

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

MON  
621:534  
S 586  
TES / MEM

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS  
NO DOMÍNIO DO TEMPO**

Tese apresentada

à Universidade Federal de Uberlândia por:

**LEANDRO AFONSO DA SILVA**

como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor  
em Engenharia Mecânica

Aprovada por:

Prof. Dr. Domingos Alves Rade – (UFU) – Orientador  
Prof. Dr. Cleudmar Amaral de Araújo – (UFU)  
Prof. Dr. José Francisco Ribeiro – (UFU)  
Prof. Dr. Marcus Antônio Viana Duarte – (UFU)  
Prof. Dr. Rubens Sampaio – (PUC/RIO DE JANEIRO)  
Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior – (UNESP/FEIS)

Uberlândia, 15 de Dezembro de 2000.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA

Av. João Naves de Ávila, 2160 - Campus Santa Mônica - Uberlândia-MG - 38408-100  
Fone: 0XX3432394149 - FAX: 0XX3432394282

**ALUNO: LEANDRO AFONSO DA SILVA**

**NÚMERO DE MATRÍCULA: 5962955-7**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL DOUTORADO**

**TÍTULO DA TESE:**

**“Técnicas de Identificação de Forças no Domínio do Tempo”**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Domingos Alves Rade**

A Tese foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na Sala 1B73 do Bloco B, Campus Santa Mônica, em 15 de dezembro de 2000, às 14:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME		ASSINATURA
Domingos Alves Rade, Prof. Dr.	UFU	
Cleudmar Amaral de Araújo, Prof. Dr.	UFU	
Rubens Sampaio, Prof. Dr.	PUC/RIO	
Vicente Lopes Jr., Prof. Dr.	UNESP/ILHA SOLTEIRA	
José Francisco Ribeiro, Prof. Dr.	UFU	
Marcus Antônio Viana Duarte, Prof. Dr.	UFU	

Uberlândia, 15 de Dezembro de 2000.

*À minha esposa Marise Therese  
e a minha filha Milena.*

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Domingos Alves Rade pelo incentivo e orientação fundamentais à realização deste trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora, pela participação e comentários preciosos dados a este trabalho.

À CAPES (Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo Suporte financeiro.

E à Faculdade de Engenharia Mecânica e à Coordenação do Curso de Pós-Graduação, por permitir que o trabalho pudesse ser realizado em boas condições.

À DEUS, por ter me concedido a capacidade e a oportunidade de realizar este trabalho.

## SUMÁRIO

	PAG.
SIMBOLOGIA	vii
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
<b>I – INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 – MOTIVAÇÃO	1
1.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
1.2.1 – Métodos no Domínio da frequência	4
1.2.2 – Métodos no Domínio do tempo	13
1.2.3 – Sistemas contínuos	18
1.3 – OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
<b>II – MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS DINÂMICOS</b>	<b>23</b>
2.1 – MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS LINEARES	23
2.1.1 – Modelo espacial	24
2.1.2 – Modelo no espaço de estados	24
2.1.3 – Modelo Modal para sistemas não amortecidos	27
2.2 – RESPOSTAS DINÂMICAS DE SISTEMAS DISCRETOS LINEARES	29
2.2.1 – Respostas de sistemas não amortecidos a um conjunto de condições iniciais	29
2.2.2 – Respostas forçadas de sistemas não amortecidos	30
2.2.3 – Respostas livres de sistemas de N g.d.l. com amortecimento viscoso	32
2.2.4 – Respostas harmônicas de sistemas não amortecidos	37
2.2.5 – Respostas harmônicas de sistemas com amortecimento viscoso	39
2.2.6 – Respostas forçadas de sistemas amortecidos	42
<b>III – PROBLEMAS INVERSOS MAL POSTOS E MAL CONDICIONADOS</b>	<b>47</b>
3.1 – CARACTERIZAÇÃO DE UM PROBLEMA MAL POSTO E MAL CONDICIONADO	47
3.1.1 – Definição de um Problema Mal Posto	49
3.1.2 – Definição de um Problema Mal Condicionado	50
3.1.3 – Solução de Problemas Inversos de Dimensão Finita	50
3.2 – CARACTERIZAÇÃO DO MAU CONDICIONAMENTO	52
3.3 – MÉTODOS PARA RESOLVER PROBLEMAS INVERSOS	56
3.3.1 - Método de Regularização de TIKHONOV	56
3.3.2 - Decomposição em Valores Singulares	58
3.3.3 - Método do Gradiente Conjugado	59

<b>IV – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS</b>	<b>61</b>
4.1 – FORMULAÇÃO DO MÉTODO	62
4.1.1 – Formulação para o caso de amortecimento proporcional	62
4.1.2 – Formulação para o caso de amortecimento geral	67
4.2 – ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DA EXPANSÃO MODAL NO PROCEDIMENTO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS	68
4.3 – ESTUDO DA INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES INICIAIS	71
4.4 – APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS COORDENADAS MODAIS À IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE ELEMENTOS DE SUPORTE	74
<b>V – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADA NA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO</b>	<b>79</b>
5.1 – FORMULAÇÃO PARA SISTEMAS COM UMA ENTRADA E UMA SAÍDA	80
5.2 – SISTEMAS COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS	83
5.3 – REDUÇÃO DO NÚMERO DE INCÓGNITAS MEDIANTE A EXPANSÃO DAS FORÇAS EXCITADORAS EM SÉRIES TRUNCADAS DE FUNÇÕES ORTOGONAIS	86
5.4 – UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA A IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE ELEMENTOS DE SUPORTE	88
<b>VI – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EMPREGANDO UM MODELO ESTRUTURAL INVERSO</b>	<b>89</b>
6.1 – FORMULAÇÃO DO MÉTODO EM TEMPO CONTÍNUO	89
6.2 – FORMULAÇÃO DO MÉTODO EM TEMPO DISCRETO	91
6.3 – MODELOS DIRETO E INVERSO FORMULADOS EM TERMOS DE PROPRIEDADES MODAIS COM AMORTECIMENTO PROPORCIONAL	94
<b>VII – APLICAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>99</b>
7.1 – DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA TESTE- SISTEMA COM 11 G.D.L.	99
7.2 – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS.	101

7.2.1 – Identificação de duas forças harmônicas	102
<b>7.3 – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NA DECONVOLUÇÃO</b>	121
7.3.1 – Identificação de uma força harmônica utilizando um procedimento recursivo	121
7.3.2 – Identificação de duas forças com posições de excitação e respostas não coincidentes	124
7.3.3 – Identificação de duas forças harmônicas considerando ruídos simulados	127
7.3.4 – Redução do número de incógnitas utilizando séries truncadas de funções ortogonais	130
7.3.5 – Identificação com incertezas sobre o número de forças excitadoras	132
<b>7.4 – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NO MODELO ESTRUTURAL INVERSO</b>	135
7.4.1 – Identificação de duas forças harmônicas	135
7.4.2 – Identificação de forças considerando ruídos simulados	137
7.4.3 – Entrada e saída dispostas em diferentes localizações	141
7.4.4 – Avaliação da sensibilidade do método de identificação a erros de modelagem	143
7.4.5 – Identificação de forças com condições iniciais desconhecidas	146
7.4.6 – Identificação utilizando o modelo inverso formulado no espaço modal	149
<b>7.5 – IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE ELEMENTOS DE SUPORTE</b>	152
7.5.1 – Método das Coordenadas Modais aplicado à identificação de parâmetros de elementos de suporte lineares	152
7.5.2 – Método da Deconvolução aplicado à identificação de parâmetros de elementos de suporte não lineares	156
<b>VIII – AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DOS MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS.</b>	161
8.1 – PRIMEIRA ESTRUTURA-TESTE: PÓRTICO TRIDIMENSIONAL	161
8.2 – SEGUNDA ESTRUTURA-TESTE: VIGA LIVRE-LIVRE DE ALUMÍNIO	163
<b>8.3 – TESTES DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS</b>	166
8.3.1 – Método das Coordenadas Modais	166
8.3.2 – Método da Deconvolução	175
8.3.3 – Método Estrutural Inverso	194
<b>IX – CONCLUSÕES E ETAPAS FUTURAS DE DESENVOLVIMENTO</b>	203
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	209
<b>BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR</b>	217
<b>ANEXO I – EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NO SISTEMA DE MEDIÇÃO.</b>	221

## SIMBOLOGIA

ARÁBICOS:

$A_i(t)$ :	$i$ -ésima aceleração medida
$[A], [\bar{A}] \in R^{2N,2N}$	Matriz de estado.
$[A_{dis}]$ :	Matriz de estado no domínio discreto.
$[B_2] \in R^{N \times f}$ :	Matriz definindo as localizações das $f$ forças excitadoras contidas no vetor $\{u(t)\}$ .
$[\bar{B}] \in R^{2N,f}$ :	Matriz que relaciona a entrada no espaço de estado.
$[B_{dis}]$ :	Matriz que relaciona a entrada no espaço de estado no domínio discreto.
$c$ :	Número de coordenadas instrumentadas (sensores).
$c_{es}$ :	Amortecimento do elemento de suporte
$[C] \in R^{N,N}$ :	Matriz de amortecimento viscoso, simétrica, semi-definida positiva.
$[\bar{C}] \in R^{s,2N}$ :	Matriz que relaciona a saída do sistema no espaço de estado.
$[C_{dis}]$ :	Matriz que relaciona a saída do sistema no espaço de estado no domínio discreto.
$[C_a]$ :	Matriz que fornece as posições dos sensores para aceleração.
$[C_v]$ :	Matriz que fornece as posições dos sensores para velocidade.
$[C_d]$ :	Matriz que fornece as posições dos sensores para deslocamento.
DVS :	Decomposição em Valores Singulares.
$[\bar{D}] \in R^{s,f}$ :	Matriz que relaciona a saída e entrada no espaço de estado.
$[D_{dis}]$ :	Matriz que relaciona a saída e entrada no espaço de estado no domínio discreto.
E:	Módulo de elasticidade.
$\{\tilde{e}\}$ :	Vetor dos pesos
F.R.F. :	Função de Resposta em Frequência.
F.R.I. :	Função de Resposta ao Impulso.
$f$ :	Número de forças excitadoras.

$f_{es}(t)$ :	Força total aplicada pelo suporte na estrutura principal .
$f(x, t)$ :	Distribuição de forças excitadoras aplicadas.
$\{f(t)\} \in R^N$ :	Vetor das forças externas aplicadas.
$\{F(\omega)\} \in R^N$ :	Vetor das forças no domínio da freqüência.
$\{f_i(t)\}$ :	Vetor das forças de inércia modais.
$\{f_A(t)\}$ :	Vetor das forças de amortecimento modais.
$\{f_E(t)\}$ :	Vetor das forças elásticas modais.
g.d.l.:	Graus de liberdade.
$h_r(t)$ :	Função de resposta ao impulso associada ao r-ésimo modo.
$h_{ij}(t)$ :	Resposta na coordenada i, devida a uma excitação do tipo impulso unitário aplicado na coordenada j.
$[h(t)]$ :	Matriz de função de resposta ao impulso.
$[H(\omega)] \in R^{NN}$ :	Matriz de F.R.F.s.
I.I.F.:	Identificação Indireta de Forças.
l:	Momento de inércia.
$[I]$ :	Matriz identidade.
k:	Passo apropriado no tempo.
$k_{es}$ :	Rigidez do elemento de suporte.
$[K] \in R^{N,N}$ :	Matriz de rigidez, simétrica, simi-definida positiva.
$M_i$ :	l-ésima massa equivalente.
$m_{es}$ :	Massa do elemento de suporte.
$[M] \in R^{N,N}$ :	Matriz de massa, simétrica, definida positiva.
$n_a$ :	Número de acelerações medidas.
N:	Número de g.d.l. da estrutura.
$[N] \in R^{N,N}$ :	Matriz das massas generalizadas.
$[N^d] \in C^{2N,2N}$ :	Matriz de massas generalizadas no espaço de estado.
$p_i$ :	Função de penalidade.
$\{P_{es}\}$ :	Vetor dos parâmetros do elemento dos suporte.
$\{P\}$ :	Vetor direção de busca.
$\{P_m(\omega)\}$ :	Coordenada Modal como função da freqüência.

$q_r(t)$ :	Coeficientes de combinação linear.
$\{q(t)\}$ :	Vetor das coordenadas generalizadas.
$r$ :	Conjunto de funções ortogonais.
$\{R\}$ :	Vetor de resíduo.
SWAT:	Sum of Weighted Accelerations Technique.
$s_r \in C$ :	Autovalores no espaço de estado.
$[S] \in C^{2N,2N}$ :	Matriz espectral no espaço de estado.
$\{u(t)\} \in R^{f,1}$ :	Vetor força de entrada no espaço de estado.
$\{u(k)\} \in R^{f,1}$ :	Vetor força de entrada no espaço de estado no domínio discreto.
$[U] \in R^{2N,2N}$ :	Matrizes de estado.
$[\hat{U}]$ e $[\hat{V}]$ :	Matrizes ortogonais da DVS.
$V(x,t)$ :	Esforço cisalhante nas seções transversais da viga.
$\{x(t)\} \in R^{c,1}$ :	Vetor de resposta temporal.
$\{\ddot{x}(t)\}, \{\dot{x}(t)\}, \{x(t)\} \in R^N$ :	São respectivamente os vetores das respostas em aceleração, velocidade e deslocamento para os N g.d.l.
$\{X(\omega)\} \in R^N$ :	Vetor das respostas no domínio da frequência
$[Z(\omega)] \in R^{NN}$ :	Matriz de rigidez dinâmica.
$y(x,t)$ :	Campo de deslocamentos transversais.
$\{y(t)\} \in R^s$ :	Vetor de saída no espaço de estado.
$\{y(k)\} \in R^s$ :	Vetor de saída no espaço de estado no domínio discreto.
$\{w_r\} \in C^{2N}$ :	Autovetores no espaço de estado.
$\{w(t)\} \in R^{2N}$ :	Vetor de estado.
$\{w(k)\} \in R^{2N}$ :	Vetor de estado no domínio discreto.
$[W] \in C^{2N,2N}$ :	Matriz modal no espaço de estado.

GREGAS:

$\alpha$ :	Parâmetro de regularização de Tikhonov.
$[\beta] \in \mathbb{R}^{N,N}$ :	Matriz de amortecimentos generalizados.
$\Delta t$ :	Período de amostragem.
$\phi_{ri}$ :	$i$ -ésima componente do autovetor $\{\phi_r\}$ .
$\{\phi_r\} \in \mathbb{R}^N$ :	Autovetores.
$[\Phi] \in \mathbb{R}^{N,N}$ :	Matriz modal.
$\gamma$ :	Massa por unidade de comprimento.
$\eta_r$ :	Massas generalizadas
$\lambda_r \in \mathbb{R}^+$ :	Autovalores.
$[\Lambda] \in \mathbb{R}^{N,N}$ :	Matriz espectral.
$\sigma_{\max}$ e $\sigma_{\min}$ :	São respectivamente o maior e o menor valores singulares.
$[\Sigma]$ :	Matriz de valores singulares.
$\omega_r$ :	Freqüência natural.
$\omega_{s_r}$ :	Freqüência natural amortecida.
$\omega$ :	Freqüência de excitação.
$\xi_r$ :	Fator de amortecimento modal.

OPERADORES MATRICIAIS:

$[ ]^+$ :	Pseudo-inversa de Moore-Penrose.
$\  \ $	Norma quadrática
$[ ]^T$ :	Matriz transposta.

Silva, L. A., 2000, "Técnicas de Identificação de Forças no Domínio do Tempo", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## Resumo

O presente trabalho é dedicado ao estudo de técnicas destinadas à identificação de forças excitadoras externas, a partir das respostas vibratórias. Tal estudo justifica-se pela existência de numerosas situações em que as forças excitadoras não podem ser diretamente medidas com o auxílio de transdutores de carga. No contexto da elastodinâmica linear, são enfocados três métodos baseados na exploração de respostas temporais, cada um deles fazendo uso de um tipo particular de modelo do sistema mecânico. São eles: o método das Coordenadas Modais, que utiliza um conjunto de auto-soluções (frequências naturais, fatores de amortecimento modais, massas generalizadas e componentes de autovetores), o método baseado na Deconvolução no domínio do tempo, no qual o modelo é constituído por um conjunto de funções de resposta ao impulso, e o método baseado no Modelo Estrutural Inverso, que utiliza um modelo no espaço de estados, formulado a partir do modelo direto intercambiando os vetores de entrada e saída. O estudo compreende o desenvolvimento da formulação, em diferentes variantes, de cada um dos métodos estudados, além da avaliação de suas características operacionais e desempenho, mediante a realização de diversas aplicações, tanto a estruturas simuladas numericamente, quanto a sistemas mecânicos reais ensaiados em laboratório. Nestas aplicações, busca-se representar as dificuldades tipicamente presentes em situações práticas, tais como a presença de ruído experimental, o uso de dados incompletos e a ocorrência de mau condicionamento numérico das equações de estimação. No estudo de cada método, propostas de procedimentos são feitas objetivando a melhor adequação dos métodos de identificação aos problemas práticos de Engenharia, mediante o tratamento de alguns de seus inconvenientes e dificuldades.

---

*Palavras-Chave: Identificação de Forças. Deconvolução. Problemas Inverso. Identificação*

Silva, L. A., 2000, "Force Identification Techniques on the Time Domain", Phd These, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG

### Abstract

The research work reported herein is devoted to the study of techniques intended for the identification of excitation forces from the system's vibratory responses. Such a study is motivated by the fact that, in many circumstances, the excitation forces cannot be easily measured using load transducers. In the context of linear elastodynamics, three methods operating in the time domain are assessed, each of them making use of a particular type of mathematical model, namely: the Modal Coordinate Method, which utilises a modal model of the system (natural frequencies, modal damping factors, generalised masses and eigenvector components); the method based on time domain deconvolution, for which the model is formed by a set of impulse response functions, and the method based on an inverse structural model, which uses an inverse state-space model, obtained from the direct model by interchanging the roles of input and output vectors. The study comprises the development of the formulation pertaining to each method, as well as an assessment of their operational features and performance, through a number of applications to both numerically simulated and experimentally tested mechanical systems. In these applications, particular emphasis is placed on some typical difficulties, such as the existence of experimental noise, the use of incomplete data and ill-conditioning of the estimation equations. In the study of each method, some procedures are suggested to cope with some of their drawbacks, in an attempt to enlarge the domain of applicability of the force identification methods.

---

*Keywords: Force Identification. Deconvolution. Inverse Problems. Identification*

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 – MOTIVAÇÃO

No âmbito da dinâmica estrutural, o conhecimento preciso da distribuição e magnitude das forças externas é de primordial importância, podendo proporcionar maior confiança nas simulações numéricas baseadas em modelos analíticos. Além disso, o conhecimento das forças excitadoras é imprescindível no projeto de sistemas de isolamento e proteção contra danos provocados por carregamentos dinâmicos.

Em certas situações, as forças excitadoras podem ser medidas diretamente com o auxílio de transdutores de força (células de carga). Entretanto, nos casos em que são tratadas estruturas leves, de pequeno porte, a introdução destes dispositivos pode alterar as características estruturais do sistema, resultando em predições incorretas das forças. Em outras situações, os locais em que as forças são aplicadas podem não ser acessíveis à instrumentação. Dificuldades para a medição direta também existem quando as forças são distribuídas em diversas localizações espaciais, sendo necessário, neste caso, considerável montante de instrumentação. Em tais casos, o uso de técnicas de identificação indireta de forças (ou técnicas de reconstrução de forças) apresentam-se como uma alternativa interessante.

A identificação indireta de forças busca estimar as forças excitadoras (entradas), a partir das respostas dinâmicas medidas da estrutura (saída) e de um modelo matemático do sistema. Em essência, a estrutura instrumentada torna-se ela mesma um transdutor de carga. Vale lembrar que as respostas dinâmicas podem ser facilmente obtidas através de procedimentos usuais de ensaios dinâmicos. Diversos tipos de modelos – obtidos tanto por técnicas de modelagem analítica quanto experimentais - podem ser empregados, tais como: um conjunto de funções de resposta em frequência (F.R.F.s), funções de resposta ao impulso (F.R.I.s), auto-soluções (frequências naturais, fatores de amortecimento modais, massas generalizadas e componentes de modos de vibração) ou ainda diversos tipos de modelos estruturais representados por matrizes de inércia, rigidez e amortecimento.

Existem dois grupos principais os quais os métodos de identificação de forças estão inseridos: o dos métodos operando no **domínio da frequência**, que buscam determinar os espectros frequências das forças excitadoras, e a dos métodos fundamentados no **domínio do tempo**, que objetivam caracterizar as variações das excitações externas em função do tempo. Uma revisão abrangente de alguns dos métodos de identificação de forças documentados na literatura é apresentada no trabalho de Stevens (1987), notando-se que a maioria dos estudos realizados enfocam os métodos no domínio da frequência, ao passo que os métodos operando no domínio do tempo têm merecido menor atenção. A escolha dentre os dois tipos de métodos deve ser feita levando-se em conta a natureza dos dados experimentais disponíveis e as especificidades da aplicação pretendida. Os diversos estudos já realizados revelam que, em geral, ambos os tipos de métodos apresentam suas vantagens e inconvenientes.

Conforme ilustrado na Figura 1.1, em princípio, o procedimento de identificação indireta de forças é simples, visto que basta inverter o problema direto, que consiste em calcular a resposta (saída) do sistema a partir do conhecimento da força excitadora (entrada) e da função de transferência (modelo), que relaciona a excitação e a resposta. Portanto, mediante a resolução de um problema inverso, as forças são estimadas a partir do conhecimento prévio da resposta do sistema e de sua função de transferência.

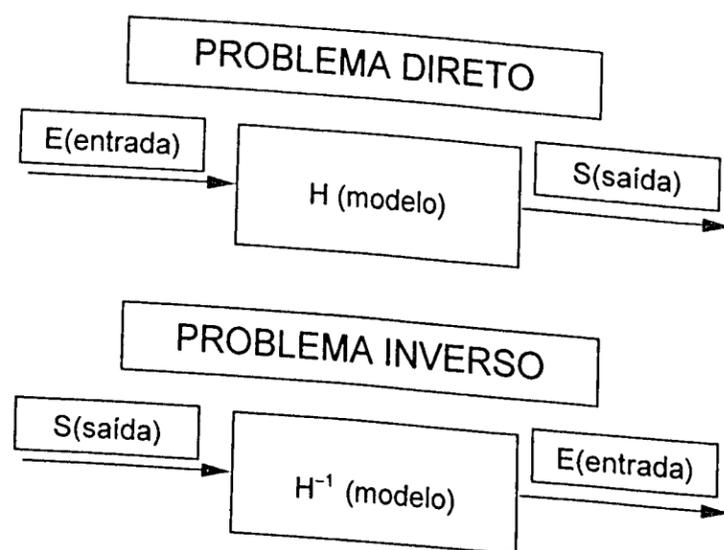


Figura 1.1 – Representação esquemática dos problemas direto e inverso da dinâmica estrutural.

Embora simples na sua essência, o problema de identificação de forças a partir das respostas dinâmicas é considerado um problema de difícil implementação prática, estando as dificuldades ligadas aos seguintes fatores principais:

- na grande maioria das vezes o problema de identificação revela-se altamente mal condicionado sob ponto de vista numérico. Este mau condicionamento é traduzido pela quase singularidade do operador  $H$ , que deve ser invertido para a resolução do problema inverso (conforme Figura 1.1). Do ponto de vista computacional, o mau condicionamento numérico se revela através de uma extrema sensibilidade dos resultados de identificação a perturbação presente nos dados utilizados (Hunt, 1972).
- na grande maioria dos casos práticos, o modelo  $H$  deve ser construído a partir de dados analíticos ou experimentais incompletos, que são inevitavelmente afetados por incertezas de modelagem e ruídos de medição. Além disso, por limitações de natureza prática, apenas um número reduzido de coordenadas são geralmente instrumentadas para aquisição das respostas dinâmicas.

Se várias forças devem ser identificadas simultaneamente, o problema de mau condicionamento mostra-se ainda mais severo. O sucesso da técnica de identificação fica, neste caso, condicionado pela observabilidade das respostas causadas por cada uma das forças separadamente. Com efeito, em algumas situações, as contribuições às respostas dinâmicas de cada uma das forças podem ter distribuições espaciais bastante semelhantes, resultando na quase singularidade do operador representando as funções de transferência. Quando isto acontece, é muito difícil separar as contribuições causadas por cada força, e pequenas variações (erros) na medição das respostas tendem a causar grandes variações nas amplitudes das forças identificadas. Foi sugerido por Hillary & Ewins (1984) que, em certas situações, dificuldades deste tipo podem ser reduzidas pela inclusão de posições de medição adicionais ou ainda movendo estas posições de modo a promover um maior enriquecimento da base de dados experimentais utilizados.

Dada a importância crucial do tratamento do mau condicionamento numérico que caracteriza, de modo geral, os problemas inversos, um grande esforço tem sido empreendido visando o desenvolvimento de algoritmos de estimação numericamente estáveis. Algumas estratégias têm sido propostas, baseadas na formulação de um problema

associado ao problema original, sendo, porém, bem condicionado. Este procedimento é conhecido como *regularização* do problema mal condicionado. As mais conhecidas estratégias de regularização utilizadas são: regularização baseada na Decomposição em Valores Singulares (DVS) (Maia, 1989), o método de regularização de Tikhonov (Tikhonov, & Arsenin, 1977) e as técnicas baseadas na aplicação de restrições determinísticas *a priori*, utilizando funções de penalidade e multiplicadores de Lagrange (Thomas & Prost, 1991). O mau condicionamento numérico e os procedimentos de regularização serão discutidos em detalhe no Capítulo III deste trabalho.

## 1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Um levantamento bibliográfico revela que não é muito vasta a literatura produzida acerca do problema de identificação indireta de forças excitadoras. É apresentada, a seguir, uma síntese dos principais estudos publicados enfocando os métodos operando nos domínios da frequência e do tempo.

### 1.2.1- Métodos no domínio da frequência

#### 1.2.1.1 - Método baseado na inversão direta da matriz de Função de Resposta em Frequência - F.R.F.s (Bartlett & Flannelly, 1979).

A resposta em regime permanente no domínio da frequência para um sistema mecânico linear com N entradas e N saídas pode ser expressa segundo:

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\} \quad (1.1)$$

onde  $\{X(\omega)\} \in R^N$  é o vetor das amplitudes das respostas,  $[H(\omega)] \in R^{N \times N}$  é a matriz de funções de resposta em frequência, e  $\{F(\omega)\} \in R^N$  é o vetor das amplitudes das forças excitadoras.

Se o número de excitações e suas localizações são conhecidas, é teoricamente possível calculá-las empregando as respostas medidas, obtidas pela instrumentação de um número igual de localizações na estrutura. Da equação (1.1), tem-se:

$$\{F(\omega)\} = [H(\omega)]^{-1}\{X(\omega)\} \quad (1.2)$$

Entretanto, este procedimento pode produzir resultados altamente errôneos (Ellis, 1973), (Bartlett & Flannelly, 1979), (Hillary, 1984).

As dificuldades encontradas com a inversão da matriz de F.R.F.s podem ser reduzidas se mais respostas do que forças aplicadas forem monitoradas, e as F.R.F.s entre todas as medições e localizações estiverem disponíveis. Neste caso a matriz  $[H(\omega)]$  é retangular e a equação (1.1) assume a forma:

$$\{X(\omega)\}_{(c \times 1)} = [H(\omega)]_{(c \times f)}\{F(\omega)\}_{(f \times 1)}, \quad \text{com } c \geq f. \quad (1.3)$$

Este tipo de equação pode ser resolvida computando a pseudo-inversa da matriz  $[H(\omega)]$ , o que efetivamente produz uma solução na forma dos mínimos quadrados. Então:

$$\{F(\omega)\} = [H(\omega)]^+ \{X(\omega)\} \quad (1.4)$$

onde  $[H(\omega)]^+ = ([H(\omega)]^T [H(\omega)])^{-1} [H(\omega)]^T$  designa a pseudo-inversa da matriz de F.R.F.s.

O tempo de cálculo é geralmente elevado para este método, uma vez que (1.4) deve ser resolvida para todos os valores de  $\omega$  na banda de frequência de interesse. Além disso, pode-se demonstrar que a matriz  $[H(\omega)]^T [H(\omega)]$ , que deve ser invertida em (1.4), possui número de condicionamento sempre superior àquele da matriz  $[H(\omega)]$  (Desanghere & Snoeys, 1985).

Quando se tem mais forças desconhecidas do que respostas medidas, não há informação suficiente para uma determinação única de todas as forças desconhecidas. Neste caso, uma solução pode ser obtida somente pela adição de restrições ao problema.

Por exemplo, uma restrição para que vetor de forças tenha norma mínima conduz a uma solução na forma (1.4) com:

$$[H(\omega)]^+ = [H(\omega)]^T ([H(\omega)]^T [H(\omega)])^{-1} \quad (1.5)$$

Infelizmente, a restrição de norma mínima carece de significado físico em problemas de identificação de forças e, geralmente, conduz a resultados insatisfatórios. Conseqüentemente, problemas de identificação de forças sub-determinados têm recebido pouca atenção.

Embora simples na sua essência, os métodos de identificação de forças baseados na inversão da matriz de F.R.F.s comportam, via de regra, dificuldades quando de sua implementação prática. Por exemplo, um dado valor de frequência de excitação,  $\omega$ , a resposta será influenciada por uns poucos modos cujas frequências características situam-se próximas daquele valor. Tal fato se verifica principalmente nas ressonâncias ou nas regiões próximas a elas. Neste caso,  $[H(\omega)]$  terá posto deficiente e será, em conseqüência, mal condicionada. Sob estas circunstâncias, é possível ter termos dentro da matriz que difiram em muitas ordens de magnitude dos demais. Este fato faz com que a solução do problema, dada por (1.4), seja muito sensível aos ruídos que contaminam, inevitavelmente, os elementos do vetor de respostas e da matriz de F.R.F.s, obtidos experimentalmente. Esta sensibilidade pode ser suficientemente alta para inutilizar completamente os resultados da identificação (Starkey & Merrill, 1989).

Uma vez que os problemas inversos tendem a ser mal condicionados, os efeitos dos erros no processo de identificação necessitam de uma maior atenção. Além dos erros oriundos dos algoritmos computacionais utilizados, há outras duas fontes de erros: os ruídos experimentais nas respostas medidas e os erros de modelagem na matriz  $[H(\omega)]$  e também possíveis erros de não linearidade.

Os erros de modelagem surgem principalmente quando os elementos de  $[H(\omega)]$  são calculados por expansões modais. Por limitações de ordem prática, estas expansões são feitas com números relativamente pequenos de modos. Neste caso, o truncamento das expansões e incertezas nos valores dos parâmetros modais conduzem aos erros de modelagem.

A maioria das aplicações têm sido feitas empregando sistemas super-determinados, envolvendo um número relativamente pequeno de forças. Uma amostragem dos tipos de aplicações consideradas é apresentada a seguir:

Bartlett & Flannelly (1979), em uma investigação experimental, determinaram as cargas vibratórias vertical e lateral atuantes no rotor de um helicóptero, usando medições das respostas na fuselagem. De posse da matriz de mobilidade, as forças vibratórias no rotor foram determinadas empregando a pseudo-inversa da matriz de mobilidade. Um grande número de acelerômetros foram usados para determinar um pequeno número de forças para uma única frequência. Sob estas circunstâncias, o condicionamento numérico da pseudo-inversa não foi considerado um grande problema.

Ewins & Hillary (1980) estudaram um sistema mecânico constituído de uma pá de compressor tendo duas entradas e seis saídas, em uma larga faixa de frequências. Eles concluíram que a matriz F.R.F.s poderia tornar-se mal condicionada em certas faixas de frequência, resultando em estimativas incertas para os espectros das forças, e que este problema tornava-se mais severo quando poucas medições de saídas eram utilizadas. Em outro trabalho, Ewins & Hillary (1984) constataram que as estimativas das forças são mais sensíveis nas frequências de ressonância, e sugeriram que medições de deformações tendem a fornecer identificações mais precisas do que medições com as acelerações no domínio de baixas frequências.

Usando alguns conceitos fundamentais da álgebra linear e da análise modal, Fabunmi (1985) estabeleceu certos critérios teóricos para garantir a precisão esperada das forças determinadas empregando a técnica da pseudo-inversa da matriz de F.R.F.s. Os critérios foram avaliados por cálculos numéricos baseados em duas vigas uniformes, uma engastada-livre e a outra livre-livre. Fabunmi estudou detalhadamente o efeito do grau de participação dos vários modos nos problemas de identificação de força. Seus resultados mostram que, dentro de uma certa faixa de frequências, há um limite para o número de forças que podem ser identificadas com precisão, e que este número está relacionado com o número de modos que contribuem efetivamente na resposta. Em particular, o autor concluiu que nas regiões próximas às ressonâncias, onde a contribuição do modo ressonante domina as de todos os outros, não mais que uma força de excitação pode ser identificada com precisão. Estes resultados confirmam as investigações feitas por Hillary & Ewins (1984).

Fregolent & Sestieri (1990) utilizaram a decomposição Q-R para minimizar os efeitos do mau condicionamento da matriz  $[H(\omega)]$ . Apesar desta decomposição necessitar de um tempo elevado de cálculo, ela apresenta vantagens numéricas no caso de matrizes virtualmente singulares, além de poder ser aplicada a sistemas matriciais retangulares. Segundo este método, a matriz de F.R.F.s é decomposta sob a forma  $[H(\omega)] = [Q][R]$ , onde  $[Q]$  é uma matriz ortogonal ( $[Q]^T [Q] = [I]$ ) e  $[R]$  é uma matriz triangular inferior.

Mas *et al.* (1994) verificaram a importância do número de condicionamento na propagação dos erros na inversão da matriz de F.R.F.s. Eles constataram que o uso de sistemas super-determinados podem proporcionar melhora do condicionamento e sobretudo aumento da precisão das forças identificadas. O amortecimento no sistema pode ter uma influência na identificação das forças, uma vez que o número de condicionamento varia com o amortecimento presente. Contudo, experimentos indicaram que erros determinísticos podem ser a maior causa das imprecisões na estimação de forças. Também reconheceram que sensores próximos à localização de uma dada força fornecem uma boa estimação para esta força em particular, mas não contribuem muito para estimação de outras forças que estão aplicadas em locais mais afastadas.

O'Callahan & Piergintili (1996) notaram que a predição resultante da força tende a ser excelente se as localizações das respostas coincidirem com as localizações reais das forças. Para o caso onde as localizações reais das forças são diferentes das localizações das respostas, as forças tendem a ser distribuídas para todas as localizações de respostas disponíveis. A quantidade de distribuição para cada uma das localizações de resposta, depende da direção e da distância do ponto de aquisição da resposta em relação à localização real da força. A análise foi conduzida em um modelo de elementos finitos de uma placa e os resultados não incluíram verificação experimental ou o efeito de medições ruidosas.

Karlsson (1996) conduziu um estudo em uma viga com configuração engastada-livre modelada via elementos finitos, onde sugere que o recíproco do número de condicionamento da matriz de função transferência seja usado como indicador da precisão das amplitudes de forças medidas indiretamente, em uma determinada frequência. Este parâmetro fornece uma ferramenta para investigação da viabilidade de medidas indiretas de forças *a priori*, antes de executar qualquer medida.

Varoto & McConnell (1999) aplicaram a técnica da pseudo-inversa da matriz de F.R.F.s na identificação das forças atuantes na interface de estruturas acopladas e na investigação da flexibilidade desta técnica quando aplicada a dados experimentais. Os conceitos de subestruturação no domínio da frequência foram utilizados para modelar as interações dinâmicas que ocorrem entre as estruturas. Os resultados obtidos pelos autores, tanto numericamente quanto experimentalmente, mostram que, em alguns casos, boas estimativas para as forças são obtidas e elas dependem, dentre outros fatores, de uma escolha adequada das localizações de medições para a aceleração.

### 1.2.1.2 - Método baseado no uso de Parâmetros Modais (Desangehere & Snoeys, 1985)

O método é baseado na teoria de transformação modal que permite expressar a matriz de F.R.F.s em parâmetros modais do sistema (frequências naturais, fatores de amortecimento modais e os autovetores modais). Estes parâmetros podem ser obtidos de vários métodos experimentais, que são largamente utilizados pela comunidade da análise modal (Ewins, 1984).

Seja um sistema de N g.d.l.s com amortecimento proporcional descrito pela seguinte equação:

$$\{X(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\phi_r\} \{\hat{\phi}_r\}^T}{-m_r \omega^2 + c_r i \omega + k_r} \{F(\omega)\} \quad (1.6)$$

onde  $\{\phi_r\}$  é um vetor modal dos pontos de medição e  $\{\hat{\phi}_r\}$  é o vetor modal dos pontos de excitação.

Em aplicações reais os modos são usualmente identificados para  $n$  ( $n < N$ ) localizações de sensores, enquanto somente  $p$  ( $p < N$ ) de todos os possíveis modos são incluídos. Se o número de forças,  $f$  e posições são conhecidas a priori, a equação (1.6) reduz a:

$$\{X(\omega)\} = \sum_{r=1}^p \frac{\{\phi_r\} \{\hat{\phi}_r\}^T}{-m_r \omega^2 + c_r i \omega + k_r} \{F(\omega)\} \quad (1.7)$$

Empregando a notação matricial, a equação (1.7) pode ser reescrita como:

$$\{X(\omega)\} = [\Phi] [\bar{S}(\omega)] [\hat{\Phi}]^T \{F(\omega)\} \quad (1.8)$$

Onde  $[\Phi]$  é a matriz modal e  $[\bar{S}(\omega)]$  é uma matriz diagonal tendo os seguintes termos em sua diagonal principal:

$$\bar{s}_r = \frac{1}{-m_r \omega^2 + c_r i \omega + k_r} = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + i 2 \xi_r \omega_r \omega} \quad (1.9)$$

Com  $\xi_r$  e  $\omega_r$  sendo respectivamente, o fator de amortecimento modal e a frequência natural do r-ésimo modo, para matriz de massa modal normalizada.

O método de identificação engloba os seguintes passos:

*Primeiro passo:* Cálculo da resposta modal

$$\{P_m(\omega)\} = [\Phi]^T \{X(\omega)\} \quad (1.10)$$

*Segundo passo:* Cálculo da excitação modal

$$\{F_m(\omega)\} = [\bar{S}(\omega)]^{-1} \{P_m(\omega)\} \quad (1.11)$$

*Terceiro passo:* Cálculo da excitação física

$$\{\hat{F}(\omega)\} = [\hat{\Phi}]^T \{F_m(\omega)\} \quad (1.12)$$

Para garantir a solução normal, é necessário satisfazer as seguintes condições: o número de pontos medidos deve exceder ou ser igual ao número de modos, que por sua vez deverá ser maior ou igual ao número de excitações.

Este método em geral é mais eficiente do ponto de vista computacional, do que os métodos fundamentados na inversão direta da matriz de F.R.F.s, pois calcula a pseudo-

inversa somente duas vezes, enquanto o método de inversão da matriz de F.R.F.s faz este cálculo para cada linha de frequência. Contudo, o método baseado na transformação em coordenadas modais tem uma fonte de erro inevitável. Este método utiliza parâmetros modais ajustados ao invés de dados medidos. Desta forma, se o erro é induzido no estágio de ajuste dos parâmetros modais, este é propagado duas vezes à força identificada através do cálculo da pseudo-inversa dos parâmetros modais e processos relacionados.

Desanghere & Snoeys (1985) e Okubo *et. al.* (1985) aplicaram este procedimento de identificação de forças em vários tipos de sistema, tais como máquinas ferramentas, motores de automóveis e compressores de ar. Okubo e colaboradores descreveram um método similar onde a matriz de F.R.F. proporciona melhores resultados. Ao contrário de Desanghere & Snoeys, foi encontrado que erros nas propriedades modais resultam em predições imprecisas nas forças aplicadas. Em particular, foi encontrado que as regiões de anti-ressonâncias eram altamente sensíveis

Starkey & Merrill (1989) aplicaram dois algoritmos para identificação de forças, que são muito similares àqueles utilizados por Okubo *et. al.* (1985) num motor montado sobre uma estrutura rígida de aço através coxins. O primeiro algoritmo utiliza um modelo da matriz de aceleração para a estrutura e o segundo utiliza um modelo modal. Os resultados obtidos pelos autores indicam que o número de condicionamento da matriz de aceleração é um bom indicador de erros na predição de forças.

Shih *et al.* (1989) propuseram um método baseado na técnica de transformação modal, onde o número de forças, como também as suas localizações, são desconhecidas. A transformação modal é feita através de um filtro modal, calculado a partir da função de resposta em frequência medida e dos parâmetros modais, dispensando o cálculo da pseudo-inversa da matriz modal. A análise do posto da matriz de forças modais é avaliado para determinar o número de forças excitadoras incoerentes aplicadas. Uma vez que o número de forças excitadoras é conhecido, suas localizações podem ser determinadas por métodos de projeção.

Yeong & Kwang (1997) descreveram um procedimento para estimação de forças via modelo modal e analisaram a propagação do erro dos parâmetros modais identificados numa viga Euler-Bernoulli bi-apoiada. Estes autores constataram que erros nos autovalores somente afetam as respostas modais dos correspondentes modos. Desta forma, o erro na

identificação da força é maior nas vizinhanças das frequências de ressonância. Os autores afirmam que os erros nos vetores modais são as principais fontes de erro na identificação de forças.

Recentemente, Kriel (2000) avaliou dois métodos no domínio da frequência, sendo um baseado na inversão da matriz de função de resposta em frequência e outro no método de transformação em coordenadas modais. Tanto a aplicação de uma única força harmônica quanto a de duas forças harmônicas agindo simultaneamente, foram consideradas em uma viga de alumínio sujeita a diferentes condições de contorno. O autor concluiu que o método baseado na inversão da função de resposta em frequência mostrou-se superior ao método baseado na transformação modal.

### 1.2.1.3 - Método baseado no Modelo Espacial

Um outro método no domínio da frequência foi proposto e testado por Tsang & Rider (1989), no qual um conjunto de matrizes de massa, amortecimento e rigidez é obtido diretamente das respostas em frequência. O método evita o processo de extração dos parâmetros modais e, conseqüentemente, elimina muitas aproximações e erros que podem ser introduzidos durante o processo. O modelo foi usado para calcular o vetor força diretamente a partir das respostas via equação:

$$\{F(\omega)\} = (-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K])\{X(\omega)\} \quad (1.13)$$

Em princípio, o método mostra-se atrativo, visto que ele evita inversões matriciais. Além do mais, é possível substituir as matrizes encontradas experimentalmente por equivalentes obtidas pela técnica de elementos finitos.

## 1.2.2 - Métodos no domínio do tempo

Alguns dos principais métodos de identificação no domínio do tempo, descritos na literatura, serão abordados a seguir.

### 1.2.2.1 - Método da Soma das Acelerações Ponderadas (Sum of Weighted Accelerations Technique – SWAT (Gregory et al., 1986))

Este método é o mais largamente utilizado para identificação indireta de força no domínio do tempo. Como o próprio nome diz, este método usa uma soma dos sinais das acelerações ponderadas para reconstruir as forças externas.

O desenvolvimento da teoria do SWAT é feito em duas etapas distintas. Primeiro, a relação entre as forças externas atuantes em uma estrutura elástica e o movimento resultante de seus graus de liberdade modais é determinada. A segunda etapa consiste em identificar as forças externas a partir daquela relação.

O primeiro passo começa com a equação do movimento para uma estrutura que pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1.14)$$

Na equação (1.14), o vetor  $\{f(t)\}$  representa todas as forças externas, incluindo as forças aplicadas e as forças resultantes das condições de contorno. O vetor de deslocamentos,  $\{x(t)\}$ , pode ser escrito em termos do seguinte somatório:

$$\{x(t)\} = \sum \{\phi_i\}q_i(t) = [\Phi]\{q(t)\} \quad (1.15)$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz modal, contendo os modos de corpo rígido e os modos elásticos, e  $\{q(t)\}$  é o vetor contendo os fatores de participação modal (coordenadas generalizadas ou coordenadas modais). Substituindo a equação (1.15) na equação (1.14), e

pré-multiplicando-se a equação resultante pelo transposto do r-ésimo autovetor de corpo rígido, denotado por  $\{\phi_r\}$ , tem-se:

$$\{\phi_r\}^T [M][\Phi]\{\ddot{q}(t)\} + \{\phi_r\}^T [C][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + \{\phi_r\}^T [K][\Phi]\{q(t)\} = \{\phi_r\}^T \{f(t)\} \quad (1.16)$$

Para os modos de corpo rígido (translação ou rotação) não há nenhuma deformação elástica, e conseqüentemente, nenhuma força elástica e nenhuma força de amortecimento. Então:

$$[K]\{\phi_r\} = [C]\{\phi_r\} = 0 \quad (1.17)$$

$$\{\phi_r\}^T [K] = \{\phi_r\}^T [C] = 0 \quad (1.18)$$

Introduzindo as equações (1.17) e (1.18) na equação (1.16), e fazendo uso da propriedade de ortogonalidade dos modos em relação à matriz de massa, da equação (1.16) resulta:

$$m_r \ddot{q}_r(t) = \{\phi_r\}^T \{f(t)\}, \quad (1.19)$$

onde  $q_r$  é o fator de participação modal e  $m_r$  é a massa generalizada para o r-ésimo modo de corpo rígido.

Esta equação mostra que se a coordenada modal de um modo de corpo rígido puder ser determinada, então a equação (1.19) pode ser resolvida para uma componente do somatório das forças externas. Assim, se as quantidades modais  $m_r$ ,  $\ddot{q}_r(t)$  e  $\{\phi_r\}$  forem conhecidas, pode-se determinar  $\{f(t)\}$  para cada valor de tempo  $t$  em que a resposta foi medida.

O segundo passo examina como calcular  $\ddot{q}_r(t)$ , na prática, a partir das acelerações medidas experimentalmente.

Sendo  $\{\ddot{x}(t)\}$ , o vetor das acelerações medidas sobre a estrutura em um número  $c$  de coordenadas instrumentadas com acelerômetros, define-se o grau de liberdade generalizado segundo:

$$s(t) = \sum_{i=1}^c \tilde{e}_i \cdot \ddot{x}_i(t) = \{\tilde{e}\}^T \cdot \{\ddot{x}(t)\} \quad (1.20)$$

As acelerações podem ser escritas como combinações lineares dos  $m$  primeiros modos da estrutura, da seguinte forma:

$$\{\ddot{x}(t)\}_{(c \times 1)} = [\Phi]_{(c \times m)} \{\ddot{q}(t)\}_{(m \times 1)} \quad (1.21)$$

Substituindo a equação (1.21) em (1.20), tem-se:

$$s(t) = \{\tilde{e}\}^T [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} \quad (1.22)$$

Em seguida, o vetor dos pesos  $\{\tilde{e}\}$  é escolhido de modo que  $s(t)$  seja igual a um grau de liberdade modal. Para tanto:

$$\{\tilde{e}\}^T [\Phi] = \{I_i\}^T \quad (1.23)$$

onde  $\{I_i\}$  é a i-ésima coluna da matriz identidade.

Aplicando o operador transposição à equação (1.23), resulta:

$$[\Phi]^T \{\tilde{e}\} = \{I_i\} \quad (1.24)$$

Admitindo  $m \geq c$ , ou seja, que o número de autovetores na sub-base modal seja maior ou igual ao número de graus de liberdade instrumentados da estrutura, os coeficientes de ponderação são calculados empregando a solução normal do método dos mínimos quadrados:

$$\{\tilde{e}\} = ([\Phi][\Phi]^T)^{-1} [\Phi] \{I_i\} \quad (1.25)$$

Resolvendo a equação (1.25) para cada um dos modos de corpo rígido, pode-se, então, determinar os fatores de participação modal  $\ddot{q}_r(t)$ , que serão introduzidos na equação (1.19) para se estimar  $\{f(t)\}$ .

Com relação ao método SWAT, pode-se observar que trata-se de um método eficiente, requerendo pequeno montante de instrumentação. Porém, dada a sua característica de explorar os modos de corpo rígido, o método apresenta os seguintes inconvenientes:

- fornece somente as resultantes das forças e momentos externos em relação ao centro de massa, não sendo capaz de identificar, separadamente, as forças que atuam em diferentes posições.

- é aplicável somente a estruturas com condições de contorno livres.

- sua precisão é afetada pelo truncamento da base modal.

Na literatura há diversas aplicações desta metodologia, com intuito de identificar as forças de impacto em estruturas sob condições de contorno livres. Gregory *et al.* (1986) aplicaram a técnica SWAT para identificar as forças de interação entre a estrutura de um projétil e o seu alvo; Bateman *et al.* (1991) identificaram as forças de impacto em um teste de campo de um modelo reduzido de um recipiente de combustível nuclear quando colide com uma barreira rígida; Priddy *et al.* (1988) investigaram uma estratégia para posicionamento ótimo dos acelerômetros para medição das forças via SWAT.

Genaro (1997) propôs uma variação do método SWAT, onde as respostas em aceleração são integradas para gerar as velocidades e deslocamentos. Uma inversão da matriz modal é então utilizada para resolver as equações do movimento para estimação das forças de excitação. Esta técnica não é limitada à exploração dos modos de corpo rígido, e desta forma não apresenta os inconvenientes inerentes ao método SWAT. Esta metodologia foi aplicada a uma simples estrutura simulada numericamente, onde as forças de impacto e harmônicas no domínio do tempo foram identificadas.

Uma comparação entre o método SWAT e a técnica da pseudo-inversa da matriz de F.R.F.s foi conduzida por Santos e Varoto (1999), com o propósito de avaliar as

características destas metodologias na identificação de uma força impulsiva em uma viga com configuração livre-livre.

### 1.2.2.2 - Método da Deconvolução no Domínio do Tempo (Kammer, 1996)

Uma outra técnica utilizada para identificar as forças excitadoras no domínio do tempo é baseada na seguinte integral de convolução:

$$\{x(t)\} = \int_0^t [h(t-\tau)]\{f(\tau)\}d\tau, \quad (1.26)$$

onde  $\{x(t)\}$  é o vetor das respostas temporais,  $\{f(t)\}$  é o vetor das forças excitadoras e  $[h(t)]$  é a matriz de Funções de Resposta ao Impulso (F.R.I.s) ou Parâmetros de Markov.

A inversão da equação (1.26) produz estimativas das forças de entrada a partir das respostas em vibração. Infelizmente, este procedimento é sabidamente mal-condicionado e requer a implementação de esquemas de regularização para estabilizar os cálculos.

Kammer (1996), propôs um método para estimação de forças agindo em uma estrutura, baseado na deconvolução a partir das respostas temporais do sistema. Um conjunto de parâmetros de Markov do sistema inverso, no qual o papel da entrada e saída são invertidos, é estimado a partir dos parâmetros de Markov do sistema direto, mediante o uso de um esquema preditivo linear. Desta forma, os dados medidos em qualquer instante de tempo podem ser convoluídos com os parâmetros inversos de Markov para produzir estimativas das forças de entrada. Esta metodologia foi aplicada a um modelo simplificado de um satélite de comunicação. A metodologia proposta por Kammer assume que as posições dos sensores e as localizações da entrada sejam coincidentes para manter um sistema com fase mínima, que garanta um sistema inverso estável.

Há alguns inconvenientes relacionados ao uso da metodologia baseada na deconvolução, tais como: o esforço computacional elevado; e a sensibilidade do cálculo dos parâmetros inversos de Markov à presença de ruído. Este fato está estritamente ligado ao mau condicionamento numérico do sistema de equações de estimação.

Mais recentemente, Stelzner & Kammer (1999), propuseram uma técnica utilizando um filtro estrutural inverso não causal, que toma como entrada a resposta estrutural e retorna, como saída, uma estimativa para força. Esta técnica, que é uma extensão da formulação proposta por Kammer (1996), permite a estimação de forças de entrada para pares de sensores/atuadores em posições não coincidentes, para sistemas com múltiplas entradas e saídas. A formulação permite a identificação de forças de entrada para sistemas que possuam zeros de transmissão instáveis. Os autores aplicaram esta técnica à estimação das forças e momentos que surgem entre um veículo espacial e a estação espacial MIR durante uma simulação de acoplamento.

### 1.2.3 - Sistemas Contínuos

No caso de sistemas contínuos é necessário resolver equações diferenciais parciais. Isto limita a aplicação dos métodos de identificação a estruturas relativamente simples, com condições de contornos bem definidas. Alguns métodos incluem a técnica de transformação de Timoshenko que utiliza medições de acelerações em localizações remotas para encontrar a força de impacto (Whiston, 1984), (Jordan & Whiston, 1984). Em outros casos, funções de respostas ao impulso para viga do tipo Euler-Bernouli e Timoshenko, submetidas a forças de impacto transversal foram também investigadas (Park & Park, 1994). As funções de respostas ao impulso foram obtidas usando uma aproximação de onda de propagação no domínio do tempo.

Law *et. al.* (1999) identificam as forças provocadas por um veículo ao movimentar-se sobre uma viga suportada por amortecedores viscosos, sem o conhecimento das características destes. As equações do movimento da viga foram obtidas a partir da transformação modal e as equações relacionando as transformadas de Fourier das respostas e das cargas móveis foram convertidas para o domínio do tempo. As forças foram então obtidas mediante emprego do método dos mínimos quadrados.

## 1.3 – OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Métodos de identificação indireta de forças operando no domínio do tempo constituem o objeto do estudo reportado neste memorial, onde diferentes formas de modelagem de sistemas mecânicos são empregadas. No contexto da elastodinâmica linear, são estudados os seguintes métodos:

- **Método das coordenadas modais.** De acordo com este método, originalmente proposto por Genaro (1997), o problema inverso é formulado a partir da representação das respostas temporais no espaço modal, sendo utilizado, como modelo, um conjunto de auto-soluções (frequências naturais, fatores de amortecimento modais, massas generalizadas e componentes de modos de vibração).

- **Método fundamentado na deconvolução das respostas temporais,** que opera a partir de um modelo constituído por um conjunto de funções de resposta ao impulso da estrutura.

- **Método baseado em um modelo inverso formulado no espaço de estados.** Este método utiliza um modelo inverso obtido a partir do sistema direto através do intercâmbio dos vetores de entrada e de saída. Uma vez construído o sistema inverso, as forças excitadoras são estimadas mediante a resolução numérica das equações de estado. O método é apresentado em duas variantes: a primeira explorando um modelo construído a partir das matrizes estruturais de massa, rigidez e amortecimento e a segunda baseada em um modelo construído a partir de um conjunto de auto-soluções. Para cada um dos tipos de modelo, são ainda consideradas duas variantes: modelo de tempo contínuo e modelo de tempo discreto.

O estudo dos métodos compreende o desenvolvimento de sua formulação, o evidenciamento de suas características operacionais e a avaliação de seu desempenho em diversas situações a partir de aplicações a sistemas simulados numericamente e ensaiada experimentalmente em laboratório. Além disso, contribuições originais são propostas a cada metodologia a ser estudada, com intuito de melhorar a adequação aos tratamento de alguns de seus inconvenientes e dificuldades. As principais contribuições propostas a cada método são relacionadas a seguir:

**Método das Coordenadas Modais**

- Avaliação de desempenho do método na identificação de diferentes tipos, números e posições de forças.
- Proposição e avaliação de um procedimento para eliminação das tendências geradas pelo processo de integração numérica das respostas em aceleração para obtenção das respostas em velocidade e deslocamento, em atuações em que as condições iniciais não são nulas.
- Avaliação, no contexto do problema de identificação de forças, de um procedimento para escolha da posição dos sensores, baseado na minimização do número de condicionamento da sub-matriz modal utilizada.
- Expansão da metodologia para o caso com amortecimento geral.
- Proposição e avaliação do uso do método das Coordenadas Modais como uma das etapas de um procedimento para estimação de parâmetros físicos de elementos de suporte.

**Método da Deconvolução no Domínio do Tempo.**

- Avaliação do desempenho do método na identificação de diferentes tipos, número e posições de forças.
- Avaliação do uso do Método do Gradiente Conjugado para a resolução numérica do sistema de equações de estimação e redução das dificuldades geradas pelo mau condicionamento numérico.
- Proposição e avaliação de um procedimento para redução do número de incógnitas, mediante o uso de expansões em série de funções ortogonais para representar as forças excitadoras.

- Proposição e avaliação do uso do Método da Deconvolução no Domínio do Tempo como uma das etapas de um procedimento para estimação de parâmetros físicos de elemento de suporte.
- Avaliação de um procedimento para identificação das funções de resposta ao impulso, associado ao Método do Gradiente Conjugado.

**Método Baseado no Modelo Estrutural Inverso.**

- Avaliação do desempenho do método na identificação de diferentes tipos, números e posições de forças.
- Avaliação de um procedimento destinado a possibilitar o emprego do método nos casos em que as forças excitadoras e os sensores para aquisição das respostas têm posições não coincidentes.

Estas contribuições proporcionadas ao estudo destes métodos serão destacadas nos capítulos seguintes.

Além deste primeiro capítulo introdutório, o presente memorial comporta nove capítulos com o seguinte conteúdo:

No Capítulo II é apresentada, a título de fundamentação teórica, uma síntese da formulação relativa aos diferentes tipos modelos matemáticos utilizados na dinâmica estrutural.

No Capítulo III o condicionamento numérico do problema inverso é focado, sendo descritos os principais procedimentos de regularização.

No Capítulo IV é apresentada a formulação do método de identificação de forças baseado nas coordenadas modais.

O Capítulo V é dedicado ao método de identificação de forças baseado na deconvolução no domínio do tempo.

O Capítulo VI apresenta a metodologia de identificação de forças baseada no emprego do modelo inverso formulado no espaço de estados.

Diversos testes de simulação numérica, realizados para a avaliação das metodologias estudadas, são apresentados no Capítulo VII.

O Capítulo VIII trata de aplicações dos métodos de identificação de forças a estruturas ensaiadas em laboratório.

Finalmente, no Capítulo IX, apresentam-se as conclusões gerais do estudo realizado e as sugestões para desenvolvimentos futuros.

## CAPÍTULO II

### MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

Visando fornecer os fundamentos teóricos para o desenvolvimento dos métodos de identificação de forças descritos nos Capítulos subsequentes, é apresentada, neste Capítulo, uma síntese da formulação referente aos diferentes tipos de modelos matemáticos de sistemas mecânicos lineares e das respostas dinâmicas obtidas mediante a resolução destes modelos.

#### 2.1- MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS LINEARES

Os modelos matemáticos de sistemas mecânicos vibratórios lineares podem se apresentar sob duas formas principais: modelos contínuos (ou de parâmetros distribuídos) e modelos discretos (ou de parâmetros concentrados) (Craig Jr., 1981). Se o primeiro tipo de formulação é escolhida, o sistema estrutural fica descrito por equações diferenciais parciais lineares (nas variáveis espaciais e na variável tempo), cuja solução é obtida para todo o domínio, devendo satisfazer a um conjunto de condições iniciais e condições de contorno. Os modelos discretos, por outro lado, são representados por conjuntos de equações diferenciais lineares ordinárias, tendo o tempo como variável independente.

O número mínimo de coordenadas físicas necessárias para representar completamente a configuração espacial de um sistema é chamado *número de graus de liberdade (g.d.l.)*. Modelos contínuos possuem número infinito de g.d.l., ao passo que modelos discretos possuem número finito de g.d.l.

Vários tipos de modelos matemáticos discretos são empregadas em dinâmica estrutural. Nas seções seguintes, estes modelos são formulados.

### 2.1.1- Modelo espacial

Para um sistema vibratório de N g.d.l, este tipo de modelo é representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais lineares ordinárias:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.1)$$

onde  $[M] \in R^{N \times N}$  é a matriz de massa, simétrica, definida positiva,  $[C] \in R^{N \times N}$  é a matriz de amortecimento viscoso, simétrica, semi-definida positiva ou definida positiva e  $[K] \in R^{N \times N}$  é a matriz de rigidez, semi-definida positiva ou definida positiva.  $\{\ddot{x}(t)\}$ ,  $\{\dot{x}(t)\}$  e  $\{x(t)\} \in R^N$  são, respectivamente, os vetores das respostas em aceleração, velocidade e deslocamento para os N graus de liberdade e  $\{f(t)\} \in R^N$  é o vetor das forças externas aplicadas.

Em geral, as distribuições de inércia, amortecimento e rigidez são difíceis de se determinar, de modo que os modelos espaciais ficam restringidos a sistemas mecânicos simples ou a sistemas discretizados por técnicas numéricas aproximadas, tais como o método dos elementos finitos.

### 2.1.2- Modelo no espaço de estados

Na forma de espaço de estados, representa-se um sistema de N g.d.l. como um conjunto de 2N equações diferenciais (se o modelo for de tempo contínuo) ou equações de diferença (modelo de tempo discreto) de primeira ordem, as quais podem ser organizadas na forma matricial.

