

ANDRE GARCIA CUNHA FILHO

**ABORDAGEM TRANSIENTE SOBRE OS
EFEITOS DO AMORTECIMENTO
VISCOELÁSTICO NA ESTABILIDADE
AEROELÁSTICA DE ESTRUTURAS
AERONÁUTICAS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2019

ANDRE GARCIA CUNHA FILHO

**ABORDAGEM TRANSIENTE SOBRE OS
EFEITOS DO AMORTECIMENTO
VISCOELÁSTICO NA ESTABILIDADE
AEROELÁSTICA DE ESTRUTURAS
AERONÁUTICAS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Vibrações Mecânicas

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.

Coorientador: Mauricio Vicente Donadon.

UBERLÂNDIA - MG

2019

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

F481 Filho, André Garcia Cunha, 1987-
2019 Abordagem transiente sobre os efeitos do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de estruturas aeronáuticas [recurso eletrônico] : n/a / André Garcia Cunha Filho. - 2019.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.

Coorientador: Maurício Vicente Donadon.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2208>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Gonçalves de Lima, Antônio Marcos , 1971-, (Orient.). II. Donadon, Maurício Vicente, -, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

ATA DE DEFESA

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica			
Defesa de:	Tese, nº 273, COPEM			
Data:	nove de agosto de dois mil e dezenove	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento: 13:00
Matrícula do Discente:	11523EMC011			
Nome do Discente:	André Garcia Cunha Filho			
Título do Trabalho:	Abordagem Transiente sobre os Efeitos do Amortecimento Viscoelástico na Estabilidade Aeroelástica de Estruturas Aeronáuticas			
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações			
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Sólidos e Vibrações			
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estudo Numérico, Implementação Computacional e Verificação Experimental de Sistemas de Controle Passivo de Vibrações para a Supressão do Flutter de Painéis Compósitos e Seções Típicas de Asas. (Bolsa PQ-2, Proc. 302026/2016-9)			

Reuniu-se no Anfiteatro B do Bloco 50, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Maurício Vicente Donadon (coorientador) - ITA; Valder Steffen Júnior - FEMEC/UFU; Aldemir Aparecido Cavalini Junior - FEMEC/UFU; Daniel Alves Castello - COPPE/UFRJ; Flávio Donizetti Marques - EESC/USP; Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 12/08/2019, às 09:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mauricio Vicente Donadon, Usuário Externo**, em 12/08/2019, às 12:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **DANIEL ALVES CASTELLO, Usuário Externo**, em 12/08/2019, às 12:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flávio Donizetti Marques, Usuário Externo**, em 12/08/2019, às 15:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em



13/08/2019, às 07:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/08/2019, às 14:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1458977** e o código CRC **E3771C75**.

Dedico esta tese com muito amor e carinho ao meu sobrinho Lucca, que nasceu neste ano, no dia 04 de maio. Que a força esteja com vc...

AGRADECIMENTOS

É com imenso prazer e satisfação que finalmente posso agradecer as pessoas que estiveram comigo nessa longa jornada de seis anos até aqui. Seis anos se passaram, mais do que uma outra faculdade eu cursei no mesmo laboratório com as mesmas pessoas. As amizades que fiz foram o combustível que me fizeram continuar andando todos os dias. Assim, as primeiras pessoas a quem serei eternamente grato são meus amigos. Sem eles teria sido psicologicamente impossível terminar este projeto.

Dentre eles, uma pessoa em particular merece todo meu respeito, consideração e carinho. Um irmão que caminha o mesmo comigo há mais de dez anos. Além de irmão, um amigo que sempre me mostrou o caminho e nunca me deixou na mão. Muito obrigado Leandro de Sousa Leão.

Talvez sorte, talvez não, mas tive a oportunidade de trabalhar com um pessoa que eu considero um gênio e que sem ele eu com certeza não teria desenvolvido a capacidade que tenho hoje. Um pessoa que nasceu para pesquisar e que observando seu trabalho, aprendi tudo que sei sobre o que é a pesquisa. Trabalhamos e desenvolvemos muita coisa juntos. Muito obrigado Yvon Pièrre Joseph Brien, o Francês.

Gostaria de agradecer também um grande amigo que fiz nesses últimos dois anos e que tenho certeza que será para toda vida, um engenheiro nato, nasceu pra isso e que me ajudou muito tanto em momentos complicados de meus desenvolvimentos, quantos nas dificuldades da vida. Muito obrigado Dener Miranda.

Outra pessoa muito especial, e outro amigo que tive o prazer de fazer foi o Vitor Taha. Sempre me dando apoio nos fazendo rir em momentos complicados. Muito obrigado.

Dizem que o fim é fácil, mas o fim de uma tese é um período dolorido, e encontrar energias mentais e motivação para continuar avançando é o que nos faz crescer e confirma o fim de uma passagem e nos transforma em um ser mais forte. Porém isso sozinho seria impossível, e nesses últimos meses uma pessoa me fez encontrar energias onde eu não tinha mais. Muito obrigado Olivia Oliveira (a azeitona).

Muito Obrigado Gefferson Silva e Thiago Versiane, companheiros de pesquisa do ITA que prestaram todo o apoio técnico para a realização de meus experimentos e que, mais importante ainda, me ofereceram casa durante todo o tempo que passei em São José dos Campos.

Muito obrigado à minha família que sempre esteve ao meu lado nos momentos difíceis.

Um agradecimento especial aos meus professores Mauricio Vicente Donadon, um grande amigo e mentor e ao meu Professor Orientador Antônio Marcos Gonçalves de Lima.

Gostaria de agradecer a Faculdade de Engenharia Mecânica e a Pós-graduação pela oportunidade de usufruir de toda essa estrutura e também as entidades de fomento, CAPES e CNPQ.

Sempre que encontrar um desafio que achar impossível, este é seu desafio. Não fuja, enfrente-o.

RESUMO

O *flutter*, que é um tipo de instabilidade aeroelástica, é um fenômeno causado pela interação simultânea das forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais em uma estrutura. No projeto de aeronaves, este é sempre um tema de extrema importância devido ao alto risco de colapso estrutural. A busca incessante por soluções que visam aumentar a eficiência das aeronaves e consequentemente reduzir impactos ambientais, têm motivado o uso de conceitos como asas de grande alongamento, bem como o emprego de novos materiais. Porém, estas soluções se tornam um enorme desafio de engenharia do ponto de vista estrutural, uma vez que há um grande aumento da flexibilidade da estrutura tornando-a propensa ao *flutter*. Neste sentido, o uso de técnicas passivas de controle de vibração, como o emprego de materiais viscoelásticos, pode ser uma solução viável para o aumento da eficiência aeroelástica do sistema, devido à sua grande capacidade de amortecimento estrutural.

As indústrias automotiva e aeronáutica utilizam amplamente os materiais viscoelásticos com o objetivo principal de atenuação de ruídos, ou pequenas vibrações. Pouco conhecimento se tem sobre o real efeito do amortecimento viscoelástico para atenuar instabilidades aeroelásticas. Neste contexto, modelos aeroelásticos quase sempre envolvem altos custos computacionais, e a introdução da viscoelasticidade nos mesmos pode torná-los proibitivos. Assim, a criação e emprego de modelos viáveis e capazes de representar o comportamento dinâmico de sistemas aeroviscoelásticos é um desafio.

O foco deste trabalho, foi viabilizar modelos aeroviscoelásticos, aplicando técnicas de redução e pelo aperfeiçoamento matemático daqueles já existentes. Foram estudados três tipos de sistemas aeroviscoelásticos: painéis aeronáuticos, uma seção típica não linear e por fim uma asa representativa com grande alongamento. Três teorias de carregamento aerodinâmico são empregadas: a Teoria do Pistão para painéis, a Teoria de Wagner não estacionária para a seção típica e a Teoria das Faixas, também não estacionária, para a asa. Salvo os modelos de painéis aeronáuticos, tanto a seção típica quanto o modelo de asa são validados experimentalmente em túnel de vento.

Palavras-chave: cálculo Fracionário, aeroviscoelasticidade, Elementos Finitos.

ABSTRACT

Flutter is a kind of aeroelastic instability caused by the simultaneous interaction of aerodynamic, elastic and inertial forces upon a structure. In the design of an aircraft, flutter is always a major concern due to its high risk of structural collapse. The constant search for solutions intended to increase aircraft performance and consequently reduce environmental impacts has motivated the use of new concepts, such as high aspect ratio wings and the employment of new materials. However, those solutions become an important structural challenge, since they induce an increase of flexibility making the structure prone to flutter. Thus, the use of passive vibration control techniques, such as viscoelastic materials may be a feasible solution to increase the system aeroelastic performance as a result of its high structural damping rate.

Automotive and aeronautical industries largely employ viscoelastic materials to mitigate noise and small vibrations. Little is known about the real effect of viscoelastic damping to reduce aeroelastic instabilities. In this scenario, aeroelastic models always involve high computational costs and introducing viscoelasticity within it may cause them to be unfeasible. Therefore, the creation and employment of computational low costs models capable of representing the dynamic behavior of aeroviscoelastic systems is a real challenge.

The focus here is to create feasible aeroviscoelastic models by applying reduction model techniques and mathematically improving the existent ones. Three kinds of aeroviscoelastic systems has been studied: aeronautical panels, a non linear typical section and a representative high aspect ratio wing. For those, three aerodynamic theories are used: the Piston Theory for panels, the Unsteady Wagner's Theory and the Unsteady Strip Theory. Except for the panel models, experimental validation were carried through in wind tunnel.

Keywords: fractional calculus, aeroviscoelasticity, finite elements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Exemplos de aeronaves cujos conceitos são asas com grande alongamento fazendo uso de material compósito.	2
Figura 3.1: Comportamento assintótico dos coeficientes de Grunwald.	23
Figura 4.1: Cinemática da placa sanduíche.	37
Figura 4.2: Esquema do elemento finito isoparamétrico utilizado em coordenadas locais, η e ξ , e globais x e y	43
Figura 4.3: Algoritmo para integração da equação do movimento com cálculo fracionário.	50
Figura 4.4: Esquema ilustrativo de um painel aeronáutico fixado nas paredes de um túnel: (1) parede rígida do túnel de vento, (2) placa sanduíche, (3) cavidade formada entre a estrutura e o túnel.	51
Figura 4.5: Aparato experimental para o estudo do flutter de painéis, uma cortesia de Vasily et al.(VEDENEEV; GUVERNYUK; KOLOTNIKOV, 2009).	51
Figura 4.6: Discretização da placa em elementos finitos da placa sanduíche para uma malha de 6×6 elementos.	55
Figura 4.7: Comparação entre as abordagens de Schmidt e Gaül e a Fórmula de Recorrência.	55
Figura 4.8: Diferenças entre as FRFs dos modelos de Schmidt e Gaül e a fórmula de recorrência.	56
Figura 4.9: FRFs comparativas entre o modelo fracionário e o Módulo Complexo.	57
Figura 4.10: FRFs comparativas entre o modelo fracionário e o Módulo Complexo.	58
Figura 4.11: Resposta temporal do sistema em um ponto anterior ao <i>flutter</i>	58
Figura 4.12: Resposta temporal do sistema em um ponto próximo ao <i>flutter</i>	59
Figura 4.13: Resposta temporal do sistema em um ponto posterior ao <i>flutter</i>	59
Figura 5.1: Cinemática da viga no espaço.	63
Figura 5.2: Elemento finito da viga representado em coordenadas locais.	64
Figura 5.3: Formas modais associadas obtidas no ANSYS WorkBench.	67
Figura 5.4: Esforço harmônico senoidal.	68
Figura 5.5: Comparação das respostas transientes obtidas em Matlab e ANSYS APDL.	68

Figura 5.6: <i>Plate like wing</i> posicionada no túnel de vento com o lastro fixo na extremidade.	69
Figura 5.7: FRFs da <i>plate like wing</i> com e sem lastro.	70
Figura 5.8: Cinemática da viga sanduíche.	72
Figura 5.9: Sobreposição da curva exibida no artigo com o resultado do programa implementado.	84
Figura 5.10: Sobreposição da curva exibida no artigo com o resultado do programa implementado.	84
Figura 5.11: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.	85
Figura 5.12: Comparação FDM Galúcio vs FDM Recorrência - flexão.	86
Figura 5.13: Comparação FDM Galúcio vs FDM Recorrência - torção.	86
Figura 5.14: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.	87
Figura 5.15: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.	88
Figura 5.16: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.	88
Figura 5.17: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema - $\theta_y(t)$	89
Figura 6.1: Modelo para seção típica com 2 graus de liberdade	91
Figura 6.2: Distribuição do campo de pressão em torno do perfil. Adaptado da referência (WRIGHT; COOPER, 2015).	94
Figura 6.3: Fotos do PAPA posicionado em frente ao túnel de vento.	95
Figura 6.4: Viga responsável por conferir rigidez ao movimento de torção.	96
Figura 6.5: Atraso da resposta aerodinâmica frente a uma variação tipo degrau do ângulo de ataque	97
Figura 6.6: Idealização de um elemento de rigidez discreta viscoelástica para alongamento	101
Figura 6.7: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.	102
Figura 6.8: Aplicação do elemento de rigidez viscoelástico no PAPA.	103
Figura 6.9: Esquema de uma barra sob torção pura. Adaptado da referência (TIMOSHENKO; GERE, 1994, pg. 60).	104
Figura 6.10: Fluxograma para resolução numérica do problema não linear da seção típica.	109
Figura 7.1: Asa idealizada por um modelo de viga de Euler-Bernoulli.	111
Figura 7.2: Distribuição de sustentação ao longo da envergadura de uma asa real e segunda a Teoria das Faixas.	112
Figura 7.3: Teoria das Faixas aplicada à uma viga em balanço.	113
Figura 8.1: Túnel de vento do Laboratório de Engenharia Aeronáutica. Fonte: (SILVA, 2016).	117
Figura 8.2: Esquema do túnel de vento do Laboratório de Engenharia Aeronáutica. Fonte: (SILVA, 2016).	118

Figura 8.3: Disposição do PAPA no túnel de vento.	118
Figura 8.4: Esquema do posicionamento dos acelerômetros no PAPA. Fonte (SILVA, 2016).	119
Figura 8.5: Elementos viscoelásticos circulares em vermelho para conferir rigidez a flexão do PAPA.	121
Figura 8.6: <i>Plate like wing</i> com lasto aplicado na extremidade e área de recobrimento do material viscoelástico.	122
Figura 8.7: Túnel de vento do Laboratório de Engenharia Aeronáutica do ITA. Foto disponível no site: http://www.aer.ita.br/node/378	123
Figura 8.8: Posicionamento da asa no túnel de vento.	124
Figura 8.9: Equipamentos para medição da velocidade do escoamento.	125
Figura 8.10: Vibrômetro Polytec CLV-2534.	126
Figura 8.11: Pontos de aplicação do lasers sobre a <i>plate like wing</i>	127
Figura 8.12: Esquema da cinemática da asa sob flexão e torção.	128
Figura 9.1: FRFS obtidas a partir das respostas transientes em <i>plunge</i> , medidas no túnel de vento.	130
Figura 9.2: Respostas transientes em <i>plunge</i> e <i>pitch</i> para uma velocidade 11,9 m/s.	131
Figura 9.3: Respostas transientes em <i>plunge</i> e <i>pitch</i> para uma velocidade 12,9 m/s.	131
Figura 9.4: Respostas transientes em <i>plunge</i> e <i>pitch</i> para uma velocidade 14,1 m/s.	132
Figura 9.5: Respostas transientes em <i>plunge</i> e <i>pitch</i> para uma velocidade 15,0 m/s.	132
Figura 9.6: Respostas transientes em <i>plunge</i> e <i>pitch</i> para uma velocidade 15,9 m/s.	133
Figura 9.7: Resultado da simulação numérica para <i>plunge</i> e <i>pitch</i> a 14,6 m/s.	133
Figura 9.8: FRFS obtidas a partir das respostas transientes em <i>plunge</i> , analisadas pelo modelo computacional.	134
Figura 9.9: Foco na FRF a 14,5 m/s para visualização da segunda frequência natural.	135
Figura 9.10: Retratos de fase para o sistema a 15,0 m/s.	135
Figura 9.11: Retratos de fase para o sistema a 15,9 m/s.	136
Figura 9.12: Sistema lin. vs Sistema não lin. a 5m/s para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$	137
Figura 9.13: Sistema lin. vs Sistema não lin. a 13m/s para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$	137
Figura 9.14: Sistema lin. vs Sistema não lin. a 14m/s para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$	138
Figura 9.15: Sistema lin. vs Sistema não lin. a 14,6m/s para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$	138
Figura 9.16: Sistema lin. vs Sistema não lin. a 5m/s para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$	139

Figura 9.17: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $13m/s$ para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$	139
Figura 9.18: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $14m/s$ para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$	140
Figura 9.19: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $14,6m/s$ para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$	140
Figura 9.20: Respostas transientes para um elemento de rigidez viscoelástico de 2 mm de espessura.	142
Figura 9.21: FFTs do sinal transiente antes e depois da instabilidade para $18,00\text{ m/s}$.	143
Figura 9.22: Retratos de fase para o sistema aeroviscoelástico com elemento de rigidez de 2 mm de espessura e velocidade de escoamento de $18,0\text{ m/s}$.	144
Figura 9.23: Respostas transientes para um elemento de rigidez viscoelástico de 3 mm de espessura.	145
Figura 9.24: FFTs do sinal transiente antes e depois da instabilidade para $19,50\text{ m/s}$.	145
Figura 9.25: Retratos de fase para o sistema aeroviscoelástico com elemento de rigidez de 3 mm de espessura e velocidade de escoamento de $19,5\text{ m/s}$.	146
Figura 9.26: Superfície de resposta do sistema variando com Θ e com a espessura da camada.	148
Figura 9.27: Planos da superfície de resposta.	148
Figura 9.28: Superfície de resposta das amplitudes do ciclo limite variando com o perímetro do elemento viscoelástico.	150
Figura 9.29: Planos das superfícies de respostas dos ciclos limites para o movimento de <i>plunge</i>	150
Figura 9.30: Planos das superfícies de respostas dos ciclos limites para o movimento de <i>pitch</i>	150
Figura 9.31: Ciclos limites para $\Theta = 90^\circ$ em todas as velocidades avaliadas.	151
Figura 9.32: Condição inicial usada nas simulações computacionais.	152
Figura 9.33: Resposta transiente da <i>plate like wing</i> a $10,50m/s$ com lastro a $5mm$ do eixo elástico.	153
Figura 9.34: Resposta transiente computacional da <i>plate like wing</i> a $9,50m/s$ com lastro a $-5mm$ do eixo elástico.	153
Figura 9.35: Zoom na resposta do grau de liberdade $w(t)$	154
Figura 9.36: Resposta transiente da <i>plate like wing</i> a $13,45m/s$ com lastro a $10mm$ do eixo elástico.	155
Figura 9.37: Resposta transiente computacional da <i>plate like wing</i> a $12,81m/s$ com lastro a $10mm$ do eixo elástico.	155
Figura 9.38: Resposta transiente da <i>plate like wing</i> a $15,89m/s$ com lastro a $15mm$ do eixo elástico.	156

Figura 9.39: Resposta transiente computacional da <i>plate like wing</i> a $15,303m/s$ com lastro a $15mm$ do eixo elástico.	156
Figura 9.40: Resposta transiente da <i>sandwich plate like wing</i> a $30,4m/s$ com lastro a $-5mm$ do eixo elástico.	157
Figura 9.41: Resposta do modelo computacional da <i>sandwich plate like wing</i> para velocidades pré-, <i>flutter</i> e pós- <i>flutter</i>	158
Figura 1.1: Esquema de um elemento isoparamétrico e o operador Jacobiano levando das coordenadas locais para globais.	179

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Valores otimizados dos parâmetros do modelo FDM (<i>Fractional Derivative Model</i>)	30
Tabela 4.1: Propriedades mecânicas da placa sanduíche	54
Tabela 4.2: Formulação clássica de Schmidt e Gaül vs Fórmula de Recorrência.	56
Tabela 5.1: Propriedades mecânicas da viga sanduíche	65
Tabela 5.2: Tabela recapitulativa para os valores modais de uma viga em balanço sob flexão pura.	66
Tabela 5.3: Análise harmônica - Valores das frequências naturais em $[Hz]$	66
Tabela 5.4: Variação das frequências naturais da <i>plate like wing</i> em função da posição do lastro.	70
Tabela 5.5: Características geométricas das vigas avaliadas	83
Tabela 5.6: Propriedades mecânicas das vigas avaliadas	83
Tabela 5.7: Parâmetros do modelo fracionário a $27^{\circ}C$	83
Tabela 5.8: Comparação das frequências naturais entre modelos de Galúcio e a Fórmula de Recorrência.	86
Tabela 8.1: Características geométricas da <i>plate like wing</i>	122
Tabela 8.2: Propriedades mecânicas da <i>sandwich plate like wing</i>	122
Tabela 9.1: Parâmetros físicos e geométricos do PAPA.	130
Tabela 9.2: Velocidades críticas experimentais* e simuladas** em função das espessuras do elementos viscoelásticos.	141
Tabela 9.3: Velocidades críticas em função dos perímetros e das espessuras dos elementos viscoelásticos.	147
Tabela 9.4: Amplitude máxima do ciclo limite em função do perímetro, espessura e velocidade.	149

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

$[B_c^0]$	Componentes axiais de deformação de cisalhamento.
$[B_f^0]$	Componentes axiais de deformação de flexão.
$[B_m^0]$	Componentes axiais de deformação de membrana.
$[B_c^1]$	Componentes rotacionais de deformação de cisalhamento.
$[B_f^1]$	Componentes rotacionais de deformação de flexão.
$[B_m^1]$	Componentes rotacionais de deformação de membrana.
$[B_c]$	Matriz de deformação de cisalhamento.
$[B_f]$	Matriz de deformação de flexão.
$[B_m]$	Matriz de deformação de membrana.
$[K_c^{(**,e)}]$	Matriz de rigidez modificada viscoelástica de cisalhamento.
$[K_c^{(*,e)}]$	Matriz de rigidez viscoelástica de cisalhamento.
$[K_f^{(**,e)}]$	Matriz de rigidez modificada viscoelástica de flexão.
$[K_f^{(*,e)}]$	Matriz de rigidez viscoelástica de flexão.
$[K_m^{(**,e)}]$	Matriz de rigidez modificada viscoelástica de membrana.
$[K_m^{(*,e)}]$	Matriz de rigidez viscoelástica de membrana.
$[M^{(e)}]^{(2)}$	Matriz de massa elementar viscoelástica.
$[M_p]$	Matriz de passagem.
$[M_R]$	Componente de rotação da massa viscoelástica.

