

2001

SÍLVIA CAROLINA LEBRÓN

MOU
532
L453/L
150/1514

**A TÉCNICA DE MULTI GRELHA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
LUBRIFICAÇÃO ELASTO-HIDRODINÂMICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Roberto Ribeiro.

UBERLÂNDIA (MG)

2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Biblioteca

SISBI/UFU
D 228471

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

L453t Lebrón, Silvia Carolina, 1957-
A técnica de multi grelha na solução de problemas de lubrificação
elasto-hidrodinâmica / Silvia Carolina Lebrón. - Uberlândia, 2001.
151 f. : il.
Orientador: Carlos Roberto Ribeiro.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Pro-
grama de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Mecânica dos fluidos - Teses. 2. Lubrificação e lubrificantes - Te-
ses. I. Ribeiro, Carlos Roberto. II. Universidade Federal de Uberlândia.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 532



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Uberlândia - MG - 38400-902
Fone: 0XX3432394149 - FAX: 0XX3432394282

ALUNO: SILVIA CAROLINA LEBRÓN

NÚMERO DE MATRÍCULA: 5991609-2

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:


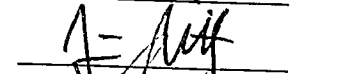

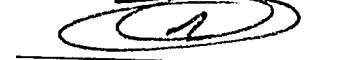
“A Técnica de Multi Grelha na Solução de Problemas de Lubrificação
Elasto Hidrodinâmica”.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Carlos Roberto Ribeiro

A Dissertação foi APROVADA em reunião pública, realizada no Anfiteatro do
Bloco X do Campus Santa Mônica, em 20 de junho de 2001, às 14:00 horas,
com a seguinte Banca Examinadora:

| NOME | |
|---|------------|
| Carlos Roberto Ribeiro, Prof. Dr. | UFU |
| João Batista Aparecido, Dr. | UNESP/FEIS |
| Francisco Paulo Lé pore Neto, Prof. Dr. | UFU |
| Aristeu da Silveira Neto, Prof. Dr. | UFU |

ASSINATURA

Uberlândia, 20 de junho de 2001.

Meus agradecimentos,

Aos meus filhos ***Bruno, Lili e Nani.***

À minha ***família.***

Aos professores ***Dr. Carlos Roberto Ribeiro e Dr. Aristeu Silveira Neto.***

Aos ***colegas da pós-graduação.***

Aos funcionários do ***DEEME.***

Ao ***CNPq*** (Conselho Nacional de Pesquisa) pelo apoio financeiro.

Lebrón, S. C., 2001, "A Técnica de Multi Grelha na solução de Problemas de Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, MG.

RESUMO

O estudo da Lubrificação Elasto Hidro Dinâmica (LEH) está relacionado às situações onde a deformação elástica dos corpos em contato hidrodinâmico não pode ser desprezada. Para analisar a LEH em contatos elípticos é necessária a solução simultânea da equação de Reynolds para a pressão e da equação da elasticidade. Para a deformação complementa-se esta formulação com a adoção de uma relação exponencial da viscosidade com a pressão, o que torna o sistema de equações acopladas altamente não-linear. O objetivo deste trabalho é o de analisar a LEH em contatos elípticos, resolvendo-a com o auxílio da técnica de Multi Grelha, que é um acelerador de convergência dos sistemas lineares gerados na discretização das equações que regem o fenômeno.

Palavras-chave: Multi Grelha, Lubrificação Elasto- Hidrodinâmica, Métodos Computacionais.

Lebrón, S. C., 2001, "Multigrid Method in Elastohydrodynamic Lubrication", M. Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, MG.

ABSTRACT

The subject of elastohydrodynamic lubrication is identified with situations in which elastic deformation plays a significant role in the hydrodynamic lubrication process. To analyze the elastohydrodynamic lubrication (LEH) of elliptical contacts it is necessary to solve simultaneously the Reynolds equation for pressure and the elasticity equation. The greatest shortcoming of this approach is the dependence exponential between the viscosity and the pressure which is, so that the coupled equations system becomes highly nonlinear. The objective of this work is to analyze LEH in elliptical contacts by means of multi grid algorithms (used for modeling and simulating complex dynamic systems) to solve them.

Keywords: *Multi-Grid, Elasto Hydrodynamic Lubrication, Computational Methods.*

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Gregas

| | |
|-----------|--|
| α | Fator de relaxação para a correção iterativa do campo de pressão |
| η | Viscosidade do lubrificante |
| λ | Relação entre os raios de curvatura (R_y/R_x) dos corpos em contato elástico |
| ρ | Densidade do lubrificante |

Letras Latinas

| | |
|-------------|---|
| A | Matriz dos coeficientes de um sistema linear |
| a | Semi-eixo na direção y de uma elipse determinada por um contato elástico |
| b | Semi-eixo na direção x de uma elipse determinada por um contato elástico |
| D | Matriz de influência da deformação elástica |
| e | Erro algébrico da aproximação \tilde{u} frente à solução exata u em um sistema linear |
| f | Vetor fonte do sistema linear |
| $h(x,y)$ | Separação superfícies em contato ou altura da película de fluido entre 2 corpos |
| k | Relação entre semi-eixos a e b de uma elipse determinada por contato elástico |
| p | Campo de pressão que surge entre os contatos lubrificados |
| r | Resíduo ou estimativa do erro de um sistema linear |
| R_y | Raio na direção y de um corpo submetido a contato elástico |
| U | Velocidade adimensional das superfícies deslizantes |
| u | Vetor de incógnitas de um sistema linear |
| \tilde{u} | Solução aproximada de um sistema linear |
| w | Carga a que está submetido um contato elástico |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| INTRODUÇÃO | 10 |
| CAPÍTULO I: CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA | 12 |
| 1.1.Considerações Preliminares | 12 |
| 1.2.Questão temática e hipóteses teóricas..... | 13 |
| 1.3.Principais antecedentes e premissas adicionais..... | 14 |
| 1.4.Estrutura da dissertação | 15 |
| CAPÍTULO II: MULTI GRELHA (MG) | 17 |
| 2.1.Considerações Preliminares | 17 |
| 2.2.Métodos iterativos para a solução de sistemas lineares..... | 18 |
| 2.2.1.Método de Jacobi | 18 |
| 2.2.2.Método de Gauss-Seidel | 19 |
| 2.2.3.Método de Sobre Relaxação (SOR) | 21 |
| 2.2.4.Aceleração Polinomial | 22 |
| 2.2.5.Método do Gradiente Conjugado (CG) | 25 |
| 2.2.6.Aceleração de Chebyshev | 27 |
| 2.3.A Técnica de Multi Grelha (MG) | 28 |
| 2.3.1.Equação residual | 28 |
| 2.3.2.O processo iterativo | 30 |
| 2.3.3.Operadores de transferência entre malhas..... | 31 |
| 2.3.4.Ciclos Multi Grelha..... | 33 |
| 2.4.Resultados na utilização do Multi Grelha | 34 |
| 2.4.1.Caso unidimensional permanente..... | 34 |
| 2.4.2 Solução bidimensional de transferência de calor..... | 39 |
| 2.4.3.Lubrificação Hidro Dinâmica..... | 42 |
| CAPÍTULO III: LUBRIFICAÇÃO ELASTO-HIDRODINÂMICA (EHD) | 45 |
| 3.1.Considerações Preliminares | 45 |
| 3.2.Contato Hertziano..... | 50 |
| 3.2.1.Geometria dos sólidos elásticos em contato seco | 52 |
| 3.2.2.Campo de pressão Hertziano..... | 54 |
| 3.2.3.Deformação elástica do campo de pressão em meio infinito | 55 |
| 3.3.Equação de Reynolds | 57 |
| 3.4.Relação entre a separação das superfícies (h) e a pressão | 58 |
| 3.5.Efeito da pressão na viscosidade | 62 |
| 3.6.Dependência da densidade com a pressão | 63 |

| | |
|--|------------|
| CAPÍTULO IV: IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA - EQUAÇÕES DE EHD ... | 64 |
| 4.1. Equações dimensionais | 64 |
| 4.2. Adimensionalização | 65 |
| 4.3. Discretização da equação de Reynolds | 66 |
| 4.4. Discretização da deformação elástica | 83 |
| 4.5. Tipos de malhas | 86 |
| 4.5.1. Malha da pressão | 87 |
| 4.5.2. Malha da deformação | 88 |
| 4.5.3. Transferência dos resultados entre as malhas | 89 |
| 4.6. Descrição geral do algoritmo | 90 |
| CAPÍTULO V: RESULTADOS E DISCUSSÕES | 96 |
| 5.1. Modelos numéricos: | 97 |
| 5.1.1. Modelo 1 | 97 |
| 5.1.2. Modelo 2 | 99 |
| 5.1.3. Modelo 3 | 102 |
| 5.2. Refinamento de malhas | 104 |
| 5.3. Estudo da variação de parâmetros do contato lubrificado | 109 |
| 5.3.1. Variação da superfície de contato (k) | 140 |
| 5.3.2. Variação da carga (W) | 142 |
| 5.3.3. Variação da velocidade (U) | 143 |
| CONCLUSÃO | 147 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 149 |

INTRODUÇÃO

Em muitos contatos entre elementos de máquinas transmitem-se forças através de finos - embora contínuos - filmes de fluido. Estes filmes de fluidos têm sido bem compreendidos já há muito tempo quando relacionados à lubrificação hidrodinâmica de mancais e os resultados experimentais confirmam a teoria. Nos anos 20 do século passado, já se percebia que muitos contatos carregados, tais como rolamentos e engrenagens, provavelmente se comportavam como se fossem hidrodinamicamente lubrificados. Ao contrário do que ocorria com os mancais, a lubrificação hidrodinâmica de engrenagens e rolamentos diferia substancialmente de resultados experimentais. Somente nos últimos anos é que a deformação elástica dos contatos foi acoplada à hidrodinâmica fornecendo uma melhor aproximação da teoria com os experimentos.

Considerando que a Lubrificação Hidrodinâmica caracteriza uma condição de lubrificação plena (a película ou cunha de óleo separa completamente as superfícies em movimento relativo), tem-se em princípio que a teoria da Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica (EHD) difere da teoria hidrodinâmica clássica por levar em consideração a influência da pressão na viscosidade e nos materiais.

Deste princípio, originou-se o objetivo principal deste trabalho, qual seja, o de analisar a EHD em contatos elípticos, resolvendo-a com o auxílio da técnica de Multi Grelha, qual seja, uma técnica orientada para a solução numérica dos sistemas lineares que se levantam freqüentemente das equações diferenciais. Esta técnica alterna o uso das grades de várias definições, conseguindo uma convergência mais rápida do que computações em malhas finas e, quanto à exatidão, melhor do que computações em malhas grosseiras/ irregulares.

A propósito, a mestranda já portava uma familiaridade com esta técnica (centrada na resolução de sistemas lineares de grande porte - IV POSMEC da UFU) com aplicação em dinâmica de fluídos (LEBRÓN & RIBEIRO, 2000), além de uma intensa dedicação aos descritores de simulação numérica computacional, sistemas lineares, equações diferenciais e métodos iterativos, somada à convivência com a linguagem de

programação orientada para objetos (C++ para Windows), o que alavancou sua motivação para empreender esta pesquisa.

O estudo da Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica (EHD) está relacionado às situações onde a deformação elástica dos corpos em contato hidrodinâmico não pode ser desprezada. Para analisar a EHD em contatos elípticos é necessária a solução simultânea das equações da pressão e da elasticidade e, para a deformação, complementa-se esta formulação com a adoção de uma relação exponencial da viscosidade com a pressão, o que torna altamente não-linear o sistema de equações acopladas.

Para a consecução do objetivo proposto, empreendeu-se uma revisão conceitual de autores clássicos - desde Hertz (1881) e Barus (1893) - até autores contemporâneos como Lepikult (1997, descrevendo o Método Gauss-Seidel de Jacobi) dentre outros, sabendo-se que alguns estudos mais recentes (VENNER, 1994; SMEETH E SPIKES, 1997; JANG E TICH, 1995) revelam tentativas através de diferentes métodos de solução, sem que, contudo, este problema apresente uma resolução completamente satisfatória.

Tem-se como premissa que os campos de pressão podem exigir uma malha extremamente refinada na região do contato e, caso a mesma seja delineada com um número grande de pontos distribuídos regularmente, isto pode inviabilizar o projeto em razão do elevado custo de processamento. No entanto, é provável que com a utilização de duas malhas, uma regular e a outra irregular, este problema pode ser contornado, ou seja, tendo como coadjuvantes a discretização proposta por Hamrock e Dowson (1981) e o auxílio da técnica de Multi Grelha (MG) para possibilitar o emprego de malhas finas na região do contato e sendo assim, como a MG acelera a convergência de grandes sistemas lineares, o custo computacional decorrente permanece em limites aceitáveis.

Nesta direção, espera-se que a técnica de Multi Grelha com malhas irregulares aplicadas em um sistema altamente não-linear seja comprovadamente rápida, precisa e eficaz, evidenciando-se como uma das contribuições específicas deste trabalho.

CAPÍTULO I

CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

1.1 Questão temática e hipóteses teóricas

Embora envolva alguns questionamentos secundários que serão levantados no decurso do estudo, a questão central deste trabalho pode ser resumida em uma única pergunta: é possível simular numericamente, sob condições isotérmicas, os contatos elípticos com lubrificação EHD onde há grandes dificuldades experimentais associadas a um problema sem solução analítica?

Como precedente para a formulação de hipóteses, tem-se que a EHD possui uma característica altamente pontual, com grandes gradientes para a pressão, o que leva à necessidade de malhas extremamente finas, gerando assim sistemas de ordem elevada que, associados à não-linearidade numérica, tendem a produzir soluções instáveis. Os campos de pressão exigem uma malha extremamente refinada na região do contato e, se a mesma for feita com um número grande de pontos distribuídos regularmente, inviabiliza o projeto pelo elevado custo de processamento.

Considerando as recomendações metodológicas de Marconi & Lakatos (1996) em que na pesquisa "as conclusões devem estar vinculadas à hipótese de investigação, cujo conteúdo foi comprovado ou refutado". (1996, p. 37), mesmo que advenham hipóteses adicionais no decurso da pesquisa, as principais são:

- 1) Com a utilização de duas malhas, uma regular e a outra irregular, este problema relacionado aos contatos elípticos com lubrificação EHD onde há grandes dificuldades experimentais pode ser contornado.
- 2) Nesse contexto, o emprego da técnica de Multi Grelha com malhas irregulares num sistema altamente não-linear pode apresentar maior rapidez de processamento, precisão e eficiência.

1.2 Principais antecedentes e premissas adicionais

Dois corpos sólidos separados por uma fina camada de fluido lubrificante, com uma velocidade relativa entre eles diferente de zero e submetidos a uma carga que os induz a uma deformação elástica caracterizam a lubrificação Elasto-Hidrodinâmica (EHD).

A análise da EHD requer a solução simultânea das equações da elasticidade e da hidrodinâmica (equações de Reynolds). O sistema acoplado de equações que compõem a solução dos problemas de lubrificação EHD possui como características que ao se definir a espessura de filme leva-se em conta a deformação elástica do contato. Neste caso, deve ser levado em consideração que tanto a viscosidade quanto a densidade dependem da pressão, resultando num problema altamente não-linear.

A maioria dos trabalhos em EHD versa sobre contatos lineares e, nesse sentido, Grubin, em 1949, foi o primeiro a tentar uma solução do problema de EHD linear isotérmico. Esta análise revelou que a forma, elasticamente deformada dos sólidos, num contato lubrificado, altamente carregado, era a mesma que a forma produzida num contato seco (Hertziano).

Esta hipótese facilitou a solução da equação de Reynolds na região de entrada do contato e permitiu o cálculo da separação dos sólidos, porém, a referida análise de Grubin não apresentou resultados compatíveis com a realidade.

O que caracteriza a não-linearidade das equações que regem a EHD está na equação de Reynolds que possui na sua formulação os valores da densidade, a viscosidade e da altura da película lubrificante que por sua vez são funções da pressão transformando o problema num sistema acoplado de equações diferenciais.

Deve ser observado que pelo caráter exponencial do cálculo da viscosidade, esta é fortemente influenciada com a variação da pressão e, mesmo que permaneça constante a altura de separação entre as superfícies e também a densidade do lubrificante, em função da pressão, a equação de Reynolds continua altamente não-linear.

1.3 Procedimentos metodológicos

Para uma solução completa do problema de EHD devem ser tratadas simultaneamente as seguintes equações: a equação de Reynolds, a relação entre a viscosidade e a pressão e as equações da elasticidade, o que foi feito por Dowson e Higginson, em 1959, obtendo a solução do problema por métodos inversos que apresentaram bons resultados para casos unidimensionais.

Por sua vez, Hamrock e Dowson (1981), apresentaram métodos iterativos de solução da EHD obtendo alguns resultados satisfatórios, cujos princípios serão aqui aproveitados na fase comparativa. Estudos mais recentes (VENNER, 1994; SMEETH E SPIKES, 1997; JANG E TICHY, 1995) tentam diferentes métodos de solução, porém este problema não pode ser considerado completamente resolvido.

Como recursos apropriados para sustentação da base metodológica, serão também empregados a discretização proposta por Hamrock e Dowson (1981) e o auxílio da técnica de Multi Grelha (MG) para possibilitar o emprego de malhas finas na região do contato posto que, como a MG acelera a convergência de grandes sistemas lineares, o custo computacional decorrente permanece em limites aceitáveis.

Como ferramenta coadjuvante para a obtenção e análise de resultados foi desenvolvido um pacote de programas aplicativos construídos pela pesquisadora com utilização da linguagem C++ (de Stroustrup), cujas listagens dos códigos-fonte estão contidas no ANEXO inserido no apêndice do presente trabalho.

Os primeiros resultados concentram-se na comparação entre os três modelos, assim como nos diferentes valores de suas variáveis. O objetivo específico desta fase consiste em localizar um modelo e um valor adequado para que, ao mesmo tempo em que forneça resultados satisfatórios, não represente um alto custo tanto em tempo de processamento quanto em capacidade de armazenamento. Para atingir tal a meta adotar-se-á como padrão de comparação os resultados obtidos por Hamrock e Dowson (1981), Jang e Tichy (1995) e Venner (1994).

Na busca do modelo e do valor apropriados de γ , diferentes combinações foram executadas. Para γ foram escolhidos os valores: 0, 1, 1.5 (valor adotado por Hamrock e Dowson em 1981) e 2.

Nos resultados obtidos para estes diferentes casos pode ser analisado, além dos perfis das pressões após 1000 iterações, o comportamento específico de cada caso com 10 e 100 iterações de modo a visualizar como o caso em questão se comporta a caminho da convergência.

Os procedimentos (passo a passo) adotados para a obtenção desses resultados estão minuciosamente descritos no Capítulo 4 (item 4.6 - Descrição geral do algoritmo) com o respectivo fluxograma.

1.4 Estrutura da dissertação

No Capítulo I, que ora se encerra, configura-se uma visão contextual desta pesquisa, incluindo o encaminhamento das hipóteses teóricas e uma abordagem superficial acerca dos métodos de solução numérica de sistemas lineares de grande porte assim como as diferentes possibilidades da sua solução iterativa.

Por conseguinte, no Capítulo II, a técnica de Multi Grelha (MG) é então abordada como recurso de aceleração da convergência na aproximação da solução numérica à exata, sendo que cada etapa do processo de MG é detalhada para fornecer ao leitor a possibilidade de implementação e uso desta poderosa ferramenta de trabalho. Finalizando esta seção, são apresentados alguns resultados que validam e comprovam a eficácia da técnica de MG utilizada.

No Capítulo III é abordado o problema físico, qual seja inerente ao principal descritor desta pesquisa, a Lubrificação EHD. Para o aprofundamento desta questão, são traçadas considerações iniciais que tem por objetivo situar o leitor no problema abordado. Posteriormente é descrito o contato seco com deformação elástica, denominado de contato Hertziano cuja formulação é semelhante à do EHD, com a inserção de algumas hipóteses simplificativas. A equação que fornece o campo de pressão em contatos elípticos, equação de Reynolds é finalmente abordada. Para entender a relação que Reynolds estabelece na sua formulação os valores da densidade, a viscosidade e da altura da película lubrificante, tais equações são apresentadas e estudadas também neste capítulo.

O Capítulo IV trata da implementação numérica das equações de EHD. Partindo-se das equações dimensionais e de suas respectivas

adimensionalizações, são abordadas diferentes formas de discretização. O Capítulo também aborda a implementação numérica das equações que regem o fenômeno assim como o esquema iterativo utilizado na sua solução.

Por sua vez, o Capítulo V apresenta os resultados obtidos. Inicia-se com um estudo sobre diferentes modelos numéricos que foram implementados e comparados. A questão de refinamento de malhas é então abordada visando localizar a que melhor se adapta ao problema, levando-se em conta a necessidade de um grande número de pontos em contraste ao custo de processamento dos mesmos. Este capítulo também ilustra os resultados obtidos perante a variação de alguns parâmetros tais como a carga (w) a que os corpos estão submetidos, a variação da velocidade de rotação (u), e a geometria da superfície de contato (k), levantando as respectivas discussões.

Por fim, são apresentadas as conclusões alcançadas - tendo em vista os objetivos propostos e as dificuldades encontradas, incluindo alguns complementos ao trabalho realizado, bem como a formulação de sugestões para continuidade do tema em trabalhos futuros. A pesquisa é finalizada com o relato de alguns aspectos conclusivos observados no seu desenvolvimento e realizando uma adequação da questão e das premissas com os resultados encontrados.

CAPÍTULO II

MULTI GRELHA (MG)

2.1 Considerações Preliminares

Os métodos iterativos de solução de sistemas lineares do tipo apresentado abaixo (na Equação 2.1) ou na forma matricial (Equação 2.2), tais como o de Gauss-Seidel, de Jacobi, do Gradiente Conjugado, do Gradiente Bi-Conjugado ou das Relaxações Sucessivas (SOR), possuem em comum a característica de convergirem rapidamente no início do processo, mas, assim que as oscilações bruscas do erro são eliminadas nos estágios iniciais, a eficiência destes métodos decai significativamente tornando-os excessivamente lentos.

$$Au = f \quad (2.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Para superar este obstáculo surge a técnica Multi Grelha, que utiliza a característica desta rápida convergência inicial dos métodos iterativos e, a partir do ponto de colapso, transfere os cálculos para uma malha mais grosseira, onde os benefícios da convergência inicial são readquiridos. A seguir os resultados da malha grosseira são transferidos de volta à malha mais fina. Este processo de transferência de informações entre malhas é realizado durante alguns ciclos, utilizando-se esquemas de interpolação.

2.2 Métodos iterativos para a solução de sistemas lineares

Dada uma matriz inversível Q , pode rescrever-se o sistema de equações (2.1) como,

$$(A + Q - Q)u = f \Rightarrow u = Q^{-1}f + (I - Q^{-1}A)u \quad (2.3)$$

onde I é a matriz identidade de ordem N .

A partir de (2.3) obtêm-se uma expressão geral para os métodos iterativos básicos que são denominados de primeiro grau posto que cada iteração depende exclusivamente da iteração anterior,

$$\tilde{u}^{n+1} = G\tilde{u}^n + k \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

onde \tilde{u} é uma aproximação do vetor u , G é a matriz de iteração do método,

$$G = I - Q^{-1}A \quad (2.5)$$

e k é um vetor definido como,

$$k = Q^{-1}f \quad (2.6)$$

Observe-se que nem G nem k dependem da iteração n , motivo pelo qual os métodos que dependem da definição dada na equação (2.4) são ditos métodos iterativos estacionários. O fato de G e k não dependerem do vetor \tilde{u} torna estes métodos lineares (BITTENCOURT, 1996).

2.2.1 Método de Jacobi

Este método é dito de deslocamento simultâneo posto que a ordem pela qual as incógnitas são atualizadas não interfere no resultado das mesmas. Resolve todas as variáveis de uma vez, é de fácil compreensão e implementação, porém de convergência muito lenta. Partindo de uma solução inicial \tilde{u}^0 ; o método de Jacobi obtém para cada passo i os valores \tilde{u}_i , para $i=1, \dots, N$ (sendo N o número de variáveis).

O procedimento iterativo do método, a partir da equação (2.2) segue a seguinte formulação (LEPKULT, 1997),

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \frac{\left(f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \tilde{u}_j^n \right)}{a_{ii}} \quad i=1, \dots, n \quad (2.7)$$

Este método é eficiente na redução das amplitudes das componentes de alta frequência da aproximação \tilde{u}^n , o que o torna apropriado como suavizador na técnica de Multi Grelha (BITTENCOURT, 1996).

Geralmente a convergência do Método de Jacobi se dá quando a matriz A é de dominância diagonal, isto é, quando o valor absoluto da diagonal em cada linha for maior que a soma dos valores absolutos dos demais elementos da linha em questão (SHEWCHUK, 1996). Para resolver o sistema apresentado na equação (2.1) pelo método de Jacobi, há necessidade de armazenamento dos valores da matriz A , dos valores dos vetores \tilde{u}^n , \tilde{u}^{n+1} e f .

2.2.2 Método de Gauss-Seidel

Conhecido como método de deslocamentos sucessivos, este método é semelhante ao método de Jacobi com a diferença de que utiliza os valores calculados na mesma iteração, o que o torna um pouco mais rápido de convergência. O procedimento iterativo do método, a partir da equação (2.2) segue a seguinte formulação (LEPKULT, 1997),

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \frac{\left(f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{u}_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \tilde{u}_j^n \right)}{a_{ii}} \quad i=1, \dots, n \quad (2.8)$$

Geralmente o cálculo do resíduo para a aferição de convergência exige um vetor adicional. Deste modo, o espaço de memória e o custo por iteração são os mesmos do método de Jacobi. O número de iterações necessárias para a convergência é inferior ao requerido pelo método de Jacobi. Esclarece-se que tanto no método de Jacobi e como no de Gauss-Seidel, a

transição da estimativa $u_i^n \equiv \tilde{u}_i^n$ do sistema (2.1) para a próxima estimativa $u_i^{n+1} \equiv \tilde{u}_i^{n+1}$ pode ser descrita matricialmente (LEPKULT, 1997), procedendo-se à decomposição LU ("Lower", "Upper") clássica da matriz A , isto é,

$$A = L + D + U \quad (2.9)$$

onde A , L , D e U são respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

O algoritmo de Jacobi pode ser representado por,

$$M_j \tilde{u}^{n+1} = N_j \tilde{u}^n + f \quad (2.10)$$

onde,

$$M_j = D \quad \text{e} \quad N_j = -(L + U)$$

e o algoritmo de Gauss-Seidel por,

$$M_g \tilde{u}^{n+1} = N_g \tilde{u}^n + f$$

onde,

$$M_g = D + L \quad \text{e} \quad N_g = -U$$

2.2.3 Método de Sobre-Relaxação

O método de Sobre-Relaxações Suscitas (SOR) é o método de Gauss-Seidel com a introdução de um parâmetro w visando acelerar a convergência.

De forma geral tem-se,

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \frac{w \left(f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{u}_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \tilde{u}_j^n \right) - (1-w) a_{ii} \tilde{u}_i^n}{a_{ii}} \quad i=1, \dots, n \quad (2.11)$$

Se $w=1$, obtém-se o método de Gauss-Seidel; para $w<1$ e $w>1$ tem-se respectivamente, sub e sobre-relaxação (BITTENCOURT, 1996). Para facilitar a convergência do método, pode se fazer a atualização da variável \tilde{u}_i através da seguinte equação, em função do fator de relaxação,

$$w_i \leq \frac{1}{\sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|} \quad i=1, \dots, n \quad (2.12)$$

Porém, se por simplicidade for utilizado um único w para todas as equações, de forma que este seja menor que todos os w_i calculados o método apresentará bons resultados.

A implementação do SOR é análoga à do Gauss-Seidel, devendo-se considerar apenas as multiplicações por w a cada passo. A memória requerida por este método é a mesma do que a do método estudado anteriormente.

Observe-se o exemplo a seguir,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

cujas solução é $(1, 1, 1)$, tem-se:

$$\text{Gauss-Seidel: } \begin{cases} x_1^{n+1} = 3 - x_2^n - x_3^n \\ x_2^{n+1} = -1 + x_1^{n+1} + x_3^n \\ x_3^{n+1} = 1 + x_1^{n+1} - x_2^{n+1} \end{cases}$$

$$\text{SOR: } \begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n (1-w) + (3 - x_2^n - x_3^n)w \\ x_2^{n+1} = x_2^n (1-w) + (-1 + x_1^{n+1} + x_3^n)w \\ x_3^{n+1} = x_3^n (1-w) + (1 + x_1^{n+1} - x_2^{n+1})w \end{cases}$$

Partindo-se do vetor $\tilde{u}^n = (0,0,0)$ e com $w = 1$ (método de Gauss-Seidel) e $w = 0.5$ (sub relaxação) têm-se os seguintes resultados:

| n | Gauss-Seidel | | | SOR | | |
|---|--------------|-------|-------|--------|--------|--------|
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_1 | x_2 | x_3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 1.5 | 0.25 | 1.125 |
| 2 | -1 | 0 | 0 | 1.5625 | 0.9687 | 1.3593 |
| 3 | 3 | 2 | 2 | 1.1171 | 1.2226 | 1.1269 |
| 4 | -1 | 0 | 0 | 0.8837 | 1.1166 | 0.9470 |
| 5 | 3 | 2 | 2 | 0.9100 | 0.9868 | 0.9350 |
| 6 | -1 | 0 | 0 | 1.0040 | 0.9580 | 0.9855 |

Tabela 2.1: Convergência dos métodos de Gauss-Seidel e SOR.

Observar que com Gauss-Seidel, ocorrem oscilações periódicas nas variáveis \tilde{u}_i , enquanto que com o SOR converge-se para a solução $(1, 1, 1)$.

2.2.4 Aceleração Polinomial

A aceleração polinomial visa aumentar a taxa de convergência dos métodos iterativos vistos anteriormente determinando uma nova sequência de aproximações, tomando combinações lineares dos vetores obtidos nas iterações do método em questão (Bittencourt, 1996). Supondo-se que o método considerado seja completamente consistente, simétrico e definido por,

$$\tilde{u}^n = G^n \tilde{u}^{n-1} + k \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.13)$$

então, sendo u a solução exata, o vetor do erro e é definido como,

$$e^n = \tilde{u}^n - u \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.14)$$

e satisfaz a relação,

$$e^n = G^n e^0 \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.15)$$

A convergência das aproximações \tilde{u} , é acelerada com o auxílio de uma nova seqüência v que é calculada como sendo a combinação linear,

$$v^n = \sum_{i=0}^n \alpha_i^n \tilde{u}^i \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.16)$$

tal que,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_{n,i} = 1 \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.17)$$

Considerando-se \hat{e} o erro cometido pela aproximação de u por v , subtraindo-se de ambos os lados da equação (2.16) os valores da solução exata u e utilizando o resultado fornecido pela equação (2.15), obtém-se,

$$\hat{e}^n = \sum_{i=0}^n \alpha_i^n e^i = \sum_{i=0}^n \alpha_i^n G^i e^0 = Q_n(G) e^0 \quad (2.18)$$

onde,

$$Q_n(G) = \alpha_{n,0} I + \alpha_{n,1} G + \dots + \alpha_{n,n} G^n \quad (2.19)$$

é um polinômio matricial.

Tomando-se a equação 2.20 como o polinômio algébrico associado a $Q_n(G)$ observa-se que $Q_n(1)=1$.

$$Q_n(x) = \alpha_{n,0} + \alpha_{n,1}x + \dots + \alpha_{n,n}x^n \quad (2.20)$$

A partir das equações (2.16) e (2.17) verifica-se que $\hat{e}^0 = e^0$ pelo que se conclui que o erro para \hat{e}^n também pode ser calculado pela equação (2.18) isto é,

$$\hat{e}^n = Q_n(G) \hat{e}^0 \quad (2.21)$$

A equação (2.21) dá o nome de aceleração polinomial ao método que a utiliza. No entanto, adotar este procedimento, como exposto, não é viável posto que o custo computacional torna-se muito elevado devido à equação (2.16), o que é resolvido construindo-se o polinômio $Q_n(x)$ a partir da relação de recorrência abaixo (2.22), onde γ_i e ρ_i são números reais.

$$Q_0(x) = 1 \quad (2.22)$$

$$Q_1(x) = \gamma_1 x - \gamma_1 + 1$$

$$Q_{n+1}(x) = \rho_{n+1}(\gamma_{n+1} x - \gamma_1 + 1 - \gamma_{n+1}) Q_n(x) + (1 - \rho_{n+1}) Q_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Além disso, $Q_n(1)=1 \quad \forall n \geq 0$. Com $Q_n(x)$ dado pela equação (2.22), as aproximações \tilde{u}^n da equação (2.4) podem ser determinadas assim:

$$\tilde{u}^1 = \gamma_1 (G \tilde{u}^0 + k) + (1 - \gamma_1) \tilde{u}^0 \quad (2.23)$$

$$\tilde{u}^{n+1} = \rho_{n+1} \{ \gamma_{n+1} (G \tilde{u}^n + k) + (1 - \gamma_{n+1}) \tilde{u}^n \} + (1 - \rho_{n+1}) \tilde{u}^{n-1} \quad n \geq 1 \quad (2.24)$$

Existem várias seqüências de polinômios $\{Q_n(x)\}$ que satisfazem a equação (2.22), entre elas estão as associadas aos métodos do Gradiente Conjugado e ao de Chebyshev.

2.2.5 Método do Gradiente Conjugado (CG)

O nome deste método deve-se ao fato de que o mesmo gera uma seqüência de vetores conjugados (ortogonais). Estes vetores são os gradientes de um funcional quadrático (ou seja, $n=2$ da equação (2.22)) cuja minimização é equivalente a resolver o sistema linear.

Se a equação (2.1) for redefinida como sendo,

$$r(\tilde{u}) = f - A\tilde{u} \text{ ou mudando a notação, } r(x) = f - Ax \quad (2.25)$$

Então, o alvo da solução do sistema linear descrito na equação (2.1) seria determinar x tal que $r(x)$ seja igual a zero. Isto pode ser feito localizando-se o mínimo de uma função $q(x)$ definida por,

$$q(x) = \frac{1}{2} x A x - x f \quad (2.26)$$

desde que,

$$\nabla q(x) = r(x) \quad (2.27)$$

Ao procurar iterativamente uma solução de (2.1), em geral tem-se,

$$x^{n+1} = x^n + \alpha p \quad (2.28)$$

onde α é um escalar e p a direção de um vetor. Evidentemente, se o escalar α for igual a zero, a solução de (2.1) já foi encontrada o que implica em que o vetor x não mais sofre modificações, isto é, $\tilde{u} \equiv u$.

A idéia do CG é dar um passo numa direção (p) que seja perpendicular (conjugada) a todos os passos anteriores e localizar α da equação (2.28) de modo que minimize a função $q(x + \alpha p)$.

Para selecionar a direção do vetor p em cada passo, o CG utiliza a regra inscrita na seguinte equação (2.29);

$$p^{n+1} = r(x^{n+1}) + \frac{[r(x^{n+1})]^2 p^n}{[r(x^n)]^2} \quad (2.29)$$

onde, p^n é a direção anterior e r como definido na equação (2.25).

Isto feito, o problema (2.1) transforma-se em uma busca unidimensional, isto é a minimização da função a (na equação 2.30), com uma única variável e mais, uma função que possui representação analítica de classe C^∞ por se tratar de um polinômio, tendo portanto solução analítica conhecida. (Vanderplaats)

$$q(x + \alpha p) = \frac{1}{2} (x + \alpha p) A (x + \alpha p) - (x + \alpha p) f \quad (2.30)$$

O CG é um método extremamente eficiente quando a matriz dos coeficientes é simétrica, positiva e definida, e requer o armazenamento um número limitado de vetores, resultando em mais $4N$ posições de memória (Barret, 1994). No entanto, na sua utilização juntamente com o método de Multi Grelha, não demonstrou ser tão eficiente quanto os métodos iterativos estacionários, o que não é uma contradição posto que a eficiência isolada de um determinado método está relacionada com a rapidez com que o mesmo converge para a solução procurada e, portanto no modo deste reduzir as altas freqüências do erro.

Há variações do GC como as citadas a seguir e que utilizam basicamente o mesmo princípio acima descrito: Gradiente Bi-Conjugado (BiCG), Gradiente Conjugado Quadrado (CGS), e Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (BI-CGSTAB).

O Gradiente Bi-Conjugado (BiCG) é um método que gera duas seqüências de vetores, de modo análogo à gerada pelo CG. A primeira é baseada na matriz dos coeficientes originais do sistema, e a segunda baseia-se na matriz transposta dos mesmos. Em vez de ortogonalizar cada seqüência, as mesmas são geradas de modo a serem mutuamente ortogonais ou bi-ortogonais. Do mesmo modo que o CG, este método necessita de espaço limitado para seu armazenamento. É geralmente utilizado quando a matriz não é simétrica nem singular, no entanto a convergência pode vir a

ser irregular. BiCG requer a multiplicação entre os coeficientes da matriz e os da sua transposta a cada iteração.

Já o Gradiente Conjugado Quadrado (CGS) é uma variação do BiCG que aplica as operações de atualização para as seqüências da matriz dos coeficientes e para as da sua transposta a partir do mesmo vetor. Em princípio, a taxa de convergência estaria sendo duplicada mas, na prática a convergência pode vir a ser muito mais irregular do que a do BiCG levando a resultados incorretos. Uma vantagem prática é a de que este método não necessita da multiplicação entre os coeficientes da matriz e os da sua transposta a cada iteração.

Por sua vez, o Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (BI-CGSTAB): é outra variação do BiCG mas se vale de diferentes atualizações para as seqüências relacionadas à matriz transposta dos coeficientes a fim de suavizar a convergência (Barret, 1994).