#### 2.1.2.1 - Modelo no espaço de estados em tempo contínuo

Pré-multiplicando a equação (2.1) por  $[M]^{-1}$  e fazendo  $\{f(t)\} = [B_2]\{u(t)\}$ , tem-se:

$$\{\ddot{x}(t)\} = -[M]^{-1}[C]\{\dot{x}(t)\} - [M]^{-1}[K]\{x(t)\} + [M]^{-1}[B_2]\{u(t)\} \quad (2.2)$$

onde  $[B_2]_{(N \times f)}$  é a matriz definindo as localizações das f forças excitadoras contidas no vetor  $\{u(t)\} \in R^f$ . Uma representação no espaço de estados de tempo contínuo para (2.2) é dada pelas seguintes equações (Juang, 1994):

$$\{\dot{w}(t)\} = [\bar{A}]\{w(t)\} + [\bar{B}]\{u(t)\} \quad (2.3)$$

$$\{y(t)\} = [\bar{C}]\{w(t)\} + [\bar{D}]\{u(t)\} \quad (2.4)$$

onde:

$$\{w(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} \in R^{2N} \text{ é o vetor de estado;}$$

$$\{y(t)\} \in R^s \text{ é o vetor das saídas do sistema}$$

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \in R^{2N \times 2N} \text{ é a matriz do sistema}$$

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[B_2] \end{bmatrix} \in R^{2N \times f} \text{ é a matriz de influência das entradas}$$

$$[\bar{C}] = [C_d] - [C_a][M]^{-1}[K] \quad [C_v] - [C_a][M]^{-1}[C] \in R^{s \times 2N} \text{ é a matriz de influência da saída}$$

$$[\bar{D}] = [C_a][M]^{-1}[B_2] \in R^{s \times f} \text{ é a matriz de transmissão direta}$$

$[C_a]$ ,  $[C_v]$  e  $[C_d]$  são matrizes que fornecem as posições dos sensores para aceleração, velocidade e deslocamento respectivamente.

### 2.1.2.2 - Modelo no espaço de estados em tempo discreto

É também possível definir, a partir do modelo em tempo contínuo, um modelo em tempo discreto, governado pelo seguinte sistema de equações de diferenças (Juang, 1994):

$$\{w(k+1)\} = [A_{\text{dis}}]\{w(k)\} + [B_{\text{dis}}]\{u(k)\} \quad (2.5)$$

$$\{y(k)\} = [C_{\text{dis}}]\{w(k)\} + [D_{\text{dis}}]\{u(k)\} \quad (2.6)$$

onde:

$\{w(k)\}$  é o vetor de estado de dimensão  $R^{2N}$

$\{u(k)\}$  é o vetor das forças excitadoras de dimensão  $R^f$

$\{y(k)\}$  é o vetor das saídas de dimensão  $R^s$

$$[A_{\text{dis}}] = e^{[A]\Delta t}$$

$$[B_{\text{dis}}] = [B] \int_0^{\Delta t} e^{[A](\Delta t - \tau)} d\tau$$

$$[C_{\text{dis}}] = [C] e^{[A]\Delta t}$$

$$[D_{\text{dis}}] = [C] \int_0^{\Delta t} e^{[A](\Delta t - \tau)} d\tau [B] + [D]$$

Nas equações acima,  $\Delta t$  é o período de amostragem e  $k$  indica as grandezas avaliadas no instante  $k\Delta t$ .

### 2.1.3 – Modelo Modal para sistemas não amortecidos

Para o sistema livre não amortecido, as equações homogêneas do movimento (2.1) ficam reduzidas a:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (2.7)$$

Utilizando uma solução da forma  $\{x(t)\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$  da equação (2.7), obtém-se o seguinte problema de autovalor:

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = \{0\} \quad \text{onde } \lambda = \omega^2 \quad (2.8)$$

O problema (2.8) admite  $N$  pares de soluções não nulas  $(\lambda_r, \{\phi_r\})$ ,  $r = 1$  a  $N$ , chamadas *auto-soluções*, onde:

- $\lambda_r \in R^+$  são os *autovalores*. As frequências naturais são dadas por:  $\omega_r = \sqrt{\lambda_r}$ ,  $r = 1$  a  $N$ .
- $\{\phi_r\} \in R^N$  são os *autovetores* ou *modos naturais de vibração*.

Os autovalores são obtidos impondo-se a condição:

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0 \quad (2.9)$$

É usual agrupar as auto-soluções nas seguintes matrizes:

- matriz modal:  $[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_N\}] \in R^{N \times N}$  (2.10)

- matriz espectral:  $[\Lambda] = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \in R^{N \times N}$  (2.11)

Para dois autovalores distintos  $\lambda_r \neq \lambda_s$ , pode-se demonstrar que são válidas as seguintes relações entre os autovetores correspondentes:

$$\{\phi_r\}^T [M] \{\phi_s\} = 0, \text{ para } r \neq s \quad (2.12)$$

$$\{\phi_r\}^T [K] \{\phi_s\} = 0, \text{ para } r \neq s \quad (2.13)$$

As duas equações traduzem as *propriedades de ortogonalidade* dos autovetores em relação as matrizes de massa e de rigidez, respectivamente.

Observando a equação (2.8), pode-se notar que se  $\{\phi_r\}$  é um autovetor, qualquer  $\alpha\{\phi_r\}$ , com  $\alpha \neq 0$  também satisfaz esta equação. Isto significa que as normas dos autovetores são indeterminadas e podem ser escolhidas arbitrariamente, de modo a satisfazerem:

$$\left. \begin{aligned} \{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} &= \eta_r \\ \{\phi_r\}^T [K] \{\phi_r\} &= \eta_r \lambda_r \end{aligned} \right\} r = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

onde  $\eta_r, r = 1, 2, \dots, N$  são as chamadas *massas generalizadas*.

Usualmente os autovetores são normalizados de modo que as massas generalizadas sejam unitárias, ou seja:

$$\left. \begin{aligned} \{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} &= 1 \\ \{\phi_r\}^T [K] \{\phi_r\} &= \lambda_r \end{aligned} \right\} r = 1 \text{ a } N \quad (2.15)$$

Com base nas definições (2.10) e (2.11) as relações de ortogonalidade (2.12) e (2.13) e de normalização (2.14) podem ser agrupadas nas seguintes formas matriciais:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [N] \quad (2.16)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [N] [\Lambda] \quad (2.17)$$

onde  $[N] = \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$  é a matriz de massas generalizadas.

Os autovetores de um sistema vibratório de N g.d.l. constituem um conjunto de N vetores linearmente independentes. Da Álgebra Linear sabe-se que tal conjunto constitui uma base vetorial do espaço N-dimensional dos vetores que representam todas as possíveis formas de movimento do sistema. Isto significa ainda que qualquer tipo de resposta do sistema mecânico pode ser expressa como uma combinação linear dos N autovetores, segundo:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} q_r(t) = [\Phi] \{q(t)\} \quad (2.18)$$

onde  $q_r(t)$  são coeficientes de combinação linear.

A equação (2.18) expressa o *Teorema da Expansão* ou *Princípio da Superposição Modal*, que constitui a base de todos os procedimentos de análise modal de sistemas mecânicos lineares.

## 2.2 – RESPOSTAS DINÂMICAS DE SISTEMAS DISCRETOS LINEARES.

### 2.2.1 - Respostas de sistemas não amortecidos a um conjunto de condições iniciais.

Introduzindo a equação (2.18) em (2.7) e pré-multiplicando a equação resultante por  $[\Phi]^T$ , tem-se:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \ddot{q}(t) + [\Phi]^T [K] [\Phi] q(t) = \{0\} \quad (2.19)$$

Fazendo uso das equações (2.16) e (2.17), a equação acima fica:

$$[N] \ddot{q}(t) + [N] [\Lambda] q(t) = \{0\} \quad (2.20)$$

Lembrando que  $[N]$  e  $[\Lambda]$  são matrizes diagonais, nota-se que o sistema (2.20) é constituído de N equações diferenciais de segunda ordem desacopladas considerando uma normalização por massa modal, do tipo:

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (2.21)$$

cujas soluções são expressas segundo:

$$q_r(t) = C_r \cos \omega_r t + D_r \sin \omega_r t \quad (2.22)$$

Introduzindo (2.22) em (2.18), tem-se:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} (C_r \cos \omega_r t + D_r \sin \omega_r t) \quad (2.23)$$

As 2N constantes  $C_r$  e  $D_r$ , figuradas em (2.23) são obtidas impondo as condições iniciais:

$$\{x(0)\} = \{x_0\} = \sum_{r=1}^N C_r \{\phi_r\} \quad (2.24)$$

Pré-multiplicando (2.23) por  $\{\phi_r\}^T [M]$ , vem:

$$C_r = \frac{1}{\eta_r} \{\phi_r\}^T [M] \{x_0\}, \quad r = 1 \text{ a } N \quad (2.25)$$

Derivando (2.24) em relação ao tempo, e utilizando procedimento similar tem-se:

$$\{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\} = \sum_{r=1}^N \omega_r D_r \{\phi_r\} \Rightarrow D_r = \frac{1}{\eta_r \omega_r} \{\phi_r\}^T [M] \{\dot{x}_0\} \quad (2.26)$$

A introdução de (2.25) e (2.26) em (2.23) permite obter a resposta do sistema a um conjunto qualquer de condições iniciais.

### 2.2.2 - Respostas forçadas de sistemas não amortecidos.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares não homogêneas, sujeito às seguintes condições iniciais:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \text{ com } \{x(0)\} = \{x_0\}; \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\} \quad (2.27)$$

Introduzindo a equação (2.18) em (2.27), seguida da pré-multiplicação da equação resultante por  $[\Phi]^T$  e do emprego das relações de ortogonalidade (2.16) e (2.17) tem-se:

$$[N]\{\ddot{q}(t)\} + [N][\Lambda]\{q(t)\} = \{g(t)\} \quad (2.28)$$

$$\text{com } \{g(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

O sistema (2.28) é constituído de N equações diferenciais desacopladas, considerando normalização por massa modal unitária, do tipo:

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{1}{\eta_r} g_r(t), \quad r = 1 \text{ a } N \quad (2.29)$$

A solução geral de (2.29) é dada por:

$$q_r(t) = q_r^h(t) + q_r^p(t), \quad (2.30)$$

onde  $q_r^h(t)$  é a solução da equação diferencial homogênea associada a (2.29) e  $q_r^p(t)$  é uma solução particular de (2.29).

A solução  $q_r^h(t)$  é dada por (2.22):

$$q_r^h(t) = A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t \quad (2.31)$$

Para obter a solução  $q_r^p(t)$  pode-se empregar o método da variação dos parâmetros, que conduz à solução:

$$q_r^p(t) = \frac{1}{\eta_r} \int_0^t g_r(\theta) h_r(1-\theta) d\theta, \quad r = 1 \text{ a } N \quad (2.32)$$

onde  $h_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \sin \omega_r t$ ,  $r = 1$  a  $N$  é a *função de resposta ao impulso* associada ao  $r$ -ésimo modo.

Substituindo (2.31) e (2.32) em (2.30) e em seguida introduzindo a equação resultante em (2.18), tem-se a resposta forçada do sistema expressa segundo:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N (A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t) \{\phi_r\} + \sum_{r=1}^N \left[ \frac{1}{\omega_r \eta_r} \int_0^t g_r(\vartheta) \sin \omega_r (t - \vartheta) d\vartheta \right] \{\phi_r\} \quad (2.33)$$

As constantes  $A_r$  e  $B_r$ , com  $r = 1$  a  $N$  são dadas pelas seguintes expressões, obtidas impondo as condições iniciais e fazendo uso das relações de ortogonalidade:

$$A_r = \frac{1}{\eta_r} \{\phi_r\}^T [M] \{x_0\} \quad (2.34)$$

$$B_r = \frac{1}{\eta_r \omega_r} \{\phi_r\}^T [M] \{\dot{x}_0\} \quad (2.35)$$

### 2.2.3 – Respostas livres de sistemas de N g.d.l. com amortecimento viscoso.

Seja o sistema de equações do movimento dado sob a forma:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{0\} \quad (2.36)$$

com as condições iniciais:  $\{x(0)\} = \{x_0\}$ ;  $\{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}$

Na análise de sistemas amortecidos, deve-se considerar separadamente dois casos relativos à matriz de amortecimento.

**1º caso:** As matrizes  $[C]$ ,  $[M]$  e  $[K]$  satisfazem a relação:

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C] \quad (2.37)$$

Pode-se verificar que o caso de amortecimento proporcional, em que a matriz de amortecimento é expressa sob a forma:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.38)$$

é um caso particular desta condição.

Neste primeiro caso, expressa-se a solução do sistema amortecido (2.36) como uma combinação linear dos autovetores do sistema não amortecido associado:

$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} q_r(t) = [\Phi] \{q(t)\}$ , onde  $[\Phi]$  e  $[\Lambda]$  são as auto-soluções do problema de autovalor do sistema não amortecido:  $([K] - \lambda[M])\{\phi\} = \{0\}$ .

Introduzindo (2.18) em (2.36), pré-multiplicando a equação resultante por  $[\Phi]^T$  e fazendo uso das relações de ortogonalidade (2.16) e (2.17), vem:

$$[N] \{\ddot{q}(t)\} + [\beta] \{\dot{q}(t)\} + [N][\Lambda] \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.39)$$

onde  $[\beta] = [\Phi]^T [C] [\Phi]$  é, neste caso, uma matriz diagonal:  $[\beta] = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_N\}$ , sendo chamada matriz de amortecimento generalizadas.

O sistema (2.39) é constituído de N equações diferenciais desacopladas, coniseraando normalização por massa modal unitária, do tipo:

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0, \quad r = 1 \text{ a } N \quad (2.40)$$

onde  $\xi_r = \frac{\beta_r}{2\eta_r \omega_r}$  são os *fatores de amortecimento modais*.

Admitindo que o amortecimento seja subcrítico ( $\xi < 1$ ,  $r = 1$  a  $N$ ), a solução geral de (2.40) se escreve:

$$q_r(t) = e^{-\xi_r \omega_r t} [A_r \cos \omega_d t + B_r \sin \omega_d t] \quad (2.41)$$

onde:  $\omega_d = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$

Introduzindo (2.41) em (2.18), vem:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} e^{-\xi_r \omega_r t} [A_r \cos \omega_d t + B_r \sin \omega_d t]$$

Introduzindo as condições iniciais, e seguindo o mesmo procedimento utilizado na seção anterior, as seguintes expressões são obtidas para as constantes  $A_r$  e  $B_r$ :

$$A_r = \frac{1}{\eta_r} \{\phi_r\}^T [M] \{x_0\} \tag{2.42}$$

$$B_r = \frac{1}{\eta_r} \{\phi_r\}^T [M] \{\dot{x}_0\} + \frac{\xi_r}{\eta_r \sqrt{1 - \xi_r^2}} \{\phi_r\}^T [M] \{x_0\} \tag{2.43}$$

$r = 1, 2, \dots, N$

**2º caso:**  $[C][M]^{-1}[K] \neq [K][M]^{-1}[C]$

Neste caso, deve-se analisar o problema no espaço  $R^{2N}$  (espaço de estados). Para tanto, o sistema (2.36) é reescrito segundo:

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \\ [M]\{\dot{x}(t)\} = [M]\{\dot{x}(t)\} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{x(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}$$

Numa forma mais compacta tem-se:

$$[U]\{\dot{w}(t)\} = [A]\{w(t)\} \tag{2.44}$$

onde são definidas as seguintes matrizes de estado:

$$[U] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} ; [A] = \begin{bmatrix} -[K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \in R^{2N, 2N} \tag{2.45}$$

Para o sistema homogêneo (2.44), buscam-se soluções do tipo:

$$\{w(t)\} = \{w\} e^{st} \tag{2.46}$$

Introduzindo (2.46) em (2.44), o problema de autovalor é obtido sob a forma:

$$([A] - s[U])\{w\} = \{0\} \tag{2.47}$$

As soluções de (2.47) são os pares de auto-soluções complexas:

$$\begin{cases} s_r \in C \text{ (autovalores)} \\ \{w_r\} = \begin{Bmatrix} \{x_r^d\} \\ s_r \{x_r^d\} \end{Bmatrix} \in C^{2N}, \quad r = 1 \text{ a } 2N \text{ (autovetores)} \end{cases}$$

No caso de estruturas fracamente amortecidas, as auto-soluções ocorrem em pares complexos conjugados e os autovalores são expressos segundo:

$$s_r = -\xi_r \omega_r \pm j \omega_d, \quad r = 1 \text{ a } N \tag{2.48}$$

onde:  $\bullet \omega_d = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$

- $\bullet \omega_d$ : frequência natural amortecida ;
- $\bullet \xi_r$ : fator de amortecimento modal

Pode-se verificar que os autovetores satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\left. \begin{aligned} \{w_r\}^T [U] \{w_s\} &= \delta_{rs} \eta_s^d \\ \{w_r\}^T [A] \{w_s\} &= \delta_{rs} \eta_s^d s_s \end{aligned} \right\} r, s = 1 \text{ a } 2N, \quad (2.49)$$

São definidas as seguintes matrizes, formadas a partir das autosoluções:

$$[S] = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_{2N}\} \in \mathbb{C}^{2N, 2N} : \text{matriz espectral}$$

$$[W] = [\{w_1\} \dots \{w_{2N}\}] \in \mathbb{C}^{2N, 2N} : \text{matriz modal}$$

$$[N^d] = \text{diag}\{\eta_1^d, \dots, \eta_{2N}^d\} \in \mathbb{C}^{2N, 2N} : \text{matriz de massas generalizadas}$$

Com estas definições, os dois conjuntos de equações de ortogonalidade (2.49), se escrevem:

$$\begin{aligned} [W]^T [U] [W] &= [N^d] \\ [W]^T [A] [W] &= [N^d] [S] \end{aligned} \quad (2.50)$$

De posse das auto-soluções, faz-se uso do Teorema da Expansão e expressa-se a solução de (2.44) como uma combinação linear dos N autovetores complexos:

$$\{w(t)\} = \sum_{r=1}^N \{w_r\} q_r(t) = [W] \{q(t)\} \quad (2.51)$$

Introduzindo (2.51) em (2.44), pré-multiplicando a equação resultante por  $[W]^T$  e usando as equações de ortogonalidade, obtém-se:

$$[N^d] \{\dot{q}(t)\} = [N^d] [S] \{q(t)\}$$

Este último sistema comporta N equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, desacopladas, do tipo:

$$\dot{q}_r(t) = s_r q_r(t), \quad r = 1 \text{ a } N, \quad (2.52)$$

cuja solução é dada por:

$$q_r(t) = A_r e^{s_r t} \quad (2.53)$$

Voltando à equação (2.51), tem-se:

$$\{w(t)\} = \sum_{r=1}^N A_r \{w_r\} e^{s_r t} \quad (2.54)$$

Introduzindo as condições iniciais em (2.54), obtém-se as constantes  $A_r$ :

$$A_r = \frac{1}{\eta_r^d} \{w_r\}^T [U] \{w_0\},$$

de forma que a resposta livre do sistema seja dada por:

$$\{w(t)\} = \sum_{r=1}^N \frac{1}{\eta_r^d} \{w_r\}^T [U] \{w_0\} e^{s_r t} \{w_r\} \quad (2.55)$$

#### 2.2.4 – Respostas harmônicas de sistemas não amortecidos.

Para um sistema de N g.d.l. não amortecido, pode-se expressar as equações do movimento em regime harmônico permanente sob a forma:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f\} e^{i\omega t}, \quad (2.56)$$

onde  $\{f\} \in \mathbb{R}^{N,1}$  é o vetor das amplitudes das forças excitadoras e  $\omega$  é a frequência de excitação.

Busca-se a solução de (2.56) em regime harmônico permanente sob a forma:

$$\{x(t)\} = \{X(\omega)\} e^{i\omega t} \quad (2.57)$$

onde  $\{X(\omega)\} \in R^{N,1}$  é o vetor das amplitudes da resposta harmônica.

Introduzindo (2.57) em (2.56), tem-se:

$$([K] - \omega^2 [M])\{X(\omega)\} = \{f\} \quad (2.58)$$

ou

$$[Z(\omega)]\{X(\omega)\} = \{f\} \quad (2.59)$$

onde  $[Z(\omega)] = [K] - \omega^2 [M] \in R^{N,N}$  é a matriz de rigidez dinâmica.

Multiplicando (2.59) por  $[Z(\omega)]^{-1}$ , obtém-se:

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)]\{f\}, \quad (2.60)$$

onde:

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \in R^{N,N} \quad (2.61)$$

é a matriz de flexibilidade dinâmica, matriz de F.R.F.'s ou matriz de receptâncias.

É muito conveniente expressar a matriz  $[H(\omega)]$  em termos de autovalores e autovetores. Para isto, partindo de (2.61), procede-se ao seguinte desenvolvimento:

$$[\Phi]^T [H(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T [K] [\Phi] - \omega^2 [\Phi]^T [M] [\Phi]$$

Fazendo uso das relações de ortogonalidade (2.16) e (2.17), a equação acima pode ser expressa sob a forma:

$$[\Phi]^T [H(\omega)]^{-1} [\Phi] = [N]([\Lambda] - \omega^2 [I]),$$

onde:

$$[H(\omega)] = [\Phi]([\Lambda] - \omega^2 [I])^{-1} [N]^{-1} [\Phi]^T \quad (2.62)$$

Notando que em (2.62) as duas matrizes a serem invertidas são diagonais, pode-se expressar aquela equação da seguinte forma:

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{\phi_r\} \{\phi_r\}^T}{\eta_r (\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (2.63)$$

Cada elemento da matriz  $[H(\omega)]$  tem a forma geral:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri} \phi_{rj}}{\eta_r (\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (2.64)$$

onde  $\phi_{ri}$  designa a  $i$ -ésima componente do autovetor  $\{\phi_r\}$ .

### 2.2.5 - Respostas harmônicas de sistemas com amortecimento viscoso.

Considere o seguinte sistema de equações do movimento:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} = \{f\} e^{i\omega t} \quad (2.65)$$

Busca-se obter as respostas harmônicas em regime permanente, considerando, a seguir, dois casos de amortecimento:

**1º caso:**  $[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C]$

Conforme já visto na seção 2.2.3, a transformação modal utilizando os autovetores do sistema não amortecido associado permite diagonalizar simultaneamente as matrizes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$ .

Busca-se então a solução de (2.65) sob a forma:

$$\{x(t)\} = \{X(\omega)\}e^{i\omega t} = [\Phi]\{q(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (2.66)$$

Introduzindo (2.66) em (2.65), pré-multiplicando a equação resultante por  $[\Phi]^T$ , tem-se:

$$(-[\Phi]^T[M][\Phi]\omega^2 + i\omega[\Phi]^T[C][\Phi] + [\Phi]^T[K][\Phi])\{q(\omega)\} = [\Phi]^T\{f\}$$

Utilizando as relações de ortogonalidade (2.16) e (2.17), a equação acima assume a forma:

$$(-[N]\omega^2 + i\omega[\beta] + [N][\Lambda])\{q(\omega)\} = [\Phi]^T\{f\}$$

onde:

$$\{q(\omega)\} = (-[N]\omega^2 + i\omega[\beta] + [N][\Lambda])^{-1}[\Phi]^T\{f\} \quad (2.67)$$

Substituindo (2.67) em (2.66), obtém-se a seguinte expressão para as amplitudes das respostas harmônicas:

$$\{X(\omega)\} = [\Phi][N[\Lambda] + i\omega[\beta] - \omega^2[N]]^{-1}[\Phi]^T\{f\} = [H(\omega)]\{f\} \quad (2.68)$$

onde:

$$[H(\omega)] = [\Phi][N[\Lambda] + i\omega[\beta] - \omega^2[N]]^{-1}[\Phi]^T \quad (2.69)$$

é a matriz de F.R.F.'s (receptâncias).

Observando que a matriz a ser invertida em (2.69) é diagonal, a última equação pode ser posta sob a forma:

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{\phi_r\}^T\{\phi_r\}}{(-\omega^2 + \omega_r^2 + i2\xi_r\omega_r)\eta_r}, \quad \text{com } \xi_r = \frac{\beta_r}{2\eta_r\omega_r} \quad (2.70)$$

Finalmente, o elemento  $H_{ij}(\omega)$  da matriz  $[H(\omega)]$  é expresso segundo:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri}\phi_{rj}}{(-\omega^2 + \omega_r^2 + i2\xi_r\omega_r)\eta_r}, \quad (2.71)$$

onde  $\phi_{ri}$  designa a  $i$ -ésima componente do autovetor  $\{\phi_r\}$ .

**2º caso:**  $[C][M]^{-1}[K] \neq [K][M]^{-1}[C]$

Após a passagem ao espaço de estados conforme detalhado na seção 2.2.3, as equações do movimento em regime harmônico ficam:

$$[U]\{\dot{w}(t)\} = [A]\{w(t)\} + \{g\}e^{i\omega t} \quad (2.72)$$

onde:  $\{g\} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^N$

Busca-se, para (2.72), uma solução da forma:

$$\{w(t)\} = \{W(\omega)\}e^{i\omega t} = [W]\{q(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (2.73)$$

onde  $[W]$  é a matriz modal do sistema amortecido.

Introduzindo (2.73) em (2.44), pré-multiplicando a equação resultante por  $[W]^T$  e utilizando as relações de ortogonalidade (2.50), obtém-se:

$$\{q(\omega)\} = (i\omega[N^d] - [S][N^d])^{-1}[W]^T\{g\}$$

e, retornando a (2.73), obtém-se a seguinte expressão para o vetor das amplitudes das respostas harmônicas:

$$\{W(\omega)\} = [W][N^d]^{-1}(i\omega[I] - [S])^{-1}[W]^T \{g\} \quad (2.74)$$

ou

$$\{W(\omega)\} = [H(\omega)]\{g\} \quad (2.75)$$

onde:

$$[H(\omega)] = [W][N^d]^{-1}(i\omega[I] - [S])^{-1}[W]^T \quad (2.76)$$

é a matriz de receptâncias.

No caso de pequeno amortecimento, as auto-soluções aparecem em pares complexos conjugados e a equação (2.76) pode ser posta sob a forma:

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{w_r\}\{w_r\}^T}{\eta_r^d(i\omega - s_r)} + \frac{\{\bar{w}_r\}\{\bar{w}_r\}^T}{\bar{\eta}_r^d(i\omega - \bar{s}_r)} \quad (2.77)$$

O elemento  $H_{ij}(\omega)$  da matriz de receptâncias é dada por:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{w_{ri} w_{rj}}{\eta_r^d(i\omega - s_r)} + \frac{\bar{w}_{ri} \bar{w}_{rj}}{\bar{\eta}_r^d(i\omega - \bar{s}_r)} \quad (2.78)$$

## 2.2.6 – Respostas forçadas de sistemas amortecidos.

No caso de vibrações forçadas as equações do movimento se escrevem:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.79)$$

com as condições iniciais  $\{x(0)\} = \{x_0\}$  e  $\{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}$ .

Após a passagem ao espaço de estados, (2.79) assume a forma:

$$[U]\{\dot{w}(t)\} = [A]\{w(t)\} + \{g(t)\} \quad (2.80)$$

com as condições iniciais:  $\{w(0)\} = \{w_0\}$ , onde:  $\{g(t)\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \in R^{2N,2N}$ .

São apresentadas a seguir, duas formas de se obter a solução geral de (2.80).

### 2.2.6.1 - Solução pelo método da matriz exponencial

Admitindo-se que  $[U]$  seja regular, (2.80) é primeiramente transformada em:

$$\{\dot{w}(t)\} = [\hat{A}]\{w(t)\} + [U]^{-1}\{g(t)\} \quad (2.81)$$

onde  $[\hat{A}] = [U]^{-1}[A]$ .

Introduzindo-se a matriz exponencial definida segundo  $e^{[\hat{A}]t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [\hat{A}]^k$

(Ogata, 1993) e multiplicando-se ambos os lados de (2.81) por  $e^{-[\hat{A}]t}$ , tem-se:

$$e^{-[\hat{A}]t} [\hat{A}] \{w(t)\} = e^{-[\hat{A}]t} [\hat{A}] \{w(t)\} + e^{-[\hat{A}]t} [U]^{-1} \{g(t)\} \quad (2.82)$$

Levando-se em conta que:

$$e^{-[\hat{A}]t} \{\dot{w}(t)\} - [\hat{A}] e^{-[\hat{A}]t} \{w(t)\} = \frac{d}{dt} (e^{-[\hat{A}]t} \{w(t)\})$$

a equação (2.82) conduz a:

$$\{w(t)\} = e^{[A]t} \{w_0\} + \int_0^t e^{-[A](t-\tau)} [U]^{-1} \{g(\tau)\} d\tau$$

ou ainda:

$$\{w(t)\} = e^{[A]t} \{w_0\} + \int_0^t [h(t-\tau)] \{g(\tau)\} d\tau \quad (2.83)$$

Em (2.83), a matriz:

$$[h(t)] = e^{[A]t} [U]^{-1} \in R^{2N,2N} \quad (2.84)$$

é a chamada matriz de *funções de respostas ao impulso unitário*. Os elementos desta matriz são interpretados da seguinte forma:  $h_{ij}(t)$  é a resposta temporal do sistema no seu  $i$ -ésimo g.d.l., devida a uma excitação do tipo impulso unitário  $\delta(t)$  aplicada no  $j$ -ésimo g.d.l.

### 2.2.6.2 - Solução pela transformação modal.

De acordo com este método, a solução procurada para (2.80) é expressa como uma combinação linear dos autovalores do sistema amortecido, que são as soluções do problema homogêneo (2.47). Assim escreve-se:

$$\{w(t)\} = [W] \{q(t)\} \quad (2.85)$$

A introdução de (2.85) em (2.80), seguida da pré-multiplicação da equação resultante por  $[W]^T$  e do uso das relações de ortogonalidade resulta em:

$$\{\dot{q}(t)\} = [S] \{q(t)\} + [W]^T \{g(t)\} \quad (2.86)$$

A solução de (2.86) é então obtida pelo Método da Variação dos Parâmetros, segundo o qual, primeiramente impõe-se:

$$\{q(t)\} = e^{[S]t} \{d(t)\} \quad (2.87)$$

Derivando (2.87) em relação ao tempo tem-se:

$$\{\dot{q}(t)\} = [S] e^{[S]t} \{d(t)\} + e^{[S]t} \{\dot{d}(t)\} \quad (2.88)$$

A introdução de (2.87) e (2.88) em (2.86) conduz a:

$$\{\dot{d}(t)\} = e^{-[S]t} [W]^T \{g(t)\},$$

cuja integração leva a:

$$\{d(t)\} = \{d(0)\} + \int_0^t e^{-[S]\tau} [W]^T \{g(\tau)\} d\tau$$

Introduzindo esta solução em (2.87) e em seguida em (2.85), obtém-se:

$$\{w(t)\} = [W] e^{[S]t} \{d(0)\} + \int_0^t [W] e^{[S](t-\tau)} [W]^T \{g(\tau)\} d\tau$$

O vetor  $\{d(0)\}$  é determinado impondo-se as condições iniciais:

$$\{w(0)\} = \{w_0\} = [W] \{d(0)\} \Rightarrow \{d(0)\} = [W]^{-1} \{w_0\} = [W]^T [U] \{w_0\}$$

A solução de (2.80) é finalmente expressa sob a forma:

$$\{w(t)\} = [W] e^{[S]t} [W]^T [U] \{w_0\} + \int_0^t [W] e^{[S](t-\tau)} [W]^T \{g(\tau)\} d\tau \quad (2.89)$$

ou ainda:

$$\{w(t)\} = [W] e^{[S]t} [W]^T [U] \{w_0\} + \int_0^t [h(t-\tau)] \{g(\tau)\} d\tau \quad (2.90)$$

Nesta última equação, a matriz:

$$[h(t)] = [W] e^{[s]t} [W]^T \quad (2.91)$$

é a matriz das funções de respostas ao impulso unitário, apresentada numa forma alternativa a (2.84).

### CAPÍTULO III

#### PROBLEMAS INVERSOS MAL POSTOS E MAL CONDICIONADOS

Este Capítulo é baseado no trabalho de Fregolent (1998) e tem como objetivo mostrar a influência do condicionamento matemático no problema de identificação de força.

Como visto no Capítulo I, a estimativa da saída devida a uma entrada conhecida é chamada de problema direto; a identificação da entrada através da saída medida é um problema inverso. Em se tratando do problema direto, a saída do sistema pode ser univocamente determinada e as pequenas variações nas entradas resultam geralmente em variações de mesma ordem nas saídas. Já os problemas inversos têm geralmente uma característica distinta: diferentes entradas podem produzir a mesma saída e pequenas variações na saída acarretam grandes oscilações na entrada, podendo a solução obtida ser completamente desprovida de significado.

Hadamard (1923), quando estudava o problema de Cauchy em conexão com a solução da equação de Laplace, verificou que a formulação matemática apresentando estas anomalias - em particular uma não dependência contínua da solução em relação aos dados - não poderia descrever um problema físico e ele chamou este tipo de problema de *problema mal posto*. Courant e Hilbert (1962) estabelecerão mais tarde as propriedades de um problema bem posto, destacando que problemas mal postos não são somente anomalias matemáticas mas eles também traduzem a física do problema.

#### 3.1 – CARACTERIZAÇÃO DE UM PROBLEMA MAL POSTO E MAL CONDICIONADO

Seja o problema: dado um operador linear contínuo  $[h]: X \rightarrow Y$  e um conjunto de dados  $\{x\} \in Y$ , encontrar  $\{f\} \in X$  tal que

$$\{x\} = [h]\{f\} \quad (3.1)$$

Y e X são chamados espaço de dados e espaço de soluções, respectivamente.

A imagem de  $[h]$  é um conjunto de todos  $\{x\}$  dentro do qual  $[h]$  projeta  $X: R([h]) = \{\{x\} \in Y \mid \{x\} = [h]\{f\}, \{f\} \in X\}$ .  $R([h])$  é um subespaço de  $Y$  e sua dimensão é chamada de posto de  $[h]$ :  $\rho([h]) = \dim(R([h]))$ . O espaço nulo é o conjunto de todos  $\{f\}$  que  $[h]$  transforma em  $0: NU([h]) = \{\{f\} \in X \mid [h]\{f\} = \{0\}\}$ .  $NU([h])$  é um subespaço de  $X$  e sua dimensão é chamada nulidade de  $[h]$ :  $\nu([h]) = \dim(NU([h]))$ .

O operador adjunto  $[h]^T$  é um operador contínuo linear tal que:

$$\forall \{f\} \in X, \{x\} \in Y: ([h]\{f\}, \{x\})_Y = (\{f\}, [h]^T \{x\})_X.$$

Entre o espaço nulo e a imagem do operador as seguintes relações se mantêm:

$$\overline{R([h])} = NU([h]^T)^\perp \quad \overline{R([h]^T)} = NU([h])^\perp; \quad X = NU([h]) \oplus \overline{R([h]^T)} \quad Y = NU([h]^T) \oplus \overline{R([h])} \quad (3.2)$$

onde o traço superior indica o fechamento de  $R([h])$ , o símbolo  $\perp$  indica o complemento ortogonal, e  $\oplus$  indica a soma direta.

Em problemas de dimensão finita:

$$\overline{R([h])} = R([h]) \quad , \quad \rho([h]) = ([h]^T) \quad (3.3)$$

As componentes de  $\{f\}$  pertencentes ao espaço nulo de  $[h]$  não podem ser recuperadas através dos dados  $\{x\}$  pois suas projeções sobre a faixa de  $[h]^T$  são nulas. Por esta razão elas são chamadas de objetos invisíveis (Bertero, 1988). Por outro lado, a componente ortogonal do espaço nulo de  $[h]$  contém os objetos visíveis que podem ser reconstruídos através do dado  $\{x\}$ . Uma vez que qualquer componente invisível de  $\{f\}$  é sempre transformado em zero por  $[h]$ , se  $NU([h]) \neq 0$ , a solução não pode ser única.

Os dados medidos  $\{x\}$  são sempre afetados por algum erro, de modo que o espaço  $Y$  contém dados exatos  $\{\bar{x}\}$  e perturbados  $\{x\}$  mas, geralmente, o último não pertence a faixa

de  $[h]$ . Uma vez que qualquer  $\{f\}$  é transformado por  $[h]$  em sua faixa, se  $\{x\}$  não pertencer a  $R([h])$ , uma solução  $\{f\}$  que pode ser transformada por  $[h]$  em  $\{x\} \in Y$  não existe.

### 3.1.1. Definição de um Problema Mal Posto

O problema (3.1) é chamado de bem posto no sentido de Hadamard se:

- a solução  $\{f\}$  é única em  $X$ ;
- a solução  $\{f\} \in X$  existe para qualquer  $\{x\} \in Y$ ;
- pequenas perturbações em  $\{x\}$  resultam em pequenas perturbações na solução  $\{f\}$ , sem a necessidade de impor restrições adicionais;
- O mapeamento inverso  $g \rightarrow$  é contínuo.

Courant e Hilbert (1962) estabelecem que uma formulação matemática descrevendo um fenômeno natural observável deve satisfazer necessariamente estas três condições. As duas primeiras condições requerem que a solução não seja ambígua, a terceira garante a dependência de continuidade da solução nos dados.

Esta definição restringe a classe de problemas bem postos, mas é possível estender esta classe definindo um problema bem posto se sua *solução generalizada* satisfizer as três condições de existência, unicidade e continuidade.

Esta segunda definição parece ser mais apropriada do ponto de vista prático. Geralmente, os dados medidos formam um conjunto finito, conhecido com um certo grau de aproximação: neste caso a solução não existe mas é possível encontrar uma solução generalizada (por mínimos quadrados, por exemplo) que pode ser considerada uma solução real do problema. Com esta definição de problema bem posto no sentido amplo, os problemas de dimensão finita lineares são sempre bem postos pois a solução generalizada sempre existe, é única e depende continuamente dos dados, ou seja, quando a variações dos dados tendendo a zero correspondem variações na solução com esta mesma tendência. Esta definição permite destacar a diferença entre uma dependência não contínua da solução em relação aos dados e a instabilidade da solução causada por erros nos dados medidos, chamada de *mau condicionamento*.

### 3.1.2. Definição de um Problema Mal Condicionado

As condições de Hadamard não são suficientes para garantir a estabilidade numérica da solução. A dependência contínua da solução em relação aos dados é somente uma condição necessária: de fato não garante que as variações na solução sejam de mesma ordem que as variações nos dados.

Considere-se o problema: dado  $\{\bar{x}\} \in Y$ , encontrar  $f(\{\bar{x}\}) \in X$ , onde  $\{\bar{x}\}$  é uma quantidade não perturbada. Geralmente  $\{\bar{x}\}$  é desconhecido uma vez que os dados medidos  $\{x\}$  são sempre perturbados. Então, somente é possível encontrar uma solução  $f(x)$  do problema perturbado. Um problema é mal condicionado quando a solução difere muito da solução  $f(\bar{x})$  do problema não perturbado, embora  $\{x\}$  esteja próximo de  $\{\bar{x}\}$ .

Então, o mau condicionamento é visível na solução somente quando os dados são afetados por algum erro. Este erro pode ser enormemente amplificado na solução de forma que ela fique sem significado algum.

Assumindo a definição no sentido amplo de problemas bem postos, os problemas lineares de dimensão finita são sempre bem postos mas eles podem ser mal condicionados.

### 3.1.3. Solução de Problemas Inversos de Dimensão Finita

Quando o operador  $[h]$  tem posto máximo, isto é  $\rho([h]) = \min(M, N)$ , os seguintes casos são possíveis:

- $M=N$ ,  $\rho([h]) = M$ . Os espaços  $X$  e  $Y$  tem as mesmas dimensões e  $NU([h]) = 0$ , onde  $0$  é a origem do subespaço. Neste caso, a inversa do operador  $[h]^{-1}$  existe e a solução do problema (3.1) existe e é única. O sistema (3.1) é chamado determinado.

- $M < N$ ,  $\rho([h]) = M$ , isto é, o espaço  $Y$  tem dimensão menor do que  $X$ . A solução não é única uma vez que  $NU([h]) \neq 0$ , mas existe porque  $\{x\}$  pertence a  $R(h)$ . O sistema é chamado subdeterminado. Entre as diferentes soluções, uma solução particular de norma mínima que

é igual a componente visível de  $\{f\} \in R([h]^T)$  pode ser obtida. Minimizando  $(\{f\}, \{f\})$  com a restrição  $[h]\{f\} = \{x\}$ , a solução de norma mínima pode ser obtida através da seguinte relação:

$$\{f\} = [h]^T ([h][h]^T)^{-1} \{x\} \quad (3.4)$$

onde  $[h]^+ = [h]^T ([h][h]^T)^{-1}$  é a pseudoinversa quando  $M < N$ .

- $M > N$ ,  $\rho([h]) = N$ , isto é o espaço  $X$  tem dimensão menor que o espaço  $Y$  e  $NU([h]) = 0$ . Isto garante que a solução, caso exista, seja única, mas como  $\{x\}$  não pertence a  $R([h])$ , a solução não existe. O sistema é chamado de superdeterminado. Em qualquer caso, é possível encontrar a chamada pseudosolução que minimiza  $(e, e)$ , com  $\{e\} = [h]\{f\} - \{x\}$ , isto é, a solução  $\{f\} \in [h]^T$  que é transformada por  $[h]$  na componente de  $\{x\}$  pertencendo a  $R([h])$ . Assim, obtém-se:

$$\{f\} = ([h]^T [h])^{-1} [h]^T \{x\} \quad (3.5)$$

onde  $[h]^+ = ([h]^T [h])^{-1} [h]^T$  é a pseudoinversa quando  $M > N$ .

Quando o posto da matriz  $[h]$  não é máximo, isto é,  $\rho([h]) < \min(M, N)$ , o sistema é chamado de singular. Ambos  $NU([h])$  e  $NU([h]^T)$  são diferentes do subespaço  $0$ . É possível encontrar uma pseudosolução ou solução generalizada escolhendo, entre as infinitas soluções pertencendo a  $R([h]^T)$  (solução de norma mínima), aquela que seja transformada por  $[h]$  em um vetor com uma distância mínima de  $\{x\}$ . Este vetor é a projeção de  $\{x\}$  sobre  $R([h])$  (uma solução por mínimos quadrados).

Dada uma matriz base  $X$  de  $R([h])$ , a matriz de projeção ortogonal sobre  $R([h])$  é:  $P = X(X^T X)^{-1} X^T$ . A pseudoinversa generalizada tem a seguinte forma:

$$[h]^+ = [h]^T X(X^T [h][h]^T X)^{-1} X^T \quad (3.6)$$

A pseudoinversa em suas diferentes formas (3.4), (3.5), (3.6), tem as seguintes propriedades:

$$[h][h]^+[h] = [h] ; [h]^+[h][h]^+ = [h]^+ ; ([h][h]^+)^T = [h][h]^+ ; ([h]^+[h])^T = [h]^+[h]$$

Geralmente é preferível não trabalhar com sistema determinado porque a solução não conseguirá filtrar os erros presentes no vetor  $\{x\}$ . Por esta razão, é melhor utilizar um sistema superdeterminado que proporciona mais informações (equações) do que incógnitas, mesmo que todas não sejam compatíveis entre si.

Com relação ao posto da matriz, é conveniente trabalhar com matrizes com posto máximo. Contudo, pode acontecer que os dados medidos não contenham informação independente na solução, (devido, por exemplo, ao erro nas medições) causando assim uma redução do posto da matriz.

Por todas estas razões, é aceita a definição no sentido amplo de problema bem posto que admite, entre as possíveis soluções, também a solução generalizada. Em todo caso, a validade da solução encontrada ou pseudo-solução tem que ser verificada para o problema considerado.

### 3.2 – CARACTERIZAÇÃO DO MAU CONDICIONAMENTO

Uma forma freqüentemente utilizada para caracterizar o condicionamento numérico de um problema é mediante o cálculo do posto e número de condicionamento de seu operador matricial, o que pode ser feito empregando a Decomposição em Valores Singulares (DVS) (Maia, 1989).

A DVS de uma matriz  $M \times N$  é expressa segundo:

$$[h]_{(M \times N)} = [\hat{U}]_{(M \times M)} [\Sigma]_{(M \times N)} [\hat{V}]_{(N \times N)}^T \quad (3.7)$$

onde  $[\hat{U}]$  e  $[\hat{V}]$  são matrizes ortogonais, ou seja:  $[\hat{U}]^T [\hat{U}] = [I]_{(M \times M)}$  e  $[\hat{V}]^T [\hat{V}] = [I]_{(N \times N)}$ .  $[\Sigma]$  é uma matriz com elementos reais positivos  $\sigma_{ii} = \sigma_i$  e  $\sigma_{ij} = 0$   $i \neq j$ . Os valores  $\sigma_i$  são

chamados de valores singulares da matriz  $[h]$ . Sem perda de generalidade, admite-se que os valores singulares sejam ordenados segundo seus valores decrescentes ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$ ). Então se tem que:

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{N} \\ \text{M-N} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

N

O posto de uma matriz é dado pelo número de linhas ou colunas independentes. Uma matriz quadrada ( $N \times N$ ) com todas as linhas linearmente independentes umas das outras terá posto  $N$  (posto completo). Se uma ou mais linhas forem combinações lineares de outras linhas, o posto será menor do que  $N$  e a matriz é dita ter posto deficiente. Uma matriz retangular ( $M \times N$ ) com  $M \geq N$  é dita ter posto completo se o posto for igual a  $N$ . Por outro lado, se o posto for menor do que  $N$ , a matriz terá um posto deficiente.

O posto de uma matriz  $[h]$  pode ser determinado a partir da DVS. Sendo  $[\hat{U}]$  e  $[\hat{V}]$  ortogonais, suas linhas são todas linearmente independentes e, conseqüentemente, ambas têm posto completo. Então, de acordo com (3.7), se  $[h]$  é de posto deficiente, esta deficiência se refletirá na matriz dos valores singulares, ou seja, o posto de  $[h]$  será o posto de  $[\Sigma]$ . Como  $[\Sigma]$  tem somente elementos na diagonal, a deficiência de posto significará a existência de um ou mais valores singulares nulos ou muito pequenos comparados aos demais. Na prática, o posto de uma matriz é dado pelo número de valores singulares maiores que um valor limite previamente estabelecido.

A correta avaliação do posto de uma matriz é crucial para determinar uma solução estável para um problema mal condicionado.

O mau condicionamento e a sua influência na solução podem ser notados substituindo a equação (3.7) em (3.1), resultando na seguinte equação abaixo.

$$\{x\} = \sum_{i=1}^r \sigma_i(v_i, f) u_i \quad (3.9)$$

O vetor  $\{f\}$  pode ser expresso como:

$$\{f\} = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1}(u_i, x) v_i \quad (3.10)$$

As relações (3.9) e (3.10) mostram que ambos problemas são dados por um somatório de termos, ponderados pelos valores singulares no problema direto (3.9) ou pelo inverso dos valores singulares em (3.10). Se alguns dos valores singulares são nulos, os correspondentes termos nos somatórios não dão quaisquer contribuições em (3.9) e devem ser descartados em (3.10). Entretanto, em problemas mal condicionados, os valores singulares de (3.10) são muito pequenos em relação aos valores singulares de (3.9). As correspondentes componentes no somatório dão uma pequena contribuição para solução do problema direto (3.9), devido a elas serem ponderadas pelos menores valores singulares, enquanto têm grande contribuição no problema inverso (3.10), devido a elas serem ponderadas pelo inverso dos valores singulares. Os erros contidos nos dados afetam todas as componentes nas equações (3.9) e (3.10), mas afetam mais fortemente as componentes relativas aos menores valores singulares que são justamente aqueles amplificados na solução do problema inverso.

O mau condicionamento depende não somente do espectro dos valores singulares mas também da quantidade de erro presente nos dados medidos. Através das equações (3.9) e (3.10), é evidenciado que somente a solução de problemas inversos pode sofrer os efeitos do mau condicionamento, enquanto o problema direto não é sensível ao operador mal condicionado.

Uma medida do mau condicionamento de uma matriz é dada pelo número de condicionamento, que é expresso pela relação  $\|h\|h^+ = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} \geq 1$ , onde  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  são, respectivamente, o maior e o menor valores singulares diferentes de zero de  $[h]$ . Quanto maior for o número de condicionamento aumenta, mais pronunciado é o mau condicionamento. Entretanto, este número não dá nenhuma informação a respeito da

precisão da solução. Isto significa que uma boa solução depende não somente do número de condicionamento mas também do erro relativo presente nos dados.

Uma relação entre o erro nos dados e a amplificação deste erro na solução pode ser encontrada, supondo que ambos  $\{x\}$  e  $[h]$  sejam afetados pelo erro. A equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$([h] + [\tilde{h}]) (\{f\} + \{\tilde{f}\}) = \{\tilde{x}\} + \{\tilde{x}\} \quad (3.11)$$

onde  $(-)$  indica dados não perturbados pelo erro e  $(\tilde{-})$  indica dados perturbados pelo erro. Após trabalhar com a equação (3.11), obtém-se a seguinte expressão:

$$\|\tilde{f}\| \leq \frac{\|[h] + [\tilde{h}]\| \|\tilde{f}\| + \|[h] + \{\tilde{x}\}\|}{1 - \|[h] + [\tilde{h}]\|} \leq \frac{\|[h] + [\tilde{h}]\| \|\tilde{f}\| + \|[h] + \{\tilde{x}\}\|}{1 - \|[h] + [\tilde{h}]\|} \quad (3.12)$$

Esta última desigualdade é mantida se:

$$\|[h] + [\tilde{h}]\| < 1 \quad (3.13)$$

Então se obtém:

$$\frac{\|\tilde{f}\|}{\|\tilde{f}\|} \leq \frac{\|[h] + [\tilde{h}]\| \left( \frac{\|[h] + [\tilde{h}]\|}{\|[h] + [\tilde{h}]\|} + \frac{\|[h] + \{\tilde{x}\}\|}{\|[h] + [\tilde{h}]\|} \right)}{1 - \|[h] + [\tilde{h}]\|} \quad (3.14)$$

A norma do erro relativo da solução depende das normas dos erros relativos  $\|[h] + [\tilde{h}]\|/\|[h]\|$  e  $\|[h] + \{\tilde{x}\}\|/\|[h]\| \|\tilde{f}\|$ , e do produto  $\|[h] + [\tilde{h}]\|$ , que define o número de condicionamento da matriz  $[h]$ .

Se somente o vetor conhecido  $\{x\}$  é perturbado, obtém-se:

$$\frac{\|\tilde{f}\|}{\|f\|} \leq \frac{\|h\|}{\|h\|} \frac{\|\tilde{x}\|}{\|x\|} \quad (3.15)$$

As equações (3.14) e (3.15) dão teoricamente um limite superior para o erro na solução, que depende tanto do número de condicionamento quanto do erro nos dados. Entretanto estas estimativas são bem maiores do que o erro realmente presente na solução, e desta forma são praticamente inúteis.

Quando o operador  $h$  é perturbado, um índice mais significativo pode ser dado pela equação (3.13). Esta condição garante a não singularidade do operador e pode ser reescrita como:

$$\frac{\|h\|}{\|h\|} \frac{\|\tilde{h}\|}{\|h\|} < 1 \quad (3.16)$$

Nesta forma, o número de condicionamento relaciona-se ao erro relativo do operador. Para filtrar as componentes que provocam instabilidades numéricas na solução, o número de condicionamento tem que ser menor do que o inverso do erro relativo nos dados.

### 3.3 – MÉTODOS PARA RESOLVER PROBLEMAS INVERSOS

Nesta seção, são descritos alguns métodos mais largamente utilizados para resolver problemas inversos, dentre os quais o método do Gradiente Conjugado que é utilizado em conjunto com o método de identificação de força baseada na Deconvolução no domínio do tempo (Capítulo V).

#### 3.3.1 - Método de Regularização de TIKHONOV

O método de Tikhonov consiste basicamente em modificar os elementos da diagonal principal de  $[h]^T [h]$  pertencente a equação (3.5). Isto é feito reescrevendo (3.5) sob a forma:

$$\{f\} = ([h]^T [h] + \alpha [I])^{-1} [h]^T \{x\} \quad (3.17)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade e  $\alpha$  é chamado de *parâmetro de regularização*.

Para evitar a inversão matricial direta e possibilitar o uso de algoritmos eficientes de resolução de sistemas de equações algébricas lineares, a equação (3.17) pode ser reescrita sob a forma:

$$([h]^T [h] + \alpha [I])\{f\} = [h]^T \{x\} \quad (3.18)$$

Pode-se demonstrar (Tikhonov & Arsenin, 1977) que a resolução da equação (3.18) é equivalente à minimização do funcional:

$$J(f, \alpha) = \|[h]\{f\} - \{x\}\|^2 + \alpha \|\{f\}\|^2 \quad (3.19)$$

É aparente, no segundo termo de (3.19), que o parâmetro regularizador positivo tem o efeito de forçar uma solução limitada. Pode-se notar que quando  $\alpha = 0$ , a solução da equação (3.17) reduz-se à solução clássica do método dos mínimos quadrados, dada pela equação (3.5).

A regularização de Tikhonov é uma técnica eficiente, porém requer a escolha do valor do parâmetro de regularização  $\alpha$ . Esta escolha não é uma tarefa simples e deve se dar por tentativas. A literatura não oferece uma estratégia definitiva para a escolha do valor de  $\alpha$ . Existem algumas técnicas para se chegar a uma primeira aproximação para o valor deste parâmetro. Uma delas é o princípio de Morozov (Groetsch, 1984). Segundo este princípio, se  $\delta$  é o erro presente na saída  $\{x\}$  do sistema, então  $\alpha$  deve ser escolhido de forma a satisfazer a seguinte relação:

$$\|[h]\{f\} - \{x\}\| = \delta \quad (3.20)$$

Observa-se que  $\alpha$  é definido apenas indiretamente e que ele depende de um valor estimado para  $\delta$ .

Outras técnicas de estimação de  $\alpha$  foram desenvolvidas, porém, em cada caso, o objetivo é o de escolher um valor que seja suficientemente grande para regularizar a solução do sistema, mas não tão grande a ponto de modificar significativamente a matriz original  $([h]^T [h])$  e, conseqüentemente, o vetor solução  $\{f\}$ .

### 3.3.2 - Decomposição em Valores Singulares

Conforme visto na Seção 3.2, para um sistema de equações dado por:

$$\{x\}_{(M \times 1)} = [h]_{(M \times N)} \{f\}_{(N \times 1)} \quad (3.21)$$

a DVS permite escrever  $[h]$  sob a forma:

$$[h]_{(M \times N)} = [\hat{U}]_{(M \times M)} [\Sigma]_{(M \times N)} [\hat{V}]_{(N \times N)}^T$$

A matriz  $[h]$  será singular se, e somente se, ela possuir pelo menos um valor singular nulo. O número de valores singulares não nulos é igual ao posto de  $[h]$ .

A equação (3.21) pode então ser escrita na forma:

$$[\hat{U}] [\Sigma] [\hat{V}]^T \{x\} = \{f\} \quad (3.22)$$

Fazendo uso das propriedades de ortogonalidade das matrizes  $[\hat{U}]$  e  $[\hat{V}]$ , (3.22) conduz a:

$$\{f\} = [\hat{V}] [\Sigma]^+ [\hat{U}]^T \{x\} \quad (3.23)$$

onde:

$$\Sigma^+ = \begin{cases} \sigma_{ii}^+ = 1/\sigma_{ii}, \sigma_{ii} > 0 \\ \sigma_{ii}^+ = 0, \text{ se } \sigma_{ii} = 0 \\ \sigma_{ij}^+ = 0, \text{ para } i \neq j \end{cases} \quad (3.24)$$

Nota-se, em (3.24), que numa situação de quase-colinearidade, quando pelo menos um valor singular tende a zero, a solução tende a apresentar amplitudes tendendo a infinito, o que caracteriza a instabilidade numérica.

A regularização consiste então em considerar nulos, na construção da matriz  $\Sigma^+$ , os menores valores singulares de  $[h]$ . Desta forma, o número de condicionamento será menor do que o inverso do erro relativo presente nos dados. Contudo, o valor abaixo do qual os valores singulares são tornados nulos é arbitrário, não havendo um procedimento definitivo para sua escolha.

### 3.3.3 - Método do Gradiente Conjugado

O Método do Gradiente Conjugado tem seu nome devido ao fato que ele gera uma seqüência de vetores conjugados (ou ortogonais). É um método extremamente eficiente quando a matriz dos coeficientes é simétrica positiva definida, uma vez que somente um número limitado de vetores necessita ser mantidos na memória (Barrett *et al.*, 1994). Sarkar *et al.* (1981) alegam que o método é bem adaptado a problemas mal condicionados, uma vez que nos métodos iterativos o número de condicionamento da matriz do sistema tem pequena influência na propagação dos erros de arredondamento. Então, este método se mostra muito adequado aos problemas de identificação.

Em cada iteração do método, dois produtos internos são computados para calcular escalares atualizados que são definidos para garantir que as seqüências satisfaçam certas condições de ortogonalidade. Pertencente à classe dos métodos iterativos não estacionários, onde os cálculos envolvem informações que mudam a cada iteração, é um dos métodos mais utilizados para resolução de um sistema de equações lineares do tipo  $\{x\} = [h]\{f\}$ .

No Método do Gradiente Conjugado não é necessário formar a matriz  $[h]^T [h]$ , cuja inversão é geralmente instável numericamente, conforme apontado por Ekstrom (1973). De acordo com esse método, o sistema dado por (3.5) é resolvido escolhendo-se uma estimativa inicial qualquer  $\{f_0\}$  para a solução. O vetor resíduo e o vetor direção de busca inicial são gerados como segue:

$$\{R_0\} = [h]\{f_0\} - \{x\}, \quad \{P_0\} = -[h]^T \{R_0\} \quad (3.25)$$

A (N+2)-ésima estimativa é então dada pela multiplicação de um escalar  $t_N$  pelo vetor direção de busca  $\{P_N\}$ :

$$\{f_{N+1}\} = \{f_N\} + t_N \{P_N\}, \quad (3.26)$$

$$\text{com } t_N = \frac{\|[h]^T \{R_N\}\|^2}{\|[h]\{P_N\}\|^2}$$

$\{R_N\}$  e  $\{P_N\}$ , que aparecem na equação do escalar  $t_N$ , são calculados de acordo com:

$$\{R_N\} = \{R_{N-1}\} + t_{N-1} [h] \{P_{N-1}\}, \quad \{P_N\} = -[h]^T \{R_N\} + q_{N-1} \{P_{N-1}\} \quad (3.27)$$

$$\text{onde } q_{N-1} = \frac{\|[h]^T \{R_N\}\|^2}{\|[h]^T \{R_{N-1}\}\|^2}$$

Sarkar *et al.* (1981) observaram que o Método do Gradiente Conjugado usualmente produz excelentes resultados e é bastante insensível à escolha da solução inicial  $\{f_0\}$ .

A última questão tratada nesta seção é pertinente ao critério de parada do algoritmo. Isto porque, para problemas mal condicionados, um número elevado de iterações não minimizarão continuamente o erro  $\|[h]\{f\} - \{x\}\|$ , mas podem introduzir oscilações ilegítimas na solução quando o método busca a solução ao longo dos autovetores que correspondem aos menores autovalores do problema. Por outro lado, poucas iterações podem resultar em uma solução de qualidade insuficiente. O critério utilizado para parar o processo iterativo no método do Gradiente Conjugado consiste em avaliar a norma do vetor resíduo, que deve estar abaixo de um certo valor pré-determinado, isto é,

$$\|R_N\| \leq M \text{ (uma constante pré-fixada)} \quad (3.28)$$

## CAPÍTULO IV

### MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS

É apresentada neste Capítulo a formulação do método de identificação indireta de forças operando no domínio do tempo, baseado no uso das equações do movimento no espaço modal. O método emprega as respostas temporais em aceleração e um conjunto de auto-soluções da estrutura: frequências naturais, fatores de amortecimento modais, massas generalizadas e componentes dos autovetores, para construir equações de estimação para as forças excitadoras.

Este método pode ser considerado uma extensão do método SWAT (Bateman *et al.*, 1991). Porém, devido ao fato de não se limitar à exploração dos modos de corpo rígido, não apresenta as limitações inerentes ao método SWAT, destacadas na Introdução.

Este método foi primeiramente estudado por Genaro (1997) e Genaro & Rade (1998). Naqueles estudos iniciais os autores verificaram a aplicabilidade prática do método e evidenciaram suas principais dificuldades, a saber:

- sensibilidade dos resultados proporcionados pela técnica em relação ao truncamento da base modal empregada, em termos do número de coordenadas instrumentadas e do número de modos mantidos na base modal;
- os erros gerados pela integração das respostas em aceleração para obtenção das velocidades e deslocamentos, nos casos em que as condições iniciais são não nulas e desconhecidas.

O estudo realizado sobre este método, após o desenvolvimento de sua formulação, permitiu oferecer as seguintes contribuições:

- a) a eliminação das tendências geradas pela integração da resposta em aceleração, quando da ocorrência de condições iniciais não nulas;
- b) utilização da técnica de identificação de forças como uma das etapas de um procedimento de estimação de parâmetros de elementos de suporte de estruturas flexíveis.

