

MON  
621  
M5321  
TES/MEM

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Simulação Numérica Fina do Processo  
de Transporte de Interfaces**

Dissertação apresentada  
à Universidade Federal de Uberlândia por:

**PAULO JOSÉ TITARA MENDES**

1999

como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Mecânica

**DIRBI/UFU**



1000187171

Aprovada por:

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto - (UFU) - Orientador  
Prof. Dr. Alexandre Megiorim Roma - (USP)  
Prof. Dr. Ricardo Fortes de Miranda - (UFU)  
Prof. Dr. Humberto Araujo Machado - (UFU)

Uberlândia, 09 de abril de 1999.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA  
Av. João Naves de Ávila 2160 Campus Santa Mônica Uberlândia - MG 38408-100  
Fone: 0342394149- FAX: 034 2394282

**ALUNO: PAULO JOSÉ TITARA MENDES**

NÚMERO DE MATRÍCULA: 5971612-3

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: TRANSFERÊNCIA DE CALOR E  
MECÂNICA DOS FLUIDOS

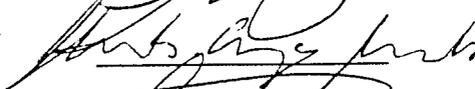
PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

Simulação Numérica Fina do Processo de Transporte de Interfaces

ORIENTADOR: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

A Dissertação foi APROVADA em reunião pública, realizada no Anfiteatro do Bloco 1Q do Campus Santa Mônica, em 09 de abril de 1999, as 14 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME		ASSINATURA
Aristeu da Silveira Neto. Prof. Dr.	- UFU	
Ricardo Fortes de Miranda, Prof. Dr.	- UFU	
Humberto Araújo Machado, Dr.	- UFU	
Alexandre Megiorin Roma, Prof. Dr.	- USP	

Uberlândia, 09 de abril de 1999.

## **Agradecimentos**

Aos meus pais José Titara Mendes e Durvalina Valente Mendes, pelo amor e apoio ao longo destes dois anos de trabalho.

Aos meus irmãos Tiago Titara Mendes e Marta Cristina Titara Mendes que sempre estiveram torcendo pelo meu sucesso profissional.

Ao meu orientador Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, pela dedicação e seriedade com que conduziu este trabalho.

Ao meu amigo Francisco Aurilo de Azevedo Pinho, pela grande ajuda que me ofereceu no que diz respeito a parte computacional deste trabalho.

À todos os colegas do Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos, que estiveram ao meu lado nesta caminhada.

Ao grupo de professores que fazem parte do curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela competência com que realizam suas funções.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

<b>1. Introdução.</b> . . . . .	1
<b>2. Formulação Matemática.</b> . . . . .	7
2.1 Introdução. . . . .	7
2.2 Formulação Euleriana para o Transporte da Fase Contínua. . . . .	8
2.3 Formulação Lagrangeana para o Transporte da Fase Dispersa . . . . .	10
2.4 Cálculo da Intensidade de Força Interfacial. . . . .	12
2.5 Cálculo do Campo de Força Euleriano. . . . .	15
2.6 Cálculo dos Campos de Propriedades Físicas. . . . .	16
2.7 Formulação para o Cálculo da Função Indicadora. . . . .	16
2.8 Cálculo dos Parâmetros Geométricos. . . . .	18
2.9 Formulação para o Processo de Remalhagem. . . . .	21
2.10 Cálculo do Salto de Pressão entre a Fase Contínua e Dispersa. . . . .	23
2.11 Algoritmo Resumido para o Transporte da Interface. . . . .	24
<b>3. Discretizações e Metodologia Numérica</b> . . . . .	25
3.1 Discretização e Metodologia Numérica para a Solução da Função Indicadora. . . . .	25

3.2 Metodologia Numérica para Solução das Equações de Navier-Stokes. ....	27
<b>4. Resultados. ....</b>	<b>38</b>
4.1 Influência da Remalhagem no Transporte Passivo de Interfaces com Campos de Velocidades Impostos. ....	38
4.1.1 Campo de Velocidade em Arco-Tangente. ....	38
4.1.2 Campo Cizalhante com um Choque de Velocidades. ....	39
4.1.3 Campo de Velocidade Parabólico. ....	41
4.2 Visualização da Função Indicadora. ....	42
4.3 Transporte Passivo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes . . . . .	47
4.4 Transporte Ativo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes. ....	51
4.4.1 Influência da Tensão Interfacial na Geometria da Interface. ....	51
4.5 Resultado do Salto de Pressão entre a Interface e a Fase Contínua. ....	59
<b>5. Análise dos Resultados. ....</b>	<b>63</b>
5.1 Análise do Processo de Remalhagem. ....	63
5.2 Análise da Função Indicadora. ....	64
5.3 Análise do Transporte Passivo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes . . . . .	66
5.4 Análise do Transporte Ativo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes. . . . .	66
5.5 Análise para o Cálculo do Salto de Pressão. ....	67
<b>6. Conclusões. ....</b>	<b>69</b>

6.1 Propostas para trabalhos Futuros. ....	71
<b>7. Referências Bibliográficas. ....</b>	<b>72</b>

## Lista de Símbolos

### Letras Latinas

d	diâmetro;
ds	comprimento elementar de interface;
D	função distribuição;
Eo	número de Eötvos;
f	força interfacial lagrangeana;
$\vec{F}$	campo de força interfacial euleriana;
$\vec{F}_i$	campo de força interfacial euleriana na direção i;
g	gravidade e função de base de lagrange;
G	gradiente da função indicadora;
h	passo espacial da malha euleriana e função de base de lagrange;
l	função indicadora;
$\kappa$	curvatura;
n	grau do polinômio de lagrange;
$\vec{n}$	normal;
p	pressão e parâmetro da equação paramétrica;
Pe	número de Peclet;
r	raio de curvatura;
R	perímetro da interface;
Re	numero de Reynolds;
s	posição de um ponto lagrangeano;
t	tempo;
$\vec{t}$	tangente;
T	temperatura;
u	velocidade na direção x;
v	velocidade na direção y;
$\vec{V}$	vetor velocidade;
$\vec{V}_k$	vetor velocidade lagrangeana;
$V_i$	vetor velocidade euleriana;
x	coordenada cartesiana;
$\vec{X}$	vetor posição;

- $\bar{X}_k$  vetor posição lagrangeana;
- y coordenada cartesiana;
- w velocidade na direção z e coeficiente de relaxação;
- We número de Weber;
- z coordenada cartesiana.

### Letras Gregas

- $\alpha$  difusão térmica;
- $\rho$  densidade;
- $\mu$  viscosidade dinâmica;
- $\sigma$  coeficiente de tensão interfacial;
- $\tau$  tensão interfacial.

### Índices

- i ponto da malha euleriana;
- k ponto da malha lagrangeana;
- 0 fase contínua;
- 1 fase dispersa.

### Operadores Matemáticos

- $\nabla$  operador vetorial nabra;
- $\nabla^2$  operador laplaciano;
- $\partial$  derivada parcial;
- $\Delta$  diferença finita;
- $\int$  integral.

### Indicadores

- $a^*$  variável adimensionalizada;
- $\bar{a}$  vetor;
- $\bar{a}$  média.

## Lista de Figuras

Figura 1.1 - Escoamentos bifásicos em um conduto vertical (Roumy, 1969): (a) bolhas independentes; (b) pacotes de bolhas; (c) pistonado; (d) agitante e (e) anular. . . . .	2
Figura 1.2 - Escoamentos bifásicos em condutos horizontais (Alves, 1954): (1) bolhas independentes; (2) escoamento tipo “plug”; (3) escoamento estratificado; (4) escoamento com ondas; (5) escoamento pistonado e (6) escoamento anular. . . . .	2
Figura 2.1 - Esquema ilustrativo das duas malhas presentes no domínio; (x) representa os pontos da malha euleriana e (●) representa os pontos da malha lagrangeana. . . . .	7
Figura 2.2 - Coordenadas eulerianas ( $\vec{x}$ ) e lagrangianas ( $\vec{x}_k$ ) representadas por vetores. . . . .	10
Figura 2.3 - Função interpolação proposta por Juric. . . . .	11
Figura 2.4 - Processo de interpolação das velocidades eulerianas para obter velocidades lagrangeanas. . . . .	12
Figura 2.5 - Forças interfaciais ao longo de todo o domínio R. . . . .	13
Figura 2.6 - Processo de distribuição da intensidade de força $\vec{f}$ para obter $\vec{F}$ . . . . .	15
Figura 2.7 - Comportamento da função $\vec{G}(\vec{x}, t)$ . . . . .	17
Figura 2.8 - Comportamento da função $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{x}, t)$ . . . . .	17
Figura 2.9 - Circunferência de centro na origem e raio 3. . . . .	20
Figura 2.10 - Representação do tamanho típico da malha (h) e da distância entre dois pontos lagrangeanos ( $\Delta s$ ). . . . .	22
Figura 2.11 - Diferença de pressão entre a fase contínua (1) e a fase dispersa (2). . . . .	23

Figura 3.1 - Ponto euleriano e seus vizinhos. . . . .	24
Figura 3.2 - Comportamento da função indicadora. . . . .	27
Figura 3.3 - Pontos para a discretização do domínio. . . . .	29
Figura 3.4 - Velocidades nas interfaces do volume de controle. . . . .	35
Figura 4.1 - Transporte de uma interface circular por um campo de velocidades arco-tangente sem regularização da malha; tempos: 0,2 s; 4,2 s; 8,2 s 12,2 s e 16,2 s. . . . .	39
Figura 4.2 - Transporte de uma interface circular por um campo de velocidades arco-tangente com regularização da malha; tempos: 0,2 s; 4,2 s; 8,2 s 12,2 s e 16,2 s. . . . .	39
Figura 4.3 - Perfil de velocidades cizalhante imposto; geometria circular inicial. . . . .	40
Figura 4.4 - Evolução temporal do processo de transporte de uma interface inicialmente circular; campo de velocidade transportante uniforme cizalhante com um choque de velocidade: $U_s = -1,0 \text{ m/s}$ e $U_j = +1,0 \text{ m/s}$ , sendo elas respectivamente a velocidade no plano superior e a velocidade no plano inferior em relação a cota $y = 10$ . . . . .	40
Figura 4.5 - Transporte de uma interface inicialmente circular por um perfil de velocidade cizalhante parabólico; tempos: 0,15 s; 3,15 s e 6,3 s; . . . . .	41
Figura 4.6 - Transporte de uma interface inicialmente circular por um perfil de velocidade cizalhante parabólico; tempos: 0,3 s; 6,3 s e 12,3 s. . . . .	41
Figura 4.7 - Função indicadora em um campo de velocidade uniforme para $t = 1,4\text{s}$ . . . . .	42
Figura 4.8 - Função indicadora em um campo de velocidades cizalhante para $t = 1,4\text{s}$ . . . . .	43
Figura 4.9 - Bolha deslocando em escoamento uniforme com velocidade $u = 1\text{m/s}$ , para tempos de: (a) 1,4s, (b) 5,6s (c) 11,2s e (d) 14,0s. . . . .	44

- Figura 4.10 - Bolha deslocando em escoamento cizalhante, descrito na figura 4.3, visualiza-se a função indicadora para tempos de: (a) 0,7s, (b) 2,1s, (c) 2,8s, (d) 3,2s, (e) 4,2s, (f) 4,9s, (g) 5,6s e (h) 6,3s. .... 45
- Figura 4.11 - Área no interior da interface em função do tempo para perfil de velocidade uniforme igual a +1,0. .... 46
- Figura 4.12 - Esquema ilustrando as condições de contorno. .... 47
- Figura 4.13 - Caixas de entrada e de saída e domínio de cálculo. .... 48
- Figura 4.14 - Transporte de uma bolha por um campo cizalhante de velocidades entre duas placas planas em repouso, para tempos de: (a) 0,2s (b) 0,3s (c) 0,35s, (d) 0,6s, (e) 0,85s e (f) 1,0s. .... 49
- Figura 4.15 - Isovalores da componente horizontal da velocidade. .... 49
- Figura 4.16 - Isovalores da componente horizontal da velocidade. .... 50
- Figura 4.17 - Transporte de uma bolha por um campo cizalhante de velocidades entre duas placas planas; a placa superior se movimenta com velocidade  $U_s = 1,0$ ; visualiza-se os tempos de: (a) 0,2s (b) 0,3s (c) 0,35s, (d) 0,6s, (e) 0,85s e (f) 1,0s. .... 50
- Figura 4.18 - Função Indicadora para  $\sigma = 1,0$  [N/m] para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s. .... 53
- Figura 4.19 - Função Indicadora para  $\sigma = 1,0E-2$  [N/m] para tempos de : (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s. .... 54
- Figura 4.20 - Campos de pressões para  $\sigma = 1,0$  [N/m] e para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s. .... 55
- Figura 4.21 - Campos de pressões para  $\sigma = 0,01$  [N/m] e para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s. .... 56

Figura 4.22 - Campos de velocidades na direção $x$ para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s. . . . .	57
Figura 4.23 - Campos de velocidades na direção $y$ para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s. . . . .	58
Figura 4.24 - Linha onde retira-se os valores da pressão. . . . .	59
Figura 4.25 - Isovalores de pressão $\sigma = 100$ . . . . .	60
Figura 4.26 - Isovalores de pressão $\sigma = 10$ . . . . .	60
Figura 4.27 - Salto de pressão em função da posição $x$ , para $\sigma = 100$ . . . . .	61
Figura 4.28 - Salto de pressão em função da posição $x$ , para $\sigma = 10$ . . . . .	61
Figura 5.1 - Módulo do gradiente da função indicadora, correspondente à Figura 4.7, para o tempo de 1,4s. . . . .	64

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Representação generalizada das equações de Conservação. ....	28
---	----

Mendes, P. J. T, 1999, "Simulação Numérica Fina do Processo de Transporte de Interfaces", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

### Resumo

No presente trabalho apresenta-se uma nova metodologia, na área de Mecânica dos Fluidos Computacional, para análise de problemas que envolvem escoamentos bifásicos. Uma das grandes dificuldades em simular numericamente esta classe de escoamentos está relacionada a presença das interfaces móveis.

A formulação apresentada permite o transporte e caracterização geométrica de interfaces. Permite também localizar dinamicamente a interface móvel, bem como, a variação de propriedades físicas ao longo da mesma. A localização dinâmica da interface e a variação das propriedades físicas é possível através de uma função denominada de função indicadora. Apresenta-se ainda um processo de regularização da malha da interface, o qual é necessário para a estabilidade dos cálculos numéricos.

Apresenta-se simulações numéricas preliminares onde transporta-se interfaces por um campo de velocidade cizalhante do tipo arco-tangente, e por um campo de velocidade parabólico. Um teste mais severo consiste em transportar a interface por um campo cizalhante com um choque de velocidades. Desta forma, é possível testar o cálculo dos parâmetros geométricos, a remalhagem e a visualização da função indicadora.

Simula-se o transporte passivo de uma bolha entre duas placas planas, via solução da equação de Navier-Stokes. Duas configurações são utilizadas: em uma delas as duas placas encontram-se em repouso e na outra a placa superior tem movimento. Finalmente, apresenta-se resultados do transporte ativo de interfaces, via solução da equação de Navier-Stokes, onde a presença da tensão interfacial altera o campo de pressão e de velocidade da fase contínua. Compara-se os resultados do salto de pressão entre as fases, obtidos via simulação, com resultados analíticos, para o caso de bolhas circulares. A comparação permite validar preliminarmente a metodologia e o código computacional desenvolvido.

---

*Palavras Chave: Captura de interface, Função Indicadora, Remalhagem, Transporte Passivo e Transporte Ativo.*

Mendes, P. J. T, 1999, "Local Numerical Simulation of the Interface Transport", M.Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

### Abstract

In this work a new method for analysing problems related to two-phase flows, in the brands of Computational Fluid Mechanics, is presented. One of the great difficulties in the simulation of this class of flows is related to the presence of moving-boundaries. The technique employed here is called *Front-Tracking Method*.

The present formulation allows the tracking and geometric definition of interfaces. It allows also to place dinamically the moving-boundary and physical properties variation as well. Such results are possible through a so called *Indicating function*. A process for boundary grid regularization is also used, in order to warranty the numerical stability.

Some preliminary results are showed, where the boundaries are tracked by a creeping flow field of tangent-inverse and parabolic types. A harder test consists in forcing a velocity shock in the flow field. Such a procedure permits testing the geometric parameters calculation, grid updating and the visualization of the indicating function.

A passive bubble-tracking is simulated between two flat parallel plates, through the solution of the well-known Navier-Stokes equations. Two configurations are used: two fixed plates and a relative displacement between them. Finally, the results for active boundary-tracking are presented, via the solution of the Navier-Stokes equations, where the presence of interfacial stress changes the pressure and velocity fields of the continuous phase. Several values for Interfacial stress are used, and the resulting pressure and velocity fields are observed. The results for the pressure jump among the phases are compared to the analytical ones, for circular bubbles. The comparison allows a preliminary validation for the method and the computational code.

---

*Key words: Two-phase flows; front-tracking, indicating function, grid updating, passive tracking, active tracking.*

# Capítulo 1

## Introdução

Problemas de interface móvel estão presentes em um grande número de aplicações em engenharia. Exemplos típicos são os escoamentos com fronteira livre, escoamentos bifásicos e multifásicos, interação fluido estrutura e em solidificação de materiais no interior de moldes. Os sistemas onde uma interface móvel é encontrada, têm como característica comum a presença de contornos internos ou interfaces demarcando regiões com propriedades físicas diferentes. Ao cruzar estas interfaces, as propriedades do fluido, sua composição, a fase e as características do escoamento, mudam muito rapidamente.

Em problemas de interface móvel, faz-se necessário acoplar as equações de quantidade de movimento, massa e energia, com as equações que caracterizam a formação, evolução e a dinâmica da interface. Os parâmetros geométricos da interface, como a normal, a tangente e a curvatura, bem como a variação da densidade e da viscosidade geram um termo fonte na equação de transporte da quantidade de movimento, afetando a dinâmica do escoamento. Este termo fonte se traduz numa força interfacial, como será detalhado numa seção subsequente. Existem dificuldades em caracterizar a interface, uma vez que, dependendo do tipo de escoamento, ela pode sofrer severas deformações, como dilatação, compressão, coalescência ou fragmentação.

Nos problemas envolvendo escoamentos bifásicos encontra-se a presença de interfaces móveis devido a existência de dois fluidos de propriedades físicas diferentes. Os escoamentos turbulentos bifásicos podem ser encontrados dentro de uma larga gama de configurações. Os mais simples são os escoamentos com uma fase dispersa, por exemplo: os escoamentos com bolhas no interior de uma fase líquida, partículas em um meio líquido ou gasoso ou gotas dentro de um meio gasoso. Outras configurações mais complexas são encontradas nos escoamentos em um conduto vertical com pacotes de bolhas: os escoamentos pistonados, os escoamentos agitantes e os escoamentos anulares. Estes escoamentos estão ilustrados na figura 1.1, retirada de Roumy (1969).

Para um conduto horizontal a classificação torna-se ainda mais complexa. A presença da gravidade tende a separar as fases e criar uma estratificação horizontal. Alves (1954) propôs uma classificação como mostra a figura 1.2.

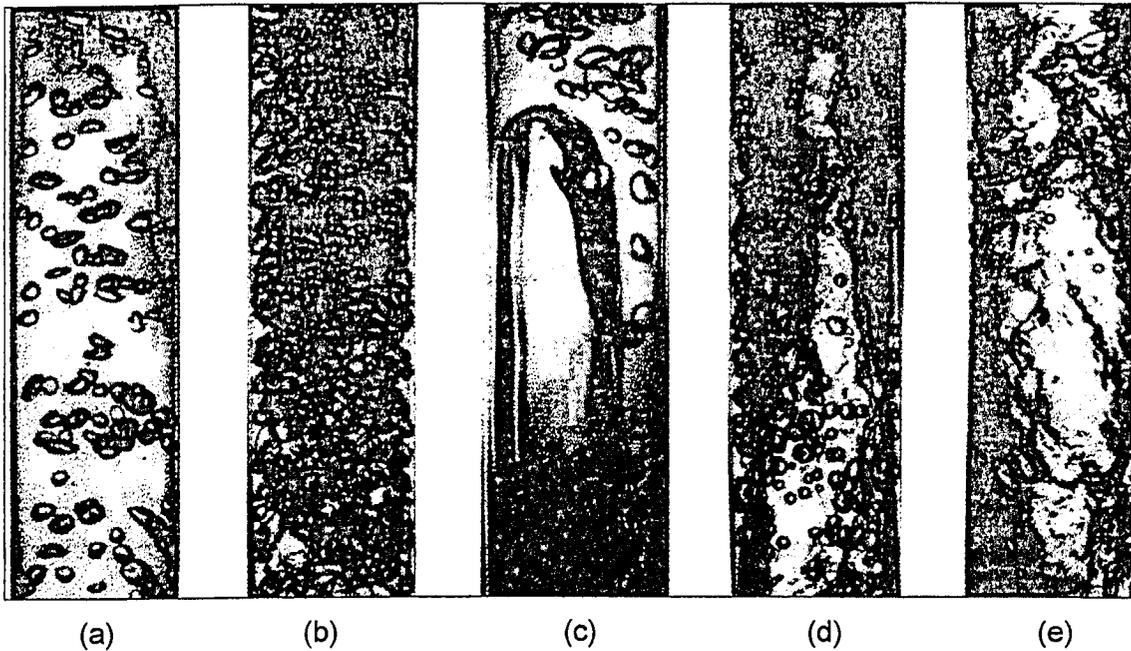


Figura 1.1 - escoamentos bifásicos em um conduto vertical (Roumy, 1969): (a) bolhas independentes; (b) pacotes de bolhas; (c) pistonado; (d) agitante e (e) anular.

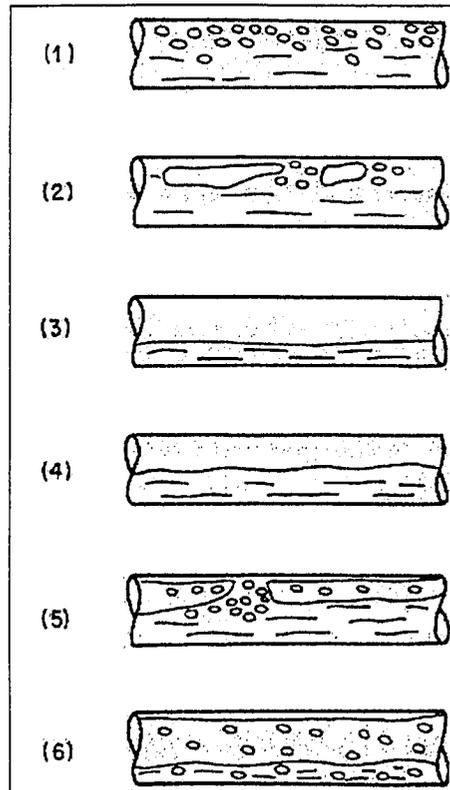


Figura 1.2 - escoamentos bifásicos em condutos horizontais (Alves, 1954): (1) bolhas independentes; (2) escoamento tipo "plug"; (3) escoamento estratificado; (4) escoamento com ondas; (5) escoamento pistonado e (6) escoamento anular.

Os escoamentos bifásicos estão relacionados a um grande número de problemas naturais e tecnológicos. Uma aplicação típica é a previsão da eficácia dos escoamentos atmosféricos sob a dispersão de poluentes de forma a manter um índice de concentração razoável para a vida local. Numerosas aplicações relacionam-se igualmente os processos de decantação de partículas originárias de uma certa fonte (Hunt, 1991). A vaporização de gotas líquidas em um escoamento turbulento é um processo importante para a propulsão e geração de potência, criadas pelo combustível líquido em formas de gotas, geradas pelo sistema de atomização em spray. A interação de gotas e do vapor com escoamentos turbulentos que as transportam produz escoamentos extremamente complexos. Uma descrição detalhada é feita por Chigier (1981), Siriguano (1993) e Ghosh e Hunt (1994).

