

SIDNEY RIBEIRO DA SILVEIRA

USO DA TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF E
FUNÇÕES DE GREEN PARA SOLUÇÃO
ANALÍTICA DE PROBLEMAS INVERSOS NÃO
LINEARES EM CONDUÇÃO DE CALOR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2019

SIDNEY RIBEIRO DA SILVEIRA

USO DA TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF E
FUNÇÕES DE GREEN PARA SOLUÇÃO
ANALÍTICA DE PROBLEMAS INVERSOS NÃO
LINEARES EM CONDUÇÃO DE CALOR

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

Uberlândia
2019

“Tudo é número”. Pitágoras.

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S587
2019 Silveira, Sidney Ribeiro da, 1984-
USO DA TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF E FUNÇÕES DE GREEN
PARA SOLUÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS INVERSOS NÃO
LINEARES EM CONDUÇÃO DE CALOR [recurso eletrônico] / Sidney
Ribeiro da Silveira. - 2019.

Orientador: Gilmar Guimarães.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-
graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2560>
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Guimarães, Gilmar, 1960-, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado, nº 283, COPEM				
Data:	dezoito de dezembro de dois mil e dezenove	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:35
Matrícula do Discente:	11523EMC008				
Nome do Discente:	Sidney Ribeiro da Silveira				
Título do Trabalho:	Uso da Transformada de Kirchhoff e Funções de Green para Solução Analítica de Problemas Inversos Não Lineares em Condução de Calor				
Área de concentração:	Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos				
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS DE PROBLEMAS INVERSOS PARA OBTENÇÃO DE CAMPOS TÉRMICOS: DETECÇÃO PRECOCE DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS DE PROBLEMAS INVERSOS PARA OBTENÇÃO DE CAMPOS TÉRMICOS: DETECÇÃO PRECOCE DE CANCER DE MAMA (IMAGENS TÉRMICAS) E DE TEMPERATURA				

Reuniu-se na Sala de Defesa da Pós Graduação 1M206- Bloco 1M, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Luis Mauro Moura - PUC/PR; Fran Sérgio Lobato - FEQUI/UFU; Francisco José de Souza - FEMEC/UFU; Gilmar Guimarães - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que o Prof. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva - UNIFEI participou da defesa por meio de Skype desde a cidade de Itajubá/MG e os demais membros da banca e o aluno participaram *in loco*.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Gilmar Guimarães, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Gilmar Guimarães, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/12/2019, às 16:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva, Usuário Externo**, em 18/12/2019, às 16:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/12/2019, às 16:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luís Mauro Moura, Usuário Externo**, em 18/12/2019, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/12/2019, às 14:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1718577** e o código CRC **C4A93DA6**.

À Gabriela, família e amigos.

Agradecimentos

À Gabriela, pelas boas ideias e companherismo.

À minha família, pela dedicação e incentivo.

Ao Gilmar pela amizade e orientação deste trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Transferência de Calor Modelagem e Experimento LTCME da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

Aos amigos da Faculdade de Engenharia Mecânica FEMEC: docentes e técnicos-administrativos.

E às agências financiadoras CAPES e CNPq.

Ribeiro, S. S. **Uso da Transformada de Kirchhoff e Funções de Green Para Solução Analítica de Problemas Inversos Não Lineares em Condução de calor**. 2019. 97f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Problemas de condução de calor podem ser observados nos mais variados aspectos. A importância da compreensão deste fenômeno reside na melhoria de processos e na caracterização de materiais. Contudo, observa-se que na maioria dos processos ocorre a variação das propriedades térmicas com a temperatura, este fenômeno é observado principalmente em grandes variações de temperatura. Neste sentido, este trabalho propõe o uso da transformada de Kirchhoff e funções de Green, para a determinação da solução analítica para o problema de condução de calor não linear, transiente e com condições de contorno não lineares. A Transformada de Kirchhoff é usada para linearização do problema e a solução analítica da versão linear é determinada usando funções de Green, assim a solução não linear é reconstruída usando a transformada inversa de Kirchhoff. Comparações com temperaturas experimentais foram feitas e observou-se grande concordância da solução obtida neste trabalho. Propõe-se também a abordagem inversa, fazendo a adaptação, para a versão não linear, da técnica: *transfer function based on Green's functions* TFBGF, para estimativa de fluxo de calor, considerando um problema unidimensional, a aplicação da técnica mostrou-se eficiente ao estimar dois tipos distintos de fluxo de calor. Também é proposto o desenvolvimento de uma técnica para determinação do comportamento da condutividade térmica variando com a temperatura. A técnica é baseada na aplicação da transformada de Kirchhoff para determinação dos coeficientes do polinômio $k(T)$. Comparações de coeficientes estimados usando diferentes formas de $k(T)$ mostraram-se de acordo com os valores teóricos.

Palavras-chave: transformada de Kirchhoff, funções de Green, solução analítica, problema inverso não linear, condução de calor não linear

Ribeiro, S. S. **Use of Kirchhoff Transform and Green Functions for Analytical Solution of Nonlinear Inverse Heat Conduction Problems.** 2019. 97p. D. Sc Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Heat conduction problems can be observed in many aspects. The importance of understanding this phenomenon lies in the process improvement and in the materials characterization. However, it is observed that in most of the processes the variation of thermal properties with temperature occurs, this phenomenon is mainly observed in large temperature variations. Therefore, this work proposes the use of the Kirchhoff's transform and Green's functions to determine the analytical solution for the nonlinear unsteady heat conduction with nonlinear boundary conditions. The kirchhoff's transform is used for problem linearization and the solution of linear version is determined using Green's functions, so the nonlinear solution is reconstruted using the Kirchhoff's inverse transform. Comparisons with experimental temperatures were made and there was a great agreement of the solution obtained in this work. The inverse approach is also proposed, adapting, for the nonlinear version, the techinque: transfer function based on Green's functions TFBGF, to estimate heat flux, considering a one-dimensional problem, the aplication of the techinque was efficient to estimate two distinct types of heat flux. It is also proposed to develop a techinque for conductivity behavior determination varying with temperature. The technique is based on the application of the Kirchhoff's transform to determine the polynomial coefficients $k(T)$. Comparisons of estimated coefficients using different forms of $k(T)$ are shown according to the theoretical values.

Keywords: Kirchhoff transform, Green's function, analytical solution, nonlinear inverse problem, nonlinear heat conduction

Lista de Figuras

3.1	Problema térmico X22Y22Z22NL	28
3.2	Temperaturas e condutividade térmica para o modelo X22Y22Z22NL.	33
3.3	Representação gráfica de um fluxo de calor discreto. Fernandes (2013)	34
4.1	Comparação entre as soluções X22L e X22NL	37
4.2	Diferença absoluta entre X22L e X22NL	38
4.3	Equivalência entre o modelo tridimensional e o modelo unidimensional	39
4.4	Comparação entre as soluções X22Y22Z22NL e X22NL	40
4.5	Comportamento da função $k(T)$	41
4.6	Comparação entre as soluções X22L e X22NL	41
4.7	Modelo tridimensional com fluxo de calor em área parcial na superfície $y = W$	43
4.8	Temperaturas do modelo X22Y22Z22 nos pontos T1, T2 e T3 considerando área parcial de fluxo de calor.	43
4.9	Comparação entre as soluções X22NL analítica e X22NL COMSOL	44
4.10	Diferença relativa entre as soluções X22NL analítica e X22NL COMSOL	45
4.11	Temperaturas experimentais, Tillmann (2005)	46
4.12	Valores experimentais de k e valores da função $k(T)$	47
4.13	Diferença absoluta entre k estimado e a função $k(T)$. Eq.(4.1)	48
4.14	Fluxo de calor ajustado pela Eq.(4.2)	49
4.15	Comparativo Tillmann (2005) e Solução analítica não linear	50
4.16	Esquema experimental usado por Wang <i>et al.</i> (2018)	51
4.17	Fluxo de Calor Wang <i>et al.</i> (2018)	52
4.18	Valores experimentais de k e valores da função $k(T)$	53
4.19	Comparativo de temperaturas obtidas por Wang <i>et al.</i> (2018) com a Solução analítica X22NL	55
5.1	Sistema dinâmico não linear	58
5.2	Sistema dinâmico linear	58
5.3	Fluxo de calor usado para simulação de temperaturas experimentais	67
5.4	Temperaturas simuladas para as posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$	68
5.5	Resposta impulsiva	69
5.6	Estimativa e diferença relativa para $x = 0$	69
5.7	Estimativa e diferença relativa para $x = L/2$	70
5.8	Estimativa e diferença relativa para $x = L$	70

5.9	Temperaturas geradas a partir de um fluxo gaussiano e resultados da aplicação da técnica para estimativa de fluxo de calor.	71
5.10	Comparativo entre fluxo de calor estimado e temperaturas recalculadas usando o fluxo de calor estimado.	72
6.1	Fluxo de calor usado na obtenção das temperaturas sintéticas.	76
6.2	Temperaturas sintéticas com adição de ruído $\epsilon\sigma$	77
6.3	Temperaturas do modelo linear dadas em termos de $\Phi(x, t)$	77
6.4	Valores estimados para o coeficiente A e valor médio.	78
6.5	Fluxo de calor, temperaturas aparentes e sintéticas, estimativa da condutividade térmica e comparativo entre a condutividade estimada e imposta.	82
6.6	Temperaturas	83
6.7	Variação de $\alpha(T)$	84
6.8	Diferença relativa entre as soluções X22NL e Comsol.	85
6.9	Comparativo entre $k(T)$ imposto e reconstruído a partir das constantes A e B	86
6.10	Diferença relativa entre a condutividade térmica imposta e estimada.	87

Lista de Tabelas

2.1	Tipos e numeração das Condições de Contorno.	23
3.1	Propriedades térmicas e geométricas usadas na solução X22Y22Z22NL. . . .	32
4.1	Propriedades térmicas que serão aplicadas nos modelos X22NL e X22L	36
4.2	Propriedades térmicas que serão aplicadas nos modelos X22NL e Comsol. . .	40
4.3	Propriedades térmicas e geométricas que serão aplicadas nos modelos X22Y22Z22NL. . . .	42
4.4	Propriedades térmicas e geométricas que serão usadas no modelo X22NL. . .	49
4.5	Condutividade térmica dependente da temperatura Wang <i>et al.</i> (2018)	52
4.6	Propriedades térmicas usadas por Wang <i>et al.</i> (2018) e o modelo X22NL . .	54
5.1	Propriedades térmicas e geométricas usadas para estimativa de fluxo de calor	66
6.1	Parâmetros usados para obtenção das temperaturas sintéticas.	76
6.2	Propriedades térmicas e geométricas para determinação de temperaturas sintéticas e aparentes.	80
6.3	Comparativo entre as constantes A e B estimadas e impostas.	81
6.4	Propriedades térmicas e geométricas usadas para obtenção das temperaturas sintéticas via Comsol.	83
6.5	Comparativo entre as constantes A e B estimativas e impostas.	84

Sumário

1	Introdução e o Estado da Arte	1
1.1	Introdução	1
1.2	Problemas Em Condução de Calor Não Lineares	3
1.3	Problemas Inversos em Condução de Calor Não Lineares	7
1.4	Escopo e Contribuições Deste Trabalho	10
2	Fundamentação Teórica	12
2.1	Introdução	12
2.2	Solução geral para a equação do calor unidimensional não linear	12
2.2.1	Linearidade e Superposição	13
2.3	Solução Analítica: Existência e Unicidade	14
2.4	A transformada de Kirchhoff	15
2.4.1	A Transformada Inversa de Kirchhoff	17
2.4.2	Condições de contorno	18
2.5	O Método de Funções de Green (FG)	20
3	Proposta de Linearização	24
3.1	Introdução	24
3.2	Problema Térmico X22NL	24
3.3	Processo de linearização	25
3.4	Solução do Problema Auxiliar Via Funções de Green	26
3.5	Aplicando a Transformada Inversa de Kirchhoff	27
3.6	Modelo Térmico 3D Transiente Não Linear	28
3.7	Solução Híbrida	33
4	Verificação Intrínseca, Representação Gráfica e Comparações Com Modelos Numéricos e Experimentais	36
4.1	Verificação Intrínseca da Solução X22NL	36
4.2	Verificação Intrínseca da Solução X22Y22Z22NL	38
4.2.1	Representação Gráfica - Modelo X22NL	40
4.3	Representação Gráfica - Modelo X22Y22Z22NL	42
4.4	Comparação: Solução Analítica Com Método Numérico	44
4.5	Comparação: Solução Analítica X22NL Com Temperaturas Experimentais	45
4.5.1	Tillmann (2005)	45

4.5.2	Wang <i>et al.</i> (2018)	50
5	Problema Inverso Não Linear: Estimativa de Fluxo de Calor Usando Soluções Analíticas	56
5.1	Introdução	56
5.2	Função de Transferência Não Linear	56
5.3	Análise de Estabilidade	61
5.4	Aplicação: Problema Térmico X22NL	66
6	Problema Inverso Não Linear: Estimativa da Condutividade Térmica Dependente da Temperatura Usando Soluções Analíticas	73
6.1	Introdução	73
6.2	Desenvolvimento da Técnica	73
6.3	Caso Particular: $k(T) = k_0(1 + AT)$	75
6.4	Caso Particular: $k(T) = k_0(A + BT)$	79
6.5	Estimando a Condutividade Térmica Dependente da Temperatura a Partir de Temperaturas Sintéticas Obtidas Numericamente	82
7	Conclusão	88
	Referências Bibliográficas	90
A	Existência, Unicidade e Dependência Contínua Para a Equação De Condução de Calor Não Linear	93

Capítulo 1

Introdução e o Estado da Arte

1.1 Introdução

Problemas envolvendo condução de calor podem ser observados em diversos aspectos e nas mais variadas formas. Podem-se citar dentre os mais variados casos: o aquecimento de uma chapa em um tratamento térmico, a condução de calor proveniente de um processo de furação ou corte, comportamento térmico durante um processo de soldagem ou o a geração de calor devido a processos de metabolismo celular.

Pode-se observar que a maioria dos problemas térmicos em engenharia apresentam propriedades dependentes da temperatura. Por exemplo: condutividade térmica, densidade e calor específico que são não linearidades cuja variação é acentuada em região de alta temperatura.

Nas últimas décadas, muitos pesquisadores tem-se dedicado a obtenção de soluções para a equação diferencial não linear, sendo propostos uma diversidade de métodos que transitam entre numéricos e analíticos. Contudo, observa-se ainda algumas simplificações na equação diferencial, citam-se: considerações de regime permanente, condições de contorno homogêneas, ou independente do tempo e espaço, métodos de aproximação de propriedades dependentes da temperatura, ou ainda, simplificação de domínios em diversas regiões onde considera-se o sistema térmico linear.

Tais aproximações ou simplificações devem-se ao fato da complexidade matemática apresentada em problemas não lineares e suas condições de contorno, que podem também ser não lineares. Assim, por vezes, aproximações ou simplificações são empregadas devido a deficiência de métodos analíticos generalizados para determinação de sua solução.

Assim, pretende-se, usando ferramentas de análise matemática e conceitos de engenharia e física estabelecer este comportamento, através da determinação do perfil térmico não linear que apresentará um sólido aquecido ou em processo de aquecimento. Neste caso, dizemos

que esta análise é feita de forma direta, isto é, conhece-se previamente todas as variáveis que envolvem o fenômeno, restando apenas realizar o cálculo do campo de temperatura.

Outra forma de análise que pode ser empregada ao estudo de condução de calor não linear é definida como problema inverso. Neste contexto pode-se pensar que o problema térmico é definido por três variáveis básicas: causa, sistema e efeito.

A causa pode ser definida como a entrada do sistema, isto é, o efeito causador da variação de temperatura como fluxo ou geração interna de calor e condições do ambiente externo à geometria.

Pode-se denominar como sistema o meio onde se ocorre a variação de temperatura, por exemplo: uma barra de metal ou tecidos vivos. Já o efeito caracteriza-se pelas temperaturas resultantes em um processo de aquecimento.

Desta forma, caracteriza-se como problema inverso o conhecimento de apenas duas das três variáveis supracitadas. Geralmente, em aplicações práticas, conhece-se apenas as temperaturas medidas através de um experimento. Assim, resta determinar o efeito causador da variação térmica apresentada, que pode ser fluxo de calor, geração de calor ou efeitos externos.

Outra abordagem em problemas inversos se dá quando se conhece o efeito causador e as temperaturas geradas mas são desconhecidas as propriedades do sistema não linear. Neste sentido, trata-se de um problema inverso de estimativa de propriedades térmicas, neste caso específico, propriedades térmicas que dependem da temperatura.

Variadas são as abordagens que podem ser realizadas neste contexto, envolvendo problemas direto ou inverso: Métodos numéricos, de otimização, estatísticos, imagens térmicas, e métodos matemáticos para cálculo de soluções analíticas.

As soluções analíticas em condução de calor apresentam-se como uma forte e robusta ferramenta para o cálculo de temperatura em um problema direto ou inverso. As soluções analíticas tem esta força devido ao fato de não dependerem de aproximações, estimativas, erros de arredondamento ou truncamento, pois são exatas, de fácil implementação e apresentam baixo custo computacional.

A obtenção de soluções analíticas para os problemas tratados neste trabalho requerem procedimentos mais elaborados aos que são normalmente usados em problemas lineares, devido as não linearidades que surgem na equação governante e ou condições de contorno.

A importância das análises realizadas neste trabalho residem na melhor compreensão física e matemática dos fenômenos não lineares em condução de calor, abordados de maneira direta ou inversa e do comportamento do sistema térmico quando se analisa a condutividade térmica variando com a temperatura. Pretende-se neste trabalho, contribuir diretamente

com a literatura, visto que não existem muitos trabalhos abordando o tema de estimativa de fluxo de calor em um sistema térmico não linear.

Desta forma objetiva-se neste trabalho a investigação, o desenvolvimento de soluções analíticas e a análise matemática de problemas não lineares em condução de calor através da aplicação conjunta da transformada de Kirchhoff e funções de Green.

Também são objetivos deste trabalho o uso das soluções analíticas desenvolvidas na aplicação à problemas inversos envolvendo a estimativa do fluxo de calor e condutividade térmica variando com a temperatura. Propõe-se uma adaptação, para versão não linear, da técnica inversa (*transfer function based on Green's functions*) (TFBGF) para a estimativa de fluxo de calor e o uso da transformada de Kirchhoff para a estimativa da condutividade térmica não linear.

Apresentam-se a seguir o estado da arte envolvendo problemas de condução de calor não lineares, estimativas para condutividade térmica e estimativas de em problemas não lineares.

1.2 Problemas Em Condução de Calor Não Lineares

Apresentam-se a seguir os principais trabalhos disponíveis na literatura sobre diferentes métodos de solução para equações diferenciais não lineares aplicadas à condução de calor.

Polyanin, Zhurov e Vyazmin (2000) abordaram a generalização do método de separação de variáveis aplicadas a equações diferenciais parciais de segunda ordem.

Neste contexto os autores propuzeram construir soluções exatas de equações diferenciais. O método envolveu a busca por transformações que permitiam reduzir a dimensão da equação diferencial e a dependência não linear aplicando-se o método de separação de variáveis e similaridade. Assim, buscaram por novas famílias de soluções exatas para problemas tridimensionais, parabólicos e hiperbólicos não lineares.

Foi mostrado que o método possibilita construir soluções exatas para os problemas não lineares propostos. Também foram apresentados exemplos usando diferentes funcionais não lineares, inclusive, termo de geração de calor não linear.

A abordagem sobre os teoremas de existência e unicidade para a solução do problema não linear transiente de condução de calor foi desenvolvida por Cimatti (2005).

O autor apresentou a equação diferencial parcial não linear e sua respectiva solução geral e usando o teorema de inversão global de Levy-Caccioppoli mostrou que o problema possui única solução.

O resultado apresentado por Cimatti (2005) é de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho, pois, garante a existência de uma solução para o problema proposto.

No mesmo sentido Rincon, J.Limaco e Liu (2001) também mostraram a existência e unicidade para o problema não linear.

Ganji e Sadighi (2007) abordaram métodos de perturbação que consistem em perturbar a equação diferencial a partir de um pequeno parâmetro, que segundo os autores, é complexo de ser encontrado quando se trata de problemas não lineares reais. Dois métodos semi analíticos foram abordados para a resolução dos problemas de condução de calor não linear propostos. Sendo eles: O método de iteração variacional (VIM) e homotopia-perturbação (HPM).

O método VIM consiste em construir correções funcionais usando multiplicadores de Lagrange que foram identificados através da otimização em teoria variacional, onde as aproximações iniciais foram arbitrárias. Já o método HPM, segundo os autores, reúne transformações em um problema complexo para constituir um problema simples. O Método HPM é aplicado à equação diferencial separada, parte linear e não linear.

Exemplos de aplicações foram apresentados por Ganji e Sadighi (2007) como equações em meios porosos considerando não linearidade cúbica. Os autores concluem que ambos métodos são eficazes como solução para problemas desta natureza.

Sun, Chang e Liang (2008) Apresentaram o uso da transformada de Kirchhoff para resolver o problema unidimensional transiente que modela a concentração de cloreto em concreto exposto ao ambiente clorídrico. A proposta apresentada é interessante de ser observada por se tratar de um problema de difusão, onde a abordagem dada a equação diferencial é aplicável ao contexto de condução de calor. Assim, o coeficiente de difusão usado na equação diferencial é dependente do tempo, profundidade e concentração de cloreto. A transformada de Kirchhoff foi empregada a fim de linearizar o modelo que comparado ao modelos apresentados na literatura apresentou similaridades.

Após determinado a equação diferencial linearizada, a mesma é então resolvida via transformada de Laplace para explicitar sua solução. E assim quando comparada a modelos numéricos obtidos via elementos finitos apresentou grande proximidade.

Salienta-se que o termo não linear tratado por Sun, Chang e Liang (2008) apresenta natureza diferente quando comparado a condutividade térmica dependente da temperatura. Contudo norteia a abordagem proposta no que tange algumas manipulações algébricas que serão aplicadas neste trabalho.

As soluções analíticas representam uma importante ferramenta para a solução de problemas de engenharia, uma vez que podem ser usadas para a validação de soluções aproximadas, facilitam a análise e o entendimento de problemas físicos Fernandes (2009), possibilitando fornecer informações precisas sobre o comportamento térmico e fluxo de calor que podem ser difíceis de perceber a partir das soluções numéricas.

Contudo existe uma grande dificuldade matemática na obtenção de soluções analíticas envolvendo interpretação e cálculo de um problema térmico, como sugere (FERNANDES, 2009): A complexidade de um modelo térmico, do ponto de vista de obtenção de soluções analíticas, normalmente encontra-se em problemas multidimensionais transientes submetidos a não homogeneidades como condições de contorno de fluxo prescrito, geração de calor ou condições de contorno como temperatura variando com o tempo.

Fernandes (2009) Propôs em seu trabalho toda metodologia do método TFBGF que tem como ponto de partida a obtenção das soluções analíticas de problemas de condução de calor usando funções de Green com variados tipos de fluxo de calor, dimensões e condições de contorno.

Estabeleceu-se então uma relação entre o sistema térmico e sistemas dinâmicos, através da entrada e saída. A partir desta relação e da solução analítica do problema pôde-se atribuir ao sistema o conceito de resposta impulsiva e obter-se então a função de transferência. Com a função de transferência pôde-se estimar o fluxo de calor teoricamente e a partir de dados experimentais, considerando temperaturas provenientes de um corte ortogonal.

O trabalho de Fernandes (2009), mesmo se tratando de uma abordagem à equação do calor linear, é um norteador deste trabalho no sentido da metodologia usada para obtenção da resposta impulsiva não linear e a técnica TFBGF para estimativa de fluxo de calor.

Zhang, Kan e Hu (2013) Mostraram a abordagem usando funções de Green para solucionar o problema não linear em materiais mistos, onde as propriedades térmicas eram dependente da temperatura.

O método de funções de Green foi aplicado a uma geometria cilíndrica onde a lei de potências modelava a mistura dos materiais. As generalizações dos modelos para as propriedades térmicas foram simplificadas com base em modelos micromecânicos como Voigt e Morie Tanaka.

As não linearidades apresentadas foram resolvidas usando o método de parâmetro artificial que consiste em obter soluções aproximadas de uma equação diferencial ordinária não linear através da introdução de um parâmetro, assumindo que a solução pode ser expandida em séries em termos deste parâmetro.

Zhang, Kan e Hu (2013) então apresentaram exemplos de aplicação da solução desenvolvida e comparação a soluções obtidas via método de elementos finitos, e observaram a precisão do método proposto e também seu baixo custo computacional.

A compreensão do fenômeno de condução de calor em reatores nucleares através de simulações computacionais apresentam uma tarefa complexa e de alto custo computacional. Desta maneira Tomatis (2013) propôs abordar um problema térmico não linear em uma se-

ção de um reator nuclear. Tomatis (2013) Ressalta a importância desta análise térmica a fim de evitar a amplificação do efeito Doppler. Assim, foi abordado a solução do problema não linear em regime permanente usando como técnica de linearização a transformada de Kirchhoff. A partir da equação diferencial linearizada foi aplicado modelos numéricos para sua solução.

Realizam-se comparações da solução apresentada a outros modelos de solução e discutido o custo computacional de ambos métodos. A solução proposta por Tomatis (2013) apresentou grande precisão e custo computacional levemente reduzido.

Análises térmicas não lineares em dispositivos eletrônicos foram apresentadas por Bagnall, Muzychka e Wang (2014). Os autores justificaram a abordagem do problema devido ao fato da vida útil de dispositivos eletrônicos ser dependente do condicionamento térmico.

Foi usado a transformada de Kirchhoff como ferramenta para estabelecimento da linearização do modelo térmico, que possuía, condutividade, densidade e calor específico variando com a temperatura. Computou-se a equação diferencial linear via método de elementos finitos considerando geração interna de calor.

