \in K$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que, para cada $t \in K$, $\|Q(f_n)(t)\| = \|P(x_n)\| \to 1$. Portanto, $\|Q(f_n)\| \to 1$. Porém, como $\|Q(f_n)\| \leq \|Q\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$1 = \lim_n \|P(x_n)\| = \lim_n \|Q(f_n)\| \leq \|Q\| \leq 1,$$

ou seja, $\|Q\| = 1$.

Como $Q \in \mathcal{P}(^k C_b(\Omega, E); C_b(\Omega, E))$ e $\|Q\| = 1$, temos que $v(Q) \geq n^{(k)}(C_b(\Omega, E))$. Pelo Lema 3.1.9, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $f \in S_{C_b(\Omega, E)}$, $t \in \Omega$, $x^* \in S_{E^*}$ tal que $x^*(f(t)) = 1$ e

$$n^{(k)}(C_b(\Omega, E)) - \epsilon \leq v(Q) - \epsilon \leq |x^*(Q(f)(t))| = |x^*(P(f(t)))|.$$

Visto que $f \in S_{C_b(\Omega; E)}$, temos $\|f(t)\| \leq 1$. Por outro lado,

$$\|f(t)\| \geq |x^*(f(t))| = 1.$$

Portanto, $\|f(t)\| = 1$. Assim, $v(P) \geq |x^*(P(f(t)))| \geq n^{(k)}(C_b(\Omega, E)) - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Desse modo, $v(P) \geq n^{(k)}(C_b(\Omega, E))$ para todo $P \in S_{\mathcal{P}(^k E, E)}$ e dessa maneira $n^{(k)}(E) \geq n^{(k)}(C_b(\Omega, E))$. ■

Proposição 3.1.13 *Seja K um espaço Hausdorff compacto. Para todo inteiro positivo k, temos que $n^{(k)}(C(K, E)) \leq n^{(k)}(E)$.*

Demonstração: Análoga a Proposição 3.1.12 tendo o conhecimento do Lema 3.1.10. ■

Proposição 3.1.14 *Seja L um espaço Hausdorff localmente compacto. Para todo inteiro positivo k, temos que $n^{(k)}(C_0(L, E)) \leq n^{(k)}(E)$.*

Demonstração: Análoga a Proposição 3.1.12 tendo o conhecimento do Lema 3.1.11. ■

Sejam E um espaço de Banach e Γ um conjunto. Denotemos por $B(\Gamma, E)$ o espaço das funções limitadas de Γ em E, munido da norma do supremo.

Lema 3.1.15 *Sejam E um espaço de Banach complexo, Γ um conjunto não vazio e F um subespaço fechado de $B(\Gamma, E)$. Suponha que para todo $f_0 \in B_F$, existe um subconjunto U_0 de Γ normante para F tal que:*

1. *Para todo $t_0 \in U_0$ e todo $\delta > 0$, existe uma função $\varphi : \Gamma \to [0,1]$ com $\varphi(t_0) = 1$ tal que*

$$\psi(x) = (1-\varphi)f_0 + \varphi x \in F \ \ (x \in E).$$

2. *Existe $x_0 \in B_E$ tal que $\|f_0 - \psi(x_0)\| < \delta$.*

Então $n^{(k)}(F) \geq n^{(k)}(E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $P \in \mathcal{P}(^kF; F)$ com $\|P\| = 1$. Dado $0 < \epsilon < 1$, existe $f_0 \in S_F$ tal que $\|P(f_0)\| > 1 - \dfrac{\epsilon}{2}$. Como $P(f_0) \in B_F$, existe $U_0 \subset \Gamma$ normante para F, isto é,

$$\|P(f_0)\| = \sup_{t \in \Gamma} \|P(f_0)(t)\| = \sup_{t \in U_0} \|P(f_0)(t)\|.$$

Daí, existe $t_0 \in U_0$ tal que $\|P(f_0)(t_0)\| > 1 - \dfrac{\epsilon}{2}$. Como P é contínua em f_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|P(f_0) - P(g)\| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } g \in F \text{ com } \|f_0 - g\| < \delta.$$

Da hipótese, existe $x_0 \in B_E$ tal que $\|f_0 - \psi(x_0)\| < \delta$, então

$$\begin{aligned} \|P(f_0) - P(\psi(x_0))\| < \frac{\epsilon}{2} \ &\Rightarrow \ \|P(f_0)(t_0) - [P(\psi(x_0))](t_0)\| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ \|P(f_0)(t_0)\| - \|[P(\psi(x_0))](t_0)\| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ \|[P(\psi(x_0))](t_0)\| > \|P(f_0)(t_0)\| - \frac{\epsilon}{2} > 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Daí, existe $x_0^* \in S_{E^*}$ tal que $|x_0^*([P(\psi(x_0))](t_0))| > 1 - \epsilon$. Escrevendo $x_0 = z_0\tilde{x_0}$ para $z_0 \in B_{\mathbb{K}}$ e $\tilde{x_0} \in S_E$ adequados, temos que a função

$$z \longmapsto x_0^*([P(\psi(z\tilde{x_0}))](t_0)) \, (z \in \mathbb{C})$$

é inteira. De fato,

$$x_0^*([P(\psi(z\tilde{x_0}))](t_0)) = (x_0^* \circ \delta_{t_0})(P(\psi(z\tilde{x_0}))) = (x_0^* \circ \delta_{t_0}) \circ P((1-\varphi)f_0 + \varphi\tilde{x_0}z).$$

Como $\delta_{t_0} : F \to E$ é uma transformação linear e $x_0^* : E \to \mathbb{C}$ é um funcional linear, temos que $x_0^* \circ \delta_{t_0} : F \to \mathbb{C}$ é um funcional linear. Como $\psi(x) = (1-\varphi)f_0 + \varphi x \in F$ para todo $x \in E$, temos que $(1-\varphi)f_0$ e φx pertencem a F, pois $\psi(0) = (1-\varphi)f_0 \in F$ e $\varphi x = \psi(x) - (1-\varphi)f_0 \in F$. Segue disso que $(1-\varphi)f_0$, $\varphi\tilde{x_0} \in F$. Assim, sabendo que $x_0^* \circ \delta_{t_0} \in F^*$, $P \in \mathcal{H}(F; F)$ e $(1-\varphi)f_0$, $\varphi\tilde{x_0} \in F$, segue da Proposição 1.5.4 que a aplicação

$$z \longmapsto x_0^*([P(\psi(z\tilde{x_0}))](t_0)) \, (z \in \mathbb{C})$$

é holomorfa. Daí, pelo Teorema do Módulo Máximo, podemos encontrar $z_1 \in S_{\mathbb{C}}$ tal que

$$\|[P(\psi(z_1\tilde{x_0}))](t_0)\| \geq |x_0^*([P(\psi(z_1\tilde{x_0}))](t_0))| \geq |x_0^*([P(\psi(z_0\tilde{x_0}))](t_0))| > 1 - \epsilon.$$

Finalmente, seja $x_1 = z_1\tilde{x_0} \in S_E$, considere $x_1^* \in S_{E^*}$ tal que $x_1^*(x_1) = 1$ e defina

$$\phi(x) = x_1^*(x)(1-\varphi)f_0 + \varphi x \in F \, (x \in E).$$

Observe que $\phi(x_1) = \psi(z_1 \tilde{x_0})$. Assim, $\|[P(\phi(x_1))](t_0)\| > 1 - \epsilon$. Definamos o polinômio k-homogêneo contínuo $Q : E \to E$ por $Q(x) = [P(\phi(x))](t_0) = (\delta_{t_0} \circ P \circ \phi)(x)$ que satisfaz

$$\|Q\| \geq \|Q(x_1)\| = \|[P(\phi(x_1))](t_0)\| > 1 - \epsilon.$$

Escolha $(x_2, x_2^*) \in \Pi(E)$ tal que $|x_2^*(Q(x_2))| \geq n^{(k)}(E)(1-\epsilon)$. Afirmamos que $(\phi(x_2), x_2^* \circ \delta_{t_0}) \in \Pi(F)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|\phi(x_2)\| = \sup_{t\in\Gamma} \|\phi(x_2)(t)\| &= \sup_{t\in\Gamma} \|x_1^*(x_2)(1-\varphi(t))f_0(t) + \varphi(t)x_2\| \\ &\leq \sup_{t\in\Gamma} (|x_1^*(x_2)|(1-\varphi(t))\|f_0(t)\| + \varphi(t)\|x_2\|) \\ &\leq \sup_{t\in\Gamma} (1-\varphi(t)+\varphi(t)) = 1, \end{aligned}$$

e para $t_0 \in U_0 \subset \Gamma$ temos

$$\|\phi(x_2)(t_0)\| = \|x_1^*(x_2)(1-\varphi(t_0))f_0(t_0) + \varphi(t_0)x_2\| = \|x_2\| = 1.$$

Portanto, $\|\phi(x_2)\| = 1$, ou seja, $\phi(x_2) \in S_F$. Veja que $\|x_2^* \circ \delta_{t_0}\| \leq \|x_2^*\|\|\delta_{t_0}\| \leq 1$. Além disso,

$$(x_2^* \circ \delta_{t_0})(\phi(x_2)) = x_2^*(\phi(x_2)(t_0)) = x_2^*(x_2) = 1.$$

Desse modo, $x_2^* \circ \delta_{t_0} \in S_{F^*}$ e $(x_2^* \circ \delta_{t_0})(\phi(x_2)) = 1$. Daí,

$$v(P) \geq |(x_2^* \circ \delta_{t_0})(P(\phi(x_2)))| = |x_2^*(Q(x_2))| \geq n^{(k)}(E)(1-\epsilon).$$

Dessa maneira, como ϵ é arbitrário, $v(P) \geq n^{(k)}(E)$ para todo $P \in S_{\mathcal{P}(^kF;F)}$. Logo, concluímos que $n^{(k)}(F) \geq n^{(k)}(E)$. ■

Antes de prosseguirmos para o próximo resultado desta seção, vamos definir o que é um espaço de Asplund e anunciar dois lemas que serão necessários para a demonstração desse teorema.

Definição 3.1.16 *Seja E um espaço de Banach. Dizemos que tal espaço é um* ***espaço de Asplund*** *se o dual de todo subespaço fechado separável de E é separável.*

Seja E um espaço de Banach e K um espaço Hausdorff compacto. Denotemos por

$$\begin{aligned} C_w(K,E) &= \{f : K \to X \; : \; f \text{ é fracamente contínua}\}; \\ C_{w^*}(K,E^*) &= \{f : K \to X^* \; : \; f \text{ é fraca-estrela contínua}\}, \end{aligned}$$

onde esses espaços estão munidos da norma do supremo.

Lema 3.1.17 *Sejam K um espaço Hausdorff compacto e E um espaço de Banach. Então para todo $f \in C_w(K,E)$, temos que o conjunto*

$$\{t \in K \; : \; \text{f é fortemente contínua em } t\}$$

é denso em K.

Demonstração: Veja a demostração em [[22], Lemma 1]. ■

Lema 3.1.18 *Sejam K um espaço Hausdorff compacto e E um espaço de Asplund. Então para todo $f \in C_{w^*}(K, E^*)$, temos que o conjunto*

$$\{t \in K \ : \ \text{f é fortemente contínua em } t\}$$

é denso em K.

