

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA - FAMAT

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



**TEORIA DE HOMOTOPIA E O GRUPO
FUNDAMENTAL DA S^1**

MARCELA DINIZ SILVA

UBERLÂNDIA - MG

DEZEMBRO/2019

MARCELA DINIZ SILVA

TEORIA DE HOMOTOPIA E O GRUPO FUNDAMENTAL DA S^1

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho.

UBERLÂNDIA - MG

DEZEMBRO/2019

MARCELA DINIZ SILVA

TEORIA DE HOMOTOPIA E O GRUPO FUNDAMENTAL DA S^1

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática. Defendida e aprovada pela banca examinadora em 21 de dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Francielle R. de Castro Coelho - FAMAT/UFU

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende - FAMAT/UFU

Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves - FAMAT/UFU

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, sem o qual seria impossível a realização deste, já que sempre é o meu guia em qualquer caminho trilhado pelos meus pés, e a minha força em qualquer batalha enfrentada pelas minhas mãos.

Depois, agradeço a minha família que sempre esteve ao meu lado para me apoiar em todas as minhas escolhas, e de forma especial no período em que me dediquei ao estudo deste, me incentivando e me lembrando que tudo na vida é conseguido por meio do trabalho e esforço empenhados nas situações que nos são impostas.

Agradeço também à minha Orientadora que aceitou me ajudar, dispondo de seu tempo sempre que precisei, e colaborando de forma indispensável para o desenvolvimento deste.

E, por fim, agradeço aos meus amigos que me apoiaram e apoiam sempre em todas as minhas decisões, e nunca permitiram que eu desistisse dos desafios que foram surgindo sem ao menos tentar. A todos o meu muito obrigado.

Resumo

Este trabalho consiste em um estudo sobre o conceito de Grupo Fundamental de um espaço topológico e suas propriedades. Para isto, estudamos tópicos de Topologia Geral, que foram valiosos para a introdução à Teoria de Homotopia e para o conceito de Grupo Fundamental. No final, apresentamos a prova de que o grupo fundamental da S^1 é isomorfo ao grupo dos números inteiros e a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra como consequência deste fato.

Palavras-chave: Espaços Topológicos. Espaços Conexos por Caminhos. Teoria de Homotopia. Grupo Fundamental da S^1 . Teorema Fundamental da Álgebra.

Sumário

Resumo	vi
Introdução	1
1 Tópicos de Topologia Geral	3
1.1 Espaços Topológicos	3
1.2 Fêcho, Interior e Ponto de Acumulação	9
1.3 Espaço de Hausdorff	12
1.4 Funções Contínuas	13
1.5 Espaços Conexos e Conexos por Caminhos	18
1.6 Espaços Compactos	24
2 Teoria de Homotopia e Grupo Fundamental	29
2.1 Homotopia	29
2.2 Homotopia de Caminhos	32
2.3 Grupo Fundamental	38
2.4 O Homomorfismo induzido	41
3 Grupo Fundamental da S^1	43
3.1 Espaços de Recobrimento	43
3.2 Cálculo do Grupo Fundamental da S^1	46
3.3 Aplicações	52
Considerações Finais	55
Referências Bibliográficas	56

Introdução

A Topologia Algébrica teve início por volta do ano 1894, por meio dos estudos do matemático francês Henri Poincaré, que apresentou uma série de trabalhos reunindo os principais resultados da área, entre eles, os resultados a respeito do grupo fundamental.

Na Topologia Algébrica, transformam-se problemas topológicos em problemas algébricos e, ao resolver estes últimos, obtêm-se informações sobre o problema original.

Uma importante teoria desta área é a Teoria de Homotopia entre espaços topológicos, na qual se estuda o conceito de Grupo Fundamental de um espaço topológico. Um dos problemas estudados em Topologia é determinar quando dois espaços topológicos dados são homeomorfos ou não. Mas não existem métodos específicos para solucionar tal questão, exceto algumas técnicas que podem ser aplicadas em casos particulares.

O conceito de Grupo Fundamental surge, então, como uma dessas técnicas, já que ele é um invariante topológico, isto é, se dois espaços topológicos são homeomorfos, eles possuem grupos fundamentais isomorfos. Além disso, o conceito de Grupo Fundamental pode ser utilizado para demonstrar resultados importantes de outras áreas como, por exemplo, o Teorema Fundamental da Álgebra, que diz que toda equação polinomial com coeficientes reais ou complexos possui pelo menos uma raiz (real ou complexa).

O principal objetivo deste trabalho é estudar o conceito de Grupo Fundamental de um espaço topológico e suas propriedades. Além disso, apresentaremos a prova de que o grupo fundamental da S^1 é isomorfo ao grupo dos números inteiros. E como consequência deste resultado, faremos a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Este trabalho de conclusão de curso foi separado em três capítulos.

No Capítulo 1, estudamos conceitos e resultados importantes para o desenvolvimento dos demais capítulos. Inicialmente, introduzimos e exemplificamos o conceito de espaços topológicos, produto de espaços topológicos, subespaço topológico, conjunto fechado, fecho, interior, ponto

de acumulação, espaço de Hausdorff e funções contínuas. Em seguida, definimos conjuntos fechados e funções contínuas. Para finalizar o capítulo, definimos conjuntos conexos, conexos por caminhos e compactos em espaços topológicos.

No Capítulo 2, apresentamos alguns requisitos importantes para o desenvolvimento do Capítulo 3. Mais especificamente, definimos e apresentamos alguns resultados sobre homotopia e homotopia de caminhos. Em seguida, introduzimos e exemplificamos o conceito de grupo fundamental. Finalizamos o capítulo definindo o homomorfismo induzido entre grupos fundamentais.

Finalmente, no Capítulo 3, encontra-se a contribuição mais significativa para este trabalho. Inicialmente, realizamos um estudo sobre espaços de recobrimento. Depois, estudamos o grupo fundamental da S^1 mostrando que este é isomorfo, como grupos, ao conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} . Por último, apresentamos duas aplicações, dentre as quais se destaca o Teorema Fundamental da Álgebra.

Capítulo 1

Tópicos de Topologia Geral

Neste capítulo introduzimos conceitos e resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso. A principal referência para este capítulo é [4].

1.1 Espaços Topológicos

Definição 1.1 *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção \mathcal{T} de subconjuntos de X obedecendo:*

- (i) X e \emptyset estão em \mathcal{T} ;
- (ii) a união dos elementos de qualquer subcoleção de \mathcal{T} está em \mathcal{T} ;
- (iii) a interseção finita dos elementos de qualquer subcoleção de \mathcal{T} está em \mathcal{T} .

O conjunto X munido da topologia \mathcal{T} é chamado espaço topológico.

Observação 1.1 *Em topologia, a noção de aberto é primitiva: uma topologia \mathcal{T} em um conjunto X é definida como um subconjunto do conjunto das partes de X (satisfazendo determinadas propriedades) e cada elemento de \mathcal{T} é chamado aberto ou conjunto aberto.*

Exemplo 1.1 *Seja X um conjunto com três elementos, $X = \{a, b, c\}$. Existem muitas topologias em X , as quais algumas serão indicadas esquematicamente na figura a seguir. O canto superior direito indica a topologia em que os abertos são X , \emptyset , $\{a, b\}$, $\{b\}$, e $\{b, c\}$. A topologia no canto superior esquerdo contém apenas X e \emptyset , enquanto a topologia no canto inferior direito contém todos os subconjunto de X . Você pode encontrar outras topologias em X permutando a, b e c .*

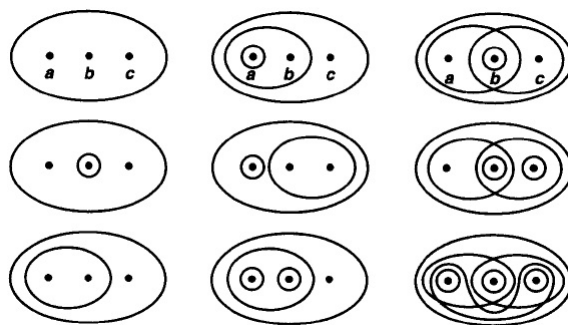


Figura 1: Topologias sobre $X = \{a, b, c\}$. [4], p.76.

Exemplo 1.2 Se X é um conjunto, a coleção $\mathcal{T} = \{A \mid A \subset X\}$ de todos os subconjuntos de X é uma topologia em X chamada topologia discreta. A coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ também é uma topologia em X chamada topologia indiscreta ou topologia trivial.

Definição 1.2 Suponha que \mathcal{T} e \mathcal{T}' são duas topologias em um dado conjunto X . Se $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, nós dizemos que \mathcal{T}' é mais fina que \mathcal{T} ; se \mathcal{T}' contém estritamente \mathcal{T} , dizemos que \mathcal{T}' é estritamente mais fina que \mathcal{T} . Também dizemos que \mathcal{T} é mais grossa que \mathcal{T}' , ou estritamente mais grossa, nas duas respectivas situações. Dizemos que \mathcal{T} é comparável a \mathcal{T}' se $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ou $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

Definição 1.3 Se X é um conjunto, uma base para a topologia \mathcal{T} sobre X é uma coleção \mathfrak{B} de subconjuntos de X (onde esses subconjuntos são chamados de “elementos básicos”), tal que:

- (i) para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento básico B contendo x ;
- (ii) se x pertence à interseção de dois elementos básicos B_1 e B_2 , então existe um elemento básico B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se \mathfrak{B} satisfaz essas duas condições, então definimos a topologia \mathcal{T} gerada por \mathfrak{B} como segue: Um subconjunto U de X é dito ser aberto em X (isto é, U é um elemento de \mathcal{T}) se para cada $x \in U$, existe um elemento básico $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$. Note que cada elemento básico é um elemento de \mathcal{T} .

Exemplo 1.3 Se X é um conjunto qualquer, a coleção de todos os subconjuntos de um único ponto de X é uma base para a topologia discreta em X .

Observação 1.2 Vamos mostrar que a coleção \mathcal{T} gerada pela base \mathfrak{B} é uma topologia em X .

De fato, temos que $\emptyset \in \mathcal{T}$, pois não contradiz a definição. Da mesma forma, X está em \mathcal{T} , pois para cada $x \in X$, existe algum elemento básico B contendo x e tal que $B \subset X$. Agora, vamos tomar uma família com índices $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, de elementos de \mathcal{T} e mostremos que

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Dado $x \in U$, existe um índice α tal que $x \in U_\alpha$. Como U_α é aberto, existe um elemento básico B tal que $x \in B \subset U_\alpha$. Então, $x \in B$ e $B \subset U$. Logo, U é aberto, pela definição.

Agora, consideremos $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ e mostremos que $U_1 \cap U_2$ pertence a \mathcal{T} . Dado $x \in U_1 \cap U_2$, escolha um elemento básico B_1 contendo x tal que $B_1 \subset U_1$ e escolha um elemento básico B_2 contendo x tal que $B_2 \subset U_2$. A segunda condição para uma base nos permite escolher um elemento B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Então, $x \in B_3$ e $B_3 \subset U_1 \cap U_2$ e daí, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Finalmente, mostraremos por indução finita que qualquer interseção finita $U_1 \cap \dots \cap U_n$ de elementos de \mathcal{T} está em \mathcal{T} . Esse fato é trivial para $n = 1$, suponha que é verdade para $n - 1$ e provemos que vale para n . Agora,

$$(U_1 \cap \dots \cap U_n) = (U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n.$$

Por hipótese, $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$ pertence a \mathcal{T} , pelo que provamos anteriormente, a interseção de $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$ e U_n também pertence a \mathcal{T} .

Vejamos agora alguns resultados importantes sobre bases para uma topologia.

Lema 1.1 *Sejam X um conjunto e \mathfrak{B} uma base para uma topologia \mathcal{T} de X . Então, \mathcal{T} é igual a coleção de todas as uniões de elementos de \mathfrak{B} .*

Demonstração: Dada uma coleção de elementos de \mathfrak{B} , eles também são elementos de \mathcal{T} . Como \mathcal{T} é uma topologia, a união desses elementos está em \mathcal{T} . Por outro lado, dado $U \in \mathcal{T}$, escolha para cada $x \in U$ um elemento B_x tal que $x \in B_x \subset U$. Então, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.

Logo, U é igual a uma união de elementos de \mathfrak{B} . ■

Lema 1.2 *Seja X um espaço topológico. Suponha que \mathfrak{C} é uma coleção de abertos de X tal que, para cada aberto U de X e para cada $x \in U$, existe um elemento C de \mathfrak{C} tal que $x \in C \subset U$. Então, \mathfrak{C} é uma base para a topologia de X .*

Demonstração: Devemos mostrar que \mathfrak{C} é uma base. A primeira condição para uma base é simples: Dado $x \in X$, como X é um conjunto aberto, existe, por hipótese, um elemento C de \mathfrak{C} tal que $x \in C \subset X$. Já para a segunda condição, seja $x \in C_1 \cap C_2$, em que C_1 e C_2 são

elementos de \mathfrak{C} . Como C_1 e C_2 são abertos, então $C_1 \cap C_2$ é aberto. Assim, existe por hipótese um elemento C_3 em \mathfrak{C} tal que $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Seja \mathcal{T} a coleção de abertos de X . Devemos mostrar que a topologia \mathfrak{T}' gerada por \mathfrak{C} é igual a topologia \mathcal{T} . Primeiro, note que se U pertence a \mathcal{T} e se $x \in U$, então existe por hipótese um elemento C de \mathfrak{C} tal que $x \in C \subset U$. Segue que U pertence à topologia \mathfrak{T}' , por definição. Por outro lado, se W pertence à topologia \mathfrak{T}' , então W equivale a uma união de elementos de \mathfrak{C} , pelo lema anterior. Como cada elemento de \mathfrak{C} pertence a \mathcal{T} e \mathcal{T} é uma topologia, W também pertence a \mathcal{T} . ■

Há também a possibilidade de compararmos duas topologias sobre um mesmo conjunto X . Dizemos que \mathfrak{T}' é mais fina que \mathcal{T} , se \mathcal{T} e \mathfrak{T}' são duas topologias sobre X , e $\mathfrak{T}' \supset \mathcal{T}$. A grosso modo, comparamos dizendo que uma tem mais abertos que a outra.

Lema 1.3 *Sejam \mathfrak{B} e \mathfrak{B}' bases para as topologias \mathcal{T} e \mathfrak{T}' , respectivamente, em X . Então, são equivalentes:*

- (i) \mathfrak{T}' é mais fina que \mathcal{T} ;
- (ii) Para cada $x \in X$ e cada elemento básico $B \in \mathfrak{B}$ contendo x , existe um elemento básico $B' \in \mathfrak{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Demonstração: (ii) \Rightarrow (i) Dado um elemento U de \mathcal{T} , devemos mostrar que $U \in \mathfrak{T}'$. Seja $x \in U$. Como \mathfrak{B} gera \mathcal{T} , existe um elemento $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset U$. A condição (ii) nos diz que existe um elemento $B' \in \mathfrak{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Então, $x \in B' \subset U$, logo $U \in \mathfrak{T}'$, por definição.

