

MON
621:534
M357e
TES/MEM

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ESTUDO TEÓRICO E NUMÉRICO DE ABSORVEDORES
DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES ATIVOS E ADAPTATIVOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Uberlândia por:

RODRIGO FRANÇA ALVES MARQUES

como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Mecânica

Aprovada por:

Prof. Dr. Domingos Alves Rade	(UFU - orientador)
Prof. Dr. José Francisco Ribeiro	(UFU)
Prof. Dr. Sérgio Frascino Müller de Almeida	(ITA)
Prof. Dr. Valder Steffen Jr.	(UFU)

SISBI/UFU



1000198670

05 de julho de 2000.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA

Av. João Naves de Ávila 2160 Campus Santa Mônica Uberlândia - MG 38408-100
Fone: 0XX342394149- FAX: 0XX342394282

ALUNO: RODRIGO FRANÇA ALVES MARQUES

NÚMERO DE MATRÍCULA: 5981609-8

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

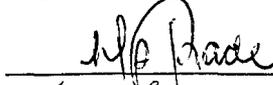
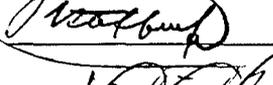
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

“Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos”.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

A Dissertação foi APROVADA em reunião pública, realizada no Anfiteatro da Biblioteca do Campus Santa Mônica, em 05 de julho de 2000, às 14:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Domingos Alves Rade, Prof. Dr.	UFU 
Sérgio Frascino Müller de Almeida, Prof. Dr.	ITA 
Valder Steffen Júnior, Prof. Dr.	UFU 
José Francisco Ribeiro, Prof. Dr.	UFU 

Uberlândia, 05 de julho de 2000.

A Deus. Por Ele tudo se
faz, sem Ele nada existe.

Agradecimentos

A Deus que nos dá vida, saúde e inteligência para realizarmos Seu projeto.

Ao Professor Domingos Alves Rade que, mais que um excelente orientador, é para mim um mentor e um grande amigo.

Aos Professores membros da banca examinadora pelas contribuições dadas ao trabalho.

À minha família pelo suporte moral e espiritual em todos os momentos.

Aos colegas de pós-graduação pela amizade e pelas contribuições ao trabalho.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo suporte financeiro.

Sumário

Simbologia	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
1 Introdução	1
2 Teoria Clássica dos ADVs Passivos	5
2.1 Introdução	5
2.2 ADV não Amortecido	5
2.3 ADV com Amortecimento Viscoso	10
2.4 Teoria Modal para o Projeto Ótimo de ADVs Amortecidos Aplicados a Sistemas Primários de Vários Graus de Liberdade	16
3 Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos	23
3.1 Introdução	23
3.2 Ressonador Defasado com Realimentação em Medidas Absolutas (RDMA)	24
3.3 Ressonador Defasado com Realimentação em Medidas Relativas (RDMR)	31
3.4 Ressonador Defasado com Amortecimento Introduzido pela Realimentação	33
3.5 Ressonador Defasado Aplicado a Sistemas Primários de Vários Graus de Liberdade	34
3.6 ADV Ativo com Realimentação em Deslocamento, Velocidade e Aceleração	36
3.7 ADV Ativo com Realimentação em Deslocamento, Velocidade e Aceleração Aplicado a Sistemas Primários de Vários Graus de Liberdade	39
3.8 ADV Ativo com Controle Ótimo	41
4 Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Adaptativos	45
4.1 Introdução	45

4.2	Materiais Inteligentes	47
4.2.1	Materiais piezelétricos	47
4.2.2	Materiais Eletrostritivos	48
4.2.3	Fluidos Eletro-reológicos	49
4.3	ADV tipo corda vibrante	51
4.4	ADV pendular	56
4.5	ADV tipo viga com atuadores piezelétricos	59
5	 Simulações Numéricas	63
5.1	Introdução	63
5.2	Simulações com Ressonador Defasado	63
5.2.1	Ressonador defasado sem amortecimento adicionado pela realimentação - Análise no domínio da frequência	63
5.2.2	Ressonador defasado sem amortecimento adicionado pela realimentação - Análise no domínio do tempo	67
5.2.3	Ressonador defasado com amortecimento adicionado pela realimentação	71
5.2.4	Ressonador defasado aplicado a sistemas primários de vários graus de liberdade	73
5.3	Simulações com ADV Ativo com Realimentação em Deslocamento e Velocidade	76
5.3.1	Análise no domínio da frequência	76
5.3.2	Análise no domínio do tempo	79
5.3.3	Aplicação do ADV ativo a sistemas primários de vários graus de liberdade	82
5.4	ADV ativo com controle ótimo	84
6	 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	91
	 Referências Bibliográficas	95
	 Apêndice I Critério de Estabilidade de Routh	99
	 Apêndice II Controle Ótimo Quadrático	103

Simbologia

1	Índice relativo ao sistema primário
2	Índice relativo ao sistema secundário (Absorvedor)
c	Constante de amortecimento
$\{f\}$	Vetor de força
k	Constante de rigidez
m	Massa
t	Tempo
$\{u\}$	Vetor de força de controle
$\{x\}$	Vetor de deslocamento, Vetor de estado
$\{\dot{x}\}$	Vetor de velocidade
$\{\ddot{x}\}$	Vetor de aceleração
$[C]$	Matriz de amortecimento
$[K]$	Matriz de rigidez
$[M]$	Matriz de massa
T	Energia cinética
V	Energia potencial
$[Y]$	Matriz modal
μ	Razão de massas
ω	Frequência natural
Ω	Frequência de excitação
ζ	Fator de amortecimento

Marques, R.F.A., 2000, "Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

Os Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADVs) vêm sendo largamente utilizados para a atenuação de vibrações estruturais, com aplicações nas engenharias mecânica, civil, naval e aeroespacial. Os ADVs mais comumente usados são os passivos, compostos por elementos de parâmetros concentrados de inércia, rigidez e amortecimento. Classicamente, os ADVs passivos são projetados de forma que sua frequência natural seja sintonizada para a frequência de excitação, admitida fixa. Entretanto, a banda de operação dos ADVs passivos é relativamente estreita, o que inviabiliza a sua aplicação para casos em que a frequência de excitação passa a variar. Como forma de contornar esta limitação, recentemente foram desenvolvidas as concepções de ADVs ativos e adaptativos, que têm capacidade de sintonização em bandas frequenciais mais largas. Os ADVs ativos são aqueles em que um atuador, colocado paralelamente aos elementos passivos do ADV, exerce uma força de controle que permite modificar sua sintonização. Por ADVs adaptativos entendem-se aqueles cujos parâmetros físicos de inércia, rigidez e amortecimento podem ser variados, de forma controlada proporcionando a sintonização desejada. Neste trabalho são estudadas três configurações de ADVs ativos e outras três de ADVs adaptativos. São elas: a) o ADV ativo com realimentação do sinal de deslocamento da massa do ADV, defasado no tempo (ressonador defasado); b) uma nova configuração proposta de ADV ativo com realimentação dos sinais de deslocamento, velocidade e aceleração relativos; c) o ADV ativo com controle ótimo; d) o ADV adaptativo tipo corda vibrante; e) o ADV adaptativo pendular; f) o ADV adaptativo tipo viga com atuadores piezelétricos. Neste estudo se incluem o desenvolvimento teórico e as simulações numéricas no domínio da frequência e do tempo, realizadas com o objetivo de avaliar as características operacionais e o desempenho das configurações estudadas.

Palavras Chave: Controle de vibrações, Absorvedores Dinâmicos de Vibrações, Absorvedores ativos, Absorvedores adaptativos, Controle ativo.

Marques, R.F.A., 2000, "Theoretical and Numerical Analysis of Active and Adaptive Dynamic Vibration Absorbers", M.Sc. Dissertation, Federal University of Uberlandia, MG.

Abstract

Dynamic Vibration Absorbers (DVAs) have been used to attenuate vibrations in various types of mechanical systems. In its simplest form, a DVA is formed by an association of passive elements (inertia, stiffness and damping). The values of these parameters are selected so as to tune the DVA to a given value of the excitation frequency, assumed to be fixed. As a result, the attenuation capability of a passive DVA significantly decreases as the excitation frequency deviates from the nominal tuning frequency. To avoid this drawback, active and adaptive DVAs have been extensively studied lately, in an attempt to achieve larger effective bandwidths and self tuning capability. Active DVAs contain, besides the passive elements, an actuator which applies a control force determined by an appropriate control law. Adaptive DVAs are understood as those constructed in such a way that the values of their physical parameters can be adjusted according to well-defined laws. In this work, some configurations of active and adaptive DVAs are assessed, namely: a) an active DVA using as feedback signal the time-delayed displacement response of the reactive mass (delayed resonator); b) a novel active DVA using a control law in which the control force is expressed as a linear combination of the displacement, velocity and acceleration of the reactive mass, relative to the primary mass; c) an active DVA exploring linear quadratic optimal control theory; d) a vibrating string-type adaptive DVA; e) a pendulum-type adaptive DVA; f) an adaptive DVA formed from a beam with piezoelectric patches. For each configuration the theoretical foundations are first developed. Then, numerical applications are presented to assess their main features and performance.

Keywords: Vibration, Dynamic Vibration Absorbers, Active absorbers, Adaptive absorbers.

Capítulo 1

Introdução

As estruturas de construção civil, máquinas e equipamentos industriais estão freqüentemente sujeitos a vibrações mecânicas indesejáveis que podem comprometer seu correto funcionamento e sua integridade, ou ainda causar desconforto a operadores e usuários. Diante deste problema surge a necessidade de controlar os níveis de vibração estrutural, de modo a assegurar condições satisfatórias de operação, segurança e conforto.

Existem hoje várias estratégias de atenuação de vibrações de sistemas mecânicos que utilizam desde técnicas simples baseadas na introdução de materiais amortecedores passivos, modificação e otimização do projeto estrutural, até o uso de sofisticados sistemas de controle ativo em malha fechada. Neste contexto, o emprego de absorvedores dinâmicos de vibrações (ADVs), cuja invenção é devida a Frahm (1911), tem-se revelado uma estratégia eficiente e econômica. Por esta razão, os ADVs têm sido objeto da atenção de engenheiros e pesquisadores, tanto no âmbito acadêmico quanto no industrial.

Em sua forma mais simples, um ADV é um dispositivo de parâmetros concentrados de massa, rigidez e amortecimento que, uma vez acoplado à estrutura primária, cujas vibrações deseja-se atenuar, é capaz de absorver a energia vibratória no ponto de conexão. Conforme mostrado no estudo realizado por Cunha Jr. (1999), configurações mais complexas de ADVs podem ser implementadas, incluindo os absorvedores múltiplos e os absorvedores constituídos por elementos estruturais contínuos.

O projeto clássico de um ADV puramente passivo, que conduz à escolha dos valores dos parâmetros de inércia, amortecimento e rigidez, é baseado na sintonização de sua freqüência natural à freqüência de excitação harmônica cujo valor é admitido ser fixo. Embora os ADVs passivos apresentem as vantagens de não requerer energia e não causar instabilidade, é largamente reconhecido que estes dispositivos têm sua aplicabilidade limitada na medida em que sua eficiência é reduzida quando a freqüência da excitação é variada, mesmo que ligeiramente.

Duas formas principais de se contornar esta limitação vêm sendo exploradas. A primeira, proposta originalmente por Den Hartog (1956), consiste no projeto ótimo de ADVs passivos, e visa ampliar a banda de frequências operacional do ADV. Recentemente, metodologias de projeto ótimo de ADVs de parâmetros concentrados e contínuos, baseadas em procedimentos numéricos de otimização, foram propostas por Rade e Steffen Jr. (1999) e Cunha Jr. (1999).

A segunda forma consiste no desenvolvimento de ADVs adaptativos e de ADVs ativos.

Os ADVs adaptativos são aqueles cujos parâmetros físicos de massa, rigidez e amortecimento podem ser ajustados, conferindo aos dispositivos a capacidade de sintonização em uma gama maior de frequências. Neste contexto, os recentes avanços tecnológicos obtidos na produção dos chamados *materiais inteligentes* (materiais piezelétricos, materiais com memória de forma, fluidos eletro-reológicos e magneto-reológicos) oferecem amplas possibilidades para a proposição de novas configurações de ADVs adaptativos. Por outro lado, os ADVs ativos dispõem de um elemento ativo (atuador) colocado paralelamente aos elementos passivos, sendo a força exercida pelo atuador calculada através de uma estratégia de controle previamente estabelecida. Uma revisão de algumas das principais contribuições à teoria e prática dos ADVs passivos, adaptativos e ativos é apresentada por Sun *et al.* (1995).

No que diz respeito aos ADVs ativos, Stephens *et al.* (1991) propõem uma configuração cujo atuador é realimentado por uma combinação dos sinais de velocidade e aceleração absolutas do sistema primário. Naquele trabalho estuda-se a estabilidade do sistema de controle, estabelecem-se as equações para definição da condição ótima de operação, e curvas de desempenho do ADV são obtidas numericamente em função da razão de massas para vários valores dos ganhos de realimentação. No entanto, observa-se que o tipo de realimentação adotado não possibilita a sintonização do ADV para uma frequência de excitação qualquer.

Olgac e Holm-Hansen (1995) propõem um novo conceito de ADV ativo denominado Ressonador Defasado (Delayed Resonator), que usa um atuador realimentado com o sinal de deslocamento da massa reativa defasado no tempo. Mais tarde, Olgac e Hosek (1997), iriam expandir o conceito do ressonador defasado com a utilização de medidas relativas de posição. Estes se mostraram eficientes na atenuação de vibrações, com a vantagem de terem uma faixa de estabilidade teoricamente semi-infinita. Contudo, a análise de estabilidade e de desempenho do ressonador defasado é dificultada pelo fato de as funções de transferência no domínio de Laplace envolverem expressões transcendentais.

No campo dos ADVs adaptativos, Seto e Yamanouch (1978) apresentam um trabalho que utiliza correntes de Eddy (correntes parasitas ou de turbilhonamento) para variação de amortecimento do absorvedor. Tanaka e Kishimura (1992) apresentam também um ADV de rigidez variável para absorção de impactos, e Yang *et al.* (1999) apresentam um ADV adaptativo com variação de rigidez para controle de vibrações de prédios sob excitação sísmica. Outras obras são citadas por Sun *et al.* (1995) que utilizam configurações com molas de lâminas e molas helicoidais para variação de rigidez, e fluidos eletro-reológicos e magneto-reológicos para variação de amortecimento.

Neste trabalho é feito um estudo de algumas configurações de ADVs ativos encontrados na literatura e outras configurações são propostas, com diferentes tipos de realimentação, explorando-se também várias estratégias de controle. Propõem-se ainda três configurações de ADVs adaptativos, sendo um ADV tipo corda vibrante com massa concentrada, com tração e posição da massa reguláveis, um ADV pendular com ajuste de rigidez e de comprimento do pêndulo, e um ADV tipo viga bi-engastada com atuadores piezelétricos.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é feita uma revisão da teoria clássica de ADVs e do método de otimização de Den Hartog, onde serão apresentados os conceitos fundamentais a serem explorados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3 são apresentadas as formulações pertinentes aos ADVs ativos considerados, quando também se insere uma análise e discussão acerca da estabilidade dos sistemas para cada configuração.

O Capítulo 4 traz as configurações propostas de ADVs adaptativos, com a obtenção das equações de movimento e das leis que dão a sintonização do ADV de acordo com a variação dos parâmetros adaptativos.

No Capítulo 5 são apresentadas simulações numéricas realizadas com ADVs ativos para ilustração da teoria e comprovação do desempenho, juntamente com a análise dos resultados.

Por fim, o Capítulo 6 contém as conclusões gerais do trabalho e propostas para direcionamento futuro de trabalhos nesta área.

Capítulo 2

Teoria Clássica dos ADVs Passivos

2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o princípio operacional e as técnicas de projeto de ADVs passivos. São considerados primeiramente os ADVs não amortecidos e amortecidos aplicados a sistemas primários de 1 grau de liberdade. Em seguida, adotando o procedimento proposto por Cunha Jr. (1999) a teoria clássica dos ADVs passivos é estendida ao caso de sistemas primários de vários graus de liberdade, mediante o desenvolvimento de uma formulação modal.

2.2 ADV não Amortecido

Seja um sistema vibratório primário não amortecido de um grau de liberdade (1 gdl), com massa m_1 e rigidez k_1 , sujeito a uma excitação harmônica de frequência Ω . Acopla-se a este um sistema vibratório secundário, também de 1 gdl, de massa m_2 e rigidez k_2 , que irá funcionar como um ADV, tal como mostrado na Figura 2.1(a).

Para o conjunto sistema primário+ADV, as equações do movimento podem ser expressas na forma matricial segundo:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.1)$$

onde:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

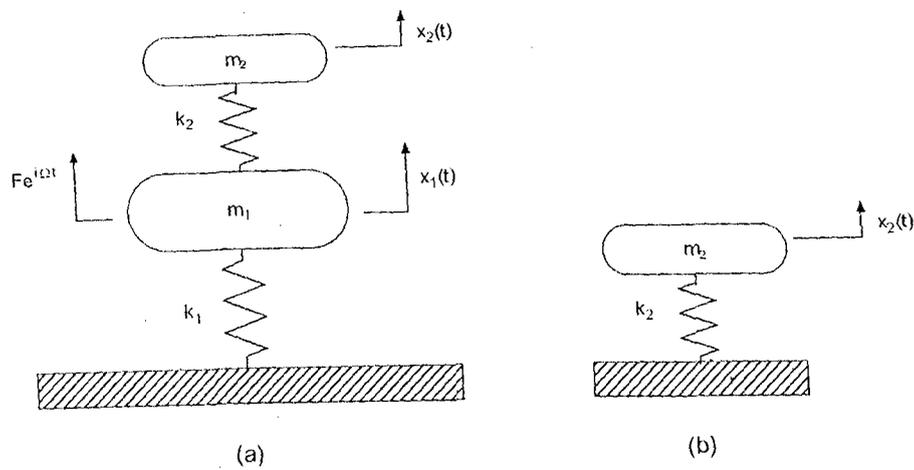


Figura 2.1- Sistema Primário+ADV não amortecido.

Passando as equações do movimento (2.1) para o domínio da frequência (correspondendo a regime harmônico permanente), são obtidas as seguintes expressões para as Funções de Resposta em Frequência (FRFs):

$$\frac{X_1}{F}(\Omega) = \frac{k_2 - \Omega^2 m_2}{(k_1 - \Omega^2 m_1)(k_2 - \Omega^2 m_2) - m_2 \Omega^2 k_2} \quad (2.2)$$

$$\frac{X_2}{F}(\Omega) = \frac{-k_2}{(k_1 - \Omega^2 m_1)(k_2 - \Omega^2 m_2) - m_2 \Omega^2 k_2} \quad (2.3)$$

Os valores absolutos destas FRFs representam, respectivamente, as amplitudes de vibração por unidade de força do sistema primário e da massa reativa (massa do ADV). Observa-se, na equação (2.2), que para $\Omega = \sqrt{k_2/m_2}$ a amplitude de vibração do sistema primário é nula qualquer que seja o valor de F . Portanto, para esta frequência, tem-se uma anti-ressonância na FRF do sistema primário. Nota-se ainda que este valor de frequência corresponde à frequência natural do ADV quando isolado do sistema primário, com sua base bloqueada, conforme ilustrado na Figura 2.1(b). Assim, o projeto do ADV passivo não amortecido consiste na escolha dos parâmetros m_2 e k_2 de modo que a sua frequência natural coincida com a frequência de excitação do sistema primário. Este processo é também chamado de sintonização do ADV passivo.

Convém expressar as amplitudes de vibração dadas por (2.2) e (2.3) em termos de parâmetros adimensionais:

$$\left| \frac{X_1}{l^2 k_1^{-1}}(\Omega) \right| = \sqrt{\frac{(g^2 - f^2)^2}{[\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (2.4)$$

$$\left| \frac{X_2}{l^2 k_1^{-1}}(\Omega) \right| = \frac{f^2}{\sqrt{[\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (2.5)$$

onde:

- $\mu = m_2/m_1$ (Razão de massas)
- $\omega_1^2 = k_1/m_1$ (Frequência natural do sistema principal)
- $\omega_2^2 = k_2/m_2$ (Frequência natural do ADV)
- $g = \Omega/\omega_1$ (Frequência de excitação normalizada)
- $f = \omega_2/\omega_1$ (Fator de sintonização)

A Figura 2.2 mostra como variam tipicamente as amplitudes de vibração do sistema primário sozinho e com a adição de um ADV passivo sintonizado para a frequência natural do sistema primário. A Figura 2.3 mostra a amplitude de vibração da massa do ADV passivo.

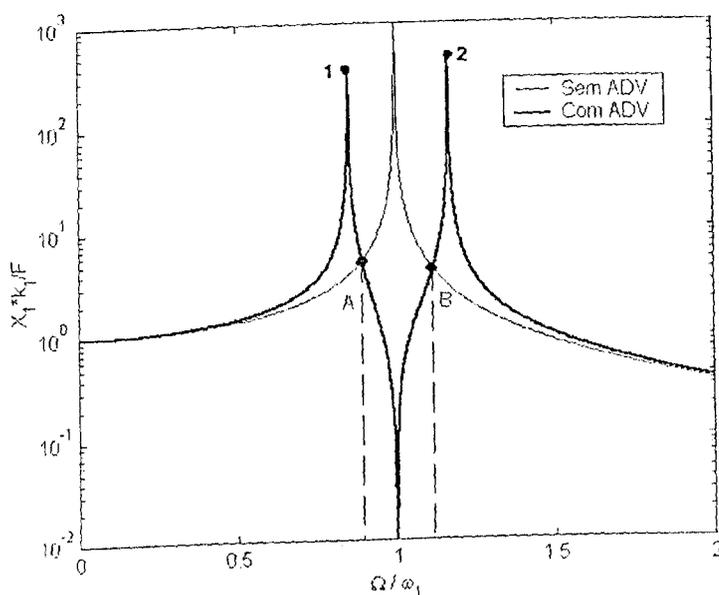


Figura 2.2- Amplitude de vibração da massa principal com e sem ADV para $f = 1$, $\mu = 0, 1$.

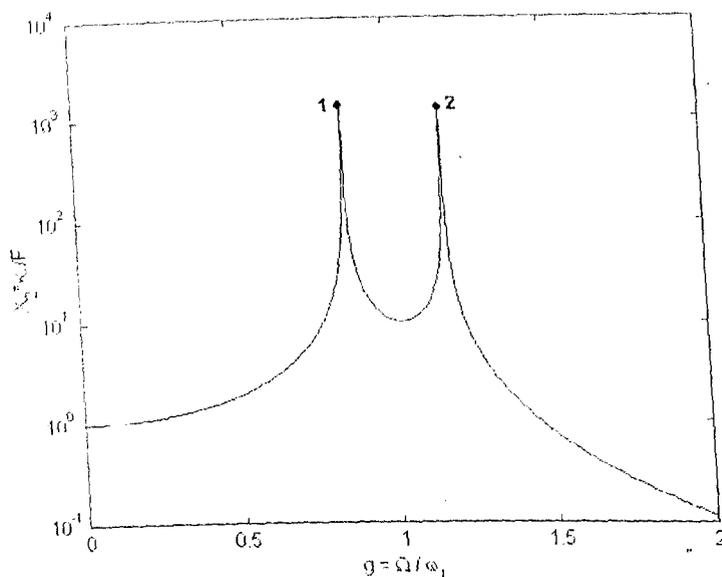


Figura 2.3- Amplitude de vibração da massa do ADV, $f = 1$, $\mu = 0,1$.

Observa-se que para o sistema primário sem ADV, quando a frequência de excitação é igual à frequência natural do sistema primário, o sistema entra em ressonância. Com a adição do ADV sintonizado para esta frequência, obtém-se em oposição, uma anti-ressonância. No entanto, verifica-se também o aparecimento, de ambos os lados da anti-ressonância, dos picos de ressonância correspondentes às frequências naturais do sistema acoplado de 2 gdl, designados por 1 e 2. Os valores destas frequências naturais são encontrados igualando-se a zero o denominador de (2.4) e (2.5):

$$\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2) = 0 \quad (2.6)$$

Particularizando para o caso em que o ADV está sintonizado à frequência natural do sistema primário ($f = 1$), tem-se:

$$g_{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\mu + 1)} \pm \sqrt{\mu} \right) \quad (2.7)$$

Está indicada, na Figura 2.2, a banda de freqüências, delimitada pelos pontos A e B, em que o ADV proporciona redução de amplitude, em comparação com a situação sem absorvedor. As abscissas dos pontos A e B podem ser encontradas igualando-se a equação (2.4) à expressão para a FRF do sistema primário sem ADV, dada por:

$$\left| \frac{X_1}{F k_1^{-1}}(\Omega) \right| = \sqrt{\frac{1}{(g-1)^2}}$$

A equação abaixo dá as expressões para as abscissas dos pontos A e B em função da razão de massas e do fator de sintonização:

$$g_{(B,A)} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{(2\mu + 4f^2 + 4 + 8f)} \pm \sqrt{(2\mu + 4f^2 + 4 - 8f)} \right) \quad (2.8)$$

Particularizando para $f = 1$:

$$g_{(B,A)} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{2\mu + 16} \pm \sqrt{2\mu} \right) \quad (2.9)$$

Na Figura 2.4 apresenta-se o gráfico que dá as duas freqüências naturais do sistema acoplado e define a banda operacional do ADV em função da razão de massas, de acordo com as equações (2.7) e (2.9).

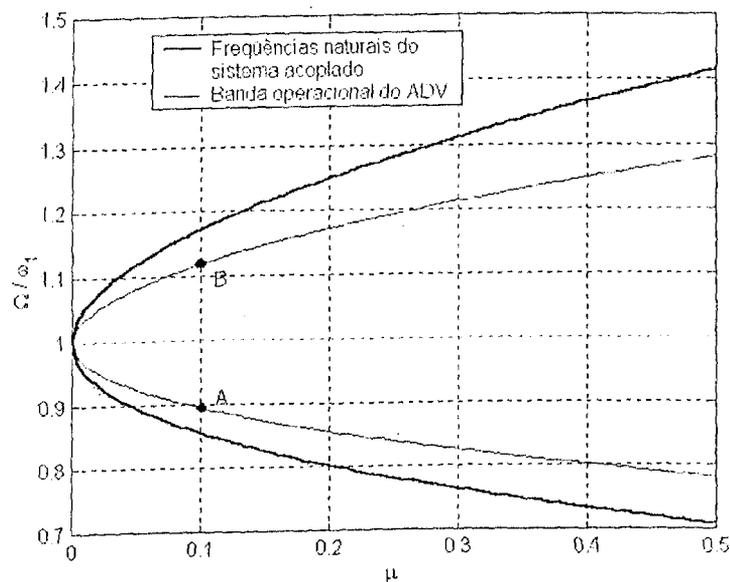


Figura 2.4- Freqüências naturais do sistema acoplado em função da razão de massas.

Neste ponto, as seguintes observações referentes ao projeto prático de ADVs não amortecidos devem ser feitas:

- Obviamente, tem-se o interesse de projetar um ADV com a menor massa possível. Contudo, a banda operacional do ADV é geralmente estreita, tendendo a diminuir com a redução da razão de massas, conforme mostra a Figura (2.4).
- Introduzindo $f = g = 1$ em (2.5) conclui-se que, nesta situação, a amplitude de vibração da massa secundária é dada por:

$$|X_2| = \frac{F}{k_1 \mu} \quad (2.10)$$

Observa-se, pois, que a amplitude de vibração da massa secundária será tanto maior quanto menor for a razão das massas. Deve ser levado em conta que o curso da massa secundária é limitado por considerações práticas de projeto, tal como a resistência à fadiga do elemento elástico do ADV.

Assim, é conveniente acrescentar ao ADV um elemento dissipador de energia (amortecedor) que permitirá uma ampliação da banda operacional e a redução das amplitudes de vibração da massa secundária. O caso de ADV com amortecimento viscoso é examinado na seção seguinte.

2.3 ADV com Amortecimento Viscoso

A Figura 2.5 ilustra um sistema primário não amortecido (m_1, k_1) ao qual é acoplado um ADV passivo amortecido (m_2, c_2, k_2). Para o sistema de 2 gdl resultante, as equações de movimento se escrevem:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.11)$$

onde:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

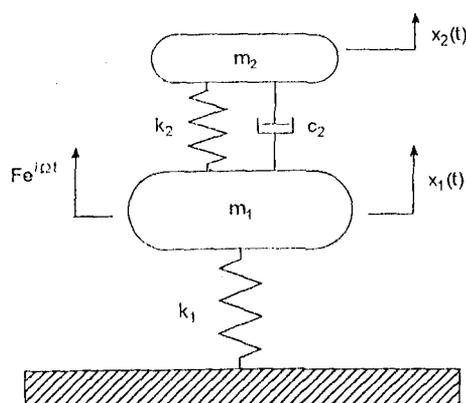


Figura 2.5- Sistema Primário+ADV amortecido.

As amplitudes de vibração em regime harmônico permanente escrevem-se em termos de parâmetros adimensionais, segundo:

$$\left| \frac{X_1}{F k_1^{-1}}(\Omega) \right| = \sqrt{\frac{(2\zeta g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (2.12)$$

$$\left| \frac{X_2}{F k_1^{-1}}(\Omega) \right| = \sqrt{\frac{(2\zeta g)^2 + (f^2)^2}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (2.13)$$

onde o fator de amortecimento ζ é assim definido:

$$\zeta = \frac{c_2}{2m_2\omega_1}$$

Aqui é importante destacar a influência do fator de sintonização f . De acordo com o que se observa na Figura 2.6, a sintonização influencia a amplitude e a posição dos picos de ressonância. Observa-se ainda que à medida que o valor de f aumenta há uma tendência de crescimento das amplitudes do primeiro pico de ressonância e a diminuição das amplitudes do segundo, o que quer dizer que deve haver um valor de sintonização para o qual as duas amplitudes se igualam.