2.2.6 Aceleração de Chebyshev

A Iteração Recursiva de Chebyshev determina polinômios cujos coeficientes são escolhidos para minimizar a norma dos resíduos no sentido dos máximos e mínimos. O polinômio $\{Q_n(x)\}$ como descritos no item 2.1.4 é tal que o raio espectral,

$$S(Q_n(G)) = \max_{m(G) \leq x \leq M(G)} |Q_n(\mu_i)| \quad (2.31)$$

seja pequeno, onde μ_i ($i = 1, \dots, N$) são os autovalores de G . Como todo o espectro de G é raramente conhecido, trabalha-se com o raio espectral virtual dado por,

$$\bar{S}(Q_n(G)) = \max_{m(G) \leq x \leq M(G)} |Q_n(x)| \quad (2.32)$$

Como $\mu_i \in [m(G), M(G)]$, tem-se que,

$$S(Q_n(G)) \leq \bar{S}(Q_n(G)) \quad (2.33)$$

Logo, neste método procura-se minimizar $\bar{S}(Q_n(G))$ através da escolha adequada da seqüência $\{Q_n(x)\}$.

Os coeficientes da matriz devem de ser positivos e definidos e requer o conhecimento dos autovalores nas extremidades. Este método possui ainda a vantagem adicional do não efetuar produtos internos durante sua execução (Barret, 1994).

Para resolver o sistema apresentado na equação (2.1) por este método há necessidade de $5N$ posições de memória.

2.3 A Técnica de Multi Grelha (MG)

2.3.1 Equação residual

Seja \tilde{u} uma aproximação da solução exata u da equação (2.1), em uma iteração qualquer, isto é

$$A(e + \tilde{u}) = f \quad (2.34)$$

Onde $e^n = u - \tilde{u}^n$, (equação (2.14)), é o desvio, ou erro algébrico, da aproximação \tilde{u} em relação à solução exata u . A norma deste erro $\|e\|$ é definida como:

$$\|e\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |e_j| \quad \text{e} \quad \|e\|_2 = \left\{ \sum_{j=1}^N e_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

Evidentemente o valor exato deste erro é tão inacessível quanto o valor da solução exata o que impossibilita a utilização da equação (2.35) como critério de convergência precisando portanto haver uma estimativa do mesmo, no caso, o resíduo r como na equação (2.25), ou seja,

$$r(\tilde{u}) = f - A\tilde{u} \quad (2.36)$$

pode ser calculado indicando quanto a aproximação \tilde{u} deixa de satisfazer a equação (2.1) (Briggs, 1987). A norma do resíduo $\|r\|$ pode ser calculada de

modo análogo ao da equação (2.35). Note-se que, caso o resíduo seja igual a zero, a solução exata do problema foi encontrada, isto é, $u \equiv v$, o que torna o erro igualmente nulo. Na prática, num processo iterativo, não se chega a um resíduo $r=0$, mas interrompe-se o processo quando o mesmo for suficientemente pequeno, da ordem de 10^{-8} por exemplo. Reorganizando a equação (2.36) como,

$$A\tilde{u} = r - f \quad (2.37)$$

e efetuando a subtração entre as equações (2.1) e (2.37) tem-se,

$$A(u - \tilde{u}) = r \quad (2.38)$$

que, com a inserção da relação (2.14) fica,

$$Ae = r \quad (2.39)$$

A equação (2.39) é denominada equação do resíduo, indicando que o erro e satisfaz o mesmo conjunto de equações que a solução u quando f é substituído por r , ou seja, resolver o sistema da equação (2.39) é exatamente análogo a resolver o sistema da equação (2.1). A utilização da equação residual é apropriada para o método de Multi Grelha pois os valores de e , por se situarem em torno de zero em um processo iterativo, são mais adequados aos processos de interpolação que transferem resultados entre as malhas. Assim, dada uma aproximação \tilde{u} , obtida por algum método iterativo, pode-se calcular o resíduo r pela equação (2.36). Para melhorar \tilde{u} , determina-se o erro e pela equação residual (2.39) e corrige-se a solução u pela equação (2.14) (BRIGGS, 1987).

Observa-se que o custo para a solução exata de (2.39) é da mesma ordem do sistema original (2.1), o que torna viável o procedimento anterior. Entretanto, como será visto posteriormente, busca-se a solução na malha fina, empregando-se os demais níveis apenas como esquemas de correção, não havendo necessidade de resolver-se de forma exata as respectivas equações de resíduo nestas malhas.

2.3.2 O processo iterativo

Seja Ω^h uma malha discretizada com uma dimensão característica h e Ω^{2h} uma malha mais grossa com dimensão característica $2h$.

De uma forma geral o método Multi Grelha segue o seguinte processo iterativo:

- 1) relaxar algumas vezes $A^h u^h = f^h$ (equação (2.1)) na malha Ω^h obtendo um valor inicial \tilde{u}^h ,
- 2) calcular o resíduo $r^h = (f^h - A^h \tilde{u}^h)$ (equação (2.36)),
- 3) transferir os valores deste resíduo r^h para a malha mais grossa Ω^{2h} , com auxílio de funções interpoladoras obtendo-se r^{2h} .
- 4) relaxar algumas vezes a equação residual $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ (equação (2.39)) na malha Ω^{2h} , obtendo-se valores para e^{2h} ,
- 5) transferir os valores deste erro e^{2h} para a malha mais fina Ω^h , com auxílio de funções interpoladoras obtendo-se e^h .
- 6) corrigir a aproximação da malha fina com $u^h \leftarrow \tilde{u}^h + e^h$ (equação 2.14),

$$1) A^h u^h = f^h \rightarrow \tilde{u}^h$$

$$2) r^h = (f^h - A^h \tilde{u}^h)$$

$$3) I_h^{2h} r^h = r^{2h}$$

$$4) A^{2h} e^{2h} = r^{2h} \rightarrow e^{2h}$$

$$5) I_{2h}^h e^{2h} = e^h$$

$$6) u^h \leftarrow \tilde{u}^h + e^h$$

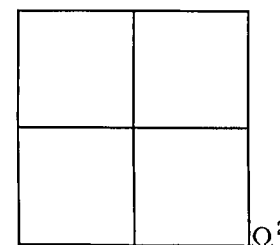
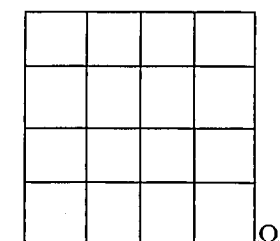


Figura 2.1: processo iterativo

2.3.3 Operadores de transferência entre malhas

Os elementos principais vistos anteriormente revelam a necessidade de operadores para transferir informações entre as malhas. Inicialmente assume-se que a malha grossa possui a metade do número de incógnitas da malha fina ou ainda que o tamanho dos elementos grossos é o dobro daqueles da malha fina. Assim a malha grossa está contida na fina, ou seja, estão aninhadas (nested meshes) (Bittencourt, 1996).

2.3.3.1 Operador de restrição

A prática tem demonstrado que o mecanismo de transferência de informações (passo 3 do sub capítulo 2.3) da malha fina Ω^h para a grossa Ω^{2h} pode ser realizado linearmente, com bons resultados. Denotando esta operação, chamada restrição, por l_h^{2h} (Briggs, 1987), tem-se:

$$l_h^{2h} : \Omega^h \rightarrow \Omega^{2h} \quad (2.40)$$

$$l_h^{2h} r^h = r^{2h} \quad \text{onde} \quad r_j^{2h} = r_{2j}^h$$

Observe-se que, o operador da equação (2.40) é um operador injetivo, isto é, os pontos da malha grossa assumem os valores correspondentes da malha fina.

2.3.3.2 Operador de prolongação

A transferência dos valores das funções (passo 5 do sub capítulo 2.3) da malha mais grossa Ω^{2h} para a mais fina Ω^h , é denominada prolongação ou interpolação, sua denotação é dada por l_{2h}^h . Bi-dimensionalmente pode ser realizada do seguinte modo,

$$l_{2h}^h : \Omega^{2h} \rightarrow \Omega^h \quad (2.41)$$

$$l_{2h}^h e^{2h} = e^h$$

onde,

$$e_{2i,2j}^h = e_{i,j}^{2h} \quad (2.42)$$

$$e_{2i+1,2j}^h = \frac{1}{2}(e_{i,j}^{2h} + e_{i+1,j}^{2h})$$

$$e_{2i,2j+1}^h = \frac{1}{2}(e_{i,j}^{2h} + e_{i,j+1}^{2h})$$

$$e_{2i+1,2j+1}^h = \frac{1}{4}(e_{i,j}^{2h} + e_{i+1,j}^{2h} + e_{i,j+1}^{2h} + e_{i+1,j+1}^{2h})$$

com

$$0 \leq i \leq \frac{M}{2} - 1$$

$$0 \leq j \leq \frac{M}{2} - 1$$

onde M é o número de pontos em x e y.

Estes procedimentos, ilustrados para duas malhas podem ser estendidos recursivamente até se atingir a malha mais grosseira possível, isto é, a de 3 pontos, e daí retornando-se à mais fina, onde reside afinal a solução do problema original (BRIGGS, 1987).

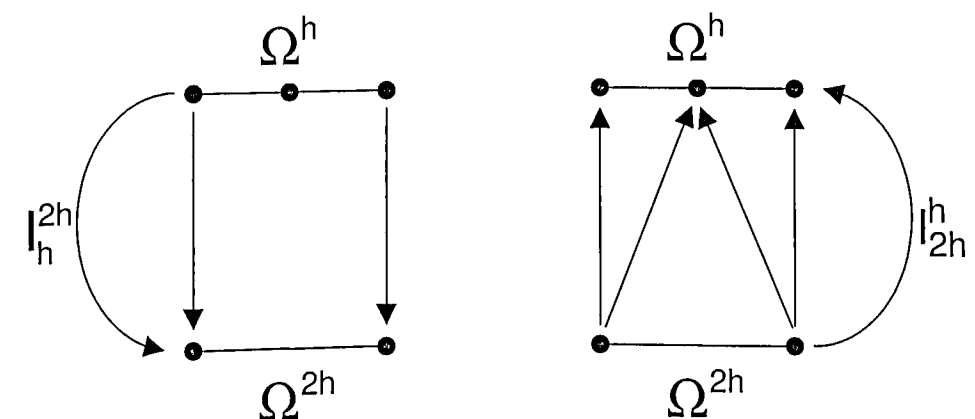


Figura 2.2: transferências de dados entre malhas

2.3.4 Ciclos Multi Grelha

O percurso de descida e subida pode ser realizado de formas diferentes, surgindo daí os diversos tipos de ciclos Multi Grelha. O parâmetro m_c no algoritmo do MG determina o número de chamadas recursivas dos níveis mais grosseiros. Para $m_c = 1$, verifica-se uma descida simples até o fundo com retorno imediato à superfície (Figura 2.3), é o chamado ciclo V.

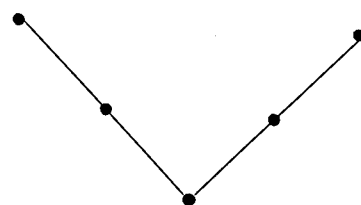


Figura 2.3: $m_c = 1$, ciclo em V

O ciclo W é (Figura 2.4) é geralmente mais robusto do que o ciclo V, além de ser mais fácil a sua análise na teoria de convergência clássica do MG. No entanto, é mais caro, e em aplicações de refinamento local (ou em 1D) pode não apresentar resultados suficientemente precisos. Os ciclos W são especialmente caros em algoritmos paralelos. Como o próprio nome o sugere, este ciclo, desce da malha mais fina para a mais grosseira, como no ciclo V, porém no retorno interrompe a subida em uma malha intermediária, voltando novamente ao fundo, para só então retornar definitivamente à superfície.

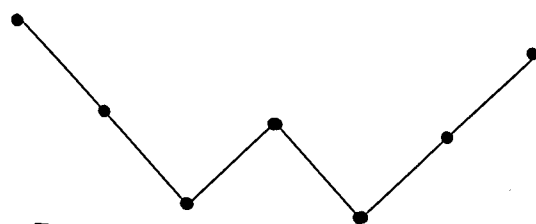


Figura 2.4: $m_c = 2$, Ciclo em W

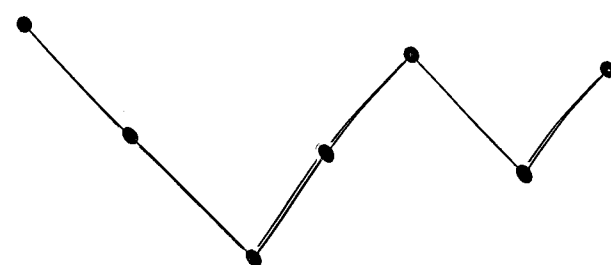


Figura 2.5: Ciclo misto

A figura precedente (Fig. 2.5) mostra a possibilidade de também criar ciclos da junção dos anteriores. A idéia consiste em monitorar o progresso da iteração em algum sentido e poder decidir como ou quando realizar o deslocamento entre as malhas (RUEDE, 1995).

2.4 Resultados na utilização do Multi Grelha

2.4.1 Caso unidimensional permanente

Para o estudo do comportamento do MG num caso unidimensional, foi abordado o escoamento de Poiseuille em um canal plano completamente desenvolvido, em regime permanente.

Fenômeno físico:

O escoamento isotérmico completamente desenvolvido no interior de um canal plano bidimensional (escoamento de Poiseuille), é governado pelas seguintes equações :

$$\text{Continuidade: } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.43)$$

$$\text{Momentum: } \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.44)$$

com,

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \text{constante} \quad (2.45)$$

onde u é a velocidade do escoamento e P a pressão do fluido. Adimensionalizando as variáveis tem-se:

$$y^* = \frac{y}{h} \quad (2.46)$$

$$u' = -\frac{\eta}{h^2} \frac{dP}{dx} u \quad (2.47)$$

onde o sinal do lado direito da equação depende do gradiente de pressão (-1 para gradiente negativo e 1 para gradiente positivo). Se a fronteira superior do canal se movimenta, tem-se um escoamento de Couette-Poiseuille, cujas condições de contorno são:

$$u(2h) = u \quad (2.48)$$

$$u(0) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad (2.49)$$

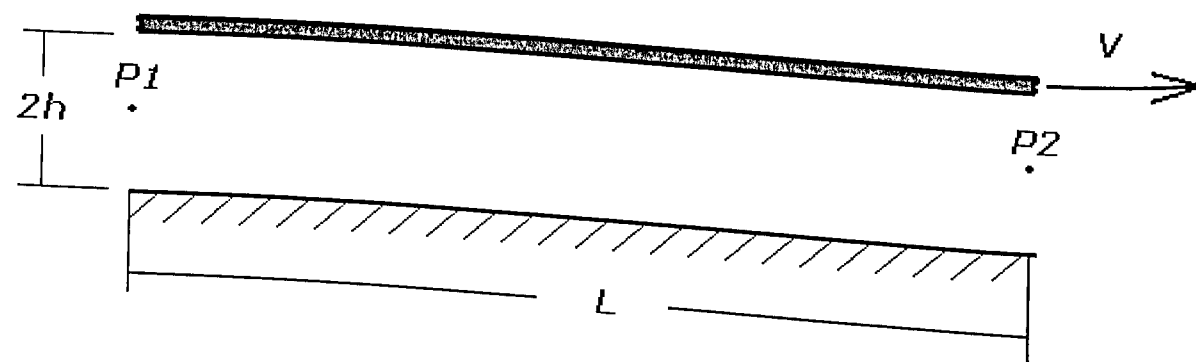


Figura 2.6: Escoamento de Poiseuille

Solução analítica:

O problema proposto torna-se então:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{-1}{\eta} \frac{dp}{dx} \quad 0 \leq y \leq 2h \quad (2.50)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$u(0) = 0 \quad (2.51)$$

$$u(2h) = 0 \quad (2.52)$$

Tomando-se

$$\frac{-1}{\eta} \frac{dp}{dx} = c \quad (2.53)$$

onde c é uma constante que, a modo ilustrativo, tomará o valor -1, tem-se então:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -1 \Rightarrow \frac{du}{dy} = -y + a \Rightarrow u = -\frac{1}{2} y^2 + ay + b \quad (2.54)$$

Aplicando-se as condições de contorno e tomando $h=0.5$ tem-se:

$$u(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \quad (2.55)$$

$$u(2h) = u(1) = 0 \Rightarrow a = 1$$

Assim sendo, a solução analítica do problema proposto é:

$$u = -\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y \quad (2.56)$$

onde y pertence ao intervalo [0,1].

Solução numérica:

Para se resolver numericamente o problema será utilizado o método de diferenças finitas centrais como a seguir:

como,

$$\frac{d^2u}{dy^2} = c \Rightarrow \frac{du}{dy} \left[\frac{du}{dy} \right] = c \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dy} \Big|_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} \approx \frac{d}{dy} \left[\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta y} \right] \approx \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta y)^2} \Rightarrow \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta y)^2} = c$$

ou na forma matricial, $Au=c$, onde,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(\Delta y)^2} & \frac{1}{(\Delta y)^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{(\Delta y)^2} & \frac{-2}{(\Delta y)^2} & \frac{1}{(\Delta y)^2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\Delta y)^2} & \frac{-2}{(\Delta y)^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-2}{(\Delta y)^2} \end{bmatrix}$$

com $c = -1$ e u a solução procurada do sistema.

Note-se que a matriz A é tridiagonal, simétrica, positiva de dimensão $(N-1) \times (N-1)$, onde N é o número de pontos da malha principal. Os resultados a seguir servem de comparação para atestar a eficiência do MG, onde é notável a capacidade e facilidade do MG em lidar com malhas extremamente finas.

| | Gauss-Seidel | Gauss-Seidel+MG |
|---------------------|--------------|-----------------|
| Número de pontos | 1024 | 1024 |
| Número de iterações | 220343 | 12 |
| Tempo de execução | 605 segundos | 1 segundo |

Tabela 2.2: Resultados de convergência para diferentes métodos de relaxação

Na Figura 2.7 é analisado o desempenho do MG em relação ao tempo de execução, onde N_v é o número de malhas utilizadas (sub-níveis) e w é o fator de relaxação. Se $w=1$ tem-se o método de Gauss-Seidel. Se $w>1$ tem-se o SOR (Sucessive Over Relaxation). A Figura 2.8 mostra a variação no número de iterações do MG em função da variação do fator de relaxação.

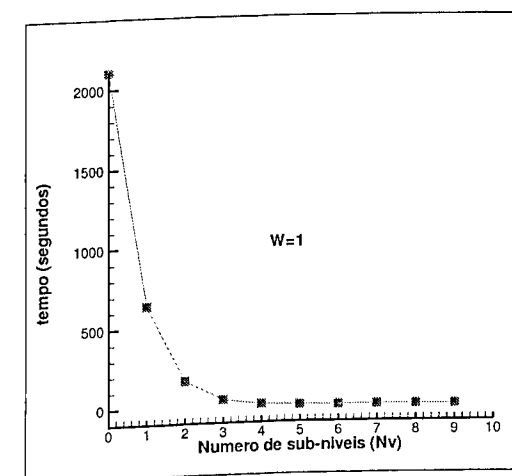


Figura 2.7: Iterações = $f(N_v)$

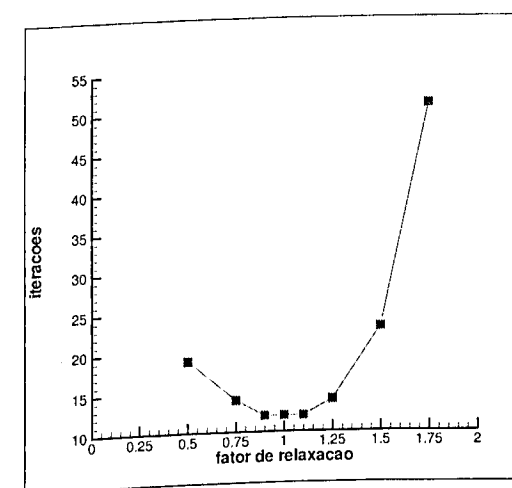


Figura 2.8: Iterações = $f(w)$

Nota-se que o número mínimo de iterações ocorre nas proximidades de $w = 1$, isto é, o SOR, para este problema, não desempenha a contento o seu papel de suavizador quando acoplado ao MG (PRESS et al, 1992).

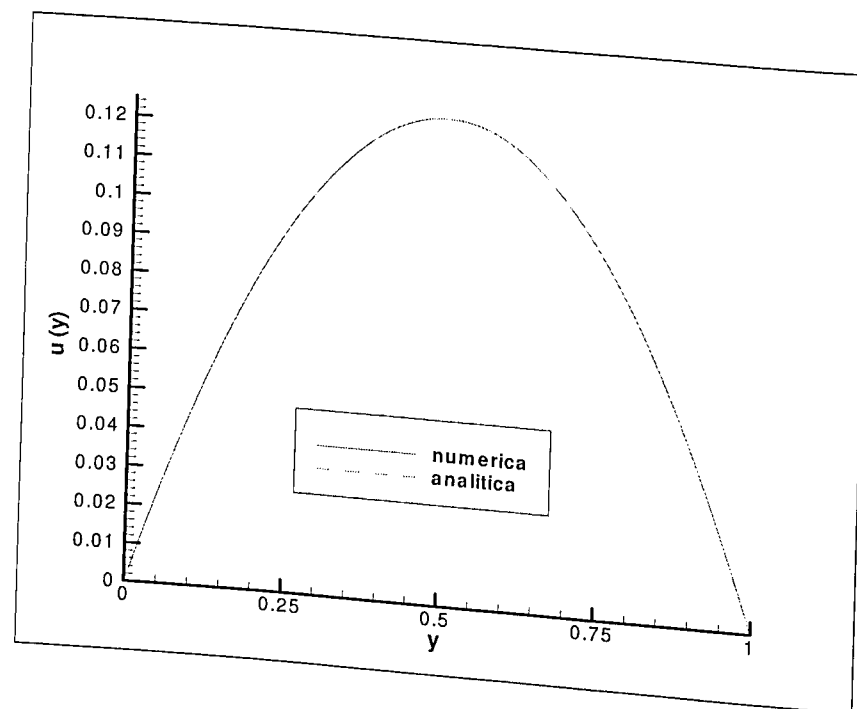


Figura 2.9: Perfil parabólico da velocidade no escoamento de Poiseuille

2.4.2 Solução bidimensional de transferência de calor

Para o estudo do comportamento do MG num caso bidimensional elíptico transiente, foi abordado um problema teórico de condução de calor bidimensional:

$$T_t = \nabla^2 T \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad t \geq 0 \quad (2.57)$$

com temperatura imposta igual a zero em todos os lados e condição inicial dada por :

$$T(x, y, 0) = \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) \quad (2.58)$$

e cuja solução exata é dada por:

$$T(x, y, t) = \sin(4\pi x) \cdot \sin(4\pi y) \cdot e^{-32\pi^2 t} \quad (2.59)$$

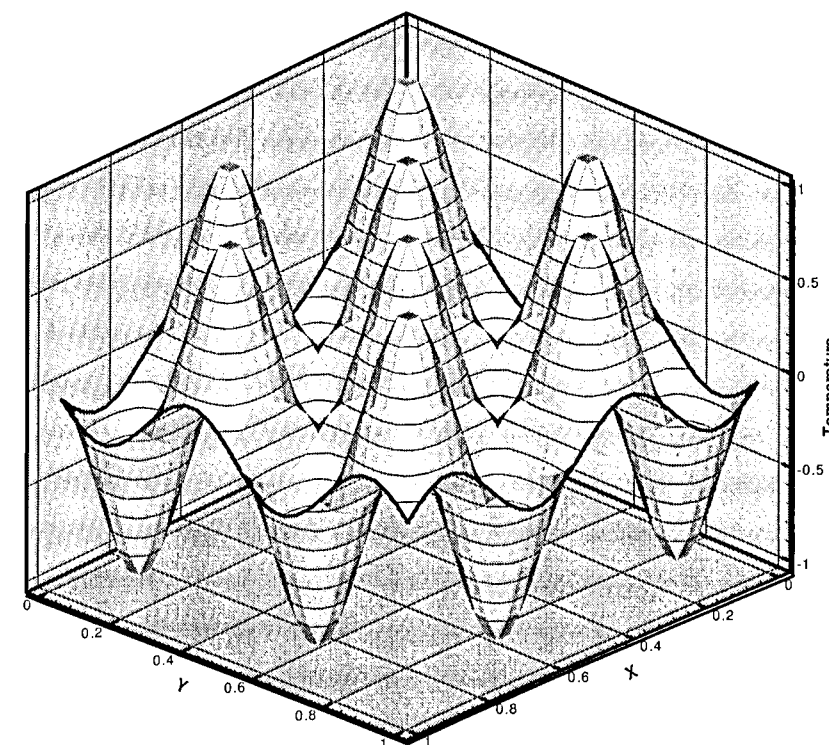


Figura 2.10: Condição inicial do problema 2-D de validação referente às equações (2.57) e (2.58).

Partindo de uma malha quadrada e visando determinar o número de pontos da malha conveniente ao problema, foi feita uma análise do erro apresentado pelo MG, em relação à solução exata e o tempo de CPU necessário para o processamento em cada caso. Os resultados obtidos podem ser visualizados nas Figuras 11 e 12, onde M é o número de pontos da malha

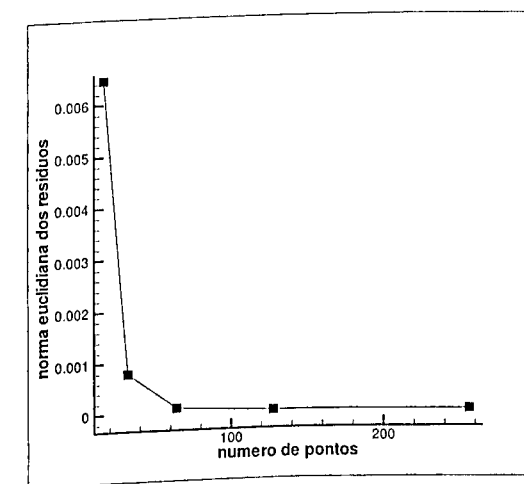


Figura 2.11: Erro = f (M)

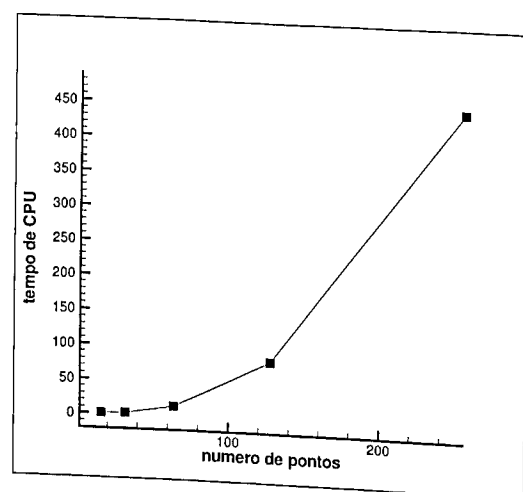


Figura 2.12: CPU = f(M)

Na Figura 2.13, a eficiência do MG pode ser constatada no tempo de processamento necessário (CPU) em função do número de sub-níveis utilizados. Convém salientar que para um número nulo de sub-níveis, o método de solução do sistema nada mais é que o de Gauss-Seidel ou o SOR, dependendo do valor de relaxação w . O erro permaneceu aproximadamente em $7 \cdot 10^{-6}$ para todos os sub-níveis.

Na análise do fator de relaxação w , constatou-se novamente a conveniência em ser usado w igual a um, isto é, o Método Iterativo de Solução de Gauss-Seidel, o que pode ser facilmente verificado observando-se a Figura 2.14.

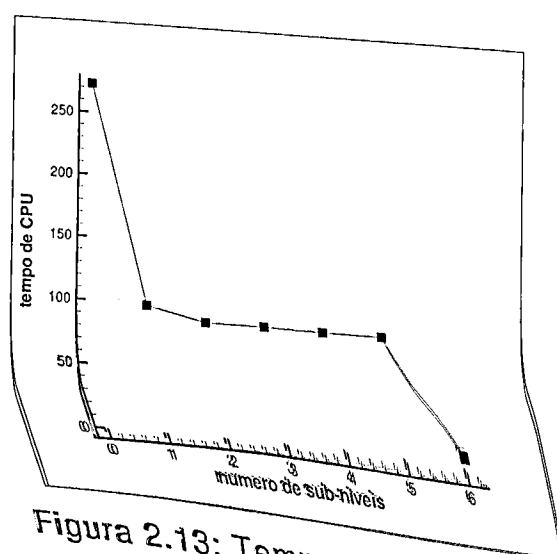


Figura 2.13: Tempo = f (sub-níveis)

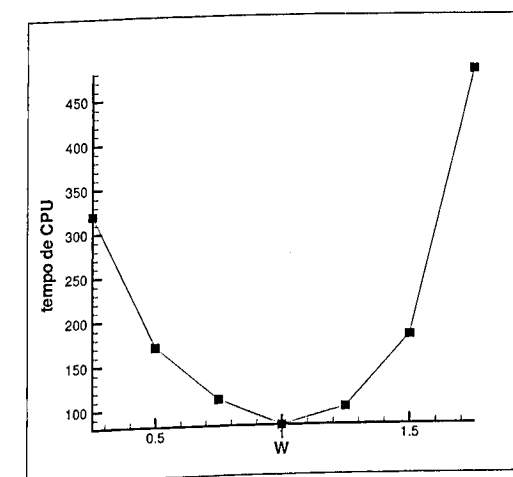


Figura 2.14: Tempo = f (W)

2.4.3 Lubrificação Hidrodinâmica

A lubrificação hidrodinâmica entre dois contatos é governada pela equação clássica de Reynolds (HAMROCK & DOWSON, 1981):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(u_a + u_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho(v_a + v_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (2.60)$$

onde,

p é o campo de pressão que surge entre os contatos lubrificados

$h(x,y)$ é a separação geométrica entre as superfícies

ρ a densidade

η a viscosidade

u_a e u_b v_a e v_b são as velocidades das superfícies deslizantes. Usualmente

$u_a = u$ e $u_b = v_a = v_b = 0$.

em regime permanente,

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

(2.61)

Quando se ignora a deformação elástica introduzida pela pressão, h é calculada levando-se em conta somente grandezas de caráter geométrico. Normalmente ρ e η dependem da pressão o que torna a equação de Reynolds não-linear e de difícil solução.

Os resultados da tabela a seguir foram obtidos para o problema linear simples, onde ρ e η são constantes com h independente da pressão:

| Tempo de CPU (segundos) | | |
|-------------------------|--------|--------|
| | Com MG | Sem MG |
| SOR | 4 | 517 |
| Gauss-Seidel | 6 | 530 |
| Gradiente Bi-Conjugado | 16 | 664 |

Tabela 2.2: Tempo de CPU na lubrificação hidrodinâmica para cada método de solução.

| Erro máximo | | |
|------------------------|------------|-----------|
| | Com MG | Sem MG |
| SOR | 10^{-10} | 10^{-8} |
| Gauss-Seidel | 10^{-11} | 10^{-4} |
| Gradiente Bi-Conjugado | 10^{-9} | 10^{-6} |

Tabela 2.3: Erro na lubrificação hidrodinâmica para cada método de solução.

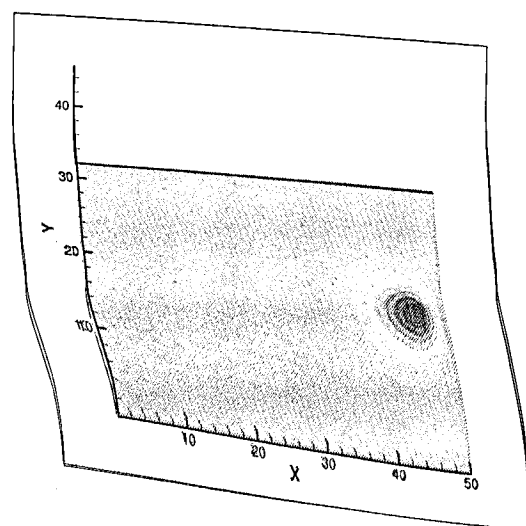


Figura 2.15: Curvas de nível da pressão

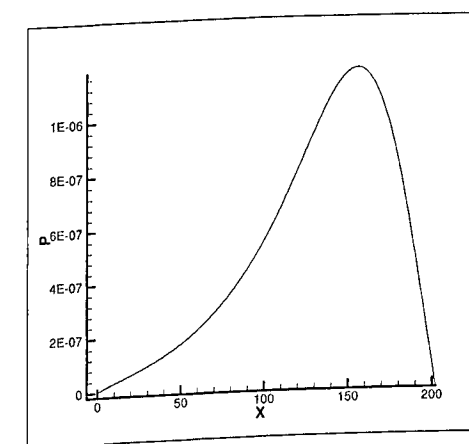


Figura 2.16: Pressão em $y=y_{\text{médio}}$.

CAPÍTULO III

LUBRIFICAÇÃO ELASTO-HIDRODINÂMICA (EHD)

3.1 Considerações Preliminares

Em muitos contatos entre elementos de máquinas transmitem-se forças através de finos, embora contínuos filmes de fluido. Estes filmes de fluidos tem sido bem compreendidos já há muito tempo quando relacionados à lubrificação hidrodinâmica de mancais e os resultados experimentais confirmam a teoria. Em 1916 Martin já havia percebido que muitos contatos carregados, tais como rolamentos e engrenagens, provavelmente se comportam como se fossem hidrodinamicamente lubrificados. Ao contrário do que ocorria com os mancais, a lubrificação hidrodinâmica de engrenagens e rolamentos diferiam substancialmente de resultados experimentais. Somente nos últimos anos é que a deformação elástica dos contatos foi acoplada à hidrodinâmica fornecendo uma melhor aproximação da teoria com os experimentos. De fato, as teorias mais antigas de lubrificação de contatos pontuais admitiam que as superfícies eram indeformáveis e que o lubrificante era iso-viscoso (KAPITZA, 1955). Entretanto, tais teorias aplicam-se somente às mais leves cargas.

A Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica (EHD) trata da lubrificação de contatos elásticos. A análise requer a solução simultânea das equações da elasticidade e da hidrodinâmica (equações de Reynolds). A Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica difere da teoria de lubrificação hidrodinâmica convencional nos seguintes aspectos:

- ao se definir a espessura de filme, leva-se em conta a deformação elástica do contato,
- a viscosidade e densidade dependem da pressão.

Quando dois sólidos estão em contato sob carga nula, dois tipos distintos de contatos são possíveis. O primeiro é o contato pontual, no qual os dois sólidos tocam-se num ponto, como ocorre em rolamentos. O segundo é um contato linear, no qual os dois sólidos tocam-se ao longo de uma linha

reta ou curva, como num rolamento cilíndrico. Após a aplicação da carga num contato pontual, o ponto expande-se numa elipse e a linha num retângulo. Embora estejamos interessados em contatos carregados, é conveniente distinguir as situações acima se referindo às mesmas como contato pontual ou contato linear.

A maioria dos trabalhos em EHD versa sobre contatos lineares. Grubin, em 1949, foi o primeiro a tentar uma solução do problema de EHD linear isotérmico. Na análise de Grubin admitiu-se que a forma, elasticamente deformada dos sólidos, num contato lubrificado, altamente carregado, era a mesma que a forma produzida num contato seco (Hertziano). Esta hipótese facilitou a solução da equação de Reynolds na região de entrada do contato e permitiu o cálculo da separação dos sólidos.

Para ilustrar as idéias expostas anteriormente, considere-se o caso de um cilindro rolando sobre um plano. A geometria da combinação cilindro-plano é mostrada na Figura 3.1:

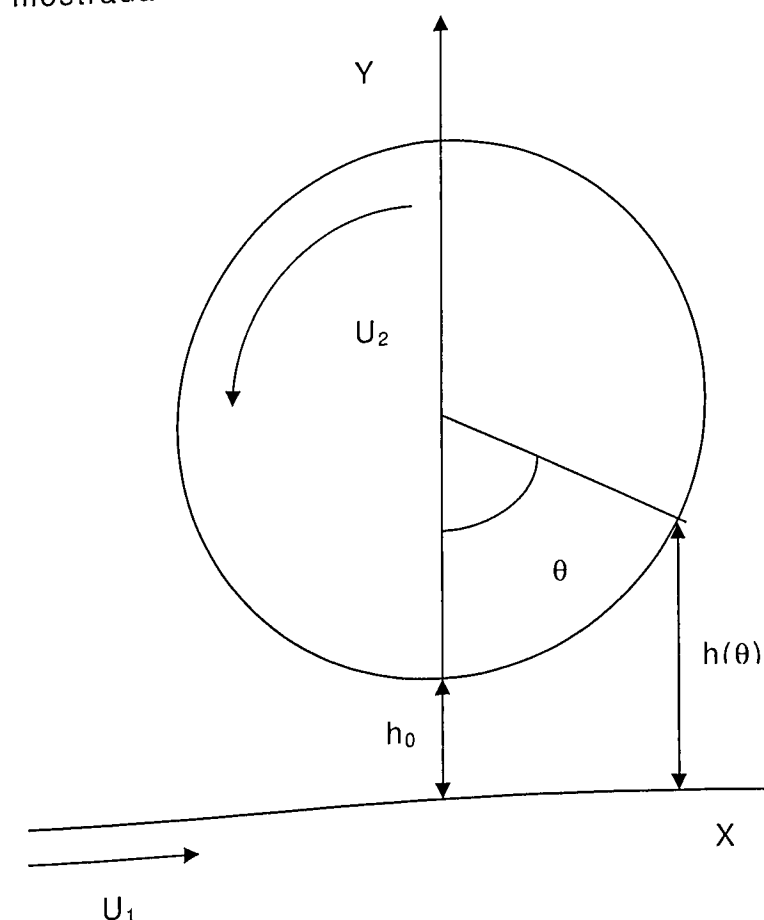


Figura 3.1 Geometria e nomenclatura do cilindro plano

Seja h_0 a separação mínima entre o cilindro infinitamente longo de raio R e o plano; então numa posição angular genérica θ , a espessura de filme é dada por:

$$h = -\frac{R}{n}(1 + n \cos \theta) \quad (3.1)$$

onde,

$$n = -\frac{R}{h_0 + R} \quad (3.2)$$

Para um cilindro longo a equação de Reynolds reduz-se a

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) = 6U_0 \frac{dh}{dx} \quad (3.3)$$

onde

$$U_0 = U_1 + U_2 \quad (3.4)$$

aplicando-se a condição de contorno de Swift-Stieber,

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad p = P_{cav} \quad (3.5)$$

obtém-se a distribuição de pressões ao longo da circunferência do cilindro. Isto feito, pode-se calcular o componente da força do lubrificante que atua normalmente ao plano. Se P_y representa esta força por unidade de comprimento tem-se,

$$P_y = \int_{x_1}^{x_2} p dx \quad (3.6)$$

| $\frac{R}{h_0}$ | θ_{cav} (graus) | $\bar{P}_y = \frac{P_y}{\mu U_0}$ |
|-----------------|------------------------|-----------------------------------|
| 10 | 11.3105 | 1.3985 10^1 |
| 10^2 | 3.8200 | 2.2140 10^2 |
| 10^3 | 1.2166 | 2.4103 10^3 |
| 10^4 | 0.3850 | 2.4423 10^4 |
| 10^5 | 0.1220 | 2.4444 10^5 |
| 10^6 | 0.0385 | 2.4473 10^6 |

Tabela 3.1: Componentes da força do lubrificante que atua normalmente ao plano do cilindro ilustrado na Figura 3.1

Da Tabela 3.1 pode-se inferir a seguinte aproximação,

$$\frac{h_0}{R} = 2.45 \frac{\mu U_0}{P_y} \quad (3.7)$$

Estimando-se a espessura mínima para o contato do dente de uma engrenagem típica,

$$\mu = 0.075 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad (3.8)$$

$$U_1 = U_2 = 5 \text{ m/s} \rightarrow U_0 = 10 \text{ m/s} \quad (3.9)$$

$$P_y = 26.5 \text{ KN/cm} \quad (3.10)$$

resultando,

$$\frac{h_0}{R} = 0.69 \cdot 10^{-6} \quad (3.11)$$

Admitindo-se um raio $R=2.5 \text{ cm}$,

$$h_0 = 1.72 \cdot 10^{-6} \quad (3.12)$$

Este valor é pequeno quando comparado até mesmo com os melhores acabamentos superficiais encontrados na prática. Até o acabamento superficial de uma esfera de rolamento típica chega a superar em dobro o valor acima, isto sem levar-se em conta a pista de rolamento cujo acabamento é bem mais grosseiro do que o da esfera. Para engrenagens helicoidais ter-se-ia a superfície retificada e polida em torno de $2 \cdot 10^{-5}$ a $4 \cdot 10^{-5}$ cm. Isto tudo conduz à conclusão de que a teoria hidrodinâmica clássica é incapaz de explicar a existência de um filme contínuo em contatos altamente carregados.

