

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

**Simulação Numérica de Grandes Escalas de Escoamentos  
Turbulentos em Cavidades Retangulares Bidimensionais**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Uberlândia, em 23 de novembro de 1995, por *Francisco Aurilo Azevedo Pinho*, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

---

Prof. Dr. Aristeu Silveira Neto (UFU)

*orientador*

DIRBI/UFU

532.51 P654s /TES/FU  
00290/96



1000022704

---

Prof. Dr. Ricardo Fortes de Miranda (UFU)

---

Prof. Dr. Átila Pantaleão S. Freire (UFRJ)

---

Prof. Msc. Roberto Francisco B. Mizerda (UNB)

Uberlândia - 1995

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA	
DIRBI - DIRETORIA DE BIBLIOTECAS	
Precedência _____	
Valor R\$	<i>doação</i>
Rec em.	<i>1 96 NE</i>
O.P.D.	<i>1</i>
N. Fiscal/Fol.	de <i>1 1</i>
Req.	<i>00290/96</i> Data <i>12/04/96</i>
Vol	Ex. <i>1</i>

FU-00005714-6

Aos meus pais *José Azevedo*  
*Pinho e Lunguinha de Azevedo*  
*Pinho* pelo carinho, amor e  
 confiança,  
 DEDICO.

I am an old man now, and when I die and go to Heaven there are two matters on which I hope enlightenment. One is quantum electrodynamics and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.

Sir Horace Lamb (1932)

## Agradecimentos

Ao Professor Aristeu Silveira Neto, pela competente orientação em todos os sentidos, confiança e respeito durante a execução deste trabalho.

Ao Professor Roberto Bomberiech pelo código computacional cedido para a execução deste trabalho.

Ao amigo Marcos Lopes, pela força inicial.

Aos professores Ricardo Fortes e Gilmar Guimarães, pelos ensinamentos e dicas valiosas.

À minha namorada Jaudelice, pela força final e pelo amor e carinho sempre presentes.

A toda minha família, em especial à tia Myriam, pelo apoio dado.

Aos companheiros de laboratório, que tornaram o dia a dia de trabalho mais agradável.

Aos amigos da republica, pela presença constante.

Às funcionarias Madalena e Janete, sempre prontas a ajudarem.

A todos meus amigos do curso, os quais não esquecerei.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

## Sumário

1	Introdução .....	1
1.1	Objetivos .....	1
1.2	Turbulência .....	2
1.3	Escoamentos Turbulentos .....	3
1.4	Modelos de Turbulência - Histórico .....	6
1.4.1	Modelos Clássicos .....	6
1.4.2	Simulação de Grandes Escalas .....	8
1.5	Escoamentos em Cavidades.....	12
2	Modelo Matemático .....	14
2.1	Equações de Navier-Stokes .....	14
2.2	Adimensionalização das Equações de Navier-Stokes .....	16
2.2.1	Esquema de Adimensionalização .....	17
2.2.2	Esquema de Adimensionalização Aplicado às Equações Navier-Stokes e às Equações de Fechamento .....	18
3	Simulação de Grandes Escalas .....	21
3.1	Filosofia da SGE .....	21
3.2	Equações de Navier-Stokes Filtradas - Equações de Reynolds ..	23
3.3	Considerações Gerais .....	26

3.4	O Modelo Submalha de Smagorinsky .....	28
3.5	Equações de Reynolds Modeladas .....	30
3.6	SGE de Escoamentos Turbulentos Bidimensionais.....	32
3.6.1	A Cascata Inversa de Energia .....	33
4	Método Numérico.....	35
4.1	Introdução ao Método MacCormack.....	35
4.2	Formulação dos Volumes Finitos .....	39
4.3	Discretização das Equações.....	41
4.4	Cálculo dos Termos Viscosos.....	43
4.5	Condições de Contorno.....	45
4.5.1	Condições de Contorno Para Velocidades .....	46
4.5.2	Condições de Contorno Para Densidade e Energia Interna	47
5	Resultados .....	48
5.1	Simulações Realizadas .....	48
5.1.1	Simulações em Cavidades no Interior de Dutos.....	50
5.1.2	Simulações em Cavidades Sob Escoamentos Livres.....	52
5.2	Resultados Preliminares .....	54
5.2.1	Condições de Contorno na Entrada do Domínio .....	54
5.2.2	Acoplamento de Domínios.....	57
5.2.3	Condição Inicial.....	57
5.3	Ajuste da Constante de Smagorinsky.....	58
5.4	Resultados da Simulação CD 80-0,4.....	62

5.4.1	Visualização dos Campos de Densidade e Rotacional .....	62
5.3.2	Análise do Espectro de Energia Cinética .....	68
5.3.3	Análise do Sinal de Pressão.....	72
5.4	Resultados das Simulações em Cavidades Sob Escoamento Livre	75
5.4.2	Resultados Gerais.....	75
5.4.3	Comparação Entre Constantes de Smagorinsky .....	80
5.4.4	Comparação com Dados Experimentais de Sinha <i>et al.</i> (1982).....	83
6	Conclusões.....	87
6.1	Sugestões Para Trabalhos Futuros .....	
7	Referências Bibliográficas .....	90

## **Simulação Numérica de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos em Cavidades Retangulares Bidimensionais**

RESUMO: Neste trabalho são apresentados resultados relativos a Simulações Numericas de Grandes Escalas de escoamentos turbulentos em cavidades retangulares bidimensionais. Utilizou-se, para as simulações, o modelo submalha de Smagorinsky. O método de discretização utilizado é o método volumes finitos totalmente explícito de MacCormack. É dedicado um capítulo do trabalho ao método totalmente explícito de MacCormack e outro à Simulação de Grandes Escalas. São feitas simulações de escoamentos em cavidades no interior de dutos e em cavidades sob escoamentos livres. Nas cavidades no interior de dutos são evidenciadas estruturas do tipo Kelvin-Helmholtz que têm caráter periódico. A periodicidade destas estruturas é evidenciada no cálculo da densidade espectral da pressão. É mostrado o espectro de energia para estas simulações, que tem boa concordância com a teoria para escoamentos turbulentos bidimensionais. Os dados das simulações com cavidades sob escoamentos livre são comparados com dados experimentais da literatura, e apresentam boa concordância em termos qualitativos.

---

*PALAVRAS-CHAVE: FLUIDOS, TURBULÊNCIA, CAVIDADES, SIMULAÇÃO NUMÉRICA, SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS, MÉTODO MACCORMACK*

## **Numerical Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows in Two Dimensional Rectangular Cavities**

**ABSTRACT:** In this work, results related to Large-Eddy Numerical Simulation of turbulent flows in rectangular two dimensional cavities are presented. The Smagorinsky turbulence subgrid model is used in the simulation. The discretization method is the MacCormack totally explicit algorithm, for which a chapter is dedicated. Large-Eddy Simulation is treated another chapter. Simulation was carried out for two cases: cavities in ducts and cavities under free flows. In the former, Kelvin-Helmholtz structures are evident which are periodic in time. Their frequency spectrum is analysed through calculation of the pressure spectral density. The energy spectral density is also calculated and showed good agreement with two dimensional turbulent flow theory. The data of the simulation in the cavities under free flows are compared to experimental data available in the literature and presented good agreement in qualitative terms.

---

**KEYWORDS:** *FLUIDS, TURBULENCE, CAVITIES, NUMERICAL SIMULATION, LARGE-EDDY SIMULATION, MACCORMACK METHOD*

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Estruturas coerentes identificadas experimentalmente em camada cizalhante por Bernal and Roshko (1986).....	10
Figura 1.2: Sequência temporal de estruturas coerentes identificadas por simulação numérica de grandes escalas de uma expansão brusca por Silveira Neto <i>et al.</i> (1993).....	10
Figura 3.1: Esquema da cascata dupla de energia para escoamentos turbulentos bidimensionais.....	33
Figura 4.1: Esquema de diferenças utilizado nos passos <i>predictor</i> e <i>corrector</i> , para discretização de equações.....	37
Figura 4.2: Malha retangular para discretização de equações bidimensionais.....	41
Figura 4.3: Esquema para o cálculo das derivadas espaciais no sentido do vetor superfície.....	43
Figura 4.4: Esquema para o cálculo das derivadas espaciais no sentido perpendicular ao vetor superfície.....	45
Figura 4.5: Esquema de malha virtual.....	45
Figura 5.1: Geometria do domínio simulado, mostrando suas dimensões características e a divisão em subdomínios.....	49
Figura 5.2: Campo de pressão, utilizando-se as condições de contorno de densidade energia interna impostas, no detalhe mostra-se a queda do coeficiente de pressão na entrada do domínio.....	55

Figura 5.3: Distribuição temporal do coeficiente de pressão na posição $x = 3 hc$ e $y = 1 hc$ . .....	55
Figura 5.18: Opção para o acoplamento de domínios que cria instabilidades numéricas. ....	56
Figura 5.4: Campos de densidade (a) e rotacional (b) da simulação CD 50-0,2, para um tempo de $46,6 hc / u\infty$ . ....	59
Figura 5.5: Campos de densidade (a) e rotacional (b) da simulação CD 50-0,4, para um tempo de $46,6 hc / u\infty$ . ....	59
Figura 5.6: Campos de densidade (a) e rotacional (b) da simulação CD 50-0,6, para um tempo de $46,6 hc / u\infty$ . ....	60
Figura 5.7: Sequência temporal do campo de rotacional, da simulação CD 80-0,4, com um intervalo de tempo de $2,33 hc / u\infty$ (parte I)..	64
Figura 5.7: Sequência temporal do campo de rotacional, da simulação CD 80-0,4, com um intervalo de tempo de $2,33 hc / u\infty$ (parte II).	65
Figura 5.8: Campos de densidade (a) e rotacional (b) e linha de corrente superpostas ao campo de rotacional (c) da simulação CD 80-0,4, para um tempo de $93,2 hc / u\infty$ . ....	67
Figura 5.9: Distribuição temporal da componente horizontal de velocidade na posição $x = 3 hc$ e $y = 1,01 hc$ . ....	70
Figura 5.10: Distribuição temporal da componente vertical de velocidade na posição $x = 3 hc$ e $y = 1,01 hc$ . ....	70
Figura 5.13: Espectro de energia cinética turbulenta, para simulação CD 80-0,4, na posição $x = 3 hc$ e $y = 1,01 hc$ , em escala linear. ...	71
Figura 5.14: Espectro de energia cinética turbulenta, para simulação	

CD 80-0,4, na posição $x = 3 hc$ e $y = 1,01 hc$ , em escala logarítmica .....	71
Figura 5.15: Distribuição temporal do coeficiente de pressão na posição $x = 3 hc$ e $y = 1 hc$ , para a simulação CD 80-0,4.....	73
Figura 5.16: Flutuação do sinal do coeficiente de pressão mostrado na figura 5.15.....	74
Figura 5.17: Densidade Espectral da pressão, obtida a partir dos dados da figura 5.16.....	74
Figura 5.18: Perfis de velocidade média horizontal, para a simulação CL 2-0,4.....	76
Figura 5.19: Perfis de rotacional médio, para a simulação CL 2-0,4... ..	78
Figura 5.20: Perfis de rotacional médio, para a simulação CL 2-0,4... ..	78
Figura 5.21: Campo de rotacional médio(a) e linha de corrente superpostas ao campo de rotacional (b) da simulação CL 2-0,4. ...	79
Figura 5.22: Campo de rotacional médio(a) e linha de corrente superpostas ao campo de rotacional (b) da simulação CL 1-0,4. ...	79
Figura 5.23: Distribuição temporal do coeficiente de pressão na posição $x = 3 hc$ e $y = 1 hc$ , para a simulação CL 2-0,4.....	80
Figura 5.24: Perfis de velocidade média horizontal, para as simulações CL 2-0,2 e CL 2-0,4, em $x / hc = 2,0$ .....	82
Figura 5.25: Perfis de coeficiente de pressão médio, para as simulações CL 2-0,2 e CL 2-0,4, em $x / hc = 2,0$ .....	82
Figura 5.26: Perfis de velocidade média horizontal, para a simulação CL 2-0,4, e dados experimentais de Sinha <i>et al.</i> (1982).....	84
Figura 5.27: Perfis de coeficiente de pressão médio na parede inferior	

da cavidade, para a simulação CL 2-0,4, e dados de Sinha <i>et al.</i> (1982).....	85
Figura 5.28: Perfis de coeficiente de pressão médio na parede anterior da cavidade, para a simulação CL 2-0,4, e dados de Sinha <i>et al.</i> (1982).....	86
Figura 5.29: Perfis de coeficiente de pressão médio na parede frontal da cavidade, para a simulação CL 2-0,4, e dados de Sinha <i>et al.</i> (1982) .....	86

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1: Simulações realizadas para cavidades no interior de dutos.	51
Tabela 5.2: Simulações realizadas para cavidades sob escoamentos livres. ....	53

## Lista de Símbolos

### Letras Latinas

- $C$ : tensor cruzado;
- $C_1$ : constante do numerador da equação de Sutherland;
- $C_2$ : constante do denominador da equação de Sutherland;
- $cp$ : coeficiente de pressão;
- $c_p$ : calor específico à pressão constante;
- $C_s$ : constante de Smagorinsky;
- $e_i$ : energia interna específica;
- $e_p$ : energia potencial específica;
- $e_t$ : energia total específica;
- $f$ : frequência ou variável genérica;
- $fc$ : fluxo de energia específica, análoga ao tensor cruzado;
- $fl$ : fluxo de energia específica, análoga ao tensor de Leonard;
- $fr$ : fluxo de energia turbulenta específica;
- $h_c$ : altura da cavidade;
- $h_d$ : altura do duto ou altura do escoamento livre;
- $i$ : vetor unitário na direção  $x$ ;
- $j$ : vetor unitário na direção  $y$ ;
- $k$ : condutividade térmica;
- $L$ : tensor de Leonard;
- $l$ : comprimento característico;

$l_c$ : comprimento da cavidade;  
 $l_i$ : comprimento de entrada do domínio simulado;  
 $l_e$ : comprimento de saída do domínio simulado;  
 $Mc$ : número de Mach;  
 $n$ : número de pontos na malha;  
 $p$ : pressão;  
 $Pr$ : número de Prandtl;  
 $q$ : fluxo de calor específico;  
 $R$ : tensor de Reynolds;  
 $Re$ : número de Reynolds;  
 $S$ : superfície ou taxa de deformação;  
 $St$ : Número de Strouhal;  
 $T$ : temperatura;  
 $t$ : tempo;  
 $u$ : velocidade na direção  $x$ ;  
 $V$ : velocidade;  
 $v$ : velocidade na direção  $y$ ;  
 $x$ : coordenada cartesiana;  
 $y$ : coordenada cartesiana.

### **Letras Gregas**

$\delta$ : tensor de Kronenberg;  
 $\mu$ : viscosidade dinâmica;  
 $\nu$ : viscosidade cinemática;  
 $\tau$ : tensão viscosa;

$\rho$ : densidade.

### Operadores

D: derivada substantiva;

$\Delta$ : diferença finita;

$\partial$ : derivada parcial;

$\nabla$ : operador vetorial nabla;

$\Sigma$ : somatório;

$\int$ : integral.

### Indicadores

$[f]$ : variável filtrada;

$\bar{f}$ : variável filtrada com filtro ponderado com a densidade;

$f^*$ : variável adimensionalizada;

$\vec{f}$ : vetor;

$\bar{\bar{f}}$ : tensor.

### Índices

$i, j$ : ponto da malha ou componente de um tensor;

$t$ : variável turbulenta ou derivada temporal;

$x$ : derivada na direção  $x$ ;

$y$ : derivada na direção  $y$ ;

$\infty$ : variável na corrente livre.

## **1 Introdução**

### **1.1 Objetivos**

Realizou-se, no presente trabalho, a simulação de dois tipos de escoamentos em cavidades. O primeiro caso consiste de um duto retangular bidimensional, com uma cavidade de seção também retangular, de altura igual a altura do duto e comprimento duas vezes esta altura. No segundo caso, a cavidade tem as mesmas dimensões que a anterior, porém está situada sob um escoamento livre sobre uma placa plana, para o que retira-se a parede superior.

Neste trabalho, objetivou-se introduzir a utilização do método de Simulação Numérica de Grandes Escalas em escoamentos turbulentos no Laboratório de Energia e Dinâmica dos Fluidos (LEDIF) da UFU, e até mesmo no Brasil, tendo como motivação a análise da possibilidade de construção de um medidor de vazão a vórtice, utilizando-se a geometria citada acima. No primeiro caso simulado, estuda-se esta possibilidade e o segundo é utilizado para validação do código, já que, como foi citado, não foram encontrados estudos experimentais relativos ao primeiro caso. O código em questão foi desenvolvido, segundo o método totalmente explícito de MacCormack e validado para um caso de escoamento sobre um degrau por Roberto Bobenrieth, (tese de doutorado em andamento no ITA), obtendo ótimos resultados quando

comparados aos resultados experimentais de Eaton and Johnston (1980) e aos resultados numéricos de Silveira Neto (1991). O código foi então modificado em sua estrutura de malhas, suas condições de contorno e inicial para adaptá-lo às situações simuladas no presente trabalho.

Percebe-se então, que dois objetivos fundamentais são almejados: primeiro, a utilização da SGE para simular um escoamento turbulento complexo sobre uma cavidade, e segundo, a quantificação das estruturas coerentes que, supostamente, devem ser geradas nesta geometria. Objetiva-se, desta forma, estimar a frequência de formação destas estruturas na cavidade, tendo em vista futuros trabalhos experimentais, quando se pretende determinar a correlação entre a vazão no canal e a frequência de formação dos vórtices nesta geometria.

## **1.2 Turbulência**

Diversos autores nesta área, entre os quais Lesieur, Tennekes, Lumley, etc., colocam a turbulência como um problema mal definido, pois não há em todas as suas características, nenhuma que a defina completamente. Segundo os mesmos, a turbulência pode ser compreendida através da observação de fenômenos naturais, sejam a evolução da fumaça de um cigarro no ar, as corredeiras de um rio ou movimentos atmosféricos. Estas observações têm permitido uma descrição de suas características principais, tais como alta difusividade, tridimensionalidade, alta dissipação e um largo espectro de energia associado a ela. Maiores discussões sobre este assunto podem ser encontradas em Tennekes and Lumley (1978) e Lesieur (1990).

Tennekes and Lumley (1978) colocam a turbulência como um fenômeno aleatório, porém a utilização desta palavra não é de todo aceitável. Na verdade, a turbulência é extremamente dependente das condições iniciais impostas ao fenômeno; mesmo pequenas variações nestas condições podem afetar sua ocorrência e sua intensidade. Como estas condições iniciais não podem ser medidas de forma determinística, pois não se tem a precisão necessária para tanto, trata-se, então, as instabilidades decorrentes destas condições de forma estatística. Neste sentido, Lesieur coloca a turbulência como um fenômeno imprevisível, pois pequenas perturbações superpostas às condições iniciais modificam completamente o resultado final do fenômeno, de forma que torna-se impossível uma predição determinística do mesmo. Este problema já foi discutido por vários autores, entre os quais, além dos acima citados, Shilichting (1979).

### **1.3 Escoamentos Turbulentos**

Os escoamentos turbulentos têm despertado cada vez mais o interesse de pesquisadores por todo o mundo, no sentido de conhecer os mistérios de sua dinâmica e pela série de aplicações práticas advindas deste conhecimento, presentes nas mais diversas áreas. Fisicamente, um dos maiores desafios neste assunto é o entendimento de como se dá o crescimento das pequenas oscilações, intrínsecas à qualquer escoamento, até a formação das grandes escalas, estas, de particular importância em quase todas as áreas que envolvem problemas dinâmicos e térmicos. Por outro lado, matematicamente o desafio maior está na

solução completa das equações que regem estes fenômenos, denominadas equações de Navier-Stokes, ver capítulo 2. A solução destas equações ainda não é possível para a maioria dos casos de interesse prático, apesar de todas as técnicas disponíveis e da grande capacidade computacional hoje existente. Não se deve desprezar a hipótese de nunca chegar-se a resolvê-las completamente para uma vasta gama de casos de interesse prático, tais como escoamentos atmosféricos e oceânicos e escoamentos com geometrias complexas, como a de um trocador de calor.

A complexidade física deste tipo de escoamento, é conseqüência do amplo espectro de escalas com interações não lineares entre todas elas, desde as maiores, determinadas pela geometria que caracteriza o escoamento, até as pequenas escalas dissipadoras de energia, denominadas escalas de Kolmogorov. Em decorrência disto, sua solução torna-se extremamente instável, onde pequenas modificações nas condições iniciais ou nas condições de contorno de um problema podem acarretar grandes diferenças na solução final do mesmo, do ponto de vista de posição e fase das estruturas turbilhonares associadas. Em seu livro *“Caos: a criação de uma nova ciência”*, Gleick (1991) chega a dizer que *“se uma borboleta bate as asas no Brasil, o clima europeu poderá, daqui a alguns meses, ser alterado por este fato”*. Vem portanto daí, a necessidade de se resolver todas as escalas do escoamento, para se ter uma representação completa da realidade física do fenômeno. Este fato leva também à consideração de que mesmo dispondo-se de uma grande capacidade computacional para se resolver

numericamente um escoamento turbulento, a realidade física poderá ser comprometida, do ponto de vista determinístico, na medida em que as condições iniciais não podem ser totalmente conhecidas.

Em escoamentos turbulentos, quanto maior o parâmetro número de Reynolds maior é a razão entre o tamanho da maior e da menor escala do fenômeno e a complexidade das interações entre elas, havendo portanto, necessidade de um maior número de pontos da malha computacional para a solução completa do escoamento. A título de exemplificação Lesieur (1990) cita que, *“o número de graus de liberdade, portanto o número de pontos da malha computacional utilizando-se um método de diferenças finitas para a simulação, de um fenômeno atmosférico, com vários quilômetros de extensão horizontal e escalas dissipativas em torno de 1,0 mm, é em torno de  $10^{20}$ . Mesmo para um escoamento em um túnel de vento, com escala integral de 5,0 mm e escalas de Kolmogorov em torno de 0,1 mm existem em torno de  $10^8$  graus de liberdade”*. Estes dados estão em conformidade com o fato de que a ordem de grandeza do número de graus de liberdade de um escoamento turbulento é dada por  $Re_l^{9/4}$ , onde  $Re_l$  é o número de Reynolds, baseado na escala integral do escoamento em questão. A solução de sistemas lineares com um número de equações desta ordem, com certeza ainda está longe de ser alcançada, tendo como fatores limitantes a memória e rapidez dos computadores existentes atualmente ou ainda em projeto.

#### **1.4 Modelos de Turbulência - Histórico**

Uma opção para se contornar o problema acima, é não se resolver todas as escalas, o que pode ser feito decompondo-as em um campo filtrado, cujo filtro pode ser uma média simples do campo contínuo, e em um campo flutuante. Porém, quando da filtragem das equações de Navier-Stokes, surgem termos que são produtos filtrados de flutuações, ou seja, momentos estatísticos de segunda ordem, devido às não-linearidades existentes nestas equações. Utilizando-se os modelos de turbulência, equaciona-se estes momentos em função do campo filtrado. Assim, os modelos exercem a função de transmitir, artificialmente, a energia que seria transmitida entre as diversas escalas do campo flutuante, através das interações não-lineares. Uma vez que estas interações só são calculadas para as escalas maiores que a malha. Sendo que, para as escalas sub-malha, estas interações são modeladas.