Demonstração: Veja a demonstração em [[22], Lemma 6]. ■

Teorema 3.1.19 *Sejam E um espaço de Banach complexo e $k \in \mathbb{N}$.*

a.) *Se K é um espaço Hausdorff compacto, então $n^{(k)}(C_w(K, E)) \geq n^{(k)}(E)$.*

b.) *Seja K um espaço Hausdorff compacto. Se E é um espaço de Asplund ou K tem um subconjunto denso de pontos isolados, então $n^{(k)}(C_{w^*}(K, E^*)) \geq n^{(k)}(E^*)$.*

c.) *Se L é Hausdorff localmente compacto, então $n^{(k)}(C_0(L, E)) \geq n^{(k)}(E)$.*

d.) *Se Ω é um espaço Hausdorff completamente regular, então $n^{(k)}(C_b(\Omega, E)) \geq n^{(k)}(E)$.*

e.) *Se K é um espaço Hausdorff compacto, então $n^{(k)}(C(K, E)) \geq n^{(k)}(E)$.*

f.) *Para um espaço Hausdorff compacto K e um subconjunto aberto denso $U \subset K$, escrevemos*

$$Y = \{f \in C(K) \ : \ f(K - U) = 0\}.$$

Então, para todo subespaço fechado F de $C(K)$ contendo Y, temos que $n^{(k)}(E) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Mostraremos em cada caso que as condições do Lema 3.1.15 são satisfeitas.
a.) Dado $f_0 \in B_{C_w(K,E)}$, o conjunto $U_0 = \{t \in K \ : \ f_0 \text{ é fortemente contínua em t}\}$ é denso em K pelo Lema 3.1.17. É claro que

$$\sup_{t \in K} \|f_0(t)\| \geq \sup_{t \in U_0} \|f_0(t)\|.$$

Mostremos que $\sup\limits_{t \in K} \|f_0(t)\| \leq \sup\limits_{t \in U_0} \|f_0(t)\|$. Seja $t \in K$. Como $\overline{U_0} = K$, existe uma rede $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em U_0 tal que $u_\lambda \to t$. Como f_0 é fracamente contínua, temos que $f_0(u_\lambda) \to f_0(t)$ fracamente. Pelo fato de $f_0(t) \in E$, segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $x^* \in S_{E^*}$ tal que $\|f_0(t)\| = |x^*(f_0(t))|$. Visto que $(x^* \circ f_0)(u_\lambda) \to (x^* \circ f_0)(t)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $|(x^* \circ f_0)(u_\lambda) - (x^* \circ f_0)(t)| < \epsilon$ para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Daí,

$$\begin{aligned}
|(x^* \circ f_0)(u_{\lambda_0}) - (x^* \circ f_0)(t)| < \epsilon \ &\Rightarrow \ |x^*(f_0(t))| - |x^*(f_0(u_{\lambda_0}))| < \epsilon \\
&\Rightarrow \ \|f_0(t)\| - \epsilon < |x^*(f_0(u_{\lambda_0}))| \leq \|f_0(u_{\lambda_0})\| \\
&\Rightarrow \ \|f_0(t)\| - \epsilon < \sup_{x \in U_0} \|f_0(x)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|f_0(t)\| \leq \sup\limits_{x \in U_0} \|f_0(x)\|$ para todo $t \in K$. Dessa maneira, $\sup\limits_{t \in K} \|f_0(t)\| \leq \sup\limits_{t \in U_0} \|f_0(t)\|$, e concluímos que U_0 é normante para K. Agora, dado $t_0 \in U_0$, o conjunto

$$W = \overline{\{t \in K \ : \ \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \delta\}}$$

não contém t_0. De fato, suponhamos que $t_0 \in W$. Então existe uma rede $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \{t \in K \ : \ \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \delta\}$ tal que $t_\lambda \to t_0$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, temos que $\|f_0(t_\lambda) - f_0(t_0)\| \geq \delta$. Todavia, como $t_0 \in U_0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|f_0(t_\lambda) - f_0(t_0)\| < \delta$ para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Mas isso é uma contradição. Dessa maneira, $t_0 \notin W$. Assim, pelo de Lema de Uryshon (Teorema 1.1.7), existe uma função contínua $\varphi : K \to [0, 1]$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e $\varphi(W) = \{0\}$. Mostremos que

$$\psi(x) = (1-\varphi)f_0 + \varphi x \in C_w(K,E)\,(x \in E).$$

Seja $x \in E$. Dado $t \in K$ e uma rede $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset K$ tal que $t_\lambda \to t$, temos que

$$x^*(\psi(x)(t_\lambda)) \longrightarrow x^*(\psi(x)(t))$$

para todo $x^* \in E^*$. Desse modo, concluímos que $\psi(x) \in C_w(K,E)$ para todo $x \in E$. Além disso, tomando $x_0 = f_0(t_0) \in B_E$, temos

$$\begin{aligned}\|f_0 - \psi(x_0)\| &= \sup_{t\in K} \|f_0(t) - [(1-\varphi(t))f_0(t) + \varphi(t)f_0(t_0)]\| \\ &= \sup_{t\in K} \|\varphi(t)(f_0(t) - f_0(t_0))\| \\ &= \sup_{t\in K} \varphi(t)\|f_0(t) - f_0(t_0)\| < \delta,\end{aligned}$$

pois $\varphi(W) = \{0\}$. Então, pelo Lema 3.1.15, $n^{(k)}(C_w(K,E)) \geq n^{(k)}(E)$.
b.) Vamos separar essa demonstração em dois casos.
Caso 1: Suponha que E é um espaço de Asplund. Seja $f_0 \in B_{C_{w^*}(K,E^*)}$. Então o conjunto $U_0 = \{t \in K \,:\, f \text{ é fortemente contínua em t}\}$ é denso em K pelo Lema 3.1.18. De forma análoga ao item a.), mostra-se que U_0 é normante para K. Dado $t_0 \in U_0$, o conjunto fechado $W = \overline{\{t \in K \,:\, \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \delta\}}$ não contém t_0. Pelo Lema de Uryshon, existe uma função contínua $\varphi : K \to [0,1]$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e $\varphi(W) = 0$. Analogamente ao item a.), mostra-se que $\psi(x^*) = (1-\varphi)f_0 + \varphi x^* \in C_{w^*}(K,E^*)$ para todo $x^* \in E^*$ e, tomando $x_0^* = f_0(t_0) \in B_{E^*}$, prova-se que $\|f_0 - \psi(x_0^*)\| < \delta$. Segue do Lema 3.1.15 que $n^{(k)}(C_{w^*}(K,E^*)) \geq n^{(k)}(E^*)$.
Caso 2: Suponha que K possui um subconjunto denso de pontos isolados. Chamemos tal conjunto de U. Seja $f_0 \in B_{C_{w^*}(K,E^*)}$. Mostremos que o conjunto

$$U_0 = \{t \in K \,:\, f_0 \text{ é fortemente contínua em t}\}$$

é denso em K. Sejam $t \in U$ e $\epsilon > 0$ dado. Visto que t é um ponto isolado, existe uma vizinhança V de t tal que $V = \{t\}$. Assim, temos que $\|f_0(v) - f_0(t)\| < \epsilon$ para todo $v \in V$. Logo, concluímos que f_0 é contínua em norma no ponto t, isto é, $t \in U_0$. Dessa maneira, $U \subset U_0$, e assim $K = \overline{U} \subset \overline{U_0} \subset K$. Logo, $\overline{U_0} = K$. E o restante segue de forma análoga ao Caso 1.
c.) Seja $f_0 \in B_{C_0(L,E)}$. Tome $U_0 = L$. É claro que U_0 é normante para L. Dado $t_0 \in U_0$, o conjunto fechado $W = \{t \in L \,:\, \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \delta\}$ não contém t_0. Logo, $t_0 \in W^c$. Como W^c é aberto e L é Hausdorff localmente compacto, pela Proposição 1.1.3, existe uma vizinhança aberta V de t_0 tal que $\overline{V} \subset W^c$ e $\overline{V}$ é compacto. Seja $K_1 = \overline{V}$. Como $\{t_0\}$ e V^c são fechados disjuntos e L é completamente regular, pela Proposição 1.1.8 existe uma função contínua $\varphi : L \to [0,1]$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e $\varphi(V^c) = \{0\}$. Agora, mostremos que $\psi(x) = (1-\varphi)f_0 + \varphi x \in C_0(L,E)$ para todo $x \in E$.

Dado $x \in E$, é fácil ver que $\psi(x)$ é contínua. Seja $\epsilon > 0$. Como $f_0 \in C_0(L,E)$, existe um compacto K_2 tal que $\|f_0(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \in K_2^c$. Tome o compacto $K = K_1 \cup K_2$. Assim,

$$\|\psi(x)(t)\| = \|(1-\varphi(t))f_0(t) + \varphi(t)x\| = \|f_0(t)\| \leq \epsilon, \forall\, t \in K^c = K_1^c \cap K_2^c.$$

Portanto, $\psi(x) \in C_0(L,E)$ para todo $x \in E$. Finalmente, tomando $x_0 = f_0(t_0)$, temos que

$$\|f_0 - \psi(x_0)\| = \sup_{t\in L} \|f_0(t) - \psi(x_0)(t)\| = \sup_{t\in L} \varphi(t)\|f_0(t) - f_0(t_0)\| < \delta,$$

pois $t \in K_1^c$ implica que $\varphi(t) = 0$. Segue do Lema 3.1.15 que $n^{(k)}(C_0(L,E)) \geq n^{(k)}(E)$.
d.) Seja $f_0 \in B_{C_b(\Omega,E)}$. Seja $U_0 = \Omega$. É claro que U_0 é normante para Ω. Dado $t_0 \in \Omega$, o conjunto fechado $W = \{t \in \Omega : \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \delta\}$ não contém t_0. Visto que Ω é completamente regular, existe uma função contínua $\varphi : \Omega \to [0,1]$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e $\varphi(W) = \{0\}$. Mostremos que $\psi(x) = (1-\varphi)f_0 + \varphi x \in C_b(\Omega, E)$ para todo $x \in E$. Seja $x \in E$ fixo. É claro que $\psi(x)$ é contínua e, uma vez que $f_0 \in C_b(\Omega, E)$, podemos encontrar $M > 0$ tal que $\|f_0(t)\| \leq M$ para todo $t \in \Omega$. Segue daí que,

$$\|\psi(x)(t)\| = \|(1-\varphi(t))f_0(t) + \varphi(t)x\| \leq \|f_0(t)\| + \|x\| \leq M + \|x\|, \forall\, t \in \Omega.$$

Desse modo, $\psi(x)$ é limitada, e concluímos que $\psi(x) \in C_b(\Omega, E)$ para todo $x \in E$. Tomando $x_0 = f_0(t_0) \in B_E$, temos que $\|f_0 - \psi(x_0)\| < \delta$. Assim, segue do Lema 3.1.15 que $n^{(k)}(C_b(\Omega, E)) \geq n^{(k)}(E)$.
e.) Seja $f_0 \in B_{C(K,E)}$. Tomemos $U_0 = K$. É claro que U_0 é normante para K. Dado $t_0 \in U_0$, o conjunto fechado $W = \{t \in K : \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \delta\}$ não contém t_0. Assim, pelo Lema de Uryshon, existe uma função contínua $\varphi : K \to [0,1]$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e $\varphi(W) = \{0\}$. É fácil ver que $\psi(x) \in C(K,E)$ para todo $x \in E$. E, tomando $x_0 = f_0(t_0) \in B_E$, temos que $\|f_0 - \psi(x_0)\| < \delta$. Desse modo, segue do Lema 3.1.15 que $n^{(k)}(C(K,E)) \geq n^{(k)}(E)$.
f.) Seja $f_0 \in B_F$. Tomando $U_0 = U$, temos que U_0 é normante para K. Dado $t_0 \in U_0$, considere o conjunto $V = \{t \in U : |f_0(t) - f_0(t_0)| < \delta\}$. É claro que V é aberto, pois $V = f_0^{-1}(B(f_0(t_0), \delta)) \cap U$. Como $\{t_0\}$ e V^c são fechados e disjuntos, pelo Lema de Uryshon, podemos encontrar uma função contínua $\varphi : K \to [0,1]$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e $\varphi(V^c) = \{0\}$. Observe que $\varphi \in Y$, pois como $U^c \subset V^c$, temos que $\varphi(U^c) = \{0\}$.