$[M_T]$	Componente de translação da massa viscoelástica.
$[T]$	Matriz de correção das rotações nodais.
$a_{h,d}$	Parâmetros do modelo a serem identificados
a_i	Constantes dos polinômios interpoladores utilizados nos elementos finitos de placa.
A_{j+1}	Coefficientes de Grunwald
$\{a_t\}$	Constantes dos polinômios interpoladores utilizados nos elementos finitos de placa.
A	Área da seção transversal da viga.
$b_{h,d}$	Parâmetros do modelo a serem identificados
$[C]$	Componente da matriz constitutiva do material viscoelástico no domínio do tempo 3D
$[C_{aero}]^{(e)}$	Matriz de amortecimento aerodinâmico elementar da Teoria do Pistão .
$[C_{aero}]^{(g)}$	Matriz de amortecimento aerodinâmico global da Teoria do Pistão .
$[\bar{C}]$	Componente da matriz constitutiva do material viscoelástico no domínio do tempo 3D
$[D]$	Componente da matriz do material viscoelástico no domínio do tempo 3D
d_1	Relação de espessuras das estruturas sanduíches.
D_1^E	Componente da propriedade do material viscoelástico no domínio do tempo 1D em alongamento
D_1^G	Componente da propriedade do material viscoelástico no domínio do tempo 1D em cisalhamento
d_2	Relação de espessuras das estruturas sanduíches.
$D2^E$	Componente da propriedade do material viscoelástico no domínio do tempo 1D em alongamento

$D2^G$	Componente da propriedade do material viscoelástico no domínio do tempo 1D em cisalhamento
d_3	Relação de espessuras das estruturas sanduíches.
D_3^E	Componente da propriedade do material viscoelástico no domínio do tempo 1D em alongamento
D_3^G	Componente da propriedade do material viscoelástico no domínio do tempo 1D em cisalhamento
dV	Infinitesimal de volume.
E_0	Módulo de elasticidade baixa frequência
E_∞	Módulo de elasticidade a alta frequência
E	Módulo de elasticidade da placa.
$\{F_{v,t-j\Delta t}\}$	Vetor de esforços dissipativos .
G_0	Módulo de cisalhamento a baixa frequência
G_1	Função de relaxação de cisalhamento
G_2	Função de relaxação volumétrica
$[\bar{G}]$	Matriz constitutiva do material viscoelástico da placa.
$gdl_w^{(n)}$	GDL w do nó n .
$gdl_{\theta_y}^{(n)}$	GDL θ_y do nó n .
G_∞	Módulo de cisalhamento a alta frequência
h	Espessura da viga.
h_1	Espessura da camada base (1)
h_2	Espessura da camada viscoelástica (2)
h_3	Espessura da camada restringente (3)
I	Momento de inércia do lastro em torno do eixo y .
I_x	Momento de inércia da viga em torno do eixo x .
I_z	Momento de inércia da viga em torno do eixo z .

J_1	Função de fluência de cisalhamento
J_2	Função de fluência volumétrica
J_T	Constante de torção.
K_0	Módulo volumétrico a baixa frequência
$[K_{aero}]^{(e)}$	Matriz de rigidez aerodinâmica elementar da Teoria do Pistão .
$[K_{aero}]^{(g)}$	Matriz de rigidez aerodinâmica global da Teoria do Pistão .
$[K_{el}]^{(g)}$	Matriz de rigidez elástica global.
$[K_f]$	Matriz de rigidez elástica de flexão da placa.
$[K_m]$	Matriz de rigidez elástica de membrana da placa.
K_n	Parâmetro adimensional usado na Eq.(35).
L_x	Largura da viga.
M_∞	Número de Mach.
m	Massa do lastro.
μ	Fator de correção do J_T .
N_l	Número de passos de tempo avaliados no passado
$[N_{u_{1,3}}]$	Funções de forma do grau de liberdade de deslocamento na direção x das camadas 1 3.
$[N_{v_{1,3}}]$	Funções de forma do grau de liberdade de deslocamento na direção y das camadas 1 3.
$[N_w]$	Função de forma do grau de liberdade de deslocamento na direção z .
$D^\alpha()$	Operador derivada fracionária
P	Pressão Pressão na cavidade.
P_∞	Pressão atmosférica.
$[P]$	Matriz de coordenadas locais.
$[P_{\theta_\xi}]$	Matriz dos polinômios interpoladores do grau de liberdade de rotação em torno do eixo x .

$[P_{\theta_\eta}]$	Matriz dos polinômios interpoladores do grau de liberdade de rotação em torno do eixo y .
$[P_{u_{1,3}}]$	Matriz dos polinômios interpoladores do grau de liberdade de deslocamento na direção x das camadas 1 e 3.
$[P_{v_{1,3}}]$	Matriz dos polinômios interpoladores do grau de liberdade de deslocamento na direção y das camadas 1 e 3.
$[P_w]$	Matriz dos polinômios interpoladores do grau de liberdade de deslocamento na direção z .
q	Pressão dinâmica.
$\{q_{t^*}\}$	Vetor de graus de liberdade em coordenadas locais.
$\{q_{t-j\Delta t}\}$	Vetor do histórico de deslocamentos.
S_w	Produto de inércia do lastro.
T	Temperatura do material viscoelástico.
$T^{(1,2,3)}$	Potencial de energia cinética
$[T_d]$	Matriz de transformação linear de desvio
$[T_h]$	Matriz de transformação linear hidrostática
u_1	Deslocamento na direção x da camada 1 placa
u_3	Deslocamento na direção x da camada 3 placa.
U_a	Energia potencial elástica da viga em alongamento.
U_f	Energia potencial elástica da viga em flexão.
$u^{(k)}$	deslocamento na direção x
$\{U^{(k)}\}$	Campo de deslocamento da camada (k) da placa
U_{yy}	Energia potencial elástica da viga.
V_∞	Velocidade do escoamento.
v_1	Deslocamento na direção y da camada 1 placa.
v_1	Deslocamento da camada base sob sua linha neutra (viga).
v_3	Deslocamento na direção y da camada 3 placa.

v_3	Deslocamento da camada restringente sob sua linha neutra da (viga).
$z^{(k)}$	variável de integração ao longo da espessura
v_B	Deslocamento da camada base sob a interface (viga).
v_C	Deslocamento da camada base sob a interface (viga).
$\{q_t\}$	Vetor de graus de liberdade nodal da placa.
$v^{(k)}$	deslocamento na direção y
W_{aero}	Trabalho do carregamento aerodinâmico.
w	deslocamento na direção z

SÍMBOLOS GREGOS

α	Ordem da derivada fracionária
$[\beta_{j+1}]$	Termo de recorrência 3D
β_{j+1}^E	Termo de recorrência para alongamento 1D em alongamento
β_{j+1}^G	Termo de recorrência para alongamento 1D em cisalhamento
β	Parâmetro adimensional da Teoria do Pistão .
δ	Deslocamento virtual.
Δt	Passo de tempo para integração numérica
$\{\varepsilon_a^{(2)}\}_t$	Deformação de alongamento da viga.
$\{\varepsilon_c^{(2)}\}_t$	Deformação de cisalhamento da viga.
$\{\varepsilon_f^{(2)}\}_t$	Deformação de flexão da viga.
$\{\varepsilon_c^{(2)}\}$	Vetor de deformação cisalhante da camada viscoelástica da placa.
$\{\varepsilon_f^{(2)}\}$	Vetor de deformação de flexão da camada viscoelástica da placa.
ε_e	deformação de um material elástico
ε_{ij}	Tensão deformação

ε_v	deformação de um material viscoso
ε_{ve}	deformação de um material viscoelástico
$\left\{ \varepsilon_m^{(2)} \right\}$	Vetor de deformação de membrana da camada viscoelástica da placa.
ε_t	Tensor deformação
ε_t^E	Deformação de alongamento
ε_t^G	Deformação de cisalhamento
ε_{xx}	Deformação axial na direção x da placa.
ε_{xy}	Deformação formação de cisalhamento no plano da placa.
ε_{yy}	Deformação axial na direção y da placa.
η	Coordenada local do elemento finito na direção y
Γ	Função gamma
γ	Parâmetro adimensional da Teoria do Pistão.
λ	Pressão dinâmica adimensional da Teoria do Pistão.
ν	Coefficiente de poisson
ω	Frequência circular [rad/s]
Π_f	Potencial de energia elástica de deformação de flexão da placa.
Π_m	Potencial de energia elástica de deformação de membrana da placa.
$\Pi^{(2)}$	Potencial de energia viscoelástica de deformação da placa.
$\Pi_{(c)}^{(2)}$	Potencial de energia viscoelástica de deformação cisalhante da placa.
$\Pi_{(f)}^{(2)}$	Potencial de energia viscoelástica de deformação de flexão da placa.
$\Pi_{(m)}^{(2)}$	Potencial de energia viscoelástica de deformação de membrana da placa.
$\rho_{1,2,3}$	Densidade de cada material
ρ_{ar}	Densidade do ar.

ρ	Densidade da viga.
σ_d	Tensor de desvio
σ_e	Tensão de um material elástico
σ_h	Tensor hidrostático
σ_{ij}	Tensão tensão
σ_t	Tensor tensão
σ_t^E	Tensão de alongamento
σ_t^G	Tensão de cisalhamento
σ_v	Tensão de um material viscoso
σ_{ve}	Tensão de um material viscoelástico
τ	Ponto no passado usado na integral de convolução
θ_x	Rotação em torno do eixo x .
θ_y	Rotação em torno do eixo y .
$\{\varepsilon\}$	Vetor de deformações da placa.
ξ	Coordenada local do elemento finito na direção x .
ζ	Parâmetro adimensional da Teoria do Pistão.

ABREVIATURAS

AR	<i>Aspect Ratio</i>
ATF	<i>Augmenting Thermodynamics Fields</i>
CFD	Laboratório de Estruturas Mescânicas
FDM	Fractional Derivative Model
FRF	Função de Resposta em Frequência
FSDT	<i>First Order Shear Deformation Theory</i>
GDL	Graus de Liberdade

GHM	Golla-Hughes-McTavis
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
LMest	Computational Fluid Dynamics
MEF	Método dos Elementos Finitos
MSSP	<i>Mechanical Systems and Signal Processing</i>
PAPA	<i>Pitch and Plunge Apparatus</i>
PEEV	Princípio da Equivalência Elástica-Viscoelástica
RT	<i>Rubbery-Transition</i>
RTG	<i>Rubbery-Transition-Glassy</i>
SeG	Schmidt e Gaul
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos da Tese	2
1.2	Contribuições da Tese	4
1.3	Organização da Tese	6
2	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	9
2.1	Técnicas para redução de modelos em elementos finitos	9
2.2	O cálculo fracionário aplicado a sistemas de engenharia	11
2.3	Modelos de sistemas aeroelásticos	15
3	MODELAGEM DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA	18
3.1	Introdução aos conceitos da viscoelasticidade linear e derivada fracionária	19
3.1.1	Aproximação para a derivada fracionária	22
3.2	Formulação da lei constitutiva tridimensional	23
3.3	Encontrando a fórmula de recorrência	27
3.3.1	Ajuste de curvas	30
3.3.2	Simplificação do Estado Triplo de tensão	31
3.3.3	Simplificação para Estados Uniaxiais de tensão	32
4	MODELO MATEMÁTICO DE PLACAS SANDUÍCHE	36
4.1	Desenvolvimento cinemático e Cálculo dos Potenciais de Energia	36
4.2	Modelo de Placa Sanduíche com Cálculo Fracionário	42
4.2.1	Discretização por Elementos Finitos da Placa Sanduíche no domínio do tempo	43
4.2.2	Obtenção das matrizes de massa e rigidez no domínio do tempo	46
4.3	Teoria do Pistão - Carregamento Aerodinâmico em Regime Supersônico	51
4.4	Métodos de Redução de Modelo para Problemas não-autoadjuntos	52
4.4.1	Redução de modelo no domínio da frequência	53

4.5	Resultados e Discussões	54
4.5.1	Fórmula de recorrência vs modelo de Schmidt e Gaul	54
4.5.2	Fórmula de Recorrência vs Módulo Complexo	56
5	MODELAGEM DE VIGAS SANDUÍCHE	62
5.1	Viga de Euler-Bernoulli	62
5.1.1	Constante de torção para perfis finos	64
5.1.2	Validação Numérica	65
5.1.3	Viga com lastro	68
5.2	Viga Sanduíche de Euler-Bernoulli	71
5.2.1	Aplicação do Método dos Elementos Finitos	76
5.2.2	Modelo das derivadas fracionárias aplicado à viga sanduíche	77
5.2.3	Verificação do Modelo de Viga Sanduíche	83
5.2.4	Convergência do passo de tempo e da extensão da memória	87
6	SEÇÃO TÍPICA NÃO LINEAR	90
6.1	Seção Tipica Não Linear - Equação do Movimento	91
6.2	Aerodinâmica não-estacionária	96
6.2.1	Idealização do elemento de rigidez discreta viscoelástica em <i>plunge</i>	100
6.2.2	Idealização do elemento de rigidez discreta viscoelástica em <i>pitch</i>	102
6.2.3	Determinação da solução não linear	107
7	TEORIA DAS FAIXAS APLICADA AO MEF	110
7.1	Adaptando a Teoria das Faixas ao MEF.	112
8	EXPERIMENTOS AEROELÁSTICOS	116
8.1	Procedimento experimental utilizado para o estudo da seção típica	116
8.1.1	Túnel de vento utilizado nos ensaios aeroelásticos da seção típica	117
8.1.2	Descrição do sistema de aquisição de dados	117
8.1.3	Aplicação dos elementos de rigidez viscoelástica	120
8.2	Procedimento experimental utilizado no estudo da Teoria das Faixas	121
8.2.1	Túnel de vento utilizado nos ensaios aeroelásticos da <i>plate like wing</i>	122
8.2.2	Descrição do sistema de aquisição de dados	126
9	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	129
9.1	Resultados - Seção Típica	129
9.1.1	Análise do sistema aeroelástico	129
9.1.2	Modelo linear vs modelo não linear	136
9.1.3	Elemento de rigidez viscoelástica aplicado em <i>plunge</i>	141
9.1.4	Elemento de rigidez viscoelástica aplicado em <i>pitch</i>	146

9.2	Resultados - Teoria das Faixas	152
9.2.1	Análise do sistema aeroelástico	152
9.2.2	Análise do sistema aeroviscoelástico	157
10	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	161
10.1	Modelagem do Comportamento Dinâmico de Materiais Viscoelásticos nos Domínios do Tempo e da Frequência	162
10.2	Modelo Matemático de Placas Sanduíche	163
10.3	Seção Típica Não Linear	164
10.4	Teoria das Faixas Aplicada ao MEF	165
10.5	Trabalhos publicados	166
10.6	Perspectivas de Trabalhos Futuros	166
	REFERÊNCIAS	169
	APÊNDICES	174
	APÊNDICE A –	175
A.1	Matrizes Aerodinâmicas - domínio do tempo	175
A.2	Lei de Hooke Generalizada	177
A.3	Definição das funções de forma	179
A.4	Operador linear Jacobiano	181

CAPÍTULO I

Introdução e Motivação

O mundo tem mudado de forma muito rápida em virtude da intervenção humana e isso tem acelerado processos naturais que antes demoravam décadas para acontecer, como por exemplo o aumento das temperaturas dos oceanos e atmosférica. Este é talvez um dos problemas ambientais que mais geram repercussão social e econômica atualmente. Neste conturbado cenário mundial, políticas foram criadas com o intuito de estimular a redução da emissão de carbono o que tem colocado enorme pressão nos governos e, consequentemente, nas indústrias em todo mundo. A indústria aeronáutica não é diferente, e por isso os engenheiros tem buscado incessantemente por soluções que visem aumentar a eficiência das aeronaves para reduzir o consumo de combustível.

Dentre as inúmeras possibilidades, novos conceitos de aeronaves com asas de grande alongamento, bem como o emprego de novos materiais, como os compósitos, têm tomado um enorme espaço no cenário industrial do setor, como por exemplo a criação e comercialização dos revolucionários Boeing 787 (DreamLiner) Fig.(1.0a) e do Airbus 350 XWB Fig.(1.0b), mostrados na .

Devido ao grande alongamento e a redução de peso em virtude de um amplo uso de materiais compósitos por toda a estrutura da aeronave, as duas aeronaves demonstraram um enorme ganho na eficiência apresentando importantes reduções no consumo de combustível. Consequentemente, isso implica em uma redução imediata da rigidez estrutural, fazendo com que estas aeronaves sejam muito flexíveis implicando em problemas que devem minimizados, dentre eles está o *flutter*.

Numa tentativa de contornar o problema do aumento da rigidez e consequente aumento de massa, alguns materiais tem sido estudados e empregados como soluções para diminuir vibrações e assim atenuar problemas aeroelásticos como o *flutter*. Neste sentido, técnicas de controle ativo utilizando materiais piezelétricos e materiais com memória de



(a) Boeing 787 (DreamLiner). Esta imagem é uma cortesia da Boeing.



(b) Airbus 350 XWB. Esta imagem é uma cortesia da Airbus.

Figura 1.1: Exemplos de aeronaves cujos conceitos são asas com grande alongamento fazendo uso de material compósito.

forma tem sido amplamente estudadas com esse objetivo. Técnicas de controle passivo como *Functionally Graded Materials* e materiais viscoelásticos também. Diversas técnicas diferentes existentes poderiam ser empregadas para este fim:

- 1 Tratamento superficial de estruturas planas, como painéis, com camadas livres de material viscoelástico;
- 2 Tratamento superficial de estruturas planas, como painéis, com camadas livres e restritivas, formando estruturas sanduíche. Esta é a estratégia abordada nesta tese;
- 3 Juntas viscoelásticas para conferir amortecimento viscoelástico em movimentos translacionais e de rotação. Estratégia também abordada nesta tese.

A grande vantagem de se utilizar este tipo de abordagem é ligada aos custos e facilidade de aplicação. Além disso, em se tratando de técnicas passivas, os materiais viscoelásticos possuem uma grande capacidade para amortecer vibrações, tornando-os aptos para os mais variados tipos de aplicação, inclusive de cunho aeronáutico.

1.1 Objetivos da Tese

Neste contexto, surgiu a necessidade de realizar uma pesquisa no domínio do tempo para melhor compreender a dinâmica dos sistemas aeroviscoelásticos. Desta necessidade,

surgiu a ideia de desenvolver o modelo das derivadas fracionárias nas estruturas tipo placa e tipo viga e destas, aplicar tanto a Teoria do Pistão quanto a Teoria das Faixas, específica para regimes subsônicos de velocidade.

Porém, os modelos disponíveis na literatura para representação comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos eram muito simplificados e de complicada identificação dos parâmetros (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004), ou eram específicos para somente alguns casos (CORTES; ELEJABARRIETA, 2007), ou eram muito complexos e extremamente custosos do ponto de vista computacional (SCHMIDT; GAUL, 2001; SCHMIDT; GAUL, 2002). Este cenário se mostrou, ao mesmo tempo inspirador e desafiador, motivando a criação de uma nova fórmula para a lei constitutiva do material viscoelástico baseada em uma recorrência e que permitiu as análises aeroviscoelásticas serem realizada com custo computacional relativamente baixo. Além disso, esta nova proposta foi criada sem qualquer suposição ou simplificação da teoria clássica existente. É importante dizer que é necessário um intenso desenvolvimento matemático para mostrar todo o conteúdo elaborado, o que pode tornar a leitura um pouco difícil.

Ainda neste viés de diminuir os custos computacionais, os sistemas aeroviscoelásticos representados no domínio da frequência demandavam um grande esforço computacional devido à forma da solução do problema. Esta utiliza o método P-k, uma abordagem bem adaptada para resolver a questão da identificação das frequências naturais do sistema e também, a determinação das propriedades mecânicas do material viscoelástico. Entretanto, para cada velocidade de escoamento avaliada, se faz necessário sintonizar, por assim dizer, os valores das frequências naturais responsáveis por induzir o sistema à instabilidade. Este processo eleva consideravelmente o custo computacional, exigindo uma solução que foi a criação de uma nova estratégia de redução de modelos baseada em uma das técnicas propostas por Étienne Balmès (BOBILLOT; BALMÈS, 2002) e muito bem adaptada para problemas de acoplamento fluido-estrutura. Esta nova abordagem permitiu um ganho computacional extremamente relevante e foi tema do artigo publicado novamente na revista *Mechanical Systems and Signal Processing* cujo título é *An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime*. É importante remarcar que, além de acoplamentos fluido-estrutura, esta técnica é bem adaptada para sistemas com acoplamentos piezelétricos e para a dinâmica de rotores.

Finalmente, após ter desenvolvido todos os modelos matemáticos para representar o comportamento dinâmico do material viscoelástico necessários para o trabalho, um modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário em regime subsônico foi desenvolvido para aplicação em sistemas bidimensionais, como uma seção típica. Além deste, um modelo para asas tridimensionais também foi desenvolvido para o estudo de uma asa tipo viga, também denominada de *plate like wing*. Neste contexto, é sabido que sistemas ae-

roelásticos adquirem comportamento não linear em algum ponto próximo à velocidade crítica. Portanto, viu-se a necessidade de se criar pelo menos um modelo não linear para estudá-lo numericamente e experimentalmente no intuito de melhor entender um pouco mais sobre do amortecimento do material viscoelástico em sistemas aeroelásticos. Devido à abordagem de sistemas aeroelásticos não lineares fugir um pouco do escopo deste trabalho, um modelo não linear de seção típica foi escolhido para o estudo, por ser o mais simples de ser modelado.