#### 4.1 – FORMULAÇÃO DO MÉTODO.

##### 4.1.1 – Formulação para o caso de amortecimento proporcional

Considere um sistema mecânico linear com amortecimento viscoso com N graus de liberdade, cujas as equações do movimento no domínio do tempo são descritas pelo seguinte modelo matemático, detalhado na Seção 2.2.3:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.1)$$

Usando o Teorema da Expansão, a solução para (4.1) pode ser expressa segundo:

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} \quad (4.2)$$

sendo  $\{q(t)\}$  o vetor das coordenadas generalizadas e  $[\Phi]$  é a matriz modal, solução do seguinte problema de autovalor do sistema não amortecido associado:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda] \quad (4.3)$$

Substituindo (4.2) em (4.1) e pré-multiplicando a equação resultante por  $[\Phi]^T$ , tem-se:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [C][\Phi] \{\dot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K][\Phi] \{q(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \quad (4.4)$$

Levando em conta as relações de ortogonalidade dadas por (2.16) e (2.17), a equação acima pode ser expressa da seguinte forma:

$$[N] \{\ddot{q}(t)\} + [\beta] \{\dot{q}(t)\} + [\Lambda] [N] \{q(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \quad (4.5)$$

Admite-se, por hipótese, que a seguinte relação seja válida (generalização do caso de amortecimento proporcional):

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C]$$

Conforme visto na Seção 2.2.3, neste caso, a equação (4.5) contém N equações diferenciais desacopladas de segunda ordem no espaço modal, do tipo:

$$\eta_r \ddot{q}(t) + \beta_r \dot{q}(t) + \lambda_r \eta_r q(t) = \{\phi_r\}^T \{f(t)\} \quad , \quad r = 1 \text{ a } N \quad (4.6)$$

e:

$$[\beta] = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_N\} = \text{diag}\{2\xi_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, 2\xi_N\sqrt{\lambda_N}\} \in R^{N,N}$$

onde  $\xi_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, N$  são os fatores de amortecimento modais.

As equações (4.6) podem ser reescritas na seguinte forma matricial:

$$\{f_i(t)\} + \{f_A(t)\} + \{f_E(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \quad (4.7)$$

onde:

$$\{f_i(t)\} = [N] \{\ddot{q}(t)\} \quad \text{é o vetor das forças de inércia modais,} \quad (4.8)$$

$$\{f_A(t)\} = [\beta] \{\dot{q}(t)\} \quad \text{é o vetor das forças de amortecimento modais, e} \quad (4.9)$$

$$\{f_E(t)\} = [\Lambda] [N] \{q(t)\} \quad \text{é o vetor das forças elásticas modais.} \quad (4.10)$$

Supondo que tanto a matriz modal  $[\Phi]$  quanto os vetores de forças modais (4.8) a (4.10) possam ser identificados de dados experimentais, o vetor  $\{f(t)\}$  pode ser calculado como se segue:

$$\{f(t)\} = [\Phi]^T (\{f_1(t)\} + \{f_A(t)\} + \{f_E(t)\}) \quad (4.11)$$

Evidentemente, uma solução sob forma dada em (4.11) apenas poderá ser obtida se a base modal completa estiver disponível, ou seja, se todos os autovalores complexos bem como todos os componentes dos autovetores forem disponíveis. Isto é raramente possível em aplicações práticas, onde usualmente se dispõe de um número reduzido  $n$  de auto-soluções identificadas ( $n < N$ ) e um número reduzido  $c$  ( $c < N$ ) de coordenadas instrumentadas para a identificação dos autovetores nos procedimentos de análise modal experimental. Estes dados experimentais incompletos são designados pelas seguintes matrizes:

$$[\tilde{N}] \in R^{n,n}, \quad [\tilde{\Lambda}] \in R^{n,n}, \quad [\tilde{\beta}] \in R^{n,n} \quad \text{e} \quad [\tilde{\Phi}] \in R^{c,n}$$

Então, se as coordenadas nas quais as forças são aplicadas constituem um subconjunto das coordenadas para as quais as componentes dos autovetores são disponíveis, o sistema de equações de estimação, análogo a (4.11), destinado à identificação do vetor de forças a partir de dados experimentais incompletos se escreve:

$$\{\tilde{f}(t)\} = ([\tilde{\Phi}]^T)^+ (\{\tilde{f}_1(t)\} + \{\tilde{f}_A(t)\} + \{\tilde{f}_E(t)\}) \quad (4.12)$$

onde  $([\tilde{\Phi}]^T)^+$  indica a pseudo-inversa de  $[\tilde{\Phi}]^T$  e:

$$\{\tilde{f}_A(t)\} = [\tilde{\beta}] \{\tilde{q}(t)\} \in R^n \quad (4.13.a)$$

$$\{\tilde{f}_1(t)\} = [\tilde{N}] \{\ddot{\tilde{q}}(t)\} \in R^n \quad (4.13.b)$$

$$\{\tilde{f}_E(t)\} = [\tilde{\Lambda}] [\tilde{N}] \{\tilde{q}(t)\} \in R^n \quad (4.13.c)$$

Baseado nestes fundamentos, e supondo que as respostas em aceleração tenham sido amostradas em  $p$  instantes de tempo e armazenadas nos vetores:

$$\{\ddot{x}(t_i)\} \in R^c, \quad i = 1 \text{ a } p$$

o método de identificação engloba os seguintes passos:

**Primeiro passo:** Sucessivas integrações numéricas das acelerações amostradas,  $\{\ddot{x}(t_i)\}$ , para obtenção das respostas em velocidade,  $\{\dot{x}(t_i)\}$ , e em deslocamento,  $\{x(t_i)\}$ , com  $i = 1 \text{ a } p$ .

**Segundo passo:** Estimação das acelerações, velocidades e deslocamentos generalizados a partir das acelerações, velocidades e deslocamentos calculados no primeiro passo, como segue:

$$\{\ddot{q}(t_i)\} = [\tilde{\Phi}]^+ \{\ddot{x}(t_i)\} \quad (4.14)$$

$$\{\dot{q}(t_i)\} = [\tilde{\Phi}]^+ \{\dot{x}(t_i)\} \quad (4.15)$$

$$\{q(t_i)\} = [\tilde{\Phi}]^+ \{x(t_i)\} \quad (4.16)$$

para  $i = 1 \text{ a } p$ .

**Terceiro passo:** Cálculo dos vetores de forças modais usando as equações (4.13.a) a (4.13.c) e resolução de (4.12) para cada instante de tempo:

$$\{\tilde{f}(t_i)\} = ([\tilde{\Phi}]^T)^+ (\{\tilde{f}_1(t_i)\} + \{\tilde{f}_A(t_i)\} + \{\tilde{f}_E(t_i)\}), \quad i = 1 \text{ a } p \quad (4.17)$$

Como pode ser visto, o método dos mínimos quadrados é utilizado duas vezes: para estimação das coordenadas generalizadas e de suas derivadas, usando as equações (4.14) a (4.16) e para estimação das forças excitadoras mediante a equação (4.17). Em ambos os cálculos, supõe-se que  $[\tilde{\Phi}]$  admita inversa. Duas situações distintas podem ocorrer:

primeiramente,  $[\tilde{\Phi}]$  pode ser quadrada e não singular, e uma única solução existe. Neste caso o número de sensores é igual ao número de autovetores incluídos na expansão. Se mais modos são incluídos, deve-se aumentar o número de medições, o que implica um aumento do limite superior da faixa de frequências, para a qual a força pode ser reconstruída. Na segunda situação, há mais localizações de medições do que modos. Neste caso, algumas medições podem ser eliminadas, ou como uma alternativa, pode-se resolver o sistema de equações usando a inversa generalizada para obter uma solução particular para este problema super-determinado. Em qualquer caso, o mais importante é que as localizações das medições sejam escolhidas de modo que a matriz  $[\tilde{\Phi}]$  não seja singular nem mal-condicionada. Evita-se, assim, o uso de soluções de norma mínima sob a condição de que  $c \geq n \geq f$ .

Um aspecto importante a ser ressaltado é que quando o número de forças  $f$  e as posições das forças são conhecidos, apenas as colunas de  $[\Phi]^T$  correspondentes às coordenadas em que as forças são aplicadas devem estar disponíveis para a resolução de (4.17)

Vale observar que medições simultâneas da aceleração, velocidade e deslocamento são muito difíceis de serem feitas do ponto de vista experimental, pois requerem o emprego de diferentes tipos de sensores. Com o intuito de evitar este inconveniente é que se sugere o procedimento de aquisição das respostas em aceleração – com o uso de acelerômetros – as quais são então sucessivamente integradas para obtenção das respostas em velocidade e deslocamento.

Embora compartilhe uma formulação similar, o método das coordenadas modais apresenta algumas vantagens em relação ao método SWAT desenvolvido por (Gregory *et al.* 1987). O método SWAT possui duas importantes limitações: a primeira é que o método permite que se identifique apenas a resultante das forças externas aplicadas sobre a estrutura, ou seja, o método não permite identificar cada força separadamente; a segunda é que, uma vez que o método baseia-se apenas nos modos de corpo rígido, ele somente pode ser aplicado aos casos em que a estrutura apresenta condições de contorno livres. Caso contrário, as forças de restrição, introduzidas pelos apoios, devem ser consideradas como forças desconhecidas aplicadas à estrutura livre.

Diferentemente do método SWAT, o método das coordenadas modais explora tanto os modos de corpo rígido quanto os modos elásticos da estrutura. Isto permite sua aplicação a sistemas sujeitos a quaisquer condições de contorno. Além disso, o método permite a identificação de cada uma das forças excitadoras nos seus diferentes pontos de aplicação. Porém, a principal vantagem apresentada pelo método das coordenadas modais reside no fato de não se ter que inverter matrizes mal condicionadas. Conforme pode ser visto na formulação, o método requer apenas a inversão da matriz modal que, em geral, é numericamente bem condicionada, desde que se faça uma escolha adequada das componentes dos autovetores que definem as linhas da matriz modal. Este fato será evidenciado através de aplicações numéricas apresentadas nos Capítulos subsequentes.

#### 4.1.2 – Formulação para o caso de amortecimento geral.

Nos trabalhos de Genaro (1997) e de Genaro & Rade (1998), o método das coordenadas modais foi desenvolvido a partir da hipótese de amortecimento proporcional, conforme detalhado na seção anterior. Nesta seção, é tratado o caso de amortecimento geral, sendo desenvolvida uma formulação baseada nas equações do movimento no espaço de estados.

Com base no desenvolvimento exposto na Seção 2.2.3, o sistema discreto com amortecimento geral é representado pelo seguinte modelo no espaço de estados:

$$[U]\dot{w}(t) = [A]w(t) + \{g(t)\} \quad (4.18)$$

Desta forma, o problema de autovalor é escrito sob a forma:

$$([A] - s[U])\{w\} = \{0\} \quad (4.19)$$

Utilizando mais uma vez o Teorema de Expansão, escreve-se:

$$\{w(t)\} = [W]\{q(t)\} \quad (4.20)$$

sendo  $\{q(t)\} \in C^{2N}$  o vetor de coordenadas generalizadas.

A substituição de (4.20) em (4.18), seguida da pré-multiplicação da equação resultante por  $[W]^T$  e o uso das relações de ortogonalidade (2.50) com a escolha  $[N^d] = [I]$  resultam em:

$$\{\dot{q}(t)\} = [S]\{q(t)\} + [W]^T \{g(t)\} \quad (4.21)$$

Desta maneira, supondo que as matrizes modal  $[W]^T$  e espectral  $[S]$  tenham sido obtidas experimentalmente, o vetor  $\{g(t)\}$  pode ser calculado como segue:

$$\{g(t)\} = [W]^T (\{\dot{q}(t)\} - [S]\{q(t)\}) \quad (4.22)$$

A partir de (4.22), os passos adotados para a implementação prática do método são similares àqueles já apresentados na Seção anterior para o caso de amortecimento proporcional.

#### 4.2- ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DA EXPANSÃO MODAL NO PROCEDIMENTO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS

A experiência tem mostrado que a principal dificuldade surgida quando do uso do método das coordenadas modais é ligada à sensibilidade das forças identificadas em relação ao número de autovetores que são mantidos na matriz  $[\tilde{\Phi}]$ . Em geral, observa-se que para obter resultados de identificação suficientemente precisos, é necessário incluir um número elevado de autovetores na matriz modal, não havendo nenhum critério que permita definir este número *a priori*.

Nesta seção é apresentado um estudo analítico, baseado no trabalho de Clark *et al.* (1998), ilustrando, como base num exemplo, que o truncamento modal tende a ser mais severo no procedimento inverso de identificação de forças do que no problema direto de determinação das respostas.

Considere-se o problema de vibrações transversais de uma viga bi-apoiada, do tipo Euler-Bernoulli, ilustrada na Figura 4.1.

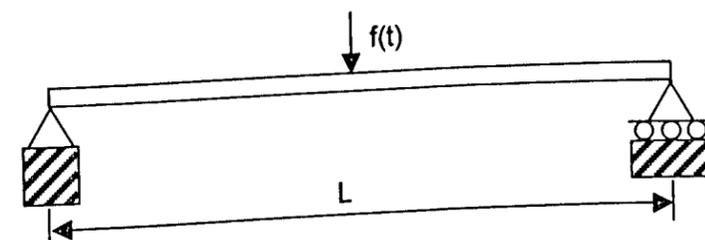


Figura 4.1 – Viga de Euler-Bernoulli bi-apoiada.

O problema é governado pela seguinte equação diferencial parcial (Meirovitch, 1975):

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (4.23)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $I$  é o momento de inércia,  $\gamma$  é a massa por unidade de comprimento. Ainda,  $y(x,t)$  e  $f(x,t)$  designam, respectivamente, o campo de deslocamentos transversais e a distribuição de forças excitadoras aplicadas, sendo ambas funções do tempo,  $t$ , e da localização ao longo da viga,  $x$ .

Com base no Teorema da Expansão, a solução do problema (em termos do campo de deslocamentos transversais) pode ser escrito como:

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t) \quad (4.24)$$

onde os modos de vibrar e as correspondentes freqüências naturais são dadas pelas seguintes equações (Meirovitch, 1975):

$$\phi_r(x) = \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \quad (4.25)$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_r = \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\gamma}} \quad (4.26)$$

Admitindo que a viga seja solicitada por uma força harmônica concentrada aplicada no seu ponto médio, de modo que  $f(x,t) = F_0 \sin(\Omega t) \delta(x - L/2)$ , (onde  $\delta(\bullet)$  é a função delta Dirac), as seguintes equações diferenciais em termos de coordenadas modais,  $q_n(t)$ , podem ser obtida a partir de (4.23):

$$\frac{d^2 q_r(t)}{dt^2} + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{2F_0}{\gamma L} \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \sin(\Omega t), r=1,2,\dots \quad (4.27)$$

A solução da equação (4.23) é da forma:

$$y(x,t) = \frac{2F_0 \sin(\Omega t)}{\gamma L} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_r^2 [1 - (\Omega/\omega_r)^2]} \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \quad (4.28)$$

Esta equação é uma série de harmônicos bem conhecida, com termos aproximando-se de zero quando  $r \rightarrow \infty$ .

A equação (4.28) pode ser utilizada para obter o esforço cisalhante atuante nas seções transversais da viga, expresso segundo:

$$V(x,t) = -EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} = EI \frac{2F_0 \sin(\Omega t)}{\gamma L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_r^2 [1 - (\Omega/\omega_r)^2]} \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \quad (4.29)$$

A equação (4.29) também é uma série de harmônicos cujos termos aproximam-se de zero quando  $r \rightarrow \infty$ . Mas em (4.28), nota-se que o deslocamento aproxima-se de zero a uma taxa proporcional a  $1/r^4$ , por causa do termo no denominador  $\omega_r^2$ , enquanto (4.29) mostra que o esforço cisalhante diminui menos rapidamente, a uma taxa proporcional a  $1/r$ , devido seus coeficientes serem modulados por  $r^3/\omega_r^2$ . Conclui-se, então, que para se ter boa precisão na caracterização de forças, um número maior de termos deve ser retido na série, em comparação com o número de termos necessários para assegurar a mesma precisão na representação do campo de deslocamentos.

Para ilustrar as diferentes taxas de convergência entre deslocamento e força, a Figura 4.2 fornece a amplitude da força de reação nos apoios e o deslocamento no meio da viga da Figura 4.1. Tanto força e deslocamento são normalizados para 1[N] ou 1[m] e calculados

analiticamente. Como pode ser visto, ambas as expansões convergem com o aumento do número de modos, mas enquanto o deslocamento tem convergência com somente poucos modos, a força apresenta erros mais elevados, mesmo após a inclusão de 30 modos.

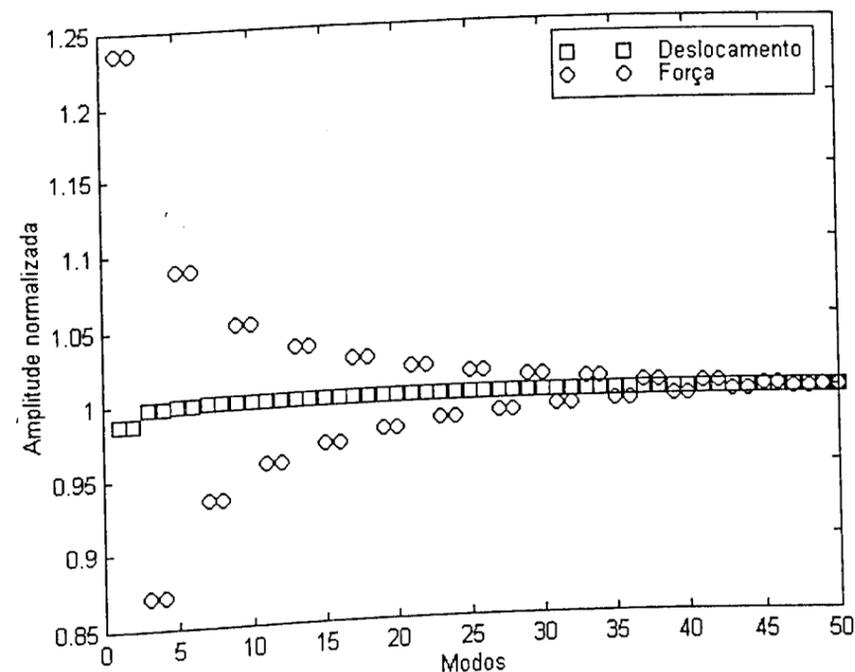


Figura 4.2 – Ilustração das diferentes taxas de convergência para deslocamento e força.

### 4.3 – ESTUDO DA INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES INICIAIS

A existência de condições iniciais não nulas introduz uma dificuldade adicional no emprego do método de identificação, na forma como foi proposto na Seção 4.1. Isto porque a integração sucessiva das respostas em aceleração, como sugerido, conduz às diferenças entre os valores instantâneos das velocidades e deslocamentos e os seus valores iniciais, e não às verdadeiras respostas em velocidade e deslocamento requeridas pelo método. Desta forma, a utilização direta das respostas obtidas por integração conduz a estimativas errôneas para as forças. Por outro lado, a determinação experimental das condições iniciais requer uma maior quantidade de instrumentação.

Ribeiro *et al.* (1999) propõem um método de integração fundamentado no emprego de filtros digitais, para obtenção dos deslocamentos usando acelerômetros. Este método foi aplicado em uma máquina servo-hidráulica, onde os autores verificaram significativas melhorias com relação à integração dupla analógica da aceleração que, como é sabido, pode introduzir erros de amplitude e fase nas respostas transientes.

É proposto, a seguir, um procedimento que permite reduzir os efeitos das condições iniciais não nulas quando seus valores exatos são desconhecidos. Conforme será visto, o método requer o conhecimento, *a priori*, de algumas informações adicionais acerca das variações temporais das forças.

Integrando sucessivamente o vetor de respostas em aceleração  $\{\ddot{x}(t)\}$ , tem-se:

$$\{\dot{x}(t)\} = \{\dot{x}(0)\} + \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt \Rightarrow \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt = \{\dot{x}(t)\} - \{\dot{x}(0)\} \quad (4.30)$$

$$\{x(t)\} = \{x(0)\} + \{\dot{x}(0)\}t + \int_0^t \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt^2 \Rightarrow \int_0^t \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt^2 = \{x(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t \quad (4.31)$$

Substituindo as equações (4.30) e (4.31) na equação (4.1), tem-se:

$$\{f(t)\} = \left( [M]\{\ddot{x}(t)\} + [C] \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt + [K] \int_0^t \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt^2 \right) + ([C]\{\dot{x}(0)\} + [K]\{x(0)\} + [K]\{\dot{x}(0)\}t) \quad (4.32)$$

ou

$$\{f(t)\} = \{\bar{f}(t)\} + \{f_0(t)\} \quad (4.33)$$

onde:

$$\bullet \{\bar{f}(t)\} = \left( [M]\{\ddot{x}(t)\} + [C] \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt + [K] \int_0^t \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt^2 \right)$$

$$\bullet \{f_0(t)\} = ([C]\{\dot{x}(0)\} + [K]\{x(0)\} + [K]\{\dot{x}(0)\}t)$$

O desenvolvimento apresentado mostra que a integração sucessiva das acelerações sem levar em conta as condições iniciais, provoca o aparecimento de tendências (erros sistemáticos) que variam linearmente com o tempo, sendo estas tendências transferidas para as forças identificadas.

Com base nesta observação, é possível, em certos casos, fazer correções nas respostas em velocidade e deslocamento, visando eliminar as tendências geradas na integração das acelerações.

Supondo que a resposta temporal tenha média zero, os seguintes passos constituem um possível processo de correção:

**1º passo:** dispendo-se de  $\int_0^t \int_0^t \{\ddot{x}(t)\} dt$ , determina-se a reta média dada por  $\bar{x}(t)$  (ver Figura 4.3) via mínimos quadrados. Os coeficientes linear e angular desta reta fornecem estimativas para as condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ .

**2º passo:** as condições iniciais no primeiro passo são substituídas nas equações (4.30) e (4.31), determinando-se a velocidade e o deslocamento corrigidas.

Alternativamente, com base em (4.33), pode-se realizar o procedimento de correção diretamente nas forças identificadas.

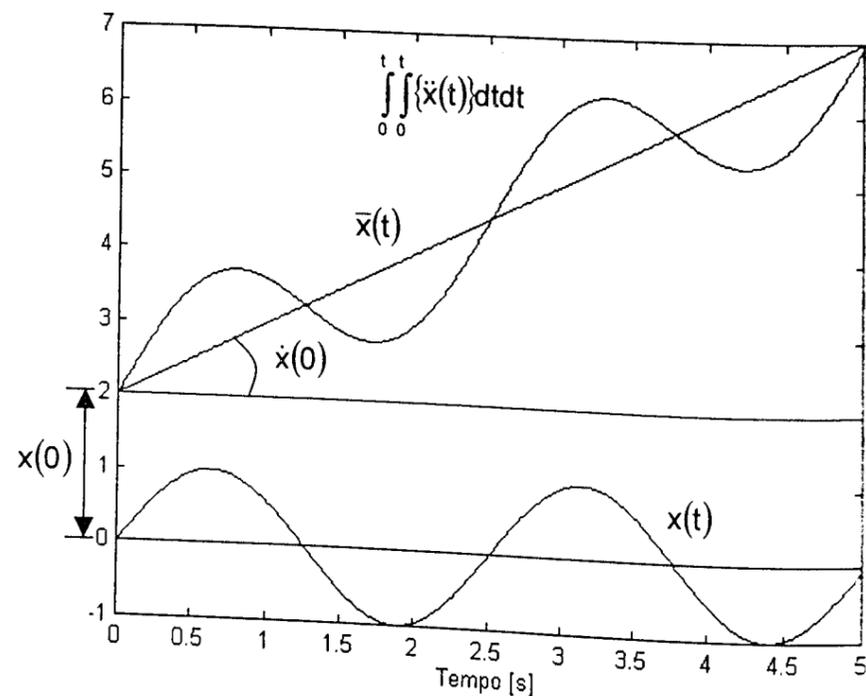


Figura 4.3 – Ilustração da influência das condições iniciais no processo de integração das respostas em aceleração.

#### 4.4 – APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS COORDENADAS MODAIS À IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE ELEMENTOS DE SUPORTE.

Nesta seção é examinada a possibilidade de emprego do método de identificação de forças baseado nas coordenadas modais como uma das etapas de um procedimento de identificação de parâmetros físicos (inércia, rigidez e amortecimento) de elementos de suporte (mancais) de estruturas flexíveis.

É sabido que as condições de contorno de estruturas são resultado de restrições cinemáticas impostas por dispositivos de fixação e que estas condições podem influenciar significativamente o comportamento dinâmico do sistema, principalmente no domínio das baixas frequências. Embora condições de contorno ideais sejam usualmente admitidas em modelos analíticos simplificados, em sistemas reais, as características mecânicas de elementos de apoio são usualmente difíceis de serem obtidas através de medidas diretas em condições normais de operação. Este fato tem motivado a realização de um significativo

número de trabalhos tratando de técnicas de identificação destas características a partir das respostas dinâmicas do sistema.

Natke & Ben-Haim (1993) investigaram métodos de identificação baseados em modelos analíticos, explorando tanto as auto-soluções como F.R.F.s. Um método para a identificação de suportes não lineares explorando as F.R.F.s foi sugerido e experimentalmente validado por Rice *et al.* (1986). Santos (1996), apresentou um estudo teórico e experimental para a identificação de características mecânicas de mancais em máquinas rotativas.

Neste trabalho, é proposta a utilização do método das coordenadas modais para identificação das forças introduzidas pelos suportes.

A idéia básica da técnica consiste em representar a influência dos elementos de suporte como forças externas aplicadas à estrutura em sua configuração livre. Uma vez identificadas estas forças, as equações do movimento para cada elemento de suporte, modelado como sistema de 1 g.d.l. linear ou não linear, são utilizadas juntamente com as respostas dinâmicas medidas nos pontos de fixação, para formar equações de estimação para os parâmetros desconhecidos.

Para identificação das forças que os suportes exercem na estrutura, a equação (4.7) é modificada para explicitar estas forças e as forças de excitação, simultaneamente aplicadas à configuração livre, da seguinte forma:

$$\{f_i(t)\} + \{f_A(t)\} + \{f_E(t)\} = [\Phi]^T \{ \{f_{es}(t)\} + \{f_c(t)\} \} \quad (4.34)$$

onde  $\{f_c(t)\}$  e  $\{f_{es}(t)\}$  são as forças excitadoras e as forças exercidas pelos mancais, respectivamente, e  $\{f_i(t)\}$ ,  $\{f_A(t)\}$ ,  $\{f_E(t)\}$  são as forças modais anteriormente definidas pelas equações (4.8), (4.9) e (4.10). Admitindo que o vetor de forças excitadoras sejam conhecidas, a partir de (4.34), o vetor  $\{f_{es}(t)\}$  pode ser calculado como segue:

$$\{f_{es}(t)\} = [\Phi]^{-T} (\{f_i(t)\} + \{f_A(t)\} + \{f_E(t)\}) - \{f_c(t)\} \quad (4.35)$$

Nos casos em que as forças excitadoras são desconhecidas, é possível inverter (4.34) para identificar, simultaneamente, as forças excitadoras e as forças exercidas pelos mancais, de acordo com:

$$\{f_{es}(t)\} + \{f_c(t)\} = [\Phi]^{-T} (\{f_i(t)\} + \{f_A(t)\} + \{f_E(t)\}) \quad (4.36)$$

Conforme anteriormente detalhado na seção 4.1, a equação (4.35) é modificada para operar com dados modais incompletos, apresentando-se então sob a forma:

$$\{f_{es}(t)\} = ([\tilde{\Phi}]^T)^{-1} (\{\tilde{f}_i(t)\} + \{\tilde{f}_A(t)\} + \{\tilde{f}_E(t)\}) - \{f_c(t)\} \quad (4.37)$$

O procedimento de identificação é composto, então, de quatro etapas. As três primeiras são idênticas aos passos descritos na Seção 4.1.1 e a quarta etapa compreende a identificação dos elementos de suportes (massa, rigidez e amortecimento), propriamente dita. Este último passo é detalhado a seguir.

Cada suporte é modelado como um sistema de 1 g.d.l., conforme ilustrado na Figura 4.4, cuja a equação do movimento (no caso de comportamento linear) é escrita sob a forma:

$$m_{es} \ddot{x}_{es}(t) + c_{es} \dot{x}_{es}(t) + k_{es} x_{es}(t) = -f_{es}(t) \quad (4.38)$$

onde  $f_{es}(t)$  denota a força total aplicada pelo suporte na estrutura principal.

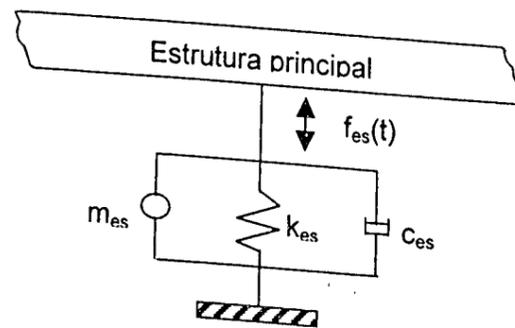


Figura 4.4 – Modelo de 1 g.d.l. para os suportes.

Dada  $f_{es}(t)$ , previamente identificada, e as respostas temporais medidas para as coordenadas de conexão dos suportes na estrutura principal, (4.38) é usada para construir o seguinte sistema de equações a ser resolvido para estimação dos parâmetros dos elementos do suporte  $m_{es}$ ,  $c_{es}$  e  $k_{es}$ :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{es}(0) & \dot{x}_{es}(0) & x_{es}(0) \\ \ddot{x}_{es}(1) & \dot{x}_{es}(1) & x_{es}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ddot{x}_{es}(p-1) & \dot{x}_{es}(p-1) & x_{es}(p-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{es} \\ c_{es} \\ k_{es} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{es}(0) \\ f_{es}(1) \\ \vdots \\ f_{es}(p-1) \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Numa forma mais compacta, (4.39) é escrita:

$$[X_{es}] \{P_{es}\} = \{F_{es}\} \quad (4.40)$$

O vetor dos parâmetros do elemento dos suportes  $\{P_{es}\} = [m_{es} \ c_{es} \ k_{es}]^T$  é finalmente obtido via solução normal do métodos dos Mínimos Quadrados da equação (4.40):

$$\{P_{es}\} = ([X_{es}]^T [X_{es}])^{-1} [X_{es}]^T \{F_{es}\} \quad (4.41)$$

## CAPÍTULO V

### MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADA NA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Propõe-se neste Capítulo uma abordagem para identificação indireta de forças a partir da inversão da equação de convolução. Este procedimento de identificação requer, como dados experimentais, as acelerações medidas em um dado conjunto de coordenadas da estrutura e um conjunto de funções de resposta ao impulso relacionando as coordenadas onde as respostas temporais são medidas e aquelas onde as forças excitadoras são aplicadas.

Vários autores têm estudado a deconvolução no domínio do tempo no tratamento de diferentes tipos de problemas. Prost & Goutte (1977) empregaram a deconvolução na restauração de imagens e em aplicações de espectroscopia. Wood & Treitel (1975) aplicaram-na em processamento de sinais sísmicos no domínio da geofísica. Sarkar *et al.* (1982) utilizaram-na para a identificação das funções de resposta ao impulso de sistemas eletromagnéticos. No âmbito da Engenharia Mecânica, Fasana & Piombo (1996) usaram o método para identificar as funções de resposta ao impulso de sistemas mecânicos vibratórios e Kammer (1996) e Genaro (1997), independentemente, utilizaram a deconvolução para a identificação de forças externas agindo em estruturas vibratórias elásticas, utilizando procedimentos computacionais distintos.

Os estudos realizados pelos autores mencionados revelam que o método mostra-se muito adequado às aplicações práticas, requerendo pouca de instrumentação, não sendo afetado por truncamentos determinados por restrições de natureza experimental. Contudo, ao contrário do método baseado nas coordenadas modais, examinado na seção anterior, tem sido verificado que o método da deconvolução conduz a equações de estimação altamente mal condicionadas, extremamente sensíveis à ruídos experimentais.

O estudo realizado sobre este método permitiu oferecer as seguintes contribuições:

- proposição de uma estratégia visando a redução do tempo de cálculo, mediante a redução número de incógnitas;
- utilização do Método do Gradiente Conjugado, apresentado na Seção 3.3.5, para a resolução estável do sistema de equações de estimação e redução das dificuldades geradas pelo mau condicionamento numérico.
- utilização do método da deconvolução como uma das etapas de um procedimento de identificação de parâmetros físicos de elementos de suporte, similar àquele descrito na Seção 4.4.
- validação experimental da técnica. Com base em levantamento bibliográfico efetuado, esta validação é, até o presente momento, inédita.

No que segue, será inicialmente desenvolvida a formulação do método para um sistema vibratório com uma entrada e uma saída. Em seguida, esta formulação será estendida a sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

### 5.1- FORMULAÇÃO PARA SISTEMAS COM UMA ENTRADA E UMA SAÍDA

Seja  $f(t)$  a entrada (força) para um sistema dinâmico linear, o qual é caracterizado por sua função de resposta ao impulso (F.R.I.)  $h(t)$ . De acordo com o exposto na Seção 2.2.6, admitindo condições iniciais nulas, a correspondente saída (resposta)  $x(t)$  é dada pela seguinte integral de convolução:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (5.1)$$

Para sistemas mecânicos fisicamente realizáveis (causais), a F.R.I. é nula para todos os valores de  $t \leq 0$ , e a equação (5.1) pode ser substituída por:

$$x(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (5.2)$$

Vários autores, tais como Delves & Walsh (1974), Deuffhard & Hairer (1983), Phillips (1962) e Twomey (1963), mostraram que uma solução analítica para o problema inverso da equação (5.2) nem sempre pode ser obtido. Contudo, este aspecto da questão pode ser ignorado no âmbito da identificação indireta de forças pelas seguintes razões: primeiramente é essencial que a F.R.I. de um sistema mecânico linear sempre exista e seja única. Além disso, a equação (5.2) será tratada numericamente considerando os valores de  $\{x(t)\}$  e  $\{f(t)\}$  amostrados no tempo.

Seja  $\Delta t$  a taxa de amostragem uniforme das funções  $x(t)$ ,  $h(t)$  e  $f(t)$ . As amostras obtidas em  $p$  instantes de tempo são designadas por  $x(i\Delta t)$ ,  $h(i\Delta t)$ ,  $f(i\Delta t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ . Com esta discretização temporal, a integração indicada em (5.2) pode ser aproximada da seguinte forma:

$$x(k\Delta t) = \sum_{i=0}^k h[(k-i)\Delta t] f(i\Delta t) \Delta t, \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (5.3)$$

Visando simplificação, a seguinte notação é introduzida para os termos figurando em (5.3):

$$\begin{aligned} x_i &= x(i\Delta t) \\ f_i &= f(i\Delta t) \\ h_i &= h(i\Delta t) \end{aligned} \quad \text{para } i=0 \text{ a } p-1.$$

Desta forma a equação (5.3) se escreve:

$$x_k = \sum_{i=0}^k h_{k-i} f_i, \text{ com } k=1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

A expansão de (5.4) conduz a:

$$\text{Para } k=0: \quad x_0 = h_0 f_0 \quad (5.5.a)$$

$$\text{Para } k=1: \quad x_1 = h_1 f_0 + h_0 f_1 \quad (5.5.b)$$

$$\text{Para } k=2: \quad x_2 = h_2 f_0 + h_1 f_1 + h_0 f_2 \quad (5.5.c)$$

⋮

$$\text{Para } k=p-1: \quad x_{p-1} = h_{p-1} f_0 + h_{p-2} f_1 + \dots + h_0 f_{p-1} \quad (5.5.d)$$

Uma primeira alternativa de resolução das equações (5.5) consiste em se empregar o seguinte esquema recursivo:

$$f_0 = \frac{x_0}{h_0} \quad \text{com } h_0 \neq 0 \quad (5.6.a)$$

$$f_1 = \frac{x_1 - f_0 h_1}{h_0} \quad (5.6.b)$$

$$f_2 = \frac{x_2 - h_2 f_0 - h_1 f_1}{h_0} \quad (5.6.c)$$

⋮

$$f_{p-1} = \frac{x_{p-1} - h_{p-1} f_0 - \dots - h_1 f_{p-2}}{h_0} \quad (5.6.d)$$

Embora seja simples e rápido do ponto de vista computacional, este procedimento conduz a resultados insatisfatórios. A razão é que  $h$  é fortemente mal condicionada (Hunt, 1972), o que implica que pequenos erros em  $x$  geram grandes erros no vetor solução  $f$ . Dada a sua natureza recursiva, em que apenas uma equação é resolvida em cada passo,

este procedimento não favorece o emprego de técnicas de regularização para estabilização numérica.

Um outro procedimento de resolução que geralmente proporciona melhores resultados consiste em agrupar as equações (5.5) em um sistema de equações, que será em seguida resolvido para a identificação de todos os valores amostrados da força excitadora, de uma só vez. Matricialmente, este sistema é expresso sob a forma:

$$\{x\} = [h]\{f\} \quad (5.7)$$

onde:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{Bmatrix}; \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [h] = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p-1} & h_{p-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix}$$

## 5.2 – SISTEMAS COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS

A extensão da equação (5.2) a sistemas de múltiplas entradas e saídas é dada pela seguinte equação abaixo:

$$\{x(t)\} = \int_0^t [h(t-\tau)]\{f(\tau)\}d\tau \quad (5.8)$$

Considerando  $c$  localizações de medição e  $f$  forças de excitação, a equação (5.8) pode ser desenvolvida como segue:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t h_{11}(t-\tau)f_1(\tau)d\tau + \dots + \int_0^t h_{1r}(t-\tau)f_r(\tau)d\tau \\ &\vdots \\ x_c(t) &= \int_0^t h_{c1}(t-\tau)f_1(\tau)d\tau + \dots + \int_0^t h_{cr}(t-\tau)f_r(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde a F.R.I.  $h_{ij}(t)$  representa a resposta na coordenada  $i$ , devida a uma excitação do tipo impulso unitário aplicado na coordenada  $j$ .

Uma aproximação discreta para a equação (5.9) é obtida fazendo  $\Delta t$  ser o intervalo de amostragem das funções  $x_i(t)$ ,  $f_i(t)$  e  $h_{ij}(t)$ . Introduzindo a notação  $x_i(k) = x_i(k\Delta t)$ ,  $f_i(k) = f_i(k\Delta t)$ ,  $h_{ij}(k) = h_{ij}(k\Delta t)$ , para  $k=1$  a  $p$ , uma versão discretizada para (5.9) é escrita:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \left[ \sum_{i=0}^k h_{11}(k-i)f_1(i) + \dots + \sum_{i=0}^k h_{1r}(k-i)f_r(i) \right] \Delta t \\ &\quad \vdots \\ x_c(k) &= \left[ \sum_{i=0}^k h_{c1}(k-i)f_1(i) + \dots + \sum_{i=0}^k h_{cr}(k-i)f_r(i) \right] \Delta t \end{aligned} \quad \text{para } k=0 \text{ a } p-1 \quad (5.10)$$

As equações (5.10) são agrupadas em um sistema de  $(c \times p)$  equações e  $(f \times p)$  incógnitas, com a seguinte estrutura triangular por blocos:

$$\begin{bmatrix} \{x(0)\} \\ \{x(1)\} \\ \vdots \\ \{x(p)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T(0)] & & & [0] \\ [T(1)] & [T(0)] & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ [T(p-1)] & [T(p-2)] & \dots & [T(0)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{f(0)\} \\ \{f(1)\} \\ \vdots \\ \{f(p)\} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

onde:

$$[T(k)] = \Delta t \begin{bmatrix} h_{11}(k) & h_{12}(k) & \dots & h_{1r}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{c1}(k) & h_{c2}(k) & \dots & h_{cr}(k) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Escrevendo o sistema (5.11) numa forma mais compacta tem-se:

$$\{x\} = [T]\{f\} \quad (5.13)$$

Diferentes algoritmos podem ser utilizados para calcular o vetor das forças desconhecidas  $\{f\}$  a partir da equação (5.13). Desde que o número de equações seja maior do que o número de incógnitas ( $c \geq f$ ) e que  $[T]$  tenha posto completo, a solução normal por mínimos quadrados para a equação (5.13) pode ser calculada segundo:

$$\{f\} = ([T]^T [T])^{-1} [T]^T \{x\} \quad (5.14)$$

É importante notar que a formulação acima pode ser utilizada para exploração de qualquer tipo de resposta temporal – aceleração, velocidade ou deslocamento – desde que as correspondentes F.R.I.s sejam empregadas.

Como já verificado no Capítulo III, o sistema de equações (5.13) é geralmente mal condicionado, ou seja, pequenos erros afetando  $\{x\}$  e ou  $[T]$  podem conduzir a grandes erros no vetor da força estimada  $\{f\}$ . No Capítulo III foram apresentadas algumas estratégias para estabilização dos cálculos, tais como a *Decomposição em Valores Singulares* (Maia, 1986) e a *Técnica de Regularização de Tikhonov* (Tikhonov, 1963). Neste trabalho, uma aproximação alternativa, baseada no *Método do Gradiente Conjugado*, é utilizada para resolver as equações de estimação.

Um questão importante se apresenta acerca da obtenção das funções de resposta ao impulso. Elas podem ser obtidas na prática por diversos procedimentos, tais como:

▫ Computando a transformada inversa de Fourier das funções de resposta em frequência. A demonstração de que as funções de resposta ao impulso e as funções de resposta em frequência formam pares de transformadas de Fourier é feita por Bendat & Piersol (1980).

▫ As F.R.I.s podem ser identificadas utilizando procedimento similar ao apresentado nesta seção para a identificação de forças, admitindo que as forças de excitação e as correspondentes respostas temporais sejam conhecidas. Este método é utilizado por Fasana & Piombo (1996). A título de ilustração deste procedimento, considere-se a equação (5.8) particularizada para o caso de uma única força aplicada na coordenada  $j$  e uma única coordenada  $i$  instrumentada com acelerômetro:

$$x_i(t) = \int_0^t h_{ij}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \quad (5.15)$$

Após a discretização temporal, a equação acima é aproximada por:

$$x_i(k) = \sum_{i=0}^k h_{ij}(k-i) f_j(i) \Delta t, \quad k=0 \text{ a } p-1. \quad (5.16)$$

Admitindo que os valores amostrados  $x_i(k)$  e  $f_j(i)$  sejam conhecidos, as equações (5.16) podem ser agrupadas no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} f_j(0) & & & [0] \\ f_j(1) & f_j(0) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f_j(p-1) & f_j(p-2) & \dots & f_j(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{ij}(0) \\ h_{ij}(1) \\ \vdots \\ h_{ij}(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(0) \\ x_i(1) \\ \vdots \\ x_i(p-1) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Numa forma mais compacta:

$$[F]_{(p,p)} \{H\}_{(p,1)} = \{X\}_{(p,1)}, \quad (5.18)$$

donde:

$$\{H\} = [F]^{-1} \{X\} \quad (5.19)$$

### 5.3 - REDUÇÃO DO NÚMERO DE INCÓGNITAS MEDIANTE A EXPANSÃO DAS FORÇAS EXCITADORAS EM SÉRIES TRUNCADAS DE FUNÇÕES ORTOGONAIS.

De acordo com a formulação desenvolvida acima, o sistema de equações de estimação (5.13) comporta  $(c \times p)$  equações e  $(f \times p)$  incógnitas. Visando obter uma boa representação temporal das forças excitadoras, é conveniente empregar um número de pontos  $p$  relativamente grande, o que implica o aumento da ordem do sistema de equações e, conseqüentemente, a elevação do esforço computacional.

É proposto, nesta seção, um procedimento visando reduzir o esforço computacional do método da deconvolução, mediante a redução do número de incógnitas. Para tanto, procede-se à expansão das forças excitadoras em séries truncadas de funções ortogonais.

Para facilitar a exposição do procedimento, considere-se o caso de sistemas com apenas uma entrada e uma saída, sendo imediata a extensão ao caso de sistemas com várias entradas e várias saídas.

Designando por  $r_0(t), r_1(t), \dots, r_{r-1}(t)$  um conjunto de  $r$  funções ortogonais, é possível expandir uma força  $f(t)$  através da série:

$$f(t) = a_0 r_0(t) + a_1 r_1(t) + \dots + a_{r-1} r_{r-1}(t) \quad (5.20)$$

onde  $a_i$  são coeficientes a serem determinados.

Avaliando (5.20) para um número  $p$  de instantes de tempo, são formadas as equações:

$$f(t_1) = a_0 r_0(t_1) + a_1 r_1(t_1) + \dots + a_{r-1} r_{r-1}(t_1)$$

$$f(t_2) = a_0 r_0(t_2) + a_1 r_1(t_2) + \dots + a_{r-1} r_{r-1}(t_2)$$

$$\vdots$$

$$f(t_p) = a_0 r_0(t_p) + a_1 r_1(t_p) + \dots + a_{r-1} r_{r-1}(t_p)$$

ou, numa forma mais compacta:

$$\{f\} = [\bar{R}] \{a\}, \quad (5.21)$$

com:

$$\{f\}_{(p \times 1)} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_p) \end{bmatrix} \quad [\bar{R}]_{(p \times r)} = \begin{bmatrix} r_0(t_1) & r_1(t_1) & \dots & r_{r-1}(t_1) \\ r_0(t_2) & r_1(t_2) & \dots & r_{r-1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_0(t_p) & r_1(t_p) & \dots & r_{r-1}(t_p) \end{bmatrix} \quad \{a\}_{(r \times 1)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{bmatrix}$$

É possível modificar a equação (5.13) substituindo nela a relação (5.21), o que resulta em:

$$\{x\} = [T][\bar{R}] \{a\} \quad (5.22)$$

O resultado é um novo sistema de equações com  $(c \times p)$  equações e  $r$  incógnitas, onde as matrizes  $[T]$  e  $[\bar{R}]$  são conhecidas. A vantagem é que  $[T][\bar{R}] \in R^{c \times p, r}$ . Escolhendo o número de funções ortogonais de sorte que  $r < f \times p$  a equação (5.22) requer menor esforço computacional para ser resolvida do que a equação (5.7). Encontrada a solução para (5.22), retorna-se a equação (5.20) para o cálculo do vetor de forças.

Este procedimento permite a utilização de diferentes tipos de funções ortogonais, tais como: séries de Fourier, séries de Chebyshev, polinômios de Legendre, polinômios de Jacobi, funções Walsh e funções Block-Pulse. Pacheco & Steffen (1998), mostra a utilização destas funções ortogonais no processo de identificação e análise de sensibilidade em sistemas mecânicos. No presente trabalho, as séries de Fourier serão utilizadas nas aplicações numéricas apresentadas no Capítulo VII.

#### 5.4 – UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO PARA A IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE ELEMENTOS DE SUPORTE.

Um procedimento similar ao que foi sugerido na Seção 4.4, é proposto com vistas à identificação de parâmetros físicos (inércia, rigidez e amortecimento) de elementos de suporte de estruturas flexíveis. Neste contexto, o método de identificação de forças baseado na deconvolução no domínio do tempo constitui uma das etapas do procedimento na qual o efeito mecânico dos elementos de suporte, modelados como sistemas de 1 g.d.l., é representado por forças externas aplicadas à estrutura com condições de contorno livres. No capítulo VII, tal procedimento será ilustrada através de exemplos de aplicações numérica.

## CAPÍTULO VI

### MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EMPREGANDO UM MODELO ESTRUTURAL INVERSO

É proposta, neste Capítulo, uma metodologia baseada no emprego de um modelo estrutural inverso, apresentado sob a forma de equações de estado. O sistema inverso é obtido a partir do sistema direto mediante o intercâmbio dos vetores de entrada e de saída. Uma vez construído o sistema inverso, as forças excitadoras são estimadas através da integração das equações de estado em tempo contínuo ou utilizando recursivamente as equações de diferença em tempos discretos.

#### 6.1- FORMULAÇÃO DO MÉTODO EM TEMPO CONTÍNUO

Conforme desenvolvimento apresentado na seção 2.1.2, um sistema mecânico de parâmetros concentrados tem a seguinte representação no espaço de estados em tempo contínuo:

$$\{\dot{w}(t)\} = [\bar{A}] \{w(t)\} + [\bar{B}] \{u(t)\} \quad (6.1)$$

$$\{y(t)\} = [\bar{C}] \{w(t)\} + [\bar{D}] \{u(t)\} \quad (6.2)$$

onde:

$$\{w(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} \in R^{2N} \quad ; \quad \{y(t)\} \in R^s$$

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \in R^{2N \times 2N}$$

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1}[B_2] \end{bmatrix} \in R^{2N \times f}$$

$$[\bar{C}] = [C_d] - [C_a][M]^{-1}[K] \quad [C_v] - [C_a][M]^{-1}[K] \in R^{s \times 2N}$$

$$[\bar{D}] = [C_a][M]^{-1}[B_2] \in R^{s \times f}$$

$[C_a]$ ,  $[C_v]$  e  $[C_d]$  são matrizes que fornecem as posições dos sensores para aceleração, velocidade e deslocamento respectivamente.

O sistema dado pelas equações (6.1) e (6.2), contendo  $N$  estados,  $f$  entradas e  $s$  saídas é denominado *sistema direto*.

Intercambiando os papéis dos vetores de entradas e saídas em (6.1) e (6.2), pode-se obter o seguinte modelo inverso (Kammer, 1996):

$$\{\dot{w}(t)\} = [\bar{A}_{inv}] \{w(t)\} + [\bar{B}_{inv}] \{y(t)\} \quad (6.3)$$

$$\{u(t)\} = [\bar{C}_{inv}] \{w(t)\} + [\bar{D}_{inv}] \{y(t)\} \quad (6.4)$$

Onde:

$$[\bar{A}_{inv}] = [\bar{A}] - [\bar{B}][\bar{D}]^+ [\bar{C}] \quad ; \quad [\bar{B}_{inv}] = [\bar{B}][\bar{D}]^+$$

$$[\bar{C}_{inv}] = -[\bar{D}]^+ [\bar{C}] \quad ; \quad [\bar{D}_{inv}] = [\bar{D}]^+ \quad ; \quad [\bar{D}]^+ = ([\bar{D}]^T [\bar{D}])^{-1} [\bar{D}]^T$$

De posse do vetor de saídas (respostas) medidas experimentalmente e das matrizes do sistema inverso obtidas por modelagem analítica da estrutura, a resolução de (6.3) e (6.4) permite estimar o vetor das entradas (forças excitadoras).

## 6.2- FORMULAÇÃO DO MÉTODO EM TEMPO DISCRETO

Conforme desenvolvimento apresentado na Seção 2.1.2, a dinâmica de um sistema mecânico de parâmetros concentrados pode também ser representado pelo seguinte modelo formulado no espaço de estados em tempo discreto:

$$\{w(k+1)\} = [A_{dis}] \{w(k)\} + [B_{dis}] \{u(k)\} \quad (6.5)$$

$$\{y(k)\} = [C_{dis}] \{w(k)\} + [D_{dis}] \{u(k)\} \quad (6.6)$$

As equações (6.5) e (6.6) podem ser manipuladas para intercâmbiar os papéis dos vetores de entrada e de saída, produzindo o seguinte sistema inverso:

$$\{w(k+1)\} = [\tilde{A}] \{w(k)\} + [\tilde{B}] \{y(k)\} \quad (6.7)$$

$$\{u(k)\} = [\tilde{C}] \{w(k)\} + [\tilde{D}] \{y(k)\} \quad (6.8)$$

onde as seguintes matrizes são definidas:

$$[\tilde{A}] = [A_{dis}] - [B_{dis}][D_{dis}]^+ [C_{dis}] \quad ; \quad [\tilde{B}] = [B_{dis}][D_{dis}]^+$$

$$[\tilde{C}] = -[D_{dis}]^+ [C_{dis}] \quad ; \quad [\tilde{D}] = [D_{dis}]^+ \quad ; \quad [D_{dis}]^+ = ([D_{dis}]^T [D_{dis}])^{-1} [D_{dis}]^T$$

O vetor das forças excitadoras  $\{u(k)\}$  é obtido da equação (6.8), dado o vetor de medição de saída  $\{y(k)\}$  é o vetor de estado  $\{w(k)\}$ , obtido através da resolução recursiva da equação (6.7).

Na formulação tanto do modelo inverso contínuo quanto do modelo inverso discreto, as pseudo-inversas  $[\bar{D}]^+$  e  $[D_{dis}]^+$ , devem ser calculadas. Isto requer que o número de sensores  $s$  seja maior ou igual ao número de forças de entrada  $f$ . Além disso,  $[\bar{D}]$  e  $[D_{dis}]$  devem ter posto completo. Como resultado, levando em conta a forma das matrizes  $[\bar{D}]$  e

$[D_{dis}]$ , formada por zeros e uns, as equações (6.7) e (6.8) podem ser utilizadas para o cálculo das forças de excitação, à condição que as posições dos sensores utilizados para a obtenção do vetor de saídas e as localizações das forças excitadoras sejam coincidentes.

Para sistemas estruturais com sensores posicionados em localizações distintas daquelas onde as forças são aplicadas, pode-se mostrar que o sistema direto possui zeros de fase não-mínima (Hashemi & Hammond, 1996). Isto significa que alguns dos zeros de transmissão do sistema discreto direto estão fora do círculo unitário no plano z ou, para a representação no contínuo, eles estão localizados no semiplano complexo direito. Estes zeros podem ser diretamente relacionados aos autovalores do sistema inverso. Desta forma, a matriz do sistema inverso  $[\tilde{A}]$  pode resultar instável. De acordo com Williams (1989) os zeros de transmissão são definidos como os valores da variável de Laplace para os quais é possível aplicar uma entrada diferente de zero e garantir uma saída nula para as localizações dos sensores, para um conjunto adequado de condições iniciais  $w(0)$ . Assim, se a entrada é admitida na forma  $u = \mu e^{\psi t}$ , então  $\psi$  é dito ser um zero de transmissão do sistema direto (6.5) e (6.6) se:

$$\begin{bmatrix} [A_{dis}] - \psi [I] & [B_{dis}] \\ -[C_{dis}] & -[D_{dis}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w(0)\} \\ \mu \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \{w(0)\} \\ \mu \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.9)$$

Para uma solução não trivial existir, o determinante da matriz Q deve ser nulo. No caso onde  $[D_{dis}]$  é de posto completo, o determinante de Q pode escrito segundo:

$$|Q| = |[D_{dis}]| |[A_{dis}] - [B_{dis}][D_{dis}]^{-1}[C_{dis}] - \psi [I]| = |[D_{dis}]| |[\tilde{A}] - \psi [I]| \quad (6.10)$$

que produz a condição:

$$|[\tilde{A}] - \psi [I]| = 0 \quad (6.11)$$

Esta última equação corresponde à equação característica do sistema inverso, implicando que  $\psi$  é também um autovalor do sistema inverso. Williams (1989) pode ser consultado para maiores detalhes sobre zeros de transmissão em sistemas estruturais.

No caso de entradas e saídas não coincidentes, a matriz  $[D_{dis}]$  tem posto deficiente e a pseudo-inversa,  $[D_{dis}]^+$  não pode ser calculada. Para contornar este problema, Kammer & Stelzner (1999) sugeriram o uso de um filtro não causal, onde a estimativa da força de entrada para o tempo  $k$  é expressa como uma função da resposta para um tempo futuro  $k+1$ . Evidentemente, este procedimento impede a aplicação do método para identificação de forças em tempo real. Para descrição do procedimento sugerido, considere-se um sistema para o qual todos os sensores e forças de entrada são não coincidentes. Para tal sistema, a matriz que relaciona a entrada e a saída é uma matriz nula, produzindo:

$$\{w(k+1)\} = [A_{dis}]\{w(k)\} + [B_{dis}]\{u(k)\} \quad (6.12)$$

$$\{y(k)\} = [C_{dis}]\{w(k)\} \quad (6.13)$$

A equação de saída (6.13) deve ser avançada no tempo antes de realizar a inversão do sistema:

$$\{y(k+1)\} = [C_{dis}]\{w(k+1)\} = [C_{dis}][A_{dis}]\{w(k)\} + [C_{dis}][B_{dis}]\{u(k)\} \quad (6.14)$$

O sistema direto, dado pelas equações (6.12) e (6.13) é não causal. O sistema inverso associado toma a forma:

$$\{w(k+1)\} = [[A_{dis}] - [B_{dis}][C_{dis}][B_{dis}]^+][C_{dis}][A_{dis}]\{w(k)\} + [B_{dis}][C_{dis}][B_{dis}]^+\{y(k+1)\} \quad (6.15)$$

$$\{u(k)\} = -([C_{dis}][B_{dis}]^+)[C_{dis}][A_{dis}]\{w(k)\} + ([C_{dis}][B_{dis}]^+)\{y(k+1)\} \quad (6.16)$$

O procedimento pode ser generalizado para um número qualquer,  $\ell$ , de avanços no tempo, produzindo:

$$\text{Sistema direto} \begin{cases} \{w(k+1)\} = [A_{dis}]\{w(k)\} + [B_{dis}]\{u(k)\} & (6.17) \\ \{y(k+\ell)\} = [C_{dis}][A_{dis}]^{\ell-1}\{w(k)\} + [C_{dis}][A_{dis}]^{\ell-1}[B_{dis}]\{u(k)\} & (6.18) \end{cases}$$

$$\text{Sistema inverso} \begin{cases} \{w(k+1)\} = [\tilde{A}] \{w(k)\} + [\tilde{B}] \{y(k+\ell)\} \\ \{u(k)\} = [\tilde{C}] \{w(k)\} + [\tilde{D}] \{y(k+\ell)\} \end{cases} \quad (6.19)$$

(6.20)

onde:

$$[\tilde{A}] = [A_{\text{dis}}] - [B_{\text{dis}}] ([C_{\text{dis}}] [A_{\text{dis}}]^{-1} [B_{\text{dis}}])^+ ([C_{\text{dis}}] [A_{\text{dis}}])'$$

$$[\tilde{B}] = [B_{\text{dis}}] ([C_{\text{dis}}] [A_{\text{dis}}]^{-1} [B_{\text{dis}}])^+$$

$$[\tilde{C}] = -([C_{\text{dis}}] [A_{\text{dis}}]^{-1} [B_{\text{dis}}])^+ [C_{\text{dis}}] [A_{\text{dis}}]'$$

$$[\tilde{D}] = ([C_{\text{dis}}] [A_{\text{dis}}]^{-1} [B_{\text{dis}}])^+$$

O vetor das forças pode ser obtido da equação (6.20), dado o vetor de saídas avançado no tempo e o vetor de estado, obtido através da resolução recursiva da equação (6.19).

### 6.3- MODELOS DIRETO E INVERSO FORMULADOS EM TERMOS DE PROPRIEDADES MODAIS COM AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

A construção do modelo inverso desenvolvido na seção anterior requer o conhecimento das matrizes estruturais de inércia, amortecimento e rigidez, que compõem as matrizes de estado. Em numerosas situações práticas, notadamente no caso de sistemas complexos, estas matrizes não estão disponíveis ou, no melhor dos casos, são obtidas pela técnica de elementos finitos, comportando um elevado número de graus de liberdade e inevitáveis imprecisões de modelagem. Nestas situações, é conveniente utilizar um modelo inverso formulado em termos de quantidades modais, as quais podem ser obtidas experimentalmente, através de técnicas bem estabelecidas de análise modal experimental, que permitem a redução do número de graus de liberdade do modelo e, em consequência, do esforço computacional.

