

# **Teoria de representações: Grupo simétrico e grupo unitário**

Marcelo Rezende Barbosa

Uberlândia

2019

# Teoria de representações: Grupo simétrico e grupo unitário

Marcelo Rezende Barbosa

Trabalho de Conclusão de Curso com orientação do Prof. Dr. Marcel Novaes, apresentado ao instituto de física da Universidade Federal de Uberlândia.

Uberlândia

2019

*Dedico esse trabalho à meu avô, José Pereira, meu “vêi”, que esteve presente em todos os momentos de minha vida, e todas as minhas conquistas. Infelizmente hoje ele não se encontra mais entre nós, e algumas de suas últimas palavras, que me acompanham durante todos esses 4 anos, foram para que eu chegasse onde cheguei.*

# Agradecimentos

- Aos meus pais, Marlene e Otair, que por mais difícil que tenha sido a caminhada sempre estiveram do meu lado me apoiando e me dando forças e condições para continuar;
- Aos meus padrinhos e madrinhas, Benedito Rezende, José Raimundo, Marta Calixto e Elisabete Blanco, que ao lado de meus pais me ajuizaram, aconselharam e deram suporte a todo momento;
- A Keilah e Franco, que foram as pessoas a me receber em uma cidade que era completamente estranha, e me ensinaram e apoiaram da forma que podiam;
- A todos os meus tios e primos, que sempre apoiaram minhas decisões e estavam sempre presentes ajudando no que podiam;
- À minha melhor amiga, Kasmyah Karlla, que foi a pessoa que me deu um porto seguro longe de casa e sempre esteve comigo desde o momento em que nos conhecemos apoiando e dando suporte;
- Ao meu orientador, Professor Dr. Marcel Novaes, por toda sua disponibilidade, paciência, atenção e por sua contribuição ímpar em minha carreira acadêmica;
- Ao professor Marco Aurélio Boselli, que me recepcionou na disciplina de física I, sempre se mostrando presente e muito disposto a ajudar, e hoje encerra um ciclo na disciplina de teoria de campos;
- A todos os amigos que fiz durante esses longos 4 anos de estadia em Uberlândia, que estiveram nos momentos bons e ruins, e nas muitas aventuras.

*“... it is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature in a way that people can feel, without their having some deep understanding of mathematics.”*

Richard P. Feynman

## RESUMO

Nesta monografia estudamos brevemente representações de grupos em sua forma geral e representações do grupo simétrico e do grupo unitário, devido à grande importância que eles apresentam para física teórica. Nesses estudos exploramos a dualidade de Schur-Weyl que surge da comutação entre esses dois grupos para estudar matrizes aleatórias unitárias, mais especificamente a média de produtos de elementos de matrizes unitárias com respeito a medida de Haar, esse estudo recebe o nome de cálculo de Weingarten. Por fim, utilizamos os resultados dos estudos de matrizes unitárias aleatórias para estudar a distribuição de quantidade que envolvam o comutador no grupo unitário, que é dado por:  $C = \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{U}^\dagger \mathcal{V}^\dagger$ .

**Palavras-Chave:** Representações, Unitário, Simétrico, Aleatório, Weingarten.

## ABSTRACT

In this monograph we briefly study representations of groups in their general form and representations of the symmetrical group and the unitary group, due to their great importance for theoretical physics. In these studies we explore the Schur-Weyl duality that arises from the commutation between these two groups to study unitary random matrices, more specifically the average product of unitary matrix elements with respect to the Haar measure, this study is called the Weingarten calculation. Finally, we use the results of the random unitary matrix studies to study the quantity distribution involving the switch in the unitary group, which is given by:  $C = \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{U}^\dagger \mathcal{V}^\dagger$ .

Keywords: Representation, Unitary, Symmetrical, Random, Weingarten.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>12</b>
2.1	Grupos simétrico e Unitário . . . . .	13
2.1.1	Grupo Simétrico . . . . .	14
2.1.2	Grupo Unitário . . . . .	16
2.2	Partições e Tabelas de Young . . . . .	18
2.3	Funções de Schur e Polinômios Simétricos . . . . .	20
2.3.1	Funções de Schur . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Teoria de grupos e representações</b>	<b>22</b>
3.1	Representações . . . . .	22
3.2	A álgebra do grupo . . . . .	23
3.3	Caracteres . . . . .	25
3.4	Produto tensorial de representações . . . . .	26
3.5	Produto cartesiano de grupos . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Dualidade de Schur-Weyl</b>	<b>28</b>
4.1	Projetores e irreps . . . . .	28
4.2	Teorema da dualidade . . . . .	29
4.3	Dualidade de Schur-Weyl . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Representações Simétricas e Unitárias</b>	<b>35</b>
5.1	Representações do Grupo Simétrico . . . . .	35
5.2	Representações do Grupo Unitário . . . . .	40



<i>SUMÁRIO</i>	9
<b>6</b> Integrais matriciais unitárias	<b>44</b>
<b>7</b> Comutadores	<b>51</b>
<b>8</b> Conclusão	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em matemática, física e química, o conceito de grupos é amplamente utilizado em variados contextos: No estudo de simetrias em teorias de campos, relatividade, mecânica clássica e mecânica quântica, nas estruturas atômicas e moleculares, o próprio estudo da álgebra abstrata e em uma infinidade de outros lugares

A teoria de grupos teve sua origem nos trabalhos do matemático francês Evarist Galois (1811-1832) para descrever raízes de equações polinomiais. Outros grandes contribuintes para a teoria foram os famosos matemáticos Leonard Euler (1707-1783), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Joseph Lois Lagrange (1736-1813) e dentre muitos outros que contribuíram para o crescimento da área com estudos em teorias de equações algébricas, teoria dos números e geometria.

A teoria de grupos como conhecida hoje foi inicialmente definida por Arthur Cayley (1821-1895) propondo que: “Um grupo é definido por leis que combinam seus elementos”. Infelizmente para Cayley, essa definição só ganhou aceitação um bom tempo depois com Walther Franz Anton Von Dyck (1856-1934). O estudo de grupos com dimensões infinitas foi iniciado por Felix Klein (1840-1925), Marius Sophus Lie (1842-1899) e Henri Poincaré (1854-1912) que tinham grande interesse em geometria e topologia.

Atualmente na matemática e física modernas os tópicos de teorias de grupos continuam aquecidos graças a novas teorias como teorias de Gauge, cordas, modelo padrão entre outros.

As matrizes aleatórias apareceram pela primeira vez em 1920 nos trabalhos de John Wishart (1898-1956), mas foram ganhar seu real destaque na física teórica com Eugene Wigner (1902-1995). Nos últimos anos a teoria ganhou muita notoriedade pelo fato de estar presente em diversas áreas da física e matemática, como na teoria das cordas, física estatística, teoria dos números e em diante.

D. Weingarten criou uma ponte entre os estudos de grupos clássicos que era interesse de Lie com o estudo de matrizes aleatórias em 1978 [27]. Anos depois, Benoit Collins [5] se voltou aos estudos de Weingarten expandindo grandemente seus trabalhos e nomeando uma importante função como função de Weingarten. Tal função tem como objetivo ser usada para calcular integrais da forma

$$\langle \prod_{n=1}^{k_1} \mathcal{U}_{i_n j_n} \prod_{n=1}^{k_2} \overline{\mathcal{U}}_{m_n l_n} \rangle = \int \prod_{n=1}^{k_1} \mathcal{U}_{i_n j_n} \prod_{n=1}^{k_2} \overline{\mathcal{U}}_{m_n l_n} d\mu(G),$$

onde  $d\mu(G)$  é uma medida sobre o grupo  $G$  e  $\mathcal{U}_{ij}$  são os elementos de matrizes que representam elementos desse grupo.

Aqui vamos trabalhar tópicos gerais de representações de grupos e usar isso como um ferramental poderoso para encontrar um caso particular das funções de Weingarten, que vamos utilizar em alguns exemplos para demonstrar sua utilidade. O caso particular que será estudado é quando  $G$  é o grupo de matrizes unitárias.

Ao final será feito um breve estudo inédito da distribuição de comutadores do grupo unitário do ponto de vista de matrizes aleatórias. Se  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  são matrizes unitárias, obtemos expressões exatas para  $\langle (TrC)^n \rangle$ ,  $\langle Tr(C^n) \rangle$  e uma versão para as funções de Weingarten para calcular  $\langle \prod_{i=1}^n C_{i,j_i} \rangle$ , onde  $C_{ij}$  são elementos de  $C$ .

## Capítulo 2

# Resultados Preliminares

Inicialmente serão enunciados conceitos fundamentais e básicos de teoria de grupos, como a própria definição de grupo, cosets e subgrupos. Também serão apresentados alguns teoremas importantes do tema, mas sem as demonstrações, que podem ser encontradas em qualquer livro padrão e introdutório de teoria de grupos, como [10] por exemplo.

Depois da visão geral sobre os grupos, serão introduzidos os grupos de permutações e unitário que vão estar presentes em todo o texto e desempenham papel principal nas teorias que vamos abordar ao fim da monografia.

**Definição.** O conjunto  $G$  forma um grupo quando uma operação  $\circ$  de elementos de  $G$  está definida e tem as seguintes propriedades:

1. Fechamento: Para todo  $a \in G$  e todo  $b \in G$ , o resultado de  $a \circ b$  também está em  $G$ ;
2. Associatividade: Para todo  $a, b, c \in G$ , tem-se:  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  ;
3. Elemento identidade: Para todo  $a \in G$ , existe um elemento  $e \in G$  tal que  $a \circ e = e \circ a = a$  ;
4. Elemento inverso: Para todo  $a \in G$ , existe um elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ .

Das definições é imediato a prova de que existe um único elemento neutro em todo grupo e que para cada elemento do grupo existe apenas uma inversa. Se além das 4 propriedades mencionadas na definição, um grupo tiver a propriedade de comutação, i.e,  $a \circ b = b \circ a$  para todo  $a, b \in G$ , então ele é dito abeliano ou comutativo.

É claro que pela definição se  $a \circ x = a \circ y$ , então  $x = y$ . Isso implica no teorema do rearranjo:

**Teorema.** *Seja  $G$  um grupo e  $a \in G$ . Seja  $f = f(a)$  uma função de um elemento do grupo (um número atribuído para cada elemento do grupo). Então para qualquer  $f$ , temos:*

$$\sum_{a \in G} f(a) = \sum_{a \in G} f(g \circ a),$$

com  $g \in G$ .

Um conceito importante e que vai ser usado com frequência é o de subgrupos:

**Definição 1.** Seja  $S$  um subconjunto de  $G$ . Então se os elementos de  $S$  satisfazem as 4 propriedades de grupo com a mesma operação que  $G$ ,  $S$  é dito um subgrupo de  $G$ .

Claramente todo grupo possui pelo menos dois subgrupos triviais: A identidade e o próprio grupo.

**Definição 2.** Seja  $S$  um subgrupo com  $h$  elementos de um grupo  $G$  com  $g > h$  elementos. Sejam  $\{e, s_2, \dots, s_h\}$  os elementos de  $S$ . Se  $x$  for um elemento de  $G$  mas não de  $S$ , o conjunto  $\{x, xs_2, \dots, xs_h\}$  é chamado de *coset à esquerda* (ou classe lateral ou conjunto complementar) e é representado por  $xS$ . O mesmo vale para  $\{x, s_2x, \dots, s_hx\}$ , que é chamado de *coset à direita*.

Os cosets tem as seguintes propriedades

1. Os elementos dos cosets não pertencem ao subgrupo que os gera;
2. Se  $x \neq y$ , então  $xS \cap yS = \emptyset$  (o mesmo vale para cosets a direita).

Os cosets de  $S$  tanto a esquerda quanto a direita têm uma característica importante: eles particionam o grupo  $G$ .

**Teorema.** Seja  $S$  um subgrupo qualquer de  $G$ . Então a união de todos os cosets  $x_1S, x_2S, \dots, x_nS$  com  $x_i \in G$  compõem todo grupo  $G$ , i.e,

$$G = \cup_i x_i S. \quad (2.1)$$

Esse é conhecido como teorema de Lagrange e implica que  $|G| = n|S|$ , onde o módulo significa número de elementos.

Com essas informações podemos começar a fechar o foco para os grupos de maior interesse no texto: Grupos simétrico e unitário.

## 2.1 Grupos simétrico e Unitário

Os dois grupos de interesse nesse trabalho são o grupo simétrico  $S_n$  que contém todas as permutações de  $n$  elementos, e o grupo unitário  $U(d)$  que veremos a seguir.

### 2.1.1 Grupo Simétrico

Temos que todo grupo finito é subgrupo de algum grupo de permutação conveniente (teorema de Cayley [1]). Temos então que qualquer representação irredutível de grupos finitos  $H < S_n$ , podem ser obtidas restringindo as representações irredutíveis de  $S_n$  em  $H$ . Esses fatos fazem valer a pena o estudo do grupo simétrico e suas representações irredutíveis, já que os grupos finitos são uma forte ferramenta para muitas áreas da física, como a cristalografia, a matéria condensada, e tantas demais, para o estudo de simetrias pontuais. Exemplos disso são os grupos de simetria de moléculas e as simetrias das redes de Bravais [8,10].

**Definição 3.** O grupo de permutações de  $n$  elementos (ou grupo simétrico  $S_n$ ) é o grupo de mapas bijetivos do conjunto  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , nele mesmo.

É claro que tais mapas admitem uma estrutura de grupo sobre a composição de funções, i.e.,  $\pi \circ \rho \in S_n$  para  $\pi, \rho \in S_n$ , onde  $(\pi \circ \rho)(X) = \pi(\rho(X))$ . Como aqui nos focamos em mapas bijetivos, é claro que existe a inversa.

Como esse grupo contém todas as permutações de  $n$  elementos, temos que a ordem do grupo é  $n!$ .

Se  $\pi$  é uma permutação, existem duas diferentes notações que podemos usar para identificá-la. A notação de duas linhas (two-lines) é o vetor

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Por exemplo se  $\pi \in S_4$  é dado por

$$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 3, \quad \pi(3) = 1 \quad \text{e} \quad \pi(4) = 4,$$

então na notação de duas linhas  $\pi$  é representado por

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podemos também usar a permutação cíclica, onde usamos apenas a segunda linha da notação de duas linhas, e separamos os ciclos. Por exemplo, para o  $\pi$  representado acima, temos a notação cíclica

$$\pi = (231)(4).$$

Nessa notação queremos dizer que o 2 vai para o terceiro lugar, o 3 para o primeiro e o 1 para o segundo, enquanto 4 permanece parado. Dessa interpretação é claro que

$$(231)(4) = (4)(123) = (4)(312).$$

Um  $k$ -ciclo é um ciclo que contém  $k$  elementos. A permutação que estamos trabalhando como exemplo contém um 3-ciclo e um 1-ciclo. O ciclo tipo dessa permutação é denotado por

$$(1^1 2^0 3^1 4^0),$$

e quer dizer que temos um 1-ciclo, zero 2-ciclos, um 3-ciclos e zero 4-ciclos.

Outra maneira de representar o ciclo tipo de uma permutação é usando partições. Uma partição de  $n$  é um conjunto de números inteiros  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  tais que  $\sum_i \lambda_i = n$ . Assim podemos escrever que o ciclo tipo do nosso exemplo é  $(3, 1)$ , que é uma partição de 4 representa que temos um 3-ciclos e um ponto fixo.