No domínio da termohidráulica as aplicações são bastante numerosas: trocador de calor, reatores químicos e termohidráulica de reatores nucleares. Neste domínio numerosos problemas são descritos por Delhaye *et al.* (1980).

Na área de engenharia de Petróleo, problemas relacionados com escoamentos bifásicos são encontrados em uma vasta gama de exemplos. Um modelo computacional que permite o estudo do retorno de um filme líquido em processos de bombeamento de petróleo utilizando gás, sistemas denominados de "gás-lift", foi proposto por Santos *et al.* (1997). A simulação apresentada permite compreender a dinâmica deste tipo de fenômeno, o qual quando minimizado, apresenta um aumento da produção. Santana *et al.* (1998) apresentou uma formulação temporal para a modelagem de escoamentos anulares estratificados sólido-líquido. Este tipo de escoamento é comumente encontrado no processo de prospeção de petróleo. A formulação contém um conjunto de quatro equações diferenciais resolvidas pelo método de diferenças finitas, onde a variação da concentração de sólidos no domínio do tempo é estabelecida por condições típicas de prospeção de petróleo.

Os escoamentos monofásicos laminares podem ser descritos por quantidades locais utilizando as equações de Navier Stokes. Por outro lado, os escoamentos turbulentos são descritos por quantidades temporais ou médias estatísticas que advêm das soluções de um sistema envolvendo equações de Reynolds e equações de fechamento suplementares. Para os escoamentos bifásicos faz-se necessário criar diferentes modelos para os diversos tipos de escoamentos encontrados. Por exemplo, descrever escoamentos anulares e agitantes com a mesma acuracidade, utilizando o mesmo modelo. Desta forma, a modelagem torna-se um processo de extrema dificuldade devido ao fato de que existem zonas de transição entre os diversos tipos de escoamentos bifásicos, dificultando a compreensão da física real do problema. Devido às dificuldades em se estudar os escoamentos bifásicos, diversas técnicas

experimentais, analíticas e numéricas têm sido desenvolvidas e utilizadas, a fim de caracterizar a dinâmica dos escoamentos onde existe a presença de uma ou mais interfaces.

Técnicas experimentais tornam-se necessárias a fim de identificar e caracterizar os tipos de escoamentos bifásicos existentes. A técnica denominada integral consiste basicamente na observação dos escoamentos utilizando fotografias ou filmagens. Técnicas óticas são descritas em detalhes por Cooper *et al.* (1964) e Arnold e Hewitt (1967). Caso as paredes do conduto sejam opacas, técnicas de raio X ou de neutros podem ser empregadas (Bennett *et al.*, 1965). Estes tipos de técnicas são necessárias, contudo não suficientes porque dificilmente produzem informações quantitativas do escoamento. Os escoamentos bifásicos podem ainda ser identificados de acordo com as propriedades da função densidade de probabilidade ou de espectros das variáveis envolvidas. Este tipo de técnica é chamada de técnica local. Para um determinado ponto, a função densidade da fase  $X_k$  pode ser determinada por uma pequena sonda localizada neste ponto. A sonda deve ser sensível a alguma mudança de propriedade física entre as fases, de forma que quando ocorre a mudança de fase sobre ela, um sinal é gerado. Quando a fase líquida é eletricamente condutiva, utiliza-se a variação da condutividade elétrica (Lackmé, 1967).

A modelagem de escoamentos bifásicos consiste basicamente das leis de balanço aplicadas para cada fase e para a interface, que pode ser considerada como uma superfície de descontinuidade. Consequentemente, as leis de balanço para cada fase são expressas em termos de equações diferenciais parciais e as leis de conservação sobre a interface são formuladas em termos de condições de salto. As equações analíticas podem ser escritas utilizando médias temporais (Ishii, 1975) ou médias espaciais (Kocamustafaogullari, 1975). Quando aplica-se médias temporais é teoricamente possível resolver problemas tridimensionais transientes, ao passo que utilizando médias espaciais soluciona-se apenas uma parcela dos escoamentos transientes. Desta forma, torna-se possível simular numericamente escoamentos bifásicos via modelos estatísticos globais, onde aplica-se equações médias para as fases presentes e o acoplamento entre as fases é feito via parâmetros empíricos.

Tem surgido ultimamente metodologias modernas e alternativas, as quais possibilitam a *simulação numérica fina* de escoamentos bifásicos. As equações médias para cada fase, são substituídas por uma formulação local, válida para qualquer fase presente naquela posição e naquele tempo. Peskin (1977) realizou uma análise numérica do escoamento de sangue no interior do coração. Este trabalho consiste na solução das equações de Navier-Stokes na presença de interfaces móveis (válvulas e a parede do coração), as quais interagem com o fluido. Utilizando este tipo de formulação, Silveira-Neto (1997) simulou numericamente

escoamentos bifásicos laminares e em transição, os quais transportam bolhas no interior de um canal fechado, através da técnica de *captura de interfaces*.

Com as técnicas experimentais encontradas atualmente consegue-se caracterizar a dinâmica de variados tipos de escoamentos. Contudo em regiões de transição a análise experimental torna-se complexa. Além das zonas transicionais os escoamentos bifásicos têm uma forte dependência de uma gama de parâmetros que os afetam diretamente. Dentre estes parâmetros, pode-se citar: pressão, densidade e viscosidade de cada fase, geometria, dimensão do duto, distribuição da fração de vazio, distribuição de diâmetros, distribuição de força interfacial, etc. Quando utiliza-se a técnica de simulação numérica via modelos estatísticos globais, surge um problema no acoplamento das fases presentes que é modelado através de parâmetros empíricos obtidos com técnicas experimentais. Desta maneira, a técnica de *simulação numérica fina* ou local surge como uma ferramenta auxiliar aos métodos tradicionais existentes. Com esta metodologia é possível deduzir informações de difícil obtenção via métodos experimentais, como coeficientes de arraste sobre regimes complexos de transporte de bolhas (ex: regime wobbling), ou ainda, coeficientes envolvidos em equações médias de transporte de área interfacial.

O presente trabalho tem como objetivo simular numericamente de forma local e instantânea o processo de transporte de bolhas no interior de um conduto forçado. As bolhas são discretizadas por uma malha que movimenta-se ao longo do domínio de cálculo, denominada de malha lagrangeana. A fase que transporta as bolhas, ou seja, a fase contínua, é discretizada por uma malha fixa em um sistema de coordenadas, chamada malha euleriana. Utiliza-se o método de captura de interfaces (front-tracking) proposto por Unverdi e Tryggvason (1992). O método consiste no cálculo de uma função denominada indicadora, que permite localizar dinamicamente a interface e também torna possível a variação das propriedades físicas, viscosidade e densidade, ao longo do escoamento. O cálculo da função indicadora consiste na solução de uma equação de Laplace cujo termo fonte é determinado pela distribuição da normal dos pontos lagrangeanos na malha euleriana. O modelo matemático será estabelecido posteriormente.

Outra necessidade é a caracterização dinâmica da geometria da interface: cálculo da normal, tangente, curvatura, raio de curvatura e comprimento dos elementos da interface. Os parâmetros geométricos que caracterizam a interface geram também um termo fonte relacionado com a tensão interfacial, afetando a solução das equações de Navier-Stokes da fase contínua. O transporte da interface pressupõe também o uso de uma função distribuição/interpolação proposta por Juric (1996).

No presente trabalho propõe-se também um processo de remalhagem da interface, uma vez que em regiões de grandes deformações a malha lagrangeana torna-se irregular causando oscilações numéricas e também perda de massa no interior da interface.

Observa-se que o que se propõe no presente trabalho de mestrado é apenas a fase inicial de um projeto maior que envolve desenvolvimentos mais avançados que exigem investimento de um tempo maior. Neste trabalho objetiva-se a preparação em termos da metodologia de modelagem, programação em C++ e a montagem de uma plataforma inicial de simulação numérica de problemas simples. Na sequência deste mestrado estão sendo planejados e desenvolvidos trabalhos mais avançados nos campos de escoamentos bifásicos; transporte de particulados e também problema de interação fluido-estrutura.

\*

## Capítulo 2

### Formulação Matemática

#### 2.1 Introdução

Os escoamentos bifásicos são compostos de uma fase contínua e uma fase dispersa. A fase contínua ou a fase transportante pode ser exemplificada como uma fase líquida que transporta bolhas ou uma fase gasosa que transporta particulados. A fase dispersa é aquela que é transportada pela fase contínua, por exemplo, bolhas num meio líquido ou particulados num meio gasoso. No presente trabalho, ambas as fases, contínua e dispersa, são discretizadas por uma mesma malha euleriana, enquanto que a interface entre elas é discretizadas por uma malha lagrangeana. A figura 2.1 abaixo ilustra as duas malhas no domínio de cálculo.

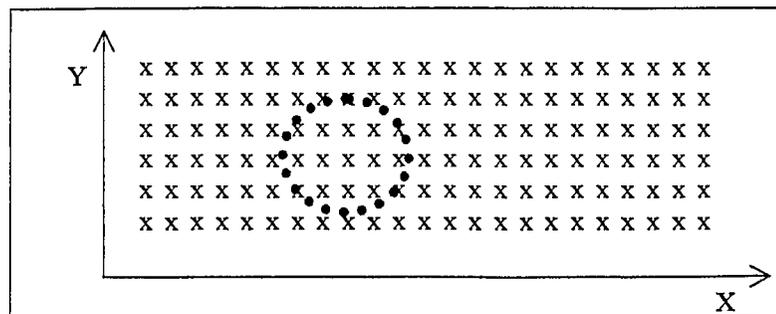


Figura 2.1 - Esquema ilustrativo das duas malhas presentes no domínio; (x) representa os pontos da malha euleriana e (•) representa os pontos da mala lagrangeana.

A malha lagrangeana é transportada pelo campo de velocidade calculado na malha euleriana. O cálculo do campo de velocidades, por sua vez, é afetado pela passagem da interface, devido a presença do campo de força interfacial gerado sobre a malha Lagrangeana e distribuído sobre a malha euleriana.

## 2.2 Formulação Euleriana para o Transporte da Fase Contínua

Ambas as fases (contínua e dispersa) são modeladas pelas equações de conservação de massa (equação 2.1) e da quantidade de movimento (equação 2.2), obtidas por meio da formulação euleriana. Estas equações são conhecidas como as equações de Navier-Stokes. Para escoamentos incompressíveis isotérmicos e fluidos newtonianos elas são escritas na seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (2.1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \left\{ \mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla}^T \vec{V}) \right\} + \vec{F} \quad (2.2)$$

Observa-se que a densidade e a viscosidade são variáveis sobre uma interface. Desta forma, o uso da equação (2.1) deve ser justificado da seguinte forma: escreve-se a equação (2.3) válida para escoamentos a  $\rho$  variável, da qual se deriva as equações (2.4) e (2.5).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.5)$$

Com a equação (2.5) acima demonstra-se que se sobre uma linha de corrente a densidade é constante então a equação (2.1) é satisfeita, mesmo para a densidade variável. Esta consideração é exata fora e dentro de uma interface e torna-se uma aproximação sobre a interface alarguecida.

Todos os termos desta equação são clássicos e dispensam maiores detalhamentos, exceto o termo  $\vec{F}$  que representa a força interfacial, a qual depende da geometria da interface e das propriedades físicas do par de fluidos que a definem.

Para escoamentos bifásicos no interior de dutos, pode-se definir os seguintes parâmetros adimensionais:

$$Re = \frac{\rho_0 V d_1}{\mu_0} \quad (2.6)$$

$$Eo = \frac{\rho_0 g d_1^2}{\sigma} \quad (2.7)$$

$$We = \frac{\rho_0 d_1 V^2}{\sigma} \quad (2.8)$$

$$Fi^* = \frac{Fi}{\sigma / d_1^2} \quad (2.9)$$

onde Re, Eo e We representam respectivamente os números de Reynolds, de Eötvos e de Weber e  $Fi^*$  é a força interfacial adimensional. O índice "1" indica a fase dispersa, por exemplo uma bolha, e "0" indica a fase contínua. O tempo característico é  $d_1/V$ , onde  $d_1$  representa o diâmetro médio de uma bolha e  $V$  é uma velocidade média característica, por exemplo a velocidade média de transporte de uma bolha. Utilizando as definições acima, pode-se adimensionalizar as equações (2.1) e (2.2). As equações adimensionalizadas são:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (2.10)$$

$$\rho^* \left[ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (u_j^* u_i^*) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \rho^* \frac{Eo}{We} g_i^* + \frac{Fi^*}{We} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[ \frac{\mu^*}{Re} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] \quad (2.11)$$

Estas equações são resolvidas através de uma metodologia do tipo volumes finitos com malhas colocadas e com um esquema implícito (Pinho, 1998). O sistema linear para pressão é resolvido utilizando um acoplamento PRIME. É importante dizer que esta solução fornece o campo euleriano de velocidade  $\vec{V}(\vec{x}, t)$  e de pressão  $p(\vec{x}, t)$ , os quais são utilizados para transportar a interface. A metodologia numérica para a solução das equações de conservação será apresentada no próximo capítulo.

### 2.3 Formulação Lagrangeana para o Transporte da Fase Dispersa

A fase dispersa é aquela que é transportada pela fase contínua, por exemplo, bolhas num meio líquido ou particulados num meio gasoso. Uma interface que separa estas fases, pode ser imaginada, do ponto de vista discreto, como um conjunto de pontos  $\vec{x}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j}$  como é ilustrado na figura 2.2.

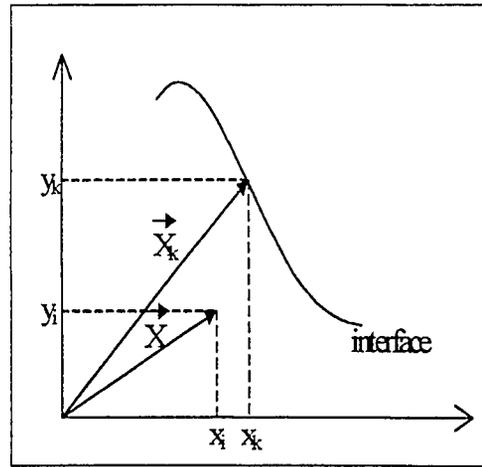


Figura 2.2 - Coordenadas eulerianas ( $\vec{x}$ ) e lagrangeanas ( $\vec{x}_k$ ), representadas por vetores.

As coordenadas  $(x_k, y_k)$  são determinadas pela configuração inicial, a qual deve ser informada. O transporte desta interface é modelado com a equação lagrangeana abaixo:

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = \vec{V}_k. \quad (2.12)$$

Esta equação é resolvida de forma explícita, utilizando-se o campo de velocidade relativo ao tempo precedente para determinar a nova posição da interface no tempo atual. Os valores da velocidade lagrangeana  $\vec{V}_k(\vec{x}_k, t)$  são obtidos pela interpolação do campo de velocidade euleriano, determinado pela solução das equações (2.1) e (2.2). Este processo de interpolação é descrito a seguir:

$$\vec{V}_k(\vec{x}_k) = \sum_i D_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_k) \vec{V}_i(\vec{x}_i) \Delta x \Delta y, \quad (2.13)$$

onde  $D_{ij}$  é uma função interpolação do tipo gaussiana como sugerido por Juric (1996). A função interpolação é dada pelas equações (2.14), (2.15) e (2.16) e ilustrada na figura 2.3 abaixo. Esta função têm como papel o alarguecimento artificial da interface. Uma outra alternativa para o cálculo da função interpolação foi a utilizada por Peskin (1977). No presente trabalho adota-se a função interpolação sugerida por Juric (1996).

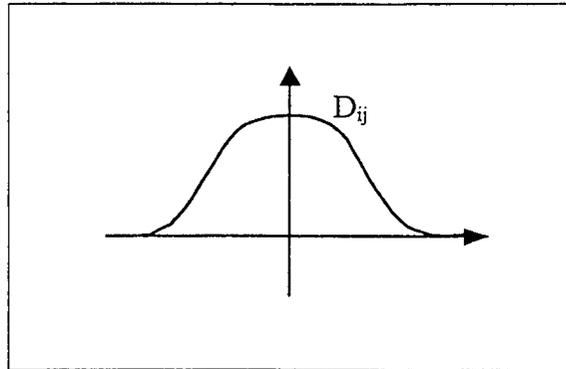


Figura 2.3 - Função interpolação proposta por Juric.

$$D_{ij}(\bar{x}_k) = \frac{f[(x_k - x_i)/h]f[(y_k - y_j)/h]}{h^2}, \quad (2.14)$$

$$f(r) = \begin{cases} f_1(r) & \text{se } \|r\| \leq 1 \\ \frac{1}{2} - f_1(2 - \|r\|) & \text{se } 1 < \|r\| \leq 2, \\ 0 & \text{se } \|r\| > 2 \end{cases}, \quad (2.15)$$

$$f_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8}, \quad (2.16)$$

onde  $r$  representa  $(x_k - x_i)/h$  ou  $(y_k - y_j)/h$  e  $h$  representa o passo espacial da malha euleriana. Como a malha euleriana apresentada é quadrada, o valor de  $h$  é igual a  $\Delta x$  ou  $\Delta y$ . Observa-se que a função distribuição pode ser utilizada tanto para a interpolação de quantidades eulerianas (ex: velocidade) quanto para distribuição das propriedades lagrangeanas (ex: força interfacial, normal e tangente). O processo de interpolação das velocidades está ilustrado na figura 2.4, onde pode-se visualizar que a velocidade lagrangeana  $\vec{V}_k(\bar{x}_k, t)$  é o resultado das influências das velocidades dos pontos vizinhos,  $\vec{V}(\bar{x}, t)$ .

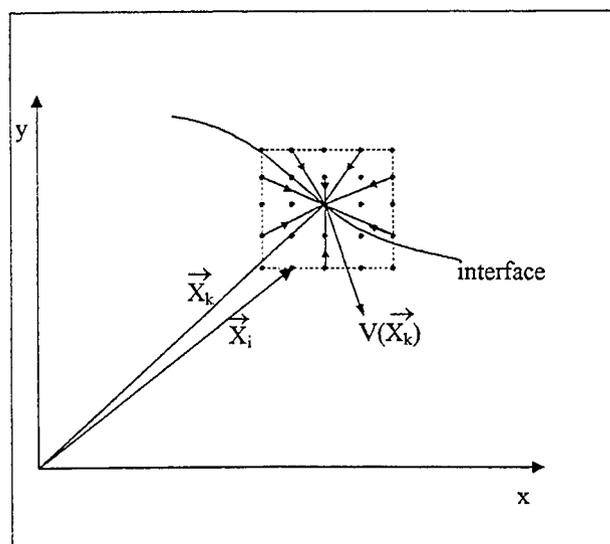


Figura 2.4 - Processo de interpolação das velocidades eulerianas para obter as velocidades lagrangeanas.

## 2.4 Cálculo da Intensidade de Força Interfacial

A intensidade da força interfacial  $\vec{f}(\vec{x}_k)$  depende do par de fluidos e dos parâmetros geométricos da interface. Classicamente a força interfacial por unidade de área é calculada através da seguinte equação:

$$\vec{f}(\vec{x}_k) = \sigma \kappa(\vec{x}_k) \vec{n}(\vec{x}_k). \quad (2.17)$$

onde  $\sigma$  é o coeficiente de tensão interfacial [N / m],  $\kappa(\vec{x}_k)$  é a curvatura [1 / m] e  $\vec{n}(\vec{x}_k)$  é a normal (vetor normalizado). Contudo, a avaliação da curvatura é muito suscetível de imprecisões numéricas, uma vez que para o seu cálculo faz-se necessário obter numericamente derivadas de segunda ordem. Uma proposta alternativa para o cálculo da força interfacial é apresentada, substituindo-se o cálculo da força interfacial via curvatura, por um parâmetro que provoque menores oscilações numéricas, por exemplo a tangente à interface.

Para que a interface permaneça em equilíbrio, o somatório das forças interfaciais ( $\vec{f}_k$ ) ao longo de toda a interface é igual a zero. Desta forma, pode-se escrever a seguinte equação:

$$\oint_R \vec{f}_k ds = 0. \quad (2.18)$$

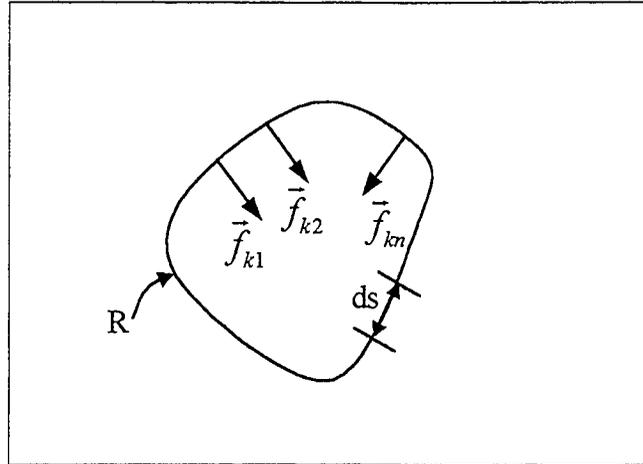


Figura 2.5 - Forças interfaciais ao longo de todo o domínio R.

A densidade linear de força interfacial ( $\sigma \vec{s}$ ) dá origem a um campo de densidade superficial de força ( $\vec{f}_k$ ), a qual pode ser expressa como o gradiente de  $\sigma \vec{s}$  (força na direção tangencial), ou seja:

$$\vec{f}_k = \frac{\partial(\sigma \vec{s})}{\partial s}, \quad (2.19)$$

onde  $\sigma$  representa o coeficiente de tensão interfacial (N/m) e  $\vec{s}$  o vetor tangente normalizado. Observa-se que  $\vec{f}_k$  é uma densidade de força na direção normal à interface. É esta força que equilibra o salto de pressão que ocorre sobre uma interface curva.

Define-se um elemento de tensão interfacial média ( $\delta \bar{\tau}_k$  [N/m]) como sendo a força interfacial média ( $\bar{f}_k$ ) vezes um elemento de comprimento  $\Delta s_k = (s_{k+1/2} - s_{k-1/2})$ , ou seja:

$$\delta \bar{\tau}_k = \bar{f}_k \Delta s_k. \quad (2.20)$$

Para o cálculo do elemento de tensão interfacial em um ponto discreto "k", tem-se:

$$\delta \bar{\tau}_k = \int_{s_{k-1/2}}^{s_{k+1/2}} \frac{\partial(\sigma \bar{s})}{\partial s} ds = \int_{s_{k-1/2}}^{s_{k+1/2}} \underbrace{\left( \sigma \frac{\partial(\bar{s})}{\partial s} \right)}_{\sigma \bar{\tau}} ds + \int_{s_{k-1/2}}^{s_{k+1/2}} \left( \bar{s} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right) ds. \quad (2.21)$$

Com base em uma análise vetorial demonstra-se que, a variação da tangente em relação a variável  $s$  que representa a interface é igual ao produto da curvatura pela normal. Desta forma, a primeira integral da equação (2.21) representa a forma clássica para o cálculo da força interfacial dada pela equação (2.17). A segunda integral da equação (2.21) permite levar em conta variações da tensão interfacial ao longo da interface, que pode ser causada pela presença de impurezas ou por variações de temperatura (efeito de Marangoni). Este tipo de efeito ocorre, por exemplo, quando existe uma camada de fluido fina sobre uma placa horizontal e com uma superfície livre. Ao aquecer a placa horizontal inferior, surgem células convectivas verticais devido à variação de densidade. Na superfície livre surgem gradientes de temperatura. O coeficiente de tensão interfacial é função da temperatura e diminui na direção dos pontos mais quentes. Desta forma, surge um campo de força resultante que conjuntamente com os gradientes de temperatura promoverá movimentos horizontais. Faber (1995), demonstra que os efeitos da tensão interfacial serão predominantes quando:

$$-\frac{d\sigma}{dT} > \alpha \rho g d^2. \quad (2.22)$$

Com base na equação acima, pode-se dizer que se a espessura  $d$  de uma camada de óleo silicone sobre uma superfície horizontal não exceder 3mm então os efeitos de Marangoni serão predominantes. No presente trabalho os efeitos de Marangoni não são considerados, pois são considerados escoamentos isotérmicos.

