

M 011  
536.58  
11.324  
TES/mem

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DIRBI/UFU**



1000186983

**ESTIMAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE UTILIZANDO**  
**PROBLEMAS INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Uberlândia por:

**ANDERSON CLAYTON ALVES DE MELO**

como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Prof. Dr. Álisson Rocha Machado - (UFU) - Orientador.

Prof. Dr. Gilmar Guimarães - (UFU) - Co-orientador.

Prof. Dr. Carlos Roberto Ribeiro - (UFU).

Prof. Dr. Haroldo Béria Campos - (UFMG).

Uberlândia, fevereiro de 1998.

**Ao meu pai, Paulo Lavedoque de Melo**

**À minha mãe, Luíza Alves Rodrigues de Melo**

## AGRADECIMENTOS

- Aos professores Álisson Rocha Machado, Gilmar Guimarães e Carlos Roberto Ribeiro, pela dedicação, orientação e amizade.
- Ao Departamento de Engenharia Mecânica e à Coordenação do curso de Pós-Graduação, pela oportunidade de realização deste trabalho.
- Aos funcionários Lázaro Henrique Alves Vieira, Valdico de Faria, Eurípedes Balsanufó Alves, Reginaldo F. de Souza e Janete Aparecida Fernandes pelo apoio técnico.
- Ao aluno Antônio César Bozzi pelo apoio técnico.
- Aos amigos da República Jurassic Park: Sandro, Alexandre Araújo, Flávio, Jalon, Hélio, Alexandre Carlos, Aurilo, André Bezerra, Issac Newton, Rouverson, Roberto Bezerra, Marcelo e André Beloni pelo apoio, companheirismo e amizade.
- Ao CNPQ pelo apoio financeiro, através da concessão de bolsa de estudo.
- À COFERMAQ pelo fornecimento de alguns insertos utilizados neste trabalho.
- À todos aqueles que de alguma forma contribuíram para realização deste trabalho.
- À minha namorada Cristiene Vasconcelos Gonçalves pelo carinho e compreensão.

# ESTIMAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE UTILIZANDO PROBLEMAS INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - <i>INTRODUÇÃO</i> .....	01
CAPÍTULO 2 - <i>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</i> .....	05
2.1. <i>TEMPERATURA DE CORTE</i> .....	05
2.1.1. <i>MÉTODOS DE MEDIÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE</i> .....	10
2.1.1.1. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA                     DE CORTE ATRAVÉS DE MÉTODOS CALORIMÉTRICOS</i> .....	11
2.1.1.2. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA                     DE CORTE ATRAVÉS DO MÉTODO DO                     TERMOPAR FERRAMENTA-PEÇA</i> .....	13
2.1.1.3. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE                     PELO MÉTODO DO TERMOPAR IMPLANTADO</i> .....	17
2.1.1.4. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE                     ATRAVÉS DE INSPEÇÃO METALOGRÁFICA</i> .....	18
2.1.1.5. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE                     UTILIZANDO VERNIZES TERMOSENSÍVEIS</i> .....	20
2.1.1.6. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE                     ATRAVÉS DE MEDIÇÕES DA RADIAÇÃO TÉRMICA</i> .....	20
2.1.1.7. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE                     UTILIZANDO SAIS COM PONTO DE FUSÃO                     CONSTANTE</i> .....	22
2.1.1.8. <i>DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE                     USANDO MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS</i> .....	23

<b>CAPÍTULO 3 - PROBLEMAS INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR - FUNDAMENTOS</b> .....	27
3.1. <i>INTRODUÇÃO</i> .....	27
3.2. <i>OBTENÇÃO DO ALGORITMO INVERSO DE ESTIMAÇÃO DO FLUXO DE CALOR - PROBLEMA UNIDIMENSIONAL</i> .....	29
3.2.1. <i>ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA TÉRMICO</i> .....	29
3.2.2. <i>SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO EM CONDUÇÃO DE CALOR</i> .....	31
3.2.2.1. <i>ALGORITMO DE STOLZ</i> .....	38
3.2.2.2. <i>MÉTODO DA FUNÇÃO ESPECIFICADA</i> .....	40
<b>CAPÍTULO 4 - O MÉTODO PROPOSTO</b> .....	44
4.1. <i>INTRODUÇÃO</i> .....	44
4.2. <i>APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA ESTUDADO</i> .....	44
4.3. <i>APRESENTAÇÃO E SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA FÍSICO ESTUDADO</i> .....	46
4.4. <i>VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO</i> .....	68
<b>CAPÍTULO 5 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL</b> .....	69
5.1. <i>MATERIAL DA PEÇA</i> .....	69
5.2. <i>MATERIAIS DAS FERRAMENTAS</i> .....	69
5.3. <i>TERMOPARES</i> .....	70
5.4. <i>TESTES EXPERIMENTAIS DE USINAGEM</i> .....	72
<b>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES</b> .....	88
<b>CAPÍTULO 7 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b> .....	89
<b>CAPÍTULO 8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	90

<b>CAPÍTULO 9 - APÊNDICE A</b>	
<b>DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA</b>	
<b>PARA OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO</b>	
<b>DE CALOR EM COORDENADAS ELIPSOIDAIIS .....</b>	<b>94</b>
9.1. <i>TEORIA SOBRE COORDENADAS</i>	
<i>CURVILÍNEAS .....</i>	<i>94</i>
9.2. <i>TEORIA SOBRE QUÁDRICAS .....</i>	<i>100</i>
9.3. <i>SISTEMA DE COORDENADAS ELIPSOIDAIIS .....</i>	<i>101</i>
9.4. <i>OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE</i>	
<i>EM COORDENADAS ELIPSOIDAIIS .....</i>	<i>102</i>
<b>CAPÍTULO 10 - APÊNDICE B</b>	
<b>ALGORITMOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>105</b>
10.1. <i>ESTIMA (Programa principal) .....</i>	<i>105</i>
10.2. <i>EUREKA (Função) .....</i>	<i>110</i>
10.3. <i>GAUSS (Função) .....</i>	<i>113</i>
10.4. <i>FUNC1 (Função) .....</i>	<i>114</i>
10.5. <i>FUNC2 (Função) .....</i>	<i>115</i>

## RESUMO

Neste trabalho é proposto um método de estimação da temperatura de interface cavaco-ferramenta em insertos octaedros sem furo, utilizando técnicas de problemas inversos em condução de calor, onde obtém-se o algoritmo sequencial usado para a determinação do fluxo de calor na interface. Utiliza-se um modelo de mapeamento elipsoidal, para aproximar as isotérmicas geradas durante o processo de aquecimento da ferramenta de corte a uma família de elipsóides confocais. O problema de condução de calor envolvido no processo de usinagem é resolvido numericamente através de um algoritmo baseado em diferenças finitas. Para validação do método proposto foram realizados ensaios de torneamento com ferramentas cerâmicas à base de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  e de metal duro classe K10, usinando ferro fundido cinzento (NB-FC200), medindo-se temperaturas na aresta inferior oposta à aresta de corte com termopares do tipo T. Os resultados apresentaram valores estimados bem próximos dos medidos e coerentes com a literatura, principalmente para as ferramentas de metal duro.

O método se apresentou bastante sensível à variações de parâmetros geométricos importantes, tais como o comprimento de contato cavaco-ferramenta e o posicionamento dos sensores de temperatura, o que justifica possíveis erros de estimação, pela dificuldade de se determinar precisamente estes parâmetros.

## ABSTRACT

A method to estimate the chip-tool interface temperature on octahedron inserts, using inverse problems techniques in heat conduction is proposed. A sequential algorithm to determine the heat flow at the interface is used. An ellipsoidal model is used in order to consider the isotherms generated during the process of tool heating as a family of ellipsoids having the same focus. The heat conduction involved in the machining process is numerically considered based on finite differences.

In order to validate the proposed method,  $\text{Si}_3\text{N}_4$  based ceramic and cemented carbide (K10) inserts were used for turning grey cast iron (NB-FC200). During machining a T type thermocouple mounted at the opposite bottom edge, between the insert face and the tool holder, monitored the temperature in real time.

The results presented estimated values pretty close to the measured ones and similar to those encountered in the literature, particularly when using cemented carbide tools.

The method showed a great sensibility to changes of some geometric parameters such as chip-tool contact area and position of the thermocouple. Difficulties in precisely determining these parameters may justify possible errors of estimation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1 - Zonas de geração de calor na usinagem.....	06
2.2 - (a) Amostra da raiz do cavaco, após Quik-stop, mostrando a zona de aderência entre ferramenta (aço rápido) e cavaco (aço com baixo teor de carbono); (b) Detalhe da zona de fluxo (TRENT, 1984).....	07
2.3 - Seção transversal de uma ferramenta de corte mostrando as zonas de geração de calor (a) antes e (b) depois de sofrer desgaste de flanco (TRENT, 1984).....	08
2.4 - Mecanismos de desgaste influenciados pela temperatura de corte.....	09
2.5 - Desgastes influenciados pela temperatura de corte. (a) Desgaste de flanco; (b) Desgaste de cratera e (c) Deformação plástica da aresta de corte (HANDBOOK SANDVIK, 1994). ....	09
2.6 - Método calorimétrico.....	11
2.7 - Esquema para medição de temperatura de corte pelo método do termopar ferramenta-peça. ....	14
2.8 - Calibração do método do termopar ferramenta-peça (FERRARESI, 1977). ....	15
2.9 - Variação do método do termopar ferramenta-peça. Uso de duas ferramentas de materiais diferentes (FERRARESI, 1977). ....	16
2.10 - Método do termopar implantado. ....	17
2.11 - Determinação da distribuição de temperatura no flanco da ferramenta. (a) Situação anterior ao cisalhamento do fio; (b) Situação imediatamente posterior ao cisalhamento (HIRAO, 1989). ....	18
2.12 - Medição da temperatura de corte através da radiação térmica. ....	21
2.13 - Experimento utilizado por Kato et alli para a determinação da temperatura no plano ortogonal de insertos (KATO, 1976). ....	22

2.14 - (a) Fontes de calor reais e (b) idealizadas no corte ortogonal.....	24
3.1 - Esquema de uma sonda espacial reentrando na atmosfera terrestre (BECK et alli, 1985). .....	27
3.2 - Possíveis pontos de medição de temperatura para aplicação em algoritmos de problemas inversos. (1) Superfície de saída; (2) Ponto interno à ferramenta, próxima à interface; (3) Superfície oposta à aresta de corte da ferramenta. ....	29
3.3 - Componentes de fluxo de calor (BECK et alli, 1985).....	32
3.4 - Representação aproximada de $q(t)$ por $M$ passos no fluxo de calor (BECK et alli, 1985). .....	35
3.5 - Forma funcional com fluxo de calor constante para o procedimento sequencial (BECK et alli, 1985). .....	41
4.1 - (a) Modelo de mapeamento elipsoidal de distribuição de temperatura em um inserto quadrado (YEN e WRIGHT, 1986); (b) Modelo elipsoidal unidimensional usado na estimação inversa da temperatura de interface cavaco-ferramenta (LIN et alli, 1992). ....	45
4.2 - Técnica proposta: localização do sensor de temperatura (termopar) na aresta oposta à aresta de corte da ferramenta (entre o inserto e a base do porta-ferramentas).....	46
4.3 - Aplicação da fórmula de Lagrange para discretização dos últimos três pontos da malha.....	55
4.4 - Comparação entre as temperaturas medidas e estimadas na aresta inferior oposta à aresta de corte ( $v_c=111$ m/min; $f=0.176$ mm/rot; $a_p=0.5$ mm).....	68
5.1 - Esquema que ilustra a montagem dos termopares junto ao termômetro e a colocação deste conjunto na garrafa térmica utilizada para calibração do sistema de aquisição.....	71
5.2 - Curva de calibração para o sistema utilizado para medição das temperaturas. ....	72
5.3 - Montagem utilizada para medir a temperatura na aresta inferior oposta à aresta de corte. ....	73

5.4 - Áreas e comprimentos de contato obtidas nos testes experimentais de usinagem. (a) Ferramenta de metal duro ( $v_c=98$ m/min; $f=0.138$ mm/rot; $a_p=1.5$ mm). (b) Ferramenta de cerâmica ( $v_c=135$ m/min; $f=0.176$ mm/rot; $a_p=1.75$ mm). .....	75
5.5 - Contornos da área de contato cavaco-ferramenta real e suposta pelo modelo teórico proposto.....	77
5.6 - Temperaturas medidas na aresta inferior oposta nas ferramentas de cerâmica e metal duro ( $v_c=98$ m/min; $f=0.176$ mm/rot; $a_p=1.5$ mm). .....	78
5.7 - Temperaturas estimadas na interface cavaco-ferramenta das ferramentas de cerâmica e de metal duro ( $v_c=98$ m/min; $f=0.176$ mm/rot; $a_p=1.5$ mm).....	79
5.8 - Influência da variação do avanço na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada na ferramenta de metal duro ( $v_c=98$ m/min; $a_p=1.5$ mm). .....	80
5.9 - Influência da variação da profundidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de metal duro ( $v_c=135$ m/min; $f=0.176$ mm/rot). .....	80
5.10 - Influência da variação da velocidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de metal duro ( $f=0.176$ mm/rot; $a_p=1.75$ mm). .....	81
5.11 - Influência da variação do avanço na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de cerâmica ( $v_c=98$ m/min; $a_p=1.5$ mm). .....	82
5.12 - Influência da variação da profundidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de cerâmica ( $v_c=135$ m/min; $f=0.176$ mm/rot). .....	82
5.13 - Influência da variação da velocidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de cerâmica ( $f=0.176$ mm/rot; $a_p=1.75$ mm). .....	83
5.14 - Influência do comprimento de contato nos valores de temperaturas estimadas (ferramenta de metal duro - $v_c=98$ m/min; $f=0.138$ mm/rot; $a_p=1.5$ mm). .....	84
5.15 - Evolução do erro percentual na estimação da temperatura de interface cavaco-ferramenta no inserto de metal duro para diferentes valores de comprimento de contato ( $v_c=98$ m/min; $f=0.138$ mm/rot; $a_p=1.5$ mm).....	84

5.16 - Esquema utilizado para validar fisicamente o método proposto. ....	85
5.17 - Evoluções da temperaturas medidas e estimadas utilizadas para verificação da validade física do método proposto.....	86
5.18 - Erros percentuais, em relação às temperaturas medidas, para diferentes posicionamentos dos sensores. ....	87

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>	<b>Página</b>
5.1 - Propriedades termofísicas dos materiais das ferramentas de corte(TRENT, 1984).....	70
5.2 - Testes realizados para medir a temperatura na aresta inferior oposta à aresta de corte para as ferramentas de metal duro e de cerâmica.....	74
5.3 - Valores medidos de comprimento e largura de contato.....	76

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS LATINAS

$M_c$  - massa de cavaco.

$c$  - calor específico.

$t_c$  - temperatura do cavaco.

$t_2$  - temperatura final da água, do cavaco e do calorímetro.

$M_a$  - massa da água no calorímetro.

$M_e$  - massa equivalente do calorímetro.

$c_e$  - calor específico do calorímetro.

$t_1$  - temperatura inicial da água e do calorímetro.

$R$  - fração de energia gerada.

$q_{at}$  - unidade térmica total por unidade de área, por unidade de tempo.

$q$  - fluxo de calor.

$t, t$  - tempo.

$L, L$  - espessura da placa.

$x, x$  - coordenada espacial cartesiana.

$y, y$  - coordenada espacial cartesiana.

$z, z$  - coordenada espacial cartesiana, espessura da ferramenta de corte.

$Y$  - temperatura medida.

$i$  - índice temporal.

$\hat{q}$  - fluxo de calor estimado.

$k$  - condutividade térmica.

$T$  - temperatura.

$S$  - função erro.

$n$  - número total de medições de temperatura.

$M$  - índice que denota o número de componentes de fluxo de calor.

$const., cte$  - constante.

$j$  - índice que denota o número de sensores de temperatura.

$J$  - número total de sensores de temperatura.

$N$  - número total de instantes de medição, número total de componentes de fluxo de calor.

$\mathbf{r}$ ,  $\bar{\mathbf{r}}$  - vetor posição.

$T_0$  - temperatura inicial.

$r$  - número de componentes futuras de fluxo de calor.

$X$  - coeficiente de sensibilidade.

$\hat{T}$  - temperatura estimada.

$\hat{T}|_{q=0}$  - vetor das temperaturas calculadas nos tempos  $t_M, t_{M+1}, \dots, t_{M+r-1}$ .

$s$  - segundo (unidade de tempo).

$K$  - coeficiente de ganho.

$a, a$  - semi-eixo do elipsóide, comprimento de contato.

$b, b$  - semi-eixo do elipsóide.

$c, c$  - semi-eixo do elipsóide.

$Q$  - taxa térmica.

$\arctg$  - arco-tangente.

$tg$  - tangente.

$$R_{\xi} = \sqrt{\xi(a^2 + \xi)(a^2 + \xi)}.$$

$r_e$  - raio da esfera.

$p$  - índice correspondente a um ponto nodal da malha discretizada.

$$Z_p = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{tg^4 \theta_p (\Delta \theta)^2 a^2}.$$

$$W = \frac{ka\pi}{4\Delta\theta Q}.$$

$np$  - número total de pontos da malha.

$vc$  - velocidade de corte.

$f$  - avanço.

$ap$  - profundidade de corte.

CV - cavalo-vapor.

$d_i$  - diâmetro inicial.

$d_f$  - diâmetro final.

$L_u$  - comprimento usinado (percurso de avanço).

TiN - nítreto de titânio.

TaC - carbeto de tântalo.

TiC - carbeto de titânio.

$L$  - comprimento de contato real.

$W$  - largura de contato.

$u$  - coordenada espacial.

$v$  - coordenada espacial.

$w$  - coordenada espacial.

$c_1, c_2, c_3$  - constantes.

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{e}$  - vetores unitários.

$h$  - fator de proporcionalidade.

$f$  - função escalar.

$\vec{F}$  - função vetorial.

$t\_vet\_fce$  - tamanho do vetor fluxo de calor estimado.

$t\_arq\_temp$  - tamanho do arquivo de temperaturas medidas.

$t_f$  - tamanho do arquivo de temperaturas medidas.

$A$  - matriz dos coeficientes.

$t_q$  - tamanho do vetor fluxo de calor estimado.

## LETRAS GREGAS

$\rho$  - massa específica.

$\lambda$  - tempo.

$\phi$  - temperatura, coeficiente de sensibilidade.

$\Delta$  - intervalo para uma determinada variável.

$\xi$  - coordenada espacial (representa uma família de elipsóides).

$\eta$  - coordenada espacial (representa uma família de hiperbolóides de uma folha).

$\zeta$  - coordenada espacial (representa uma família de hiperbolóides de duas folhas).

$\alpha$  - difusividade térmica.

$\theta$  - coordenada espacial  $\left[ \theta = \arctg\left(\sqrt{\xi}/\alpha\right) \right]$ .

$\theta_m$  - teta que corresponde ao ponto de medição das temperaturas experimentais (aresta inferior oposta à aresta de corte).

$\pi$  - pi (3.1415926535 ...).

$\gamma_0$  - ângulo de saída.

$\alpha_0$  - ângulo de folga.

$\chi_r$  - ângulo de posição.

$\lambda_s$  - ângulo de inclinação.

$\Phi$  - temperatura.

## OPERADORES

$\partial$  - derivada parcial.

$\sum$  - somatório.

$>$  - maior que.

$\int$  - integral simples.

$\sqrt{\quad}$  - raiz quadrada.

$J$  - Jacobiano.

$\nabla^2 f$  - Laplaceano de uma função escalar  $f$ .

$\bar{\nabla}$  - divergente.

$\bar{\nabla}f$  - gradiente de uma função escalar  $f$ .

## OUTROS SÍMBOLOS

$\infty$  - infinito.

# CAPÍTULO 1

## *INTRODUÇÃO*

“A resistência da ferramenta às solicitações diversas limita a possibilidade de aproveitamento de uma máquina operatriz que determina, em primeiro lugar, as condições técnicas de trabalho e, através destas, as condições econômicas de qualquer processo de usinagem”, KOTTHAUS (1966), citado por MARCONDES (1990). Esta citação traduz perfeitamente bem a importância que tem o bom desempenho da ferramenta de corte num processo de usinagem. Além das solicitações mecânicas, as ferramentas estão sujeitas à solicitações térmicas, que podem ativar uma série de mecanismos de desgaste tais como a deformação plástica superficial por cisalhamento à altas temperaturas, a deformação plástica da aresta de corte sob altas tensões de compressão e o desgaste difusivo (MACHADO, 1993). A magnitude das temperaturas desenvolvidas durante o processo de usinagem dos metais sempre foi motivo de preocupação por parte de técnicos, engenheiros e cientistas da área. Durante o período da Revolução Industrial (séculos XVIII e XIX), quando se deu o início da história moderna do corte dos metais, já era percebido o efeito que tinha a temperatura na vida das ferramentas. Os melhores materiais disponíveis para a manufatura destas durante o século XIX, eram o aço com alto teor de carbono e o aço carbono ligado, que recebiam tratamento térmico adequado para que lhes fossem conferidas as propriedades que permitissem a usinagem de metais tais como o ferro fundido e o bronze (HANDBOOK SANDVIK, 1994). As ferramentas de aço carbono eram aquecidas até uma temperatura entre 750 e 835 °C e posteriormente resfriadas bruscamente em água até atingirem a temperatura ambiente, o que conferia às mesmas uma dureza máxima de 950 HV (TRENT, 1984). O grande problema era que quando tais ferramentas eram utilizadas no processo de corte perdiam rapidamente esta propriedade. O fenômeno de aquecimento obrigava o uso de condições de corte (velocidade, avanço e profundidade) baixas o suficiente para evitar o desenvolvimento de grandes temperaturas e, conseqüentemente, o colapso da ferramenta em pouco tempo de uso, o que tornava a manufatura de peças um processo relativamente demorado. Em 1868 surge o denominado “aço Mushet” (nome de seu inventor, Robert Mushet), considerado a primeira tentativa comercial para melhorar o desempenho das ferramentas de corte (TRENT, 1984).

Composto de 6 a 10 % de tungstênio e 1.2 a 2 % de manganês e, mais tarde, 0.5 % de cromo, com porcentagens de carbono de 1.2 a 2.5 %, o aço Mushet era dotado da excelente propriedade de temperabilidade. O uso do novo material como ferramenta, permitiu um aumento da velocidade de corte na usinagem de aço comum, de 42.5 % quando comparado com o aço carbono (TRENT, 1984). Quando se deu o surgimento da “**ciência da usinagem dos metais**” no início do século XX com **Frederick Winslow Taylor**, começou-se definitivamente a procura por materiais capazes de suportar níveis de temperaturas cada vez mais elevados, que permitissem o uso de condições de corte mais severas. Em 1900 na exposição em Paris, Taylor apresentou uma das mais importantes contribuições científicas e tecnológicas do início do século, o aço rápido (HSS-High Speed Steel). Para demonstrar o grande salto que este material possibilitaria na usinagem do aço, ele realizou operações de corte à velocidades e avanços tais que tornavam os cavacos azulados! O surgimento do aço-rápido significou um grande aumento na capacidade de produção de peças usinadas. As operações, que levavam 100 minutos para serem realizadas com as ferramentas de aço com alto teor de carbono durante o século XIX, eram executadas em apenas 26 minutos com as ferramentas de aço-rápido no começo do século XX. Isso significou um ganho de 74 minutos no tempo de produção de um determinado componente (HANDBOOK SANDVIK, 1994). O grande sucesso das ferramentas de aço-rápido se deveu a grande capacidade de manutenção de sua dureza e forma a elevadas temperaturas. No século XX, em torno de 1915, as ligas fundidas surgiram e um novo passo foi dado em direção a evolução dos materiais para ferramentas de corte que suportassem maiores níveis de temperatura e, conseqüentemente, condições de corte mais severas. As ligas fundidas eram compostas de algumas ligas não-ferrosas baseadas principalmente em cobalto, cromo, tungstênio, etc. Com o surgimento desse novo material, algumas operações que duravam 26 minutos para serem executadas com ferramentas de aço rápido, levavam apenas 15 minutos com as ferramentas de ligas fundidas (HANDBOOK SANDVIK, 1994). No final da década de 20 foi desenvolvido um novo material que, a exemplo do aço-rápido inventado por Taylor, foi uma verdadeira revolução no mundo da usinagem da época. O carbetó cementado, ou carbetó sinterizado de tungstênio, ou ainda metal duro, desenvolvido graças a tecnologia da metalurgia do pó, possibilitou a utilização de condições de corte extremamente severas durante tempos de usinagem jamais vistos. A operação de usinagem que levava 26 minutos com o aço rápido e 15 minutos com as ligas fundidas, era executada em apenas 6 minutos com as ferramentas de metal duro

(HANDBOOK SANDVIK, 1994). Esta vantagem do metal duro em relação aos outros dois materiais se deve principalmente ao fato deste possuir uma maior dureza à quente que os outros. Desenvolvimentos subsequentes incluíram a adição de outros carbeto tais como o carbeto de titânio (TiC) e o carbeto de tântalo (TaC), o que melhorou ainda mais as propriedades de resistência à craterização. Posteriormente, veio o desenvolvimento dos chamados materiais cerâmicos e ultra-duros tais como as ferramentas cerâmicas à base de alumina ( $Al_2O_3$ ), cujas principais vantagens em relação ao metal duro, segundo TRENT (1984) são:

- (1) Retenção da dureza e resistência à compressão a temperaturas maiores do que com metal duro;
- (2) Muito menos solubilidade em aço do que qualquer metal duro.

O desenvolvimento do Sialon (Si-Al-O-N), material à base de nitreto de silício com adições de alumínio e oxigênio, permitiu a usinagem de ligas aeroespaciais à velocidades de corte de 180 a 300 m/min e avanços de 0.2 mm/rot.

O diamante policristalino, recomendado para a usinagem de ligas de alumínio e o nitreto cúbico de boro, segundo material mais duro que se conhece, são mais dois exemplos de materiais utilizados hoje em dia para o corte de metais.

Apesar de todo o desenvolvimento que persiste através dos tempos na busca de materiais cada vez mais eficientes, as ferramentas não estão livres dos efeitos negativos da ação do calor gerado na região de corte. Como foi dito no início deste capítulo introdutório, a temperatura desenvolvida na região de interface é um dos principais fatores determinantes das causas dos desgastes das ferramentas. Portanto, paralelamente ao progresso dos materiais, se deu o desenvolvimento de técnicas para a medição das temperaturas de corte na região da interface com o objetivo de se conhecer com mais profundidade as causas dos desgastes.

São diversos os métodos de medição da temperatura de corte encontrados atualmente na literatura, dentre os quais encontram-se os métodos analíticos de estimação desta importante variável do processo de usinagem.

Este trabalho visa a proposição de um método de determinação da temperatura na interface cavaco-ferramenta utilizando problemas inversos em condução de calor. Consiste numa extensão do trabalho de LIMA (1996), que utilizou a mesma técnica para analisar o problema térmico de estimação da temperatura de corte no processo de usinagem e, portanto,

faz parte de uma linha de pesquisa importante do grupo de usinagem e de transferência de calor e de massa da Universidade Federal de Uberlândia.

No Capítulo 2, faz-se uma revisão bibliográfica dos principais métodos de medição de temperatura de corte existentes.

Apresenta-se no Capítulo 3, os conceitos e fundamentos de problemas inversos em condução de calor e, conseqüentemente, a obtenção do algoritmo sequencial utilizado para estimar a temperatura de interface cavaco-ferramenta.

Para o uso da técnica de problemas inversos, torna-se também necessário a construção de um modelo físico para a previsão do campo de temperatura na ferramenta. O desenvolvimento desse modelo é apresentado no Capítulo 4.

No Capítulo 5, é descrito o procedimento experimental executado para testar o método desenvolvido. Neste capítulo são também apresentados resultados e discussões dos mesmos.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas através da realização deste trabalho.

## CAPÍTULO 2

### *REVISÃO BIBLIOGRÁFICA*

#### 2.1. TEMPERATURA DE CORTE

Durante o processo de usinagem a maior parte da potência consumida é utilizada para o cisalhamento do material que leva à formação do cavaco e da nova superfície usinada. Uma pequena parcela dessa energia fica retida no material deformado principalmente sob formas de energia elástica e energia de superfície.

TAYLOR e QUINNEY (1934, 1937), citado por SHAW (1983), usando uma técnica calorimétrica acurada mediram a energia retida em barras metálicas na forma de calor quando estas eram deformadas sob torção. Encontrou-se que a percentagem da energia retida decresce com o aumento na energia da solitação envolvida. Quando estes resultados foram extrapolados para os níveis de deformação na formação do cavaco, estimou-se que a energia não convertida em calor era apenas de 1 a 3 % da total. Pode-se assumir portanto, com uma margem de erro muito pequena, que toda a potência consumida no processo de formação do cavaco é convertida em calor.

A energia térmica gerada durante um processo de corte é distribuída diretamente para o cavaco, a peça, a ferramenta de corte, o fluido de corte e o meio ambiente. A maior parcela é conduzida pelo cavaco. Segundo TRENT (1984), durante a usinagem de aço à alta velocidade sem o uso de fluido de corte, o cavaco pode atingir temperaturas da ordem de 250 a 350 °C, logo após ter deixado a zona de corte. Sob condições muito excepcionais, essas temperaturas podem chegar a valores acima de 650 °C durante a usinagem de aços endurecidos ou de certas ligas de níquel. Felizmente o calor que flui para o cavaco tem pouca influência na temperatura da ferramenta, uma vez que o tempo de contato entre ambos é muito curto. Nesse sentido, TRENT (1984) observa que, para uma velocidade de corte de 50 m/min e um grau de recalque (relação entre a espessura do cavaco e a espessura de corte) igual a 2, a velocidade de saída do cavaco é de 25 m/min. Se o contato deste elemento com a superfície de saída for de 1 mm, um pequeno elemento de cavaco passará sobre esta área em apenas 2 milissegundos.

Grande parte do calor gerado durante o processo de corte flui em direção à peça que está sendo trabalhada, comprometendo sua acuracidade dimensional. TRENT (1984), apresenta resultados que indicam que a proporção de calor que segue em direção à peça pode chegar a 50 % do total, para baixos avanços e pequenos ângulos do plano de cisalhamento.

Segundo FERRARESI (1977), somente 8 a 10 % do calor total que é gerado no processo de corte flui em direção à ferramenta, porém o aumento de temperatura associado com este calor é significativo, podendo chegar à ordem de 1000 - 1100 °C. CASTO et alli (1994), através de simulação numérica e análises experimentais em ferramentas cerâmicas, encontraram valores de temperatura superiores a 1540 °C para a interface cavaco-ferramenta. Nesse caso, usinou-se o aço ISO C40 e as temperaturas foram obtidas através de microscopia eletrônica de varredura. Em um trabalho recente, ABRÃO e ASPINWALL (1997), usando métodos de medição de temperatura com termopar implantado e com um pirômetro infravermelho, juntamente com uma análise numérica utilizando volumes finitos, estimaram a temperatura de interface durante a usinagem de barras do aço AISI E52100 com ferramentas de PCBN. Foram encontradas temperaturas da ordem de 1550 °C.

A Figura 2.1 mostra as três zonas onde o calor pode ser gerado durante o processo de usinagem.