Em qualquer grupo  $G$ , elementos  $g$  e  $h$  são conjugados se

$$g = khk^{-1} \tag{2.2}$$

para algum  $k \in G$ . O conjunto de todos os elementos conjugados a  $g$  formam sua classe de conjugação denotada aqui por  $K_g$ . As classes de conjugação são também chamadas de classes de equivalência pelo fato da operação de conjugação ser uma relação de equivalência. As classes de conjugação particionam todo o grupo  $G$ . Para o  $S_n$  podemos aplicar a definição de classes de conjugação e chegar a conclusão que duas permutações estão na mesma classe de conjugação se e somente se possuem o mesmo ciclo tipo. Assim existe uma bijeção natural entre as partições e as classes de conjugação.

Podemos encontrar o tamanho ou ordem de uma classe de conjugação da seguinte forma. Seja  $G$  um grupo qualquer e considere o centralizador de  $g \in G$  definido por:

$$Z_g = \{h \in G | hgh^{-1} = g\},$$

ou seja, o conjunto de todos os elementos que comutam com  $g$ . É fácil notar que os cosets de  $Z_g$ , i.e.,  $kZ_g$  ou  $Z_g k$ , tem uma correspondência um para um com os elementos da classe de conjugação de  $g$ , i.e., para cada elemento da classe de  $g$ , existe um coset de  $Z_g$ . De fato, para  $h \in Z_g$  e  $k \in G$ ,

$$(kh)g(kh)^{-1} = k(hgh^{-1})k^{-1} = k g k^{-1} \in K_g.$$

Então pelo teorema de Lagrange, temos que a ordem de  $K_g$  é

$$|K_g| = \frac{|G|}{|Z_g|}. \tag{2.3}$$

Para o grupo simétrico  $S_n$ , temos que a classe de conjugação de um elemento do grupo pode ser indexada com a partição que representa o seu ciclo tipo, i.e.  $K_\lambda \equiv K_g$  se  $g$  tem ciclo tipo  $\lambda$ .

**Proposição 4.** Se  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n})$  e se  $\pi \in S_n$  tem ciclo tipo  $\lambda$ , então  $|Z_g|$  depende apenas de  $\lambda$  e

$$z_\lambda \equiv |Z_g| = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \dots n^{m_n} m_n! \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Se  $h \in Z_g$  então sua atuação em  $g$  como  $ghg^{-1}$  pode permutar os ciclos de tamanho  $i$  entre eles mesmos, ou pode rodar (ciclicamente) os elementos dentro de um único ciclo (ou ambos). Então existem  $m_i!$  maneiras de realizar a primeira operação citada e  $i^{m_i}$  rotações cíclicas em cada  $i$  – ciclo. O que conclui a prova.  $\square$

Portanto temos que o tamanho das classes de conjugação para o grupo simétrico é dado por

$$K_\lambda = \frac{n!}{z_\lambda}. \quad (2.5)$$

O grupo de permutações pode ser gerado pelas transposições que são permutações de dois elementos, i.e.,  $\tau = (ij)$ . De fato, toda permutação pode ser obtida multiplicando transposições adequadas. Então se  $\pi = \tau_1 \dots \tau_k$ , onde  $\tau_i$  é uma transposição, podemos definir o sinal da permutação  $\pi$  por:

$$\text{sgn}(\pi) = (-1)^k.$$

É óbvio que o sinal satisfaz

$$\text{sgn}(\pi\sigma) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\sigma),$$

o que nos diz que o sinal é uma representação como veremos mais para frente com a definição de representações (muito usada nas regras de seleção da mecânica quântica).

### 2.1.2 Grupo Unitário

Podemos pensar em variedades como hipersuperfícies suaves que podem ser mapeadas localmente no  $\mathbb{R}^n$ , uma definição formal e rigorosa desse conceito pode ser encontrada em livros de análise como [25, 7]. Os grupos de Lie são variedades cujos elementos obedecem uma estrutura de grupo [12]. O grupo geral linear de dimensão  $d$ , que denotamos por  $GL(d)$  é o grupo de matrizes/operadores que podem ser invertidos e é também um grupo de Lie.

**Definição 5.** O grupo unitário é o subgrupo de  $GL(d)$ , tal que

$$U(d) \equiv \{\mathcal{U} \in GL(d) | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{I}_d\}.$$



O grupo unitário é extremamente importante em física. Ele é o responsável por realizar transformações de bases, translações espaciais, rotações e translações temporais, na mecânica quântica. O que explica seu destaque. De fato, todas essas operações são feitas com o grupo unitário pelo fato de que ele preserva o produto escalar, e isso é importante na mecânica quântica, pois mudanças de referenciais não devem mudar os valores observados fisicamente, que estão intimamente relacionados com o produto escalar. Seja  $|v\rangle$  um vetor em uma certa base, e  $|w\rangle = \mathcal{U}|v\rangle$  o vetor transformado por um operador unitário. Temos então que

$$\langle w|w\rangle = \langle v|\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}|v\rangle = \langle v|v\rangle.$$

## Medida Invariante

Em muitos momentos durante o texto será necessário tomar a média sobre todo o grupo para definir algum operador, realizar alguma demonstração, ou algo o que seja. Para grupos discretos isso é um trabalho simples, somas convencionais dão conta do recado. Grupos de Lie no entanto são contínuos, mas possuem uma propriedade importante, que é a compacidade, i.e., são compactos.

Graças ao teorema do rearranjo, podemos escrever

$$\sum_{g \in G} f(g \circ g') = \sum_{h \in G} f(h = g \circ g') = \sum_{g \in G} f(g), \quad (2.6)$$

ou de maneira mais insinuativa

$$\sum_{g \in G} f(g \circ g') = \sum_{g \in G} f(g), \quad (2.7)$$

ou ainda mais, podemos ter que

$$\sum_{g \in G} f(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g). \quad (2.8)$$

Para grupos contínuos, devemos trocar essas somas discretas, por alguma forma de integral

$$\int d\mu_g f(g)$$

que satisfaça relações semelhantes. Para fazer isso precisamos definir a medida  $d\mu_g$  no grupo, de forma que essa integral retorne sempre um valor finito. É claro que a escolha de diferentes tipos de medidas resultaria em diferentes valores, mesmo com a “soma” sobre todo o grupo. Por isso gostaríamos que existisse uma medida invariante, i.e., seja a mesma até quando os elementos do grupo forem reordenados (queremos uma medida que nos de os resultados do teorema do rearranjo no caso contínuo). Ou seja,

$$d\mu_g = d\mu_{g \circ g'} = d\mu_{g' \circ g} = d\mu_{g^{-1}}. \quad (2.9)$$

Infelizmente não é sempre que podemos contar com a existência dessa medida, mas para o nosso em particular ela é garantida pelo teorema:

**Teorema 6.** *Seja  $G$  um grupo compacto. Então existe uma medida  $d\mu(G)$  que satisfaz (2.9), e é única a menos de uma fator de normalização.*

*Essa medida é chamada de medida de Haar.*

Para o grupo unitário (que é compacto) vamos denotar por

$$\int f(\mathcal{U}) d\mu(U)$$

e todos os resultados que vão ser obtidos por meio de somas e que dependem de somas se fazem validos para esse grupo. Uma discussão mais detalhada da medida de Haar e da medida de Haar em grupos de Lie, pode ser encontrada em [24].

## 2.2 Partições e Tabelas de Young

Na seção que trata de grupos de permutação definimos as partições da seguinte forma:

**Definição 7.** *Seja  $n$  um inteiro e  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  um conjunto de inteiros. Se  $\sum_i \lambda_i = |\lambda| = n$ , então dizemos que  $\lambda$  é uma partição de  $n$ , ou dizemos que  $\lambda$  particiona  $n$ . Denotamos isso por  $\lambda \vdash n$ .*

É comum na literatura ordenar uma partição de forma decrescente, ou seja  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  [11,22].

Se  $\lambda$  tem  $l$  elementos dizemos que tem comprimento  $l(\lambda) = l$ .

Definimos o número de partições de  $n$ , por  $p(n)$  ou  $p_n$ . Não existe uma fórmula simples para essa quantidade, mas temos uma função geratriz bem simples:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-t^n} \right). \quad (2.10)$$

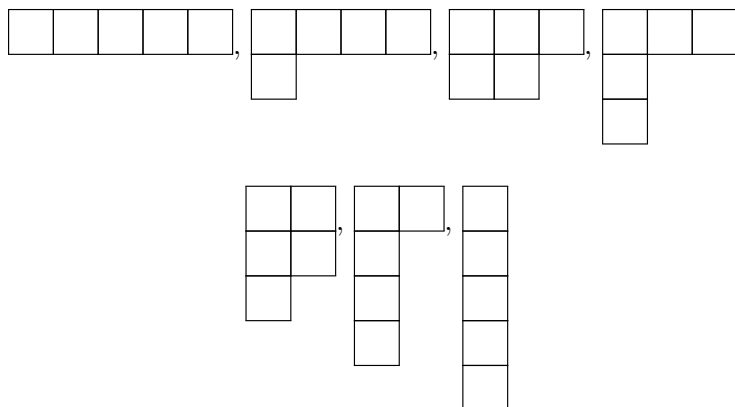
Além da função geratriz simples, para  $n$ 's grandes, Hardy e Ramanujan conseguiram uma fórmula assintótica dada por:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp \left[ \pi \sqrt{\frac{2n}{3}} \right]. \quad (n \gg 1)$$

Podemos representar partições de forma pictórica pelos chamados diagramas de Young (ou Young Frames), que são definidos por:

**Definição 8.** Dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ , um diagrama de Young é uma coleção finita de caixas, organizadas em filas justificadas a esquerda, com  $\lambda_1$  caixas na primeira fila,  $\lambda_2$  na segunda e assim por diante.

Por exemplo, para  $n = 5$



que representam  $(5)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 1)$  e  $(1, 1, 1, 1, 1)$ . Essa representação de partições é importante para obter as representações irredutíveis dos grupos simétrico e unitário. Não é complicado ver que o número de diagramas de Young para um  $n$  é o mesmo número de classes de conjugação do  $S_n$  (lembre da definição de ciclo-tipo).

**Definição 9.** Um diagrama de Young com caixas preenchidas com inteiros é chamado de tabela de Young.

Existem dois tipos de tabela de Young que vão ser de grande interesse no que se segue:

- As *tabelas de Young padrão*  $T$ , que são tabelas de Young preenchidas de forma crescente tanto nas linhas quanto nas colunas.
- As *tabelas de Young semipadrão*  $T$ , que são tabelas de Young preenchidas de forma crescente nas colunas e fracamente crescente (podemos repetir números) nas linhas.

As *tabelas de Young padrão* serão responsáveis pela construções das representações irredutíveis dos grupos simétricos, enquanto as *tabelas de Young semipadrão* irão ser usadas para construir as representações irredutíveis do grupo unitário. Esses fatos irão nos mostrar que *tabelas padrão* e *tabelas semipadrão* são em certo contexto, duais.

Podemos falar do conteúdo de uma tabela de Young usando composições:

**Definição 10.** Seja  $n$  um inteiro qualquer e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$  um conjunto de inteiros *ordenados*, tal que  $\sum_{i=1}^l \alpha_i = n$ . Dizemos que  $\alpha$  é uma composição de  $n$ .

É necessário atenção, quando nos referimos a uma partição, falamos de um conjunto de inteiros independentes da ordem (apesar de *por costume* utilizarmos a ordem decrescente), enquanto quando nos referimos a

uma composição a ordem é importante. O que quero dizer é, que se falamos de partições, qualquer conjunto com inteiros iguais e ordenados de formas diferentes são a mesma partição, enquanto para composições eles são composições diferentes.

É claro que no caso de composições devemos levar em conta os 0's.

**Definição 11.** Seja  $T$  uma tabela de Young com formato  $\lambda$ , e que contém  $\alpha_1$ 's números 1,  $\alpha_2$ 's números 2 e assim por diante. Dizemos que  $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$  é o conteúdo da tabela  $T$ .

Pela definição, é claro que o conteúdo de uma tabela de Young deve ser uma composição.

Definimos como  $f^\lambda$  o número de *tabelas de Young Padrão* com formato  $\lambda$ . Definimos também  $K_{\alpha, \lambda}$  como o número de *tabelas de Young semipadrão* com conteúdo  $\alpha$  e formato  $\lambda$ . Essa última quantidade é amplamente conhecida na matemática discreta e leva o nome de números de Kostka, em homenagem ao matemático Carl Kostka.

Um resultado que se segue para os  $f^\lambda$  é dado pelo seguinte teorema que é demonstrado em [24]:

**Teorema 12.**  $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$ .

## 2.3 Funções de Schur e Polinômios Simétricos

O espaço de funções simétricas  $\Lambda$ , é o espaço de série de potências invariantes sob a ação do grupo de permutações.

Seja  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  um conjunto de variáveis e considere suas séries de potências. O monômio  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \dots$  é dito de grau  $n$  se  $n = \sum_i \lambda_i$ . Se  $f$  é uma função simétrica, então ela é invariante sob a ação

$$\pi f(x_1, x_2, \dots) = f(x_{\pi 1}, x_{\pi 2}, \dots).$$

O espaço  $\Lambda$  tem inúmeras bases, mas aqui vamos considerar duas que vão ser importantes para o que se segue.

O espaço  $\Lambda$  pode ser decomposto como

$$\Lambda = \bigoplus_n \Lambda^n$$

onde  $\Lambda^n$  é o espaço das simétrico das séries de grau  $n$ .

**Definição 13.** Se  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  é um conjunto de variáveis, definimos as funções simétrica de potência, como:

$$p_0 = 1$$

$$p_n = \sum_i x_i^n, \quad n \geq 1 \quad (2.11)$$

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

As funções simétricas de potências têm duas propriedades importantes:

1.

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{|\lambda| - l(\lambda)}}{z_{\lambda}} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y); \quad (2.12)$$

2.

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_{\lambda}} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y), \quad (2.13)$$

onde as somas são sobre as partições de todos os inteiros, que vamos denotar por  $\lambda \in Par$ . Ambas propriedades são facilmente demonstradas.

**Teorema 14.** *Os polinômios simétricos de potência são uma base ortogonal do espaço de funções simétricas.*

### 2.3.1 Funções de Schur

Podemos definir um monômio de ordem  $n$ , usando tabelas de Young [6].

**Definição 15.** Seja  $T$  uma tabela de Young com conteúdo  $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ . Definimos então o monômio relacionado com essa tabela por

$$m(\alpha(T)) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots$$

A definição de  $m(\alpha(T))$ , nos permite definir o que chamamos de funções de Schur:

**Definição 16.** Seja  $SSYT(\lambda)$  o conjunto de todas as *tabelas de Young semipadrão* de formato  $\lambda$ . A função de Schur é definida como

$$s_{\lambda} = \sum_{T \in SSYT(\lambda)} K_{\lambda, \alpha} m(\alpha(T)).$$

Pode ser provado que as funções de Schur são simétricas [6, 22, 26].

**Teorema 17.** *As funções de Schur de grau  $n$  são base do espaço  $\Lambda^n$ .*

A maneira que definimos as funções de Schur não é única. De fato, podemos encontrar outras definições e formas das funções de Schur (todas equivalentes, é claro) em [22, 16, 26].

Todos os fatos básicos foram apresentados aqui, sendo sobre grupos ou não. Nos próximos capítulos focaremos em um estudo geral de representações e em um estudo sobre representações do  $S_n$  e do  $U(d)$ .

