

ARIEL DOS SANTOS SANTIAGO

# Associatividade nos produtos tensoriais projetivo e injetivo



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2020

ARIEL DOS SANTOS SANTIAGO

# Associatividade nos produtos tensoriais projetivo e injetivo

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Ideais de polinômios homogêneos e operadores multilineares em espaços de Banach.

**Orientador:** Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG  
2020

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S235 Santiago, Ariel dos Santos, 1995-  
2020 Associatividade nos produtos tensoriais projetivo e injetivo  
[recurso eletrônico] / Ariel dos Santos Santiago. - 2020.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Matemática.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.161>  
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo, 1962-,  
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação  
em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152  
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNO(A):** Ariel dos Santos Santiago

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11812MAT002

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática.

**LINHA DE PESQUISA:** Ideais de polinômios homogêneos e operadores multilineares em espaços de Banach.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Associatividade nos produtos tensoriais projetivo e injetivo.

**ORIENTADOR(A):** Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 27 de fevereiro de 2020, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

**ASSINATURA**

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Profa. Dra. Sonia Sarita Berrios Yana  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 27 de fevereiro de 2020.

# Dedicatória

Dedico este trabalho a minha mãe Marilza dos Santos.

# Agradecimentos

Agradeço a minha mãe, Marilza dos Santos, pelas lutas que teve para me criar e educar, sempre superando as dificuldades que os mais pobres têm em um país desigual e injusto. Aos meus familiares que sempre me apoiaram da melhor forma possível.

Agradeço aos colegas mestrandos com os quais construí amizades e compartilhei alegrias e tristezas.

Agradeço ao meu orientador Geraldo Botelho pela paciência e pela dedicação para comigo, pelos conselhos os quais ouvi atentamente e por manter, durante esse tempo, uma boa relação aluno/orientador.

Agradeço a Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, em especial o Programa de Pós-graduação em Matemática, pelo suporte dado aos mestrandos e pela contribuição na minha formação acadêmica.

Agradeço as professoras Marcela Luciano Vilela de Souza e Sonia Sarita Berrios Yana por terem aceito o convite para fazer parte da banca de avaliação da minha dissertação.

Agradeço, finalmente, a agência de fomento CAPES pelo auxílio financeiro o qual sempre foi pontual e permitiu que eu me dedicasse exclusivamente aos estudos.

Santiago, A. S. *Associatividade nos produtos tensoriais projetivo e injetivo*. 2020. 78 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

Dados os espaços normados  $X_1, \dots, X_n$ , reais ou complexos, estudamos neste trabalho algumas propriedades do produto tensorial projetivo  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n$  e do produto tensorial injetivo  $X_1 \widehat{\otimes}_\epsilon \dots \widehat{\otimes}_\epsilon X_n$ . Os objetivos principais são enunciar e demonstrar com detalhes os seguintes resultados: (i) O produto tensorial projetivo é associativo; (ii) Se pelo menos dois espaços normados  $X_1, \dots, X_n$  têm dimensão infinita, então o produto tensorial  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  munido com a norma projetiva é um espaço normado incompleto; (iii) O produto tensorial injetivo é associativo. Para atingir esses objetivos, fazemos a construção algébrica do produto tensorial, estudamos as normas projetiva e injetiva e provamos os teoremas de linearização em cada um desses casos.

*Palavras-chave:* Espaços de Banach, norma injetiva, norma projetiva, associatividade.

Santiago, A. S. *Associativity in the projective and injective tensor products*. 2020. 78 p.  
M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Abstract

Given the normed spaces  $X_1, \dots, X_n$ , real or complex, in this work we study some properties of the projective tensor product  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n$  and of the injective tensor product  $X_1 \widehat{\otimes}_\epsilon \dots \widehat{\otimes}_\epsilon X_n$ . The main purposes are to state and to provide detailed proofs of the following results: (i) The projective tensor product is associative; (ii) If at least two of the normed spaces  $X_1, \dots, X_n$  are infinite dimensional, then the tensor product  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  endowed with the projective norm is incomplete; (iii) The injective tensor product is associative. To prove these results, the algebraic tensor product is constructed, the projective and injective norms are studied and linearization theorems for each of these cases are proved.

*Keywords:* Banach spaces, injective norm, projective norm, associativity.



# Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\ \cdot\ $ ou $\ \cdot\ _E$	norma em um espaço normado $E$
$(E, \ \cdot\ )$	espaço normado $E$ com a norma $\ \cdot\ $
$ \cdot $	módulo
$\pi$	norma projetiva
$\varepsilon$	norma injetiva
$B_E$	bola unitária fechada do espaço normado $E$
$x_n \xrightarrow{n} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para $x$
$L(E; F)$	espaço dos operadores lineares entre os espaços $E$ e $F$
$\mathcal{L}(E; F)$	espaço dos operadores lineares contínuos entre os espaços normados $E$ e $F$
$E^*$	dual algébrico do espaço vetorial $E$
$E'$	dual topológico do espaço normado $E$
$E''$	bidual topológico do espaço normado $E$
$J_E$	mergulho canônico do espaço normado $E$ em seu bidual $E''$
$\sigma(E, E')$ ou $w$	topologia fraca do espaço normado $E$
$x_n \xrightarrow{w} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge na topologia fraca para $x$
$\sigma(E', E)$ ou $w^*$	topologia fraca-estrela do espaço dual $E'$
$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$	a sequência $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ converge na topologia fraca-estrela para $\varphi$
$co(S)$	envoltória convexa do conjunto $S$
$\overline{E}$	fecho na topologia da norma do conjunto $E$
$[E]$	espaço gerado pelos elementos do conjunto $E$
$h(E)$	imagem de um conjunto $E$ pela aplicação $h: E \longrightarrow F$

$A_L$	linearização, definida sobre o produto tensorial, da forma $n$ -linear $A$
$I_{G,E}$	operador inclusão de $G$ em $E$
$I_E$	operador identidade definido em $E$
$L(X_1, \dots, X_n; Z)$	espaço das formas $n$ -lineares de $X_1 \times \dots \times X_n$ em $Z$
$L_f(X_1, \dots, X_n; Z)$	espaço das formas $n$ -lineares de tipo finito de $X_1 \times \dots \times X_n$ em $Z$
$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$	espaço das formas $n$ -lineares contínuas de $X_1 \times \dots \times X_n$ em $Z$
$L_I(X_1, \dots, X_n)$	espaço das formas $n$ -lineares integrais
$X_1 \otimes \dots \otimes X_n$	produto tensorial dos espaços $X_1, \dots, X_n$
$X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n$	produto tensorial projetivo dos espaços normados $X_1, \dots, X_n$
$X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$	produto tensorial injetivo dos espaços normados $X_1, \dots, X_n$
$T_1 \otimes \dots \otimes T_n$	produto tensorial dos operadores lineares $T_1, \dots, T_n$
$\bigotimes_n X$	produto tensorial do espaço $X$ por ele mesmo $n$ -vezes
$\prod_{j=1}^n x_j$	produto dos $n$ números $x_j \in \mathbb{K}$ , $j = 1, \dots, n$
$\bigcap_{j=1}^n A_j$	interseção dos $n$ conjuntos $A_j$ , $j = 1, \dots, n$
$\bigcup_{j \in I} A_j$	união dos conjuntos $A_j$ , $j \in I$
$\bigcup_{j=1}^\infty A_j$	união enumerável dos conjuntos $A_j$ , $j \in \mathbb{N}$
$\prod_{j \in I} X_j$	produto cartesiano generalizado dos conjuntos $X_j$ , $j \in I$
$\bigoplus_{j=1}^n X_j$	soma direta dos conjuntos $X_j$ , $j = 1, \dots, n$
$(X, \tau)$	espaço topológico munido da topologia $\tau$
$C(X; Y)$	conjunto das funções contínuas entre os espaços topológicos $X$ e $Y$
$C(X)$	conjunto das funções contínuas entre o espaço topológico $X$ e o corpo $\mathbb{K}$
$(X, \mathcal{M})$	espaço mensurável
$M(X, \mathbb{K})$	espaço das medidas de Radon de $X$ em $\mathbb{K}$

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Espaços normados . . . . .	4
1.2 Espaços topológicos e redes . . . . .	11
1.3 Medida . . . . .	16
<b>2 O Produto Tensorial Algébrico</b>	<b>20</b>
2.1 A construção . . . . .	20
2.2 O teorema da linearização . . . . .	36
2.3 A associatividade . . . . .	40
<b>3 O Produto Tensorial Projetivo</b>	<b>43</b>
3.1 A norma projetiva . . . . .	43
3.2 O teorema da linearização . . . . .	49
3.3 A associatividade . . . . .	52
3.4 Incompletude . . . . .	57
<b>4 O Produto Tensorial Injetivo</b>	<b>61</b>
4.1 A norma injetiva . . . . .	61
4.2 Formas integrais e o teorema da linearização . . . . .	68
4.3 A associatividade . . . . .	72
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>77</b>

# Introdução

Este trabalho insere-se na grande área de Análise Funcional, subárea da Teoria dos Espaços de Banach. Nesta área, não apenas operadores lineares são estudados, e entre os operadores não lineares mais importantes estão os operadores multilineares, os polinômios homogêneos e as funções holomorfas (veja, por exemplo, os livros clássicos [8, 19, 20]).

É claro que muito da teoria linear se perde no caso não linear. Uma tentativa de minimizar essa perda é buscar um processo de linearização, que significa associar a um operador não linear um outro operador linear cujas propriedades, que podem ser estudadas com o auxílio da teoria linear, forneçam informações sobre o operador não linear original. Muitas técnicas de linearização foram desenvolvidas com sucesso, e neste trabalho estamos interessados na linearização de operadores multilineares.

No caso multilinear, da Álgebra veio a técnica de linearizar operadores multilineares por meio do produto tensorial. Mais especificamente, se  $X_1, \dots, X_n, Y$  são espaços vetoriais, então todo operador  $n$ -linear  $A: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow Y$  admite uma linearização definida no produto tensorial  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  a valores  $Y$ , que é um operador linear que carrega muitas das características de  $A$ .

Na Análise, consideramos operadores multilineares contínuos entre espaços normados e espaços de Banach, e para isso devemos definir uma norma no espaço vetorial  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  e estudar a continuidade da linearização de um operador multilinear contínuo. Há muitas maneiras de se fazer isso, cada uma delas com suas características e finalidades. Trabalhamos nesta dissertação com a norma projetiva  $\pi$  e com a norma injetiva  $\varepsilon$ , que são as mais importantes, tanto do ponto de vista histórico como no que concerne as aplicações.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar demonstrações completas e detalhadas de três resultados, a saber:

- (i) O completamento do produto tensorial munido da norma projetiva, denotado por  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n$  e chamado de *produto tensorial projetivo*, é associativo;
- (ii) Se pelo menos dois espaços normados  $X_1, \dots, X_n$  têm dimensão infinita, então o produto tensorial  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  munido com a norma projetiva é um espaço normado incompleto;
- (iii) O completamento do produto tensorial munido da norma injetiva, denotado por  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$  e chamado de *produto tensorial injetivo*, é associativo.

Esses três resultados são conhecidos e largamente utilizados em pesquisa, mencionamos apenas alguns artigos nos quais eles são usados: [4, 7, 12, 13, 16, 25]. A questão é que, mesmo sendo muito utilizados, é muito difícil encontrar demonstrações completas e detalhadas na literatura, por serem tais demonstrações longas, técnicas e trabalhosas. Para agregar mais interesse ainda, mencionamos que associatividade não se verifica em produtos tensoriais topológicos em geral. Por exemplo, não vale a associatividade em

produtos tensoriais de espaços vetoriais topológicos (veja [11]) e não vale a associatividade em produtos tensoriais projetivos simétricos de espaços de Banach (veja [2, 25]). Por tudo isso acreditamos que a apresentação de demonstrações completas e detalhadas desses três resultados pode ser uma boa contribuição para a literatura na área.

Descreveremos a seguir como o trabalho está estruturado.

No Capítulo 1 fazemos uma breve introdução aos conceitos básicos necessários para entender as definições e as demonstrações que se seguem ao longo deste trabalho, nos seguintes temas: espaços de Banach, operadores contínuos, extensão de operadores, espaços topológicos, topologia fraca, topologia fraca-estrela, medidas e integrais. Em geral, para a teoria básica de espaços de Banach e operadores lineares nos referimos a [3], para produtos tensoriais nos referimos a [6, 23], e para a teoria dos operadores multilineares contínuos nos referimos a [10, 19].

No Capítulo 2, considerando os espaços vetoriais  $X_1, \dots, X_n, Z$  e os respectivos subespaços  $E_1, \dots, E_n$  de  $X_1, \dots, X_n$ , faremos a construção do produto tensorial (algébrico) dos espaços vetoriais  $X_1, \dots, X_n$ , que será denotado por  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . Vemos nesse capítulo que o produto tensorial  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  é, em particular, um subespaço vetorial do dual algébrico do espaço das formas multilineares definidas sobre o produto cartesiano dos espaços  $X_1, \dots, X_n$  que tomam valores no corpo de escalares, em particular, os elementos do produto tensorial são funcionais lineares. Preparando o terreno para os capítulos seguintes, provamos neste capítulo a associatividade do produto tensorial algébrico. Para isso, é necessário abordar o chamado *Teorema da Linearização*, que permite associar cada operador multilinear  $A$  a um único operador linear  $A_L$ , o qual nos referimos por linearização de  $A$  e cujo domínio é o produto tensorial. Essa associação é feita de maneira que o espaço dos operadores multilineares de  $X_1 \times \dots \times X_n$  em  $Z$  é isomorfo ao espaço dos operadores lineares de  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  em  $Z$ .

No Capítulo 3 estudamos a norma projetiva  $\pi$  no produto tensorial de espaços normados  $X_1, \dots, X_n$ . Agora que o produto tensorial é um espaço normado, denotado por  $X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n$ , podemos considerar um completamento  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n$ , o qual chamamos de *produto tensorial projetivo*. Considere  $Z$  um espaço normado. Provamos algumas propriedades da norma projetiva até chegar no *Teorema da Linearização* para o produto tensorial projetivo, que permite associar cada operador multilinear contínuo  $A$  a um único operador linear contínuo  $A_L$  de modo que o espaço dos operadores  $n$ -lineares contínuos de  $X_1 \times \dots \times X_n$  em  $Z$  é isometricamente isomorfo ao espaço dos operadores lineares de  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n$  em  $Z$  por meio da correspondência  $A \longleftrightarrow A_L$ . De posse do teorema da linearização, provamos dois dos resultados centrais da dissertação: a associatividade no produto tensorial projetivo e a incompletude de  $X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n$  quando pelo menos dois desses espaços têm dimensão infinita.

No Capítulo 4 estudamos a outra norma central na teoria dos produtos tensoriais de espaços de Banach: a norma injetiva  $\varepsilon$ . Denotamos o produto tensorial munido da norma injetiva por  $X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n$  e seu completamento por  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$ , o qual é chamado de *produto tensorial injetivo*. Veremos que, ao contrário da norma projetiva, o produto tensorial de subespaços  $E_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon E_n$  é isomorfo isometricamente a um subespaço do produto tensorial  $X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n$ , além disso, se os subespaços  $E_1, \dots, E_n$  forem fechados então  $E_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon E_n$  é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado de  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$ . Por serem normas diferentes e nem sempre equivalentes, a continuidade

da linearização de um operador multilinear contínuo em relação à norma injetiva não é equivalente à continuidade na norma projetiva. Segue disso que devemos ter um teorema de linearização diferente para a norma injetiva. Definiremos formas multilineares integrais e provaremos que a linearização de um operador multilinear é contínua em relação à norma injetiva se, e somente se, o operador é integral. Este teorema de linearização, que depende fortemente do Teorema de Riesz para representação de funcionais lineares contínuos em espaços de funções contínuas, é a chave para a demonstração do último resultado central da dissertação, que é a associatividade do produto tensorial injetivo.

Ariel dos Santos Santiago  
Uberlândia-MG, 27 de fevereiro de 2020.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos clássicos e resultados básicos da Análise Funcional, Álgebra Linear, Topologia Geral e Teoria da Medida, que podem ser encontrados em [3, 5, 9, 18, 21, 22, 24, 26], que serão utilizados ao longo da dissertação. Por não serem o objeto central de estudo, muitos resultados serão apresentados sem demonstrações, e referências serão fornecidas. Termos e símbolos não definidos podem ser encontrados em [3, 23].

### 1.1 Espaços normados

Sempre que considerarmos um espaço vetorial, digamos  $X$ , o corpo de escalares será denotado por  $\mathbb{K}$  e representará o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. O símbolo  $X^*$  representará o espaço dos funcionais lineares definidos em  $X$ .

**Definição 1.1.** Para cada número real  $p \geq 1$ , define-se

$$\ell_p = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty \right\}.$$

Dados  $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , as operações

$$(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty = (x_j + y_j)_{j=1}^\infty \text{ e } \alpha(x_j)_{j=1}^\infty = (\alpha x_j)_{j=1}^\infty$$

tornam o conjunto  $\ell_p$  um espaço vetorial.

**Teorema 1.2.** (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Dados  $q, p_1, \dots, p_n \geq 1$  tais que  $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}$ , tem-se*

$$\left( \sum_{j=1}^\infty |x_{j,1} \cdots x_{j,n}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{j=1}^\infty |x_{j,1}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdots \left( \sum_{j=1}^\infty |x_{j,n}|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

sempre que  $(x_{j,1})_{j=1}^\infty \in \ell_{p_1}, \dots, (x_{j,n})_{j=1}^\infty \in \ell_{p_n}$ .

*Demonstração.* Veja [1, Proposição 2.1.6]. □

**Teorema 1.3.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e seja  $\mathcal{C}$  um conjunto linearmente independente em  $V$ . Então existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  contendo  $\mathcal{C}$ .*

*Demonstração.* Veja [5, Teorema 2.8.1]. □

**Lema 1.4.** *Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $x \in X$ . Se  $\varphi(x) = 0$  para todo funcional  $\varphi \in X^*$ , então  $x = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  tal que  $\varphi(x) = 0$  para todo funcional  $\varphi \in X^*$ . Suponha que  $x \neq 0$ . Como o conjunto  $\{x\}$  é linearmente independente, pelo Teorema 1.3, existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $X$  tal que  $\{x\} \subseteq \mathcal{B}$ . Digamos que  $\mathcal{B} = \{x\} \cup \{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ . Assim, todo elemento em  $X$  pode ser escrito de maneira única na forma

$$\beta x + \sum_{i \in I} \beta_i x_i, \text{ onde o conjunto } I \subseteq J \text{ é finito, } \{\beta_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{K} \text{ e } \beta \in \mathbb{K}.$$

A unicidade da representação acima garante a boa definição do operador  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{K}$  dado por

$$\varphi \left( \beta x + \sum_{i \in I} \beta_i x_i \right) := \beta.$$

Dados  $\beta x + \sum_{i \in I} \beta_i x_i$  e  $\theta x + \sum_{i \in I'} \theta_i x_i$  em  $X$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi \left( \beta x + \sum_{i \in I} \beta_i x_i + \lambda \left( \theta x + \sum_{i \in I'} \theta_i x_i \right) \right) &= \varphi \left( \beta x + \sum_{i \in I} \beta_i x_i + \lambda \theta x + \sum_{i \in I'} \lambda \theta_i x_i \right) \\ &= \varphi \left( (\beta + \lambda \theta) x + \sum_{i \in I \cup I'} (\beta_i + \lambda \theta_i) x_i \right) \\ &= \beta + \lambda \theta \\ &= \varphi \left( \beta x + \sum_{i \in I} \beta_i x_i \right) + \lambda \varphi \left( \theta x + \sum_{i \in I'} \theta_i x_i \right), \end{aligned}$$

provando que o operador  $\varphi$  é linear. Por hipótese,  $\varphi(x) = 0$ . Por outro lado, a definição de  $\varphi$  nos fornece  $\varphi(x) = \varphi(1x) = 1$ . Essa contradição prova que  $x = 0$ . □

**Lema 1.5.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $S$  um subespaço de  $V$ . Então existe um subespaço  $G$  de  $V$  tal que  $V = S \oplus G$ , isto é  $V = \{x + y : x \in S, y \in G\}$  e  $S \cap G = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.3 existem uma base  $\mathcal{B}$  para o subespaço  $S$  e uma base  $\mathcal{B}'$  para o espaço vetorial  $V$  tais que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ . Considere o conjunto  $\mathcal{P} = \mathcal{B}' - \mathcal{B}$  e chame de  $G$  o subespaço vetorial de  $V$  gerado por  $\mathcal{P}$ . Para todo  $u \in V$  existem  $n \in \mathbb{N}$ , escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  e vetores  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{B}'$  tais que  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ . Como  $\mathcal{B}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{B}$  e  $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ , podemos escrever  $\{1, \dots, n\} = \{k_1, \dots, k_m\} \cup \{j_1, \dots, j_p\}$  onde  $x_{k_1}, \dots, x_{k_m} \in \mathcal{P}$  e  $x_{j_1}, \dots, x_{j_p} \in \mathcal{B}$ . Assim,

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{q=1}^m \alpha_{k_q} x_{k_q} + \sum_{r=1}^p \alpha_{j_r} x_{j_r},$$



e então  $V = G + S$ . Se  $u \in G \cap S$ , então

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^n \beta_j y_j, \text{ onde } x_i \in \mathcal{B} \text{ e } y_j \in \mathcal{P}.$$

Isso implica que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^n \beta_j y_j = 0.$$

Como o conjunto  $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$  é linearmente independente, pois está contido na base  $\mathcal{B}'$ , segue que  $\alpha_i = 0$  para todo  $1 \leq i \leq m$ , e portanto  $u = 0$ .  $\square$

**Definição 1.6.** Uma *norma* sobre o espaço vetorial  $E$  é uma função

$$\|\cdot\|_E: E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|_E,$$

que satisfaz as seguintes condições:

- i)  $\|x\|_E \geq 0$  para todo  $x \in E$ ;
- ii)  $\|x\|_E = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
- iii)  $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$  para todo escalar  $\lambda$  e para todo  $x \in E$ ;
- iv)  $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$  para todos  $x, y \in E$  (desigualdade triangular).

Neste caso, o par  $(E, \|\cdot\|_E)$  é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos  $\|\cdot\|$  no lugar de  $\|\cdot\|_E$ . Denotamos a bola unitária fechada em  $E$  por  $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ . É bem conhecido que a expressão

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in E,$$

define uma norma em  $E$ , chamada de métrica induzida pela norma.

**Definição 1.7.** Um espaço normado  $E$  é chamado de *espaço de Banach* quando for completo na métrica induzida pela norma.

**Teorema 1.8.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $T: E \longrightarrow F$  linear. As seguintes condições são equivalentes:

- (a)  $T$  é lipschitziano.
- (b)  $T$  é uniformemente contínuo.
- (c)  $T$  é contínuo.
- (d)  $T$  é contínuo em algum ponto de  $E$ .
- (e)  $T$  é contínuo na origem.
- (f)  $\|T\| := \sup \{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$ .

(g) Existe uma constante  $C \geq 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  para todo  $x \in E$ .

*Demonstração.* Veja [3, Teorema 2.1.1]. □

A correspondência  $T \mapsto \|T\|$  define uma norma no espaço vetorial  $\mathcal{L}(E; F)$  dos operadores contínuos de  $E$  em  $F$  e  $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  para todo  $x \in E$ . A demonstração pode ser encontrada em [15, Seção 2.7].

**Corolário 1.9.** *Seja  $T: E \rightarrow F$  um operador linear bijetor entre espaços normados. Então  $T$  é um isomorfismo se, e somente se, existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que  $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$  para todo  $x \in E$ .*

*Demonstração.* Veja [3, Corolário 2.1.2]. □

**Teorema 1.10.** (Teorema de Hahn-Banach) *Seja  $G$  um subespaço de um espaço normado  $E$  e  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo  $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{K}$  cuja restrição a  $G$  coincide com  $\varphi$  e  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .*

*Demonstração.* Veja [3, Corolário 3.1.3]. □

**Corolário 1.11.** *Seja  $E$  um espaço normado. Para todo  $x_0 \in E$ ,  $x_0 \neq 0$ , existe um funcional linear  $\varphi \in E'$  tal que  $\|\varphi\| = 1$  e  $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ .*

*Demonstração.* Veja [3, Corolário 3.1.4]. □

**Corolário 1.12.** *Seja  $E$  um espaço normado,  $E \neq \{0\}$  e  $x \in E$ . Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

*Demonstração.* Veja [3, Corolário 3.1.5]. □

Por ser muito simples, o resultado a seguir será apresentado sem demonstração e sem referência.

**Proposição 1.13.** *Sejam  $(E, \|\cdot\|_E)$  um espaço normado,  $F$  um espaço vetorial e  $T: F \rightarrow E$  um isomorfismo algébrico. Então a expressão*

$$\|x\|_F = \|T(x)\|_E, \text{ para todo } x \in F,$$

*é uma norma em  $F$ .*

**Teorema 1.14.** *Para todo espaço normado  $E$ , o operador*

$$J_E: E \rightarrow E'', \quad J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E',$$

*é uma isometria linear, chamada de mergulho canônico de  $E$  em  $E''$ .*

*Demonstração.* Veja [3, Proposição 4.3.1]. □

**Proposição 1.15.** *Para todo espaço normado  $E$ , existe um espaço de Banach  $\hat{E}$  que contém uma cópia isométrica de  $E$  que é densa em  $\hat{E}$ .*

*Demonstração.* Veja [3, Proposição 4.3.3]. □

**Observação 1.16.** O espaço  $\widehat{E}$  da proposição acima é chamado de *completamento* do espaço normado  $E$ . Quando necessário podemos escrever  $(\widehat{E}, \zeta)$  onde  $\zeta: E \longrightarrow \widehat{E}$  é uma imersão isométrica cuja imagem é densa em  $\widehat{E}$ , ou seja,  $\overline{\zeta(E)} = \widehat{E}$ .

**Observação 1.17.** Do fato de  $\zeta$  ser uma isometria, segue imediatamente que  $B_{\zeta(E)} = \zeta(B_E)$ .

Algumas vezes será útil denotar o fecho de um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  por  $\overline{A}^X$ . Por densidade e continuidade, a igualdade da observação acima se estende à bola unitária fechada do completamento:

**Proposição 1.18.** *Sejam  $E$  um espaço normado e  $(\widehat{E}, \zeta)$  um completamento de  $E$ . Então  $B_{\widehat{E}} = \overline{B_{\zeta(E)}}^{\widehat{E}}$ .*

*Demonstração.* Veja [24, Proposição 3.11]. □

**Lema 1.19.** *Sejam  $(\widehat{E}, \zeta)$  um completamento do espaço normado  $E$  e  $A \subseteq E$ . Então  $\overline{\zeta(\overline{A}^E)}^{\widehat{E}} = \overline{\zeta(A)}^{\widehat{E}}$ .*

*Demonstração.* Veja [24, Lema 3.13]. □

**Observação 1.20.** Sejam  $(\widehat{E}, \zeta)$  um completamento do espaço normado  $E$  e  $A \subseteq E$ . Temos então  $\zeta(A) \subseteq \widehat{E}$  e, por  $\zeta$  ser uma isometria linear, às vezes se recorre a um abuso de notação para escrever  $A \subseteq \widehat{E}$ . Nesse caso a Proposição 1.18 e o Lema 1.19 garantem que  $B_{\widehat{E}} = \overline{B_E}^{\widehat{E}}$  e  $\overline{(\overline{A}^E)}^{\widehat{E}} = \overline{A}^{\widehat{E}}$ , respectivamente.