Agora, mostremos que $\psi(z) = (1-\varphi)f_0 + \varphi z \in F$ para $z \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\psi(z)(t) = (1-\varphi(t))f_0(t) + \varphi(t)z = f_0(t) - \varphi(t)f_0(t) + z\varphi(t), \forall\, t \in K.$$

Logo, $\psi(z) = f_0 - \varphi f_0 + z\varphi$. Como $f_0, -\varphi f_0,\ z\varphi \in F$, temos que $\psi(z) \in F$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Finalmente, tomando $x_0 = f_0(t_0)$ e observando que $W \subset V^c$, onde $W = \{t \in K : \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geq \delta\}$, temos

$$\|f_0 - \psi(x_0)\| = \sup_{t \in K} \|f_0(t) - \psi(x_0)(t)\| \leq \sup_{t \in K} \varphi(t)\|f_0(t) - f_0(t_0)\| < \delta.$$

Segue do Lema 3.1.15 que $n^{(k)}(F) \geq n^{(k)}(\mathbb{C}) = 1$. Portanto, $n^{(k)}(F) = 1$. ■

Veja em [[14], Theorem VI.7.1] que para qualquer espaço Hausdorff compacto K e qualquer espaço de Banach E, os espaços $C(K, E^*)$, $C_w(K, E^*)$ e $C_{w^*}(K, E^*)$ podem ser isometricamente identificados com $K(E, C(K))$, $W(E, C(K))$ e $\mathcal{L}(E, C(K))$, respectivamente, onde $K(E, C(K))$(respectivamente $W(E, C(K))$) denota o espaço de Banach de todos os operadores lineares compactos (fracamente compactos) de E em $C(K)$.

Corolário 3.1.20 *Sejam E um espaço de Banach complexo e K um espaço Hausdorff compacto. Então,*

$$n^{(k)}(W(E, C(K))) \geq n^{(k)}(E^*) = n^{(k)}(K(E, C(K)))$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Se E é um espaço de Asplund ou K contém um subconjunto denso de pontos isolados, então

$$n^{(k)}(\mathcal{L}(E, C(K))) \geq n^{(k)}(E^*) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Segue do item a.) e do item e.) do Teorema 3.1.19 e da Proposição 3.1.13 que $n^{(k)}(C_w(K,E^*)) \geq n^{(k)}(E^*)$ e $n^{(k)}(C(K,E^*)) = n^{(k)}(E^*)$. Além disso, pelo Teorema 2.1.8 temos que $n^{(k)}(W(E,C(K))) = n^{(k)}(C_w(K,E^*))$ e $n^{(k)}(K(E,C(K))) = n^{(k)}(C(K,E^*))$. Segue daí,

$$n^{(k)}(W(E,C(K))) = n^{(k)}(C_w(K,E^*)) \geq n^{(k)}(E^*) = n^{(k)}(C(K,E^*)) = n^{(k)}(K(E,C(K))).$$

Agora, suponha que E é um espaço de Asplund ou que K contém um subconjunto denso de pontos isolados. Então, pelo item b.) do Teorema 3.1.19, temos que $n^{(k)}(C_{w^*}(K,E^*)) \geq n^{(k)}(E^*)$. Pelo Teorema 2.1.8, temos que $n^{(k)}(\mathcal{L}(E,C(K))) = n^{(k)}(C_{w^*}(K,E^*))$. Segue então que

$$n^{(k)}(\mathcal{L}(E,C(K))) = n^{(k)}(C_{w^*}(K,E^*)) \geq n^{(k)}(E^*).$$

■

Exemplo 3.1.21 *Existe um espaço de Banach E complexo tal que $n^{(k)}(E) = 1$ e $n^{(k)}(E^{**}) = k^{\frac{k}{1-k}}$ para todo $k \geq 2$, isto é, o índice polinomial numérico de E é o maior possível, enquanto que o índice de E^{**} é o menor possível.*

Demonstração: Seja E um espaço de Banach complexo separável tal que $n^{(k)}(E) = k^{\frac{k}{1-k}}$ para todo $k \geq 2$. A existência de tal espaço é garantida por [[19], Example 9]. Pelo Teorema de Banach-Mazur (Teorema 1.2.14), podemos considerar E como um subespaço fechado de $C(\Delta)$, onde Δ é o conjunto de Cantor. Seja

$$\begin{array}{rll} T: & C[0,1] & \longrightarrow C(\Delta) \\ & f & \longmapsto T(f) = f|_{\Delta}. \end{array}$$

É claro que T está bem definido e é um operador linear contínuo. Definamos os subespaços fechados $X(E)$ e Y de $C[0,1]$ por

$$X(E) = \{f \in C[0,1] \,:\, T(f) \in E\} \text{ e } Y = Ker(T).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} Y = Ker(T) = \{f \in C[0,1] \,:\, T(f) = 0\} &= \{f \in C[0,1] \,:\, f(t) = 0, \forall\, t \in \Delta\} \\ &= \{f \in C[0,1] \,:\, f([0,1] - \Delta^c) = 0\} \end{aligned}$$

e Δ^c é aberto e denso em $[0,1]$. Segue do item f.) do Teorema 3.1.19 que $n^{(k)}(X(E)) = 1$ para $k \geq 2$.

Por outro lado, segundo [[25] Theorem 3.3 e Remark 3.4.b], $X(E)^* = E^* \oplus_1 Y^*$. Daí $X(E)^{**} = E^{**} \oplus_\infty Y^{**}$. Segue do Corolário 2.1.22 e do Corolário 2.2.7 que $n^{(k)}(X(E)^{**}) \leq n^{(k)}(E^{**}) \leq n^{(k)}(E) = k^{\frac{k}{1-k}}$. O outro lado é assegurado pelo Teorema 2.1.10, $n^{(k)}(X(E)^{**}) \geq k^{\frac{k}{1-k}}$. Então, $n^{(k)}(X(E)^{**}) = k^{\frac{k}{1-k}}$ para $k \geq 2$. ■

3.2 Espaço $L_\infty(\mu, E)$

O objetivo desta seção é encontrar uma relação entre E e o espaço $L_\infty(\mu, E)$ das classes de funções a valores em E mensuráveis e limitadas μ-quase sempre. Para conseguir essa relação, precisamos de três lemas primeiramente.

Lema 3.2.1 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita, E um espaço de Banach e $f \in L_\infty(\mu, E)$ com $\|f(t)\| \geq \lambda$ μ-quase sempre. Então existe $B \in \Sigma$ com $0 < \mu(B) < \infty$ tal que*

$$\left\| \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu \right\| > \lambda.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [[26], Lemma 2.1]. ■

Lema 3.2.2 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita, E um espaço de Banach e $f \in L_\infty(\mu, E)$, $C \in \Sigma$ com medida positiva e $\epsilon > 0$. Então existem $x \in E$ e $A \subseteq C$ com $0 < \mu(A) < \infty$ tal que $\|x\| = \|f\chi_C\|$ e $\|(f - x)\chi_A\| < \epsilon$. Além do mais, o conjunto*

$$\{x\chi_A + f\chi_{\Omega - A} \, : \, x \in S_E, f \in B_{L_\infty(\mu,E)}, A \in \Sigma \text{ com } 0 < \mu(A) < \infty\}$$

é denso em $S_{L_\infty(\mu,E)}$.

Demonstração: Veja a demonstração em [[26], Lemma 2.2]. ■

Lema 3.2.3 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita, E um espaço de Banach, k um inteiro positivo e $P \in \mathcal{P}(^k L_\infty(\mu, E); L_\infty(\mu, E))$. Então*

$$v(P) = \sup \left\{ \left| x^* \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A P(x\chi_A + f\chi_{\Omega - A}) d\mu \right) \right| \, : \, x\chi_A + f\chi_{\Omega - A} \in W, \, x^* \in S_{E^*} \text{ e } x^*(x) = 1 \right\},$$

onde $W = \{x\chi_A + f\chi_{\Omega - A} \, : \, x \in S_E, f \in B_{L_\infty(\mu,E)}, A \in \Sigma$ com $0 < \mu(A) < \infty\}$.

Demonstração: Dado $A \in \Sigma$ com $0 < \mu(A) < \infty$, definimos a função $\psi_A : L_\infty(\mu, E) \to E$ por $\psi_A(h) = \dfrac{1}{\mu(A)} \displaystyle\int_A h d\mu$. Consideremos $\Gamma = \{(x\chi_A + f\chi_{\Omega - A}, \; x^* \circ \psi_A) \, : \, (x, x^*) \in \Pi(E), \; f \in B_{L_\infty(\mu,E)}, \; A \in \Sigma \text{ com } 0 < \mu(A) < \infty\}$.

Mostremos que $\Gamma \subset \Pi(L_\infty(\mu, E))$. De fato, seja $(x\chi_A + f\chi_{\Omega - A}, \; x^* \circ \psi_A) \in \Gamma$. Primeiramente, vejamos que $x\chi_A + f\chi_{\Omega - A} \in S_{L_\infty(\mu,E)}$. Temos que $\|x\chi_A + f\chi_{\Omega - A}\|_\infty \leq 1$, pois $\emptyset \in \Sigma$, $\mu(\emptyset) = 0$ e $\|x\chi_A(t) + f(t)\chi_{\Omega - A}(t)\| \leq 1$ para todo $t \in \emptyset^c = \Omega$. Suponhamos que $\|x\chi_A + f\chi_{\Omega - A}\|_\infty < 1$. Logo, existe uma constante $0 < c < 1$ tal que $x\chi_A + f\chi_{\Omega - A}$ é limitada por c μ-quase sempre, isto é, existe um conjunto $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ e $\|x\chi_A(t) + f(t)\chi_{\Omega - A}(t)\| \leq c$ para todo $t \in N^c$. É fácil ver que $A \cap N^c \neq \emptyset$. Assim, para $t \in A \cap N^c$, temos que

$$1 > c \geq \|x\chi_A(t) + f(t)\chi_{\Omega - A}(t)\| = \|x\chi_A(t)\| = \|x\| = 1,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\|x\chi_A + f\chi_{\Omega - A}\|_\infty = 1$.

Mostremos que $x^* \circ \psi_A \in S_{L_\infty(\mu,E)^*}$. Com facilidade se mostra que $x^* \circ \psi_A$ é linear, logo, basta mostra a continuidade. Seja $g \in B_{L_\infty(\mu,E)}$. Então, existe $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tal que $\|g(t)\| \leq 1$ para todo $t \in N^c$. Daí,

$$
\begin{aligned}
|x^*(\psi_A(g))| = \left| x^*\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A g(t)d\mu(t)\right)\right| &\leq \frac{1}{\mu(A)}\left\|\int_A g(t)d\mu(t)\right\| \\
&= \frac{1}{\mu(A)}\left\|\int_{A\cap N^c} g(t)d\mu(t)\right\| \\
&\leq \frac{1}{\mu(A)}\int_{A\cap N^c}\|g(t)\|d\mu(t) \\
&\leq \frac{1}{\mu(A)}\mu(A\cap N^c) \leq 1.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
|x^*(\psi_A(x\chi_A + f\chi_{\Omega-A}))| &= \left| x^*\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A x\chi_A + f\chi_{\Omega-A}d\mu\right)\right| \\
&= \left| x^*\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A x\chi_A d\mu\right)\right| \\
&= |x^*(x)| = 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $x^*\circ\psi_A \in S_{L_\infty(\mu,E)^*}$. Dessa maneira, $(x\chi_A+f\chi_{\Omega-A},\ x^*\circ\psi_A) \in \Pi(L_\infty(\mu,E))$ e concluímos que $\Gamma \subset \Pi(L_\infty(\mu,E))$. Observe que a projeção na primeira coordenada do conjunto Γ é o conjunto

$$\{x\chi_A + f\chi_{\Omega-A} : x \in S_E, f \in B_{L_\infty(\mu,E)}, A \in \Sigma \text{ com } 0 < \mu(A) < \infty\}$$

que é denso em $S_{L_\infty(\mu,E)}$ pelo Lema 3.2.2. Segue do Teorema 3.1.8 que

$$v(P) = \sup\{|(x^*\circ\psi_A)(P(x\chi_A + f\chi_{\Omega-A}))| : (x\chi_A + f\chi_{\Omega-A},\ x^*\circ\psi_A) \in \Gamma\},$$

isto é,

$$v(P) = \sup\left\{\left| x^*\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A P(x\chi_A + f\chi_{\Omega-A})d\mu\right)\right| : x\chi_A + f\chi_{\Omega-A} \in W,\ x^* \in S_{E^*} \text{ e } x^*(x) = 1\right\}.$$

■

Assim, obtidos todos os lemas, podemos prosseguir com os resultados principais.

