

Roger Victor Rodrigues

**Estudo e desenvolvimento numérico
do projeto de um gerador elétrico
acionado por motor a pistão livre**

Uberlândia - MG

2019

Roger Victor Rodrigues

**Estudo e desenvolvimento numérico
do projeto de um gerador elétrico
acionado por motor a pistão livre**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de Concentração: Vibração e Resistência dos Materiais.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Braga dos Santos

Coorientador: Prof. Dr. Solidônio Rodrigues de Carvalho

Uberlândia - MG

2019

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R696
2020 Rodrigues, Roger Victor, 1989-
 Estudo e desenvolvimento numérico do projeto de um gerador
 elétrico acionado por motor a pistão livre [recurso eletrônico] /
 Roger Victor Rodrigues. - 2020.

 Orientador: Marcelo Braga dos Santos.
 Coorientador: Solidônio Rodrigues de Carvalho.
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
 Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
 Modo de acesso: Internet.
 Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.48>
 Inclui bibliografia.
 Inclui ilustrações.

 1. Engenharia mecânica. I. Santos, Marcelo Braga dos, 1974-,
 (Orient.). II. Carvalho, Solidônio Rodrigues de, 1978-, (Coorient.).
 III. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
 Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 559, COPEM				
Data:	20/02/2020	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	[16:15]
Matrícula do Discente:	11812EMC015				
Nome do Discente:	Roger Victor Rodrigues				
Título do Trabalho:	Estudo e Desenvolvimento Numérico do Projeto de um Gerador Elétrico acionado por Motor a Pistão Livre				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Projetos de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se na Sala 1M206 - Bloco 1M, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Solidônio Rodrigues de Carvalho (co-orientador) - FEMEC/UFU; Francisco José de Souza - FEMEC/UFU; Antonio Carlos Ferreira - UFRJ e Marcelo Braga dos Santos orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). Marcelo Braga dos Santos, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado(a).

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Braga dos Santos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2020, às 16:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Carlos Ferreira, Usuário Externo**, em 20/02/2020, às 16:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Solidonio Rodrigues de Carvalho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2020, às 16:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2020, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1870081** e o código CRC **79B98CA3**.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Braga dos Santos, pelo encorajamento e constantes apoio e orientação. Também agradeço ao Prof. Dr. Solidônio Rodrigues de Carvalho, co-orientador deste trabalho, pelo suporte dado.

Agradecimentos especiais são aos meus pais, Edson Fernando Rodrigues e Rosângela Cristina Cunha, que foram a base para a concretização deste trabalho. Estas páginas são a materialização dos anos de esforços de vocês, desdobrados em cuidados sobre mim, e que certamente nunca conseguirei agradecer adequadamente.

Agradeço ainda a outros dois pilares de minha vida, Louise Fernanda Rodrigues França e Ana Cecília Rios Porfírio Ferreira, irmã e esposa, pois me proporcionaram as luzes e momentos de alegria que me ofereceram repouso na jornada difícil.

A todos os meus familiares e amigos que também agradeço, pelo companherismo apesar da distância.

À UFU e à Faculdade de Engenharia Mecânica por possibilitarem a minha formação.

Aos órgão de fomento CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

As imposições dos órgãos governamentais que restringem os níveis de emissões de poluentes sobre o mercado têm impulsionado buscas por alternativas mais eficientes aos equipamentos geradores convencionais, principalmente aqueles cuja fonte de energia são os combustíveis fósseis. Dentre essas alternativas, observa-se o motor de pistão livre, conceito que apesar de perder popularidade na década de 60 do século passado, tem atraído a atenção de diversos centros de pesquisas nos últimos vinte anos. As suas características como maiores eficiência e compactabilidade, simplicidade e manutenção facilitada, além da possibilidade de operar com taxa de compressão variável, justificam o esforço da comunidade científica em torno deste equipamento. Denomina-se por Moto-Geradores de Pistão Livre o conjunto motor de pistão livre e gerador elétrico linear, cuja aplicação em veículos automotivos híbridos ou como central de geração de energia elétrica é amplamente discutida. O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático e numérico de um Moto-Gerador de Pistão Livre com o qual é possível projetá-lo e otimizá-lo. Diferentemente dos modelos disponíveis na literatura, o modelo desenvolvido deve abranger o acoplamento existente entre o motor de pistão livre e o gerador elétrico de tal forma que as dimensões e os parâmetros do equipamento elétrico também sejam variáveis disponíveis ao usuário do modelo. Para que o objetivo seja atingido, um modelo do gerador elétrico linear de ímãs permanentes é desenvolvido recorrendo-se a um método semi-analítico, denominado Método dos Subdomínios, para estimativa da distribuição do campo magnético no interior da máquina. Os resultados deste modelo foram validados e comparados com um modelo baseado no Método dos Elementos Finitos, e estes destacaram as vantagens da técnica escolhida, a saber: o baixo custo computacional e os baixos valores de erro em relação ao modelo de referência. Para representar os fenômenos termodinâmicos presentes no motor de pistão livre, um modelo termodinâmico adimensional é derivado a partir da Primeira Lei da Termodinâmica associada a simplificações inerentes à teoria dos gases ideais. O modelo desenvolvido foi validado por comparação com um modelo mais sofisticado, denominado *Homogeneous Two-Zone Finite Release Cycle*. O acoplamento entre os modelos eletromagnético e termodinâmico, delimitados ao gerador elétrico e ao motor, respectivamente, é feito através de um modelo dinâmico derivado a partir da Segunda Lei de Newton, com o qual o objetivo do trabalho é atingido. Para demonstrar a potencialidade do modelo obtido, uma série de análises paramétricas é realizada a fim de entender superficialmente as relações existentes entre as diversas variáveis que compõem o modelo. Por fim, com as lições aprendidas através das análises, um procedimento para o projeto de um Moto-Gerador Linear utilizando o modelo desenvolvido é proposto.

Palavras-chave: Motor de Pistão Livre, Moto-Gerador Linear, modelo matemático, otimização, projeto.

Abstract

Due to the constant restrictions, that regulate the level of pollutants emissions, on the market, the demand for more efficient alternatives for the conventional generators has increased, mainly those which energy source are fossil fuels. The Free-Piston Engine is one of those alternatives, as a concept that despite of the loss of popularity in the 60th of the last century, has attracted the attention of the research centers in recent years. It presents as advantages higher efficient, compactability, simplicity and easier maintainability, as well as the possibility of variable compression ratio. Those features justify the scientific effort made on this equipment. The assembly of a Free-Piston Engine and a Linear Electric Generator is denominated as Free-Piston Generator, which applicability in hybrid vehicles or as energy generator are widely referred. The objective of this work is to develop a mathematical and numerical model of a Free-Piston Generator for design and optimization purposes. Distinctly of the models available in the literature, the developed model must consider the relation between the Free-Piston Engine and the Linear Generator in a way that the dimensions and parameters of the electric element are also available for the final user. To achieve this goal, a model of a permanent magnetic electric generator is derived using a semi-analytical method, namely Subdomains Method, in order to estimate the magnetic field distribution in the interior of the machine. The results of the model were validated and compared with a Finite Element Method based model, and this comparison highlighted the advantages of the chosen method: the low-computational cost and small errors. To simulated the thermodynamic phenomena that are present in the Free-Piston Engine, a zero-dimensional model is derived from the First Law of Thermodynamics combined with inherent assumptions of the ideal gases theory. The derived model was validated by comparison with a more sophisticated model, namely *Homogeneous Two-Zone Finite Release Cycle*. The electromagnetic and thermodynamic models are associated with a third model, the dynamic model, derived from the Newton's Second Law, in order to obtain the complete coupled model and meet the objetiv. To illustrate the capability of the obtained model, a set of parametric analysis are made and observations on the relation between the variables of the model are done. At the end, a procedure for design a Linear Free-Piston Generator using the proposed model is described.

Keywords: Free-Piston Engine, Free-Piston Generator, Mathematical Model, Optimization, Design.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Perfis característicos de força resistiva segundo o tipo de carga associado ao motor. Fonte: (BENTO et al., 2019)	30
Figura 2 – Configuração básica de um motor de pistão livre. Fonte: (BENTO et al., 2019)	32
Figura 3 – Configuração básica de um motor de pistão livre. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)	33
Figura 4 – Motor de pistão simples da companhia Holandesa Innas BV (a) Diagrama esquemático. (b) Foto do equipamento. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)	34
Figura 5 – Motor de pistão simples patenteado pela fabricante Honda. Fonte: (HANIPAH; MIKALSEN; ROSKILLY, 2015)	34
Figura 6 – Motor de pistão duplo. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)	35
Figura 7 – Motor de pistões opostos. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)	36
Figura 8 – Exemplos das classes de GEL. (a) Topologia com magnetização externa. (b) Topologia com magnetização interna. Adaptado de Gysen (2011)	39
Figura 9 – Exemplos das configurações do linor. Adaptado de Gysen (2011)	39
Figura 10 – (a) Estator com polos salientes não-retangulares. (b) Estator com polos salientes retangulares. Adaptado de Gysen (2011)	40
Figura 11 – Classificação segundo a distribuição das bobinas. Adaptado de Gysen (2011).	42
Figura 12 – Exemplo de divisão em regiões para uma geometria com coordenadas cilíndricas. Adaptado de Gysen (2011)	51
Figura 13 – Exemplo do uso de coordenadas locais para regiões diversas. Adaptado de Gysen (2011)	53
Figura 14 – (a) Topologia do gerador linear. (b) Dimensões de um trecho ativo. Adaptado de Gysen et al. (2008)	53
Figura 15 – Divisão em regiões e condições de contorno aplicadas. Adaptado de Gysen (2011)	54
Figura 16 – Circuito completo do gerador e carga associada (Fase A).	57
Figura 17 – Geometria de um trecho ativo do modelo MEF com detalhe na malha nos pontos de concentração de campo.	59
Figura 18 – Condições de contorno aplicadas ao modelo FEM.	60
Figura 19 – Condições de contorno aplicadas ao modelo FEM.	61
Figura 20 – Diagrama ilustrando a configuração motor de pistão duplo. Adaptado de Jia et al. (2015)	62
Figura 21 – Diagrama esquemático da estrutura do modelo do motor.	62

Figura 22 – Diagrama de corpo livre do conjunto pistão e linor do motor analisado.	63
Figura 23 – Diagrama do volume de controle considerado para o desenvolvimento das equações termodinâmicas	64
Figura 24 – Comparação entre os resultados obtidos via rotina proposta por Ferguson e Kirkpatrick (2015) e o modelo proposto.	70
Figura 25 – Eficiência térmica em função da razão de compressão. (a) Ciclo Otto; (b)Ciclo Diesel. Adaptado de Boles e Cengel (1989).	70
Figura 26 – Eficiência térmica do ciclo Otto em função do coeficiente politrópico γ . Adaptado de Boles e Cengel (1989).	71
Figura 27 – Estrutura do modelo construído.	72
Figura 28 – Variação da eficiência do gerador elétrico em função da frequência de amostragem utilizada na simulação numérica.	72
Figura 29 – Variação relativa da eficiência do gerador elétrico em função da frequência de amostragem utilizada na simulação numérica.	73
Figura 30 – Resumo das funções e fluxograma do software desenvolvido.	73
Figura 31 – Resumo das variáveis software desenvolvido disponíveis ao usuário.	75
Figura 32 – Deslocamento, corrente instantânea e força eletromagnética no estado de regime permanente sob as condições determinadas.	79
Figura 33 – Deslocamento, velocidade e força eletromagnética no estado de regime permanente sob as condições determinadas no domínio da frequência.	80
Figura 34 – Curvas da eficiência eletromecânica em função da resistência de carga R_L .	81
Figura 35 – Curvas da eficiência eletromecânica em função da indutância de carga L_L .	82
Figura 36 – Curvas de força induzida em função da velocidade e: (a) da resistência de carga R_L ; (b) da indutância de carga L_L	83
Figura 37 – Coeficiente de amortecimento equivalente c_{ger} em função da resistência de carga, frequência natural e modelo de circuito elétrico.	84
Figura 38 – Coeficiente de amortecimento equivalente C_{ger} em função da resistência de carga, frequência natural e modelo de circuito elétrico.	85
Figura 39 – Curvas da amplitude da força de excitação em função da frequência natural f_n	85
Figura 40 – Curvas do espectro das variáveis analisadas no domínio do tempo. (a) $k = 316 \text{ kN/m}$; (b) $k = 0$	87
Figura 41 – Curvas do espectro de potências das variáveis observadas. (a) $k = 316 \text{ kN/m}$; (b) $k = 0$	87
Figura 42 – Curvas da eficiência e da razão $\max(x)/\tau_{ws}$ para o moto-gerador com mola.	88
Figura 43 – Curvas da eficiência e da razão $\max(x)/\tau_{ws}$ para o moto-gerador sem mola.	88

Figura 44 – Deslocamento do pistão, propriedades dos gases na câmara de combustão e força induzida.	89
Figura 45 – Curvas de variáveis obtidas via simulação para moto-gerador: com e sem mola.	91
Figura 46 – Diagrama de Pressão <i>vs</i> Deslocamento para o moto-gerador com e sem mola.	92
Figura 47 – Curvas de variação dos parâmetros de desempenho em função da massa m_t	93
Figura 48 – Curvas de variação dos parâmetros de desempenho em função do diâmetro D_p	93
Figura 49 – Curvas de variação dos parâmetros de desempenho em função da rigidez k	94
Figura 50 – Curvas de variação da potência gerada em função dos variáveis avaliadas.	95
Figura 51 – Fluxograma para cálculo dos parâmetros da máquina.	96
Figura 52 – Frequência em função da razão L_s/D_p , da massa do cursor e da taxa de compressão.	99
Figura 53 – Condição de funcionamento instável do moto-gerador.	100
Figura 54 – Pressão na câmara de combustão do moto-gerador com condição de funcionamento estável, porém com alta variação da pressão máxima.	102
Figura 55 – (a) Topologia do gerador linear. (b) Dimensões de um trecho ativo. Adaptado de Gysen et al. (2008)	113
Figura 56 – Divisão em regiões e condições de contorno aplicadas. Adaptado de Gysen (2011)	113
Figura 57 – Vetor de magnetização resultante dos ímãs permanentes. Adaptado de Gysen (2011).	114

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resumo de classes de configurações e topologia de um gerador elétrico linear. Fonte: (GYSEN, 2011)	38
Tabela 2 – Exemplos de protótipos funcionais.	43
Tabela 3 – Dimensões e parâmetros utilizados para validação do método proposto.	60
Tabela 4 – Comparação de desempenho entre o método dos subdomínios e MEF para o exemplo estudado.	61
Tabela 5 – Parâmetros de simulação utilizados para comparar os resultados do modelo proposto com a rotina disponibilizada por Ferguson e Kirkpatrick (2015)	69
Tabela 6 – Parâmetros de entrada do programa	74
Tabela 7 – Dimensões e parâmetros utilizados no projeto do gerador. (GYSEN et al., 2008)	77
Tabela 8 – Parâmetros e dimensões do motogerador linear.	89
Tabela 9 – Comparação de desempenho entre simulações com e sem mola associada ao linor.	90
Tabela 10 – Resultados da análise prévia dos parâmetros (Na ordem dos cálculos).	100
Tabela 11 – Resultados do modelo utilizando os parâmetros estimados.	100
Tabela 12 – Resultados da análise prévia dos parâmetros (Na ordem de cálculos).	101
Tabela 13 – Resultados do modelo utilizando os parâmetros estimados.	102

Lista de símbolos

a	Constante de forma da função de Wiebe.
\vec{A}	Vetor potencial magnético. Unidade: $[Wb/m]$
$A_{cyl,i}$	Área lateral do cilindro "i" do motor linear. Unidade: $[m^2]$
A_p	Área dos pistões do motor linear. Unidade: $[m^2]$
AFR	Razão mássica ar-combustível.
b	Constante de forma da função de Wiebe.
B	Densidade de fluxo magnético. Unidade: $[T]$
c	Coefficiente de amortecimento relativo às perdas devido ao atrito no motor linear. Unidade: $[N \cdot s/m]$
c_{ger}	Coefficiente de amortecimento equivalente relativo a força induzida pelo gerador elétrico linear. Unidade: $[N \cdot s/m]$
C_d	Tempo total de combustão da mistura ar-combustível contida nas câmaras do motor linear. Unidade: $[s]$
C_p	Calor específico a pressão constante do gás contido na câmara de combustão. Unidade: $[J/kg \cdot K]$
C_v	Calor específico a volume constante do gás contido na câmara de combustão. Unidade: $[J/kg \cdot K]$
F_{ger}	Força contraeletromotriz exercida pelo gerador elétrico linear. Unidade: $[N]$
h_i	Coefficiente de transferência por convecção no cilindro "i" do motor linear. Unidade: $[W/m^2]$
H	Intensidade do campo magnético. Unidade: $[A \cdot esp/m]$
i_a	Corrente instantânea na fase "a" do gerador elétrico. Unidade: $[A]$
I_n	Função modifica de Bessel do tipo I e ordem n .
J_d^r	Densidade de corrente na direção d presente na região r . Unidade: $[A/m^2]$
k	Constante de rigidez do elemento elástico associado ao linor. Unidade: $[N/m]$
K_n	Função modifica de Bessel do tipo K e ordem n .

L_{aa}	Auto indutância das bobinas da fase "a"do gerador elétrico. Unidade:[H]
L_{ab}	Indutância mútua entre as bobinas da fase "a"e "b"do gerador elétrico. Unidade:[H]
$L_{L,a}$	Indutância de carga associada aos terminais da fase "a"do gerador elétrico. Unidade:[H]
m_t	Massa total do linor e qualquer elemento associado a ele. Unidade: [kg]
\vec{M}	Vetor de magnetização. Unidade: [A/m]
N_c	Número de voltas das bobinas do gerador elétrico linear.
N_{pa}	Número de trechos ativos do gerador elétrico linear.
P_i	Pressão no interior da câmara do motor linear. Unidade: [Pa]
Pot_{ger}	Potência entregue pelo gerador elétrico linear. Unidade: [W]
$Q_{c,i}$	Calor instantâneo devido ao processo de combustão no cilindro "i"do motor linear. Unidade:[J]
Q_{in}	Calor total gerado com a combustão completa da mistura ar-combustível contida na câmara do motor linear. Unidade:[J]
Q_{inf}	Poder calorífico inferior do combustível. Unidade:[MJ/kg]
R_c	Raio exterior das bobinas do gerador elétrico linear. Unidade: [m]
R_{ger}	Resistência elétrica associada às bobinas do gerador elétrico. Unidade: [Ω]
$R_{L,a}$	Resistência elétrica da carga associada aos terminais da fase "a"do gerador elétrico. Unidade: [Ω]
R_t	Raio interior das bobinas do gerador elétrico linear. Unidade: [m]
$t_{s,i}$	Tempo de referência relativo ao instante de ignição no cilindro "i"do motor linear. Unidade:[s]
T_i	Temperatura do gás contido na câmara "i"do motor linear. Unidade:[K]
T_w	Temperatura média das paredes dos cilindros do motor linear. Unidade:[K]
x	Deslocamento do linor do motor linear. Unidade: [m]
w_n	Enésima frequência espacial.

Λ	Fluxo concatenado. Unidade: $[Wb]$
μ	Permeabilidade magnética. Unidade: $[H/m]$
η_{comb}	Eficiência da combustão.

Sumário

1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
1.1	Motor de Pistão Livre	27
1.1.1	Histórico	27
1.1.2	Princípios de funcionamento	28
1.1.3	Componentes, configurações e suas respectivas vantagens e desvantagens	31
1.1.3.1	Motor de pistão simples	32
1.1.3.2	Motor de pistão duplo	35
1.1.3.3	Motor de pistões opostos e gerador de gases de expansão	36
1.2	Gerador Elétrico Linear	37
1.2.1	Topologias de geradores elétricos lineares tubulares de ímãs permanentes	38
1.2.1.1	Classificação segundo a configuração do linor	38
1.2.1.2	Classificação segundo a geometria dos polos	40
1.2.1.3	Classificação segundo a distribuição das bobinas	41
1.2.2	Gerador elétrico linear acoplado ao motor de pistão livre	43
1.3	Modelos Matemáticos	45
1.3.1	Métodos de modelagem de geradores elétricos lineares	45
1.3.1.1	Circuito magnético equivalente	45
1.3.1.2	Mapeamento Schwartz Christoffel	45
1.3.1.3	Método dos elementos finitos	46
1.3.1.4	Método dos subdomínios	46
1.3.2	Modelos de geradores elétricos lineares associados a motores de pistão livre	47
1.3.3	Métodos de modelagem de motores de pistão livre	48
2	DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DOS MODELOS	49
2.1	Modelo do Gerador Elétrico Linear	49
2.1.1	Introdução	49
2.1.2	Modelagem de subdomínios	49
2.1.2.1	Equações da magnetostática	49
2.1.2.2	Solução analítica das Equações de Maxwell	50
2.1.2.3	Divisão em regiões	51
2.1.2.4	Condições de contorno	52
2.1.2.5	Topologia do gerador	53
2.1.2.6	Aplicação do método de subdomínios	54
2.1.2.7	Fluxo concatenado e tensão induzida	54
2.1.2.8	Força eletromagnética	56

2.1.3	Circuito elétrico	57
2.1.3.1	Modelo R	57
2.1.3.2	Modelo RL	58
2.1.3.3	Modelo RLC	58
2.1.4	Validação do método de subdomínios	59
2.2	Modelo do Motor-Gerador de Pistão Livre	62
2.2.1	Estruturação do modelo	62
2.2.2	Modelo dinâmico	63
2.2.3	Modelo termodinâmico	63
2.2.3.1	Trasferência de calor	64
2.2.3.2	Calor gerado pela combustão	65
2.2.3.3	Propriedades termodinâmicas dos gases	65
2.2.3.4	Validação do modelo termodinâmico	68
2.2.3.5	Análise das eficiências	70
2.3	Rotina numérica	72
2.3.1	Parâmetros de entrada	74
3	RESULTADOS	77
3.1	Modelo do Gerador Elétrico Linear	77
3.1.1	Modelo do gerador elétrico linear	77
3.1.2	Análise paramétrica	81
3.1.2.1	Eficiência eletromecânica e os parâmetros do circuito externo	81
3.1.2.2	Força eletromagnética e os parâmetros do circuito externo	82
3.1.2.3	Eficiência eletromecânica e o curso do linor	84
3.1.2.4	Influência do tipo de força de excitação e da constante de rigidez sobre a eficiência do gerador	86
3.2	Modelo do Moto-Gerador de Pistão Livre	89
3.2.1	Exemplo de aplicação do modelo	89
3.2.2	Influência da mola sobre o desempenho	90
3.2.3	Análise paramétrica	92
3.3	Metodologia de projeto do moto-gerador	95
3.3.1	Fluxograma de cálculo dos parâmetros	95
3.3.2	Equacionamento	96
3.3.3	Etapas	97
3.3.3.1	Parâmetros desejados	97
3.3.3.2	Parâmetros complementares	97
3.3.3.3	Variáveis estimadas	98
3.3.3.4	Ajuste fino e variáveis ajustadas	99
3.3.4	Exemplo 1	99
3.3.5	Exemplo 2	101

4	CONCLUSÃO	103
	REFERÊNCIAS	107
	APÊNDICES	111
	APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DAS MATRIZES DE TOPOLO- GIA E VETOR GERADOR DE CAMPO (MÉTODO DOS SUBDOMÍNIOS)	113

Introdução

É evidente a crescente preocupação com a ação humana sobre a natureza e os seus efeitos. Uma das razões para tal é o acúmulo de resíduos derivados do petróleo e problema que ele representa para a civilização moderna. O plástico, por exemplo, é um dos constituintes mais comuns do lixo, devido às suas características que o transformaram em um elemento altamente flexível para as diversas situações do cotidiano. Entretanto seus resíduos causam problemas consideráveis no mundo, devido ao seu grande volume e dificuldade de tratamento. Devido a isso, acordos e normas que restringem mais e mais o lançamento de substâncias poluentes no meio ambiente são assinados, visando reduzir fenômenos associados, sendo o mais citado destes o aquecimento global.

Como resposta a tais acontecimentos, nota-se nos centros de pesquisas científicas o aumento dos esforços dos pesquisadores a fim de obter formas alternativas de geração de energia, principalmente a partir de fontes renováveis. Essa denominação refere-se ao uso de fontes diferentes dos combustíveis fósseis como: eólica, solar, geotérmica, hidráulica, biomassa, entre outros (ZOU et al., 2017). Costa (2006) recomenda além do uso de fontes alternativas para obtenção de combustíveis, o uso de formas mais eficazes dos recursos petrolíferos que ainda nos restam, seja por técnicas de otimização da eficiência energética, ou por processos de reciclagem e reutilização dos recursos provenientes do petróleo.

Neste âmbito a associação do gerador linear ao motor de pistão livre, um sistema vibratório de um grau de liberdade, pode resultar em uma máquina mais eficiente na conversão da energia química do combustível em energia elétrica (ZOU et al., 2017; YUAN et al., 2018; ABDALLA; IBRAHIM; NOR, 2016; JIA et al., 2018). Dada a complexidade do problema que envolve três grandes áreas da engenharia, a saber, Elétrica, Dinâmica de Sistemas Mecânicos e Sistemas Térmicos; torna-se essencial o domínio e a compreensão das técnicas de projeto, dos modelos físicos e matemáticos, dos limites de funcionamento e dos métodos e das necessidades de fabricação.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático e numérico do Moto-Gerador de Pistão Livre – gerador linear associado ao motor de pistão livre – com o qual é possível projetá-lo e otimizá-lo. Para que o objetivo seja atingido, buscou-se os métodos de modelagem mais adequados para ambos os equipamentos que compõem este sistema, o gerador elétrico e o motor de pistão livre, através da pesquisa e comparação. Os resultados dos modelos desenvolvidos foram validados a partir da comparação com modelos mais sofisticados. Assim, este trabalho pretende contribuir com a descrição de um modelo que disponibiliza ao usuário as variáveis relativas aos equipamentos principais do Moto-Gerador de Pistão Livre, de modo que este possa avaliar e conhecer a relação

existente entre elas e sua influência sobre o desempenho do equipamento.

Descreve-se sobre a estrutura do trabalho. O primeiro capítulo apresenta uma descrição sobre os equipamentos que compõem o Moto-Gerador de Pistão Livre, a saber, o Motor de Pistão Livre e o Gerador Elétrico Linear. Também neste capítulo, discute-se sobre os métodos de modelagem comumente utilizados para representar estes sistemas, listando as suas características. O segundo capítulo é dedicado ao detalhamento do modelo proposto, com o registro das deduções das expressões matemáticas que o compõem, bem como das validações dos modelos. No terceiro capítulo é descrito os resultados das diversas análises realizados sobre o modelo proposto, com o fim de verificar não só a potencialidade do mesmo, mas também as relações existentes entre as diversas variáveis. Com as lições aprendidas através destas análises, uma metodologia de projeto, utilizando o modelo proposto, é descrita.

1 Revisão Bibliográfica

1.1 Motor de Pistão Livre

1.1.1 Histórico

Os primeiros protótipos do motor de pistão livre surgiram, quase que simultaneamente, em locais diversos da Europa nas décadas de 20 e 30 do último século. Contudo, o crédito da nova invenção é dado a Pescara, advogado e inventor nascido na Argentina e residente do velho continente na época, pelo fato de sua patente, dentre as várias registradas no período, ter sido a primeira datada, no ano 1928. A patente de Pescara descreve um aparato movido pelo motor de pistão livre de uma câmara somente e cuja função era produzir ar comprimido. Apesar da especificidade da patente, Pescara tomou o cuidado de expandir a proteção garantida pelo documento a diversas outras aplicações que utilizassem o mesmo tipo de força propulsiva ([MIKALSEN; ROSKILLY, 2007](#); [MIKALSEN, 2008](#)).

Em meados do século 20 os motores de pistão livre foram largamente aplicados nas operações de geração, tanto de ar comprimido, quanto de gases direcionados para gerar energia elétrica em plantas industriais. São também registrados o uso desse tipo de motor em equipamentos bélicos e no setor automotivo ([ACHTEN, 1994](#); [MIKALSEN; ROSKILLY, 2007](#)).

Contudo, segundo [Mikalsen e Roskilly \(2007\)](#) e [Xiao, Li e Huang \(2010\)](#), o emprego dessas máquinas foi abandonado na década de 1960, em vista da superioridade alcançada pelos motores possuidores do mecanismo biela-manivela – hoje denominados convencionais – e cujo princípio de funcionamento era regido pelo ciclos Otto e Diesel. Tal superioridade era constatada principalmente na estabilidade no funcionamento e na facilidade na partida destes últimos.

Nas duas últimas décadas, vê-se o interesse de diversos grupos de pesquisas, além de fabricantes, novamente voltado para este tipo de equipamento impulsionados pela busca constante de redução de emissões proveniente da queima de combustíveis fósseis e aumento de eficiência. Como relata [Jia \(2016\)](#), o retorno a esse tipo de motor é devido ao conhecimento de que eles alcançam uma maior eficiência termomecânica, cerca de 40 a 50%, quando comparados com os motores convencionais, cuja eficiência termomecânica é na faixa de 30 a 40%.

Associada à essa busca por atender as retrições dos órgãos regulamentadores, a disponibilidade de técnicas mais sofisticadas de controle e atuação de sistemas também é um fator que contribuiu decisivamente para o ressurgimento dos motores de pistão livre

(JIA, 2016).

O volume de trabalhos dedicados a este tema é então reflexo desses dois fatores. Como exemplo, destaca-se os trabalhos desenvolvidos, incluindo a construção de protótipos, nas universidades de West Virginia, Newcastle e Shanghai Jiaotong, bem como nas instituições tecnológicas de Beijing, Nanjing e da República Tcheca.

Ainda são poucos os relatos de aplicações comerciais, apesar de se notar a quantidade de patentes que são documentadas por parte das grandes empresas. (HANIPAH; MIKALSEN; ROSKILLY, 2015) resumizam algumas dessas patentes, que são geralmente voltadas para a indústria automobilística.

1.1.2 Princípios de funcionamento

Nesta seção descreve-se brevemente sobre o termo que define o motor estudado neste trabalho e quais são as diferenças construtivas deste, a ponto de torná-lo uma classe única dentre aquelas já existentes.

O motor de pistão livre é uma máquina térmica que pode ser classificada como motor de combustão interna, quanto ao comportamento do fluido ativo, e em motor alternativo, quanto à forma de se obter trabalho mecânico (BRUNETTI, 2012). Contudo, esta classificação é a mesma dada ao motor de combustão interna convencional. Apesar da mesma classificação, observa-se no entanto que, na literatura referente a este tópico, os autores definem o motor de pistão livre baseando-se na diferença que ele apresenta frente aos motores convencionais. Segundo Mikalsen (2008), motores de pistão livre são motores lineares, não possuidores do mecanismo biela-manivela, assim sendo que o movimento do pistão não é dado por este mecanismo e sim pela resultante de forças atuando sobre o mesmo. Jia (2016) descreve os motores de pistão livre como motores lineares nos quais o uso do mecanismo biela-manivela é eliminado e o pistão e outros elementos associados a ele, possui movimento livre e linear.

Quando se avalia os princípios de funcionamento de um motor de combustão interna, é necessário uma compreensão abrangente da série de processos dinâmicos, físicos e químicos que ocorrem neste sistema. Ao estudar esses processos em um motor de pistão livre, é possível utilizar-se dos conhecimentos já consolidados na área de motores de combustão interna, visto que os processos físicos e químicos a que o fluido ativo é submetido são os mesmos, sendo apenas os processos dinâmicos que envolvem a movimentação do pistão fundamentalmente diferentes (MIKALSEN, 2008).

Logo, considerando o ponto de vista termodinâmico, as teorias utilizadas aos motores térmicos convencionais são também aplicáveis aos motores de pistão livre. Portanto, deve-se concluir que os mesmos processos observados em um motor convencional (admissão, compressão, expansão e escape), são também presentes em um motor de pistão livre. A

possibilidade de o motor trabalhar sob os regimes denominados de 2 Tempos ou 4 Tempos também existe.

Do ponto de vista dinâmico, porém, é necessário observar a ausência do mecanismo biela-manivela e relacionar as consequências da mesma. Nos motores convencionais, este mecanismo associado ao volante constitui um elemento utilizado tanto para controle do movimento dos pistões quanto para armazenamento de energia (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007; BRUNETTI, 2012). O movimento dos pistões é restrito e definido pela cadeia cinemática composta do pistão, do bloco do motor, da biela e do eixo virabrequim. No motor de pistão livre, o movimento do pistão é determinado pela resultante das forças que atuam sobre ele, independente de qualquer cadeia cinemática. Portanto, como descreve (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007), na concepção de motor de pistão livre, a interação entre essas forças deve ser pensada de tal forma que o movimento do pistão seja delimitado, independente do regime de operação. O volante de inércia, presente nos motores convencionais e ausente no motor de pistão livre, também define uma diferença de grande importância entre ambos os motores. Nos motores de combustão interna tradicionais o volante de inércia suaviza flutuações de energia cinética e estabiliza o funcionamento do motor, algo não verificado no motor de pistão livre.

É devido a essas diferenças do ponto de vista dinâmico que esse tipo de equipamento possui características únicas, justificando o uso do termo como uma nova classe de motores. Tais características abrem portas para novas vantagens, porém a custo de desafios que devem ser superados. O controle do movimento do pistão, da frequência de operação e a partida do motor são alguns destes obstáculos, ao passo que a taxa de compressão variável e a maior eficiência se mostraram como ganhos importantes do novo equipamento.

Mikalsen (2008) lista as características únicas do motor de pistão livre, a saber:

1. **Dinâmica e controle do movimento do pistão:** No motor de pistão livre, o movimento do pistão deixa de ser imposto pelo mecanismo biela-manivela e passa a ser regido pela interação de forças a que ele está submetido. Devido a isso, o controle da taxa de compressão, bem como o controle em momentos de instabilidade operacional, devem ser realizados através do conhecimento das forças impostas sobre o elemento móvel, ao longo de todo o ciclo e para as diversas situações possíveis.
2. **Controle da frequência de operação:** Comparando o conjunto câmara de combustão e pistão livre com um sistema massa-mola, o autor baseia sua estratégia de controle da frequência de operação à existência de uma frequência natural, que pode variar de acordo com a pressão dos gases contidos nas câmaras de combustão.
3. **Partida:** A partida do motor aqui estudado é obtida por meio de um impulso ao pistão capaz de realizar uma etapa de compressão da mistura ar-combustível

contida na câmara de gás. A ignição é então dada, iniciando o processo de operação natural do motor, sendo porém um desafio alcançar e manter o estado de regime permanente. Outro método é submeter o pistão a um movimento recíproco com amplitude crescente até que a taxa de compressão desejada seja obtida. A escolha de um dos métodos depende do tipo de carga que é associada ao motor.

4. **Falha de combustão:** Outro desafio relatado é a ocorrência de falha de combustão, sendo o problema não o fenômeno em si, e sim a consequência. Ocorrida tal falha, é provável que o processo de compressão do próximo ciclo não seja suficiente para manter o motor em estado operacional.
5. **Carga associada:** O motor de pistão livre necessita de uma carga capaz de extrair trabalho da força exercida diretamente pelo conjunto pistão e linor (eixo ao qual o pistão está associado). Além disso, o componente de carga também deve ser projetado para suportar as altas forças de aceleração e temperaturas a que será submetido. Os tipos usuais de carga para esse tipo de motor são: bombas hidráulicas, compressores de ar e geradores elétricos lineares. A diferença entre cada uma dessas aplicações advém dos perfis de força resistiva característicos de cada componente, como ilustrado na Figura 1.

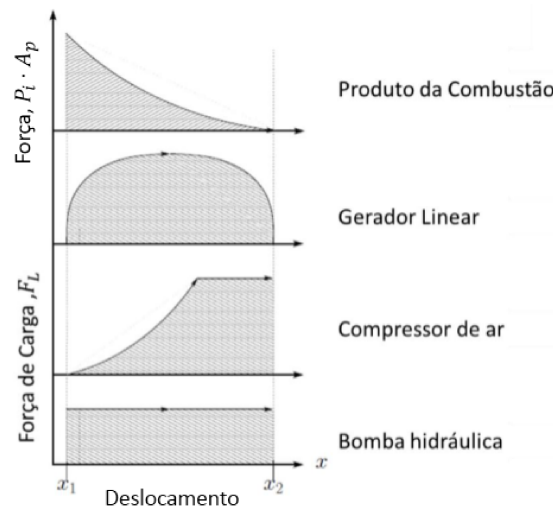


Figura 1 – Perfis característicos de força resistiva segundo o tipo de carga associado ao motor. Fonte: (BENTO et al., 2019)

6. **Simplicidade do conceito:** Como descrito anteriormente, a simplicidade do motor de pistão livre, devido a retirada do mecanismo biela-manivela, é a principal razão do esforço conjunto da comunidade científica com o fim de impulsionar o seu desenvolvimento. A essa simplicidade, Mikalsen (2008) acrescenta as seguintes vantagens: menores perdas devido às forças de atrito, custos reduzidos de fabricação e manutenção e compactabilidade do motor.