#### **1.4.1 Modelos Clássicos**

O primeiro modelo de turbulência, baseado em comprimento de escalas, a surgir, em 1925, foi o modelo do comprimento de mistura de Prandtl, que é um modelo simples, a zero equações, ou seja, sem utilizar equações de transporte para os termos turbulentos, onde a viscosidade turbulenta é estimada de forma empírica. Depois surgiram modelos de turbulência a uma equação, nos quais utiliza-se uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta e uma correlação empírica para o comprimento de mistura. Com estas duas grandezas, calcula-se a viscosidade turbulenta, o que permite modelar os momentos estatísticos de segunda ordem em função do campo resolvido. A seguir, surgiram os

modelos a duas equações, ou seja, com duas equações de transporte, nos quais são deduzidas equações de transporte para a energia cinética turbulenta e para a sua dissipação. Novamente, devido aos termos não lineares, surgem momentos de terceira ordem, os quais são modelados utilizando-se os momentos de segunda ordem, ver Lumley (1978) e Launder and Spalding (1972). Observa-se que nos modelos até agora comentados utiliza-se o conceito de viscosidade turbulenta, ver Heisenberg (1948). Paralelamente surgiram modelos não dependentes da viscosidade turbulenta, tais como o modelo das tensões de Reynolds e os modelos algébricos.

Estes modelos, no entanto, apresentam um problema de falta de generalidade, devido ao grande número de constantes a serem ajustadas se o tipo de escoamento é alterado. Apesar disto, o modelo  $k-\varepsilon$  é, até hoje, um dos modelos mais utilizados em cálculos de engenharia, tais como projetos de aerofólios ou transmissão de calor em regime turbulento sobre diversos tipos de geometrias. Porém, para uma análise fenomenológica dos processos físicos envolvidos nos escoamentos turbulentos, estes modelos deixam a desejar, pois os mesmos só são viáveis para o cálculo de grandezas médias.

#### **1.4.2 Simulação de Grandes Escalas**

Com o advento dos computadores de maior capacidade de memória e maior rapidez de cálculo, surgiu, nos últimos anos, uma nova filosofia em termos de simulação de escoamentos turbulentos, denominada Simulação de Grandes Escalas (SGE). Nesta nova filosofia,

as grandes escalas são calculadas diretamente, enquanto que as pequenas escalas são modeladas. Este fato, trás uma vantagem em relação às filosofias anteriores, pois a hipótese de isotropia é assumida, de forma obrigatória, somente para as pequenas escalas, portanto, com maior possibilidade de ser obedecida. Os modelos, neste caso, são denominados de modelos submalha. Leslie and Quarine (1979) dão detalhes sobre a aplicação da teoria de turbulência na formulação de modelos submalha.

O primeiro trabalho em Simulação de Grandes Escalas, foi um estudo sobre simulação de escoamentos atmosféricos realizado por Smagorinsky (1963). Neste trabalho, foi proposto e utilizado o modelo que leva seu nome, baseado no conceito de viscosidade turbulenta e utilizando-se a hipótese de Heisenberg (1948), de que as tensões de Reynolds são proporcionais à taxa de deformação. Na mesma área, surgiram trabalhos de Leith (1971) e Deardoff (1971). Lilly (1967) estabeleceu equações de transporte para as componentes das tensões de Reynolds, demonstrando a consistência do modelo de Smagorinsky. Por outro lado, a primeira aplicação do método de SGE em escoamentos de interesse para engenharia foi feita por Deardoff (1970), quando estudou um escoamento de Poiseuille plano mantido por gradiente de pressão constante. Daí até os dias atuais, esta técnica tem avançado consideravelmente: teorias consistentes têm sido desenvolvidas, modelos submalha mais avançados têm sido desenvolvidos e testados na busca de modelos com maiores performances; Piomeli (1988) utilizou e comparou uma família de modelos derivados do modelo de Smagorinsky,

e o progresso, tanto nos esquemas de discretização quanto na rapidez e memória dos computadores, tem permitido a aplicação de SGE numa variedade cada vez maior de escoamentos.

A Simulação de Grandes Escalas tem sido utilizada em vários domínios da turbulência, tais como: turbulência em canal (Moin and Kim, 1982), decaimento de turbulência tridimensional isotrópica (Lesieur and Rogallo, 1989) e escoamento turbulento complexo sobre uma expansão brusca (Silveira Neto, 1993). Mais recentemente os trabalhos em Simulação de Grandes Escalas têm sido feitos no sentido de compreender os fenômenos presentes nos escoamentos turbulentos, uma vez que o controle do nível de turbulência em um dado escoamento tem grande aplicação prática nas mais diversas áreas da engenharia e da meteorologia.

O conceito de estrutura coerente, que surgiu na última década, corresponde a uma concentração de vorticidade que mantém uma geometria definida por um tempo muito maior do que seu tempo característico de rotação. Estruturas deste tipo exercem um papel fundamental em numerosas aplicações tecnológicas, tais como termo-hidráulica em reatores nucleares, estudos ambientais, vibração, arraste e sustentação aerodinâmicos, combustão, etc. Em cada um destes campos, faz-se necessário entender a dinâmica destas estruturas organizadas, de tal forma a se poder controlar mecanicamente a produção ou supressão das mesmas.

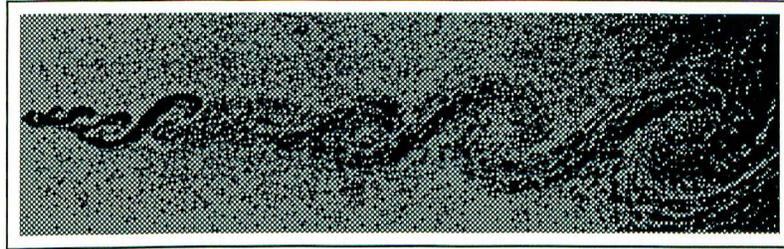


Figura 1.1: Estruturas coerentes identificadas experimentalmente em camada cizalhante por Bernal and Roshko (1986).

A descrição destas estruturas foi feita por Townsend (1967) e foram identificadas em camadas cizalhantes por Brown and Roshko (1974). Trabalhos experimentais de Breidenthal (1981), Bernal and Roshko (1986), ver figura 1.1, e Lasheras and Choi (1988) mostraram que as estruturas coerentes aparecem tridimensionalmente em escoamentos cizalhantes livres. Este mesmo tipo de estrutura foi também identificado em várias simulações numéricas, entre elas Metcalfe (1987), Silveira Neto *et al.* (1991) e Silveira Neto *et al.* (1993), ver figura 1.2.

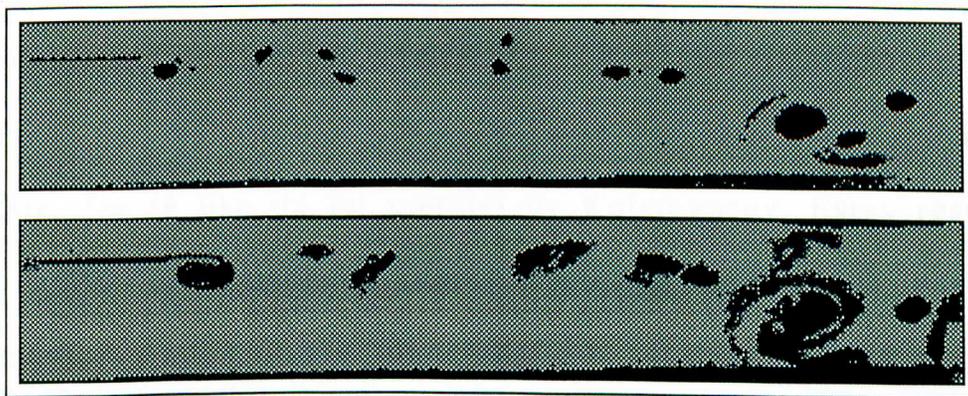


Figura 1.2: Sequência temporal de estruturas coerentes identificadas por simulação numérica de grandes escalas de uma expansão brusca por Silveira Neto *et al.* (1993).

O modelo “função estrutura de velocidade” desenvolvido a partir

do conceito de viscosidade turbulenta espectral, introduzido por Kraichnan (1976) e implementado para turbulência isotrópica por Chollet and Lesieur (1981), surge como inovador, devido ao fato da única constante envolvida ser determinada analiticamente a partir da teoria de Kolmogorov (1962). Além do que, enquanto os modelos da família de Smagorinsky são baseados na taxa de deformação, o modelo de função estrutura de velocidade é baseado nas flutuações de velocidade, o que está mais ligado à atividade turbulenta local.

Este modelo foi inicialmente testado em escoamentos do tipo turbulência isotrópica por Comte *et al.* (1990) e em camada limite compressível por Normand and Lesieur (1990). Foi também o modelo utilizado por Silveira Neto (1993) para um estudo fenomenológico de escoamentos turbulentos complexos sobre um degrau, sendo que os resultados também são, neste trabalho, comparados com simulações que utilizam os modelos de Smagorinsky e  $k-\epsilon$ . Este modelo apresenta a vantagem de ser completamente analítico, não necessitando de ajuste em nenhuma constante, porém o mesmo só pode ser implementado para turbulência tridimensional, considerando-se que para a determinação da constante, fez-se uso da lei inercial de Kolmogorov. Estes resultados foram muito encorajadores, aproximando-se muito dos resultados experimentais de Eaton and Johnston (1980) e permitindo a elucidação de muitos fenômenos observados experimentalmente, como por exemplo o estiramento de vórtices secundários, na direção longitudinal do escoamento, pelos vórtices primários, o que se constitui no principal mecanismo de transição e manutenção da turbulência tridimensional.

Para histórico mais detalhado, bem como perspectivas futuras em relação aos modelos de turbulência e à SGE pode-se consultar as seguintes referências: Lesieur (1990), Voke and Collins (1983) e Smagorinsky (1993).

### 1.5 Escoamentos em Cavidades

Diversos estudos, tanto experimentais como numéricos, já foram realizados em cavidades. Entre estes, pode-se citar os estudos numéricos do tipo escoamento de Stokes, nos quais o escoamento no interior da cavidade é gerado por uma velocidade imposta na parte superior da mesma. Como ilustração, tem-se os resultados de Freitas and Street (1988), que fizeram um estudo tridimensional e Shankar (1992), que fez um estudo bidimensional, porém estes estudos não permitem visualizar as interações entre os escoamentos interno e externo à cavidade, que são determinantes para o estudo dos fenômenos que ocorrem em casos reais.

A. Outra situação também estudada, é o caso no qual a cavidade está localizada em uma superfície sobre a qual há um escoamento livre. Este caso foi estudado experimentalmente com descolamento laminar por Sinha *et al.* (1982). Uma variação do último caso é a inclusão de aquecimento, caso este estudado para diversos números de Reynolds por Yamamoto *et al.* (1979) e por Aung (1983), ambos experimentalmente e Bhatti and Aung (1984) numericamente, utilizando-se de um código de diferenças finitas, bidimensional e com malha irregular. Porém, nenhum trabalho foi encontrado em cavidades no interior de dutos e,

principalmente, nenhum evidenciando as instabilidades físicas que caracterizam o escoamento médio observado classicamente em vários trabalhos.

## 2 Modelo Matemático

O modelo matemático utilizado para a descrição do movimento dos fluidos são as equações de Navier-Stokes compressíveis, com as seguintes simplificações: considera-se o escoamento como bidimensional e despreza-se os efeitos das forças de empuxo, uma vez que não há grandes diferenças de massa específica agindo no escoamento. Quanto ao fluido, este é considerado como um gás perfeito e newtoniano.

### 2.1 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes, com as simplificações colocadas acima, são, nesta seção, apenas apresentadas. Detalhes sobre as mesmas podem ser encontradas em Shilichting (1979).

*equação da continuidade*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

*equações de conservação da quantidade de movimento*

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho uv - \tau_{xy})}{\partial y} = 0, \quad (2.2.a)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u - \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p - \tau_{yy})}{\partial y} = 0, \quad (2.2.b)$$

*equação de conservação da energia*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e_t u + p u - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} + q_x)}{\partial x} \\ + \frac{\partial(\rho e_t v + p v - u \tau_{yx} - v \tau_{yy} + q_y)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Utiliza-se, para o fechamento do sistema, as seguintes equações, doravante denominadas de

*equações de constitutivas*

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (2.4)$$

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.5)$$

$$e_t = e_i + \frac{u^2 + v^2}{2} + e_p, \quad (2.6)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e_i, \quad (2.7)$$

$$T = \frac{(\gamma - 1)e_i}{R}, \quad (2.8)$$

$$\mu = \frac{C_1 T^{3/2}}{(T + C_2)}, \quad (2.9)$$

onde, para o ar,  $C_1 = 1,458 \cdot 10^{-6}$  e  $C_2 = 110,4$

$$k = \frac{\nu \rho c_p}{Pr}. \quad (2.10)$$

Nestas equações  $i$ ,  $j$  e  $k$  variam de 1 a 2.

Ressalta-se que, a partir deste momento, quando referenciar-se às equações de Navier-Stokes, às equações de fechamento ou quaisquer outras derivadas destas, fica implícito todas as simplificações feitas nesta seção.

## 2.2 Adimensionalização das Equações de Navier-Stokes

Existe uma série de vantagens classicamente conhecidas em se trabalhar com equações adimensionalizadas, entre as quais a possibilidade de se extrapolar os resultados, desde que se mantenha os parâmetros adimensionais, tais como, números de Reynolds ( $Re$ ), Prandtl ( $Pr$ ) e Mach ( $Mc$ ) constantes.

### 2.2.1 Esquema de Adimensionalização

Dispõe-se de várias possibilidades para adimensionalização das

equações de Navier-Stokes, entre estas, Anderson *et al.* (1984) sugerem o seguinte esquema:

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{l}, & y^* &= \frac{y}{l} & \text{e} & \quad t^* &= \frac{t}{l/u_\infty}, \\
 \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & u^* &= \frac{u}{u_\infty} & \text{e} & \quad v^* &= \frac{v}{u_\infty}, \\
 p^* &= \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, & T^* &= \frac{T}{T_\infty} & \text{e} & \quad e^* &= \frac{e}{u_\infty^2}, \\
 \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_\infty} & \text{e} & \quad k^* &= \frac{k}{k_\infty}, \\
 \tau^*_{ij} &= \frac{\tau_{ij}}{\rho_\infty u_\infty^2} & \text{e} & \quad q^*_i &= \frac{q_i}{\rho_\infty u_\infty^3}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

definindo-se, ainda, os seguintes parâmetros adimensionais:

$$Re = \frac{u_\infty l}{\nu_\infty}, \quad Pr = \frac{\alpha}{\nu_\infty}, \quad \text{e} \quad Mc = \frac{u_\infty}{c}, \tag{2.12}$$

onde as variáveis denotadas por asteriscos são as variáveis adimensionalizadas e as denotadas por “∞” são as variáveis da corrente livre.

## 2.2.2 Esquema de Adimensionalização Aplicado às Equações Navier-Stokes e às Equações de Fechamento

Aplicando-se o esquema de adimensionalização proposto acima às equações de Navier-Stokes, obtêm-se as seguintes equações:

*equação da continuidade adimensionalizada*

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0, \quad (2.13)$$

*equações de conservação da quantidade de movimento adimensionalizadas*

$$\frac{\partial (\rho^* u^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial (\rho^* u^{*2} + p^* - \tau_{xx}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (\rho^* u^* v^* - \tau_{xy}^*)}{\partial y^*} = 0, \quad (2.14.a)$$

$$\frac{\partial (\rho^* v^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial (\rho^* v^* u^* - \tau_{yx}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (\rho^* v^{*2} + p^* - \tau_{yy}^*)}{\partial y^*} = 0, \quad (2.14.b)$$

*equação de conservação da energia adimensionalizada*

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho^* e^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial (\rho^* e^* u^* + p^* u^* - u^* \tau_{xx}^* - v^* \tau_{xy}^* + q_x^*)}{\partial x^*} \\ + \frac{\partial (\rho^* e^* v^* + p^* v^* - u^* \tau_{yx}^* - v^* \tau_{yy}^* + q_y^*)}{\partial y^*} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

*equações constitutivas adimensionalizadas*

$$\tau_{ij}^* = \frac{2\mu^*}{3Re} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \delta_{ij} \frac{2\mu^*}{3Re} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}, \quad (2.16)$$

$$q_i^* = -\frac{k^*}{(\gamma-1)Mc^2 Re Pr} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*}, \quad (2.17)$$

$$e_i^* = e_i^* + \frac{u^{*2} + v^{*2}}{2} + e_p^*, \quad (2.18)$$

$$p^* = (\gamma-1)\rho^*e_i^*, \quad (2.19)$$

$$T^* = \gamma(\gamma-1)Mce_i^*, \quad (2.20)$$

$$\mu^* = \frac{C_1^* T^{*3/2}}{(T^* + C_2^*)}, \quad (2.21)$$

onde as constante  $C_1$  e  $C_2$  são adimensionalizadas por

$$C_1^* = C_1 \frac{u_\infty}{T_\infty^{3/2}} \quad \text{e} \quad C_2^* = \frac{C_2}{T_\infty}. \quad (2.22)$$

Verifica-se que, utilizando-se este esquema de adimensionalização, as equações de transporte ficam idênticas às equações originais e, apenas as equações de fechamento são mudadas. A

partir deste ponto do texto, todas as variáveis e constantes devem ser consideradas como adimensionais, mesmo não apresentando o indicador asterisco. Este procedimento tem como objetivo, facilitar a notação e não carregar o texto.

### 3 Simulação de Grandes Escalas

Como já foi colocado no capítulo introdutório, não há, a princípio, grandes dificuldades em se resolver as equações de Navier-Stokes numericamente, uma vez que todos os seus operadores podem ser representados em uma malha computacional. Porém, surgem limitações à medida que se aumenta o número de Reynolds do escoamento. Uma proposta colocada no sentido de se resolver este problema, é a utilização da técnica de Simulação de Grandes Escalas (SGE) que, como já foi citado, oferece vantagens em relação às filosofias clássicas de modelagem de turbulência.

#### 3.1 Filosofia da SGE

Tome-se um método numérico que se utilize de uma malha cúbica regular, de tamanho característico  $\Delta x$ , para discretização das equações de Navier-Stokes adimensionais. Decompondo-se o campo contínuo de uma variável  $f$ , em um campo filtrado, ou campo de grandes escalas,  $[f]$ , utilizando-se um filtro,  $G_{\Delta x}$ , que pode ser a princípio um filtro gaussiano do tamanho característico  $\Delta x$ ,

$$[f(x,t)] = \int_D f(x,t) G(x-x') dx' , \quad (3.1)$$

e em um campo flutuante, ou campo submalha,  $f'$ , de tal forma que:

$$f(\vec{x}, t) = [f(\vec{x}, t)] + f'(\vec{x}, t). \quad (3.2)$$

Este filtro é normalmente aplicado às equações de Navier-Stokes incompressíveis. Para os casos compressíveis se faz necessária a utilização de um filtro ponderado com a massa específica, tal como sugerido por Erlebacher *et al.* (1990):

$$\bar{f} = \frac{[\rho f]}{[\rho]}, \quad (3.3)$$

o campo primitivo  $f$  fica então definido como:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t). \quad (3.4)$$

A aplicação deste filtro às equações de Navier-Stokes compressíveis adimensionalizadas pode ser vista na seção a seguir.

### 3.2 Equações de Navier-Stokes Filtradas - Equações de Reynolds

Nesta seção serão apresentadas apenas as equações resultantes da aplicação do filtro às equações do modelo matemático vistas no capítulo anterior, sem preocupação com sua dedução. Maiores detalhes, inclusive deduções, podem ser vistos em Ragab and Sheen (1993) ou em Anderson *et al.* (1984).

*equação da continuidade filtrada:*

$$\frac{\partial [\rho]}{\partial t} + \frac{\partial ([\rho]\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial ([\rho]\bar{v})}{\partial y} = 0, \quad (3.5)$$

*equações da conservação do quantidade de movimento filtradas:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial ([\rho]\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial ([\rho]\bar{u}^2 + [p] - \bar{\tau}_{xx} + C_{xx} + L_{xx} + R_{xx})}{\partial x} \\ + \frac{\partial ([\rho]\bar{u}\bar{v} - \bar{\tau}_{xy} + C_{xy} + L_{xy} + R_{xy})}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3.6.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial ([\rho]\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial ([\rho]\bar{v}\bar{u} - \bar{\tau}_{yx} + C_{yx} + L_{yx} + R_{yx})}{\partial x} \\ + \frac{\partial ([\rho]\bar{v}^2 + [p] - \bar{\tau}_{yy} + C_{yy} + L_{yy} + R_{yy})}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3.6.b)$$

*equação da conservação de energia filtrada:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial ([\rho]\bar{e}_t)}{\partial t} + \frac{\partial ([\rho]\bar{e}_t\bar{u} + [p]\bar{u} - \bar{u}\bar{\tau}_{xx} - \bar{v}\bar{\tau}_{xy} + \bar{q}_x + fc_x + fl_x + fr_x)}{\partial x} \\ + \frac{\partial ([\rho]\bar{e}_t\bar{v} + [p]\bar{v} - \bar{u}\bar{\tau}_{yx} - \bar{v}\bar{\tau}_{yy} + \bar{q}_y + fc_y + fl_y + fr_y)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Estas equações são denominadas equações de Reynolds ou equações de Navier-Stokes filtradas. Nelas, as tensões viscosas e o fluxo de calor são calculados como se segue:

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{2\mu}{3Re} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2\mu}{3Re} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}, \quad (3.8)$$

$$\bar{q}_i = - \frac{k}{(\gamma - 1) Mc^2 Re Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}, \quad (3.9)$$

Observa-se que, nestas equações, aparecem termos adicionais que envolvem médias do produto de flutuações de velocidade e energia. Nas equações de conservação do quantidade de movimento aparecem o tensor de Reynolds,

$$R_{ij} = [\rho] (\overline{u'_i u'_j}), \quad (3.10.a)$$

e outros tensores adicionais; como o tensor de Leonard,

$$L_{ij} = [\rho] (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j), \quad (3.10.b)$$

e o tensor cruzado,

$$C_{ij} = [\rho] (\overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j}). \quad (3.10.c)$$

Na equação da energia aparecem o fluxo turbulento,

$$f r_i = [\rho] (\overline{u'_i e_t}) + \overline{u'_i (p' + \tau'_{ii} + \tau'_{ij})}, \quad (3.11.a)$$

e os fluxos adicionais, análogos aos tensores de Leonard e Cruzado,

$$f_{l_i} = [\rho] (\overline{u'_i \bar{e}_t} + \overline{\bar{u}_i e'_t}) + \overline{u'_i ([p] + \bar{\tau}_{ii} + \bar{\tau}_{ij})} + \overline{\bar{u}_i (p' + \tau'_{ii} + \tau'_{ij})}, \quad (3.11.b)$$

e

$$f_{c_i} = [\rho] (\overline{\bar{u}_i \bar{e}_t} - \overline{\bar{u}_i e'_t}) + \overline{\bar{u}_i ([p] + \bar{\tau}_{xx} + \bar{\tau}_{xy})} - \overline{\bar{u}_i ([p] + \bar{\tau}_{xx} + \bar{\tau}_{xy})}. \quad (3.11.c)$$

Estes termos adicionais aparecem devido ao fato de que, diferentemente da média simples, utilizada nos métodos clássicos de modelagem da turbulência,

$$\overline{\bar{f}'} \neq \bar{f}' \quad \text{e} \quad \bar{f}' \neq 0. \quad (3.12)$$

O problema denominado de “*problema de fechamento da turbulência*” consiste então, em correlacionar estes tensores e fluxos de energia com o campo filtrado. No sentido de se resolver este problema, o modelo de turbulência, que em simulação de grandes escalas denomina-se modelo submalha, permite a obtenção de equações suplementares de modo a fechar o sistema de equações. Nestas equações faz-se uso do conceito de viscosidade turbulenta.