Considerando que o coeficiente de tensão interfacial permanece constante, a solução da equação (2.21) pode ser dada por:

$$\delta \bar{\tau}_k = (\sigma \bar{s})_{k+1/2} - (\sigma \bar{s})_{k-1/2}. \quad (2.23)$$

Substituindo a equação (2.20) em (2.23), obtêm-se a seguinte equação:

$$\bar{f}_k \Delta s_k = (\sigma \bar{s})_{k+1/2} - (\sigma \bar{s})_{k-1/2}. \quad (2.24)$$

ou



## 2.6 Cálculo dos Campos de Propriedades Físicas

Para o cálculo das propriedades físicas utiliza-se um método proposto também por Unverdi e Tryggvason (1992). Este método é baseado em uma função chamada indicadora. Esta função resulta da solução de uma equação de Laplace e, dependendo das condições de contorno, ela admite solução 1 para a fase dispersa, 0 para a fase contínua e valores intermediários ao longo da interface alarguecida. Desta forma, o cálculo das propriedades físicas é realizado através das seguintes equações:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)I(\vec{x}, t), \quad (2.27)$$

$$\mu(\vec{x}, t) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)I(\vec{x}, t), \quad (2.28)$$

onde o índice "0" representa as propriedades da fase contínua e o índice "1" representa a fase dispersa. Quando a função indicadora é igual a zero, o produto  $(\rho_1 - \rho_0)I(\vec{x}, t)$  também é zero e a densidade admite o mesmo valor da densidade da fase contínua. Por outro lado, quando a função indicadora é igual a 1, a densidade admitirá o valor da fase dispersa. Este mesmo raciocínio é empregado para o cálculo da viscosidade. Desta forma, pode-se dizer que as equações (2.27) e (2.28) permitem o cálculo de propriedades físicas em um meio com mais de uma fase de maneira dinâmica.

## 2.7 Formulação para o Cálculo da Função Indicadora

Define-se a função  $\vec{G}(\vec{x}, t)$  como o gradiente da função indicadora:

$$\vec{G}(\vec{x}, t) \equiv \vec{\nabla}I(\vec{x}, t). \quad (2.29)$$

sendo  $\vec{G}(\vec{x}, t)$  calculado através da seguinte equação:

$$\vec{G}(\vec{x}, t) = \sum_k D(\vec{x} - \vec{x}_k) \vec{n}(\vec{x}_k) \Delta s(\vec{x}_k), \quad (2.30)$$

onde  $\vec{n}(\vec{x}_k)$  é a normal à interface e  $\Delta s(\vec{x}_k)$  é o comprimento de arco entre os dois pontos consecutivos da interface. O comportamento da função  $\vec{G}(\vec{x}, t)$  sobre uma interface unidimensional é ilustrado na figura 2.7 abaixo. Considere a interface ilustrada na figura 2.7 (a). Para visualizar qualitativamente a função  $\vec{G}(\vec{x}, t)$ , toma-se o plano  $y = 0$  e plota sobre o eixo a sua distribuição, a qual está ilustrada na figura 2.7 (b).

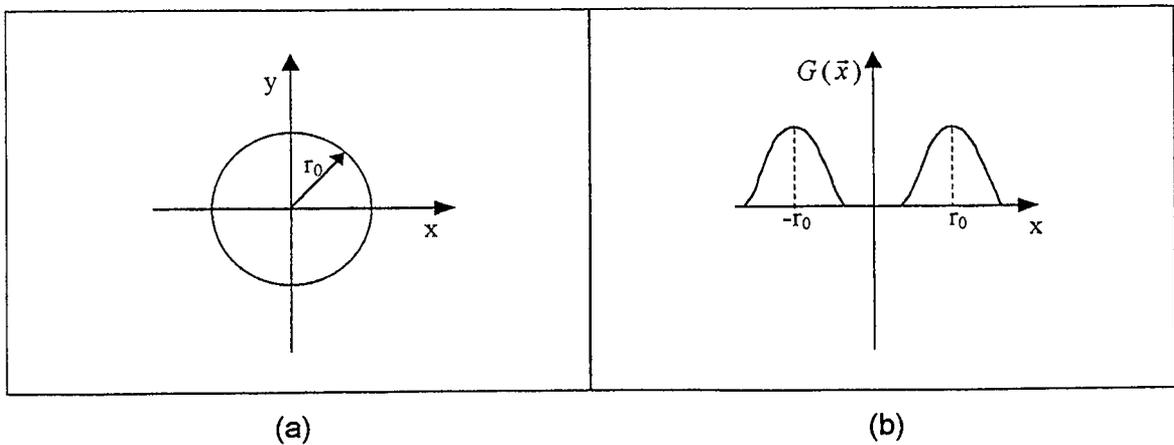


Figura 2.7 –Interface de raio  $r_0$  (a) e comportamento da função  $\vec{G}(\vec{x}, t)$  sobre a interface(b).

Como definido anteriormente, o gradiente da função indicadora é igual a  $\vec{G}(\vec{x}, t)$  e o comportamento desta função sobre uma interface unidimensional está representado na figura (2.7). Na figura (2.8) mostra-se o comportamento do seu divergente sobre a mesma interface apresentada na figura 2.7(b).

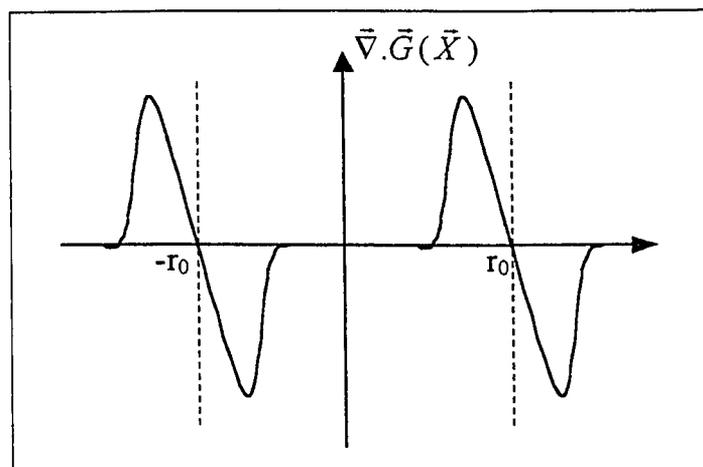


Figura 2.8 - Comportamento da função  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{x}, t)$ .

Desta forma, aplicando-se o operador divergente sobre a equação (2.29) obtêm-se:

$$\nabla^2 I(\bar{x}, t) = \bar{\nabla} \cdot \bar{G}(\bar{x}, t). \quad (2.31)$$

Observa-se que o segundo membro desta equação é conhecido. Esta equação é resolvida pelo método das diferenças finitas. Para a solução da equação (2.31), utiliza-se como condição de contorno o valor zero em todo o domínio. O sistema linear é resolvido pelo Método das Sobre-Relaxações Sucessivas (SOR). A discretização da equação (2.31), bem como a metodologia numérica para sua solução é apresentada no próximo capítulo.

## 2.8 Cálculo dos Parâmetros Geométricos

No cálculo da força interfacial e da função indicadora nota-se a necessidade de se conhecer os parâmetros geométricos da interface. Ela pode ser modelada por uma equação vetorial paramétrica e por ajuste de polinômios de Lagrange de grau “n” sobre um conjunto de “n + 1” pontos sequenciais.

A interface pode ser modelada por uma equação paramétrica do tipo:

$$\bar{R}(p) = g(p)\bar{i} + h(p)\bar{j}. \quad (2.32)$$

A normal, a tangente, a curvatura e o comprimento de arco podem ser calculados pelas seguintes equações, respectivamente:

$$\bar{n}(\bar{x}_k, t) = \frac{-h'\bar{i} + g'\bar{j}}{\sqrt{(h')^2 + (g')^2}}. \quad (2.33)$$

$$\bar{t}(\bar{x}_k, t) = \frac{g'\bar{i} + h'\bar{j}}{\sqrt{(h')^2 + (g')^2}}. \quad (2.34)$$

$$\kappa(\bar{x}_k, t) = \frac{g'h'' - g''h'}{\{(h')^2 + (g')^2\}^{3/2}} \quad (2.35)$$

$$s(\bar{x}_k) = \frac{1}{4} \left( \sqrt{g'^2(\bar{x}_{k-1}) + h'^2(\bar{x}_{k-1})} + 2\sqrt{g'^2(\bar{x}_k) + h'^2(\bar{x}_k)} + \sqrt{g'^2(\bar{x}_{k+1}) + h'^2(\bar{x}_{k+1})} \right). \quad (2.36)$$

onde ( ' ) é a derivada em relação ao parâmetro  $p$ . Com este tipo de formulação é possível também obter o raio de curvatura, ou seja:

$$r(\bar{x}_k, t) = \frac{1}{\kappa(\bar{x}_k, t)}. \quad (2.37)$$

As coordenadas  $x_k(\bar{i})$  e  $y_k(\bar{j})$  são conhecidas, ou seja, as posições dos pontos da interface são definidas. Para o cálculo das componentes  $g(p)$  e  $h(p)$ , utiliza-se polinômios de Lagrange de grau "n" sobre um conjunto de "n + 1" pontos:

$$g_n(p) = \sum_{k=0}^n L_k(p) x_k(p_k); \quad (2.38)$$

$$h_n(p) = \sum_{k=0}^n L_k(p) y_k(p_k); \quad (2.39)$$

$$L_k(p) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{p - p_j}{p_k - p_j}; \quad (2.40)$$

onde  $x_k(p_k)$  e  $y_k(p_k)$  são os pontos discretos da interface. A sequência de pontos pode ser definida como:

$$\{x_k(p_k), y_k(p_k)\} \quad k = 0, \dots, n \text{ e } p_k = k, k = 0, \dots, n \quad (2.41)$$

$n$  é o grau do polinômio.

No presente trabalho são utilizados polinômios de grau 4.

Como exemplo, calcula-se os parâmetros geométricos sobre uma posição dada (ponto 2) em uma circunferência com centro na origem do sistemas de coordenadas e de raio 3 (ver

figura 2.9). Utiliza-se uma série de 5 pontos e consequentemente polinômios de Lagrange de grau 4.

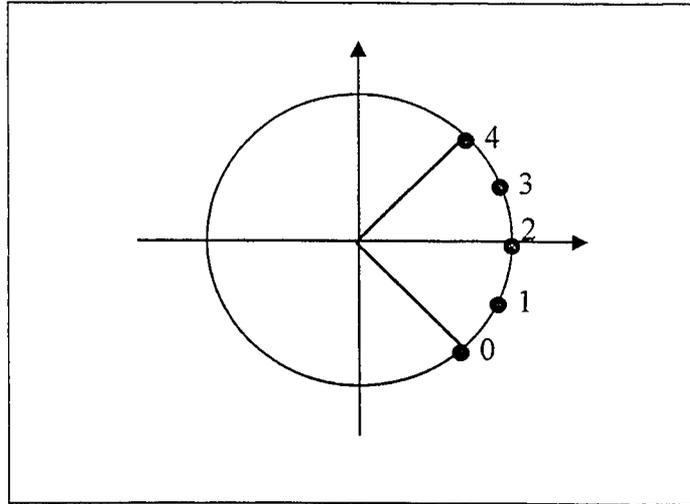


Figura 2.9 - Circunferência de centro na origem e raio 3.

Derivando as equações (2.38) e (2.39) obtém-se:

$$g'_4(p_2) = \{x_0(p_0) - 8x_1(p_1) + 8x_3(p_3) - x_4(p_4)\} / 12,$$

$$h'_4(p_2) = \{y_0(p_0) - 8y_1(p_1) + 8y_3(p_3) - y_4(p_4)\} / 12,$$

$$g''_4(p_2) = \{-x_0(p_0) + 16x_1(p_1) - 30x_2(p_2) + 16x_3(p_3) - x_4(p_4)\} / 12,$$

$$h''_4(p_2) = \{-y_0(p_0) + 16y_1(p_1) - 30y_2(p_2) + 16y_3(p_3) - y_4(p_4)\} / 12,$$

A posição dos pontos é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0(p_0) = x_0(0) = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2,12132 \\ x_1(p_1) = x_1(1) = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 2,77164 \\ x_2(p_2) = x_2(2) = 3 \cos(0) = 3,00000 \\ x_3(p_3) = x_3(3) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2,77164 \\ x_4(p_4) = x_4(4) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,12132 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(p_0) = y_0(0) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2,12132 \\ y_1(p_1) = y_1(1) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -1,14805 \\ y_2(p_2) = y_2(2) = 3 \sin(0) = 0,00000 \\ y_3(p_3) = y_3(3) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1,14805 \\ y_4(p_4) = y_4(4) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,12132 \end{array} \right.$$

Desta forma, obtém-se o valor das derivadas dos polinômios e os parâmetros geométricos para o ponto 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} g'_4(2) = 0,0 \\ h'_4(2) = 1,17718 \\ g''_4(2) = -0,462513 \\ h''_4(2) = 0,0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} = -\vec{i} + 0\vec{j} \\ \vec{t} = 0\vec{i} + \vec{j} \\ \kappa = 0,33762 \\ r = \frac{1}{\kappa} = 2,99614 \end{array} \right.$$

## 2.9 Formulação para o Processo de Remalhagem

Uma interface deve ser definida inicialmente por meio de um conjunto de pontos de coordenadas conhecidas. O número de pontos lagrangeanos necessários para discretizar a interface também é definido inicialmente. No entanto, quando a interface é transportada, ela pode passar por processos de deformação, dependendo da natureza do campo de velocidade que a transporta. Neste caso, para manter a regularidade da malha necessita-se refazê-la, aumentando e redistribuindo o número de pontos. A necessidade da remalhagem se deve a problemas de instabilidades numéricas no processo de transporte da interface, caso as distâncias entre os pontos fiquem muito aleatórias. Para tanto, utiliza-se o seguinte critério de estabilidade, baseado no tamanho típico da malha euleriana:

$$0,9 \leq \frac{\Delta s}{h} \leq 1,1 \quad (2.42)$$

onde  $\Delta s$  é a distância entre os pontos lagrangeanos da interface e  $h$  é o tamanho típico da malha euleriana.

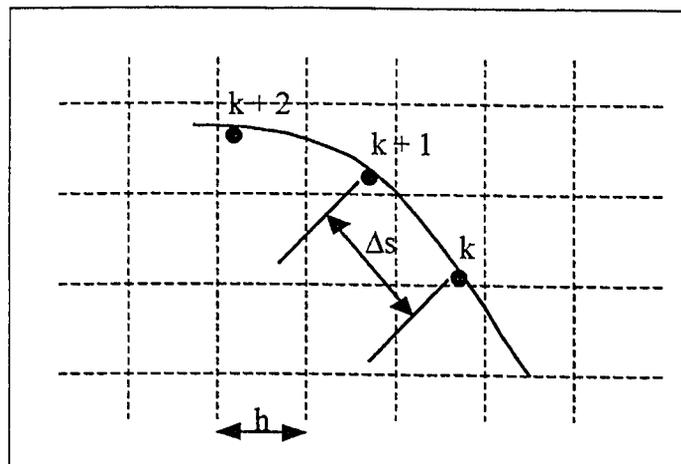


Figura 2.10 - Representação do tamanho típico da malha euleriana ( $h$ ) e da distância entre dois pontos lagrangeanos ( $\Delta s$ ).

Os limites deste critério são determinados por meio de experiências numéricas que apresentam estabilidade. O processo de regularização pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Escolhe-se dois pontos lagrangeanos  $k$  e  $k+1$ , sendo  $k$  o ponto de partida. Calcula-se a distância entre estes dois pontos, utilizando-se a equação abaixo:

$$\Delta s_{k+1/2} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}; \quad (2.43)$$

2. Submete-se esta distância ao critério (equação 2.42). Caso o critério não seja obedecido, retira-se ou acrescenta-se um ponto de tal forma que ele fique satisfeito. No caso de se acrescentar um ponto, o processo é feito de tal forma que ele pertença à reta que passa pelos dois pontos adjacentes a este novo ponto;
3. Retorna-se ao item 1 e repete-se o processo para os pontos  $k+1$  e  $k+2$ ;
4. Varre-se todos os pontos da interface, após o que a malha estará regularizada.

Observa-se que o critério descrito no item “2” pode criar difusão numérica de massa. No entanto, para malhas finas esta difusão não é relevante como será ilustrado posteriormente.

## 2.10 Cálculo do Salto de Pressão entre a Fase Contínua e Dispersa

A figura 2.11 abaixo ilustra a diferença de pressão ( $\Delta p$ ) existente entre as duas fases:

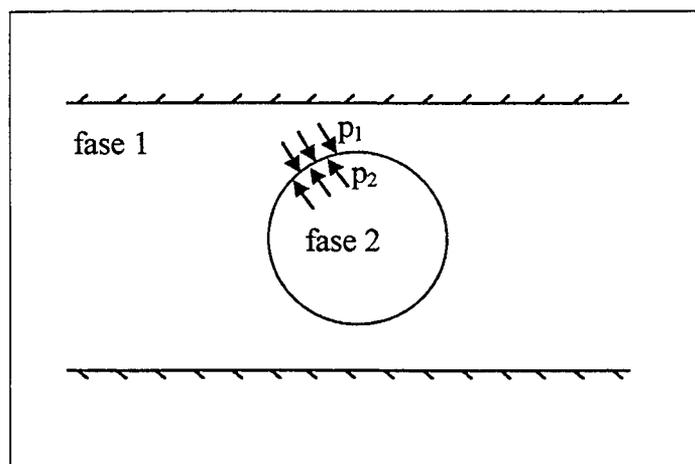


Figura 2.11 - Diferença de pressão entre a fase contínua (1) e a fase dispersa (2).

O cálculo do salto de pressão entre as fases para uma interface circular é realizado através da seguinte equação, (White, 1991):

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{r} \quad (2.44)$$

onde  $\sigma$  é o coeficiente de tensão superficial e  $r$  é o raio de curvatura.

Adimensionalizando a equação (2.44), dividindo-se ambos os lados por  $\rho g d$  e sabendo que  $r = d/2$ , tem-se que:

$$\frac{\Delta p}{\rho g d} = \frac{2\sigma}{\rho g d^2} \quad (2.45)$$

ou

$$\Delta p^* = \frac{2}{Eo} \quad (2.46)$$

## 2.11 Algoritmo Resumido para o Transporte da Interface

A solução das equações apresentadas no presente trabalho exige uma certa sequência de cálculo. Para simplificar esta sequência montou-se o seguinte algoritmo:

- 1- Para o tempo inicial, define-se uma geometria conhecida para a interface. Desta forma, caracteriza-se a interface no instante  $t_0$ ;
- 2- Calcula-se os parâmetros geométricos da interface;
- 3- Calcula-se a função indicadora, utilizando a equação (2.31);
- 4- Avalia-se a força interfacial ( $\vec{F}$ ), os campos de densidade ( $\rho$ ) e viscosidade ( $\mu$ ), utilizando as equações (2.26) (2.27) e (2.28);
- 5- Resolve-se as equações de Navier-Stokes com propriedades físicas variáveis e com a presença da força interfacial;
- 6- Interpola-se as velocidades calculadas no item 5, encontrando as velocidades de transporte da malha lagrangeana. Transporta-se e regulariza a interface;
- 7- Conhecendo as novas posições dos pontos da interface, caracteriza-se uma nova geometria;
- 8- Retorna-se ao item 2.

## Capítulo 3

### Discretizações e Metodologia Numérica

#### 3.1 Discretização e Metodologia Numérica para Solução da Função Indicadora

Para discretização da equação (2.31) apresentada no capítulo anterior, ilustra-se na figura 3.1 abaixo, uma malha euleriana com um nó  $(i, j)$  e seus pontos vizinhos.

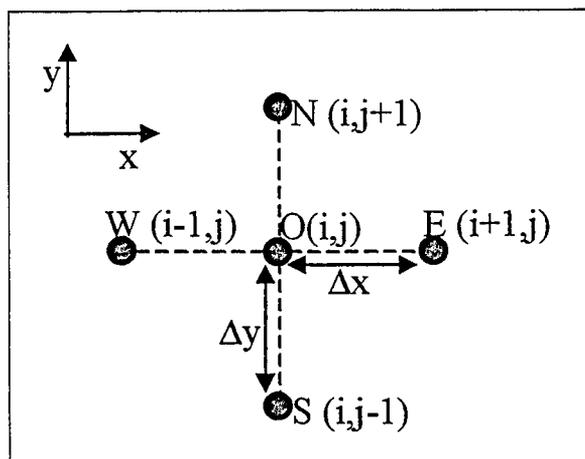


Figura 3.1 - Ponto euleriano e seus vizinhos.

A equação (2.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}. \quad (3.1)$$

Discretizando cada termo da equação (3.1), tem-se:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{I_{i+1,j} - I_{i-1,j}}{2\Delta x} = \frac{I_E - I_W}{2\Delta x}. \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{I_{i,j+1} - I_{i,j-1}}{2\Delta y} = \frac{I_N - I_S}{2\Delta y}. \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{I_{i+1,j} + I_{i-1,j} - 2I_{i,j}}{\Delta x^2} = \frac{I_E + I_W - 2I_O}{\Delta x^2}. \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{I_{i,j+1} + I_{i,j-1} - 2I_{i,j}}{\Delta y^2} = \frac{I_N + I_S - 2I_O}{\Delta y^2}. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial Gx}{\partial x} = \frac{G_{i+1,j} - G_{i-1,j}}{2\Delta x}. \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial Gy}{\partial y} = \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (3.7)$$

As equações (3.6) e (3.7) podem ser expressas por:

$$g(x, y) = \frac{G_{i+1,j} - G_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.4), (3.5) e (3.8) em (3.1), tem-se;

$$\frac{I_E + I_W - 2I_O}{\Delta x^2} + \frac{I_N + I_S - 2I_O}{\Delta y^2} = g(x, y). \quad (3.9)$$

Onde  $g(x, y)$  é conhecida ao longo da solução do sistema linear. Define-se os seguintes coeficientes para a solução da equação (3.1):

$$a_E = a_W = \frac{I}{\Delta x^2}. \quad (3.10)$$

$$a_S = a_N = \frac{I}{\Delta y^2}. \quad (3.11)$$

$$a_O = -(a_E + a_W + a_S + a_N). \quad (3.12)$$

Substituindo os coeficientes na equação (3.9), tem-se o seguinte sistema linear de equações:

$$I_O a_O + I_E a_E + I_S a_S + I_W a_W + I_N a_N = g(x, y). \quad (3.13)$$

Para a solução da equação acima aplica-se o Método das Sobre-Relaxações Sucessivas (SOR). Desta forma, a solução pode ser apresentada como:

$$\bar{I}_O = I_O(1-w) - w \left( I_E \frac{a_E}{a_O} + I_S \frac{a_S}{a_O} + I_W \frac{a_W}{a_O} + I_N \frac{a_N}{a_O} - \frac{g(x, y)}{a_O} \right), \quad (3.14)$$

onde  $\bar{I}_O$  e  $I_O$  correspondem ao valor da função indicadora na interação atual e anterior respectivamente. O valor do coeficiente de relaxação da equação (3.14) acima, é representado por  $w$ . O comportamento da função indicadora sobre a interface que está representada na figura (2.7 a) está ilustrado na figura (3.2) abaixo onde a interface está localizada no valor zero do eixo horizontal.

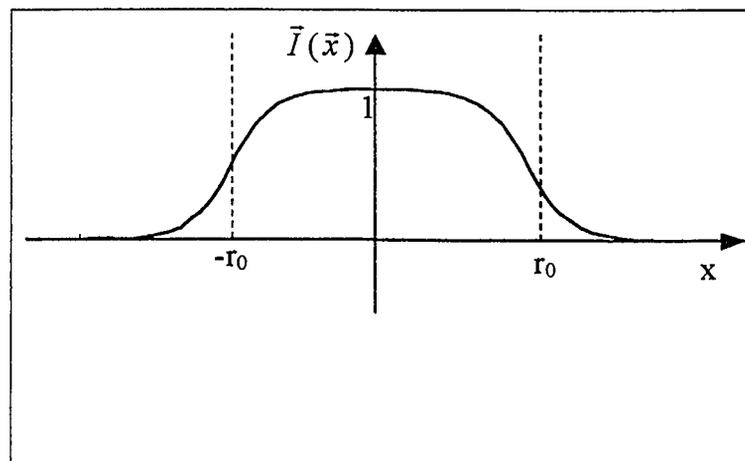


Figura 3.2 - Comportamento da função indicadora.