7. **Processo de combustão:** As altas velocidades do pistão na região próxima ao ponto morto superior influenciam significativamente no processo de combustão no motor de pistão livre. Devido a essa influência, observa-se maiores níveis de turbulência, que favorecem a mistura do ar e combustível, aumentando a taxa da reação e a velocidade da chama. Além disso, a formação de gases NO_x é consideravelmente reduzida e a perda de calor para as paredes do cilindro são menores. Frente a essas características, Mikalsen (2008) conclui que os modelos desenvolvidos para os motores convencionais não são apropriados para representar o comportamento observado nos motores de pistão livre.
8. **Otimização da combustão e operação multi-combustível:** A possibilidade de operar com taxa de compressão variável nos motores de pistão livre abre a possibilidade de se utilizar com diversos combustíveis, sem que nenhuma modificação no motor seja realizada. Além disso, para cada combustível é possível otimizar o processo de combustão através de um controle preciso do movimento do pistão.
9. **HCCI (*Homogeneous Charge Compression Ignition*):** Motores HCCI – Ignição por Compressão de Carga Homogênea, em tradução livre – combinam características de motores de gasolina e diesel convencionais. Tal combinação consiste em submeter a mistura ar-combustível contida na câmara de combustão até o momento em que há a auto-ignição, resultando em uma combustão rápida porém com baixo controle. Segundo Mikalsen (2008) os motores de pistão livre são adequados a operação HCCI devido à ausência de restrição cinemática. Como vantagens dessa forma de combustão apresentam-se uma maior eficiência e a possibilidade de trabalhar com misturas mais pobres, em relação às misturas usuais, além das menores taxas de emissão de gases residuais.
10. **Esforços mecânicos:** Os esforços mecânicos a que os elementos dos motores de pistão livre são submetidos são elevados, particularmente se operam a altas razões de compressão e a elevadas pressões. Os acentuados gradientes de pressão resultam em altas taxas de queima do combustível e, como consequência, observa-se forças e acelerações de maiores amplitudes. Portanto, os materiais dos elementos são sujeitos a maiores tensões em comparação aos mesmos elementos nos motores convencionais.

1.1.3 Componentes, configurações e suas respectivas vantagens e desvantagens

Embora os motores de pistão livre possam assumir diversas configurações, considera-se como os componentes básicos: câmara de combustão, dispositivo de rebote, ou ressalto, e carga (ACHTEN, 1994; MIKALSEN, 2008; JIA, 2016). Estes componentes estão ilustrados na Figura 2.

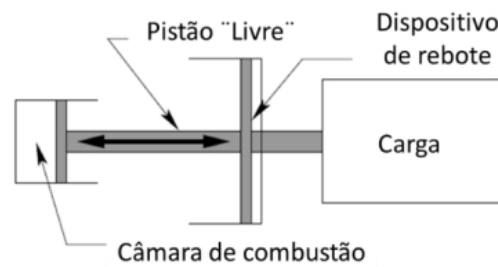


Figura 2 – Configuração básica de um motor de pistão livre. Fonte: (BENTO et al., 2019)

Na câmara de combustão ocorrem processos físicos e químicos que envolvem o fluido ativo. Quais processos ocorrem e qual a ordem dos mesmos depende do ciclo e regime que o motor fora concebido para funcionar, sendo análogos aos existentes nos motores convencionais.

O dispositivo de ressalto, ou rebote, é responsável primeiramente pelo armazenamento de parte da energia produzida durante o processo de expansão. Essa energia é utilizada para garantir a compressão suficiente para o próximo processo de combustão, assegurando assim, o funcionamento do equipamento em regime permanente. Portanto, a necessidade da existência desse dispositivo é decorrente da retirada do mecanismo biela-manivela.

Além da energia entregue ao dispositivo de ressalto, alguma parte da energia gerada pelo motor é convertida em calor, ruído, deformação, entre outros, pelas forças dissipadoras presentes, principalmente a força de atrito. A parcela resultante é então absorvida pelo dispositivo denominado de carga, cujo papel é converter essa energia cinética em outro tipo de energia ou diretamente em trabalho útil desejado. Como descrito na seção anterior, os tipos de carga usualmente utilizados no motor de pistão livre são: bombas hidráulicas, compressores de ar e geradores elétricos lineares.

Os motores de pistão livre são usualmente divididos entre três categorias segundo a disposição, número de cilindros e número de pistões, a saber: motor de pistão livre, motor de pistão e motor de pistões opostos. Uma quarta categoria é sugerida por (MIKALSEN, 2008), denominada geradores de gases de expansão de pistão livre. Contudo, esta última é uma especificação da categoria motor de pistões opostos, na qual a extração da energia entregue ao fluido através do processo de combustão é realizada por meio de uma turbina, ao invés de um mecanismo de carga acoplado diretamente ao eixo do motor.

1.1.3.1 Motor de pistão simples

O motor de pistão simples consiste na associação dos três componentes básicos, descritos na anteriormente. As Figuras 2 e 3 ilustram esta configuração.

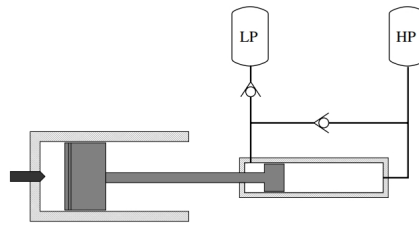


Figura 3 – Configuração básica de um motor de pistão livre. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)

O motor ilustrado na Figura 3 possui como elemento de carga um cilindro hidráulico, sendo portanto a energia gerada pelo equipamento direcionada para pressurização do fluido que passa pelo cilindro. Deve-se observar, no entanto, que o mesmo dispositivo utilizado como carga pelo motor, também atua como dispositivo de rebote, através da atuação controlada de válvulas. Em outros modelos de motor com cilindro único, nos quais a carga é exercida por geradores elétricos ou cilindros pneumáticos, é necessária a existência de um dispositivo dedicado ao papel de rebote, como ilustrado na Figura 2.

Dentre as características únicas da configuração avaliada cita-se a maior controlabilidade do motor, com a qual a frequência, taxa de compressão e curso do pistão determinados pelo usuário são facilmente obtidos (MIKALSEN, 2008; JIA, 2016). Além disso, devido à existência de uma única câmara de combustão, o desbalanceamento das forças e a consequente presença de vibrações são características inerentes a essa configuração (MIKALSEN, 2008; JIA, 2016). Nesta última questão, Achten (1994) discorda dos autores referidos, argumentando que a ausência de vibrações é obtida por meio da escolha de uma montagem apropriada sobre a estrutura de suporte.

Como exemplo de motores que se enquadram a essa configuração cita-se o motor da companhia Holandesa Innas BV, que entregava uma potência de cerca de 17 kW associada a uma eficiência de por volta de 50%. Este motor utilizava Diesel como combustível e era também caracterizado por possuir um complexo controle do sistema hidráulico, que exercia simultaneamente o papel de mecanismo de rebote e de carga (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007). A Figura 4 ilustra um diagrama esquemático do motor e uma foto do equipamento.

Um segundo exemplo deste tipo de motor é registrado pela Universidade Técnica de Dresden, na Alemanha. O equipamento é bastante similar ao descrito anteriormente, mas possuía uma diferença fundamental com aquele, diferença essa encontrada no sistema de controle que era do tipo histerese (*on-off*). Como resultado, a eficiência entregue pelo motor era consideravelmente menor, por volta de 30% (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007).

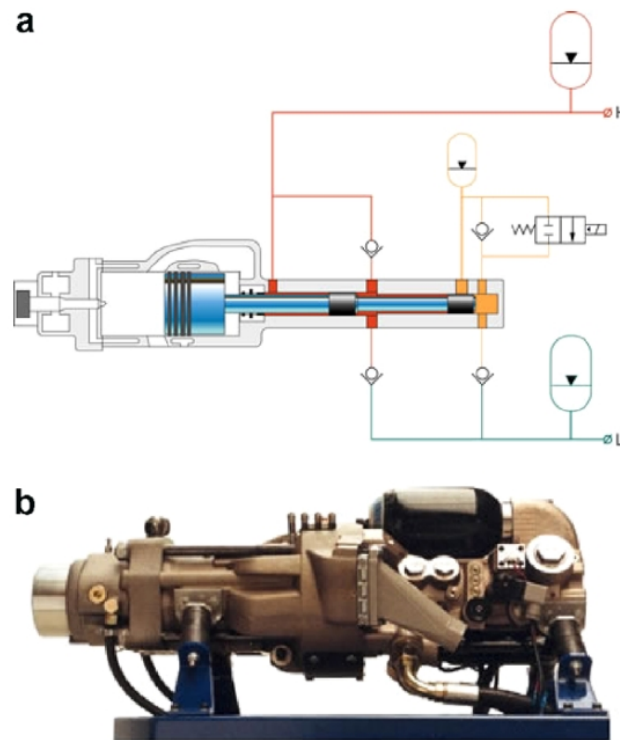


Figura 4 – Motor de pistão simples da companhia Holandesa Innas BV (a) Diagrama esquemático. (b) Foto do equipamento. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)

Como terceiro exemplo desta configuração, cita-se a patente registrada pela fabricante Honda, de um motor que funciona sob o regime de um ciclo de 4 tempos. Este equipamento apresenta como dispositivo de rebote uma mola mecânica e como carga um gerador elétrico linear. Um diferencial a ser notado no motor consiste de um dispositivo utilizado para determinar o deslocamento do pistão, constituído de uma placa triangular e um sensor de proximidade, como ilustrado na Figura 5 (HANIPAH; MIKALSEN; ROSKILLY, 2015).

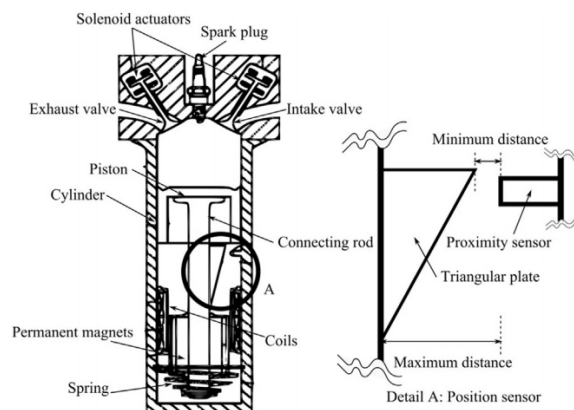


Figura 5 – Motor de pistão simples patenteado pela fabricante Honda. Fonte: (HANIPAH; MIKALSEN; ROSKILLY, 2015)

1.1.3.2 Motor de pistão duplo

A segunda configuração do motor de pistão livre, denominado motor de pistão duplo, consiste na associação de dois pistões ao mesmo eixo, sendo que cada pistão é alocado na sua respectiva câmara de combustão, conforme mostrado na Figura 6.

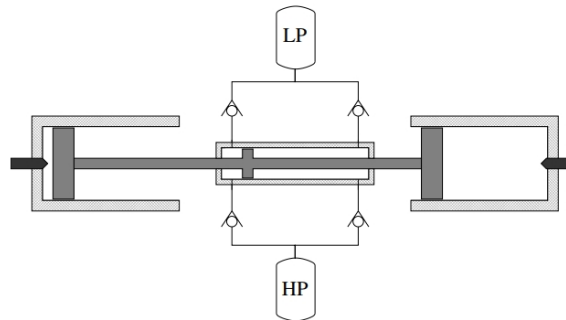


Figura 6 – Motor de pistão duplo. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)

Este tipo de configuração pode dispensar a necessidade do dispositivo de rebote, sendo o trabalho para compressão do gás contido em um cilindro fornecido pelo processo de expansão ocorrido no outro (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007; JIA, 2016). Assim, uma construção mais simples e mais compacta do equipamento é obtida e, conseqüentemente, uma maior razão entre potência e peso do motor.

Alguns problemas do motor de pistão duplo são registrados. O controle do movimento do pistão, acentuando-se o controle do deslocamento e da taxa de compressão, é um aspecto ainda pesquisado. Devido ao fato de que o processo de combustão em um cilindro dirige o processo de compressão no cilindro oposto, pequenas variações no processo de compressão influenciam fortemente nas compressões subsequentes. Tal característica é uma barreira para o controle otimizado de emissões e eficiência. Trabalhos experimentais demonstram a susceptibilidade do comportamento do motor a essas variáveis (MIKALSEN, 2008).

São poucos os protótipos funcionais, dentre eles citando-se o motor registrado pela Universidade de West Virgínia, cujos parâmetros de operação são a frequência de operação por volta de 23 Hz , entregando uma potência de 316 W (JIA, 2016).

Mais recentemente, a fabricante General Motors patenteou um motor com esta configuração com aplicação voltada para a geração de energia elétrica. O diferencial do equipamento registrado é a presença de um elemento denominado por *volante elétrico*, em tradução livre, que segundo os registros é responsável por uma melhor controlabilidade do motor (HANIPAH; MIKALSEN; ROSKILLY, 2015).

Como terceiro exemplo, cita-se o motor construído pelo Laboratório Nacional Sandia, instituto americano. Este motor funciona sob o ciclo denominado HCCI, que

apresenta características fundamentais em comparação com os motores de ignição por faísca e de ignição espontânea. O equipamento é alimentado com combustíveis diversos, principalmente hidrogenados, chegando a uma potência máxima de 40 kW (JOHNSON; LEICK; MOSES, 2015).

1.1.3.3 Motor de pistões opostos e gerador de gases de expansão

Consiste essencialmente em um par de pistões que compartilham de uma mesma câmara de combustão, sendo necessário, no entanto, que os mecanismos de rebote e carga estejam associados ao par referido.

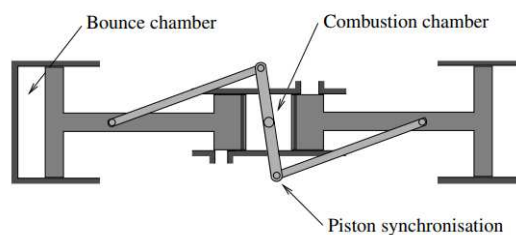


Figura 7 – Motor de pistões opostos. Fonte: (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007)

Jia (2016) cita como principais vantagens dessa configuração o comportamento balanceado do motor, do ponto de vista dinâmico, e conseqüentemente a ausência de vibrações. Além disso, a eliminação do cabeçote resulta em uma perda de calor reduzida, e o fluxo unidirecional que aumenta a eficiência do processo de admissão e exaustão simultânea dos gases combustível e residuais do processo. Como desvantagens, a autora cita a necessidade dos mecanismos de sincronização e de rebote, elevando a complexidade do equipamento.

É importante frisar que, nos primeiros momentos de desenvolvimento dos motores de pistão livre, essa configuração era exclusivamente aplicada à geração de ar comprimido, ou de gases para expansão (JIA, 2016), o que levou à possibilidade de dispensar a necessidade de uma carga associada ao eixo do motor. Neste caso, o trabalho entregue pelo motor ao fluido seria extraído por um elemento externo.

Para essa condição específica, Mikalsen e Roskilly (2007) propõe uma quarta terminologia para configuração dos motores, o gerador de gases de expansão. Comparando o motor de pistão livre para esta aplicação, em relação às turbinas convencionais, aquele apresenta como vantagens a alta taxa de compressão dos gases, além de a compressão do gás admitido ocorrer sem a necessidade de um componente dedicado a essa tarefa. Conseqüentemente, o gás entregue à turbina apresenta menores temperaturas, quando comparado com os processos usuais de compressão e os materiais utilizados para construção da turbina estariam submetidos a condições mais amenas.

Como exemplo desse tipo de motor, cita-se o motor denominado Sigma GS-34, utilizado como gerador de gás para expansão. Este equipamento fora fabricado pela Sociedade Industrial da Mecânica Aplicada (SIGMA), situada na França, e utilizava como combustível o Diesel. O gerador possuía uma potência nominal de 1000 *kW*, a uma eficiência média de 34,6% (MIKALSEN; ROSKILLY, 2007).

Um exemplo mais recente de um motor com esta configuração é outra patente registrada pela fabricante General Motors, na qual é descrito um motor construído para geração de energia elétrica. Deve-se ressaltar que nos registros é acentuada a ausência do mecanismo de sincronização dos pistões (HANIPAH; MIKALSEN; ROSKILLY, 2015).

1.2 Gerador Elétrico Linear

Compreende-se a importância da energia elétrica para a sociedade atual quando é observado que cerca de 40% de toda energia atualmente utilizada pela área industrial é energia elétrica. Atribui-se essa proporção às vantagens associadas a esse tipo de energia, como a alta disponibilidade, facilidade na transmissão e a ausência de emissão de poluentes (BOLDEA, 2017).

A obtenção da energia elétrica é feita através das denominadas máquinas elétricas, que convertem a energia mecânica em elétrica, ou vice versa. Usualmente, as máquinas elétricas são classificadas como rotativas devido ao fato de que a energia mecânica absorvida, ou entregue, pelo equipamento é associada ao movimento rotativo de um eixo. Contudo, a partir da década de 1960 o uso de máquinas elétricas lineares (MEL) tem aumentado progressivamente (BOLDEA, 2017). Nestas máquinas, como é compreendido pelo nome, o movimento associado à energia mecânica é linear.

A justificativa para o uso intensivo tardio de tais equipamentos, pois que as máquinas elétricas lineares foram inventadas no século 19, é o controle da corrente obtida, que varia fortemente devido ao movimento recíproco do linor (BOLDEA, 2017). Com o surgimento da eletrônica de potência, aliado à necessidade de mecanismos de controle lineares, o desenvolvimento das máquinas elétricas lineares ressurge com novas topologias, materiais, modelos e métodos de construção (BOLDEA, 2017).

Como descreve Boldea (2017), atualmente as aplicações típicas das MEL são: controle de pistão de compressores de refrigeradores de pequeno porte; Controle de precisão de plataformas com movimentos delimitados em um plano; e geração de energia elétrica. Segundo o autor, a força motriz de tais geradores é usualmente derivada de motores stirling, motores de pistão livre com ignição a faísca, ou ondas marítimas. Boldea (2015) relata a predileção da NASA pelo gerador elétrico linear associado a um motor Stirling em missões espaciais de tempo estendido devido a alta confiabilidade do equipamento, sendo que a estimativa de tempo que o conjunto gerador e motor poderiam funcionar sem falha era de

50.000 horas.

[Boldea \(2017\)](#) lista como características das MEL: Baixo custo de fabricação; alta confiabilidade e melhor rastreabilidade da posição do atuador; A essas características [Yan et al. \(2016\)](#) acrescenta: controle preciso e compactabilidade do equipamento;

1.2.1 Topologias de geradores elétricos lineares tubulares de ímãs permanentes

Há um grande número de topologias e configurações a serem consideradas na construção de uma máquina elétrica linear. Nesta seção, descreve-se brevemente sobre as possibilidades construtivas disponíveis para os denominados geradores tubulares, cuja geometria de ambos estator e linor são cilíndricas. A Tabela 1 resume as classes em que o gerador pode ser enquadrado.

Tabela 1 – Resumo de classes de configurações e topologia de um gerador elétrico linear.
Fonte: ([GYSEN, 2011](#))

Classe segundo ...	Denominação	Ilustração
Posição do estator	Topologia com magnetização interna Topologia com magnetização externa	Figura 8
Configuração do linor	Magnetização radial com eixo ferroso Magnetização radial com ferro interposto Magnetização axial com ferro interposto Quasi-Halbach	Figura 9
Geometria dos polos	Estator com polos não salientes Estator com polos salientes não-retangulares Estator com polos salientes retangulares	Figura 10
Distribuição das bobinas	Concentrado Distribuído Multi-camadas Modular Singular	Figura 11

A seguir, descreve-se as sobre algumas das classificações descritas na tabela acima.

1.2.1.1 Classificação segundo a configuração do linor

O conjunto de ímãs permanentes podem ser posicionados de maneiras diversas com o fim de direcionar os seus polos de maneira mais adequada, criando assim fluxos de campo magnéticos mais coerentes. Como em um gerador linear, o campo gerado deve passar pelo entreferro para ser conduzido pelos polos do estator, resultando na corrente induzida, é preferível que os polos dos ímãs sejam posicionados de tal forma que o campo no entreferro seja predominantemente radial ([GYSEN, 2011](#); [BOLDEA, 2015](#); [YAN et al., 2016](#)). A Figura 9 mostra as montagens usualmente utilizadas.

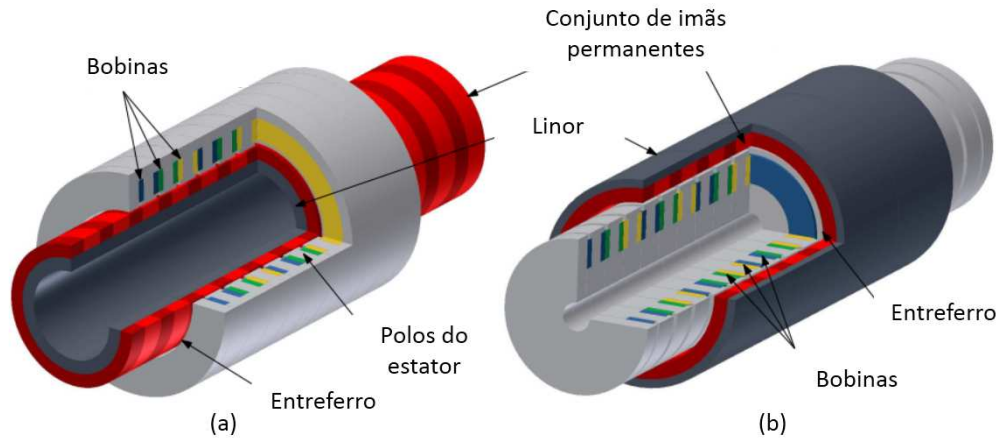


Figura 8 – Exemplos das classes de GEL. (a) Topologia com magnetização externa. (b) Topologia com magnetização interna. Adaptado de Gysen (2011)

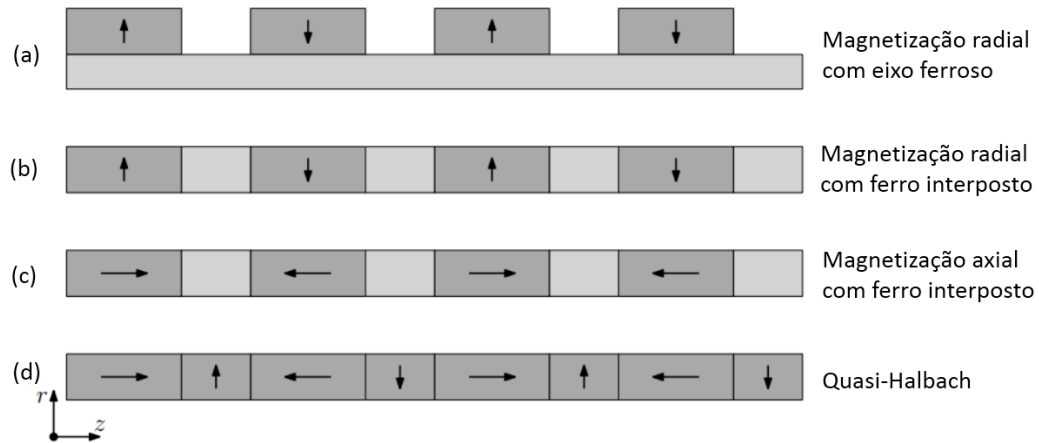


Figura 9 – Exemplos das configurações do linor. Adaptado de Gysen (2011)

Como verificado na figura acima, para a configuração (a), é necessário utilizar um eixo, ou suporte, composto por um material magnético mole, para que a permeabilidade no retorno do campo magnético gerado aumente e, como consequência, o fluxo magnético no entreferro aumente (GYSEN, 2011). O mesmo efeito é também obtido com o uso de material ferromagnético entre os ímãs, como indicado na configuração (b).

Substituindo os ímãs com polarização radial para axial, como indicado na Figura 9(c), resulta em menor relutância do caminho traçado pelo fluxo de campo magnético, e portanto, uma maior concentração de campo é presente no entreferro (GYSEN, 2011). Como ilustrado, esta configuração não requer o uso de eixo com material magnético mole, pois o seu uso iria desviar o campo do entreferro. Segundo (YAN et al., 2016), uma vantagem dessa configuração é o menor custo de manufatura deste tipo de ímã.

Quando ímãs com polarização radial e axial são intercalados, a configuração denominada "quasi-Halbach" é obtida, como ilustrado na Figura 9(d). Como na configuração

anterior, não há necessidade de utilizar um eixo de material magnético mole, resultando em menores amplitudes de força coercitiva (GYSEN, 2011). Contudo, devido ao uso de ímãs com polarização radial, é uma solução com maior custo, visto que os ímãs com esta polarização são mais caros.

1.2.1.2 Classificação segundo a geometria dos polos

O estator é classificado segundo a existência ou ausência de polos salientes, estruturas formadas com o objetivo de concentrar o fluxo de campo magnético no interior das bobinas, sendo esta classificação simplesmente: polos salientes ou polos não salientes.

As máquinas elétricas de ímãs permanentes com polos não salientes não apresentam forças coercitivas – forças de atração entre os ímãs e os polos mais próximos – devido a ausência dessa sobresalência de material ferromagnético, contudo menores densidade de força induzida são obtidas devido a maior distância do entreferro. Além disso, como comenta Boldea (2015), a presença das forças coercitivas é compensada pela maior precisão no controle da máquina.

Ainda em relação a geometria dos polos, estes podem apresentar geometria retangulares ou não-retangulares (GYSEN, 2011), como indicado na Figura 10.

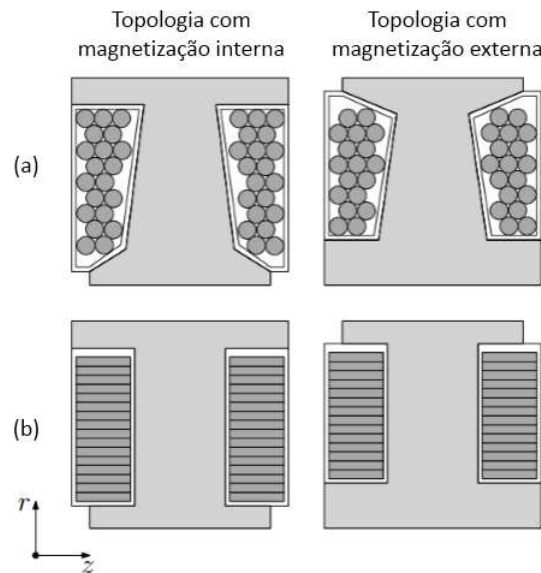


Figura 10 – (a) Estator com polos salientes não-retangulares. (b) Estator com polos salientes retangulares. Adaptado de Gysen (2011)

O uso de geometria não-retangulares provém da possibilidade de variar a largura dos polos na direção radial de modo a aumentar a área das ranhuras e a área efetiva das bobinas. Contudo, essa prática resulta em um menor fator de enchimento k_f , sendo este função do número de voltas e do diâmetro do fio condutor.

Em contraste, geometrias retangulares permitem o uso das denominadas fitas condutoras – fios com perfil retangular – resultando em um maior fator de enchimento, independente do número de voltas das bobinas, ou das dimensões do perfil do condutor. Além disso, a montagem e isolamento das bobinas são simplificadas. [Gysen \(2011\)](#) argumenta que o uso dessas fitas melhora significativamente o comportamento térmico do conjunto, visto que o fator de enchimento resulta em maior condutividade térmica da bobina.

1.2.1.3 Classificação segundo a distribuição das bobinas

A Figura 11 ilustra as possibilidades construtivas para a distribuição das bobinas – montagens e associações dos enrolamentos de fios condutores.

A distribuição desses elementos deve ser pensada de tal forma, que permita um razão fixa entre polos magnéticos e ranhuras bobinadas, além de maximizar o fluxo concatenado. Para máquinas elétricas lineares, existem mais possibilidades construtivas para obter tal objetivo em relação às máquinas rotativas ([GYSEN, 2011](#)).

A classificação leva em conta alguns parâmetros característicos do trecho ativo da máquina, ou seção periódica – elemento único que é replicado periodicamente na construção do equipamento. Dentre esses parâmetros, observa-se o número de polos magnéticos P , de ranhuras por S (múltiplo do número de fases utilizadas), além do número de terminais de enrolamento por trecho ativo C_{ph} .

Para detalhes das vantagens e desvantagens de cada montagem ilustrada, referir-se a [Gysen \(2011\)](#).

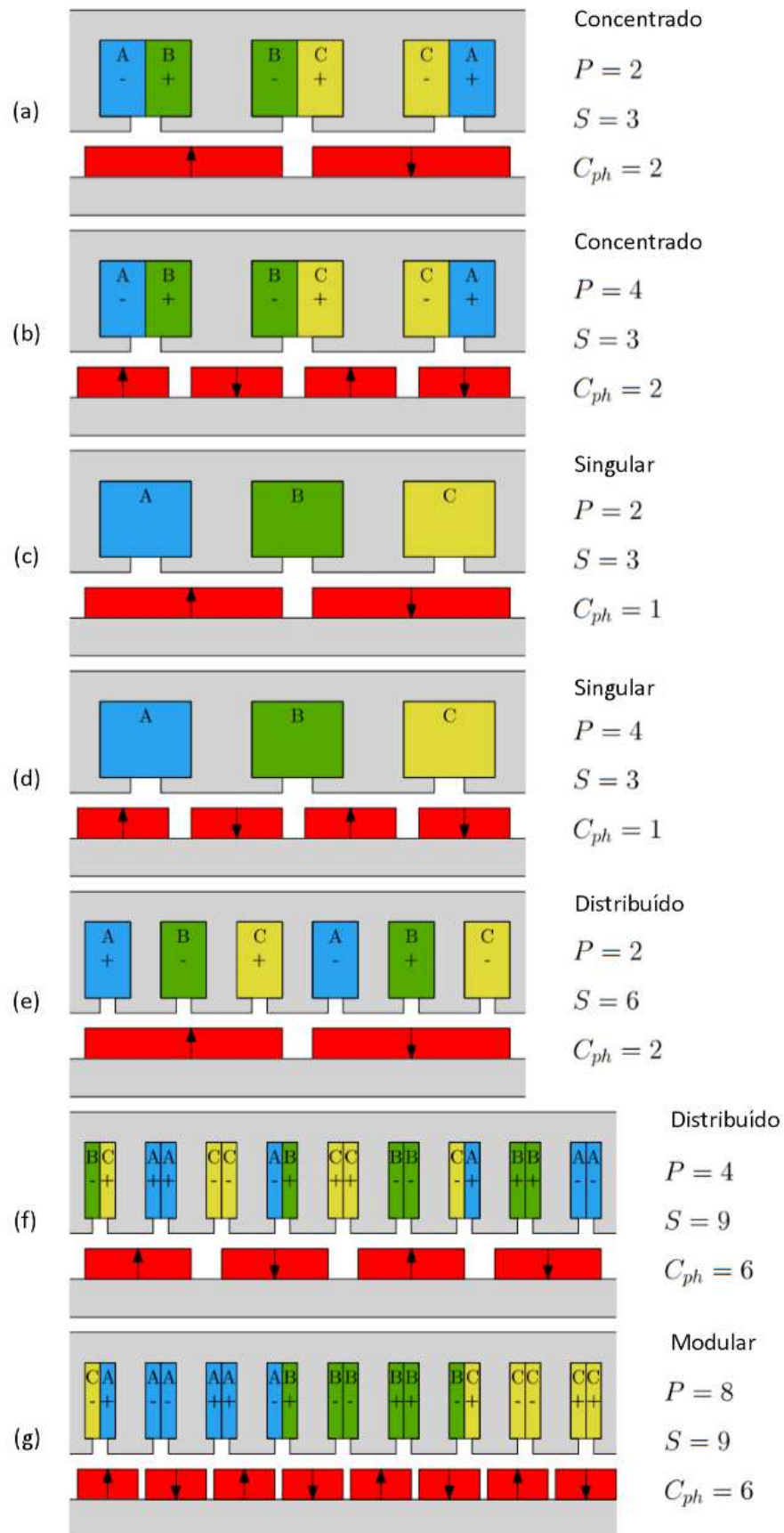


Figura 11 – Classificação segundo a distribuição das bobinas. Adaptado de Gysen (2011).

1.2.2 Gerador elétrico linear acoplado ao motor de pistão livre

O uso de um gerador elétrico linear acoplado ao motor de pistão livre é um conceito que atrai a atenção dos pesquisadores desde o momento em que foi concebido (JIA, 2016). Tal combinação é denominada *Free Piston Engine Generator* – Moto-Gerador de Pistão Livre em tradução-livre, ou *Free Piston Energy Converter* – Conversor de Energia de Pistão Livre. Neste trabalho, é dada preferência pelo primeiro termo pois o segundo mostra-se poder ser aplicado a outros casos, visto que não especifica que tipo de energia está sendo convertida. A Tabela 2 lista alguns protótipos desse tipo de equipamento em diversos centros de pesquisa no mundo. Vale ressaltar que, geradores lineares de ímãs permanentes foram utilizados em todos os protótipos citados, porém com topologias e configurações diversas.

Tabela 2 – Exemplos de protótipos funcionais.

Centro de pesquisa	Configuração do motor	Ano	Trabalhos de referência
Universidade West Virginia	Pistão duplo, 2 Tempos, ignição por faísca	1998	(NANDKUMAR, 1998)
	Pistão duplo, 2 Tempos, Diesel	2000	(DAVID, 2000)
	Pistão duplo, 4 Tempos	2001	(PETREANU, 2001)
Universidade de Newcastle	Pistão duplo, 2 Tempos, ignição por faísca	2012	
Laboratório Nacional Sandia	Pistão duplo, 2 Tempos, HCCI	1998	
	Pistões opostos, 2 Tempos, HCCI	2015	(LEICK; MOSES, 2015)
European funded project	Pistão duplo, HCCI	2002	(HANNSSON; LEKSELL; CARLSSON, 2005)
Universidade Técnica República Tcheca	Pistão duplo, 2 Tempos, ignição por faísca	2007	(VYSOKÝ, 2007)
Instituto Tecnológico Nanjing	Pistão simples, 4 Tempos, dispositivo de rebote mecânico	2008	(XU; CHANG, 2010)
Toyota	Pistão simples, dispositivo de rebote pneumático	2012	(KOSAKA et al., 2014)

Apesar do visível esforço conjunto dos pesquisadores, o moto-gerador de pistão livre não é disponibilizado no mercado comercial. A razão disso são os obstáculos impostos pela ausência do mecanismo biela-manivela. Em sua tese, Hansson (2006) argumenta dois desses desafios, que devem ser superados para viabilizar o comércio, a saber:

1. **Uma máquina elétrica robusta:** O equipamento elétrico utilizado deve suportar o ambiente hostil no qual estará instalado, sendo a hostilidade devido às altas temperaturas e constante vibração presentes.
2. **Sofisticados controles de combustão:** A depender do processo de combustão escolhido para o motor o controle desse processo deve atender às complexidades do processo. No caso do motor *HCCI*, visto que o combustível é injetado com antecedência na câmara de combustão e a ignição ocorre no momento em que a temperatura e pressão sejam suficientes, não há possibilidade de se utilizar os métodos convencionais de controle.

Em relação ao segundo item, a equipe da Universidade de Newcastle têm publicado a evolução do resultado obtido por eles por meio das técnicas de controle retro-alimentado

do ponto motor superior alcançado pelo pistão (MIKALSEN; JONES; ROSKILLY, 2010; MIKALSEN; ROSKILLY, 2010a; MIKALSEN; ROSKILLY, 2010b; JIA, 2016).

Contudo, é observado que atualmente a atenção dos pesquisadores está voltada para a otimização do equipamento em estudo, seja através da otimização do processo de renovação da mistura ar-combustível no interior da câmara ou através da melhor compreensão dos mecanismos de ineficiência energética. Resume-se alguns desses trabalhos.