Bagnall, Muzychka e Wang (2014) apresentaram também a análise da relevância de se considerar ou não a difusividade térmica não linear, devido ao seu impacto no perfil térmico. Mostrou-se que este efeito, não linear, não é danoso para a determinação do perfil térmico.

Abdulkareem (2014) abordou a solução de um problema de condução de calor não linear transiente em uma geometria esférica oca com condutividade térmica dependente da temperatura. Foram usadas mudanças de variáveis através da transformada de Kirchhoff e a função $k(T)$ empírica disponível em literatura.

Abdulkareem (2014) considerou um material isolante com temperatura inicial uniforme e submetido, em seu raio interno, a uma mudança de temperatura. Uma solução analítica foi proposta para comparação de resultados com outra solução analítica disponível na literatura para análise de quatro variações de perfil térmico. Assumiu-se uma condutividade térmica constante e verificou-se que as características do material de isolamento térmico e o valor da pressão entre suas partículas têm um grande efeito sobre a taxa de transferência de calor e perfil de temperatura.

Mierzwiczak, Chen e Z.Fu (2015) Apresentou o método *singular boundary method* (SBM) para a equação do calor não linear em regime permanente. Empregou-se a transformada de Kirchhoff para remoção da não linearidade associada a dependência da temperatura à condutividade térmica. Após linearização é aplicado o método SBM que usou apenas uma iteração para apresentar o perfil térmico. Apresentam-se diversos exemplos de condutividade térmica variando com a temperatura em diferentes geometrias e comparações com outros

métodos numéricos, onde, a solução proposta apresentou grande precisão e estabilidade com a técnica abordada.

Vazquez (2017) Descreveu a teoria matemática de difusão e condução de calor não linear que configuram a maioria dos problemas reais em engenharia e física. O autor apresentou, em grande parte do trabalho, diferentes formas de não linearidades e a teoria de solução e exemplos para cada caso.

Kumar A.K. Singh (2018) abordou o problema térmico de mudança de fase com fronteira móvel e também condutividade térmica e calor específico como funções da temperatura. Foram propostas soluções exatas para estes problemas usando o método de Chebyshev tau deslocado que consiste em uma solução aproximada das equações diferenciais parciais usando a derivada do funcional via método tau.

Foram realizadas comparações entre a solução obtida e solução exata e observou-se grande proximidade entre as soluções. Os autores acreditam que os esquemas apresentados podem ser ferramentas para pesquisadores que estudam problemas envolvendo fronteiras móveis.

O conceito de Biotermodinâmica foi abordado por Li *et al.* (2018) que envolve a junção da equação da bio transferência de calor, bio mecânica, dano por queimadura e compreensão da fisiologia. O conceito *Biothermomechanics* segundo os autores é muito importante para aplicações clínicas em tecidos vivos.

Na abordagem, a equação da bio transferência de calor foi considerada com propriedades dependentes da temperatura e de dupla camada. A equação diferencial foi linearizada e resolvida usando transformada de Kirchhoff e Laplace respectivamente e comparadas com resultados obtidos via método de elementos finitos, onde apresentaram grande proximidade.

Também foi analisado pelos autores as influências das variabilidades dos termos não lineares presentes na equação.

Apresenta-se na próxima seção os principais trabalhos envolvendo problemas inversos em condução de calor não linear.

1.3 Problemas Inversos em Condução de Calor Não Lineares

Pretende-se nesta seção apresentar os principais trabalhos disponíveis na literatura que abordam problemas inversos em condução de calor não linear.

Tillmann (2005) propôs uma metodologia experimental para estimativa simultânea da condutividade e difusividade térmica dependente da temperatura em materiais isolantes considerando um modelo térmico unidimensional a determinação simultânea das propriedades

termofísicas variando com a temperatura se deu pelo princípio da técnica Mista, onde, foram definidas funções objetivo nos domínios do tempo e frequência. Uma das funções é resolvida usando a fase da função resposta em frequência do sistema dinâmico unidimensional tendo como entrada e saída fluxo de calor e temperatura. A outra função objetivo foi dada pelos sinais de temperatura na superfície frontal e oposta da amostra que foi acondicionada em um forno à temperatura controlada. As estimativas apresentadas por Tillmann (2005) mostraram concordância quando comparados com dados disponíveis na literatura.

M.Mierzwiczak e J.A.Kolodziej (2011) propuseram um método numérico não iterativo inverso para estimativa da condutividade térmica dependente da temperatura em um modelo bidimensional em regime permanente. Um o modelo polinomial para a condutividade térmica foi imposto. A identificação da condutividade térmica foi dada usando informações experimentais dos contornos e temperaturas no interior do domínio, empregando o método de soluções fundamentais. Os resultados apresentados mostraram-se satisfatórios quando comparados com modelos clássicos par estimativa de condutividade térmica.

Cui, Gao e Zhang (2012) propuseram um novo método para estimativa de propriedades termofísicas dependentes da temperatura usando o perfil térmico não linear, sem necessidade do conhecimento da forma funcional das propriedades. O método consiste em tratar como variável de otimização a propriedade que deseja-se estimar e minimizá-la considerando a solução não linear do problema e dados experimentais usando o método dos mínimos quadrados. A principal contribuição apresentada pelo trabalho é a abordagem do método *complex-variable-differentiation method* aplicado a técnica de problema inverso para cálculo dos coeficientes de sensibilidade. Exemplos de aplicação do método foram apresentados para mostrar a eficiência do método e também uma breve investigação sobre a influência dos erros de medição experimental nas estimativas.

Muitos problemas térmicos são modelados por equações do calor com fronteiras fixas, contudo, há também uma variedades de problemas térmicos onde os contornos podem variar com o tempo, e são conhecidos como Problemas de Stefan

Neste sentido Hussein e Lesnic (2014), propôs em um problema inverso de estimativa de difusividade térmica variando com a temperatura usar, numericamente, o método dos mínimos quadrados considerando um problema térmico unidimensional. Os resultados numéricos foram apresentados e discutidos.

Terpilowski, Rudzki e Woroniak (2016) propõem em seu trabalho a estimativa da difusividade térmica dependente da temperatura usando temperaturas experimentais para os seguintes materiais: Fe61Ni39, Fe52Ni48 e Fe40Ni60 com foco nas vizinhanças dos pontos de medição.

Usou-se uma modificação do método pulso que possibilitou a diminuição dos intervalos médios entre os valores discretos de temperatura obteve-se erros de medição menores que 4%. Cada liga de ferro, individualmente, foi acondicionada a um ambiente com temperaturas elevadas e foram estimados os valores para difusividade térmica durante o aquecimento e resfriamento das ligas.

O método *A multiple model adaptive inverse (MMAI)* foi proposto por Wang *et al.* (2018) onde estimou-se o fluxo de calor em um problema de condução de calor não linear com propriedades termofísicas dependentes da temperatura. O método consiste em dividir o domínio em diversos subdomínios lineares, onde, a cada subdomínio um submodelo térmico é predito e pontos para medida de temperatura são estabelecidos. Baseado então no modelo global predito os fluxos de calor são simultaneamente estimados através de otimização. Estimativas de fluxo de calor tipo senóide e *step* apresentaram grande precisão quando comparado a outros métodos.

Liu, Qiu e Lin (2019) propuseram uma solução para o problema inverso considerando equações diferenciais parciais não lineares de alta ordem onde pretendeu-se estimar a geração de calor. Iniciou-se a investigação usando modelos unidimensionais e bidimensionais em coordenadas cartesianas com condições de contorno de terceiro tipo, depois extrapolando a técnica para problemas quadridimensionais. Os autores desenvolveram uma família de parâmetros únicos para homogeneização temporal e espacial através de superposição dos contornos de terceiro tipo resolveu-se numericamente os sistemas lineares resultantes. Finalmente, a geração de calor desconhecida é determinada através de substituições numéricas das soluções obtidas na equação governante não linear. Os autores concluem que o método, após executados diversos testes foi capaz de recuperar a geração de calor para qualquer ponto do domínio sem necessidade de informações adicionais.

A determinação do perfil térmico durante processos de usinagem, segundo Ferreira *et al.* (2018), é fundamental para melhoramento da qualidade do processo. De acordo com Ferreira *et al.* (2018) recentemente ferramentas de corte vem sendo revestidas com materiais que apresentam características isolantes e pretendem proporcionar menor taxa de transferência de calor para a ferramenta de corte. Os autores apresentaram uma análise do perfil térmico em ferramentas revestidas por nitreto de titânio (TiN) e óxido de alumínio (Al_2O_3). Usou-se o *software* numérico COMSOL[®]. As análises foram realizadas considerando a geometria da ferramenta de corte tridimensional, transiente, propriedades térmicas variando com a temperatura e trocas de calor com o ambiente através de convecção e radiação. A abordagem inversa foi proposta pelo método da função especificada implementado em ambiente MATLAB[®] acoplado ao ambiente COMSOL[®].

Segundo Wang *et al.* (2019) a compreensão das propriedades térmicas é crucial para a simulação e projeto de processos de queima de materiais. Usando o método numérico *Charring Materials Ablation* (CMA) estimou-se a condutividade térmica e o calor específico dependentes da temperatura obtendo respectivamente 4,3% e 3,1% como diferenças ao modelo simulado, fato que segundo os autores apresenta uma boa aproximação.

1.4 Escopo e Contribuições Deste Trabalho

Pode-se observar pelos diversos trabalhos revisados que a transformada de Kirchhoff apresenta-se como uma forte ferramenta matemática quando acoplada a outros métodos, numéricos ou analíticos. Este trabalho propõe o acoplamento da transformada de Kirchhoff às funções de Green, para a solução de problemas de condução de calor não lineares, transientes e com condições de contorno não homogêneas e não lineares.

Também observa-se que a maioria dos métodos inversos para estimativa de fluxo de calor e propriedades térmicas encontrados a literatura são oriundos de métodos numéricos ou de otimização.

Desta maneira este trabalho também pretende contribuir com a literatura no aspecto de desenvolvimento de um método para estimativa da condutividade térmica e fluxo de calor, considerando problemas de condução de calor não lineares, transientes e com condições de contorno não homogêneas e também não lineares usando resultados diretos da aplicação da transformada de Kirchhoff juntamente com o método de funções de Green.

A fim de desenvolver os objetivos propostos, este trabalho estrutura-se em 7 capítulos na seguinte maneira:

- Introdução e o estado da arte: introduz-se o presente trabalho e apresenta-se os principais resultados disponíveis na literatura sobre os temas propostos.
- Fundamentação teórica: apresenta-se a metodologia para o problema direto não linear, ou seja, a descrição do problema, a discussão sobre existência e unicidade das soluções apresentadas, a e técnica de aplicação da transformada de Kirchhoff e funções de Green.
- Proposta de linearização: mostra-se neste capítulo o processo de aplicação da transformada de Kirchhoff a fim de linearizar o problema, a aplicação das funções de Green e o conceito de soluções híbridas em condução de calor.
- Verificação das soluções: neste capítulo apresenta-se a verificação das soluções uni e tridimensionais e comparações a modelos oriundos da literatura.

- Estimativa do fluxo de calor: o processo para estimativa do fluxo de calor é apresentado neste capítulo, juntamente com a aplicação em um problema unidimensional.
- Estimativa da condutividade térmica: apresenta-se neste capítulo a metodologia para a estimativa da condutividade térmica dependente da temperatura considerando dois casos distintos de modelo para a condutividade dependente da temperatura.
- Conclusão: neste capítulo de conclusão mostra-se um paralelo entre as propostas deste trabalho e os resultados obtidos.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Nesta seção apresenta-se a abordagem metodológica para solução da equação do calor transiente não linear. Inicialmente apresenta-se o procedimento para um problema unidimensional e em seguida serão abordados os problemas bi e tridimensionais. Em todos os casos as soluções analíticas foram obtidas usando o método de funções de Green.

2.2 Solução geral para a equação do calor unidimensional não linear

O fenômeno de condução de calor não linear é matematicamente descrito, em uma geometria unidimensional, pela seguinte equação diferencial parcial.

$$k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = C(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

onde, $C(T) = \rho(T)c_p(T)$

Nota-se, observando a Eq.(3.1), a presença dos termos $k(T)$ e $C(T)$, que são denominados funcionais e funções da temperatura que é solução da equação diferencial, deste modo, a solução T da equação diferencial depende do comportamento dos funcionais k e C .

Este fato impossibilita a aplicação de métodos clássicos de solução como: separação de variáveis, transformada de Laplace e Funções de Green. Pois, todos métodos, supracitados, possuem soluções gerais construídas usando da aplicação direta do teorema da superposição.

2.2.1 Linearidade e Superposição

Consideremos a equação diferencial de difusão de calor linear unidimensional transiente, tem-se:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a(x, t) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.2)$$

onde o termo $a(x, t)$ representa o termo de geração de calor.

Pode-se escrever a Eq.(2.2) como:

$$LT(x, t) = f, \quad (2.3)$$

onde $f(x) = -a(x)$ e L representa o operador linear dado por:

$$LT(x, t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Ou seja, define-se $LT(x, t)$ como um operação de transformação.

$$L : C^n(\Omega) \rightarrow C(\Omega) \quad (2.5)$$

$$T \mapsto LT \quad (2.6)$$

$$, \quad (2.7)$$

onde $C^n(\Omega)$ é o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes diferenciáveis e contínuas.

Usa-se a nomenclatura *operador* para denotar que a função L está definida entre espaços de funções, isto quer dizer que o operador L leva uma função T a uma função LT , sendo LT um operador diferencial parcial. Devido a Eq.(2.2) ser linear, o operador LT é também linear. Isso quer dizer que L leva a função identicamente nula nela mesmo e ainda:

$$L(T_1 + \beta T_2) = LT_1 + \beta LT_2, \quad (2.8)$$

válido para qualquer T_1, T_2 no domínio de L e qualquer escalar $\beta \in \mathbb{R}$.

Pode-se ainda associar a equação diferencial parcial não homogênea a uma equação ho-

homogênea, isto é:

$$LT = 0, \tag{2.9}$$

isso significa que, para a Eq. (2.2) o termo $f = a(x, t) = 0$.

Dessa maneira, observando as Eqs. (2.8)-(2.9) e considerando T_1, T_2, \dots, T_n satisfazendo a Eq.(2.9) e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ escalares tem-se que:

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^m \beta_i T_i, \tag{2.10}$$

é solução da Eq.(2.9). Pode-se observar que a solução da Eq.(2.2) é dada por uma combinação linear de soluções, Eq.(2.10).

Em termos de álgebra linear, L é um operador definido em um espaço vetorial de funções V e as soluções $T \in V$ da Eq.(2.9) formam um subespaço vetorial em V . Este fato é definido como princípio da superposição.

Desta forma o princípio da superposição consiste em buscar uma combinação linear de soluções que satisfaçam a equação diferencial.

Porém, quando se trata de uma equação da forma:

$$k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = C(T) \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2.11}$$

devido a não linearidade, não se pode fazer a aplicação do princípio da superposição, pois não se obtém uma combinação linear que satisfaça a equação diferencial.

Existem diversos métodos para linearizar a equação do calor, sejam de natureza analítica ou numérica. Dentre estes, um método poderoso é a aplicação da transformada de Kirchhoff.

2.3 Solução Analítica: Existência e Unicidade

Quando se fala sobre soluções analíticas para quaisquer problemas, duas perguntas surgem imediatamente: este problema possui solução? Se existe, é única?.

Em outras palavras: a equação de difusão de calor não linear, transiente e com condições de contorno também não lineares e não homogêneas admite solução analítica? Ela é única?

De fato, uma função é dita solução de uma equação diferencial quando esta satisfaz as condições de contorno e inicial.

Diversos materiais, especialmente metálicos, quando submetidos a altas temperaturas estabelecidas por: tratamento térmico, processos de fabricação como corte ortogonal ou de soldagem, apresentam um comportamento complexo no sentido de sua estrutura. Estas estruturas usualmente implicam em variação de suas propriedades térmicas com a temperatura.

Por exemplo, Borukhov, Tsurko e Zayats (2009) observaram que a condutividade térmica apresenta alta dependência da temperatura, apresentando grandes variações durante estes processos.

A fim de mostrar que a solução de difusão de calor não linear possui única solução Cimatti (2005) define um problema auxiliar aplicando o teorema de Levy-Caccioppoli e mostrou que a solução da equação de difusão de calor não linear converge para uma subsequência do domínio da equação diferencial, o que caracteriza a existência de uma solução única para o problema. Como mostrado no apêndice A.

Trata-se, na próxima seção, a metodologia para determinação da solução analítica para o problema de condução de calor não linear com condições de contorno não homogêneas e não lineares. Será abordada a metodologia da transformada de Kirchhoff e sua inversa.

2.4 A transformada de Kirchhoff

Dentre os diversos métodos de linearização apresenta-se como alternativa a transformada de Kirchhoff.

Carslaw e Jaeger (1959) definem a Transformada de Kirchhoff como:

$$\Phi(x, t) = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k(\hat{T}) d\hat{T} \quad (2.12)$$

onde k_0 é definido como condutividade térmica de referência (BAGNALL; MUZYCHKA; WANG, 2014).

Nota-se que a transformada de Kirchhoff, Eq.(2.12) é dada pelo produto do inverso da condutividade térmica de referência com a integral do funcional $k(T)$ com extremos de integração 0 e T .

Observa-se assim que a variável Φ traz consigo, todo efeito de $k(T)$, já que Φ , geometri-

camente, é a área abaixo da curva:

$$\int_0^T k(\widehat{T}) d\widehat{T} \quad (2.13)$$

Da Eq.(2.12), tem-se diretamente, pela definição da integral definida, o seguinte fato:

$$\frac{d\Phi}{dT} = \frac{k(T)}{k_0} \Rightarrow k(T) = k_0 \frac{d\Phi}{dT} \quad (2.14)$$

A Eq.(2.14) é então aplicada ao lado esquerdo da equação da difusão de calor não linear, Eq. (2.15),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = C(T) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.15)$$

obtendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 \frac{d\Phi}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Rightarrow k_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

Multiplicando-se o lado direito da Eq. (2.15) por $\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi}$ e considerando as propriedades dos operadores lineares T e Φ obtém-se:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi} \Rightarrow C(T) \frac{\partial T}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.17)$$

Mas da Eq.(2.14) tem-se que:

$$\frac{dT}{d\Phi} = \frac{k_0}{k(T)}, \quad (2.18)$$

logo:

$$C(T) \frac{k_0}{k(T)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (2.19)$$

assim:

$$k_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = C(T) \frac{k_0}{k(T)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (2.20)$$

simplificando o termo k_0 em ambos lados da equação tem-se o problema auxiliar dado por:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha(T)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.21)$$

Observa-se que a Eq. (2.21) ainda permanece não linear. Entretanto a dependência de $\alpha(T)$ é bem mais fraca, uma vez que as dependências de $k(T)$ e $C(T)$ podem ser eventualmente compensadas.

Assim assumindo a hipótese (KOVAL'CHUK; LOPUSHANSKAYA, 1993) de $\alpha(T) = \alpha_0$ tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.22)$$

A aplicabilidade desta hipótese será analisada mais adiante.

Observa-se que a Eq.(2.22) tem exatamente a mesma forma da equação de difusão de calor, porém em termos de uma variável auxiliar Φ .

2.4.1 A Transformada Inversa de Kirchhoff

Objetiva-se então, a partir da solução de um problema auxiliar, determinar a solução analítica para o problema de condução de calor não linear.

Desta forma, usando o problema auxiliar definido na seção anterior pode-se determinar a solução analítica para o problema, resta apenas explicitar a solução Φ em termos de T , o que é obtido através da transformada inversa de Kirchhoff.

Reescrevendo a Eq.(2.12):

$$\Phi(x, t) = k(T(x, t)) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k(\hat{T}(x, t)) d\hat{T} \quad (2.23)$$

e considerando $k(T(x, t)) = k_0 f(T(x, t))$ uma função integrável e invertível, onde, $k_0 f(T(x, t))$ descreve o comportamento de condutividade térmica em função da temperatura. Integrando

no intervalo de 0 a T a Eq.(2.23) obtém-se:

$$\Phi(x, t) = k(T(x, t)) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k_0 f(\hat{T}(x, t)) d\hat{T} \Rightarrow \Phi(x, t) = k(T(x, t)) = F(T(x, t)) \quad (2.24)$$

onde

$$F(T(x, t)) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k_0 f(\hat{T}(x, t)) d\hat{T} \quad (2.25)$$

assim:

$$T(x, t) = k^{-1}(\Phi(x, t)) \Rightarrow T(x, t) = F^{-1}(\Phi(x, t)) \quad (2.26)$$

Desta forma,

$$T(x, t) = F^{-1}(\Phi(x, t)) \quad (2.27)$$

onde $F^{-1}(\Phi(x, t))$ é a função inversa da integral do comportamento de $k(T)$ aplicado a temperatura aparente Φ . Assim pode-se explicitar analiticamente a solução geral para um problema térmico não linear.

Observa-se que, usando o método proposto pode-se determinar analiticamente a solução para qualquer problema não linear. Para a obtenção das temperaturas. Para tal, basta conhecer, ou impor, o comportamento de $k(T(x, t))$.

2.4.2 Condições de contorno

Como as condições de contorno também podem ser não lineares, propõe-se a aplicação da transformada de Kirchoff também na superfície. Deste modo, como consequência direta da definição Eq.(2.12), tem-se que:

- **Condição de contorno de primeiro tipo:**

$$T = f(\vec{r}) \quad (2.28)$$

então:

$$\Phi = \hat{f}(\vec{r}) \quad (2.29)$$

Como \hat{f} depende do funcional $k(T)$, e se, por exemplo, considerarmos $k(T) = A + BT$ para representar o modelo de comportamento do termo $k(T)$, teremos como condição de contorno de primeiro tipo a equação:

$$\Phi = \hat{f}(\vec{r}) = \left(Af(\vec{r}) + \frac{B}{2}[f(\vec{r})]^2 + C \right), \quad (2.30)$$

onde C , \vec{r} , A e B são: constante de integração, o vetor (x, y, z) e constantes de $k(T)$ respectivamente.

- **Condição de contorno de segundo tipo:**

A condição de contorno de segundo tipo é dada por:

$$-k(T) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_i} = q(\vec{r}, t). \quad (2.31)$$

Aplicando a transformação de Kirchhoff teremos:

$$-k_0 \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=x_i} = q(\vec{r}, t). \quad (2.32)$$

- **Condição de contorno de terceiro tipo**

Dada a seguinte condição de contorno:

$$-k(T) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_i} = h(T - T_\infty), \quad (2.33)$$

e aplicando a transformada Kirchhoff obtem-se:

$$-k_0 \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=x_i} = h(k^{-1}(\Phi) - T_\infty). \quad (2.34)$$

Note que a condição de contorno é não linear pois na Eq.(2.34)

$$h(k^{-1}(\Phi) - T_{\infty}) \neq h(\Phi - T_{\infty}), \quad (2.35)$$

isso ocorre devido ao fato que nem sempre $T = k^{-1}(\Phi) = \Phi$ no contorno onde ocorre a condição de convecção de calor.

Cobble (1963) mostrou que a transformada de Kirchhoff pode ser aplicada em condições de contorno de convecção quando o coeficiente de convecção varia com a temperatura e de maneira particular quando a temperatura ambiente é zero. Contudo, observando que aproximação $k^{-1}(\Phi) \rightarrow \Phi$ não pode ser rigorosamente aplicada nestas condições. Bagnall, Muzychka e Wang (2014) observou que para alguns problemas particulares, a transformada de Kirchhoff fornece bons resultados quando aplicado a problemas com condição de contorno de fluxo de calor e uma superfície sujeita a um meio convectivo. Os autores observaram que a temperatura atual T e a temperatura aparente Φ eram aproximadamente iguais na fronteira de convecção. Neste sentido, propuseram a aproximação: $k^{-1}(\Phi)$ em Φ .

Assim, tem-se a condição de contorno de terceiro tipo como:

$$-k_0 \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_{x=x_i} = h(\Phi - T_{\infty}). \quad (2.36)$$

Uma vez linearizado, pode-se aplicar o método das funções de Green para obtenção de solução analítica de problemas não homogêneos, transientes, tridimensionais, com fonte de calor móvel ou fixa e condições de contorno que podem ser variáveis com tempo e espaço.

2.5 O Método de Funções de Green (FG)

Funções de Green (FG) é atribuído ao método como forma de homenagem a *George Green* (1773 - 1841), matemático e físico Inglês. Green, desenvolveu um método para cálculo de soluções analíticas para equações diferenciais parciais transientes, quase estáticos e lineares.

O método também é aplicável a problemas de convecção ou vários outros que possam ser descritos pelo mesmo tipo de equação diferencial parcial, e desta forma possui algumas vantagens em seu uso, como:

- Variação espacial e distribuição de temperatura inicial.
- Condições de contornos variando com o tempo e espaço.

- Termo de geração de energia variando com o espaço.

Sem perda de generalidade considere o problema unidimensional em geometria retangular na variável T :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k}g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad t > 0, \quad (2.37)$$

o termo $g(x, t)$ refere-se a geração de calor.

Sob a condição de contorno geral:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i} + h_i T|_{x_i} = f_i(t) \quad t > 0. \quad (2.38)$$

Observe que as condições de contorno de segundo e terceiro tipos podem ser obtidas fazendo $h_i = 0$ e $f_i(t) = 0$ respectivamente.

E a condição inicial:

$$T(x, 0) = F(x). \quad (2.39)$$

De forma geral a solução para este problema usando FG pode ser construída da seguinte maneira:

$$T(x, t) = \underbrace{\int_{x'=0}^L G(x, t|x', \tau) F(x') dx'}_A \quad (2.40)$$

$$+ \underbrace{\frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L g G(x, t|x', \tau) dx' d\tau}_B \quad (2.41)$$

$$+ \underbrace{\alpha \int_{\tau=0}^t \frac{f_i(t)}{k} G(x, t|x', \tau) d\tau}_C, \quad (2.42)$$

onde os termos destacados por: A , B e C são as integrais referentes aos efeitos da condição inicial, geração de calor e convecção ou fluxo de calor respectivamente, G é a FG característica do problema.

