

620

MON
532.529
A862e
TES/MEM

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTRUTURA DA SUPERFÍCIE LIVRE DE UM FILME LÍQUIDO ESCOANDO
SOBRE UMA PLACA PLANA VERTICAL: FENÔMENO DO *FLOODING*.

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Uberlândia por IDALBERTO FERREIRA DE ATAÍDES como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, aprovada em 19/09/94 pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Milton Biage	Orientador - UFU
Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto	UFU
Prof. Dr. Ricardo Fortes de Miranda	UFU
Prof. Dr. Fernando de Almeida França	UNICAMP

532.529 A862e /TES/FU
DIRBI/UFU 04375/95



1000022602

Uberlândia, 19 de Setembro de 1994.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA	
CIRBI - DIRETORIA DE BIBLIOTECAS	
Procedência	DEEME
Valor R\$	doação
Fac. em	04/09/95
C.F.C.	
N. Fiscal/inst.	
Reg.	4375/95 Data 14/08/95
Vol.	Ex. 1

FU-00005658-1

À minha esposa Maríza, à minha filha Isadora, aos meus Pais e meu Irmão.

Meus agradecimentos

- **Ao Prof. Dr. Milton Biage, orientador da Dissertação, pelo apoio, pela confiança e inestimável colaboração;**
- **À minha esposa Mariza pelo incentivo e carinho;**
- **Aos meus pais e meu irmão pelo apoio e compreensão;**
- **Ao amigo Paulo Marcos de Barros Monteiro pela colaboração na confecção dos resultados e pelo apoio durante o curso;**
- **Aos colegas Gabriel Fernando Lopes e Marcos Alberto Lopes da Silva, pela colaboração no aspecto computacional;**
- **Ao colega Arlindo de Matos pela colaboração na confecção dos resultados;**
- **Ao colega Luís Fernando Marques pelo grande apoio;**
- **Ao Laboratório de Processamento Digital de Sinais do Departamento de Engenharia Elétrica, por permitir o uso da Estação RISC;**
- **Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.**

ATAÍDES, I. F.; Estrutura da Superfície Livre de um Filme Líquido Escoando sobre uma Placa Plana Vertical: Fenômeno do *Flooding*, Uberlândia, 1994, 135 p.

RESUMO: O fenômeno do *flooding*, que ocorre num escoamento vertical de um filme líquido, sujeito a uma vazão de gás a contra-corrente, tem sido estudado a 40 anos. A sua compreensão é muito importante para se resolver diferentes problemas que aparecem na Engenharia Química, na Engenharia de Petróleo e na Engenharia Nuclear. O *flooding* é um fenômeno de transição de um escoamento de um filme líquido a contra-corrente a um fluxo de gás, para um filme co-corrente. Realizou-se, neste estudo, um modelamento numérico que possibilita determinar, com precisão, este ponto de transição da configuração do escoamento. Apresenta-se, no primeiro capítulo, um abrangente apanhado bibliográfico a respeito do *flooding*, a fim de obter informações sobre os diferentes critérios utilizados no estudo do fenômeno, para caracterizar o ponto de transição, além de levantar as influências das características geométricas e das propriedades do escoamento como também fluido. No segundo capítulo, procede-se a formulação matemática para um escoamento de um filme líquido sobre uma parede plana vertical, a contra-corrente a um escoamento de um gás. Nesta formulação, aplica-se as equações de conservação para um escoamento bidimensional e isotérmico. Utilizando o teorema dos Π de Vashy-Buckingham, faz-se uma minuciosa análise dimensional, a fim de obter parâmetros que possibilitem estabelecer uma análise assintótica para as equações adimensionais e reduzir um conjunto de EDP's a uma única EDP, referente à espessura do filme líquido. No capítulo 3, a EDP referente a espessura do filme líquido é decomposta em uma equação não-linear para o problema permanente e outra, linear, referente ao problema transiente. Na solução da EDP para o problema permanente, aplica-se o método espectral, considerando-se especificamente o método da colocação de Chebyshev para a sua discretização. Em seguida, estuda-se o problema transiente, realizando-se uma análise de instabilidade temporal, a fim de obter o ponto de transição do escoamento, através de uma análise sobre o comportamento das velocidades de onda no plano complexo. No capítulo 4, apresenta-se os resultados referentes ao estudo descrito nos capítulos precedentes. Estes resultados são apresentados nos padrões existentes na literatura; isto é, uma carta de transição de escoamento contra-corrente para co-corrente. Esta carta é apresentada relacionando a velocidade superficial do líquido versus a velocidade superficial do gás. Estes resultados concordam razoavelmente bem com os existentes na literatura. E por último, apresenta-se a conclusão final sobre as vantagens e desvantagens do estudo e proposições para a continuação da pesquisa.

ESCOAMENTO BIFÁSICO. *FLOODING*. TRANSIÇÃO. INSTABILIDADE.

ATAÍDES, I. F. ; The Structure of the Free Surface of a Liquid Film Over a Vertical Flat Plate: The *Flooding* Phenomenon, Uberlândia, 1994, 135 p.

ABSTRACT: The *flooding* phenomenon occurs in a vertical liquid film flow with a gas flow in the counter-current sense. This problem has been studied during the last 40 years. The comprehension of this kind of flow is very important for many practical applications. In this work, the transition phenomenon of *flooding* is studied with the aid of a semi-analytical mathematical model. A set of partial differential equations are reduced to a single partial differential equation, using an asymptotic analysis. The partial differential equation is related to the liquid film thickness. This equation is split in its steady-state part and its transient part. The first equation (steady-state) is solved with the Chebyshev spectral method and the second equation (transient) is solved with the aid of a stability analysis. The main results are related to the *flooding* point determination. They are presented as a function of the liquid velocity and gas velocity. They agree very well with the experimental results existing in the current literature.

TWO PHASE FLOW. FLOODING. TRANSITION. INSTABILITY.

ESTRUTURA DA SUPERFÍCIE LIVRE DE UM FILME LÍQUIDO ESCOANDO SOBRE UMA PLACA PLANA: FENÔMENO *FLOODING*

S U M Á R I O

1. INTRODUÇÃO.	1
1.1. <i>Flooding</i> . Considerações Gerais.	1
1.2. Os escoamentos a Contra-Corrente Gás-Líquido e o Fenômeno do <i>Flooding</i>	4
1.3. O Efeito do Comprimento do Conduto.	11
1.4. Conclusão.	12
2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	17
2.1. Equações Governantes.	17
2.1.1. Em Todo o Filme Líquido.	18
2.1.2. Condições de Contorno.	19
2.2. Adimensionalização das Equações	19
2.3. Expansão em Séries Assintóticas.	22
2.4. Sistemas de Equações Referentes aos termos de $O(\epsilon^0)$ e $O(\epsilon^1)$. . .	25
2.5. Resolução dos Sistemas.	27
3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA NÃO-LINEAR DA ESPESSURA DO FILME.	30
3.1. Transformação da Equação da Espessura do Filme Líquido para a Aplicação da Teoria Espectral da Colocação	30
3.2. Equação para a Tensão Tangencial do Gás na Interface e Condições Limites em x	32

3.3. Considerações Gerais Sobre o Problema.	34
3.4. Solução do Problema, Utilizando a Técnica da Estabilidade de Solução Permanente.	35
3.4.1. Princípios Matemáticos da Técnica.	35
3.4.2. Aplicação da Técnica nas Equações do Problema em Estudo.	38
3.5. Método Espectral Para a Resolução do Problema.	41
3.5.1. Método de Colocação de Chebyshev.	41
3.5.2. Aplicação do Método Espectral da Colocação nas Equações do Problema	45
3.5.3. Análise do Comportamento da Espessura Flutuante do Filme \tilde{h}	51
4. DISCUSSÃO, RESULTADOS E CONCLUSÃO.	57
4.1. Discussão.	57
4.2. Resultados.	59
4.3. Conclusão.	77
5. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.	79
6. ANEXOS.	84
6.1. Anexo I. Análise Dimensional.	84
6.2. Anexo II.	97
6.2.1. Adimensionalização das Equações do Movimento e Continuidade.	97

6.2.2.	Adimensionalização das Condições de Contorno.	98
6.3.	Anexo III.	102
6.3.1.	Desenvolvimento em Série Assintótica das	
	Equações do Movimento e Continuidade.	102
6.3.1.1.	Equações do Movimento.	103
6.3.1.2.	Equação da Continuidade.	104
6.3.2.	Desenvolvimento em Série Assintótica das Condições	
	de Contorno.	104
6.3.2.1.	Condição Cinemática.	104
6.3.2.2.	Tensão Normal na Interface Gás-Líquido.	105
6.3.2.3.	Tensão Tangencial na Interface Gás-Líquido . . .	105
6.3.2.4.	Velocidade do Líquido na Parede.	106
6.3.3.	Resolução do Sistema que Acompanha ε^0	106
6.3.4.	Resolução do Sistema que Acompanha ε^j ($j = 1,2,3,\dots$). . .	115
6.4.	ANEXO IV. PROGRAMAS REFERENTES À DETERMINAÇÃO DA	
	ESPESSURA DO FILME LÍQUIDO PERMANENTE NO	
	ESCOAMENTO DE UM FILME A CONTRA-	
	CORRENTE.	115

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PAG.
1.1. Tipos de sistema experimental: (a) Sistema com injeção de líquido através de um reservatório: (b) Sistema com injeção de líquido através de parede porosa.	3
1.2. Principais geometrias de injeção e extração de líquido.	3
2.1. escoamento de um filme líquido sobre uma parede plana vertical, submetido ao escoamento de um gás a contra-corrente.	17
3.1. Filme líquido escoando sobre uma das paredes de um canal retangular vertical, na presença de um gás escoando a contra-corrente.	31
3.2. Diagrama de Bloco representativo do procedimento de cálculo da espessura do filme.	50
4.1. Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_l = 0.0088$ m/s.	65
4.2. Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_l = 0.022$ m/s.	66
4.3. Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_l = 0.035$ m/s.	67
4.4. Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_l = 0.053$ m/s.	68
4.5. Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x ,	

para $J_1 = 0.067$ m/s.	69
4.6. Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_1 = 0.088$ m/s.	70
4.7. Evolução da espessura média do filme líquido com relação a x , em função do Número de Reynolds do gás, para várias velocidades superficiais do líquido (J_1).	71
4.8. Evolução da espessura média do filme líquido com relação a x , em função do Número de Reynolds do gás, para várias velocidades superficiais do líquido (J_1).	72
4.9. Comparação da espessura do filme líquido obtida neste trabalho com aquelas determinadas pelo método do escoamento plano e com as obtidas experimentalmente em Biage, 1989.	73
4.10. Comparação da espessura do filme líquido obtida neste trabalho com aquelas determinadas pelo método do escoamento plano e com as obtidas experimentalmente em Biage, 1989.	74
4.11. Comparação da espessura do filme líquido obtida neste trabalho com aquelas determinadas pelo método do escoamento plano e com as obtidas experimentalmente em Biage, 1989.	75
4.12. Carta de <i>Flooding</i> (evolução da curva de transição para quatro estimativas).	76
I.1. Esquema que mostra o escoamento de um filme plano sobre uma parede vertical.	92

LISTA DE TABELAS

TABELA	PAG.
1.1. Características dos sistemas experimentais, das medidas realizadas pelo método de visualização.	15
I.1. Dimensões das grandezas da Eq. (I.1) no sistema fundamental M.L.T.. .	86

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

a	- Razão entre s e L	
a_k	- Coeficiente da série - Eq. (3.33)	
A	- Área	[m ²]
A	- Auto-vetor de F_h - Eq. (3.21)	
A	- Coeficiente da equação de f_i - Eq. (3.5)	
b_k	- Coeficiente da série - Eq. (3.33)	
b_k^α	- Matriz das dimensões da análise dimensional	
b1	- Largura do vão de entrada e de saída do líquido - Eq. (3.24)	[m]
B	- Coeficiente da equação de f_i - Eq. (3.5)	
c	- Velocidade de propagação de onda	[m/s]
C	- Coeficiente da equação de f_i - Eq. (3.5)	
c_k	- Coeficiente da série - Eq. (3.34)	
COEF	- Coeficiente	
d	- Coeficiente da série - Eq. (3.34)	
D	- Diâmetro hidráulico do canal	
e	- Coeficiente da série - Eq.(3.35)	
F	- Constante	
F_h	- Derivada de Fréchet - Eq. (3.19)	
f_i	- Correlação experimental para a tensão tangencial - Eq. (3.5)	
g	- Aceleração da gravidade	[m/s ²]
$\langle h \rangle$	- Espessura adimensional média de h em relação a x	
$h(x,t)$	- Espessura do filme líquido	[m]
h_i	- Solução permanente de h	
h_N	- Espessura de Nusselt	[m]
h_o	- Espessura de Nusselt - Anexo I	[m]
h_o	- Valor inicial de h - Eq. (3.15)	
la_k	- Parte imaginária do coeficiente a_k - Eq. (3.37)	
la_N	- Parte imaginária de h_N - Eq. (3.50)	
J_1^*	- Velocidade superficial adimensional do líquido - Cap. 1	[m/s]

J_g	- Velocidade superficial do gás	[m/s]
J_l	- Velocidade superficial do líquido	[m/s]
k	- Número de ondas	
K_p	- Relação entre forças gravitacionais do gás e do líquido - Eq. (3.8)	
K_v	- Relação entre forças viscosas e gravitacionais do gás - Eq. (3.9)	
L	- Comprimento do canal - Tab. 1.1	[m]
L	- Comprimento na análise dimensional	[m]
L	- Comprimento da injeção até a descarga da fase líquida	[m]
$L1$	- Metade do comprimento do canal L - Eq. (3.24)	[m]
m	- Número de grandezas fundamentais da análise dimensional - Anexo 1	
M	- Fluxo de massa - Eq. (4.5)	
M	- Massa na análise dimensional	[Kg]
$M()$	- Operador padrão diferencial - Eq. (3.37)	
n	- Número de grandezas totais da análise dimensional - Anexo 1	
N	- Delimitador do número de termos da série - Eq. (3.31)	
$O()$	- Ordem de grandeza do parâmetro colocado entre parênteses	
P	- Pressão	[N/m ²]
q	- Carga elétrica	[C]
Q	- Vazão por unidade de comprimento	[m ² /s]
Q_{vg}	- Vazão volumétrica do gás	[m ³ /s]
Q_{vl}	- Vazão volumétrica do líquido	[m ³ /s]
r	- Erro - Eq. (3.19)	
r	- Número de grandezas primárias da análise dimensional - Anexo 1	
Ra_k	- Parte real do coeficiente a_k - Eq. (3.37)	
Re	- Número de Reynolds	
Rh_N	- Parte real de h_N - Eq. (3.50)	
s	- Espessura do canal - Fig. 2.1	[m]
t	- Tempo	[s]
$T_k(x)$	- Função tentativa - Eq. (3.30)	
T	- Tempo na análise dimensional	[s]
u	- Velocidade na direção x	[m/s]
U	- Velocidade na análise dimensional	[m/s]

U_0	- Velocidade da superfície do filme plano - Eq. (I.15)	[m/s]
v	- Velocidade na direção y	[m/s]
x	- Coordenada longitudinal	[m]
x_j	- Pontos de colocação	
y	- Coordenada transversal	[m]
W	- Número de Weber	
z	- Razão entre parâmetros do líquido e do gás	

Símbolos Gregos:

α_A^β	- Matriz das dimensões da análise dimensional	
α_s	- Razão entre as áreas ocupadas pelo gás e pelo líquido - Eq.(3.6)	
β	- Coeficiente de amplificação temporal	
δ	- Função delta de Dirac	
ε	- Parâmetro perturbador	
θ	- Ângulo - Eq. (3.30)	
θ	- Temperatura	[K]
λ	- Auto-valor de F_h - Eq. (3.6)	
μ	- Viscosidade dinâmica	[N.s/m ²]
ν	- Viscosidade Cinemática	[m ² /s]
π	- Grupo dos Pi na análise dimensional - Anexo I	
ρ	- Densidade	[Kg/m ³]
σ	- Tensão Superficial	[N/m]
τ^{xx}	- Tensão normal	[N/m ²]
τ^{yx}	- Tensão tangencial no plano normal a y e na direção x	[N / m ²]
τ^{yy}	- Tensão normal	[N/m ²]
τ_i	- Tensão de cisalhamento do gás - Eq. (3.4)	[N/m ²]
ϕ	- Diâmetro do Canal - Tab. 1.1	[mm]
Φ	- Funções tentativas do método espectral - Eq. (3.31)	
Ψ	- Funções teste - Eq. (3.33)	

Subscritos:

- g - Referente à fase gás
- i - Interface
- l,L - Referente à fase líquida
- N - Nusselt
- o - Referente a um filme plano - Anexo I
- t - Transversal

Superscritos:

- * - Forma dimensional do parâmetro
- - Forma adimensional do parâmetro - Eqs. (3.1) e (3.2)
- i - Ordem de derivada parcial - Anexo III
- ~ - Flutuação

1. INTRODUÇÃO

Um importante apanhado bibliográfico a respeito do fenômeno denominado "*flooding*" pode ser encontrado em BIAGE [4], o qual, devido à sua forma consistente e clara, será aqui resumida. Biage (1989) mostra, concisamente, a evolução no estudo do fenômeno *flooding*, fazendo um apanhado dos pontos enfocados nas mais importantes pesquisas dos últimos anos.

No final deste capítulo, será apresentado um resumo geral que finaliza com o conceito do *flooding* adotado neste trabalho.

1.1. FLOODING. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O fenômeno do *flooding*, que ocorre num escoamento vertical de um filme líquido, sujeito a uma vazão de gás a contra-corrente, tem sido estudado a 40 anos. A compreensão deste fenômeno é muito importante para se resolver diferentes problemas que aparecem na Engenharia Química, Engenharia de Petróleo ou na Engenharia Nuclear.

O escoamento de um filme líquido sobre a parede de um canal, na presença de um gás escoando a contra-corrente, pode existir somente para um intervalo de vazões de gás abaixo de um certo limite, para uma vazão de líquido fixa. Acima deste limite, experimenta-se uma forte diminuição da vazão de líquido descendente sob forma de filme. O conjunto composto pela vazão de gás crítica, mais a vazão de líquido que corresponde a esta limitação, é considerada definição do que se denomina o Ponto de *Flooding*.

O escoamento a contra-corrente entre um gás e um líquido pode apresentar três configurações (Taitel e Barnea, 1983):

- escoamento sob forma de filme
- escoamento sob forma de bolhas
- escoamento sob forma de pistões de líquido, constituído de uma longa bolha de Taylor separando estes pistões.

O escoamento sob forma de filme é aquele que pode existir dentro de um

amplo intervalo de vazões de líquido e de gás, com uma grande diferença de pressão entre as extremidades de entrada e saída de líquido. Por este fato, esta é a forma mais comum entre os escoamentos a contra-corrente.

O *flooding*, em um escoamento sob forma de filme, é estudado através de dois tipos de geometria representadas na Fig. 1.1. Na primeira geometria, o líquido é introduzido por intermédio de um reservatório, na extremidade superior do canal, enquanto que na segunda, o líquido é injetado por meio de uma porção de parede porosa, situada entre as extremidades do conduto.

Num escoamento sob forma de filme, o termo *flooding* é utilizado para descrever vários aspectos da transição de um escoamento a contra-corrente para um escoamento co-corrente. Os vários critérios propostos para caracterizar esta transição são: a manutenção de um filme suspenso, o desencadeamento do processo de dispersão de gotículas, formação de uma ponte ou de um pistão de líquido através do canal, a existência de uma configuração de escoamento caótico, e o aumento brutal do gradiente de pressão na seção de ensaio.

Em consequência, os valores das vazões de gás e líquido, correspondentes ao ponto de *flooding*, diferem e as correlações empíricas ou os modelos teóricos desenvolvidos não concordam.

Um outro fator que contribui para a dispersão dos resultados experimentais é a utilização de diferentes tipos de geometria de injeção e de extração do gás e do líquido. A Fig. 1.2 mostra as principais geometrias de injeção de líquido e de gás empregadas.

Uma grande parte das pesquisas sobre os escoamentos, sob forma de filme a contra-corrente, realizadas até aqui, têm como alvo principal o estudo das influências das propriedades dos fluidos e das geometrias experimentais (diâmetros, comprimento do conduto, mecanismos de injeção e extração de líquido, etc). Somente algumas poucas trataram do comportamento do fluxo antes e após o *flooding*, a fim de melhor explicar a causa e o mecanismo da transição. De fato, após vários anos de estudos, o mecanismo do *flooding* é ainda obscuro. Assim, segundo os pesquisadores, o comportamento da interface gás-líquido, antes e depois do *flooding*, é descrito de maneira completamente contraditória. Além disso, os fenômenos de arrastamento e deposição de gotículas ainda não foram estudados

em escoamentos sob forma de filme a contra-corrente.

Faz-se necessário reforçar que, neste capítulo, examina-se a evolução das pesquisas existentes, tratando das descrições dos fenômenos.

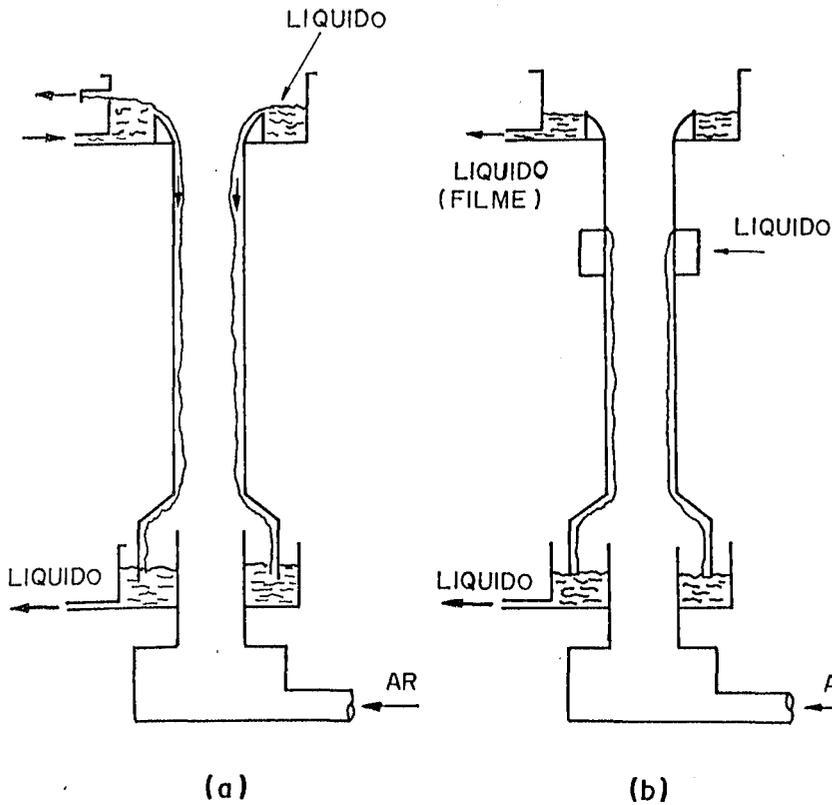


Figura 1.1 - Tipos de sistema experimental: (a) Sistema com injeção de líquido através de um reservatório; (b) Sistema com injeção através de parede porosa.

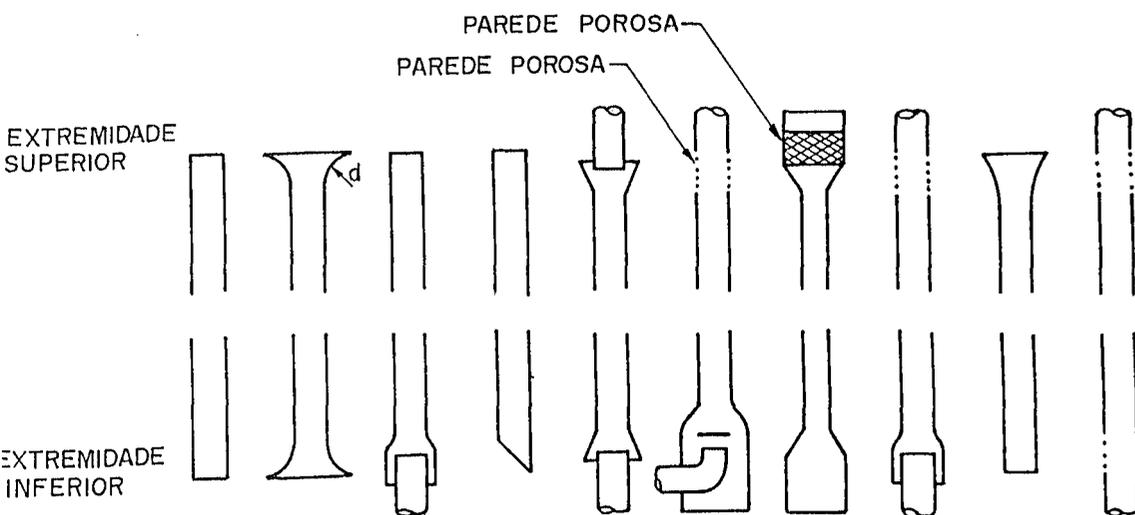


Figura 1.2 - Principais geometrias de injeção e extração de líquido

1.2. OS ESCOAMENTOS A CONTRA-CORRENTE GÁS-LÍQUIDO E O FENÔMENO DO *FLOODING*

Este ítem apresenta um resumo das principais publicações contidas na literatura especializada a respeito do comportamento da interface gás-líquido de um escoamento a contra-corrente. As características dos sistemas experimentais, utilizados nos respectivos estudos, são apresentadas na Tabela 1.1.

Segundo Wallis (1962 a,b), antes do *flooding*, a interface pode apresentar uma configuração caótica, de forma que as ondas de perturbação se propagam da parte inferior na direção da parte superior do tubo. Isto ocasiona uma diminuição da vazão de líquido extraído abaixo da vazão de líquido injetado. Quando do *flooding*, o autor observou, primeiro, a presença de pontes e, num estágio posterior, a presença de pistões de líquido. No primeiro trabalho (Wallis, 1962 a), o autor define o *flooding* pela presença de pontes de líquido. No trabalho seguinte (Wallis, 1962 b), define-se o ponto de *flooding* como aquele onde o filme líquido se afila (ou adelgaça) na subida dentro do tubo, deixando seca uma parte deste, abaixo da zona de injeção (manutenção do filme suspenso).

Hewitt e Wallis (1963) estudaram o fenômeno do *flooding* num sistema com injeção de líquido através de uma parede porosa. Observou-se que, antes do *flooding*, a interface gás-líquido torna-se lisa ou apresenta uma aparência ligeiramente ondulada. Momentos antes do *flooding*, a superfície do filme líquido apresenta-se com fortes intumescências em equilíbrio. Quando do *flooding*, estas intumescências estouram e a água é enviada na direção da extremidade superior do tubo. Neste momento, o filme líquido torna-se caótico por toda parte e grandes ondas de perturbação, deslocando-se sob forma de esteira, aparecem na superfície do filme. Concluiu-se que o *flooding* resulta de um brusco processo, provavelmente, associado ao rápido crescimento de uma onda sobre a superfície do filme líquido, ao invés de um retro-arrastamento do fluxo de líquido sob o efeito do cisalhamento interfacial, como proposto por Wallis (1962, b).

Shearer e Davidson (1965) constataram que o *flooding* aparece em duas posições diferentes, de acordo com a vazão de líquido. Para uma vazão considerada fraca ($J_1^{*1/2} < 0,4$), o *flooding* é caracterizado por uma ponte líquida numa zona

próxima da extração. Para uma elevada vazão ($J_1^{*1/2} > 0,6$), a ponte aparece numa zona próxima da injeção.

Clift e outros (1966) observaram que, para uma velocidade do gás inferior àquela quando do *flooding*, o filme líquido é perturbado por ondas que tornam-se visíveis um pouco abaixo do ponto de injeção do líquido. As amplitudes destas ondas aumentam à medida que elas se deslocam na direção da parte inferior do tubo. Para uma velocidade do gás mais próxima daquela referente ao *flooding*, estas ondas crescem em amplitude e o ponto de aparecimento destas se aproxima da entrada do líquido. Para um grande número de Reynolds do filme líquido, as ondas descritas anteriormente são substituídas por ondulações menores e aleatórias. Quando do *flooding*, as ondas sobre o filme líquido tornam-se suficientemente grandes para formar as pontes ou os pistões de líquido. Estas pontes são dispersas sob forma de gotículas as quais são arrastadas pelo escoamento do gás.

Pushkina e Sorokin (1969) também estudaram o fenômeno *flooding*, utilizando os dois tipos de mecanismos de injeção de líquido: a parede porosa e o reservatório. O ponto de *flooding* é suposto atingido quando uma parte do líquido é descendente sob forma de filme e a outra ascendente sob forma de gotículas, dentro do meio gasoso. Se for usada a parede porosa como mecanismo de injeção, as gotículas arrastadas pelo escoamento de gás se depositam sobre a parede do tubo, acima da zona de injeção de líquido, formando um filme que escoar na direção desta região de injeção. Para uma velocidade de gás superior àquela quando do *flooding* (segundo a definição de *flooding* utilizada aqui), o filme líquido, antes descendente, irá subir na direção da extremidade superior do tubo. Esta configuração é considerada pelos autores como o limite superior do *flooding*.

Tobilevich e outros (1968) observaram, para um sistema água-ar, que gotículas eram dispersas para uma velocidade de gás superior a 10 m/s. Quando a velocidade do gás atinge o valor de 15 m/s, produz-se o fenômeno de retroarrastamento do filme líquido. Quando o líquido era uma mistura água-açúcar (mais viscoso do que a água somente), os autores observaram, que numa velocidade da ordem de 6,5 m/s, as ondas circulares se deslocam na direção da parte superior do tubo, ao longo do filme líquido, o qual escoar na direção da parte inferior deste. Quando a velocidade do gás aumenta, a amplitude das ondas cresce e, finalmente,

o escoamento a contra-corrente se transforma em um escoamento co-corrente.

Até 1969, observou-se que as descrições do mecanismo de *flooding*, apresentadas pelos investigadores citados, podem ser classificadas em duas categorias: (i) formação de uma ponte de líquido através do conduto, devido ao forte crescimento de uma onda sobre a superfície do filme; (ii) retro-arrastamento do filme líquido (filme suspenso), o que caracteriza o fim do processo de transição.

O primeiro mecanismo possibilitou o desenvolvimento de várias teorias a respeito do *flooding*. Pode-se citar: Shearer e Davidson (1965), Jameson e Cetinbudaklar (1969), Imura e outros (1977), McQuillan e outros (1985), Bachir (1987), etc.

O segundo mecanismo também conduz a uma outra série de modelizações teóricas e empíricas a respeito do *flooding*. Pode-se citar: Wallis e Makkenchery (1974), Wallis e Kuo (1976), Eichhorn (1980), Mishima e Nishihara (1980).

Stainthorp e Batt (1967) introduziram um novo ponto de vista a respeito do *flooding* e, em particular, sobre a evolução da estrutura da interface gás-líquido. Estes autores mediram a amplitude, a frequência e a velocidade de ondas num escoamento anular a contra-corrente. Eles constataram uma estrutura de interface gás-líquido similar àquela descrita por Stainthorp e Allen (1965), que estudaram, anteriormente, a estrutura de um filme líquido, escoando sobre a parede de um tubo vertical, na ausência de escoamento de gás a contra-corrente. Esta estrutura é composta por várias regiões:

- ▣ Uma região de filme praticamente liso, compreendida entre a injeção e o ponto de aparição visual das ondas.
- ▣ Uma região estreita formada por ondas regulares que tendem a tornar-se sinusoidais.
- ▣ Uma região extensa, onde as amplitudes das ondas crescem rapidamente e suas formas se modificam.
- ▣ Uma última região, em que as ondas parecem ser ondas solitárias subsistentes das ondulações do substrato.