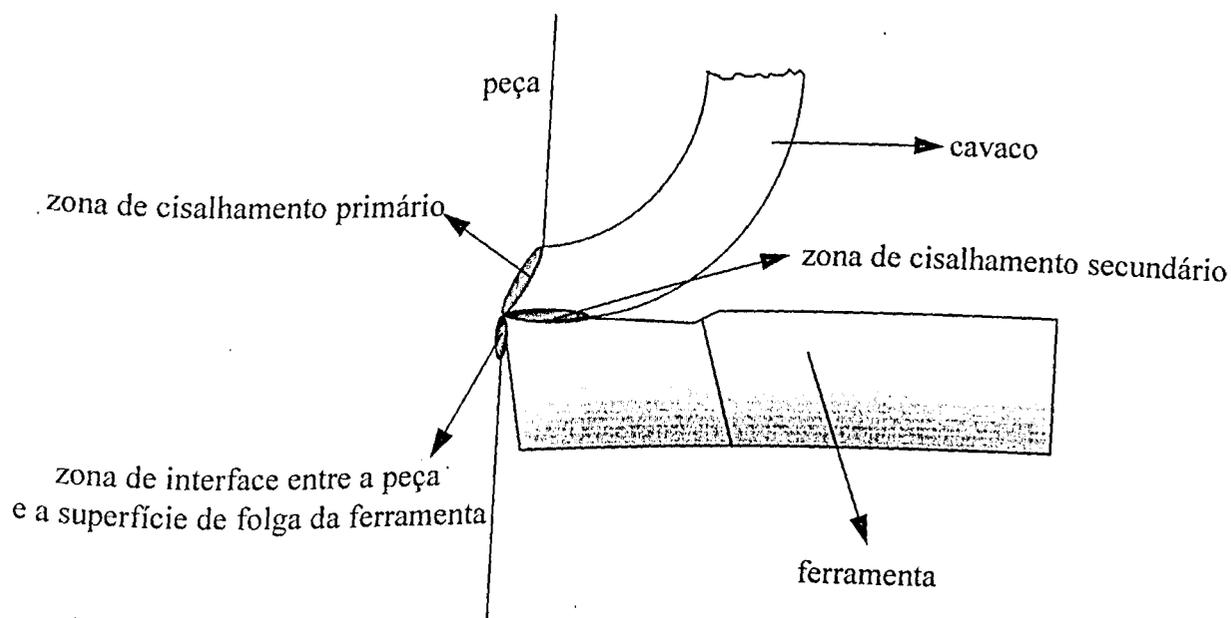
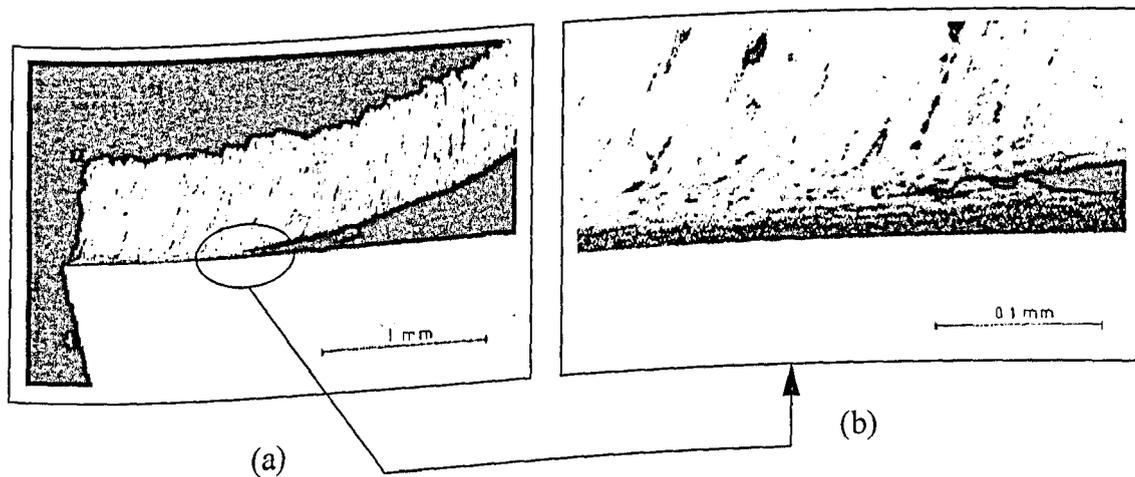


Figura 2.1. Zonas de geração de calor na usinagem.

A zona de cisalhamento primário é uma região que surge durante todo o processo de corte, na interface entre o material que está sendo recalcado e o cavaco que está sendo formado. Nesta região as deformações cisalhantes geralmente são da ordem de 2 a 4 (TRENT, 1984). O trabalho necessário para provocar estas deformações é praticamente todo transformado em calor, o que faz elevar a temperatura naquela região de corte. A maior parte deste calor é dissipado pelo cavaco, mas uma pequena fração flui em direção à peça, podendo às vezes causar problemas de precisão dimensional na mesma (MACHADO, 1993).

A zona de cisalhamento secundária foi muito estudada por TRENT (1963), que através da análise de micrografias da raiz do cavaco de vários materiais usinados com aço rápido e metal duro, utilizando técnicas de Quick-Stop, obteve evidências claras de um contato íntimo entre o cavaco e a ferramenta numa grande porção da interface. Esta região foi denominada *zona de aderência*, Figura 2.2a.

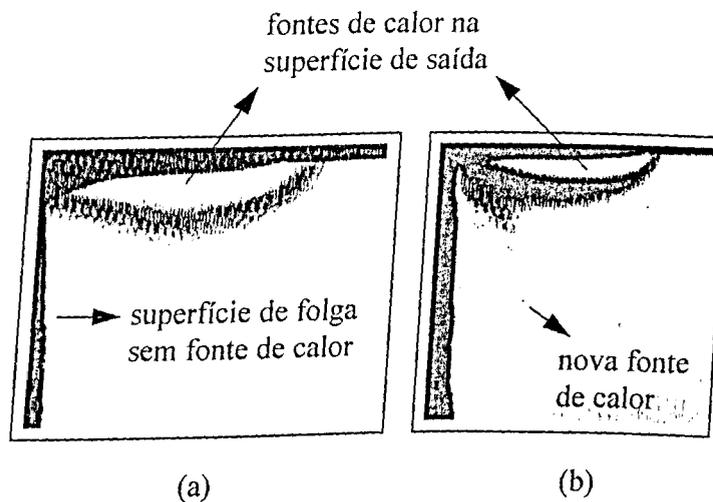


**Figura 2.2.** (a) Amostra da raiz do cavaco, após Quick-Stop, mostrando a zona de aderência entre ferramenta (aço rápido) e cavaco (aço com baixo teor de carbono); (b) Detalhe da zona de fluxo (TRENT, 1984).

A região logo acima da interface, dentro da zona de aderência foi denominada *zona de fluxo*, Figura 2.2b. Nela existe um gradiente de velocidade que varia desde zero, na interface cavaco-ferramenta, até um valor igual a velocidade de saída do cavaco. Este gradiente provoca a ocorrência de grandes deformações, que são bem maiores do que as existentes no plano de cisalhamento primário, podendo atingir valores iguais a 100 ou mais (TRENT, 1984). Para que sejam alcançados tais níveis, é necessário uma grande quantidade de trabalho cisalhante,

que é praticamente todo transformado em calor. Esta fonte térmica é a principal responsável pelo aumento da temperatura da ferramenta de corte.

A zona de interface entre a peça e a superfície de folga da ferramenta, também pode representar uma importante fonte de geração de calor no processo de usinagem. Quanto menor o ângulo de folga da ferramenta, maior será a área de contato da superfície do flanco com a nova superfície usinada. Esse fato pode produzir uma zona de aderência e, conseqüentemente, gerar uma zona de fluxo semelhante à existente na região de interface cavaco-ferramenta. Nota-se assim que é possível reduzir-se a intensidade do calor gerado nesta região através do aumento do ângulo de folga. Porém deve-se observar que um aumento demasiado, pode comprometer a cunha cortante devido a redução da mesma. Um fator que pode causar a redução do ângulo de folga e, conseqüentemente, intensificar a geração de calor nesta região, é o desgaste de flanco ou deformação plástica da aresta de corte. Este efeito é mostrado por TRENT (1984) na Figura 2.3. Observa-se que a seção transversal da ferramenta que sofreu uma deformação de sua aresta de corte (Figura 2.3b), teve seu ângulo de folga eliminado, aumentando-se o contato entre ferramenta e peça, criando uma nova fonte de calor.



**Figura 2.3.** Seção transversal de uma ferramenta de corte mostrando as zonas de geração de calor (a) antes e (b) depois de sofrer desgaste de flanco (TRENT, 1984).

As temperaturas desenvolvidas na região de corte são, usualmente, nocivas tanto à peça quanto à ferramenta. Como foi dito, as altas temperaturas podem provocar distorções na

peça, resultando numa má precisão dimensional, ou prejudicando o acabamento superficial. Quanto as ferramentas de corte, as temperaturas podem atingir níveis de ativação de alguns mecanismos de desgaste provocando falhas prematuras. Os mecanismos que são mais fortemente influenciados pela temperatura são: a *deformação plástica superficial por cisalhamento à altas temperaturas* (causa principalmente o desgaste de cratera), a *deformação plástica da aresta de corte sob altas tensões de compressão* (causa a redução do ângulo de folga, provocando o aparecimento de uma zona de fluxo na região de interface peça-superfície de folga) e a *difusão* (causa os desgastes de cratera e de flanco). A Figura 2.4 mostra esquematicamente os mecanismos de desgaste citados e a Figura 2.5 mostra fotografias de ferramentas com desgaste de flanco, desgaste de cratera e deformação plástica da aresta de corte.

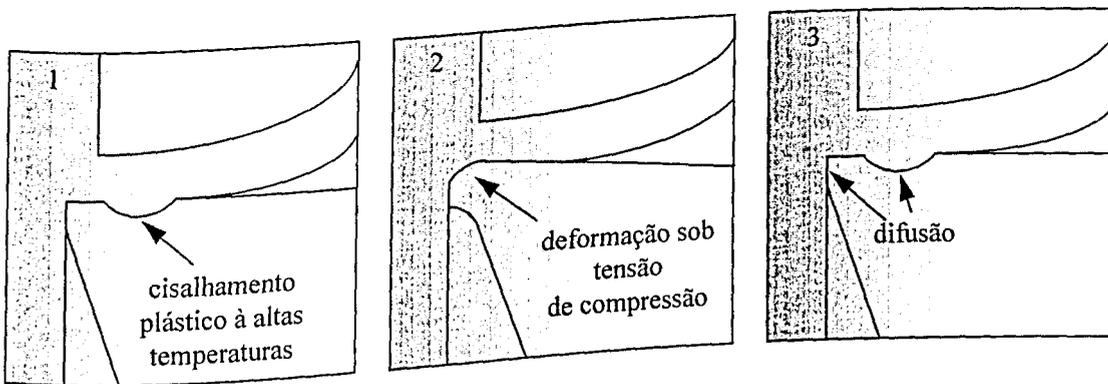


Figura 2.4. Mecanismos de desgaste influenciados pela temperatura de corte.

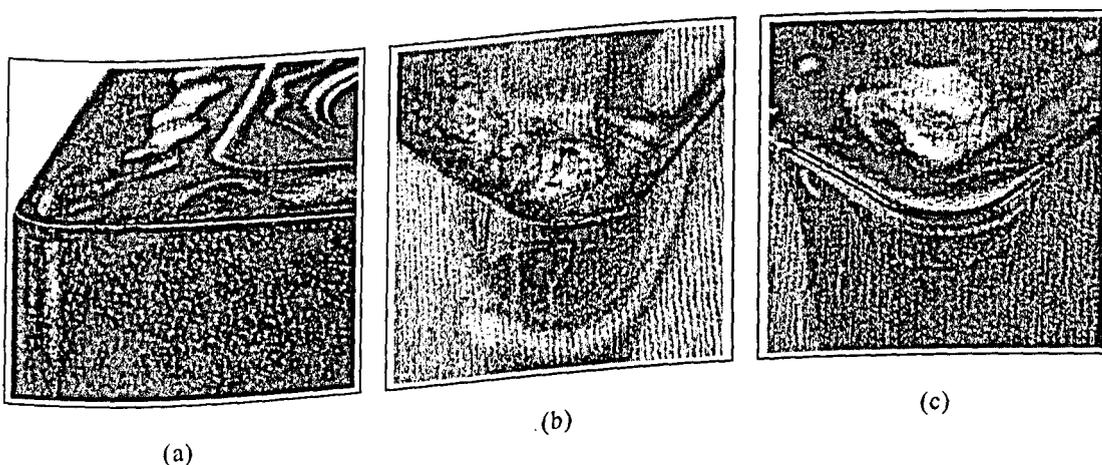


Figura 2.5. Desgastes influenciados pela temperatura de corte. (a) Desgaste de flanco; (b) Desgaste de cratera e (c) Deformação plástica da aresta de corte (HANDBOOK SANDVIK, 1994).

O desenvolvimento de tais desgastes é extremamente prejudicial tanto para a peça quanto para a ferramenta de corte. O desgaste de flanco aumenta a temperatura de corte e, conseqüentemente, favorece o aparecimento de outros mecanismos de desgaste, provocando a sua própria progressão. Além disso, pode prejudicar a qualidade superficial das peças usinadas. O desgaste de cratera e a deformação plástica da aresta de corte, além de aumentar a temperatura, podem alcançar níveis elevados, provocando o enfraquecimento da aresta cortante e o conseqüente colapso da ferramenta.

### **2.1.1. MÉTODOS DE MEDIÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE**

O conhecimento das temperaturas provenientes do processo de usinagem é fundamental para que se possa entender os mecanismos térmicos que conduzem ao desgaste e, conseqüentemente, ao colapso da ferramenta de corte. SADEK (1959), citado por LENZ (1967), provou em sua tese que a topografia da cratera gerada durante a usinagem e a distribuição de temperatura sob a superfície de saída da ferramenta estão intimamente relacionadas.

Além de auxiliar no entendimento dos fenômenos termicamente ativados que ocorrem na usinagem, a temperatura pode ainda ser utilizada como um sensor para o controle adaptativo. JAESCHKE et alli (1967), desenvolveram um sistema para a manutenção da temperatura da ferramenta de corte no processo de torneamento através da variação automática da velocidade de corte. O sistema de controle básico consistiu de um amplificador operacional integrador, um motor de velocidade variável e um sistema de medição de temperatura pelo método do termopar ferramenta-peça.

Durante várias décadas diversos pesquisadores vêm tentando medir a distribuição de temperatura na ferramenta, na peça e até mesmo no cavaco. LENZ (1967) publicou um artigo onde são citados vários métodos de medição de temperatura de corte. Observa-se, nesse caso, que as principais técnicas de medição de temperatura na usinagem surgiram entre as décadas de 20 e 50.

Apesar do grande número de técnicas existentes para determinação das temperaturas geradas durante o processo de corte, não existe ainda uma que seja totalmente confiável e universal. Em todas elas existem fontes de erros.

São citadas a seguir algumas das técnicas mais importantes para determinação da temperatura de corte:

- Através de métodos calorimétricos;
- Através do método do termopar ferramenta-peça ;
- Através do método do termopar implantado;
- Através de inspeção metalográfica;
- Utilizando vernizes termosensíveis;
- Utilizando sais com ponto de fusão constante;
- Através de medições da radiação térmica;
- Através de métodos analíticos e numéricos.

### 2.1.1.1. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE ATRAVÉS DE MÉTODOS CALORIMÉTRICOS

A Figura 2.6 mostra um esboço da montagem necessária para determinação da temperatura de corte pelo método calorimétrico.

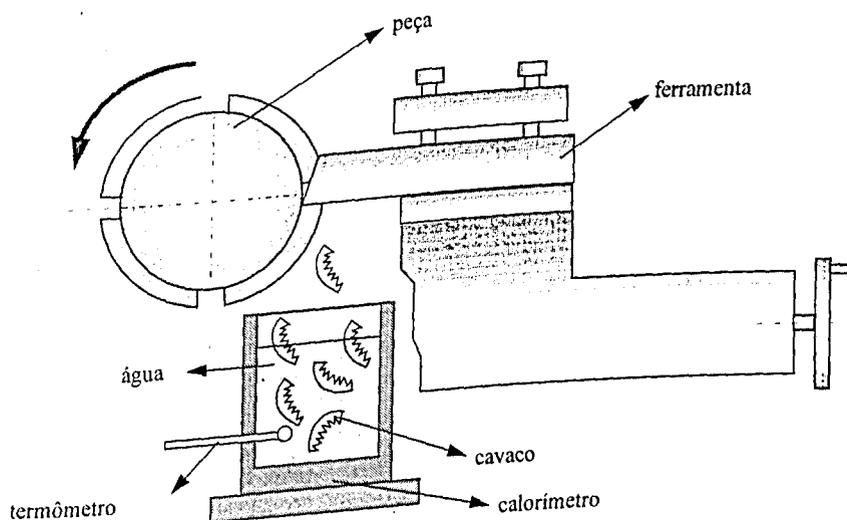


Figura 2.6. Método calorimétrico (FERRARESI, 1977).

O método é utilizado para obtenção da temperatura média do cavaco. Os seguintes passos devem ser seguidos:

- mede-se a temperatura inicial da água contida no calorímetro;
- usina-se a peça durante um certo tempo fazendo com que os cavacos caiam dentro do calorímetro, aquecendo a água;
- quando a usinagem termina, mede-se a temperatura final da água;
- pesa-se o cavaco após sua secagem e determina-se a temperatura média do mesmo através do uso da Equação do Calorímetro, Equação (2.1), (FERRARESI, 1977).

$$M_c \cdot c(t_c - t_2) = (M_a + M_e \cdot c_e)(t_2 - t_1). \quad (2.1)$$

Onde,

$M_c$  representa a massa de cavaco em g,

$c$  o calor específico do cavaco,

$t_c$  a temperatura do cavaco a ser determinada em  $^{\circ}\text{C}$ ,

$t_2$  a temperatura final da água, do cavaco e do calorímetro em  $^{\circ}\text{C}$ ,

$M_a$  a massa da água no calorímetro em g,

$M_e$  a massa equivalente do calorímetro em g,

$c_e$  o calor específico do calorímetro e

$t_1$  e temperatura inicial da água e do calorímetro em  $^{\circ}\text{C}$ .

Rescrevendo a Equação (2.1), obtém-se uma expressão para a temperatura do cavaco,

$$t_c = \frac{(M_a + M_e \cdot c_e)(t_2 - t_1)}{M_c \cdot c} + t_2. \quad (2.2)$$

Esta técnica pode ser útil no estudo qualitativo da influência da variação dos parâmetros de usinagem sobre a temperatura de corte. Porém, não indica valores reais absolutos dos níveis de temperatura na região de interface cavaco-ferramenta o que é uma desvantagem muito importante. Além disso vai existir a troca de calor com o meio ambiente o que contribui para a falta de precisão do método.

### **2.1.1.2. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE ATRAVÉS DO MÉTODO DO TERMOPAR FERRAMENTA-PEÇA**

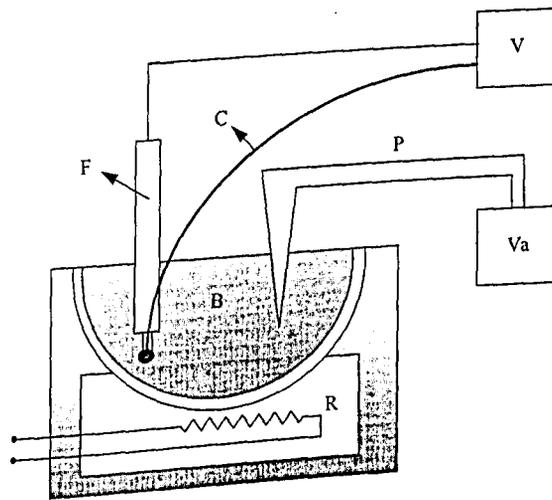
Este método faz parte dos chamados *métodos termoeletricos de medição de temperatura de corte*. Baseia-se no efeito SEEBECK, segundo o qual durante o aquecimento de uma junta soldada composta por dois condutores diferentes, surge uma força eletromotriz proporcional à temperatura na junta.

Fazendo uso deste princípio, LENZ (1967) cita que, GOTTWEIN (1925) na Alemanha, SHORE (1925) nos Estados Unidos e HERBERT (1926) na Inglaterra, desenvolveram quase simultaneamente, o denominado “método do termopar ferramenta-peça”, criado originalmente para medição da temperatura de corte no processo de torneamento.

Segundo SHAW (1983), as leis termoeletricas aplicáveis neste método são as seguintes:

- a f.e.m. num circuito termoeletrico depende somente da diferença de temperatura entre as junções quente e fria, e é independente de gradientes que possam existir em alguma parte que compõe o sistema;
- a f.e.m. gerada é independente do tamanho e da resistência dos condutores;
- se a junção dos dois metais está a uma temperatura uniforme, a f.e.m. gerada não é afetada se um terceiro metal, que esteja à mesma temperatura, for usado para fazer a ligação entre os dois primeiros.





**Figura 2.8.** Calibração do método do termopar ferramenta-peça (FERRARESI, 1977).

Consiste na imersão simultânea dos componentes F, C e P em um banho de sal B, aquecido pela resistência R. F é uma haste do mesmo material da ferramenta de corte, que deve ter um diâmetro de pelo menos 1/8" para garantir uma temperatura uniforme e limitar a quantidade de calor transferido à extremidade fria que, por sua vez, deve estar a uma boa distância da ponta aquecida, mantendo-se à temperatura ambiente durante a calibração. C representa o material da peça, podendo ser o próprio cavaco desta. Se o material em usinagem não produz cavaco longo, deve-se preparar uma peça longa semelhante à haste da ferramenta. A temperatura do banho é medida por um termopar cromel-alumel padrão P.

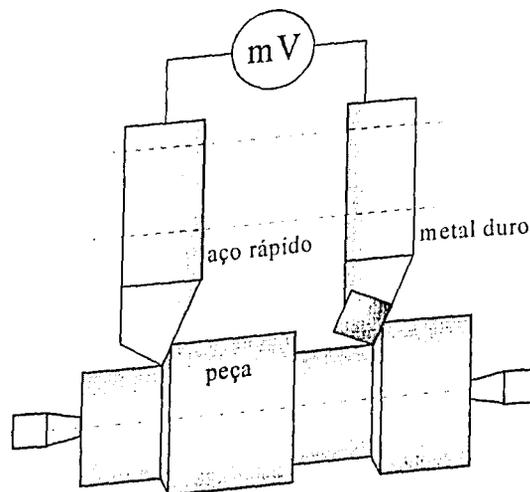
Apesar de bastante prático e de simples utilização, o método do termopar ferramenta-peça apresenta uma série de particularidades que devem ser levadas em conta durante sua montagem e utilização. TRIGGER (1963), BICKEL (1963), FERRARESI (1977) e SHAW (1983) citam algumas limitações e cuidados que devem ser tomados. Deve-se observar que a "junta soldada", representada pelo contato da ferramenta com o cavaco e peça, não permanece estável durante o processo de usinagem devido a existência de picos e vales nesta região. Naturalmente, os contatos ocorrem nos picos, gerando uma diferença de pressão nesses contatos o que, por sua vez, gera diferentes forças eletromotrizes. Portanto, cada contato constitui um ponto potencial, ou seja, uma junção quente, e a interface cavaco-ferramenta pode, desta forma, ser considerada como um termopar de tamanho finito com um número infinitamente grande de fontes elementares interligadas num circuito em paralelo (QURESHI e KOENIGSBERGER, 1966). O fenômeno descrito constitui numa das limitações do método,

ou seja, o mesmo não é capaz de fornecer a temperatura máxima na região de interface, mas sim a temperatura média. Uma outra limitação do método é a necessidade de que os materiais da peça e da ferramenta sejam condutores de eletricidade, pois só desta maneira o circuito termoeletrico estará fechado. Isto significa dizer que não é possível medir a temperatura de corte quando se dispõe, por exemplo, de ferramentas cerâmicas ou quando se usina algum material não metálico. Surge ainda uma pergunta à respeito do método de calibração: *será que uma calibração estática é satisfatória para uma situação real dinâmica?*

Deve-se tomar cuidado quando da utilização do método à baixas velocidades de corte. Sob esta condição, pode surgir na interface uma aresta postiça (APC) que restringirá o contato do material da peça com o da ferramenta. Neste caso a f.e.m. gerada representa a temperatura média da região de contato da APC com a ferramenta.

Por sua praticidade e versatilidade, o método do termopar ferramenta-peça é, ainda hoje, a técnica experimental mais utilizada para medição da temperatura de corte. Segundo TRENT (1984), diversos pesquisadores em áreas específicas da usinagem têm utilizado o método para comparar a usinabilidade de diferentes materiais, a eficiência de fluidos de corte ou o desempenho de diferentes materiais para ferramentas.

Uma variação do método do termopar ferramenta-peça descrito anteriormente está mostrado na Figura 2.9 à seguir.



**Figura 2.9.** Variação do método do termopar ferramenta-peça. Uso de duas ferramentas de materiais diferentes (FERRARESI, 1977).

Consiste da utilização de duas ferramentas de materiais diferentes, por exemplo, aço rápido e metal duro, formando um par térmico. Desta maneira, o contato rotacional necessário e a influência das diferentes junções existentes no método anteriormente descrito são eliminados. A diferença na f.e.m. gerada nos dois termopares calibrados é medida, de modo que a temperatura pode ser calculada. Uma das principais limitações do método é a necessidade da utilização de ferramentas de materiais diferentes, o que torna difícil a avaliação da temperatura em condições de corte mais severas utilizando ferramentas de aço rápido e metal duro, por exemplo, que possuem resistências totalmente diferentes.

### 2.1.1.3. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE PELO MÉTODO DO TERMOPAR IMPLANTADO

Outra técnica de medição da temperatura de corte usando os princípios da termoeletricidade é o método do termopar implantado Figura 2.10.

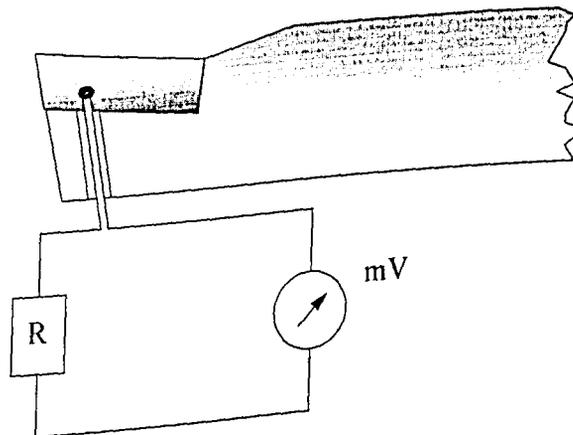
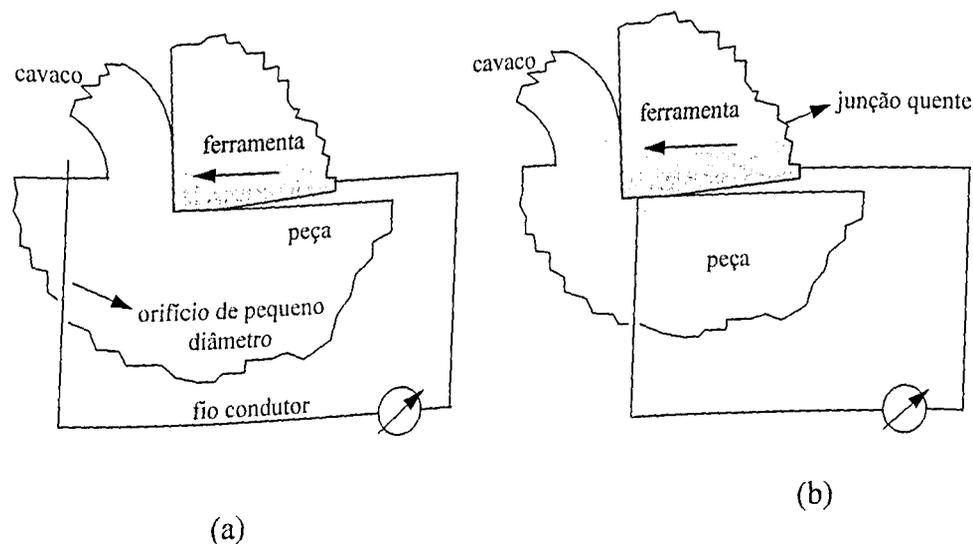


Figura 2.10. Método do termopar implantado.

Consiste da inserção de termopares de pequeno diâmetro em diversas posições da ferramenta de corte. Para tanto são feitos microfuros, geralmente por eletroerosão. Uma aplicação bastante útil do método é na determinação da distribuição de temperatura em insertos de metal duro. Para tanto, as ferramentas devem ser furadas em diversas posições e profundidades. É importante que se tenha um único furo por inserto para minimizar a perturbação do fluxo de

calor. Caso contrário, a determinação da distribuição de temperatura se torna uma tarefa extremamente difícil.

HIRAO (1989), determinou a distribuição de temperatura no flanco da ferramenta utilizando um termopar formado entre a superfície de folga da ferramenta e um fino fio implantado na peça, Figuras 2.11 a e b.



**Figura 2.11.** Determinação da distribuição de temperatura no flanco da ferramenta. (a) Situação anterior ao cisalhamento do fio; (b) Situação imediatamente posterior ao cisalhamento (HIRAO, 1989).

Pode-se observar que no momento da passagem da ferramenta de corte pelo furo onde está localizado o fio, é estabelecido o contato da superfície de folga da ferramenta com este, formando um termopar. O valor da f.e.m. gerada pode ser lido através de um milivoltímetro.

#### 2.1.1.4. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE ATRAVÉS DE INSPEÇÃO METALOGRAFICA

A distribuição da temperatura de corte pode ser obtida através da inspeção metalográfica da própria ferramenta. A dureza à temperatura ambiente do aço carbono endurecido e do aço rápido decresce após seu reaquecimento, e a redução na dureza depende da temperatura e do tempo de aquecimento. Segundo TRENT (1984), as ferramentas de aço

carbono endurecidas começam a perder dureza a partir de 250 °C, e esta propriedade é rapidamente reduzida após um aquecimento à 600 °C. Já as ferramentas de aço rápido não sofrem amolecimento apreciável até 600 °C. Entre 600 e 850 °C a dureza cai rapidamente, mas pode voltar a subir para temperaturas de reaquecimento maiores, se forem rapidamente resfriadas. Calibrando-se a dureza versus temperatura e o tempo de aquecimento, uma família de curvas pode ser obtida. Desta forma, se a dureza em qualquer zona afetada pelo calor for medida e o tempo de aquecimento for conhecido, a temperatura alcançada na região pode ser determinada.

A variação na dureza após um reaquecimento é resultado de mudanças na microestrutura do material das ferramentas. Segundo TRENT (1984), no aço carbono e em alguns aços rápidos, estas mudanças são geralmente muito graduais, dificultando a identificação de uma estrutura característica de uma estreita faixa de temperatura. Porém, em certos aços rápidos (aços contendo cobalto, por exemplo), modificações distintas na estrutura ocorrem à intervalos de aproximadamente 50 °C entre 600 e 900 °C, o que permite a medição das temperaturas com uma precisão de  $\pm 25$  °C dentro da região afetada pelo calor.

A medição da micro-dureza como método para a determinação da temperatura de corte é extremamente trabalhoso e requer que medições precisas sejam realizadas. O método de medição pela avaliação das mudanças microestruturais é relativamente preciso e muito mais rápido que o primeiro, porém exige muita experiência na interpretação das microestruturas.

As principais limitações de ambos os métodos reside no fato de que os mesmos só podem ser aplicados em ferramentas de aço e onde temperaturas relativamente altas são geradas. TRENT (1984), cita porém, que certos carbos cementados ligados com ferro, sofrem mudanças estruturais em torno de 800 °C, o que pode ser utilizado na identificação de isotérmicas na região afetada pelo calor. DEARNLEY (1983) desenvolveu uma técnica que permite avaliar a distribuição de temperatura em insertos de metal duro. Consiste na substituição do elemento ligante normalmente utilizado nesses insertos, o Co, por ferro e ferro-silício, com diferentes teores. Cada ligante utilizado possui uma temperatura específica de transformação de fase, o que permite determinar as isotérmicas nas ferramentas.