Teorema 3.2.4 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e E um espaço de Banach complexo. Então $n^{(k)}(L_\infty(\mu,E)) = n^{(k)}(E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Primeiro, provemos que $n^{(k)}(L_\infty(\mu,E)) \geq n^{(k)}(E)$. Seja $P \in \mathcal{P}(^kL_\infty(\mu,E); L_\infty(\mu,E))$ com $\|P\| = 1$. Dado $0 < \epsilon < 1$, existe $f \in S_{L_\infty(\mu,E)}$ tal que $\|P(f)\|_\infty > 1 - \frac{\epsilon}{2}$. Segue daí que existe um conjunto $V \in \Sigma$ tal que $\mu(V) > 0$ e $\|P(f)(t)\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}$ para todo $t \in V$ (Proposição 1.6.10). Como P é contínuo em f, existe $\delta > 0$ tal que $\|P(f) - P(h)\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $h \in L_\infty(\mu,E)$ com $\|f - h\|_\infty < \delta$. Pelo Lema 3.2.2, existe $y_0 \in E$ tal que $0 < \|y_0\| = \|f\chi_V\| \leq 1$ e $A \subseteq V$ com $0 < \mu(A) < \infty$ tal que $\|(f - y_0)\chi_A\|_\infty < \delta$. Tome $y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A} \in L_\infty(\mu,E)$. Temos que

$$\|f - (y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})\|_\infty = \|(f - y_0)\chi_A\|_\infty < \delta,$$

e dessa maneira $\|P(f) - P(y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})\|_\infty < \dfrac{\epsilon}{2}$. Assim, existem $0 < \beta < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\|P(f)(t) - P(y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})(t)\| \leq \beta < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $t \in N^c$. Não é difícil mostrar que existe um conjunto $A_1 \in \Sigma$, $A_1 \subset A$ com $\mu(A - A_1) = 0$ tal que

$$\|[P(y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})](t)\| > 1 - \epsilon$$

para todo $t \in A_1$. Para isso, basta tomar o conjunto $A_1 = A \cap N^c$.

Agora, consideremos a função $\Theta : \mathbb{C} \longrightarrow (L_\infty(A_1, \mu|_{A_1}, E), \|\,.\,\|_{A_1})$ definida por

$$\Theta(z) = \pi \circ P(zy_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A}),$$

onde $\pi : (L_\infty(\Omega, \mu, E), \|\,.\,\|_\Omega) \longrightarrow (L_\infty(A_1, \mu|_{A_1}, E), \|\,.\,\|_{A_1})$ é uma aplicação linear contínua dada por $\pi(h) = h|_{A_1}$. É claro que Θ é uma função inteira. De fato, uma vez que $P \in \mathcal{P}({}^kL_\infty(\mu, E); L_\infty(\mu, E))$ e $f\chi_{\Omega-A}$, $y_0\chi_A \in L_\infty(\mu, E)$, temos que a correspondência

$$z \longmapsto P(f\chi_{\Omega-A} + zy_0\chi_A)(z \in \mathbb{C})$$

é um polinômio em $\mathbb{C}$ por [[28], Exercise 2.L]. Pelo fato de π ser uma aplicação linear contínua, temos que $\Theta(z) = \pi \circ P(zy_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})$ é um polinômio, logo uma aplicação holomorfa em $\mathbb{C}$. Dessa maneira, pelo Teorema do Módulo Máximo (Teorema 1.5.5), concluímos que

$$1 - \epsilon < \|P(y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})\|_{A_1} = \|\Theta(1)\|_{A_1} \leq \max_{|z| \leq \|y_0\|^{-1}} \|\Theta(z)\|_{A_1} = \max_{|z| = \|y_0\|^{-1}} \|\Theta(z)\|_{A_1}.$$

Desse modo, podemos encontrar $z_0 \in \mathbb{C}$ com $|z_0| = \|y_0\|^{-1}$ tal que $\|\Theta(z_0)\|_{A_1} = \max_{|z| = \|y_0\|^{-1}} \|\Theta(z)\|$. Então $\|z_0y_0\| = 1$ e

$$1 - \epsilon < \|P(z_0y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})\|_{A_1}.$$

Novamente pela Proposição 1.6.10, podemos encontrar $A_2 \in \Sigma$ com $A_2 \subset A_1$ tal que $0 < \mu(A_2) < \infty$ e

$$1 - \epsilon < \|[P(z_0y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})](t)\|$$

para todo $t \in A_2$. Aplicando o Lema 3.2.1 para $P(z_0y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})$ como um elemento de $(L_\infty(A_2, \mu|_{A_2}, X), \|\,.\,\|_{A_2})$, podemos encontrar $B \in \Sigma$ com $0 < \mu(B) < \infty$ e $B \subset A_2$ tal que

$$1 - \epsilon < \left\| \frac{1}{\mu(B)} \int_B P(z_0y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A}) d\mu \right\|.$$

Fixemos $x_0^* \in S_{E^*}$ com $x_0^*(z_0y_0) = 1$. Defina

$$\phi(x) = x\chi_A + x_0^*(x)f\chi_{\Omega-A} \in L_\infty(\mu, E)(x \in E)$$

e considere o polinômio k-homogêneo $S \in \mathcal{P}({}^kE; E)$ dado por

$$S(x) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B P(\phi(x)) d\mu = \psi \circ (P \circ \phi)(x)(x \in E)$$

onde $\psi : L_\infty(\mu, E) \to \mathbb{C}$ dado por $\psi(f) = \dfrac{1}{\mu(B)} \displaystyle\int_B f d\mu$. É claro que S é um polinômio, pois é composição de um polinômio com uma aplicação linear. E é claro que S é contínuo, pois

$$\|S\| = \sup\{\|S(x)\| : x \in B_E\} \leq \|P\| < \infty.$$

Temos que

$$\|S\| \geq \|S(z_0y_0)\| = \left\| \frac{1}{\mu(B)} \int_B P(\phi(z_0y_0))d\mu \right\| = \left\| \frac{1}{\mu(B)} \int_B P(z_0y_0\chi_A + f\chi_{\Omega-A})d\mu \right\| > 1 - \epsilon.$$

Pela Proposição 2.1.6, visto que $v(S) \geq n^{(k)}(E)\|S\| > n^{(k)}(E)(1-\epsilon)$, existe $x \in S_E$ e $x^* \in S_{E^*}$ tal que

$$x^*(x) = 1 \text{ e } |x^*(S(x))| > n^{(k)}(E)(1-\epsilon).$$

Tome $g = \phi(x) \in S_{L_\infty(\mu,E)}$ e defina o funcional linear $g^* \in S_{L_\infty(\mu,E)^*}$ dado por

$$g^*(h) = x^* \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B h d\mu \right).$$

Como $B \subset A$, temos que

$$g^*(g) = x^* \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B (x\chi_A + x_0^*(x)f\chi_{\Omega-A})d\mu \right) = x^*(x) = 1.$$

Então $(g, g^*) \in \Pi(L_\infty(\mu, E))$ e daí

$$|g^*(P(g))| = |g^*(P(\phi(x)))| = \left| x^* \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B P(\phi(x))d\mu \right) \right| = |x^*(S(x))| \geq n^{(k)}(E)(1-\epsilon).$$

Assim, $v(P) \geq |g^*(P(g))| \geq n^{(k)}(E)(1-\epsilon)$. Fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $v(P) \geq n^{(k)}(E)$ para todo $P \in \mathcal{P}(^k L_\infty(\mu, E); L_\infty(\mu, E))$ com $\|P\| = 1$. Dessa maneira, $n^{(k)}(L_\infty(\mu, E)) \geq n^{(k)}(E)$.

Agora, provemos que $n^{(k)}(E) \geq n^{(k)}(L_\infty(\mu, E))$. Seja $S \in \mathcal{P}(^k E; E)$ com $\|S\| = 1$. Consideremos o polinômio $P \in \mathcal{P}(^k L_\infty(\mu, E); L_\infty(\mu, E))$ dado por

$$[P(f)](t) = S(f(t)) \;\; (t \in \Omega, f \in L_\infty(\mu, E)).$$

Vejamos que P é de fato polinômio. Seja $A \in \mathcal{L}(^k E; E)$ tal que $S = \hat{A}$. Defina $\varphi : L_\infty(\mu, E)^k \to L_\infty(\mu, E)$ por $\varphi(f_1, \ldots, f_k) = A \circ (f_1, \ldots, f_k)$. É fácil ver que φ está bem definida, é k-linear e contínua. Além disso,

$$\varphi(f, \ldots, f)(t) = A \circ (f(t), \ldots, f(t)) = A(f(t), \ldots, f(t)) = S(f(t)) = [P(f)](t) \;\; (t \in \Omega).$$

Portanto, $\varphi(f, \ldots, f) = P(f)$, ou seja, $P \in \mathcal{P}(^k L_\infty(\mu, E); L_\infty(\mu, E))$. Ainda, temos que $\|P\| = 1$ e, segue disso que, $v(P) \geq n^{(k)}(L_\infty(\mu, E))$. Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema 3.2.3, existe $x \in S_E$, $f \in B_{L_\infty(\mu,E)}$, $A \in \Sigma$ com $0 < \mu(A) < \infty$ e $x^* \in S_{E^*}$ com $x^*(x) = 1$ tal que

$$v(P) - \epsilon < \left| x^* \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A P(x\chi_A + f\chi_{\Omega-A})d\mu \right) \right|.$$

Uma vez que $[P(x\chi_A + f\chi_{\Omega-A})](t) = S(x)$ para todo $t \in A$, obtemos que

$$\left| x^* \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A P(x\chi_A + f\chi_{\Omega-A})d\mu \right) \right| = |x^*(S(x))|.$$

Dessa maneira, temos que

$$n^{(k)}(L_\infty(\mu, E)) - \epsilon \leq v(P) - \epsilon < |x^*(S(x))| \leq v(S).$$

Como ϵ é arbitrário, concluímos que $n^{(k)}(L_\infty(\mu, E)) \leq v(S)$ para todo $S \in \mathcal{P}(^kE; E)$ com $\|S\| = 1$. Assim, $n^{(k)}(L_\infty(\mu, E)) \leq n^{(k)}(E)$. ■

Observe que a demonstração da segunda desigualdade no teorema anterior não depende do corpo. Assim, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.5 *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e E um espaço de Banach. Então*

$$n^{(k)}(L_\infty(\mu, E)) \leq n^{(k)}(E)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 3.2.6 *No caso real, a igualdade na proposição anterior não é verdadeira em geral. Veremos que $n^{(2)}(l_\infty) = \frac{1}{2}$, tendo visto que $n^{(2)}(\mathbb{R}) = 1$.*

3.3 Espaços Lush, CL e C-rich

Nas seções anteriores estudamos o índice polinomial numérico de espaços bem conhecidos e alguns até bem clássicos. Nessa seção, vamos fazer esse estudo sobre espaços não tão convencionais. São eles os espaços lush, CL e C-rich. Primeiramente, começaremos com a definição de espaço lush. Em toda seção trabalharemos com espaços de Banach reais.

Definição 3.3.1 *Seja E um espaço de Banach real. Dizemos que E é **lush** se para todo $x, y \in S_E$ e para todo $\epsilon > 0$, existe $x^* \in S_{E^*}$ tal que $y \in S(B_E, x^*, \epsilon)$ e*

$$dist(x, co(S(B_E, x^*, \epsilon) \cup -S(B_E, x^*, \epsilon))) < \epsilon,$$

*onde $S(B_E, x^*, \epsilon) = \{x \in B_E : x^*(x) > 1 - \epsilon\}$ é chamada de **fatia** de B_E.*

Nosso objetivo inicial é conseguir uma estimativa inferior do índice polinomial numérico de ordem k de um espaço lush. E para isso, vamos precisar de três lemas.