Nem a deformação elástica nem a dependência da viscosidade à variação da pressão podem isoladamente produzir o aumento desejado h_0/R .

Para uma solução completa do problema de EHD deve-se satisfazer simultaneamente as seguintes equações:

- A equação de Reynolds,
- A relação entre a viscosidade e densidade com a pressão,
- As equações da elasticidade.

Descobre-se logo que o esquema iterativo convencional representado na figura 3.2 nem sempre converge.

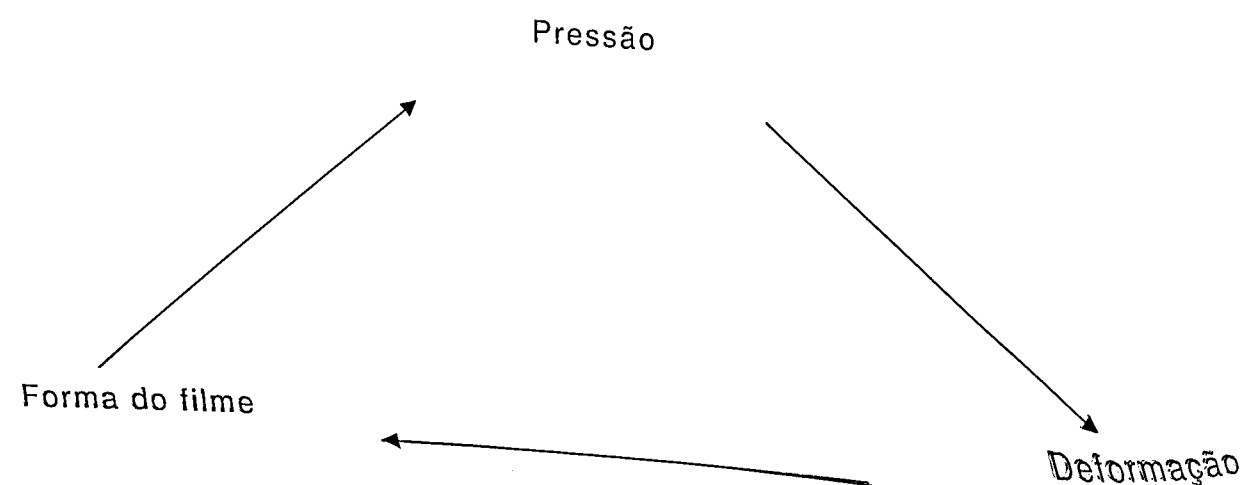


Figura 3.2: Esquema iterativo convencional da EHD

Isto ocorre particularmente quando a deformação elástica das superfícies é grande. Para contornar este percalço, Dowson e Higginson (1959) propuseram a chamada solução inversa.

A essência da solução inversa reside no cálculo da forma do filme que uma determinada distribuição de pressões irá imprimir. Esta distribuição de pressões é também empregada no cálculo da deformação elástica superficial. O restante do processo computacional consiste numa alteração sistemática da distribuição até que se consiga a coincidência entre a forma do filme hidrodinâmico e a superfície deformada.

Dowson e Higginson (1959) obtiveram a seguinte fórmula para a espessura mínima do filme:

$$h = \frac{1.6 \alpha^{0.6} (\mu_0 u)^{0.7} E^{0.03} R^{0.43}}{W^{0.13}} \quad (3.13)$$

onde, aplicando-se esta fórmula à engrenagem típica estudada tem-se,

$$h_0 = 1.8 \cdot 10^{-4} \quad (3.14)$$

que é 100 vezes maior do que o valor obtido através da teoria clássica.

3.2 Contato Hertziano

Dois sólidos elásticos, com diferentes raios de curvatura num par de planos principais (x e y) passando através do contato entre os sólidos, tocam-se num único ponto na ausência de carga externa.

Esta condição é chamada de contato pontual e é ilustrada na Figura 3.3. Esta condição é chamada de contato pontual e é ilustrada na Figura 3.3. Por conseguinte, mostra-se uma análise na qual foi exibida a seguir. Por conseguinte, mostra-se uma análise na qual foi adotada uma curvatura positiva para superfícies convexas (como a da mencionada Figura 3.3) e também da curvatura negativa para superfícies côncavas.

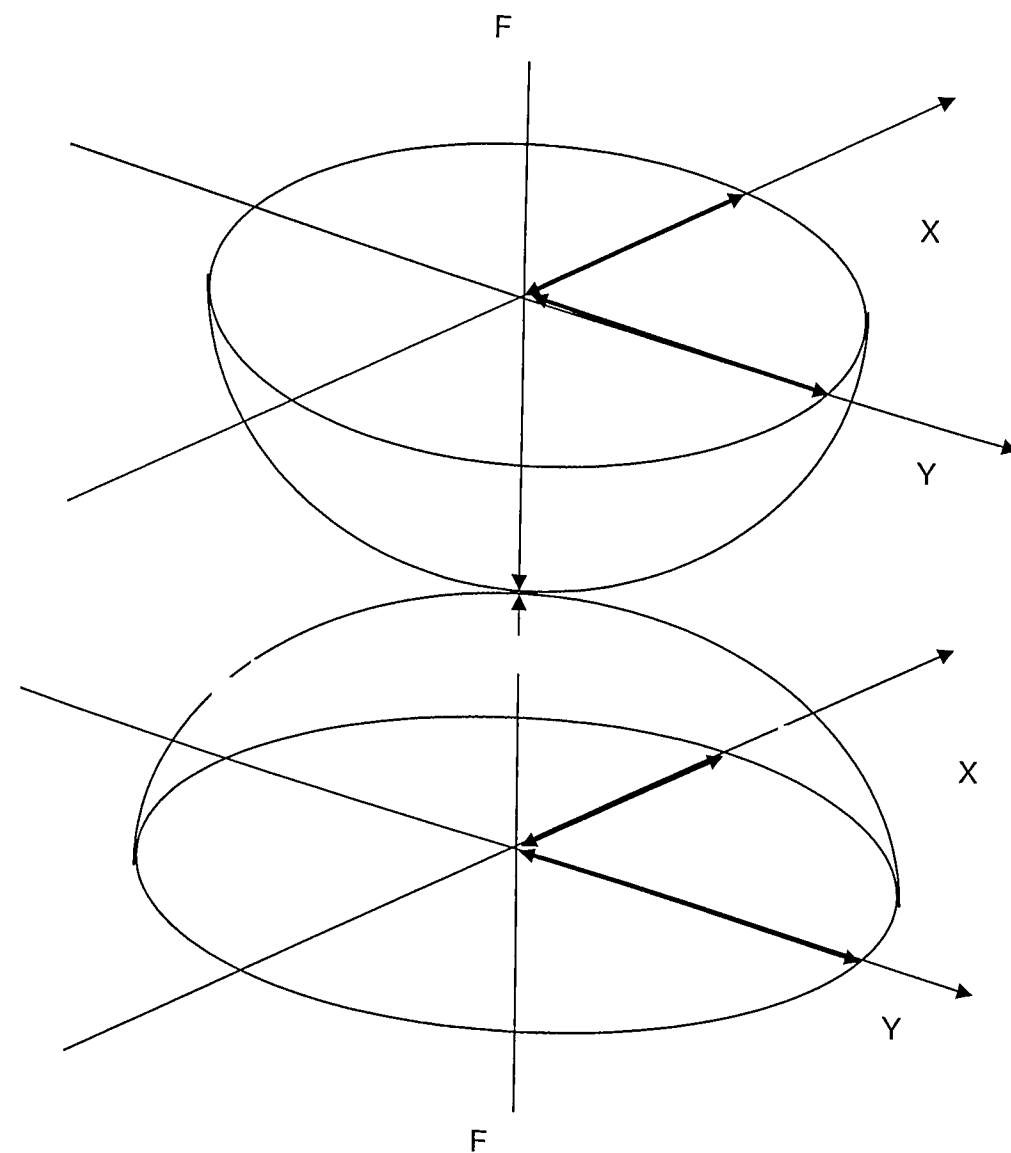


Figura 3.3: geometria do contato elástico sólido pontual

Define-se a soma de curvaturas (HAMROCK, 1981) como:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (3.15)$$

e a diferença das curvaturas como

$$\Gamma = R \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) \quad (3.16)$$

onde,

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{ay}} + \frac{1}{r_{by}} \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{ax}} + \frac{1}{r_{bx}} \quad (3.18)$$

Quando os sólidos da Figura 3.3 têm uma força normal aplicada, três importantes aspectos devem ser analisados,

- A geometria do contato.
- O surgimento de um campo de pressão e
- A deformação dos sólidos.

3.2.1 Geometria dos sólidos elásticos em contato seco

A deformação dos sólidos da Figura 3.3 sob a ação de uma força F , expande o ponto de contato em uma elipse de semi-eixo maior a e semi-eixo menor b . Esta elipsóide mostrada na Figura 3.4 é definida como:

(3.19)

$$k = \frac{a}{b}$$

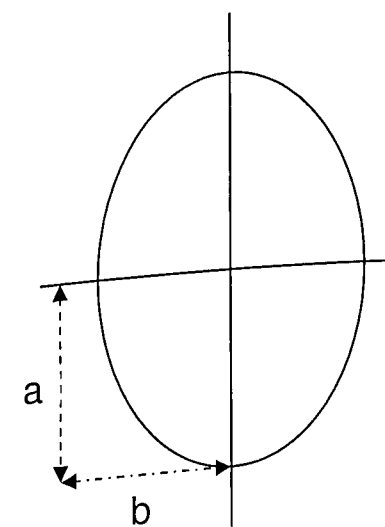


Figura 3.4: Elipse de contato

A determinação da superfície de contato, isto é os parâmetros a e b , pode ser obtida pelas seguintes expressões (Hertz, 1881),

$$\frac{a}{R_x} = \left[\frac{6k^2 \epsilon W \lambda}{\pi(\lambda+1)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.20)$$

$$\frac{b}{R_x} = \left[\frac{6k^2 \epsilon W \lambda}{\pi k(\lambda+1)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.21)$$

onde,

$$w = \frac{F}{E' R_x^2} \quad (3.22)$$

$$\lambda = \frac{R_y}{R_x} \quad (3.23)$$

$$E' = \frac{2}{\frac{1-\nu_a^2}{E_a} + \frac{1-\nu_b^2}{E_b}} \quad (3.24)$$

Onde ν_a e ν_b representam os módulos de Poisson dos materiais e ϵ é a integral elíptica de Legendre de segunda ordem dada por:

$$\epsilon = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (3.25)$$

Observe-se que na equação (3.25) ϵ é função de k , tendo-se portanto que proceder-se a um método iterativo para obtenção do mesmo. Em 1966, Harris demonstrou que os parâmetros elípticos podem ser obtidos pela expressão:

(3.26)

$$J(k) = \left[\frac{2\sigma - \epsilon(1+\Gamma)}{\epsilon(1-\Gamma)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

onde,

(3.27)

$$\Gamma = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

e σ é a integral elíptica de Legendre de primeira ordem dada por:

(3.28)

$$\sigma = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

Hamrock & Anderson (1973) aproveitaram as equações de Harris para obter k iterativamente, com a adoção de:

(3.29)

$$k_{n+1} = J(k_n)$$

Uma vez determinado k , com o auxílio das integrações elípticas (Press et al, 1997), retorna-se às equações (3.16) e (3.17) determinando finalmente os parâmetros da elipse de contato adimensionalizadas pelo raio de curvatura R_x .

3.2.2 Campo de pressão Hertziano

O campo de pressão que surge devido à atuação da carga (w) num contato elíptico seco é denominado de campo Hertziano de pressão, ilustrado na figura 3.5.

Partindo das hipóteses de que: os materiais são homogêneos e a tensão do escoamento não é excedida, não há forças tangenciais entre os sólidos, o contato é limitado a uma pequena área, e os sólidos estão em repouso e equilíbrio, Hertz (1881) obteve uma expressão para o cálculo da pressão em contatos secos elípticos:

$$p = p_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} \quad (3.30)$$

Se a pressão for integrada sobre a área de contato,

$$p_{\max} = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (3.31)$$

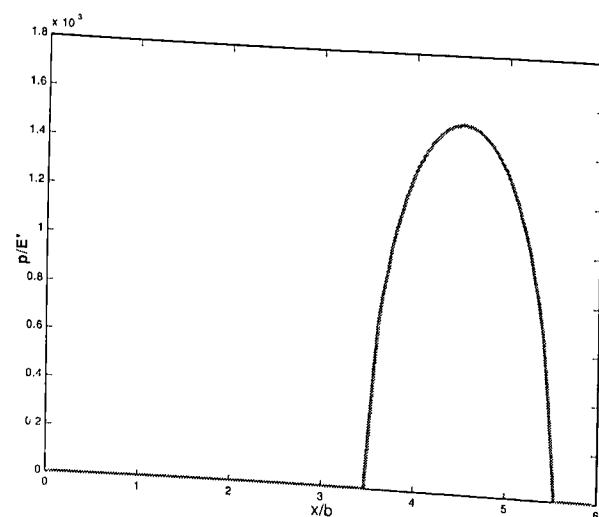


Figura 3.5: Perfil Hertziano da Pressão.

3.2.3 Deformação elástica do campo de pressão em meio infinito

Na prática a área sobre a qual ocorre deformação elástica dos corpos sob a ação de uma carga (w) é muito pequena quando comparada com o raio dos corpos que se tocam.

Seja (x, y) um ponto genérico de um domínio infinito Ω onde se deseja calcular a deformação elástica provocada por um campo de pressão que atua no domínio Ω .

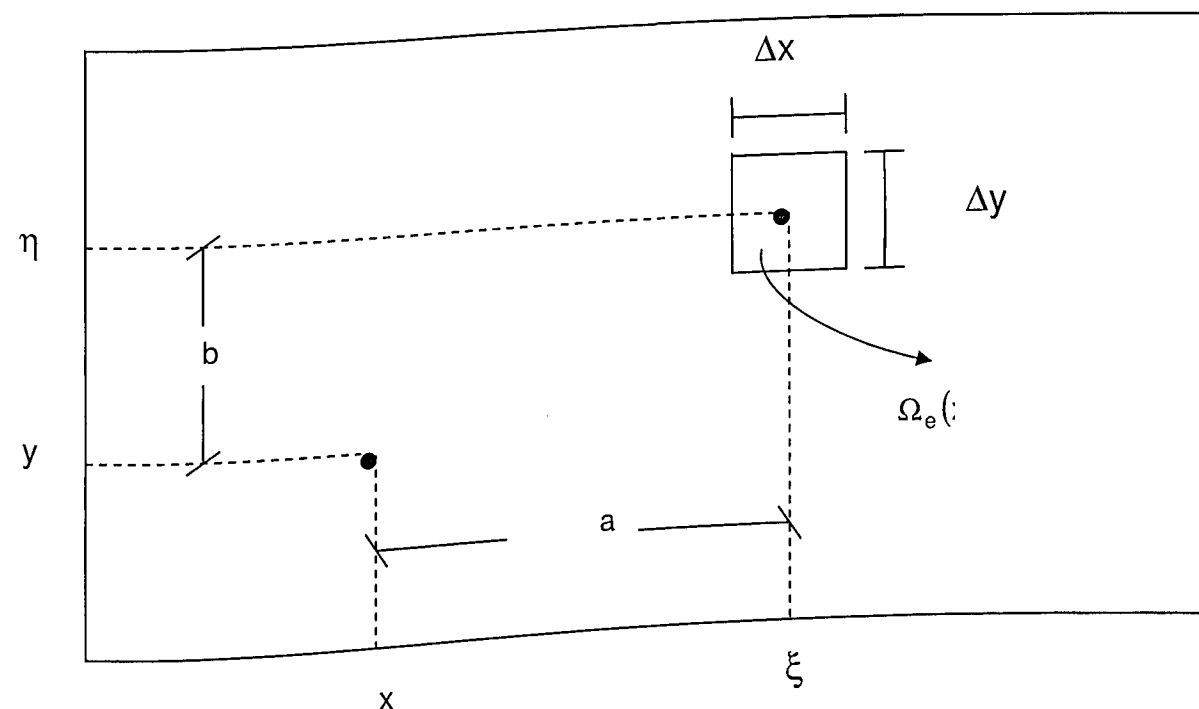


Figura 3.6: deformação elástica do campo de pressão em meio infinito sujeito a uma pressão uniforme sobre uma pequena área retangular.

Segundo Timoshenco e Goodier, 1951, uma força elementar situada em (ξ, η) , isto é $P(\xi, \eta)d\xi d\eta$, provoca um deslocamento em (x, y) dado por:

$$d\delta(x, y; \xi, \eta) = \frac{2P(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\pi E' \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (3.32)$$

Para obter-se a deformação total, abrangendo todo o campo de pressão, basta integrar-se (3.32), isto é,

$$\delta(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{P(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (3.33)$$

onde P é a pressão em cada ponto e a área definida pelas integrais inclui a região inteira de geração de pressão.

3.3 Equação de Reynolds

O domínio bidimensional utilizado está esquematizado na Figura 3.7 que representa o retângulo de dimensões $Bb \times Aa$ (metros) onde está inserida a elipse hertziana de contato entre os corpos, que auxilia a delimitar a região onde deve ser estudado o comportamento da pressão. Experimentos numéricos de diversos autores aconselham que esta região tenha aproximadamente três a cinco vezes a dimensão da elipse de contato.

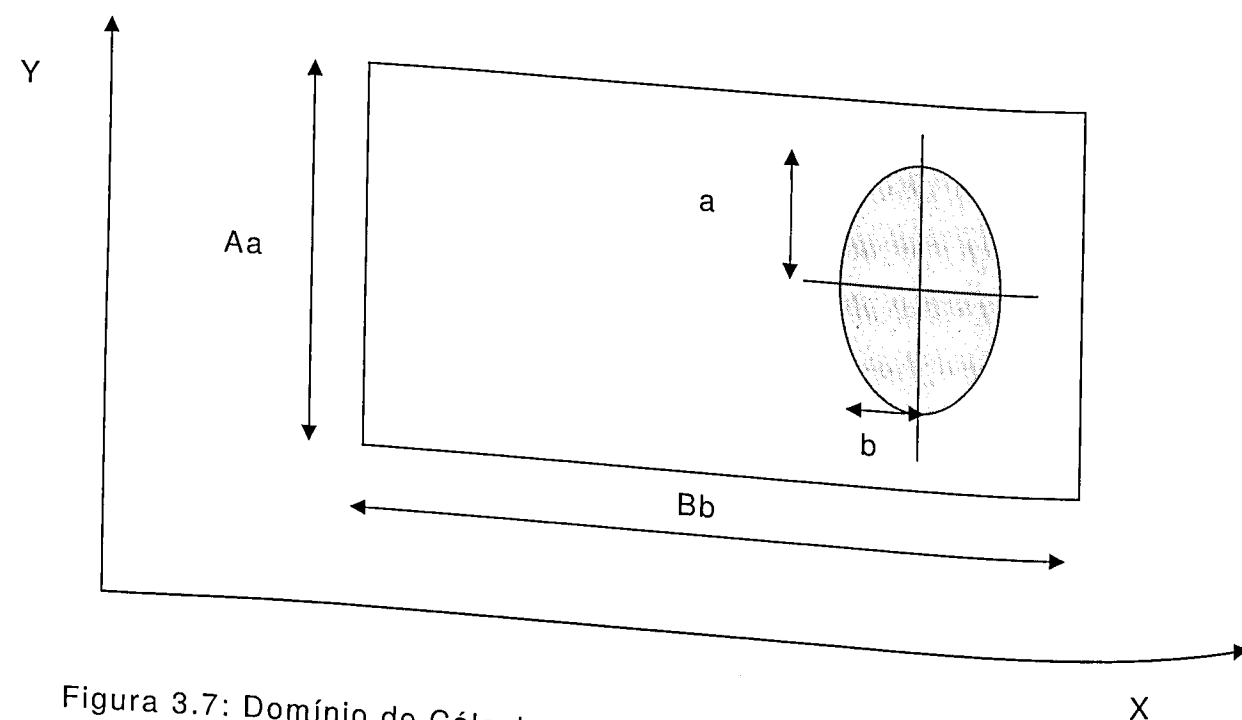


Figura 3.7: Domínio de Cálculo, geometria da região de contato.

A pressão hidrodinâmica entre dois contatos é governada pela equação clássica de Reynolds (HAMROCK & DOWSON, 1981):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(u_a + u_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho(v_a + v_b)h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (3.34)$$

onde,

- p é o campo de pressão que surge entre os contatos lubrificados
- $h(x,y)$ é a separação entre as superfícies

- ρ a densidade
- η a viscosidade
- u_a e u_b , v_a e v_b são as velocidades das superfícies deslizantes.

Usualmente $u_a = u$ e $u_b = v_a = v_b = 0$.

A não-linearidade da equação de Reynolds surge devido à dependência da viscosidade η e da densidade ρ com a pressão.

3.4 Relação entre a separação das superfícies (h) e a pressão

Para pressões pequenas, a separação das superfícies pode ser considerada rígida, ou seja, depende somente da geometria do contato o que está ilustrado na Figura 3.8, isto é, ignora-se o efeito da pressão na variação da altura de lubrificante:

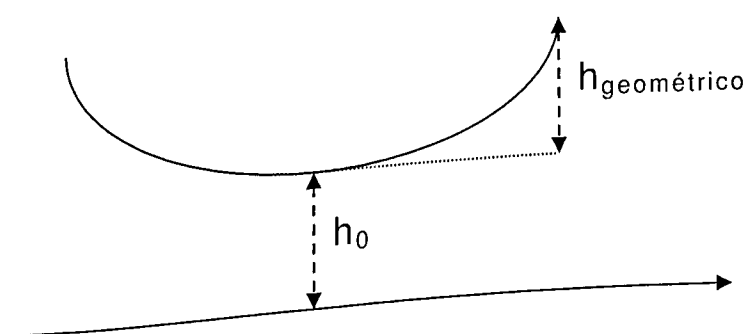


Figura 3.8: altura do lubrificante para baixas pressões

E com isso esta altura pode ser aproximada por um polinômio de Segunda ordem dado por:

$$h(x,y) = h_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2R_x} + \frac{(y-y_0)^2}{2R_y} \quad (3.35)$$

onde, h_0 é a espessura do filme no centro, considerada como altura mínima da camada de lubrificante devido à rugosidade das superfícies dos materiais.

A segunda parcela representa a separação geométrica (S) dos sólidos em contato cuja formulação é detalhada a seguir. Considere-se a separação geométrica entre os dois sólidos elipsoidais da Figura 3.9,

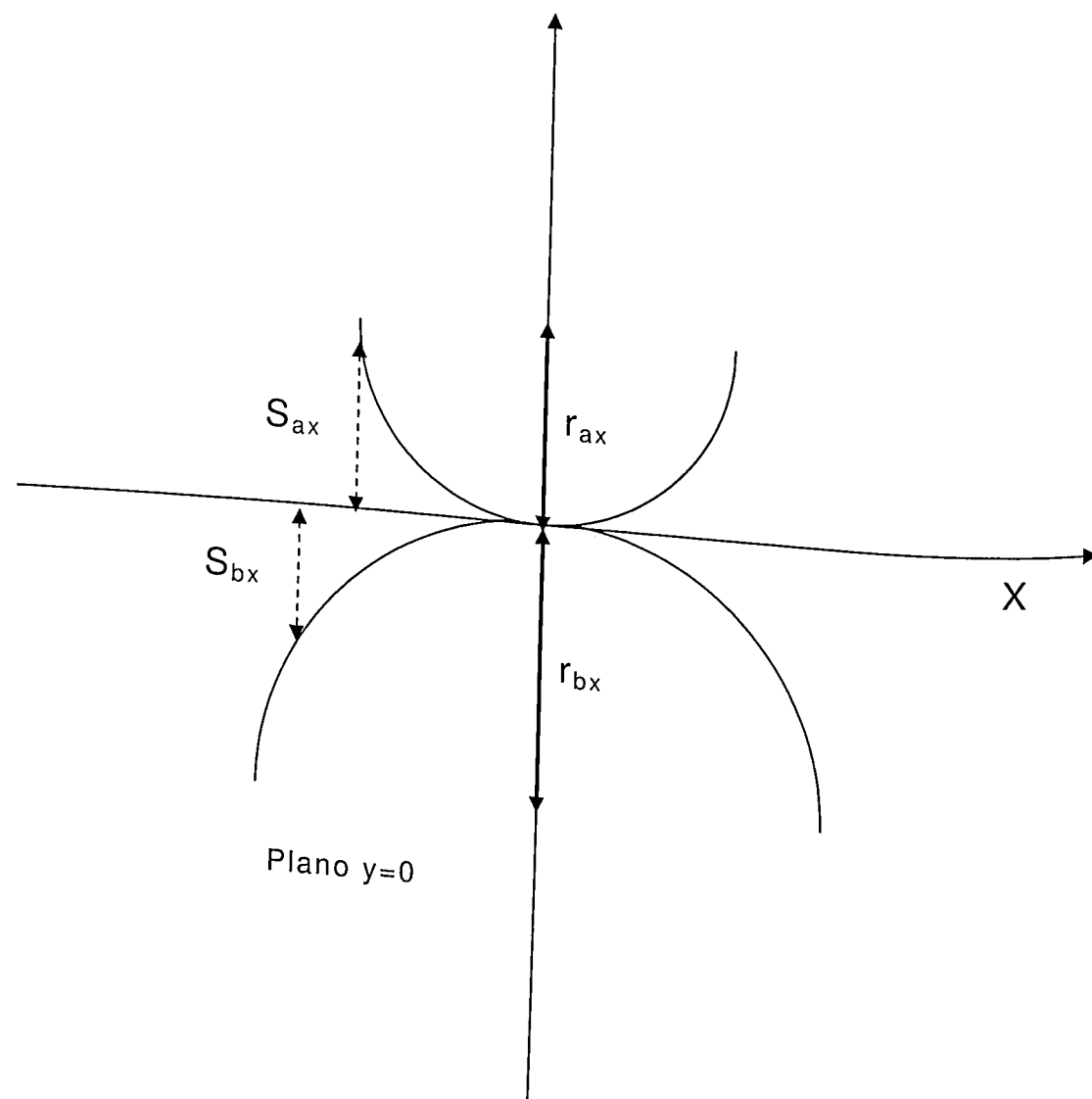


Figura 3.9: separação geométrica de dois sólidos elipsoidais

tal separação geométrica pode ser considerada como a soma ,

$$(S_{ax} + S_{bx})$$

(3.36)

ou, de modo equivalente, pode-se considerar a separação entre um simples sólido elipsoidal e um plano, como ilustrado na Figura 3.10,

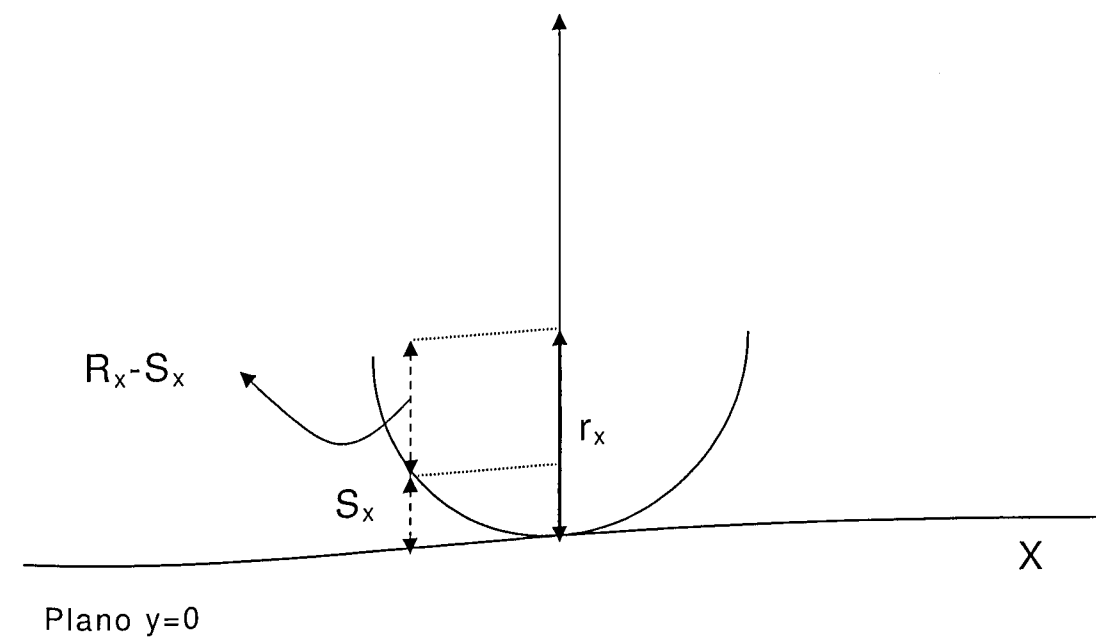


Figura 3.10: separação geométrica entre uma elipse e um plano

Com esta simplificação, pode-se formular a separação em função da posição,

(3.37)

$$r_{ax}^2 = x^2 + (r_{ax} - S_{ax})^2$$

ou

(3.38)

$$x^2 = S_{ax} (2r_{ax} - S_{ax})^2$$

levando-se em conta que $2r_{ax} \gg S_{ax}$, na equação (3.38) tem-se,

(3.39)

$$S_{ax} \cong \frac{x^2}{2r_{ax}}$$

Esta é a conhecida aproximação parabólica para a seção circular de um sólido e é válida para quaisquer raios de curvatura, mesmo que de dimensões extremamente pequenas.

Procedendo-se a formulações análogas para S_{ay} , S_{bx} e S_{by} chega-se à expressão da separação geométrica total entre dois sólidos elipsoidais,

$$S = \frac{x^2}{2r_x} + \frac{y^2}{2r_y} \quad (3.40)$$

No entanto, a deformação do sólido elipsoidal que representa o contato elasto-hidrodinâmico não pode ser ignorada sistematicamente, pois sob condições de Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica as duas superfícies estão separadas por um filme de fluido. A distribuição normal da pressão na vizinhança da zona de contato pode produzir uma deformação elástica local significativa quando comparada com a espessura do filme lubrificante. Assim sendo, o cálculo de $h(p)$ deverá levar em conta não só a geometria como também a deformação sofrida pelo corpo. Tem-se então a altura da película de lubrificante como sendo,

$$h(x, y) = h_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2R_x} + \frac{(y - y_0)^2}{2R_y} + \delta(x, y) \quad (3.41)$$

onde a última parcela é devido à deformação no sólido provocada pela ação da carga (equação (3.33)) e está ilustrada na Figura 3.11,

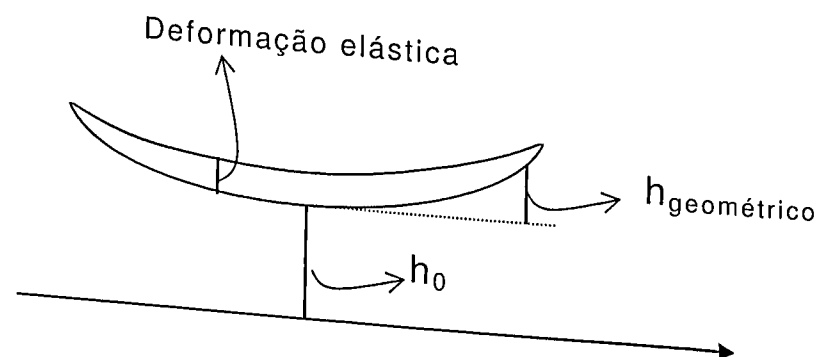


Figura 3.11: altura da camada de lubrificante num contato de EHD

3.5 Efeito da pressão na viscosidade

A relação da viscosidade com a pressão representa o maior problema de não-linearidade na equação de Reynolds. Barus (1893) propôs a seguinte formula para a dependência isotérmica entre viscosidade e pressão,

$$\eta = \eta_0 \exp(\alpha p) \quad (3.42)$$

onde, η_0 é a viscosidade à pressão atmosférica e α representa o coeficiente de pressão-viscosidade do lubrificante.

Este coeficiente α caracteriza o líquido considerado e depende somente da temperatura do mesmo e não da pressão. Apesar da equação (3.42) ser muito utilizada, somente representa o comportamento de lubrificantes em determinadas faixas de pressões, o que não acontece na realidade. A relação proposta por Roelands em 1966, para condições isotérmicas demonstrou ser mais eficiente,

$$\log \eta + 1.200 = (\log \eta_0 + 1.200) \left(1 + \frac{p}{2000}\right)^Z \quad (3.43)$$

onde,

η_0 é a viscosidade do lubrificante a pressão atmosférica;

Z é uma constante adimensional de indexação da viscosidade com a pressão e

p a pressão, kgf/cm^2 .

Aplicando-se antilogaritmo e rearranjando-se a equação acima:

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{p}{2000}\right)^Z \times 10^{1.2 \left(1 + \frac{p}{2000}\right)^Z - 1} \quad (3.44)$$

Observe-se que pelo caráter exponencial do cálculo da viscosidade, esta é fortemente influenciada com a variação da pressão e, mesmo que a altura de separação entre as superfícies e a densidade do lubrificante

permaneçam constantes em função da pressão, a equação de Reynolds continua altamente não-linear.

3.6 Dependência da densidade com a pressão

A densidade também sofre variação em função da pressão mormente que esta variação não seja tão importante quando comparada com a variação que a pressão induz à viscosidade. Para as elevadas pressões que ocorrem nos problemas elasto-hidrodinâmicos, o liquido não mais pode ser considerado incompressível, levando à necessidade de uma formulação da densidade em função da pressão,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\gamma_1 p}{1 + \gamma_2 p} \quad (3.45)$$

onde,

ρ_0 é a densidade do lubrificante a pressão atmosférica, e as constantes γ_1 e γ_2 são inerentes ao lubrificante utilizado.

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE EHD

4.1 Equações dimensionais

No capítulo anterior foram vistas as equações que regem a Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica assim como seu embasamento teórico, que resumidamente são: equação de Reynolds (4.1), efeito da pressão na viscosidade (4.2), dependência da densidade com a pressão (4.3) e relação entre a separação das superfícies (h) e a pressão (4.4), a saber:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{p}{2000} \right)^Z \times 10^{1.2 \left(1 + \frac{p}{2000} \right)^Z - 1} \quad (4.2)$$

onde,

P representa o campo de pressão [kgf/cm²]
 Z é uma constante adimensional de indexação da pressão com a viscosidade

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\gamma_1 P}{1 + \gamma_2 P} \quad (4.3)$$

$$h(x, y) = h_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2R_x} + \frac{(y - y_0)^2}{2R_y} + \delta(x, y) \quad (4.4)$$

Considerando a abordagem da constante adimensional de indexação, vejamos agora as diferentes formas possíveis de adimensionalização.