Um estado da arte contendo as principais contribuições nas áreas de cálculo fracionário aplicado a engenharia, materiais viscoelásticos e aeroelasticidade é apresentado. É também mostrado um breve cenário das pesquisas sobre cálculo fracionário.

1.2 Contribuições da Tese

Várias contribuições foram geradas ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Modelos matemáticos forma aperfeiçoados, novas estratégias de redução de modelos de elementos finitos propostas, reinterpretações dos sistemas aeroelástico e aeroviscoelásticos foram feitas. Nesta seção são listadas as principais contribuições separadas por tópicos.

Modelos viscoelásticos com derivadas fracionárias

Talvez a mais importante contribuição deste trabalho foi a criação de nova fórmula da lei constitutiva tridimensional para materiais viscoelásticos. A partir dos trabalhos de Fluge (FLÜGGE, 1975) e Makris (MAKRIS, 1997) e Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001; SCHMIDT; GAUL, 2002), um modelo de material viscoelástico no domínio do tempo e descrito de termos de derivadas fracionárias, foi desenvolvido.

Este trabalho foi necessário, pois o modelo fracionário que o laboratório LMEST possui até então permitia a formulação de problemas de estados uniaxiais de tensão, e o primeiro desafio era criar uma placa sanduíche cujo estado de tensão é plano. Entretanto, devido aos excessivos custos computacionais, a solução do problema aeroviscoelástico para determinação do *flutter* de painéis se mostrou inviável.

O trabalho se encontrou em uma situação em que ou se encontrava uma solução, ou o estudo de painéis deveria ser removido do plano de tese. Assim, a solução foi a criação de uma fórmula de recorrência, já existente na formulação proposta por Schmidt e Gaul, mas que os autores não a vislumbraram. Desta forma, a criação da fórmula da recorrência poderia ser entendida como a finalização dos trabalhos de Schmidt e Gaul que viabilizou as análises aeroelásticas com painéis e conseqüentemente qualquer outro estudo subsequente.

Além disso, foi possível extrapolar o conceito tridimensional da lei constitutiva descrita segundo a Fórmula de Recorrência, para casos de estado plano e uniaxiais de tensão. Isso permitiu uma formulação matricial da lei constitutiva da viga sanduíche, outra contribui-

ção, bem como a idealização de elementos de rigidez viscoelástica discreta para conferir amortecimento e rigidez a movimentos de torção e translação.

Métodos de redução de modelos

Os modelos de sistemas aeroviscoelásticos criados no domínio da frequência apresentam também um elevado custo computacional devido à técnica utilizada para determinação da solução do problema. Neste caso, o método P-k é empregado, exigindo que a sintonização das frequências responsáveis pela instabilidade aeroviscoelástica seja realizada. O problema é que a introdução das propriedades viscoelásticas torna a matriz de rigidez total do problema complexa. Além disso, a presença da matriz de rigidez aerodinâmica torna a matriz de rigidez não simétrica. Tem-se então, um problema de autovalor polinomial complexo e não auto-adjunto, o que torna a inversão da matriz de rigidez um processo muito mais lento.

Um problema de autovalor com essas características, faz com que métodos de redução convencionais baseados em subespaços vetoriais obtidos a partir de problemas simples de autovalor não sejam capazes de condensar o problema.

Desta forma, uma base de redução criada de forma iterativa, onde a cada iteração um resíduo contendo informações da dinâmica completa do sistema aeroviscoelástico foi proposta. O interessante desta abordagem é que além de sistema com a presença de acoplamento fluido-estrutura, ela é muito bem adaptada para dinâmica de rotores e sistema multi-físicos como acoplamento estruturais-piezelétricos.

Modelagem de sistemas aeroviscoelásticos

Em virtude da criação da fórmula de recorrência, suas aplicações se mostraram importantes contribuições para o assunto da aeroviscoelasticidade, pois estas serviram de validação experimental.

Dos três modelos aeroviscoelásticos criados, dois deles foram validados experimentalmente, a seção típica não linear e o modelo da Teoria das Faixas. Ambos utilizaram a mesma teoria de carregamento aerodinâmico não estacionária definida a partir da Teoria de Wagner no domínio do tempo.

Apesar de haver na literatura trabalhos similares ao realizado com a seção típica não linear, como o trabalho de Sales (SALES et al., 2018), a proposta do modelo fracionário segundo a Fórmula de Recorrência seguida de validação experimental é uma importante contribuição, pois serve de confirmação dos modelos e comprovação da eficiência da recorrência. Além disso, um completo desenvolvimento matemático foi feito para idealização dos elementos discretos de rigidez viscoelástica de tal maneira que a representação destes por meio do cálculo fracionário fosse possível. O mesmo vale para a *sandwich plate like*

wing em que uma formulação para o caso unidimensional de tensão com torção foi criada com base nas suposições discutidas por Reddy (REDDY; MAHAFFEY, 2013).

Além disso, outra contribuição, é a formulação matemática utilizada para estabelecer a equação do movimento dos dois sistemas. Foi feita um desenvolvimento direto, sem a necessidade de descrever o sistema no espaço de estados, o que para o caso da *sandwich plate like wing* é uma estratégia interessante, pois evita que o sistema dobre sua ordem, aumentando os custos computacionais.

1.3 Organização da Tese

Além desta introdução, esta Tese está organizada da seguinte maneira: um capítulo teórico mostrando os avanços realizados no modelo de material viscoelástico no domínio do tempo utilizando o Cálculo Fracionário. É feita uma breve passagem sobre a modelagem destes materiais no domínio da frequência, porém este não é o foco do trabalho.

Em seguida, no capítulo 4 são mostrados os modelos matemáticos de placas sanduíche nos domínios do tempo e da frequência, onde uma comparação das duas abordagens é feita. Ainda neste capítulo, o modelo de carregamento aerodinâmico para o estudo da instabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos é descrito segundo a Teoria do Pistão. Finalmente o capítulo 4 se encerra com a apresentação das contribuições feitas para métodos de redução de modelo nos domínios do tempo e da frequência

O Capítulo 5 mostra toda a formulação matemática da Viga de Euler-Bernoulli e sua contra-parte sanduíche. Uma lei constitutiva matricial segundo a fórmula de recorrência para este caso é proposta de modo a facilitar a implementação computacional. É mostrada ainda uma comparação entre o modelo fracionário proposto por Galúcio e a fórmula de recorrência.

O Capítulo 6 trata da modelagem não linear de uma seção típica e como foram idealizados matematicamente os elementos discretos de rigidez viscoelástica. Além disso, uma forma um tanto particular de descrever a equação do movimento deste sistema aeroviscoelástico foi proposta para resolução no domínio do tempo sem a necessidade de adentrar no espaço de estado e dobrar a ordem do sistema.

Na continuidade, o Capítulo 7 é uma continuação natural do anterior, onde a Teoria das Faixas aplicada ao MEF é apresentada. Nesta parte é feita um estudo preliminar que possibilitou a criação do plano experimental para realização em túnel de vento. Modelos da *sandwich plate like wing* criados com o modelo de material proposto por Galucio e a partir da fórmula de recorrência são comparados.

O capítulo 8 mostra os detalhes das configurações dos experimentos realizados nos dois tuneis de vento utilizados. Em seguida, o capítulo 9 mostra os resultados experimentais comparados com os resultados obtidos pelos modelos computacionais.

Finalmente, o trabalho se encerra com uma conclusão destacando os principais pontos do trabalho e com uma perspectiva de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

Referências Bibliográficas

O estado da arte deste trabalho será composto de uma parte referente às técnicas de redução de modelo, uma segunda parte referente ao cálculo fracionário e suas aplicações na engenharia mecânica e aeronáutica. Finalmente, uma terceira subseção relacionada aos principais métodos para modelagem de sistemas aeroelásticos no que se refere à matemática do carregamento aerodinâmico utilizado.

Como os modelos em elementos finitos utilizados neste trabalho são já conhecidos e nada de novo foi discutido sobre este assunto, o estado da arte contemplará somente os temas onde novas contribuições surgiram efetivamente. A intenção é se ater somente aos assuntos mais importantes, uma vez que ao longo de todo o texto, uma matemática relativamente complexa será tratada, o que pode ser muito cansativo para o leitor.

2.1 Técnicas para redução de modelos em elementos finitos

Em virtude dos altos custos computacionais envolvidos no cálculo de sistemas aero-viscoelásticos, técnicas para redução de modelo tanto no domínio da frequência quanto do tempo foram desenvolvidas nesta tese. Logo, serão listados neste estado da arte os principais trabalhos científicos utilizados no desenvolvimento destas técnicas.

Dowell et al.(DOWELL; THOMAS; HALL, 2004) propõe um método de redução de modelo para uma seção típica cujo carregamento aerodinâmico é modelado por CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Logo, o seu modelo é focado no método de CFD de fato, diferentemente do desejado neste trabalho. Dardel e Bakhtiari-Nejad (DARDEL; BAKHTIARI-NEJAD, 2010) apresenta um modelo reduzido de um sistema aeroelástico não linear contendo os modos de flexão e torção, criado para o estudo das oscilações em ciclo limite.

Njuguna (NJUGUNA, 2007) apresenta uma discussão detalhada sobre a necessidade de se usar um método eficiente de redução de modelos para análises aeroelástica de painéis compósitos onde técnicas de controle ativo são empregadas para aumentar velocidades críticas. A ideia do autor é reduzir o modelo do sistema de controle eliminando os modos de com menor grau de controlabilidade e observabilidade. Zhou (ZHOU et al., 1995) desenvolveu um método de redução combinado com um controle Linear Quadrático Regulador para postergar o *flutter* em um painel com não linearidades estruturais e sob carregamentos térmicos. Moon e Kim (MOON; KIM, 2001) implementaram estratégias passivas e ativas de controle para postergar o *flutter* de painéis compósitos com não linearidades estruturais através de um método de transformação modal.

Ainda, Shin (SHIN et al., 2006) aplicou um método de truncamento modal para reduzir o esforço computacional demandado na análise aeroelástica de painéis compósito de forma cilíndrica tratadas passivamente com camadas viscoelásticas restringidas. Entretanto, o método por eles desenvolvidos é de utilidade limitada devido ao fato de que a frequência de excitação e a temperatura assumida para o material viscoelástico foram mantidas constantes na análise aeroelástica. Foi percebido ao longo do trabalho que as bases de redução para este tipo de problema devem conter informações dinâmicas do sistema que contemplem a variação das frequências naturais devido à velocidade do escoamento, bem como devido às mudanças de temperatura.

Apesar de existirem alguns métodos de redução para sistemas aeroelásticos (SANDER; BON; GERADIN, 1973), a maioria deles envolve a aplicação de bases de projeção modais padrão. Estas bases são formadas por autovetores obtidos a partir de um problema de autovalor composto por uma matriz aerodinâmica constante. Além disso, sabe-se que a matriz de rigidez aerodinâmica introduz propriedades algébricas no problema de autovalor um tanto não convencionais. Ouisse (OUISSÉ; SADOULET-REBOUL, 2011) descreve problemas com acoplamento fluido-estrutura, problemas de dinâmica de rotores e problema com acople piezolétrico como sendo problemas de autovalor polinomiais complexos não auto-adjuntos. Neste contexto Balmès, certamente um dos principais pesquisadores na área de redução de modelos em elementos finitos, publicou vários trabalhos de suma importância para a criação da estratégia utilizada neste trabalho (BALMES, 1996; BOBILLOT; BALMÈS, 2002). Outra contribuição muito importante, foi o trabalho de Rouleau (ROULEAU; DEU; LEGAY, 2017), onde um compilado de todos os métodos propostos por Balmès é exposto com bastante detalhes.

Desta forma, a proposta deste trabalho foi criar uma base de redução iterativa contendo informações modais completas da dinâmica aeroviscoelástica do sistema. Isto foi feito introduzindo resíduos dinâmicos para diferentes velocidades de escoamento à base. Da forma como o método é proposto, somente um problema de autovalor relativo às propriedades conservativas associadas ao sistema aeroviscoelástico é necessário ser resolvido

para a criação de um subespaço vetorial inicial, e a partir deste os resíduos são introduzidos. Esta abordagem proporciona a criação da base de forma bastante eficiente e uma vez criada, a mesma é utilizada para avaliar todas as velocidades até o ponto crítico.

2.2 O cálculo fracionário aplicado a sistemas de engenharia

Segundo Mainardi (MAINARDI, 2010), o uso do cálculo fracionário para solução de integrais e derivadas de qualquer ordem positiva pode ser considerado como sendo um braço da matemática física que lida com equações integro-diferenciais, onde as integrais são do tipo de convolução. Ao longo dos últimos anos, o uso desta abordagem foi amplamente aplicado para o caso de materiais viscoelásticos, sendo talvez a aplicação mais frequente da teoria (MAINARDI, 2010, pg. vii).

Porém outros usos foram encontrados para o uso do cálculo fracionário, como o estudo da propagação de ondas em meios sólidos. O livro *“Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity”* (MAINARDI, 2010) é uma excelente referência para o tema, bem como para se iniciar nos estudos do cálculo fracionário, dando um emprego prático desta matemática um tanto avançada de forma a evitar demonstrações de teoremas ou provas de qualquer tipo.

Apesar de ser um tema antigo, pois surgiu a partir de especulações feita por G. W. Leibniz em 1695 e 1697 e por L. Euler em 1730, as aplicações do cálculo fracionário em engenharia são relativamente novas, sendo considerado um tema bem contemporâneo. Somente a partir da década de 70 surgiram congressos especializados em cálculo fracionário, sendo o primeiro organizado por B. Ross, que logo após a sua defesa de doutorado organizou o primeiro congresso sobre o assunto: (“First Conference on Fractional Calculus and its Application”) na Universidade de New Haven em junho de 1974.

No últimos anos, as contribuições geradas por diversos pesquisadores estimularam a busca por novas áreas de aplicação do cálculo fracionário, como na física, outras engenharias e possivelmente fenômenos fractais. Outras áreas incluem funções especiais, teoria do controle, física química, processos estocásticos, difusões anômalas, reologia e até mesmo em aeroelasticidade.

Há hoje pesquisas relacionadas ao cálculo fracionário e solução da Integral de Duhamel presente no modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário definido segundo a Função de Wagner. No estado da arte é citado um trabalho onde o autor resolve esta integral e determina o carregamento aerodinâmico no domínio da frequência e o compara com o modelo de Theodorsen, obtendo excelentes resultados. No laboratório LMEst (Laboratório de Estruturas Mecânicas), já está em andamento um pesquisa sobre este tema onde trabalham o Professor Antônio Marcos Gonçalves de Lima como orientador, o aluno de iniciação científica Cassiano Arruda e o aluno de Doutorado André Garcia

Cunha Filho (o autor) como co-orientador.

O uso do Cálculo Fracionário é uma forma bastante atrativa para representar matematicamente o comportamento dinâmico de sistemas de engenharia causais, pois apresenta uma matemática relativamente simples, embora os conceitos por trás desta sejam bastante elaborados (GRÜNWALD, 1867). Sabe-se que diversos são os sistemas que permitem a modelagem utilizando as derivadas fracionárias e no contexto deste trabalho, tanto o material viscoelástico quanto o carregamento aerodinâmico não estacionário permitem tal abordagem. Entretanto, o carregamento aerodinâmico não foi tema de estudo, mas serviu de motivação para um projeto de iniciação científica já em andamento no laboratório.

O uso do cálculo fracionário possui uma série de vantagens. A literatura mostra que esta abordagem se justifica pela qualidade dos resultados quando comparado com experimentos. Além disso, é uma prática relativamente nova e contemporânea, ainda pouco explorada. Assim, são listados a seguir uma série de trabalhos considerados mais relevantes no contexto da aeroelasticidade e viscoelasticidade.

Swiney (SWINNEY, 1989) em seu trabalho intitulado “*A Fractional Calculus Model of Aeroelasticity*” mostra que é possível reinterpretar a integral de Duhamel presente no cálculo do carregamento aerodinâmico por meio de derivadas fracionárias. Os resultados obtidos foram basicamente os mesmos daqueles apresentados por Theodorsen (THEODORSEN; MUTCHLER, 1935). Entretanto, nenhuma tentativa de descrever o carregamento utilizando a função de Wagner (WAGNER, 1925) foi realizada, o que motivou os trabalhos da iniciação científica mencionada anteriormente.

Ryder (RYDER, 1990) desenvolveu um modelo utilizando o cálculo fracionário para resolver a Função de Kernel de uma superfície de sustentação retangular com pequeno alongamento submetida a um escoamento subsônico incompressível. Nenhuma outra referência foi encontrada relacionada à determinação do carregamento aerodinâmico por meio do cálculo fracionário.

Portanto, o que segue é um compilado das principais aplicações das derivadas fracionárias para representação do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos. Começando pelos trabalhos de Bagley e Torvick, os quais foram os pioneiros na representação das leis constitutivas dos materiais viscoelásticos utilizando o conceito das derivadas fracionárias, bem como no uso das aproximações por somatório para determinação dos campos de tensão não local. O primeiro trabalho publicado pelos autores (BAGLEY; TORVIK, 1979) descreve a lei para o estado uniaxial de tensão. Os autores também contextualizam o uso do cálculo fracionário em relação a modelos já consagrados. Desta maneira eles explicam que o modelo do Módulo Complexo, exclusivo para o domínio da frequência, apresenta uma matemática com características um tanto inadequadas do ponto de vista do comportamento causal apresentado pelos materiais viscoelásticos e suas aplicações. Segundo os autores, o Módulo Complexo não contempla a influência de esta-

dos anteriores no cálculo do estado atual. Esta característica impede que se aplicada as transformadas rápida de Fourier e sua inversa para levar o modelo do tempo para frequência e vice-versa, não seria possível chegar no mesmo resultado. Alguns anos mais tarde, Bagley e Torvick (BAGLEY; TORVIK, 1983) apresentam um trabalho com aplicações práticas onde o Método dos Elementos Finitos foi empregado justamente para mostrar a adaptabilidade da abordagem em sistemas práticos de engenharia mecânica. Ênfase é dada à pouca quantidade de parâmetros físicos demandada pelo modelo, o que facilita muito o processo de identificação dos mesmos, principalmente quando comparado com o modelo GHM (GOLLA; HUGHES, 1985), onde mais de dez parâmetros são necessários (FILHO; LIMA; DONADON, 2016). Ainda em 1983, Bagley e Torvick (BAGLEY; TORVIK, 1983) apresentam uma aplicação prática, onde um modelo sob estado uniaxial de tensão é criado para representação de uma viga sanduíche.

Finalmente, um último trabalho de Bagley e Torvik foi estudado (BAGLEY; TORVIK, 1986), tendo grande relevância nesta tese, pois permitiu explicar o desenvolvimento matemático da integral de Boltzman (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985) por meio da derivada fracionária e em seguida aproximá-la numericamente utilizando a aproximação de Rieman-Liouville (RICHARD, 2014).

Outra referência de grande importância é o trabalho apresentado por Fludge (FLÜGGE, 1975) e mais tarde com mais detalhes por Makris (MAKRIS, 1997). Estes autores mostraram como uma lei constitutiva tridimensional para materiais viscoelásticos é possível de ser estabelecida com base nos conceitos de decomposição das tensões em parcelas hidrostáticas e desviadoras. Esta abordagem se mostrou muito simples de ser aplicada para os materiais viscoelásticos utilizando o cálculo fracionário quando comparada com a Lei de Hooke Generalizada. Nesta última seria muito complicado ou simplesmente não seria possível representar um estado triaxial de tensão utilizando o cálculo fracionário.

Seguindo esta linha cronológica, Schmidt e Gaul publicaram dois trabalhos (SCHMIDT; GAUL, 2001; SCHMIDT; GAUL, 2002) onde a ideia de Makris (MAKRIS, 1997) é utilizada para criação de um modelo em elementos finitos de uma viga 3D contendo material viscoelástico. Um completo e complexo desenvolvimento matemático é exposto, mostrando as dificuldades envolvidas na implementação de um código. Os altos custos computacionais surgem da necessidade de integrar os campos de tensão de cada elemento da malha a cada instante de tempo e ainda ter que armazenar estes valores em matrizes, as quais resultam em matrizes com 5 dimensões. Um *software* foi desenvolvido, mostrando que aplicações aeroviscoelásticas seriam inviáveis, o que serviu de motivação a criação de uma solução para o problema.

Galucio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004) propôs uma solução que viabilizaria os cálculos aeroviscoelásticos. A partir de um estado uniaxial de tensão, a autora sugere o uso de uma variável denominada de anelástica que acaba com a necessidade de inte-

grar os campos de tensão para cada instante de tempo. Porém, vários problemas foram percebidos com este modelo, sendo o mais grave a incapacidade de implementá-lo para sistemas em estado plano ou tridimensional de tensão. Outro problema é a necessidade de identificação experimental do tempo de relaxação para determinação dos parâmetros do modelo. Finalmente, as imposições feitas para criação da variável anelásticas não foram claramente explicadas. Portanto, este modelo não foi utilizado e serviu também como motivação para resolver o problema do custo computacional do modelo de Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001).

Perseguindo o mesmo objetivo, Cortés e Elejabarrieta (CORTES; ELEJABARRIETA, 2007) usaram o modelo de derivada fracionário com 5 parâmetros. Neste modelo os autores obtêm as equações do movimento a partir do momento linear de uma viga engastada-livre, porém restrita a aplicação superficial de material viscoelástico sem camada restringente, tornando a aplicação bastante específica ao caso. Entretanto, os autores conseguiram eliminar a auto-dependência da tensão, provavelmente aliviando os custos computacionais.

Até este ponto, estes foram os principais trabalhos utilizados para a criação dos modelos fracionários desta tese. Contudo, várias outras referências foram estudadas e se mostraram relevantes na construção deste estado da arte.

Bagley e Calico (BAGLEY; CALICO, 1991) utilizam equações de estado de ordem fracionária para modelar estruturas amortecidas com material viscoelástico e também controladas ativamente. Os autores mostram que esta formulação é muito bem adaptada para teorias de controle ativo, uma vez que a forma matemática das equações no espaço de estado apresentam um *feedback* das derivadas temporais de ordem fracionária dos deslocamento estruturais que melhoram a eficiência da estratégia de controle aplicada.