**Teorema 1.21.** *Sejam  $E$  um espaço normado,  $F$  um espaço de Banach,  $G$  um subespaço de  $E$  e  $T: G \longrightarrow F$  um operador linear contínuo. Então:*

- i) Existe uma única extensão linear contínua de  $T$  ao fecho de  $G$ . A norma da extensão coincide com a norma de  $T$  e se  $T$  é isometria, então a extensão também é.*
- ii) Se  $E$  é completo,  $G$  é denso em  $E$ ,  $T(G)$  é denso em  $F$  e  $T$  é isomorfismo topológico sobre sua imagem, então a extensão de  $T$  ao fecho de  $G$  é sobrejetora.*

*Demonstração.* Para mostrar *i)*, considere o operador  $\widetilde{T}: \overline{G} \longrightarrow F$  definido por

$$\widetilde{T}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \text{ onde } (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq G \text{ e } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Vejamos que  $\widetilde{T}$  está bem definido. Para isso, precisamos que a sequência  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$  seja convergente em  $F$  e que seu limite independa da sequência tomada, isto é, se  $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq G$  e  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n)$ . Como a sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy por ser convergente, de

$$\|T(x_k) - T(x_l)\| = \|T(x_k - x_l)\| \leq \|T\| \cdot \|x_k - x_l\| \text{ para todos } k, l \in \mathbb{N},$$

segue que a sequência  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy, e portanto convergente pois  $F$  é um espaço de Banach. Se  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência em  $G$  tal que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , temos

$$\|T(x_n) - T(y_n)\| = \|T(x_n - y_n)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - y_n\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite em  $n \rightarrow \infty$  segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n)$ , o que prova a boa definição do operador  $T$ .

Sejam  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \subseteq G$  tais que  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  e  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Assim,  $(x_n + \alpha y_n)_{n=1}^\infty \subseteq G$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \alpha y_n) = x + \alpha y$ . Da definição de  $\tilde{T}$  segue que

$$\tilde{T}(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n + \alpha y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T(x_n) + \alpha T(y_n)) = \tilde{T}(x) + \alpha \tilde{T}(y),$$

provando que  $\tilde{T}$  é um operador linear. Além disso, segue da continuidade da norma e da linearidade do operador  $T$  que

$$\|\tilde{T}(x)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|T\| \cdot \|x\|. \quad (1.1)$$

Como isso vale para todo  $x \in E$ , segue que  $\tilde{T}$  é contínuo. Para verificar a unicidade, suponha que  $J: \overline{G} \rightarrow F$  seja um operador linear contínuo cuja restrição ao subespaço  $G$  concida com o operador linear  $T$ , ou seja,  $J$  é uma extensão linear contínua de  $T$  ao fecho de  $G$ . Neste caso, da continuidade de  $J$  segue que

$$J(x) = J\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \tilde{T}(x),$$

donde segue a unicidade da extensão. Para a igualdade de normas, note que da equação (1.1) segue a desigualdade  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$ . Por outro lado,

$$\|T(z)\| = \|\tilde{T}(z)\| \leq \|\tilde{T}\| \cdot \|z\| \text{ para todo } z \in G.$$

Isso implica que  $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$ , e portanto  $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ . Para finalizar a demonstração do item *i*), supondo que  $T$  seja uma isometria, temos

$$\|\tilde{T}(x)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|,$$

provando que a extensão  $\tilde{T}$  também é uma isometria.

Dadas as condições do item *ii*), tome  $y \in F$ . Como  $T(G)$  é denso em  $F$ , existe uma sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq T(G)$  tal que  $y_n \rightarrow y$ . Como o operador  $T: G \rightarrow T(G)$  é um isomorfismo topológico, para cada  $y_n$  existe um único  $x_n \in G$  tal que  $T(x_n) = y_n$ . Para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x_n - x_m\| = \|T^{-1} \circ T(x_n - x_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|.$$

Fazendo  $m, n \rightarrow \infty$  segue que  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq G$  é de Cauchy, e portanto convergente no espaço completo  $E$ , digamos  $x_n \rightarrow x$ . Então

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \tilde{T}(x),$$

o que finaliza a demonstração. □

Relembre que um espaço normado  $E$  que contém um subconjunto enumerável e denso em  $E$  é dito *separável*. Enunciamos a seguir uma caracterização que será útil. Para um subconjunto  $A$  do espaço vetorial  $E$ , por  $[A]$  denotamos o subespaço vetorial de  $E$  gerado por  $A$ .

**Proposição 1.22.** *Um espaço normado  $E$  é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável  $A \subseteq E$  tal que  $[A]$  é denso em  $E$ .*

*Demonstração.* Veja [3, Lema 1.6.3] □

Os dois teoremas enunciados a seguir serão utilizados no estudo da incompletude do produto tensorial projetivo.

**Teorema 1.23.** *Se  $E$  é um espaço de Banach de dimensão infinita e separável, então existem uma sequência  $(x_m)_{m=1}^\infty$  em  $E$  e uma sequência  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  em  $E'$  tais que  $\varphi_n(x_m) = \delta_{m,n}$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , onde  $\delta_{m,n}$  é o delta de Kronecker.*

*Demonstração.* Veja [18, Theorem 1.f.4] □

Relembre que uma série  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  em um espaço normado  $E$  é: (i) *absolutamente convergente* se a série numérica  $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$  é convergente; (ii) *incondicionalmente convergente* se, para toda bijeção  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , a série  $\sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}$  é convergente em  $E$ .

**Teorema 1.24.** *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado  $E$ :*

- (a) *Toda série absolutamente convergente em  $E$  é incondicionalmente convergente.*
- (b) *Toda série absolutamente convergente em  $E$  é convergente.*
- (c)  *$E$  é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Veja [3, Proposição 10.1.4] □

Finalizamos a seção com dois resultados básicos de Análise na Reta.

**Proposição 1.25.** *Sejam  $A, B$  conjuntos de números reais não-negativos. Definimos  $A \cdot B = \{x \cdot y; x \in A \text{ e } y \in B\}$ . Se  $A$  e  $B$  forem limitados, então  $A \cdot B$  é limitado e*

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B, \quad \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

*Demonstração.* Veja [17]. □

**Proposição 1.26.** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios e  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Então*

$$\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y).$$

*Demonstração.* Veja [21, Lema 2.4.10] □

## 1.2 Espaços topológicos e redes

Nesta seção veremos conceitos e resultados básicos de Topologia Geral e de topologias fracas em espaços normados.

**Definição 1.27.** Uma *topologia* em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$ , cujos elementos são chamados de *conjuntos abertos* na topologia  $\tau$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- i)  $X$  e  $\emptyset$  pertencem a  $\tau$ .
- ii) Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $A_1, \dots, A_n \in \tau$ , então  $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \tau$ .
- iii) Se  $\{A_i\}_{i \in I}$  é uma coleção de elementos de  $\tau$ , então  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ .

Neste caso, dizemos que o par  $(X, \tau)$  é um *espaço topológico*, e quando não houver perigo de ambiguidade escrevemos  $X$  no lugar de  $(X, \tau)$ .

Um subconjunto  $F$  de  $X$  é chamado de *conjunto fechado* se seu complementar for aberto, isto é, se  $F^c = X - F \in \tau$ .

Um exemplo simples de espaço topológico é o par  $(\mathbb{K}, \tau)$  onde  $\tau := \{A \subset \mathbb{K} : \text{para todo } x \in A \text{ existe } r > 0 \text{ de modo que } B(x, r) := \{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\} \subseteq A\}$ .

**Definição 1.28.** Uma *vizinhança* de um elemento  $x$  do espaço topológico  $X$  é qualquer subconjunto  $U$  de  $X$  que contém um aberto  $V$  contendo  $x$ , isto é, existe um aberto  $V$  tal que  $x \in V \subseteq U$ . A coleção  $\mathcal{U}_x$  de todas as vizinhanças de  $x$  é chamada de *sistema de vizinhanças* de  $x$ .

**Definição 1.29.** Uma *base* do espaço topológico  $(X, \tau)$  é uma subcoleção  $\mathcal{B}$  de  $\tau$  tal que todo conjunto aberto pode ser escrito como uma união de elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Definição 1.30.** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $Z \subseteq X$ . A coleção

$$\tau_Z := \{B \cap Z : B \in \tau\}$$

é uma topologia em  $Z$ , chamada *topologia relativa* ou *topologia em  $Z$  induzida por  $\tau$* . Com esta topologia, dizemos que  $Z$  é um subespaço topológico de  $X$ .

**Definição 1.31.** Uma função  $f: X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos é *contínua* se  $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$  é aberto em  $X$  para todo aberto  $A$  em  $Y$ .

É fácil ver que se  $f: X \rightarrow Y$  é uma função contínua entre espaços topológicos e  $Z \subset X$ , então a restrição de  $f$  a  $Z$ ,  $f|_Z: Z \rightarrow Y$ , é também uma função contínua. Para isso basta notar que  $(f|_Z)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap Z$  para todo aberto  $A$  em  $Y$ .

**Definição 1.32.** Um *conjunto dirigido* é um par  $(\Lambda, \leq)$  em que  $\leq$  é uma direção no conjunto  $\Lambda$ , isto é, é uma relação em  $\Lambda$  tal que:

- i)  $\lambda \leq \lambda$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ .

ii) Se  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  e  $\lambda_2 \leq \lambda_3$ , então  $\lambda_1 \leq \lambda_3$ .

iii) Para todos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  existe  $\lambda_3 \in \Lambda$  tal que  $\lambda_1 \leq \lambda_3$  e  $\lambda_2 \leq \lambda_3$ .

**Definição 1.33.** Uma *rede* em um conjunto  $X$  é uma função  $P: \Lambda \longrightarrow X$ , onde  $\Lambda$  é um conjunto dirigido. Usualmente se denota  $P(\lambda)$  por  $x_\lambda$ , e neste caso nos referimos à rede por  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

**Definição 1.34.** Dizemos que uma rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  no espaço topológico  $X$  *converge* para  $x \in X$ , e neste caso escrevemos  $x_\lambda \longrightarrow x$ , se para cada vizinhança  $V$  de  $x$  existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $x_\lambda \in V$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ .

**Teorema 1.35.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $x \in X$ . Uma função  $f: X \longrightarrow Y$  é contínua se, e somente se,  $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$  em  $Y$  para toda rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  em  $X$  tal que  $x_\lambda \longrightarrow x$ .*

*Demonstração.* Veja [26, Theorem 11.8] □

**Proposição 1.36.** *Sejam  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  e  $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  redes no espaço topológico  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  tais que  $x_\lambda \longrightarrow x$  e  $y_\lambda \longrightarrow y$ . Então a rede  $(x_\lambda y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  converge para  $xy$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  e suponha que  $y \neq 0$ . Das hipóteses de convergência, existem  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$  tais que

$$\begin{aligned} |x_\lambda - x| &< 1 \text{ para todo } \lambda \geq \lambda_1, \\ |x_\lambda - x| &< \frac{\varepsilon}{2|y|} \text{ para todo } \lambda \geq \lambda_2, \\ |y_\lambda - y| &< \frac{\varepsilon}{2(1+|x|)} \text{ para todo } \lambda \geq \lambda_3. \end{aligned}$$

Daí, para todo  $\lambda \geq \lambda_1$ ,  $|x_\lambda| - |x| \leq |x_\lambda - x| < 1$  e então  $|x_\lambda| < 1 + |x|$ . Do terceiro axioma de conjunto dirigido, existe  $\lambda_4 \in \Lambda$  tal que  $\lambda_4 \geq \lambda_1$  e  $\lambda_4 \geq \lambda_2$ , e o mesmo axioma nos fornece  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $\lambda_0 \geq \lambda_4$  e  $\lambda_0 \geq \lambda_3$ . Do segundo axioma segue que se  $\lambda \geq \lambda_0$ , então  $\lambda \geq \lambda_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Assim, para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$\begin{aligned} |x_\lambda y_\lambda - xy| &= |x_\lambda y_\lambda - x_\lambda y + x_\lambda y - xy| = |x_\lambda(y_\lambda - y) + (x_\lambda - x)y| \\ &\leq |x_\lambda(y_\lambda - y)| + |(x_\lambda - x)y| = |x_\lambda| \cdot |y_\lambda - y| + |x_\lambda - x| \cdot |y| \\ &\leq (1 + |x|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |x|)} + \frac{\varepsilon}{2|y|} |y| = \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que  $x_\lambda y_\lambda \longrightarrow xy$  no caso em que  $y \neq 0$ . No caso em que  $y = 0$  basta considerar as desigualdades  $|x_\lambda - x| < 1$  e  $|y_\lambda - y| < \frac{\varepsilon}{1 + |x|}$ . □

Sejam  $X$  um conjunto,  $(Y_i)_{i \in I}$  uma família de espaços topológicos e  $(f_i)_{i \in I}$  uma família de funções  $f_i: X \longrightarrow Y_i$  para cada  $i \in I$ . Para cada  $i \in I$  e cada aberto  $A_i$  em  $Y_i$  considere o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X ; f_i(x) \in A_i\}.$$

Chame de  $\Phi$  a coleção dos subconjuntos de  $X$  que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma  $f_i^{-1}(A_i)$ .

**Proposição 1.37.** *Existe uma topologia  $\tau$  em  $X$  que tem  $\Phi$  como base, isto é, os elementos de  $\tau$  são uniões de elementos de  $\Phi$ .*

*Demonstração.* [9, Proposition 4.4] □

**Definição 1.38.** A topologia  $\tau$  da Proposição 1.37 é chamada de *topologia gerada pela família de funções  $(f_i)_{i \in I}$* .

**Definição 1.39.** Seja  $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  uma coleção de conjuntos. O *produto cartesiano generalizado* dos conjuntos  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in \Gamma$ , é definido como sendo o seguinte conjunto de funções:

$$\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha = \left\{ f: \Gamma \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \Gamma \right\}.$$

Denotando  $f(\alpha)$  por  $x_\alpha$  para cada  $\alpha \in \Gamma$ , podemos nos referir ao elemento  $f \in \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  por  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ . Fixando  $\beta \in \Gamma$ , a função

$$\pi_\beta: \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha \longrightarrow X_\beta, \quad \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}) = x_\beta,$$

é chamada de *projeção na  $\beta$ -ésima coordenada*.

Se cada  $X_\alpha$  for um espaço topológico, então a topologia em  $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  gerada pelas funções  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  é chamada de *topologia produto*.

**Teorema 1.40.** *Seja  $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  uma coleção de espaços topológicos. Uma rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  no produto cartesiano generalizado  $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  converge para  $x$  em relação à topologia produto se, e somente se,  $\pi_\beta(x_\lambda) \longrightarrow \pi_\beta(x)$  em  $X_\beta$  para cada  $\beta \in \Gamma$ .*

*Demonstração.* Veja [26, Theorem 11.9] □

**Definição 1.41.** Um espaço topológico  $X$  é um *espaço de Hausdorff* se para todos  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , existem vizinhanças  $U$  de  $x$  e  $V$  de  $y$  tais que  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definição 1.42.** Um subconjunto  $K$  do espaço topológico  $X$  é *compacto* se para toda coleção  $(A_i)_{i \in I}$  de abertos em  $X$  tal que  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $i_1, \dots, i_n \in I$  tais que  $K \subseteq (A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n})$ , ou seja, se toda cobertura aberta de  $K$  admite subcobertura finita.

**Proposição 1.43.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $K \subseteq X$ .*

- i) Se  $X$  é compacto e  $K$  é fechado, então  $K$  é compacto.*
- ii) Se  $X$  é Hausdorff e  $K$  é compacto, então  $K$  é fechado.*
- iii) Se  $f: X \longrightarrow Y$  é contínua e  $K$  é compacto em  $X$ , então  $f(K)$  é compacto em  $Y$ .*

*Demonstração.* Veja [9, Proposition 4.22, Proposition 4.24 e Proposition 4.26]. □



Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. Denota-se por  $C(X; Y)$  o conjunto de todas as funções contínuas de  $X$  em  $Y$ . Quando  $Y = \mathbb{K}$  escreve-se simplesmente  $C(X)$ .

**Proposição 1.44.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Então:*

i)  $C(X)$  é um espaço vetorial real se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e um espaço vetorial complexo se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  com as operações pontuais de funções:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) \text{ e } (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

para todos  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $f, g \in C(X)$ .

ii) Se  $X$  é compacto, então a função

$$\| \cdot \| : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

é uma norma em  $C(X)$ .

iii) Se  $X$  é compacto, então  $C(X)$  é Banach.

*Demonstração.* Justificaremos apenas o item ii). O terceiro item da Proposição 1.43 garante que  $f(X) \subset \mathbb{K}$  é compacto, e portanto limitado, para toda  $f \in C(X)$ . Isso garante que a função  $\| \cdot \| : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$  está bem definida. É claro que  $\|0\| = 0$ . Se  $\|f\| = 0$ , então  $|f(x)| = 0$  para todo  $x \in X$ , e portanto  $f = 0$ . É imediato que  $\|f\| \geq 0$  para toda  $f \in C(X)$ . A desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\} = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Por fim, segue facilmente que  $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ . Para a demonstração do item iii), veja [9, Proposition 4.13 e Corollary 4.27].  $\square$

**Teorema 1.45.** *Se  $X_\alpha$  é um espaço de Hausdorff para todo  $\alpha \in \Gamma$ , então o produto cartesiano generalizado  $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  munido com a topologia produto é também um espaço de Hausdorff.*

*Demonstração.* Veja [9, Proposition 4.10].  $\square$

**Teorema 1.46.** (Teorema de Tychonoff) *Se  $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  é uma família de espaços topológicos compactos, então o produto cartesiano generalizado  $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  é compacto na topologia produto.*

*Demonstração.* Veja [9, Theorem 4.43].  $\square$

Dado um espaço normado  $E$ , podemos considerar a topologia em  $E$  gerada pelos funcionais  $\varphi \in E'$  de acordo com a Definição 1.38. Essa topologia é chamada de *topologia fraca* em  $E$  e denotada por  $\sigma(E, E')$  ou  $\omega$ . Quando uma rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$  em  $E$  converge para  $x \in E$  na topologia fraca, escrevemos  $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$ .

**Proposição 1.47.** *Seja  $E$  um espaço normado. Então:*

i) Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo  $\varphi \in E'$ ,  $\varphi: (E, \sigma(E, E')) \rightarrow \mathbb{K}$  é contínuo.

ii) Para cada  $x_0 \in E$ , os conjuntos da forma

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E : |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \varepsilon, \text{ para todo } j \in J\},$$

onde  $J$  é um conjunto finito,  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi_j \in E'$  para todo  $j \in J$ , formam uma base de vizinhanças abertas de  $x_0$  para a topologia fraca.

iii) Sejam  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$  uma rede em  $E$  e  $x \in E$ . Então  $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$  se, e somente se,  $\varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x)$  em  $\mathbb{K}$  para todo  $\varphi \in E'$ .

iv) A topologia fraca  $\sigma(E, E')$  é de Hausdorff.

v) Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $f: Z \rightarrow (E, \sigma(E, E'))$  uma função. Então  $f$  é contínua se, e somente se,  $\varphi \circ f: Z \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua para todo  $\varphi \in E'$ .

*Demonstração.* Veja [3, Proposição 6.2.2]. □

Do item iii) da Proposição acima segue imediatamente que:

**Corolário 1.48.** Em um espaço normado  $E$ , se  $x_n \rightarrow x$  então  $x_n \xrightarrow{\omega} x$ .

Podemos considerar no dual  $E'$  de um espaço normado  $E$  a topologia fraca  $\sigma(E', E'')$ , que é a topologia gerada pelos elementos de  $E''$ . Mas em espaços duais podemos considerar uma outra topologia muito útil. Do Teorema 1.14 sabemos que para cada  $x \in E$ ,  $J_E(x): E' \rightarrow \mathbb{K}$  é um funcional linear contínuo, e assim podemos considerar a topologia em  $E'$  gerada, de acordo com a Definição 1.38, pelos elementos do conjunto

$$J_E(E) = \{J_E(x) \in E'' : x \in E\} \subseteq E''.$$

Essa topologia é chamada de *topologia fraca-estrela* em  $E'$  e denotada por  $\sigma(E', E)$  ou  $\omega^*$ . Quando uma rede  $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$  em  $E'$  converge para  $\varphi \in E'$  na topologia fraca-estrela, escrevemos  $\varphi_\lambda \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ .

**Proposição 1.49.** Seja  $E$  um espaço normado. Então:

i) Para todo  $x \in E$ ,  $J_E(x): (E', \sigma(E', E)) \rightarrow \mathbb{K}$  é contínuo.

ii) Para cada  $\varphi_0 \in E'$ , os conjuntos da forma

$$W_{J,\varepsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_j) - \varphi_0(x_j)| < \varepsilon, \text{ para todo } j \in J\},$$

onde  $J$  é um conjunto finito,  $\varepsilon > 0$  e  $x_j \in E$  para todo  $j \in J$ , formam uma base de vizinhanças abertas de  $\varphi_0$  para a topologia fraca-estrela.

iii) Sejam  $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$  uma rede em  $E'$  e  $\varphi \in E'$ . Então  $\varphi_\lambda \xrightarrow{\omega^*} \varphi$  se, e somente se,  $\varphi_\lambda(x) \rightarrow \varphi(x)$  para todo  $x \in E$ .

iv) A topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  é de Hausdorff.

v) Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $f: Z \rightarrow (E', \sigma(E', E))$  uma função. Então  $f$  é contínua se, e somente se,  $J_E(x) \circ f: Z \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua para todo  $x \in E$ .

*Demonstração.* Veja [3, Proposição 6.2.2].  $\square$

**Teorema 1.50.** (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) Para todo espaço normado  $E$ , a bola unitária fechada  $B_{E'} = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$  é compacta na topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  de  $E'$ .

## 1.3 Medida

Terminamos este capítulo introdutório com conceitos e resultados básicos de Teoria da Medida e Integração.

**Definição 1.51.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma coleção  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de  $X$  é dita ser uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  se  $\mathcal{M}$  tem as seguintes propriedades:

- i)  $X \in \mathcal{M}$ .
- ii) Se  $E \in \mathcal{M}$  então  $E^c \in \mathcal{M}$ , onde  $E^c$  é o complementar de  $E$  relativo ao conjunto  $X$ , isto é,  $E^c = X - E$ .
- iii) Se  $\{E_j\}_{j=1}^\infty$  é uma coleção enumerável de subconjuntos de  $\mathcal{M}$ , então  $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{M}$ .

Se  $\mathcal{M}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , então dizemos que o par  $(X, \mathcal{M})$  é um *espaço mensurável*, e os elementos de  $\mathcal{M}$  são chamados de *conjuntos mensuráveis* em  $X$ .

**Teorema 1.52.** Se  $\mathcal{F}$  é uma coleção qualquer de subconjuntos de  $X$ , então existe uma menor  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\mathcal{F})$  em  $X$  tal que  $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$ .

*Demonstração.* Veja [22, Theorem 1.10].  $\square$

A  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\mathcal{F})$  do teorema acima é chamada de  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{F}$ .

Dado um espaço topológico  $(X, \tau)$  qualquer podemos considerar, de acordo com o Teorema 1.52, o espaço mensurável  $(X, \sigma(\tau))$ . A  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\tau)$  é conhecida como  $\sigma$ -álgebra de Borel e seus elementos são chamados de *conjuntos de Borel* ou *borelianos*.

**Definição 1.53.** Seja  $(X, \mathcal{M})$  um espaço mensurável. Uma *medida* em  $\mathcal{M}$  é uma função  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  tal que:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- ii) Se  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  é uma coleção enumerável de subconjuntos disjuntos em  $\mathcal{M}$  então
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n).$$

Para a teoria básica de funções mensuráveis e funções integráveis, veja [22] ou [9]. Enunciaremos a seguir algumas das propriedades básicas de integrais que serão úteis neste trabalho.

**Proposição 1.54.** *Sejam  $\mu$  uma medida em uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ ,  $f, g: X \rightarrow \mathbb{K}$  funções integráveis e  $\alpha \in \mathbb{K}$ .*

$$1. \int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X (f + g) d\mu.$$

$$2. \int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu.$$

$$3. \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

*Demonstração.* Veja [9, Proposition 2.21 e Proposition 2.22]. □

**Definição 1.55.** Seja  $(X, \mathcal{M})$  um espaço mensurável. Uma *medida com sinal* em  $\mathcal{M}$  é uma função  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$  tal que:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- ii)  $\mu$  assume no máximo um dos valores  $\{-\infty, \infty\}$ .
- iii) Se  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  é uma coleção enumerável de subconjuntos disjuntos em  $\mathcal{M}$ , então
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n).$$

**Definição 1.56.** Seja  $(X, \mathcal{M})$  um espaço mensurável. Dizemos que uma coleção  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  de elementos de  $\mathcal{M}$  é uma partição de  $E$  se  $E_i \cap E_j = \emptyset$  sempre que  $i \neq j$ , e  $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ . Uma *medida complexa* em  $\mathcal{M}$  é uma função  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$$

para toda partição  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  de  $E$ .

Note que, em particular, a série  $\sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$  é incondicionalmente convergente. De fato, de [14, Theorem 1.3.5] sabemos que uma série definida em um espaço normado de dimensão finita é incondicionalmente convergente se, e somente se, a série é absolutamente convergente (isso também segue do Teorema 1.24). Dessa forma, temos que  $\sum_{n=1}^\infty |\mu(E_n)| < \infty$ . Isso permite definir a variação total da medida complexa  $\mu$ :

**Definição 1.57.** Seja  $\mu$  uma medida complexa em  $(X, \mathcal{M})$ . Define-se a *variação total*  $|\mu|$  de  $\mu$  por:

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{n=1}^\infty |\mu(E_n)|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  de  $E$ .

**Teorema 1.58.** *A variação total  $|\mu|$  de uma medida complexa  $\mu$  em  $\mathcal{M}$  é uma medida (não-negativa) em  $\mathcal{M}$ .*

*Demonstração.* Veja [22, Theorem 6.2]. □

**Proposição 1.59.** *Seja  $\mu$  uma medida complexa em  $(X, \mathcal{M})$ .*

- i)  $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$  para todo  $E \in \mathcal{M}$
- ii) Se  $f \in L^1(\mu)$ , então  $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d|\mu|$ .