## Capítulo 3

# Teoria de grupos e representações

### 3.1 Representações

Seja  $(G, \circ)$  um grupo. Podemos denotar a multiplicação do grupo dada por  $g \circ h$ , pela abreviação  $gh$ . Um homomorfismo entre dois grupos,  $G$  e  $H$  é um mapa  $f : G \rightarrow H$  tal que  $f(gx) = f(g)f(x)$  para todos elementos  $g$  e  $x$  do grupo de saída. Uma representação de um grupo qualquer  $G$  é um homomorfismo que leva esse grupo  $G$ , no grupo geral linear sobre um espaço complexo  $V$ , ou seja  $f : G \rightarrow H$ . Esse espaço vetorial vai ser referido como a representação do grupo (alguns livros costumam dizer  $G$ -módulo), de maneira equivalente, podemos dizer que existe uma ação de  $G$  em  $V$ . Para um vetor  $|v\rangle \in V$ , denotamos a ação de um elemento de  $G$ , como  $g|v\rangle \equiv f(g)|v\rangle$ . Dizemos que duas representações  $V$  e  $W$  são equivalentes se existir um isomorfismo  $\phi : V \rightarrow W$ , que satisfaça  $\phi(g|v\rangle) = g\phi(|v\rangle)$ , ou podemos ver de tal maneira que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ & V \rightarrow W & \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ & V \rightarrow W & \\ & \phi & \end{array}$$

comute. Um espaço  $V$  é dito ser uma representação irredutível de  $G$ , se ele não contiver nenhum subespaço invariante sob ação do grupo, a não ser os espaços triviais, i.e, os únicos subespaços  $W \subseteq V$  tais que  $g|w\rangle \in W$  para todo  $|w\rangle \in W$  e  $g \in G$ , são o espaço nulo  $W = \{0\}$  e o próprio espaço  $W = V$ . Toda representação de um grupo finito, seja ele contínuo ou discreto, pode ser escrita como a soma direta de espaços de representações irredutíveis, e é de onde vem toda a importância de se estudar esse tipo de representações quando se fala de teoria de grupos.

**Teorema 18.** *Seja  $W$  uma representação de um grupo finito  $G$ . Então  $W$  é isomorfo a uma soma direta de representações irredutíveis de  $G$ , ou seja  $W \cong \bigoplus_i V_i$  para representações irredutíveis  $V_i$  de  $G$ .*

*Demonstração.* Se  $(w_1, w_2)$  é um produto escalar em  $W$ , então

$$[w_1, w_2] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gw_1, gw_2)$$

é também um produto escalar em  $W$ , mas é  $G$ -invariante. Dai se segue que se  $V$  é um subespaço invariante de  $W$ , então seu complemento ortogonal  $V^\perp$  em  $W$ , também é invariante. De fato, se  $v \in V$  e  $v^\perp \in V^\perp$ , temos que  $[gv^\perp, v] = [v^\perp, g^{-1}v] = 0$ , desde que a primeira igualdade se dê pela  $G$ -invariância e a segunda por  $g^{-1}v \in V$ . Então podemos ir quebrando o espaço  $W$  em subespaços invariantes e como  $W$  tem dimensão finita, chegará um momento que o algoritmo acaba e temos apenas representações irredutíveis.  $\square$

Sem dúvida alguma podemos afirmar que o resultado mais famoso e importante (o que ficara bem explícito durante o texto) da teoria de grupos e representações é o lema de Schur, devido a Isaac Schur.

**Lema 19.** *Sejam  $V$  e  $W$  irreps (representações irredutíveis) de  $G$ . Se o homomorfismo  $\phi : V \rightarrow W$  comuta com a ação do grupo, então*

- Ou  $\phi$  é um isomorfismo, ou  $\phi = 0$ .
- Se  $V = W$ , então  $\phi = \lambda \mathbb{I}$  para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* É uma constatação direta que  $\text{Ker}\phi$  ( $\text{Im}\phi$ ) (o núcleo e a imagem da transformação  $\phi$ ) são espaços invariantes de  $V$  ( $W$ ) e como  $V$  ( $W$ ) são irreps, eles só podem ser iguais a  $\emptyset$  ou  $V$  ( $W$ ). Então ou  $\phi$  é um isomorfismo ou é o mapa nulo. Para a segunda afirmação devemos lembrar que  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado, isso significa que toda equação nos complexos tem solução nos complexos (não é verdade para os reais). Disso temos que  $\phi$  deve ter um auto valor  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Como  $\text{Ker}(\phi - \lambda \mathbb{I})$  não é um espaço vazio e  $\phi - \lambda \mathbb{I}$  não é um isomorfismo, pela primeira parte do lema ele só pode ser  $\phi - \lambda \mathbb{I} = 0$ .  $\square$

O conjunto de todos os homomorfismos  $\phi : V \rightarrow W$ , forma um espaço vetorial que denotamos por  $\text{Hom}(V, W)$ . Se  $V = W$ , temos o espaço dos endomorfismos, denotado por  $\text{End}(V)$ .

O lema de Schur implica que a decomposição do grupo do teorema 1 é única. Então a classificação de representações de grupos finitos  $G$  é reduzida a classificação de irreps, como já hávia mencionado.

O lema de Schur implica que existe uma matriz  $T$  que realiza o isomorfismo (e é invertível por definição) que comuta com todo elemento de  $G$ . Para ver isso, podemos fazer  $V = W$ , então o isomorfismo  $\phi : V \rightarrow V$ , é dado por uma matriz que satisfaça  $Tf(g) = f(g)T$ , para todo  $g$ . Podemos afirmar ainda mais, a partir da segunda afirmação do lema de Schur, podemos concluir que toda matriz  $T$  que comuta com os elementos do grupo, é uma matriz escalar dada por  $T = \mathbb{I}\lambda$ .

## 3.2 A álgebra do grupo

Antes de começar a trabalhar com o grupo é mais conveniente começar pelo que chamamos de álgebra do grupo, que vamos denotar por  $\mathcal{A}(G)$  e consiste em um espaço vetorial sobre os elementos do grupo. De

forma mais concisa, podemos definir  $\mathcal{A}(G)$ , como o espaço vetorial com elementos  $a = \sum_{g \in G} a(g)g$ , onde  $a(g) \in \mathbb{C}$  e os elementos do grupo  $g$ 's são linearmente independentes e formam uma base desse espaço. A dimensão desse espaço é claramente a dimensão do grupo. Chamamos esse espaço de álgebra do grupo pois além da estrutura de um espaço vetorial ele tem uma estrutura de produtos definida pela operação do grupo  $(g, h) \mapsto gh$  o que transforma esse espaço em uma coisa que leva o nome de álgebra: dois elementos nesse espaço podem ser operados de forma a dar outro elemento como

$$ab = \left( \sum_g a(g)g \right) \left( \sum_h b(h)h \right) = \sum_{g,h} a(g)b(h)(gh) = \sum_x \left( \sum_y a(xy^{-1})b(y) \right) x. \quad (3.1)$$

Em outras palavras, uma álgebra é um espaço vetorial com um produto definido entre os elementos.

Uma interpretação para a álgebra do grupo é que ela representa também o espaço de funções  $a : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Para duas funções  $a(x)$  e  $b(x)$ , podemos definir o produto como (baseado em (3.1))

$$(a \star b) = \sum_y a(xy^{-1})b(y) \quad (3.2)$$

Podemos definir também o adjunto de  $a(x)$  como sendo

$$a^*(x) = \overline{a(x^{-1})} \quad (3.3)$$

Podemos então estender o conceito de representação de um grupo para a álgebra desse grupo pelo seguinte teorema.

**Teorema 20.** *Se  $V$  é uma representação unitária de  $G$  (o teorema 1 garante que seja verdade). A definição de representação dos elementos do grupo  $G$  se estende de forma linear para os elementos  $a \in \mathcal{A}(G)$ :*

$$V(a) = \sum_g a(g)V(g), \quad (3.4)$$

e obedecem à

$$V(a+b) = V(a) + V(b)$$

$$V(a \star b) = V(a)V(b)$$

$$V(a^*) = V(a)^*$$

$$V(e) = \mathbb{I}.$$



Esse teorema se segue de maneira direta pela forma que definimos representações e  $\mathcal{A}(G)$ .

Podemos definir para a álgebra do grupo um produto interno

$$(f, g) = \sum_{x \in G} \overline{f(x)}g(x), \quad f, g \in \mathcal{A}(G).$$

Podemos definir o conjunto de classes de irreps de  $G$  com a notação  $\widehat{G}$ . Para cada  $\alpha \in \widehat{G}$  temos uma irrep unitária que denotaremos por  $V_\alpha$  e tem elementos de matrizes denotados por  $V_{\alpha,ij}$  onde  $i, j \in \{1, \dots, d_\alpha := \dim V_\alpha\}$ . Então segue o seguinte teorema [22].

**Teorema 21.** *As funções  $\sqrt{d_\alpha}V_{\alpha,ij}(g)$  são ortogonais e bases de  $\mathcal{A}(G)$ , i.e.*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{V_{\alpha,ij}(g)} V_{\beta,kl}(g) = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (3.5)$$

e os elementos correspondentes a um  $\alpha$  fixo são fechados segundo a multiplicação

$$\left( \frac{d_\alpha}{|G|} V_{\alpha,ij} \star \frac{d_\beta}{|G|} V_{\beta,kl} \right) (x) = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{jk} \frac{d_\alpha}{|G|} V_{\alpha,il}(x). \quad (3.6)$$

Uma forma de avaliar representações é ver como se comportam em relação aos seus mapeamentos uma nas outras, então é interessante avaliar invariantes. Por esse motivo aqui introduzimos os caracteres que são os mesmos para irreps equivalentes.

### 3.3 Caracteres

Lembrando que em qualquer grupo  $G$ , elementos  $g$  e  $h$  são conjugados se

$$g = khk^{-1}$$

para algum  $k \in G$ . O conjunto de todos os elementos conjugados a  $g$  forma a classe de conjugação de  $g$ .

Dizemos que  $f$  é uma função de classe se ela é uma função da álgebra do grupo  $\mathcal{A}(G)$  e é constante nas classes de conjugação, i.e

$$f(y) = f(xy x^{-1}) \quad \forall x, y \in G. \quad (3.7)$$

Seja  $\mathcal{Z}(G)$  o conjunto de funções de classe, não é complicado ver que  $\mathcal{Z}(G)$  é o centro de  $\mathcal{A}(G)$ , ou seja, consiste de todos os elementos  $f \in \mathcal{A}(G)$  que  $f \star g = g \star f$  para todo  $g \in \mathcal{A}(G)$ . O caracter de uma representação  $V$  de  $G$  é definido por

$$\chi(g) = \text{Tr}V(g). \quad (3.8)$$

Da definição de caracter é claro que ele é uma função de classe.

**Teorema 22.** *Os caracteres  $\chi_\alpha$  formam uma base ortonormal de  $\mathcal{L}(G)$ , i.e*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha(g) \overline{\chi_\beta(g)} = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.9)$$

*Demonstração.* A prova desse teorema segue de maneira direta de (3.5) □

Como  $\mathcal{L}(G)$  tem a mesma dimensão igual ao número de classes de conjugação por definição e um espaço de dimensão  $\dim \mathcal{L}(G)$  só pode ter  $\dim \mathcal{L}(G)$  mutuamente ortogonais, segue que  $|\widehat{G}| = \dim \mathcal{L}(G)$ , i.e., o número de classes de conjugação é o mesmo número de irreps.

Se uma representação redutível contém  $m_\alpha$  representações equivalentes à  $V_\alpha$ , escrevemos sua decomposição como  $V \cong \bigoplus_\alpha V_\alpha^{\oplus m_\alpha}$  e isso implica que podemos escrever o caracter de  $V$ , como  $\chi_V = \sum_\alpha m_\alpha \chi_\alpha$ .

Podemos definir a ação do grupo  $G$  na sua álgebra  $\mathcal{A}(G)$ , utilizando a multiplicação usual do grupo, essa ação da origem a uma representação que é denominada a representação regular de  $G$  que vamos denotar por  $R$ .

**Corolário 23.** *Se  $d_\alpha$  é a dimensão da irrep  $V_\alpha$ , então podemos decompor a representação regular como*

$$R \cong \bigoplus_\alpha V_\alpha^{\oplus d_\alpha}$$

*Demonstração.* Podemos escrever o caracter da representação regular como  $\chi_R = \sum_\alpha m_\alpha \chi_\alpha$ . Podemos então encontrar o coeficiente  $m_\alpha$ , fazendo o produto escalar  $(\chi_R, \chi_\alpha) = m_\alpha$ , truque muito comum no eletromagnetismo e mecânica quântica. No entanto, pela definição da representação regular, o único caracter diferente de zero é o da identidade, que dá exatamente a dimensão da representação regular que já sabemos ser a ordem do grupo, então por (3.9), temos que  $(\chi_R, \chi_\alpha) = \chi_\alpha(e) = d_\alpha$ . □

Desse resultado, temos de maneira direta a fórmula da dimensionalidade (basta olha para  $\chi_R(e)$ ) para grupos finitos  $|G| = \sum_\alpha d_\alpha^2$ .

### 3.4 Produto tensorial de representações

Sejam  $V$  e  $W$  duas representações de  $G$ . Podemos definir o produto tensorial dessas representações como

$$(V \otimes W)(g) = V(g) \otimes W(g). \quad (3.10)$$

Podemos reparar que  $G$  age simultaneamente em  $V$  e  $W$ , então  $V \otimes W$  é uma representação de  $G$  e não de  $G \times G$ . Esse é o motivo de em geral  $V \otimes W$  não ser uma irrep mesmo se separadamente  $V$  e  $W$  o forem.

Dessa forma se fizermos o produto tensorial de duas irreps, podemos decompô-la em outras irreps, como foi mostrado na seção anterior, i.e.

$$V_\alpha \otimes V_\beta = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} n_{\alpha\beta}^\gamma V_\gamma.$$

Os coeficientes  $n_{\alpha\beta}^\gamma$  são conhecidos como inteiros de Clebsh-Gordan de  $G$ . Esses são os coeficientes de Clebsh-Gordan da soma de Spins.  $n_{\alpha\beta}^\gamma$  tem a mesma interpretação que  $m_\alpha$  tem para  $V$ , ele conta quantas vezes  $V_\gamma$  se repete em  $V_\alpha \otimes V_\beta$ .

Na física, o estudo dos caracteres combinados com o produto tensorial de representações de grupos de simetria em pontos redes de Bravais, fornecem as conectividades da figura de dispersão dos fônons de rede [8].

### 3.5 Produto cartesiano de grupos

Se  $G$  e  $H$  são grupos, podemos induzir um grupo  $G \times H$  através do produto cartesiano e que tem a multiplicação dada por

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2). \quad (3.11)$$

Se  $V$  e  $W$  são representações de  $G$  e  $H$  respectivamente, podemos definir a representação de produto externo, dada por  $V \otimes W(g, h)$  como  $V(g) \otimes W(h)$ . Se  $V$  e  $W$  são irrep, então  $V \otimes W$  também é uma irrep de  $G \times H$  e a volta é válida, se  $V \otimes W$  é uma irrep, suas componentes também são. Vale notar a diferença entre a definição dessa seção com a da seção anterior. Aqui definir a ação de maneira individual, cada grupo age no seu espaço de representação, enquanto na seção anterior a ação é de um grupo de maneira conjunta no produto tensorial de espaços. Então devemos ter cuidado para não confundir a representação de produto externo de  $G \times H$  com o produto tensorial de representações.

## Capítulo 4

# Dualidade de Schur-Weyl

Aqui com os conceitos e resultados gerais de teoria de representações apresentados no capítulo anterior, vamos trabalhar para montar as representações do grupo simétrico e do grupo unitário, e mostrar que esses dois grupos carregam uma relação de dualidade um com relação ao outro.