Francesco Mainardi é hoje um dos principais pesquisadores do cálculo fracionário. Seu livro, *“Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity”* (MAINARDI, 2010), é uma das principais referências sobre cálculo fracionário no mundo. O objetivo principal deste livro é mostrar que o cálculo fracionário é um método adequado para descrever comportamentos viscoelásticos. Entre o conteúdo apresentado, o autor demonstra modelos viscoelásticos através do cálculo fracionário, incluindo algumas interpretações físicas da aplicação do mesmo.

Bologna, Deseri e Zingales (BOLOGNA; LUCA; ZINGALES, 2017) formulam uma generalização do critério de Routh-Hurwitz para um sistema de 2 graus de liberdade da coluna de Beck. Este tipo de estrutura consiste de uma viga elástica que é sujeita à um carregamento constante em sua extremidade livre. Os suportes da viga são idealizados como sendo um elemento de mola torsional viscoelástica cujo comportamento é o mesmo daquele apresentado por Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001) e é denominado de *springpot*. Os autores mostram o desenvolvimento da integral de convolução existente no princípio da superposição de Boltzman (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985) por meio

do uso do cálculo fracionário e a partir deste desenvolvimento, determinam a equação do movimento e as regiões de instabilidade da viga.

Hansen (HANSEN, 1990), a partir da necessidade de melhorar a qualidade dos modelos matemáticos de materiais viscoelásticos para predição de amortecimento, fez uso do conceito “*Augmenting Thermodynamics Fields*” (ATF), cujas equações de equilíbrio apresentam derivadas de ordem fracionária. Este modelo foi comparado com o modelo viscoelástico de Bagley e Torvik e concluiu-se que através das derivadas fracionárias juntamente com o modelo ATF é possível descrever com maior precisão o correto amortecimento de diversos materiais.

Walker (WALKER, 1988) desenvolveu uma lei de controle para estruturas amortecidas passivamente utilizando materiais viscoelásticos, os quais são modelados utilizando lei constitutiva descritas por meio de derivadas fracionárias. Neste caso, o controle ativo de vibrações foi feito por forças e momentos aplicado à estruturas. Assim, a teoria de Controle Quadrático Ótimo é modificada para se adequar com sistemas com derivadas fracionárias no vetor estado, onde novamente o uso da abordagem fracionária se mostrou bem adaptada para sistemas controlados ativamente.

McCullough (III, 1989) mostrou que a partir do cálculo fracionário é possível estabelecer as dependências simultâneas da temperatura e frequência do material viscoelástico. O autor utilizou além das derivadas fracionárias, uma função de deslocamento em temperatura para obtenção de um módulo complexo compatível com o MEF de estruturas contendo material viscoelástico. O modelo apresentou uma boa correlação somente para baixas frequências, porém o mesmo pode ser representado por uma expressão simples com poucos parâmetros a serem identificados.

2.3 Modelos de sistemas aeroelásticos

Várias referencias foram utilizadas no desenvolvimentos dos modelos aero/aeroviscoelásticos desta tese. Serão listadas somente as principais que realmente serviram de pilar para toda a teoria discutida aqui.

Uma das mais importantes referências que norteou os conceitos utilizados sobre aeroelasticidade deste trabalho é o livro de Wright e Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads* (WRIGHT; COOPER, 2015), um material completo sobre aeroelasticidade, carregamentos aerodinâmicos e as instabilidades envolvidas neste tipo de sistema. A partir desta, iniciou-se a pesquisa para desenvolvimento dos modelos de seção típica, onde Silvestre (SILVESTRE, 2012) e Silva (SILVA, 2016) expõem modelos lineares deste tipo de sistema aeroelástico com 3 graus de liberdade cujo carregamento aerodinâmico não estacionário é definido no domínio do tempo utilizando a tão conhecida Função de Wagner (WAGNER, 1925) em seus trabalhos de doutorado e mestrado, respectivamente. Silva

publicou também um artigo com as principais contribuições de sua dissertação (SILVA et al., 2018), e os detalhes de sua modelagem. A partir destes trabalhos, iniciaram-se os esforços para a criação dos modelos de seção típica lineares no domínio do tempo com a aplicação de rijezas elementares viscoelásticas tanto em *plunge*, quanto em *pitch*, utilizando a fórmula de recorrência.

No contexto de seção típica com elementos viscoelásticos, Sales (SALES et al., 2018) desenvolveu um modelo não linear de uma seção típica com 3 graus de liberdade onde elementos de rigidez viscoelástica foram idealizados para todos os graus de liberdade e o comportamento em ciclo limite do sistema foi estudado. Para isso, Sales (SALES et al., 2018) faz o uso do modelo de material viscoelástico no domínio do tempo proposto por Galúcio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004). O mesmo conceito de não linearidade utilizado por Sales (SALES et al., 2018) foi aplicado no modelo de seção típica não linear desenvolvido nesta tese. Neste mesmo âmbito de inserção de rijezas viscoelásticas em seções típicas, Martins (MARTINS et al., 2017) estudou as velocidades críticas do sistema aeroviscoelástico formado por uma seção típica linear com 2 graus de liberdade onde rijezas viscoelásticas foram introduzidas tanto em *plunge*, quanto em *pitch*.

Ainda sobre modelos não lineares de seção típica, novamente Sales (SALES et al., 2019) publicou um trabalho similar, porém uma folga foi introduzida na rigidez da superfície de controle com o intuito de se avaliar a caoticidade do sistema e os impactos da viscoelásticidade neste quesito.

Em seguida, o estudo relacionado à asas tridimensionais com grande alongamento, denominadas aqui de *plate like wing* e *sandwich plate like wing* iniciou-se. Neste caso, para determinação do carregamento aerodinâmico não estacionário deste tipo de sistema aeroelástico, a Teoria das Faixas (WRIGHT; COOPER, 2015) foi utilizada. Essencialmente, a formulação matemática foi realizada com base no desenvolvido para a seção típica, porém extrapolando as equações para o MEF, onde forças aerodinâmicas se tornam carregamentos aerodinâmicos ao serem integradas ao longo do comprimento de cada faixa. Entretanto, alguns trabalhos que se enquadram no contexto devem ser mencionados no intuito de contextualizar o tema proposto. Silva Neto (NETO; DUARTE; SILVA, 2018) desenvolveram um modelo de uma *plate like wing*, também com um lastro fixado em sua extremidade livre, porém com fios de material com memória de forma dispostos de tal maneira que o controle passivo de vibração da estrutura foi realizado. Os resultados computacionais obtidos foram comparados com experimentos realizados em túnel de vento. Versiani (VERSIANI et al., 2019) também trabalhou com um modelo de *plate like wing*, onde um carregamento aerodinâmico quase-estacionário foi desenvolvido segundo a Teoria das Faixas. Entretanto, neste trabalho o controle realizado foi ativo por meio de atuadores piezolétricos dispostos em posições estratégicas da asa. O objetivo deste trabalho foi mostrar como diminuir os efeitos de cargas de rajada com o controle ativo.

O autor também validou seu modelo com resultados experimentais medidos em túnel de vento. No contexto de *sandwich plate like wings* cujo carregamento aerodinâmico não estacionário é descrito pela Teoria das Faixas, nenhuma referência foi encontrada.

CAPÍTULO III

Modelagem do Comportamento Dinâmico de Materiais Viscoelásticos nos Domínios do Tempo e da Frequência

Na primeira etapa deste trabalho de pesquisa, ainda no âmbito do mestrado, a aplicabilidade e eficiência de materiais viscoelásticos em diferentes sistemas aerodinâmicos foram avaliadas. Placas sanduíches com núcleo viscoelástico foram submetidas a escoamentos supersônicos e suas instabilidades aeroelásticas estudadas. Para isso, foram empregados dois modelos de materiais viscoelásticos, o modelo do Módulo Complexo (de Lima, 2007), específico para o domínio da frequência e o modelo GHM (Golla-Hudges-McTavish) (MC-TAVISH; HUGHES, 1993), possível de ser aplicado tanto na frequência quanto no tempo. Apesar do bom resultado obtido, estes são modelos matematicamente não causais, ou seja, eles não possuem a capacidade de considerar o histórico de estados no cálculo do estado atual, fato que motivou os trabalhos de Bagley e Torvick. Portanto, dado que modelos que utilizam o cálculo fracionário possuem a causalidade em sua matemática, isso faz com que seja um ponto de partida que justifica sua utilização neste trabalho. Ademais, a literatura mostra como o cálculo fracionário é capaz de representar de maneira muito fiel o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos. Assim, esta capacidade será colocada a prova quando a viga sanduíche tipo asa de grande alongamento, ou simplesmente *sandwich plate like wing*, for submetida a um carregamento aerodinâmico subsônico.

Neste capítulo, os conceitos básicos da viscoelasticidade linear são apresentados, bem como todo o desenvolvimento do modelo de derivadas fracionárias. Ainda neste contexto, o desenvolvimento matemático de uma fórmula de recorrência em sua forma mais geral será demonstrado e a partir deste, simplificações serão realizadas para atender os casos de estado triplo, duplo e uniaxial de tensão. Porém, o que é a fórmula de recorrência? A fórmula de recorrência foi uma solução matemática encontrada para acabar com a auto-dependência do campo de tensão do material viscoelástico. Nos trabalhos de

Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001; SCHMIDT; GAUL, 2002), ficou claro como a auto-dependência faz com que o processo de integração seja computacionalmente caro inviabilizando aplicações práticas como o estudo de sistemas aeroviscoelásticos. Portanto, a recorrência pode ser compreendida como uma finalização, ou extensão dos trabalhos de Schmidt e Gaul.

No que se refere ao modelo do Módulo Complexo na frequência, haja vista que este trabalho é uma continuação da pesquisa de mestrado intitulada: O efeito do tratamento viscoelástico superficial na estabilidade aeroelástica de placas sanduíches, o mesmo não será desenvolvido ou terá sua teoria exposta neste trabalho e qualquer informação referente ao mesmo pode ser consultada na respectiva referência.

3.1 Introdução aos conceitos da viscoelasticidade linear e derivada fracionária

Os materiais viscoelásticos têm sido objeto de estudo dos pesquisadores nas áreas de engenharia mecânica e aeronáutica há várias décadas. Dada sua importância como solução para mitigar vibrações mecânicas, um grande esforço ao longo dos anos foi dedicado à criação de modelos cada vez mais avançados e eficientes. Esta coerência abrange tanto os aspectos matemáticos dos modelos, quanto às suas capacidades qualitativas de representar a realidade. Para melhor entender isso, basta observar o método do Módulo Complexo, um modelo com excelente capacidade de previsão do comportamento dinâmico do material viscoelástico, mas que matematicamente é um modelo não-causal. Outro modelo, também bastante consagrado, é o GHM, mas que, novamente, não apresenta a característica da causalidade. Neste contexto, Bagley e Torvik defenderam em diversos trabalhos (BAGLEY; TORVIK, 1979; BAGLEY; TORVIK, 1983; BAGLEY; TORVIK, 1983; L; TORVIK, 1985; BAGLEY; TORVIK, 1986), a importância de modelos viscoelásticos causais.

Neste contexto eles iniciam o processo para demonstrar matematicamente a causalidade explicando os tipos de materiais existentes: elásticos (e), viscoelásticos (ve) e viscosos (v), do ponto de vista da ordem da derivada temporal da deformação, ou, da taxa de deformação, tal qual mostrado abaixo:

$$\sigma_e = E \frac{d^0 \varepsilon_e}{dt^0} \quad (3.1a)$$

$$\sigma_{ve} = E \frac{d^\alpha \varepsilon_{ve}}{dt^\alpha} \quad (3.1b)$$

$$\sigma_v = E \frac{d\varepsilon_v}{dt} \quad (3.1c)$$

onde $0 < \alpha < 1$ é a ordem da derivada fracionária. Observa-se que os materiais viscoelásticos ocupam todo o universo da ordem não inteira da derivada. Isso significa que em função da temperatura do material, o valor de α pode flutuar para valores próximos a 0 para temperaturas mais baixas, e próximos a 1 para temperaturas mais altas. Desta maneira, tem-se que o objetivo aqui é descrever o campo de tensão em termos da taxa de variação fracionária da deformação. Nos desenvolvimentos a seguir será mostrado este desenvolvimento matemático, bem como algumas particularidades que distinguem a modelagem de materiais viscoelásticos de materiais puramente elásticos.

Uma dessas particularidades é não utilizar a Lei de Hooke Generalizada para a determinação da lei constitutiva do material. Neste caso, o que se faz é baseá-la nos conceitos hidrostáticos e de desvio dos tensores tensão e deformação, $\sigma_t = \sigma_h + \sigma_d$, $\varepsilon_t = \varepsilon_h + \varepsilon_d$. Assim, Christensen (CHRISTENSEN, 1982, pg.7) define as relações de tensão do material viscoelástico em termos das componentes hidrostáticas e de desvio do tensor tensão como sendo uma integral de convolução no tempo, como descrito a seguir:

$$\sigma_d = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\tau) \frac{d\varepsilon_d(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.2a)$$

$$\sigma_h = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\tau) \frac{d\varepsilon_h(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.2b)$$

onde

$$\sigma_d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_h, \quad (3.3a)$$

$$\varepsilon_d = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_h \quad (3.3b)$$

e o termo, δ_{ij} , é o conhecido delta de Kronecker. De maneira similar, as relações de deformação podem ser estabelecidas como segue:

$$\varepsilon_d = \int_{-\infty}^{\infty} J_1(\tau) \frac{d\sigma_d(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.4a)$$

$$\varepsilon_h = \int_{-\infty}^{\infty} J_2(\tau) \frac{d\sigma_h(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.4b)$$

Nas Eqs.(3.2a) e (3.4a) os termos $G_1(t)$ e $J_1(t)$ representam as funções de relaxação e fluência em cisalhamento do material, enquanto que os termos, $G_2(t)$ e $J_2(t)$, são seus correspondentes volumétricos. Em outras palavras, estes termos poderiam ser entendidos como sendo os equivalentes viscoelásticos dos módulos elásticos de cisalhamento G e volumétrico K .

Observa-se que todas as integrais descritas possuem intervalos que variam de $[-\infty : \infty]$. Entretanto, assume-se aqui que o corpo viscoelástico parte sempre de um estado em repouso, o que permite dizer que $t_0 = 0$. Desta maneira, o que se tem na

prática é um intervalo que varia de $[0 : t]$, e para este intervalo avalia-se o instante, $t = 0$, o que resulta em:

$$\sigma_d = \varepsilon_d(t)G_1(0) + \int_0^t G_1(\tau) \frac{d\varepsilon_d(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.5a)$$

$$\sigma_h = \varepsilon_h(t)G_2(0) + \int_0^t G_2(\tau) \frac{d\varepsilon_h(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.5b)$$

A partir deste ponto, o desenvolvimento será feito somente com a Eq.(3.5b), uma vez que o mesmo valerá para as outras representações. Faz-se necessário assim, introduzir a definição de derivada fracionária de Riemann (RICHARD, 2014, pg.39) para uma função, $f(t)$, qualquer, como segue:

$$D^\alpha (f(t)) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t-\tau)d\tau}{\tau^\alpha} \quad (3.6)$$

onde, α , é a ordem fracionária da derivada e seu valor deve estar compreendido entre o intervalo de $0 < \alpha < 1$. O parâmetro, Γ , representa a função gama e será discutida em detalhes mais a frente. É possível, agora, relacionar a derivada fracionária com a equação do tensor hidrostático, Eq.(3.5b), como mostrado a seguir:

$$\sigma_h = G_2 \frac{d^\alpha \varepsilon_h(t)}{dt^\alpha} = \frac{G_2}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon_h(0) + \frac{G_2}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varepsilon_h(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau \quad (3.7)$$

Em seguida, aplicando-se a Regra de Leibnitz (RICHARD, 2014, pg. 16) na Eq.(3.7), a expressão do tensor tensão hidrostático assume a seguinte forma:

$$\sigma_h = G_2 \frac{d^\alpha \varepsilon_h(t)}{dt^\alpha} = G_2(t)\varepsilon_h(0) + \int_0^t G_2(\tau)\dot{\varepsilon}_h(t-\tau)d\tau \quad (3.8)$$

onde

$$G_2(t) = \frac{G_2}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \quad (3.9)$$

e o segundo termo da Eq.(3.8) se anulará para $t = 0$, dada a condição de repouso e de nenhum deslocamento. Pela Eq.(3.9), o que se faz de fato é tornar a propriedade G_2 do material um parâmetro constante por definição, e impor sobre este uma variação com o tempo regida por um parâmetro externo.

Desta maneira, a relação entre a derivada fracionária de Riemann (Eq.(3.6)) e a integral de convolução dada pela função de relaxação em alongamento, Eq.(3.5b), é estabelecida. Estes desenvolvimentos podem ser extrapolados para a função de cisalhamento exatamente como o realizado.

O que se tem até aqui é uma forma de descrever um problema antes regido por uma integral da convolução de duas funções, uma propriedade mecânica de um material dependente do tempo e a taxa de variação da deformação deste material, respectivamente.

Basicamente o que se fez foi impor a propriedade do material como sendo constante transferindo sua dependência temporal para uma função denominada de gama, que de certa maneira penalizará essa constância do material à medida que o mesmo é avaliado no passado. A partir disso, foi possível intervir com o conceito de derivada fracionária para reescrever o problema segundo Riemann. Parece redundante, mas não é, pois a presença da função gama e o fato de o parâmetro de forma isolada ter se tornado constante, permita que as aproximações existentes para o cálculo fracionário sejam evocadas e aplicadas.

A etapa que segue consiste em representar a derivada fracionária por meio de uma aproximação que permite aplicá-la a qualquer tipo de problema de elementos finitos, meios contínuos ou discretos.

3.1.1 Aproximação para a derivada fracionária

Após a introdução do conceito de derivada fracionária, é necessário definir uma forma para resolvê-la. Existem na literatura várias formas aproximadas de resolução, porém neste trabalho será utilizada a aproximação de Grünwald-Letnikov, por impor a menor quantidade de restrições às funções as quais serão aplicadas à derivada fracionária (SCHMIDT; GAUL, 2001). Além disso, esta abordagem pode ser facilmente implementada em algoritmos numéricos.

O desenvolvimento da aproximação de Grünwald-Letnikov não será tratado neste trabalho, pois este não é o foco. Logo, o que é de grande interesse é a aproximação em si, que é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \Delta t^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_l} A_{j+1} f(t - j\Delta t) \quad (3.10)$$

onde, Δt , é o incremento de tempo utilizado no processo numérico de integração, α , é ordem da derivada fracionária e N_l é o parâmetro que define até qual instante no passado o cálculo será realizado. A_{j+1} , são os coeficientes de Grünwald, que podem ser obtidos pela função gama, Γ , ou por meio de uma recorrência oriunda desta, como mostrado a seguir:

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} \quad \text{ou} \quad A_{j+1} = \frac{j - \alpha - 1}{j} A_j \quad (3.11)$$

Esta aproximação foi utilizada também por Galúcio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004) e por Schmidt e Gaul em duas ocasiões diferentes (SCHMIDT; GAUL, 2001; SCHMIDT; GAUL, 2002). Portanto, todo o desenvolvimento da lei constitutiva tridimensional do material viscoelástico será feito utilizando a recorrência. Como mencionado anteriormente, as propriedades mecânicas do material perderam a dependência implícita em relação a tempo para ter uma dependência explícita por meio da função gama e que agora é descrita por meio dos coeficientes de Grünwald. Se plotados variando com j , vê-se

que os coeficientes de Grunwald representam uma função assintótica que tende a zero. A Fig.(3.1) mostra este comportamento

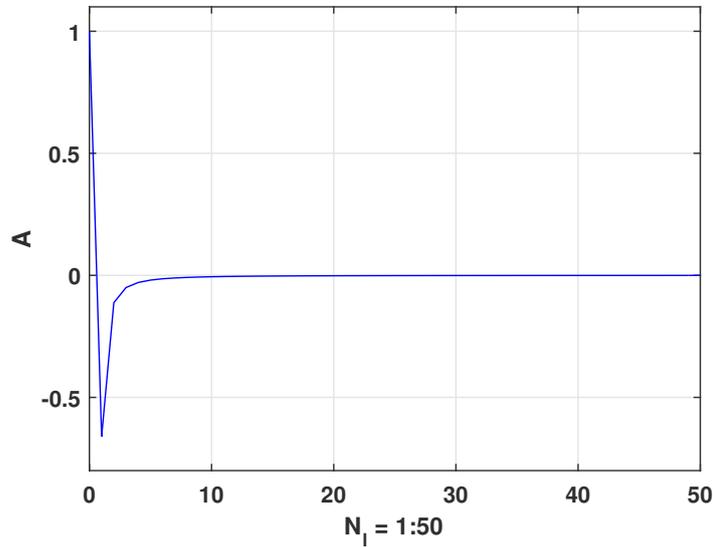


Figura 3.1: Comportamento assintótico dos coeficientes de Grunwald.

Isso mostra que quanto mais distante no passado for o cálculo, menor influência este terá no estado atual, retratando bem a penalidade mencionada quando discutidos os conceitos de derivada fracionária e a função gama. Entretanto, isso pode não ser verdade ao se realizar uma análise harmônica, por exemplo. Este será rediscutido mais a frente, após o método de redução no domínio do tempo ser apresentado.