Com base no desenvolvimento apresentado na Seção 2.2.3, as equações do movimento de um sistema discreto, com amortecimento viscoso, podem ser expressas em da seguinte forma:

$$[N]\ddot{q}(t) + [\beta]\dot{q}(t) + [N\Lambda]q(t) = [\Phi]^T \{f(t)\} \quad (6.21)$$

Admitindo a condição  $[C]M^{-1}[K] = [K]M^{-1}[C]$  e  $\{f(t)\} = [B_2]\{u(t)\}$ , a equação (6.21) toma a forma:

$$\{\ddot{q}(t)\} + 2[\xi\omega]\{\dot{q}(t)\} + [\omega^2]\{q(t)\} = [N]^{-1}[\Phi]^T [B_2]\{u(t)\} \quad (6.22)$$

De forma equivalente, a equação (6.22) assume a seguinte representação no espaço de estados:

$$\{\dot{w}(t)\} = [A_m] \{w(t)\} + [B_m] \{u(t)\} \quad (6.23)$$

sendo:

$$\bullet \{w(t)\} = \begin{Bmatrix} \{q(t)\} \\ \{\dot{q}(t)\} \end{Bmatrix} \in R^{2N} \text{ vetor de estado}$$

$$\bullet [A_m] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\omega^2] & -2[\xi\omega] \end{bmatrix} \in R^{2N \times 2N} \text{ matriz do sistema}$$

$$\bullet [B_m] = \begin{bmatrix} [0] \\ [N]^{-1}[\Phi]^T [B_2] \end{bmatrix} \in R^{2N \times f} \text{ matriz de influência}$$

A equação de saída, expressa em termos da aceleração, velocidade e deslocamento é expressa segundo:

$$\{y(t)\} = [C_a]\{\ddot{x}(t)\} + [C_v]\{\dot{x}(t)\} + [C_d]\{x(t)\} \quad (6.24)$$

com  $[C_a]$ ,  $[C_v]$  e  $[C_d]$  fornecendo as posições dos sensores para a aceleração, velocidade e deslocamento respectivamente. De posse do vetor aceleração dado pela equação (2.2) e substituindo-o na equação (6.24), chega-se à equação de medição:

$$\{y_m(t)\} = -[C_a][M]^{-1}[C]\{\dot{x}(t)\} - [C_a][M]^{-1}[K]\{x(t)\} + [C_a][M]^{-1}[B_2]\{u(t)\} + [C_v]\{\dot{x}(t)\} + [C_d]\{x(t)\} \quad (6.25)$$

Substituindo (2.18) em (6.25), chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} \{y_m(t)\} = & -[C_a][M]^{-1}[C][\Phi]\{\dot{q}(t)\} - [C_a][M]^{-1}[K][\Phi]\{q(t)\} + [C_a][M]^{-1}[B_2]\{u(t)\} + \\ & + [C_v][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + [C_d][\Phi]\{q(t)\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Utilizando a relação de ortogonalidade e normalização dos autovetores (2.16), tem-se:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [N] \Rightarrow [M]^{-1} = [\Phi][N]^{-1}[\Phi]^T \quad (6.27)$$

Substituindo (6.27) em (6.26) e usando as relações de ortogonalidade (2.16) e (2.17), tem-se:

$$\begin{aligned} \{y_m(t)\} = & -[C_a][\Phi][\xi][\omega]\{\dot{q}(t)\} - [C_a][\Phi][\eta]^{-1}[\omega^2]\{q(t)\} + [C_a][\Phi][\eta]^{-1}[\Phi]^T[B_2]\{u(t)\} + \\ & + [C_v][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + [C_d][\Phi]\{q(t)\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Por fim, a equação de saída no espaço modal é posta sob a forma:

$$\{y_m(t)\} = [C_m]\{w(t)\} + [D_m]\{u(t)\} \quad (6.29)$$

onde

$$\bullet [C_m] = [C_d][\Phi] - [C_a][\Phi][N]^{-1}[\omega^2] \quad [C_v][\Phi] - 2[C_a][\Phi][\xi][\omega]$$

$$\bullet [D_m] = [C_a][\Phi][N]^{-1}[\Phi]^T[B_2]$$

No caso de utilização de base modal incompleta (contendo  $m$  modos,  $m < N$ ):

$$[A_m] \in R^{2m \times 2m} \quad ; \quad [B_m] \in R^{2m \times f}$$

$$[C_m] \in R^{s \times 2m} \quad ; \quad [D_m] \in R^{s \times f}$$

Utilizando procedimento similar ao descrito na Seção 6.2, permutando nas equações (6.23) e (6.29), chega-se às seguintes equações do sistema inverso em termos de propriedades modais:

$$\{\dot{w}(t)\} = [A_{m_{nv}}]\{w(t)\} + [B_{m_{nv}}]\{y_m(t)\} \quad (6.30)$$

$$\{u(t)\} = [C_{m_{nv}}]\{w(t)\} + [D_{m_{nv}}]\{y_m(t)\}$$

com:

$$\bullet [A_{m_{nv}}] = [A_m] - [B_m][D_m]^+[C_m]$$

$$\bullet [B_{m_{nv}}] = [B_m][D_m]^+$$

$$\bullet [C_{m_{nv}}] = -[D_m]^+[C_m]$$

$$\bullet [D_{m_{nv}}] = [D_m]^+$$

Os modelos direto e inverso em tempo discreto, expressos em termos das propriedades modais são representados pelos seguintes sistemas de equações de diferenças:

• Modelo direto

$$\{w(k+1)\} = [A_{m_{dis}}] \{w(k)\} + [B_{m_{dis}}] \{u(k)\} \quad (6.31)$$

$$\{y(k)\} = [C_{m_{dis}}] \{w(k)\} + [D_{m_{dis}}] \{u(k)\} \quad (6.32)$$

• Modelo inverso

$$\{w(k+1)\} = [\tilde{A}] \{w(k)\} + [\tilde{B}] \{y(k)\} \quad (6.33)$$

$$\{u(k)\} = [\tilde{C}] \{w(k)\} + [\tilde{D}] \{y(k)\} \quad (6.34)$$

onde:

$$\bullet [\tilde{A}] = [A_{m_{dis}}] - [B_{m_{dis}}][D_{m_{dis}}]^+ [C_{m_{dis}}]$$

$$\bullet [\tilde{B}] = [B_{m_{dis}}][D_{m_{dis}}]^+$$

$$\bullet [\tilde{C}] = -[D_{m_{dis}}]^+ [C_{m_{dis}}]$$

$$\bullet [\tilde{D}] = [D_{m_{dis}}]^+$$

O procedimento detalhado na Seção 6.2, que permite identificar as forças excitadoras em um sistema com posições de forças e sensores não coincidentes, mediante avanços no tempo no vetor das saídas, também pode ser estendido para o caso do modelo formulado em termos de propriedades modais.

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste Capítulo são apresentados diversos exemplos de simulação numérica realizados com o objetivo de avaliar o desempenho e ilustrar as características dos métodos de identificação de forças apresentados nos Capítulos IV a VI.

7.1 – DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA TESTE – SISTEMA COM 11 G.D.L.

A Figura 7.1 mostra as características físicas do sistema teste de 11 g.d.l. utilizado nos testes de simulação numérica e as Tabelas 7.1 e 7.2 apresentam as características modais deste sistema.

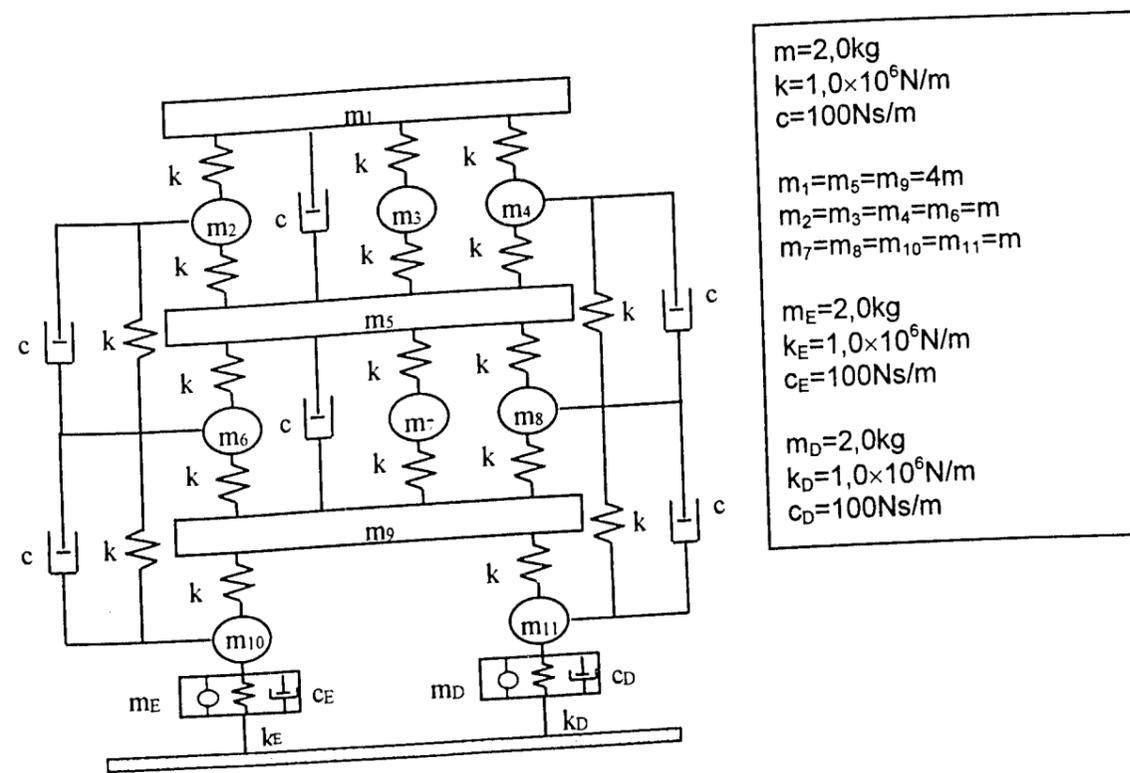


Figura 7.1 – Características físicas do modelo de 11 GDL

Tabela 7.1 – Autovetores normalizados segundo a matriz de massa.

MODO					
1º	2º	3º	4º	5º	6º
-0.1856	0.2293	0.1558	0.0000	0.0425	-0.0492
-0.1668	0.2293	-0.0582	-0.0886	-0.0671	-0.1803
-0.1802	0.1395	-0.1008	0.0000	-0.0231	0.6315
-0.1668	0.0495	-0.0582	0.0886	-0.0671	-0.1803
-0.1642	-0.0186	-0.2467	-0.0000	-0.0500	-0.0315
-0.1409	-0.0863	-0.0198	-0.1534	-0.0814	-0.0766
-0.1517	-0.1413	-0.1392	0.0000	0.3555	-0.0387
-0.1409	-0.0863	-0.0198	0.1534	-0.0814	-0.0766
-0.1304	-0.1947	0.1212	0.0000	0.1650	0.0364
-0.0941	-0.1391	0.1262	-0.3306	-0.2370	0.0320
-0.0941	-0.1391	0.1262	0.3306	-0.2370	0.0320
7º	8º	9º	10º	11º	
-0.0414	-0.0000	0.0837	0.0000	-0.0275	
0.1111	0.4264	-0.3398	-0.2456	0.2270	
0.0394	0.0000	-0.1926	-0.0000	-0.0016	
0.1111	-0.4264	-0.3398	0.2456	0.2270	
0.0283	-0.0000	0.1775	-0.0000	0.0321	
0.0874	0.2132	-0.1401	0.4254	-0.4272	
-0.5306	0.0000	-0.1655	0.0000	-0.0299	
0.0874	-0.2132	-0.1401	-0.4254	-0.4272	
0.1476	-0.0000	0.0470	-0.0000	0.0535	
-0.1413	-0.1066	0.0251	-0.0658	0.0556	
-0.1413	0.1066	0.0251	-0.0658	0.0556	

Tabela 7.2 – Características modais do sistema teste de 11 g.d.l.

Modos	Freqüências	Fatores de
	Naturais (Hz)	Amortecimento (%)
1	27,10	0,73
2	78,77	1,75
3	117,95	2,53
4	126,72	1,82
5	145,71	1,18
6	164,15	0,25
7	171,83	0,76
8	177,94	1,42
9	206,17	0,62
10	244,81	4,53
11	248,14	4,28

## 7.2 – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NAS COORDENADAS MODAIS.

Nesta Seção são apresentadas algumas das simulações numéricas que foram realizadas com o objetivo de avaliar o desempenho da metodologia de identificação de forças baseada nas coordenadas modais e dos procedimentos sugeridos no Capítulo IV. O principal interesse na realização destas simulações reside no fato que a solução exata do problema (posição e magnitude da força) é conhecida podendo-se, desta forma, avaliar a precisão dos resultados fornecidos pelos procedimentos de identificação.

Diversos fatores foram considerados nas simulações, traduzindo os diferentes tipos de dificuldade que caracterizam o problema de identificação indireta de forças em situações práticas, a saber: presença de ruído nas respostas temporais e nas auto-soluções, ocorrência simultânea de várias forças de excitação, utilização de uma base modal incompleta no que se refere tanto ao número de sensores (coordenadas instrumentadas) quanto ao número de autovetores utilizados no procedimento de identificação.

### 7.2.1 – Identificação de duas forças harmônicas.

Os testes descritos a seguir visaram a identificação de duas forças aplicadas simultaneamente nas massas 1 e 7 dadas pelas equações:

$$f_1 = 500 \cos(2\pi 150t) + 250 \cos(2\pi 75t) \quad (7.1.a)$$

$$f_7 = 250 \cos(2\pi 180t) \quad (7.1.b)$$

As condições iniciais foram admitidas nulas e as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 0,1 s, discretizadas em 1000 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  s). As respostas do sistema foram geradas através de um procedimento de integração do tipo Runge-Kutta de 4º ordem (Junkins, 1978) em ambiente MATLAB®.

Para proporcionar uma situação mais realista, em que somente as respostas em aceleração são determinadas experimentalmente com o uso de acelerômetros, optou-se por empregar as acelerações obtidas mediante a utilização do algoritmo de Runge-Kutta de 4º ordem como respostas experimentais. Estas acelerações foram então integradas por duas vezes para a obtenção das respostas em velocidade e em deslocamento, através do algoritmo de integração numérica baseado na regra do trapézio.

As Figuras 7.2 e 7.3 ilustram as respostas do sistema nas coordenadas 1 e 7. Estão superpostas as respostas em velocidade e deslocamento exatas e as correspondentes integradas, obtidas pela regra do trapézio. Observa-se que o procedimento de integração, ainda que seja um dos mais simples, oferece boa precisão.

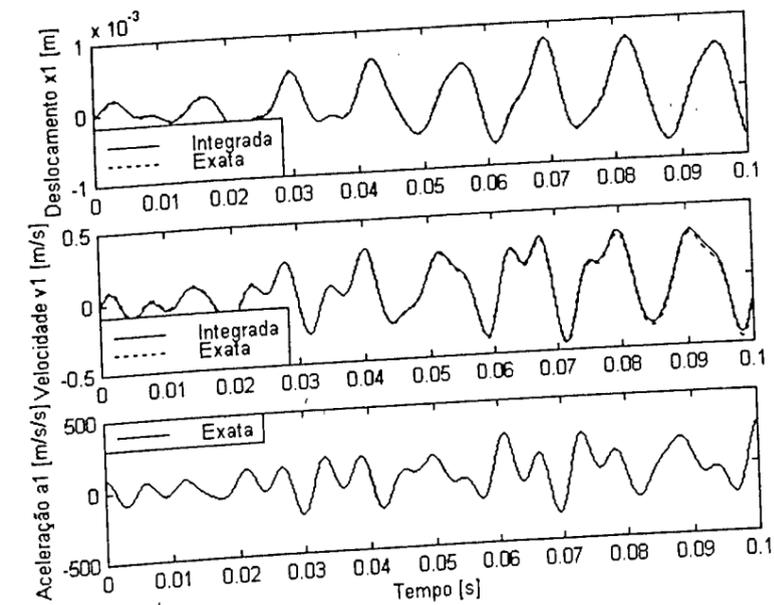


Figura 7.2 – Respostas temporais para a massa 1.

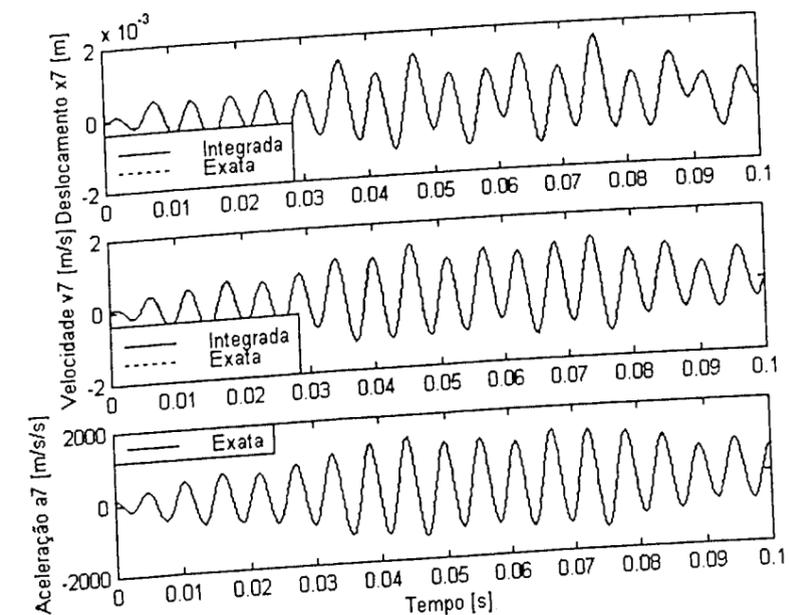


Figura 7.3 – Respostas temporais para a massa 7.

7.2.1.1 - Efeito do truncamento do número de modos na base modal

São apresentadas a seguir aplicações numéricas realizadas objetivando caracterizar o efeito do truncamento da base modal, no tocante ao número de modos utilizados na matriz modal  $[\tilde{\Phi}] \in R^{c,n}$ . Para tanto, o número de modos na base modal foi continuamente aumentado de  $n=4$  a  $n=11$  primeiros modos, admitindo-se que todas as coordenadas tenham sido instrumentadas ( $c=11$ ). Os resultados apresentados nas Figuras 7.4 a 7.11 permitem avaliar a influência do número de modos na base modal, sobre a precisão das forças identificadas. Para cada teste é fornecido o desvio entre as forças exatas e identificadas, segundo:

$$E_{RMS} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^p [f_{exata}(t_i) - f_{identif.}(t_i)]^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p [f_{exata}(t_i)]^2}} \times 100 \quad (7.2)$$

Para cada um dos testes, é também indicado o número de condicionamento da submatriz modal  $[\tilde{\Phi}] \in R^{c,n}$ , que permite avaliar a estabilidade numérica do processo de resolução das equações de estimação, dada por (4.12).

Os resultados obtidos revelam a sensibilidade dos resultados de identificação em relação ao truncamento da base modal. Como era esperado, a precisão das forças identificadas aumenta continuamente, à medida em que se aumenta o número de modos na base modal.

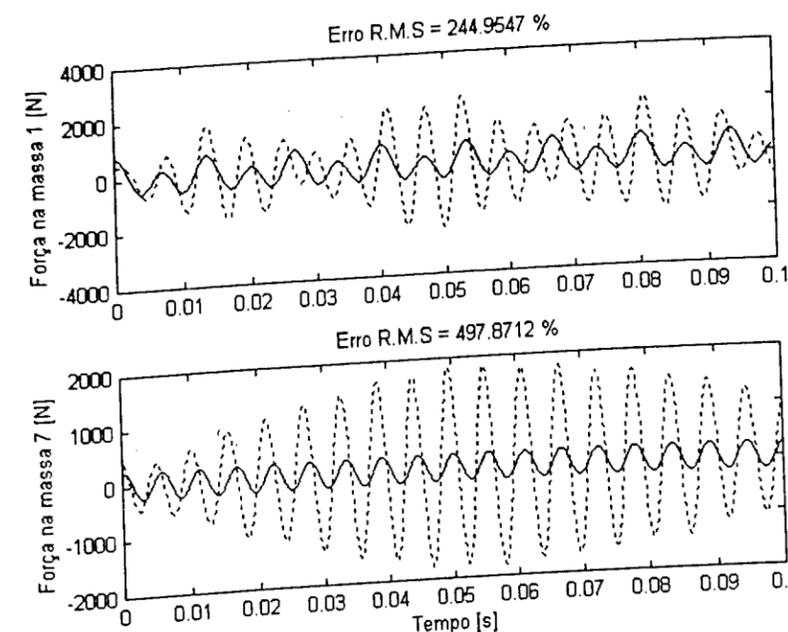


Figura 7.4 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=4$ ).  $Cond([\tilde{\Phi}])=1,40$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

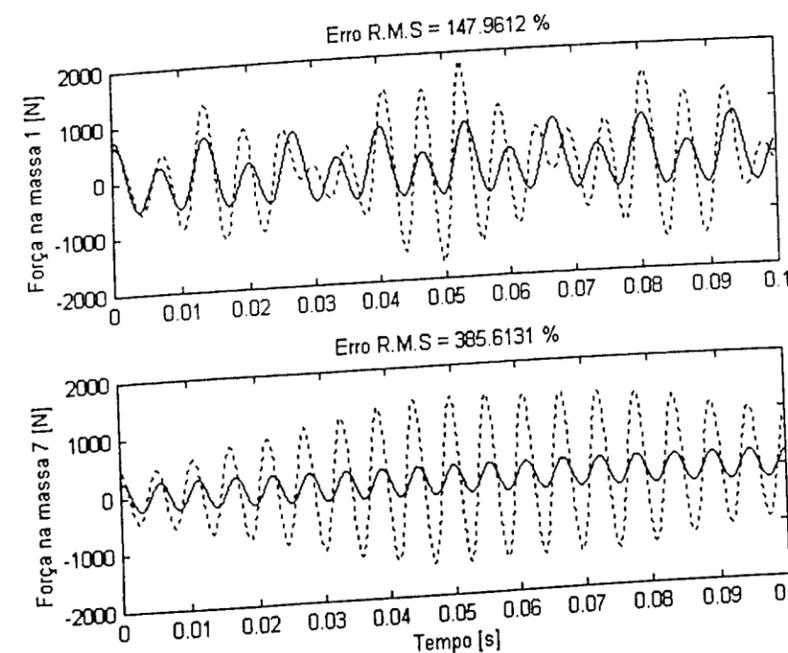


Figura 7.5 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=5$ ).  $Cond([\tilde{\Phi}])=1,58$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

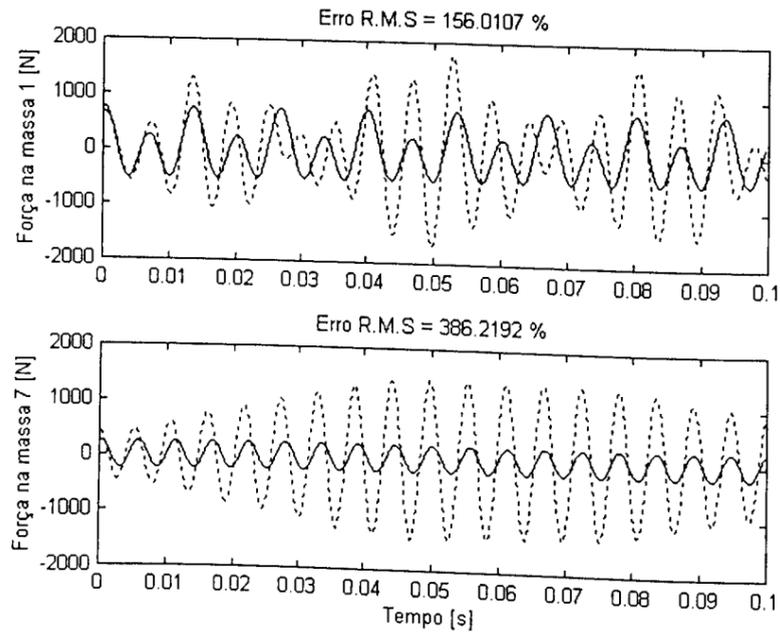


Figura 7.6 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=6$ ).  $\text{Cond}([\tilde{\Phi}])=1,99$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

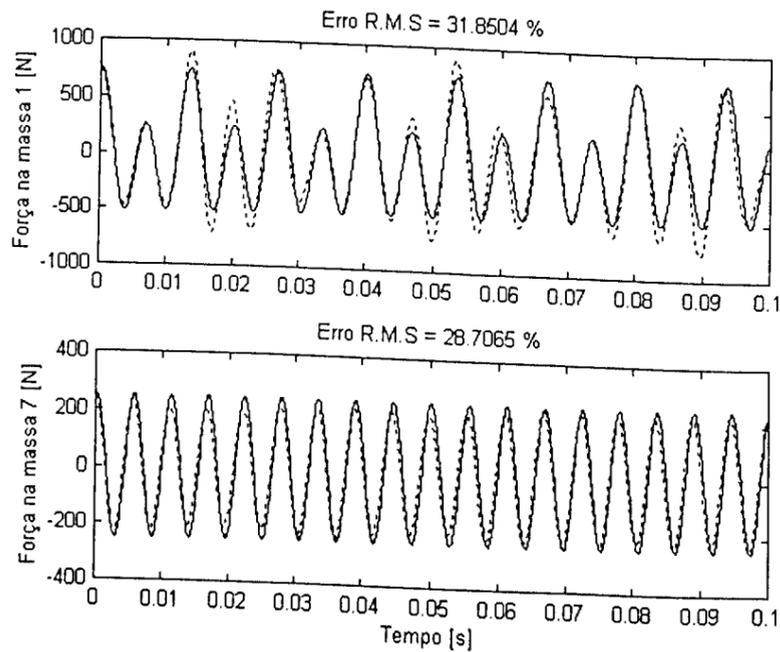


Figura 7.7 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=7$ ).  $\text{Cond}([\tilde{\Phi}])=2,00$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

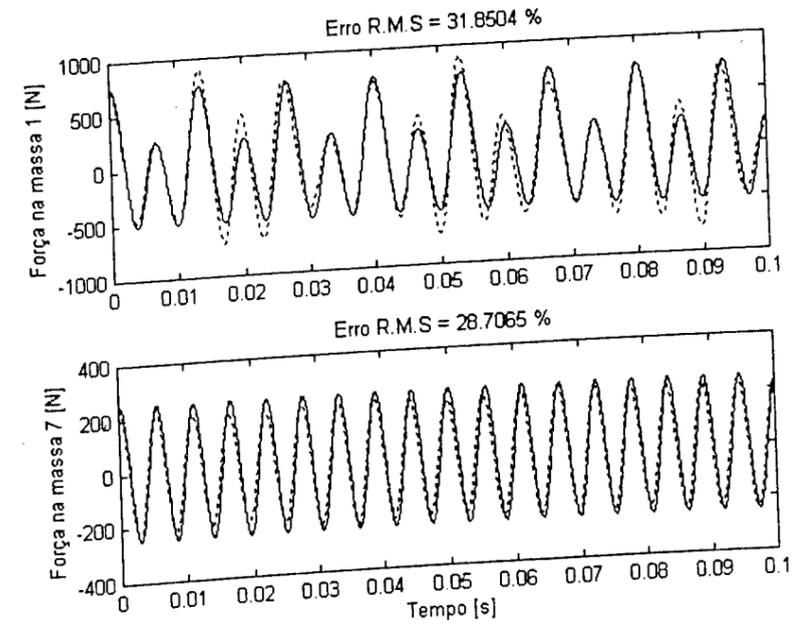


Figura 7.8 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=8$ ).  $\text{Cond}([\tilde{\Phi}])=2,00$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

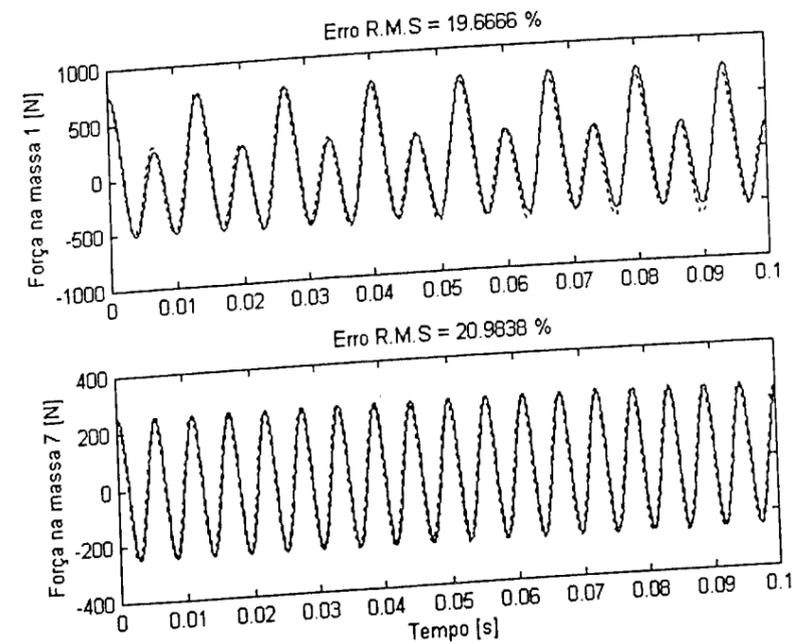


Figura 7.9 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=9$ ).  $\text{Cond}([\tilde{\Phi}])=2,00$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

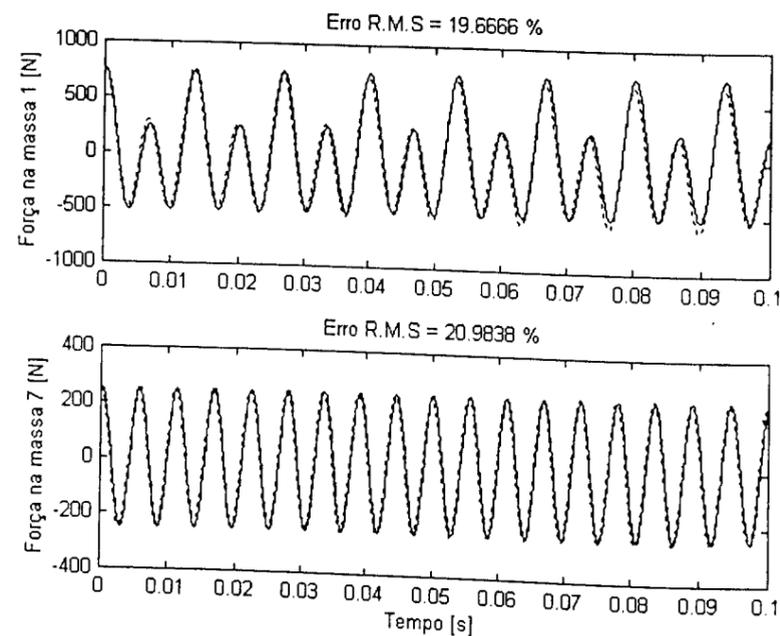


Figura 7.10 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=10$ ).  $Cond(\tilde{\Phi})=2,00$ .

\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

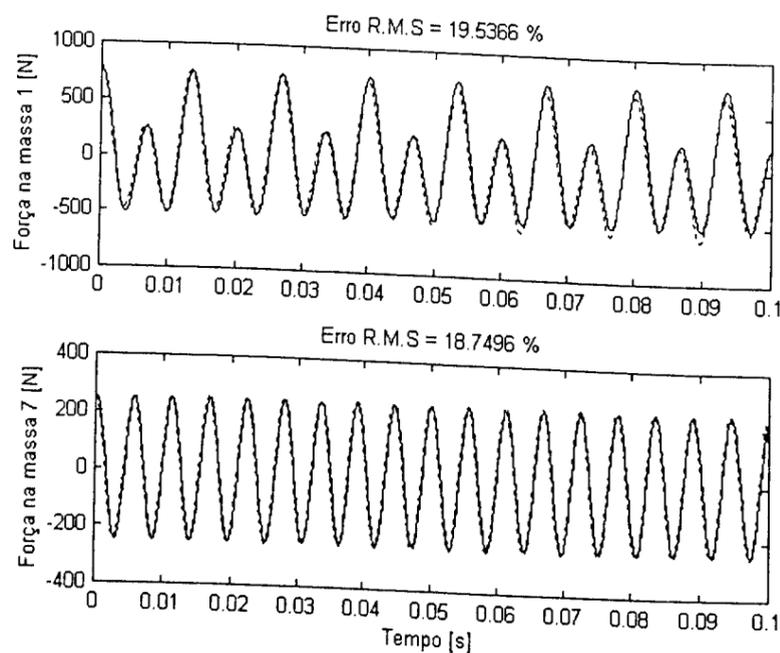


Figura 7.11 – Forças exatas e identificadas. ( $c=11, n=11$ ).  $Cond(\tilde{\Phi})=2,00$ .

\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

### 7.2.1.2 - Efeito da escolha das coordenadas instrumentadas

Os testes descritos a seguir foram realizados com o objetivo de evidenciar a influência da escolha das coordenadas instrumentadas sobre a precisão das forças identificadas, em conexão com o condicionamento da matriz  $[\tilde{\Phi}]$ .

As mesmas condições verificadas na Seção 7.2.1, no que diz respeito à força aplicada e à integração do sinal de aceleração, foram adotadas nesta simulação.

O número de modos utilizados,  $n$ , foi considerado sempre igual ao número de sensores utilizados ( $n = c$ ), o que permite estimar as coordenadas modais através da solução normal do método dos mínimos quadrados.

Os resultados apresentados nas Figuras 7.12 a 7.14 confirmam que a escolha das localizações das respostas incluídas na matriz modal, pode afetar significativamente o número de condicionamento da sub-matriz modal e a precisão das forças identificadas. Revelam também que há uma relação direta entre o número de condicionamento e a qualidade da identificação.

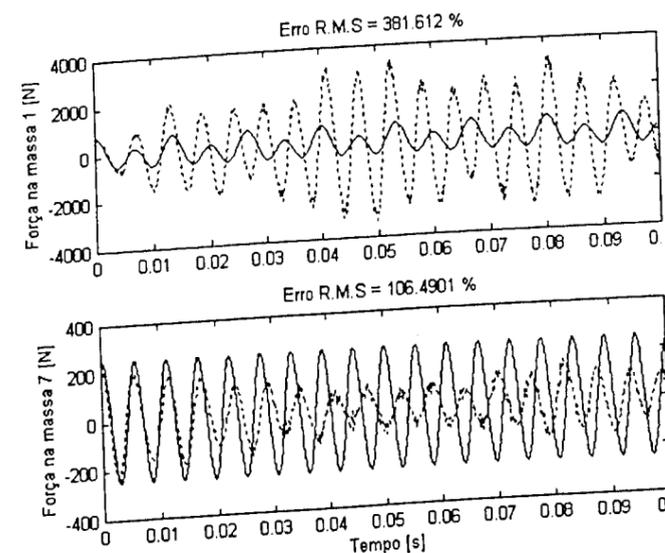


Figura 7.12 – Forças exatas e identificadas ( $c=n=7$ ). Sensores localizados nas massas 1, 2, 4, 6, 7, 8 e 11.  $Cond(\tilde{\Phi})=2,45 \times 10^{15}$ .

\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

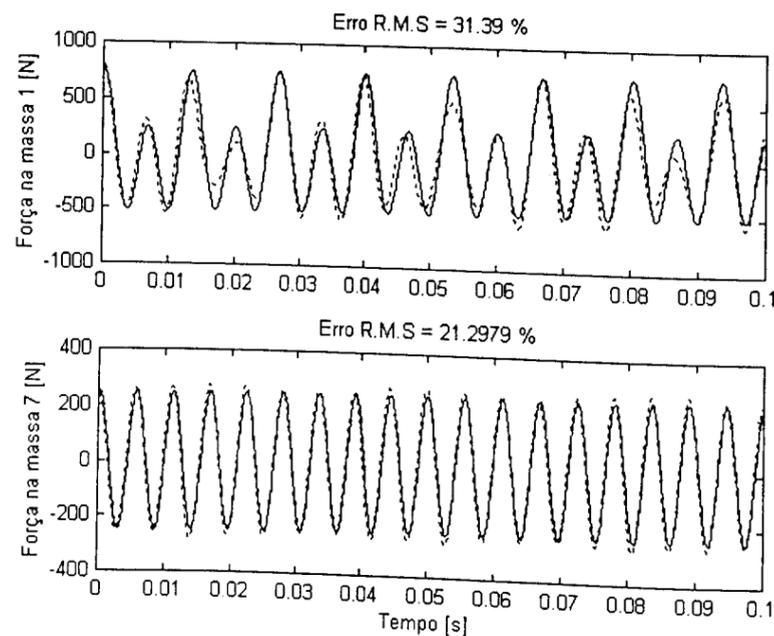


Figura 7.13 – Forças exatas e identificadas ( $c=7, n=7$ ). Sensores localizados nas massas 1,

3, 5, 7, 9, 10 e 11.  $\text{Cond}([\tilde{\Phi}])=2,58$ .

\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

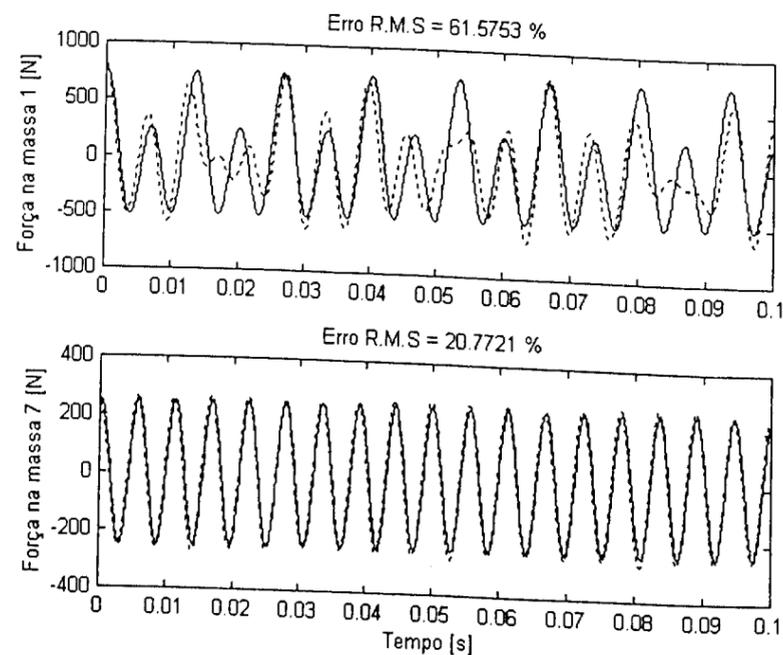


Figura 7.14 – Forças exatas e identificadas ( $c=7, n=7$ ). Sensores localizados nas massas 1,

4, 5, 7, 8, 9 e 10.  $\text{Cond}([\tilde{\Phi}])=8,43$ .

\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

As observações retiradas dos resultados obtidos conduzem naturalmente à questão da escolha ótima das coordenadas instrumentadas.

Para uma estrutura real envolvendo um grande número de graus de liberdade, a seleção de um sub-conjunto de coordenadas a serem instrumentadas para aquisição das respostas temporais pode se mostrar uma tarefa árdua. Com efeito, para escolher  $c$  localizações para os sensores de um conjunto de  $C$  posições candidatas, seria necessário avaliar

$$\binom{C}{c} = \frac{C!}{c!(C-c)!}$$

combinações na busca de uma sub-matriz modal ótima. Para o caso analisado, para 7 localizações de sensores escolhidas de um total de 11, 330 combinações devem ser avaliadas, o que é impraticável.

Rade (1994) propôs a utilização de um método fundamentado na minimização do número de condicionamento da matriz modal, para encontrar localizações sub-ótimas para os sensores. Admite-se que se disponha de uma estimativa da matriz modal,  $[\hat{\Phi}]$ , fornecida, por exemplo, por um modelo de elementos finitos, contendo  $C$  linhas correspondendo às posições candidatas e  $n$  colunas, estas últimas correspondendo aos modos a serem utilizados no procedimento de identificação de forças. O método busca selecionar um subconjunto de linhas de  $[\hat{\Phi}]$  para construir a sub-matriz modal  $[\tilde{\Phi}] \in \mathbb{R}^{c \times n}$ , de número de condicionamento o menor possível, de acordo com o seguinte procedimento:

- A primeira linha escolhida é arbitrária. Pode-se escolher, por exemplo, a linha de  $[\hat{\Phi}]$  que possui a maior norma euclidiana;
- Para a seleção da segunda linha, cada uma das  $(C-1)$  linhas não selecionadas da matriz  $[\hat{\Phi}]$  é combinada à primeira linha escolhida para formar  $(C-1)$  matrizes  $[\tilde{\Phi}] \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ . Avaliam-se os números de condicionamento de cada uma destas matrizes. A linha escolhida é aquela que corresponde ao menor número de condicionamento de  $[\tilde{\Phi}]$ ;

• O procedimento é iterado e cada linha escolhida é adicionada à matriz  $[\tilde{\Phi}]$  até que nenhuma redução sensível do número de condicionamento seja obtida pela adição de outras linhas.

Aplicando-se esta metodologia ao sistema de 11 g.d.l., mantendo-se os sete primeiros autovetores na base modal, foram selecionadas as seguintes localizações para os sete sensores: [7 3 10 11 9 1 5]. Os resultados de identificação obtidos com estas posições são aqueles apresentados na Figura 7.13. Nota-se que este conjunto de coordenadas produziu o menor número de condicionamento e a melhor qualidade de reconstrução de forças dentre as três combinações de posições sensores consideradas nas Figuras 7.12 a 7.14.

### 7.2.1.3 - Influência de ruído simulado

A robustez das estimações proporcionadas pelo método de identificação de forças fundamentado nas coordenadas modais é avaliada em relação a incertezas que, em situações práticas, estão presentes nos dados experimentais. Para tanto, ruídos são simulados com a inclusão de perturbações aleatórias nas acelerações e nas auto-soluções.

Para o ruído afetando as acelerações, é empregado um modelo de tal forma que, para cada sensor, o erro aleatório, em um determinado instante, é inversamente proporcional à amplitude da aceleração naquele instante. A Figura 7.15 ilustra este modelo, onde  $\hat{\ddot{x}}_i(t_j)$  é a aceleração contaminada pelo ruído no  $i$ -ésimo sensor, no instante  $t_j$ . Além disso,  $r_j$  é um número real aleatório, de distribuição uniforme, pertencente ao intervalo  $[-1 1]$ ,  $|\ddot{x}_i|_{\max}$  é a máxima amplitude da aceleração no intervalo de tempo considerado e  $e_{\max}$  e  $e_{\min}$  são, respectivamente, os valores máximo e mínimo dos erros aleatórios admitidos. Três testes foram realizados, considerando diferentes níveis para os erros aleatórios. A Tabela 7.3 fornece os valores máximo e mínimo dos erros aleatórios adotados para cada caso.

Tabela 7.3 – Valores para os erros

TESTE	$e_{\max}$ (%)	$e_{\min}$ (%)
1	2	0.5
2	5	1
3	10	2

Em relação aos erros referentes às características modais, estes foram introduzidos empregando fatores multiplicativos aleatórios de distribuição uniforme. Os valores adotados para os três testes foram: 15% para os autovalores, 13% para os autovetores e 12% para as massas generalizadas.

Repetindo o mesmo teste da Seção 7.2.1.2., com  $c = 7$ ,  $n = 7$  e com sensores localizados nas massas 1, 3, 5, 7, 9, 10 e 11, os resultados de identificação obtidos para os três testes são apresentados nas Figuras 7.16 a 7.18.

Confrontando as Figuras 7.16 a 7.18 com a Figura 7.13 (caso sem ruído), nota-se a esperada degradação da qualidade das forças identificadas, com o aumento do nível de ruído aleatório. Contudo, para baixos níveis de ruído não se observa uma severa amplificação do ruído, o que permite concluir que o método baseado nas coordenadas modais mostrou-se razoavelmente robusto a ruídos presentes nos dados experimentais.

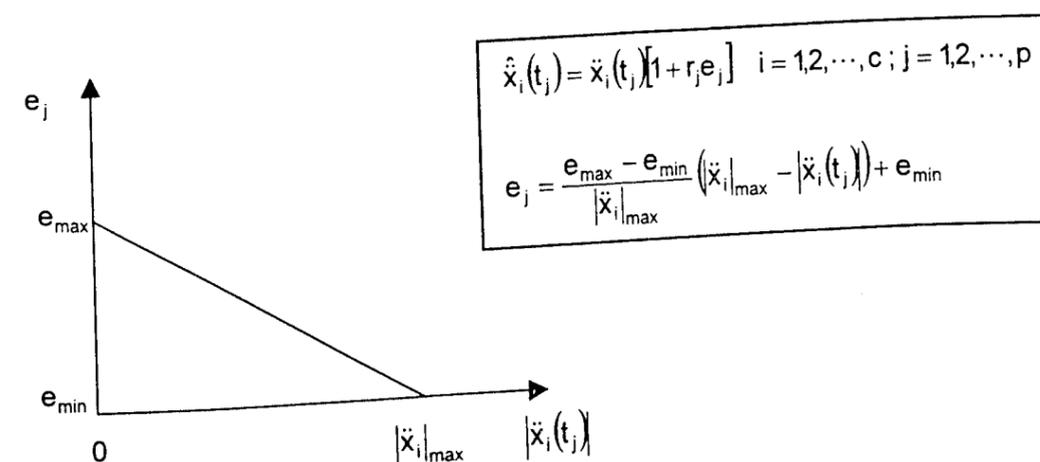


Figura 7.15 – Modelo do ruído aleatório presente nas acelerações.

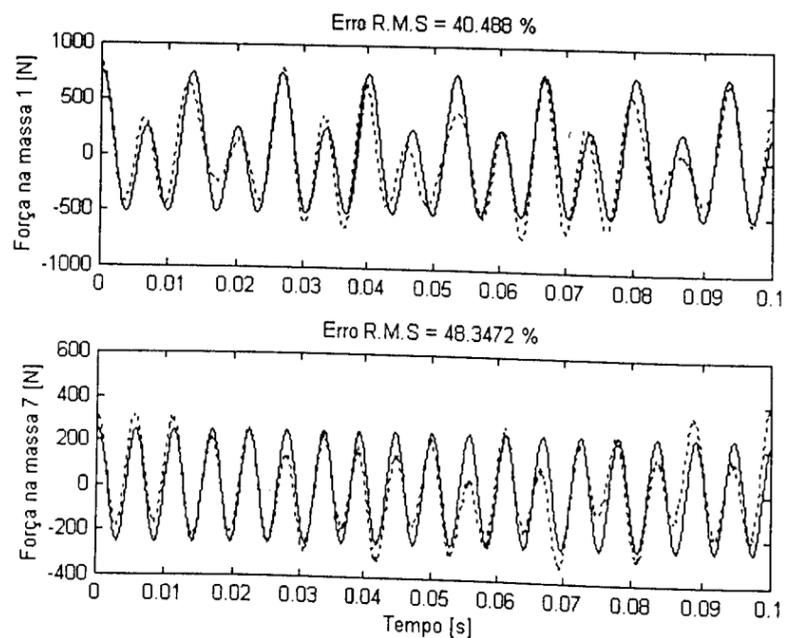


Figura 7.16 – Forças exatas e identificadas ( $c=n=7$ ).  $Cond(\tilde{\Phi})=2,68$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada. Teste 1

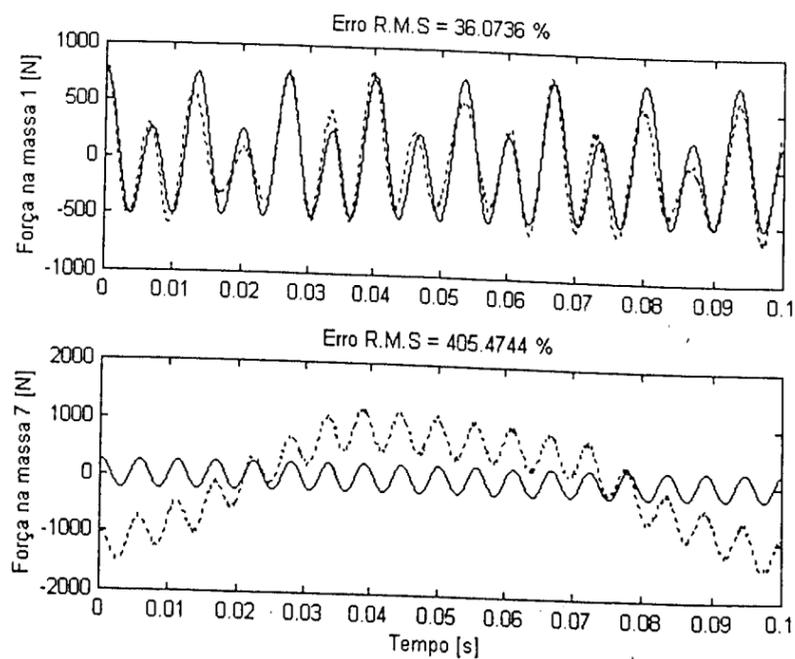


Figura 7.17 – Forças exatas e identificadas ( $c=n=7$ ).  $Cond(\tilde{\Phi})=2,80$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada. Teste 2.

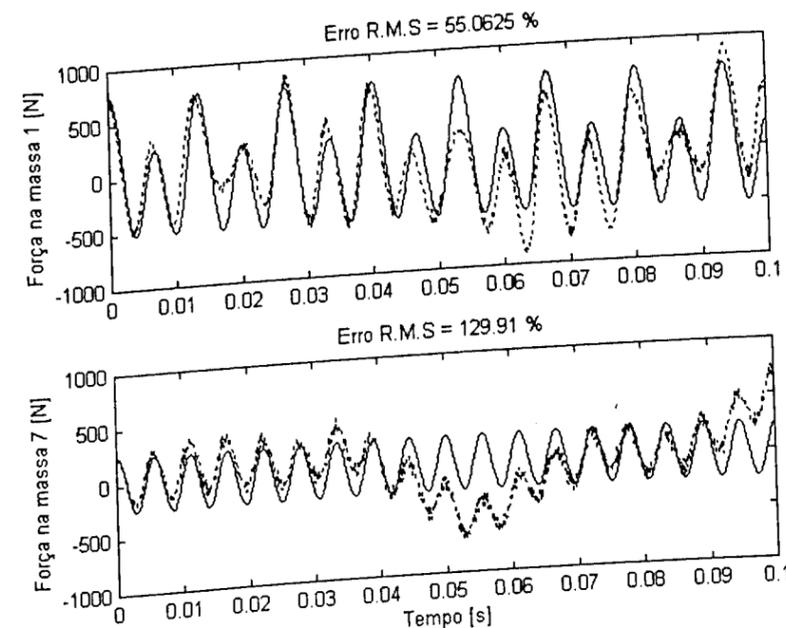


Figura 7.18 – Forças exatas e identificadas ( $c=n=7$ ).  $Cond(\tilde{\Phi})=2,85$ .  
 \_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada. Teste 3.

**7.2.1.4 – Influência das condições iniciais no processo de identificação de forças.**

Esta seção busca ilustrar o procedimento, proposto na Seção 4.3, para remoção das tendências geradas durante o processo de integração numérica das respostas em aceleração para obtenção das respostas em velocidade e deslocamento.

Considere-se uma força excitadora harmônica com frequência de 10 Hz, aplicada na massa 1 do sistema representado pela Figura 7.1, dada por  $f_1(t) = 800\sin(2\pi 10t)$ . Admite-se ainda que todas as massas tenham velocidade e deslocamento iniciais iguais a 5 m/s e  $1 \times 10^{-2}$  m respectivamente.

As respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 4 s, discretizadas em 1000 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 0,004$  s). Os sensores foram admitidos posicionados segundo as coordenadas 1, 3, 5, 7, 9, 10 e 11, e os 7 primeiros modos foram utilizados.

A Figura 7.19 ilustra as respostas temporais na massa 1 antes de se removerem as tendências provocadas pelo procedimento de integração da aceleração. Já na Figura 7.20, tem-se, após aplicação do procedimento proposto na Seção 4.3 do Capítulo IV, as respostas temporais para a massa 1 após a remoção das tendências geradas pelo processo de integração.

As Figuras 7.21 e 7.22 apresentam os resultados da identificação antes e após a aplicação da técnica de remoção das tendências, respectivamente.

Observa-se que a identificação da força utilizando as respostas temporais sem eliminação das tendências geradas pelas condições iniciais, Figura 7.21, conduz a resultados completamente errôneos. Por outro lado, o emprego do procedimento de remoção das tendências geradas pelas condições iniciais não nulas proporciona bons resultados de identificação (Figura 7.22), o que permite concluir sobre a conveniência de utilizar o procedimento sugerido.

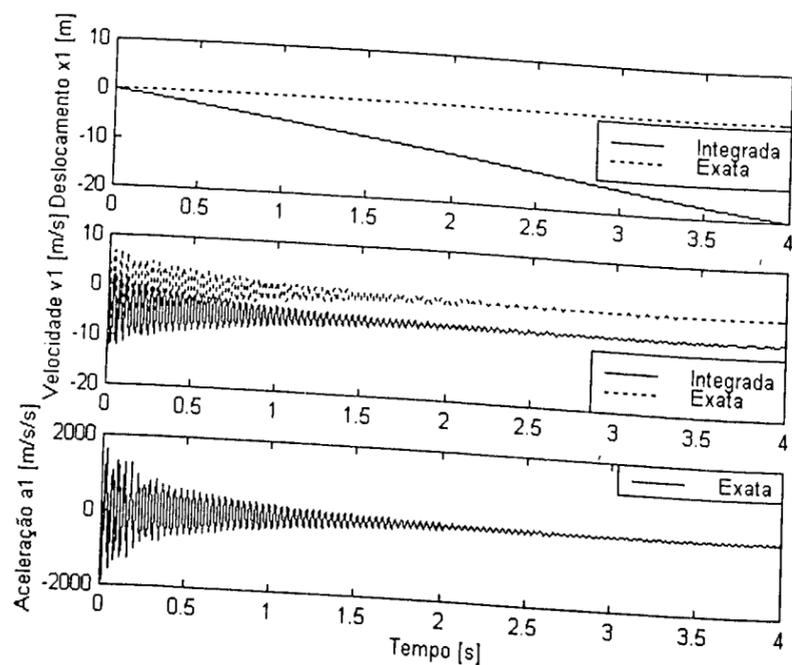


Figura 7.19 – Respostas temporais exatas e integradas para a massa 1, sem a remoção das tendências geradas pelas condições iniciais.

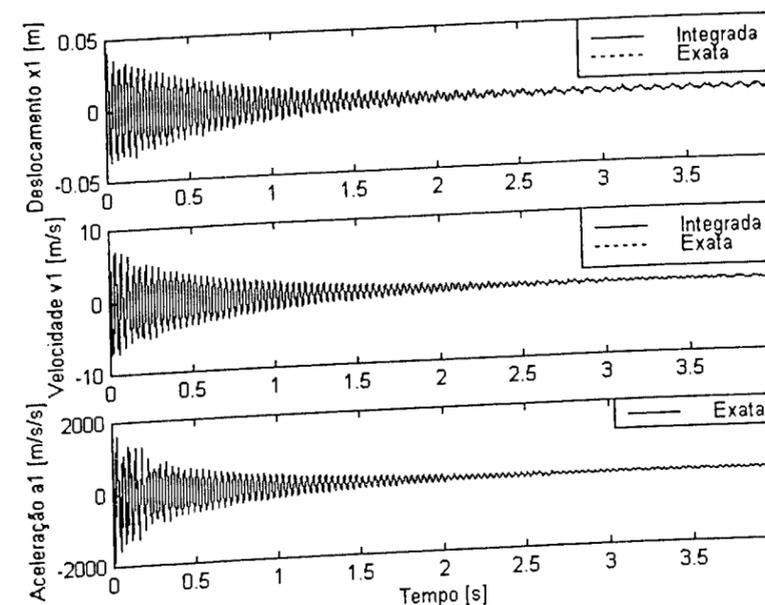


Figura 7.20 – Respostas temporais exata e integrada para a massa 1, após remoção das tendências geradas pelas condições iniciais.

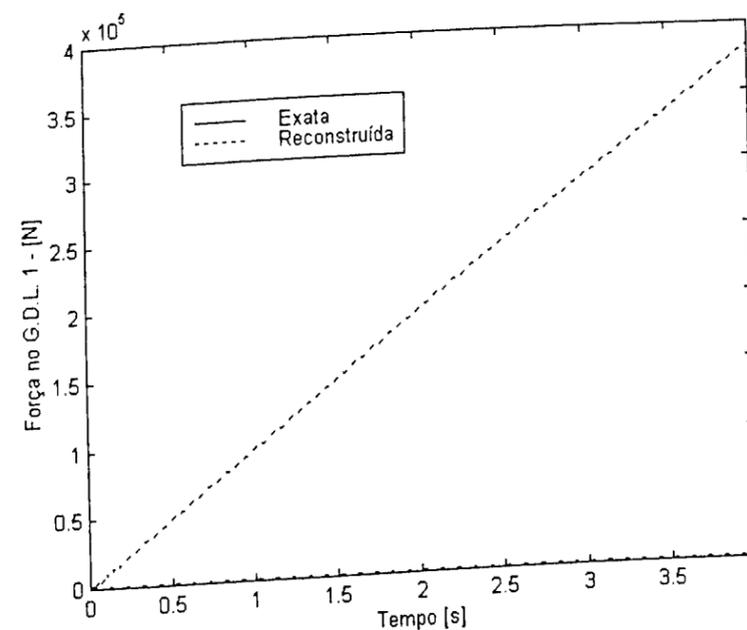


Figura 7.21 - Força exata e identificada ( $c=n=7$ ) a partir das respostas integradas, sem remoção das tendências.

\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

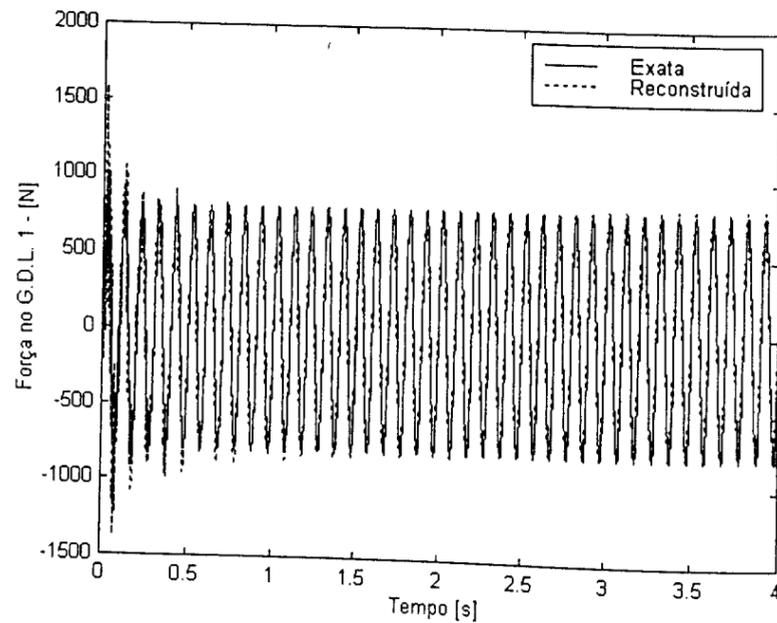


Figura 7.22 – Força exata e identificada a partir das respostas temporais integradas, com remoção das tendências ( $c=n=7$ ).

\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada

#### 7.2.1.5 – Análise do efeito de filtragem freqüencial.

O interesse desta seção é verificar se as forças identificadas sofrem algum efeito de filtragem freqüencial, determinada pela banda freqüencial dos modos usados no procedimento de identificação.

O teste idealizado visa identificar duas forças harmônicas, cujas freqüências situam-se fora da banda freqüencial dos modos utilizados na identificação. As forças foram aplicadas nas massas 1 e 7 e são dadas a seguir:

$$f_1 = 500 \cos(2\pi 450t) + 250 \cos(2\pi 375t) \quad (7.3)$$

$$f_7 = 250 \cos(2\pi 540t) \quad (7.4)$$

Procedeu-se, também, ao truncamento do número de modos na base modal ( $n=7$ ), e do número de sensores ( $c=7$ ). Foram instrumentadas as massas 1, 3, 5, 7, 9, 10 e 11. Desta forma, os sete modos utilizados na identificação da força abrangem uma faixa freqüência que varia de 27 a 172 Hz (ver Tabela 7.2). Percebe-se, portanto, que as freqüências das forças excitadoras encontram-se além deste intervalo. A Figura 7.23 permite comparar as forças identificadas e exatas no domínio do tempo, ao passo que as Figuras 7.24 e 7.25 permitem comparar os espectros de freqüência das forças identificadas e os correspondentes espectros das forças exatas. Observa-se que o método foi capaz de identificar todas as componentes harmônicas das forças com boa precisão, ainda que estas componentes estivessem fora da faixa dos modos utilizados. Este resultado revela não haver efeito de filtragem em freqüência no método das coordenadas modais.

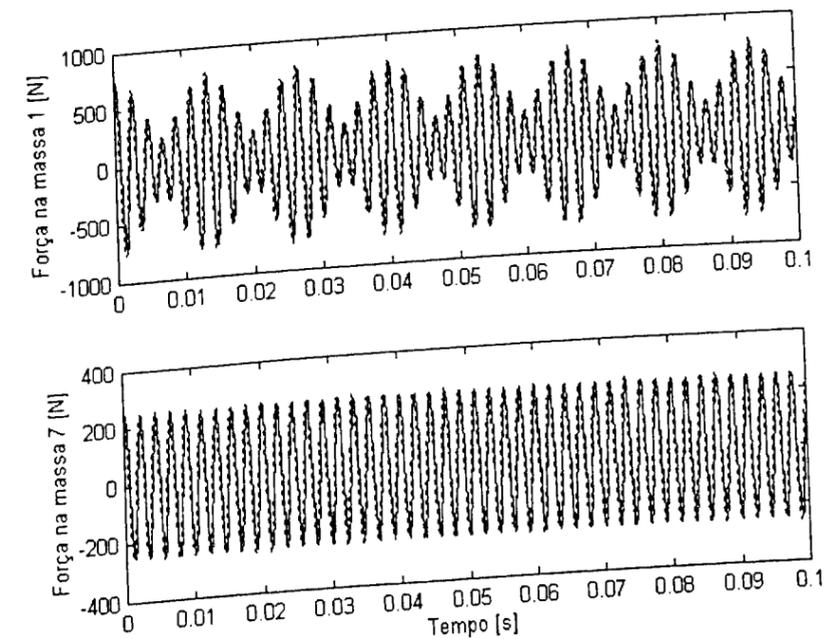


Figura 7.23 – Forças exatas e identificadas  
\_\_\_\_\_ : força exata; - - - - : força identificada.

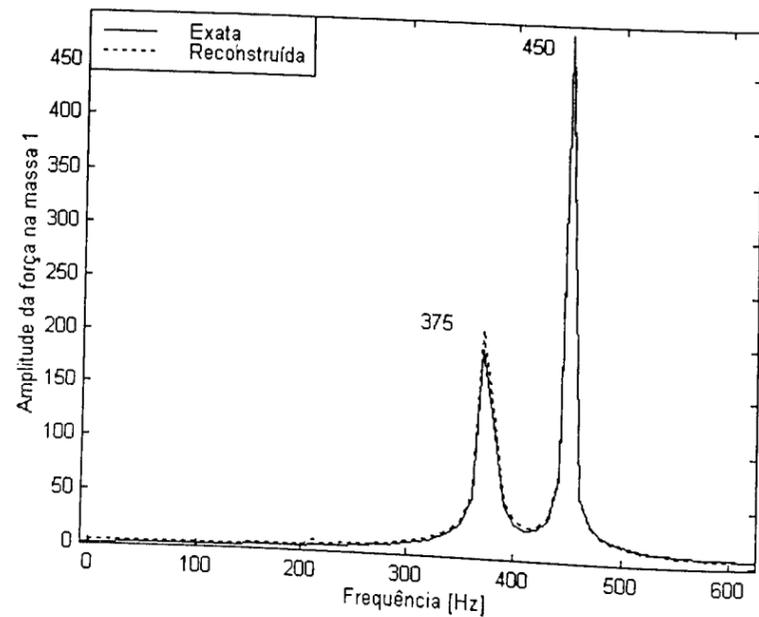


Figura 7.24 – Espectros de freqüência da força aplicada na massa 1.