(i) \Rightarrow (ii) Sejam $x \in X$ e $B \in \mathfrak{B}$, com $x \in B$. Agora, $B \in \mathcal{T}$ por definição, e $\mathcal{T} \subset \mathfrak{T}'$ pela condição (i). Desse modo, $B \in \mathfrak{T}'$. Como \mathfrak{T}' é gerada por \mathfrak{B}' , existe um elemento $B' \in \mathfrak{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. ■

Exemplo 1.4 *Se \mathfrak{B} é a coleção de todos os intervalos abertos na reta:*

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

A topologia gerada por \mathfrak{B} é chamada topologia usual na reta. Sempre que consideramos \mathbb{R} devemos supor que essa topologia é dada a menos que especificarmos o contrário.

Exemplo 1.5 *Sejam X e Y espaços topológicos. A topologia do produto em $X \times Y$ é a topologia tendo como base a coleção \mathfrak{B} de todos os conjuntos da forma $U \times V$, em que U é um aberto de X e V é um aberto de Y .*

Vamos checar que \mathfrak{B} é uma base para a topologia do produto. De fato, a primeira condição é trivial, pois $X \times Y$ é um elemento básico. A segunda condição segue do fato que interseção de quaisquer dois elementos básicos $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ é outro elemento básico, pois

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

e como $(U_1 \cap U_2)$ e $(V_1 \cap V_2)$ são abertos de X e de Y , então $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$ é um elemento básico. Observe a figura a seguir:

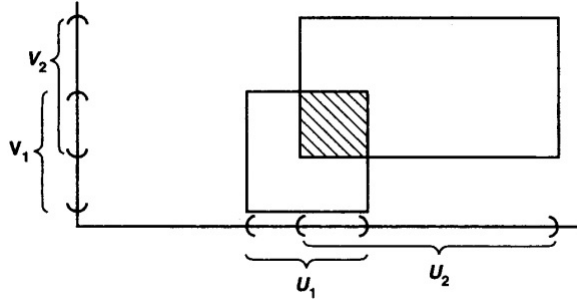


Figura 2: Interseção do produto cartesiano de abertos. [4], p.87.

Observe que a coleção \mathfrak{B} não é uma topologia em $X \times Y$. A união dos dois retângulos da figura, por exemplo, não é o produto de dois conjuntos, logo não pertence a \mathfrak{B} . Porém, a união qualquer de abertos de $X \times Y$ é um aberto de $X \times Y$.

Teorema 1.1 *Se \mathfrak{B} é uma base para a topologia de X e \mathfrak{C} é uma base para a topologia de Y , então a coleção*

$$\mathfrak{D} = \{B \times C \mid B \in \mathfrak{B} \text{ e } C \in \mathfrak{C}\}$$

é uma base para a topologia de $X \times Y$.

Demonstração: Dado um aberto W de $X \times Y$ e um ponto (x, y) de W , pela definição da topologia do produto, existe um elemento básico $U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subset W$. Como \mathfrak{B} e \mathfrak{C} são bases para X e Y , respectivamente, podemos escolher um elemento B de \mathfrak{B} tal que $x \in B \subset U$, e um elemento C de \mathfrak{C} tal que $y \in C \subset V$. Então, $(x, y) \in B \times C \subset W$. Como a coleção \mathfrak{D} satisfaz os critérios do Lema 1.2, temos que \mathfrak{D} é uma base para $X \times Y$. ■

Definição 1.4 *Seja $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ uma função dada por:*

$$\pi_1(x, y) = x.$$

Seja $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ uma função dada por:

$$\pi_2(x, y) = y.$$

As funções π_1 e π_2 são chamadas projeções de $X \times Y$ sobre o primeiro e sobre o segundo fator, respectivamente.

Observação 1.3 *Se U é um aberto de X , então o conjunto $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$, o qual é aberto em $X \times Y$. Analogamente, se V é um aberto de Y , então o conjunto $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, o qual é aberto em $X \times Y$.*

Definição 1.5 *Seja X um espaço topológico com a topologia \mathcal{T} . Se Y é um subconjunto de X , a coleção*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

é uma topologia em Y , chamada topologia do subespaço. Com essa topologia, Y é chamado um subespaço de X , e seus abertos são todas as interseções de abertos de X com Y .

Observemos que, \mathcal{T}_Y é uma topologia. Com efeito, temos que \emptyset e Y estão em \mathcal{T}_Y , pois

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \text{ e } Y = Y \cap X,$$

onde \emptyset e X são elementos de \mathcal{T} . Além disso, utilizando que

$$(U_1 \cap Y) \cap \dots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap Y, \text{ e}$$
$$\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \cap Y,$$

prova-se as demais condições da Definição 1.1.

Definição 1.6 *Dado um conjunto ordenado X , diremos que o subconjunto Y de X é convexo se para cada par de pontos $a < b$ de Y , todo o intervalo (a, b) de pontos de X está contido em Y . Note que os intervalos e raios em X são convexos em X .*

Lema 1.4 *Se \mathfrak{B} é uma base para a topologia de X , então a coleção*

$$\mathfrak{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathfrak{B}\}$$

é uma base para a topologia do subespaço em Y .

Demonstração: Dado U aberto em X e dado $y \in U \cap Y$, podemos escolher um elemento B de \mathfrak{B} tal que $y \in B \subset U$. Então, $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. Segue do Lema 1.2 que \mathfrak{B}_Y é uma base para a topologia do subespaço em Y . ■

Lema 1.5 *Seja Y um subespaço de X . Se U é aberto em Y e Y é aberto em X , então U é aberto em X .*

Demonstração: Como U é aberto em Y , $U = Y \cap V$ para algum aberto V em X . Como Y e V são abertos em X , temos que $Y \cap V$ é aberto em X . ■

Lema 1.6 *Se A é um subespaço de X e B é um subespaço de Y , então a topologia do produto em $A \times B$ é a topologia gerada por $A \times B$ como subespaço de $X \times Y$.*

Demonstração: O conjunto $U \times V$ é o elemento básico para $X \times Y$, em que U é aberto em X e V é aberto em Y . Assim, $(U \times V) \cap (A \times B)$ é o elemento básico para a topologia do subespaço em $A \times B$. Agora,

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

Como $U \cap A$ e $V \cap B$ são abertos para as topologias do subespaço em A e em B , respectivamente, o conjunto $(U \cap A) \times (V \cap B)$ é o elemento básico para a topologia do produto em $A \times B$.

Logo, as bases para a topologia do subespaço em $A \times B$ e para a topologia do produto em $A \times B$ são as mesmas. Desse modo, as topologias são iguais. ■

1.2 Fêcho, Interior e Ponto de Acumulação

Definição 1.7 *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto A do espaço topológico X é dito fechado se o conjunto $X - A$ é aberto.*

Exemplo 1.6 O subconjunto $[a, b]$ de \mathbb{R} é fechado, pois o seu complementar

$$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty),$$

é aberto. Analogamente, $[a, +\infty)$ é fechado, pois o seu complementar $(-\infty, a)$ é aberto. Note que, o subconjunto $[a, b)$ de \mathbb{R} não é aberto nem fechado.

Teorema 1.2 Seja X um espaço topológico. Então,

- (i) \emptyset e X são fechados;
- (ii) Interseções arbitrárias de fechados são fechados;
- (iii) Uniões finitas de fechados são fechados.

Demonstração: (i) \emptyset e X são fechados pois seus complementares são X e \emptyset , respectivamente.

(ii) Dada uma coleção de fechados $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, temos que

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha).$$

Como os conjuntos $X - A_\alpha$ são abertos por definição, $\bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$ é uma união arbitrária de abertos, que é aberto. Portanto, $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ é fechado.

(iii) Analogamente, se A_i é fechado para $i = 1, \dots, n$, considerando

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i),$$

obtemos que o conjunto $\bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$ é uma interseção finita de abertos, e assim, é aberto. Desse modo, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ é fechado. ■

Teorema 1.3 Seja Y um subespaço de X . Então um conjunto A é fechado em Y se, e somente se, A é a interseção de um fechado de X com Y .

Demonstração: Assuma que $A = C \cap Y$, onde C é fechado em X . Como $X - C$ é aberto em X , temos que $(X - C) \cap Y$ é aberto em Y , pela definição da topologia do subespaço. Porém, $(X - C) \cap Y = Y - A$. Como $Y - A$ é aberto em Y , temos que A é fechado em Y .

Por outro lado, assumamos que A é fechado em Y . Como $Y - A$ é aberto em Y temos, por definição, que é igual a interseção de um aberto U de X com Y . O conjunto $X - U$ é fechado em X , e $A = Y \cap (X - U)$, logo A é igual à interseção de um fechado de X com Y , como desejado. ■

Definição 1.8 Dado um subconjunto A de um espaço topológico X , o interior de A é definido como a união de todos os abertos contidos em A , e o fêcho de A é definido como a interseção de todos os fechados contendo A . Denotaremos o interior de A por $\text{Int}A$ e o fêcho de A por \bar{A} .

Observação 1.4 Observe que,

$$\text{Int}A \subset A \subset \bar{A}.$$

Além disso, se A é aberto, $A = \text{Int}A$, e se A é fechado, $A = \bar{A}$.

Teorema 1.4 Sejam Y um subespaço de X , A um subespaço de Y e \bar{A} o fêcho de A em X . Então, o fêcho de A em Y é $\bar{A} \cap Y$.

Demonstração: Seja B o fêcho de A em Y . O conjunto \bar{A} é fechado em X , então $\bar{A} \cap Y$ é fechado em Y pelo Teorema 1.3. Como $\bar{A} \cap Y$ contém A , e, por definição, B é igual a interseção de todos os fechados de Y contendo A , temos que $B \subset \bar{A} \cap Y$.

Por outro lado, sabemos que B é fechado em Y . Pelo Teorema 1.3, $B = C \cap Y$ para algum fechado C de X . Então C é um fechado de X contendo A . Como \bar{A} é a interseção de todos os fechados, temos que $\bar{A} \subset C$. Logo, $\bar{A} \cap Y \subset C \cap Y = B$. ■

Teorema 1.5 Seja A um subconjunto de um espaço topológico X .

(i) Então, $x \in \bar{A}$ se, e somente se, todo aberto U contendo x intercepta A .

(ii) Supondo que a topologia de X é dada por uma base, então $x \in \bar{A}$ se, e somente se, todo elemento básico B contendo x intercepta A .

Demonstração: (i) (\Leftarrow) Se x não pertence a \bar{A} , o conjunto $U = X - \bar{A}$ é um aberto contendo x que não intercepta A .

(\Rightarrow) Se existe um aberto U contendo x que não intercepta A , então $X - U$ é um fechado contendo A . Pela definição do fêcho \bar{A} , o conjunto $X - U$ deve conter \bar{A} . Logo, $x \notin \bar{A}$.

(ii) (\Rightarrow) Se todo aberto contendo x intercepta A , então todo elemento básico B contendo x intercepta A , pois B é aberto.

(\Leftarrow) Se todo elemento básico contendo x intercepta A , então todo aberto U contendo x intercepta A , já que U contém um elemento básico que contém x . ■

Observação 1.5 Para dizer que “ U é um aberto contendo x ”, usa-se a terminologia: “ U é uma vizinhança de x ”.

Definição 1.9 *Sejam A um subconjunto do espaço topológico X e $x \in X$. Dizemos que x é um ponto de acumulação de A se toda vizinhança de x intercepta A em algum ponto diferente de x , ou seja, x é um ponto de acumulação de A se $x \in \overline{A - \{x\}}$. Denotaremos por A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A .*

Teorema 1.6 *Sejam A um subconjunto do espaço topológico X e A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A . Então,*

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

Demonstração: Se $x \in A'$, toda vizinhança de x intercepta A (em um ponto diferente de x). Assim, pelo Teorema 1.5, $x \in \bar{A}$. Consequentemente, $A' \subset \bar{A}$. Como $A \subset \bar{A}$, segue que $A \cup A' \subset \bar{A}$.

Reciprocamente, seja $x \in \bar{A}$ e mostremos que $x \in A \cup A'$. Se $x \in A$, é fácil ver que $x \in A \cup A'$. Suponha que $x \notin A$. Como $x \in \bar{A}$, temos que toda vizinhança U de x intercepta A . Como x não pertence a A , o conjunto U deve interceptar A em um ponto diferente de x . Então $x \in A'$, o que significa que $x \in A \cup A'$. ■

Corolário 1.1 *Um subconjunto A de um espaço topológico X é fechado se, e somente se, contém todos os pontos de acumulação de A , ou seja, $A' \subset A$.*

Demonstração: Segue direto do teorema anterior. ■

1.3 Espaço de Hausdorff

Definição 1.10 *Um espaço topológico X é chamado espaço de Hausdorff se para cada par x_1, x_2 de pontos distintos de X , existem vizinhanças U_1 e U_2 de x_1 e x_2 , respectivamente, tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Teorema 1.7 *Todo conjunto de pontos finitos em um espaço de Hausdorff X é fechado.*

Demonstração: É suficiente mostrar que todo conjunto de um ponto $\{x_0\}$ é fechado. Se x é um ponto de X diferente de x_0 , então x e x_0 possuem duas vizinhanças disjuntas U e V , respectivamente. Como U não intercepta x_0 , o ponto x não pertence ao fecho do conjunto $\{x_0\}$. Consequentemente, $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$. Logo, $\{x_0\}$ é fechado. ■

Teorema 1.8 *Sejam X um espaço topológico com a propriedade de que $\{x\}$ é fechado, para todo $x \in X$, e A um subconjunto de X . Então, x é um ponto de acumulação de A se, e somente se, toda vizinhança de x contém infinitos pontos de A .*

Demonstração: (\Leftarrow) Se toda vizinhança de x intercepta A em uma quantidade infinita de pontos, com certeza intercepta A em algum ponto diferente de x , então x é um ponto de acumulação de A .

(\Rightarrow) Suponhamos que x é um ponto de acumulação de A e que uma vizinhança U de x intercepta A em apenas uma quantidade finita de pontos. Então, U também intercepta $A - \{x\}$ em uma quantidade finita de pontos.