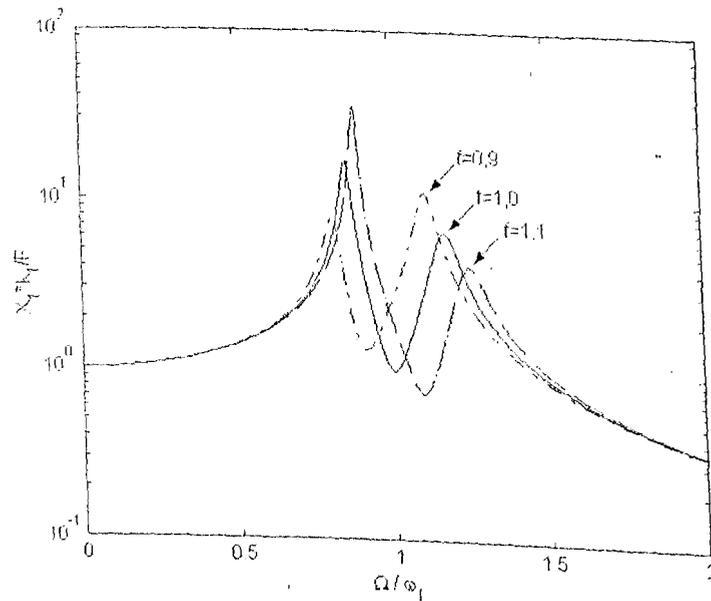


Figura 2.6- Influência de f sobre as amplitudes de vibração do sistema primário com ADV passivo amortecido, $\mu = 0,1$, $\zeta = 0,05$.

A Figura 2.7 mostra a influência do fator de amortecimento ζ . Observa-se, para uma sintonização fixa f , a presença de dois pontos P e Q, ditos pontos invariantes, pelos quais a curva de resposta necessariamente passa, independentemente do fator de amortecimento. É importante notar que o fator de amortecimento influencia no grau de achatamento da curva de resposta, e que quando o fator de amortecimento é muito grande, tendendo a um valor infinito, o comportamento do sistema é idêntico ao de um sistema de um grau de liberdade, de massa igual a $(m_1 + m_2)$, uma vez que as duas massas tornam-se virtualmente unidas pelo amortecedor. O comportamento observado sugere que valores ótimos dos parâmetros f e ζ possam ser determinados de modo a minimizar as amplitudes de vibração do sistema primário em uma longa banda em torno da sua frequência natural.

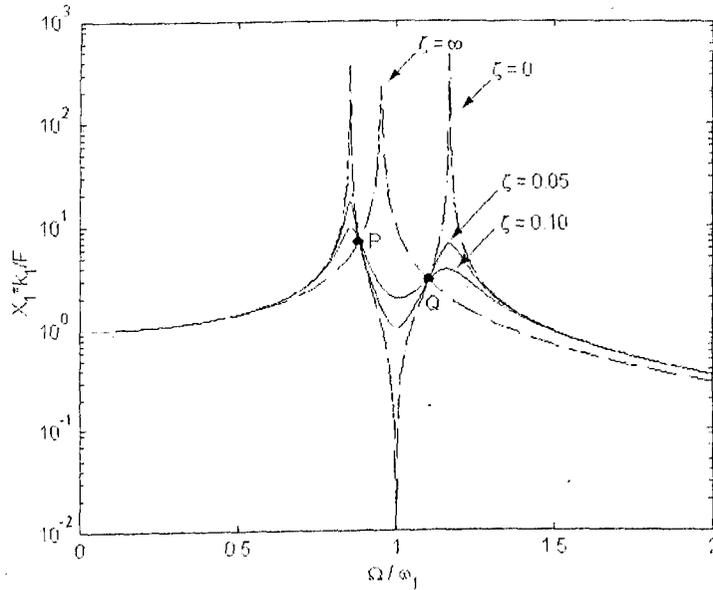


Figura 2.7- Influência de ζ sobre as amplitudes de vibração do sistema primário com ADV passivo amortecido, $\mu = 0, 1, f = 1$.

O projeto ótimo de ADVs passivos, tal como proposto por Den Hartog (1956), é baseado na determinação dos valores de f e ζ que fazem com que os pontos invariantes P e Q estejam a uma mesma altura e que o mais alto pico de amplitude passe por um deles. Este critério assegura que a curva de resposta em frequência da massa primária será a mais "plana" possível.

Inicialmente procuram-se os valores das abscissas para os pontos invariantes, isto é, os valores de g para os quais $\frac{X_1}{Fk_1^{-1}}$ é independente do fator de amortecimento ζ . Voltando à equação (2.12) nota-se que ela pode ser escrita na forma:

$$\frac{X_1}{Fk_1^{-1}} = \sqrt{\frac{A\zeta^2 + B}{C\zeta^2 + D}} \quad (2.14)$$

que é independente do amortecimento se $A/C = B/D$, ou seja:

$$\left(\frac{1}{g^2 - 1 + \mu g^2} \right)^2 = \left(\frac{g^2 - f^2}{\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)} \right)^2 \quad (2.15)$$

$$\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2) = \pm (g^2 - f^2)(g^2 - 1 + \mu g^2) \quad (2.16)$$

Tomando o sinal negativo chega-se à solução trivial:

$$g^2 = 0 \quad (2.17)$$

Realmente, em $g = 0$ a amplitude X_1 é independente do amortecimento, pois o movimento do sistema é tão lento que não há força de amortecimento. Por outro lado, tomando o sinal positivo em (2.16) chega-se à equação bi-quadrada:

$$g^4 - 2\frac{1+f^2+\mu f^2}{2+\mu}g^2 + \frac{2f^2}{2+\mu} = 0 \quad (2.18)$$

cujas soluções positivas dão as abscissas dos pontos invariantes P e Q . É importante notar que os valores destas abscissas dependem dos valores de μ e f .

O próximo passo é obter a sintonização f que faz com que os pontos P e Q tenham a mesma altura. Para isto não é necessário resolver a equação (2.18), substituir os valores na equação (2.12) e igualar as duas expressões, o que seria um processo muito trabalhoso. Basta lembrar que para os pontos P e Q a amplitude de vibração não depende do amortecimento, de modo que se pode selecionar um valor para ζ que torne a equação (2.12) a mais simples possível. Fazendo então $\zeta = \infty$, (2.12) fica:

$$\frac{X_1}{k_1^{-1}} = \pm \frac{1}{g^2 - 1 + \mu g^2} \quad (2.19)$$

Considerando que as amplitudes são grandezas positivas e que quando $g^2 < \frac{1}{1+\mu}$ o denominador da equação (2.19) é negativo, toma-se para a primeira raiz g_P o sinal negativo e para a segunda g_Q o valor positivo. Impondo a condição de mesma amplitude para os dois pontos chega-se à expressão:

$$\frac{1}{1 - g_P^2(1 + \mu)} = -\frac{1}{1 - g_Q^2(1 + \mu)} \quad (2.20)$$

$$g_P^2 + g_Q^2 = \frac{2}{1 + \mu} \quad (2.21)$$

Lembrando ainda que a soma das raízes de uma equação do segundo grau é igual ao coeficiente do termo linear, a menos do sinal, tem-se ainda uma segunda equação:

$$g_P^2 + g_Q^2 = \frac{2(1 + f^2 + \mu f^2)}{2 + \mu} \quad (2.22)$$

Após a substituição de (2.22) em (2.21) obtém-se o fator de sintonização ótimo:

$$f_{ót} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (2.23)$$

que garante a mesma altura para os pontos invariantes. É necessário agora obter o valor de ζ que faz com que a curva de resposta em frequência tenha inclinação nula em um dos pontos invariantes. Para isto é necessário substituir o valor de f dado pela equação (2.23) na equação (2.12), diferenciar em relação a g , e igualar o resultado a zero para o ponto P , cuja abscissa g_P é encontrada resolvendo-se a equação (2.18). Este é um processo trabalhoso e que leva a:

$$(\zeta_{ót})_P^2 = \frac{\mu \left(3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right)}{8(1 + \mu)^3} \quad (2.24)$$

Fazendo o mesmo procedimento para o ponto Q , obtém-se:

$$(\zeta_{ót})_Q^2 = \frac{\mu \left(3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right)}{8(1 + \mu)^3} \quad (2.25)$$

Em aplicações de engenharia, usualmente se toma o valor médio das duas expressões acima como o valor ótimo para o fator de amortecimento:

$$\zeta_{ót} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (2.26)$$

A Figura 2.8 permite comparar as curvas de resposta em frequência da massa primária em três situações: sem ADV, com ADV passivo não amortecido sintonizado à frequência natural do sistema principal e com ADV passivo ótimo.

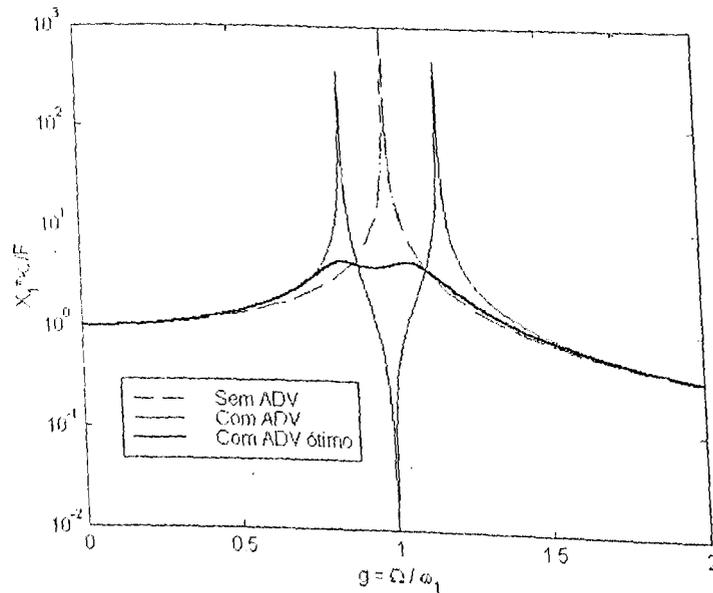


Figura 2.8- Amplitudes de vibração do sistema primário, $\mu = 0, 1$.

2.4 Teoria Modal para o Projeto Ótimo de ADVs Amortecidos Aplicados a Sistemas Primários de Vários Graus de Liberdade

A teoria vista até aqui considera o acoplamento de ADVs passivos simples a sistemas primários de um grau de liberdade. Contudo, em numerosas aplicações práticas os sistemas primários são mais convenientemente modelados como sistemas discretos de vários graus de liberdade ou ainda como sistemas de parâmetros distribuídos (sistemas contínuos). Assim, faz-se necessário o desenvolvimento de uma teoria permitindo o projeto ótimo de ADVs destinados a estes tipos de sistemas. Com este objetivo, é apresentada nesta seção uma formulação geral desenvolvida por Cunha Jr. (1999), a partir de uma teoria específica para sistemas primários do tipo viga, desenvolvida por Warburton e Ayorinde (1980).

Considere-se o sistema primário da Figura 2.9 representado por matrizes de inércia e rigidez $[M]$ e $[K]$, ao qual se acopla um ADV passivo simples amortecido. Ao sistema primário é aplicada uma força harmônica $F^j(t)$ segundo grau de liberdade j , cujo deslocamento é denotado por $x_j(t)$. No grau de liberdade c é acoplado o ADV passivo, não havendo restrições que impeçam os graus de liberdade j e c de serem coincidentes.

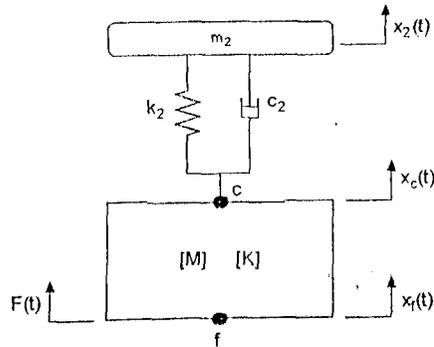


Figura 2.9- Sistema primário de vários graus de liberdade + ADV passivo.

Admite-se, por hipótese, que a resposta do conjunto é dominada por apenas um modo de vibração e que a massa do ADV é suficientemente pequena para que as freqüências naturais e modos de vibração do sistema primário não sejam significativamente alterados pela conexão do ADV. Assim, a resposta do sistema primário pode ser expressa segundo:

$$\{x(t)\} = \{Y_\sigma\} q_\sigma(t) \quad (2.27a)$$

$$\{\dot{x}(t)\} = \{Y_\sigma\} \dot{q}_\sigma(t) \quad (2.27b)$$

onde $\{Y_\sigma\}$ é o autovetor associado ao σ -ésimo modo de vibração do sistema primário sem o ADV e $q_\sigma(t)$ é a coordenada modal generalizada correspondente. Tem-se portanto que:

$$x_f(t) = Y_{\sigma f} q_\sigma(t) \quad (2.28a)$$

$$x_c(t) = Y_{\sigma c} q_\sigma(t) \quad (2.28b)$$

onde $Y_{\sigma f}$ e $Y_{\sigma c}$ são as componentes do autovetor $\{Y_\sigma\}$ correspondentes aos graus de liberdade f e c . O autovetor $\{Y_\sigma\}$ é normalizado de modo a satisfazer:

$$\{Y_\sigma\}^T [M] \{Y_\sigma\} = M_\sigma \quad (2.29a)$$

$$\{Y_\sigma\}^T [K] \{Y_\sigma\} = M_\sigma \omega_\sigma^2 \quad (2.29b)$$

sendo M_σ e ω_σ , respectivamente, a massa generalizada e freqüência natural do sistema primário, correspondentes ao σ -ésimo modo de vibrar. Escreve-se então a energia cinética do sistema combinado como:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}(t)\}^T [M] \{\dot{x}(t)\} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2(t) \quad (2.30)$$

Em virtude das relações (2.27b) e (2.29a) a equação acima é desenvolvida da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2} \{Y_\sigma\}^T [M] \{Y_\sigma\} \dot{q}_\sigma^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2(t) \quad (2.31)$$

$$T = \frac{1}{2} M_\sigma \dot{q}_\sigma^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2(t) \quad (2.32)$$

Da mesma forma escreve-se a energia de deformação do sistema combinado:

$$V = \frac{1}{2} \{x(t)\}^T [K] \{x(t)\} + \frac{1}{2} k_2 [x_2(t) - x_c(t)]^2 \quad (2.33)$$

$$V = \frac{1}{2} \{Y_\sigma\}^T [K] \{Y_\sigma\} q_\sigma^2 + \frac{1}{2} k_2 [x_2(t) - x_c(t)]^2 \quad (2.34)$$

$$V = \frac{1}{2} M_\sigma \omega_\sigma^2 q_\sigma^2(t) + \frac{1}{2} k_2 [x_2(t) - Y_{\sigma c} q_\sigma(t)]^2 \quad (2.35)$$

A função dissipação de Rayleigh pode ser expressa sob a forma:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} c_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_c(t)]^2 \\ &= \frac{1}{2} c_2 [\dot{x}_2(t) - Y_{\sigma c} \dot{q}_\sigma(t)]^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

O trabalho virtual da força de excitação é escrita segundo:

$$\begin{aligned} \delta W^{nc} &= F e^{i\Omega t} \delta x_f \\ &= F e^{i\Omega t} Y_{\sigma f} \delta q_\sigma \\ &= Q_\sigma \delta q_\sigma + Q_2 \delta x_2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde se obtêm as forças generalizadas:

$$Q_\sigma = F e^{i\Omega t} Y_{\sigma f} \quad (2.38a)$$

$$Q_2 = 0 \quad (2.38b)$$

As equações de Lagrange para o problema são escritas como (Meirovitch, 1975):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\sigma} = Q_\sigma \quad (2.39a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = Q_2 \quad (2.39b)$$

onde L é o Lagrangeano dado pela diferença entre as energias cinética e de deformação ($L = T - V$).

Substituindo as equações (2.32), (2.35), (2.36), (2.38a) e (2.38b) nas equações (2.39a) e (2.39b), obtêm-se as equações do movimento para o sistema acoplado na forma matricial:

$$[\hat{M}] \{\ddot{\tilde{x}}(t)\} + [\hat{C}] \{\dot{\tilde{x}}(t)\} + [\hat{K}] \{\tilde{x}(t)\} = \{\tilde{f}(t)\} \quad (2.40)$$

onde

$$[\hat{M}] = \begin{bmatrix} M_\sigma & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [\hat{C}] = \begin{bmatrix} c_2 Y_{\sigma c}^2 & -c_2 Y_{\sigma c} \\ -c_2 Y_{\sigma c} & c_2 \end{bmatrix} \quad [\hat{K}] = \begin{bmatrix} M_\sigma \omega_\sigma^2 + k_2 Y_{\sigma c}^2 & -k_2 Y_{\sigma c} \\ -k_2 Y_{\sigma c} & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{\tilde{x}(t)\} = \begin{Bmatrix} q_\sigma \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \{\tilde{f}(t)\} = \begin{Bmatrix} Y_{\sigma f} F e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Define-se agora massa efetiva (M_{ef}) como sendo a massa que colocada no ponto de conexão do ADV terá a mesma energia cinética que o sistema primário. Portanto:

$$\frac{1}{2} M_{ef} \dot{x}_c^2(t) = \frac{1}{2} \{\dot{x}(t)\}^T [M] \{\dot{x}(t)\} \quad (2.41)$$

$$M_{ef} Y_{\sigma c}^2 \dot{q}_\sigma^2(t) = \{Y_\sigma\}^T [M] \{Y_\sigma\} \dot{q}_\sigma^2(t) \quad (2.42)$$

$$M_{ef} = \frac{M_\sigma}{Y_{\sigma c}^2} \quad (2.43)$$

De maneira semelhante define-se rigidez efetiva (K_{ef}) como sendo a rigidez ligando a coordenada de conexão ao referencial fixo, armazenando a mesma energia de deformação do sistema primário. Assim:

$$\frac{1}{2} K_{ef} x_c^2(t) = \frac{1}{2} \{x(t)\}^T [K] \{x(t)\} \quad (2.44)$$

$$K_{ef} Y_{\sigma c}^2 q_\sigma^2(t) = \{Y_\sigma\}^T [K] \{Y_\sigma\} q_\sigma^2(t) \quad (2.45)$$

$$K_{ef} = \frac{M_\sigma \omega_\sigma^2}{Y_{\sigma c}^2} \quad (2.46)$$

Resolvendo a equação (2.40) para a excitação harmônica em regime permanente e introduzindo os conceitos de massa e rigidez efetivas, tem-se:

$$\begin{cases} q_{\sigma}(t) = Q_{\sigma} e^{i\Omega t} \\ x_2(t) = X_2 e^{i\Omega t} \end{cases}$$

com:

$$\frac{Q_{\sigma}}{F}(\Omega) = \frac{Y_{\sigma f} (k_2 - \Omega^2 m_2 + i\Omega c_2)}{Y_{\sigma c}^2 \left\{ [M_{ef} (\omega_{\sigma}^2 - \Omega^2) + k_2 + i\Omega c_2] (k_2 - \Omega^2 m_2 + i\Omega c_2) - (k_2 + i\Omega c_2)^2 \right\}} \quad (2.47)$$

Escrevendo a equação acima em função dos parâmetros adimensionais:

$$\mu_{ef} = m_2 / M_{ef}$$

$$g = \Omega / \omega_{\sigma}$$

$$f = \omega_2 / \omega_{\sigma}$$

$$\zeta_2 = c_2 / 2m_2\omega_{\sigma}$$

tem-se:

$$\left| \frac{Q_{\sigma}}{F K_{ef}^{-1}}(\Omega) \right| = Y_{\sigma f} \sqrt{\frac{(2\zeta_2 g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta_2 g)^2 (g^2 - 1 + \mu_{ef} g^2)^2 + [\mu_{ef} f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (2.48)$$

Finalmente, a amplitude de vibração harmônica para um grau de liberdade qualquer i do sistema primário é dado por:

$$|X_i| = Y_{\sigma i} |Q_{\sigma}| \quad (2.49)$$

Assim:

$$\left| \frac{X_i}{F K_{ef}^{-1}}(\Omega) \right| = Y_{\sigma i} Y_{\sigma f} \sqrt{\frac{(2\zeta_2 g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta_2 g)^2 (g^2 - 1 + \mu_{ef} g^2)^2 + [\mu_{ef} f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (2.50)$$

A equação (2.50) tem forma idêntica à equação (2.12) de modo que a teoria desenvolvida na seção anterior para o projeto de ADVs passivos aplicados a sistemas de 1 grau de liberdade pode ser estendida a sistemas primários de vários graus de liberdade, tratando-se cada modo de vibração isoladamente. Assim, os parâmetros ótimos do ADV acoplado a sistemas primários de vários graus de liberdade são dados por:

$$f_{ót} = \frac{1}{1 + \mu_{ef}} \quad (2.51)$$

$$\zeta_{2ót} = \sqrt{\frac{3\mu_{ef}}{8(1 + \mu_{ef})^3}} \quad (2.52)$$

Capítulo 3

Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos

3.1 Introdução

Como foi visto no capítulo anterior, os absorvedores passivos são adequados à atenuação de vibrações em uma banda de frequências relativamente estreita. Além disso, a realização física de um absorvedor passivo de configuração ótima pode ser uma tarefa difícil do ponto de vista prático.

Os absorvedores dinâmicos ativos, estudados neste capítulo, oferecem a possibilidade de atenuar vibrações em uma faixa mais ampla de frequências, com a vantagem de que a sintonização pode ser feita ajustando os ganhos de realimentação, sem alteração dos parâmetros físicos do ADV.

Evidentemente, comparados aos ADVs passivos, a implementação prática dos ADVs ativos é mais complexa, envolvendo fatores importantes tais como a instabilidade, o sensoriamento e as estratégias de controle.

Os ADVs ativos são basicamente constituídos por um ADV passivo ao qual é adicionado um elemento ativo (atuador) colocado paralelamente aos elementos de rigidez e amortecimento do absorvedor, como mostrado na Figura 3.1. O que diferencia as várias concepções de ADVs ativos é a forma de se calcular a força $u(t)$ exercida pelo atuador.

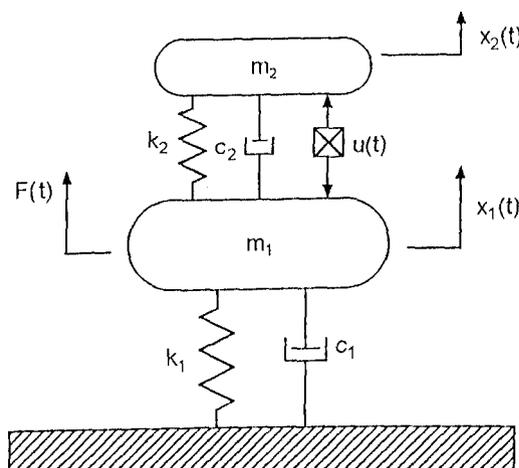


Figura 3.1- Sistema Primário+ADV Ativo.

Neste capítulo serão desenvolvidas as formulações e discutidas as características operacionais de três tipos de ADVs ativos, a saber:

- o Ressonador Defasado, proposto por Olgac e Holm-Hansen (1995) que usa um atuador realimentado com o sinal de deslocamento da massa reativa, defasado no tempo. São propostos alguns desenvolvimentos que complementam o trabalho original destes autores.
- uma nova configuração proposta de ADV ativo utilizando uma realimentação dada por uma combinação linear dos sinais de deslocamento, velocidade e aceleração relativos entre a massa reativa e o sistema primário. Conforme será visto, esta configuração permite obter uma ampla faixa de sintonização dentro da qual é assegurada a estabilidade.
- uma configuração de ADV ativo proposta por Chang e Soong (1980) que utiliza uma técnica de controle ótimo para definir a força exercida pelo elemento ativo.

3.2 Ressonador Defasado com Realimentação em Medidas Absolutas (RDMA)

No absorvedor ativo proposto por Olgac e Holm-Hansen (1995), a força de controle $u(t)$ exercida pelo atuador é proporcional ao deslocamento da massa reativa, defasado de um intervalo de tempo τ , ou seja:

$$u(t) = -Cx_2(t - \tau) \quad (3.1)$$

A teoria do ressonador defasado é baseada no fato, evidenciado na Seção 2.1, que haverá anulação da resposta harmônica da massa primária quando a frequência natural do ADV com sua base fixa coincidir com a frequência de excitação. Assim, dada a frequência de excitação (Ω) e um conjunto de valores dos parâmetros passivos (m_2, c_2, k_2) o projeto do ressonador defasado consiste em determinar os parâmetros G e τ de modo que uma de suas frequências naturais coincida com Ω .

Para o ADV ativo considerado isoladamente, tem-se a seguinte equação do movimento:

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + Cx_2(t - \tau) = 0 \quad (3.2)$$

e as equações do movimento para o sistema primário acoplado ao ADV ativo ficam:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} + \{u(t)\} \quad (3.3)$$

com:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{u(t)\} = \begin{Bmatrix} Gx_2(t - \tau) \\ -Gx_2(t - \tau) \end{Bmatrix}$$

Passando a equação (3.2) para o domínio de Laplace, chega-se à equação característica do ADV ativo:

$$m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s} = 0 \quad (3.4)$$

Esta equação apresenta infinitas raízes para G e $\tau > 0$. A Figura 3.2 apresenta o gráfico do lugar das raízes da equação (3.4) no plano complexo, com G variando em $[-\infty, +\infty]$ e τ constante.

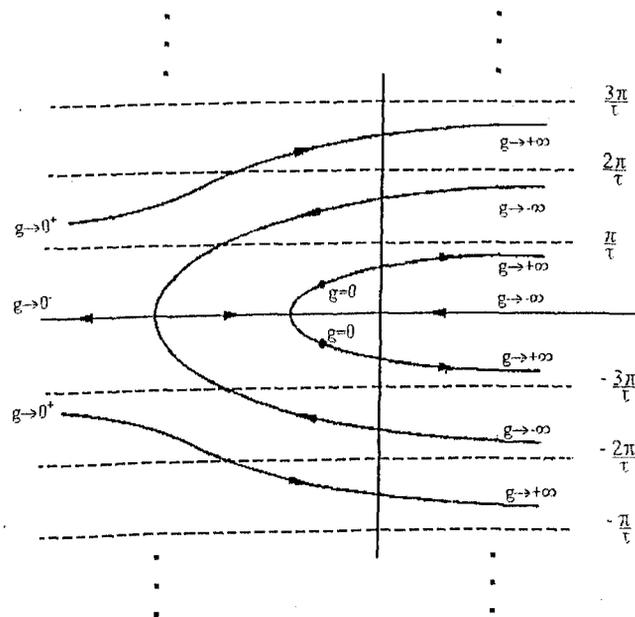


Figura 3.2- Lugar das raízes da equação (3.4). (Extraída de Olgac e Holm-Hansen, 1995)

Para $s = a + bi$, tem-se que o valor do ganho G é:

$$G = - (m_2 s^2 + c_2 s + k_2) e^{\tau a} e^{i b \tau} \quad (3.5)$$

Como G deve ser um número real positivo:

$$G = |m_2 s^2 + c_2 s + k_2| e^{\tau a} \quad (3.6)$$

observado o fato que $|e^{ib\tau}| = 1$. Além disso, o argumento de G na equação (3.5) deve ser um múltiplo de 2π , ou seja:

$$\angle -1 + \angle (m_2 s^2 + c_2 s + k_2) + \angle e^{\tau a} + \angle e^{ib\tau} = 2\kappa\pi \quad \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.7)$$

Desenvolvendo a expressão acima, escreve-se:

$$-\pi + \angle (m_2 s^2 + c_2 s + k_2) + 0 + b\tau = 2\kappa\pi \quad (3.8)$$

o que finalmente implica:

$$\angle (m_2 s^2 + c_2 s + k_2) = (2\kappa + 1)\pi - b\tau \quad (3.9)$$

Passando agora a equação (3.3) para o domínio de Laplace, obtém-se a função de transferência para a amplitude de vibração do sistema primário:

$$\frac{X_1}{F}(s) = \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s}}{(m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s}) P(s) + m_2 s^2 (c_2 s + k_2)} \quad (3.10)$$

onde $P(s) = m_1 s^2 + c_1 s + k_1$ é o polinômio característico do sistema primário isolado. Nota-se que para os valores de s que satisfazem a equação (3.4), o numerador da equação (3.10) se anula, isto é, ocorre uma anti-ressonância do sistema.

Sintonizar o ADV ativo para a frequência Ω significa fazer com que a equação característica (3.4) seja satisfeita para o valor de $s = \Omega i$. Assim:

$$G = |-\Omega^2 m_2 + i\Omega c_2 + k_2| = \sqrt{(k_2 - \Omega^2 m_2)^2 + (\Omega c_2)^2} \quad (3.11)$$

e

$$\angle (-\Omega^2 m_2 + i\Omega c_2 + k_2) = (2\kappa + 1)\pi - \Omega\tau \quad (3.12)$$

Desenvolvendo a última expressão acima, escreve-se:

$$\tau = \frac{1}{\Omega} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\Omega c_2}{\Omega^2 m_2 - k_2} \right) + 2k\pi \right] \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.13)$$

As equações (3.11) e (3.13) dão os valores de G e τ que sintonizam o ADV ativo para a frequência de excitação Ω . Nota-se que o efeito do amortecimento do ADV é eliminado uma vez que se impõe a sintonização para o valor de $s = \Omega i$, localizado sobre o eixo imaginário do plano complexo.

Como nenhuma restrição foi imposta à frequência Ω , é sempre possível achar valores de G e τ que sintonizam o ADV para esta frequência. No entanto, é fundamentalmente importante analisar o aspecto da estabilidade. Pode ocorrer o caso em que seja possível a sintonização para uma dada frequência, mas que o sistema acoplado resulte instável. A estabilidade do sistema acoplado é assegurada se todos os seus polos (raízes da equação característica) estiverem localizados no semiplano complexo esquerdo. A análise de estabilidade pode ser feita empregando o critério de estabilidade de Nyquist (Ogata, 1993), conforme o procedimento descrito a seguir.