### 3.3 Considerações Gerais

O problema de fechamento da turbulência é muitas vezes denominado de problema de homogeneização, onde as leis que

governam um fenômeno são conhecidas em um nível microscópico e deseja-se uma lei para um nível macroscópico. Neste caso, o nível microscópico corresponde à menor partícula individual de fluido para a qual é possível aplicar-se as equações de Navier-Stokes, e o nível macroscópico corresponde ao campo filtrado. Para que o conceito de viscosidade turbulenta tenha uma forte base teórica, uma teoria de homogeneização para turbulência terá ainda que ser desenvolvida, uma vez que a teoria existente prevê uma separação bem explícita entre os dois níveis, e não um espectro contínuo de energia do nível macroscópico para o nível microscópico. Porém, este conceito tem sido empregado de forma satisfatória em vários casos como citado no capítulo introdutório.

Matematicamente, o problema do modelo de turbulência é um problema mal posto, devido à propagação de incertezas contidas inicialmente no campo flutuante, que não são detectadas pela malha, para o campo filtrado. Mesmo assim, isso não se torna um grande problema. Deve-se esperar no entanto, que, a cada passo da simulação, as propriedades do campo submalha se mantenham estatisticamente constantes. Este fato tem duas consequências que devem ser levadas em consideração: primeiro, a SGE não poderá prever de forma determinística a evolução de um dado escoamento além de um dado tempo de predicibilidade, sendo que este é o tempo que as escalas menores se propagam até o campo filtrado, e segundo, se dois escoamentos são diferentes entre si apenas nas pequenas escalas, não será possível com SGE detectar suas diferenças, mesmo quando estas se

propagarem para o campo das grandes escalas.

Com estas considerações Lesieur (1990) propõe critérios para definir o que se pode denominar uma boa Simulação de Grandes Escalas. São eles: *“A simulação deve prever corretamente as propriedades estatísticas da turbulência, tais como distribuição espectral, coeficientes de troca turbulenta etc. e deve simular corretamente a forma e a topologia das estruturas organizadas até as escalas calculadas. Contudo, não se faz necessária a previsão exata do momento atual ou a fase das estruturas turbilionares do escoamento turbulento. Isto, no entanto, não é tão importante, uma vez que a repetição, do ponto de vista determinístico, de um escoamento turbulento, mesmo em laboratório, é impossível”*.

Em termos de modelagem dos tensores submalha, uma consideração a ser feita é a de que se se utiliza, para solução das equações de Navier-Stokes, um método de discretização de ordem menor que três, como é o caso do método de MacCormack, pode-se desprezar os tensores e fluxos adicionais citados na seção anterior e modelar-se apenas o tensor de Reynolds,  $[\rho](\overline{u'_i u'_j})$ , e o fluxo turbulento de energia,  $[\rho](\overline{u'_i e'_i})$ . este fato é o que torna as equações de movimento filtradas idênticas às equações médias clássicas. A diferença fundamental que resta é a forma pela qual se calcula a viscosidade turbulenta e a filosofia da simulação, que exige cálculos de alta resolução. Observa-se também, que o fluxo turbulento de energia de pressão e de tensões viscosas,  $\overline{u'_i(p' + \tau'_{ii} + \tau'_{ij})}$ , pode ser desprezado

frente ao fluxo de energia total, o que torna as equações de movimento filtradas idênticas às equações de movimento médias.

### 3.4 O Modelo Submalha de Smagorinsky

O modelo submalha de Smagorinsky é um dos mais usados para simulação de grandes escalas de turbulência não-homogênea. Neste modelo, o tensor de Reynolds é modelado utilizando-se o conceito de viscosidade turbulenta. As equações a serem resolvidas passam, agora, a ser equações sem o tensor de Reynolds e sem o fluxo de energia turbulento e com uma viscosidade e uma difusividade turbulentas adicionadas à viscosidade e à difusividade moleculares, respectivamente, como será visto nas equações da seção 3.5.

Este modelo é baseado sobre a hipótese de equilíbrio local das pequenas escalas  $\wp = \varepsilon$ , onde:

$$\wp = \overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (3.13)$$

é a produção de energia cinética turbulenta e

$$\varepsilon = \frac{c_1 \left( \overline{u'_i u'_j} \right)^{3/2}}{l} \quad (3.14)$$

é a sua dissipação, sendo

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.15)$$

as componentes do tensor taxa de deformação do campo filtrado. Supõe-se ainda, que a viscosidade turbulenta seja proporcional às escalas características de comprimento e de velocidade da turbulência. Uma simples análise dimensional fornece a base para esta suposição, que resulta em:

$$\nu_t = c_2 l \left( \overline{u'_i u'_j} \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Colocando-se a viscosidade turbulenta em função das componentes do tensor taxa de deformação,  $\bar{S}_{ij}$ , tem-se que:

$$\nu_t = (Cs l)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}, \quad (3.17)$$

onde o comprimento característico  $l$  está associado ao tamanho característico da malha,  $l = \sqrt{\Delta x \Delta y}$ . A constante de Smagorinsky,  $Cs$ , foi determinada por Lilly (1967) como sendo  $Cs = 0,2$  para turbulência homogênea e isotrópica. No entanto, o valor desta constante é controverso. Yoshizawa (1982) encontrou  $Cs = 0,11$ , Deardoff (1971) propõe o valor de  $Cs = 0,1$ , obtido com a Simulação de Grandes Escalas do escoamento em um canal. Silveira Neto (1993) utilizou o valor proposto por Lilly para o escoamento em uma expansão brusca, obtendo

resultados comparáveis com os resultados experimentais para esta geometria.

O fluxo turbulento da energia total,  $[\rho](\overline{u'e't})$ , é modelado utilizando-se o conceito de difusividade turbulenta,  $\alpha_t$ . Esta, é calculada utilizando-se o número de Prandtl turbulento ( $Pr_t = \nu_t/\alpha_t$ ), para o qual Lesieur (1990) sugere o valor 0,6.

### 3.5 Equações de Reynolds Modeladas

As equações de transporte modeladas, como pode ser visto a seguir, mantêm a mesma forma que as equações de Navier-Stokes. Uma mudança, no entanto, pode ser vista no cálculo das tensões viscosas e fluxos de calor, onde são acrescentados os valores de viscosidade e difusividade turbulentas. Estas equações tomam a seguinte forma:

*equação da continuidade*

$$\frac{\partial [\rho]}{\partial t} + \frac{\partial ([\rho]\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial ([\rho]\bar{v})}{\partial y} = 0, \quad (3.18)$$

*equações de conservação do quantidade de movimento modeladas*

$$\frac{\partial ([\rho]\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial ([\rho]\bar{u}^2 + [\rho] - \bar{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial ([\rho]\bar{u}\bar{v} - \bar{\tau}_{xy})}{\partial y} = 0, \quad (3.19.a)$$

$$\frac{\partial([\rho]\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial([\rho]\bar{v}\bar{u} - \bar{\tau}_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial([\rho]\bar{v}^2 + [p] - \bar{\tau}_{yy})}{\partial y} = 0, \quad (3.19.b)$$

*equação de conservação da energia modelada*

$$\begin{aligned} \frac{\partial([\rho]\bar{e}_t)}{\partial t} + \frac{\partial([\rho]\bar{e}_t\bar{u} + [p]\bar{u} - \bar{u}\bar{\tau}_{xx} - \bar{v}\bar{\tau}_{xy} + \bar{q}_x)}{\partial x} \\ + \frac{\partial([\rho]\bar{e}_t\bar{v} + [p]\bar{v} - \bar{u}\bar{\tau}_{yx} - \bar{v}\bar{\tau}_{yy} + \bar{q}_y)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

As tensões viscosas e fluxos de calor são dados por:

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{2(\mu + \mu_t)}{3Re} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2(\mu + \mu_t)}{3Re} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}, \quad (3.21)$$

$$\bar{q}_i = - \frac{(k + k_t)}{(\gamma - 1)Mc^2 Re Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}, \quad (3.22)$$

onde

$$\mu_t = Re[\rho] (C_s l)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}, \quad (3.23)$$

$$k_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t}, \quad (3.24)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.25)$$

Como feito para o processo de adimensionalização, as variáveis, a partir deste ponto do texto, não mais apresentarão os indicadores de filtragem, para facilidade de notação, ficando, porém, implícito que todas as variáveis foram filtradas segundo o processo indicado nas seções 3.1 e 3.2.

E interessante, nesta altura do texto, despertar-se para alguns aspectos físicos da solução numérica destas equações, considerando-se a simplificação de bidimensionalização feita inicialmente no modelo matemático.

### 3.6 SGE de Escoamentos Turbulentos Bidimensionais

Foi em termos de escoamentos bidimensionais que a simulação de grandes escalas foi proposta por Smagorinsky em 1963. Sabe-se, no entanto, que, por natureza, os escoamentos turbulentos são tridimensionais. Porém, em muitos casos, tomando-se um escoamento como bidimensional nas grandes escalas e simulando-o como tal, pode-se conseguir resultados significativos, até mesmo em termos da evolução das estruturas coerentes. Comparações deste nível podem ser encontradas em Silveira Neto (1993).

Considerando-se um escoamento quasi-bidimensional nas grandes escalas, tal como o caso da cavidade com paredes laterais afastadas do plano a ser considerado, e tridimensional nas pequenas escalas,

assume-se então, que o número de onda de corte na SGE localiza-se nas pequenas escalas. Então, para ser desenvolvido, o modelo submalha tem que estar de acordo com a dinâmica das estruturas bidimensionais (cascata inversa de energia) e ao mesmo tempo prever estas interações com escalas submalhas tridimensionais.

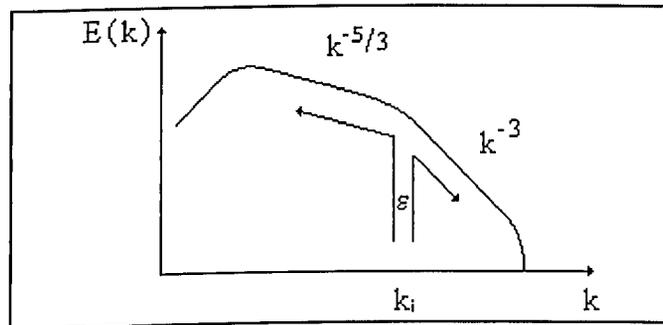


Figura 3.1: Esquema da cascata dupla de energia para escoamentos turbulentos bidimensionais.

### 3.6.1 A Cascata Inversa de Energia

Estê conceito foi introduzido por Kraichnan (1968) para escoamentos turbulentos bidimensionais. A energia cinética injetada a uma taxa  $\varepsilon$  num escoamento turbulento bidimensional será dividida em um fluxo no sentido das menores para as maiores escalas, inverso ao previsto pela cascata natural direta. A figura (3.1) mostra esquematicamente o espectro de energia obtido em tais casos.

A cascata inversa é não-estacionária em baixos números de onda, uma vez que a taxa de fornecimento de energia se mantém constante e a dissipação nestas escalas não o é. Na faixa estacionária de  $k < k_i$  o espectro é proporcional a  $k^{-5/3}$  e na faixa estacionária de  $k > k_i$  o

espectro é proporcional a  $k^{-3}$ , diferentemente do espectro tridimensional, que apresenta em toda faixa estacionária um espectro proporcional a  $k^{-5/3}$ .

## 4 Método Numérico

O método dos volumes finitos de MacCormack (1969), formulação na qual o incremento de cada propriedade é calculado pelo fluxo líquido das mesmas através das superfícies de controle, é um esquema largamente utilizado para a solução das equações para escoamentos compressíveis de fluidos Newtonianos. Este esquema, é uma variação do esquema de Lax-Wendroff (1960) em dois passos, o que remove a necessidade de cálculo das variáveis nas superfícies de controle, tornando-se um método de fácil implementação e mais rápido, Anderson *et al.* (1984). Daí sua larga utilização quando da solução de EDP's não lineares.

### 4.1 Introdução ao Método MacCormack

O esquema de dois passos é feito na discretização espacial e consiste no uso de diferenças com o ponto posterior para o primeiro passo, denominado *passo preditor*, e de diferenças com o ponto anterior no segundo passo, denominado *passo corretor*. As ordens destas diferenças podem ser mudadas bem como se pode trabalhar alternando-as (Anderson *et al.*, 1984). Para um entendimento mais claro do que seja diferença anterior (backward difference) e posterior (forward difference) aplicar-se-á o método a uma equação simples, no caso a equação da onda linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.1)$$

Discretizando-se esta equação através do método totalmente explícito de MacCormack tem-se que:

*passo preditor*

$$\Delta u_i^{\overline{n+1}} = -c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (4.2.a)$$

calcula-se um valor intermediário para a variável  $u$ ,

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n + \Delta u_i^{\overline{n+1}}, \quad (4.2.b)$$

*passo corretor*

$$\Delta u_i^{n+1} = -c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^{\overline{n+1}} - u_{i-1}^{\overline{n+1}}). \quad (4.2.c)$$

Isto vem do fato de que na diferença posterior, *passo preditor*, é assumido que os valores das variáveis nas superfícies  $(i+1/2)$  são iguais aos do ponto  $(i+1)$  e, na diferença anterior, *passo corretor*, é assumido que os valores das variáveis nas superfícies  $(i+1/2)$  são iguais aos do ponto  $(i)$ , como indicado na figura (4.1). O valor final de  $u_j^{n+1}$  é calculado por:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{(\Delta u_i^{\overline{n+1}} + \Delta u_i^{n+1})}{2}. \quad (4.2.d)$$

Observa-se que a variação total é uma média das variações calculadas nos passos *preditor* e *corretor*.

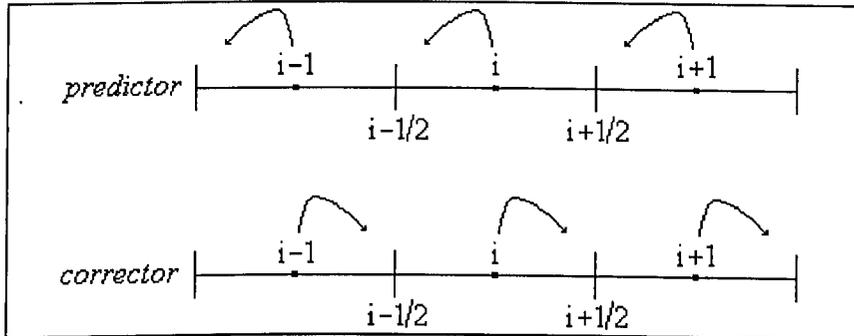


Figura 4.1: Esquema de diferenças utilizado nos passos *preditor* e *corretor*, para discretização de equações.

Equações vetoriais, tais como as equações para escoamento incompressível, não-viscoso, unidimensional e não-estacionário, escritas na forma mostrada a seguir:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0, \quad (4.3)$$

onde os vetores  $\vec{U}$  e  $\vec{E}$ , são definidos a partir das equações citadas da seguinte forma:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

podem ser integradas pelo método MacCormack, resultando no seguinte algoritmo:

*passo preditor*

$$\Delta \vec{U}_i^{\overline{n+1}} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{E}_{i+1}^n - \vec{E}_i^n), \quad (4.5.a)$$

$$\vec{U}_i^{\overline{n+1}} = \vec{U}_i^n + \Delta \vec{U}_i^{\overline{n+1}}, \quad (4.5.b)$$

*passo corretor*

$$\Delta \vec{U}_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{E}_i^{\overline{n+1}} - \vec{E}_{i-1}^{\overline{n+1}}), \quad (4.5.c)$$

$$\vec{U}_j^{n+1} = \vec{E}_j^n + \frac{(\Delta \vec{E}_j^{\overline{n+1}} + \Delta \vec{E}_j^{n+1})}{2}. \quad (4.5.d)$$

Ao final de cada passo, deve-se desmembrar as componentes do vetor  $\vec{U}$  para a obtenção das variáveis primitivas, de tal forma que um novo vetor  $\vec{E}$  possa ser calculado para o próximo passo de integração.

## 4.2 Formulação dos Volumes Finitos

Tomando-se as equações de Reynolds compressíveis, modeladas e adimensionalizadas como mostradas na seção 3.5, define-se o tensor  $\vec{\vec{P}}$  de tal forma que:

$$\vec{\vec{P}} = \vec{E} \times \vec{i} + \vec{F} \times \vec{j}, \quad (4.6)$$

onde os vetores de fluxo,  $\vec{E}$  e  $\vec{F}$ , são definidos pelas equações a seguir:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (\rho e_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (\rho e_t + p)v - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

e  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são os vetores unitários nas direções  $x$  e  $y$ . Pode-se então, escrever as equações de transporte da seção anterior, na forma vetorial, como:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\vec{P}} = 0, \quad (4.9)$$

ou

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\vec{P}}, \quad (4.10)$$

onde o vetor propriedade  $\vec{U}$  é definido como:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Integrando-se a equação 4.10 em um volume de controle fixo  $V$ , tem-se que:

$$\int_V \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{P} dV. \quad (4.12)$$

Alternando os operadores “integral” e “derivada parcial temporal” do termo à esquerda da equação 4.12 e aplicando-se o teorema da divergência ao lado direito da equação, obtém-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{U} dV = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (4.13)$$

Esta é a equação a ser discretizada utilizando-se o método totalmente explícito de MacCormack.

### 4.3 Discretização das Equações

Para se fazer a integração da equação (4.13) considera-se um volume de controle de uma malha retangular de tamanho  $\Delta x \times \Delta y$ , tal como mostrado na figura 4.2. A cada volume de controle desta malha associa-se um centróide, onde as propriedades do fluido são iguais à média das propriedades no interior do volume, calculadas como se segue

$$\bar{f} = \frac{1}{V} \int_V f dV, \quad (4.14)$$

onde  $\bar{f}$  é a propriedade no centróide e  $f$  é a propriedade em cada ponto do volume de controle. Associa-se também, a cada volume, suas superfícies de controle, considerando-se que em cada uma das quatro superfícies as propriedades se mantêm constantes.

.	$i, j+1$	.
$i-1, j$	$i, j$	$i+1, j$
.	$i, j-1$	.

Figura 4.2: Malha retangular para discretização de equações bidimensionais.

Seguindo-se estes procedimentos, tem-se que a equação a ser discretizada é agora dada por:

$$\frac{\partial \vec{U}_{ij}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \sum \vec{P}_{ij} \Delta \vec{S}, \quad (4.15)$$

onde  $i, j$  indicam as coordenadas do centróide, e  $\sum$  indica a soma sobre as faces do volume.

A aproximação temporal é feita substituindo-se a derivada temporal do vetor propriedade pela razão entre as diferenças finitas deste e do tempo, de tal forma que:

$$\frac{\partial \vec{U}_{ij}}{\partial t} \cong \frac{\Delta \vec{U}_{ij}}{\Delta t} = \frac{\vec{U}_{ij}^{n+1} - \vec{U}_{ij}^n}{\Delta t}. \quad (4.16)$$

A integração dos vetores fluxo nas superfícies de controle é feita seguindo o esquema de dois passos do método do MacCormack como indicado na seção 4.1. Sendo assim, as equações para os dois passos são dadas por:

*passo preditor*

$$\Delta \vec{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = -\frac{\Delta t}{V_{ij}} \left( \vec{P}_{i+1/2}^{\overline{n}} \vec{S}_{i+1/2j} - \vec{P}_{i,j}^{\overline{n}} \vec{S}_{i-1/2j} + \vec{P}_{i,j+1}^{\overline{n}} \vec{S}_{ij+1/2} - \vec{P}_{i,j}^{\overline{n}} \vec{S}_{ij-1/2} \right), \quad (4.17.a)$$

$$\vec{U}_{ij}^{\overline{n+1}} = \vec{U}_{ij}^n + \Delta \vec{U}_{ij}^{\overline{n+1}}, \quad (4.17.b)$$

*passo corretor*

$$\Delta \vec{U}_{ij}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{V_{ij}} \left( \vec{P}_{ij}^{\overline{n+1}} \vec{S}_{i+1/2j} - \vec{P}_{i-1/2j}^{\overline{n+1}} \vec{S}_{i-1/2j} + \vec{P}_{ij}^{\overline{n+1}} \vec{S}_{ij+1/2} - \vec{P}_{ij-1/2}^{\overline{n+1}} \vec{S}_{ij-1/2} \right), \quad (4.17.c)$$

sendo, finalmente, o vetor propriedade no passo posterior calculado através da média das duas variações:

$$\vec{U}_{ij}^{n+1} = \vec{U}_{ij}^n + \frac{(\Delta \vec{U}_{ij}^{\overline{n+1}} + \Delta \vec{U}_{ij}^{n+1})}{2}. \quad (4.17.d)$$

É importante observar que, ao final de cada passo, como já foi salientado, deve-se decompor o vetor propriedade  $\vec{U}$  de tal forma a se obter um novo tensor  $\vec{P}$  para o passo seguinte. Como consequência, no passo *corretor*, utiliza-se para este cálculo as propriedades calculadas no passo *preditor*.

#### 4.4 Cálculo dos Termos Viscosos

Para o cálculo do tensor  $\vec{P}$  em cada passo, deve-se calcular os valores das tensões viscosas nas superfícies de controle. Para isto, devem ser estimados os valores de viscosidade e das derivadas espaciais de velocidade nestas superfícies.

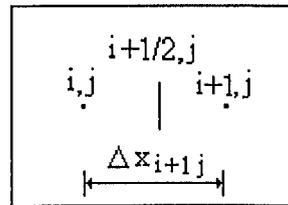


Figura 4.3: Esquema para o cálculo das derivadas espaciais no sentido do vetor superfície.

Para o cálculo da viscosidade, faz-se uma média dos valores desta nos centróides adjacentes à superfície na qual se quer o valor da viscosidade, por exemplo a viscosidade na superfície  $(i+1/2,j)$  é dada pela média dos valores da viscosidade nos pontos  $(i, j)$  e  $(i+1, j)$ ,

$$\mu_{i+1/2,j} = \frac{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}}{2}. \quad (4.18)$$

Observa-se que a viscosidade varia de acordo com a variação da temperatura segundo a equação de Sutherland (2.12).

Para as derivadas espaciais de velocidade, dois métodos são utilizados, dependendo do caso. No caso da derivada ser na mesma direção do vetor superfície, conforme a figura 4.3, esta é calculada pela diferença finita entre os dois pontos adjacentes à superfície em questão. Para a superfície  $(i+1/2, j)$ , cujo vetor superfície é na direção  $i$ , por exemplo, a derivada nesta direção é dada pela diferença finita entre os pontos  $(i, j)$  e  $(i+1, j)$ ,

$$(\partial f / \partial x)_{i+1/2, j} = \frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta x_{i+1, j}}. \quad (4.19)$$

No caso em que a derivada é na direção perpendicular ao vetor superfície, conforme a figura 4.4, os valores da derivada espacial são calculados pela média dos valores nos dois pontos adjacentes, tal como na viscosidade. Por exemplo, a derivada na direção  $j$  na superfície  $(i+1/2, j)$  é dada por:

$$(\partial f / \partial y)_{i+1/2, j} = \frac{(\partial f / \partial y)_{i, j} + (\partial f / \partial y)_{i+1, j}}{2}, \quad (4.20)$$

sendo que as derivadas nestes pontos adjacentes são calculadas por diferença centrada como mostrado a seguir:

$$(\partial f / \partial y)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{(\Delta y_{i,j} + \Delta y_{i,j+1})} \text{ e } (\partial f / \partial y)_{i+1,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{(\Delta y_{i+1,j} + \Delta y_{i+1,j+1})}. \quad (4.21)$$

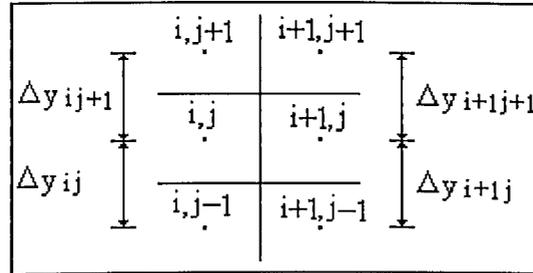


Figura 4.4: Esquema para o cálculo das derivadas espaciais no sentido perpendicular ao vetor superfície.