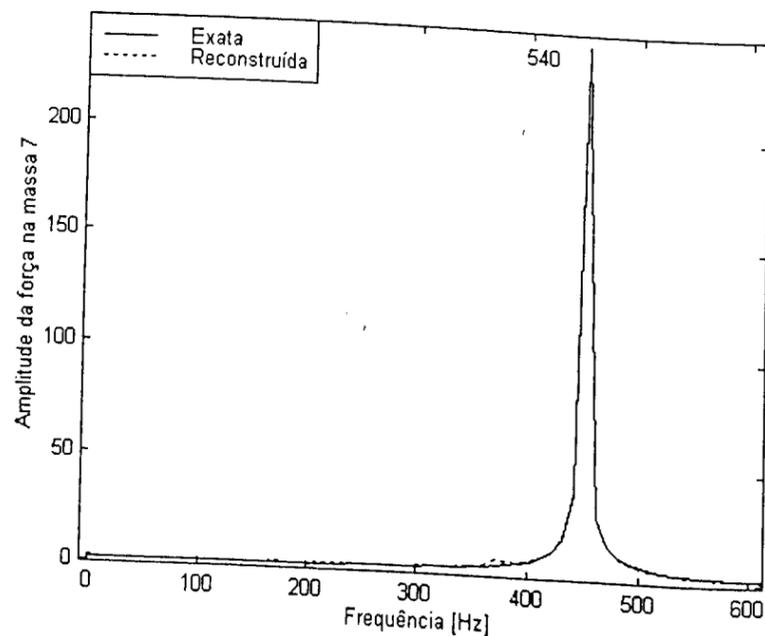


Figura 7.25 – Espectros de freqüência da força aplicada na massa 7.

### 7.3 – MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NA DECONVOLUÇÃO

Simulações numéricas foram realizadas com o intuito de apreciar o desempenho do método da deconvolução no domínio do tempo, estudado no Capítulo V.

Diversos fatores foram considerados nas simulações, tais como posições de forças excitadoras e sensores não coincidentes, presença de ruído experimental e regularização do sistema de equações de estimação. No tocante a este último aspecto, investiga-se o uso do método do Gradiente Conjugado para a resolução numérica do sistema de equações.

#### 7.3.1 – Identificação de uma força harmônica utilizando um procedimento recursivo.

Conforme destacado na Seção 5.1, a utilização do esquema recursivo dado pela equação (5.6) conduz a resultados insatisfatórios. Para ilustrar esta dificuldade, um teste numérico foi realizado utilizando o sistema de 1 g.d.l. ilustrado na Figura 7.26, submetido a uma força excitadora harmônica dada pela expressão:

$$f(t) = 800 \cos(15t)$$

As condições iniciais foram admitidas nulas. As respostas temporais foram observadas na janela de 0 a 1,5 s e discretizadas em 256 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 0,0059$  s). A Figura 7.27 mostra as respostas temporais do sistema e a Figura 7.28 ilustra as suas funções de resposta ao impulso em termos de deslocamento, velocidade e aceleração. Tais F.R.I. foram obtidas analiticamente.

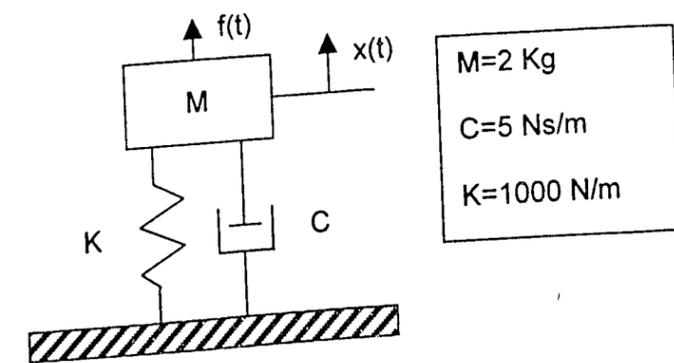


Figura 7.26 – Sistema teste de 1 g.d.l.

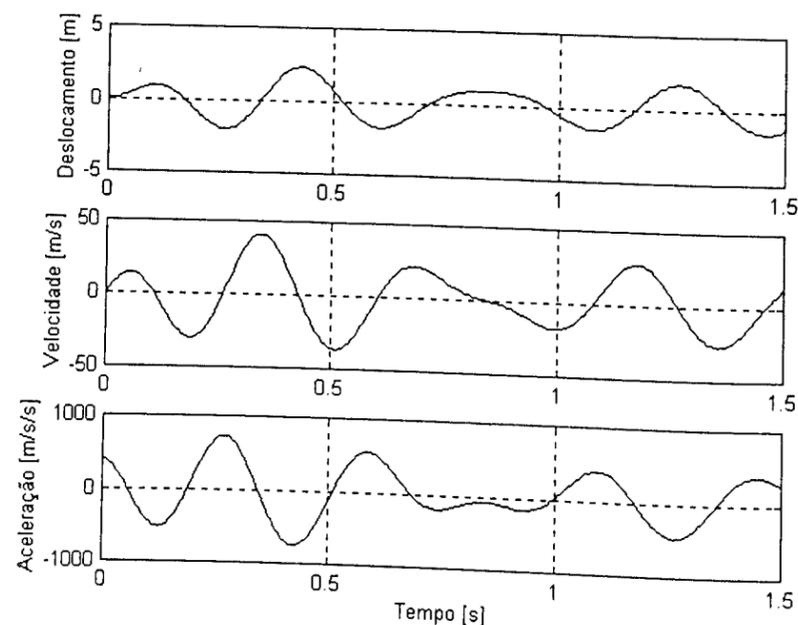


Figura 7.27 – Respostas temporais do sistema de 1 g.d.l. à excitação harmônica.

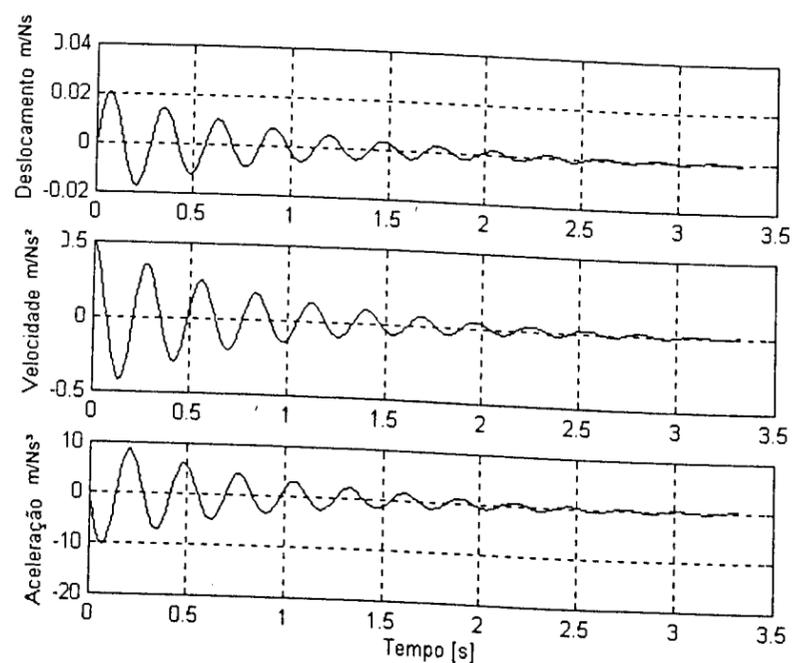


Figura 7.28 – F.R.I. do sistema de 1 g.d.l.

A partir da resposta temporal e da F.R.I. em aceleração, procedeu-se, inicialmente, ao teste do método de identificação recursivo sumarizado pelas equações (5.6). A força resultante da identificação é apresentada na Figura 7.29, confrontada com a força exata.

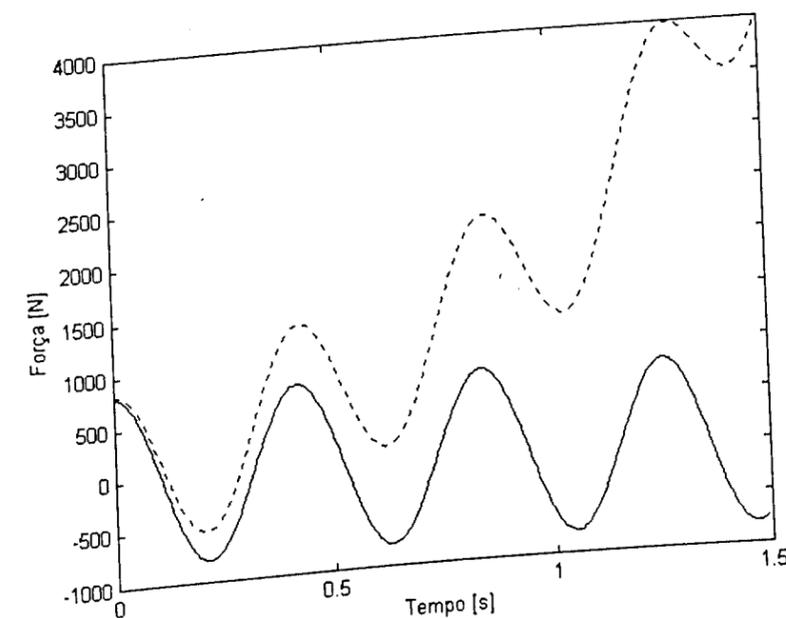


Figura 7.29 – Forças exata e identificada.  
 — : força exata; - - - : força identificada.

Observa-se a tendência de crescimento permanente da amplitude da força identificada, tipicamente devido ao mau condicionamento numérico do problema de deconvolução.

Os resultados mostram a necessidade de se empregar um outro método para a resolução do problema inverso, qual seja, aquele baseado na equação (5.7), associado a técnicas de regularização que objetivam a estabilização numérica do problema. Neste sentido, foi utilizado o método do Gradiente Conjugado, cuja formulação foi apresentada no Capítulo III.

O resultado da identificação empregando o método do Gradiente Conjugado é apresentado a seguir, observando-se que a força excitadora foi reconstruída com boa precisão.

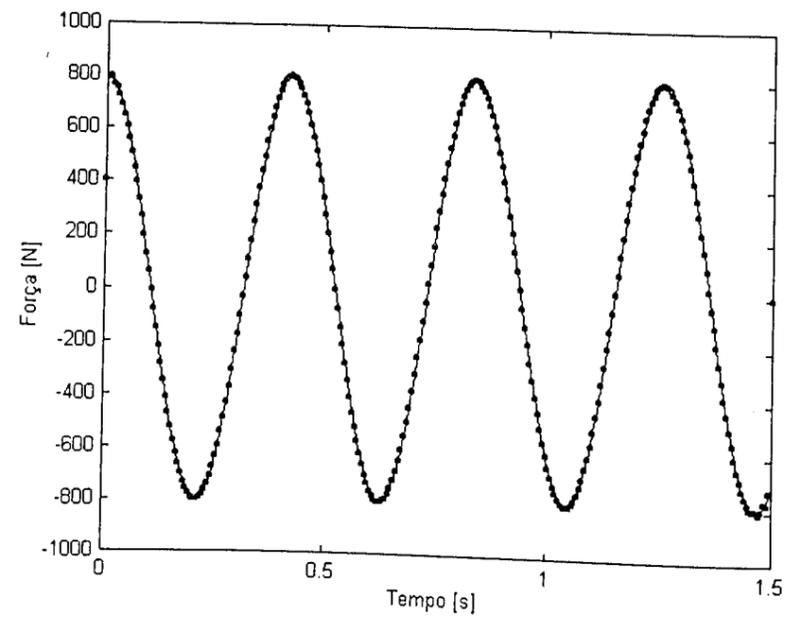


Figura 7.30 – Forças exata e identificada, utilizando o MGC.  
 \_\_\_\_\_: força exata; .....: força identificada.

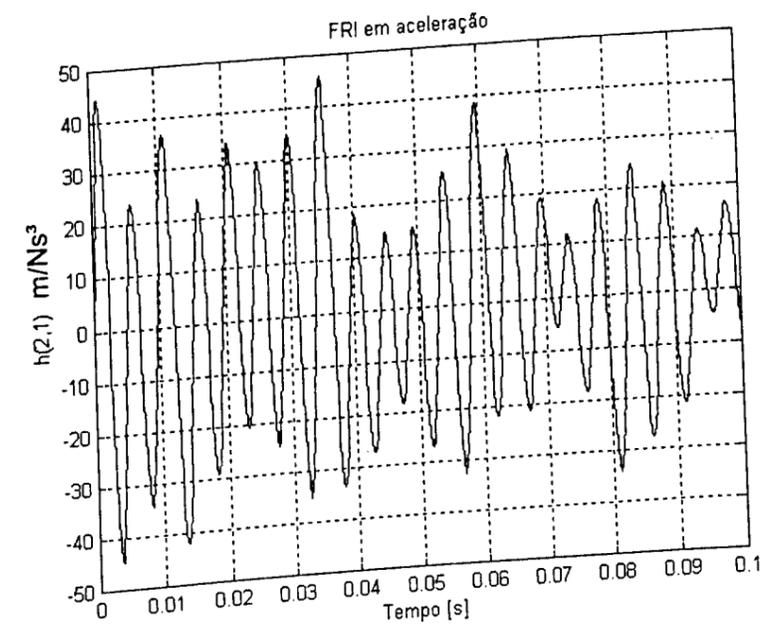


Figura 7.31 – F.R.I., em aceleração, do sistema de 11 g.d.l. Força no g.d.l. 1 e sensor no g.d.l. 2.

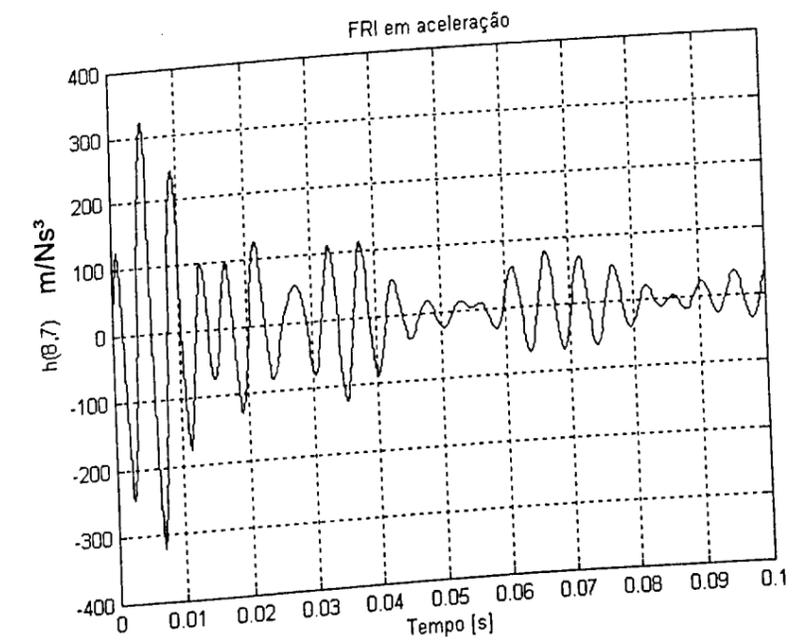


Figura 7.32 – F.R.I., em aceleração, do sistema de 11 g.d.l. Força no g.d.l. 7 e sensor no g.d.l. 8.

**7.3.2 – Identificação de duas forças com posições de excitação e respostas não coincidentes.**

O sistema de 11 g.d.l., mostrado na Figura 7.1, foi submetido a duas forças representadas pelas equações (7.1a) e (7.1b), aplicadas nas massas 1 e 7. As condições iniciais foram admitidas nulas e as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 0,1 s, discretizadas em 500 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 2,004 \times 10^{-4}$  s).

As Figuras 7.2 e 7.3 mostram as respostas temporais do sistema correspondentes às coordenadas 1 e 7 e as Figuras 7.31 e 7.32 ilustram algumas das funções de resposta ao impulso unitário em aceleração calculadas analiticamente.

Os testes de identificação das forças aplicadas nas massas 1 e 7 foram efetuados empregando as respostas em aceleração observadas nas coordenadas 2 e 8. Neste caso, as F.R.I.s que intervêm na formulação são apenas as F.R.I.s  $h_{2,1}(t)$  e  $h_{8,7}(t)$  mostradas nas Figuras 7.31 e 7.32. Os resultados da identificação empregando o método do Gradiente Conjugado são apresentados na Figura 7.33.

A Figura 7.34 fornece a evolução do resíduo do método do Gradiente Conjugado em função da evolução do número de iterações utilizadas para a estimação das forças, onde o critério utilizado para parar o processo iterativo consiste em avaliar a norma do vetor resíduo, que deve estar abaixo de um certo valor pré-determinado. Para este teste tem-se:  $\|R_n\| \leq 1,30$  com 127 iterações.

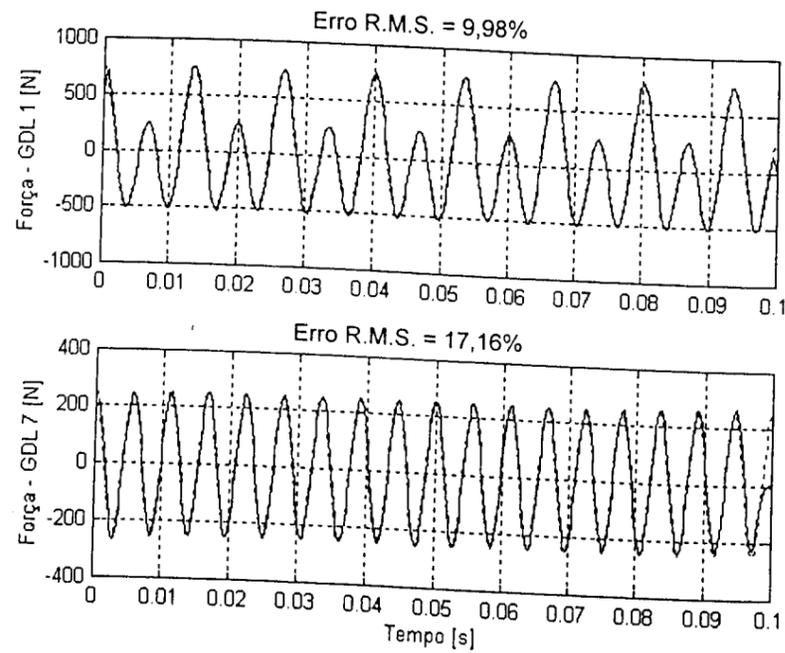


Figura 7.33 – Força exata e identificada(contínua).  
 \_\_\_\_\_ : força identificada; - - - - : força exata.

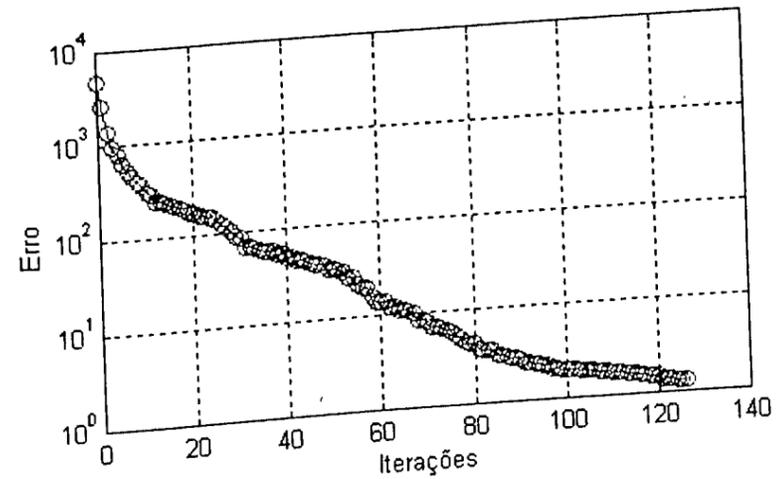


Figura 7.34 – Evolução do resíduo em função do número de iterações.

Da análise da Figura 7.33, conclui-se que o método da deconvolução no domínio do tempo associado ao método do Gradiente Conjugado foi capaz de proporcionar uma boa estimação para as forças excitadoras na situação em que estas forças são aplicadas em posições diferentes daquela em que são adquiridas as respostas.

### 7.3.3 - Identificação de duas forças harmônicas considerando ruídos simulados.

Testes numéricos foram realizados para avaliar a robustez do método baseado na deconvolução no domínio do tempo em relação a ruídos presentes nos dados experimentais (respostas em aceleração e F.R.I.s). Estes ruídos foram produzidos aplicando o modelo apresentado na Figura 7.15 tanto às respostas em aceleração quanto às F.R.I.s. Os limites utilizados para as amplitudes máxima e mínima dos ruídos foram aqueles correspondentes aos três testes considerados na Tabela 7.3.

Foram admitidas as mesmas condições estabelecidas para os testes da Seção anterior ou seja, as mesmas forças excitadoras e condições para obtenção das respostas temporais. As Figuras 7.35 a 7.37 fornecem os resultados finais da identificação para os três níveis de ruído considerados.

Como observado para o caso do método das coordenadas modais, as forças reconstruídas pelo método da deconvolução sofrem progressiva degradação com o aumento do nível de ruído. Observa-se, contudo, que mesmo para níveis de ruídos mais elevados, resultados aceitáveis puderam ser obtidos, o que implica que o método da deconvolução também mostra-se robusto em relação aos ruídos experimentais.

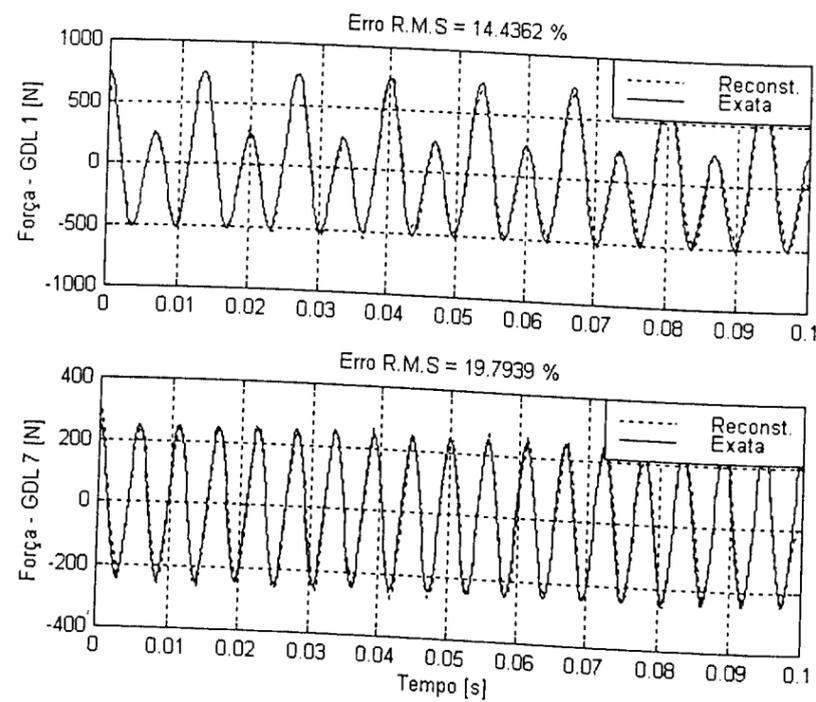


Figura 7.35 - Forças exatas e identificadas. Teste 1.

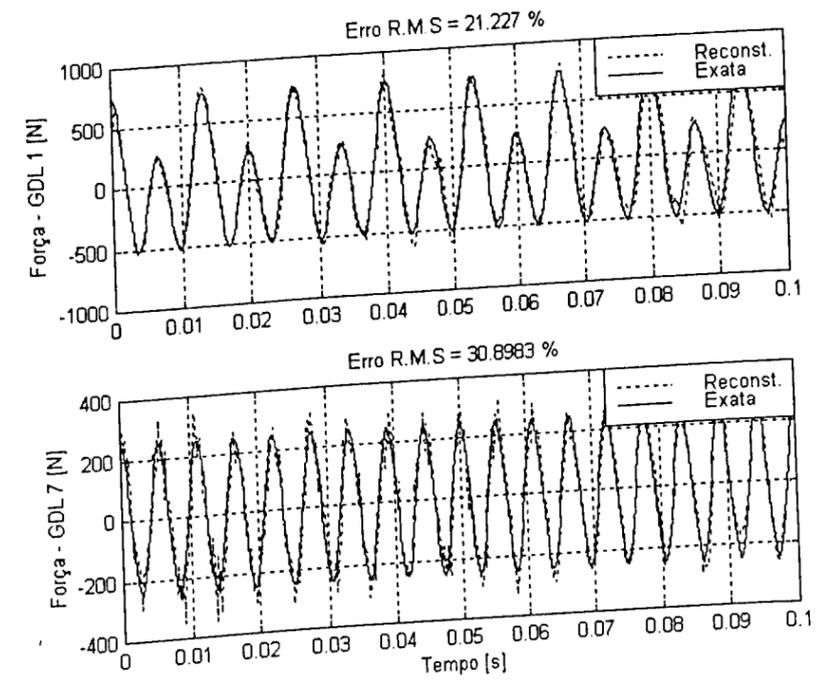


Figura 7.36 - Forças exatas e identificadas. Teste 2.

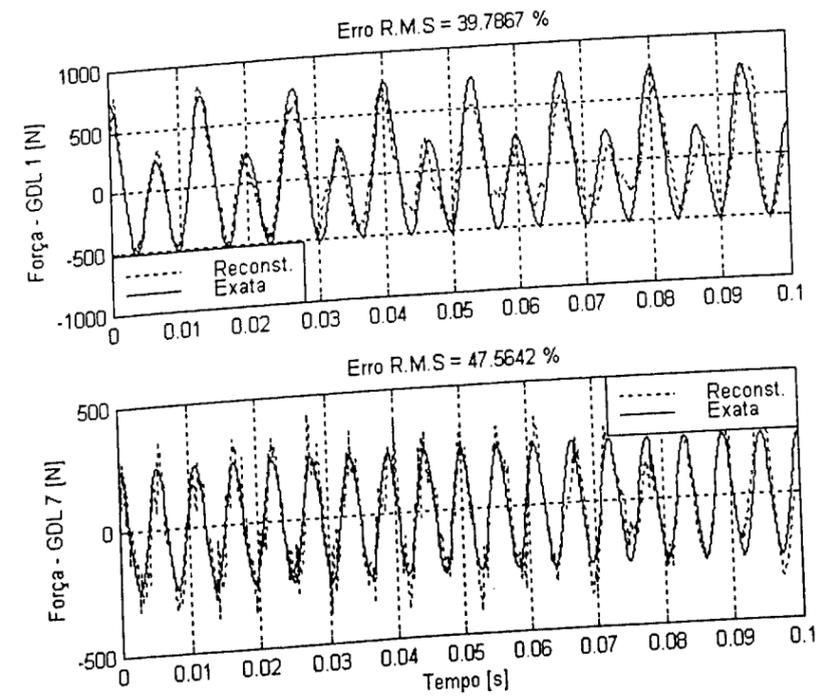


Figura 7.37 - Forças exatas e identificadas. Teste 3.

**7.3.4 – Redução do número de incógnitas utilizando séries truncadas de funções ortogonais.**

Como exemplo de aplicação da técnica de redução do número de incógnitas, sugerida na Seção 5.3, e sumarizada pela Equação (5.22), considerou-se uma força transitória, simulando uma excitação por impacto, mostrada na Figura 7.38, aplicada na massa 1.

Um único sensor foi admitido posicionado na massa 7. Foram utilizadas as mesmas condições verificadas na Seção 7.3.2 para a obtenção das respostas temporais e da F.R.I.  $h_{1,7}$  sem ruído experimental no intervalo de 0 a 0,1 s, discretizadas em 500 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 2,004 \times 10^{-4}$  s)

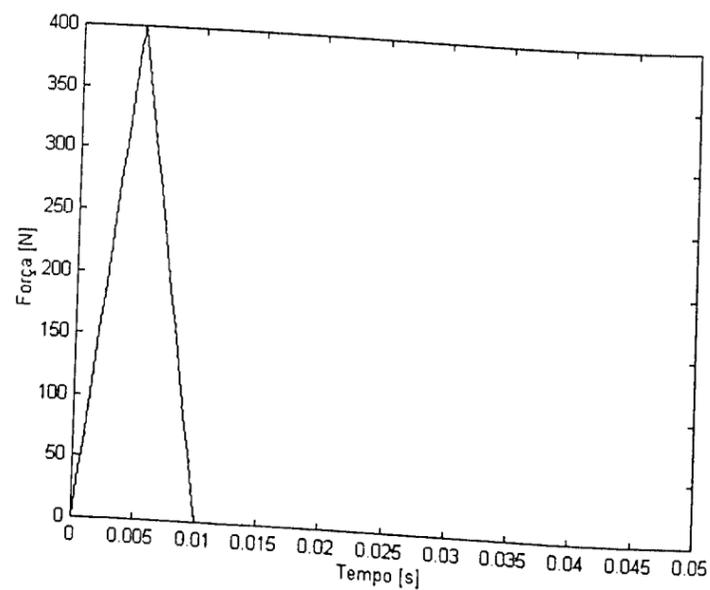


Figura 7.38 – Força transitória aplicada na massa 1.

As Figuras 7.39 a 7.41 fornecem os resultados obtidos em três testes: o primeiro sem empregar o procedimento de redução do número de incógnitas e os dois seguintes, com séries de Fourier contendo 250 termos e 100 termos. Para cada teste é indicado os tempos de processamento.

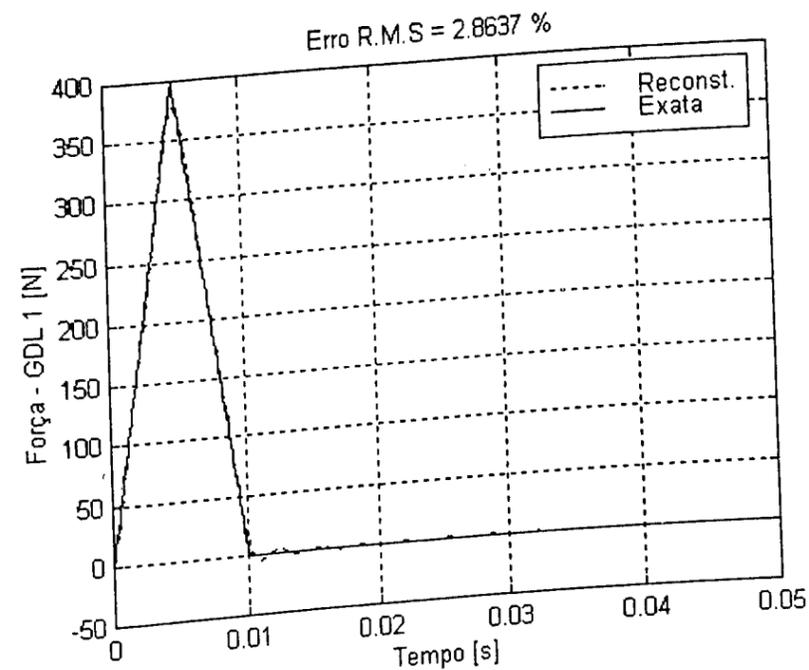


Figura 7.39 – Força exata e identificada, sem redução de incógnitas.  $t = 53,687$  s.

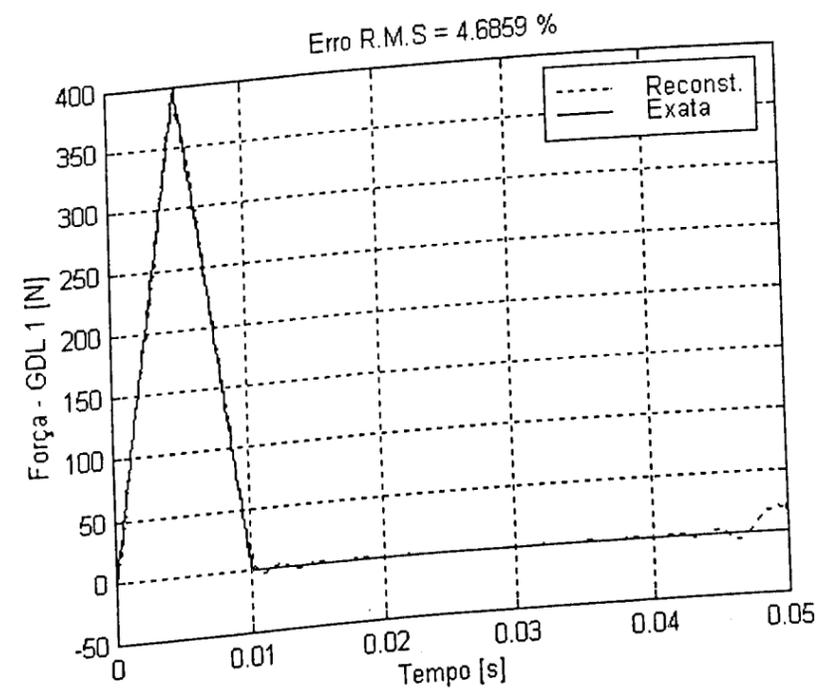


Figura 7.40 - Força exata e identificada com 250 termos.  $t = 40,759$  s

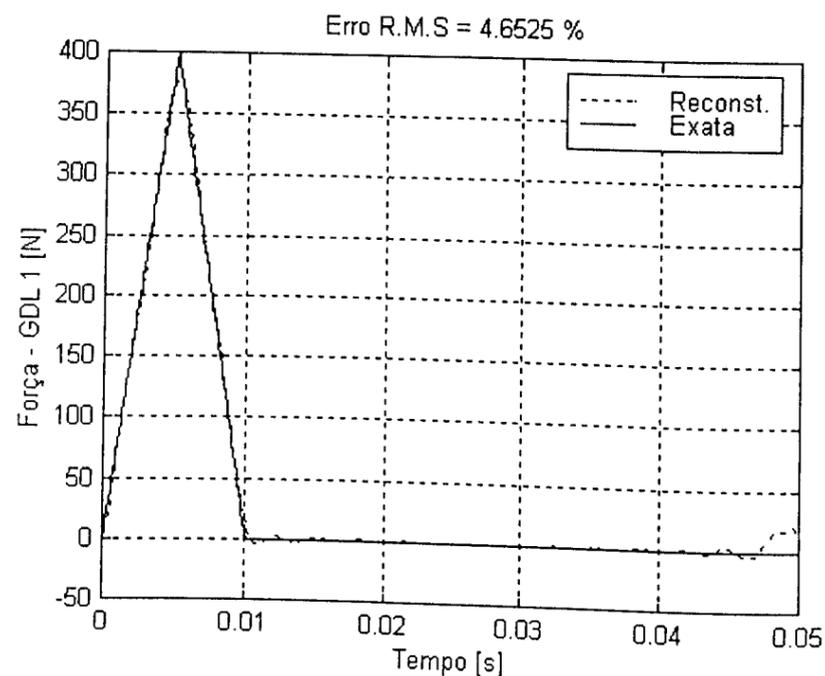


Figura 7.41 - Força exata e identificada com 100 termos.  $t = 26,348$  s

Os resultados obtidos levam a concluir sobre a conveniência de empregar séries truncadas de funções ortogonais para reduzir o número de incógnitas do problema de identificação. Mesmo com significativa redução do número de incógnita, o método foi capaz de reconstruir as forças excitadoras com boa precisão, assegurando, ao mesmo tempo, redução do tempo de processamento. Deve-se observar que, naturalmente, a precisão da reconstrução aumenta com o aumento do número de termos mantidos na expansão por funções ortogonais.

### 7.3.5 – Identificação com incertezas sobre o número de forças excitadoras.

Os testes numéricos descritos nesta Seção foram realizados com o objetivo de avaliar o desempenho do método da deconvolução em situação em que há incerteza quanto ao número de forças excitadoras atuando sobre o sistema. Dois casos são considerados. No primeiro deles, deseja-se reconstruir duas forças excitadoras quando há, efetivamente, três forças atuando no sistema.

Para simular esta situação, considere-se o sistema de 11 g.d.l., representado na Figura 7.1, submetido às seguintes forças aplicadas nas massas 1, 7 e 11 respectivamente.

$$f_1 = 500 \cos(2\pi 150t) + 250 \cos(2\pi 75t) \quad (7.5)$$

$$f_7 = 250 \cos(2\pi 180t) \quad (7.6)$$

$$f_{11} = 500 \cos(2\pi 200t) \quad (7.7)$$

As condições iniciais foram admitidas nulas e as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 0,05 s, discretizadas em 200 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 2,5126 \times 10^{-4}$  s), obtidas pela utilização do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Os testes de identificação das forças aplicadas nas massas 1 e 7 foram efetuados empregando as respostas em aceleração observadas nas coordenadas 3 e 5. Neste caso, as F.R.I.s que intervêm na formulação são apenas as F.R.I.s  $h_{3,1}(t)$ ,  $h_{3,7}(t)$ ,  $h_{5,1}(t)$  e  $h_{5,7}(t)$ . Os resultados da identificação obtidos empregando o método do Gradiente Conjugado para resolver o sistema de equações de estimação são apresentados na Figura 7.42.

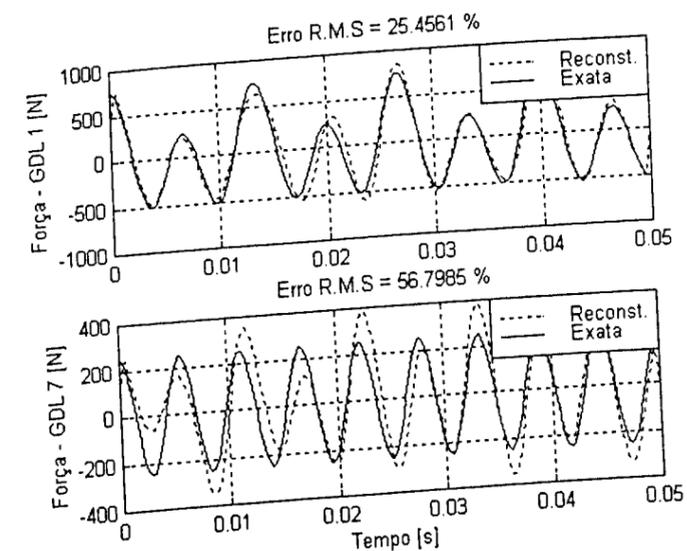


Figura 7.42 - Força exata e identificada.

Mesmo negligenciando a força aplicada na massa 11, o método da deconvolução foi capaz de proporcionar estimativas razoáveis para as demais forças atuantes nas massas 1

e 7. Nota-se, evidentemente, a tendência de que haja uma distribuição da influência da força negligenciada entre as duas outras.

O segundo teste consiste na tentativa de identificar três forças quando, de fato, há apenas duas atuando sobre o sistema. As respostas nas massas 3, 5, e 9, devidas as forças  $f_1$  e  $f_7$  foram calculadas e utilizadas subsequente para identificar três forças:  $f_1$ ,  $f_7$  e  $f_9$ . As demais condições deste teste são idênticas àquelas do teste anterior.

Os resultados da identificação são apresentados na Figura 7.43, podendo-se notar que o método proporcionou reconstruções precisas das forças efetivamente aplicadas, indicando ainda que não há força aplicada na massa 9.

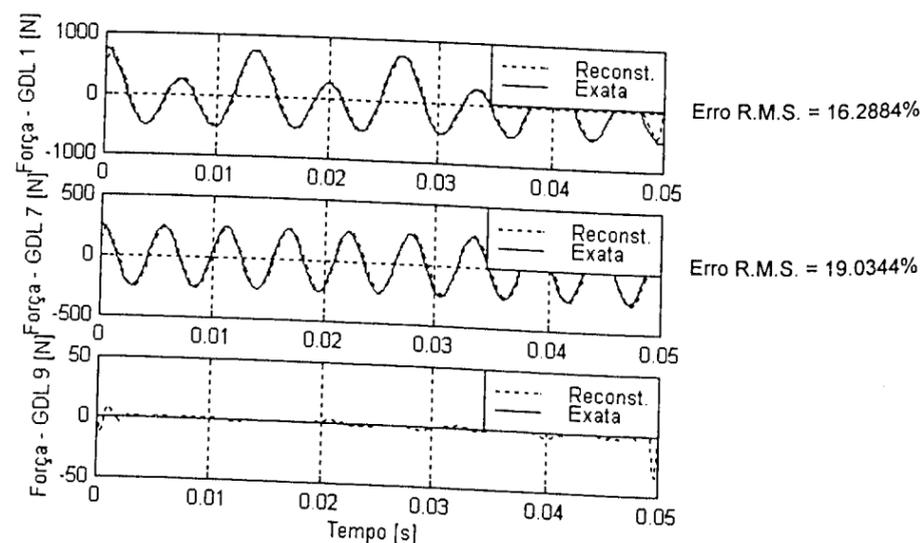


Figura 7.43 - Forças exatas e identificadas.

## 7.4 - MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS BASEADO NO MODELO ESTRUTURAL INVERSO.

São avaliadas, a seguir, as características operacionais, robustez e precisão do método de identificação de forças baseado no modelo estrutural inverso apresentado no Capítulo 6. Nestas simulações, busca-se avaliar os efeitos, sobre o desempenho do método, de fatores complicadores que estão presentes em situações reais de medidas em laboratório ou no campo, tais como ruídos e dados experimentais incompletos. Além disso é feita uma avaliação da sensibilidade das estimções de forças em relação a imprecisões no modelo.

### 7.4.1 - Identificação de duas forças harmônicas.

Para esta simulação foram aplicadas as duas forças periódicas dadas pelas equações (7.1a) e (7.1b) nas massas de números 1 e 7 do sistema ilustrado na Figura 7.1. As condições iniciais foram admitidas nulas e as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 0,1 s, discretizadas em 1000 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$  s). Os testes de identificação das forças aplicadas nas massas 1 e 7 foram efetuados utilizando as respostas em aceleração observadas nas massas 1 e 7 (posições de forças e sensores coincidentes).

As respostas em aceleração, livres de ruídos experimentais, foram obtidas através da integração numérica da Equação (6.1) pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem e da utilização da Equação (6.2). Foram admitidas conhecidas as matrizes de estado exatas do sistema teste.

Tanto o modelo de tempo contínuo como o modelo de tempo discreto foram utilizados para fins de identificação das forças. Para o modelo de tempo contínuo, o vetor das forças excitadoras foi obtido a partir da Equação (6.4), conhecendo-se as respostas em aceleração obtidas através da resolução da Equação (6.3) e do vetor de estado. De maneira análoga, o vetor das forças excitadoras, para o modelo de tempo discreto, é obtido a partir da equação diferença (6.8), conhecendo-se as respostas em aceleração obtidas através da resolução recursiva da equação diferença (6.7) e do vetor de estado. As Figuras 7.44 e 7.45 ilustram os resultados da identificação das forças empregando ambos os tipos de modelo. Nota-se

que o modelo contínuo proporcionou reconstruções mais precisas que o modelo discreto. Acredita-se que isto possa ser atribuído a erros oriundos do processo de geração do modelo discreto a partir do modelo contínuo, de acordo com a formulação apresentada na Seção 2.1.2.2.

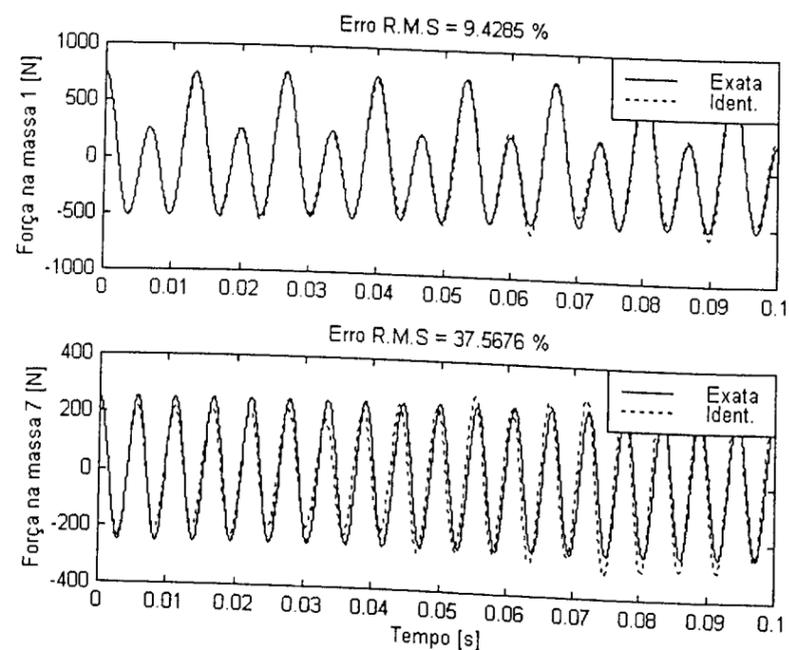


Figura 7.44 – Forças exatas e identificadas empregando o modelo de tempo contínuo.

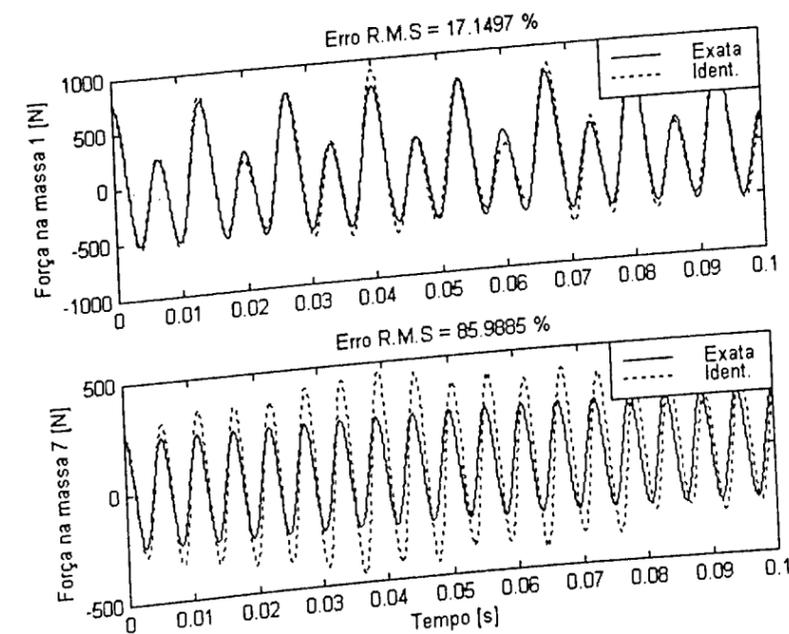


Figura 7.45 – Forças exatas e identificadas empregando o modelo de tempo discreto.

#### 7.4.2 - Identificação de forças considerando ruídos simulados.

De forma análoga ao que foi feito na avaliação dos métodos anteriores, foi também avaliado o desempenho do método quando os dados experimentais (respostas em aceleração) estão contaminadas por ruídos aleatórios. Estes ruídos foram produzidos aplicando o modelo apresentado na Figura 7.15 às respostas em aceleração. Os limites utilizados para as amplitudes máxima e mínima dos ruídos foram os mesmos estabelecidos para os três testes considerados na Tabela 7.3.

Repetindo o mesmo teste da seção anterior, nota-se que, ainda que as respostas em aceleração tenham sido contaminadas por ruído, o método foi capaz de proporcionar resultados satisfatórios para baixos níveis de ruído, observando-se, contudo uma contínua degradação da precisão das forças identificadas com o aumento do nível de ruído experimental.

As Figuras 7.46 a 7.51 fornecem os resultados da identificação, obtidos empregando os modelos em tempo contínuo e em tempo discreto.

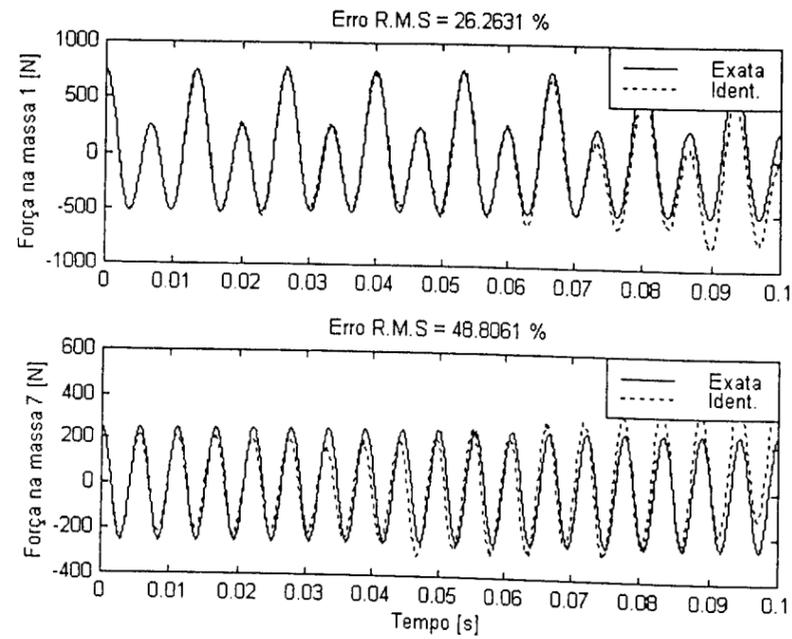


Figura 7.46 - Forças exatas e identificadas modelo de tempo contínuo. Teste 1.

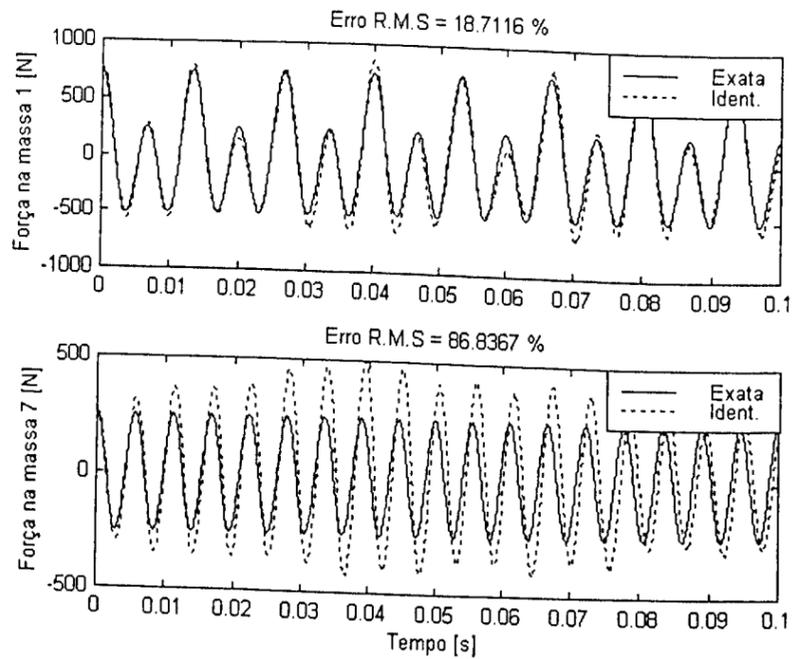


Figura 7.47 - Forças exatas e identificadas modelo de tempo discreto. Teste 1.

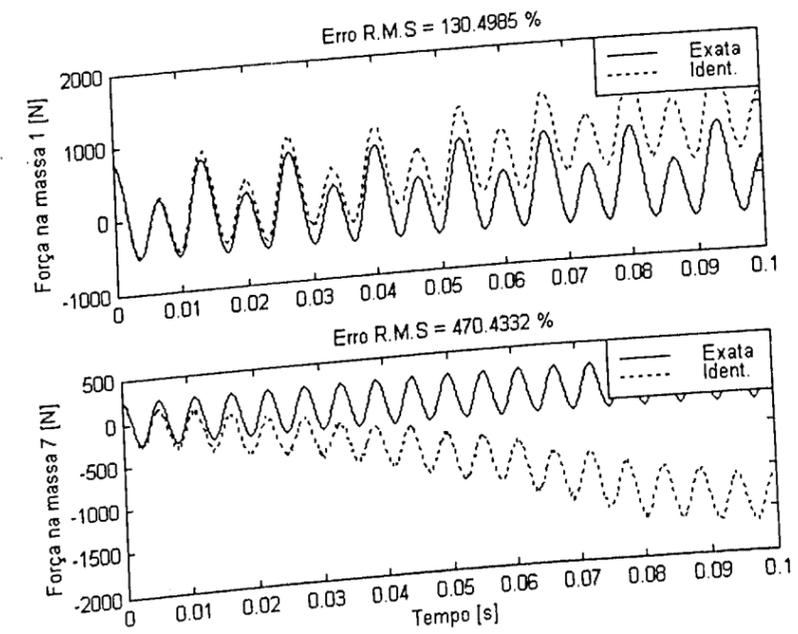


Figura 7.48 - Forças exatas e identificadas modelo de tempo contínuo. Teste 2.

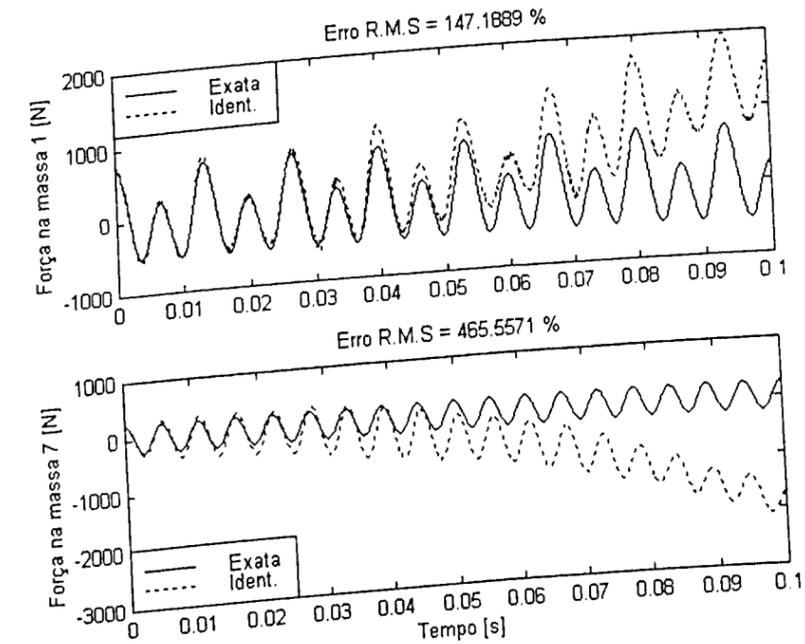


Figura 7.49 - Forças exatas e identificadas modelo de tempo discreto. Teste 2.

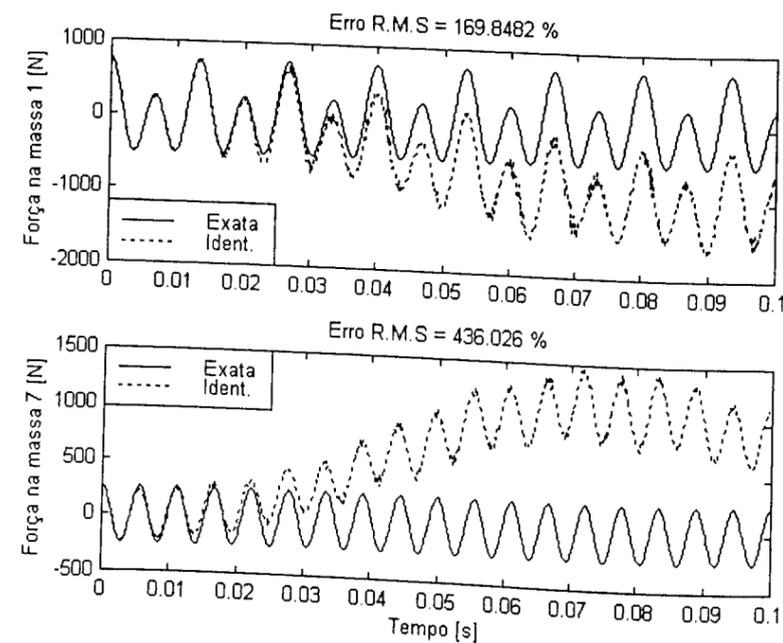


Figura 7.50 - Forças exatas e identificadas modelo de tempo contínuo. Teste 3.

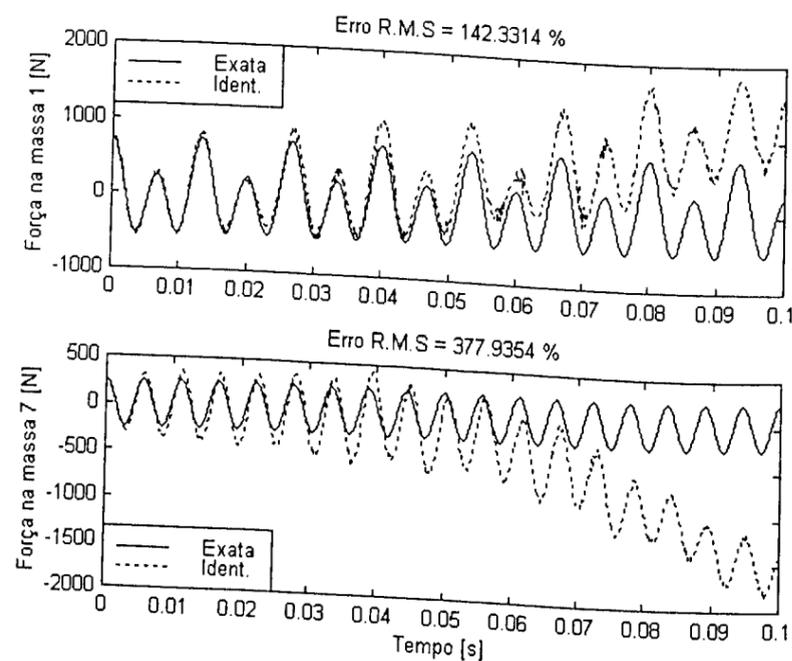


Figura 7.51 - Forças exatas e identificadas modelo de tempo discreto. Teste 3.

### 7.4.3 – Entrada e saída dispostas em diferentes localizações.

Foi visto no Capítulo VI que quando se tem sensores e forças dispostos em diferentes localizações, a matriz  $[D_{dis}]$  não é de posto máximo e desta forma a pseudo-inversa  $[D_{dis}]^{\dagger}$  não existe. Para contornar este problema, foi estudada uma metodologia que permite identificar as forças excitadoras em sistemas com posições de forças e sensores não coincidentes, mediante a introdução de avanços no tempo na equação de saídas, a partir do modelo de tempo discreto.

Para simular a situação de forças e sensores posicionados em diferentes localizações, consideraram-se as mesmas condições do teste descrito na Seção 7.4.1, no qual as forças, dadas pelas equações (7.1a) e (7.1b), foram aplicadas nas massas 1 e 7, respectivamente. Os sensores foram admitidos posicionados nas massas 8 e 11.

Condições iniciais nulas foram assumidas e as acelerações foram observadas no intervalo de 0 a 0,05 s, com  $\Delta t = 5,00 \times 10^{-5}$  s. As respostas em aceleração foram primeiramente obtidas através da integração numérica via Runge-Kutta de 4ª ordem da equação (6.1) e da utilização da equação (6.2), admitindo-se conhecidas as matrizes de estado exatas do sistema.

Onze avanços diferentes foram analisados na faixa de  $\ell = 0$  a  $\ell = 10$ . O resultado mais preciso foi obtido com avanço  $\ell = 3$ .

A título de ilustração, as Figuras 7.52 a 7.54 mostram as forças identificadas para três distintos valores de avanço nas respostas temporais ( $\ell = 2$ ,  $\ell = 3$  e  $\ell = 4$ ), onde nota-se que para valores abaixo e acima de  $\ell = 3$  há uma degradação dos resultados estimados.

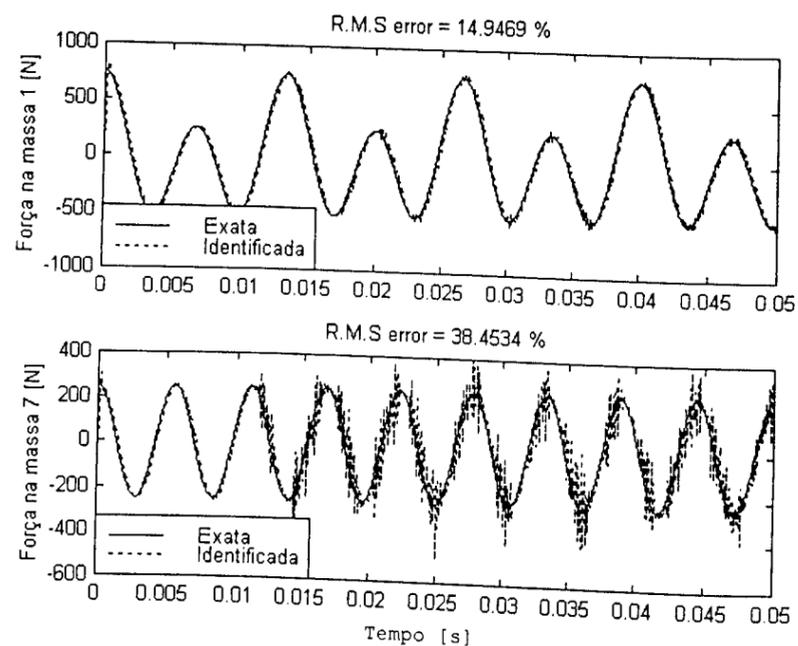


Figura 7.52- Forças exatas e identificadas com  $\ell=2$ .