**Definição 1.60.** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico,  $\mu$  uma medida de Borel sobre  $(X, \sigma(\tau))$ , isto é, uma medida definida nos borelianos de  $X$ , e  $E$  um boreliano de  $X$ .

- i)  $\mu$  é dita *regular exterior* em  $E$  se  $\mu(E) = \inf\{\mu(O) : O \supset E \text{ e } O \text{ é aberto}\}$ .
- ii)  $\mu$  é dita *regular interior* em  $E$  se  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ e } K \text{ é compacto}\}$ .
- iii) Dizemos que  $\mu$  é *Borel regular* se for regular exterior e regular interior em todos os borelianos de  $X$ .
- iv) Dizemos que  $\mu$  é de *Radon* se for finita em todos os compactos, regular exterior em todos os borelianos e regular interior em todos os abertos.

Uma medida complexa  $\mu$  definida em uma  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{M}$  é dita *regular* se sua variação total  $|\mu|$  for regular.

Dada uma medida com sinal  $\mu$  sobre o espaço mensurável  $(X, \mathcal{M})$ , um subconjunto  $E \in \mathcal{M}$  é dito ser  $\mu$ -positivo se  $\mu(F) \geq 0$  para todo  $F \in \mathcal{M}$  tal que  $F \subset E$ . Analogamente, um subconjunto  $E \in \mathcal{M}$  é dito ser  $\mu$ -negativo se  $\mu(F) \leq 0$  para todo  $F \in \mathcal{M}$  tal que  $F \subset E$ .

**Teorema 1.61.** (Teorema da Decomposição de Hahn) *Seja  $\mu$  uma medida com sinal sobre o espaço mensurável  $(X, \mathcal{M})$ . Então existem um conjunto  $\mu$ -positivo  $P$  e um conjunto  $\mu$ -negativo  $N$  tais que  $P \cup N = X$  e  $P \cap N = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Veja [9, Theorem 3.3]. □

O par  $(P, N)$  acima é chamado de *decomposição de Hahn* de  $X$  em relação a  $\mu$ . Em geral, tal decomposição não é única, no entanto, se  $(P_1, N_1)$  e  $(P_2, N_2)$  são decomposições de Hahn de  $X$  em relação a  $\mu$ , então:

$$\mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_2) \text{ e } \mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2) \text{ para todo } E \in \mathcal{M}$$

Isso segue facilmente da igualdade elementar  $\mu(E) = \mu(E \cap P_j) + \mu(E \cap N_j)$ . De fato, para todos  $E \in \mathcal{M}, j = 1, 2$ , juntamente com a igualdade  $\mu(P_1 \cap N_2) = \mu(P_2 \cap N_1) = 0$  temos que:

$$\begin{aligned} \mu(E \cap P_1) &= \mu((E \cap P_1) \cap P_2) + \mu((E \cap P_1) \cap N_2) \\ &= \mu(E \cap P_1 \cap P_2) + \mu(E \cap P_1 \cap N_2) \\ &= \mu(E \cap P_1 \cap P_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu(E \cap P_2) &= \mu((E \cap P_2) \cap P_1) + \mu((E \cap P_2) \cap N_1) \\ &= \mu(E \cap P_2 \cap P_1) + \mu(E \cap P_2 \cap N_1) \\ &= \mu(E \cap P_2 \cap P_1).\end{aligned}$$

Logo  $\mu(E \cap P_2) = \mu(E \cap P_1)$ . De modo semelhante vemos que  $\mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2)$ . Com isso, podemos definir a variação positiva  $\mu^+ : \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$  e a variação negativa  $\mu^- : \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$  da seguinte forma:

$$\mu^+(E) := \mu(E \cap P) \quad \text{e} \quad \mu^-(E) := -\mu(E \cap N).$$

É fácil verificar que  $\mu^+$  e  $\mu^-$  são medidas positivas e  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ . Define-se a variação total  $|\mu| : \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$  de uma medida com sinal  $\mu$  por

$$|\mu| := \mu^+ + \mu^-.$$

**Definição 1.62.** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico,  $\mu$  uma medida de Borel com sinal e  $\nu$  uma medida de Borel complexa.

- i) Dizemos que  $\mu$  é *medida de Radon com sinal* se  $\mu^+$  e  $\mu^-$  forem medidas de Radon.
- ii) Dizemos que  $\nu$  é *medida de Radon complexa* se as partes real e imaginária de  $\nu$  forem medidas de Radon com sinal.
- iii)  $M(X) := \{\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} : \mu \text{ medida de Radon complexa}\}.$

**Proposição 1.63.** Se  $\mu$  é uma medida de Borel complexa, então  $\mu$  é medida de Radon complexa se, e somente se,  $|\mu|$  é de Radon. Mais ainda,  $M(X)$  é um espaço vetorial no qual  $\|\mu\| := |\mu|(X)$  é uma norma.

*Demonstração.* Veja [9, Proposition 7.16]. □

# Capítulo 2

## O Produto Tensorial Algébrico

Neste capítulo fazemos a construção algébrica do produto tensorial de espaços vetoriais, com ênfase na relação estreita com a teoria de operadores multilineares, e provamos vários resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes, quando trataremos dos produtos tensoriais topológicos.

### 2.1 A construção

**Definição 2.1.** Sejam  $X_1, \dots, X_n, Z$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . O operador  $A: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow Z$  é dito *n-linear* se for linear em cada uma de suas coordenadas, isto é,

$$A(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) = \alpha A(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n),$$

para quaisquer  $1 \leq j \leq n$ ,  $x'_j, x''_j \in X_j$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Exemplo 2.2.** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z$  espaços vetoriais,  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_{n-1} \in X_{n-1}^*$  e  $T: X_n \longrightarrow Z$  um operador linear. Vejamos que o operador  $A: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow Z$  definido por

$$A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})T(x_n),$$

é um operador *n-linear*.

De fato, para quaisquer  $x'_j, x''_j \in X_j$ , com  $j = 1, \dots, n-1$ , e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , tem-se

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_j(\alpha x'_j + x''_j) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})T(x_n) \\ &= \alpha \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_j(x'_j) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})T(x_n) + \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_j(x''_j) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})T(x_n) \\ &= \alpha A(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_{n-1}, x_n) + A(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

o que prova a linearidade de  $A$  nas primeiras  $(n-1)$ -coordenadas. A linearidade de  $A$  na  $n$ -ésima coordenada é análoga, bastando usar a linearidade de  $T$ .

Dados  $\varphi_n \in X_n^*$  e  $y \in Z$ , é fácil ver que o operador

$$T: X_n \longrightarrow Z, \quad T(x_n) = \varphi_n(x_n)y,$$

é linear. Então, de acordo com Exemplo 2.2, o operador  $A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Z$  definido por

$$A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \varphi_n(x_n) y,$$

é  $n$ -linear. Em particular, quando  $Z = \mathbb{K}$  e  $y = 1$ , concluímos que o operador  $A: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow \mathbb{K}$  definido por  $A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$  é um operador  $n$ -linear.

**Exemplo 2.3.** Sejam  $p_1, \dots, p_n, q \geq 1$  tais que  $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{q}$ . Considere os espaços  $\ell_{p_1}, \dots, \ell_{p_n}, \ell_q$ . Vejamos que o operador  $A: \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_n} \rightarrow \ell_q$  definido por

$$A((x_{j,1})_{j=1}^\infty, \dots, (x_{j,n})_{j=1}^\infty) = (x_{j,1} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty$$

é um operador  $n$ -linear.

Sejam  $(x_{j,1})_{j=1}^\infty \in \ell_{p_1}, \dots, (x_{j,n})_{j=1}^\infty \in \ell_{p_n}$ . Segue do Teorema 1.2 que a sequência  $(x_{j,1} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty$  é um elemento de  $\ell_q$ , e então o operador  $A$  está bem definido. Por simplicidade, e sem perda de generalidade, vejamos que o operador  $A$  é linear na primeira coordenada. Dados  $(x_{j,1})_{j=1}^\infty, (x'_{j,1})_{j=1}^\infty \in \ell_{p_1}$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} A(\alpha(x_{j,1})_{j=1}^\infty + (x'_{j,1})_{j=1}^\infty, (x_{j,2})_{j=1}^\infty, \dots, (x_{j,n})_{j=1}^\infty) \\ &= A((\alpha x_{j,1} + x'_{j,1})_{j=1}^\infty, (x_{j,2})_{j=1}^\infty, \dots, (x_{j,n})_{j=1}^\infty) \\ &= ((\alpha x_{j,1} + x'_{j,1})x_{j,2} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty = (\alpha x_{j,1}x_{j,2} \cdots x_{j,n} + x'_{j,1}x_{j,2} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty \\ &= (\alpha x_{j,1}x_{j,2} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty + (x'_{j,1}x_{j,2} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty \\ &= \alpha(x_{j,1}x_{j,2} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty + (x'_{j,1}x_{j,2} \cdots x_{j,n})_{j=1}^\infty \\ &= \alpha A((x_{j,1})_{j=1}^\infty, (x_{j,2})_{j=1}^\infty, \dots, (x_{j,n})_{j=1}^\infty) + A((x'_{j,1})_{j=1}^\infty, (x_{j,2})_{j=1}^\infty, \dots, (x_{j,n})_{j=1}^\infty). \end{aligned}$$

Denotamos por  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$  o conjunto dos operadores  $n$ -lineares de  $X_1 \times \cdots \times X_n$  em  $Z$ , e quando  $Z = \mathbb{K}$  escrevemos simplesmente  $L(X_1, \dots, X_n)$ . Os elementos de  $L(X_1, \dots, X_n)$  são muitas vezes chamados de *formas multilineares*. Em particular, quando  $n = 1$ ,  $L(X_1; Z)$  é o conjunto dos operadores lineares de  $X_1$  em  $Z$ .

**Definição 2.4.** Sejam  $A, B \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Definimos, de forma natural, as seguintes operações em  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$ :

$$\begin{aligned} (A + B)(x_1, \dots, x_n) &= A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \\ (\alpha A)(x_1, \dots, x_n) &= \alpha A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

**Proposição 2.5.** *Dados  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z$  espaços vetoriais, o conjunto  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$ , munido das operações definidas em 2.4, é um espaço vetorial.*

*Demonstração.* Sejam  $A, B, C \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$  e  $\beta \in \mathbb{K}$ . Como  $Z$  é um espaço vetorial, a adição em  $Z$  é comutativa, e então

$$\begin{aligned} (A + B)(x_1, \dots, x_n) &= A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) = B(x_1, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x_n) \\ &= (B + A)(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$



mostrando que vale a comutatividade em  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$ . Definindo

$$P: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow Z, \quad P(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

é imediato que  $P$  é um operador  $n$ -linear e

$$(A + P)(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n) + P(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n)$$

para todos  $x_j \in X_j, j = 1, \dots, n$ , ou seja,  $P$  é o elemento neutro da adição em  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$ . Dado o escalar  $1 \in \mathbb{K}$ ,

$$(1A)(x_1, \dots, x_n) = 1A(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n),$$

pois  $A(x_1, \dots, x_n) \in Z$ . Vejamos que  $\beta A + B$  é um operador  $n$ -linear: para quaisquer  $x'_j, x''_j \in X_j$  com  $j = 1, \dots, n$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} ((\beta A) + B)(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) &= (\beta A)(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) \\ &= \beta A(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) \\ &= \beta (\alpha A(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n)) + \alpha B(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) \\ &\quad + B(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) \\ &= \alpha \beta A(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + \beta A(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) + \alpha B(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) \\ &\quad + B(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) \\ &= \alpha (\beta A)(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + (\beta A)(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) + \alpha B(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) \\ &\quad + B(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) \\ &= \alpha ((\beta A)(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n)) + (\beta A)(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) \\ &\quad + B(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) \\ &= \alpha ((\beta A) + B)(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + ((\beta A) + B)(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Isso mostra que o conjunto  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$  é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar. Para a associatividade, usaremos a associatividade em  $Z$ :

$$\begin{aligned} ((A + B) + C)(x_1, \dots, x_n) &= (A + B)(x_1, \dots, x_n) + C(x_1, \dots, x_n) \\ &= (A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n)) + C(x_1, \dots, x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) + (B(x_1, \dots, x_n) + C(x_1, \dots, x_n)) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) + (B + C)(x_1, \dots, x_n) \\ &= (A + (B + C))(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Vimos que  $\beta A$  é um operador  $n$ -linear para todo  $\beta \in \mathbb{K}$ , em particular o operador  $-1A$  é  $n$ -linear. Assim;

$$\begin{aligned} (A + (-1A))(x_1, \dots, x_n) &= A(x_1, \dots, x_n) + (-1A)(x_1, \dots, x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) + (-1)A(x_1, \dots, x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) - A(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

então todo elemento em  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$  possui um inverso aditivo.

A distributividade segue de forma análoga ao que foi feito usando a distributividade do espaço vetorial  $Z$ .  $\square$

**Definição 2.6.** Sejam  $X_1, \dots, X_n, Z$  espaços vetoriais,  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_n \in X_n^*$  e  $y \in Z$ . No Exemplo 2.2 vimos que o operador

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow Z,$$

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)y$$

é  $n$ -linear. Operadores em  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$  que são combinações lineares de operadores deste tipo são chamados de *operadores  $n$ -lineares de tipo finito*. É claro que o conjunto formado pelos operadores de tipo finito é um subespaço vetorial de  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$ , que será denotado por  $L_f(X_1, \dots, X_n; Z)$ , isto é,

$$L_f(X_1, \dots, X_n; Z) = \text{span}\{\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y : n \in \mathbb{N}, \varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_n \in X_n^* \text{ e } y \in Z\}.$$

Vejamos que operadores multilineares em espaços vetoriais de dimensão finita são todos de tipo finito.

**Proposição 2.7.** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z$  espaços vetoriais. Se  $X_1, \dots, X_n$  têm dimensão finita, então  $L(X_1, \dots, X_n; Z) = L_f(X_1, \dots, X_n; Z)$ .

*Demonstração.* Sejam  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_1 = \{e_1^1, \dots, e_{k_1}^1\}$  base de  $X_1$ ,  $\beta_2 = \{e_1^2, \dots, e_{k_2}^2\}$  base de  $X_2$ ,  $\dots$ ,  $\beta_n = \{e_1^n, \dots, e_{k_n}^n\}$  base de  $X_n$ . Considere os operadores

$$\begin{aligned} \varphi_1^1, \dots, \varphi_{k_1}^1: X_1 &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_1^1 \left( \sum_{j=1}^{k_1} \lambda_j^1 e_j^1 \right) := \lambda_1^1, \dots, \varphi_{k_1}^1 \left( \sum_{j=1}^{k_1} \lambda_j^1 e_j^1 \right) := \lambda_{k_1}^1, \\ \varphi_1^2, \dots, \varphi_{k_2}^2: X_2 &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_1^2 \left( \sum_{j=1}^{k_2} \lambda_j^2 e_j^2 \right) := \lambda_1^2, \dots, \varphi_{k_2}^2 \left( \sum_{j=1}^{k_2} \lambda_j^2 e_j^2 \right) := \lambda_{k_2}^2, \\ &\vdots \\ \varphi_1^n, \dots, \varphi_{k_n}^n: X_n &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_1^n \left( \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n e_j^n \right) := \lambda_1^n, \dots, \varphi_{k_n}^n \left( \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n e_j^n \right) := \lambda_{k_n}^n. \end{aligned}$$

É fácil ver que  $\varphi_{i_j}^j \in X_j^*$  para todos  $j = 1, \dots, n$  e  $i_j = 1, \dots, k_j$ . Dados  $A \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$  e  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ , temos

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots, x_n) &= A \left( \sum_{j_1=1}^{k_1} \lambda_{j_1}^1 e_{j_1}^1, \sum_{j_2=1}^{k_2} \lambda_{j_2}^2 e_{j_2}^2, \dots, \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_{j_n}^n e_{j_n}^n \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_{j_1}^1 \lambda_{j_2}^2 \dots \lambda_{j_n}^n A(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, \dots, e_{j_n}^n) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \varphi_{j_1}^1(x_1) \varphi_{j_2}^2(x_2) \dots \varphi_{j_n}^n(x_n) A(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, \dots, e_{j_n}^n). \end{aligned}$$

Escrevendo  $A(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, \dots, e_{j_n}^n) := b_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ , segue que

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} \varphi_{j_1}^1(x_1) \varphi_{j_2}^2(x_2) \cdots \varphi_{j_n}^n(x_n) b_{j_1, j_2, \dots, j_n} \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} (\varphi_{j_1}^1 \otimes \varphi_{j_2}^2 \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_n}^n \otimes b_{j_1, j_2, \dots, j_n})(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

provando que  $A = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} (\varphi_{j_1}^1 \otimes \varphi_{j_2}^2 \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_n}^n \otimes b_{j_1, j_2, \dots, j_n})$ , donde segue que  $A \in L_f(X_1, \dots, X_n; Z)$ .  $\square$

**Proposição 2.8.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z$  espaços vetoriais. Para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ , o operador*

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n: L(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x_1 \otimes \cdots \otimes x_n(A) = A(x_1, \dots, x_n),$$

*é um funcional linear, isto é,  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in L(X_1, \dots, X_n)^*$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A, B \in L(X_1, \dots, X_n)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Vimos na Proposição 2.5 que  $L(X_1, \dots, X_n)$  é um espaço vetorial, então  $A + \alpha B \in L(X_1, \dots, X_n)$  e

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n(A + \alpha B) = (A + \alpha B)(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n) + \alpha B(x_1, \dots, x_n).$$

$\square$

Agora estamos prontos para a definição do produto tensorial de espaços vetoriais.

**Definição 2.9.** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Define-se o *produto tensorial* de  $X_1, \dots, X_n$  por

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n := \text{span}\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n; x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Assim, por definição,  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  é um subespaço vetorial de  $L(X_1, \dots, X_n)^*$ . Os elementos de  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  são chamados de *tensores*. Tensores da forma  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  são ditos *tensores elementares*.

Sendo assim, todo tensor  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  tem uma representação da forma

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i), \quad (2.1)$$

onde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^i \in X_1, \dots, x_n^i \in X_n$ , e  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ . Mais ainda, para toda forma  $n$ -linear  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ , tem-se

$$u(A) = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i) \right) (A) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i)(A) = \sum_{i=1}^m \lambda_i A(x_1^i, \dots, x_n^i).$$

O operador multilinear a ser introduzido no resultado a seguir desempenhará um papel central em nosso estudo.

**Proposição 2.10.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais. O operador*

$$\sigma_n: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow X_1 \otimes \dots \otimes X_n, \quad \sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n,$$

*é  $n$ -linear, chamado de operador  $n$ -linear canônico.*

*Demonstração.* Para todos  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $j = 1, \dots, n$  e  $x_1 \in X_1, \dots, x'_j, x''_j \in X_j, \dots, x_n \in X_n$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_n(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n)(A) &= x_1 \otimes \dots \otimes (\alpha x'_j + x''_j) \otimes \dots \otimes x_n(A) \\ &= A(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) \\ &= \alpha A(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n) \\ &= \alpha(x_1 \otimes \dots \otimes x'_j \otimes \dots \otimes x_n)(A) + x_1 \otimes \dots \otimes x''_j \otimes \dots \otimes x_n(A) \\ &= \alpha \sigma_n(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n)(A) + \sigma_n(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n)(A) \\ &= (\alpha \sigma_n(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + \sigma_n(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n))(A), \end{aligned}$$

o que prova que

$$\sigma_n(x_1, \dots, \alpha x'_j + x''_j, \dots, x_n) = \alpha \sigma_n(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) + \sigma_n(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_n).$$

□

Da proposição acima segue imediatamente que:

**Corolário 2.11.** *Para todos  $j = 1, \dots, n$  e  $x_1 \in X_1, \dots, x'_j, x''_j \in X_j, \dots, x_n \in X_n$ , vale que:*

- i)  $x_1 \otimes \dots \otimes (x'_j + x''_j) \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes \dots \otimes x'_j \otimes \dots \otimes x_n + x_1 \otimes \dots \otimes x''_j \otimes \dots \otimes x_n.$
- ii)  $\lambda(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) = (\lambda x_1) \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes (\lambda x_2) \otimes \dots \otimes x_n = \dots = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes (\lambda x_n).$

Do item (ii) do corolário acima segue que a representação do tensor  $u$  obtido na equação (2.1) pode sempre ser reescrita na forma

$$u = \sum_{i=1}^m y_1^i \otimes \dots \otimes y_n^i,$$

onde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $y_1^i \in X_1, \dots, y_n^i \in X_n$ .

A proposição abaixo mostra como conjuntos linearmente independentes e bases podem ser transferidas dos espaços componentes para o produto tensorial.

**Proposição 2.12.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ .*

- i) *Sejam  $E_1, \dots, E_n$  subconjuntos linearmente independentes de  $X_1, \dots, X_n$ , respectivamente. Então  $\{x_1 \otimes \dots \otimes x_n : x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$  é subconjunto linearmente independente de  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ .*

ii) Se  $\{e_j^i : i \in B_j\}$  é base de  $X_j$  para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , então

$$C = \{e_1^{i_1} \otimes \dots \otimes e_n^{i_n} : (i_1, \dots, i_n) \in B_1 \times \dots \times B_n\}$$

é uma base para  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ .

*Demonstração.* i) Suponha que  $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) = 0$ , onde  $x_1^i \in E_1, \dots, x_n^i \in E_n$ . Dados  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_n \in X_n^*$ , considere a forma  $n$ -linear

$$A: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n).$$

Temos  $u(A) = 0$  e daí

$$\begin{aligned} \varphi_n \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) x_n^i \right) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_n(x_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i A(x_1^i, \dots, x_n^i) = u(A) = 0, \end{aligned}$$

para cada  $\varphi_n \in X_n^*$ . Aplicando o Lema 1.4 concluímos que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) x_n^i = 0$ , e da independência linear de  $E_n$  segue que  $\lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Portanto,

$$0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) = \varphi_{n-1} \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-2}(x_{n-2}^i) x_{n-1}^i \right)$$

para cada  $\varphi_{n-1} \in X_{n-1}^*$ . Uma nova aplicação do Lema 1.4 nos permite concluir que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-2}(x_{n-2}^i) x_{n-1}^i = 0$ . O fato de  $E_{n-1}$  ser linearmente independente garante que  $\lambda_i \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-2}(x_{n-2}^i) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Prosseguindo dessa forma, obtemos que  $\lambda_i \varphi_1(x_1^i) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m$ , e daí

$$0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_1(x_1^i) = \varphi_1 \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i x_1^i \right)$$

para cada  $\varphi_1 \in X_1^*$ . Uma última aplicação do Lema 1.4 implica que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_1^i = 0$ . A independência linear de  $E_1$  garante que  $\lambda_i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .

ii) O item i) nos garante que  $C$  é um conjunto linearmente independente, ou seja, para provar ii) basta mostrar que  $C$  é um gerador do espaço  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . Dado  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ , considere  $\sum_{k=1}^m x_1^k \otimes \dots \otimes x_n^k$  uma representação de  $u$ . Como  $x_1^k \in X_1$  para cada  $k = 1, \dots, m$ , existem  $m_1^k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{1,k}^1, \dots, \alpha_{1,k}^{m_1^k} \in \mathbb{K}$  e  $i_{1,k}^1, \dots, i_{m_1^k,k}^1 \in B_1$  tais que

$$x_1^k = \sum_{p=1}^{m_1^k} \alpha_{1,k}^p e_1^{i_{p,k}^1}.$$

De forma similar, como  $x_2^k \in X_2$  para cada  $k = 1, \dots, m$ , existem  $m_2^k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{2,k}^1, \dots, \alpha_{2,k}^{m_2^k} \in \mathbb{K}$  e  $i_{1,k}^2, \dots, i_{m_2^k,k}^2 \in B_2$  tais que

$$x_2^k = \sum_{p=1}^{m_2^k} \alpha_{2,k}^p \cdot e_2^{i_{p,k}^2}.$$

$$\vdots$$

De forma similar, como  $x_n^k \in X_n$  para cada  $k = 1, \dots, m$ , existem  $m_n^k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{n,k}^1, \dots, \alpha_{n,k}^{m_n^k} \in \mathbb{K}$  e  $i_{1,k}^n, \dots, i_{m_n^k,k}^n \in B_n$  tais que

$$x_n^k = \sum_{p=1}^{m_n^k} \alpha_{n,k}^p e_n^{i_{p,k}^n}.$$

Uma aplicação do Corolário 2.11 revela que

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^m \left( \left( \sum_{p=1}^{m_1^k} \alpha_{1,k}^p e_1^{i_{p,k}^1} \right) \otimes \left( \sum_{p=1}^{m_2^k} \alpha_{2,k}^p e_2^{i_{p,k}^2} \right) \otimes \dots \otimes \left( \sum_{p=1}^{m_n^k} \alpha_{n,k}^p e_n^{i_{p,k}^n} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{p_1=1}^{m_1^k} \sum_{p_2=1}^{m_2^k} \dots \sum_{p_n=1}^{m_n^k} \alpha_{1,k}^{p_1} \alpha_{2,k}^{p_2} \dots \alpha_{n,k}^{p_n} \left( e_1^{i_{p_1,k}^1} \otimes e_2^{i_{p_2,k}^2} \otimes \dots \otimes e_n^{i_{p_n,k}^n} \right) \right), \end{aligned}$$

o que comprova que  $u$  possui uma representação que é combinação linear dos elementos do conjunto  $C$ .  $\square$

Imediatamente do item (ii) da proposição anterior segue o seguinte.