Os autores constataram também que a taxa de crescimento das ondas

(variação da amplitude de onda em função da variação da velocidade do gás), é muito maior na zona próxima à injeção do filme líquido do que na zona próxima de sua extração. Eles observaram ondas de grande amplitude ($\cong 0,4$ mm) na zona intermediária, mas sem possibilidade de formarem pontes sobre o conduto, cujo diâmetro era de 34,5 mm. A medida de velocidade de ondas não mostrou a presença de ondas ascendentes sobre a superfície do filme líquido.

Suzuki e Ueda (1977) observaram a seguinte estrutura da interface do filme líquido: à proporção que a velocidade do gás aumenta, a amplitude das ondas também aumenta. Uma onda de grande amplitude se forma próxima da extremidade inferior da seção de ensaio. Logo que a amplitude desta onda atinge um certo valor, ela começa a se alongar na direção circunferencial. A crista desta onda é então dispersa sob forma de gotículas. A onda e as gotículas são arrastadas na direção da parte superior do tubo, pelo escoamento do gás. Quando esta onda chega ao nível da injeção de líquido, o filme torna-se fortemente perturbado. Uma parte do líquido sobe, em forma de filme, na direção da extremidade superior do tubo e uma outra parte continua na descendente. Para uma velocidade ainda maior, todo o líquido sobe, na forma de filme, em direção à parte superior do tubo.

As observações destes autores introduzem uma nova questão sobre o mecanismo do *flooding*. Elas tendem provar que este fenômeno resulta da subida de uma onda, ao invés da formação de ponte, pelo líquido, no conduto.

Dukler e Smith (1979) afirmaram que, dependendo da vazão de líquido, há três mecanismos que conduzem ao *flooding*:

- ▣ CASO I : baixa vazão de líquido ($Re_l = 310$ e $Re_l = 776$);
- ▣ CASO II : elevada vazão de líquido ($Re_l = 3105$);
- ▣ CASO III: vazão de líquido intermediária ($Re_l = 1552$).

Para uma baixa vazão de líquido (CASO I), a estrutura da interface gás-líquido praticamente não se modifica antes que a velocidade do gás tenha atingido uma velocidade próxima daquela correspondente ao *flooding*. Próximo do *flooding*, a amplitude de uma onda, situada logo abaixo da injeção do líquido, cresce rapidamente. Pequenas gotículas se depositam sobre a parede interna do tubo,

logo acima da injeção, onde se constata um aumento da perda de pressão. Quando do *flooding*, todo o filme líquido é perturbado. Produz-se um brusco aumento do arrastamento de gotículas e as ondas se formam sobre ele. Estas ondas se deslocam na direção da parte superior do tubo, ultrapassando a região de injeção do líquido. Neste momento, constata-se uma considerável perda de pressão generalizada dentro do tubo. Um filme bastante perturbado apresenta-se acima da zona de injeção de líquido. A espessura média do filme descendente aumenta por causa da formação de ondas estacionárias sobre a sua superfície. Conclui-se que, para o CASO I:

- O *flooding* é produzido próximo da injeção do líquido por causa do crescimento de ondas estacionárias.
- Nenhuma onda forma uma ponte antes e depois do *flooding*.

Para o CASO II, as características do escoamento são as seguintes:

- Quando a velocidade do gás é nula, o filme líquido é liso próximo da zona de injeção e ondulado próximo da zona de extração do líquido.
- Quando a velocidade do gás se aproxima daquela quando do *flooding*, as gotículas são arrastadas pelo meio gasoso. Estas são depositadas sobre a parede interna do tubo, acima da injeção, formando um filme líquido delgado que torna a descer na direção desta zona de injeção.
- Quando a velocidade do gás se aproxima ainda mais daquela quando do *flooding*, o filme líquido parece perturbado numa faixa de, aproximadamente, quinze centímetros abaixo da zona de injeção. As amplitudes das ondas formadas nesta região permanecem constantes e são caracterizadas pelo arrastamento de gotículas.
- Quando do *flooding*, nenhuma onda estacionária se forma sobre o filme líquido.

Para uma vazão de líquido intermediária (CASO III), o *flooding* se apresenta da mesma maneira que no CASO II. No ponto de *flooding*, a estrutura das ondas

sobre o filme líquido não se modifica muito, exceto dentro de uma zona de, aproximadamente, quinze centímetros abaixo de sua zona de injeção. Nesta região, a configuração do escoamento é extremamente caótica. Os autores observaram a presença de uma grande onda, cuja crista é dispersa sob forma de gotículas.

Barathan e outros (1978), utilizando o sistema de injeção através de reservatório, descobriram que a estrutura da interface gás-líquido poderá ser caracterizada por três regimes diferentes, segundo os valores das tensões de cisalhamento interfacial e de cisalhamento na parede:

- Quando o cisalhamento interfacial é desprezível em relação ao cisalhamento na parede, a vazão de líquido injetado desce sob a forma de um filme liso, sem ser perturbado pela vazão de gás ao longo do tubo. Este é o chamado regime liso.
- Quando o cisalhamento interfacial é muito maior que o cisalhamento na parede, a interface gás-líquido apresenta uma configuração perturbada e ondulada ao longo do tubo. A vazão de líquido extraída é muito menor do que a injetada. O filme torna-se mais espesso e ondulado, ocasionando um aumento do cisalhamento interfacial. Este é o chamado regime de filme rugoso.
- Existe um regime intermediário aos dois citados acima, caracterizado por um regime de filme liso na parte superior do tubo e um regime de filme rugoso na parte inferior. A descontinuidade entre as duas espessuras do filme é instável e pode oscilar dentro do tubo.
- Finalmente, uma situação onde o filme líquido é arrastado na direção da parede superior do tubo, graças a uma vazão de gás elevada. Nesta situação, a parede, na parte inferior do tubo, torna-se seca.

Whalley e McQuillan (1985) analisaram a hipótese segundo a qual o fenômeno de *flooding* ocorre devido ao crescimento de uma onda sobre a superfície do filme líquido. Por isto, eles geraram as ondas sobre o filme através de injeção pontual de líquido e observaram o comportamento da interface. Estas ondas foram geradas em vários pontos entre a injeção e a extração do líquido. Os autores

utilizaram dois procedimentos de injeção de ondas: ou uma única onda, ou várias ondas. A influência destas ondas sobre o comportamento da interface foi estudado para duas vazões de líquido: uma considerada baixa (37,8 g/s) e outra considerada elevada (88,2 g/s).

Os resultados experimentais obtidos, com a injeção de uma onda única, confirmam a hipótese de crescimento da onda até a amplitude crítica. As observações podem se resumir em:

- A perturbação do filme é provocada pela onda injetada.
- É possível desencadear o *flooding*, através da geração de uma onda dentro do filme líquido, quando a vazão de gás é bastante próxima daquela correspondente ao *flooding*.
- A geração da onda na extremidade superior do tubo é mais susceptível de provocar o *flooding* do que a geração no centro ou na parte inferior.

Os resultados experimentais, correspondentes à situação em que várias ondas são injetadas no filme, mostram que esta injeção de ondas provoca o *flooding* para uma vazão de gás inferior àquela para a qual este é produzido sem a injeção de ondas. Isto não é verdadeiro se a frequência de injeção for inferior a 1 Hz.

Maron e Dukler (1984) basearam-se nas observações de Dukler e Smith (1979), como também nas de outros investigadores, para conceituar o *flooding* dentro de dois tipos de sistemas experimentais. Para o sistema com injeção feita através de reservatório, o *flooding* é definido como um brusco crescimento da ondulação da superfície do filme, acompanhado pela dispersão de gotículas. Para o sistema com injeção através de parede porosa, o *flooding* é definido pela existência de um filme líquido ascendente, acima da zona de injeção. Os autores confirmam que o *flooding* é sempre acompanhado por um brusco aumento da perda de pressão.

Muito recentemente, Zabarás e Dukler (1988) mediram a espessura do filme, o gradiente de pressão e o atrito na parede. Foi constatado que próximo da zona de injeção do líquido, para uma velocidade de gás inferior àquela quando do *flooding*, a superfície do filme é lisa ou geralmente coberta por ondas capilares. Quando a

significativa sobre a velocidade de *flooding*, para velocidades superficiais, do filme líquido, mais elevadas. Além disso, eles constataram que o efeito do comprimento do canal tende a diminuir quando o líquido é mais viscoso. Sudo e Ohnuki (1984) concluíram que a velocidade do *flooding* cresce com o comprimento do canal para comprimentos muito pequenos (entre 3 e 50 mm) e que esta velocidade decresce com o comprimento para os comprimentos médios (entre 50 e 250 mm). Zabarás e Dukler (1988) verificaram que o comprimento do conduto não apresenta praticamente nenhum efeito sobre a velocidade do *flooding*. Taitel e Barnea (1982) indicam que o efeito do comprimento do conduto vem de variações do atrito interfacial, que depende da geometria do canal (diâmetro e comprimento). Maron e Dukler (1984) indicam que o efeito do comprimento é devido ao mecanismo de depósito de gotículas sobre o filme líquido. Se o comprimento do conduto é aumentado, a chegada de gotículas acima da injeção do líquido torna-se difícil. A deposição se faz, sobre o filme líquido, abaixo da injeção, o que ocasiona uma diminuição da velocidade do *flooding*. Whalley e McQuillan (1985) indicam que a influência do comprimento do conduto está de acordo com a teoria a qual surge que o *flooding* é provocado pelo crescimento de uma onda até uma amplitude limite. Segundo os autores, para vazões de gás e de líquido fixas, a taxa de crescimento de uma onda é independente do comprimento do conduto, mas a distância entre a injeção e a posição onde uma onda atinge a amplitude máxima crítica, para desencadear o *flooding*, depende do seu comprimento. Em consequência, o *flooding* se desencadeia quando o comprimento do conduto for suficientemente grande para permitir o crescimento de uma onda até a amplitude crítica.

1.4. CONCLUSÃO

Até 1969, os investigadores definiram o *flooding* a partir de observações visuais, sem medir as espessuras do filme líquido, à exceção contudo de Hewitt e Wallis (1963) como também de Stainthorp e Batt (1967). As duas definições adotadas são: ou a existência de uma ponte líquida através do conduto, ou o retro-

arrastamento do filme líquido em direção à parte do canal, superior à injeção de líquido.

Porém o mecanismo de formação de ponte deve ser eliminado, como resultado das medições da espessura do filme líquido realizadas por Stainthorp e Batt (1967); Suzuki e Ueda (1977), Dukler e Smith (1979) além de Zabarás e Dukler (1988). O mecanismo de subida do líquido também deve ser abandonado, no que diz respeito à definição de *flooding*, porque corresponde ao fim da transição e não ao seu desencadeamento.

A partir de 1977, a maioria dos autores (Suzuki e Ueda, 1977; Dukler e Smith, 1979; Whalley e McQuillan, 1985; etc) apontaram como definição do *flooding*, o início da subida de uma onda de grande amplitude. Entretanto, as medidas de velocidade das ondas (Stainthorp e Batt, 1967 e Zabarás e Dukler, 1988) mostram que este fenômeno parece não existir.

Enfim, outros autores (assim como Bachir, 1987) apontaram como critério de desencadeamento do *flooding*, dentro de seus estudos teóricos, o brusco aumento da amplitude de uma onda, fenômeno que seria susceptível de provocar a dispersão de gotículas. Entretanto as experiências (Pushkina e Sorokin, 1969; Zabarás e Dukler, 1988) mostram que pode muito bem haver o arrastamento de gotículas sem haver aumento brutal da espessura do filme.

Em conclusão, parece poderem ser eliminados quatro critérios de desenvolvimento do *flooding*: o de formação de ponte, retro-arrastamento do filme líquido, elevação de uma onda de grande amplitude e, por fim, aumento brutal da espessura do filme.

O termo *flooding* tem sido utilizado para descrever vários aspectos da transição entre um escoamento de um filme a contra-corrente para um escoamento co-corrente. Em função disso, utilizou-se várias definições do fenômeno de *flooding* como também estabeleceu-se vários critérios para caracterizar esta transição (parágrafo 1.1). A definição do *flooding* depende do processo de introdução do líquido: quer por um reservatório situado na extremidade superior do conduto, ou por injeção no meio da seção de ensaio, através de uma parede porosa.

Neste estudo, considerando a injeção como sendo feita através de uma parede porosa, a definição do *flooding* é dada como sendo o ponto (par vazão de

líquido injetado - vazão gasosa) antes do qual a totalidade do líquido escoar na direção da base da seção de ensaio e após o qual uma parte do líquido é arrastado na direção da parte superior desta seção, formando um escoamento de um filme co-corrente, e a outra parte continua a escoar em direção à base, a contra-corrente com a vazão do gás.

Esta definição dada ao *flooding* corresponde, na realidade, a uma transição na estrutura da espessura do filme líquido descendente. Esta mudança constitui um fato, provavelmente, mais fácil de prever numa modelização teórica.

Tabela 1.1: Características dos sistemas experimentais, das medidas realizadas pelo método de visualização

AUTORES	Mecanismos de Injeção de Líquido a) reservatório; b) meio poroso	Medidas Realizadas (outras além)	Geometria do Canal Φ : diâmetro L: comprimento (mm)	Método de Visualização
Wallis (1962a)	a	-	$\Phi = 12,7; 19,5; 25,4$ e $50,80$ L = ?	visual
Wallis (1962b)	a	-	$\Phi = 19,5; 25,4$ L = ?	visual
Hewitt e Wallis (1963)	b	- Veloc. das ondas - Espessura média	$\Phi = 31,75$ L = 903	cinemato-gráfico (alta velocidade)
Shearer e Davidson (1965)	a	-	$\Phi = 38,10$ L = ?	visual
Clift e outros (1966)	b	-	$\Phi = 63,5$ L = 1806	visual
Pushkina e Sorokin(1969)	a e b	-	$\Phi =$ (entre 6 e 309) L = 2500	visual
Tobilevich e outros (1968)	b	-	$\Phi = 32,7$ e $52,5$ L = 2500 e 3000	visual
Stainthorp e Batt (1967)	b	- velocidade, amplitude e frequência das ondas	$\Phi = 34,5$ L = 700	visual
Suzuki e Ueda (1977)	b	- espessura média	$\Phi = 10,18$ e $28,8$ L = 590, 1540 e 1830	fotos (alta velocidade)
Dukler e Smith (1979)	b	- espessura média - gradiente de pressão	$\Phi = 50,8$ L = 1505	visual

Tabela 1.1: Características dos sistemas experimentais, das medidas realizadas pelo método de visualização (continuação)

AUTORES	Mecanismos de Injeção de Líquido a) reservatório; b) meio poroso	Medidas Realizadas (outras além)	Geometria do Canal Φ : diâmetro L : comprimento (mm)	Método de Visualização
Bharathan e outros (1978)	a	- espessura média - gradiente de pressão	$\Phi = 25$ e 51 L = 1520	visual
Whalley e McQuillan (1985)	b	-	$\Phi = 32$ L = 500, 1000 e 2000	visual
Zabaras e Dukler (1988)	b	- espessura instantânea e média - atrito na parede - velocidade e amplitude das ondas	$\Phi = 50,8$ L = 310, 2200 e 3800	visual
Biage (1989)	b	- espessuras média e flutuante - Gradiente de pressão - velocidade, amplitude e frequência das ondas	<u>Canal retangular</u> L = 1050, 700 e 300	Câmara rápida: 2000 imagens/s (colorida)

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

O sistema em estudo constitui-se de um filme líquido, escoando sobre uma placa plana vertical, submetido a um escoamento de gás a contra-corrente. A Fig. 2.1 apresenta, esquematicamente, um conduto retangular com um sistema de alimentação do líquido na parte superior de uma de suas paredes e a respectiva descarga na parte inferior da mesma. Tanto a alimentação quanto a extração de líquido são feitas através de parede porosa. O líquido escoo por gravidade.

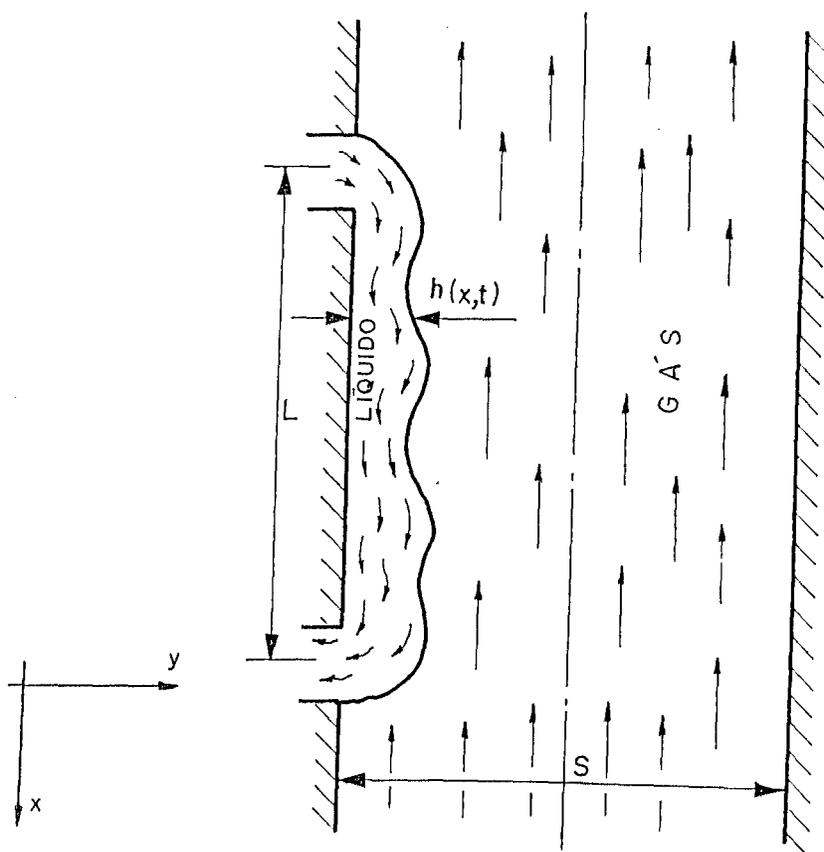


Figura 2.1- Escoamento de um filme líquido sobre uma parede plana vertical submetido ao escoamento de um gás a contra-corrente.

2.1. EQUAÇÕES GOVERNANTES

As hipóteses restritivas utilizadas são as seguintes:

- (H1) O escoamento é isotérmico
- (H2) Não há mudança de fase
- (H3) O escoamento é bidimensional

(H4) Os fluidos são Newtonianos e incompressíveis

(H5) A tensão superficial é constante e constitui a única propriedade da interface

(H6) Ausência de escorregamento na parede.

Em virtude de (H3), utiliza-se um sistema de coordenadas (x,y) como indicado na Fig. 2.1, ou seja, uma coordenada de fluxo longitudinal e uma coordenada transversal, na direção normal à parede. Despreza-se a outra coordenada transversal, cuja direção é ortogonal a estas duas. As componentes do vetor velocidade V , no líquido, serão notadas u e v nas direções x e y , respectivamente.

Devido às hipóteses levantadas anteriormente, o sistema de equações que rege o escoamento do filme líquido é o seguinte:

2.1.1. EM TODO O FILME LÍQUIDO

a) As Equações do Movimento (Navier-Stokes)¹

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} - \nu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} - \nu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) = 0 \quad (2.2)$$

b) A Equação da Continuidade

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.3)$$

^{1*} Representa os termos dimensionais

2.1.2. CONDIÇÕES DE CONTORNO

a) Condição Cinemática na Interface Gás-Líquido

$$v^* = \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*}; \quad y^* = h^*(x^*, t^*) \quad (2.4)$$

b) Tensão Normal na Interface Gás-Líquido

$$P^* - P_G^* + (\tau_G^{*yy} - 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y^*}) \frac{[1 + (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]}{[1 - (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]} + \frac{\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}}}{[1 + (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]^{\frac{3}{2}}} \sigma^* = 0 \quad (2.5)$$

em

$$y^* = h^*(x^*, t^*)$$

c) Tensão Tangencial na Interface Gás-Líquido

$$\tau_G^{*yx} - \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) - 2(\tau_G^{*xx} - 2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x^*}) \frac{\frac{\partial h^*}{\partial x^*}}{[1 - (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]} = 0 \quad (2.6)$$

em

$$y^* = h^*(x^*, t^*)$$

d) Velocidade do Líquido na Parede

$$u^* = v^* = 0; \quad em \quad y^* = 0. \quad (2.7)$$

2.2. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As Equações Diferenciais Parciais (EDP) mostradas regem o sistema esquematizado pela Fig. 2.1. Estas EDP's deverão ser transformadas para se obter

uma única Equação Diferencial Parcial para a espessura do filme líquido adimensional (h), em função da variável de comprimento adimensionalizada (x) e do tempo (t), também adimensionalizado. Este procedimento exige uma grande quantidade de manipulações matemáticas. As principais, são apresentadas em anexos, no final deste estudo.

O primeiro passo será a análise dimensional dos termos envolvidos neste sistema de equações que será objeto do Anexo I. Neste anexo encontra-se um importante estudo a respeito do grau de interferência de cada variável no sistema, traduzido pela presença do elemento perturbador ε , resumindo-se numa análise de ordem de grandeza.

No final do Anexo I, são apresentados os grupos usados na adimensionalização de cada variável do sistema. A partir destes, torna-se possível a estruturação do Anexo II, que trata, exatamente, da adimensionalização das equações do sistema, constituído das equações (2.1) até a (2.7). Portanto, do Anexo I, obtém-se:

$$u^* = \left(\frac{gQ^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}} u ; \quad v^* = \varepsilon \left(\frac{gQ^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}} v \quad (2.8)$$

$$x^* = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}} x ; \quad y^* = \left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}} y ; \quad t^* = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{v^2}{g^2Q}\right)^{\frac{1}{3}} t \quad (2.9)$$

$$h^* = \left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}} h ; \quad P^* = \frac{1}{\varepsilon} (\rho g)^{\frac{2}{3}} (\mu Q)^{\frac{1}{3}} P \quad (2.10)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{\varepsilon^3} (\rho g)^{\frac{1}{3}} (\mu Q)^{\frac{2}{3}} \sigma ; \quad \tau^{*yx} = \mu \left(\frac{g^2Q}{v^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tau^{yx} . \quad (2.11)$$

Para se proceder a adimensionalização já mencionada, basta substituir estes parâmetros nas equações, como foi feito no Anexo II, resultando nas seguintes relações:

a) Para as Equações do Movimento (Navier-Stokes):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 - \frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon Re \left(-\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \epsilon^3 Re \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \epsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

b) Para a Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

c) Para a Condição de Contorno Cinemática na Interface Gás-Líquido:

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.15)$$

d) Para a Tensão Normal na Interface Gás-Líquido:

$$\begin{aligned} & (az)^2 \left[P^2 - \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \epsilon \left\{ -2az \left[zP^2 + (P_G - a^2 \tau_G^{yy}) P - z \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} + \\ & + \epsilon^2 \left\{ z^2 \left[\left(a \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right] P^2 + 2z \left(P_G - 3a^2 \tau_G^{yy} - 2a^2 z \frac{\partial v}{\partial y} \right) P + (P_G - a^2 \tau_G^{yy})^2 - \right. \\ & \left. - \left(z \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \left[1 - 2 \left(a \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (2.16) \end{aligned}$$

onde:

$$z = \frac{\mu \left(\frac{g^2 Q}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{\mu_G \left(\frac{g^2 Q}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}}_G} ; \quad a = \frac{\epsilon}{L}$$

e) Para a Tensão Tangencial na Interface Gás-Líquido:

$$\begin{aligned} \tau_G^{yx} - z \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon [-2a\tau_G^{xx} \frac{\partial h}{\partial x}] + \varepsilon^2 [-(\tau_G^{yx} - z \frac{\partial u}{\partial y}) (\frac{\partial h}{\partial x})^2 - z \frac{\partial v}{\partial x} + \\ + 2(\tau_G^{xx} + 2z \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial h}{\partial x}] + \varepsilon^4 [z \frac{\partial v}{\partial x} (\frac{\partial h}{\partial x})^2] = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

f) Para as velocidades do Líquido na Parede:

$$u = v = 0 . \quad (2.18)$$

2.3. EXPANSÃO EM SÉRIES ASSINTÓTICAS

O próximo passo será a expansão das velocidades e pressão da fase líquida em séries assintóticas, segundo as potências do parâmetro perturbador ε . Esta expansão será feita como se pode ver a seguir:

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)} + \dots \quad (2.19)$$

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \varepsilon^3 v^{(3)} + \dots \quad (2.20)$$

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \dots \quad (2.21)$$

Torna-se importante salientar que o parâmetro perturbador ε , definido no Anexo I como $\varepsilon = h_N/L$, é extremamente pequeno. O numerador h_N é a Espessura de Nusselt e L é o comprimento característico do canal, podendo ser conferido na Fig. 2.1.

Todo o processo de transformação das equações do sistema, devido à expansão de seus termos em série assintótica, será desenvolvido no Anexo III. O resultado será o novo sistema de equações a seguir:

a) Equações do Movimento:

■ Na direção x

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial y^2} + 1 - \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} + \epsilon \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - Re \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \right. \right. \\ & \left. \left. + u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) \right] + \epsilon^2 \left[\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} - Re \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \right. \right. \\ & \left. \left. + u^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + v^{(1)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) \right] + O(\epsilon^3) = 0 \quad (2.22) \end{aligned}$$

■ Na direção y

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial y^2} \right) + O(\epsilon^3) = 0 \quad (2.23)$$

b) Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + \epsilon \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} \right) + O(\epsilon^3) = 0 \quad (2.24)$$

c) Condição Cinemática:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} - v^{(0)} + u^{(0)} \frac{\partial h}{\partial x} + \epsilon \left[u^{(1)} \frac{\partial h}{\partial x} - v^{(1)} \right] + \\ & + \epsilon^2 \left[u^{(2)} \frac{\partial h}{\partial x} - v^{(2)} \right] + O(\epsilon^3) = 0 \quad (2.25) \end{aligned}$$

d) Tensão Normal na Interface Gás-Líquido:

$$\begin{aligned}
& (az)^2 [(P^{(0)})^2 - (\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2})^2] + \epsilon \{ [2azP^{(0)} (azP^{(1)} - zP^{(0)} - P_G) + \\
& + 2az [a^2 \tau_G^{yy} P^{(0)} + z (\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2})^2] \} + \epsilon^2 \{ (zP^{(0)} + P_G)^2 + (azP^{(1)} + a^2 \tau_G^{yy})^2 - \\
& - 2a^2 \tau_G^{yy} (3zP^{(0)} + P_G) - 2azP^{(1)} (2zP^{(0)} + P_G) + 2(az)^2 P^{(0)} (P^{(2)} - \\
& - 2 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}) + (az \frac{\partial h}{\partial x})^2 [(P^{(0)})^2 + 2(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2})^2] - \\
& - (z\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2})^2 \} + O(\epsilon^3) = 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

e) Tensão Tangencial na Interface Gás-Líquido:

$$\begin{aligned}
& \tau_G^{yx} - z \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \epsilon [-z \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} - 2a \tau_G^{xx} \frac{\partial h}{\partial x}] + \\
& + \epsilon^2 [-z \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 (z \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} - \tau_G^{yx}) - z \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \\
& + 2 \frac{\partial h}{\partial x} (2z \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \tau_G^{xx})] + O(\epsilon^3) = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

f) Velocidades do Líquido na Parede:

■ Na direção x

$$u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + O(\epsilon^3) = 0 \tag{2.28}$$

▣ Na direção y

$$v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + O(\varepsilon^3) = 0. \quad (2.29)$$

2.4. SISTEMAS DE EQUAÇÕES REFERENTES AOS TERMOS DE $O(\varepsilon^0)$ E $O(\varepsilon^1)$

Observa-se que, em cada uma das equações, os termos da esquerda são igualados a zero. Para isto ser verdadeiro, os termos que acompanham ε^0 , ε^1 , ε^2 , etc. deverão ser nulos. Desta maneira, obtém-se vários sistemas de equações diferenciais parciais (EDP) com suas condições de contorno, como será visto a seguir.

a) Para os termos que acompanham ε^0 :

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial y^2} + 1 - \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = 0 \quad (2.32)$$

▣ Suas condições de contorno:

$$P^{(0)} = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}; \text{ em } y=h \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v^{(0)} + u^{(0)} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ em } y=h \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} = \frac{\tau_G^{yx}}{z} \text{ em } y=h \quad (2.35)$$

$$u^{(0)} = 0 \text{ em } y = 0 \quad (2.36)$$

$$v^{(0)} = 0 \text{ em } y = 0 \quad (2.37)$$

b) Para os termos que acompanham ε :

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - \text{Re} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (2.40)$$

■ Suas Condições de Contorno:

$$P^{(1)} = \frac{P_G}{az} - \frac{a}{z} \tau_G^{yy} \text{ em } y = h \quad (2.41)$$

$$u^{(1)} \frac{\partial h}{\partial x} - v^{(1)} = 0 \text{ em } y = h \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} = -2a \frac{\tau_G^{xx}}{z} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ em } y = h \quad (2.43)$$

$$u^{(1)} = 0 \text{ em } y = 0 \quad (2.44)$$

$$v^{(1)} = 0 \text{ em } y = 0 \quad (2.45)$$

Não foram apresentados os sistemas acompanhados por ε^2 , ε^3 , etc. porque apenas a resolução destes dois primeiros será suficiente para se obter uma excelente aproximação do problema real.

Da resolução do primeiro sistema, obtém-se as equações para $u^{(0)}$ e $v^{(0)}$, o que possibilita resolver o segundo, já que ele depende somente das equações das velocidades que acompanham ε^0 . E assim todos os sistemas, a partir do segundo, só depende dos resultados obtidos nos sistemas de ordens inferiores. Portanto, o segundo sistema depende da resolução do primeiro, o terceiro depende das soluções do primeiro e segundo e assim, sucessivamente.

2.5. RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS

No Anexo III, encontra-se a resolução do sistema de equações que acompanha ε^0 , ou seja, as equações de (2.30) a (2.37), obtendo-se a equação diferencial parcial para a espessura do filme líquido $h(x,t)$.

Ainda no Anexo III, além da equação para a espessura do filme, também são desenvolvidas as equações para as velocidades $u^{(0)}(x,y,t)$, $v^{(0)}(x,y,t)$, $u^{(1)}(x,y,t)$ e $v^{(1)}(x,y,t)$.

Neste ponto do desenvolvimento matemático, torna-se interessante salientar que há uma enorme semelhança entre as equações para as velocidades apresentadas por Chang [6] e as que foram obtidas neste estudo. A análise dimensional desenvolvida, através do teorema dos PI de Buckingham, é a responsável pelas principais diferenças. A introdução do parâmetro de perturbação (ε), por meio de equações que levam em consideração aspectos não só matemáticos mas, principalmente físicos (Anexo I), proporciona o aparecimento de termos, acompanhados por σ (tensão superficial), que tornam as equações bem mais completas. Além disso, surgem termos relativos ao gás, que são τ_G^{yy} , τ_G^{xx} e P_G , assim como suas derivadas, que em Chang [6] não aparecem.