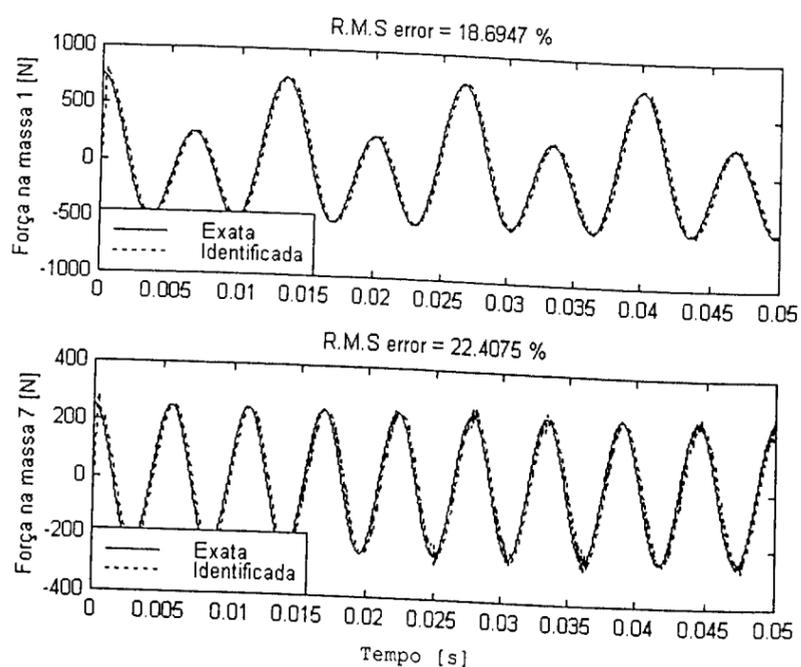


Figura 7.53- Forças exatas e identificadas com  $\ell=3$ .

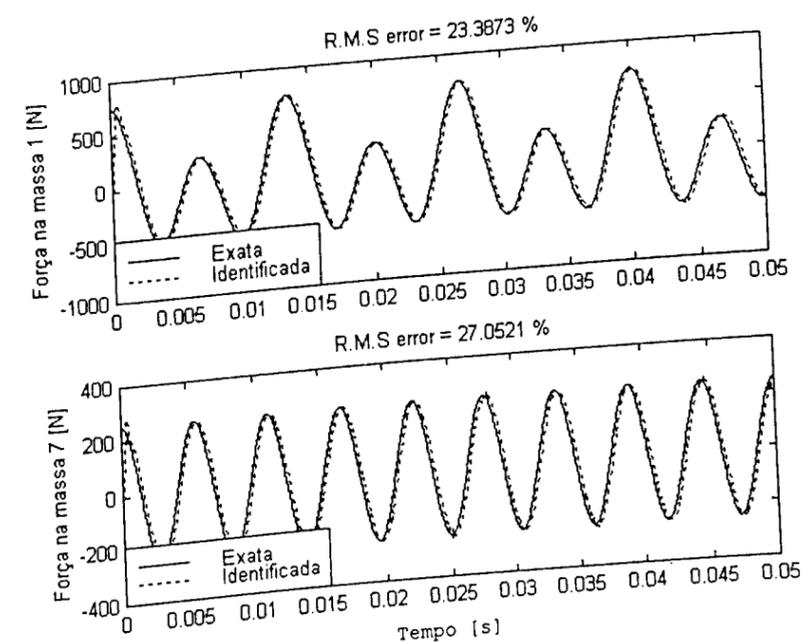


Figura 7.54- Forças exatas e identificadas com  $\ell=4$ .

#### 7.4.4 – Avaliação da sensibilidade do método de identificação a erros de modelagem.

É claro que o sucesso do procedimento de identificação de forças depende da precisão do modelo empregado, representado pelas matrizes de estado figurando na Equação (6.1).

Esta seção procura analisar os efeitos de incertezas introduzidas na distribuição de massa e de rigidez do modelo. Para tanto, considere-se o mesmo conjunto de forças dada pela equação (7.1), aplicadas nas massas 1 e 7 do sistema mostrado na Figura 7.1. Condições iniciais nulas foram assumidas e as acelerações foram observadas no intervalo de 0 a 0,05 s, com  $\Delta t = 5,00 \times 10^{-5}$  s. As respostas em aceleração foram primeiramente obtidas através da integração numérica via Runge-Kutta de 4ª ordem da equação (6.1) e a utilização da equação (6.2). Foi assumido que as repostas eram medidas nas massas de número 1 e 7. O vetor das forças excitadoras é obtido a partir da equação (6.4), conhecendo-se as repostas em aceleração e o vetor de estado.

Os erros de modelagem foram simulados mediante a introdução de perturbações aleatórias em alguns dos elementos (arbitrariamente escolhidos) das matrizes exatas de

massa e de rigidez do sistema. Estes erros foram introduzidos usando uma seqüência aleatória uniformemente distribuída, gerada no intervalo  $[1-\epsilon_{\max}; 1+\epsilon_{\max}]$ . Dois níveis diferentes de erro foram considerados, correspondendo a  $\epsilon_{\max} = 20\%$  e  $50\%$ . Estas perturbações podem ser avaliadas através da Tabela 7.4.

Para simular uma situação prática em que a matriz de amortecimento não é disponível, o modelo empregado para identificação das forças foi assumido ser não amortecido ( $[C]=0$ ), embora a resposta do sistema tenha sido simulada a partir do modelo completo amortecido.

Como pode ser visto nas Figuras 7.55 e 7.56, as forças estimadas tendem a ser menos precisas para o nível mais alto de erros de modelagens. Para níveis moderados de incertezas no modelo, as forças puderam ser reconstruídas com precisão razoável.

Tabela 7.4 - Valores e localizações das modificações introduzidas no modelo.

Elemento	Valor exato	Valor perturbado	Valor perturbado
Perturbado		( $\epsilon_{\max} = 20\%$ )	( $\epsilon_{\max} = 50\%$ )
M(1,1)	8 kg	9,38 kg	8,48 kg
M(5,5)	8 kg	7,02 kg	5,72 kg
M(9,9)	8 kg	7,01 kg	10,43 kg
K(1,3)	$1 \times 10^6$ N/m	$8,34 \times 10^5$ N/m	$1,03 \times 10^6$ N/m
K(2,5)	$1 \times 10^6$ N/m	$1,04 \times 10^6$ N/m	$6,27 \times 10^5$ N/m
K(4,5)	$1 \times 10^6$ N/m	$1,11 \times 10^6$ N/m	$1,09 \times 10^6$ N/m
K(6,9)	$1 \times 10^6$ N/m	$9,71 \times 10^5$ N/m	$9,92 \times 10^5$ N/m
K(8,9)	$1 \times 10^6$ N/m	$1,07 \times 10^6$ N/m	$1,16 \times 10^6$ N/m

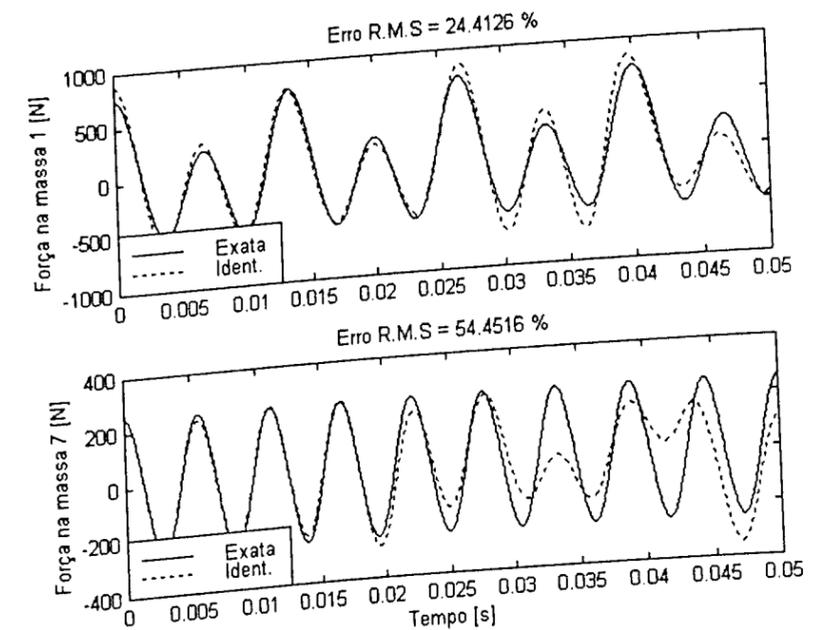


Figura 7.55- Forças exatas e identificadas, com erro máximo de 20% nos parâmetros físicos do modelo.

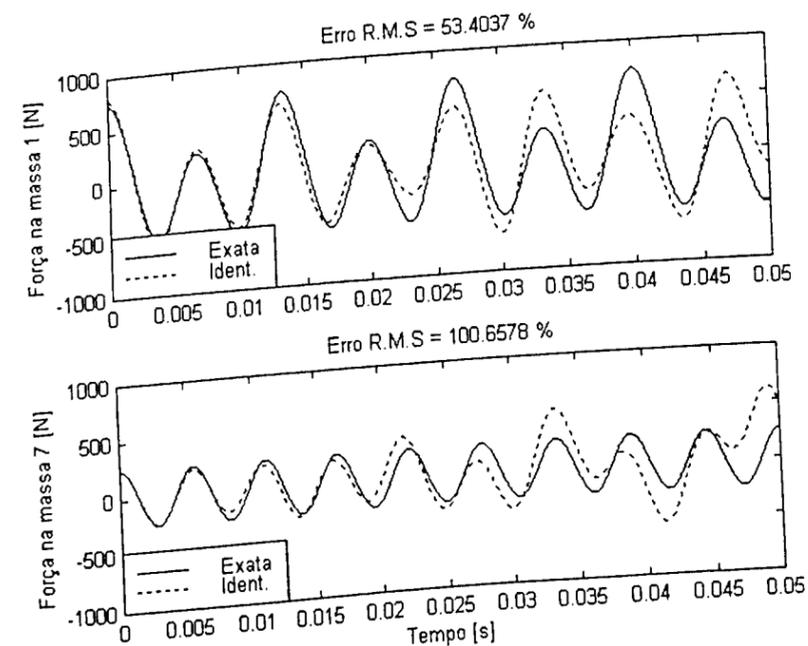


Figura 7.56- Forças exatas e identificadas, com erro máximo de 50% nos parâmetros físicos do modelo.

#### 7.4.5 – Identificação de forças com condições iniciais desconhecidas.

Até aqui, nos testes com o método baseado no modelo estrutural inverso admitiu-se a hipótese de que o sistema tenha partido de condições iniciais nulas e que a identificação de forças é realizada a partir do instante  $t = 0$ . Porém, tal hipótese não pode ser assegurada em muitas situações práticas. Pode-se, por exemplo, desejar reconstruir as forças excitadoras atuantes em uma máquina ou equipamento em funcionamento, a partir das respostas dinâmicas medidas a partir de um instante de tempo qualquer. Neste caso, as condições iniciais podem ser consideradas. Assim, o objetivo desta seção é avaliar a possibilidade de identificar as forças excitadoras quando os deslocamentos e velocidades no início do intervalo de aquisição são desconhecidos.

Considere-se uma força excitadora única aplicada na massa 1 do sistema representado na Figura 7.1, dada por  $f_1(t) = 800\sin(2\pi 30t)$ . Admite-se ainda que todas as massas tenham velocidade e deslocamento iniciais iguais a 5 m/s e  $1 \times 10^{-2}$  m respectivamente. A resposta em aceleração foi calculada no intervalo de 0 a 5 s, discretizada em 3000 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 0,0017$  s), a partir das equações (6.1) e (6.2), via integração numérica pelo Método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Foi assumido que a resposta em aceleração era medida somente na massa de número 1. As Figuras 7.57 e 7.58 mostram a resposta em aceleração para a massa 1.

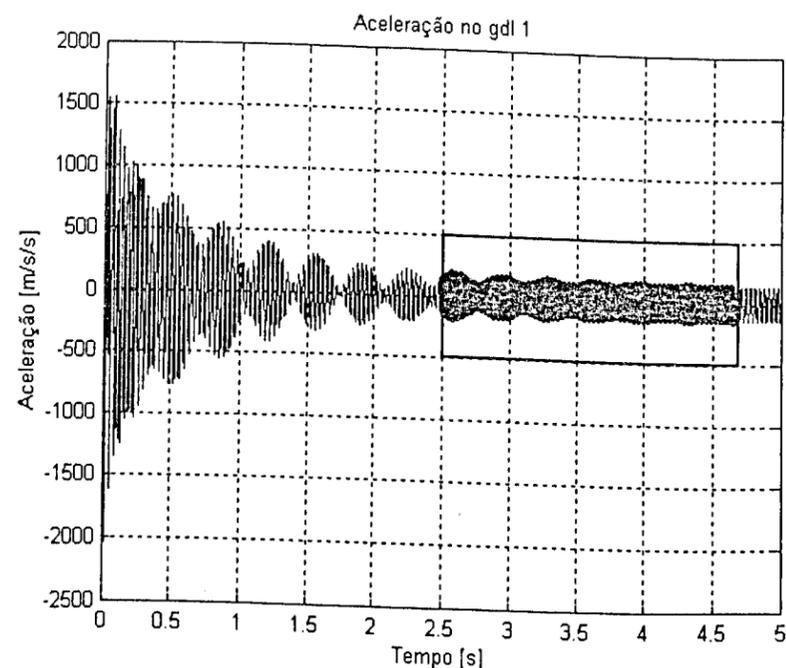


Figura 7.57 – Resposta em aceleração para a massa 1.

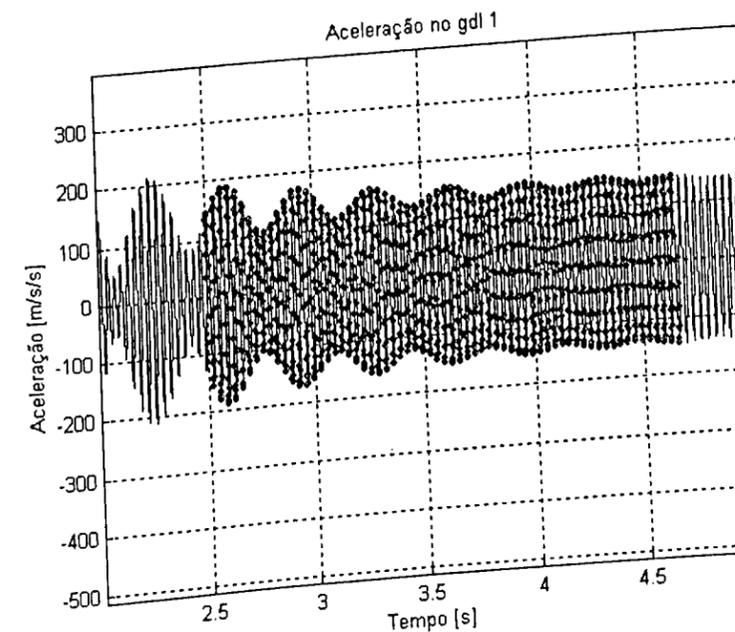


Figura 7.58 – Amplificação do trecho destacado na Figura 7.57.  
..... : Resposta utilizada para fins de identificação da força excitadora.

Para fins de identificação da força excitadora, foi utilizada a resposta em aceleração adquirida no intervalo de 2.5 a 4.67 s, compreendendo 1301 pontos. Na utilização recursiva do modelo estrutural inverso, representado pelas Equações (6.7) e (6.8), o vetor de estado no instante inicial foi admitido ser nulo.

As Figuras 7.59 e 7.60 fornecem os resultados de identificação obtidos, onde observa-se que, no início do intervalo, a estimação da força é imprecisa devido à desconsideração das condições iniciais no vetor de estado. Contudo, para instantes de tempo posteriores, a força identificada tende a convergir para a força exata.

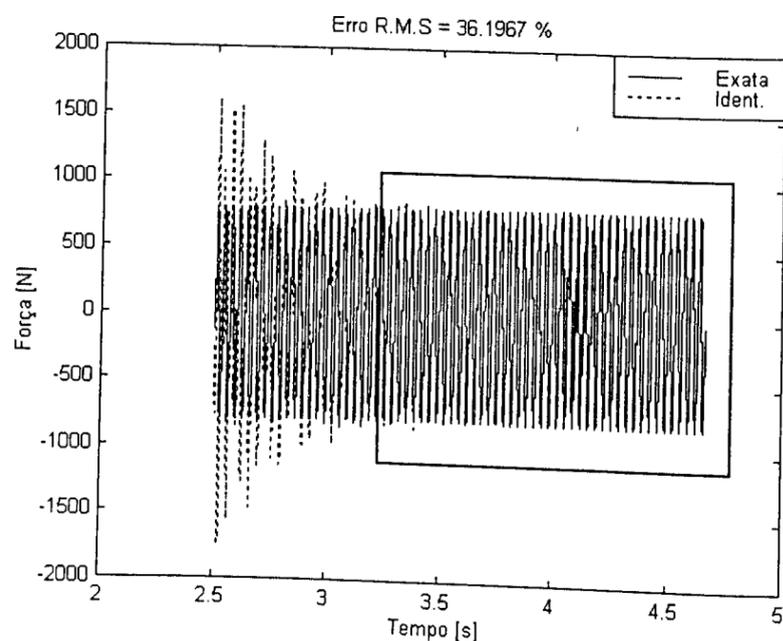


Figura 7.59 – Força exata e identificada.

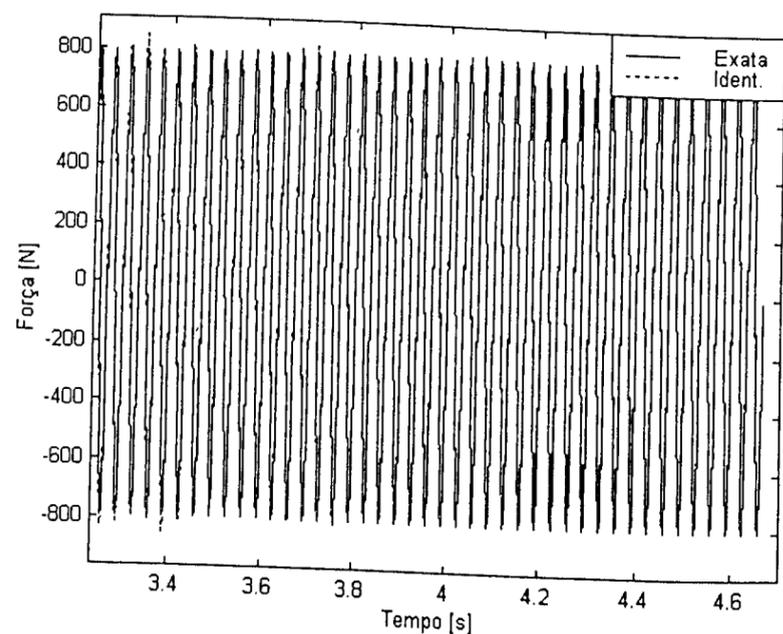


Figura 7.60 – Amplificação do trecho destacado na Figura 7.59.

#### 7.4.6 – Identificação utilizando o modelo inverso formulado no espaço modal.

Nesta seção é avaliado o método de identificação de forças explorando o modelo inverso formulado no espaço modal, desenvolvido na Seção 6.3. São apresentados testes de simulação numérica realizados com o objetivo de caracterizar o efeito do truncamento da base modal no tocante ao número de modos utilizados na matriz modal. Para tanto, é considerado o sistema representado na Figura 7.1, submetido a uma força excitadora aplicada na massa de número 7, dada por:

$$f_7(t) = 200 \cos(2\pi 360t) + 100 \sin(2\pi 450t) \quad (7.8)$$

As condições iniciais foram admitidas nulas e as acelerações foram observadas no intervalo de 0 a 0,05 s, discretizadas em 1000 pontos igualmente espaçados. As respostas em aceleração foram primeiramente obtidas através da integração numérica via método de Runge-Kutta de 4ª ordem da equação (6.1) e a utilização da equação (6.2).

Nos testes de identificação, o número de modos na base modal foi continuamente aumentado, de  $n=6$  a  $n=11$  primeiros modos, admitindo-se que a coordenada referente à massa 7 tenha sido instrumentada ( $c=1$ ) para aquisição das respostas em aceleração.

No modelo empregado para identificação da força foi assumido ser não amortecido ( $[C]=0$ ), embora a resposta do sistema tenha sido simulada a partir do modelo completo amortecido.

Os resultados de identificação são apresentados nas Figuras 7.61 a 7.64. Observa-se que a precisão da força identificada aumenta continuamente à medida em que se aumenta o número de modos na base modal. A partir de  $n = 9$  não se observa mais nenhuma diferença significativa no processo de identificação.

Os resultados obtidos permitem concluir que a utilização do modelo inverso formulado no espaço modal constitui uma estratégia válida para obter um modelo condensado, de dimensão reduzida, havendo, entretanto, que se estabelecer um compromisso entre a dimensão do modelo e a precisão da identificação que ele pode proporcionar.

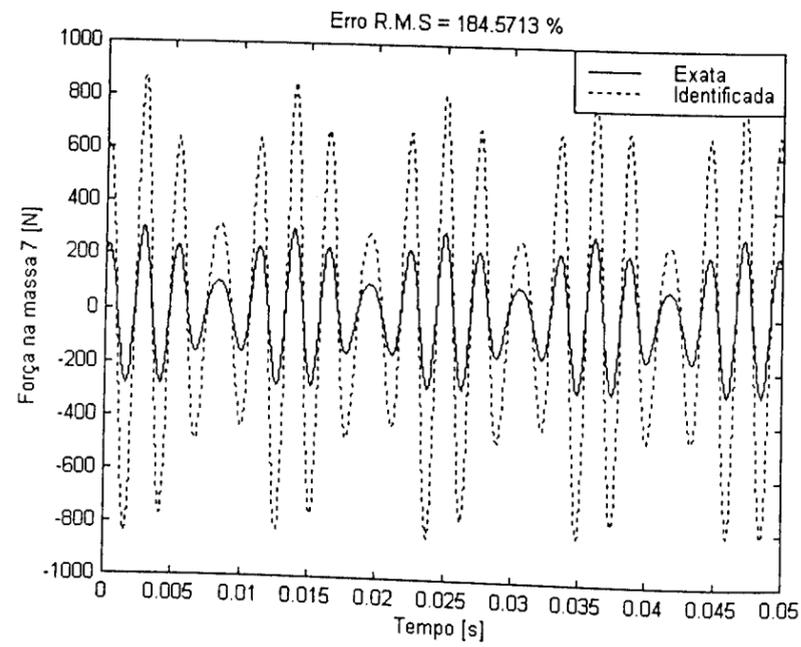


Figura 7.61 – Forças exata e identificada. (c=1, n=6)

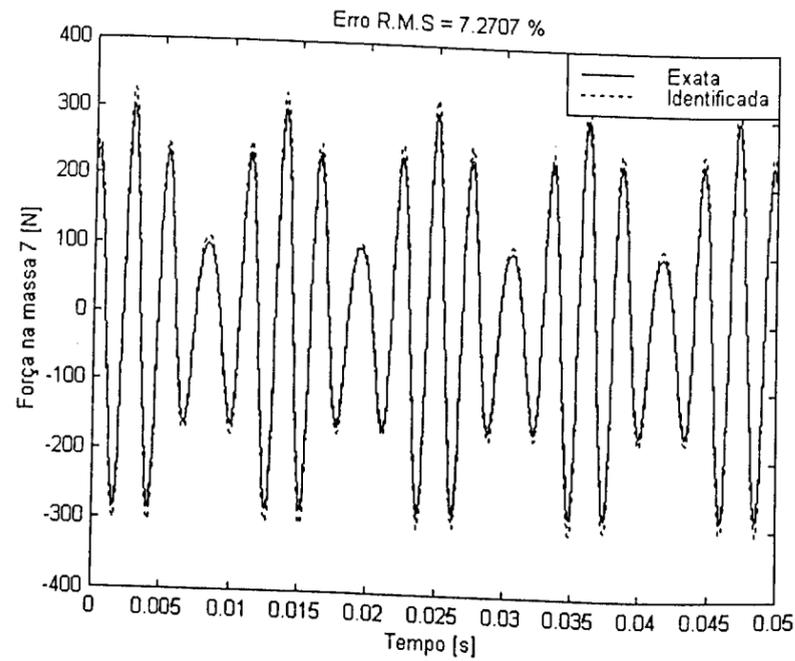


Figura 7.62 – Forças exata e identificada. (c=1, n=7)

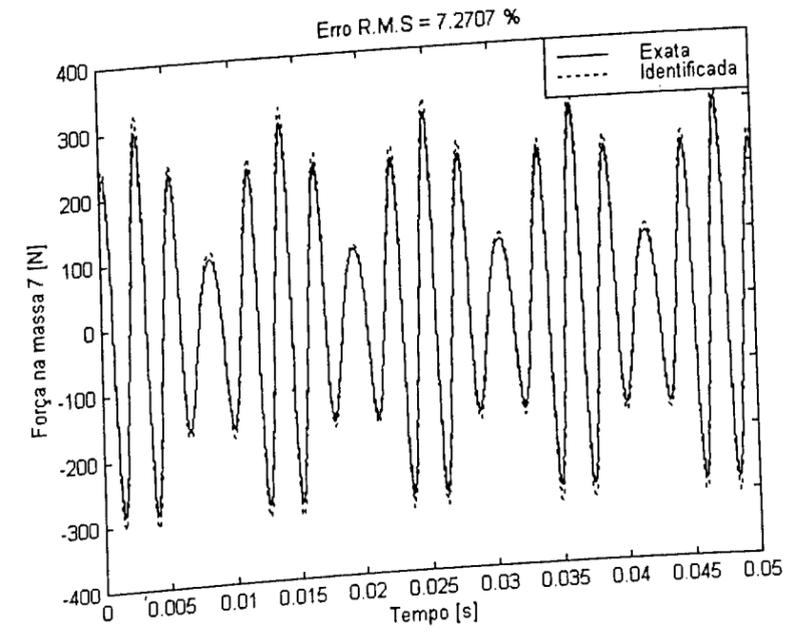


Figura 7.63 – Forças exata e identificada. (c=1, n=8)

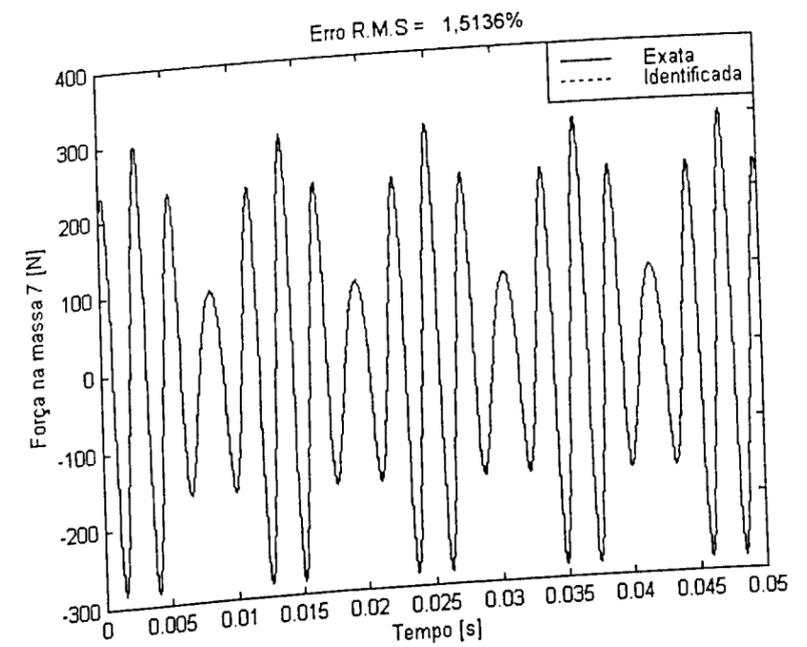


Figura 7.64 – Forças exata e identificada. (c=1, n=9)

## 7.5 – IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE ELEMENTOS DE SUPORTE.

Nesta seção ilustra-se, através de exemplos de simulação numérica, o emprego dos métodos de identificação de forças (Coordenadas Modais e Deconvolução) como uma das etapas de um procedimento de identificação de parâmetros concentrados (inércia, rigidez e amortecimento) de elementos de suporte de estruturas flexíveis, conforme procedimentos detalhados nas Seções 4.4 e 5.4.

### 7.5.1- Método das Coordenadas Modais aplicado à identificação de parâmetros de elementos de suporte lineares.

Como proposto na Seção 4.4, o método das coordenadas modais é empregado para identificação das forças introduzidas pelos suportes. O princípio de operação do método se resume em 4 etapas:

- 1ª etapa: Integração sucessiva da resposta temporal em aceleração para obtenção das respostas em velocidade e em deslocamento.
- 2ª etapa: Estimação das acelerações, velocidades e deslocamentos generalizados a partir das acelerações, velocidades e deslocamentos calculados na primeira etapa, utilizando as equações (4.14) a (4.16)
- 3ª etapa: Cálculo dos vetores de forças modais usando as equações (4.13.a) a (4.13.c) e resolução de (4.37) para cada instante de tempo
- 4ª etapa: Uma vez obtidas as forças introduzidas pelos suportes, o vetor dos parâmetros de cada elemento de suporte é obtido através da resolução de (4.41).

Nos testes numéricos foi utilizado um modelo de elementos finitos de uma viga apoiada por dois suportes lineares em suas extremidades, comportando 20 elementos de viga bi-dimensional de Euler-Bernoulli, cada um com dois nós e 3 g.d.l.s por nó. Os g.d.l.s na direção axial da viga foram bloqueados de modo que o número total de g.d.l. do modelo é 42. Os suportes são modelados como sistemas de 1 g.d.l. contendo parâmetros de inércia, amortecimento viscoso e rigidez. A geometria e as propriedades físicas do modelo são

mostradas na Figura 7.65, onde os nós foram numerados sucessivamente, de 1 a 21, da esquerda para a direita.

Uma força transitória, simulando uma excitação por impacto, mostrada na Figura 7.66, foi aplicada segundo a direção transversal no ponto médio da viga (nó 11). Assumindo condições iniciais nulas, as respostas em aceleração foram obtidas mediante a integração das equações do movimento, usando um integrador da família Newmark com  $\Delta t = 2,51 \times 10^{-4}$  [s]. As respostas em velocidade e em deslocamento foram obtidas através da integração das respostas em aceleração, empregando a regra do trapézio.

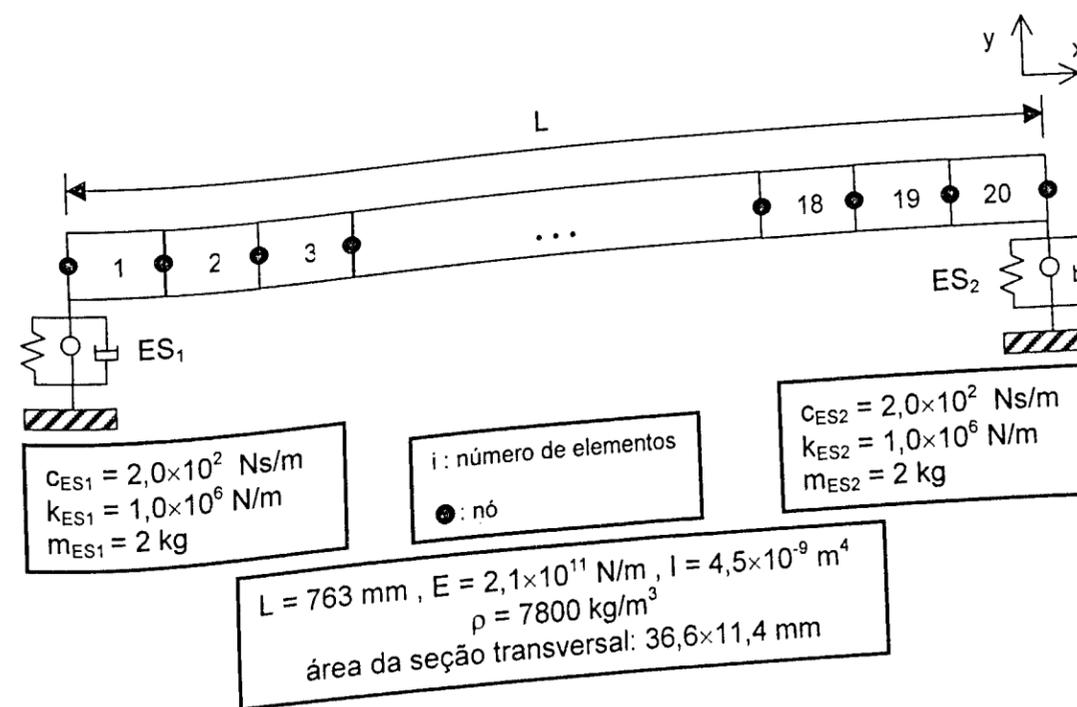


Figura 7.65 - Propriedades físicas e geométricas do modelo de E.F.

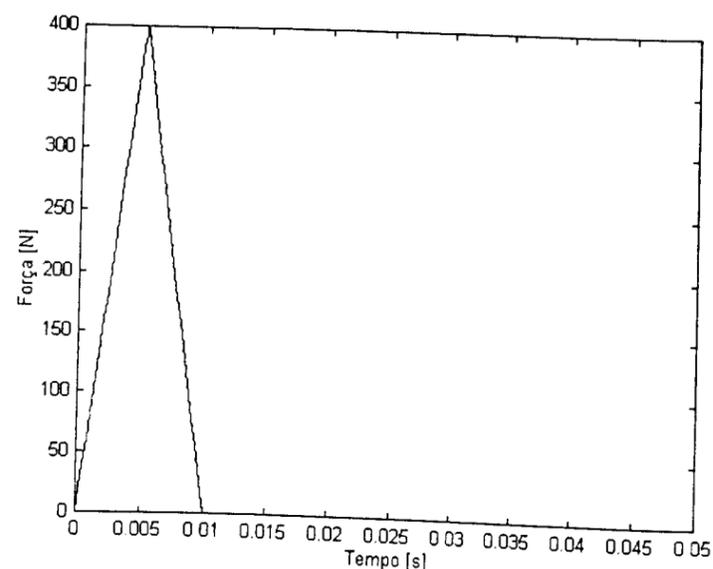


Figura 7.66 – Força transitória aplicada no ponto médio da viga.

Dois testes foram realizados, utilizando dados com e sem ruído. Para o caso com ruído, tanto a resposta em aceleração quanto as auto-soluções foram perturbadas por números aleatórios simulando os ruídos experimentais. Utilizando o modelo apresentado na Figura 7.15, os valores máximo e mínimo adotados dos erros aleatórios admitidos para a aceleração foram:  $e_{\max} = 2\%$  e  $e_{\min} = 0,5\%$ . Em relação aos erros referentes às características modais, foram considerados os seguintes valores: 5% para os autovalores, 10% para os autovetores e 5% para as massas generalizadas. Em ambos os testes, o número de modos utilizados foi igual a 3. As componentes dos autovetores e as respostas temporais foram adquiridas nos nós 1, 11, e 21 ( $c=3$ ), na direção  $y$ .

As Figuras 7.67 e 7.68 mostram as forças identificadas que cada suporte aplica à viga livre-livre, e a Tabela 7.5 fornece os valores identificados para os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento dos elementos de suporte, notando-se que precisão aceitável pode ser obtida mesmo na presença de ruídos experimentais.

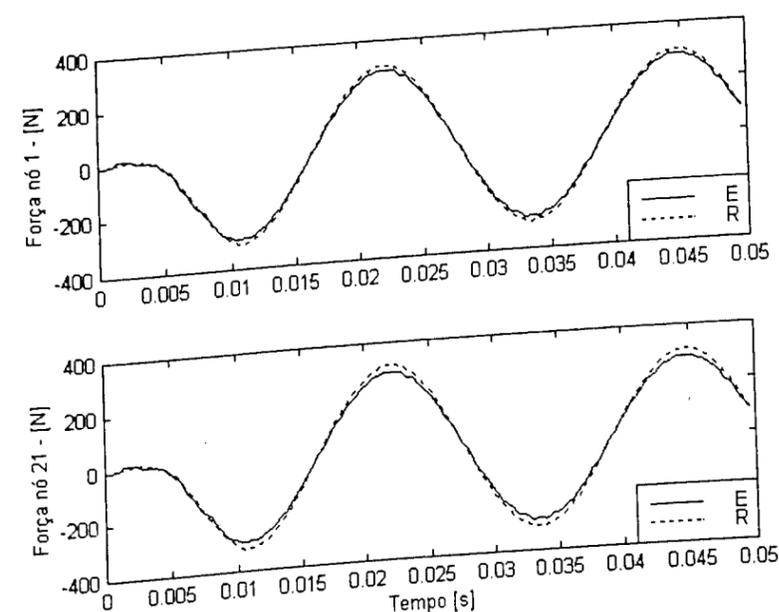


Figura 7.67 – Forças exata e identificada nos elementos de suporte. Sem ruído

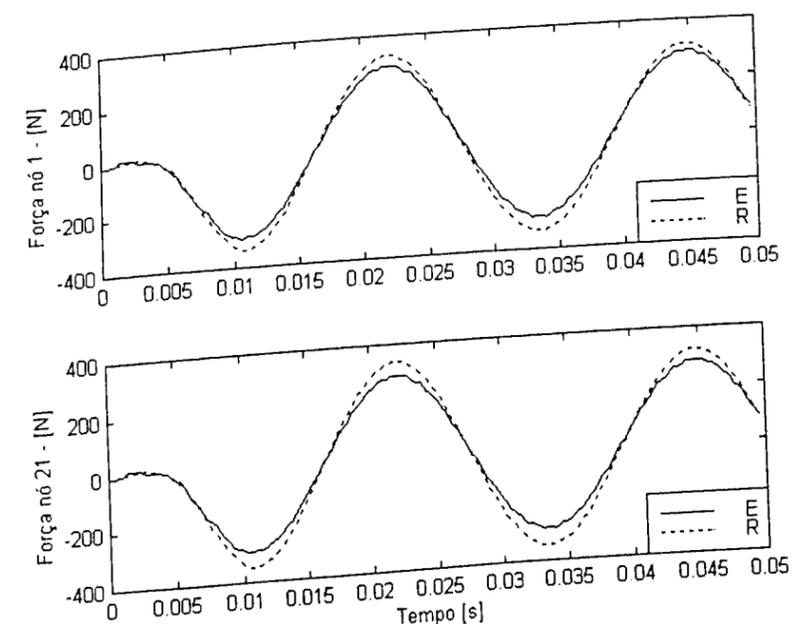


Figura 7.68 – Forças exata e identificada nos elementos de suporte. Com ruído

Tabela 7.5 - Valores dos parâmetros identificados

Parâmetros do Suporte	Valores estimados		Erro (%)	
	Sem ruído	Com ruído	Sem ruído	Com ruído
$m_{ES1}$	1,98 kg	2,06 kg	1,00	3,00
$k_{ES1}$	$1,04 \times 10^6$ N/m	$1,11 \times 10^6$ N/m	4,00	11,00
$c_{ES1}$	195,09 Ns/m	202,20 Ns/m	2,46	1,10
$m_{ES2}$	1,99 kg	2,13 kg	0,50	6,50
$k_{ES2}$	$1,07 \times 10^6$ N/m	$1,15 \times 10^6$ N/m	7,00	15,00
$c_{ES2}$	198,06 Ns/m	209,61 Ns/m	0,97	4,81

**7.5.2 - Método da Deconvolução aplicado à identificação de parâmetros de elementos de suporte não lineares.**

A equação do movimento para um suporte de comportamento não linear, modelado como sistema de 1 grau de liberdade, é dada por:

$$m_{es} \ddot{x}_{es}(t) + c_{es} \dot{x}_{es}^a(t) + k_{es} x_{es}^b(t) = -f_{es}(t) \quad (7.9)$$

onde  $f_{es}(t)$  é a força total exercida pela estrutura principal sobre o suporte e  $a, b, c_{es}, k_{es}$  e  $m_{es}$  constituem os parâmetros a serem identificados.

A determinação dos parâmetros ótimos é feita minimizando-se a seguinte função erro formulada a partir de (7.9):

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{\|f_{es}(t_i) - (m_{es} \ddot{x}(t_i) + c_{es} \dot{x}^a(t_i) + k_{es} x^b(t_i))\|}{\|f_{es}(t_i)\|} \quad (7.10)$$

onde  $N$  é o número de pontos tomados nas respostas temporais.

A identificação dos parâmetros de elementos de suporte de comportamento não linear foi feita utilizando o modelo de 11 g.d.l mostrado na Figura 7.69. O modelo foi excitado por

uma força impulsiva, mostrada na Figura 7.70, aplicada à massa 1. As respostas nas coordenadas 1, 10 e 11 foram calculadas via método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com taxa de amostragem  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-4}$  s, no intervalo de tempo de 0 a 0,05 s.

Foi estabelecido que, nas Equação (7.9), os graus de não linearidade associados ao amortecimento e à rigidez seriam quadrático e cúbico, respectivamente. Os valores exatos dos parâmetros a serem determinados são apresentados na Figura 7.69.

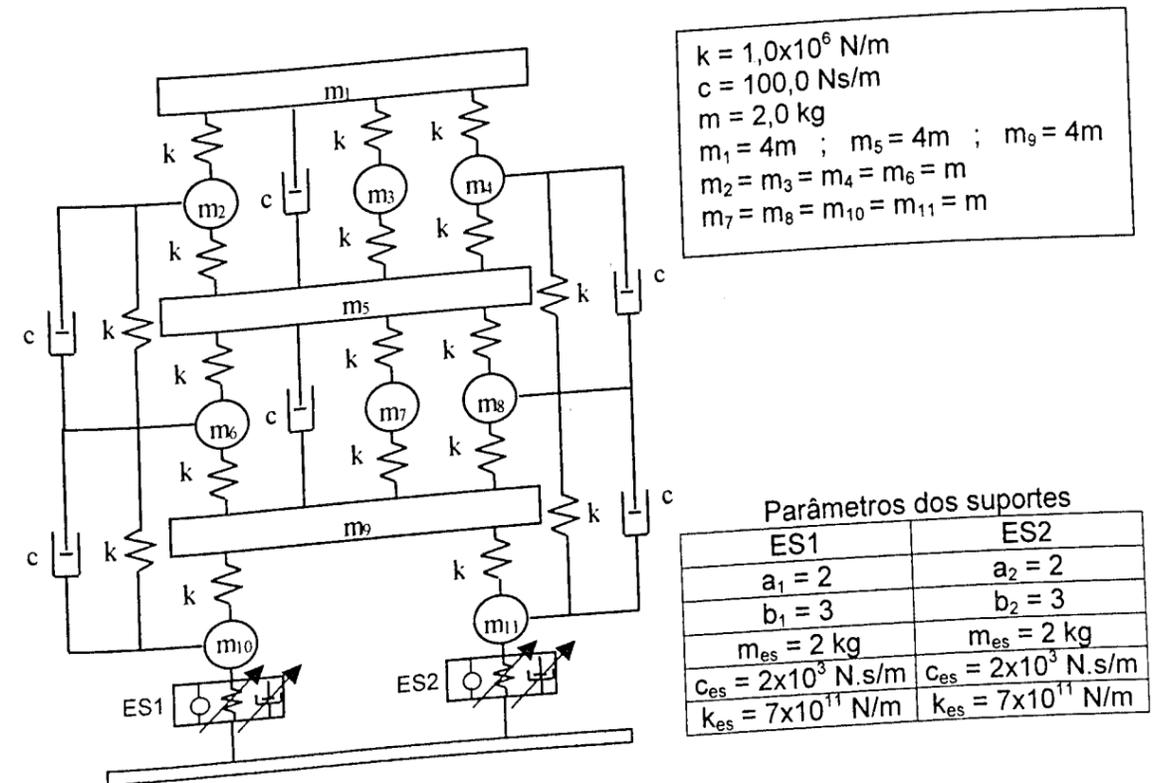


Figura 7.69 - Sistema simulado de 11 g.d.l utilizado nos testes de identificação.

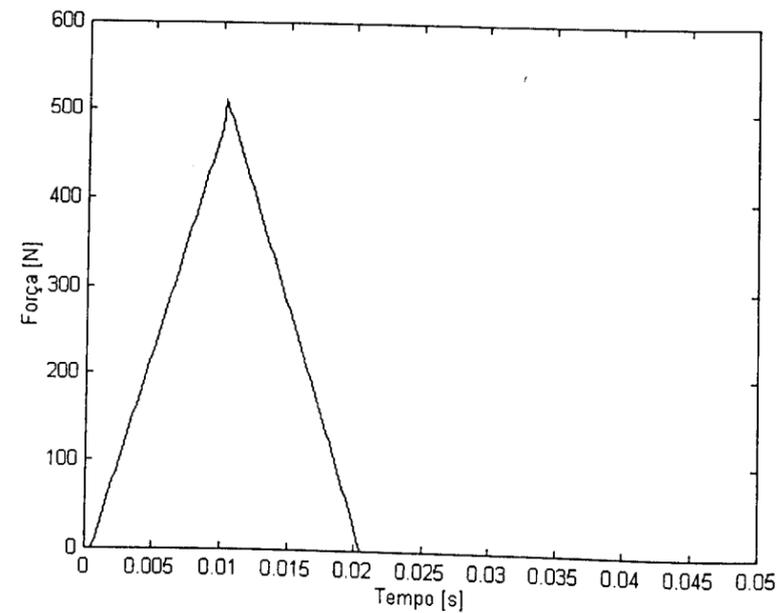


Figura 7.70 - Força aplicada na massa 1.

Os procedimentos de obtenção das respostas dinâmicas com ruído ( $e_{max} = 2\%$  e  $e_{min} = 0.5\%$ ), foram aqueles já detalhados na Seção 7.2.1.3. A minimização da função erro dada por (7.10) foi efetuada empregando a técnica de Algoritmo Genético (Goldberg, 1987), com os seguintes parâmetros: população de 200 indivíduos; probabilidade de cruzamento de 70% e probabilidade de mutação de 2%.

No procedimento de identificação, foi assumido que todas as três forças, força de excitação e as duas forças aplicadas pelos suportes, eram desconhecidas. Esta hipótese pode ser útil em situações práticas, uma vez que nenhuma instrumentação é requerida para a medição da força de excitação.

Os resultados obtidos são mostrados na Figura 7.71 e Tabela 7.6. Observa-se uma boa correlação entre as forças exatas e reconstruídas.

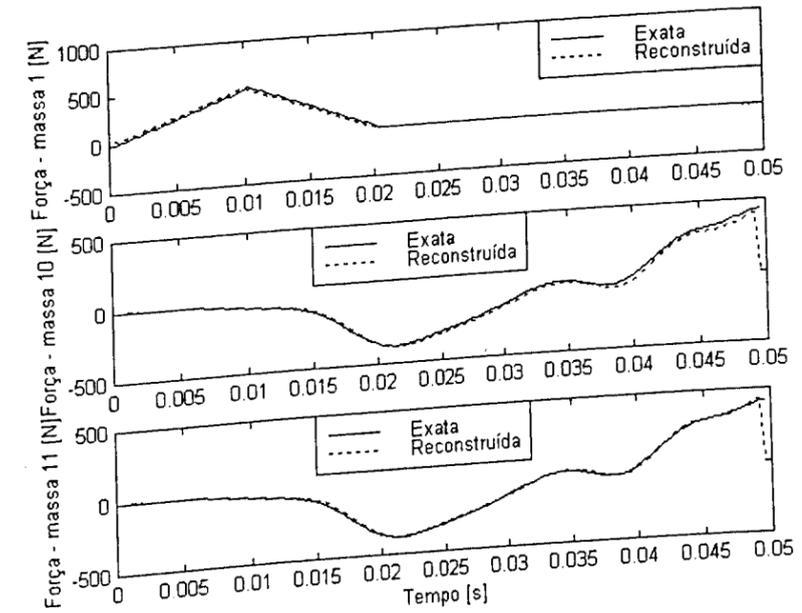


Figura 7.71 - Forças exatas e identificadas.

Tabela 7.6 – Valores dos parâmetros identificados

Parâmetros	Valores estimados	Erro (%)
$m_1$	1,97	1,15
$c_1$	$1,75 \times 10^3$	12,50
$k_1$	$6,41 \times 10^{11}$	8,43
$a_1$	1,87	6,50
$b_1$	3,00	0,00
$m_2$	2,11	5,50
$c_2$	$1,74 \times 10^3$	13,00
$k_2$	$6,62 \times 10^{11}$	5,43
$a_2$	2,00	0,00
$b_2$	3,00	0,00

Os resultados revelam que os parâmetros de inércia e de rigidez são identificados com uma margem de erro aceitável (menor que 10%). Os erros mais elevados afetando os parâmetros de amortecimento podem ser explicados pela pouca influência deste parâmetro no comportamento dinâmico do sistema.

## CAPÍTULO VIII

### AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DOS MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS.

Neste Capítulo, os métodos de identificação de forças são avaliados mediante diversos testes efetuados em estruturas ensaiadas em laboratório. Busca-se, com este estudo, avaliar o desempenho e a robustez dos métodos em situações mais próximas das aplicações práticas, onde intervêm dificuldades adicionais oriundas do procedimento experimental.

Diferentes tipos de forças excitadoras (impulsiva, harmônica e varredura freqüencial) são consideradas na avaliação dos métodos estudados.

Foram utilizadas duas estruturas-teste: um pórtico tridimensional apresentando comportamento típico de um sistema discreto de três graus de liberdade, na faixa de baixas freqüências, e uma viga prismática de alumínio, com condições de contorno livres.

Nas próximas seções, ambas as estruturas são descritas, seguindo-se a descrição dos testes de identificação de forças realizados e dos resultados obtidos.

#### 8.1 – PRIMEIRA ESTRUTURA-TESTE: PÓRTICO TRIDIMENSIONAL

A primeira estrutura utilizada para avaliação dos métodos de identificação é ilustrada na Figura 8.1. Trata-se basicamente um sistema formado por três placas quadradas de alumínio, concentrando a maior parte da massa do sistema, conectadas por três conjuntos de quatro lâminas de aço dispostas em paralelo. Foi verificado que, no domínio de baixas freqüências, o sistema se comporta como um sistema de três graus de liberdade pouco amortecido, cujas freqüências naturais são:  $f_1=5,87$  Hz,  $f_2=11,56$  Hz,  $f_3=18,06$  Hz. A Tabela 8.1 fornece as principais características físicas e geométricas da estrutura teste.

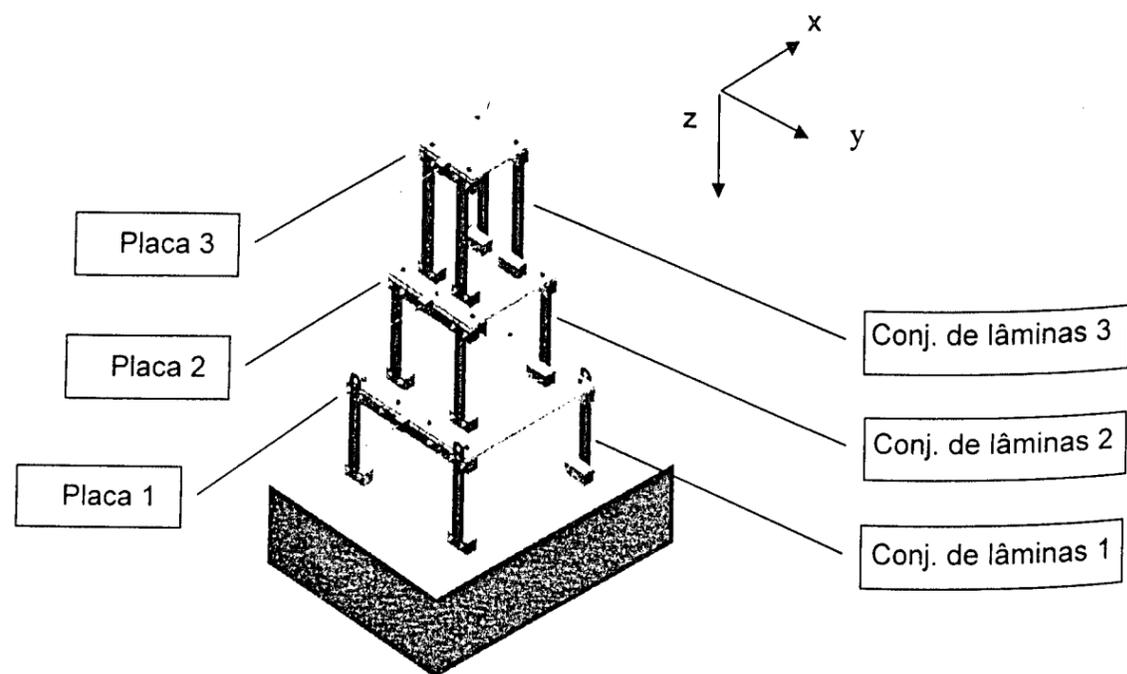


Figura 8.1 – Sistema mecânico utilizado nos experimentos.

Tabela 8.1 – Características da estrutura teste.

Componentes	Massa (kg)	Dimensões (cm)
Placa 1 (com as conexões)	0,930	25×25×0,57
Placa 2 (com as conexões)	2,230	17×17×0,67
Placa 3 (com as conexões)	3,300	11×11×0,67
Lâmina do conjunto 1	0,016	9,20×2,25×0,1
Lâmina do conjunto 2	0,018	10,20×2,25×0,1
Lâmina do conjunto 3	0,026	14,70×2,25×0,1

Em todos os testes realizados, tanto a excitação aplicada com as repostas em aceleração foram medidas somente na direção x. As coordenadas medidas foram localizadas nas três placas, numeradas como mostrado na Figura 8.1.

### 8.2 – SEGUNDA ESTRUTURA-TESTE: VIGA LIVRE-LIVRE DE ALUMÍNIO.

A segunda estrutura-teste utilizada é constituída de uma viga prismática livre-livre, de alumínio, ilustrada esquematicamente na Figura 8.2. Conforme indicado nesta Figura, foi desenhada uma malha sobre a superfície da viga, definindo os pontos equidistantes, numerados de 1 a 55, onde a viga foi instrumentada, objetivando sua excitação e a observação das acelerações na direção y.

A viga foi suspensa por fios flexíveis para aproximar a condição de contorno do tipo livre-livre, como mostra a Figura 8.3.

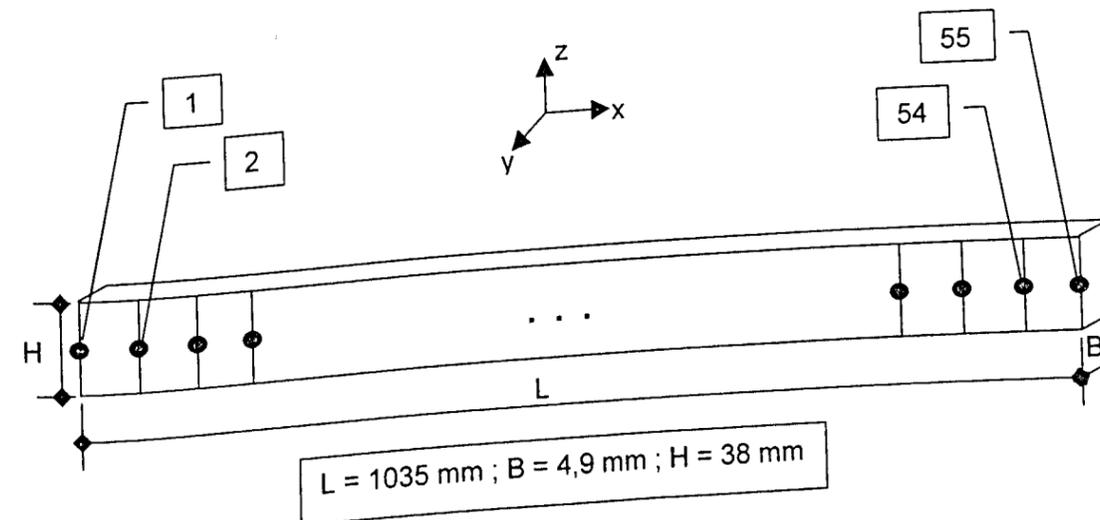


Figura 8.2 – Características da viga ensaiada.

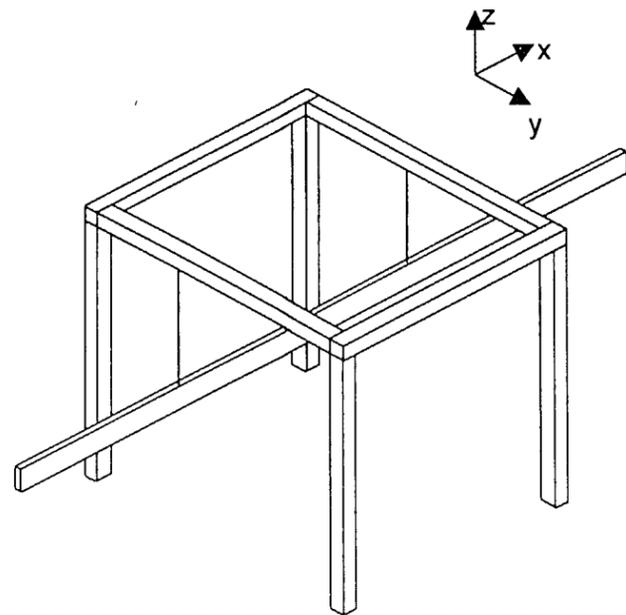


Figura 8.3 – Esquema de sustentação da viga ensaiada.

Foi também elaborado um modelo de elementos finitos da viga apresentada acima, com o objetivo de avaliar os métodos de identificação de forças que fazem uso de dados híbridos analítico-experimentais.

Foi construído um modelo de elementos finitos comportando 54 elementos de viga bi-dimensional de Euler-Bernoulli, com dois nós e 3 g.d.l. por nó. Os g.d.l. na direção axial foram bloqueados de modo que o número total de g.d.l. do modelo é 110. A geometria e as propriedades físicas do modelo são mostradas na Figura 8.4. Vale notar que a malha do modelo é a mesma que a adotada para a instrumentação da viga durante os ensaios, mostrada na Figura 8.2.

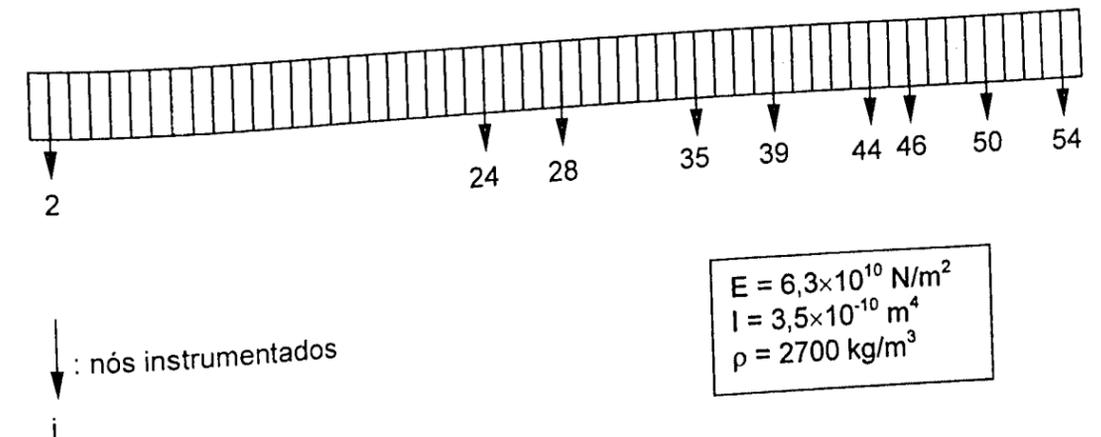


Figura 8.4 – Propriedades físicas e geométricas do modelo de E.F.

Nenhum amortecimento foi considerado no modelo de elementos finitos e a Tabela 8.2 fornece os valores das frequências naturais da viga modelada via elementos finitos.

Tabela 8.2 – Valores das frequências naturais da viga

Modos	Frequências Naturais (Hz)
1	13,08
2	36,05
3	70,66
4	116,80
5	174,47
6	243,66
7	324,38
8	416,62

A Figura 8.5 mostra a confrontação entre as F.R.F.  $H_{54,54}(\omega)$  (os índices dizem respeito à numeração atribuída aos nós instrumentados, mostrado na Figura 8.4) da viga real e do modelo, podendo-se observar uma boa correlação entre duas F.R.F.s.