**Corolário 2.13.** *Se  $X_1, \dots, X_n$  são espaços vetoriais de dimensão finita, então*

$$\dim(X_1 \otimes \dots \otimes X_n) = \dim(X_1) \dots \dim(X_n).$$

**Lema 2.14.** *Sejam  $Y_1, \dots, Y_n, X_1, \dots, X_n, Z, W$  espaços vetoriais,  $A \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$ ,  $T_1 \in L(Y_1; X_1), \dots, T_n \in L(Y_n; X_n)$  e  $T \in L(Z; W)$ . Então o operador*

$$T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n): Y_1 \times \dots \times Y_n \rightarrow W$$

*definido por*

$$T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)(y_1, \dots, y_n) = T(A(T_1(y_1), \dots, T_n(y_n))),$$

*para todos  $y_1 \in Y_1, \dots, y_n \in Y_n$ , é  $n$ -linear.*

A situação está ilustrada no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n & & & & \\ \downarrow T_1 & \downarrow T_2 & & \downarrow T_n & \searrow T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n) \\ X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n & \xrightarrow{A} & Z & \xrightarrow{T} & W \end{array}$$

*Demonstração.* Para todos  $1 \leq j \leq n$ ,  $y_1 \in Y_1, \dots, y'_j, y''_j \in Y_j, \dots, y_n \in Y_n$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned}
& T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)(y_1, \dots, \alpha y'_j + y''_j, \dots, y_n) \\
&= T(A(T_1(y_1), \dots, T_j(\alpha y'_j + y''_j), \dots, T_n(y_n))) \\
&= T(A(T_1(y_1), \dots, \alpha T_j(y'_j) + T_j(y''_j), \dots, T_n(y_n))) \\
&= T(\alpha A(T_1(y_1), \dots, T_j(y'_j), \dots, T_n(y_n)) + A(T_1(y_1), \dots, T_j(y''_j), \dots, T_n(y_n))) \\
&= \alpha T(A(T_1(y_1), \dots, T_j(y'_j), \dots, T_n(y_n))) + T(A(T_1(y_1), \dots, T_j(y''_j), \dots, T_n(y_n))) \\
&= \alpha(T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n))(y_1, \dots, y'_j, \dots, y_n) + T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)(y_1, \dots, y''_j, \dots, y_n).
\end{aligned}$$

□

**Definição 2.15.** Seja  $E$  um subespaço do espaço vetorial  $X$ . Define-se o operador inclusão  $I_{E,X}: E \rightarrow X$  por  $I_{E,X}(x) = x$ .

É claro que o operador inclusão é linear e injetor. Quando  $E = X$ , escrevemos simplesmente  $I_X$  para representar o operador identidade, ao invés de  $I_{X,X}$ . Os seguintes casos particulares do Lema 2.14 serão úteis:

**Corolário 2.16.** *Nas condições do Lema 2.14, temos que:*

- i) Se  $W = Z$  e  $T = I_Z$ , então  $A \circ (T_1, \dots, T_n)$  é um operador  $n$ -linear.
- ii) Se  $Y_j = X_j$  e  $T_j = I_{X_j}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , então  $T \circ A$  é um operador  $n$ -linear.

Sejam  $X_1, \dots, X_n, Z$  espaços vetoriais,  $E_1$  subespaço de  $X_1$ , ...,  $E_n$  subespaço de  $X_n$ . Se  $A \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$  então, pelo Corolário 2.16,  $A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) \in L(E_1, \dots, E_n; Z)$ . Note que o operador  $A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})$  é a restrição do operador  $n$ -linear  $A$  ao produto cartesiano dos subespaços  $E_1, \dots, E_n$ .

**Lema 2.17.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais,  $E_1$  subespaço de  $X_1$ , ...,  $E_n$  subespaço de  $X_n$ . Se  $A \in L_f(E_1, \dots, E_n)$  então existe  $B \in L_f(X_1, \dots, X_n)$  tal que  $B \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) = A$ .*

*Demonstração.* Para todos  $y_1 \in E_1, \dots, y_n \in E_n$ ,

$$A(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_1^i \otimes \dots \otimes \varphi_n^i(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_1^i(y_1) \dots \varphi_n^i(y_n),$$

onde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_1^i \in E_1^*, \dots, \varphi_n^i \in E_n^*$  e  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Pelo Lema 1.5, para cada  $j = 1, \dots, n$ , existe um subespaço  $G_j$  do espaço  $X_j$  tal que  $X_j = E_j \oplus G_j$ . A unicidade da representação na soma direta nos permite considerar os seguintes funcionais lineares ( $1 \leq j \leq n$ ):

$$\tilde{\varphi}_j^i: X_j \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \tilde{\varphi}_j^i(x_j) := \varphi_j^i(e_j) \text{ onde } x_j = e_j + g_j \text{ com } e_j \in E_j \text{ e } g_j \in G_j.$$

Então o operador  $B = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\varphi}_1^i \otimes \dots \otimes \tilde{\varphi}_n^i$  é de tipo finito definido sobre  $X_1 \times \dots \times X_n$ , e para concluir a demonstração basta mostrar que  $B \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) = A$ . De fato,

para todos  $y_1 \in E_1, \dots, y_n \in E_n$ ,

$$\begin{aligned}
A(y_1, \dots, y_n) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_1^i(y_1) \cdots \varphi_n^i(y_n) \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\varphi}_1^i(y_1) \cdots \tilde{\varphi}_n^i(y_n) \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\varphi}_1^i \otimes \cdots \otimes \tilde{\varphi}_n^i(y_1, \dots, y_n) \\
&= B \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})(y_1, \dots, y_n).
\end{aligned}$$

□

**Proposição 2.18.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais,  $E_1$  subespaço de  $X_1, \dots, E_n$  subespaço de  $X_n$  com  $E_1, \dots, E_n$  subespaços de dimensão finita. Para todo  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ , existe  $B \in L_f(X_1, \dots, X_n)$  tal que as restrições  $B \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})$  e  $A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})$  coincidem.*

*Demonstração.* Seja  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ . Pelo Corolário 2.16, o operador  $A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})$  é  $n$ -linear. Como os espaços  $E_1, \dots, E_n$  têm dimensão finita, segue da Proposição 2.7 que  $L(E_1, \dots, E_n) = L_f(E_1, \dots, E_n)$ . Portanto  $A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) \in L_f(E_1, \dots, E_n)$  e então, pelo Lema 2.17, existe  $B \in L_f(X_1, \dots, X_n)$  tal que

$$B \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) = A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}).$$

□

O resultado a seguir ajuda muito a suavizar o problema causado pela falta de unicidade na representação de um tensor. Muito do que fizemos até agora foi para preparar sua demonstração.

**Proposição 2.19.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais,  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . São equivalentes:*

- i)  $u = 0$ .
- ii)  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*$ .
- iii)  $\sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*, j \neq 1$ .
- iv)  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) x_2^i \varphi_3(x_3^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*, j \neq 2$ .
- $\vdots$
- $n+2)$   $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) x_n^i = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*, j \neq n$ .



*Demonstração.* Vimos no Exemplo 2.2 que o operador

$$A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n),$$

é  $n$ -linear para todos  $\varphi_j \in X_j^*$ . Suponha  $u = 0$ . Então

$$0 = u(A) = \sum_{i=1}^m A(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i),$$

para todos  $\varphi_j \in X_j^*$ , o que prova  $i) \implies ii)$ .

Suponha que  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*$ . Neste caso,

$$0 = \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = \varphi_1 \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right),$$

e pelo Lema 1.4 segue que  $\sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*, j \neq 1$ , provando  $ii) \implies iii)$ .

Suponha agora que  $\sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*, j \neq 1$ . Então,

$$\varphi_2 \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) x_2^i \varphi_3(x_3^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right) = \varphi_1 \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right) = 0,$$

para todos  $\varphi_j \in X_j^*$ . Uma segunda aplicação do Lema 1.4 nos permite concluir que  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) x_2^i \varphi_3(x_3^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*, j \neq 2$ , o que prova  $iii) \implies iv)$ .

Neste ponto está claro que as implicações  $iv) \implies v), \dots, n+1) \implies n+2)$  seguem de forma análoga. Resta provar a implicação  $n+2) \implies i)$ . Para isso, seja  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ . Considere os subespaços  $E_1 = \text{span}\{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^m\}, \dots, E_n = \text{span}\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m\}$ . Da Proposição 2.18 existe um operador  $B \in L_f(X_1, \dots, X_n)$ , digamos  $B = \sum_{j=1}^r \alpha_j \varphi_1^j \otimes \cdots \otimes \varphi_n^j$ , onde  $\varphi_1^j \in X_1^*, \dots, \varphi_n^j \in X_n^*$  e  $\alpha_j \in \mathbb{K}$ , tal que

$$B \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) = A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}).$$

Assim,

$$u(A) = \sum_{i=1}^m A(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^m B(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r \alpha_j \varphi_1^j \otimes \cdots \otimes \varphi_n^j(x_1^i, \dots, x_n^i).$$

Por  $n+2)$  segue que

$$\begin{aligned} u(A) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r \alpha_j \varphi_1^j(x_1^i) \cdots \varphi_n^j(x_n^i) \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \varphi_n^j \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1^j(x_1^i) \cdots \varphi_{n-1}^j(x_{n-1}^i) x_n^i \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \varphi_n^j(0) = 0, \end{aligned}$$

portanto  $u = 0$ . □

Para o caso de espaços normados precisaremos de um refinamento da proposição anterior.

**Definição 2.20.** Seja  $X$  um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto  $S$  de  $X^*$  é *separante* se para todo  $x \in X$  tem-se:  $\varphi(x) = 0$  para todo  $\varphi \in S$  se, e somente se,  $x = 0$ , ou equivalentemente, para todos  $x, y \in X, x \neq y$ , existe  $\varphi \in S$  tal que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

**Corolário 2.21.** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais,  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . Se  $S_1$  é um subconjunto separante de  $X_1^*, \dots, S_n$  é um subconjunto separante de  $X_n^*$ , então são equivalentes:

i)  $u = 0$ .

ii)  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j$ .

iii)  $\sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j, j \neq 1$ .

iv)  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) x_2^i \varphi_3(x_3^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j, j \neq 2$ .

⋮

n+2)  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) x_n^i = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j, j \neq n$ .

*Demonstração.* Faremos a demonstração de uma forma mais resumida. Se  $u = 0$ , pela Proposição 2.19 temos  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j^*$ . Em particular,

$\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j$ .

Se  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j$ , então

$$0 = \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = \varphi_1 \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \dots \varphi_n(x_n^i) \right).$$

Como  $S_1$  é conjunto separante segue que  $\sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j, j \neq 1$ .

Supondo que  $\sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j, j \neq 1$ , temos

$$\varphi_2 \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) x_2^i \varphi_3(x_3^i) \dots \varphi_n(x_n^i) \right) = \varphi_1 \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \dots \varphi_n(x_n^i) \right) = 0$$

para todos  $\varphi_j \in S_j$ . Como  $S_2$  é conjunto separante segue que  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) x_2^i \varphi_3(x_3^i) \dots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j, j \neq 2$ .

As demais implicações, exceto a última, seguem de forma análoga. Para provar a última implicação, suponha que  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) x_n^i = 0$  para todos  $\varphi_j \in S_j, j \neq n$ . Para todo  $\psi_n \in X_n^*$ , temos

$$\varphi_{n-1} \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-2}(x_{n-2}^i) x_{n-1}^i \psi_n(x_n^i) \right) = \psi_n \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) x_n^i \right) = 0$$

para todo  $\varphi_{n-1} \in S_{n-1}$ . Daí,  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-2}(x_{n-2}^i) x_{n-1}^i \psi_n(x_n^i) = 0$  para todo  $\psi_n \in X_n^*$ , pois  $S_{n-1}$  é separante. Novamente, para todo  $\psi_{n-1} \in X_{n-1}^*$  temos

$$\begin{aligned} & \varphi_{n-2} \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-3}(x_{n-3}^i) x_{n-2}^i \psi_{n-1}(x_{n-1}^i) \psi_n(x_n^i) \right) \\ &= \psi_{n-1} \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-2}(x_{n-2}^i) x_{n-1}^i \psi_n(x_n^i) \right) = 0 \end{aligned}$$

para todo  $\varphi_{n-2} \in S_{n-2}$ . Daí,  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-3}(x_{n-3}^i) x_{n-2}^i \psi_{n-1}(x_{n-1}^i) \psi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\psi_{n-1} \in X_{n-1}^*, \psi_n \in X_n^*$  pois  $S_{n-2}$  é separante. Prosseguindo dessa forma, obtemos

$$\sum_{i=1}^m x_1^i \psi_2(x_2^i) \cdots \psi_n(x_n^i) = 0$$

para todos  $\psi_2 \in X_2^*, \dots, \psi_n \in X_n^*$ , e o resultado segue pela Proposição 2.19.  $\square$

Agora estamos em condições de provar o resultado desejado para espaços normados.

**Corolário 2.22.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços normados,  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . São equivalentes:*

- i)  $u = 0$ .
- ii)  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j'$ .
- iii)  $\sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j', j \neq 1$ .
- iv)  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) x_2^i \varphi_3(x_3^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j', j \neq 2$ .
- $\vdots$
- $n+2)$   $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}^i) x_n^i = 0$  para todos  $\varphi_j \in X_j', j \neq n$ .

*Demonstração.* Vejamos que, para cada  $j = 1, \dots, n$ , o conjunto  $X_j'$  é separante para  $X_j^*$ . De fato, pelo Teorema de Hahn-Banach (veja Corolário 1.12), para todo  $x_j \in X_j$  tem-se

$$\|x_j\| = \sup\{|\varphi_j(x_j)| : \varphi_j \in X_j' \text{ e } \|\varphi_j\| \leq 1\}.$$

Daí,  $\varphi_j(x_j) = 0$  para todo  $\varphi \in X_j'$  implica que  $\|x_j\| = 0$ , e então  $x_j = 0$ . Logo  $X_j'$  é um subconjunto separante de  $X_j^*$ . O resultado segue do Corolário 2.21.  $\square$

**Lema 2.23.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais,  $E_1$  subespaço de  $X_1, \dots, E_n$  subespaço de  $X_n$ ,  $u \in E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . O operador*

$$\tau: E_1 \otimes \dots \otimes E_n \longrightarrow X_1 \otimes \dots \otimes X_n$$

*dado por*

$$\tau(u) = \tau \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i \right) = \sum_{i=1}^m I_{E_1, X_1}(x_1^i) \otimes \dots \otimes I_{E_n, X_n}(x_n^i),$$

*está bem definido, é linear e injetor. Em particular,  $\tau(E_1 \otimes \dots \otimes E_n)$  é subespaço de  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  isomorfo a  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ .*

*Demonstração.* Vejamos que  $\tau$  está bem definido no sentido de que independe da representação do tensor. Para isso, sejam  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$  e  $\sum_{j=1}^p y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j$  representações de  $u$  em  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^m B(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{j=1}^p B(y_1^j, \dots, y_n^j)$$

para toda forma  $n$ -linear  $B \in L(E_1, \dots, E_n)$ . Para cada forma  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ , segue do Corolário 2.16 que  $A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) \in L(E_1, \dots, E_n)$ , e então

$$\begin{aligned} \tau \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i \right) (A) &= \sum_{i=1}^m A(I_{E_1, X_1}(x_1^i), \dots, I_{E_n, X_n}(x_n^i)) \\ &= \sum_{i=1}^m A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})(x_1^i, \dots, x_n^i) \\ &= \sum_{j=1}^p A \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})(y_1^j, \dots, y_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^p A(I_{E_1, X_1}(y_1^j), \dots, I_{E_n, X_n}(y_n^j)) \\ &= \tau \left( \sum_{j=1}^p y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j \right) (A). \end{aligned}$$

Agora segue imediatamente da definição de  $\tau$  que se  $u \in E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ , então  $\tau(u) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ .

Vejamos que  $\tau$  é linear. Dados  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  e  $\sum_{j=1}^p y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j$  representações de  $u$  e  $w$  em  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ , respectivamente, e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , temos

$$\begin{aligned}
\tau(u + \alpha w) &= \tau \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i + \alpha \left( \sum_{j=1}^p y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j \right) \right) \\
&= \tau \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i + \sum_{j=1}^p (\alpha y_1^j) \otimes y_2^j \otimes \cdots \otimes y_n^j \right) \\
&= \sum_{i=1}^m I_{E_1, X_1}(x_1^i) \otimes \cdots \otimes I_{E_n, X_n}(x_n^i) + \sum_{j=1}^p I_{E_1, X_1}(\alpha y_1^j) \otimes I_{E_2, X_2}(y_2^j) \otimes \cdots \otimes I_{E_n, X_n}(y_n^j) \\
&= \sum_{i=1}^m I_{E_1, X_1}(x_1^i) \otimes \cdots \otimes I_{E_n, X_n}(x_n^i) + \sum_{j=1}^p (\alpha I_{E_1, X_1}(y_1^j)) \otimes I_{E_2, X_2}(y_2^j) \otimes \cdots \otimes I_{E_n, X_n}(y_n^j) \\
&= \sum_{i=1}^m I_{E_1, X_1}(x_1^i) \otimes \cdots \otimes I_{E_n, X_n}(x_n^i) + \alpha \left( \sum_{j=1}^p I_{E_1, X_1}(y_1^j) \otimes I_{E_2, X_2}(y_2^j) \otimes \cdots \otimes I_{E_n, X_n}(y_n^j) \right) \\
&= \tau(u) + \alpha \tau(w).
\end{aligned}$$

Para provar que este operador é injetivo, suponha que  $\tau(u) = 0 \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ . Seja  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$  em  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ . Considere os subespaços  $F_1 = \text{span}\{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^m\}, \dots, F_n = \text{span}\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m\}$ . Para cada forma  $A \in L(E_1, \dots, E_n)$ , pela Proposição 2.18 existe uma forma de tipo finito  $B \in L_f(E_1, \dots, E_n)$  tal que

$$B \circ (I_{F_1, E_1}, \dots, I_{F_n, E_n}) = A \circ (I_{F_1, E_1}, \dots, I_{F_n, E_n}).$$

Isso implica, pelo Lema 2.17, que existe um operador de tipo finito  $C \in L_f(X_1, \dots, X_n)$  tal que

$$C \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n}) = B.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
u(A) &= \sum_{i=1}^m A(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^m B(x_1^i, \dots, x_n^i) \\
&= \sum_{i=1}^m C \circ (I_{E_1, X_1}, \dots, I_{E_n, X_n})(x_1^i, \dots, x_n^i) \\
&= \sum_{i=1}^m C(I_{E_1, X_1}(x_1^i), \dots, I_{E_n, X_n}(x_n^i)) \\
&= \tau(u)(C) = 0,
\end{aligned}$$

o que implica que  $u(A) = 0$  para toda forma  $A \in L(E_1, \dots, E_n)$ , ou seja,  $u = 0$ .  $\square$

Usamos a seguir a notação usual de soma direta de um número finito de subespaços vetoriais de um espaço vetorial.

**Proposição 2.24.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais. Suponha que  $m \in \mathbb{N}$  e que para cada  $1 \leq k \leq n$  existam subespaços  $F_{k_1}, F_{k_2}, \dots, F_{k_m}$  de  $X_k$  tais que  $X_k = F_{k_1} \oplus F_{k_2} \oplus \dots \oplus F_{k_m}$ . Então*

$$X_1 \otimes \dots \otimes X_k \otimes \dots \otimes X_n = \bigoplus_{i=1}^m \tau_i (X_1 \otimes \dots \otimes F_{k_i} \otimes \dots \otimes X_n),$$

onde  $\tau_i: X_1 \otimes \dots \otimes F_{k_i} \otimes \dots \otimes X_n \longrightarrow X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ , são os operadores definidos como no Lema 2.23.

*Demonstração.* Sejam  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  e  $\sum_{j=1}^p x_1^j \otimes \dots \otimes x_k^j \otimes \dots \otimes x_n^j$  uma representação de  $u$ . Por hipótese, para cada  $x_k^j$  existem  $x_{k_1}^j \in F_{k_1}, \dots, x_{k_m}^j \in F_{k_m}$  tais que  $x_k^j = \sum_{l=1}^m x_{k_l}^j$ . Então

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^p x_1^j \otimes \dots \otimes x_k^j \otimes \dots \otimes x_n^j = \sum_{j=1}^p x_1^j \otimes \dots \otimes \left( \sum_{l=1}^m x_{k_l}^j \right) \otimes \dots \otimes x_n^j \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_{k_l}^j \otimes \dots \otimes x_n^j = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^p x_1^j \otimes \dots \otimes x_{k_l}^j \otimes \dots \otimes x_n^j \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^p I_{X_1}(x_1^j) \otimes \dots \otimes I_{F_{k_l}, X_k}(x_{k_l}^j) \otimes \dots \otimes I_{X_n}(x_n^j) \\ &= \sum_{l=1}^m \tau_l \left( \sum_{j=1}^p x_1^j \otimes \dots \otimes x_{k_l}^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right). \end{aligned}$$

Sejam agora  $l \in \{1, \dots, m\}$  e

$$v \in \tau_l (X_1 \otimes \dots \otimes F_{k_l} \otimes \dots \otimes X_n) \cap \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \tau_i (X_1 \otimes \dots \otimes F_{k_i} \otimes \dots \otimes X_n) \right\}.$$

O tensor  $v$  pode então ser escrito de duas formas:

$$v = \tau_l \left( \sum_{j=1}^{r_l} x_{1,l}^j \otimes \dots \otimes x_{k,l}^j \otimes \dots \otimes x_{n,l}^j \right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \tau_i \left( \sum_{j=1}^{r_i} x_{1,i}^j \otimes \dots \otimes x_{k,i}^j \otimes \dots \otimes x_{n,i}^j \right).$$

Aplicando os operadores  $\tau_1, \dots, \tau_m$  obtemos as seguintes duas representações para  $v$  em  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ :

$$v = \sum_{j=1}^{r_l} x_{1,l}^j \otimes \dots \otimes x_{k,l}^j \otimes \dots \otimes x_{n,l}^j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \sum_{j=1}^{r_i} x_{1,i}^j \otimes \dots \otimes x_{k,i}^j \otimes \dots \otimes x_{n,i}^j,$$

donde segue que

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \sum_{j=1}^{r_i} x_{1,i}^j \otimes \cdots \otimes x_{k,i}^j \otimes \cdots \otimes x_{n,i}^j + \sum_{j=1}^{r_l} (-x_{1,l}^j) \otimes x_{2,l}^j \otimes \cdots \otimes x_{k,l}^j \otimes \cdots \otimes x_{n,l}^j.$$

Aplicando a Proposição 2.19 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \sum_{j=1}^{r_i} \varphi_1(x_{1,i}^j) \cdots \varphi_{k-1}(x_{k-1,i}^j) \cdot x_{k,i}^j \cdot \varphi_{k+1}(x_{k+1,i}^j) \cdots \varphi_n(x_{n,i}^j) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{r_l} \varphi_1(-x_{1,l}^j) \varphi_2(x_{2,l}^j) \cdots \varphi_{k-1}(x_{k-1,l}^j) \cdot x_{k,l}^j \cdot \varphi_{k+1}(x_{k+1,l}^j) \cdots \varphi_n(x_{n,l}^j), \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \sum_{j=1}^{r_i} \varphi_1(x_{1,i}^j) \cdots \varphi_{k-1}(x_{k-1,i}^j) \cdot x_{k,i}^j \cdot \varphi_{k+1}(x_{k+1,i}^j) \cdots \varphi_n(x_{n,i}^j) \\ &= \sum_{j=1}^{r_l} \varphi_1(x_{1,l}^j) \cdots \varphi_{k-1}(x_{k-1,l}^j) \cdot x_{k,l}^j \cdot \varphi_{k+1}(x_{k+1,l}^j) \cdots \varphi_n(x_{n,l}^j), \end{aligned}$$

para todos os funcionais  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_{k-1} \in X_{k-1}^*, \varphi_{k+1} \in X_{k+1}^*, \dots, \varphi_n \in X_n^*$ . Como, por hipótese,

$$F_{k_l} \cap \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m F_{k_i} \right\} = \{0\},$$

segue que

$$0 = \sum_{j=1}^{r_l} \varphi_1(x_{1,l}^j) \cdots \varphi_{k-1}(x_{k-1,l}^j) \cdot x_{k,l}^j \cdot \varphi_{k+1}(x_{k+1,l}^j) \cdots \varphi_n(x_{n,l}^j)$$

para todos funcionais  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_{k-1} \in X_{k-1}^*, \varphi_{k+1} \in X_{k+1}^*, \dots, \varphi_n \in X_n^*$ . Mais uma aplicação da Proposição 2.19 revela que  $0 = \sum_{j=1}^{r_l} x_{1,l}^j \otimes \cdots \otimes x_{k,l}^j \otimes \cdots \otimes x_{n,l}^j = u$ .  $\square$

## 2.2 O teorema da linearização

Nesta seção veremos que o objetivo do produto tensorial é fazer uma ponte entre a álgebra multilinear e a álgebra linear, no sentido de que a cada operador multilinear corresponde um operador linear definido no produto tensorial, e vice-versa.

**Teorema 2.25.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Para cada operador  $n$ -linear  $A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Z$  existe um único operador linear  $A_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow Z$  tal que  $A = A_L \circ \sigma_n$ , isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
X_1 \times \cdots \times X_n & \xrightarrow{A} & Z \\
\sigma_n \downarrow & \nearrow A_L & \\
X_1 \otimes \cdots \otimes X_n & & 
\end{array}$$

Mais ainda, a correspondência  $A \longleftrightarrow A_L$  é um isomorfismo entre os espaços vetoriais  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$  e  $L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Z)$ .

O operador linear  $A_L$  é chamado de *linearização* do operador  $n$ -linear  $A$ .