Yuan et al. (2016) realiza uma investigação da influência do movimento do pistão sobre o processo de combustão para o motor de pistão livre, comparando os resultados com o motor convencional. Para sua análise, o autor utiliza um modelo numérico CFD. Os seus resultados indicam que, em relação aos motores convencionais, os motores de pistão livre apresentam um tempo de combustão mais prolongado devido à maior velocidade média do pistão ao longo do processo de combustão. Além disso, Yuan et al. (2016) verifica diferenças presentes na taxa de calor entregue nas etapas do processo de combustão, concluindo que estas diferenças resultam em uma eficiência levemente reduzida para o motor de pistão livre. Contudo, os motores de pistão livre apresentam grande vantagem em relação à emissão de gases NO_x .

Hung, Jaewon e Lim (2017) realiza um estudo do processo de renovação da mistura ar-combustível no interior da câmara de combustão de um motor de pistão livre utilizando um modelo CFD, avaliando a influência das dimensões e posições das válvulas de admissão e escape na eficiência de renovação da mistura ar-combustível. Os resultados do estudo são comparados com análises experimentais para validação.

Jia et al. (2018) faz uma análise aprofundada dos mecanismos responsáveis pelas forças de atrito para ambos motores convencional e de pistão livre, comparando as diferenças obtidas entre os dois motores. Os autores verificaram que as perdas devido às forças de atrito nos motores de pistão livre são cerca de 50% menores, quando em comparação com os motores convencionais. Contudo, Jia et al. (2018) mostra que tal diferença não possui contribuição das forças presentes nos anéis de vedação, e sim devido à ausência do mecanismo biela-manivela.

Chendong et al. (2019) replica o modelo proposto por Jia (2016), validando-o por meio de uma bancada experimental. Em um segundo momento, o autor realiza uma análise paramétrica na qual ele avalia a influência dos parâmetros físicos do motor, como a massa, e dos parâmetros do circuito elétrico alimentado pelo gerador. Em suas conclusões, Chendong et al. (2019) descreve as relações encontradas entre as variáveis avaliadas.

1.3 Modelos Matemáticos

1.3.1 Métodos de modelagem de geradores elétricos lineares

Um dos obstáculos, quando se pretende projetar uma máquina elétrica, é modelar e calcular o campo eletromagnético e a sua distribuição no interior da máquina. Tal é a importância da compreensão da distribuição deste campo que é notável o surgimento de máquinas de alta precisão, com acelerações e densidades de força cada vez maiores, paralelamente ao desenvolvimento de métodos de cálculo mais precisos (BOLDEA, 2015).

Usualmente, as técnicas para modelagem do campo são classificadas de acordo com a intensidade do uso de métodos numéricos para a obtenção da solução desejada. Neste sentido, se nenhum método numérico é utilizado para resolver as equações diferenciais parciais usadas para descrever as leis de Gauss ou Maxwell, o método é denominado analítico. Se as referidas equações são resolvidas numericamente, o método é denominado numérico. Entre esses dois extremos, enquadra-se a possibilidade de obter a solução analítica das equações, como por exemplo através de séries de Fourier, sendo porém que o cálculo dessa solução depende de elevado número de fatores que devem ser calculados simultaneamente. A essa possibilidade, refere-se à técnica como método semi-analítico.

A seguir, descreve-se brevemente algumas dessas técnicas.

1.3.1.1 Circuito magnético equivalente

Historicamente, o método do circuito magnético equivalente foi o primeiro método utilizado para obter a distribuição do campo magnético. Este método consiste em discretizar o interior da máquina elétrica, ou uma parte representativa do mesmo, substituindo os seus elementos por modelos teóricos e associando-os de forma a montar um circuito semelhante a um circuito elétrico. O cálculo da distribuição do campo magnético baseia-se em resolver o circuito construído utilizando-se uma lei análoga a de Kirchhoff, aplicada a circuitos elétricos (CURTI; PAULIDES; LOMONOVA, 2015).

Apesar de ser o método mais simples, com concepção e implementação facilitadas, a precisão nos resultados é fundamentalmente dependente do quão minucioso é o processo de modelagem do problema analisado. Assim sendo, os circuitos equivalentes podem se tornar grandes e complexos, e prolongado é o tempo exigido para a derivação dos mesmos (GYSEN et al., 2010; CURTI; PAULIDES; LOMONOVA, 2015).

1.3.1.2 Mapeamento Schwartz Christoffel

Este método consiste em uma transformação que permite mapear um domínio com um formato qualquer, transformando em um domínio com o formato poligonal. Aplicável em quaisquer operações que envolvem o conceito de campo, e que os parâmetros físicos

são uniformemente distribuídas em um espaço isotrópico. Pode-se comparar este método à Transformação de Laplace, utilizada em estudos de vibrações mecânicas, controle de sistema, entre outras áreas do conhecimento.

Este método é sempre associado a outro método analítico obtendo ótima precisão nos resultados, cerca de 2% a 3% quando comparados com FEM, além de ser facilmente implementada. Contudo, o método é limitado a problemas planos e, na maioria dos casos, deve-se considerar a permeabilidade magnética dos materiais ferromagnéticos infinita, o que possibilita a estimativa da distribuição do campo em apenas algumas regiões (CURTI; PAULIDES; LOMONOVA, 2015).

1.3.1.3 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos consiste em dividir o domínio avaliado em diversos elementos. Para um único elemento, tem-se a matriz que associa as variáveis físicas contidas no modelo e cuja associação advém das equações diferenciais que ditam os fenômenos físicos simulados. Logo, constrói-se para o domínio discretizado a matriz de rigidez global e resolve-se todo o sistema avaliado.

A precisão dos resultados obtida sem a necessidade de resolver as equações das leis de Gauss e Maxwell é a característica mais atraente do FEM. Contudo esta apresenta como contraponto o esforço computacional, consideravelmente elevado.

Todos os métodos citados até o momento requerem a discretização da geometria e malhagem do modelo para o cálculo da distribuição de campo. Portanto, a solução obtida é determinada apenas para os pontos pré-definidos. Obter alta precisão nos resultados é aumentar consideravelmente o custo computacional da rotina utilizada, conseqüentemente o tempo necessário para os cálculos. A isso, acrescenta-se que a necessidade de experiência do usuário para que a discretização do modelo seja feita corretamente para que os resultados obtidos sejam confiáveis (GYSEN et al., 2010).

1.3.1.4 Método dos subdomínios

O método foi originalmente sugerido por Hague em 1929 no cálculo do campo magnético para uma posição arbitrária entre dois fios condutores de corrente que posicionavam em paralelo (GYSEN et al., 2010). Ao longo do tempo, o novo método foi aplicado por diversos estudiosos na tentativa de encontrar soluções para problemas cada vez mais complexos. Nos últimos anos, vê-se como resultado desse esforço coletivo, a possibilidade de utilizar a metodologia de Hague para descrever a distribuição do campo magnético no interior de máquinas elétricas.

O método os subdomínios consiste em dividir o domínio avaliado em regiões físicas, denominadas subdomínios, para as quais as equações de Maxwell são resolvidas

analiticamente. Logo, as equações de Maxwell são escritas para cada subdomínio em termos de potencial, a partir das quais a densidade de fluxo é derivada. Condições de contorno são impostas nos limites de cada subdomínio através da determinação do potencial, ou fluxo, do campo eletromagnético, obtendo-se por fim um sistema de equações lineares (DEVILLERS et al., 2016).

Este método também é referido como Modelo analítico exato, Modelo semi-analítico, modelagem baseada em Fourier ou Método Harmônico (CURTI; PAULIDES; LOMONOVA, 2015). Quanto a classificação como um método analítico, Gysen et al. (2010), Devillers et al. (2016) reforçam que o uso de métodos numéricos para a resolução do sistema de equações lineares insere erros nos resultados, por isso sendo o uso do termo semi-analítico mais apropriado.

Estimada a distribuição do campo magnético no equipamento elétrico, através da técnica escolhida, o próximo passo é determinar a tensão, corrente e força induzidas, o que é facilmente obtido através das conhecidas equações das Leis de Lenz, Kirchhoff e Ohm. Este procedimento será descrito com mais detalhes no capítulo referente ao desenvolvimento do modelo do gerador linear.

1.3.2 Modelos de gerados elétricos lineares associados a motores de pistão livre

Descreve-se brevemente sobre os modelos de geradores usualmente utilizados nos trabalhos referentes a motores de pistão livre.

Com raras exceções, os geradores elétricos lineares são modelados como um amortecedor viscoso, cujo coeficiente de amortecimento é equivalente à força contraeletromotriz produzida pelo equipamento. Tal raciocínio é coerente, pelo conhecimento de que a tensão induzida nas bobinas do gerador variam em função da velocidade de maneira proporcional em determinada faixa de operação. Logo, como consequência, a corrente e força induzidas também apresentam variações próximas, devido à hipótese de comportamento linear.

Contudo, duas desvantagens são apresentadas em relação a este procedimento. A primeira, a necessidade de se recorrer a experimentos físicos, ou a documentação dos fabricantes, para se obter o valor do coeficiente de amortecimento. Segundo, neste procedimento não há a possibilidade de se conhecer a influência dos parâmetros e dimensões do gerador, e do circuito elétrico associado a ele, sobre o comportamento dinâmico e desempenho do motor.

Devido a esses aspectos, este trabalho busca desenvolver o modelo mais completo do gerador elétrico, capaz de representar com maior fidelidade os fenômenos não-lineares presentes neste tipo de equipamento, e que este modelo seja acoplado ao modelo do motor de pistão livre. Com isso, espera-se obter um modelo mais completo, com o qual é possível

observar a interação entre os fenômenos do elemento que produz a força motriz e os fenômenos presentes no elemento que extrai trabalho do sistema.

1.3.3 Métodos de modelagem de motores de pistão livre

Devido à inexistência do mecanismo de conversão do movimento linear em rotativo, o motor de pistão livre apresenta um *modus operandi* único e diverso do comportamento exibido pelo motor convencional (JIA, 2016).

Segundo Mikalsen (2008), o modelo básico composto dos fenômenos dinâmicos associados ao funcionamento do motor de pistão livre é facilmente obtido, pois o movimento do pistão é determinado pela resultante das forças sobre ele aplicadas. De fato, todos os autores referenciados por este trabalho obtêm a equação do movimento aplicando a Segunda Lei de Newton sobre o sistema avaliado.

Mikalsen (2008) também lista os modelos da câmara de rebote e do gerador elétrico como equações que podem ser prontamente encontradas. Contudo, como mostrado na seção anterior, existe a possibilidade de aumentar consideravelmente a complexidade do modelo do gerador elétrico.

Em seguida, Mikalsen (2008) argumenta que os processos termodinâmicos ocorridos na câmara de combustão exigem modelos mais sofisticados, para que os fenômenos relativos a mecânica dos fluidos, transferência de calor e fenômenos da fisico-química, sejam devidamente representados. Porém, é necessário dizer que tal nível de complexidade também depende do objetivo e uso final do modelo (HEYWOOD et al., 1988). Por exemplo, para uma análise das emissões dos gases resultantes do processo de combustão, modelos de alta complexidade, tal qual referidos por Mikalsen (2008), são os ideais. Para uma análise de potência estimada e otimização do equipamento, talvez um modelo em que os fenômenos fisico-químicos sejam postos de lado seja o melhor caminho, obtendo uma formulação em que os fenômenos termodinâmicos e dinâmicos sejam acoplados.

Heywood et al. (1988) classifica os modelos segundo as equações que dão origem a eles, a saber: Modelos termodinâmicos ou modelos fluidomecânicos. À primeira classe, o autor também refere-se como modelos adimensionais, ou de dimensão nula, visto a ausência de representação do movimento dos fluidos contidos na câmara.

Além da classificação descrita, os modelos também podem ser descritos segundo o número de volumes de controle utilizados para representar o ciclo descrito ao longo do funcionamento da máquina térmica (FERGUSON; KIRKPATRICK, 2015). Neste sentido, denomina-se o modelo com uma, duas ou três regiões.

2 Desenvolvimento e validação dos modelos

2.1 Modelo do Gerador Elétrico Linear

2.1.1 Introdução

Esta seção é uma descrição da formulação proposta por [Gysen et al. \(2010\)](#), aplicável a casos generalizados de estudo em atuadores elétricos. A adequação da metodologia para o estudo de geradores é explicitada. O método é detalhado à aplicação específica para a topologia do gerador elétrico linear avaliada neste trabalho, a saber: "gerador tubular, com magnetização radial, circuito trifásico e com polos salientes".

2.1.2 Modelagem de subdomínios

2.1.2.1 Equações da magnetostática

A Equação 2.1 expressa a distribuição do campo magnético em termos do vetor potencial magnético, \vec{A} , para o sistema de coordenadas axisimétricas ([GYSEN et al., 2010](#)).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} A_\theta = -\mu_0 \left(\frac{\partial M_r}{\partial \theta} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) - \mu \cdot J_\theta \quad (2.1)$$

Onde,

$\vec{A}(r, \theta, z)$ é o vetor potencial magnético. Unidade: $[Wb/m]$;

M_d é o vetor de magnetização na direção d (genérica). Unidade: $[A/m]$;

J_θ é o vetor de densidade de corrente na direção θ . Unidade: $[A/m^2]$.

A equação acima é obtida a partir das equações de Maxwell, levando-se a efeito as seguintes considerações.

1. O problema eletromagnético considerado deve ser descrito em um plano;
2. As propriedades dos materiais são lineares, homogêneos e isotrópicos;
3. A permeabilidade magnética dos materiais ferromagnéticos é infinita;
4. Os campos magnéticos gerados por imãs permanentes ou por fios condutores de corrente são constantes na direção radial.

Descreve-se brevemente as justificativas das considerações realizadas. Equipamentos eletromagnéticos são de geometria tridimensional. Contudo, a metodologia proposta limita-se a problemas descritos em um plano. Logo, conclui-se que a geometria do problema

avaliado deve ser invariável em uma das coordenadas, ou dimensões, consideradas. Para a topologia selecionada para estudo neste trabalho, e considerando-se que o sistema de coordenadas mais adequado para essa geometria seja o sistema axisimétrico (r, θ, z) , resulta-se que a direção na qual a invariabilidade é observada é a θ .

A solução analítica é somente aplicada a problemas lineares, logo a permeabilidade magnética dos materiais é considerada uma propriedade isotrópica e homogênea. Da mesma forma, os ímãs permanentes são modelados com a curva de magnetização, campo magnético *versus* campo magnetizante (\vec{B} vs \vec{H}) linear, com o campo remanescente B_{rem} e com permeabilidade relativa μ_r .

A permeabilidade relativa dos materiais ferromagnéticos é considerada infinita, portanto a distribuição do campo magnético não é estimada no interior desses materiais. Contudo, o potencial de campo magnético nos limites delineados por esses materiais é igualado a zero (condição de contorno de Neumann).

Deve-se também considerar as regiões geradoras de campo magnético possuem componentes invariáveis na direção radial. Acaso haja uma variação no campo na direção referida, é necessário que a região seja dividida, de forma que as propriedades sejam constantes dentro das novas divisões.

Determinado o vetor potencial magnético para o domínio avaliado, através da Equação 2.1, a densidade do fluxo magnético é calculado como descrito na Equação 2.2.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.2)$$

2.1.2.2 Solução analítica das Equações de Maxwell

Há uma unidade na metodologia proposta pelos autores referenciados para obtenção da solução da equação de Poisson 2.1. Gysen et al. (2010) propõem que os termos relativos à geração de campo magnético, \vec{M} , sejam expressos em séries de Fourier, abrindo a possibilidade de aplicação da técnica de separação de variáveis com fim de encontrar a solução desejada. Seguindo essa metodologia, a solução do vetor potencial magnético é dado como o produto de duas funções, sendo cada função dependente de uma das coordenadas do plano avaliado.

Contudo, para problemas cujas coordenadas são axisimétricas, uma das funções citadas, especificamente a função dependente da direção radial r , é composta pela combinação linear de funções especiais (por exemplo, funções de Bessel). Neste ponto, as soluções propostas pelos autores podem divergir na escolha das funções especiais utilizadas. Gysen et al. (2010) propõe como solução a combinação de funções de Bessel modificada do tipo **I** e **K**, de ordens 0 e 1. Já Yan et al. (2016) deduz sua solução utilizando funções *Struve* modificadas do tipo L .

Vale notar que, apesar das funções especiais, utilizadas para compor a solução das Equações de Maxwell poderem ser divergentes, a solução ainda apresenta convergência. Porém, como tal convergência depende do número de harmônicos (número de termos da série de Fourier) a serem calculados, a solução pode divergir da solução real (GYSEN et al., 2010).

2.1.2.3 Divisão em regiões

Como descrito anteriormente, para que a distribuição da densidade de campo magnético para o problema proposto seja estimada, é necessário que a geometria bidimensional seja dividida em regiões. Tal divisão é realizada segundo a natureza (material) e função do componente delimitado pela região. No aspecto geral, as regiões obtidas pelo processo de divisão podem ser classificadas como periódicas ou não. Mais especificamente, classifica-se cada região como:

- Região não geradora de campo magnético (ex.: ar, vácuo, materiais ferromagnéticos e materiais magnéticos moles);
- Região magnetizada (ímãs permanentes);
- Região condutora de corrente (bobinas e fios condutores).

Após o processo de divisão, é necessário verificar se as regiões obtidas são delimitadas por quatro fronteiras cada, e que estas fronteiras sejam paralelas entre si em pares e às direções determinadas pelo sistema de coordenadas. A Figura 12 ilustra a divisão para uma geometria com coordenadas cilíndricas.

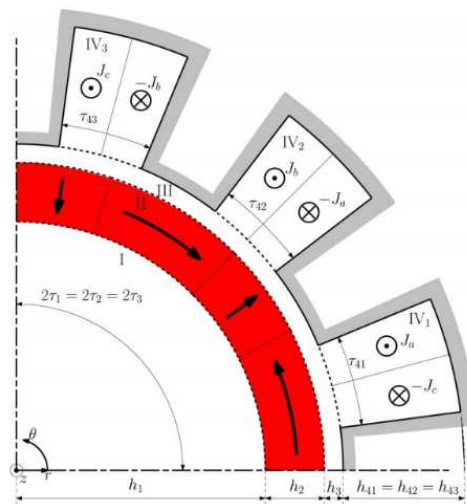


Figura 12 – Exemplo de divisão em regiões para uma geometria com coordenadas cilíndricas. Adaptado de Gysen (2011)

2.1.2.4 Condições de contorno

As condições de contorno são aplicadas nas fronteiras determinadas entre as regiões do domínio. A condição é especificada de acordo com a classificação das regiões separadas pelas fronteiras.

Gysen et al. (2010) descreve a existência de cinco tipos de condições de contorno, a saber:

- Condição de contorno de Neumann;
- Condição de contorno de Dirichlet;
- Condição de contorno contínua;
- Combinação das condições de contorno de Neumann e contínua;
- Conservação do fluxo magnético;
- Lei de Ampère.

Para registro, nos limitaremos a descrever somente as condições que foram aplicadas à topologia selecionada.

A condição de contorno do tipo Neumann ocorre na interface entre um material ferromagnético e um material magnético mole. Nesta condição, o fluxo magnético tangencial a fronteira é nulo. Já na condição de contorno de continuidade, as componentes normal e tangencial da densidade de fluxo magnético deve manter a continuidade na fronteira delineada entre as regiões. Esta condição de contorno é aplicada entre regiões com permeabilidades magnética diferentes. Por fim, para os casos em que uma das regiões consideradas é caracterizada pelo intercalamento periódico de materiais, como por exemplo no entreferro dos geradores de polos salientes, a combinação das condições de contorno de Neumann e contínua é a condição de contorno adequada.

Vale notar que, para a obtenção da solução desejada, cada região não periódica delimitada pelo processo de divisão possui um sistema de coordenadas local. Esse sistema de coordenadas é obtido apenas via translação do sistema de coordenadas utilizado por referência. Logo, cada região é deslocada na direção axial z , dentre o sistema de coordenadas (r, z, θ) , por uma distância δz . Denota-se este sistema de coordenadas local por (r, z_k, θ) , sendo,

$$z_k = z - \delta z \quad (2.3)$$

A Figura 13 ilustra esta sistematização do uso de coordenadas locais.

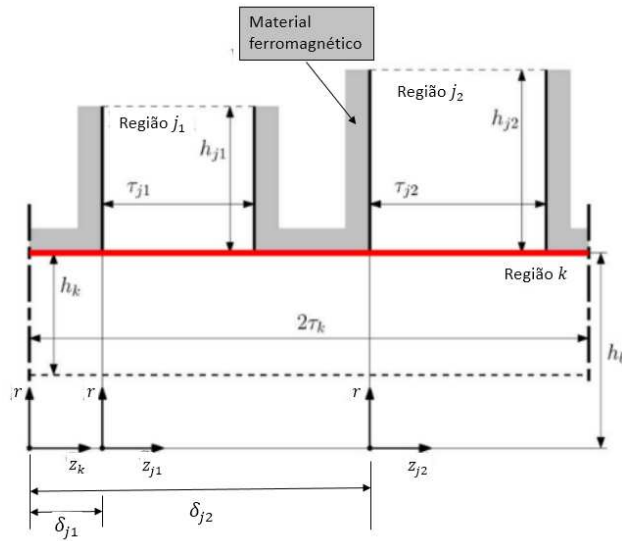


Figura 13 – Exemplo do uso de coordenadas locais para regiões diversas. Adaptado de Gysen (2011)

2.1.2.5 Topologia do gerador

Antes de descrever a etapa final do processo de estimativa da distribuição do campo magnético no interior do gerador, descorre-se brevemente sobre a topologia selecionada.

Há uma variedade de topologias para geradores lineares com imãs permanentes e, como citado anteriormente, a topologia selecionada para este trabalho é classificada gerador tubular, com magnetização radial, circuito trifásico e com polos salientes.

A Figura 14 mostra ilustrações sobre a topologia descrita e um corte de um trecho ativo (unidade básica do gerador) com suas dimensões.

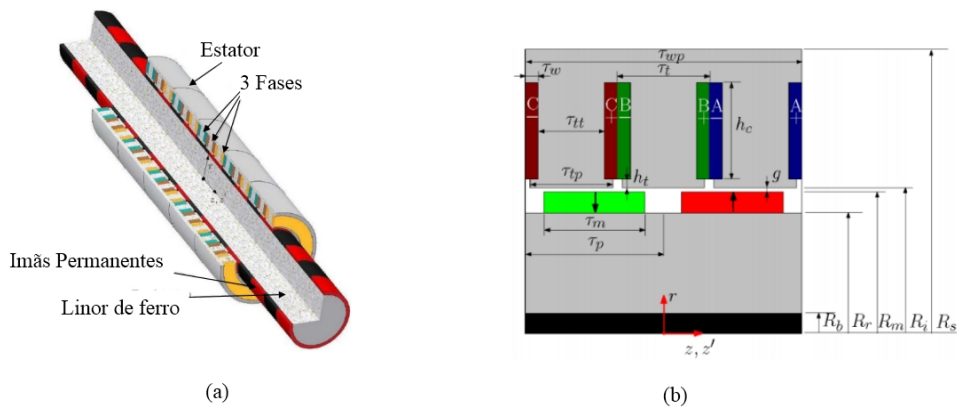


Figura 14 – (a) Topologia do gerador linear. (b) Dimensões de um trecho ativo. Adaptado de Gysen et al. (2008)

2.1.2.6 Aplicação do método de subdomínios

Determinadas a solução analítica para as equações de Maxwell e a topologia do equipamento avaliado, a aplicação do método escolhido é direta. A Figura 15 ilustra a divisão da geometria do gerador e as condições de contorno selecionadas para as respectivas fronteiras.

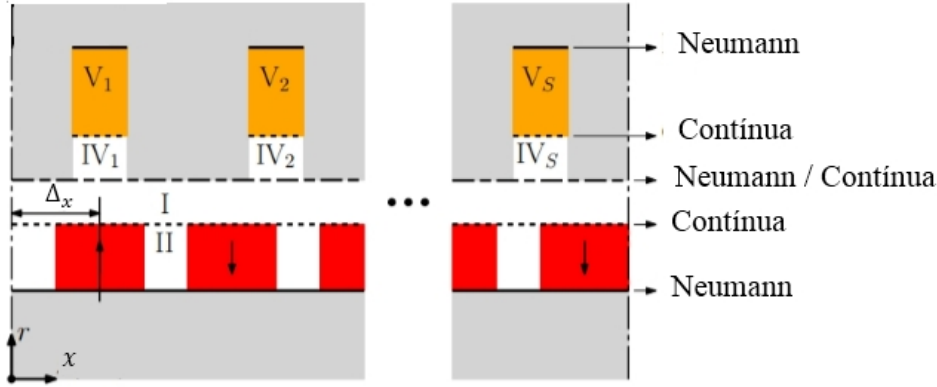


Figura 15 – Divisão em regiões e condições de contorno aplicadas. Adaptado de Gysen (2011)

Ao aplicar as referidas condições de contorno, um conjunto de equações lineares e independentes é obtido, cuja forma é indicada na Equação 2.4.

$$[M] \{X\} = \{S\} \quad (2.4)$$

Onde,

- $[M]$ é a matriz topológica do sistema;
- $\{X\}$ é o vetor de constantes desconhecidas;
- $\{S\}$ é o vetor dos termos geradores de campo.

Obtidos os valores das constantes desconhecidas, $\{X\}$, a distribuição do campo magnética é determinada em todo domínio avaliado. É interessante observar, que a distribuição \vec{B} resultante é função do deslocamento z , ou seja, é necessário que o sistema seja resolvido apenas uma vez para que a distribuição seja estimada para qualquer deslocamento z .

A formulação detalhada dos termos da Equação 2.4 está disponível no Apêndice A.

2.1.2.7 Fluxo concatenado e tensão induzida

O fluxo concatenado $\Lambda_{i,pm}$ nas bobinas presentes no slot i para um deslocamento do linor em relação ao estator, Δz , é calculado a partir do vetor potência magnético $\vec{A}_\theta^{V,i}$,

como indicado nas Equações 2.5 a 2.7 (GYSEN, 2011).

$$\Lambda_{i,pm} = \frac{2\pi}{\tau_o(R_c - R_t)} \int_{R_t}^{R_c} \int_0^{\tau_o} A_{\theta}^{V,i}(r, z, \Delta z) \cdot r \cdot dr \cdot dz \quad (2.5)$$

$$A_{\theta}^{V,i}(r, z, \Delta z) = \frac{1}{w_n^V} \left(a_n^{V,i} \cdot \mathbf{I}_1(w_n^V \cdot r) + b_n^{V,i} \cdot \mathbf{K}_1(w_n^V \cdot r) \right) \cos(w_n^V \cdot z) + A_{\theta,0}^{V,i}(r) \quad (2.6)$$

$$A_{\theta,0}^{V,i}(r) = -\mu \frac{J_{\theta 0}^{V,i} r^3}{3} + \frac{B_0^{V,i} r}{2} + \frac{A_0^{V,i}}{r} \quad (2.7)$$

Onde,

- $\Lambda_{i,pm}$ é o fluxo concatenado nas bobinas presentes no slot i ;
- $J_{\theta 0}^{V,i}$ é a densidade de corrente na direção θ , na região V, i ;
- \mathbf{I}_1 é a função modifica de Bessel do tipo I e ordem 1;
- \mathbf{K}_1 é a função modifica de Bessel do tipo K e ordem 1;

Para encontrar $A_0^{V,i}$, necessário aplicar a condição de contorno de continuidade entre as regiões I e IV_i e entre as regiões IV_i e V_i . Entre as regiões I e IV_i , tem-se as Equações 2.8 a 2.9, que resolvidas levam a Equação 2.10.

$$A_0^{IV,i} = R_i \cdot A_{\theta,0}^{IV,i}(R_i) + \mu_o J_{\theta 0}^{IV,i} \frac{R_i^3}{3} - \frac{B_0^{IV,i} R_i^2}{2} \quad (2.8)$$

$$A_{\theta,0}^{IV,i}(R_i) = \frac{1}{\tau_o} \int_0^{\tau_o} A_{\theta}^I(R_i, z, \Delta z) dz \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} A_{\theta,0}^{IV,i}(R_i) &= \frac{1}{\tau_o} \sum_{n=1}^{N_I} \frac{1}{w_n^I} \left(a_n^I \cdot \mathbf{I}_1(w_n^I \cdot R_i) + b_n^I \cdot \mathbf{K}_1(w_n^I \cdot R_i) \right) \times \\ &\times \left[\sin(w_n^I(\tau_o + \Delta z + \Delta^{IV,i})) - \sin(w_n^I(\Delta z + \Delta^{IV,i})) \right] - \\ &- \frac{1}{\tau_o} \sum_{n=1}^{N_I} \frac{1}{w_n^I} \left(c_n^I \cdot \mathbf{I}_1(w_n^I \cdot R_i) + d_n^I \cdot \mathbf{K}_1(w_n^I \cdot R_i) \right) \times \\ &\times \left[\cos(w_n^I(\tau_o + \Delta z + \Delta^{IV,i})) - \cos(w_n^I(\Delta z + \Delta^{IV,i})) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

De forma análoga, aplicando-se a condição de continuidade entre as regiões IV, i e V, i , obtém-se as Equações 2.11 e 2.12, que resolvidas, levam a Equação 2.13

$$A_0^{V,i} = R_t \cdot A_{\theta,0}^{V,i}(R_t) + \mu_o J_{\theta 0}^{V,i} \frac{R_t^3}{3} - \frac{B_0^{V,i} R_t^2}{2} \quad (2.11)$$

$$A_{\theta,0}^{V,i}(R_t) = \frac{1}{\tau_o} \int_0^{\tau_o} A_{\theta}^{IV}(R_t, z, \Delta z) dz \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
A_{\theta,0}^{V,i}(R_t) &= \frac{1}{\tau_o} \sum_{n=1}^{N_I} \frac{1}{w_n^{IV^2}} \left(a_n^{IV} \cdot \mathbf{I}_1(w_n^{IV} \cdot R_t) + b_n^{IV} \cdot \mathbf{K}_1(w_n^{IV} \cdot R_t) \right) \times \\
&\times \left[\text{sen}(w_n^{IV} \cdot \tau_o) - \text{sen}(w_n^{IV} \cdot 0) \right] + \\
&+ \tau_o \left(\frac{A_0^{IV,i}}{R_t} - \mu \frac{J_{\theta 0}^{IV,i} R_t^2}{3} + \frac{B_0^{IV,i} R_t}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Realizada análises das grandezas de ordem dos termos da Equação 2.13, verificou-se que o termo $A_{\theta,0}^{V,i}/R_t$ é desprezíveis em comparação aos outros termos. Além disso, observa-se que na resolução para a densidade de campo devido a presença dos imãs, tem-se $J_{\theta,0}^{IV,i} = J_{\theta,0}^{V,i} = 0$ e $B_0^{IV,i} = B_0^{V,i} = 0$, podendo então a expressão 2.5 ser simplificada, conforme indicado na Equação 2.14.

$$\begin{aligned}
\Lambda_{i,pm}(\Delta z) &= 2 \cdot \pi \cdot A_0^{V,i}(\Delta z) \\
&= 2 \cdot \pi \frac{R_i}{R_t} \frac{1}{\tau_o} \sum_{n=1}^{N_I} \frac{1}{w_n^{I^2}} \left(a_n^I \cdot \mathbf{I}_1(w_n^I \cdot R_i) + b_n^I \cdot \mathbf{K}_1(w_n^I \cdot R_i) \right) \times \\
&\times \left[\text{sen}(w_n^I(\tau_o + \Delta z + \Delta^{IV,i})) - \text{sen}(w_n^I(\Delta z + \Delta^{IV,i})) \right] - \\
&- \frac{1}{\tau_o} \sum_{n=1}^{N_I} \frac{1}{w_n^{I^2}} \left(c_n^I \cdot \mathbf{I}_1(w_n^I \cdot R_i) + d_n^I \cdot \mathbf{K}_1(w_n^I \cdot R_i) \right) \times \\
&\times \left[\cos(w_n^I(\tau_o + \Delta z + \Delta^{IV,i})) - \cos(w_n^I(\Delta z + \Delta^{IV,i})) \right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Conhecida a expressão do fluxo concatenado, calcula-se portanto a tensão induzida nas bobinas, através da Lei de Lenz, conforme indicado pelas Equações 2.15 e 2.16.

$$\begin{aligned}
e_i(t) &= -N_c \frac{d\Lambda_{i,pm}(\Delta z)}{dt} = -N_c \frac{d\Lambda_{i,pm}(\Delta z)}{d\Delta z} \frac{d\Delta z}{dt} \\
&= -N_c \cdot v(t) \frac{d\Lambda_{i,pm}(\Delta z)}{d\Delta z}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Lambda_{i,pm}(\Delta z)}{d\Delta z} &= 2 \cdot \pi \frac{R_i}{R_t} \frac{1}{\tau_o} \sum_{n=1}^{N_I} \frac{1}{w_n^I} \left(a_n^I \cdot \mathbf{I}_1(w_n^I \cdot R_i) + b_n^I \cdot \mathbf{K}_1(w_n^I \cdot R_i) \right) \times \\
&\times \left[\cos(w_n^I(\tau_o + \Delta z + \Delta^{IV,i})) - \cos(w_n^I(\Delta z + \Delta^{IV,i})) \right] - \\
&- \frac{1}{\tau_o} \sum_{n=1}^{N_I} \frac{1}{w_n^I} \left(c_n^I \cdot \mathbf{I}_1(w_n^I \cdot R_i) + d_n^I \cdot \mathbf{K}_1(w_n^I \cdot R_i) \right) \times \\
&\times \left[\text{sen}(w_n^I(\tau_o + \Delta z + \Delta^{IV,i})) - \text{sen}(w_n^I(\Delta z + \Delta^{IV,i})) \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.1.2.8 Força eletromagnética

A expressão da força eletromagnética é obtida aplicando-se a lei da conservação de energia no sistema eletromecânico. Considera-se que a energia de campo e a co-energia

do sistema magnético sejam iguais, ou seja, o sistema é linear (BOLDEA, 2015). Além disso, considera-se que a auto indutância e as indutâncias mútuas das bobinas sejam independentes do deslocamento do cursor para a topologia e configuração escolhidas. Com os apontamentos acima, obtém-se a Equação 2.17.

$$F_{ger} = N_c \cdot N_{pa} \begin{Bmatrix} i_A & i_B & i_C \end{Bmatrix} \frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \Lambda_{A,pm}(\Delta z) \\ \Lambda_{B,pm}(\Delta z) \\ \Lambda_{C,pm}(\Delta z) \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

2.1.3 Circuito elétrico

Estimada a distribuição do campo eletromagnético no interior da máquina, bem como a tensão induzida, é necessário que o circuito elétrico associado aos terminais do gerador seja conhecido, para que a corrente seja completamente definida.

A Figura 16 ilustra o diagrama esquemático do circuito determinado para apenas da fase "A" do gerador. Observa-se que neste modelo, a resistência (R_{ger}), a auto-indutância (L_{AA}) e as indutâncias mútuas (L_{AB} e L_{AC}) das bobinas são consideradas. Também consideradas a resistência de carga ($R_{L,A}$), bem como a indutância e a capacitância de carga ($L_{L,A}$ e $C_{L,A}$).

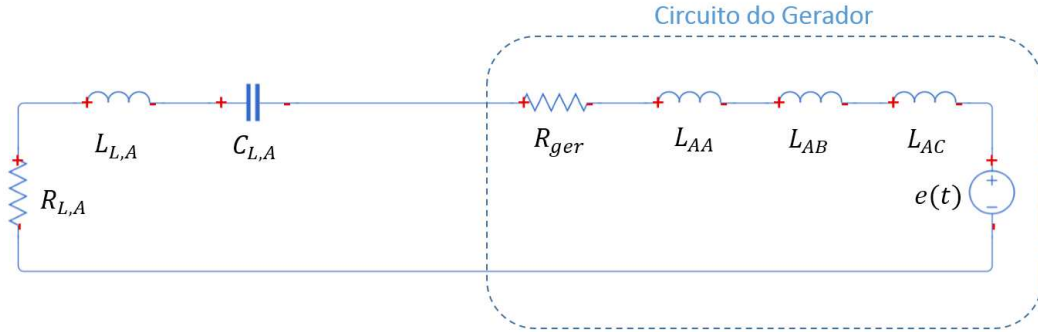


Figura 16 – Circuito completo do gerador e carga associada (Fase A).