4.2 Adimensionalização

Dentre as diferentes formas de adimensionalização possíveis, adotou-se o esquematizado na tabela 4.1 abaixo,

| | |
|------------------------------------|------------------------------|
| $X = \frac{x}{b}$ | $Y = \frac{y}{a}$ |
| $K = \frac{a}{b}$ | $W = \frac{F}{E'R_x^2}$ |
| $H = \frac{h}{R_x}$ | $P = \frac{p}{E'}$ |
| $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}$ | $U = \frac{\eta_0 u}{E'R_x}$ |
| $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ | $\lambda = \frac{R_y}{R_x}$ |

Tabela 4.1: Constantes de adimensionalização:

Utilizando-se este esquema tem-se,

equação de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \left(\frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial X} \quad (4.5)$$

efeito da pressão na viscosidade:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0} \right) \left[1 - \left(\frac{1+p}{c} \right)^2 \right] \quad (4.6)$$

onde,

η_0 representa a viscosidade do lubrificante à pressão atmosférica,
 $c = 1.96 \times 10^8 \text{ N/m}^2$,

$\eta_\infty = 6.31 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$ e,

dependência da densidade com a pressão

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\gamma_1 P E'}{1 + \gamma_2 P E'} \quad (4.7)$$

relação entre a separação das superfícies (h) e a pressão

$$H = \frac{h}{R_x} = H_0 + \left(\frac{b}{R_x} \right)^2 \frac{(x - x_0)^2}{2} + \left(\frac{b}{R_x} \right)^2 \frac{k^2 (y - y_0)^2}{2} + \frac{\delta(x, y)}{R_x} \quad (4.8)$$

4.3 Discretização da equação de Reynolds

Antes de se passar à discretização da equação diferencial (4.9), serão desenvolvidas algumas considerações genéricas para auxiliar o entendimento posterior do problema.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \left(\frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial X} \quad (4.9)$$

Seja considerada uma função genérica $f(x)$ que passa por 3 pontos:

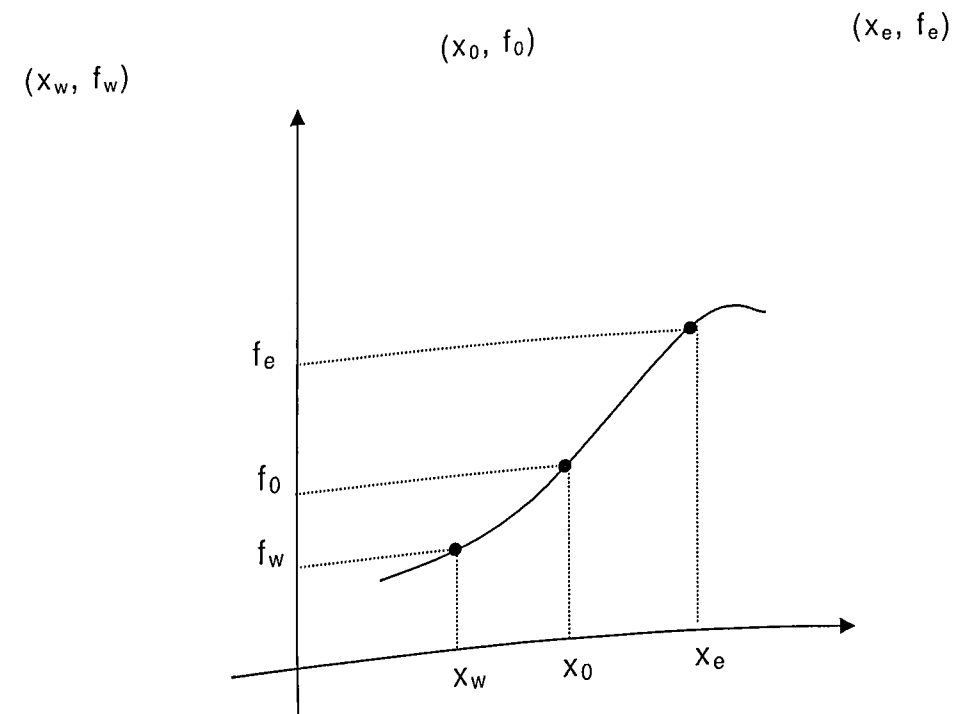


Figura 4.1: função genérica que passa por 3 pontos

onde os índices (w, 0, e) são referências a oeste, centro e leste respectivamente. Aproximando-se esta função por um polinômio do 2º grau tem-se, segundo Lagrange:

$$f(x) \cong \frac{(x-x_0)(x-x_e)}{(x_w-x_0)(x_w-x_e)} f_w + \frac{(x-x_w)(x-x_e)}{(x_0-x_w)(x_0-x_e)} f_0 + \frac{(x-x_w)(x-x_0)}{(x_e-x_w)(x_e-x_0)} f_e \quad (4.10)$$

Utilizando-se desta aproximação pode-se calcular as derivadas de $f(x)$ em qualquer ponto do intervalo de interpolação $x_w \leq x \leq x_e$, ou seja,

$$f'(x) \cong \frac{(x-x_0)+(x-x_e)}{(x_w-x_0)(x_w-x_e)} f_w + \frac{(x-x_w)+(x-x_e)}{(x_0-x_w)(x_0-x_e)} f_0 + \frac{(x-x_w)+(x-x_0)}{(x_e-x_w)(x_e-x_0)} f_e \quad (4.11)$$

São pontos de interesse específico em diferenças finitas os valores de $f'(x)$ nos pontos nodais x_w, x_0, x_e , isto é,

$$f'(x_w) \cong \frac{(x_w-x_0)+(x_w-x_e)}{(x_w-x_0)(x_w-x_e)} f_w + \frac{(x_w-x_e)}{(x_0-x_w)(x_0-x_e)} f_0 + \frac{(x_w-x_0)}{(x_e-x_w)(x_e-x_0)} f_e \quad (4.12)$$

$$f'(x_0) \cong \frac{(x_0-x_e)}{(x_w-x_0)(x_w-x_e)} f_w + \frac{(x_0-x_w)+(x_0-x_e)}{(x_0-x_w)(x_0-x_e)} f_0 + \frac{(x_0-x_w)}{(x_e-x_w)(x_e-x_0)} f_e$$

$$f'(x_e) \cong \frac{(x_e-x_0)}{(x_w-x_0)(x_w-x_e)} f_w + \frac{(x_e-x_w)}{(x_0-x_w)(x_0-x_e)} f_0 + \frac{(x_e-x_w)+(x_e-x_0)}{(x_e-x_w)(x_e-x_0)} f_e$$

E os valores nodais das segundas derivadas $f''(x_w) = f''(x_0) = f''(x_e)$

$$f''(x) \cong \frac{2}{(x_w-x_0)(x_w-x_e)} f_w + \frac{2}{(x_0-x_w)(x_0-x_e)} f_0 + \frac{2}{(x_e-x_w)(x_e-x_0)} f_e \quad (4.13)$$

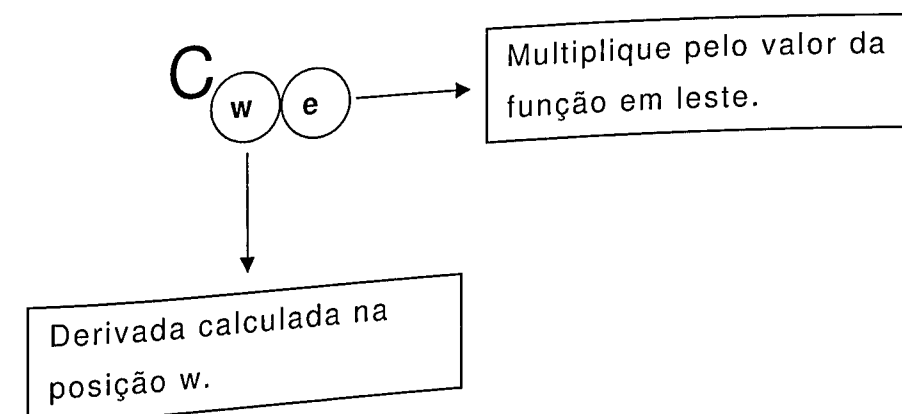
Visando facilitar a notação, as equações (4.12) podem ser escritas como,

$$f'(x_w) \cong C_{ww} f_w + C_{w0} f_0 + C_{we} f_e \quad (4.14 a)$$

$$f'(x_0) \cong C_{0w} f_w + C_{00} f_0 + C_{0e} f_e \quad (4.14 b)$$

$$f'(x_e) \cong C_{ew} f_w + C_{e0} f_0 + C_{ee} f_e \quad (4.14 c)$$

Onde o primeiro índice indica o nó onde se está calculando a derivada e o segundo refere-se a qual valor nodal da função o coeficiente deve ser multiplicado. Por exemplo,



comparando-se (4.12) com (4.14) tem-se:

$$C_{ww} = \frac{(x_w-x_0)+(x_w-x_e)}{(x_w-x_0)(x_w-x_e)} \quad (4.15)$$

$$C_{w0} = \frac{(x_w-x_e)}{(x_0-x_w)(x_0-x_e)}$$

e assim sucessivamente até,

$$C_{ee} = \frac{(x_e-x_w)+(x_e-x_0)}{(x_e-x_w)(x_e-x_0)}$$

De forma análoga se expressa sinteticamente (4.13) como:

$$f''(x) \cong CC_w f_w + CC_0 f_0 + CC_e f_e \quad (4.16)$$

onde,

$$CC_w = \frac{2}{(x_w - x_0)(x_w - x_e)} \quad (4.17)$$

$$CC_0 = \frac{2}{(x_0 - x_w)(x_0 - x_e)}$$

$$CC_e = \frac{2}{(x_e - x_0)(x_e - x_w)}$$

Note-se que agora não há necessidade do segundo índice, posto que as derivadas segundas são iguais para todos os nós, por outro lado, usamos um duplo C para indicar que o coeficiente refere-se às segundas derivadas.

Um caso particular de interesse é quando os pontos x_w, x_0, x_e , estão equi-espçados, ou seja,

$$\Delta x = x_0 - x_w = x_e - x_0$$

neste caso, os coeficientes de discretização (4.15) reduzem-se a:

$$\begin{aligned} C_{ww} &= -\frac{3}{2\Delta x} & C_{0w} &= -\frac{1}{2\Delta x} & C_{ew} &= \frac{1}{2\Delta x} \\ C_{w0} &= \frac{2}{\Delta x} & C_{00} &= 0 & C_{e0} &= -\frac{2}{\Delta x} \\ C_{we} &= -\frac{1}{2\Delta x} & C_{0e} &= \frac{1}{2\Delta x} & C_{ee} &= \frac{3}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (4.18)$$

e os coeficientes de (4.17) ficam,

$$CC_e = \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

$$CC_w = \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

$$CC_0 = -\frac{2}{(\Delta x)^2}$$

Substituindo-se (4.18) em (4.14) resulta,

$$(4.19a)$$

$$f'(x_w) = -\frac{3f_w - 4f_0 + f_e}{2\Delta x}$$

$$(4.19b)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_e - f_w}{2\Delta x}$$

$$(4.19c)$$

$$f'(x_e) = \frac{f_w - 4f_0 + 3f_e}{2\Delta x}$$

$$(4.19d)$$

$$f''(x_w) = f''(x_0) = f''(x_e) \cong \frac{f_w - 2f_0 + f_e}{(\Delta x)^2}$$

que são as bem conhecidas fórmulas de diferenças finitas aplicadas à malha regular. Seja então considerado agora um operador diferencial $A(\phi)$ definido por:

$$(4.20)$$

$$A(\phi; r) = \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

Note que o operador A é aplicado sobre a função ϕ e que r é uma função paramétrica dada. Tem-se como objetivo agora expressar a equação (4.20) em diferenças finitas centrais. Inicialmente isto será feito para uma malha regular e a seguir estendida para uma malha genérica. Nesse sentido, existem duas abordagens ao se defrontar com a discretização de (4.20): a primeira consiste em se aplicar as fórmulas de diferenças finitas diretamente sobre a equação (4.20) e a outra em se proceder à diferenciação indicada antes de se proceder à discretização.

Abordagem 1:

$$A(\phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad r > 0$$

aplicando-se (4.19b) resulta:

$$A(\phi) = \frac{\left[\left(r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right]}{2\Delta X} \quad (4.21)$$

aplicando-se (4.19c) e (4.19a) vem:

$$A(\phi) = r_e \frac{\phi_w - 4\phi_0 + 3\phi_e}{4(\Delta X)^2} + r_w \frac{3\phi_w - 4\phi_0 + \phi_e}{4(\Delta X)^2} \quad (4.22)$$

ou

$$A(\phi) = \phi_w \left(\frac{r_e + 3r_w}{4(\Delta X)^2} \right) + \phi_e \left(\frac{r_w + 3r_e}{4(\Delta X)^2} \right) - \phi_0 \left(\frac{r_e + r_w}{(\Delta X)^2} \right) \quad (4.23)$$

ou

$$A(\phi) = \phi_w a_w + \phi_e a_e - \phi_0 a_0$$

onde,

$$a_w = \left(\frac{r_e + 3r_w}{4(\Delta X)^2} \right) > 0 \quad (\text{pois } r > 0) \quad (4.24)$$

$$a_e = \left(\frac{r_w + 3r_e}{4(\Delta X)^2} \right) > 0$$

$$a_0 = a_e + a_w > 0$$

Abordagem 2:

$$A(\phi) = \frac{\partial}{\partial X} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) = r \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial r}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial X}$$

aplicando-se (4.19d) e (4.19b) resulta:

$$(4.25)$$

$$A(\phi) = r_0 \frac{\phi_w - 2\phi_0 + \phi_e}{(\Delta X)^2} + \frac{r_e - r_w}{2\Delta X} \frac{\phi_e - \phi_w}{2\Delta X}$$

$$(4.26)$$

$$A(\phi) = \phi_w a_w + \phi_e a_e - \phi_0 a_0$$

onde,

$$(4.27)$$

$$a_w = \frac{r_0}{(\Delta X)^2} - \frac{r_e - r_w}{4(\Delta X)^2}$$

$$a_e = \frac{r_0}{(\Delta X)^2} - \frac{r_e - r_w}{4(\Delta X)^2}$$

$$a_0 = \frac{2r_0}{(\Delta X)^2} > 0$$

Da mesma forma que (4.24) tem-se agora $a_0 = a_e + a_w > 0$, porém não se garante mais que $a_w > 0$ e que $a_e > 0$.

Segundo Patankar (1980), a discretização (4.24) é intrinsecamente estável enquanto que não há garantias sobre a abordagem fornecida por (4.27).

O mesmo procedimento pode ser aplicado a uma malha irregular, o que será feito considerando-se somente a abordagem 1 por ser mais estável. neste caso, aplicando-se (4.14b) tem-se,

$$(4.28)$$

$$A(\phi) = \frac{\partial}{\partial X} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) = C_{0w} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w + C_{00} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_0 + C_{0e} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e$$

desdobrando-se $\frac{\partial \phi}{\partial X}$ segundo (4.14) resulta,

$$A(\phi) = C_{0w}r_w(C_{ww}\phi_w + C_{w0}\phi_0 + C_{we}\phi_e) + C_{00}r_0(C_{0w}\phi_w + C_{00}\phi_0 + C_{0e}\phi_e) + C_{0e}r_e(C_{ew}\phi_w + C_{e0}\phi_0 + C_{ee}\phi_e) \quad (4.29)$$

ou

$$A(\phi) = \phi_w a_w + \phi_e a_e + \phi_0 a_0 \quad (4.30)$$

onde,

$$a_w = C_{0w}r_w C_{ww} + C_{00}r_0 C_{0w} + C_{0e}r_e C_{ew} \quad (4.31)$$

$$a_e = C_{0w}r_w C_{we} + C_{00}r_0 C_{0e} + C_{0e}r_e C_{ee}$$

$$a_0 = C_{0w}r_w C_{w0} + C_{00}r_0 C_{00} + C_{0e}r_e C_{e0}$$

Considere-se agora a equação alvo, a equação (4.9). Antes de se delinear a discretização, procede-se à seguinte mudança de variável dependente:

$$\phi = h^\gamma P \quad 0 \leq \gamma \leq 2 \quad (4.32)$$

A justificativa para se adotar a transformação dada por (4.32) é que, em problemas de contatos lubrificados, a pressão atinge picos pronunciados justamente onde h é pequeno. Ao se multiplicar P por potências de h , há uma tendência de se obter um campo de ϕ mais suave, portanto, mais tratável por diferenças finitas.

Se $\gamma=0$ ter-se-á $\phi=P$ e não haverá transformação alguma. Se γ é muito elevado, por exemplo $\phi=h^3P$, haverá um efeito muito pronunciado onde h é pequeno e perder-se-á o efeito suavizador, daí a razão em limitar-se γ a valores inferiores a três.

Estas idéias estão ilustradas adiante (Figura 4.2).

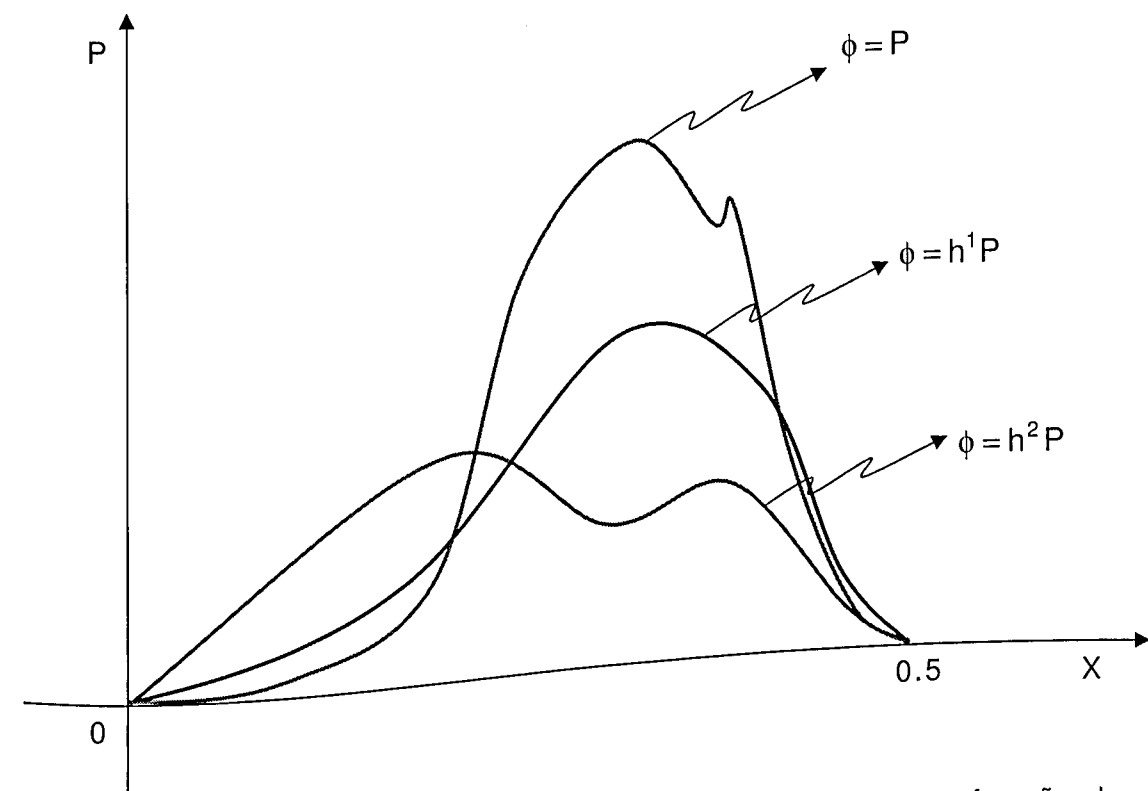


Figura 4.2: efeito suavizador para o campo de pressão em função dos diferentes valores de γ

Da equação (4.32) tem-se

$$P = \phi h^{-\gamma}$$

$$P_x = \frac{\partial P}{\partial X} = \phi_x h^{-\gamma} - \gamma h^{-\gamma-1} h_x \phi \quad (4.33a)$$

$$h^3 P_x = \phi_x h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_x \phi$$

analogamente, (4.33b)

$$h^3 P_y = \phi_y h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_y \phi$$

Substituindo-se (4.33) em (4.9) resulta,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\rho}{\eta} [\phi_x h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_x \phi] \right\} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\rho}{\eta} [\phi_y h^{3-\gamma} - \gamma h^{2-\gamma} h_y \phi] \right\} = 12U \frac{b}{R_x} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (4.34)$$

definindo-se

$$r = \frac{\rho}{\eta} \quad (4.35)$$

tem-se para a equação (4.34),

$$\frac{\partial}{\partial x} [r h^{3-\gamma} \phi_x] + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} [r h^{3-\gamma} \phi_y] - \gamma \frac{\partial}{\partial x} [r h^{2-\gamma} h_x \phi] - \frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} [r h^{2-\gamma} h_y \phi] = 12U \left(\frac{b}{R_x} \right) \quad (4.36)$$

Desenvolvendo a primeira parcela de (4.36) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} [r h^{3-\gamma} \phi_x] = h^{3-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r \phi_x) + (r \phi_x) (3-\gamma) h^{2-\gamma} h_x \quad (4.37)$$

desenvolvendo a terceira parcela resulta,

$$\frac{\partial}{\partial x} [r h^{2-\gamma} h_x \phi] = \phi \frac{\partial}{\partial x} [r h^{2-\gamma} h_x] + r h^{2-\gamma} h_x \phi_x = \quad (4.38)$$

$$\phi \left[(2-\gamma) h^{1-\gamma} r h_x^2 + h^{2-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r h_x) \right] + h^{2-\gamma} r h_x \phi_x$$

Substituindo-se (4.37) e (4.38) assim como as fórmulas análogas na direção y, na expressão (4.36) tem-se:

$$\begin{aligned} & h^{3-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r \phi_x) + \frac{h^{3-\gamma}}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} (r \phi_y) + (r \phi_x) (3-\gamma) h^{2-\gamma} h_x + \frac{1}{k^2} (r \phi_y) (3-\gamma) h^{2-\gamma} h_y \\ & - \gamma \left\{ \phi \left[(2-\gamma) h^{1-\gamma} r h_x^2 + h^{2-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r h_x) \right] + h^{2-\gamma} r h_x \phi_x \right\} \\ & - \frac{\gamma}{k^2} \left\{ \phi \left[(2-\gamma) h^{1-\gamma} r h_y^2 + h^{2-\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (r h_y) \right] + h^{2-\gamma} r h_y \phi_y \right\} = 12U \frac{b}{R_x} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Reagrupando os termos em $r \phi_x$, $r \phi_y$ e ϕ vem,

$$\begin{aligned} & h^{3-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r \phi_x) + \frac{h^{3-\gamma}}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} (r \phi_y) + (r \phi_x) (3-2\gamma) h^{2-\gamma} h_x + \frac{1}{k^2} (r \phi_y) (3-2\gamma) h^{2-\gamma} h_y \\ & - \gamma \phi \left\{ (2-\gamma) h^{1-\gamma} r h_x^2 + h^{2-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (r h_x) + \frac{(2-\gamma)}{k^2} h^{1-\gamma} r h_y^2 + \frac{h^{2-\gamma}}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} (r h_y) \right\} = 12U \frac{b}{R_x} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.40)$$

dividindo-se (4.40) por $h^{3-\gamma}$ resulta,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (r \phi_x) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} (r \phi_y) + r (3-2\gamma) \left[\phi_x \frac{h_x}{h} + \frac{\phi_y}{k^2} \frac{h_y}{h} \right] \\ & - \gamma \phi \left\{ (2-\gamma) r \left[\left(\frac{h_x}{h} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{h_y}{h} \right)^2 \right] + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (r h_x) + \frac{1}{h k^2} \frac{\partial}{\partial y} (r h_y) \right\} = \frac{12U}{h^{3-\gamma}} \left(\frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.41)$$

a equação (4.41) é a equação básica que servirá à discretização. Note que quando $\gamma = 3/2$ as parcelas em ϕ_x e ϕ_y se anulam e a equação (4.41) simplifica-se. Este valor é o utilizado por Dowson e Higginson, 1959, em seu trabalho.

Escrevendo (4.41) de forma sintética teremos,

$$\frac{\partial}{\partial x} (r \phi_x) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} (r \phi_y) + a \phi_x + \frac{b}{k^2} \phi_y - c \phi = \frac{12U}{h^{3-\gamma}} \left(\frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (4.42)$$

onde,

$$a = r(3 - 2\gamma) \frac{h_x}{h}$$

$$b = r(3 - 2\gamma) \frac{h_y}{h}$$

$$c = \gamma \left\{ (2 - \gamma) r \left[\left(\frac{h_x}{h} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{h_y}{h} \right)^2 \right] + \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial X} (r h_x) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} (r h_y) \right] \right\}$$

Para discretizar (4.42) considere uma célula de uma malha de diferenças finitas (regular ou não) ilustrada na Figura 4.3.

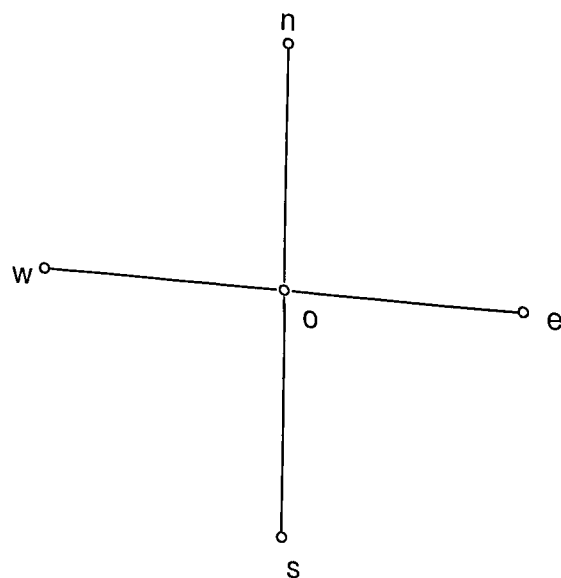


Figura 4.3: célula da malha regular

Aplicando-se (4.30) às duas primeiras parcelas de (4.42), onde um superescrito indica o eixo coordenado, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial X} (r \phi_x) = \phi_w a_w^x + \phi_e a_e^x + \phi_o a_o^x$$

(4.43)

$$\frac{\partial}{\partial Y} (r \phi_y) = \phi_n a_n^y + \phi_s a_s^y + \phi_o a_o^y$$

onde a_w^x, a_e^x e a_o^x são dados por (4.31) e a_n^y, a_s^y e a_o^y também são calculados por (4.31) porém substituindo as coordenadas x por y no cálculo dos coeficientes expressos na equação (4.15).

Aplicando-se (4.14) às parcelas ϕ_x e ϕ_y vem,

(4.44)

$$\phi_x = \phi_w C_{ow}^x + \phi_e C_{oe}^x + \phi_o C_{oo}^x$$

$$\phi_y = \phi_s C_{os}^y + \phi_n C_{on}^y + \phi_o C_{oo}^y$$

Substituindo-se (4.43) e (4.44) em (4.42) resulta,

(4.45)

$$a_o \phi_o + a_n \phi_n + a_s \phi_s + a_w \phi_w + a_e \phi_e = f$$

onde

$$a_o = a_o^x + \frac{a_o^y}{k^2} + a C_{oo}^x + \frac{b C_{oo}^y}{k^2} - C$$

$$a_w = a_w^x + a C_{ow}^x$$

$$a_e = a_e^x + a C_{oe}^x$$

$$a_s = \frac{a_s^y + b C_{os}^y}{k^2}$$

$$a_n = \frac{a_n^y + b C_{on}^y}{k^2}$$

Um dos complicadores na busca de uma solução numérica da equação (4.9) é o termo ρ/η dependente da pressão, o que torna o problema não-linear. Uma das maneiras de se circunscrever este problema é utilizar a chamada pressão reduzida que consiste em uma mudança na variável

dependente P para a variável q (pressão reduzida) segundo a seguinte transformação:

$$q(P) = \int_0^P \frac{\rho(\xi)}{\eta(\xi)} d\xi \quad (4.46)$$

Como $\rho = \rho(P)$ e $\eta = \eta(P)$ dependem do modelo reológico adotado (descritos na seção 4.5) e, em geral, são expressões analiticamente complicadas, o cálculo da integral (4.46) deve ser realizado numericamente. O resultado desta integração pode ser visualizado na Figura 4.4.

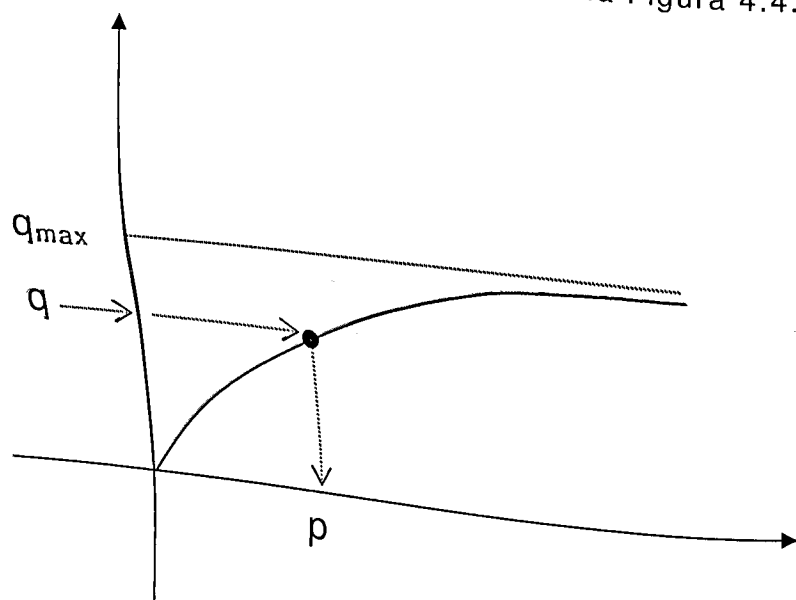


Figura 4.4: comportamento da curva definida pela equação (4.46).

Nesta figura nota-se que q tende assintoticamente para um valor limite q_{\max} quando q tende para o infinito. Derivando-se a equação (4.46) em relação a x , utilizando-se a regra de Leibnitz de diferenciação de integrais, resulta:

$$q_x = \left(\frac{\rho}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \quad (4.47)$$

logo,

$$(4.48)$$

$$h^3 q_x = \frac{\rho}{\eta} h^3 \frac{\partial P}{\partial x}$$

de modo análogo,

$$(4.49)$$

$$h^3 q_y = \frac{\rho}{\eta} h^3 \frac{\partial P}{\partial y}$$

Substituindo-se (4.48) e (4.49) em (4.9) resulta:

$$(4.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(H^3 \frac{\partial q}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(H^3 \frac{\partial q}{\partial Y} \right) = 12U \left(\frac{b}{R_x} \right) \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X}$$

A equação (4.50) é muito mais tratável do que a equação (4.9) uma vez linear em q . Há, como esperado, um complicador nesta abordagem, pois assim que se calcula o campo q , há que se obter o campo p correspondente. Isto é feito entrando-se no gráfico da Figura 4.4 no sentido indicado pelas flechas, porém na região assintótica do gráfico, pequenos desvios dos valores de q acarretam grandes desvios nos valores da pressão correspondente. Como esta região é de grande interesse prático na obtenção dos picos de pressão, deve-se resolver tanto a equação (4.50) como calcular o gráfico da Figura 4.4 com grande precisão.

O modelo de discretização da equação (4.50) segue exatamente os mesmos passos da equação (4.9) inclusive na transformação provida pela equação (4.32). Basta fazer $r \equiv 1$ no desenvolvimento que resulta ou em (4.45).

Para contornar as dificuldades numéricas do modelo anterior, em vez de se utilizar a transformação (4.46), ilustrada no gráfico 4.4, adotemos a seguinte transformação:

$$(4.51)$$

$$q(P) = \frac{(1 - e^{-cp})}{c} \Leftrightarrow p = -\frac{\ln(1 - qc)}{c}$$

que é apresentada na Figura 4.5.

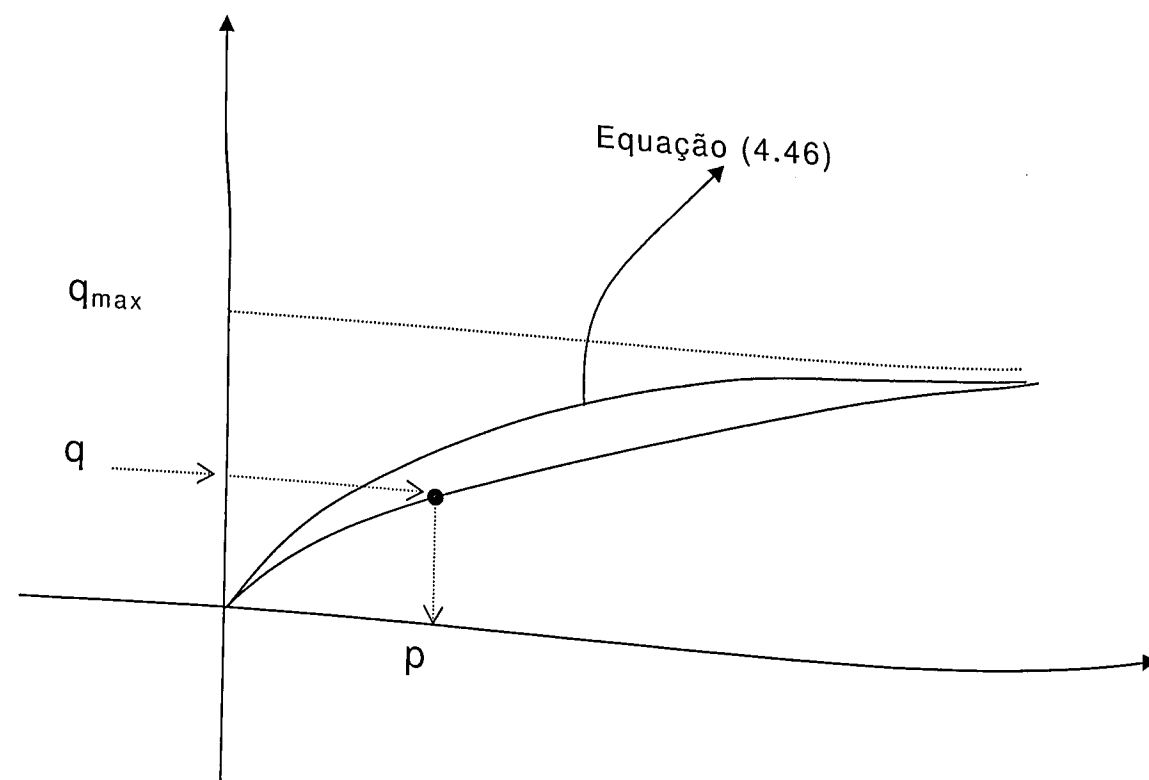


Figura 4.5: comportamento da curva $q(p)$ utilizando a viscosidade fictícia.

Com isto elimina-se o inconveniente da transformação inversa do modelo anterior. Derivando-se (4.51) resulta:

$$q_x = e^{-cp} P_x \quad (4.52)$$

$$P_x = \frac{q_x}{e^{-cp}} \quad (4.53)$$

$$\frac{p}{\eta} h^3 P_x = \frac{p}{\eta e^{-cp}} h^3 q_x = \frac{p}{\eta'} h^3 q_x \quad (4.54)$$

onde

$$\eta' = \eta e^{-cp} \quad (4.55)$$

Note-se que temos o mesmo formato para a equação de Reynolds com a substituição de η por η' que pode ser denominada de viscosidade fictícia.

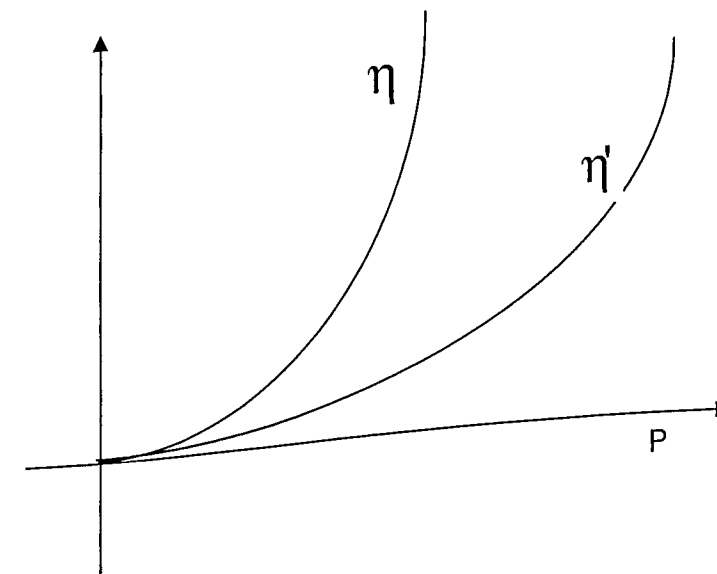


Figura 4.6: curvas do crescimento da viscosidade e da viscosidade fictícia

A vantagem é que o termo η' varia mais lentamente com a pressão P , o que contribui para a estabilidade da solução. Além disso a equação (4.51) é facilmente inversível.

(4.56)

$$p = -\frac{\log(1 - cq)}{c}$$

Resta determinar c para obter os efeitos desejados. Neste trabalho foi escolhido c de modo que quando p se aproxima de $2 P_h$ onde P_h é a máxima pressão Hertziana, a relação entre η' e η é dada por:

$$\eta' = 0.99\eta$$

Em resumo, neste trabalho foram abordados três modelos numéricos para o tratamento da equação de Reynolds dados por:

| | | |
|----------|---------------------|-------------------------------------|
| Modelo 1 | $\phi = h^\gamma q$ | $q = P$ |
| Modelo 2 | $\phi = h^\gamma q$ | $q = \int_b \frac{\rho}{\eta} d\xi$ |
| Modelo 3 | $\phi = h^\gamma q$ | $q = \frac{1 - e^{-c\phi}}{c}$ |

Tabela 4.2: modelos de solução da equação de Reynolds testados neste trabalho.

4.4 Discretização da deformação elástica

Na avaliação da integral da equação (3.33) há dois importantes problemas (BISWAS e SNIDLE, 1976). O primeiro refere-se aos pontos de singularidade e o segundo aos recursos computacionais.