Sejam $\{x_1, \dots, x_m\}$ pontos de $U \cap (A - \{x\})$. O conjunto $X - \{x_1, \dots, x_m\}$ é um aberto de X , já que o conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$ é fechado. Então,

$$U \cap (X - \{x_1, \dots, x_m\})$$

é uma vizinhança de x que não intercepta o conjunto $A - \{x\}$, o que contradiz o fato de que x é um ponto de acumulação de A . ■

Definição 1.11 *Sejam X um espaço topológico e x_1, x_2, x_3, \dots uma sequência de pontos em X . Dizemos que a sequência x_1, x_2, x_3, \dots converge para um ponto $x \in X$ se, para toda vizinhança U de x , existe $N > 0$ tal que $x_n \in U$, para todo $n \geq N$.*

Teorema 1.9 *Se X é um espaço de Hausdorff, então uma sequência de pontos de X converge para, no máximo, um ponto de X .*

Demonstração: Suponha que x_n é uma sequência de pontos de X que converge para x . Se $y \neq x$, sejam U e V vizinhanças disjuntas de x e y , respectivamente. Como U contém x_n para todo n (exceto uma quantidade finita de valores de n), o conjunto V não pode conter a sequência. Desse modo, x_n não pode convergir para y . ■

1.4 Funções Contínuas

Definição 1.12 *Sejam X e Y espaços topológicos. A função $f : X \rightarrow Y$ é dita contínua se, para cada aberto V de Y , o conjunto $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ é um aberto de X .*

Observação 1.6 Note que se a topologia do espaço Y é dada por uma base \mathfrak{B} , então para provar a continuidade de f é suficiente mostrar que a imagem inversa de todos os elementos básicos são abertos de X .

De fato, observe que um aberto arbitrário $V \in Y$ pode ser escrito como a união de elementos básicos,

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha.$$

Assim,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha),$$

e temos que $f^{-1}(V)$ é aberto se cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ é aberto.

Teorema 1.10 Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \rightarrow Y$. Então, são equivalentes:

- (i) f é contínua;
- (ii) Para todo subconjunto $A \subset X$, temos $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;
- (iii) Para todo fechado B de Y , o conjunto $f^{-1}(B)$ é fechado em X ;
- (iv) Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) Assuma que f é contínua. Seja A um subconjunto de X . Vamos mostrar que se $x \in \bar{A}$, então $f(x) \in \overline{f(A)}$. Seja V uma vizinhança de $f(x)$. Então, $f^{-1}(V)$ é um aberto de X contendo x . Além disso, $f^{-1}(V)$ intercepta A em algum ponto y . Desse modo, V intercepta $f(A)$ no ponto $f(y)$. Portanto, $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(ii) \Rightarrow (iii) Sejam B um fechado em Y e $A = f^{-1}(B)$. Devemos provar que A é fechado em X , ou seja, basta mostrar que $\bar{A} = A$. Temos que $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$. Assim, se $x \in \bar{A}$,

$$f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B.$$

Logo, $x \in f^{-1}(B) = A$. Portanto, $\bar{A} \subset A$, o que significa que $\bar{A} = A$.

(iii) \Rightarrow (i) Seja V um aberto de Y . Tome $B = Y - V$. Então,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V).$$

Como B é um fechado de Y , segue que $f^{-1}(B)$ é fechado em X , por hipótese. Logo, $f^{-1}(V)$ é aberto em X .

(i) \Rightarrow (iv) Sejam $x \in X$ e V uma vizinhança de $f(x)$. Então, o conjunto $U = f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x tal que $f(U) \subset V$.

(iv) \Rightarrow (i) Sejam V um aberto de Y e $x \in f^{-1}(V)$. Temos que $f(x) \in V$, e por hipótese, existe uma vizinhança U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$. Então, $U_x \subset f^{-1}(V)$.

Daí, $f^{-1}(V)$ pode ser escrito como a união de abertos U_x . Logo, $f^{-1}(V)$ é aberto e assim, f é contínua. ■

Definição 1.13 *Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção. Se a função f e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ são contínuas, então f é chamada um homeomorfismo.*

Observação 1.7 *A condição que f^{-1} é contínua nos diz que para cada aberto U de X , a imagem inversa de U pela função $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é aberta em Y . Além disso, a imagem inversa de U pela função f^{-1} é a mesma que a imagem de U pela função f . Desse modo, outra forma de definir um homeomorfismo é dizer que é uma função bijetiva $f : X \rightarrow Y$, tal que $f(U)$ é aberto se, e somente se, U é aberto.*

Essa observação mostra que um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ nos dá uma correspondência bijetiva não apenas entre X e Y , mas também entre as coleções de abertos de X e de Y . Como resultado, qualquer propriedade de X que é inteiramente expressada nos termos da topologia de X se reproduz, por meio de f , como propriedades correspondentes para o espaço Y . Tais propriedades de X são chamadas propriedades topológicas de X .

Teorema 1.11 *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

(i) *(Função Constante) Se $y_0 \in Y$ e $f : X \rightarrow Y$ é definida por $f(x) = y_0$, para todo $x \in X$, então f é contínua.*

(ii) *(Inclusão) Se A é um subespaço de X , a função inclusão $i : A \rightarrow X$ é contínua.*

(iii) *(Composição de funções) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são contínuas, então a função $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.*

(iv) *(Restrição do domínio) Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, e se A é um subespaço de X , então a função restrição $f|_A : A \rightarrow Y$ é contínua.*

(v) *(Restrição ou expansão do contradomínio) Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Se Z é um subespaço de Y contendo o conjunto imagem $f(X)$, então a função $g : X \rightarrow Z$ obtida pela restrição do*

contradomínio de f é contínua. Se Z é um espaço que possui Y como subespaço, então a função $h : X \rightarrow Z$ obtida pela expansão do contradomínio de f é contínua.

(vi) (Formulação local de continuidade) A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se X pode ser escrito como a união de abertos U_α tal que $f|_{U_\alpha}$ é contínua, para cada α .

Demonstração: (i) Sejam $f(x) = y_0$, para todo $x \in X$, e V um aberto em Y . Observe que,

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} X, & \text{se } y_0 \in V, \\ \emptyset, & \text{se } y_0 \notin V. \end{cases}$$

De qualquer forma, temos que $f^{-1}(V)$ é aberto.

(ii) Se U é aberto em X , então $i^{-1}(U) = U \cap A$, que é aberto em A pela definição de subespaço topológico.

(iii) Se U é aberto em Z , então $g^{-1}(U)$ é aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X . Mas,

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U).$$

Logo, $g \circ f$ é contínua.

(iv) Temos que $f|_A = f \circ i$, onde $i : A \rightarrow X$ é a inclusão e $f : X \rightarrow Y$. Como i e f são contínuas segue que $f|_A$ é contínua.

(v) Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Se $f(X) \subset Z \subset Y$, mostremos que a função $g : X \rightarrow Z$ obtida de f é contínua. Para isto, seja B aberto em Z . Então, $B = Z \cap U$, para algum aberto U de Y . Como $f(X) \subset Z$, então

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B).$$

Logo, $g^{-1}(B)$ é aberto em X pois $f^{-1}(U)$ é aberto em X .

Para mostrar que $h : X \rightarrow Z$ é contínua se $Y \subset Z$ é um subespaço, basta observar que $h = j \circ f$, onde $j : Y \rightarrow Z$ é a inclusão.

(vi) Por hipótese, podemos escrever $X = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, U_α aberto de X , tal que $f|_{U_\alpha}$ é contínua para cada α . Seja V um aberto de Y . Então,

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f|_{U_\alpha})^{-1}(V).$$

Como $f|_{U_\alpha}$ é contínua, $f^{-1}(V) \cap U_\alpha$ é aberto em U_α . Logo, $f^{-1}(V) \cap U_\alpha$ é aberto em X .

Além disso,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} (f^{-1}(V) \cap U_{\alpha}),$$

então, $f^{-1}(V)$ também é aberto em X . ■

Teorema 1.12 (Lema da colagem) *Seja $X = A \cup B$, onde A e B são fechados em X , e sejam $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$, então a função $h : X \rightarrow Y$, definida como $h(x) = f(x)$, se $x \in A$, e $h(x) = g(x)$, se $x \in B$, é contínua.*

Demonstração: Seja C um fechado em Y . Temos que,

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Como f é contínua, $f^{-1}(C)$ é fechado em A e, conseqüentemente, $f^{-1}(C)$ é fechado em X . Da mesma forma, $g^{-1}(C)$ é fechado em B , e assim, é fechado em X . A união de ambos é $h^{-1}(C)$, que é fechado em X . ■

Teorema 1.13 *Seja $f : A \rightarrow X \times Y$ dada por:*

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Então, f é contínua se, e somente se, as funções

$$f_1 : A \rightarrow X \quad \text{e} \quad f_2 : A \rightarrow Y$$

são contínuas. As funções f_1 e f_2 são chamadas funções coordenadas de f .

Demonstração: Sejam $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ projeções no primeiro e segundo fatores, respectivamente. Temos que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ e $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, para todos abertos U e V , em X e em Y , respectivamente. Logo, π_1 e π_2 são contínuas.

Note que, para cada $a \in A$,

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \quad \text{e} \quad f_2(a) = \pi_2(f(a)).$$

Assim, f_1 e f_2 são composições de funções contínuas, e daí, são contínuas.

Por outro lado, suponhamos que f_1 e f_2 são contínuas. Mostremos que para cada elemento básico $U \times V$ para a topologia de $X \times Y$, a imagem inversa $f^{-1}(U \times V)$ é aberto em A . Um ponto a pertence a $f^{-1}(U \times V)$ se, e somente se, $f(a) \in U \times V$, isto é, se, e somente se, $f_1(a) \in U$ e $f_2(a) \in V$. Assim,

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Como os dois conjuntos $f_1^{-1}(U)$ e $f_2^{-1}(V)$ são abertos, temos que $f^{-1}(U \times V)$ é um aberto em A . ■

1.5 Espaços Conexos e Conexos por Caminhos

Definição 1.14 *Seja X um espaço topológico. Uma separação de X é um par U, V de abertos disjuntos não-vazios de X cuja união é X . O espaço X é dito conexo se não existe uma separação para X .*

Observação 1.8 *Um espaço X é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados em X são o conjunto vazio e o próprio conjunto X .*

Lema 1.7 *Se Y é um subespaço de X , uma separação de Y é um par de conjuntos disjuntos não-vazios A e B cuja união é Y , sendo que nenhum deles contém um ponto de acumulação do outro. O espaço Y é conexo se não existe separação de Y .*

Demonstração: Suponha primeiro que A e B formam uma separação de Y . Então A é aberto e fechado em Y . O fecho de A em Y é o conjunto $\bar{A} \cap Y$ (sendo que \bar{A} denota o fecho de A em X). Como A é fechado em Y , $A = \bar{A} \cap Y$. Isso significa que $\bar{A} \cap B = \emptyset$. Como \bar{A} é a união de A e seus pontos de acumulação, B não contém pontos de acumulação de A . Por um argumento similar mostramos que A não contém pontos limites de B .

Por outro lado, suponha que A e B são conjuntos disjuntos não-vazios cuja união é Y , sendo que nenhum deles contém um ponto limite do outro. Então $\bar{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Desse modo, podemos concluir que $\bar{A} \cap Y = A$ e $\bar{B} \cap Y = B$. Logo, ambos A e B são fechados em Y , e como $A = Y - B$ e $B = Y - A$, eles são abertos em Y como desejado. ■

Lema 1.8 *Se os conjuntos C e D formam uma separação para X , e se Y é um subespaço conexo de X , então Y está inteiramente contido em C ou D .*

Demonstração: Como C e D são ambos abertos em X , o conjunto $C \cap Y$ e $D \cap Y$ são abertos em Y . Esses dois conjuntos são disjuntos e a união deles é Y . Se ambos forem não vazios, então formam uma separação para Y , assim, um deles é vazio. Desse modo temos que Y está inteiramente contido em C ou D . ■

Teorema 1.14 *A união de uma coleção de subespaços conexos de X que possui um ponto em comum é conexa.*

Demonstração: Sejam $\{A_\alpha\}$ uma coleção de subespaços conexos de um espaço X , e p um ponto de $\bigcap A_\alpha$. Devemos mostrar que o espaço $Y = \bigcup A_\alpha$ é conexo. Suponha que $Y = C \cup D$ é uma separação de Y . O ponto p pertence a um dos conjuntos C ou D , suponhamos $p \in C$. Como A_α é conexo, deve estar inteiramente contido em C ou em D , e não pode estar em D , pois $p \in A_\alpha$ e $p \in C$. Consequentemente, $A_\alpha \subset C$ para todo α , o que significa que $\bigcup A_\alpha \subset C$, contradizendo o fato de que D é não-vazio. ■

Teorema 1.15 *Seja A um subespaço conexo de X . Se $A \subset B \subset \bar{A}$, então B também é conexo.*

Demonstração: Seja A conexo com $A \subset B \subset \bar{A}$. Suponha que $B = C \cup D$ é uma separação de B . Pelo Lema 1.8, todo conjunto A deve estar inteiramente contido em C ou em D , suponhamos $A \subset C$. Então, $\bar{A} \subset \bar{C}$. Como \bar{C} e D são disjuntos, temos que B não intercepta D . Isso contradiz o fato de que D é um subconjunto não vazio de B . ■

Teorema 1.16 *A imagem de um espaço conexo por uma função contínua é conexa.*

Demonstração: Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, com X conexo. Devemos provar que $Z = f(X)$ é conexo. Como a função obtida de f restringindo seu contradomínio ao espaço Z também é contínua, é suficiente considerar o caso de uma função contínua sobrejetora

$$g : X \rightarrow Z.$$

Suponha que $Z = A \cup B$ é uma separação de Z em dois conjuntos não-vazios abertos em Z . Então $g^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ são conjuntos disjuntos cuja união é X . Além disso, eles são abertos em X pois g é contínua, e não-vazios pois g é sobrejetora. Assim, $g^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ formam uma separação de X , contradizendo a suposição de que X é conexo. ■

Teorema 1.17 *Um produto cartesiano finito de espaços conexos é conexo.*

Demonstração: Vamos provar primeiro que o produto de dois espaços conexos $X \times Y$ é conexo. Considere um ponto (a, b) do produto $X \times Y$. Note que cada “fatia horizontal” $X \times \{b\}$ é conexa e homeomorfa a X , e cada “fatia vertical” $\{a\} \times Y$ também é conexa e homeomorfa a Y . Com isso, cada espaço

$$T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

é conexo, pois é união de dois espaços conexos que possui o ponto (x, b) em comum. Veja a figura a seguir.

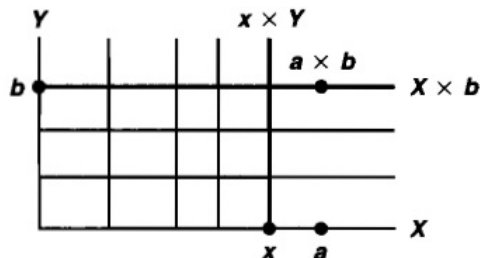


Figura 3: União de conexos com um ponto em comum. [4], p.151.

Agora, seja $\bigcup_{x \in X} T_x$ a união de todos esses espaços. Essa união é conexa, pois é a união de uma coleção de espaços conexos que possui o ponto (a, b) em comum. Como $\bigcup_{x \in X} T_x = X \times Y$, obtemos que o espaço $X \times Y$ é conexo.

A demonstração para produtos finitos de espaços conexos segue por indução, usando o fato que $X_1 \times \dots \times X_n$ é homeomorfo com $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$. ■

Os dois próximos resultados falam sobre os conexos da reta real. Lembrando que os intervalos da reta são da forma:

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b], [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, a] \text{ e } (-\infty, a), \quad (1.1)$$

com $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Proposição 1.1 *Todo intervalo da reta é um espaço conexo.*

Demonstração:

Seja I um intervalo de extremos a e b . A demonstração vale para qualquer um dos intervalos listados em (1.1).