Com base no diagrama apresentado, três modelos para o circuito elétrico foram desenvolvidos, sendo um modelo no qual apenas a resistência do circuito é considerada (modelo R); o segundo no qual a resistência e a indutância do circuito são não nulas (modelo RL) e, por fim, o terceiro no qual nenhum dos elementos é desprezado.

Descreve-se o equacionamento de cada modelo.

2.1.3.1 Modelo R

No modelo R, a indutância e a capacitância do circuito são consideradas desprezíveis, para os casos nos quais essas grandezas não apresentam influência sobre o comportamento

dinâmico do sistema como um todo.

Neste caso, a corrente instantânea do circuito é determinada pela Equação 2.18.

$$\{i(t)\} = [R_T] \{e(t)\} \quad (2.18)$$

Onde $[R_T]$ é calculada segundo a Equação 2.19.

$$[R_T] = \begin{bmatrix} R_{ger} + R_{L,A} & 0 & 0 \\ 0 & R_{ger} + R_{L,B} & 0 \\ 0 & 0 & R_{ger} + R_{L,C} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

2.1.3.2 Modelo RL

Considera-se no modelo RL, que ambas as propriedades resistivas e indutivas do circuito sejam relevantes para a análise do comportamento dinâmico do sistema. Neste caso, a corrente instantânea é determinada pela EDO 2.20

$$\{\dot{i}(t)\} = -[L_T]^{-1} \left([R_T] \{i(t)\} + \{e(t)\} \right) \quad (2.20)$$

Onde $[R_T]$ e $[L_T]$ são determinadas segundo as Equações 2.19 e 2.21, respectivamente.

$$[L_T] = \begin{bmatrix} L_{AA} + L_{L,A} & L_{AB} & L_{AC} \\ L_{BA} & L_{BB} + L_{L,B} & L_{BC} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} + L_{L,C} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.1.3.3 Modelo RLC

Por fim, no modelo RLC, todos os componentes ilustrados na Figura 16 são considerados no equacionamento. A Equação 2.22 é utilizada para determinar a corrente instantânea do circuito.

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{i}(t)\} \\ \{i(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_T] & [0] \\ [0] & [R_T] \end{bmatrix}^{-1} \left(- \begin{bmatrix} [R_T] & [C_T]^{-1} \\ -[R_T] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{i(t)\} \\ \{\int_0^t i(\tau) d\tau\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{e(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \right) \quad (2.22)$$

Onde $[C_T]$ é determinada pela Equação 2.23.

$$[C_T] = \begin{bmatrix} C_{L,A} & 0 & 0 \\ 0 & C_{L,B} & 0 \\ 0 & 0 & C_{L,C} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Portanto, a avaliação conjunta das equações que determinam as correntes instantâneas dos circuitos do gerador, 2.18, 2.20 e 2.22 e das equações que estimam a tensão e força induzidas, ou contraeletromotrizes, são a base para uma análise do desempenho e do comportamento dinâmico do gerador.

Neste trabalho, utiliza-se como critério de desempenho do gerador, a potência consumida pelo resistores de carga associados aos terminais do mesmo, $R_{L,a}$. Portanto, esta potência será referida como a potência gerada pelo equipamento. A Equação 2.24 é utilizada para o cálculo da potência elétrica gerada.

$$Pot_{ger} = \int_0^t R_L \cdot N_{pa} \left\{ \begin{matrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{matrix} \right\} dt \quad (2.24)$$

Onde,

N_{pa} é o número de trechos ativos do gerador.

2.1.4 Validação do método de subdomínios

Para validar os resultados obtidos pelo método selecionado para estimar a densidade de fluxo magnético \vec{B} , um modelo do mesmo problema foi construído e resolvido utilizando o método de elementos finitos (MEF).

O desenvolvimento do modelo MEF se deu utilizando o software FEMM, software livre, limitado a resolução de problemas bi-dimensionais. Para a geometria construída, o número de nós utilizados fora 10.124 e os elementos básicos eram triangulares. Nota-se ainda que o software referido utiliza como base do equacionamento das matrizes de seus elementos o método denominado por método do escalar potencial. A Figura 17 ilustra o resultado final da geometria construída no software, depois de executar o processo de construção da malha.

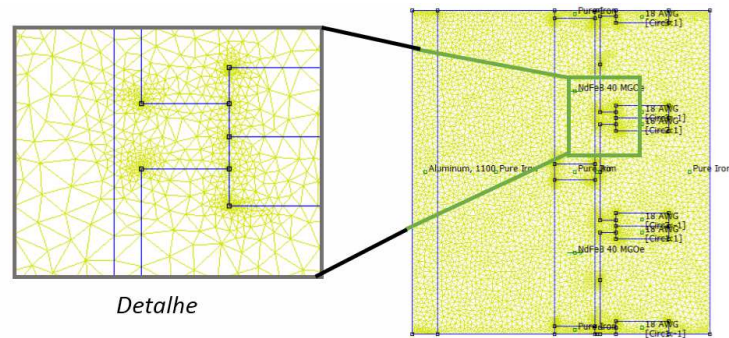


Figura 17 – Geometria de um trecho ativo do modelo MEF com detalhe na malha nos pontos de concentração de campo.

A Tabela 3 apresenta as dimensões escolhidas para a aplicação dos métodos.

Tabela 3 – Dimensões e parâmetros utilizados para validação do método proposto.

Dimensão	Valor	Descrição
h_c	22,5 mm	Altura das ranhuras
h_m	5 mm	Altura dos imãs
h_t	2 mm	Altura das extremidades
g	1 mm	Entreferro
N	50	Número de voltas das bobinas
N_p	2	Número de pólos magnéticos
N_{pa}	5	Número de trechos ativos
N_{ph}	3	Número de fases
N_s	15	Número de ranhuras
N_{sp}	5	Número de ranhuras por fase N_s/N_{ph}
R_{ag}	33,8 mm	Raio médio do entreferro
R_b	5 mm	Raio interno do eixo do linor
R_i	34,3 mm	Raio interno do estator
R_m	33,3 mm	Raio externo dos imãs
R_r	28,3 mm	Raio do eixo do linor
R_s	66,6 mm	Raio externo do estator
τ_m	32,3 mm	Passo magnético
τ_p	32,3 mm	Passo do polo
τ_t	21,46 mm	Passo entre as ranhuras
τ_{tt}	15,53 mm	Distância entre as ranhuras
τ_{tp}	19,1 mm	Largura das extremidades
τ_w	3 mm	Largura das ranhuras
τ_{wp}	64,6 mm	Comprimento do trecho ativo

Para a solução do problema, determinou-se o uso das condições de contorno ilustradas na Figura 18.

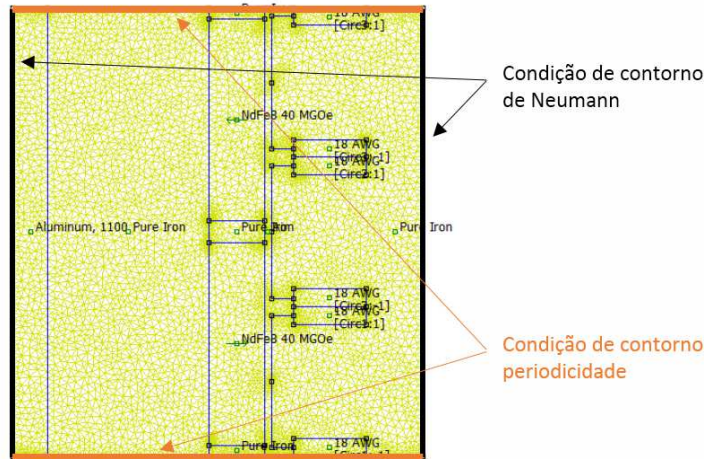


Figura 18 – Condições de contorno aplicadas ao modelo FEM.

A Figura 19 compara os resultados obtidos via MEF e método dos subdomínios. A Tabela 4 resume a comparação do desempenho entre os dois métodos.

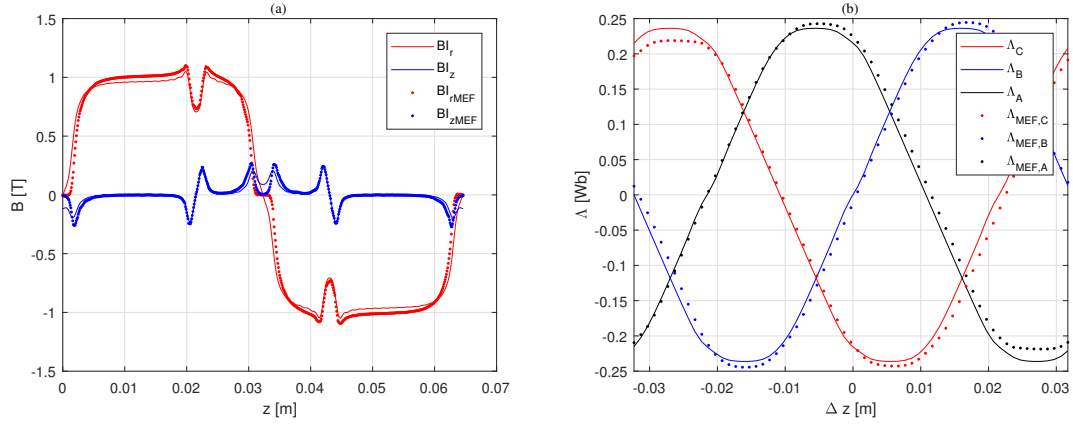


Figura 19 – Condições de contorno aplicadas ao modelo FEM.

Tabela 4 – Comparação de desempenho entre o método dos subdomínios e MEF para o exemplo estudado.

Parâmetro de comparação	Valor
Erro médio de B_r (%)	0,639
Erro médio de B_θ (%)	0,128
Erro médio de λ_A (%)	0,012
Tempo de processamento MSD (s)	6,174
Tempo de processamento MEF (s)	247,462

Observa-se que o erro obtido é consideravelmente pequeno, sendo o maior valor 0,638%. Notável é ainda a diferença apresentada nos tempos médios de processamento necessário para a solução do problema, no qual é verificado que este parâmetro para o método dos subdomínios é próximo de 40 vezes menor que o tempo utilizado pelo MEF. Assim, conclui-se que o método selecionado é apto para atender às demandas de uma rotina computacional voltada para projeto e otimização, a saber, precisão e baixo custo computacional.

2.2 Modelo do Motor-Gerador de Pistão Livre

2.2.1 Estruturação do modelo

A Figura 20 ilustra a configuração selecionada para este estudo: motor de pistão duplo. Como já descrito anteriormente, esta configuração consiste na associação de duas câmaras de combustão e um gerador de ímã permanente linear.

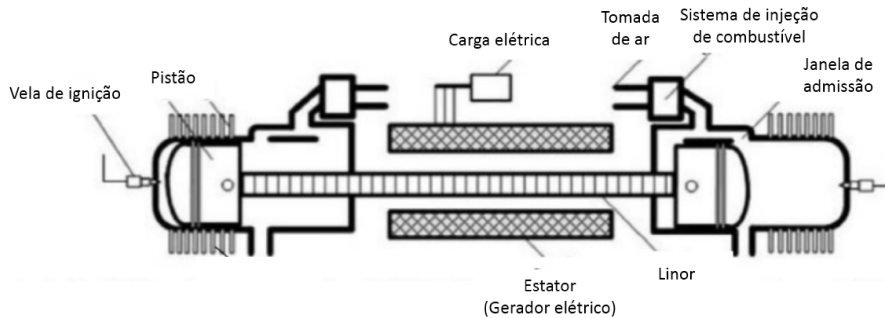


Figura 20 – Diagrama ilustrando a configuração motor de pistão duplo. Adaptado de Jia et al. (2015)

O modelo numérico terá por função principal determinar o movimento do linor, sendo naturalmente este movimento governado pela segunda lei de Newton. Dentre as forças que atuam sobre o pistão, são consideradas as forças de atrito, a força eletromagnética exercida pelo alternador, e a força resultante da diferença de pressão existente entre as duas faces dos respectivos pistões. Para que estas forças sejam devidamente estimadas, considerando-se os vários tipos de fenômenos que as geram, o modelo do gerador linear fora estruturado de tal forma que é composto por três submodelos, sendo eles: o modelo dinâmico, o modelo do gerador e o modelo termodinâmico. Esta estrutura é ilustrada na Figura 21.

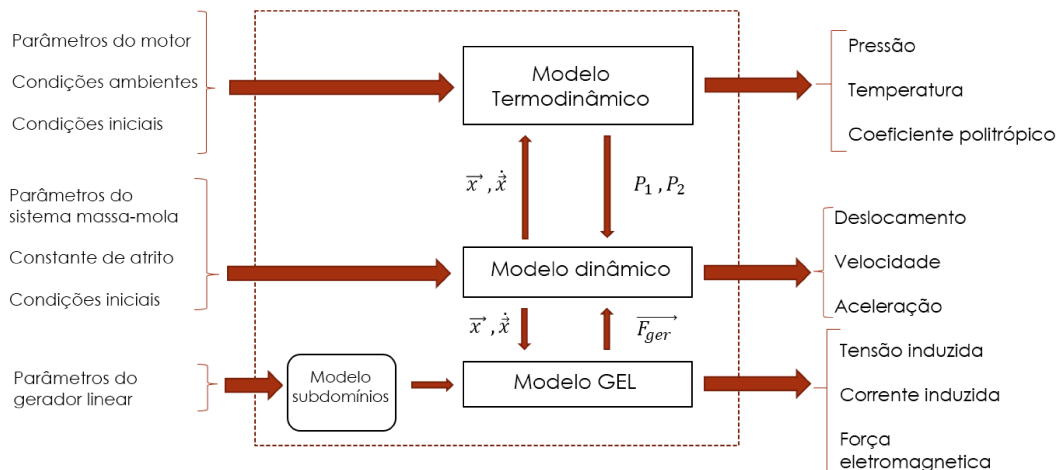


Figura 21 – Diagrama esquemático da estrutura do modelo do motor.

Descreve-se a seguir cada um dos submodelos, a começar pelo modelo dinâmico.

2.2.2 Modelo dinâmico

A Figura 22 ilustra o diagrama de corpo livre do conjunto pistão e linor do gerador analisado. O movimento do pistão é obtido segundo a Equação 2.25.

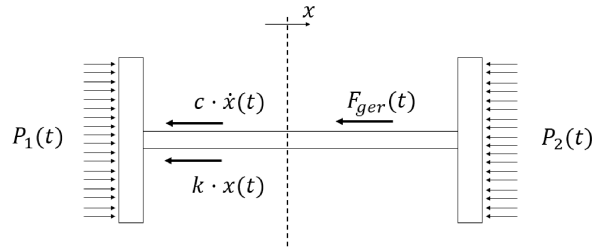


Figura 22 – Diagrama de corpo livre do conjunto pistão e linor do motor analisado.

$$m_t \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = A_p(P_1(t) - P_2(t)) - F_{ger}(t) \quad (2.25)$$

Onde,

$x(t)$ é o deslocamento do linor;

m_t é a massa total do linor e qualquer elemento associado a ele;

c é o coeficiente de amortecimento relativo às perdas devidas ao atrito;

k é a constante de rigidez do elemento elástico associado ao linor;

A_p é a área do pistão;

P_i é a pressão no interior da câmara "i";

$F_{ger}(t)$ é a força eletromagnética exercida pelo gerador;

A força eletromagnética é determinada pelo modelo do gerador, descrito na seção anterior. Para que o cálculo seja realizado, é necessário que a velocidade e o deslocamento instantâneos do pistão sejam entregues à rotina de cálculo. Com esses valores e demais parâmetros e dimensões do equipamento elétrico, a força é estimada pela Equação 2.17 e demais equações a esta associadas, com destaque às equações determinadas pelo modelo de circuito elétrico, Equações 2.19 a 2.23.

2.2.3 Modelo termodinâmico

Modelo termodinâmico é utilizado neste trabalho na tentativa de representar os fenômenos que ocorrem nas câmaras de combustão do motor estudado. Como descrito anteriormente, um modelo termodinâmico é assim denominado devido às equações utilizadas como base para a obtenção do modelo, neste caso, as leis da termodinâmica. Com isso, pretende-se ressaltar que as leis determinadas pela mecânica dos fluidos são ignoradas nesta etapa.

Outra classificação do modelo construído nesta seção é dimensão nula, ou não dimensional em uma tradução livre, classificação essa devido ao fato de que nenhum modelo do fluxo dos fluidos é considerado e que as propriedades são homogêneas em todo o volume de controle.

Para o desenvolvimento das equações, considera-se o volume de controle mostrado na Figura 23

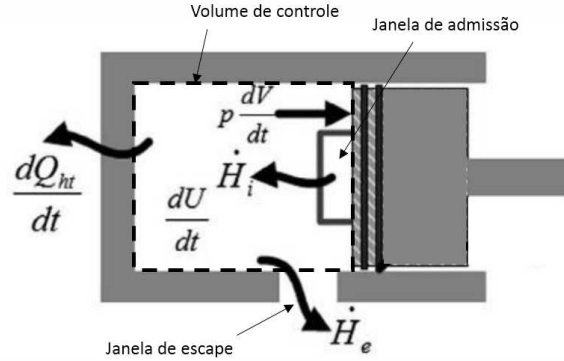


Figura 23 – Diagrama do volume de controle considerado para o desenvolvimento das equações termodinâmicas

2.2.3.1 Transferência de calor

A transferência de calor entre o gás contido no cilindro "i" e as paredes do mesmo, $Q_{w,i}$, é modelada segundo a Equação 2.26.

$$\frac{dQ_{w,i}}{dt} = h_i(t) \cdot A_{cyl,i}(t)(T_i(t) - T_w) \quad (2.26)$$

Onde,

- h_i é o coeficiente de transferência por convecção;
- $A_{cyl,i}$ é a área lateral do cilindro "i";
- T_i é a temperatura do gás contido no cilindro "i";
- T_w é a temperatura média das paredes do cilindros.

O coeficiente de transferência por convecção é estimado segundo a expressão abaixo (MIKALSEN, 2008).

$$h_i(t) = 130 \cdot V_i^{-0.06}(t) \left(\frac{P_i(t)}{10^5} \right) T_i^{-0.4}(t) (v_p + 1.4)^{0.8} \quad (2.27)$$

Onde,

- v_p é a velocidade média de deslocamento dos pistões;
- V_i é o volume do gás contido no cilindro "i".

2.2.3.2 Calor gerado pela combustão

Nos ciclos ideais Otto e Diesel, o calor liberado pela combustão é entregue ao sistema sob condições especiais, sendo o volume da câmara constante, para o ciclo Otto, ou a pressão da mesma câmara constante, para o ciclo Diesel. Porém, é sabido que após a ignição da mistura ar-combustível, seja por meio da fagulha elétrica ou da auto-ignição, o conjunto de processos físico-químicos que são iniciados são de alta complexidade, sendo uma barreira para a modelagem (HEYWOOD et al., 1988). Devido a isso, a simulação da taxa de calor gerado ao longo do processo de combustão é um dos fatores com mais alto grau de incerteza neste modelo. Muitas abordagens para solucionar esta questão já foram desenvolvidas, sendo que grande parte delas obtiveram sucesso neste empreendimento (HEYWOOD et al., 1988).

Deve-se considerar ainda a condição especial do motor analisado. Como o movimento do pistão em um motor de pistão livre diferencia-se significativamente dos motores convencionais, poucas informações sobre a influência desse movimento sobre o processo de combustão ainda estão disponíveis. Segundo Mikalsen (2008) e Jia (2016), o uso da função de Wiebe baseada no tempo de combustão para estimar a taxa de calor gerador é um modo de se obter ótimos resultados, devido a capacidade de se avaliar o efeito dos tempos de atraso de ignição e de combustão sobre o comportamento do sistema.

A função de Wiebe é descrita pela Equação 2.28 (HEYWOOD et al., 1988).

$$\frac{dQ_{c,i}}{dt} = a \frac{b+1}{C_d} \left(\frac{t-t_{s,i}}{C_d} \right) \exp \left[-a \left(\frac{t-t_{s,i}}{C_d} \right)^{b+1} \right] Q_{in} \quad (2.28)$$

$Q_{c,i}$ é o calor instantâneo devido ao processo de combustão no cilindro "i";

Q_{in} é o calor total gerado com a combustão completa da mistura ar-combustível;

a, b são as constantes de forma da função Wiebe;

C_d é o tempo total de combustão da mistura ar-combustível;

$t_{s,i}$ é o tempo de ignição no cilindro "i".

Ao longo do trabalho, são considerados para as constantes de forma, a, b , os valores 5 e 2, respectivamente, conforme sugerido por Heywood et al. (1988) e utilizado por Mikalsen (2008) e Jia (2016).

2.2.3.3 Propriedades termodinâmicas dos gases

Nesta subseção, deriva-se as equações que serão utilizadas para estimar a variação das propriedades termodinâmicas dos gases contidos nas câmaras de combustão. Durante o processo de dedução, a simbologia (t) utilizada para indicar que a variável é função do tempo será omitida, para simplificação das equações.

Aplica-se a Primeira Lei da Termodinâmica sobre o sistema.

$$dQ - dW = dU = d(m \cdot u) \quad (2.29)$$

Onde Q , W , U e u são o calor e trabalho transferidos e, a energia interna e a energia interna específica, respectivamente. Considerando que a mistura tenha o comportamento de um gás perfeito, tem-se $u = C_v \cdot T$, logo,

$$\begin{aligned} dQ - dW &= dm \cdot (C_v \cdot T) + m \cdot d(C_v \cdot T) \\ &= dm \cdot C_v \cdot T + m \cdot T \cdot dC_v + m \cdot C_v \cdot dT \end{aligned} \quad (2.30)$$

As constantes de calor específico, C_p e C_v , são obtidas a partir dos dados experimentais consolidados e disponíveis na Tabela JANAF. Nesta, tem-se o conjunto de equações do cálculo de C_p/R , razão entre calor específico e a constante do gás, para cada componente químico usualmente encontrado no ar (HEYWOOD et al., 1988). Essas equações são dependentes somente da temperatura, como indicado na Equação 2.31.

$$\frac{C_p}{R} = f(T) = \sum_{n=1}^5 a_n \cdot T^{n-1} \quad (2.31)$$

A Equação 2.32 apresenta a derivada da equação anterior.

$$\frac{dC_p}{R} = \frac{1}{R} \frac{dC_p}{dT} dT = \sum_{n=1}^5 ((n-1)a_n \cdot T^n) dT \quad (2.32)$$

O calor específico a volume constante é dado pela Equação 2.33.

$$C_v = C_p - R \quad (2.33)$$

Como R é dependente somente da composição química da mistura, e essa é considerada durante todo o ciclo constante e igual a do ar puro, tem-se então que R é constante. Logo, derivando a expressão acima,

$$dC_v = dC_p = \frac{dC_p}{dT} dT \quad (2.34)$$

Descritas a equação da Primeira Lei da Termodinâmica e as equações dos calores específicos, é necessário obter as equações que descrevem a variação da temperatura e pressão do gás sob análise. Nesta etapa, considera-se que o gás apresente comportamento

similar ao de um gás ideal. Logo, da Lei dos Gases Ideais, tem-se a Equação 2.35 e sua derivada 2.36.

$$P \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad (2.35)$$

$$dP \cdot V + P \cdot dV = dm \cdot R \cdot T + m \cdot dR \cdot T + m \cdot R \cdot dT \quad (2.36)$$

Dividindo a expressão acima por $m \cdot R \cdot T$ e sendo $dR = 0$, obtém-se a Equação 2.37.

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dm}{m} \quad (2.37)$$

Substituindo as Equações 2.34 e 2.37 na Equação 2.30 e lembrando-se que $dW = P \cdot dV$, tem-se a Equação 2.38.

$$\begin{aligned} dQ - P \cdot dV &= dm \cdot C_v \cdot T + m \left(T \cdot \frac{dC_p}{dT} + C_v \right) dT \\ &= dm \cdot C_v \cdot T + m \cdot T \left(T \cdot \frac{dC_p}{dT} + C_v \right) \left(\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dm}{m} \right) \\ &= dm \cdot C_v \cdot T + \frac{P \cdot V}{R} \left(T \cdot \frac{dC_p}{dT} + C_v \right) \left(\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dm}{m} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Reunindo as derivadas,

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{P \cdot V}{R} \left(T \cdot \frac{dC_p}{dT} + C_v \right) \frac{dP}{P} + \left[\frac{P}{R} \left(T \cdot \frac{dC_p}{dT} + C_v \right) + P \right] dV + \\ &\quad + \left[C_v \cdot T - \frac{P \cdot V}{m \cdot R} \left(T \cdot \frac{dC_p}{dT} + C_v \right) \right] dm \\ &= V \left(\frac{T}{R} \cdot \frac{dC_p}{dT} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) dP + P \left(\frac{T}{R} \cdot \frac{dC_p}{dT} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) dV - T^2 \frac{dC_p}{dT} dm \end{aligned} \quad (2.39)$$

Colocando dP em evidência, tem-se portanto,

$$dP = \frac{1}{(\gamma - 1) \frac{T}{R} \frac{dC_p}{dT} + 1} \left[\frac{\gamma - 1}{V} dQ - \frac{P(\gamma - 1)}{V} \left(\frac{T}{R} \frac{dC_p}{dT} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) dV - (\gamma - 1) \frac{T^2}{V} \frac{dC_p}{dT} dm \right] \quad (2.40)$$

Onde,

$$\frac{1}{R} \frac{dC_p}{dT} = \sum_{n=1}^5 ((n-1)a_n \cdot T^n) \quad (2.41)$$

A Equações 2.42 e 2.43 definem o coeficiente politrópico, γ , e sua derivada, respectivamente.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} d\gamma &= \frac{C_v \cdot dC_p - C_p \cdot dC_v}{C_v^2} = \frac{dC_p - \gamma \cdot dC_v}{C_v} \\ &= \frac{(1 - \gamma)}{C_v} \frac{dC_p}{dT} dT \end{aligned} \quad (2.43)$$

Portanto, o modelo termodinâmico é composto de três equações diferenciais ordinárias, a saber, Equações 2.37, 2.40, e 2.43, com as quais todas as propriedades do gás contido na câmara de combustão podem ser determinadas.

2.2.3.4 Validação do modelo termodinâmico

Ferguson e Kirkpatrick (2015) disponibilizou um algoritmo que estima a variação de pressão e temperatura da mistura ar-combustível no interior da câmara de combustão baseado no modelo denominado *Homogeneous Two-Zone Finite Heat Release Cycle*. Neste modelo, o sistema analisado anteriormente, contido pela câmara de combustão, é dividido em duas regiões, "não-queimada" e "queimada", e as equações diferenciais que descrevem a variação das propriedades termodinâmicas são encontradas para as duas regiões a partir das equações de conservação de massa, conservação de energia, do estado e da fração mássica "queimada". No desenvolvimento dessas equações, algumas considerações são levadas em conta, sendo elas: a mistura ar-combustível é homogênea e a mesma ocorre antes da inserção na câmara de combustão; ambas regiões estão na mesma pressão; a temperatura de ignição é a temperatura adiabática de chama baseada na entalpia da mistura. Deve-se frisar que este modelo também considera o fenômeno de perda de calor.

Contudo, a rotina publicada pelo referido autor é aplicada a motores convencionais. Portanto, para que a validação seja coerente, aplicou-se o modelo termodinâmico proposto neste trabalho ao mesmo exemplo.

Para tal, utilizou-se como modelo dinâmico aplicado na análise de motores convencionais, descrito nas Equações 2.44 a 2.46 (HEYWOOD et al., 1988).

$$\theta = 2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot t \quad (2.44)$$

$$\dot{x} = \omega \left[-r \cdot \text{sen}(\theta) - \frac{r^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)}{\sqrt{l^2 - r^2 \text{sen}(\theta)^2}} \right] \quad (2.45)$$

$$\ddot{x} = \omega^2 \left[-r \cdot \cos(\theta) - \frac{r^2 \cdot \cos(\theta)^2 - \text{sen}(\theta)^2}{\sqrt{l^2 - r^2 \text{sen}(\theta)^2}} - \frac{r^4 \cdot \text{sen}(\theta)^2 \cos(\theta)^2}{\left(\sqrt{l^2 - r^2 \text{sen}(\theta)^2}\right)^3} \right] \quad (2.46)$$

Onde,

θ é o ângulo do virabrequim;

l é o comprimento da biela;

r é o raio da manivela;

x é a posição do pistão em relação ao eixo do virabrequim;

Associando-se as Equações 2.44 a 2.46 às Equações do modelo termodinâmico, e considerando-se como condições iniciais e parâmetros de simulação dados na Tabela 5

Tabela 5 – Parâmetros de simulação utilizados para comparar os resultados do modelo proposto com a rotina disponibilizada por [Ferguson e Kirkpatrick \(2015\)](#)

Parâmetro	Valor
Razão de compressão	12
Diâmetro do pistão	82,5 mm
Curso do pistão	114,3 mm
Comprimento da biela	228,4 mm
Raio da manivela	51,10 mm
Velocidade de rotação	8 rad/s
Ângulo de ignição	-10°
Ângulo total de combustão	50°
Temperatura da parede do cilindro	400 K
Razão mássica ar e combustível	17,35
Poder calorífico do combustível	44,6 MJ/kg
Temperatura de admissão	350 K
Pressão de admissão	100 kPa

A Figura 24 compara os resultados obtidos. Na análise dos dados mostrados na figura observa-se uma concordância entre os valores obtidos com a metodologia proposta e aquela disponível na literatura. As diferenças entre as curvas ilustradas foram maiores para a temperatura, após o início do processo de combustão. Três razões podem explicar essas divergências: primeiro, a diferença existente entre os dois modelos em termos de complexidade; segundo, no desenvolvimento do modelo disponibilizado por [Ferguson e Kirkpatrick \(2015\)](#), há uma etapa de simplificação das equações cinemáticas por séries de Taylor. Tal simplificação não foi utilizada na validação, visto que a resolução seria por integração numérica; terceiro, no modelo proposto neste trabalho, a pressão e temperatura, nos processos de exaustão e admissão dos gases, são consideradas constantes e iguais aos valores de admissão, como é possível de se observar na região entre 100° e 150°.

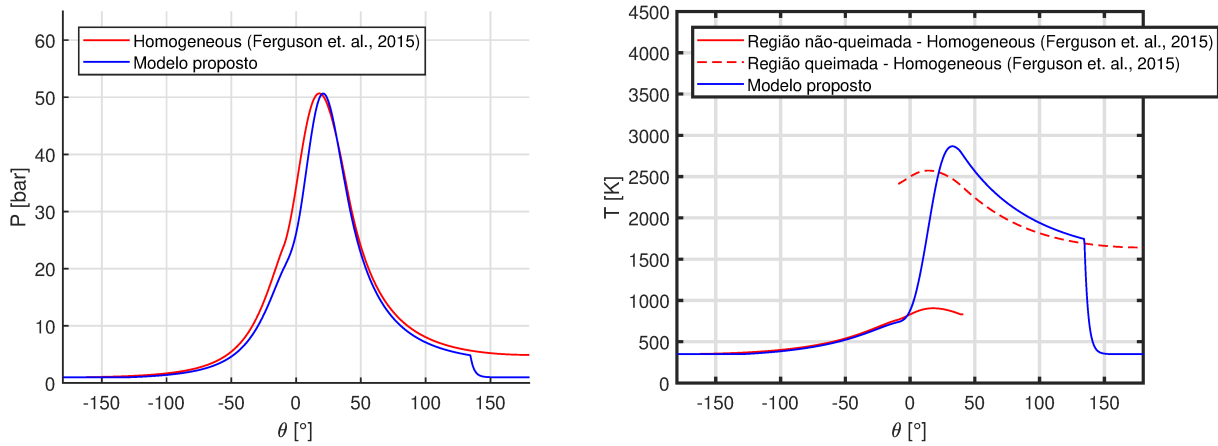


Figura 24 – Comparação entre os resultados obtidos via rotina proposta por Ferguson e Kirkpatrick (2015) e o modelo proposto.

2.2.3.5 Análise das eficiências

Define-se eficiência térmica como a razão entre o trabalho extraído do sistema e o calor entregue a ele através da combustão (BOLES; CENGEL, 1989). Em um sistema sem perdas mecânicas, o trabalho extraído é igual à diferença entre calor entregue ao sistema e o calor extraído no mesmo.

Por convenção, utiliza-se como referência para comparação, as eficiências térmicas teóricas obtidas pelos ciclos Otto e Diesel. A Figura 25 ilustra os gráficos de variação de η_{th} em função da razão de compressão $C.R.$ e da razão de corte (aplicável ao ciclo Diesel).

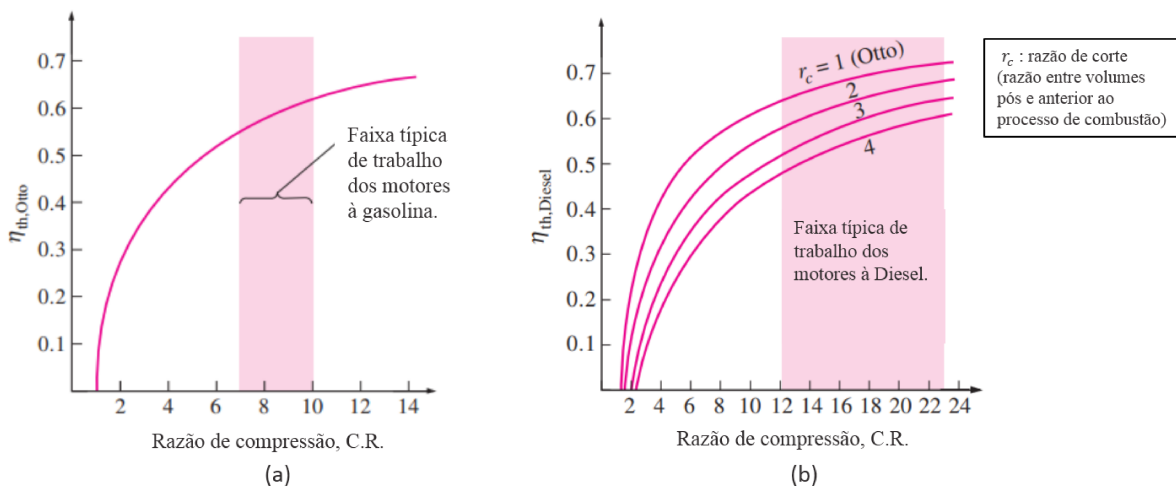


Figura 25 – Eficiência térmica em função da razão de compressão. (a) Ciclo Otto; (b) Ciclo Diesel. Adaptado de Boles e Cengel (1989).

Observa-se que nos motores Otto convencionais essa eficiência é cerca de 60%, ao passo que no motor Diesel essa eficiência ainda é função da razão de corte r_c . Convém notar que a eficiência térmica é também função do coeficiente politrópico da mistura

ar-combustível, como ilustrado na Figura 26.

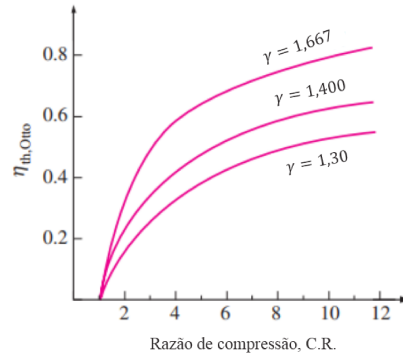


Figura 26 – Eficiência térmica do ciclo Otto em função do coeficiente politrópico γ . Adaptado de [Boles e Cengel \(1989\)](#).

Portanto, considerando-se que o motor de pistão é capaz de trabalhar com taxa de compressão variável, conclui-se que a eficiência térmica apresentada pelo equipamento dependerá dos parâmetros de operação que ele apresenta, ou seja, até mesmo a estratégia de controle utilizada influenciará fortemente a eficiência do motor.

Para o cálculo da eficiência termomecânica, as perdas mecânicas inerentes ao funcionamento do equipamento são contabilizadas. Usualmente, a faixa de eficiência termomecânica típica de motores Otto situa-se entre 20 e 30%, com raras exceções, como o motor Jenbacher type 4 da General Electric que atinge os 40% de eficiência. No caso dos motores de pistão livre, a eficiência pode chegar a valores da ordem de 50% ([JIA, 2016](#)).

No modelo proposto, é necessário ainda considerar as perdas elétricas inerentes ao gerador. Neste sentido, o desempenho do gerador é avaliado através da potência elétrica gerada, que é considerada igual a potência consumida pelo resistor. A estimativa deste parâmetro é feita utilizando os resultados da corrente e tensão instantâneos obtidos no domínio do tempo na simulação numérica, após o momento em que o regime permanente é alcançado.