O problema relacionado à presença da singularidade fraca em $x = \xi$ e $y = \eta$ é contornado adotando-se o seguinte procedimento:

- divide-se o domínio de integração Ω em $m \times n$ retângulos elementares Ω_e (Figura 4.7), de largura e altura Δx e Δy respectivamente,
- considera-se a pressão como sendo constante no interior de cada domínio elementar Ω_e ,
- calcula-se analiticamente a integral (3.33), isto é,

(4.57)

$$d\delta(x_i, y_j; \xi_k, \eta_l) = \frac{2P(\xi_k, \eta_l)}{\pi E'} \iint_{\Omega_e} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}} =$$

$$\frac{2P(\xi_k, \eta_l)}{\pi E'} \int_{\xi_k - \frac{\Delta x}{2}}^{\xi_k + \frac{\Delta x}{2}} \int_{\eta_l - \frac{\Delta y}{2}}^{\eta_l + \frac{\Delta y}{2}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}}$$

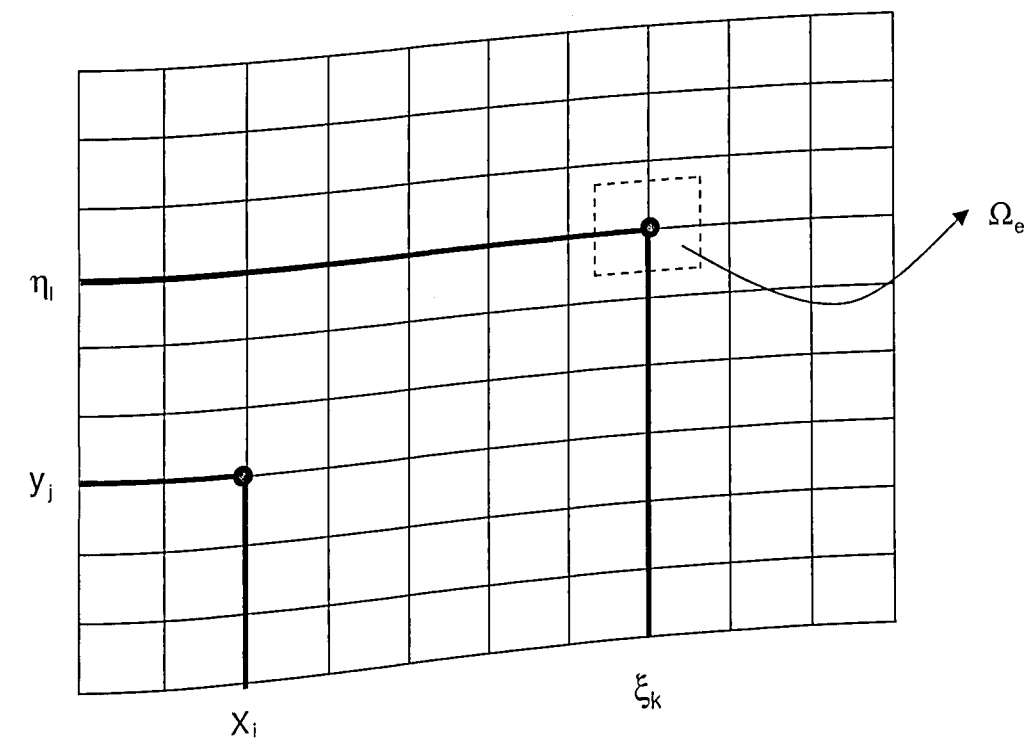


Figura 4.7: divisão do domínio para o cálculo da matriz de deformações.

A integral dupla que aparece na equação (4.57) só depende da distância relativa entre os pontos (x_i, y_j) e (ξ_k, η_l) , e das dimensões do retângulo elementar no qual a pressão foi considerada constante, ou seja,

$$\int_{\xi_k - \frac{\Delta x}{2}}^{\xi_k + \frac{\Delta x}{2}} \int_{\eta_l - \frac{\Delta y}{2}}^{\eta_l + \frac{\Delta y}{2}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}} = D(x_i - \xi_k, y_j - \eta_l; \Delta x, \Delta y) \quad (4.58)$$

onde Δx e Δy são considerados parâmetros. A matriz de deformação D tem solução analítica dada por,

$$\begin{aligned}
D = & \left(\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right) \ln \left| \frac{\left(\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right) + \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}}{\left(-\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right) + \sqrt{\left(-\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}} \right| \\
& + \left(\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right) \ln \left| \frac{\left(\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right) + \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}}{\left(-\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right) + \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(-\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}} \right| \\
& + \left(-\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right) \ln \left| \frac{\left(-\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right) + \sqrt{\left(-\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(-\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}}{\left(\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right) + \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(-\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}} \right| \\
& + \left(-\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right) \ln \left| \frac{\left(-\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right) + \sqrt{\left(-\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(-\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}}{\left(\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right) + \sqrt{\left(-\frac{\Delta x}{2} + x_i - \xi_k \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2} + y_j - \eta_l \right)^2}} \right|
\end{aligned}$$

(4.59)

Deste modo, (4.57) fica,

$$d\delta(x_i, y_j; \xi_k, \eta_l) = \frac{2P(\xi_k, \eta_l)}{\pi E'} D(|x_i - \xi_k|, |y_j - \eta_l|; \Delta x, \Delta y) \quad (4.60)$$

A contribuição de todo o campo de pressão no deslocamento do ponto (x_i, y_j) , pode ser expressa como,

$$\delta(x_i, y_j) = \frac{2}{\pi E'} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n P(\xi_k, \eta_l) D(|x_i - \xi_k|, |y_j - \eta_l|; \Delta x, \Delta y) \quad (4.61)$$

Analise agora o problema que se relaciona com os recursos computacionais exigidos no cálculo de (4.61) para se percorrer todo o campo de deslocamento, tanto em termos de tempo de processamento quanto em memória de armazenamento.

Considerando-se que $1 < i < m$; $1 < j < n$; $1 < k < m$; $1 < l < n$, teremos $(m \times n)^2$ produtos a serem realizados no cálculo de (4.61). Uma malha, por exemplo, de 128×256 pontos resultaria em cerca de 10^9 operações! Este algoritmo é um dos maiores consumidores de recursos computacionais do processo, devendo ser implementado com cuidado.

Caso a malha seja irregular o cálculo a priori de $D(|x_i - \xi_k|, |y_j - \eta_l|; \Delta x, \Delta y)$ torna-se inviável com os recursos atuais disponíveis pois, Δx e Δy agora seriam variáveis e o número de operações e de armazenamento subiriam, para o exemplo citado, para $(10^9)^2$.

4.5 Tipos de malhas

O campo da pressão caracteriza-se por possuir altos gradientes na região do contato e valores com variação suave fora dela. Estes gradientes elevados exigem o emprego de malhas extremamente finas, elevando o custo computacional, tornando o problema de difícil solução. A alternativa viável é a utilização de malhas irregulares cujo espaçamento possa ser adaptado conforme a geometria do contato, inserindo um maior número de pontos nas regiões de altos gradientes e um menor número nas demais.

Chega-se então a um impasse, uma malha irregular lidaria a contento com as pressões e no entanto, como dito anteriormente, acarretaria sérios problemas no cálculo da deformação elástica.

Para contornar este problema, neste trabalho foram empregadas duas malhas distintas simultaneamente, uma regular para calcular as deformações e outra irregular para lidar com o campo de pressão.

Com isto, dois problemas tiveram de ser resolvidos, o primeiro refere-se ao critério a ser usado para a geração da malha de pressão na região do contato e o segundo ao modo de transmitir os dados entre as malhas.

4.5.1 Malha da pressão

Na direção x , sabe-se que a localização da região de altos gradientes para a pressão ocorre nas vizinhanças da fronteira posterior ($x = B$). Na direção y , o problema apresenta simetria, com altos gradientes quando $y \cong B/2$. Das inúmeras possibilidades de geração de malhas irregulares, neste trabalho optou-se pela utilização de uma progressão geométrica de razão q ($0 \leq q \leq 1$), isto é, a cada novo intervalo, a distância entre os pontos iria decrescendo exponencialmente.

A soma dos termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1} \quad (4.62)$$

S_n é conhecido, pois ao se desejar seccionar o domínio de cálculo seguindo uma progressão geométrica, o valor da soma dos termos da PG é igual ao tamanho do próprio domínio, isto é, para a direção x ter-se-ia

$$S_{nx} = B \quad (4.63)$$

Com isto, pode ser calculado o primeiro termo da PG,

$$a_1 = \frac{B(q-1)}{q^n - 1} \quad (4.64)$$

Por outro lado, se for conhecida a relação desejada entre o primeiro e o último termo da PG, ou seja, um fator de redução definido por,

$$\frac{a_n}{a_1} = \text{red} \quad (4.65)$$

A razão q fica,

$$q = e^{\left[\frac{\ln(\text{red})}{n-1} \right]}$$

A geração da malha na direção y segue raciocínio análogo, tomando-se no entanto somente a metade do domínio de cálculo para aproveitar a característica simétrica do problema nesta direção e espelhando-se então os resultados para a outra metade. Na Figura 4.8 pode ser vista a malha irregular inserida no domínio de cálculo assim como a concentração de pontos na região do contato.

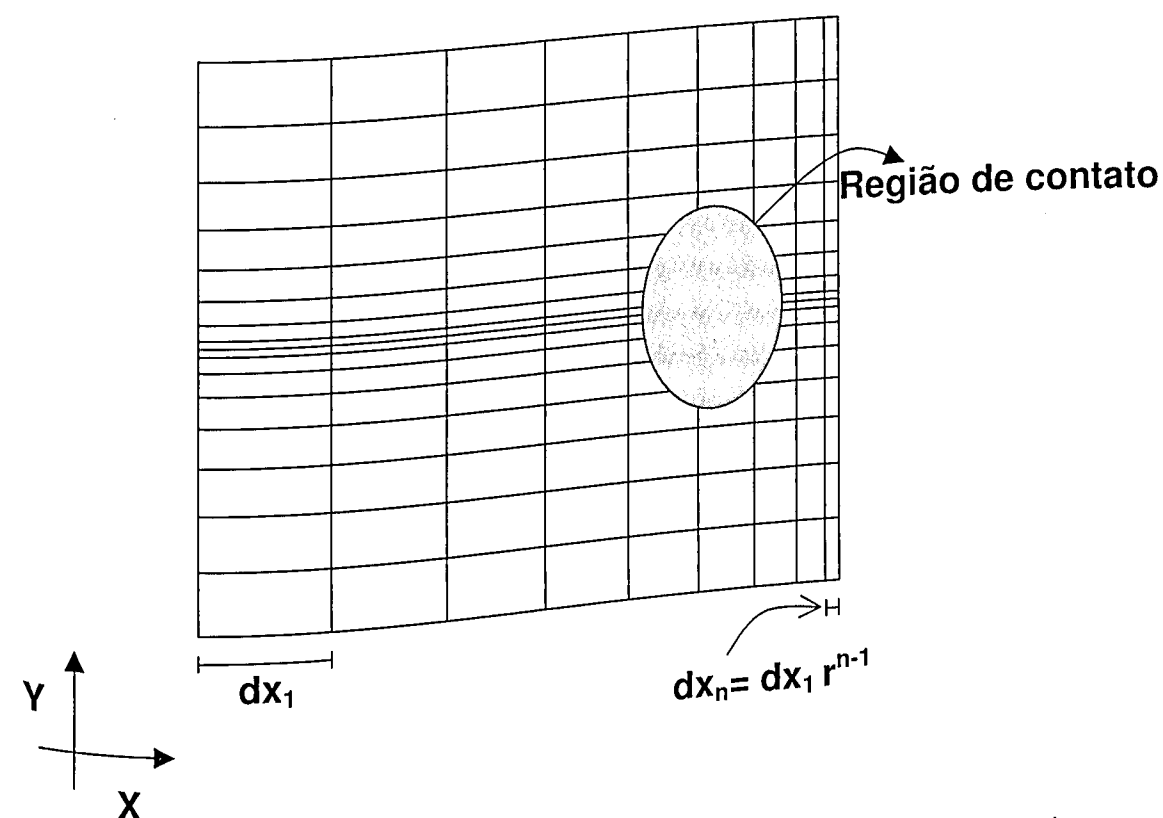


Figura 4.8: malha irregular inserida no domínio de cálculo.

4.5.2 Malha da deformação

O critério utilizado para a geração da malha regular foi baseado no menor valor de Δx e Δy da malha irregular, isto é,

(4.67)

$$\Delta x_{\text{regular}} = x_{\text{irregular}}^N - x_{\text{irregular}}^{N-1}$$

$$\Delta y_{\text{regular}} = y_{\text{irregular}}^{M/2} - y_{\text{irregular}}^{(M/2)-1}$$

Observe-se que na direção y , foi tomado o meio do domínio e não a extremidade como na direção x . Isto se deve novamente à utilização da simetria que o problema apresenta nesta direção.

Finalmente, o número de pontos da malha regular foi definido como a parte inteira da fração:

$$M = \frac{A}{\Delta y} \quad (4.68)$$

$$N = \frac{B}{\Delta x}$$

4.5.3 Transferência dos resultados entre as malhas

Como os nós da malha de pressão não coincidem com os nós da malha de deformação, torna-se necessária a transmissão dos resultados da primeira para a segunda e vice versa (Figura 4.9a).

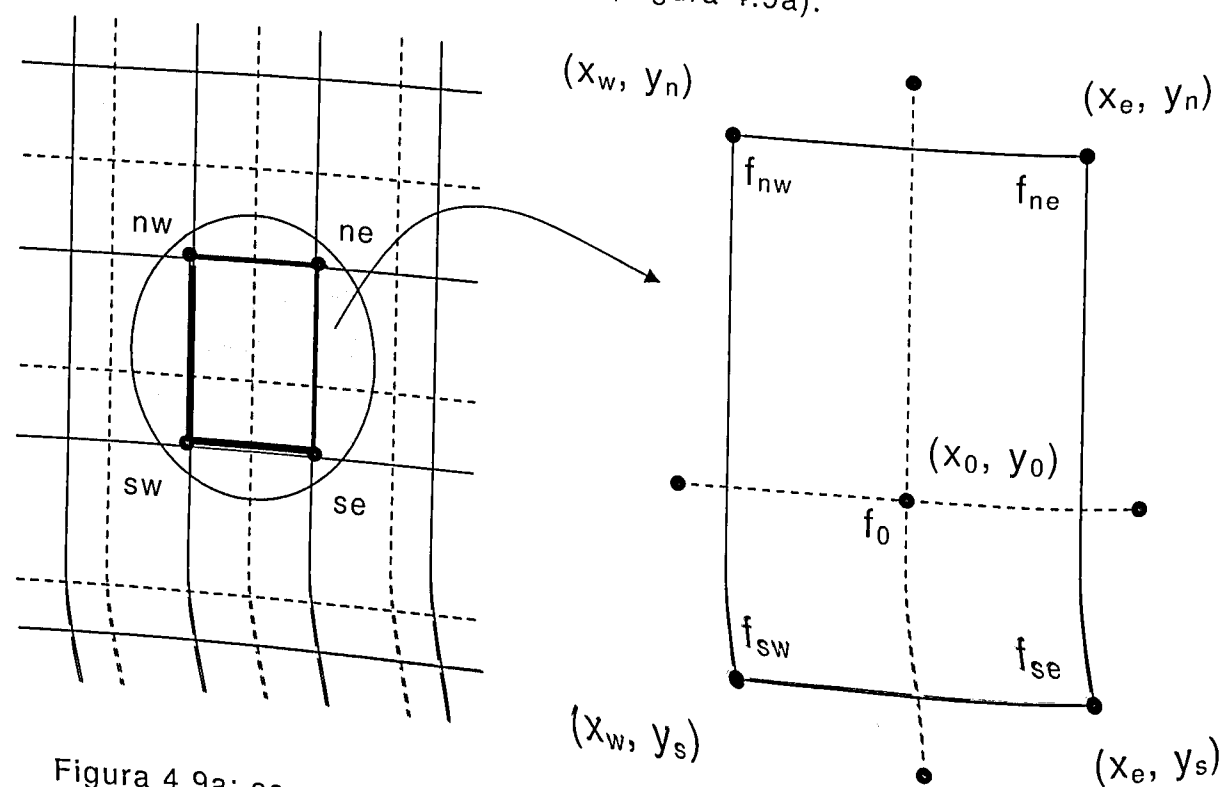


Figura 4.9a: esquema de duas malhas não coincidentes

Figura 4.9b: esquema de interpolação

Para se obter o valor de f_0 a partir dos valores de f_{sw} , f_{se} , f_{nw} , f_{ne} como mostra a Figura 4.9b, utilizou-se de um esquema lagrangeano bi-linear, isto é:

$$f(x) \cong \frac{(x_0 - x_e)(y_0 - y_n)}{(x_w - x_e)(y_s - y_n)} f_{sw} + \frac{(x_0 - x_w)(y_0 - y_n)}{(x_e - x_w)(y_s - y_n)} f_{se} + \frac{(x_0 - x_w)(y_0 - y_s)}{(x_e - x_w)(y_n - y_s)} f_{ne} + \frac{(x_0 - x_e)(y_0 - y_s)}{(x_w - x_e)(y_n - y_s)} f_{nw} \quad (4.69)$$

4.6 Descrição geral do algoritmo

O diagrama adiante apresentado no formato de fluxograma (Figura 4.10) ilustra o processamento numérico dado às equações da EHD, mostrando a seqüência passos (apresentados entre parênteses) para a consecução dos resultados do estudo.:

Está implícita no passo inicial a inserção no programa dos parâmetros (variáveis que entram) referentes a cada caso, tais como:

- i. velocidade de rotação (U),
- ii. carga (w),
- iii. geometria do contato (k),
- iv. tamanho (M e N) e configuração da malha ($Redx$ e $Redy$ da seção 4.5.1),
- v. modelo (Tabela 4.2),
- vi. γ (Equação (4.32)),
- vii. fator de relaxação α ,
- viii. número máximo de iterações $imax$,
- ix. H_0 (seção 3.4) e
- x. constantes das equações reológicas.

As idéias expostas anteriormente traduzem-se no seguinte processo iterativo global:

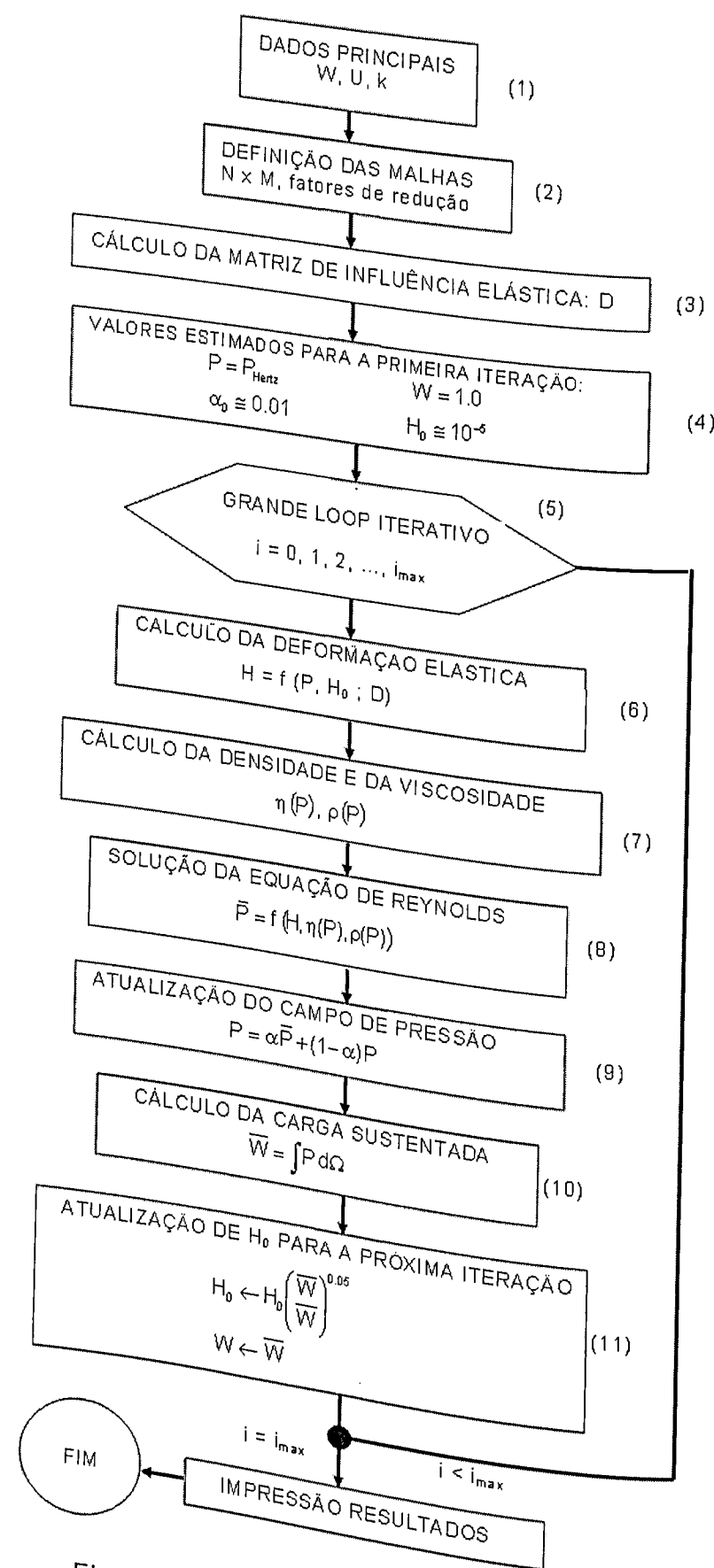


Figura 4.10: processo iterativo global

Passo 1:

Este passo inicial insere no programa os parâmetros de entrada referentes a cada caso tais como foram elencados.

Brewe e Hamrock (1977) obtiveram uma fórmula de recorrência para poder calcular k (item iii) a partir dos raios da superfície de contato R_x e R_y ; utilizando a inversa da fórmula por eles estabelecida, pode-se chegar aos valores que relacionam estes raios,

$$\frac{R_y}{R_x} = \left(\frac{k}{1.0339} \right)^{1/0.636}$$

assim sendo, os resultados das figuras desta seção referem-se aos seguintes valores aproximados,

| $K = \frac{a}{b} \Rightarrow$ | $\frac{R_y}{R_x} \equiv$ |
|-------------------------------|--------------------------|
| 1.0 | 0.95 |
| 2.0 | 2.82 |
| 6.0 | 15.88 |

Tabela 4.3: valores utilizados na variação da geometria de contato e relações entre k e os raios de curvatura.

O parâmetro α ($0 \leq \alpha \leq 1$) do item viii é um fator de relaxação para que o campo de pressão seja atualizado paulatinamente, de modo a evitar saltos bruscos que causem instabilidade no processo. Percebeu-se no entanto que, se este valor de α permanecesse fixo durante o processo, se muito elevado, causava instabilidades indesejadas e se muito pequeno, exigia um número excessivo de iterações e consequentemente um tempo computacional muito elevado.

Para contornar este percalço, optou-se pela modificação de α no decorrer do processo e o critério utilizado foi:

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 - \frac{i}{i_{\max}} \right) \quad (4.70)$$

onde α_0 é valor inicial de α que pode ser estipulado como entrada do programa (neste trabalho este valor foi de $\alpha_0 = 0.01$ para a maioria dos casos) e i_{\max} representa o número de máximo de iterações que o código irá efetuar.

As constantes do item (xi) para o cálculo das equações reológicas que foram utilizadas neste trabalho podem ser vistas na tabela 4.4 a seguir,

| | |
|--|--------------------------------------|
| Módulo de elasticidade | $E' = 210e9$ |
| Viscosidade à pressão atmosférica | $\eta_0 = 0.045$ |
| Coefficiente da equação da viscosidade | $Z = 0.76;$ |
| Coefficientes da equação da densidade versus pressão | $\gamma_1 = 0.6$ $\gamma_2 = 1.7$ |

Tabela 4.4: constantes

Tabela 4.4: constantes para o cálculo das equações reológicas

Passo 2:

A definição das malhas da seção 4.5 é feita nesta etapa. A avaliação da Equação (4.69) é muito rápida mas há dificuldade em localizarem-se os pontos vizinhos (sw, se, ne, nw) em relação a um ponto dado (0). Para não sobrecarregar o processo iterativo esta localização é realizada apenas uma vez, no início do processo, e os vizinhos são armazenadas em matrizes indicadoras.

Passo 3:

A matriz de influência D na malha regular, fornecida pela Equação (4.58), é calculada no início do processo e armazenada para o cálculo posterior da altura da camada de lubrificante a cada iteração.

Passo 4:

Passo 4:

A pressão Hertziana (P_H) em malha regular é calculada com o auxílio da Equação (3.30) para servir de inicialização ao campo de pressão. ($P = P_H = P_{\text{antigo}}$). A carga estimada inicial é tomada como 100% da carga correspondente à pressão Hertziana e o valor de inicialização de H_0 foi ajustado experimentalmente.

Passo 5:

Passo 5:

Início do grande processo iterativo, o valor para o número máximo de iterações (i_{\max}) foi determinado experimentalmente em torno de 2000.

Passo 6:

Passo 6:
Cálculo da altura de lubrificante em malha regular utilizando a Equação (3.41) e a matriz de influência calculada no passo 3.

Passo 7:

Passo 7:

Neste passo são calculadas em malha regular as equações reológicas acopladas ao sistema: a viscosidade (Equação (4.6)) e a densidade (Equação (4.7)). Procede-se também a transferência dos dados da malha regular para a malha irregular (seção 4.5).

Passo 8:

Passo 8:

Neste passo se dá a resolução numérica da equação de Reynolds descrita na seção 4.3 seguindo o seguinte esquema:

- i. Substituição da variável P por $q(P)$ (Equação (4.50)) com o auxílio do
- ii. Cálculo da pressão reduzida (Equação (4.50)) com o auxílio do Multi Grelha com o SOR como método de relaxação utilizando malha irregular (Capítulo II).
- iii. $\bar{P} \leftarrow q$ retorno à variável P (Equação (4.51))
- iv. Transferência do campo de pressão para a malha regular (seção 4.5).

Passo 9:

Cálculo do fator de relaxação α descrito no passo 1 e atualização do campo de pressão do seguinte modo,

$$P \leftarrow \alpha \bar{P} + (1-\alpha)P \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.71)$$

Passo 10:

Cálculo da carga estimada para a pressão,

$$\bar{w} = \int p d\Omega \quad (4.72)$$

Passo 11:

Partindo-se do princípio de que a altura mínima do fluido H_0 é inversamente proporcional à carga sustentada, o valor de H_0 é ajustado durante o processo iterativo, de acordo com a seguinte regra básica:

$$h_0 = h_0 \left(\frac{\bar{w}}{W} \right)^\lambda \quad (4.73)$$

onde \bar{W} é o valor da carga na iteração atual e W o valor da carga na iteração anterior. O expoente $\lambda=0.05$ foi adotado após exaustivos testes numéricos. Para se evitar oscilações exaustivas a equação (4.73) é aplicada somente se ocorrer uma das duas condições abaixo:

$$\bar{W} > W \text{ e } \bar{W} > 1.0$$

Ou

$$\bar{W} < W \text{ e } \bar{W} < 1.0$$

Finalmente, dar-se-á início à fase final do estudo, em que os primeiros resultados concentram-se na comparação entre os três modelos objeto de análise, assim como nos diferentes valores para o coeficiente γ ($0 \leq \gamma \leq 2$) da equação

(4.32)

CAPÍTULO V

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo desta fase consistiu em localizar – nos três protótipos – um modelo e um valor adequado para γ que, ao mesmo tempo que forneça resultados satisfatórios, não fosse tão dispendioso tanto em tempo de processamento quanto em capacidade de armazenamento. Para atingir a meta desta primeira fase, adotou-se como padrão de comparação os resultados obtidos por Hamrock e Dowson (1981), Jang e Tichy (1995) e Venner (1994).

Na busca do modelo e do valor de γ apropriados, diferentes combinações foram executadas. Para γ foram escolhidos os valores: 0, 1, 1.5 (valor adotado por Hamrock e Dowson em 1981) e 2.

Os resultados obtidos nestes diferentes casos pode ser analisado nas Figuras 5.1 a 5.12. onde, além dos perfis das pressões após 1000 iterações, pode ser observado o comportamento de cada caso com 10 e 100 iterações de modo a visualizar como o caso em questão se comporta a caminho da convergência.

Os parâmetros usados para rodar estes modelos podem se vistos na tabela 5.1 a seguir,

| Altura mínima de lubrificante | Velocidade adimensional $U = \frac{\eta_0 u}{E' R_x}$ | Contato aproximadamente esférico $k = \frac{a}{b}$ | Carga adimensional $W = \frac{F}{E' R_x^2}$ |
|-------------------------------|--|--|--|
| $H_0 = 10^{-5}$ | $U = 0.1683 \cdot 10^{-11}$ | $K = 1.25$ | $W = 0.1106 \cdot 10^{-6}$ |

Tabela 5.1: parâmetros utilizados para a escolha do modelo

5.1. Modelos numéricos

5.1.1. Modelo 1

$$\phi = h^\gamma P$$

$$0 \leq \gamma \leq 2$$

Nos gráficos representados nas Figuras 5.1 a 5.4 nota-se o surgimento de instabilidades, ultrapassando em muito a pressão Hertziana, com o que se conclui que este modelo não é apropriado para a continuidade do trabalho.

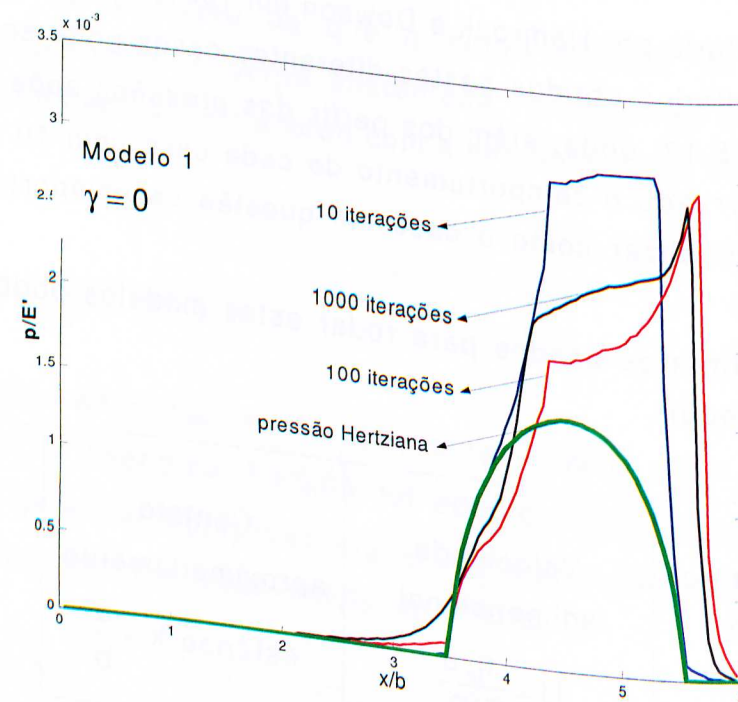


Figura 5.1: $\phi = P$

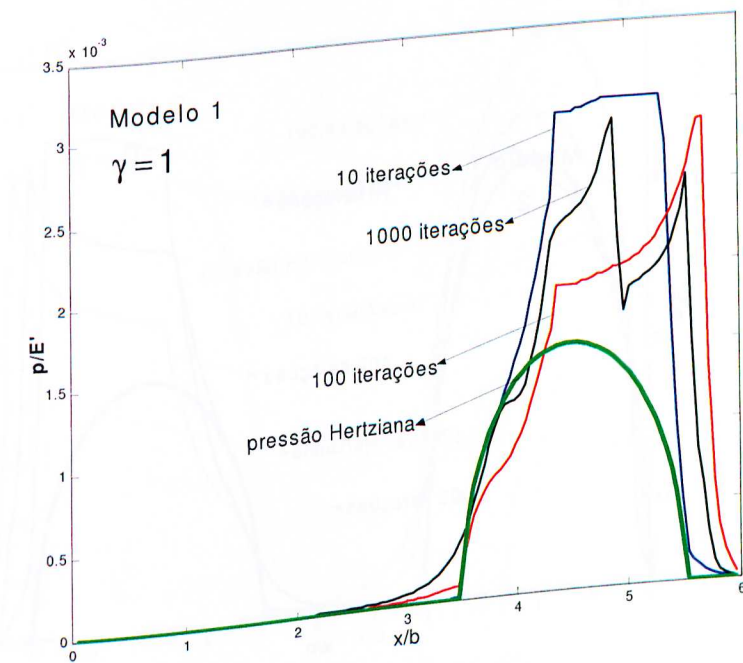


Figura 5.2: $\phi = hP$

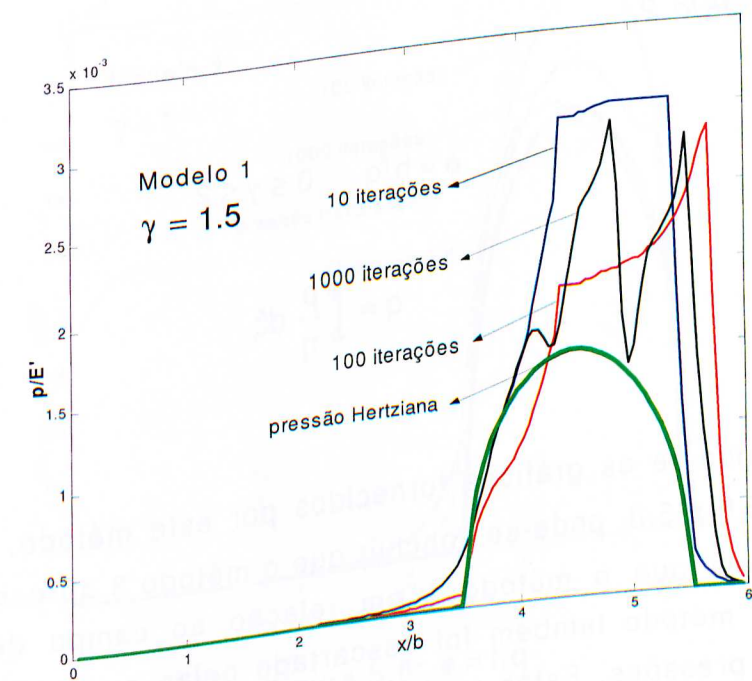
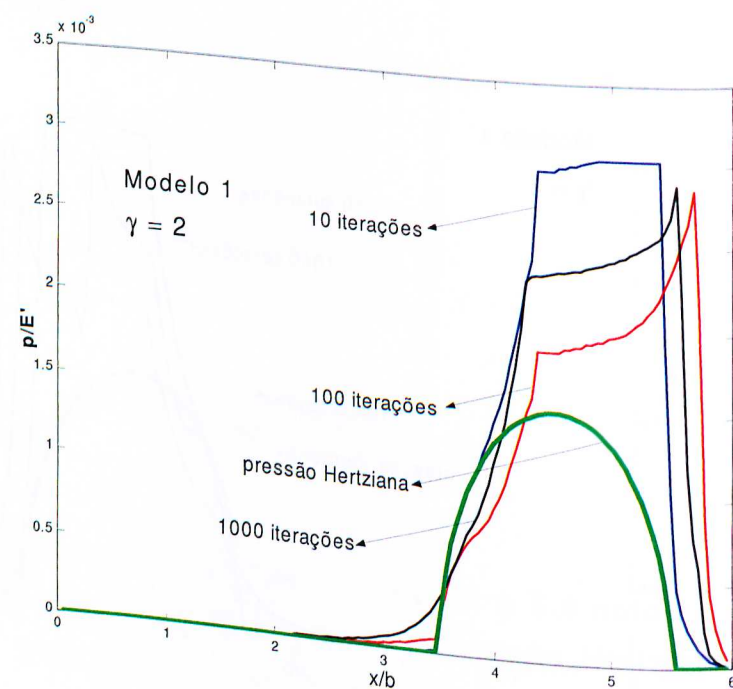


Figura 5.3: $\phi = \sqrt{h^3} P$

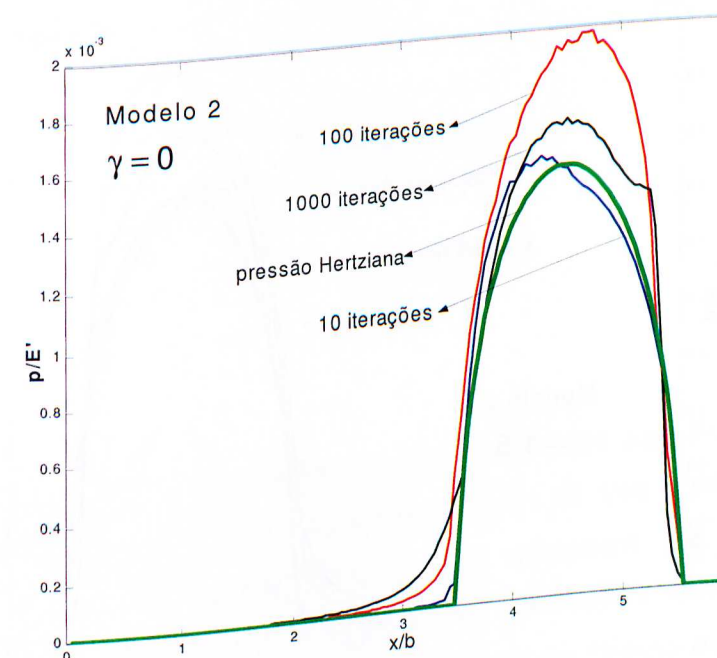
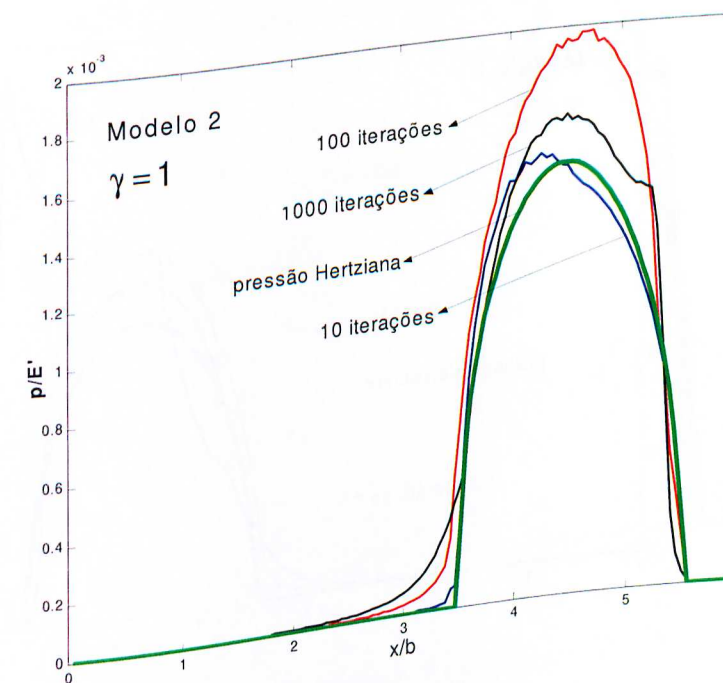
Figura 5.4: $\phi = h^2 P$

5.1.2. Modelo 2

$$\phi = h^\gamma q \quad 0 \leq \gamma \leq 2$$

$$q = \int \frac{\rho}{\eta} d\xi$$

Observando-se os gráficos fornecidos por este método, representados nas Figuras 5.5 a 5.8, pode-se concluir que o método 3 apresenta resultados mais palatáveis que o método 1 em relação ao campo de pressão. No entanto, este método também foi descartado pelas oscilações visualizadas no valor das pressões. Estas oscilações relacionam-se com a exigência do método em relação a um número maior de iterações e conseqüente aumento

Figura 5.5: $\phi = q$ Figura 5.6: $\phi = hq$

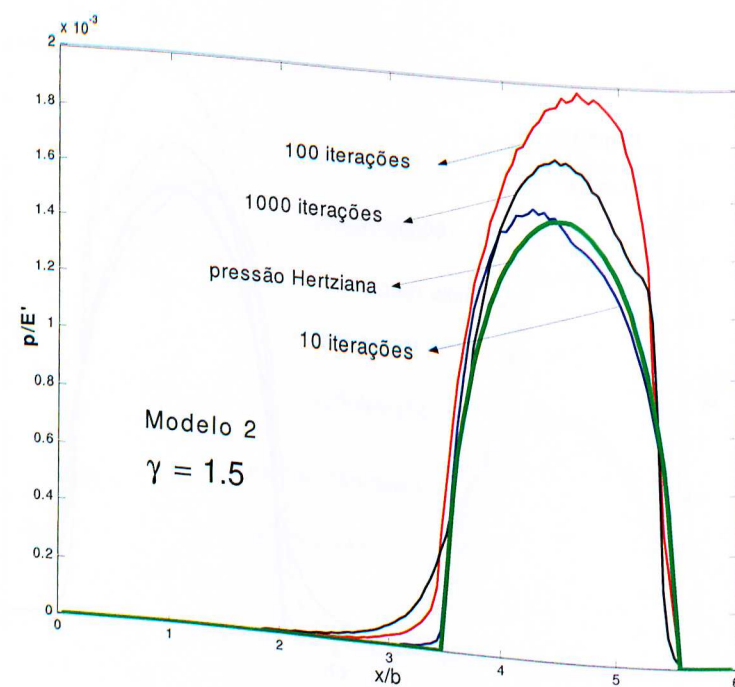


Figura 5.7: $\phi = \sqrt{h^3} q$

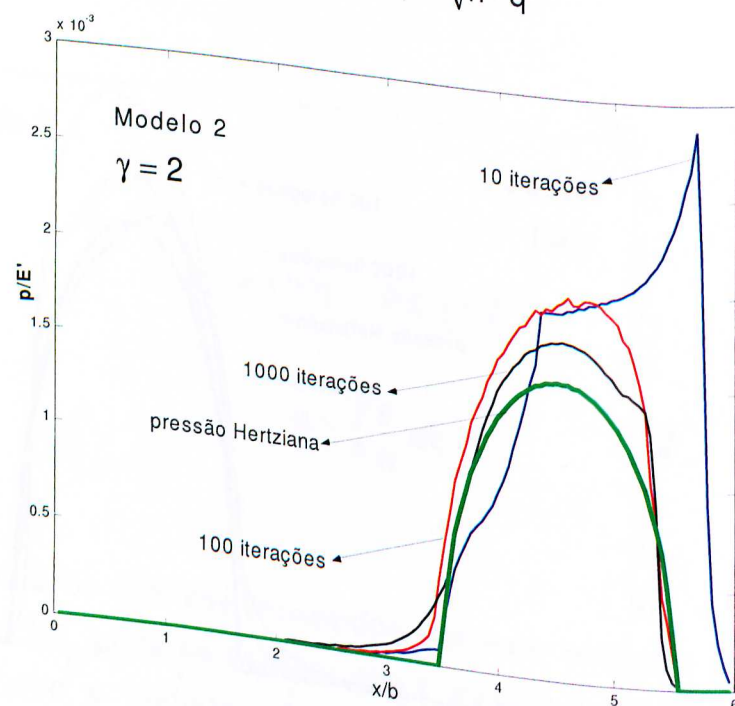


Figura 5.8: $\phi = h^2 q$

5.1.3. Modelo 3

$$\phi = h^\gamma q \quad 0 \leq \gamma \leq 2$$

$$q = \frac{1 - e^{-cp}}{c}$$

Este método, cujos resultados podem ser vistos nas Figuras 5.9 a 5.12, foi o que apresentou melhor convergência, além do que o perfil das pressões foi o que apresentou melhor convergência, além do que o perfil das pressões foi o que apresentou melhor convergência, além do que o perfil das pressões foi o que apresentou melhor convergência. Foi obtido com o mesmo, assemelha-se aos expostos na bibliografia. Foi escolhido $\gamma=0$ por que este caso apresentou oscilações menores nos campos das pressões demonstrando ser mais econômico em tempo de CPU.