*Demonstração.* Seja  $A \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$ . Vejamos que o operador  $A_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \rightarrow Z$  dado por

$$A_L \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \right) = \sum_{i=1}^m A(x_1^i, \dots, x_n^i),$$

está bem definido. Para isso suponha que  $\sum_{i=1}^{m_1} y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i = \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (-y_1^i) \otimes y_2^i \otimes \cdots \otimes y_n^i$  em  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ . Neste caso,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{m_1} y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (-y_1^i) \otimes y_2^i \otimes \cdots \otimes y_n^i \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} y_1^i \otimes y_2^i \otimes \cdots \otimes y_n^i \\
&= \sum_{i=1}^{m_2} y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.16 sabemos que  $\varphi \circ A \in L(X_1, \dots, X_n)$  para todo funcional linear  $\varphi \in Z^*$ , e portanto

$$\begin{aligned}
\varphi \left( \sum_{i=1}^{m_2} A(y_1^i, \dots, y_n^i) \right) &= \sum_{i=1}^{m_2} \varphi (A(y_1^i, \dots, y_n^i)) = \sum_{i=1}^{m_2} \varphi \circ A(y_1^i, \dots, y_n^i) \\
&= \sum_{i=1}^{m_2} y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i (\varphi \circ A) = \left( \sum_{i=1}^{m_2} (y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i) \right) (\varphi \circ A) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo funcional linear  $\varphi \in Z^*$ . Segue pelo Lema 1.4 que  $\sum_{i=1}^{m_2} A(y_1^i, \dots, y_n^i) = 0$ , e como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m_2} A(y_1^i, \dots, y_n^i) &= \sum_{i=1}^{m_1} A(y_1^i, \dots, y_n^i) + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} A(y_1^i, \dots, y_n^i) \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} A(y_1^i, \dots, y_n^i) - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} A(-y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i),
\end{aligned}$$



temos

$$\sum_{i=1}^{m_1} A(y_1^i, \dots, y_n^i) = \sum_{i=m_1+1}^{m_2} A(-y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i),$$

provando que  $A_L$  está bem definido. Provemos agora a linearidade de  $A_L$ . Como todo tensor é uma combinação linear de tensores elementares, basta verificar que  $A_L$  é linear nos tensores elementares. Para todos  $x_1, y_1 \in X_1, \dots, x_n, y_n \in X_n$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n + (\alpha y_1) \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_n) &= A(x_1, \dots, x_n) + A(\alpha y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) + \alpha A(y_1, \dots, y_n) \\ &= A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + \alpha A_L(y_1 \otimes \dots \otimes y_n). \end{aligned}$$

Para verificar a igualdade  $A = A_L \circ \sigma_n$ , note que, para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ ,

$$\begin{aligned} (A_L \circ \sigma_n)(x_1, \dots, x_n) &= A_L(\sigma_n(x_1, \dots, x_n)) \\ &= A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Para comprovar a unicidade de  $A_L$ , suponha que  $B \in L(X_1 \otimes \dots \otimes X_n; Z)$  é um operador linear tal que  $A = B \circ \sigma_n$ . Pelo que acabamos de provar,

$$A_L \circ \sigma_n = A = B \circ \sigma_n.$$

Assim, para cada  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ ,

$$\begin{aligned} B\left(\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i\right) &= \sum_{i=1}^m B(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) = \sum_{i=1}^m B(\sigma_n(x_1^i, \dots, x_n^i)) \\ &= \sum_{i=1}^m (B \circ \sigma_n)(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^m (A_L \circ \sigma_n)(x_1^i, \dots, x_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^m A_L(\sigma_n(x_1^i, \dots, x_n^i)) = \sum_{i=1}^m A_L(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) \\ &= A_L\left(\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i\right). \end{aligned}$$

Por último, mostraremos que a correspondência  $A \longleftrightarrow A_L$  é linear e sobrejetora (note que a injetividade segue diretamente da unicidade da linearização). Sejam  $A, B \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$

$$\begin{aligned} ((A_L + \alpha B_L) \circ \sigma_n)(x_1, \dots, x_n) &= (A_L + \alpha B_L)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\ &= A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + \alpha B_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) + \alpha B(x_1, \dots, x_n) \\ &= (A + \alpha B)(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

o que prova que  $(A_L + \alpha B_L) \circ \sigma_n = A + \alpha B$ . Pela unicidade da linearização segue que  $A_L + \alpha B_L = (A + \alpha B)_L$ , o que estabelece a linearidade da correspondência. Dado  $B \in L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Z)$ , considere o operador

$$A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Z, \quad A(x_1, \dots, x_n) = B(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).$$

Note que  $A = B \circ \sigma_n$ , e então pelo Corolário 2.16 sabemos que  $A$  é um operador  $n$ -linear. Novamente pela unicidade da linearização temos  $B = A_L$ , e disso segue a sobrejetividade.  $\square$

Tomando  $Z$  como sendo o corpo dos escalares no teorema acima, obtemos:

**Corolário 2.26.**  $L(X_1, \dots, X_n)$  é isomorfo a  $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)^*$ .

**Exemplo 2.27.** Veremos neste exemplo que a linearização do operador  $n$ -linear canônico  $\sigma_n: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  é o operador identidade no produto tensorial, isto é,  $(\sigma_n)_L = I_{X_1 \otimes \cdots \otimes X_n}$ .

De fato, pelo Teorema 2.25 existe um único operador linear  $(\sigma_n)_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  tal que  $\sigma_n = (\sigma_n)_L \circ \sigma_n$ . Mas é imediato que  $\sigma_n = I_{X_1 \otimes \cdots \otimes X_n} \circ \sigma_n$ , onde  $I_{X_1 \otimes \cdots \otimes X_n}: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  é o operador identidade, portanto a unicidade de  $(\sigma_n)_L$  implica que  $I_{X_1 \otimes \cdots \otimes X_n} = (\sigma_n)_L$ .

Como primeira consequência do teorema de linearização provaremos a existência do produto tensorial de operadores lineares.

**Corolário 2.28.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  espaços vetoriais. Dados  $T_1 \in L(X_1; Y_1), \dots, T_n \in L(X_n; Y_n)$ , existe um único operador linear  $T_1 \otimes \cdots \otimes T_n: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n$  tal que*

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ .

*Demonstração.* Defina o operador  $A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n$  por

$$A(x_1, \dots, x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n).$$

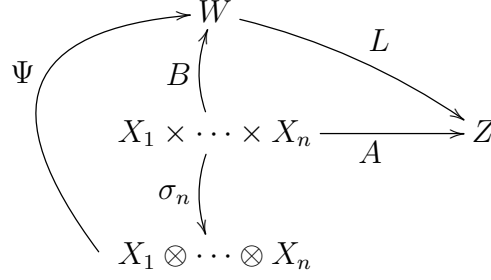
Segue, da linearidade de  $T_1, \dots, T_n$  e do Corolário 2.11, que  $A$  é um operador  $n$ -linear. Pelo Teorema 2.25 existe um único operador linear  $A_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n$  tal que

$$A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A(x_1, \dots, x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Chame  $A_L = T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$ .  $\square$

**Teorema 2.29.** (Unicidade do Produto Tensorial). *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais. Suponha que existam um espaço vetorial  $W$  e um operador  $n$ -linear  $B: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow W$  com a seguinte propriedade: para cada espaço vetorial  $Z$  e cada operador  $n$ -linear  $A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Z$  existe um único operador linear  $L: W \longrightarrow Z$  tal que  $A = L \circ B$ . Então existe um isomorfismo  $\Psi: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow W$  tal que  $\Psi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = B(x_1, \dots, x_n)$  para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ .*

O diagrama ilustra a situação:



*Demonstração.* Como o operador  $B: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow W$  é  $n$ -linear, o Teorema 2.25 garante que existe um único operador linear  $B_L \in L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; W)$  tal que  $B = B_L \circ \sigma_n$ . Por hipótese, como os operadores  $B$  e  $\sigma_n$  são  $n$ -lineares, existem únicos operadores lineares  $L_B: W \longrightarrow W$  e  $L_{\sigma_n}: W \longrightarrow X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  tais que  $B = L_B \circ B$  e  $\sigma_n = L_{\sigma_n} \circ B$ . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} B = B_L \circ \sigma_n \\ \sigma_n = L_{\sigma_n} \circ B \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \sigma_n = (L_{\sigma_n} \circ B_L) \circ \sigma_n \\ \sigma_n = I_{X_1 \otimes \cdots \otimes X_n} \circ \sigma_n \end{array} \right\} \implies L_{\sigma_n} \circ B_L = I_{X_1 \otimes \cdots \otimes X_n}.$$

Como  $B = I_W \circ B$ , segue da unicidade de  $L_B$  que  $I_W = L_B$ , e então

$$\left. \begin{array}{l} B = B_L \circ \sigma_n \\ \sigma_n = L_{\sigma_n} \circ B \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} B = (B_L \circ L_{\sigma_n}) \circ B \\ B = L_B \circ B \end{array} \right\} \implies B_L \circ L_{\sigma_n} = L_B = I_W.$$

Portanto  $B_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow W$  é um operador linear e bijetor.  $\square$

## 2.3 A associatividade

Como dito na introdução, os objetivos centrais desta dissertação é provar a associatividade dos produtos tensoriais projetivo e injetivo, a serem introduzidos nos próximos capítulos. É claro que uma porção dessas demonstrações envolve o aspecto algébrico do produto tensorial. O objetivo desta seção é deixar essa parte algébrica pronta para ser usada nos capítulos seguintes.

**Teorema 2.30.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais e  $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$  tais que  $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_t < n$ . Então existe um único isomorfismo algébrico*

$$T: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow (X_1 \otimes \cdots \otimes X_{n_1}) \otimes (X_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes X_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (X_{n_{t-1}+1} \otimes \cdots \otimes X_n)$$

tal que

$$T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_{t-1}+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ .

*Demonstração.* Considere o operador

$$A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow (X_1 \otimes \cdots \otimes X_{n_1}) \otimes (X_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes X_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (X_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes X_n)$$

definido por

$$A(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n).$$

Segue do Corolário 2.11 que  $A$  é um operador  $n$ -linear, e pelo Teorema 2.25 podemos considerar a sua linearização

$$A_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow (X_1 \otimes \cdots \otimes X_{n_1}) \otimes (X_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes X_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (X_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes X_n).$$

Já sabemos que  $A_L$  é um operador linear entre os espaços que queremos, e também que  $A_L$  satisfaz a igualdade desejada para os tensores elementares. Basta mostrar que  $A_L$  é um isomorfismo. Para provar que  $A_L$  é injetora, suponha que  $A_L \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \right) = 0$ .

Dados  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_n \in X_n^*$ , definimos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \psi_1: X_1 \times \cdots \times X_{n_1} &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_1(x_1, \dots, x_{n_1}) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n_1}(x_{n_1}), \\ \psi_2: X_{n_1+1} \times \cdots \times X_{n_2} &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_2(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}) = \varphi_{n_1+1}(x_{n_1+1}) \cdots \varphi_{n_2}(x_{n_2}), \\ &\vdots \\ \psi_t: X_{n_{t-1}+1} \times \cdots \times X_{n_t} &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_t(x_{n_{t-1}+1}, \dots, x_{n_t}) = \varphi_{n_{t-1}+1}(x_{n_{t-1}+1}) \cdots \varphi_{n_t}(x_{n_t}), \\ \psi_{t+1}: X_{n_t+1} \times \cdots \times X_n &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_{t+1}(x_{n_t+1}, \dots, x_n) = \varphi_{n_t+1}(x_{n_t+1}) \cdots \varphi_n(x_n). \end{aligned}$$

Já sabemos que todas essas são formas  $n$ -lineares de tipo finito. Considere suas linearizações  $(\psi_1)_L, \dots, (\psi_{t+1})_L$  de acordo com o Teorema 2.25. Como  $(\psi_1)_L \in (X_1 \otimes \cdots \otimes X_{n_1})^*, \dots, (\psi_{t+1})_L \in (X_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes X_n)^*$ , e

$$A_L \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \right) = \sum_{i=1}^m (x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{n_1}^i) \otimes (x_{n_1+1}^i \otimes \cdots \otimes x_{n_2}^i) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1}^i \otimes \cdots \otimes x_n^i) = 0,$$

segue da Proposição 2.19 que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m (\psi_1)_L(x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{n_1}^i) (\psi_2)_L(x_{n_1+1}^i \otimes \cdots \otimes x_{n_2}^i) \cdots (\psi_{t+1})_L(x_{n_t+1}^i \otimes \cdots \otimes x_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^m \psi_1(x_1^i, \dots, x_{n_1}^i) \psi_2(x_{n_1+1}^i, \dots, x_{n_2}^i) \cdots \psi_{t+1}(x_{n_t+1}^i, \dots, x_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_{n_1}(x_{n_1}^i) \varphi_{n_1+1}(x_{n_1+1}^i) \cdots \varphi_{n_2}(x_{n_2}^i) \cdots \varphi_{n_t+1}(x_{n_t+1}^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \end{aligned}$$

para todos funcionais  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_n \in X_n^*$ . Aplicando novamente a Proposição 2.19 segue que

$$\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i = 0,$$

provando que  $A_L$  é injetora. Para provar que  $A_L$  é sobrejetora, note que um tensor elementar qualquer em  $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_{n_1}) \otimes (X_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes X_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (X_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes X_n)$  tem a forma

$$\left( \sum_{i=1}^{m_1} x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{n_1}^i \right) \otimes \left( \sum_{i=1}^{m_2} x_{n_1+1}^i \otimes \cdots \otimes x_{n_2}^i \right) \otimes \cdots \otimes \left( \sum_{i=1}^{m_{t+1}} x_{n_t+1}^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \right),$$

que é igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_{t+1}=1}^{m_{t+1}} (x_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{n_1}^{i_1}) \otimes (x_{n_1+1}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}^{i_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1}^{i_{t+1}} \otimes \cdots \otimes x_n^{i_{t+1}}) \\ &= \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_{t+1}=1}^{m_{t+1}} A \left( x_1^{i_1}, \dots, x_{n_1}^{i_1}, x_{n_1+1}^{i_2}, \dots, x_{n_2}^{i_2}, \dots, x_{n_t+1}^{i_{t+1}}, \dots, x_n^{i_{t+1}} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_{t+1}=1}^{m_{t+1}} A_L \left( x_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{n_1}^{i_1} \otimes x_{n_1+1}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{n_t+1}^{i_{t+1}} \otimes \cdots \otimes x_n^{i_{t+1}} \right) \\ &= A_L \left( \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_{t+1}=1}^{m_{t+1}} x_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{n_1}^{i_1} \otimes x_{n_1+1}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{n_t+1}^{i_{t+1}} \otimes \cdots \otimes x_n^{i_{t+1}} \right). \end{aligned}$$

Isso prova que a imagem de  $A_L$  contém os tensores elementares. Como esses tensores geram todo o produto tensorial e  $A_L$  é linear, segue que  $A_L$  é sobrejetora.  $\square$

Enunciamos a seguir a forma particular do teorema acima para o produto tensorial de um espaço vetorial por ele mesmo. Dados um espaço vetorial  $X$  e  $n \in \mathbb{N}$ , usamos a seguinte notação:

$$\bigotimes_n X = \underbrace{X \otimes \cdots \otimes X}_{n \text{ vezes}}.$$

**Corolário 2.31.** *Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $n, n_1, \dots, n_{t+1} \in \mathbb{N}$  tais que  $0 = n_0 < 1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_t < n_{t+1} = n$ . Então existe um isomorfismo*

$$T: \bigotimes_n X \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{t+1} \left( \bigotimes_{n_i - n_{i-1}} X \right)$$

tal que

$$T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \bigotimes_{i=1}^{t+1} (x_{n_{i-1}+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_i})$$

para todos  $x_1, \dots, x_n \in X$ .

# Capítulo 3

## O Produto Tensorial Projetivo

Dados espaços normados  $X_1, \dots, X_n$ , podemos considerar a possibilidade de normar o espaço vetorial  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . Tendo em vista a correspondência entre operadores  $n$ -lineares e operadores lineares no produto tensorial, é natural buscar uma norma no produto tensorial que associe operadores multilineares contínuos a operadores lineares contínuos. Estudaremos esta norma e a sua associatividade neste capítulo.

### 3.1 A norma projetiva

Começamos com uma recordação rápida da teoria básica dos operadores multilineares contínuos.

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Se  $X_1, \dots, X_n$  são espaços normados então  $X_1 \times \dots \times X_n$  também é espaço normado com as normas usuais, e se  $Z$  também for normado, então podemos considerar os operadores  $n$ -lineares de  $X_1 \times \dots \times X_n$  em  $Z$  que são contínuos. Neste capítulo, a menos que se diga o contrário, os espaços  $X_1, \dots, X_n, Z$  serão normados.

**Proposição 3.1.** *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador  $n$ -linear  $A \in L(X_1, \dots, X_n; Z)$ :*

- i)  $A$  é contínuo.*
- ii)  $A$  é contínuo na origem.*
- iii) Existe  $c \geq 0$  tal que  $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$  para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ .*
- iv)  $\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}\} < \infty$ .*

*Demonstração.* Veja [24, Proposição 2.7]. □

O conjunto de todos os operadores  $n$ -lineares contínuos de  $X_1 \times \dots \times X_n$  em  $Z$  será denotado por  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$ . No caso em que  $n = 1$  e  $Z = \mathbb{K}$ , denotaremos  $\mathcal{L}(X_1; \mathbb{K})$  simplesmente por  $X'_1$ , espaço este que é chamado de *dual topológico de  $X_1$*  e os elementos de  $X'_1$  são chamados de funcionais lineares contínuos.

**Exemplo 3.2.** Sejam  $\varphi_1 \in X'_1, \dots, \varphi_n \in X'_n$  e  $y \in Z$ . Vejamos que o operador  $n$ -linear  $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y$  é contínuo e, além disso,  $\|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y\| = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|y\|$ .

De acordo com o exemplo 2.2 o operador  $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y$ , definido em 2.6, é um operador  $n$ -linear. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y\| &= \sup\{\|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y(x_1, \dots, x_n)\| : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}\} \\ &= \sup\{\|\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)y\| : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}\} \\ &= \sup\{|\varphi_1(x_1)| \cdots |\varphi_n(x_n)| \|y\| : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}\}. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 1.25 temos

$$\|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y\| = \left( \prod_{j=1}^n \sup\{|\varphi_j(x_j)| : x_j \in B_{X_j}\} \right) \|y\| = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|y\|.$$

**Proposição 3.3.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$ . Então:*

- i)  $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$  para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ .
- ii)  $\|A\| = \inf\{c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$ .

*Demonstração.* Veja [24, Proposição 2.8]. □

**Proposição 3.4.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  e  $Z$  espaços normados.*

- i)  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$  é um subespaço vetorial de  $L(X_1, \dots, X_n; Z)$ .
- ii) A função  $A \mapsto \|A\|$  é uma norma em  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$ .
- iii) Se  $Z$  é um espaço de Banach, então  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$ , com a norma do item ii), também é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Veja [24, Proposição 2.10 e Proposição 2.11]. □

**Proposição 3.5.** *Sejam  $Y_1, \dots, Y_n, X_1, \dots, X_n, Z, W$  espaços normados,  $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$ ,  $T_1 \in \mathcal{L}(Y_1; X_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(Y_n; X_n)$  e  $T \in \mathcal{L}(Z; W)$ . Então o operador*

$$T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n) : Y_1 \times \dots \times Y_n \rightarrow W$$

*definido por*

$$T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)(y_1, \dots, y_n) = T(A(T_1(y_1), \dots, T_n(y_n))),$$

*para todos  $y_1 \in Y_1, \dots, y_n \in Y_n$ , é  $n$ -linear, contínuo e*

$$\|T \circ A \circ (T_1, \dots, T_n)\| \leq \|T\| \cdot \|A\| \cdot \|T_1\| \cdots \|T_n\|.$$

*Demonstração.* Veja [10, Lema 2.1.6]. □

Definimos a seguir a norma projetiva no produto tensorial de espaços normados. As demonstrações relativas à norma projetiva que apresentamos a seguir são detalhamentos das demonstrações que aparecem em [23] para o caso  $n = 2$ . Normalmente, no caso geral os resultados são apresentados sem demonstrações.

**Definição 3.6.** Define-se a função  $\pi: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow \mathbb{R}$  por

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdots \|x_n^i\| : m \in \mathbb{N} \text{ e } u = \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \right\}.$$

**Observação 3.7.** Quando for necessário especificar o domínio da função  $\pi$ , escreveremos  $\pi_{X_1, \dots, X_n}(u)$  ou  $\pi(u; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$  no lugar de  $\pi(u)$ .

**Proposição 3.8.** A função  $\pi$  é uma norma em  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$  para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ .

*Demonstração.* Considere  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ . Vejamos que  $\pi(\lambda u) = |\lambda| \pi(u)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Isto é óbvio quando  $\lambda = 0$  pois  $\pi(0) = 0$ . Façamos o caso em que  $\lambda \neq 0$ . Se  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  é uma representação de  $u$ , então é claro que  $\sum_{i=1}^m (\lambda x_1^i) \otimes x_2^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  é uma representação de  $\lambda u$ . Segue da Definição 3.6 que

$$|\lambda|^{-1} \cdot \pi(\lambda u) \leq |\lambda|^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m \|\lambda x_1^i\| \cdot \|x_2^i\| \cdots \|x_n^i\| = \sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdot \|x_2^i\| \cdots \|x_n^i\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de  $u$  segue que  $|\lambda|^{-1} \pi(\lambda u) \leq \pi(u)$ , e então  $\pi(\lambda u) \leq |\lambda| \pi(u)$ . Aplicando essa desigualdade para o escalar  $\lambda^{-1}$ , temos

$$\pi(u) = \pi(\lambda^{-1} \lambda u) \leq |\lambda^{-1}| \pi(\lambda u) = |\lambda|^{-1} \pi(\lambda u),$$

donde segue que  $|\lambda| \pi(u) \leq \pi(\lambda u)$ . Logo  $|\lambda| \pi(u) = \pi(\lambda u)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Provaremos agora que  $\pi$  satisfaz a desigualdade triangular. Sejam  $u, v \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\varepsilon > 0$ . Da Definição 3.6 existem representações  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  e  $\sum_{i=1}^k y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i$  dos vetores  $u$  e  $v$ , respectivamente, tais que

$$\sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdots \|x_n^i\| \leq \pi(u) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k \|y_1^i\| \cdots \|y_n^i\| \leq \pi(v) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

É claro que  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i + \sum_{i=1}^k y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i$  é uma representação do vetor  $u + v$ , e disso decorre que

$$\pi(u + v) \leq \sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdots \|x_n^i\| + \sum_{i=1}^k \|y_1^i\| \cdots \|y_n^i\| \leq \pi(u) + \pi(v) + \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Fazendo  $\varepsilon \longrightarrow 0^+$  segue que  $\pi(u + v) \leq \pi(u) + \pi(v)$ .



Suponha que  $\pi(u) = 0$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma representação de  $u$  tal que  $\sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdots \|x_n^i\| \leq \varepsilon$ . Daí, para todos  $\varphi_1 \in X_1', \dots, \varphi_n \in X_n'$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right| &\leq \sum_{i=1}^m |\varphi_1(x_1^i)| \cdots |\varphi_n(x_n^i)| \leq \sum_{i=1}^m \|\varphi_1\| \cdot \|x_1^i\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \|x_n^i\| \\ &= \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdots \|x_n^i\| \leq \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando mais uma vez o limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  obtemos que  $\left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right| = 0$ , ou seja,  $\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) = 0$ . Do Corolário 2.22 segue que  $u = 0$ .

Por fim, mostraremos que  $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ . A desigualdade  $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$  segue diretamente da Definição 3.6. É claro que a igualdade é válida se algum  $x_j = 0$ . Supondo todos  $x_j \neq 0$ , pelo Teorema de Hahn-Banach na forma do Corolário 1.11 podemos tomar funcionais  $\varphi_1 \in B_{X_1'}, \dots, \varphi_n \in B_{X_n'}$  tais que  $\varphi_1(x_1) = \|x_1\|, \dots, \varphi_n(x_n) = \|x_n\|$ . Considere o operador

$$A: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow \mathbb{K}, \quad A(y_1, \dots, y_n) = \varphi_1(y_1) \cdots \varphi_n(y_n),$$

que é  $n$ -linear pois  $A = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ . Sejam  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\sum_{i=1}^m y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i$  uma representação de  $u$ . Como a linearização  $A_L$  de  $A$  é um funcional linear em  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ , temos

$$\begin{aligned} |A_L(u)| &= \left| A_L \left( \sum_{i=1}^m y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i \right) \right| \leq \sum_{i=1}^m |A_L(y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\varphi_1(y_1^i) \cdots \varphi_n(y_n^i)| \leq \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \cdot \sum_{i=1}^m \|y_1^i\| \cdots \|y_n^i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \|y_1^i\| \cdots \|y_n^i\|. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de  $u$  segue que  $|A_L(u)| \leq \pi(u)$  para todo  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ . Em particular,

$$\|x_1\| \cdots \|x_n\| = A(x_1, \dots, x_n) = A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).$$

□

Denota-se por  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  o produto tensorial  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  munido da norma  $\pi$ . Nesse sentido, pela Proposição 1.15 pode-se considerar um completamento de  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ , o qual será denotado por  $\widehat{X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n}$ . O espaço de Banach  $\widehat{X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n}$  é chamado de *produto tensorial projetivo* de  $X_1, \dots, X_n$ . Na Seção 3.4 trataremos da questão da necessidade de se tomar um completamento.

**Exemplo 3.9.** Vejamos que o operador  $n$ -linear canônico

$$\sigma_n: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$$

é contínuo e  $\|\sigma_n\| = 1$ . De fato, para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$  temos que

$$\pi(\sigma_n(x_1, \dots, x_n); X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

A igualdade  $\|\sigma_n\| = 1$  segue do item *iv*) da Proposição 3.1, ou do item *ii*) da Proposição 3.3.

**Definição 3.10.** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços vetoriais. Se  $A_1, \dots, A_n$  são subconjuntos de  $X_1, \dots, X_n$ , respectivamente, definimos o conjunto

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n := \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}.$$

**Proposição 3.11.**  $B_{X_1} \otimes \cdots \otimes B_{X_n} \subseteq B_{X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n}$ .

*Demonstração.* Para todos  $x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}$ ,

$$\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\| \leq 1.$$

□

**Definição 3.12.** Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $S$  um subconjunto de  $X$ . A interseção de todos os subconjuntos convexos de  $X$  que contêm  $S$  é chamada de *envoltória convexa* de  $S$  e denotada por  $co(S)$ . Quando  $X$  é um espaço vetorial normado podemos considerar o fecho da envoltória convexa de  $S$  que será denotado por  $\overline{co}(S)$ .

É fácil verificar que a interseção de famílias arbitrárias de conjuntos convexos é um conjunto convexo, portanto a envoltória convexa de qualquer subconjunto de um espaço vetorial é um conjunto convexo. As seguintes fórmulas para calcular a envoltória convexa são muito úteis.

**Proposição 3.13.** *Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $S \subseteq X$ . Então*

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

*Demonstração.* Ver [24, Proposição 3.8].

□

**Corolário 3.14.** *Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $S \subseteq X$  com  $0 \in S$ . Então*

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

*Demonstração.* Ver [24, Corolário 3.9].