Obsevando a existência de um grande número de soluções analíticas em condução de calor Beck *et al.* (2010) propõe um sistema de numeração a fim de facilitar a identificação e organização dos diversos problemas que possam ser tratados.

Este sistema de numeração é composto de uma letra e dois números, que respectivamente simbolizam a direção no eixo cartesiano e os tipos de condições de contornos naquela direção. Por exemplo as letras X, Y e Z referenciam as coordenadas x, y e z respectivamente. Assim a equação da difusão:

$$k\nabla^2 T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.43)$$

pode estar sujeita a seis condições de contorno distintas:

A primeira condição de contorno possível é chamada de condição tipo zero ou condição natural, quando se trata de geometria infinita em uma ou mais direções.

O número 1 representa a condição de temperatura prescrita ou de Dirichlet,

$$T(\vec{r}_i, t) = f_i(\vec{r}_i, t), \quad (2.44)$$

onde $\vec{r} = (x, y, z)$.

Condição de fluxo prescrito de calor ou Neumann, é representada pelo número 2.

$$k \frac{\partial T}{\partial n_i} \Big|_{\vec{r}_i} = f_i(\vec{r}_i, t), \quad (2.45)$$

onde n representa a normal para fora da superfície, considerando uma geometria retangular.

E a condição de contorno de convecção ou Robin, representada pelo número 3.

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\vec{r}_i} + h_i T \Big|_{\vec{r}_i} = f_i(\vec{r}_i, t). \quad (2.46)$$

O número 4 representa problema de condição de contorno de quarto tipo, sem convecção,

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\vec{r}_i} = f_i(\vec{r}_i, t) - (\rho c_p b)_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\vec{r}_i}. \quad (2.47)$$

Condição de quinto tipo, com convecção é representado pelo número 5.

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\vec{r}_i} = h_i T_i = f_i(\vec{r}_i, t) - (\rho c_p b)_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\vec{r}_i}, \quad (2.48)$$

nas condições de contorno de quarto e quinto tipos o termo $(\rho c_p b)_i$ representa uma camada fina na superfície i onde b é a sua espessura.

As condições de contorno podem ser sintetizadas com sua respectiva numeração conforme a seguinte tabela:

Exemplificando o sistema de numeração com um problema X21. Tem-se em $x = 0$

Tabela 2.1: Tipos e numeração das Condições de Contorno.

Notação	Nome do contorno	Descrição
0	Tipo zero	Sem efeito físico (infinito)
1	Dirichlet	Temperatura prescrita
2	Neumann	Fluxo de calor prescrito
3	Robin	Convecção
4	Quarto tipo (Carlaw)	Filme fino, sem convecção
5	Quinto tipo (Jaeger)	Filme fino, com convecção

superfície exposta a um fluxo de calor e em $x = L$ a condição de temperatura prescrita. Para problemas de duas ou três dimensões o raciocínio segue de forma análoga.

Para problemas multi dimensionais, a FG é o produto das FGs características de cada dimensão. Por exemplo para um problema bidimensional com condições de contorno de segundo e terceiro tipo na direção x e primeiro tipo na direção y , teremos:

$$G(x, y, t|x', y', \tau) = G_{X23}(x, t|x', \tau)G_{Y11}(y, t|y', \tau), \quad (2.49)$$

o que é outra grande vantagem na utilização no método de FG.

As funções de Green são obtidas facilmente em Beck *et al.* (2010) apêndice X.

Apresenta-se na próxima seção uma aplicação prática da transformada de Kirchhoff, FG e da transformação inversa, a fim de explicitar uma solução analítica para um problema térmico tipo X22.

Capítulo 3

Proposta de Linearização

3.1 Introdução

Nesta seção aborda-se a metodologia para obtenção de solução analítica para o modelo térmico unidimensional não linear transiente com condições de contorno também não lineares do tipo X22NL.

3.2 Problema Térmico X22NL

O modelo matemático que descreve o problema é dado por:

$$k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = C(T) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.1)$$

onde, $C(T) = \rho(T)c_p(T)$, e está sujeito as condições de contorno:

$$-k(T) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q, \quad (3.2)$$

e

$$-k(T) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0, \quad (3.3)$$

e a condição inicial:

$$T(x, 0) = T(x), \quad (3.4)$$

onde $0 \leq x \leq L$.

Esta combinação específica de condições de contorno caracterizam o problema como X22NL, isto é, um problema unidimensional transiente na direção da coordenada ortogonal x com condições de contorno de segundo tipo nesta direção, sendo, fluxo de calor e isolamento térmico respectivamente.

Observe ainda que a Eq.(3.1) define um problema não linear devido aos funcionais $k(T)$ e $C(T)$. Note também que as condições de contorno impostas são não lineares. Fato que, como dito anteriormente, impossibilita a aplicação do método de funções de Green.

Como já observado, será aplicado a transformada de Kirchhoff como alternativa para linearização da equação diferencial e condições de contorno. Este procedimento será detalhado na subseção a seguir.

3.3 Processo de linearização

Reescrevendo a Eq.(2.12):

$$\Phi(x, t) = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k(\hat{T}) d\hat{T}, \quad (3.5)$$

e aplicando o método de transformação de Kirchhoff nas Eqs. (3.1)-(3.4) como mostrado na Seção (2.4), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.6)$$

com as condições de contorno:

$$-k(T) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q \Rightarrow k_0 \frac{d\Phi}{dx} \frac{dT}{dT} \Big|_{x=0} = q \Rightarrow k_0 \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=0} = q, \quad (3.7)$$

$$-k_0 \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=L} = 0, \quad (3.8)$$

e a condição inicial:

$$\Phi(x, 0) = \Phi(x), \quad (3.9)$$

onde $0 \leq x \leq L$

Observa-se que as Eqs.(3.6)-(3.9) escritas na variável Φ são lineares e portanto podem ser resolvidas aplicando o método de FG.

3.4 Solução do Problema Auxiliar Via Funções de Green

Apresenta-se nesta seção a aplicação do método FG, descrito na seção(2.5), que pretende estabelecer uma solução $\Phi(x, t)$.

A solução do problema dado pelas Eqs. (3.6)-(3.9) usando FG pode ser escrita como:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 + \frac{\alpha_0}{k_0} \int_0^\tau G_{x22}(x, t|x', \tau) q d\tau, \quad (3.10)$$

onde $G_{x22}(x, t|x', \tau)$ é a função de Green característica do problema linear X22L e pode ser obtida em Beck *et al.* (2010) Apêndice X. Assim $G_{x22}(x, t|x', \tau)$ como:

$$G_{x22}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_0^\infty e^{-\beta_m^2 \alpha_0 (t-\tau)} \cos(\beta_m x) \cos(\beta_m x'). \quad (3.11)$$

Substituindo Eq.(3.11) em Eq.(3.10) e resolvendo a integral temporal obtém-se a solução:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 + \frac{q\alpha_0 t}{k_0 L} + \frac{2q}{k_0 L} \sum_0^\infty \frac{\cos(\beta_m x)}{\beta_m^2} - \frac{2q}{k_0 L} \sum_0^\infty \cos(\beta_m x) \frac{e^{-\beta_m^2 \alpha_0 t}}{\beta_m^2}, \quad (3.12)$$

onde $\beta_m = \frac{m\pi}{L}$.

Assim, para explicitar a solução do problema em termos de $T(x, t)$ resta aplicar a transformada inversa de Kirchhoff, detalhado na seção seguinte.

3.5 Aplicando a Transformada Inversa de Kirchhoff

Considera-se, de forma hipotética, um comportamento para o funcional $k(T)$. Assim, usando novamente a Eq.(2.12):

$$\Phi = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k(\widehat{T}) d\widehat{T}, \quad (3.13)$$

e considerando $k(T) = k_0(1 + AT)$, onde A é uma constante, obtém-se:

$$\Phi(T) = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k_0(1 + A\widehat{T}) d\widehat{T} \Rightarrow \Phi(T) = k(T) = \frac{AT^2}{2} + T. \quad (3.14)$$

Fato que implica diretamente que:

$$\Phi(T) = \frac{AT^2}{2} + T. \quad (3.15)$$

Para explicitar a solução $T(x, t)$ deve-se determinar a inversa da função $\frac{AT^2}{2} + T$. Porém, note que $\frac{AT^2}{2} + T$ é uma função polinomial de grau 2 e não possui inversa para todo o seu domínio, contudo, considera-se, para aplicações práticas em condução de calor $T \geq 0$. Desta forma pode-se determinar sua inversa, pois, $\frac{AT^2}{2} + T$, torna-se, a partir da restrição imposta, uma função sobrejetora.

Assim, a função inversa de $\frac{AT^2}{2} + T$, aplicada em $\Phi(x, t)$ determina a solução para o problema analítico em termos de $T(x, t)$, que é dada pela Eq.(3.16) a seguir:

$$T(x, t) = k^{-1}(\Phi) \Rightarrow T(x, t) = \frac{1}{A} \left(\sqrt{1 + 2A\Phi(x, t)} - 1 \right). \quad (3.16)$$

Observa-se que, ao aplicar o método FG juntamente com a transformada de Kirchhoff, o fato que, o termo que caracterizará o comportamento do perfil térmico é a escolha do comportamento do funcional $k(T)$.

O funcional $k(T)$ para fins de aplicações hipotéticas será considerado $k(T) = k_0(1 + AT)$, contudo, pode-se obter modelos de $k(T)$, para fins práticos, através de modelos apresentados na literatura ou estimando experimentalmente. A estimativa do funcional $k(T)$ será abordado nas próximas seções.

Uma vantagem da aplicação de FG juntamente com a transformada de Kirchhoff é que

não há a necessidade de recalcular, para diferentes modelos térmicos, suas versões lineares analíticas. Basta, neste caso, definir o comportamento de $k(T)$ e através da inversão da integral da transformada explicitar a solução.

Conclui-se que, o comportamento não linear de qualquer problema térmico, se dá a partir do conhecimento de sua solução linear, e da aplicação da transformação inversa.

Como discutido na seção 2.5, uma das vantagens do uso do método FG é o fato que soluções bi ou tridimensionais podem ser construídas através do produto das FG unidimensionais. Neste sentido, aborda-se a seguir a solução analítica de um problema 3D transiente não linear.

3.6 Modelo Térmico 3D Transiente Não Linear

Apresenta-se nesta seção a metodologia para obtenção de solução analítica para um problema térmico não linear transiente tridimensional tipo X22Y22Z22NL.

O problema X22Y22Z22NL em coordenadas cartesianas $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq W$ e $0 \leq z \leq R$ é caracterizado pelos seus contornos serem de segundo tipo em todas as faces, onde, na face $y = W$ é submetido a um fluxo de calor que pode ser em toda face ou parte dela, e, todas as demais faces mantidas sob condição de isolamento térmico, isto é, fluxo de calor nulo. A Fig.(3.1-a) apresenta um esquema do problema a ser tratado considerando um fluxo de calor aplicado a toda face $y = W$, já na Fig.(3.1-b) observa-se que o fluxo de calor pode ser delimitado a uma área parcial $L_1 \leq x \leq L_2 \times R_1 \leq z \leq R_2$ sobre a face $y = W$.

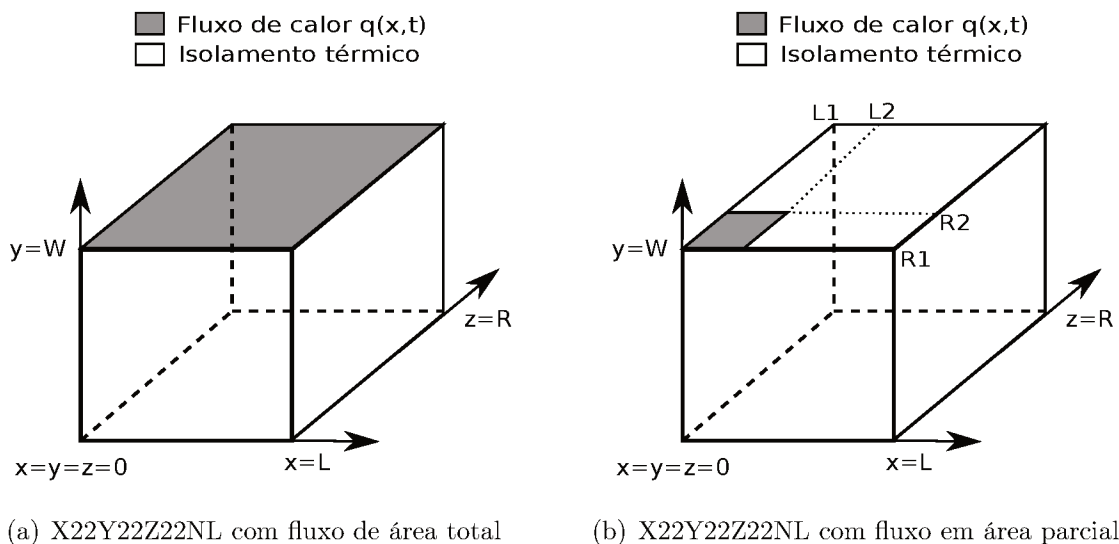


Figura 3.1: Problema térmico X22Y22Z22NL

Matematicamente o problema é dado pela seguinte equação diferencial juntamente com as condições de contorno:

$$k(T) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = C(T) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.17)$$

onde o termo $C(T) = \rho(T)c_p(T)$.

Submetido às condições de contorno:

$$-k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (3.18)$$

$$k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.19)$$

$$-k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = q(x, t), \quad (3.20)$$

ou em uma área parcial:

$$-k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = q(x, t) \text{ delimitado por } L_1 \leq x \leq L_2 \times R_1 \leq z \leq R_2, \quad (3.21)$$

e para a direção z :

$$k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \quad (3.22)$$

e a condição inicial:

$$T(x, y, z, 0) = T_0 \quad (3.23)$$

Observa-se a necessidade da aplicação da transformada de Kirchoff que pode ser realizada de forma análoga ao problema unidimensional X22NL, descrita na seção 2.4. Dessa maneira, tem-se o problema na variável Φ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.24)$$

Sujeito às condições de contorno:

$$-k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (3.25)$$

$$k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.26)$$

$$-k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=W} = q(x, t), \quad (3.27)$$

ou parcialmente:

$$-k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=W} = q(x, t) \text{ delimitado por } L_1 \leq x \leq L_2 \times R_1 \leq z \leq R_2, \quad (3.28)$$

e para a direção z :

$$k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \quad (3.29)$$

e condição inicial:

$$\Phi(x, y, z, 0) = \Phi_0 \quad (3.30)$$

Aplica-se então o método FG, obtendo-se a solução:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \Phi(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ &+ \frac{\alpha_0}{k_0} \int_{t=0}^{\tau} \int_{x'=L_1}^{L_2} \int_{z'=R_1}^{R_2} q(x, t) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) \Phi(x, y, z, 0) d\tau' dx' dz', \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ é o produto das funções de Green unidimensionais nas direções cartesianas x , y e z respectivamente. Observa-se que, por se tratar de um problema com condições de contorno iguais em todas três dimensões, tem-se então o produto da Eq.(3.11), onde varia-se apenas as coordenadas cartesianas e autovalores em cada direção.

Assim, efetuada a multiplicação das funções de Green e substituindo o produto na Eq.(3.31) obtém-se a solução analítica para o problema X22Y22Z22L.

Fernandes (2009) demonstrou que as integrais no primeiro termo da Eq.(3.31) resultam em Φ_0 , isto é:

$$\int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0)\Phi(x, y, z, 0)dx'dy'dz' = \Phi_0 \quad (3.32)$$

Resolvendo a integral do segundo termo da Eq.(3.31) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \Phi_0 \\ &+ \frac{a_0}{k_0} \frac{1}{LWR} (L_2 - L_1)(R_2 - R_1) \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) d\tau \\ &+ \frac{a_0}{k_0} \frac{2}{WR} (R_2 - R_1) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha_0 t} \cos(\beta_m x) [\text{sen}(\beta_m L_2) - \text{sen}(\beta_m L_1)] \frac{1}{m\pi} \\ &\times \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) e^{-\beta_m^2 \alpha_0 t} d\tau \quad (3.33) \\ &+ \frac{a_0}{k_0} \frac{2}{LWR} (L_2 - L_1)(R_2 - R_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha_0 \tau} \cos(\beta_n y) \cos(ny) \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) e^{-\beta_n^2 \alpha_0 \tau} d\tau \\ &+ \frac{a_0}{k_0} \frac{2}{LW} (L_2 - L_1) \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\beta_p^2 \alpha_0 \tau} \cos(\beta_p z) [\text{sen}(\beta_p R_2) - \text{sen}(\beta_p R_1)] \frac{1}{\pi p} \\ &\times \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) e^{-\beta_p^2 \alpha_0 \tau} d\tau \\ &+ \frac{\alpha_0}{k_0} \frac{4}{WR} (R_2 - R_1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2) \alpha_0 t} \cos(\beta_m x) [\text{sen}(\beta_m L_2) - \text{sen}(\beta_m L_1)] \\ &\times \frac{1}{m\pi} \cos(\beta_n y) \cos(n\pi) \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2) \alpha_0 \tau} d\tau \\ &+ \frac{\alpha_0}{k_0} \frac{4}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_p^2) \alpha_0 t} \cos(\beta_m x) [\text{sen}(\beta_m L_2) - \text{sen}(\beta_m L_1)] \\ &\times \frac{1}{m\pi} [\text{sen}(\beta_p R_2) - \text{sen}(\beta_p R_1)] \frac{1}{p\pi} \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) e^{-(\beta_m^2 + \beta_p^2) \alpha_0 \tau} d\tau \\ &+ \frac{\alpha_0}{k_0} \frac{4}{LW} (L_2 - L_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2 + \beta_p^2) \alpha_0 t} \cos(\beta_n y) \cos(n\pi) \cos(\beta_p z) \\ &\times [\text{sen}(\beta_p R_2) - \text{sen}(\beta_p R_1)] \frac{1}{p\pi} \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) e^{-(\beta_n^2 + \beta_p^2) \alpha_0 \tau} d\tau \\ &+ \frac{\alpha_0}{k_0} \frac{8}{W} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2) \alpha_0 t} \cos(\beta_m x) [\text{sen}(\beta_m L_2) - \text{sen}(\beta_m L_1)] \frac{1}{m\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \cos(\beta_n y) \cos(n\pi) \cos(\beta_p z) [\text{sen}(\beta_p R_2) - \text{sen}(\beta_p R_1)] \frac{1}{p\pi} \\ & \times \int_{t=0}^{\tau} q(x, \tau) e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2) a_0 \tau} d\tau, \end{aligned}$$

onde $\beta_m = \frac{m\pi}{L}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{W}$ e $\beta_p = \frac{p\pi}{R}$ são autovalores.

De posse da solução analítica, Eq.(3.33), para as temperaturas aparentes usando-se a transformada inversa de Kirchhoff determina-se o perfil térmico do modelo X22Y22Z22NL em termos de T .

Obsreva-se também na Eq.(3.33) que em todos termos as integrais temporais não foram resolvidas analiticamente pois pretende-se empregar o uso de soluções híbridas, que será discutida na seção 3.7. O uso de soluções híbridas, permitem uma flexibilidade na implementação computacional da solução, pois, nem sempre o fluxo de calor pode ser expresso por uma função contínua e experimentalmente é dado por um vetor discreto.

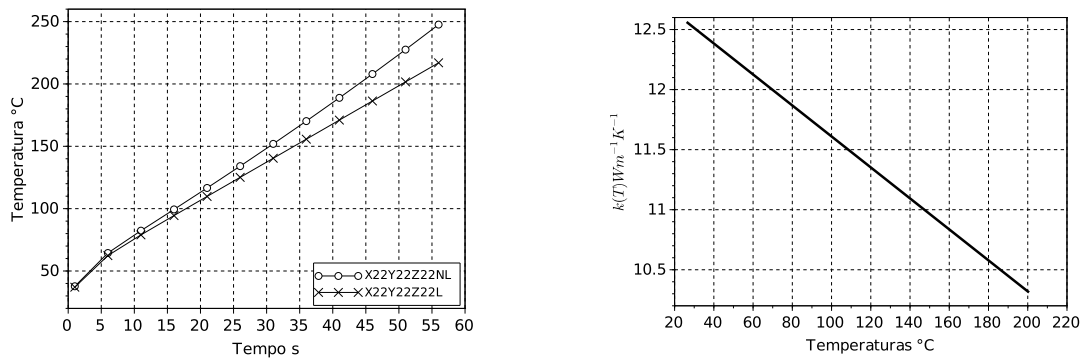
Contudo, para obtenção de uma solução puramente analítica, basta impor uma função matemática para o fluxo de calor e efetuar o cálculo as integrais resultantes.

Assim, usando as propriedades térmicas e geometrias dadas pela Tab.(3.1) apresenta-se o perfil térmico para o prolema X22Y22Z22NL.

Tabela 3.1: Propriedades térmicas e geométricas usadas na solução X22Y22Z22NL.

Notação	Valor	Unidade
L, R, W	1×10^{-2}	m
(x, y, z)	$(L/2, W, L/2)$	m
$T(x, y, z, 0)$	20	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0(1 + AT)$	$Wm^{-1}K^{-1}$
k_0	12,9	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$3,95 \times 10^{-6}$	m^2s^{-1}
A	-1×10^{-3}	K^{-1}
$q(x, y, z, t)$	1×10^5	W
t	60	s
dt	1	s

A Fig.(3.2-a) apresenta as temperaturas obtidas usando um fluxo de calor constante em toda a face $y = W$. Observa-se um pequeno desvio dos perfis de Φ e T devido a condutividade térmica diminuir com o aumento da temperatura Fig.(3.2-b). Observa-se ainda uma variação de aproximadamente 20% da condutividade térmica em função das temperaturas.



(a) Comparativo entre os perfis térmicos das soluções X22Y22Z22NL e X22Y22Z22L

(b) Condutividade térmica variando com a temperatura no modelo X22Y22Z22NL.

Figura 3.2: Temperaturas e condutividade térmica para o modelo X22Y22Z22NL.

3.7 Solução Híbrida

Observando a Eq.(3.10) nota-se que o integrando depende do modelo do fluxo de calor q nesse caso se o termo q for uma função ou uma constante obtém-se facilmente uma solução puramente analítica, obtendo-se para cada forma de fluxo de calor uma solução distinta.

Porém, para fins práticos e de generalização faz-se o uso do fluxo de calor discreto. Desta forma, propõe-se, como abordado por Fernandes (2013), o uso de soluções híbridas.

Considerando, sem perda de generalidade, a integral:

$$\int_{t=0}^t q(\tau)d\tau, \quad (3.34)$$

se o termo $q(t)$ é discreto, então, é representado por um vetor do tipo $q(t) = [q_1, q_2, \dots, q_n]$, onde para cada intervalo de tempo Δt tem-se uma componente do vetor $q(t)$ como seu representante.

O que gráficamente pode ser representado da seguinte maneira:

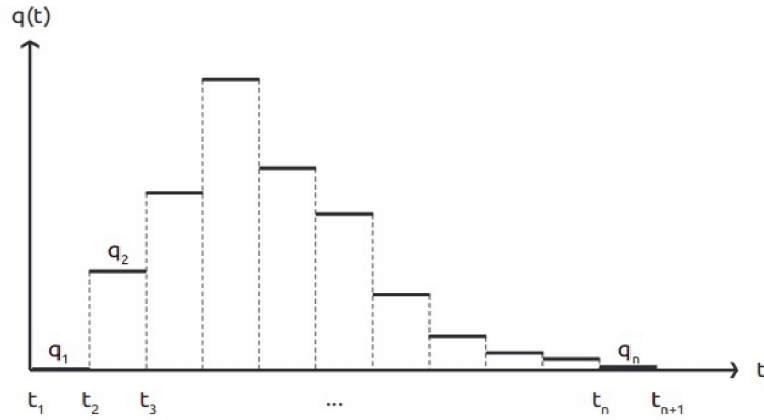


Figura 3.3: Representação gráfica de um fluxo de calor discreto. Fernandes (2013)

Observa-se então pela Fig.(3.3) que o fluxo de calor $q(t)$ discreto pode ser considerado uma constante para cada intervalo de tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$.

Então a integral, Eq.(3.34), pode ser calculada de forma discreta da seguinte maneira:

$$\int_{t=0}^t q(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} q_1 d\tau + \int_{t_2}^{t_3} q_2 d\tau + \dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_n d\tau = \sum_{n=1}^{N-1} q_n (t_{n+1} - t_n). \quad (3.35)$$

Desta maneira, a versão híbrida da solução dada pela Eq.(3.12) é dada por:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 + \frac{\alpha_0}{k_0 L} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (t_{n+1} - t_n) + \frac{2\alpha_0}{k_0 L} \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\beta_m x)}{\beta_m^2 \alpha_0} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\beta_m^2 \alpha_0 (t-t_{n+1})} - e^{-\beta_m^2 \alpha_0 (t-t_n)}). \quad (3.36)$$

As soluções analítica e híbrida Eqs.(3.12)-(3.36) respectivamente, foram implementadas e realizada a verificação da solução híbrida por meio de uma solução puramente analítica Fernandes (2013). Considerando vários tipos de fluxo de calor, em todos os casos foi suficiente considerar um intervalo de tempo de discretização $\delta t = 1s$.

Apresenta-se no próximo capítulo a verificação das soluções X22NL e X22Y22Z22NL e também comparações dos perfis térmicos fornecidos pela solução X22NL a modelos disponí-

veis na literatura.

Capítulo 4

Verificação Intrínseca, Representação Gráfica e Comparações Com Modelos Numéricos e Experimentais

4.1 Verificação Intrínseca da Solução X22NL

Inicialmente, a solução analítica não linear X22NL será verificada via comparação com a solução X22L de um problema linear, dada por Fernandes (2013).