O critério de estabilidade de Nyquist é baseado no mapeamento da equação característica no plano complexo, conforme ilustrado na Figura 3.3. Traçando-se o contorno de Bromwich, que compreende o semiplano complexo direito (Figura 3.3(a)), faz-se o mapeamento da equação característica (3.4), conforme mostrado na Figura 3.3(b).

O número de raízes da equação característica localizados no semiplano direito (polos instáveis do sistema) é dado por:

$$Z = P + N \quad (3.14)$$

onde P é o número de polos da equação característica localizados no semiplano direito, e N é o número de envolvimentos da origem no sentido horário, verificados no mapeamento da equação característica.

Para a equação característica dada por (3.4) o número de polos é zero. Devido à natureza transcendental da equação característica, seu mapeamento é bastante complicado. Para facilitar, um outro método é usado, baseado na separação da equação característica (3.4) em duas componentes:

$$m_2 s^2 + c_2 s + k_2 - (-G e^{T s}) = E_1 - E_2 = 0 \quad (3.15)$$

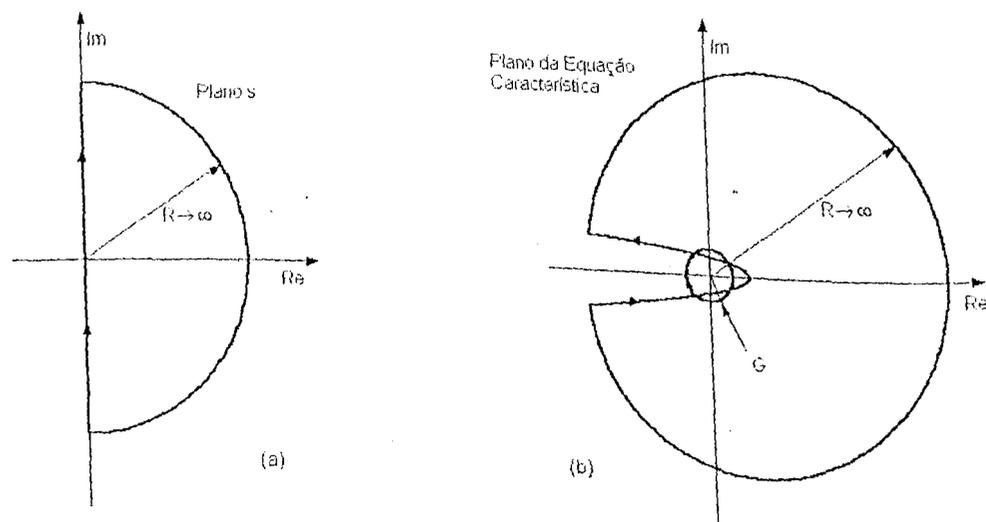


Figura 3.3- Mapeamento da equação característica no plano complexo segundo o contorno de Bromwich.

O mapeamento de E_1 é imediato e o de E_2 é um círculo de raio G . Ambos são mostrados na Figura 3.3(b).

Tomando-se então os pontos correspondentes nestes dois mapeamentos, A_1 e A_2 , e monitorando-se o argumento θ de $A_1 - A_2$, calcula-se o número N de incrementos de 2π do ângulo θ no sentido horário.

Observando a Figura 3.3(b) notam-se quatro interseções entre os mapeamentos das duas componentes da equação característica. Duas delas correspondem às raízes impostas da equação característica, isto é, $s = \pm\Omega i$, e são chamadas verdadeiras. As outras duas são interseções puramente geométricas, pois E_1 e E_2 assumem o mesmo valor, mas para diferentes valores s . Este último tipo de interseção não causa problemas no cálculo de θ , já que $A_1 - A_2$ não é nulo. As interseções verdadeiras, no entanto, causam problemas para o cálculo de θ .

O procedimento neste caso é modificar o contorno de Bromwich, gerando um pequeno desvio em torno das raízes da equação característica, na forma $s = \pm\Omega i + \varepsilon e^{i\phi}$, com ϕ variando de $-\pi/2$ a $\pi/2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \ll 1$. O contorno resultante é mostrado na Figura 3.4(a). No mapeamento das componentes da equação característica aparecerão desvios idênticos em torno das interseções verdadeiras, como se verifica na Figura 3.4(b).

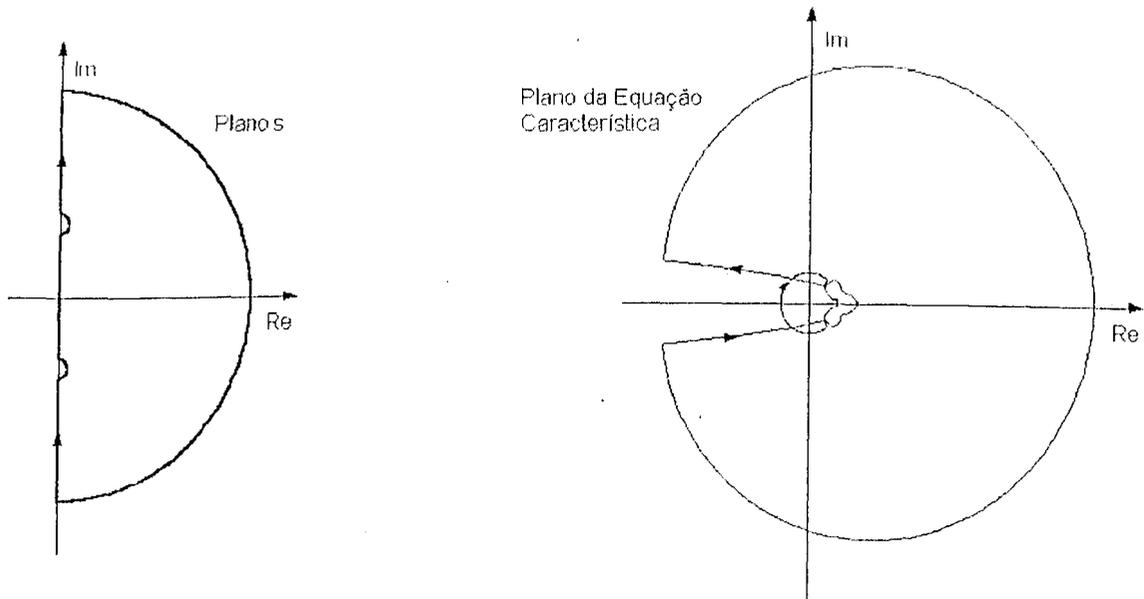


Figura 3.4- Mapeamento da equação característica no plano complexo segundo o contorno de Bromwich modificado.

Obtido o número de envolvimentos N , calcula-se a quantidade de zeros da equação característica localizados no semiplano direito. Se $Z = 0$, então o sistema é estável para aquela combinação de G e τ . Pode-se assim determinar os limites de estabilidade do sistema, calculando o valor mínimo de Ω para o qual o sistema é estável.

A análise feita vale para o ADV isolado do sistema primário. Para analisar a estabilidade do sistema combinado, toma-se o denominador da equação (3.10), que é o polinômio característico do sistema combinado, que será designado por $C(s)$, e pode-se então escrever:

$$C(s) = A(s) + Ge^{-\tau s}P(s) \quad (3.16)$$

onde $A(s) = (m_2s^2 + c_2s + k_2)P(s) + m_2s^2(c_2s + k_2)$ corresponde ao polinômio característico do sistema combinado sem o elemento ativo. Dividindo a equação (3.16) por $P(s)$, tem-se:

$$\bar{C}(s) = \frac{C(s)}{P(s)} = \frac{A(s)}{P(s)} - (-Ge^{-\tau s}) \quad (3.17)$$

A função $A(s)/P(s)$ pode ser facilmente mapeada no plano complexo, segundo o contorno de Bromwich. Como já foi visto, $-Ge^{-\tau s}$ gera uma circunferência de raio G . Da mesma forma como foi feito para o ADV sozinho, tomam-se dois pontos $A1$ e $A2$ correspondentes nos gráficos de $A(s)/P(s)$ e $-Ge^{-\tau s}$, e calcula-se o argumento θ do

número complexo $A1 - A2$ para cada valor de s do contorno de Bromwich. O número N de envoltimentos da origem pelo polinômio característico no sentido horário é igual ao número de incrementos de 2π no valor de θ .

O número de polos P do polinômio característico no semiplano direito é também dado pelo número de zeros de $P(s)$, que é facilmente obtido. Assim, calculando Z pela equação (3.14), verifica-se a estabilidade do sistema combinado.

Olgac e Holm-Hansen (1995) propõe uma outra forma de analisar a estabilidade do sistema que torna mais simples a determinação dos limites de estabilidade do sistema. Sabe-se que a estabilidade do sistema acoplado deve ser assegurada enquanto o Ressonador Defasado isolado, sintonizado para a frequência de excitação, é marginalmente estável (seus polos estão localizados sobre o eixo imaginário). A situação de estabilidade marginal do sistema acoplado é determinada a partir do cálculo de G e τ para os quais seus polos (raízes da equação característica do sistema acoplado (3.16)) estão localizados sobre o eixo imaginário. Desde que $G \in \mathfrak{R}^+$, escreve-se para o sistema acoplado:

$$G_{(SA)} = \frac{|A(s)|}{|P(s)|} \quad (3.18)$$

e:

$$\tau_{(SA)} = \frac{1}{\Omega} [-\angle A(s) + \angle P(s) + (2k + 1)\pi] \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.19)$$

Observando a Figura 3.2 nota-se que quanto maior o valor do ganho G ($G \in \mathfrak{R}^+$), mais à direita se localizam as raízes da equação característica (3.4), e maior é a tendência do sistema ser instável. Deseja-se alocar os polos do Ressonador Defasado isolado sobre o eixo imaginário, garantindo que os polos do sistema acoplado se localizem no semiplano esquerdo. Assim, para que o sistema seja estável:

$$G < G_{(SA)} \quad (3.20)$$

Traçando para cada valor de Ω , a curva de G versus τ que sintonizam o Ressonador Defasado isolado, e a curva que dá os valores de ganho e atraso para a situação de estabilidade marginal do sistema acoplado ($G_{(SA)}, \tau_{(SA)}$), mostradas na Figura 3.5, determina-se o valor crítico do atraso τ_{cr} e o respectivo valor crítico de frequência Ω_{cr} , para os quais $G = G_{(SA)}$. Para valores de $\tau < \tau_{cr}$ ($\Omega > \Omega_{cr}$), a equação (3.20) é satisfeita e o sistema acoplado é estável.

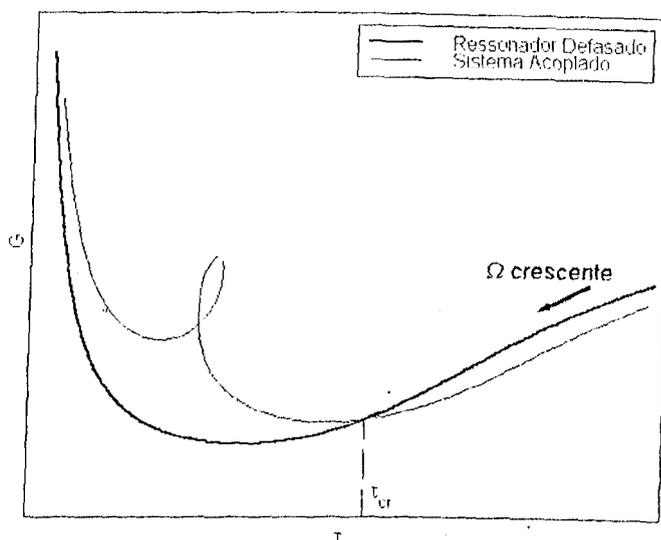


Figura 3.5- Curvas de G versus τ para o Ressonador Defasado isolado e para o sistema acoplado.

3.3 Ressonador Defasado com Realimentação em Medidas Relativas (RDMR)

A implementação prática do Ressonador Defasado empregando a formulação originalmente desenvolvida, apresentada na seção precedente, requer, para a geração da força de controle $u(t)$, a aquisição do sinal de deslocamento absoluto da massa reativa. Do ponto de vista prático, esta aquisição é difícil de ser feita uma vez que o ADV está conectado à massa principal, que pode se mover. Assim, torna-se mais conveniente empregar, ao invés do deslocamento absoluto, o deslocamento relativo da massa secundária em relação à massa primária. Com este objetivo Olgac e Hosek (1997) adaptaram a teoria do Ressonador Defasado, conforme desenvolvimento a seguir. A força de controle é dada por:

$$u(t) = -G[x_2(t - \tau) - x_1(t - \tau)] = -Gx_r(t - \tau) \quad (3.21)$$

onde $x_r(t) = x_2(t) - x_1(t)$ designa o deslocamento relativo da massa do ADV com respeito à massa do sistema primário.

As equações de movimento para o sistema acoplado são expressas na forma matricial dada pela equação (3.3), com:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_r(t) \end{Bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{u(t)\} = \begin{Bmatrix} Gx_r(t) \\ -Gx_r(t) \end{Bmatrix}$$

Após passagem das equações do movimento ao domínio de Laplace, obtém-se a seguinte função de transferência relativa à massa primária do sistema acoplado:

$$\frac{X_1}{F}(s) = \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s}}{(m_1 s^2 + c_1 s + k_1)(m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s}) + (c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s}) m_2 s^2} \quad (3.22)$$

Nota-se que o numerador da equação (3.22) é igual ao da equação (3.10) e também igual ao polinômio característico do ADV ativo sozinho (equação (3.4)). Pode-se então concluir que o cálculo dos parâmetros G e τ para o RDMR é feito da mesma forma que para o RDMA, através das equações (3.11) e (3.13).

Para fazer a análise de estabilidade do sistema combinado escreve-se o polinômio característico sob a seguinte forma:

$$C(s) = A(s) + B(s)G e^{-\tau s} \quad (3.23)$$

onde $A(s)$ é o mesmo obtido para o caso de realimentação com medidas absolutas e $B(s) = (m_1 + m_2)s^2 + c_1 s + k_1$.

Dividindo a equação (3.23) por $B(s)$, tem-se a seguinte expressão para a equação característica do sistema acoplado:

$$C(s) = \frac{C(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{B(s)} - (-G e^{-\tau s}) \quad (3.24)$$

que é semelhante à equação (3.17). Portanto, a análise de estabilidade feita para o RDMR é feita da mesma forma que para o RDMA, com a diferença que o número de polos P é neste caso igual ao número de zeros do polinômio $B(s)$ que é diferente do número de zeros de $P(s)$. De acordo com Olgac e Hosek (1997), a banda de frequências na qual o RDMR é estável é maior que a banda de estabilidade do RDMA.

3.4 Ressonador Defasado com Amortecimento Introduzido pela Realimentação

A teoria original do Ressonador Defasado propõe a alocação dos zeros da Função de Transferência de Malha Fechada (FTMF) no eixo imaginário, mais precisamente para $s = \pm \Omega i$. Isto significa que o ressonador se comportará como um ADV não amortecido nas vizinhanças da frequência de sintonização.

Conforme foi evidenciado no Capítulo 2, os ADVs não amortecidos têm o inconveniente de serem eficientes apenas em uma estreita banda de frequências em torno da frequência de excitação. Foi também mostrado que a inclusão do amortecimento no ADV pode propiciar a ampliação da banda de operação.

Com base no exposto, o que se propõe nesta seção é a generalização da teoria original do Ressonador Defasado, considerando que um dos zeros da equação característica do ressonador possa ser alocado no semiplano complexo esquerdo, sendo escrito da forma $s = a + bi$, ou $s = -\zeta\Omega + i\Omega\sqrt{1 - \zeta^2}$, onde ζ designa o fator de amortecimento desejado. Neste caso, as equações (3.6) e (3.9), que dão as condições para escolha de G e τ , conduzem a:

$$\begin{aligned} G &= \left| m_2 (a + bi)^2 + c_2 (a + bi) + k_2 \right| e^{\tau a} \\ &= \sqrt{[m_2 (a^2 - b^2) + c_2 a + k_2]^2 + (2m_2 ab + c_2 b)^2} e^{\tau a} \end{aligned} \quad (3.25)$$

e

$$\angle [m_2 (a + bi)^2 + c_2 (a + bi) + k_2] = (2\kappa + 1)\pi - b\tau$$

donde:

$$\tau = \frac{1}{b} \left\{ \lg^{-1} \left[\frac{2m_2 ab + c_2 b}{m_2 (b^2 - a^2) - c_2 a - k_2} \right] + 2\kappa\pi \right\} \quad \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.26)$$

Observa-se que é necessário primeiramente calcular o atraso τ e depois o ganho G .

A análise de estabilidade do sistema com ressonador amortecido é feita da mesma forma que para o sistema com ressonador não amortecido. A Figura 3.6 mostra as curvas de G versus τ que dão a sintonização do ressonador para várias combinações de frequência de excitação e fator de amortecimento, e as curvas de ganho para a situação de estabilidade marginal do sistema acoplado. Nota-se que quanto maior o fator de amortecimento, mais à direita se dá o cruzamento entre as curvas de sintonização e de estabilidade marginal, definindo assim regiões de estabilidade mais amplas. Conclui-se que com a adição de amortecimento pela realimentação, pode-se aumentar a gama de frequências em que é possível sintonizar o

ressonador, garantindo a estabilidade do sistema acoplado.

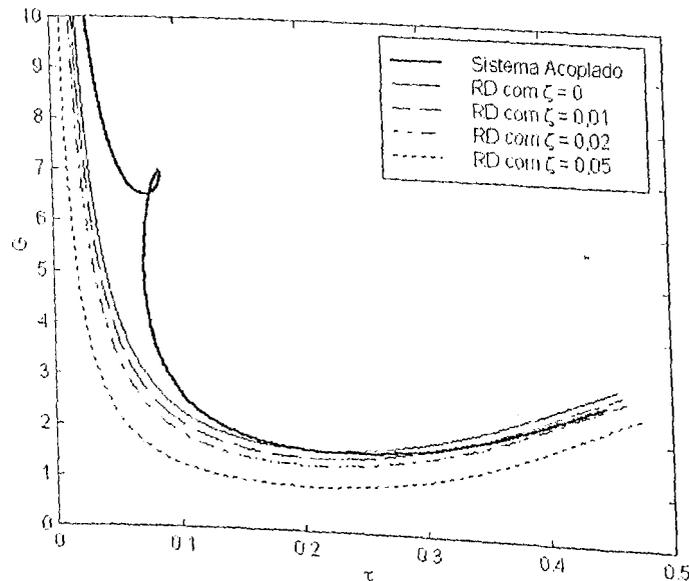


Figura 3.6- Curvas de G versus τ para o Ressonador Defasado isolado com vários valores de ζ , e para o sistema acoplado.

3.5 Ressonador Defasado Aplicado a Sistemas Primários de Vários Graus de Liberdade

No Capítulo 2 foi apresentada uma teoria modal destinada ao projeto de ADVs passivos aplicados a sistemas primários não amortecidos de vários graus de liberdade. Nesta seção, é proposta a associação desta teoria com o Ressonador Defasado, com o propósito de atenuar a vibração nas vizinhanças de cada um dos modos do sistema primário, considerado isoladamente. Partindo dos conceitos desenvolvidos no Capítulo 2, e observando o fato que a inclusão do atuador não altera as expressões das energias cinética e de deformação e da Função Dissipação de Rayleigh, utilizam-se as equações (2.32), (2.35) e (2.36). Por conveniência estas equações são transcritas abaixo.

$$T = \frac{1}{2} M_{\sigma} \dot{q}_{\sigma}^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2(t) \quad (2.32)$$

$$V = \frac{1}{2} M_{\sigma} \omega_0^2 q_{\sigma}^2(t) + \frac{1}{2} k_2 [x_2(t) - Y_{\sigma c} q_{\sigma}(t)]^2 \quad (2.35)$$

$$F = \frac{1}{2} c_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_c(t)]^2 = \frac{1}{2} c_2 [\dot{x}_2(t) - Y_{\sigma c} \dot{q}_\sigma(t)]^2 \quad (2.36)$$

Já para o trabalho virtual das forças não conservativas tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W^{nc} &= F e^{i\Omega t} \delta x_f + G x_2(t-\tau) \delta x_c - G x_2(t-\tau) \delta x_2 \\ &= [F e^{i\Omega t} Y_{\sigma f} + G x_2(t-\tau) Y_{\sigma c}] \delta q_\sigma - G x_2(t-\tau) \delta x_2 \end{aligned}$$

donde se obtêm as forças generalizadas:

$$Q_\sigma = F e^{i\Omega t} Y_{\sigma f} + G x_2(t-\tau) Y_{\sigma c} \quad (3.27a)$$

$$Q_2 = -G x_2(t-\tau) \quad (3.27b)$$

Aplicando as equações de Lagrange (2.39a) e (2.39b) chega-se às equações do movimento na forma matricial:

$$[\tilde{M}] \{ \ddot{\tilde{x}}(t) \} + [\tilde{C}] \{ \dot{\tilde{x}}(t) \} + [\tilde{K}] \{ \tilde{x}(t) \} = \{ \tilde{f}(t) \} + \{ \tilde{u}(t) \} \quad (3.28)$$

onde:

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} M_\sigma & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [\tilde{C}] = \begin{bmatrix} c_2 Y_{\sigma c}^2 & -c_2 Y_{\sigma c} \\ -c_2 Y_{\sigma c} & c_2 \end{bmatrix} \quad [\tilde{K}] = \begin{bmatrix} M_\sigma \omega_\sigma^2 + k_2 Y_{\sigma c}^2 & -k_2 Y_{\sigma c} \\ -k_2 Y_{\sigma c} & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{ \tilde{x}(t) \} = \begin{Bmatrix} q_\sigma \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \{ \tilde{f}(t) \} = \begin{Bmatrix} Y_{\sigma f} F e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{ \tilde{u}(t) \} = \begin{Bmatrix} Y_{\sigma c} G x_2(t-\tau) \\ -G x_2(t-\tau) \end{Bmatrix}$$

Retomando os conceitos de massa e rigidez efetivas definidos na Seção 2.4, chega-se à expressão:

$$\frac{Q_\sigma}{F}(s) = \frac{Y_{\sigma f} (m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s})}{Y_{\sigma c}^2 [\Lambda(s) + G e^{-\tau s} P(s)]} \quad (3.29)$$

com $P(s) = M_{ef} s^2 + K_{ef}$, e $\Lambda(s) = (m_2 s^2 + c_2 s + k_2) P(s) + m_2 s^2 (c_2 s + k_2)$. Utilizando a relação (2.49), pode-se ainda escrever:

$$\left| \frac{X_i}{F}(s) \right| = \frac{Y_{\sigma i} Y_{\sigma f}}{Y_{\sigma c}^2} \times \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2 + G e^{-\tau s}}{\Lambda(s) + G e^{-\tau s} P(s)} \quad (3.30)$$

que é semelhante à equação (3.10). A análise de estabilidade então se faz da mesma forma

que para o Ressonador Defasado aplicado a sistemas de um grau de liberdade.

3.6 ADV Ativo com Realimentação em Deslocamento, Velocidade e Aceleração

Nesta seção é proposta a formulação para um absorvedor ativo cuja força de controle é expressa como uma combinação linear dos sinais de deslocamento, velocidade e aceleração relativos da massa do ADV em relação à massa do sistema primário, expressa segundo:

$$u(t) = -[\alpha(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \gamma(x_2 - x_1)] \quad (3.31)$$

onde α , β e γ são denominados ganhos de realimentação de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente. Para o sistema combinado as equações de movimento ficam:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.32)$$

com

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2 + \alpha \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + \beta & -(c_2 + \beta) \\ -(c_2 + \beta) & c_2 + \beta \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \gamma & -(k_2 + \gamma) \\ -(k_2 + \gamma) & k_2 + \gamma \end{bmatrix}$$

e $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ como definidos anteriormente.

Observa-se que nesta formulação o efeito da força de controle $u(t)$ foi inserido nas matrizes físicas do sistema e que os ganhos de realimentação β e γ funcionam como amortecimento e rigidez adicionados aos parâmetros passivos c_2 e k_2 respectivamente, resultando em amortecimento e rigidez equivalentes $(c_2 + \beta)$ e $(k_2 + \gamma)$. Esta interpretação não se aplica ao ganho α , que por aparecer fora da diagonal principal e também no termo m_{11} da matriz de massa, não pode ser interpretado como uma massa adicionada ao ADV.

Passando as equações do movimento para o domínio de Laplace, obtém-se a equação característica:

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \quad (3.33)$$

com:

$$\begin{cases} a_0 = m_2\alpha + m_1(m_2 + \alpha) \\ a_1 = (m_1 + m_2)(c_2 + \beta) + c_1(m_2 + \alpha) \\ a_2 = (m_1 + m_2)(k_2 + \gamma) + k_1(m_2 + \alpha) + c_1(c_2 + \beta) \\ a_3 = c_1(k_2 + \gamma) + k_1(c_2 + \beta) \\ a_4 = k_1(k_2 + \gamma) \end{cases} \quad (3.34)$$

A fim de analisar a estabilidade do sistema foi adotado o critério de Routh apresentado no Apêndice I. Este critério é aplicável a sistemas cuja equação característica é expressa por um polinômio. Para a equação característica de quarta ordem do problema em questão, o critério estabelece que o sistema é estável se todos os coeficientes da equação característica são positivos e se as seguintes condições são satisfeitas:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0 \quad (3.35a)$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 a_4}{b_1} > 0 \quad (3.35b)$$

Introduzindo as expressões dos coeficientes (3.34) nas expressões (3.35a) e (3.35b), obtêm-se as seguintes desigualdades a serem satisfeitas pelos ganhos de controle para que a estabilidade seja assegurada:

$$\alpha > \frac{-m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \quad (3.36a)$$

$$\beta > -c_2 \quad (3.36b)$$

$$\gamma > -k_2 \quad (3.36c)$$

Como já foi discutido anteriormente, os ganhos de realimentação β e γ se adicionam às constantes c_2 e k_2 dos elementos passivos. As duas últimas condições de estabilidade podem ser traduzidas como condições de que o amortecimento equivalente ($c_2 + \beta$) e a rigidez equivalente ($k_2 + \gamma$) devem ser positivos.

A partir das equações do movimento (3.32) obtêm-se a seguinte FRF pontual para o sistema primário:

$$\frac{X_1}{F}(\Omega) = \frac{-(m_2 + \alpha)\Omega^2 + i\Omega(c_2 + \beta) + (k_2 + \gamma)}{a_0\Omega^4 - a_1\Omega^3 - a_2\Omega^2 + a_3\Omega + a_4} \quad (3.37)$$

Considerando o caso particular do ADV não amortecido e sem realimentação em velocidade ($c_2 = \beta = 0$), nota-se que a FRF tem um zero para $\Omega = \omega_2$, onde ω_2 é a frequência natural do ADV ativo com realimentação em deslocamento e aceleração definida da seguinte forma:

$$\omega_2 \triangleq \sqrt{\frac{k_2 + \gamma}{m_2 + \alpha}} \quad (3.38)$$

Conclui-se que, dado um ADV ativo com parâmetros quaisquer de massa (m_2) e rigidez (k_2), é possível alocar um zero do sistema acoplado em uma frequência de excitação qualquer Ω , apenas regulando os ganhos de realimentação em deslocamento (γ) e aceleração (α).

Para o caso do ADV amortecido, realimentado em velocidade e deslocamento ($\beta, \gamma \neq 0, \alpha = 0$) a FRF pontual do sistema primário é escrita:

$$\left| \frac{X_1}{Fk_1^{-1}}(\Omega) \right| = \sqrt{\frac{(2\zeta g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu g^2 f^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (3.39)$$

onde:

$$\zeta = \frac{c_2 + \beta}{2m_2\omega_1}$$

$$f = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{k_2 + \gamma}{m_2}}$$

Nota-se a semelhança entre a equação (3.39) e a equação (2.12) que dá a FRF pontual relativa à massa primária do sistema acoplado com ADV passivo amortecido. Desta forma, o desenvolvimento da teoria para absorvedores ótimos de Den Hartog se aplica ao ADV ativo proposto de maneira análoga à que foi desenvolvida para o ADV passivo amortecido. Assim, as expressões para o fator de sintonização e para o amortecimento ótimos são dados por:

$$f_{ót} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (3.40)$$

$$\zeta_{ót} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (3.41)$$

Então a sintonização ótima é feita calculando-se primeiramente $f_{(\delta t)}$ e $\zeta_{(\delta t)}$, e em seguida determinam-se os valores ótimos do ganhos β e γ segundo:

$$\beta_{\delta t} = 2\zeta_{\delta t}m_2\omega_1 - c_2 \quad (3.42)$$

$$\gamma_{\delta t} = (f_{\delta t}\omega_1)^2 m_2 - k_2 \quad (3.43)$$

3.7 ADV Ativo com Realimentação em Deslocamento, Velocidade e Aceleração Aplicado a Sistemas Primários de Vários Graus de Liberdade

Nesta seção é proposta a associação do ADV ativo com realimentação em deslocamento, velocidade e aceleração com a teoria modal desenvolvida na Seção 2.4, que permite o projeto ótimo do ADV ativo para aplicações a sistemas primários de vários graus de liberdade, cujos modos de vibração são tratados individualmente.