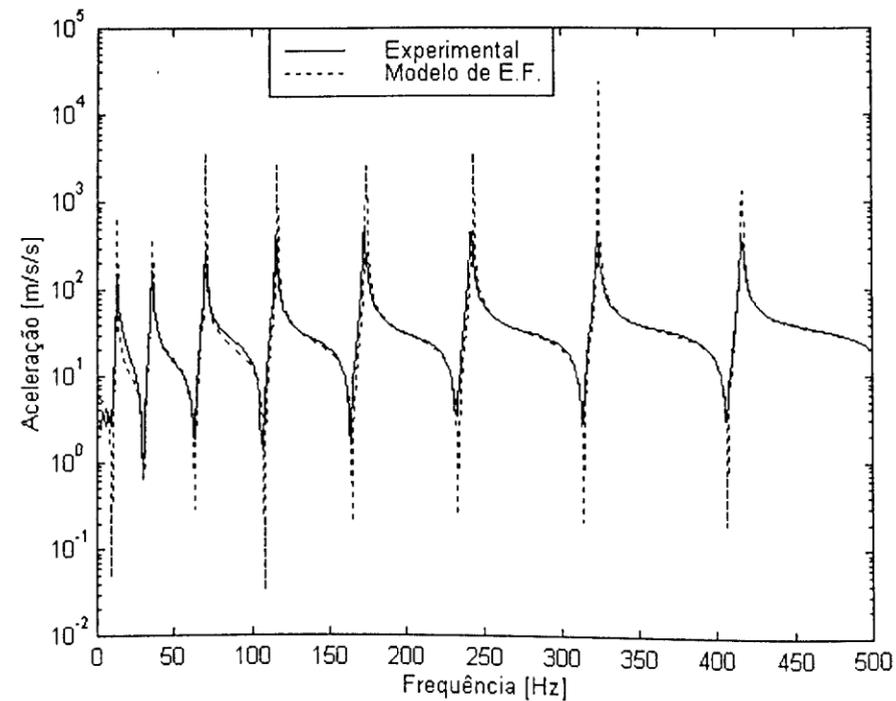


Figura 8.5 – Função de resposta em frequência  $H_{54,54}(\omega)$

### 8.3 – TESTES DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS

#### 8.3.1 – Método das Coordenadas Modais

##### 8.3.1.1 - Testes com a viga livre-livre

A cadeia de medição utilizada para obtenção das forças excitadoras e das respostas temporais da viga livre-livre é mostrada na Figura 8.6. A descrição de cada equipamento empregado pode ser encontrado no Anexo I.

Os testes foram conduzidos para cobrir a faixa de frequências de 0 a 500 Hz, que inclui os oito primeiros modos de flexão da viga. As forças de excitação foram aplicadas nos nós da malha desenhada sobre a superfície da viga, através de um excitador eletrodinâmico

alimentado por um gerador de sinais. Elas foram então medidas utilizando um transdutor de força piezelétrico. As correspondentes respostas em aceleração foram simultaneamente adquiridas nos nós da malha desenhada sobre a superfície da viga por acelerômetros piezelétricos. Os sinais da força e das acelerações foram amplificados empregando amplificadores de sinais, e enviados para uma placa digitalizadora com 4 canais simultâneos e posteriormente armazenados em um micro-computador. Então, assumindo que as forças de excitação eram desconhecidas, o método de identificação de forças descrito no Capítulo IV, combinado com as auto-soluções (frequências naturais e componentes de modos de vibração) obtidas do modelo de elementos finitos, foi empregado para reconstruir as forças de entrada. Uma vez que as medições das forças exatas eram disponíveis, elas puderam ser comparadas às forças identificadas com a finalidade de avaliar a precisão do procedimento de reconstrução de força.

Vale ressaltar que a opção de se utilizar as auto-soluções oriundas do modelo de elementos finitos, ao invés de se usar as auto-soluções obtidas por procedimento de análise modal experimental é justificada pelos seguintes fatores: para assegurar a precisão da identificação, o método das coordenadas modais requer um conjunto preciso e o mais completo possível de parâmetros modais. Do ponto de vista experimental, isto se traduz na instrumentação simultânea de mais pontos da estrutura, o que é inviável devido à limitação no número de sensores disponíveis e canais do sistema de aquisição. Além do mais, um outro fator complicador para realização da análise modal experimental é o fato da estrutura teste ser pouco amortecida.

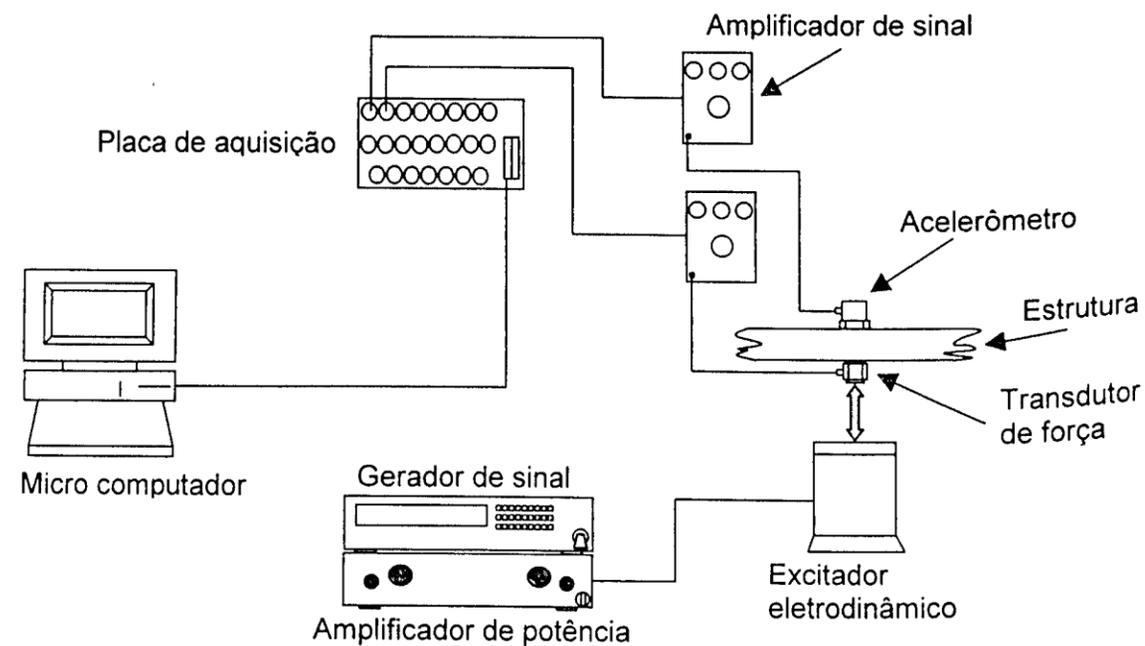


Figura 8.6 – Sistema de medição.

**Identificação de uma força harmônica com sensor e atuador em uma mesma posição.**

O primeiro teste de identificação objetivou reconstruir uma força harmônica de frequência igual a 20 Hz aplicada no nó 44 da viga, utilizando as respostas dinâmicas medidas em três posições, incluindo aquela em que a força excitadora é aplicada.

A partir de condições iniciais nulas, as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 1,6 s, discretizado em 2048 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 7,81 \times 10^{-4}$  s). Os acelerômetros foram postos nos nós 39, 44 e 50 escolhidos arbitrariamente. Estas acelerações foram então integradas por duas vezes para a obtenção das respostas em velocidade e em deslocamento, através do algoritmo de integração numérica pela regra do trapézio.

As Figuras 8.7 a 8.9 ilustram as respostas do sistema nos nós instrumentados.

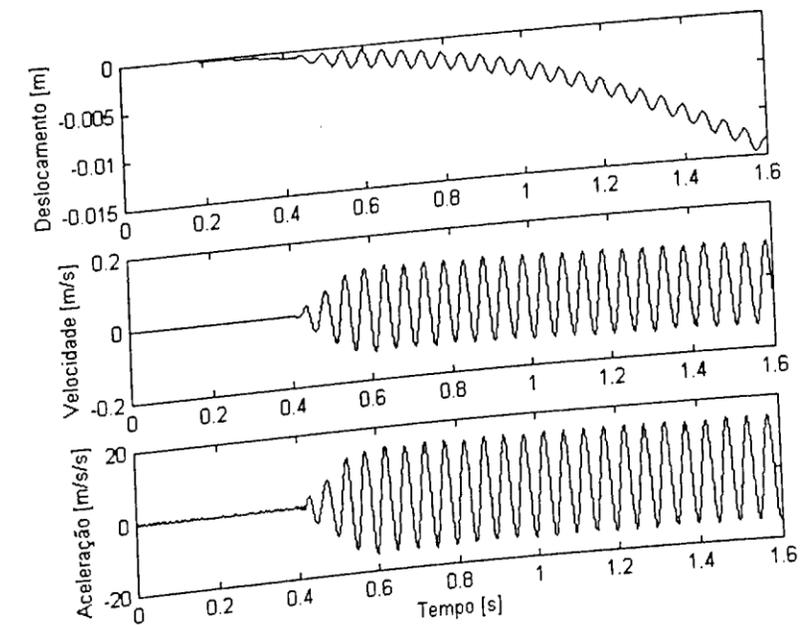


Figura 8.7 – Respostas temporais no nó 39.

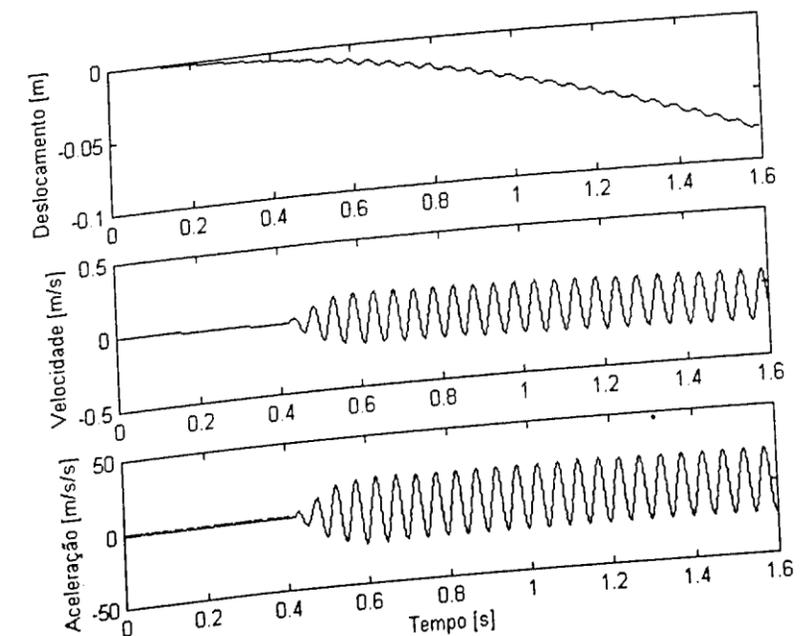


Figura 8.8 – Respostas temporais no nó 44.

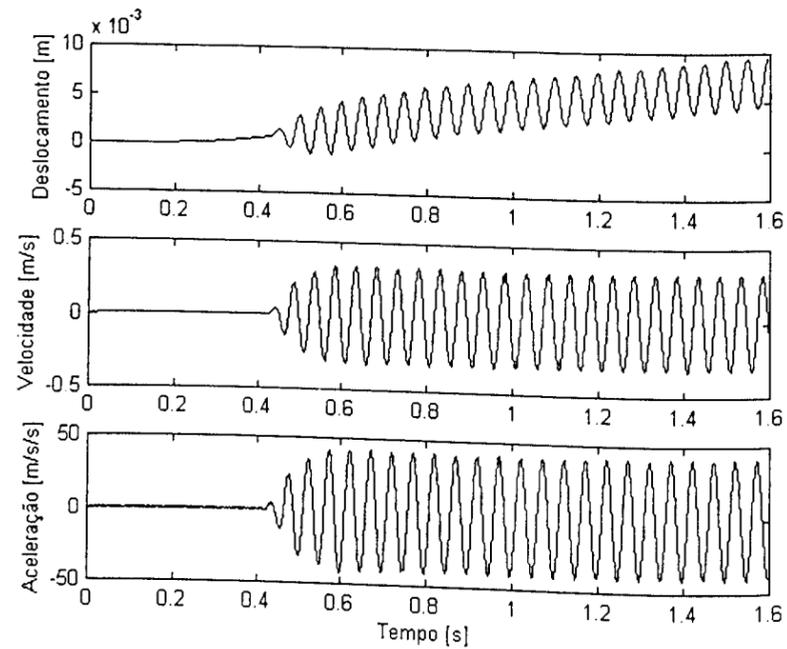


Figura 8.9 – Respostas temporais no nó 50.

O resultado da reconstrução é apresentado nas Figuras 8.10 e 8.11, usando somente os dois primeiros modos flexíveis na matriz  $[\tilde{\Phi}]$ . Uma vez que os dados foram adquiridos imediatamente após a ativação do excitador, observa-se que a excitação não é perfeitamente harmônica e que a amplitude aumenta durante os primeiros ciclos, devido à inércia do sistema estrutura-excitador.

A identificação proporcionou razoável precisão para a força reconstruída. O período da força é perfeitamente detectado, ao passo que a variação da amplitude é menos precisa.

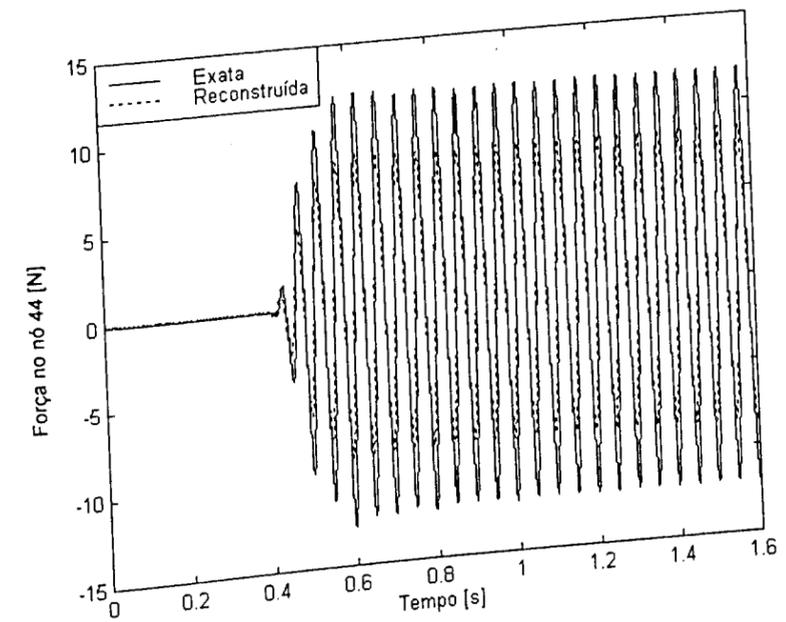


Figura 8.10 - Força medida e identificada no nó 44 no domínio do tempo.

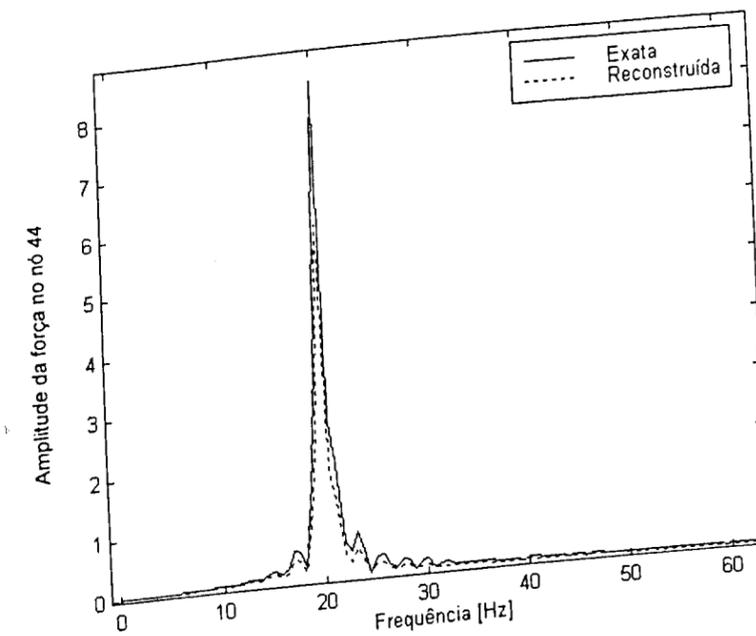


Figura 8.11 – Força medida e identificada no nó 44. Espectro de frequência.

### Identificação de uma força harmônica com sensores e atuador não coincidentes em posições.

O objetivo deste ensaio é verificar o comportamento do método quando se tem força excitadora e sensores em posições não coincidentes.

Considerando as mesmas condições do teste anterior, mas com os acelerômetros postos nos nós 39, 46 e 50, os resultados apresentados nas Figuras 8.12 e 8.13 foram obtidos usando os dois primeiros modos flexíveis na matriz  $[\tilde{\Phi}]$ .

Pode-se notar que os resultados obtidos neste teste são essencialmente idênticos àqueles obtidos no teste anterior, realizado com sensor e atuador colocados em posições coincidentes.

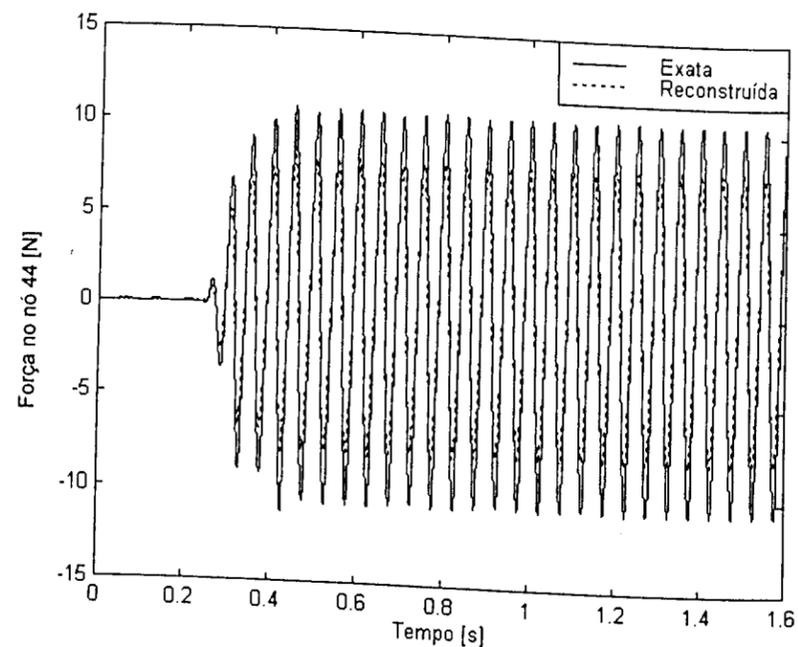


Figura 8.12 - Forças medida e identificada no nó 44. Representação no domínio do tempo.

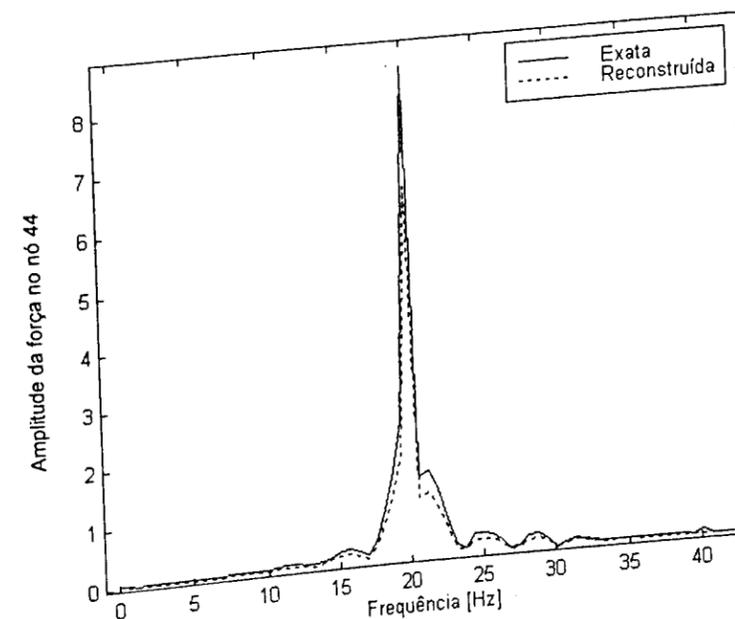


Figura 8.13 - Forças medida e identificada no nó 44. Espectro de frequência.

### Identificação de uma força com uma rápida varredura frequencial.

Neste teste, buscou-se identificar uma força contendo um espectro de frequência mais amplo, aplicada no nó 44 da viga. Esta força foi gerada executando uma sucessão de varreduras em frequência na banda de 2 - 20 Hz, onde cada ciclo de varredura foi completado em 0,55 s.

As condições iniciais foram admitidas nulas e as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 1,6 s, discretizadas em 2048 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 7,81 \times 10^{-4}$  s). Os acelerômetros foram posicionados nos nós 39, 44 e 50. Estas acelerações medidas foram então integradas por duas vezes para a obtenção das respostas em velocidade e em deslocamento, através do algoritmo de integração numérica pela regra do trapézio.

O resultado da reconstrução usando somente os dois primeiros modos flexíveis na matriz  $[\tilde{\Phi}]$  é apresentado nas Figuras 8.14 e 8.15.

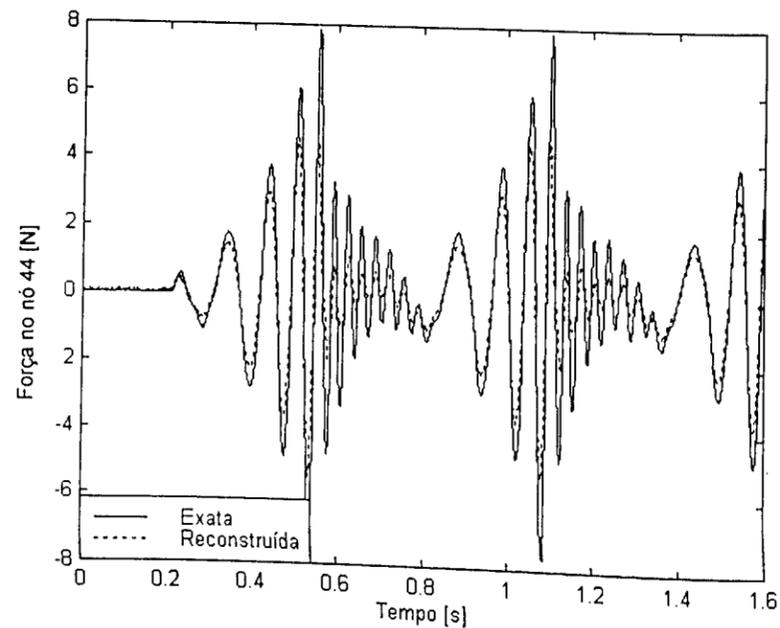


Figura 8.14 – Forças medida e identificadas no nó 44. Representação no domínio do tempo.

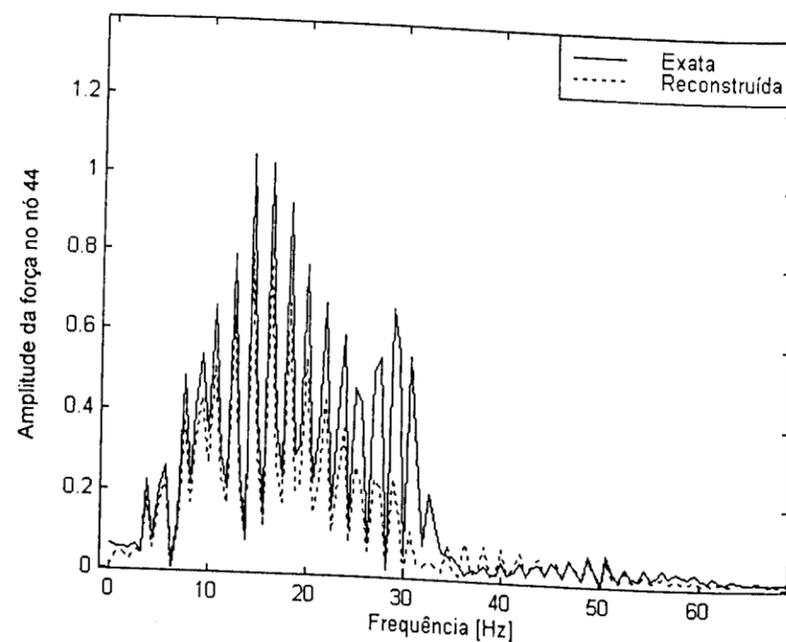


Figura 8.15 – Forças medida e identificada no nó 44. Espectro de frequência.

Nota-se que o método teve maior dificuldade, na reconstrução da força excitadora notadamente no tocante às componentes frequências na faixa de 20 a 35 Hz.

### 8.3.2 – Método da Deconvolução

#### 8.3.2.1 - Testes com o pórtico tridimensional

Os testes realizados na estrutura mostrada na Figura 8.1 foram divididos em duas fases: a primeira fase destinou-se à identificação das F.R.I.s, utilizando a equação (5.18). Para isto, uma força de excitação por impacto foi aplicada na coordenada 1 e as correspondentes respostas temporais foram medidas nas coordenadas 1, 2 e 3. Tanto a força quanto as respostas temporais foram adquiridas simultaneamente utilizando uma placa digitalizadora de 16 canais, sendo 4 destes canais de aquisição simultânea. Os sinais de entrada foram medidos com o auxílio de um transdutor piezelétrico de carga, e as acelerações (sinal de saída) foram medidas usando acelerômetros piezelétricos. Os sinais de força e de aceleração foram amplificados empregando amplificadores de sinais, e enviados para a placa de aquisição e posteriormente armazenados em um micro-computador. Cada sinal adquirido foi observado no intervalo de 0 a 2,7 s discretizados em 1000 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 2,70 \times 10^{-3}$  s). Desta forma, a Equação (5.18) foi sucessivamente resolvida para as F.R.I.s  $h_{11}(t)$ ,  $h_{21}(t)$  e  $h_{31}(t)$ , utilizando o método do Gradiente Conjugado, apresentado na Seção 3.3.5. A título de ilustração, as Figuras 8.16 e 8.17 fornecem respectivamente a aceleração para a placa 3 e a F.R.I.  $h_{31}(t)$  em termos de aceleração.

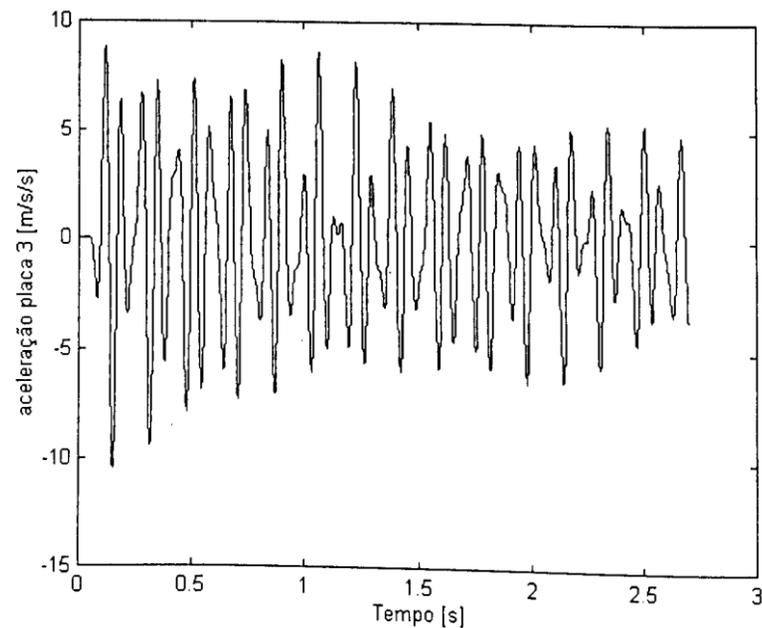


Figura 8.16 – Resposta em aceleração para a placa 3.

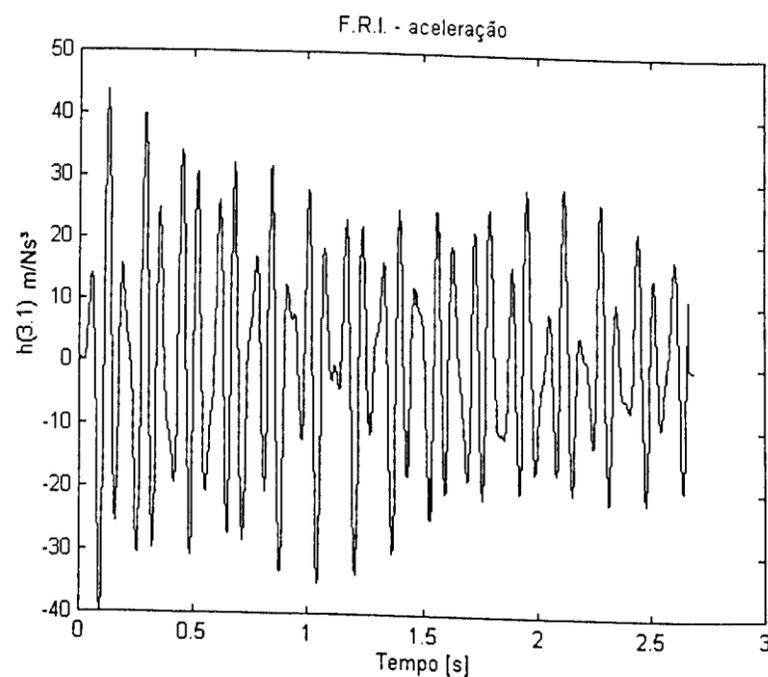


Figura 8.17 – F.R.I.  $h_{31}$  da estrutura teste.

Na segunda fase dos testes, vários tipos de forças de excitação foram aplicadas na coordenada 1 através de um excitador eletrodinâmico alimentado por um gerador de sinais. Elas foram então medidas utilizando-se um transdutor de força piezelétrico. As correspondentes respostas em aceleração foram simultaneamente adquiridas para as coordenadas 1, 2 e 3 utilizando acelerômetros piezelétricos. Então, assumindo que as forças de excitação eram desconhecidas e usando as F.R.I.s previamente identificadas na primeira fase dos testes, o método de identificação de forças, descrito no Capítulo V, combinado com o método do Gradiente Conjugado, foi empregado para reconstruir as forças de entrada. Uma vez que as forças exatas eram disponíveis, elas puderam ser comparadas às forças identificadas com a finalidade de avaliar a precisão do procedimento de reconstrução de forças.

Detalhes dos equipamentos utilizados no sistema de medição podem ser encontrados no Anexo I.

#### *Identificação de uma força harmônica*

O primeiro teste de identificação destinou-se a reconstruir uma força harmônica de frequência 7 Hz aplicada na placa 1. Os resultados de duas reconstruções são apresentados em seqüência. Na Figura 8.18, é apresentado o resultado da identificação realizada usando a resposta em aceleração medida na coordenada 2, ao passo que a Figura 8.19 mostra a força identificada a partir da resposta em aceleração medida na coordenada 3.

Pode ser verificado que, uma vez que os dados foram adquiridos imediatamente após a ativação do excitador, a força excitadora não é perfeitamente harmônica. Observa-se que a amplitude aumenta durante os primeiros ciclos, devido à inércia do sistema estrutural excitador.

Como pode ser visto, ambas as identificações proporcionaram razoável precisão para a força reconstruída. O período da força reconstruída é perfeitamente detectado, ao passo que a variação da amplitude é menos precisa.

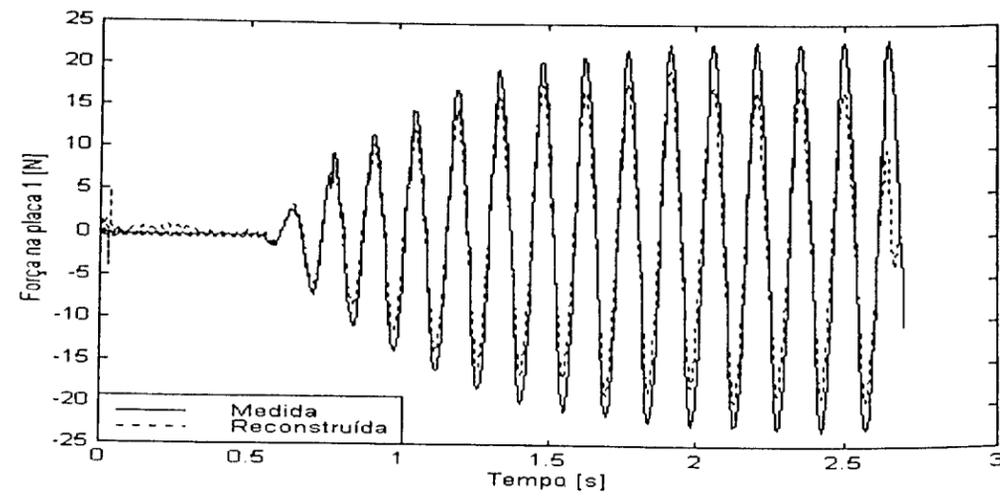


Figura 8.18 – Força medida e reconstruída para a coordenada 1, identificada a partir da resposta medida na coordenada 2.

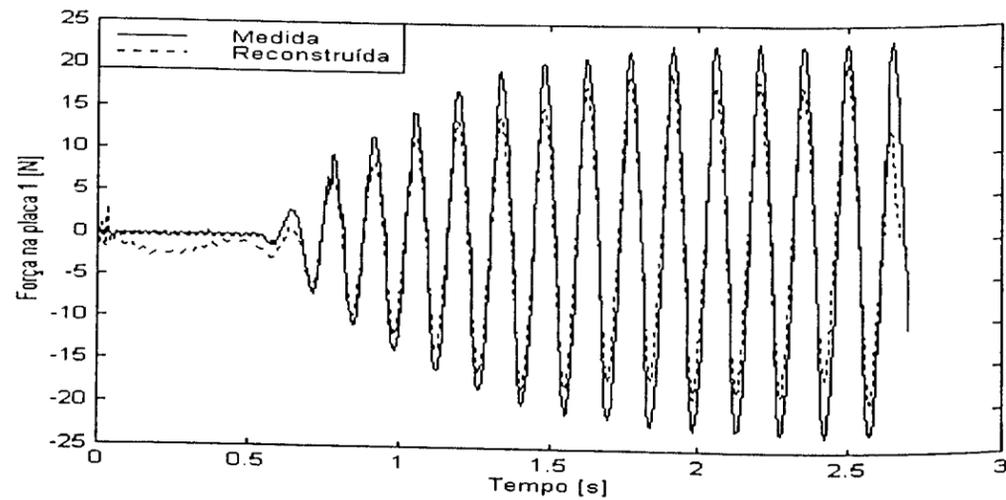


Figura 8.19 – Força medida e reconstruída para a coordenada 1, identificada a partir da resposta medida na coordenada 3.

**Identificação de uma força triangular de baixa frequência**

O procedimento descrito nas seções anteriores foi usado para reconstrução de uma força periódica do tipo triangular de frequência igual a 4 Hz aplicada na placa 1. As Figuras 8.20 e 8.21 apresentam os resultados obtidos utilizando as acelerações medidas nas placa 2 e 3 respectivamente. Analisando os resultados, os mesmos comentários apresentados para o caso da força harmônica podem ser feitos.

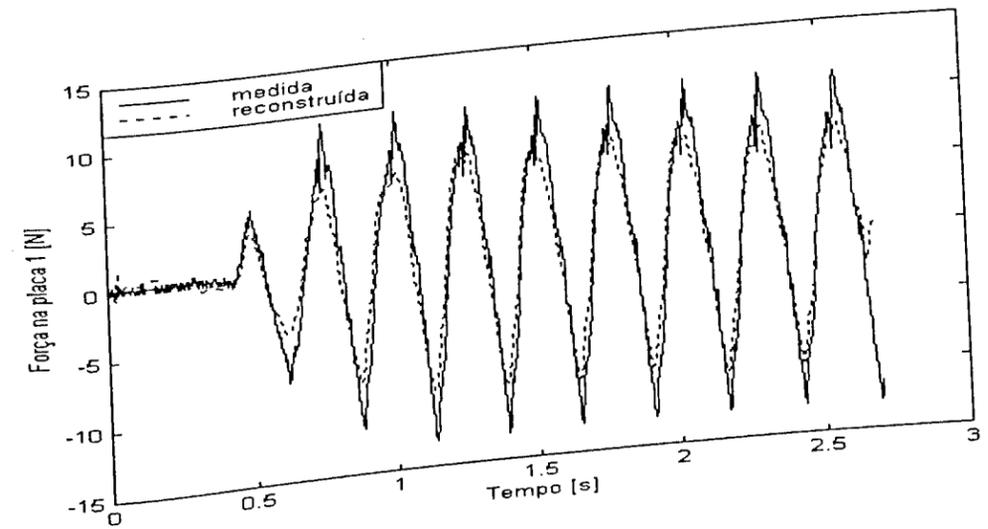


Figura 8.20 - Força medida e reconstruída para a coordenada 1, identificada a partir da resposta medida na coordenada 2.

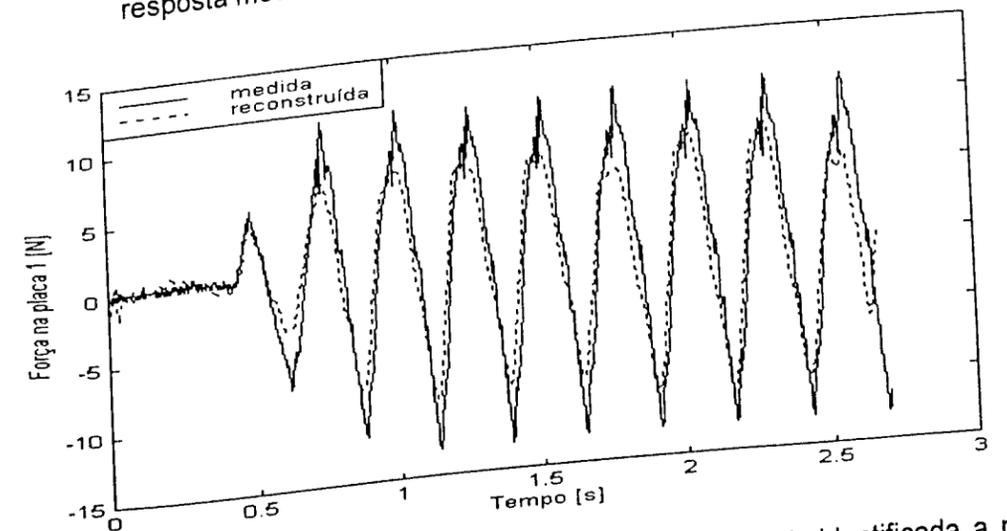


Figura 8.21 - Força medida e reconstruída para a coordenada 1, identificada a partir da resposta medida na coordenada 2.



**Identificação de uma força impulsiva com sensor e atuador na mesma posição.**

Neste teste uma força impulsiva é aplicada no nó 2 com o auxílio de um martelo de impacto instrumentado com uma célula de carga piezelétrica, e a aceleração também é medida neste mesmo ponto.

A partir de condições iniciais nulas, a resposta em aceleração foi adquirida no intervalo [0-0,02 s], discretizada em 512 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 3,9 \times 10^{-5}$  s).

Primeiramente, foi identificada a função de resposta ao impulso (F.R.I.) da viga livre-livre, utilizando o procedimento baseado na equação (5.18) associado ao método do gradiente conjugado. A força de excitação aplicada para obtenção da F.R.I. é dada pela Figura 8.25 e o método do gradiente conjugado foi utilizado para resolver as equações de estimação.

As Figuras 8.26 e 8.27 mostram, respectivamente, as respostas temporais e a F.R.I. em aceleração para o caso analisado.

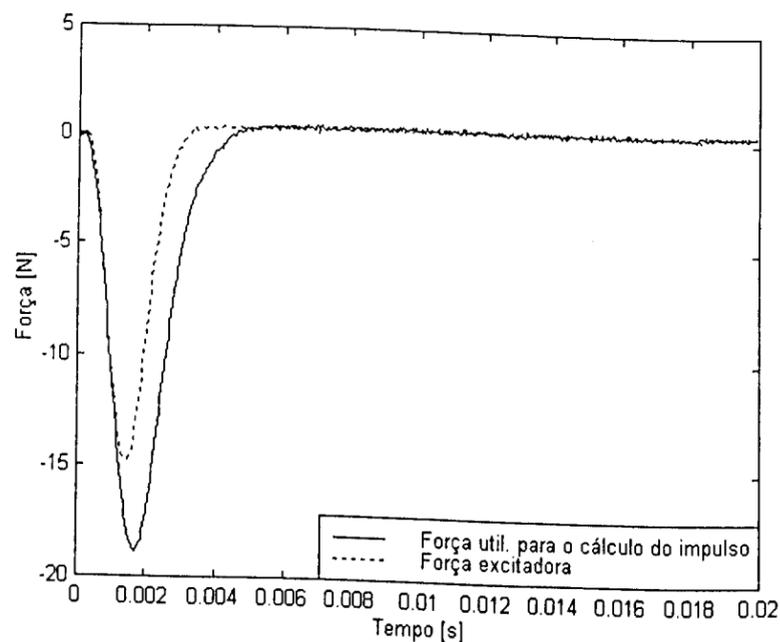


Figura 8.25 – Forças impulsivas.

- : excitação utilizada para identificação da F.R.I.
- \_\_\_\_\_ : excitação utilizada para fins de reconstrução da força.

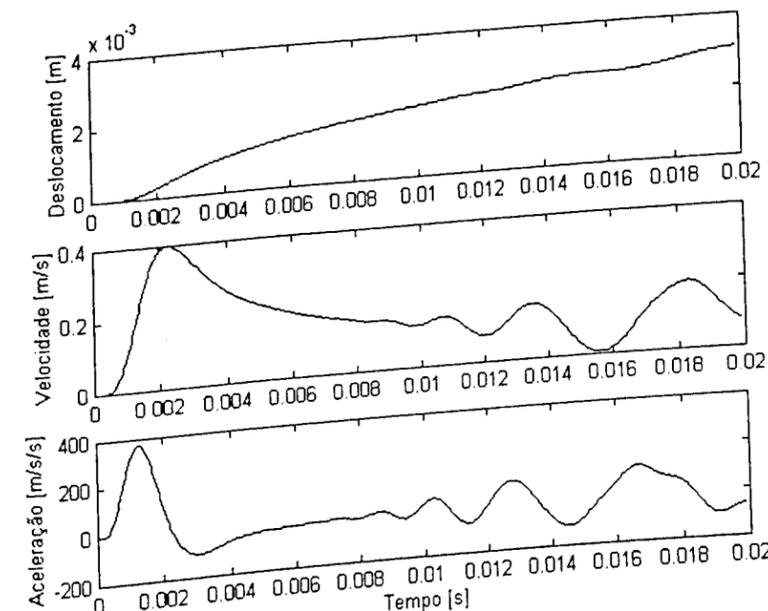


Figura 8.26 – Respostas temporais para o nó 2 da viga.

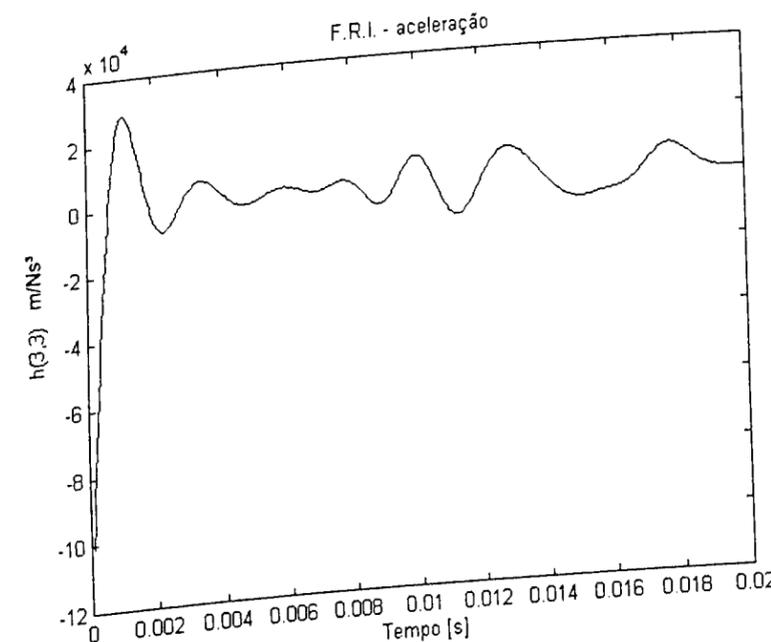


Figura 8.27 – F.R.I.,  $h_{2,2}$ , em aceleração para a viga.

Na segunda etapa do teste, a identificação da força de impacto aplicada no nó 2 foi feita empregando a resposta em aceleração medida no nó 2 e a F.R.I.  $h_{2,2}(t)$ . A força reconstruída, comparada com a força medida, é mostrada na Figura 8.28 (variação com o tempo) e na Figura 8.29 (espectros de frequência).

Da análise do resultado, conclui-se que o método da deconvolução no domínio do tempo associado ao método do Gradiente Conjugado foi capaz de proporcionar uma boa estimativa para a força excitadora.

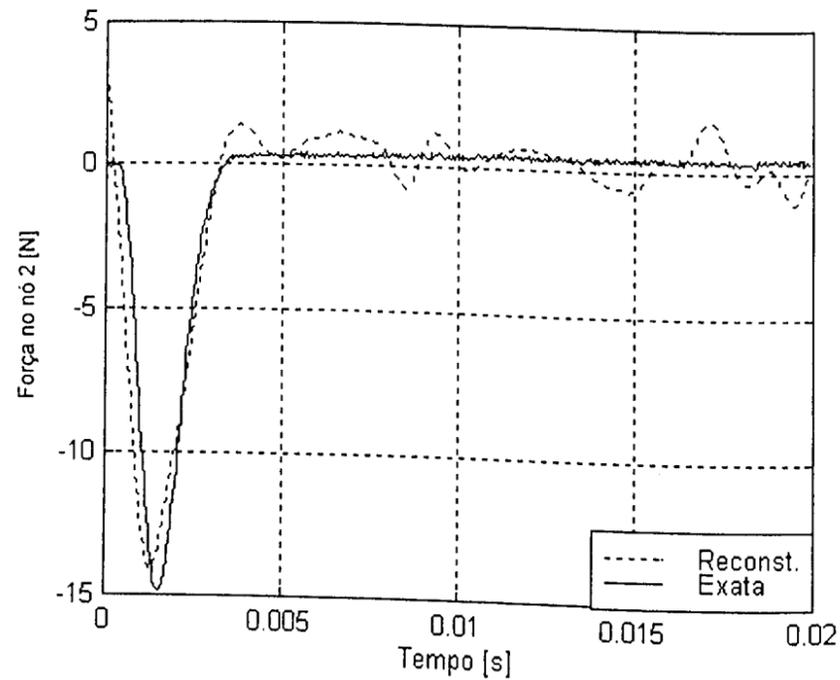


Figura 8.28 – Forças exata e reconstruída aplicada no nó 2 .

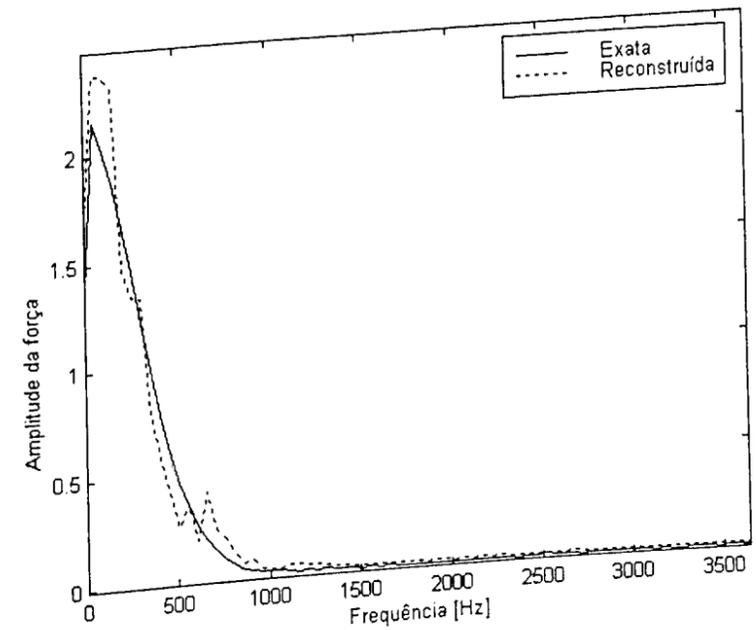


Figura 8.29 – Espectros de frequência das forças exata e reconstruída aplicadas no nó 2.

### *Identificação de uma força impulsiva com sensor e atuador em posições não coincidentes.*

Procedimento similar ao descrito no teste anterior foi realizado considerando, contudo, a força excitadora aplicada em uma localização não coincidente com a posição do sensor utilizado para aquisição da resposta em aceleração. Assim, uma força impulsiva foi aplicada no nó 24 da viga (Figura 8.30), com o acelerômetro colocado no nó 54. Desta forma a F.R.I. que intervém na formulação é apenas a F.R.I.  $h_{54,24}(t)$ , que foi obtida utilizando o mesmo procedimento do teste anterior. Os resultados deste teste são apresentados nas Figuras 8.31 a 8.33, notando boa qualidade da reconstrução da força excitadora, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Este resultado confirma que o método da deconvolução, associado à técnica do gradiente conjugado, é insensível à localização do sensor com respeito à posição onde a força excitadora é aplicada.

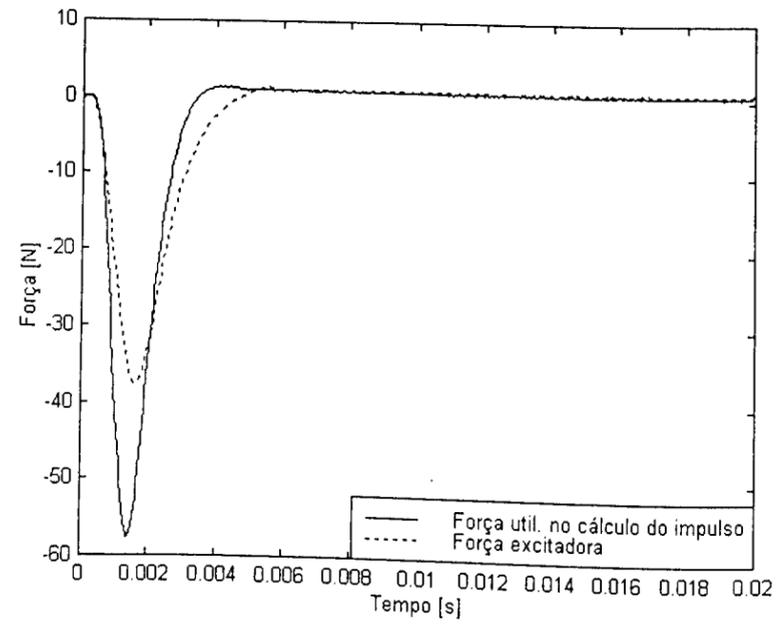


Figura 8.30 – Forças impulsivas.

----- : excitação utilizada para o cálculo do impulso.  
 \_\_\_\_\_ : excitação utilizada para fins de identificação da força.

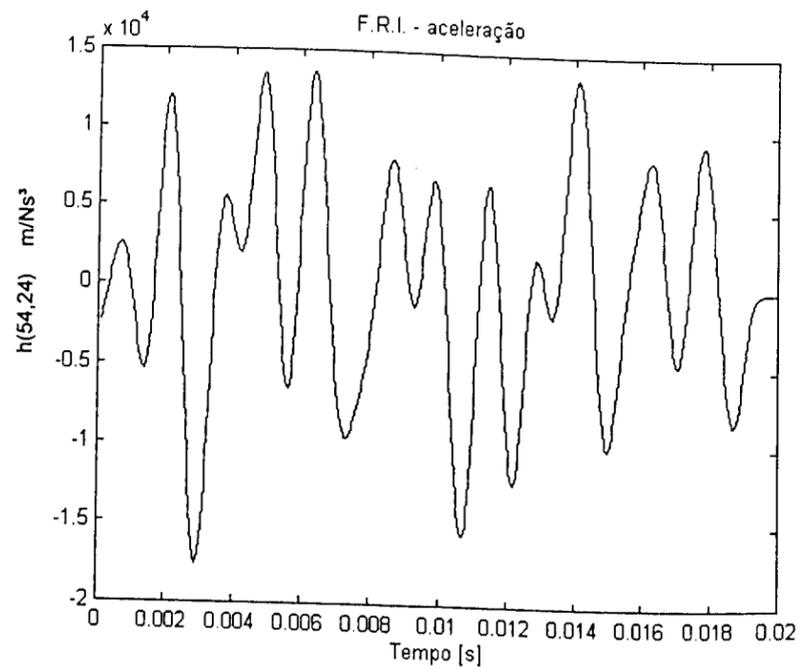


Figura 8.31 – F.R.I.,  $h_{54,24}$  para a viga.

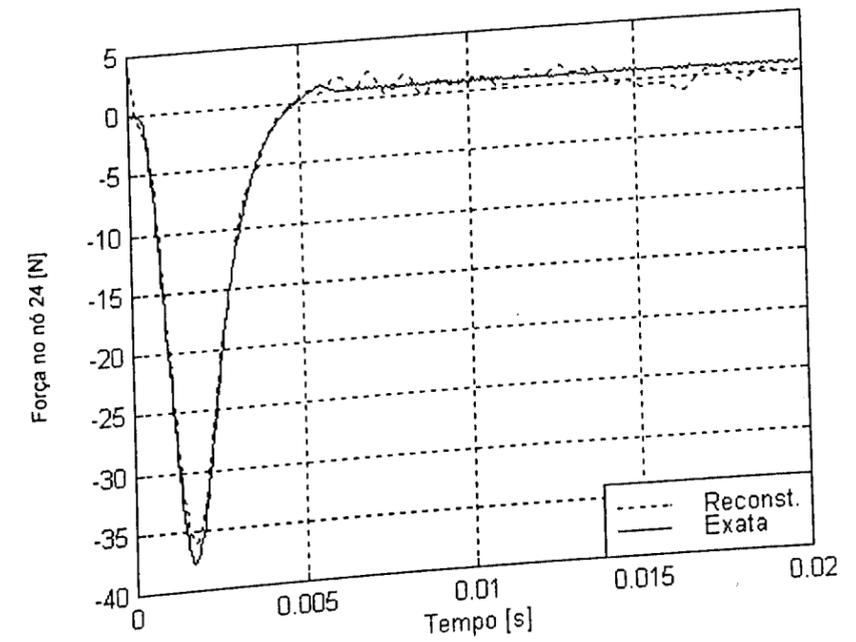


Figura 8.32 - Forças exata e reconstruída aplicada no nó 24.

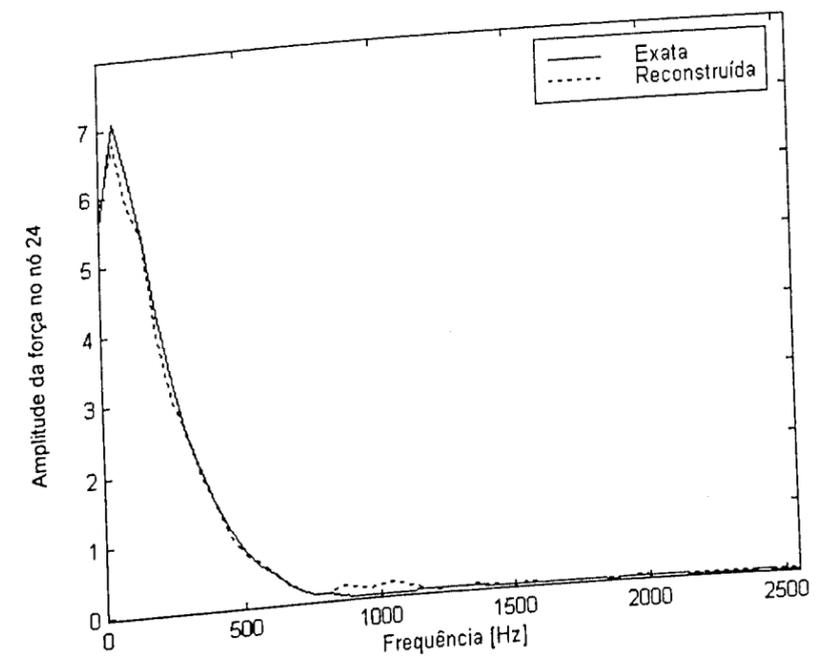


Figura 8.33 - Espectro de frequência da força aplicada no nó 24.

**Identificação de uma força harmônica com sensor e atuador na mesma posição.**

Neste teste, uma força harmônica de frequência 20 Hz é aplicada no nó 24, ficando o acelerômetro posicionado neste mesmo nó.

A resposta em aceleração foi adquirida no intervalo 0 a 1,6 s, discretizada em 512 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 3,1 \times 10^{-3}$  s).

Inicialmente, para a obtenção da função de resposta ao impulso (F.R.I.) da viga livre-livre, foi adotado o procedimento baseado na equação (5.18) associado ao método do gradiente conjugado. A partir de condições iniciais nulas, uma força impulsiva foi aplicada e o método do gradiente conjugado foi utilizado para resolver as equações de estimação.

As Figuras 8.34 e 8.35 mostram as respostas temporais e a F.R.I. em aceleração para este caso.

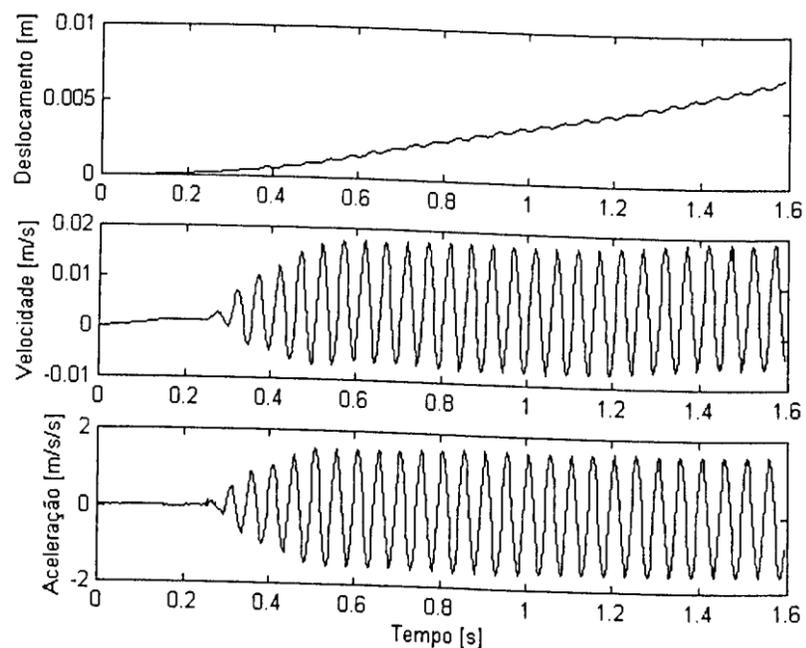


Figura 8.34 – Respostas temporais para o nó 24 da viga.

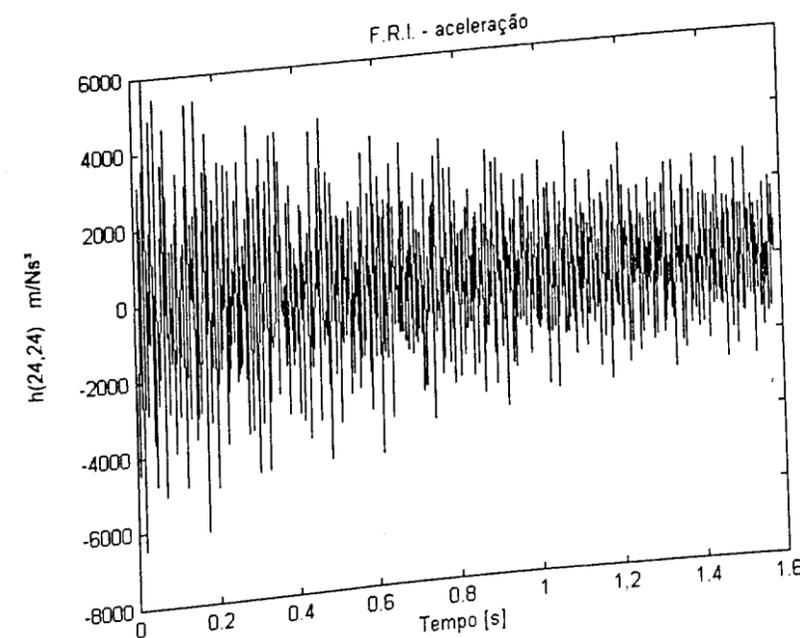


Figura 8.35 - F.R.I.,  $h_{24,24}$  para a viga.

Na segunda etapa do teste procedeu-se à identificação da força harmônica aplicada no nó 24 a partir da correspondente resposta em aceleração observada neste mesmo nó e da F.R.I.  $h_{24,24}$ . Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 8.36 a 8.37, onde são comparadas as forças medida e reconstruída, no domínio do tempo e da frequência, respectivamente. Pode-se observar que, assim como no caso do pórtico tridimensional, os dados foram adquiridos imediatamente após a ativação do excitador. Desta forma a função força não é perfeitamente harmônica e a amplitude aumenta durante os primeiros ciclos, devido à inércia do sistema estrutura-excitador. A força harmônica é reconstruída com boa precisão. O período e amplitude da força são corretamente identificados.