Este procedimento visa verificar se a solução proposta retorna à solução linear caso as propriedades térmicas $k(T)$ e $\alpha(T)$ não variem com a temperatura. Obviamente esta verificação não garante que a solução do problema não linear esteja absolutamente correta, porém garante, de certa forma, que a base da solução linear está validada.

As propriedades térmicas dos dois modelos são apresentadas na Tab. (4.1).

Tabela 4.1: Propriedades térmicas que serão aplicadas nos modelos X22NL e X22L

Notação	Valor	Unidade
L	0,01	m
x	0	m
$T(0, t)$	0	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0(1 + AT)$	$Wm^{-1}K^{-1}$
k_0	12,9	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$3,95 \times 10^{-6}$	m^2s^{-1}
A	$A \rightarrow 0$	K^{-1}
q	1×10^5	W

Observa-se na Eq.(3.16) que as temperaturas T são dadas pela aplicação da função inversa

k aplicada às temperaturas aparentes Φ . Assim, nota-se que A deve ser diferente de zero. Contudo se $A \rightarrow 0$ então $T \rightarrow \Phi$ e como as temperaturas Φ são obtidas a partir de um modelo X22 linear verificado resta analisar se nestas condições $T \rightarrow \Phi$.

É importante observar que os parâmetros mostrados na Tab.(4.1) não influenciam no desempenho do processo de verificação.

Assim, apresenta-se na Fig.(4.1) uma comparação entre a solução X22L e a solução X22NL considerando $k(T) = k_0(1 + AT)$. Observa-se excelente concordância, sendo a diferença entre as soluções menores que 5×10^{-5} , ou relativamente, da ordem de $5 \times 10^{-6} \%$.

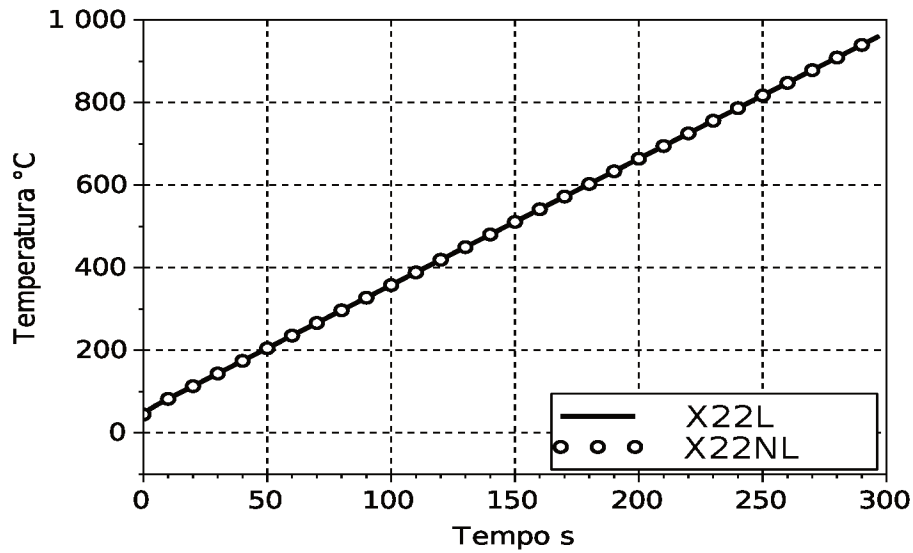


Figura 4.1: Comparação entre as soluções X22L e X22NL

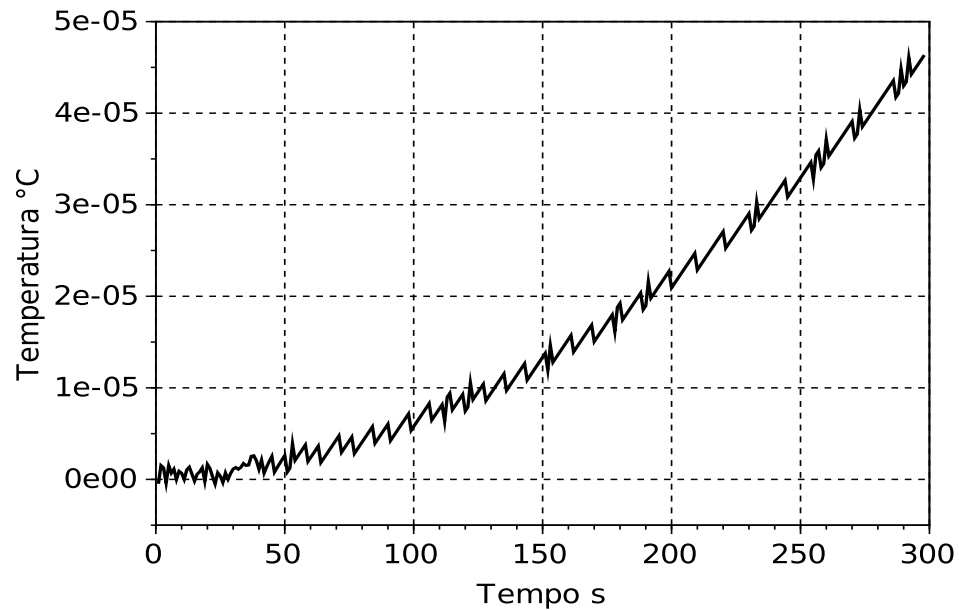


Figura 4.2: Diferença absoluta entre X22L e X22NL

4.2 Verificação Intrínseca da Solução X22Y22Z22NL

De forma análoga verifica-se o cálculo e a implementação da solução analítica X22Y22Z22NL.

Uma vez considerando que a solução X22NL foi verificada, propõe-se o seu uso para a verificação da solução X22Y22Z22NL.

Observa-se na fig.(4.3) que o problema tridimensional tende a se tornar um problema unidimensional caso todas as superfícies sejam isoladas exceto $x = 0$.

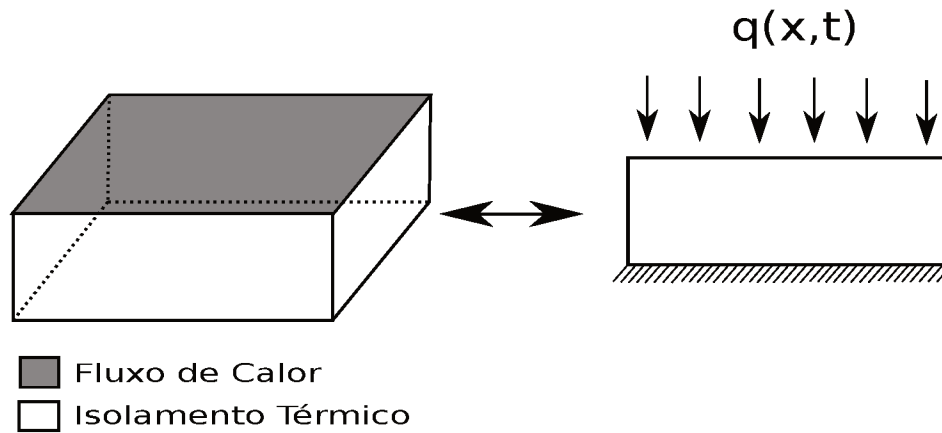
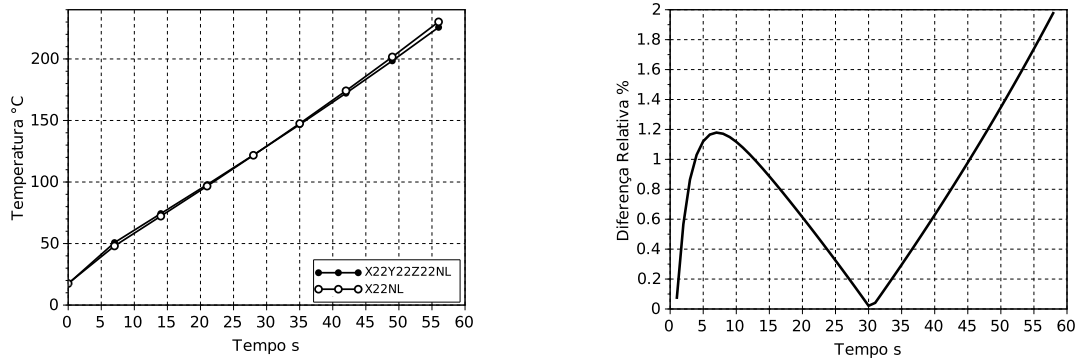


Figura 4.3: Equivalência entre o modelo tridimensional e o modelo unidimensional

Desta maneira ambas soluções analíticas são comparadas usando-se as mesmas configurações geométricas, propriedades termofísicas e fluxo de calor. Exceto para o modelo tridimensional, onde as superfícies remanescentes são isoladas.

Observa-se na Fig. (4.4-a) que a solução tridimensional tem excelente concordância com a solução unidimensional, como observa-se na Fig.(4.4-b), uma diferença relativa inferior a 2% entre as soluções.



(a) Comparação entre as soluções X22Y22Z22NL e X22NL (b) Diferença relativa entre as soluções X22Y22Z22NL e X22NL

Figura 4.4: Comparação entre as soluções X22Y22Z22NL e X22NL

4.2.1 Representação Gráfica - Modelo X22NL

Apresenta-se nesta seção a representação gráfica da solução do problema X22NL, o comportamento do termo $k(T)$ e a comparação dos resultados obtidos analiticamente com a simulação numérica usando o *software* Comsol Multiphysics[®].

Observa-se que a implementação da solução analítica, foi feita usando o *software* Scilab com os parâmetros dados pela Tab.(4.2)

Tabela 4.2: Propriedades térmicas que serão aplicadas nos modelos X22NL e Comsol.

Notação	Valor	Unidade
L	0,01	m
x	0	m
$T(0, t)$	0	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0(1 + AT)$	$Wm^{-1}K^{-1}$
k_0	12,9	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$3,95 \times 10^{-6}$	m^2s^{-1}
A	1×10^{-3}	K^{-1}
q	1×10^5	W

A Fig. (4.2.1) apresenta o comportamento do termo $k(T)$ considerando as propriedades apresentadas pela Tab.(4.2)

A Fig. (4.6) apresenta a comparação entre os comportamentos das soluções analíticas X22L e X22NL, dada pela Eq.(3.12).

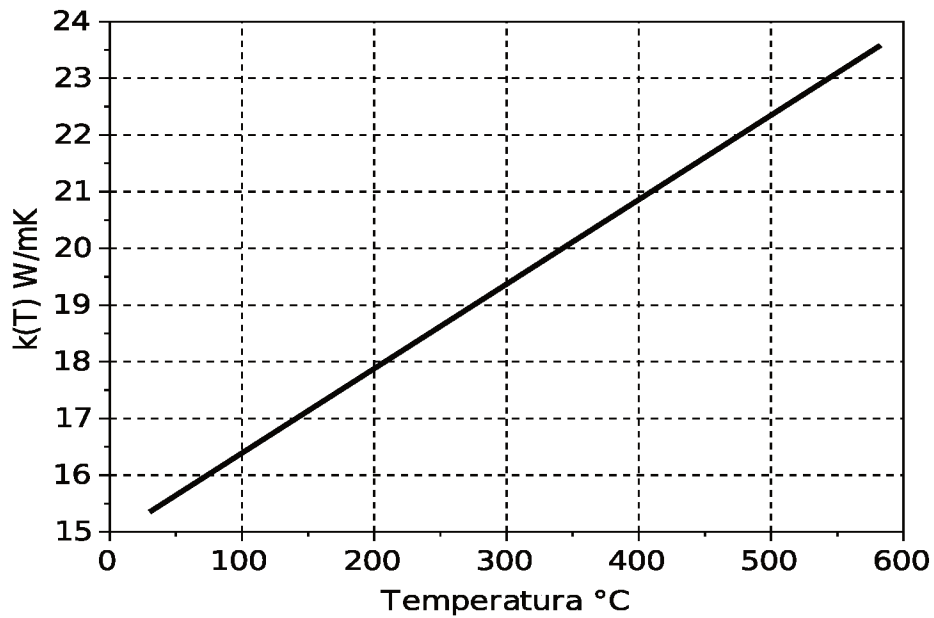


Figura 4.5: Comportamento da função $k(T)$

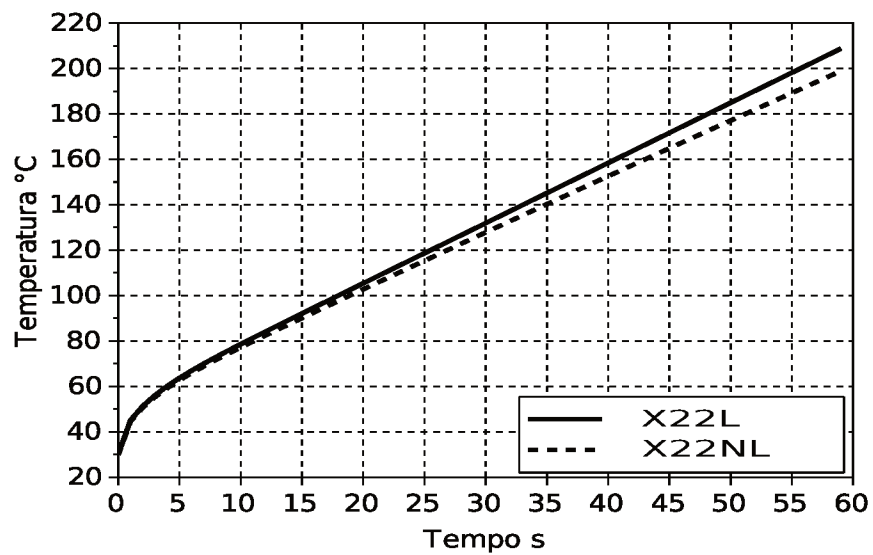


Figura 4.6: Comparação entre as soluções X22L e X22NL

Observa-se que quanto maior o tempo, maior a temperatura e portanto maior são os

valores de $k(T)$, o que faz com que a temperatura seja menor para o modelo não linear.

4.3 Representação Gráfica - Modelo X22Y22Z22NL

Calcula-se também as temperaturas do problema tridimensional em três pontos distintos considerando uma área parcial de fluxo de calor delimitada por $0 \leq x \leq L/5$ e $0 \leq z \leq R/50$ sobre a superfície $y = W$ considerando as propriedades térmicas e geométricas dadas pela Tab.(4.3) e o tempo de simulação de $t = 60s$.

Tabela 4.3: Propriedades térmicas e geométricas que serão aplicadas nos modelos X22Y22Z22NL.

Notação	Valor	Unidade
$L = W$	0,01	m
R	0,1	m
$T(0, t)$	20	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0(1 + AT)$	$Wm^{-1}K^{-1}$
k_0	12,9	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$3,95 \times 10^{-6}$	m^2s^{-1}
A	-1×10^{-3}	K^{-1}
q	1×10^6	W

E nos pontos:

- $T1 = (\frac{L}{5}, W, \frac{4R}{50})$,
- $T2 = (\frac{4L}{5}, W, \frac{4R}{50})$,
- $T3 = (0, \frac{W}{2}, \frac{R}{50})$.

Como apresentados pela Fig.(4.7).

As temperaturas calculadas nestes pontos específicos simulam um processo real de usinagem, onde são fixados termopares na ferramenta de corte.

A Fig. (4.8) apresenta as temperaturas para os pontos escolhidos. Pode-se observar temperaturas mais altas para a posição T3 devido a proximidade com a fonte de calor.

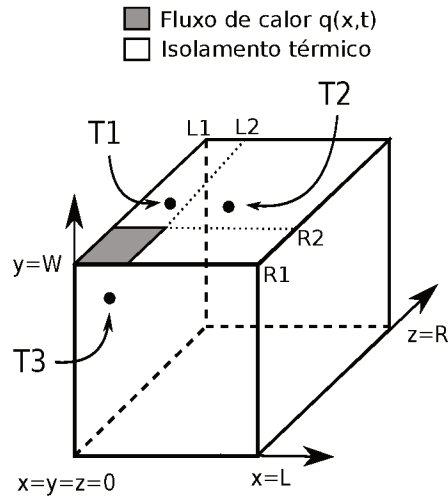


Figura 4.7: Modelo tridimensional com fluxo de calor em área parcial na superfície $y = W$

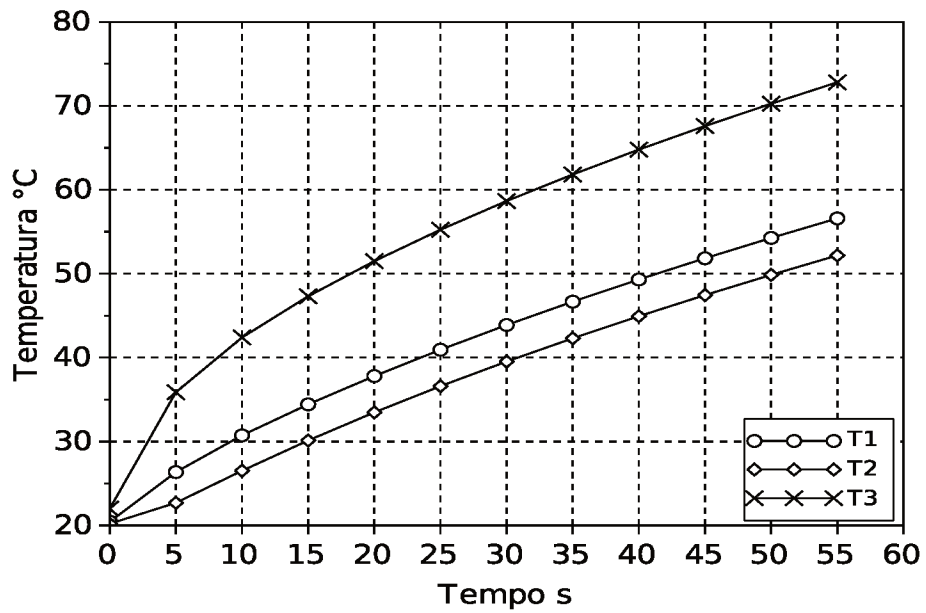


Figura 4.8: Temperaturas do modelo X22Y22Z22 nos pontos T1, T2 e T3 considerando área parcial de fluxo de calor.

4.4 Comparação: Solução Analítica Com Método Numérico

Apresenta-se nesta seção uma comparação das soluções X22NL e X22Y22Z22NL com suas respectivas soluções obtidas através de simulações numéricas, via Comsol.

Uma vez que as soluções analíticas X22NL e X22Y22Z22NL são soluções aproximadas, entende-se, neste caso, que uma comparação com soluções numéricas apresenta uma boa ferramenta de verificação de ambas soluções.

Assim, usando o *software* Comsol Multiphysics[®], simulou-se problema X22 usando os mesmos parâmetros do modelo analítico. Em seguida, os dados obtidos numericamente foram comparados aos resultados analíticos e apresentados na Fig.(4.9). Observa-se, na Fig.(4.9), que as soluções, numérica e analítica são concordantes, sendo a diferença relativa entre as soluções menores que 2,7%, Fig.(4.10).

Nota-se que, com o aumento do tempo há um aumento nas diferenças entre os perfis analítico e numérico, onde as temperaturas numéricas tendem a ser maiores.

Este fato se deve a aproximação $\alpha(T) = \alpha_0$ realizada analiticamente, onde, no ambiente Comsol os valores de α permanecem não lineares, pois, numericamente são obtidos através da relação $\alpha = k(T)\rho^{-1}C_p^{-1}$. Observe que no modelo analítico $\alpha = \alpha_0$.

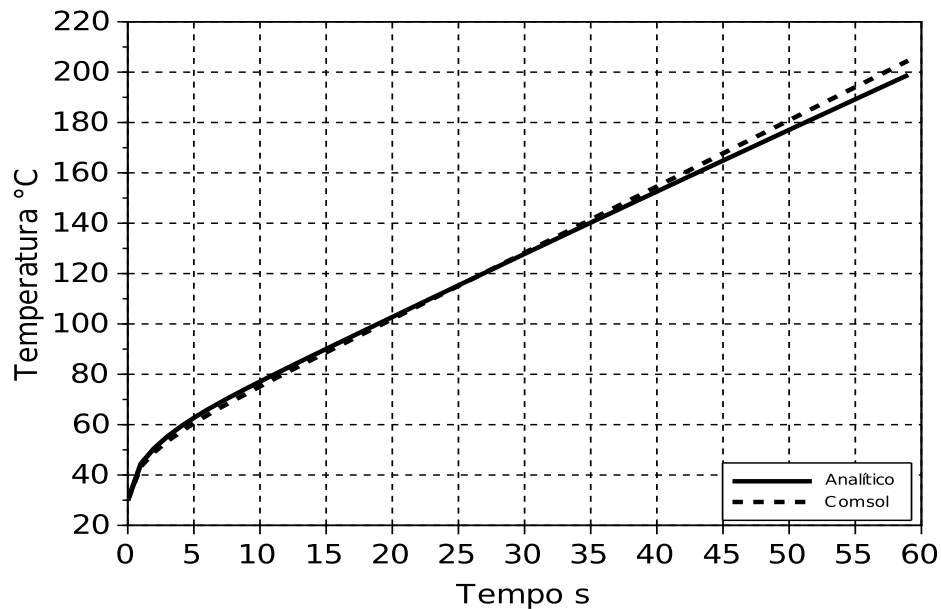


Figura 4.9: Comparação entre as soluções X22NL analítica e X22NL COMSOL

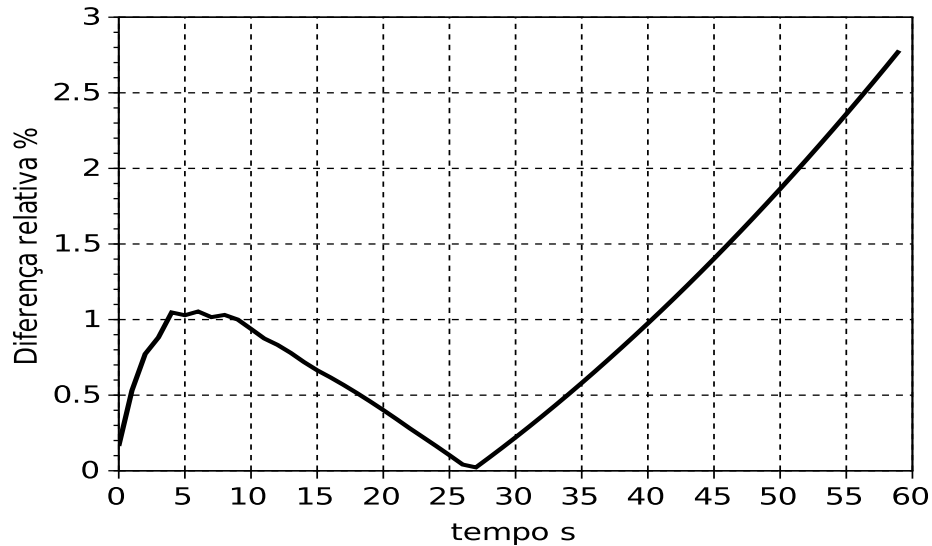


Figura 4.10: Diferença relativa entre as soluções X22NL analítica e X22NL COMSOL

Apresenta-se a seguir uma comparação da solução X22NL com dados de temperatura experimentais, obtidos na literatura.

4.5 Comparação: Solução Analítica X22NL Com Temperaturas Experimentais

Apresenta-se nesta seção a comparação e análise da solução analítica de um problema do tipo X22, cuja solução é dada pela Eq.(3.16) com temperaturas obtidas experimentalmente em um problema térmico de mesma característica.

Pretende-se então, usar os valores de temperaturas adquiridos experimentalmente, juntamente com o comportamento da condutividade térmica não linear para fazer comparações aos resultados apresentados pela Eq.(3.16), usando-se as mesmas condições.

4.5.1 Tillmann (2005)

Foi realizado por Tillmann (2005) o aquecimento de uma amostra de Policloreto de Vinila (PVC) de dimensão $245 \times 25 \times 245mm$, relacionados as coordenadas cartesianas x, z, y

respectivamente.

A amostra foi aquecida por efeito Joule por 30s com uma potência responsável pela imposição de um fluxo de calor de $400W$ superfície da coordenada z . A amostra foi acondicionada, durante o experimento, no interior de um forno que a manteve a uma temperatura ambiente constante de $20,81^{\circ}C$. As temperaturas foram adquiridas durante $4000s$ com intervalos de $1s$.

A amostra de PVC foi exposta a um aquecimento em $z = 25mm$ e isolado térmicamente em $z = 0mm$, onde na posição $z = 25mm$, é acoplado um termopar para aquisição do sinal de temperatura.

Devido a geometria escolhida por Tillmann (2005), o problema tridimensional apresenta comportamento unidimensional, uma vez que as dimensões x e y são aproximadamente 10 vezes maiores que a dimensão z . Fato que possibilita a comparação das temperaturas experimentais de um modelo tridimensional com temperaturas provenientes de uma solução analítica unidimensional de um modelo X22NL.

A Fig.(4.11) apresenta as temperaturas adquiridas para as condições acima mencionadas. Observa-se então uma variação de aproximadamente $5^{\circ}C$ no ponto $z = 25mm$, que é representado pelo termopar T_1 , os termopares T_2 e T_3 são posicionados em $z = 0mm$ e no interior do forno, respectivamente.