### 2.1.1.5. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE UTILIZANDO VERNIZES TERMOSENSÍVEIS

Segundo LENZ (1967), SCHALLBROCK e LANG (1943) foram os primeiros a usar vernizes termosensíveis na usinagem, utilizando suas capacidades de mudança de cor à certas temperaturas. Esta técnica é aplicada somente em superfícies acessíveis sob condições de regime permanente.

FERRARESI (1977), cita o uso de lápis indicador de temperatura para controlar a vida das ferramentas pluricortantes. Tal controle baseia-se no seguinte princípio: *cargas iguais na aresta das ferramentas pluricortantes originam iguais temperaturas; a aresta mais carregada aquece-se mais e a menos carregada aquece-se menos.*

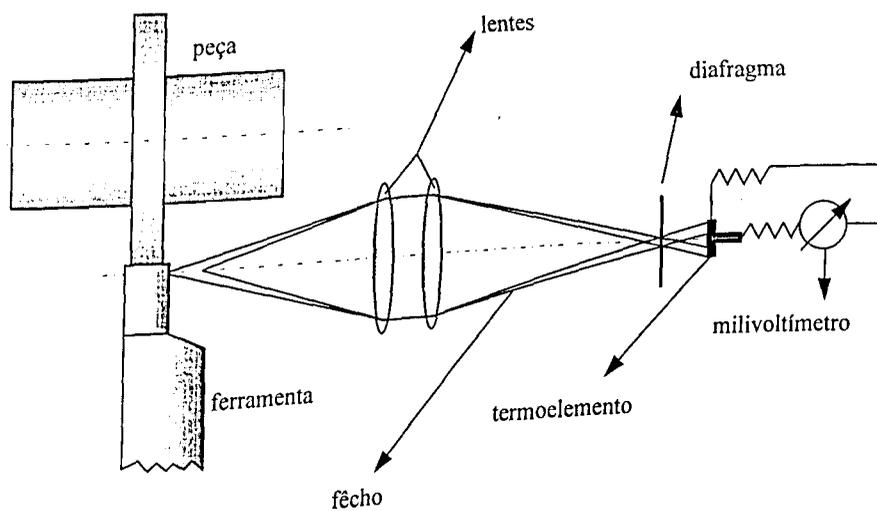
A utilização do lápis indicador de temperatura permite determinar as ferramentas mais sobrecarregadas.

### 2.1.1.6. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE ATRAVÉS DE MEDIÇÕES DA RADIAÇÃO TÉRMICA

Este método baseia-se no princípio em que um componente aquecido emite uma certa quantidade de radiação térmica. Fazendo-se esta radiação incidir num sensor de temperatura, gera-se uma f.e.m. que pode ser detectada por um milivoltímetro. Através de calibração apropriada, pode-se relacionar a f.e.m. com a temperatura equivalente e, desta forma, determinar a distribuição de temperatura em certas regiões da ferramenta de corte.

A radiação térmica emitida durante o processo de usinagem foi medida pela primeira vez pelo famoso experimento de SCHWERD (1933), citado por BICKEL (1963), durante a usinagem de um disco através de corte ortogonal. As superfícies da ferramenta, da peça e do cavaco ficaram acessíveis, permitindo que a radiação infravermelha destas fossem focalizadas por um sistema de lentes.

A Figura 2.12 ilustra o método onde é utilizado um termopar como sensor de temperatura.



**Figura 2.12.** Medição da temperatura de corte através da radiação térmica (FERRARESI, 1977).

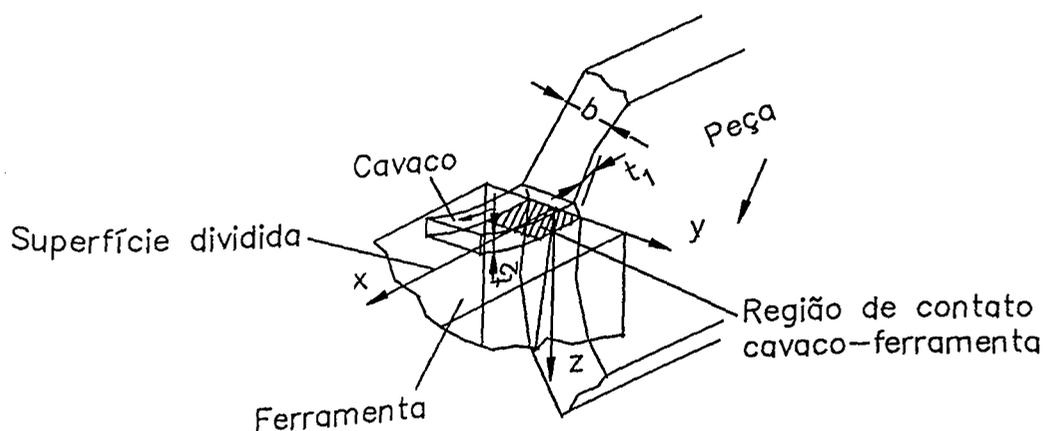
Pode-se observar que o calor irradiado pela ponta da ferramenta está sendo projetado, por meio de um sistema de lentes, no termoelemento (termopar), o qual produz uma d.d.p. proporcional à temperatura naquela região. A f.e.m. gerada é medida através de um milivoltímetro. O sistema pode ser calibrado de modo a fornecer valores da temperatura na região da ferramenta, em qualquer unidade.

TRIGGER (1963), desenvolveu um arranjo experimental para a determinação da distribuição de temperatura no flanco de ferramentas de metal duro. Basicamente, a técnica experimental utilizou um detector de radiação infravermelha fotocondutivo movente para varrer a superfície de flanco da ferramenta durante o corte. Foram obtidas curvas que mostram a distribuição da temperatura no flanco. Verificou-se que o pico de temperatura ocorre à uma certa distância da aresta de corte e que o nível de temperatura é influenciado pelo desgaste de flanco. Foi estimada ainda a distribuição de temperatura na interface cavaco-ferramenta utilizando analogia elétrica. Observou-se que os picos de temperatura ocorreram próximo da metade do comprimento de contato cavaco-ferramenta e que temperaturas muito mais baixas foram obtidas na aresta de corte.

### 2.1.1.7. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE UTILIZANDO SAIS COM PONTO DE FUSÃO CONSTANTE

Esta técnica consiste da utilização de sais com ponto de fusão bem definido tais como NaCl, KCl, CdCl, PbCl<sub>2</sub>, AgCl, KNO<sub>3</sub>, para determinação da distribuição da temperatura no corpo da ferramenta de corte.

KATO et alli (1976), determinaram a distribuição de temperatura numa superfície perpendicular ao plano de referência de ferramentas de metal duro (classe P20), cermets e cerâmicas, durante o corte ortogonal de tubos do material STKM 13A utilizando pós de sais com ponto de fusão constante, Figura 2.13.



**Figura 2.13.** Experimento utilizado por Kato et alli para a determinação da distribuição de temperatura no plano ortogonal de insertos (KATO et alli, 1976).

A técnica consiste, em primeiro lugar, da divisão do inserto em duas partes de iguais dimensões. Geralmente esta etapa é realizada por processo de abrasão (retificação) dos insertos, até que se alcance a dimensão desejada, ou seja, a metade do tamanho original. Para obter uma ferramenta bipartida, pelo processo anteriormente descrito, é necessário a disponibilidade de, pelo menos, dois insertos do mesmo material. Com a ferramenta bipartida em mãos, a próxima etapa consiste em umedecer as superfícies retificadas com uma solução de silicato de sódio para melhorar a adesão do sal que será posteriormente espalhado por sobre

estas superfícies. Terminadas estas etapas, as partes são unidas e processa-se a usinagem durante um tempo suficiente, até que o sistema entre em regime. Após o corte, a ferramenta é novamente separada e a isotérmica gerada pela fusão do sal é observada. Esta pode ser identificada pela linha gerada entre o sal que sofreu fusão e o que permaneceu sem transformação. Se este processo for repetido com vários tipos de sais (com pontos de fusão diferentes), e com ferramentas de um mesmo material, pode-se determinar a distribuição de temperatura no plano ortogonal à aresta da ferramenta de corte.

CASTO et alli (1994), utilizaram uma técnica semelhante. Com o uso de nitreto de potássio (ponto de fusão = 390 °C), posto num plano paralelo à superfície de saída de insertos cerâmicos, determinaram a isotérmica gerada durante a usinagem do aço ISO C40.

### **2.1.1.8. DETERMINAÇÃO DA TEMPERATURA DE CORTE USANDO MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS**

Em virtude de certas limitações dos métodos experimentais, vários pesquisadores vêm tentando resolver o problema de determinação das temperaturas desenvolvidas na região de corte usando modelos analíticos e numéricos.

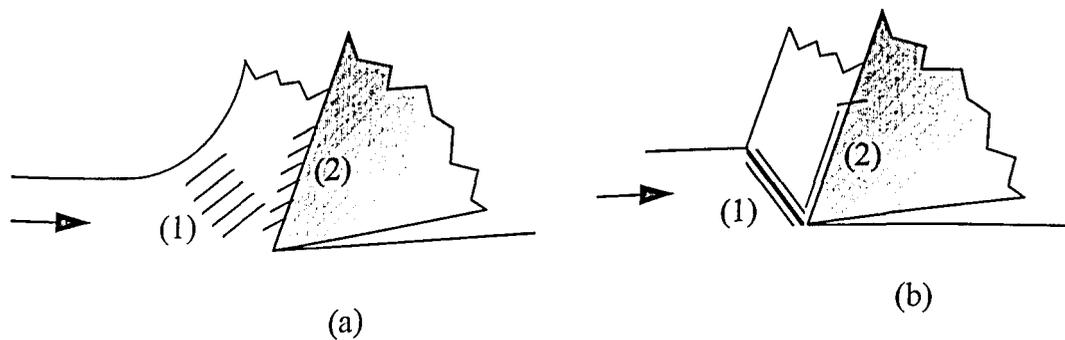
O primeiro tratamento analítico de temperaturas em ferramentas de corte foi apresentado por TRIGGER e CHAO (1951). A análise desenvolvida baseou-se no princípio da partição de Block para calcular a temperatura média da interface cavaco-ferramenta, admitindo-se que o calor desenvolvido nesta região é uniformemente distribuído.

O método descrito à seguir, desenvolvido originalmente por LOEWEN e SHAW (1954), baseou-se no trabalho de TRIGGER e CHAO (1951) e está descrito em detalhes em SHAW (1983).

O método tem como base as seguintes considerações (Figura 2.14):

- as duas principais fontes de energia térmica no processo de usinagem são a zona de cisalhamento primária (1) e a região de interface entre a ferramenta e o cavaco (2);
- toda energia consumida em (1) e (2) é convertida em calor;

- as energias geradas em (1) e (2) estão concentradas em superfícies planas;
- as energias geradas em (1) e (2) estão uniformemente distribuídas (i.e. o fluxo de calor ao longo destas superfícies é constante);
- não há troca de calor com o meio ambiente.



**Figura 2.14.** (a) Fontes de calor reais e (b) idealizadas no corte ortogonal.

Mesmo com estas considerações, o problema de estimação das temperaturas geradas no plano de cisalhamento primário e na região de interface entre a ferramenta e o cavaco, ainda é complexo. Isto se deve ao fato de que a energia gerada em (1) é distribuída de maneira desigual para o cavaco e para a peça, o mesmo acontecendo com a energia gerada em (2), porém, neste caso, a distribuição se dá em direção ao cavaco e à ferramenta. Portanto existem dois coeficientes a serem determinados:  $R_1$ , que é a fração de energia gerada em (1) que flui em direção ao cavaco e  $R_2$ , que é a fração de energia gerada em (2) que flui em direção ao cavaco.

O método de estimação dos coeficientes  $R_1$  e  $R_2$  foi desenvolvido por BLOCK (1938). Este avalia a temperatura média na interface através de dois pontos de vista:

(a) admitindo que todo o calor gerado flui para dentro de um membro estacionário;

(b) admitindo que todo o calor gerado flui para dentro de um membro extensivo.

Esta última hipótese envolve o método de solução para fontes de calor móveis de JAEGER (1942).

Quando a temperatura média calculada utilizando a admissão (a), usando um fluxo de calor igual a  $(1-R)q_{at}$  ( $q_{at}$  = unidade térmica total por unidade de área, por unidade de tempo) é igualada àquela calculada através de (b) usando um fluxo de calor  $Rq_{at}$ , uma equação com R como única incógnita é obtida, a qual pode ser resolvida para esta variável desconhecida.

Após o surgimento do tratamento analítico descrito acima, vários outros apareceram, inclusive alguns sendo aplicáveis ao corte tridimensional.

WEINER (1955), obteve a distribuição da temperatura no plano de cisalhamento primário, admitindo que a velocidade do cavaco era perpendicular a este plano e que a condução de calor nas direções do movimento da peça e do cavaco poderiam ser desprezadas.

DUTT e BREWER (1964), melhoraram a análise teórica do campo de temperatura na região do corte reduzindo o número de simplificações. As equações diferenciais pertinentes foram resolvidas por diferenças finitas. Outro fato inédito do trabalho é o tratamento generalizado das entidades do processo (cavaco, ferramenta e peça), que até então eram tratadas separadamente.

Um método numérico que vem sendo aplicado com bastante frequência para a obtenção dos campos de temperatura na usinagem é o método dos elementos finitos (MEF). Consiste da discretização do domínio (ferramenta, cavaco e peça) em sub-regiões denominadas elementos finitos que são interligados entre si nos pontos nodais localizados no contorno de cada sub-região. Para aproximar a solução em qualquer ponto do domínio são utilizadas funções, geralmente, polinomiais. O erro gerado por essa aproximação é geralmente minimizado pelo método de Galerkin (LIMA, 1996).

TAY et alli (1976), aplicaram o método dos elementos finitos para calcular a distribuição de temperatura gerada na peça, cavaco e ferramenta durante o corte ortogonal. A solução numérica levou em conta as geometrias reais do cavaco e da ferramenta, as distribuições de velocidade e fontes de calor dentro das zonas de cisalhamento primária e secundária, as variações nas propriedades térmicas dos materiais da ferramenta e da peça e as variações na tensão de escoamento do material da peça com a deformação, com a taxa de deformação e a temperatura.

CASTO et alli (1994), obtiveram a distribuição de temperatura no corte tridimensional em ferramentas cerâmicas através de uma análise por elementos finitos. Um programa

comercial capaz de levar em conta a dependência da temperatura sobre os coeficientes de condutividade térmica foi utilizado para a obtenção das isotérmicas em todo o volume da ferramenta.

O método dos elementos de contorno é um outra ferramenta matemática poderosa para obtenção dos campos de temperatura na usinagem dos metais. CHAN e CHANDRA (1991), obtiveram a distribuição do fluxo de calor separadamente na ferramenta de corte, cavaco e peça, durante o processo de usinagem em condições de regime permanente utilizando este método.

A análise das temperaturas desenvolvidas na região de corte também vêm sendo estudadas através da união de resultados experimentais com problemas inversos, isto é, a estimativa da distribuição de temperaturas nas áreas afetadas pelo calor, à partir de medições realizadas em pontos afastados da região de geração.

YEN e WRIGHT (1986), analisaram a distribuição da temperatura na interface cavaco-ferramenta utilizando medições de temperatura em pontos afastados aos pontos de geração de calor. A distribuição de temperatura foi descrita em coordenadas elipsoidais para insertos quadrados.

LIN et alli (1992), usaram a idéia de YEN e WRIGHT (1986) e, utilizando problemas inversos, estimaram a temperatura na interface cavaco-ferramenta em insertos de metal duro e de cerâmica.

LIMA (1996), analisou o problema térmico de estimativa da temperatura no processo de usinagem utilizando técnicas inversas. Numa primeira abordagem, o autor, através do uso de hipóteses simplificativas, analisou o problema uni e bidimensionalmente.

No capítulo seguinte serão apresentados os fundamentos teóricos dos problemas inversos em condução de calor, que conduzirão à obtenção do algoritmo que foi utilizado neste trabalho para a estimativa da temperatura na região de interface cavaco-ferramenta.

## CAPÍTULO 3

### PROBLEMAS INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR FUNDAMENTOS

#### 3.1. INTRODUÇÃO

Frequentemente são encontradas situações práticas em que se deseja obter a distribuição de temperatura em um corpo condutor de calor, desconhecendo-se as condições de contorno necessárias para a solução da equação de difusão que rege o fenômeno. Um exemplo citado por BECK et alli (1985), é o de uma sonda espacial reentrando na atmosfera terrestre, Figura 3.1.

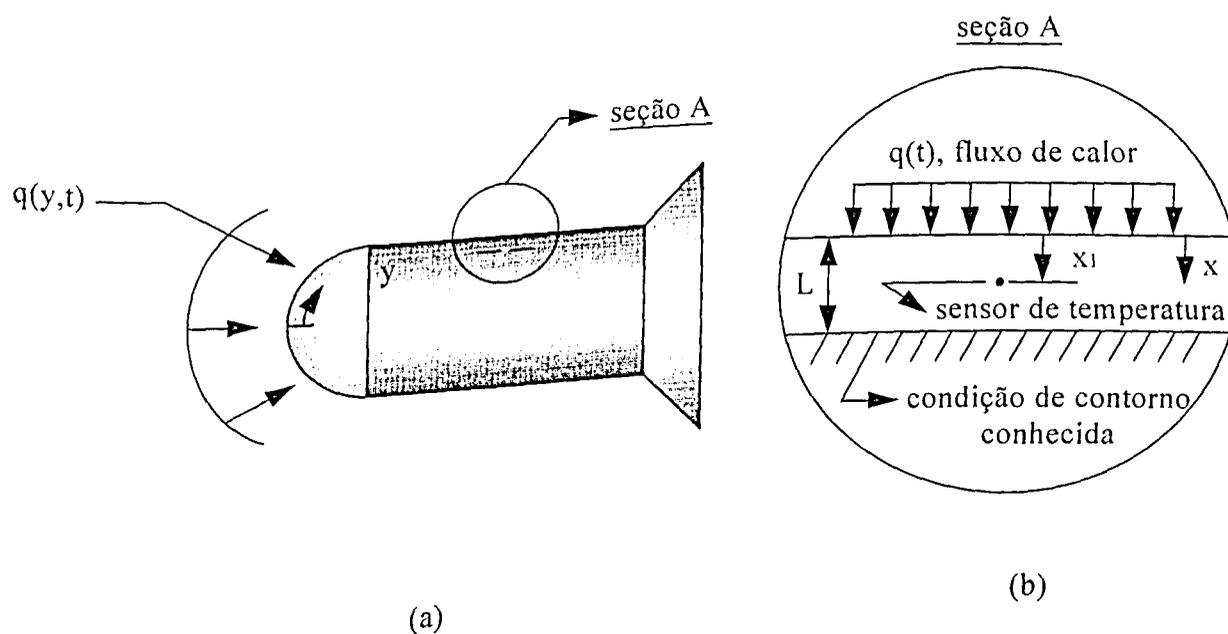


Figura. 3.1. Esquema de uma sonda espacial reentrando na atmosfera terrestre (BECK et alli, 1985).

Quando a sonda mergulha na camada de gases que circunda a Terra, inicia-se um processo de geração de calor devido ao atrito com as partículas gasosas. Isso faz com que a temperatura em sua superfície aumente. Deseja-se conhecer a evolução do fluxo de calor e da temperatura

na superfície da casca a partir de medições de temperatura realizadas em um ponto interno da sonda. Problemas deste tipo são frequentemente denominados PROBLEMAS INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR.

Uma vez obtida a evolução do fluxo de calor superficial através da técnica de problemas inversos, a determinação da distribuição de temperatura na superfície do corpo torna-se um problema direto, visto que os contornos são agora conhecidos.

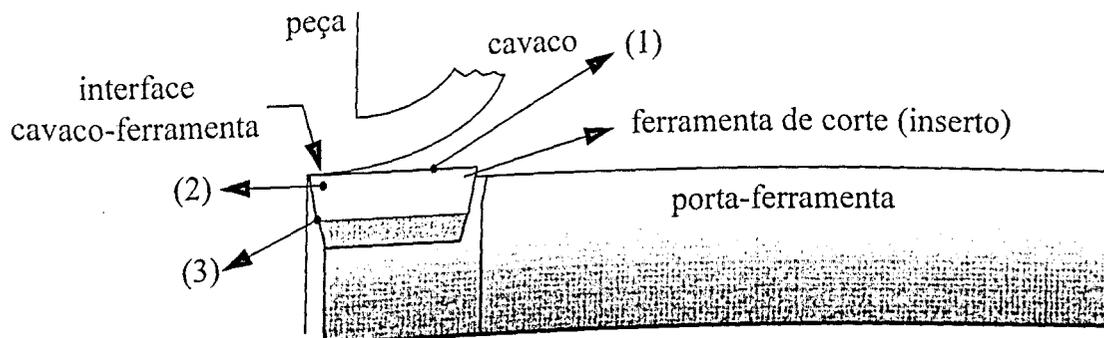
Segundo BECK et alli (1985), um dos primeiros artigos sobre problemas inversos em condução de calor foi publicado por STOLZ (1960). O trabalho trata do cálculo da taxa de transferência de calor durante o aquecimento de corpos de formas finitas simples. Porém, foi durante o programa espacial, iniciado em 1956, que houve um grande avanço no estudo da teoria de problemas inversos em condução de calor. As aplicações estiveram relacionadas com equipamentos tais como mísseis, sondas e foguetes.

Um dos principais trabalhos sobre o assunto é devido a BECK et alli (1985). Nele o problema inverso em condução de calor é definido como a estimação da história do fluxo de calor superficial a partir de histórias de temperaturas medidas em um ou mais pontos interiores a um corpo condutor de calor. O trabalho desenvolvido por Beck e seus colaboradores, permitiu a utilização de intervalos de tempo bem menores do que aqueles utilizados quando da aplicação do método de Stolz. Atualmente os algoritmos desenvolvidos a partir dessa técnica vêm sendo aplicados nas mais diversas áreas do conhecimento tais como, no estudo do aquecimento periódico em câmaras de combustão de motores de combustão interna, na solidificação do vidro, na calorimetria indireta para uso em laboratório, entre outros (BECK et alli, 1985).

Uma área que vem utilizando com frequência a técnica de problemas inversos é a Usinagem de Metais. Como mencionado no Capítulo 2, um dos fatores que mais contribuem para o aumento da taxa de desgaste da ferramentas de corte é o calor gerado durante o processo de usinagem. Nesse caso, o conhecimento das evoluções de fluxo de calor e temperatura na interface cavaco-ferramenta são extremamente importantes. A abordagem desse problema através do uso de técnicas de problemas inversos é, portanto, uma alternativa viável. Observa-se na Figura 3.2 que o problema térmico decorrente do processo de usinagem pode ser resolvido em parte, através da modelagem da ferramenta de corte. Nesse caso, a geração de calor na interface poderia ser tratada como uma fonte de calor imaterial, a ser

determinada através da medição de temperatura em pontos interiores ou na superfície oposta a essa geração.

Apresenta-se a seguir alguns fundamentos, bem como a obtenção do algoritmo de estimação do fluxo de calor em problemas de condução de calor unidimensional.



**Figura 3.2.** Possíveis pontos de medição de temperatura para aplicação em algoritmos de problemas inversos. (1) Superfície de saída; (2) Ponto interno à ferramenta, próximo à interface; (3) Superfície oposta à aresta de corte da ferramenta.

## 3.2. OBTENÇÃO DO ALGORITMO INVERSO DE ESTIMAÇÃO DO FLUXO DE CALOR - PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

### 3.2.1. ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA TÉRMICO

Considere-se, inicialmente, o problema inverso unidimensional apresentado pela Figura 3.1. O objetivo, nesse caso é a obtenção de  $q$  em função apenas do tempo. As medições de temperatura realizadas no ponto  $x_i$  são tomadas em intervalos de tempos discretos, ou seja,  $t_1, t_2, \dots$  ou, de uma maneira geral,  $t_i$ . O fluxo de calor estimado no tempo  $t_i$  correspondente à temperatura medida  $Y_i$  é denotado por  $\hat{q}_i$ .

Para se estimar a história do fluxo de calor superficial é necessário um modelo matemático que descreva o fenômeno físico do processo de transferência de calor. No caso em questão, considera-se a seção transversal da casca da sonda sendo uma placa plana sujeita a um fluxo de calor em sua superfície frontal  $q(t)$  e isolada na face oposta, Figura 3.1. Além

desta simplificação, é também considerado que a mesma é constituída de um único material, homogêneo e isotrópico.

O modelo matemático que descreve esse problema pode ser dado pela equação da difusão de calor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.1)$$

sujeita às condições de contorno,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left. -k \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t), \quad (3.3)$$

à medição de temperatura

$$T(x_i, t_i) = Y_i \quad (3.4)$$

e à condição inicial,

$$T(x, 0) = T_0(x). \quad (3.5)$$

Onde  $q(t_i)$  representa o fluxo de calor em tempos discretos,  $t_i$ , a serem determinados. Os valores dos parâmetros  $k$ ,  $\rho$  e  $c$  são considerados conhecidos e representam, respectivamente, a condutividade térmica, a densidade e o calor específico da placa. Observa-se que a condição de contorno em  $x = L$ , no caso um isolamento perfeito, é uma das hipóteses que podem ser consideradas. Pode-se ainda, dependendo das condições físicas existentes, considerar-se a superfície oposta à geração de calor, sujeita a uma troca térmica com um meio convectivo ou de radiação.

### 3.2.2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO EM CONDUÇÃO DE CALOR

A técnica usada para a solução de um problema inverso aqui apresentada, fundamenta-se no trabalho de BECK et alli (1985). Consiste basicamente da minimização de uma função erro,  $S$ , definida pela soma dos quadrados das diferenças entre temperaturas experimentais,  $Y_i$ , e temperaturas calculadas pelo modelo teórico,  $T_i$ , em relação ao fluxo de calor (LIMA, 1996), ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2 \quad (3.6)$$

Onde  $i$  é o índice de intervalos de tempos discretos e  $n$  é o número total de medições da temperatura. A minimização da função é feita derivando-se a mesma em relação ao fluxo de calor e igualando-se o resultado a zero, ou seja,

$$\frac{\partial S}{\partial q} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i) \frac{\partial T_i}{\partial q_i} = 0 \quad (3.7)$$

Simplificando,

$$0 = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i) \frac{\partial T_i}{\partial q_i} \quad (3.8)$$

O método desenvolvido por BECK et alli (1985) para obtenção do termo  $\partial T_i / \partial q_i$ , denominado coeficiente de sensibilidade, consiste em se derivar a equação da difusão de calor, as condições de contorno e a condição inicial do problema físico em estudo (Equações 3.1-3.5) em relação a  $q_i$ .

O problema dado pelas Equações (3.1-3.5) pode ser rescrito em sua forma discreta como,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.9)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} q_M = \text{const.}, t_{M-1} < t < t_M, \\ q(t), t > t_M \end{cases}, \quad (3.10)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (3.11)$$

$$\text{e } T(x, t_{M-1}) = T_{M-1}(x). \quad (3.12)$$

Onde  $T_{M-1}(x)$  denota a distribuição de temperatura no tempo  $t_{M-1}$ . O fluxo de calor,  $q(t)$ , para  $t > t_M$  é uma função arbitrária do tempo. As propriedades térmicas são consideradas constantes e o parâmetro de interesse é o fluxo de calor,  $q_M$ , que é constante no intervalo de tempo entre  $t_{M-1}$  e  $t_M$ , Figura 3.3.

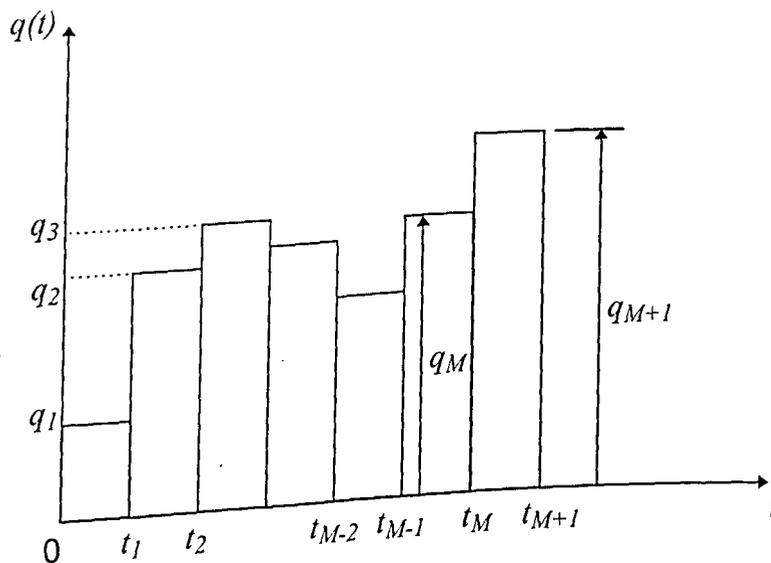


Figura 3.3. Componentes de fluxo de calor (BECK et alli, 1985).

Derivando-se agora as Equações (3.9-3.12) em relação a  $q_M$ , obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial X_M}{\partial x} \right] = \rho c \frac{\partial X_M}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$$-k \frac{\partial X_M}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 1, & t_{M-1} < t < t_M, \\ 0, & t > t_M \end{cases}, \quad (3.14)$$

$$\text{e } X_M(x, t_{M-1}) = 0. \quad (3.15)$$

onde  $X_M$  é o coeficiente de sensibilidade no instante  $M$ . Pode-se observar que, para problemas lineares, os coeficientes de sensibilidade podem ser determinados sem a necessidade do conhecimento do fluxo de calor superficial. Observa-se ainda que o modelo matemático relacionado com o coeficiente de sensibilidade anteriormente descrito é idêntico àquele do problema físico, isto significa que o mesmo algoritmo usado para calcular os coeficientes de sensibilidade poderá ser utilizado para calcular a distribuição de temperatura.

De uma forma geral os coeficientes de sensibilidade para os problemas inversos em condução de calor podem ser dados pela seguinte equação:

$$X_{jM}(x_j, t_i) \equiv \frac{\partial T(x_j, t_i)}{\partial q_M}, \quad (3.16)$$

onde  $X_{jM}(x_j, t_i)$  é o coeficiente de sensibilidade calculado para a localização do sensor  $x_j$  e tempo  $t_i$ , em relação ao fluxo de calor  $q_M$ ;  $j=1, \dots, J$ , é o número de sensores de temperatura;  $i=1, \dots, N$ , são os instantes de medição e  $M=1, 2, \dots, N$ , é o número de componentes de fluxo de calor.

Para um único sensor de temperatura, a Equação (3.16) é simplificada por

$$X_M(t_i) \equiv \frac{\partial T(t_i)}{\partial q_M}. \quad (3.17)$$

O coeficiente de sensibilidade é uma variável extremamente importante no estudo de problemas inversos em condução de calor. Através de sua análise pode-se obter informações importantes à respeito de possíveis regiões de dificuldade na estimação.

Observando-se, nesse ponto, a necessidade de uma expressão que forneça o campo de temperatura em função do fluxo de calor a ser estimado, a alternativa usada nesse procedimento é o uso do teorema de Duhamel. Assim, uma vez que a obtenção dos algoritmos de problemas inversos em condução de calor aqui apresentados baseia-se nesse teorema, ele será apresentado à seguir.