No presente trabalho, apenas a tensão de cisalhamento τ_G^{yx} será considerada, através de equação empírica. Despreza-se as tensões τ_G^{yy} e τ_G^{xx} , as derivadas da pressão do gás P_G , em relação a x , e também os gradientes de τ_G^{yx} .

Para fazer-se um estudo completo deste sistema, torna-se necessário

proceder o desenvolvimento também da fase gasosa, assim como foi feito para o filme líquido, acoplando-se então as equações resultantes. Esta poderá ser uma proposta para trabalhos futuros.

Para obter-se a equação final para a espessura do filme líquido, procede-se da seguinte maneira:

- ▣ Despreza-se os termos não acompanhados por Re na equação (III.47) do Anexo III.
- ▣ Divide-se a equação resultante por h^3 .
- ▣ O resultado deverá ser somado à equação (III.31) do Anexo III.

Assim, a equação abaixo, resultante deste processo, é a EDP para a espessura do filme líquido.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} h \left(h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \right) + \frac{\sigma}{3} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^3 + \frac{1}{2z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} h^2 + \\
& \varepsilon \left\{ -\frac{11}{24} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \frac{\partial h}{\partial x} h^2 \left(h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \right) - \right. \\
& - \frac{\partial h}{\partial x} h \left(\frac{2}{3} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} + \frac{3}{8} \frac{\tau_G^{yx}}{z^2} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \frac{3}{8} \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \\
& - \frac{3}{10} \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} h^2 \left(3 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{7}{4z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \frac{3}{2} \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \\
& - \frac{5}{6} \frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right] - \frac{111}{2520} \sigma h^4 \left[\frac{\partial^5 h}{\partial x^5} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \right. \\
& \left. + \sigma \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right)^2 \right] - \frac{\sigma}{3} h^2 \left(\frac{1}{3z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h + \frac{13}{120} \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} h + \frac{2}{5} \frac{\partial^5 h}{\partial t \partial x^4} \right) - \\
& - \frac{3}{40z} h^2 \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} + \tau_G^{yx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] - \frac{3}{40z} h^2 \left[\frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \right. \\
& \left. + \sigma \tau_G^{yx} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] - \frac{3}{40} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h^3 \left(1 + 2\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \sigma^2 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)^2 \right) - \\
& - \frac{5}{24} h \left[\frac{1}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \frac{\partial h}{\partial t} \right] \} \text{Re} + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (2.46)
\end{aligned}$$

No próximo capítulo, será apresentado o processo de discretização matemática da Eq. (2.46), a fim de que esta possa ser resolvida numericamente.

3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA NÃO-LINEAR DA ESPESSURA DO FILME

3.1. TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ESPESSURA DO FILME LÍQUIDO PARA A APLICAÇÃO DA TEORIA ESPECTRAL DA COLOCAÇÃO

No Capítulo 2, obteve-se, a partir de conjunto de EDP's, uma única EDP para a espessura do filme líquido h , altamente não-linear. Para se chegar a esta equação, expandiu-se as velocidades e pressão em séries assintóticas até o termo de segunda ordem. Esta é uma equação geral que foi obtida utilizando-se parâmetros de escala, cuidadosamente determinados (conforme pode ser observado no Anexo I), de forma a caracterizar o efeito assintótico.

Neste capítulo far-se-á a solução da espessura do filme líquido, utilizando-se somente os termos de primeira ordem. Conjectura-se que seja possível obter uma excelente aproximação para a solução de espessura do filme líquido, apenas com estes termos.

A fim de adequar a equação da espessura do filme líquido à técnica numérica a ser empregada, como também de representar a carta de transição do *flooding*, em função das velocidades superficiais do gás e do líquido, realizou-se uma transformação dos grupos adimensionais utilizados na análise assintótica, para as variáveis x , h , t e σ , da seguinte forma:

$$x = \frac{\varepsilon L}{2} \frac{\bar{x}}{\left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}; \quad h = \frac{h_N}{\left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} \bar{h} \quad (3.1)$$

$$t = \frac{\varepsilon L}{Q} \frac{h_N}{\left(\frac{v^2}{g^2 Q}\right)^{\frac{1}{3}}} \bar{t}; \quad \sigma = \frac{h_N^3}{L^3 \mu} \frac{\bar{\sigma}}{\left(\frac{gQ^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (3.2)$$

Os parâmetros mantidos na equação em suas formas originais são τ_G^{yx} e z .

A escolha desta forma de adimensionalização justifica-se devido ao esquema de eixos adotado na Fig. 3.1.

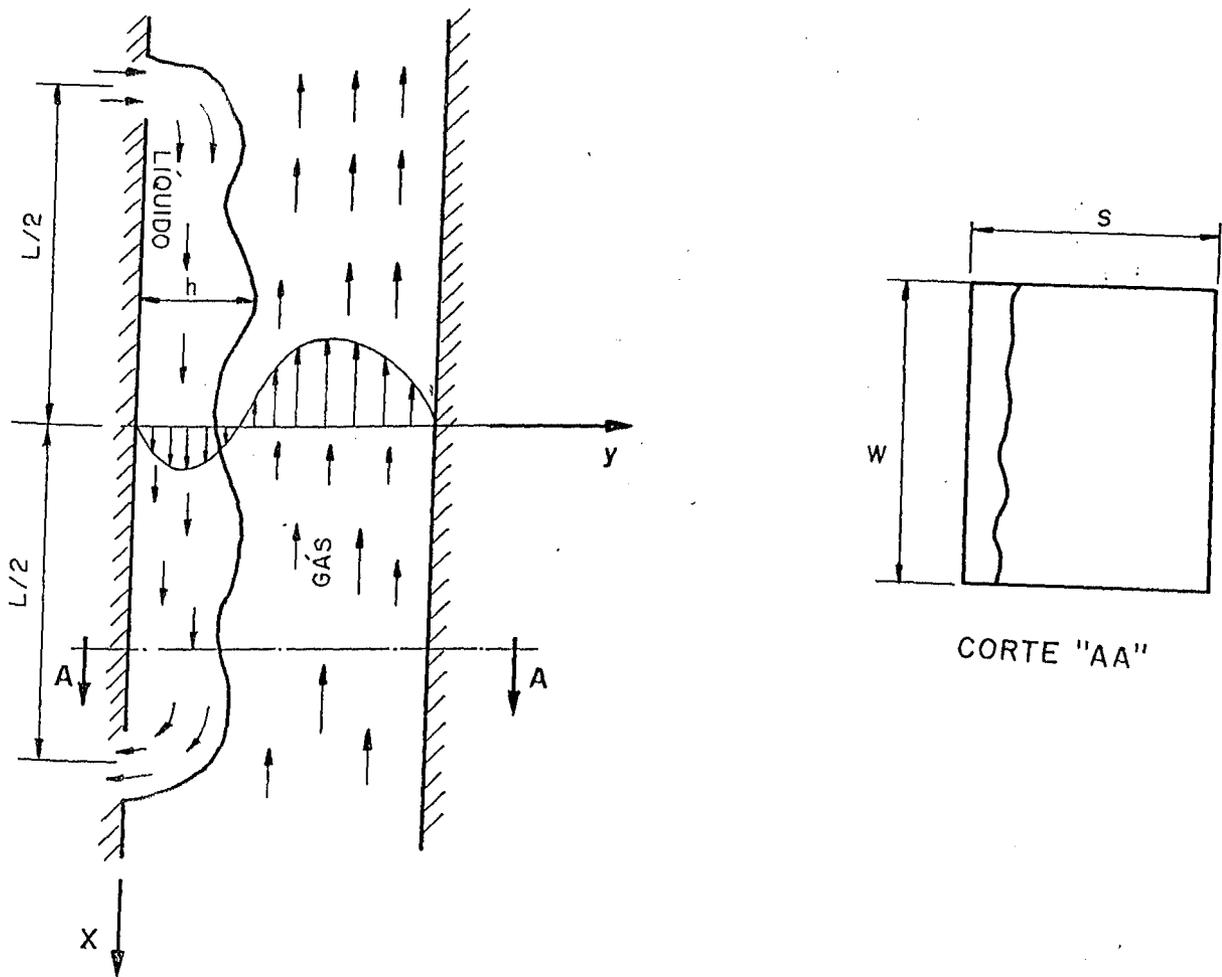


Fig. 3.1. Filme líquido escoando sobre uma das paredes de um canal retangular vertical, na presença de um gás escoando a contra-corrente.

Com esta transformação de escala, a Eq. (2.46), da espessura do filme líquido, retendo somente os termos de primeira ordem, torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + 2F \frac{\partial h}{\partial x} h^2 + 2F \frac{2}{3} \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial h}{\partial x} h + \frac{16}{3} \epsilon^3 W F \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^3 + \\ + \frac{F^2}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} h^2 + 16 \epsilon^3 W F \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} h^2 = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde

$$W = \left(\frac{\sigma}{\rho g h_N^2} \right) = \text{Número de Weber} \quad (3.4)$$

$$F = \left(\frac{g h_N^3}{v Q} \right) = \text{cte.} = 3$$

Nesta equação, as barras sobre as variáveis transformadas, por meio das Eqs. (3.1) e (3.2), foram eliminadas para simplificar o trabalho, mesmo porque, não haveria necessidade das mesmas.

3.2. EQUAÇÕES PARA A TENSÃO TANGENCIAL DO GÁS NA INTERFACE E CONDIÇÕES LIMITES EM X

Para a solução da Eq. (3.3), tem-se a necessidade de utilizar uma equação para a tensão de cisalhamento do gás. Inicialmente será utilizada a seguinte equação para a tensão interfacial:

$$\tau_i = \frac{1}{2} f_i \rho_G u_G^2 \quad (\text{Barathan e outros, 1978}) \quad (3.5)$$

onde tem-se:

$$f_i = A [0,005 + B (1 - \alpha_g)^C] \quad (3.6)$$

e os coeficientes A, B e C são os seguintes:

■ Correlação : A = 1; B = 14,6 e C = 1,87 para $(1 - \alpha_g) < 0,1$.

Tem-se ainda que:

$$\alpha_s \triangleq \frac{A_G}{A} = \frac{(s-h)}{s} \quad (3.7)$$

A correlação experimental (3.5) tem sido utilizada com sucesso em vários modelos de estudo do fenômeno *flooding*, tornando a mais indicada pelos pesquisadores. Por este motivo, ela será adotada neste estudo.

Adimensionalizando-se a Eq. (3.5), com os grupos adimensionais já mostrados neste capítulo, esta se torna uma função do número Reynolds do gás e dos parâmetros K_p e K_v . O parâmetro K_p representa uma relação entre forças gravitacionais do gás e do líquido e o parâmetro K_v representa uma relação entre forças viscosas e gravitacionais da fase gás. Portanto,

$$\frac{\tau_i}{Z} = \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} (f_i K_p K_v Re_G^2) \quad (3.8)$$

onde

$$K_p = \frac{\rho_G (s - h_N) g}{\rho h_N g} \quad (3.9)$$

$$K_v = \frac{v_G^2}{(s - h_N)^3 g} \quad (3.10)$$

$$Re_G = \frac{Q_G}{v_G} \quad (3.11)$$

A relação entre a tensão de cisalhamento interfacial e a tensão tangencial do gás depende das direções do sistema de eixos de referência. Para as direções especificadas na Fig. 3.1, tem-se:

$$\tau_G^{yx} = -\tau_i \quad (3.12)$$

donde obtém-se:

$$\frac{\tau_G^{yx}}{z} = -\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} f_i K_p K_v Re_G^2 \quad (3.13)$$

Esta será a equação utilizada na resolução da Eq. (3.3), para a avaliação da estabilidade do filme líquido e obtenção da espessura do mesmo.

3.3. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PROBLEMA

Substituindo-se a Eq. (3.13) na Eq. (3.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + 6 \frac{\partial h}{\partial x} h^2 + 16 \epsilon^3 W \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^3 + \\ + 48 \epsilon^3 W \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} h^2 - 3 f_i K_p K_v Re_G^2 \frac{\partial h}{\partial x} h = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Comparando-se esta equação com a Eq. (3.3), nota-se a ausência dos termos acompanhados dos gradientes de τ_G^{yx} que, como já foi visto, são desprezados.

Pretende-se estudar a evolução de um filme líquido, utilizando a equação da espessura Eq. (3.14), mostrada anteriormente. A solução desta equação pode ser obtida quando se conhece os seguintes parâmetros: h , Re_G , σ , f_i , K_p , K_v , W e ϵ . Consequentemente, tem-se as Eqs. (3.5) e (3.14) e oito variáveis desconhecidas. Dentre estas, quatro dependem de parâmetros geométricos e/ou das propriedades dos fluidos, que servirão somente para verificar os efeitos destes parâmetros na estrutura do escoamento. Portanto, estes parâmetros serão fixados em conformidade com o intervalo de variações destes, utilizados em estudos existentes

na literatura, a fim de comparar os resultados. Em resumo, tem-se as Eqs. (3.5) e (3.14) e três variáveis desconhecidas: h , ε e Re_G .

Observa-se que o sentido do escoamento do filme líquido depende, essencialmente, destas três variáveis. Dependendo dos valores de Re_G e, portanto, de h e ε , as soluções possíveis são:

- (i) Um filme líquido descendente, escoando a contra-corrente com o gás;
- (ii) Um filme líquido ascendente, escoando a co-corrente com o gás;
- (iii) Coexistência de dois filmes: um ascendente e outro descendente.

Quando da solução da Eq. (3.14), é necessário discernir as soluções que correspondem a estes três casos. Esta distinção é feita com o auxílio de vários critérios, diferentes entre si, conforme descrito no capítulo 1. Além disso, a distinção só é possível se a solução da Eq. (3.14) for realizada respeitando o seguinte procedimento:

- a) Fixar a vazão de líquido e , conseqüentemente, o parâmetro ε ;
- b) Variar o número de Reynolds do gás dentro de um certo intervalo, obtendo as soluções para h correspondentes a estes valores;
- c) O ponto de *flooding* será obtido quando ocorrer uma brusca mudança na espessura h . O par composto pelo número de Reynolds do gás e pela vazão de líquido, correspondentes a esta mudança, será considerado o ponto de *flooding*. Este será o critério, a priori, utilizado.

3.4. SOLUÇÃO DO PROBLEMA, UTILIZANDO A TÉCNICA DA ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO PERMANENTE

3.4.1. PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS DA TÉCNICA

Conforme descrito por Stakgold (1979), no regime permanente, estuda-se um problema de valor limite (contorno) em coordenadas espaciais (denotada por x). O problema dependente do tempo é do tipo de valor inicial e do tipo de valor limite no

espaço. Embora normalmente pensa-se na solução como uma função de $h(x,t)$, na qual as variáveis x e t têm mais ou menos iguais pesos, um outro ponto de vista mais útil, será apresentado a seguir. Em cada tempo t , a solução h é um elemento ou ponto num espaço de Hilbert H . Quando t muda, o elemento $h = h(t)$ move no espaço de Hilbert de acordo com a equação de evolução

$$\frac{d}{dt}h(x, t) = F(h, Re_G) ; \quad t > 0 ; \quad h_{t=0} = h_0, \quad (3.15)$$

onde h_0 é o valor inicial de h e F é uma transformação (geralmente, não linear) de H dentro dele mesmo. As derivadas com respeito às coordenadas espaciais estão contidas no operador F .

Uma das principais questões relacionadas a (3.15) é a da estabilidade de regimes permanentes. Considera-se h_1 como sendo um elemento do espaço H que satisfaz

$$F(h_1, Re_G) = 0. \quad (3.16)$$

Então h_1 não depende de t e, portanto, também é uma solução de (3.15) com valor inicial h_0 . Considera-se h_1 uma solução permanente ou um estado de equilíbrio que intera sempre pelo efeito de pequenas perturbações num estado de equilíbrio. Tais perturbações desaparecem, crescem ou permanecem do mesmo tamanho. A análise que permite caracterizar o efeito destas perturbações consiste em estudar (3.15) com valor inicial h_0 próximo de h_1 . Diz-se que h_1 é estável se existe um $\epsilon > 0$, tal que a solução de $h(t)$ da Eq. (3.15) satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|h - h_1\| = 0 \quad \text{quando} \quad \|h_0 - h_1\| \leq \epsilon. \quad (3.17)$$

Considera-se $h(t)$ uma solução de (3.15), correspondente ao valor inicial h_0 , próximo a h_1 como segue:

$$h = h_i + \varepsilon \tilde{h} \quad (3.18)$$

onde ε é um pequeno parâmetro.

Substituindo-se (3.18) em (3.15), obtém-se:

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{F(h_i + \varepsilon \tilde{h}, Re_G) - F(h_i, Re_G)}{\varepsilon} = F_h(h_i, Re_G) \tilde{h} + r \quad (3.19)$$

onde $F_h(h_i, Re_G)$ é a derivada de Fréchet de F em função de h_i , e em função de um parâmetro perturbador, (isto é a linearização de F em h_i) e r é o erro de ordem superior em h :

$$\lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} (\|r\|/\|\tilde{h}\|) = 0.$$

Desde que o valor inicial para \tilde{h} seja pequeno, o comportamento da solução de (3.19) será determinado pela equação linearizada

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = F_h(h_i, Re_G) \tilde{h} \quad (3.20)$$

Pode-se assumir o seguinte princípio de estabilidade linearizado: se todas as soluções de (3.20) diminuem exponencialmente com t e com x , então deseja-se soluções de (3.20) para $\tilde{h}(0)$ suficientemente pequenas. Se (3.20) tem alguma solução que está aumentando exponencialmente, existirá um pequeno estado inicial e/ou limite para o qual a solução de (3.19) aumenta rapidamente no início, até a não-linearidade se sobrepor.

Este princípio está bem estabelecido para equações diferenciais ordinárias e para algumas classes de equações diferenciais parciais. Em alguns casos um estudo de (3.19) inicia-se com (3.20).

A questão é, então, quando (3.20) tem todas as soluções decrescentes exponencialmente? Se se tentar uma solução da forma

$$\tilde{h}(x, t) = A e^{[ik(x-ct) + \beta t]} \quad (3.21)$$

onde A é um elemento de H (espaço de Hilbert), independente do tempo e da coordenada x . Aplicando (3.21) em (3.20) obtém-se:

$$F_h(h_i, Re_C) = \beta - i k c, \quad (3.22)$$

onde k e c são, respectivamente, os números de onda e a velocidade de propagação de uma onda elementar e β é o coeficiente de amplificação temporal. Nesta análise de instabilidade temporal sobre ondas periódicas é conveniente definir uma variável complexa C que estabelece uma relação entre a variação de \tilde{h} com t e a variação de \tilde{h} com x . Esta relação é descrita como segue:

$$C = - \frac{\left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right)}{\left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right)} \quad (3.23)$$

onde

$$C = c + i \frac{\beta}{k} \quad (3.24)$$

Ainda, na análise de instabilidade temporal linear, para cada modo k existe uma ou várias soluções correspondentes a C , cuja parte real é a velocidade de propagação e a parte imaginária é o fator de amplificação. Uma onda com $c > 0$ e $k < 0$ é convectivamente instável.

3.4.2. APLICAÇÃO DA TÉCNICA NAS EQUAÇÕES DO PROBLEMA EM ESTUDO

Doravante, a teoria exposta no item 3.4.1 será usada. Aplica-se, inicialmente, a Eq. (3.16) na equação que descreve o problema físico em estudo, ou seja, a Eq. (3.14), donde obtém-se :

$$F(h_i, Re_G) = -6 \frac{\partial h_i}{\partial x} h_i^2 - 16 e^3 W \frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4} h_i^3 - 48 e^3 W \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} \frac{\partial h_i}{\partial x} h_i^2 +$$

$$+ 3 f i K_p K_v Re_G^2 \frac{\partial h_i}{\partial x} h_i = 0 \quad (3.25)$$

A equação acima será resolvida conjuntamente com as seguintes condições de contorno:

a) Na entrada do líquido:

$$h_i = h_{Ni}; \quad \frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4} = 0 \quad (3.26)$$

b) Na saída do líquido:

$$h_i = h_{Ni}; \quad \frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4} = 0 \quad (3.27)$$

onde h_N é a espessura de Nusselt.

As condições limite têm uma forte influência sobre a estrutura do escoamento e, conseqüentemente, sobre o *flooding*. Entretanto, neste trabalho será explorada somente a situação caracterizada pelas Eqs. (3.26) e (3.27).

No conjunto de Eqs. (3.25), (3.26) e (3.27) será aplicada a técnica espectral da colocação para a solução do problema. Esta solução será utilizada na análise de instabilidade do problema transiente.

A espessura instantânea do filme líquido será obtida aplicando-se a teoria descrita pela Eq. (3.19) sobre a Eq. (3.14), donde obtém-se:

Espera-se que somente os termos lineares, contidos na Eq. (3.28), sejam suficientes para descrever o comportamento do problema físico, considerando-se que, normalmente, as ondas existentes na superfície do filme são ondas de pequenas amplitudes que se amplificam fortemente, somente no momento que acontece a transição (*flooding*).

Assim, mantendo somente os termos lineares na Eq. (3.28), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{h}}{dt} = & [-12 h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} - 48 \epsilon^3 W h_i^2 \frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4} - 96 \epsilon^3 W h_i \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} \frac{\partial h_i}{\partial x} + \\ & + 3 f i K_p K_v Re_G^2 \frac{\partial h_i}{\partial x}] \tilde{h} + [-6 h_i^2 - 48 \epsilon^3 W h_i^2 \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3} + 3 f i K_p K_v Re_G^2 h_i] \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \\ & + [-48 \epsilon^3 W h_i^2 \frac{\partial h_i}{\partial x}] \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} + [-16 \epsilon^3 W h_i^3] \frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para a solução do problema descrito pela equação anterior, torna-se necessário considerar quatro condições limites e uma condição inicial. Entretanto, para uma análise de instabilidade, a fim de caracterizar a transição do fenômeno (*flooding*), como é o caso deste trabalho, não se faz necessário assumir estas condições limites e inicial.

3.5. MÉTODO ESPECTRAL PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

3.5.1. MÉTODO DE COLOCAÇÃO DE CHEBYSHEV

Os métodos espectrais são diferenciados não somente pelo tipo de método (Galerkin, Colocação ou Tau), mas também pela escolha particular das funções tentativas. As funções tentativas, mais frequentemente usadas, são os polinômios trigonométricos, os de Chebyshev e os de Legendre.

O mais versátil conjunto de funções tentativas é composto pelos polinômios de Chebyshev. Estes são definidos no intervalo $[-1, 1]$ por:

$$T_k(x) = \cos k\theta \quad (3.30)$$

onde k é inteiro não negativo, $x = \cos \theta$ e $0 \leq \theta \leq \pi$. Desta forma x decresce de 1 para -1. A função $T_k(x)$ é definida por (3.30) no intervalo de $-1 \leq x \leq 1$. Este intervalo é denotado por I , tal que para $x \in I$ encontra-se um único valor de $\theta = \arccos x$ que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$ e $T_k(x)$ tem o valor igual a $\cos k\theta$. Portanto, $T_k(x)$ é uma função real definida em I , que pode ser escrita como (CANUTO e Outros, 1988):

$$T_k(x) = \cos k(\arccos x) \quad (3.31)$$

onde

$$x = \cos \theta \quad \text{ou} \quad \theta = \arccos x.$$

A partir de (3.30), se $x \in I$, o seguinte intervalo $-1 \leq T_k(x) \leq 1$ é satisfeito e os pontos de I , nos quais $|T_k(x)| = 1$, são denominados de pontos extremos de $T_k(x)$.

Escolhendo as funções tentativas

$$\phi_k(x) = T_k(x); \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.32)$$

a solução aproximada para h_i e para as derivadas de ordem inferior de h_i tem as seguintes representações:

$$h_i(x, t) = \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x); \quad \frac{\partial h_i}{\partial x}(x, t) = \sum_{k=0}^N b_k \phi_k(x); \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=0}^N c_k \phi_k(x); \quad \frac{\partial^3 h_i}{\partial x^3}(x, t) = \sum_{k=0}^N d_k \phi_k(x) \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^4 h_i}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{k=0}^N e_k \phi_k(x) \quad (3.35)$$

Na versão de colocação do MWR (Método dos Pesos Residuais), as funções testes são as funções delta de Dirac modificadas, escritas a seguir:

$$\Psi_j(x) = \delta(x - x_j), \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (3.36)$$

onde os x_j são os pontos de colocação, distintos no intervalo $(-1, 1)$. A aplicação do MWR sobre um operador padrão diferencial qualquer, designado por M , pode ser escrito como segue:

$$\int_{-1}^1 M(h_j) \Psi_j(x) dx = 0; \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (3.37)$$

o qual reduz-se a

$$M(h_j) \Big|_{x=x_j} = 0; \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (3.38)$$

Os pontos discretos de x são chamados de pontos de colocação, que segundo o processo de integração de Chebyshev-Gauss-Lobato, é definido como segue (CANUTO e outros, 1988):

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.39)$$

A partir da seguinte propriedade dos polinômios de Chebyshev:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{para } k > 1 \quad (3.40)$$

obtém-se:

$$\left(\frac{1}{k+1}\right) T'_{k+1}(x) + \left(1 - \frac{k}{k-1}\right) T'_{k-1}(x) = 2 T_k(x) \quad (3.41)$$

para $k \geq 3$

onde o superscrito alínea no polinômio de Chebyshev representa a derivada deste polinômio com relação a x .

Aplicando na Eq. (3.41) as Eqs. (3.33), (3.34) e (3.35) e realizando algumas manipulações matemáticas, obtém-se as seguintes relações:

$$2ka_k = b_{k-1} - E_k b_{k+1} \quad (3.42)$$

$$2kb_k = c_{k-1} - E_k c_{k+1} \quad (3.43)$$

$$2kc_k = d_{k-1} - E_k d_{k+1} \quad (3.44)$$

$$2kd_k = e_{k-1} - E_k e_{k+1} \quad (3.45)$$

onde

$$k = 1, 2, \dots, N-1$$

e

$$E_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k=1 \\ 4 & \text{se } k=2 \\ 1 & \text{outros casos} \end{cases}$$

Toda esta conceituação, referente ao método espectral, aplicada nas Eqs. (3.25) a (3.27), possibilitará calcular espessura média do filme que será utilizada na análise de instabilidade do mesmo.

3.5.2. APLICAÇÃO DO MÉTODO ESPECTRAL DA COLOCAÇÃO NAS EQUAÇÕES DO PROBLEMA

Quando se aplica as equações de (3.32) a (3.45) sobre as Eqs. (3.25) a (3.27), isto é, quando se utiliza o princípio do método espectral da colocação e considera que os coeficientes das expansões em séries, propostos pelas equações de (3.33) a (3.35) são variáveis complexas, obtém-se:

▪ Equação referente à parte real:

$$\sum_{k=0}^N [AA_{jk}Ra_k + BB_{jk}Ia_k] = CC_j; \quad j=1, 2, \dots, N-1 \quad (3.46)$$

onde

$$AA_{jk} = \sum_{I=0}^N \left\{ 2Rb_I T_k(x_j) T_I(x_j) + 16e^{3W} \sum_{i=0}^N \left[\frac{1}{3} Ra_i R d_i - \frac{1}{3} Ia_i I d_i + \right. \right. \\ \left. \left. + Rb_I R C_i - Ib_I I C_i \right] T_k(x_j) T_I(x_j) T_i(x_j) \right\};$$

$$BB_{jk} = - \sum_{l=0}^N \left\{ 2Ib_l T_k(x_j) T_l(x_j) + \sum_{i=0}^N 16\epsilon^3 W \left[\frac{1}{3} Ia_l R d_i + \frac{1}{3} Ra_l I d_i + \right. \right.$$

$$\left. Ib_l R C_i + Rb_l I C_i \right] T_k(x_j) T_l(x_j) T_i(x_j) \};$$

$$CC_j = f_i K_p K_v Re_G^2 \sum_{l=0}^N Rb_l T_l(x_j)$$

▪ Equação referente à parte imaginária:

$$\sum_{k=0}^N [DD_{jk} Ia_k + EE_{jk} Ra_k] = FF_j; \quad j=1, 2, \dots, N-1 \quad (3.47)$$

onde

$$DD_{jk} = \sum_{l=0}^N 2Rb_l T_k(x_j) T_l(x_j) + 16\epsilon^3 W \sum_{l=0}^N \sum_{i=0}^N \left[-\frac{1}{3} Ia_l I d_i + \frac{1}{3} Ra_l R d_i - \right.$$

$$\left. -Ib_l I C_i + Rb_l R C_i \right] T_k(x_j) T_l(x_j) T_i(x_j);$$

$$EE_{jk} = \sum_{l=0}^N \left\{ 2Ib_l T_k(x_j) T_l(x_j) + 16 \epsilon^3 W \sum_{i=0}^N \left[\frac{1}{3} Ra_l Id_i + \frac{1}{3} Ia_l Rd_i + \right. \right. \\ \left. \left. + Rb_l Ic_i + Ib_l Rc_i \right] T_k(x_j) T_l(x_j) T_i(x_j) \right\};$$

$$FF_j = fi Kp Kv Re_G^2 \sum_{l=0}^N Ib_l T_l(x_j)$$

onde la_k , lb_k , lc_k , ld_k e le_k são as partes imaginárias e Ra_k , Rb_k , Rc_k , Rd_k e Re_k são as partes reais, respectivamente, dos coeficientes a_k , b_k , c_k , d_k e e_k que aparecem nas equações de (3.33) a (3.35).

Similarmente, as condições limites, definidas pelas Eqs. (3.26) e (3.27), poderão ser escritas, respectivamente, como segue:

$$\sum_{k=0}^N [AA_{0k} Ra_k + BB_{0k} Ia_k] = CC_0; \quad (3.48)$$

$$\sum_{k=0}^N [AA_{Nk} Ra_k + BB_{Nk} Ia_k] = CC_N; \quad (3.49)$$

onde

$$CC_0 = Rh_N; \quad CC_N = Ih_N; \quad AA_{0k} = BB_{0k} = 1; \quad AA_{Nk} = BB_{Nk} = T_k(x_N),$$

com

$$h_N = \sqrt{Rh_N^2 + Ih_N^2} \quad (3.50)$$

onde h_N é a espessura de Nusselt, Rh_N e Ih_N são, respectivamente, as partes real e imaginária de h_N .

As condições limites para o escoamento permanente são assumidas como sendo iguais à espessura de Nusselt. Entretanto, considera-se a existência de uma componente imaginária, a fim de obter modos também imaginários na solução. A consideração de uma parte imaginária na condição limite poderá influenciar na estabilidade do problema. Este é um fato que deverá ser comprovado.

As equações de (3.42) a (3.45) e de (3.46) a (3.49), juntamente com as condições limites dadas pelas Eqs. (3.26) e (3.27), permitem estabelecer um sistema de equações para determinar os coeficientes reais e imaginários, referentes às equações de (3.33) a (3.35) e, conseqüentemente, a espessura do escoamento permanente. Em resumo, este sistema de equações poderá ser evidenciado como segue.

$$\begin{bmatrix}
 AA_{00} & AA_{01} & \dots & AA_{0N} & BB_{00} & BB_{01} & \dots & BB_{0N} & Ra_0 & CC_0 \\
 AA_{10} & AA_{11} & \dots & AA_{1N} & BB_{10} & BB_{11} & \dots & BB_{1N} & Ra_1 & CC_1 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 AA_{N0} & AA_{N1} & \dots & AA_{NN} & BB_{N0} & BB_{N1} & \dots & BB_{NN} & Ra_N & CC_N \\
 AA_{00} & AA_{01} & \dots & AA_{0N} & BB_{00} & BB_{01} & \dots & BB_{0N} & Ia_0 & FF_0 \\
 DD_{10} & DD_{11} & \dots & DD_{1N} & EE_{10} & EE_{11} & \dots & EE_{1N} & Ia_1 & FF_1 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 DD_{N0} & DD_{N1} & \dots & DD_{NN} & EE_{N0} & EE_{N1} & \dots & EE_{NN} & Ia_N & FF_N
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CC_0 \\ CC_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CC_N \\ FF_0 \\ FF_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ FF_N \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

As Eqs. de (3.52) a (3.55) foram resolvidas, utilizando-se o procedimento de decomposição LDU, cujas rotinas encontram-se desenvolvidas em VETTERLING, W. T. e outros, 1988.