Como potência absorvida pelo sistema, considera-se a energia disponível por meio da combustão ideal (com eficiência 100%) do combustível utilizado. Para a estimativa deste parâmetro, considera-se que a taxa de consumo do combustível seja o número de cilindros do moto-gerador multiplicado pela frequência de operação do equipamento.

Denomina-se, portanto, eficiência termoelétrica a razão entre a potência de energia elétrica gerada e a potência disponibilizada ao sistema por meio do combustível, conforme indicado na Equação 2.47.

$$\eta = \frac{Pot_{ger}}{Pot_{comb}} = \frac{Pot_{ger}}{2 \cdot f_{op} \cdot Q_{inf} \cdot m_{comb}} \quad (2.47)$$

2.3 Rotina numérica

Nesta seção, descreve-se brevemente sobre o software desenvolvido para resolver o problema proposto. A Figura 27 ilustra a estrutura deste programa.

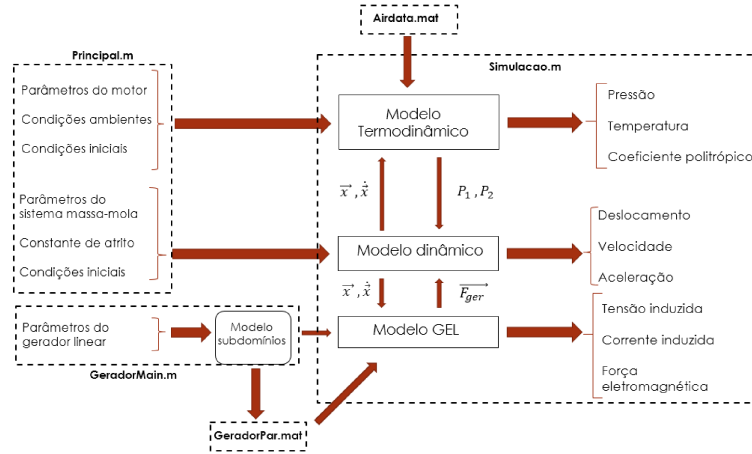


Figura 27 – Estrutura do modelo construído.

As rotinas foram desenvolvidas no ambiente do software MatLAB®. As equações diferenciais ordinárias foram resolvidas utilizando a função *ode45*, que é baseada no método Runge-Kutta de quinta ordem e seis estágios. Para definir qual seria o passo de tempo adequado para as integrações, de modo a garantir a convergência dos resultados, realizou-se uma série de simulações do modelo, descrito mais detalhadamente no próximo capítulo, variando-se o passo de integração. Os valores utilizados para o passo são relativos às seguintes frequências de amostragem: 256, 512, 1.024, 2.048, 4.096 e 8.192 Hz.

A Figura 28 mostra os resultados para a eficiência eletromecânica do gerador, em função da frequência de amostragem, da resistência de carga R_L e do modelo de circuito selecionado. Utilizou-se para a capacitância de carga, o valor $100\mu F$. Somente a auto indutância e a indutância mútua foram consideradas nos circuitos RL e RLC.

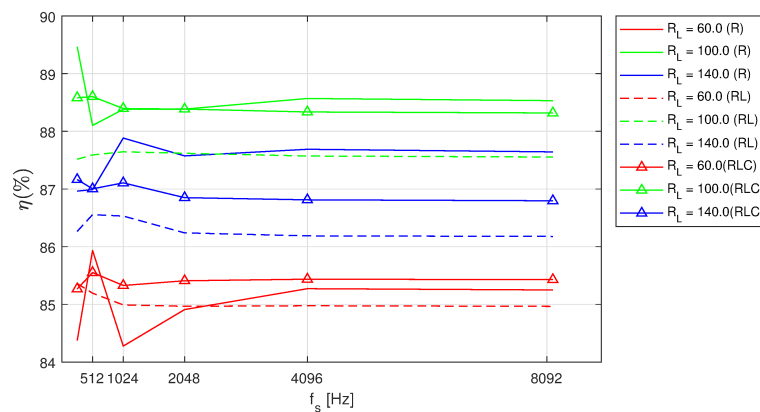


Figura 28 – Variação da eficiência do gerador elétrico em função da frequência de amostragem utilizada na simulação numérica.

Observa-se que há uma variação da eficiência em função do valor da resistência utilizado. A razão para tal será esclarecida no capítulo Resultados. A Figura 29 mostra a variação relativa da eficiência eletromecânica do gerador.

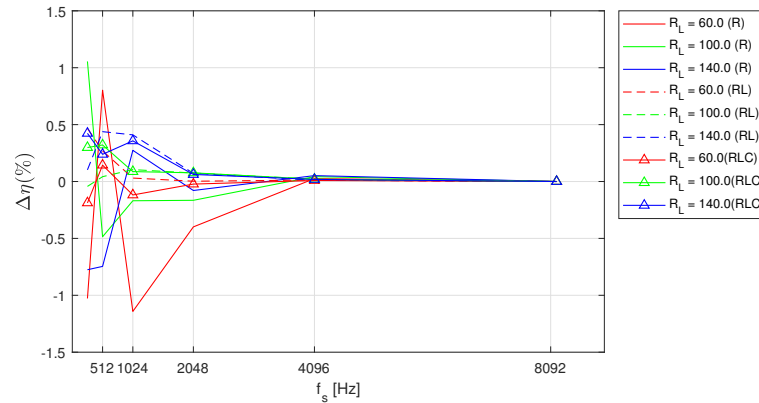


Figura 29 – Variação relativa da eficiência do gerador elétrico em função da frequência de amostragem utilizada na simulação numérica.

Observa-se que o a diferença relativa entre os valores obtidos a partir de 2.048 Hz está abaixo de 0,5%. Baseando-se nestes resultados, todas as simulações e resultados apresentados neste trabalho utilizam a frequência 4.096 Hz .

A Figura 30 resume as funções dos arquivos que compõem o software. O arquivo *Airdata.mat* contém os dados da Tabela JANAF, necessária para determinar as propriedades do gás contido na câmara de combustão.

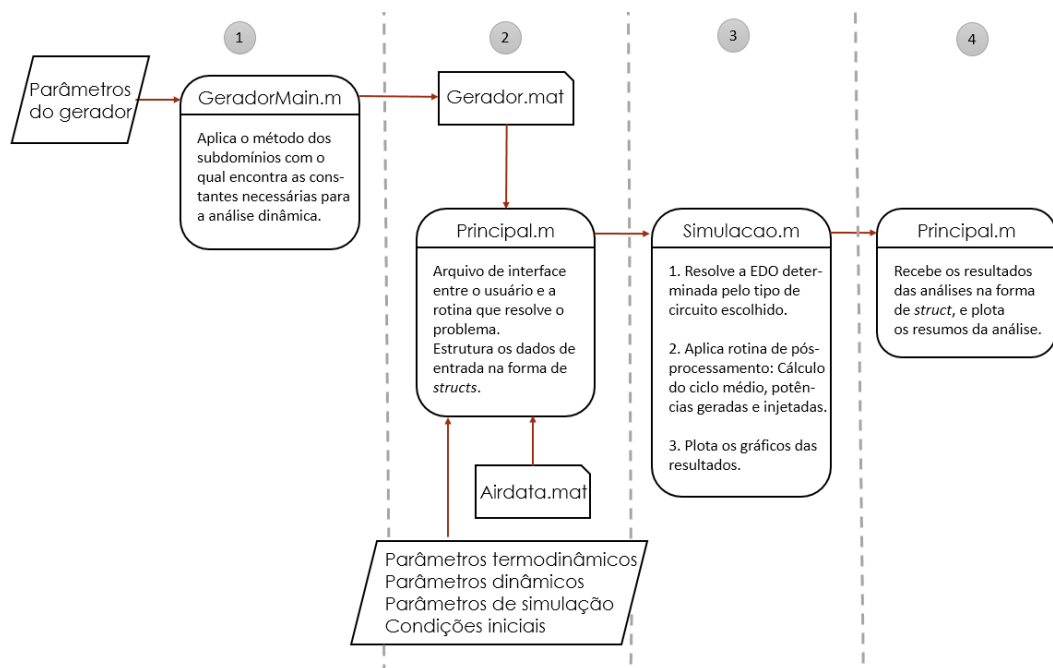


Figura 30 – Resumo das funções e fluxograma do software desenvolvido.

A enumeração indicada na Figura 30 refere-se à ordem de execução arquivos que

compõem o software. Vale mencionar que o passo 1 indicado na Figura 30 necessita ser executado apenas uma vez, caso as dimensões do gerador não sejam modificadas.

2.3.1 Parâmetros de entrada

A Tabela 6 e a Figura 31 resumem quais são os parâmetros disponíveis ao usuário do programa. A notação descrita na Tabela 6 é idêntica à utilizada no programa.

Tabela 6 – Parâmetros de entrada do programa

	Variável	Descrição
Parâmetros da simulação	fs	Frequência de amostragem $[Hz]$
	df	Resolução de frequência $[Hz]$
Condição inicial	xo	Deslocamento inicial $[m]$
	vo	Velocidade inicial $[m/s]$
Dimensões do motor	Ls	Meio curso máximo do pistão $[m]$
	Dp	Diâmetro do pistão $[m]$
Parâmetros dinâmicos	m	Massa do conjunto pistão e linor $[kg]$
	c	Coefficiente de amortecimento (perdas mecânicas) $[N \cdot s/m]$
	k	Constante de rigidez da mola $[N/m]$
Circuito elétrico	Rc	Carga resistiva alimentada pelo gerador $[\Omega]$
	C	Capacitância associada ao circuito gerador $[F]$
	L	Indutância associada ao circuito do gerador $[H]$
Dados do gerador	NI	Número de espiras em cada bobina.
	Npa	Número de partes ativas no gerador.
	Circuito	Modelo do circuito selecionado (R, RL, RLC).
Propriedades termodinâmicas	Qinf	Poder calorífico inferior do combustível $[J/kg]$
	Padm	Pressão de admissão da mistura ar+combustível $[Pa]$
	Tadm	Temperatura de admissão $[^{\circ}C]$
	Twall	Temperatura na superfície da parede da câmara $[^{\circ}C]$
	AFR	Razão mássica ar-combustível
	EtaComb	Rendimento da combustão
	WFa	Parâmetro "a" da função Wiebe (Equação 2.28)
	WFB	Parâmetro "b" da função Wiebe (Equação 2.28)
	td	Tempo de combustão $[s]$
Pontos do ciclo	Phic	Fator de Posição de ignição (Razão L_c/L_s)
	Phiex	Fator de Posição de escape (Razão L_{ex}/L_s)
	Phiadm	Fator de Posição do FIM da admissão (Razão L_{adm}/L_s)

Como descrito anteriormente, aconselha-se o uso de valores maiores que 4.096 Hz para a frequência de amostragem f_s , devido às não-lineares do modelo. Já a resolução de frequência df define o valor básico que definirá o vetor de frequências em que o espectro será construído. A escolha dessas duas variáveis como parâmetros da simulação se deu devido à possibilidade de aplicar técnicas de análises no domínio da frequência sobre os resultados do algoritmo. Logo, a escolha de f_s e df é baseada não somente para manter a

convergência dos resultados, mas também para determinar a mínima frequência que se deseja observar no espectro de potências.

Das condições iniciais, há a possibilidade de definir a posição e velocidade iniciais do pistão. Neste sentido, a experiência obtida neste trabalho aconselha utilizar como valor de x_0 tal que o pistão fique posicionado próximo ao ponto morto superior e v_0 nula para facilitar a convergência.

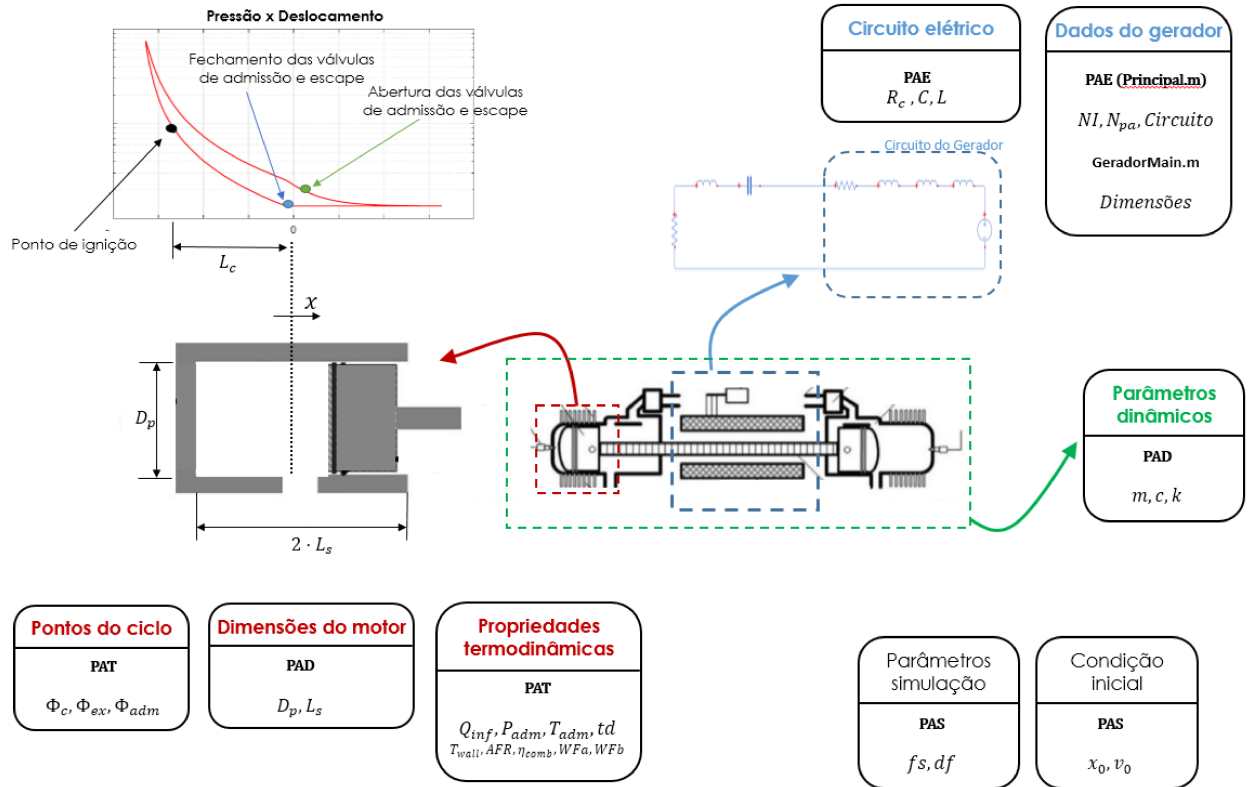


Figura 31 – Resumo das variáveis software desenvolvido disponíveis ao usuário.

Dentre os parâmetros dinâmicos, situam-se a massa do conjunto pistão e linor, e quaisquer outros elementos associados a eles, a constante de amortecimento c , e a constante de rigidez da mola k . Para valores m , os trabalhos referenciados apresentam valores sempre entre 3 e 5 kg (JIA, 2016; HANIPAH, 2015; MIKALSEN; ROSKILLY, 2008; HANSSON, 2006; ATKINSON et al., 1999). A constante de amortecimento é estimada segundo as perdas mecânicas inerentes à movimentação do conjunto móvel. Neste trabalho, fez-se uso da faixa de valores entre 10 e 15 $N \cdot s/m$ (ATKINSON et al., 1999). A constante de mola é dada considerando-se que o elemento associada ao pistão seja linear. A definição dessa constante será descrita nas próximas seções.

As variáveis relacionadas aos componentes elétricos do gerador elétrico foram separadas de acordo com a sua utilidade para uma malha de controle. Neste sentido, elas são denominadas como variáveis do circuito elétricos ou dados do gerador. As primeiras são os elementos que compõem o circuito associado aos terminais do gerador e que podem

ser resumidos nos três elementos básicos: resistor R_c , indutor L e capacitor C . Portanto, considera-se possibilidade de variar esses parâmetros durante as simulações, como um método de controle do equipamento. Os dados do gerador são parâmetros que dependem da construção desse elemento e que dificilmente estão disponíveis a um sistema de controle. Essas são o número de espiras de cada bobina NI , o número de trechos ativos N_{pa} e o modelo do circuito escolhido para análise, *Circuito*. Além dos parâmetros descritos, é possível modificar as dimensões do gerador através da rotina *GeradorMain.m*.

Descreve-se sobre as variáveis especificamente relacionadas ao motor de pistão linear, a começar sobre as dimensões do motor. Estas são definidas por dois parâmetros, a saber: o meio curso máximo do pistão, L_s , e o diâmetro do pistão, D_p . O meio curso é definido como a metade do deslocamento total possível do pistão, como ilustrado na Figura 31. Esta definição é comumente utilizada para as análises relacionadas a este tipo de motor (JIA, 2016; MIKALSEN; ROSKILLY, 2008).

As propriedades termodinâmicas são outras variáveis diretamente associadas ao comportamento do gás contido na câmara de combustão. Neste programa, é considerado que o comportamento da mistura ar e combustível seja devidamente representado por ar puro ao longo do ciclo. Devido a isso, como descrito anteriormente, considera-se que a composição desses gás seja constante no período simulado. Dentre essas propriedades, é possível modificar as condições do ar admitido na câmara (P_{adm} , T_{adm}) e a temperatura média das paredes do cilindro T_{wall} . Também pode-se simular a escolha de diversos combustíveis através do poder calorífico inferior Q_{inf} , bem como combinar a proporção desejada através de AFR , e acrescentar a estimativa de eficiência da combustão, η_{comb} . Por fim, é possível modificar os parâmetros relacionados a taxa de calor devido à queima da mistura ar-combustível, através das variáveis WF_a , WF_b e t_d , que compõem a Equação 2.28.

Por fim, descreve-se sobre as variáveis que definem os pontos importantes do ciclo termodinâmico. Estes pontos são definidos em relação ao eixo de coordenadas x , cuja origem é distanciada de L_s a partir do cabeçote do cilindro. O ponto de ignição é definido pela razão $\Phi_c = L_c/L_s$, sendo L_c definido como a distância entre a origem do eixo x e o ponto de início da combustão. De forma análoga, os pontos de abertura e fechamento das válvulas de admissão e escape são definidos pelas razões Φ_{ex} e Φ_{adm} , respectivamente.

3 Resultados

3.1 Modelo do Gerador Elétrico Linear

3.1.1 Modelo do gerador elétrico linear

Para exemplificar a aplicação do modelo do gerador elétrico proposto, determinou-se as dimensões e parâmetros deste equipamento e avaliou-se o desempenho do mesmo através dos resultados da simulação.

Neste caso, o desempenho do gerador é avaliado através da potência elétrica gerada, que é igual à potência consumida pelo resistor de carga, sendo tal potência estimada através da corrente e tensão instantâneos obtidos no domínio do tempo na simulação numérica após o momento em que o regime permanente é alcançado.

Tabela 7 – Dimensões e parâmetros utilizados no projeto do gerador. (GYSEN et al., 2008)

Dimensão	Valor	Descrição
h_c	22,5 mm	Altura das ranhuras
h_m	5 mm	Altura dos imãs
h_t	2 mm	Altura das extremidades
g	1 mm	Entreferro
N	50	Número de voltas das bobinas
N_p	2	Número de pólos magnéticos
N_{pa}	5	Número de trechos ativos
N_{ph}	3	Número de fases
N_s	15	Número de ranhuras
N_{sp}	5	Número de ranhuras por fase N_s/N_{ph}
R_{ag}	33,8 mm	Raio médio do entreferro
R_b	5 mm	Raio interno do eixo do linor
R_i	34,3 mm	Raio interno do estator
R_m	33,3 mm	Raio externo dos imãs
R_r	28,3 mm	Raio do eixo do linor
R_s	66,6 mm	Raio externo do estator
τ_m	32,3 mm	Passo magnético
τ_p	32,3 mm	Passo do polo
τ_t	21,46 mm	Passo entre as ranhuras
τ_{tt}	15,53 mm	Distância entre as ranhuras
τ_{tp}	19,1 mm	Largura das extremidades
τ_w	3 mm	Largura das ranhuras
τ_{wp}	64,6 mm	Comprimento do trecho ativo

Para o cálculo da tensão e corrente induzidos, através das equações descritas na seção referente ao modelo do gerador, é necessário que tais equações sejam resolvidas em conjunto com as equações dinâmicas que traduzem o movimento do linor. Naturalmente, as equações dinâmicas são facilmente obtidas aplicando-se a Segunda Lei de Newton sobre o diagrama de corpo livre do elemento móvel do equipamento.

As dimensões e parâmetros do gerador usados neste exemplo estão disponíveis na Tabela 7 e ilustrados na Figura 14. Os parâmetros da força de excitação a que o linor é submetido é 250 N e 40 Hz para amplitude e frequência, respectivamente. Determinou-se os valores 5 kg, 315,00 kN/m e 0 N · s/m para a massa, rigidez da mola e coeficiente de amortecimento, respectivamente. Convém anotar que nesta análises, bem como nas que a seguem, a rigidez foi calculada de tal modo que a frequência natural do sistema iguale-se à frequência natural da força de excitação. O passo de tempo de integração utilizado é associado à frequência de amostragem 4.096 Hz.

O modelo do circuito do tipo RL foi selecionado, considerando-se a resistência de carga igual a 100 Ω, a auto indutância, e as indutâncias mútuas das bobinas do gerador. Os valores destas estão contidas na matriz de indutância, que deve ser construída conforme indicado na Equação 2.21. Para a topologia e dimensões selecionadas, a matriz de indução é dada pela Equação 3.1 (unidade em Henry). Esta matriz é obtida através da metodologia proposta por Gysen (2011). Resultados próximos são obtidos através do modelo de Elementos Finitos.

$$[L_T] = \begin{bmatrix} 0,0125 & -0,0062 & -0,0062 \\ -0,0062 & 0,0125 & -0,0062 \\ -0,0062 & -0,0062 & 0,0125 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

A Figura 32 mostra as curvas obtidas para o deslocamento, a corrente instantânea e força eletromagnética, obtidos em regime permanente no domínio do tempo.

Observa-se que a curva do deslocamento apresenta as características de uma curva harmônica, ao passo que a corrente instantânea das três fases do circuito são similares ao comportamento característico deste tipo de gerador. Em relação à força induzida, é notável que um comportamento não linear é presente nos momentos de maiores velocidades do linor, refletido nas fortes variações.

Em condição de regime permanente, a frequência de operação é igual à frequência imposta pela força de excitação.

Aplicando uma rotina de pós-processamento, uma estimativa das potências elétrica gerada e mecânica injetada no sistema é realizada, a partir das Equações 2.24 e 3.2, respectivamente. Para o exemplo descrito, obteve-se 0,72 kW de potência elétrica gerada, a uma faixa de 87,35 % de eficiência eletromecânica.

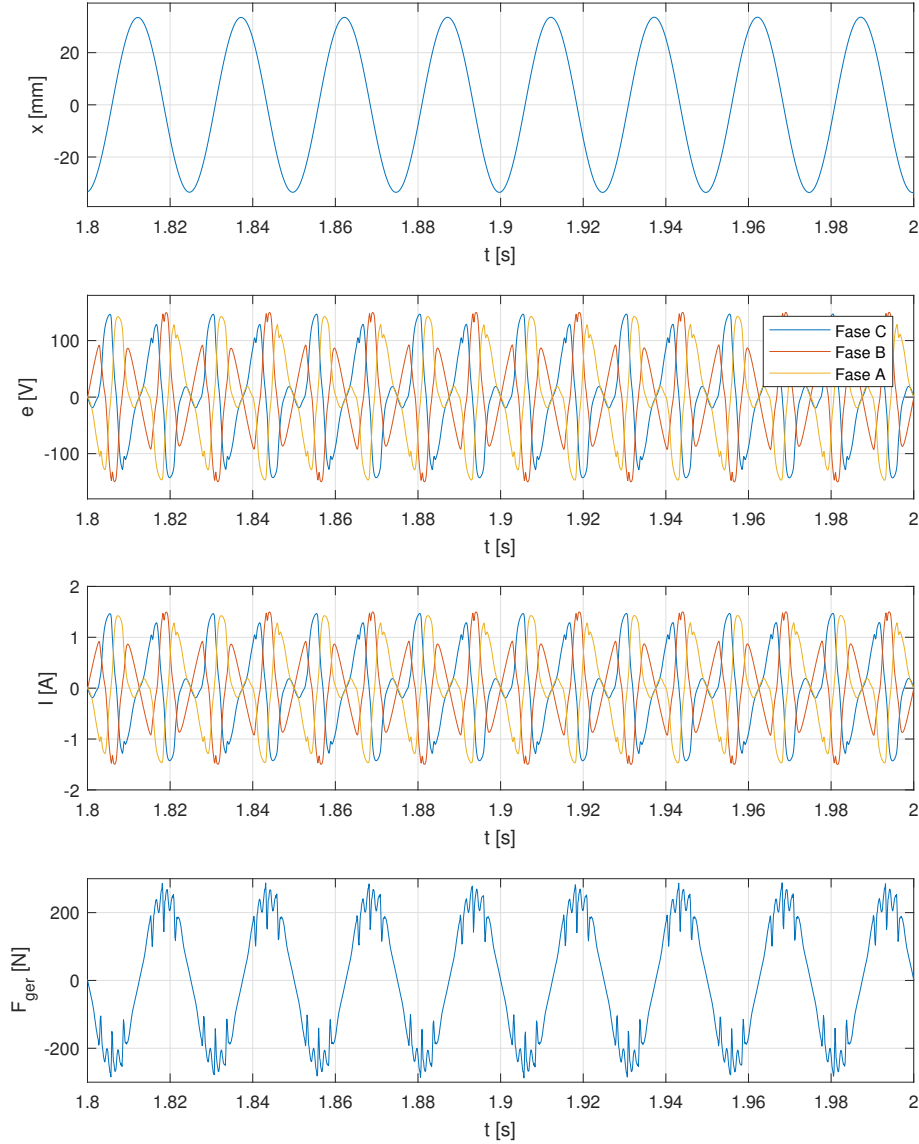


Figura 32 – Deslocamento, corrente instantânea e força eletromagnética no estado de regime permanente sob as condições determinadas.

$$Pot_{mec} = \int_0^t F(t) \cdot \dot{x}(t) dt \quad (3.2)$$

Onde,

$F(t)$ é a força de excitação aplicada ao linor.

Para análise no domínio da frequência, aplica-se a Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*) nas curvas de deslocamento, velocidade e força induzida. A Figura 33 mostra os resultados obtidos.

Observa-se que as curvas de deslocamento e velocidade apresentam comportamento similar comparados às curvas obtidas por sistemas massa-mola de 1 G.D.L. associados a amortecedores viscosos. Contudo, os espectros apresentado pela tensão e força induzidas possuem picos de amplitude nas frequências harmônicas. Conforme descreve Boldea (2017),

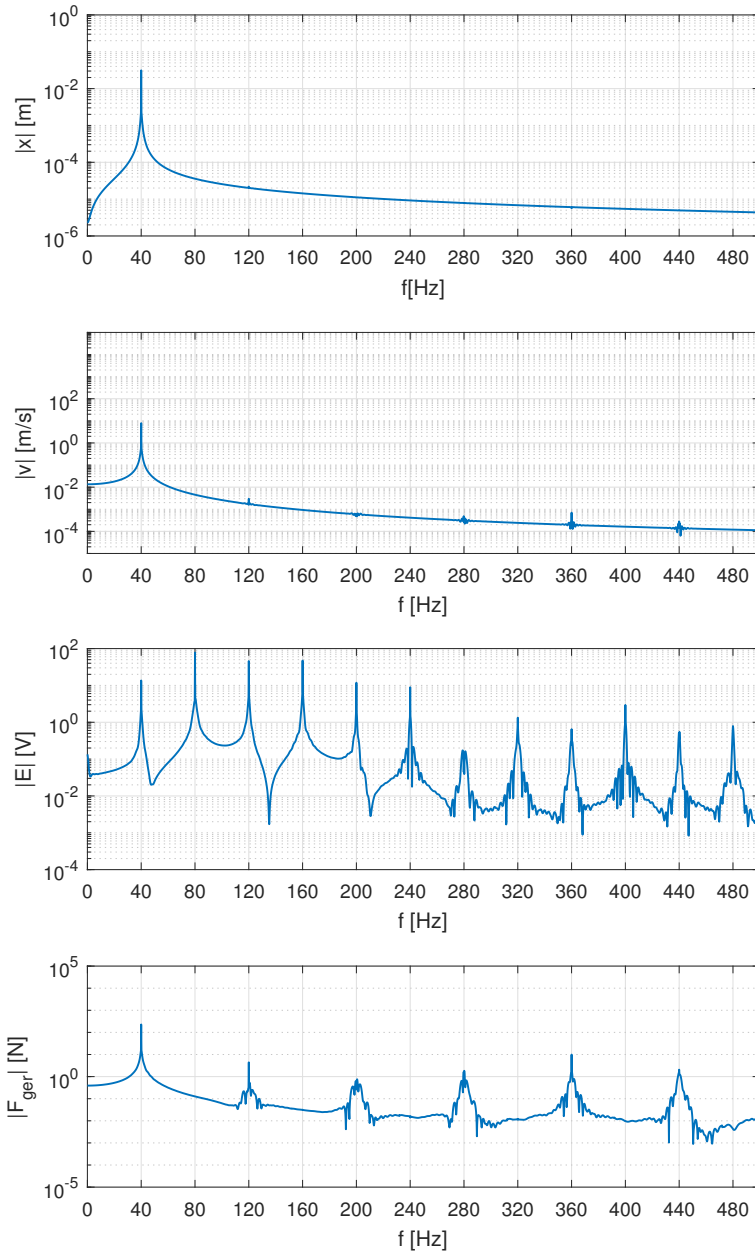


Figura 33 – Deslocamento, velocidade e força eletromagnética no estado de regime permanente sob as condições determinadas no domínio da frequência.

tal comportamento é esperado devido ao achatamento dos picos do fluxo concatenado a que as bobinas são submetidas, como ilustrado na Figura 19, que resulta na presença de harmônicos na tensão e, conseqüentemente, na corrente induzidos. Interessantemente, o espectro da tensão induzida apresenta todas as frequências múltiplas, ao passo que a força induzida apresenta somente aquelas de multiplicidade ímpar.

3.1.2 Análise paramétrica

Com o objetivo de entender os efeitos da variação dos parâmetros do circuito elétrico associado ao gerador projetado na seção anterior, realizou-se uma análise paramétrica na qual varia-se os parâmetros avaliados, estudando o impacto sob o desempenho do gerador.

Nos resultados das análises a serem descritos a seguir, a força de excitação considerada é da forma senoidal com amplitude e frequência conhecidas, cujos valores das frequências são sempre iguais à frequência natural do sistema massa-mola, com exceção dos casos nos quais a diferença é explicitada. As condições iniciais das simulações são nulas para todas as variáveis do vetor de estado (deslocamento e velocidade do linor, corrente e tensão induzidos e força contraeletromotriz). De modo análogo ao realizado na seção anterior, o desempenho do gerador é estimado a partir da potência consumida pelo resistor de carga associado aos terminais do equipamento.

3.1.2.1 Eficiência eletromecânica e os parâmetros do circuito externo

A Figura 34 mostra como a eficiência eletromecânica varia em função do valor das resistências de carga R_L . O gráfico também compara as curvas obtidas para todos os modelos de circuito elétrico desenvolvidos, isto é: modelos R, RL e RLC. Nas simulações onde indutância inerente às bobinas do gerador é considerada (modelos RL e RLC), utilizou-se como valor para a indutância e capacitância de carga 20 mH e $100\text{ }\mu\text{F}$, respectivamente.

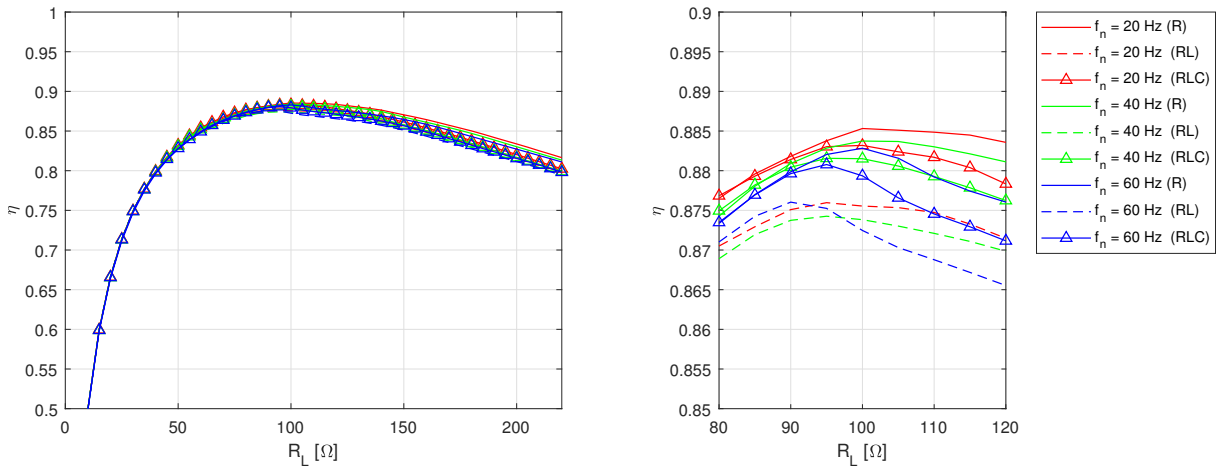


Figura 34 – Curvas da eficiência eletromecânica em função da resistência de carga R_L .

Quando a simulação considera uma força de excitação com amplitude de pico constante, observa-se a que o desempenho do gerador depende da resistência de carga. Para os menores valores de resistência, maiores amplitudes de corrente induzida são obtidos, contudo o deslocamento e a velocidade do linor são limitados, resultando em uma ineficiente conversão da energia mecânica em elétrica. Por outro lado, na região onde os valores de resistência de carga são maiores, menores as amplitude de corrente e força induzidas, o que

possibilita maiores deslocamento e velocidade do linor, porém, devido às baixas correntes, a potência elétrica consumida pelos resistores de carga é limitada e consideravelmente inferior à potência entregue pela força de excitação.

É notável que a região na qual o valor de resistência R_L situa-se entre $90 \, \Omega$ e $110 \, \Omega$, é onde a máxima eficiência é obtida. Nesta região, observa-se que a eficiência eletromecânica apresenta pequenas variações em função dos diferentes valores de frequência natural e dos diferentes modelos de circuito. Para ilustrar, o modelo R apresentou a maior valor de máxima de eficiência, que em comparação com o menor valor obtido, pelo modelo RL, difere de apenas 1,5%.

A Figura 35 ilustra a variação da eficiência do equipamento elétrico em função da indutância L_L . O valor de capacitância utilizado nos modelos RLC é $100 \, \mu F$.

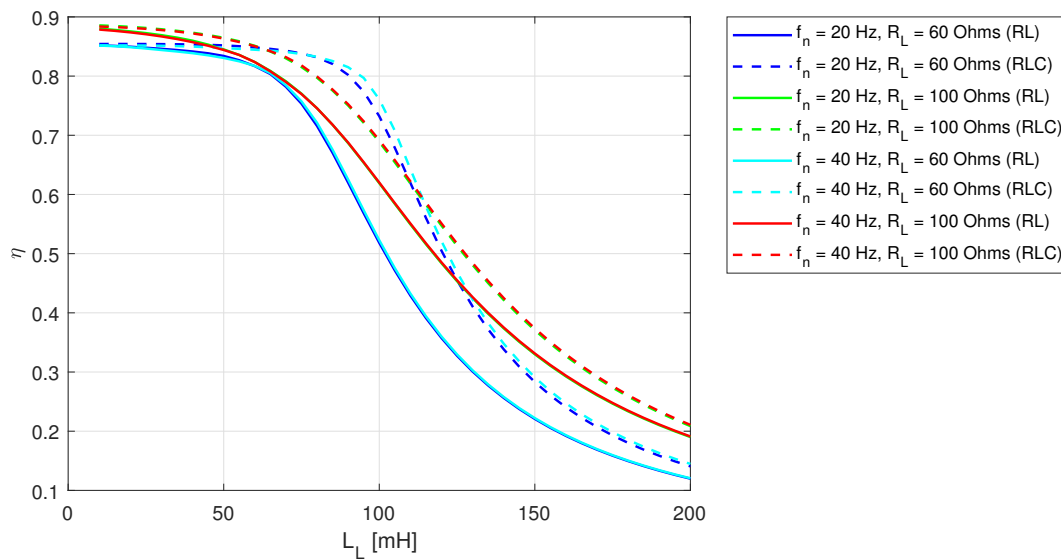


Figura 35 – Curvas da eficiência eletromecânica em função da indutância de carga L_L .