#### 4.5 Condições de Contorno

As Condições de Contorno são estabelecidas com o auxílio de uma malha virtual que circunda todo o domínio de cálculo, ver figura 4.5. A partir do tipo de condição de contorno, baseada nos aspectos físicos do problema, especifica-se os valores para as propriedades nos centróides da malha virtual. Estas condições são sempre atualizadas ao final de cada passo *preditor* ou *corretor*. A seguir, comenta-se sobre os tipos de condições utilizadas.

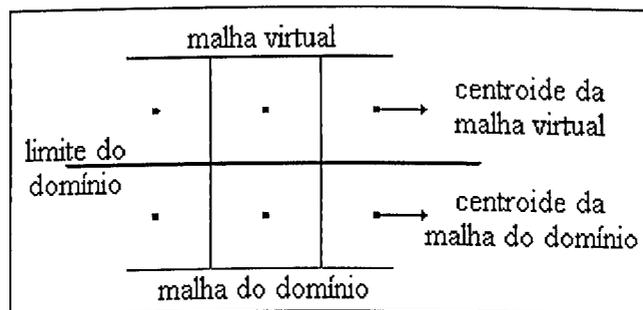


Figura 4.5: Esquema de malha virtual.

#### 4.5.1 Condições de Contorno Para Velocidades

Para a velocidade têm-se basicamente três tipos de condições de contorno: condição de escoamento livre ou completamente desenvolvido, condição de não-escorregamento e condição de velocidade não-nula imposta. No primeiro caso, considera-se que os gradientes de velocidade são nulos

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_l} = 0, \quad (4.22)$$

onde  $x_l$  é a direção da superfície do contorno. Para isto, faz-se com que os valores das velocidades nos centróides da malha virtual sejam iguais aos valores nos centróides da malha do domínio adjacentes à malha virtual. No segundo caso, as velocidades são nulas no contorno da malha

$$u_i = 0. \quad (4.23)$$

Faz-se então, com que as velocidades nos centróides virtuais sejam iguais, em módulo, às velocidades nos centróides adjacentes do domínio, porém com sentido contrário. O terceiro e último caso é utilizado para estabelecer uma velocidade constante na entrada do domínio

$$u_i = f(x_p), \quad (4.24)$$

onde  $x_p$  é a direção perpendicular à direção da superfície de contorno. Impõe-se, então, um perfil de velocidade na malha virtual e este valor não é mudado durante o cálculo.

#### 4.5.2 Condições de Contorno Para Densidade e Energia Interna

Para a densidade e energia interna considera-se dois casos: a condição de escoamento livre ou completamente desenvolvido, e a condição de parede. Para o caso de escoamento livre ou completamente desenvolvido, os gradientes de energia e densidade são considerados nulos,

$$\frac{\partial e_i}{\partial x_l} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_l} = 0. \quad (4.25)$$

Para a condição de parede, considera-se que as paredes são adiabáticas, portanto os gradientes de energia interna nas paredes são nulos, e como não há fluxo de massa através das mesmas, os gradientes de densidade são também nulos. Impõe-se então, em ambos os casos, nos centróides da malha virtual o mesmo valor de energia interna dos centróides adjacentes.

Explicações mais detalhadas sobre a utilização destas condições de contorno, bem como outros detalhes sobre o método totalmente explícito de MacCormack podem, também, ser encontradas em Hirsch (1990).

## 5 Resultados

### 5.1 Simulações Realizadas

Apresentar-se-á neste capítulo, os resultados obtidos com as simulações realizadas, tanto para cavidades no interior de dutos, como para cavidades sob escoamentos livres. Estas simulações consistem em resolver as equações de Reynolds modeladas, conforme mostradas na seção 3.5, utilizando-se o método de discretização totalmente explícito de MacCormack, mostrado no capítulo 4. As simulações serão analisadas em seus aspectos qualitativos, para a primeira situação, uma vez que, como colocado nos objetivos, não foram encontrados trabalhos experimentais nesta geometria, e em seus aspectos quantitativos, para a segunda situação estudada, onde, os resultados conseguidos serão comparados com os resultados de Sinha *et al.* (1982).

Nos dois casos simulados, a geometria do domínio de cálculo é a mesma, ver figura 5.1. Muda-se, no entanto, de um caso para outro, as condições de contorno no plano 1-2, mostrado na mesma figura. Para a formação do domínio de cálculo completo, utilizou-se a técnica de composição de domínios, técnica esta, que consiste em dividir o domínio em subdomínios retangulares e uni-los, de tal forma que, na interface entre os mesmos, um dado domínio passe a ser a condição de contorno do outro e vice-versa. Esta técnica têm a vantagem, em

relação a se utilizar um domínio retangular único, de se fazer economia de memória, pois, não se armazena pontos em locais em que não há fluxo. Para o caso em questão, escolheu-se a divisão em três subdomínios, denominados *entrada*, *cavidade* e *saída*, ver figura 5.1. Esta escolha foi feita de tal forma, que os acoplamentos entre estes domínios não se localizassem em locais que facilitam a propagação de instabilidades, tais como regiões de alto cisalhamento. Pode-se exemplificar esta técnica, tomando-se a interface entre os subdomínios denominados de *entrada* e *cavidade*. Observa-se, que, para a face direita do domínio *entrada*, as condições de contorno são os valores na parte superior da face esquerda do domínio *cavidade*, bem como, a condições de contorno na parte superior da face esquerda do domínio *cavidade*, são os valores na face direita do domínio *entrada*.

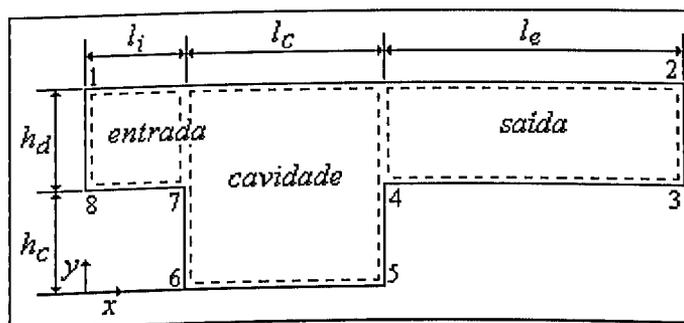


Figura 5.1: Geometria do domínio simulado, mostrando suas dimensões características e a divisão em subdomínios.

Na figura 5.1 podem ser identificadas as seguintes medidas: comprimento de entrada,  $l_i$ , comprimento da cavidade,  $l_c$ , e comprimento de saída,  $l_e$ , altura da cavidade,  $h_c$ , e altura do duto ou altura do domínio livre, dependendo do caso simulado,  $h_d$ . Ressalta-se que estes

comprimentos são sempre adimensionalizados, como indicado na seção 2.2, em função da altura dimensional da cavidade. Desta forma tem-se sempre que:  $h_c = 1,0$ .

### 5.1.1 Simulações em Cavidades no Interior de Dutos

Realizou-se para este caso, quatro simulações, sendo que, as três primeiras, permitiram ajustar a constante de Smagorinsky, a qual foi utilizada em uma simulação com malha mais refinada, que corresponde à quarta simulação. Estas simulações têm os parâmetros adimensionais: número de Reynolds,  $Re = 641.000$ , número de Prandtl,  $Pr = 0,71$  e número de Mach,  $Mc = 0,034$  e utiliza-se as propriedades físicas do ar à temperatura 300 K. A geometria é dada pelos valores de comprimento de entrada,  $l_i = 1,0$ , comprimento da cavidade,  $l_c = 2,0$ , comprimento de saída,  $l_e = 3,0$  e altura do duto,  $h_d = 1,0$ . Nas três primeiras foram utilizados três valores da constante de Smagorinsky, iguais a 0,2, 0,4 e 0,6, respectivamente. A malha, nestas simulações, tem 50 pontos por altura da cavidade, tanto na direção vertical como na direção horizontal. A quarta e última simulação tem constante de Smagorinsky igual a 0,4, que, como será visto, é o valor mais adequado para o código utilizado. A malha, neste caso, tem 80 pontos por altura da cavidade, tanto na vertical como na horizontal.

As condições de contorno para velocidades, densidade e energia interna, nestas simulações, são descritas a seguir, seguindo a figura 5.1. No plano 1-2, foram utilizadas condição de não-escorregamento, para as velocidades e condição de parede adiabática, para densidade e energia

interna. No plano 2-3, foi utilizada condição de contorno de escoamento completamente desenvolvido, para todas as variáveis em questão. Nos planos 3-4, 4-5, 5-6, 6-7 e 7-8, foram utilizadas condição de não-escorregamento, para as velocidades e condição de contorno de parede adiabática, para a densidade e energia interna. No plano 8-1, foram utilizadas condições de velocidade imposta, com um perfil turbulento não desenvolvido, e de densidade e energia interna, também impostas, porém, com um perfil constante. A condição inicial utilizada foi de velocidade igual a  $u_\infty$  no duto, e velocidade nula no interior da cavidade. Para a densidade e energia interna, utilizou-se o valor imposto na entrada em todo domínio de cálculo.

As simulações realizadas, neste caso, estão colocadas na tabela 5.1. Nesta tabela são mostradas as diferenças entre as simulações, além de codificá-las, no sentido de facilitar futuras referências durante o texto.

Tabela 5.1: Simulações realizadas para cavidades no interior de dutos.

Código da Simulação	Constante de Smagorinsky	Malha (pts/h)
CD 50-0,2	0,2	50
CD 50-0,4	0,4	50
CD 50-0,6	0,6	50
CD 80-0,4	0,4	80

Prar estas simulações foi utilizado um computador de grande porte IBM-3090. Porém os dados sobre tempo de CPU não foram

coletados.

### 5.1.2 Simulações em Cavidades Sob Escoamentos Livres

Para este caso, realizou-se três simulações, as quais, correspondem a dois casos estudados por Sinha *et al.* (1982). As três têm como características comuns, os parâmetros adimensionais: número de Reynolds,  $Re = 2.648$ , número de Prandtl,  $Pr = 0,71$  e número de Mach,  $Mc = 0,005$  e utiliza-se as propriedades físicas do ar à temperatura 305 K. A geometria, para a primeira simulação, é dada pelos valores de comprimento de entrada,  $l_i = 1,0$ , comprimento da cavidade,  $l_c = 1,0$ , comprimento de saída,  $l_e = 3,0$  e altura do duto,  $h_d = 1,0$ . Esta simulação tem constante de Smagorinsky igual a 0,4. Nas duas últimas, a geometria é a mesma, excetuando-se pelo comprimento da cavidade,  $l_c = 2,0$ . Estas duas simulações são diferenciadas pelas suas constantes de Smagorinsky, iguais a 0,2 e 0,4, respectivamente. Para todas as três simulações, a malha tem 25 pontos por altura da cavidade, tanto na direção vertical como na direção horizontal.

As condições de contorno para velocidades, densidade e energia interna mudam, em relação aos casos de cavidades em dutos, apenas nos planos 1-2 e 8-1, seguindo a figura 5.1. No plano 1-2, foi utilizada condição de contorno de escoamento livre, para todas as variáveis em questão. Já, no plano 8-1 foi utilizada condição de velocidade imposta, com um perfil laminar, e condição de contorno de escoamento completamente desenvolvido, para a densidade e energia interna. A condição inicial utilizada foi a mesma que para o escoamento em

cavidades no interior de dutos, a saber, velocidade igual a  $u_\infty$  no duto, e velocidade nula no interior da cavidade. Para a densidade e energia interna, também utilizou-se o valor imposto na entrada em todo domínio de cálculo.

Estas simulações estão colocadas na tabela 5.2. Nesta tabela são mostradas as diferenças entre as mesmas, além de codificá-las.

Tabela 5.2: Simulações realizadas para cavidades sob escoamentos livres.

Código da Simulação	Comprimento da Cavidade	Constante de Smagorinsky
CL 1-0,4	1,0	0,4
CL 2-0,2	2,0	0,2
CL 2-0,4	2,0	0,4

Para estas simulações foi utilizado um micro computador 486, 66 Mh, com 4 Magabytes de memoria RAM. Gastou-se em torno de 3,5 h para cada 10000 passos de tempo para as simulações CL 2-0,2 e CL 2-0,4, e 2,5 h para cada 10000 passos de tempo da simulação CL 1-0,4.

## 5.2 Resultados Preliminares

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos, no decorrer dos trabalhos, com as simulações em cavidades no interior de dutos. Os mesmos estão relacionados com os aspectos computacionais do método utilizado.

### 5.2.1 Condições de Contorno na Entrada do Domínio

As condições de densidade e energia interna, impostas na entrada do domínio, não apresentaram-se adequadas, pois, com estas condições não se obteve um resultado satisfatório, com relação à pressão. Este resultado é mostrado na figura 5.2. Nesta observa-se que existe uma queda nos valores de coeficiente de pressão, logo na entrada do domínio, quando este coeficiente é calculado utilizando-se, como pressão de referência, a pressão imposta na entrada. Esta queda do coeficiente de pressão persiste, mesmo tendo-se a estabilidade da densidade e da energia interna. No gráfico da figura 5.3 mostra-se o sinal do coeficiente de pressão no ponto  $x = 2,5 h_c$  e  $y = 1 h_c$ , onde pode-se observar a queda deste coeficiente a partir do início da simulação. Este fato pode ter sua origem devido a não correspondência entre os perfis de velocidade e os perfis de densidade e energia interna impostos na malha virtual da entrada do domínio. Esta discrepância gera um choque numérico indesejável e sem significado físico. Por outro lado as malhas internas tem sua pressão calculada, de tal modo que os princípios de conservação são obedecidos.

Para solucionar este problema, utilizou-se, no plano em questão, condição de contorno de velocidade imposta, porém, para densidade e energia interna, utilizou-se condição de escoamento completamente desenvolvido. Estas condições mostraram-se satisfatórias, porém, elas só foram utilizadas, quando da simulação em cavidades sob escoamento livre.

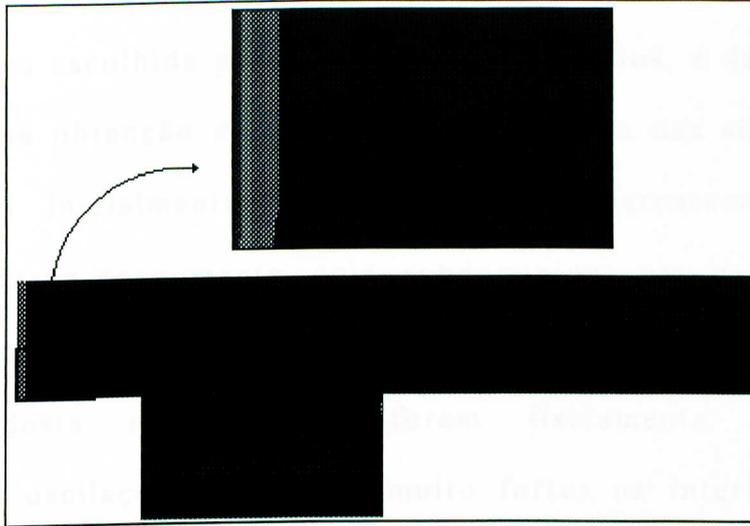


Figura 5.2: Campo de pressão, utilizando-se as condições de contorno de densidade energia interna impostas, no detalhe mostra-se a queda do coeficiente de pressão na entrada do domínio.

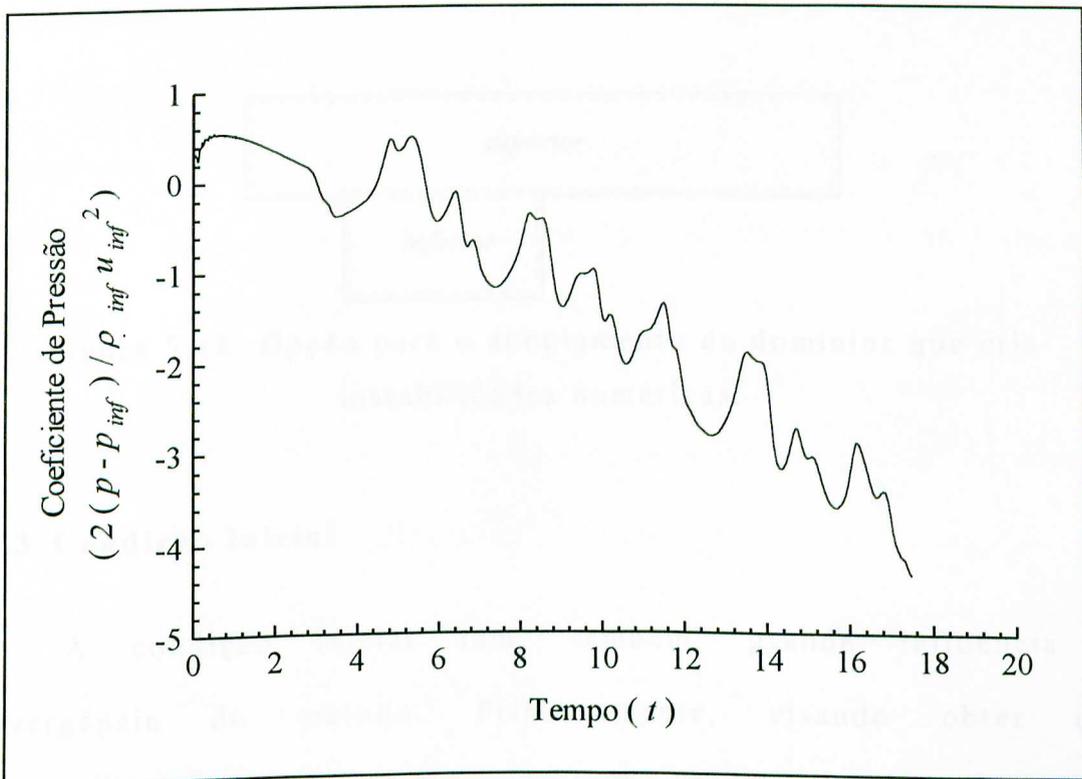


Figura 5.3: Distribuição temporal do coeficiente de pressão na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1 h_c$ .

### 5.2.2 Acoplamento de Domínios

A forma escolhida para se acoplar os domínios, é de fundamental importância na obtenção da convergência numérica das simulações. Na escolha feita inicialmente de acoplamento, aparentemente a mais natural, utilizava-se somente dois subdomínios: um canal completo superior e a cavidade inferior, como ilustrado na figura 5.18. Porém, os resultados desta escolha não foram fisicamente coerentes e apresentaram oscilações numéricas muito fortes na interface entre os dois domínios. A princípio, este fato pode ser atribuído ao acoplamento em uma região com os maiores níveis de cisalhamento, portanto, com grande possibilidade de ampliar, de forma fisicamente incoerente, as pequenas oscilações numéricas geradas devido ao mesmo.

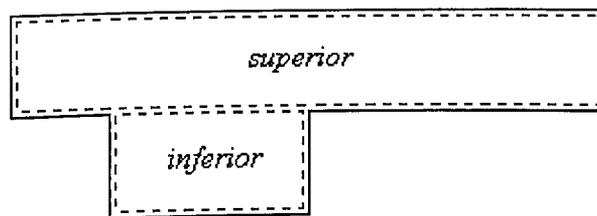


Figura 5.18: Opção para o acoplamento de domínios que cria instabilidades numéricas.

### 5.2.3 Condição Inicial

A condição inicial tem, também, grande influência na convergência do método. Primeiramente, visando obter uma convergência mais rápida, utilizou-se velocidade igual à  $u_\infty$  em toda o domínio. Isto gerava instabilidades no campo de densidade no canto

superior direito da cavidade, devido a uma forte compressão nesta região, juntamente com a descontinuidade gerada pela quina aí existente. Estas instabilidades se ampliavam e levavam à uma divergência da solução. Para solucionar este problema, optou-se por utilizar velocidade inicial nula no interior da cavidade, o que levou a resultados satisfatórios.

### 5.3 Ajuste da Constante de Smagorinsky

Como citado, o ajuste da constante de Smagorinsky foi feito através das três primeiras simulações de cavidades no interior de dutos. Os resultados destas três simulações, CD 50-0,2, CD 50-0,4 e CD 50-0,6, estão plotados nas figuras 5.4, 5.5 e 5.6, respectivamente, para um tempo igual a  $46,6 h_c / u_\infty$ , que, considerando-se os parâmetros adimensionais e as propriedades do fluido utilizados, corresponde a um tempo físico de 0,2 s. Cada uma destas figuras é dividida em “a” e “b”, sendo que, aqueles com o subíndice “a” correspondem ao campo de densidade, e as com o subíndice “b”, ao campo de rotacional. Os campos de densidade são plotados em doze níveis de cores entre os valores  $0,98 \rho_\infty$  e  $1,01 \rho_\infty$ . Os campos de rotacional são também plotado em doze níveis, e seus valores estão entre  $-6 u_\infty / h_c$  e  $5 u_\infty / h_c$ . Nas imagens, a cor vermelha corresponde ao nível de maior valor da variável em questão, e a cor azul, ao nível de menor valor.

Nas figuras 5.4.a e 5.4.b, as estruturas de Kelvin-Helmholtz são claramente evidenciadas. Pode-se notar uma faixa de rotacional de valor elevado, logo acima da cavidade, que dá origem às estruturas citadas.

No correspondente campo de densidade, figura 5.4.a, é possível notar as mesmas estruturas. No entanto, este campo se revela extremamente instável na região logo acima da parede frontal da cavidade, à direita. Estas instabilidades são puramente numéricas, e mostram que a viscosidade turbulenta, que modela as interações não-lineares entre as grandes escalas, que são resolvidas, e as escalas submalha, que são modeladas, não assume um valor suficientemente elevado para cumprir esta tarefa. Estes fatos foram também discutidos em Pinho e Silveira Neto (1995).

Comparando-se as figuras 5.4, 5.5 e 5.6, observa-se que, à medida que se aumenta o valor da constante de Smagorinsky, portanto, o valor da viscosidade turbulenta, as instabilidades numéricas no campo de densidade desaparecem. Porém, na simulação cuja constante de Smagorinsky é igual a 0,6, as estruturas de Kelvin-Helmholtz também desaparecem, como se pode ver na figura 5.6.b. A partir destas considerações, conclui-se que, a utilização do valor da constante de Smagorinsky, igual a 0,4, é a melhor escolha, pois, este valor permite simular adequadamente as interações desejadas entre as pequenas e as grandes escalas, sem contudo, suprimir a formação das mesmas sob um efeito muito forte da viscosidade turbulenta. Espera-se, que a utilização de uma malha mais refinada gere as estruturas físicas mais facilmente, porém, sem as instabilidades numéricas que caracterizam a simulação CD 50-0,2.



Figura 5.4: Campos de densidade (a) e rotacional (b) da simulação CD 50-0,2, para um tempo de  $46,6 h_c / u_\infty$ .