Como já foi mencionado anteriormente para o Ressonador Defasado, a inclusão do atuador não altera as expressões das energias cinética e de deformação e da Função Dissipação de Rayleigh. Portanto as equações (2.32), (2.35) e (2.36) se aplicam também ao ADV ativo proposto. Por outro lado, o trabalho virtual das forças não conservativas se escreve para o ADV ativo:

$$\begin{aligned} \delta W^{nc} &= F e^{i\Omega t} \delta x_f + [\alpha (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_c) + \beta (\dot{x}_2 - \dot{x}_c) + \gamma (x_2 - x_c)] (\delta x_c - \delta x_2) \\ &= \{ F e^{i\Omega t} Y_{\sigma f} + [\alpha (\ddot{x}_2 - Y_{\sigma c} \ddot{q}_\sigma) + \beta (\dot{x}_2 - Y_{\sigma c} \dot{q}_\sigma) + \gamma (x_2 - Y_{\sigma c} q_\sigma)] Y_{\sigma c} \} \delta q_\sigma + \\ &\quad - [\alpha (\ddot{x}_2 - Y_{\sigma c} \ddot{q}_\sigma) + \beta (\dot{x}_2 - Y_{\sigma c} \dot{q}_\sigma) + \gamma (x_2 - Y_{\sigma c} q_\sigma)] \delta x_2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

obtendo-se as forças generalizadas:

$$Q_\sigma = F e^{i\Omega t} Y_{\sigma f} + [\alpha (\ddot{x}_2 - Y_{\sigma c} \ddot{q}_\sigma) + \beta (\dot{x}_2 - Y_{\sigma c} \dot{q}_\sigma) + \gamma (x_2 - Y_{\sigma c} q_\sigma)] Y_{\sigma c} \quad (3.45a)$$

$$Q_2 = -[\alpha (\ddot{x}_2 - Y_{\sigma c} \ddot{q}_\sigma) + \beta (\dot{x}_2 - Y_{\sigma c} \dot{q}_\sigma) + \gamma (x_2 - Y_{\sigma c} q_\sigma)] \quad (3.45b)$$

A substituição das expressões (2.32), (2.35), (2.36), (3.45a) e (3.45b) nas equações de Lagrange (2.39a) e (2.39b) resulta nas equações do movimento dadas por:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.46)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} M_\sigma + \alpha Y_{\sigma c}^2 & -\alpha Y_{\sigma c} \\ -\alpha Y_{\sigma c} & m_2 + \alpha \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} (c_2 + \beta) Y_{\sigma c}^2 & -(c_2 + \beta) Y_{\sigma c} \\ -(c_2 + \beta) Y_{\sigma c} & c_2 + \beta \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} M_\sigma \omega_\sigma^2 + (k_2 + \gamma) Y_{\sigma c}^2 & -(k_2 + \gamma) Y_{\sigma c} \\ -(k_2 + \gamma) Y_{\sigma c} & k_2 + \gamma \end{bmatrix} \\
 \{x(t)\} &= \begin{Bmatrix} q_\sigma \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} Y_{\sigma f} F e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Nota-se a semelhança desta equação com a equação do movimento para sistemas de vários graus de liberdade com ADV passivo (2.40). Também aqui pode-se interpretar $(c_2 + \beta)$ como um amortecimento equivalente e $(k_2 + \gamma)$ como rigidez equivalente. No entanto, a mesma interpretação de massa equivalente do ADV não se aplica a $(m_2 + \alpha)$ devido ao aparecimento do ganho α fora da diagonal principal e no termo m_{11} da matriz de massa.

Tomando o caso particular em que não há realimentação em aceleração ($\alpha = 0$), e introduzindo os conceitos de massa e rigidez efetivas, definidos na Seção 2.4, resolve-se a equação (3.46) para excitação harmônica em regime permanente, obtendo-se:

$$\begin{cases} q_\sigma(t) = Q_\sigma e^{i\Omega t} \\ x_2(t) = X_2 e^{i\Omega t} \end{cases}$$

com:

$$\left| \frac{Q_\sigma}{F k_{ef}^{-1}}(\Omega) \right| = Y_{\sigma f} \sqrt{\frac{(2\zeta_2 g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta_2 g)^2 (g^2 - 1 + \mu_{ef} g^2)^2 + [\mu_{ef} f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (3.47)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 \mu_{ef} &= m_2 / M_{ef} \\
 g &= \Omega / \omega_\sigma \\
 f &= \frac{\omega_2}{\omega_\sigma} = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{k_2 + \gamma}{m_2}} \\
 \zeta_2 &= \frac{(c_2 + \beta)}{2m_2 \omega_\sigma}
 \end{aligned}$$

Como a amplitude de vibração harmônica para um grau de liberdade qualquer i do sistema primário é dado por $|X_i| = Y_{\sigma i} |Q_\sigma|$, a FRF para o grau de liberdade i fica:

$$\left| \frac{X_i}{l'K_{ef}^{-1}}(\Omega) \right| = Y_{\sigma i} Y_{\sigma f} \sqrt{\frac{(2\zeta_{2g})^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta_{2g})^2 (g^2 - 1 + \mu_{ef} g^2)^2 + [\mu_{ef} f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (3.48)$$

Pela semelhança entre as equações (3.48) e (2.12), podem-se deduzir as expressões que dão a sintonização e o amortecimento ótimos para cada modo do sistema primário:

$$f_{\acute{o}t} = \frac{1}{1 + \mu_{ef}} \quad (3.49)$$

$$\zeta_{2\acute{o}t} = \sqrt{\frac{3\mu_{ef}}{8(1 + \mu_{ef})^3}} \quad (3.50)$$

Finalmente obtêm-se as expressões para cálculo dos ganhos ótimos do ADV ativo acoplado a sistemas primários de vários graus de liberdade:

$$\beta_{\acute{o}t} = 2\zeta_{2\acute{o}t} m_2 \omega_\sigma - c_2 \quad (3.51)$$

$$\gamma_{\acute{o}t} = (f_{\acute{o}t} \omega_1)^2 m_2 - k_2 \quad (3.52)$$

3.8 ADV Ativo com Controle Ótimo

As configurações de ADVs ativos apresentadas nas seções anteriores são destinadas à atenuação de vibrações harmônicas em regime permanente. Obviamente, conforme mostrado por Cunha Jr. (1999), um conjunto de absorvedores independentes pode ser utilizado para atenuar vibrações periódicas, sendo cada um dos ADVs sintonizados para uma das componentes harmônicas da resposta. Contudo, faz-se necessário o desenvolvimento de um procedimento de projeto de ADVs ativos aplicável a qualquer tipo de regime vibratório livre ou forçado. Com este objetivo, é estudada nesta seção a associação de um ADV ativo com a técnica de controle ótimo. Esta estratégia tem sido explorada por vários pesquisadores (Chang e Soong, 1980 e Hrovat *et al.*, 1983). A teoria desenvolvida a seguir é adaptada daquela proposta por Chang e Soong (1980).

Para o sistema de 2 graus de liberdade mostrado na Figura 3.1, definindo a grandeza relativa $z(t) = x_2(t) - x_1(t)$, a equação do movimento pode ser expressa sob a seguinte forma no espaço de estados:

$$\{\dot{x}\} = [A] \{x\} + [B] u + \{f\} \quad (3.53)$$

onde $\{x\} = \{ x \quad z \quad \dot{x} \quad \dot{z} \}^T$ é o vetor de estado,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_1} & -\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_1}\right) & \frac{c_1}{m_1} & -\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_2}{m_1}\right) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

são as matrizes de estado, e

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F(t)}{m_1} \\ -\frac{F(t)}{m_1} \end{bmatrix}$$

é o vetor das excitações externas, e $u(t)$ é a força de controle desenvolvida pelo atuador.

Admite-se que $u(t)$ seja expresso como uma combinação linear das variáveis de estado, ou seja:

$$\{u(t)\} = -[k_g] \{x\} \quad (3.54)$$

onde $[k_g]$ é o vetor de ganhos de realimentação de estado.

De acordo com a teoria de controle ótimo, apresentada por Ogata (1993) e resumida no Apêndice II, procura-se determinar o conjunto ótimo de ganhos de realimentação, definidos como aqueles que minimizam o índice de desempenho representado pelo funcional quadrático:

$$J = \int_0^T \frac{1}{2} \left[\{x\}^T [Q] \{x\} + r u^2 \right] dt \quad (3.55)$$

onde $(0, T)$ é um intervalo de tempo apropriadamente escolhido, $[Q]$ é uma matriz que dá os fatores de ponderação para as diferentes componentes do vetor de estado, e r é o fator de ponderação para o esforço de controle. $[Q]$ deve ser quadrada de ordem igual à dimensão do vetor de estados, e semi-definida positiva, enquanto r deve ser positivo.

Observando a equação (3.55) nota-se que ao minimizar J busca-se minimizar

simultaneamente as grandezas contidas no vetor de estado (relacionadas com os níveis de vibração) e o esforço de controle necessário para esta ação. Na forma como o problema é posto, as componentes que definem o vetor de estados são o deslocamento e velocidade do sistema primário e deslocamento e velocidade relativos entre o sistema primário e a massa reativa. Isto significa que se deseja minimizar o movimento do sistema primário e o curso da massa reativa.

Conforme demonstrado no Apêndice II, fazendo $T' \rightarrow \infty$ na equação (3.54), a força de controle que minimiza o funcional (3.55) é dada por:

$$u(t) = -\frac{[B]^T [P] \{x\}}{r} \quad (3.56)$$

onde $[P]$ é uma matriz simétrica que obedece a equação algébrica de Riccati:

$$[A]^T [P] + [P] [A] - [P] [B] r^{-1} [B]^T [P] + [Q] = 0 \quad (3.57)$$

Comparando as equações (3.54) e (3.56), obtém-se o vetor de ganhos de realimentação de estado como:

$$\{k_g\} = \frac{1}{r} [B]^T [P] \quad (3.58)$$

A possibilidade de controlar o estado através da força $u(t)$, dada por (3.56) é condicionada à hipótese de que o sistema seja completamente controlável e estável. Matematicamente, estas condições são expressas sob as formas:

$$\begin{aligned} posto [[B] \quad [A][B] \quad \dots \quad [A]^{n-1}[B]] &= n \\ posto \left[[D] \quad [A]^T [D] \quad \dots \quad ([A]^{n-1})^T [D] \right] &= n \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde $[D]$ é uma matriz tal que $[Q] = [D]^T [D]$ e n é a ordem do sistema.

É importante notar que nem sempre é possível a medição de todas as variáveis de estado utilizadas na realimentação. A obtenção de uma variável não disponível por diferenciação de uma outra disponível também não é recomendada, visto que a diferenciação de um sinal sempre diminui a relação sinal para ruído. Nestes casos há uma outra forma de se obter as variáveis não disponíveis para medição, que é pelo projeto de observadores de estado. A teoria para projeto de observadores de estado pode ser encontrada na obra de Ogata (1993).

Capítulo 4

Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Adaptativos

4.1 Introdução

Conforme evidenciado nos capítulos anteriores, os ADVs passivos e ativos possuem vantagens e inconvenientes. Com efeito, os ADVs passivos, embora garantam a estabilidade do sistema, possuem sintonização fixa, determinada pela escolha dos parâmetros físicos apresentando faixas de frequência de operação relativamente estreitas.

Por outro lado, os ADVs ativos oferecem a possibilidade de sintonização variável em uma banda de frequências mais ampla, embora a estabilidade não possa ser garantida para todas as combinações dos parâmetros de controle.

Visando combinar os aspectos positivos dos dois tipos de ADVs, uma terceira classe de ADVs tem sido bastante explorada. São os denominados ADVs adaptativos (Sun *et al.*, 1995), entendidos como aqueles cujos parâmetros físicos podem ser variados (automaticamente ou com intervenção do operador) de modo a assegurar sintonização em uma banda de frequências mais ampla. Nos casos em que a variação dos parâmetros é feita com a realização de algum trabalho externo, admite-se que esta variação seja feita num processo quase-estático de modo que, em cada instante, o sistema possa ser modelado como um sistema de parâmetros físicos passivos de valores constantes. Esta hipótese assegura a estabilidade do sistema.

Algumas configurações de ADVs adaptativos foram mencionadas no artigo de revisão de Sun *et al.* (1995), incluindo as duas configurações ilustradas na Figura 4.1. A configuração mostrada na Figura 4.1(a) é a do ADV tipo massa-mola helicoidal, em que um motor de corrente-contínua é usado para sintonizar o ADV, regulando o comprimento efetivo da mola. Um ADV com molas de lâminas é mostrado na Figura 4.1(b), onde um parafuso de avanço controla a abertura entre as lâminas, variando a rigidez à flexão do conjunto e, conseqüentemente, a sintonização do ADV.

Um trabalho propondo a utilização de ADV com rigidez variável e amortecimento por correntes de Eddy foi apresentado por Seto e Yamanouch (1978). Hrovat *et al.* (1983) e Yang *et al.* (1999) propuseram o uso de ADVs com variação de amortecimento para controle de vibrações de estruturas de construção civil.

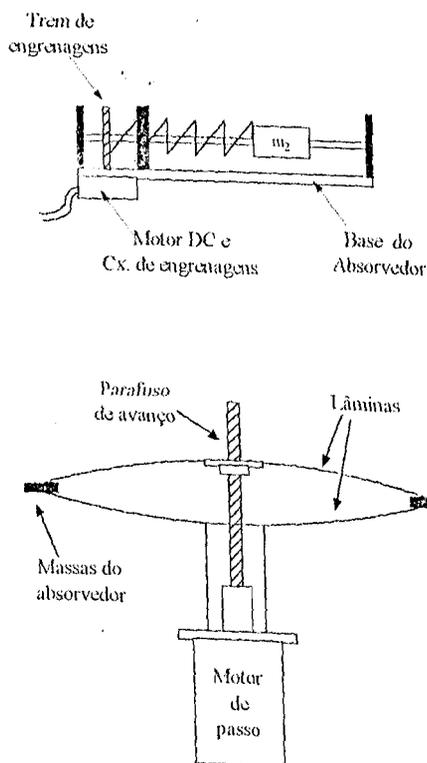


Figura 4.1- Exemplos de ADVs adaptativos: (a) ADV tipo massa-mola helicoidal; (b) ADV tipo massas-mola de folhas.

A proposição de novas configurações de ADVs adaptativos tem sido viabilizada pelo progresso tecnológico obtido no campo dos chamados *Materiais Inteligentes*. Estes materiais são capazes de sofrer alterações controláveis na sua geometria e ou propriedades físicas mediante alterações das condições ambientais.

Neste Capítulo faz-se inicialmente uma apresentação dos princípios operacionais dos principais tipos de materiais inteligentes, as leis físicas que governam o comportamento destes materiais e sugestões de como estes materiais podem ser utilizados na concepção de ADVs adaptativos. A seguir são estudadas as características de três configurações de ADVs adaptativos não amortecidos: o ADV baseado na corda vibrante, o ADV pendular e o ADV com atuadores piezelétricos. Para cada uma das configurações são obtidas as equações do movimento do ADV e as equações ou curvas que determinam a variação da frequência natural de acordo com os parâmetros variáveis.

4.2 Materiais Inteligentes

Os materiais inteligentes são aqueles cuja geometria e ou propriedades físicas (mecânicas, elétricas, térmicas, ópticas, etc.) podem ser variadas de forma controlada, mediante a variação das condições ambientais (campo elétrico, campo magnético, pressão, temperatura, etc.). A principal aplicação destes materiais é na confecção de sensores e atuadores com características de miniaturização, rapidez de resposta, alta capacidade de carga e sensoriamento e atuação distribuídos.

Dentre os principais tipos de materiais inteligentes podem-se citar os materiais piezelétricos, os eletrostritivos, os magnetostritivos, e os materiais com memória de forma, as fibras ópticas, e os fluidos eletro-reológicos e magneto-reológicos. A seguir são comentadas as características e aplicações de alguns destes materiais.

4.2.1 Materiais piezelétricos

Os materiais piezelétricos são aqueles capazes de se deformarem mecanicamente em resposta a um campo elétrico aplicado, e inversamente, de produzirem uma polarização elétrica em resposta a uma tensão mecânica. Podem-se citar como exemplos de materiais com propriedades piezelétricas o quartzo natural, as cerâmicas de titanato-zirconato de chumbo (PZT) e os polímeros de fluorido de polivinilideno (PVDF).

A característica piezelétrica é obtida através da polarização do material no processo de fabricação, através da aplicação de um alto campo elétrico a altas temperaturas. Os materiais piezelétricos sofrem o efeito do envelhecimento, isto é, a polarização obtida na fabricação tende a desaparecer com o tempo. Existe ainda, para cada material piezelétrico, um valor de temperatura, denominado temperatura de Curie, a partir do qual o material começa a perder a característica piezelétrica.

Observa-se que o comportamento da deformação com relação ao campo elétrico aplicado exibe histerese, conforme se pode ver na Figura 4.2. No entanto, a maior parte das aplicações se dá para baixos valores de campo elétrico, onde o comportamento é linear.

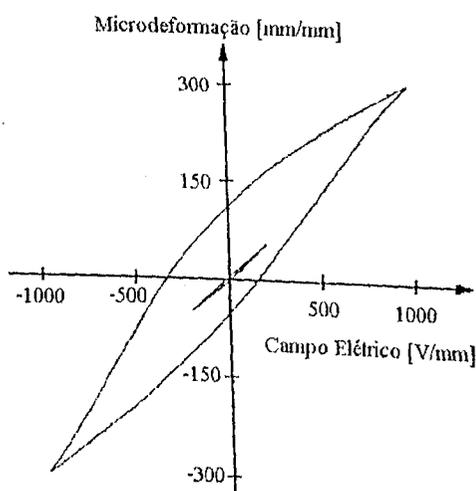


Figura 4.2- Distribuição de tensão do material G-1195 para campos elétricos moderados e altos (Banks, 1996).

As equações que governam o comportamento do material piezelétrico são dadas na forma matricial como:

$$\{D\} = [d]^T \{\sigma\} + [h] \{E\} \quad (4.1)$$

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} + [d] \{E\} \quad (4.2)$$

onde D é o vetor deslocamento elétrico, d é a matriz de coeficientes piezelétricos, σ é o vetor de tensões, h é a matriz dielétrica do material piezelétrico, E é o vetor campo elétrico, ε é o vetor de deformações, e S é a matriz de flexibilidade.

Modelamento e aplicações de materiais piezelétricos como sensores e atuadores no controle de vibrações podem ser encontradas nas obras de Lesieutre (1998), Faria e Almeida (1996), Tanaka *et al.* (1996), Agnes (1995), Gaudenzi (1995), Yu (1995), Zhou *et al.* (1995), Devasia *et al.* (1993), Hagood e Flotow (1991).

Uma configuração de ADV adaptativo é proposta adiante neste capítulo, em que atuadores de material piezelétrico são utilizados para ajustar as frequências naturais de vibração transversal de uma viga, através do efeito de enrijecimento sob tensão.

4.2.2 Materiais Eletrostritivos

Os materiais eletrostritivos têm a característica de se deformarem mecanicamente quando submetidos a um campo elétrico. As deformações são induzidas pelo surgimento de

orientações preferenciais de dipolos elétricos no material. Os materiais eletrostritivos mais comuns são o Niobato de chumbo-magnésio (PMN), e o niobato de chumbo-magnésio enriquecido com titanato de chumbo (PMN-PT).

Para campos elétricos baixos, o acoplamento eletro-mecânico destes materiais é aproximadamente quadrático, havendo saturação para altos valores de campo elétrico, tal como mostrado na Figura 4.3. Nota-se também que a inversão do campo elétrico não gera deformações negativas, como acontece com os materiais piezelétricos. Para a obtenção de deformações bi-direcionais faz-se necessária a adição de um nível DC ao sinal do campo elétrico, e a variação do campo se dará em torno deste nível.

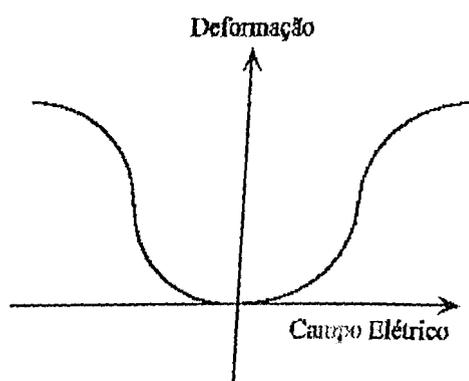


Figura 4.3- Relação deformação-campo elétrico de um material eletrostritivo.

As equações que expressam o efeito eletrostritivo são escritas na forma tensorial como:

$$D_j = h_{jn}^T E_n + 2m_{jnk} E_n \sigma_{kl}$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + m_{pqij} E_p E_q$$

onde D é o vetor deslocamento elétrico, h é a matriz dielétrica do material, E é o vetor campo elétrico, m é o tensor de acoplamento eletrostritivo, ε é a matriz de deformação, S é a matriz de flexibilidade, σ é a matriz de tensões.

O comportamento não linear da relação entre a deformação e o campo elétrico limita a utilização destes materiais. No entanto, assim como os materiais piezelétricos, eles podem ser usados na concepção de ADVs adaptativos, atuando na variação de rigidez do ADV.

4.2.3 Fluidos Eletro-reológicos

Os fluidos eletro-reológicos são dispersões de partículas sólidas, condutoras ou polarizáveis, em óleos não condutores. Com a aplicação de um campo elétrico as partículas

sofrem alguma forma de polarização induzida e interagem entre si. Esta interação resulta na fibrilação das partículas, o que altera a viscosidade aparente do fluido. A característica eletro-reológica de um fluido depende de fatores como a fração volumétrica de partículas sólidas na dispersão, do tamanho e da forma das partículas, da temperatura e das propriedades físico-químicas do óleo e das partículas.

O comportamento eletro-reológico pode ser separado nos regimes de pré-escoamento e pós-escoamento, mostrados na Figura 4.4(a). A maioria das aplicações, no entanto, é baseada no regime de pós-escoamento. A Figura 4.4(b) mostra como se comporta a relação entre a tensão de cisalhamento no fluido τ e a taxa de deformação de cisalhamento $\dot{\gamma}$, quando o campo elétrico é variado.

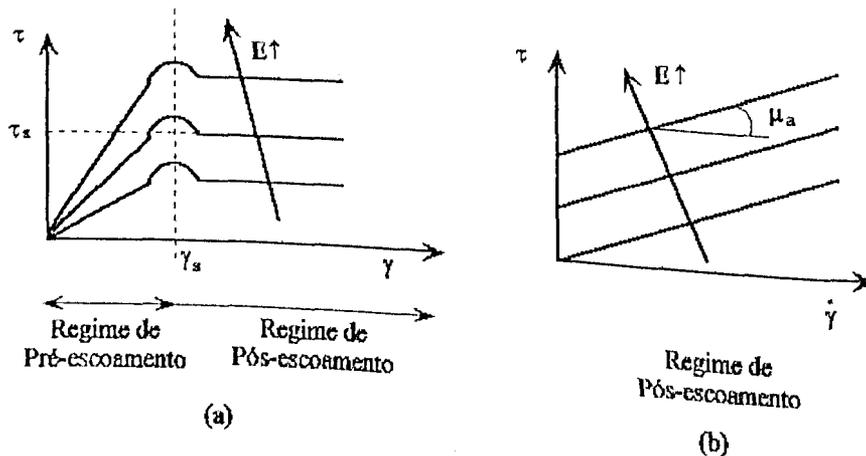


Figura 4.4- Influência do campo elétrico nas curvas de: (a) tensão-deformação de cisalhamento nos regimes de pré e pós-escoamento; (b) tensão-taxa de deformação de cisalhamento no regime de pós-escoamento.

Em se tratando de amortecedores, pode-se relacionar força de amortecimento com a tensão de cisalhamento no fluido, e velocidade com a taxa de deformação de cisalhamento. Assim, estabelece-se a relação entre amortecimento e campo elétrico para os fluidos eletro-reológicos. Estes fluidos podem então ser usados na confecção de absorvedores adaptativos com amortecimento variável (Hidaka *et al.*, 1999).

Coulter *et al.* (1995) fazem um estudo das aplicações de fluidos eletro-reológicos em engenharia, e trazem uma formulação para a relação força-velocidade de acordo com a variação do campo elétrico. Don e Coulter (1995) fazem uma investigação teórica e experimental da utilização de materiais eletro-reológicos na confecção de estruturas adaptativas. Uma revisão sobre o estado da arte da aplicação de fluidos eletro-reológicos no controle de vibrações pode ser encontrado no trabalho de Sims *et al.* (1999).

4.3 ADV tipo corda vibrante

Este ADV é composto por uma corda de comprimento ℓ e densidade linear ρ , sujeita a uma tração T_c , e à qual é presa uma massa concentrada m que pode deslizar ao longo da corda. O esquema deste ADV é apresentado na Figura 4.5. Admitem-se como parâmetros variáveis para a sintonização a tração T_c e a posição da massa ao longo da corda, indicada por d .

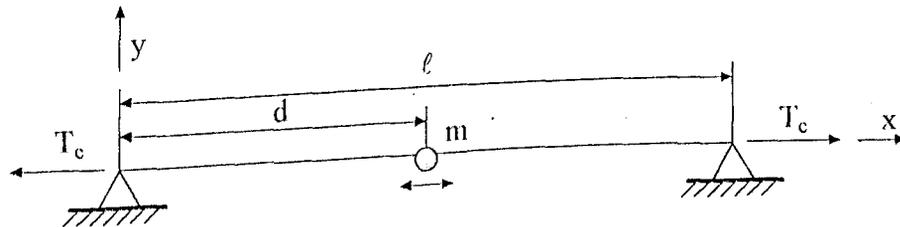


Figura 4.5- ADV tipo corda vibrante.

Uma ilustração de como pode ser feita a conexão do ADV tipo corda vibrante à estrutura primária é mostrada na Figura 4.6.

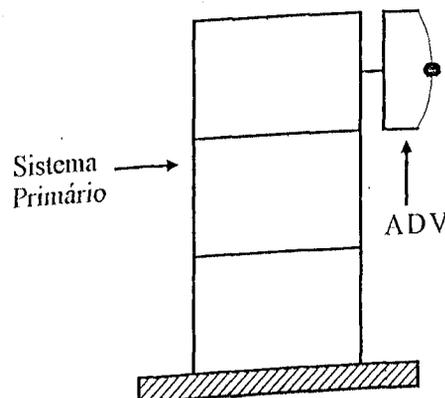


Figura 4.6- ADV tipo corda vibrante acoplado a um sistema primário.

A fim de determinar as equações de movimento e as frequências naturais em função dos parâmetros T_c e d , o ADV é modelado empregando a técnica de Rayleigh-Ritz. Para tanto, a função que descreve o movimento transversal da corda é expressa sob a forma:

$$\tilde{y}(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(x) q_i(t) \quad (4.3)$$

onde:

- $q_i(t)$, $i = 1$ a n são as coordenadas generalizadas e
- $Y_i(x)$, $i = 1$ a n são as autofunções associadas à corda vibrante sem a massa concentrada.

De acordo com Meirovitch (1975) as autofunções são dadas por:

$$Y_i(x) = \text{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \quad (4.4)$$

A partir de (4.3), computam-se as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = \tilde{y}'(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{i\pi}{\ell} \cos \frac{i\pi x}{\ell} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = \dot{\tilde{y}}(x, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \text{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \quad (4.6)$$

Formulando as energias cinética e potencial, escreve-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho [\dot{\tilde{y}}(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} m [\dot{\tilde{y}}(t, d)]^2$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} T_c [\tilde{y}'(x, t)]^2 dx$$

Introduzindo as expressões (4.5) e (4.6) nas equações acima obtêm-se:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^{\ell} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \text{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \text{sen} \frac{j\pi x}{\ell} \right) dx + \frac{1}{2} m \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \text{sen} \frac{i\pi d}{\ell} \text{sen} \frac{j\pi d}{\ell} \right] \quad (4.7)$$

$$V = \frac{T_c}{2} \int_0^{\ell} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \frac{ij\pi^2}{\ell^2} \cos \frac{i\pi x}{\ell} \cos \frac{j\pi x}{\ell} \right) dx \quad (4.8)$$

Observando que:

$$\int_0^\ell \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} \ell/2 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\int_0^\ell \cos \frac{i\pi x}{\ell} \cos \frac{j\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} \ell/2 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4.10)$$

as energias então se escrevem sob as formas:

$$T = \frac{\rho\ell}{4} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} m \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \operatorname{sen} \frac{i\pi d}{\ell} \operatorname{sen} \frac{j\pi d}{\ell} \right] \quad (4.11)$$

$$V = \frac{T_c \pi^2}{4\ell} \sum_{i=1}^n i^2 q_i^2 \quad (4.12)$$

São agora introduzidas as equações de Lagrange (Meirovitch, 1975):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 \text{ a } n \quad (4.13)$$

onde $L = T - V$. Introduzindo (4.11) e (4.12) em (4.13), obtêm-se as equações do movimento na seguinte forma matricial:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (4.14)$$

onde:

$$\{q\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} \frac{\rho\ell}{2} + m \operatorname{sen}^2 \frac{i\pi d}{\ell} & i = j \quad i = 1 \text{ a } n \\ m \operatorname{sen} \frac{i\pi d}{\ell} \operatorname{sen} \frac{j\pi d}{\ell} & i \neq j \quad i = 1 \text{ a } n \end{cases}$$

$$k_{ij} = \begin{cases} \frac{T_c \pi^2}{2\ell} i^2 & i = j \quad i = 1 \text{ a } n \\ 0 & i \neq j \quad i = 1 \text{ a } n \end{cases}$$

Assim, escolhido o número de modos a serem utilizados na discretização, obtêm-se as matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ para o ADV tipo corda vibrante. A obtenção das freqüências naturais do sistema se dá a partir da resolução do problema de auto-valor associado:

$$([K] - \lambda[M])\{Y\} = 0 \quad (4.15)$$

Um código computacional em linguagem MATLAB™ foi desenvolvido para o cálculo das freqüências naturais do ADV tipo corda vibrante. A título de ilustração a Figura 4.7 mostra a variação da primeira freqüência natural do ADV em relação aos parâmetros variáveis T_c e d , para uma corda de comprimento $\ell = 0,30m$, densidade linear $\rho = 0,0245Kg/m$, e massa concentrada $m = 0,05Kg$, utilizando cinco modos na discretização ($n = 5$).