### 4.1 Projetores e irreps

Nos baseando no teorema 4, podemos definir a seguinte quantidade  $C_\alpha \in \mathcal{A}(G)$ , por:

$$C_\alpha = \frac{d_\alpha}{|G|} \chi_\alpha = \sum_{g \in G} \frac{d_\alpha}{|G|} \chi_\alpha(g) g. \quad (4.1)$$

Essa quantidade chamaremos aqui de projetor (na literatura ela também é denotada por mínimo projetor central) e goza das seguintes propriedades:

1.  $C_\alpha$  é ídem potente, i.e.

$$(C_\alpha)^2 = C_\alpha;$$

Essa identidade segue de forma direta da segunda equação do teorema 4.

2. Possui uma relação um para um com as irreps;

Pela definição,  $C_\alpha \in \mathcal{L}(G)$ , que por sua vez tem uma relação um para um com as irreps .

3. Seja  $V$  uma representação de  $G$  e  $C_\alpha$  um projetor na álgebra do grupo. Se  $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha^{\oplus m_\alpha}$  é a decomposição de  $V$  em irreps  $V_\alpha$  com multiplicidade  $m_\alpha$ , então  $V(C_\alpha)$  é o projetor sobre  $V_\alpha^{\oplus m_\alpha}$ .

A atuação de um elemento  $g \in G$  no  $i$ -ésimo vetor da base da irrep  $\alpha$ ,  $|v_{\alpha,i}\rangle$ , é dada por

$$V_\alpha(g)|v_{\alpha,i}\rangle = \sum_{j=1}^{d_\alpha} V_{\alpha,ij}(g)|v_{\alpha,j}\rangle.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\overline{V_{\beta,kl}(g)}$  e somando sobre o grupo temos

$$\sum_{g \in G} \overline{V_{\beta,kl}(g)} V_{\alpha}(g) |v_{\alpha,i}\rangle = \frac{|G|}{d_{\alpha}} \delta_{k,i} \delta_{\alpha,\beta} |v_{\alpha,l}\rangle,$$

ou de forma equivalente

$$C_{\beta} |v_{\alpha,i}\rangle = \begin{cases} |v_{\alpha,i}\rangle, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

A construção das irreps do grupo simétrico e unitário foram muito uso dos resultados sobre projetores apresentados aqui. Mas antes, será apresentado o teorema da dualidade, que é a base da dualidade de Schur-Weyl.

## 4.2 Teorema da dualidade

A seguir vamos ver que a relação de comutação entre duas álgebras implica em uma dualidade com relação as irreps dos grupos que as geram. Aqui vamos estudar essas relações para construir essas dualidades.

O comutante  $\mathcal{A}'$  de um conjunto  $\mathcal{A}$  de uma álgebra  $\mathcal{C}$  é o conjunto de elementos em  $\mathcal{C}$  que comutam com todos os elementos de  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A}' = \{b \in \mathcal{C} | ab = ba \ \forall a \in \mathcal{A}\}.$$

**Lema 24.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços complexos de dimensão finita. O comutante de  $\mathcal{A} = \text{End}(V) \otimes \mathbb{I}$  em  $\text{End}(V \otimes W)$  é  $\mathcal{B} = \mathbb{I} \otimes \text{End}(W)$ .*

*Demonstração.* É claro que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$ . Para mostrar que  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}$ , vamos considerar os elementos mais gerais  $A \otimes \mathbb{I}_W \in \mathcal{A}$  e  $B \in \mathcal{A}'$ . Na forma matricial temos

$$A \otimes \mathbb{I}_W = \begin{pmatrix} A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

A condição de comutação exige que  $(A \otimes \mathbb{I}_W)B = B(A \otimes \mathbb{I}_W)$ , que na forma matricial é

$$\begin{pmatrix} AB_{11} & AB_{12} & \cdots & AB_{1n} \\ AB_{21} & AB_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ AB_{n1} & \cdots & \cdots & AB_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A & B_{12}A & \cdots & B_{1n}A \\ B_{21}A & B_{22}A & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}A & \cdots & \cdots & B_{nn}A \end{pmatrix}.$$

Ou seja,  $[A, B_{ij}] = 0$  para todo  $i, j$ . Pelo lema de Schur,  $B_{ij}$  deve ser uma matriz escalar, o que nos leva em  $B_{ij} = b_{ij} \mathbb{I}_V$  que pode ser escrito na forma  $B = \mathbb{I}_V \otimes B$ , o que mostra que a matriz mais geral de  $\mathcal{A}'$  está em  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Teorema 25.** *Seja  $V$  a representação de um grupo finito com decomposição  $V \cong \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}^{\oplus n_{\alpha}} \cong \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha} \otimes \mathbb{C}^{n_{\alpha}}$ . Seja  $\mathcal{A}$  a álgebra gerada por  $V$  e  $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$  seu comutante. Então*

$$\mathcal{A} \cong \bigoplus_{\alpha} \text{End}(V_{\alpha}) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{B} \cong \bigoplus_{\alpha} \mathbb{I}_{V_{\alpha}} \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{n_{\alpha}}) \quad (4.3)$$

Ainda mais, temos que  $\mathcal{B}' = \mathcal{A}$ , onde  $\mathcal{B}'$  é o comutante de  $\mathcal{B}$  (teorema do comutante duplo).

*Demonstração.* É fácil ver que o

$$\frac{d_{\alpha}}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{V_{\alpha,ij}(g)} V(g) \in \mathcal{A}$$

Pela ortogonalidade  $V_{\alpha,ij}$  e pela decomposição de  $V$  em componentes irredutíveis, temos

$$\begin{aligned} \frac{d_{\alpha}}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{V_{\alpha,ij}(g)} V(g) &= \frac{d_{\alpha}}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{V_{\alpha,ij}(g)} \left( \bigoplus_{\beta} V_{\beta}(g) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}} \right) \\ &= \bigoplus_{\beta} \frac{d_{\alpha}}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{V_{\alpha,ij}(g)} (V_{\beta}(g) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}}) \\ &= \bigoplus_{\beta} \frac{d_{\alpha}}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{V_{\alpha,ij}(g)} \sum_{kl} V_{\beta,kl}(g) E_{kl} \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}} \\ &= \bigoplus_{\beta} \frac{d_{\alpha}}{|G|} \sum_{kl} \left( \sum_{g \in G} \overline{V_{\alpha,ij}(g)} V_{\beta,kl}(g) \right) E_{\beta,kl} \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}} \\ &= E_{\alpha,ij} \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Onde  $E_{\alpha,ij}$  é a matriz com um nas posições  $(i, j)$  e 0 nas demais. Isso mostra que  $\text{End}(V_{\alpha}) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}} \subset \mathcal{A}$ . Mas é claro que pela definição da ação, qualquer elemento de  $\mathcal{A}$  é um elemento de  $\text{End}(V_{\alpha}) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}}$ , no que segue (4.2).

É claro que  $\bigoplus_{\alpha} \mathbb{I}_{V_{\alpha}} \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{n_{\alpha}}) \subseteq \mathcal{A}' = \mathcal{B}$ . Para ver que todo elemento de  $\mathcal{B}$  é dessa forma, i.e.  $\mathcal{B} \subseteq \bigoplus_{\alpha} \mathbb{I}_{V_{\alpha}} \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{n_{\alpha}})$ , considere o projetor  $C_{\alpha}$  sobre  $V_{\alpha} \otimes \mathbb{C}^{n_{\alpha}}$ . Pela relação de fechamento dos projetores e como são elementos de  $\mathcal{A}$  e comutam com todo  $B \in \mathcal{B}$ , temos

$$B = \sum_{\alpha} C_{\alpha} B = \sum_{\alpha} C_{\alpha} B C_{\alpha} = \sum_{\alpha} B_{\alpha}.$$

Temos que  $B_{\alpha} \in (\text{End}(V_{\alpha}) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}})'$  e o lema 7 implica que  $(\text{End}(V_{\alpha}) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n_{\alpha}}})' = \mathbb{I}_{V_{\alpha}} \otimes \text{End}(\mathbb{C}^{n_{\alpha}})$ .  $\square$

### 4.3 Dualidade de Schur-Weyl

Nessa seção vamos mostrar que  $S_k$  e  $U(d)$  são duplos comutantes, e que seu espaço de representações tem uma decomposição interessante em vista do teorema 8. Mas antes de seguir em frente, vamos obter a ação desses grupos no espaço de produto tensorial. Se  $\mathbb{C}^d$  é um espaço vetorial complexo de dimensão  $d$ , então  $S_k$  tem uma ação natural em  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$  dada por:

$$\mathbf{P}(\pi)|i_1 \dots i_k\rangle := |i_{\pi^{-1}(1)} \dots i_{\pi^{-1}(k)}\rangle. \quad (4.4)$$

Onde  $\pi \in S_k$  e  $|i_1 \dots i_k\rangle$  é uma abreviação de  $|i_1\rangle \otimes \dots \otimes |i_k\rangle$ , em que cada ket é um elemento da base de  $\mathbb{C}^d$ . Denotamos o grupo unitário  $d \times d$  por  $U(d)$ . Sua ação natural em  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$  é dada por

$$\mathbf{Q}(\mathcal{U})|i_1 \dots i_k\rangle := \mathcal{U}|i_1\rangle \otimes \dots \otimes \mathcal{U}|i_k\rangle. \quad (4.5)$$

Onde  $\mathcal{U} \in U(d)$ . A partir dessas duas ações, temos um resultado famoso (devido a Schur) que é válido mencionar antes de enunciar o teorema central dessa seção:

**Teorema 26.** *Seja  $\mathcal{A} = \text{span}\{\mathbf{P}(\pi) : \pi \in S_k\}$  e  $\mathcal{B} = \text{span}\{\mathbf{Q}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in U(d)\}$ . Então:*

$$\mathcal{A}' = \mathcal{B} \text{ e } \mathcal{B}' = \mathcal{A}. \quad (4.6)$$

*Demonstração.* Seja  $\{|1\rangle, \dots, |d\rangle\}$  a base padrão de  $\mathbb{C}^d$ . Para um conjunto  $I = (i_1, \dots, i_k)$  com  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\} := [d]$ , podemos definir o ket  $|I\rangle := |i_1, \dots, i_k\rangle$ . Esses tensores formam uma base do espaço de produto tensorial  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$ . O grupo  $S_k$  permuta a base pela ação  $\mathbf{P}(\pi)|I\rangle = |\pi I\rangle$  que foi definida a anteriormente.

Supomos que  $B \in \text{End}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$ , tenha matriz  $\langle I|B|J\rangle = [b_{I,J}]$ , na base padrão e

$$B|J\rangle = \sum_{I \in [d]} b_{I,J}|I\rangle.$$

Nós temos que

$$B\mathbf{P}(\pi)|J\rangle = \sum_{I \in [d]} b_{I,\pi J}|I\rangle, \quad (4.7)$$

para  $\pi \in S_k$ , enquanto

$$\mathbf{P}(\pi)B|J\rangle = \sum_{I \in [d]} b_{\pi^{-1}I, J} |I\rangle, \quad (4.8)$$

Fazendo a troca  $I \rightarrow \pi I$ , a condição de comutação implica que

$$b_{I, J} = b_{\pi I, \pi J}, \quad \forall I, J; \pi \in S_k. \quad (4.9)$$

Consideremos a forma bilinear não degenerada ( $f(x, y) = 0$  para todo  $y \in V$  implica que  $x = 0$ )  $\langle X, Y \rangle := \text{Tr}(XY)$ . Podemos dizer que quando restringimos essa forma a  $\mathcal{A}'$ , ela continua sendo não degenerada. De fato, pela projeção  $X \mapsto X^\#$  de  $\text{End}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$  em  $\mathcal{A}'$  dada por:

$$X^\# = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \mathbf{P}(\pi) X \mathbf{P}(\pi)^{-1} \quad (4.10)$$

temos que se  $B \in \mathcal{A}'$ , então

$$\langle X^\#, B \rangle = \langle X, B \rangle.$$

Assim, se  $\langle \mathcal{A}', B \rangle = 0$  então  $\langle X, B \rangle = 0$  para todo  $X \in \text{End}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$ , o que implica que  $B = 0$ . Logo  $\mathcal{A}'$  é não degenerado.

Pela álgebra linear, devemos ter que  $\dim(\mathcal{A}') = \dim(\mathcal{B}) + \dim(\mathcal{B}^\perp)$ , já que sabemos a priori que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$ . Então para provar que  $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$ , basta mostrar que  $\dim(\mathcal{B}^\perp) = 0 \implies \mathcal{B}^\perp = \{0\}$ , i.e., se  $B \in \mathcal{A}'$  é ortogonal a  $\mathcal{B}$ , então  $B = 0$ . Agora se  $g = [g_{ij}] \in GL(d)$ , então  $\mathbf{Q}(g)$  tem matriz  $g_{I, J} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k}$  (pela definição da atuação no espaço produto e pela atuação de transformações em base) na base  $|I\rangle$ . Assumimos que

$$\langle B, \mathbf{Q}(g) \rangle = \sum_{I, J} b_{I, J} g_{j_1 i_1} \dots g_{j_k i_k} = 0 \quad (4.11)$$

para todo  $g \in GL(d)$ , onde  $b_{I, J}$  é a nossa matriz  $B$ . Definimos o polinômio  $p_B$  nas matrizes  $M_n(\mathbb{C}^d)$  por

$$p_B(X) = \sum_{I, J} b_{I, J} x_{j_1 i_1} \dots x_{j_k i_k} \quad (4.12)$$

para as matrizes  $X = [x_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}^d)$ . Da análise real, sabemos que se  $E$  é um subconjunto denso em  $X$ , então se  $f(p) = g(p)$  para todo  $p \in E$ , então  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Podemos afirmar que  $GL(d)$  é denso em  $M_n(\mathbb{C}^d)$  (essa prova e as definições exatas de teoria dos conjuntos não são necessárias para esse trabalho), então de (4.11) o polinômio  $p_B$  é identicamente 0 para todo  $X \in M_n(\mathbb{C}^d)$ .

É possível mostrar que  $b_{I, J} = 0$  para todo  $I, J$ , de  $p_B(X) = 0$  e de (4.11). Seja  $\Theta = \{(I, J) : I, J \in [d]^k\}$ . Temos que a atuação de  $\sigma \in S_k$  em  $\Theta$  é por  $\sigma(I, J) = (\sigma I, \sigma J)$ . Como  $B \in \mathcal{A}'$ , temos que a função  $(I, J) \rightarrow b_{I, J}$  é constante nas orbitas de  $S_k$  em  $\Theta$ . Podemos então definir a relação de equivalência em  $\Theta$ :  $(I', J') \sim (I, J) \iff \exists \sigma \in S_k : (I', J') = \sigma(I, J)$ .



Seja  $\Gamma$  um conjunto completo de representantes das diferentes classes de equivalência.

Utilizando a notação  $x_{I,J} = x_{i_1 j_1} \dots x_{i_k j_k}$ , podemos notar que  $x_{\sigma I, \sigma J}$  é somente uma permutação dos fatores de  $x_{I,J}$ , o que implica que  $x_{I,J} = x_{\sigma I, \sigma J}$ . Logo,

$$\begin{aligned} p_B(X) &= \sum_{I,J} b_{I,J} x_{j_1 i_1} \dots x_{j_k i_k} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma b_\gamma x_{\bar{\gamma}} \end{aligned}$$

onde  $n_\gamma$  é a cardinalidade da orbita de  $\gamma$ , e se  $\gamma = (I, J)$ , então  $b_\gamma = b_{I,J}$  e  $\bar{\gamma}$  é o representante em  $\Gamma$  da classe de equivalência de  $(J, I)$ .