3.5.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA ESPESSURA FLUTUANTE DO FILME LIQUIDO \tilde{h}

Como explicado anteriormente, espera-se que somente os termos lineares, contidos na Eq. (3.28), sejam suficientes para descrever o comportamento do problema físico. Isto é justificado, baseando-se no fato de que as ondas existentes na superfície do filme são de pequena amplitude, que se amplificam somente no instante em que acontece a transição (*flooding*).

A Eq. (3.29) contém apenas os termos lineares existentes na Eq. (3.28). Se se aplicar, nesta equação, a solução obtida para a espessura do filme líquido permanente, determinada no ítem anterior, a seguinte equação, representando a espessura do filme flutuante, pode ser apresentada:

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = COEF1 \tilde{h} + COEF2 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + COEF3 \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} + COEF4 \frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial x^4} \quad (3.56)$$

cujos coeficientes são representados, consecutivamente, por:

$$COEF1 = \{ 3fiKpKvRe_g^2 \sum_{k=0}^N Rb_k T_k(x_j) - 12 \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N [Ra_k Rb_i - Ia_k Ib_i] T_k(x_j) T_i(x_j) -$$

$$- 48e^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [Ra_k Ra_i Rd_l - Ia_k Ia_i Rd_l - Ia_k Ra_i Id_l -$$

$$- Ra_k Ia_i Id_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) - 96e^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [Ra_k Rb_i Rc_l - Ia_k Ib_i Rc_l -$$

$$- Ia_k Rb_i Ic_l - Ra_k Ib_i Ic_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) \} +$$

$$+ i \{ 3fiKpKvRe_g^2 \sum_{k=0}^N Ib_k T_k(x_j) - 12 \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N [Ia_k Rb_l + Ra_k Ib_l] T_k(x_j) T_l(x_j) -$$

$$- 48e^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [Ra_k Ra_i Id_l - Ia_k Ia_i Id_l + Ia_k Ra_i Rd_l +$$

$$+ Ra_k Ia_i Rd_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) - 96e^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [Ra_k Rb_i Ic_l -$$

$$- Ia_k Ib_i Ic_l + Ia_k Rb_i Rc_l + Ra_k Ib_i Rc_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) \} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
COEF2 = & \left\{ 3 f i K p K v R e_G^2 \sum_{k=0}^N R a_k T_k(x_j) - 6 \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N [R a_k R a_i - \right. \\
& - I a_k I a_i] T_k(x_j) T_i(x_j) - 48 e^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [R a_k R a_i R C_l - I a_k I a_i R C_l - \\
& - I a_k R a_i I C_l - R a_k I a_i I C_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) \left. \right\} + \\
& + i \left\{ 3 f i K p K v R e_G^2 \sum_{k=0}^N I a_k T_k(x_j) - 6 \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N [I a_k R a_i + R a_k I a_i] T_k(x_j) T_i(x_j) - \right. \\
& - 48 e^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [R a_k R a_i I C_l - I a_k I a_i I C_l + I a_k R a_i R C_l + \\
& \left. + R a_k I a_i R C_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) \right\} \quad (3.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
COEF3 = & -48 \epsilon^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N [Ra_k Rb_i - Ia_k Ib_i] T_k(x_j) T_i(x_j) + \\
& + i \left\{ -48 \epsilon^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N [Ia_k Rb_i + Ra_k Ib_i] T_k(x_j) T_i(x_j) \right\} \quad (3.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
COEF4 = & -16 \epsilon^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [Ra_k Ra_i Ra_l - Ia_k Ia_i Ra_l - \\
& - Ia_k Ra_i Ia_l - Ra_k Ia_i Ia_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) + \\
& + i \left\{ -16 \epsilon^3 W \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^N [Ra_k Ra_i Ia_l - Ia_k Ia_i Ia_l + \right. \\
& \left. + Ia_k Ra_i Ra_l + Ra_k Ia_i Ra_l] T_k(x_j) T_i(x_j) T_l(x_j) \right\} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Utilizando-se a Eq. (3.23) e aplicando a Eq. (3.21) e suas derivadas de primeira, terceira e quarta ordens com relação à coordenada x , na Eq. (3.56), obtém-se duas importantes relações entre k , c e β . Estas duas relações são

apresentadas a seguir, sendo a primeira referente à parte real e a segunda à parte imaginária.

a) Parte Real

$$\beta - R_{\text{COEF1}} + k I_{\text{COEF2}} - k^3 I_{\text{COEF3}} - k^4 R_{\text{COEF4}} = 0 \quad (3.61)$$

b) Parte Imaginária

$$-k C - I_{\text{COEF1}} - k R_{\text{COEF2}} + k^3 R_{\text{COEF3}} - k^4 I_{\text{COEF4}} = 0 \quad (3.62)$$

Os termos R_{COEF1} , R_{COEF2} , R_{COEF3} e R_{COEF4} são as partes reais obtidas, respectivamente, dos coeficientes COEF1, COEF2, COEF3 e COEF4. Da mesma forma, os termos I_{COEF1} , I_{COEF2} , I_{COEF3} e I_{COEF4} , são as partes imaginárias obtidas, respectivamente, dos mesmos coeficientes, os quais são apresentados nas equações de (3.57) a (3.60).

As Eqs. (3.61) e (3.62) permitem obter a transição do escoamento, considerando os efeitos dos modos temporais sobre a solução permanente caracterizada no item 3.5.2. A transição do escoamento, utilizando estas equações, far-se-a seguindo o procedimento no qual é estabelecido um intervalo de valores para K (número de ondas), onde é levantada a máxima amplificação obtida neste intervalo (máximo valor de β), em função do número de Reynolds do gás. Este ponto de máxima amplificação é tomado como o ponto de *flooding*. Tal procedimento de análise de instabilidade temporal foi utilizado com relativo sucesso por Bachir (1987). Entretanto, a limitação desta análise baseia-se no fato de que esta teoria é aplicada para ondas não dispersivas que, comprovadamente, não é o caso do problema em estudo, que é altamente dispersivo, devido à forte interação entre os efeitos viscosos das fases líquida e gasosa.

Entretanto, o Método Espectral da Colocação de Chebyshev, descrito no item 3.5.1 e aplicado na solução permanente, é o procedimento mais apropriado para ser utilizado na solução da Eq. (3.56), juntamente com as condições limites adequadas ao problema. A aplicação desta técnica não apresenta limitação quanto ao caráter de ondas serem dispersivas ou não e ainda permite levantar diretamente a solução da espessura do filme líquido flutuante. Neste caso, um critério de análise do comportamento da Densidade Espectral poderá levantar o ponto de transição do escoamento, e conseqüentemente, o ponto de *flooding*. Mas, nenhuma destas técnicas serão utilizadas neste estudo, por considerar que tal estudo constitui um trabalho, extremamente amplo, para uma dissertação de mestrado. Porém, esta discussão está sendo apresentada, a fim de ilustrar a amplitude deste trabalho e orientar a seqüência da pesquisa no futuro.

4. DISCUSSÃO, RESULTADOS E CONCLUSÃO

4.1. DISCUSSÃO

Os programas computacionais, referente ao fluxograma mostrado na Fig. 3.2, foram executados numa estação de trabalho IBM RISC 6091 19 do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia. Estes programas foram escritos na linguagem de programação C, e o procedimento utilizado na solução das matrizes descritas pelas Eq. (3.52) a (3.55), foi o método LDU, cujo programa aplicando-se esta técnica, desenvolvido na linguagem de processamento C, encontra-se já pronto em VETTERLING, W. T. e Outros, 1989.

As equações (3.33) a (3.35), representando as expansões de h_1 e suas derivadas de ordem superior, com relação a x , são expandidas até ordem de 30 termos ($N = 30$). A expansão é limitada nesta ordem, devido ao tempo de processamento ser extremamente longo, pois trata-se de um programa cujo procedimento de cálculo é iterativo.

Entretanto, nos trabalhos futuros, este programa será implementado no computador IBM 3090, da Universidade Federal de Uberlândia, e portanto, deverá ser resolvido com uma ordem de expansão bem maior, o que possibilitará observar melhor as flutuações da espessura do filme, com frequências mais elevadas e de menores amplitudes, com relação à coordenada espacial x . A evolução destas pequenas amplitudes com o número de Reynolds do gás, podem alterar o ponto de *flooding*. Entretanto, este é um fato a ser comprovado.

O procedimento de execução do programa, para encontrar o ponto de transição na estrutura do escoamento (ponto de *flooding*), é aquele no qual a vazão¹ de líquido por unidade de área é fixada, e a vazão de gás (ou número de Reynolds) é aumentada gradualmente, até ultrapassar o ponto de transição do escoamento (*flooding*). Este ponto de transição da estrutura do escoamento é obtido, considerando-se como critério de *flooding*, o fato de que a espessura média do filme, com relação a x (veja a Eq. 4.1), aumenta consideravelmente no ponto de

¹Os termos vazão de líquido, vazão de gás, J_l , J_g e Re_g serão utilizados semelhante neste capítulo, de acordo com a conveniência necessária.

flooding, ou, em algumas vazões de líquidos (as menores), esta mudança acontece de maneira brusca.

$$\langle h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x) dx \quad (4.1)$$

Este critério de transição é consistente com o comportamento físico do problema, conforme explicado no item 3.3, devido às explicações seguintes: o sentido do escoamento do filme líquido depende, essencialmente de três variáveis (h , ε e Re_0). Dependendo dos valores de Re_0 e, portanto, de h e ε , as soluções possíveis são:

- Um filme líquido descendente, escoando a contra-corrente com o gás;
- Um filme líquido ascendente, escoando a co-corrente com o gás;
- Coexistência de dois filmes: um ascendente e outro descendente.

Quando da solução do problema, através do procedimento exposto na Fig. 3.2, é necessário discernir quando ocorre a transição de uma solução para outra, conforme caracterizado anteriormente. Neste estudo, esta distinção entre as soluções é feita, considerando-se o fato da espessura média do filme aumentar consideravelmente e imediatamente cair de forma brusca quando da transição. Este fato é fisicamente consistente se se considerar que o aumento brusco da espessura do filme provoca uma diminuição da velocidade do escoamento do líquido, mantendo a vazão constante. Entretanto, quando a espessura média do filme decai, imediatamente após o aumento, induz-se a concluir que uma parte do líquido descendente em forma de filme é arrastado devido ao atrito interfacial, provocado pelo escoamento do gás. Este ponto, no qual se constata o primeiro arrastamento parcial do líquido descendente, é tomado como o ponto de *flooding* (este critério é o mesmo considerado na pesquisa experimental de Biage, 1989). Logicamente, este

ponto caracteriza o início do processo de transição. Após este ponto, o aumento do número de Reynolds do gás provoca novos picos na espessura média do filme líquido, o que caracteriza novos *flooding*, até que o processo de transição atinge o seu estado final. Este processo de transição foi observado experimentalmente por Biage, 1989.

O procedimento para encontrar o ponto de *flooding*, segundo o critério estabelecido, constitui um trabalho árduo, devido ao fato de que as soluções são obtidas fixando-se, inicialmente, uma vazão de gás zero, que, após a convergência do problema, com um erro da ordem de 10^{-3} , é incrementada gradualmente. Este incremento no número de Reynolds deverá ser pequeno e a solução obtida para o problema, referente ao número de Reynolds anterior é tomada como o valor inicial, no processo iterativo, para a solução referente ao número de Reynolds seguinte. Este procedimento é absolutamente necessário devido o problema em estudo ser altamente não-linear e a convergência tornar-se extremamente difícil num processo iterativo, se os valores iniciais admitidos não estiverem próximo da solução procurada. Considerando-se este fato e sabendo-se que o ponto de transição deverá ser procurado num amplo intervalo do número de Reynolds, a determinação de um ponto de *flooding* referente a uma vazão de líquido fixa, constitui, como afirmado anteriormente, um árduo trabalho que poderá levar semanas de cálculo, mesmo se o processamento for executado em Estação de Trabalho IBM RISC 6091.

4.2. RESULTADOS

As Figs. de 4.1 a 4.6, mostram as espessuras do filme líquido em função de x , onde estas variáveis estão adimensionalizadas, conforme especificado pelas Eqs. (3.1) e (3.2). Em cada figura é caracterizada a evolução do comportamento do filme em relação ao número de Reynolds do gás.

Observa-se, através destas figuras, que a espessura do filme líquido oscila ao longo do comprimento do canal, representado pela variável x . Esta oscilação com

relação a x aumenta quando a vazão de líquido é menor. Este fato concorda com as observações experimentais apresentadas em Biage, 1989. Entretanto, para observar de uma forma mais consistente, o comportamento das flutuações com relação a x , torna-se necessário realizar os cálculos para a espessura do filme líquido, com uma expansão para h_1 e de suas derivadas de ordem superior com relação a x , até um valor de N muito maior que o utilizado neste trabalho. Logicamente, quanto maior é o valor de N , mais modos frequenciais aparecerão nos resultados similares aos apresentados nas Figs. de 4.1 a 4.6. Observa-se, também, nestas figuras que as curvas referentes à espessura do filme líquido apresentam um comportamento simétrico com relação a x . Este comportamento, advém do fato que as condições limites especificadas pelas Eqs. (3.26) a (3.27) são simétricas.

Ainda, nas Figs. 4.1 a 4.6, o fato mais significativo mostrado é que as flutuações e a espessura média do filme líquido, aumentam com o crescimento do número de Reynolds. Este fato é concordante com as observações experimentais, apresentadas na literatura especializada, especialmente, em Biage, 1989. Quando o número de Reynolds atinge o ponto de *flooding*, correspondente a uma vazão de líquido fixa, conforme caracterizado nas figuras citadas, a espessura do filme diminui bruscamente, caracterizando um arrastamento parcial do líquido descendente. O par de vazões de líquido e gás referente a este ponto é denominado de ponto de *flooding*. Entretanto, os níveis de flutuações continuam a aumentar, mesmo após o início do processo de transição. O aumento do nível de flutuação com o número de Reynolds do gás é mais significativo, para as vazões de líquidos menores. Isto é devido ao fato das tensões da parede e interfacial atuarem numa faixa maior, no interior do filme líquido, quando a espessura deste é menor. Como as flutuações no filme são, essencialmente, devido à viscosidade, então, este caráter apresentado, mostrado nas figuras citadas acima, é consistente com comportamento físico do problema. Outro fato importante, observado nestas figuras é que a queda da espessura do filme líquido, é mais acentuada quando a vazão de líquido é menor. Este fato se justifica, também, devido à interação dos efeitos da tensão de cisalhamento devido à parede e à interface.

As Figs. 4.7 e 4.8 mostram a evolução da espessura média do filme líquido com relação a x , para várias vazões de líquidos. O fato mais importante a ser

caracterizado nestas figuras é a observação apresentada no final do parágrafo anterior, onde a queda da espessura do filme líquido é mais acentuada quando a vazão de líquido é menor. Outra observação a ser feita nestas figuras, é o fato do ponto de *flooding* aumentar com a diminuição da vazão de líquido. Este fato é observado em todas as cartas de *flooding*, apresentadas na literatura. Fisicamente, isto é devido, também, à interação das tensões devido à parede e a interface. Após o ponto de *flooding*, que neste trabalho caracteriza o início da transição, novos picos na espessura do filme acontecem. Estes picos caracterizam novos arrastamentos de líquido pelo escoamento de gás, até que a transição aconteça totalmente.

As Figs. de 4.9 a 4.11 mostram as evoluções da espessura média do filme líquido, dimensional - definida pela Eq. (4.1) - em função da velocidade superficial do gás, para várias velocidades superficiais de líquidos. A conversão das variáveis existentes nestas curvas são necessárias para comparação com os resultados experimentais e com o modelo, baseado na teoria da bifurcação, aplicado sobre um escoamento de um filme plano, vertical, e contra-corrente a um escoamento de um gás. Os resultados experimentais e o modelo encontram-se apresentados em Biage, 1989. As variáveis J_l e J_g , encontradas nestas figuras são, respectivamente, as velocidades superficiais do líquido e do gás. Elas são definidas como segue:

$$J_l = \frac{Qv_l}{A_t} \quad (4.2)$$

$$J_g = \frac{Qv_g}{A_t} \quad (4.3)$$

onde Qv_l e Qv_g são, respectivamente, as vazões volumétricas do líquido e do gás, A_t é a área transversal do canal.

De uma forma geral, observa-se nas Figs. 4.9 a 4.11 que os picos existentes na espessura do filme líquido, concordam quase que perfeitamente com os picos desta variável, obtidos experimentalmente, mostrando uma ótima aproximação nos pontos de *flooding*. Entretanto, quanto ao valor médio da espessura do filme líquido com relação aos resultados experimentais, ela apresenta uma diferença em torno de 35% em todas as curvas. Esta aproximação pode ser considerada razoável, se se observar que em valores numéricos, ela corresponde a menos de 0,2 mm e medidas experimentais em canais verticais ou horizontais, com precisão menor que esta ordem de grandeza, é praticamente impossível, desde que as superfícies internas dos canais apresentam irregularidades maiores que estes valores. O modelo de escoamento plano, desenvolvido na teoria da bifurcação, apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais, para a espessura do filme líquido. Esta concordância é devido, principalmente, ao fato que neste modelo, o desenvolvimento dos cálculos da espessura inicia com o valor da espessura, obtida experimentalmente, para uma velocidade superficial $J_g = 0$. Então, a partir deste valor inicial, a espessura do filme é perturbada pela velocidade superficial do gás, através de incrementos graduais até ultrapassar o ponto de transição que caracteriza o ponto de *flooding*. Os pontos de *flooding* obtidos através deste modelo apresentam um erro de aproximação, conforme caracterizado em Biage (1989), de aproximadamente 22%. A fraca aproximação deste modelo advém do fato que as equações de conservação que descrevem o problema físico são obtidas através de balanços globais sobre um escoamento plano vertical, onde despreza-se os termos inerciais contidos nestas equações, além de ser necessário utilizar correlações experimentais, tanto para a tensão interfacial, quanto para as tensões nas paredes em contato com o gás e com o líquido. Entretanto, este modelo apresenta uma formulação simples e este fato pode ser vantajoso em algumas situações.

A Fig. 4.12 mostra a carta de *flooding* que de uma forma padrão, ela quase sempre é apresentada, na literatura especializada, no plano (J_l, J_g) . Nesta figura foram colocados os pontos experimentais obtidos por Biage (1989) e duas outras curvas obtidas através das correlações experimentais de Feind (1960) e English e Outros (1963). Estas correlações foram escolhidas por apresentarem grande

aproximação para resultados experimentais obtidos por vários outros pesquisadores. Neste estudo, as correlações de Feind e English e Outros, apresentam uma erro relativo médio de 15% e 11%, respectivamente, considerados bons. Estas correlações são definidas pelas seguintes equações:

■ Correlação Feind (1960):

$$m \frac{Re_G}{(Re_{sl})^n} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0.4} \left(\frac{\mu_g}{\mu_l} \right)^{0.75} + 1.4 \times 10^{-4} = 1300 \left(\frac{s}{h_N} \right)^{1.25} \quad (4.4)$$

onde os coeficientes apresentados na equação acima são definidos de acordo com as seguintes relações:

$$200 \leq Re \leq 2500 \begin{cases} m=92; n=0,33 & \text{se } Re_{sl} < 1600 \\ m=315,4; n=0,5 & \text{para os demais} \end{cases}$$

■ Correlação English e Outros (1963):

$$J_G = 0,286 \left\{ \frac{D_h^{0,322} \rho_l^{0,419} \sigma^{0,097}}{\rho_g^{0,462} \mu_l^{0,150} J_l^{0,075}} \right\} \quad (4.5)$$

$$0,1 \leq \left(\frac{M_l}{M_g} \right) \leq 1,0$$

onde as variáveis apresentadas nas equações acima, isto é, ρ_l e ρ_g são, respectivamente, as densidades do líquido e do gás e da mesma forma, μ_l e μ_g são as viscosidades dinâmicas do líquido e do gás, s é a espessura do canal, h_N é a espessura de Nusselt, σ é tensão superficial e M_l e M_g são, respectivamente, os fluxos de massa da fase líquida e da fase gás e finalmente, D_h é o diâmetro

hidráulico do canal. Os grupos adimensionais, Re_G e Re_{s1} , são definidos de acordo com as seguintes equações:

$$Re_G = \frac{\rho_G J_G S}{\mu_G}; \quad Re_{s1} = \frac{\rho_l J_l D_h}{\mu_l}. \quad (4.6)$$

Quanto aos resultados, através da Fig. 4.12, observa-se uma concordância quase que perfeita entre a curva de *flooding* referente a este estudo e aquela referente aos resultados experimentais. O erro relativo médio é de aproximadamente de 3%. Este modelo, apesar de complexo quanto à sua formulação, não apresenta os termos flutuantes com relação ao tempo, contidos na equação da espessura do filme líquido. Portanto, deve-se concluir que os termos flutuantes não afetam, de forma considerável, o escoamento e neste caso, a transição é influenciada somente pelo escoamento permanente. Este fato deverá ser comprovado, resolvendo este problema com a inclusão da solução transiente relativa ao tempo, juntamente com solução permanente. Posteriormente, deve-se comparar os resultados aqui apresentados e os envolvendo as duas soluções (permanente e transiente), com resultados experimentais para outras formas geométricas e de outros pesquisadores.

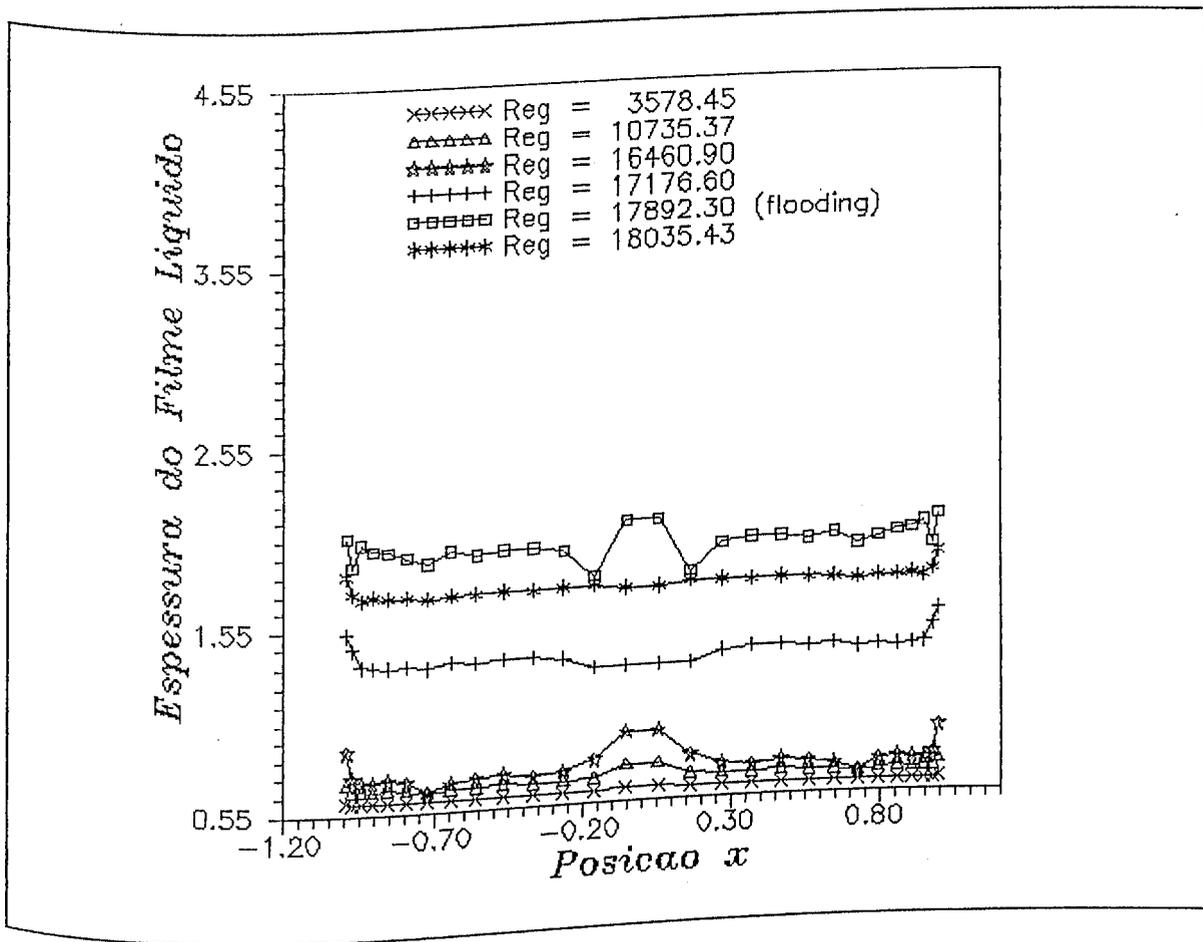


Figura 4.1 - Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_1 = 0.0088$ m/s