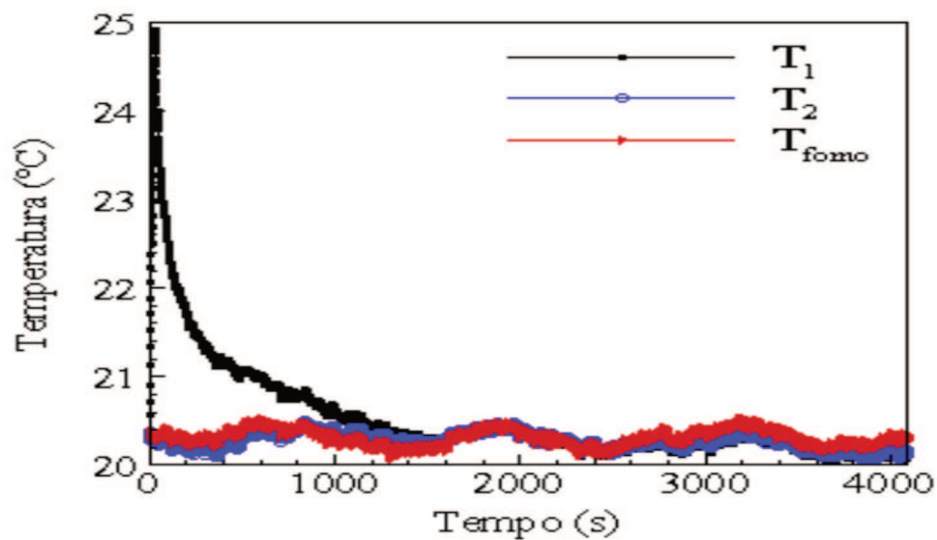


Figura 4.11: Temperaturas experimentais, Tillmann (2005)

Serão consideradas para caráter comparativo apenas as temperaturas obtidas pelo termopar $T1$.

A partir dos dados adquiridos, e usando técnicas de otimização, Tillmann (2005) obteve o comportamento das propriedades k e α , condutividade e difusividade térmica, respectivamente.

Os valores de k obtidos por Tillmann (2005) podem ser observados pela Fig.(4.12). Observe que k neste caso é composto de valores discretos. Fez-se, assim uma aproximação usando um polinômio primeiro grau. O polinômio interpolador foi obtido através do *software* matemático Wolfram Alpha[®], é dado por:

$$k(T) = -AT + B, \quad (4.1)$$

onde $A = 0,000173557$ e $B = 0,159789$.

Observa-se na Fig.(4.13) as diferenças entre os valores estimados para k Tillmann (2005) e a aproximação realizada pela função $k(T)$.

Uma vez que a solução analítica X22NL requer funções contínuas para $k(T)$ e fluxo de calor $F(t)$, foram obtidas curvas de ajuste tanto para os dados discretos da condutividade térmica, como para o fluxo de calor experimental.

As Figs. (4.12)-(4.13)-(4.2) apresentam graficamente estes ajustes.

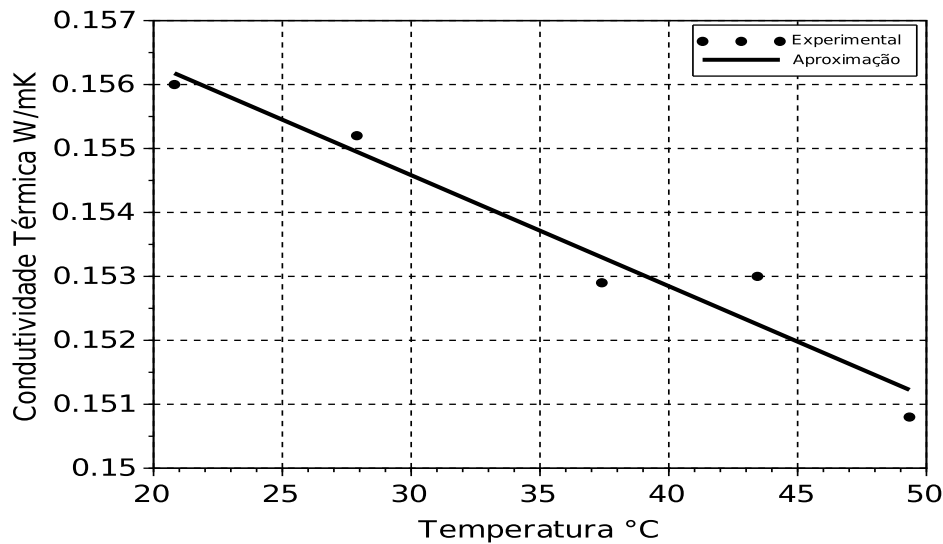


Figura 4.12: Valores experimentais de k e valores da função $k(T)$

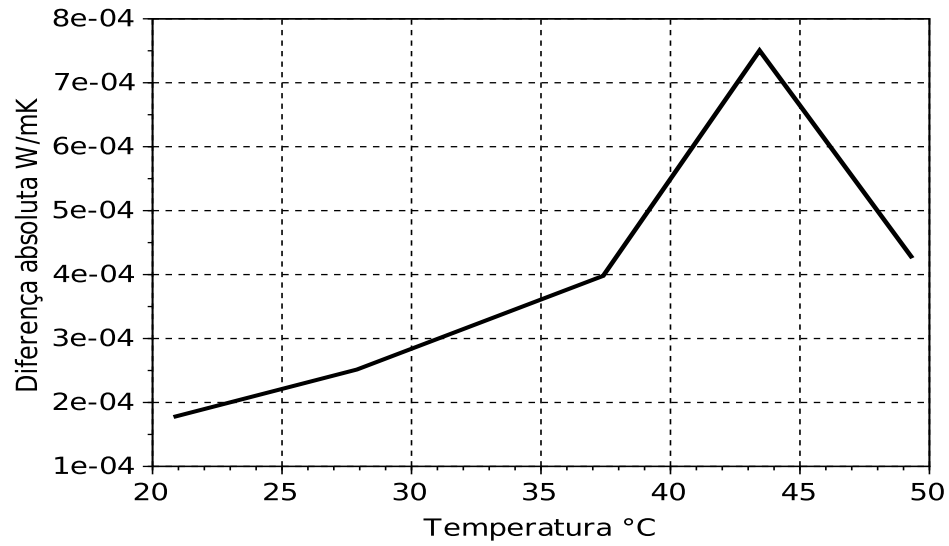


Figura 4.13: Diferença absoluta entre k estimado e a função $k(T)$. Eq.(4.1)

A curva:

$$F(t) = 400e^{-0,05t}, \quad (4.2)$$

modela, analiticamente, o fluxo discreto usado.

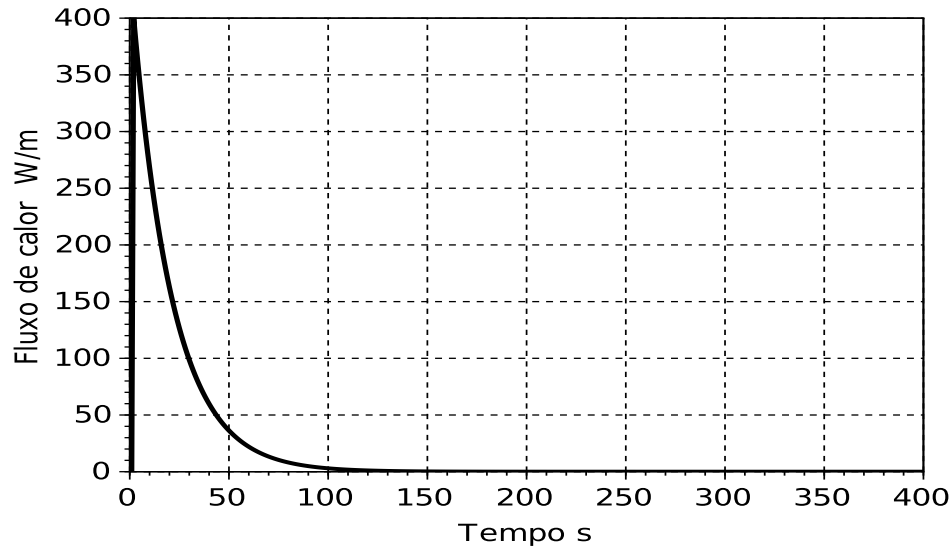


Figura 4.14: Fluxo de calor ajustado pela Eq.(4.2)

A Tabela (4.4) apresenta as propriedades térmicas e geométricas usadas por Tillmann (2005) e que serão usadas no modelo X22NL.

Tabela 4.4: Propriedades térmicas e geométricas que serão usadas no modelo X22NL.

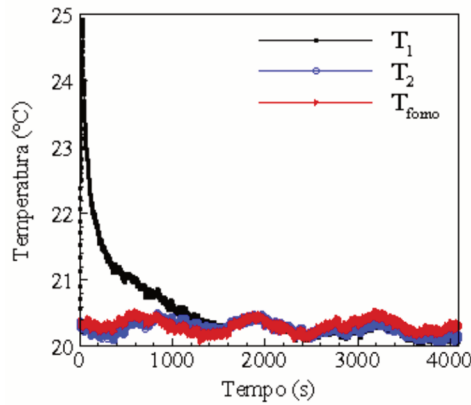
Notação	Valor	Unidade
L	0,025	m
$T(0, t)$	20,81	$^{\circ}C$
$k(T)$	$-A + BT$	$Wm^{-1}K^{-1}$
k_0	0,1560	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$1,30 \times 10^{-6}$	m^2s^{-1}
A	0,000173557	K^{-1}
B	0,159789	K^{-1}
q	400	W
t	2000	s
dt	1	s

Assim, para a posição $x = 0$ calcula-se as temperaturas. Usou-se a posição $x = 0$ para os cálculo das temperaturas devido ao fato que serão comparadas aos valores obtidos experimentalmente, para a posição do termopar $T1$.

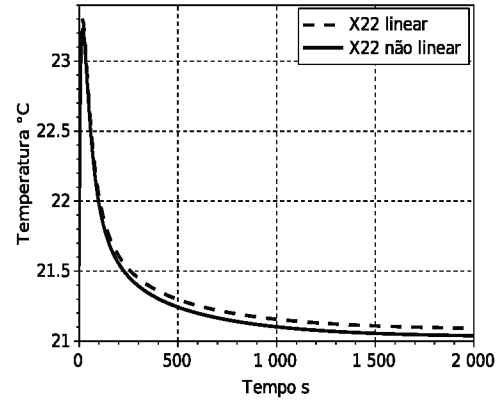
A Fig.(4.15) apresenta a comparação entre as temperaturas obtidas analiticamente e experimentalmente. Observa-se que as temperaturas provenientes do modelo não linear são

mais baixas quando comparadas aos dados experimentais, para tempos longos.

Uma hipótese para esse comportamento pode ser atribuída ao ajuste do fluxo de calor cujo valor tende a zero a partir de 150s enquanto o fluxo de calor experimental não se anula totalmente.



(a) Tillmann (2005)



(b) Solução analítica X22NL

Figura 4.15: Comparativo Tillmann (2005) e Solução analítica não linear

4.5.2 Wang *et al.* (2018)

Wang *et al.* (2018) Propôs o uso da técnica *multiple model adaptive inverse method (MMAI)* para estimar a condutividade térmica dependente da temperatura de um material. A técnica MMAI consiste em dividir o domínio em sub domínios, onde, em cada subdomínio a condutividade térmica possui comportamento linear e então é predita e estabelecida a partir de um submodelo.

Desta maneira considerou-se o seguinte esquema experimental:

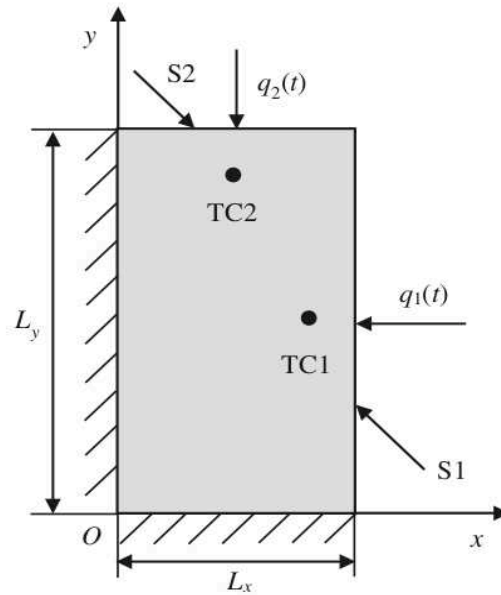


Figura 4.16: Esquema experimental usado por Wang *et al.* (2018)

Por se tratar de um problema bidimensional onde a dimensão y é o dobro da dimensão x opta-se, sem perda de generalidade, por usar a solução analítica X22 unidimensional para fins de comparação.

O fluxo de calor $q_1(t)$ usado por Wang *et al.* (2018), Eq.(4.3), foi aplicado no ponto $x = L_x$. A Fig.(4.17) mostra graficamente o fluxo de calor.

$$q_1(t) = 3 \times 10^5(1 - e^{-0,1t}) + 2,5 \times 10^5 \text{sen} \left(\frac{\pi t}{60} \right), \quad (4.3)$$

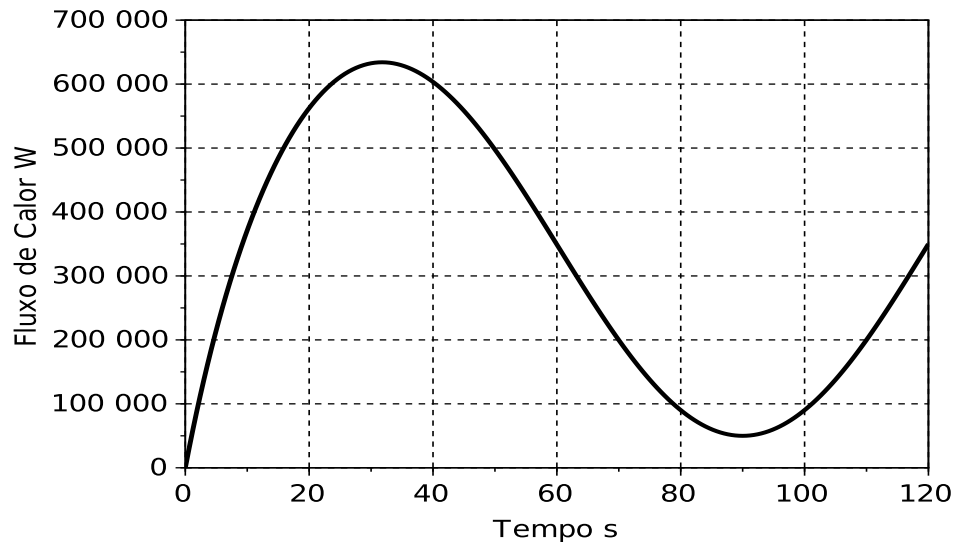


Figura 4.17: Fluxo de Calor Wang *et al.* (2018)

Wang *et al.* (2018) também apresentou, em forma de tabela, os valores para a condutividade térmica dependente da temperatura, que podem ser observados pela Tab.(4.5).

Tabela 4.5: Condutividade térmica dependente da temperatura Wang *et al.* (2018)

Temperatura °C	Condutividade Térmica W/mK
0	61,5
100	58,2
200	54,4
300	50,2
400	45,5
500	41,2
600	36,8

Analogamente, como os dados da Tab.(4.5) são dados de forma discreta o uso da solução X22NL requer uma função de ajuste contínua. O procedimento para obtenção da função $k(T)$ para este caso é análoga a mostrada na seção (4.5.1). Apresenta-se a seguir, Fig.(4.18), a representação gráfica resultante da operação realizada.

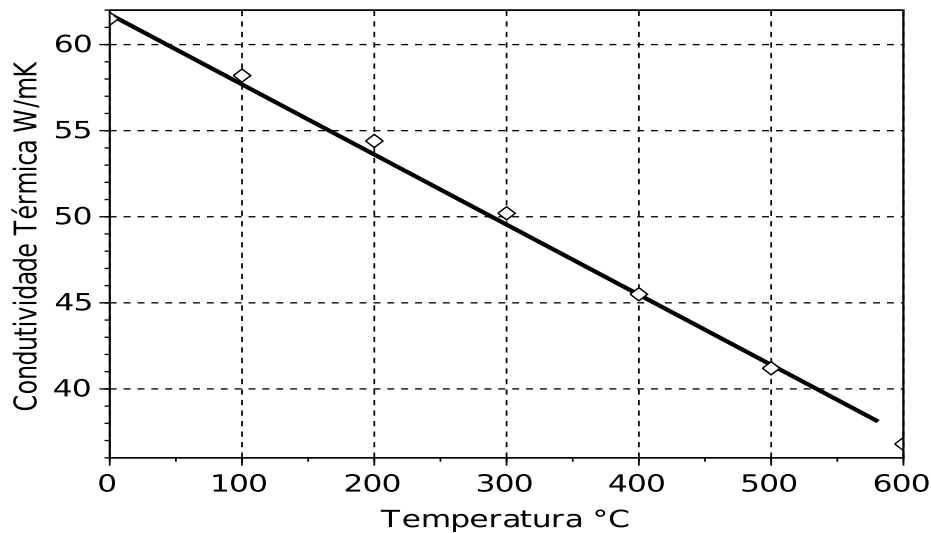


Figura 4.18: Valores experimentais de k e valores da função $k(T)$

Dessa forma resta apenas determinar a inversa da integral de $k(T) = k_0 - AT$, para que se possa explicitar a solução analítica tipo X22 para o problema. Assim:

$$T(x, t) = \left[\int_0^T \frac{1}{k_0} k(T) dT \right]^{-1}. \quad (4.4)$$

Obtendo-se:

$$T(x, t) = \frac{1}{A} (\sqrt{k_0^2 + 2k_0 A \Phi} - k_0), \quad (4.5)$$

que é a solução analítica para o problema X22NL nestas condições.

A fig.(4.19) apresenta as temperaturas obtidas por Wang *et al.* (2018) e pela solução analítica X22NL considerando as mesmas propriedades, que são apresentadas pela Tab.(4.6).

Observa-se na Fig.(4.19) que os perfis térmicos apresentam boa concordância, com uma diferença relativa de aproximadamente 20% para entre os tempos $20s \leq t \leq 80s$. Isto se dá devido ao fato que o problema proposto por Wang *et al.* (2018) é bidimensional e foi feita uma aproximação unidimensional para a solução analítica X22NL.

Tabela 4.6: Propriedades térmicas usadas por Wang *et al.* (2018) e o modelo X22NL

Notação	Valor	Unidade
L_x	0,075	m
L_y	0,15	m
$TC1$	$(\frac{19L_x}{30})$	m
$T(0, t)$	20	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0 - AT$	$Wm^{-1}K^{-1}$
k_0	61,5	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$1,7 \times 10^{-5}$	m^2s^{-1}
A	0,0407143	K^{-1}
t	120	s
dt	0,6	s

Observa-se assim uma boa aproximação da solução analítica ao modelo apresentado, mesmo considerando a simplificação geométrica.

Cabe observar que foram comparadas temperaturas obtidas analiticamente com temperaturas experimentais ou numéricas que podem apresentar erros de medição, arredondamento ou truncamento.

Como pode-se observar que um dos objetivos deste trabalho é de se determinar, de forma analítica, o fluxo de calor e a difusividade térmica em função da temperatura a partir de temperaturas obtidas por experimentos simulados analiticamente e numericamente. Estes procedimentos serão apresentados a seguir.

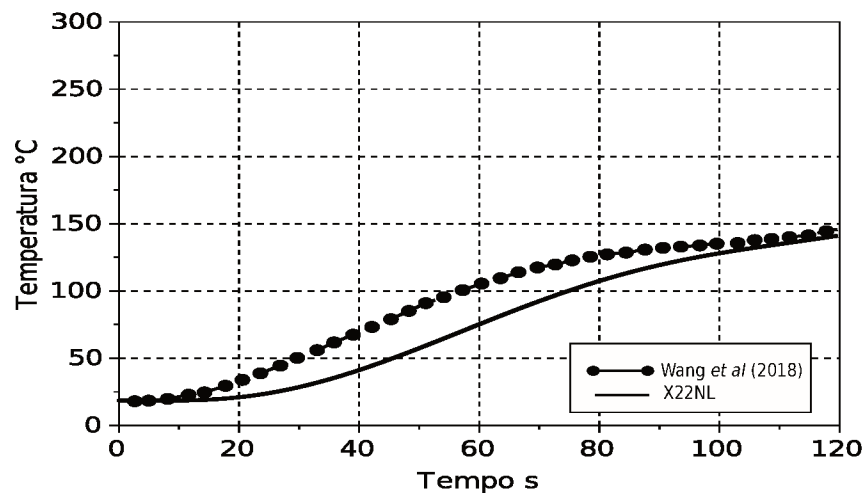


Figura 4.19: Comparativo de temperaturas obtidas por Wang *et al.* (2018) com a Solução analítica X22NL

Capítulo 5

Problema Inverso Não Linear: Estimativa de Fluxo de Calor Usando Soluções Analíticas

5.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo a metodologia para problemas inversos onde objetiva-se estimar o fluxo de calor e condutividade térmica dependente da temperatura. Para tal será feito um estudo sobre a determinação da função de transferência não linear para adaptação e aplicação do método TFBGF (transfer function based on Green's Functions) para problemas não lineares. Também será abordado a metodologia para determinação da condutividade térmica dependente da temperatura.

5.2 Função de Transferência Não Linear

Nesta seção detalha-se o procedimento de identificação e análise da função de transferência para um problema não linear.

Em sistemas dinâmicos três são as variáveis a serem estudadas, a excitação, a função transferência e a resposta do sistema. Os problemas são resolvidos conhecendo-se sempre duas variáveis e estimando a terceira: Os problemas inversos são aqueles em que a partir do conhecimento do sistema e de sua resposta (efeito) estima-se a excitação (causa). É possível analisar problemas de condução de calor fazendo-se uma analogia aos sistemas dinâmicos (FERNANDES, 2013).

A aplicação da técnica TFBGF consiste em usar o teorema da convolução para explicitar

analiticamente a função de transferência, e, conhecendo as temperaturas experimentais ou simuladas determinar o fluxo de calor. Pretende-se então, realizar uma adaptação da técnica TFBGF para a estimativa de fluxo de calor quando se trata de problemas não lineares, visto que neste caso, o comportamento do sistema dependerá da sua saída, fato que não ocorre em sistemas lineares.

Neste sentido, Bendat e Piersol (2010) definem sistema não linear como um sistema que atua instantaneamente na presença de uma excitação em um arranjo não linear. A saída do sistema é função, tanto da entrada quanto do comportamento do sistema, isto é, a saída do sistema por ser descrita matematicamente como:

$$y(t) = g(x(t)), \quad (5.1)$$

onde $y(t)$, $x(t)$ e $g(x)$ são respectivamente a entrada, saída e comportamento do sistema não linear, fig.(5.1).

Em outras palavras, quando o sistema $g(x)$ é não linear isso quer dizer que para quaisquer constantes a_1 , a_2 e quaisquer entradas $x_1(t)$, $x_2(t)$ tem-se

$$g(a_1x_1 + a_2x_2) \neq a_1g(x_1) + a_2g(x_2), \quad (5.2)$$

pois $g(x)$ é não aditivo ou não homogêneo.

Observa-se também que quando $x(t)$ é transladado para $x(t + \tau)$ e como $y(t) = g[x(t)]$ então tem-se $y(t + \tau) = g[x(t + \tau)]$.

Então pode-se observar, que sistemas dinâmicos não lineares não podem ser expressados matematicamente por uma operação de convolução entre a entrada e saída do sistema, uma vez que, os dados de saída possuem dependência contínua dos dados de entrada e do comportamento do sistema, como pode ser observado pela Fig.(5.1).

O que ocorre em sistemas térmicos é análogo ao observado por Bendat e Piersol (2010), os dados de saída possuem dependência contínua dos dados de entrada e do comportamento do sistema térmico, uma vez que, as propriedades térmicas do sistema são dependentes da temperatura. Isto é, um sistema térmico não linear pode ser descrito pela função $h(\alpha, k(T), x, t)$, onde $k(T)$ apresenta a dependência da entrada do sistema, que é responsável pela variação de temperatura ΔT .

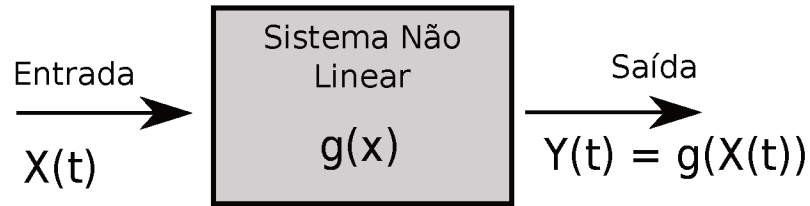


Figura 5.1: Sistema dinâmico não linear

Contudo, ao considerar um problema auxiliar $\Phi(x, t)$ linear, derivado de um problema não linear, tem-se a possibilidade de expressá-lo como mostrado na Fig. (5.2).

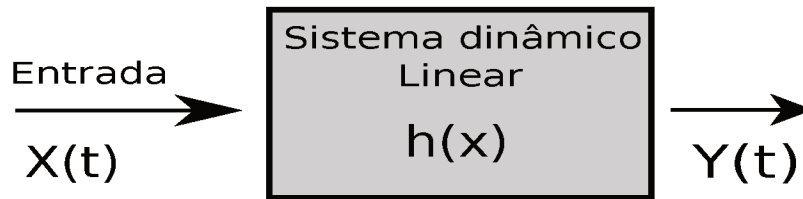


Figura 5.2: Sistema dinâmico linear

Observa-se que, as funções de entrada e saída são: fluxo de calor $q(x, t)$ e temperatura $T(x, t)$ respectivamente.

Assim, inicialmente, parte-se do Teorema da Convolução. Que é dado por:

$$\Phi(x, t) = \tilde{h}(x, t) * q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau) \tilde{h}(t - \tau) d\tau, \quad (5.3)$$

onde a função $\tilde{h}(x, t)$ na Eq.(5.3) representa a resposta impulsiva para um problema linear. Assim, busca-se uma relação matemática que expresse de forma analítica a resposta ao impulso para um problema não linear.