3.2 Formulação da lei constitutiva tridimensional

O desenvolvimento da lei constitutiva tridimensional do material viscoelástico será feito com base nos conceitos hidrostáticos e de desvio dos tensores tensão e deformação, σ_h e σ_d , onde os subíndices, h e d , fazem referencia às parcelas hidrostática e de desvio, respectivamente. Assim, das relações da Teoria da Elasticidade, é possível descrever os tensores tensão e deformação através das seguintes expressões:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_h\} + \{\sigma_d\} = [T_h] \{\sigma\} + [T_d] \{\sigma\} \quad (3.12a)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_h\} + \{\varepsilon_d\} = [T_h] \{\varepsilon\} + [T_d] \{\varepsilon\} \quad (3.12b)$$

As matrizes de transformação linear que aparecem nas Eqs.(3.12a) e (3.12b), são de

dimensão $[6 \times 6]$ e são descritas como segue:

$$[T_h] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [T_d] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Desta maneira, assim como Schimdt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001), a lei constitutiva é apresentada em termos de suas partes hidrostática e de desvio, tal qual mostrado abaixo:

$$\{\sigma_h\} + [a_h] \left\{ \frac{d^{\alpha_h} \sigma_h}{dt^{\alpha_h}} \right\} = 3K_0 \{\varepsilon_h\} + 3 [b_h] \left\{ \frac{d^{\alpha_h} \{\varepsilon_h\}}{dt^{\alpha_h}} \right\} \quad (3.14a)$$

$$\{\sigma_d\} + [a_d] \left\{ \frac{d^{\alpha_d} \sigma_d}{dt^{\alpha_d}} \right\} = 2G_0 \{\varepsilon_d\} + 2 [b_d] \left\{ \frac{d^{\alpha_d} \{\varepsilon_d\}}{dt^{\alpha_d}} \right\} \quad (3.14b)$$

onde K_0 e G_0 são os valores assintóticos a baixa frequência dos módulos volumétrico e de cisalhamento do material viscoelástico, $\alpha_{h,d}$ são as ordens das derivadas fracionárias, $[a_{h,d}]$ e $[b_{h,d}]$ são parâmetros físicos do sistema a serem determinados por ajuste de curva e valem:

$$[a_h] = a_h [T_h] \quad (3.15a)$$

$$[b_h] = b_h [T_h] \quad (3.15b)$$

$$[a_d] = a_d [T_d] \quad (3.15c)$$

$$[b_d] = b_d [T_d]. \quad (3.15d)$$

As Eqs.(3.14a) e (3.14b) mostram que a dependência da frequência dos módulos é descrita pelas derivadas fracionárias. Entretanto, há ainda a dependência da temperatura que está intrinsecamente presente nos parâmetros físicos, que são determinados pelo ajuste de curva para diferentes valores da mesma.

Desta maneira, a forma existente para identificar os valores dos parâmetros exige que as Eqs.(3.14a) e (3.14b) sejam descritas no domínio da frequência. Desta maneira, a transformada de Laplace é aplicada, obtendo:

$$[1 + a_h (i\omega)^{\alpha_h}] \{\sigma_h^*\} = 3 [K_0 + b_h (i\omega)^{\alpha_h}] \{\varepsilon_h^*\} \quad (3.16a)$$

$$[1 + a_d (i\omega)^{\alpha_d}] \{\sigma_d^*\} = 2 [G_0 + b_d (i\omega)^{\alpha_d}] \{\varepsilon_d^*\} \quad (3.16b)$$

onde $\sigma_{h,d}^*$ e $\varepsilon_{h,d}^*$ representam os tensores hidrostáticos e de desvio no domínio da frequência. Assim, a partir das Eq.(3.16b) e (3.16a), os módulos volumétricos e de cisalhamento dependentes da frequência podem ser determinados de forma independente como descritos abaixo:

$$K^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_h^*\}}{3\{\varepsilon_h^*\}} = \frac{K_0 + b_h (i\omega)^{\alpha_h}}{1 + a_h (i\omega)^{\alpha_h}} \quad (3.17a)$$

$$G^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_d^*\}}{2\{\varepsilon_d^*\}} = \frac{G_0 + b_d (i\omega)^{\alpha_d}}{1 + a_d (i\omega)^{\alpha_d}} \quad (3.17b)$$

Isso é um problema, pois para caracterizá-los é necessário valores empíricos para os dois parâmetros, o que pode ser um problema devido à dificuldade de se obter estes valores. Assim, uma forma para contornar esta dificuldade é utilizar o Princípio da Equivalência Elástica-Viscoelástica (PEEV) (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985), que assume um coeficiente de Poisson (ν) constante. Tal suposição permite utilizar os conceitos da teoria da elasticidade que estabelece a proporcionalidade entre os módulos o que permite descrever o módulo de cisalhamento em termos do volumétrico e vice-versa. Entretanto, particularmente neste trabalho, preferência é dada para descrever o módulo volumétrico em função do cisalhamento, uma vez que os valores empíricos disponíveis são para o módulo de cisalhamento. Além disso, o principal emprego dado ao material viscoelástico será para trabalhar em cisalhamento, fazendo com que qualquer erro relativo ao mau uso do PEEV para descrição do módulo volumétrico terá pouca relevância no resultado final.

Feitas todas estas considerações, o módulo volumétrico pode ser descrito da seguinte maneira:

$$K^*(i\omega) = \frac{2G^*(i\omega)(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (3.18)$$

Substituindo a Eq.(3.18) na Eq.(3.17b), tem-se que o módulo volumétrico é descrito em termos do módulo de cisalhamento:

$$K^*(i\omega) = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \left(\frac{G_0 + b_d (i\omega)^{\alpha_d}}{1 + a_d (i\omega)^{\alpha_d}} \right) \quad (3.19)$$

Os outros parâmetros são determinados exatamente da mesma maneira,

$$a_h = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} a_d \quad (3.20a)$$

$$b_h = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} b_d \quad (3.20b)$$

Em relação às ordens fracionárias, $\alpha_{h,d}$, é assumido a igualdade dos dois termos. Entretanto, isto não é simplesmente uma suposição, mas uma condição termodinâmica que pode ser demonstrada experimentalmente, como discutido por Bagley e Torvik (BAGLEY; TORVIK, 1986).

Finalmente, após a definição de todos os parâmetros físicos envolvidos no sistema, a lei constitutiva pode ser determinada. Para isso, utiliza-se da relação existente as Eqs.(3.14a) e (3.14b), e ao somar as duas equações é possível descrever a tensão em função da deformação, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \{\sigma_t\} = & [\bar{C}] \{\varepsilon_t\} + [\bar{B}_d] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1}^{(\alpha_d)} \{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} + [\bar{B}_h] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1}^{(\alpha_h)} \{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} \\ & - [\bar{A}_d] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1}^{(\alpha_d)} \{\sigma_{t-j\Delta t}\} - [\bar{A}_h] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1}^{(\alpha_h)} \{\sigma_{t-j\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde $A_{j+1}^{\alpha_{h,d}}$, são os coeficientes de Grünwald calculados para cada α_h e α_d .

Obviamente, todo um desenvolvimento matemático foi feito para chegar na Eq.(3.21), sendo que o passo principal foi avaliar a equação para $j = 1$ e em seguida reorganizar seus termos. Novos parâmetros foram criados para compactar a equação, porém todos são função dos parâmetros físicos já descritos. Estes novos parâmetros são mostrado a seguir:

$$[\bar{C}] = [A]^{-1} (2G_0 [T_d] + 3K_0 [T_h] + [B_d] + [B_h]) = [A]^{-1} ([C] + [D]) \quad (3.22a)$$

$$[C] = 2G_0 [T_d] + 3K_0 [T_h] \quad (3.22b)$$

$$[D] = [B_h] + [B_d] \quad (3.22c)$$

$$[A] = [I] + [A_d] + [A_h] \quad (3.22d)$$

$$[B_h] = 3b_h \Delta t^{-\alpha_h} [T_h] \quad (3.22e)$$

$$[B_d] = 2b_d \Delta t^{-\alpha_d} [T_d] \quad (3.22f)$$

$$[\bar{A}_h] = [A]^{-1} [A_h] \quad (3.22g)$$

$$[\bar{A}_d] = [A]^{-1} [A_d] \quad (3.22h)$$

$$[\bar{B}_h] = [A]^{-1} [B_h] \quad (3.22i)$$

$$[\bar{B}_d] = [A]^{-1} [B_d] \quad (3.22j)$$

$$[A_h] = a_h \Delta t^{-\alpha_h} [T_h] \quad (3.22k)$$

$$[A_d] = a_d \Delta t^{-\alpha_d} [T_d] \quad (3.22l)$$

Até este ponto, os desenvolvimentos são idênticos aos demonstrados por Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001). Porém os autores desenvolvem o potencial de energia

viscoelástica a partir da Eq.(3.21). Esta abordagem torna o problema extremamente custoso computacionalmente, pois faz com que a tensão seja dependente dela mesma. Como resultado, é necessário realizar a integração numérica do campo de tensão para cada elemento da malha a cada instante de tempo, Δt e armazenar toda essa informação em função do tamanho de N_l durante todo o cálculo. Será mostrado mais a frente a comparação entre o excessivo tempo de cálculo para uma placa sanduíche modelada em elementos finitos com 6×6 elementos e a fórmula de recorrência.

Apesar de Galúcio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004) ter contornado este problema, sua solução se manteve restrita a problemas uniaxiais de tensão. Uma tentativa de extrapolar seus resultados para o caso de uma placa (estado plano de tensão) não obteve sucesso. Faria (FARIA, 2010) obteve o mesmo resultado. Isso serviu de motivação para desenvolver uma nova alternativa capaz de representar qualquer tipo de estado de tensão sem a necessidade de realizar integrais dentro do integrador numérico para obtenção da solução do problema. A solução foi encontrar uma fórmula de recorrência a partir da Eq.(3.21) capaz de fazer com que a auto-dependência da tensão fosse eliminada, como será detalhado mais a frente neste capítulo. Considera-se esta uma grande contribuição advinda do desenvolvimento deste trabalho.

3.3 Encontrando a fórmula de recorrência

Nesta seção será mostrado a recorrência existente na Eq.(3.21) e como determinar, a partir dela, uma nova fórmula para a tensão que seja dependente somente do deslocamento e seu histórico, a partir de um termo de recorrência. O grande objetivo de abordar o campo de tensão desta maneira é poder integrar todas as matrizes responsáveis por gerar os esforços dissipativos internos do material viscoelástico fora do integrador numérico. Isso faz com que, não só a quantidade de cálculo diminua drasticamente, mas o tempo necessário para tal operação e a quantidade de memória requerida.

Antes de iniciar os desenvolvimentos, uma mudança na notação é feita para facilitar a escrita, onde funções dependentes do tempo serão denotadas da seguinte forma: $f(t) = f_t$. Assim, para iniciar a demonstração, avalia-se a Eq.(3.21) para o instante de tempo $t = 1\Delta t$, obtendo:

$$\{\sigma_{\Delta t}\} = [\bar{C}] \{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.23)$$

Uma observação deve ser feita logo na primeira iteração, para todo $j = 1$, tem-se que β_1 sempre valerá o termo $[\bar{C}]$, tal qual mostrado na expressão abaixo:

$$[\beta_1] = [\bar{C}], \quad \text{para } j = 1 \quad (3.24)$$

Este processo será interpretado como uma lei da fórmula de recorrência. Assim, tem-se

que a Eq.(3.23), pode ser reescrita em termos de $[\beta_1]$.

$$\{\sigma_{\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.25)$$

Em seguida, a Eq.(3.21), é avaliada novamente para $t = 2\Delta t$, resultando em:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{2\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\bar{B}_d] A_2^{(\alpha_d)} \{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}_d] A_2^{(\alpha_d)} \{\sigma_{\Delta t}\} + \\ [\bar{B}_h] A_2^{(\alpha_h)} \{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}_h] A_2^{(\alpha_h)} \{\sigma_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Já no segundo instante de tempo nota-se a aparição de tensões e deformações do instante passado. Assim, a Eq.(3.25) é introduzida na Eq.(3.26), e os termos são agrupados cronologicamente, o que resulta na equação abaixo:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{2\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + \\ \left[\left([\bar{B}_d] A_2^{(\alpha_d)} - [\bar{A}_d] A_2^{(\alpha_d)} [\beta_1] \right) + \left([\bar{B}_h] A_2^{(\alpha_h)} - [\bar{A}_h] A_2^{(\alpha_h)} [\beta_1] \right) \right] \{\varepsilon_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na Eq.(3.27), nota-se a aparição do segundo termo da fórmula de recorrência, $[\beta_2]$. Entretanto, ainda não possível descrevê-la com clareza, pois há termos que ainda não apareceram e uma tentativa de descrevê-la seria errônea. Assim, para facilitar as futuras substituições, a Eq.(3.27) é reescrita em sua forma recorrente:

$$\{\sigma_{2\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_2] \{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.28)$$

Em seguida, avalia-se a Eq.(3.21) para $t = 3\Delta t$, resultando em:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{3\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{3\Delta t}\} + [\bar{B}_d] A_2^{(\alpha_d)} \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\bar{B}_d] A_3^{(\alpha_d)} \{\varepsilon_{\Delta t}\} + \dots \\ \dots + [\bar{B}_h] A_2^{(\alpha_h)} \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\bar{B}_h] A_3^{(\alpha_h)} \{\varepsilon_{\Delta t}\} - \dots \\ \dots - [\bar{A}_d] A_2^{(\alpha_d)} \{\sigma_{2\Delta t}\} - [\bar{A}_d] A_3^{(\alpha_d)} \{\sigma_{\Delta t}\} - \dots \\ \dots - [\bar{A}_h] A_2^{(\alpha_h)} \{\sigma_{2\Delta t}\} - [\bar{A}_h] A_3^{(\alpha_h)} \{\sigma_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Novamente, os termos são rearranjados de forma cronológica e por efeitos, ou seja,

hidrostático e desvio.

$$\begin{aligned}
\{\sigma_{3\Delta t}\} = & [\beta_1] \{\varepsilon_{3\Delta t}\} \left[\left([\bar{B}_d] A_2^{\alpha_d} - [\bar{A}_d] A_2^{\alpha_d} [\beta_1] \right) + \dots \right. \\
& \left. \dots + \left([\bar{B}_h] A_2^{\alpha_h} - [\bar{A}_h] A_2^{\alpha_h} [\beta_1] \right) \right] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + \dots \\
\dots + & \left[[\bar{B}_d] A_3^{\alpha_d} - [\bar{A}_d] A_2^{\alpha_d} \left([\bar{B}_d] A_2^{\alpha_d} - [\bar{A}_d] A_2^{\alpha_d} [\beta_1] + \dots \right. \right. \\
& \left. \left. + \dots [\bar{B}_h] A_2^{\alpha_h} - [\bar{A}_h] A_2^{\alpha_h} [\beta_1] \right) - [\bar{A}_d] A_3^{\alpha_d} [\beta_1] \right] \{\varepsilon_{\Delta t}\} + \dots \\
\dots + & \left[[\bar{B}_h] A_3^{\alpha_h} - [\bar{A}_h] A_2^{\alpha_h} \left([\bar{B}_d] A_2^{\alpha_d} - [\bar{A}_d] A_2^{\alpha_d} [\beta_1] + \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \dots + [\bar{B}_h] A_2^{\alpha_h} - [\bar{A}_h] A_2^{\alpha_h} [\beta_1] \right) - [\bar{A}_h A_3^{\alpha_h}] [\beta_1] \right] \{\varepsilon_{\Delta t}\}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

onde novamente a Eq.(3.30) é reescrita em termos da fórmula de recorrência.

$$\{\sigma_{3\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{3\Delta t}\} + [\beta_2] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_3] \{\varepsilon_{\Delta t}\} \tag{3.31}$$

Finalmente, a partir do termo, $[\beta_3]$, é possível descrever a fórmula de recorrência. Desta maneira, tem-se que o campo de tensão do material viscoelástico segundo uma lei constitutiva tridimensional, é descrita como mostrado abaixo:

$$\{\sigma_t\} = \sum_{j=0}^{N_t} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_{t-j\Delta t}\}, \quad \text{quando } j = 0 \rightarrow [\beta_1] = [\bar{C}] \tag{3.32}$$

onde o termo recorrente, $[\beta_{j+1}]$, após análise da Eq.(3.30) e percepção da recorrência, poder ser descrito pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
[\beta_{j+1}] = & A_{j+1}^{(\alpha_h)} [\bar{B}_h] - [\bar{A}_h] \sum_{i=1}^j A_{j+1}^{(\alpha_h)} [\beta_{j+1-i}] + \dots \\
& \dots + A_{j+1}^{(\alpha_d)} [\bar{B}_d] - [\bar{A}_d] \sum_{i=1}^j A_{j+1}^{(\alpha_d)} [\beta_{j+1-i}]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Observa-se que a fórmula da tensão não é mais auto-dependente, o que permitirá realizar todas as integrais fora do integrador numérico. Esta nova abordagem torna o processo de cálculo extremamente eficiente, como será visto a seguir ao comparar os tempos de cálculo desta metodologia com aquela apresentada por Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001). Além disso, outra diferença entre as duas abordagens, é que nesta, os parâmetros físicos do sistema são considerados todos diferentes e determinado de acordo com o

PEEV (Princípio da Equivalência Elástica-Viscoelástica) (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985), fato que resulta em uma equação de tensão composta inteiramente por duas partes, uma hidrostática e outra de desvio, tal qual mostrado na Eq.(3.33).

Assim, tem-se um problema com apenas três parâmetros a serem identificados, Uma vez que uso do PEEV permitirá a identificação dos outros três. Na subseção que segue esta seção, será mostrado o processo de identificação dos parâmetros físicos, bem como as unidades de cada um.

3.3.1 Ajuste de curvas

Como explicado anteriormente, o ajuste de curvas é feito somente para o módulo de cisalhamento e o módulo volumétrico definido pela Eq.(3.19). Este processo será realizado utilizando o programa “*SIMPLE Optimization Tool Box*” para Matlab, desenvolvido por Chegury e Steffen (VIANA; STEFFEN, 2007). O método eurístico de Evolução Diferencial disponível no pacote é utilizado, fazendo uso da Eq.(3.17b) como parte da função objetivo do problema, conforme a seguinte expressão:

$$F_{obj} = \left\| \frac{G_{exp} - G^*(i\omega)}{G_{exp}} \right\| \quad (3.34)$$

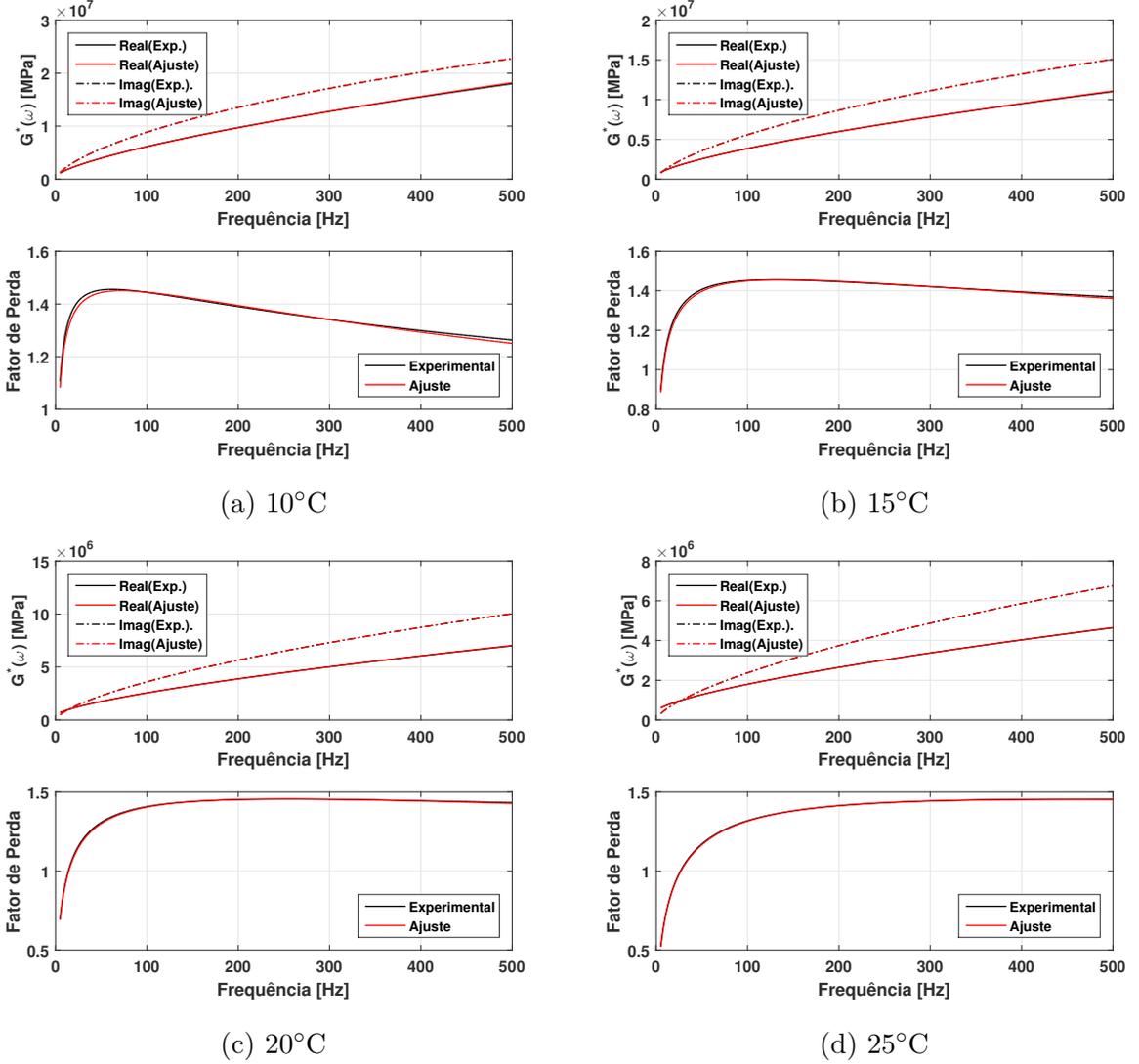
onde G_{exp} são os valores experimentais, os mesmos utilizados no modelo do Módulo Complexo, e $G^*(i\omega)$ são os valores determinados pela Eq.(3.17b).