Como os  $\{x_\gamma\}$  são obviamente L.I. e  $p_B(X) = 0$ , segue-se que  $b_\gamma = b_{I,J} = 0$ . □

O resultado que vem a seguir é sobre uma belíssima decomposição do espaço tensorial  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$  com relação a ação grupo unitário  $U(d)$  e do grupo simétrico  $S_k$ . Esse teorema irá nos guiar por boa parte do trabalho daqui para frente, assim como o lema de Schur tem feito.

**Teorema 27.** *Existe uma base, conhecida como base de Schur, na qual a representação  $(\mathbf{QP}, (\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$  de  $U(d) \times S_k$  se decompõe em irreps  $\mathbf{Q}_\lambda$  e  $\mathbf{P}_\lambda$  de  $U(d)$  e  $S_k$ , respectivamente:*

i)  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \mathbf{Q}_\lambda \otimes \mathbf{P}_\lambda$ ;

ii)  $\mathbf{P}(\pi) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \mathbb{I}_{\mathbf{Q}_\lambda} \otimes \mathbf{P}_\lambda(\pi)$ ;

iii)  $\mathbf{Q}(\mathcal{U}) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \mathbf{Q}_\lambda(\mathcal{U}) \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{P}_\lambda}$ .

Desde que  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  comutam, nós podemos definir a representação  $(\mathbf{QP}, (\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$  de  $U(d) \times S_k$  como

$$\mathbf{QP}(\mathcal{U}, \pi) = \mathbf{Q}(\mathcal{U})\mathbf{P}(\pi) = \mathbf{P}(\pi)\mathbf{Q}(\mathcal{U}) \quad (\mathcal{U}, \pi) \in U(d) \times S_k. \quad (4.13)$$

Então:

$$\mathbf{QP}(\mathcal{U}, \pi) = \mathcal{U}^{\otimes k} \mathbf{P}_\pi = \mathbf{P}_\pi \mathcal{U}^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \mathbf{Q}_\lambda \otimes \mathbf{P}_\lambda. \quad (4.14)$$

*Demonstração.* A aplicação do teorema 8, ao grupo  $G = S_k$  (e seu parceiro dual  $U(d)$ , teorema 9), prova i), ii) e iii). Restá provar que  $\mathbf{Q}_\lambda$  é uma irrep. Um argumento curto, porém, elegante é:  $\mathbf{Q}_\lambda$  é irredutível se e somente se sua extensão ao  $GL(d)$  é irredutível. Então é suficiente demonstrar que  $\mathbf{Q}_\lambda$  não é decomposto sob a ação de  $GL(d)$ . Pelo lema de Schur, isso é equivalente a mostrar que os mapas em  $End(\mathbf{Q}_\lambda)$  que comutam com a ação de  $GL(d)$ , são múltiplos da identidade, o que denotaremos por  $End_{GL(d)}(\mathbf{Q}_\lambda) = \mathbb{C}$ . O primeiro resultado que devemos ter em mente é que o centro (conjunto que pertence a álgebra e comuta com todos os elementos)  $End(\mathbf{Q}_\lambda)$  são as matrizes escalares, ou seja,  $\mathbb{C}$ . Pelo lema de Schur

$$\text{End}_{S_k}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k}) = \bigoplus_{\lambda} \text{End}(\mathbf{Q}_{\lambda}) \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{P}_{\lambda}} = \bigoplus_{\lambda} \text{End}(\mathbf{Q}_{\lambda}). \quad (4.15)$$

E também requerendo a comutação com  $GL(d)$ , temos

$$\text{End}_{GL(d) \times S_k}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k}) = \bigoplus_{\lambda} \text{End}_{GL(d)}(\mathbf{Q}_{\lambda}). \quad (4.16)$$

Então se  $\text{End}_{GL(d) \times S_k}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$  estiver contido no centro de  $\text{End}_{S_k}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$ , implicará que  $\text{End}_{GL(d)}(\mathbf{Q}_{\lambda})$  é o centro de  $\text{End}(\mathbf{Q}_{\lambda})$  e portanto  $\text{End}_{GL(d)}(\mathbf{Q}_{\lambda}) = \mathbb{C}$ . De fato, como  $GL(d)$  e  $S_k$  também satisfazem as condições do teorema do duplo comutante, as matrizes que comutam com  $S_k$  na ação em  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$ , são todas da forma  $T^{\otimes k}$  para  $T \in GL(d)$ . Isso mostra claramente que  $\text{End}_{GL(d) \times S_k}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$  está contido no centro de  $\text{End}_{S_k}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$  (pois a ação de qualquer  $A \in \text{End}_{GL(d) \times S_k}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$ , sob  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$  comuta com a ação de  $GL(d) \times S_k$ , logo comuta com  $T$ ). O que finaliza a prova.  $\square$

Na física, além do uso da dualidade de Schur-Weyl para obter as irreps do grupo unitário, também é feita uma generalização desse teorema para estudar grupos de Gauge em teorias de campos e de calibre [17].

## Capítulo 5

# Representações Simétricas e Unitárias

Depois de entender as relações de dualidade entre os grupos simétrico e unitário, precisamos encontrar suas representações (irredutíveis) de forma direta. Para relacionar essas representações com o que foi dito no capítulo anterior, tomemos a decomposição do espaço  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$ . A priori mostramos que a decomposição pode ser dada por

$$(\mathbb{C}^d)^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \mathbf{Q}_\lambda \otimes \mathbf{P}_\lambda$$

Existe um teorema que garante que temos uma transformação de base que  $((\mathbb{C}^d)^{\otimes k} = \mathcal{H}$  por simplicidade de notação)

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \text{Hom}(\mathbf{P}_\lambda, \mathcal{H}) \otimes \mathbf{P}_\lambda. \quad (5.1)$$

Essa decomposição é chamada de isotópica [12]. Então é possível mostrar que  $\text{Hom}(\mathbf{P}_\lambda, \mathcal{H})$  é uma irrep do grupo unitário.

Poderíamos nos focar em estudar o grupo simétrico e depois estender seus resultados para o grupo unitário usando  $\text{Hom}(\mathbf{P}_\lambda, \mathcal{H})$ . Essa abordagem pode ser seguida por [22], e aplicada a nossa decomposição (ele faz todo o trabalho, mas não se preocupa com o grupo unitário). Aqui vou fazer uma abordagem mais direta e construir as irrep do grupo simétrico e depois usá-las para encontrar as irreps do grupo unitário.

### 5.1 Representações do Grupo Simétrico

Vimos anteriormente que podemos representar permutações em diagramas de Young e que as permutações indexam as classes de conjugação do grupo simétrico. Dados esses dois fatos e o fato que existe um relação um para um entre classes de conjugação e irreps, vamos construir as irreps do grupo simétrico estudando as simétricas das tabelas de Young.

Se uma tabela de Young  $T$  tem formato  $\lambda$ , vamos nos referir a ela como  $\lambda(T)$ .

**Definição 28.** Seja  $T$  uma tabela de Young com formato  $\lambda$ . Definimos então os subgrupos

$$\mathcal{R}(T) = \{\pi \in S_n \mid \pi \text{ permuta os elementos das linhas de } T\}$$

$$\mathcal{C}(T) = \{\pi \in S_n \mid \pi \text{ permuta os elementos de cada coluna de } T\}$$

Em outras palavras  $\mathcal{R}(T)$  e  $\mathcal{C}(T)$  são os grupos de simetrias das linhas e colunas respectivamente.

É fácil notar que  $|\mathcal{R}(T)| = \lambda_1! \lambda_2! \dots$ .

**Definição 29.** Dada uma tabela  $T$ , definimos  $P(T), Q(T)$  e  $E(T) \in \mathcal{A}(S_n)$  por

$$P(T) = \sum_{p \in \mathcal{R}(T)} p,$$

$$Q(T) = \sum_{q \in \mathcal{C}(T)} \text{sgn}(q)q,$$

$$E(T) = P(T)Q(T).$$

Vamos aqui construir as irreps usando  $E(T)$ , que mostraremos que se trata do projetor que foi mencionado no capítulo 2, a menos de constantes multiplicativas.

Dado  $g \in S_n$  e uma tabela  $T$ , então  $gT$  é uma tabela obtida trocando  $i$  por  $g(i)$  em cada caixa. É claro que,

$$\mathcal{R}(gT) = g\mathcal{R}(T)g^{-1}; \mathcal{C}(gT) = g\mathcal{C}(T)g^{-1};$$

$$P(gT) = gP(T)g^{-1}; Q(gT) = gQ(T)g^{-1}; E(gT) = gE(T)g^{-1}.$$

Isso implicará que duas tabelas com o mesmo formato, porém que diferem por uma permutação  $g$  dos elementos, nos dá a mesma irrep. Isso é algo que podemos intuir do fato dos diagramas representarem permutações e essas terem uma relação de uma para um com as classes de conjugação.

**Exemplo 30.** Seja  $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ . Então  $\mathcal{R}(T) = \{e, (12)\}$ ,  $\mathcal{C}(T) = \{e, (13)\}$  e  $P(T) = 1 + (12)$ ,  $Q(T) = 1 - (13)$ , e ainda  $E(T) = 1 + (12) - (13) - (123)$ .

Rapidamente falando e vendo o exemplo anterior,  $E(T)$  simetriza as linhas e antisimetriza as colunas. Nós vamos considerar na construção pares de tabelas  $T$  e  $T'$ .

**Definição 31.** Escrevemos  $T \vDash T'$  se existe um par  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tal que  $i, j$  estão na mesma linha de  $T$  e na mesma coluna de  $T'$ . Caso contrário  $T \not\vDash T'$ .

Essa definição vai desempenhar um papel principal no que está por vir. Parte da importância dessa definição é :

**Proposição 32.** *Se  $T \vDash T'$ , então*

$$Q(T')P(T) = 0$$

*Em particular*

$$E(T')E(T) = 0$$

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathcal{R}(T)$ , então

$$pP(T) = P(T)p = P(T)$$

pelo teorema do rearranjo. De forma similar, se  $q \in \mathcal{C}(T)$ ,

$$qQ(T) = Q(T)q = \text{sgn}Q(T).$$

Se  $T \vDash T'$  e  $i, j$  é o par que satisfaz essa condição, então a transposição  $(ij)$  está na intersecção de  $P(T)$  e  $Q(T')$ , i.e.

$$(ij) \in P(T) \cap Q(T')$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(T')P(T) &= Q(T')\{(ij)P(T)\} = \\ &= \{Q(T')(ij)\}P(T) = -Q(T')P(T) \end{aligned}$$

Pois o sinal de qualquer transposição é  $-1$ , por definição. O que implica que  $Q(T')P(T) = 0$ .  $\square$

**Lema 33.** *Suponha  $\lambda(T) = \lambda(T')$  e  $T \not\vDash T'$ . Então existe  $p \in \mathcal{R}(T)$  e  $q \in \mathcal{C}(T)$  tal que  $T' = pqT$ .*

*Demonstração.* Nós afirmamos que  $T \not\vDash T'$  se e somente se existe  $p \in \mathcal{R}(T)$ ,  $q' \in \mathcal{C}(T')$  tal que

$$q'T' = pT. \tag{5.2}$$

Temos que se dois elementos na mesma linha de  $T$ , vão estar na mesma linha de  $pT$ , então em diferentes colunas de  $q'T'$ , e então em diferentes colunas de  $T' = (q'^{-1})q'T'$ .

Inversamente, se  $T \not\equiv T'$  vamos olhar o par  $i, j$  de números na primeira coluna de  $T'$ . Por  $T \not\equiv T'$ , eles estão em linhas distintas de  $T$ , então existe uma permutação  $p_1$  que os leva para a primeira coluna. Logo em seguida podemos aplicar uma permutação  $q'_1$  em  $T$  que os deixa em posições idênticas as que estão em  $T$ . Aplicando essa lógica repetidas vezes, construímos  $p$  e  $q'$  que satisfazem 5.2.

Então

$$T' = pp^{-1}(q'^{-1})pT = pqT,$$

onde

$$\begin{aligned} q &= p^{-1}(q')^{-1}p = (p^{-1}q')(q')^{-1}(p^{-1}q')^{-1} \in (p^{-1}q')\mathcal{C}(T')(p^{-1}q')^{-1} \\ &= \mathcal{C}(p^{-1}q'T) = \mathcal{C}(T). \end{aligned}$$

O que prova o resultado. □

**Lema 34.** *Seja  $T$  uma tabela fixa e suponha que  $s \in S_n$  não possa ser escrito como  $s = pq$  para algum  $p \in \mathcal{R}(T)$  e  $q \in \mathcal{C}(T)$ . Então existem  $p_0 \in \mathcal{R}(T)$  e  $q_0 \in \mathcal{C}(T)$  tais que*

$$\text{sgn}(q_0) = -1 \text{ e } s = p_0sq_0.$$

*Demonstração.* Seja  $T' = sT$ . Como  $s$  não pode ser escrito com  $pq$  para nenhum  $p \in \mathcal{R}(T)$  e  $q \in \mathcal{C}(T)$ , segue do lema anterior que  $T \not\equiv T'$ , i.e. existem um par  $i, j$  na mesma linha de  $T$  e na mesma coluna de  $T'$ . Então definimos

$$p_0 = (ij)$$

e

$$q_0 = s^{-1}(ij)s \in \mathcal{C}(s^{-1}T') = \mathcal{C}(T).$$

Então como  $q_0$  é conjugado de uma transposição, ele também é uma transposição, logo  $\text{sgn}(q_0) = -1$  e

$$p_0sq_0 = (ij)ss^{-1}(ij)s = (ij)^2s = s,$$

pois a inversa da transposição é ela mesma. □

**Proposição 35.** *Suponha  $a \in \mathcal{A}(S_n)$  e para todo  $p \in \mathcal{R}(T)$  e  $q \in \mathcal{C}(T)$ , temos*

$$paq = \text{sgn}(q)a. \tag{5.3}$$

Então

$$a = \gamma E(T)$$

para alguma constante  $\gamma$ .

*Demonstração.* Escrevendo  $a = \sum_{g \in S_n} \alpha_g g$ , temos pela suposição que

$$\alpha_{pgq} = \text{sgn}(q)\alpha_g$$

Tomando  $g = e$ , temos para todo  $p \in \mathcal{R}(T)$  e  $q \in \mathcal{C}(T)$

$$\alpha_{pq} = \text{sgn}(q)\alpha_e.$$

Por outro lado, usando o lema anterior, se  $s \neq pq$  então existe  $p_0 \in \mathcal{R}(T)$  e  $q_0 \in \mathcal{C}(T)$  tal que  $\text{sgn}(q_0) = -1$  e  $p_0 s q_0 = s$ . Então

$$\alpha_s = \alpha_{p_0 s q_0} = \text{sgn}(q_0)\alpha_s = -\alpha_s.$$

Isso implica que se  $a$  satisfaz 5.3, as únicas permutações que aparecem na sua soma são as que podem ser escritas como  $g = pq$ . Segue daí que

$$a = \alpha_e \sum_{\substack{p \in \mathcal{R}(T) \\ q \in \mathcal{C}(T)}} \text{sgn}(q) pq = \alpha_e E(T).$$

□

Agora depois de toda álgebra gasta nessa seção, vamos mostrar matematicamente a relação dos simetrizadores com as irreps.