Fazendo a entrada do sistema, descrito pela Eq.(5.3) um pulso de calor, isto é: $q(t) = \delta(t)$ (FERNANDES, 2013), e observando que no método funções de Green, a função $\tilde{h}(x, t - \tau)$ é a FG característica ao problema térmico e que, sem perda de generalidade, a FG para qualquer sistema térmico é dada em termos de $t - \tau$, obtém-se:

$$\Phi(x, t) = \tilde{h}(x, t) * q(t) = \frac{\alpha_0}{k_0} \int_0^t G_{x22}(x, t|x', t - \tau) \delta(\tau) d\tau, \quad (5.4)$$

onde: $G_{x22}(x, t|x', \tau)$ é dada por Beck *et al.* (2010).

$$G_{x22}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha_0 (t-\tau)} \cos(\beta_m x) \cos(\beta_m x'), \quad (5.5)$$

da propriedade de elemento neutro da convolução: $\delta * h = h$, tem-se que:

$$\tilde{h}(t) = \frac{\alpha_0}{k_0} \int_0^t G_{x22}(x, t|x', t - \tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{\alpha_0}{k_0} G_{x22}(x, t|x', t). \quad (5.6)$$

Assim,

$$\tilde{h}(t) = \frac{\alpha_0}{k_0} \left[\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha_0 t} \cos(\beta_m x) \cos(\beta_m x') \right]. \quad (5.7)$$

Observe que: $\delta * h = h$, e portanto não existe a não necessidade de se resolver a integral temporal.

Porém, como

$$\delta(t) * h(t) = T(x, t), \quad (5.8)$$

e da propriedade de elemento neutro da convolução tem-se que:

$$h(x, t) * \delta(t) = h(x, t) \Rightarrow h(x, t) = T(x, t), \quad (5.9)$$

de acordo com (FERNANDES, 2013). Note que, de forma análoga:

$$\delta(t) * \tilde{h}(t) = \tilde{h}(t) \Rightarrow \tilde{h}(t) = \Phi(x, t), \quad (5.10)$$

e a partir da transformação inversa de Kirchhoff tem-se:

$$T(x, t) = k^{-1}(\Phi(x, t)). \quad (5.11)$$

Assim, a partir das Eqs.(5.9)-(5.10) pode-se concluir que a resposta impulsiva para um problema não linear é dada por:

$$h(x, t) = k^{-1}(\tilde{h}(x, t)). \quad (5.12)$$

Desta forma:

$$T(x, t) = q(t) * k^{-1}(\tilde{h}(x, t)). \quad (5.13)$$

Também é propriedade da convolução o fato que, o operador convolução no domínio do tempo torna-se o operador multiplicação no domínio da frequência. Assim, aplicando a transformada de Laplace na Eq.(5.13) tem-se que:

$$\mathcal{L}[T(x, t)] = \mathcal{L}[q(t) * k^{-1}(\tilde{h})] = \mathcal{L}[q(t)] \cdot \mathcal{L}[k^{-1}(\tilde{h})]. \quad (5.14)$$

Assim:

$$T(s) = q(s) \cdot \tilde{H}(s) \Rightarrow q(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{T(s)}, \quad (5.15)$$

onde $\tilde{H}(s) = \mathcal{L}[k^{-1}(\tilde{h})]$ é a função de Transferência e possibilita a estimativa do fluxo de calor quando se tem um problema de condução de calor não linear.

Considerando, hipoteticamente, $k(T) = k_0(A + BT)$ tem-se que:

$$h(x, t) = k^{-1}(\tilde{h}) = -\frac{\sqrt{2B\tilde{h}(x, t) + A^2 - A^2}}{B}, \quad (5.16)$$

onde a função $k^{-1}(\tilde{h})$ é a inversa da integral de $k(T)$ aplicada a \tilde{h} de forma análoga a descrita anteriormente.

Assim, a função de transferência de um sistema térmico não linear é dada pela transformada de Laplace da resposta impulsiva, Eq.(5.16). Observa-se que a função de transferência fornece informações inerentes ao sistema térmico.

Deve-se também observar, que a função de transferência para o sistema não linear definida pela Eq.(5.16) apresenta a dependência de $k(T)$ através das constantes A e B que são invariantes no tempo e espaço.

De posse da função de transferência e temperaturas é possível determinar o fluxo de calor (excitação) imposto ao sistema, entretanto, deve-se analisar se existe a transformada de Laplace da resposta impulsiva e a estabilidade dos problemas direto e inverso. Esta análise será discutida na seção seguinte.

5.3 Análise de Estabilidade

Como dito anteriormente, a função de transferência de um problema térmico pode ser definida como a transformada de Laplace da resposta impulsiva do problema, dado pela Eq.(5.16).

Desta forma pergunta-se: Existe a transformada de Laplace da resposta ao impulso do sistema, em outras palavras, existe $\mathcal{L}[k^{-1}(\tilde{h})]$? E se existe é estável?

Pode-se definir a transformada de Laplace como: Seja uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a transformada de Laplace é a função $F(s)$ tal que:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (5.17)$$

onde $f(t)$ é a função a ser transformada para o domínio da frequência.

Se a integral, Eq.(5.17) for convergente então s terá a forma $s = a + bi$ com a e $b \in \mathbb{R}$

O integrando na Eq.(5.17) é o produto de ua função $f(t)$ por uma função exponencial negativa que tem o declínio a partir de um dado $s > 0$. Isto implica que $e^{-st} \rightarrow 0$ quando

$t \rightarrow \infty$. Se e^{-st} faz com que o integrando corresponda a uma função exponencial implica que a integral apresente convergência.

Dizemos que $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é de ordem exponencial se existirem $M > 0$ e γ tal que:

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \forall t > 0 \quad (5.18)$$

Observa-se que na Eq.(5.18) a função $f(t)$ corresponde a Eq.(5.7) onde, se avaliada em $x = 0$ resulta em:

$$\tilde{h}(t) = \frac{\alpha_0}{k_0 L} + \frac{2\alpha_0}{k_0 L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha_0 t} \cos(\beta_m x) \quad (5.19)$$

Considerando o fato que:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (5.20)$$

este fato permite analisar termo a termo a equação. Assim, deve-se mostrar se existem $M > 0$ e γ tais que:

$$\left| \frac{\alpha_0}{k_0 L} \right| \leq Me^{\gamma t} \quad (5.21)$$

e

$$\left| \frac{2\alpha_0}{k_0 L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha_0 t} \cos(\beta_m x) \right| \leq Me^{\gamma t} \quad (5.22)$$

Observa-se que a Eq.(5.21) é satisfeita quando $M = \frac{\alpha_0}{k_0 L} \geq 0$ e $\gamma = 0$ da mesma forma que a Eq.(5.22) se satisfaz quando $M = \frac{2\alpha_0}{k_0 L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m x) \geq 0$ e $\gamma = -\beta_m^2 \alpha_0$

Nota-se também que $h(x, t) = k^{-1}(\tilde{h}(x, t))$ existe pois trata-se da função inversa da integral de $k(T)$ que é uma função contínua, integrável e linear.

Assim, conclui-se que existe a transformada de Laplace da função $h(x, t) = k^{-1}(\tilde{h}(x, t))$.

Sobre a estabilidade do sistema dinâmico observa-se o Teorema do Valor Final que afirma

que um sistema dinâmico é estável se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s, t), \quad (5.23)$$

Logo deve-se mostrar a igualdade dos limites na Eq.(5.23).

Considerando:

$$k(T) = k_0(1 + A_1T + \dots + A_nT^n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.24)$$

e:

$$\tilde{h}(t) = \frac{\alpha_0}{k_0L} + \frac{2\alpha_0}{k_0L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha_0 t} \cos(\beta_m x), \quad (5.25)$$

então a resposta impulsiva será dada por:

$$h(x, t) = k^{-1}[\tilde{h}(x, t)], \quad (5.26)$$

e a função de transferência:

$$H(x, s) = \mathcal{L}[h(x, t)]. \quad (5.27)$$

Observa-se que as funções dadas nas Eq.(5.26) e Eq.(5.27) são referentes ao problema não linear.

De forma análoga:

$$\tilde{H}(x, s) = \mathcal{L}[\tilde{h}(x, t)], \quad (5.28)$$

é a resposta impulsiva do problema linear.

Fazendo $A_n \rightarrow 0$, $n \in \mathbb{N}$ na Eq.(5.24) tem-se como consequência o fato que $k(T) \rightarrow k_0$ e ainda que:

$$h(x, t) \rightarrow \tilde{h}(x, t) \quad (5.29)$$

$$H(x, s) \rightarrow \tilde{H}(x, s), \quad (5.30)$$

e facilmente pode-se notar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{H}(x, s) = \frac{\alpha_0}{k_0 L}, \quad (5.31)$$

e pode-se concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(x, s) = \frac{\alpha_0}{k_0 L}. \quad (5.32)$$

Desta forma pode-se concluir a partir do Teorema do Valor Final que o sistema dinâmico não linear é estável.

Resta analisar se o sistema dinâmico inverso também é estável, isto é, Se o produto:

$$\frac{T(x, s)}{H(x, s)}, \quad (5.33)$$

é estável.

Assim, segundo Fernandes (2013) o sistema poderá ser considerado estável se para cada possível função limitada de entrada:

$$T(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[T(x, s)], \quad (5.34)$$

produzir uma função de saída:

$$q(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[q(x, s)], \quad (5.35)$$

para um sistema com resposta impulsiva:

$$\frac{1}{h(x, t)}. \quad (5.36)$$

Assim, um sistema físico pode ser dito estável se para cada função limitada de entrada produzir uma função limitada de saída (FERNANDES, 2013).

Assim:

$$|q(x, t)| = \int_0^\infty \frac{|T(x, t)|}{|h(x, t)|} dt, \quad \forall t > 0, \quad (5.37)$$

dessa maneira devem existir constantes \mathcal{A} e \mathcal{B} tais que:

$$|T(x, t)| \leq \mathcal{A} \quad (5.38)$$

$$\left| \frac{1}{h(x, t)} \right| \leq \mathcal{B} \quad (5.39)$$

Como $T(x, t)$ são temperaturas experimentais, medidas através de um sistema físico realizável, logo existe \mathcal{A} tal que $|T(x, t)| \leq \mathcal{A}$, como mostrado por Fernandes (2013).

Mostra-se que a função $\left| \frac{1}{h(x, t)} \right|$ é convergente e limitada, isto é existe \mathcal{B} tal que $\left| \frac{1}{h(x, t)} \right| \leq \mathcal{B}$ calculando o limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x, t)}, \quad (5.40)$$

Este limite é o inverso ao calculado na aplicação do Teorema do Valor Final, logo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x, t)} = \frac{k_o L}{\alpha_0}. \quad (5.41)$$

Pode-se assim concluir que o sistema dinâmico inverso é estável e pode ser usado para estimativa de fluxo de calor em problemas térmicos não lineares.

Uma propriedade interessante da Transformada de Laplace é a translação no eixo da frequência e do tempo Saute, Azevedo e Strauch (2019), isto é: Se $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$ definida para $s > s_0$ então:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a) \quad (5.42)$$

Isto é, há um deslocamento a para a direita no gráfico de F .

Este fato implica diretamente nas estimativas de fluxo de calor usando a função *fft* via Scilab ou Matlab onde é provocado um deslocamento do fluxo de calor estimado para direita com relação ao fluxo de calor simulado.

Aborda-se a seguir a aplicação da técnica a um problema unidimensional do tipo X22, onde pretende-se estimar, de forma simulada, o fluxo de calor.

5.4 Aplicação: Problema Térmico X22NL

Apresenta-se nesta seção a aplicação da técnica desenvolvida para estimativa do fluxo de calor aplicado a um problema unidimensional tipo X22NL. Dessa maneira serão usadas as temperaturas provenientes da implementação da solução analítica X22 e função de transferência não lineares

A Tab.(5.1) apresenta as propriedades térmicas e geometria que serão usadas para as estimativas de fluxo de calor. Observando que para a estimativa de fluxo de calor a forma de $k(T)$ deve ser conhecida.

Tabela 5.1: Propriedades térmicas e geométricas usadas para estimativa de fluxo de calor

Notação	Valor	Unidade
L	10×10^{-2}	m
x	$0, L/2, L$	m
$T(0, t)$	25	$^{\circ}C$
k_0	401	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	117×10^{-6}	m^2s^{-1}
t	200	s
dt	1	s

Considerando a condutividade térmica como $k(T) = k_0(1 + AT)$ onde $A = 1 \times 10^{-3}$ pode-se simular temperaturas a partir de diferentes formas de fluxo e usando a Eq.(??) estimar o fluxo de calor que foi imposto.

como já visto a solução analítica não linear considerando a condutividade térmica $k(T) = k_0(1 + AT)$ é dada por:

$$T(x, t) = k^{-1}(\Phi) \Rightarrow T(x, t) = \frac{1}{A} \left(\sqrt{1 + 2A\Phi(x, t)} - 1 \right), \quad (5.43)$$

Como serão usados diferentes formas de fluxo de calor então escolhe-se o uso da solução

aparente $\Phi(x, t)$ híbrida, que é dada por:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 + \frac{\alpha_0}{k_0 L} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (t_{n+1} - t_n) + \frac{2\alpha_0}{k_0 L} \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\beta_m x)}{\beta_m^2 \alpha_0} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\beta_m^2 \alpha_0 (t-t_{n+1})} - e^{-\beta_m^2 \alpha_0 (t-t_n)}). \quad (5.44)$$

A Fig.(5.3) apresenta o fluxo de calor do tipo onda quadrada “*step heat flux*” aplicado ao ponto $x = 0$. Observa-se que o fluxo de calor desta característica apresenta valor máximo para $40s < t < 140s$ pode-se notar também que exatamente quando $t = 40s$ e $t = 140s$ existe um salto de zero para os valores máximo e mínimo respectivamente.

A Fig.(5.4) apresenta as temperaturas simuladas que foram geradas usando o fluxo de calor, Fig.(5.3), e as propriedades geométricas e térmicas, Tab.(5.1) para as posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$. Observa-se um ganho maior de temperatura para as posições mais próximas a fonte de calor.

A resposta impulsiva é apresentada pela Fig.(5.5) para as posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$ respectivamente.

É importante notar que a resposta impulsiva será a mesma para todas as simulações, pois se trata da mesma geometria e propriedades usadas.

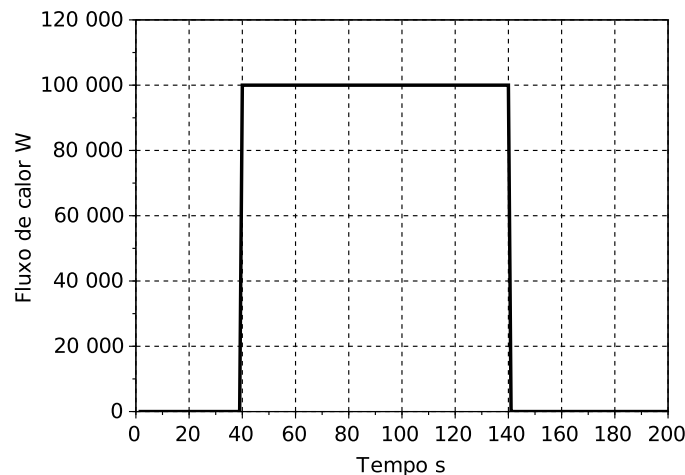


Figura 5.3: Fluxo de calor usado para simulação de temperaturas experimentais

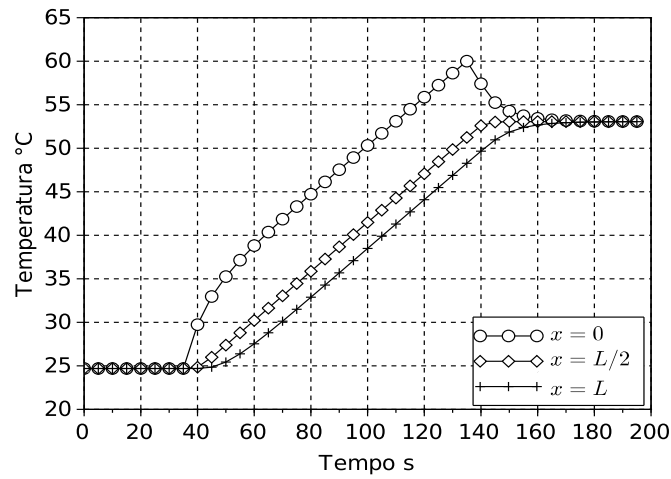


Figura 5.4: Temperaturas simuladas para as posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$

As Fig.(5.6 a) apresentam respectivamente o fluxo de calor estimado e simulado para a posição $x = 0$, observa-se que exatamente no tempo $t = 40s$, ponto de início do fluxo, um pico elevado no fluxo estimado, esta divergência é denominada *overshoot* Fernandes (2013) que é devido a mudança brusca de valores de fluxo.

Isto é, instantaneamente o fluxo de calor salta de zero para seu valor máximo. Este fenômeno também pode ser observado na estimativa do fluxo de calor constante. Nota-se também que para o tempo $t = 140s$ o fenômeno não é observado.

É evidenciado o efeito do *overshoot* quando se observa as diferenças percentuais Fig.(5.6 b) entre o fluxo estimado e simulado.

As Figs.(5.7a - 5.8a) apresentam a estimativa de fluxo de calor para as posições $x = L/2$ e $x = L$ respectivamente. Observa-se a o deslocamento dos fluxos de calor estimados à direita com relação ao fluxo simulado, este fato é devido a propriedade de translação no eixo da frequência.

Este fato implica diretamente no cálculo das diferenças percentuais entre as estimativas e o fluxo simulado, Figs. ((5.7b - 5.8b)) onde as diferenças são grandes nos pontos de descontinuidade do fluxo simulado. Contudo, observa-se diferenças menores que 10% onde o fluxo de calor é constante. O que aparenta uma boa estimativa.

De forma análoga, porém usando para este teste $A = -1 \times 10^{-3}$ faz-se a análise para a estimativa de um fluxo de calor tipo gaussiano.

Observa-se na Fig. (5.9a) as temperaturas geradas usando o fluxo de calor com amplitude de $q = 1 \times 10^6$.

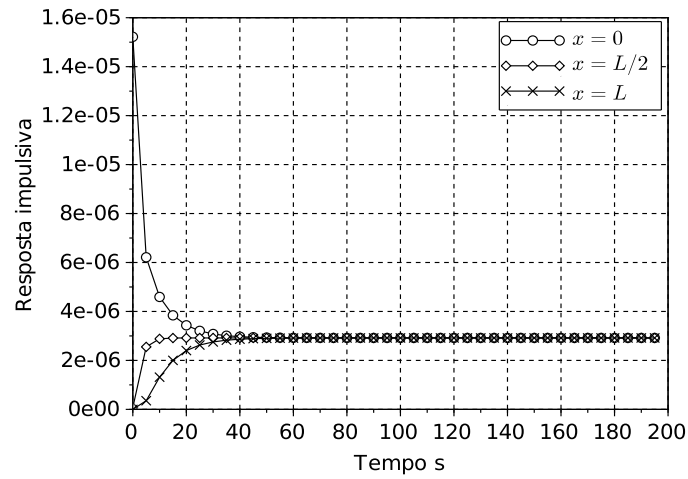
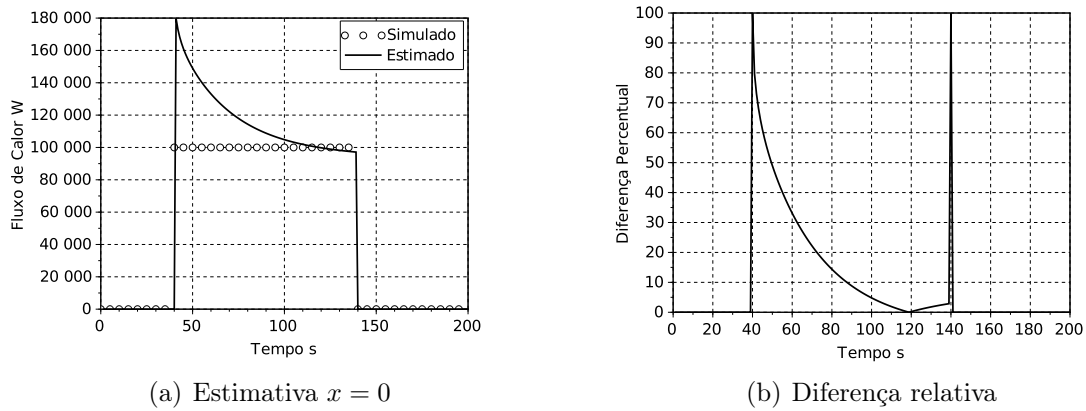


Figura 5.5: Resposta impulsiva



(a) Estimativa $x = 0$

(b) Diferença relativa

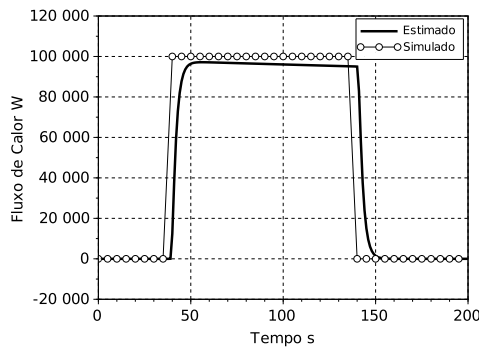
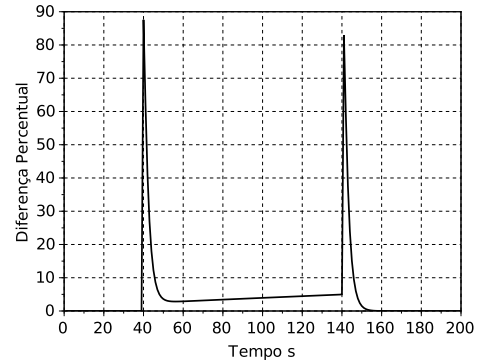
Figura 5.6: Estimativa e diferença relativa para $x = 0$

Nota-se que como $A < 0$ o comportamento de $k(T)$ é decrescente. Pode se observar uma variação térmica $\Delta T = 225^\circ C$ para a posição $x = 0$.

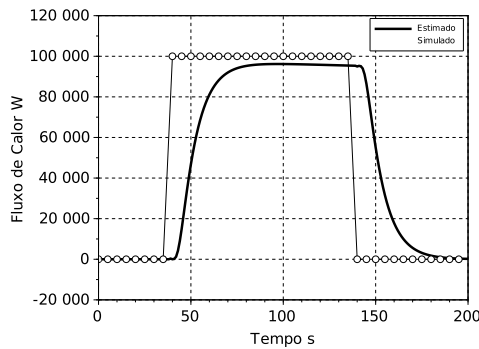
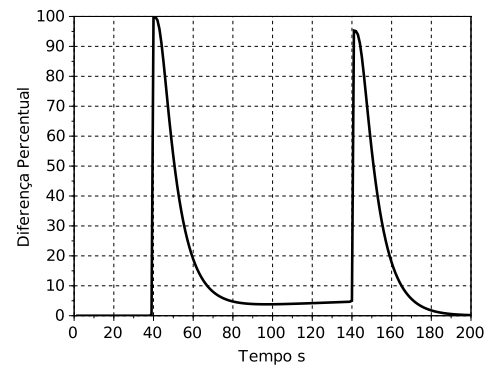
Os fluxos de calor estimados para as posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$ respectivamente são apresentados pela Fig. (5.9b).

Observa-se um comportamento inesperado na estimativa em $x = 0$ para os primeiros e últimos tempos, esse fato se deve a proximidade da fonte de calor. Observa-se fato semelhante quando estima-se o fluxo para o caso de fluxo tipo onda quadrada.

Para as demais posições $x = L/2$ e $x = L$ não nota-se esta anomalia, contudo pode-se observar o efeito de translação das estimativas para estas posições, as diferenças relativas, desconsiderando o efeito de translação são de 10% e zero respectivamente.

(a) Estimativa $x = L/2$ 

(b) Diferença relativa

Figura 5.7: Estimativa e diferença relativa para $x = L/2$ (a) Estimativa $x = L$ 

(b) Diferença relativa

Figura 5.8: Estimativa e diferença relativa para $x = L$

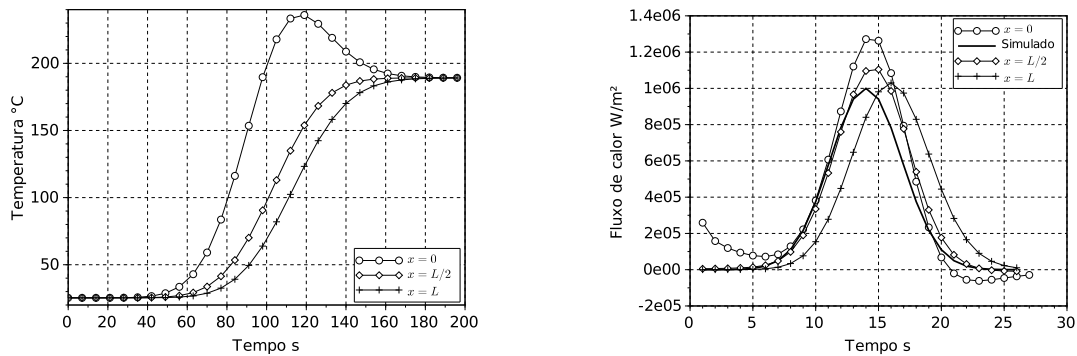
Para ambos testes observa-se a possibilidade da estimativa de fluxo na face oposta a que é imposta o fluxo de calor, concordando com a possibilidade de aplicação prática deste método.

Considerando agora uma variação de aproximadamente 62% em $k(T)$ que impactará drasticamente nas temperaturas geradas pelo modelo não linear. Realiza-se a estimativa de fluxo de calor para a posição $x = L$.

Para tal, considera-se $A = -3 \times 10^{-3}$ e um fluxo de calor tipo gaussiano de amplitude $q = 1 \times 10^6$ e $T(x, 0) = 0^\circ C$.

Assim, as Figs.(5.10) apresentam respectivamente o comportamento de $k(T)$, as temperaturas geradas a estimativa comparada ao fluxo de calor simulado e as temperaturas recalculadas

Observa-se mais uma vez a presença da translação da estimativa com relação ao fluxo imposto, nota-se também que a diferença máxima apresentada é inferior a 10%.