□

**Lema 3.15.** *Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais,  $S \subseteq X$  e  $T: X \longrightarrow Y$  um operador linear. Então  $T(co(S)) = co(T(S))$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.13 temos

$$\begin{aligned} T(\text{co}(S)) &= T\left(\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\}\right) \\ &= \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i) : T(x_1), \dots, T(x_n) \in T(S), n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\} \\ &= \text{co}(T(S)). \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.16.** *A bola unitária fechada em  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n$  é a envoltória convexa fechada do conjunto  $B_{X_1} \otimes \dots \otimes B_{X_n}$ .*

*Demonstração.* Primeiro provaremos que

$$B_{X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n} = \overline{\text{co}}(B_{X_1} \otimes \dots \otimes B_{X_n}). \quad (3.1)$$

Suponha que  $u$  seja um elemento da bola unitária aberta de  $X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n$ . Então, pela definição de norma projetiva, existe uma representação, digamos  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$ , de  $u$  tal que

$$\sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \dots \|x_n^i\| < 1.$$

Para todo  $1 \leq i \leq m$  considere

$$y_1^i = \begin{cases} \|x_1^i\|^{-1} x_1^i & , \quad \text{se } x_1^i \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{se } x_1^i = 0 \end{cases}, \dots, y_n^i = \begin{cases} \|x_n^i\|^{-1} x_n^i & , \quad \text{se } x_n^i \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{se } x_n^i = 0 \end{cases}.$$

Dessa forma temos  $x_1^i = \|x_1^i\| y_1^i, \dots, x_n^i = \|x_n^i\| y_n^i$  para todo  $i$ , e então

$$u = \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i = \sum_{i=1}^m (\|x_1^i\| \dots \|x_n^i\|) y_1^i \otimes \dots \otimes y_n^i,$$

com  $y_1^i \in B_{X_1}, \dots, y_n^i \in B_{X_n}$ ,  $\|x_1^i\| \dots \|x_n^i\| \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \dots \|x_n^i\| < 1$ . Como 0 pertence ao conjunto  $B_{X_1} \otimes \dots \otimes B_{X_n}$ , pelo Corolário 3.14 segue que  $u \in \text{co}(B_{X_1} \otimes \dots \otimes B_{X_n})$ . Tomando os fechos obtemos  $B_{X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n} \subseteq \overline{\text{co}}(B_{X_1} \otimes \dots \otimes B_{X_n})$ . Por outro lado, a Proposição 3.11 garante a validade da implicação

$$B_{X_1} \otimes \dots \otimes B_{X_n} \subseteq B_{X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n} \implies \overline{\text{co}}(B_{X_1} \otimes \dots \otimes B_{X_n}) \subseteq B_{X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n},$$

pois a bola unitária fechada é um conjunto convexo e fechado, e disso segue a igualdade (3.1). Chamemos de  $\zeta$  a imersão isométrica linear (com imagem densa) do espaço normado  $X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n$  em seu completamento  $(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n)$ . Pela Proposição 1.18 e pela Observação 1.17, temos

$$B_{X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n} = \overline{B_{\zeta(X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n)}^{X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n}} = \overline{\zeta(B_{X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n})}^{X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n}.$$

Aplicando a igualdade (3.1) e o Lema 1.19 obtemos

$$B_{X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n} = \overline{\zeta(\overline{co}(B_{X_1} \otimes \cdots \otimes B_{X_n}))}^{X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n} = \overline{\zeta(co(B_{X_1} \otimes \cdots \otimes B_{X_n}))}^{X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n}.$$

Por fim, do Lema 3.15 segue que

$$B_{X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n} = \overline{co(\zeta(B_{X_1} \otimes \cdots \otimes B_{X_n}))}^{X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n} = \overline{co}^{X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n}(\zeta(B_{X_1} \otimes \cdots \otimes B_{X_n})),$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

## 3.2 O teorema da linearização

Mostraremos a seguir que, conforme o desejado, a linearização de um operador multilinear contínuo é um operador linear contínuo em relação à norma projetiva.

**Teorema 3.17.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n, Z$  espaços normados,  $Z$  um espaço de Banach e  $A: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Z$  um operador  $n$ -linear contínuo. Então existe um único operador linear contínuo  $A_L: X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n \rightarrow Z$  tal que  $\|A\| = \|A_L\|$  e  $A = A_L \circ \sigma_n$ , isto é, o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_n & \xrightarrow{A} & Z \\ \sigma_n \downarrow & \nearrow A_L & \\ X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n & & \end{array}$$

Mais ainda, a correspondência  $A \longleftrightarrow A_L$  é um isomorfismo isométrico entre o espaço de Banach  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$  dos operadores  $n$ -lineares contínuos e o espaço de Banach  $\mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n; Z)$  dos operadores lineares contínuos.

Continuamos chamando o operador linear  $A_L$  de *linearização* do operador multilinear  $A$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.25 existe um único operador linear  $T: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \rightarrow Z$  tal que  $A = T \circ \sigma_n$ . Vejamos que  $T$  é contínuo com a norma projetiva em  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ .

Dados  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ , temos

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \left\| T \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m A(x_1^i, \dots, x_n^i) \right\| \leq \sum_{i=1}^m \|A(x_1^i, \dots, x_n^i)\| \\ &\leq \|A\| \cdot \sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdots \|x_n^i\|. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de  $u$  segue que  $\|T(u)\| \leq \|A\| \pi(u)$ , provando que  $T$  é contínuo e  $\|T\| \leq \|A\|$ . Como os operadores  $T$  e  $\sigma_n$  são contínuos, com  $\|\sigma_n\| = 1$ , da Proposição 3.5 temos

$$\|A\| = \|T \circ \sigma_n\| \leq \|T\| \cdot \|\sigma_n\| = \|T\|,$$

donde segue que  $\|A\| = \|T\|$ . Pelo Teorema 1.21 existe uma única extensão linear contínua  $A_L: X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n \longrightarrow Z$  do operador linear contínuo  $T$  e, além disso,  $\|A_L\| = \|T\|$ . Como  $A_L$  é extensão de  $T$  e  $A = T \circ \sigma_n$ , segue que  $A = A_L \circ \sigma_n$ . Sejam  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $A, B \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$ , segue do que acabamos de mostrar que existem únicos  $A_L, B_L, (\alpha B)_L, (A + B)_L \in \mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n; Z)$  tais que

$$A = A_L \circ \sigma_n, \quad B = B_L \circ \sigma_n, \quad \alpha B = (\alpha B)_L \circ \sigma_n \quad \text{e} \quad A + B = (A + B)_L \circ \sigma_n.$$

Assim,

$$A = A_L \circ \sigma_n \quad \text{e} \quad B = B_L \circ \sigma_n \quad \text{implicam} \quad \text{que} \quad A + B = (A_L + B_L) \circ \sigma_n,$$

e então  $(A_L + B_L) = (A + B)_L$ . Também

$$B = B_L \circ \sigma_n \quad \text{implica} \quad \text{que} \quad \alpha B = (\alpha B_L) \circ \sigma_n,$$

e então  $\alpha B_L = (\alpha B)_L$ . Isso mostra que a correspondência  $A \longleftrightarrow A_L$  é linear. Para concluir a demonstração resta checar a sobrejetividade. Dado  $T \in \mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n; Z)$ , defina  $B: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Z$  por

$$B(x_1, \dots, x_n) = T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = T \circ \sigma_n(x_1, \dots, x_n).$$

Pelo Corolário 2.16,  $B$  é um operador  $n$ -linear, a continuidade de  $B$  segue da continuidade dos operadores  $T$  e  $\sigma_n$  pela Proposição 3.5. Portanto, pela unicidade da linearização,  $B_L = T$ .  $\square$

**Corolário 3.18.** *Seja  $Z$  um espaço de Banach. Se  $T \in \mathcal{L}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Z)$ , então*

$$\|T\| = \sup\{\|T(u)\| : u \in B_{X_1} \otimes \cdots \otimes B_{X_n}\}.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.17, existe um operador  $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Z)$  tal que  $A_L = T$ . Então  $A = T \circ \sigma_n$  e

$$\begin{aligned} \|T\| &= \|A_L\| = \|A\| = \sup\{\|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}\} \\ &= \sup\{\|T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\| : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}\} \\ &= \sup\{\|T(u)\| : u \in B_{X_1} \otimes \cdots \otimes B_{X_n}\}. \end{aligned}$$

$\square$

**Corolário 3.19.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços normados e  $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n)$ . Então:*

- i) Os espaços de Banach  $(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)'$  e  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n)$  são isomorfos isometricamente.*
- ii) Se  $u \in X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ , então  $u(A) = A_L(u)$ .*
- iii) Se  $u \in X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ , então*

$$\pi(u) = \sup\{|u(A)| : A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) \text{ e } \|A\| \leq 1\}.$$

*Demonstração.* O item  $i)$  segue de imediato do Teorema 3.17 tomando  $Z = \mathbb{K}$ . Para os outros itens, seja  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . Pelo item  $i)$  existe  $A_L \in (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)'$  tal que  $A = A_L \circ \sigma_n$ , e então

$$u(A) = \sum_{i=1}^m A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A_L \left( \sum_{i=1}^m x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \right) = A_L(u).$$

Como  $\|A\| = \|A_L\|$ , segue que

$$\{|u(A)|; A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) \text{ e } \|A\| \leq 1\} = \{|A_L(u)|; A_L \in (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)' \text{ e } \|A_L\| \leq 1\}.$$

Como  $u \in X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ , o Teorema 1.10 garante que

$$\{|\varphi(u)| : \varphi \in (X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n)', \|\varphi\| \leq 1\} = \{|A_L(u)| : A_L \in (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)', \|A_L\| \leq 1\}.$$

De fato, para cada  $\varphi \in (X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n)'$  existe  $\tilde{\varphi} \in (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)'$  extensão de  $\varphi$  com  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ , e para cada  $A_L \in (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)'$  a sua restrição,  $(A_L)|_{X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n}$ , é contínua com  $\|A_L\| \geq \|(A_L)|_{X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n}\|$ . Por fim, aplicando o Corolário 1.12 concluímos que

$$\begin{aligned} \pi(u) &= \sup\{|\varphi(u)| : \varphi \in (X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n)' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|A_L(u)| : A_L \in (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)' \text{ e } \|A_L\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|u(A)| : A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) \text{ e } \|A\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

□

Concluímos esta seção provando a existência do produto tensorial projetivo de operadores lineares contínuos.

**Proposição 3.20.** *Sejam  $T_1 \in \mathcal{L}(X_1; Y_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(X_n; Y_n)$ . Então existe um único operador linear contínuo*

$$T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_n : X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n \longrightarrow Y_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi Y_n$$

*tal que*

$$T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n)$$

*para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Além disso,  $\|T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_n\| = \|T_1\| \cdots \|T_n\|$ .*

*Demonstração.* Defina

$$A : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi Y_n, \quad A(x_1, \dots, x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n).$$

É claro que  $A$  está bem definido e, da linearidade de  $T_1, \dots, T_n$  e do Corolário 2.11 segue que  $A$  é um operador  $n$ -linear. Temos pela Proposição 3.8 que

$$\begin{aligned} \pi(A(x_1, \dots, x_n); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) &= \pi(T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) \\ &= \|T_1(x_1)\| \cdots \|T_n(x_n)\|, \end{aligned}$$

e então da Proposição 1.25 segue que

$$\begin{aligned}
\|T_1\| \cdots \|T_n\| &= \prod_{j=1}^n \sup\{\|T_j(x_j)\| : x_j \in X_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T_1(x_1)\| \cdots \|T_n(x_n)\| : x_j \in X_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\pi(A(x_1, \dots, x_n); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) : x_j \in X_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1\} \\
&= \|A\|.
\end{aligned}$$

Assim,  $A$  é um operador  $n$ -linear contínuo e  $\|A\| = \|T_1\| \cdots \|T_n\|$ . Pelo Teorema 3.17 existe um único operador linear contínuo

$$A_L: X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n \longrightarrow Y_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi Y_n$$

tal que

$$A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A(x_1, \dots, x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$  e  $\|A_L\| = \|A\| = \|T_1\| \cdots \|T_n\|$ .  $\square$

### 3.3 A associatividade

Cumprimos nesta seção um dos objetivos principais da dissertação, que é exibir uma demonstração detalhada da associatividade do produto tensorial projetivo. Como dissemos na introdução, apesar desse resultado ser muito utilizado, não encontramos na literatura nenhuma demonstração completa e detalhada.

Além de tudo que fizemos antes, precisamos de alguns resultados preparatórios. Começamos com um teorema de extensão de operadores multilineares ao fecho.

**Teorema 3.21.** *Sejam  $E_1, \dots, E_n$  espaços normados,  $F$  espaço de Banach e  $G_1$  subespaço de  $E_1, \dots, G_n$  subespaço de  $E_n$ . Para todo operador  $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F)$  existe um único operador  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G_1}, \dots, \overline{G_n}; F)$  que estende  $A$  e  $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ .*

*Demonstração.* Veja [10, Teorema 3.1.9].  $\square$

Também não encontramos demonstração do caso geral do resultado a seguir, por isso apresentamos a demonstração em detalhes. O caso  $n = 2$  encontra-se enunciado em [6, Proposition 3.9(2)].

**Proposição 3.22.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços normados,  $E_1$  subespaço denso em  $X_1, \dots, E_n$  subespaço denso em  $X_n$ . Então  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$  é subespaço denso em  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ . Além disso,  $\pi(u; E_1 \otimes \cdots \otimes E_n) = \pi(u; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$  para todo  $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.23,  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$  é um subespaço vetorial de  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ . Sejam  $v \in X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . Considere

$$k = \max\{\|x_j^l\| : 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m\}. \quad (3.2)$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , segue pela hipótese de densidade que existem  $z_j^l \in E_j$ ,  $1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m$ , tais que

$$\|x_j^l - z_j^l\| < \min \left\{ \varepsilon, \frac{\varepsilon}{mnk^{n-1}}, \frac{\varepsilon}{mnk^{n-2}(\varepsilon + k)}, \dots, \frac{\varepsilon}{mnk(\varepsilon + k)^{n-2}}, \frac{\varepsilon}{mn(\varepsilon + k)^{n-1}} \right\} \quad (3.3)$$

Note que, para tais  $j$  e  $l$ ,

$$\|z_j^l\| = \|z_j^l - x_j^l + x_j^l\| \leq \|z_j^l - x_j^l\| + \|x_j^l\| < \varepsilon + k. \quad (3.4)$$

Então,

$$\sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \dots \otimes z_n^i \in E_1 \otimes \dots \otimes E_n \subseteq X_1 \otimes \dots \otimes X_n$$

e

$$\begin{aligned} & \pi \left( v - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \dots \otimes z_n^i \right) \\ &= \pi \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \dots \otimes z_n^i \right) \\ &= \pi \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes x_2^i \otimes \dots \otimes x_n^i \right. \\ & \quad + \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes x_2^i \otimes \dots \otimes x_n^i - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes z_2^i \otimes x_3^i \otimes \dots \otimes x_n^i \\ & \quad + \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes z_2^i \otimes x_3^i \otimes \dots \otimes x_n^i - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes z_2^i \otimes z_3^i \otimes x_4^i \otimes \dots \otimes x_n^i \\ & \quad \vdots \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \dots \otimes z_{n-1}^i \otimes x_n^i - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \dots \otimes z_n^i \right). \end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 2.11, temos

$$\begin{aligned} \pi \left( v - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \dots \otimes z_n^i \right) &= \pi \left( \sum_{i=1}^m (x_1^i - z_1^i) \otimes x_2^i \otimes \dots \otimes x_n^i \right. \\ & \quad + \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes (x_2^i - z_2^i) \otimes x_3^i \otimes \dots \otimes x_n^i \\ & \quad + \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes z_2^i \otimes (x_3^i - z_3^i) \otimes x_4^i \otimes \dots \otimes x_n^i \\ & \quad \vdots \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \dots \otimes z_{n-1}^i \otimes (x_n^i - z_n^i) \right), \end{aligned}$$



e agora segue da desigualdade triangular e da Proposição 3.8 que

$$\begin{aligned}
\pi \left( v - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \cdots \otimes z_n^i \right) &\leq \sum_{i=1}^m \|x_1^i - z_1^i\| \|x_2^i\| \cdots \|x_n^i\| \\
&+ \sum_{i=1}^m \|z_1^i\| \|x_2^i - z_2^i\| \|x_3^i\| \cdots \|x_n^i\| \\
&+ \sum_{i=1}^m \|z_1^i\| \|z_2^i\| \|x_3^i - z_3^i\| \|x_4^i\| \cdots \|x_n^i\| \\
&\vdots \\
&+ \sum_{i=1}^m \|z_1^i\| \cdots \|z_{n-1}^i\| \|x_n^i - z_n^i\|.
\end{aligned}$$

Substituindo os valores das equações (3.2), (3.3) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\pi \left( v - \sum_{i=1}^m z_1^i \otimes \cdots \otimes z_n^i \right) &< \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{mnk^{n-1}} k^{n-1} \\
&+ \sum_{i=1}^m (\varepsilon + k) \frac{\varepsilon}{mnk^{n-2}(\varepsilon + k)} k^{n-2} \\
&+ \sum_{i=1}^m (\varepsilon + k)^2 \frac{\varepsilon}{mnk^{n-3}(\varepsilon + k)^2} k^{n-3} \\
&\vdots \\
&+ \sum_{i=1}^m (\varepsilon + k)^{n-1} \frac{\varepsilon}{mn(\varepsilon + k)^{n-1}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso prova que  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$  é subespaço denso em  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ . Seja  $u \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ . Pelo Teorema 3.21 temos que

$$\{|u(B)| : B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n) \text{ e } \|B\| \leq 1\} = \{|u(A)| : A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) \text{ e } \|A\| \leq 1\}$$

e então usando o Corolário 3.19 temos

$$\begin{aligned}
\pi(u; E_1 \otimes \cdots \otimes E_n) &= \sup \{|u(B)| : B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n) \text{ e } \|B\| \leq 1\} \\
&= \sup \{|u(A)| : A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) \text{ e } \|A\| \leq 1\} \\
&= \pi(u; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n).
\end{aligned}$$

□

Provaremos agora a associatividade do produto tensorial projetivo.

**Teorema 3.23.** *Sejam  $n_1, \dots, n_t, n \in \mathbb{N}$  tais que  $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_t < n$ . Então existe um único isomorfismo isométrico*

$$T: X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n \rightarrow (X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_{n_1}) \otimes_\pi (X_{n_1+1} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_{n_2}) \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi (X_{n_{t-1}+1} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n)$$

tal que

$$T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ , e um único isomorfismo isométrico

$$\widehat{T}: X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n \longrightarrow (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n)$$

que estende  $T$ .

*Demonstração.* Considere o operador  $n$ -linear

$$A: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow (X_1 \otimes \cdots \otimes X_{n_1}) \otimes (X_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes X_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (X_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes X_n)$$

definido por

$$A(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n).$$

Vimos no Teorema 2.30 que sua linearização algébrica

$$T: X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n \rightarrow (X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_{n_1}) \otimes_\pi (X_{n_1+1} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_{n_2}) \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi (X_{n_t+1} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n)$$

é um isomorfismo algébrico tal que

$$T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Vejamos que  $A$  é um operador contínuo. Para isso, chame

$$Z_0 = (X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_{n_1}), \dots, Z_t = (X_{n_t+1} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n).$$

Então

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup \{ \pi((x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n); Z_0 \otimes \cdots \otimes Z_t) : \\ &\quad x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n} \} \\ &= \sup \{ \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}; Z_0) \cdots \pi(x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n; Z_t) : \\ &\quad x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n} \} \\ &= \sup \{ \|x_1\| \cdots \|x_n\| ; x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n} \} = 1, \end{aligned}$$

provando que  $A$  é um operador  $n$ -linear contínuo. Como visto na demonstração do Teorema 3.17,  $T$  é um operador linear contínuo e  $\|T\| = \|A\| = 1$ . Disso segue que, para todo  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$

$$\pi(T(u)) \leq \|T\| \pi(u) = \pi(u).$$

Como  $T$  é um isomorfismo algébrico, seu inverso  $T^{-1}$  está bem definido e é linear. Do Teorema 2.25 existe um operador  $n$ -linear

$$B: (X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_{n_1}) \times (X_{n_1+1} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_{n_2}) \times \cdots \times (X_{n_t+1} \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n) \longrightarrow X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$$

tal que  $B_L = T^{-1}$ . Provaremos agora que  $B$  é um operador contínuo. Para isso sejam  $u_0 \in Z_0, \dots, u_t \in Z_t$  e  $\sum_{i_0=1}^{m_0} x_1^{i_0} \otimes \dots \otimes x_{n_1}^{i_0}, \dots, \sum_{i_t=1}^{m_t} x_{n_t+1}^{i_t} \otimes \dots \otimes x_n^{i_t}$  representações de  $u_0, \dots, u_t$ , respectivamente. Temos

$$\begin{aligned}
\pi(B(u_0, \dots, u_t)) &= \pi \left( B \left( \sum_{i_0=1}^{m_0} x_1^{i_0} \otimes \dots \otimes x_{n_1}^{i_0}, \dots, \sum_{i_t=1}^{m_t} x_{n_t+1}^{i_t} \otimes \dots \otimes x_n^{i_t} \right) \right) \\
&= \pi \left( \sum_{i_0=1}^{m_0} \dots \sum_{i_t=1}^{m_t} B(x_1^{i_0} \otimes \dots \otimes x_{n_1}^{i_0}, \dots, x_{n_t+1}^{i_t} \otimes \dots \otimes x_n^{i_t}) \right) \\
&= \pi \left( \sum_{i_0=1}^{m_0} \dots \sum_{i_t=1}^{m_t} B_L((x_1^{i_0} \otimes \dots \otimes x_{n_1}^{i_0}) \otimes \dots \otimes (x_{n_t+1}^{i_t} \otimes \dots \otimes x_n^{i_t})) \right) \\
&= \pi \left( \sum_{i_0=1}^{m_0} \dots \sum_{i_t=1}^{m_t} T^{-1}((x_1^{i_0} \otimes \dots \otimes x_{n_1}^{i_0}) \otimes \dots \otimes (x_{n_t+1}^{i_t} \otimes \dots \otimes x_n^{i_t})) \right) \\
&= \pi \left( \sum_{i_0=1}^{m_0} \dots \sum_{i_t=1}^{m_t} x_1^{i_0} \otimes \dots \otimes x_{n_1}^{i_0} \otimes \dots \otimes x_{n_t+1}^{i_t} \otimes \dots \otimes x_n^{i_t} \right) \\
&\leq \sum_{i_0=1}^{m_0} \dots \sum_{i_t=1}^{m_t} \|x_1^{i_0}\| \dots \|x_{n_1}^{i_0}\| \dots \|x_{n_t+1}^{i_t}\| \dots \|x_n^{i_t}\| \\
&= \left( \sum_{i_0=1}^{m_0} \|x_1^{i_0}\| \dots \|x_{n_1}^{i_0}\| \right) \dots \left( \sum_{i_t=1}^{m_t} \|x_{n_t+1}^{i_t}\| \dots \|x_n^{i_t}\| \right).
\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de  $u_0, \dots, u_t$  obtemos

$$\pi(B(u_0, \dots, u_t)) \leq \|u_0\| \dots \|u_t\|,$$

e então  $B$  é um operador  $n$ -linear contínuo com  $\|B\| \leq 1$ . Logo,  $B_L = T^{-1}$  é um operador linear contínuo. Assim, para todo  $u \in X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n$ ,

$$\pi(u) = \pi(T^{-1}(T(u))) \leq \|T^{-1}\| \pi(T(u)) = \|B_L\| \pi(T(u)) = \|B\| \pi(T(u)) \leq \pi(T(u)),$$

provando que  $T$  é um isomorfismo isométrico e completando a demonstração da primeira afirmação.

Para a segunda parte, sabemos pela Proposição 3.22 que o espaço

$$(X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_{n_1}) \otimes_\pi \dots \otimes_\pi (X_{n_t+1} \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n)$$

é denso em

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_{n_1}) \otimes_\pi \dots \otimes_\pi (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n),$$

e portanto denso em

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n).$$

Identificando um espaço com o subespaço do seu complemento com o qual ele é isomorfo isometricamente, podemos considerar o operador linear contínuo  $T$  tomando valores no complemento do seu contradomínio, isto é,

$$T: X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n \longrightarrow (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_n).$$

Pelo item *i*) do Teorema 1.21, o isomorfismo isométrico  $T$  admite uma única extensão ao completamento do seu domínio, a qual chamamos de  $\widehat{T}$ :

$$\widehat{T}: X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n \longrightarrow (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n),$$

que é linear, contínua e isometria (e portanto injetora). Do item *ii*) do Teorema 1.21 segue que  $\widehat{T}$  é sobrejetora, e portanto uma bijeção. Pelo Corolário 1.9, o operador  $\widehat{T}$  é um isomorfismo. Além disso,

$$\widehat{T}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . □

### 3.4 Incompletude

Assim que definimos o produto tensorial munido da norma projetiva, introduzimos a notação  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n$  para o seu completamento. Cabe a pergunta: será que o espaço normado  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  nunca é completo? Por um lado, não é difícil provar que se no máximo um dos espaços  $X_1, \dots, X_n$  têm dimensão infinita, então  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  é completo. O motivo de sempre considerarmos o completamento é que este é o único caso em que há completude, ou seja, se pelo menos dois dos espaços envolvidos têm dimensão infinita, então  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  é incompleto. O problema é que este último fato é de difícil demonstração e muito difícil de ser encontrado na literatura. Na verdade, não conseguimos localizar nenhuma demonstração detalhada deste fato. Por isso, um dos objetivos desta dissertação é apresentar uma demonstração detalhada deste fato, o que é feito no resultado a seguir.

**Teorema 3.24.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços de Banach, com pelo menos dois deles de dimensão infinita. Então o espaço normado  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  é incompleto.*

*Demonstração.* Por simplicidade, suponha que os espaços  $X_1$  e  $X_2$  tenham dimensão infinita. O caso mais geral segue de forma análoga, apenas com algumas alterações (na verdade complicações) na notação. Como  $X_1$  tem dimensão infinita, existe uma sequência  $(w_1^m)_{m=1}^\infty$  em  $X_1$  tal que o conjunto  $\{w_1^m : m \in \mathbb{N}\}$  é linearmente independente. Considere o seguinte subespaço fechado de  $X_1$ :

$$E = \overline{\text{span}\{w_1^m ; m \in \mathbb{N}\}}.$$

Então  $E$  tem dimensão infinita e é um espaço de Banach, pois é um subespaço fechado contido no espaço de Banach  $X_1$ . Mais ainda, pela Proposição 1.22 sabemos que  $E$  é separável. Pelo Teorema 1.23 existem uma sequência  $(x_1^m)_{m=1}^\infty$  em  $E$  e uma sequência  $(\varphi_1^r)_{r=1}^\infty$  em  $E'$  tais que  $\varphi_1^r(x_1^m) = \delta_{m,r}$  para todos  $r, m \in \mathbb{N}$ . Pelo Teorema 1.10, para cada funcional linear contínuo  $\varphi_1^r$  existe um funcional linear contínuo  $\widetilde{\varphi}_1^r$  em  $X_1'$  que é extensão de  $\varphi_1^r$ , então  $\widetilde{\varphi}_1^r(x_1^m) = \varphi_1^r(x_1^m) = \delta_{m,r}$  para quaisquer  $m, r \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, como  $X_2$  também tem dimensão infinita, existe uma sequência  $(x_2^m)_{m=1}^\infty$  em  $X_2$  tal que o conjunto

$\{x_2^m : m \in \mathbb{N}\}$  é linearmente independente. Tome  $0 \neq x_j \in X_j$  para cada  $3 \leq j \leq n$  e observe que  $x_1^m, x_2^m \neq 0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Como o espaço  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n$  é Banach e

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \pi \left( \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \cdots \otimes x_n \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \pi (x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\| \cdot \|x_3\| \cdots \|x_n\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|x_3\| \cdots \|x_n\|}{2^m} \\ &= \left( \prod_{j=3}^n \|x_j\| \right) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < +\infty, \end{aligned}$$

pelo Teorema 1.24 a série  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \cdots \otimes x_n$  é convergente para um vetor  $u$  em  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n$ . Suponha que o espaço  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  seja completo. Neste caso  $u \in X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  e podemos tomar uma representação

$$u = \sum_{i=1}^k y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i \text{ com } k \in \mathbb{N}, y_1^i \in X_1, \dots, y_n^i \in X_n.$$

Segue do Corolário 1.11 que, para cada  $3 \leq j \leq n$ , existe  $\varphi_j \in X'_j$  tal que  $\varphi_j(x_j) = \|x_j\|$ . Como cada  $x_j$  é não-nulo,

$$P := \prod_{j=3}^n \varphi_j(x_j) = \prod_{j=3}^n \|x_j\| \neq 0.$$

Considere o operador

$$T: X'_1 \longrightarrow X_2, \quad T(\varphi_1) := \sum_{i=1}^k \prod_{j=3}^n \varphi_1(y_1^i) \varphi_j(y_j^i) y_2^i.$$

Para todos  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $\varphi'_1, \varphi_1 \in X'_1$ ,

$$\begin{aligned} T(\alpha\varphi_1 + \varphi'_1) &= \sum_{i=1}^k \prod_{j=3}^n (\alpha\varphi_1 + \varphi'_1)(y_1^i) \varphi_j(y_j^i) y_2^i = \sum_{i=1}^k (\alpha\varphi_1(y_1^i) + \varphi'_1(y_1^i)) \prod_{j=3}^n \varphi_j(y_j^i) y_2^i \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha\varphi_1(y_1^i) \prod_{j=3}^n \varphi_j(y_j^i) y_2^i + \sum_{i=1}^k \varphi'_1(y_1^i) \prod_{j=3}^n \varphi_j(y_j^i) y_2^i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^k \prod_{j=3}^n \varphi_1(y_1^i) \varphi_j(y_j^i) y_2^i + \sum_{i=1}^k \prod_{j=3}^n \varphi'_1(y_1^i) \varphi_j(y_j^i) y_2^i \\ &= \alpha T(\varphi_1) + T(\varphi'_1), \end{aligned}$$

provando que  $T$  é um operador linear.