Seja $S \subset I$ aberto e fechado em I . Suponhamos que $S \neq \emptyset$ e mostremos que $S = I$.

Como S é aberto em I , podemos considerar $c \in S$, interior ao intervalo I .

Seja $b' = \sup\{t \in I \mid [c, t) \subset S\}$. Temos que $c < b'$ e afirmamos que $[c, b') \subset S$. De fato, se $x \in [c, b')$, isto é, $c \leq x < b'$, então, pela definição de supremo, existe $t \in I$ com $x < t$ e $[c, t) \subset S$. Logo, $x \in S$.

Agora, provemos que $b' = b$. Do contrário, teríamos $b' < b$, donde $b' \in I$ e, como S é fechado em I , $b' \in S$. Daí, $[c, b'] \subset S$. Como S é aberto em I , existiria $\varepsilon > 0$ tal que $[c, b' + \varepsilon) \subset S$, o que contradiz a definição de b' . Logo, $b' = b$ e $[c, b) \subset S$.

Analogamente, pode-se mostrar que $(a, c] \subset S$ e portanto, $(a, b) \subset S$. Como S é fechado em I , o fecho de (a, b) em relação a I está contido em S . Mas tal fecho é I , o que implica que $I = S$. ■

Proposição 1.2 *Todo subconjunto conexo da reta é um intervalo.*

Demonstração: Suponhamos que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ conexo não é um intervalo. Assim, existem números reais $a, b \in S$, $c \notin S$, tais que $a < c < b$.

Daí, $A = (-\infty, c) \cap S$ e $B = (c, +\infty) \cap S$ são abertos em S , disjuntos, não vazios (pois $a \in A$ e $b \in B$), com $S = A \cup B$ (pois $c \notin S$). Logo, S não é conexo, o que é um absurdo. ■

Teorema 1.18 (Teorema do valor intermediário) *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde X é um espaço topológico conexo e \mathbb{R} é um espaço topológico com a topologia usual. Se $a, b \in X$ e se $r \in \mathbb{R}$ é tal que $f(a) < r < f(b)$, então existe um ponto c de X tal que $f(c) = r$.*

Demonstração: Como X é conexo então $f(X)$ é um conexo de \mathbb{R} . Assim, $f(X)$ é um intervalo.

Por hipótese, $r \in \mathbb{R}$ é tal que $f(a) < r < f(b)$ e daí, $r \in f(X)$ (pois $f(X)$ é um intervalo).

Portanto, existe $c \in X$ de modo que $f(c) = r$. ■

Definição 1.15 *Dados dois pontos x e y do espaço X , um caminho em X de x a y é uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow X$ de algum intervalo fechado da reta até X , tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$. Um espaço X é dito conexo por caminhos se cada par de pontos de X pode ser ligado por um caminho em X .*

Exemplo 1.7 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo, ou seja, para quaisquer $p, q \in X$, o segmento de reta $[p, q] = \{tp + (1 - t)q \mid t \in [0, 1]\}$ está inteiramente contido em X . Temos claramente que X é conexo por caminhos.*

Observação 1.9 *É fácil ver que um espaço conexo por caminhos X é conexo. De fato, suponha que $X = A \cup B$ é uma separação de X . Seja $f : [a, b] \rightarrow X$ um caminho em X . Sendo a imagem contínua de um conjunto conexo, o conjunto $f([a, b])$ é conexo, logo está inteiramente contido*

em A ou em B . Consequentemente, não existe caminhos em X ligando um ponto x de A a um ponto y de B , contrariando a suposição de que X é conexo por caminhos. Observe, pelo exemplo a seguir, que a recíproca não é válida, ou seja, existe espaço que é conexo mas não é conexo por caminhos.

Exemplo 1.8 Considere $S = \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\}$.

Como S é a imagem de um conjunto conexo $(0, 1]$ por uma função contínua, segue que S é conexo. Logo, o fecho \bar{S} em \mathbb{R}^2 também é conexo. O conjunto $\bar{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ é um clássico exemplo em topologia chamado curva senoidal, e está ilustrado na figura a seguir.

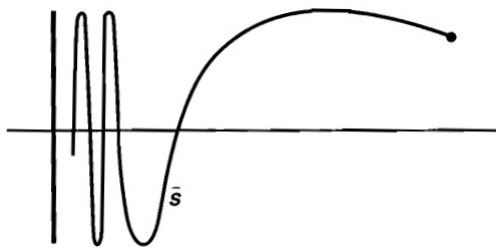


Figura 4: Curva senoidal. [4], p.157.

Vamos mostrar que \bar{S} não é conexo por caminhos. Suponha que existe um caminho $f : [a, c] \rightarrow \bar{S}$ iniciando na origem e terminando em um ponto de S . Note que, o conjunto $f^{-1}(\{0\} \times [-1, 1]) = \{t \in [a, b] \mid f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\}$ é fechado e possui um elemento máximo b . Então, $f : [b, c] \rightarrow \bar{S}$ é um caminho que leva b em algum ponto de $\{0\} \times [-1, 1]$, e leva os pontos de $(b, c]$ em pontos de S .

Trocando $[b, c]$ por $[0, 1]$, e considerando $f(t) = (x(t), y(t))$, temos que $x(0) = 0$, e $x(t) > 0$ e $y(t) = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x(t)} \right)$, para $t > 0$. Devemos mostrar que existe uma sequência de pontos $t_n \rightarrow 0$ tal que $y(t_n) = (-1)^n$. Logo, a sequência $y(t_n)$ não converge, contradizendo a continuidade de f .

Vamos definir t_n da seguinte forma: dado n , escolha u , $0 < u < x \left(\frac{1}{n} \right)$ tal que $\operatorname{sen} \left(\frac{1}{u} \right) = (-1)^n$. Pelo Teorema 1.18, podemos encontrar t_n com $0 < t_n < \frac{1}{n}$ tal que $x(t_n) = u$.

Definição 1.16 Seja X um espaço topológico. Defina a seguinte relação em X :

$$x \sim y \iff \text{existe um subespaço conexo de } X \text{ contendo } x \text{ e } y.$$

As classes de equivalência são chamadas componentes (ou componentes conexas) de X .

Observação 1.10 *É claro que a relação definida é reflexiva e simétrica. A transitividade segue por notarmos que se A é um subespaço conexo contendo x e y , e se B é um subespaço conexo contendo y e z , então $A \cup B$ é um subespaço contendo x e z que é conexo, pois possuem o ponto y em comum.*

Teorema 1.19 *As componentes conexas de X são subespaços conexos disjuntos de X , cuja união é igual a X , tais que cada subespaço conexo não vazio de X intercepta apenas uma delas.*

Demonstração: Como as componentes conexas de X são classes de equivalência, então são disjuntas e sua união é X .

Vamos mostrar que cada subespaço conexo A de X intercepta apenas uma delas. Para isto, suponhamos que A intercepta as componentes C_1 e C_2 de X nos pontos x_1 e x_2 , respectivamente. Logo, $x_1 \sim x_2$ pela definição, e assim, $C_1 = C_2$.

Para mostrar que a componente C é conexa, seja $x_0 \in C$. Para cada $x \in C$, temos que $x_0 \sim x$. Logo, existe um subespaço conexo A_x contendo x_0 e x . Daí, $A_x \subset C$.

Portanto, $C = \bigcup_{x \in C} A_x$ e como os subespaços A_x são conexos que possuem o ponto x_0 em comum, segue que C é conexa. ■

Definição 1.17 *Seja X um espaço topológico. Definimos outra relação de equivalência no espaço X :*

$$x \sim y \iff \text{existe um caminho em } X \text{ de } x \text{ a } y.$$

As classes de equivalência são chamadas componentes conexas por caminhos de X .

Observação 1.11 *Note que se existe um caminho $f : [a, b] \rightarrow X$ de x a y cujo domínio é o intervalo $[a, b]$, então existe também um caminho g de x a y tendo o intervalo fechado $[c, d]$ como domínio e isso se deve ao fato de que quaisquer dois intervalos fechados em \mathbb{R} são homeomorfos.*

Agora, vamos mostrar que é uma relação de equivalência. De fato,

- $x \sim x$ pois, para cada $x \in X$, existe o caminho constante $f : [a, b] \rightarrow X$ definido por $f(t) = x$, para todo $t \in [a, b]$. Logo, a relação é reflexiva.

- Se $x \sim y$ então existe um caminho $f : [0, 1] \rightarrow X$ de x a y . Defina $g : [0, 1] \rightarrow X$ por $g(t) = f(1 - t)$, para todo $t \in [0, 1]$, e temos que g é um caminho de y a x . Portanto, a relação é simétrica.

• Finalmente, sejam $f : [0, 1] \rightarrow X$ um caminho de x a y , e $g : [1, 2] \rightarrow X$ um caminho de y a z . Podemos definir o caminho $h : [0, 2] \rightarrow X$ de x a z por:

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t \in [0, 1] \\ g(t), & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$$

A continuidade de h segue do Teorema 1.12. Portanto, a relação é transitiva.

A prova do próximo teorema é similar à prova do Teorema 1.19.

Teorema 1.20 *As componentes conexas por caminhos de X são subespaços de X , disjuntas, cuja união é X . Cada subespaço conexo por caminhos não vazio de X intercepta apenas uma delas.*

1.6 Espaços Compactos

Definição 1.18 *Uma coleção \mathcal{A} de subconjuntos de um espaço X é dita uma cobertura de X , se a união dos elementos de \mathcal{A} é igual a X . A cobertura é chamada de cobertura aberta de X se seus elementos são abertos de X .*

Definição 1.19 *Um espaço X é dito compacto se cada cobertura aberta \mathcal{A} de X contém uma subcoleção finita que também cobre X .*

Exemplo 1.9 *Seja $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$. Mostremos que $X \subset \mathbb{R}$ é compacto. Para isto, considere uma cobertura aberta \mathcal{A} de X . Então, existe um elemento U de \mathcal{A} tal que $0 \in U$. O conjunto U contém os pontos $\frac{1}{n}$, exceto uma quantidade finita. Para cada ponto x de X que não pertence a U , escolha um elemento de $U_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U_x$. Assim, $X \subset \left(\bigcup_{x \in X-U} U_x \right) \cup U$ e $\{U, U_x \mid x \in X - U\}$ é uma subcoleção finita de \mathcal{A} que cobre X .*

Lema 1.9 *Seja Y um subespaço de X . Então, Y é compacto se, e somente se, toda cobertura de Y por elementos abertos em X contém uma subcoleção finita que cobre Y .*

Demonstração: Suponhamos que Y é compacto e $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma cobertura de Y por abertos em X . Então, a coleção

$$\{A_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$$

é uma cobertura de Y por abertos em Y . Assim, uma subcoleção finita

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, \dots, A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

cobre Y . Então, $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ é uma subcoleção de \mathcal{A} que cobre Y .

Por outro lado, seja $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha\}$ uma cobertura de Y por abertos em Y . Para cada α , escolha um conjunto A_α aberto em X tal que $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$.

A coleção $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ cobre Y . Logo, $\{A'_{\alpha_1}, \dots, A'_{\alpha_n}\}$ é uma subcoleção de \mathcal{A}' que cobre Y . ■

Teorema 1.21 *Todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração: Seja Y um subespaço fechado de um espaço compacto X . Dada uma cobertura \mathcal{A} de Y por abertos de X , vamos formar uma cobertura aberta \mathcal{B} de X adicionando a \mathcal{A} o conjunto aberto $X - Y$, isto é,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}.$$

Como X é compacto, existe uma subcoleção finita de \mathcal{B} que cobre X . Se essa subcoleção contém o conjunto $X - Y$, descarte $X - Y$, caso contrário, deixe a subcoleção como está. A coleção resultante é uma subcoleção finita de \mathcal{A} que cobre Y . ■

Teorema 1.22 *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração: Seja Y um subespaço compacto do espaço de Hausdorff X . Vamos provar que $X - Y$ é aberto.

Seja $x_0 \in X - Y$. Para cada $y \in Y$, como X é espaço de Hausdorff, existem vizinhanças disjuntas U_y e V_y dos pontos x_0 e y , respectivamente. A coleção $\{V_y \mid y \in Y\}$ é uma cobertura de Y por abertos de X . Portanto, uma quantidade finita deles V_{y_1}, \dots, V_{y_n} cobre Y . O aberto

$$V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

contém Y , e é disjunto do aberto

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$$

formado pela interseção das vizinhanças correspondentes de x_0 , pois se z é um ponto de V , então $z \in V_{y_i}$ para algum i , conseqüentemente $z \notin U_{y_i}$, e então $z \notin U$.

Portanto, U é uma vizinhança de x_0 disjunta de Y e daí, Y é fechado. ■

Teorema 1.23 *A imagem de um espaço compacto por uma função contínua é compacta.*

Demonstração: Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e X compacto. Seja \mathcal{A} uma cobertura de $f(X)$ por abertos em Y . A coleção

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

é uma coleção de abertos que cobre X .

Como X é compacto, segue que uma quantidade finita deles, digamos $f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n)$, cobre X .

Logo, os conjuntos A_1, \dots, A_n cobrem $f(X)$ e portanto, $f(X)$ é compacto. ■

Teorema 1.24 *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua bijetora. Se X é compacto e Y é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração: Devemos provar que f^{-1} é contínua. Para isto, vamos mostrar que a imagem de conjuntos fechados de X por f são fechados em Y .

Seja A um fechado em X . Então, pelo Teorema 1.21, A é compacto. Desse modo, $f(A)$ é compacto. Como Y é Hausdorff, $f(A)$ é fechado em Y , pelo Teorema 1.22. ■

Teorema 1.25 *Sejam X um espaço topológico, \mathbb{R} com a topologia usual e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se X é compacto, então existem $c, d \in X$ tais que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Veja [4], Teorema 27.4, p.174. ■

Para finalizar esta seção e também este capítulo, vamos apresentar a demonstração do Lema do número de Lebesgue (Lema 1.10) que nos será útil no decorrer deste trabalho. Aqui, assumiremos conhecidos os conceitos e propriedades de métrica, espaços métricos e funções contínuas entre espaços métricos.

Definição 1.20 *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Para cada $x \in X$, definimos a distância de x a A como*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Observação 1.12 Para um A fixado, a função $d(x, A)$ é uma função contínua. De fato, dados x, y em X , temos as desigualdades

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$

para cada $a \in A$. Assim,

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf d(y, a) = d(y, A),$$

então,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Utilizando as mesmas ideias, pode-se mostrar que $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ e assim, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Donde segue a continuidade da função $d(x, A)$.

Definição 1.21 Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$, A limitado (ou seja, $d(x, y) < k$, para todos $x, y \in A$, para algum $k \in \mathbb{R}$). Definimos o número $d(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ como sendo o diâmetro de A .