### 3.2 Metodologia Numérica para Solução das Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes apresentadas na Capítulo 2 são representadas aqui de forma generalizada em função de uma propriedade  $\phi$  qualquer:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \phi u_j - \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] = S^\phi \quad (3.15)$$

As grandezas que aparecem nesta equação são descritas na tabela 1 abaixo, representando a equação da conservação de massa e as duas componentes da equação de conservação da quantidade de movimento.

Tabela 3.1 - Representação generalizada das equações de Conservação

	$\phi$	$\Gamma^\phi$	$S^\phi$
Conservação da Massa	1	0	0
Conservação da Quantidade de movimento (x)	$U$	$\mu$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + g_x + F_x$
Conservação da Quantidade de movimento (y)	$V$	$\mu$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + g_y + F_y$

A solução da equação (3.15) passa por um processo de discretização em volumes finitos. Integrando-se esta equação sobre um volume de controle de tamanho  $\Delta x \Delta y$  obtém-se:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV + \int_{VC} \bar{\nabla} \cdot [\rho \phi \bar{V} - \Gamma^\phi \bar{\nabla} \phi] dV = \int_{VC} S^\phi dV \quad (3.16)$$

Utilizando o teorema da divergência de Gauss, sobre o segundo termo desta equação, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\rho \phi) dV + \int_{SC} (\rho \phi \bar{V}) d\bar{A} - \int_{SC} (\Gamma^\phi \bar{\nabla} \phi) d\bar{A} = \int_{VC} S^\phi dV \quad (3.17)$$

Esta equação dá origem à seguinte equação discreta:

$$\frac{M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + \dot{M}_e \phi_e^\theta - \dot{M}_w \phi_w^\theta + \dot{M}_n \phi_n^\theta - \dot{M}_s \phi_s^\theta = D_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e^\theta - D_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w^\theta + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n^\theta - D_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s^\theta + L[S^\phi]^\theta \quad (3.18)$$

Os índices que aparecem na equação (3.18) são ilustrados na figura 3.3.

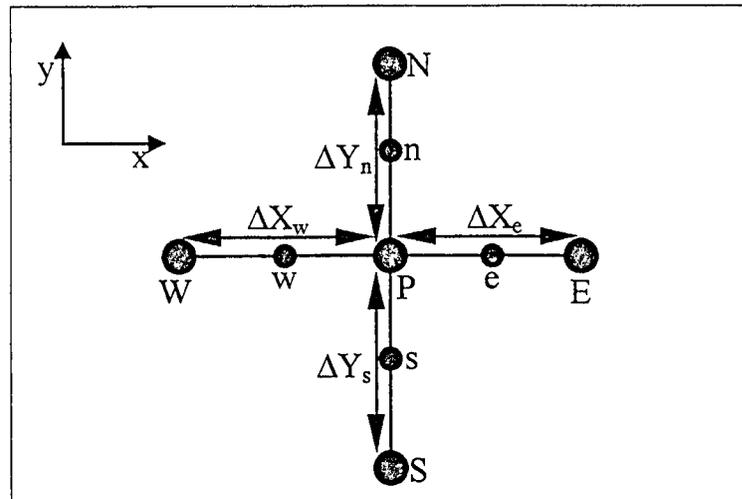


Figura 3.3 - Pontos para a discretização do domínio.

Para  $\phi = 1$ , a equação (3.18) torna-se a equação de conservação da massa discreta.

$$\frac{M_P - M_P^o}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (3.19)$$

Observa-se que o sobrescrito "o" representa o tempo precedente. O termo  $M_P$  é igual a  $\rho\phi$  e representa a massa ou a quantidade de movimento contidas no volume de integração. Se  $\phi = 1$  tem-se a massa e se  $\phi$  for igual a componente de velocidade ( $u$  ou  $v$ ) então tem-se a quantidade de movimento no volume de integração.

Se  $\theta = 1$  para todos os termos pressão e velocidade a discretização é totalmente implícita. Se  $\theta = 0$  para todos os termos então a discretização é totalmente explícita. No presente trabalho optou-se pela discretização implícita. Doravante, utilizar-se-á um sobrescrito para  $\theta = 0$  e não se utiliza nenhum sobrescrito para  $\theta = 1$ , por questão de simplificação.

Os fluxos de massa convectivos ( $\dot{M}$ ) e os coeficientes difusivos ( $D$ ) são dados por:

$$\dot{M}_e = \rho u \Delta y|_e; \quad (3.20)$$

$$\dot{M}_w = \rho u \Delta y|_w; \quad (3.21)$$

$$\dot{M}_n = \rho v \Delta x|_n; \quad (3.22)$$

$$\dot{M}_s = \rho v \Delta y|_s; \quad (3.23)$$

$$D_{1e} = \Gamma^\phi \Delta y|_e; \quad (3.24)$$

$$D_{1w} = \Gamma^\phi \Delta y|_w; \quad (3.25)$$

$$D_{2n} = \Gamma^\phi \Delta x|_n; \quad (3.26)$$

$$D_{2s} = \Gamma^\phi \Delta x|_s. \quad (3.27)$$

Na equação (3.18) o termo  $L[S^\phi]^\theta$  representa a aproximação numérica da variável  $S^\phi$  entre colchetes. Este termo está especificado na equação (3.39).

As propriedades transportadas  $\phi$  são interpoladas utilizando-se a função do esquema WUDS (Weighted Upstream Differencing Scheme). Os termos convectivos são calculados por:

$$\phi_e = \left(\frac{1}{2} + \alpha_e\right)\phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_e\right)\phi_E; \quad (3.28)$$

$$\phi_w = \left(\frac{1}{2} + \alpha_w\right)\phi_W + \left(\frac{1}{2} - \alpha_w\right)\phi_P; \quad (3.29)$$

$$\phi_n = \left(\frac{1}{2} + \alpha_n\right)\phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_n\right)\phi_N; \quad (3.30)$$

$$\phi_s = \left(\frac{1}{2} + \alpha_s\right)\phi_S + \left(\frac{1}{2} - \alpha_s\right)\phi_P. \quad (3.31)$$

Para os termos difusivos tem-se que:

$$\Gamma_e^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = \beta_e \Gamma_e^\phi \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e}\right); \quad (3.32)$$

$$\Gamma_w^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w = \beta_w \Gamma_w^\phi \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w}\right); \quad (3.33)$$

$$\Gamma_n^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n = \beta_n \Gamma_n^\phi \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_n}\right); \quad (3.34)$$

$$\Gamma_s^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s = \beta_s \Gamma_s^\phi \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y_s}\right). \quad (3.35)$$

No presente trabalho o coeficiente  $\beta$  é tomado igual a 1 e o coeficientes  $\alpha$  é calculado através da equações (3.36), conforme sugerido por Maliska (1995). Outros valores de  $\beta$  foram testados e não se observou maiores influências sobre os resultados.

$$\alpha_j = \frac{Pe_j^2}{10 + 2Pe_j^2}, \quad (3.36)$$

Nesta equação  $Pe$  corresponde ao número de Peclet que é calculado por:

$$Pe_j = \frac{\rho u_j \Delta x_j}{\Gamma_j^\phi}, \quad (3.37)$$

onde  $j$  indica “e”, “w”, “n” e “s”

Substituindo as equações (3.28) a (3.31) e as equações (3.32) a (3.35) na equação (3.18), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{M_P \phi_P}{\Delta t} + \phi_P^\theta \left[ \dot{M}_e \left( \frac{1}{2} + \alpha_e \right) - \dot{M}_w \left( \frac{1}{2} - \alpha_w \right) + \dot{M}_n \left( \frac{1}{2} + \alpha_n \right) - \dot{M}_s \left( \frac{1}{2} - \alpha_s \right) - S_P \Delta V + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_e \right. \\
& \left. + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_w + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_n + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_{se} \right] = \phi_E^\theta \left[ - \left( \frac{1}{2} - \alpha_e \right) \dot{M}_e + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_e \right] + \phi_W^\theta \left[ \left( \frac{1}{2} + \alpha_w \right) \dot{M}_w + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_w \right] \\
& + \phi_N^\theta \left[ - \left( \frac{1}{2} - \alpha_n \right) \dot{M}_n + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_n \right] + \phi_S^\theta \left[ \left( \frac{1}{2} + \alpha_s \right) \dot{M}_s + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_s \right] + \frac{M_P^\circ \phi_P^\circ}{\Delta t} + S_C \Delta V.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Os coeficientes  $S_P$  e  $S_C$  que surgem na equação (3.38) são provenientes de um processo de linearização do termo fonte. Esta linearização pode ser feita utilizando a equação (3.39), abaixo:

$$L[S^\phi]^\theta = S_P \Delta V + S_C \Delta V \tag{3.39}$$

Para que a equação (3.38) assuma uma forma mais reduzida e mais conveniente para se trabalhar, adiciona-se a equação de conservação de massa (equação(3.19)), multiplicada por  $-1$ , à equação (3.38), no interior do colchete que multiplica  $\phi_P^\theta$ . Desta forma, após manipulações algébricas, encontra-se:

$$\frac{M_P}{\Delta t} \phi_P + A_P^* \phi_P^\theta = A_e \phi_E^\theta + A_w \phi_W^\theta + A_s \phi_S^\theta + A_n \phi_N^\theta + \frac{M_P^\circ}{\Delta t} \phi_P^\circ + S_C \Delta V, \tag{3.40}$$

onde:

$$A_P^* = A_e + A_w + A_n + A_s - S_P \Delta V - \frac{M_P}{\Delta t} + \frac{M_P^\circ}{\Delta t}; \tag{3.41}$$

$$A_e = - \left( \frac{1}{2} - \alpha_e \right) \dot{M}_e + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_e; \tag{3.42}$$

$$A_w = \left( \frac{1}{2} + \alpha_w \right) \dot{M}_w + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_w; \tag{3.43}$$

$$A_n = -\left(\frac{1}{2} - \alpha_n\right) \dot{M}_n + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_n; \quad (3.44)$$

$$A_s = \left(\frac{1}{2} + \alpha_s\right) \dot{M}_s + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_s. \quad (3.45)$$

Como dito anteriormente, utiliza-se a formulação implícita, ou seja, a equação (3.40) é escrita para  $\theta = 1,0$ . Desta forma, encontra-se:

$$A_P \phi_P = \frac{M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + \sum A_{nb} \phi_{NB} + Sc \Delta V. \quad (3.46)$$

onde

$$A_P = \sum A_{NB} - S_P \Delta v + \frac{M_P^o}{\Delta t}, \quad (3.47.a)$$

$$e \quad A_{NB} = A_e + A_w + A_s + A_n. \quad (3.47.b)$$

Substituindo  $\phi$  pelas variáveis dependentes, tem-se sistemas de equações aproximadas a serem resolvidos. Para um escoamento bidimensional, o sistema de equações torna-se:

$$A_P u_P = A_e u_E + A_w u_W + A_n u_N + A_s u_S - L[P^u] \Delta V + B^u; \quad (3.48)$$

$$A_P v_P = A_e v_E + A_w v_W + A_n v_N + A_s v_S - L[P^v] \Delta V + B^v; \quad (3.49)$$

$$\frac{M_P - M_P^o}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0. \quad (3.50)$$

Os termos  $L[P^u]$  e  $L[P^v]$  são os termos lineares envolvendo as pressões e os termos  $B^u$  e  $B^v$  correspondem à gravidade ( $g$ ) e o campo de força interfacial ( $\vec{F}$ ).

Para o acoplamento pressão-velocidade utiliza-se o método PRIME (Pressure Implicit Momentum Explicit) com arranjo co-localizado. Para este tipo de arranjo, todas as variáveis

possuem o mesmo volume de controle para o balanço das propriedades, isto faz com que o cálculo dos coeficientes das equações de conservação seja obtido de maneira mais simples e conseqüentemente exigindo um espaço de memória computacional menor. Contudo, com o arranjo co-localizado, torna-se necessário o cálculo das velocidades ( $u$  e  $v$ ) nas interfaces do volume de controle, como ilustra a figura (3.4), a fim de que o acoplamento pressão-velocidade não fique comprometido.

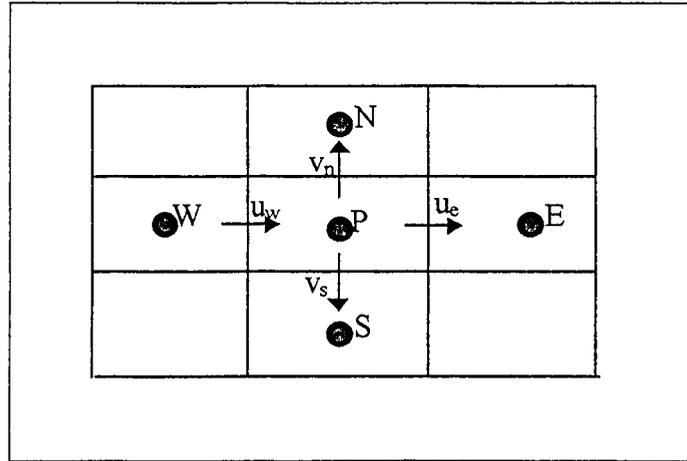


Figura 3.4 - Velocidades nas interfaces do volume de controle.

A vantagem do método PRIME é que a correção de velocidade e o cálculo da pressão é realizado em um só passo. Maliska (1995) propõe para o cálculo das pseudo-velocidades ( $u_e^*$  e  $v_n^*$ ) na interface, como sendo:

$$u_e^* = \frac{\sum (A_{nb} u_{NB})_P + \sum (A_{nb} u_{NB})_E + B_u|_P + B_u|_E}{(A_p)_P + (A_p)_E}, \quad (3.51)$$

$$v_n^* = \frac{\sum (A_{nb} v_{NB})_P + \sum (A_{nb} v_{NB})_N + B_v|_P + B_v|_N}{(A_p)_P + (A_p)_N}, \quad (3.52)$$

onde o termo fonte que está representado por  $B_u$  e  $B_v$  corresponde a todos os termos fonte da equação de quantidade de movimento, exceto o gradiente de pressão. De maneira análoga, torna-se possível calcular as pseudo-velocidades  $u_w^*$  e  $v_s^*$  nas interfaces do volume de controle. As equações para o cálculo das pseudo-velocidades são provenientes de uma média da equação da quantidade de movimento, equações (3.48) e (3.49), aplicada nos pontos "P", "E", "W", "S" e "N". Com este campo de pseudo-velocidades e utilizando a equação de conservação

de massa é possível obter uma equação para o cálculo do campo da pressão. Esta equação pode ser escrita da forma:

$$A_p P_p = A_e P_E + A_w P_W + A_s P_S + A_n P_N - \nabla \cdot \vec{V}^* . \quad (3.53)$$

Determinado o campo de pressão, faz-se necessário corrigir os campos de velocidade porque as equações (3.51) e (3.52) utilizadas para o cálculo inicial das velocidades não levam em conta o gradiente de pressão, por este fato é que denomina-se esta velocidade de pseudo-velocidade. Desta forma, utiliza-se para a correção das velocidades as seguintes equações sugerida por Maliska (1995):

$$u_e = u_e^* - \bar{d}_e^u (P_E - P_p); \quad (3.54)$$

$$u_w = u_w^* - \bar{d}_w^u (P_p - P_W); \quad (3.55)$$

$$v_n = v_n^* - \bar{d}_n^v (P_N - P_p); \quad (3.56)$$

$$v_s = v_s^* - \bar{d}_s^v (P_p - P_S). \quad (3.57)$$

onde:

$$\bar{d}_e^u = \left( \frac{\Delta y}{A_p} \right)_e \quad (3.58)$$

os outros valores de  $\bar{d}$  são calculados de maneira análoga.

Como o arranjo de malha utilizado no presente trabalho é do tipo co-localizado e não existem velocidades armazenadas nas interfaces, faz-se necessário calcular as velocidades no centro do volume de controle. Este processo é realizado através de uma média aritmética das velocidades da interface.

Como já foi bastante enfatizado, o esquema de discretização temporal aqui utilizado é do tipo completamente implícito. No entanto cabe ressaltar que este esquema não é de todo apropriado para análise de fenômenos transientes, quando se interessa por simular o fenômeno físico de forma detalhada no tempo. Ele é mais apropriado para determinação do estado permanente de um dado sistema em análise.

Neste momento recapitula-se os esquemas de marcha no tempo e de acoplamento pressão-velocidade utilizados no presente trabalho. Trata-se do método PRIME (*pressure implicit, momentum explicit*). Resumidamente o que se faz está esquematizado nos itens abaixo:

- a. Inicia-se todas as variáveis de cálculo;
- b. Incrementa-se o tempo;
- c. Inicia-se o cálculo dos campos das velocidades utilizando-se as equações (3.51) e (3.52) na qual não tem o gradiente de pressão – obtém-se as chamadas *pseudo-velocidades* – este cálculo é efetuado com uma iteração apenas do método *SOR*;
- d. Resolve-se o sistema linear para a pressão, equação (3.53), utilizando-se o método *SOR*, fazendo-se tantas iterações quantas forem necessárias, até a convergência do campo de pressão – utiliza-se os campos das *pseudo-velocidades* precedentes;
- e. Corrige-se as velocidades com os gradientes de pressão recém avaliados, utilizando-se as equações (3.54) e (3.55) e retorna-se ao item c com os novo campos das velocidades e efetua-se um novo ciclo *SOR* sobre as velocidades;
- f. Verifica-se a convergência do campo de pressão: se não convergiu continua no item d e se convergiu retorna-se ao item b e atualiza-se o tempo;

Observa-se que estes dois ciclos são repetidos até que o campo de pressão não apresente mais variações, dentro de uma dada tolerância. Ao fazer estes dois *loops* tem-se um processo equivalente à solução de três sistemas lineares simultâneos: dois para as velocidades e um para a pressão. Este fato permite que se marche no tempo com grandes passos de tempo e se atinja rapidamente o regime permanente. No entanto, para análise do transitório dos sistemas, este método completamente implícito torna-se caro já que, por razões físicas é necessário que se trabalhe com pequenos passos de tempo.

Para resolver este problema, no contexto da presente pesquisa, onde o maior interesse é se capturar fenômenos de altas frequências, o que se fará é a modificação do algoritmo no sentido de limitar o número de iterações entre o cálculo das velocidades e da solução do sistema linear para pressão. Para tanto o passo de tempo pode ser calculado utilizando-se uma composição do passo de tempo convectivo e do passo de tempo difusivo. Calcula-se este

passo de tempo para todas as células da malha e escolhe-se o mínimo encontrado. Este é o chamado critério de estabilidade *CFL* utilizado para os métodos de discretização temporal semi-implícito, para os quais as velocidades são resolvidas sem passar pela solução de sistemas lineares e a pressão é resolvida via solução de um sistema linear.

No caso do método acima, uma vez limitado o número de iterações entre as velocidades e a pressão o que estará sendo praticado é o método semi-implícito, uma vez que as velocidades do tempo atual estarão sendo calculadas com as velocidades do tempo precedente e com apenas um ciclo de correção após a solução do sistema linear da pressão. A convergência deste tipo de método pode ser garantida se o passo de tempo for suficientemente pequeno, como garante o critério de estabilidade comentado acima.

## Capítulo 4

### Resultados

#### 4.1 Influência da Remalhagem no Transporte Passivo de Interfaces com Campos de Velocidades Impostos

Com este tipo de exercício objetiva-se testar o processo de regularização da malha lagrangeana. Para tanto uma interface inicialmente circular é submetida a diferentes campos de velocidades cizalhantes, de forma a se criar diferentes processos de deformação.

##### 4.1.1 Campo de Velocidade Cizalhante em Arco-Tangente

O campo de velocidade transportante é gerado utilizando-se a equação abaixo:

$$u(y) = 2 + \frac{2\arctag(y)}{\pi}. \quad (4.1)$$

O campo de velocidade é gerado na malha euleriana. Ele é função da posição  $y$  (ver figura 2.1) e caracteriza o cisalhamento vertical. Para o transporte da interface, via equação (4.1), necessita-se de conhecer as velocidades nos pontos lagrangeanos sobre a interface. Isto é feito via processo de interpolação já descrito no Capítulo 2.

Nas Figuras 4.1 e 4.2 visualiza-se a interface em diferentes posições, as quais correspondem a diferentes valores de tempo. Observa-se o processo de deformação. Na Figura 4.1 tem-se o transporte sem o processo de regularização enquanto na Figura 4.2 tem-se a malha lagrangeana com a regularização. Observa-se no primeiro caso a falta de uniformidade na distribuição dos pontos, evidenciando-se a necessidade deste processo. A malha euleriana utilizada é de 125x65 pontos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. O raio da circunferência inicial é de 5 *mm*. Observa-se que este nível de desuniformidade da malha

lagrangeana seria o bastante para divergir o cálculo numa simulação real onde se resolve as equações de transporte completas.

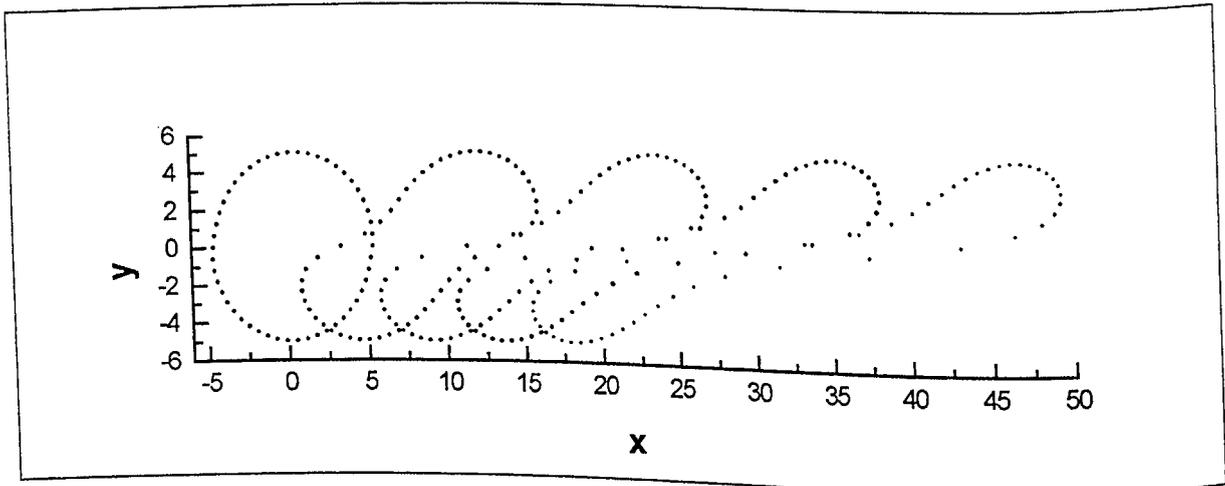


Figura 4.1 - Transporte de uma interface circular por um campo de velocidades arco-tangente sem regularização da malha; tempos: 0,2 s; 4,2 s; 8,2 s; 12,2 s e 16,2 s.