No processo de ajuste de curvas, várias temperaturas são definidas de modo que um banco de dados seja criado. Desta maneira, valores de temperaturas são definidos de acordo com a aplicabilidade desejada. Caso um valor de temperatura que não se encontra no banco de dados seja definido pelo usuário, o programa de evolução é incorporado ao MEF, e o processo de otimização é realizado normalmente. Entretanto, este procedimento terá um impacto no tempo de cálculo. A Tabela 3.1 mostra os valores obtidos pelas otimizações das seguintes temperaturas:

Tabela 3.1: Valores otimizados dos parâmetros do modelo FDM (*Fractional Derivative Model*)

Temperaturas [°C]	G_0 [Pa]	b_d [Nm ⁻² s ^α]	a_d [s ^α]	α_d [-]
10	412887	147864	0,0008217	0,66714
15	403531	95061	0,0004680	0,66091
20	419582	57563	0,0003162	0,66780
25	427808	35483	0,0002541	0,67643
27	423716	31293	0,00001723	0,67107
29	422615	27288	0,0001097	0,66801
30	425301	24489	0,0001388	0,67273
35	429484	16272	0,0001302	0,67902

Assim, a partir destes resultados as contra-partes hidrostáticas podem ser calculadas, como discutido anteriormente. Curvas do processo de otimização são mostradas para se ter uma noção da qualidade dos resultados. Nota-se que para temperaturas mais baixas, há um pequena perda na qualidade em baixas frequências.



3.3.2 Simplificação do Estado Triplo de tensão

A Eq.(3.33) pode ser simplificada com intuito de facilitar a identificação dos parâmetros, bem como para aliviar o próprio desenvolvimento matemático dos potenciais de energia. Desta maneira, a primeira simplificação será igualar as ordens fracionárias segundo as considerações termodinâmicas discutidas na Seção 3.2. Neste caso, a Eq.(3.33) se torna:

$$[\beta_{j+1}] = A_{j+1}^{(\alpha)} \left([\bar{B}_h] + [\bar{B}_d] \right) - \left([\bar{A}_h] + [\bar{A}_d] \right) \sum_{i=1}^j A_{j+1}^{(\alpha)} [\beta_{j+1-i}] \quad (3.35)$$

Como os termos entre parênteses são dependentes de $\alpha_{h,d}$, os mesmos são expandidos e as ordens fracionárias fatoradas.

$$[\beta_{j+1}] = \Delta t^{-\alpha} [A]^{-1} [D] - \Delta t^{-\alpha} [A]^{-1} (a_h [A_h] + a_d [A_d]) \sum_{i=1}^j A_{j+1}^{(\alpha)} [\beta_{j+1-i}] \quad (3.36)$$

Esta é a forma final da recorrência para $\alpha_h = \alpha_d$. Entretanto, Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001) não a utilizam, pois em seus trabalhos é assumido também que o parâmetro $a_h = a_d = a$. Logo, fazendo esta última suposição, a Eq.(3.36) toma a seguinte forma:

$$[\beta_{j+1}] = \Delta t^{-\alpha} [A]^{-1} [D] - a \Delta t^{-\alpha} [A]^{-1} [I_6] \sum_{i=1}^j A_{j+1}^{(\alpha)} [\beta_{j+1-i}] \quad (3.37)$$

Esta formulação será utilizada para comparar os resultados obtidos com a Fórmula de Recorrência com os obtidos pelo emprego do modelo de Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001). Com vistas a uma confirmação de que a nova formulação de recorrência proposta neste trabalho leva a resultados similares aos apresentados por aqueles autores.

Uma última consideração deve ser feita nesta etapa, referente ao estado de tensão. Como nos modelos de placa utilizados neste trabalho consideram inextensibilidade ao longo da espessura, as componentes nesta direção dos tensores tensão e deformação valem zero. Isto implica que as matrizes de transformação, $[T_{h,d}]$ terão a ordem diminuída para $[5 \times 5]$, uma vez que as tensões e deformações axiais na direção z são removidas.

Além disso, vale salientar que o uso dos conceitos hidrostáticos e de desvio admitem no máximo o estado plano de tensão. Tentar estender esta metodologia para o estado único de tensão não é válido e os resultados são completamente errôneos. Neste caso, o que se faz é utilizar a lei constitutiva unidimensional para alongamento e/ou cisalhamento puro, como será visto a seguir.

3.3.3 Simplificação para Estados Uniaxiais de tensão

Como neste trabalho modelos de vigas serão utilizados para modelar asas de grande alongamento e perfis moderadamente finos, o modelo de viga de Euler-Bernoulli (BATHE, 2006) será utilizado. Se esta viga fosse uma viga simples sob flexão, somente uma lei constitutiva para alongamento seria suficiente. Entretanto, a viga será uma estrutura sanduíche de três camadas, e para que esta modelagem seja possível, os elementos elásticos da viga sanduíche deverão conter o grau de liberdade de alongamento, para que a camada central viscoelástica cisalhe transversalmente ao longo de sua espessura. Além disso, um grau de liberdade de torção pura deverá ser acrescido no modelo, para que seja possível mais tarde implementar a Teoria das Faixas no MEF. Consequentemente, uma segunda lei constitutiva unidimensional deverá ser contemplada, a de cisalhamento puro.

Entretanto, os movimentos de alongamento e torção são idealizados de forma desacoplada, especificamente para este modelo. Isto permite que leis constitutivas para cisalhamento e alongamento sejam definidas de forma separada. Para isso, é utilizado a teoria proposta por Bagley e Torvik (BAGLEY; TORVIK, 1983), a qual abrange os três tipos de comportamento do material viscoelástico: “*rubbery, transition and glassy regions (RTG)*”, ou em português regiões viscosa (ou similar a algo emborrachado), de transição e vítrea. Desta maneira tem-se duas leis constitutivas fracionárias e distintas a serem utilizadas:

$$\sigma_t^E + a_E \frac{d^\alpha \sigma_t^E}{d^\alpha} = E_0 \varepsilon_t^E + E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon_t^E}{dt^\alpha} \quad (3.38a)$$

$$\sigma_t^G + a_G \frac{d^\alpha \sigma_t^G}{d^\alpha} = G_0 2\varepsilon_t^G + G_\infty \frac{d^\alpha 2\varepsilon_t^G}{dt^\alpha} \quad (3.38b)$$

Observa-se ainda que neste caso a lei constitutiva de cisalhamento é basicamente a mesma da lei para o caso de desvio do tensor tensão a menos da matriz de transformação, $[T_d]$. A mudança nos índices é feita somente para diferenciar as tensões e as deformações para cada caso.

Das Eqs.(3.38a) e (3.38b), são obtidas as fórmulas de recorrência, exatamente como feito na Seção3.3. Desta maneira tem-se para o caso de alongamento a seguinte fórmula de recorrência:

$$\sigma_t^E = \sum_{j=0}^{N_l} \beta_{j+1}^E \varepsilon_{t-j\Delta t}^E, \quad \text{onde} \quad \beta_1^E = D_2^E \quad (3.39a)$$

$$\beta_{j+1}^E = D_3^E A_{j+1} + \sum_{i=1}^j D_1^E A_{i+1} \beta_{j+1-i}^E \quad (3.39b)$$

e os parâmetros D_1^E , D_2^E e D_3^E , valem respectivamente:

$$D_1^E = -\frac{a_E \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_2^E = \frac{E_0 + E_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_3^E = \frac{E_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}}$$

E para o caso de cisalhamento,

$$\sigma_t^G = \sum_{j=0}^{N_l} \beta_{j+1}^G \varepsilon_{t-j\Delta t}^G, \quad \text{onde} \quad \beta_1^G = D_2^G \quad (3.40a)$$

$$\beta_{j+1}^G = D_3^G A_{j+1} + \sum_{i=1}^j D_1^G A_{i+1} \beta_{j+1-i}^G \quad (3.40b)$$

e os parâmetros D_1^G , D_2^G e D_3^G , valem respectivamente:

$$D_1^G = -\frac{a_G \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_2^G = \frac{2G_0 + 2G_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_3^G = \frac{2G_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}}$$

A partir das Eqs. (3.40) será possível formular não somente a viga sanduíche, como também os modelos não lineares de uma seção típica com elementos viscoelásticos discretos

de rigidez para alongamento (*plunge*) e cisalhamento (*pitch*). Nos próximos capítulos serão mostradas as formulações em elementos finitos de placas e vigas sanduíches segundo a “*Layerwise Theory*” (REDDY, 2004) empregando para toda a formulação vista neste capítulo.

CAPÍTULO IV

Modelo Matemático de Placas Sanduíche

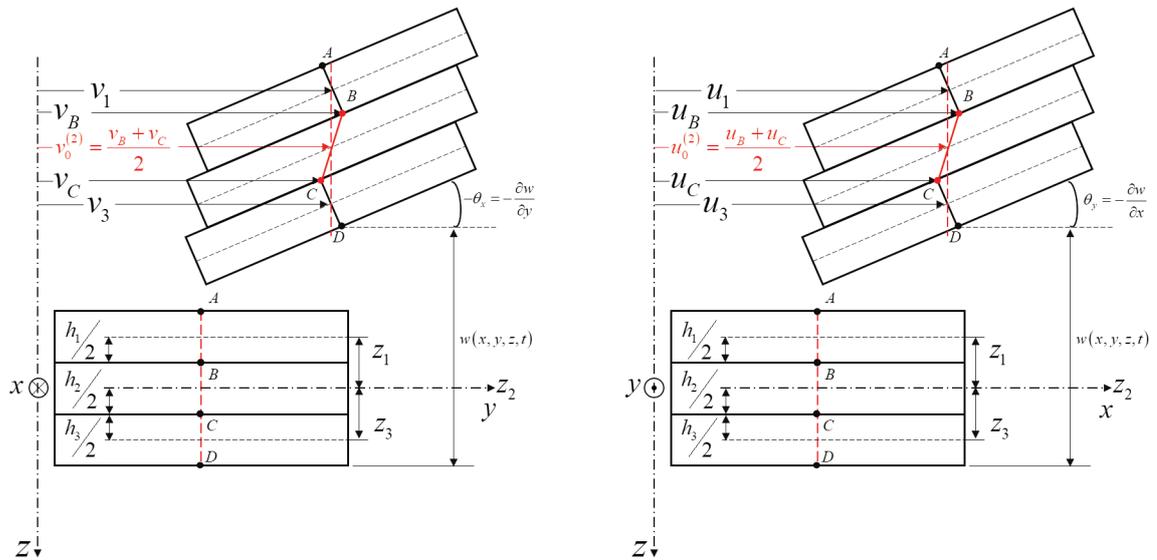
Neste capítulo, os modelos matemáticos nos domínios do tempo e da frequência de placas sanduíches são discutidos. Entretanto, a formulação no domínio da frequência, a qual faz uso do Modelo do Módulo Complexo (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985) não será tratada em detalhes, uma vez que este trabalho é a continuação do mestrado de Cunha Filho (FILHO, 2015), onde toda esta formulação já foi detalhada.

Será discutido, ainda neste capítulo, o modelo de carregamento aerodinâmico em regime supersônico, descrito pela Teoria do Pistão (DOWELL, 1975), para estudar as características da instabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos nos domínios do tempo e da frequência. Neste contexto, é proposto um método distinto de redução de modelo, no domínio da frequência, o qual resultou num artigo publicado na revista “*Mechanical Systems and Signal Processing (MSSP)*”, cuja referência é (FILHO et al., 2017). Este método de redução foi necessário, pois técnicas convencionais baseadas em espaços vetoriais obtidos a partir do problema estático e puramente conservativo não se mostraram efetivas. Isto ocorre devido à presença do acoplamento fluido-estrutura, o qual faz com que o problema de autovalor do sistema se torne do tipo polinomial complexo e não auto-adjunto. Esta característica algébrica pode ser encontrada também em problemas de dinâmica de rotores e problemas multifísicos que contenham elementos piezoelétricos (OUISSSE, 2014).

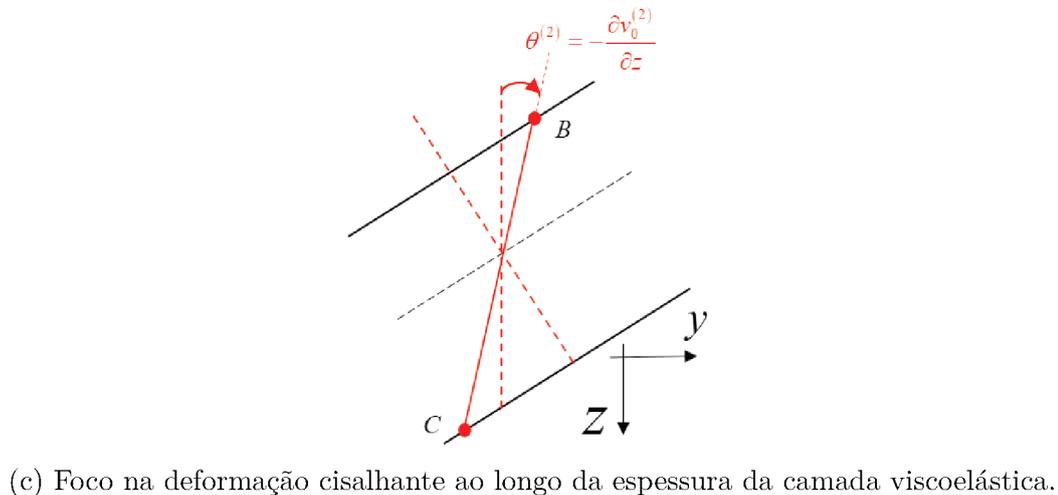
4.1 Desenvolvimento cinemático e Cálculo dos Potenciais de Energia

Neste trabalho, tanto o modelo de placa quanto o de vigas sanduíches são idealizados segundo a teoria Zigue-Zague de primeira ordem (*Layerwise - First Order Shear Deformation Theory, Layerwise - FSDT*, (FARIA, 2010)). Nesta teoria, os deslocamentos das camadas elásticas (base e restringente) são definidos segundo as suposições feitas pela Teoria de Placas de Kirchhof-Love (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

Além destas, é admitido que o deslocamento transversal, $w(x, y, z, t)$, e as rotações θ_x e θ_y são iguais para todas as camadas. A partir deste campo de deslocamento, uma relação cinemática entre as camadas externas é feita supondo a condição de não deslizamento entre as mesmas. Para melhor explicar esta cinemática, um esquema físico é mostrado na Fig.(4.1).



(a) Deslocamento das camadas no plano ZY. (b) Deslocamento das camadas no plano ZX.



(c) Foco na deformação cisalhante ao longo da espessura da camada viscoelástica.

Figura 4.1: Cinemática da placa sanduíche.

Antes de adentrar nos detalhes cinemáticos esquematizados na Fig.4.1, vale introduzir o campo de deslocamento descrito pela *Layerwise - FSDT*. Assim, tem-se que o campo de deslocamento da placa sanduíche pode ser representado pela seguinte equação:

$$\{U^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} u^{(k)}(x, y, z, t) \\ v^{(k)}(x, y, z, t) \\ w^{(k)}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^{(k)}(x, y, t) - (z - z^{(k)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ v_0^{(k)}(x, y, t) - (z - z^{(k)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (4.1a)$$

onde o índice, $k = 1, 2$ e 3 , faz referência às camadas de base, viscoelástica e restringente, respectivamente. Para simplificar a escrita, os desenvolvimentos que seguem serão feitos somente para o plano yz , e os resultados subsequentes devem ser extrapolados para o plano xz .

Observando a Fig.(4.1), tem-se que a condição de não deslizamento entre as camadas pode ser notada pelas cotas v_b e v_c , que são simplesmente os deslocamentos das camadas 1 e 3 avaliados para, $z^{(1)} = -\frac{h_1+h_2}{2}$ e $z^{(3)} = \frac{h_3+h_2}{2}$, respectivamente. Percebe-se ainda que, pelo fato da referência do sistema estar posicionada exatamente sobre a linha neutra da camada viscoelástica, tem-se que $z^{(2)} = 0$, logo, o deslocamento da camada viscoelástica pode ser descrito pela seguinte equação:

$$v^{(2)}(x, y, z, t) = v_0^{(2)}(x, y, t) + z\theta^{(2)}(x, y, t) = v_0^{(2)}(x, y, t) + z \frac{\partial v_0^{(2)}(x, y, t)}{\partial z} \quad (4.2)$$

O termo, $v_0^{(2)}$, descreve o deslocamento da camada viscoelástica sobre a linha neutra e pode ser definido como sendo uma relação cinemática entre as camadas (1) e (3). Portanto, avalia-se, $v^{(1)}(x, y, -h/2, t)$ e $v^{(3)}(x, y, h/2, t)$:

$$v^{(1)}\left(x, y, -\frac{h_2}{2}, t\right) = v_B = v_1(x, y, t) - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.3a)$$

$$v^{(3)}\left(x, y, \frac{h_2}{2}, t\right) = v_C = v_3(x, y, t) + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.3b)$$

É possível agora descrever o deslocamento sobre a linha neutra da camada viscoelástica pela seguinte equação:

$$v_0^{(2)}(x, y, t) = \frac{v_1(x, y, t) + v_3(x, y, t)}{2} + \frac{h_3 - h_1}{4} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} = \dots \dots \frac{1}{2} \left[v_1(x, y, t) + v_3(x, y, t) + \frac{h_3 - h_1}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right] \quad (4.4)$$

O outro termo do campo de deslocamento da camada viscoelástica, $\frac{\partial v_0^{(2)}(z, y, t)}{\partial z}$, e responsável pelo cisalhamento ao longo da espessura pode ser definido pelas observações feitas na Fig.(4.0c) e admitindo pequenos deslocamentos:

$$\frac{\partial v_0^{(2)}(y, t)}{\partial z} \approx \frac{(v_C - v_B)}{h_2} \quad (4.5)$$

Utilizando as relações de v_B e v_C , tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial v_0^{(2)}(x, y, t)}{\partial z} = \frac{1}{h_2} \left(v_3(x, y, t) - v_1(x, y, t) + \frac{h_3 + h_1}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (4.6)$$

Introduzindo as Eqs.(4.4) e (4.6) na Eq.(4.2), define-se o campo de deslocamento da camada viscoelástica na direção, y , em função dos graus de liberdade das camadas base

e restrigente. De maneira análoga tem-se o deslocamento na direção x . Portanto, o deslocamento total da camada viscoelástica é definido como:

$$v^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left[v_1(x, y, t) + v_3(x, y, t) + \frac{d_1}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right] + \dots \quad (4.7a)$$

$$\dots + \frac{z_2}{h_2} \left[v_3(x, y, t) - v_1(x, y, t) + \frac{d_2}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right]$$

$$u^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left[u_1(x, y, t) + u_3(x, y, t) + \frac{d_1}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right] + \dots \quad (4.7b)$$

$$\dots + \frac{z_2}{h_2} \left[u_3(x, y, t) - u_1(x, y, t) + \frac{d_2}{2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right]$$

$$w^{(2)}(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (4.7c)$$

onde $d_1 = h_3 - h_1$ e $d_2 = h_1 + h_3$. Quanto aos deslocamentos das camadas externas elásticas, tem-se que os mesmos são expressos pelas seguintes equações:

$$U^{(1)} = \begin{Bmatrix} u^{(1)}(x, y, z, t) \\ v^{(1)}(x, y, z, t) \\ w^{(1)}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^{(1)}(x, y, t) - (z - z^{(1)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ v_0^{(1)}(x, y, t) - (z - z^{(1)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$U^{(3)} = \begin{Bmatrix} u^{(3)}(x, y, z, t) \\ v^{(3)}(x, y, z, t) \\ w^{(3)}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^{(3)}(x, y, t) - (z - z^{(3)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ v_0^{(3)}(x, y, t) - (z - z^{(3)}) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Destes deslocamentos, os potenciais de energia cinética de cada camada podem ser calculados para determinação das matrizes de massa pelas seguintes expressões:

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} \int_V \rho_1 \left(\frac{dU^{(1)}}{dt} \right)^2 dV \quad (4.10a)$$

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \rho_2 \left(\frac{dU^{(2)}}{dt} \right)^2 dV \quad (4.10b)$$

$$T^{(3)} = \frac{1}{3} \int_V \rho_3 \left(\frac{dU^{(3)}}{dt} \right)^2 dV \quad (4.10c)$$

onde $\rho_{1,2,3}$ são as densidades dos materiais de cada camada.

Para as energias de deformação de cada camada, $\Pi^{(1,2,3)}$, primeiramente calcula-se todas as deformações. Entretanto, vale lembrar que neste trabalho assume-se a inextensibilidade das camadas na direção z , ou seja, não há deformações axiais nesta direção, o que faz com a matriz constitutiva tenha a ordem reduzida, seja para o Módulo Complexo,

seja para o modelo fracionário. Assim, as deformações das camadas elásticas são definidas como segue:

$$\{\varepsilon^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(j)} \\ \varepsilon_{yy}^{(j)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(j)} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_m^{(j)}\} + z \{\varepsilon_f^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x} \\ \frac{\partial v_j}{\partial y} \\ \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

onde $j = 1, 3$ faz referência somente às camadas elásticas. Esta separação de equacionamento entre as camadas elásticas e viscoelástica é feita devido aos efeitos presentes em cada material. Desta maneira, tem-se que a lei constitutiva para as camadas elásticas é definida da forma:

$$\{\sigma^{(j)}\} = E_j [\bar{E}] \{\varepsilon^{(j)}\} = E_j \frac{1}{(1 - \nu_j^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_j & 0 \\ \nu_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_j}{2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde, E_j , é o módulo de elasticidade de cada camada e ν_j , é o coeficiente de Poisson. Finalmente o potencial de energia de deformação das camadas elásticas pode ser determinado:

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^{(j)}\}^T \{\sigma^{(j)}\} dV \quad (4.13)$$

Substituindo as Eqs.(4.11) e (4.12) na Eq.(4.13), as parcelas de energia de deformação de membrana e flexão são determinadas.

$$\begin{aligned} \Pi^{(j)} = \Pi_m^{(j)} + \Pi_f^{(j)} &= \frac{1}{2} E_j h_j \int_A \{\varepsilon_m^{(j)}\}^T [\bar{E}] \{\varepsilon_m^{(j)}\} dA + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} E_j \frac{h_j^3}{12} \int_A \{\varepsilon_f^{(j)}\}^T [\bar{E}] \{\varepsilon_f^{(j)}\} dA \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, ao derivar a Eq.(4.14) em relação às coordenadas generalizadas, as matrizes de rigidez de membrana, $[K_m^{(j)}]$, e flexão, $[K_f^{(j)}]$, são obtidas para as camadas elásticas.