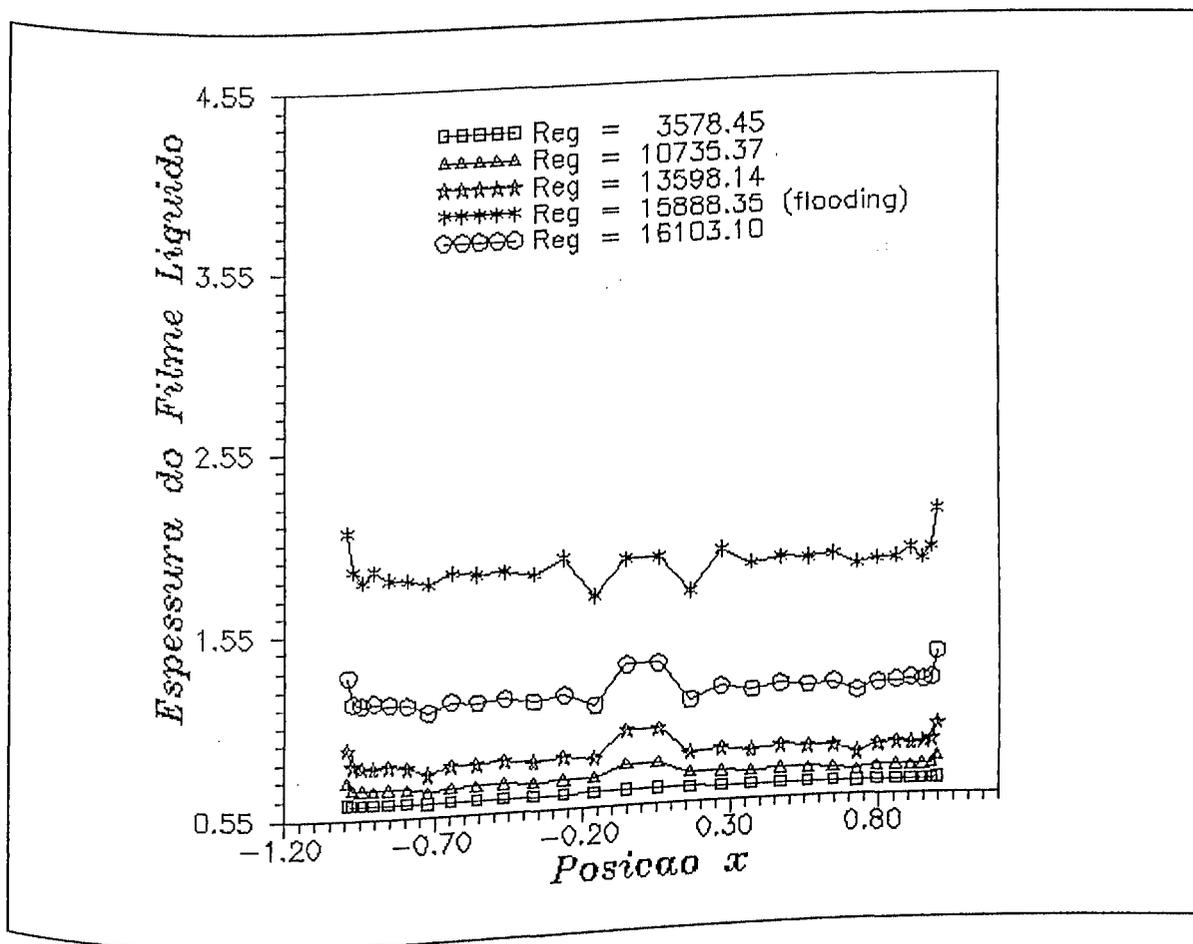


Figura 4.2 - Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_1 = 0.022$ m/s

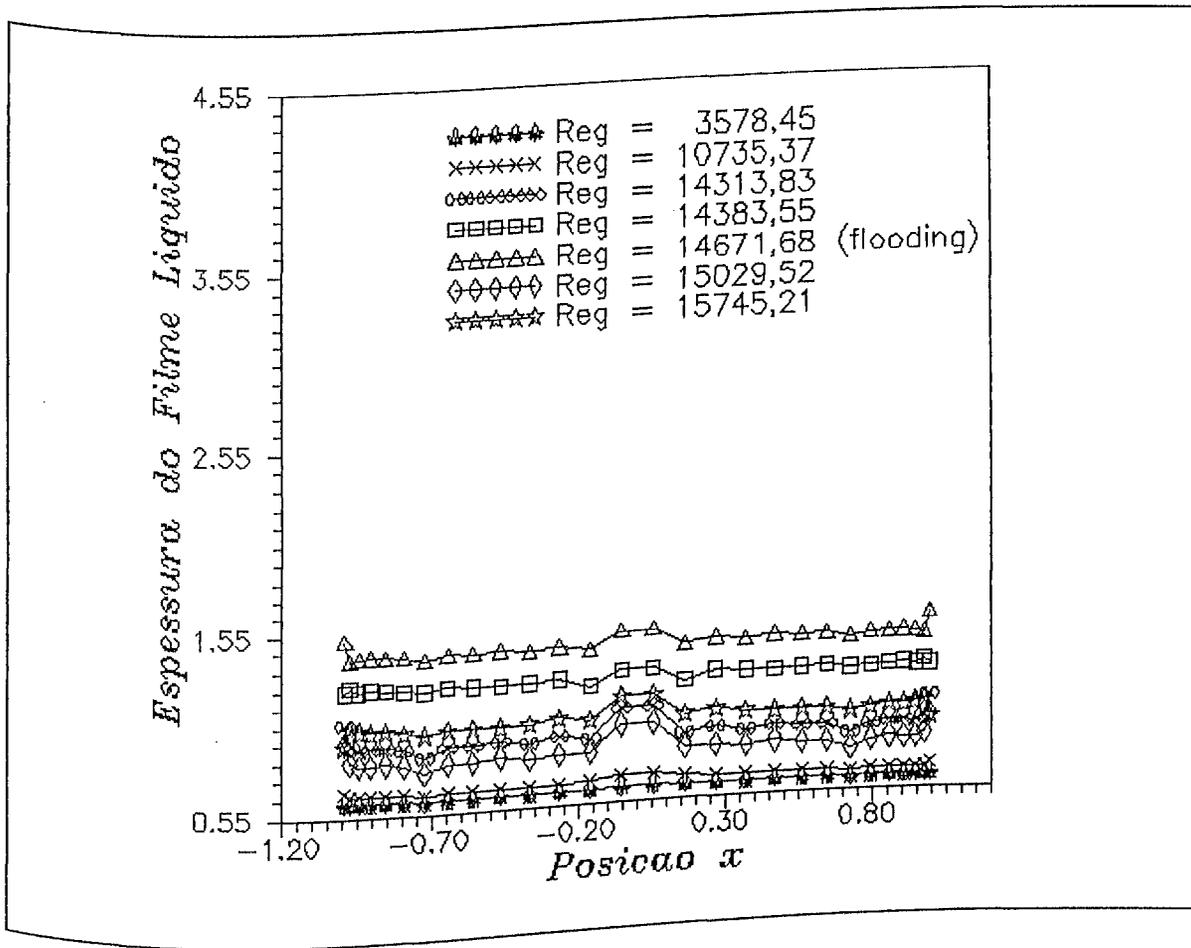


Figura 4.3 - Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_1 = 0.035$ m/s

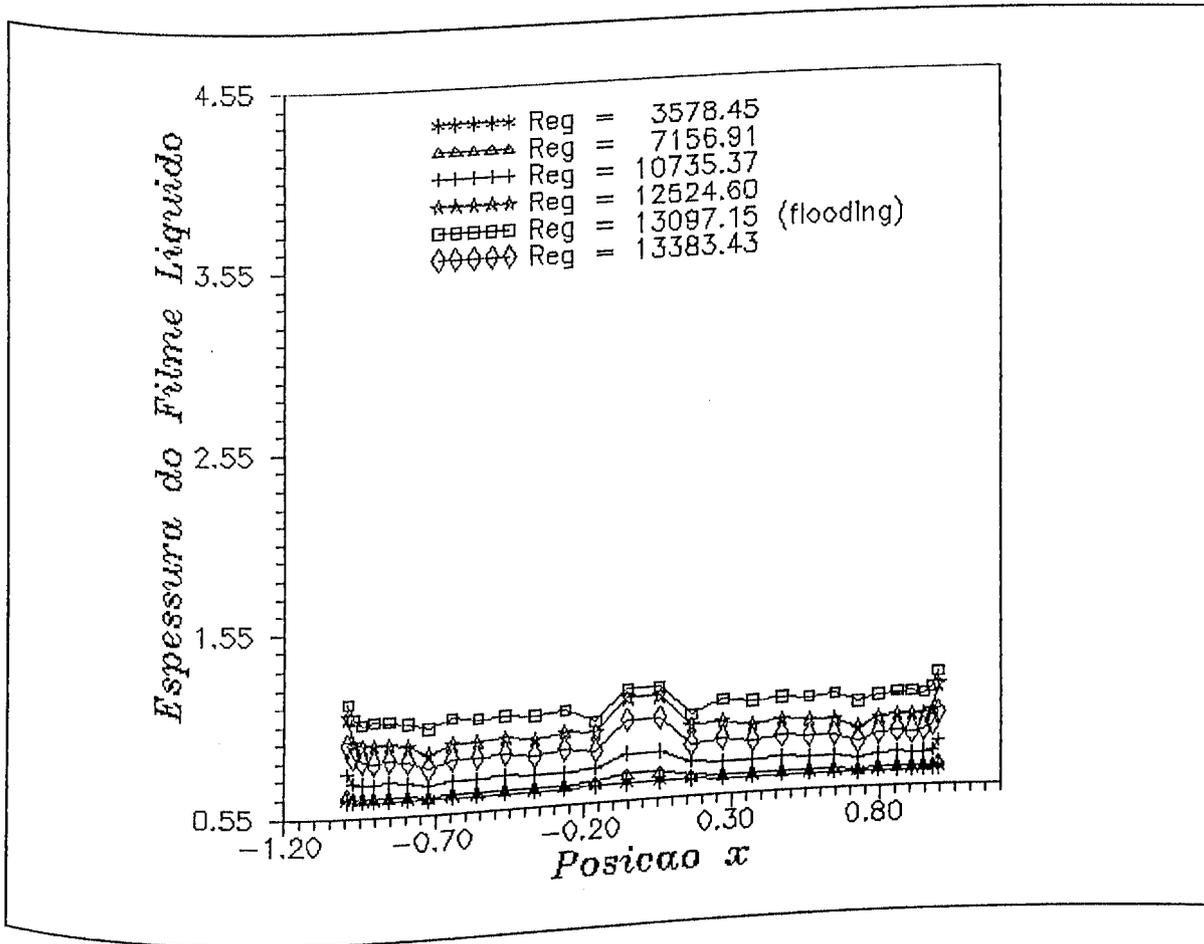


Figura 4.4 - Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_1 = 0.053$ m/s

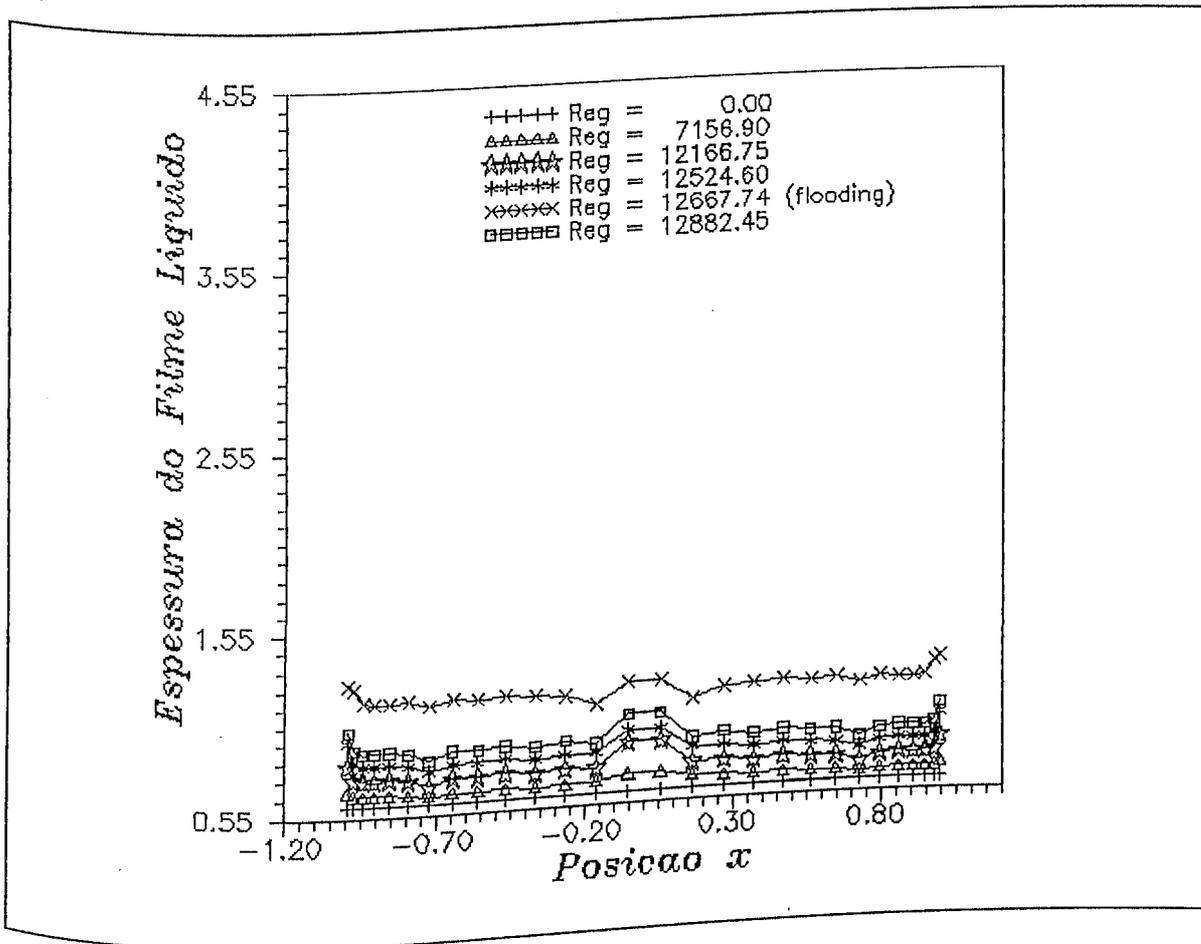


Figura 4.5 - Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_1 = 0.067$ m/s

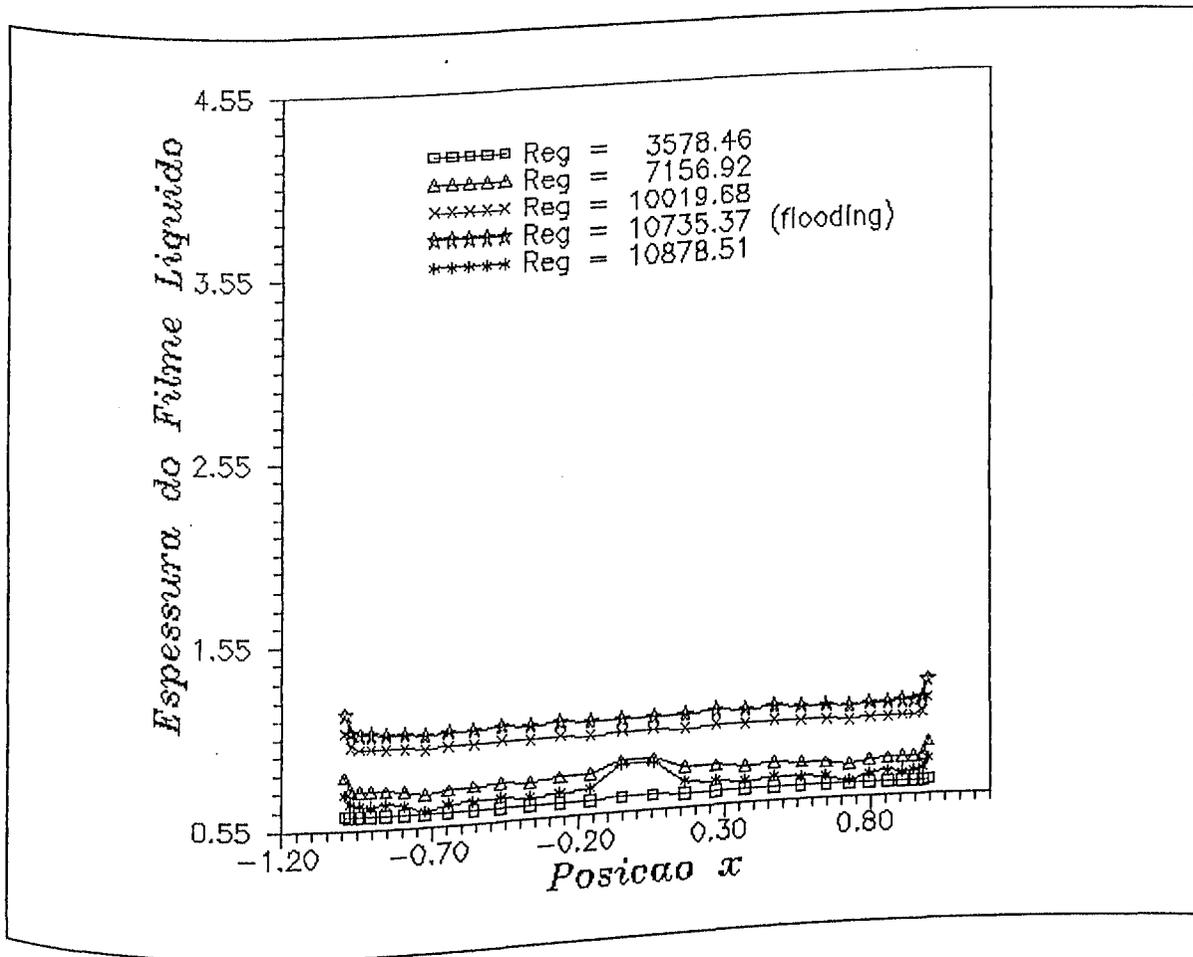


Figura 4.6 - Espessura adimensional do filme líquido em função da posição x , para $J_1 = 0.088$ m/s

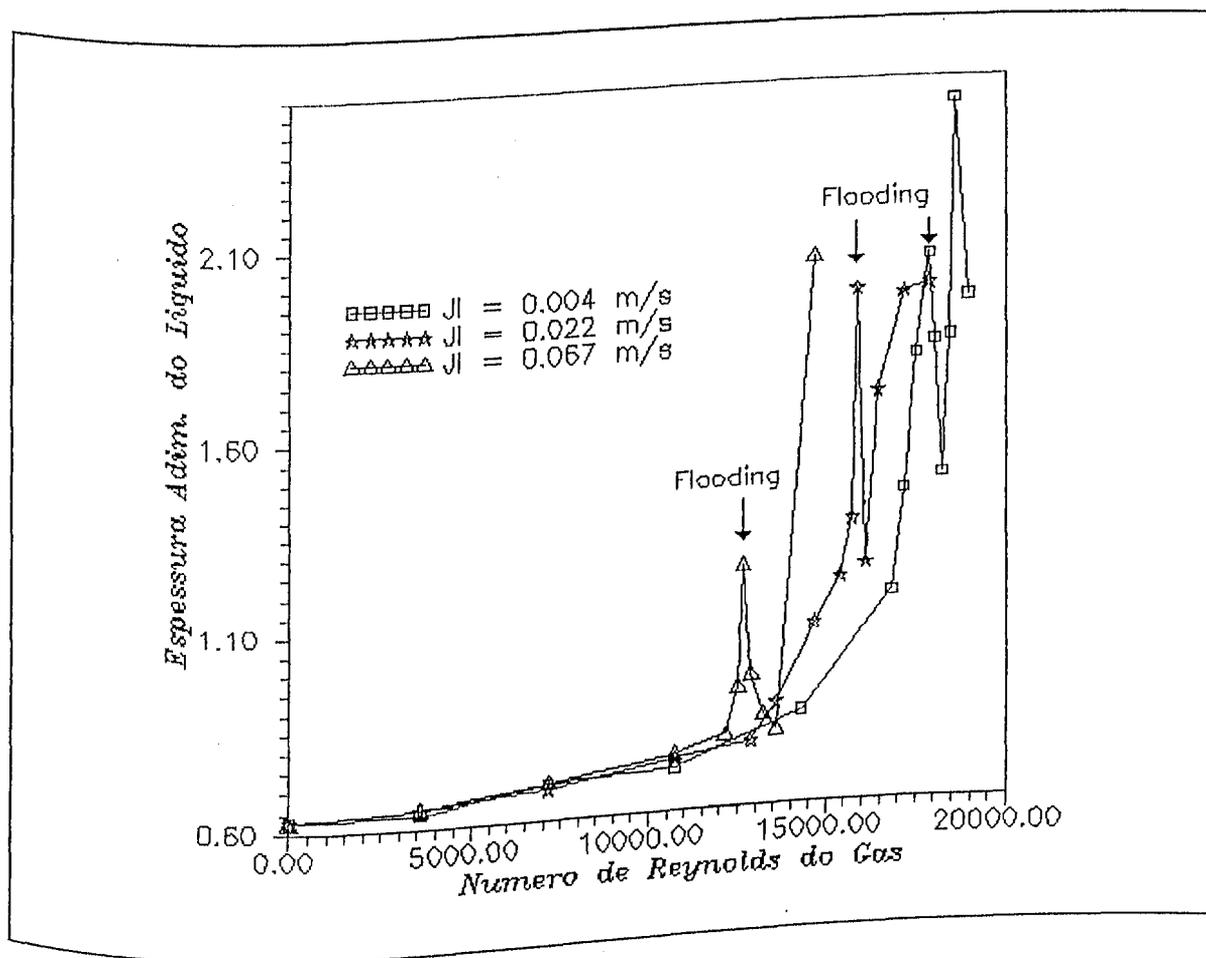


Figura 4.7 - Evolução da espessura média do filme líquido com relação a x , em função do Número de Reynolds do gás, para várias velocidades superficiais do líquido (J_1)

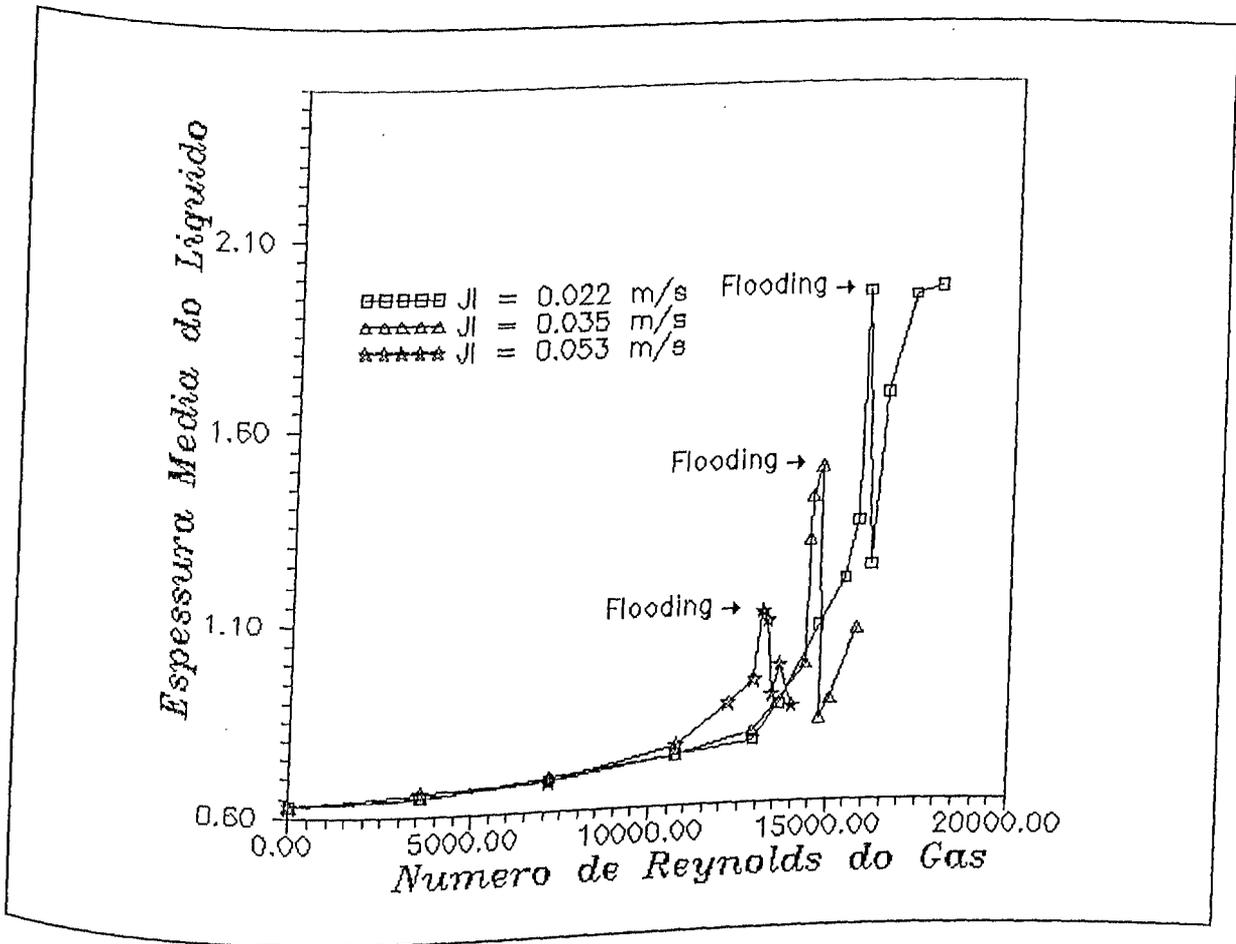


Figura 4.8 - Evolução da espessura média do filme líquido com relação a x , em função do Número de Reynolds do gás, para várias velocidades superficiais do líquido (J_l)

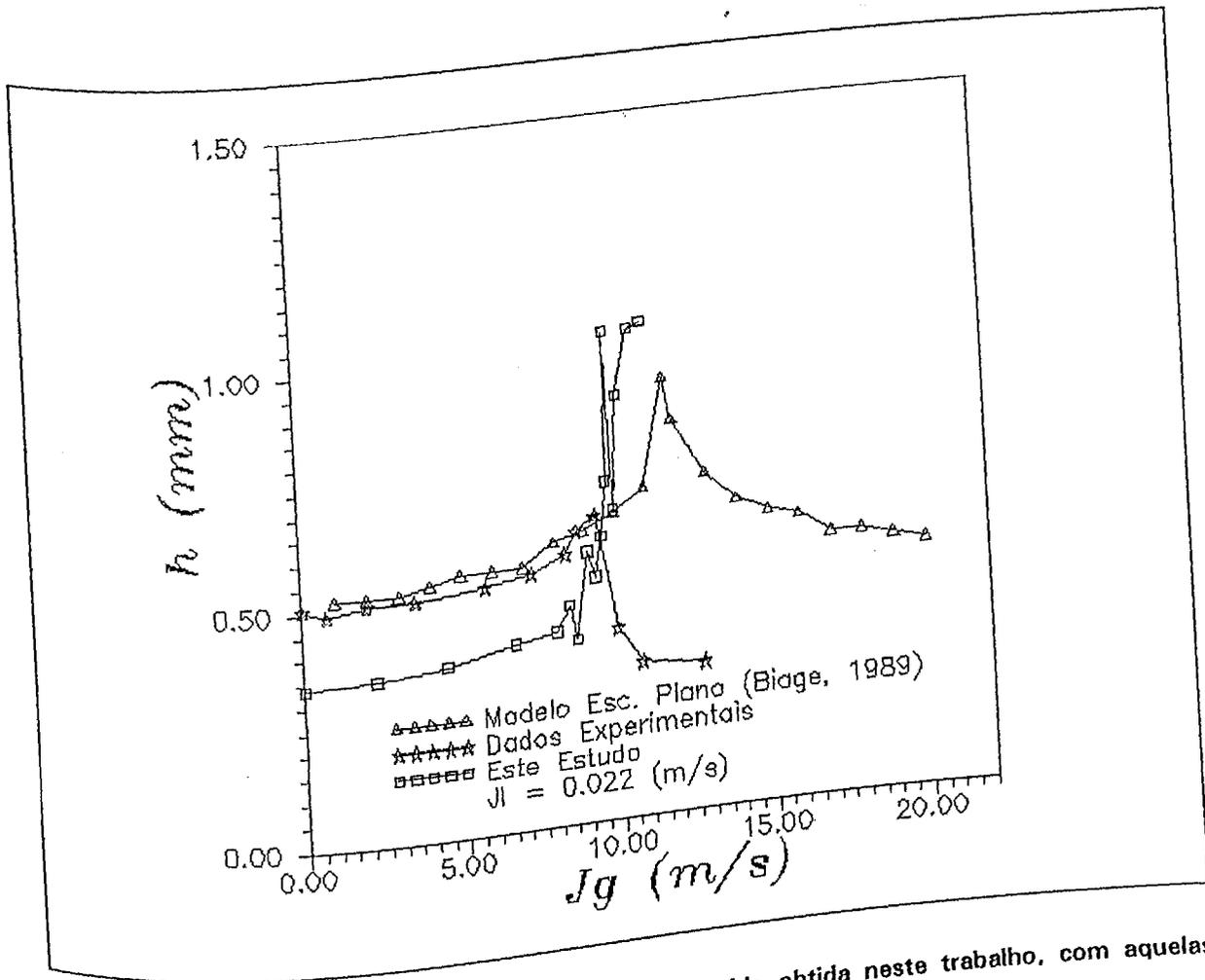


Figura 4.9 - Comparação da espessura do filme líquido obtida neste trabalho, com aquelas determinadas pelo método do escoamento plano e com as obtidas experimentalmente em Biage, 1989.

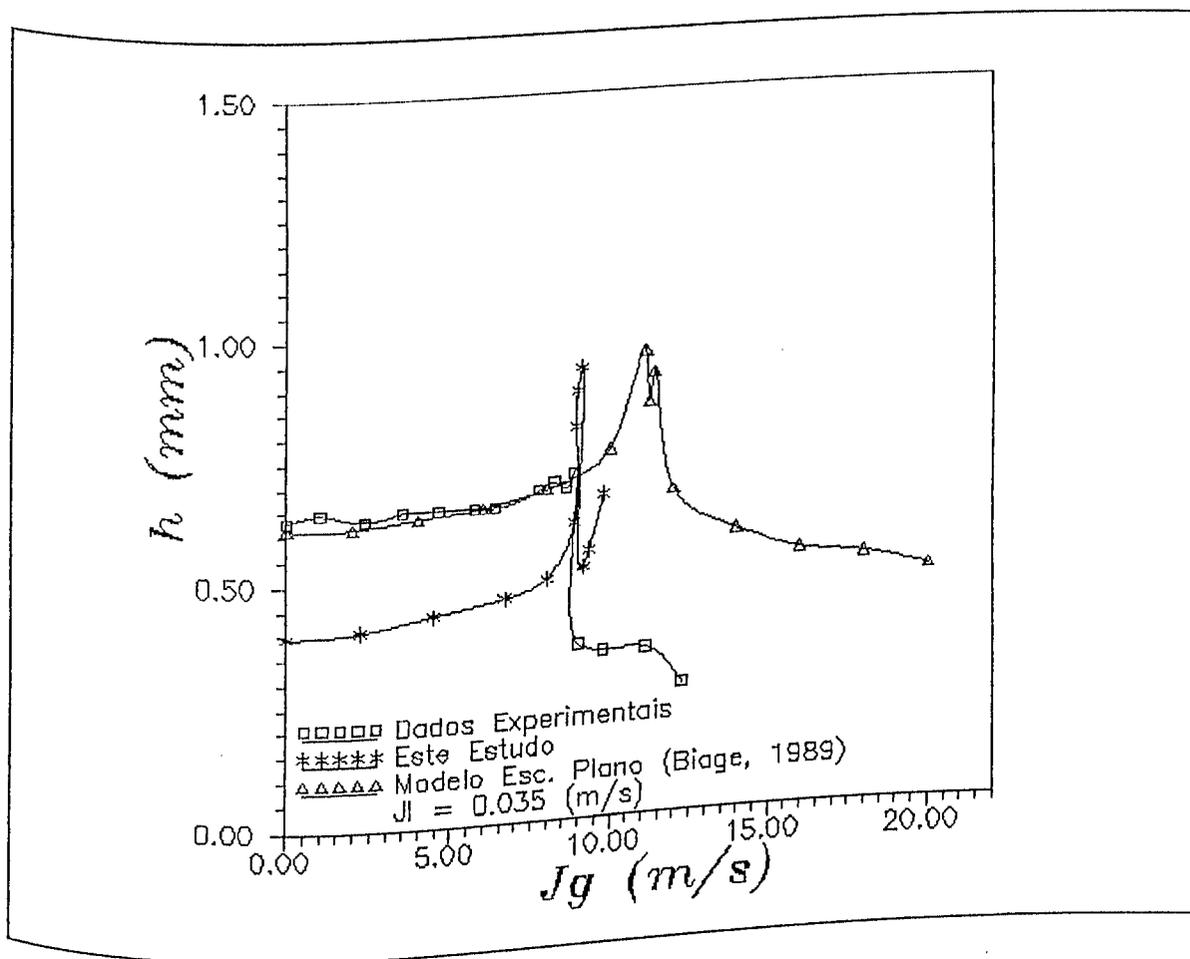


Figura 4.10 - Comparação da espessura do filme líquido obtida neste trabalho, com aquelas determinadas pelo método do escoamento plano e com as obtidas experimentalmente em Biage, 1989.

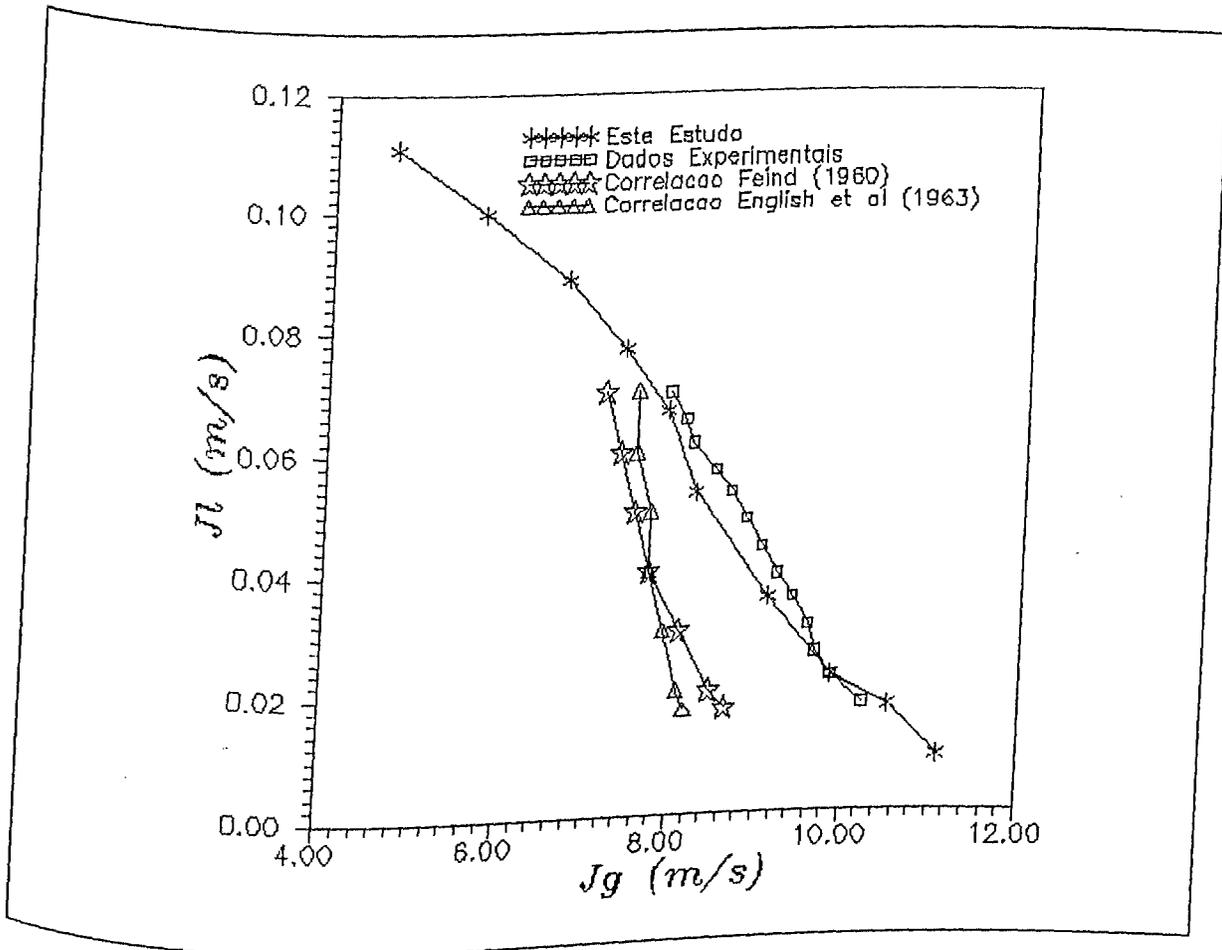


Figura 4.12 - Carta de Flooding (evolução da curva de transição para quatro estimativas)

4.3. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi desenvolvido um estudo sobre o escoamento de um filme líquido sobre uma parede plana vertical, submetida a um escoamento de gás a contra-corrente. A partir das equações de conservação, referentes ao domínio e às fronteiras, foi aplicado um procedimento de adimensionalização que permitiu introduzir a teoria da perturbação e, conseqüentemente, reduzir o problema, a princípio, constituído de inúmeras variáveis, e iguais números de equações, em um problema caracterizado somente por uma equação, definida pela espessura do filme líquido, em função de vários parâmetros característicos do escoamento, que definem o comportamento da estrutura do filme. Esta redução do número de equações constitui um trabalho árduo e difícil. A solução remanescente que define o problema foi decomposta em duas equações, sendo a primeira referente ao escoamento permanente e a segunda referente ao escoamento transiente.