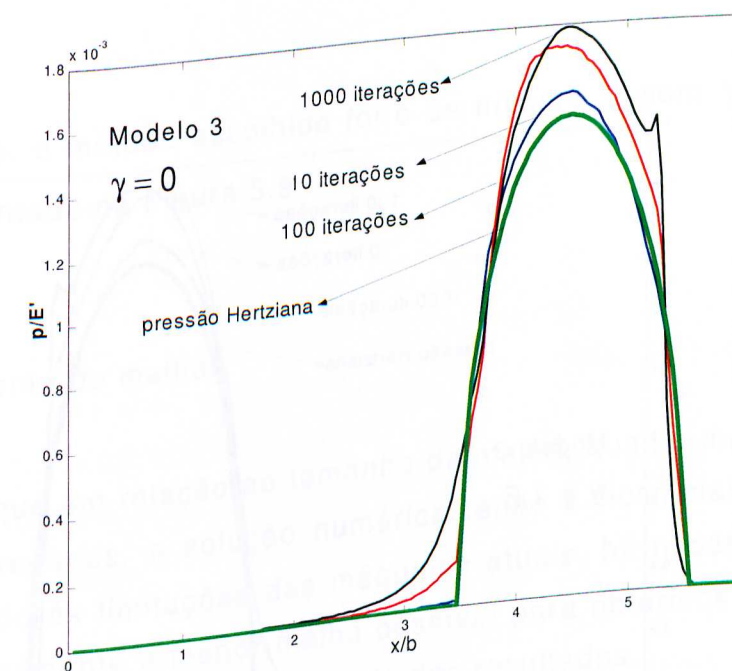
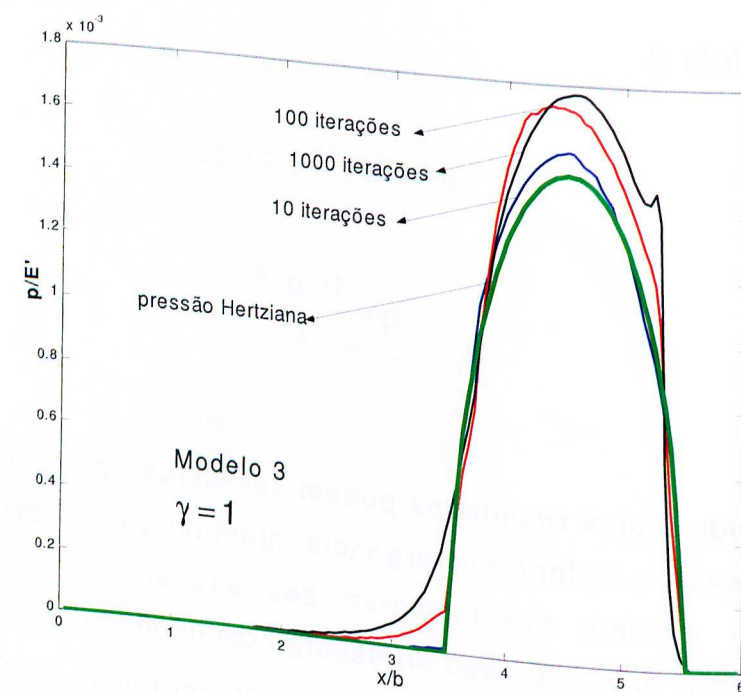
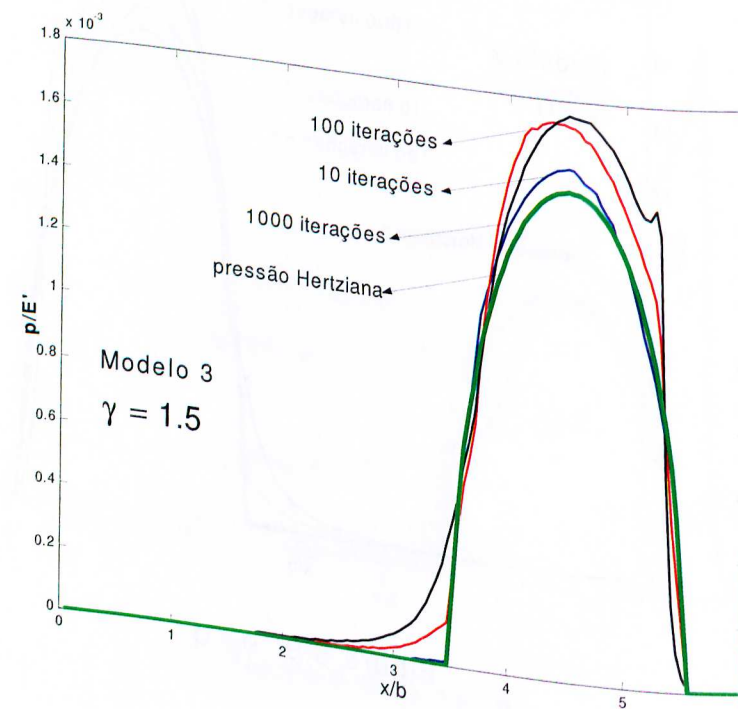
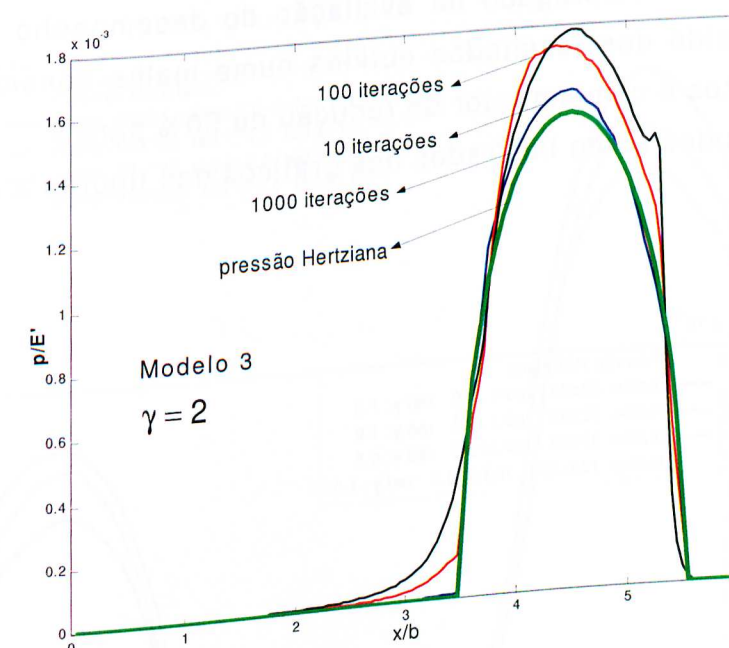


Figura 5.9: $\phi = q$

Figura 5.10: $\phi = hq$ Figura 5.11: $\phi = \sqrt{h^3} q$ Figura 5.12: $\phi = h^2 q$

Em resumo, o método escolhido foi o de número 3, com $\gamma=0$ estando o mesmo representado na Figura 5.9.

5.2. Refinamento de malhas

Sabe-se que em relação ao tamanho da malha, quanto maior o número de pontos empregados, a solução numérica tende a ficar mais próxima da realidade. Devido às limitações das máquinas atuais, há necessidade de se estudar criteriosamente a menor malha possível para obtermos um resultado satisfatório sem comprometer a qualidade dos resultados.

Utilizando o mesmo algoritmo, no modelo 3 com $\gamma=0$, diversas malhas foram testadas assim como a combinação de fatores de redução de malha com o qual em vez de malhas regulares, poder-se ia trabalhar com malhas que ficassem mais finas nas regiões de maior interesse (seção 4.5). Pensou-se na possibilidade de, por exemplo, uma malha de 64 pontos numa determinada direção e com um fator de redução de 50%, poderia apresentar um resultado análogo ao de uma malha de 128 pontos.

O parâmetro empregado na avaliação do desempenho dos diferentes casos foi extraído dos resultados obtidos numa malha considerada grande, 128 x 256 pontos e com um fator de redução de 50% para x.

Estes estudos estão ilustrados nos gráficos das figuras a seguir.

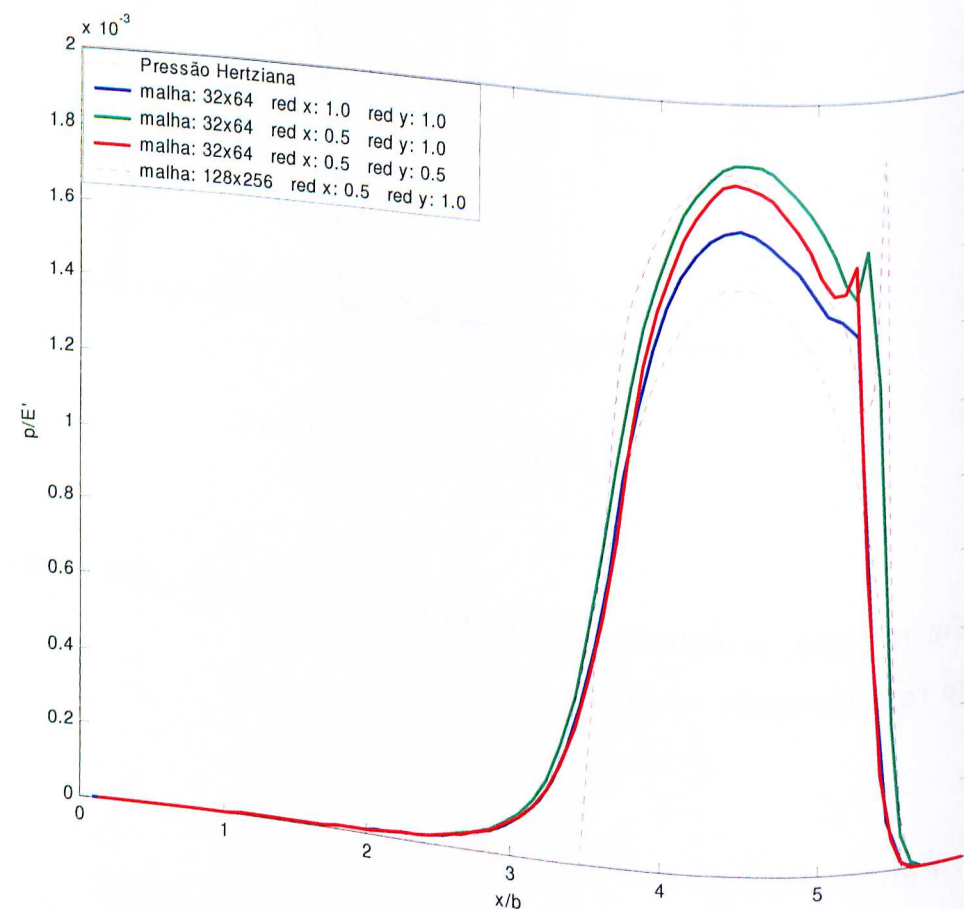


Figura 5.13: malhas de 32 x 64 pontos com diversos fatores de redução

Observe-se que na Figura 5.13, mesmo em malhas grosseiras, já se visualizam os perfis da pressão, principalmente na curva que representa o resultado da malha 32 x 64 com 50% de redução em x.

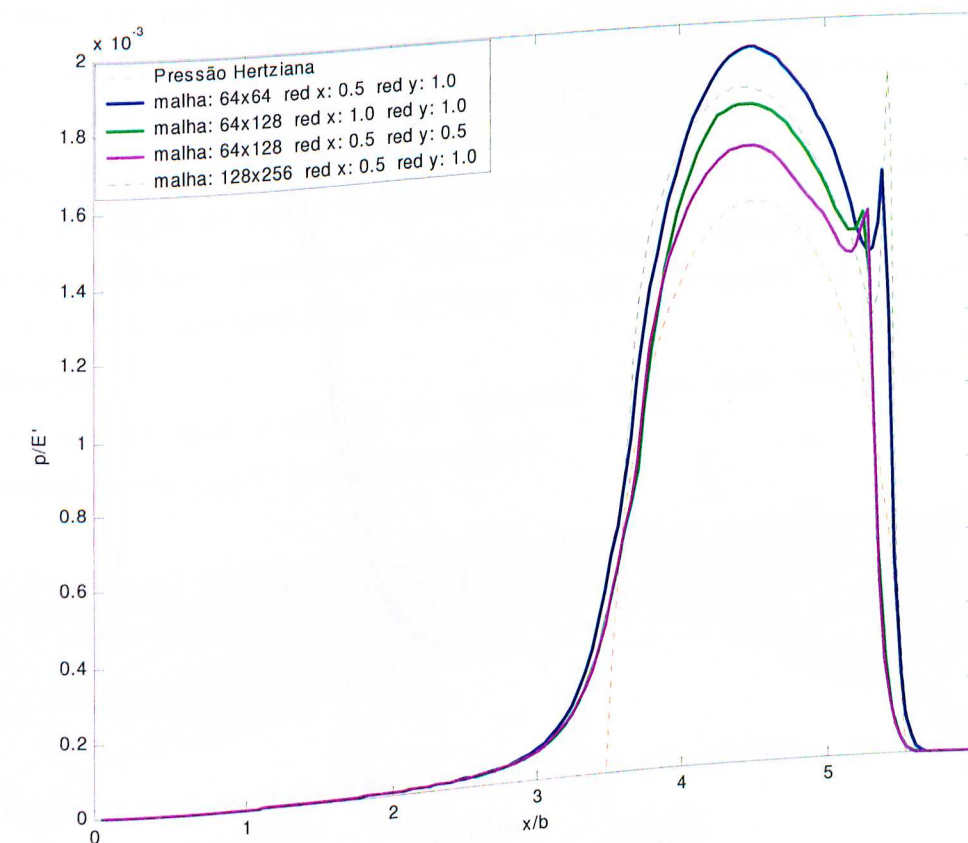


Figura 5.14: malhas de 64x128 pontos com diversos fatores de redução

Na Figura 5.14 se observa um bom comportamento do modelo e já fornece opção de escolha: a malha considerada de melhor performance é a malha de 64x128 pontos e redução de 50% na direção x.

Mas uma questão ainda não foi respondida, será que uma redução de malhas realmente se comporta como se fosse uma outra malha com maior número de pontos?

A fim de visualizar a resposta a esta questão, foram executados alguns testes cujos resultados estão impressos nas figuras a seguir.

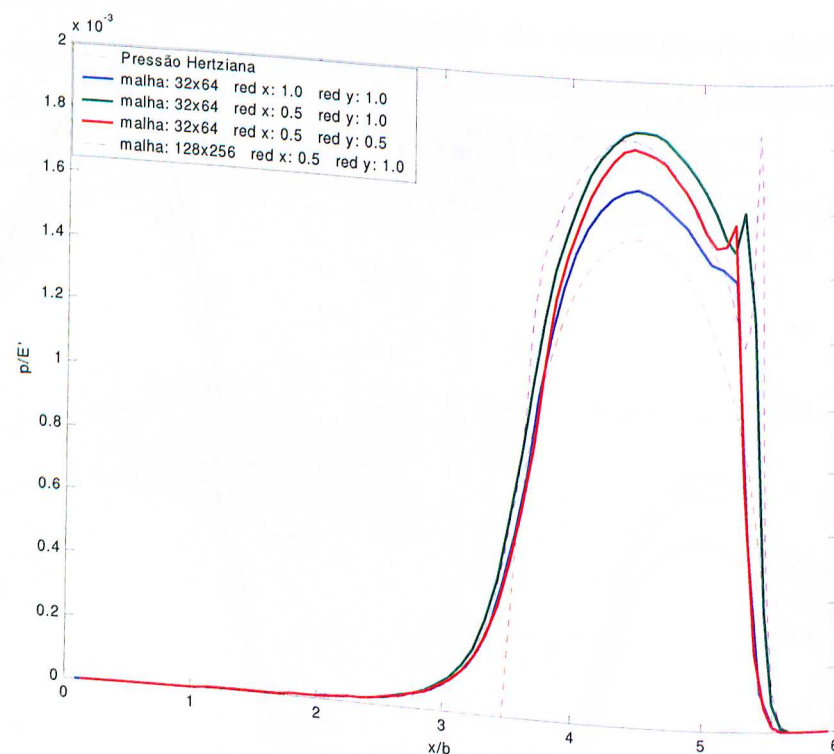


Figura 5.15: equivalência entre malhas de 32 x 64 em função ao fator de redução

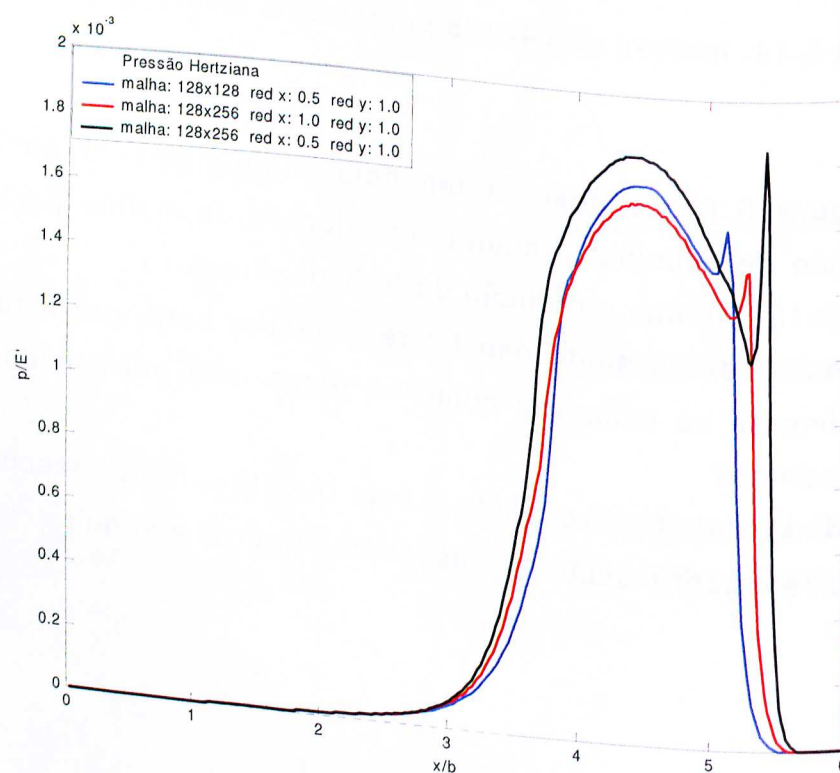


Figura 5.16: equivalência entre malhas de 128 x 256 em função ao fator de redução

Observa-se nas Figuras 5.13 e 5.14 a resposta à questão, as malhas com fator de redução demonstraram um desempenho melhor do que as regulares, com a vantagem de fornecerem resultados mais precisos sem a necessidade de uma malha extremamente refinada.

Com isto pôde-se optar finalmente por uma malha e, neste trabalho, a malha escolhida para prosseguir com o estudo foi aquela que já vinha apresentando bom desempenho, a malha de 64x128 pontos e redução de 50% na direção x.

Um resultado que sintetiza as escolhas feitas pode ser visualizado tridimensionalmente nas Figuras 5.17 e 5.18.

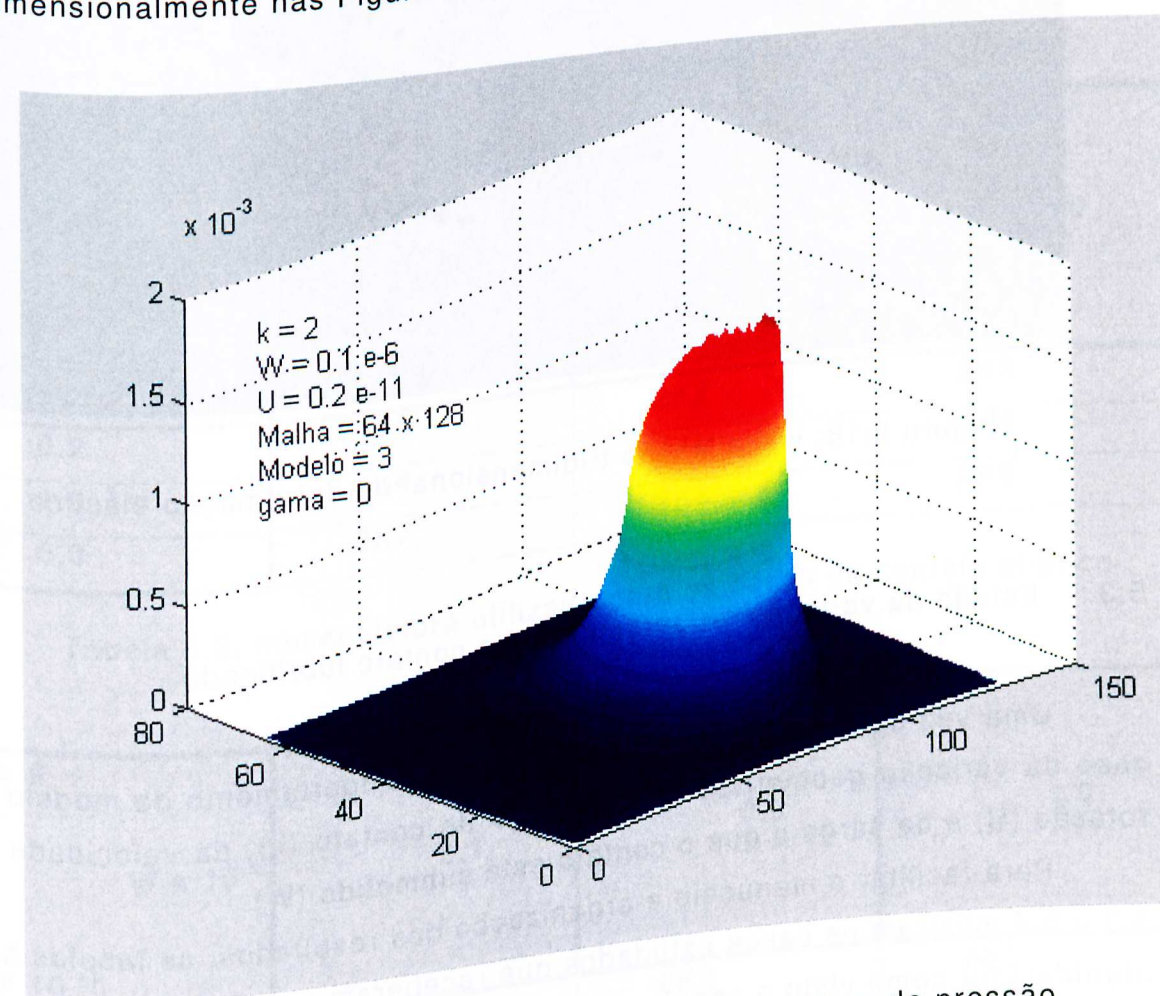


Figura 5.17: visualização tridimensional do campo de pressão

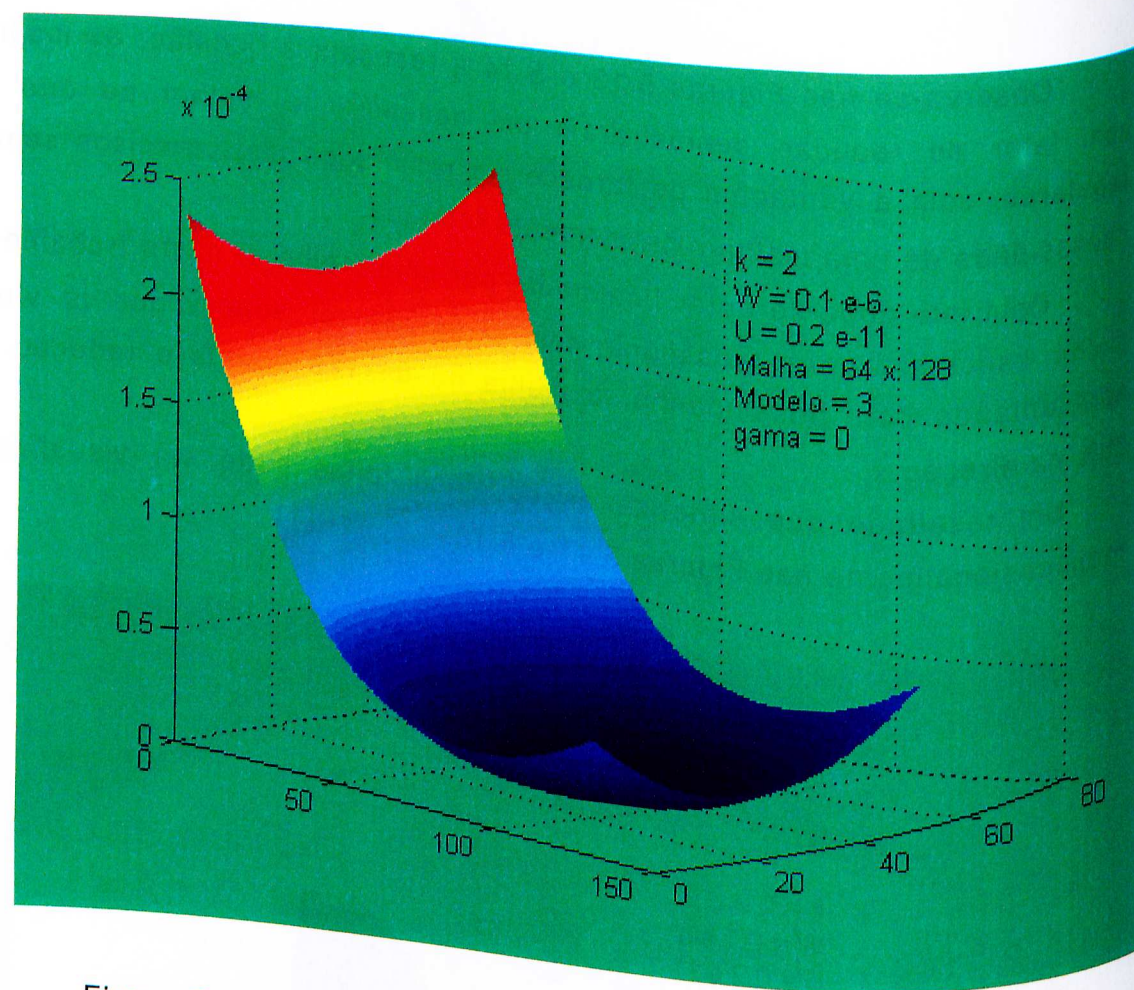


Figura 5.18: visualização tridimensional da deformação elástica

5.3. Estudo da variação de parâmetros do contato lubrificado

Uma vez definida a malha, resta saber o comportamento do modelo no caso da variação geométrica da superfície de contato (k), da velocidade de rotação (U) e da carga a que o contato está submetido (W).

Para facilitar o manuseio e organização dos resultados, as tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 mostram os casos estudados que receberam um código identificador como visto a seguir,

| $K = 1$ | $W \times 10^{-6}$ | 0.1 | 0.5 | 1.0 |
|---------------------|--------------------|-----|-----|-----|
| $U \times 10^{-11}$ | | | | |
| 0.2 | 1K1 | 1K2 | 1K3 | |
| 1.0 | 1K4 | 1K5 | 1K6 | |
| 5.0 | 1K7 | 1K8 | 1K9 | |

Tabela 5.2: nomenclatura utilizada para os casos de contato esférico ($k=1$)

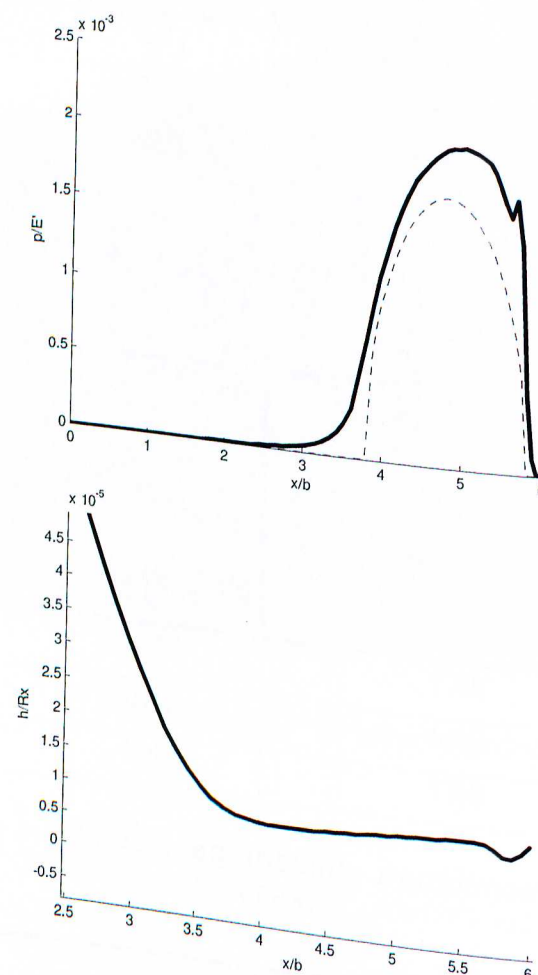
| $K = 2$ | $W \times 10^{-6}$ | 0.1 | 0.5 | 1.0 |
|---------------------|--------------------|-----|-----|-----|
| $U \times 10^{-11}$ | | | | |
| 0.2 | 2K1 | 2K2 | 2K3 | |
| 1.0 | 2K4 | 2K5 | 2K6 | |
| 5.0 | 2K7 | 2K8 | 2K9 | |

Tabela 5.3: nomenclatura utilizada para os casos de contato elíptico ($k=1$)

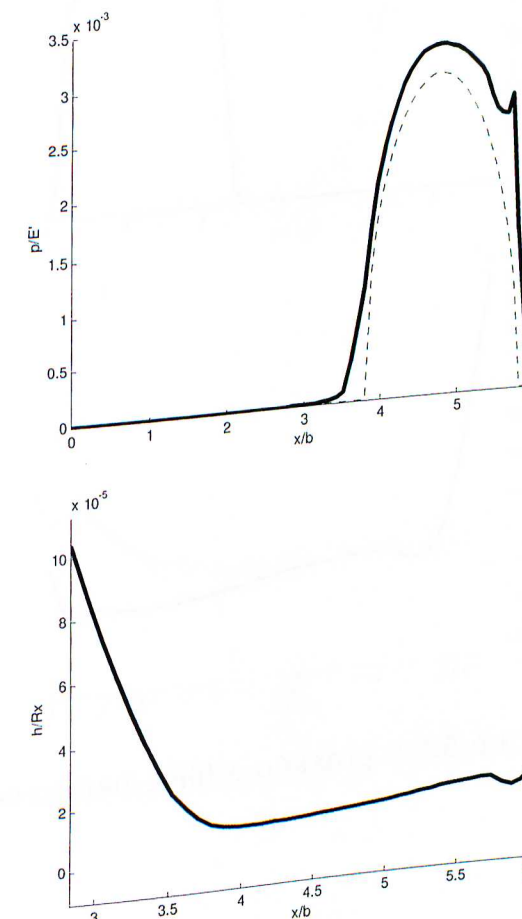
| $K = 6$ | $W \times 10^{-6}$ | 0.1 | 0.5 | 1.0 |
|---------------------|--------------------|-----|-----|-----|
| $U \times 10^{-11}$ | | | | |
| 0.2 | 6K1 | 6K2 | 6K3 | |
| 1.0 | 6K4 | 6K5 | 6K6 | |
| 5.0 | 6K7 | 6K8 | 6K9 | |

Tabela 5.4: nomenclatura utilizada para os casos de contato cilíndrico ($k=1$)

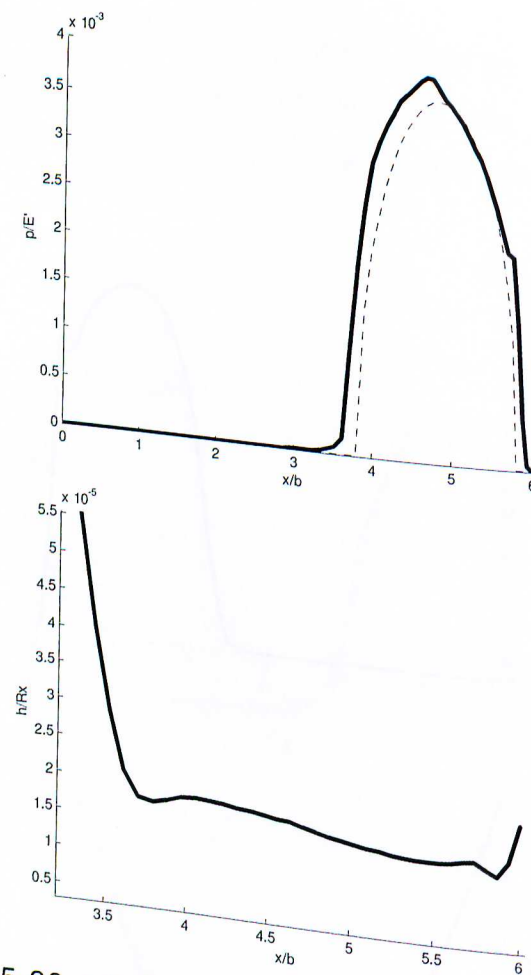
Graficamente dois tipos de resultados são de interesse imediato: o campo de pressão e campo de deformação. As Figuras 5.19 a 5.72 apresentam os campos obtidos na linha de centro (linha de simetria) destas grandezas.