**Teorema 36.** *Fixe uma tabela  $T$ . Seja  $d = \dim(\mathcal{A}(S_n)E(T)) \equiv \dim\{aE(T) | a \in \mathcal{A}(S_n)\}$ . Seja  $e(T) = (n!)^{-1}dE(T)$ . Então  $e(T)$  é um projetor em  $\mathcal{A}(S_n)$ . Se  $\lambda(T) = \lambda(T')$  então  $e(T)$  é equivalente a  $e(T')$ . Em particular cada diagrama de Young  $\lambda$  tem uma irrep associada que denotamos por  $\mathbf{P}_\lambda$ .*

*Demonstração.* Para começar, vamos nos lembrar da demonstração da proposição 32. Se  $p \in \mathcal{R}(T)$  e  $q \in \mathcal{C}(T)$  então  $pP(T) = P(T)$  e  $qQ(T) = \text{sgn}(q)Q(T)$ . Assim  $pE(T)^2q = \text{sgn}(q)E(T)^2$ . Pelo lema anterior, devemor ter então

$$E(T)^2 = \kappa(T)E(T).$$

Dado  $a \in \mathcal{A}(S_n)$ , seja  $R_a : \mathcal{A}(S_n) \rightarrow \mathcal{A}(S_n)$  atuando com  $R_a b = ba$ . Então usando a base natural da álgebra  $\mathcal{A}(S_n)$  (seus próprios elementos), temos,

$$\text{Tr}(R_e) = n!,$$

$$\text{Tr}(R_g) = 0 \text{ se } g \neq e.$$

Então

$$\text{Tr}(R_{R(T)}) = n!.$$

Por outro lado, seja  $f_1, f_2, \dots, f_d$  é uma base de  $\mathcal{A}(S_n)E(T)$ , e a sua extensão para  $\mathcal{A}(S_n)$  com  $f_{d+1}, \dots, f_n$ . Então com  $R_a$  é a atuação de  $a$  pela direita e que cada  $f_i$  da base de  $\mathcal{A}(S_n)E(T)$  é da forma  $e_i E(T)$ , com  $e_i \in \mathcal{A}(S_n)$ , temos:

$$R_{E(T)}f_i = \kappa(T)f_i$$

Então

$$\text{Tr}(R_{E(T)}) = \kappa(T)d.$$

Logo podemos ver que  $\kappa(T) = n!/d$ .

Isso mostra que  $e(T) = (n!)^{-1}dE(T)$  é um projetor.

Mostrar a equivalência de  $e(T)$  e  $e(T')$  é fácil. Se  $\lambda(T) = \lambda(T')$ , então existe  $g \in S_n$  tal que  $gT = T'$ . Pelas propriedades de  $E(T)$ , temos que  $e(T') = ge(T)g^{-1}$ , logo são equivalentes.

Como os projetores levam à irreps e existe uma correspondência um para um entre projetores e irreps, fica provado matematicamente a correspondência entre a permutação (forma da tabela de Young)  $\lambda$  e a irrep  $\mathbf{P}_\lambda$ . □

A última parte dessa demonstração também justifica os teoremas:

**Teorema 37.** *Se  $\lambda \neq \mu$ , então  $\mathbf{P}_\lambda$  e  $\mathbf{P}_\mu$  são irrep inequivalentes.*

**Teorema 38.**  *$\{\mathbf{P}_\lambda\}$  é o conjunto de todas as irreps do  $S_n$ .*

É possível mostrar ([22, 24]) que o conjunto de *tabelas de Young padrão* formam uma base das irreps.

Para resumir essa seção podemos dizer que criamos projetores de irreps, usando o simetrizador das tabelas de Young  $E(T)$  e que cada formato de tabela nos leva a um novo projetor e assim a uma nova irrep do  $S_n$ .

Como sabemos obter irreps do  $S_n$  e que o grupo unitário é seu dual, podemos criar irreps do grupo unitário usando os simetrizadores de Young.

## 5.2 Representações do Grupo Unitário

Existe uma ação natural do grupo de permutações no espaço  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k} = \mathcal{H}$  que já foi mostrada em 4.4.

A idéia é usar a ação do simetrizador de Young para decompor  $(\mathbb{C}^d)^{\otimes k} = \mathcal{H}$  em irreps unitárias (e simétricas).



**Exemplo 39.** Seja  $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^d)^{\otimes 2}$ . O grupo de permutações  $S_2$  contém apenas duas irreps, as que estão relacionadas com o simetrizador de tabelas com formato  $\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}$  e aquelas relacionadas com tabelas  $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ . A aplicação do simetrizador  $E\left(\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}\right) = 1 + (12)$  ira produzir um espaço completamente simétrico e a aplicação do simetrizador  $E\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}\right) = 1 - (12)$  ira produzir um espaço completamente antissimétrico

$$E\left(\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}\right) \mathcal{H} = \{|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle + |v_2\rangle \otimes |v_1\rangle \mid |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{C}^d\}$$

$$E\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}\right) \mathcal{H} = \{|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle - |v_2\rangle \otimes |v_1\rangle \mid |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{C}^d\}.$$

Supondo que  $d = 2$ , então cada  $|v_i\rangle$  é combinação linear de três vetores de base  $|e_1\rangle$  e  $|e_2\rangle$ . É fácil perceber que o espaço simétrico vai ter 3 e o antissimétrico 1 (temos que descontar os índices iguais que se anulam pela antisimetria). Usando a notação  $[ij] = |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle$ , podemos escrever a base desses dois espaços como:

$$E\left(\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}\right) \mathcal{H} = \{[12] + [21], [11], [22]\}$$

$$E\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}\right) \mathcal{H} = \{[12] - [21]\}.$$

Uma maneira mais sugestiva de representar essas base é associando-as a *tabelas de Young Semipadrão*.

$$E\left(\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}\right) \mathcal{H} = \{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}\}$$

$$E\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}\right) \mathcal{H} = \left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \right\}.$$

O fato de podermos escrever a base desses espaços com simetrias bem definidas como *tabelas de Young Semipadrão* não uma exclusividade de  $k = 2$ .

**Teorema 40.** Seja  $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$ . Seja  $T$  uma tabela de formato  $\lambda$ . As tabelas de Young Semipadrão de formato  $\lambda$  geram todo espaço simetrizado por  $E(T)$ .

Para dar uma idéia da demonstração desse teorema podemos pensar da seguinte forma:

Seja  $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^d)^{\otimes k}$  e  $E(\lambda(T))$  o simetrizador de Young da tabela  $T$  que tem formato  $\lambda$ . O subespaço de  $\mathcal{H}$  obtido pela aplicação de  $E(\lambda(T))$  tem a mesma simetria que as “politabelas”  $\lambda(T)$ , e dizemos  $E(\lambda(T))\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_\lambda$ . Um tensor  $v_{i_1, i_2, \dots, i_k} \in \mathcal{H}$  (usando a notação de componentes muito recorrente em relatividade) atuado por  $E(\lambda(T))$  será representado de forma a exibir sua simetria colocando os índices  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  nas caixas do diagrama de Young correspondente ao formato  $\lambda$ .

**Exemplo 41.** Seja  $T = \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  e  $k = 3$ . Então temos que  $v_{\begin{smallmatrix} i & j \\ k \end{smallmatrix}} \in \mathcal{H}_{(2,1)}$ , onde  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

Como as bases também não obedecem a simetria imposta pelo simetrizador, podemos escrevê-las como tabelas de Young

**Exemplo 42.** Para o espaço de  $k = 3$  com simetria imposta pela tabela com formato  $\lambda = (2, 1)$ , escrevemos um tensor  $|v\rangle \in \mathcal{H}_{(2,1)}$  na sua forma completa como (base+componentes)

$$|v\rangle = \sum_{ijk} \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline k & \\ \hline \end{array} \times v \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline k & \\ \hline \end{array}.$$

Então precisamos descobrir  $\begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline k & \\ \hline \end{array}$  que geram esse espaço. A idéia é começar do caso mais simples,  $k = 2$ . Nesse caso sabemos que temos a representação simétrica e antissimétrica e as tabelas que geram esses espaços são as *tabelas de Young Semipadrão* de formatos  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$  e  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ , como já sabemos. Para  $k > 2$  teremos tabelas de Young  $T$  com formato  $\lambda(T)$  que tem simetrias mistas e podemos seguir a seguinte idéia: Primeiramente escrevemos o diagrama de Young de  $\lambda = \lambda^k$  vazio. Escrevemos o número  $k$  em cada caixa desse diagrama que deve ser removida para obter o diagrama  $\lambda^{k-1}$ . Então repita o processo, escreva  $k - 1$  em cada caixa que deve ser removida do diagrama  $\lambda^{k-1}$  para obter  $\lambda^{k-2}$ , e assim por diante até obter  $\lambda^1$ , então escreva 1 nas caixas restantes.

Isso irá preencher o diagrama inicial com números do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  (nem todos precisam aparecer e repetições podem ocorrer).

**Exemplo 43.** Sejam  $\lambda = \lambda^3 = (4, 3, 1)$ ,  $\lambda^2 = (3, 2)$  e  $\lambda^1 = (2)$ . Então a tabela gerada pelo algoritmo é:

1	1	2	3
2	2	3	
3			

**Definição 44.** Chamamos de padrão de ramificação  $n$  o conjunto  $\gamma = \{\lambda^n, \lambda^{n-1}, \dots, \lambda^1\}$ .

As Tabelas de Young que são originadas pelo padrão de ramificação são *Semipadrão*. Podemos usar os mais diversos padrões de ramificação para construir tabelas para  $k > 2$  tomando  $\gamma = \{\lambda^k, \dots, (2), (1)\}$  ou  $\gamma = \{\lambda^k, \dots, (2)\}$  que são as ramificações que chegam nas tabelas padrão quando  $k = 2$ . Usando indução, mostramos que as tabelas obtidas geram o espaço de simetria  $\lambda$  [12].

Desse fato mostramos que as *tabelas de Young Semipadrão*  $T$  com formato  $\lambda$ , geram o espaço de simetria  $\lambda$ .

Seja  $\mathcal{U}$  um elemento de  $U(d)$  qualquer, que atuam sobre o próprio  $\mathbb{C}^d$  e possui autovalores  $x_1, x_2, \dots, x_d$ , ou seja,

$$\mathcal{U} |e_i\rangle = x_i |e_i\rangle.$$

Seja  $T$  uma *tabelas de Young Semipadrão* com formato  $\lambda(T)$  e conteúdo  $\alpha(T)$ . Podemos ver facilmente se nos ampararmos no Exemplo 39, que quando  $\mathcal{U}$  atua sobre  $T$ , ele produz  $T$  multiplicado pelo monômio

$m(\alpha(T))$  definido no primeiro capítulo. Então o caracter de  $\mathcal{U}$  na representação  $\mathcal{H}_\lambda$  é soma sobre todas as *tabelas Semipadrão* com formato  $\lambda(T)$  e conteúdo  $\alpha(T)$ , já que as tabelas Semipadrão geram  $\mathcal{H}_\lambda$ ,

$$ch_{\mathcal{H}_\lambda}(\mathcal{U}) = \sum_{T \in SSYT(\lambda)} K_{\lambda, \alpha} m(\alpha(T)).$$

Mas como vimos no primeiro capítulo, isso é a função de Schur  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_d)$ .

Até aqui temos que as bases para as irreps do grupo simétrico são as *tabelas de Young Padrão*, enquanto para o grupo unitário são as *tabelas de Young Semipadrão*. De forma pictográfica, representando as *TYS* por  $\{\lambda\}$  e as *TYSS* por  $[\lambda]$ , podemos escrever:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \vdash k} \{\lambda\} \otimes [\lambda] \quad (5.4)$$

A relação entre os caracteres  $\chi_\lambda$  e  $s_\lambda$  é dada pela conhecida fórmula de Frobenius:

$$s_\lambda = \sum_{\gamma \vdash k} \frac{1}{z_\gamma} \chi_\lambda(\pi) p_\gamma, \quad (5.5)$$

onde  $\pi \in \gamma$ ,  $z_\gamma$  definido pela equação (2.5) e  $p_\gamma$  são os polinômios simétricos já discutidos no capítulo 2. Como caracteres são ortogonais nas classes, obtemos:

$$p_\gamma = \sum_{\lambda \vdash k} \chi_\lambda(\gamma) s_\lambda, \quad (5.6)$$

onde  $\chi_\lambda(\gamma)$  é o caracter da representação  $\lambda$  na classe  $\gamma$ .

No próximo capítulo vamos utilizar as relações entre  $\chi_\lambda$ ,  $s_\lambda$  e  $p_\lambda$  para exemplificar o cálculo de Weingarten que iremos desenvolver.

## Capítulo 6

# Integrais matriciais unitárias

Aqui chegamos ao ápice do trabalho e vamos usar algumas ferramentas usadas nos capítulos anteriores para derivar importantes relações e resultado sobre integrais realizadas sobre os grupos unitários. O trabalho inicial aqui é encontrar uma fórmula para

$$\int_{U(d)} \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{\mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{\mathcal{U}_{i'_k j'_k}} d\mu(U). \quad (6.1)$$

Vamos começar esse trabalho com algumas definições [5,30].

Para  $A \in \text{End}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$ , podemos definir

$$\mathcal{E}_k(A) = \int_{U(d)} \mathcal{U}^{\otimes k} A (\mathcal{U}^{\otimes k})^\dagger d\mu(U) \quad (6.2)$$

que é uma projeção  $\mathcal{E}_k : \text{End}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbb{C}[S_k])$ . Essa projeção é conhecida na literatura matemática como expectativa condicional e tem a propriedade de ser compatível com o traço, i.e.,  $\text{Tr} \circ \mathcal{E}_k = \text{Tr}$ . Podemos ver seu uso em física no estudo da entropia de estado bipartidos em [15].