Lema 3.3.2 *Sejam $M > 1$ e $k \geq 1$. Então,*

$$\max_{t\in[0,1]} \left[t^k + (1-t)^k + M \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} t^j (1-t)^{k-j} \right] = \frac{2 + M(2^k - 2)}{2^k}.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [[21], Lemma 2.2]. ■

Lema 3.3.3 *Sejam $k \geq 1$, E um espaço de Banach real, $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$ com $\|P\| \leq 1$ e $\epsilon > 0$. Então, para todo $x^* \in S_{E^*}$ e $x \in E$ tal que $x \in S(B_E, x^*, \frac{\epsilon^2}{4})$, temos que*

$$|x^*(P(x))| \leq v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon.$$

Demonstração: Sejam $x^* \in S_{E^*}$ e $x \in S(B_E, x^*, \frac{\epsilon^2}{4})$. Então,

$$x^*(x) > 1 - \tfrac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow -\tfrac{\epsilon^2}{4} < x^*(x) - 1 \leq 0 < \tfrac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow |x^*(x) - 1| < \tfrac{\epsilon^2}{4}.$$

Assim, pelo Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás (Teorema 2.1.19), existe $(y, y^*) \in \Pi(E)$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$ e $\|x^* - y^*\| < \epsilon$. Portanto, denotando $\check{P}$ a aplicação multilinear simétrica associada a P, temos que

$$\begin{aligned}
|x^*(P(x))| &\leq |y^*(P(y))| + |x^*(P(y)) - y^*(P(y))| + |x^*(P(x)) - x^*(P(y))| \\
&\leq v(P) + \epsilon + \|P(x) - P(y)\| \\
&\leq v(P) + \epsilon + \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}(x^{k-j+1}, y^{j-1}) - \check{P}(x^{k-j}, y^j)\| \\
&= v(P) + \epsilon + \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}(x, \ldots, x, \underbrace{x - y}_{\text{(k-j+1)-ésima posição}}, y, \ldots, y)\| \\
&\leq v(P) + \epsilon + \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}\| \|x\|^{k-j} \|x - y\| \|y\|^{j-1} \\
&\leq v(P) + \epsilon + \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}\| \epsilon = v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 3.3.4 *Sejam E, F espaços de Banach, k um inteiro positivo e $A \in \mathcal{L}(^kE; F)$. Para $x_1, \ldots, x_k \in E$, temos que*

$$\begin{aligned}
k!A(x_1, \ldots, x_k) = (-1)^0 \hat{A}(x_1 + \cdots + x_k) &+ (-1)^1 \sum_{\{i_1, \ldots, i_{k-1}\} \subset \{1, \ldots, k\}} \hat{A}(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \\
&+ (-1)^2 \sum_{\{i_1, \ldots, i_{k-2}\} \subset \{1, \ldots, k\}} \hat{A}(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-2}}) \\
&+ \cdots + (-1)^{k-1}(\hat{A}(x_1) + \cdots + \hat{A}(x_k)),
\end{aligned}$$

onde para cada inteiro positivo $j (1 \leq j \leq k)$ os elementos $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, k\}$ são distintos.

Demostração: Veja a demonstração em [[9], Lemma 3.4]. $\blacksquare$

Teorema 3.3.5 *Seja E um espaço de Banach real lush. Então, para $k \geq 1$, temos que*

$$n^{(k)}(E) \geq \frac{2^k}{2 + M_k(2^k - 2)}, \text{ onde } M_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{j^k}{j!(k-j)!}.$$

Demonstração: Sejam $P \in \mathcal{P}(^kE; E)$ com $\|P\| = 1$ e $0 < \epsilon < 1$ fixado. Tomemos $x_0 \in S_E$ tal que $\|P(x_0)\| > 1 - \epsilon$. Como E é Lush e x_0, $\dfrac{P(x_0)}{\|P(x_0)\|} \in S_E$, encontramos $x^* \in S_{E^*}$ com $\dfrac{P(x_0)}{\|P(x_0)\|} \in S(B_E, x^*, \frac{\epsilon^2}{4})$, $\lambda \in [0, 1]$ e $x_1, x_2 \in S(B_E, x^*, \frac{\epsilon^2}{4})$ tais que $\|x_0 - (\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)\| < \dfrac{\epsilon^2}{4}$. A partir disso, temos que

$$
\begin{aligned}
& \|P(x_0) - P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)\| \\
= & \left\| \sum_{j=1}^{k} \check{P}(x_0^{k-j+1}, (\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)^{j-1}) - \check{P}(x_0^{k-j}, (\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)^{j}) \right\| \\
\leq & \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}(x_0^{k-j+1}, (\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)^{j-1}) - \check{P}(x_0^{k-j}, (\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)^{j})\| \\
= & \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}(x_0, \ldots, x_0, \underbrace{x_0 - (\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)}_{\text{j-ésima posição}}, \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2, \ldots, \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)\| \\
\leq & \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}\| \|x_0\|^{k-j} \|x_0 - (\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)\| \|\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2\|^{j} \\
< & \sum_{j=1}^{k} \|\check{P}\| \frac{\epsilon^2}{4} = k\|\check{P}\| \frac{\epsilon^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Como $\dfrac{P(x_0)}{\|P(x_0)\|} \in S(B_E, x^*, \dfrac{\epsilon^2}{4})$, temos que

$$
\left| x^* \left(\frac{P(x_0)}{\|P(x_0)\|} \right) \right| > 1 - \frac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow |x^*(P(x_0))| > \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right) \|P(x_0)\| > \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)(1-\epsilon).
$$

Além disso,

$$
|x^*(P(x_0)) - x^*(P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2))| \leq \|P(x_0) - P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)\| < k\|\check{P}\| \frac{\epsilon^2}{4}.
$$

Segue de tudo isso que

$$
\begin{aligned}
|x^*(P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2))| &= |x^*(P(x_0)) - (x^*(P(x_0)) - x^*(P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2)))| \\
&\geq |x^*(P(x_0))| - |x^*(P(x_0)) - x^*(P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2))| \\
&\geq \left(1 - \tfrac{\epsilon^2}{4}\right)(1-\epsilon) - k\|\check{P}\| \frac{\epsilon^2}{4}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Por outro lado, temos pelo Binômio de Newton para Aplicações Multilineares (Teorema 1.3.7) que

$$
\begin{aligned}
& |x^*(P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2))| \\
= & \left| x^* \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \check{P}((\lambda x_1)^{k-j}, (-(1-\lambda)x_2)^{j}) \right) \right| \\
= & \left| x^* \left(\lambda^k P(x_1) + (1-\lambda)^k P(-x_2) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \check{P}((\lambda x_1)^{k-j}, (-(1-\lambda)x_2)^{j}) \right) \right| \\
\leq & \lambda^k |x^*(P(x_1))| + (1-\lambda)^k |x^*(P(-x_2))| + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \lambda^{k-j}(1-\lambda)^j |x^*(\check{P}(x_1^{k-j}, x_2^{j}))| \\
\leq & (\lambda^k + (1-\lambda)^k)(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \lambda^{k-j}(1-\lambda)^j |x^*(\check{P}(x_1^{k-j}, x_2^{j}))|,
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

onde a última desigualdade decorre do Lema 3.3.3. Nosso próximo passo é estimar $|x^*(\check{P}(x_1^l, x_2^{k-l}))|$ para $l \in \{1, \dots, k-1\}$. Para fazer isso, escrevemos $B = \{1, \dots, k\}$, $y_i = x_1$ para $i \in \{1, \dots, l\}$ e $y_i = x_2$ para $i \in \{l+1, \dots, k\}$, e daí, pelo Lema 3.3.4, temos

$$
\begin{aligned}
& k!|x^*(\check{P}(x_1^l, x_2^{k-l}))| \\
& = |x^*(k!\check{P}(x_1^l, x_2^{k-l}))| \\
& \leq |x^*(P(lx_1 + (k-l)x_2))| + \sum_{\{i_1,\dots,i_{k-1}\}\subset B} |x^*(P(y_{i_1} + \cdots + y_{i_{k-1}}))| \\
& + \sum_{\{i_1,\dots,i_{k-2}\}\subset B} |x^*(P(y_{i_1} + \cdots + y_{i_{k-1}}))| + \cdots + l|x^*(P(x_1))| + (k-l)|x^*(P(x_2))| \\
& \leq\ k^k \left|x^*\left(P\left(\tfrac{lx_1+(k-l)x_2}{k}\right)\right)\right| + (k-1)^k \sum_{\{i_1,\dots,i_{k-1}\}\subset B} \left|x^*\left(P\left(\frac{y_{i_1} + \cdots + y_{i_{k-1}}}{k-1}\right)\right)\right| \\
& +(k-2)^k \sum_{\{i_1,\dots,i_{k-2}\}\subset B} \left|x^*\left(P\left(\frac{y_{i_1} + \cdots + y_{i_{k-2}}}{k-2}\right)\right)\right| \\
& + \cdots + l|x^*(P(x_1))| + (k-l)|x^*(P(x_2))|.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Como $x_1, x_2 \in S(B_E, x^*, \frac{\epsilon^2}{4})$, então $\mu x_1 + (1-\mu)x_2 \in S(B_E, x^*, \frac{\epsilon^2}{4})$ para todo $\mu \in [0,1]$. Portanto, retomando a expressão (3.3) e usando o Lema 3.3.3, temos que

$$
\begin{aligned}
k!|x^*(\check{P}(x_1^l, x_2^{k-l}))| & \leq k^k(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon) + (k-1)^k \binom{k}{k-1}(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon) \\
& +(k-2)^k \binom{k}{k-2}(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon) + \cdots + k(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon) \\
& = \sum_{j=1}^{k} j^k \left(\frac{k!}{j!(k-j)!}\right)(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon).
\end{aligned}
$$

A partir disso, deduzimos que

$$
|x^*(\check{P}(x_1^l, x_2^{k-l}))| \leq \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{j^k}{j!(k-j)!}\right)(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon) = M_k(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon).
$$

Daí, retomando a expressão (3.2), temos que

$$
\begin{aligned}
& |x^*(P(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2))| \\
& \leq (\lambda^k + (1-\lambda)^k)(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon) + M_k(v(P) + \epsilon + k\|\hat{P}\|\epsilon)\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\lambda^l(1-\lambda)^{k-l} \\
& = \left(\lambda^k + (1-\lambda)^k + M_k\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\lambda^l(1-\lambda)^{k-l}\right)(v(P) + \epsilon + k\|\hat{P}\|\epsilon),
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

e pelo Lema 3.3.2,

$$
|x^*(P(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2))| \leq \frac{2 + M_k(2^k - 2)}{2^k}(v(P) + \epsilon + k\|\check{P}\|\epsilon).
$$

Finalmente, observando as expressões (3.1) e (3.4), obtemos

$$\left(1-\frac{\epsilon^2}{4}\right)(1-\epsilon)-k\|\check{P}\|\frac{\epsilon^2}{4}\leq\frac{2+M_k(2^k-2)}{2^k}(v(P)+\epsilon+k\|\check{P}\|\epsilon),$$

e fazendo $\epsilon\to 0$, temos que

$$1\leq\frac{2+M_k(2^k-2)}{2^k}v(P)\Rightarrow\frac{2^k}{2+M_k(2^k-2)}\leq v(P)$$

para todo $P\in\mathcal{P}(^kE;E)$ com $\|P\|=1$. Portanto,

$$n^{(k)}(E)\geq\frac{2^k}{2+M_k(2^k-2)}.$$

■

Nosso próximo objetivo é fazer a estimativa do índice polinomial numérico de ordem k de um espaço C-rich e um espaço CL. Para tal fim, são necessários conceitos de Análise Convexa.

Definição 3.3.6 *Sejam E um espaço vetorial e $\mathbb{T}=\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|\leq 1\}$. Um subconjunto $D\subset E$ é **equilibrado** se $\lambda x\in D$ para todo $\lambda\in\mathbb{T}$ e para todo $x\in D$, isto é, $\mathbb{T}.D\subset D$.*

Definição 3.3.7 *Um subconjunto D de um espaço vetorial E é dito **absolutamente convexo** se é convexo e equilibrado.*

Definição 3.3.8 *Sejam E um espaço vetorial e A um subconjunto de E. A **envoltória absolutamente convexa de A** é o menor conjunto absolutamente convexo que contém A. Denotamos a envoltória absolutamente convexa de A por $\Gamma(A)$.*

Observação 3.3.9 *É possível mostrar que a envoltória absolutamente convexa de A é $co(\mathbb{T}A)$, onde $\mathbb{T}=\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|=1\}$.*

Definição 3.3.10 *Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que um conjunto $A\subset S_E$ é um **subconjunto convexo maximal de** S_E se A não está propriamente contido em qualquer outro subconjunto convexo de S_E.*

Introduzido esses conceitos, vamos definir o que são espaços CL e espaços C-rich.