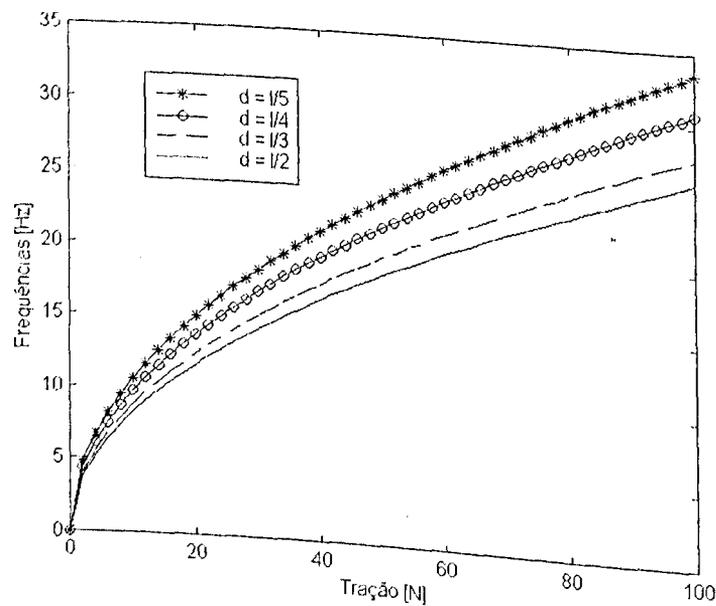


Figura 4.7- Variação da primeira freqüência natural do ADV com a tração e com a posição da massa concentrada.

As Figuras 4.8 e 4.9 a seguir mostram, respectivamente, as variações da segunda e terceira freqüências naturais do ADV com T_c e d .

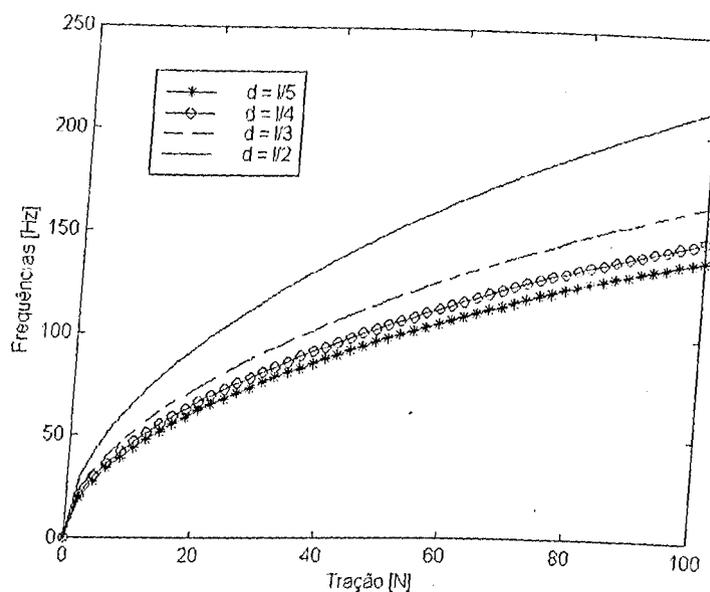


Figura 4.8- Variação da segunda frequência natural do ADV com a tração e com a posição da massa concentrada.

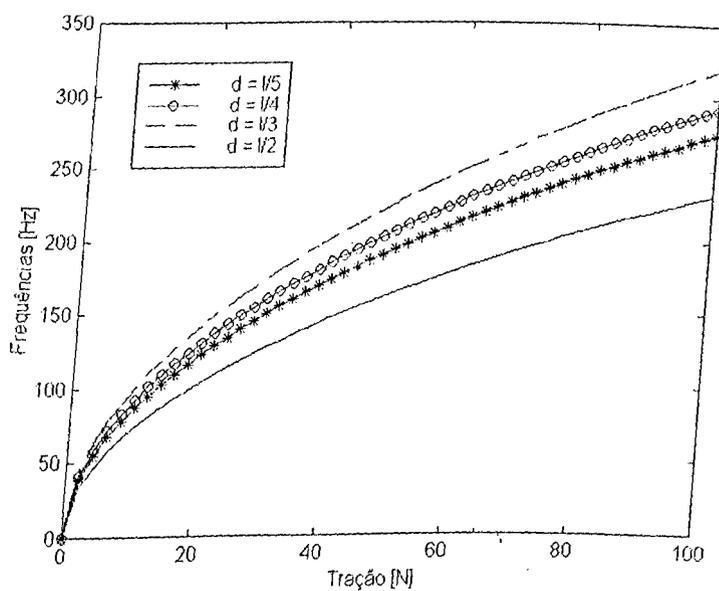


Figura 4.9- Variação da terceira frequência natural do ADV com a tração e com a posição da massa concentrada.

Deve-se observar que quanto mais próxima a massa concentrada estiver das extremidades da corda, menor será a energia cinética associada a seu movimento, e por consequência, menor será a parcela de energia que o ADV é capaz de absorver. No que diz respeito ao primeiro modo da corda, configurações em que a guia está mais próxima do

centro são mais eficientes.

Na prática, um ADV do tipo corda vibrante pode ser construído com um cabo de aço apoiado sobre suportes ligados à estrutura primária, e ao qual se prende uma guia de massa m . O controle automático dos parâmetros variáveis do ADV pode ser implementado com o emprego de *encoders*, motores de passo e uma célula de carga. A partir do sinal vibratório adquirido do sistema primário, identifica-se a frequência de excitação, e determinam-se os valores de referência para a tração e para a posição da massa concentrada que sintonizam o ADV para aquela frequência. A célula de carga, por sua vez, mede o valor de força de tração no cabo a cada instante. Os valores de referência e o valor de tração medido pelo extensômetro alimentam um controlador que comandará os motores de passo. Estes, ao enrolar ou desenrolar o cabo, alteram os valores de tração no cabo e posição da massa concentrada para que o ADV seja sintonizado com a frequência de excitação.

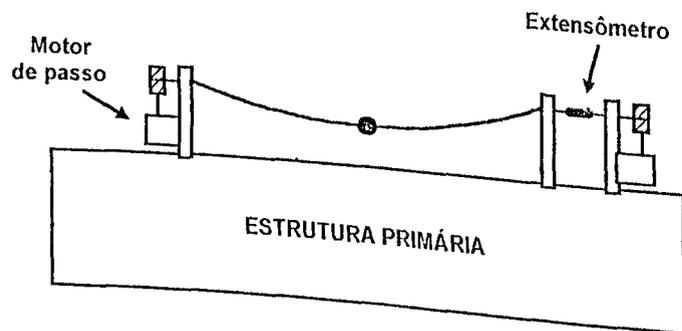


Figura 4.10- Esquema do ADV tipo corda vibrante acoplado ao sistema primário.

4.4 ADV pendular

Conforme evidenciado por Koronev e Reznikov (1995) as configurações de ADVs pendulares são muito convenientes para aplicações em estruturas de grande porte, sujeitas a vibrações de baixas frequências, tais como edifícios e torres esbeltas.

A configuração proposta, ilustrada na Figura 4.11(b), consiste de um pêndulo formado por uma haste uniforme de massa m_h , contendo em sua extremidade, uma massa pontual m . A haste do pêndulo é ligada, por uma conexão rígida, a uma lâmina flexível engastada-livre, cuja rigidez à flexão é EI . Para esta configuração admitem-se como parâmetros ajustáveis o comprimento da haste do pêndulo (ℓ) e a posição da conexão entre a haste do pêndulo e a lâmina flexível.

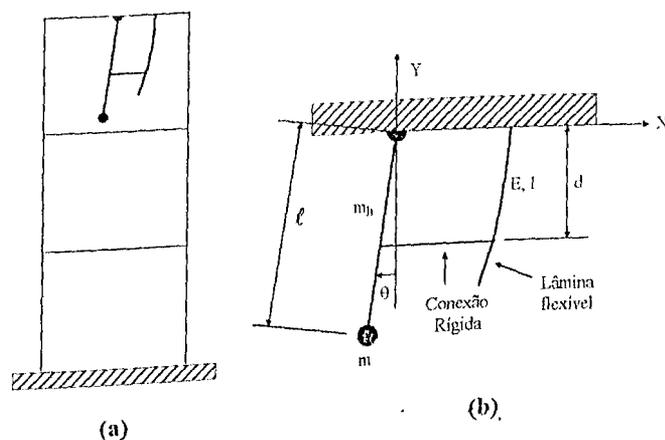


Figura 4.11- ADV pendular: (a) conectado ao sistema primário; (b) isolado.

Desprezando a inércia da lâmina, seu efeito se traduz por uma rigidez equivalente dada por:

$$k_l = \frac{3EI}{d^3}$$

Para obter a equação do movimento do ADV formulam-se primeiramente as energias cinética e potencial, admitindo que o deslocamento angular θ seja suficientemente pequeno para que o sistema possa ser tratado como um sistema linear. Assim as energias cinética e potencial são escritas sob as formas:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_h\ell^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} V &= mg\ell(1 - \cos\theta) + m_h g \frac{\ell}{2}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k_l(\theta d)^2 \\ &= \left(m + \frac{m_h}{2}\right)g\ell(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\frac{3EI}{d}\theta^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aplicando a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

onde $L = T - V$, e admitindo a hipótese de pequenas amplitudes de vibração, o que permite fazer $\sin\theta = \theta$ e $\cos\theta = 1$ para linearizar o sistema, obtém-se a equação de movimento do absorvedor:

$$\left(m + \frac{m_h}{3}\right) \ell^2 \ddot{\theta} + \left[\left(m + \frac{m_h}{2}\right) g \ell + \frac{3EI}{d}\right] \theta = 0 \quad (4.18)$$

A frequência natural do sistema governado pela equação (4.18) é:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(m + \frac{m_h}{2}\right) g \ell + \frac{3EI}{d}}{\left(m + \frac{m_h}{3}\right) \ell^2}} \quad (4.19)$$

Assim, fica explícita a dependência da frequência natural em relação aos parâmetros ajustáveis ℓ e d . O gráfico da Figura 4.12 mostra curvas que expressam esta dependência para um pêndulo com haste de massa $m_h = 0,100Kg$, massa concentrada $m = 0,500Kg$, ligado a uma viga de rigidez à flexão $EI = 0,175Nm^2$, com $g = 9,81m/s^2$.

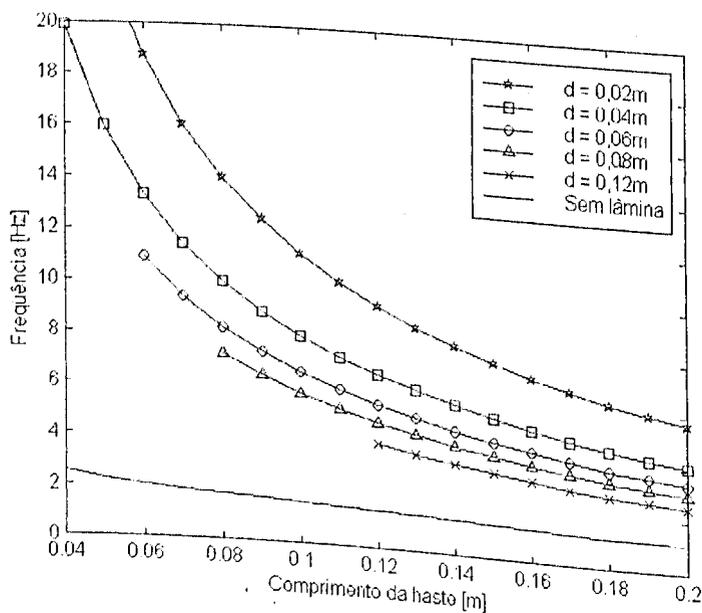


Figura 4.12- Dependência da frequência natural do pêndulo com relação ao comprimento da haste e à posição da conexão da viga

Cabe observar que a frequência natural do pêndulo sem lâmina flexível é

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(m + \frac{m_h}{2}\right) g}{\left(m + \frac{m_h}{3}\right) \ell}}$$

que é obtida retirando a parcela devida à rigidez da lâmina na equação (4.19). Neste caso para obter, por exemplo, uma frequência natural de $10Hz$ ($20\pi rad/s$) com o pêndulo supra-citado

(com a lâmina desconectada), seria necessária uma haste de comprimento muito pequeno de $\ell = 0,0026m$, o que pode não ser viável. Isto justifica o acoplamento da lâmina, o que dá mais rigidez ao pêndulo, aumentando o domínio das freqüências naturais que podem ser obtidas para o ADV, com comprimentos de pêndulo factíveis.

Um ADV pendular adaptativo pode ser realizado fisicamente empregando uma haste com estrutura telescópica, acionada por um parafuso sem fim comandado por um motor de passo, à qual se prende a massa pontual. A posição da conexão da lâmina flexível pode ser variada por um motor independente que movimenta a barra de conexão.

4.5 ADV tipo viga com atuadores piezelétricos

Nesta seção é proposta uma configuração de ADV adaptativo que explora a tecnologia dos materiais piezelétricos. Trata-se de uma viga metálica bi-engastada sobre a qual são colocadas duas placas de material piezelétrico, como mostrado na Figura 4.13. Os dois elementos piezelétricos são comandados por uma mesma tensão elétrica V , de modo que sua deformação é transmitida parcialmente à viga metálica.

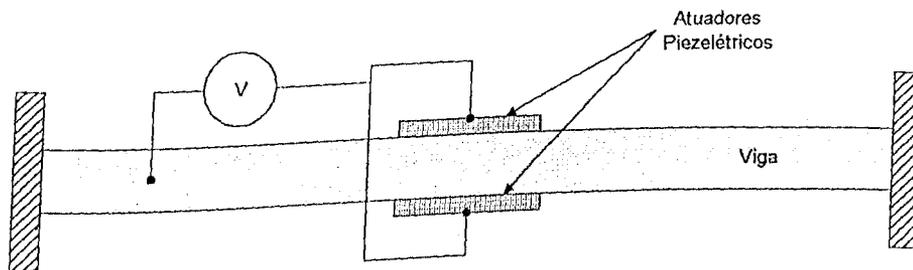


Figura 4.13- ADV tipo viga com atuadores piezelétricos.

Com a viga restringida em suas extremidades, a deformação do material piezelétrico causa um tensionamento mecânico interno na viga. Conforme evidenciado por Oguamanan *et al.* (1997) este enrijecimento sob tensão (*stress - stiffening*) promove variações nas freqüências naturais de movimento de flexão da viga. Este efeito é explorado para conferir adaptabilidade ao ADV. Variando a tensão aplicada entre valores negativos e positivos, pode-se aumentar ou diminuir aos valores das freqüências naturais da viga. Quando a viga é tracionada o valor de suas freqüências naturais também diminuem. Em oposição, a viga terá suas freqüências naturais aumentadas quando for comprimida pelos elementos piezelétricos.

Para evidenciar o efeito de enrijecimento sob tensão é apresentada a seguir uma simulação por elementos finitos utilizando o software ANSYS[®]. Modelou-se uma viga de alumínio com atuadores piezelétricos em duas configurações mostradas na Figura 4.14, sendo

a primeira com os atuadores no centro da viga e a outra com atuadores nas extremidades. Na Tabela 4.1 e nas matrizes que a seguem estão os parâmetros físicos e geométricos utilizados na modelagem para as duas configurações (ANSYS[®], 1992).

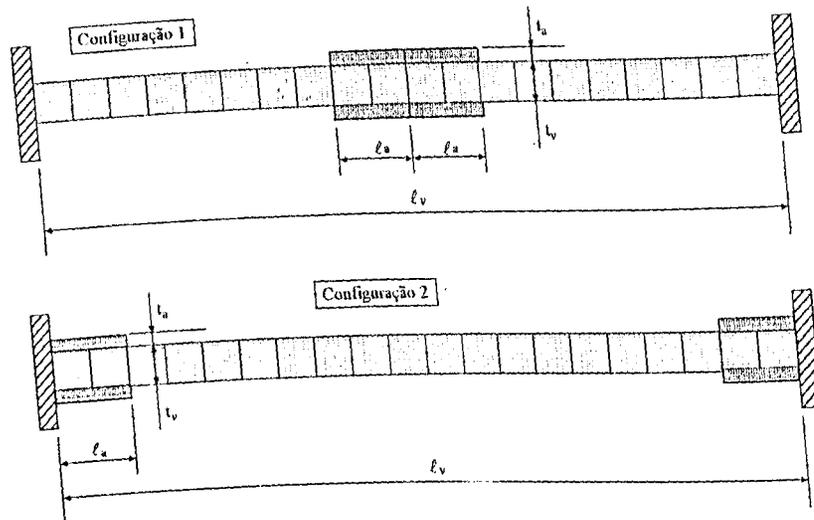


Figura 4.14- Modelos de Elementos Finitos das duas configurações de ADV tipo viga com atuadores piezoelétricos.

Tabela 4.1- Parâmetros físicos e geométricos

Comprimento da viga (ℓ_v) [mm]	200,0
Comprimento dos atuadores (ℓ_a) [mm]	20,0
Largura da viga (b_v) [mm]	10,0
Largura dos atuadores (b_a) [mm]	10,0
Espessura da viga (t_v) [mm]	0,50
Espessura dos atuadores (t_a) [mm]	0,19
Módulo de Elasticidade da viga (E_v) [GPa]	70,3
Coefficiente de Poisson da Viga (ν_v)	0,345
Densidade do material da viga (ρ_v) [Kg/m ³]	2690
Densidade do material dos atuadores (ρ_a) [Kg/m ³]	7730

$$[d]^T = 10^{-12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -132.88 & -132.88 & 302.18 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ V \end{bmatrix}$$

$$[h] = 10^{-9} \begin{bmatrix} 8.7969 & 0 & 0 \\ 0 & 8.7969 & 0 \\ 0 & 0 & 8.7969 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ m \end{bmatrix}$$

$$[c] = [S]^{-1} = \begin{bmatrix} 128 & 68 & 66 & 0 & 0 & 0 \\ 68 & 128 & 66 & 0 & 0 & 0 \\ 66 & 66 & 110 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} \text{ [GPa]}$$

Aplicou-se uma voltagem nula nas faces dos atuadores presas à viga, e foi variada a voltagem V nas duas faces externas dos atuadores. A partir destes dados obtiveram-se as seguintes curvas para as frequências naturais do ADV em função da tensão elétrica aplicada.

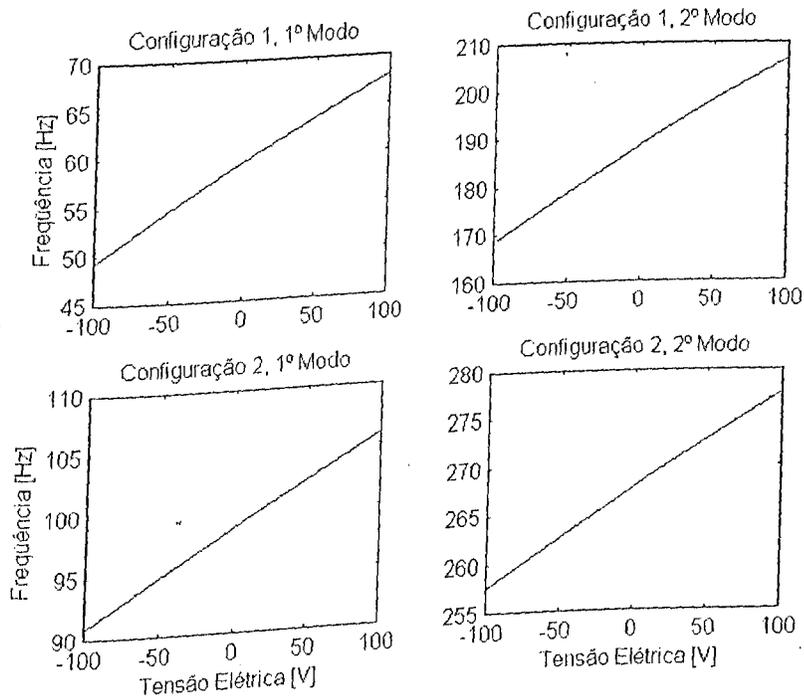


Figura 4.15- Frequências naturais versus tensão elétrica para as duas configurações de ADV tipo viga com atuadores piezelétricos.

Observa-se que o comportamento das frequências naturais da viga variam linearmente com a tensão elétrica. Para estas configurações nota-se ainda que a sensibilidade das frequências naturais com relação à tensão elétrica é baixa. A Tabela 4.2 mostra os valores de sensibilidade obtidos para as duas primeiras frequências naturais do ADV, considerando as duas configurações propostas.

Tabela 4.2- Sensibilidade da frequência natural da viga com relação à tensão elétrica aplicada.

	Sensibilidade Hz/V.	
	Configuração 1	Configuração 2
1º modo	0,0928	0,0755
2º modo	0,1901	0,0997

Capítulo 5

Simulações Numéricas

5.1 Introdução

Neste Capítulo são apresentadas diversas simulações numéricas com o objetivo de ilustrar as principais características das configurações de ADVs ativos e adaptativos e avaliar os procedimentos sugeridos nos Capítulos anteriores.

5.2 Simulações com Ressonador Defasado

5.2.1 Ressonador defasado sem amortecimento adicionado pela realimentação - Análise no domínio da frequência

Os fundamentos teóricos e operacionais do ressonador defasado não amortecido na forma originalmente proposta por Olgac e Holm-Hansen (1995) foram apresentados na Seção 3.2. Nesta seção será ilustrada a possibilidade de sintonização do ressonador defasado sem amortecimento adicionado pela realimentação, mediante a escolha adequada dos valores dos parâmetros G e τ . Para tanto, considere-se um sistema primário de 1 gdl com as seguintes características:

- massa do sistema primário: $m_1 = 1,0Kg$
- rigidez do sistema primário: $k_1 = 100,0N/m$
- coeficiente de amortecimento do sistema primário: $c_1 = 2Ns/m$
- frequência natural do sistema primário: $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1} = 10,0rad/s$
- fator de amortecimento do sistema primário: $\zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1} = 0,1$

Estes valores foram escolhidos com base na literatura estudada. A utilização de um sistema primário de baixa frequência natural justifica-se pela larga aplicação dos absorvedores

à atenuação de vibrações de estruturas de construção civil, como prédios e pontes, que notadamente tem baixa frequência natural.

Inicialmente escolhem-se os parâmetros do ADV passivo de forma que ele não esteja sintonizado para a frequência natural do sistema primário ($f = 0,8$). Admite-se também um fator de amortecimento $\zeta_2 = 0,125$ para o ADV passivo. Levando em conta as observações feitas quanto à influência da razão de massas na eficiência do absorvedor, escolhe-se para o ADV uma razão de massas $\mu = 0,10$. Desta forma, os valores dos parâmetros físicos do ADV passivo são:

$$m_2 = \mu m_1 = 0,10 Kg \quad (5.1)$$

$$k_2 = \omega_2^2 m_2 = (f \omega_1)^2 m_2 = 6,4 N/m \quad (5.2)$$

$$c_2 = 2\zeta_2 m_2 \omega_2 = 0,2 Ns/m \quad (5.3)$$

A Figura 5.1 permite comparar as FRFs da massa primária em duas situações: sem ADV e com ADV passivo, ficando evidente que a sintonização imperfeita não permite a atenuação completa do pico de ressonância.

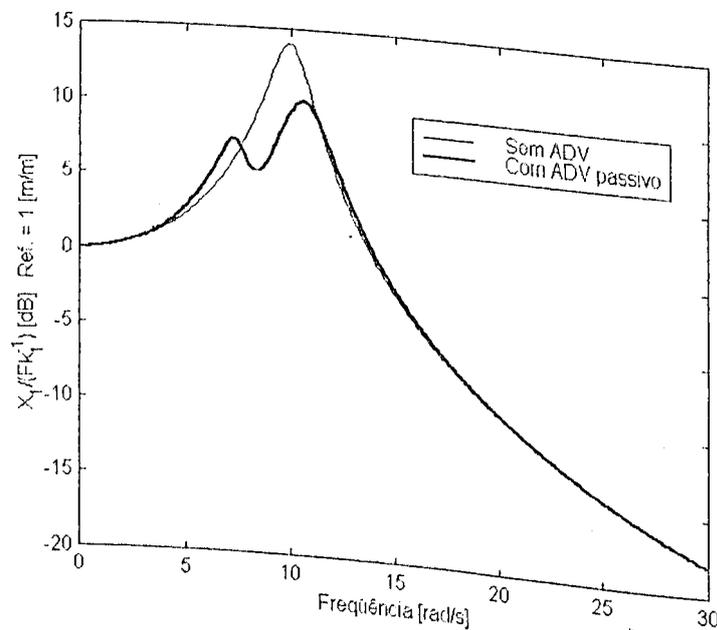


Figura 5.1- Resposta em frequência do sistema primário sem ADV, e com ADV passivo ótimo.

Inicialmente procede-se o estudo da estabilidade do sistema com ressonador. Aplicando a metodologia descrita na Seção 3.2, os valores de τ e ω críticos são: $\tau_{cr} = 0,201s$ e $\omega_{cr} = 7,97rad/s$. Este resultado permite concluir que o ressonador defasado pode ser sintonizado para a frequência natural do sistema primário ($\omega_1 = 10rad/s$), sendo assegurada a estabilidade do sistema.

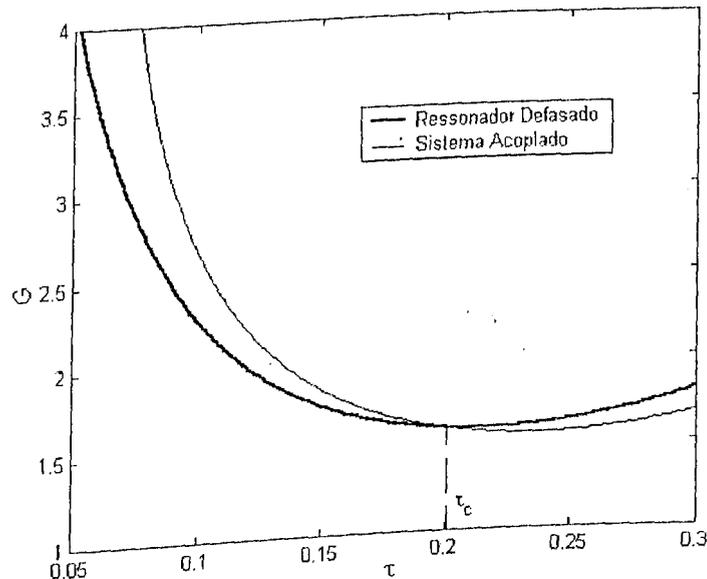


Figura 5.2- Gráfico G versus τ para o RD e para o sistema acoplado.

A fim de sintonizar o ADV com ressonador defasado para a frequência natural não amortecida do sistema primário, calculam-se os parâmetros do RD de acordo com as equações (3.11) e (3.13), obtendo-se:

$$G = 9,558N/m \quad (5.4a)$$

$$\tau = 0,021s \quad (5.4b)$$

A resposta em frequência do sistema com ressonador defasado é a mostrada na Figura 5.3, confrontada com as FRFs apresentadas anteriormente na Figura 5.1. Note-se que com a sintonização do ressonador (sem modificação dos parâmetros físicos), o pico de ressonância foi substituída por uma anti-ressonância. É importante observar, contudo, que similarmente ao que se observa no caso de ADVs passivos, a introdução do ressonador provocou o surgimento de dois outros picos de ressonância, um de cada lado da anti-ressonância. Em consequência, é estreita a banda de frequências na qual a redução de amplitudes de vibração é obtida (delimitada pelos pontos A e B indicados na Figura 5.3).

Esta observação confirma o interesse de aumentar o amortecimento efetivo do ADV, mediante o posicionamento conveniente de seus polos no plano complexo, utilizando o conceito do RD com amortecimento adicionado pela realimentação, introduzido na Seção 3.4. Esta estratégia pode ampliar a banda operacional do ressonador, conforme será demonstrado mais adiante.

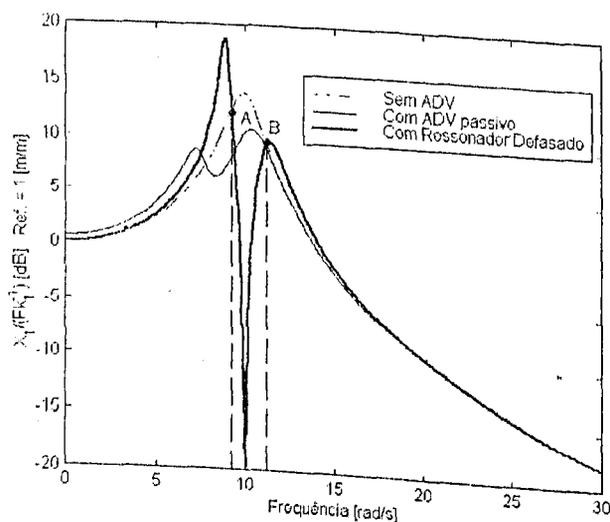


Figura 5.3- FRFs dos sistemas sem ADV, com ADV passivo e com RD.

A Figura 5.4 mostra as curvas de resposta em frequência da massa do ADV para os casos de ADV passivo e ADV com ressonador defasado, podendo-se observar que, para a frequência de sintonização utilizada, a massa do ADV com ressonador em funcionamento vibra com amplitude maior que a atingida com o ADV passivo.

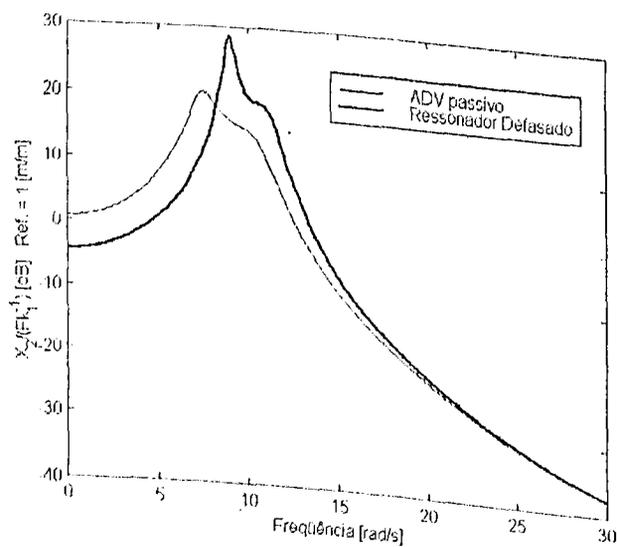


Figura 5.4- Resposta em frequência do ADV.