(a) Temperaturas geradas por um fluxo de calor gaussiano.

(b) Comparativo entre fluxo de calor estimado em três posições e o fluxo imposto.

Figura 5.9: Temperaturas geradas a partir de um fluxo gaussiano e resultados da aplicação da técnica para estimativa de fluxo de calor.

Em problemas práticos, ocorre que não se conhece o fluxo de calor que foi imposto experimentalmente para que se faça comparação entre os fluxos (experimental e imposto). Assim recalcula-se as temperaturas usando o fluxo de calor estimado e faz-se a comparação.

A Fig.(5.10d) apresenta a comparação das temperaturas simuladas com as recalculadas a partir do fluxo de calor estimado Fig.(5.10c). Observa-se grande proximidade entre os perfis térmicos apresentando diferenças inferiores a 0,5%.

Este fato mostra que a estimativa, mesmo estando defasada com relação a simulada ainda é capaz de reconstituir as temperaturas.

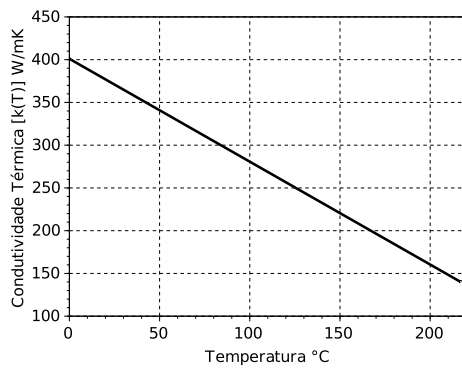
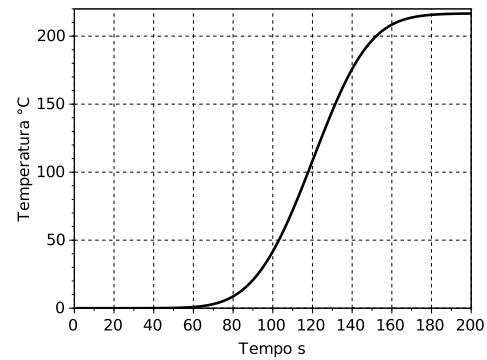
Pode-se notar que a metodologia desenvolvida apresenta uma ferramenta robusta para estimativa de fluxo de calor para problemas não lineares.

Assim, para estimar o fluxo de calor deve-se conhecer as temperaturas amostradas em um problema real e a resposta impulsiva, que foi tratada neste capítulo.

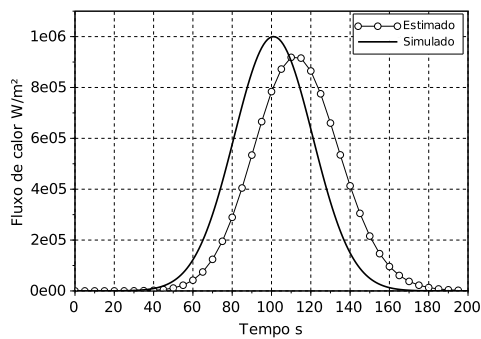
Observa-se também que, as temperaturas experimentais, para aplicação do método podem ser provenientes de apenas um ponto de acesso da geometria. Fato que pode ser visto como facilitador para aplicações práticas, pois pode diminuir o tempo e o custo experimental ou quando se possui apenas uma superfície de acesso.

Desta forma conclui-se que é possível estimar fluxo de calor quando se trata de um problema não linear de forma rápida, pois, a resposta impulsiva apresenta-se de fácil implementação, e quando implementada apresenta baixo custo computacional em sua execução.

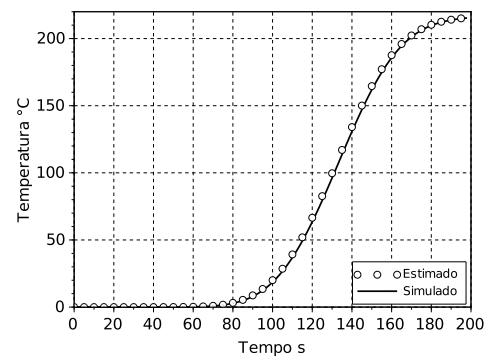
Apresenta-se no próximo capítulo a abordagem da estimativa da condutividade térmica variando com a temperatura.

(a) Variação de $k(T)$ 

(b) Temperaturas geradas a partir do uso do fluxo de calor imposto.



(c) Comparação entre o fluxo imposto e estimado.



(d) Comparativo entre as temperaturas recalculadas usando o fluxo estimado e o fluxo imposto.

Figura 5.10: Comparativo entre fluxo de calor estimado e temperaturas recalculadas usando o fluxo de calor estimado.

Capítulo 6

Problema Inverso Não Linear: Estimativa da Condutividade Térmica Dependente da Temperatura Usando Soluções Analíticas

6.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo o desenvolvimento de um método para estimativa do comportamento da condutividade térmica variando com a temperatura. A relevância deste estudo se dá na obtenção da descrição completa do comportamento da condutividade térmica de um material variando com a temperatura.

6.2 Desenvolvimento da Técnica

Esta seção é dedicada ao desenvolvimento da técnica para estimativa do comportamento da condutividade térmica dependente da temperatura. Reescrevendo

$$\Phi = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k(\hat{T}) d\hat{T}. \quad (6.1)$$

Onde a Eq.(6.1) é a definição da transformada de Kirchhoff, e $k(T) = F(k_0, A_1, A_2, \dots, A_n, T)$ é uma função genérica para o comportamento da condutividade térmica. Observa-se que F é função da condutividade térmica de referência, das constantes A e da temperatura T .

Supondo uma função genérica do tipo: $F(k_0, A_1, A_2, \dots, A_n, T)$ tal que F seja contínua, integrável e sua integral possua inversa, logo, pela definição de integral definida, existe uma única função \widehat{F} tal que:

$$\Phi = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T F(k_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \widehat{T}) d\widehat{T} = \widehat{F}(k_0, A_1, A_2, \dots, A_n, T) \quad (6.2)$$

Observa-se que:

$$T(x, t) = k^{-1}(\Phi) \quad (6.3)$$

Que é a aplicação inversa da transformada de Kirchoff, para determinação das temperaturas em termos de $T(x, t)$. Assim, tem-se que:

$$T(x, t) = \widehat{F}^{-1}(k_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \Phi), \quad (6.4)$$

onde a função $\Phi(x, t)$ na Eq.(6.4) representa as temperaturas obtidas pela versão linear do problema.

Desta forma, a partir da definição dos valores A_1, A_2, \dots, A_n pode-se apresentar a função $T(x, t)$, como aplicado no capítulo 3.

Mas o que ocorre em casos práticos é que não se conhece o comportamento da função $k(T)$. São conhecidos apenas os valores de temperaturas obtidos experimentalmente.

Assim, pretende-se, determinar o comportamento da função $k(T)$ a partir do conhecimento de temperaturas experimentais de um problema não linear.

Como visto na Eq.(6.4), F depende das temperaturas provenientes da versão linear do problema térmico. Assim, modela-se o problema proposto por uma equação diferencial linear, com as mesmas condições de contorno, geometria e propriedades térmicas a fim de obter-se as temperaturas aparentes relacionadas ao problema não linear, isto é, o termo $\Phi(x, t)$.

Desta forma, a partir do conhecimento dos termos $T(x, t)$ e $\Phi(x, t)$ da Eq.(6.4) resta a determinação dos coeficientes A_1, A_2, \dots, A_n .

Apresenta-se a seguir a obtenção dos coeficientes A_1, A_2, \dots, A_n . para alguns casos particulares de $k(T)$.

Nestes testes as temperaturas experimentais serão obtidas sinteticamente através de simulações numéricas considerando as propriedades térmicas conhecidas.

6.3 Caso Particular: $k(T) = k_0(1 + AT)$

Considerando o caso particular $k(T) = k_0(1 + AT)$, onde A é uma constante. Obtém-se:

$$\Phi(x, t) = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k_0(1 + A\hat{T})d\hat{T} \Rightarrow \Phi(x, t) = k(T) = \frac{AT^2}{2} + T \quad (6.5)$$

Então:

$$T(x, t) = k^{-1}(\Phi) \quad (6.6)$$

Logo

$$T(x, t) = \frac{1}{A} \left(\sqrt{1 + 2A\Phi(x, t)} - 1 \right), \quad (6.7)$$

é solução de temperatura para o caso particular $k(T)$ considerado.

Note que na Eq.(6.5), tem-se $\Phi(x, t) = \frac{AT^2}{2} + T$ onde a constante A pode ser facilmente isolada se tornando função de T e Φ . Assim, obtém-se:

$$AT^2 + 2T - 2\Phi = 0 \quad (6.8)$$

onde

$$A = \frac{-2T + 2\Phi}{T^2}, \quad T(x, t) \neq 0. \quad (6.9)$$

Observa-se a restrição $T(x, t) \neq 0$ na equação anterior. Isso implica que para casos práticos as temperaturas devem assumir valores não nulos quando medidos em graus Celsius. Uma alternativa para contornar este inconveniente é usar temperaturas em escalas absolutas, como Kelvin.

As temperaturas “experimentais”, aqui chamadas de sintéticas, são obtidas considerando os seguintes parâmetros.

E com um fluxo de calor do tipo:

Tabela 6.1: Parâmetros usados para obtenção das temperaturas sintéticas.

Notação	Valor	Unidade
L	$2,5 \times 10^{-3}$	m
x	0	m
$T(0, t)$	20	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0(1 + AT)$	–
k_0	14,4	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$3,95 \times 10^{-6}$	m^2s^{-1}
A	$A = -2,67098 \times 10^{-6}$	–
t	300	s
dt	1	s

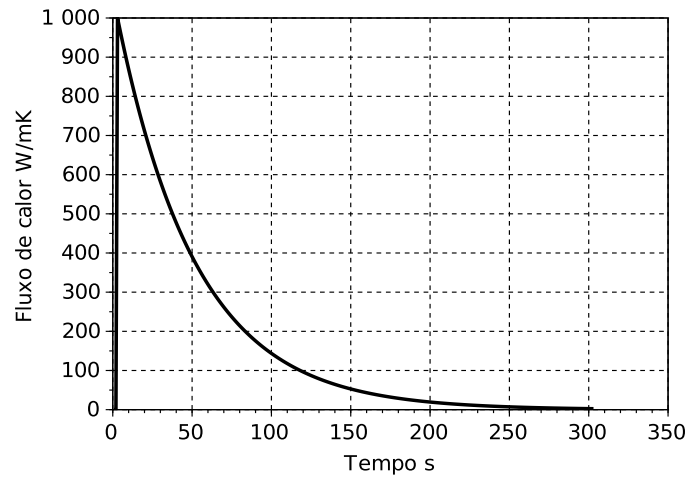


Figura 6.1: Fluxo de calor usado na obtenção das temperaturas sintéticas.

Devido ao fato de temperaturas experimentais normalmente apresentarem ruídos aleatórios inerentes do processo de medição, as temperaturas sintéticas foram obtidas adicionando-se ruído às simulações, ou seja:

$$T(x, t) = T(x, t) + \epsilon\sigma \quad (6.10)$$

A Fig.(6.2) apresenta as temperaturas sintéticas com adição do ruído ϵ e desvio padrão σ geradas pelo modelo não linear.

Usando os mesmos valores apresentados pela Tab.(6.1) determina-se o perfil térmico para

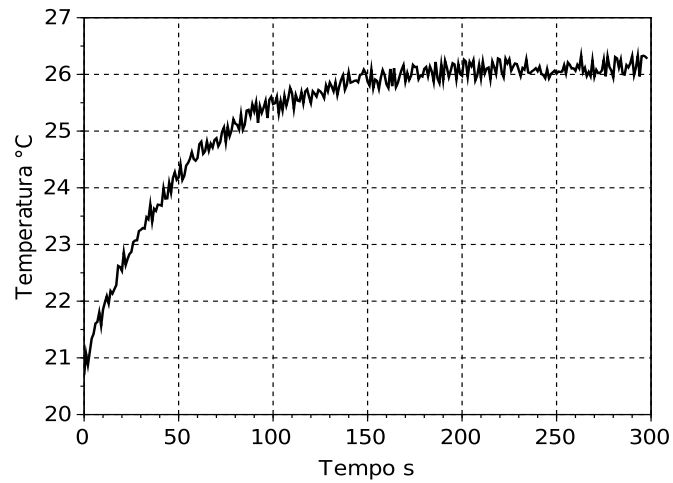


Figura 6.2: Temperaturas sintéticas com adição de ruído $\epsilon\sigma$.

o problema linear Φ e o seu perfil térmico é apresentado pela Fig.(6.3).

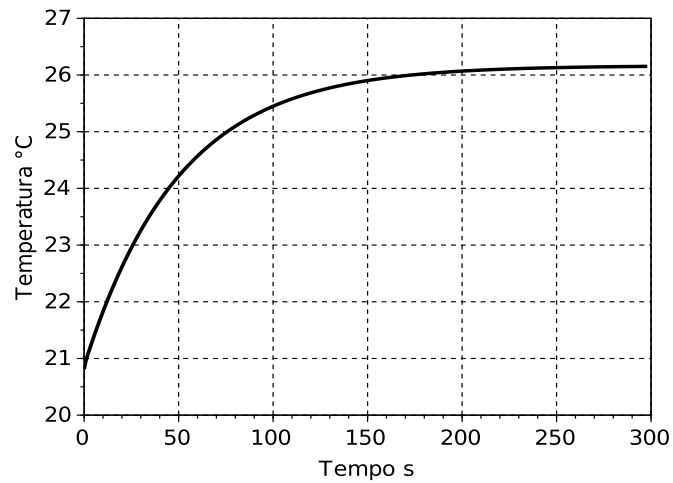


Figura 6.3: Temperaturas do modelo linear dadas em termos de $\Phi(x, t)$

Desta forma, usando a Eq.(6.9) onde $\Phi(x, t)$ e $T(x, t)$ são as temperaturas experimental (sintéticas) e teórica respectivamente pode-se determinar a constante A .

Assim:

$$A = \frac{-2T + 2\Phi}{T^2} \Rightarrow A = -0,0000027 \quad (6.11)$$

Note que a equação acima, que determina o coeficiente A vai ter como saída um vetor com 300 valores distintos para o coeficiente, isto se dá pois os vetores T e Φ possuem dimensão 300,

Observa-se também que, as dimensões dos vetores de temperatura dependem do tempo total de duração do experimento.

Outro fator que influencia no fato da obtenção de valores distintos é a presença do ruído adicionado as temperaturas do problema não linear.

A Fig.(6.4) apresenta os valores obtidos para o coeficiente A .

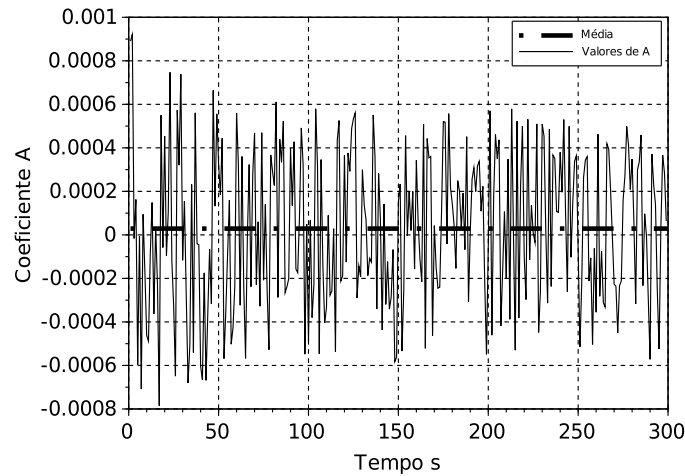


Figura 6.4: Valores estimados para o coeficiente A e valor médio.

Tillmann (2005) também obteve valores distintos para as estimativas de k , em seu trabalho, e, considerou a média dos valores obtidos. Usando uma metodologia análoga, calculou-se o valor médio de A , como mostrado na Fig.(6.4).

Observa-se que o coeficiente A estimado é exatamente o mesmo que foi imposto para gerar as temperaturas simuladas. Observa-se também que mesmo com adição de ruído às temperaturas foi possível obter a função $k(T)$ através do coeficiente A .

Conclue-se que para qualquer caso onde o modelo $k(T)$ possui dependência de apenas uma constante, esta pode ser facilmente isolada e calculada.

Na próxima seção analisa-se a estimativa de constantes para o modelo $k(T) = k_0(A+BT)$.

6.4 Caso Particular: $k(T) = k_0(A + BT)$

Considerando a função $k(T)$ é dada por $k(T) = k_0(A + BT)$ onde A e B são constantes tem-se:

$$\Phi(x, t) = k(T) = \frac{1}{k_0} \int_0^T k_0(A + B\hat{T})d\hat{T} \Rightarrow AT + \frac{BT^2}{2} \quad (6.12)$$

Como

$$T(x, t) = k^{-1}(\Phi) \quad (6.13)$$

Tem-se que

$$T(x, t) = -\frac{\sqrt{2B\Phi + A^2} - A}{B} \quad (6.14)$$

E também:

$$AT + \frac{BT^2}{2} = \Phi \quad (6.15)$$

Neste caso, não é possível isolar as constantes A ou B sem que ambas fiquem em função uma da outra, porém, como as funções $T(x, t)$ e $\Phi(x, t)$ são conhecidas, pode-se escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} AT(x, t_1) + \frac{B}{2}T(x, t_1)^2 = \Phi(x, t_1) \\ AT(x, t_2) + \frac{B}{2}T(x, t_2)^2 = \Phi(x, t_2) \end{cases} \quad (6.16)$$

Nota-se que no sistema linear, Eq.(6.16), a primeira equação está relacionada ao tempo $t = 1$ e a segunda ao tempo $t = 2$, assim, relaciona-se as temperaturas atuais com temperaturas futuras onde $dt = t_2 - t_1$.

O sistema linear então pode ser reescrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(x, t_1) & T(x, t_2) \\ \frac{T(x, t_1)^2}{2} & \frac{T(x, t_2)^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x, t_1) & \Phi(x, t_2) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Observa-se que a matriz que contém as constantes a serem determinadas pode ser isolada na equação matricial $AX = B$. Assim:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x, t_1) & \Phi(x, t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(x, t_1) & T(x, t_2) \\ \frac{T(x, t_1)^2}{2} & \frac{T(x, t_2)^2}{2} \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.18)$$

Nota-se que em (6.18) que as temperaturas experimentais T não podem ser sequencialmente nulas, ou seja $T_m = 0$ e $T_{m+1} = 0$ para $m \in \mathbb{N}$ resultaria em uma matriz com linhas ou colunas completamente nulas, implicando diretamente na não existência da matriz inversa das temperaturas experimentais, impossibilitando a aplicação do método que necessita da inversão da matriz.

Assim, considerando as informações apresentadas pela Tab.(6.2), analogamente ao caso anterior, gera-se então as temperaturas sintéticas e aparentes para aplicação do método.

Tabela 6.2: Propriedades térmicas e geométricas para determinação de temperaturas sintéticas e aparentes.

Notação	Valor	Unidade
L	$2,5 \times 10^{-3}$	m
x	0	m
$T(0, t)$	20	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0(A + BT)$	—
k_0	14,4	$Wm^{-1}K^{-1}$
α_0	$3,95 \times 10^{-6}$	m^2s^{-1}
A	$A = 1,01$	K^{-1}
B	$B = -5 \times 10^{-4}$	K^{-1}
t	300	s
dt	1	s

A Fig.(6.5-a) apresenta o fluxo de calor imposto para gerar as temperaturas sintéticas e aparentes $T(x, t)$ e $\Phi(x, t)$ respectivamente.

Ao realizar o procedimento proposto, isto é, resolvendo o sistema linear dado pela Eq.(6.16) nas variáveis $T(x, t)$ e $\Phi(x, t)$ pode-se estabelecer as constantes A e B que determinam $k(T)$.

Tabela 6.3: Comparativo entre as constantes A e B estimadas e impostas.

Constante	Imposto	Estimado	Diferença percentual
<i>Sem adição de ruído</i>			
A	1,01	1,01	0%
B	-5×10^{-4}	-5×10^{-4}	0%
<i>Com adição de ruído</i>			
A	1,01	0,998694	1,1%
B	-5×10^{-4}	$-4,67 \times 10^{-4}$	6,6%

A Tab.(6.3) apresenta os resultados das estimativas de A e B considerando dois testes, com e sem ruído. É observado que sem a adição de ruído o método é capaz de determinar exatamente os valores foram impostos. Já com a adição de ruído foram apresentados respectivamente as diferenças de 1,1% e 6,6% para A e B respectivamente.

Obseva-se que a estimativa de B tem um erro de aproximadamente 6 vezes maior do que A, contudo, pode-se considerar um erro pequeno e que não compromete na reconstrução da função $k(T)$.

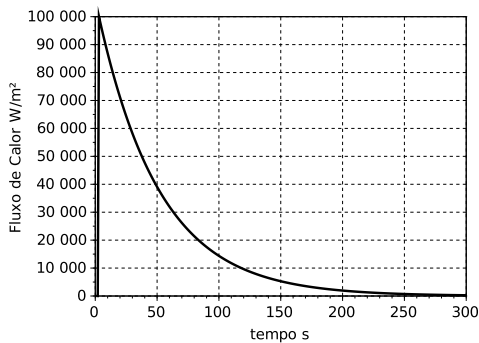
As Figs. (6.5-c,d) apresentam respectivamente a reconstrução da função $k(T)$ a partir das constantes A e B estimadas e a diferença percentual entre $k(T)$ imposto e estimado. Nota-se diferenças percentuais inferiores a 1,2%.

As diferenças no comportamento de $k(T)$ estimado Figs. (6.5-c) se deve principalmente ao termo B, pois este na função $k(T) = k_0(A + BT)$ representa o coeficiente angular da reta formada por $k(T)$, que como dito anteriormente, é 6,6% menor que o valor imposto.

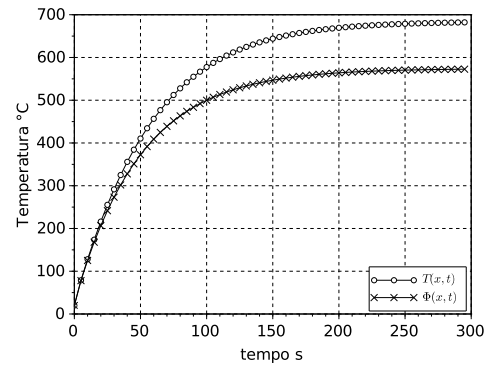
Embora as estimativas, quando considerado adição de ruído, sejam ligeiramente distantes pode-se considerar uma boa aproximação aos falores reais, que foram impostos.

Deve-se notar que para realizar a estimativa em um caso real, é necessário conhecer, além da geometria e fluxo de calor, a condutividade térmica de referência k_0 e difusividade térmica α_0 do material a que é submetido o fluxo de calor.

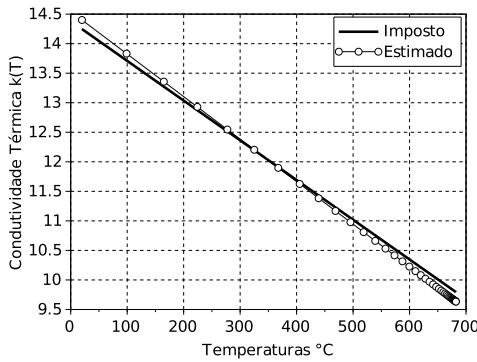
Na proxima seção será mostrado a aplicação do método considerando temperaturas que não foram geradas pela solução não linear proposta neste trabalho, mas sim, do método numérico elementos finitos através do software Comsol Multiphysics.



(a) Fluxo de calor imposto



(b) Temperaturas sintéticas e aparentes



(c) Comparativo entre a condutividade térmica estimada e imposta.

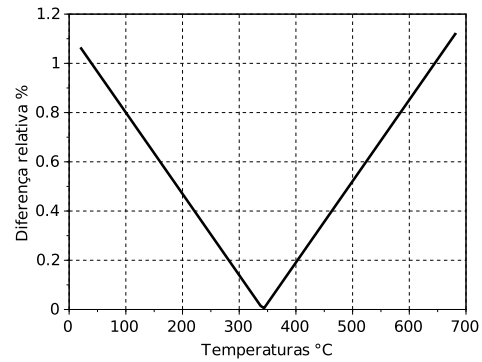
(d) Diferença relativa entre $k(T)$ imposto e simulado

Figura 6.5: Fluxo de calor, temperaturas aparentes e sintéticas, estimativa da condutividade térmica e comparativo entre a condutividade estimada e imposta.

6.5 Estimando a Condutividade Térmica Dependente da Temperatura a Partir de Temperaturas Sintéticas Obtidas Numericamente

Apresenta-se nesta seção a estimativa da condutividade dependente da temperatura considerando temperaturas sintéticas obtidas via método numérico usando o *software* COMSOL.

Simulou-se o problema tipo X22NL com fluxo de calor imposto em $x = 0$ e isolamento térmico em $x = L$ onde: $0 \leq x \leq L = 10 \times 10^{-2}m$. As propriedades térmicas e as constantes A e B usadas são apresentadas pela Tab.(6.4).

A metodologia para realizar a estimativa de parâmetros para a função $k(T)$, é o uso das temperaturas provenientes da simulação numérica, $T(x, t)$, e as temperaturas geradas pelo modelo linear analítico, $\Phi(x, t)$.

Tabela 6.4: Propriedades térmicas e geométricas usadas para obtenção das temperaturas sintéticas via Comsol.