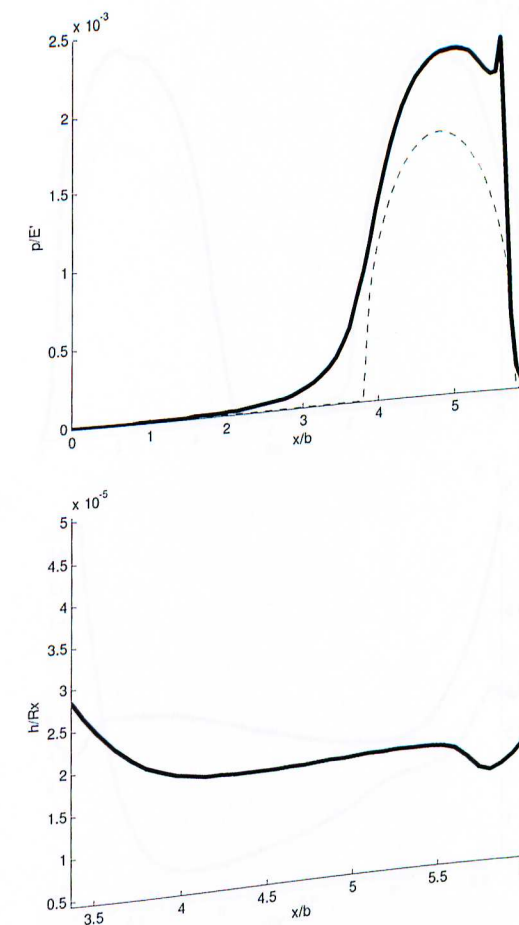
Figuras 5.19 e 5.20: pressão e filme para o caso 1k1



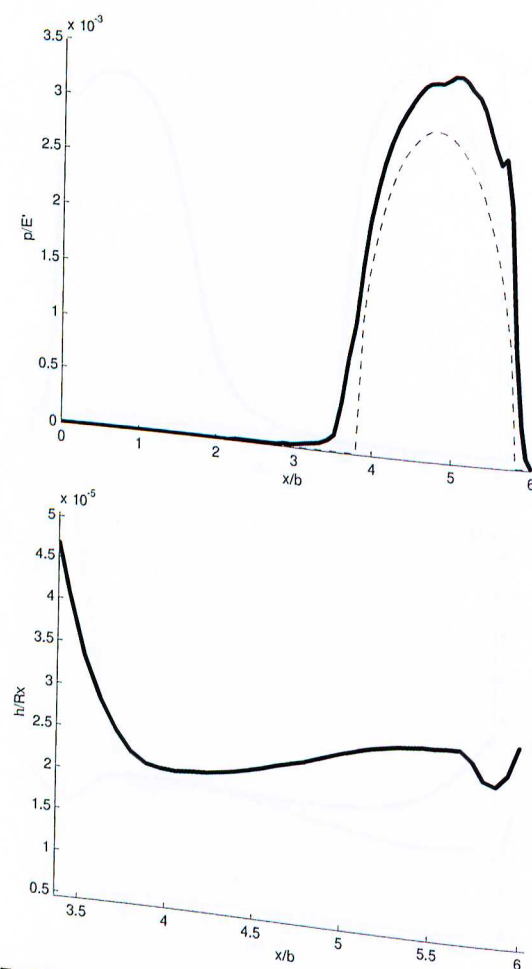
Figuras 5.21 e 5.22: pressão e filme para o caso 1k2



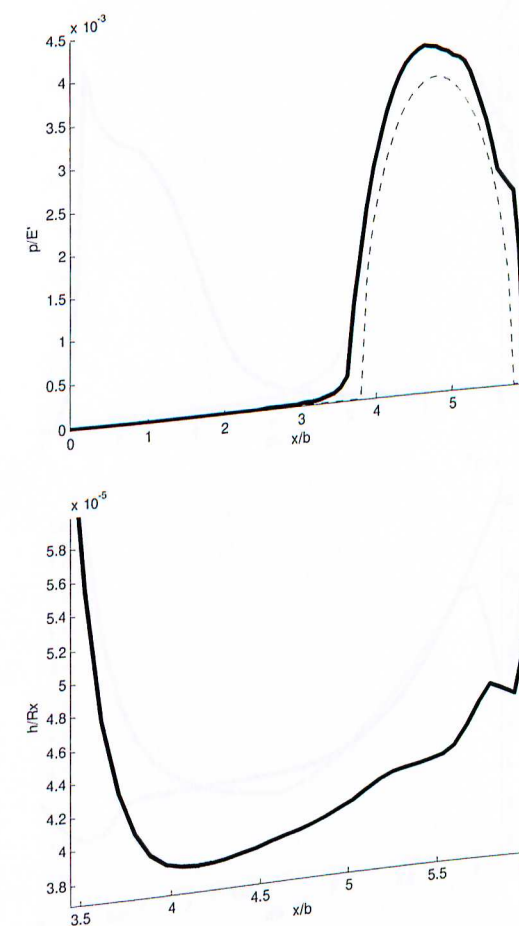
Figuras 5.23 e 5.24: pressão e filme para o caso 1k3



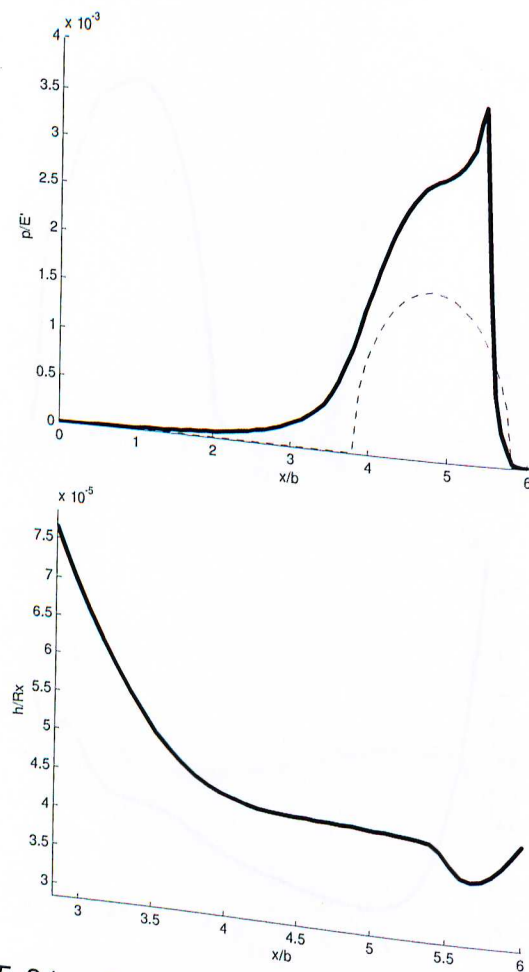
Figuras 5.25 e 5.26: pressão e filme para o caso 1k4



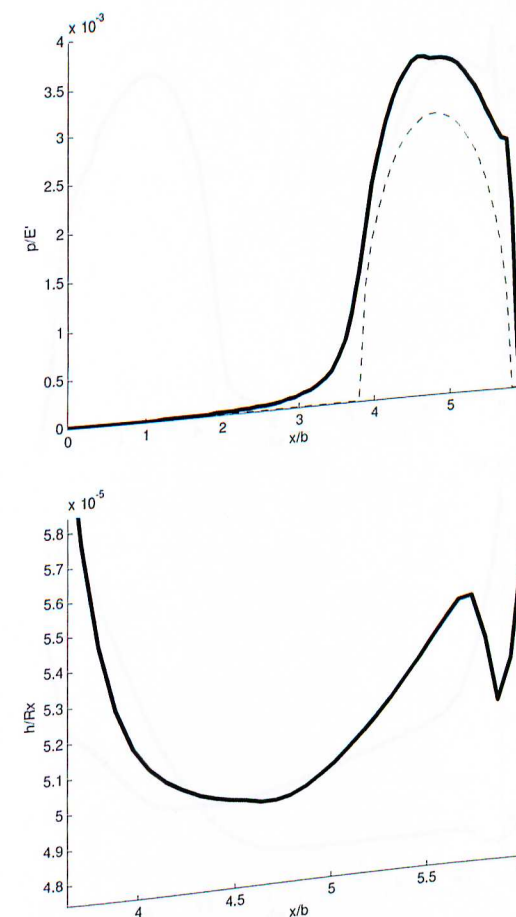
Figuras 5.27 e 5.28: pressão e filme para o caso 1k5



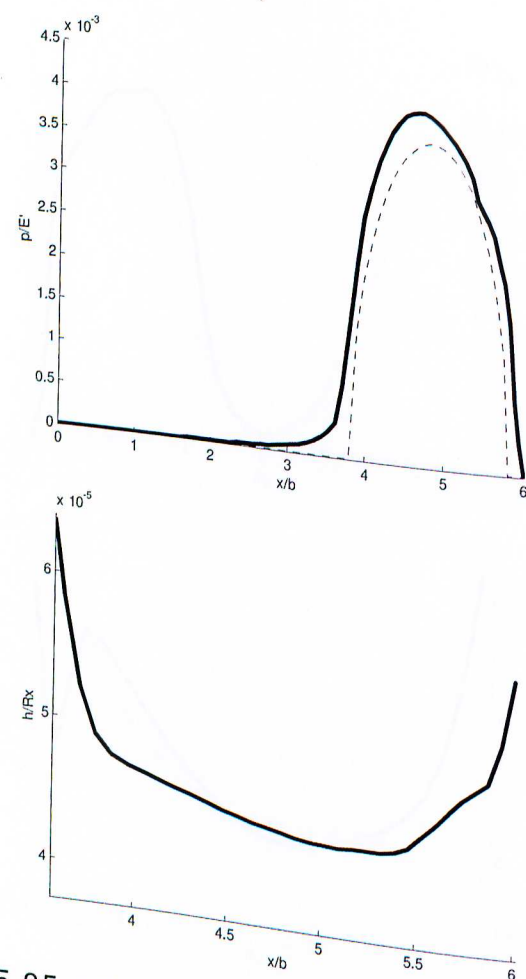
Figuras 5.29 e 5.30: pressão e filme para o caso 1k6



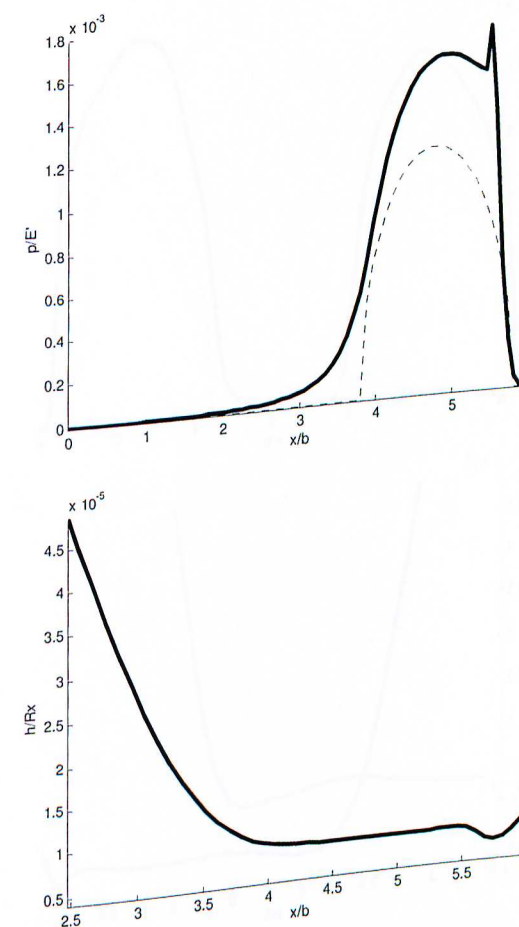
Figuras 5.31 e 5.32: pressão e filme para o caso 1k7



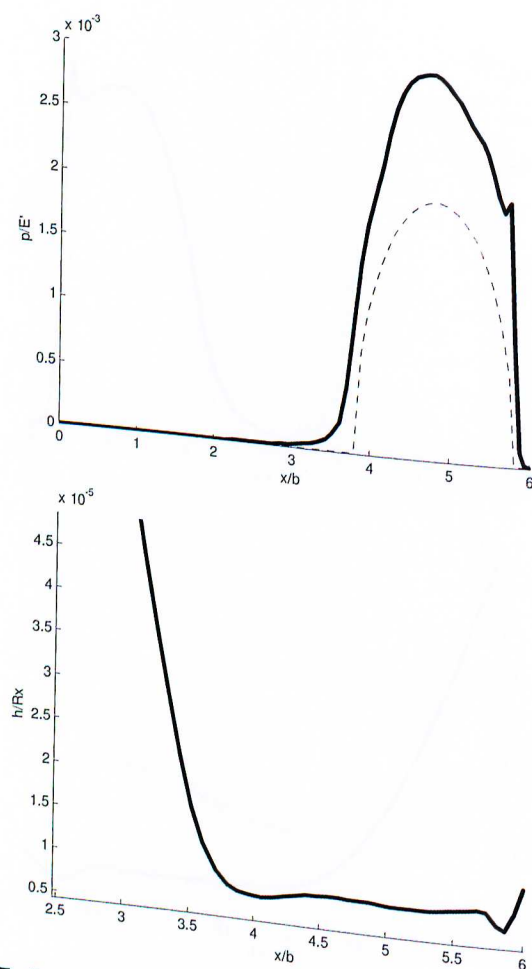
Figuras 5.33 e 5.34: pressão e filme para o caso 1k8



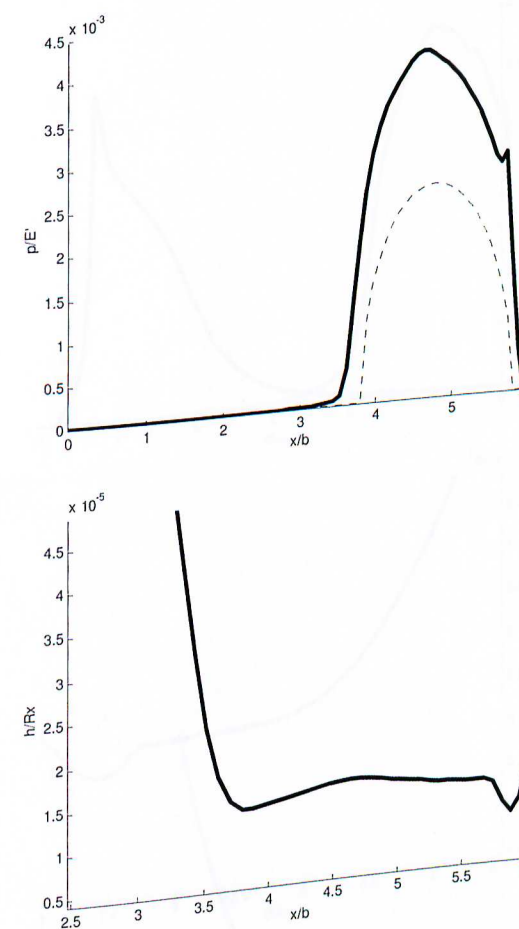
Figuras 5.35 e 5.36: pressão e filme para o caso 1k9



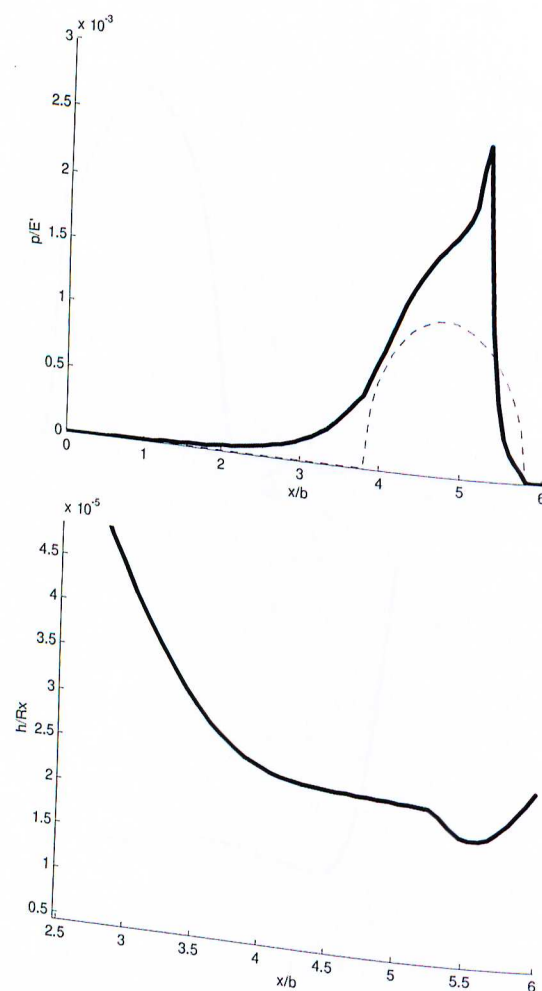
Figuras 5.37 e 5.38: pressão e filme para o caso 2k1



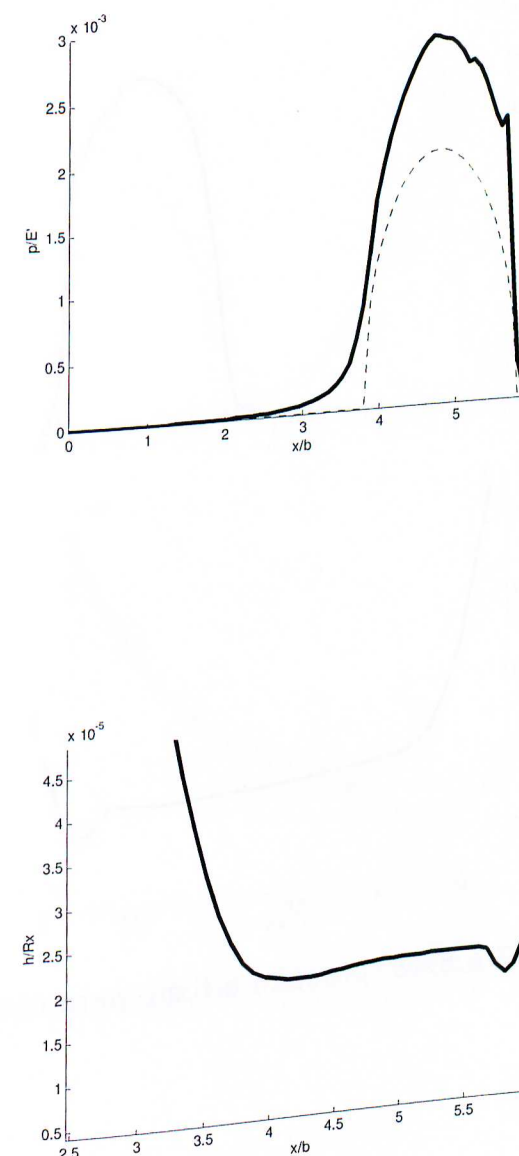
Figuras 5.39 e 5.40: pressão e filme para o caso 2k2



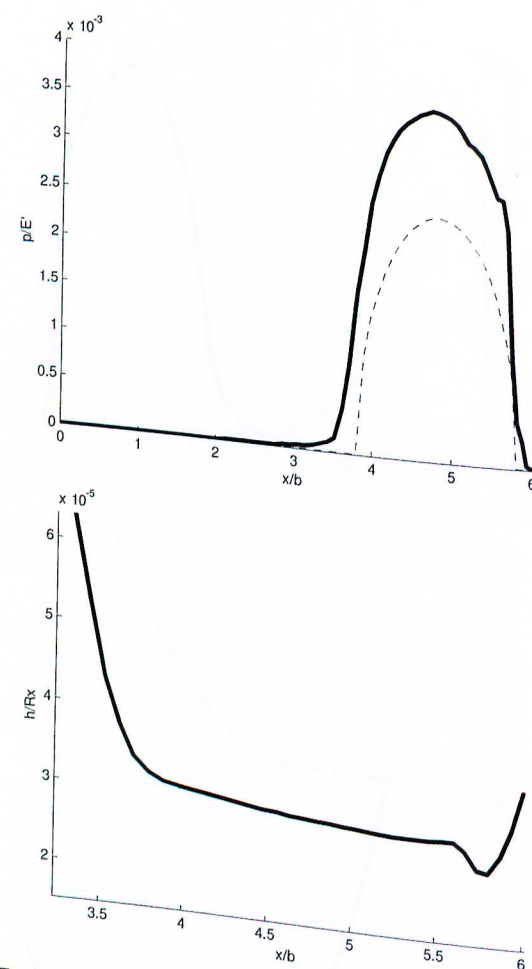
Figuras 5.41 e 5.42: pressão e filme para o caso 2k3



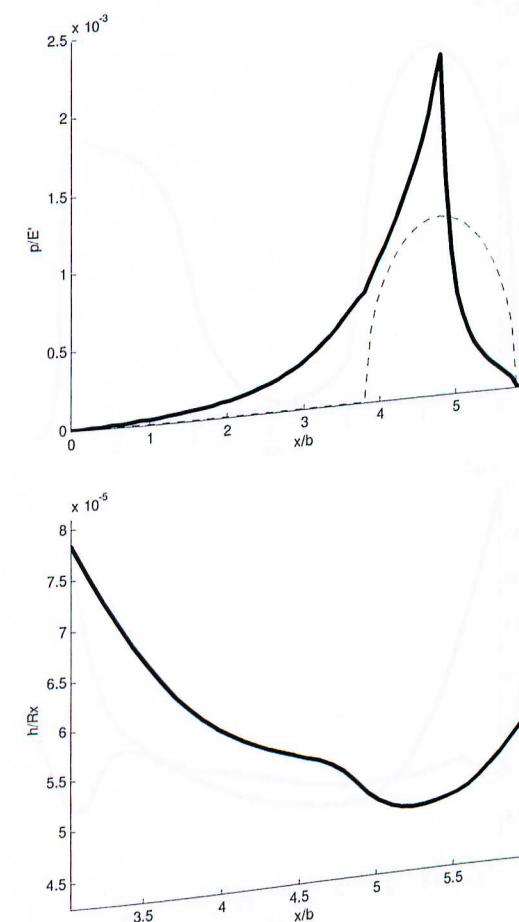
Figuras 5.43 e 5.44: pressão e filme para o caso 2k4



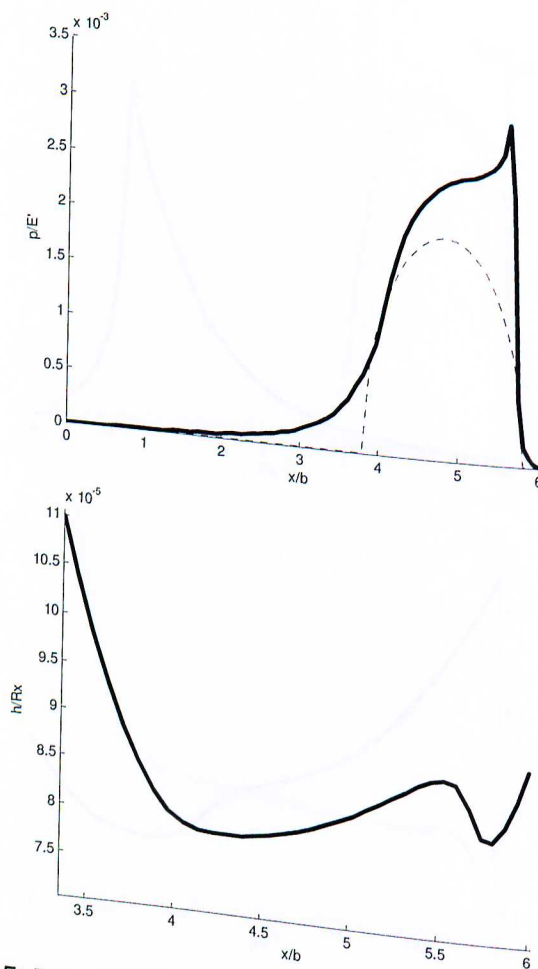
Figuras 5.45 e 5.46: pressão e filme para o caso 2k5



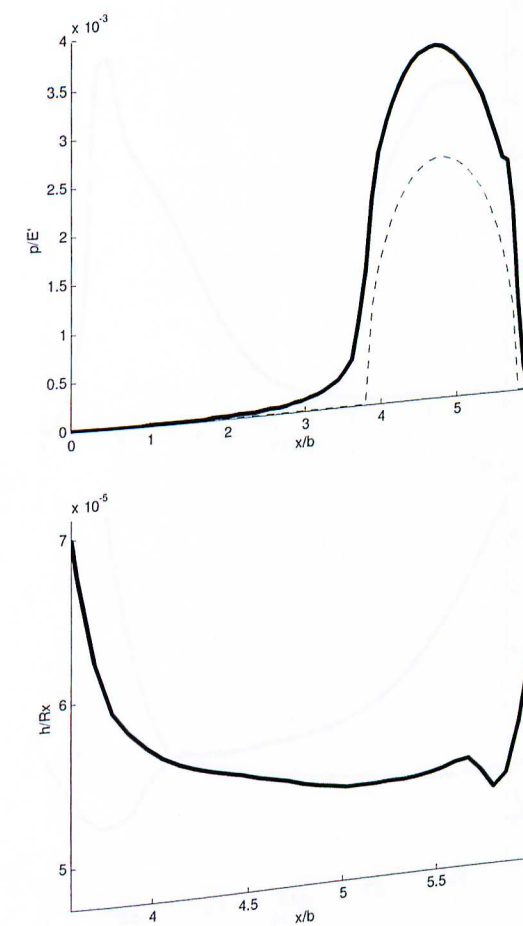
Figuras 5.47 e 5.48: pressão e filme para o caso 2k6



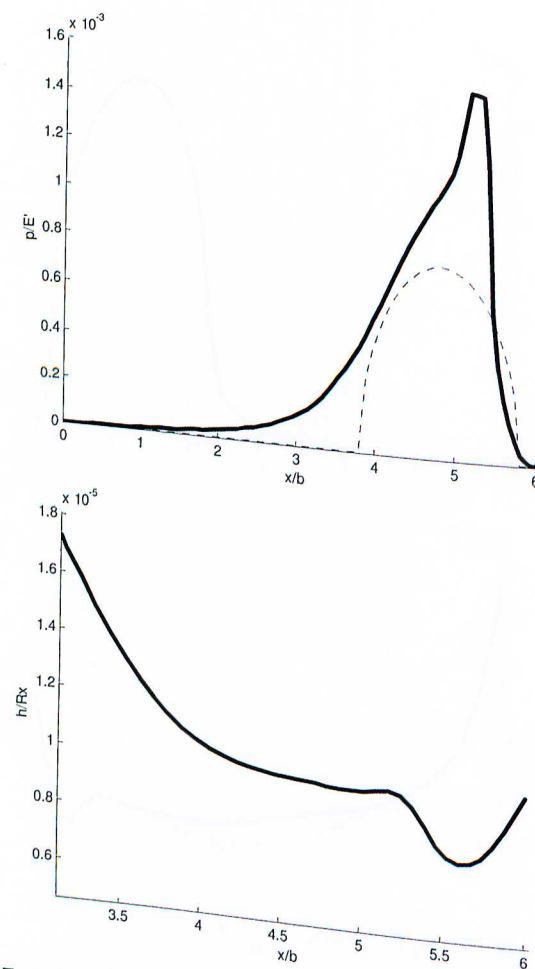
Figuras 5.49 e 5.50: pressão e filme para o caso 2k7



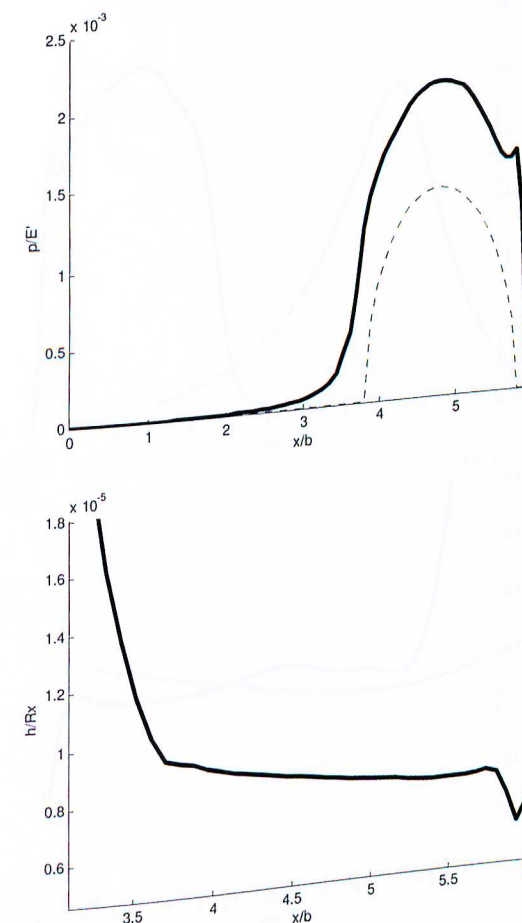
Figuras 5.51 e 5.52: pressão e filme para o caso 2k8



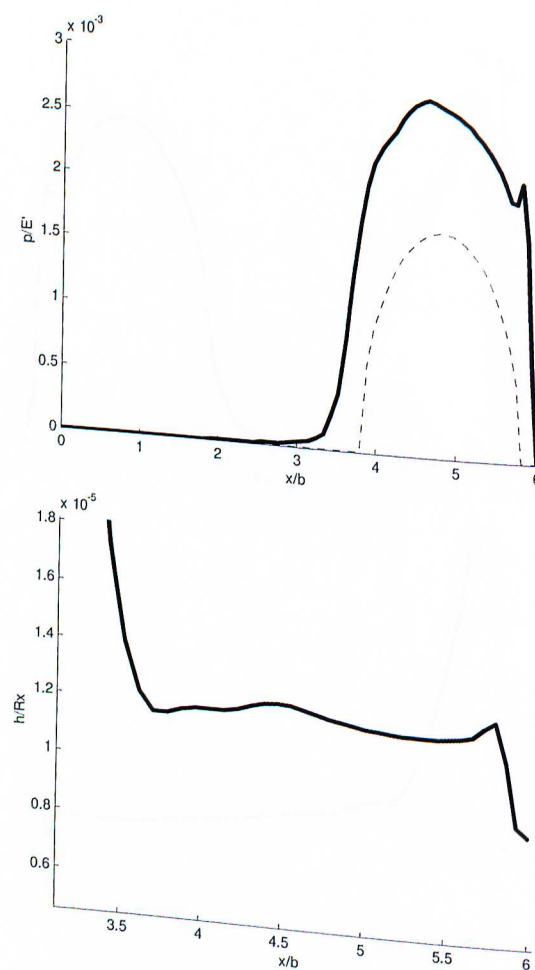
Figuras 5.53 e 5.54: pressão e filme para o caso 2k9



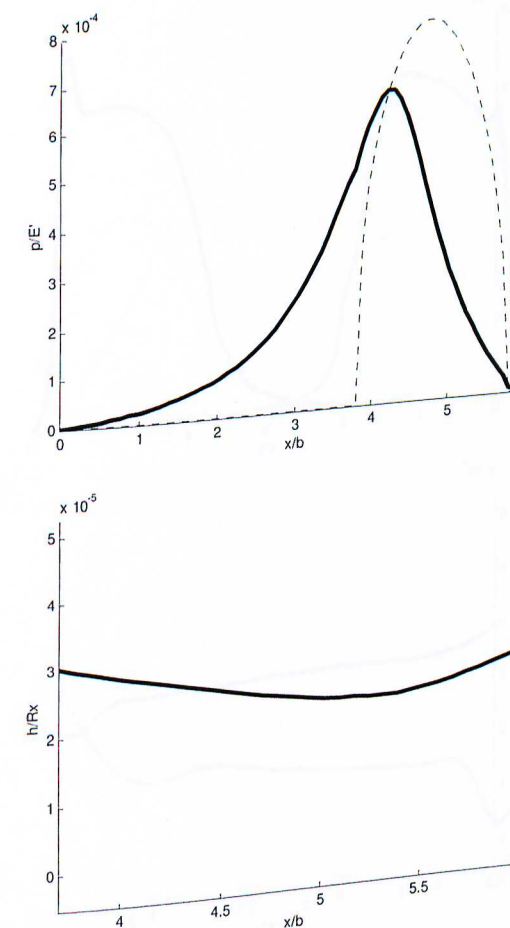
Figuras 5.55 e 5.56: pressão e filme para o caso 6k1



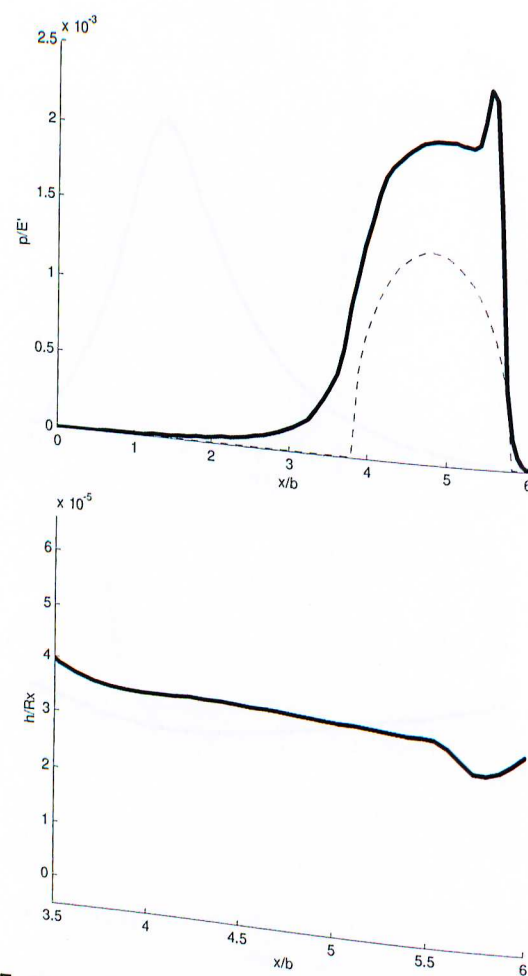
Figuras 5.57 e 5.58: pressão e filme para o caso 6k2



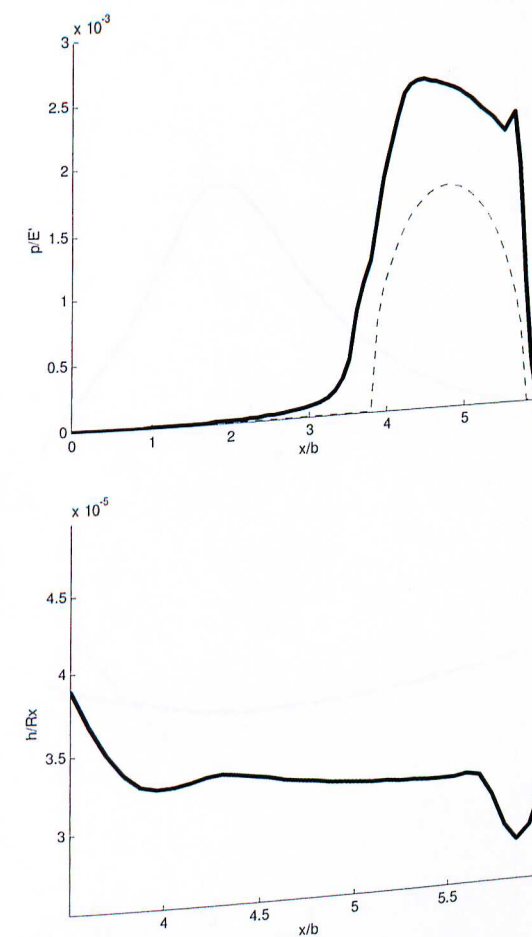
Figuras 5.59 e 5.60: pressão e filme para o caso 6k3



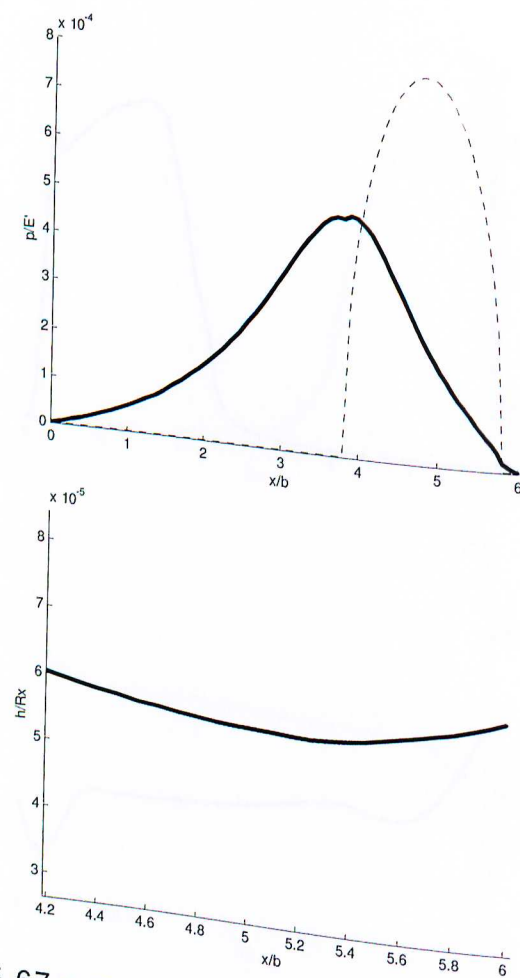
Figuras 5.61 e 5.62: pressão e filme para o caso 6k4