Na figura anterior, observa-se que a o aumento da indutância associada ao gerador elétrico resulta em uma queda abrupta da eficiência. A razão para tal seria o fato de que a indutância é um fator limitante da taxa de variação da corrente, o que resulta em menores amplitudes de corrente induzida e, conseqüentemente, menor energia convertida.

3.1.2.2 Força eletromagnética e os parâmetros do circuito externo

A Figura 36 mostra as curvas da força eletromagnética, ou força induzida, em função de diferentes valores da resistência e indutância de carga, R_L e L_L . Para as simulações utilizadas na construção destes gráficos, a frequência natural do sistema massa-mola é igual a 20 Hz .

Para as simulações nas quais o valor da indutância é nulo, nota-se que independente dos valores de resistência de carga, o comportamento geral das curvas da força induzida

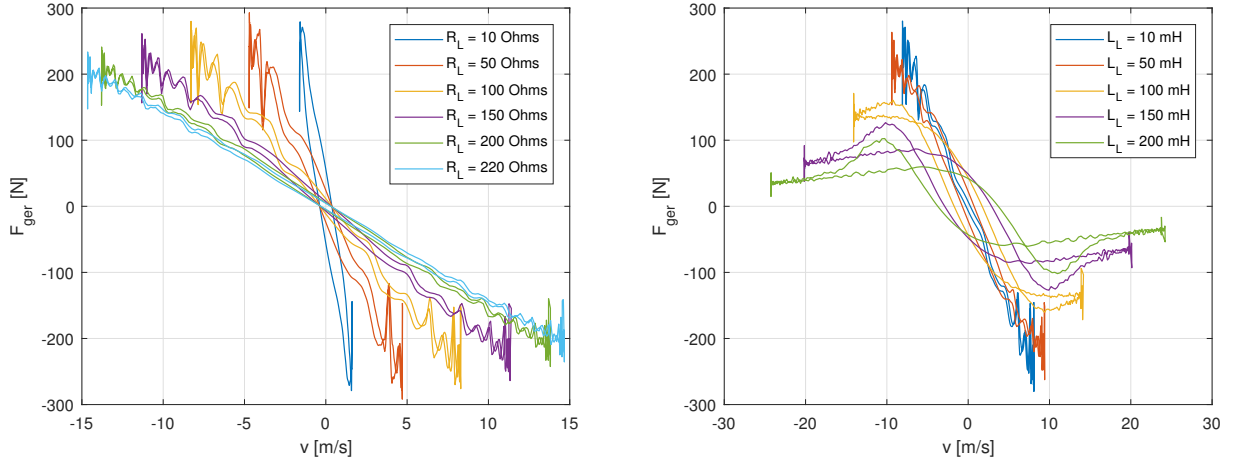


Figura 36 – Curvas de força induzida em função da velocidade e: (a) da resistência de carga R_L ; (b) da indutância de carga L_L .

é próximo ao linear, mesmo considerando as não-linearidades apresentadas nas regiões de velocidade máxima. Por outro lado, o aumento da indutância pode significar em uma transição da curva da força considerada de linear para não-linear. Observa-se que, para os maiores valores de indutância simulados, a amplitude máxima da força induzida é consideravelmente reduzida. Portanto, considerando que a variação do deslocamento em todas as simulações é baixa, resulta-se que o trabalho extraído do sistema pela força induzida é menor para os casos nos quais maiores valores de indução de carga foram utilizados. Tal fato pode ser relacionado à baixa eficiência observada na seção anterior.

Como descrito anteriormente, nos métodos de modelagem do gerador linear usualmente aplicados a modelos de moto-geradores lineares, é comum assumir, com precisão aceitável, que a força induzida exercida pelo equipamento elétrico é similar à força de resistência apresentada por um amortecedor viscoso. Isso significa, que a força induzida poderia ser estimada por uma constante multiplicando a velocidade do linor, sendo esta constante determinada experimentalmente ou através da documentação do fabricante do gerador elétrico.

Numericamente, utilizando os resultados das simulações obtidas pelo modelo proposto neste trabalho, o coeficiente de amortecimento c_{ger} pode ser estimado a partir dos vetores de força induzida e velocidade $\{F_{ger}\}$ e $\{\dot{x}\}$ determinados no domínio do tempo, como indicado a Equação 3.3.

$$\hat{c}_{ger} = \min(\|c_{ger} \cdot \{\dot{x}\} - \{F_{ger}\}\|) \quad (3.3)$$

A Figura 37 ilustra as curvas do coeficiente de amortecimento equivalente em função da resistência de carga, da frequência natural do sistema e do modelo do circuito elétrico utilizado.

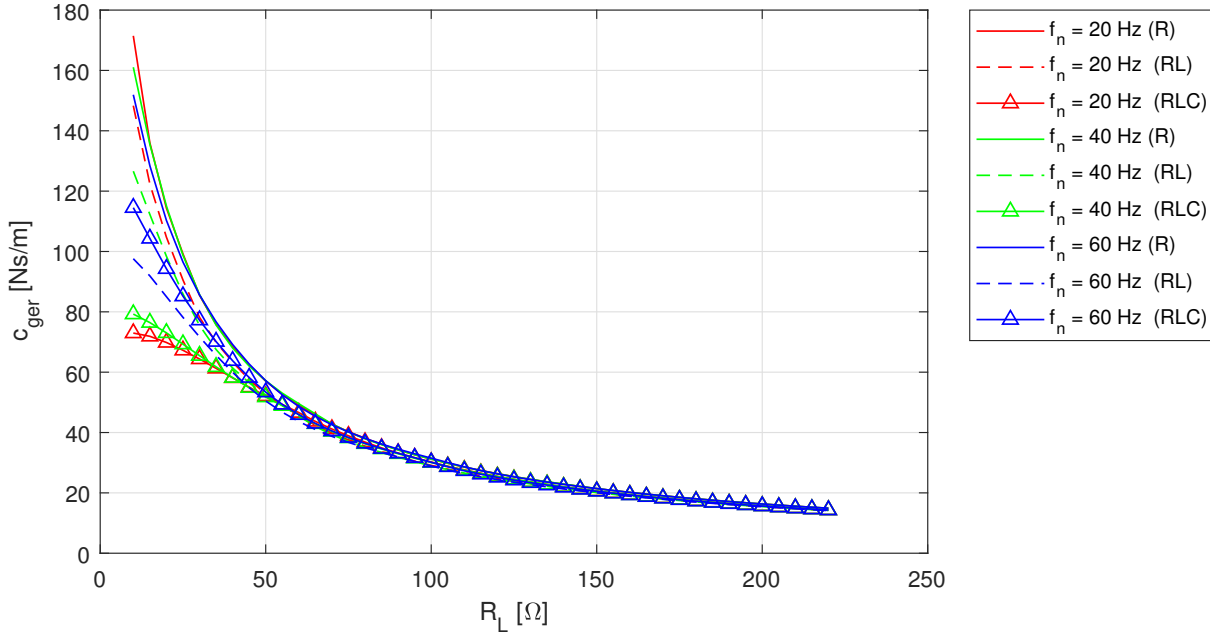


Figura 37 – Coeficiente de amortecimento equivalente c_{ger} em função da resistência de carga, frequência natural e modelo de circuito elétrico.

3.1.2.3 Eficiência eletromecânica e o curso do linor

O projeto de um gerador linear de ímãs permanentes requer uma atenção especial em relação a amplitude do curso do linor. É recomendável que o curso em regime permanente seja o mais próximo possível ao passo das ranhuras das bobinas, τ_{ws} , por dois motivos, a saber: manter a compactabilidade do equipamento; obter maior eficiência (BOLDEA; NASAR, 1987).

A amplitude do deslocamento de um sistema dinâmico de 1 G.D.L. depende da amplitude e da frequência da força de excitação. Com o objetivo de obter o curso do linor igual ao valor desejado, a amplitude da força de excitação pode ser estimada segundo a Equação 3.4. Observa-se que, para a configuração selecionada, $\tau_{ws} = \tau_p$.

$$F_o = 2 \cdot \pi \cdot c_{ger} \cdot \tau_{ws} \cdot f_n \quad (3.4)$$

O gráfico apresentado na Figura 38 ilustra as curvas de variação da eficiência eletromecânica em função da razão entre o curso e o passo das ranhuras, $\max(x)/\tau_{ws}$. Os resultados apresentados no gráfico foram obtidos variando-se a resistência de carga e a amplitude da força de excitação, conforme a Equação 3.4.

Como registrado anteriormente, para esta configuração do gerador, a máxima eficiência é obtida com o uso de uma resistência de carga igual a 100 Ω , independente da frequência natural do sistema. Observa-se que nestes casos, a razão $\max(x)/\tau_{ws}$ é próximo a 1,0.

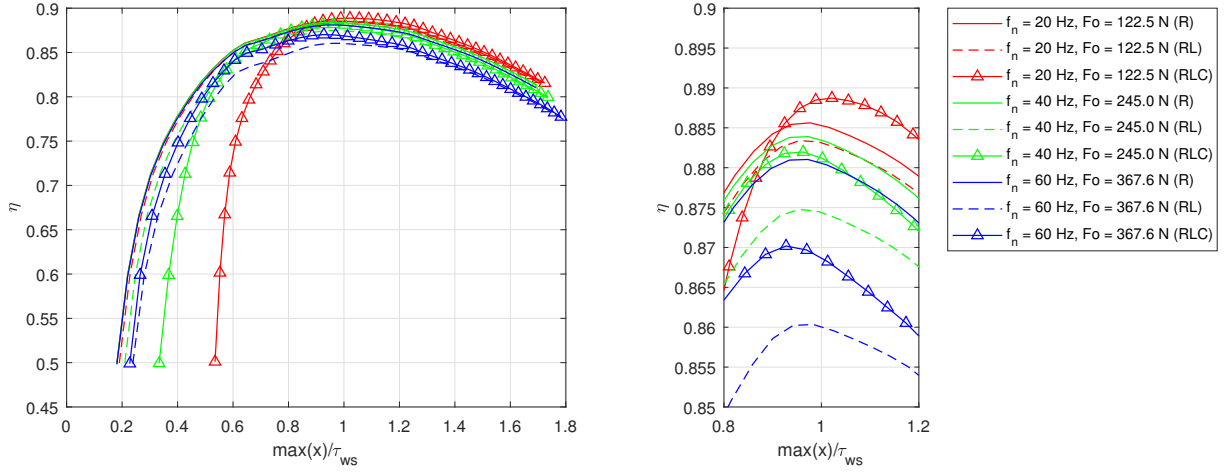


Figura 38 – Coeficiente de amortecimento equivalente C_{ger} em função da resistência de carga, frequência natural e modelo de circuito elétrico.

No gráfico anterior, observa-se que a variação do par frequência natural e amplitude da força de excitação resulta em uma pequena variação da eficiência obtida. Comparando os resultados entre as diferentes valores de frequência utilizados, obteve-se uma divergência máxima próxima a 2,0 %. Considerando os diferentes modelos de circuito elétrico, a diferença máxima observada também é próxima a 2,0 %.

A Figura 39 mostra os valores de amplitude da força de excitação com os quais o curso do linor obtido foi próximo ao valor desejado, $32,5 \pm 2 \text{ mm}$, para diferentes valores de frequência natural do sistema mecânico. O gráfico também compara, os resultados com os obtidos pela Equação 3.4.

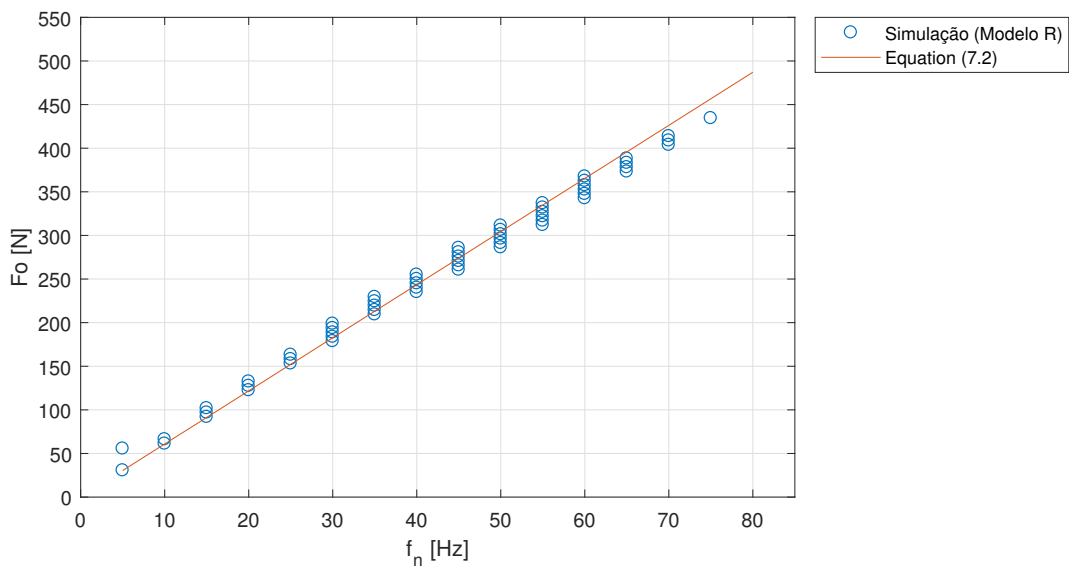


Figura 39 – Curvas da amplitude da força de excitação em função da frequência natural f_n .

3.1.2.4 Influência do tipo de força de excitação e da constante de rigidez sobre a eficiência do gerador

O gerador linear de ímãs permanentes é usualmente proposto como equipamento elétrico a ser associado com forças motrizes entregues por motores Stirling, motores lineares ou eixos movimentados pelo deslocamento de ondas marítimas. Sabendo disso, é possível deduzir que a força a que o gerador é submetido difere consideravelmente da força senoidal utilizada no estudo paramétrico realizado até então. Portanto, é oportuno avaliar a influência da forma de onda da força de excitação aplicada sobre o eixo do GEL.

Além disso, nesta etapa do estudo, outro aspecto analisado é a presença da mola associada ao conjunto pistão e linor. Sabe-se que um sistema dinâmico de 1 G.D.L. trabalha de forma similar a um filtro mecânico, quando existe a associação do elemento elástico ao eixo móvel deste sistema, o que resulta no "bloqueio" de todas as frequências, com exceção de uma região próxima a frequência natural. Portanto, a presença ou ausência da mola é também considerada.

Nos resultados a serem descritos, considerou-se como valores para a resistência de carga, amplitude da força de excitação e frequência natural igual a $100\ \Omega$, $250\ N$ e $40\ Hz$, respectivamente. Para as formas de onda da força de excitação, selecionou-se as seguintes: senoidal, triangular e retangular. Também, a fim de verificar a influência da mola sobre o sistema, variou-se o valor da rigidez da mola entre $k = 0\ kN/m$ ou $316\ kN/m$.

A Figura 40 são apresentados os resultados das simulações variando-se a forma de onda da força de excitação e a presença ou não da rigidez associada.

Verificou-se que apesar da variação da forma de onda da excitação, o deslocamento apresentou um comportamento próximo ao harmônico. No entanto, a análise dos espectros mostra a distorção da onda com a presença de harmônicos de ordem superior. É possível verificar, com os dados deste resultado, que as amplitudes da velocidade e deslocamento variam proporcionalmente ao valor *RMS* da força aplicada.

Por outro lado, os resultados das simulações nas quais a mola não é utilizada demonstram uma forte disparidade quando a velocidade é avaliada. De fato, para a força de excitação de forma retangular, a velocidade apresentou uma forma similar à triangular. Tal fato contribui para o raciocínio que compara o sistema massa-mola a um filtro mecânico. Neste caso também, é verificada uma diferença das amplitudes obtidas de deslocamento e velocidade, que também são proporcionais ao valor *RMS* da força aplicada.

A Figura 41 mostra os resultados anteriores, contudo avaliados no domínio da frequência.

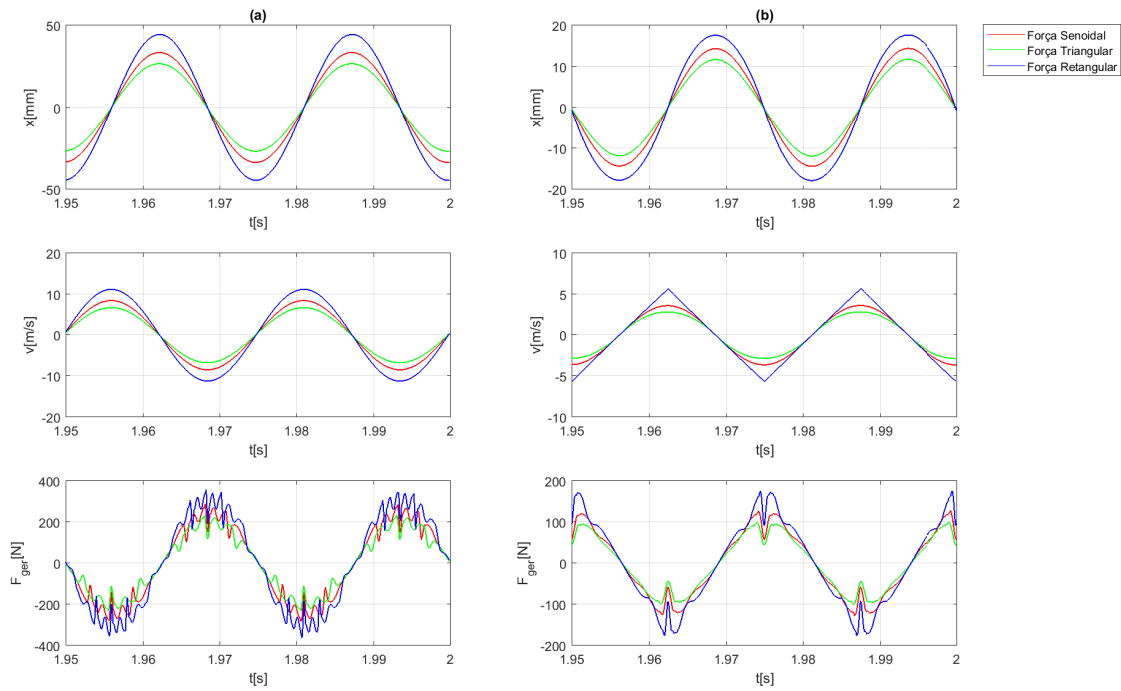


Figura 40 – Curvas do espectro das variáveis analisadas no domínio do tempo. (a) $k = 316 \text{ kN/m}$; (b) $k = 0$.

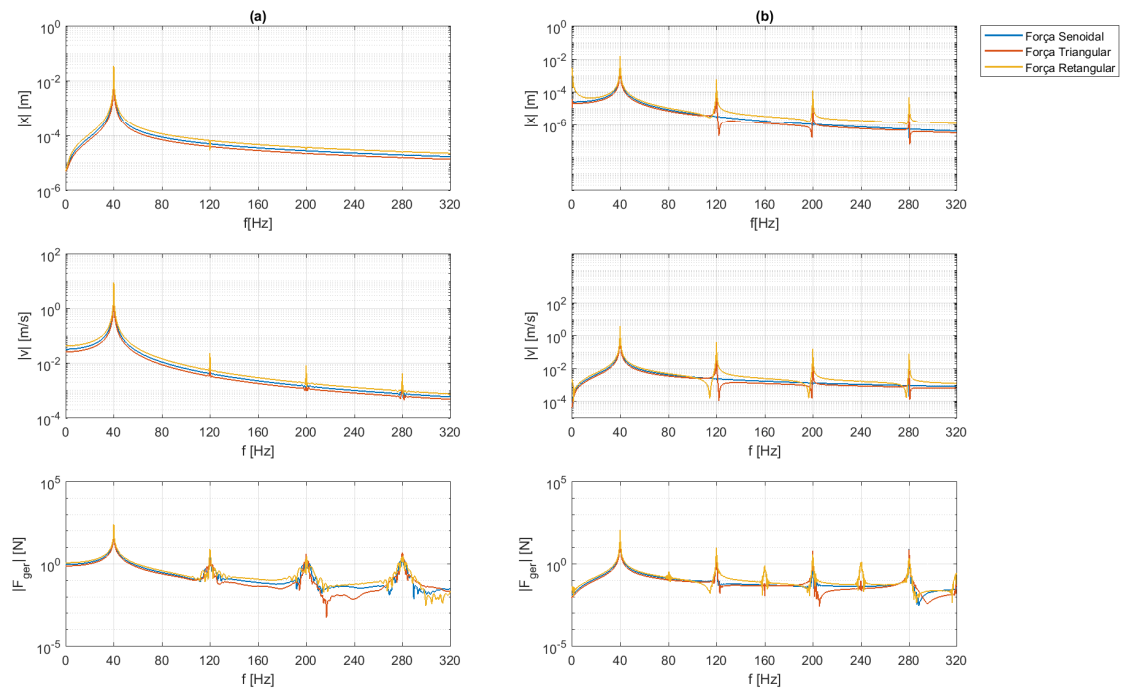


Figura 41 – Curvas do espectro de potências das variáveis observadas. (a) $k = 316 \text{ kN/m}$; (b) $k = 0$.

Para o caso no qual a rigidez da mola associada é não nula, verifica-se que as

curvas do espectro de potência das variáveis observadas são similares, independente da forma da curva da força de excitação. Observando a curva da velocidade, é possível notar que para os casos onde a força é triangular ou retangular, surgem pequenos picos nos terceiro, quinto e sétimo harmônicos. No espectro de potência da força induzida, maior é a amplitude nas regiões próximas aos harmônicos referidos.

As Figuras 42 e 43 apresentam as curvas da eficiência e da razão entre o máximo deslocamento e o passo das ranhuras do gerador.

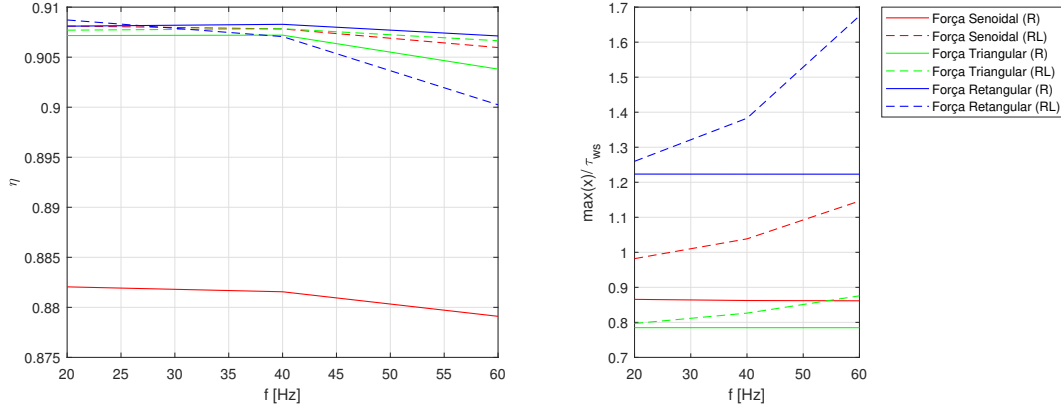


Figura 42 – Curvas da eficiência e da razão $\max(x)/\tau_{ws}$ para o moto-gerador com mola.

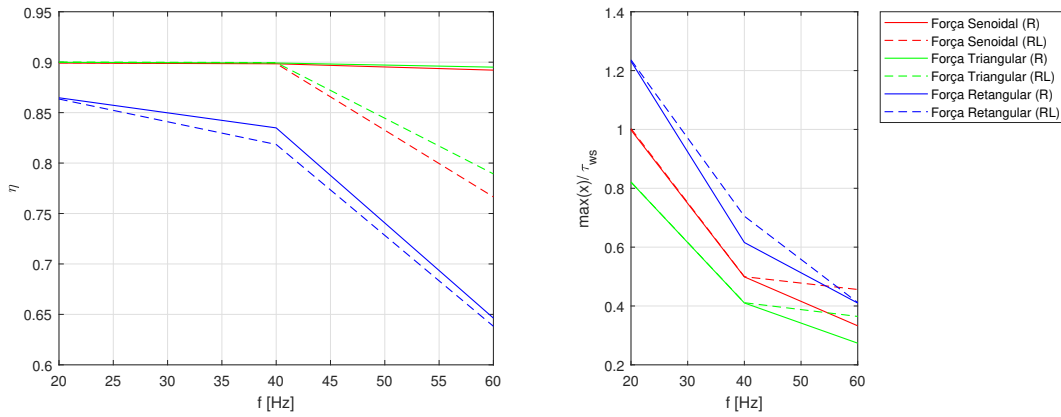


Figura 43 – Curvas da eficiência e da razão $\max(x)/\tau_{ws}$ para o moto-gerador sem mola.

Os resultados mostram que o uso de um elemento elástico associado ao linor do reduz a queda a eficiência eletromecânica nas faixas de maiores frequências de trabalho. É notável que a eficiência estimada do equipamento é dependente do formato da força de excitação. Considerando o modelo de circuito R, para o caso no qual o sistema com mola é avaliado, a menor eficiência é obtida com a força senoidal. Por outro lado, para o modelo RL, o pior resultado é obtido para a força cuja curva é retangular. Na situação na qual a mola não é utilizada, a força retangular apresentou a menor eficiência, para ambos os modelos de circuito elétrico. Conclui-se, portanto, que em um cenário geral, maior eficiência eletromecânica é obtida quanto mais suave é a curva da força de excitação. Além disso, a presença da mola garante uma curva de eficiência mais estável.

3.2 Modelo do Moto-Gerador de Pistão Livre

3.2.1 Exemplo de aplicação do modelo

Com o objetivo de exemplificar a aplicação do modelo proposto, determinou-se as dimensões e parâmetros do motogerador linear. A Tabela 8 resume os dados relativos às dimensões da câmara e propriedades do combustível selecionado para a aplicação. Os dados da Tabela 7 foram aproveitados como parâmetros para o gerador linear. O modelo de circuito elétrico do tipo RL foi selecionado, onde a resistência de carga fora 45Ω e apenas a auto-indutância e indutâncias mútuas das bobinas do gerador foram consideradas.

Tabela 8 – Parâmetros e dimensões do motogerador linear.

Parâmetro	Valor	Representação
m_t	$3,0 \text{ kg}$	Soma de massas do linor, pistão e outros elementos.
c	$5,0 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$	Coefficiente de amortecimento (perdas por atrito).
k	$0,0 \text{ kN}/\text{m}$	Constante de rigidez da mola associada ao linor.
C_d	$3,85 \text{ ms}$	Tempo de combustão.
P_{int}	135 kPa	Pressão de admissão.
T_{int}	25°C	Temperatura de admissão.
T_w	75°C	Temperatura das paredes do cilindro.
V_{disp}	$0,21 \text{ L}$	Cilindrada da câmara de combustão.
Q_{inf}	$27 \text{ MJ}/\text{kg}$	Poder calorífico inferior do combustível.
AFR	28	Razão mássica ar-combustível.
η_{comb}	0,80	Eficiência da combustão.

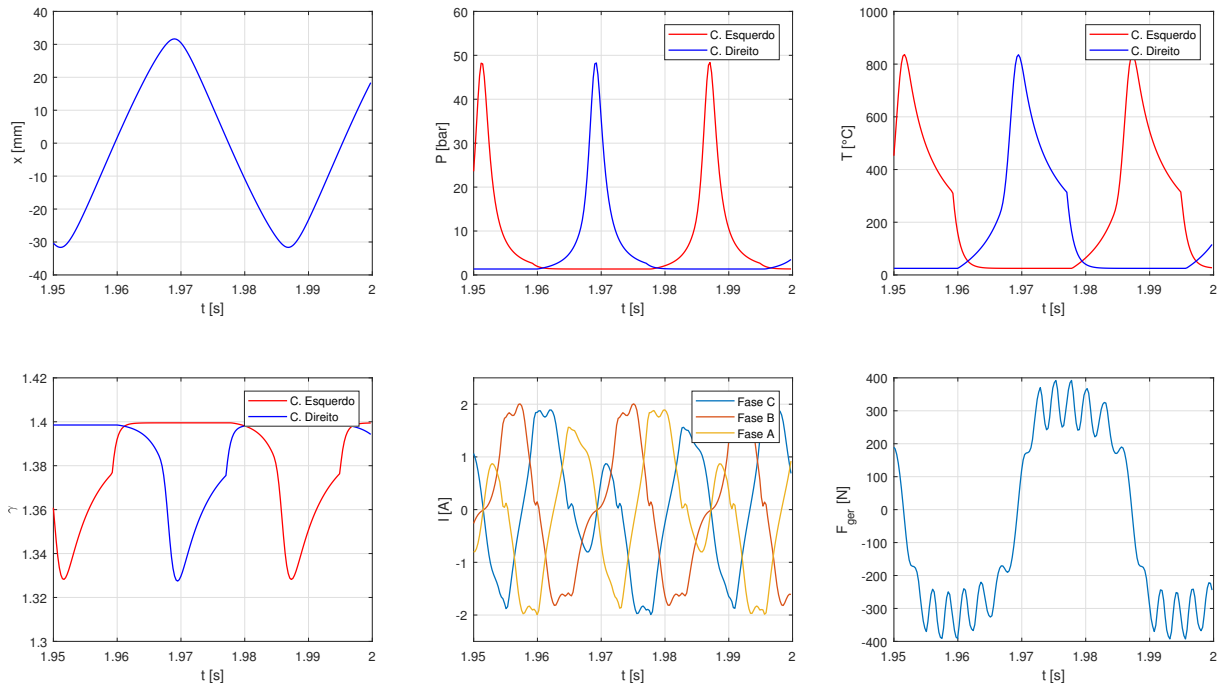


Figura 44 – Deslocamento do pistão, propriedades dos gases na câmara de combustão e força induzida.

A Figura 44 mostra os resultados para o deslocamento do pistão, pressão, temperatura e coeficiente politrópico dos gases contidos na câmara. As curvas da corrente instantânea e força eletromagnética são também ilustradas.

Utilizando os resultados do modelo, estimou-se para os parâmetros selecionados uma eficiência termoelétrica de 44,21 %, com o motor operando a uma frequência de 28,86 Hz e entregando uma potência de 0,99 kW .

3.2.2 Influência da mola sobre o desempenho

Como descrito anteriormente, a inércia do volante associado ao eixo virabrequim, em um motor convencional, garante o funcionamento estável do motor. Contudo, apesar da ausência desses elementos em um motor de pistão livre torná-lo um equipamento mais simples, por outro lado traz à tona uma desvantagem do mesmo: a instabilidade (MIKALSEN, 2008).

Como uma possível solução a este problema, propõe-se o uso de uma mola associada ao conjunto pistão e linor, para que esta exerça o papel de acumuladora de energia, devolvendo-a nos momentos oportunos. Para simular o efeito desta proposta, considerou-se as dimensões utilizadas no exemplo de projeto descrito anteriormente, e varia-se a resistência de carga R_L , de modo a simular uma mudança na potência exigida pelo sistema alimentado pelo gerador. Neste caso, reduziu-se de 100 Ω para 60 Ω . O objetivo é, a partir dos resultados apresentados na seção anterior, situação na qual o equipamento funciona de modo estável, observar a influência da variação da resistência sobre as condições operacionais do equipamento.

A Figura 45 ilustra, portanto, as curvas das variáveis analisadas para dois cenários: o sistema sem a mola ($k = 0$), e com a mola ($k = 30 \text{ kN/m}$).

A Tabela 9 resume a comparação de desempenho entre as simulações realizadas.

Tabela 9 – Comparação de desempenho entre simulações com e sem mola associada ao linor.

Parâmetro	Sem mola	Com mola
$C.R.$	29,10	15,94
$\max(P)$ [bar]	148,81	74,50
$\max(T)$ [$^{\circ}C$]	923,58	851,67
f [Hz]	37,63	36,52
$\max(I)$ [A]	2,06	2,10
Pot_{ger} [kW]	1,49	1,36
η	51,56	48,15

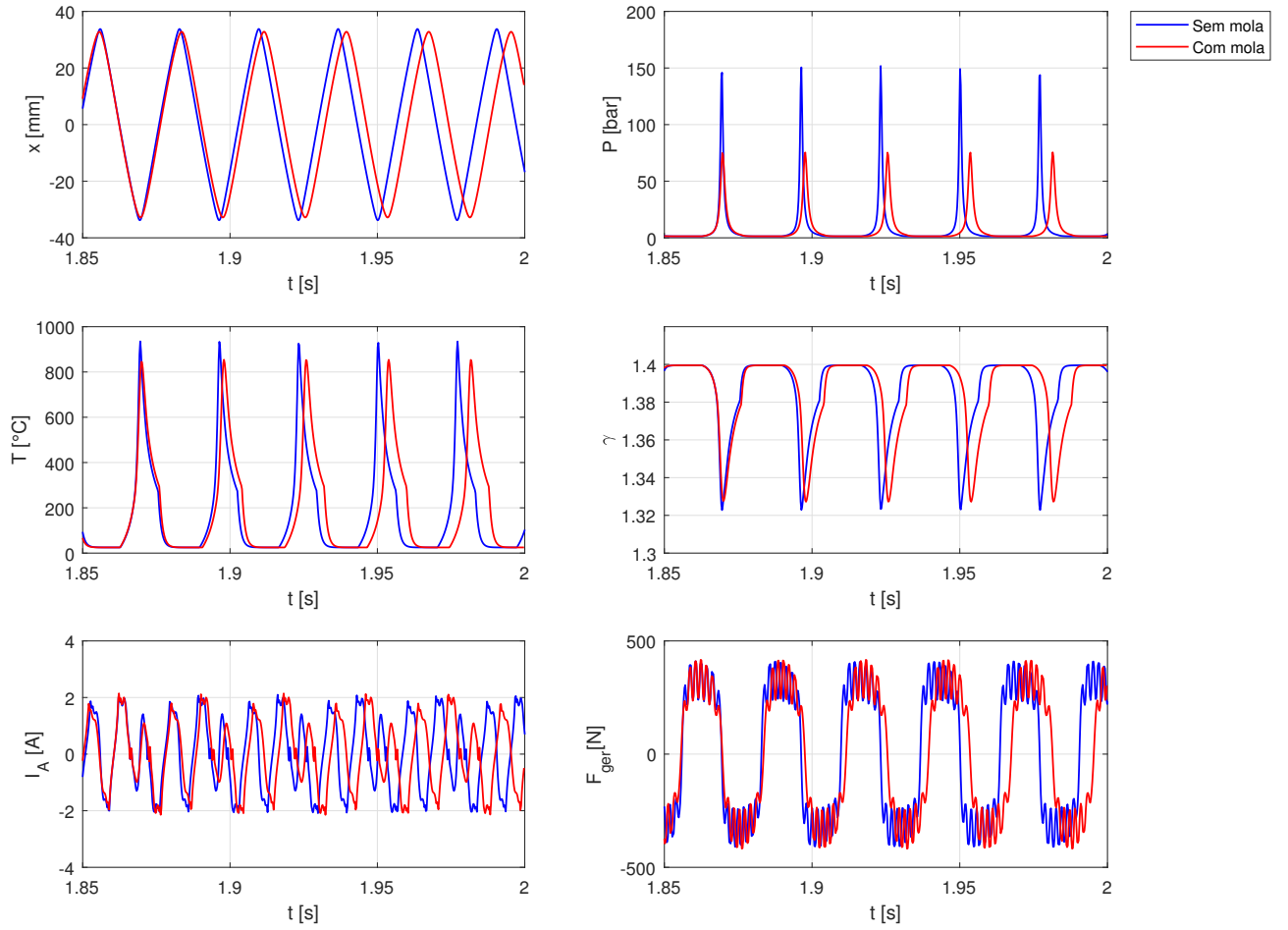


Figura 45 – Curvas de variáveis obtidas via simulação para moto-gerador: com e sem mola.

Ao se comparar os resultados obtidos com os apresentados na seção anterior (veja Figura 44), verifica-se que, devido à variação da resistência R_L , o valor de máxima pressão obtido no interior da câmara de combustão pode aumentar consideravelmente, chegando a triplicar no cenário onde a mola não fora utilizada. Nesta situação, há a possibilidade de dano dos elementos do motor devido às maiores tensões a que são submetidos. Em comparação, quando a mola é considerada, este aumento é limitado a 25 %.