O teorema de Duhamel é um técnica de resolução de problemas diretos em condução de calor que emprega uma solução por blocos (isto é, a função contínua no tempo e espaço é aproximada por uma série de pulsos sobre pequenos intervalos de tempo e posição) e também o princípio da superposição, para obter a temperatura em qualquer ponto  $r$  e tempo  $t$  (BECK et alli, 1985). Na Figura 3.4 pode-se observar a representação de  $q(t)$  por  $M$  passos de fluxo de calor. O teorema de Duhamel pode ser expresso pela seguinte equação:

$$T(r, t) = T_0 + \int_0^t q(\lambda) \frac{\partial \phi(r, t - \lambda)}{\partial t} d\lambda. \quad (3.18)$$

Onde  $\phi$  é a temperatura em qualquer instante,  $t$ , e posição,  $r$ , em um corpo condutor sujeito a um fluxo de calor superficial do tipo,

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

A condição mostrada na expressão (3.19) é algumas vezes denominada de *fluxo de calor de passo unitário* ou mesmo *fluxo de calor constante unitário*.

No teorema de Duhamel consideram-se as propriedades térmicas do corpo independentes da temperatura, podendo as mesmas variar com a posição. A distribuição de temperatura não necessita ser unidimensional.

A aproximação numérica apresentada por BECK et alli (1985) para a Equação (3.18) é dada pela seguinte expressão:

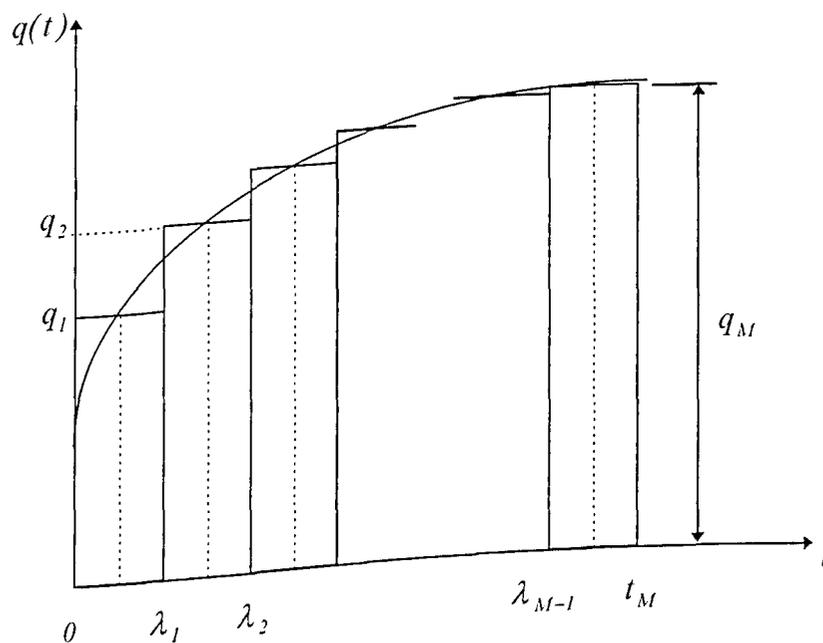
$$T(\mathbf{r}, t_M) = T_0 + \sum_{n=1}^M q_n \Delta\phi(\mathbf{r}, t_{M-n}) \quad (3.20)$$

Onde  $M$  é o instante de cálculo atual e  $n=1, 2, \dots, M$ .

Para o caso de um problema unidimensional, a Equação (3.20) pode ser simplificada como segue:

$$T_M = T_0 + \sum_{n=1}^M q_n \Delta\phi_{M-n}, \quad \Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i. \quad (3.21)$$

Onde  $q_n$  é o valor estimado no tempo  $(n - \frac{1}{2})\Delta t$  como indicado pela Figura 3.4.



**Figura 3.4.** Representação aproximada de  $q(t)$  por  $M$  passos no fluxo de calor (BECK et alli, 1985).

Frequentemente torna-se vantajoso a utilização do Teorema de Duhamel na forma matricial. Uma expansão da Equação (3.21) com  $M$  variando de 1 até  $M-1+r$ , onde  $r$  é o número de componentes futuras de fluxo de calor (explicado mais adiante), pode ser exposta da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned}
T_1 &= T_0 + q_1 \Delta \phi_0 \\
T_2 &= T_0 + q_1 \Delta \phi_1 + q_2 \Delta \phi_0 \\
T_3 &= T_0 + q_1 \Delta \phi_2 + q_2 \Delta \phi_1 + q_3 \Delta \phi_0 \\
&\vdots \\
T_M &= T_0 + q_1 \Delta \phi_{M-1} + q_2 \Delta \phi_{M-2} + \dots + q_{M-1} \Delta \phi_1 + q_M \Delta \phi_0 \\
T_{M+1} &= T_0 + q_1 \Delta \phi_M + q_2 \Delta \phi_{M-1} + \dots + q_M \Delta \phi_1 + q_{M+1} \Delta \phi_0 \\
&\vdots \\
T_{M+r-1} &= T_0 + q_1 \Delta \phi_{M+r-2} + \dots + q_{M+r-2} \Delta \phi_1 + q_{M+r-1} \Delta \phi_0
\end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Ou em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_M \\ T_{M+1} \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \phi_0 & & & & & & \\ \Delta \phi_1 & \Delta \phi_0 & & & & & \\ \Delta \phi_2 & \Delta \phi_1 & \Delta \phi_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \Delta \phi_{M-1} & \Delta \phi_{M-2} & \Delta \phi_{M-3} & \dots & \Delta \phi_0 & & \\ \Delta \phi_M & \Delta \phi_{M-1} & \Delta \phi_{M-2} & \dots & \Delta \phi_1 & \Delta \phi_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \Delta \phi_{M+r-2} & \Delta \phi_{M+r-3} & \Delta \phi_{M+r-4} & \dots & \Delta \phi_{r-1} & \Delta \phi_{r-2} & \dots & \Delta \phi_0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_M \\ q_{M+1} \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix} + T_0 \mathbf{1}$$

onde  $\mathbf{1}$  é o vetor unitário. Colocando a Equação (3.23) numa forma mais compacta,

$$T = X_q + T_0 \mathbf{1}. \quad (3.24)$$

onde  $T$  refere-se às temperaturas calculadas,  $q$  representa as componentes de fluxo de calor,  $X$  é a matriz triangular inferior representativa dos coeficientes de sensibilidade e  $T_0$  é a temperatura inicial.

Nos métodos sequenciais de investigação de um problema inverso em condução de calor, as componentes de fluxo  $q_1, q_2, \dots, q_{M-1}$ , são consideradas conhecidas previamente e denotadas por  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{M-1}$  e deseja-se estimar as componentes  $q_M, q_{M+1}, \dots, q_{M+r-1}$ . Além disso, pode ser que exista alguma condição conhecida tal como um fluxo de calor, ou uma condição convectiva em  $x = L$ , ou ainda um aquecimento volumétrico interno. Por isso é apropriado expressar a Equação (3.24) da seguinte forma:

$$T = Xq + \hat{T}|_{q=0}. \quad (3.25)$$

Onde,

$$T = \begin{bmatrix} T_M \\ T_{M+1} \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_M \\ q_{M+1} \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix}, \quad (3.26a,b)$$

$$X = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \Delta\phi_{r-1} & \Delta\phi_{r-2} & \cdots & \Delta\phi_0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$e \hat{T}|_{q=0} = \begin{bmatrix} \hat{T}_M|_{q_M=0} \\ \hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0} \\ \vdots \\ \hat{T}_{M+r-1}|_{q_M=q_{M+1}=\dots=q_{M+r-1}=0} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

O termo  $\hat{T}\Big|_{q=0}$  é o vetor das temperatura calculadas no tempos  $t_M, t_{M+1}, \dots, t_{M+r-1}$  em função das componentes de fluxo de calor previamente estimadas. Desta forma, no instante  $M$ , a Equação (3.28) fica,

$$\hat{T}_M\Big|_{q_M=0} = \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i} + T_0. \quad (3.29)$$

Pode-se observar que a condição estabelecida pela Equação (3.19) para a temperatura  $\phi(r,t)$  é exatamente igual àquela necessária para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade. Portanto, a obtenção das temperaturas  $\phi$ 's pode ser alcançada pelo cálculo dos coeficientes de sensibilidade como foi mostrado pelo exemplo da Figura 3.1.

Existem diversos procedimentos para a estimação do fluxo de calor superficial que utilizam as técnicas de problemas inversos em condução de calor. As técnicas que serão descritas à seguir para o caso unidimensional estão descritas em BECK et alli (1985).

### 3.2.2.1. ALGORITMO DE STOLZ

O método de Stolz consiste em se estimar o fluxo de calor superficial como uma função do tempo, utilizando medições discretas de temperatura adquiridas por um único sensor. As temperaturas calculadas são feitas iguais aos valores medidos. Esta técnica pode ser obtida pelo uso do teorema de Duhamel. A temperatura desenvolvida no local do sensor e no instante de tempo  $t_M$  pode ser dada pela Equação (3.25), ou seja:

$$T_M = \hat{T}_M\Big|_{q_M=0} + \Delta\phi_0 q_M, \quad (3.30)$$

onde  $T_M$  é a temperatura calculada pela aproximação de Duhamel,  $\hat{T}_M\Big|_{q_M=0}$  é o termo dado pela Equação (3.29) e  $\Delta\phi_0$  é o coeficiente de sensibilidade calculado no instante  $t = 0s$ . Fazendo-se a temperatura calculada,  $T_M$ , igual a temperatura medida,  $Y_M$ , tem-se:

$$Y_M = \hat{T}_M \Big|_{q_M=0} + \Delta\phi_0 \hat{q}_M. \quad (3.31)$$

Reordenando para o fluxo de calor estimado,  $\hat{q}_M$ , obtém-se:

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \hat{T}_M \Big|_{q_M=0}}{\phi_1}, \quad (3.32)$$

pois  $\Delta\phi_0 = \phi_1 - \phi_0 = \phi_1$ .

Substituindo a Equação (3.29) na Equação (3.32), obtém-se o algoritmo de Stolz, ou seja,

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i} - T_0}{\phi_1}. \quad (3.33)$$

Pode-se observar a natureza sequencial do algoritmo de Stolz (Equação 3.33), pelo fato de que a estimativa de  $\hat{q}_M$  depende de  $Y_M$  e dos  $\hat{q}_i$ 's ( $\hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{M-1}$ ) anteriores e  $M$  sendo sequencialmente aumentado de uma unidade a cada intervalo de tempo.

Uma outra importante observação no algoritmo de Stolz é a sua natureza linear. Considere-se, por exemplo, os três primeiros termos da Equação (3.33) representados abaixo:

$$\hat{q}_1 = \frac{Y_1 - T_0}{\phi_1}, \quad (3.34)$$

$$\hat{q}_2 = \frac{Y_2 - \hat{q}_1 \Delta\phi_1 - T_0}{\phi_1} \text{ e} \quad (3.35)$$

$$\hat{q}_3 = \frac{Y_3 - \hat{q}_1 \Delta\phi_2 - \hat{q}_2 \Delta\phi_1 - T_0}{\phi_1}. \quad (3.36)$$

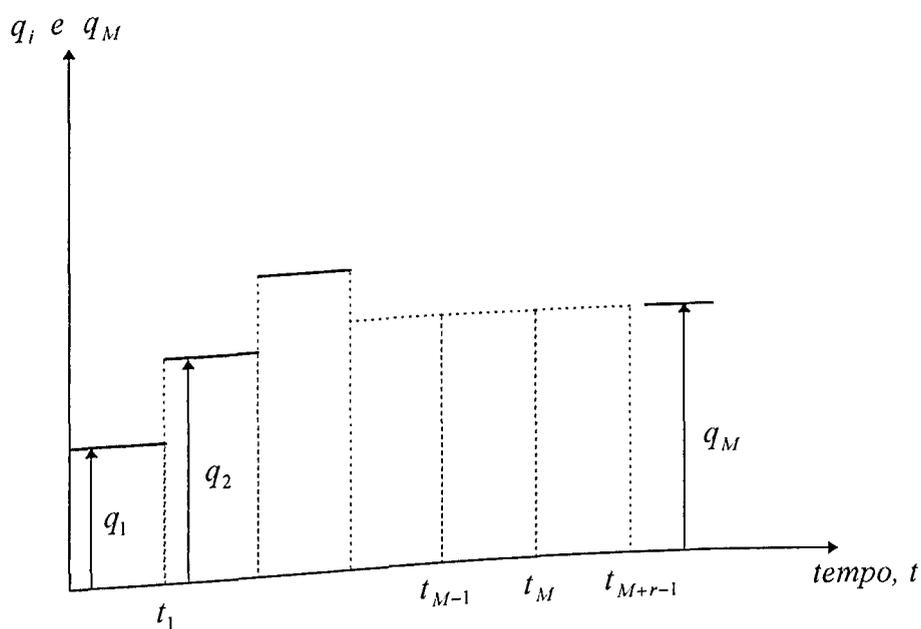
Pode-se observar que as Equações (3.34), (3.35) e (3.36) são funções lineares de  $Y_1$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$  e  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $Y_3$  respectivamente.

### 3.2.2.2. MÉTODO DA FUNÇÃO ESPECIFICADA

O método da função especificada consiste da execução dos seguintes procedimentos (BECK et alli, 1985):

- 1) É admitida uma forma funcional para  $q(t)$  para tempos maiores que  $t_{M-1}$ , ou seja,  $t_M, t_{M+1}, \dots, t_{M+r-1}$  (o fluxo de calor para  $t < t_{M-1}$  é considerado conhecido);
- 2) Um somatório de funções quadráticas, compostas do quadrado da diferença entre temperaturas medidas e correspondentes temperaturas calculadas, é usado nestes tempos;
- 3) As componentes de fluxo de calor são estimadas para a forma funcional assumida;
- 4) Somente a primeira componente de fluxo de calor,  $q_M$ , é retida;
- 5) Incrementa-se  $M$  da unidade e repete-se o procedimento.

As formas funcionais admitidas para os tempos,  $t_M, t_{M+1}, \dots, t_{M+r-1}$ , podem ser constantes, parabólicas, exponenciais ou cúbicas. O procedimento sequencial mais simples é aquele que admite temporariamente que diversos fluxos de calor futuros são constantes com o tempo, Figura 3.5.



**Figura 3.5.** Forma funcional com fluxo de calor constante para o procedimento sequencial (BECK et alli, 1985).

Desta forma as componentes de fluxo de calor estimadas,  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{M-1}$  são admitidas conhecidas e o objetivo é estimar  $q_M$ . Para estabilizar os algoritmos de problemas inversos em condução de calor, as componentes de fluxo de calor,  $q_M, q_{M+1}, \dots, q_{M+r-1}$ , são admitidas iguais, ou seja:

$$(3.37)$$

$$q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_{M+r-1} = q_M,$$

onde  $r$  é o número de componentes futuras do fluxo de calor.

Utilizando-se a hipótese dada pela Equação (3.37), faz-se necessário a obtenção de modelos matemáticos para  $T_M, T_{M+1}, \dots, T_{M+r-1}$ , que podem ser obtidas através da Equação (3.25), onde suas componentes são dadas pelas Equações (3.26-3.28). Nesse sentido, admitindo-se uma forma funcional constante do fluxo de calor, tem-se

$$\left. \begin{aligned} T_M &= \hat{T}_M \Big|_{q_M=0} + \phi_1 q_M \\ T_{M+1} &= \hat{T}_M \Big|_{q_M=q_{M+1}=0} + \phi_2 q_M \\ &\vdots \\ T_{M+r-1} &= \hat{T}_M \Big|_{q_M=\dots=q_{M+r-1}=0} + \phi_r q_M \end{aligned} \right\} \quad (3.38a,b,c)$$

Sendo que,

$$\phi_j = \sum_{i=0}^{j-1} \Delta \phi_i. \quad (3.39)$$

A obtenção de  $q_M$  consiste da minimização da função erro definida por,

$$S = \sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - T_{M+i-1})^2. \quad (3.40)$$

Substituindo-se a Equação (3.38c) na Equação (3.40) obtém-se,

$$S = \sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q=0} - \phi_i q_M)^2. \quad (3.41)$$

Minimizando,

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = -2 \sum_{i=1}^r \phi_i \left( Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q_{M+i-1}} - \phi_i q_M \right) = 0, \quad (3.42)$$

ou então,

$$0 = \sum_{i=1}^r \phi_i \left( Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q_{M+i-1}} - \phi_i q_M \right), \quad (3.43)$$

ou ainda,

$$0 = \sum_{i=1}^r \phi_i \left( Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q_{M+i-1}} \right) - \sum_{i=1}^r \phi_i \phi_i q_M. \quad (3.44)$$

Substituindo  $q_M$  pelo valor estimado  $\hat{q}_M$  e isolando-se esta variável na Equação (3.44), obtém-se,

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^r \left( Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q_M = \dots = 0} \right) \phi_i}{\sum_{i=1}^r \phi_i^2}. \quad (3.45)$$

Definindo o coeficiente de ganho como,

$$K_i = \frac{\phi_i}{\sum_{j=1}^r \phi_j^2}, \quad (3.46)$$

a Equação (3.45) fica,

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^r K_i \left( Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \Big|_{q_M = \dots = 0} \right). \quad (3.47)$$

O algoritmo acima pode ser usado para a estimação do fluxo de calor superficial de maneira sequencial, a partir da história de temperaturas medida por um único sensor num ponto afastado da interface de geração.

No capítulo seguinte será apresentado o método proposto neste trabalho para a estimação da temperatura de interface cavaco-ferramenta.

## CAPÍTULO 4

### *O MÉTODO PROPOSTO*

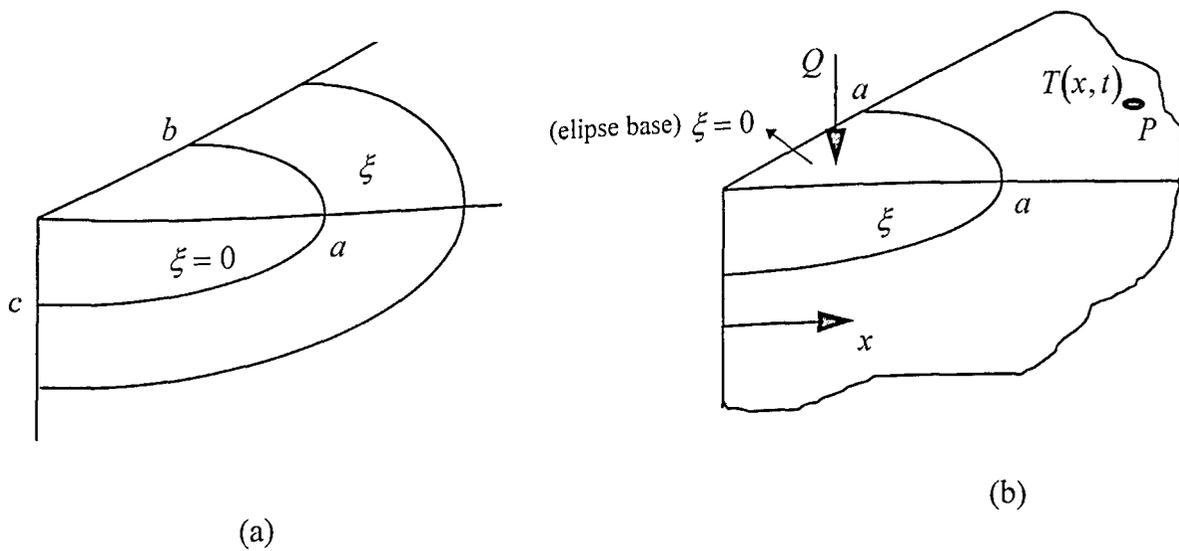
#### 4.1. INTRODUÇÃO

A metodologia apresentada neste trabalho, visa a determinação da temperatura de interface cavaco-ferramenta em insertos quadrados sem furo, durante o torneamento tridimensional à seco, utilizando técnicas de problemas inversos em condução de calor.

O método proposto baseia-se em LIN et alli (1992), no uso de técnicas em diferenças finitas e no método da função especificada desenvolvido por BECK et alli (1985).

#### 4.2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA ESTUDADO

Como foi descrito no Capítulo 3, para a estimação do fluxo de calor superficial a partir da história de temperatura medida em um ponto afastado, é necessário que se tenha um modelo matemático do problema físico em questão. Este modelo pode se apresentar nos mais diversos sistemas de coordenadas existentes. No caso de um inserto quadrado durante o corte tridimensional, se for considerado um modelo matemático no sistema cartesiano de coordenadas, é necessário a avaliação das três componentes do fluxo de calor, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , o que torna o problema muito complexo. YEN e WRIGHT (1986), sugeriram que as isotérmicas geradas nos insertos quadrados durante o processo de torneamento, fossem representadas por uma família de elipsóides confocais, Figura 4.1a. Tal consideração permitiu que o modelo matemático do processo de transferência de calor no corpo das ferramentas de corte, fosse tratado em termos de coordenadas elipsoidais (Ver Apêndice A), tendo como único parâmetro espacial a variável  $\xi$ , coordenada espacial que representa uma família de elipsóides confocais. Desta forma, o problema físico de difusão de calor tridimensional pôde ser tratado matematicamente como um problema unidimensional.



**Figura 4.1.** (a) Modelo de mapeamento elipsoidal da distribuição de temperatura num inserto quadrado (YEN e WRIGHT, 1986); (b) Modelo elipsoidal unidimensional usado na estimação inversa da temperatura de interface cavaco-ferramenta (LIN et alli, 1992).

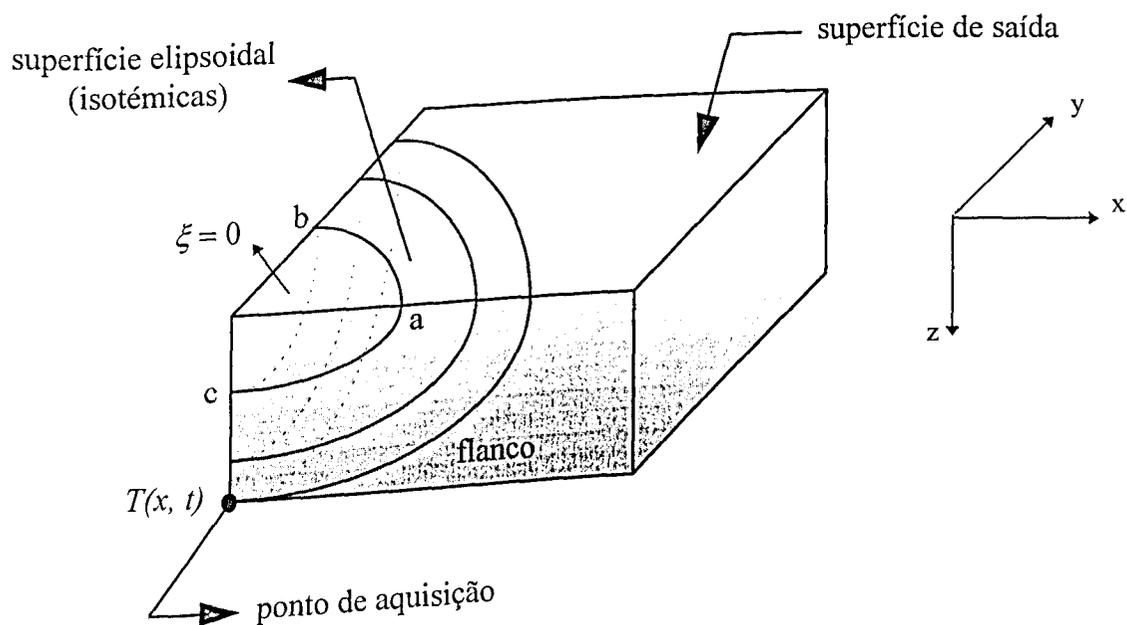
YEN e WRIGHT (1986) e LIN et alli (1992), propuseram que os semi-eixos da elipse base (Figura 4.1b), especificados quando  $a = b$  e  $c = 0$ , são aceitáveis para obtenção da distribuição de temperatura em insertos quadrados. Com base neste modelo, as seguintes hipóteses foram feitas:

1. A ferramenta é rígida e seu desgaste é desprezado;
2. As propriedades termofísicas do material da ferramenta,  $k$ ,  $\rho$  e  $c$ , são consideradas constantes;
3. O comprimento de contato da interface cavaco-ferramenta é constante e igual aos semi-eixos da elipse base, consequentemente a área de contato sobre a superfície de saída é igual a um quarto de círculo.

Desta forma, a temperatura de interface cavaco-ferramenta foi estimada de acordo com o esquema mostrado na Figura 4.1b. A história de temperatura num ponto localizado na superfície de saída (ponto  $P$  na Figura 4.1b) da ferramenta de corte, foi adquirida através de um detector de radiação infra-vermelha ("infrared"). Os valores medidos foram utilizados no algoritmo sequencial de problemas inversos (Equação 3.47) para a estimação do fluxo de calor

na superfície correspondente a  $\xi = 0$ . O método utilizado para a resolução da equação diferencial do problema físico (obtenção dos coeficientes de sensibilidade e das temperaturas estimadas) foi o método dos elementos finitos.

A técnica proposta neste trabalho baseia-se em LIN et alli (1992). As mudanças existentes dizem respeito à localização do sensor de temperatura, que neste caso foi fixado na aresta inferior oposta à aresta de corte, Figura 4.2, ponto  $T(x, t)$ , e ao método de resolução da equação diferencial relativa ao modelo matemático do problema físico, onde utilizou-se o método das diferenças finitas.



**Figura 4.2.** Técnica proposta: localização do sensor de temperatura (termopar) na aresta oposta à aresta de corte da ferramenta (entre o inserto e a base do porta-ferramentas).

### 4.3. APRESENTAÇÃO E SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA FÍSICO ESTUDADO

O modelo matemático para o problema físico em questão, segundo LIN et alli (1992), pode ser dado pela equação da difusão de calor em coordenadas elipsoidais, ou seja,

$$\frac{4}{\xi^2} R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ k R_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Considerando  $k$  constante a Equação (4.1) fica,

$$\frac{4}{\xi^2} R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ R_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4.2)$$

sujeita às condições de contorno

$$-k \frac{2R_\xi}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow 0} = q(t), \quad (4.3a)$$

$$T \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = T_0 \quad (4.3b)$$

e à condição inicial

$$T(\xi, 0) = T_0. \quad (4.4)$$

Onde,

$k$  é a condutividade térmica do material da ferramenta de corte,

$\rho$  é a massa específica do material da ferramenta de corte,

$c$  é o calor específico do material da ferramenta de corte,

$T_0$  é a temperatura quando  $\xi \rightarrow \infty$ , igual à temperatura inicial (temperatura ambiente),

$q$  é o fluxo de calor quando  $\xi \rightarrow 0$  e

$$R_\xi = \sqrt{\xi(a^2 + \xi)(a^2 + \xi)}. \quad (4.5)$$

Observa-se através das Equações (4.2-4.4), que aparecerá um ponto singular no cálculo quando  $\xi = 0$ . Para evitar este tipo de problema, a seguinte transformação é proposta,

$$\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{\xi}}{a}\right) \Rightarrow \xi = (a \cdot \operatorname{tg}\theta)^2. \quad (4.6)$$

Derivando-se  $\theta$  em relação a  $\xi$  na Equação (4.6), tem-se,

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{\xi}}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\xi}} = \frac{a}{2R_\xi}. \quad (4.7)$$

O termo  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)$  da Equação (4.2), pode ser expresso em termos da variável  $\theta$  da seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( R_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi}. \quad (4.8)$$

Substituindo-se o resultado obtido em (4.7) na expressão (4.8), obtém-se,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( R_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = \frac{a}{2R_\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( R_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right). \quad (4.9)$$

Com o resultado obtido em (4.9) a Equação (4.2) pode ser expressa da seguinte maneira,

$$\frac{4}{\xi^2} R_\xi \frac{a}{2R_\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( R_\xi \frac{a}{2R_\xi} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.10)$$

Simplificando a Equação (4.10), obtém-se,

$$\frac{a^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \quad (4.11)$$

Substituindo (4.6) em (4.11), tem-se,

$$\frac{a^2}{a^4 \operatorname{tg}^4 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \quad (4.12)$$

Simplificando,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^4 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{a^2}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \quad (4.13)$$

A Equação (4.13) é a forma da Equação (4.2) em termos da variável  $\theta$ .

Sabe-se que a relação entre as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  com a elipsoidal  $\xi$  é dada pela equação  $x = \sqrt{a^2 + \xi}$ , e que a relação entre a coordenada  $z$  e a  $\xi$  é expressa por  $z = \sqrt{\xi}$  (Ver Apêndice A). No infinito, como  $a = cte$  (foco da família de elipsóides),  $x = z = y$ , o que torna o elipsóide nesta região uma esfera. Portanto a área de um quarto deste elemento no infinito pode ser dada por  $\frac{\pi}{2} r_e^2$ , onde  $r_e$  é o raio da esfera que neste caso é igual a  $x = y = z = \sqrt{\xi}$ . Desta forma, a área de um quarto do elipsóide na região infinita é expressa por  $\frac{\pi}{2} \xi$ . Como considera-se que não existem perdas de energia pelas paredes do corpo da ferramenta de corte, isto é, toda energia que entra na elipse base é dissipada na superfície elipsoidal localizada no infinito, a energia total entrando no contorno correspondente a  $\xi = 0$  pode ser dada pela seguinte expressão,

$$Q = \frac{q \pi \xi}{2} \quad (4.14)$$

Portanto a Equação do contorno  $\xi \rightarrow 0$  pode ser expressa como,

$$-k \frac{2R_\xi}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} = q = \frac{2Q}{\pi \xi}. \quad (4.15)$$

Simplificando,

$$-kR_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{Q}{\pi}. \quad (4.16)$$

Ajustando a equação (4.16) em termos de  $\theta$ , obtém-se,

$$\left(-kR_\xi\right) \left(\frac{a}{2} \frac{1}{R_\xi} \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = \frac{Q}{\pi}. \quad (4.17)$$

Ou ainda,

$$-ka \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{2}{\pi} Q. \quad (4.18)$$

Portanto, o equacionamento utilizado para modelar a distribuição de temperatura na ferramenta de corte em termos da nova coordenada  $\theta$  fica como segue,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^4 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{a^2}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (4.19)$$

sujeito às condições de contorno

$$-ka \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{2}{\pi} Q, \quad (4.20a)$$

$$T \Big|_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} = T_0 \quad (4.20b)$$

e à condição inicial

$$T(\theta, 0) = T_0. \quad (4.21)$$

Discretizando a Equação (4.19) em diferenças finitas implícitas tem-se,

$$\frac{1}{tg^4 \theta_p} \frac{(T_{p+1}^{i+1} + T_{p-1}^{i+1} - 2T_p^{i+1})}{(\Delta\theta)^2} = \frac{\alpha^2 (T_p^{i+1} - T_p^i)}{\alpha \Delta t}, \quad (4.22)$$

onde  $p$  representa o índice correspondente a um ponto nodal da malha discretizada e  $i$  corresponde ao índice temporal ( $t = i\Delta t$ ).