Para  $A \in \text{End}((\mathbb{C}^d)^{\otimes k})$ , podemos montar a seguinte quantidade

$$\Delta(A) = \sum_{\pi \in S_k} \text{Tr}(A \mathbf{P}(\pi^{-1})) \mathbf{P}(\pi). \quad (6.3)$$

**Proposição 45.** *A quantidade  $\Delta$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- i)  $\Delta(A \mathbf{P}(\sigma)) = \Delta(A) \mathbf{P}(\sigma)$  e  $\Delta(\mathbf{P}(\sigma) A) = \mathbf{P}(\sigma) \Delta(A)$ ;
- ii)  $\Delta(\mathbb{I})$  coincide com o caracter de  $\mathbf{P}$  conseqüentemente é dado por

$$\Delta(\mathbb{I}) = k! \sum_{\lambda \vdash k} \frac{s_\lambda(1^{\times d})}{f^\lambda} C_\lambda$$

onde  $C_\lambda$  é o projetor do capítulo 2 e 5, e  $\Delta(\mathbb{I})$  é um elemento inversível de  $\mathbb{C}[S_k]$ ; sua inversa vai ser chamada de função de Weingarten e é dada por

$$Wg = \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\lambda \vdash (k,d)} \frac{(f^\lambda)^2}{s_\lambda (1^{\times d})} \chi_\lambda;$$

iii) A relação entre  $\mathcal{E}(A)$  e  $\Delta(A)$  é dada por

$$\Delta(A) = \mathcal{E}_k(A)\Delta(\mathbb{I});$$

iv) A variação de  $\Delta$  é igual a a variação de  $\mathbf{P}(\mathbb{C}[S_k])$ ;

v) Em  $\mathbf{P}(\mathbb{C}[S_k])$  o que se segue é verdade:

$$\Delta(A\mathcal{E}_k(B)) = \Delta(A)\Delta(B)\Delta(\mathbb{I})^{-1}.$$

*Demonstração.* i) Da definição de  $\Delta(A)$  e do teorema do rearranjo para grupos temos:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{A}\mathbf{P}(\sigma)) &= \sum_{\pi \in S_k} \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}(\sigma)\mathbf{P}(\pi^{-1}))\mathbf{P}(\pi) \\ &= \sum_{\pi \in S_k} \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}(\sigma\pi^{-1}))\mathbf{P}(\pi) \\ &= \sum_{\rho \in S_k} \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}(\rho^{-1}))\mathbf{P}(\rho)\mathbf{P}(\sigma) \\ &= \Delta(\mathbf{A})\mathbf{P}(\sigma) \end{aligned}$$

Da mesma forma a segunda igualdade é demonstrada

ii) Se  $A = \mathbb{I}$ , temos por definição que

$$\Delta(\mathbb{I}) = \sum_{\pi \in S_k} \text{Tr}(\mathbf{P}(\pi^{-1}))\mathbf{P}(\pi) = \sum_{\pi \in S_k} \chi(\pi^{-1})\mathbf{P}(\pi).$$

Pela dualidade de Schur-Weyl, temos que

$$(\mathbb{C}^d)^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash (k,d)} \mathbf{Q}_\lambda \otimes \mathbf{P}_\lambda$$

de onde se segue que

$$\chi = \sum_{\lambda \vdash (k,d)} d_\lambda \chi_\lambda$$

onde  $d_\lambda$  é a multiplicidade de  $\mathbf{P}_\lambda$ , i.e.  $d_\lambda = \dim \mathbf{Q}_\lambda = s_\lambda(1^{\times d})$ . Então

$$\chi(\pi^{-1}) = \sum_{\lambda \vdash (k,d)} s_\lambda(1^{\times d}) \chi_\lambda(\pi^{-1}),$$

e voltando na expressão para  $\Delta(\mathbb{I})$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{I}) &= \sum_{\pi \in S_k} \left( \sum_{\lambda \vdash (k,d)} s_\lambda(1^{\times d}) \chi_\lambda(\pi^{-1}) \right) \mathbf{P}(\pi) \\ &= \sum_{\lambda \vdash (k,d)} s_\lambda(1^{\times d}) \left( \sum_{\pi \in S_k} \chi_\lambda(\pi^{-1}) \mathbf{P}(\pi) \right). \end{aligned}$$

Esse último termo entre parênteses não é um total desconhecido, a menos de algumas constantes ele já apareceu quando falavamos do projetor  $C_\lambda$ , i.e.

$$\frac{k!}{f^\lambda} C_\lambda = \sum_{\pi \in S_k} \chi_\lambda(\pi^{-1}) \mathbf{P}(\pi)$$

de onde se segue que

$$\Delta(\mathbb{I}) = k! \sum_{\lambda \vdash k} \frac{s_\lambda(1^{\times d})}{f^\lambda} C_\lambda$$

ainda mais, como  $C_\lambda$  é um projetor  $C_\lambda C_\mu = \delta_{\lambda,\mu}$ , e segue que

$$\Delta(\mathbb{I})^{-1} = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{f^\lambda}{s_\lambda(1^{\times d})} C_\lambda.$$

Retornando a expressão de  $C_\lambda$ , obtemos a expressão para a função correspondente de  $\Delta(\mathbb{I})^{-1}$  na álgebra

$$Wg = \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(f^\lambda)^2}{s_\lambda(1^{\times d})} \chi_\lambda$$

i.e.

$$\Delta(\mathbb{I})^{-1} = \sum_{\pi \in S_k} Wg(\pi) \mathbf{P}(\pi)$$

iii) Do fato que  $\mathbf{Q}(\mathcal{U})$  comuta com  $\mathbf{P}(\pi)$

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathcal{E}_k(A)) &= \sum_{\pi \in S_k} \text{Tr} \left( \int_{U(d)} \mathbf{Q}(\mathcal{U}) \mathbf{A} \mathbf{Q}(\mathcal{U})^\dagger d\mu(U) \mathbf{P}(\pi^{-1}) \right) \mathbf{P}(\pi) \\
 &= \sum_{\pi \in S_k} \text{Tr} \left( \mathbf{A} \int_{U(d)} \mathbf{Q}(\mathcal{U})^\dagger \mathbf{P}(\pi^{-1}) \mathbf{Q}(\mathcal{U}) d\mu(U) \right) \mathbf{P}(\pi) \\
 &= \sum_{\pi \in S_k} \text{Tr} (\mathbf{A} \mathbf{P}(\pi^{-1})) \mathbf{P}(\pi) = \Delta(A)
 \end{aligned}$$

Daí como  $\mathcal{E}_k(A) \in \mathbf{P}(\mathbb{C}[S_k])$ , e pelo ponto *i*), temos que

$$\Delta(A) = \Delta(\mathcal{E}_k(A)\mathbb{I}) = \mathcal{E}_k(A)\Delta(\mathbb{I})$$

da mesma forma  $\Delta(A) = \Delta(\mathbb{I})\mathcal{E}_k(A)$ .

*iv*) Segue direto de *iii*) compinado com *ii*).

*v*) De forma direta, temos

$$\Delta(A\mathcal{E}_k(B)) = \Delta(A)\mathcal{E}_k(B) = \Delta(A)\Delta(B)\Delta(\mathbb{I})^{-1}.$$

□

Agora podemos focar no objetivo que é obter uma expressão para (6.1).

**Corolário 46.** *Seja  $k$  um inteiro positivo e  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$ ,  $\mathbf{i}' = (i'_1, \dots, i'_k)$  e  $\mathbf{j}' = (j'_1, \dots, j'_k)$   $k$ -tuplas de inteiros positivos, então*

$$\begin{aligned}
 &\int_{U(d)} \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{\mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{\mathcal{U}_{i'_k j'_k}} d\mu(U) \\
 &= \sum_{\sigma, \tau \in S_k} Wg(\sigma\tau^{-1}) \langle i_1 | i'_{\sigma(1)} \rangle \dots \langle i_k | i'_{\sigma(k)} \rangle \langle j_1 | j'_{\tau(1)} \rangle \dots \langle j_k | j'_{\tau(k)} \rangle
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

*Demonstração.* Para provar isso, vamos precisar da propriedade *v*) das  $\Delta$ 's e vamos definir os seguintes operadores  $A = |\mathbf{i}'\rangle\langle \mathbf{i}|$  e  $B = |\mathbf{j}\rangle\langle \mathbf{j}'|$ , onde  $|\mathbf{i}\rangle = |i_1, \dots, i_k\rangle$ . Podemos notar que

$$\int_{U(d)} \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{\mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{\mathcal{U}_{i'_k j'_k}} d\mu(U) = \text{Tr}(A\mathcal{E}_k(B))$$

e que em *v*) podemos expandir da seguinte maneira (usando a definição de  $\Delta$ ):

$$\Delta(A\mathcal{E}_k(B)) = \text{Tr}(A\mathcal{E}_k(B))\mathbb{I} + \sum_{\pi \in S_k \setminus \{e\}} \text{Tr}(A\mathcal{E}_k(B)\mathbf{P}(\pi^{-1}))\mathbf{P}(\pi).$$

Pela seguinte ação  $\mathbf{P}(\sigma)|i_1, \dots, i_k\rangle = |i_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, i_{\sigma^{-1}(k)}\rangle$ , podemos escrever o operador de permutação como:

$$\mathbf{P}(\sigma) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in [d]} |i_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, i_{\sigma^{-1}(k)}\rangle \langle i_1, \dots, i_k|,$$

e como  $\mathbf{P}(\sigma^{-1}) = \mathbf{P}(\sigma)^\dagger$ , temos que

$$\mathbf{P}(\sigma^{-1}) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in [d]} |i_1, \dots, i_k\rangle \langle i_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, i_{\sigma^{-1}(k)}|.$$

Então, por definição temos

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}(\sigma^{-1}))\mathbf{P}(\sigma) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_k} \langle i_1 | i'_{\sigma(1)} \rangle \dots \langle i_k | i'_{\sigma(k)} \rangle \mathbf{P}(\sigma). \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\Delta(B) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_k} \langle i_1 | i'_{\tau(1)} \rangle \dots \langle i_k | i'_{\tau(k)} \rangle \mathbf{P}(\tau^{-1}).$$

Então novamente de  $\nu$ ) temos

$$\begin{aligned} \Delta(A\mathcal{E}_k(B)) &= \Delta(A)\Delta(B)\Delta(\mathbb{I})^{-1} \\ &= \sum_{\sigma, \tau, \pi \in \mathcal{S}_k} \langle i_1 | i'_{\sigma(1)} \rangle \dots \langle i_k | i'_{\sigma(k)} \rangle \langle i_1 | i'_{\tau(1)} \rangle \dots \langle i_k | i'_{\tau(k)} \rangle Wg(\pi^{-1})\mathbf{P}(\sigma\tau^{-1}\pi), \end{aligned}$$

e assim o termo que tem a identidade é aquele que  $\pi = \tau\sigma^{-1}$ . Comparando as expressões para  $\Delta(A\mathcal{E}_k(B))$ , mostramos que

$$\sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{S}_k} \langle i_1 | i'_{\sigma(1)} \rangle \dots \langle i_k | i'_{\sigma(k)} \rangle \langle i_1 | i'_{\tau(1)} \rangle \dots \langle i_k | i'_{\tau(k)} \rangle Wg(\sigma\tau^{-1}) = \text{Tr}(A\mathcal{E}_k(B))$$

o que demonstra o resultado. □

Além disso, podemos mostrar que:

**Teorema 47.** *Se  $k \neq l$  então:*

$$\int_{U(d)} \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{\mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{\mathcal{U}_{i'_k j'_k}} d\mu(U) = 0.$$



*Demonstração.* Basta notar que multiplicação de uma matriz unitária por uma fase  $z \in U(1)$  (somente uma fase complexa) continua sendo unitária, então:

$$\begin{aligned} & \int_{U(d)} \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{\mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{\mathcal{U}_{i'_l j'_l}} d\mu(U) \\ &= \int_{U(d)} z \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots z \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{z \mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{z \mathcal{U}_{i'_l j'_l}} d\mu(U) \\ &= z^{k-l} \int_{U(d)} \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{\mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{\mathcal{U}_{i'_l j'_l}} d\mu(U). \end{aligned}$$

O que implica que

$$(1 - z^{k-l}) \int_{U(d)} \mathcal{U}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{U}_{i_k j_k} \overline{\mathcal{U}_{i'_1 j'_1}} \dots \overline{\mathcal{U}_{i'_l j'_l}} d\mu(U) = 0.$$

Como  $z$  é uma fase arbitrária, podemos afirmar que o que deve ser é a integral, o que demonstra o teorema.  $\square$

Podemos entender o resultado do teorema anterior intuitivamente. Se  $k \neq l$  então vai sobrar um complexo  $\mathcal{U}_{ij}$  sem o módulo, e estaremos avaliando a média de uma fase complexa, que deve ser 0.

Com esse resultado podemos avaliar médias sobre quantidades envolvidas com funções de matrizes do grupo unitário.

Para exemplificar vamos usar uma média conhecida e obter seu resultado usando as funções de Weingarten.

**Exemplo 48.** O cálculo de  $\langle \text{Tr}(\mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger)^n \rangle$ , é trivial e pode ser facilmente obtido levando em conta a unitariedade das matrizes  $\mathcal{U}$ , i.e.,  $\mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{I}$ . Logo se  $\mathcal{U} \in U(N) \implies \langle \text{Tr}(\mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger)^n \rangle = N$ . Mas o objeto aqui não é simplesmente avaliar a média proposta, mas sim ver o cálculo de Weingarten em ação. Para isso, vamos escrever então

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger)^n \rangle = \sum_J \sum_K \int \mathcal{U}_{j_n, k_1} \mathcal{U}_{j_1, k_2} \dots \mathcal{U}_{j_{n-1}, k_n} \overline{\mathcal{U}_{j_1, k_1}} \overline{\mathcal{U}_{j_2, k_2}} \dots \overline{\mathcal{U}_{j_n, k_n}} d\mu(U(N)), \quad (6.5)$$

onde  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  e  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ . Seja  $\pi = (123\dots n)$  a permutação cíclica de  $n$  elementos. Podemos escrever (6.5) como:

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(\mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger)^n \rangle &= \sum_J \sum_K \sum_{\sigma, \tau \in S_k} Wg(\sigma \tau^{-1}) \langle j_n | j_{\sigma \pi(1)} \rangle \dots \langle j_{n-1} | j_{\sigma \pi(n-1)} \rangle \langle k_1 | k_{\tau(1)} \rangle \dots \langle k_n | k_{\tau(n)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma, \tau \in S_k} Wg(\sigma \tau^{-1}) \sum_J \langle j_n | j_{\sigma \pi(1)} \rangle \dots \langle j_{n-1} | j_{\sigma \pi(n-1)} \rangle \sum_K \langle k_1 | k_{\tau(1)} \rangle \dots \langle k_n | k_{\tau(n)} \rangle. \end{aligned}$$

Sejam  $\gamma$  e  $\lambda$  partições tais que  $\sigma \pi \in \gamma$  e  $\tau \in \lambda$ . Com uma breve reflexão, não é complicado perceber que a soma em  $J$  e a soma em  $K$  são exatamente os polinômios simétricos da identidade (todos os autovalores

iguais a 1),  $p_\gamma(1^{\times N})$  e  $p_\lambda(1^{\times N})$  respectivamente. Abrindo a função de Weingarten (FW) e usando (6.5) temos:

$$\langle Tr(\mathcal{W}\mathcal{W}^\dagger)^n \rangle = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \left\{ \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\theta \vdash n} \frac{(f^\theta)^2}{s_\theta(1^{\times d})} \chi_\theta(\sigma\tau^{-1}) \times \sum_{\mu \vdash n} \chi_\mu(\sigma\pi) s_\mu(1^{\times N}) \times \sum_{\beta \vdash n} \chi_\beta(\tau) s_\beta(1^{\times N}) \right\}.$$

Para prosseguir podemos inverter as somas nas partições com as somas nas permutações fazer uso da ortogonalidade dos caracteres que foram mostradas no capítulo 3.

$$\begin{aligned} \langle Tr(\mathcal{W}\mathcal{W}^\dagger)^n \rangle &= \sum_{\theta, \beta, \mu \vdash n} \left\{ \frac{1}{(n!)^2} \frac{(f^\theta)^2}{s_\theta(1^{\times d})} \right\} \times \sum_{\sigma \in S_n} \{ \chi_\mu(\sigma\pi) s_\mu(1^{\times N}) s_\beta(1^{\times N}) \} \times \sum_{\tau \in S_n} \chi_\theta(\sigma\tau^{-1}) \chi_\beta(\tau) \\ &= \sum_{\beta, \mu \vdash n} \left\{ \frac{1}{(n!)} f^\beta \right\} \times \sum_{\sigma \in S_n} \{ \chi_\mu(\sigma\pi) s_\mu(1^{\times N}) \} \times \chi_\beta(\sigma) \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \chi_\mu(\pi) s_\mu(1^{\times N}) = p_n(1^{\times N}) \\ &= \sum_{i=1}^N 1^n = N. \end{aligned}$$

Que era o esperado.