Também é notável a eficiência termodinâmica e os patamares atingidos por ela. Tal fato pode ser explicado pela variação da taxa de compressão obtida. Sabe-se que o aumento deste parâmetro resulta em uma maior eficiência (FERGUSON; KIRKPATRICK, 2015). Contudo, nos motores convencionais, os limites observados para motores de ignição por faísca situam-se entre 9 e 11. No caso do motor de pistão livre, este limite ainda não é claramente definido pois, como um exemplo, há relatos de motores que funcionaram com $C.R. = 50$ (MIKALSEN, 2008).

A Figura 46 mostra o diagrama de pressão em função do deslocamento do pistão para os dois cenários simulados.

Vale mencionar que no modelo proposto a ignição da mistura ar-combusível ocorre

em uma posição determinada do pistão. Devido a isso, as pressões obtidas nas etapas de compressão e no início da combustão são próximas, independente da presença ou não do elemento elástico. Porém, como é esperado, os diagramas se diferenciam nas regiões próximas ao ponto morto superior. Tal divergência é devido ao fato de que a mola absorve parte da energia cinética do pistão, sendo o restante convertido em energia interna no gás contido nas câmaras de combustão, resultando no aumento de pressão.

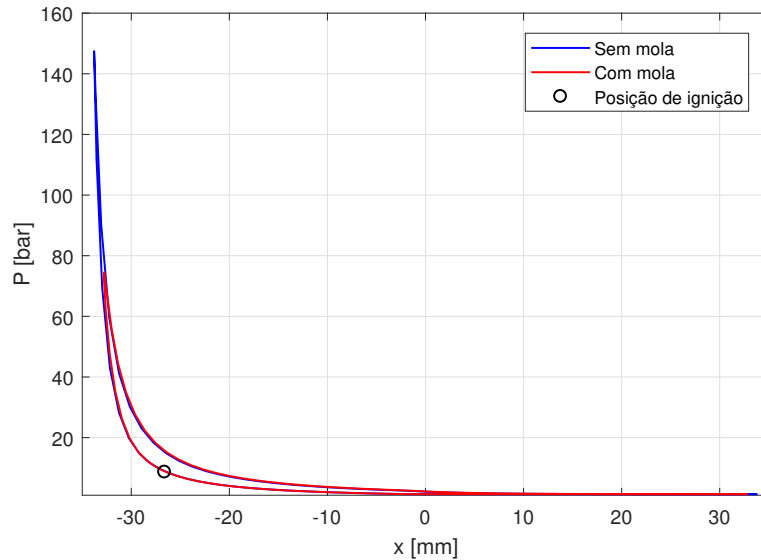


Figura 46 – Diagrama de Pressão *vs* Deslocamento para o moto-gerador com e sem mola.

A temperatura do gás também apresenta menores amplitudes no caso onde o uso do elemento elástico é considerado. Como consequência, o coeficiente politrópico é maior, como observado nos gráficos anteriores. Também é observado uma pequena variação na amplitude das correntes induzidas. Os valores obtidos para as frequências de operação também são próximos.

Conclui-se, portanto, que o uso da mola associada ao pistão do moto-gerador pode ser uma solução à instabilidade comumente verificada na operação deste equipamento.

3.2.3 Análise paramétrica

De forma análoga ao realizado com o modelo do gerador linear, uma análise paramétrica é feita através de simulações com o modelo do moto-gerador linear. Como o modelo proposto procura reproduzir os fenômenos termodinâmicos, elétricos e dinâmicos, e a relação entre eles, presentes no motogerador, é esperado que a variação de um único parâmetro reflita sobre o desempenho do equipamento como um todo. Portanto, com o objetivo de entender essas relações, e demonstrar a potencialidade do modelo, três parâmetros foram variados: a massa do conjunto pistão e linor, o diâmetro do pistão e a rigidez da mola associada.

A Figura 47 mostra as curvas de variação da eficiência termoeétrica, da taxa de compressão, da frequência de operação e da máxima pressão obtida (multiplicada pelo fator $1/3$) em função da variação da massa m_t . Demonstra-se que a taxa de compressão varia proporcionalmente à massa m_t , e de modo quase linear. Como já discutido anteriormente, tal ocorre devido à ausência de uma limitação cinemática. Também é observado que a eficiência global acompanha o aumento da massa, o que é explicado pelo aumento de $C.R.$. A frequência de operação apresenta mínimas variações na faixa de valores simulados.

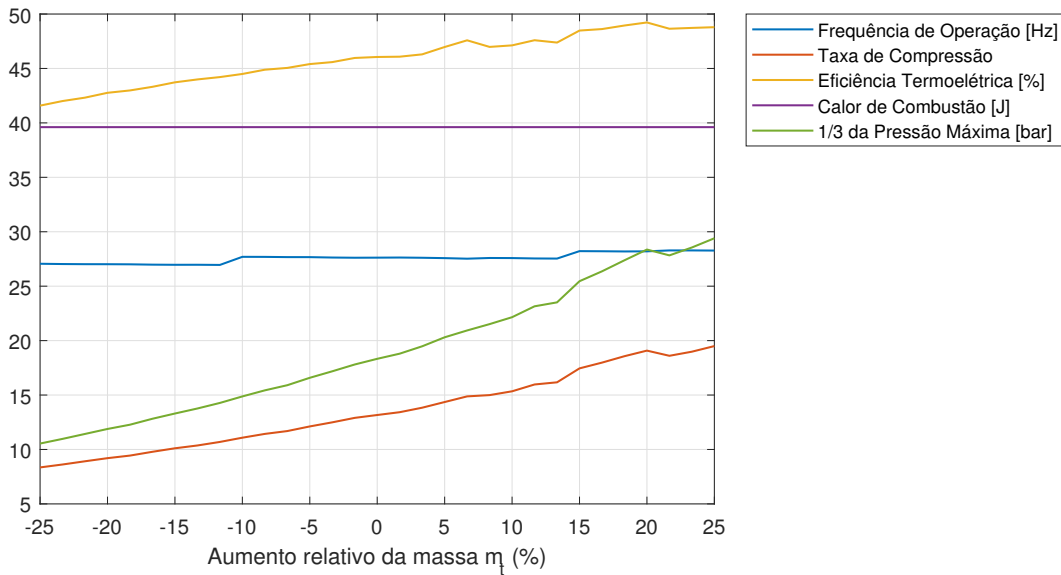


Figura 47 – Curvas de variação dos parâmetros de desempenho em função da massa m_t .

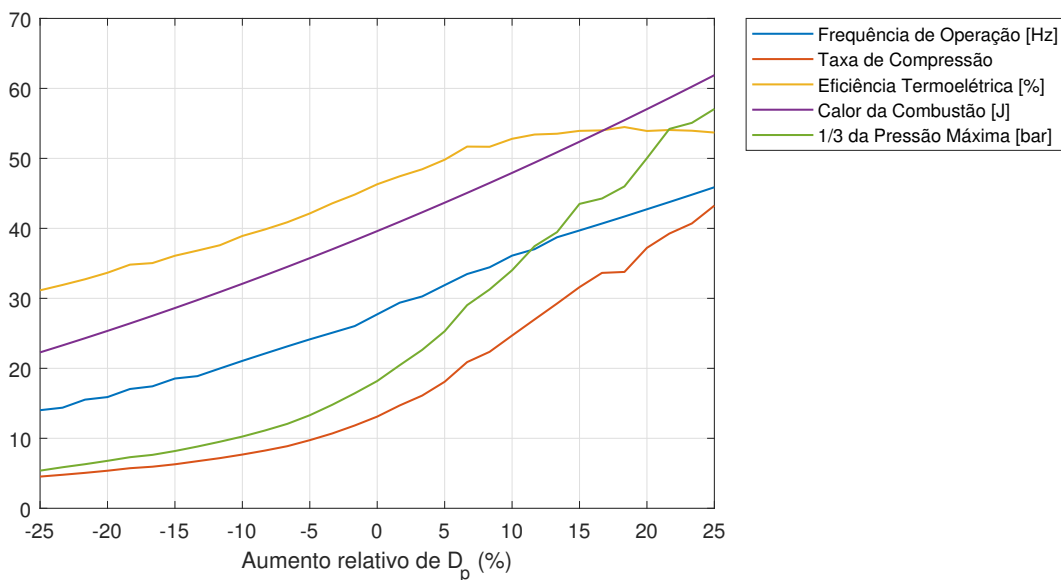


Figura 48 – Curvas de variação dos parâmetros de desempenho em função do diâmetro D_p .

A Figura 48 ilustra a variação dos mesmos parâmetros de comparação em relação à variação do diâmetro do pistão, D_p .

Em contraste às observações anteriores, nota-se que a frequência de operação varia proporcionalmente ao diâmetro do pistão. Tal observação pode induzir ao raciocínio de que a variação relativa do diâmetro, em comparação à massa apresenta uma maior influência sobre a frequência natural do sistema. Contudo, é necessário notar que, com o objetivo de manter a mesma razão mássica de ar e combustível, a quantidade deste varia proporcionalmente ao volume da câmara do cilindro, como pode ser observado na curva de quantidade de calor de combustão. Como uma consequência disto, maior é a pressão máxima obtida. Portanto, o aumento da frequência de operação é o resultado da combinação desses dois fatores: a variação da área do pistão e máxima pressão obtida. A taxa de compressão e eficiência termoeétrica resultantes também variam não-linearmente e de modo proporcional ao aumento do diâmetro.

Na próxima série de simulações, considera-se uma mola com rigidez $k = 30 \text{ kN/m}$ ao eixo do equipamento. A Figura 49 mostra os gráficos de variação dos parâmetros de desempenho, em relação à variação da rigidez do elemento elástico.

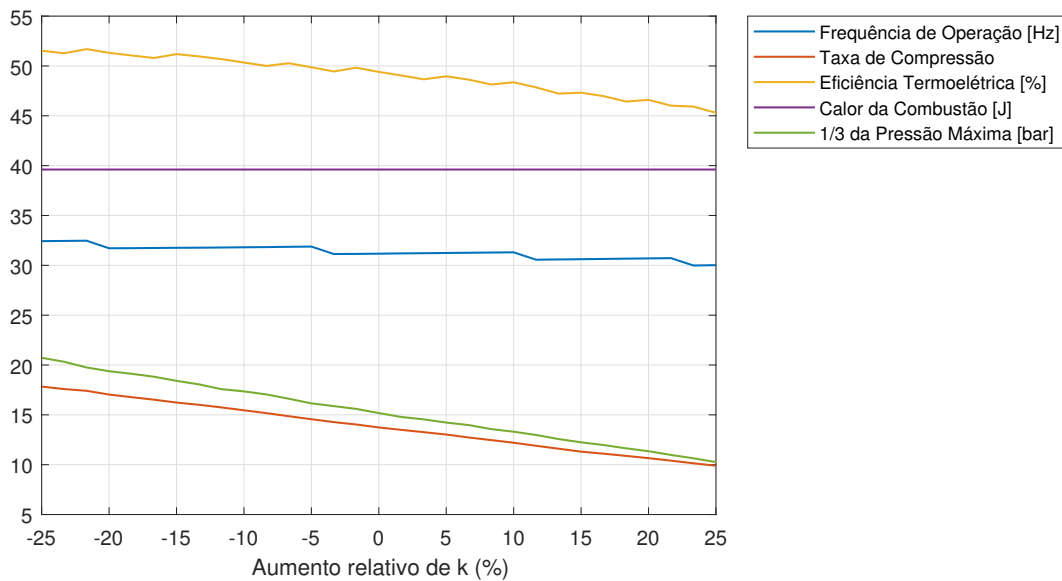


Figura 49 – Curvas de variação dos parâmetros de desempenho em função da rigidez k .

Observa-se que a taxa de compressão, a eficiência global, e máxima pressão do gás contido variam de modo inversamente proporcional ao aumento de k . Também nota-se que a frequência de operação é praticamente constante, apesar da variação da rigidez do elemento.

A Figura 50 apresenta as curvas de variação da potência gerada em função da variação da massa m_t , do diâmetro do pistão D_p e da rigidez da mola k .

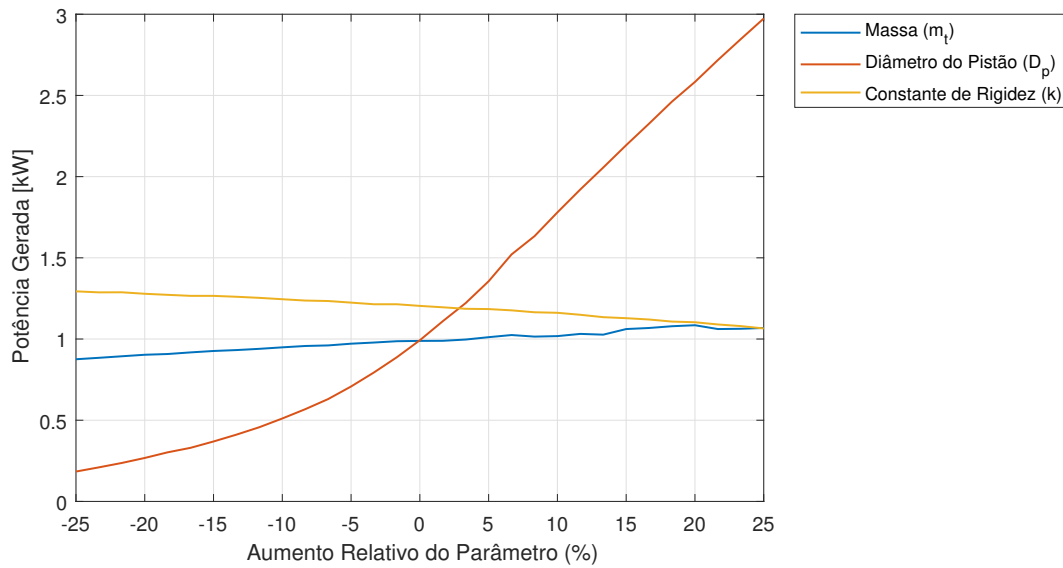


Figura 50 – Curvas de variação da potência gerada em função dos variáveis avaliadas.

3.3 Metodologia de projeto do moto-gerador

A partir dos resultados e observações apresentados nas seções e capítulos anteriores, verificou-se a possibilidade de propor uma metodologia a ser utilizada como uma ferramenta de auxílio da definição dos parâmetros e dimensões do moto-gerador.

3.3.1 Fluxograma de cálculo dos parâmetros

A Figura 51 ilustra um fluxograma que pode ser utilizado para definição dos parâmetros da máquina.

No fluxograma apresentado, procura-se demonstrar quais as relações entre as variáveis e como proceder na determinação dos parâmetros desejados. Considera-se primeiramente que o usuário tenha em mente o projeto de determinado moto-gerador com potência mínima, frequência de operação e uma taxa de compressão limitada pelo combustível a ser utilizado.

Reune-se a essas variáveis a o curso do pistão L_s , a razão entre o curso e o diâmetro do pistão, L_s/B e uma estimativa da eficiência global. Como será descrito adiante, é possível com estas variáveis estimar as demais variáveis de maneira a encontrar um resultado próximo do desejado.

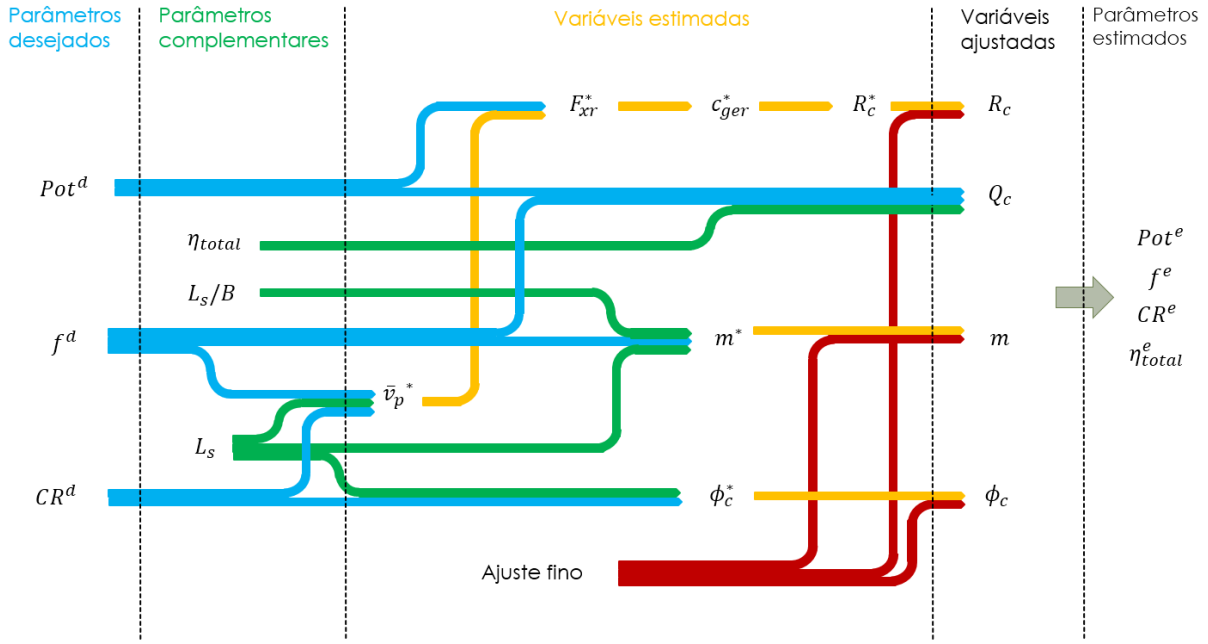


Figura 51 – Fluxograma para cálculo dos parâmetros da máquina.

3.3.2 Equacionamento

Abaixo seguem as equações utilizadas durante o processo de cálculo dos parâmetros da máquina. A Equação 3.5 indica o cálculo da potência indicada média (MIKALSEN, 2008).

$$Pot_{ind,m} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_p}{L_s} \right)^2 \times P_{mi} \times \bar{v}_p \times L_s^2 \quad (3.5)$$

Onde:

- $Pot_{ind,m}$ é a potência indicada;
- P_{mi} é a pressão média indicada;
- \bar{v}_p é a velocidade média do pistão;
- L_s é o curso máximo do pistão;
- D_p é o diâmetro do pistão.

Pode-se estimar a força induzida média do gerador pela Equação 3.6.

$$F_{xr} = \frac{Pot_{ind,m}}{\bar{v}_p \cdot \eta_{ger}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_p}{L_s} \right)^2 \times P_{mi} \times \frac{L_s^2}{\eta_{ger}} \quad (3.6)$$

Onde:

- η_{ger} é a eficiência estimada do gerador;

A velocidade média é relacionada com a frequência de funcionamento do equipamento, segundo a Equação 3.7.

$$\bar{v}_p = 2 \cdot S \cdot f = 4 \cdot L_s \cdot \frac{(CR - 1)}{CR} \cdot f \quad (3.7)$$

Onde:

f é a frequência de funcionamento do motor;

CR é a taxa de compressão;

A força induzida média e a velocidade média são diretamente associadas através do coeficiente de amortecimento médio (por analogia a um amortecedor viscoso), como indicado na Equação 3.8 (MIKALSEN, 2008).

$$c_{ger} = \frac{F_{xr}}{\bar{v}_p} \quad (3.8)$$

Para o cálculo do combustível necessário, basta ajustar os parâmetros para que o calor de combustão seja próximo ao valor estimado pela Equação 3.9.

$$Q_c = \frac{Pot_{ind,m}}{2 \cdot f \eta_{total}} \quad (3.9)$$

Por fim, a Equação 3.10 ilustra um meio de estimar a frequência natural do motor (HANSSON, 2006).

$$f_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{P_{adm} \cdot D_p \cdot \gamma \cdot (CR - 1)}{m_p \cdot L_s \cdot CR}} \quad (3.10)$$

Onde:

P_{adm} é a pressão de admissão da mistura ar-combustível;

γ é a constante do gás;

m_p é a massa do pistão.

3.3.3 Etapas

3.3.3.1 Parâmetros desejados

Primeiramente, define-se quais os parâmetros de desempenho desejados. Conforme indicado no fluxograma, Fig. 51, estes parâmetros são a Potência (Pot^d), a frequência de operação (f^d) e a taxa de compressão (CR^d).

3.3.3.2 Parâmetros complementares

Definidos os parâmetros desejados, é possível estimar os parâmetros complementares. Considerando-se a frequência de operação próxima da frequência natural do sistema e que

a pressão de admissão, a taxa de compressão e massa do pistão são conhecidos. A razão D_p/L_s é estimada a partir da Equação 3.10, como indicado na Equação 3.11.

$$\frac{D_p}{L_s} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot m}{P_{adm}} \frac{CR}{(CR - 1)} \quad (3.11)$$

3.3.3.3 Variáveis estimadas

Conforme indicado no diagrama, as variáveis estimadas são a velocidade média do pistão, calculada pela Equação 3.7; a força induzida média, determinada pela 3.6; o coeficiente de amortecimento, encontrado pela Equação 3.8 e o ponto de ignição, estimado através da Equação 3.12

$$\Phi_c = \frac{S/2 - \bar{v}_p/2 \cdot t_d}{L_s} = \frac{CR - 1}{CR} (1 - 2 \cdot f \cdot t_d) \quad (3.12)$$

Onde:

t_d é o tempo de combustão;

Com o coeficiente de amortecimento em mãos, estima-se a resistência de carga ótima para alcançar a força induzida média necessária. Para isso, pode-se fazer uso do gráfico ilustrado na Figura 37.

Por fim, o calor de combustão é estimado pela Equação 3.9. Usualmente, o valor $\eta_{total} = 50\%$ é razoável. Determinado Q_c , o valor desejado é obtido ajustando-se as variáveis relativas às propriedades do combustível e da mistura ar-combustível. Nesta etapa, deve-se tomar o devido cuidado para que a mistura não se torne rica em combustível, pois o programa não considera o balanço estequiométrico e logo todo combustível é queimado, independente da quantidade de oxigênio.

Contudo, uma observação deve ser feita. A massa do pistão ótima, antes considerada determinada, pode ser recalculada. Para tal, utiliza-se o modelo completo criado aplicando-se as seguintes considerações: ausência do gerador ou do amortecedor, ausência da mola linear, ausência de combustível e ausência de perda (ou ganho) de calor entre a superfície das câmaras de combustão e os gases contidos nas mesmas. Ao modelo é aplicado como condições iniciais velocidade nula e deslocamento relativo a razão de compressão desejada.

Os resultados obtidos são utilizados para o cálculo da frequência "natural" do sistema quando é considerada apenas a interação fluido-estrutura. A Figura 52 mostra a influência da massa do cursor, da taxa de compressão e da razão L_s/D_p sobre a frequência resultante.

Observa-se que a frequência resultante é diretamente proporcional a taxa de compressão CR e inversamente proporcional a massa do cursor e a razão L_s/D_p .

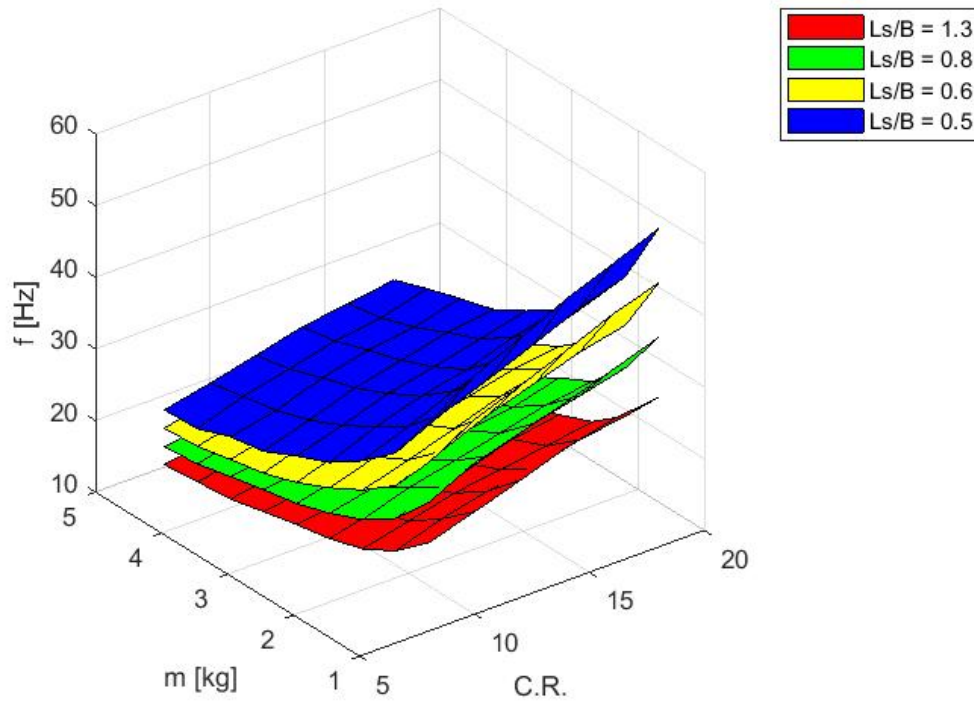


Figura 52 – Frequência em função da razão L_s/D_p , da massa do cursor e da taxa de compressão.

3.3.3.4 Ajuste fino e variáveis ajustadas

Estimadas as variáveis na etapa anterior, verifica-se o resultado através de uma simulação do sistema. Quase sempre é necessário então um ajuste fino das variáveis calculadas, afim de que os parâmetros desejados sejam atendidos.

3.3.4 Exemplo 1

Como exemplo, propõe-se o objetivo de estimar os parâmetros para o projeto de um moto-gerador. Como parâmetros e dimensões do gerador, considera-se os dados da Tabela 7. Seguindo o procedimento proposto, determina-se na primeira etapa os parâmetros desejados. Neste caso, seja a potência nominal $1,25 \text{ kW}$ e frequência de 30 Hz .

Como parâmetros complementares, tem-se $P_{adm} = 135 \text{ kPa}$, $m_p = 3 \text{ kg}$, $L_s = 35 \text{ mm}$, $CR = 12$ e $t_d = 3,85 \text{ ms}$.

A Tabela 10 resume os resultados encontrados, na execução da segunda e terceira etapas.

Tabela 10 – Resultados da análise prévia dos parâmetros (Na ordem dos cálculos).

Equações ou Figuras	Parâmetro calculado
Eq. 3.11	$D_p/L_s = 0,8613$
	$D_p = 30,00mm$
Eq. 3.7	$\bar{v}_p = 3,85 \text{ m/s}$
Eq. 3.6	$F_{xr} = 360,75 \text{ N}$
Eq. 3.8	$c_{ger} = 93,70 \text{ N} \cdot s/m$
Fig. 52	$R_L = 25 \Omega$
Eq. 3.12	$\Phi_c = 0,7049$
Eq. 3.9	$Q_c = 41,67 \text{ J}$

Utilizando os parâmetros acima, o resultado obtido demonstrou um funcionamento não estável do sistema (vede Figura 53), no qual o pistão não atingiu o ponto de ignição após um período de funcionamento. Através da Equação 3.3, verificou-se que o coeficiente de amortecimento obtido foi de 135 Ns/m , valor maior que o estimado. Portanto, uma das formas de se obter um funcionamento estável é reduzir o coeficiente de amortecimento. Neste exemplo, optou-se por aumentar a resistência para $R_L = 45 \Omega$.

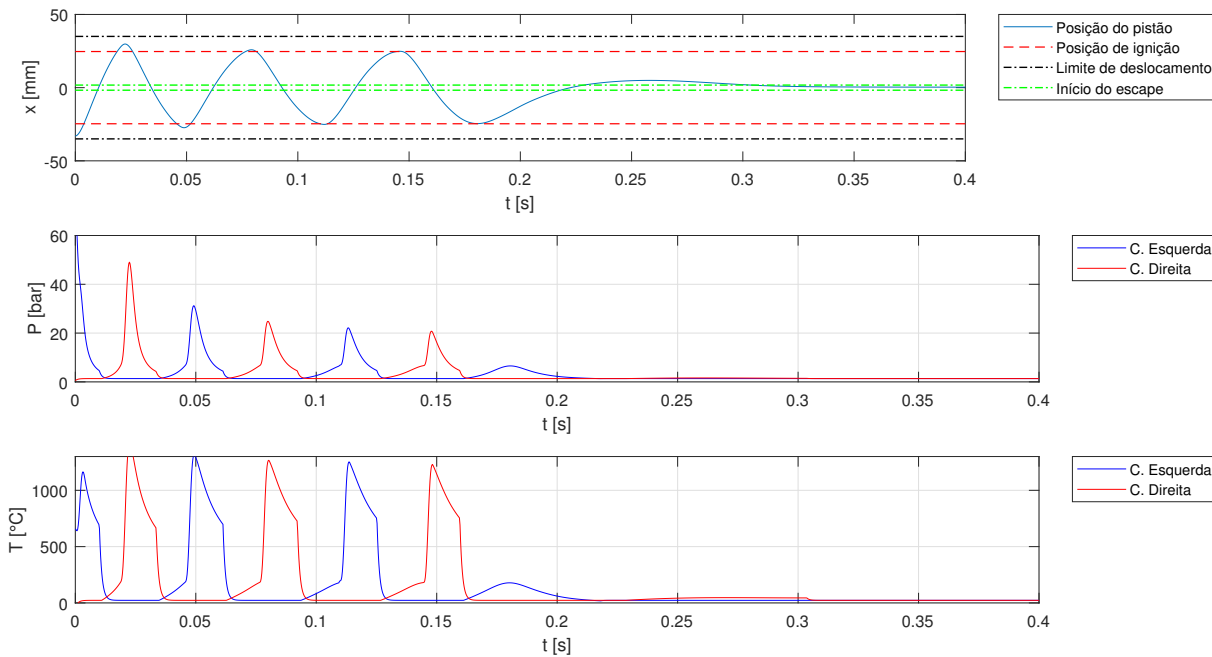


Figura 53 – Condição de funcionamento instável do moto-gerador.

Tabela 11 – Resultados do modelo utilizando os parâmetros estimados.

Parâmetro	Valor obtido
f	$26,35 \text{ Hz}$
\bar{v}_p	$3,27 \text{ m/s}$
$Pot_{ind,m}$	$0,90 \text{ kW}$
η_{total}	$0,4095$
CR	$12,76$

Simulando o modelo com o novo valor de resistência, uma operação estável foi obtida. Os parâmetros de desempenho do modelo estão na Tabela 11

3.3.5 Exemplo 2

Como um segundo exemplo, deseja-se obter as dimensões de um moto-gerador com menor potência nominal e menor frequência de operação. Neste caso, seja 400 W e 20 Hz o valor destes parâmetros, respectivamente. Considera-se $P_{adm} = 135\text{ kPa}$, $L_s = 35\text{ mm}$, $CR = 12$ e $t_d = 3,85\text{ ms}$.

Para este exemplo, considera-se que o motor que a ser projeto é construído utilizando-se elementos de um motor existente. Neste caso, seja $D_p/L_s = 0,75$. Observa-se que a massa do conjunto pistão e linor ainda não foi determinada.

A Tabela 12 resume os resultados encontrados na segunda e terceira etapas.

Tabela 12 – Resultados da análise prévia dos parâmetros (Na ordem de cálculos).

Equações ou Figuras	Parâmetro calculado
Eq. 3.11	$m_p = 5,85\text{ kg}$
Eq. 3.7	$\bar{v}_p = 2,57\text{ m/s}$
Eq. 3.6	$F_{xr} = 173,16\text{ N}$
Eq. 3.8	$c_{ger} = 67,47\text{ N} \cdot \text{s/m}$
Fig. 52	$R_L = 50\text{ }\Omega$
Eq. 3.12	$\Phi_c = 0,7755$
Eq. 3.9	$Q_c = 20,00\text{ J}$

Utilizando os parâmetros acima, o resultado obtido demonstrou um funcionamento estável, porém não satisfatório do sistema. Verifica-se pelos resultados da rotina de cálculo do ciclo médio que o desvio padrão máximo da pressão é quase 109 bar , o que indica uma forte variação entre os ciclos. Na Figura 54 observa-se uma variação cíclica da pressão máxima para ambas as câmaras. Tal pode ser um indicativo de que a energia que é entregue ao sistema não é totalmente absorvida pelo gerador. Através da Equação 3.3, verificou-se que o coeficiente de amortecimento obtido foi de $68,13\text{ N} \cdot \text{s/m}$, valor próximo do esperado.

Observa-se então a taxa de compressão obtida, $CR = 19,02$, acima do esperado. Ajusta-se, portanto, o ponto de ignição através do parâmetro Φ_c , na tentativa de reduzir a taxa de compressão obtida. Neste procedimento, experimentou-se $\Phi_c = 0,72$ e foi observado que a taxa de compressão aumentou para 30. Ajusta-se $\Phi_c = 0,70$ e é obtido $CR = 26$. Na terceira tentativa, utiliza-se $\Phi_c = 0,83$, com o qual obtém-se desempenho próximo do desejado. Conclui-se, assim, a quarta etapa do procedimento proposto.

Simulando o modelo com a modificação descrita, obteve-se uma operação estável. Os parâmetros de desempenho do modelo estão na Tabela 13

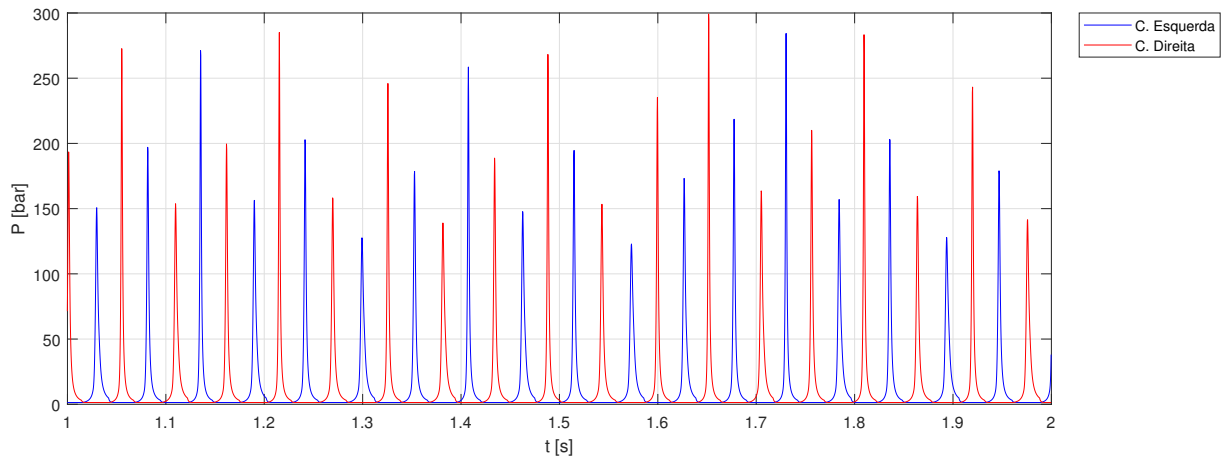


Figura 54 – Pressão na câmara de combustão do moto-gerador com condição de funcionamento estável, porém com alta variação da pressão máxima.

Tabela 13 – Resultados do modelo utilizando os parâmetros estimados.

Parâmetro	Valor obtido
f	15,22 Hz
\bar{v}_p	1,84 m/s
$Pot_{ind,m}$	297 W
η_{total}	0,4330
CR	14,00

Observa-se que o desempenho está mais distante que o desejado, quando comparado com o obtido no Exemplo 1. Contudo foi possível demonstrar por meio de ambos exemplos como o método facilita a procura pelos parâmetros do motor através da redução do número de ajustes finos dos parâmetros.

4 Conclusão

Neste trabalho desenvolveu-se um modelo numérico com fins para projeto e otimização de um moto-gerador linear. Frente aos modelos já existentes e disponíveis na literatura, o objetivo específico de desenvolvimento de um modelo capaz de considerar mais parâmetros multidisciplinares, sem comprometer a estabilidade de cálculo e a velocidade de integração foi atendido.

O modelo proposto não considera a aproximação do gerador linear por uma força proporcional a velocidade na integração numérica das equações diferenciais ordinárias. Desta forma, pode-se estudar como o projeto dimensional do gerador e cada um de seus parâmetros elétricos influenciam o desempenho global da máquina. Em relação aos fenômenos termodinâmicos, deriva-se as equações considerando-se a variação do coeficiente politrópico e, devido a isso, o modelo obtido apresenta resultados mais próximos do que é observado na realidade.