Lema 1.10 (O Lema do número de Lebesgue) Seja \mathcal{A} uma cobertura aberta do espaço métrico (X, d) . Se X é compacto, então existe $\delta > 0$ tal que, para cada subconjunto de X que tem diâmetro menor do que δ , existe um elemento de \mathcal{A} que contém esse subconjunto.

O número δ é chamado número de Lebesgue para a cobertura \mathcal{A} .

Demonstração:

Seja \mathcal{A} uma cobertura aberta de X . Se X é um elemento de \mathcal{A} , então qualquer número positivo é um número de Lebesgue para \mathcal{A} .

Agora, suponhamos que X não é um elemento de \mathcal{A} . Como X é compacto, temos que existe uma subcoleção finita $\{A_1, \dots, A_n\}$ de \mathcal{A} que cobre X . Para cada i , seja $C_i = X - A_i$, e defina $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i),$$

para todo $x \in X$. Note que $f(x)$ é a média dos números $d(x, C_i)$.

Devemos mostrar que $f(x) > 0$, para todo x . Dado $x \in X$, escolha i tal que $x \in A_i$. Agora, escolha ε de modo que a ε -vizinhança de x esteja contida em A_i . Então, $d(x, C_i) \geq \varepsilon$, e daí, $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{n}$.

Como f é contínua, pelo Teorema 1.25, existe um valor mínimo que f assume, suponhamos δ . Devemos mostrar que δ é o número de Lebesgue.

Para isto, seja B um subconjunto de X de diâmetro menor do que δ . Escolha um ponto $x_0 \in B$, e temos que B está contido na δ -vizinhança de x_0 . Temos que

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m),$$

onde $d(x_0, C_m)$ é o maior entre os números $d(x_0, C_i)$. Assim, a δ -vizinhança de x_0 está contida em $A_m = X - C_m$ da cobertura \mathcal{A} . ■

Capítulo 2

Teoria de Homotopia e Grupo

Fundamental

Neste capítulo serão desenvolvidos fatos gerais da Teoria de Homotopia, os quais vão ser utilizados no restante do trabalho. Homotopia é um dos assuntos mais importantes da área de Topologia Algébrica. Além disso, vamos introduzir o conceito de grupo fundamental, que é um invariante topológico importante na Topologia Algébrica. Em todos os resultados e definições, considere I o intervalo compacto $[0, 1]$. Neste capítulo, foram utilizadas as referências [2], [3] e [4].

2.1 Homotopia

Definição 2.1 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas (ou que f é homotópica a g) quando existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que*

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x)$$

para todo $x \in X$. A aplicação F é chamada uma homotopia entre f e g . Escreve-se $f \simeq g$.

Observação 2.1 *Dada uma homotopia F entre f e g , consideremos, para cada $t \in I$, a aplicação contínua $F_t : X \rightarrow Y$, definida por $F_t(x) = f(x, t)$, para todo $x \in X$. A família $(F_t)_{t \in I}$ é uma família de aplicações contínuas com $F_0 = f$ e $F_1 = g$. Dizer que duas aplicações*

f e g são homotópicas significa, intuitivamente, que a imagem de f pode ser continuamente deformada na imagem de g , e o contradomínio Y é o espaço onde a deformação ocorre.

Exemplo 2.1 Sejam f e g aplicações quaisquer de um espaço topológico X em \mathbb{R}^2 . Defina

$$F : X \times I \rightarrow Y \text{ por } F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

(segmento de reta ligando $f(x)$ a $g(x)$), para todo $(x, t) \in X \times I$. Temos que, F está bem definida e é contínua (pois o segmento de reta ligando $f(x)$ a $g(x)$ está inteiramente contido em \mathbb{R}^2 e, f e g são contínuas). Além disso, $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Logo, $f \simeq g$.

Exemplo 2.2 Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n -dimensional. Dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow S^n$, se $f(x) \neq -g(x)$, para todo $x \in X$, então $f \simeq g$.

De fato, note que 0 não pertence a $(1 - t)f(x) + tg(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in I$.

Então, podemos definir $F : X \times I \rightarrow S^n$ por

$$F(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tg(x)}{\|(1 - t)f(x) + tg(x)\|},$$

para todo $(x, t) \in X \times I$. Temos, para todo $x \in X$, que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. Logo, F é uma homotopia entre f e g .

Exemplo 2.3 Seja $f : S^n \rightarrow S^n$ uma aplicação contínua. Se f não possui pontos fixos, ou seja, $f(x) \neq x$, para todo $x \in S^n$, então f é homotópica à aplicação antípoda α dada por $\alpha(x) = -x$, para todo $x \in S^n$.

Com efeito, observe que $f(x) \neq -\alpha(x)$, para todo $x \in S^n$, e pelo Exemplo 2.2, obtemos que $f \simeq \alpha$.

Proposição 2.1 Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações constantes, tal que $f(x) = p$, para qualquer $x \in X$ e $g(x) = q$, para todo $x \in X$. As aplicações f e g são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos do espaço Y .

Demonstração: Suponhamos primeiro que f e g são homotópicas. Então, existe uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Defina uma aplicação $\alpha : I \rightarrow Y$ por $\alpha(t) = F(x, t)$, para todo $t \in I$, e temos:

$$\alpha(0) = p \quad \text{e} \quad \alpha(1) = q.$$

Assim, α define um caminho entre p e q . Portanto, p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos.

Reciprocamente, como p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos de Y , segue que existe um caminho $\alpha : I \rightarrow Y$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Assim, defina uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ por $F(x, t) = \alpha(t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$.

Logo, $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Portanto, F é uma homotopia entre f e g e então, f e g são homotópicas. ■

Proposição 2.2 *Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ e $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ contínuas. Se $f_1 \simeq f_2$ e $g_1 \simeq g_2$, então $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.*

Demonstração: Por hipótese, existem homotopias $F_1 : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F_1(x, 0) = f_1(x)$ e $F_1(x, 1) = f_2(x)$, para todo $x \in X$ e $F_2 : Y \times I \rightarrow Z$ tal que $F_2(y, 0) = g_1(y)$ e $F_2(y, 1) = g_2(y)$, para todo $y \in Y$.

Defina $K : X \times I \rightarrow Z$ por $K(x, t) = F_2(F_1(x, t), t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$. Temos,

$$K(x, 0) = (g_1 \circ f_1)(x) \quad \text{e} \quad K(x, 1) = (g_2 \circ f_2)(x),$$

para todo $x \in X$. Além disso, K é contínua.

Portanto, $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. ■

Proposição 2.3 *A relação de homotopia \simeq é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas $f : X \rightarrow Y$.*

Demonstração: Devemos mostrar que \simeq é reflexiva, simétrica e transitiva.

Primeiro, mostremos que \simeq é reflexiva. Para isto, seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. A função $F : X \times I \rightarrow Y$ dada por $F(x, t) = f(x)$, para todo $(x, t) \in X \times I$, é uma homotopia entre f e f . Logo, \simeq é reflexiva.

Agora, provemos que \simeq é simétrica. Considere $F : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Defina $K : X \times I \rightarrow Y$ por $K(x, t) = F(x, 1 - t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$ e obtemos uma homotopia entre g e f . Assim, \simeq é simétrica.

Por último, vamos mostrar que \simeq é transitiva. Sejam $F : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g , e $K : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre g e h . Defina $L : X \times I \rightarrow Y$ como

$$L(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Temos que L está bem definida, pois se $t = \frac{1}{2}$ temos que $F(x, 2t) = g(x) = K(x, 2t - 1)$. Além disso, como L é contínua nos fechados $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ de $X \times I$, então L é contínua pelo Teorema 1.12. Logo, L é uma homotopia entre f e h . Portanto, a relação \simeq é transitiva. ■

2.2 Homotopia de Caminhos

Antes de definirmos o grupo fundamental de um espaço topológico X , precisamos considerar caminhos em X e uma relação de equivalência chamada homotopia de caminhos (definição 2.2) entre eles. Relembrando que, se x_0 e x_1 são pontos de X , e $f : [0, 1] \rightarrow X$ é uma aplicação contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, dizemos que f é um caminho em X de x_0 a x_1 . Neste caso, x_0 é chamado ponto inicial do caminho f , e x_1 é chamado ponto final do caminho f . Se f e g são dois caminhos em X , existe uma relação mais forte entre f e g , que será definida a seguir.

Definição 2.2 *Sejam $f, g : I \rightarrow X$ caminhos com $f(0) = g(0) = x_0$ e $f(1) = g(1) = x_1$. Dizemos que f é homotópico a g se existe uma aplicação contínua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que*

$$F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = g(s), F(0, t) = x_0 \text{ e } F(1, t) = x_1,$$

para cada $s \in I$ e para cada $t \in I$. Chamamos F de homotopia de caminhos entre f e g . Se existe uma homotopia de caminhos entre f e g , escrevemos $f \simeq_p g$.

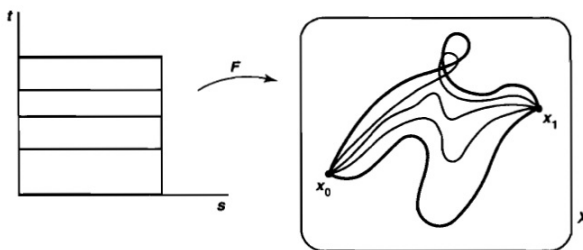


Figura 5: Homotopia de caminhos. [4], p.323.

Proposição 2.4 *A relação \simeq_p é uma relação de equivalência.*

Demonstração: Provemos que \simeq_p é reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) \simeq_p é reflexiva: Seja $f : I \rightarrow X$ um caminho em X com $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. A função $F : I \times I \rightarrow X$ dada por $F(s, t) = f(s)$, para todo $(s, t) \in I \times I$, é uma homotopia de caminhos entre f e f . Logo, \simeq_p é reflexiva.

(ii) \simeq_p é simétrica: Considere $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de caminhos entre f e g . Defina $K : I \times I \rightarrow X$ por $K(s, t) = F(s, 1 - t)$, para todo $(s, t) \in I \times I$ e obtemos uma homotopia entre g e f . Assim, \simeq_p é simétrica.

(iii) \simeq_p é transitiva: Sejam $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de caminhos entre f e g , e $K : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de caminhos entre g e h . Defina $L : I \times I \rightarrow X$ como

$$L(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t), & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ K(s, 2t - 1), & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Temos que L está bem definida, pois se $t = \frac{1}{2}$ temos que $F(s, 2t) = g(s) = K(s, 2t - 1)$. Além disso, como L é contínua nos fechados $I \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $I \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ de $I \times I$, então L é contínua pelo Teorema 1.12. É fácil ver que $L(s, 0) = f(s)$, $L(s, 1) = h(s)$, $L(0, t) = x_0$ e $L(1, t) = x_1$. Logo, L é uma homotopia de caminhos entre f e h . Portanto, a relação \simeq_p é transitiva. ■

Observação 2.2 *Seja $f : I \rightarrow X$ um caminho em X de x_0 a x_1 . Como \simeq_p é uma relação de equivalência, vamos denotar por $[f]$ a classe de equivalência do caminho f , ou seja, $[f] = \{g : I \rightarrow X \mid g \text{ é um caminho de } x_0 \text{ a } x_1 \text{ e } f \simeq_p g\}$.*

Definição 2.3 *Seja $x_0 \in X$. O caminho $e_{x_0} : I \rightarrow X$ com $e_{x_0}(t) = x_0$, para todo $t \in I$, é chamado caminho constante em x_0 .*

Definição 2.4 *Sejam $x_0, x_1 \in X$ e $f : I \rightarrow X$ um caminho com $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Caminho reverso de f é o caminho $\bar{f} : I \rightarrow X$ definido por $\bar{f}(t) = f(1 - t)$, para todo $t \in I$.*

Definição 2.5 *Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 , e se g é um caminho em X de x_1 a x_2 , definimos o produto de caminhos $f * g$ de f e g como sendo o caminho h dado por*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Observação 2.3 Observe que, a aplicação h está bem definida e é contínua, pelo Teorema 1.12, assim h define um caminho em X de x_0 a x_2 .

Lema 2.1 Sejam $f, g : I \rightarrow X$ caminhos em X de x_0 a x_1 e $k : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $f \simeq_p g$ então $k \circ f \simeq_p k \circ g$.

Demonstração: Como $f \simeq_p g$ segue que existe uma homotopia de caminhos F entre f e g .

Defina $K : I \times I \rightarrow Y$ por $K(s, t) = (k \circ F)(s, t)$, para todo $(s, t) \in I \times I$. Temos que,

- K é contínua pois é composta das aplicações contínuas k e F .
- $K(s, 0) = k(F(s, 0)) = k(f(s)) = (k \circ f)(s)$, para todo $s \in I$.
- $K(s, 1) = k(F(s, 1)) = k(g(s)) = (k \circ g)(s)$, para todo $s \in I$.
- $K(0, t) = k(F(0, t)) = k(x_0)$, para todo $t \in I$.
- $K(1, t) = k(F(1, t)) = k(x_1)$, para todo $t \in I$.

Assim, $k \circ F$ é uma homotopia de caminhos entre $k \circ f$ e $k \circ g$. Portanto, $k \circ f \simeq_p k \circ g$. ■

Lema 2.2 Sejam $k : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, $f : I \rightarrow X$ um caminho em X de x_0 a x_1 e $g : I \rightarrow X$ um caminho em X de x_1 a x_2 . Então, $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$.

Demonstração: Considere $h = f * g$, e temos que:

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Assim,

$$(k \circ h)(s) = \begin{cases} k(f(2s)), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ k(g(2s - 1)), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$[(k \circ f) * (k \circ g)](s) = \begin{cases} k(f(2s)), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ k(g(2s - 1)), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

o que mostra que $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$. ■

A operação do produto de caminhos induz uma operação bem definida em classes de homotopia de caminhos, definida por

$$[f] * [g] = [f * g]. \quad (2.1)$$

Para verificar este fato, sejam f e f' caminhos em X de x_0 a x_1 , g e g' caminhos em X de x_1 a x_2 , F uma homotopia de caminhos entre f e f' , e G uma homotopia de caminhos entre g e g' . Defina

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ G(2s - 1, t), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Como $H\left(\frac{1}{2}, t\right) = F(1, t) = x_1 = G(0, t)$ para todo $t \in I$, H é contínua nos fechados $I \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $I \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ de $I \times I$, então H é contínua pelo Teorema 1.12. Além disso,

$$H(0, t) = F(0, t) = x_0 \text{ e } H(1, t) = G(1, t) = x_2;$$

$$H(s, 0) = \begin{cases} F(2s, 0), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ G(2s - 1, 0), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = (f * g)(s);$$

$$H(s, 1) = \begin{cases} F(2s, 1), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ G(2s - 1, 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} f'(2s), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g'(2s - 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = (f' * g')(s).$$

Logo, H é uma homotopia de caminhos entre $f * g$ e $f' * g'$, e portanto, a operação $[f] * [g] = [f * g]$ está bem definida.