Definição 3.3.11 *Seja E um espaço de Banach. Dizemos que E é um **espaço CL** se B_E é a envoltória absolutamente convexa de todo subconjunto convexo maximal de S_E.*

São exemplos de espaços CL reais o espaço $L_1(\mu)$ para uma medida arbitrária μ e seus preduais isométricos, em particular $C(K)$, onde K é um espaço Hausdorff compacto.

Definição 3.3.12 *Seja K um espaço Hausdorff compacto. Dizemos que um subespaço fechado E de $C(K)$ é **C-rich** se para todo subconjunto aberto não vazio U de K e para todo $\epsilon>0$, existe uma função positiva contínua h de norma 1 com suporte em U, isto é, $h(t)\neq 0$ para todo $t\in U$ e $h(t)=0$ para todo $t\notin U$, e a distância entre h e E é menor que ϵ.*

São exemplos de subespaços C-rich os subespaços de codimensão finita de $C(K)$ com K perfeito.

Para fazer uma estimativa do índice polinomial numérico de ordem k para os espaços C-rich e CL, mostremos que ambos são lush. A prova de que espaços C-rich são lush foi retirada de [[6], Theorem 2.4] e a prova de que espaços CL são lush foi inspirada em [18].

Teorema 3.3.13 *Sejam K um espaço Hausdorff compacto e E um subespaço fechado C-rich do espaço real $C(K)$. Então E é um espaço Lush.*

Demonstração: Fixemos $f, g \in S_E$ e $\epsilon > 0$. Existe $t_0 \in K$ tal que $|g(t_0)| = 1$. Pela continuidade de f e g, podemos encontrar um subconjunto aberto U de K com $t_0 \in U$ tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \frac{\epsilon}{4} \text{ e } |g(t) - g(t_0)| < \frac{\epsilon}{4}$$

para todo $t \in U$. Assim, pelo fato de E ser C-rich, existe uma função contínua $h : K \to [0,1]$ de norma 1 com suporte em U e a distância de h até E é menor que $\frac{\epsilon}{8}$. Afirmamos que existe uma função $\tilde{h} \in S_E$ com $\|h - \tilde{h}\| < \frac{\epsilon}{4}$. De fato, considere $\hat{h} \in E$, $\hat{h} \neq 0$ tal que $\|h - \hat{h}\| < \frac{\epsilon}{8}$. Então

$$\|\hat{h}\| - \|h\| < \frac{\epsilon}{8} \Rightarrow \|\hat{h}\| < 1 + \frac{\epsilon}{8}.$$

Tome $\tilde{h} = \dfrac{\hat{h}}{\|\hat{h}\|} \in S_E$. Daí,

$$\begin{aligned} \|h - \tilde{h}\| = \left\| h - \frac{\hat{h}}{\|\hat{h}\|} \right\| &= \left\| h - \hat{h} + \hat{h} - \frac{\hat{h}}{\|\hat{h}\|} \right\| \\ &\leq \|h - \hat{h}\| + |\|\hat{h}\| - 1| \\ &< \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Como $\|h\| = 1$, existe $t_1 \in U$ tal que $h(t_1) = 1$. Daí, podemos dizer que

$$g(t_0)g(t_1) \geq 1 - |g(t_1) - g(t_0)| > 1 - \frac{\epsilon}{4}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (1 - g(t_0)g(t_1))^2 &= 1 - 2g(t_0)g(t_1) + g(t_0)^2 g(t_1)^2 \\ &= g(t_0)^2 - 2g(t_0)g(t_1) + g(t_1)^2 \\ &= (g(t_1) - g(t_0))^2, \end{aligned}$$

o que implica

$$1 - g(t_0)g(t_1) = |g(t_1) - g(t_0)| \Rightarrow g(t_0)g(t_1) = 1 - |g(t_1) - g(t_0)| > 1 - \frac{\epsilon}{4}.$$

Afirmamos que para todo $\gamma \in S\left(\dfrac{-f(t_0)}{g(t_0)}, 1\right)$, temos que

$$|f(t_0) + \gamma g(t_0)| = 1 \text{ e } \|f + \gamma g(t_0)h\| < 1 + \frac{\epsilon}{4}.$$

De fato, seja $\gamma \in S\left(\dfrac{-f(t_0)}{g(t_0)}, 1\right)$. Temos que

$$|f(t_0) + \gamma g(t_0)| = \left|\gamma - \left(\frac{-f(t_0)}{g(t_0)}\right)\right| = 1.$$

Se $t \notin U$, então $|f(t) + \gamma g(t_0)h(t)| = |f(t)| \leq 1$. Se $t \in U$, então

$$\begin{aligned} |f(t) + \gamma g(t_0)h(t)| &\leq |f(t) - f(t_0)| + |f(t_0) + \gamma g(t_0)h(t)| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + |f(t_0) + \gamma g(t_0)h(t)|. \end{aligned}$$

Como $h(t) \in [0,1]$, podemos escrever $f(t_0)+\gamma g(t_0)h(t)$ como uma combinação convexa de $f(t_0)$ e $f(t_0) + \gamma g(t_0)$. Daí, temos que

$$|f(t_0) + \gamma g(t_0)h(t)| = |(f(t_0) + \gamma g(t_0))h(t) + (1 - h(t))f(t_0)| \leq 1.$$

Agora, como $0 \in co\left(S\left(\frac{-f(t_0)}{g(t_0)}, 1\right)\right)$, existem $\gamma_1, \gamma_2 \in S\left(\frac{-f(t_0)}{g(t_0)}, 1\right)$ tais que $0 = \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2$. Consideremos

$$x^* = \frac{g(t_0)\delta_{t_1}|_E}{\|\delta_{t_1}|_E\|} \in S_{E^*} \quad \text{e} \quad f_i = \frac{f + \gamma_i g(t_0)\tilde{h}}{1+\epsilon} \in E (i = 1, 2).$$

Observe que $f_1, f_2 \in B_E$, pois

$$\begin{aligned} \|f_i\| = \left\|\frac{f + \gamma_i g(t_0)\tilde{h}}{1+\epsilon}\right\| &= \frac{1}{1+\epsilon}\|f + \gamma_i g(t_0)h - \gamma_i g(t_0)h + \gamma_i g(t_0)\tilde{h}\| \\ &\leq \frac{1}{1+\epsilon}(\|f + \gamma_i g(t_0)h\| + |\gamma_i g(t_0)|\|h - \tilde{h}\|) \\ &< \frac{1}{1+\epsilon}\left(1 + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2}\right) < 1. \end{aligned}$$

Finalmente, temos que $g \in S(B_E, x^*, 2\epsilon)$, pois $g \in B_E$ e

$$x^*(g) = \frac{g(t_0)g(t_1)}{\|\delta_{t_1}|_E\|} > 1 - \frac{\epsilon}{4}.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \|f - (\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)\| &= \left\|f - \left(\lambda\left(\frac{f + \gamma_1 g(t_0)\tilde{h}}{1+\epsilon}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{f + \gamma_2 g(t_0)\tilde{h}}{1+\epsilon}\right)\right)\right\| \\ &= \left\|f - \left(\frac{\lambda f + (1-\lambda)f + g(t_0)\tilde{h}(\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2)}{1+\epsilon}\right)\right\| \\ &= \left\|f - \left(\frac{f}{1+\epsilon}\right)\right\| = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \epsilon. \end{aligned}$$

E para $i = 1, 2$, temos que

$$\begin{aligned} (1+\epsilon)|x^*(f_i)| &= (1+\epsilon)\left|\frac{g(t_0)(f(t_1) + \gamma_i g(t_0)\tilde{h}(t_1))}{(1+\epsilon)\|\delta_{t_1}|_E\|}\right| \\ &\geq |f(t_1) + \gamma_i g(t_0)\tilde{h}(t_1)| \\ &= |f(t_1) + \gamma_i g(t_0)h(t_1) - \gamma_i g(t_0)h(t_1) + \gamma_i g(t_0)\tilde{h}(t_1)| \\ &\geq |f(t_1) + \gamma_i g(t_0)| - |\gamma_i||h(t_1) - \tilde{h}(t_1)| \\ &\geq |f(t_1) + \gamma_i g(t_0)| - 2\|h - \tilde{h}\| \\ &\geq |f(t_0) + \gamma_i g(t_0)| - |f(t_1) - f(t_0)| - 2\|h - \tilde{h}\| \\ &> 1 - \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{2} > 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Segue disso que $|x^*(f_i)| > \dfrac{1-\epsilon}{1+\epsilon} > 1-2\epsilon$. Assim, concluímos que $f_1, f_2 \in S(B_E, x^*, 2\epsilon) \cup -S(B_E, x^*, 2\epsilon)$. Dessa forma, temos que

$$dist(f, co(S(B_E, x^*, 2\epsilon) \cup -S(B_E, x^*, 2\epsilon))) \leq \|f - (\lambda f_1 - (1+\lambda f_2))\| < \epsilon.$$

Dessa maneira, concluímos que E é lush. ■

Para mostrarmos que um espaço CL é lush, vamos precisar de um lema.

Lema 3.3.14 *Sejam E um espaço normado e $y \in S_E$. Então existe um subconjunto convexo maximal M de S_E com $y \in M$.*

Demonstração: Seja $\Lambda = \{F \subset S_E : F$ é um conjunto convexo contendo $y\}$. Sobre Λ consideremos a relação de ordem parcial de inclusão de conjuntos. Seja $\mathcal{B}$ uma cadeia de Λ. Seja $B = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$. É claro que B é um conjunto convexo contendo y contido em S_E, e assim temos que $B \in \Lambda$. Além disso, dado qualquer $A \in \mathcal{B}$, temos que $A \subset B$. Dessa maneira, concluímos que $\mathcal{B}$ tem cota superior. Logo, pelo Lema de Zorn, Λ tem um elemento maximal, digamos M. Temos que $\{y\}$ é um conjunto convexo de S_E. Segue daí que $\{y\} \subset M$. Assim, concluímos que M é um subconjunto convexo maximal de S_E e $y \in M$. ■

Teorema 3.3.15 *Seja E um espaço CL real. Então E é lush.*

Demonstração: Sejam $x, y \in S_E$ e $\epsilon > 0$. Como $y \in S_E$, existe um conjunto convexo maximal M de S_E tal que $y \in M$. Segundo [[24], Section 2], podemos escrever $M = \{x \in B_E : x^*(x) = 1\}$ para algum $x^* \in ext(B_{E^*}) \subset S_{E^*}$, onde $ext(B_{E^*})$ é o conjunto dos pontos extremos de B_{E^*}. Tomemos a fatia $S = S(B_E, x^*, \epsilon)$. É claro que $M \subset S$, pois $x^*(x) > 1-\epsilon$ para todo $x \in M$. Como E é um espaço CL, temos que

$$B_E = \Gamma(M) \subset \Gamma(S) = co(\mathbb{T}S) = co(S \cup -S) \subset B_E.$$

Logo, concluímos que $dist(x, \Gamma(S)) < \epsilon$. Portanto, E é lush. ■

Corolário 3.3.16 *Seja E um espaço CL real ou um subespaço real C-rich de $C(K)$, onde K é um espaço Hausdorff compacto. Então, para $k \geq 1$, temos que*

$$n^{(k)}(E) \geq \frac{2^k}{2 + M_k(2^k - 2)}, \text{ onde } M_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{j^k}{j!(k-j)!}.$$

Em particular, isso aplica-se ao espaço $L_1(\mu)$ e seus preduais isométricos, em particular para $C(K)$, e para subespaços de codimensão finita de $C(K)$ quando K é perfeito.