Reordenando a Equação (4.22), tem-se,

$$\frac{\alpha \Delta t}{tg^4 \theta_p (\Delta\theta)^2 \alpha^2} (T_{p+1}^{i+1} + T_{p-1}^{i+1} - 2T_p^{i+1}) = T_p^{i+1} - T_p^i. \quad (4.23)$$

Fazendo  $\frac{\alpha \Delta t}{tg^4 \theta_p (\Delta\theta)^2 \alpha^2} = Z_p$  em (4.23) e ordenando novamente, obtém-se,

$$-T_{p-1}^{i+1} + (2 + 1/Z_p)T_p^{i+1} - T_{p+1}^{i+1} = (1/Z_p)T_p^i. \quad (4.24)$$

Discretizando agora o contorno correspondente a  $\theta = 0$ , a Equação (4.20a) fica como segue,

$$-ka \left. \frac{(T_2^{i+1} - T_0^{i+1})}{2 \cdot \Delta\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{2}{\pi} Q. \quad (4.25)$$

Portanto o modelo discretizado pode ser representado da seguinte forma,

$$-T_{p-1}^{i+1} + (2 + 1/Z_p)T_p^{i+1} - T_{p+1}^{i+1} = (1/Z_p)T_p^i, \quad (4.26)$$

sujeito às condições de contorno,

$$-ka \left. \frac{(T_2^{i+1} - T_0^{i+1})}{2 \cdot \Delta\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{2}{\pi} Q, \quad (4.27)$$

$$T \Big|_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} = T_0 \quad (4.28)$$

e à condição inicial

$$T(\theta, 0) = T_0. \quad (4.29)$$

Analisando a Equação (4.25), a seguinte transformação pode ser realizada,

$$\frac{ka\pi}{4\Delta\theta Q} (T_0^{i+1} - T_2^{i+1}) = 1. \quad (4.30)$$

E ainda fazendo  $\frac{ka\pi}{4\Delta\theta Q} = W$  na Equação (4.30), tem-se,

$$W(T_0^{i+1} - T_2^{i+1}) = 1, \quad (4.31)$$

ou seja,

$$T_0^{i+1} = \frac{1}{W} + T_2^{i+1}. \quad (4.32)$$

Fazendo  $p = 1$  em (4.26), tem-se,

$$-T_0^{i+1} + (2 + 1/Z_1)T_1^{i+1} - T_2^{i+1} = (1/Z_1)T_1^i. \quad (4.33)$$

Substituindo (4.32) em (4.33) obtém-se a seguinte expressão,

$$-\left[\frac{1}{W} + T_2^{i+1}\right] + (2 + 1/Z_1)T_1 - T_2 = (1/Z_1)T_1^i, \quad (4.34)$$

onde,

$$Z_1 = \frac{\alpha \Delta t}{\text{tg}^4 \theta_1 (\Delta \theta)^2 a^2}. \quad (4.35)$$

Como  $\theta_1 = 0$ ,  $Z_1 \rightarrow \infty$ . Portanto,

$$-\left[\frac{1}{W} + T_2^{i+1}\right] + (2 + 0)T_1^{i+1} - T_2^{i+1} = 0 \cdot T_1^i. \quad (4.36)$$

Simplificando,

$$T_1^{i+1} - T_2^{i+1} = \frac{1}{2 \cdot W}, \quad (4.37)$$

que é a equação em diferenças finitas para o nodo correspondente a  $\theta = 0$  (ou seja,  $\xi = 0$ ).

A primeira etapa do processo de estimação na temperatura superficial através de técnicas de problemas inversos em condução de calor, consiste da obtenção dos coeficientes de sensibilidade no ponto onde as temperaturas experimentais foram adquiridas. Como foi dito no Capítulo 3, o coeficiente de sensibilidade é definido como a primeira derivada da temperatura em relação ao fluxo de calor. Se for aplicada esta definição no modelo matemático do problema físico em estudo, obtém-se um outro modelo análogo, do ponto de vista de resolução, ao problema original e que pode ser resolvido para obtenção dos coeficientes de sensibilidade.

No estudo realizado definiu-se o coeficiente de sensibilidade como a primeira derivada da temperatura em relação a taxa de transferência de calor  $Q$ . Aplicando esta definição no modelo matemático discretizado obtém-se a seguinte equação,

$$-X_{p-1}^{i+1} + \left(2 + 1/Z_p\right) \cdot X_p^{i+1} - X_{p+1}^{i+1} = \left(1/Z_p\right) \cdot X_p^i, \quad (4.38)$$

sujeita às condições de contorno

$$-k.a. \frac{(X_2^{i+1} - X_0^{i+1})}{2.\Delta\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{2}{\pi}, \quad (4.39)$$

$$T \Big|_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} = 0 \quad (4.40)$$

e à condição inicial

$$T(\theta, 0) = 0. \quad (4.41)$$

Onde  $X$  é o coeficiente de sensibilidade.

Apresenta-se à seguir o procedimento usado para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade na região de medição das temperaturas.

A relação existente entre a coordenada espacial cartesiana  $z$  e a coordenada elipsoidal  $\xi$  é dada por,  $z = \sqrt{\xi}$  (Ver Apêndice A) e a relação entre esta variável e  $\theta$  é dada por  $\xi = (a.tg\theta)^2$ . Portanto  $z = a.tg\theta$  ou  $\theta = tg^{-1}(z/a)$ . Se for considerado um valor de  $z$  igual à espessura do inserto utilizado no processo de corte, pode-se calcular facilmente o valor do  $\theta_m$  que corresponde ao ponto de medição das temperaturas experimentais. Com o valor de  $\theta_m$  obtido, e a definição do número de pontos da malha, o valor do  $\Delta\theta$  é dado por

$$\Delta\theta = \frac{\theta_m}{np - 1}. \quad (4.42)$$

Onde  $np$  é o número total de pontos da malha.

Observa-se que esse procedimento garante a localização exata para o valor de  $\theta_m$ . Entretanto, nem todo o domínio discretizado foi coberto.

Portanto o novo tamanho de  $np$  para todo o domínio é dado por,

$$np = \frac{\pi}{2 \cdot \Delta\theta} + 1 \dots \quad (4.43)$$

Uma vez que o novo valor calculado para  $np$  pode não ser um valor inteiro, torna-se necessário um tratamento especial diferenciado para os três últimos pontos da malha. Aplica-se, nesse caso, a fórmula de interpolação de Lagrange para os três últimos pontos, Figura (4.3), o que conduz à obtenção da Equação (4.44).

$$T = \frac{(\theta - \theta_{np-1})(\theta - \theta_{np})}{(\theta_{np-2} - \theta_{np-1})(\theta_{np-2} - \theta_{np})} T_{np-2} + \frac{(\theta - \theta_{np-2})(\theta - \theta_{np})}{(\theta_{np-1} - \theta_{np-2})(\theta_{np-1} - \theta_{np})} T_{np-1} + \frac{(\theta - \theta_{np-2})(\theta - \theta_{np-1})}{(\theta_{np} - \theta_{np-2})(\theta_{np} - \theta_{np-1})} T_{np} \quad (4.44)$$

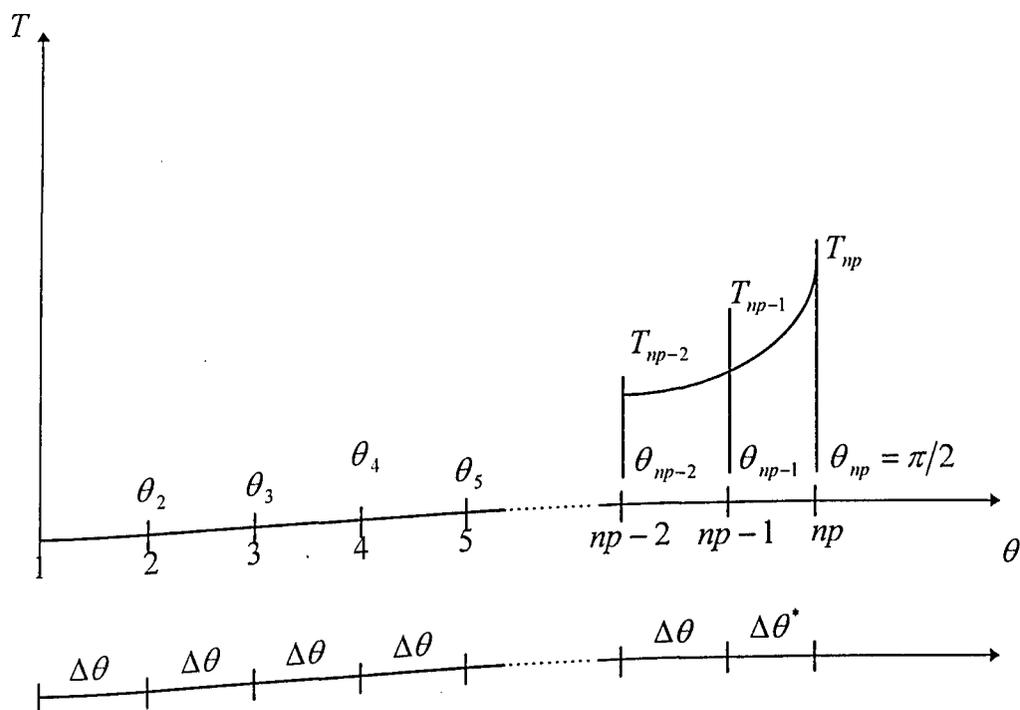


Figura 4.3. Aplicação da fórmula de Lagrange para discretização dos últimos três pontos da malha (onde  $\Delta\theta^* \neq \Delta\theta$ ).

Simplificando a Equação (4.44), tem-se,

$$T = (\theta - \theta_{np-1})(\theta - \theta_{np}) \cdot v_{np-2} + (\theta - \theta_{np-2})(\theta - \theta_{np}) \cdot v_{np-1} + (\theta - \theta_{np-2})(\theta - \theta_{np-1}) \cdot v_{np}, \quad (4.45)$$

onde,

$$v_{np-2} = \frac{1}{(\theta_{np-2} - \theta_{np-1})(\theta_{np-2} - \theta_{np})} \cdot T_{np-2}, \quad (4.46)$$

$$v_{np-1} = \frac{1}{(\theta_{np-1} - \theta_{np-2})(\theta_{np-1} - \theta_{np})} \cdot T_{np-1} \quad (4.47)$$

$$\text{e } v_{np} = \frac{1}{(\theta_{np} - \theta_{np-2})(\theta_{np} - \theta_{np-1})} \cdot T_{np}. \quad (4.48)$$

A Equação (4.45) fornece a expressão para o cálculo da temperatura entre  $T_{np-2}$  e  $T_{np}$  como função da variável  $\theta$ .

A segunda derivada da Equação (4.45) pode ser expressa por,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 2v_{np-2} + 2v_{np-1} + 2v_{np} = 2(v_{np-2} + v_{np-1} + v_{np}). \quad (4.49)$$

Fazendo-se

$$\beta_{np-2} = (\theta_{np-2} - \theta_{np-1})(\theta_{np-2} - \theta_{np}), \quad (4.50)$$

$$\beta_{np-1} = (\theta_{np-1} - \theta_{np-2})(\theta_{np-1} - \theta_{np}), \quad (4.51)$$

$$\text{e } \beta_{np} = (\theta_{np} - \theta_{np-2})(\theta_{np} - \theta_{np-1}) \quad (4.52)$$

e substituindo estes valores em (4.19), tem-se,

$$\frac{2}{tg^4 \theta_{np-1}} \left( \frac{T_{np-2}^{i+1}}{\beta_{np-2}} + \frac{T_{np-1}^{i+1}}{\beta_{np-1}} + \frac{T_{np}^{i+1}}{\beta_{np}} \right) = \frac{\alpha^2}{\alpha} \frac{T_{np-1}^{i+1} - T_{np-1}^i}{\Delta t}. \quad (4.53)$$

Reordenando (4.53), obtém-se,

$$-\frac{2\Delta t}{tg^4 \theta} \cdot \frac{1}{\beta_{np-2}} \cdot T_{np-2}^{i+1} + \left( 1 - \frac{2}{tg^4 \theta_{np-1} \beta_{np-1}} \right) \cdot T_{np-1}^{i+1} = T_{np-1}^i, \quad (4.54)$$

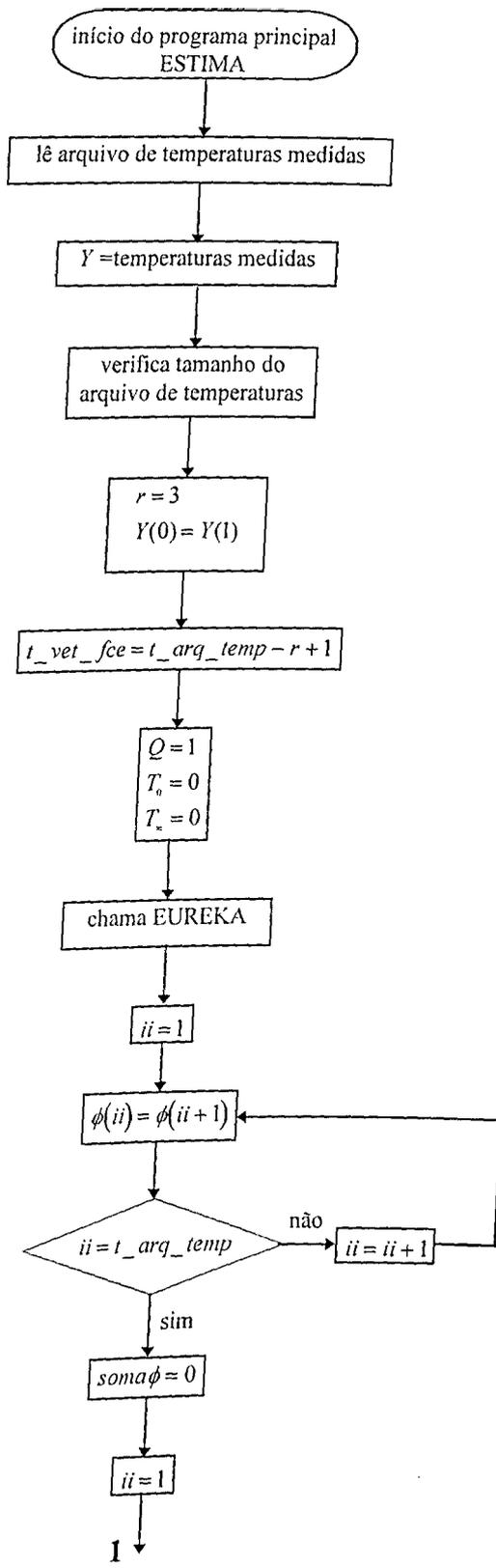
que é a equação em diferenças finitas para os três últimos nós da malha.

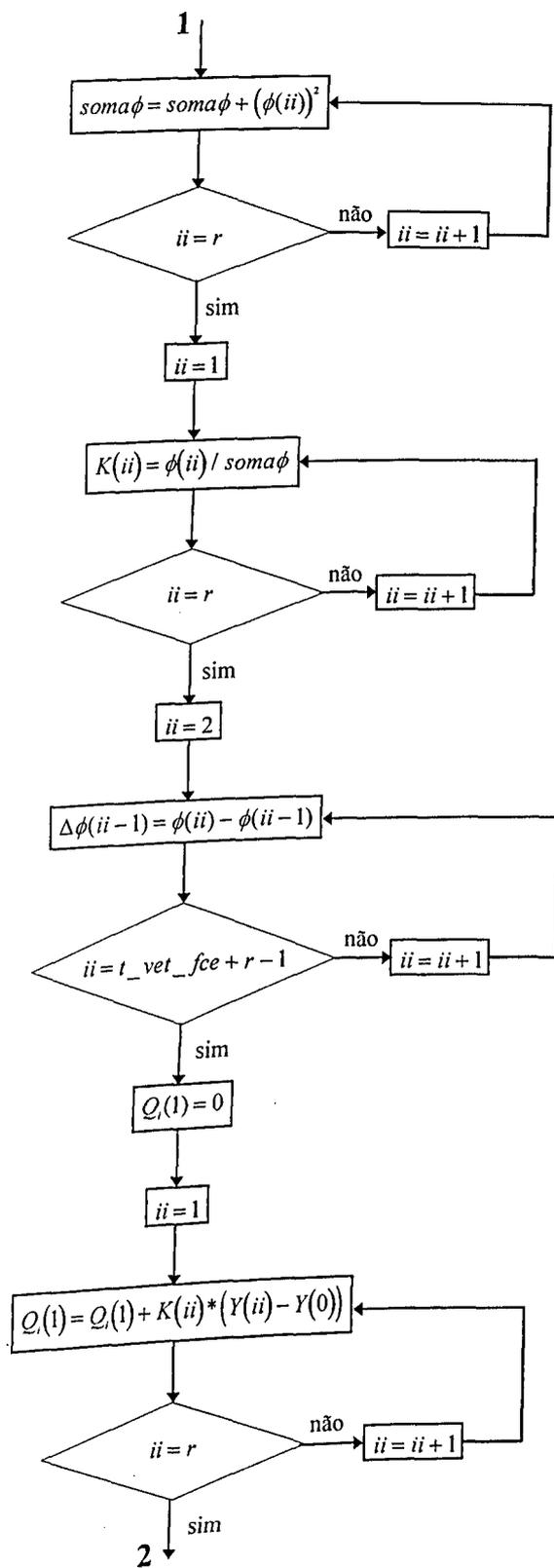
Tendo sido calculados os coeficientes de sensibilidade, a próxima etapa é a utilização do algoritmo sequencial dado pela Equação (3.47) para estimar a história da taxa térmica na superfície correspondente a  $\theta = 0$  (ou  $\xi = 0$ ).

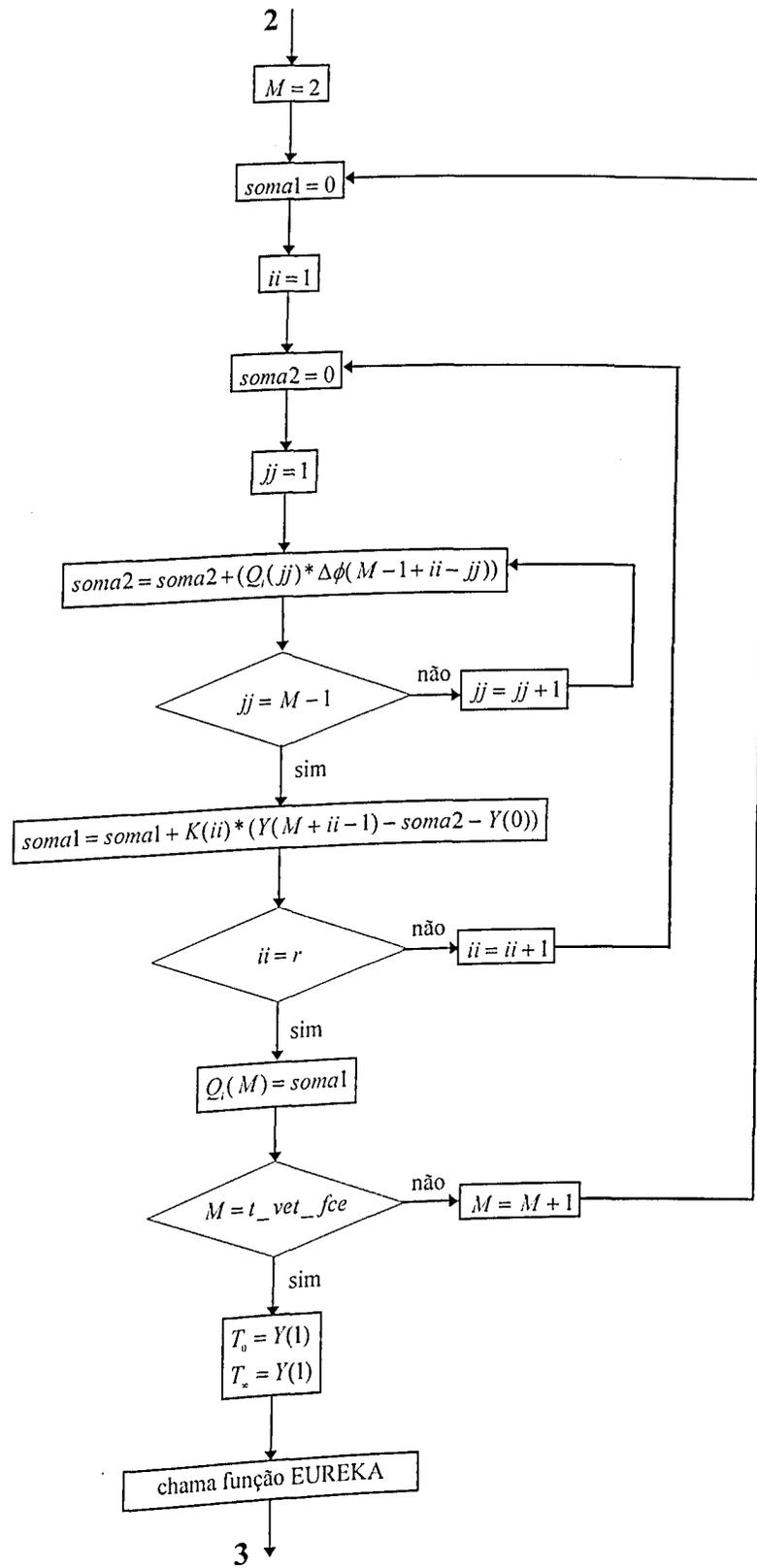
Com os valores dos fluxos estimados, pode-se calcular as temperaturas através da solução das Equações (4.1-4.4) que representam a solução do problema direto de difusão de calor.

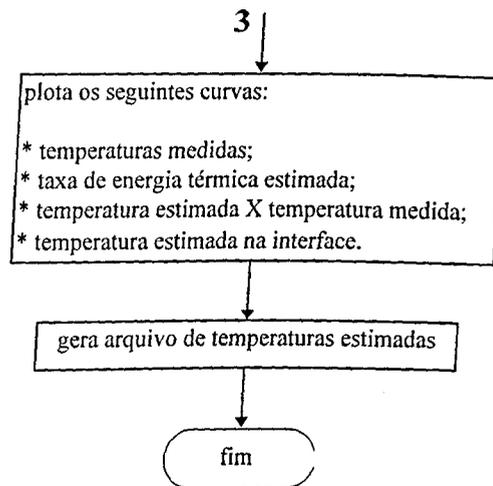
Para resolver o problema inverso, foi desenvolvido um pacote computacional em MATLAB 5.0, composto de um programa principal denominado ESTIMA e das funções EUREKA, GAUSS, FUNC1 e FUNC2. A listagem dos programas está no Apêndice B.

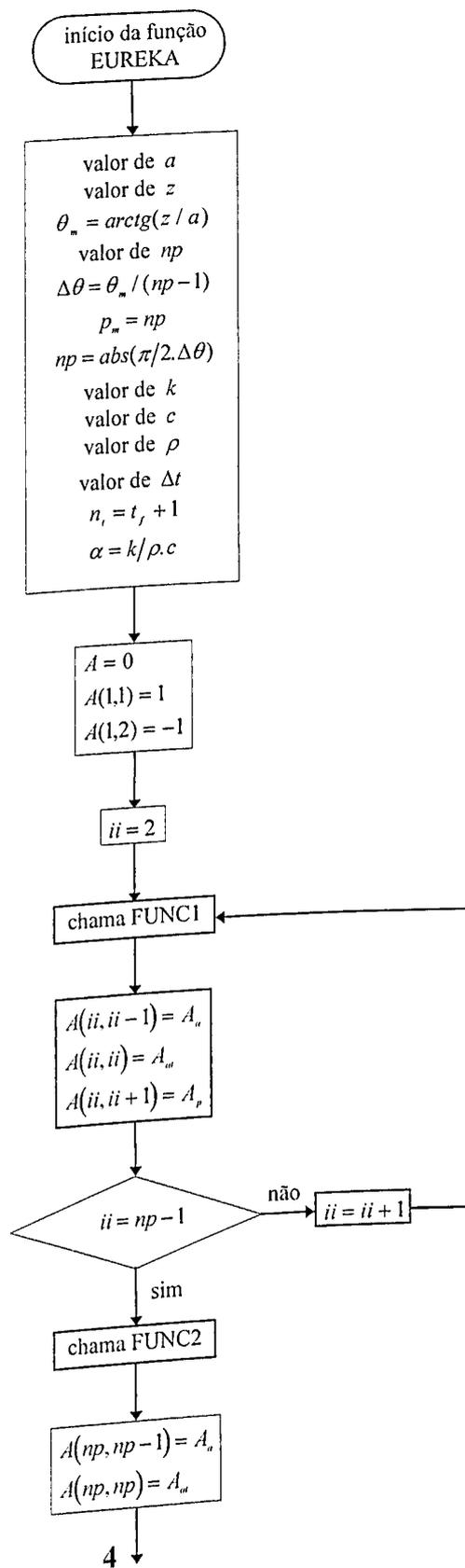
O fluxograma a seguir resume a sequência utilizada para resolução do problema matemático em questão.

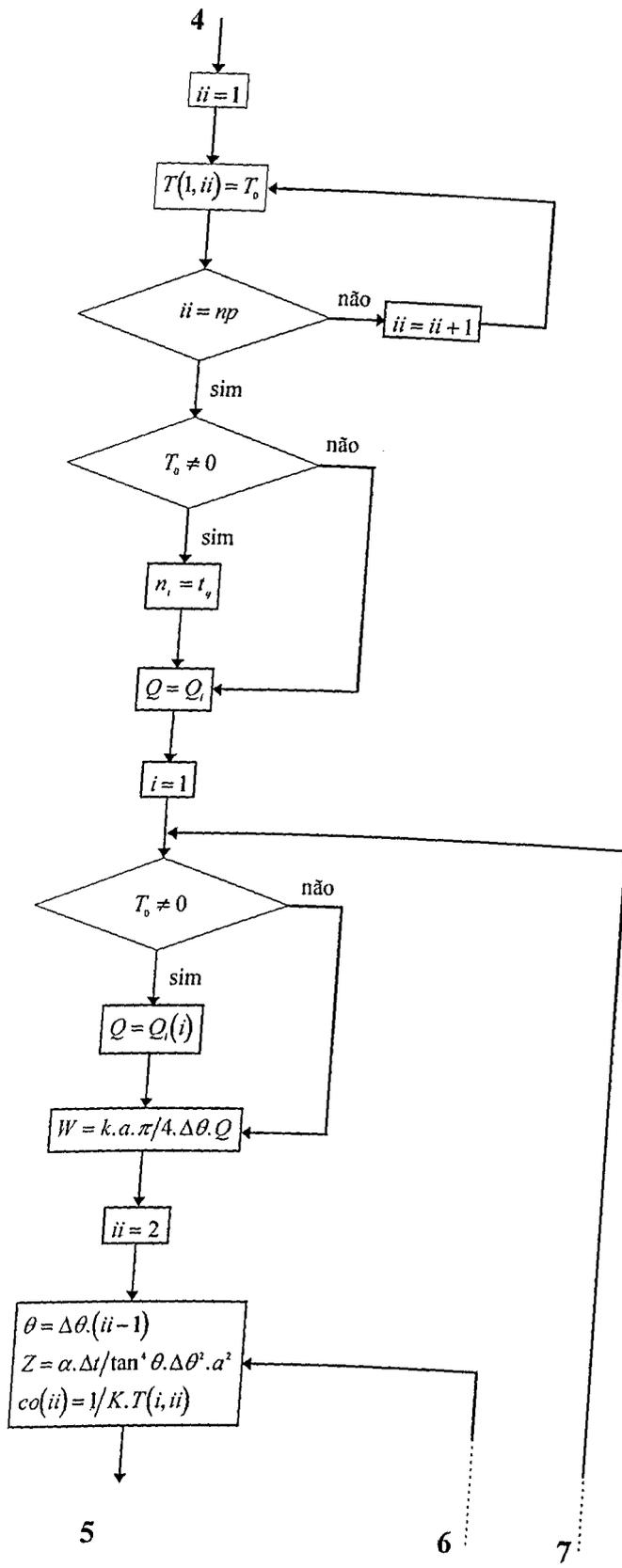


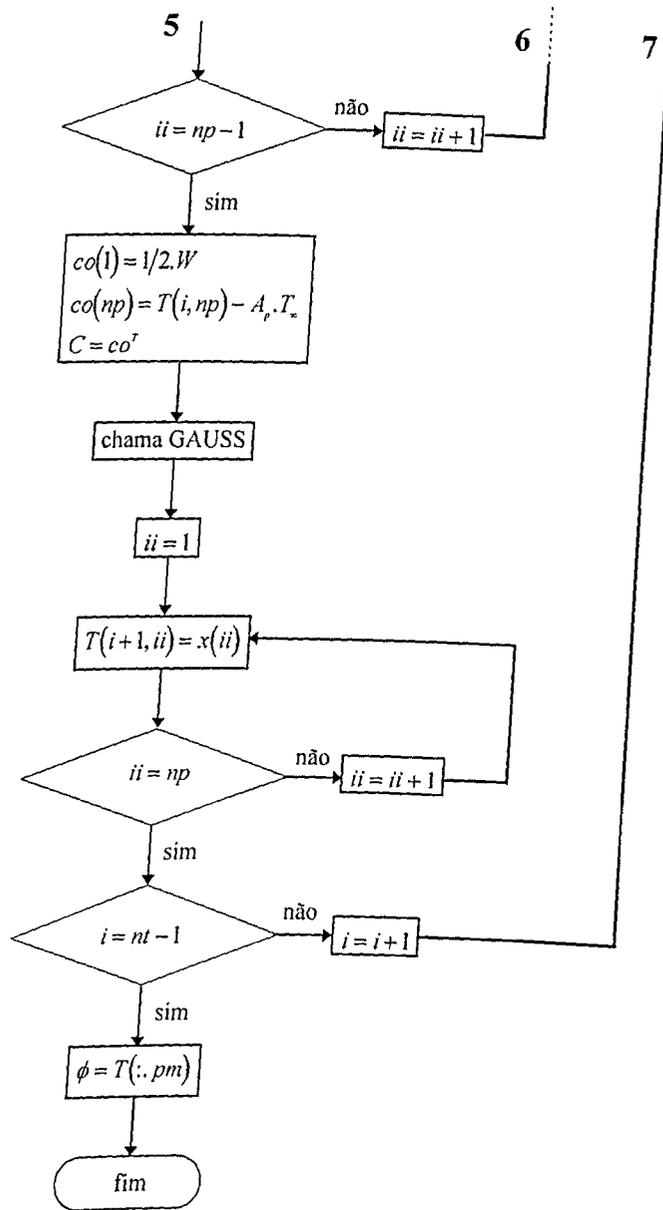


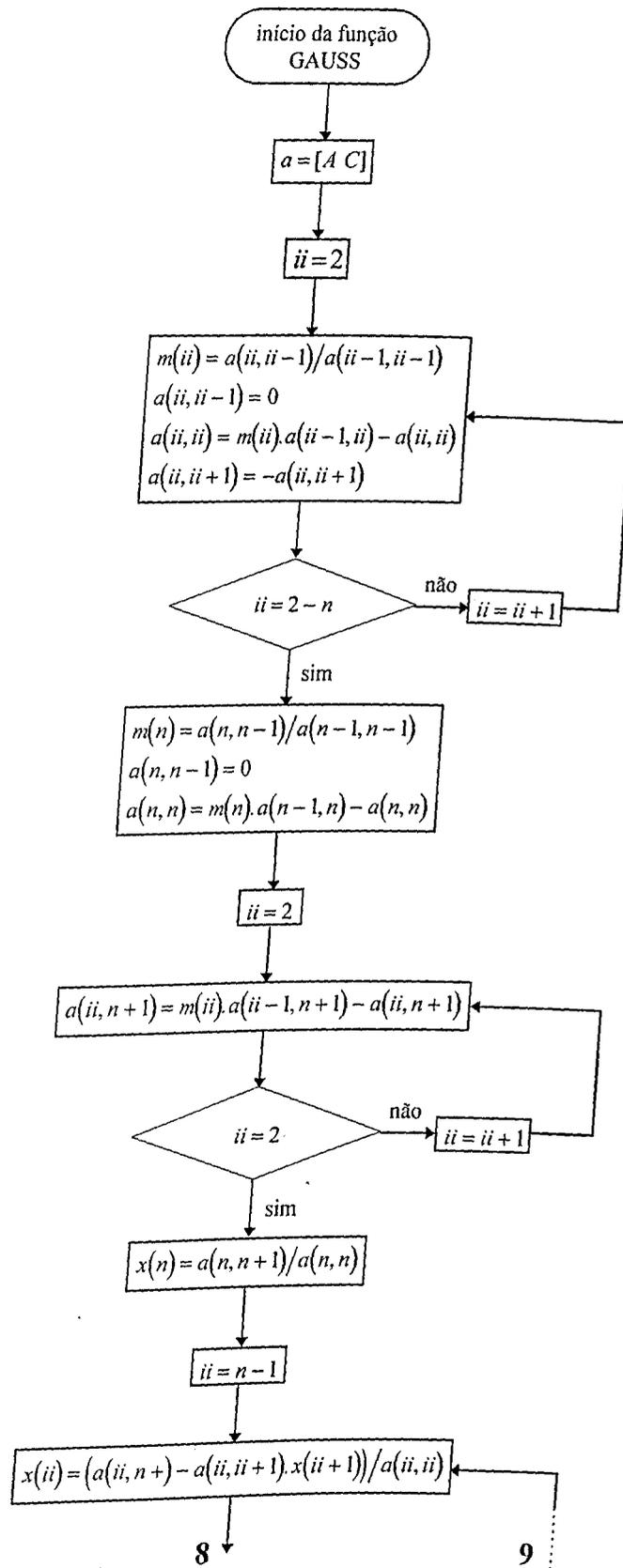


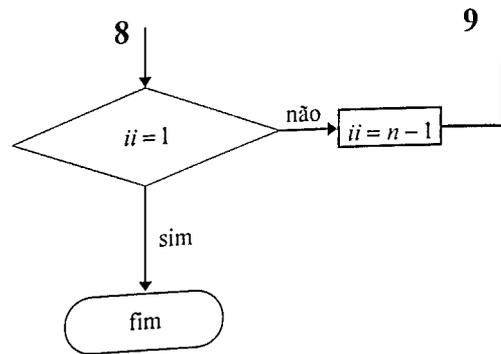


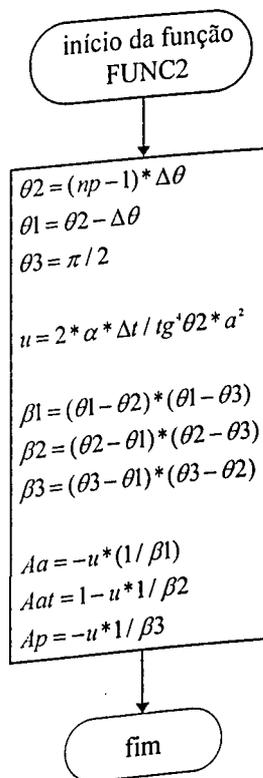
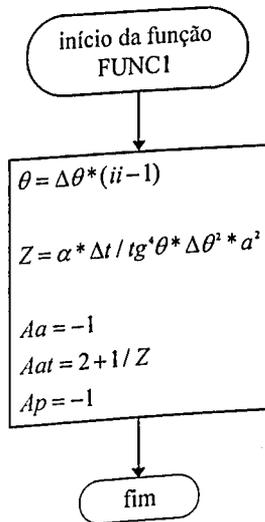