Teorema 2.1 *A operação $*$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *(Associatividade) Se $[f] * ([g] * [h])$ está definido, então $([f] * [g]) * [h]$ também está definido.*

*Além disso, $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$.*

(ii) *(Identidades à direita e à esquerda) Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 , então*

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \text{ e } [e_{x_0}] * [f] = [f],$$

onde e_{x_0} é o caminho constante em x_0 e e_{x_1} é o caminho constante em x_1 .

(iii) *Dado o caminho f em X de x_0 a x_1 , seja \bar{f} o caminho inverso de f . Então,*

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad e \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Demonstração: (i) Sejam $f, g, h : I \rightarrow X$ caminhos em X com $f(0) = x_0$, $f(1) = g(0) = x_1$, $g(1) = h(0) = x_2$ e $h(1) = x_3$. Provemos que $f * (g * h) \simeq_p (f * g) * h$.

Considere a aplicação $F : I \times I \rightarrow X$, definida por

$$F(s, t) = \begin{cases} f\left(\frac{4s}{1+t}\right), & \text{se } s \in \left[0, \frac{t+1}{4}\right], \\ g(4s - 1 - t), & \text{se } s \in \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right], \\ h\left(1 - \frac{4(1-s)}{2-t}\right), & \text{se } s \in \left[\frac{t+2}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Devemos mostrar que F é contínua, $F(0, t) = x_0$, $F(1, t) = x_3$, $F(s, 0) = [(f * g) * h](s)$ e $F(s, 1) = [f * (g * h)](s)$. De fato,

• Temos que $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Além disso, as seguintes composições de aplicações são contínuas:

$$s \in \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \mapsto \frac{4s}{t+1} \in I \mapsto f\left(\frac{4s}{t+1}\right) \in X,$$

$$s \in \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right] \mapsto 4s - t - 1 \in I \mapsto g(4s - t - 1) \in X,$$

$$s \in \left[\frac{t+2}{4}, 1\right] \mapsto 1 - \frac{4(1-s)}{2-t} \in I \mapsto h\left(1 - \frac{4(1-s)}{2-t}\right) \in X.$$

Desse modo, F é contínua.

• $F(0, t) = f(0) = x_0$ e $F(1, t) = h(1) = x_3$.

• Sabemos que, $F(s, 0) = \begin{cases} f(4s), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ g(4s - 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ h(2s - 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$

Por outro lado,

$$k(s) = (f * g)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

e

$$(k * h)(s) = \begin{cases} k(2s), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ h(2s - 1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Para $s \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, segue que $0 \leq 2s \leq \frac{1}{2}$ e daí, $k(2s) = f(4s)$. Para $s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, obtemos que $\frac{1}{2} \leq 2s \leq 1$ e $k(2s) = g(4s - 1)$. Assim,

$$[(f * g) * h](s) = F(s, 0) = \begin{cases} f(4s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{4}], \\ g(4s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ h(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

• Temos que, $F(s, 1) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(4s - 2), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ h(4s - 3), & \text{se } s \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$

Por outro lado,

$$l(s) = (g * h)(s) = \begin{cases} g(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ h(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

e

$$(f * l)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ l(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Para $s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, obtemos que $0 \leq 2s - 1 \leq \frac{1}{2}$ e $l(2s - 1) = g(4s - 2)$. Para $s \in [\frac{3}{4}, 1]$, segue que $\frac{1}{2} \leq 2s - 1 \leq 1$ e $l(2s - 1) = h(4s - 3)$. Logo,

$$[f * (g * h)](s) = F(s, 1) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(4s - 2), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ h(4s - 3), & \text{se } s \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Logo, $(f * g) * h \simeq_p f * (g * h)$.

(ii) Seja $e_0 : I \rightarrow I$ o caminho constante em 0, ou seja, $e_0(s) = 0$, para todo $s \in I$. Considere $id : I \rightarrow I$ a aplicação identidade, a qual é um caminho em I de 0 a 1. Então, $e_0 * id$ também é um caminho em I de 0 a 1.

Como I é convexo, existe uma homotopia de caminhos $G : I \times I \rightarrow I$ entre id e $e_0 * id$ dada por $G(s, t) = (1 - t)s + t(e_0 * id)(s)$, para todo $(s, t) \in I \times I$. Pelo Lema 2.1, $f \circ G$ é uma homotopia de caminhos entre os caminhos $f \circ id = f$ e $f \circ (e_0 * id)$.

Agora, pelo Lema 2.2, temos que $f \circ (e_0 * id) = (f \circ e_0) * (f \circ id) = e_{x_0} * f$. Assim,

$$[f] = [e_{x_0} * f] = [e_{x_0}] * [f].$$

De modo análogo, utilizando o fato que se e_1 denota o caminho constante em 1, então $id * e_1 \simeq_p id$, tem-se que $[f] * [e_{x_1}] = [f]$.

(iii) Considere o caminho inverso de id , $\bar{id} : I \rightarrow I$, dado por $\bar{id}(s) = 1 - s$, para todo $s \in I$. Então, $id * \bar{id}$ é um caminho em I que começa e termina em 0. Como I é convexo, existe uma homotopia por caminhos H entre e_0 e $id * \bar{id}$. Pelo Lema 2.1, temos que $f \circ H$ é uma homotopia de caminhos entre

$$f \circ e_0 = e_{x_0} \quad \text{e} \quad f \circ (id * \bar{id}) = (f \circ id) * (f \circ \bar{id}) = f * \bar{f}.$$

Assim, $[f] * [\bar{f}] = [f * \bar{f}] = [e_{x_0}]$.

Por um argumento similar, e usando o fato que $\bar{id} * id \simeq_p e_1$, pode-se mostrar que $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$. ■

2.3 Grupo Fundamental

A partir de agora consideraremos um caso particular do conceito de homotopia de caminhos. Dedicaremos atenção especial às homotopias de caminhos em que os caminhos são caminhos fechados (laços): em que o ponto inicial e o ponto final são o mesmo.

Definição 2.6 *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X . Uma aplicação contínua $f : I \rightarrow X$ tal que $f(0) = f(1) = x_0$ é chamada um caminho fechado ou um laço baseado em x_0 .*

Observação 2.4 *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X . Consideremos o conjunto das classes de homotopia de caminhos dos laços baseados em x_0 , com a operação $*$. Segue do Teorema 2.1 que a operação $*$, quando restrita a esse conjunto, satisfaz os axiomas da definição de grupo. De fato, dados dois laços f e g baseados em x_0 , o produto $f * g$ está sempre definido e é um laço baseado em x_0 . A associatividade, a existência de um única identidade $[e_{x_0}]$, e a existência de um inverso $[\bar{f}]$ para $[f]$ são imediatos.*

Definição 2.7 *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X . O conjunto das classes de homotopia de caminhos dos laços baseados em x_0 , com a operação $*$, é chamado grupo fundamental de X com base no ponto x_0 . Denotamos esse grupo por $\pi_1(X, x_0)$.*

Neste momento um questionamento natural a se fazer é: até que ponto a escolha do ponto base influencia a estrutura do grupo fundamental? A resposta para esta pergunta é dada a seguir.

Teorema 2.2 (Independência do ponto base) *Se x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são grupos isomorfos.*

Demonstração: Suponhamos que x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X . Assim, existe um caminho $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Defina a aplicação $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ por

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha],$$

para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.

- Para mostrar que $\hat{\alpha}$ está bem definida basta usar argumentos similares aos utilizados na demonstração da boa definição da operação (2.1).

- $\hat{\alpha}$ é homomorfismo. De fato, sejam $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$. Daí,

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) = [\bar{\alpha}] * ([f] * [g]) * [\alpha] = \hat{\alpha}([f] * [g]).$$

- Considere $\hat{\beta} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ dada por $\hat{\beta}([g]) = [\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]$, para todo $[g] \in \pi_1(X, x_1)$. De modo análogo ao de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ está bem definida. Além disso, $\hat{\beta}$ é o homomorfismo inverso de $\hat{\alpha}$ pois

$\hat{\beta}([g]) * \hat{\beta}([h]) = ([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) = [\alpha] * ([g] * [h]) * [\bar{\alpha}] = \hat{\beta}([g] * [h])$, para todo $[g], [h] \in \pi_1(X, x_1)$.

$$(\hat{\alpha} \circ \hat{\beta})([g]) = \hat{\alpha}([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [g], \text{ para todo } [g] \in \pi_1(X, x_1).$$

$$(\hat{\beta} \circ \hat{\alpha})([f]) = \hat{\beta}([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * [\bar{\alpha}] = [f], \text{ para todo } [f] \in \pi_1(X, x_0).$$

Portanto, $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são grupos isomorfos. ■

Corolário 2.1 *Se X é um espaço topológico conexo por caminhos e x_0 e x_1 são dois pontos de X , então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Demonstração: Sejam x_0 e x_1 são dois pontos de X . Como X é conexo por caminhos, segue que X tem uma única componente conexa por caminhos, que é X . Assim, x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos e pelo Teorema 2.2, $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$. ■

Observação 2.5 *Suponha que X é um espaço topológico. O corolário anterior nos mostra que o grupo $\pi_1(X, x_0)$ depende apenas da componente conexa por caminhos do ponto x_0 em X . Por isso é natural, ao estudar o grupo fundamental, trabalhar apenas com espaços conexos por caminhos. Mas, note que o isomorfismo que se define no Teorema 2.2 depende do caminho escolhido entre x_0 e x_1 . Quando se varia a classe $[\alpha]$, o isomorfismo $\hat{\alpha}$ geralmente também varia, exceto no caso em que $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano (o que seria uma exigência muito rigorosa a se fazer). Neste caso, duas classes quaisquer de caminhos α e γ ligando x_0 a x_1 , definem o mesmo isomorfismo, isto é, $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$. De fato, para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, obtemos*

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] = ([\bar{\alpha}] * [f] * [\gamma]) * ([\bar{\gamma}] * [\alpha]) = [\bar{\gamma}] * [f] * ([\alpha] * [\bar{\alpha}]) * [\gamma] = [\bar{\gamma}] * [f] * [\gamma] = \hat{\gamma}([f]).$$

Definição 2.8 *Um espaço topológico X é dito simplesmente conexo se é um espaço conexo por caminhos e se $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$ (grupo trivial), para algum $x_0 \in X$, e conseqüentemente para todo $x_0 \in X$.*

Exemplo 2.4 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo. Mostremos que X é simplesmente conexo. De fato, claramente X é conexo por caminhos (pois X é convexo). Falta mostrar que $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$. Para isto, sejam $x_0 \in X$ e $f : I \rightarrow X$ um laço com ponto base x_0 . Defina $F : I \times I \rightarrow X$ por $F(s, t) = (1-t)f(s) + te_{x_0}(s)$, para todo $(s, t) \in I \times I$. Como X é convexo, temos que $F(s, t) \in X$, para todo $(s, t) \in I \times I$. Além disso, F é contínua e,*

$$F(s, 0) = f(s), \quad F(s, 1) = e_{x_0}(s), \quad F(0, t) = x_0 = F(1, t),$$

para todos $s, t \in I$. Logo, $f \simeq_p e_{x_0}$. Portanto, $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$.

Lema 2.3 *Sejam X um espaço topológico simplesmente conexo e $f, g : I \rightarrow X$ caminhos em X tais que $f(0) = x_0 = g(0)$ e $f(1) = x_1 = g(1)$. Então, $f \simeq_p g$.*

Demonstração: Considere o produto de caminhos $f * \bar{g} : I \rightarrow X$. Temos que $f * \bar{g}$ é um laço em X com ponto base x_0 . Como X é simplesmente conexo, ou seja, $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$, segue que $f * \bar{g} \simeq_p e_{x_0}$. Logo,

$$[f] = [f * \bar{g}] * [g] = [e_{x_0}] * [g] = [g] \implies [f] = [g].$$

Portanto, $f \simeq_p g$. ■

2.4 O Homomorfismo induzido

Suponhamos que X e Y são espaços topológicos, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ e $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua tal que $h(x_0) = y_0$. Para isto, usaremos a seguinte notação:

$$h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0).$$

Se f é um laço em X com ponto base x_0 , então a composta $h \circ f : I \rightarrow Y$ é um laço em Y com ponto base y_0 . A correspondência $f \mapsto h \circ f$ dá origem a uma aplicação que leva $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(Y, y_0)$.

Definição 2.9 *Seja $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação contínua. Defina $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ por*

$$h_*([f]) = [h \circ f],$$

para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. A aplicação h_* é chamada homomorfismo induzido por h , relativo ao ponto base x_0 .

Observação 2.6 *A aplicação h_* está bem definida, pois se F é uma homotopia de caminhos entre os caminhos f e g , então $h \circ F$ é uma homotopia de caminhos entre os caminhos $h \circ f$ e $h \circ g$. Assim, para todos $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$,*

$$[f] = [g] \implies [h \circ f] = [h \circ g] \implies h_*([f]) = h_*([g]).$$

Além disso, h_* é um homomorfismo pois, para todos $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$h_*([f] * [g]) = h_*([f * g]) = [h \circ (f * g)] = [(h \circ f) * (h \circ g)] = [h \circ f] * [h \circ g] = h_*([f]) * h_*([g]).$$

Observação 2.7 *Observe que, o homomorfismo h_* não depende apenas da aplicação $h : X \rightarrow Y$, mas também da escolha do ponto básico $x_0 \in X$.*

Consideremos agora X, Y e Z espaços topológicos, e $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e $k : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ aplicações contínuas tais que $h(x_0) = y_0$ e $k(y_0) = z_0$. Note que, $(k \circ h)(x_0) = z_0$. Podemos considerar a seguinte aplicação contínua:

$$k \circ h : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$$

e o seguinte homomorfismo induzido

$$(k \circ h)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0).$$

Temos que, $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. De fato,

$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_*([h \circ f]) = k_*(h_*([f])) = (k_* \circ h_*)([f])$, para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.

Finalmente, se $id : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ é a aplicação identidade, então $id_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade.

Teorema 2.3 *Se $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo de X em Y , com $h(x_0) = y_0$, então $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja $k : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ o homeomorfismo inverso de h , com $k(y_0) = x_0$. Então,

$$k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = (id_{\pi_1(X, x_0)})_* \quad \text{e} \quad h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = (id_{\pi_1(Y, y_0)})_*.$$

Como $(id_{\pi_1(X, x_0)})_*$ e $(id_{\pi_1(Y, y_0)})_*$ são os homomorfismos identidades de $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$, respectivamente, segue que h_* é um isomorfismo. ■

Definição 2.10 *Sejam X um espaço topológico e A um subespaço de X . Dizemos que uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ é uma retração quando $r(y) = y$, para todo $y \in A$, ou seja, quando $r|_A = id_A$. Neste caso, o subespaço A chama-se retrato do espaço X .*

Observação 2.8 *Note que, se $r : X \rightarrow A$ é uma retração, então r é sobrejetora.*

Exemplo 2.5 *Considere $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Defina $r : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow S^1$, por $r(z) = \frac{z}{|z|}$, para todo $z \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Temos que r é contínua e $r(z) = \frac{z}{|z|} = z = id_{S^1}(z)$, para todo $z \in S^1$. Assim, r é uma retração e daí, S^1 é um retrato de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.*

Lema 2.4 *Sejam X um espaço topológico, A um retrato de X e $i : A \rightarrow X$ a inclusão. Então, o homomorfismo induzido $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ é injetor.*

Demonstração: Considere $r : X \rightarrow A$ uma retração. Então, a $r \circ i : A \rightarrow A$ é contínua e tal que $(r \circ i)(a) = r(a) = a = id_A(a)$, para todo $a \in A$. Logo,

$$(r \circ i)_* = (id_A)_* \implies r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A, a)}.$$

Portanto, i_* é injetor. ■

Capítulo 3

Grupo Fundamental da S^1

3.1 Espaços de Recobrimento

No capítulo anterior, mostramos que todo subespaço convexo de \mathbb{R}^n tem grupo fundamental trivial. Nesta seção, nosso objetivo é estudar os espaços de recobrimento, que irão nos ajudar a mostrar que existe espaço que tem o grupo fundamental não trivial.