Demonstração: Decorre diretamente dos Teoremas 3.3.13 e 3.3.15 juntamente com o Teorema 3.3.5. ■

Exemplo 3.3.17 *Vimos no Corolário 2.1.22 que $n^{(k)}(E^{**}) \leq n^{(k)}(E)$ para todo espaço de Banach E e $k \in \mathbb{N}$. Vejamos a seguir que existe um espaço de Banach real E tal que $n^{(k)}(E) > 0$ e $n^{(k)}(E^{**}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Dado um espaço de Banach separável E, sabemos por [[25], Theorem 3.3], que existe um subespaço C-rich $X(E)$ de $C[0,1]$ tal que E^* é um L-somando de $X(E)^*$. Consideremos o espaço real $E = l_2$. Por um lado, como $X(l_2)$ é um subespaço C-rich de $C[0,1]$, o Corolário 3.3.16 nos dá que $n^{(k)}(X(l_2)) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $X(l_2)^* = l_2^* \oplus_1 V$, temos que $X(l_2)^{**} = l_2^{**} \oplus_\infty V^*$. Como $l_2^{**} \cong l_2$, segue $X(l_2)^{**} = l_2 \oplus_\infty V^*$, e assim concluímos

$$n^{(k)}(X(l_2)^{**}) \leq n^{(k)}(l_2) \leq n^{(1)}(l_2) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

3.4 Espaços de Sequências

Nesta seção, vamos desenvolver resultados sobre o índice polinomial numérico de ordem k dos espaços c, c_0, l_1, l_∞, l_∞^m e l_1^m $(m \geq 2)$.

Teorema 3.4.1 *Suponha que E denote os espaços complexos c_0, c e l_∞. Então para cada k inteiro positivo, temos que $n^{(k)}(E) = 1$.*

Demonstração: Sejam $P \in \mathcal{P}(^k c_0; c_0)$ e $\epsilon > 0$ dados. Para cada inteiro positivo j, seja $P_j(x) = e_j^* \circ P(x)$, onde $e_j^* : c_0 \to \mathbb{C}$ é a projeção na j-ésima coordenada. É claro que $P_j \in \mathcal{P}(^k c_0)$. Além disso, existe $x' \in S_{c_0}$ e um inteiro positivo j_0 tal que $\|P\| - \epsilon < |P_{j_0}(x')|$. Mostremos a seguir que podemos escolher $y \in S_{c_0}$ tal que $|e_{j_0}^*(y)| = 1$ e $\|P\| - \epsilon < |P_{j_0}(y)|$. De fato, escreva $x(j) = e_j^*(x)$ para cada $x \in c_0$ e para cada j inteiro positivo. Definamos $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$p(\lambda) = P_{j_0}(x' - x'(j_0)e_{j_0} + \lambda e_{j_0}).$$

Então p é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$. Assim, é claro que p é contínua em $\mathbb{C}$ e holomorfa em $B(0,1)$. Então, pelo Teorema do Módulo Máximo (Teorema 1.5.5), existe um número complexo ξ, $|\xi| = 1$ tal que $|p(x'(j_0))| \leq |p(\xi)|$. Seja $y = x' - x'(j_0)e_{j_0} + \xi e_{j_0}$. Então $y \in S_{c_0}$ e $|e_{j_0}^*(y)| = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|P\| - \epsilon < |P_{j_0}(x')| &= |P_{j_0}(x' - x'(j_0)e_{j_0} + x'(j_0)e_{j_0})| \\ &= |p(x'(j_0))| \\ &\leq |p(\xi)| \\ &= |P_{j_0}(x' - x'(j_0)e_{j_0} + \xi e_{j_0})| = |P_{j_0}(y)|. \end{aligned}$$

Agora, defina $x^* \in c_0^*$ por $x^* = sgn(y(j_0))e_{j_0}^*$. Observe que

$$\left\| \frac{1}{y(j_0)sgn(y(j_0))} y \right\| = \frac{1}{|y(j_0)||sgn(y(j_0))|} \|y\| = 1,$$

$$x^* \left(\frac{1}{y(j_0)sgn(y(j_0))} y \right) = sgn(y(j_0))e_{j_0}^* \left(\frac{1}{y(j_0)sgn(y(j_0))} y \right) = 1$$

e $\|x^*\| = 1$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} v(P) \geq \left| x^* \left(P \left(\frac{1}{y(j_0)sgn(y(j_0))} y \right) \right) \right| &= \left| \frac{1}{y(j_0)^k sgn(y(j_0))^k} \right| |x^*(P(y))| \\ &= |x^*(P(y))| = |e_{j_0}^*(P(y))| = |P_{j_0}(y)| > \|P\| - \epsilon. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $\|P\| \leq v(P) \leq \|P\|$. Daí, $v(P) = \|P\|$. Portanto, $n^{(k)}(c_0) = 1$. Os casos c e l_∞ são análogos. ■

A seguir faremos estimativas do índice polinomial numérico de ordem k para os espaços reais l_1^m, $l_\infty^m (m \geq 2)$, c_0, l_1 e l_∞ fazendo o uso do Corolário 2.2.7 e do Corolário 3.3.16. Antes disso, precisamos de dois lemas.

Lema 3.4.2 *l_1^2 é isometricamente isomorfo a l_∞^2.*

Demonstração: Defina $T : l_\infty^2 \to l_1^2$ dado por $T(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$. É claro que T é linear. Além disso, T é contínua, pois $dim(l_1^2) = 2$. Verifiquemos a bijetividade de T. Para isto, basta mostrar a injetividade. Observe que,

$$\begin{aligned} Ker(T) = \{(x, y) \in l_\infty^2 : T(x, y) = (0, 0)\} &= \left\{(x, y) \in l_\infty^2 : \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) = (0, 0)\right\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Dessa maneira T é injetora, logo, bijetora. Por fim, verifiquemos que T é isometria. Seja $(x, y) \in l_\infty^2$. Temos que

$$\|T(x, y)\|_1 = \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right|.$$

Vamos mostrar que $\max\{|x|, |y|\} = \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right|$. Se $|x| = |y|$, então o problema está resolvido. Se $|x| > 0$ e $|y| = 0$, temos que $\max\{|x|, |y|\} = |x|$ e

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{x}{2}\right| = |x|.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $|x| > |y| > 0$. Então, $\max\{|x|, |y|\} = |x|$. Vamos analisar isso em três casos.

1ºCaso: Suponha que $x > y > 0$. Temos que $x - y > 0$ e $x + y > 0$. Segue daí que

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x = |x|.$$

2º Caso: Suponha que $x > 0 > y > -x$. Temos que $x + y > 0$ e $x - y > 0$. Segue daí que,

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x = |x|.$$

3º Caso: Suponha que $0 > y > x$. Temos que $x - y < 0$ e $x + y < 0$. Segue daí que,

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| = \frac{-x-y}{2} + \frac{-x+y}{2} = -x = |x|.$$

Logo, concluímos que

$$\|T(x, y)\|_1 = \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| = \max\{|x|, |y|\} = \|(x, y)\|_\infty.$$

Portanto, T é um isomorfismo isométrico. ■

Lema 3.4.3 $(l_\infty^2)^*$ *é isometricamente isomorfo a* l_1^2.

Demonstração: Defina $\Phi : l_1^2 \to (l_\infty^2)^*$ dado por $\Phi(b_1, b_2) = \varphi_{(b_1,b_2)}$, onde $\varphi_{(b_1,b_2)} : l_\infty^2 \to \mathbb{R}$ é dado por $\varphi_{(b_1,b_2)}(a_1, a_2) = a_1b_1 + a_2b_2$. Mostremos que Φ é um isomorfismo isométrico. É fácil ver que Φ está bem definida. Mostremos a linearidade de Φ. Sejam $(b_1, b_2), (c_1, c_2) \in l_1^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\varphi_{(b_1+\lambda c_1,\, b_2+\lambda c_2)}(a_1, a_2) = (\varphi_{(b_1,b_2)} + \lambda\varphi_{(c_1,c_2)})(a_1, a_2),\ \forall\, (a_1, a_2) \in l_\infty^2.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
\Phi((b_1, b_2) + \lambda(c_1, c_2)) = \Phi((b_1 + \lambda c_1,\, b_2 + \lambda c_2)) &= \varphi_{(b_1+\lambda c_1,\, b_2+\lambda c_2)} \\
&= \varphi_{(b_1,b_2)} + \lambda\varphi_{(c_1,c_2)} \\
&= \Phi(b_1, b_2) + \lambda\Phi(c_1, c_2),
\end{aligned}$$

para todo $(b_1, b_2), (c_1, c_2) \in l_1^2$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Agora, verifiquemos a bijetividade de Φ. Seja $(b_1, b_2) \in l_1^2$ tal que $\Phi(b_1, b_2) = 0$. Daí,

$$\Phi(b_1, b_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{(b_1,b_2)} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0,\ \forall\, (a_1, a_2) \in l_\infty^2.$$

Assim, tomando os pontos $(1, 0), (0, 1) \in l_\infty^2$, concluímos que $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$. Dessa maneira, $Ker(\Phi) = \{(0, 0)\}$ e Φ é injetora. Como $\dim(l_\infty^2) = 2$, temos que $\dim(l_\infty^2)^* = 2$, cuja base é $\{f_1, f_2\}$ onde

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

para $i, j = 1, 2$. Portanto, Φ é sobrejetora. Agora, vejamos a continuidade de Φ. Seja $(b_1, b_2) \in l_1^2$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(b_1, b_2)\| = \|\varphi_{(b_1,b_2)}\| &= \sup\{|\varphi_{(b_1,b_2)}(a_1, a_2)| \,:\, \|(a_1, a_2)\|_\infty \leq 1\} \\
&= \sup\{|a_1b_1 + a_2b_2| \,:\, \|(a_1, a_2)\|_\infty \leq 1\} \\
&\leq \sup\{|a_1||b_1| + |a_2||b_2| \,:\, \|(a_1, a_2)\|_\infty \leq 1\} \\
&= |b_1| + |b_2| = \|(b_1, b_2)\|_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\Phi(b_1, b_2)\| \leq \|(b_1, b_2)\|_1$ para todo $(b_1, b_2) \in l_1^2$, ou seja, Φ é contínua.

Por fim, vamos verificar que Φ é isometria. Separaremos em três casos.

1º Caso: Se $b_1 = b_2 = 0$, então $\|\Phi(b_1, b_2)\| = 0 = \|(b_1, b_2)\|_1$.

2º Caso: Se $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(b_1, b_2)\| &= \sup\{|a_1b_1 + a_2b_2| \,:\, \max\{|a_1|, |a_2|\} \leq 1\} \\
&= \sup\{|a_1b_1| \,:\, \max\{|a_1|, |a_2|\} \leq 1\} \\
&= |b_1| = \|(b_1, b_2)\|_1.
\end{aligned}$$

3º Caso Se $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, tome $\left(\dfrac{|b_1|}{b_1}, \dfrac{|b_2|}{b_2}\right) \in S_{l_\infty^2}$. Temos que

$$\left|\varphi_{(b_1,b_2)}\left(\frac{|b_1|}{b_1},\frac{|b_2|}{b_2}\right)\right| = |b_1|+|b_2| = \|(b_1,b_2)\|_1.$$

Daí, temos que $\|(b_1,b_2)\|_1 \leq \|\varphi_{(b_1,b_2)}\| = \|\Phi(b_1,b_2)\| \leq \|(b_1,b_2)\|_1$.

Portanto, Φ é uma isometria. Desse modo, concluímos que Φ é um isomorfismo isométrico. ■

Teorema 3.4.4 *Suponha que E denote os espaços reais l_∞^m, $l_1^m (m \geq 2)$, c_0, l_1 e l_∞. Então,*

$$n^{(2)}(E) = \frac{1}{2} \quad e \quad \frac{2^k}{2+M_k(2^k-2)} \leq n^{(k)}(E) \leq \frac{2}{k}\left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{k-2}{2}} (k \geq 3).$$

Demonstração: Primeiramente, vamos fazer algumas breves observações. Considerando os espaços de medida $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_c)$ e $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mu_c)$, onde $\Omega = \{1,\dots,m\}$ e μ_c é a medida de contagem, temos que $c_0^* = l_1 = L_1(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_c)$, $l_1^m = (\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mu_c)$ e $l_\infty^m = C(\Omega)$. Temos ainda que $l_\infty = C(K)$, onde K é a compatificação de Stone-Cech de $\mathbb{N}$. Assim, segue do Corolário 3.3.16 que

$$\frac{2^k}{2+M_k(2^k-2)} \leq n^{(k)}(E) \ (k \geq 2).$$

Quando $k = 2$, temos que $M_2 = 3$, e assim, temos que

$$n^{(2)}(E) \geq \frac{2^2}{2+M_2(2^2-2)} = \frac{1}{2}.$$

Para provar a desigualdade inversa, observemos que $l_1^2 \cong l_\infty^2$ é ou um L-somando ou um M-somando de E, pois $c_0 = l_\infty^2 \oplus_{c_0} X$, $l_\infty = l_\infty^2 \oplus_\infty Z$, $l_1 = l_1^2 \oplus_1 V$, $l_1^m = l_1^2 \oplus_1 W$ e $l_\infty^m = l_\infty^2 \oplus_\infty Y$, onde

$$X = \left[\bigoplus_{n=3}^{\infty}\mathbb{R}\right]_{c_0}, \ Z = \left[\bigoplus_{n=3}^{\infty}\mathbb{R}\right]_{l_\infty}, \ V = \left[\bigoplus_{n=3}^{\infty}\mathbb{R}\right]_{l_1}, \ W = \left[\bigoplus_{n=3}^{m}\mathbb{R}\right]_{l_1} \text{ e } Y = \left[\bigoplus_{n=3}^{m}\mathbb{R}\right]_{l_\infty}.$$

Então,

$$n^{(k)}(E) \leq n^{(k)}(l_1^2) = n^{(k)}(l_\infty^2)$$

pelo Corolário 2.2.7.