5.2.2 Ressonador defasado sem amortecimento adicionado pela realimentação - Análise no domínio do tempo

Nesta seção é apresentada uma simulação numérica realizada com o objetivo de ilustrar a possibilidade de sintonização automática do RD mediante a aquisição de sinais de respostas vibratórias em tempo real. A Figura 5.5 mostra o diagrama de blocos elaborado no ambiente SIMULINKTM. O cálculo de G e τ está incluído no modelo, dentro do bloco "Ressonador". Este bloco é alimentado pelo sinal de deslocamento da massa reativa e pelo sinal da frequência de excitação, dando como resultado a força de controle $u = Gx_2(t - \tau)$.

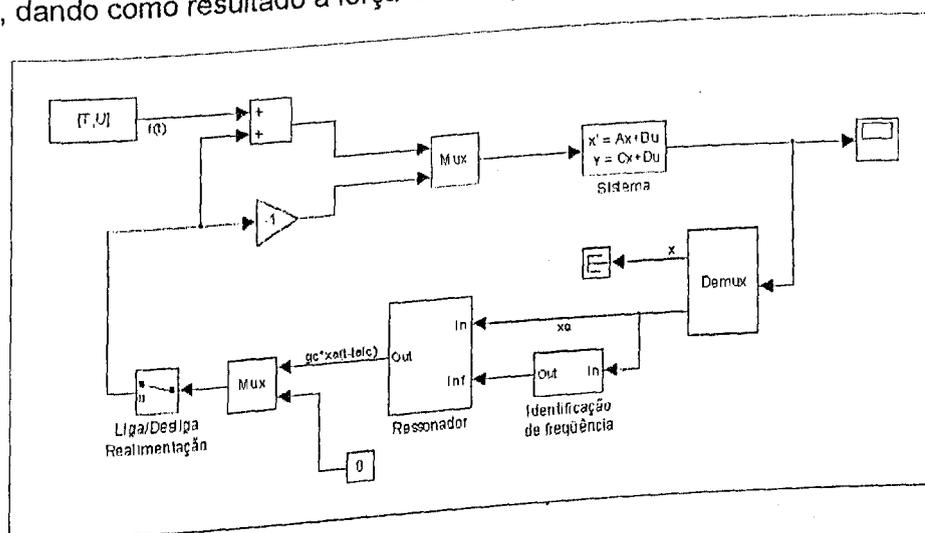


Figura 5.5- Modelo SIMULINKTM para simulação do sistema primário com Ressonador Defasado.

A frequência de excitação é obtida através do bloco "Identificação de frequência" onde se calcula o número de mudanças de sinal da resposta em deslocamento da massa reativa em um determinado intervalo de tempo. Calcula-se então o período do movimento, e posteriormente a frequência com que o sistema é excitado em regime permanente.

É imposto um critério de convergência para estimação da frequência de excitação, de modo que o ressonador só comece a operar quando este critério for satisfeito. Isto ocorre quando o sistema está operando em regime harmônico permanente.

É adotada uma excitação harmônica de frequência $12,5 \text{ rad/s}$ ($1,99 \text{ Hz}$), e amplitude $F = 1 \text{ N}$, e um tempo de simulação de 30 s . O deslocamento do sistema primário é mostrado na Figura 5.6.

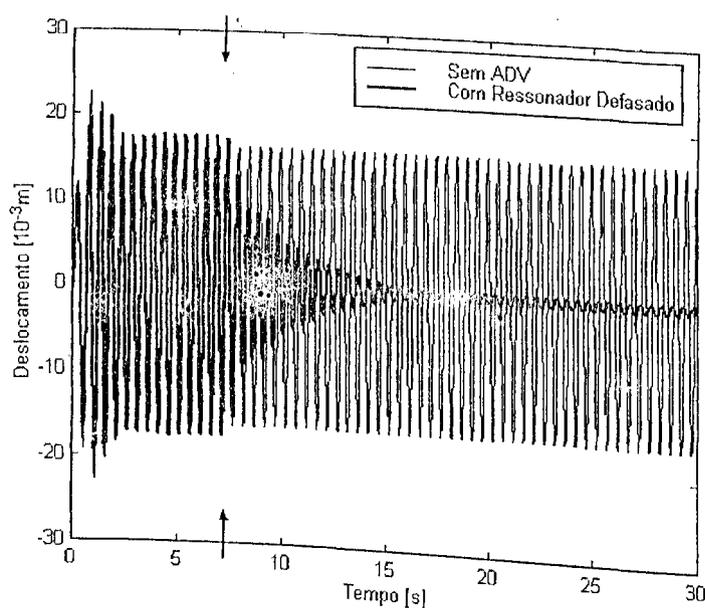


Figura 5.6- Deslocamento do sistema primário com Ressonador Defasado.

A frequência de excitação é identificada em $t = 7,22s$, com o valor de $12,483rad/s$. A partir deste instante, indicado por setas na Figura 5.6, o ressonador passa a funcionar com os parâmetros calculados de acordo com o valor identificado da frequência de excitação. O critério de convergência para a frequência de excitação foi relaxado para que se pudesse observar melhor a influência do ressonador, mostrando alguns ciclos de oscilação do sistema antes do controle começar a atuar, com amplitude média de $17,5 \times 10^{-3}m$. Após o ressonador começar a funcionar a amplitude de vibração do sistema diminui até atingir uma amplitude média residual de $0,68 \times 10^{-3}m$.

Com relação à existência de vibrações residuais após a atuação do ressonador, deve-se observar que o ressonador impõe uma anti-ressonância exatamente na frequência de excitação identificada. Como o valor desta frequência difere ligeiramente do valor exato da frequência de excitação, a sintonização do ressonador não é perfeita, havendo como resultado amplitude final não nula. Apesar disso, a amplitude final corresponde a 3,9% da amplitude de vibração do sistema com ADV puramente passivo. A Figura 5.7 mostra uma ampliação da FRF do sistema primário em torno da anti-ressonância, com o RD sintonizado para a frequência de excitação identificada. Nota-se claramente a existência de uma amplitude de vibração residual no valor exato da frequência de excitação.

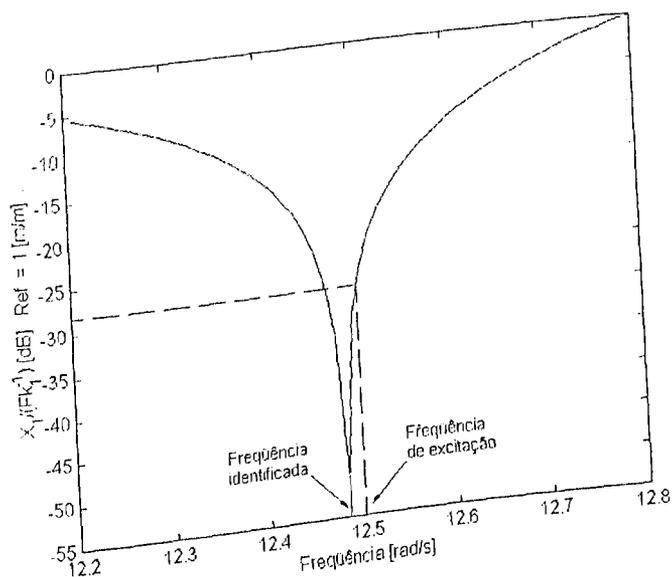


Figura 5.7- Resposta em frequência do sistema primário com RD sintonizado para a frequência identificada.

Levando em conta o fato que, em aplicações práticas, a detecção da frequência de excitação é algo delicado, estando sujeita a imprecisões, a questão que se põe é a influência dos erros de identificação da frequência na eficiência do ressonador. Os resultados apresentados na Figura 5.8 permitem avaliar a sensibilidade do ressonador sem amortecimento adicionado pela realimentação em relação a erros de identificação da frequência.

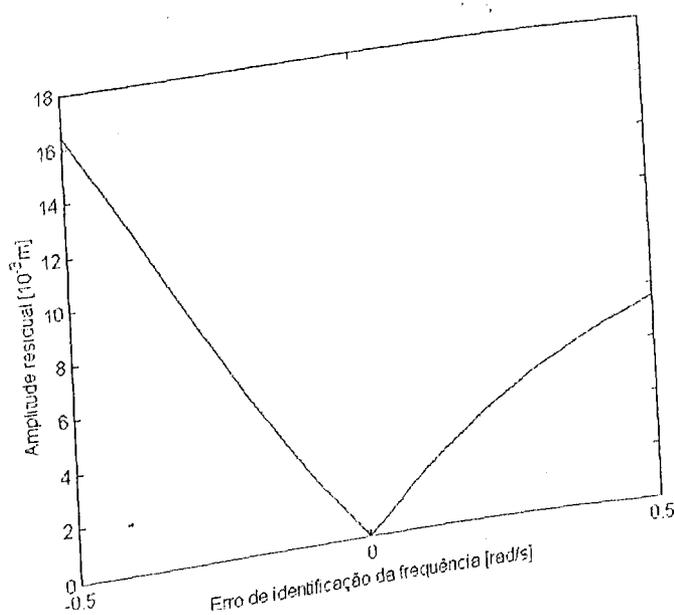


Figura 5.8- Amplitude de vibração residual devida a erro de identificação da frequência.

A Figura 5.9 mostra o deslocamento da massa reativa durante a simulação. As setas indicam o instante em que o ressonador é acionado. Nota-se que a amplitude do deslocamento da massa reativa aumenta quando o ressonador é acionado, o que está em acordo com as FRFs do ADV com e sem ressonador, mostradas na Figura 5.4.

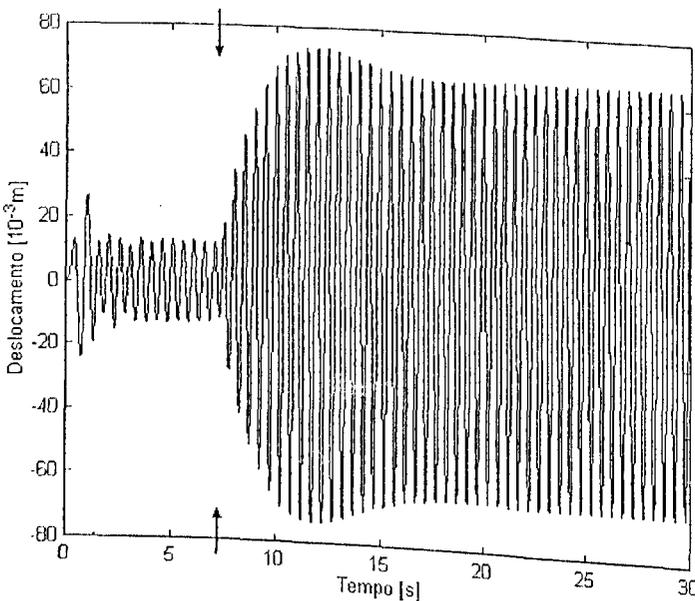


Figura 5.9- Deslocamento da massa reativa.

A força de controle $u(t)$ é mostrada na Figura 5.10.

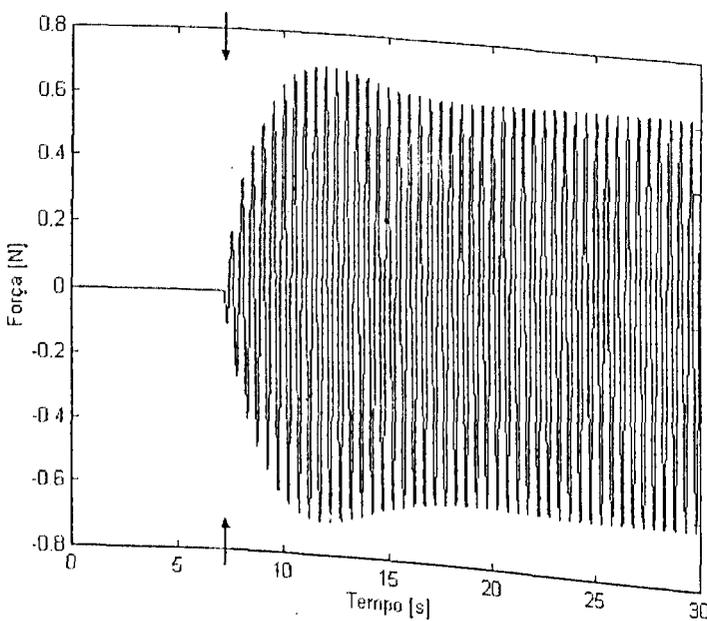


Figura 5.10- Força de controle.

5.2.3 Ressonador defasado com amortecimento adicionado pela realimentação

Conforme sugerido na Seção 3.4, a alocação dos polos do RD, considerado isoladamente, no semiplano complexo esquerdo possibilita adicionar amortecimento ao sistema. Para o posicionamento dos polos em um ponto genérico $s = a + bi$, os parâmetros do ressonador são dados pelas equações (3.25) e (3.26).

Neste ponto, é conveniente estabelecer analogia com os sistemas amortecidos passivos e relacionar as partes real e imaginária do polo complexo com o fator de amortecimento ζ_s e frequência natural ω_s . Para tanto parte-se da igualdade:

$$-\zeta\omega_s \pm i\omega_s\sqrt{1-\zeta^2} = a \pm bi \quad a \leq 0 \quad (5.5)$$

obtendo-se as relações:

$$a = -\zeta_s\omega_s \quad (5.6a)$$

$$b = \omega_s\sqrt{1-\zeta^2} \quad (5.6b)$$

$$\zeta_s = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (5.6c)$$

$$\omega_s = \sqrt{a^2+b^2} \quad (5.6d)$$

Tomando o mesmo sistema usado nas simulações com RD sem amortecimento adicionado pela realimentação ($m_1 = 1,0Kg$, $c_1 = 2Ns/m$, $k_1 = 100N/m$, $m_2 = 0,1Kg$, $c_2 = 0,2$, $k_2 = 6,4N/m$), calculam-se os parâmetros G e τ que dão a sintonização do ressonador para a frequência natural do sistema primário ($\Omega = \omega_1$). Têm-se como resultados:

$$G = 4,118N/m \quad (5.7a)$$

$$\tau = 0,051s \quad (5.7b)$$

Visando caracterizar o efeito do posicionamento dos polos do ressonador no semiplano complexo esquerdo, mantido o valor de $\Omega = \omega_1$, o fator de amortecimento ζ é variado e, para cada valor, as partes real e imaginária dos polos do ressonador são calculadas de acordo com (5.6a) e (5.6b) e os parâmetros G e τ são computados utilizando (3.25) e (3.26). Os valores obtidos são apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3- Parâmetros do RD obtidos com a variação de ζ .

ζ	a	b	G [N/m]	τ [s]
0,00	0,00	10,00	4,118	0,051
0,10	-1,00	9,950	1,915	0,631
0,20	-2,00	9,798	1,164	0,585
0,50	-5,00	8,660	0,472	0,537

As curvas de resposta em frequência da massa principal, obtidas para os diferentes valores do fator de amortecimento são confrontadas na Figura 5.11. Pode-se verificar que o amortecimento adicionado pela alocação dos polos no semiplano complexo esquerdo pode proporcionar, similarmente ao que ocorre no caso de ADVs passivos, maior redução das amplitudes em uma banda de frequências mais ampla.

Esta atenuação das amplitudes da resposta do sistema primário, e o arredondamento da anti-ressonância têm implicação direta na questão da sintonização imperfeita do ressonador, discutida na seção anterior. O arredondamento da anti-ressonância eleva as amplitudes de resposta em suas proximidades, e portanto aumenta o nível de vibração residual nesta região. No entanto, a atenuação das amplitudes de ressonância, proporcionada pelo amortecimento adicionado pela realimentação, diminui o nível de vibração residual para o caso em que a frequência identificada está fora da banda operacional do RD sem amortecimento adicionado pela realimentação.

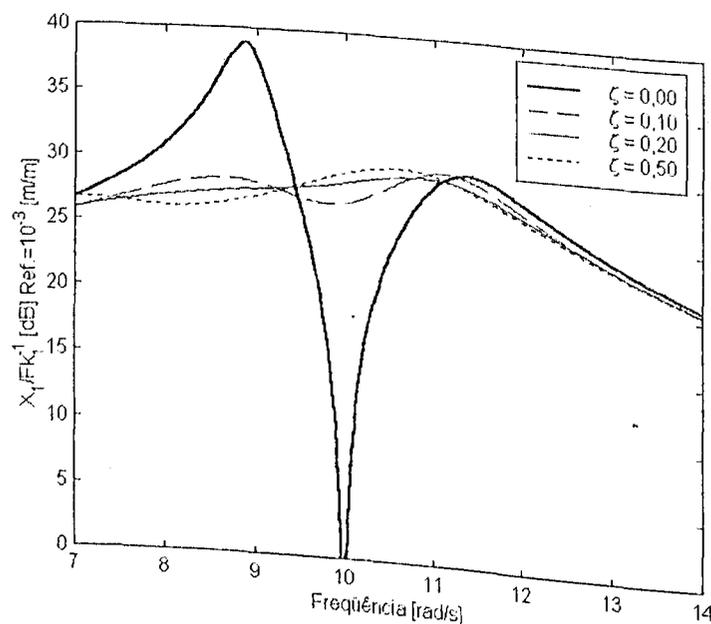


Figura 5.11- Resposta em frequência do sistema primário para vários valores de ζ .

5.2.4 Ressonador defasado aplicado a sistemas primários de vários graus de liberdade

Para avaliar a aplicação do ressonador defasado a sistemas primários de vários graus de liberdade, modelou-se uma viga bi-apoiada por elementos finitos, tal como mostrado na Figura 5.12, com as seguintes características:

- 20 elementos de viga bi-dimensional com 21 nós e 3 graus de liberdade por nó (u, v, θ);
- área da seção transversal: $A = 4,172 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- momento de inércia: $I = 4,519 \times 10^{-9} \text{ m}^4$
- comprimento: $\ell = 0,763 \text{ m}$
- densidade do material: $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$
- módulo de elasticidade do material: $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

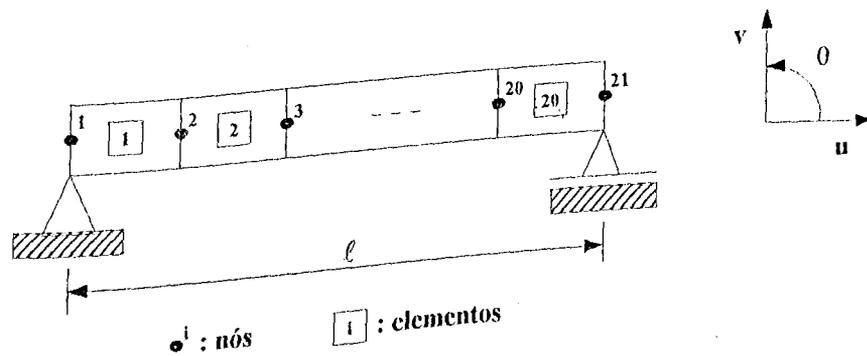


Figura 5.12- Modelo de elementos finitos da viga bi-apoiada.

Foram obtidas as matrizes de massa $[M]$ e rigidez $[K]$ da viga, a partir das quais foram calculadas a matriz modal do sistema $[Y]$, as frequências naturais, e os valores de massa e rigidez efetivas para cada modo. A Tabela 5.4 mostra, para os três primeiros modos da viga, os valores de frequência, massa e rigidez efetivas, correspondentes aos gdl v nos nós 15, 16 e 17.

Tabela 5.4- Frequências naturais, massa e rigidez efetivas para os três primeiros modos da viga.

Modo	Frequência Natural [Hz]	M_{ef} [Kg]			K_{ef} 10^6 N/m		
		gdl 15 (v)	gdl 16 (v)	gdl 17 (v)	gdl 15 (v)	gdl 16 (v)	gdl 17 (v)
1	46,071	1,897	2,483	3,594	0,159	0,208	0,301
2	184,23	1,374	1,242	1,374	1,840	1,665	1,840
3	414,35	13,021	2,487	1,375	88,251	16,854	9,317

Observa-se que há uma menor variação entre os valores de massa efetiva para o gdl 16 (y). Como a razão de massas é a relação entre a massa do ADV, que é fixa, e a massa efetiva, o desvio no valor da razão de massas também é menor para o nó 16. Isto faz deste ponto a melhor posição dentre as três para acoplamento de um ADV que possa ser sintonizado para os três primeiros modos da viga, individualmente.

Foi escolhido portanto um ADV de massa $m_2 = 0,2Kg$ que dá razões de massa de 0,081, 0,161, 0,080 para os três primeiros modos respectivamente. As constantes de rigidez e amortecimento adotadas para o ADV são $k_2 = 10000N/m$, e $c_2 = 5,0Ns/m$. Assim, o ADV está sintonizado para a frequência de 35,59Hz, abaixo da primeira frequência natural da viga, e tem um fator de amortecimento $\zeta_2 = 0,056$. Foram então calculados os valores de G e τ que dão a sintonização para os três primeiros modos da viga. Os resultados são mostrados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5- Valores de G e τ para sintonização nas três primeiras frequências naturais da viga.

Modo	G [N/m]	τ [s]
1	6912,1	$728,76 \times 10^{-6}$
2	$0,258 \times 10^6$	$19,377 \times 10^{-6}$
3	$1,346 \times 10^6$	$3,716 \times 10^{-6}$

Os resultados obtidos indicam que a sintonização para frequências mais altas implica em altos ganhos de realimentação G e baixos valores de τ . Isto pode trazer dificuldades para a implementação prática deste tipo de ADV pois ganhos elevados levam a altos valores da força de controle que podem saturar a capacidade do atuador. Por outro lado, os baixos valores de τ exigem maior resolução temporal do sistema de aquisição de sinais.

As respostas em frequência do deslocamento transversal da viga no nó 16 são mostradas nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15 com ampliação em torno dos três primeiros modos, respectivamente. Apresentam-se as curvas de resposta correspondentes aos casos do sistema primário sem ADV, com ADV atuando passivamente e com ressonador defasado sintonizado para as três primeiras frequências naturais da viga.

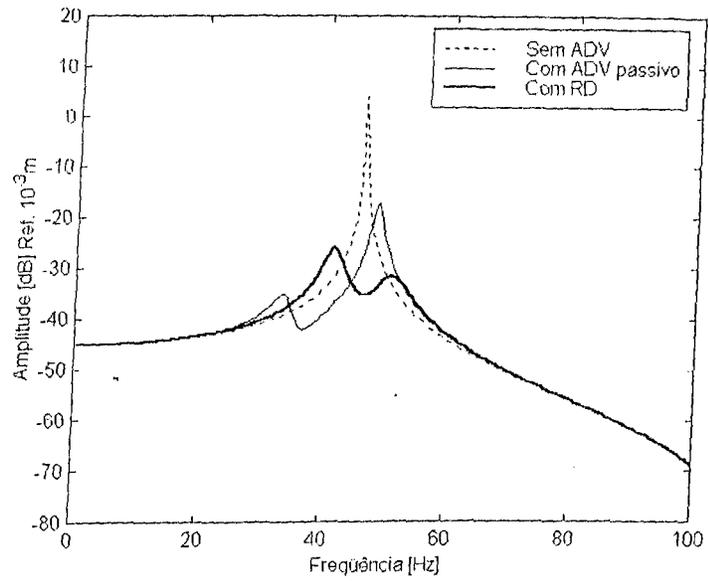


Figura 5.13- Amplitudes de resposta da viga nas proximidades do primeiro modo de vibração.

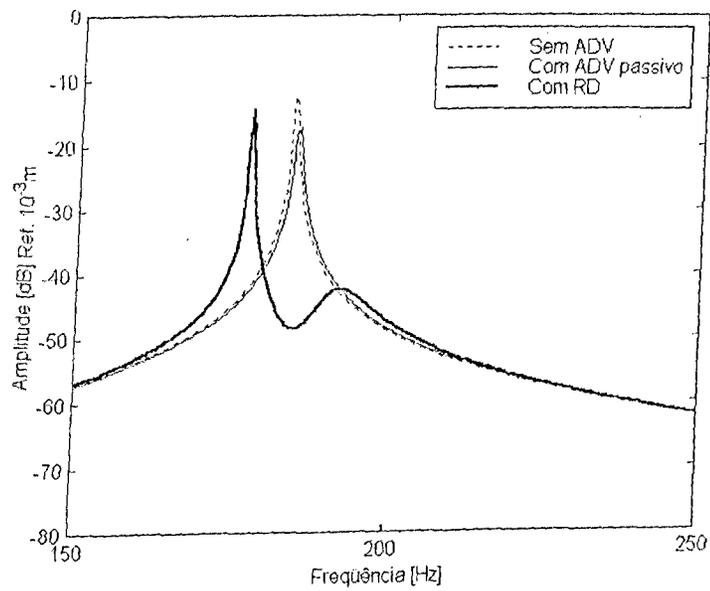


Figura 5.14- Amplitudes de resposta da viga nas proximidades do segundo modo de vibração.

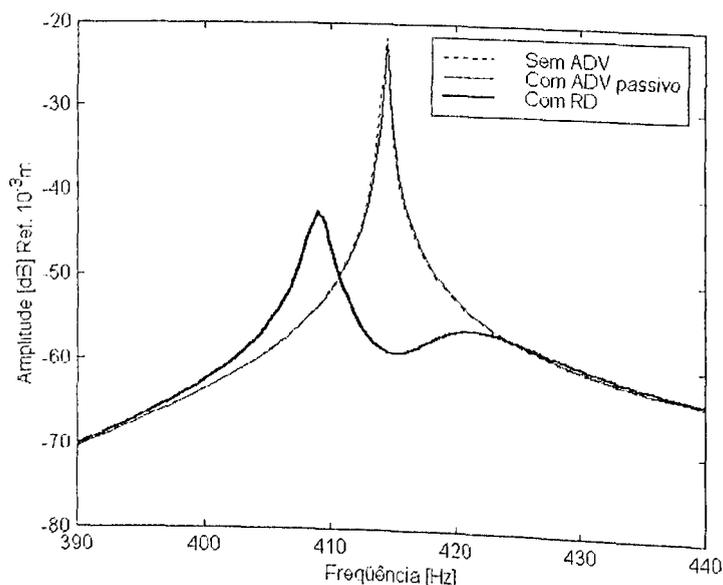


Figura 5.15- Amplitudes de resposta da viga nas proximidades do terceiro modo de vibração.

Nota-se pelas figuras acima que com o RD consegue-se a sintonização para os três primeiros modos da viga sem variação dos parâmetros físicos do ADV.

5.3 Simulações com ADV Ativo com Realimentação em Deslocamento e Velocidade

5.3.1 Análise no domínio da frequência

O ADV ativo proposto no Capítulo 3, com realimentação em medidas relativas de deslocamento, velocidade e aceleração, revelou a importante característica de que os ganhos de realimentação em deslocamento (γ) e velocidade (β) intervêm respectivamente como rigidez e amortecimento passivos adicionados ao ADV. Já o ganho de realimentação em aceleração (α) não tem esta característica com relação à massa do ADV. Sabendo que para sintonizar o ADV e regular o seu fator de amortecimento bastam as variações de rigidez e amortecimento, fizeram-se simulações com este ADV apenas variando os ganhos β e γ , mantendo-se $\alpha = 0$. Neste caso a força de controle é dada por:

$$u(t) = -[\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \gamma(x_2 - x_1)]$$

Inicialmente foi considerado o acoplamento do ADV ativo a um sistema primário de 1 grau de liberdade. Admite-se como sistema primário o conjunto massa-mola de massa

$m_1 = 1,0Kg$ e constante de rigidez $k_1 = 100N/m$. A freqüência natural deste sistema é portanto de $\omega_1 = 10rad/s$. Acopla-se a este um ADV do tipo massa-mola-amortecedor, com massa $m_2 = 0,1Kg$, constante de rigidez $k_2 = 8,265N/m$, e constante de amortecimento $c_2 = 0,042Ns/m$. Assim, se o ADV atuar passivamente, terá sintonização e amortecimento ótimos, de acordo com a teoria de Den Hartog, apresentada na Seção 2.3.

Supondo que o sistema primário seja excitado a uma freqüência $\Omega = 12,5rad/s$, observa-se pela Figura 5.16 que o ADV perde sua eficiência e o sistema acoplado passa a vibrar com amplitude ligeiramente maior que o sistema sem ADV. A sintonização do ADV ativo é feita para amplitude ligeiramente maior que o sistema sem ADV. A sintonização do ADV ativo é feita para a freqüência de excitação (Ω), e um fator de amortecimento $\zeta_2 = 0,05$ é imposto para ADV ativo considerado isoladamente. Calculam-se então os valores de γ e β para esta situação:

$$\gamma = \Omega^2 m_2 - k_2 = 7,361N/m \quad (5.8)$$

$$\beta = 2\zeta_2 m_2 \Omega - c_2 = -0,211Ns/m \quad (5.9)$$

Os gráficos de resposta em freqüência para o sistema primário sem ADV, com ADV passivo, e com ADV ativo são mostrados na Figura 5.16.