Somente a primeira equação, ou seja, aquela referente ao escoamento permanente, tornou-se objeto de solução neste estudo, sendo resolvida pelo Método Espectral da Colocação. Os resultados plotados na Carta de *Flooding* (Fig. 4.12), foram os melhores possíveis.

Em estudos subseqüentes a este, será muito importante que se estime, através deste modelo, as influências de variáveis tais como o comprimento do canal, forças gravitacionais, forças viscosas e de superfície, além daquelas exercidas pelas condições limites e iniciais. Devido ao grande interesse que representa dominar o efeito destes parâmetros, torna-se, então, perfeitamente justificável enfrentar tamanha complexidade. Até o momento nenhum modelo tem estimado com precisão a influência destes parâmetros. Porém, o estudo aqui apresentado, possibilita desenvolver trabalhos sobre os efeitos de todas estas variáveis.

A complementação desta pesquisa, será objeto de uma série de estudos subseqüentes, que irão verificar as influências dos parâmetros a seguir, sobre a solução do escoamento permanente:

- ▲ comprimento do canal, representado pelo parâmetro ε ;

64375/95

- ▲ parâmetro K_p , definido pela Eq. (3.8), que representa a relação entre as forças gravitacionais do líquido e do gás;
- ▲ parâmetro K_v , definido pela Eq. (3.9), que representa a relação entre as forças viscosas e gravitacionais da fase líquido;
- ▲ parâmetro σ , definido pela Eq. (3.2), que representa os efeitos da força superficial;
- ▲ novas condições limites influenciando no comportamento da transição.

Após analisar o comportamento da solução permanente com relação aos itens acima citados, a introdução da solução transiente no problema, apresentada no item 3.5.3, é importante, para verificar a própria influência desta equação e de suas condições limites sobre o problema. Este estudo deverá constituir-se da etapa subsequente do problema que, ao conter a análise envolvendo os itens citados acima, constitui o estudo mais complexo deste modelo.

Finalmente, uma comparação de resultados deste estudo com os experimentais de outros pesquisadores, para diferentes geometrias, poderá validar o modelo proposto.

Entretanto, este modelo para o estudo da transição de um escoamento a contra-corrente para co-corrente é bastante completo e, até o momento, não existe outro na literatura. Os resultados obtidos são bastante animadores e servirão como estímulo para os estudos subsequentes.

5. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [1] BACHIR, A.; Etude de L'instabilité d'un Film Liquide Ruisselant sur une Plaque Verticale et Soumis à un Contre-Courant de Gaz. Transition vers L'écoulement Cocourant Ascendant.; Tese de Doutorado - L'institut National Polytechnique de Grenoble - Université Scientifique. Technique et Médicale de Grenoble - Grenoble; 1987; 592 p.
- [2] BARRDAHL, R.; On the Stability of Falling Films - Periodic, Finite-Amplitude Waves; JChE Journal; Vol. 32, No. 5; 789 - 797; 1986.
- [3] BHARATHAN, D. e Outros; Air Water Counter-Current Annular Flow; EPRI Report, No. NP-786; 1978.
- [4] BIAGE, M.; Structure de la Surface Libre d'un Film Liquide Ruisselant sur une Plaque Plane Verticale et Soumis a un Contre-Courant de Gaz: Transition vers L'écoulement Cocourant Ascendant; Tese de Doutorado - L'institut National Polytechnique de Grenoble - Grenoble; 1989; 397 p.
- [5] CANUTO, C. e outros; Spectral Methods in Fluid Dynamics; Springer - Verlag; New York; 1988; 557 p.
- [6] CHANG, H-C.; Nonlinear Waves on Liquid Film Surfaces - I. Flooding in a Vertical Tube; Chemical Engineering Science; Vol. 41; 2463-2476; 1986.
- [7] CLIFT, R. e Outros; The Effect of Viscosity on the Flooding Conditions in Wetted Wall Columns; Chem. Engng. Sci.; Vol. 21, 87 - 95; 1966.
- [8] DUKLER, A. E. e SMITH, L.; Two-Phase Interactions in Counter-Current Flow: Studies of the Flooding Mechanism; NUREG Report; No. NUREG/CR - 0617; 1979.

- [9] EICHHORN, R.; Dimensionless Correlation of the Hanging film Phenomenon; J. of Fluids Engineering (Transactions of the ASME); Vol. 102; 372 - 375; 1980.
- [10] HEWITT, G.F. e Outros; Transaction in Film Flow in a Vertical Tube; Report UKAEA; No. AERE- R-4614; 1965.
- [11] HEWITT, G.F.; Influence of End Conditions, Tube Inclination and Fluid Physical Properties on Flooding in Gas-Liquid Flows; Report HTFS, No. HTFS-RS-222; 1977.
- [12] HEWITT, G.F. e WALLIS, G. B.; Flooding and Associated Phenomena in Falling Film Flow in a tube; Report AERE; No. AERE - R 4022; 1963.
- [13] IMURA, H. e Outros; Flooding Velocity in a Counter-Current Annular Two-Phase Flow; Chem. Engng. Sci.; Vol. 32; 75-87; 1977.
- [14] JAMESON, G. J. e CENTINBUKLAR, A.; Wave Inception by Air Flow Over a Liquid Film; Cocurrent Gas-Liquid Flow; Rhodes, E. et Scott, D.S., Eds, Plenum Press; 271-282; 1969.
- [15] LBOVITZ, N. R.; Perturbation Expansions on Perturbed Domains; SIAM Review; Vol. 24; No. 4; 381 - 400; 1982.
- [16] MARON, D. M e DUKLER, A.E.; Flooding and Upward Film Flow in Vertical Tubes - II. Speculations on Film Flow Mechanisms; Int. J. Multiphase Flow; Vol. 10; No. 5, 599 - 621; 1984.
- [17] McQUILLAN, K. W. e Outros; Flooding in Vertical Two-Phase Flow; Int. J. Multiphase Flow; Vol. 11; No. 6, 741 - 760; 1985.
- [18] McQUILLAN, K. W. e WHALLEY, P.B.; A Comparison Between Correlations and Experimental Flooding Data for Gas-Liquid Flow in Vertical Circular Tubes; Chem. Engng. Sci.; Vol 40; No. 8, 1425 - 1440; 1985.

- [19] MISHIMA, K. e NISHIHARA, H.; Flooding Velocities for Counter Current Air-Water; Annu. Rep. Res. Reactor Kyoto Univ.; Vol. 17; 1 - 14; 1984.
- [20] PUSHKINA, O. L. e SOROKIN, Y. L.; Breakdown of Liquid Film Motion in Vertical Tubes; Heat Transfer - Soviet Research; Vol. 1; No. 5, 56 - 64; 1969.
- [21] RIVLIN, T. J.; The Chebyshev Polynomials; John Wiley & Sons; New York; 1974; 186 p.
- [22] SHILICHTING, H.; Boundary-Layer Theory; 6a. ed., McGraw-Hill Book Company; New York; 1968; 748 p.
- [23] SHEARER, C. J. e DAVIDSON, J. F. The Investigation of a Standing Wave Due to Gas Blowing Upwards Over a Liquid Film; Its Relation to Flooding in Wetted-Wall Columns; J. Fluid Mech.; Vol. 22; Part 2, 321- 335; 1965.
- [24] SISSOM, L. E. e PITTS, D. R.; Fenômenos de Transporte; Ed. Guanabara Dois S. A.; Rio de Janeiro - RJ; 1979; 765 p.
- [25] STAINTHORP, F. P. e ALLEN, J. M.; The Development of Ripples on the surface of Liquid Film Flowing Inside a Vertical Tube; Trans. Instn. Chem. Engrs.; Vol. 43; T85 - T91; 1965.
- [26] STAINTHORP, F. P. e BATT, R. S. W.; The Effect of Cocurrent and Counter-Current Air Flow on the Wave Properties of Falling Liquid Films; Trans. Instn. Chem. Engrs.; Vol. 45; T372 - T382.
- [27] STAKGOLD, I.; Green's Functions and Boundary Value Problems; John Wiley & Sons; New York; 1979; 638 p.
- [28] SUDO, Y. e OHNUKI, A.; Mechanism of Falling Water Limitation Under Counter-Current Flow Through a Vertical Flow Path; Bulletin of JSME; Vol. 27; No. 27; No. 226, 708-715; 1984.

- [29] SUZUKI, S. e UEDA, T.; Behaviour of Liquid Films and Flooding in Counter-Current Two-Phase Flow - Part 1. Flow in Circular Tubes; Int. J. Multiphase Flow; Vol. 3; 517 - 532; 1977.
- [30] TAITEL, Y. e BARNEA, D.; A Film Model for the Prediction of Flooding and Flow Reversal Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes; Int. J. Multiphase Flow; Vol. 8; No. 1, 1 - 10; 1982.
- [31] TOBILEVICH, N.Y. e Outros; The Downward Motion of a Liquid Film in Vertical Tubes in an Air-Vapour Counterflow; J. Engng. Phys.; No. 15, 887 - 861; 1968.
- [32] UEDA, T. e SUZUKI, S.; Behaviour of Liquid Films and Flooding in Counter-Current Two-Phase Flow - Part 2. Flow in Annuli and rod bundles; Int. J. Multiphase Flow; Vol. 4; 157 - 170; 1978.
- [33] VAN WYLEN, G. J. e SONNTAG, R. E.; Fundamentos da Termodinâmica Clássica; 2. ed.; Ed. Edgard Blucher Ltda.; São Paulo - SP; 1976; 565 p.
- [34] VERNIER, Ph.; Analyse Systématique des Échelles. 1ère Partie: Analyse Dimensionnelle Traditionnelle; Rapport CEA-R-5120; France, 1983.
- [35] VETTERLING, W. T. e Outros; Numerical Recipes - Example Book (C); Cambridge University Press; Cambridge; 1988, 239 p.
- [36] WALLIS, G.B.; Flooding Velocities for Air and Water in Vertical Tubes; Report AEEW; No. AEEW - R123; 1962 a.
- [37] WALLIS, G.B.; The Transition from Flooding to Upwards Cocurrent Annular Flow in a Vertical Tube. Report AEEW; No. AEEW - R142; 1962 b.
- [38] WALLIS, G. B. e KUO, J. T.; The Behaviour of Gas Liquid Interfaces in Vertical Tubes; Int. J. Multiphase Flow; Vol. 2; 521 - 536; 1976.

- [39] WALLIS, G. B. e MAKKENCHERY, S.; The Hanging Film Phenomenon in Vertical Tubes; Int. J. Multiphase Flow; Vol. 2; 521 - 536; 1974.
- [40] WHALLEY, P. B. e McQUILLAN, K. W.; Flooding in Two-Phase Flow: The Effect of Tube Length and Artificial Wave Injection; Physico-Chemical Hydrodynamics; Vol. 6; No. 1/2, 3 - 21; 1985.
- [41] ZABARAS, G. J. e DUKLER, A. E.; Counter-Current Gas-Liquid Annular Flow, Including the Flooding State; A. I. Ch. E. J.; Vol. 34; No. 3, 389 - 396; 1988.

6. ANEXOS

6.1. ANEXO I. ANÁLISE DIMENSIONAL

Existem cinco entidades fundamentais usadas como medidas para os sistemas físicos. Tais entidades - massa [M], comprimento [L], tempo [T], temperatura [θ] e carga elétrica [q] - são representados por meio de padrões internacionais. Matematicamente, as dimensões constituem um código para informar como o valor numérico de uma quantidade varia quando as unidades básicas de medida são submetidas a variações preestabelecidas.

Para obedecer ao uso mais comum, adota-se aqui o sistema MLT, já que a temperatura [θ] e a carga elétrica [q] não estão presentes nas relações matemáticas desenvolvidas neste estudo. A Tabela 1.1 fornece as dimensões das grandezas físicas deste trabalho. A pesquisa para a forma dimensional correta de uma equação desconhecida denomina-se análise dimensional.

O cálculo dos grupos adimensionais utilizados neste trabalho são efetuados utilizando o teorema dos PI de Vashy-Buckingham. Este teorema fornece uma técnica sistemática para a determinação dos grupos adimensionais que governam o problema, facilitando a experiência e a compreensão do problema físico.

Utilizando o teorema dos PI de Vashy-Buckingham sobre a função

$$U = f(Q, \rho g, \mu, x, \tau_1, \sigma, v, t, P, h) \quad (I.1)$$

onde U é a velocidade e as outras variáveis estão definidas na lista de abreviaturas e símbolos.

Segundo Vernier (1983), a redução adimensional da Eq. (I.1) necessita das seguintes etapas:

- (i) Escrever a matriz das dimensões

$$b_k^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n)$$

das n grandezas que figuram na Eq. (I.1), no sistema de m grandezas fundamentais (massa M , comprimento L e tempo T ; $m = 3$).

(ii) Escolher, dentre as grandezas determinantes da Eq. (I.1), r grandezas primárias g_α , sendo r as linhas da matriz de dimensões ($r \leq m$). No caso da Eq. (I.1), $r = m = 3$.

(iii) Determinar a matriz das dimensões

$$a_A^\beta; \quad (\beta = 1, \dots, r; \quad A = r+1, \dots, n)$$

das $(n-r)$ grandezas secundárias subsistentes na Eq. (I.1), no sistema r grandezas primárias. As matrizes a_A^β são as soluções dos $(n-r)$ sistemas lineares

$$b_\beta^\alpha a_A^\alpha = b_A^\alpha$$

(I.2)

(iv) Obter os PI por meio das expressões:

$$\Pi_A = g_A \prod_{\alpha=1}^r (g_\alpha^{-a_A^\alpha})$$

(I.3)

A forma reduzida das equações, tal como a Eq. (I.1), é do tipo

$$\Pi = \phi (\pi_A, \dots)$$

onde ϕ é a função $f(1, \dots, \pi_A, \dots)$.

Tabela I.1 Dimensões das grandezas da Eq. (I.1) no sistema fundamental L.M.T.

2 ^{ária}	ρg	μ	Q	x	π	σ	v	T	P	h
1 ^{ária}										
M	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
T	-2	-1	-1	0	-2	-2	-1	1	-2	0
L	-2	-1	2	1	-1	0	1	0	-1	1

No presente trabalho, as grandezas primárias escolhidas são Q_L , $\rho_L g$, μ_L . Seguindo os procedimentos já mostrados, obtém-se os grupos adimensionais requeridos no problema explorado. É o que se fará de agora em diante.

a) Considerando o comprimento, aqui representado por x , tem-se a expressão

$$\Pi_1 = x^* (\rho_L g)^{-a} (\mu_L)^{-b} (Q_L)^{-c}.$$

O sistema linear montado de acordo com a Eq. (I.2), a partir de dados retirados da Tab. I.1, fica da forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

A resolução deste, possibilita obter

$$\Pi_1 = \frac{x^*}{\mu_L^{-\frac{1}{3}} (\rho_L g)^{-\frac{1}{3}} Q_L^{\frac{1}{3}}}$$

ou ainda, utilizando-se da relação $\nu = \mu/\rho$, pode-se afirmar que

$$\Pi_1 = x^* \left(\frac{g}{\nu Q} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{I.4})$$

b) Para a Tensão de Cisalhamento (τ_i), de acordo com a Eq. (I.3), tem-se:

$$\Pi_2 = \tau_i^* (\rho_L g)^{-a} (\mu_L)^{-b} (Q_L)^{-c}.$$

O sistema linear, de acordo com a Eq. (I.2), será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

A resolução deste sistema produz

$$\Pi_2 = \frac{\tau_i^*}{(\rho_L g)^{\frac{2}{3}} \mu_L^{\frac{1}{3}} Q_L^{\frac{1}{3}}}. \quad (\text{I.5})$$

c) De acordo com a Eq. (I.3), considerando a Tensão Superficial (σ), tem-se:

$$\Pi_3 = \sigma^* (\rho_L g)^{-a} (\mu_L)^{-b} (Q_L)^{-c}.$$

O sistema linear, de acordo com a Eq. (I.2), será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

A resolução deste sistema produz

$$\Pi_3 = \frac{\sigma^*}{(\rho_L g)^{\frac{1}{3}} (\mu_L)^{\frac{2}{3}} (Q_L)^{\frac{2}{3}}} \quad (\text{I.6})$$

d) Considerando a Velocidade (v) na direção y , tem-se:

$$\Pi_4 = v^* (\rho_L g)^{-a} (\mu_L)^{-b} (Q_L)^{-c}.$$

O sistema linear, de acordo com a Eq. (I.2), será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema, obtém-se:

$$\Pi_4 = \frac{v^*}{(\rho_L g)^{\frac{1}{3}} (\mu_L)^{-\frac{1}{3}} (Q_L)^{\frac{2}{3}}}$$

e considerando $\nu = \mu/\rho$, pode-se afirmar que

$$\Pi_4 = v^* \left(\frac{v_L}{g Q_L^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{I.7})$$

e) Considerando o Tempo (t), de acordo com a Eq. (I.3), tem-se:

$$\Pi_5 = t^* (\rho_L g)^{-a} (\mu_L)^{-b} (Q_L)^{-c}.$$

O sistema linear, de acordo com a Eq. (I.2), será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

A resolução deste sistema possibilita obter:

$$\Pi_5 = \frac{t^*}{(\rho_L g)^{-\frac{2}{3}} (\mu_L)^{\frac{2}{3}} (Q_L)^{\frac{1}{3}}}$$

e, fazendo $v = \mu/\rho$, pode-se afirmar que

$$\Pi_5 = t^* \left(\frac{g^2 Q_L}{v_L} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{I.8})$$

f) Considerando a Pressão (P), de acordo com a Eq. (I.3), tem-se:

$$\Pi_6 = P^* (\rho_L g)^{-a} (\mu_L)^{-b} (Q_L)^{-c}.$$

O sistema linear, de acordo com a Eq. (I.2), será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

A resolução deste sistema possibilita obter:

$$\Pi_6 = \frac{P^*}{(\rho_L g)^{\frac{2}{3}} (\mu_L)^{\frac{1}{3}} (Q_L)^{\frac{1}{3}}}. \quad (\text{I.9})$$

g) Considerando, finalmente, a espessura do filme líquido (h), de acordo com a Eq. (I.3) tem-se:

$$\Pi_7 = h^* (\rho_L g)^{-a} (\mu_L)^{-b} (Q_L)^{-c}.$$

O sistema linear, de acordo com a Eq. (I.2), será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

A resolução deste sistema possibilita obter:

$$\Pi_7 = \frac{h^*}{(\rho_L g)^{-\frac{1}{3}} (\mu_L)^{\frac{1}{3}} (Q_L)^{\frac{1}{3}}}$$

ou, como $\nu = \mu/\rho$, é possível afirmar que

$$\Pi_7 = h^* \left(\frac{g}{vQ} \right)^{\frac{1}{3}} . \quad (\text{I.10})$$

Faz-se necessário agora, um estudo do grau de importância das variáveis, ou seja, o quanto cada variável interfere nos fenômenos que ocorrem no sistema. Para tanto, procede-se uma análise de ordem de grandezas, introduzindo um parâmetro adimensional muito pequeno ε . Este é um parâmetro perturbador do sistema definido pela relação geométrica (h_0/L) para a parte líquida e $\varepsilon_G = (s-h)/L$, ou ainda, $\varepsilon_G = s/L - \varepsilon$, para o gás.

Tomando um escoamento do tipo mostrado na Fig 1.1, a equação do movimento na direção x é dada por

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g = 0 \quad (\text{I.11})$$

logicamente contando com as condições de contorno:

$$u = 0 \quad \text{quando} \quad y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{quando} \quad y = h_0 .$$

O desenvolvimento dessas equações conduz à seguinte equação para a velocidade u :

$$u = -\frac{g}{2v} h_0^2 \left[\left(\frac{y}{h_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{h_0} \right) \right] . \quad (\text{I.12})$$

Sabe-se que a taxa de fluxo de massa é dada por:

$$Q = \int_0^{h_0} u \, dy .$$

Substituindo a Eq. (I.12) na equação da vazão, obtém-se:

$$Q = \frac{gh_0^3}{3\nu} \quad (\text{I.13})$$

Isto possibilita mostrar que:

$$h_0 = \left(\frac{3Q\nu}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

nada mais é do que a espessura de Nusselt, a qual corresponde ao fluxo de líquido com ausência de tensão interfacial.

Na superfície livre, ou seja, quando $y = h_0$, sabe-se que

$$Q = U_0 h_0 \quad (\text{I.14})$$

Ao substituir a Eq. (I.14) na Eq. (I.13), pode-se obter

$$U_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{h_0^2 g}{\nu} \right) \quad (\text{I.15})$$

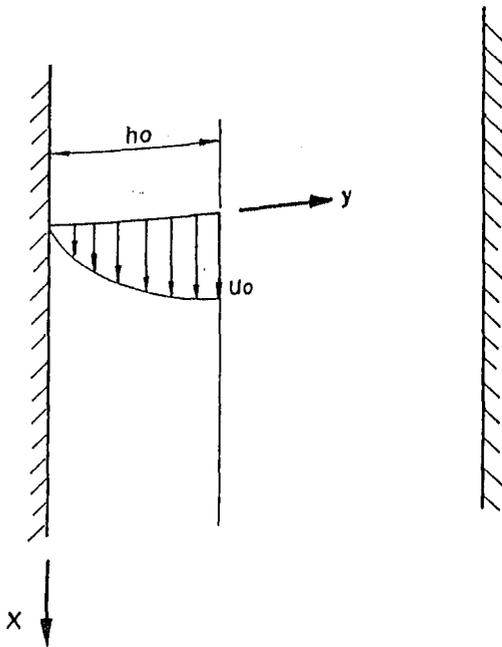


Figura I.1- Esquema que mostra o escoamento de um filme plano sobre uma parede vertical

Substituindo a Eq. (I.13) na Eq. (I.15), pode-se obter

$$U_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{g Q^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}} . \quad (\text{I.16})$$

Torna-se necessário observar que apartir das Equações (I.13) e (I.16) pode ser obtido, respectivamente:

$$h_0 = 3^{\frac{1}{3}} \left(\frac{v Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{h_0}{\left(\frac{v Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx 1,44 \equiv O(1) \quad (\text{I.17})$$

e

$$\frac{U_0}{\left(\frac{g Q^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx 0,693 \equiv O(1) . \quad (\text{I.18})$$

É desejável que

$$\frac{x}{L} \approx \frac{y}{h_0}$$

e ainda que

$$\frac{x}{L} \approx 1 ,$$

ou seja,

$$\frac{x}{L} \approx \frac{y}{h_0} \equiv O(1) .$$

Da Eq. (I.17) obtém-se:

$$\frac{x}{L} \approx \frac{\left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}{h_0} \Rightarrow x \approx \frac{\left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon} \quad \text{onde } \varepsilon = \frac{h_0}{L} \quad (\text{I.19})$$

Partindo-se da Equação da Continuidade é possível realizar a seguinte análise:

$$\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\left(\frac{Q^2 g}{v}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{O(v)}{\left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} = 0$$

Assim,

$$O(v) = -\varepsilon \left(\frac{Q^2 g}{v}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{I.20})$$

Da equação para o tempo

$$t = \frac{x}{u} \Rightarrow O(t) = \frac{\left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon \left(\frac{gQ^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

o que permite afirmar que

$$O(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{v^2}{g^2 Q}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{I.21})$$

Para a análise da Pressão (P), utiliza-se o seguinte expediente:

$$P^* \approx \rho g x^* \Rightarrow P^* \approx \frac{\rho g}{\varepsilon} \left(\frac{vQ}{g}\right)^{\frac{1}{3}} x \approx \frac{1}{\varepsilon} (\rho g)^{\frac{2}{3}} (\mu Q)^{\frac{1}{3}}$$

Portanto,

$$\frac{\varepsilon P^*}{(\rho g)^{\frac{2}{3}} (\mu Q)^{\frac{1}{3}}} \approx O(1)$$

Finalmente, a análise da Tensão Superficial (σ), que é feita a partir de

$$P^* - P_G^* = \frac{\sigma^*}{R^*} \Rightarrow \sigma^* = \frac{P^* - P_G^*}{\frac{1}{R^*}}$$

Desta forma,

$$\sigma^* \approx \frac{P^*}{\frac{1}{R^*}} \approx \frac{P^*}{\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}}} \cdot \frac{1}{[1 + (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Considerando que:

$$(\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2 \lll 1,$$

$$\sigma^* \approx \frac{P^*}{\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}}} \approx \frac{[(\rho g)^{\frac{2}{3}} (\mu Q)^{\frac{1}{3}}]}{\varepsilon} P \approx \frac{(\rho g)^{\frac{2}{3}} (\mu Q)^{\frac{1}{3}} (\frac{v Q}{g})^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon^3} \frac{P}{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}$$

E assim:

$$\frac{\varepsilon^3 \sigma^*}{[\rho g (\mu Q)^2]^{\frac{1}{3}}} \approx \frac{P}{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}} \approx \sigma \approx O(1) . \quad (I.22)$$

Apresenta-se a seguir as variáveis adimensionalizadas nas suas formas finais. Será notado a presença do parâmetro perturbador ε , que foi introduzido por razões já salientadas anteriormente. Desta forma tem-se:

$$u = \frac{u^*}{\left(\frac{g Q^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}}} ; \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon \left(\frac{g Q^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}}} ;$$

$$x = \frac{x^*}{\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{v Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} ; \quad y = \frac{y^*}{\left(\frac{v Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} ;$$

$$t = \frac{t^*}{\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{v^2}{g^2 Q}\right)^{\frac{1}{3}}} ; \quad h = \frac{h^*}{\left(\frac{v Q}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} ; \quad \tau^{yx} = \frac{\tau^{*yx}}{\mu \left(\frac{g^2 Q}{v^2}\right)^{\frac{1}{3}}} ;$$

$$P = \frac{P^*}{\frac{1}{\varepsilon} (\rho g)^{\frac{2}{3}} \mu^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{1}{3}}} ; \quad \sigma = \frac{\sigma^*}{\frac{1}{\varepsilon^3} (\rho g)^{\frac{1}{3}} \mu^{\frac{2}{3}} Q^{\frac{2}{3}}} .$$

6.2. ANEXO II

6.2.1. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO E CONTINUIDADE

As equações de conservação de quantidade de movimento, Eqs. (2.1) e (2.2) do Capítulo 2, assim como a equação da continuidade, Eq. (2.3), escritas abaixo:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - g^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} - \nu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} - \nu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{II.3})$$

serão submetidas aos parâmetros de adimensionalização a seguir, que foram obtidos no Anexo I:

$$u^* = u \left(\frac{g Q^2}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad v^* = v \left(\frac{g Q^2}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} \epsilon; \quad x^* = \frac{x}{\epsilon} \left(\frac{\nu Q}{g} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad (\text{II.4})$$

$$y^* = y \left(\frac{\nu Q}{g} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad t^* = \frac{t}{\epsilon} \left(\frac{\nu^2}{g^2 Q} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad P^* = \frac{P}{\epsilon} [(\rho g)^2 \mu Q]^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{II.5})$$

Nas Eq. (II.1) a (II.5), assim como ao longo de todo este anexo, as grandezas não acompanhadas do asterístico são caracterizadas como variáveis adimensionais, exceto os grupos característicos encontrados através da análise dimensional apresentados no Anexo I.

O resultado do processo da substituição dos grupos (II.4) e (II.5) nas Eqs. (II.1), (II.2) e (II.3) resulta nas seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 - \frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon Re \left(-\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \epsilon^3 Re \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \epsilon^4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.8})$$

onde Re é o Número de Reynolds do líquido ($Re = Q_L/\nu_L$). O Número de Reynolds representa, fisicamente, a relação entre as forças inerciais e as forças viscosas.

6.2.2. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno serão adimensionalizadas, utilizando-se os mesmos grupos adimensionais definidos em (II.4) e (II.5), além dos seguintes:

$$\sigma^* = \frac{1}{\epsilon^3} [\rho g (\mu Q)^2]^{1/3} \sigma; \quad h^* = \left(\frac{\nu Q}{g} \right)^{1/3} h. \quad (\text{II.9})$$

As equações que descrevem as condições de contorno para o problema físico em estudo, que foram apresentadas no Capítulo 2, serão transcritas a seguir:

■ Condição Cinemática na Interface:

$$v^* = \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \quad (\text{II.10})$$

■ Componente Nomal da Tensão na Interface:

$$P^* - P_G^* + (\tau_G^{yy} - 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y^*}) \frac{[1 + (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]}{[1 - (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]} + \frac{\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}}}{[1 + (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]^{3/2}} \sigma^* = 0 \quad (\text{II.11})$$

■ Componente da Tensão Tangencial na Interface:

$$\tau_G^{*yx} - \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) - 2 \left(\tau_G^{*xx} - 2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \frac{\frac{\partial h^*}{\partial x^*}}{[1 - (\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2]} = 0 \quad (\text{II.12})$$

■ Condição de Velocidade na Parede do Conduto:

$$u^* = 0; \quad v^* = 0 \quad (\text{II.13})$$

Aplicando-se os grupos adimensionais já apresentados, sobre a Eq. (II.10), obtém-se a seguinte equação adimensionalizada:

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{II.14})$$

Prosseguindo no processo de adimensionalização, agora com a Eq. (II.11), observa-se que esta apresenta alguns termos acompanhados do índice G que indicam serem referentes à fase gasosa. Tais termos introduzem a interferência do gás no sistema. Portanto, faz-se necessário inserir um novo parâmetro perturbador correspondente ao gás. Já que este parâmetro para o líquido é dado por $\epsilon = h_0/L$, para o gás será dado exatamente da mesma forma, somente lembrando que esta fase ocupa, em média, o espaço de $(s - h_0)$ da largura do canal, onde s é a largura deste canal. Assim, o tal parâmetro, para a fase gasosa, é dado por

$$\epsilon_G = \frac{s - h_0}{L}$$

o que pode ser transformado da seguinte forma:

$$\epsilon_G = \frac{s}{L} - \frac{h_0}{L} \quad .$$

Fazendo $a = s/L$, o resultado será

(II.15)

$$\epsilon_G = a - \epsilon$$

Para o gás, a única diferença nos parâmetros de adimensionalização, com relação aos apresentados no final do Anexo I, é o fato de se colocar o índice G nas grandezas aqui existentes, indicando serem pertencentes ao gás. Assim, por exemplo,

$$P_G^* = \frac{P_G}{\epsilon_G} \left[(\rho g)_G^{\frac{2}{3}} \mu_G^{\frac{1}{3}} Q_G^{\frac{1}{3}} \right]; v_G^* = v_G \epsilon_G \left(\frac{Q^2 g}{v} \right)_G^{\frac{1}{3}}; \text{ etc.}$$

Para a tensão τ_G^{*yy} , tem-se:

$$\tau_G^{*yy} = 2 \mu_G \frac{\partial v_G^*}{\partial y^*} = 2 \mu_G \frac{\epsilon_G \left(\frac{Q^2 g}{v} \right)_G^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{v Q}{g} \right)_G^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial v_G}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\tau_G^{*yy} = 2 (a - \epsilon) \mu_G \left(\frac{Q g^2}{v^2} \right)_G^{\frac{1}{3}} \frac{\partial v_G}{\partial y} \quad (II.16)$$

Depois de um grande número de transformações utilizando, além dos parâmetros adimensionais, também as Eqs. (II.15) e (II.16), chega-se à seguinte equação adimensionalizada e truncada no termo que acompanha ϵ^3 :

$$a^2 z^2 \left[P^2 - \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \epsilon \left\{ -2 a z \left[z P^2 + (P_G - a^2 \tau_G^{*yy}) P - z \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} +$$

$$+ \epsilon \left\{ z^2 \left[a^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right] P^2 + 2 z (P_G - 3 a^2 \tau_G^{*yy} - 2 a^2 z \frac{\partial v}{\partial y}) P + (P_G - a^2 \tau_G^{*yy})^2 - \right.$$

$$\left. - (z \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2})^2 \left[1 - 2 \left(a \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + O(\epsilon^3) = 0 \quad (II.17)$$

onde ainda tem-se que

$$z = \frac{(\rho g)^{\frac{2}{3}} \mu^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{1}{3}}}{(\rho g)^{\frac{2}{3}} \mu_G^{\frac{1}{3}} Q_G^{\frac{1}{3}}} = \frac{\mu \left(\frac{g^2 Q}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{\mu_G \left(\frac{g^2 Q}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}}}_G \quad (\text{II.18})$$

A Eq.(II.12), quando submetida aos parâmetros adimensionais (II.4) , (II.5) e (II.9), assim como a

$$\tau_G^{*yx} = \tau_G^{xy} \left[\mu_G \left(\frac{g^2 Q}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]; \quad \tau_G^{*xx} = \tau_G^{xx} e_G \left[\mu_G \left(\frac{g^2 Q}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right], \quad (\text{II.19})$$

resulta, depois de uma série de transformações matemáticas, na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \tau_G^{xy} - z \frac{\partial u}{\partial y} + e \left[-2 a \tau_G^{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + e^2 \left[-\tau_G^{yx} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ \left. + 2 \left(\tau_G^{xx} + 2 z \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + e^4 \left[z \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{II.20}) \end{aligned}$$

tendo ainda que a e z já foram mostrados anteriormente.