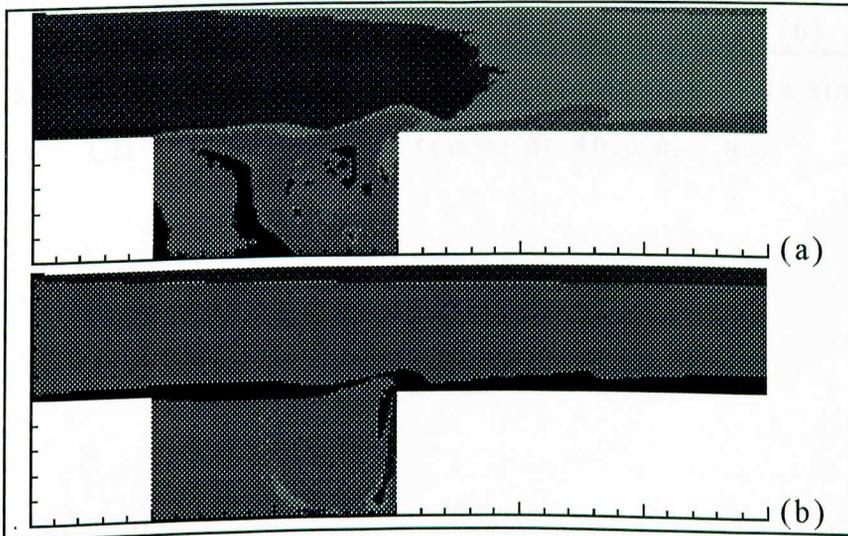


Figura 5.5: Campos de densidade (a) e rotacional (b) da simulação CD 50-0,4, para um tempo de  $46,6 h_c / u_\infty$ .

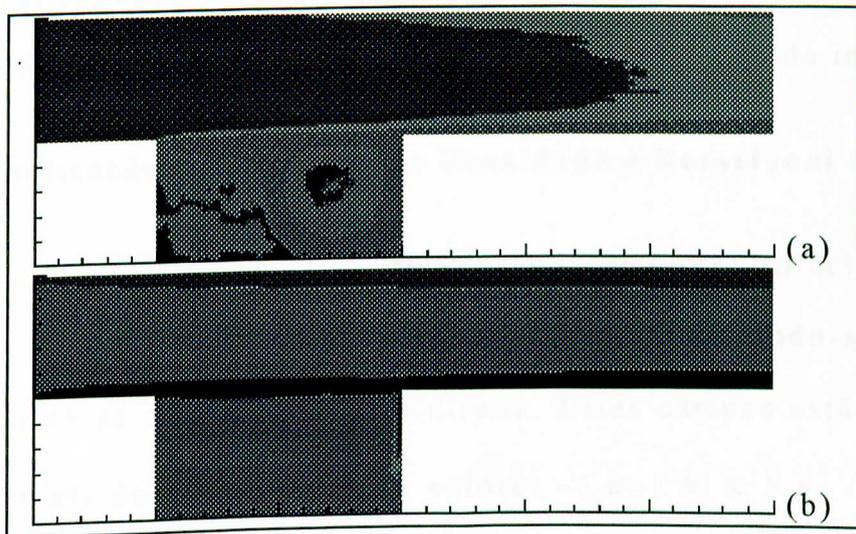


Figura 5.6: Campos de densidade (a) e rotacional (b) da simulação CD 50-0,6, para um tempo de  $46,6 h_c / u_\infty$ .

## 5.4 Resultados da Simulação CD 80-0,4

A simulação a ser analisada nesta seção, CD 80-0,4, tem como característica, uma malha bem mais refinada que as anteriores, além da sua constante de Smagorinsky já ter sido ajustada, no caso, igual a 0,4. Esta simulação será analisada a seguir, sobre três aspectos, a saber: primeiro a visualização dos campos de densidade e rotacional do escoamento; segundo e terceiro aspectos, análise do espectro de energia cinética e do sinal do coeficiente de pressão em posições de interesse.

### 5.4.1 Visualização dos Campos de Densidade e Rotacional

Uma sequência temporal, relativa ao campo de rotacional desta simulação, é mostrada nas figuras 5.7.a-t, observando-se que, o escoamento se dá da esquerda para direita. Estes campos estão plotados em doze níveis de cores, entre os valores  $-6 u_{\infty} / h_c$  e  $5 u_{\infty} / h_c$ . A cor vermelha corresponde aos maiores níveis de rotacional, e a cor azul, aos menores níveis. A primeira imagem é conseguida com um tempo de  $2,33 h_c / u_{\infty}$ , que corresponde à um tempo físico de 0,01 s. Entre uma imagem e outra tem-se este mesmo intervalo de tempo, totalizando o tempo adimensional de  $46,6 h_c / u_{\infty}$  (0,2 s).

Nota-se, na primeira imagem, figura 5.7.a, uma faixa (cor azul) de rotacional negativo, na interface entre a cavidade e o duto. Ela corresponde a uma zona fortemente cizalhante e de perfis inflexionais de velocidade média. Esta faixa apresenta um leve grau de instabilidade, principalmente no seu lado esquerdo. Elas são o resultado da

amplificação de perturbações injetadas numericamente sobre o campo médio do escoamento, e que modelam a turbulência residual do mesmo, simulando a forma de um ruído branco. Estas pequenas instabilidades ampliam-se, graças às não-linearidades das equações de Navier-Stokes, figura 5.7.b, e dão origem à primeira estrutura coerente, figura 5.7.c, que é uma estrutura do tipo Kelvin-Helmholtz. Esta estrutura se desenvolve, figuras 5.7.c-e, deslocando-se no sentido do escoamento médio. Observa-se na figura 5.7.e, que há uma curvatura da faixa de rotacional para cima, como consequência da desaceleração que sofre a estrutura, nas proximidades da parede frontal da cavidade.

Na sequência a estrutura encontra a parede frontal da cavidade, figura 5.7.f. A mesma começa a descer, seguindo uma corrente que circula no interior da cavidade, a camada limite formada nesta parede é descolada, figura 5.7.g, de modo que, forma-se um par contra-rotativo, estrutura esta, já identificada nas simulações de escoamentos sobre um degrau, por Silveira Neto (1993). Nesta figura já aparece, também, a formação de uma nova estrutura na faixa de rotacional negativo. O par contra-rotativo caminha no sentido da circulação global, formada no interior da cavidade, figura 5.7.h. Observa-se ainda, nesta figura, que a segunda estrutura formada passa acima da parede frontal da cavidade, portanto, percorrendo um caminho diferente da primeira.

O processo de formação de estruturas continua, bem como, o caminho seguido pelo par contra-rotativo, figuras 5.7.i-k. A figura 5.7.k mostra a separação do par contra-rotativo, devido a diferença de velocidade na corrente global, que conduz os dois vórtices. O vórtice

mais interno continua na corrente global, enquanto o outro, fica na mesma posição, figuras 5.7.l-m, até que uma nova estrutura formada, o desloca e consome toda sua energia, fazendo com que o mesmo desapareça, figuras 5.7.n-p. Nas figuras 5.7.m-n, é possível observar, próximo a face frontal, um processo de emparelhamento de dois vórtices, que giram na circulação global.

A partir da figura 5.7.p, já se pode ver várias estruturas, que são conduzidas pela circulação global. Há, a partir daí, descolamento, tanto da camada limite da parede frontal, como da parede inferior, figuras 5.7.q-s. Um novo par contra-rotativo é formado, porém desta vez, a partir do descolamento da camada limite da parede inferior, figura 5.7-t. Neste caso, no entanto, o par parece tender a se separar rapidamente, já que a estrutura de rotacional positivo, de cor vermelha, tende a tomar o rumo de uma segunda circulação global oposta a principal, que é formada por indução a partir da primeira, no lado esquerdo da cavidade.

Percebe-se, com base neste resultado, que a região logo acima da cavidade, do lado direito, é uma região divisora de vórtices, criando desta forma, uma região de alta atividade turbulenta. Este fato explica fisicamente, porque os experimentalistas Sinha, Gupta e Oberai (1982), mediram, nesta região, os maiores níveis de intensidade turbulenta. Outra observação importante, é a presença das recirculações globais, encontradas por Sinha *et al.* (1982). Elas são visualizadas como uma composição de múltiplas escalas, o que já era esperado por ser uma característica da turbulência.

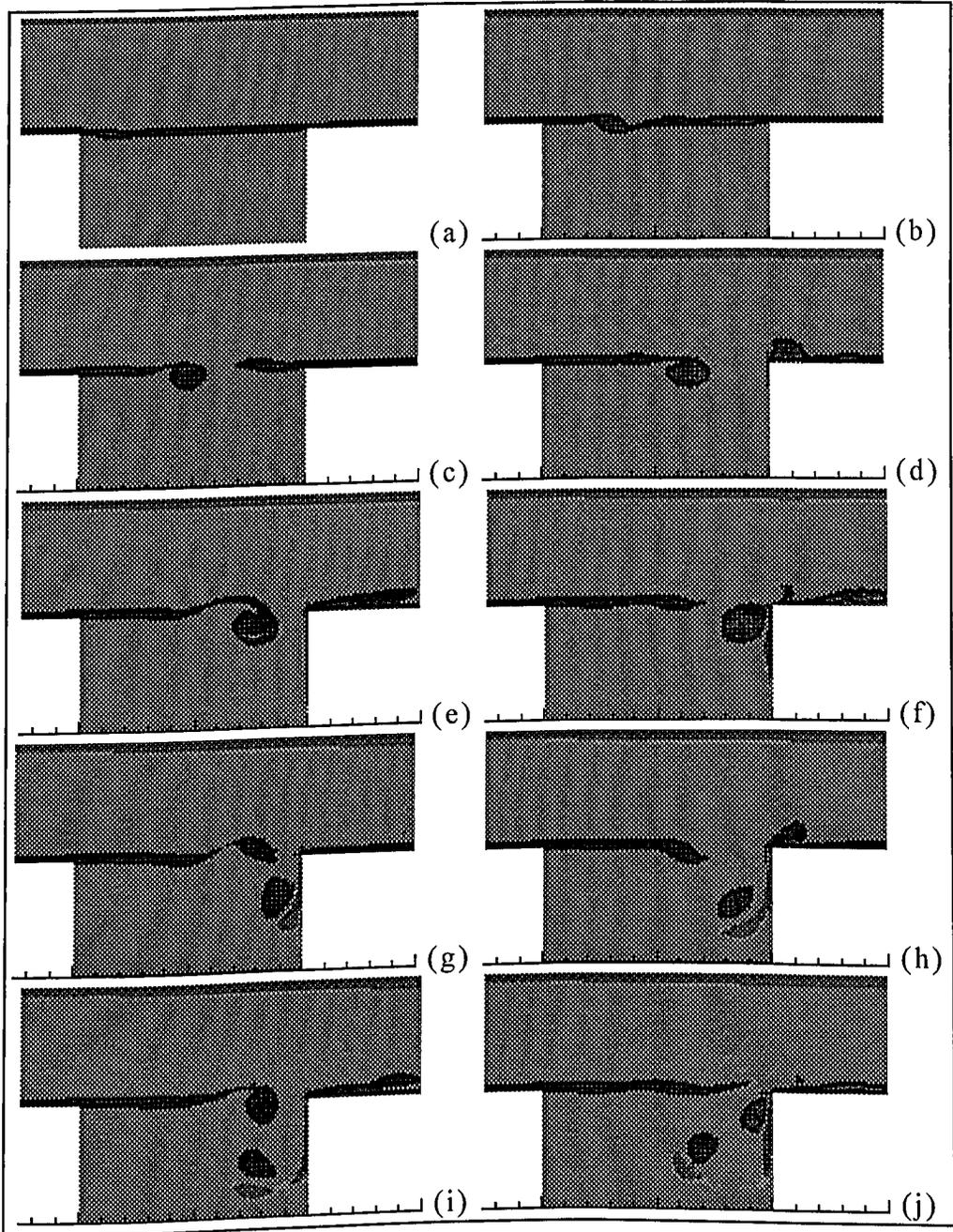


Figura 5.7: Sequência temporal do campo de rotacional, da simulação CD 80-0,4, com um intervalo de tempo de  $2,33 h_c / u_\infty$  (parte I).

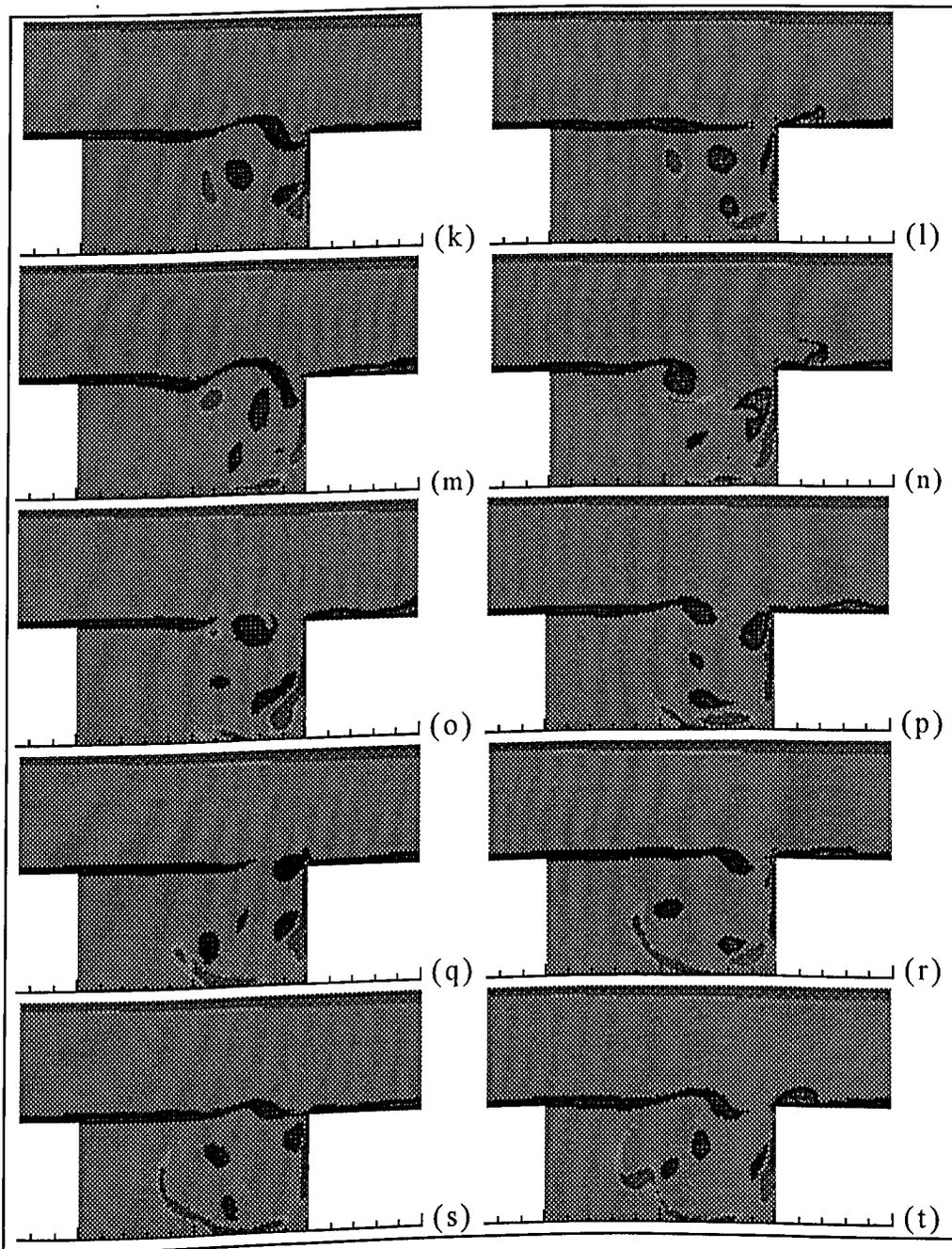


Figura 5.7: Sequência temporal do campo de rotacional, da simulação CD 80-0,4, com um intervalo de tempo de  $2,33 h_c / u_\infty$  (parte II).

Nas figuras 5.8.a-c, vê-se os campos de densidade, figura 5.8.a, de rotacional, figura 5.8.b, plotados da mesma forma que os campos das figuras 5.7, e linhas de corrente sobrepostas ao campo de rotacional, figura 5.8.c, para um tempo de  $93,2 h_c / u_\infty$ , que corresponde, fisicamente, a 0,4 s. O campo de densidade não se mostra instável, como já era esperado, mesmo com o refinamento da malha. Pode-se supor, a partir destes resultados, que a constante de Smagorinsky é independente da malha, no entanto, não se pode fazer esta afirmação com certeza, pois, para isto, seria necessário um trabalho com diversos níveis de refinamento de malhas. O campo de rotacional, mostra diversas estruturas, que são conduzidas tanto pela circulação global principal, localizada a direita, como pela induzida, localizada a esquerda, como se supôs que aconteceria no parágrafo anterior. As linhas de corrente, superpostas ao campo de rotacional, mostram claramente as circulações globais, e o processo de transporte das estrutura turbilionaes que as compõem. A título de comparação entre os campos de rotacional e de densidade, nota-se que a forma das estruturas pode ser observada em ambos. Observa-se, também, que os centro dos vórtices, no campo de rotacional, correspondem a baixos valores no campo de densidade. Este fato é amplamente comprovado teoricamente, ver Shilichting (1993).

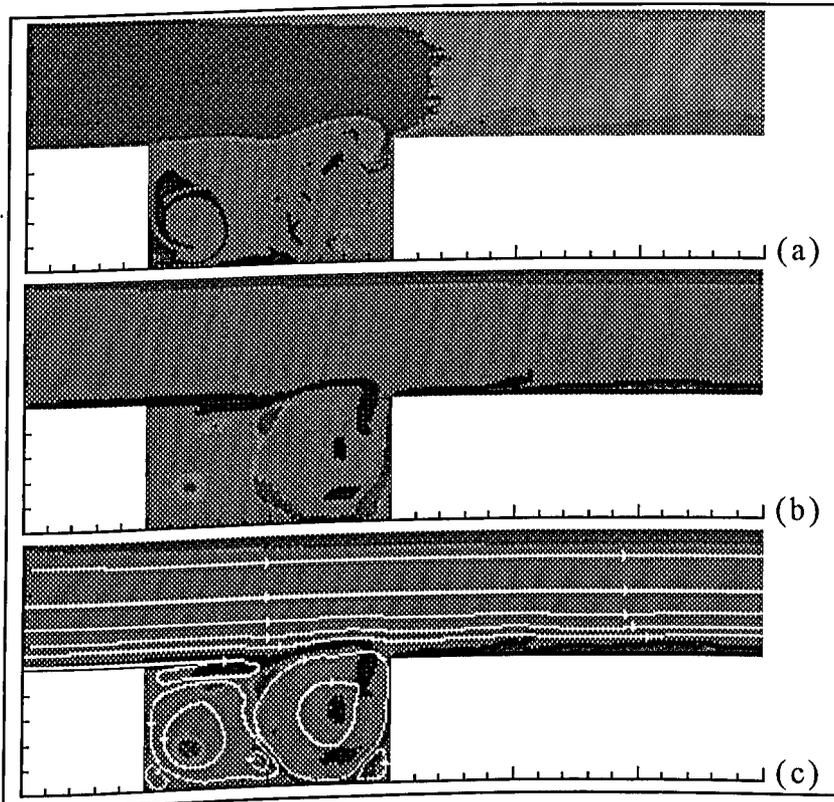


Figura 5.8: Campos de densidade (a) e rotacional (b) e linha de corrente superpostas ao campo de rotacional (c) da simulação CD 80-0,4, para um tempo de  $93,2 h_c / u_\infty$ .

### 5.3.2 Análise do Espectro de Energia Cinética

As figuras 5.9 e 5.10 mostram as distribuições temporais das componentes de velocidade  $u$  e  $v$ , relativas a um ponto localizado em  $x = 3 h_c$  e  $y = 1,01 h_c$ . Observa-se o comportamento altamente instável do escoamento, porém, com um regime estatisticamente estabelecido. Afim de se extrair mais informações dos resultados, aplica-se a transformada de Fourier a uma combinação de flutuação de velocidade. Tem-se, então, a densidade espectral de energia cinética turbulenta  $E(f) = u'u' + v'v'$ , que é mostrado na figura 5.13, em escala linear, e na figura 5.14, em escala logarítmica. O ponto em questão, foi escolhido, devido ao fato de que, os experimentos de Sinha *et al.* (1982) mostram que a região com esta localização é a região com maior nível de energia cinética turbulenta.

Na figura 5.13, nota-se a presença de uma frequência característica de energia, bem definida, no número de Strouhal ou frequência adimensional,  $St = 0,64$ . Frequência esta, que corresponde à passagem das maiores estruturas, sobre o ponto no qual se tomou o sinal. Nota-se, também, os harmônicos de menor amplitude, que correspondem a passagem das menores estruturas.

Na figura 5.14, apresenta-se o gráfico da figura 5.13 em escalas logarítmicas. Observa-se características parecidas com às do gráfico mostrado na seção 3.6, figura 3.1, que é a forma de espectro típico dos escoamentos bidimensionais. Observa-se a tendência a duas inclinações, que, como se pode observar, são próximas das inclinações

características. Para comparação, as retas de cor verde e vermelha correspondem as inclinações de  $-5/3$  e  $-3$ , respectivamente. Observa-se que, a partir do valor de número de Strouhal  $St \cong 3$ , o gráfico começa a tomar outras inclinações, porém, isto não é problema, uma vez que, estes valores correspondem a valores de amplitude em torno de  $10^{-5}$ , que, com certeza, são valores numéricos, uma vez que, as escalas com estas frequências não são detectadas pela malha espacial. Um espectro de energia, da mesma forma que este, foi obtido em experimentos montados por Gharib and Derango (1989), em escoamentos quasi-bidimensionais, utilizando-se filmes de sabão, em diversas geometrias. Calculando-se a integral do espectro de energia, obtém-se a energia cinética turbulenta associada a este ponto. Para o ponto em questão este valor foi calculado, obtendo-se 5,78%. Este valor é da mesma ordem de grandeza que os valores medidos por Sinha *et al.* (1982) para a mesma posição, porém, é um valor mais alto, o que já é esperado, uma vez que, o número de Reynolds desta simulação é bem mais alto que aquele correspondente ao experimento.