Definição 3.1 *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Um aberto U de B é dito ser uma vizinhança distinguida se a imagem inversa $p^{-1}(U)$ pode ser escrita como a união de abertos disjuntos V_α em E tais que para cada α , a restrição $p|_{V_\alpha}$ é um homeomorfismo de V_α sobre U . A coleção $\{V_\alpha\}$ é chamada uma partição de $p^{-1}(U)$ em fatias.*

Se U é uma vizinhança distinguida, podemos imaginar o conjunto $p^{-1}(U)$ como uma “pilha de panquecas”, cada uma com o mesmo tamanho e formato de U , flutuando no ar acima de U . A aplicação p leva-as em U , como mostra a figura a seguir.

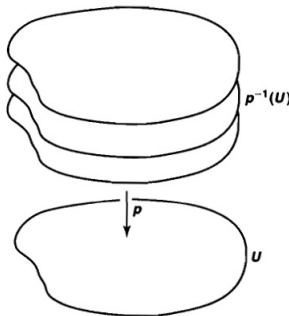


Figura 6: Aplicação de recobrimento. [4], p.336.

Definição 3.2 *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se cada ponto b de B possui uma vizinhança distinguida U , então p é chamada uma aplicação de recobrimento, e dizemos que E é um espaço de recobrimento de B .*

Observação 3.1 *Note que se $p : E \rightarrow B$ for uma aplicação de recobrimento, então para cada $b \in B$ o subespaço $p^{-1}(b)$ de E possui a topologia discreta. De fato, como existe vizinhança U de b tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ (união disjunta de abertos de E) e cada restrição $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo, segue que $V_{\alpha} \cap p^{-1}(b) = \{v_{\alpha}\}$ (um único ponto) que é aberto em $p^{-1}(b)$. Logo, $p^{-1}(b)$ possui a topologia discreta.*

Teorema 3.1 *Se $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, então p é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Suponhamos que A é um aberto de E . Devemos mostrar que $p(A)$ é um aberto em B .

Dado $y \in p(A)$, escolha uma vizinhança distinguida U de y , ou seja, $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ (união disjunta de abertos de E) e cada restrição $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

Temos que existe um ponto $x \in A$ tal que $p(x) = y$. Seja V_{β} a fatia que contém x .

Como A é aberto em E , o conjunto $V_{\beta} \cap A$ é aberto em V_{β} . Daí, o conjunto $p|_{V_{\beta}}(V_{\beta} \cap A)$ é aberto em U (pois $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ é homeomorfismo). Logo, $p|_{V_{\beta}}(V_{\beta} \cap A)$ é aberto em B .

Consequentemente, $p|_{V_{\beta}}(V_{\beta} \cap A)$ é uma vizinhança de y contida em $p(A)$ e portanto, $p(A)$ é aberto em B . ■

Teorema 3.2 *A aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada pela equação*

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração: Considere, por exemplo, U o subconjunto de S^1 consistindo de todos os pontos em que a primeira coordenada é positiva. Assim, $p^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos 2\pi x > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, onde

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right).$$

Como $\sin 2\pi x$ é estritamente crescente em cada \overline{V}_n , temos que a aplicação $p|_{\overline{V}_n}$ é injetora. Além disso, $p(\overline{V}_n) = \overline{U}$ e pelo Teorema 1.18, $p(V_n) = U$. Como \overline{V}_n é compacto e \overline{U} é Hausdorff, segue que $p|_{\overline{V}_n}$ é um homeomorfismo de \overline{V}_n em \overline{U} . Em particular, $p|_{V_n}$ é um homeomorfismo de V_n em U .

Argumentos semelhantes podem ser utilizados para provar que V (subconjunto de S^1 consistindo de todos os pontos em que a primeira coordenada é negativa), W (subconjunto de S^1 consistindo de todos os pontos em que a segunda coordenada é positiva) e T (subconjunto de S^1 consistindo de todos os pontos em que a segunda coordenada é negativa) são vizinhanças distinguidas. Desse modo, cada ponto de S^1 possui uma vizinhança distinguida. Logo, $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é uma aplicação de recobrimento. ■

Observação 3.2 *Se $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, então p é um homeomorfismo local de E em B . Para ver isto, seja $x \in E$. Então, $y = p(x) \in B$. Como $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, existe uma vizinhança distinguida U de y , ou seja, $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ (união disjunta de abertos de E) e cada restrição $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Temos que $x \in V_{\alpha}$ (pois $y = p(x) \in U$), para algum α , $p(V_{\alpha}) = U$ que é aberto em B e $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Logo, p é homeomorfismo local de E em B .*

Teorema 3.3 *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento. Se B_0 é um subespaço de B e $E_0 = p^{-1}(B_0)$, então a aplicação $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$ obtida pela restrição de p é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração: Dado $b_0 \in B_0$, considere U uma vizinhança distinguida de b_0 em B .

Então, existem abertos disjuntos $\{V_{\alpha}\}$ de E tais que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ e cada restrição $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Logo, $U \cap B_0$ é uma vizinhança de b_0 em B_0 , e os conjuntos $V_{\alpha} \cap E_0$ são abertos disjuntos em E_0 tais que

$$\bigcup_{\alpha} (V_{\alpha} \cap E_0) = \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) \cap E_0 = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(B_0) = p^{-1}(U \cap B_0)$$

e $p|_{V_{\alpha} \cap E_0} : V_{\alpha} \cap E_0 \rightarrow U \cap B_0$ é homeomorfismo.

Portanto, $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$ é uma aplicação de recobrimento. ■

Teorema 3.4 *Se $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B'$ são aplicações de recobrimento, então*

$$p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$$

é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração: Dados $b \in B$ e $b' \in B'$, sejam U e U' vizinhanças distinguidas de b e b' em B e B' , respectivamente. Assim, $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ (união disjunta de abertos de E), $(p')^{-1}(U') = \bigcup_{\beta} V'_{\beta}$ (união disjunta de abertos de E'), e $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ e $(p')|_{V'_{\beta}} : V'_{\beta} \rightarrow U'$ são homeomorfismos.

Então,

$$\begin{aligned} (p \times p')^{-1}(U \times U') &= \{(x, z) \in E \times E' \mid (p \times p')(x, z) = (p(x), p'(z)) \in U \times U'\} = \{(x, z) \in \\ E \times E' \mid p(x) \in U \text{ e } p'(z) \in U'\} &= \{(x, z) \in E \times E' \mid x \in p^{-1}(U) \text{ e } z \in (p')^{-1}(U')\} = \\ p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') &= \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) \times \left(\bigcup_{\beta} V'_{\beta} \right) = \bigcup_{\alpha, \beta} (V_{\alpha} \times V'_{\beta}). \end{aligned}$$

É fácil ver que esta união de abertos de $E \times E'$ é disjunta e que cada um dos abertos $V_{\alpha} \times V'_{\beta}$ é aplicado homeomorficamente em $U \times U'$ por $p \times p'$.

Logo, $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ é uma aplicação de recobrimento. ■

3.2 Cálculo do Grupo Fundamental da S^1

O estudo de espaços de recobrimento de um espaço X está intimamente relacionado ao estudo do grupo fundamental de X . Nesta seção, vamos estabelecer uma relação entre estes dois conceitos, e calcular o grupo fundamental do círculo.

Definição 3.3 *Sejam E, B e X espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ uma aplicação. Se $f : X \rightarrow B$ é uma aplicação contínua, um levantamento de f é uma aplicação $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.*

A existência de levantamentos quando p é uma aplicação de recobrimento é uma importante ferramenta quando estudamos espaços de recobrimento e grupos fundamentais. Primeiro, vamos mostrar que, para um espaço de recobrimento, caminhos possuem levantamentos e, em seguida, vamos mostrar que homotopias de caminhos também possuem levantamentos.

Lema 3.1 *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento com $p(e_0) = b_0$. Então, qualquer caminho $f : [0, 1] \rightarrow B$, com $f(0) = b_0$, possui um único levantamento $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow E$, o qual é um caminho com $\tilde{f}(0) = e_0$.*

Demonstração: Como $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, vamos cobrir B por vizinhanças distinguidas U . Do Lema 1.10, segue que existe uma subdivisão de $[0, 1]$, suponhamos s_0, \dots, s_n , tal que, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, o conjunto $f([s_i, s_{i+1}])$ pertence a alguma vizinhança distinguida U .

Definição de \tilde{f} : Primeiro, defina $\tilde{f}(0) = e_0$. Supondo que \tilde{f} está definido em $[0, s_i]$, vamos definir $\tilde{f}(s)$ para $s_i \leq s \leq s_{i+1}$, da seguinte maneira: o conjunto $f([s_i, s_{i+1}])$ está contido em alguma vizinhança distinguida U . Então, existem abertos disjuntos $\{V_\alpha\}$ de E tais que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ e, para cada α , $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ é homeomorfismo. Agora,

$$p(\tilde{f}(s_i)) = f(s_i) \implies \tilde{f}(s_i) \in p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_\alpha.$$

Assim, existe β tal que $\tilde{f}(s_i) \in V_\beta$. Para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, defina $\tilde{f}(s)$ por

$$\tilde{f}(s) = (p|_{V_\beta})^{-1}(f(s)).$$

Como $p|_{V_\beta} : V_\beta \rightarrow U$ é um homeomorfismo, \tilde{f} é contínua em $[s_i, s_{i+1}]$.

Usando esta mesma ideia, definimos \tilde{f} em todos subconjuntos de $[0, 1]$. Pelo Teorema 1.12, \tilde{f} é contínua em $[0, 1]$. O fato de que $p \circ \tilde{f} = f$ é imediato por causa da definição de \tilde{f} .

Unicidade de \tilde{f} : Vamos provar a unicidade de \tilde{f} . Suponha que \bar{f} é outro levantamento de f tal que $\bar{f}(0) = e_0$. Então, $\bar{f}(0) = e_0 = \tilde{f}(0)$.

Suponha que $\bar{f}(s) = \tilde{f}(s)$, para todo $s \in [0, s_i]$. Seja V_β como na demonstração da existência de \tilde{f} . Então, para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\bar{f}(s) = (p|_{V_\beta})^{-1}(f(s))$.

Como \bar{f} é um levantamento de f , então $\bar{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ (união disjunta de abertos de E).

Logo, existe α tal que $\bar{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset V_\alpha$, pois o conjunto $\bar{f}([s_i, s_{i+1}])$ é conexo.

Pelo fato de que $\bar{f}(s_i) = \tilde{f}(s_i) \in V_\beta$, obtemos que $\bar{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset V_\beta$.

Portanto, para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\bar{f}(s) = y \in V_\beta$ e $y \in p^{-1}(f(s))$ (pois $p(y) = p(\bar{f}(s)) = (p \circ \bar{f})(s) = f(s)$). Mas existe apenas um ponto y , a saber, $y = (p|_{V_\beta})^{-1}(f(s))$. Consequentemente, $\bar{f}(s) = \tilde{f}(s)$, para todo $s \in [s_i, s_{i+1}]$. ■

Lema 3.2 *Sejam $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento, com $p(e_0) = b_0$, e $F : I \times I \rightarrow B$ uma aplicação contínua, com $F(0, 0) = b_0$. Então, existe uma única aplicação contínua $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$, que é um levantamento de F . Se F for uma homotopia de caminhos, então \tilde{F} é uma homotopia de caminhos.*

Demonstração: Dada a aplicação contínua F com $F(0,0) = b_0$, definimos $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Pelo lema anterior, podemos estender \tilde{F} até o subconjunto $\{0\} \times I$ de $I \times I$ e até o subconjunto $I \times \{0\}$ de $I \times I$. Faremos a extensão de \tilde{F} a $I \times I$ como segue.

Utilizando o Lema 1.10, tome as partições de $[0, 1]$:

$$s_0 < s_1 < \dots < s_m \quad \text{e} \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n,$$

de modo que cada retângulo $I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ seja tal que $F(I_i \times J_j) \subset U$, onde U é uma vizinhança distinguida de B .

Definimos o levantamento \tilde{F} da seguinte maneira: começaremos definindo no retângulo $I_1 \times J_1$, e depois definiremos nos outros retângulos $I_i \times J_1$ da primeira linha. Em seguida, definiremos nos retângulos $I_i \times J_2$ da linha seguinte, e assim por diante.

Em geral, dados i_0 e j_0 , assumamos que \tilde{F} está definida no conjunto $A = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup R \cup S$, onde $R = \bigcup_{j < j_0} (I_i \times J_j)$ e $S = \bigcup_{j=j_0, i < i_0} (I_i \times J_j)$. Assumamos também que $\tilde{F}|_A$ é um levantamento de $F|_A$.

Vamos definir \tilde{F} em $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Para isto, escolha em vizinhança distinguida U de B que contém o conjunto $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$, ou seja, existem abertos disjuntos $\{V_\alpha\}$ de E tais que $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ e, para cada α , $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ é homeomorfismo.

Agora, temos que \tilde{F} já está definido no conjunto $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0}) = (\{s_{i_0-1}\} \times [t_{i_0-1}, t_{i_0}]) \cup ([s_{i_0-1}, s_{i_0}] \times \{t_{i_0-1}\})$ que é conexo. Logo, $\tilde{F}(C)$ é conexo e deve estar inteiramente contido em um dos abertos V_0 de E . Esta situação está ilustrada na figura a seguir:

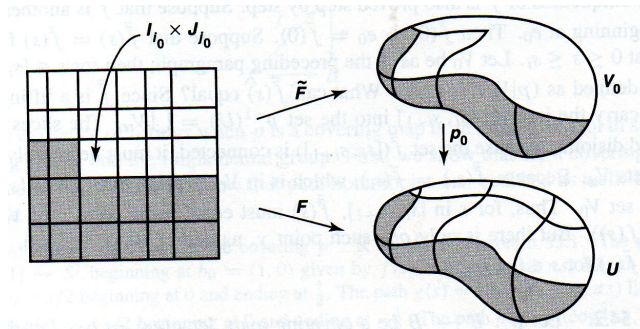


Figura 7: Levantamento \tilde{F} aplicado a C . [4], p.344.