Finalmente, a Eq. (II.13), depois de submetida aos parâmetros adimensionais, transforma-se em:

$$u = 0; \quad v = 0. \quad (\text{II.21})$$

É muito importante ressaltar que os termos não acompanhados por nenhum índice, referem-se ao líquido.

6.3. ANEXO III

6.3.1. DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE ASSINTÓTICA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO E CONTINUIDADE

Considere duas funções $a(x,y,t)$ e $b(x,y,t)$ que doravante serão notadas por a e b , respectivamente. Expandindo-as em séries assintóticas, com relação ao termo perturbador ε , o resultado será:

$$a = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \varepsilon^2 a^{(2)} + \dots \quad (\text{III.1})$$

$$b = b^{(0)} + \varepsilon b^{(1)} + \varepsilon^2 b^{(2)} + \dots \quad (\text{III.2})$$

A adição ou subtração entre as séries de a e b é, simplesmente, a operação termo a termo das partes que acompanham um determinado ε^j ($j = 1, 2, 3, \dots$):

$$a \pm b = [a^{(0)} \pm b^{(0)}] + \varepsilon [a^{(1)} \pm b^{(1)}] + \varepsilon^2 [a^{(2)} \pm b^{(2)}] + \dots \quad (\text{III.3})$$

O produto entre a e b é dado por:

$$\begin{aligned} ab = & a^{(0)} b^{(0)} + \varepsilon a^{(0)} b^{(1)} + \varepsilon^2 a^{(0)} b^{(2)} + \dots \\ & + \varepsilon a^{(1)} b^{(0)} + \varepsilon^2 a^{(1)} b^{(1)} + \varepsilon^3 a^{(1)} b^{(2)} + \dots \\ & + \varepsilon^2 a^{(2)} b^{(0)} + \varepsilon^3 a^{(2)} b^{(1)} + \varepsilon^4 a^{(2)} b^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Observa-se neste produto uma lei de formação que é confirmada por LÉBOVITZ [15].

A derivada parcial de ordem i , da função a , em relação, por exemplo, à

coordenada x , (poderia também ser uma das outras coordenadas y ou t) fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial^i a}{\partial x^i} = \frac{\partial^i a^{(0)}}{\partial x^i} + \varepsilon \frac{\partial^i a^{(1)}}{\partial x^i} + \varepsilon^2 \frac{\partial^i a^{(2)}}{\partial x^i} + \dots \quad (\text{III.5})$$

O produto da função a , pela derivada parcial, de ordem i , da função b , em relação à coordenada x (por exemplo), resulta em:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^i b}{\partial x^i} &= a^{(0)} \frac{\partial^i b^{(0)}}{\partial x^i} + \varepsilon a^{(0)} \frac{\partial^i b^{(1)}}{\partial x^i} + \varepsilon^2 a^{(0)} \frac{\partial^i b^{(2)}}{\partial x^i} + \dots \\ &+ \varepsilon a^{(1)} \frac{\partial^i b^{(0)}}{\partial x^i} + \varepsilon^2 a^{(1)} \frac{\partial^i b^{(1)}}{\partial x^i} + \varepsilon^3 a^{(1)} \frac{\partial^i b^{(2)}}{\partial x^i} + \dots \\ &+ \varepsilon^2 a^{(2)} \frac{\partial^i b^{(0)}}{\partial x^i} + \varepsilon^3 a^{(2)} \frac{\partial^i b^{(1)}}{\partial x^i} + \varepsilon^4 a^{(2)} \frac{\partial^i b^{(2)}}{\partial x^i} + \dots \quad (\text{III.6}) \end{aligned}$$

Este tratamento, desde a Eq. (III.1) até a (III.6), é suficiente para desenvolver as equações que serão apresentadas posteriormente. Nestas, a e b poderão ser substituídas pelas velocidades u e v , ou ainda, pela pressão P , por serem as funções expandidas em séries assintóticas. Apenas a pressão P não apresenta derivadas em relação ao tempo.

6.3.1.1. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Partindo-se da equação do movimento, adimensionalizada, na direção x , Eq. (2.12), e considerando-se o tratamento dado nas equações de (III.1) a (III.6), o resultado é a equação a seguir:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial y^2} + 1 - \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} + \epsilon \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - Re \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \right. \right. \\ & \left. \left. + u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) \right] + \epsilon^2 \left[\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} - Re \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \right. \right. \\ & \left. \left. u^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + v^{(1)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) \right] + O(\epsilon^3) = 0 \quad (\text{III.7}) \end{aligned}$$

A equação do movimento, adimensionalizada, na direção y , Eq. (2.13), também é submetida às considerações a respeito da expansão em série assintótica mostradas nas equações de (III.1) a (III.6), que tem como resultado a seguinte equação:

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial y^2} \right) + \dots = 0 \quad (\text{III.8})$$

6.3.1.2. EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Da mesma forma, partindo da equação da continuidade (2.14), obtém-se:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + \epsilon \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} \right) + \dots = 0 \quad (\text{III.9})$$

6.3.2. DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE ASSINTÓTICA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

6.3.2.1. CONDIÇÃO CINEMÁTICA

De maneira semelhante ao processo realizado até o momento, a Condição Cinemática, Eq. (2.15), torna-se:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} - v^{(0)} + u^{(0)} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \epsilon \left[u^{(1)} \frac{\partial h}{\partial x} - v^{(1)} \right] + \epsilon^2 \left[u^{(2)} \frac{\partial h}{\partial x} - v^{(2)} \right] + O(\epsilon^3) = 0 \quad (\text{III.10})$$

6.3.2.2. TENSÃO NORMAL NA INTERFACE GÁS-LÍQUIDO

Da Eq. (2.16), que é a equação da Tensão Normal na Interface Gás-Líquido, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left\{ (az)^2 \left[(P^{(0)})^2 - \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} + \epsilon^2 \left\{ 2azP^{(0)} (azP^{(1)} - zP^{(0)} - P_G) + \right. \\ & \left. + 2az \left[a^2 \tau_G^{yy} P^{(0)} + z \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} + \epsilon^2 \left\{ (zP^{(0)} + P_G)^2 + (azP^{(1)} + a^2 \tau_G^{yy})^2 - \right. \\ & \left. - 2a^2 \tau_G^{yy} (3zP^{(0)} + P_G) - 2azP^{(1)} (2zP^{(0)} + P_G) + 2(az)^2 P^{(0)} (P^{(2)} - 2 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}) + \right. \\ & \left. + (az \frac{\partial h}{\partial x})^2 \left[(P^{(0)})^2 + 2 \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right] - \left(z \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + O(\epsilon^3) = 0 \quad (\text{III.11}) \end{aligned}$$

6.3.2.3. TENSÃO TANGENCIAL NA INTERFACE GÁS-LÍQUIDO

Da Eq. (2.17), que é da Tensão Tangencial na Interface Gás-Líquido, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \left[\tau_G^{yx} - z \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right] + \varepsilon \left[-z \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} - 2z \tau_G^{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \varepsilon^2 \left[-z \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} - \tau_G^{yx} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + z \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} - z \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + 2z \tau_G^{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + 4z \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right] + O(\varepsilon^3) = 0 \quad (\text{III.12})
 \end{aligned}$$

6.3.2.4. VELOCIDADE DO LÍQUIDO NA PAREDE

E, finalmente, através da Eq. (2.18), que representa as velocidades do líquido na parede, obtém-se:

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots = 0. \quad (\text{III.14})$$

6.3.3. RESOLUÇÃO DO SISTEMA QUE ACOMPANHA ε^0

Por uma questão puramente didática, será aqui repetido o primeiro sistema de equações, ou seja, aquele que acompanha ε^0 .

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial y^2} + 1 - \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.15})$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.17})$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.18})$$

Condições de contorno:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v^{(0)} + u^{(0)} \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad y = h$$

$$P^{(0)} = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}; \quad y = h \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} = \frac{\tau^{yx}}{z}; \quad y = h \quad (\text{III.20})$$

$$u^{(0)} = 0; \quad y = 0 \quad (\text{III.21})$$

$$v^{(0)} = 0; \quad y = 0 \quad (\text{III.22})$$

Integrando a Eq. (III.16), em relação a y , obtém-se:

$$P^{(0)} + C_1 = 0$$

onde C_1 é a constante que resulta da integração. Para se obter C_1 , utiliza-se a condição de contorno (III.19). Procedendo assim obtém-se:

$$C_1 = \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (\text{III.23})$$

e, conseqüentemente,

$$P^{(0)} = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Como σ é uma constante, conclui-se que $P^{(0)}$ não varia com y . Portanto, derivando $P^{(0)}$ em relação a x , para que o resultado possa ser substituído em (III.15), obtém-se:

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}.$$

A Eq. (III.15) torna-se:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial y^2} + 1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0. \quad (\text{III.24})$$

Integrando-se esta Eq. (III.24) em relação a y , obtém-se, com o auxílio da condição de contorno (III.20), a seguinte equação:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) y - \left(\frac{\tau_G^{yx}}{z} + h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h\right) = 0 \quad (\text{III.25})$$

Integrando-se agora a Eq. (III.25), novamente em relação à variável y e considerando-se a condição de contorno (III.21), obtém-se a equação para $u^{(0)}$:

$$u^{(0)} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) y^2 + \left(\frac{\tau_G^{yx}}{z} + h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h\right) y \quad (\text{III.26})$$

Desenvolvendo-se a Eq. (III.17), obtém-se:

$$v^{(0)} = - \int_0^y \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} dy \quad (\text{III.27})$$

Desta forma, para se obter $v^{(0)}$ torna-se necessário diferenciar $u^{(0)}$ em relação a x e substituir o resultado na Eq. (III.27). Isto produzirá:

$$v^{(0)} = \frac{1}{3} \left[\frac{\sigma}{2} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right] y^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + 1 \right) + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h \right] y^2 \quad (\text{III.28})$$

Na interface gás-líquido $u^{(0)}$ e $v^{(0)}$ podem ser obtidas fazendo $y = h(x,t)$, o que resulta em:

$$u^{(0)} = \frac{h^2}{2} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^2 + \frac{\tau_G^{yx}}{z} h \quad (\text{III.29})$$

$$v^{(0)} = -\frac{\sigma}{3} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^3 - \frac{1}{2z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} h^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} h^2 \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) \quad (\text{III.30})$$

Finalmente, a equação diferencial para a espessura do filme líquido, correspondente a ϵ^0 , será obtida substituindo as Eqs. (III.29) e (III.30) na condição cinemática, Eq. (III.18). Assim procedendo, o resultado será:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} h^2 (1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial h}{\partial x} h + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^3 + \frac{1}{2z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} h^2 = O(\epsilon) \quad (\text{III.31})$$

onde $O(\epsilon)$ representa o erro de ordem ϵ , que é aproximadamente igual a zero.

6.3.4. RESOLUÇÃO DO SISTEMA QUE ACOMPANHA ϵ^j ($j = 1, 2, 3, \dots$)

Pelo mesmo motivo alegado no item 6.3.3., repete-se aqui também o sistema

que acompanha ϵ :

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - \text{Re} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{III.32})$$

(III.33)

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} = 0$$

(III.34)

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = 0$$

Condições de contorno:

$$P^{(1)} = \frac{P_G}{az} - \frac{a}{z} \tau_G^{yy}; \quad u^{(1)} \frac{\partial h}{\partial x} - v^{(1)} = 0; \quad y = h \quad (\text{III.35})$$

(III.36)

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} = -2a \frac{\tau_G^{xx}}{z} \frac{\partial h}{\partial x}; \quad y = h \quad (\text{III.37})$$

(III.37)

$$u^{(1)} = 0; \quad y = 0$$

(III.38)

$$v^{(1)} = 0; \quad y = 0$$

Para proceder a resolução deste, recorre-se ao item 6.3.3. e mais especificamente, às Eqs. (III.26) e (III.28). Derivando-se $u^{(0)}(x,y,t)$ em relação ao tempo e, da mesma forma, em relação às coordenadas x e y , obtém-se, respectivamente:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} = \left(-\frac{\sigma}{2} \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3}\right) y^2 + \left[\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} h\right] y \quad (\text{III.39})$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} = \left(-\frac{\sigma}{2} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4}\right) y^2 + \left[\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h\right] y \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} = -\left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) y + \left[\frac{\tau_G^{yx}}{z} + h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)\right] \quad (\text{III.41})$$

Os processos de multiplicação usados para obter-se os grupos são muito simples e não trazem nenhuma complicação matemática. Por outro lado, o procedimento é extremamente longo, exigindo muito trabalho e concentração.

Somando-se a Eq. (III.23) aos dois grupos mencionados, obtém-se a relação a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} &= \frac{1}{12} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) y^4 - \\ &- \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \left[\left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) h + \frac{\tau_G^{yx}}{z}\right] y^3 + \left\{\frac{1}{2} \left[\left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\tau_G^{yx}}{z}\right] \left[\sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x}\right] + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\tau_G^{yx}}{z} + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h\right) - \right. \\ &\left. - \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3}\right\} y^2 + \left\{\sigma \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} h + \frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial t} + \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) \frac{\partial h}{\partial t}\right\} y \quad (\text{III.42}) \end{aligned}$$

Substituindo-se (III.42) em (III.32), a resolução é idêntica àquela do item 6.3.3., o que leva à seguinte equação para $u^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} = & \frac{Re}{360} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} (1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) y^6 - \frac{Re}{60} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} [(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) h + \frac{\tau_G^{yx}}{z}] y^5 + \\
& + \frac{Re}{24} \left\{ \left[\sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \right] \left[(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) h + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \right] + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\tau_G^{yx}}{z} + h \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} h - \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} \right\} y^4 + \frac{Re}{6} \left\{ \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} h + \frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial t} + \right. \\
& + \left. (1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) \frac{\partial h}{\partial t} \right\} y^3 + \frac{1}{2z} \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial P_G}{\partial x} - \frac{a}{2} \frac{\partial \tau_G^{yy}}{\partial x} \right\} y^2 + \left\{ -Re \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\sigma \frac{\tau_G^{yx}}{z} + h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h \right) h^3 + \frac{\sigma}{10} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^5 (1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) + \right. \\
& + \left. \frac{\sigma}{12} \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h^4 - \frac{\sigma}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} h^4 + \frac{\sigma}{3} \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial t} + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \right\} - \\
& - 2a \frac{\tau_G^{xx}}{z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a}{z} \frac{\partial \tau_G^{yy}}{\partial x} h + \frac{1}{az} \frac{\partial P_G}{\partial x} h \Big\} y
\end{aligned} \tag{III.43}$$

Partindo da Eq. (III.34), obtém-se:

$$v^{(1)} = - \int_0^y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dy. \tag{III.44}$$

Portanto, derivando-se $u^{(1)}(x,t)$ com respeito à variável x e, posteriormente, integrando-se o resultado com respeito à variável y , no intervalo $0 \leq x \leq y$, que na verdade é a extensão compreendida pelo filme líquido, obtém-se:

$$\begin{aligned}
v^{(1)} = & \left\{ -\frac{Re \sigma}{2520} \left[\frac{\partial^5 h}{\partial x^5} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \sigma \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right)^2 \right] \right\} y^7 + \\
& + \left\{ \frac{Re \sigma}{360} \left[\frac{\partial^5 h}{\partial x^5} h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h \right) \right] + \frac{Re \sigma}{360} \left[\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \left(\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \right) + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} \right] \right\} y^6 + \left\{ \frac{Re}{120} \left[\sigma \frac{\partial^5 h}{\partial t \partial x^4} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\tau_G^{yx}}{z^2} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} - \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] - \frac{Re}{60z} \left[\frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \left(\frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} h + \tau_G^{yx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{Re}{120z} \left[\sigma \tau_G^{yx} \left(\frac{\partial^5 h}{\partial x^5} h + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right] - \frac{Re}{120} \left[\sigma \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} h^2 \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{Re \sigma}{60} \left[2 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \frac{\partial h}{\partial x} h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right] - \right. \\
& \left. - \frac{Re \sigma^2}{120} \left\{ \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \right\} y^5 + \\
& \left\{ -\frac{Re}{24} \left[\frac{1}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right] - \frac{Re \sigma}{24} \left[\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^5 h}{\partial t \partial x^4} h + \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \right\} y^4. \\
& + \left\{ -\frac{1}{6z} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2 P_G}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 \tau_G^{yy}}{\partial x^2} \right] \right\} y^3 + \\
& + \left\{ \frac{Re \sigma}{4} h^4 \left[\frac{1}{5} \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \left(\frac{5}{3} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{5} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h \right) \right] + \right. \\
& + \frac{Re}{4} h^3 \left[\sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h \left(\frac{5}{3} \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \right) + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \left(\frac{\sigma}{6} \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} h + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{Re}{4z} h^2 \left[\tau_G^{yx} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{h}{3} \left(5 \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_G^{yx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Re}{2} h^2 \left\{ \sigma \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^5 h}{\partial t \partial x^4} h + \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{h}{6} \left[\left(\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\tau_G^{yx}}{z^2} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} \right] \right\} + \\
& + \frac{Re \sigma}{12z} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^2 \left[5 \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} h + \tau_G^{yx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h + 3 \tau_G^{yx} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{Re}{12} h^3 \left[\frac{1}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} h + \right. \\
& + 4 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h (1 + 2\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) \left. \right] + \frac{Re \sigma}{12} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^3 \left[8 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} h \right] + \\
& + \frac{Re}{4} h \left\{ \frac{\sigma^2}{3} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)^2 h \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h + 4 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial t \partial x} \right\} + \frac{Re}{2} h \left[\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} h (1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) \left. \right] + \frac{Re}{4} \frac{\partial h}{\partial t} h \left[2 \frac{\partial h}{\partial x} (1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h \right] + \frac{a}{2z} \left(\frac{\partial \tau_G^{xx}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial \tau_G^{yy}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \tau_G^{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_G^{yy}}{\partial x^2} h \right) + \frac{1}{2az} \left(\frac{\partial^2 P_G}{\partial x^2} h + \frac{\partial P_G}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left. \right\} y^2 \quad (III.45)
\end{aligned}$$

As velocidades $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$ na superfície do filme líquido podem ser obtidas através da substituição, respectivamente em (III.43) e (III.45), de $h(x,t)$ no lugar de y . Este procedimento, apesar de não ser matematicamente difícil, é extremamente trabalhoso devido ao elevado volume de operações. Aliás este grande volume de trabalho é uma tônica neste estudo.

Obtidas as velocidades $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$ em $y = h(x,t)$, chega-se à equação para a espessura do filme líquido substituindo-se estas velocidades na Eq. (III.35). O resultado, para os termos que acompanham ε , é o seguinte:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left\{ -\frac{11}{24} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \frac{\partial h}{\partial x} h^5 \left[h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \right] - \frac{\partial h}{\partial x} h^4 \left[\frac{2}{3} \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} + \frac{3}{8} \frac{\tau_G^{yx}}{z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] - \frac{3}{40} \frac{\partial h}{\partial x} h^4 \left[\frac{\partial h}{\partial x} \left(5 \sigma \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + 6h \right) + \frac{7}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} h \right] - \frac{3}{10} \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} h^5 \left(3 \frac{\partial h}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{4z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} + \frac{3}{2} \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{5}{6} \frac{\partial h}{\partial x} h^3 \left[\frac{1}{z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{111}{2520} \sigma h^7 \left[\frac{\partial^5 h}{\partial x^5} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \sigma \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right)^2 \right] - \frac{\sigma}{3} h^5 \left(\frac{1}{3z} \frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} h + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{13}{120} \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} h + \frac{2}{5} \frac{\partial^5 h}{\partial t \partial x^4} \right) - \frac{3}{40z} h^5 \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\partial \tau_G^{yx}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\tau_G^{yx}}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} + \tau_G^{yx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{3}{40z} h^5 \left[\frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial x^2} h \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \sigma \tau_G^{yx} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] - \frac{3}{40} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h^6 \left[1 + 2 \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sigma^2 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)^2 \right] - \frac{5}{24} h^4 \left[\frac{1}{z} \frac{\partial^2 \tau_G^{yx}}{\partial t \partial x} + \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} \left(1 + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right] \right\} - \\
& - \frac{1}{z} \frac{\partial h}{\partial x} h \left(\frac{1}{a} \frac{\partial P_G}{\partial x} h - a \frac{\partial \tau_G^{yy}}{\partial x} h + 2a \tau_G^{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \\
& - \frac{h^2}{z} \left(\frac{1}{3a} \frac{\partial^2 P_G}{\partial x^2} h - \frac{a}{3} \frac{\partial^2 \tau_G^{yy}}{\partial x^2} h + a \frac{\partial \tau_G^{xx}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + a \tau_G^{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) = O(\varepsilon^2) \quad (\text{III.46})
\end{aligned}$$

onde $O(\varepsilon^2)$ representa o erro de ordem ε^2 , que é aproximadamente igual a zero.

6.4. ANEXO IV. PROGRAMAS REFERENTES À DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA DO FILME LÍQUIDO PERMANENTE NO ESCOAMENTO DE UM FILME A CONTRA-CORRENTE

```

#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <malloc.h>
#include <stdio.h>

double Tk(int, int, int);
void INIT_VET(double a[],int N,double VALOR);

double HN,E,W,AS,KP,KV,RE,FI,FR,HMR,HMI,CP1,CP2,CP3,CP4;

void nerror(error_text)
char error_text[];
{
    void exit();

    fprintf(stderr,"Numerical Recipes run-time error...\n");
    fprintf(stderr,"%s\n",error_text);
    fprintf(stderr,"...now exiting to system...\n");
    exit(1);
}

void lubksb(a,n,indx,b)
double a[][400],b[];
int n,indx[];
{
    int i,ii = 0,ip,j;
    double sum;

    for (i = 1;i <= n;i++) {
        ip = indx[i];
        sum = b[ip];
        b[ip] = b[i];
        if (ii)
            for (j = ii;j <= i-1;j++) sum -= a[i][j]*b[j];
        else if (sum) ii = i;
        b[i] = sum;
    }
    for (i = n;i >= 1;i--) {
        sum = b[i];

```

```

    for (j=i+1;j<=n;j++) sum -= a[i][j]*b[j];
    b[i] = sum/a[i][i];
}
}

```

```
#define TINY 1.0e-20;
```

```
void ludcmp(a,n,indx,d)
```

```
int n,indx[];
```

```
double a[][400],d[];
```

```
{
```

```
    int i,imax,j,k;
```

```
    double big,dum,sum,temp;
```

```
    double vv[400];
```

```
    void nrerror();
```

```
    *d=1.0;
```

```
    for (i=1;i<=n;i++) {
```

```
        big=0.0;
```

```
        for (j=1;j<=n;j++)
```

```
            if ((temp=fabs(a[i][j])) > big) big=temp;
```

```
        if (big == 0.0) nrerror("Singular matrix in routine LUDCMP");
```

```
        vv[i] = 1.0/big;
```

```
    }
```

```
    for (j=1;j<=n;j++) {
```

```
        for (i=1;i<j;i++) {
```

```
            sum = a[i][j];
```

```
            for (k=1;k<i;k++) sum -= a[i][k]*a[k][j];
```

```
            a[i][j] = sum;
```

```
        }
```

```
        big=0.0;
```

```
        for (i=j;i<=n;i++) {
```

```
            sum = a[i][j];
```

```
            for (k=1;k<j;k++)
```

```
                sum -= a[i][k]*a[k][j];
```

```
            a[i][j] = sum;
```

```
            if ( (dum = vv[i]*fabs(sum)) >= big) {
```

```
                big = dum;
```

```
                imax = i;
```

```
            }
```

```
        }
```

```
        if (j != imax) {
```

```
            for (k=1;k<=n;k++) {
```

```
                dum = a[imax][k];
```

```
                a[imax][k] = a[j][k];
```

```
                a[j][k] = dum;
```

```
            }
```

```
        } *d = -(*d);
```

```

        vv[imax] = vv[j];
    }
    indx[j] = imax;
    if (a[j][j] == 0.0) a[j][j] = TINY;
    if (j != n) {
        dum = 1.0/(a[j][j]);
        for (i=j+1; i<=n; i++) a[i][j] *= dum;
    }
}
}

```

```
#undef TINY
```

```
double Tk(k,N,j)
```

```
int k,j,N;
```

```
{
    double aux;

    aux = cos(k * j * (M_PI / N));
    return aux;
}

```

```
void INTEGIN_CO(intr1,N,NN)
```

```
int N,NN;
```

```
double intr1[];
```

```
{
```

```
    int i,j,k;
```

```
    double apoi,aju,ittr;
```

```
    N--;
```

```
    if(NN == 1) ittr = HMR;
```

```
    else ittr = HMI;
```

```
    for(k=1; k<=N+1; k++) {
```

```
        for(j=1; j<=N+1; j++) {
```

```
            if(j == N+1) apoi = fabs((j-2)*(M_PI/N)-(j-1)*(M_PI/N));
```

```
            else apoi = fabs((j-1)*(M_PI/N)-j*(M_PI/N));
```

```
            intr1[k] += apoi*ittr*Tk(k-1,N,j-1);
```

```
        }
```

```
    if(k == 1) aju = 1.0/M_PI;
```

```
    else aju = 2.0/M_PI;
```

```
    intr1[k] = aju*intr1[k];
```

```
    }
```

```
}
```

```
void INTEG_CO(intr1,intr2,N)
```

```
double intr1[],intr2[];
```

```
int N;
```

```

{
    int j,k;
    double apoi,aju;

    INIT_VET(intr1,N,0.0);
    N--;
    for(k=1; k<=N+1; k++) {
        for(j=1; j<=N+1; j++) {
            if(j == N+1) apoi = fabs((j-2)*(M_PI/N)-(j-1)*(M_PI/N));
            else apoi = fabs((j-1)*(M_PI/N)-j*(M_PI/N));
            intr1[k] += apoi*intr2[j]*Tk(k-1,N,j-1);
        }
        if(k == 1) aju = 1.0/M_PI;
        else aju = 2.0/M_PI;
        intr1[k] = aju*intr1[k];
    }
}

```

```

void M_MAT(M_B,Ra,B1,N)
double **M_B, *Ra, *B1;
int N;
{
    register int i,j;

    for(i=1; i<=N; i++)
        { B1[i]=0.0;
          for(j=1; j<=N; j++)
              M_B[i][j]=0.0;
        }
    for(i=3; i<=N; i++)
        { M_B[i][i]=1.0;
          M_B[i][i+2]=-1.0;
          B1[i]=2*i*Ra[i+1];
        }
    M_B[1][1] = 1.0;
    M_B[1][3] = -0.5;
    M_B[2][2] = 1.0;
    M_B[2][4] = -1.0;
    B1[1] = Ra[2];
    B1[2] = 4*Ra[3];
}

```

```

void MAT_PR(MAT,Ra,Rb,Rc,Rd,la,lb,lc,ld,N)
double MAT[][400], Ra[], Rb[],
    Rc[], Rd[], la[], lb[],
    lc[], ld[];
int N;

```

```

{
  register int J,K,I,L;
  double aux = 0.0,aux1 = 0.0,aux2 = 0.0;

  for(I=1 ;I<=10*N ;I++)
    for(J=1 ;J<=10*N ;J++) MAT[I][J] = 0.0;

  N--;
  for(L=1 ;L < N ;L++) {
    for(K=0 ;K<=N ;K++) {
      for(J=0 ;J<=N ;J++) {
        for(I=0 ;I<=N ;I++) {
          aux +=
            (0.333*Ra[J+1]*Rd[I+1]-0.333*la[J+1]*Id[I+1]+
             Rb[J+1]*Rc[I+1]-Ib[J+1]*Ic[I+1])*Tk(K,N,L)*
            Tk(J,N,L)*Tk(I,N,L);
          aux1 +=
            (0.333*la[J+1]*Rd[I+1]+0.333*Ra[J+1]*Id[I+1]+
             Ib[J+1]*Rc[I+1]+Rb[J+1]*Ic[I+1])*Tk(K,N,L)*
            Tk(J,N,L)*Tk(I,N,L);
          aux2 +=
            (0.333*Ra[J+1]*Id[I+1]+0.333*la[J+1]*Rd[I+1]+
             Rb[J+1]*Ic[I+1]+Ib[J+1]*Rc[I+1])*Tk(K,N,L)*
            Tk(J,N,L)*Tk(I,N,L);
          }
          aux *= 16.0*pow(E,3.0)*W;
          aux += 2.0*Rb[J+1]*Tk(K,N,L)*Tk(J,N,L);
          aux1 *= -16.0*pow(E,3.0)*W;
          aux1 += -2.0*Ib[J+1]*Tk(K,N,L)*Tk(J,N,L);
          aux2 *= 16.0*pow(E,3.0)*W;
          aux2 += 2.0*Ib[J+1]*Tk(K,N,L)*Tk(J,N,L);
        }
        MAT[L+1][K+1] = aux;
        MAT[L+1][N+K+2] = aux1;
        MAT[N+2+L][K+1] = aux;
        MAT[N+2+L][N+K+2] = aux2;
        aux = aux1 = aux2 = 0.0;
      }
    }
  }
  for( K=0; K<=N; K++) {
    MAT[1][K+1] = 1.0;
    MAT[N+1][K+1] = Tk(K,N,N);
    MAT[N+2][N+K+2] = 1.0;
    MAT[2*N+2][N+K+2] = Tk(K,N,N);
  }
}