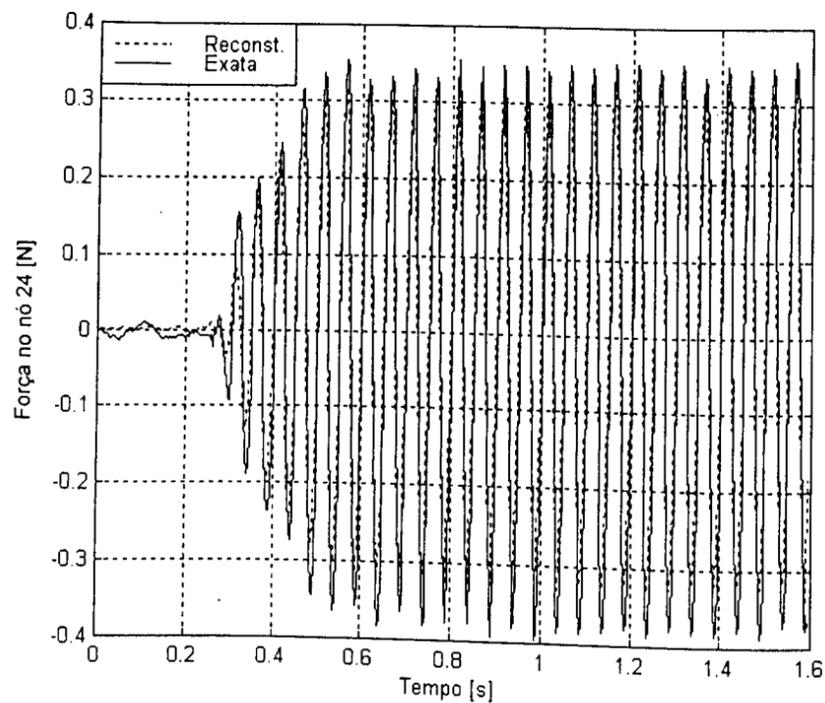


Figura 8.36 - Forças exata e reconstruída no nó 24.

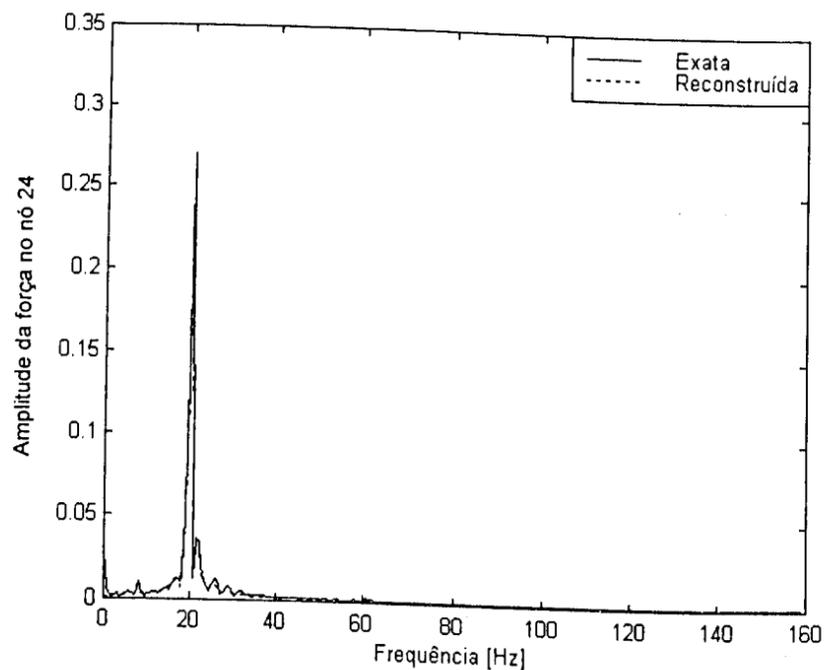


Figura 8.37 - Espectro de frequência da força aplicada no nó 24.

**Identificação de uma força periódica com sensor e atuador em posições não coincidentes.**

Procedimento similar ao descrito no teste anterior foi realizado considerando, desta vez, a força excitadora aplicada em uma localização não coincidente com a posição do sensor utilizado para aquisição da resposta em aceleração. Assim, a força foi aplicada no nó 24 e a resposta dinâmica foi adquirida no nó 54. Desta forma, a F.R.I. utilizada no procedimento de identificação é  $h_{54,24}$ . Foi empregando o mesmo procedimento adotado no teste anterior para a obtenção das respostas temporais e da F.R.I., no intervalo de 0 a 1,6 s, com discretização em 1024 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 1,56 \times 10^{-3}$  s). Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 8.38 a 8.40.

Aqui, mais uma vez, nota-se que a reconstruções corretas da força tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência foram proporcionadas pelo método da deconvolução.

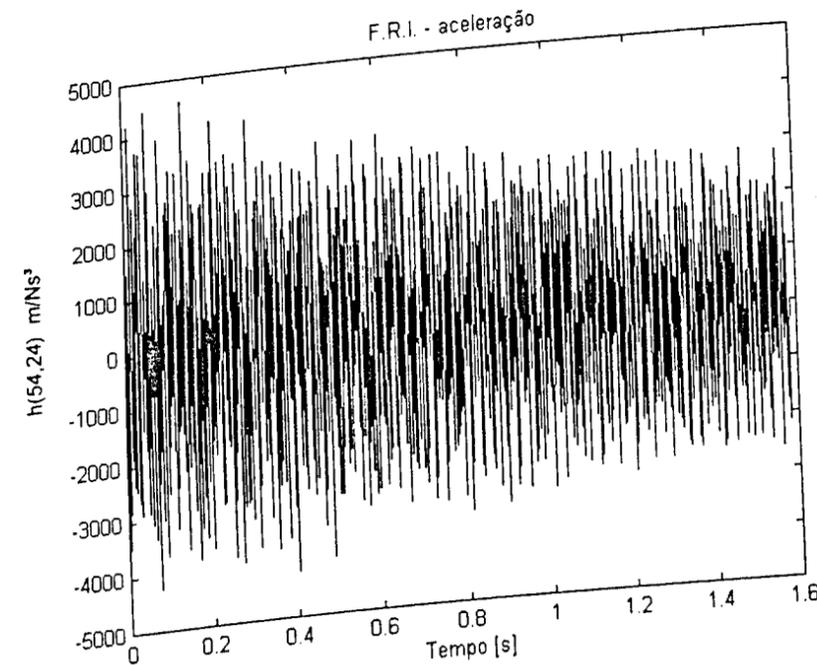


Figura 8.38 - F.R.I.,  $h_{54,24}$ , em aceleração para a viga.

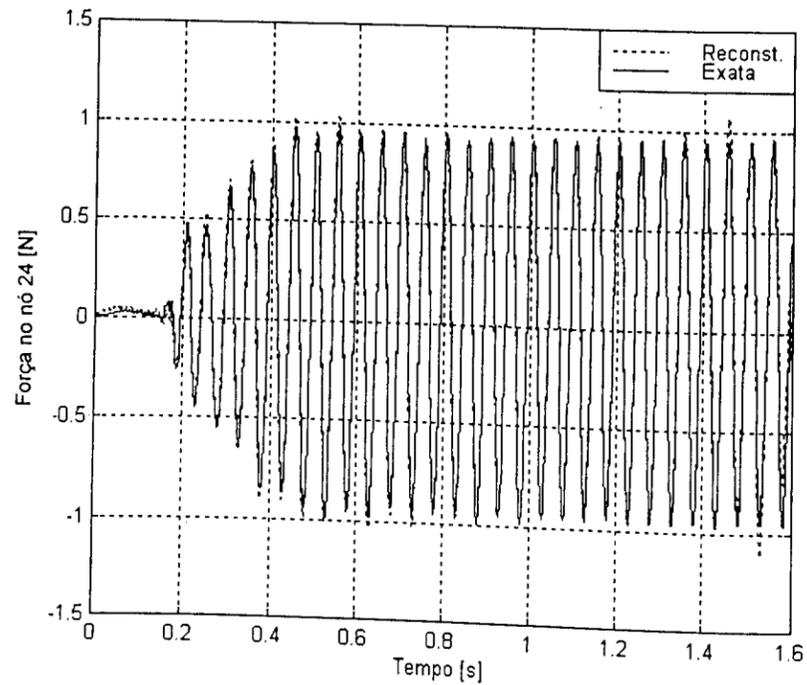


Figura 8.39 - Forças exata e reconstruída no nó 24.

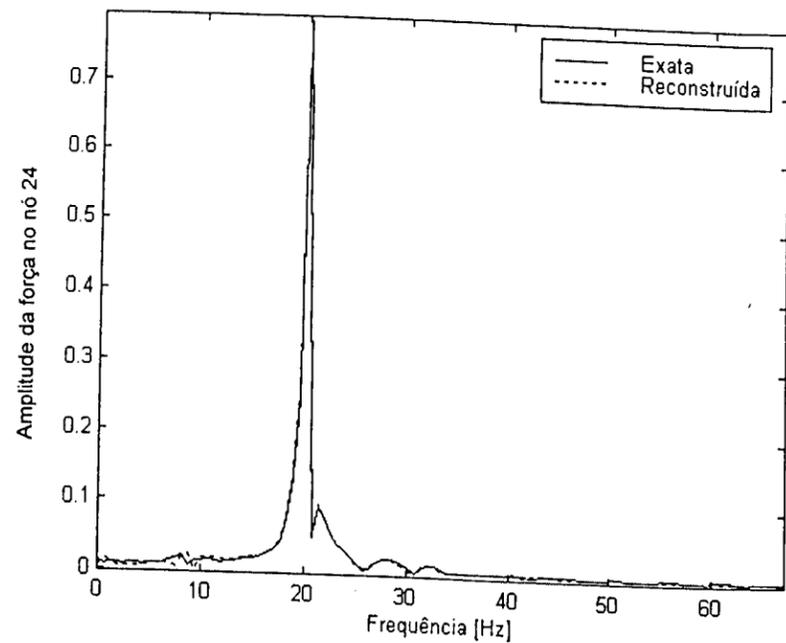


Figura 8.40 - Espectro de frequência da força aplicada no nó 24.

**Identificação de uma força com uma rápida varredura freqüencial, com sensor e atuador em posições não coincidentes.**

Este teste tem por objetivo a reconstrução de uma força de excitadora gerada através de uma sucessão de varreduras em frequência na banda [2 – 20 Hz], aplicada no nó 24 da viga, sendo cada ciclo de varredura completado em 0,55 s.

As condições iniciais foram admitidas nulas e as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 1,6s, discretizadas em 1024 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 1,56 \times 10^{-3}$  s). O acelerômetro foi posto no nó 54. As Figuras 8.41 e 8.42 mostram as forças reconstruídas comparadas com a força medida, no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente. Também este tipo de força, com um espectro freqüencial mais amplo foi reconstruída com boa precisão.

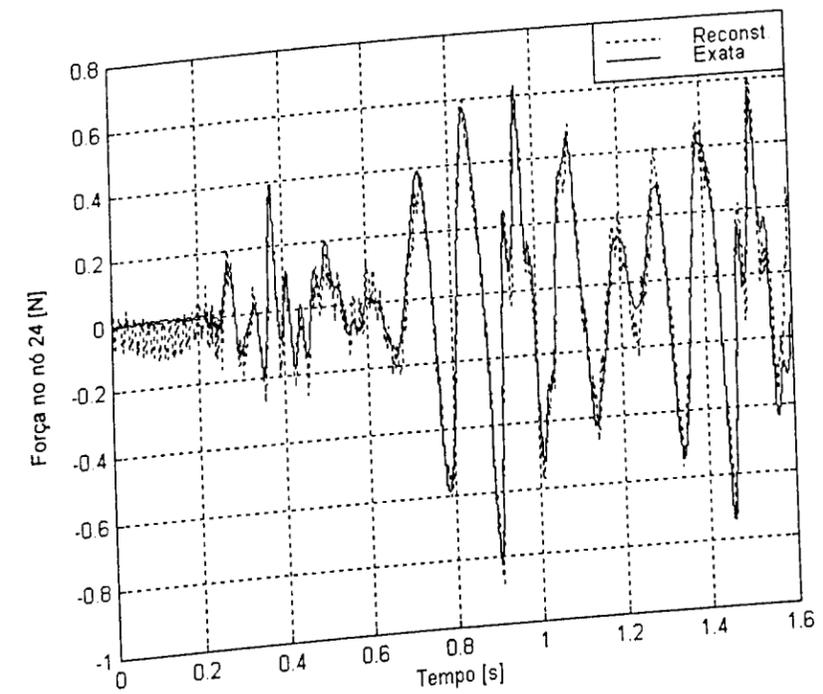


Figura 8.41 - Forças exata e reconstruída no nó 24.

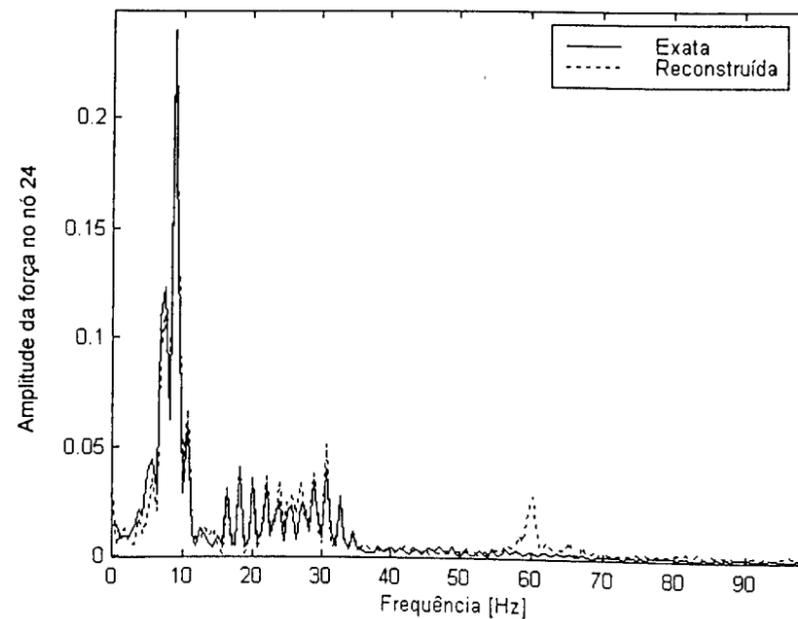


Figura 8.42 - Espectro de frequência da força aplicada no nó 24.

### 8.3.3 – Modelo Estrutural Inverso

#### 8.3.3.1 - Testes com a viga livre-livre

O mesmo sistema de medição empregado nas Seções 8.3.1 e 8.3.2 foi adotado para obtenção das forças excitadoras e das respostas em aceleração.

#### **Identificação de uma força impulsiva com sensor e atuador na mesma posição.**

Busca-se avaliar o método apresentado no Capítulo VI, sendo uma força impulsiva aplicada no nó 2 da viga ilustrada na Figura 8.2. As condições iniciais foram admitidas nulas e a resposta em aceleração foi adquirida no intervalo de 0 a 0,02 s, discretizada em 512 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 3,9 \times 10^{-5}$  s), por meio de um acelerômetro posicionado no nó 2.

A força excitadora é reconstruída a partir da equação diferença (6.8). As matrizes de estado do sistema necessárias para a identificação, foram obtidas através do modelo de elementos finitos da viga, apresentado na Seção 8.2.

As Figuras 8.43 e 8.44 mostram a força identificada nos domínios do tempo e da frequência, respectivamente.

Nota-se que o método de identificação de forças baseado no modelo estrutural inverso foi capaz de proporcionar resultados bastante satisfatórios. Obviamente, isto se deve ao fato de ter sido utilizado um modelo de elementos finitos capaz de representar, com precisão, o comportamento dinâmico da estrutura testada, conforme evidenciado na Figura 8.5.

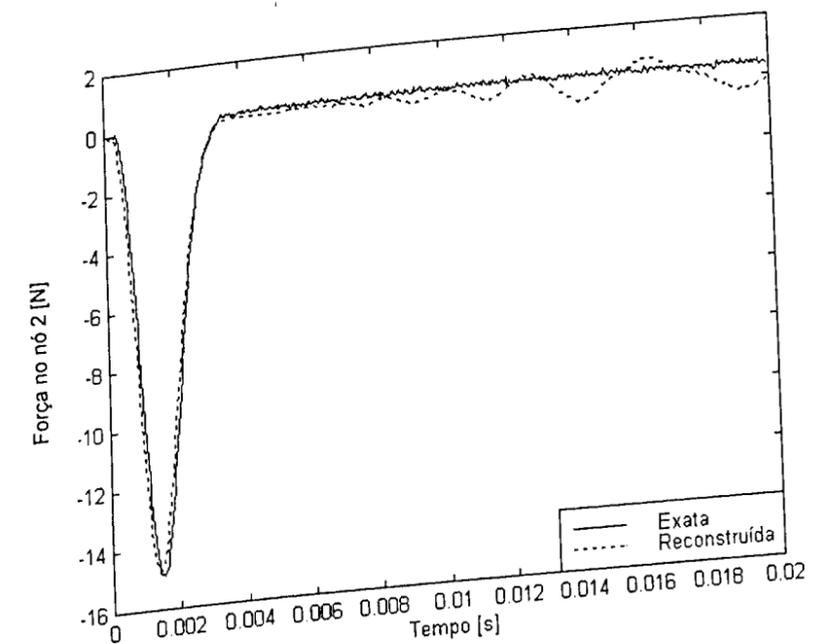


Figura 8.43 – Força impulsiva aplicada no nó 2.

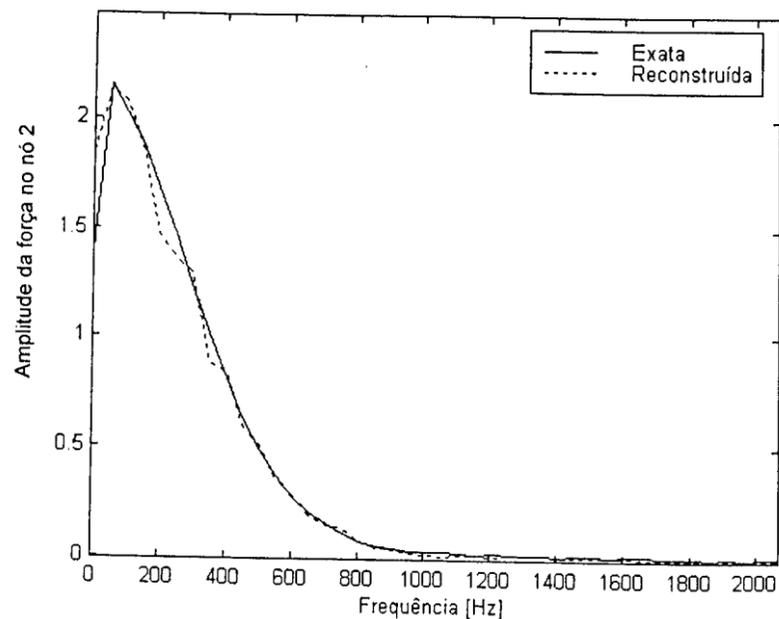


Figura 8.44 – Espectro de frequência da força aplicada no nó 2.

**Avaliação da sensibilidade do método de identificação em relação a erros de modelagem.**

Como verificado no Capítulo VII, o procedimento de identificação de forças baseado no modelo estrutural inverso depende da precisão do modelo empregado. Desta forma, procura-se analisar os efeitos de incertezas introduzidas na distribuição de rigidez do modelo, mediante reduções do módulo de elasticidade de alguns dos elementos constituintes do modelo de elementos finitos representado na Figura 8.4. O modelo foi subdividido 18 subdomínios cada um dos quais engloba três elementos consecutivos do modelo de 54 elementos, conforme ilustrado na Figura 8.45, onde estão destacados os subdomínios cujos valores dos módulos de elasticidade foram alterados.

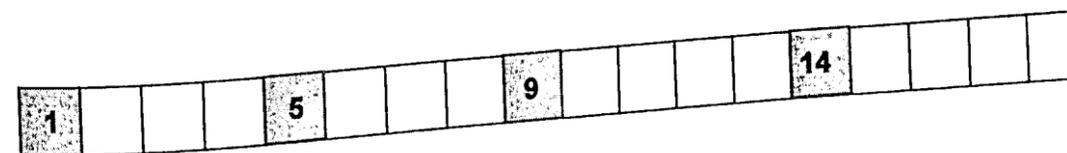


Figura 8.45 – Modelo de elementos finitos utilizado para avaliação da sensibilidade do método de identificação em relação a erros de modelagem.

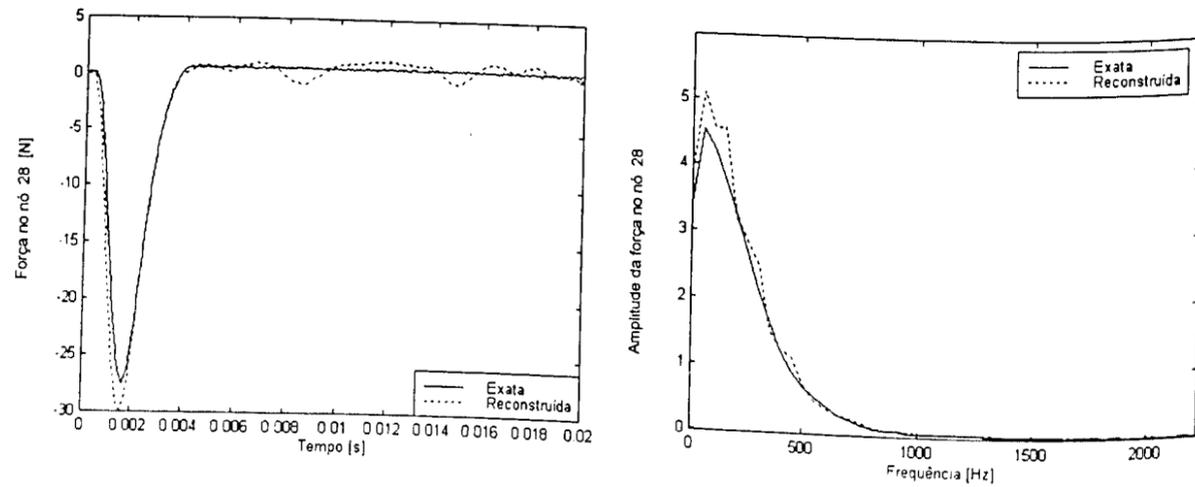
Nos testes de identificação realizados, foram explorados diversos níveis perturbação do modelo de elementos finitos, conforme apresentado na Tabela 8.3.

Tabela 8.3 – Valores dos níveis de redução empregado para o módulo de elasticidade

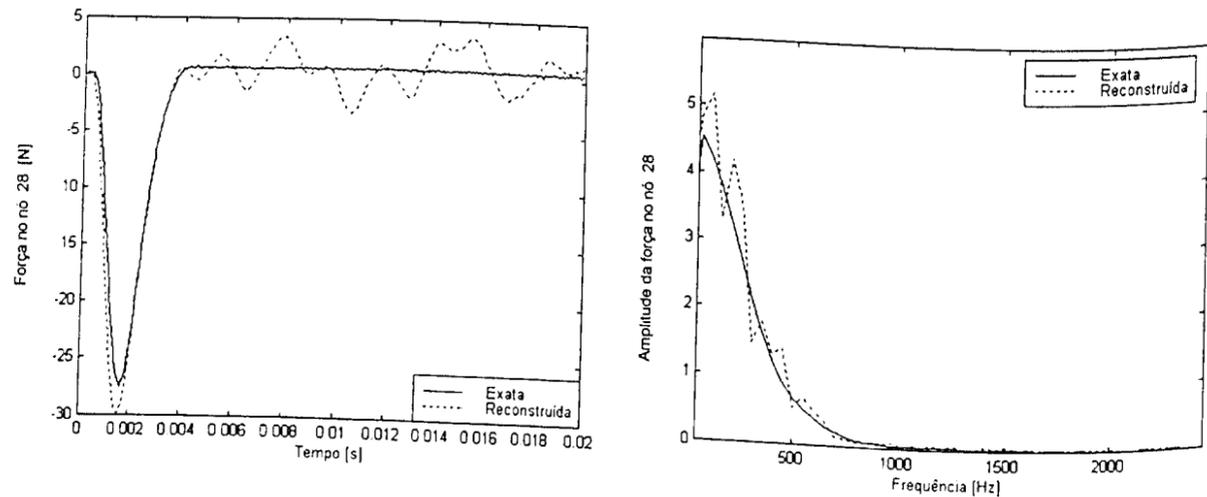
Caso	Elementos escolhidos para redução do módulo de elasticidade			
	1	5	9	14
1	Sem redução	Sem redução	Sem redução	Sem redução
2	20% valor inicial	10% valor inicial	40% valor inicial	30% valor inicial
3	40% valor inicial	30% valor inicial	60% valor inicial	50% valor inicial

Uma força impulsiva foi aplicada na estrutural real no nó 28 e o acelerômetro foi colocado também neste mesmo nó. As mesmas condições utilizadas para a obtenção da aceleração no teste anterior foram empregadas neste teste.

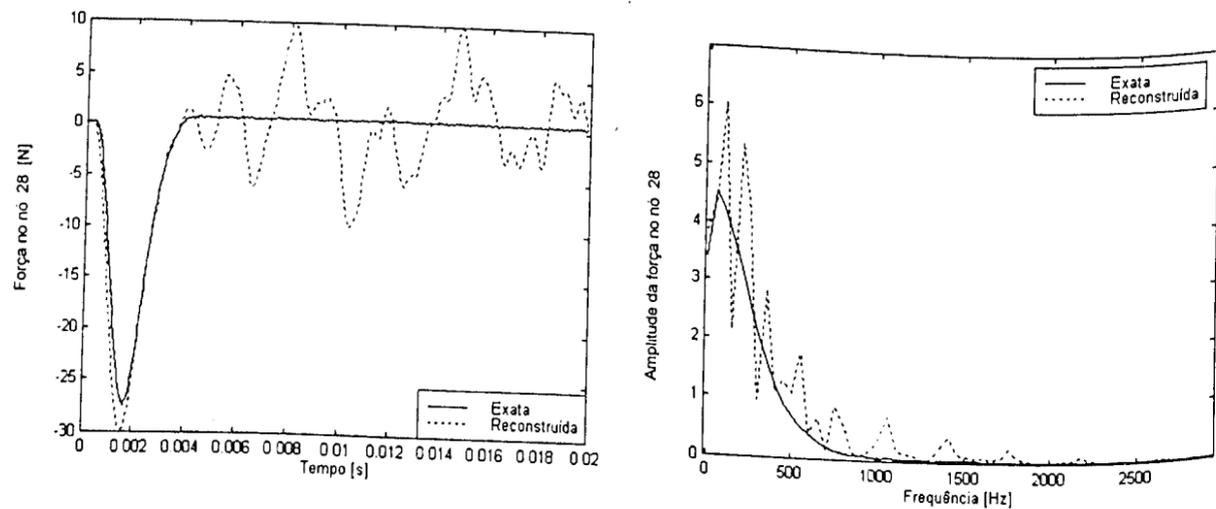
Os resultados mostrados na Figura 8.46 mostram que a força estimada tende a ser menos precisa para altos níveis de erros de modelagens. Contudo, para níveis moderados de incertezas no modelo, reconstruções razoavelmente precisas puderam ser obtidas, indicando que as estimativas são razoavelmente robustas com relação a incertezas no modelo.



(a) caso 1



(b) caso 2



(c) caso 3

Figura 8.46 – Força exata e reconstruída aplicada no nó 28, para os casos 1 a 3.

**Identificação de uma força harmônica com sensor e atuador na mesma posição.**

O objetivo é identificar uma força harmônica de frequência igual a 20 Hz aplicada no nó 24, com acelerômetro colocado neste mesmo nó.

As condições iniciais foram admitidas nulas e a resposta em aceleração foi adquirida no intervalo de 0 a 1,6 s, discretizada em 1024 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 1,56 \times 10^{-3}$  s).

O vetor da força excitadora é obtido a partir da equação diferença (6.8). As matrizes de estado do sistema teste, necessárias para a identificação, foram obtidas através do modelo de elementos finitos da viga, apresentado na Figura 8.4.

As Figuras 8.47 e 8.48 mostram as respostas temporais e a força identificada.

Observa-se que o método conseguiu reconstruir a força excitadora, tendo sido o período e a amplitude identificados com precisão razoável.

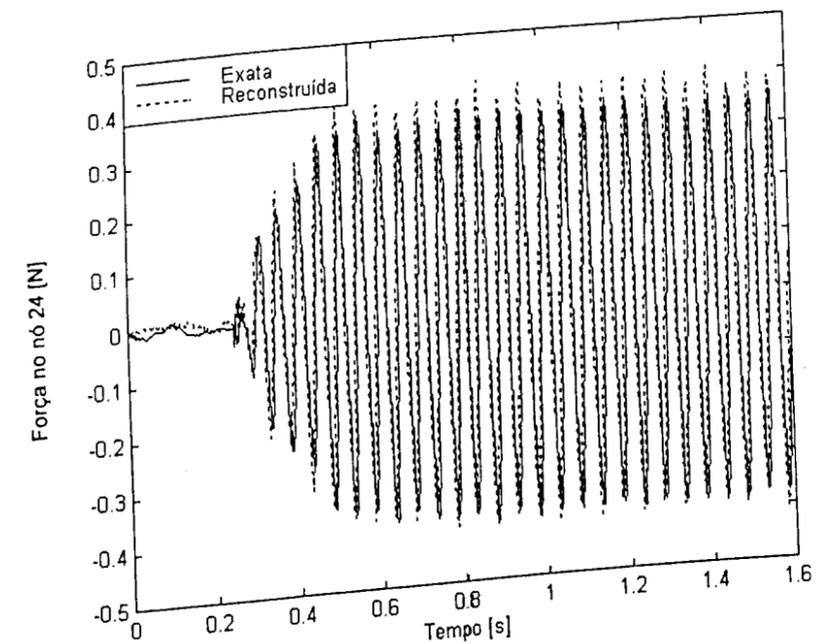


Figura 8.47 – Forças exata e reconstruída aplicada no nó 24.

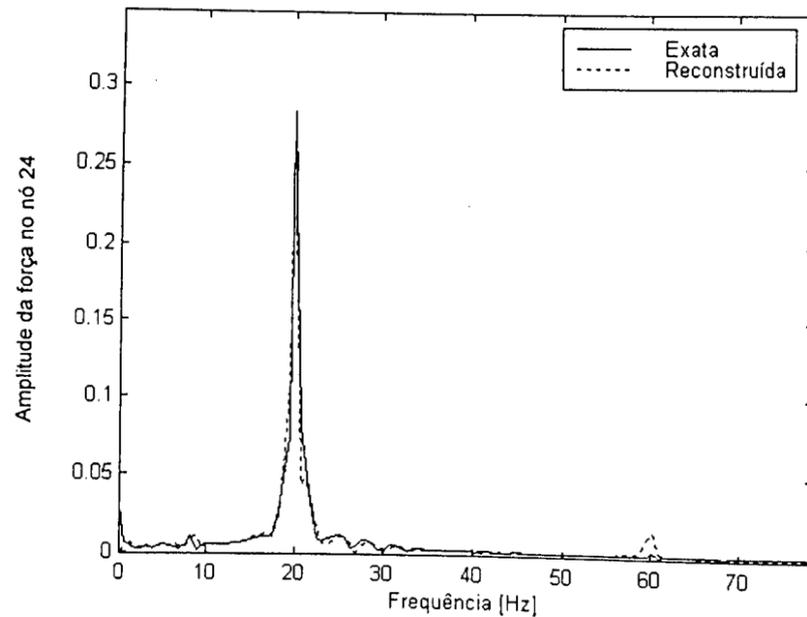


Figura 8.48 – Espectro de frequência da força aplicada no nó 24.

**Identificação de uma força com uma rápida varredura freqüencial.**

Uma força de excitação gerada executando uma sucessão de varreduras em frequência na banda de 2 – 20 Hz foi aplicada no nó 24 da viga, sendo cada ciclo de varredura completado em 0,55s.

As condições iniciais foram admitidas nulas e as respostas temporais foram observadas no intervalo de 0 a 1,6 s, discretizadas em 1024 pontos igualmente espaçados ( $\Delta t = 1,56 \times 10^{-3}$  s). O acelerômetro foi posto no nó 24. Os resultados da reconstrução são apresentados nas Figuras 8.49 e 8.50, podendo-se notar que também este tipo de força pôde ser reconstruída com precisão aceitável, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência

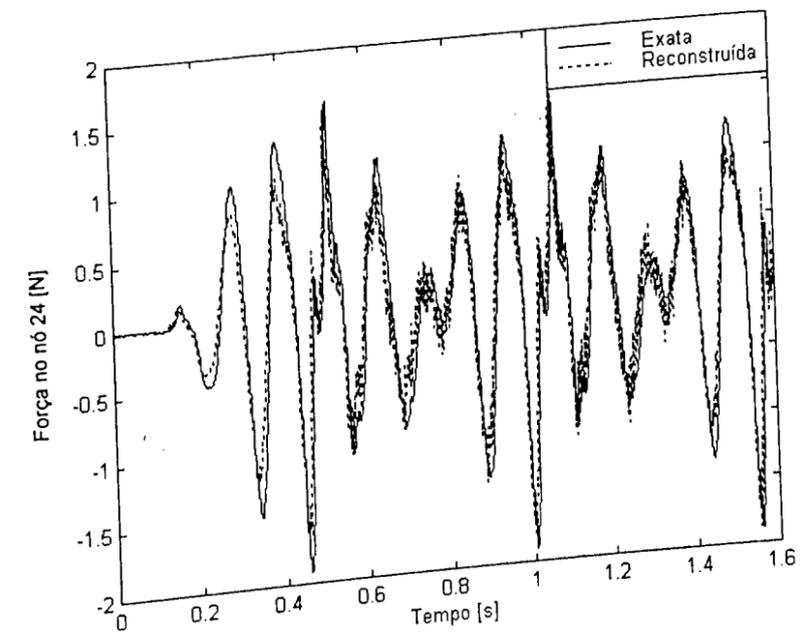


Figura 8.49 – Forças exata e reconstruída aplicadas no nó 24.

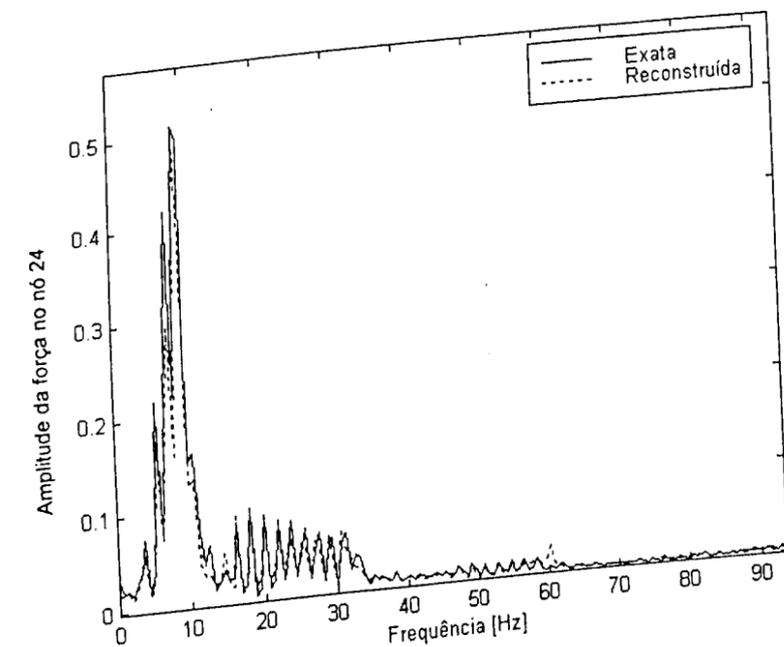


Figura 8.50 – Espectro de frequência da força aplicada no nó 24.

## CAPÍTULO IX

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO ESTUDO

No contexto do problema de identificação de forças excitadoras em elastodinâmica linear, o presente trabalho enfocou as técnicas operando no domínio do tempo. Foram estudados, em particular, três métodos baseados na utilização de três tipos diferentes de modelos dinâmicos, a saber:

- O método das Coordenadas Modais, explorando um modelo modal do sistema mecânico;
- O método da Deconvolução no domínio do tempo, que utiliza, como modelo, um conjunto de funções de resposta ao impulso da estrutura;
- O método baseado no Modelo Estrutural Inverso, que faz uso de um modelo formulado no espaço de estados com duas possíveis variantes: modelo em tempo contínuo e modelo em tempo discreto.

O estudo compreendeu o desenvolvimento das formulações de cada um dos métodos e a avaliação de suas características operacionais e desempenho, mediante a realização de numerosas aplicações, tanto a estruturas simuladas numericamente quanto a estruturas reais ensaiadas em laboratório. Em todas estas aplicações, buscou-se caracterizar as dificuldades presentes nas situações práticas com ênfase no uso de dados incompletos, na presença de ruídos de medida e na ocorrência de mau condicionamento numérico.

No estudo de cada método, contribuições originais foram propostas objetivando sua melhor adequação aos tratamentos de alguns de seus inconvenientes e dificuldades. As principais contribuições são relacionadas a seguir:

## a) Método das Coordenadas Modais

- Avaliação de desempenho do método na identificação de diferentes tipos, números e posições de forças, através de aplicações tanto a estruturas simuladas numericamente quanto a estruturas ensaiadas em laboratório.
- Proposição e avaliação de um procedimento para eliminação das tendências geradas pelo processo de integração numérica das respostas em aceleração para obtenção das respostas em velocidade e deslocamento, em atuações em que as condições iniciais não são nulas.
- Avaliação, no contexto do problema de identificação de forças, de um procedimento para escolha da posição dos sensores, baseado na minimização do número de condicionamento da sub-matriz modal utilizada.
- Proposição e avaliação do uso do método das Coordenadas Modais como uma das etapas de um procedimento para estimação de parâmetros físicos de elementos de suporte.
- Expansão da metodologia para o caso de amortecimento geral

## b) Método da Deconvolução no Domínio do Tempo.

- Avaliação do desempenho do método na identificação de diferentes tipos, número e posições de forças, mediante aplicações tanto a estruturas simuladas numericamente quanto a estruturas ensaiadas em laboratório.
- Avaliação do uso do Método do Gradiente Conjugado para a resolução numérica do sistema de equações de estimação e redução das dificuldades geradas pelo mau condicionamento numérico.
- Proposição e avaliação de um procedimento para redução do número de incógnitas, mediante o uso de expansões em série de funções ortogonais para representar as forças excitadoras.

- Proposição e avaliação do uso do Método da Deconvolução no Domínio do Tempo como uma das etapas de um procedimento para estimação de parâmetros físicos de elemento de suporte.
- Avaliação de um procedimento para identificação das funções de resposta ao impulso, associado ao Método do Gradiente Conjugado.

## c) Método Baseado no Modelo Estrutural Inverso

- Avaliação do desempenho do método na identificação de diferentes tipos, números e posições de forças, através de aplicações tanto a sistemas simulados numericamente quanto a estruturas ensaiadas em laboratório.
- Avaliação de um procedimento destinado a possibilitar o emprego do método nos casos em que as forças excitadoras e os sensores para aquisição das respostas têm posições não coincidentes.

De modo geral, os três métodos estudados demonstraram ser bem adaptados às aplicações práticas de Engenharia, dadas as características verificadas de relativa robustez em relação a ruídos experimentais e à sua capacidade de utilizar dados incompletos. Adicionalmente, os três métodos mostraram-se capazes de identificar simultaneamente várias forças excitadoras, aplicadas em localizações espaciais distintas da estrutura.

Não foi estabelecido para este trabalho, o objetivo de efetuar uma comparação sistemática dos três métodos estudados, o que seria considerado tarefa difícil e inconclusiva. Isto porque cada método utiliza uma formulação específica e um tipo particular de dados. No entanto, é útil confrontar algumas de suas principais características, evidenciadas no estudo realizado.

O Método das Coordenadas Modais tem a importante característica de produzir equações de estimação numericamente bem condicionadas, mediante uma escolha adequada das coordenadas instrumentadas para a aquisição das respostas. Isso implica uma relativa estabilidade. Nestas condições, o método provou ser razoavelmente robusto em relação a ruídos aleatórios presentes nos dados, sendo capaz de reconstruir as forças com boa precisão no processo de resolução numérica destas equações.

O maior inconveniente do método das Coordenadas Modais verificado é a sensibilidade de suas estimações em relação ao número de modos e coordenadas instrumentadas empregados para formação da matriz modal utilizada.

O Método baseado na Deconvolução no domínio do tempo requer pequena quantidade de dados e de instrumentação, sendo, portanto, uma técnica bastante adequada para aplicações práticas. Contudo, seu principal inconveniente é o típico mau condicionamento numérico das equações de estimação, o que requer o uso de procedimento especiais de regularização. Associado ao método do Gradiente Conjugado, o método da Deconvolução no domínio do tempo provou-se ser razoavelmente robusto em relação a ruídos experimentais, sendo capaz de reconstruir diferentes tipos de forças com precisão satisfatória.

O Método baseado no modelo Estrutural Inverso também demonstrou ser capaz de reconstruir satisfatoriamente diferentes tipos de forças excitadoras na presença de ruídos experimentais e dados incompletos. Sendo este método baseado no uso de um modelo analítico, sua utilização fica restrita aos casos em que este modelo possa ser obtido com razoável precisão. O método aplica-se tanto as condições de forças e sensores com posições coincidentes quanto as condições em que as posições de forças e sensores são distintas. Neste último caso, deve-se fazer uso de um procedimento específico, baseado no avanço da equação de saída, de modo a possibilitar a construção do modelo inverso.

Alguns aspectos relativos aos métodos de identificação de forças no domínio do tempo não foram abordados neste trabalho e poderão ser objeto de investigação futura. Dentre eles, podem ser citados:

- identificação de cargas distribuídas, mediante a reconstrução de um conjunto de forças discretas equivalentes;
- reconstrução simultânea de forças e momentos externos aplicados à estruturas;
- análise teórica das relações entre pólos e zeros dos sistemas direto e inverso no Método baseado no modelo Estrutural Inverso, com vistas à análise de estabilidade e a definição de critérios para a escolha adequada do avanço  $\ell$ ,

nos casos em que sensores e forças são posicionados em localizações distintas.

- Avaliação do desempenho dos métodos quando aplicados a sistemas estruturais mais complexos, sujeitos a maior número de forças excitadoras. Em particular, os procedimentos de identificação podem ser aplicados a máquina rotativas visando quantificar o desbalanceamento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barrett, R., Berry M., Chan, T., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhoui, V., Pozo, R., Romine, C. & Van der Vorst, H., 1994, "Templates – for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods".
- Bartlett, F. D. Jr. & Flannelly, W. G., 1979, "Model Verification of Force Determination for Measuring Vibratory Loads", *Journal of the American Helicopter Society*, pp. 10-17.
- Bateman, V. I., Carne, T. G., Gregory, D. L., Attaway, S.W. & Yoshimura, H. R., 1991, "Force Reconstruction for Impact Tests", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 113, pp. 192-200.
- Bateman, V. I., Carne, T. G. & Mayes, R. L., 1992, "Force Reconstruction Using A Sum of Weighted Accelerations Technique", *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, UC/SEM*, pp. 291-298.
- Bateman, V. I., Carne, T. G. & Mayes, R. L., 1994, "Force Reconstruction Using A Sum of Weighted Acceleration Technique – Max-Flat Procedure", *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, UC/SEM*, pp. 1054-1062.
- Bendat, J. S. & Piersol, A. G., 1980, "Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis", A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, New York.
- Clark, W. W., Kim, J. H. & Marangoni, R. D., 1998, "Using Residual Flexibility for Improved Observation of Reaction Forces in Flexible Structures", *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 20, pp. 401-408.
- Craig, Jr. & Roy, R., 1981, "Structural Dynamics – An Introduction to Computer Methods", John Wiley & Sons, New York.
- Delves, L. M. & Walsh, J., 1974, "Numerical Solution of Integral Equations", Oxford, Clarendon Press.

- Desanghere, G. & Snoeys, R., 1985, "Indirect Identification of Excitation Forces", Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, pp. 1-25.
- Deuffhard, P. & Hairer, E., 1983, "Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations", Proceedings of an International Workshop, Heidelberg, Germany.
- Dubowski, D.G. & Dobson, B.J., 1985, "Computation of Excitation Forces Using Structural Response Data", The 56<sup>th</sup> Symposium on Shock and Vibration, Monterey, California, pp. 101-105.
- Ekstrom, M. P., 1973, "A Spectral Characterization for the Ill-Conditioning in Numerical Convolution", IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, pp. 344-347.
- Ellis, N. A., 1973, "Technique for Evaluating the Fluctuating Aerodynamic Forces on a Flexible Building", Proceedings of the International Symposium on Vibration Problem in Industry, Keswick, England.
- Ewins, D.J., 1984, "Modal Testing: Theory and Practice", John Wiley & Sons Inc., New York.
- Fabunmi, J. A., 1985, "Effects of Structural Modes on Vibratory Force Determination by the Pseudoinverse Technique", AIAA Journal, vol. 24, n° 3, pp. 504-509.
- Fasana, A. & Piombo, B. A. D., 1996, "Identification of Linear Mechanical Systems by Deconvolution Techniques", Mechanical Systems and Signal Processing, pp. 350-373.
- Fregolent, A. & Sestieri, A., 1990, "Assessment of Procedures for Force Identification from Experimental Response", Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, pp. 825-838.
- Fregolent, A., 1998, "Mathematical Conditions", On International Course on New Applications and Techniques of Experimental Modal Testing Updating, Optimization, Damage Detection, Cadis, June 29 - July 3, 1998.

- Genaro, G., 1997, "Identificação de Forças Excitadoras a Partir das Respostas Dinâmicas no Domínio do Tempo", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.
- Genaro, G. & Rade, D. A., 1998, "Input Force Identification in the Time Domain", 16<sup>nd</sup> International Modal Analysis Conference, Santa Barbara, California, USA.
- Ghoneim, G. A. M., Johansson, B. M., Smyth, M. W. & Grinstead, J., 1984, "Global Ship Ice Impact Forces Determined from Full-Scale Tests and Analytical Modeling of the Ice-Breakers Canner Kigoriak and Robert Le Meur", Trans. of SNAME, pp. 253-282.
- Goldberg, D. E., 1989, "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning", MA, Addison Wesley Publishing Company, Inc.
- Gregory, D. L., Priddy, T. G. & Smallwood, D. O., 1987, "Experimental Determination of the Dynamic Forces Acting on Non-Rigid Bodies", Society of Automotive Engineers Inc., pp.7126-71236.
- Groetsch, C. W., 1984, "The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind", Pitman Publishing, London.
- Hadamard, J., 1923, "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations", New York: Dover, 1952 re-issue.
- Hashemi, I.W. & Hammond, J.K., 1996, "Recognition and Inversion of Non-Minimum Phase Systems Using  $L_1$  and  $L_2$  Norms, Proceedings of the Conference held at Swansea, UK, pp. 194-204.
- Hendricx, Ir. W., 1994, "Accurate Vehicle FRF Measurements for Indirect Force Determination Based upon Matrix Inversion", ISMA19-Tools for Noise and Vibration Analysis, pp. 1037-1048.
- Hillary, B. & Ewins, D. J., 1980, "A Method for Force Determination from Vibration Response Measurements", Aeroelasticity in Turbomachines: Proceedings of the Second International Symposium, Lausanne, Switzerland, Sept. 8-12.

Hillary, B. & Ewins, D. J., 1984, "The Use of Strain Gauges in Force Determination and Frequency Response Function Measurements", 2<sup>nd</sup> International Modal Analysis Conference, Orlando, CA, pp. 627-634.

Holland, J. H., 1975, "Adaptation in Natural and Artificial Systems", The University of Michigan Press, Ann Arbor.

Horta, L. G. & C. A. Sandridge, 1992, "On-Line Identification of Forward/Inverse Systems for Adaptive Control Applications", AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, pp. 1639-1649.

Hunt, B. R., 1972, "A Theorem on the Difficulty of Numerical Deconvolution", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, pp. 94-95.

Jordan, R.W. & Whitson, G.S., 1984, "Remote Impact Analysis by Use of Propagated Acceleration Signals, II: Comparison Between Theory and Experiment", Journal of Sound and Vibration, Vol. 97, No. 1, pp. 53-63.

Juang, Jer-Nan, 1994, "Applied System Identification", Prentice Hall PTR, Englewood cliffs, New Jersey.

Junkins, John L., 1978, "Mechanics Dynamica Systems", Sijthoff & Noordhoff International Publishers Alphen Aan Den Rijn, The Netherlands.

Kammer, D. C., 1996, "Input Force Reconstruction Using a Time Domain Technique", AIAA Journal, AIAA-96-1201-CP, pp. 21-30.

Karlsson, S. E. S., 1996, "Identification of External Structural Loads from Measured Harmonic Responses", Journal of Sound and Vibration, 196(1), pp. 59-74.

Kriel, T. E. S. & Heyns, P. S., 2000, "Assessment of Frequency Domain Force Identification Procedures", Msc. Dissertation, Department of Mechanical and Aeronautical Engineering, Faculty of Engineering, University of Pretoria, Pretoria, South Africa.

Kwakernaak, H. & Sivan, R. 1972, "Linear Optimal Control Systems", Wiley-Interscience, a division of John Wiley & Sons, Inc.

Law, S. S., Chan, T. H. T. & Zeng, Q. H., 1999, "Moving Force Identification – A Frequency and Time Domains Analysis", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 121, September, pp. 394-401.

Maia, N. M. M., 1989, "An Introduction to the Singular Value Decomposition Technique (SVD)", Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Las Vegas, USA, pp. 335-339.

Mas, P., Sas, P. & Wyckaert, K., 1994, "Indirect Force Identification Based upon Impedance Matrix Inversion: A Study on Statistical and Deterministical Accuracy", ISMA19- Tools for Noise and Vibration Analysis, pp. 1049-1065.

Meirovitch, L., 1975, "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill.

Natke, G. H. & Ben-Haim, 1993, "Identification of Boundary Conditions of Structures", Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, pp. 1490-1492.

O'Callahan, J. & Piergentili, F., 1996, "Force Estimation Using Operational Data", Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, pp. 1586-1592.

Ogata, K., 1993, "Engenharia de Controle Moderno", Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, Rio de Janeiro.

Okubo, N., 1983, "The Analysis of Dynamic Behaviours of a Machine under Operating Condition", Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, Katholieke Univeresiteit te Leuven, Belgium, pp. 1-14.

Okubo, N., Tanabe, S. & Tatsuno, T., 1985, "Identification of Forces Generated by a Machine Under Operating Conditions", Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Modal Analysis Conference, Orlando, pp. 920-927.

- Ory, H., Glaser, H. & Holzdeppe, D., 1986, "Quality of Modal Analysis and Reconstruction of Forcing Functions Based on Measured Output Data", Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Los Angeles, vol. 2, pp. 850-857.
- Pacheco, R. P. & Steffen, V. Jr., 1998, "Identificação e Análise de Sensibilidade de Sistemas Mecânicos Utilizando Funções Ortogonais", Anais do II Seminário do Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, pp.75-80.
- Park, H. & Park, Y., 1994, "Transient Response of an Impacted Beam and Indirect Impact Force Identification Using Strain Measurements", Shock and Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 106, pp. 22-28.
- Phillips, D. L., 1962, "A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 9, pp. 84-95.
- Priddy, T. G., Gregory, D. L. & Coleman, R. G., 1988, "Strategic Placement of Accelerometers to Measure Forces by the Sum of Weighted Accelerations", SAND87-2567.UC-38, February. Available from: National Technical Information Service, 5285 Port Royal Road, Springfield, VA 22162.
- Prost, R. & Goutte, R., 1977, "Deconvolution When the Convolution Kernel has No Inverse", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-25, n° 6, December, pp. 542-549.
- Ribeiro, J.G.T, Freire, J.L.F. & Castro, J.T.P, 1999, "Some Comments on Digital Integration to Measure Displacements Using Accelerometers", Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC XVII), Orlando, Florida, USA.
- Rice, H. J., XU, K. Q. & Fitzpatrick, J. A., 1986, "In Situ Identification of Local Non-Linearities in Multiple Degree-of-freedom Systems", Proceedings of the Conference on Identification in Engineering Systems", pp. 238-252, Swansea, UK.
- Santos, I. F., 1996, "Theoretical and Experimental Identification of the Stiffness and Damping Coefficients of Active Tilting-pad Journal Bearings", Proceedings of the Conference on Identification in Engineering Systems, pp. 783-792, Swansea, UK.

- Santos, M. A. & Varoto, P. S., 1999, "Identification of Dynamics Loads: A comparative analysis Between Time and Frequency Domain Techniques", 15<sup>th</sup> Brazilliam Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil.
- Sarkar, T. K., Weiner, D. D. & Jain, V. K., 1981, "Some Mathematical Considerations in Dealing with the Inverse Problem", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-29, n° 2, March.
- Sarkar, T. K., Weiner, D. D., Jain, V. K. & Dianat, S. A., 1982, "Impulse Response Determination in the Time Domain - Theory", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-30, n° 4, July.
- Shih, C.Y., Zhang, Q. & Allemang, R.J., 1989, "Force Identification by Using Principle and Modal Coordinate Transformation Method", Vibration Analysis - Technique and Application, ASME Publications DE - Vol. 18-4, pp. 303-309.
- Starkey, J. M. & Merrill, G. L., 1989, "On the Ill-Conditioned Nature of Indirect Force-Measurement Techniques", Journal of Modal Analysis, July, pp. 103-108.
- Steltzner, A. D. & Kammer, D. C., 1999, "Input Force Estimation Using an Inverse Structural Filter", Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, pp. 954-960.
- Stevens, K. K., 1987, "Force Identification Problems - An Overview", Procedures of the SEM Conference on Experimental Mechanics, pp. 838-844.
- Thomas, G., 1983, "A Positive Optimal Deconvolution Procedure", Proceedings of the International Conference Acoustics Speech Signal Process, Boston, USA, pp. 651-654.
- Thomas, G. & Jahmi, G., 1988, "Some results on Optimal Constrained Deconvolution", in: J.L. Lacoume, A. Chehikian, N. Martin and J. Malbos, eds, Signal Processing IV, EUSIPCO 88, Elsevier, Amsterdam.
- Thomas, G. & Prost, R., 1991, "Iterative Constrained Deconvolution", Signal Processing, vol. 23, n° 1, April.

- Tikhonov, A. N. & Arsenin, V. Y., 1977, "Solutions of Ill-Posed Problems", New York: Wiley.
- Tsang, W. F. & Rider, E., 1989, "The technique of extraction of structural parameters from experimental forced vibration data", Proceedings of IMAC 7, Las Vegas, Nevada, February, pp. 1627-1633.
- Twomey, S., 1963, "On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature", Journal of the Association for Computing Machinery, pp. 97-101.
- Varoto, P. S. & McConnell, K. G., 1999, "On the Identification of Interface Forces and Motions in Coupled Structures", Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC XVII), Orlando, Florida, USA.
- Yeong Ryeol Kim & Kwang Joon Kim, 1997, "Indirect Input Identification by Modal Model Technique", Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, pp. 1263-1269.
- Whiston, G. S., 1984, "Remote Impact Analysis by Use of Propagated Acceleration Signals, I: Theoretical Methods", Journal of Sound and Vibration, 97(1), pp. 35-51.
- Whiston, G. S. & Jordan, R. W., 1984, "Remote Impact Analysis by Use of Propagated Acceleration Signals, II: Comparison Between Theory and Experiment", Academic Press Inc. Limited, London, pp. 53-63.
- Williams, T., 1989, "Transmission-Zero Bounds for Large Space Structures, with Applications", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 12(1), pp. 33-38.
- Williams, D., 1948, "Dynamic Loads in Aeroplanes under Given Impulsive Loads with Particular Reference to Landing and Gust Loads on a Large Flying Boat", Aeronautical Research Council, Techn. Rep. n° 2221.
- Wood, L. C. & Treitel, S., 1975, "Seismic Signal Processing", Proceedings IEEE, vol. 63, April, pp. 649-661.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- Braun, W. J., Miller, M. H. & Schultze, J. F., 1999, "The Development of Machine-Tool Force Reconstruction for Wear Identification", Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, pp. 94-98.
- D'Cruz, J., Crisp, J. D. C. & Ryall, T. G., 1992, "On the Identification of a Harmonic Force on a Viscoelastic plate from Response Data", ASME Journal of Applied Mechanics 59, pp. 722-729.
- Doyle, J. F., 1993, "Force Identification from Dynamic Responses of a Bimaterial Beam", SEM Spring Conference on Experimental Mechanics held in Milwaukee, WI on June 10-13, pp. 64-69.
- Fabunmi, J. A., 1987, "Feasibility of Dynamic Load Determination from Measured Mobilities", Proceedings of the Seminar Conference on Experimental Mechanics, pp. 845-850.
- Forsythe, G. E., Malcon, M. A. & Moler, C. B., 1977, "Computer Methods for Mathematical Computations", Prentice-Hall.
- Ghoneim, G. A. M., Johansson, B. M., Smyth, M. W. & Grinstead, J., 1984, "Global Ship Ice Impact Forces Determined from Full-Scale Tests and Analytical Modeling of the Ice-Breakers Canner Kigoriak and Robert Le Meur", Trans. of SNAME, pp. 253-282.
- Hyungsson Park & Youn-silk Park, 1993, "Transient Response of an Impacted Beam and Indirect Impact Force Identification Using Strain Measurements", Shock and Vibration, vol. 1, n° 3, pp. 267-278.
- Jackson, D. D., 1972, "Interpretation of Inaccurate, Insufficient and Inconsistent Data", Geophys. J. R. astr. Soc. 28, pp. 97-109.

Katz, R. M., Kene, V. D., Ravera, R. J. & Skalski, C. A., 1974, "Performance of Magnetic Suspension for High Speed Vehicles Operating over Flexible Guideways", ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 96, pp. 204-212.

Lavrentiev, M. M., 1967, "Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics", In Tracts in Natural Philosophy, vol. II, Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Lee, H. & Park, Y., 1994, "The Characteristics of Inverse Transfer Function in Determining Input Forces", Proceedings of the International Conference on Vibration Engineering-ICVE'94, Beijing, pp. 139-144.

Lee, H. & Park, Y., 1995, "Error Analysis of Indirect Force Determination and a Regularisation Method to Reduce Force Determination Error", Mechanical Systems and Signal Processing, 9(6), pp. 615-633.

Maia, N. M. M., 1991, "Fundamentals of Singular Value Decomposition", Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, USA, pp. 709-715.

M-C Han, Wicks, A. L., 1990, "Force Determination with Slope and Strain response measurement", Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Kissimmee, USA, pp. 365-372.

Michaels, J. E. & Yih-Hsing Pao, 1986, "Determination of Dynamic Forces from Wave Motion Measurements", Journal of Applied Mechanics, vol. 53, pp. 61-68.

Nashed, M. Z., 1972, "Some aspects of Regularization and Approximation Solutions of Ill-Posed Operator Equations", In Proc. Army Analysis Conf., pp. 163-181.

Okubo, N., 1983, "The Analysis of Dynamic Behaviours of a Machine under Operating Condition", Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, Katholieke Univeresiteit te Leuven, Belgium, pp. 1-14.

Paez, T. L. & Coleman, R., 1989, "Identification of Distributed Forces on a Structure", Proceedings - Institute of Environmental Sciences, pp. 280-286.

Pilkey, W. D. & Kalinowski, J., 1972, "Identification of Shock and Vibration Forces", System Identification of Vibrating Structures, ASME, pp. 73-86.

Polak, E., 1971, "Computational Methods in Optimization", Academic Press, New York.

Sarkar, T. K., Tseng, F. I., Rao, S. M., Dianat, S. A. & Hollmann, B. Z., 1985, "Deconvolution of Impulse Response from Time-Limited Input and Output: Theory and Experiment", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. IM-34, n° 4, pp. 541-546.

Silverman, L. M., 1969, "Inversion of Multivariable Linear Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 14, n° 3, June, pp. 270-276.

Silverman, H. F. & Pearson, A. E., 1973, "On Deconvolution Using the Discrete Fourier Transform", IEEE Transactions on Audio Electroacoustics, vol. AU-21, n° 2, pp. 112-118.

Söderström, T. & Stoica, P., 1989, "System Identification", Prentice Hall International (UK) Ltd.

Ting, E.C., Genin, J. & Ginsberg, J. H., 1974, "A general algorithm for moving mass problem", Journal of Sound and Vibrations, Vol. 33, pp. 49-58.

Wang, M. L., Kreitinger, T. & Luo, H. L., 1987, "Force Identification from Structural Responses", Proceedings of the SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Houston, Texas, pp. 851-855.

Wilson, J. F., 1973, "Response of simple spans to moving mass loads", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 11, pp. 4-5.

## ANEXO I

## EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NO SISTEMA DE MEDIÇÃO.

Tabela AI.1 – Equipamentos utilizados.

Equipamento	Descrição	Número de série
Martelo de impacto	B & K tipo 8202	1321460
Acelerômetros	B & K tipo 4375	972723 / 972721 / 972725
Transdutores de forças	B & K tipo 8200	925771 / 1365610
Excitador eletrodinâmico	B & K	1878072
Amplificadores de sinais	B & K tipo 2635	1355954/1922809/1355955
Amplificador de potência	B & K tipo 2712	906297
Gerador de sinal	B & K tipo 1049	1353335
Placa digitalizadora	TEKTRONIX	
Analizador de espectro	WIN30DS/4 – 16 canais	
	SD-380 – 2 canais	