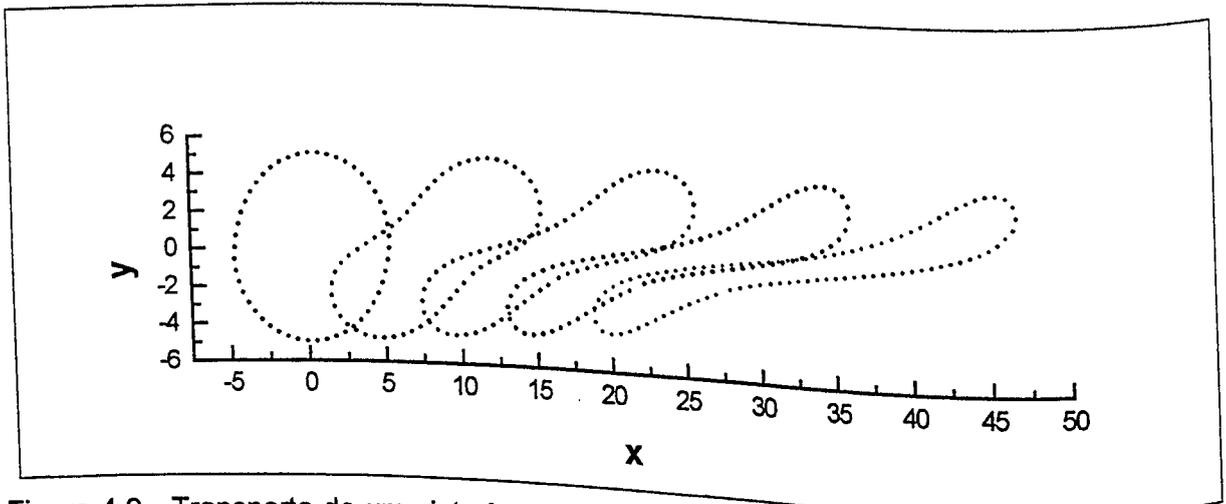


Figura 4.2 - Transporte de uma interface circular por um campo de velocidades arco-tangente com regularização da malha; tempos: 0,2 s; 4,2 s; 8,2 s; 12,2 s e 16,2 s.

#### 4.1.2 Campo Cizalhante com um Choque de Velocidade

Neste caso objetiva-se um teste mais rigoroso através de um choque de velocidade. O campo de velocidade é uniforme, porém composto de dois campos de mesma intensidade mas de sentidos contrários (ver figura 4.3). O raio da circunferência é  $r = 5 \text{ mm}$ . Na Figura 4.4 mostra-se a interface em diferentes instantes. Observa-se o rigoroso processo de deformação.

A interface é igualmente dividida em relação ao plano horizontal. Observa-se que a malha permanece bem regularizada. O número de pontos lagrangeanos inicial é de 100 e no tempo final é de 207, o que ilustra a regularização dinâmica da malha. Observa-se ainda que a área interna à interface é calculada a cada passo de tempo, a qual deve ser conservada. Como a densidade no interior da interface fica constante, isto equivale a dizer que a massa deve ser conservada. Esta verificação será mostrada posteriormente.

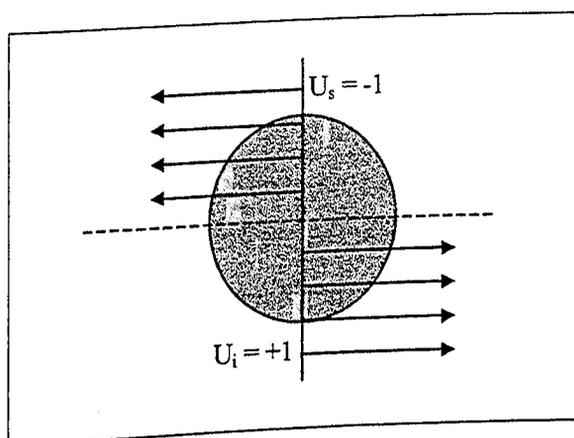


Figura 4.3 - Perfil de velocidades cizalhante imposto; geometria circular inicial.

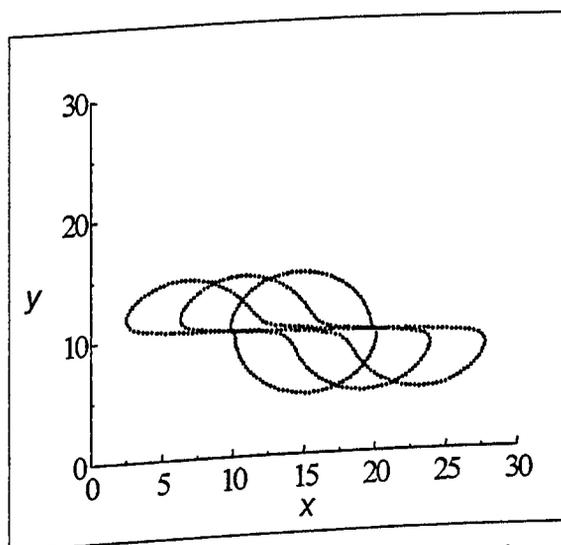


Figura 4.4 - Evolução temporal do processo de transporte de uma interface inicialmente circular; campo de velocidade transportante uniforme cizalhante com um choque de velocidade:  $U_s = -1,0 \text{ m/s}$  e  $U_i = +1,0 \text{ m/s}$ , sendo elas respectivamente a velocidade no plano superior e a velocidade no plano inferior em relação a cota  $y = 10$ .

### 4.1.3 Campo de Velocidade Parabólico

Neste último caso transporta-se a interface com um campo de velocidade dado pela equação abaixo:

$$u(y) = -\frac{1}{50}y^2 + \frac{2}{5}y. \quad (4.2)$$

Nas Figuras (4.5) e (4.6) mostra-se os resultados para diferentes tempos. Observa-se que o transporte e a regularização da malha se mostram coerentes. A dinâmica de deformação é simples de ser entendida. Ela acompanha o campo de velocidade parabólico.

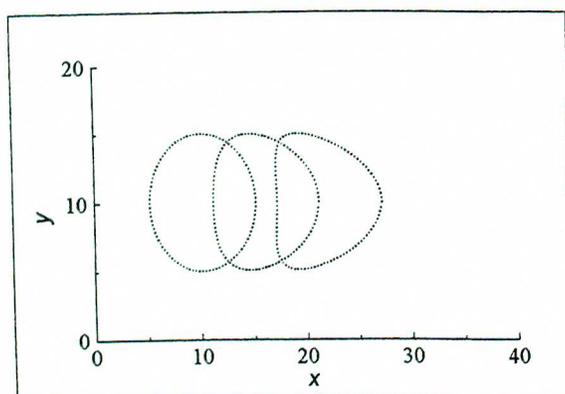


Figura 4.5 - Transporte de uma interface inicialmente circular por um perfil de velocidade cizalhante parabólico; tempos: 0,15 s; 3,15 s e 6,3 s;

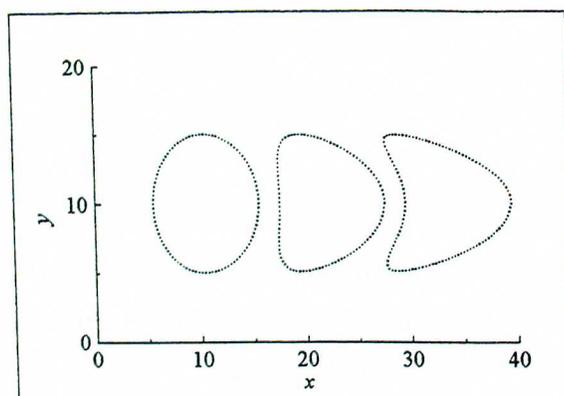


Figura 4.6 - Transporte de uma interface inicialmente circular por um perfil de velocidade cizalhante parabólico; tempos: 0,3 s; 6,3 s e 12,3 s.

## 4.2 Visualização da função indicadora

Plotou-se dois gráficos para demonstrar o cálculo da função indicadora. Na figura (4.7) tem-se a função indicadora para uma interface circular transportada por um campo de velocidade uniforme e na figura (4.8) tem-se uma interface inicialmente circular transportada pelo campo de velocidades cizalhante ilustrado na Figura (4.3). Observa-se pela legenda de cores à direita das figuras que fora da interface a função indicadora assume valor “0” e no seu interior ela assume valor “1”, como se esperava. Nota-se também que a função indicadora se adapta perfeitamente à geometria da interface. De fato, o termo fonte que surge na equação (2.30) depende apenas da distribuição da normal à interface. É este termo fonte que caracteriza a solução da equação de Laplace que governa a função indicadora.

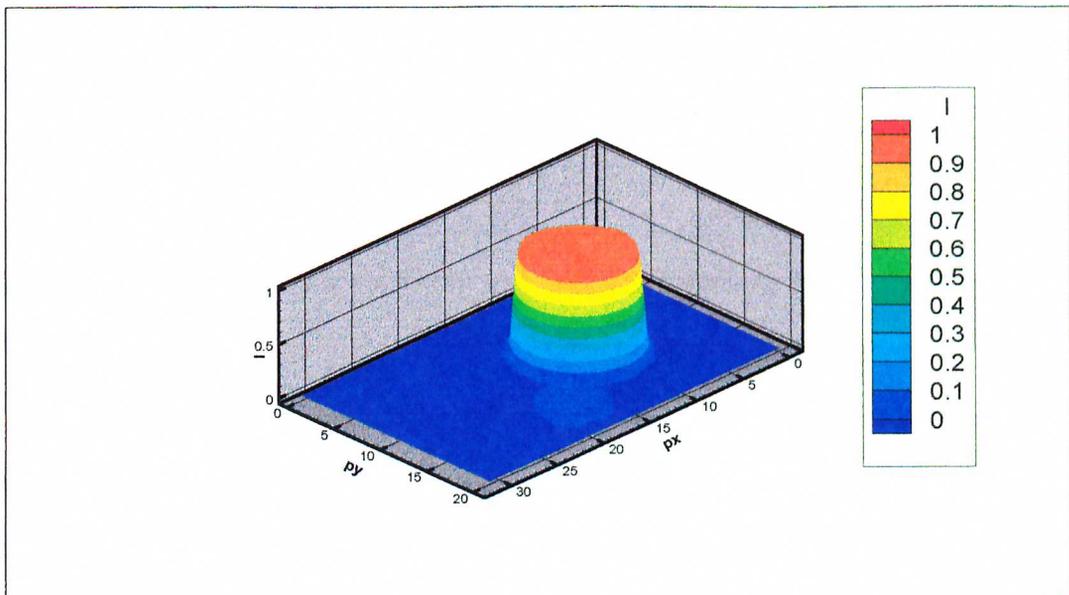


Figura 4.7 - Função indicadora em um campo de velocidade uniforme para  $t = 1,4s$ .

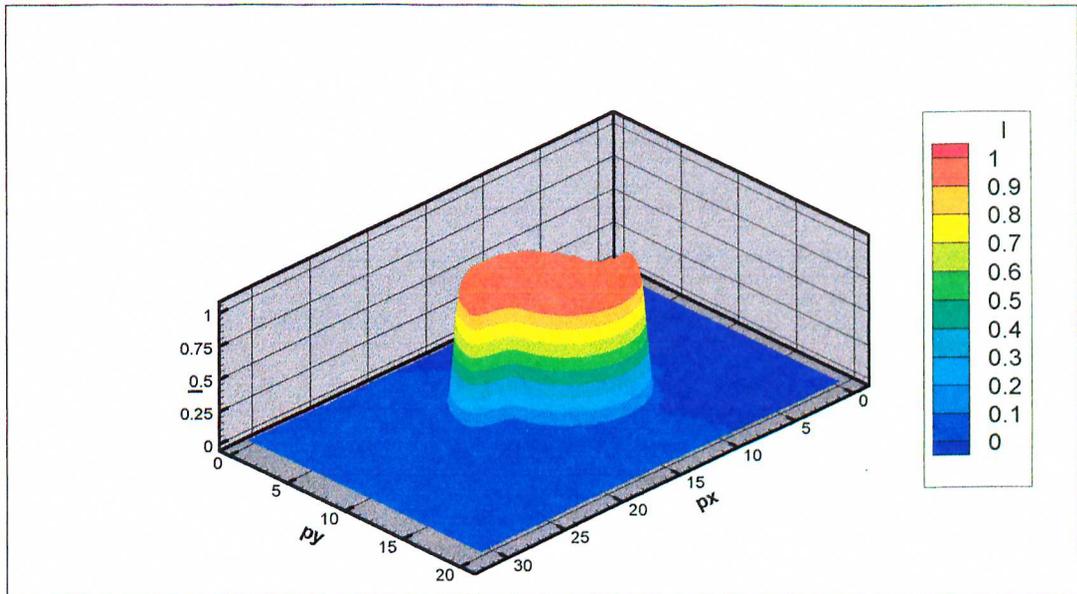


Figura 4.8 - Função indicadora em um campo de velocidades cizalhante para  $t = 1,4s$ .

Para os dois casos acima plotou-se os isovalores da função indicadora em todo domínio de cálculo, para diferentes tempos. Os resultados estão demonstrados nas figuras (4.9) e (4.10) abaixo. A cor azul representa a fase contínua do escoamento com  $I = 0,0$  e a cor vermelha representa a fase dispersa com  $I = 1,0$ . As cores intermediárias representam a interface alarguecida. Este alarguecimento é controlado pela malha euleriana. Ele é necessário para que não ocorra um choque nas propriedades físicas, como será ilustrado posteriormente.

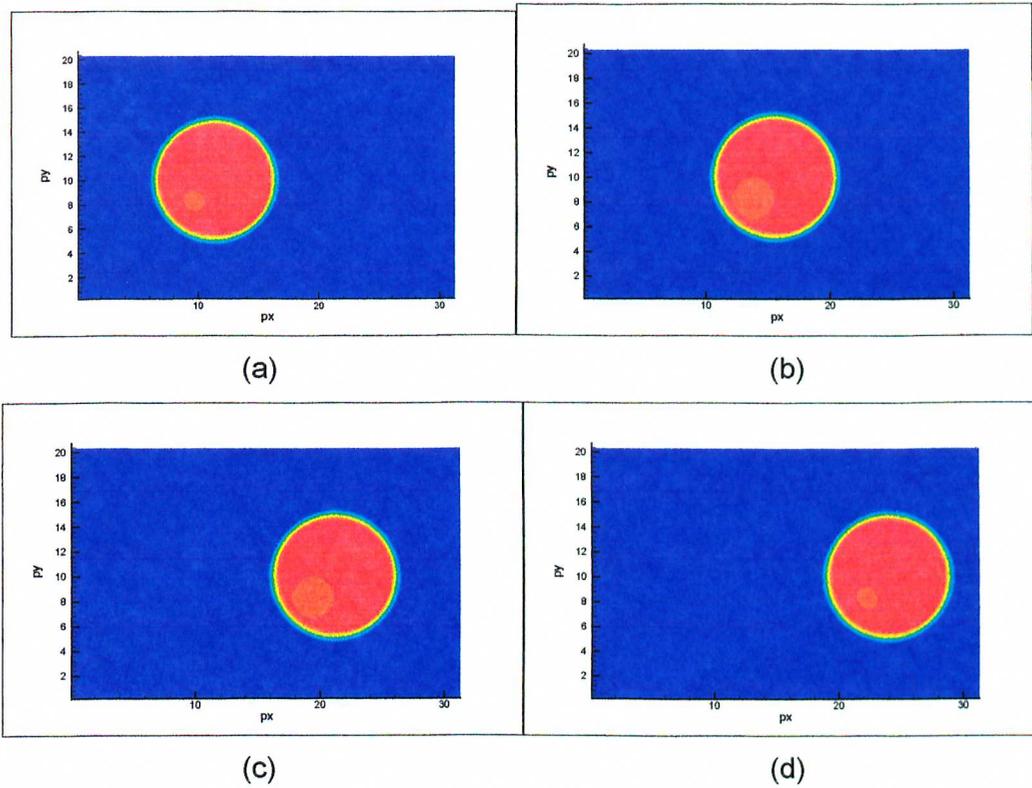


Figura 4.9 - Bolha deslocando em escoamento uniforme com velocidade  $u = 1\text{m/s}$ , para tempos de: (a) 1,4s, (b) 5,6s (c) 11,2s e (d) 14,0s.

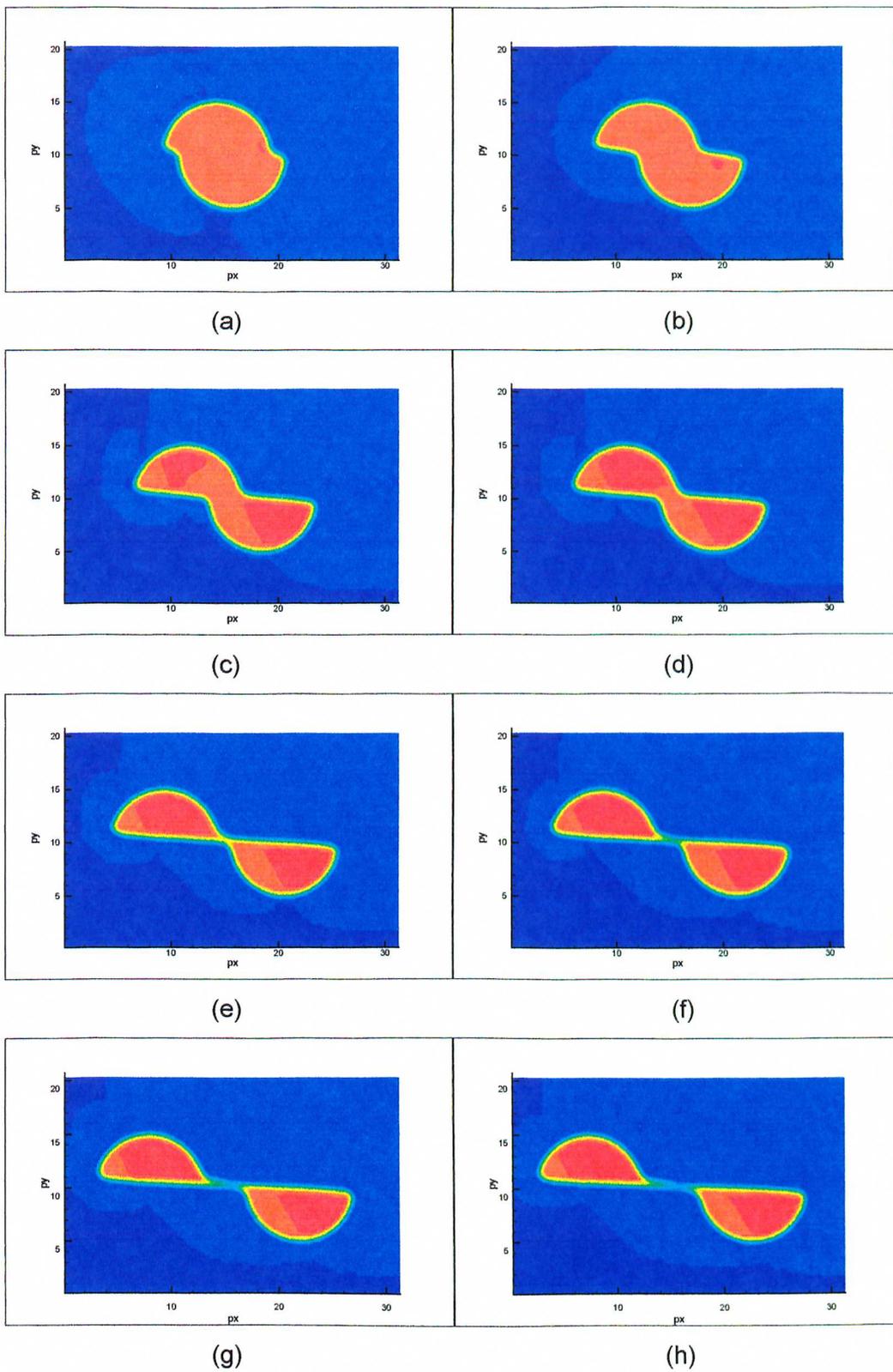


Figura 4.10 - Bolha deslocando em escoamento cizalhante, descrito na figura 17, visualiza-se a função indicadora para tempos de: (a) 0,7s, (b) 2,1s, (c) 2,8s, (d) 3,2s, (e) 4,2s, (f) 4,9s, (g) 5,6s e (h)6,3s.

Observa-se ainda que a função indicadora permite identificar não só a posição da interface no tempo mas também a sua geometria.

É interessante perceber que, no caso cizalhante, a bolha é conduzida a um processo de fragmentação como pode ser observado na figura 4.10 (h). A física dos fenômenos de fragmentação e coalescência de bolhas é bastante complexa. Quando uma interface se aproxima de uma outra, permanece um filme de fluido, aprisionado que impede a fusão das interfaces de imediato. Em função da dinâmica externa às bolhas, elas são comprimidas e o filme aprisionado se coloca a drenar. O tempo de drenagem é longo pois o número de Reynolds local é muito pequeno. A solução do problema de coalescência passa pela solução deste problema de drenagem. Este último, no entanto, não pode, atualmente, ser resolvido via equações de Navier-Stokes devido as dimensões que podem chegar a  $10^{-7}$ m. Uma idéia que está sendo cogitada pelos autores é a aplicação da "teoria dos gases em rede" de Boltzman, a qual permite resolver escoamentos a baixos números de Reynolds, através de equações que levam em conta os choques moleculares de forma estatística. O modelo físico para este processo de fragmentação está sendo proposto e será objeto de estudos futuros.

A figura (4.11) abaixo mostra o valor da área no interior da interface para o caso de perfil uniforme. Observa-se que ela permanece constante, o que demonstra que a massa da bolha é conservada ao longo do processo de transporte, uma vez que a densidade é constante em seu interior. Quanto a conservação da massa para os casos fortemente cizalhantes, foi verificado que ocorre destruição de aproximadamente 3% da massa contida no interior da interface. Novas formas de regularização estão em desenvolvimento, objetivando-se minimizar este efeito.

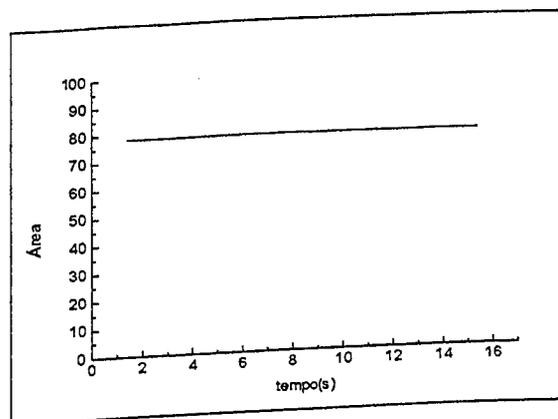


Figura 4.11 - Área no interior da interface em função do tempo para perfil de velocidade uniforme igual a +1,0.

### 4.3 Transporte Passivo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes

Neste item apresenta-se um exemplo mais realista que os casos anteriores. Aqui o campo de velocidades euleriano não é mais imposto como nos casos precedentes. Ele é calculado via solução das equações de Navier-Stokes completas, como descrito no item 2.1.

No entanto, ainda não se leva em conta, na solução das equações de conservação, as variações de propriedades físicas e a presença de interfaces. Esta é a razão pela qual fala-se ainda de transporte passivo. A interface é simplesmente transportada pelo escoamento sem afetar sua dinâmica.

Neste exemplo, simula-se o escoamento entre duas placas planas paralelas para duas situações distintas. Na primeira delas as placas permanecem em repouso e na segunda situação a placa superior tem velocidade  $U_s = 1,0$  e a placa inferior está parada. Na entrada impõe-se velocidades  $U_e = 1,0$ , para os dois testes. A cada passo de tempo, uma vez calculado o campo de velocidades, via solução das equações de Navier-Stokes, ele é interpolado para se obter as velocidades na malha lagrangeana. As condições de contorno estão ilustradas na figura (4.12) abaixo.

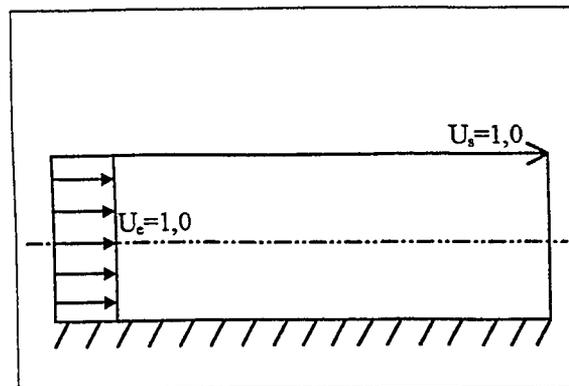


Figura 4.12 - Esquema ilustrando as condições de contorno.