Para o caso $k = 2$, basta considerar o polinômio $P \in \mathcal{P}(^2 l_1^2; l_1^2)$ dado por $P(x,y) = \left(\frac{x^2}{2}+2xy, -\frac{y^2}{2}-xy\right)$ $((x,y) \in l_1^2)$ que satisfaz $\|P\| = 1$ e $v(P) \leq \frac{1}{2}$, como vimos na Observação 2.2.8. Daí,

$$n^{(2)}(E) \leq n^{(2)}(l_1^2) \leq \frac{1}{2}.$$

Para o caso $k \geq 3$, consideremos o polinômio $P \in \mathcal{P}(^k l_\infty^2; l_\infty^2)$ dado por $P(x,y) = (x^2y^{k-2} - y^k, 0)$ $((x,y) \in l_\infty^2)$. Mostremos que $\|P\| = 1$. Dado $(x,y) \in l_\infty^2$ com $\max\{|x|,|y|\} \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\|P(x,y)\| = \|(x^2y^{k-2}-y^k,0)\| &= \max\{|x^2y^{k-2}-y^k|,0\} \\
&= |x^2y^{k-2}-y^k| = |y^{k-2}(x^2-y^2)| \\
&= |y^{k-2}||x^2-y^2| \leq |x^2-y^2| \leq 1.
\end{aligned}$$

Logo, $\|P\| \leq 1$. Tomando o ponto $(0,1) \in l_\infty^2$, temos que $\|P(0,1)\| = \|(-1,0)\| = 1$. Concluímos assim que $\|P\| = 1$. Por outro lado, usando a definição de raio numérico e o fato de P ser k-homogêneo, temos que

$$v(P) = \sup\{|y^{k-2} - y^k| \,:\, |y| < 1\} = \frac{2}{k}\left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{k-2}{k}}.$$

De fato, por definição, temos que

$$v(P) = \sup\{|z^*(P(z))| \,:\, (z, z^*) \in \Pi(l_\infty^2)\}.$$

Seja $(z, z^*) \in \Pi(l_\infty^2)$. Logo, $z = (x, y) \in S_{l_\infty^2}$, $z^* \in S_{(l_\infty^2)^*}$ e $z^*(z) = 1$. Como $(l_\infty^2)^*$ é isometricamente isomorfo a l_1^2 (Lema 3.4.3), existe $(\alpha, \beta) \in l_1^2$ tal que $z^* = \varphi(\alpha, \beta)$ e $\|(\alpha, \beta)\|_1 = \|z^*\| = 1$, isto é, $|\alpha| + |\beta| = 1$. Assim, $\max\{|x|, |y|\} = 1$ e $z^*(z) = \varphi(\alpha, \beta)(x, y) = \alpha x + \beta y = 1$. Sabendo disso, vamos analisar $|z^*(P(z))|$ separando em três casos.

1º Caso: Suponha que $|x| = 1$ e $|y| = 1$. Temos que

$$P(z) = P(x, y) = (x^2 y^{k-2} - y^k, 0) = (y^{k-2}(x^2 - y^2), 0) = (0, 0),$$

e daí, $|z^*(P(z))| = 0$.

2º Caso: Suponha que $|x| = 1$ e $|y| < 1$. Veja que

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| = 1 = |z^*(z)| = |\alpha x + \beta y| \leq |\alpha| + |\beta||y| \quad &\Rightarrow \quad |\alpha| + |\beta| \leq |\alpha| + |\beta||y| \\ &\Rightarrow \quad |\beta|(1 - |y|) \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad |\beta|(1 - |y|) = 0 \\ &\Rightarrow \quad |\beta| = 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha x + \beta y = 1$, temos que $\alpha x = 1$, e assim concluímos que $|\alpha| = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} |z^*(P(z))| = |\varphi(\alpha, 0)P(x, y)| = |\varphi(\alpha, 0)(x^2 y^{k-2} - y^k, 0)| &= |\alpha(x^2 y^{k-2} - y^k)| \\ &= |y^{k-2} - y^k|. \end{aligned}$$

3º Caso Suponha que $|x| < 1$ e $|y| = 1$. Veja que

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| = 1 = |z^*(z)| = |\alpha x + \beta y| \leq |\alpha||x| + |\beta| \quad &\Rightarrow \quad |\alpha| + |\beta| \leq |\alpha||x| + |\beta| \\ &\Rightarrow \quad |\alpha|(1 - |x|) \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad |\alpha|(1 - |x|) = 0 \\ &\Rightarrow \quad |\alpha| = 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha x + \beta y = 1$, temos que $\beta y = 1$, e assim concluímos que $|\beta| = 1$. Dessa maneira,

$$|z^*(P(z))| = |\varphi(0, \beta)P(x, y)| = |\varphi(0, \beta)(x^2 y^{k-2} - y^k, 0)| = 0.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} v(P) &= \sup\{|z^* P(z)| : z \in S_{l_\infty^2},\ z^* \in S_{(l_\infty^2)^*} \text{ e } z^*(z) = 1\} \\ &= \sup\{|y^{k-2} - y^k| \,:\, |y| < 1\} \\ &= \sup\{y^{k-2} - y^k \,:\, |y| < 1\}. \end{aligned}$$

Consideremos a função $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = y^{k-2} - y^k$. Temos que o ponto máximo de g é $\left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
v(P) = \sup\{|y^{k-2} - y^k| \,:\, |y| < 1\} &= \left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{k-2}{2}} - \left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{k}{2}} \\
&= \frac{2}{k}\left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{k-2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
n^{(k)}(E) \leq n^{(k)}(l_\infty^2) \leq \frac{2}{k}\left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{k-2}{2}} \text{ para } k \geq 3.
$$

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] G. Avila. *Variáveis Complexas e Aplicações.* 3ª Edição, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] R. G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: J. Wiley & Sons, 1995. https://doi.org/10.1002/9781118164471

[3] F. F. Bonsall e J. Duncan. *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras* London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 2, Cambridge, 1971. https://doi.org/10.1017/CBO9781107359895

[4] F.F. Bonsall e J. Duncan. *Numerical Ranges II.* London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **10**, Cambridge, 1973. https://doi.org/10.1017/CBO9780511662515

[5] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[6] K. Boyko, V. Kadets, M. Martín e D. Werner. *Numerical index of Banach spaces and duality* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **142** (2007), 93-102. https://doi.org/10.1017/S0305004106009650

[7] Y. S. Choi, D. Garcia, S. G. Kim e M. Maestre. *Norm or numerical radius attaining mappings on C(K).* J. Math. Anal. Appl. **295** (2004), 80-96. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.03.005

[8] Y. S. Choi , D. García, M. Maestre e M. Martín. *The polynomial numerical index for some complex vector-valued function spaces*, Quart. J. Math. **59** (2008), 455-474. https://doi.org/10.1093/qmath/ham054

[9] Y. S. Choi e S. G. Kim. *Norm or numerical radius attaining multilinear mappings and polynomials.* J. London Math. Soc. **54** (1996), 135-147. https://doi.org/10.1112/jlms/54.1.135

[10] Y. S. Choi, S. Dantas, M. Jung e M. Martín *The Bishop-Phelps-Bollobás property and absolute sums*. Mediterr. J. Math. **16**, 73 (2019). https://doi.org/10.1007/s00009-019-1346-6

[11] Y. S. Choi, D. Garcia, S. G. Kim e M. Maestre. *The polynomial numerical index of a Banach space*. Proc. Edinb. Math. Soc. **49** (2006), 39-52. https://doi.org/10.1017/S0013091502000810

[12] A. M. Davie e T. W. Gamelin. *A theorem on polynomial-star approximation.* Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351-356. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1989-0947313-8

[13] J. Duncan, C. M. McGregor, J. D. Pryce e A. J. White. *The Numerical Index of a Normed Space*. J. London Math. Soc. **2** (1970), 481-488. https://doi.org/10.1112/jlms/2.Part 3.481

[14] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators, Part I: General Theory.* New York: Wiley Classics Library, 1988.

[15] L. A. Harris. *A Bernstein-Markov theorem for normed spaces*. J. Math. Anal. Appl. **208** (1997), 476-486. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5339

[16] L. A. Harris. *The numerical range of holomorphic functions in Banach spaces*. Am. J. Math. **93** (1971), 1005-1019. https://doi.org/10.2307/2373743

[17] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar e L. Weis. *Analysis in Banach Space. Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory*. Berlin: Springer International Publishing, 2016. https://doi.org/10.1007/978-3-319-48520-1

[18] D. Jan, X. Huang e R. Lui. *Generalized-lush spaces and Mazur-Ulam property*. Studia Math. **219** (2013), 139-153. https://doi.org/10.4064/sm219-2-4

[19] V. Kadets, M. Martín e R. Payá. *Recent progress and open questions on the numerical index of Banach spaces*. Rev. R. Acad. Cien. Ser. A. Mat. (RACSAM) **100** (2006), 155-182.

[20] S. G. Kim, M. Martín e J. Méri. *On the polynomial numerical index of the real spaces c_0, l_1 and l_∞*. J. Math. Anal. Appl. **337** (2008), 98-106. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.101

[21] S. G. Kim. *Three kinds of numerical indices of a Banach Space*. Math. Proc. Royal Irish Acad. **112A** (2012), 21-35. https://doi.org/10.3318/PRIA.2012.112.4

[22] G. López, M. Martín e J. Merí. *Numerical index of Banach spaces of weakly or weakly-star continuos functions*. Rocky Mountain J. Math. **38** (2008), 213-223. https://doi.org/10.1216/RMJ-2008-38-1-213

[23] G. Lumer. *Semi-inner Product Spaces*. Trans. Am. Math. Soc. **100** (1961), 29-43. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0133024-2

[24] M. Martín e R. Payá. *On CL-spaces and almost CL-spaces*. Ark. Mat. **42** (2004), 107-118. https://doi.org/10.1007/BF02432912

[25] M. Martín. *The group of isometries of a Banach space and duality*. J. of Func. Anal. **255** (2008), 2966-2976. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.06.004

[26] M. Martín e A. Villena. *Numerical Index and the Daugavet Property for $L_\infty(\mu, X)$*. Proc. Ed. Math. Soc., **46** (2003), 415-420. https://doi.org/10.1017/S0013091502000524

[27] M. Martín e R. Payá. *Numerical index of vector-valued function spaces*. Studia Mathematica **142** (2000), 269-280. https://doi.org/10.4064/sm-142-3-269-280

[28] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces*. New York: Dover, 2010.

[29] J. R. Munkres. *Topology*. 2ª Edição, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1975.

[30] R. Payá. *Tecnicas del rango numerico y estructura en espacio normado*. Tese de Doutorado, Universidad de Granada, Espanha, 1980.

[31] A. Rodriguez-Palacios. *Numerical ranges of uniformly continuos functions on the unit sphere of a Banach space*. J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 472-476. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.03.012

[32] O. Toeplitz. *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer*. Math. Z. **2** (1918), 187-197. https://doi.org/10.1007/BF01212904

[33] P. Wojtaszczyk. *Banach Spaces for Analysts*. Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge, 1991. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608735