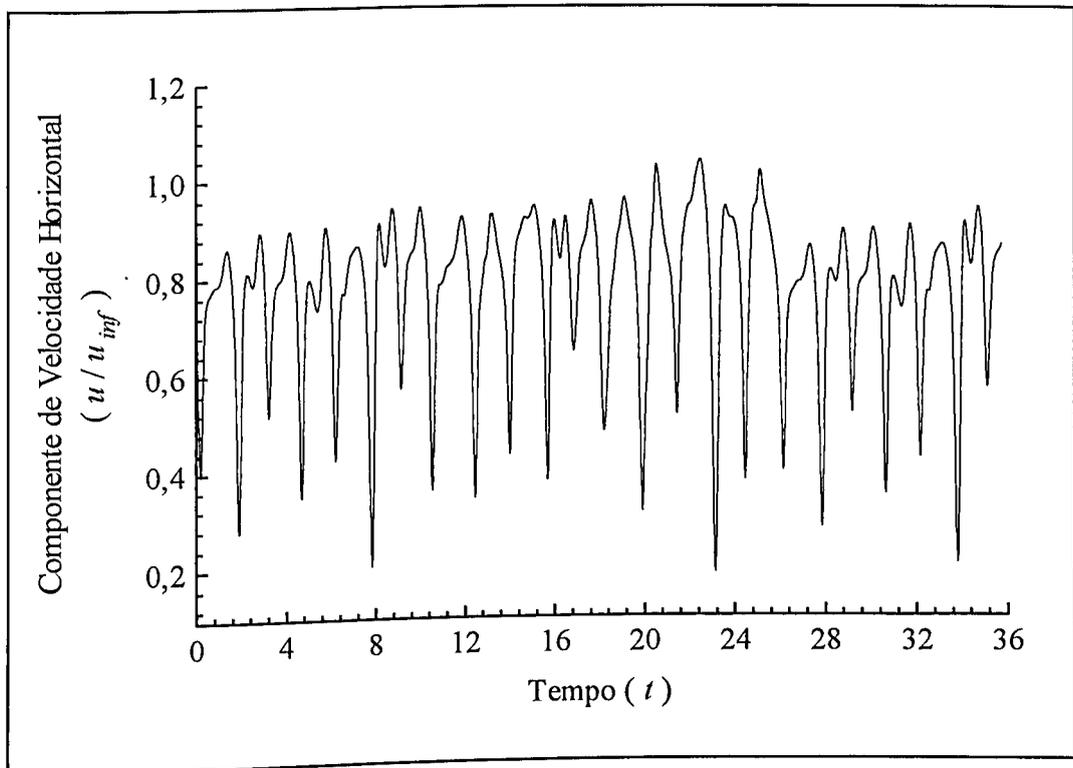


Figura 5.9: Distribuição temporal da componente horizontal de velocidade na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1,01 h_c$ .

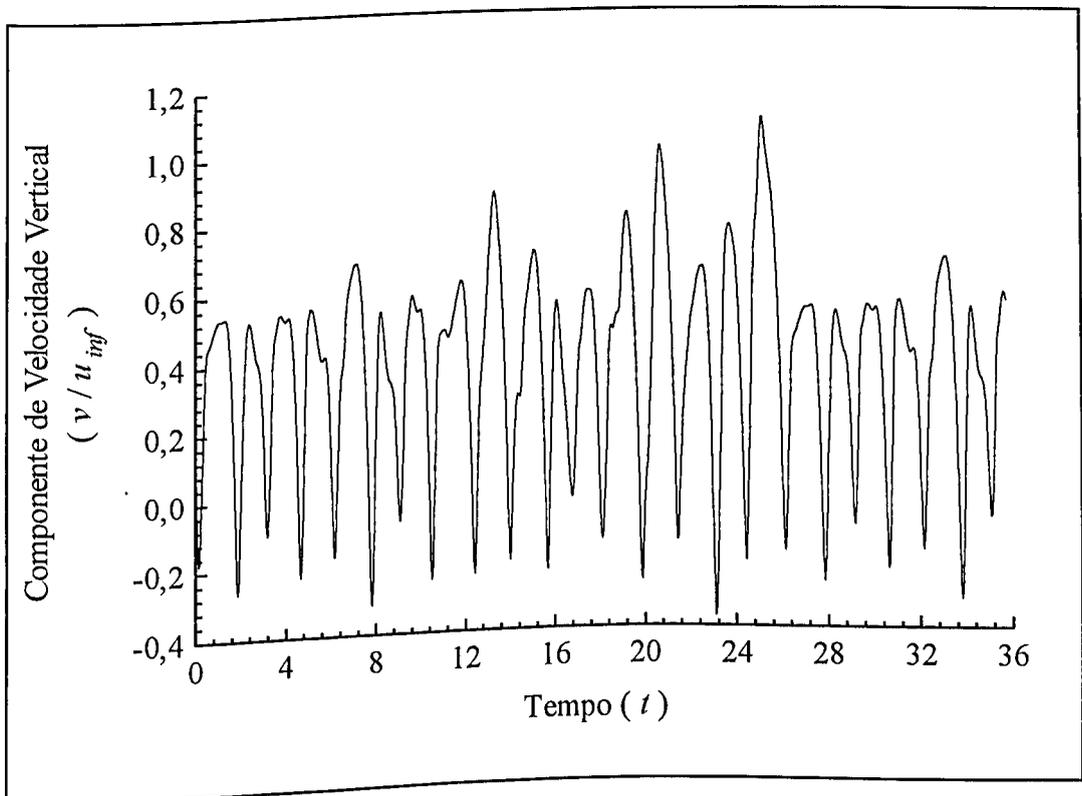


Figura 5.10: Distribuição temporal da componente vertical de velocidade na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1,01 h_c$ .

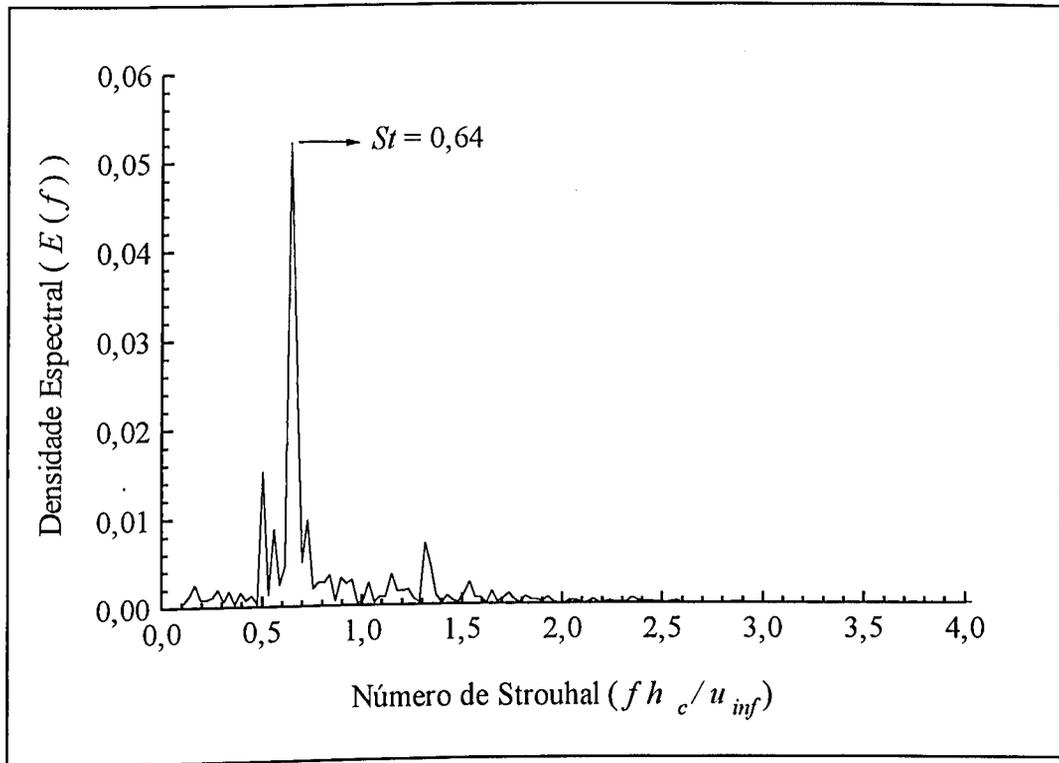


Figura 5.13: Espectro de energia cinética turbulenta, para simulação CD 80-0,4, na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1,01 h_c$ , em escala linear.

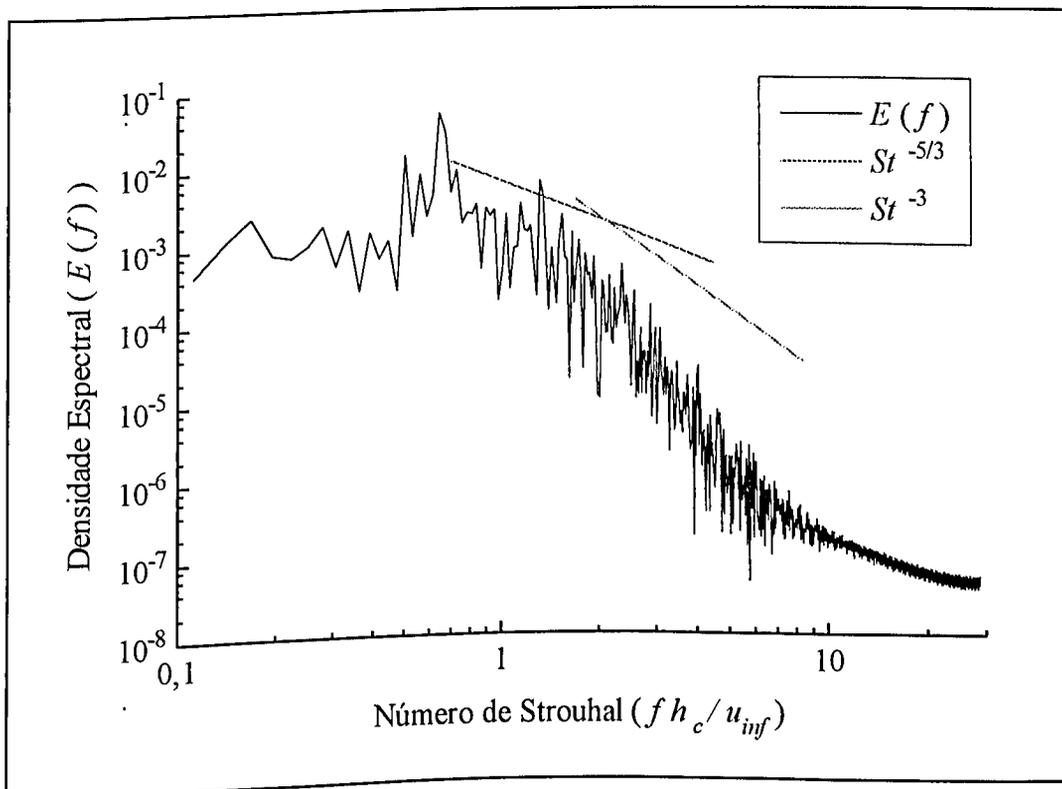


Figura 5.14: Espectro de energia cinética turbulenta, para simulação CD 80-0,4, na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1,01 h_c$ , em escala logarítmica.

### 5.3.3 Análise do Sinal de Pressão

A análise do sinal de pressão tem como objetivo, questionar a possibilidade de se obter uma medida da frequência de formação dos vórtices através deste sinal, de forma a se obter uma correlação entre a frequência e a velocidade média no canal acima da cavidade. Este sinal foi tomado no canto superior direito da cavidade, em  $x = 3 h_c$  e  $y = 1 h_c$ , portanto, num ponto diferente do sinal tomado para o cálculo da energia cinética. Este ponto foi escolhido, pois é o ponto em que, a princípio, deve-se colocar um sensor de pressão, de forma a detectar o choque das estruturas com a parede frontal da cavidade.

O sinal temporal do coeficiente de pressão está mostrado na figura 5.15. Este sinal foi obtido entre os tempos  $46,6 h_c / u_\infty$  e  $82,4 h_c / u_\infty$ , o mesmo contém, no total, 2048 pontos no tempo. Este intervalo corresponde a  $0,15 s$  físicos de simulação. Para a obtenção deste sinal sem os problemas citados na seção 5.1.1.1, calculou-se o coeficiente de pressão, tomando-se como referência, a pressão em um ponto interior ao domínio. O critério, para a escolha deste ponto, foi que o mesmo se localizasse num ponto sem a influencia de camada limite e que estivesse em uma região que não sofresse os efeitos de entrada. Um ponto que satisfaz estes critérios é o ponto  $x = 1 h_c$  e  $y = 1,5 h_c$ .

A figura 5.16 apresenta a flutuação do coeficiente de pressão. Sobre os dados deste gráfico aplicou-se a transformada de Fourier, tal como feito para a o espectro de energia cinética, para obter a densidade espectral de pressão. Este espectro está mostrado na figura 5.17.

O espectro de pressão mostra que o sinal apresenta, como no espectro de energia, uma frequência bem definida, apresentando, também, os harmônicos. Esta frequência bem definida pode, facilmente, ser identificada, já que sua amplitude é bem superior a amplitude dos harmônicos. Esta frequência aqui obtida,  $St = 0,66$ , é levemente diferente da obtida para a energia cinética. A diferença nas duas frequências é justificável, pelo fato de que o número de estruturas coerentes que passam pelo ponto onde foi amostrada a distribuição do coeficiente de pressão deve ser diferente que no ponto onde foram amostradas as distribuições de velocidade. De fato, como pode ser observado na figura 5.7, parte das estruturas é transportada pelo canal de saída e parte é capturada pela cavidade.

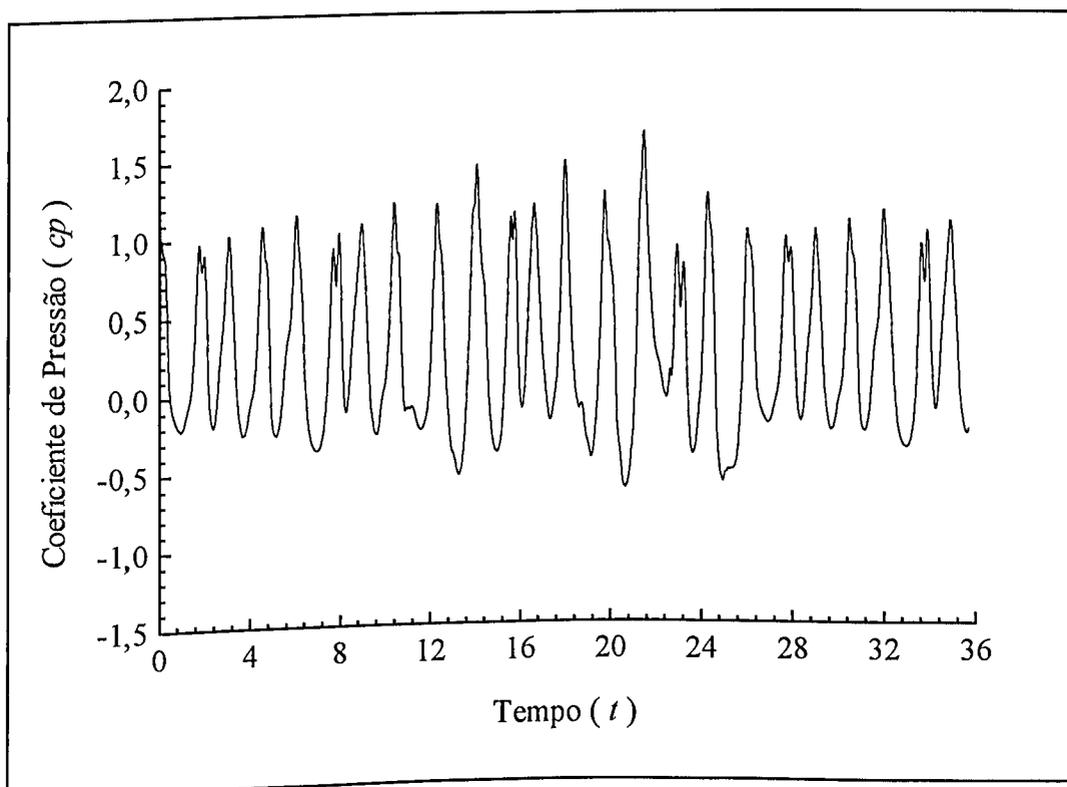


Figura 5.15: Distribuição temporal do coeficiente de pressão na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1 h_c$ , para a simulação CD 80-0,4.

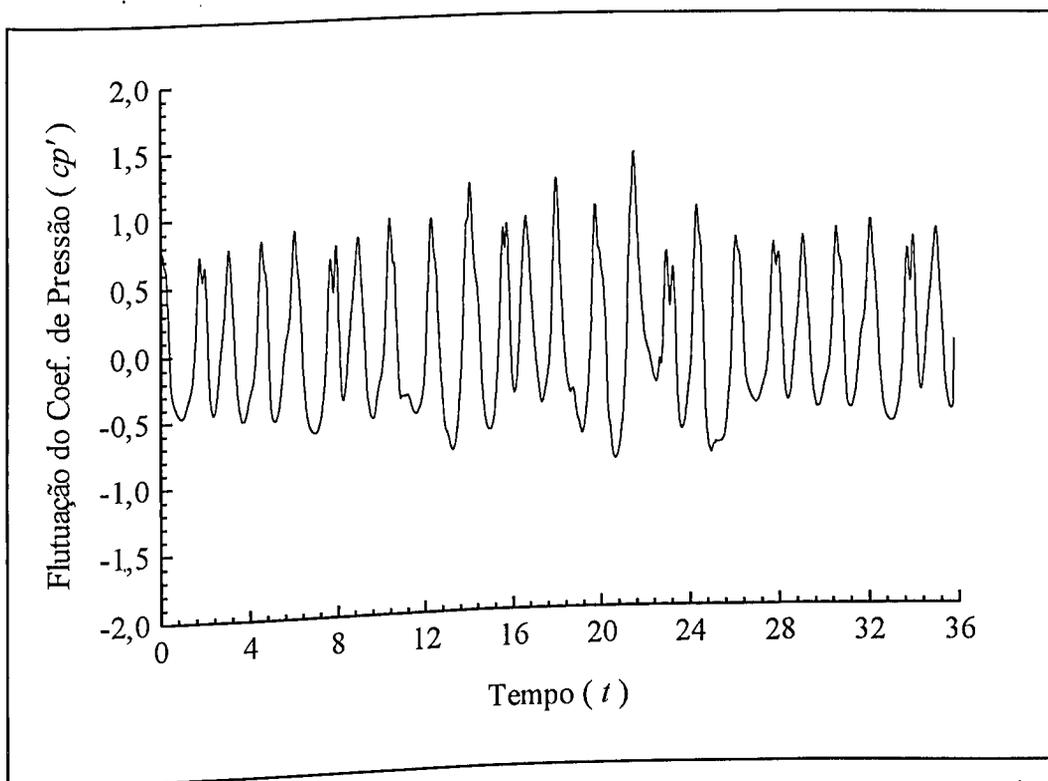


Figura 5.16: Flutuação do sinal do coeficiente de pressão mostrado na figura 5.15.

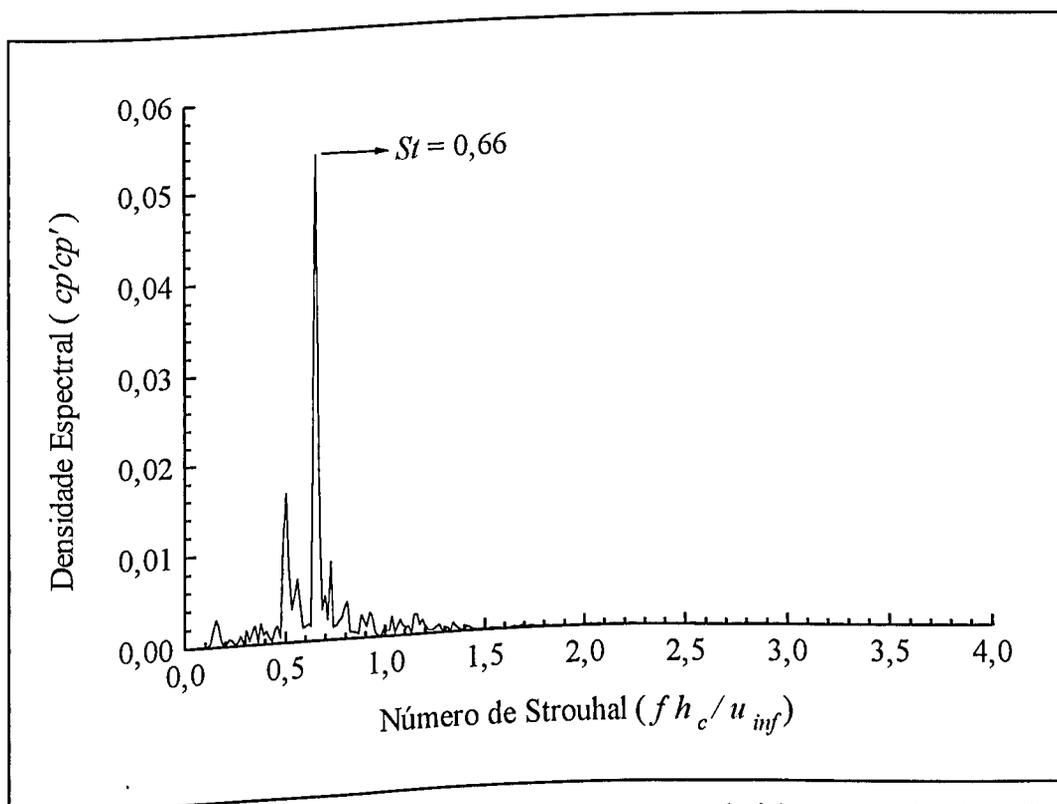


Figura 5.17: Densidade Espectral da pressão, obtida a partir dos dados da figura 5.16.

Para os parâmetros adimensionais e as propriedades do fluido utilizadas, o número de Strouhal,  $St = 0,66$ , corresponde a uma frequência dimensional,  $f = 154 \text{ Hz}$ . Este valor é importante, pois, o mesmo, dá uma informação quantitativa no sentido de especificar o sensor de pressão a ser utilizado no experimento.

#### **5.4 Resultados das Simulações em Cavidades Sob Escoamento Livre**

Nesta seção serão analisados os resultados das três simulações realizadas para cavidades sobre escoamentos livres.

##### **5.4.2 Resultados Gerais**

Perfis de velocidade horizontal média, da simulação CL 2-0,4, são mostrados na figura 5.18. Percebe-se claramente nestes perfis, que a região logo acima da interface entre a cavidade e o duto, é uma região de grandes gradientes de velocidade horizontal média, sendo esta região, portanto, uma zona de intenso cisalhamento. O fato de existir aí perfis de velocidade média inflexionais, torna esta região propícia para a ampliação de instabilidades, ver Conte *et al.* (1989). No entanto, estas instabilidades não foram capturadas nesta simulação, supostamente, devido ao fato de se ter, neste caso, um nível muito baixo de refinamento de malha. Esta suposição é baseada no fato de que nas simulações em cavidades no interior de dutos, onde se tem, na região de interface, uma estrutura de velocidade muito parecida com a mostrada, além de uma malha bem mais refinada, ver seção 5.1, as instabilidades foram ampliadas até a formação das estruturas coerentes, ver seção 5.4.

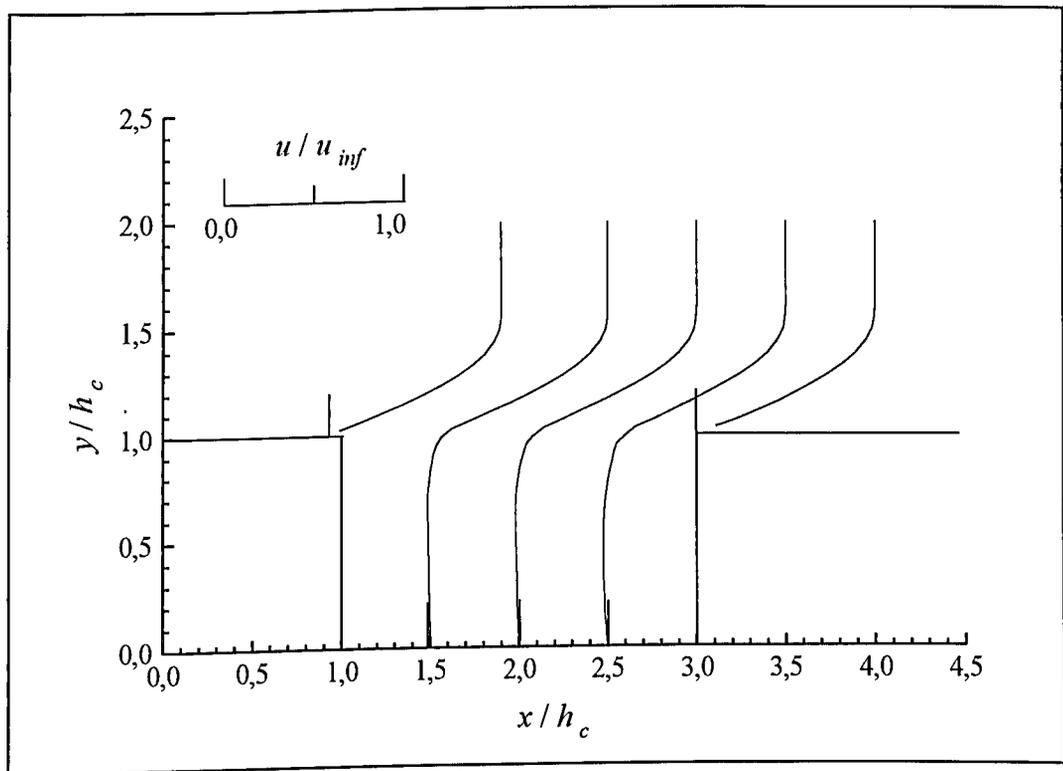


Figura 5.18: Perfis de velocidade média horizontal, para a simulação CL 2-0,4.