Em relação à camada viscoelástica, será desenvolvido primeiramente o cálculo dos potenciais de energia adaptado ao Módulo Complexo, por sua maior simplicidade em relação ao cálculo fracionário. Este último será apresentado em uma seção separada. Portanto, como no módulo complexo a Lei de Hooke Generalizada ainda é utilizada para o cálculo dos potenciais de energia, tem-se que a matriz constitutiva da camada viscoelástica é definida da seguinte forma:

$$\{\sigma^{(2)}\} = G(\omega, T) [\bar{G}] \{\varepsilon^{(2)}\} = G(\omega, T) \begin{bmatrix} \frac{2}{1 - \nu_2} & \frac{2\nu_2}{1 - \nu_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu_2}{1 - \nu_2} & \frac{2}{1 - \nu_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\varepsilon^{(2)}\} \quad (4.15)$$

Nota-se que neste caso, o termo fatorado da matriz é o $G(\omega, T)$, pois suas propriedades são determinadas por ajuste de curva de valores experimentais medidos para o módulo de cisalhamento do material. Resta definir o campo de deformação da camada (2), o qual é descrito como segue:

$$\left\{ \varepsilon^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_3) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z}{h_2} \frac{\partial}{\partial x} (u_3 - u_1) + \frac{zd_2}{2h_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v_1 + v_3) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{z}{h_2} \frac{\partial}{\partial y} (v_3 - v_1) + \frac{zd_2}{2h_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_1 + u_3) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_1 + v_3) + \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \dots \\ \dots + \frac{z}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (u_3 - u_1) + \frac{\partial}{\partial x} (v_3 - v_1) + d_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{1}{h_2} \left(u_3 - u_1 + \frac{d_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{h_2} \left(v_3 - v_1 + \frac{d_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

onde h_2 é a espessura da camada viscoelástica e $d_3 = h_1 + 2h_2 + h_3$ é um novo parâmetro que surge ao fatorar, $1/h_2$, das últimas duas linhas do vetor. Assim, é possível separar os efeitos de membrana, flexão e cisalhamento da camada viscoelástica:

$$\left\{ \varepsilon^{(2)} \right\} = \left\{ \varepsilon_m^{(2)} \right\} + \frac{z}{h_2} \left\{ \varepsilon_f^{(2)} \right\} + \frac{1}{h_2} \left\{ \varepsilon_c^{(2)} \right\} \quad (4.17)$$

onde,

$$\square \left\{ \varepsilon_m^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_3) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v_1 + v_3) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_1 + u_3) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_1 + v_3) + \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\square \left\{ \varepsilon_f^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (u_3 - u_1) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_3 - v_1) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_3 - u_1) + \frac{\partial}{\partial x} (v_3 - v_1) + d_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\square \left\{ \varepsilon_c^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 - u_1 + \frac{d_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \\ v_3 - v_1 + \frac{d_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}.$$

Finalmente o potencial de energia viscoelástica é calculado.

$$\Pi^{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^{(2)}\}^T \{\sigma^{(2)}\} dV = \frac{1}{2} G(\omega, T) \int_V \{\varepsilon^{(2)}\}^T [\bar{G}] \{\varepsilon^{(2)}\} dV \quad (4.18)$$

A Eq.(4.18) resultará em três componentes de energia de deformação, os quais são mostrados abaixo:

$$\Pi^{(2)} = \Pi_m^{(2)} + \Pi_f^{(2)} + \Pi_c^{(2)} \quad (4.19)$$

Cada um destes potenciais vale,

$$\square \Pi_m^{(2)} = \frac{1}{2} G(\omega, T) h_2 \int_A \{\varepsilon_m^{(2)}\}^T [\bar{G}] \{\varepsilon_m^{(2)}\} dA = \frac{1}{2} \{q_t\}^T [K_m^{(2)}] \{q_t\};$$

$$\square \Pi_f^{(2)} = \frac{1}{2} G(\omega, T) \frac{h_2}{12} \int_A \{\varepsilon_f^{(2)}\}^T [\bar{G}] \{\varepsilon_f^{(2)}\} dA = \frac{1}{2} \{q_t\}^T [K_f^{(2)}] \{q_t\};$$

$$\square \Pi_c^{(2)} = \frac{1}{2} G(\omega, T) \frac{1}{h_2} \int_A \{\varepsilon_c^{(2)}\}^T [\bar{G}] \{\varepsilon_c^{(2)}\} dA = \frac{1}{2} \{q_t\}^T [K_c^{(2)}] \{q_t\}.$$

onde $\{q\}$, é o vetor de graus de liberdade, que surge na formulação após aplicação do Método dos Elementos Finitos. Entretanto, este processo não será demonstrado neste trabalho por estar explicado na referência (FILHO, 2015).

Uma vez definido o modelo de placas sanduíches segundo o módulo complexo, a próxima seção discutirá o modelo de derivadas fracionárias aplicado a placas sanduíches segundo a Fórmula de Recorrência.

4.2 Modelo de Placa Sanduíche com Cálculo Fracionário

Nesta seção, o modelo de placa sanduíche é desenvolvido utilizando a nova representação do cálculo fracionário proposto neste trabalho como abordagem para representação do comportamento dinâmico do material viscoelástico. O desenvolvimento é feito a partir da lei constitutiva recorrente definida na Seção 3, Eq.(3.37) e das deformações da camada viscoelástica descritas pela Eq.(4.17). Desta maneira, é possível descrever os potenciais de deformação viscoelástica em termos da recorrência para os três efeitos, já admitindo $\{\sigma_k\}_t = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_k\}_{t-j\Delta t}$, onde $k = m, f, c$ faz referência os efeitos de membrana, flexão e cisalhamento. Portanto, tem-se as seguintes equações:

$$\Pi_{m,t}^{(2)} = \frac{1}{2} h_2 \int_A \{\varepsilon_m\}^T \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_m\}_{t-j\Delta t} dA \quad (4.20a)$$

$$\Pi_{f,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{h_2}{12} \int_A \{\varepsilon_f\}^T \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_f\}_{t-j\Delta t} dA \quad (4.20b)$$

$$\Pi_{c,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{h_2} \int_A \{\varepsilon_c\}^T \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_c\}_{t-j\Delta t} dA \quad (4.20c)$$

Estes potenciais devem ser avaliados para $j = 0$, pois da forma como estão contêm tanto as componentes de rigidez viscoelástica quanto as rigidezes ditas modificadas, que são responsáveis por gerarem os esforços dissipativos. Tem-se, então, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \Pi_{m,t}^{(2)} &= \frac{1}{2} h_2 \int_A \{\varepsilon_m\}^T [\bar{C}] \{\varepsilon_m\}_{t-j\Delta t} dA + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} h_2 \int_A \{\varepsilon_m\}^T \sum_{j=1}^{N_t} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_m\}_{t-j\Delta t} dA \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{f,t}^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{h_2}{12} \int_A \{\varepsilon_f\}^T [\bar{C}] \{\varepsilon_f\}_{t-j\Delta t} dA + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \frac{h_2}{12} \int_A \{\varepsilon_f\}^T \sum_{j=1}^{N_t} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_f\}_{t-j\Delta t} dA \end{aligned} \quad (4.21b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{c,t}^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{h_2} \int_A \{\varepsilon_c\}^T [\bar{C}] \{\varepsilon_c\}_{t-j\Delta t} dA + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} h_2 \int_A \{\varepsilon_c\}^T \sum_{j=1}^{N_t} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon_c\}_{t-j\Delta t} dA \end{aligned} \quad (4.21c)$$

A primeira integral do lado direito das Eqs.(4.21) resultarão nas componentes viscoelásticas de rigidez da placa sanduíche, enquanto que a segunda, a que contém o somatório do histórico de deslocamentos, formarão os esforços dissipativos. Para mostrar o surgimento destes termos, o método dos Elementos Finitos será apresentado na sequência.

4.2.1 Discretização por Elementos Finitos da Placa Sanduíche no domínio do tempo

Para modelar a placa sanduíche, um elemento finito retangular isoparamétrico com quatro nós nas extremidades é utilizado. Com base na teoria descrita na seção anterior, foi concebido um elemento com as características mostradas na Fig.(4.2).

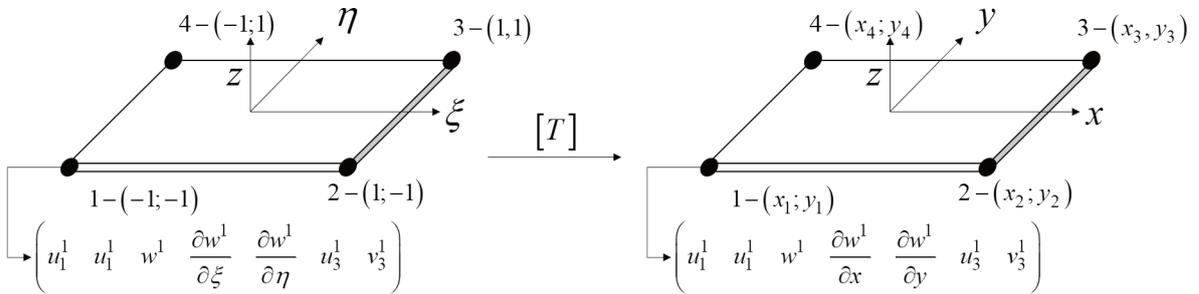


Figura 4.2: Esquema do elemento finito isoparamétrico utilizado em coordenadas locais, η e ξ , e globais x e y .

Neste elemento cada nó possui 7 graus de liberdade, totalizando 28 graus de liberdade por elemento, que podem ser representados da seguinte forma:

$$\{q_t^{(i)}\}^T = [u_1^{(i)} \quad v_1^{(i)} \quad w^{(i)} \quad \theta_x^{(i)} \quad \theta_y^{(i)} \quad u_3^{(i)} \quad v_3^{(i)}]_t \quad (4.22)$$

onde, $i = 1, 2, 3, 4$, faz referência aos nós do elemento. É importante dizer que, $\{q_t^{(i)}\}^T$, é descrito no sistema de coordenadas globais, x e y , ao passo que os polinômios interpoladores em coordenadas locais, ξ e η . Isto implicará no uso do operador jacobiano para transformação de coordenadas e correções das rotações nodais, como será visto mais adiante nesta seção.

Portanto, para cada grau de liberdade faz necessário determinar um tipo de interpolação. Neste contexto, é importante atender os critério de continuidade das funções, uma vez que o grau do polinômio interpolador utilizado deve ser escolhido corretamente para representar o grau de liberdade, $w(x, y, t)$, e assim garantir uma continuidade mínima. Para melhor compreender a continuidade do polinômio e conseqüentemente do elemento finito a ser utilizado, tome uma função, $f(t) : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$. Esta função é de continuidade $C^k = C^k(\Omega)$, se suas derivadas de ordem j , onde $0 \leq j \leq k$, existirem e forem funções contínuas. Desta forma, tem-se que o polinômio interpolador de $w(x, y, t)$, deve ter no mínimo continuidade C^1 , para que suas derivadas de primeira ordem sejam contínuas e diferenciáveis uma segunda vez. Como conseqüência, o elemento finito obtido é também de continuidade C^1 .

Assim, polinômios bi-cúbicos são utilizados para descrever em coordenadas locais o deslocamento transversal, $w(\eta, \xi, t)$, e a partir deste, as rotações são determinadas. Quanto aos deslocamentos na direções x e y , responsáveis pelo efeito de membrana da placa, polinômios bi-lineares são utilizados. Todos eles são mostrados abaixo:

$$u_1(\xi, \eta, t) = a_0 + a_1\eta + a_2\xi + a_3\eta\xi \quad (4.23a)$$

$$v_1(\xi, \eta, t) = a_4 + a_5\eta + a_6\xi + a_7\eta\xi \quad (4.23b)$$

$$w(\xi, \eta, t) = a_8 + a_9\eta + a_{10}\xi + a_{11}\eta\xi + a_{12}\eta^2 + a_{13}\xi^2 + a_{14}\eta^2\xi + \dots \quad (4.23c)$$

$$\dots + a_{15}\eta\xi^2 + a_{16}\xi^3 + a_{17}\eta^3 + a_{18}\eta^3\xi + a_{19}\eta\xi^3$$

$$\theta_\xi(\xi, \eta, t) = a_9 + a_{11}\xi + 2a_{12}\eta + 2a_{14}\eta\xi + a_{15}\xi^2 + 3a_{17}\eta^2 + 3a_{18}\eta^2\xi + a_{19}\xi^3 \quad (4.23d)$$

$$\theta_\eta(\xi, \eta, t) = a_{10} + a_{11}\eta + 2a_{13}\xi + a_{14}\eta^2 + 2a_{15}\eta\xi + 3a_{16}\xi^2 + a_{18}\eta^3 + 3a_{19}\eta\xi^2 \quad (4.23e)$$

$$u_3(\xi, \eta, t) = a_{20} + a_{21}\eta + a_{22}\xi + a_{23}\eta\xi \quad (4.23f)$$

$$v_3(\xi, \eta, t) = a_{24} + a_{25}\eta + a_{26}\xi + a_{27}\eta\xi \quad (4.23g)$$

A partir destes polinômios, as funções de forma para cada grau de liberdade devem ser determinadas. Primeiramente, as Eqs.(4.23) podem ser reescritas matricialmente, como mostrado a seguir:

$$\{U_t\} = [P(\xi, \eta)] \{a_t\} \quad (4.24)$$

onde, $[P(\xi, \eta)]$ contém as variáveis ξ e η dos polinômios e o vetor, $\{a_t\}$ as constantes dos polinômios dependentes do tempo a serem determinadas. Para isso, uma primeira aproximação é feita avaliando todas as coordenadas nodais $\xi = [-1, 1]$ e $\eta = [-1, 1]$ obtendo

$\{q_t^*\}$, que é uma primeira solução nodal obtida pela avaliação das coordenadas nodais. A notação, \cdot^* , mostra que este vetor não sofreu correções nodais devido às rotações. As correções serão mostradas logo a seguir. Este cálculo é mostrado a seguir.

$$\{q_t^*\}^{(e)} = \begin{bmatrix} [P(-1, -1)] \\ [P(1, -1)] \\ [P(1, 1)] \\ [P(1, 1)] \end{bmatrix} \{a_t\} = [P^{(e)}(\xi, \eta)]_{[28 \times 28]} \{a_t\}_{[28 \times 1]} \quad (4.25)$$

Agora é possível determinar os valores das constantes dos polinômios invertendo a matriz $[P^{(e)}(\xi, \eta)]$,

$$\{a_t\} = [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.26)$$

Substituindo a Eq.(4.26) na Eq.(4.24), tem-se que os deslocamentos podem ser descritos em termos das funções de forma, $[N]$:

$$u_1(\xi, \eta) = [P_{u_1}] [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} = [N_{u_1}] \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.27a)$$

$$v_1(\xi, \eta) = [P_{v_1}] [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} = [N_{v_1}] \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.27b)$$

$$w(\xi, \eta) = [P_w] [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} = [N_w] \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.27c)$$

$$\theta_\xi(\xi, \eta) = [P_{\theta_\xi}] [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} = [N_{\theta_\xi}] \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.27d)$$

$$\theta_\eta(\xi, \eta) = [P_{\theta_\eta}] [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} = [N_{\theta_\eta}] \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.27e)$$

$$u_3(\xi, \eta) = [P_{u_3}] [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} = [N_{u_3}] \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.27f)$$

$$v_3(\xi, \eta) = [P_{v_3}] [P^{(e)}(\xi, \eta)]^{-1} \{q_t^*\}^{(e)} = [N_{v_3}] \{q_t^*\}^{(e)} \quad (4.27g)$$

Apesar das funções de forma terem sido determinadas, ainda há inconsistências no que se refere ao uso das coordenadas locais, pois o vetor de incógnitas nodais elementar $\{q_t^*\}^{(e)}$ está descrito em coordenadas locais. Para isso é necessário fazer as correções das rotações nodais por meio de uma matriz de transformação linear $[T]$, onde:

$$\{q_t^*\}^{(e)} = [T] \{q_t\}^{(e)} \quad (4.28)$$

onde a matriz, $[T]$ é composta dos seguintes termos:

$$[T] = \begin{bmatrix} [M_p] & & & zeros \\ & [M_p] & & \\ & & [M_p] & \\ zeros & & & [M_p] \end{bmatrix} \quad (4.29a)$$

$$[M_p] = \begin{bmatrix} [I_{3 \times 3}] & zeros \\ & [J] \\ zeros & [I_{2 \times 2}] \end{bmatrix} \quad (4.29b)$$

A matriz $[J]$ é o Jacobiano, obtido ao aplicar a regra da cadeia para derivar o campo de deslocamento, $\{U_t(\xi, \eta)\}$, em relação às coordenadas locais, como mostrado abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial\{U\}_t}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\{U\}_t}{\partial\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\{U\}_t}{\partial x} \\ \frac{\partial\{U\}_t}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\{U\}_t}{\partial x} \\ \frac{\partial\{U\}_t}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

onde x e y são descritas em função das coordenadas locais através das seguintes funções de interpolação, ou de mapeamento:

$$x = x_c + a\frac{\xi}{2}, \quad x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad a = x_2 - x_1; \quad (4.31a)$$

$$y = y_c + b\frac{\eta}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad b = y_2 - y_1. \quad (4.31b)$$

e a e b são os comprimentos do elemento nas direções x e y , respectivamente.

Mais detalhes sobre como obter as funções de mapeamento são encontradas no Apêndice A.4. Portanto, substituindo a Eq.(4.28) na Eq.(4.27), as funções de forma em coordenadas locais corrigidas das rotações, são obtidas como segue:

$$\{U_{i,t}(x, y)\} = [N_i(\xi, \eta)] [T] \{q_t\}^{(e)} \quad (4.32)$$

Substituindo os deslocamentos descritos em função das funções de interpolação, nos potenciais de energia, as matrizes elementares de massa e rigidez do problema são determinadas.

4.2.2 Obtenção das matrizes de massa e rigidez no domínio do tempo

A partir dos cálculos dos potenciais de energia cinética, ver Eq.(4.10c), e energia de deformação, ver Eq.(4.19), os mesmos são introduzidos na Equação de Lagrange para obtenção da equação do movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT^{(2)}}{d\{\dot{q}_t\}^{(e)}} \right) + \frac{d\Pi^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} = 0 \quad (4.33)$$

Desenvolvendo o termo que contém a energia cinética, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT^{(2)}}{d\{\dot{q}_t\}^{(e)}} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\{\dot{q}_t\}^{(e)}} \left(\frac{1}{2} h_2 \rho_2 \int_A (\dot{u}^{(2)} + \dot{v}^{(2)} + \dot{w}^{(2)})^2 dA \right) \right] = [M^{(e)}]^{(2)} \{\ddot{q}_t\} \quad (4.34)$$

Após as duas derivações, as componentes de massa de translação (T), rotação (R) são determinadas a nível elementar. Substituindo as funções de forma descritas nas Eqs.(4.32) na Eq.(4.34), e considerar os processos de derivação por meio da regra da cadeia, as seguintes matrizes são obtidas:

$$\begin{aligned} [M^{(e)}]^{(2)} = & \rho_2 h_2 \int_A [M_T] \det([J]) d\xi d\eta + \rho_2 \frac{h_2}{12} \int_A [M_R] \det([J]) d\xi d\eta + \dots \\ & \dots + \rho_2 h_2 \int_A [N_w]^T [N_w] \det([J]) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $[M_T]$ e $[M_R]$ são descritas como segue:

$$[M_T] = [N_u^T]^T [N_u^T] + [N_v^T]^T [N_v^T], \quad \text{onde :} \quad (4.36a)$$

$$[N_u^T] = \frac{1}{2} ([N_{u1}] + [N_{u3}]) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (4.36b)$$

$$[N_v^T] = \frac{1}{2} ([N_{v1}] + [N_{v3}]) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.36c)$$

$$[M_R] = [N_u^R]^T [N_u^R] + [N_v^R]^T [N_v^R], \quad \text{onde :} \quad (4.37a)$$

$$[N_u^R] = \frac{1}{h_2} ([N_{u3}] - [N_{u1}]) + \frac{d_2}{2h_2} \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (4.37b)$$

$$[N_v^R] = \frac{1}{h_2} ([N_{v3}] - [N_{v1}]) + \frac{d_2}{2h_2} \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.37c)$$

Nota-se que as componentes de rotação que originarão flexão e torção são descritas pelos termos que contém as derivadas da função de forma relativa ao deslocamento w . Além disso, tem-se que $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{a}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2}{b}$.

Em seguida, as funções de forma são substituídas nos potenciais de energia de deformação descritos pelas Eqs.(4.21) e derivados em relação a $\{q_t\}^{(e)}$, para obtenção das matrizes de rigidez viscoelástica e “*rigidezes modificadas*”, as quais originarão os esforços internos dissipativos do material viscoelástico. Desta maneira, as componentes dos potenciais de energia são separadas nas parcelas de rigidez e rigidez modificada, no intuito de facilitar a compreensão:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} &= \frac{d\Pi_{m^*,t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} + \frac{d\Pi_{f^*,t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} + \frac{d\Pi_{c^*,t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} + \dots \\ &\dots + \frac{d\Pi_{m^{**},t-j\Delta t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} + \frac{d\Pi_{f^{**},t-j\Delta t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} + \frac{d\Pi_{c^{**},t-j\Delta t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Conclui-se que os índices (*) e (**) fazem referência às componentes de rigidez viscoelástica e rigidez viscoelástica modificada, respectivamente, sendo que este último resultará nos esforços dissipativos do material que comporão o lado direito da equação do movimento.