Para inserir os pontos lagrangeanos, que determinam a interface móvel, dentro do domínio de cálculo, construiu-se uma caixa de entrada na região anterior ao domínio de cálculo. No interior da caixa de entrada gera-se a interface circular com raio constante e esta interface desloca-se até o domínio de cálculo com velocidade constante e igual a condição de contorno na entrada do domínio, não se deformando. Portanto a interface somente começa a se deformar no instante que ela entra no domínio de cálculo. É a partir deste instante que os pontos estão sendo transportados utilizando a solução das equações de conservação. Construiu-se também uma caixa de saída na região posterior ao domínio de cálculo, que tem

como função a retirada da interface. Cada ponto que entra no interior da caixa de saída desaparece. Este artifício têm as finalidades de não se promover choques de propriedades físicas e do termo fonte nas equações de conservação, quando da injeção e da destruição de uma interface no domínio de cálculo. Com esta metodologia estes processos acontecem de forma gradativa no tempo e no espaço. As caixas e o domínio de cálculo estão representados na figura (4.13). O processo de inserção da interface no domínio de cálculo está ilustrado na figura 4.14 (a) e (b).

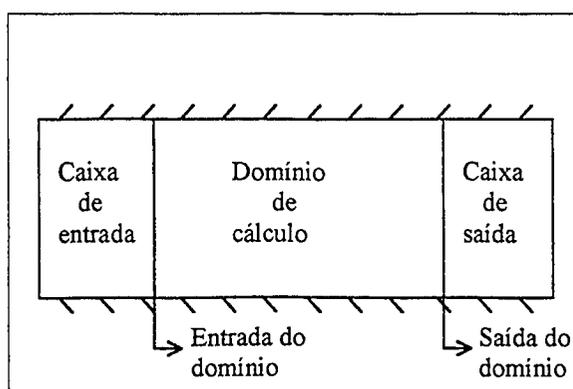


Figura 4.13 - Caixas de entrada e de saída e domínio de cálculo.

É importante ressaltar que todos os resultados apresentados apartir do presente momento são relativos à bolha no interior do domínio de cálculo. As caixas de entrada e saída têm apenas a função de colocar e retirar a interface neste domínio.

Na figura (4.14) visualiza-se a evolução temporal do transporte de uma bolha inicialmente circular onde as placas estão em repouso. Tem-se 6 instantes distintos. A bolha é transportada continuamente para o interior do domínio de cálculo, sem criar choques sobre nenhum ponto do domínio. À medida que a interface é transportada pelo campo de velocidade ela se deforma, de acordo com o campo parabólico que se desenvolve no interior do canal. A resistência da bolha à forças externas neste caso é nula pois as forças de interface são nulas. Observa-se que o nível de representatividade física dos fenômenos está sendo aumentado progressivamente, de forma a se desenvolver com segurança o código numérico.

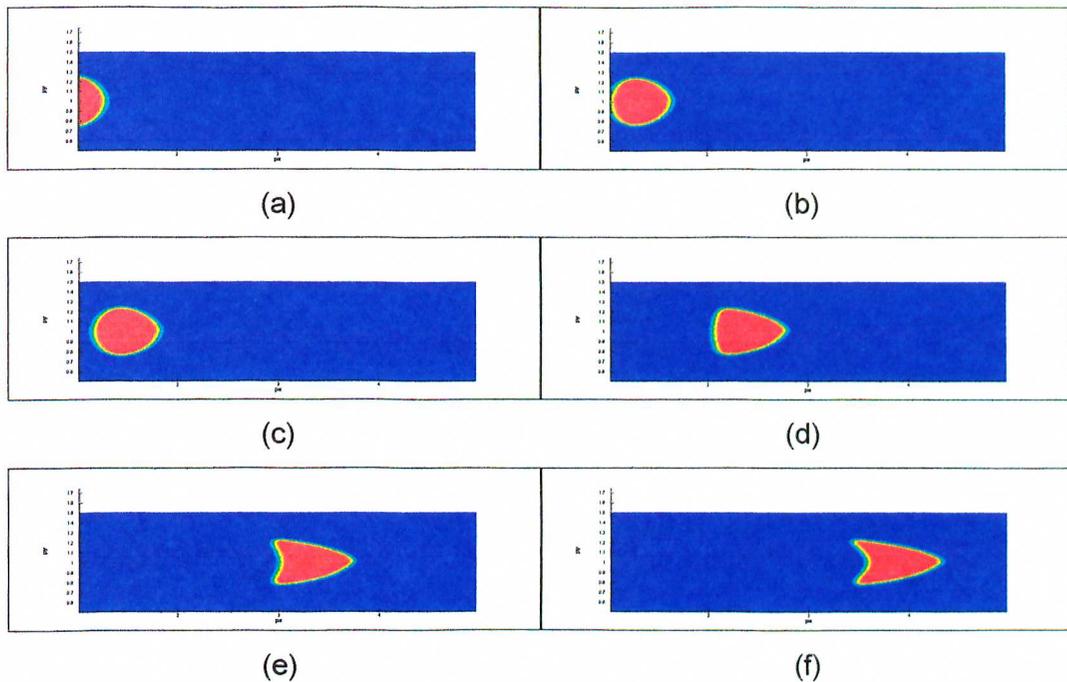


Figura 4.14 - Transporte de uma bolha por um campo cizalhante de velocidades entre duas placas planas em repouso, para tempos de: (a) 0,2s (b) 0,3s (c) 0,35s, (d) 0,6s, (e) 0,85s e (f) 1,0s.

Na figura (4.15) plotou-se os isovalores da componente horizontal da velocidade (direção x). Observando-se a legenda de cores à direita, nota-se que o escoamento se desenvolve, acelerando-se no centro do canal e desacelerando-se nas paredes do mesmo.

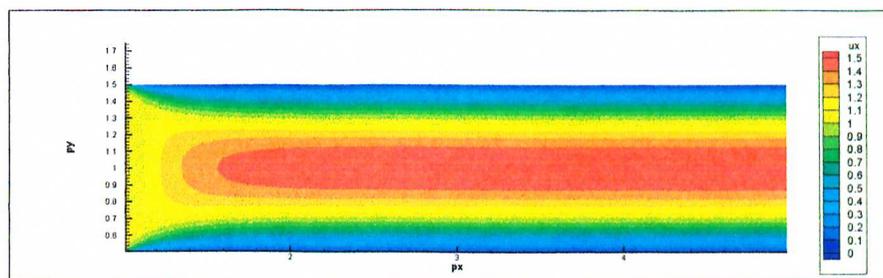


Figura 4.15 - Isovalores da componente horizontal da velocidade.

No próximo exemplo simula-se transporte de uma interface em um escoamento de Couette, onde a placa superior se movimenta com velocidade  $U_s = 1$ . Na figura (4.16) plotou-se o campo da componente horizontal de velocidade (direção x), a fim de se comparar com o campo anterior (figura (4.15)). Observa-se que o campo de velocidades que se estabelece nesta configuração é também cizalhante, porém diferente do precedente pois que a placa superior se movimenta. O campo de velocidade neste caso se assemelha a uma camada limite.

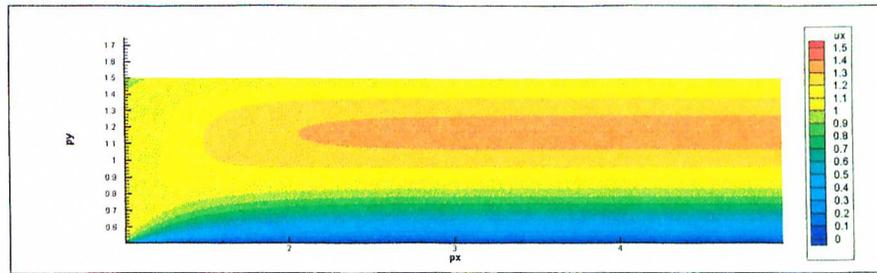


Figura 4.16 - Isovalores da componente horizontal da velocidade.

Na figura (4.17) pode-se visualizar o transporte da interface pelo campo de escoamento da figura (4.16). Observa-se que a interface se deforma em conformidade com o campo de velocidade. Esta é uma simulação simplificada do processo de interação de uma bolha com uma camada limite.

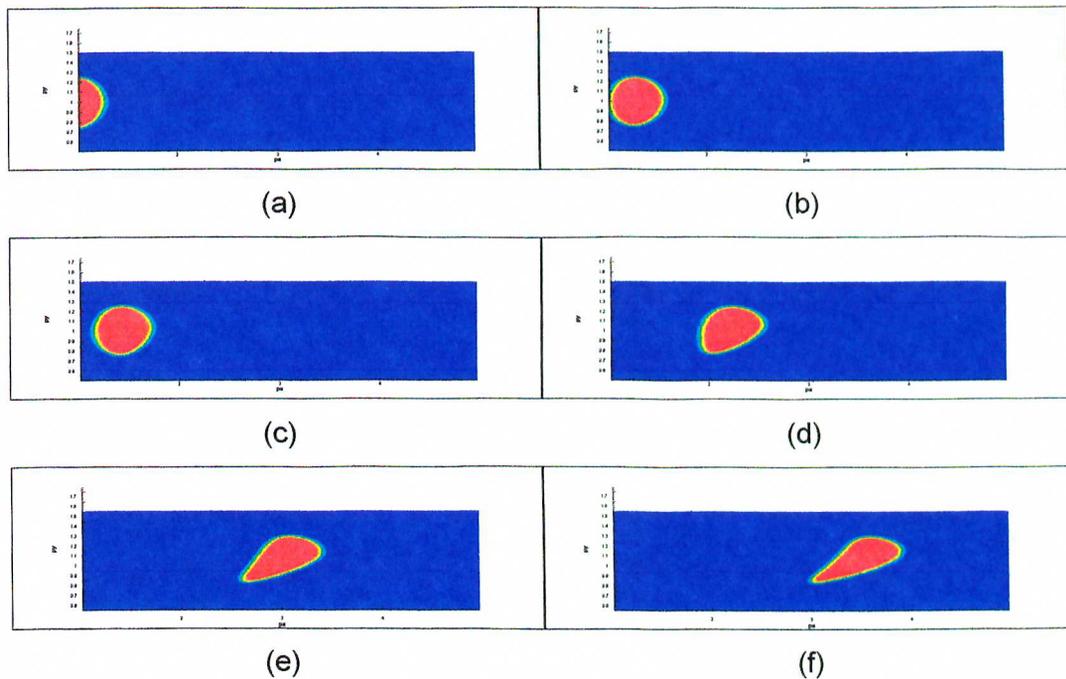


Figura 4.17 - Transporte de uma bolha por um campo cizalhante de velocidades entre duas placas planas; a placa superior se movimenta com velocidade  $U_s = 1,0$ ; visualiza-se os tempos de: (a) 0,2s (b) 0,3s (c) 0,35s, (d) 0,6s, (e) .0,85s e (f) 1,0s.

## 4.4 Transporte Ativo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes

Neste item a interface é transportada via solução das equações de Navier-Stokes completas, incluindo-se as variações das propriedades físicas, densidade, viscosidade e com tensão interfacial diferente de zero. Com isto, a presença de tensão interfacial altera o campo de pressão e velocidade da fase contínua, influenciando na solução das equações de conservação. Desta forma fala-se de transporte ativo, onde a bolha é transportada, afetando a solução dos campos da velocidade e da pressão. A mesma configuração do canal plano, ilustrada na figura (4.15) é aqui utilizada

### 4.4.1 Influência da Tensão Interfacial na Geometria da Interface

A presença da tensão interfacial ( $\sigma$ ) influencia no processo de transporte, na deformação e na forma final da interface. Desta forma, dois testes distintos foram realizados a fim de verificar esta influência. No primeiro deles a interface tem uma tensão interfacial igual a  $1 \text{ [N/m]}$  e o segundo com tensão interfacial de  $1.0E-2 \text{ [N/m]}$ . Para estes dois casos a densidade é constante e a viscosidade da fase contínua é 100 vezes maior que a fase dispersa. A razão da densidade permanecer constante neste dois exemplos é que esta propriedade física multiplica os termos não lineares da equação de quantidade de movimento. Desta forma, com variações de densidade no domínio, a solução das equações de conservação tornam-se mais trabalhosa e conseqüentemente exige um tempo computacional maior. Como neste item deseja-se analisar a influência da tensão interfacial na geometria da interface, a densidade permanece constante para que o tempo computacional não se torne elevado. Testes com variações de densidade serão realizados num futuro próximo.

Na figura (4.18) mostra-se a evolução temporal do processo de transporte da interface relativa a  $\sigma = 1 \text{ [N/m]}$ . Neste caso existe uma mudança de 100 vezes na viscosidade quando se passa de uma fase para outra. Percebe-se a importância das caixas de injeção e de saída da bolha. Estes dois processos são simulados sem que hajam instabilidades numéricas.

Quando se compara os resultados das figuras (4.18) e (4.14), observa-se que eles são completamente diferentes, apesar da configuração do escoamento, em termos de geometria e das condições de contorno, serem as mesmas. Entre as figuras 4.18 (c) e 4.18 (f) observa-se um processo de deformação pulsante mostrando a ação da tensão interfacial na tentativa de recuperar a geometria de circunferência inicial. De fato, como mostra a equação (2.17) a força

restauradora é proporcional à curvatura. Na figura 4.18 (d) a bolha tende a se ovalizar sobre a influência do campo de velocidade da região de entrada do duto, onde está acontecendo o desenvolvimento das camadas limite superior e inferior. Isto faz com que a componente de velocidade em  $y$  aumente e ovalize a bolha. Na figura 4.18 (d) tem-se um aumento da curvatura nos pontos à montante e à jusante da mesma. Este fato tende a devolver a geometria circular. No entanto, o efeito do desenvolvimento de um campo parabólico de velocidade se superpõe. Os dois efeitos (força interfacial e deformação pelos perfis parabólicos) passam a agir de forma aditiva na região à montante e de forma a se subtraírem na região à jusante da bolha. É por estas razões que a bolha adquire, no final do domínio, uma geometria semelhante aquela da figura 4.14, porém com um nível de deformação completamente amortecido pela ação da força de interface.

A fim de verificar a influência da força interfacial, uma nova simulação foi realizada, utilizando o mesmo escoamento anterior, com  $\sigma = 1E-2$  [N/m], sendo portanto 100 vezes menor que a do caso precedente. Mostra-se na figura (4.19) a sequência temporal do transporte da interface. Observa-se que, sobe a ação do desenvolvimento da camada limite a bolha foi completamente ovalizada. Enquanto no caso precedente houve uma recuperação de geometria na região à montante da bolha, neste caso isto não, aconteceu, uma vez que a tensão interfacial é muito pequena. Também na parte à jusante da bolha a deformação é mais importante que no caso precedente. Em resumo, comparando-se as figuras 4.18 (e) e 4.19 (e) verifica-se que a bolha está nitidamente mais esférica no caso de maior tensão interfacial.

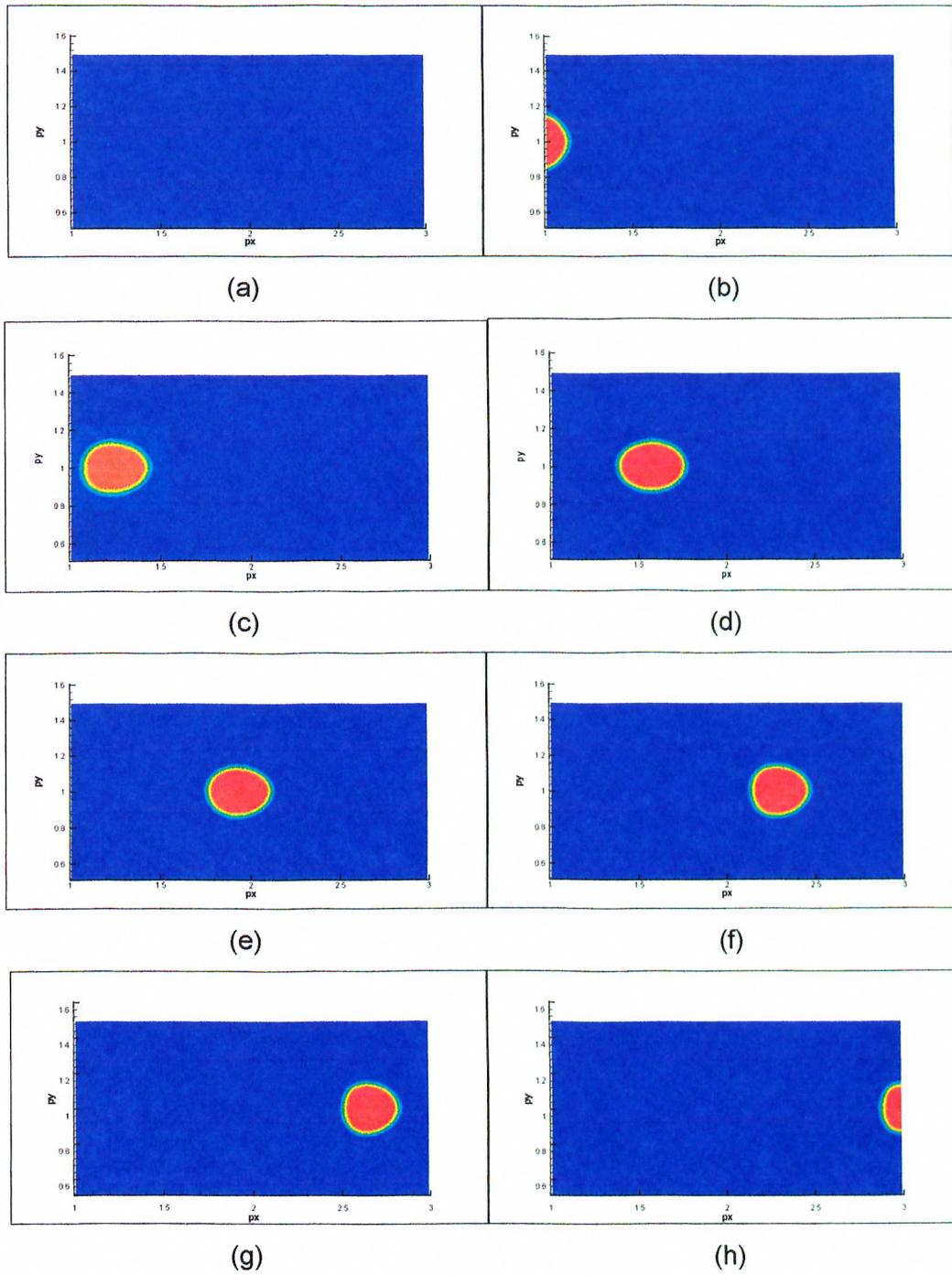


Figura 4.18 - Função Indicadora para  $\sigma = 1.0$  [N/m] para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s.

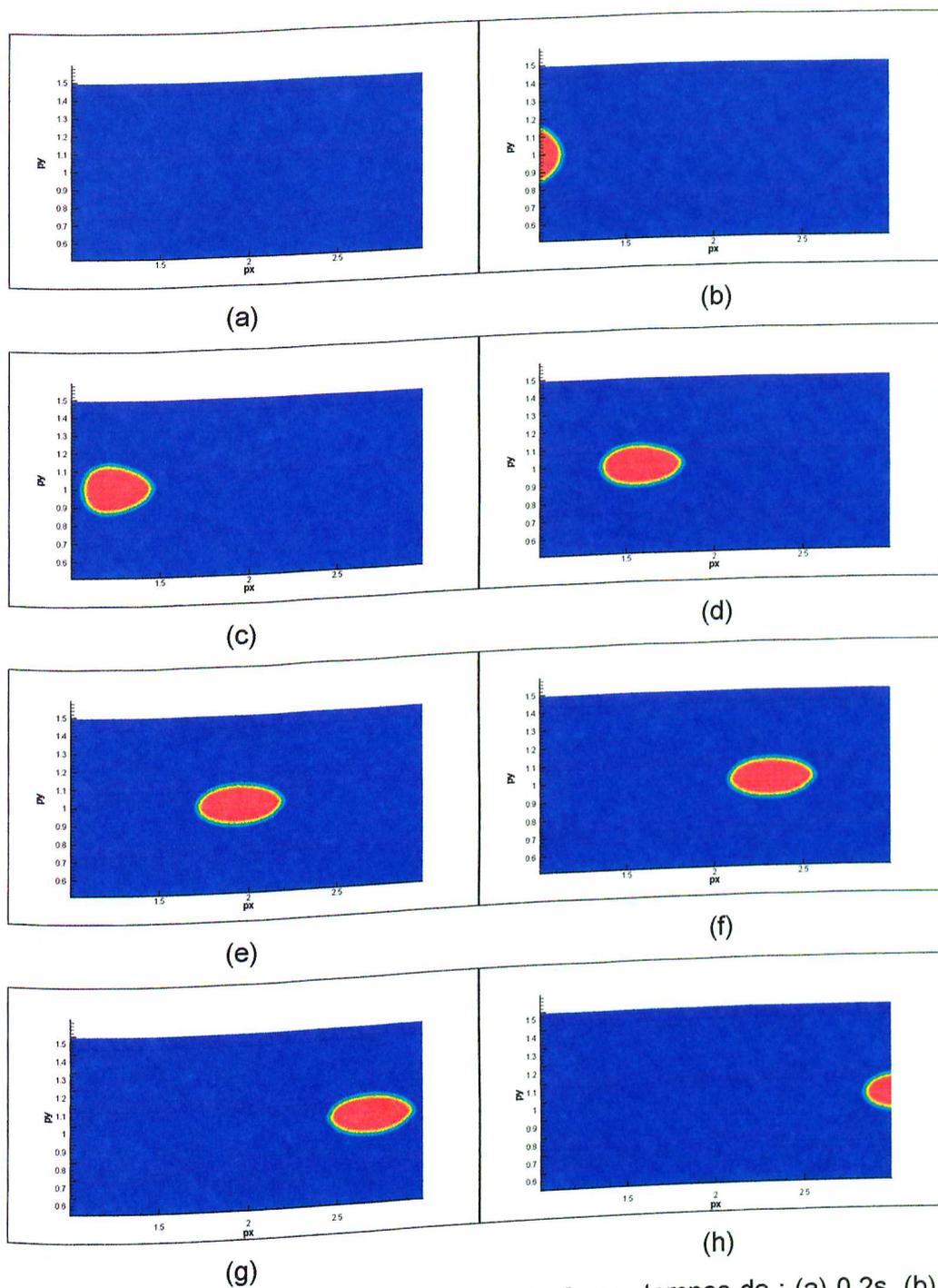


Figura 4.19 - Função Indicadora para  $\sigma = 1.0E-2$  [N/m] para tempos de : (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s.

A fim de verificar a influência da interface nos campos de pressão, plotou-se os campos desta variável para os casos com tensão interfacial igual a  $1.0$  [N/m] e  $0,01$  [N/m]. Os resultados destes campos estão ilustrados nas figuras (4.20) e (4.21). Nota-se que aparece um salto de pressão no escoamento, o qual coincide com a posição da bolha. Nota-se ainda que

no caso de menor tensão interfacial o salto de pressão é mais amortecido, quando se compara as duas figuras Posteriormente ele será quantificado.