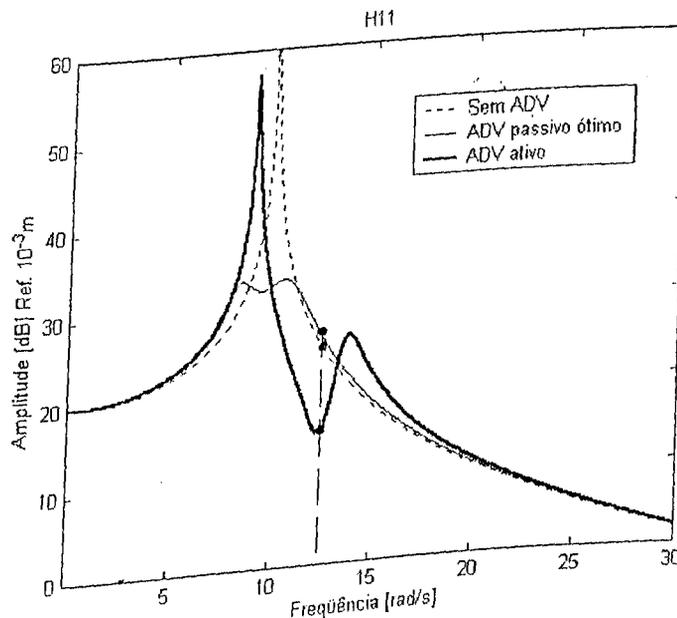


Figura 5.16- Amplitudes de resposta do sistema primário.

Para se obter a sintonização do ADV ativo que dá um comportamento equivalente ao do ADV passivo ótimo de Den Hartog, basta calcular os ganhos β e γ de acordo com as equações (3.42) e (3.43).

Como um segundo exemplo numérico, considere-se o sistema primário adotado para as simulações anteriores do ADV ativo, mas sem amortecimento ($m_1 = 1Kg$, $c_1 = 0$, $k_1 = 100N/m$, $\omega_1 = 10rad/s$) e um ADV passivo não amortecido, de razão de massas $\mu = 0,1$, e sintonizado para a frequência natural do sistema primário ($\omega_2 = \omega_1$, $m_2 = 0,1Kg$, $c_2 = 0$, $k_2 = 10N/m$), obtêm-se o fator de sintonização e o amortecimento ótimos dados por:

$$f_{ót} = \frac{1}{1 + \mu} = 0,909 \quad (5.10)$$

$$\zeta_{ót} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} = 0,168 \quad (5.11)$$

e finalmente os ganhos ótimos:

$$\gamma_{ót} = (0,909 \times 10)^2 \cdot 0,1 - 10 = -1,737 [N/m] \quad (5.12)$$

$$\beta_{ót} = 2 \times 0,168 \times 0,1 \times 10 = 0,336 [Ns/m] \quad (5.13)$$

A Figura 5.17 mostra as respostas em frequência do sistema primário sem ADV, com o ADV passivo e com o ADV ativo ótimo.

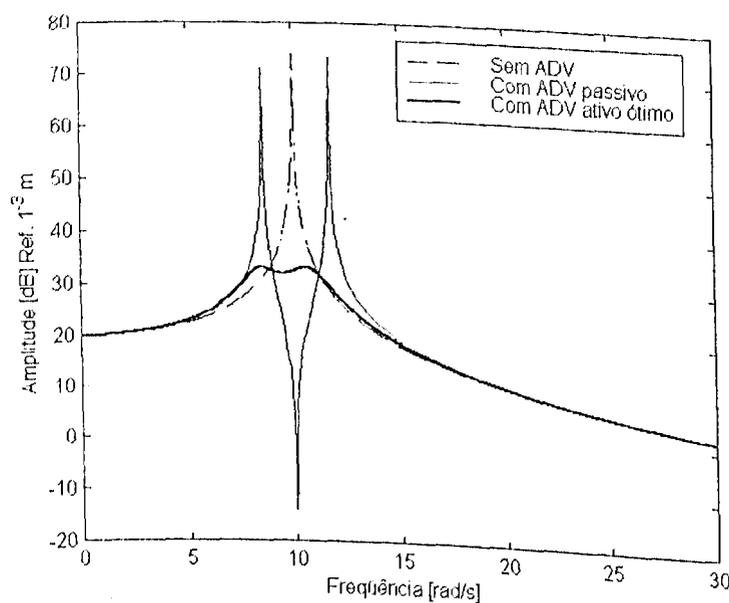


Figura 5.17- Amplitudes de resposta do sistema primário.

5.3.2 Análise no domínio do tempo

Para ilustrar o comportamento do sistema no domínio do tempo foi elaborado o modelo SIMULINKTM mostrado na Figura 5.18. O modelo é o mesmo usado para o ressonador defasado ($m_1 = 1kg$, $k_1 = 100N/m$, $c_1 = 2Ns/m$, $m_2 = 0,1Kg$, $k_2 = 6,4N/m$, $c_2 = 0,2Ns/m$), sendo os cálculos de β e γ feitos no próprio modelo.

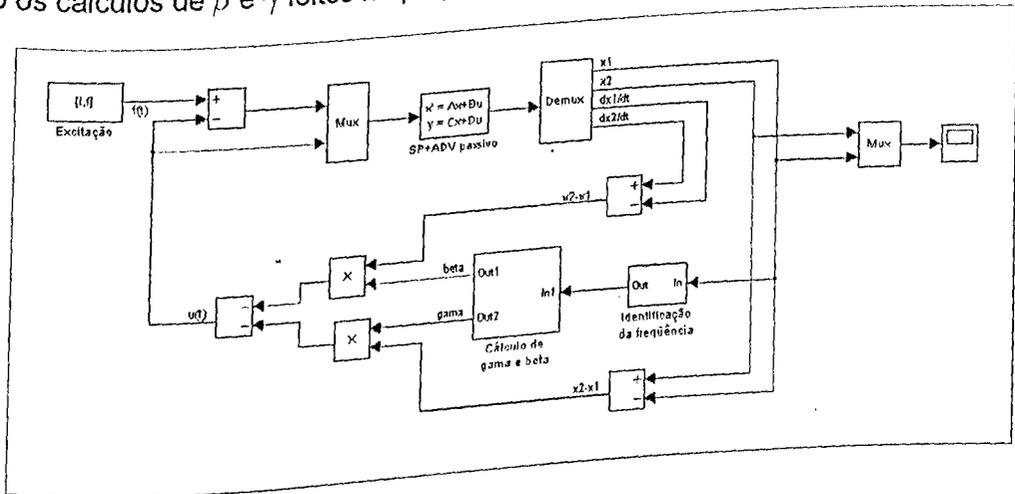


Figura 5.18- Modelo SIMULINKTM para simulação do sistema primário com ADV ativo.

Como parâmetros de simulação foram adotados uma excitação de frequência $\Omega = 12,5 rad/s$ e amplitude $F = 1N$, e tempo total de simulação de 30s. A Figura 5.19 mostra a resposta em deslocamento do sistema primário com ADV ativo. A frequência de excitação foi identificada em 7,44s, com o valor de 12,52Hz.

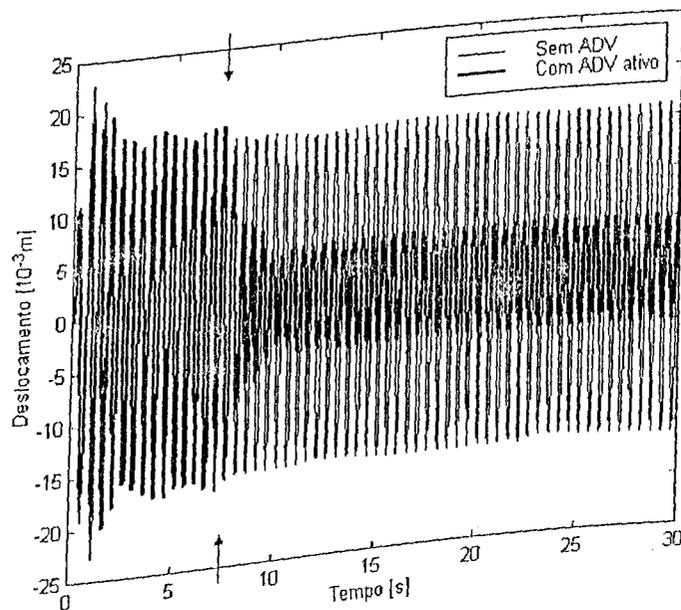


Figura 5.19- Deslocamento do sistema primário com ADV ativo ($\zeta = 0,05$).

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram respectivamente o deslocamento da massa reativa e a força de controle $u(t)$ durante a simulação.

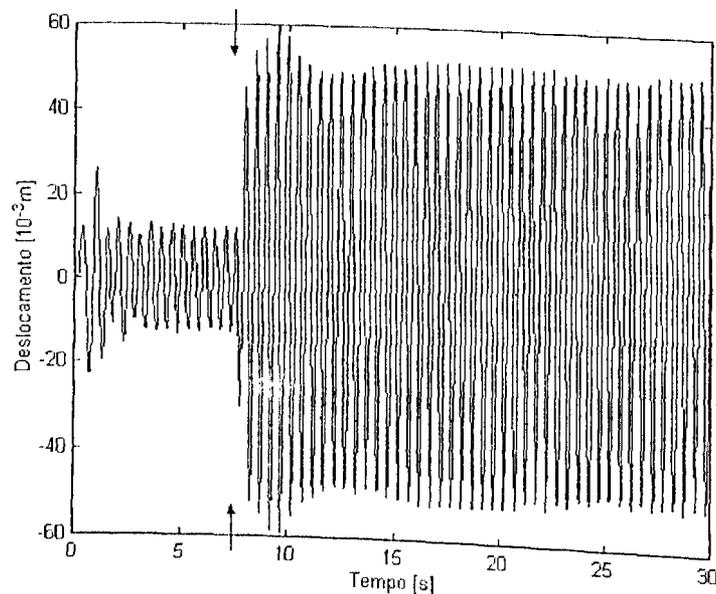


Figura 5.20- Deslocamento da massa reativa ($\zeta = 0,05$).

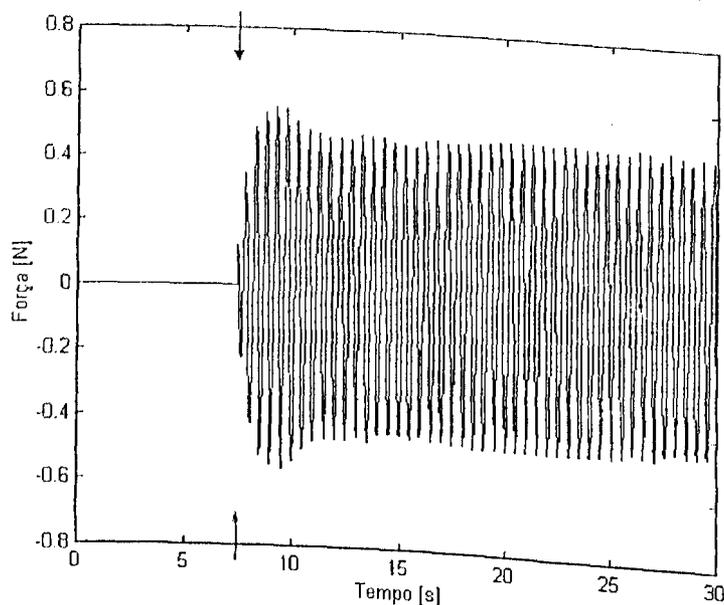


Figura 5.21- Força de controle ($\zeta = 0,05$).

Observa-se que houve uma redução na amplitude de resposta do sistema primário de $17,5 \times 10^{-3} [m]$ para $5 \times 10^{-3} [m]$. No entanto esta redução pode ser ainda maior se for imposto um fator de amortecimento nulo para o zero da função transferência, fazendo $\beta = -c_2$. Neste caso a amplitude final da resposta do sistema primário é de $0,1 \times 10^{-3} [m]$, como se pode

observar na Figura 5.22.

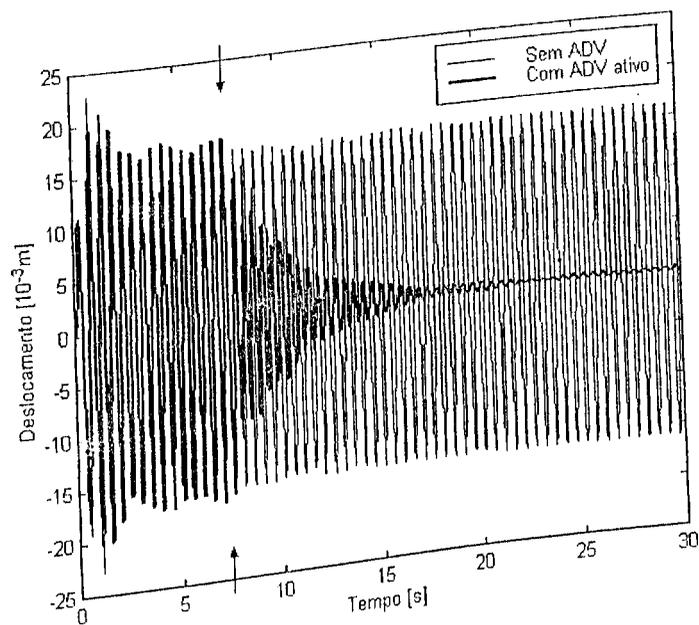


Figura 5.22- Deslocamento do sistema primário com ADV ativo ($\zeta = 0$).

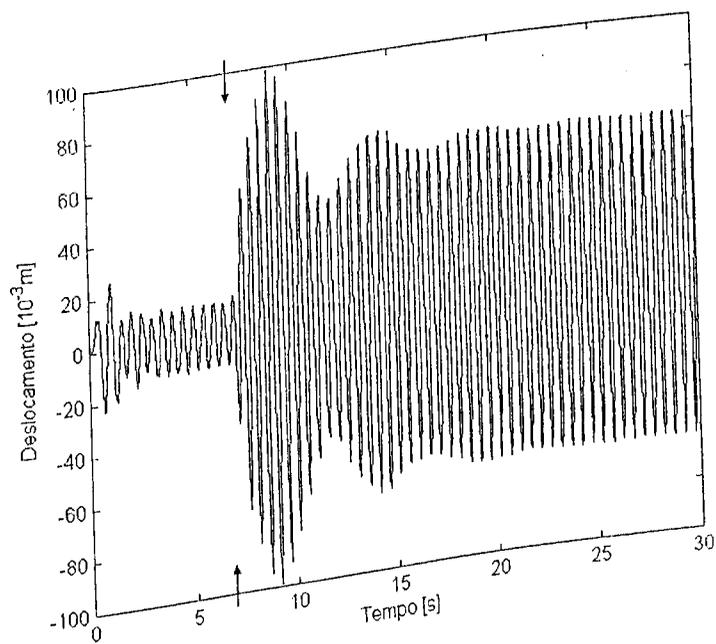


Figura 5.23- Deslocamento da massa reativa ($\zeta = 0$).

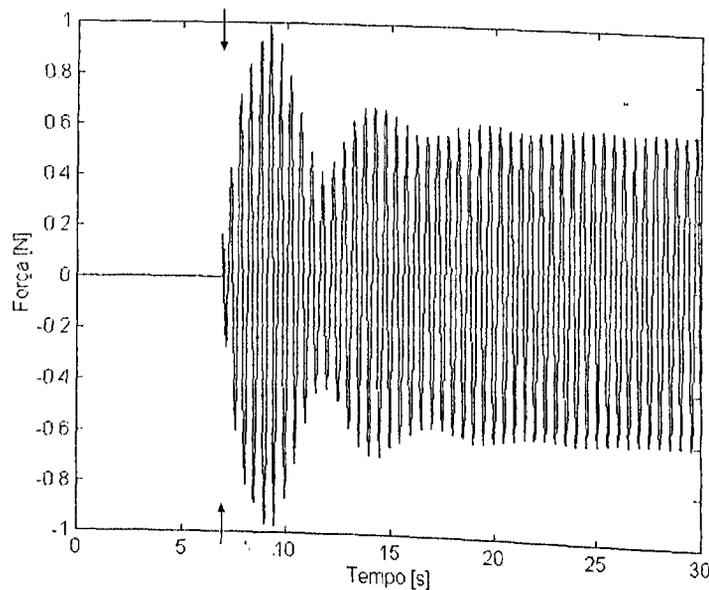


Figura 5.24- Força de controle ($\zeta = 0$).

5.3.3 Aplicação do ADV ativo a sistemas primários de vários graus de liberdade

Pretende-se ilustrar a utilização do ADV ativo ótimo para redução dos picos de ressonância de sistemas primários de vários graus de liberdade. Considera-se como sistema primário a viga da Figura 5.12 utilizada anteriormente para simulações com o ressonador defasado. Escolhendo o nó 16 como ponto de conexão do ADV, são adotados os seguintes valores para os parâmetros passivos: $m_2 = 0,2Kg$, $c_2 = 5Ns/m$, $k_2 = 10000N/m$. Desta forma, o ADV está sintonizado para a frequência de $35,59Hz$ e tem um fator de amortecimento $\zeta = 0,056$. Considerando os três primeiros modos da viga, para cada um deles há um valor de massa efetiva (Tabela 5.4) e uma razão de massas correspondente. Assim, para cada modo calculam-se os valores de sintonização e amortecimento ótimos ($f_{ót}$, $\zeta_{ót}$) e em seguida os valores dos ganhos de realimentação $\gamma_{ót}$ e $\beta_{ót}$. Os valores obtidos são mostrados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6- Parâmetros ótimos para o ADV ativo.

Modo	μ	$f_{ót}$	$\zeta_{ót}$	$\gamma_{ót}$ [N/m]	$\beta_{ót}$ [Ns/m]
1	0,081	0,925	0,155	4353,8	12,915
2	0,161	0,861	0,196	$0,189 \times 10^6$	85,945
3	0,080	0,926	0,155	$1,151 \times 10^6$	156,04

As amplitudes de resposta obtidas com o ADV ativo ótimo sintonizado para cada modo são apresentadas nas Figuras 5.25, 5.26 e 5.27.

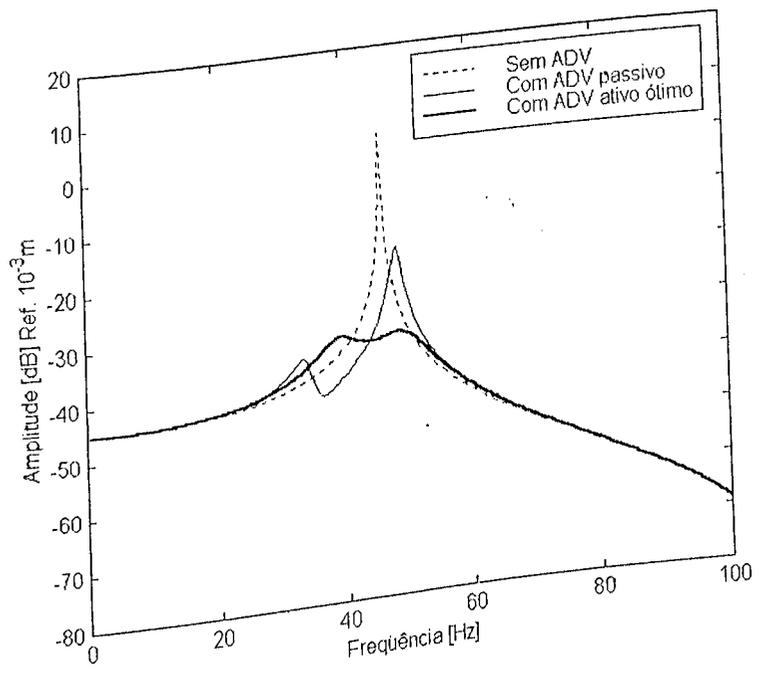


Figura 5.25- Amplitudes de resposta da viga nas proximidades do primeiro modo de vibração.

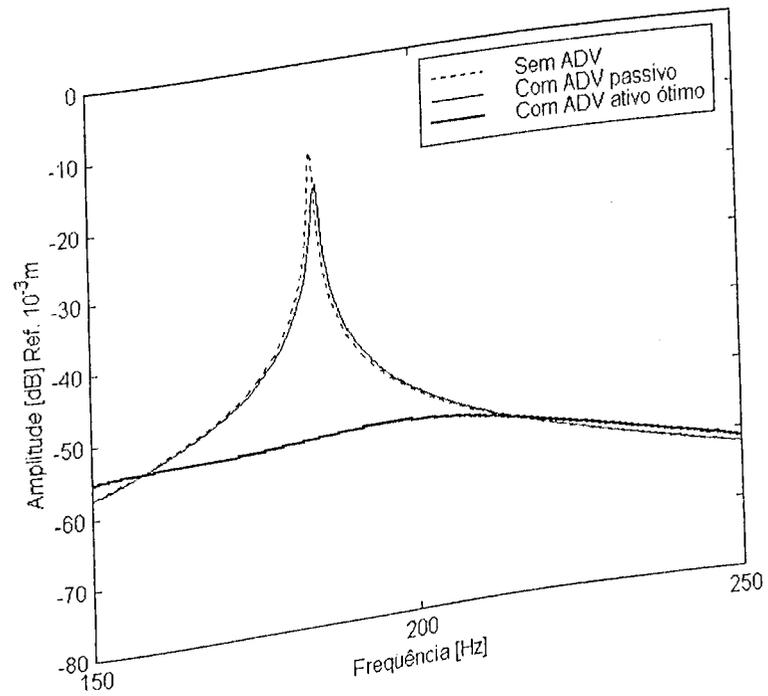


Figura 5.26- Amplitudes de resposta da viga nas proximidades do segundo modo de vibração.

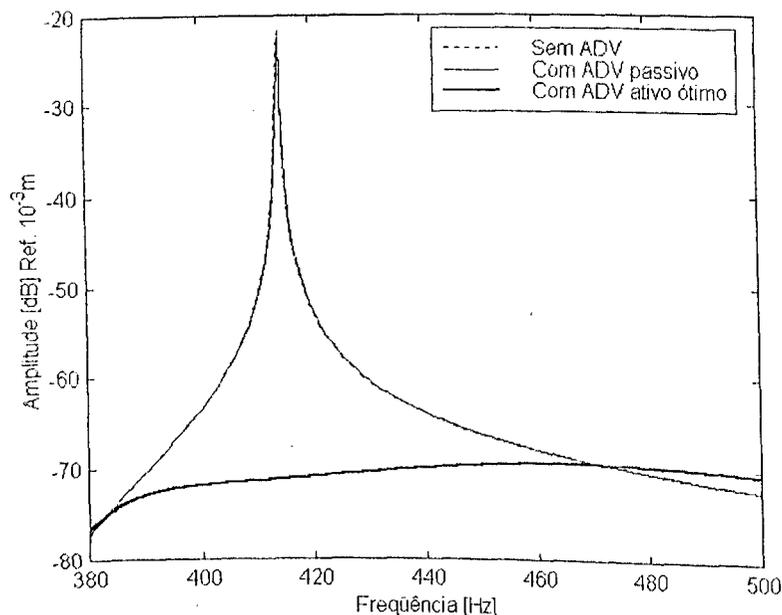


Figura 5.27- Amplitudes de resposta da viga nas proximidades do terceiro modo de vibração.

Observa-se uma redução nas amplitudes de vibração com a sintonização do ADV ativo ótimo para cada modo. No entanto, nota-se que os valores dos ganhos de realimentação $\gamma_{ót}$ e $\beta_{ót}$ para a sintonização com as frequências naturais mais altas do sistema primário são bastante altos. Estes ganhos levam a altas forças de controle, o que pode trazer dificuldades na implementação prática do ADV.

5.4 ADV ativo com controle ótimo

Seguindo o procedimento sugerido por Chang e Soong (1995), nesta Seção é ilustrado o uso de ADVs ativos associados à técnica de controle ótimo.

Considere-se o sistema primário de massa $m_1 = 1,0Kg$, rigidez $k_1 = 100N/m$ e constante de amortecimento $c_1 = 2Ns/m$. Acopla-se a este um ADV de massa $m_2 = 0,1Kg$, rigidez $k_2 = 6,4Nm/s$ e sem amortecimento. Obviamente o ADV passivo não está sintonizado para a frequência natural do sistema primário. Deseja-se obter um controlador ótimo que minimize as amplitudes de vibração do sistema primário, sem que no entanto se tenham grandes amplitudes de vibração do sistema secundário, e com baixo esforço de controle. Com base nestes requisitos, definindo o índice de desempenho dado por (3.55), e obedecendo as condições de controlabilidade e estabilidade do sistema expressas por (3.59), escolhem-se as seguintes matrizes de ponderação:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$r = \frac{1}{100} \quad (5.15)$$

Após montar as matrizes de estado do sistema de acordo com (3.53), obtém-se a matriz $[P]$ que obedece a equação de Riccati (3.57). Por fim calcula-se o vetor de ganhos de realimentação $[k_g] = [B]^T [P] r^{-1}$:

$$[k_g] = [-57,248 \quad 0 \quad -4,482 \quad 0,856] \quad (5.16)$$

sendo a força de controle dada por:

$$u(t) = -[k_g] \{x\}$$

Foi criado um modelo no SIMULINKTM para simular o comportamento do sistema num período de 20s sob a ação de uma força periódica do tipo soma de harmônicos, dada por:

$$F(t) = 0,3 \text{sen}(10t) + 0,7 \text{sen}(20t) + 0,5 \text{sen}(30t) + 0,4 \text{sen}(40t) \quad [N] \quad (5.17)$$

A Figura 5.28 mostra o modelo SIMULINKTM. As respostas em deslocamento do sistema primário com o ADV agindo passivamente e com o ADV ativo com controlador ótimo são mostradas na Figura 5.29. Os deslocamentos relativos entre o sistema primário e o ADV são mostrados na Figura 5.30. Na Figura 5.31 é mostrada a força de controle durante o tempo de simulação.

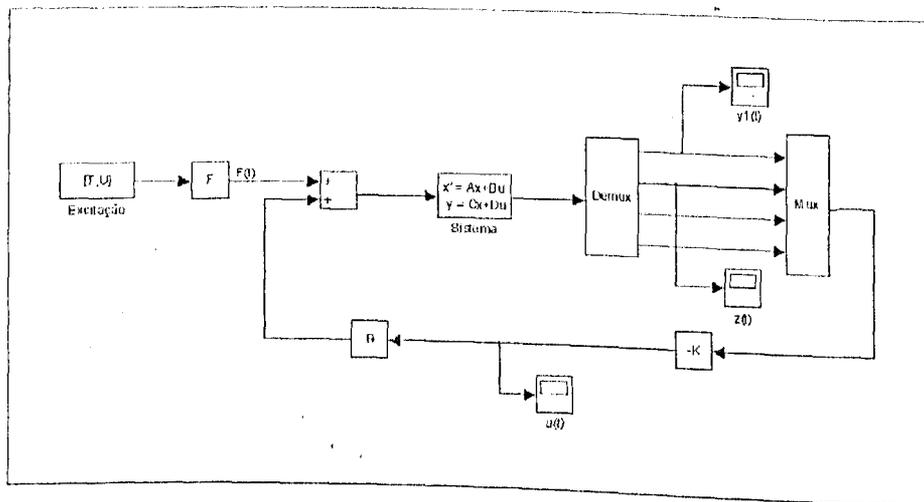


Figura 5.28- Modelo SIMULINKTM para simulação do sistema primário com ADV ativo com controle ótimo.

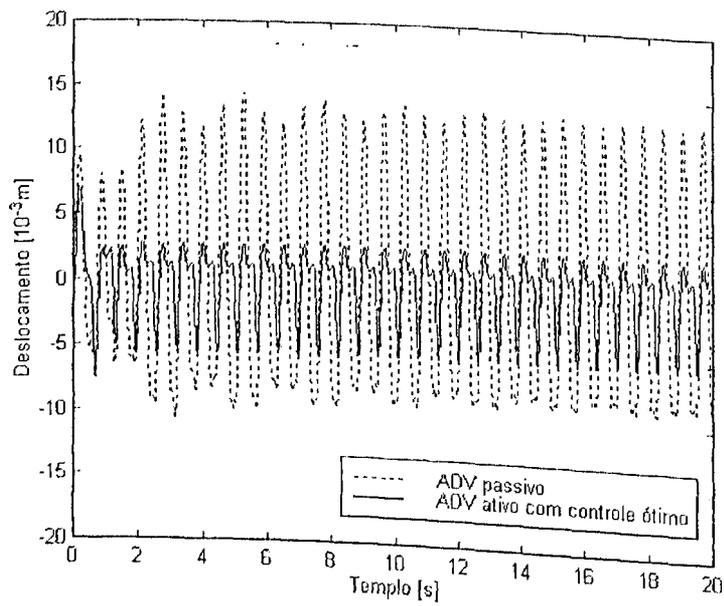


Figura 5.29- Respostas em deslocamento do sistema primário.

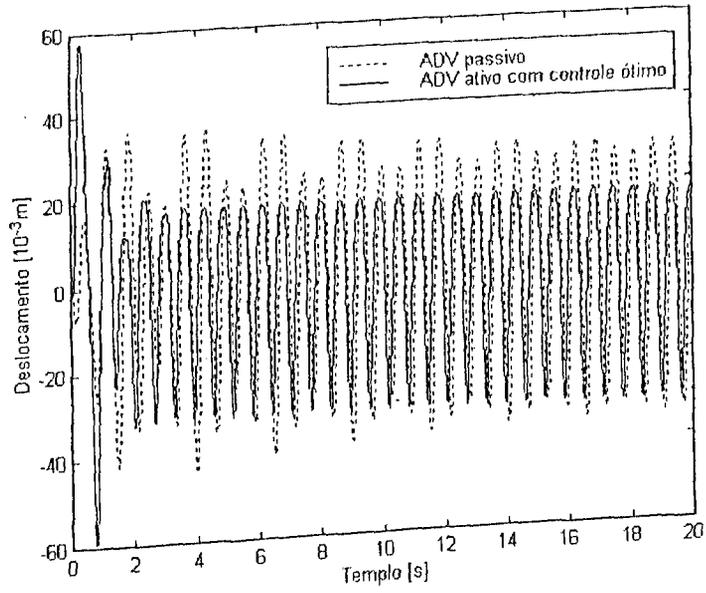


Figura 5.30- Deslocamento relativo entre sistema primário e ADV.