Por um lado, observe que  $T(X'_1) \subseteq \text{span}\{y_2^1, \dots, y_2^k\}$ , então  $T(X'_1)$  é um subespaço de  $X_2$  de dimensão finita, e portanto não existem infinitos vetores linearmente independentes em  $T(X'_1)$ .

Por outro lado, note que dados  $\varphi_1 \in X'_1$  e  $\varphi_2 \in X'_2$  o operador

$$A_{\varphi_1, \varphi_2}: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad A_{\varphi_1, \varphi_2}(z_1, \dots, z_n) = \varphi_1(z_1) \cdots \varphi_n(z_n),$$

é  $n$ -linear e contínuo pelo Exemplo 2.2. Podemos então considerar sua linearização  $(A_{\varphi_1, \varphi_2})_L$ . Segue que

$$\begin{aligned} \varphi_2(T(\varphi_1)) &= \varphi_2\left(\sum_{i=1}^k \prod_{j=3}^n \varphi_1(y_1^i) \varphi_j(y_j^i) y_2^i\right) = \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^n \varphi_j(y_j^i) = \sum_{i=1}^k A_{\varphi_1, \varphi_2}(y_1^i, \dots, y_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^k (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L(y_1^i \otimes \dots \otimes y_n^i) = (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L\left(\sum_{i=1}^k y_1^i \otimes \dots \otimes y_n^i\right) = (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L(u) \\ &= (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_n\right) \\ &= (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L\left(\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^s \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_n\right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L\left(\sum_{m=1}^s \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_n\right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^s (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L\left(\frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_n\right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^s \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} (A_{\varphi_1, \varphi_2})_L(x_1^m \otimes x_2^m \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_n) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^s \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} A_{\varphi_1, \varphi_2}(x_1^m, x_2^m, x_3, \dots, x_n) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^s \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \varphi_1(x_1^m) \varphi_2(x_2^m) \prod_{j=3}^n \varphi_j(x_j) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_2\left(\sum_{m=1}^s \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \varphi_1(x_1^m) x_2^m P\right) \\ &= \varphi_2\left(\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^s \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \varphi_1(x_1^m) x_2^m P\right), \end{aligned}$$

para todo funcional linear contínuo  $\varphi_2 \in X'_2$ . Pelo Corolário 1.11 temos

$$T(\varphi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \varphi_1(x_1^m) x_2^m P.$$

Agora aplicando o operador  $T$  nos termos da sequência  $(\tilde{\varphi}_1^r)_{r=1}^\infty$  obtida no início da demonstração, temos

$$\begin{aligned} T(\tilde{\varphi}_1^r) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \tilde{\varphi}_1^r(x_1^m) x_2^m P = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_1^m\| \cdot \|x_2^m\|} \delta_{m,r} x_2^m P \\ &= \frac{1}{2^r \|x_1^r\| \cdot \|x_2^r\|} \delta_{r,r} x_2^r P = \frac{1}{2^r \|x_1^r\| \cdot \|x_2^r\|} x_2^r P, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$T\left(\frac{2^r \|x_1^r\| \cdot \|x_2^r\|}{P} \tilde{\varphi}_1^r\right) = x_2^r$$

para todo  $r \in \mathbb{N}$ . Portanto  $T(X'_1)$  contém o conjunto linearmente independente  $\{x_2^m : m \in \mathbb{N}\}$ . Isso é uma contradição pois vimos acima que  $T(X'_1)$  têm dimensão finita. Logo o espaço  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$  é incompleto.  $\square$

# Capítulo 4

## O Produto Tensorial Injetivo

A norma projetiva estudada no capítulo anterior está, por sua própria definição, muito atrelada às normas dos espaços envolvidos, e portanto às topologias geradas pelas normas. Estudaremos neste capítulo uma outra norma no produto tensorial, chamada de norma injetiva, que está mais associada às topologias fracas dos espaços. Em termos de utilidade no estudo de operadores multilineares, as duas normas são igualmente importantes e largamente aplicadas. Mais uma vez, o resultado principal do capítulo é a demonstração da associatividade do produto tensorial injetivo, resultado este também que não é facilmente encontrado na literatura.

### 4.1 A norma injetiva

Assim como no Capítulo 3, neste capítulo, a menos que se diga o contrário, os espaços considerados serão sempre espaços normados.

**Lema 4.1.** *O operador*

$$\theta: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \mathcal{L}(X'_1, \dots, X'_n),$$

*dado por*

$$\theta(x_1, \dots, x_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n),$$

*está bem definido, é  $n$ -linear contínuo e*

$$\|\theta(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

*para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Em particular,  $\|\theta\| = 1$ .*

*Demonstração.* Omitiremos a demonstração de que  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  é um operador  $n$ -linear. Chamando

$$c := \sup\{|\theta(x_1, \dots, x_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)| : \varphi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n}\},$$



temos

$$\begin{aligned}
c &= \sup\{|\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)| : \varphi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n}\} \\
&= \sup\{|\varphi_1(x_1)| \cdots |\varphi_n(x_n)| : \varphi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n}\} \\
&= \prod_{j=1}^n \sup\{|\varphi_j(x_j)| : \varphi_j \in B_{X'_j}\} \\
&= \|x_1\| \cdots \|x_n\|,
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da Proposição 1.25 e a última do Corolário 1.12. Isso prova que  $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(X'_1, \dots, X'_n)$  e  $\|\theta(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ , donde seguem todas as afirmações.  $\square$

**Definição 4.2.** Considere o operador  $\theta$  do Lema 4.1 e sua linearização

$$\theta_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow \mathcal{L}(X'_1, \dots, X'_n),$$

de acordo com o Teorema 2.25. A *norma injetiva* é definida por

$$\varepsilon: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon(u) = \|\theta_L(u)\|.$$

**Observação 4.3.** Quando necessário para evitar ambiguidades, escreveremos  $\varepsilon_{X_1, \dots, X_n}(u)$  ou  $\varepsilon(u; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$  para especificar o domínio da função  $\varepsilon$ .

**Proposição 4.4.** A função  $\varepsilon$  é uma norma em  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ .

*Demonstração.* Sejam  $u, v \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . É claro que  $\varepsilon(u) = \|\theta_L(u)\| \geq 0$ . Para a desigualdade triangular, veja que

$$\varepsilon(u + v) = \|\theta_L(u + v)\| = \|\theta_L(u) + \theta_L(v)\| \leq \|\theta_L(u)\| + \|\theta_L(v)\| = \varepsilon(u) + \varepsilon(v).$$

Também tem-se

$$\varepsilon(\alpha u) = \|\theta_L(\alpha u)\| = \|\alpha \theta_L(u)\| = |\alpha| \cdot \|\theta_L(u)\| = |\alpha| \varepsilon(u).$$

Para finalizar a demonstração, provemos que o operador linear  $\theta_L$  é injetor. Suponha que  $\theta_L(u) = 0$ . Se  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  é uma representação de  $u$ , então

$$\theta_L(u) = \theta_L\left(\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i\right) = \sum_{i=1}^m \theta_L(x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i) = \sum_{i=1}^m \theta(x_1^i, \dots, x_n^i),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\theta_L(u)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \left(\sum_{i=1}^m \theta(x_1^i, \dots, x_n^i)\right)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^m \theta(x_1^i, \dots, x_n^i)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\
&= \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

para todos  $\varphi_1 \in X'_1, \dots, \varphi_n \in X'_n$ . Segue do Corolário 2.22 que  $u = 0$ , o que prova que  $\theta_L$  é injetor. Daí,

$$\varepsilon(u) = 0 \iff \|\theta_L(u)\| = 0 \iff \theta_L(u) = 0 \iff u = 0,$$

o que completa a demonstração.  $\square$

Denota-se por  $X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n$  o produto tensorial  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  munido da norma injetiva  $\varepsilon$ . Nesse sentido, pela Proposição 1.15 pode-se considerar um completamento de  $X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n$ , o qual denota-se por  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$ . O espaço de Banach  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$  chama-se *produto tensorial injetivo* dos espaços  $X_1, \dots, X_n$ .

Provaremos a seguir fórmulas alternativas para o cálculo da norma injetiva, bem como propriedades iniciais desta norma.

**Proposição 4.5.** *Sejam  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $v \in X'_1 \otimes \cdots \otimes X'_n$ . Então:*

i) *Para toda representação  $u = \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$ ,*

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right| : \varphi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n} \right\}.$$

ii) *Para toda representação  $u = \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  e todo  $t \in \{1, \dots, n\}$ ,*

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^n \varphi_j(x_j^i) x_t^i \right\| : \varphi_j \in B_{X'_j} \right\}.$$

iii) *Para toda representação  $v = \sum_{i=1}^m \varphi_1^i \otimes \cdots \otimes \varphi_n^i$ ,*

$$\varepsilon(v) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \cdots \varphi_n^i(x_n) \right| : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n} \right\}.$$

iv)  $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$  para todo  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ .

v)  $\varepsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$  para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ .

*Demonstração.* Para uma representação qualquer  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  do tensor  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ ,

$$\varepsilon(u) = \|\theta_L(u)\| = \sup \{ |\theta_L(u)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)| : \varphi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n} \}.$$

Segue da igualdade (4.1) que

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right| : \varphi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \varphi_1 \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right) \right| : \varphi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n} \right\}, \end{aligned}$$

e daí, pela Proposição 1.26,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &= \sup_{\varphi_2 \in B_{X'_2}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n}} \sup \left\{ \left| \varphi_1 \left( \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right) \right| : \varphi_1 \in B_{X'_1} \right\} \\
&= \sup_{\varphi_2 \in B_{X'_2}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n}} \left\| \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right\| \\
&= \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m x_1^i \varphi_2(x_2^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right\| : \varphi_2 \in B_{X'_2}, \dots, \varphi_n \in B_{X'_n} \right\}.
\end{aligned}$$

Com isso provamos o item *i*) e o caso em que  $t = 1$  no item *ii*). Os outros casos do item *ii*) seguem de forma análoga.

Provemos agora o item *iii*). Para isso usaremos o item *i*) e, por simplicidade, faremos para  $v \in X'_1 \otimes X'_2$ . Usaremos várias vezes o fato de que podemos trocar a ordem em que os supremos são tomados (veja a Proposição 1.26). Temos então:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(v) &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \psi_1(\varphi_1^i) \psi_2(\varphi_2^i) \right| : \psi_1 \in B_{X''_1}, \psi_2 \in B_{X''_2} \right\} \\
&= \sup_{\psi_2 \in B_{X''_2}} \sup_{\psi_1 \in B_{X''_1}} \left| \psi_1 \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1^i \psi_2(\varphi_2^i) \right) \right| = \sup_{\psi_2 \in B_{X''_2}} \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_1^i \psi_2(\varphi_2^i) \right\|.
\end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=1}^m \varphi_1^i \psi_2(\varphi_2^i)$  é um funcional linear contínuo em  $X'_1$ ,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(v) &= \sup_{\psi_2 \in B_{X''_2}} \sup_{x_1 \in B_{X_1}} \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \psi_2(\varphi_2^i) \right| \\
&= \sup_{x_1 \in B_{X_1}} \sup_{\psi_2 \in B_{X''_2}} \left| \psi_2 \left( \sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \varphi_2^i \right) \right| = \sup_{x_1 \in B_{X_1}} \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \varphi_2^i \right\|.
\end{aligned}$$

E como  $\sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \varphi_2^i$  é um funcional linear contínuo em  $X'_2$ ,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(v) &= \sup_{x_1 \in B_{X_1}} \sup_{x_2 \in B_{X_2}} \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \varphi_2^i(x_2) \right| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \varphi_2^i(x_2) \right| : x_1 \in B_{X_1} \text{ e } x_2 \in B_{X_2} \right\},
\end{aligned}$$

o que prova *iii*).

*iv*) Considerando o operador  $n$ -linear contínuo  $\theta$  do Lema 4.1, pelo Teorema 3.17 sabemos que sua linearização

$$\theta_L: X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n \longrightarrow \mathcal{L}(X'_1, \dots, X'_n)$$

é um operador linear contínuo e  $\|\theta_L\| = \|\theta\| = 1$ . Então,

$$\varepsilon(u) = \|\theta_L(u)\| \leq \|\theta_L\|\pi(u) = \pi(u).$$

v) Para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ ,

$$\varepsilon(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \|\theta_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)\| = \|\theta(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_1\| \dots \|x_n\|.$$

□

Vejamos, como consequência do iv) da Proposição 4.5, que  $\mathcal{L}(X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n; Z) \subseteq \mathcal{L}(X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n; Z)$ . De fato, para todos  $\varphi \in \mathcal{L}(X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n; Z)$  e  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ ,

$$\|\varphi(u)\| \leq \|\varphi\|_\varepsilon \varepsilon(u) \leq \|\varphi\|_\varepsilon \pi(u).$$

**Exemplo 4.6.** Vejamos que o operador  $n$ -linear canônico

$$\sigma_n: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow X_1 \otimes \dots \otimes X_n,$$

é contínuo em relação à norma injetiva em  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . De fato, para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ ,

$$\varepsilon_{X_1, \dots, X_n}(\sigma_n(x_1, \dots, x_n)) = \varepsilon_{X_1, \dots, X_n}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \|x_1\| \dots \|x_n\|,$$

o que prova que  $\sigma_n$  é um operador  $n$ -linear contínuo e, mais ainda,  $\|\sigma_n\|_\varepsilon = 1$ .

**Proposição 4.7.** *Sejam  $\varphi_1 \in X'_1, \dots, \varphi_n \in X'_n$ . A linearização algébrica do operador  $n$ -linear contínuo  $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ ,*

$$(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)_L: X_1 \otimes \dots \otimes X_n \longrightarrow \mathbb{K},$$

*é contínua em relação à norma injetiva em  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ , e, mais ainda,*

$$\|(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)_L\|_\varepsilon = \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\|.$$

*Demonstração.* Sejam  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . Então,

$$\begin{aligned} |(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)_L(u)| &= \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \dots \varphi_n(x_n^i) \right| = |\theta_L(u)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)| \\ &\leq \|\theta_L(u)\| \cdot \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\| = \varepsilon(u) \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\|. \end{aligned}$$

Isso prova que o operador linear  $(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)_L$  é contínuo em relação à norma injetiva e  $\|(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)_L\|_\varepsilon \leq \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\|$ . O que acabamos de provar, juntamente com o Exemplo 4.6, nos diz que os operadores do seguinte diagrama comutativo são contínuos:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_n & \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n} & \mathbb{K} \\ \sigma_n \downarrow & \nearrow (\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)_L & \\ X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n & & \end{array}$$

Por outro lado, usando a Proposição 3.5 e, mais uma vez, o Exemplo 4.6,

$$\begin{aligned}\|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| &= \|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n\| = \|(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)_L \circ \sigma_n\| \\ &\leq \|(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)_L\|_\varepsilon \|\sigma_n\|_\varepsilon = \|(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)_L\|_\varepsilon,\end{aligned}$$

e a igualdade desejada segue.  $\square$

Assim como na norma projetiva, podemos considerar o produto tensorial injetivo de operadores lineares contínuos:

**Proposição 4.8.** *Sejam  $T_1 \in \mathcal{L}(X_1; Y_1), \dots, T_n \in \mathcal{L}(X_n; Y_n)$ . Então existe um único operador linear contínuo*

$$T_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon T_n: X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n \longrightarrow Y_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon Y_n,$$

tal que

$$T_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon T_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Além disso,  $\|T_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon T_n\|_\varepsilon = \|T_1\| \cdots \|T_n\|$ .

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.28 existe um único operador linear

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_n: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n,$$

tal que  $T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n)$  para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Vejamos que este operador é contínuo munindo os dois lados com a norma injetiva, isto é, que o operador

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_n: X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n \longrightarrow Y_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon Y_n$$

é contínuo. Para isso sejam  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . Então,

$$\begin{aligned}&\varepsilon(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(u); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) \\ &= \varepsilon\left(\sum_{i=1}^m T_1(x_1^i) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n^i); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n\right) \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(T_1(x_1^i)) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(T_n(x_n^i)) \right| : \varphi_1 \in B_{Y_1'}, \dots, \varphi_n \in B_{Y_n'} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m T_1^*(\varphi_1)(x_1^i) \otimes \cdots \otimes T_n^*(\varphi_n)(x_n^i) \right| : \varphi_1 \in B_{Y_1'}, \dots, \varphi_n \in B_{Y_n'} \right\} \\ &= \|T_1^*\| \cdots \|T_n^*\| \cdot \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \frac{T_1^*(\varphi_1)}{\|T_1^*\|}(x_1^i) \otimes \cdots \otimes \frac{T_n^*(\varphi_n)}{\|T_n^*\|}(x_n^i) \right| : \varphi_1 \in B_{Y_1'}, \dots, \varphi_n \in B_{Y_n'} \right\}\end{aligned}$$

onde  $T_1^*, \dots, T_n^*$  são os operadores adjuntos de  $T_1, \dots, T_n$ , respectivamente. Como  $\|T_j^*\| = \|T_j\|$ ,

$$\frac{T_j^*(\varphi_j)}{\|T_j^*\|} \in X_j' \text{ e } \left\| \frac{T_j^*(\varphi_j)}{\|T_j^*\|} \right\| = \frac{\|T_j^*(\varphi_j)\|}{\|T_j^*\|} \leq \frac{\|T_j^*\| \|\varphi_j\|}{\|T_j^*\|} = \|\varphi_j\| \leq 1$$

para todo  $1 \leq j \leq n$ , temos

$$\begin{aligned} & \varepsilon(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(u); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) \\ & \leq \|T_1^*\| \cdots \|T_n^*\| \cdot \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m \psi_1(x_1^i) \otimes \cdots \otimes \psi_n(x_n^i) \right\| : \psi_1 \in B_{X_1'}, \dots, \psi_n \in B_{X_n'} \right\} \\ & = \|T_1\| \cdots \|T_n\| \varepsilon(u; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n). \end{aligned}$$

Por outro lado, da definição de supremo, para todo  $\alpha > 0$  podemos tomar  $x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}$  tais que  $\|T_j(x_j)\| \geq (1 - \alpha)\|T_j\|$  para todo  $1 \leq j \leq n$ . Então, de

$$\varepsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\| \leq 1$$

segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) &= \varepsilon(T_1(x_1) \otimes \cdots \otimes T_n(x_n); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) \\ &= \|T_1(x_1)\| \cdots \|T_n(x_n)\| \\ &\geq (1 - \alpha)^n \|T_1\| \cdots \|T_n\|. \end{aligned}$$

Fazendo  $\alpha \rightarrow 0$  obtemos

$$\varepsilon(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) \geq \|T_1\| \cdots \|T_n\|,$$

e então

$$\begin{aligned} \|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n\|_\varepsilon &= \sup\{\varepsilon(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(u); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) : u \in B_{X_1 \otimes \cdots \otimes X_n}\} \\ &\geq \varepsilon(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n); Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n) \\ &\geq \|T_1\| \cdots \|T_n\|, \end{aligned}$$

donde concluímos que  $\|T_1 \otimes \cdots \otimes T_n\|_\varepsilon = \|T_1\| \cdots \|T_n\|$ . Pelo Teorema 1.21 existe uma única extensão linear contínua

$$T_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon T_n : X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n \longrightarrow Y_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon Y_n$$

do operador  $T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$  que preserva a sua norma.  $\square$

Veremos a seguir que a norma injetiva respeita subespaços (e por isso ela é chamada de norma injetiva), fato este que não vale na norma projetiva. O fato da norma projetiva não respeitar subespaços pode ser encontrado, por exemplo, em [6, 3.9].

**Proposição 4.9.** *Sejam  $E_1, \dots, E_n$  subespaços dos espaços normados  $X_1, \dots, X_n$ , respectivamente. Então  $E_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon E_n$  é isomorfo isometricamente a um subespaço de  $X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n$ .*

*Demonstração.* Consideremos o operador linear e injetor

$$\tau : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \longrightarrow X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$$

do Lema 2.23. Tomando a norma injetiva no domínio e no contradomínio, o operador

$$\tau : E_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon E_n \rightarrow X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n$$

é ainda linear e injetor. Basta provar que  $\varepsilon_{E_1, \dots, E_n}(u) = \varepsilon_{X_1, \dots, X_n}(\tau(u))$  para todo  $u \in E_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon E_n$ . Para isso seja  $u = \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ . Para todo  $1 \leq j \leq n$ , temos:

- Se  $\varphi_j \in B_{E'_j}$  então, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe  $\tilde{\varphi}_j \in X'_j$  tal que  $\varphi_j(x_j) = \tilde{\varphi}_j(x_j)$  para todo  $x_j \in E_j$  e  $\|\varphi_j\| = \|\tilde{\varphi}_j\|$ , e portanto  $\varphi_j \in B_{X'_j}$ ;
- Se  $\psi_j \in B_{X'_j}$  então  $\psi_j|_{E_j} \in B_{E'_j}$ ,  $\psi_j(x_j) = \psi_j|_{E_j}(x_j)$  para todo  $x_j \in E_j$  e  $\|\psi_j|_{E_j}\| \leq \|\psi_j\|$ .

Portanto,

$$\left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right| : \varphi_1 \in B_{E'_1}, \dots, \varphi_n \in B_{E'_n} \right\} = \\ = \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \psi_1(x_1^i) \cdots \psi_n(x_n^i) \right| : \psi_1 \in B_{X'_1}, \dots, \psi_n \in B_{X'_n} \right\},$$

donde segue que  $\varepsilon_{E_1, \dots, E_n}(u) = \varepsilon_{X_1, \dots, X_n}(\tau(u))$  e completa a demonstração.  $\square$

**Corolário 4.10.** *Sejam  $E_1, \dots, E_n$  subespaços fechados dos espaços normados  $X_1, \dots, X_n$ , respectivamente. Então  $E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon E_n$  é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado de  $X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon X_n$ .*

*Demonstração.* Vimos na Proposição 4.9 que o operador

$$\tau: E_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon E_n \rightarrow X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon X_n$$

é uma imersão isométrica linear. Pelo Teorema 1.21 existe uma única extensão linear contínua de  $\tau$ ,

$$\tilde{\tau}: E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon E_n \longrightarrow X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon X_n,$$

que também é imersão isométrica linear. Como  $E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon E_n$  é um espaço de Banach e  $\tilde{\tau}$  é uma imersão isométrica linear, sua imagem  $\tilde{\tau}(E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon E_n) \subseteq X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon X_n$  é também um espaço de Banach, e portanto fechado em  $X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon X_n$ .  $\square$

## 4.2 Formas integrais e o teorema da linearização

Vimos que os operadores multilineares contínuos estão em correspondência biunívoca com os operadores lineares que são contínuos em relação à norma projetiva. O que se pode dizer dos operadores multilineares cujas linearizações são contínuas em relação à norma injetiva? Veremos nesta seção que as formas multilineares cujas linearizações são contínuas em relação à norma injetiva são exatamente as formas integrais, a serem introduzidos em breve.

Dados  $X_1, \dots, X_n$  espaços normados, podemos considerar a topologia fraca-estrela no dual de cada um desses espaços, ou seja,  $(X'_1, \omega^*), \dots, (X'_n, \omega^*)$ . Considere as bolas  $B_{X'_1}, \dots, B_{X'_n}$  como subespaços de  $(X'_1, \omega^*), \dots, (X'_n, \omega^*)$  de acordo com a Definição 1.30, respectivamente. Assim, o conjunto  $B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}$  é um espaço topológico munido da topologia produto. Combinando os Teoremas 1.45, 1.50 e 1.46 concluímos que este espaço topológico é compacto e Hausdorff. Podemos então considerar, pela Proposição 1.44, o espaço normado  $C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n})$ , o qual, de acordo com o resultado a seguir, contém uma cópia isométrica do produto tensorial injetivo.

**Lema 4.11.** *O espaço  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$  é isomorfo isometricamente a um subespaço de  $C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n})$ .*

*Demonstração.* Vejamos que o operador

$$A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}),$$

definido por

$$A(x_1, \dots, x_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n),$$

está bem definido, isto é, que a função  $A(x_1, \dots, x_n): B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n} \longrightarrow \mathbb{K}$  é contínua na topologia produto das topologias fraca-estrela. Para isso, seja  $(\psi_1^\lambda, \dots, \psi_n^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  uma rede em  $B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}$  que converge para  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ . Pelo Teorema 1.40 temos  $\psi_1^\lambda \xrightarrow{\omega^*} \psi_1, \dots, \psi_n^\lambda \xrightarrow{\omega^*} \psi_n$ . Para cada  $1 \leq j \leq n$ , vimos na Proposição 1.49 que a função

$$J_{X_j}(x_j): (X'_j, \omega^*) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad J_{X_j}(x_j)(\varphi_j) = \varphi_j(x_j),$$

é contínua, portanto sua restrição  $(J_{X_j}(x_j))|_{B_{X'_j}}: (B_{X'_j}, \omega^*) \longrightarrow \mathbb{K}$  também é contínua.