Da mesma forma, utilizando técnicas de teoria de representações podemos encontrar diversos outros resultados, como por exemplo o fator de forma:

$$\frac{1}{N} \langle |Tr(\mathcal{W}^n)|^2 \rangle = \begin{cases} N & n = 0 \\ |n|/N & 0 < n \leq N \\ 1 & N < n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O cálculo do primeiro regime é trivial, enquanto o cálculo em  $0 < n \leq N$  e  $N < n$  podem ser obtidos com o uso das FW, e são amplamente discutidos em [8].

O uso de cálculo de Weingarten na física pode ser visto em [20].

Um outro exemplo do uso das FW são para obter médias de produtos de elementos de matrizes do comutador, que será feito no capítulo a seguir.

## Capítulo 7

# Comutadores

Sejam  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in U(N)$ . Então o comutador definidor no grupo  $U(N)$  pelas matrizes  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  é dado por

$$C := [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = \mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{U}^\dagger\mathcal{V}^\dagger$$

e pertence ao grupo  $U(N)$ . Podemos então responder algumas perguntas sobre propriedades estatísticas de  $C$  trabalhando com as FW e o traço dado pelas funções de Schur.

Na irrep  $\lambda$ , temos que  $s_\lambda(\mathcal{U}A\mathcal{U}^\dagger B) = \text{Tr}[\mathbf{Q}_\lambda(\mathcal{U}A\mathcal{U}^\dagger B)]$ . Então a média dessa função de Schur no grupo unitário deve dar:

$$\begin{aligned} \int \text{Tr}[\mathbf{Q}_\lambda(\mathcal{U}A\mathcal{U}^\dagger B)] d\mu(U(N)) &= \sum_{i,k,l,m} \int [\mathbf{Q}_\lambda(\mathcal{U})]_{ii} [\mathbf{Q}_\lambda(A)]_{kl} [\mathbf{Q}_\lambda(\mathcal{U}^\dagger)]_{lm} [\mathbf{Q}_\lambda(B)]_{mi} d\mu(U(N)) \\ &= \sum_{i,k,l,m} [\mathbf{Q}_\lambda(A)]_{kl} [\mathbf{Q}_\lambda(B)]_{mi} \int [\mathbf{Q}_\lambda(\mathcal{U})]_{ii} [\mathbf{Q}_\lambda(\mathcal{U}^\dagger)]_{lm} d\mu(U(N)) \\ &= \frac{s_\lambda(A)s_\lambda(B)}{s_\lambda(\mathbf{1}^{\times N})}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde no último passo foi usado o teorema 23 da ortogonalidade dos elementos de matrizes (na versão contínua). Além disso, pelo teorema 24 temos que

$$\int s_\lambda(\mathcal{U}) s_\mu(\mathcal{U}^\dagger) = \delta_{\lambda,\mu}. \quad (7.2)$$

Então como

$$\langle s_\lambda(C) \rangle = \int \int s_\lambda(C) d\mu_{\mathcal{U}} d\mu_{\mathcal{V}},$$

podemos utilizar (7.1) e (7.2) para obter:

$$\langle s_\lambda(C) \rangle = \frac{1}{s_\lambda(1^{\times N})}. \quad (7.3)$$

Como para qualquer caso, temos que  $(TrA)^n = p_{1^n}(A)$ , podemos combinar (7.3) e a expansão de  $p_{1^n}(C)$  em funções de Schur (5.6) para obter

$$\langle (TrC)^n \rangle = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{f^\lambda}{s_\lambda(1^{\times N})}. \quad (7.4)$$

No caso de  $N \gg 1$ , temos que  $s_\lambda(1^{\times N}) \rightarrow \frac{f^\lambda}{n!} N^n$  [17], o que leva ao caso assintótico:

$$\langle (TrC)^n \rangle \sim \frac{n!}{N^n} p_n. \quad (N \gg 1) \quad (7.5)$$

Para casos em que além de  $N \gg 1$ , temos  $n \gg 1$ , podemos usar a fórmula de Ramanujan-Hardy [12], para o caso assintótico de  $p_n$  e a fórmula de Stirling [21] para obter:

$$\langle (TrC)^n \rangle \sim \frac{1}{4N^n} \sqrt{\frac{2}{3}n\pi} (n^{n-1}) \exp[\pi \sqrt{\frac{2}{3}n} - n]. \quad (n, N \gg 1) \quad (7.6)$$

Além dos casos discutidos, usando as FW, podemos obter:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n C_{i,j_i} \right\rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left\{ \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\chi_\lambda(\sigma)}{(s_\lambda(1^{\times N}))^2} \frac{f^\lambda}{n!} \right\} \langle i_1 | J_{\sigma(1)} \rangle \langle i_2 | J_{\sigma(2)} \rangle \dots \langle i_n | J_{\sigma(n)} \rangle, \quad (7.7)$$

que seria um análogo do cálculo de Weingarten para comutadores. A partir da equação (7.7) obtemos de forma direta a equação (7.4). Para o caso mais simples, temos:

$$\langle C_{ij} \rangle = \frac{\delta_{i,j}}{N^2},$$

que é  $\frac{1}{N^2}$  vezes a matriz identidade.

Além disso podemos usar (7.7) para estudar casos mais complexos, como:

$$\langle C_{ij}^2 \rangle = \frac{4\delta_{i,j}}{N^2(N+1)^2}$$

e

$$\langle |TrC|^2 \rangle = \frac{N^2}{N^2 - 1}.$$

Para obter a fórmula (7.7) podemos usar o caso  $n = 2$  sem perda de generalidades. Temos que:

$$\langle C_{i_1 j_1} C_{i_2 j_2} \rangle = \langle (\mathcal{U} \Psi \mathcal{U}^\dagger \Psi^\dagger)_{i_1 j_1} (\mathcal{U} \Psi \mathcal{U}^\dagger \Psi^\dagger)_{i_2 j_2} \rangle$$

$$= \sum_{k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3} \int \mathcal{U}_{i_1 k_1} \mathcal{U}_{i_2 l_1} \mathcal{U}_{k_3 k_2}^* \mathcal{U}_{l_3 l_2}^* d\mu_{\mathcal{U}} \int \mathcal{V}_{k_1 k_2} \mathcal{V}_{l_1 l_2} \mathcal{V}_{j_1 k_3}^* \mathcal{V}_{j_2 l_3}^* d\mu_{\mathcal{V}}.$$

As duas integrais sobre o grupo unitário são obtidas por FW, e podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle C_{i_1 j_1} C_{i_2 j_2} \rangle &= \sum_{k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3} \left( \sum_{\sigma, \tau \in \mathcal{S}_2} \langle i_1 | k_{\tau(3)} \rangle \langle i_2 | l_{\tau(3)} \rangle \langle k_1 | k_{\sigma(2)} \rangle \langle l_1 | l_{\sigma(2)} \rangle Wg(\sigma \tau^{-1}) \right) \times \\ &\quad \left( \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{S}_2} \langle k_1 | j_{\alpha(1)} \rangle \langle l_2 | j_{\alpha(2)} \rangle \langle k_2 | k_{\beta(3)} \rangle \langle l_2 | l_{\beta(3)} \rangle Wg(\beta \alpha^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Realizando as somas em  $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3$  primeiro, chegamos em uma forma muito mais amigável dada por:

$$\langle C_{i_1 j_1} C_{i_2 j_2} \rangle = \sum_{\beta \sigma \alpha \tau \in \mathcal{S}_2} \langle j_1 | i_{\beta^{-1} \sigma \alpha \tau^{-1}(1)} \rangle \langle j_2 | i_{\beta^{-1} \sigma \alpha \tau^{-1}(2)} \rangle Wg(\beta \alpha^{-1}) Wg(\sigma \tau^{-1}).$$

Podemos fazer duas mudanças de variáveis, dadas por  $\gamma = \sigma^{-1} \beta$  e  $\theta = \alpha \tau$ , para chegar em:

$$\begin{aligned} \langle C_{i_1 j_1} C_{i_2 j_2} \rangle &= \sum_{\theta \sigma \gamma \tau \in \mathcal{S}_2} \langle j_1 | i_{\gamma \theta(1)} \rangle \langle j_2 | i_{\gamma \theta(2)} \rangle Wg(\theta \tau^{-1} \gamma^{-1} \sigma^{-1}) Wg(\sigma \tau^{-1}) \\ &= \sum_{\theta \sigma \gamma \tau \in \mathcal{S}_2} \langle j_1 | i_{\gamma \theta(1)} \rangle \langle j_2 | i_{\gamma \theta(2)} \rangle \times \\ &\quad \left( \frac{1}{(n!)^4} \sum_{\mu \vdash n} \frac{(f^\mu)^2}{s_\mu(1 \times N)} \chi_\mu(\sigma \tau^{-1}) \right) \times \left( \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(f^\lambda)^2}{s_\lambda(1 \times N)} \chi_\lambda(\theta \tau^{-1} \gamma^{-1} \sigma^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Com o uso da ortogonalidade novamente, podemos reduzir essa expressão ainda mais e chegar em:

$$\langle C_{i_1 j_1} C_{i_2 j_2} \rangle = \sum_{\theta \sigma \gamma \tau \in \mathcal{S}_2} \langle j_1 | i_{\gamma \theta(1)} \rangle \langle j_2 | i_{\gamma \theta(2)} \rangle \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{(n!)^3} \frac{(f^\mu)^3}{(s_\mu(1 \times N))^2} \chi_\mu(\gamma^{-1} \sigma^{-1} \theta \sigma).$$

Com outra mudança de variáveis, dessa vez  $\nu = \gamma \theta$ , podemos reescrever como

$$\begin{aligned} \langle C_{i_1 j_1} C_{i_2 j_2} \rangle &= \sum_{\theta \sigma \nu \in \mathcal{S}_2} \langle j_1 | i_{\nu(1)} \rangle \langle j_2 | i_{\nu(2)} \rangle \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{(n!)^3} \frac{(f^\mu)^3}{(s_\mu(1 \times N))^2} \chi_\mu(\theta \nu^{-1} \sigma^{-1} \theta \sigma) \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{S}_2} \langle j_1 | i_{\nu(1)} \rangle \langle j_2 | i_{\nu(2)} \rangle \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{(n!)^3} \frac{(f^\mu)^3}{(s_\mu(1 \times N))^2} \sum_{\sigma \theta \in \mathcal{S}_2} \chi_\mu(\theta \nu^{-1} \sigma^{-1} \theta \sigma). \end{aligned}$$

A última soma pode ser feita usando fatorações de permutações, e é dada simplesmente por  $(n!)^2 \frac{\chi_\mu(\nu)}{(f^\mu)^2}$ ,

o que prova (7.7). A generalização para  $n \geq 2$  vale pois as permutações estão relacionadas com as duas integrais que aparecem, e cada uma das integrais só fará aparecer outros termos  $\langle j_i | i_{V(i)} \rangle$ .

Além disso, usando as mesmas idéias que foram usadas para chegar em (7.4), podemos usar que  $p_m(A) = Tr(A^m)$ , e obter:

$$\langle Tr(C^n) \rangle = \sum_{\lambda} \frac{\chi_{\lambda}(n)}{s_{\lambda}(1^{\times N})}. \quad (7.8)$$

O caracter  $\chi_{\lambda}(n)$  é um dos que conhecemos da literatura, e podemos substituir a fórmula (7.8), por

$$\langle Tr(C^n) \rangle = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k! \frac{(n-k-1)!(N-k-1)!}{(N+n-k-1)!}. \quad (7.9)$$

Então para alguns valores de  $n$ , temos:

$$\langle Tr(C^2) \rangle = -\frac{4}{N(N^2-1)},$$

$$\langle Tr(C^4) \rangle = \frac{9(N^2+4)}{N(N^2-1)(N^2-4)}.$$

Todo esse último capítulo contém conteúdo inédito, parte de um trabalho que será publicado futuramente.

## Capítulo 8

# Conclusão

Durante todo o texto, apesar do grande foco matemático sempre foram citados aplicações e usos da teoria de representações e grupos na física, o que mostra a grande importância do conhecimento do tema para as mais diversas áreas.

Pudemos perceber durante a construção da teoria de funções Weingarten a importância das teorias de grupos e representações na área de matrizes aleatórias, principalmente no que diz respeito a dualidade Schur-Weyl que foi crucial na obtenção das FW.

Dito isso conclui-se que grupos e representações apesar de serem uma teoria antiga, ainda são muito importantes na física e matemática de forma geral, fazendo-se indispensável seu aprendizado para um conhecimento profundo desses temas.

# Referências Bibliográficas

- [1] M.A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer, 1988.
- [2] S. Aubert and C.S. Lam. Invariant integration over the unitary group. 2003.
- [3] R. Carter, G. Segal, and I. Macdonald. *Lectures on Lie Groups and Lie algebras*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] M. Christandl. *The Structure of Bipartite Quantum States: Insights from Group Theory and Cryptography*. PhD thesis, University of Cambridge, 2006.
- [5] B. Collins and P. Sniady. Integration with respect to the haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. 2004.
- [6] Robson da Silva. Funções simétricas e combinatória. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2007.
- [7] Elon Lages de Lima. *Variedades Diferenciáveis*. IMPA, 1973.
- [8] M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, and A. Jorio. *Group Theory: Application to the Physics of Condensed Matter*. Springer, 2010.
- [9] M.D. Esposti and A. Knauf. On the form factor for the unitary group. 2013.
- [10] A. Fazzio and K. Watari. *Introdução A Teoria De Grupos: APLICADA EM MOLECULAS E SOLIDOS*. UFSM, 2009.
- [11] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory: A First Course*. Springer, 1991.
- [12] R. Goodman and N.R. Wallach. *Symmetry, Representations, and Invariants*. Springer, 2009.
- [13] B.C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Springer, 2013.
- [14] G.H. Hardy and S. Ramanujan. Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc.*, 1918.
- [15] L.Zhang and H. Xiang. Average entropy of a subsystem over a global unitary orbit of a mixed bipartite state. *arXiv:1509.00211 [quant-ph]*, 2017.



- [16] I.G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall polynomials*. Springer, 1979.
- [17] I. Marvian and R.W. Spekkens. A generalization of schur-weyl duality with applications in quantum estimation. 2014.
- [18] S. Matsumoto. Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces. *Random Matrices: Theory Appl Vol. 2 No. 2*, 2013.
- [19] M.Novaes. Expansion of polynomial lie group integrals in terms of certain maps on surfaces, and factorizations of permutations. *IOPscience*, 2016.
- [20] M. Novaes. Energy-dependent correlations in the s-matrix of chaotic systems. *J. Math. Phys.* 57(12), 2016.
- [21] D.J. Rowe, M.J. Carvalho, and J. Repka. Dual pairing of symmetry groups and dynamical groups in physics. *Reviews of Modern Physics*, 2012.
- [22] B. Sagan. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Springer, 1991.
- [23] S. Salinas. *Introduction to Statistical Physics*. Springer, 1997.
- [24] B. Simon. *Representations of Finite and Compact Groups*. American Mathematical Society, 1996.
- [25] M. Spivak. *Calculus on Manifolds*. Benjamin Cummings, 1965.
- [26] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics: Volume 2*. Cambridge, 2001.
- [27] D. Weingarten. Asymptotic behavior of group integrals in the limit of infinite rank. *J. Mathematical Phys*, 1978.
- [28] S.F. Weintraub. *Representation Theory of Finite Groups: Algebra and Arithmetic*. American Mathematical Society, 2003.
- [29] J. Wishart. The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika*, 1928.
- [30] L. Zhang. Matrix integrals over unitary groups: An application of schur-weyl duality. 2015.