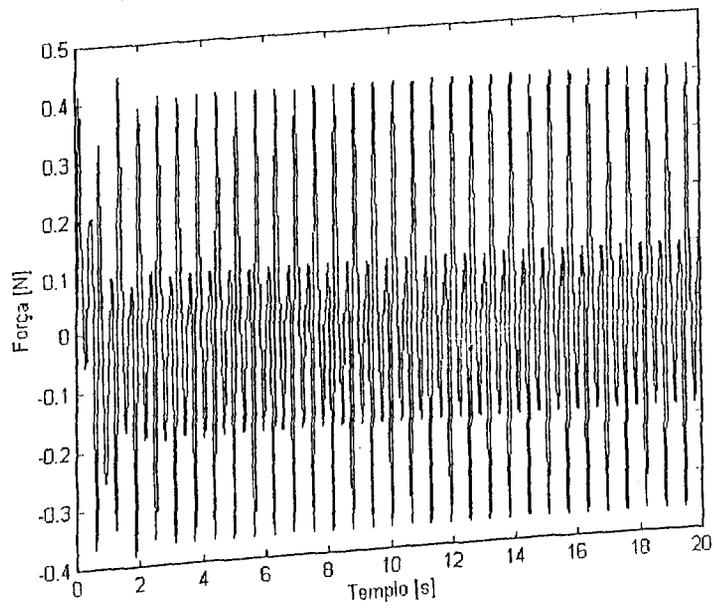


Figura 5.31- Força de controle para o ADV ativo com controle ótimo.

A fim de se avaliar a conveniência da utilização de ADVs ativos, com a colocação do atuador entre o sistema primário e o absorvedor, ao invés de colocá-lo diretamente no sistema primário, foram estudados os esforços de controle para as duas configurações mostradas na Figura 5.32.

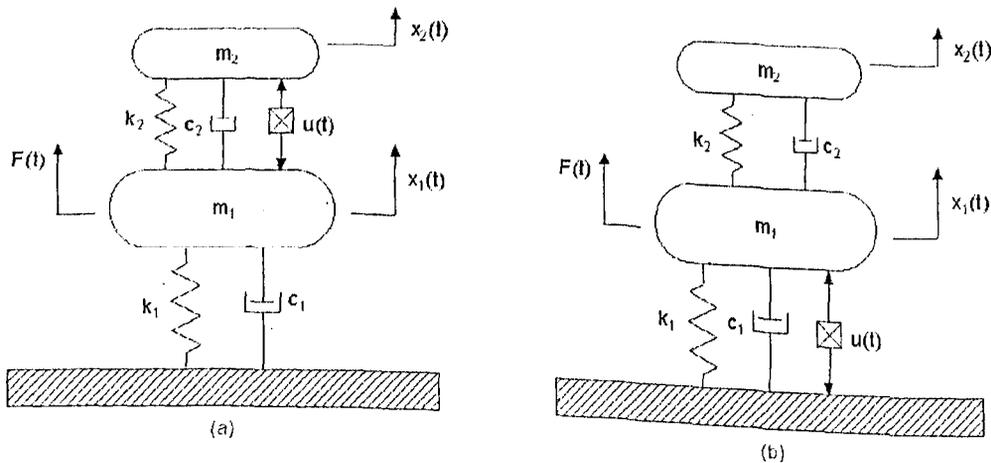


Figura 5.32- Configurações para estudo da força de controle: (a) com ADV ativo, (b) com atuador no sistema primário.

Admitindo os mesmos valores para os parâmetros do sistema primário e do ADV adotados anteriormente na simulação do ADV ativo anteriormente apresentado nesta seção, a matriz de estado $[B]$ fica diferente para a configuração (b):

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix}$$

Em consequência, as matrizes $[P]$ e $[k_g]$ também resultam diferentes para as duas configurações. Para a configuração (a) os valores são os mesmos obtidos na simulação anterior. Para o caso (b), a matriz de ganhos de realimentação fica:

$$[k_g] = \begin{bmatrix} -0,499 & 0 & -8,252 & -0,005 \end{bmatrix}$$

Os deslocamentos do sistema primário para as duas configurações são mostrados na Figura 5.33. Observa-se que a amplitude do deslocamento é praticamente a mesma para os dois casos. No entanto, observando os gráficos da Figura 5.34, que fornecem os históricos das forças de controle para as duas situações, nota-se que a força de controle assume menores amplitudes quando se utiliza a configuração (a) correspondente ao caso de ADV ativo.

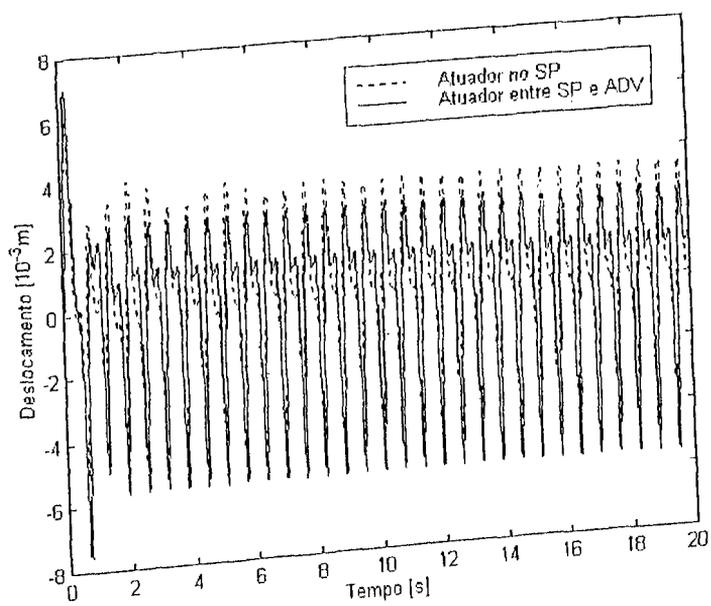


Figura 5.33- Deslocamento do sistema primário.

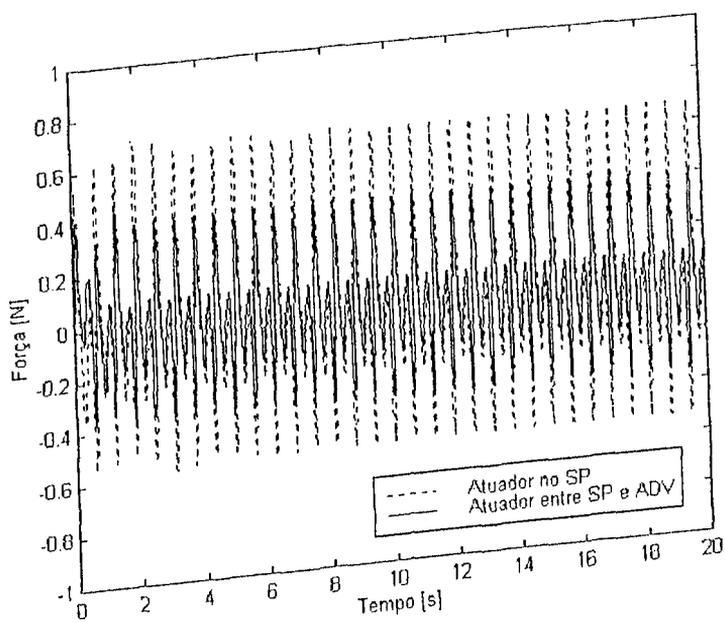


Figura 5.34- Força de controle.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

A teoria e as simulações numéricas desenvolvidas neste trabalho sugerem que os ADVs ativos e adaptativos podem ser convenientemente usados em aplicações práticas onde se deseja atenuar vibrações de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos harmônicos de frequência variável.

Em geral, os ADVs ativos, comparados aos ADVs passivos, apresentam a vantagem do aumento da banda operacional oferecendo a possibilidade de sintonização automática para a frequência de excitação. Os ADVs ativos podem ainda ser utilizados em aplicações onde é inviável a obtenção de elementos passivos com as propriedades necessárias para a correta sintonização do ADV. Por outro lado, estes ADVs apresentam o inconveniente de terem uma banda de estabilidade limitada, ao contrário dos ADVs passivos que são sempre estáveis.

Particularmente, o ADV com realimentação do sinal de deslocamento da massa reativa defasado no tempo (ressonador defasado) tem a vantagem de utilizar apenas uma medida na realimentação. No entanto, o processo de identificação da frequência de excitação, necessário para a sintonização do ADV, pode ter um alto custo e as imprecisões envolvidas neste processo geram vibrações residuais do sistema primário, não previstas pela hipótese de sintonização exata.

Outro inconveniente do ressonador é que sua aplicação se limita à sintonização para frequências superiores à frequência crítica, abaixo da qual o sistema é instável. A análise da estabilidade do ressonador defasado, aplicada a sistemas de vários graus de liberdade, tal como proposta neste trabalho, leva em consideração a predominância de apenas um modo. Assim a equação característica do sistema acoplado foi aproximada com base nesta hipótese. Deve-se no futuro fazer uma análise de estabilidade do sistema acoplado, considerando o efeito dos demais modos. Outra proposta para trabalhos futuros é a escolha de critérios para a otimização do ressonador, definindo funções-objetivo que minimizam as amplitudes de vibração na banda de interesse.

O ADV ativo proposto com realimentação em deslocamento, velocidade e aceleração relativos tem a vantagem de uma banda de estabilidade comparável à do ADV passivo, além da simplicidade da interpretação do efeito dos ganhos de realimentação como rigidez e amortecimento adicionados aos parâmetros passivos. Entretanto este ADV supõe a possibilidade de obtenção de três medidas relativas, para o que, dependendo da aplicação,

são necessários seis canais de medição para as medidas absolutas e posterior cálculo das medidas relativas, ou dois canais de medição de aceleração e integração no tempo. Foi visto que sua aplicação para sintonização fixa e ótima, para sistemas de um ou vários graus de liberdade segue o procedimento que se aplica aos ADVs passivos. Porém, os efeitos do ganho de realimentação em aceleração podem ser melhor estudados, objetivando a obtenção de um controle sobre a razão de massas. Este efeito pode ser particularmente interessante na sintonização ótima para sistemas de vários graus de liberdade.

Sobre o ADV ativo com controle ótimo, verificou-se a viabilidade de sua aplicação a sistemas onde a excitação não é harmônica, e quando se deseja além da atenuação das vibrações do sistema primário, minimizar a oscilação da massa do ADV e a força de controle. As análises de controlabilidade e estabilidade dos sistemas com este tipo de ADV são simples e diretas, baseadas no cálculo de postos de matrizes. A validação experimental deste ADV é proposta como atividade a ser desenvolvida em trabalhos futuros.

Os ADVs adaptativos se revelaram uma técnica promissora no controle de vibrações. Não apresentam o problema de estabilidade desde que, dado um processo quase-estático de variação dos parâmetros ajustáveis, a cada instante podem ser analisados como ADVs passivos. Sua aplicação é limitada apenas pelas restrições nos valores que os parâmetros ajustáveis podem efetivamente assumir. Contudo o processo de adaptação nos casos em que deve ser efetuado rapidamente, num período de tempo comparado ao período da oscilação, o sistema mecânico deve ser modelado e analisado como um sistema de parâmetros variáveis. Conforme ressaltado por Sun *et al.* (1995), este é um problema que merece estudos mais aprofundados.

O ADV adaptativo tipo corda vibrante encontra aplicações a sistemas de pequeno porte. Mesmo com a adição da massa concentrada, a massa total efetiva deste tipo de ADV é pequena e depende da posição da massa concentrada.

Ao contrário do ADV tipo corda vibrante, o ADV adaptativo pendular tem aplicação a sistemas de grande porte, principalmente de construção civil, tais como prédios e torres esbeltas, devido à sua baixa frequência natural.

Devido à baixa sensibilidade da frequência natural do ADV tipo viga com atuadores piezelétricos em relação à tensão elétrica aplicada nos polos dos atuadores, este ADV se limita a aplicações em que se deseja a sintonização dentro de uma banda não muito larga. No entanto esta sensibilidade pode ser aumentada pela ênfase do efeito do enrijecimento sob tensão. Isto pode ser conseguido empregando vigas mais esbeltas.

A tecnologia dos materiais inteligentes vem sendo bastante estudada por pesquisadores de todo o mundo. A utilização desta tecnologia abre novas portas para a concepção de ADVs

adaptativos com sintonização automática. Por isto, os estudos de ADVs adaptativos que utilizam os materiais inteligentes são bastante promissores e deverão ser assunto de trabalhos futuros nesta área.

Referências Bibliográficas

- Agnes, G. S., 1995, "Development of a Modal Model for Simultaneous Active and Passive Piezoelectric Vibration Supression", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 6, pp. 482-487.
- Aida, T., Toda, S., Ogawa, N. e Imada, Y., 1992, "Vibration Control of Beams by Beam-Type Dynamic Vibration Absorbers", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118(2), pp. 248-258.
- Ansys Examples Supplement, 1992, Swanson Analysis Systems Inc.
- Banks, H. T., 1996, "Smart Material Structures - Modeling, Estimation and Control", John Wiley & Sons, U.S.
- Chang, J. C. H. e Soong, T. T., 1980, "Structural Control Using Active Tuned Mass Dumpers", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, pp. 1091-1098.
- Coulter, J. P., Weiss, K. D. e Carlson, J. D., 1995, "Engineering Applications of Electrorheological Materials", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 5, pp. 64-75.
- Cunha Jr., S.S., 1999, "Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações", *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.*
- Den Hartog, J. P., 1956, "Mechanical Vibrations", 4th edition, McGraw-Hill Book Co. Inc., N.Y.
- Devasia, S., Meressi, T., Paden, B. e Bayo, E., 1993, "Piezoelectric Actuator Design for Vibration supression: Placement and Sizing", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.16(5), pp. 859-864.
- Don, D. L., Coulter, J. P., 1995, "An Analytical and Experimental Investigation of Electrorheological Material Based Adaptive Beam Structure", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 6, pp. 846-853.
- Faria, A. R. e Almeida, S. F. M., 1996, "Modeling of Actively Damped Beams with Piezoelectric Actuators with Finite Stiffness Bond", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 7, pp. 677-688.

- Frahm, H., 1911, "Device for Damping Vibration of Bodies", US Patent, 989.958.
- Gaudenzi, P e Bathe, K-J, 1995, "An Iterative Finite Element Procedure for the Analysis of Piezoelectric Continua", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 6, pp. 266-273.
- Hagood, N. W e Flotow, A., 1991, "Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146(2), pp. 243-268.
- Hidaka, S., Ahn, Y-K, Morishita, S., 1999, "Adaptive Vibration Control by a Variable Damping Dynamic Absorber using ER Fluid ", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121(3), pp. 373-378.
- Hrovat, D., Barak, P e Rabins, M., 1983, "Semi-active versus Passive or Active Tuned Mass Dampers for Structural Control", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, pp. 691-705.
- Huang, S-J e Lian, R-J, 1994, "A Dynamic Absorber With Active Vibration Control", *Journal Of Sound and Vibration*, Vol. 178(3), pp. 323-335.
- Koronev, B. G., Reznikov, L. M., 1993, "Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Technical Applications", John Wiley & Sons Ltd., U.S.
- Lesieutre, G. A., 1998, "Vibration Damping and Control Using Shunted Piezoelectric Materials", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 30, pp. 187-195.
- Meirovitch, L., 1975, "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill, Inc., U.S.
- Nye, J. F., 1985, "Physical Properties of Crystals - Their Representation by Tensors and Matrices", Oxford Science Publications, Oxford.
- Ogata, K., 1993, "Engenharia de Controle Moderno", Prentice-Hall do Brasil, RJ.
- Oguamanan, D. C. D., Almeida, S. F. M. e Hansen, J. S., 1997, "Stress Stiffening Effects on Laminated Timoshenko Beams with Piezoelectric Actuators", *Anais do XIV COBEM*, Bauru, SP.
- Olgac, N. and Holm-Hansen, B., 1995, "Tunable Active Vibration Absorber: The Delayed Resonator", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 117, pp. 513-519.

- Olgac, N. and Hosek, M., 1997, "Active Vibration Absorption Using Delayed Resonator With Relative Position Measurement", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 131-136.
- Onoda, J. e Sano, T., 1992, "Active, Passive, and Semiactive Vibration Supression by Stiffness Variation", *AIAA Journal*, Vol. 30(12), pp. 2922-2929.
- Rade, D. A. e Steffen Jr., 1999, "Optimization of Dynamic Absorbers Over a Frequency Band", *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, U.S., pp. 188-193.
- Seto, K. e Yamanouch, M., 1978, "On the Effect of a Variable Stiffness-type Dynamic Absorber with Eddy-current Damping ", *Bulletin of the JSME*, Vol. 21(160), pp. 1482-1489.
- Sims, N. D., Stanway, R. e Johnson, A. R., 1999, "Vibration Control Using Smart Fluids: A State-of-the-Art Review", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 31, pp. 195-203.
- Stephens, L. S., Rouch, K. E. and Tewani, S. G., 1991, "Theory for an Active Dynamic Vibration Absorber", *Structural Vibration and Acoustics*, Vol. 34, pp. 89-94.
- Sun, J. Q., Jolly, M. R. e Norris, M. A., 1995, "Passive, Adaptive and Active Tuned Vibration Absorbers - A Survey ", *Transactions of the ASME*, Vol. 117, pp. 234-242.
- Tanaka, M., Chonan, S. e Jiang, Z. W., 1996, "Force Control of a Flexible Finger with Distributed Sensors and Piezoelectric Actuators", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 7, pp. 301-306.
- Tanaka, N. e Kishimura, Y., 1992, "Impact Vibration control using a Semi-active Damper ", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 158(2), pp. 277-292.
- Teng, T-L, Liang, C-C e Liao, C-C, 1996, "Optimal Design of a Dynamic Absorber Using Polymer-Laminated Steel Sheets", *Computers & Structures*, Vol. 60(6), pp. 981-988.
- Vakakis, A. F. e Paipetis, S. A., 1986, "The Effect of a Viscously Damped Dynamic Absorber on a Linear Multi-Degree-of-Freedom System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105(1), pp. 49-60.
- Warburton, G. B., Ayorinde, E. O., 1980, "Optimum Absorber Parameters for Simple Systems, Earthquake Engineering and Structural Dynamics", Vol 8, pp. 197-217.

Yang, J. N., Agrawal, A. K. e Kim, J-H, "A Semi-active Stiffness Damper for Vibration Control of Civil Engineering Structures", Proceedings of the 17th IMAC, Orlando, Florida, U.S., pp. 437-443.

Yu, Y. Y., 1995, "Some Advances in Linear and Nonlinear Dynamical Modeling of Elastic and Piezoelectric Plates", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 7, pp. 237-254.

Zhou, S. Liang, C. e Rogers, C. A., 1995, "Integration and Design of Pizoceramic Elements in Intelligent Structures", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 6, pp. 733-743.

APÊNDICE I

Critério de Estabilidade de Routh

A teoria para o critério de estabilidade de Routh é apresentada neste Apêndice. Este critério permite determinar o número de polos instáveis (localizados no semiplano complexo direito) de uma função transferência escrita como uma razão de polinômios em s . Seja portanto a função de transferência:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_0 s^m + p_1 s^{m-1} + \dots + p_{m-1} s + p_m}{q_0 s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_{n-1} s + q_n} \quad (1.1)$$

onde (p_0, p_1, \dots, p_m) e (q_0, q_1, \dots, q_n) são constantes reais e $m \leq n$. Os polos da função de transferência são determinados pelos zeros do polinômio $Q(s)$. Escreve-se então:

$$Q(s) = q_0 s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_{n-1} s + q_n = 0 \quad (1.2)$$

onde $q_n \neq 0$ (quaisquer raízes nulas são removidas).

Pode-se fatorar $Q(s)$ em fatores lineares e quadráticos, tais como $(s + a)$ e $(s^2 + bs + c)$, onde a, b e c são reais. Os fatores lineares resultam em raízes reais do polinômio, e os fatores quadráticos em raízes complexas. O fator $(s^2 + bs + c)$ resulta em raízes com partes reais negativas somente se b e c são ambos positivos. Portanto, para que todas as raízes tenham partes reais negativas, as constantes a, b , e c em todos os fatores devem ser positivas. O produto de qualquer número de fatores lineares e quadráticos contendo apenas coeficientes positivos sempre resulta em coeficientes positivos. Assim, uma condição necessária para que $Q(s)$ tenha apenas raízes com partes reais negativas, e que portanto o sistema seja estável, é que todos os seus coeficientes estejam presentes e que sejam todos positivos. Caso todos sejam negativos, basta multiplicar ambos os membros da equação (1.2) por -1 para torná-los positivos.

Procura-se agora estabelecer uma condição suficiente para a estabilidade do sistema. Arranjando os coeficientes do polinômio em linhas e colunas da seguinte forma

s^n	q_0	q_2	q_4	q_6	\dots
s^{n-1}	q_1	q_3	q_5	q_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	\dots
\vdots	\vdots	\vdots			
s^2	e_1	e_2			
s	f_1				
s^0	g_1				

onde b_1, b_2, b_3, \dots são calculados como:

$$b_1 = \frac{q_1 q_2 - q_0 q_3}{q_1}$$

$$b_2 = \frac{q_1 q_4 - q_0 q_5}{q_1}$$

$$b_3 = \frac{q_1 q_6 - q_0 q_7}{q_1}$$

$$\vdots$$

O cálculo dos b 's continua até que todos os restantes sejam nulos. Seguindo o mesmo padrão obtêm-se os demais coeficientes:

$$c_1 = \frac{b_1 q_3 - q_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 q_5 - q_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 q_7 - q_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$\vdots$$

Este processo continua até se completar a n -ésima linha. A tabela obtida é triangular. O critério de estabilidade de Routh estabelece que o número de raízes da equação (1.2) com

partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna da tabela. Assim, a condição necessária e suficiente para que todas as raízes da equação (1.2) se localizem no semiplano complexo esquerdo é que todos os coeficientes de $Q(s)$ sejam positivos e que todos os termos da primeira coluna da tabela tenham sinais positivos.

APÊNDICE II

Controle Ótimo Quadrático

Neste Apêndice é apresentada a teoria para o projeto de sistemas de controle estáveis que minimizam um índice de desempenho quadrático. Seja o sistema de controle representado por:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A] \{x(t)\} + [B] \{u(t)\} \quad (II.1)$$

onde $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}^{n,1}$ é o vetor de estado, $\{u(t)\} \in \mathfrak{R}^{m,1}$ é o vetor de controle, $[A] \in \mathfrak{R}^{n,n}$ e $[B] \in \mathfrak{R}^{n,m}$ são as matrizes de estado.

Deseja-se determinar a matriz constante $[k_g] \in \mathfrak{R}^{m,n}$ dos ganhos de realimentação que dão o vetor de controle $\{u(t)\}$ como uma combinação linear das componentes do vetor de estado $\{x(t)\}$, sob a forma:

$$\{u\} = -[k_g] \{x\} \quad (II.2)$$

de modo a minimizar um índice de desempenho dado por um funcional do tipo:

$$J = \int_0^{\infty} (\{x\}^T [Q] \{x\} + \{u\}^T [R] \{u\}) dt \quad (II.3)$$

onde: $[Q] \in \mathfrak{R}^{n,n}$ é uma matriz positiva definida (ou positiva semidefinida) e simétrica, e $[R] \in \mathfrak{R}^{m,m}$ é uma matriz positiva definida e simétrica.

O primeiro termo do índice de desempenho se relaciona com a minimização das variáveis de estado e o segundo termo com a minimização do esforço de controle. As matrizes $[Q]$ e $[R]$ determinam a relevância de cada variável de estado e das forças de controle no índice de desempenho.

Substituindo a equação (II.2) na equação (II.1), escreve-se:

$$\{\dot{x}\} = [A] \{x\} - [B] [k_g] \{x\} = ([A] - [B] [k_g]) \{x\} \quad (II.4)$$

Supõe-se aqui que a matriz $([A] - [B] [k_g])$ é estável, isto é, que todos os seus autovalores têm partes reais negativas. Mais adiante serão discutidas as condições para a estabilidade desta matriz. Substituindo $\{u\}$ na equação (II.3), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} \left(\{x\}^T [Q] \{x\} + \{x\}^T [k_g]^T [R] [k_g] \{x\} \right) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \{x\}^T \left([Q] + [k_g]^T [R] [k_g] \right) \{x\} dt
 \end{aligned} \tag{11.5}$$

Segundo Ogata (1993), as funções de Liapunov podem ser efetivamente usadas na solução de problemas de otimização de parâmetros. Estas equações se escrevem na forma matricial como:

$$[V] = -\frac{d}{dt} \left(\{x\}^T [P] \{x\} \right) \tag{11.6}$$

onde $[P] \in \mathfrak{R}^{n,n}$ é uma matriz positiva definida e simétrica. Assim impõe-se a solução:

$$\{x\}^T \left([Q] + [k_g]^T [R] [k_g] \right) \{x\} = -\frac{d}{dt} \left(\{x\}^T [P] \{x\} \right) \tag{11.7}$$

Desenvolvendo a derivada na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \{x\}^T \left([Q] + [k_g]^T [R] [k_g] \right) \{x\} &= -\{\dot{x}\}^T [P] \{x\} - \{x\}^T [P] \{\dot{x}\} \\
 &= -\{x\}^T \left(([A] - [B] [k_g])^T [P] \right. \\
 &\quad \left. + [P] ([A] - [B] [k_g]) \right) \{x\}
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

Comparando os dois termos desta equação e observando que ela deve ser verdadeira qualquer que seja $\{x\}$, tem-se que:

$$\left([A] - [B] [k_g] \right)^T [P] + [P] ([A] - [B] [k_g]) = - \left([Q] + [k_g]^T [R] [k_g] \right) \tag{11.9}$$

De acordo com o segundo método de Liapunov (Ogata, 1993) se $([A] - [B] [k_g])$ é estável, então existe uma matriz $[P]$ que satisfaz a equação (11.9).

Observada a igualdade imposta em (11.7), o índice de desempenho pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} -\frac{d}{dt} \left(\{x\}^T [P] \{x\} \right) dt \\
&= -\{x\}^T [P] \{x\} \Big|_0^{\infty} \\
&= -\{x(\infty)\}^T [P] \{x(\infty)\} + \{x(0)\}^T [P] \{x(0)\}
\end{aligned} \tag{II.10}$$

Como todos os autovalores de $([A] - [B][k_g])$ têm partes reais negativas $\{x(\infty)\} \rightarrow 0$, o índice de desempenho pode ser calculado de acordo com a equação (II.11) em termos do estado inicial e da matriz $[P]$, que se relaciona com $[A]$, $[B]$, $[Q]$ e $[R]$ de acordo com a equação (II.9).

$$J = \{x(0)\}^T [P] \{x(0)\} \tag{II.11}$$

Para obter a solução do problema escreve-se $[R]$ como o produto:

$$[R] = [T]^T [T] \tag{II.12}$$

Desde que $[R]$ é positiva definida e simétrica é sempre possível obter uma matriz $[T]$ não singular que satisfaça a equação acima. Assim, a equação (II.9) pode ser reescrita como:

$$\left([A]^T - [k_g]^T [B]^T \right) [P] + [P] \left([A] - [B][k_g] \right) + [Q] + [k_g]^T [T]^T [T] [k_g] = 0 \tag{II.13}$$

Desenvolvendo os produtos obtém-se:

$$\begin{aligned}
[A]^T [P] + [P] [A] - \left([T] [k_g] - ([T]^T)^{-1} [B]^T [P] \right)^T \left([T] [k_g] - ([T]^T)^{-1} [B]^T [P] \right) + \\
- [P] [B] [R]^{-1} [B]^T [P] + [Q] = 0
\end{aligned} \tag{II.14}$$

A minimização de J com relação a $[k_g]$ requer a minimização de

$$\{x\}^T \left([T] [k_g] - ([T]^T)^{-1} [B]^T [P] \right)^T \left([T] [k_g] - ([T]^T)^{-1} [B]^T [P] \right) \{x\}$$

com relação a $[k_g]$ (Ogata, 1993). Como esta é uma expressão quadrática e portanto não-negativa, o mínimo ocorre quando ela é nula, isto é:

$$\begin{aligned}
 [T] [k_g] &= ([T]^T)^{-1} [B]^T [P] \\
 [k_g] &= [T]^{-1} \left(([T]^T)^{-1} [B]^T [P] \right) \\
 &= [R]^{-1} [B]^T [P]
 \end{aligned} \tag{II.15}$$

A equação (II.15) dá a matriz ótima $[k_g]$. Assim, substituindo esta equação em (II.2) obtém-se:

$$\{u(t)\} = -[R]^{-1} [B]^T [P] \{x(t)\} \tag{II.16}$$

onde $[P]$ deve satisfazer a equação (II.9) ou a equação de Riccati (II.17), obtida com a substituição de (II.15) em (II.9)

$$[A]^T [P] + [P]^T [A] - [P] [B] [R]^{-1} [B]^T [P] + [Q] = 0 \tag{II.17}$$

O projeto do controlador ótimo inicia-se então com a determinação da matriz $[P]$ que satisfaz a equação de Riccati (II.17), e em seguida calcula-se a matriz dos ganhos de realimentação $[k_g]$ que dará o vetor de controle $\{u(t)\}$ como uma combinação linear das componentes do vetor de estados $\{x(t)\}$. Para isto é necessário que o sistema seja controlável e que a matriz $([A] - [B] [k_g])$ seja estável.

A controlabilidade do sistema é garantida se:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (B) & (AB) & \dots & (A^{n-1}B) \end{bmatrix} = n \tag{II.18}$$

onde n é a ordem do sistema. De acordo com Ogata (1993), o requisito de estabilidade de $([A] - [B] [k_g])$ é satisfeito se:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} [Q]^{1/2} \\ [Q]^{1/2} [A] \\ \vdots \\ [Q]^{1/2} [A]^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{II.19}$$