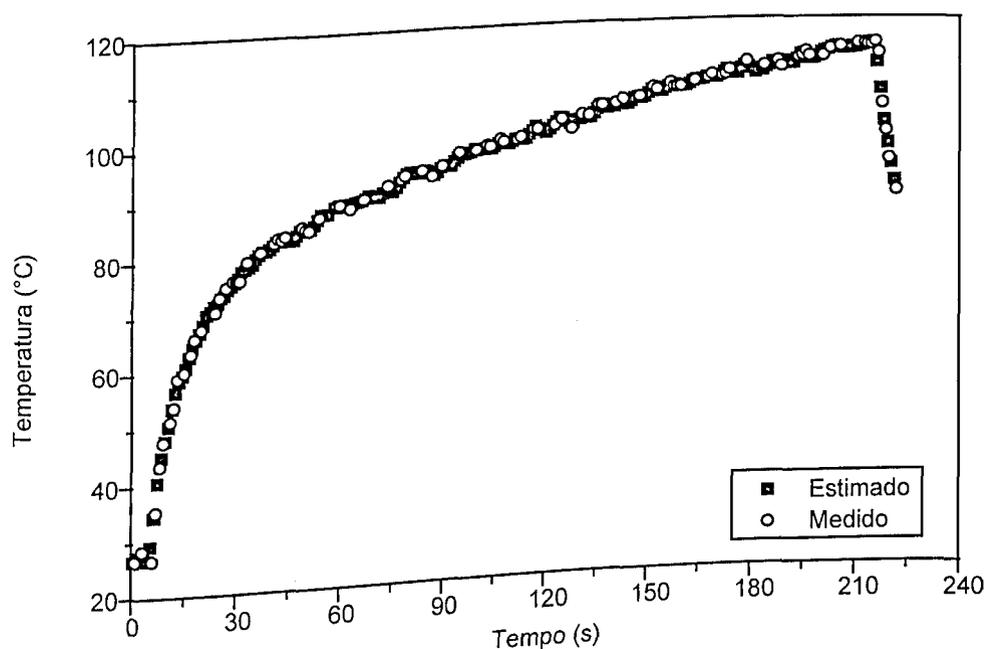






#### 4.4. VALIDAÇÃO DO PACOTE COMPUTACIONAL

Para testar a eficácia numérica do programa construído para estimar a temperatura de corte, fez-se uma comparação entre as curvas de temperaturas medidas (na aresta inferior oposta à aresta de corte) e de temperaturas estimadas na mesma posição. O gráfico da Figura 4.4 mostra o resultado obtido para um dos ensaios que foram realizados quando usinou-se ferro fundido cinzento NB - FC 200, com uma ferramenta de metal duro classe K10. Pode-se observar uma boa concordância entre os valores medidos e estimados, o que valida satisfatoriamente o programa computacional construído.



**Figura 4.4.** Comparação entre as temperaturas medidas e estimadas na aresta inferior oposta à aresta de corte ( $v_c=111$  m/mim;  $f=0.176$  mm/rot;  $a_p=0.5$  mm).

No capítulo seguinte será apresentado o procedimento experimental que foi realizado para obtenção das histórias de temperaturas na aresta oposta à aresta de corte e os resultados obtidos através da estimação utilizando o método anteriormente descrito. Será apresentada ainda uma análise da validade física do método proposto.

# CAPÍTULO 5

## *PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL*

Os testes experimentais de usinagem para verificar a eficácia do método proposto foram realizados no Laboratório de Ensino e Pesquisa em Usinagem, LEPU. A calibração dos termopares foi feita no Laboratório de Transferência de Calor e de Massa, LTCM.

### 5.1. MATERIAL DA PEÇA

A escolha do material usinado nos testes de temperatura de corte foi uma consequência da geometria dos insertos utilizados. Como a idéia inicial do método proposto era a modelagem da distribuição de temperatura em insertos octaedros sem furo, optou-se pela escolha desses tipos de ferramentas as quais são naturalmente negativas e por este motivo aplicáveis no corte de ferros fundidos. O ferro fundido utilizado foi o NB - FC 200 fabricado pela fundição TUPY. Foram usadas duas barras pré-usinadas com 80 mm de diâmetro e 470 mm de comprimento.

### 5.2. MATERIAIS DAS FERRAMENTAS

Foram utilizadas nos testes, ferramentas de metal duro e de cerâmica. As ferramentas de metal duro utilizadas foram as ISO SNGN 120408 classe K10 da BRASSINTER e as de cerâmica à base de  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , ISO SNGN 120412 classe CIC6000 da COFERMAQ. O porta ferramentas utilizados foi o ISO CSBNR 20 20 K12 da SANDVIK COROMANT. Ao se montar uma ferramenta no suporte, o conjunto apresentava a seguinte geometria:  $\gamma_0 = -6^\circ$ ,  $\alpha_0 = 6^\circ$ ,  $\chi_r = 75^\circ$  e  $\lambda_s = -6^\circ$ .

As propriedades termofísicas dos materiais das ferramentas de corte foram retiradas de TRENT (1984) e estão listadas na Tabela 5.1. Destaca-se a dificuldade de se obter estas propriedades junto aos fabricantes. Por este motivo, utilizou-se as da literatura.

**Tabela 5.1.** Propriedades termofísicas dos materiais das ferramentas de corte (TRENT, 1984).

Material da ferramenta	Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	Calor específico (J/Kg.°C)	Condutividade térmica (W/m.°C)
cerâmica (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> )	3200	1086.8	25
metal duro (WC)	15800	234	100

### 5.3. TERMOPARES

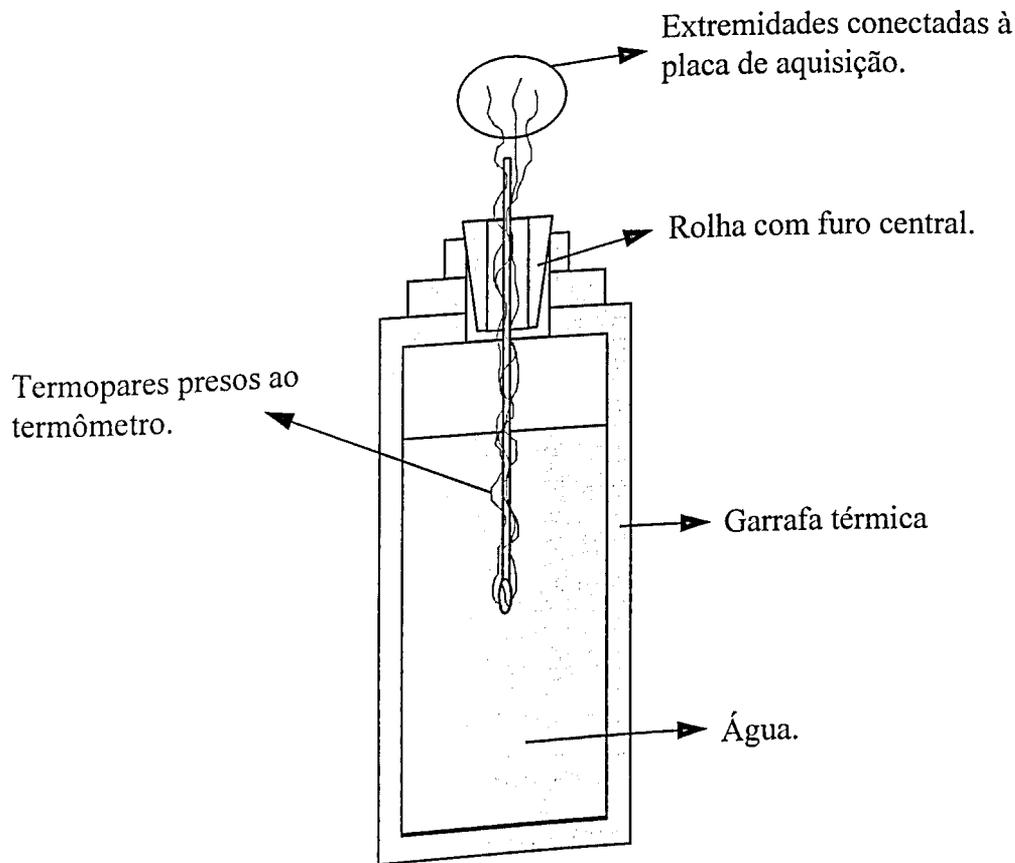
Os termopares utilizados nos testes de temperatura foram do tipo T, ou seja, cobre-constantan com bitola de 0.25 mm de diâmetro. Estes tipos de termopares são muito utilizados em aplicações industriais ou de laboratório para medidas precisas de temperatura na faixa de -200 a +350 °C (BORCHARDT e GOMES, 1979).

Para a calibração do sistema de medição de temperatura (termopares e equipamentos de aquisição) os seguintes materiais e equipamentos foram utilizados:

- gelo triturado;
- água quente (45 a 50 °C);
- um microcomputador Pentium 100 MHz da Itautec;
- uma placa de aquisição PCL - 810 com o software *Genie*;
- uma garrafa térmica de 500 ml;
- três fios de termopares do tipo T.

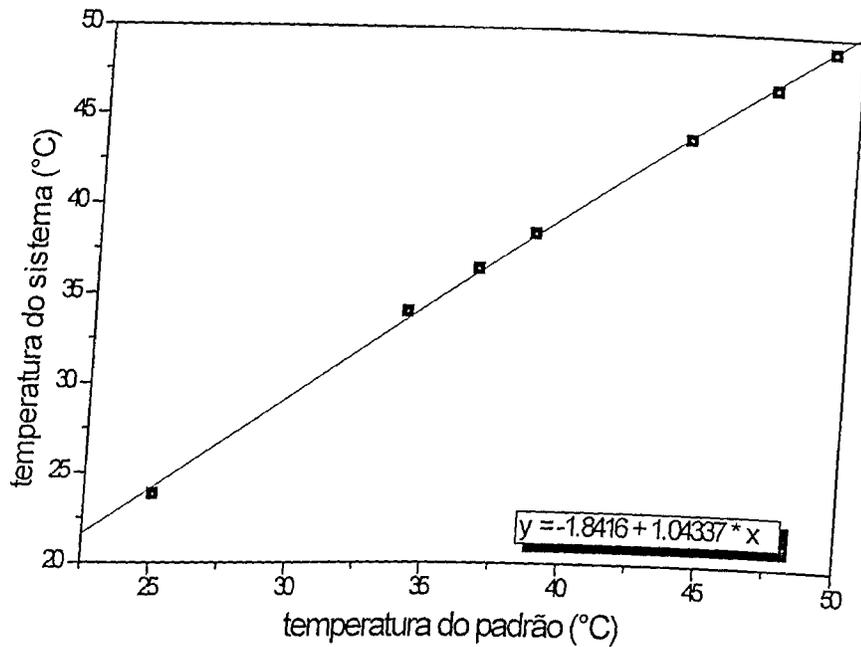
O primeiro passo no processo de calibração consistiu na fixação dos termopares de tal forma que suas junções ficassem o mais próximo possível do bulbo do termômetro padrão. As outras extremidades foram conectadas à placa de aquisição. Inicialmente comparou-se a temperatura ambiente medida pelo padrão com as temperaturas fornecidas pelo sistema de aquisição utilizando-se os termopares de cobre-constantan. Posteriormente, fez-se o

termômetro, juntamente com os termopares, mergulhar na água quente contida no interior da garrafa térmica, como mostra a Figura (5.1).



**Figura 5.1.** Esquema que ilustra a montagem dos termopares junto ao termômetro e a colocação deste conjunto na garrafa térmica utilizada para calibração do sistema de aquisição.

Em seguida comparou-se as temperaturas medidas pelo padrão com as temperaturas lidas pelo sistema de aquisição de maneira simultânea. Este processo foi repetido para diversos valores de temperaturas os quais foram conseguidos através do abaixamento da energia térmica da água utilizando o gelo triturado. A Figura 5.2 mostra a curva de calibração obtida para o sistema de aquisição montado.

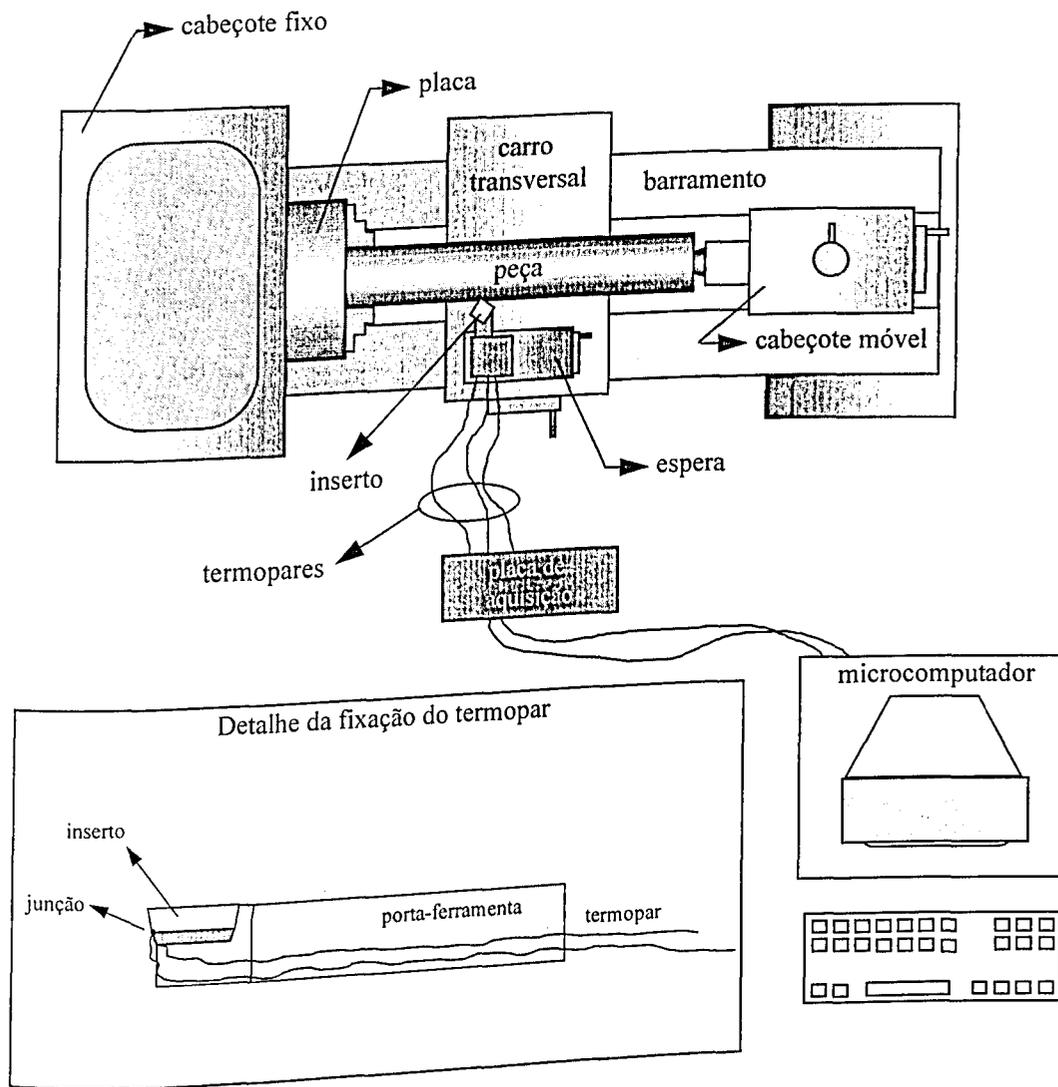


**Figura 5.2.** Curva de calibração para o sistema utilizado para medição das temperaturas.

Pode-se observar a característica linear da curva de calibração que praticamente forma um ângulo de  $45^{\circ}$  com os eixos coordenados, indicando pouca variação entre os valores padrões e os obtidos pelo sistema de aquisição montado. Tendo em vista este resultado, não foi necessário a utilização da curva acima.

#### 5.4. TESTES EXPERIMENTAIS DE USINAGEM

Para medição da temperatura de corte, foi utilizado um torno mecânico convencional IMOR MAXI - II - 520 - 6 CV de potência, onde foi montado o mesmo sistema de aquisição utilizado para a calibração dos termopares descrita anteriormente. A temperatura ambiente durante os ensaios foi de  $27^{\circ}\text{C}$ . A Figura 5.3 mostra esquematicamente a montagem realizada.



**Figura 5.3.** Montagem utilizada para medir a temperatura na aresta inferior oposta à aresta de corte.

Primeiramente foram realizados testes para medir a evolução da temperatura na aresta inferior oposta à aresta de corte. A fixação da junção do termopar nesta posição foi garantida pela pressão de aperto da pastilha contra a base do porta-ferramentas. Apenas a junção do termopar foi mantida sem isolamento. Os testes mostrados na Tabela 5.2 foram realizados nas duas barras de ferro fundido descritas anteriormente, cada uma sendo usinada com um tipo de ferramenta (metal duro e cerâmica).

**Tabela 5.2.** Testes realizados para medir a temperatura na aresta inferior oposta à aresta de corte para as ferramentas de metal duro e de cerâmica.

Variação da velocidade de corte [ $f = 0.176$ mm/rot.; $a_p = 1.75$ mm]					
Ensaio	$d_i$ (mm)	$d_f$ (mm)	$L_u$ (mm)	rpm	$V_c$ (m/min)
1	80.0	76.5	470	355	89
2	76.5	73.0	470	450	108
3	73.0	69.5	470	900	206
Variação do avanço [ $V_c = 98$ m/min.; $a_p = 1.5$ mm]					
Ensaio	$d_i$ (mm)	$d_f$ (mm)	$L_u$ (mm)	rpm	$f$ (mm/rot)
4	69.5	66.5	157	450	0.138
5	69.5	66.5	157	450	0.176
6	69.5	66.5	157	450	0.242
Variação da profundidade de corte [ $f = 0.176$ ; $V_c = 135$ m/min.]					
Ensaio	$d_i$ (mm)	$d_f$ (mm)	$L_u$ (mm)	rpm	$a_p$ (mm)
7	66.5	61.5	157	710	2.5
8	66.5	63.0	157	710	1.75
9	66.5	65.0	157	710	0.75

onde,

$d_i$  = diâmetro inicial da barra;

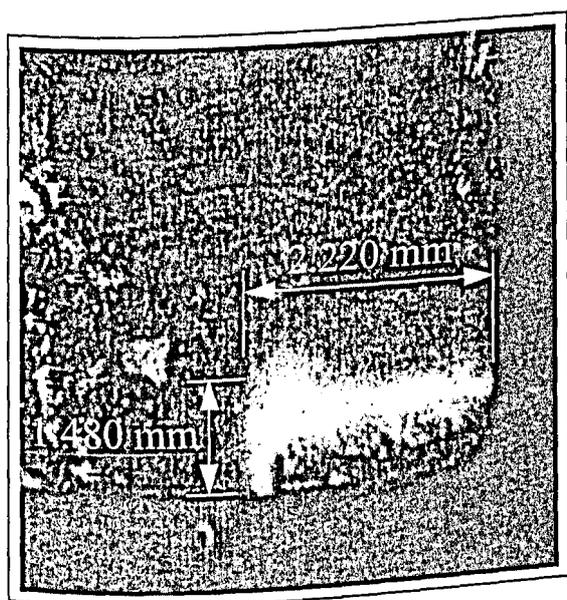
$d_f$  = diâmetro final da barra;

$L_u$  = comprimento usinado (percurso de avanço).

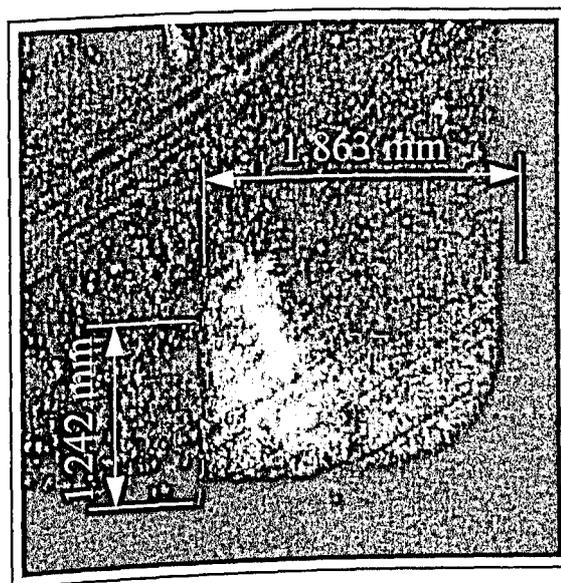
Como pode ser observado, o número de ensaios para cada tipo de pastilha é 9. Foram utilizadas três pastilhas de cada material. Apenas as quatro arestas superiores de cada pastilha foram utilizadas. As inferiores, que ficavam em contato com o termopar, não eram utilizadas pois o comprimento de contato cavaco-ferramenta tinha que ser determinado em todos os testes.

O método utilizado para obtenção do comprimento de contato cavaco-ferramenta foi proposto por DE SOUZA (1996). A superfície de saída da ferramenta é pintada com tinta de caneta hidrocor para retroprojeter e após a usinagem, a área de contato cavaco-ferramenta é identificada e o comprimento de contato pode ser medido usando-se um software analisador de imagens.

Quando as ferramentas foram analisadas, verificou-se que a área de contato cavaco-ferramenta, na maior parte dos ensaios, apresentou-se sob a forma de um retângulo como pode ser visto através das Figuras 5.4 a e b.



(a)



(b)

**Figura 5.4.** Áreas e comprimentos de contato obtidas nos testes experimentais de usinagem. (a) Ferramenta de metal duro ( $v_c=98$  m/min;  $f=0.138$  mm/rot;  $a_p=1.5$  mm). (b) Ferramenta de cerâmica ( $v_c=135$  m/min;  $f=0.176$  mm/rot;  $a_p=1.75$  mm).

Durante o processo de medição dos comprimentos de contato, destaca-se a dificuldade de identificação destes em alguns insertos devido à falta de contraste entre a cor da tinta utilizada para pintar a superfície de saída das ferramentas e a cor original das pastilhas. Este problema foi mais pronunciado nos insertos cerâmicos, devido à sua cor mais escura. Pode-se observar ainda, que a forma retangular da área de contato era descaracterizada, possivelmente devido a um desvio do fluxo de cavaco da direção normal regular apresentada na maior parte do ensaio.

Observando-se as figuras anteriores, pode-se ver claramente que a região de contato cavaco-ferramenta não aparece como a área de um quarto de círculo como é proposto pelo modelo de YEN e WRIGTH (1986) e LIN et alli (1992). Nos experimentos realizados por DE SOUZA (1996), foram utilizadas ferramentas revestidas com TiN na última camada, portanto com a coloração amarela característica. Quando elas foram pintadas com tinta preta o contraste era evidente, facilitando a medição da área de contato. Neste caso, quando se diminuiu a velocidade de corte e aumentou-se o avanço e a profundidade de corte, o comprimento e a área de contato cavaco-ferramenta aumentou.

O procedimento então adotado foi calcular áreas de quartos de círculos equivalentes às áreas obtidas nos testes experimentais e utilizar seus respectivos raios no programa de estimação da temperatura de interface cavaco-ferramenta.

Os valores obtidos estão listados na Tabela 5.3 a seguir.

Tabela 5.3. Valores medidos de comprimento e largura de contato.

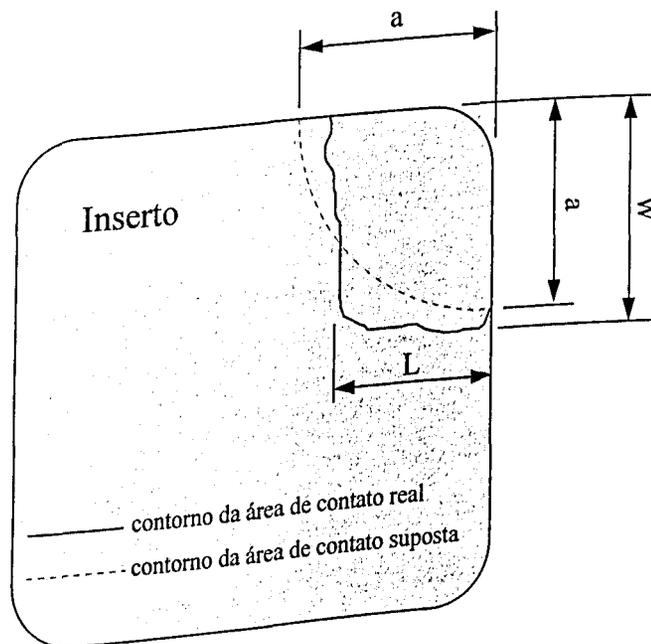
Ferramentas de metal duro											
Ensaio	L (mm)	W (mm)	a (mm)	Ensaio	L (mm)	W (mm)	a (mm)	Ensaio	L (mm)	W (mm)	a (mm)
				4	1.480	2.220	1.739	7	1.071	4.044	2.348
1	0.779	2.748	1.651	5	1.070	2.537	1.613	8	1.176	2.431	1.908
2	0.819	2.378	1.575	6	0.806	2.557	1.620	9	1.070	1.678	1.512
3	0.951	2.312	1.673								
Ferramentas de cerâmica											
Ensaio	L (mm)	W (mm)	a (mm)	Ensaio	L (mm)	W (mm)	a (mm)	Ensaio	L (mm)	W (mm)	a (mm)
				4	1.097	2.484	1.863	7	1.162	4.401	2.552
1	1.229	3.290	2.269	5	1.189	2.378	1.897	8	1.480	2.801	2.297
2	1.361	3.257	2.376	6	1.282	2.339	1.954	9	1.242	1.863	1.716
3	1.057	3.238	2.087								

onde:

$L$  é o comprimento de contato,  $W$  é a largura de contato e  $a$  é raio da área circular equivalente.

Observa-se que alguns valores fogem desta regra, o que pode ser explicado pela falta de precisão durante as medições devido a dificuldade de distinção dos contornos da área de contato, pois as ferramentas utilizadas tinham a coloração escura, não apresentando bom contraste quando a tinta foi aplicada. Pode-se observar ainda, que os valores obtidos para as ferramentas de cerâmica foram geralmente maiores do que aqueles obtidos para as ferramentas de metal duro. O maior raio de ponta das ferramentas cerâmicas pode ser responsável por esses resultados.

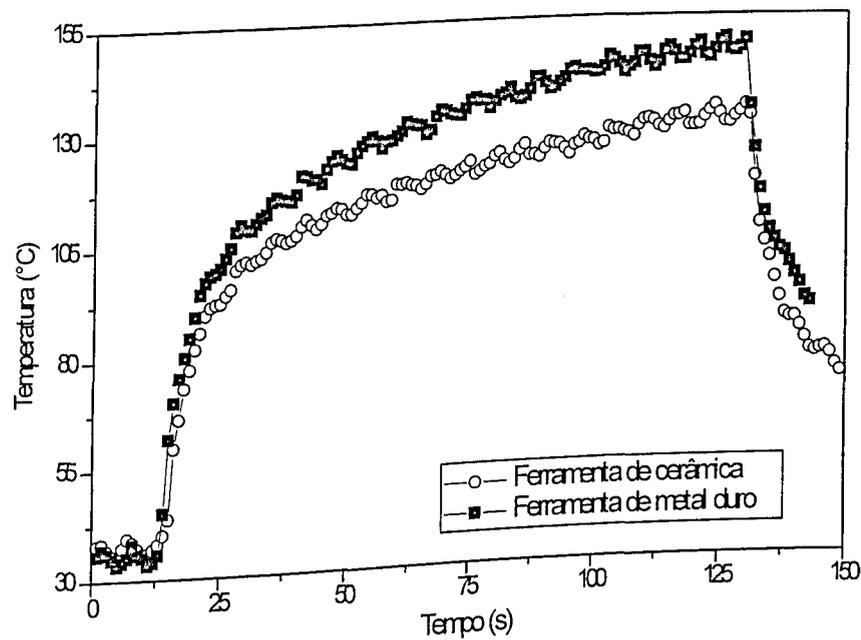
A Figura 5.5 é um esquema que mostra a área de contato cavaco ferramenta real e a considerada no modelo teórico proposto (um quarto de círculo).