Notação	Valor	Unidade
L	10×10^{-2}	m
x	0	m
$T(0, t)$	25	$^{\circ}C$
$k(T)$	$k_0(A + BT)$	$Wm^{-1}K^{-1}$
k_0	401	$Wm^{-1}K^{-1}$
C_p	385	$JKg^{-1}K$
ρ	8933	gcm^{-3}
A	$A = 1,01$	K^{-1}
B	$B = -5 \times 10^{-4}$	K^{-1}
t	300	s
dt	1	s

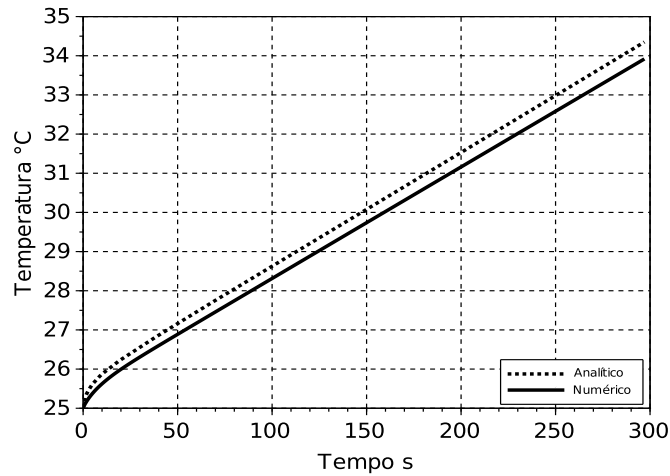


Figura 6.6: Temperaturas

A Fig.(6.5) apresenta as soluções numérica e analítica, isto é, perfis térmicos dados pelo Comsol e solução não linear X22NL respectivamente.

Nota-se uma diferença entre as soluções, isso ocorre devido ao fato que, para implementação de parâmetros via Comsol a difusividade térmica é calculada automaticamente usando a Eq.(6.19).

$$\alpha = \frac{k(T)}{\rho C_p}. \quad (6.19)$$

Desta maneira o COMSOL usa a difusividade térmica também como um parâmetro não linear.

Já para o modelo analítico não linear, usou-se a seguinte aproximação $\alpha(T) \rightarrow \alpha_0$ pois, como discutido anteriormente, a difusividade térmica em função da temperatura não apresenta grande variação, 0,45%, para este caso específico. Como pode ser observado pela Fig.(6.7).

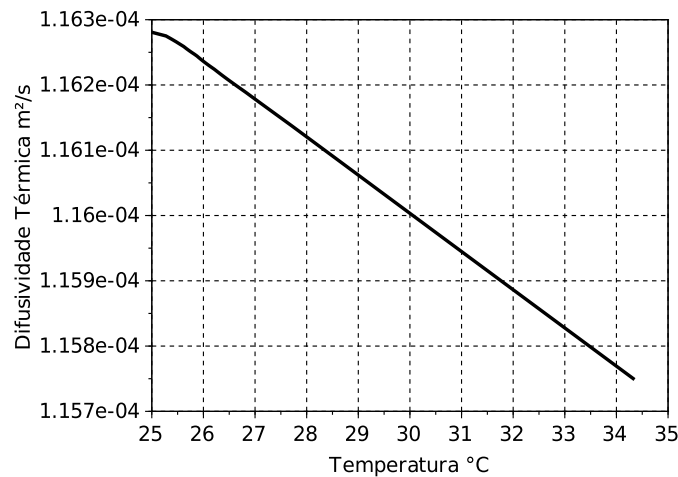


Figura 6.7: Variação de $\alpha(T)$

A critério de comparação, calculou-se a solução analítica X22NL e comparou-se com os resultados apresentados pelo Comsol. A Fig.(6.8) apresenta a diferença entre os modelos analítico e numérico, pode-se ver que a diferença máxima apresentada é menor que 1,3%.

Desta maneira, pode-se concluir que a aproximação da difusividade térmica para um valor constante não é danosa para o cálculo das temperaturas para modelos não lineares.

Tabela 6.5: Comparativo entre as constantes A e B estimativas e impostas.

Constante	Imposto	Estimado	Diferença percentual
A	1,01	1,0146234	0,45%
B	-5×10^{-4}	$-6,39 \times 10^{-4}$	27%

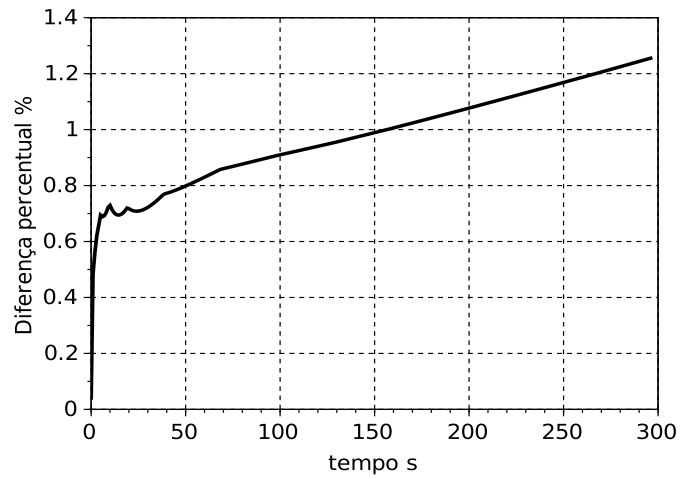


Figura 6.8: Diferença relativa entre as soluções X22NL e Comsol.

A Tab.(6.5) apresenta a comparação entre os os valores das constantes A e B estimadas e impostas. Pode-se observar uma grande aproximação ao parâmetro A e uma diferença percentual maior entre o valor estimado B quando comparado ao valor imposto.

Contudo, após as constantes A e B estimadas pode-se reconstruir a condutividade térmica e compará-la com a condutividade imposta, como mostra a Fig.(6.9). Ambas condutividades apresentam comportamento decrescente, devido ao parâmetro $B < 0$ e perfis semelhantes onde pode ser observado a diferença máxima de 0,1% como apresentado na Fig.(6.10).

Deve-se notar que é mais expressivo observar as diferenças quando se reconstroi a condutividade térmica a partir dos parâmetros A e B estimados pois, como mostrado na seção anterior o parâmetro B apresentou uma difença percentual de 6,6% quando comparado ao imposto. Porém, quando reconstruída a condutividade térmica observou-se diferenças percentuais menores que 1,2%.

Similarmente observou-se uma diferença de 27% entre o valor de B estimado e imposto. Porém diferenças menores que 0,1% quando se compara a condutividade reconstruída com a que foi imposta.

Pode-se observar uma grande proximidade entre as estimativas, tanto provenientes de método numérico ou X22NL com os valores impostos, mesmo considerando o uso da difusividade térmica não linear usada pelo Comsol.

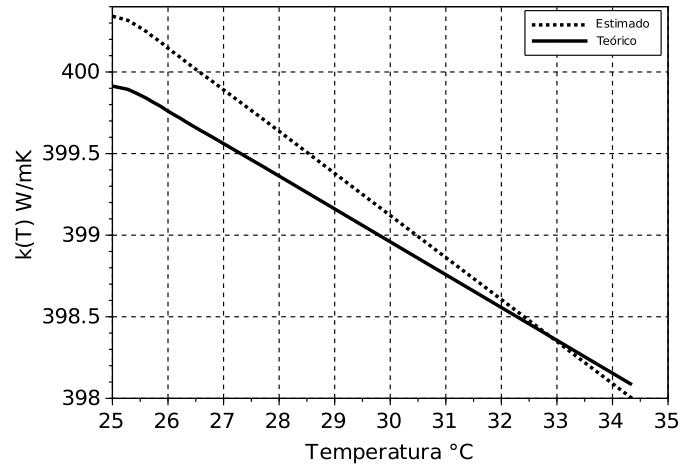


Figura 6.9: Comparativo entre $k(T)$ imposto e reconstruído a partir das constantes A e B .

A estimativa da condutividade térmica dependente da temperatura mostrou-se uma forte ferramenta para a determinação dos coeficientes de $k(T)$ e sua reconstrução.

Observa-se que para se estimar o comportamento da condutividade térmica é necessário o conhecimento de temperaturas experimentais, temperaturas aparentes e propriedades térmicas de referência, que podem ser facilmente obtidas via literatura.

Outro ponto interessante na aplicação da técnica é o fato que as temperaturas usadas nas estimativas são provenientes de apenas um ponto da superfície de acesso da geometria, facilitando assim sua aplicação quando se trata de procedimentos experimentais.

Também deve-se observar que as constantes estimadas são dependentes da variação de temperatura que foi amostrada, logo, para cada ΔT teremos novos valores para A e B .

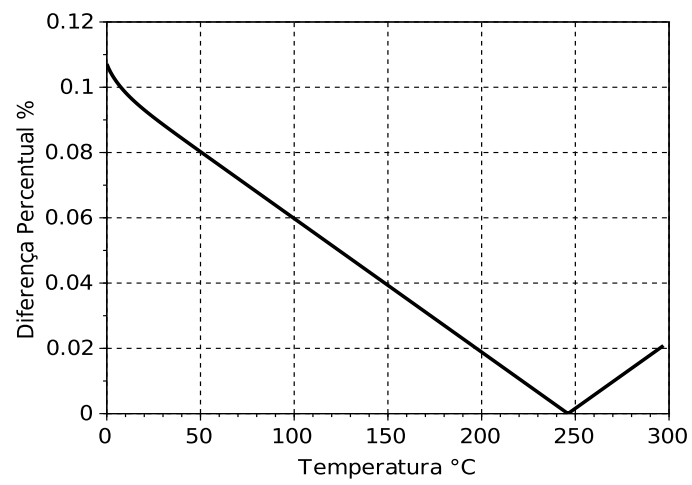


Figura 6.10: Diferença relativa entre a condutividade térmica imposta e estimada.

Capítulo 7

Conclusão

Propôs-se neste trabalho, a análise e o desenvolvimento de soluções analíticas de problemas não lineares em condução de calor, soluções de problemas inversos envolvendo estimativa de fluxo de calor, e o comportamento da condutividade térmica dependente da temperatura.

Inicialmente, observou-se que, os trabalhos disponíveis na literatura propuseram grande diversidade de métodos para desenvolvimento de soluções à equação do calor não linear, onde em sua maioria eram métodos numéricos, híbridos, simplificados ou considerando regime permanente. Neste sentido, este trabalho propôs uma metodologia para determinação da solução analítica, considerando regime transiente e condições de contorno não lineares.

Abordou-se então, os conceitos matemáticos de não linearidade, Teorema da Superposição e o Teorema da Existência e Unicidade, observou-se que, o problema proposto possui solução, e que, poderia ser determinada de forma analítica.

Para determinação da solução analítica, usou-se a transformada de Kirchhoff para linearizar o problema e suas condições de contorno, onde a versão linear do problema foi denominada de temperatura aparente, assim, aplicou-se o método de funções de Green, para determinação da solução analítica da versão linearizada.

Usando como hipótese o conhecimento do comportamento da condutividade térmica dependente da temperatura, pôde-se, determinar a solução do problema direto não linear usando a transformada inversa de Kirchhoff, então, a solução obtida foi verificada e comparada com soluções disponíveis na literatura. Observou-se grande concordância entre os resultados obtidos, mesmo se tratando de métodos distintos.

A abordagem inversa do problema não linear foi apresentada através da adaptação da técnica TFBGF, para estimativa de fluxo de calor. Nesta abordagem foi detalhada a metodologia para obtenção da resposta impulsiva não linear e a análise de estabilidade. Onde, observou-se que a resposta impulsiva é estável, podendo ser aplicada em problemas reais.

A partir de dados sintéticos, apresentou-se a estimativa de fluxo de calor, onde, observou-se que o fluxo de calor estimado apresentava grande proximidade com o fluxo teórico. Desta maneira a adaptação da técnica TFBGF para problemas não lineares mostrou-se robusta e capaz de realizar a estimativa do fluxo de calor, sendo necessário apenas conhecer as temperaturas experimentais e a resposta impulsiva do problema.

Também, apresentou-se a técnica para estimativa dos coeficientes do funcional condutividade térmica usando soluções analíticas. Para determinação do método, empregou-se uma consequência imediata da transformada de Kirchhoff, que possibilitou escrever um sistema linear em função dos coeficientes a serem determinados.

Resolvendo o sistema linear de forma matricial, e usando temperaturas sintéticas, pôde-se determinar os coeficientes e observou-se grande aproximação com os coeficientes teóricos. O método desenvolvido mostrou-se eficiente e robusto, para estimativa dos coeficientes, onde, determinou-se o comportamento da condutividade térmica dependente da temperatura.

Foi observado, como vantagens do método desenvolvido, a possibilidade da estimativa do comportamento da condutividade térmica, conhecendo apenas a solução analítica linear e as temperaturas experimentais (sintéticas), em apenas um ponto da geometria.

Propõe-se, para trabalhos futuros, o aprimoramento das técnicas inversas desenvolvidas neste trabalho, e a aplicação, considerando tecidos vivos, meios multicamada, fontes móveis de calor e a estimativa da condutividade térmica e fluxo de calor.

Referências Bibliográficas

ABDULKAREEM, M. A. Analytical solution of transient heat conduction through a hollow spherical thermal insulation material of a temperature dependent thermal conductivity. *Journal of Engineering*, v. 20, n. 1, 2014.

BAGNALL, K. R.; MUZYCHKA, Y. S.; WANG, E. N. Application of the kirchhoff transform to thermal spreading problems with convection boundary conditions. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, v. 4, n. 3, 2014. Doi: <<https://doi.org/10.1109/tcpmt.2013.2292584>>.

BECK, J. V. *et al. Heat Conduction Using Green's Functions*. [S.l.]: Taylor and Francis Group, 2010. (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences). ISBN 9781439813546.

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. *Randon Data: Analysis and measurement procedures*. Fourth edition. [S.l.]: A John Willey e Sons, 2010. ISBN 978-0-470-24877-5.

BORUKHOV, V. T.; TSURKO, V.; ZAYATS, G. The functional identification approach for numerical reconstruction of the temperature dependent thermal conductivity coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, p. 232–238, 2009. Doi:<<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.01.43>>.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1959.

CIMATTI, G. A note on existence, uniqueness and continuous dependence for a nonlinear heat conduction problem. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 71, p. 295–297, 2005. Doi:<[10.1093/imamat/hxh102](https://doi.org/10.1093/imamat/hxh102)>.

COBBLE, M. *Nonlinear heat transfer in solids*. 1963.

CUI, M.; GAO, X.; ZHANG, J. A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 58, p. 113 – 119, 2012. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.02.024>>.

FERNANDES, A. P. *Funções de Green: Soluções analíticas aplicadas em problemas inversos em condução de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009.

FERNANDES, A. P. *Função transferência analítica aplicada á solução de problema inverso em condução de calor*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

FERREIRA, D. C. *et al.* Numerical analysis of the influence of coatings on a cutting tool using comsol. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2018. Doi: <<https://doi.org/10.1007/s00170-018-1855-7>>.

GANJI, D.; SADIGHI, A. Application of homotopy-perturbation and variational iteration methods to nonlinear heat transfer and porous media equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 207, p. 24 – 34, 2007. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.07.030>>.

HUSSEIN, M.; LESNIC, D. Determination of a time-dependent thermal diffusivity and free boundary in heat conduction. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 53, p. 154 – 163, 2014. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.02.027>>.

KOVAL'CHUK, B. V.; LOPUSHANSKAYA, G. P. The green's function method in stationary and nonstationary nonlinear heat conduction problems. *Plenum Publishing Corporation*, 1993. Doi: <<https://doi.org/10.1007/bf01097863>>.

KUMAR A.K. SINGH, R. A. A moving boundary problem with variable specific heat and thermal conductivity. *Journal of King Saud University - Science*, 2018. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.05.028>>.

LI, X. *et al.* Analytical study of transient thermo-mechanical responses of dual-layer skin tissue with variable thermal material properties. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 124, p. 459 – 466, 2018. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.11.002>>.

LIU, C.-S.; QIU, L.; LIN, J. Solving the higher-dimensional nonlinear inverse heat source problems by the superposition of homogenization functions method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 141, p. 651–657, 2019. Doi: <doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.07.007>.

MIERZWICZAK, M.; CHEN, W.; Z.FU. The singular boundary method for steady-state nonlinear heat conduction problem with temperature-dependent thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 91, p. 205 – 217, 2015. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.051>>.

M.MIERZWICZAK; J.A.KOŁODZIEJ. The determination temperature-dependent thermal conductivity as inverse steady heat conduction problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 54, p. 790 – 796, 2011. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.10.024>>.

POLYANIN, A. D.; ZHUROV, A. I.; VYAZMIN, A. V. Generalized separation of variables in nonlinear heat and mass transfer equations. *J. Non-Equilib. Thermodyn*, v. 25, p. 251 – 267, 2000. Doi: <<https://doi.org/10.1515/jnetdy.2000.017>>.

- RINCON, M.; J.LIMACO; LIU, I. S. Existence and uniqueness of solutions of a nonlinear heat equation. 2001. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2015.10.170>>.
- SAUTE, E.; AZEVEDO, F. S.; STRAUCH, I. F. *Transformada de Laplace: Um Livro Colaborativo*. Universidade do Rio Grande do Sul, 2019. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-tl/livro.pdf>>.
- SUN, Y.; CHANG, T.; LIANG, M. Kirchhoff transformation analysis for determining time/depth dependent chloride diffusion coefficient in concrete. *J Mater Sci*, v. 43, p. 1429 – 1437, 2008. Doi: <<https://doi.org/10.1007/s10853-007-2304-4>>.
- TERPILOWSKI, J.; RUDZKI, R. S. R.; WORONIAK, G. Thermal diffusivity investigation of fe61ni39, fe52ni48 and fe40ni60 binary ironenickel alloys using the modified pulse method. *Journal of Alloys and Compounds*, v. 657, p. 748 – 754, 2016. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2015.10.17>>.
- TILLMANN, A. R. *Determinação Simultânea da Condutividade Térmica e da Difusividade Térmica Variando com a Temperatura*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.
- TOMATIS, D. Heat conduction in nuclear fuel by kirchhoff transformation. *Annals of Nuclear Energy*, v. 57, p. 100 – 105, 2013. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2013.01.048>>.
- VAZQUEZ, J. L. The mathematical theories of diffusion nonlinear and fractional diffusion. In: _____. *Nonlocal and Nonlinear Diffusions and Interactions: New Methods and Directions*. [S.l.]: Springer, Cham, 2017. v. 2186, p. 205–278. ISBN 978-3-319-61493-9. Doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-61494-6_5>.
- WANG, G. *et al.* A multiple model adaptive inverse method for nonlinear heat transfer system with temperature-dependent thermophysical properties. *International journal of Heat and Mass Transfer*, v. 118, p. 847–856, 2018. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.027>>.
- WANG, X. *et al.* Estimation of temperature-dependent thermal conductivity and specific heat capacity for charring ablators. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 129, p. 894 – 902, 2019. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.10.014>>.
- ZHANG, H.; KAN, W.; HU, X. Green's function approach to the nonlinear transient heat transfer analysis of functionally graded materials. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 71, p. 292 – 301, 2013. Doi: <<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2013.04.025>>.

Apêndice A

Existência, Unicidade e Dependência Contínua Para a Equação De Condução de Calor Não Linear

Usando o Teorema da inversa global de Levy-Caccipoli Cimatti (2005) provou a existência, unicidade e dependência contínua para o problema não linear de condução de calor.

O problema clássico de condução de calor não linear com fluxo de calor prescrito em uma fronteira é dado pela equação:

$$-\nabla(k(\mathcal{U})\nabla\mathcal{U}) = f \text{ em } \Omega, \tag{A.1}$$

sob as condições:

$$\mathcal{U} = 0 \text{ em } \gamma, \tag{A.2}$$

e

$$k(\mathcal{U})\frac{d\mathcal{U}}{dn} = h(\mathcal{U}_a - \mathcal{U}) \text{ em } \Gamma, \tag{A.3}$$

onde h é uma constante positiva. Assumindo:

$$f(x) \in L^2(\Omega), \quad \mathcal{U}_a \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (\text{A.4})$$

Onde Ω é um subconjunto limitado de \mathbb{R}^3 com fronteira $\partial\Omega = \gamma \cup \Gamma$, $\gamma \cup \Gamma = \emptyset$. \mathcal{U} são temperaturas em Ω e \mathcal{U}_a função dada em Γ que representa a temperatura ambiente. A condutividade térmica k dependente da temperatura satisfaz:

$$k(s) \in L^\infty(\mathbb{R}^1), \quad k_1 \geq k(s) \geq k_0 \geq 0. \quad (\text{A.5})$$

Usando a transformação dada por:

$$u = \Phi(\mathcal{U}) = \int_0^{\mathcal{U}} k(z) dz \quad (\text{A.6})$$

Devido a Eq.(A.5) a função Φ é assintoticamente linear e possui uma inversa global $\Psi(u)$ em \mathbb{R}^1 , em função de u , o problema original pode ser reescrito como:

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{A.7})$$

sujeito a:

$$u = 0 \quad \text{em } \gamma, \quad (\text{A.8})$$

e

$$\frac{du}{dn} + h\Psi(u) = g \quad \text{em } \Gamma, \quad (\text{A.9})$$

onde $g = h\mathcal{U}_a$.

Para um uso futuro uma estimativa “a priori”

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f_n\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \quad (\text{A.10})$$

válida como solução do problema linear

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \gamma, \quad \frac{du}{dn} = g \text{ em } \Gamma. \quad (\text{A.11})$$

Teorema: Sejam X e Y espaços de Banach, $F : X \rightarrow Y$, $F \in C^1(X, Y)$ e ainda assumindo F apropriado e localmente inversível. Então F é o difeomorfismo global de X em Y .

$F : X \rightarrow Y$ é apropriada se para todo compacto $K \subset Y$, $F^{-1}(K)$ é um conjunto compacto em X .

Para aplicação do teorema define-se:

$$X = \{u \in H^2(\Omega), u = 0 \text{ em } \gamma\}, \quad Y = L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma), \quad (\text{A.12})$$

$$F(u) = \left(\begin{array}{c} -\Delta u \\ \left. \frac{du}{dn} \right|_{\Gamma} + h\Psi(u|_{\Gamma}) \end{array} \right). \quad (\text{A.13})$$

Claramente, $F \in C^1(X, Y)$, prova-se inicialmente que F é localmente invertível. Seja $u \in X$, tem-se que:

$$F'(u)[\omega] = \left(\begin{array}{c} -\Delta \omega \\ \left. \frac{d\omega}{dn} \right|_{\Gamma} + h\Psi'(u|_{\Gamma})\omega \end{array} \right). \quad (\text{A.14})$$

Para mostrar que a derivade $F'(u)$ é invertível e $F'(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$, note que o problema:

$$\Delta \omega = 0 \text{ em } \Omega, \quad \frac{d\omega}{dn} = -h\Psi'(u)\omega \text{ em } \Gamma, \quad \omega = 0 \text{ em } \gamma, \quad (\text{A.15})$$

tem única solução trivial $\omega = 0$, multiplicando a Eq.(A.15) por ω tem-se integrando por partes sobre Ω ,

$$\int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dx + \int_{\Gamma} h\Psi'(u)\omega^2 d\Gamma = 0. \quad (\text{A.16})$$

Desde que $\Psi'(u) = (k(\Psi(u)))^{-1} > 0$, obtém-se $\omega = 0$. Afirmamos que F também é apropriado, para este propósito, toma-se u_n uma sequência arbitrária em X e define-se $u_n \in Y$ com:

$$u_n = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} = F(u_n). \quad (\text{A.17})$$

Prova-se que se $v_n \rightarrow v$ em Y , isto é:

$$f_n \rightarrow f \text{ em } L^2(\Omega), \quad g_n \rightarrow g \text{ em } H^{1/2}(\Gamma), \quad v = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

então existe uma subsequência de u_n de tal forma que $u_n \rightarrow u$ em X e $F(u) = v$. Este fato implicará na adequação de F . A Eq. (A.17) pode ser escrita como:

$$-\Delta u_n = f_n \text{ em } \gamma \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{du_n}{dn} = h\Psi(u_n) = g_n \text{ em } \Gamma. \quad (\text{A.20})$$

Então, multiplicando a Eq. (A.19) por u_n e integrando por partes sobre Ω , teremos pela Eq.(A.20),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Gamma} u_n h\Psi(u_n) d\Gamma &= \int_{\Gamma} g_n u_n d\Gamma + \int_{\Omega} f_n u_n dx \\ &\leq \|g_n\|_{L^2(\Gamma)} \|u_n\|_{L^2(\Gamma)} + \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \|g_n\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u_n\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|g_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Pelo fato de $\Psi(s)s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^1$ e f_n e g_n serem limitadas em $L^2(\Omega)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente, pode-se concluir, com a escolha apropriada de ϵ que u_n é a priori limitado por $H^1(\Omega)$. Contudo, u_n é limitado em $H^{1/2}(\Gamma)$ e $L^2(\Omega)$. Em outro sentido, como $\Psi(s)$ é linear no infinito, também $g_n - h\Psi(u_n)$ é limitado em $H^{1/2}(\Gamma)$.

Observando a Eq.(A.10) pode-se concluir que u_n é limitada em $H^2(\Omega)$ assim é possível extrair a partir de uma sequência u_n uma subsequência de tal forma que $u_n \rightarrow u$ em $C^{0,\alpha}(\Gamma)$

e $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ em uma formulação fraca do problema dado pela Eqs.(A.19)-(A.20), isto é:

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f_n \phi dx - h \int_{\Gamma} \Psi(u_n) \phi d\Gamma + \int_{\Gamma} g_n \phi d\Gamma, \quad (\text{A.22})$$

para todo $\phi \in H^1(\Omega)$, tanto que $\phi = 0$ em γ . Além disso $\Psi(u_n) \rightarrow \Psi(u)$ em $H^{1/2}(\Gamma)$ e pela Eqs. (A.19)-(A.20), levando em conta a estimativa da Eq.(A.10), pode-se concluir que $u_n \rightarrow u$ em X . Daí F é um mapa apropriado e pelo teorema de Levy-Caccippoli, define-se um difeomorfismo global. Existência, unicidade e dependência contínua C^1 para a solução $\mathcal{U} = \Phi(h)$ das Eqs. (A.1)-(A.2) segue como consequência.