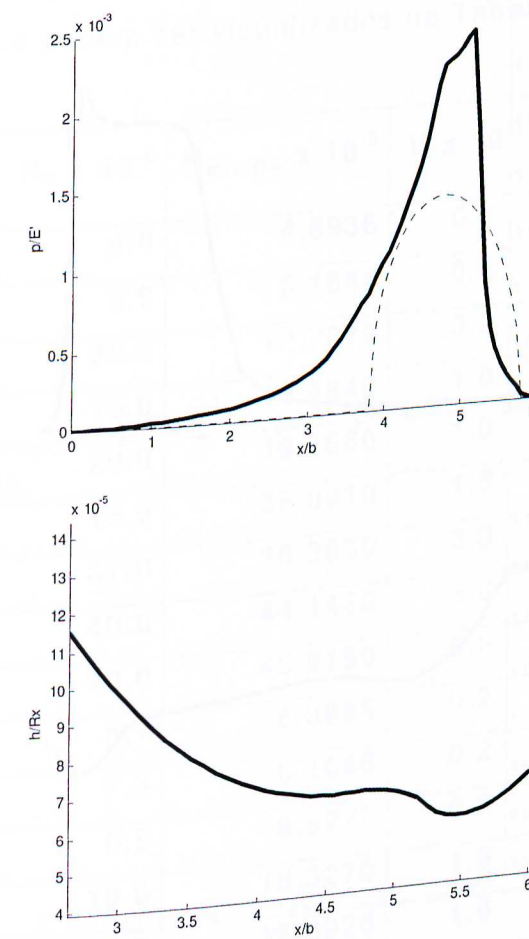
Figuras 5.63 e 5.64: pressão e filme para o caso 6k5



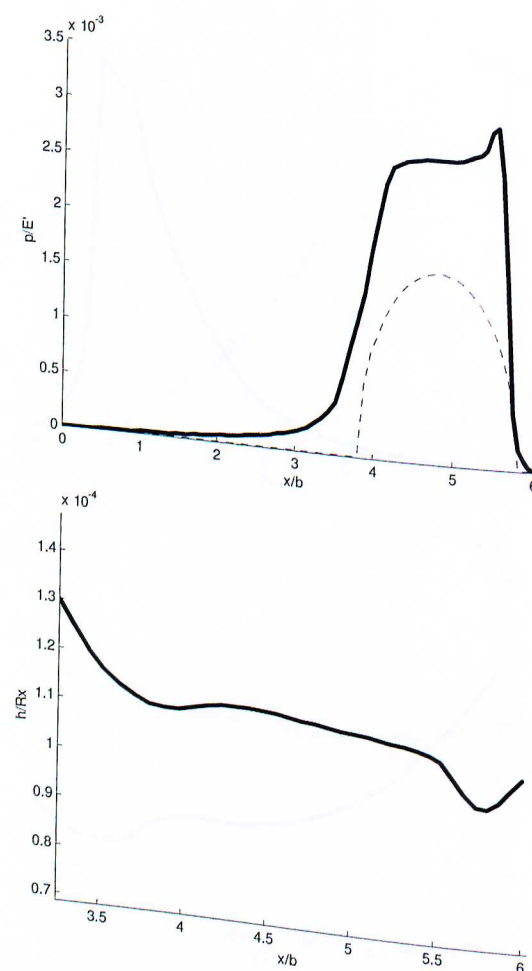
Figuras 5.65 e 5.66: pressão e filme para o caso 6k6



Figuras 5.67 e 5.68: pressão e filme para o caso 6k7



Figuras 5.69 e 5.70: pressão e filme para o caso 6k8



Figuras 5.71 e 5.72: pressão e filme para o caso 6k9

Alguns resultados numéricos de caráter geral dos casos definidos nas Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 podem ser visualizados na Tabela 5.5 abaixo.

| Caso | K | $H_0 \times 10^{-6}$ | $H_{\text{mínimo}} \times 10^{-6}$ | $U \times 10^{-11}$ | $W \times 10^{-6}$ | F/F_H |
|------|---|----------------------|------------------------------------|---------------------|--------------------|---------|
| 1k1 | 1 | 4.0 | 4.6936 | 0.2 | 0.1 | 1.0066 |
| 1k2 | 1 | 5.0 | 8.1644 | 0.2 | 0.5 | 0.9647 |
| 1k3 | 1 | 25.0 | 12.7070 | 0.2 | 1.0 | 1.1175 |
| 1k4 | 1 | 10.0 | 14.4840 | 1.0 | 0.1 | 1.0039 |
| 1k5 | 1 | 20.0 | 18.1660 | 1.0 | 0.5 | 0.9719 |
| 1k6 | 1 | 15.0 | 36.0910 | 1.0 | 1.0 | 1.0538 |
| 1k7 | 1 | 37.0 | 36.3030 | 5.0 | 0.1 | 1.0108 |
| 1k8 | 1 | 40.0 | 44.1460 | 5.0 | 0.5 | 0.9771 |
| 1k9 | 1 | 40.0 | 40.9150 | 5.0 | 1.0 | 0.9626 |
| 2k1 | 2 | 5.7 | 6.3985 | 0.2 | 0.1 | 1.0012 |
| 2k2 | 2 | 7.3 | 6.1645 | 0.2 | 0.5 | 1.0026 |
| 2k3 | 2 | 5.6 | 9.9275 | 0.2 | 1.0 | 1.1020 |
| 2k4 | 2 | 19.0 | 18.3270 | 1.0 | 0.1 | 0.9996 |
| 2k5 | 2 | 73.0 | 18.0920 | 1.0 | 0.5 | 1.0060 |
| 2k6 | 2 | 170.0 | 24.0610 | 1.0 | 1.0 | 0.9893 |
| 2k7 | 2 | 45.0 | 48.7050 | 5.0 | 0.1 | 1.0446 |
| 2k8 | 2 | 130.0 | 78.4560 | 5.0 | 0.5 | 0.9860 |
| 2k9 | 2 | 220.0 | 51.3510 | 5.0 | 1.0 | 1.0266 |
| 6k1 | 6 | 7.3 | 7.3219 | 0.2 | 0.1 | 0.9969 |
| 6k2 | 6 | 1.6 | 6.0397 | 0.2 | 0.5 | 0.9853 |
| 6k3 | 6 | 30.0 | 8.3876 | 0.2 | 1.0 | 1.0104 |
| 6k4 | 6 | 22.0 | 21.9940 | 1.0 | 0.1 | 1.0118 |
| 6k5 | 6 | 35.0 | 26.7660 | 1.0 | 0.5 | 1.0761 |
| 6k6 | 6 | 15.0 | 27.5880 | 1.0 | 1.0 | 0.9256 |
| 6k7 | 6 | 15.0 | 55.0070 | 5.0 | 0.1 | 1.2923 |
| 6k8 | 6 | 68.0 | 57.2840 | 5.0 | 0.5 | 0.9857 |
| 6k9 | 6 | 50.0 | 96.9620 | 5.0 | 1.0 | 1.0829 |

Tabela 5.5: Resultados gerais

Note-se que o valor inicial da altura de fluído (H_0) não é necessariamente o mesmo para cada caso. Isto é resultado de exaustivos testes onde se verificou grande sensibilidade do problema a esta variável o que poderia levar o código a convergir ou não.

Para contornar este problema, inicialmente cada caso foi rodado com $H_0 = 1 \times 10^{-5}$ e um número de iterações (i_{\max}) igual a 2000. Analisando-se então os resultados obtidos, especificamente o correspondente à altura mínima de fluído (H_{\min}), e tomando-se este valor para inicializar novamente H_0 , outros novos resultados podiam ser obtidos. Isto foi feito manualmente por 3 vezes em cada caso. Os resultados assim obtidos demostraram ser melhores porém, verificou-se que apesar dos valores finais de H_0 e H_{\min} serem próximos, o valor final de H_{\min} não era o mesmo, denotando a alta sensibilidade do problema em relação a este dado de entrada.

Outro fator estudado foi o do número mínimo de iterações para a convergência do código. Inicialmente foram aplicadas 1000 iterações com resultados aparentemente satisfatórios, mas, ao se efetuarem testes visando aumentar este número para 2000, 3000 (e em um caso extremo para 16000) iterações (demorando 8 horas num microprocessador de 900 MHz) verificou-se a natureza oscilatória dos resultados, ora acima da força ocasionada pelo contato seco (Hertziano) ora abaixo, mas sem apresentar um comportamento assintótico para uma determinada direção.

Outra tentativa de estabilizar o sistema foi a adoção de um fator de relaxação para o campo de pressão (α) bem pequeno (seção 4.1), o que contradiz totalmente o que foi feito por Hamrock e Dowson em 1981, posto que eles utilizaram-se do novo campo de pressão em sua íntegra ($\alpha = 1$). Com uma relaxação pequena ($\alpha \approx 0.0001$), obviamente que o número de iterações (i_{\max}) teve de ser aumentado porém, as oscilações dos resultados permaneceram.

Para aprofundar o conhecimento do problema estudado apresentaremos a seguir um estudo mais detalhado da influência dos diversos parâmetros na análise. Para isto serão superpostos os resultados gráficos de alguns dos casos estudados (Figuras 5.19 a 5.72). O estudo apresentado a seguir constará de três seções: a variação da geometria do contato (k), a variação da carga aplicada (W) e a variação da velocidade (U).

5.3.1 Variação da superfície de contato (k)

Para entender a influência de k lembremos que ele está relacionado à geometria do contato, indicando se a região sob análise apresenta características elípticas, esféricas ou cilíndricas. Observe-se que para $k = 6.0$, a área de contato pode ser considerada aproximadamente cilíndrica, para $k = 1.0$, o contato é esférico e para $k = 2.0$, tem-se um contato elíptico propriamente dito.

Para analisar os resultados em função de k , foram escolhidos os casos 1k5, 2k5 e 6k5, por representarem um caso médio em relação aos estudados e por verificar-se nos mesmos velocidade e carga constantes onde k é o único parâmetro que varia. Os gráficos correspondentes a estes casos foram superpostos e podem ser vistos nas Figuras 5.73 e 5.74 a seguir,

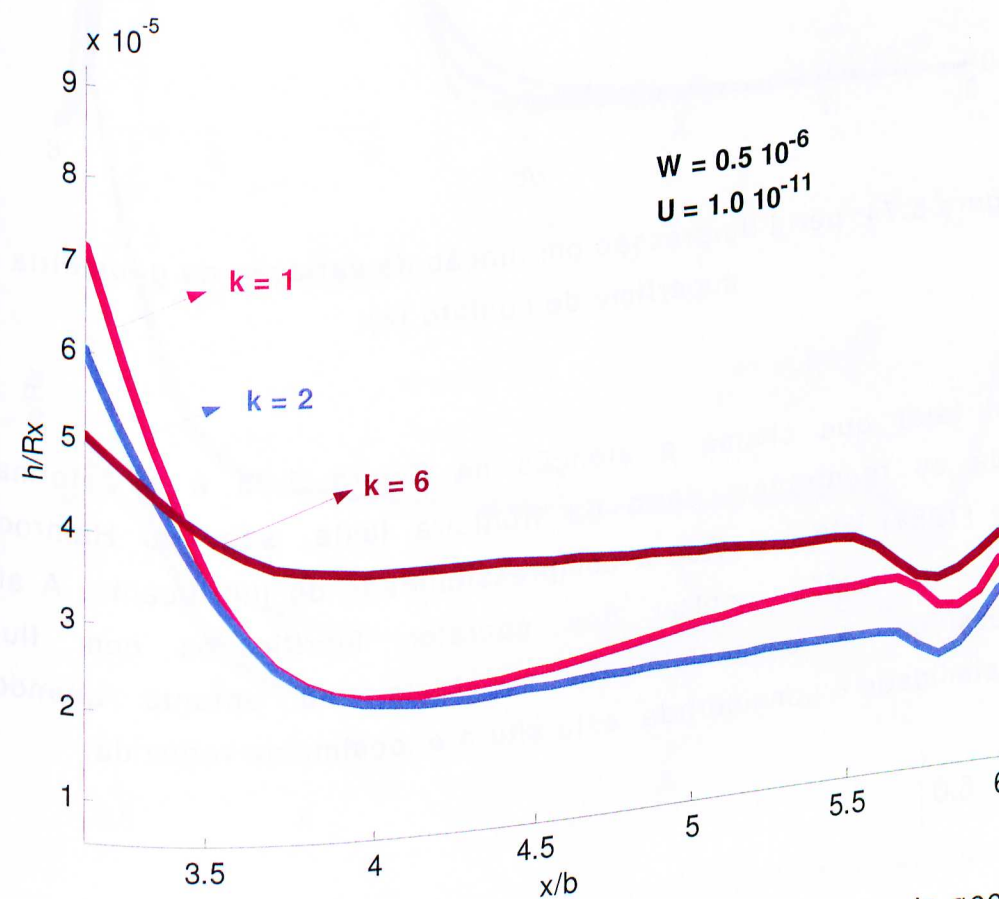


Figura 5.73: Deformação elástica em função da variação da geometria da superfície de contato (k).

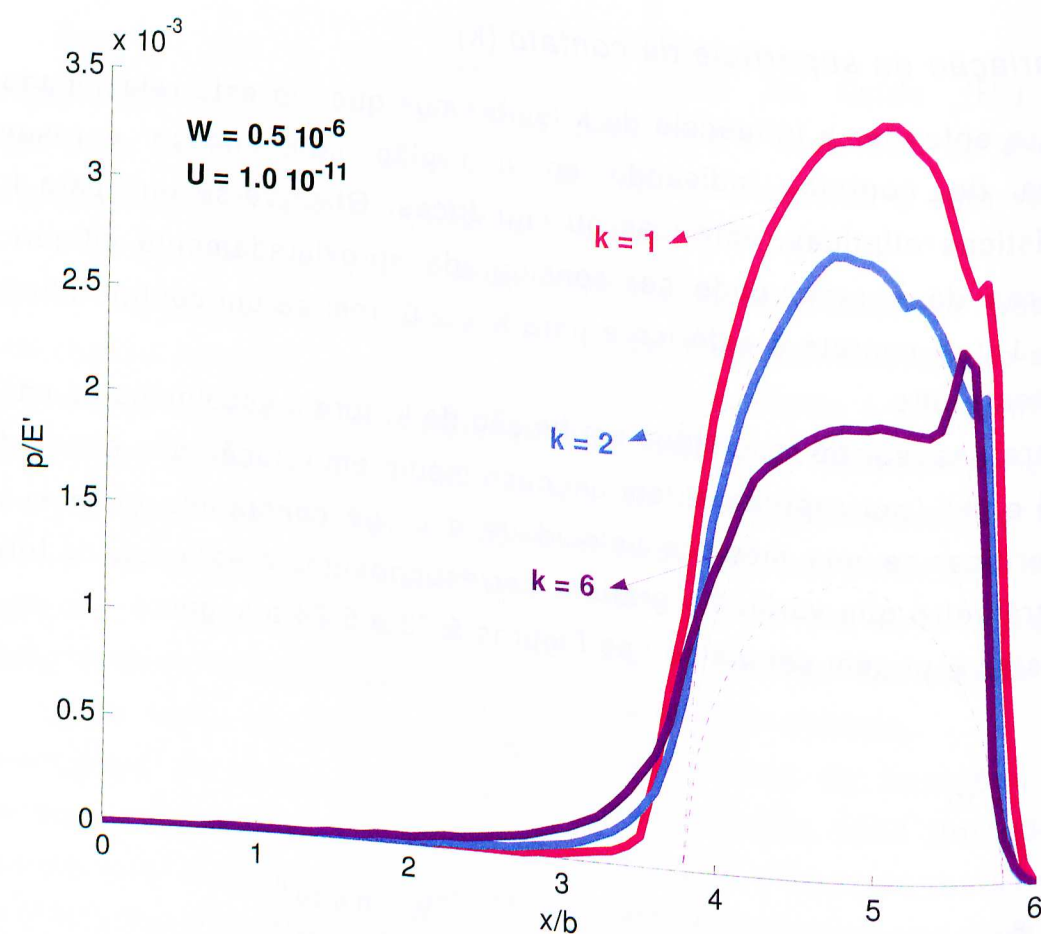


Figura 5.74: perfil da pressão em função da variação da geometria da superfície de contato (k).

Um fator que chama a atenção na Figura 5.73 é a deformação acentuada ou reentrância perto da fronteira leste, segundo Hamrock e Dowson (1981) isto é devido à compressibilidade do lubrificante. A altura do filme na região central dos contatos lubrificadas com fluídos incompressíveis é essencialmente constante, no entanto quando a compressibilidade é considerada, esta altura é localmente reduzida:

$$\left(5.5 \leq \frac{x}{b} \leq 6.0\right)$$

Sabe-se que relação entre pressão e área de contato é inversamente proporcional, e que para o menor k corresponde a menor área de contato, resultado que pode ser verificado no gráfico da Figura 5.74.

5.3.2 Variação da carga (W)

A variação do parâmetro adimensional W indica a variação da carga aplicada sobre os corpos em contato o que conduz a uma maior pressão e por consequência, uma maior deformação das superfícies.

Como feito na seção anterior, a superposição de resultados refere-se a um caso médio da variação dos parâmetros estudada. Fixando-se a geometria de contato ($k = 2$) e a velocidade do sólido ($U = 1.0 \cdot 10^{-11}$), a carga aplicada no corpo foi variada nos valores: $0.1 \cdot 10^{-6}$, $0.5 \cdot 10^{-6}$ e $1.0 \cdot 10^{-6}$, correspondendo aos casos 2k4, 2k5 e 2k6. Os perfis das diferentes pressões e deformações resultantes podem ser vistos nas figuras a seguir.

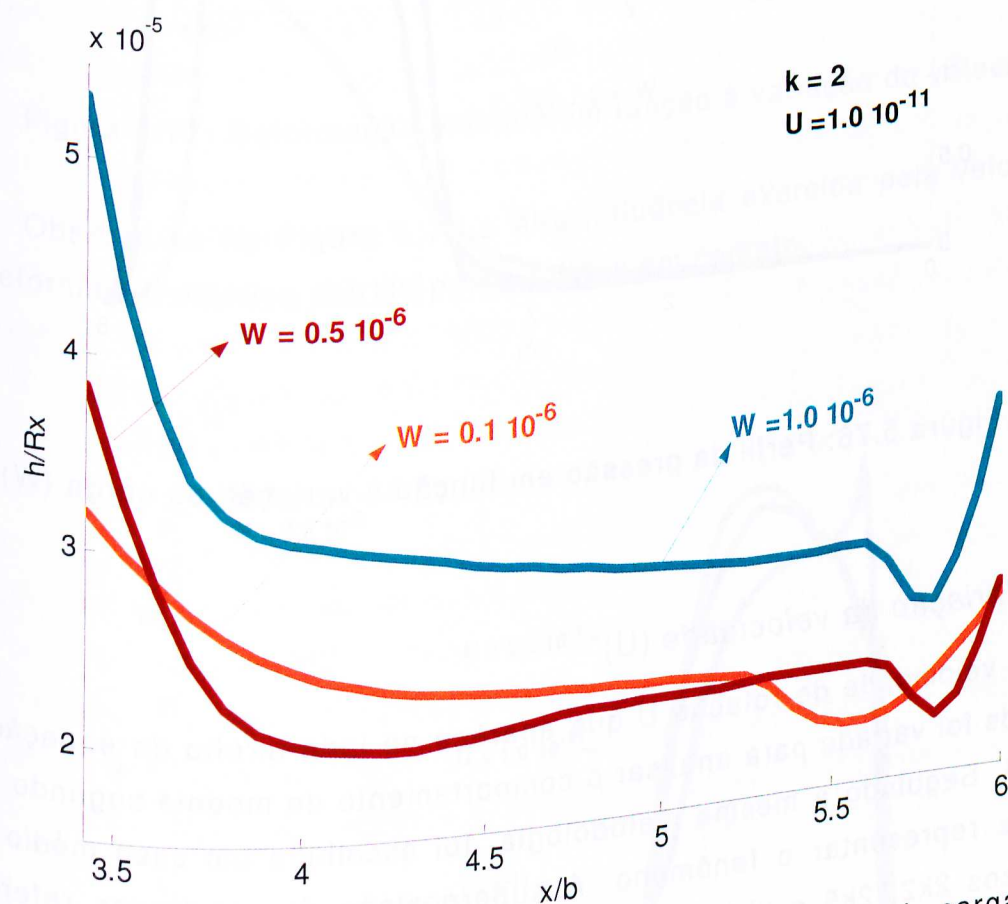


Figura 5.75: Deformação elástica em função à variação da carga (W)

Observe-se na seqüência (Figura 5.76) a coerência nos resultados, para cargas mais elevadas verifica-se o correspondente aumento do campo de pressão.

As pequenas oscilações que aparecem para as duas cargas maiores indicam que a convergência total ainda não foi obtida, sendo necessário um maior número de iterações para suavizar estas curvas.

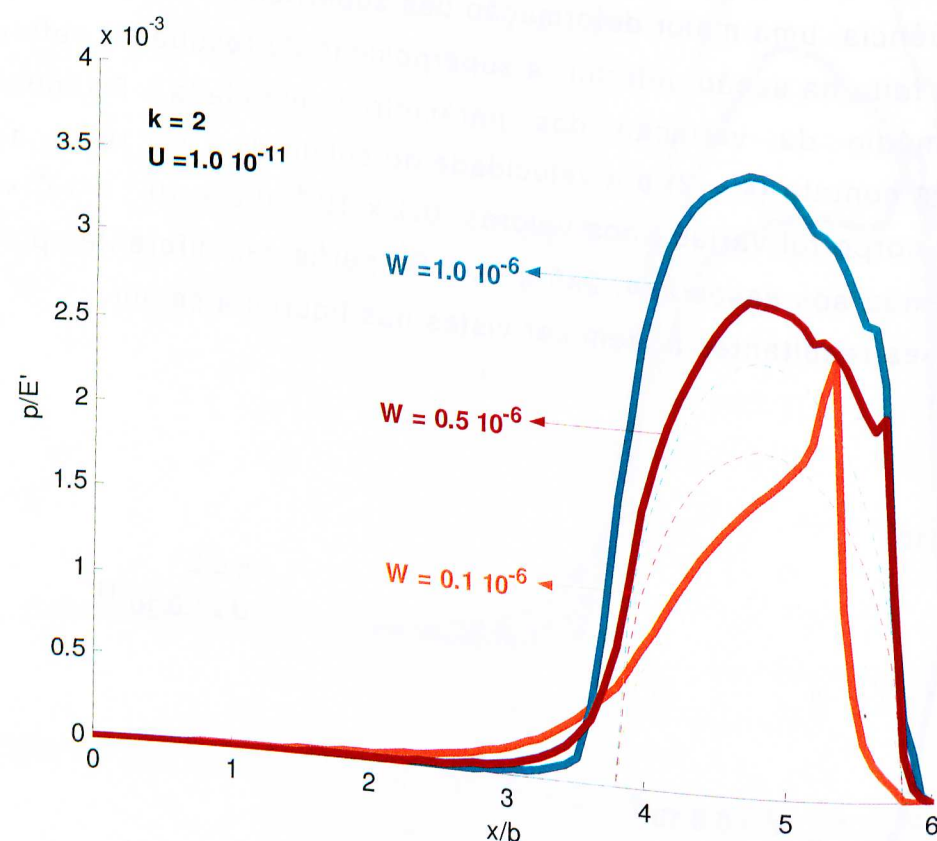


Figura 5.76: Perfil da pressão em função à variação da carga (W).

5.3.3 Variação da velocidade (U)

A velocidade de rotação U que aparece no lado direito da equação de Reynolds foi variada para analisar o comportamento do modelo segundo esta variável. Seguindo a mesma metodologia, foi escolhido um caso médio que pudesse representar o fenômeno. A superposição de resultados refere-se aos casos 2k2, 2k5 e 2k8 onde a geometria de contato ($k=2$) e a carga aplicada ($w = 0.5 \cdot 10^{-6}$) permanecem constantes e a velocidade é variada nos valores: $0.2 \cdot 10^{-11}$, $1.0 \cdot 10^{-11}$ e $5.0 \cdot 10^{-11}$.

Os perfis das diferentes pressões e deformações resultantes da variação da velocidade podem ser vistos nas figuras a seguir.

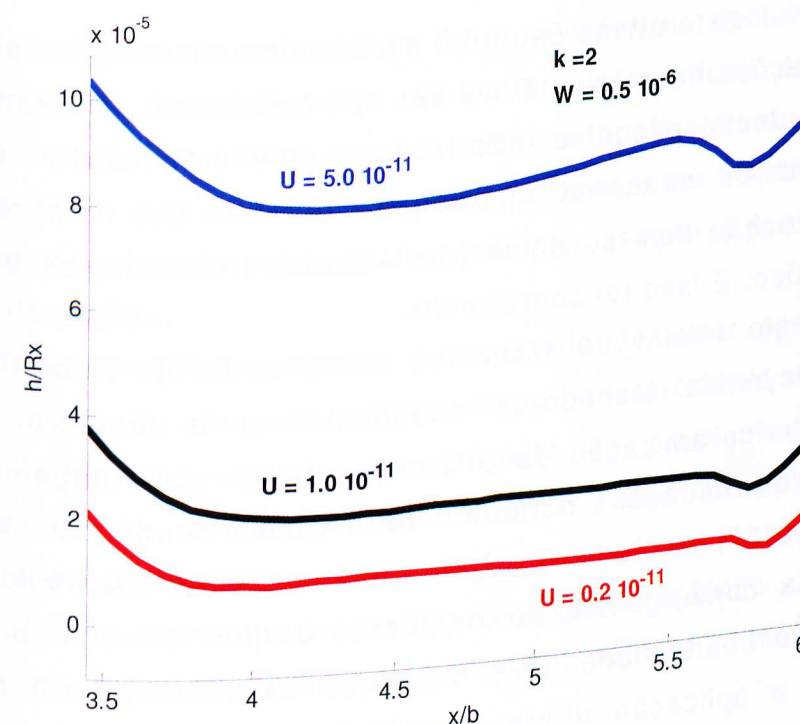


Figura 5.77: Deformação elástica em função à variação da velocidade.

Observa-se na Figura 5.77 a alta influência exercida pela velocidade na deformação elástica sofrida pelos sólidos em contato.

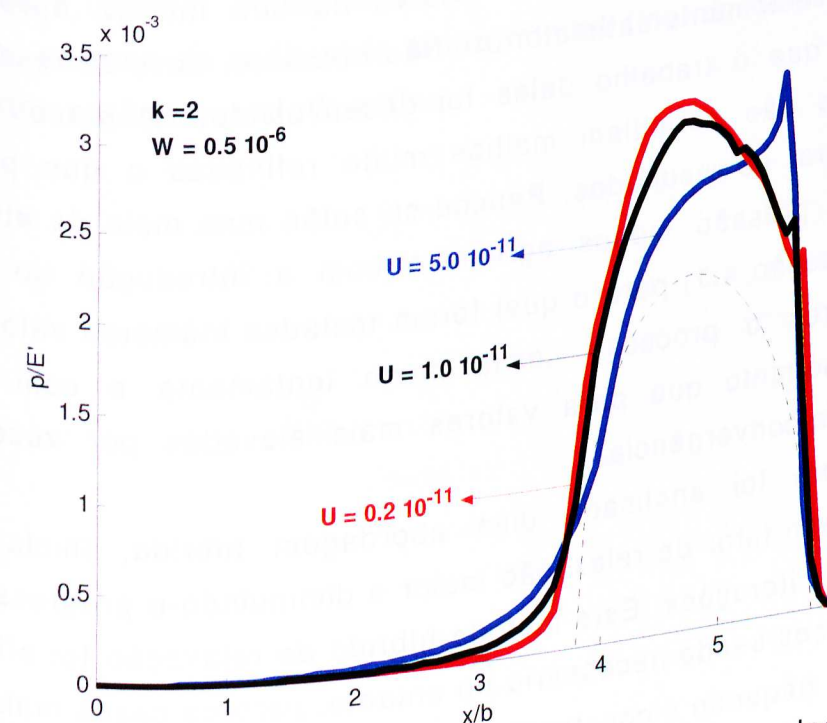


Figura 5.78: Perfil da pressão em função à variação da velocidade (U).

Para concluir este último capítulo, serão retomados alguns pontos que merecem explicações adicionais. Deve ser oportunamente esclarecido que o objetivo maior desta pesquisa não requer uma finalização repleta de discussões acerca de um ou outro paradigma, uma vez que a conclusão está centrada na obtenção bem sucedida (ou tentativa frustrada) de um modelo eficaz e econômico. E isso foi conseguido.

Num estágio inicial do trabalho, procedeu-se à discretização da equação de Reynolds fazendo-se analiticamente a primeira derivação indicada e posterior aplicação de diferenças finitas (abordagem 2, seção 4.3). Os primeiros resultados obtidos confirmaram a tendência mencionada por Patankar (1980) desta abordagem produzir altas instabilidades que comprometiam a convergência do processo, o que fez com o que esta abordagem fosse abandonada. Com a adoção da abordagem 1 da mesma seção, isto é, a aplicação direta das diferenças finitas na equação de Reynolds, foram contornados estes primeiros problemas de convergência. No entanto, devido à alta não-linearidade do problema, instabilidades ainda podiam ser verificadas com grandes oscilações no campo das pressões, ora muito além ora muito aquém da pressão Hertziana correspondente.

Para a atualização do campo da pressão a cada iteração, Hamrock e Downson (1981) usaram os novos valores na sua íntegra apresentando resultados aparentemente satisfatórios. Não obstante, deve-se ressaltar que na época em que o trabalho deles foi desenvolvido, os poucos recursos computacionais não permitiam malhas muito refinadas o que por vezes poderia mascarar os resultados. Pensou-se então num meio de atualização do campo da pressão menos agressivo com a introdução do fator de relaxação α (seção 4.1) para o qual foram testados inúmeros valores. Para valores menores o processo corria muito lentamente e com menores oscilações, enquanto que para valores mais elevados por vezes via-se comprometida a convergência.

Finalmente foi analisada uma abordagem híbrida, iniciando-se o processo com um fator de relaxação maior e diminuindo-o progressivamente no decorrer das iterações. Este método híbrido de relaxação foi eficiente na maioria dos casos sendo necessário no entanto, para os casos mais críticos, o uso de um α pequeno e constante.

Outro fator que gerou dificuldades foi a influência do valor de H_0 (seção 4.6). Inicialmente foi estipulado um valor fixo, retirado da bibliografia,

para a altura inicial da película de fluído. Porém, no decorrer das análises foram detectadas instabilidades aliadas ao valor inicial deste parâmetro. Começava então mais uma exaustiva busca, a localização de um valor inicial apropriado que não desestabilizasse o processo. Optou-se por uma atualização iterativa do valor deste parâmetro (seção 4.6) que aumentou a eficiência do código.

Como consequência desta, dependendo do valor de inicialização e apesar do ajuste da altura de lubrificante, a cada processo eram verificados resultados diferentes, a alta sensibilidade do problema apresentava-se novamente. Numa tentativa de contornar este problema, adotou-se inicialmente um determinado valor para H_0 iniciando-se o processo que era e uma vez colhidos os resultados, mediante a observação do valor final de H_0 , este valor era inserido novamente no código para o reinício do processo, evitando-se assim bruscas oscilações.

Em relação à variação dos parâmetros estudada na seção 5.3, alguns resultados ficaram com suas decifrações pendentes. O campo da pressão apresentou resultados coerentes em relação à variação da carga (W) e à variação da geometria do contato (k), mormente que quanto à variação da velocidade (U), os resultados obtidos não apresentaram nenhuma regra fixa que pudesse definir o comportamento da questão, sendo ainda mais distorcidos na fase de análise da altura mínima final de fluído em função da variação dos parâmetros U , W e k .

CONCLUSÃO

Em concordância com o objetivo geral decorrente da questão formulada, este trabalho simulou numericamente, sob condições isotérmicas, os contatos elípticos com Lubrificação Elasto-Hidrodinâmica (EHD), tendo sido adotada a discretização, com vistas ao emprego do método das diferenças finitas associado à técnica de Multi Grelha (MG) para acelerar a convergência do processo.

A característica altamente pontual do problema, com grandes gradientes de pressão, exigiu um minucioso estudo das malhas que melhor se adaptassem à EHD. Deviam ser satisfeitas simultaneamente as equações de Reynolds, a relação entre a viscosidade e a pressão e as equações da elasticidade. Os campos de pressão exigiam uma malha extremamente refinada na região do contato e, se a mesma fosse feita com um número grande de pontos distribuídos regularmente, inviabilizaria o projeto pelo elevado custo de processamento.

Com a utilização de duas malhas, uma regular e a outra irregular, este problema foi contornado. O emprego da técnica de Multi Grelha com malhas irregulares num sistema altamente não-linear provou ser rápida, precisa e eficiente sendo uma das contribuições específicas deste trabalho.

Como consequência dos resultados obtidos pode-se também conjecturar que as oscilações do problema não são propriamente resultados de imperfeições do modelo, mas sim, um reflexo da realidade física subjacente, o comportamento caótico do sistema, concluindo-se que o problema não foi totalmente dominado.

Como opções de continuidade e aprofundamento do tema podem ser considerados a adoção do modelo dinâmico e a aplicação de uma técnica inversa. O modelo dinâmico consistiria em utilizar a equação de Reynolds (equação 3.34) no seu modo transiente, isto é, considerar a evolução temporal do sistema. A técnica inversa sugerida refere-se a calcular inicialmente a deformação e altura da película para posteriormente calcular a pressão correspondente a essa deformação, o que representa o oposto do que foi desenvolvido neste trabalho.

Há de se convir que a solução da EHD ainda representa um grande desafio numérico devido às instabilidades do processo, à não-linearidade decorrente principalmente pela dependência exponencial da viscosidade com a pressão e à observação de resultados por vezes contrários aos esperados. Em que pese esta assertiva, as soluções fornecem subsídios para o estudo e a prática da lubrificação elasto-hidrodinâmica seja em mancais de rolamento ou em aplicações outras exógenas dos elementos de máquinas, admitindo-se até aplicações na área biomédica com relação aos mecanismos de articulação mecânica de implantes ósseos.

Entretanto, o desenvolvimento de modelos para os problemas de contato conforme ainda não estão próximos de prover soluções práticas para aplicações importantes, mesmo existindo modelos computacionais extremamente sofisticados, como o *datamining*. A lubrificação elasto-hidrodinâmica é um tópico de pesquisa que, apesar de extremamente relevante para o desenvolvimento tecnológico de máquinas rotativas velozes, leves e eficientes, ainda necessita de muitos avanços para seu amadurecimento e consolidação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETT, R.; BERRY, M.; CHAN, T. F.; DEMMEL, J.; DONATO, J.; DONGARRA, J.; EUJKHOUT, V.; POZO, R.; ROMINE, C.; VAN DER VORST, H. **Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods**, 2.ed. Philadelphia: SIAM, 1994.

BARUS, C. Isotherms, Isopiestic, and Isometrics Relative to Viscosity. **Am. J. Sci.** v. 45, p. 87-96, 1893.

BISWAS, S.; SNIDLE, R. W. Elastohydrodynamic Lubrication of Apherical Surfaces of Low Elastic Modulus. **J. Lubr. Technol.** v. 98, n. 4, p. 525-529, 1976.

BITTENCOURT, M. L. **Métodos Iterativos e Multigrid adaptáveis em malhas não estruturadas**. 1996. Tese de Doutorado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BRIGGS, W. L. **A Multigrid Tutorial**, Philadelphia: Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

BREWE, D. E.; HAMROCK, B. J. Simplified Solution for Elliptical - Contact Defromation between Two Elastic Solids. **J. Lubr. Technol.** v. 99, n. 4, p. 85-487, 1977.

CAMERON, A. **The Principles of Lubrication**. New York: Wiley, 1966.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. A. Numerical Solution of to the Elastohydrodynamic Problem. **J. Mech. Eng. Sci.** v.1, pp. 6-15, 1959.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. **Elastohydrodynamic Lubrication: the Fundamentals of Roller and Gear Lubrication**. Oxford: Pergamon, 1966.

GRUBIN, A. N.; VENOGADOVA, I. E. **Investigation of the Contact of Machine Components**. Department of Scientific and Industrial Research, Great Britain, 1949.

HAMROCK, B. J.; ANDERSON, W. J. Analysis of an Arched Outer-Race Ball Bearing Considering Centrifugal Forces. **J. Lubr. Technol.** 1973.

HAMROCK, B. J.; DOWSON, D. **Ball Bearing Lubrication** - The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts. New York: John Wiley & Sons Inc. 1981.

HARRIS, T. A. **Rolling Bearing Analysis**. New York: John Wiley & Sons Inc., 1966.

HERTZ, H. The Contact of Elastic Solids. **J. Reine Angew. Math.** v. 92, p. 156-171, 1881.

JANG, S.; TICHI, J. Reological Models for Thin Film EHL Contacts. **Journal of Tribology.** v. 117, 1995.

KAPITZA, P. L. The Hydrodynamic Theory of Lubrication in Presence of Rolling. **Zhurnal Tecknicheskoi Fisiki.** v. 25, 1955.

LEBRÓN, S. C.; RIBEIRO, C. R. **Método de multi grelha na resolução de sistemas lineares de grande porte com aplicação em dinâmica de fluídos**. In: Seminário do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2000, Uberlândia. IV POSMEC, 2000. v. único. p. 181-186.

LEPIKULT, T. **Jacob's and Gauss-Seidel Method**. Disponível em: <http://www.cs.ut.ee/~toomas_l/linalg/lin2/node32.html>. Acesso em: 13 jan. 2001.

MARTIN, H. M. Lubrication of Gear Teeth. London, **Engineering**, v. 102, p. 119-121, 1916.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica de Fluidos Computacional**. 1.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de Pesquisa: Análise e interpretação de dados**. São Paulo: Atlas, 1996.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. 1. ed. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes in C**. 2.ed. New York: Cambridge University Press, 1992.

ROELANDS, C. J. A. Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils, **Druk. V. R. B.**, Groningen, Netherlands, 1966.

RUEDE, U. **The Multigrid Workbench: Cycling strategies**. Disponível em: <http://www.mgnet/tutorials/xwb/cycles.html>. Acesso em: 23 jan. 2001.

SHEWCHUK, J. R. **An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without Agonizing Pain**. Pittsburg: Carnegie Mellon University, 1996.

SMEETH, M.; SPIKES, H. A. Central and Minimum Elastohydrodynamic Film Thickness at High Contact Pressure. **Journal of Tribology**, v. 119/291, 1997.

TIMOSHENKO, S; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 2. ed., New York: McGraw-Hill, 1951.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**. New York: McGraw Hill, 1984.

VENNER, C. H. Higher-Order Multilevel Solvers for the EHL Line and Point Contact Problem. **Journal of Tribology**, v. 116/741, 1994