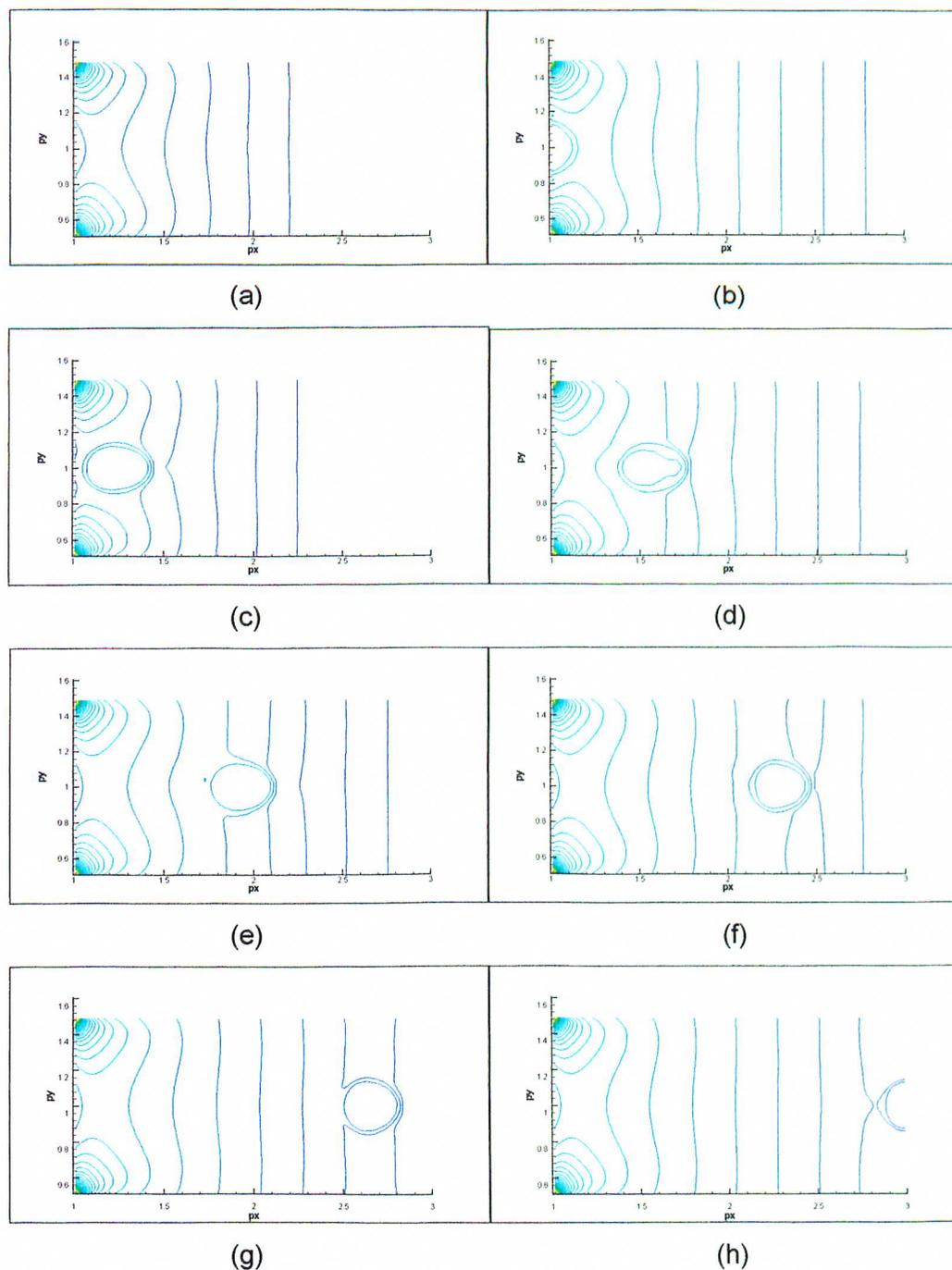


Figura 4.20 - Campos de pressões para  $\sigma = 1,0$  [N/m] e para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s.

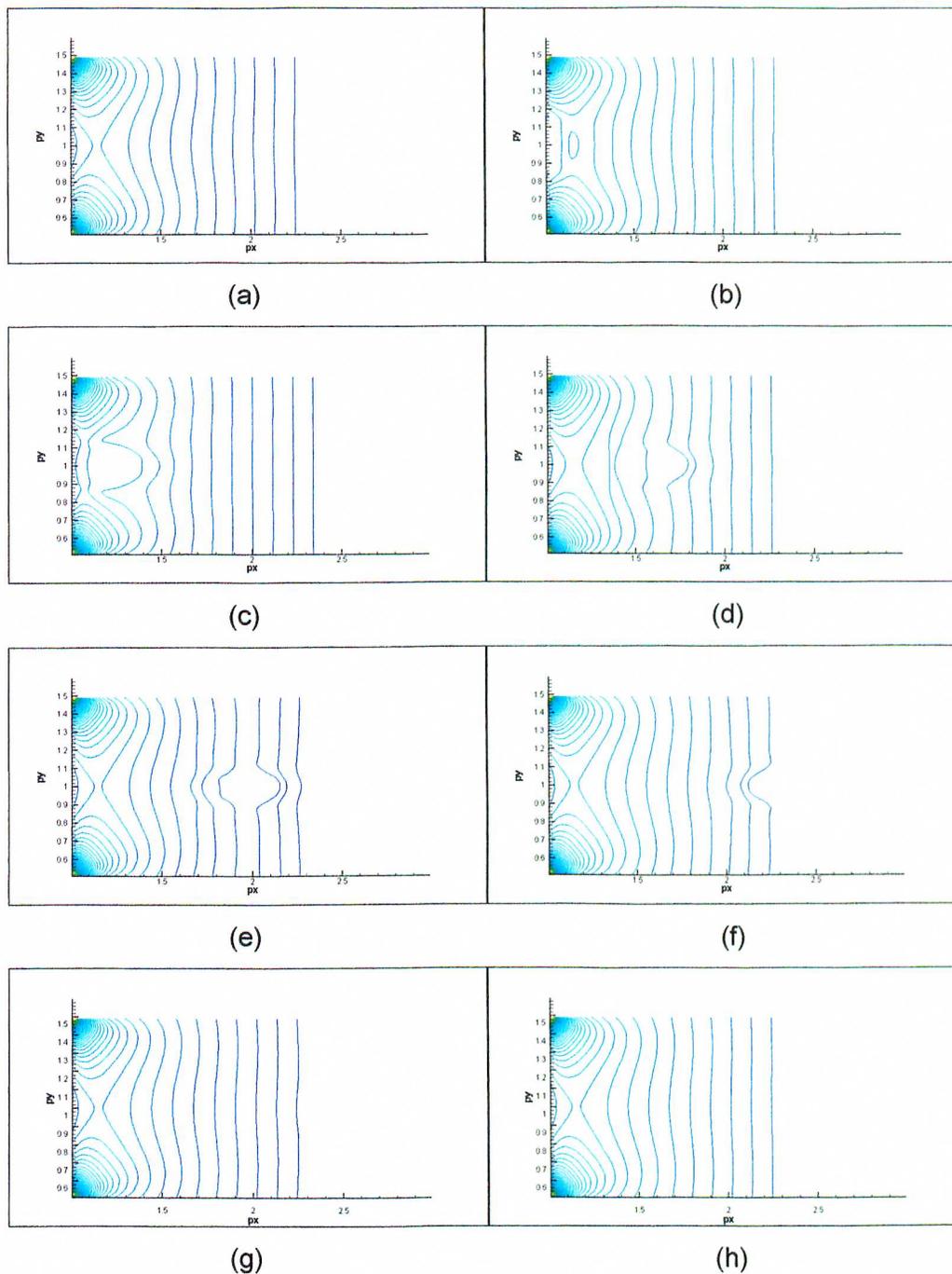


Figura 4.21 - Campos de pressões para  $\sigma = 0,01$  [N/m] e para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s.

Plotou-se também os campos de velocidades nas direções  $x$  e  $y$  para o caso em que  $\sigma$  é igual a  $1,00$ . Os resultados são representados nas figuras (4.22) e (4.23). Observa-se que o campo de velocidade é afetado pela presença da bolha o que é normal, uma vez que ela passa a resistir às tendências naturais do escoamento. Ela atua como se fosse um obstáculo móvel no interior do escoamento. Isto fica claro na figura (4.23) (componente vertical da velocidade).

Aqui percebe-se mesmo a presença de perturbações no campo de velocidade, criadas pela presença da bolha.

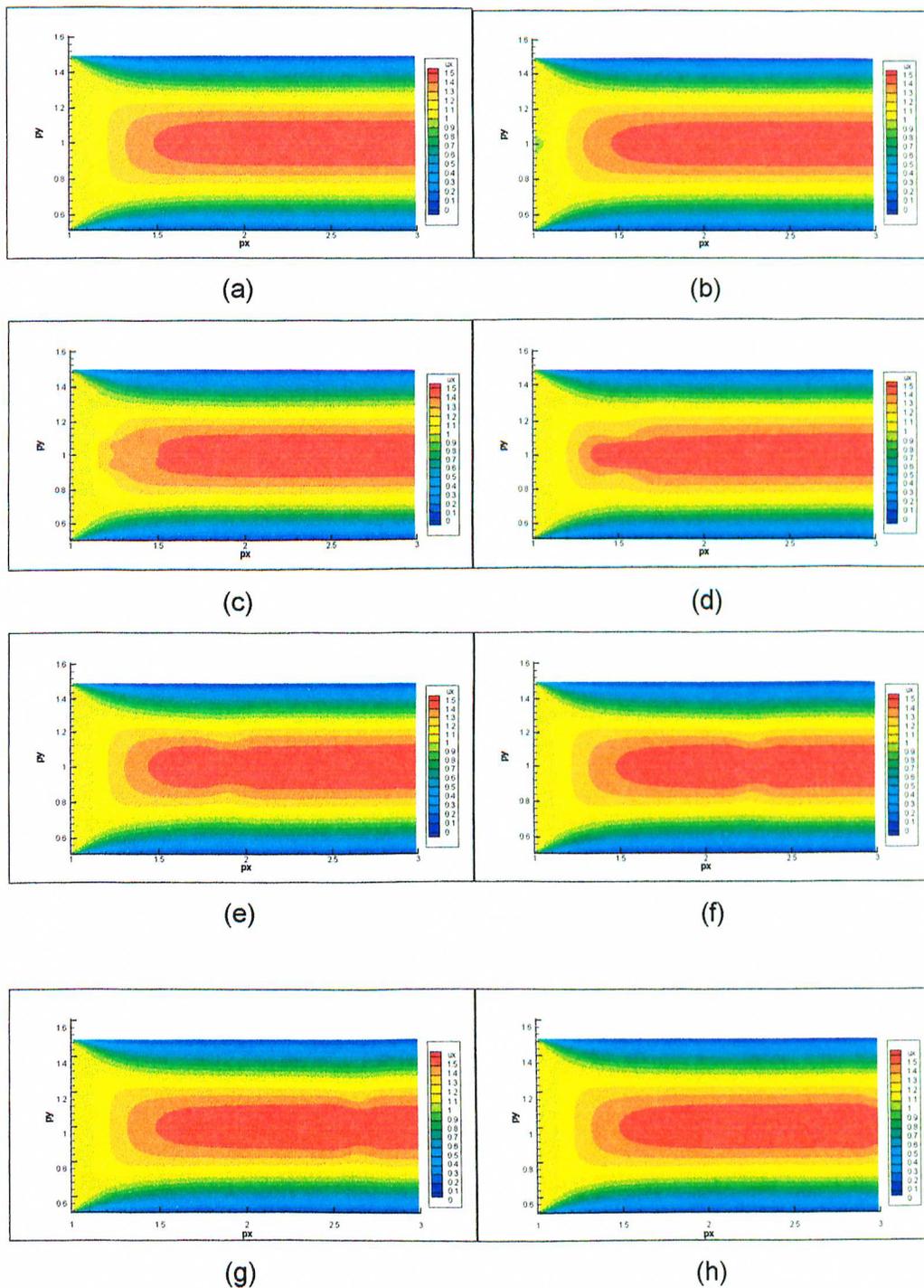


Figura 4.22 - Campos de velocidades na direção  $x$  para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s.

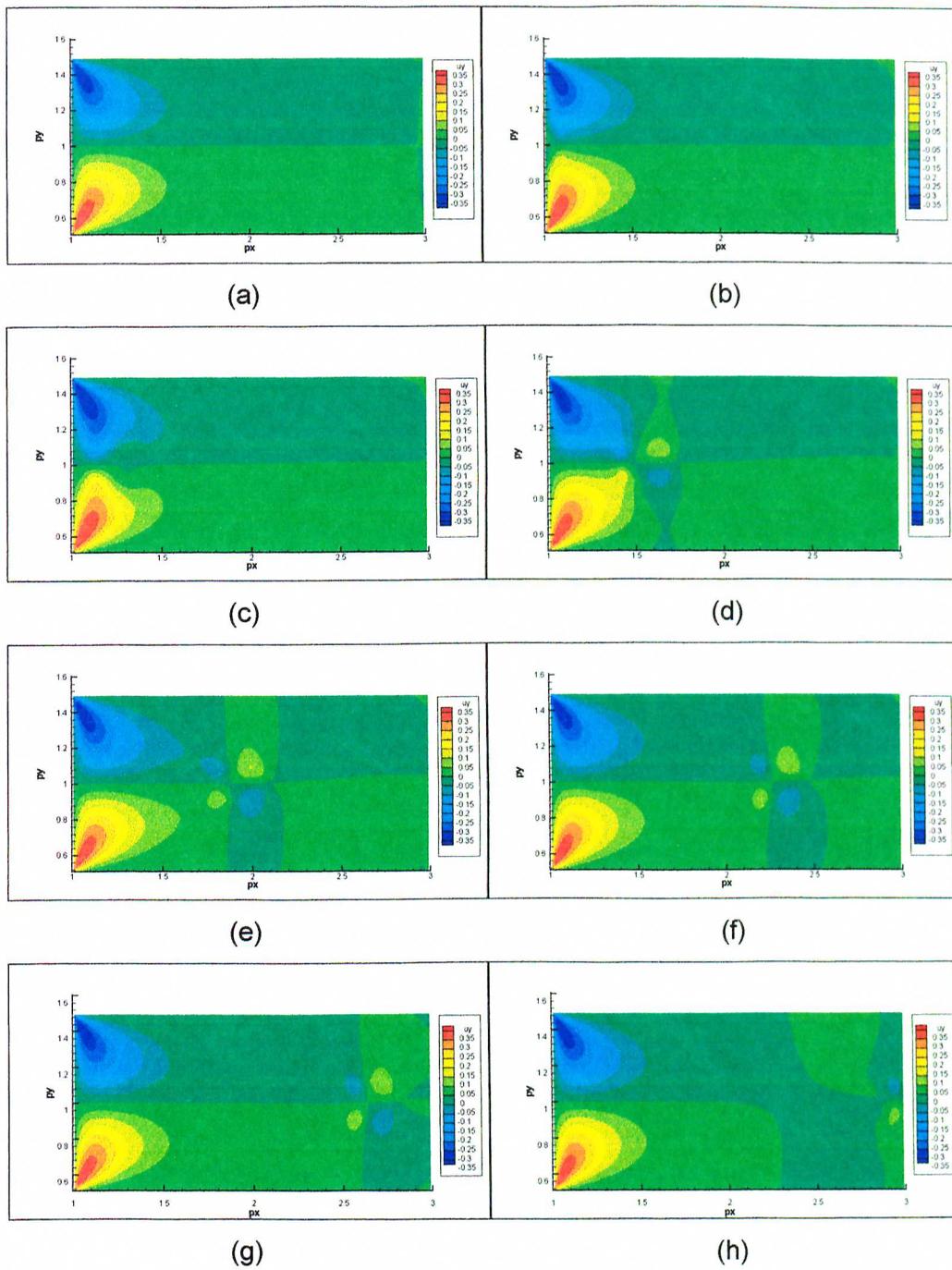


Figura 4.23 - Campos de velocidades na direção  $y$  para tempos de: (a) 0,2s, (b) 0,4s, (c) 0,6s, (d) 0,8s, (e) 1,0s, (f) 1,2s, (g) 1,4s e (h) 1,6s.

#### 4.5 Resultado do Salto de Pressão entre a Interface e a Fase Contínua

Como foi demonstrado na seção anterior, equação (2.46), o salto de pressão ( $\Delta \bar{p}$ ) entre a fase contínua e a fase dispersa é uma constante e igual a  $2/E_0$  para interfaces circulares. Para realizar o presente teste, faz-se necessário que a fase dispersa tenha um raio constante, ou seja, a interface não pode se deformar ao longo do domínio. Neste caso, as forças de interface devem predominar sobre as forças de inércia. O número de Eötvos é o número adimensional que controla a influência relativa destas duas forças e para que as forças de interface sejam predominantes este número deve possuir baixos valores. No presente trabalho, calcula-se o salto de pressão para dois valores distintos de tensão interfacial ( $\sigma$ ). Para os dois casos o tempo é o mesmo e igual a  $1,0s$ , o diâmetro inicial da bolha ( $d_1$ ) é igual a  $1.0E-3m$  e a gravidade ( $g$ ) é igual a  $9,81m/s^2$ . As condições de contorno são as mesmas dos casos precedentes. Para o cálculo do salto de pressão ( $\Delta \bar{p}$ ), retira-se um conjunto de 100 pontos com os valores da pressão, ao longo de uma linha que cruza toda a interface. Com estes valores de pressão calcula-se a diferença entre o maior e o menor valor obtido. A figura (4.24) ilustra a interface e a linha pela qual calcula-se os valores da pressão.

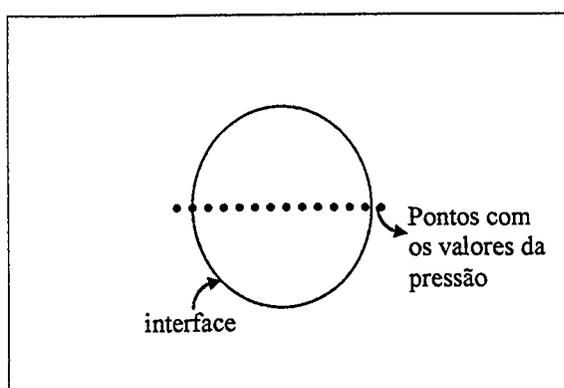


Figura 4.24 - Linha onde retira-se os valores da pressão.

Nas figura (4.25) e (4.26) visualiza-se os isovalores da pressão nas duas configurações, para as quais o valor do salto de pressão foi retirado.

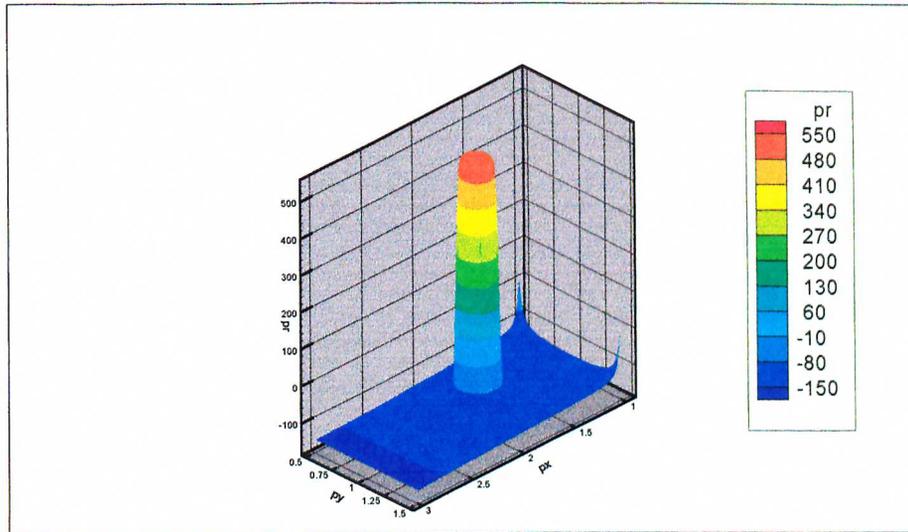


Figura 4.25 - Isovalores de pressão  $\sigma = 100$ .

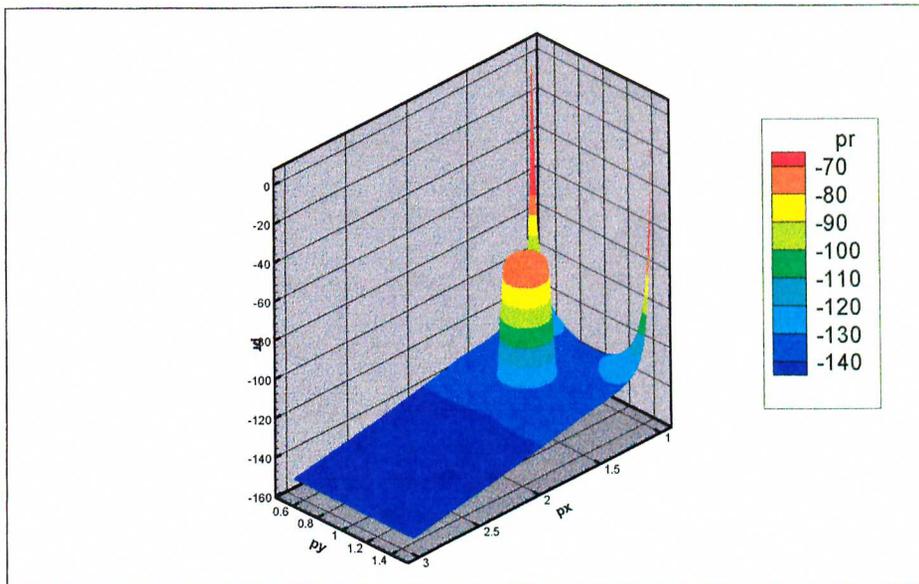


Figura 4.26 - Isovalores de pressão para  $\sigma = 10$ .

As figuras (4.27) e (4.28) apresentam o salto de pressão em função da posição  $x$  da interface.

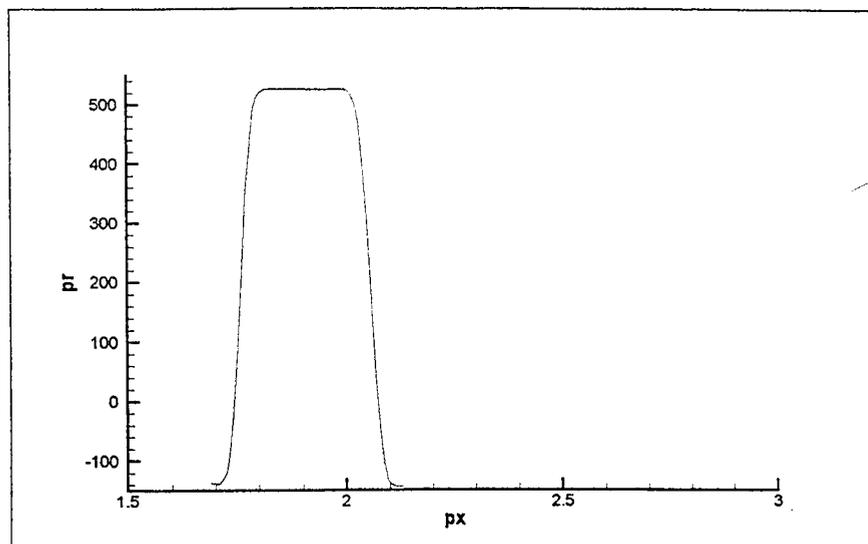


Figura 4.27 - Salto de pressão em função da posição  $x$ , para  $\sigma = 100$ .

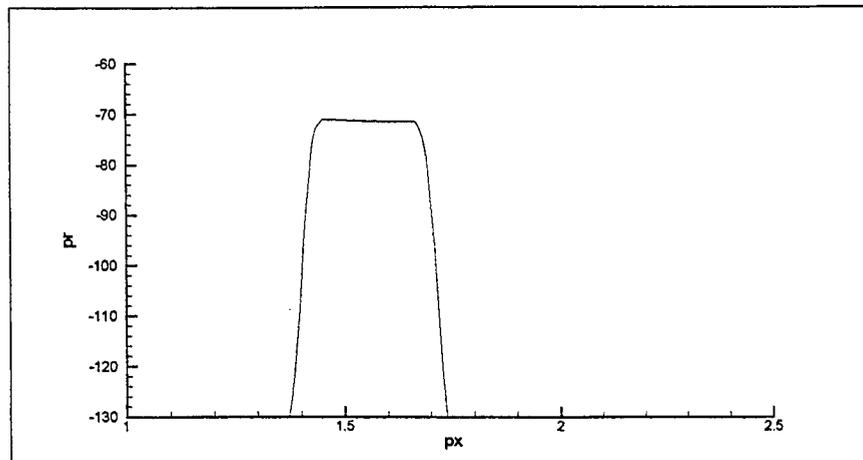


Figura 4.28 - Salto de pressão em função da posição  $x$ , para  $\sigma = 10$ .