A figura 5.19 mostra perfis de rotacional médio para a mesma simulação considerada no parágrafo anterior. Pode-se notar, comparando-se esta figura com a anterior, que os valores de mais altos níveis de rotacional correspondem aos maiores gradientes de velocidade horizontal. Este fato indica que a velocidade horizontal é a que tem realmente grande influência sobre o cisalhamento e, portanto, na amplificação das perturbações.

A figura 5.20 mostra perfis de rotacional médio para a simulação CL 1-0,4. Estes perfis, se comparados aos perfis da simulação CL 2-0,4, dão a indicação que nos dois casos o mecanismo de amplificação das estruturas é o mesmo. Observa-se no entanto, nas figuras 5.21 e 5.22, que a estrutura destes escoamentos não é a mesma. No escoamento da

simulação CL 2-0,4 aparecem duas circulações no interior da cavidade, enquanto que, no escoamento da simulação CL 1-0,2 aparece somente uma circulação. Este fato faz com que o nível de cisalhamento na primeira simulação seja maior, devido a recirculação contrária ao escoamento no interior do duto, gerada por indução, o que pode ser confirmado comparando-se os gráficos das figuras 5.19 e 5.20. Pode-se supor, portanto, que a cavidade com maior comprimento tem maiores possibilidades de amplificar perturbações que a de menor comprimento, porém, nenhum teste foi feito neste sentido.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINAS  
BIBLIOTECA

00290/96

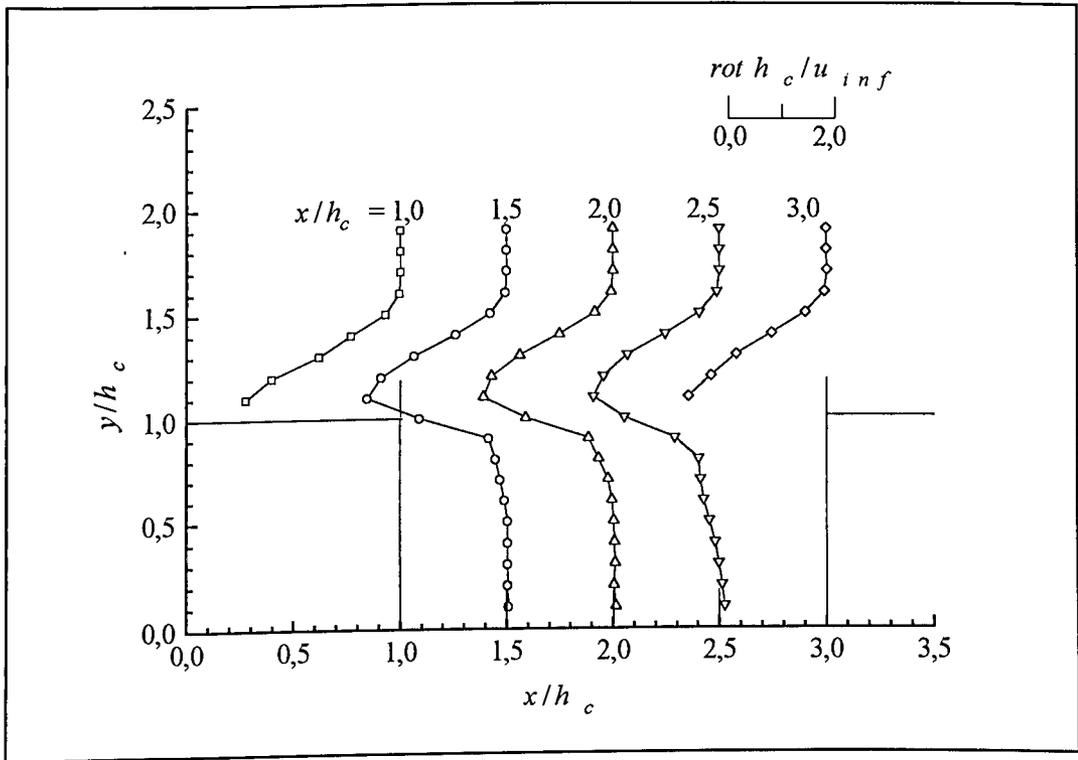


Figura 5.19: Perfis de rotacional médio, para a simulação CL 2-0,4.

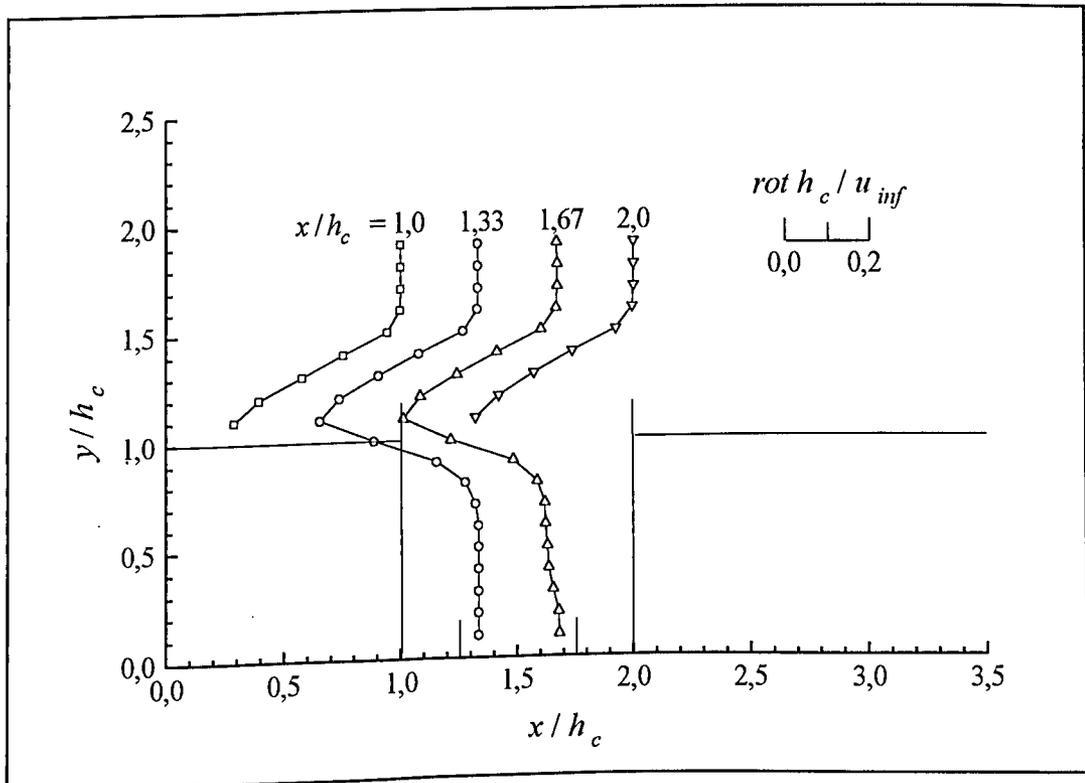


Figura 5.20: Perfis de rotacional médio, para a simulação CL 2-0,4.

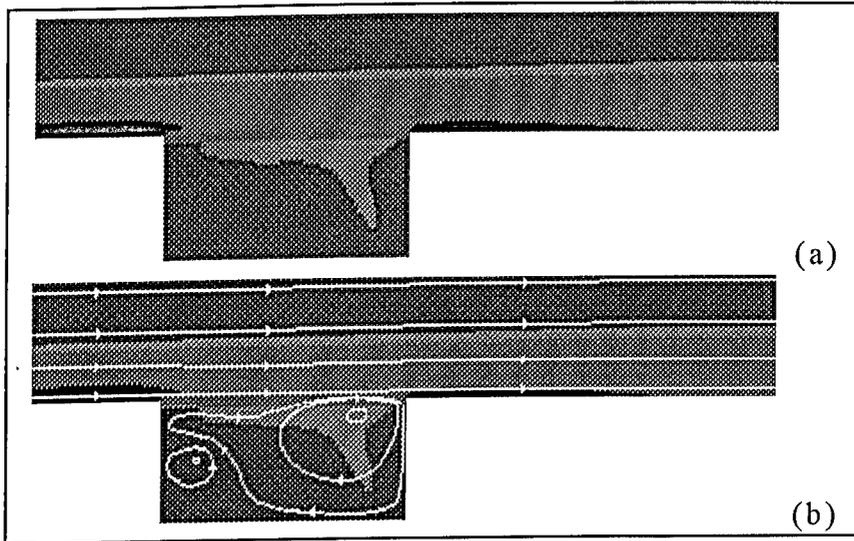


Figura 5.21: Campo de rotacional médio(a) e linha de corrente superpostas ao campo de rotacional (b) da simulação CL 2-0,4.

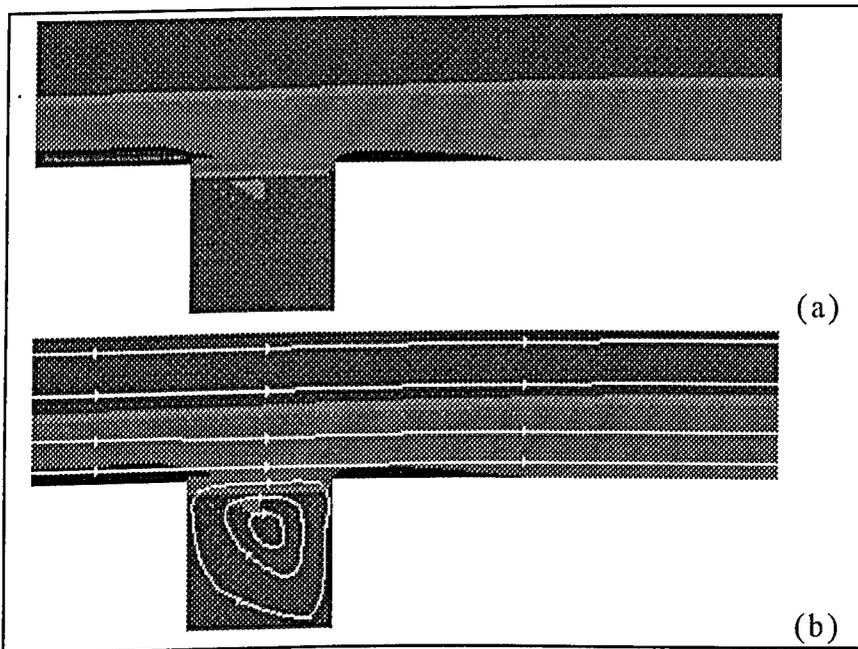


Figura 5.22: Campo de rotacional médio(a) e linha de corrente superpostas ao campo de rotacional (b) da simulação CL 1-0,4.

Um resultado importante, nestas simulações, está mostrado na figura 5.23. Nela vê-se uma distribuição temporal do coeficiente de pressão na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1 h_c$ , para a simulação CL 2-0,4. Nota-se que, apesar de muito instável, este coeficiente oscila em torno de um valor médio, que não sofre grandes variações. Isto mostra que a condição de contorno utilizada na entrada, para estas simulações, foi bastante satisfatória. Para o problema das oscilações, pode-se tentar utilizar métodos de sobrerelaxação, porém nenhum método neste sentido chegou a ser implementado neste trabalho.

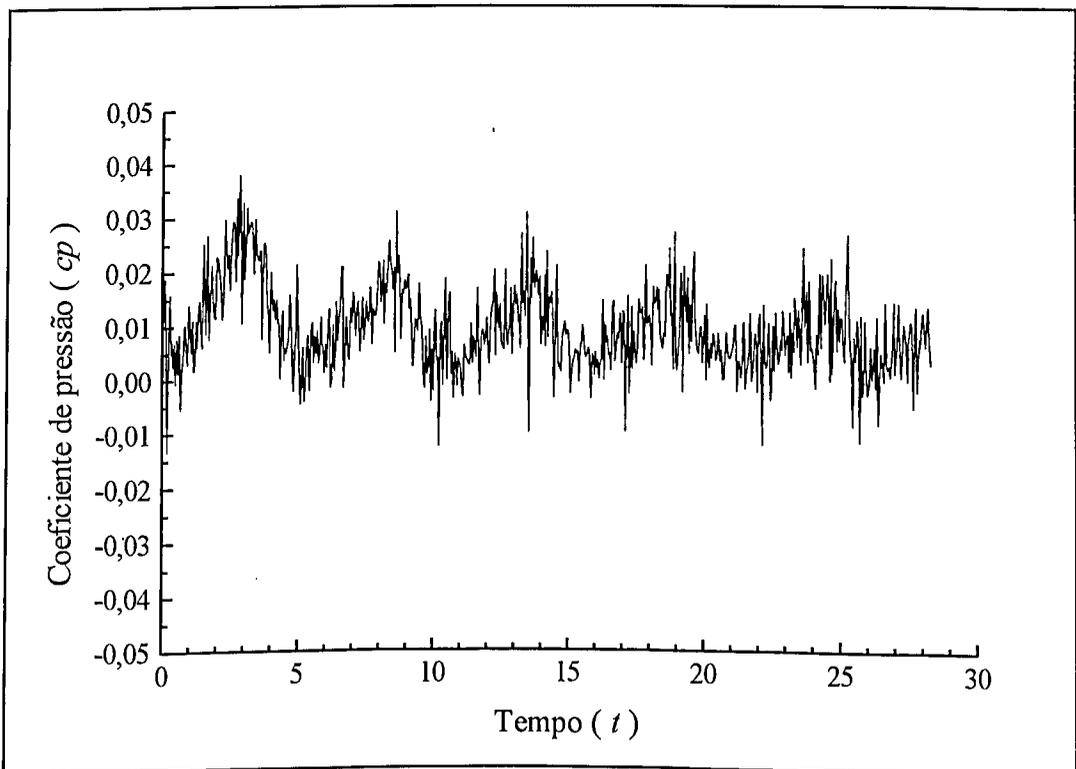


Figura 5.23: Distribuição temporal do coeficiente de pressão na posição  $x = 3 h_c$  e  $y = 1 h_c$ , para a simulação CL 2-0,4.

#### 5.4.3 Comparação Entre Constantes de Smagorinsky

Na figura 5.24, pode-se analisar as influências da constante de Smagorinsky na velocidade. Os perfis de velocidade horizontal média representados, correspondem às simulações CL 2-0,2 e CL 2-0,4, na posição  $x / h_c = 2,0$ . Nota-se que o perfil para a simulação com maior constante de Smagorinsky, na interface entre a cavidade e o duto, é mais suave, mostrando uma maior coerência física. Isto deve-se a maior difusividade imprimida pela maior constante, com conseqüente maior viscosidade turbulenta. Porém, como será visto posteriormente, ainda não é o perfil desejado.

A influência da constante de Smagorinsky na pressão pode ser analisada na figura 5.25. Esta influência é bem mais sensível do que a exercida na velocidade. Observa-se uma diminuição nas instabilidades, bem como nos próprios valores do coeficiente de pressão, com o aumento da constante de Smagorinsky. É importante notar, que estas instabilidades na pressão não levam à divergência nos resultados.

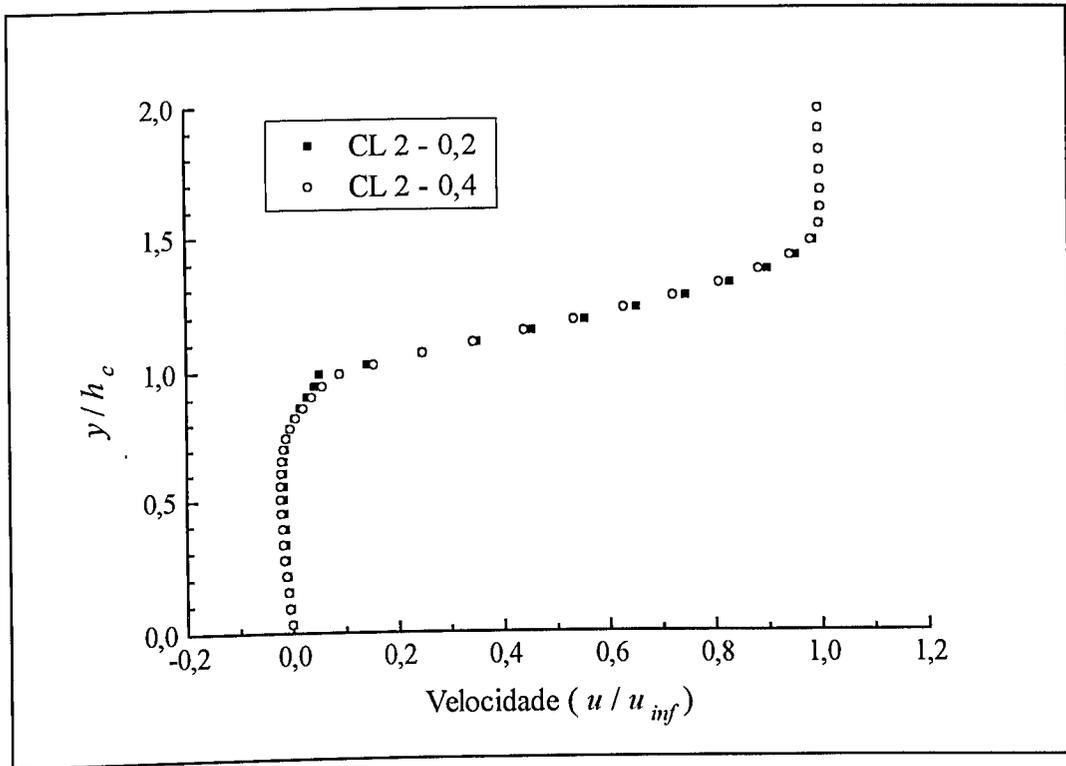


Figura 5.24: Perfis de velocidade média horizontal, para as simulações CL 2-0,2 e CL 2-0,4, em  $x / h_c = 2,0$ .

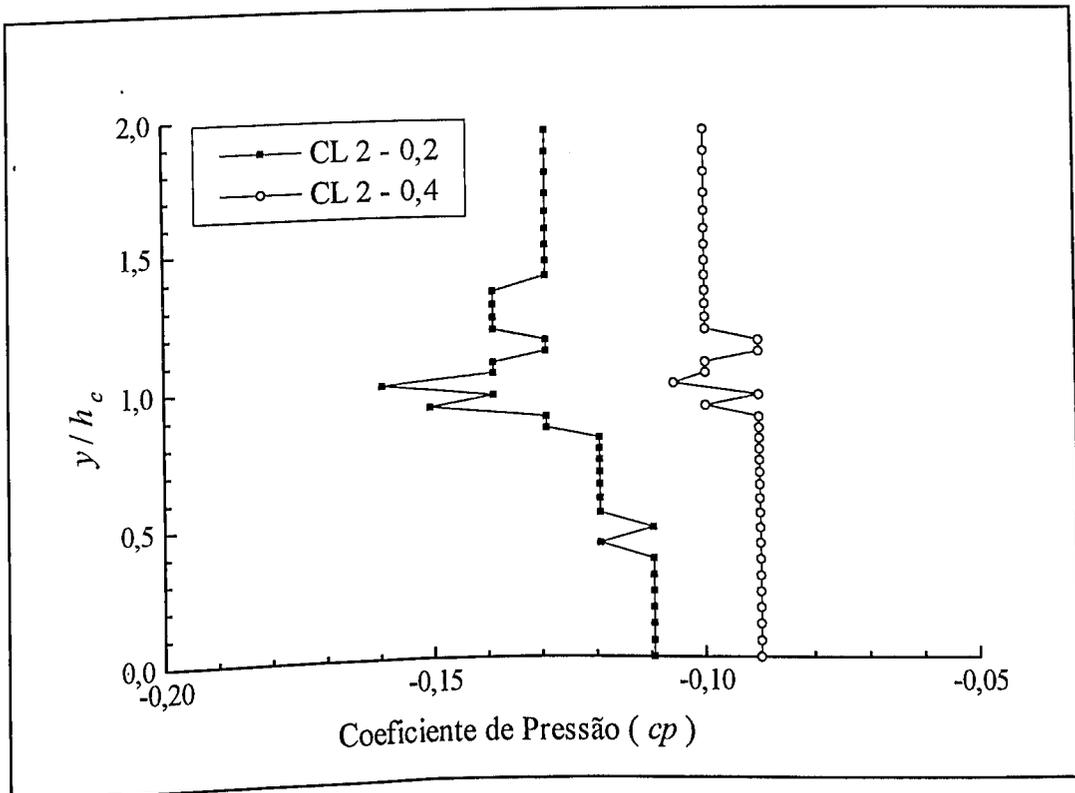


Figura 5.25: Perfis de coeficiente de pressão médio, para as simulações CL 2-0,2 e CL 2-0,4, em  $x / h_c = 2,0$ .

#### 5.4.4 Comparação com Dados Experimentais de Sinha *et al.* (1982)

Os resultados numéricos de velocidade média, obtidos com a simulação CL 1-0,4, estão plotados, em perfis verticais, juntamente com as velocidades medidas experimentalmente por Sinha *et al.* (1982), na figura 5.26. Os dois perfis numéricos centrais tem um desvio médio de 23%, em relação aos dados experimentais. Os maiores erros encontrados estão no interior da cavidade, onde as velocidades são baixas. além disto os perfis de velocidade experimentais apresentam-se com gradientes mais suaves na região de mais alto cisalhamento. Supõe-se que esta dispersão de dados ocorre devido à uma baixa resolução na malha, que impede que haja uma maior injeção de energia para o interior da cavidade através da entrada de estruturas coerentes. Esta falta de injeção de estruturas, faz com que apenas o cisalhamento provoque o movimento rotativo no interior da cavidade. Porém, isto não é suficiente para simular corretamente, em termos quantitativos, as velocidades no interior da cavidade.