```

```
/* Matriz p/ Rb */
```

```
for(l=1; l<=N+1; l++)
    MAT[2*N+3][2*N+2+l]=1.0;
```

```
for(l=3; l<=N; l++)
    { MAT[2*N+3+l][2*N+2+l]=1.0;
      MAT[2*N+3+l][2*N+4+l]=-1.0;
      MAT[2*N+3+l][l+1] = -2*l;
    }
```

```
MAT[2*N+4][2*N+3] = 1.0;
```

```
MAT[2*N+4][2*N+5] = -0.5;
```

```
MAT[2*N+5][2*N+4] = 1.0;
```

```
MAT[2*N+5][2*N+6] = -1.0;
```

```
MAT[2*N+4][2] = -1;
```

```
MAT[2*N+5][3] = -4;
```

```
for(l=1; l<=N+1; l++)
    MAT[3*N+3][2*N+2+l]= Tk(l-1,N,N);
```

```
/* Matriz p/ lb */
```

```
for(l=1; l<=N+1; l++)
    MAT[3*N+4][3*N+3+l]=1.0;
```

```
for(l=3; l<=N; l++)
    { MAT[3*N+4+l][3*N+3+l]=1.0;
      MAT[3*N+4+l][3*N+5+l]=-1.0;
      MAT[3*N+4+l][N+2+l] = -2*l;
    }
```

```
MAT[3*N+5][3*N+4] = 1.0;
```

```
MAT[3*N+5][3*N+6] = -0.5;
```

```
MAT[3*N+6][3*N+5] = 1.0;
```

```
MAT[3*N+6][3*N+7] = -1.0;
```

```
MAT[3*N+5][N+3] = -1;
```

```
MAT[3*N+6][N+4] = -4;
```

```
for(l=1; l<=N+1; l++)
    MAT[4*N+4][3*N+3+l]= Tk(l-1,N,N);
```

```
/* Matriz p/ R2a */
```

```
for(l=1; l<=N+1; l++)
    MAT[4*N+5][4*N+4+l]=1.0;
```

```

for(l = 3; l <= N; l++)
  { MAT[4*N+5+l][4*N+4+l] = 1.0;
    MAT[4*N+5+l][4*N+6+l] = -1.0;
    +l] = 1.0;
    MAT[3*N+4+l][3*N+5+l] = -1.0;
    MAT[3*N+4+l][N+2+l] = -2*l;
  }
MAT[3*N+5][3*N+4] = 1.0;
MAT[3*N+5][3*N+6] = -0.5;
MAT[3*N+6][3*N+5] = 1.0;
MAT[3*N+6][3*N+7] = -1.0;
MAT[3*N+5][N+3] = -1;
MAT[3*N+6][N+4] = -4;

for(l = 1; l <= N+1; l++)
  MAT[4*N+4][3*N+3+l] = Tk(l-1,N,N);

```

/* Matriz p/ R2a */

```

for(l = 1; l <= N+1; l++)
  MAT[4*N+5][4*N+4+l] = 1.0;

for(l = 3; l <= N; l++)
  { MAT[4*N+5+l][4*N+4+l] = 1.0;
    MAT[4*N+5+l][4*N+6+l] = -1.0;
    [5*N+6] = 1.0;
    MAT[5*N+7][5*N+8] = -0.5;
    MAT[5*N+8][5*N+7] = 1.0;
    MAT[5*N+8][5*N+9] = -1.0;
    MAT[5*N+7][3*N+5] = -1;
    MAT[5*N+8][3*N+6] = -4;
  }

for(l = 1; l <= N+1; l++)
  MAT[6*N+6][5*N+5+l] = Tk(l-1,N,N);

```

/* Matriz p/ Rc */

```

for(l = 1; l <= N+1; l++)
  MAT[6*N+7][6*N+6+l] = 1.0;

for(l = 3; l <= N; l++)
  { MAT[6*N+7+l][6*N+6+l] = 1.0;
    MAT[6*N+7+l][6*N+8+l] = -1.0;
    MAT[6*N+7+l][4*N+l+5] = -2*l;
  }

```

```

MAT[6*N+8][6*N+7] = 1.0;
MAT[6*N+8][6*N+9] = -0.5;
MAT[6*N+8][6*N+8] = 1.0;
MAT[6*N+9][6*N+8] = -1.0;
MAT[6*N+9][6*N+10] = -1.0;
MAT[6*N+8][4*N+6] = -1;
MAT[6*N+9][4*N+7] = -4;
MAT[6*N+9][4*N+7] = -4;

for(l=1; l<=N+1; l++)
  MAT[7*N+7][6*N+6+l] = TK(l-1,N,N);
  MAT[7*N+7][6*N+6+l] = TK(l-1,N,N);

/* Matriz p/ Ic */
for(l=1; l<=N+1; l++)
  MAT[7*N+8][7*N+7+l] = 1.0;
  MAT[7*N+8][7*N+7+l] = 1.0;

for(l=3; l<=N; l++)
  { MAT[7*N+8+l][7*N+7+l] = 1.0;
    MAT[7*N+8+l][8*N+9+l] = -1.0;
    MAT[7*N+8+l][5*N+1+6] = -2*l;
    MAT[7*N+8+l][7*N+7+l] = 1.0;
  }
  MAT[7*N+9][7*N+8] = -0.5;
  MAT[7*N+9][7*N+10] = 1.0;
  MAT[7*N+9][7*N+9] = 1.0;
  MAT[7*N+10][7*N+11] = -1.0;
  MAT[7*N+10][7*N+11] = -1.0;
  MAT[7*N+9][5*N+7] = -1;
  MAT[7*N+9][5*N+7] = -4;
  MAT[7*N+10][5*N+8] = -4;
  MAT[7*N+10][5*N+8] = -4;

for(l=1; l<=N+1; l++)
  MAT[8*N+8][7*N+7+l] = TK(l-1,N,N);
  MAT[8*N+8][7*N+7+l] = TK(l-1,N,N);

/* Matriz p/ Rd */
for(l=1; l<=N+1; l++)
  MAT[8*N+9][8*N+8+l] = 1.0;
  MAT[8*N+9][8*N+8+l] = 1.0;

for(l=3; l<=N; l++)
  { MAT[8*N+9+l][8*N+8+l] = 1.0;
    MAT[8*N+9+l][9*N+10+l] = -1.0;
    MAT[8*N+9+l][6*N+1+7] = -2*l;
    MAT[8*N+9+l][8*N+8+l] = 1.0;
  }
  MAT[8*N+10][8*N+9] = -0.5;
  MAT[8*N+10][8*N+11] = 1.0;
  MAT[8*N+10][8*N+10] = 1.0;
  MAT[8*N+11][8*N+12] = -1.0;
  MAT[8*N+11][8*N+12] = -1.0;
  MAT[8*N+11][8*N+12] = -1;
  MAT[8*N+10][6*N+8] = -4;
  MAT[8*N+10][6*N+8] = -4;
  MAT[8*N+11][6*N+9] = -4;
  MAT[8*N+11][6*N+9] = -4;

```

```
MAT[9*N+9][8*N+8+I] = Tk(I-1,N,N);
```

```
/* Matriz p/ Id */
```

```
for(I=1; I<=N+1; I++)
    MAT[9*N+10][9*N+9+I] = 1.0;
```

```
for(I=3; I<=N; I++)
    { MAT[9*N+10+I][9*N+9+I] = 1.0;
      MAT[9*N+10+I][10*N+11+I] = -1.0;
      MAT[9*N+10+I][7*N+I+8] = -2*I;
    }
```

```
MAT[9*N+11][9*N+10] = 1.0;
```

```
MAT[9*N+11][9*N+12] = -0.5;
```

```
MAT[9*N+12][9*N+11] = 1.0;
```

```
MAT[9*N+12][9*N+13] = -1.0;
```

```
MAT[9*N+11][7*N+9] = -1;
```

```
MAT[9*N+12][7*N+10] = -4;
```

```
for(I=1; I<=N+1; I++)
    MAT[10*N+10][9*N+9+I] = Tk(I-1,N,N);
```

```
}
```

```
void EQSOL(VET,Rb,lb,N)
```

```
double VET[], Rb[], lb[];
```

```
int N;
```

```
{
```

```
    int J,L;
```

```
    double aux = 0.0,
```

```
           aux1 = 0.0,
```

```
           aux2 = 0.0;
```

```
    for(J=1 ;J<=10*N ;J++) VET[J] = 0.0;
```

```
    N--;
```

```
    aux = FI*KP*KV*RE*RE;
```

```
    for(L=1 ;L<=N ;L++) {
        for(J=0 ;J<=N ;J++) {
            aux1 += Rb[J+1]*Tk(J,N,L);
            aux2 += lb[J+1]*Tk(J,N,L);
```

```
        }
        VET[L+1] = aux*aux1;
```

```
        VET[N+L+2] = aux*aux2;
```

```
        aux1 = aux2 = 0.0;
```

```
    }
    VET[1] = VET[N+1] = HMR;
```

```

    VET[N + 2] = VET[2*N + 2] = HMI;
}

void MACROS(void)
{
    float Qgaux;
    double aux;
    double Mi,Ro,Gr,Q,L,Si,S,Rg,Ng,Qg,A,B,C,NI;

    Mi = 0.90925e-3;
    Ro = 996.7;
    NI = 0.912e-6;
    Gr = 9.8067;
    Q = 166.66e-5;
    L = 1.05;
    Si = 0.0726;
    S = 0.025;
    Rg = 1.191;
    Ng = 1.5525e-5;
    printf("\nENTRE COM A VAZAO DE GAZ (Qg): ");
    scanf("%f",&Qgaux);
    Qg = (double) Qgaux;
    */
    Qg/= 900.0; /* TRANSFORMACAO DE UNIDADE (M3/H) PARA (M2/S)

    A = 1.0;
    B = 14.6;
    C = 1.87;
    aux = (double) pow(3.0*(Mi*Q)/(Ro*Gr),1.0/3.0);
    HN = aux;
    E = HN/L;
    W = Si/(Ro*Gr*HN*HN);
    AS = (S - HN)/S;
    KP = Rg*(S - HN)/(Ro*HN);
    KV = (Ng*Ng)/(pow(S - HN,3.0)*Gr);
    RE = Qg/Ng;
    FI = A*(0.005 + B*pow(1.0-AS,C));
    FR = (Gr*pow(HN,3))/(NI*Q);
    HMR = 0.95;
    HMI = 0.05;
}

```

```

void COPY(VET,AUX,N)
double VET[],AUX[];
int N;
{
    register int i;

    for(i = 1 ; i <= N ; i + +) AUX[i] = VET[i];
}

```

}

int CONVERGE(VET,AUX,N,ERR,DEF)

double VET[],AUX[];

int N,DEF;

double ERR;

{

register int i;

double aux;

for(i = 1 ; i <= N ; i++) {

aux = fabs(VET[i] - AUX[i]);

printf("\nCONV_ %d [%d] == > % 2.17E",DEF,i,aux);

if(aux >= ERR) return 0;

}

printf("\n");

return 1;

}

int PRINT1a(VET,N)

double *VET;

int N;

{

register int i;

for(i = 1 ; i <= N ; i++) printf("\na[%2d] = % 2.17E",i,VET[i]);

}

int PRINTMAT(VET,N)

double **VET;

int N;

{

register int i,m;

int k = 1;

for(m = 1 ; m <= N ; m++)
for(i = 1 ; i <= N ; i++) {

if(k == 24) {

getchar();

k = 1;

}

printf("\nMAT[%d][%d] = % 2.12E",m,i,VET[m][i]);

}

return 1;

}

```
void PRINTRala(VET,VET2,N)
```

```
double VET[],VET2[];
```

```
int N;
```

```
{
```

```
    register int i;
```

```
    for(i=1 ;i<=N ;i++) printf("\nRa[%2d] = % 2.17E la[%2d] = % 2.17E",i,VET[i],i,VET2[i]);
```

```
    printf("\n\n");
```

```
    getchar();
```

```
}
```

```
void INIT_VET(a,N,VALOR)
```

```
double a[];
```

```
double VALOR;
```

```
int N;
```

```
{
```

```
    register int i;
```

```
    for(i=1 ;i<=N ;i++) a[i] = VALOR;
```

```
}
```

```
void FUNC(V1,V2,l,f)
```

```
int l;
```

```
double **V1;
```

```
double V2[6][6], f[6];
```

```
{
```

```
    int j,i;
```

```
    INIT_VET(f,5,0.0);
```

```
    for (j=1; j<=5; j++) {
```

```
        for (i=1; i<=5; i++) f[j] += V1[i][i]*V2[j][i];
```

```
        f[j] = f[j];
```

```
    }
```

```
}
```

```
void XJ( double aux[], int N)
```

```
{
```

```
    register int j;
```

```
    N--;
```

```
    for(j=0 ;j<=N ;j++) aux[j+1] = cos((j * M_PI)/N);
```

```
}
```

```
void DRV1(VET1,aux,N,q)
```

```
int N,q;
```

```
double VET1[],aux[];
```

```
{
```

```

register int i,j,k,m,l,n,p;
double VET2[400],aux1[6],fo[400][400],li[6][6];
double li1[6],li11[6];

```

```

p= N/5;
if(q == 1) XJ(VET2,N);

```

```

/* ----- primeira derivada -----*/

```

```

for(n= 1 ;n<=p ;n+ +)
  for(i= 1 ;i<= 5 ;i+ +) fo[n][i] = 0.0;
l= 0;
for(j=0 ;j<N ;j+ = 5) {
  l+ +;
  for(i= 1 ;i<= 5 ;i+ +) fo[l][i] = VET1[i+j];
  for (n= 1; n<= 5; n+ +)
    for (i= 1; i<= 5; i+ +) li[n][i]= 0.0;
  m= 1;
  while(m<= 5) {
    for (i= 1; i<= 5; i+ +) li1[i]= 1.0;
    k= 1;
    while(k<= 5) {
      if(m == k)
        for(i= 1 ;i<= 5 ;i+ +)
          if(i != m) li[m][k] += 1.0/(VET2[m+j]-VET2[i+j]);
      else {
        for(i= 1 ;i<= 5 ;i+ +)
          if(k != i) li1[k] *= (VET2[k+j]-VET2[i+j]);
        li11[k] = 1.0;
        for(i= 1 ;i<k ;i+ +)
          if((i != m)) li11[k] *= (VET2[m+j]-VET2[i+j]);
        for(i= k+ 1 ;i<= 5 ;i+ +)
          if(i != m) li11[k] *= (VET2[m+j]-VET2[i+j]);
        li[m][k] = li11[k]/li1[k];
      }
      k+ +;
    }
    m+ +;
  }
  FUNC(fo,li,l,aux1);
  for(i= 1; i<= 5; i+ +)
    aux[i+j] = aux1[i];
}
}

```

```

void func(x,f,df)
double x,*f,*df;
{

```

```

    *f = CP1*x*x*x + CP2*x*x + CP3*x + CP4;
    *df = 3*CP1*x*x + 2*CP2*x + CP3;
}

double func_calc(double a,double b)
{
    double xo,x1,fx,fxl,xerr,eps = 0.5e-5;
    int i;
        xo = (a + b)/2;
        func(xo,&fx,&fxl);
        for(i=1 ;i<= 100 ;i+ +) {
            x1 = xo - (fx/fxl);
            func(xo,&fx,&fxl);
            xerr = fabs(x1-xo);
            if(fabs(fx) < eps) return x1;
            if(xerr < eps) return x1;
            xo = x1;
            func(xo,&fx,&fxl);
        }
        return -999;
}

void newton_rapson(li,ls,N,raiz)
double li,ls,N;
double *raiz;
{
    double delta,xf,aux,auxold;

    xf = li;
    delta = (ls - li)/N;
    auxold = li;
    *raiz = 0.0;
    do{
        xf = li + delta;
        aux = func_calc(li,xf);
        if(*raiz == 0.0) *raiz = aux;
        if(aux == -999) li = xf;
        else
            if(aux == auxold) li = xf;
            else {
                if(fabs(aux) < 3) {
                    if(aux > 0) auxold = *raiz = aux;
                    else auxold = aux;
                }
            }
        else
            if(aux < *raiz)
                if(aux > 0) auxold = *raiz = aux;
    }
}

```

```

                                else auxold = aux;
                                if(li < aux) li = aux;
                                else li = xf;
                                }
                                }while(li < ls);
                                }

#define MAX 100
#define MAX8 400

void main(argc,argv)
int argc;
char **argv;
{
    int    i, j, k, m, l, DIM, indx1[MAX8], tecla;
    double A[MAX8][MAX8], SOL[MAX8], auxla[MAX], auxRa[MAX],
    la[MAX],
           Ra[MAX], erro, soma[MAX], soma1[MAX], soma2[MAX], max1,
           erro1,
           d, aux1, teta, teste, tit1, tit2, tit3, tit4, NK,
           R2a[MAX],I2a[MAX],
           Ib[MAX], Rb[MAX], Ic[MAX], Rc[MAX], Id[MAX], Rd[MAX],
           vc[MAX], alpha[MAX], beta[MAX], wn[MAX],
           ICOEF_1[MAX], RCOEF_1[MAX], RCOEF_2[MAX],
           ICOEF_2[MAX],
           ICOEF_3[MAX], RCOEF_3[MAX],ICOEF_4[MAX],
           RCOEF_4[MAX],
           raiz, vcold, wncold, alphaold, betaold;
    float  Raux = 0.0, laux = 0.0, valor, kn;
    FILE   *fp;
    static unsigned long cont;
    char   nome[13], name[50];
    char   nome1[13], name1[50];

    strcpy(name,"//u//edna//gabriel//");
    strcpy(name1,"//u//edna//gabriel//");
    if(argc < 2) {
        printf("ENTRE COM NOME DO ARQUIVO (p/ Ra e la): ");
        scanf("%s",nome);
        if(!strcmp(nome,""))
            strcat(name,"default.doc");
        else
            strcat(name,nome);
    }
    else
        strcat(name,argv[1]);
    if(argc < 3) {
        printf("\nENTRE COM O NOME DO ARQUIVO (Hk): ");

```

```

scanf("%s",nome1);
if(!strcmp(nome1,""))
    strcat(name1,"default.doc");
else
    strcat(name1,nome1);
}
else
    strcat(name1,argv[2]);
printf("\nENTRE COM A DIMENSAO DA MATRIZ: ");
scanf("%d",&DIM);
erro = 1e-1;
erro1 = 3e-1;
for(i=1 ;i<=10*DIM ;i++ ) {
    indx1[i] = 0; SOL[i] = 0.0;
    for(j=1 ;j<=10*DIM ;j++ ) A[i][j] = 0.0;
}
for(i=1 ;j<=DIM ;i++ ) {
    auxla[i] = auxRa[i] = la[i] = 0.0;
    Ra[i] = Ib[i] = Rb[i] = Ic[i] = Rc[i] = 0.0;
    R2a[i] = l2a[i] = ld[i] = Rd[i] = 0.0;
    soma[i] = soma1[i] = soma2[i] = 0.0;
    ICOEF_1[i] = RCOEF_1[i] = 0.0;
    ICOEF_2[i] = RCOEF_2[i] = 0.0;
    ICOEF_3[i] = RCOEF_3[i] = 0.0;
    ICOEF_4[i] = RCOEF_4[i] = 0.0;
    vc[i] = alpha[i] = beta[i] = wn[i] = 0.0;
}
printf("\nENTRAR COM VALORES INICIAIS p/ Rs e ls (1 ou 0)? ");
scanf("%d",&tecla);
if(tecla == 0)
    if((fp = fopen(name,"rt")) == NULL) {
        printf("Nao foi possivel abrir o arquivo desejado.");
        exit(1);
    }
    else {
        for(i=1 ;j<=DIM ;i++ ) {
            fscanf(fp,"%E %E",&Raux,&laux);
            Ra[i] = (double) Raux;
            la[i] = (double) laux;
            fscanf(fp,"%E %E",&Raux,&laux);
            Rb[i] = (double) Raux;
            Ib[i] = (double) laux;
            fscanf(fp,"%E %E",&Raux,&laux);
            R2a[i] = (double) Raux;
            l2a[i] = (double) laux;
            fscanf(fp,"%E %E",&Raux,&laux);
            Rc[i] = (double) Raux;
            lc[i] = (double) laux;

```

```

        fscanf(fp,"%E %E",&Raux,&laux);
        Rd[i] = (double) Raux;
        Id[i] = (double) laux;
    }
    fclose(fp);
}
else {
    INIT_VET(la,DIM,0.002);
    INIT_VET(Ra,DIM,0.018);
    INIT_VET(I2a,DIM,0.002);
    INIT_VET(R2a,DIM,0.018);
    INIT_VET(lb,DIM,-0.2);
    INIT_VET(Rb,DIM,-0.2);
    INIT_VET(lc,DIM,-0.2);
    INIT_VET(Rc,DIM,-0.2);
    INIT_VET(Id,DIM,-0.2);
    INIT_VET(Rd,DIM,-0.2);
}
MACROS();
cont = 1;
do{
    INIT_VET(soma1,DIM,0.0);
    INIT_VET(soma2,DIM,0.0);
    INIT_VET(soma,DIM,0.0);
    COPY(Ra,auxRa,DIM);
    COPY(la,auxla,DIM);
    MAT_PR(A,Ra,Rb,Rc,Rd,la,lb,lc,ld,DIM);
    ludcmp(A,10*DIM,indx1,&d);
    EQSOL(SOL,Rb,lb,DIM);
    lubksb(A,10*DIM,indx1,SOL);
    for(i=1;i<=DIM;i++){
        Ra[i] = SOL[i];
        la[i] = SOL[i+DIM];
        Rb[i] = SOL[i+2*DIM];
        lb[i] = SOL[i+3*DIM];
        R2a[i] = SOL[i+4*DIM];
        I2a[i] = SOL[i+5*DIM];
        Rc[i] = SOL[i+6*DIM];
        lc[i] = SOL[i+7*DIM];
        Rd[i] = SOL[i+8*DIM];
        Id[i] = SOL[i+9*DIM];
    }

    for(j=0;j<=(DIM-1);j++){
        for(k=1;k<=DIM;k++){
            teta = atan(la[k]/Ra[k]);
            aux1 = pow(Ra[k],2.0) + pow(la[k],2.0);
            aux1 = pow(aux1,0.5)*fabs(Tk(k-1,DIM-1,j));

```

```

        soma1[j+1] += aux1*cos(teta);
        soma2[j+1] += aux1*sin(teta);
        soma[j+1] += aux1;
    }
    /*for(i= 1 ;i<= DIM ;i+ +)
    printf("\nRa = % 2.17E la = % 2.17E",Ra[i],la[i]);*/
    printf("\n%d",cont);
    cont+ +;
}while(!(CONVERGE(Ra,auxRa,DIM,erro,1) &&
        CONVERGE(la,auxla,DIM,erro1,2)));
printf("\nVETOR DE Ra e la:\n");
if((fp = fopen(name,"wt")) == NULL) {
    printf("Nao foi possivel abrir o arquivo desejado.");
    exit(1);
}
for(i= 1 ;i<= DIM ;i+ +) {
    printf("Ra[%2d] = % 2.17E    la[%2d] = %
2.17E\n",i,Ra[i],i,la[i]);
    fprintf(fp,"% 2.17E % 2.17E ",Ra[i],la[i]);
    fprintf(fp,"% 2.17E % 2.17E ",Rb[i],lb[i]);
    fprintf(fp,"% 2.17E % 2.17E ",R2a[i],l2a[i]);
    fprintf(fp,"% 2.17E % 2.17E ",Rc[i],lc[i]);
    fprintf(fp,"% 2.17E % 2.17E\n",Rd[i],ld[i]);

}
fclose(fp);
valor = 0.0;
for(i= 1 ;i<= DIM ;i+ +) valor += soma[i];
valor /= DIM;

if((fp = fopen(name1,"wt")) == NULL) {
    printf("Nao foi possivel abrir o arquivo desejado.");
    exit(1);
}
for(i= 1 ;i<= DIM ;i+ +) {
    printf("\n|Hk|[%2d] = % 2.17E",i,soma[i]);
    fprintf(fp,"% 2.17E\n",soma[i]);
}
fclose(fp);

/* wnold = -20000.0;

****    Calculo do coeficiente 1 ****

if((fp = fopen("//u//edna//saida.doc","wt")) == NULL) {
    printf("NAO FOI POSSIVEL ABRIR SEU ARQUIVO DE SAIDA");
    exit(1);
}

```

```

for(m = 1 ; m <= 10 ; m + + ) {
  wnold + = 10000.0;
  for(j = 1 ; j <= DIM ; j + + ) {
    double TKAUX,tit5,tit6,tit7,tit8,tit9,tit10;

    tit1 = 0.0;
    tit2 = 0.0;
    tit3 = 0.0;
    tit4 = tit5 = tit6 = tit7 = tit8 = 0.0;
    for(k = 1 ; k <= DIM ; k + + ) {
      for(i = 1 ; i <= DIM ; i + + ) {
        tit1 + = -(Rb[i]*Ra[k]-Ib[i]*Ia[k])*

Tk(k-1,DIM-1,j-1)*Tk(i-1,DIM-1,j-1);
        tit2 + = -(Ia[k]*Rb[i] + Ra[k]*Ib[i])*

Tk(k-1,DIM-1,j-1)*Tk(i-1,DIM-1,j-1);
        for(l = 1 ; l <= DIM ; l + + ) {
          TKAUX = Tk(k-1,DIM-1,j-1)*Tk(i-1,DIM-1,j-1)*
            Tk(l-1,DIM-1,j-1);
          tit5 + = -(Ra[k]*Rb[i]*Rc[l]-Ia[k]*Ib[i]*Rc[l]-
            Ia[k]*Rb[i]*Ic[l]-Ra[k]*Ib[i]*Ic[l])*
            TKAUX;
          tit6 + = -(Ra[k]*Ra[i]*Rd[l]-Ia[k]*Ia[i]*Rd[l]-
            Ia[k]*Ra[i]*Id[l]-Ra[k]*Ia[i]*Id[l])*
            TKAUX;
          tit7 + = -(Ra[k]*Rb[i]*Ic[l]-Ia[k]*Ib[i]*Ic[l] +
            Ia[k]*Rb[i]*Rc[l] + Ra[k]*Ib[i]*Rc[l])*
            TKAUX;
          tit8 + = -(Ra[k]*Ra[i]*Id[l]-Ia[k]*Ia[i]*Id[l] +
            Ia[k]*Ra[i]*Rd[l] + Ra[k]*Ia[i]*Rd[l])*
            TKAUX;
        }
      }
      tit3 + = Rb[k]*Tk(k-1,DIM-1,j-1);
      tit4 + = Ib[k]*Tk(k-1,DIM-1,j-1);
    }
  }
  tit1 * = 4*FR;
  tit2 * = 4*FR;
  tit3 * = FR*FI*KP*KV*pow(RE,2.);
  tit4 * = FR*FI*KP*KV*pow(RE,2.);
  tit5 * = 32*pow(E,3)*W*FR;
  tit6 * = 16*pow(E,3)*W*FR;
  tit7 * = 32*pow(E,3)*W*FR;
  tit8 * = 16*pow(E,3)*W*FR;
  RCOEF_1[j] = tit1 + tit3 + tit5 + tit6;
  ICOEF_1[j] = tit2 + tit4 + tit7 + tit8;
}

```

**** Calculo do coeficiente 2 *****

```

tit1 = 0.0;
tit2 = 0.0;
tit3 = 0.0;
tit4 = tit5 = tit6 = tit7 = tit8 = tit9 = tit10 = 0.0;
for(k=1; k <= DIM; k++) {
    for(i=1; i <= DIM; i++) {
        TKAUX = Tk(k-1,DIM-1,j-1)*Tk(i-1,DIM-1,j-1);
        tit1 += -(Ra[k]*Ra[i]-Ia[k]*Ia[i])*TKAUX;
        tit2 += -(Ra[k]*Ia[i] + Ia[k]*Ra[i])*TKAUX;
        tit9 += -(Ra[k]*Rb[i]-Ia[k]*Ib[i])*TKAUX;
        tit10 += -(Ia[k]*Rb[i]-Ra[k]*Ib[i])*TKAUX;
        for(l=1; l <= DIM; l++) {
            TKAUX = Tk(k-1,DIM-1,j-1)*Tk(i-1,DIM-1,j-1)*
                Tk(l-1,DIM-1,j-1);
            tit5 += -(Ra[k]*Ra[i]*Rc[l]-Ia[k]*Ia[i]*Rc[l]-
                Ia[k]*Ra[i]*Ic[l]-Ra[k]*Ia[i]*Ic[l])*
                TKAUX;
            tit6 += -(Ra[k]*Ra[i]*Ic[l]-Ia[k]*Ia[i]*Ic[l] +
                Ia[k]*Ra[i]*Rc[l] + Ra[k]*Ia[i]*Rc[l])*
                TKAUX;
            tit7 += -(Ra[k]*Ra[i]*Rc[l]-Ia[k]*Ia[i]*Ra[l]-
                Ia[k]*Ra[i]*Ia[l]-Ra[k]*Ia[i]*Ia[l])*
                TKAUX;
            tit8 += -(Ra[k]*Ra[i]*Ia[l]-Ia[k]*Ia[i]*Ia[l] +
                Ia[k]*Ra[i]*Ra[l] + Ra[k]*Ia[i]*Ra[l])*
                TKAUX;
        }
        tit3 += Ra[k]*Tk(k-1,DIM-1,j-1);
        tit4 += Ia[k]*Tk(k-1,DIM-1,j-1);
    }
}
tit1 *= 2*FR;
tit2 *= 2*FR;
tit3 *= FR*FI*KP*KV*pow(RE,2.);
tit4 *= FR*FI*KP*KV*pow(RE,2.);
tit5 *= 16*pow(E,3)*W*FR;
tit6 *= 16*pow(E,3)*W*FR;
tit7 *= 16*pow(E,3)*W*FR;
tit8 *= 16*pow(E,3)*W*FR;
tit9 *= 16*pow(E,3)*W*FR;
tit10 *= 16*pow(E,3)*W*FR;
RCOEF_2[j] = tit1 + tit3 + tit5;
ICOEF_2[j] = tit2 + tit4 + tit6;
RCOEF_4[j] = tit7;
ICOEF_4[j] = tit8;

```

```
RCOEF_3[j] = tit9;
ICOEF_3[j] = tit10;
if(wnold != 0.0) {
    vc[j] = -(RCOEF_2[j] + ICOEF_1[j]/wnold) +
    RCOEF_3[j]*wnold*wnold-ICOEF_4[j]*pow(wnold,3);
    beta[j] = RCOEF_1[j] - wnold*ICOEF_2[j] +
    ICOEF_3[j]*pow(wnold,3)+RCOEF_4[j]*pow(wnold,4);
    fprintf(fp,"% 2.2E % 2.17E % 2.17E\n",
            wnold,vc[j],beta[j]);
}
}
fclose(fp);
*/
printf("\nVALOR = % 2.3E\n",valor);}
```