Para o desenvolvimento do modelo do gerador elétrico linear, avaliou-se qual seria o método apropriado para estimar a distribuição do campo magnético no interior da máquina. O Método dos Subdomínios foi selecionado, visto a suas vantagens frente aos outros métodos, a saber, a alta precisão nos resultados e o baixo custo computacional. O processo de validação do modelo comprovou esses dois aspectos. Um modelo construído utilizando o Método dos Elementos Finitos foi utilizado como referência para a validação. Os resultados mostraram que para a estimativa da distribuição do campo magnético nas direções radial e axial, os erros médios foram 0,639 % e 0,012 %, respectivamente. A comparação entre os tempos de processamento mostram que o Método dos Subdomínios apresentou um tempo quase 40 vezes menor em relação ao Método dos Elementos Finitos. Portanto, conclui-se que o método escolhido poderia contribuir fortemente para que o objetivo do trabalho fosse alcançado.

Para que a variação do coeficiente politrópico fosse inserida no equacionamento das propriedades termodinâmicas do gás contido na câmara de combustão do motor, considerou-se os calores específicos a pressão e volume constantes funções da temperatura. Essas funções são disponíveis na tabela JANAF. Dado isso, as equações diferenciais ordinárias resultantes abrangiam a variação das propriedades termodinâmicas, considerando-se um coeficiente politrópico variável. Para a validação deste modelo, recorreu-se a uma rotina numérica baseada no modelo denominado *Homogeneous Two-Zone Finite Heat Release Cycle*. A comparação entre os resultados mostraram uma forte similaridade, sendo as maiores diferenças observadas nas curvas da temperatura. A justificativa dessas divergências situam-se na níveis de complexidade que separam os dois modelos, além de uma consideração

feita no modelo proposto: a pressão e temperatura, nos processos de exaustão e admissão dos gases, são constantes e iguais aos valores de admissão.

Com o objetivo de entender os efeitos entre as variações dos parâmetros utilizados para alimentar os modelos desenvolvidos sobre a eficiência desses modelos, análises paramétricas foram realizadas nos modelos do gerador elétrico e do moto-gerador, separadamente.

Os resultados da análise referentes ao sub-modelo do gerador elétrico, demonstraram que a eficiência do equipamento não dependia somente da resistência de carga alimentada, mas também da indutância do circuito, do tipo da força de excitação e da presença ou ausência da mola associada ao linor. Verificou-se que:

- Para menores valores de resistência, a conversão da energia mecânica em elétrica é limitada. A medida que maiores valores de resistência de carga são utilizados, a eficiência eletromecânica aumenta até que um valor máximo seja obtido e, retornando à queda novamente. Nos resultados observados, as maiores eficiências foram obtidas em uma faixa de 90Ω a 110Ω .
- O uso de maiores indutâncias de carga resultam em uma queda brusca da eficiência do gerador devido à limitação que esses elementos oferecem à variação da corrente induzida.
- O uso de uma mola associada ao linor do equipamento elétrico afeta o comportamento dinâmico do sistema consideravelmente, por fazer que este opere de maneira similar a um filtro mecânico. Também é observado que a presença da mola permite que maiores eficiências eletromecânicas sejam obtidas em faixas de maiores frequências de operação, independente do tipo de força aplicada ao sistema.

A análise paramétrica realizada sobre o modelo do moto-gerador mostraram a forte influência entre os parâmetros de projeto do equipamento. Os resultados para variação da massa e área do pistão, e da constante de rigidez da mola foram apresentados. Resume-se as conclusões:

- O uso da mola é aconselhável para manter uma operação estável e evitar as altas variações dos picos de pressão obtidos no interior da câmara, quando uma variação da potência absorvida pela carga é observada.
- A eficiência termoelétrica, bem com a razão de compressão e o valor de pico da pressão variam proporcionalmente à massa do pistão.
- Considerando a variação da área do pistão, a razão de compressão e a eficiência apresentam variação na razão direta, contudo de forma não-linear.

Por fim, visto a complexidade do modelo, e a forte relação entre as variáveis, uma metodologia de uso do modelo para o projeto de um moto-gerador é proposta. Nesta metodologia, dada a potência, a frequência de operação e a razão de compressão desejadas, estima-se os parâmetros necessários através de equações. Dois exemplos da aplicação da metodologia são disponibilizados.

Portanto, conclui-se que os objetivos do trabalho foram atingidos, sendo o resultado deste uma potencial base para o desenvolvimento de outros projetos que visem contribuir para a construção do primeiro Moto-Gerador de Pistão Livre no Brasil. Sob este cenário, propõe-se para trabalhos futuros:

- Desenvolver o modelo de controle da máquina para partida e extração da máxima energia elétrica possível;
- Projeto mecânico da máquina a partir das simulações realizadas do modelo proposto;
- Otimização de variáveis utilizando o modelo;
- Construção de um protótipo para validação e possível aprimoramento do modelo proposto.

Referências

- ABDALLA, I. I.; IBRAHIM, T.; NOR, N. B. M. Development and optimization of a moving-magnet tubular linear permanent magnet motor for use in a reciprocating compressor of household refrigerators. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 77, p. 263–270, 2016. doi:[10.1016/j.ijepes.2015.11.020](https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2015.11.020). Citado na página 25.
- ACHTEN, P. A. A review of free piston engine concepts. *SAE transactions*, JSTOR, p. 1836–1847, 1994. doi:[10.4271/941776](https://doi.org/10.4271/941776). Citado 3 vezes nas páginas 27, 31 e 33.
- ATKINSON, C. M. et al. Numerical simulation of a two-stroke linear engine-alternator combination. *SAE transactions*, JSTOR, p. 1416–1430, 1999. doi:[10.4271/1999-01-0921](https://doi.org/10.4271/1999-01-0921). Citado na página 75.
- BENTO, P. F. et al. Modelo dinâmico e termodinâmico para motor linear de pistão livre. Universidade Federal de Uberlândia, 2019. doi:[10.14393/ufu.di.2019.339](https://doi.org/10.14393/ufu.di.2019.339). Citado 3 vezes nas páginas 11, 30 e 32.
- BOLDEA, I. *Synchronous generators*. [S.l.]: CRC Press, 2015. doi:[10.1201/b19310](https://doi.org/10.1201/b19310). Citado 5 vezes nas páginas 37, 38, 40, 45 e 57.
- BOLDEA, I. *Linear electric machines, drives, and MAGLEVs handbook*. [S.l.]: CRC press, 2017. doi:[10.1201/b13756](https://doi.org/10.1201/b13756). Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 79.
- BOLDEA, I.; NASAR, S. A. Permanent-magnet linear alternators part ii: Design guidelines. *IEEE Transactions on Aerospace and electronic Systems*, IEEE, n. 1, p. 79–82, 1987. doi:[10.1109/TAES.1987.313338](https://doi.org/10.1109/TAES.1987.313338). Citado na página 84.
- BOLES, M. A.; CENGEL, Y. A. *Thermodynamics: an engineering approach*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 12, 70 e 71.
- BRUNETTI, F. Motores de combustão interna. *São Paulo: Blucher*, v. 1, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- CHENDONG, G. et al. Parametric analysis of a dual-piston type free-piston gasoline engine linear generator. *Energy Procedia*, Elsevier, v. 158, p. 1431–1436, 2019. doi:[10.1016/j.egypro.2019.01.346](https://doi.org/10.1016/j.egypro.2019.01.346). Citado na página 44.
- COSTA, P. Produção de hidrocarbonetos líquidos e gasosos por pirólise de resíduos plásticos. *Produção de hidrocarbonetos líquidos e gasosos por pirólise de resíduos plásticos*, 2006. Citado na página 25.
- CURTI, M.; PAULIDES, J. J.; LOMONOVA, E. A. An overview of analytical methods for magnetic field computation. In: IEEE. *2015 Tenth International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)*. [S.l.], 2015. p. 1–7. doi:[10.1109/EVER.2015.7112938](https://doi.org/10.1109/EVER.2015.7112938). Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 47.
- DAVID, H. *A diesel two-stroke linear engine*. Tese (Doutorado) — Dissertation, West Virginia University, 2000. Citado na página 43.

DEVILLERS, E. et al. A review of subdomain modeling techniques in electrical machines: performances and applications. In: IEEE. *Electrical Machines (ICEM), 2016 XXII International Conference on*. [S.l.], 2016. p. 86–92. doi:[10.1109/ICELMACH.2016.7732510](https://doi.org/10.1109/ICELMACH.2016.7732510). Citado na página 47.

FERGUSON, C. R.; KIRKPATRICK, A. T. *Internal combustion engines: applied thermosciences*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 12, 15, 48, 68, 69, 70 e 91.

GYSEN, B. et al. Analytical and numerical techniques for solving laplace and poisson equations in a tubular permanent-magnet actuator: Part i. semi-analytical framework. *IEEE Transactions on Magnetics*, IEEE, v. 44, n. 7, p. 1751–1760, 2008. doi:[10.1109/TMAG.2008.922416](https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.922416). Citado 6 vezes nas páginas 11, 13, 15, 53, 77 e 113.

GYSEN, B. et al. General formulation of the electromagnetic field distribution in machines and devices using fourier analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, IEEE, v. 46, n. 1, p. 39–52, 2010. doi:[10.1109/TMAG.2009.2027598](https://doi.org/10.1109/TMAG.2009.2027598). Citado 7 vezes nas páginas 45, 46, 47, 49, 50, 51 e 52.

GYSEN, B. L. J. Generalized harmonic modeling technique for 2d electromagnetic problems. *Applied to the design of a Direct-Drive Active Suspension System*, 2011. Citado 15 vezes nas páginas 11, 13, 15, 38, 39, 40, 41, 42, 51, 53, 54, 55, 78, 113 e 114.

HANIPAH, M. R. *Development of a spark ignition free-piston engine generator*. Tese (Doutorado) — Newcastle University, 2015. Citado na página 75.

HANIPAH, M. R.; MIKALSEN, R.; ROSKILLY, A. Recent commercial free-piston engine developments for automotive applications. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 75, p. 493–503, 2015. doi:[10.1016/j.applthermaleng.2014.09.039](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2014.09.039). Citado 5 vezes nas páginas 11, 28, 34, 35 e 37.

HANSSON, J.; LEKSELL, M.; CARLSSON, F. Minimizing power pulsations in a free piston energy converter. In: IEEE. *2005 European Conference on Power Electronics and Applications*. [S.l.], 2005. p. 8–pp. doi:[10.1109/EPE.2005.219541](https://doi.org/10.1109/EPE.2005.219541). Citado na página 43.

HANSSON, J. *Analysis and control of a hybrid vehicle powered by free-piston energy converter*. Tese (Doutorado) — KTH, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 43, 75 e 97.

HEYWOOD, J. B. et al. *Internal combustion engine fundamentals*. Mcgraw-hill New York, 1988. Citado 4 vezes nas páginas 48, 65, 66 e 68.

HUNG, N. B.; JAEWON, S.; LIM, O. A study of the scavenging process in a two-stroke free piston linear engine using cfd. *Energy Procedia*, Elsevier, v. 142, p. 1353–1360, 2017. doi:[10.1016/j.egypro.2017.12.519](https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.12.519). Citado na página 44.

JIA, B. *Analysis and control of a spark ignition free-piston engine generator*. Tese (Doutorado) — Newcastle University, 2016. Citado 13 vezes nas páginas 27, 28, 31, 33, 35, 36, 43, 44, 48, 65, 71, 75 e 76.

JIA, B. et al. A study and comparison of frictional losses in free-piston engine and crankshaft engines. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 140, p. 217–224, 2018. doi:<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.05.018>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 44.

- JIA, B. et al. Development and validation of a free-piston engine generator numerical model. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 91, p. 333–341, 2015. doi:[10.1016/j.enconman.2014.11.054](https://doi.org/10.1016/j.enconman.2014.11.054). Citado 2 vezes nas páginas 11 e 62.
- JOHNSON, T. A.; LEICK, M. T.; MOSES, R. W. Experimental evaluation of the free piston engine—linear alternator (fpla). *Sandia National Laboratories: Albuquerque, NM, USA*, 2015. doi:[10.4271/2016-01-0677](https://doi.org/10.4271/2016-01-0677). Citado na página 36.
- KOSAKA, H. et al. *Development of free piston engine linear generator system part 1-investigation of fundamental characteristics*. [S.l.], 2014. doi:. Citado na página 43.
- LEICK, M. T.; MOSES, R. W. *Experimental Evaluation of the Free Piston Engine-Linear Alternator (FPLA)*. [S.l.], 2015. doi:[10.2172/1177159](https://doi.org/10.2172/1177159). Citado na página 43.
- MIKALSEN, R. An investigation into the free-piston engine concept and its potential for high efficiency and low emissions power generation. Newcastle University, 2008. Citado 15 vezes nas páginas 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 48, 64, 65, 90, 91, 96 e 97.
- MIKALSEN, R.; JONES, E.; ROSKILLY, A. Predictive piston motion control in a free-piston internal combustion engine. *Applied Energy*, Elsevier, v. 87, n. 5, p. 1722–1728, 2010. doi:[10.1016/j.apenergy.2009.11.005](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2009.11.005). Citado na página 44.
- MIKALSEN, R.; ROSKILLY, A. The control of a free-piston engine generator. part 1: Fundamental analyses. *Applied Energy*, Elsevier, v. 87, n. 4, p. 1273–1280, 2010. doi:[10.1016/j.apenergy.2009.06.036](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2009.06.036). Citado na página 44.
- MIKALSEN, R.; ROSKILLY, A. The control of a free-piston engine generator. part 2: Engine dynamics and piston motion control. *Applied Energy*, Elsevier, v. 87, n. 4, p. 1281–1287, 2010. doi:[10.1016/j.apenergy.2009.06.035](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2009.06.035). Citado na página 44.
- MIKALSEN, R.; ROSKILLY, A. P. A review of free-piston engine history and applications. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 27, n. 14-15, p. 2339–2352, 2007. doi:[10.1016/j.applthermaleng.2007.03.015](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2007.03.015). Citado 8 vezes nas páginas 11, 27, 29, 33, 34, 35, 36 e 37.
- MIKALSEN, R.; ROSKILLY, A. P. The design and simulation of a two-stroke free-piston compression ignition engine for electrical power generation. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 28, n. 5-6, p. 589–600, 2008. doi:[10.1016/j.applthermaleng.2007.04.009](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2007.04.009). Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.
- NANDKUMAR, S. Two-stroke linear engine. 1998. Citado na página 43.
- PETREANU, S. Conceptual analysis of a four-stroke linear engine. 2001. Citado na página 43.
- VYSOKÝ, O. Linear combustion engine as main energy unit for hybrid vehicles. *Proceedings of Transtec Prague*, p. 236–244, 2007. Citado na página 43.
- XIAO, J.; LI, Q.; HUANG, Z. Motion characteristic of a free piston linear engine. *Applied energy*, Elsevier, v. 87, n. 4, p. 1288–1294, 2010. doi:[10.1016/j.apenergy.2009.07.005](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2009.07.005). Citado na página 27.

XU, Z.; CHANG, S. Prototype testing and analysis of a novel internal combustion linear generator integrated power system. *Applied Energy*, Elsevier, v. 87, n. 4, p. 1342–1348, 2010. doi:[10.1016/j.apenergy.2009.08.027](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2009.08.027). Citado na página 43.

YAN, L. et al. *Electromagnetic linear machines with dual Halbach array: design and analysis*. [S.l.]: Springer, 2016. doi:[10.1007/978-981-10-2309-5](https://doi.org/10.1007/978-981-10-2309-5). Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 50.

YUAN, C. et al. Combustion characteristics analysis of a free-piston engine generator coupling with dynamic and scavenging. *Energy*, Elsevier, v. 102, p. 637–649, 2016. doi:[10.1016/j.energy.2016.02.131](https://doi.org/10.1016/j.energy.2016.02.131). Citado na página 44.

YUAN, C. et al. Effect of hydrogen addition on the combustion and emission of a diesel free-piston engine. *International Journal of Hydrogen Energy*, Elsevier, 2018. doi:[10.1016/j.ijhydene.2018.05.038](https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.05.038). Citado na página 25.

ZOU, H. et al. Experimental investigation and performance analysis of a direct-driven linear generator. *Energy Procedia*, Elsevier, v. 142, p. 284–290, 2017. doi:[10.1016/j.egypro.2017.12.045](https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.12.045). Citado na página 25.

Apêndices

APÊNDICE A – Formulação das matrizes de topologia e vetor gerador de campo (Método dos Subdomínios)

Descreve-se de maneira resumida o equacionamento utilizado na aplicação escolhido neste trabalho para estimar a distribuição do campo magnético \vec{B} no interior do gerador. Considera-se um gerador linear de ímãs permanentes com topologia tubular, com magnetização radial, circuito trifásico e polos salientes. A Figura 55 ilustra a topologia mencionada. A Figura 56 ilustra a divisão de regiões utilizada neste trabalho.

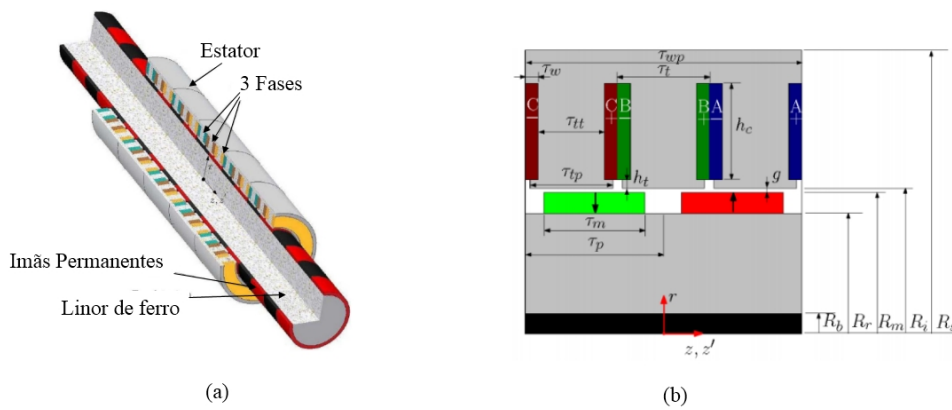


Figura 55 – (a) Topologia do gerador linear. (b) Dimensões de um trecho ativo. Adaptado de Gysen et al. (2008)

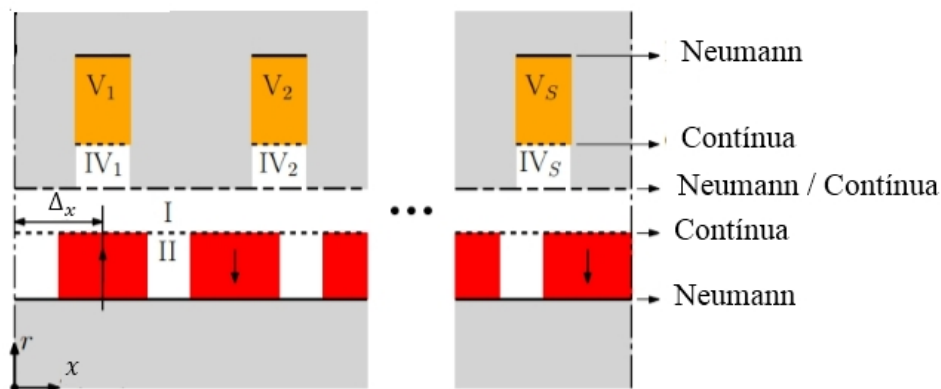


Figura 56 – Divisão em regiões e condições de contorno aplicadas. Adaptado de Gysen (2011)

Considera-se que os ímãs sejam dispostos de tal forma que um vetor de magnetização periódico seja formado, conforme indicado pela Figura 57.

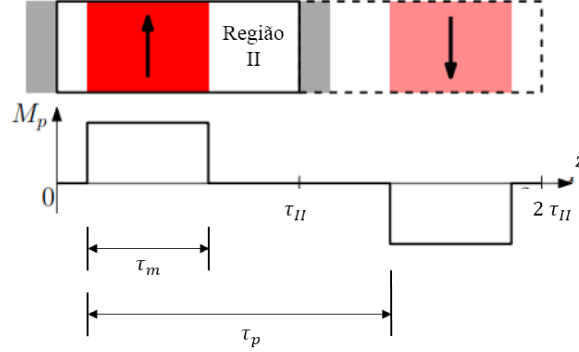


Figura 57 – Vetor de magnetização resultante dos ímãs permanentes. Adaptado de Gysen (2011).

A Equação A.1 descreve o vetor de magnetização dentro do intervalo periódico $0 \leq z \leq 2 \cdot \tau_p$.

$$M_r^{II}(z) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq z < (\tau_p - \tau_m)/2 \\ B_{rem}/\mu_0 & , (\tau_p - \tau_m)/2 \leq z < (\tau_p + \tau_m)/2 \\ 0 & , (\tau_p + \tau_m)/2 \leq z < (3\tau_p - \tau_m)/2 \\ -B_{rem}/\mu_0 & , (3\tau_p - \tau_m)/2 \leq z < 2\tau_p \end{cases} \quad (A.1)$$

Onde,

B_{rem} é a constante de campo remanescente;

μ_0 é a permeabilidade magnética do ar.

Nota-se que o sobrescrito utilizado na notação refere-se à numeração da região, conforme indicado na Figura 56, ao passo que o subscrito indica a direção do campo descrito. Esse padrão de notação é utilizado para todas as variáveis dependentes da região avaliada e da direção descrita.

O vetor de magnetização $M_r^{II}(z)$ também pode ser descrito por meio de séries de Fourier conforme indicado na Equação A.2.

$$M_r^{II}(z) = M_{r0}^{II} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(M_{rsn}^{II} \text{sen}(w_n^{II} z) + M_{rcn}^{II} \text{cos}(w_n^{II} z) \right) \quad (A.2)$$

Onde w_n^k é a n ésima frequência especial da região k , calculada segundo a Equação A.3

$$w_n^k = \frac{n\pi}{\tau_k} \quad (A.3)$$

Onde τ_k é o passo periódico da região descrita. As constantes que compõem a série descrita na Equação A.2 são calculadas pelas Equações A.4 a A.6.

$$M_{r0}^{II} = \frac{1}{2\tau_p} \int_0^{2\tau_p} M_r^{II}(z) \text{sen}(w_n^{II} z) dz \quad (\text{A.4})$$

$$M_{rsn}^{II} = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{2\tau_p} M_r^{II}(z) \text{sen}(w_n^{II} z) dz \quad (\text{A.5})$$

$$M_{rcn}^{II} = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{2\tau_p} M_r^{II}(z) \cos(w_n^{II} z) dz \quad (\text{A.6})$$

O vetor de densidade de corrente \vec{J} é descrito de forma análoga ao vetor \vec{M} , porém com direção paralela à coordenada θ , conforme indicado nas Equações A.7 e A.8.

$$\vec{J}^k = J_\theta^k(z) \vec{i}_\theta \quad (\text{A.7})$$

$$J_\theta^{II}(z) = J_{\theta 0}^{II} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(J_{\theta sn}^{II} \text{sen}(w_n^{II} z) + J_{\theta cn}^{II} \cos(w_n^{II} z) \right) \quad (\text{A.8})$$

O vetor dos N_k harmônicos espaciais truncados para cada região k é definido pela Equação A.9.

$$w^k = [w_1^k, w_2^k, \dots, w_{N_k}^k] \quad (\text{A.9})$$

O vetor das constantes a serem calculadas é composto por diversas variáveis, como indicado na Equação A.10.

$$\{X\} = \begin{bmatrix} a^I & b^I & c^I & d^I & a^{II} & b^{II} & c^{II} & d^{II} & a^{IV} & b^{IV} & B_0^{IV} & a_n^V & b_n^V & B_0^V \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10})$$

A Equação A.11 define a matrix de correlação $\epsilon_s^{k,j}$.

$$\epsilon_s^{k,j} = \begin{bmatrix} \epsilon_s^{k,j1} & \epsilon_s^{k,j2} & \dots & \epsilon_s^{k,jv} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.11})$$

Onde cada matriz $\epsilon_s^{k,jv}$ é definida conforme indicado na Equação A.12.

$$\epsilon_s^{k,j} = \begin{bmatrix} \epsilon_s^{k,jv}(1, 1) & \epsilon_s^{k,jv}(1, 2) & \dots & \epsilon_s^{k,jv}(1, N_k) \\ \epsilon_s^{k,jv}(2, 1) & \epsilon_s^{k,jv}(2, 2) & \dots & \epsilon_s^{k,jv}(2, N_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_s^{k,jv}(N_j, 1) & \epsilon_s^{k,jv}(N_j, 2) & \dots & \epsilon_s^{k,jv}(N_j, N_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Os termos da Equação A.12 são dados pelas Equações A.13 e A.14.

$$\epsilon_s^{k,jv}(m, n) = \frac{2}{\tau_{jv}} \int_0^{\tau_{jv}} \text{sen}(w_n z^k) \text{sen}(w_m^{jv} z^{jv}) dz^{jv} \quad (\text{A.13})$$

$$\epsilon_c^{k,jv}(m, n) = \frac{2}{\tau_{jv}} \int_0^{\tau_{jv}} \cos(w_n z^k) \text{sen}(w_m^{jv} z^{jv}) dz^{jv} \quad (\text{A.14})$$

A Equação A.15 define a matrix de correlação $\kappa_s^{k,j}$.

$$\kappa_c^{k,j} = \begin{bmatrix} \kappa_c^{k,j1} & \kappa_c^{k,j2} & \dots & \kappa_c^{k,jv} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.15})$$

Onde cada matriz $\kappa_c^{k,jv}$ é definida conforme indicado na Equação A.16.

$$\kappa_c^{k,j} = \begin{bmatrix} \kappa_c^{k,jv}(1, 1) & \kappa_c^{k,jv}(1, 2) & \dots & \kappa_c^{k,jv}(1, N_k) \\ \kappa_c^{k,jv}(2, 1) & \kappa_c^{k,jv}(2, 2) & \dots & \kappa_c^{k,jv}(2, N_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_c^{k,jv}(N_j, 1) & \kappa_c^{k,jv}(N_j, 2) & \dots & \kappa_c^{k,jv}(N_j, N_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Os termos da Equação A.16 são dados pelas Equações A.17 e A.18.

$$\kappa_s^{k,jv}(n, m) = \frac{1}{\tau_k} \int_{\Delta^{jv}-\Delta^k}^{\Delta^{jv}-\Delta^k+\tau_{jv}} \text{sen}(w_m^{jv} z^{jv}) \text{sen}(w_n^k z^k) dz^k \quad (\text{A.17})$$

$$\kappa_c^{k,jv}(n, m) = \frac{1}{\tau_k} \int_{\Delta^{jv}-\Delta^k}^{\Delta^{jv}-\Delta^k+\tau_{jv}} \cos(w_m^{jv} z^{jv}) \text{sen}(w_n^k z^k) dz^k \quad (\text{A.18})$$

A matrix de correlação $\zeta_c^{k,jv}$ é encontrada de modo similar. Os termos que compõem a matrix são dados pelas Equações A.19 e A.20.

$$\zeta_s^{k,jv}(n, m) = \frac{1}{\tau_k} \int_{\Delta^{jv}-\Delta^k}^{\Delta^{jv}-\Delta^k+\tau_{jv}} \text{sen}(w_m^{jv} z^{jv}) \cos(w_n^k z^k) dz^k \quad (\text{A.19})$$

$$\zeta_c^{k,jv}(n, m) = \frac{1}{\tau_k} \int_{\Delta^{jv}-\Delta^k}^{\Delta^{jv}-\Delta^k+\tau_{jv}} \cos(w_m^{jv} z^{jv}) \cos(w_n^k z^k) dz^k \quad (\text{A.20})$$

A matrix de correlação $\kappa_0^{k,j}$ é definida como indicado na Equação A.21

$$\kappa_0^{k,j} = \begin{bmatrix} \kappa_0^{k,j1}(1) & \kappa_0^{k,j2}(2) & \dots & \kappa_0^{k,jv}(1) \\ \kappa_0^{k,j1}(2) & \kappa_0^{k,j2}(2) & \dots & \kappa_0^{k,jv}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_0^{k,j1}(N_k) & \kappa_0^{k,j2}(N_k) & \dots & \kappa_0^{k,jv}(N_k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Os termos da Equação A.21 são definidos pela Equação A.22.

$$\kappa_0^{k,jv}(n) = \frac{1}{\tau_k} \int_{\Delta^{jv}-\Delta^k}^{\Delta^{jv}-\Delta^k+\tau_{jv}} \text{sen}(w_n^k z^k) dz^k \quad (\text{A.22})$$

A matriz de correlação $\zeta_0^{k,jv}$ é encontrada de modo similar. Os termos que compõem a matriz é dados pela Equação A.23.

$$\kappa_0^{k,jv}(n) = \frac{1}{\tau_k} \int_{\Delta^{jv}-\Delta^k}^{\Delta^{jv}-\Delta^k+\tau_{jv}} \cos(w_n^k z^k) dz^k \quad (\text{A.23})$$

O vetor de termos geradores de campo da região II G_{rs}^{II} é descrito conforme mostrado na Equação A.24.

$$G_{rs}^{II} = \begin{bmatrix} G_{rs1}^{II}(Rm) & G_{rs2}^{II}(Rm) & \dots & G_{rsN}^{II}(Rm) \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.24})$$

Os termos que compõem o vetor da Equação A.24 são dados pela Equação A.25.

$$G_{rsn}(r)^{II} = \left(\mu_0 M_{rsn}^{II} + \mu \frac{J_{\theta cn}^{II}}{wn^{II}} \right) F_{rn}^{II}(r) \quad (\text{A.25})$$

Os termos que compõem a Equação A.25 estão disponíveis nas Equações A.5 a A.26.

$$F_{rn}(r)^{II} = \mathbf{K}_1(w_n^{II} r) \int_{wn^{II} r_0}^{wn^{II} r} r' \mathbf{I}_1(r') dr' - \mathbf{I}_1(w_n^{II} r) \int_{wn^{II} r_0}^{wn^{II} r} r' \mathbf{K}_1(r') dr' \quad (\text{A.26})$$

Os vetores G_{rc}^{II} , G_{zc}^{II} , G_{zc}^{II} são definidos de modo similar, porém com os termos das Equações A.27 a A.30.

$$G_{rcn}(r)^{II} = \left(\mu_0 M_{rcn}^{II} - \mu \frac{J_{\theta cn}^{II}}{wn^{II}} \right) F_{rn}^{II}(r) \quad (\text{A.27})$$

$$G_{zsn}(r)^{II} = \left(\mu_0 M_{rcn}^{II} - \mu \frac{J_{\theta sn}^{II}}{wn^{II}} \right) F_{zn}^{II}(r) \quad (\text{A.28})$$

$$G_{zcn}(r)^{II} = \left(\mu_0 M_{rsn}^{II} + \mu \frac{J_{\theta cn}^{II}}{wn^{II}} \right) F_{zn}^{II}(r) \quad (\text{A.29})$$

$$F_{zn}(r)^{II} = \mathbf{K}_0(w_n^{II} r) \int_{wn^{II} r_0}^{wn^{II} r} r' \mathbf{I}_1(r') dr' + \mathbf{I}_0(w_n^{II} r) \int_{wn^{II} r_0}^{wn^{II} r} r' \mathbf{K}_1(r') dr' \quad (\text{A.30})$$

O vetor de densidade de corrente para a região IV e V é definido pela Equação A.31.

$$J_{\theta 0}^j = \begin{bmatrix} J_{\theta 0}^{j1} & J_{\theta 0}^{j2} & \dots & J_{\theta 0}^{jS} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.31})$$

Para simplificar as notações na construção da matriz topológica, as seguintes matrizes são definidas.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \text{diag}(\mathbf{I}_0(w^I R_r)), & \mathbf{C}_2 &= \text{diag}(\mathbf{K}_0(w^I R_r)), \\ \mathbf{C}_3 &= \text{diag}(\mathbf{I}_1(w^I R_r)), & \mathbf{C}_4 &= \text{diag}(\mathbf{K}_1(w^I R_r)), \\ \mathbf{C}_5 &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_0(w^{II} R_r), P)), & \mathbf{C}_6 &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_0(w^{II} R_r), P)), \\ \mathbf{C}_7 &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_1(w^{II} R_r), P)), & \mathbf{C}_8 &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_1(w^{II} R_r), P)), \\ \mathbf{C}_9 &= \text{diag}(\mathbf{I}_0(w^I R_m)), & \mathbf{C}_{10} &= \text{diag}(\mathbf{K}_0(w^I R_m)), \\ \mathbf{C}_{11} &= \text{diag}(\mathbf{I}_1(w^I R_m)), & \mathbf{C}_{12} &= \text{diag}(\mathbf{K}_1(w^I R_m)), \\ \mathbf{C}_{13} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_0(w^{II} R_m), P)), & \mathbf{C}_{14} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_0(w^{II} R_m), P)), \\ \mathbf{C}_{15} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_1(w^{II} R_m), P)), & \mathbf{C}_{16} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_1(w^{II} R_m), P)), \\ \mathbf{C}_{17} &= \text{diag}(\mathbf{I}_0(w^I R_i)), & \mathbf{C}_{18} &= \text{diag}(\mathbf{K}_0(w^I R_i)), \\ \mathbf{C}_{19} &= \text{diag}(\mathbf{I}_1(w^I R_i)), & \mathbf{C}_{20} &= \text{diag}(\mathbf{K}_1(w^I R_i)), \\ \mathbf{C}_{21} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_0(w^{IV} R_i), S)), & \mathbf{C}_{22} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_0(w^{IV} R_i), S)), \\ \mathbf{C}_{23} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_1(w^{IV} R_i), S)), & \mathbf{C}_{24} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_1(w^{IV} R_i), S)), \\ \mathbf{C}_{25} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_0(w^{IV} R_t), S)), & \mathbf{C}_{26} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_0(w^{IV} R_t), S)), \\ \mathbf{C}_{27} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_1(w^{IV} R_t), S)), & \mathbf{C}_{28} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_1(w^{IV} R_t), S)), \\ \mathbf{C}_{29} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_0(w^{IV} R_c), S)), & \mathbf{C}_{30} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_0(w^{IV} R_c), S)), \\ \mathbf{C}_{31} &= \text{diag}(U(\mathbf{I}_1(w^{IV} R_c), S)), & \mathbf{C}_{32} &= \text{diag}(U(\mathbf{K}_1(w^{IV} R_c), S)), \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Onde,

- \mathbf{I}_n é a função modificada de Bessel do tipo I e ordem n ;
- \mathbf{K}_n é a função modificada de Bessel do tipo K e ordem n ;
- P é o número de pólos magnéticos;
- S é o número de ranhuras por trecho ativo;
- $U(\mathbf{v}, P)$ é uma função de concatenação vertical de P vetores \mathbf{v} ;
- $\text{diag}(\mathbf{v})$ é uma função diagonalização do vetor \mathbf{v} .

A matriz topológica $[M]$ é apresentada na Equação A.33

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 & -C_2 & 0 & 0 \\ -C_{11} & -C_{12} & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & -C_{11} & -C_{12} \\ 0 & 0 & -\mu_r C_9 & \mu_r C_{10} & 0 & 0 & C_9 & -C_{10} \\ -\mu_r C_9 & \mu_r C_{10} & 0 & 0 & C_9 & -C_{10} & 0 & 0 \\ \epsilon_s^{I,IV} C_{19} & \epsilon_s^{I,IV} C_{20} & -\epsilon_c^{I,IV} C_{19} & -\epsilon_c^{I,IV} C_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{17} & -C_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{17} & -C_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ -C_{23} & -C_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ -\kappa_c^{I,IV} C_{21} & \kappa_c^{I,IV} C_{22} & -\kappa_0^{I,IV} & 0 & 0 & 0 & & \\ -\zeta_c^{I,IV} C_{21} & \zeta_c^{I,IV} C_{22} & -\zeta_0^{I,IV} & 0 & 0 & 0 & & \\ C_{27} & C_{28} & 0 & -C_{27} & -C_{28} & 0 & & \\ C_{25} & -C_{26} & 0 & -C_{25} & C_{26} & 0 & & \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & & \\ 0 & 0 & 0 & C_{29} & -C_{30} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & & \end{bmatrix} \quad (A.33)$$

O vetor dos termos geradores de campo $\{S\}$ é dada pela Equação [A.34](#).

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_{rs}^{II} \\ -G_{rc}^{II} \\ -G_{zs}^{II} \\ -G_{zc}^{II} \\ 0 \\ -\mu_0 R_i \kappa_0^{I,IV} J_{\theta 0}^{IV} \\ -\mu_0 R_i \zeta_0^{I,IV} J_{\theta 0}^{IV} \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0 R_t (J_{\theta 0}^{IV} - J_{\theta 0}^V) \\ 0 \\ \mu_0 J_{\theta 0}^V R_c \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$