Escrevendo  $\sigma_j(x_j) = (J_{X_j}(x_j))|_{B_{X'_j}}$  segue que  $\sigma_j(x_j)(\psi_j^\lambda) \xrightarrow{\omega^*} \sigma_j(x_j)(\psi_j)$ . Daí, usando a Proposição 1.36,

$$\begin{aligned} \lim_\lambda A(x_1, \dots, x_n)(\psi_1^\lambda, \dots, \psi_n^\lambda) &= \lim_\lambda (\psi_1^\lambda(x_1) \cdots \psi_n^\lambda(x_n)) = \left( \lim_\lambda \psi_1^\lambda(x_1) \right) \cdots \left( \lim_\lambda \psi_n^\lambda(x_n) \right) \\ &= \left( \lim_\lambda \sigma_1(x_1)(\psi_1^\lambda) \right) \cdots \left( \lim_\lambda \sigma_n(x_n)(\psi_n^\lambda) \right) = \sigma_1(x_1)(\psi_1) \cdots \sigma_n(x_n)(\psi_n) \\ &= \psi_1(x_1) \cdots \psi_n(x_n) = A(x_1, \dots, x_n)(\psi_1, \dots, \psi_n). \end{aligned}$$

Uma vez bem definido, é imediato que  $A$  é  $n$ -linear. Considere sua linearização

$$A_L: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}).$$

Para todo  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ , de acordo com a norma definida em  $C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n})$ ,

$$\|A_L(u)\| = \sup\{|A_L(u)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)| : (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}\}.$$

Para qualquer representação  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$  de  $u$ ,

$$\begin{aligned} \|A_L(u)\| &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m A(x_1^i, \dots, x_n^i)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \right| : (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i) \cdots \varphi_n(x_n^i) \right| : (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n} \right\} \\ &= \varepsilon(u). \end{aligned}$$

Assim,  $A_L: X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n \longrightarrow C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n})$  é um operador linear contínuo, além disso,  $A_L$  é uma isometria. Como  $B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}$  é compacto, segue pela Proposição 1.44 que  $C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n})$  é um espaço de Banach, e portanto, de acordo com o Teorema 1.21, a extensão de  $A_L$  ao produto tensorial injetivo é também uma isometria.  $\square$



**Teorema 4.12.** (Teorema da Representação de Riesz) *Seja  $K$  um espaço topológico compacto de Hausdorff. Para cada funcional  $\varphi \in C(K; \mathbb{K})'$  existe uma medida  $\mu_0 \in M(K; \mathbb{K})$  tal que*

$$\varphi(f) = \int_K f d\mu_0 \text{ para toda } f \in C(K; \mathbb{K}).$$

*Mais ainda, a correspondência  $\varphi \in C(K; \mathbb{K})' \longrightarrow \mu_0 \in M(K; \mathbb{K})$  é um isomorfismo isométrico.*

*Demonstração.* Veja [6, Apêndice B] ou [9, Corollary 7.18]. □

**Definição 4.13.** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços normados e  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ . Dizemos que  $A$  é uma *forma  $n$ -linear integral* se existe uma medida  $\mu \in M(B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}; \mathbb{K})$  tal que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \int_{B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}} \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad (4.2)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Neste caso a norma integral de  $A$  é definida por

$$\|A\|_I = \inf\{\|\mu\| : \mu \in M(B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}; \mathbb{K}) \text{ e } \mu \text{ satisfaz (4.2)}\}.$$

Provamos agora o teorema principal desta seção.

**Teorema 4.14.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços normados e  $A \in L(X_1, \dots, X_n)$ . Então a linearização  $A_L: X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n \longrightarrow \mathbb{K}$  da forma  $A$  é contínua se, e somente se,  $A$  é integral. Mais ainda,  $\|A\|_I = \|A_L\|$ .*

*Demonstração.* Considere  $i: X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n \longrightarrow C(B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n})$  a imersão isométrica linear do Lema 4.11, que é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Podemos considerar sua inversa  $i^{-1}: i(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n) \longrightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n$ . Suponha que a forma  $A$  seja integral. Neste caso existe uma medida  $\mu_0 \in M(B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}; \mathbb{K})$  tal que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \int_{B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}} \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) d\mu_0(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Pelo Teorema 4.12 existe um funcional  $\psi \in C(B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n})'$  de modo que

$$\psi(f) = \int_{B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}} f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\mu_0(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

para toda  $f \in C(B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n})$  e  $\|\psi\| = \|\mu_0\|$ . Em particular, dados  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ , tomando a função  $f = i(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  temos

$$\begin{aligned} \psi(i(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)) &= \int_{B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}} i(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\mu_0(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &= \int_{B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_n}} \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) d\mu_0(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) = A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n). \end{aligned}$$

Isso prova que

$$\psi \circ i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Segue da unicidade da linearização de  $A$  que  $\psi \circ i = A_L$ . Portanto  $A_L$  é um funcional contínuo e

$$\|A_L\| = \|\psi \circ i\| \leq \|\psi\| \cdot \|i\| = \|\psi\| = \|\mu_0\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as medidas  $\mu_0$  das representações integrais de  $A$  obtemos  $\|A_L\| \leq \|A\|_I$ .

Reciprocamente, suponha que o funcional  $A_L: X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n \longrightarrow \mathbb{K}$  seja contínuo. Neste caso,  $A_L \circ i^{-1}$  é um funcional linear contínuo em  $i(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n)$ , e pelo Teorema de Hanh-Banach podemos tomar extensão  $\varphi \in C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n})'$  de  $A_L \circ i^{-1}$  tal que

$$\|\varphi\| = \|A_L \circ i^{-1}\| \leq \|A_L\| \cdot \|i^{-1}\| = \|A_L\|.$$

Por outro lado,

$$\|A_L\| = \|A_L \circ i^{-1} \circ i\| \leq \|A_L \circ i^{-1}\| \cdot \|i\| = \|A_L \circ i^{-1}\| = \|\varphi\|,$$

e portanto  $\|\varphi\| = \|A_L\|$ . Pelo Teorema 4.12 existe uma medida  $\mu_1 \in M(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}; \mathbb{K})$  tal que  $\|\mu_1\| = \|\varphi\| = \|A_L\|$  e

$$\varphi(f) = \int_{B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}} f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\mu_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

para toda  $f \in C(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n})$ . Então

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_n) &= A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A_L \circ i^{-1}(i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) \\ &= \varphi(i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) \\ &= \int_{B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}} i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\mu_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &= \int_{B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}} \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) d\mu_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \end{aligned}$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ , o que prova que  $A$  é integral e  $\|A\|_I \leq \|\mu_1\| = \|A_L\|$  e completa a demonstração.  $\square$

**Corolário 4.15.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  espaços normados.*

- i) *O conjunto  $L_I(X_1, \dots, X_n)$  das formas  $n$ -lineares integrais é subespaço vetorial de  $L(X_1, \dots, X_n)$ .*
- ii) *A função  $\|\cdot\|_I$  é uma norma em  $L_I(X_1, \dots, X_n)$ .*
- iii) *Os espaços  $L_I(X_1, \dots, X_n)$  e  $(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n)'$  são isomorfos isometricamente.*
- iv)  *$L_I(X_1, \dots, X_n)$  é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* O teorema nos diz que a correspondência

$$A \in L_I(X_1, \dots, X_n) \longleftrightarrow A_L \in (X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n)'$$

é biunívoca. Como a correspondência  $A \mapsto A_L$  é linear, o item *i*) é imediato e o item *ii*) segue das propriedades de norma de  $(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n)'$  e da igualdade  $\|A\|_I = \|A_L\|$ . Essa mesma igualdade implica *iii*) e o item *iv*) segue do fato de que espaço normado que é isomorfo a espaço de Banach também é espaço de Banach.  $\square$

### 4.3 A associatividade

Atingiremos nesta seção o último objetivo desta dissertação, que é apresentar uma demonstração detalhada da associatividade do produto tensorial injetivo, resultado este que, também, não encontramos demonstrado na literatura.

**Lema 4.16.** *Sejam  $E_1, \dots, E_n$  subespaços densos de  $X_1, \dots, X_n$ , respectivamente. Então  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  é subespaço denso em  $X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n$ .*

*Demonstração.* Seja  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . Dado  $\delta > 0$ , existe  $v \in E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  tal que  $\pi(u - v) < \delta$  pois vimos na Proposição 3.22 que  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  é denso em  $X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_n$ . Pelo item *iv*) da Proposição 4.5 segue que  $\varepsilon(u - v) \leq \pi(u - v) < \delta$ , o que prova que  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  é denso em  $X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n$ .  $\square$

**Teorema 4.17.** *Sejam  $n_1, \dots, n_t, n \in \mathbb{N}$  tais que  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_t < n$ . Então existe um único isomorfismo isométrico*

$$T: X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n \longrightarrow (X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_1}) \otimes_\varepsilon (X_{n_1+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_2}) \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon (X_{n_{t-1}+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n)$$

tal que

$$T(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \dots \otimes x_{n_2}) \otimes \dots \otimes (x_{n_{t-1}+1} \otimes \dots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ , e um único isomorfismo isométrico

$$\widehat{T}: X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n \longrightarrow (X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon (X_{n_{t-1}+1} \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n)$$

que estende  $T$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.30 existe um único isomorfismo algébrico

$$T: X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n \longrightarrow (X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_1}) \otimes_\varepsilon (X_{n_1+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_2}) \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon (X_{n_{t-1}+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n)$$

tal que

$$T(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \dots \otimes x_{n_2}) \otimes \dots \otimes (x_{n_{t-1}+1} \otimes \dots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . Então sua inversa  $T^{-1}$  está bem definida e é linear. Sejam  $u \in X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n$  e  $\sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$  uma representação de  $u$ . Dados os funcionais

$\vartheta_1 \in B_{X'_1}, \dots, \vartheta_n \in B_{X'_n}$ , considere os operadores  $n$ -lineares de tipo finito:

$$\begin{aligned} \psi_1 &: X_1 \times \dots \times X_{n_1} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_1(x_1, \dots, x_{n_1}) = \vartheta_1(x_1) \dots \vartheta_{n_1}(x_{n_1}), \\ \psi_2 &: X_{n_1+1} \times \dots \times X_{n_2} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_2(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}) = \vartheta_{n_1+1}(x_{n_1+1}) \dots \vartheta_{n_2}(x_{n_2}), \\ &\vdots \\ \psi_t &: X_{n_{t-1}+1} \times \dots \times X_{n_t} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_t(x_{n_{t-1}+1}, \dots, x_{n_t}) = \vartheta_{n_{t-1}+1}(x_{n_{t-1}+1}) \dots \vartheta_{n_t}(x_{n_t}), \\ \psi_{t+1} &: X_{n_t+1} \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_{t+1}(x_{n_t+1}, \dots, x_n) = \vartheta_{n_t+1}(x_{n_t+1}) \dots \vartheta_n(x_n). \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.7, a linearização  $(\psi_j)_L$  de cada  $\psi_j$  é contínuo em relação à norma injetiva e  $\|(\psi_j)_L\|_\varepsilon \leq 1$ . Assim, para todos  $\vartheta_1 \in B_{X'_1}, \dots, \vartheta_n \in B_{X'_n}$  existem funcionais  $(\psi_1)_L \in B_{(X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_1})'}, \dots, (\psi_{t+1})_L \in B_{(X_{n_t+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n)'}$  tais que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^m \vartheta_1(x_1^i) \dots \vartheta_n(x_n^i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \vartheta_1(x_1^i) \dots \vartheta_{n_1}(x_{n_1}^i) \vartheta_{n_1+1}(x_{n_1+1}^i) \dots \vartheta_{n_2}(x_{n_2}^i) \dots \vartheta_{n_t+1}(x_{n_t+1}^i) \dots \vartheta_n(x_n^i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \psi_1(x_1^i, \dots, x_{n_1}^i) \psi_2(x_{n_1+1}^i, \dots, x_{n_2}^i) \dots \psi_{t+1}(x_{n_t+1}^i, \dots, x_n^i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m (\psi_1)_L(x_1^i \otimes \dots \otimes x_{n_1}^i) (\psi_2)_L(x_{n_1+1}^i \otimes \dots \otimes x_{n_2}^i) \dots (\psi_{t+1})_L(x_{n_t+1}^i \otimes \dots \otimes x_n^i) \right|. \end{aligned}$$

Isso mostra que o conjunto

$$E := \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \vartheta_1(x_1^i) \dots \vartheta_n(x_n^i) \right| : \vartheta_1 \in B_{X'_1}, \dots, \vartheta_n \in B_{X'_n} \right\}$$

está contido em

$$F = \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \psi_1(x_1^i \otimes \dots \otimes x_{n_1}^i) \dots \psi_{t+1}(x_{n_t+1}^i \otimes \dots \otimes x_n^i) \right| : \psi_1 \in B_{Z_1}, \dots, \psi_{t+1} \in B_{Z_{t+1}} \right\},$$

onde  $Z_1 = (X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_1})', \dots, Z_{t+1} = (X_{n_t+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n)'$ . De

$$T(u) = \sum_{i=1}^m T(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) = \sum_{i=1}^m (x_1^i \otimes \dots \otimes x_{n_1}^i) \otimes \dots \otimes (x_{n_t+1}^i \otimes \dots \otimes x_n^i), \quad (4.3)$$

segue que

$$\varepsilon(T(u)) = \sup F \geq \sup E = \varepsilon(u).$$

Por outro lado, segue de (4.3) e da definição da norma injetiva que, dado  $\delta > 0$  existem funcionais  $\varphi_1 \in B_{(X_1 \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_1})'}, \varphi_2 \in B_{(X_{n_1+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_{n_2})'}, \dots, \varphi_{t+1} \in B_{(X_{n_t+1} \otimes_\varepsilon \dots \otimes_\varepsilon X_n)'}$  tais que

$$\varepsilon(T(u)) \leq \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i \otimes \dots \otimes x_{n_1}^i) \varphi_2(x_{n_1+1}^i \otimes \dots \otimes x_{n_2}^i) \dots \varphi_{t+1}(x_{n_t+1}^i \otimes \dots \otimes x_n^i) \right| + \delta. \quad (4.4)$$

Para esses funcionais  $\varphi_j$ ,  $1 \leq j \leq t+1$ , existem, pelo Teorema 4.14, formas integrais  $A_1 \in L_I(X_1, \dots, X_{n_1}; \mathbb{K}), \dots, A_{t+1} \in L_I(X_{n_{t+1}}, \dots, X_n; \mathbb{K})$  tais que  $(A_j)_L = \varphi_j$ . Em particular,

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1^i \otimes \dots \otimes x_{n_1}^i) &= (A_1)_L(x_1^i \otimes \dots \otimes x_{n_1}^i) = A_1(x_1^i, \dots, x_{n_1}^i), \\ \varphi_2(x_{n_1+1}^i \otimes \dots \otimes x_{n_2}^i) &= (A_2)_L(x_{n_1+1}^i \otimes \dots \otimes x_{n_2}^i) = A_2(x_{n_1+1}^i, \dots, x_{n_2}^i), \\ &\vdots \\ \varphi_{t+1}(x_{n_{t+1}}^i \otimes \dots \otimes x_n^i) &= (A_{t+1})_L(x_{n_{t+1}}^i \otimes \dots \otimes x_n^i) = A_{t+1}(x_{n_{t+1}}^i, \dots, x_n^i).\end{aligned}$$

Pela definição de formas integrais, existem medidas  $\mu_1 \in M(B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_{n_1}}; \mathbb{K}), \mu_2 \in M(B_{X'_{n_1+1}} \times \dots \times B_{X'_{n_2}}; \mathbb{K}), \dots, \mu_{t+1} \in M(B_{X'_{n_{t+1}}} \times \dots \times B_{X'_n}; \mathbb{K})$  tais que

$$\begin{aligned}A_1(x_1^i, \dots, x_{n_1}^i) &= \int_{B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_{n_1}}} \theta_1(x_1^i) \dots \theta_{n_1}(x_{n_1}^i) d\mu_1(\theta_1, \dots, \theta_{n_1}), \\ A_2(x_{n_1+1}^i, \dots, x_{n_2}^i) &= \int_{B_{X'_{n_1+1}} \times \dots \times B_{X'_{n_2}}} \theta_{n_1+1}(x_{n_1+1}^i) \dots \theta_{n_2}(x_{n_2}^i) d\mu_2(\theta_{n_1+1}, \dots, \theta_{n_2}), \\ &\vdots \\ A_{t+1}(x_{n_{t+1}}^i, \dots, x_n^i) &= \int_{B_{X'_{n_{t+1}}} \times \dots \times B_{X'_n}} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \dots \theta_n(x_n^i) d\mu_{t+1}(\theta_{n_{t+1}}, \dots, \theta_n),\end{aligned}$$

e  $\|\mu_j\| \leq \|(A_j)_L\| + \delta$  para todos  $x_1^i \in X_1, \dots, x_n^i \in X_n$ . Portanto  $\|\mu_j\| \leq 1 + \delta$  para cada  $1 \leq j \leq t+1$ . Retomando a desigualdade (4.4), considerando as notações  $B_1 := B_{X'_1} \times \dots \times B_{X'_{n_1}}, \dots, B_{t+1} := B_{X'_{n_{t+1}}} \times \dots \times B_{X'_n}$ , e usando as propriedades básicas de integrais, temos

$$\begin{aligned}\varepsilon(T(u)) &\leq \left| \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_1^i \otimes \dots \otimes x_{n_1}^i) \varphi_2(x_{n_1+1}^i \otimes \dots \otimes x_{n_2}^i) \dots \varphi_{t+1}(x_{n_{t+1}}^i \otimes \dots \otimes x_n^i) \right| + \delta \\ &= \left| \sum_{i=1}^m A_1(x_1^i, \dots, x_{n_1}^i) A_2(x_{n_1+1}^i, \dots, x_{n_2}^i) \dots A_{t+1}(x_{n_{t+1}}^i, \dots, x_n^i) \right| + \delta \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \left( \int_{B_1} \theta_1(x_1^i) \dots \theta_{n_1}(x_{n_1}^i) d\mu_1 \right) \left( \int_{B_2} \theta_{n_1+1}(x_{n_1+1}^i) \dots \theta_{n_2}(x_{n_2}^i) d\mu_2 \right) \dots \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{B_{t+1}} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \dots \theta_n(x_n^i) d\mu_{t+1} \right) \right| + \delta \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \int_{B_1} \left( \int_{B_2} \theta_{n_1+1}(x_{n_1+1}^i) \dots \theta_{n_2}(x_{n_2}^i) d\mu_2 \right) \dots \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{B_{t+1}} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \dots \theta_n(x_n^i) d\mu_{t+1} \right) \theta_1(x_1^i) \dots \theta_{n_1}(x_{n_1}^i) d\mu_1 \right| + \delta \\ &= \left| \int_{B_1} \sum_{i=1}^m \left( \int_{B_2} \theta_{n_1+1}(x_{n_1+1}^i) \dots \theta_{n_2}(x_{n_2}^i) d\mu_2 \right) \dots \right.\end{aligned}$$

$$\left( \int_{B_{t+1}} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \cdots \theta_n(x_n^i) d\mu_{t+1} \right) \theta_1(x_1^i) \cdots \theta_{n_1}(x_{n_1}^i) d\mu_1 \Big| + \delta.$$

No caso real, isto é,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , segue da Proposição 1.54 que

$$\begin{aligned} \varepsilon(T(u)) &\leq \int_{B_1} \left| \sum_{i=1}^m \left( \int_{B_2} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \cdots \theta_{n_2}(x_{n_2}^i) d\mu_2 \right) \cdots \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{B_{t+1}} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \cdots \theta_n(x_n^i) d\mu_{t+1} \right) \theta_1(x_1^i) \cdots \theta_{n_1}(x_{n_1}^i) \right| d\mu_1 + \delta \\ &\quad \vdots \\ &\leq \int_{B_1} \int_{B_2} \cdots \int_{B_{t+1}} \left| \sum_{i=1}^m \theta_1(x_1^i) \cdots \theta_n(x_n^i) \right| d\mu_{t+1} \cdots d\mu_2 d\mu_1 + \delta \\ &\leq \int_{B_1} \int_{B_2} \cdots \int_{B_{t+1}} \varepsilon(u) d\mu_{t+1} \cdots d\mu_2 d\mu_1 + \delta \\ &= \varepsilon(u) \mu_{t+1}(B_{t+1}) \cdots \mu_2(B_2) \mu_1(B_1) + \delta \\ &\leq \varepsilon(u) |\mu_{t+1}|(B_{t+1}) \cdots |\mu_2|(B_2) |\mu_1|(B_1) + \delta \\ &= \varepsilon(u) \|\mu_{t+1}\| \cdots \|\mu_2\| \cdot \|\mu_1\| + \delta \\ &\leq \varepsilon(u) (1 + \delta)^{t+1} + \delta. \end{aligned}$$

No caso complexo, isto é,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , segue da Proposição 1.59 e do Teorema 1.58 que

$$\begin{aligned} \varepsilon(T(u)) &\leq \int_{B_1} \left| \sum_{i=1}^m \left( \int_{B_2} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \cdots \theta_{n_2}(x_{n_2}^i) d\mu_2 \right) \cdots \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{B_{t+1}} \theta_{n_{t+1}}(x_{n_{t+1}}^i) \cdots \theta_n(x_n^i) d\mu_{t+1} \right) \theta_1(x_1^i) \cdots \theta_{n_1}(x_{n_1}^i) \right| d|\mu_1| + \delta \\ &\quad \vdots \\ &\leq \int_{B_1} \int_{B_2} \cdots \int_{B_{t+1}} \left| \sum_{i=1}^m \theta_1(x_1^i) \cdots \theta_n(x_n^i) \right| d|\mu_{t+1}| \cdots d|\mu_2| d|\mu_1| + \delta \\ &\leq \int_{B_1} \int_{B_2} \cdots \int_{B_{t+1}} \varepsilon(u) d|\mu_{t+1}| \cdots d|\mu_2| d|\mu_1| + \delta \\ &= \varepsilon(u) |\mu_{t+1}|(B_{t+1}) \cdots |\mu_2|(B_2) |\mu_1|(B_1) + \delta \\ &= \varepsilon(u) \|\mu_{t+1}\| \cdots \|\mu_2\| \cdot \|\mu_1\| + \delta \\ &\leq \varepsilon(u) (1 + \delta)^{t+1} + \delta. \end{aligned}$$

Em ambos os casos, fazendo  $\delta \rightarrow 0$  obtemos  $\varepsilon(T(u)) \leq \varepsilon(u)$ . Mostramos até aqui que o operador

$$T: X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n \longrightarrow (X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_{n_1}) \otimes_\varepsilon (X_{n_1+1} \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_{n_2}) \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon (X_{n_t+1} \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n)$$

é um isomorfismo isométrico. Pelo Lema 4.16, o espaço

$$(X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_{n_1}) \otimes_\varepsilon (X_{n_1+1} \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_{n_2}) \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon (X_{n_t+1} \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n)$$

é denso em

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_{n_1}) \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n),$$

e portanto denso em

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n).$$

Consideremos  $T$  tomando valores no completamento, isto é,

$$T: X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_n \longrightarrow (X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n).$$

Pelo item *i*) do Teorema 1.21 existe uma única extensão de  $T$ ,

$$\widehat{T}: X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n \longrightarrow (X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_{n_1}) \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon (X_{n_t+1} \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_n),$$

que é linear, contínua e isometria (logo injetora). Do item *ii*) do Teorema 1.21 segue que  $\widehat{T}$  é sobrejetora, e portanto uma bijeção. Pelo Corolário 1.9, o operador  $\widehat{T}$  é um isomorfismo. Além disso,

$$\widehat{T}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}) \otimes (x_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{n_2}) \otimes \cdots \otimes (x_{n_t+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ . □

# Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, T. R. - *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.
- [2] ARON, R. M. E RUEDA, P. - *p-compact homogeneous polynomials from an ideal point of view*, Function spaces in modern analysis, 61–71, Contemp. Math., **547**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D. E TEIXEIRA, E. - *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2ª edição, 2015.
- [4] BOTELHO, G. E TORRES, E. - *Two-sided polynomial ideals on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **462** (2018), 900–914. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.12.054>
- [5] COELHO, F. E LOURENÇO, M. - *Um Curso de Álgebra Linear*, 2ª edição, EDUSP, 2005.
- [6] DEFANT, A. E FLORET, K. - *Tensor Norms and Operator Ideals*, Amsterdam; New York: North-Holland, 1993.
- [7] DIMANT, V., GALICER, D. E GARCÍA, R. - *Geometry of integral polynomials, M-ideals and unique norm preserving extensions*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 1987–2012. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2011.12.021>
- [8] DINEEN, S. - *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, 1999. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0869-6>
- [9] FOLLAND, G. - *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, New York, 1984.
- [10] GARCÍA SANTISTEBAN, L. A. - *Técnicas de extensão de operadores multilineares em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2019.
- [11] GLOCKNER, H. - *Tensor products in the category of topological vector spaces are not associative*, arXiv:math/0307041v2[math.FA], 2004.
- [12] GRECU, B. E RYAN, R. - *Schauder bases for symmetric tensor products*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 459–469. <https://doi.org/10.2977/prims/1145475364>



- [13] JAIN, R. E KUMAR, A. - *Ideals in operator space projective tensor product of  $C^*$ -algebras*, J. Aust. Math. Soc. **91** (2011), 275–288. <https://doi.org/10.1017/S1446788711001479>
- [14] KADETS, M.I. E KADETS, V.M. - *Series in Banach spaces: conditional and unconditional convergence*, Operator Theory: Advances and Applications vol. 94, Birkhauser 1997. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9196-7>
- [15] KREYSZIG, E. R. - *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, 1989.
- [16] LASSALLE, S. E TURCO, P. - *Polynomials and holomorphic functions on  $\mathcal{A}$ -compact sets in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **463** (2018), 1092–1108. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.03.070>
- [17] LIMA, E. L. - *Curso de Análise Vol. 1*, Projeto Euclides. IMPA, 12ª edição, 2009.
- [18] LINDENSTRAUSS, J. E TZAFRIRI, L. - *Classical Banach Spaces*, Berlin; New York, Springer, 1977.
- [19] MUJICA, J. - *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover, 2010.
- [20] NACHBIN, L. - *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer, 1969.
- [21] NOGUEIRA, D. F. - *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2016.
- [22] RUDIN, W. - *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York , 3ª edição, 1987.
- [23] RYAN, R. A. - *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, London; New York, Springer, 2002. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.03.070>
- [24] SILVA, A. R. - *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- [25] TORRES, L. A. - *Adjuntos generalizados e germes de ideias de operadores lineares e polinômios homogêneos*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2019.
- [26] WILLARD, S. - *General Topology*, Dover Publications, 2004.