BIBLIOTECA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

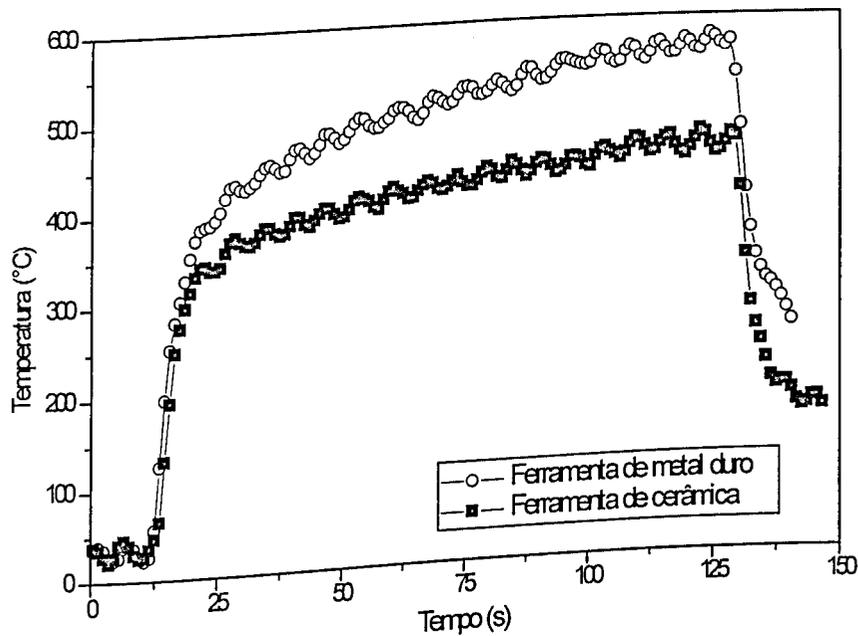
**Figura 5.5.** Contornos da área de contato cavaco-ferramenta real e suposta pelo modelo teórico proposto.

Os gráficos à seguir mostram resultados obtidos com a utilização do programa ESTIMA.



**Figura 5.6.** Temperaturas medidas na aresta inferior oposta nas ferramentas de cerâmica e metal duro ( $v_c=98$  m/min;  $f=0.176$  mm/rot;  $a_p=1.5$  mm).

No gráfico da Figura 5.6 estão plotadas as curvas de temperaturas medidas na aresta inferior oposta à aresta de corte para as ferramentas de metal duro e cerâmica para as condições do ensaio n<sup>o</sup> 5 da Tabela 5.2. Pode-se observar que, para um mesmo período de usinagem, a temperatura obtida com este último tipo de inserto é inferior ao primeiro. Este comportamento pode ser explicado pela diferença existente na condutividade térmica de ambas as ferramentas, sendo maior para a de metal duro (Tabela 5.1). O mesmo fenômeno ocorre com os valores de temperaturas estimadas na interface cavaco-ferramenta (Figura 5.7).



**Figura 5.7.** Temperaturas estimadas na interface cavaco-ferramenta das ferramentas de cerâmica e de metal duro ( $v_c=98$  m/min;  $f=0.176$  mm/rot;  $a_p=1.5$  mm).

Nas curvas mostradas no gráfico da Figura 5.8, pode-se verificar a influência da variação do avanço na temperatura de interface estimada. Neste caso utilizou-se a ferramenta de metal duro. Observa-se que os níveis de temperatura aumentam com o aumento desta variável do processo.

Na Figura 5.9 observa-se a influência da profundidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta para a ferramenta de metal duro. Nota-se que a temperatura cresceu nitidamente quando se aumentou a profundidade de corte de 0.75 para 1.75 mm, enquanto para  $a_p=1.75$  mm e  $a_p=2.5$  mm, as temperaturas foram praticamente as mesmas. Isto mostra que a profundidade de corte tem maior influência na temperatura de corte para valores pequenos. Ensaio realizado no LEP/UFU, utilizando o método do termopar ferramenta-peça também apresentaram resultados semelhantes (FERNANDES, 1992).

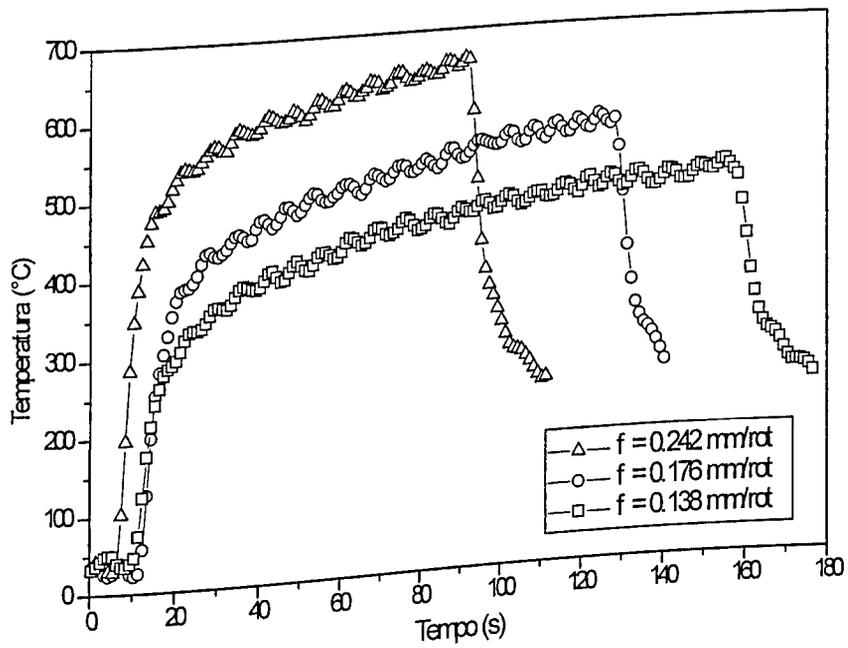


Figura 5.8. Influência da variação do avanço na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de metal duro ( $v_c = 98$  m/min;  $a_p = 1.5$  mm).

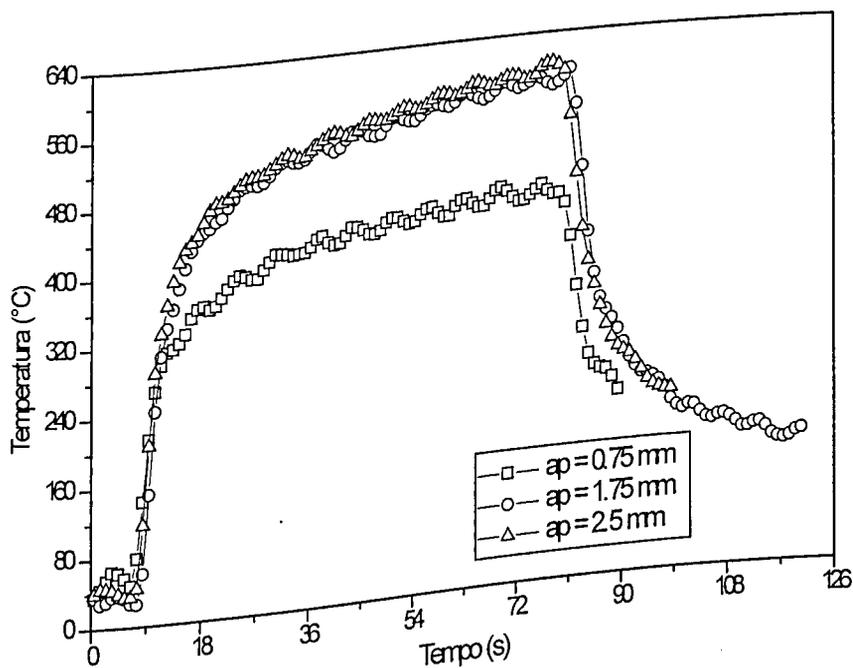
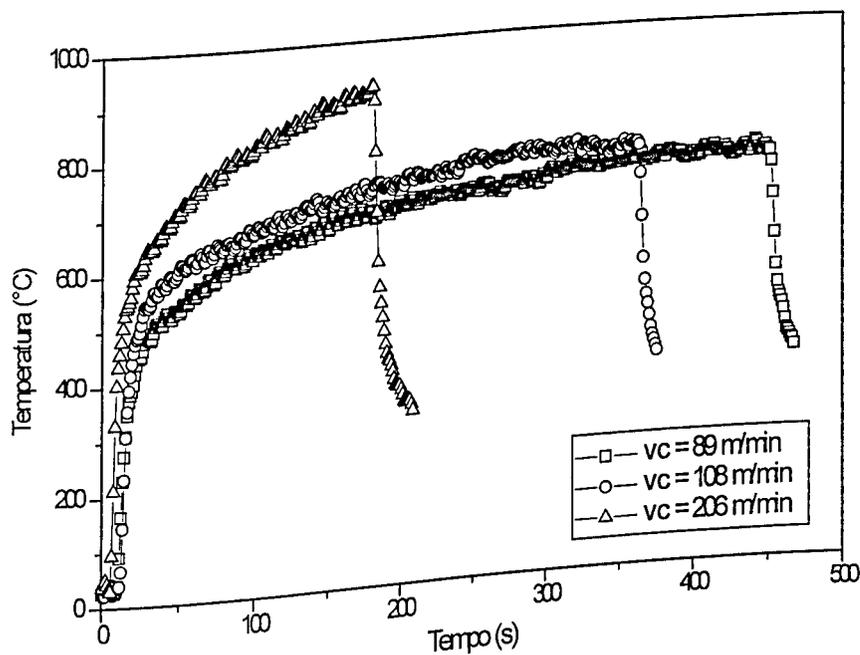


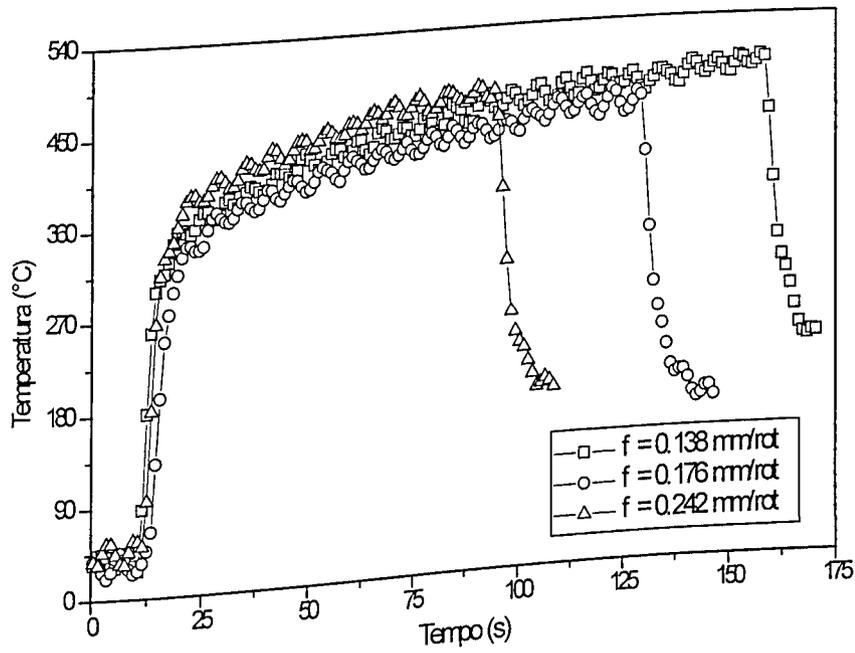
Figura 5.9. Influência da variação da profundidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de metal duro ( $v_c = 135$  m/min;  $f = 0.176$  mm/rot).

A Figura 5.10 mostra a influência da velocidade de corte na temperatura estimada para a ferramenta de metal duro. Observa-se que o aumento deste parâmetro também afeta os níveis de temperatura estimados no sentido de aumentá-los. Os níveis de temperaturas estimadas são bem coerentes com os observados na literatura nestas condições (TRENT, 1984).

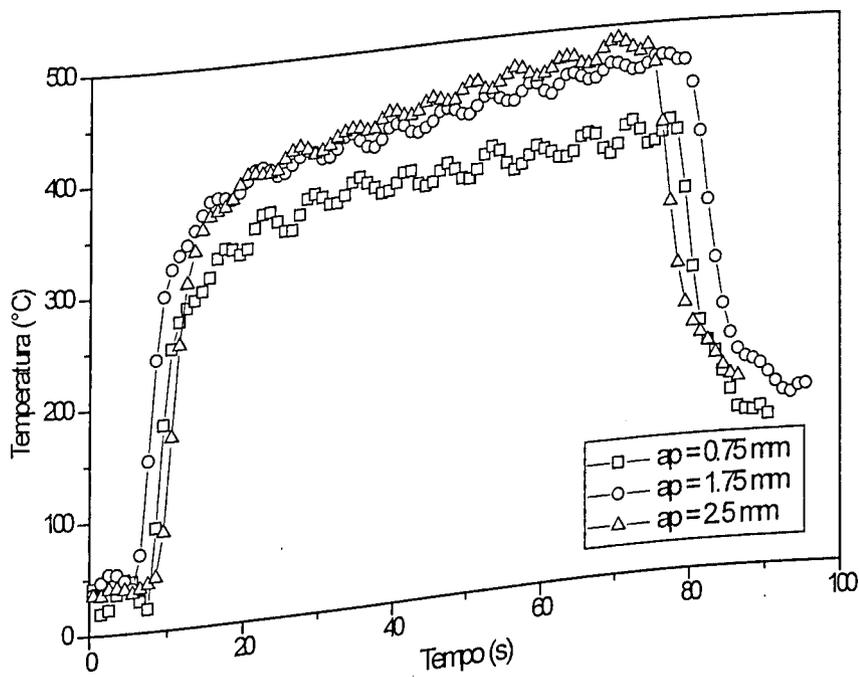


**Figura 5.10.** Influência da variação da velocidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de metal duro ( $f=0.176$  mm/rot;  $a_p=1.75$  mm).

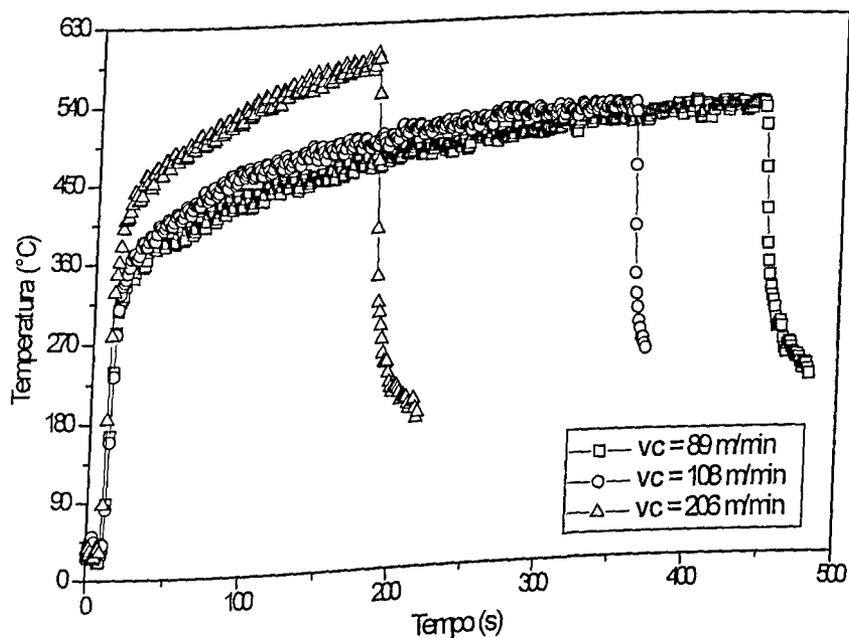
As Figuras 5.11-5.13 mostram as curvas de temperaturas estimadas obtidas para a ferramenta de cerâmica. Pode-se observar que o mesmo comportamento ocorreu com os insertos de metal duro, foi verificado com estas ferramentas, exceto na Figura 5.11 (influência do avanço). A falta de precisão da área de contato medida pode ser responsável por este resultado. Os baixos valores relativos de temperatura estimados nas ferramentas cerâmicas no geral, podem ser explicados pelos mesmos motivos.



**Figura 5.11.** Influência da variação do avanço na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de cerâmica ( $v_c=98$  m/min;  $a_p=1.5$  mm).

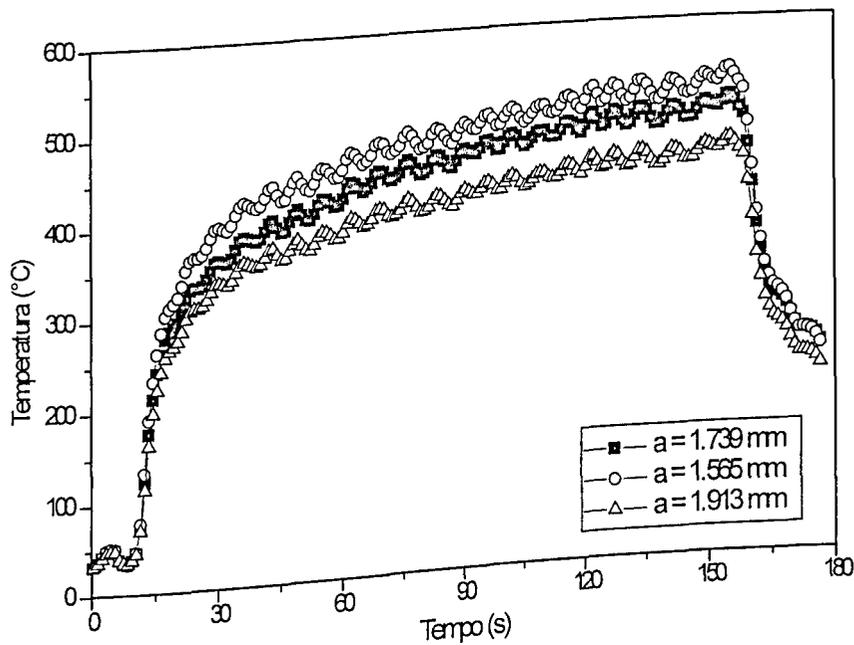


**Figura 5.12.** Influência da variação da profundidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de cerâmica ( $v_c=135$  m/min;  $f=0.176$  mm/rot).

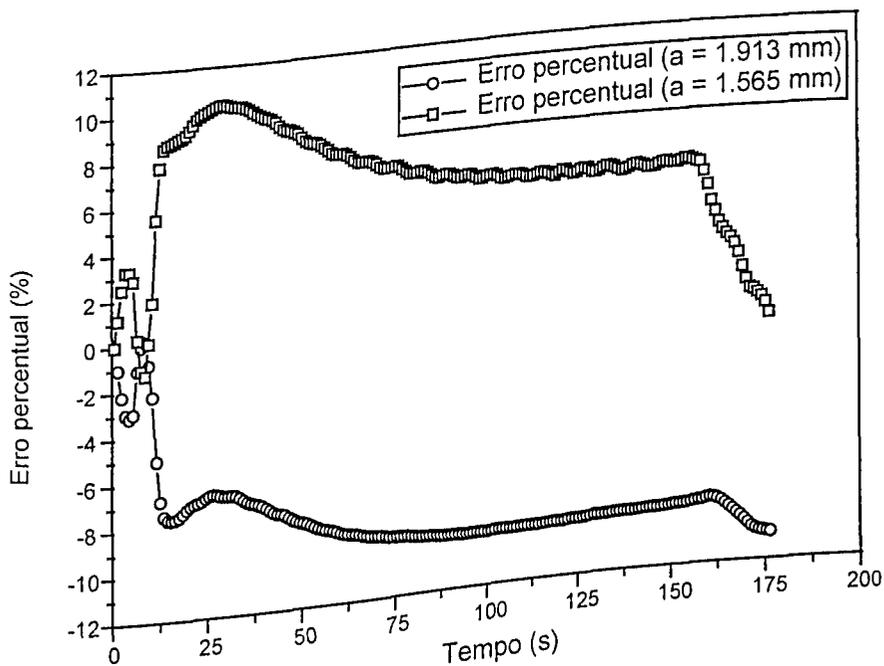


**Figura 5.13.** Influência da variação da velocidade de corte na temperatura de interface cavaco-ferramenta estimada no inserto de cerâmica ( $f=0.176$  mm/rot;  $a_p=1.75$  mm).

Na Figura 5.14 pode-se verificar a influência que tem o comprimento de contato nos valores de temperaturas estimadas. Observa-se a sensibilidade dos valores obtidos com a variação de  $\pm 10\%$  do parâmetro em questão, indicando a importância de se medir com precisão esta variável. Pode-se observar também, que existe uma tendência do erro percentual tornar-se constante à medida que o regime permanente é estabelecido, indicando que as diferenças nas temperaturas estimadas para diferentes comprimentos de contato, tendem a permanecerem constantes durante este regime (Figura 5.15).

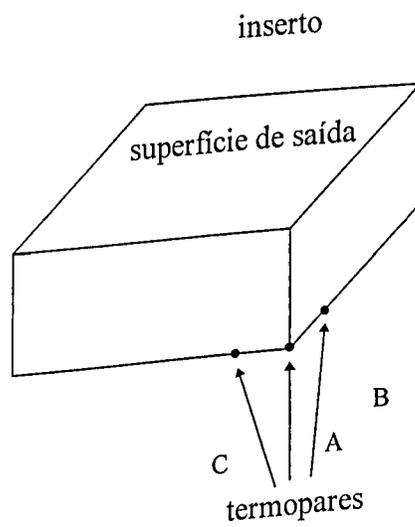


**Figura 5.14.** Influência do comprimento de contato nos valores de temperaturas cavaco-ferramenta estimadas (ferramenta de metal duro -  $vc=98$  m/min;  $f=0.138$  mm/rot;  $ap=1.5$  mm).



**Figura 5.15.** Evolução do erro percentual na estimativa da temperatura de interface cavaco-ferramenta no inserto de metal duro para diferentes valores de comprimento de contato ( $vc=98$  m/min;  $f=0.138$  mm/rot;  $ap=1.5$  mm).

Para verificar a coerência do método, ou seja, testar a validade física do método proposto, foi realizado um ensaio onde, além do termopar colocado na aresta oposta à aresta de corte, foram postos mais dois termopares entre a base do porta-ferramentas e a superfície de corte, isto é,  $CA=AB=3$  mm. oposta à superfície de saída à 3 mm do canto da pastilha (Figura 5.16), isto é,  $CA=AB=3$  mm.



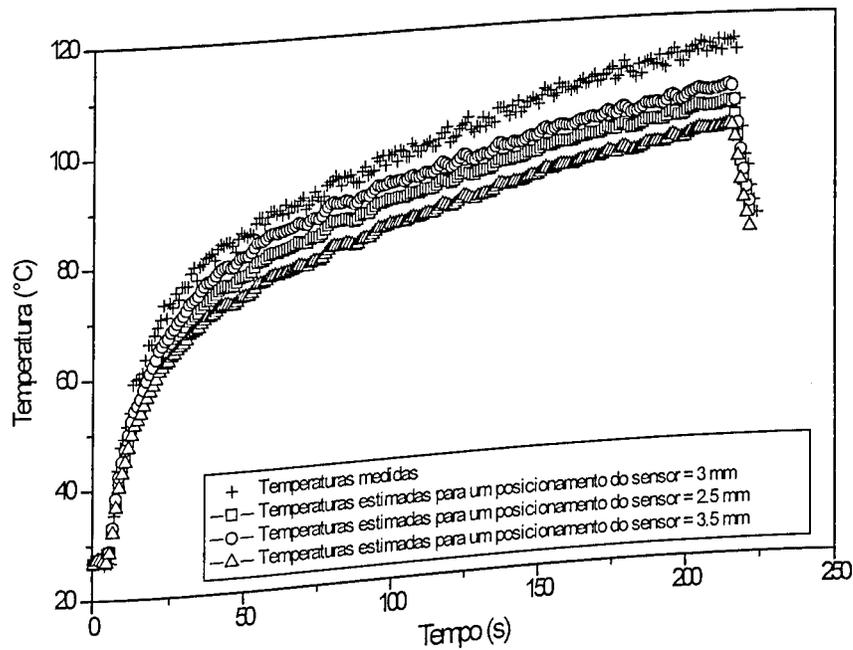
**Figura 5.16.** Esquema utilizado para validar fisicamente o método proposto.

Desta forma pôde-se comparar os valores de temperaturas estimadas nos pontos C e B, utilizando o fluxo de calor calculado na interface cavaco-ferramenta, com os valores medidos pelos termopares colocados nestes mesmos pontos.

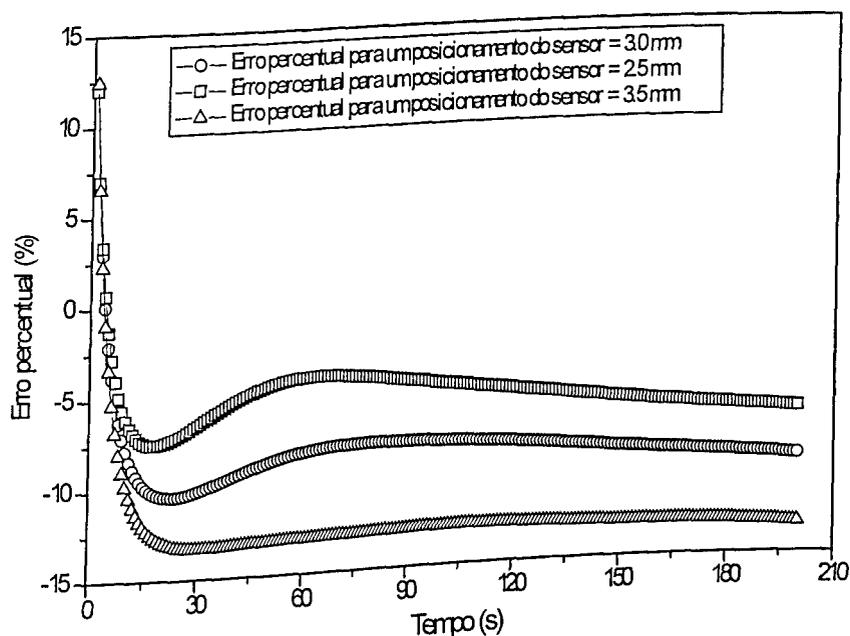
O ensaio realizado consistiu do uso da ferramenta de metal duro com as seguintes condições de corte:

$$V_c = 111.53 \text{ m/min}; f = 0.176 \text{ mm/rot}; a_p = 0.5 \text{ mm}.$$

Como foi verificado que havia uma certa imprecisão durante o posicionamento dos sensores utilizados para verificar a validade física do método proposto, fez-se uma análise de erro, considerando medições de temperatura a 2.5, 3 e 3.5 mm da aresta oposta. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Figuras 5.17 e 5.18.



**Figura 5.17.** Evoluções das temperaturas medidas e estimadas utilizadas para verificação da validade física do método proposto.



**Figura 5.18.** Erros percentuais, em relação às temperaturas medidas, para diferentes posicionamentos dos sensores.

Através da Figura 5.18 pode-se verificar a grande influência que tem o posicionamento dos sensores na estimação correta das temperaturas que foram medidas. Os erros percentuais mostrados são aceitáveis devido a grande quantidade de considerações e incertezas que caracteriza o método em proposição. As considerações dizem respeito ao modelo de mapeamento elipsoidal, ou seja, as isotérmicas geradas durante o processo de aquecimento da ferramenta não são exatamente elipsóides perfeitos e à área de contato cavaco-ferramenta considerada como sendo um quarto de círculo. As incertezas dizem respeito aos erros de posicionamento dos sensores de temperatura e as imprecisões nas medições dos comprimentos de contato.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Os resultados obtidos permitem que as seguintes conclusões sejam estabelecidas:

- O método proposto se mostra eficaz para a estimação da temperatura de interface cavaco-ferramenta em insertos octaedros sem furo e de qualquer tipo de material no torneamento à seco.
- Os valores de temperaturas estimadas na interface cavaco-ferramenta são fortemente dependentes das condições de corte. Eles aumentam com o aumento da velocidade de corte do avanço e da profundidade de corte.
- Para as mesmas condições de corte e o mesmo tempo de usinagem, a temperatura de interface é maior nas ferramentas de metal duro do que nas ferramentas de cerâmica. Isso se deve à diferença na difusividade dos dois materiais.
- Os resultados obtidos na estimação (taxa de energia térmica gerada e temperaturas) são fortemente influenciados pela área de contato cavaco-ferramenta e pelo posicionamento dos sensores de temperatura. Portanto, a diferença obtida na comparação entre temperaturas estimadas e medidas, são justificáveis pelas dificuldades de se determinar com precisão esses valores. Além disso, simplificações, tal como o modelamento considerando as isotérmicas geradas durante o processo de aquecimento como superfícies elipsoidais, podem ter contribuído para o afastamento das curvas reais em relação às curvas estimadas.

## CAPÍTULO 7

### *SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS*

- Quantificar a influência da dimensão da junção dos termopares e da variação das áreas de contato cavaco-ferramenta nos resultados estimados.
- Medir as propriedades térmicas do material das ferramentas de corte reais para utilização no método proposto.
- Comparar o modelo aqui apresentado com resultados obtidos por modelos bi e tridimensionais.
- Utilizar medições de forças e potência de corte para confrontar os valores de energia térmica estimada com aqueles calculados por estes parâmetros.
- Estender a aplicação do método em usinagem com utilização de fluido de corte.

## CAPÍTULO 8

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRÃO, A. M.; ASPINWALL, D. K. (1997) - "Temperature Evaluation of Cutting Tools During Machining of Hardened Bearing Steel Using Polycrystalline Cubic Boron Nitride and Ceramic Cutting Tools", *Materials Science and Technology*, vol. 13, pp. 445-450.
- ARAÚJO, L. C. P.; FROTA, M. C. R. (1983) - "Introdução ao Cálculo Vetorial", FUMARC/UCMG, Belo Horizonte.
- BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; St. CLAIR, C. R. (1985) - "Inverse Heat Conduction: Ill Posed Problems, Wiley.
- BICKEL, E. (1963) - "The Temperature on a Turning Tool", *International Prod. Eng. Res. Conference - ASME*, pp. 89-94.
- BLOK, H. (1938) - In *Proc. General Discussion in Lubrification and Lubricants*, p. 222, *Instn. Mech. Eng.*, London.
- BORCHARDT, I. G.; GOMES, A. F. (1979) - "Termometria Termoelétrica - Termopares", SAGRA S.A., Porto Alegre.
- CASTO, S. L.; VALVO, E. L.; PIACENTINI, M.; RUISI, V. F.; LUCCHINI, E.; MASCHIO, S. (1994) - "Cutting Temperatures Evaluation in Ceramic Tools: Experimental Tests, Numerical Analysis and SEM Observations", *Annals of the CIRP*, vol. 43, pp. 73-76.
- CHAN, C. H.; CHANDRA, A. (1991) - "A Boundary Element Method Analysis of the Thermal Aspects of Metal Cutting Processes", *Journal of Engineering for Industry*, vol. 113, pp. 311-319.
- DEARNLEY, P. A. (1983) - "New Technique for Determining Temperature Distribution in Cemented Carbide Cutting Tools", *Metals Technology*, vol. 10, pp. 205-214.
- DE SOUZA, A. N. (1996) - "Efeito dos Parâmetros de Usinagem na Área de Contato Cavaco-Ferramenta", *Pesquisa de Iniciação Científica*, Universidade Federal de Uberlândia.
- DUTT, R. P.; BREWER, R. C. (1964) - "On the Theoretical Determination of the Temperature Field in Orthogonal Machining", *The International Journal of Production Research*, vol. 4, n<sup>o</sup> 2, pp. 91-114.
- FERNANDES, J. R. S (1992) - "Projeto e Fabricação de um Dispositivo para Medir Temperatura de Corte no Processo de Torneamento", *Relatório TEC PIBIC - DIRPE N<sup>o</sup> 40-91*, DEEME-UFU, 45 pags.