Os resultados encontrados foram:

Para  $\sigma = 100$ , tem-se:

$$\Delta^* p = 2,007/E\sigma.$$

Para  $\sigma = 10$ , tem-se:

$$\Delta \dot{p} = 2,047/Eo.$$

Uma análise mais detalhada será realizada na próxima unidade

## Capítulo 5

### Análise dos Resultados

#### 5.1 Análise do Processo de Remalhagem

O processo de remalhagem apresentado nos resultados mostrou-se eficiente mesmo para casos com alta deformação da interface. Um teste rigoroso, foi o exemplo apresentado na figura (4.4), onde a interface está sendo transportada por um campo de velocidade com um choque. Neste teste, um pequeno comprimento da interface sofre uma grande deformação. As figuras (4.1) e (4.2) mostram a necessidade do processo de remalhagem. Para o caso sem a regularização da malha, à medida que a interface se desloca com o tempo, encontra-se regiões onde os pontos da interface estão distribuídos de maneira irregular. Estas regiões são facilmente observadas onde o perfil de velocidade imposto causa forte deformação na interface. Para o teste de velocidade cizalhante em arco-tangente (figuras (4.1) e (4.2)), esta região está entre  $-2$  e  $2$  na cota  $y$ , onde observa-se uma grande distância entre os pontos lagrangeanos, para o caso sem remalhagem. Quando as distâncias entre os pontos tornam-se aleatórias, os parâmetros geométricos, como normal e tangente, apresentam-se com valores muito diferentes entre eles. Este salto de valores causa uma distribuição dos parâmetros geométricos não uniforme, acarretando problemas no cálculo da função indicadora que conseqüentemente trará problemas de instabilidade numérica. O ideal é que não se tenha fortes gradientes nos parâmetros geométricos entre um ponto e seus vizinhos.

O passo de tempo no processo de remalhagem apresentado neste trabalho, é um parâmetro de extrema importância. Como a função interpolação utilizada no processo é uma função que leva em conta somente dois pontos (equação (2.43)), ou seja, uma função linear, o passo de tempo para o transporte não pode ser alto. Utilizando um passo de tempo de  $4s$  e analisando a figura (4.2), tem-se que o processo de remalhagem não conseguiria prever a deformação que ocorre entre  $0,2s$  e  $4,2s$ . Para este caso ocorreria a perda de área no interior da interface, tornando-a cada vez mais reduzida com o decorrer do transporte. Um outro fator de relevância na remalhagem seria o número de pontos iniciais que definem a interface, este número deve atender a um critério a fim de que os pontos não tornem-se muitos distantes

acarretando em problemas semelhantes ao do passo de tempo elevado. Este critério pode ser o mesmo apresentado na equação (2.42).

É importante ressaltar que na remalhagem utiliza-se uma função de realocação dinâmica da linguagem C, o que possibilita gerar novos pontos lagrangeanos se necessários. Este fato é observado nas figuras (4.5) e (4.6), onde define-se inicialmente 100 pontos lagrangeanos e o no tempo final observa-se a presença de mais de 150 pontos.

## 5.2 Análise da Função Indicadora

A função indicadora é proveniente do cálculo de um Laplaciano, como mostra a equação (2.31), contudo para o cálculo do Laplaciano define-se a função  $\vec{G}(\vec{x}, t)$  como o gradiente da função indicadora. A figura (5.1) ilustra o módulo do gradiente da função indicadora em um campo de velocidade uniforme para o mesmo tempo que aquele apresentado na figura (4.7).

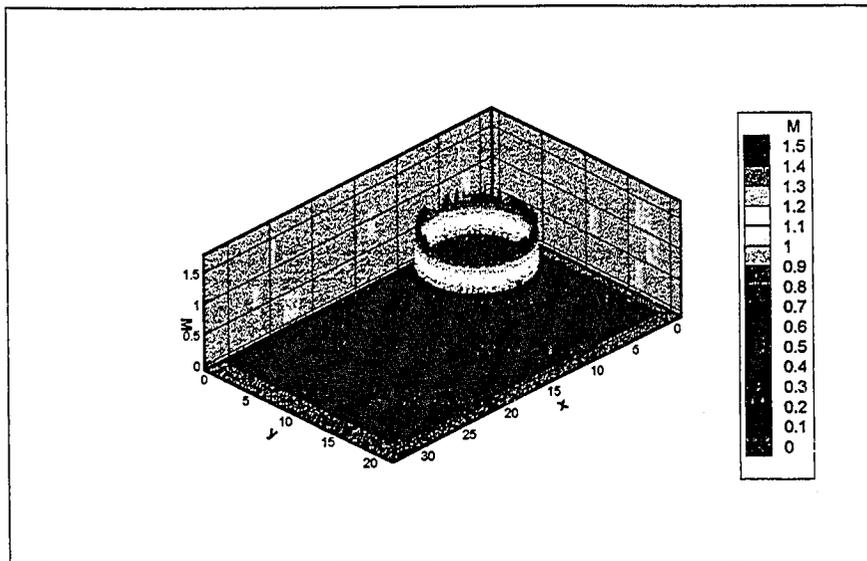


Figura 5.1 - Módulo do gradiente da função indicadora, correspondente à Figura 4.7, para o tempo de 1,4s.

Repete-se a figura (4.7) para efeito de comparação com a figura agora apresentada.

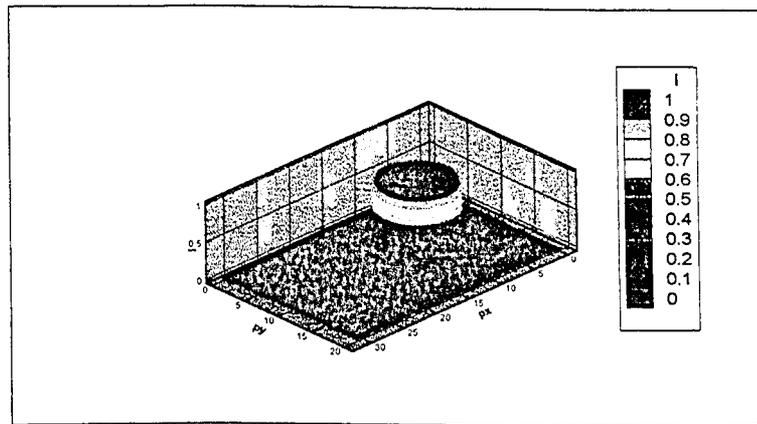


Figura 4.7 – Função Indicadora em um campo de velocidade uniforme  $t = 1,4s$ .

Na figura (5.1) tem-se o gradiente da função indicadora e na figura (4.7) a própria função indicadora. Quando se aplica o laplaciano sobre a função  $\bar{G}(\bar{x}, t)$  ocorre uma suavização das flutuações existentes, sobre o gradiente, ao longo da interface. Observa-se que o gradiente  $\bar{G}$  é muito oscilante. No entanto a função indicadora é bastante uniforme. Observa-se ainda que estas flutuações são devidas ao fato que a função  $\bar{G}$  é obtida da distribuição da normal (lagrangeana) sobre a malha euleriana.

As figuras (4.7) e (4.8) mostram que a função indicadora admite valores iguais a zero nas regiões fora da interface, valores iguais a um no interior da interface e valores intermediários ao longo da interface. Para o cálculo da função indicadora, a função distribuição  $D_{ij}$  tem como objetivo a distribuição da normal na malha euleriana. Esta distribuição tem como consequência o alargamento artificial da interface, o que explica os valores intermediários (entre 0 e 1). Este alargamento é um artifício matemático a fim de se evitar choques de propriedades físicas, densidade e viscosidade, sobre a interface. Este choque de propriedades causaria problemas na convergência numérica das equações de conservação de massa e quantidade de movimento. Como a função indicadora admite valores intermediários, o cálculo dos campos de propriedades físicas, via equações (2.27) e (2.28), também possuem valores intermediários a fim de se evitar o choque.

Na figura (4.9), observa-se o transporte de uma interface circular em um campo de velocidades uniforme. Este teste tem como objetivo mostrar que a função indicadora permite localizar dinamicamente a presença da interface em seu domínio de transporte. Na figura (4.11), o campo de velocidade imposto permite que o cálculo da função indicadora e do processo de remalhagem sejam realizados simultaneamente. Nota-se que o tempo computacional aumenta quando comparado com o caso precedente. Como já comentado anteriormente, a bolha é conduzida a um processo de fragmentação, contudo não ocorre a separação das novas bolhas devido a ausência de um modelo matemático no código

computacional. O desenvolvimento deste modelo está em curso. Estão também sendo estudados modelos para o problema de interação de bolhas com paredes.

### **5.3 Análise do Transporte Passivo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes**

Analisando a figura (4.11), observa-se que a bolha se deforma a medida que ela é transportada. Esta deformação ocorre de maneira simétrica, em relação a cota  $y = 1,0$ , e a bolha admite uma geometria similar ao perfil de velocidade. Na saída do domínio, a bolha possui uma configuração parabólica semelhante a um perfil de velocidade totalmente desenvolvido em escoamentos no interior de dutos. Quando a placa superior admite movimento, figura (4.16), a bolha não apresenta mais uma geometria simétrica. Como o campo de velocidade torna-se maior na região superior da bolha, esta região será transportada mais rapidamente que a parte inferior da mesma. É interessante notar que este problema simula, de forma simples, o processo de interação de uma bolha com uma camada limite. O transporte se dá sem que ocorra instabilidade numérica apesar da forte deformação sofrida pela interface, graças ao processo de regularização da malha lagrangeana.

Para os testes onde transporta-se a interface passivamente, pode-se dizer que o campo de velocidade é um parâmetro que tem forte influência sobre a geometria da interface. Ao comparar as figuras (4.14) e (4.17) nota-se que para os três primeiros passos de tempo (0,2s, 0,3s e 0,35s) a geometria da interface é praticamente a mesma nos dois casos. Isto pode ser explicado quando analisa-se as figuras (4.15) e (4.16), onde o campo de velocidades na entrada do domínio é semelhante, e a medida que o campo de velocidade vai se modificando as interfaces vão adquirindo geometrias diferentes.

### **5.4 Análise do Transporte Ativo de Interfaces via Solução das Equações de Navier-Stokes**

Nas figuras (4.18) e (4.19) apresenta-se a função indicadora para dois valores de tensão superficial diferentes. Quando compara-se estas duas figuras, nota-se que a interface da figura (4.18) apresenta um formato mais circular do que a figura (4.19), ao longo de todo o domínio. Isto é devido à tensão interfacial ser maior no primeiro caso. Contudo nas figuras

(4.18) (b), (c) e (d), que seria uma região mais próxima da entrada do domínio, nota-se uma ovalização na direção  $x$ . Esta deformação é explicada quando visualiza-se o campo de velocidade na direção  $y$  (figura (4.23)). Como a condição de contorno na entrada do domínio é velocidade imposta e o perfil de velocidade é uniforme em  $y$ , então surgem velocidades “ $u_y$ ” na região de entrada que forçam uma parte do fluido para o centro do domínio, na tentativa de tornar o perfil de velocidade parabólico. Esta porção de fluido causa o achatamento da bolha na direção horizontal. Na sequência (figuras (4.18) (e), (f) e (g)), nota-se que a bolha tende a voltar a ser circular. Isto ocorre devido as velocidades na direção  $y$  se tornarem menores e consequentemente não causando um fluxo de massa nesta direção. Desta forma, o parâmetro que causa maior influência na geometria da bolha será a tensão interfacial que faz com que a bolha tenda a retornar ao seu estado circular.

Na figura (4.19), a bolha sofre uma forte deformação na entrada pelo mesmo motivo que na figura anterior, contudo a bolha não tende a retornar ao seu estado circular permanecendo deformada horizontalmente. Para este caso o valor da tensão interfacial é pequeno e o parâmetro principal que controla a geometria da interface são as forças de inércia. Finalmente, quando compara-se as figuras (4.18) e (4.19) nota-se que no caso onde a tensão superficial é maior ocorre uma pulsação da bolha, ou seja, deforma-se e depois tende a retornar ao estado inicial. E para o caso de baixa tensão a bolha apenas se deforma.

Na figura (4.22), nota-se que, inicialmente, o campo de velocidade é simétrico e não possui nenhum tipo de oscilação. Contudo quando a bolha entra no domínio as velocidades começam a ser alteradas nas regiões onde a bolha se encontra, ou seja, a presença da bolha altera o campo de velocidade. Este fato também pode ser notado com as velocidades na direção  $y$  (figura (4.23)).

## 5.5 Análise para Cálculo do Salto de Pressão

Neste item compara-se os saltos de pressão numérico e analítico.

Comparando-se com o resultado analítico  $2/E_0$  os erros foram de 0,35% para  $\sigma = 100$  e 2,30% para  $\sigma = 10$ . Observa-se que o maior erro ocorre para a menor tensão interfacial. Isto acontece porque quanto menor a tensão maior a deformação na geometria da interface, para um mesmo campo de velocidade e pressão. Quando a bolha se deforma é natural que o salto de pressão seja diferente do analítico, pois que este último só é válido para interfaces circulares. Testes para o caso onde  $\sigma = 1,0$  e  $\sigma = 10E-2$  foram realizados e os erros ficam em torno de 10%.

Observa-se que o campo de pressão está sendo bem capturado, validando, para esta configuração, a metodologia e o algoritmo. Outros testes se fazem necessários e eles serão realizados.

## Capítulo 6

### Conclusões

Neste trabalho apresentou-se um modelo matemático para o transporte de interfaces. Nota-se uma evolução deste modelo ao longo do trabalho. Inicialmente o transporte de interfaces era realizado através de campos de velocidades impostos e a presença da interface não alterava a dinâmica do escoamento. Este tipo de transporte, denominado de passivo, não leva em conta os fenômenos físicos que realmente acontecem no escoamento. Contudo os testes preliminares utilizando diversos perfis de velocidade imposto (uniforme, cizalhante e arco-tangente) permitiu de uma maneira mais simplificada, validar o código computacional com relação aos seguintes cálculos: parâmetros geométricos (normal, tangente, comprimento de arco e raio de curvatura), processo de remalhagem e função indicadora.

Utilizando-se a distribuição da normal com a qual se calcula a função indicadora, Utilizando-se a tangente calcula-se o campo de força interfacial euleriano. Através do comprimento de arco realiza-se a remalhagem e calcula-se o raio de curvatura o qual entra no cálculo do salto de pressão. Desta forma, a implementação e validação do cálculo dos parâmetros geométricos foi a primeira atividade do presente trabalho e que afeta diretamente os resultados finais do mesmo.

O processo de regularização da malha lagrangeana mostrou-se necessário principalmente em regiões de fortes deformações, onde o espaçamento entre os pontos lagrangeanos não obedece ao critério adotado. Em relação a este critério, diferentes versões foram testadas e quanto mais rigoroso o mesmo se torna, ou seja, quanto menor a distância entre o limite inferior e superior, a malha torna-se mais regular. Contudo o tempo computacional aumenta. Desta forma, o critério adotado possibilitou uma boa regularização da malha com um tempo computacional não elevado. O passo de tempo para o transporte e a distância inicial entre os pontos da malha lagrangeana são parâmetros de grande importância para que o modelo de remalhagem apresentado seja eficiente. Caso estes dois parâmetros não sejam bem definidos problemas como perda de área no interior da interface, não conservação da massa e divergência no código podem acontecer.

A função indicadora permite localizar dinamicamente a interface, assim como a determinação dinâmica dos campos de propriedades físicas. O cálculo da área mostrou que a área inicial no interior da interface se conserva ao longo do transporte o que implica em

conservação de massa. Testes utilizando diferentes campos de velocidade apresentaram resultados coerentes.

Um passo importante deste trabalho foi agrupar o código computacional que realiza o transporte passivo de interfaces com o código desenvolvido por Pinho (1998) em sua tese de doutorado, onde apresenta a solução das equações de conservação. Estes dois códigos conjuntamente com o cálculo do termo fonte proveniente da força interfacial é que permitiram a realização do transporte ativo de interfaces. Este tipo de transporte já leva em conta alguns fenômenos físicos que realmente ocorrem na dinâmica dos escoamentos bifásicos. Evidentemente o modelo apresentado não consegue prever fenômenos como a aproximação da bolha na parede do duto, fragmentação e coalescência de bolhas e transporte multi-bolhas. Contudo os resultados apresentados para o transporte ativo mostraram-se coerentes qualitativamente quando diferentes tensões interfaciais foram testadas em um mesmo escoamento. O de menor tensão apresenta maior deformação e o de maior tensão sofre grande deformação inicial devido ao campo de velocidade e retorna ao seu estado inicial ao ser transportada. Com dois valores de tensão interfacial ( $\sigma = 10$  e  $\sigma = 100$ ) foi possível calcular o salto de pressão e obter um resultado quantitativo que permite validar parcialmente o código computacional. O que se conclui é que o campo de pressão está sendo bem capturado.

Utilizando a metodologia apresentada ao longo do trabalho, será possível simular numericamente problemas de escoamentos bifásicos em condutos forçados com diferentes geometrias, na tentativa de entender fenômenos físicos e otimizar processos. A metodologia poderá servir também como ferramenta para análise de problemas de engenharia do petróleo apresentados na introdução do trabalho, como os sistemas de bombeamento denominados "gás-lift" estudados por Santos *et al.* (1998). Simulações numéricas de escoamentos com a presença dos chamados "pigs", cuja função é, além da limpeza, o monitoramento de dutos, apresentado por Nieckele *et al.* (1998), também poderão ser realizadas aplicando-se a metodologia apresentada.

Outra aplicação futura é o caso deste código para a determinação de informações sobre parâmetros do tipo coeficiente de arraste, área interfacial, os quais são de difícil determinação experimental para determinadas situações práticas. Por exemplo, uma bolha que se desloca em regime de oscilações (wobbling) apresenta um coeficiente de arraste de valor não determinado. Poder-se-a dar respostas a questões desta natureza via simulação numérica.

Desta forma o que se propõe no âmbito de um projeto maior é a modelagem e a construção de um código computacional para simular de forma fina e local, classes especiais de escoamentos bifásicos no interior de condutos forçados, buscando dar respostas a questões de difícil análise experimental. Trata-se do que se chama na atualidade de experimentação numérica de problemas de dinâmica dos fluidos.

### 6.1 Propostas para Trabalhos Futuros

Duas teses de doutoramento se iniciarão na sequência do presente trabalho (dissertação de mestrado). Com uma delas objetiva-se o transporte multi-bolhas em escoamentos turbulentos. Modelos especiais deverão ser utilizados: está sendo proposto o uso de Simulação Numérica de Grandes Escalas para análise fina de escoamentos turbulentos bifásicos no interior de condutos forçados. Na segunda tese serão explorados os aspectos de modelagem matemática dos processos de coalescência e fragmentação de bolhas bem como os processos de interação de bolhas com camadas limite e com as paredes dos condutos. Uma dissertação de mestrado está sendo desenvolvida com o objetivo de estender a metodologia para interfaces tridimensionais. Uma outra proposta futura será a aplicação da metodologia para determinação de correlações estatísticas, por exemplo: levantar correlações do coeficiente de arraste sobre bolhas em regimes diversos: bolhas esférica (escoamentos laminares e turbulentos); bolha de geometria em calota (laminar e turbulento); geometrias complexas e transitórias (laminar e turbulento).

A dinâmica de particulados em processo de deposição e dinâmica de particulados em processo de separação por forças centrífugas também estão sendo estudadas utilizando a metodologia de captura de interfaces (uma tese de doutorado está em desenvolvimento);

Estudos avançados de dinâmica de escoamentos multifásicos em geometrias complexas e em escoamentos turbulentos também estão sendo estudados utilizando a metodologia de captura de interfaces.

Estudos avançados de dinâmica de escoamentos multifásicos em geometrias complexas e em escoamentos turbulentos também estão sendo estudados utilizando a metodologia de captura de interfaces.

Estudos avançados de dinâmica de escoamentos multifásicos em geometrias complexas e em escoamentos turbulentos também estão sendo estudados utilizando a metodologia de captura de interfaces.

Estudos avançados de dinâmica de escoamentos multifásicos em geometrias complexas e em escoamentos turbulentos também estão sendo estudados utilizando a metodologia de captura de interfaces.

Estudos avançados de dinâmica de escoamentos multifásicos em geometrias complexas e em escoamentos turbulentos também estão sendo estudados utilizando a metodologia de captura de interfaces.

## Referências Bibliográficas

1. Alves, G.E., 1954, "Cocurrent Liquid-Gas Flow in a Pipeline Contactor", Chem. Eng. Prog., vol 50, no.9, pp449-456.
2. Arnold, C. R. and Hewitt, G.F., 1967, "Further Developments in the Photography of Two-Phase Gas-Liquid Flow", J. Photo. Sci., vol. 15, pp97-114.
3. Bennett, A.W., Hewitt, G.F., Kearsley, H.A., Keeys, R.K.F., and Lacey, P.M.C., 1965, "Flow Visualization Studies of Boiling at High Pressure", Inst. Mech. Eng. Proc. 1965-1966, vol. 180, pt. 3C, pp. 260-270.
4. Chigier, R., 1981, "Energy Combustion and Environment", McGraw-Hill, New York, pp.496.
5. Cooper, K.D., Hewitt, G.F., and Pinchin, B., 1964, "Photography of Two-Phase Gas/Liquid Flow", J. Photo. Sci., vol. 12, pp269-278.
6. Delhaye, J.M., Giot, M. et Riethmuller, M.L., 1980, "Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering", McGraw-Hill Book Company, New York.
7. Faber, T.E., 1995, "Fluid Dynamics for Physicists", Cambridge University Press.
8. Ghosh, S. and Hunt, J. C. R., 1994, "Introduce Air Velocity Within Droplet Driven Sprays", Proc. R. Soc. London, Ser. A, 444, pp.105-127.
9. Hunt, J.C.R., 1991, "Industrial and Environment Fluid Mechanics", Annu.Rev.Fluid Mech., 23, pp1-41.
10. Ishii, M., 1975, "Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow", Eyrolles, Paris.
11. Juric, D., 1996, "Computation of Phase Change", Ph.D. Thesis, Mech. Eng. Univ. of Michigan.

12. Kocamustafaogullari, G., 1971, "Thermo-Fluid Dynamics of Separated Two-Phase Flow", Ph.D. thesis, School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Ga.:
13. Lackmé, C., 1967, "Structure et Cinématique des Ecoulements Diphasiques à Bulles", CEA-R-3203.
14. Maliska, C.R., 1995, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", Livros Técnicos e Científicos, Editora S.A., 1995.
15. Nieckele, A.O., Azevedo, L. F., and Braga, A.M., 1998, "Simulation of Fluid Flow and Pig Dynamics in Dewatering Operations in Pipelines", VII ENCIT, Rio de Janeiro, Brasil.
16. Peskin, C.S., 1977, "Numerical Analysis of Blood Flow in Heart", J. of Computational Physics, 25, pp. 220-252.
17. Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
18. Pinho, F.A.A., Silveira Neto, A., 1998, "Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos turbulentos Bifásicos – Método Numérico", II Seminário do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFU, pp. 01-06.
19. Roumy, R., 1969, "Structure des Ecoulements Diphasiques Eau-air. Etude de la Fraction de Vide Moyenne et des Configurations d'Écoulement", CEA-R-3892.
20. Santana, M.M., Campos, W., Gaspari, E. and Martins, A.L., 1998, "A Time Dependent Formulation For The Modeling Of Stratified Solid-Liquid Annular Flows", VII ENCIT, Rio de Janeiro, Brasil.
21. Santos, O.G., Alhanati, F.J.S. and Bordalo, S.N., 1998, "Liquid Fallback and Performace of Intermittent Gas-Lift", VII ENCIT, Rio de Janeiro, Brasil.
22. Silveira-Neto, A., 1997, "Simulation Numerique Fine Des Ecoulements Turbulents Diphasiques non Miscibles", Grenoble.
23. Siriguano, W. A., 1993, "Fluid Dynamics of Sprays", J. Fluid Mech., 115, pp. 345-378.

24. Unverdi, S. O. and Tryggvason, G., 1992, "A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-Fluid Flows", J. Computational Physics, 100, pp 25-37.

25. White, F.M., 1991, "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 2<sup>nd</sup> edition.

FU-00009921-3

26. ...

27. ...

28. ...

29. ...

30. ...

31. ...

32. ...

33. ...