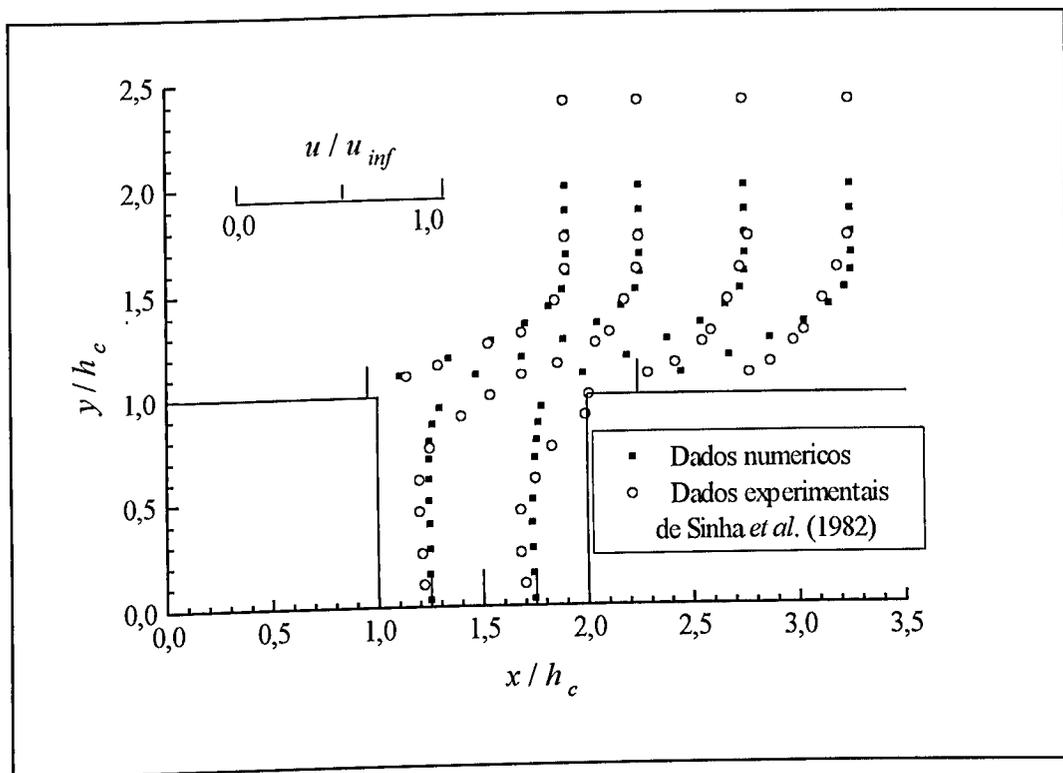


Figura 5.26: Perfis de velocidade média horizontal, para a simulação CL 2-0,4, e dados experimentais de Sinha *et al.* (1982).

Os Coeficientes de pressão experimentais na parede inferior, na parede anterior e na parede frontal da cavidade, estão plotados nas figuras 5.27, 5.28 e 5.29, respectivamente. Nos mesmos gráficos apresentam-se também, os coeficientes de pressão médio calculados numericamente. Porém estes dados numéricos correspondem a uma filtragem espacial dos dados calculados. Esta filtragem foi feita com o intuito de eliminar oscilações do tipo mostradas no gráfico da figura 5.25.

Estes dados filtrados mostram-se bastantes coerentes e bem correlacionados com os dados experimentais, principalmente na parede inferior da cavidade. Neste caso, ocorrendo um maior desvio na região mais próxima ao canto direito da cavidade. Este desvio, supõe-se, seja

devido a presença de recirculações aí existentes, as quais, não são capturadas pela malha. Nas paredes anterior e posterior, há uma dispersão maior destes coeficientes. Pode-se fazer, porém, nestas regiões, questionamentos quanto a forma de medida realizada pelos experimentalistas Sinha *et al.* (1982), já que, os mesmos utilizam-se de orifícios nas paredes para medida de pressão estática, portanto, nestas regiões, é possível que os mesmos estejam medindo uma parcela de pressão dinâmica, pois os orifícios, ficam paralelos ao escoamento, o que não acontece na parede inferior.

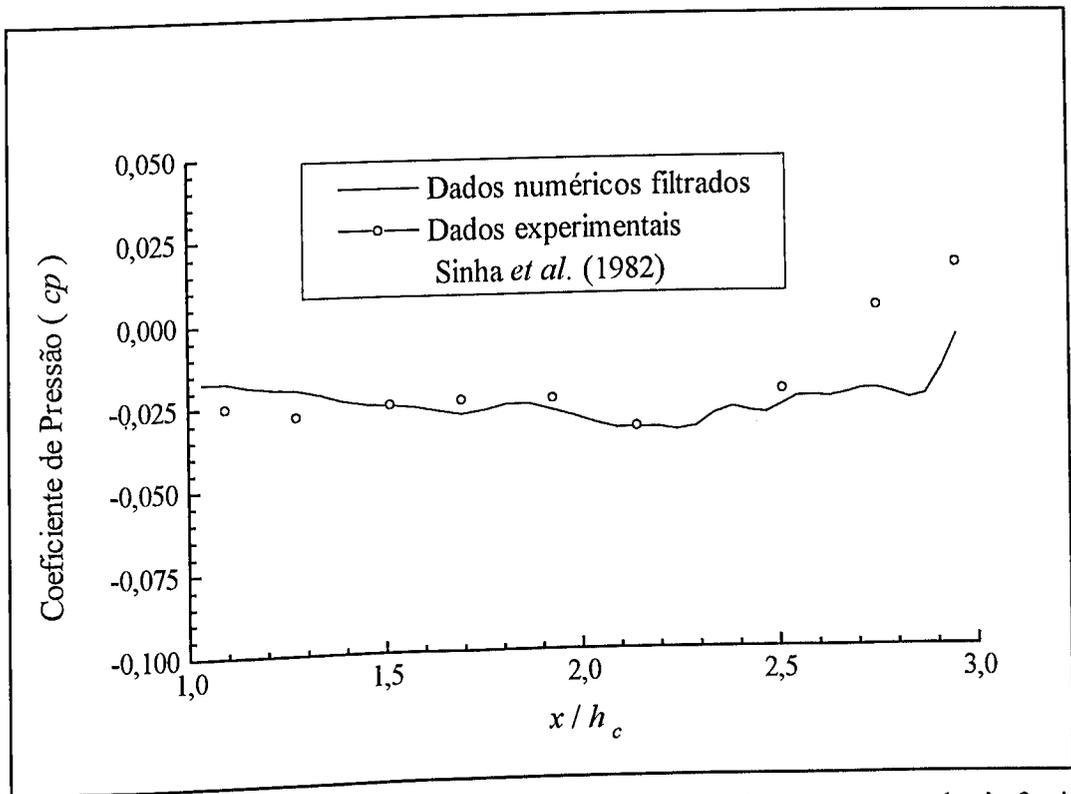


Figura 5.27: Perfis de coeficiente de pressão médio na parede inferior da cavidade, para a simulação CL 2-0,4, e dados de Sinha *et al.* (1982).

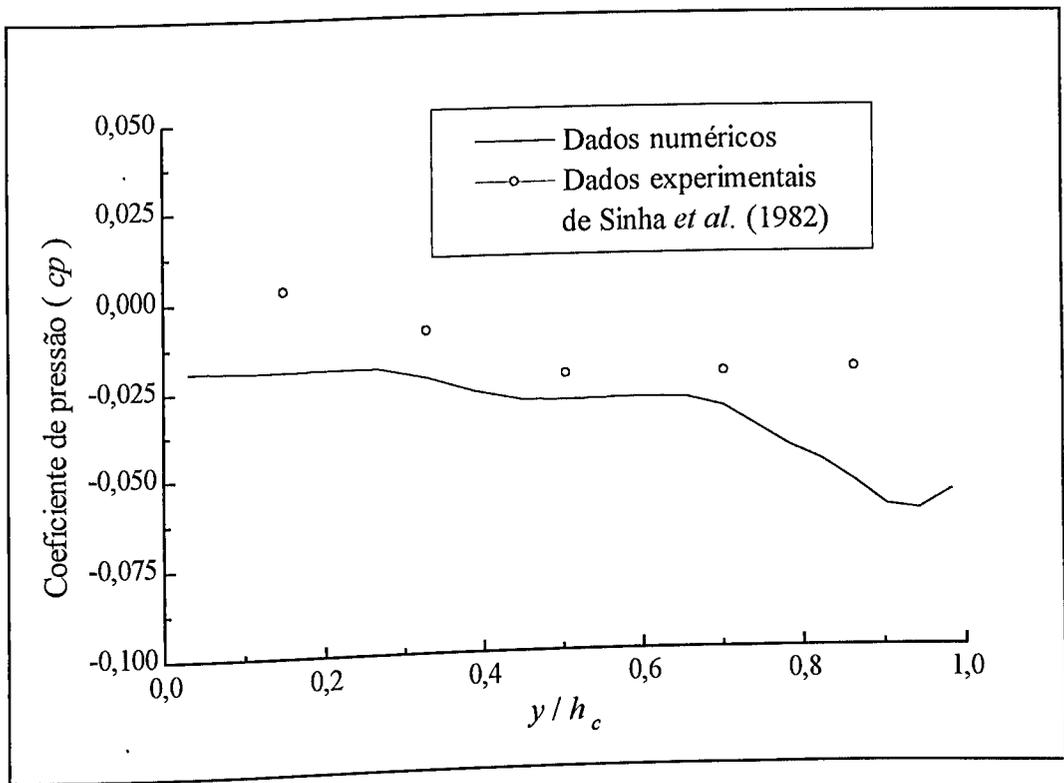


Figura 5.28: Perfis de coeficiente de pressão médio na parede anterior da cavidade, para a simulação CL 2-0,4, e dados de Sinha *et al.* (1982).

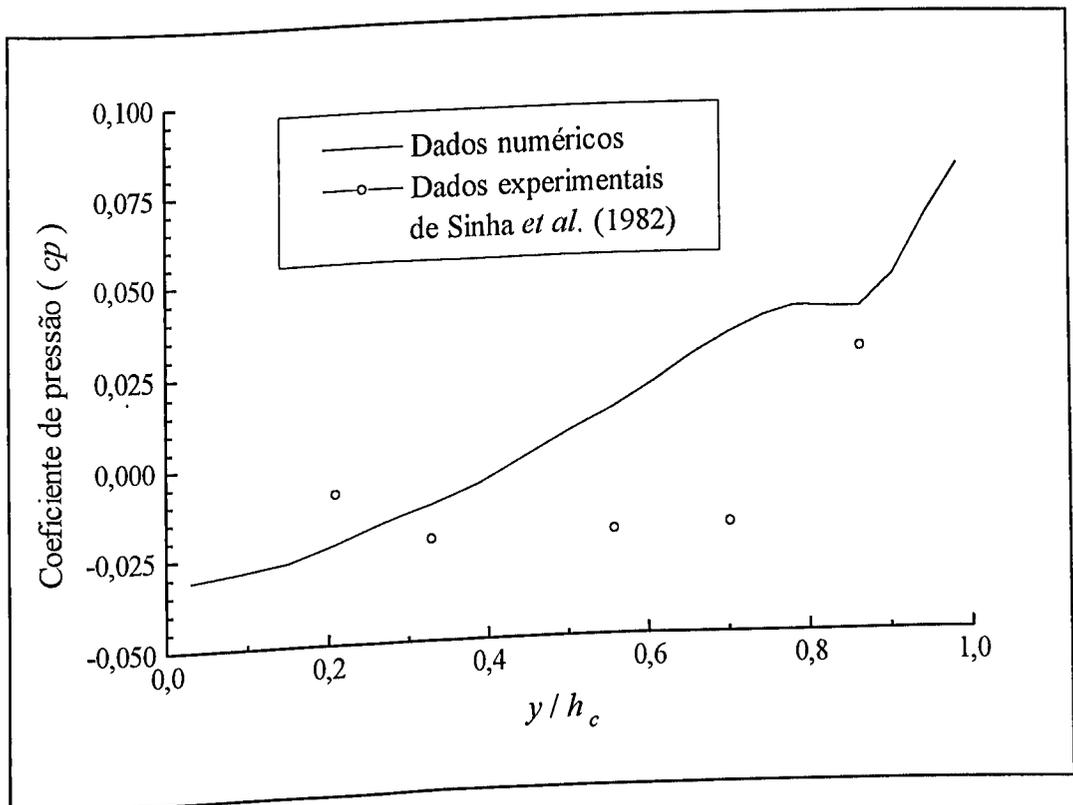


Figura 5.29: Perfis de coeficiente de pressão médio na parede frontal da cavidade, para a simulação CL 2-0,4, e dados de Sinha *et al.* (1982).

## 6 Conclusões

A Simulação Numérica de Grandes Escalas de um escoamento turbulento sobre uma cavidade retangular está sendo realizada com sucesso. O código computacional simula muito bem, em termos qualitativos, a formação de estruturas coerentes que caracterizam os escoamentos turbulentos. O modelo de turbulência é vital para a convergência dos resultados. O modelo utilizado, modelo de Smagorinsky, desempenha bem o papel de amortecer as instabilidades numéricas, porém, sem suprimir a formação das estruturas coerentes. Para isto, basta que se ajuste de forma coerente a única constante do modelo. Dos valores testados, o valor que se revelou mais adequado neste sentido foi o valor de  $C_s = 0,4$ .

Um conjunto de estruturas de malha, condições iniciais e condições de contorno foi testado, conseguindo-se, por fim, uma situação satisfatória. A melhor estrutura de malha é a que divide o domínio em três subdomínios, de tal forma, que os acoplamentos entre os subdomínios não se situem em regiões que podem amplificar as instabilidades numéricas. A condição inicial mais adequada é aquela em que a velocidade é nula no interior da cavidade, pois assim evita-se choques em locais de descontinuidades, tal como a presença de um canto vivo. Nas condições de contorno, o destaque fica por conta da

condição de entrada do domínio. A melhor condição nesta face é a de velocidade imposta e a extrapolação, da malha do domínio para a malha virtual, da densidade e energia interna.

Os resultados com escoamento turbulento em cavidade no interior de dutos, mostram que há uma frequência bem definida na formação de estruturas coerentes na cavidade. Este resultado reforça, portanto, a perspectiva de construção de um medidor de vazão a vortex. Os resultados, nestas simulações foram bastante animadores com relação ao espectro de energia cinética, onde houve uma boa concordância com a teoria de Kolmogorov para escoamentos bidimensionais. Além disto, os valores de energia cinética turbulenta foram da ordem esperada para este tipo de geometria.

### 6.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Uma sequência natural deste trabalho é a calibragem fina do código, de tal forma, que o mesmo passe a fornecer resultados quantitativamente superiores aos obtidos até agora. Para isto, pode-se utilizar métodos de sobrerelaxação, com malha mais refinadas, até se obter valores de coeficiente de pressão mais estáveis. Referências a estes métodos, podem ser encontrados em Anderson *et al.* (1984). Com os novos resultados, fazer um novo ajuste da constante de Smagorinsky, utilizando-se o espectro de energia para isto.

Uma vez ajustado o código, seguir a sequência dos objetivos deste trabalho, simular o medidor de vazão para vários números de Reynolds, e obter uma relação deste parâmetro com o número de

Strouhal. Porém, para uma boa correlação, experimentos devem ser realizados, uma vez que, uma das características da Simulação de Grandes Escalas é a insensibilidade ao número de Reynolds, como exposto no capítulo dedicado e este tema.

Novas linhas de pesquisa podem também surgir, tanto com aplicações práticas, a partir da simulação de escoamentos em diversas geometrias, como em aplicações teóricas, com estudos de aspectos computacionais relativos ao método de MacCormack, bem como, estudos de hipóteses teóricas, tal como, o alcance da validade da hipótese Bousinesque, já que o código é compressível, e os resultados podem ser comparados com resultados que apliquem esta hipótese.

## 7 Referências Bibliográficas

- [1] Aung, W., "An Interferometric Investigation of Separated Forced Convection in Laminar Flow Past Cavities", Journal of heat Transfer, vol. 105, pp. 505-512, 1993.
- [2] Anderson, D. A., Tanehill, J. C. and Pletcher, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
- [3] Bernal, L. P. and Roshko, A., "Streamwise Vortex Structure in Plane Mixing Layer", Journal of Fluid Mechanics, vol. 170, pp. 499-525, 1986.
- [4] Bhatti, A. and Aung, W., "Finite Difference Analysis of Laminar Separated Forced Convection in Cavities", Journal of Heat Transfer, vol. 106, pp. 49-54, 1984.
- [5] Brown, G. L., and Roshko, A., "On Density Effects and Large Structure in Turbulent Mixing Layer", Journal of Fluid Mechanics, vol. 64, pp. 775-816, 1974.
- [6] Chollet, J. P. and Lesieur, M., "Parameterization of Small Scales of Three-Dimensional Isotropic Turbulence Utilizing Spectral Closure", Journal Atmospheric Science, vol. 38, pp. 2747-2757, 1982.
- [7] Conte, P. Lesieur, M Laroche, H. and Normand, X., "Numerical Simulation of Turbulent Plane Shear Layers", Turbulent Shear Flow 6, Spring-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

- [8] Comte, P., Lee, S. S., Cabot, W. and Moin, P., "A Subgrid-Scale Model Based Upon the Secoud-Order Velocity Structure Function, Proceedings of the Summer Program" *Center for turbulence Research, Stanford, California*, 1990.
- [9] Deardoff, J. W., "*A Numerical Study of Three-Dimensional Tubulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 41, pp. 453-480, 1970.
- [10] Deardoff, J. W., "*On the magnitude of the Subgrid-Scale eddy coefficient*", Journal Computational Phisics, vol. 7, pp. 120-133. 1971.
- [11] Eaton, J. K. and Johnston, J. P., "*Turbulent Flow Reattachment: An Experimental Study of Flow Structure Behind a Backward-Facing Step*", Stanford University, Rep. MD-39, 1980.
- [12] Freitas, C. J. and Street R. L., "*Non-Linear Transient Phenomena in a Complex Recirculating Flow: A Numerical Invetigation*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 8, pp. 769-802, 1988.
- [13] Gharib, M. and Derango, P., "*A Liquid (Soap Film) Tunnel to Study Two-Dimensional Laminar and Turbulent Shear Flows*", North-Holand Physica Publishing Division, vol. 37, pp. 406-416, 1989.
- [14] Gleick, J., "Caos: A Criação de uma Nova Ciência", *Editora Campus*, Rio de Janeiro, 1990.
- [15] Heisenberg, W. "*On the theory of Statistical and Isotropic turbulence*", Proc. Roy. Soc., vol. A195, pp. 402-406, 1948.

- [16] Hirsch, C., "Numerical Computational of Internal and External Flows; Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows", *John Wiley & Sons*, 1990.
- [17] Kolmogorov, A. N., "*A Refinement of Previous Hypothesis Concerning the Local Structure of Turbulence in a Viscous Incompressible Fluid at High Reynolds Number*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 12, pp. 82-85, 1962.
- [18] Kraichnan, R. H., "*Small-Scale Structure Convected by Turbulence*", Physics Fluids, vol. 11, pp. 945-953, 1968.
- [19] Kraichnan, R. H., "*Eddy Viscosity in Two and Three-Dimensions*", Journal Atmospheric Science, vol. 33, pp. 1521-1536, 1976.
- [20] Lax, P. D. and Wendroff, B., "*System of Conservation Laws*", Comm. Pure Applied Mathematics, vol. 13., pp. 217-237, 1960.
- [21] Lasheras, J. C. and Choi, H., "*Three-Dimensional Instability of a Plane Free Shear Layer: an Experimental Study of the Formation and Evolution of Streamwise Vortices*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 189, pp. 53-86, 1988.
- [22] Launder, B. E. and Spalding, D. B., "Mathematical Model of Turbulence", *Academic Press*, 1972.
- [23] Leith, C. E., "*Atmospheric Predictability and two-Dimensional Turbulence*", Journal Atmospheric, vol. 28, pp. 145-161, 1972.
- [24] Lesieur, M. and Rogallo, R., "*Large-Eddy Simulation of Passive Scalar Diffusion in Isotropic Turbulence*", Physics Fluids, vol. 1 A, pp. 718-722, 1989.
- [25] Lesieur, M., "Turbulence in Fluids", *Kluwer Academic Publishers*, 1990.

- [26] Leslie, D. C. and Quarine, G. L., "*The Application of Theory to the Formulation of Subgrid Modeling Procedures*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 91, pp. 65-91, 1979.
- [27] Lilly, D. K., "*The Representation of Small-Scale of Turbulence in Numerical Experiment*", Proceeding IBM Science Computatinal Symposium Enviroment Science, IBM Data Processament Division, White Plains, New York, 195-210, 1967.
- [28] MacComarck, R. W., "*The Effect of Viscosity Hypervelocity Impact Cratering*", AIAA, paper 69-354, Cincinnati, Ohio, 1969.
- [29] Metcalfe, R. W., Orzag, S. A., Brachet, M. E., Menon, S. and Riley, J., "*Secoundary Instability of a Temporally Growing Mixing Layer*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 184, pp. 207-243, 1987.
- [30] Moin, P. and Kim, P., "*Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 118, pp. 341-377, 1982.
- [31] Normand, X. and Lesieur , M., "*Numerical Experiments on Transition in the Compressible Boundary Layer over an Insulated Flat Plate*", Submitted to the Theorical and Computational Fluid Dynamics, 1990.
- [32] Pinho, F. A. A. e Silveira Neto, A., "*Large-Eddy Simulation in Two-Dimensional Rectangular Cavity*", Secound International Workshop on Vortex Flow and Related Numerical Methods, pp. 13-14, 1995.
- [33] Piomeli, U., "*Models for Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows Including Tranpiration*", Doctoral Thesis, Stanford University, 1988.

[34] Saad, A. R. and Sheen S. C., "*Large-Simulation of Mixing-Layers*", Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows, Edited by Boris Galperin and Steven A. Orzag, Cambridge University Press, pp. 255-286, 1993.

[35] Shankar, P. N., "*The Eddy Structure in Stokes Flow in a Cavity*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 250, pp. 371-383, 1993.

[36] Sinha, S. N., Gupta, A. K. and Oberai, M. M., "*Laminar Separating Flow Over Backsteps and Cavities, Part II: Cavities*", AIAA Journal, vol. 20, No 3, pp. 370-375, 1982.

[37] Silveira Neto, A., Grand, D. et Lesieur, M., "*Simulation Numérique Bidimensionnelle d'un Écoulement Turbulent Stratifié Derrière une Marche*", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 34, pp. 1999- 2011, 1991.

[38] Silveira Neto, A., Grand, D., Metais, O. and Lesieur, M., "*A Numerical Investigation of the Coherent Structures of Turbulence Behind a Backward-Facing Step*", Journal of Fluid Mechanics, vol. 256, pp. 1-25, 1993.

[39] Shilichting, H., "Boundary-Layer Theory", McGraw-Hill Publishing Company, 1979.

[40] Smagorinsky, J., "*General Circulation Experiments with Primitive Equations*", Mon. Weather Rev., vol. 91, 3, pp. 99-164, 1963.

[41] Smagorinsky, J., "*Some Historical remarks on the Use of Nonlinear Viscosities*", Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows, Edited by Boris Galperin and Steven A. Orzag, Cambridge University Press, pp. 3-36, 1993.

[42] Tennekes, H. and Lumley, J. R., "A First Course in Turbulence", The MIT Press, 1978.

- [43] Townsend, A. A. 1967, "The Structure of Turbulent Shear Flow"  
*Cambridge University Press*, 1972.
- [44] Voke, P. R. and Collins, M. W., "*Large-Eddy Simulation: Retrospect and Prospect*", Physical Chemical Hydrodynamics, vol. 4, pp. 119-161, 1983.
- [45] Yamamoto, H., Seki, N. and Fukusako, S. "*Forced Convection Heat Transfer on Heated Bottom Surface of a Cavity*", Journal of Heat Transfer, vol. 110, pp. 475-479, 1979.
- [46] Yoshizawa, A., "*A Statistically Derived Subgrid Model for the Large-Eddy Simulation of Turbulence*", Physycs Fluids, vol. 25, pp. 1532-1538, 1982.