- FERRARESI, D. (1977) - "Fundamentos da Usinagem dos Metais", Editora Edgard Blücher Ltda., vol. 1, SP, 751 pgs.
- GOTTWEIN, K. (1925) - "Die Messung der Schneidentemperatur beim Abdrehen von Flusseisen", Maschinenbau.
- HANDBOOK SANDVIK (1994) - "Modern Metal Cutting".
- HERBERT, E. G. (1926) - "The Measurement of Cutting Tool Temperature", The Institution of Mechanical Engineers.
- HIRAO, M. (1989) - "Determining Temperature Distribution on Flank Face of Cutting Tool", J. Materials Shaping Technology, vol. 6, n<sup>o</sup> 3, pp. 143-148.
- JAEGER, J. C. (1942). Proc. R. Soc. N. S. W. 78, 203.
- JAESCHKE, J. R.; ZIMMERLY, R. D.; WU, S. M. (1967) - "Automatic Cutting Tool Temperature Control", International Journal Machining Tool Des. Res., vol. 7, pp. 465-475.
- KATO, S.; YAMAGUCHI, K.; WATANABLE, Y.; HIRAIWA, Y. (1976) - "Measurement of Temperature Distribution Within Tool Using Powders of Constant Melting Point", ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 607-613.
- KOTTAUS, H. (1966) - "Processos e Dispositivos de Produção", 3<sup>o</sup> vol., Editora Polígono, São Paulo.
- LAMB, H. (1945) - "Hydrodynamics", sixth edition, DOVER Publications, New York.
- LENZ, E. (1967) - "Temperatures in Metal Cutting", International Conference on Manufacturing Technology, pp. 553-557.
- LIMA, F. R. S. (1996) - "Estudos de Técnicas de Problemas Inversos Bidimensionais. Aplicação em Processos de Usinagem", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia.
- LIN, J.; LEE, S.; WENG, C. (1992) - "Estimation of Cutting Temperature in High Speed Machining", Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 114, pp. 289-290.
- LOEWEN, E. G.; SHAW, M. C. (1954) - Trans. Am. Soc. mech. Engrs 76, 217.
- MACHADO, A. R.; da SILVA, M. B. (1993) - "Usinagem dos Metais", Apostila DEEME - UFU, 174 pgs.
- MARCONDES, F. C. (1990) - "A História do Metal Duro", CPA Consultoria de Projetos e Artes LTDA.

- QURESHI, A. H.; KOENIGSBERGER, F. (1966) - "An Investigation into the Problem of Measuring the Temperature Distribution on the Rake Face of a Cutting Tool", *Annals of the CIRP*, vol. XIV, pp. 189-199.
- SADEK, A. M. (1959) - "Kolkbildung und Temperaturverteilung auf der Spanfläche von Drehmeisseln", Dissertation, München.
- SCHALLBROCH, H.; LANG, M. (1943) - Messung der Schnitttemperatur mittels Temperaturanzeigender Farbanstriche".
- SCHWERD, F. (1933) - "Ueber die Bestimmung des Temperaturfeldes beim Spanablauf".
- SHAW, M. C. (1983) - "Metal Cutting Principles", Oxford Science Publications, 593 pgs.
- SHORE, H. (1925) - "Thermoelectric Measurement of Cutting Tool Temperature", *Journal of the Washington Academy of Sciences*.
- SILVA, V. V.; REIS, G. L. (1981) - "Geometria Analítica", Coleção didática nº 1, UFG Editora, Goiânia.
- SPIEGEL, M. R. (1969) - "Análise Vetorial", Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro.
- STOLZ, G. Jr (1960) - "Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes", *J. Heat Transfer* 82, 20-26.
- TAY, A. O.; STEVENSON, M. G.; DAVIS, G. V.; OXLEY, P. L. B. (1976) - "A Numerical Method for Calculating Temperature Distributions in Machining, from Force and Shear Angle Measurements", *Int. J. Mach. Tool Des. Res.*, vol. 16, pp. 335-349.
- TAYLOR, G. I.; QUINNEY, H. (1934) - *Proc. R. Soc.* A143, 307.
- TAYLOR, G. I.; QUINNEY, H. (1937) - *Proc. R. Soc.* A163, 157.
- TRENT, E. M. (1963) - "Cutting Steel and Iron With Cemented Carbide Tools - Part II: Conditions and Seizure at the Tool Work Interface", *Journal of the Iron and Steel Institute*.
- TRENT, E. M. (1984) - "Metal Cutting", 2nd Edition, Butterworths, London, ISBN 0408108568, 245 pgs.
- TRIGGER, K. J. (1963) - "Temperature in Machining and Their Importance", *International Prod. Eng. Res. Conference - ASME*, pp. 95-101.
- TRIGGER, K. J.; CHAO, B. T. (1951) - *Trans. Am. Soc. mech. Engrs* 73, 57.
- WEINER, J. (1955) - *Trans. Am. Soc. mech. Engrs* 77, 1331.

YEN, D. W.; WRIGHT, P. K. (1986) - "A Remote Temperature Sensing Technique for Estimating the Cutting Interface Temperature Distribution", Transactions of the ASME, vol. 108, pp. 252-263.

## CAPÍTULO 9

### APÊNDICE A

#### DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA PARA OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE CALOR EM COORDENADAS ELIPSOIDAIIS

##### 9.1. TEORIA SOBRE COORDENADAS CURVILÍNEAS

Segundo SPIEGEL (1969), a transformação entre as coordenadas de um ponto  $(x, y, z)$  do sistema cartesiano para um ponto  $(u, v, w)$  no espaço, se define por meio das seguintes relações,

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \quad (9.1a, b, c)$$

Admite-se que o Jacobiano da transformação seja não nulo. Desta forma,

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9.2)$$

Por conseguinte, em um certo campo do espaço as funções (9.1) possuem inversas, ou seja,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (9.3a, b, c)$$

Superfícies coordenadas são famílias de superfícies que se obtém igualando-se as coordenadas a uma constante (SPIEGEL, 1969). Por exemplo, se  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são constantes, então três famílias de superfícies são,

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2 \quad \text{e} \quad w(x, y, z) = c_3. \quad (9.4a, b \text{ e } c)$$

Assim se  $v$  e  $w$  são constantes, (9.1) representa a curva  $u$ . De maneira similar, temos curvas  $v$  e curvas  $w$ . Estas três curvas se chamam *curvas coordenadas*. Como as três curvas coordenadas não são em geral linhas retas, como no sistema de coordenado retangular, tais sistemas coordenados se chamam *coordenadas curvilíneas*.

Se  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  é o vetor posição de um ponto  $P$ , (9.1) podem ser escritos da seguinte forma :  $\vec{r} = \vec{r}(u, z, w)$ .

Um vetor tangente à curva  $u$  em  $P$  (para o qual  $v$  e  $w$  são constantes) é  $\partial\vec{r}/\partial u$ . Logo um vetor tangente unitário nessa direção é,

$$\vec{e}_u = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} / \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \right|, \quad (9.5)$$

donde,

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = h_u \vec{e}_u, \quad (9.6)$$

portanto,

$$h_u = \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \right|. \quad (9.7)$$

Da mesma forma se  $\vec{e}_v$  e  $\vec{e}_w$  são os vetores tangentes unitários às curvas  $v$  e  $w$  em  $P$  respectivamente, tem-se,

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = h_v \vec{e}_v \quad \text{e} \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} = h_w \vec{e}_w, \quad (9.8a \text{ e } b)$$

onde,

$$h_v = \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right| \quad \text{e} \quad h_w = \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} \right| \quad (9.9a \text{ e } b)$$

As quantidades  $h_u, h_v, h_w$  são chamados, *fatores de proporcionalidade*. Os vetores unitários  $\bar{e}_u, \bar{e}_v$  e  $\bar{e}_w$ , têm o sentido do crescimento de  $u, v$  e  $w$  respectivamente.

Através das variáveis descritas anteriormente, pode-se desenvolver uma equação para expressar o Laplaceano de uma determinada função escalar  $(\nabla^2 f)$  em função de coordenadas curvilíneas gerais. Seja  $f = f(u, v, w)$  uma função escalar das coordenadas curvilíneas e  $\vec{F} = \vec{F}_u \bar{e}_u + \vec{F}_v \bar{e}_v + \vec{F}_w \bar{e}_w$  uma função vetorial, ambas admitindo derivadas parciais de 1ª ordem (de 2ª para o caso da fórmula do Laplaceano). Sabe-se do cálculo vetorial que  $\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} f]$ , ou seja, o Laplaceano de uma função escalar  $f$  é igual ao divergente do gradiente de  $f$  (ARAÚJO e FROTA, 1983). Se  $f = f(x, y, z)$ , tem-se,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}. \quad (9.10)$$

Como,

$$f = f(u, v, w) = f[u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)], \quad (9.11)$$

derivando  $f$  em relação a  $x, y$  e  $z$ , tem-se,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9.13)$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (9.14)$$

Substituindo-se (9.12), (9.13) e (9.14) em (9.10) e ordenando-se convenientemente, obtém-se,

$$\bar{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \bar{k} \right) + \frac{\partial f}{\partial w} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \bar{k} \right). \quad (9.15)$$

As expressões entre parênteses na Equação (9.15) representam respectivamente  $\bar{\nabla}u$ ,

$\bar{\nabla}v$  e  $\bar{\nabla}w$ . Logo,

$$\bar{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial u} \bar{\nabla}u + \frac{\partial f}{\partial v} \bar{\nabla}v + \frac{\partial f}{\partial w} \bar{\nabla}w. \quad (9.16)$$

Porém sabe-se que,

$$\bar{e}_u = h_u \bar{\nabla}u \Rightarrow \bar{\nabla}u = \frac{1}{h_u} \bar{e}_u, \quad (9.18)$$

$$\bar{e}_v = h_v \bar{\nabla}v \Rightarrow \bar{\nabla}v = \frac{1}{h_v} \bar{e}_v, \quad (9.19)$$

$$\text{e } \bar{e}_w = h_w \bar{\nabla}w \Rightarrow \bar{\nabla}w = \frac{1}{h_w} \bar{e}_w.$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \bar{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \bar{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \bar{e}_w. \quad (9.20)$$

A Equação (9.20) fornece a expressão do gradiente de uma função escalar

$f = f(u, v, w)$  para qualquer sistema de coordenadas curvilíneas.

Passa-se agora à demonstração da equação geral para o cálculo do divergente de  $f$ .

Sabe-se que  $\bar{\nabla}u = \bar{e}_u/h_u$ ,  $\bar{\nabla}v = \bar{e}_v/h_v$  e  $\bar{\nabla}w = \bar{e}_w/h_w$ . Logo,

$$\bar{\nabla}v \times \bar{\nabla}w = \frac{\bar{e}_v \times \bar{e}_w}{h_v h_w} = \frac{\bar{e}_u}{h_u}, \quad (9.21)$$

$$\bar{\nabla}_w \times \bar{\nabla}_u = \frac{\bar{e}_v \times \bar{e}_w}{h_w h_v} = \frac{\bar{e}_v}{h_w h_v} \quad (9.22)$$

$$\text{e } \bar{\nabla}_u \times \bar{\nabla}_v = \frac{\bar{e}_u \times \bar{e}_v}{h_u h_v} = \frac{\bar{e}_w}{h_u h_v} \quad (9.23)$$

Portanto,

$$\bar{e}_u = h_v h_w \bar{\nabla}_v \times \bar{\nabla}_w, \quad (9.24)$$

$$\bar{e}_v = h_w h_u \bar{\nabla}_w \times \bar{\nabla}_u \quad (9.25)$$

$$\text{e } \bar{e}_w = h_u h_v \bar{\nabla}_u \times \bar{\nabla}_v. \quad (9.26)$$

Calculando-se agora os divergentes de  $(F_i \bar{e}_i, i = u, v, w)$ , tem-se,

$$\bar{\nabla}(F_u \bar{e}_u) = \bar{\nabla}(F_u h_v h_w \bar{\nabla}_v \times \bar{\nabla}_w), \quad (9.27)$$

$$\bar{\nabla}(F_v \bar{e}_v) = \bar{\nabla}(F_v h_w h_u \bar{\nabla}_w \times \bar{\nabla}_u) \quad (9.28)$$

$$\text{e } \bar{\nabla}(F_w \bar{e}_w) = \bar{\nabla}(F_w h_u h_v \bar{\nabla}_u \times \bar{\nabla}_v), \quad (9.29)$$

então,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}(F_u \bar{e}_u) &= \bar{\nabla}(F_u h_v h_w) \bar{\nabla}v \times \bar{\nabla}w + F_u h_v h_w \bar{\nabla}(\bar{\nabla}v \times \bar{\nabla}w) = \\
&= \bar{\nabla}(F_u h_v h_w) \frac{\bar{e}_v}{h_v} \times \frac{\bar{e}_w}{h_w} + 0 = \bar{\nabla}(F_u h_v h_w) \frac{\bar{e}_u}{h_v h_w} = \\
&= \left[ \frac{\bar{e}_u}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\bar{e}_v}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} (F_u h_v h_w) + \frac{\bar{e}_w}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} (F_u h_v h_w) \right] = \\
&= \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w)
\end{aligned} \tag{9.30}$$

De maneira análoga,

$$\bar{\nabla}(F_v \bar{e}_v) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (F_v h_u h_w) \tag{9.31}$$

$$\tag{9.32}$$

$$\text{e } \bar{\nabla}(F_w \bar{e}_w) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (F_w h_u h_v).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla} \cdot F &= \bar{\nabla}(F_u \bar{e}_u + F_v \bar{e}_v + F_w \bar{e}_w) = \bar{\nabla}(F_u \bar{e}_u) + \bar{\nabla}(F_v \bar{e}_v) + \bar{\nabla}(F_w \bar{e}_w) = \\
&= \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (F_v h_u h_w) + \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (F_w h_u h_v) = \\
&= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (F_w h_u h_v) \right]
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Sabendo-se que  $\bar{\nabla}f = \frac{\bar{e}_u}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\bar{e}_v}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\bar{e}_w}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w}$  e fazendo-se  $\bar{F} = \bar{\nabla}f$ , tem-se que,

$$\tag{9.34}$$

$$F_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\tag{9.35}$$

$$F_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$e F_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot F &= \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} f = \nabla^2 f = \bar{\nabla}(F_u \bar{e}_u + F_v \bar{e}_v + F_w \bar{e}_w) = \bar{\nabla}(F_u \bar{e}_u) + \bar{\nabla}(F_v \bar{e}_v) + \bar{\nabla}(F_w \bar{e}_w) = \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} h_v h_w \right) + \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} h_u h_w \right) + \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} h_u h_v \right) = \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.37)$$

## 9.2. TEORIA SOBRE QUÁDRICAS

Quádricas são superfícies geradas à partir de equações que possuem em suas formulações variáveis quadráticas tais como  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (SILVA e REIS, 1981). Desta forma, as superfícies quádricas básicas são o elipsóide, o hiperbolóide, o parabolóide, o cone e a superfície cilíndrica. Abaixo serão descritos os dois primeiros tipos de superfícies.

### Elipsóide

A equação em coordenadas cartesianas do elipsóide genérico é dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (9.38)$$

onde,  $a^2 > b^2 > c^2$  com  $a^2$ ,  $b^2$  e  $c^2 \neq 0$ , são os semi-eixos do elipsóide.

## Hiperbolóide

A superfície gerada pela rotação de uma hipérbole em torno de um de seus eixos é chamada hiperbolóide de revolução. Se a rotação da hipérbole se dá em torno do eixo que contém os focos, a superfície obtida é um hiperbolóide de revolução de duas folhas. A superfície obtida girando-se a hipérbole em torno do seu outro eixo de simetria é o hiperbolóide de uma folha.

As equações descritas abaixo representam superfícies hiperbólicas.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - hiperbolóide de uma folha com eixo de simetria } y. \quad (9.39)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - hiperbolóide de uma folha com eixo de simetria } z. \quad (9.40)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - hiperbolóide de uma folha com eixo de simetria } x. \quad (9.41)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - hiperbolóide de duas folhas com eixo de simetria } z. \quad (9.42)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - hiperbolóide de duas folhas com eixo de simetria } y. \quad (9.43)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - hiperbolóide de duas folhas com eixo de simetria } x. \quad (9.44)$$

### 9.3. SISTEMA DE COORDENADAS ELIPSÓIDAIAS

O sistema de coordenadas elipsóidais é um sistema do tipo ortogonal triplo de superfícies, o qual é caracterizado pelo fato de em cada ponto (que define a interseção entre as três superfícies coordenadas), os planos tangentes às superfícies através de quaisquer duas famílias serem perpendiculares.

Este sistema é formado pelas quádricas confocais definidas pela equação genérica,

(9.45)

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} - 1 = 0$$

Através de um dado ponto qualquer  $(x, y, z)$  passam três superfícies do sistema, correspondendo às três raízes de (9.45). Se  $a > b > c$ , uma destas raízes ( $\xi$ ) variará entre  $\infty$  e  $-c^2$ , outra ( $\eta$ ) entre  $-c^2$  e  $-b^2$ , e a terceira ( $\zeta$ ) entre  $-b^2$  e  $-a^2$ . As superfícies  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  são, conseqüentemente, elipsóides, hiperbolóides de uma folha e hiperbolóides de duas folhas, respectivamente.

#### 9.4. OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS ELIPSOIDAIAS

Através da definição de  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , deduz-se imediatamente que,

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} - 1 = \frac{(\xi - \theta)(\eta - \theta)(\zeta - \theta)}{(a^2 + \theta)(b^2 + \theta)(c^2 + \theta)}. \quad (9.46)$$

Então multiplicando-se (8.44) por  $a^2 + \theta$  e, pondo  $\theta = -a^2$ , obtém-se a primeira das seguintes expressões,

$$x^2 = \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad (9.47)$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \quad (9.48)$$

$$\text{e } z^2 = \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}, \quad (9.49)$$

portanto,

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}. \quad (9.50)$$

Fazendo a derivada de  $x$  em relação a  $\xi$  na Equação (9.50), tem-se,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{x}{(a^2 + \xi)}, \quad (9.51)$$

da mesma forma,

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{y}{(b^2 + \xi)} \quad (9.52)$$

$$\text{e } \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{z}{(c^2 + \xi)}. \quad (9.53)$$

Pela definição de fator de proporcionalidade citada anteriormente, tem-se,

$$h_{\xi} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} \right\}. \quad (9.54)$$

Diferenciando (9.46) com relação a  $\theta$  e, posteriormente, fazendo-se  $\theta = \xi$  resulta,

$$-\frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} - \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} - \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} = \frac{\xi\zeta - \zeta\eta - \xi^2 + \xi\eta}{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}. \quad (9.55)$$

Multiplicando-se ambos os lados de (9.55) por  $(-1)$  e simplificando, obtém-se,

$$\frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} = \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}, \quad (9.56)$$

portanto,

$$h_{\xi}^2 = \frac{1}{4} \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}, \quad (9.57)$$

$$h_{\eta}^2 = \frac{1}{4} \frac{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}{(a^2 + \eta)(b^2 + \eta)(c^2 + \eta)} \quad (9.58)$$

$$\text{e } h_{\zeta}^2 = \frac{1}{4} \frac{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}{(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)(c^2 + \zeta)}. \quad (9.59)$$

Substituindo-se os valores de (9.57), (9.58) e (9.59) em (9.37), pode-se obter a expressão de  $\nabla^2 f$  em termos de coordenadas elipsoidais, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = & -\frac{4}{(\eta - \zeta)(\zeta - \xi)(\xi - \eta)} \left[ (\eta - \zeta) \left\{ (a^2 + \xi)^{1/2} (b^2 + \xi)^{1/2} (c^2 + \xi)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right\}^2 + \right. \\ & + (\zeta - \xi) \left\{ (a^2 + \eta)^{1/2} (b^2 + \eta)^{1/2} (c^2 + \eta)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right\}^2 + \\ & \left. + (\xi - \eta) \left\{ (a^2 + \zeta)^{1/2} (b^2 + \zeta)^{1/2} (c^2 + \zeta)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\}^2 \right] f. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Se  $f$  for a temperatura  $\Phi$ , pode-se deduzir a equação fenomenológica da difusão de calor em coordenadas elipsoidais como,

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{(\eta - \zeta)(\zeta - \xi)(\xi - \eta)} \left[ (\eta - \zeta) \left\{ (a^2 + \xi)^{1/2} (b^2 + \xi)^{1/2} (c^2 + \xi)^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right\}^2 + \right. \\ & + (\zeta - \xi) \left\{ (a^2 + \eta)^{1/2} (b^2 + \eta)^{1/2} (c^2 + \eta)^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right\}^2 + \\ & \left. + (\xi - \eta) \left\{ (a^2 + \zeta)^{1/2} (b^2 + \zeta)^{1/2} (c^2 + \zeta)^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\}^2 \right] = \rho c \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.61)$$

# CAPÍTULO 10

## APÊNDICE B

### ALGORITMOS NUMÉRICOS

O pacote computacional desenvolvido consiste de um programa principal denominado ESTIMA, o qual invoca diretamente a função EUREKA e indiretamente as funções GAUSS, FUNC1 e FUNC2. Todo o pacote foi desenvolvido em MATLAB 5.0.

#### 10.1. ESTIMA (Programa principal)

```
% Universidade Federal de Uberlândia
% Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
% Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
% Laboratório de Ensino e Pesquisa em Usinagem - LEPU
% Laboratório de Transferência de Calor e de Massa - LTCM

% Programa que estima a temperatura de interface cavaco-
% ferramenta no processo de torneamento utilizando
% problemas inversos em condução de calor (IHCP)

% Aluno Autor: Eng. Anderson Clayton Alves de Melo (DEEME-UFU)
% Professor Orientador: Dr. Álisson Rocha Machado (DEEME-UFU)
% Professor Co-orientador: Dr. Gilmar Guimarães (DEEME-UFU)

% Uberlândia, 31 de junho de 1997.

clc;
clear all;
close all;
```

```
path('z:\acamelol\nov',path);
disp ('Aguarde um momento. Processando ...');
```

```
% Inicializa importantes valores de definição
```

```
ttela = get(0,'ScreenSize');
ttela(1:2) = [0 0];
set(0,'DefaultFigurePosition',ttela);
clear ttela;
```

```
fig = figure(...
    'NumberTitle','off',...
    'Name','ESTIMA - RESULTADOS');
clear fig;
```

```
fid = fopen('z:\acamelol\nov\7100754.dat','r');
Y = fscanf(fid,'%f');
```

```
status = fclose(fid);
clear status, fid;
```

```
[t_arq_temp aux] = size(Y);
clear aux;
```

```
r = 3;
Y0 = Y(1);
```

```
t_vet_fce = t_arq_temp-r+1;
```

```
Q = 1; Ti = 0; Tinf = 0;
```

```
[fi] = eureka(t_arq_temp,Q,Ti,Tinf,t_vet_fce);
```

```

for ii = 1:t_arq_temp
    fi(ii) = fi(ii+1);
end

somafi = 0;

for ii = 1:r
    somafi = somafi+fi(ii)^2;
end

for ii = 1:r
    K(ii) = fi(ii)/somafi;
end

clear somafi;

for ii = 2:t_vet_fce+r-1
    deltafi(ii-1) = fi(ii)-fi(ii-1);
end

q(1) = 0;

for ii = 1:r
    q(1) = q(1)+K(ii)*(Y(ii)-Y0);
end

for M = 2:t_vet_fce
    soma1 = 0;
    for ii = 1:r
        soma2=0;
        for jj = 1:M-1

```

```

        soma2 = soma2+(q(jj)*deltafi(M-1+ii-jj));
    end
    soma1 = soma1+K(ii)*(Y(M+ii-1)-soma2-Y0);
end
q(M) = soma1;
end

Ti = Y(1); Tinf = 27;

[fi,T,teta,a,ntempos,deltat] = eureka(t_arq_temp,q,Ti,Tinf,t_vet_fce);

[t_vet_t aux] = size(T);
clear aux;

time = deltat/2:deltat:(t_vet_t-1)*deltat+deltat;

% Plota resultados gráficos

subplot(2,2,1)
tempo = 1:deltat:(t_arq_temp)*deltat;
plot(tempo,Y,'r+')
title('Temperaturas medidas')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('temperatura (°C)')
grid

subplot(2,2,2)
plot(time,q,'c+')
title('Taxa de energia térmica estimada')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('Energia térmica (W)')
grid

```

```

subplot(2,2,3)
plot(tempo,Y,'+c')
hold on
plot(time,T(:,20),'og')
title('Temperaturas estimadas X Temperaturas medidas na aresta inferior oposta')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('temperatura (°C)')
grid

```

```

subplot(2,2,4)
plot(time,T(:,1),'+')
title('Temperaturas estimadas na interface cavaco-ferramenta')
xlabel('tempo(s)')
ylabel('temperatura (°C)')
grid

```

% Gera arquivos de temperaturas medidas e estimadas

```

arq = [time; q];
fid = fopen('z:\acamelol\arq_sai\cap075q.sai','w');
fprintf(fid,'%6.2f %12.3fn',arq);
status = fclose(fid);

```

```

aux1 = T(:,1);
arq1 = [time; aux1];
fid = fopen('z:\acamelol\arq_sai\cap075e.sai','w');
fprintf(fid,'%6.2f %12.3fn',arq1);
status = fclose(fid);

```

```

aux2 = T(:,20);
arq2 = [time; aux2];
fid = fopen('z:\acamelol\arq_sai\cap075p.sai','w');

```

```
fprintf(fid,'%6.2f %12.3fn',arq2);
```

```
aux3 = Y';
```

```
arq3 = [tempo; aux3];
```

```
fid = fopen('z:\acamelol\arq_sailcap075m.sai','w');
```

```
fprintf(fid,'%6.2f %12.3fn',arq3);
```

## 10.2. EUREKA (Função)

```
% Universidade Federal de Uberlândia
```

```
% Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
```

```
% Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
```

```
% Laboratório de Ensino e Pesquisa em Usinagem - LEPU
```

```
% Laboratório de Transferência de Calor e de Massa - LTCM
```

```
% Função para encontrar a solução em diferenças finitas implícitas
```

```
% da equação diferencial em coordenadas elipsoidais do processo
```

```
% de condução de calor na ferramenta de corte.
```

```
% Aluno autor: Eng. Anderson Clayton A. de Melo (DEEME-UFU)
```

```
% Professores Orientadores: Dr. Álisson Rocha Machado, Dr. Gilmar Guimarães e
```

```
% Dr. Carlos Roberto Ribeiro (DEEME-UFU).
```

```
function [fi, T, teta, a, ntempos, deltat] = eureka(tf, q, Ti, Tinf, tq);
```

```
a = 1.77;
```

```
tmalha = 20;
```

```
if Ti == 0
```

```
    tetam = atan(4.76/a);
```

```
    deltateta = tetam/(tmalha-1);
```

```
    pm = tmalha;
```

```

    tmalha = fix(pi/(2*deltateta))+1;
else
    aux1 = -62.9801+a^2;
    aux2 = -22.6576*a^2;
    aux3 = [1 aux1 aux2];
    raizes = roots(aux3);
    raiz = max(raizes);
    tetam = atan(sqrt(raiz)/a);
    deltateta = tetam/(tmalha-1);
    pm = tmalha;
    tmalha = fix(pi/(2*deltateta))+1;
end

k = 0.1;
cp = 0.234;
ro = 0.0158;
deltat = 1;
ntempos = tf+1;
alfa = k/(ro*cp);
A = zeros(tmalha);
A(1,1) = 1;
A(1,2) = -1;

for ii = 2:tmalha-1
    [Aa,Aat,Ap] = func1(a,ii,deltateta,alfa,deltat);
    A(ii,ii-1) = Aa;
    A(ii,ii) = Aat;
    A(ii,ii+1) = Ap;
end

[Aa,Aat,Ap] = func2(a,tmalha,deltateta,alfa,deltat);

```

$A(\text{tmalha}, \text{tmalha}-1) = Aa;$

$A(\text{tmalha}, \text{tmalha}) = Aat;$

for ii = 1:tmalha

$T(1, ii) = T_i;$

end

if  $T_i \sim 0$

    ntempos = tq;

end

$Q = q;$

for p = 1:ntempos-1

    if  $T_i \sim 0$

$Q = q(p);$

    end

$W = k \cdot a \cdot \pi / (4 \cdot \text{deltateta} \cdot Q);$

for ii = 2:tmalha-1

$\text{teta} = \text{deltateta} \cdot (ii-1);$

$\text{eta}(ii) = \text{teta};$

$\text{xis}(ii) = \sqrt{a^2 + a^2 \cdot (\tan(\text{teta}))^2};$

$K = \text{alfa} \cdot \text{deltat} / (\tan(\text{teta})^4 \cdot \text{deltateta}^2 \cdot a^2);$

$\text{co}(ii) = 1 / (K \cdot T(p, ii));$

end

$\text{co}(1) = 1 / (2 \cdot W);$

$\text{co}(\text{tmalha}) = T(p, \text{tmalha}) - A_p \cdot T_{\text{inf}};$

$C = \text{co};$  % monta o vetor de temperaturas

```
clear co;
```

```
[x] = gauss(T,tmalha,A,C,p);
```

```
for ii = 1:tmalha
```

```
    T(p+1,ii) = x(ii);
```

```
end
```

```
end
```

```
fi = T(:,pm);
```

```
teta = 0:deltateta:(10-2)*deltateta;
```

```
teta = [teta];
```

### 10.3. GAUSS (Função)

```
% Universidade Federal de Uberlândia
```

```
% Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
```

```
% Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
```

```
% Laboratório de Ensino e Pesquisa em Usinagem - LEPU
```

```
% Laboratório de Transferência de Calor e de Massa - LTCM
```

```
% Função para resolver o sistema tridiagonal gerado pela função
```

```
% EUREKA usando o método da eliminação gaussiana.
```

```
% Aluno Autor: Eng. Anderson Clayton Alves de Melo (DEEME-UFU)
```

```
function [x] = gauss(T,n,A,C,p)
```

```
    a = [A C];
```

```
    for ii = 2:n-1
```

```

m(ii) = a(ii,ii-1)/a(ii-1,ii-1);
a(ii,ii-1) = 0;
a(ii,ii) = m(ii)*a(ii-1,ii)-a(ii,ii);
a(ii,ii+1) = -a(ii,ii+1);
end

m(n) = a(n,n-1)/a(n-1,n-1);
a(n,n-1) = 0;
a(n,n) = m(n)*a(n-1,n)-a(n,n);

for ii = 2:n
    a(ii,n+1) = m(ii)*a(ii-1,n+1)-a(ii,n+1);
end

x(n) = a(n,n+1)/a(n,n);

for ii = n-1:-1:1
    x(ii) = (a(ii,n+1)-a(ii,ii+1)*x(ii+1))/a(ii,ii);
end

```

#### 10.4. FUNC1 (Função)

```

% Universidade Federal de Uberlândia
% Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
% Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
% Laboratório de Ensino e Pesquisa em Usinagem - LEPU
% Laboratório de Transferência de Calor e de Massa - LTCM

% Função para calcular as variáveis e constantes da função EUREKA.

% Autor: Eng. Anderson Clayton Alves de Melo (DEEME-UFU)

```

```
function [Aa,Aat,Ap] = func1(a,ii,deltateta,alfa,deltat);
```

```
teta = deltateta*(ii-1);
```

```
K = alfa*deltat/(tan(teta)^4*deltateta^2*a^2);
```

```
Aa = -1;
```

```
Aat = 2+1/K;
```

```
Ap = -1;
```

### 10.5. FUNC2 (Função)

% Universidade Federal de Uberlândia

% Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

% Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

% Laboratório de Ensino e Pesquisa em Usinagem - LEPU

% Laboratório de Transferência de Calor e de Massa - LTCM

% Função para calcular os coeficientes do sistema no penúltimo

% ponto do domínio discretizado.

% Aluno Autor: Eng. Anderson Clayton Alves de Melo (DEEME-UFU)

```
function [Aa,Aat,Ap] = func2(a,tmalha,deltateta,alfa,deltat);
```

```
teta2 = (tmalha-1)*deltateta;
```

```
teta1 = teta2-deltateta;
```

```
teta3 = pi/2;
```

```
u = 2*alfa*deltat/(tan(teta2)^4*a^2);
```

```
beta1 = (teta1-teta2)*(teta1-teta3);
```

```
beta2 = (teta2-teta1)*(teta2-teta3);
```

```
beta3 = (teta3-teta1)*(teta3-teta2);
```

```
Aa = -u*(1/beta1);
```

FU-00011881-1

$$Aat = 1-u*1/beta2;$$

$$Ap = -u*1/beta3;$$