Seja $p_0 : V_0 \rightarrow U$ a restrição de p a V_0 . Como \tilde{F} é um levantamento de $F|_A$, sabemos que para $x \in C$,

$$p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x),$$

logo, $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$, para todo $x \in C$.

Conseqüentemente, para $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$, podemos definir \tilde{F} por

$$\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$$

Pelo Teorema 1.12, a aplicação \tilde{F} é contínua.

Utilizando esta mesma ideia, definimos \tilde{F} para todos os elementos de $I \times I$ e \tilde{F} é contínua pelo Teorema 1.12.

Agora, verifiquemos unicidade de \tilde{F} . Note que, em cada etapa da construção de \tilde{F} , primeiro estendemos \tilde{F} para os subconjuntos $\{0\} \times I$ e $I \times \{0\}$ de $I \times I$, depois estendemos para os retângulos $I_i \times J_j$, existe apenas um modo de estender \tilde{F} continuamente. Portanto, uma vez que especificamos o valor de \tilde{F} em $(0, 0)$, \tilde{F} é única.

Agora, suponhamos que F é uma homotopia de caminhos. Devemos mostrar que \tilde{F} é uma homotopia de caminhos.

Como F é uma homotopia de caminhos com $F(0, 0) = b_0$, segue que $F(0, t) = b_0$, para todo $t \in I$. Como \tilde{F} é um levantamento de F , para todo $t \in I$, temos que

$$p(\tilde{F}(0, t)) = F(0, t) = b_0 \implies \tilde{F}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(b_0).$$

Pela observação 3.1, sabemos que $p^{-1}(b_0)$ possui a topologia discreta como um subespaço de E , ou seja, conjuntos unitários são abertos de $p^{-1}(b)$. Como $\{0\} \times I$ é conexo e \tilde{F} é contínua, então $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ é conexo. E pelo Lema 1.8, $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ deve ser igual a um conjunto que possui um único ponto. Assim, para todo $t \in I$, $\tilde{F}(0, t) = e_0$ (pois $\tilde{F}(0, 0) = e_0$).

De modo similar, prova-se que $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ deve ser um conjunto que possui um único ponto. Logo, \tilde{F} é uma homotopia de caminhos. ■

Teorema 3.5 *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento, com $p(e_0) = b_0$. Sejam $f, g : I \rightarrow B$ dois caminhos em B de b_0 a b_1 , e sejam \tilde{f} e \tilde{g} levantamentos de f e g , respectivamente, em E com $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = e_0$. Se $f \simeq_p g$, então $\tilde{f} \simeq_p \tilde{g}$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) \in E$.*

Demonstração: Seja $F : I \times I \rightarrow B$ uma homotopia de caminhos entre f e g , com $F(0, 0) = b_0$.

Pelo lema anterior, existe um levantamento $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$ de F tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Além disso, \tilde{F} é uma homotopia de caminhos com $\tilde{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ e $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ é um conjunto que possui um único ponto: $\{e_1\}$.

Observe que, a restrição $\tilde{F}|_{I \times \{0\}}$ de \tilde{F} é um caminho em E que começa em e_0 (pois $\tilde{F}(0, 0) = e_0$), e é um levantamento de $F|_{I \times \{0\}}$. Como \tilde{f} é também um caminho em E que começa em e_0 e um levantamento de $f = F|_{I \times \{0\}}$, pelo Lema 3.1, obtemos que $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$, para todo $s \in I$.

Do mesmo modo, $\tilde{F}|_{I \times \{1\}}$ é um caminho em E que é um levantamento de $F|_{I \times \{1\}}$, e que começa em e_0 (pois $\tilde{F}(0, 1) = e_0$). Pelo fato de que \tilde{g} é também um caminho em E que começa em e_0 e um levantamento de $g = F|_{I \times \{1\}}$, pelo Lema 3.1, segue que $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$, para todo $s \in I$.

Portanto, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) = e_1$ e \tilde{F} é uma homotopia por caminhos entre \tilde{f} e \tilde{g} . ■

Sejam $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento e $b_0 \in B$. Escolha e_0 de modo que $p(e_0) = b_0$. Dado um elemento $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, considere \tilde{f} o levantamento de f para um caminho em E que começa em e_0 . Defina $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ por

$$\phi([f]) = \tilde{f}(1).$$

Pelo Teorema 3.5, ϕ está bem definida. É claro que ϕ depende da escolha do ponto e_0 .

Teorema 3.6 *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento, com $p(e_0) = b_0$. Se E é conexo por caminhos, então*

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

é sobrejetora. Além disso, se E é simplesmente conexo, então ϕ é bijetora.

Demonstração: Seja $e_1 \in p^{-1}(b_0)$. Como $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ e E é conexo por caminhos, então existe um caminho $\tilde{f} : I \rightarrow E$ tal que $\tilde{f}(0) = e_0$ e $\tilde{f}(1) = e_1$.

Assim, defina $f : I \rightarrow B$ por $f(s) = (p \circ \tilde{f})(s)$, para todo $s \in I$. Temos que:

- f é aplicação contínua pois p e \tilde{f} são contínuas.
- $f(0) = p(\tilde{f}(0)) = p(e_0) = b_0$ e $f(1) = p(\tilde{f}(1)) = p(e_1) = b_0$.

Logo, f é um laço com ponto base b_0 e assim, $[f] \in \pi_1(B, b_0)$.

Pela definição de ϕ , $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = e_1$ e portanto, ϕ é sobrejetora.

Agora, suponhamos que E é simplesmente conexo e mostremos que ϕ é injetora. Para isto, sejam $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$ tais que $\phi([f]) = \phi([g])$.

Sejam \tilde{f} e \tilde{g} levantamentos de f e g , respectivamente, em E tais que $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = e_0$. De acordo com o Teorema 3.5, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

Como E é simplesmente conexo, pelo Lema 2.3, segue que existe uma homotopia de caminhos \tilde{F} em E entre \tilde{f} e \tilde{g} . Então, $p \circ \tilde{F}$ é uma homotopia de caminhos em B entre $p \circ \tilde{f} = f$ e $p \circ \tilde{g} = g$.

Logo, $[f] = [g]$ e daí, ϕ é injetora. Portanto, ϕ é bijetora. ■

Teorema 3.7 *O grupo fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros.*

Demonstração: Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ a aplicação de recobrimento do Teorema 3.2, com $e_0 = 0$, e $b_0 = (1, 0) = p(e_0)$. Então,

$$p^{-1}(b_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = b_0 = (1, 0)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) = (1, 0)\} = \mathbb{Z}.$$

Como \mathbb{R} é simplesmente conexo, pelo teorema anterior, temos que $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ é bijetora.

Falta mostrar que ϕ é um homomorfismo de grupos.

Sejam $[f], [g] \in \pi_1(S^1, b_0)$ e consideremos \tilde{f} e \tilde{g} levantamentos de caminhos de f e g , respectivamente, em \mathbb{R} , tais que $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 0$.

Fazendo $n = \tilde{f}(1)$ e $m = \tilde{g}(1)$, obtemos que $\phi([f]) = n$ e $\phi([g]) = m$, por definição.

Considere $\bar{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ o caminho dado por $\bar{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$, para todo $s \in I$.

Como $p(n + x) = p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$(p \circ \bar{g})(s) = p(n + \tilde{g}(s)) = p(\tilde{g}(s)) = g(s),$$

para $s \in I$, e $\bar{g}(0) = n + \tilde{g}(0) = n$. Logo, \bar{g} é um levantamento de g em \mathbb{R} que começa em n .

Considerando que \tilde{f} é um caminho em \mathbb{R} com $\tilde{f}(0) = 0$ e $\tilde{f}(1) = n$, e \bar{g} é um caminho em \mathbb{R} tal que $\bar{g}(0) = n$ e $\bar{g}(1) = n + m$, então o produto de caminhos $\tilde{f} * \bar{g}$ está bem definido, e é um caminho em \mathbb{R} de 0 a $n + m$. Além disso, $\tilde{f} * \bar{g}$ é um levantamento de $f * g$ (pois $p \circ (\tilde{f} * \bar{g}) = (p \circ \tilde{f}) * (p \circ \bar{g}) = f * g$). Assim,

$$\phi([f] * [g]) = \phi([f * g]) = (\tilde{f} * \bar{g})(1) = n + m = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = \phi([f]) + \phi([g]).$$

Portanto, ϕ é um homomorfismo. ■

3.3 Aplicações

O resultado a seguir é um resultado clássico de Topologia que é consequência do conhecimento que temos sobre o grupo fundamental da S^1 .

Teorema 3.8 *Não existe retração $r : D^2 \rightarrow S^1$.*

Demonstração: Se S^1 fosse um retrato de D^2 , então, pelo Lema 2.4, o homomorfismo induzido da inclusão $i : S^1 \rightarrow D^2$, $i_* : \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \pi_1(D^2, (1, 0))$ seria injetor, o que é um absurdo pois $\pi_1(S^1, (1, 0))$ é isomorfo a \mathbb{Z} e $\pi_1(D^2, (1, 0))$ é trivial. ■

Agora, veremos que um importante teorema da Álgebra, o Teorema Fundamental da Álgebra, também é consequência do cálculo do grupo fundamental da S^1 .

Teorema 3.9 *Uma equação polinomial*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

de grau $n > 0$ com coeficientes reais ou complexos possui pelo menos uma raiz (real ou complexa).

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em quatro partes.

Parte 1: Consideremos $S^1 \subset \mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos) e a aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(z) = z^n$, para todo $z \in S^1$. Vamos mostrar que o homomorfismo induzido $f_* : \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \pi_1(S^1, (1, 0))$ é injetor.

Seja $p_0 : I \rightarrow S^1$ dado por $p_0(s) = e^{2\pi is} = (\cos 2\pi s, \text{sen } 2\pi s)$, para todo $s \in I$. Temos que p_0 é um laço em S^1 com ponto base $(1, 0)$.

Assim, para todo $s \in I$,

$$f(p_0(s)) = (e^{2\pi is})^n = (\cos 2\pi ns, \text{sen } 2\pi ns),$$

e $f \circ p_0 : I \rightarrow S^1$ é um laço com ponto base $(1, 0)$.

Considerando $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\tilde{f}(s) = ns$, para todo $s \in I$, temos que \tilde{f} é um levantamento de $f \circ p_0$ no espaço de recobrimento \mathbb{R} (Teorema 3.2) com $\tilde{f}(0) = 0$ e $\tilde{f}(1) = n \cdot 1 = n$.

Agora, seja $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\bar{f}(s) = s$, para todo $s \in I$. Note que \bar{f} é um levantamento de p_0 no espaço de recobrimento \mathbb{R} com $\bar{f}(0) = 0$ e $\bar{f}(1) = 1$.

Logo, no isomorfismo $\phi : \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \mathbb{Z}$ (do Teorema 3.7), $[f \circ p_0] \mapsto n$ e $[p_0] \mapsto 1$.

Como $f_* : \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \pi_1(S^1, (1, 0))$ é tal que $f_*([p_0]) = [f \circ p_0]$, $\pi_1(S^1, (1, 0))$ é isomorfo a \mathbb{Z} (via ϕ do teorema anterior), $[p_0] \mapsto 1$ e $[f \circ p_0] \mapsto n$, segue que $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é dada por $f_*(m) = nm$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Portanto, f_* é injetor.

Parte 2: Vamos mostrar que se $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é a aplicação $g(z) = z^n$, então g não é homotópica a aplicação constante.

Considere $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dada por $i(z) = z$, para todo $z \in S^1$. Temos que $g = i \circ f$, onde f é a aplicação definida na parte 1. Já vimos que f_* é injetor, e como S^1 é um retrato de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pelo Lema 2.4, segue que i_* é injetor.

Portanto, $g_* = (i \circ f)_* = i_* \circ f_*$ é injetor. Logo, g não é homotópica a aplicação constante (pois se $g \simeq_p e_{(1,0)}$, então $g \circ \alpha \simeq_p e_{(1,0)} \circ \alpha = e_{(1,0)}$, para todo $\alpha : I \rightarrow S^1$ laço. Daí, $g_*([\alpha]) = [e_{(1,0)}]$, o que é um absurdo pois g_* é injetor).

Parte 3: Agora, vamos provar um caso especial do teorema. Dada a equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

suponhamos que

$$|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| < 1$$

e vamos mostrar que a equação possui uma raiz pertencente ao disco $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 \leq 1\}$.

Suponhamos que não existe raiz da equação polinomial que pertence a B^2 . Então, podemos definir a aplicação $k : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ por

$$k(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

para todo $z \in D^2$.

Seja $h = k|_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ a restrição de k em S^1 . Como $k : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é uma extensão contínua de h a D^2 , segue, por [3] (Lemma 55.3, p.349), que h é homotópica a aplicação constante.

Por outro lado, vamos definir uma homotopia $F : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ entre h e a aplicação g (Parte 2) por

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0),$$

para todo $(z, t) \in S^1 \times I$. Observe que, $F(z, t) \neq (0, 0)$, pois

$$\begin{aligned} |F(z, t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)| \geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \dots + |a_0|) = \\ &1 - t(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) > 0. \end{aligned}$$

Como h é homotópica a aplicação constante e h é homotópica a g , segue que g é homotópica a aplicação constante, o que é uma contradição pelo que provamos na Parte 2.

Portanto, existe raiz da equação polinomial que pertence a D^2 .

Parte 4: Agora, vamos provar o caso geral. Dada uma equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

vamos escolher um número real $c > 0$ e realizar a substituição $x = cy$. Desse modo, obtemos a equação

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \dots + a_1(cy) + a_0 = 0$$

ou

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{c^{n-1}}y + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

Se esta última equação possui uma raiz $y = y_0$, então a equação original possui a raiz $x_0 = cy_0$. Logo, precisamos apenas escolher c grande o suficiente para que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{c} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{c^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_1}{c^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{c^n} \right| < 1$$

e reduzir o teorema ao caso especial considerado na Parte 3. ■

Considerações Finais

No desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso percebemos o quão importante é a Teoria de Homotopia e o estudo do Grupo Fundamental para a área de Topologia Algébrica. Vimos que o grupo fundamental é um invariante topológico que nos permite utilizar ferramentas da teoria dos grupos para provar resultados importantes na topologia, dentre outras coisas, ele pode nos auxiliar na decisão de quando dois espaços não são homeomorfos. Além disso, podemos usar este invariante para provar resultados de outras áreas, como por exemplo, o Teorema Fundamental da Álgebra, o qual foi apresentado neste trabalho. Existem outros resultados que também podem ser provados utilizando o grupo fundamental, a saber, o Teorema do ponto fixo de Brouwer e casos particulares do Teorema de Borsuk-Ulam.

Referências Bibliográficas

- [1] Lima, E.L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [2] Lima, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1993.
- [3] Massey, W.S. *Algebraic Topology: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [4] Munkres, J. R. *Topology*. 2nd edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.