Serão desenvolvidos primeiramente os termos que originarão a rigidez viscoelástica, a

começar pela componente de membrana (m):

$$\frac{d\Pi_{m^*,t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} = h_2 \int_A [B_m]^T [\bar{C}] [B_m] \det([J]) d\xi d\eta \{q_t\}^{(e)} = [K_m^{(*,e)}]^{(2)} \{q_t\}^{(e)}, \quad (4.39a)$$

$$[B_m] = [B_m^0] + d_1 [B_m^1] \quad (4.39b)$$

$$[B_m^0] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} ([N_{u_1}] + [N_{u_3}]) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} ([N_{v_1}] + [N_{v_3}]) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} ([N_{u_1}] + [N_{u_3}]) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \xi} ([N_{v_1}] + [N_{v_3}]) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ [0_{1 \times 12}] \\ [0_{1 \times 12}] \end{bmatrix} \quad (4.39c)$$

$$[B_m^1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \frac{1}{4} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ [0_{1 \times 28}] \\ [0_{1 \times 28}] \end{bmatrix} \quad (4.39d)$$

flexão:

$$\frac{d\Pi_{f^*,t}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} = \frac{h_2}{12} \int_A [B_f]^T [\bar{C}] [B_f] \det([J]) d\xi d\eta \{q_t\}^{(e)} = [K_f^{(*,e)}]^{(2)} \{q_t\}^{(e)}, \quad (4.40a)$$

$$[B_f] = [B_f^0] + d_2 [B_f^1] \quad (4.40b)$$

$$[B_f^0] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} ([N_{u_3}] - [N_{u_1}]) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} ([N_{v_3}] - [N_{v_1}]) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} ([N_{u_3}] - [N_{u_1}]) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \xi} ([N_{v_3}] - [N_{v_1}]) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ [0_{1 \times 12}] \\ [0_{1 \times 12}] \end{bmatrix} \quad (4.40c)$$

$$[B_f^1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ [0_{1 \times 28}] \\ [0_{1 \times 28}] \end{bmatrix} \quad (4.40d)$$

e cisalhamento:

$$\frac{d\Pi_{c^{*,t}}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} = \frac{1}{h_2} \int_A [B_c]^T [\bar{C}] [B_c] \det([J]) d\xi d\eta \{q_t\}^{(e)} = [K_c^{(*,e)}]^{(2)} \{q_t\}^{(e)}, \quad (4.41a)$$

$$[B_c] = [B_c^0] + d_3 [B_c^1] \quad (4.41b)$$

$$[B_c^0] = \begin{bmatrix} [0_{1 \times 28}] \\ [0_{1 \times 28}] \\ [0_{1 \times 28}] \\ [N_{u_3}] - [N_{u_1}] \\ [N_{u_3}] - [N_{u_1}] \end{bmatrix} \quad (4.41c)$$

$$[B_c^1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [0_{1 \times 28}] \\ [0_{1 \times 28}] \\ [0_{1 \times 28}] \\ \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial [N_w]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.41d)$$

Finalmente, as componentes do potencial de energia referente ao campo de deslocamento não local são desenvolvidos, a iniciar pelo termo de membrana:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{m^{**,t-j\Delta t}}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} &= h_2 \int_A [B_m]^T \sum_{j=1}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_m] \det([J]) d\xi d\eta \{q_{t-j\Delta t}\}^{(e)} = \dots \\ &\dots = h_2 \sum_{j=1}^{N_l} [K_m^{(**,e)}]_{(j)}^{(2)} \{q_{t-j\Delta t}\}^{(e)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

em seguida, flexão:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{f^{**,t-j\Delta t}}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} &= \frac{h_2}{12} \int_A [B_f]^T \sum_{j=1}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_f] \det([J]) d\xi d\eta \{q_{t-j\Delta t}\}^{(e)} = \dots \\ &\dots = \frac{h_2}{12} \sum_{j=1}^{N_l} [K_f^{(**,e)}]_{(j)}^{(2)} \{q_{t-j\Delta t}\}^{(e)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

e finalmente, cisalhamento:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{c^{**,t-j\Delta t}}^{(2)}}{d\{q_t\}^{(e)}} &= \frac{1}{h_2} \int_A [B_c]^T \sum_{j=1}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_c] \det([J]) d\xi d\eta \{q_{t-j\Delta t}\}^{(e)} = \dots \\ &\dots = \frac{1}{h_2} \sum_{j=1}^{N_l} [K_c^{(**,e)}]_{(j)}^{(2)} \{q_{t-j\Delta t}\}^{(e)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde o termo de recorrência, $[\beta_{j+1}]$, é definido pela Eq.(3.37), pois trata-se de um estado plano de tensão.

As Eqs.(4.42), (4.43) e (4.44), mostram como o processo de cálculo faz com que todas as integrais possam ser calculadas fora do integrador numérico. Esta é a principal contribuição da Fórmula de Recorrência que viabiliza introduzir a viscoelasticidade em problemas aeroelásticos, como será visco a seguir. Entretanto, será demandado uma certa quantidade de memória diretamente proporcional à quantidade de vetores (N_l) utilizados para computar o efeito de não-localidade, porém esta quantidade de memória é incomparável com aquela demandada por Schmidt e Gaul.

Portanto, utilizando processos clássicos de montagem de matrizes elementares em elementos finitos, a equação global do movimento é definida:

$$[M]^{(g)} \{\ddot{Q}\}_t + [K]^{(g)} \{Q\}_t = \{F_v\}_{t-j\Delta t} \quad (4.45)$$

onde,

$$[M]_{(g)} = [M^{(1)}]^{(g)} + [M^{(2)}]^{(g)} + [M^{(3)}]^{(g)} \quad (4.46a)$$

$$[K]_{(g)} = [K^{(1)}]^{(g)} + [K^{(2)}]^{(g)} + [K^{(3)}]^{(g)} \quad (4.46b)$$

$$\{F_{t-j\Delta t, v}\} = - \sum_{j=1}^{N_l} [K_{(g)}^{(**)}]_{(j)}^{(2)} \{Q\}_{t-j\Delta t} \quad (4.46c)$$

Um algoritmo é proposto para facilitar a compreensão do método numérico de integração de Newmark utilizado para solucionar a equação do movimento (4.45) e determinar os vetores de deslocamentos para todos os instantes de tempo.

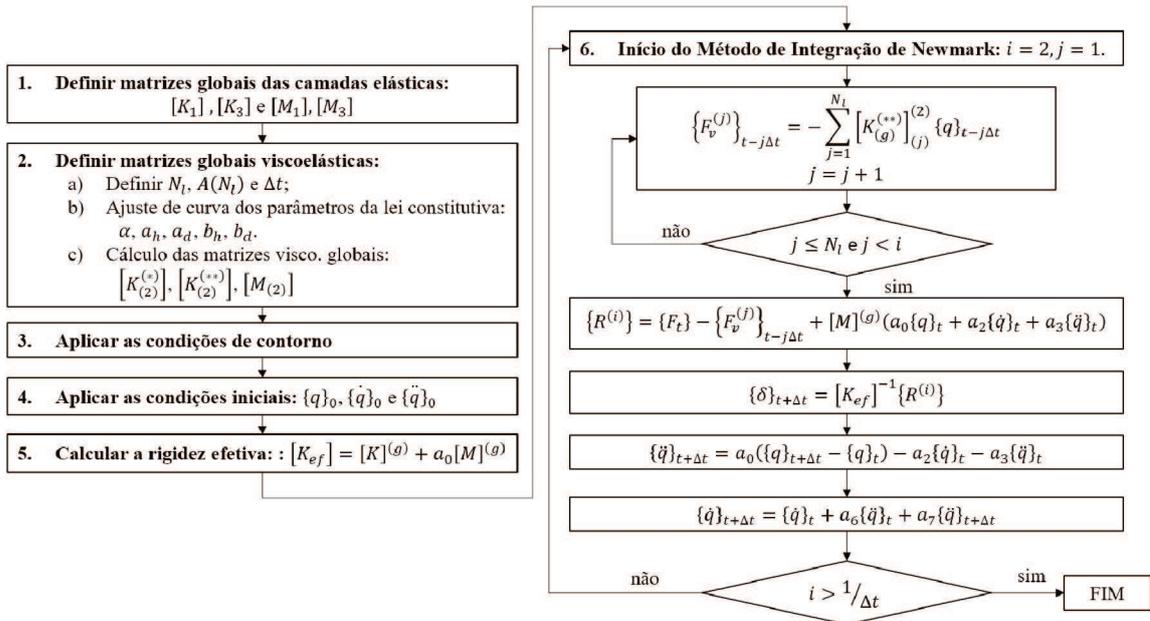


Figura 4.3: Algoritmo para integração da equação do movimento com cálculo fracionário.

4.3 Teoria do Pistão - Carregamento Aerodinâmico em Regime Supersônico

Nesta seção a Teoria do Pistão para representação do carregamento aerodinâmico será descrita brevemente. Basicamente a Teoria do Pistão representa o carregamento aerodinâmico de um painel aeronáutico fixado de tal maneira que somente uma de suas superfícies entra em contato com o escoamento supersônico e a outra se encontra em um ambiente de ar estagnado, ou cavidade. A Fig(4.4) esquematiza este sistema.

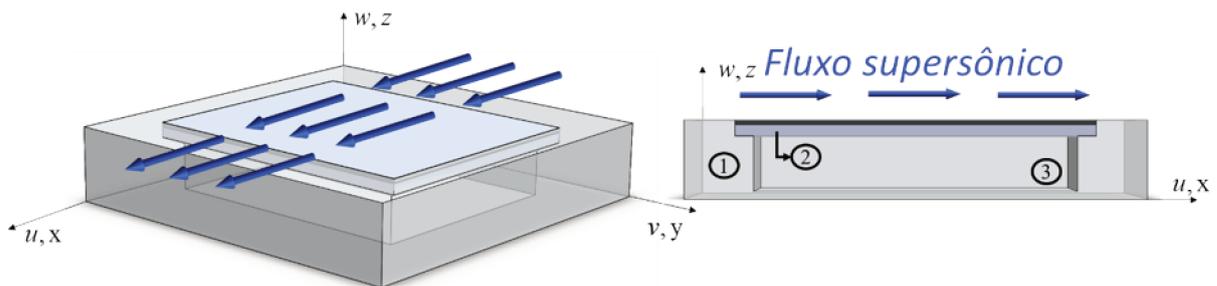


Figura 4.4: Esquema ilustrativo de um painel aeronáutico fixado nas paredes de um túnel: (1) parede rígida do túnel de vento, (2) placa sanduíche, (3) cavidade formada entre a estrutura e o túnel.

Vasily et al.(VEDENEEV; GUVERNYUK; KOLOTNIKOV, 2009), em um dos poucos trabalhos experimentais atuais sobre *flutter* de painéis, mostram seu aparato experimental.



Figura 4.5: Aparato experimental para o estudo do flutter de painéis, uma cortesia de Vasily et al.(VEDENEEV; GUVERNYUK; KOLOTNIKOV, 2009).

Para este estudo a Teoria do Pistão adotada será a linear de primeira ordem obtida a partir da equação proposta por Ashley e Zartarian (ASHLEY; ZARTARIAN, 1956),

$$P - P_{\infty} = \frac{2q}{\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (4.47)$$

onde $q = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$ é a pressão dinâmica que atua sobre o painel, ρ_∞ é a densidade do ar em algum ponto distante do painel, $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ e $\zeta = \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{U_\infty}$, sendo M_∞ o número de Mach.

Na Eq.(4.47), a derivada espacial irá resultar no termo de rigidez aerodinâmica que será somado à rigidez do painel, e a derivada temporal resultará na matriz de amortecimento aerodinâmico. Para obter essas matrizes, o trabalho virtual devido ao campo de pressão sobre a placa, tal qual descrito por (DOWELL, 1975), é inserido nas Equações de Lagrange, como mostrado abaixo:

$$\frac{\partial \delta W_{aero}}{\partial \delta \{q_t\}^{(e)}} = - \frac{\partial}{\partial \delta \{q_t\}^{(e)}} \left(\int_A \frac{2q}{\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta w + \zeta \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) dA \right) \quad (4.48)$$

Após substituição das respectivas funções de forma solução das derivadas, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{aero}}{\partial \delta \{q_t\}^{(e)}} &= - \int_A \lambda \frac{\partial [N_w]^T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} [N_w] dA \{q_t\}^{(e)} - \{\dot{q}_t\}^{(e)T} \int_A \gamma \frac{\partial [N_w]^T}{\partial t} [N_w] dA = \dots \\ &\dots = \lambda [K_{aero}]^{(e)} \{q_t\}^{(e)} - \{\dot{q}_t\}^{(e)T} \gamma [C_{aero}]^{(e)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde $\lambda = \frac{2q}{\beta}$ e $\gamma = \lambda \zeta$.

Em seguida, as matrizes aerodinâmicas globais são montadas e introduzidas na equação global do movimento, Eq.(4.45), resultando na seguinte equação cuja solução é determinada no domínio do tempo:

$$[M]^{(g)} \{\ddot{Q}\}_t + [C_{aero}]^{(g)} \{\dot{Q}\}_t + ([K]^{(g)} + \lambda [K_{aero}]^{(g)}) \{Q\}_t = \{F\}_{t-j\Delta t} \quad (4.50)$$

Substituindo as matrizes globais aerodinâmicas no problema do Módulo Complexo para solução do mesmo no domínio da frequência, a seguinte equação global do movimento é obtida:

$$\begin{aligned} [M]^{(g)} \{\ddot{Q}\}_t + [C_{aero}]^{(g)} \{\dot{Q}\}_t + \dots \\ \dots + ([K_{el}]^{(g)} + G(\omega, T) [K_v]^{(g)} + \lambda [K_{aero}]^{(g)}) \{Q\}_t = \{0\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

As Eqs.(4.50) e (4.51) são os dois principais objetos de estudo deste trabalho. Uma faz uso de uma abordagem extremamente eficiente para representar o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos que é o Módulo Complexo, que no entanto, não leva em conta a causalidade do material, já a outra sim. Desta maneira, os dois modelos serão comparados e uma discussão é feita ao final deste capítulo. Além disso, dois métodos de redução são propostos e serão desenvolvidos na próxima seção.

4.4 Métodos de Redução de Modelo para Problemas não-autoadjuntos

Nesta seção uma breve discussão sobre o método de redução de modelos para problemas de autovalor polinomial complexo não-adjunto é feita. Um completo desenvolvimento

sobre a abordagem não será mostrada aqui, uma vez que um artigo foi publicado sobre o assunto, logo caso seja necessário, o leitor pode consultar a referência (FILHO et al., 2017).

4.4.1 *Redução de modelo no domínio da frequência*

O método de redução no domínio da frequência surgiu da necessidade de resolver o problema aeroviscoelástico de painéis devido à complexidade dos cálculos envolvidos somada à grande quantidade de graus de liberdade do problema de elementos finitos, fazendo com que algumas análises sejam inviáveis.

Rouleau (ROULEAU; DEU; LEGAY, 2017) propôs um trabalho onde vários métodos foram exaustivamente comparados. Todos eles foram implementados para resolver o problema da aeroviscoelasticidade de painéis e ao longo deste processo, foi percebido que bases convencionais não eram capazes de representar corretamente a dinâmica do problema. Isto acontece porque, primeiramente, os métodos convencionais geram bases que contém somente autovetores obtidos de um problema conservativo associado de um problema não-conservativo. Isso significa, por exemplo, que estes autovetores são obtidos do modelo do módulo complexo a uma frequência constante e igual a zero. Consequentemente, um problema que tem sua dinâmica modificada por um parâmetro externo, como a velocidade do escoamento, não será bem representado em sua forma reduzida, caso bases deste tipo sejam usadas.

Portanto, é necessário pensar em uma forma de contemplar a sensibilidade do sistema frente uma variação de um parâmetro externo que altere sua dinâmica. Há também uma explicação algébrica que é relacionada a problemas que envolvem acoplamento fluido-estrutura, problemas de dinâmica de rotores e multi-físicos, como por exemplo quando houver a presença de materiais piezoelétricos. Nestes problemas, as matrizes $[M]$, $[C]$ ou $[K]$ podem não ser simétricas, como é o caso da matriz de rigidez em aeroelasticidade de painéis. Como consequência, o problema de autovalor obtido é dito polinomial complexo não-autoadjunto. O resultado disso são diferentes autovetores de esquerda e de direita, que implicam numa abordagem diferente para determinação dos mesmos. Esta diferença não é levada em conta pelos métodos convencionais, e portanto, não são bem adaptados para o caso.

Destá maneira, uma forma de contornar o problema, porém sem entrar no mérito dos autovetores de esquerda e de direita, é contemplar toda a dinâmica do sistema. A partir disso, criar resíduos estáticos com base nos esforços aerodinâmicos e dinâmicos, os quais são definidos a partir do próprio deslocamento do painel, gerado pelo próprio carregamento aerodinâmico. Isto implica numa base de redução criada de maneira iterativa, e portanto, terá uma ordem maior do que as bases convencionais, mas que é capaz de resol-

ver o problema com excelentes compromissos entre custo computacional e qualidade dos resultados.

4.5 Resultados e Discussões

Nesta seção serão apresentados os resultados referentes aos modelos de placa sanduíche desenvolvidos com a fórmula de recorrência, comparações deste com a abordagem de Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001), bem como comparações com o Modelo do Módulo Complexo. Todas estas análises serão realizadas sem a presença de carregamento aerodinâmico e ao lugar deste, um impulso unitário será utilizado.

Em seguida, os modelos aeroviscoelásticos serão estudados comparando a recorrência com Módulo Complexo e as diferenças na predição da velocidade crítica. Finalmente, os modelos reduzidos são apresentados.

Para todas as análises que seguem, uma placa com as seguintes propriedades mecânicas e geométricas será utilizada:

Tabela 4.1: Propriedades mecânicas da placa sanduíche

Camada	Young [GPa]	Densidade [$\frac{kg}{m^3}$]	Poisson	Esp. [mm]	L_x [m]	L_y [m]
Base (1)	73	2780	0.34	2	0.39	0.33
Visco. (2)	$G(\omega, T)$	1600	0.49	0.5	0.39	0.33
Rest. (3)	73	2780	0.34	0.5	0.39	0.33

Um esquema da discretização em elementos finitos da placa quadri-apoiada é mostrado na Fig.(4.6) com o ponto de aplicação da força e visualização do deslocamento sendo o nó 17.

4.5.1 Fórmula de recorrência vs modelo de Schmidt e Gaul

O principal objetivo desta comparação é mostrar que a Fórmula de Recorrência, proposta neste trabalho, e a abordagem de Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001) são matematicamente o mesmo problema e diferenças percebidas são devido ao processo numérico realizar muito mais cálculos que o outro, acumulando assim uma maior quantidade de erros numéricos. Dessa grande diferença de cálculos realizados, erros numéricos surgirão necessária mente.

A análise será feita para uma temperatura do material viscoelástico de $15^\circ C$, com um passo de tempo, $\Delta t = 0.1 ms$ e $N_t = 500$. Os resultados são mostrados por meio das respostas no domínio do tempo, na Fig.(4.7).

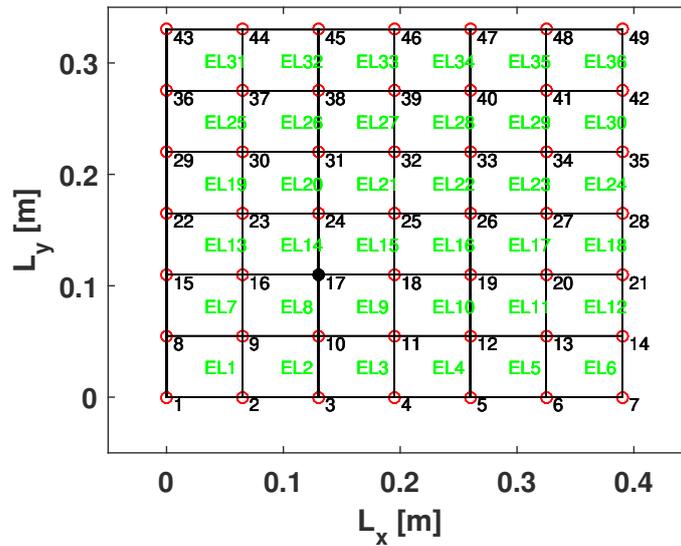


Figura 4.6: Discretização da placa em elementos finitos da placa sanduíche para uma malha de 6×6 elementos.

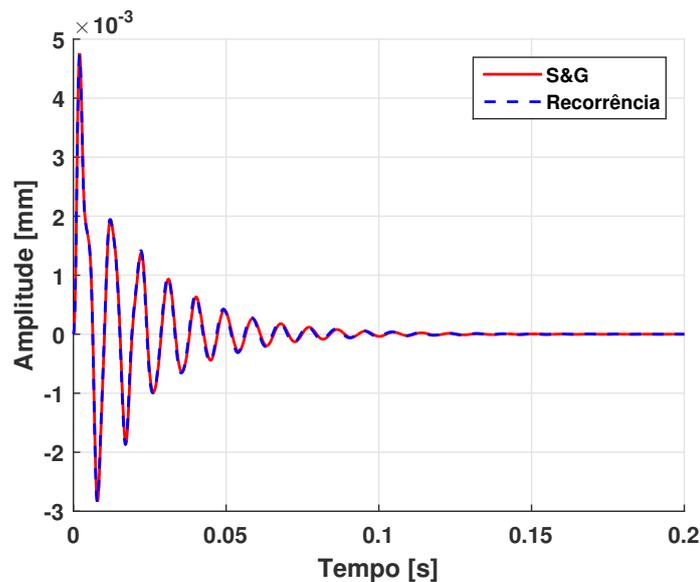


Figura 4.7: Comparação entre as abordagens de Schmidt e Gaül e a Fórmula de Recorrência.

Finalmente, a Fig.(4.8) compara os dois modelos no domínio da frequência. As curvas foram obtidas pelo cálculo da FRF entre a resposta e o impulso unitário e as respostas normalizadas pelo máximo de cada uma das FRFs.

A última e mais importante análise feita nesta etapa é a comparação entre os esforços computacionais das duas abordagens. A Tabela 4.2 mostra como a abordagem de Schmidt e Gaul é inviável, mesmo para análises simples como uma avaliação modal. Utilizá-la para problemas de aeroelasticidade não era uma opção, tornando imperativo contornar o

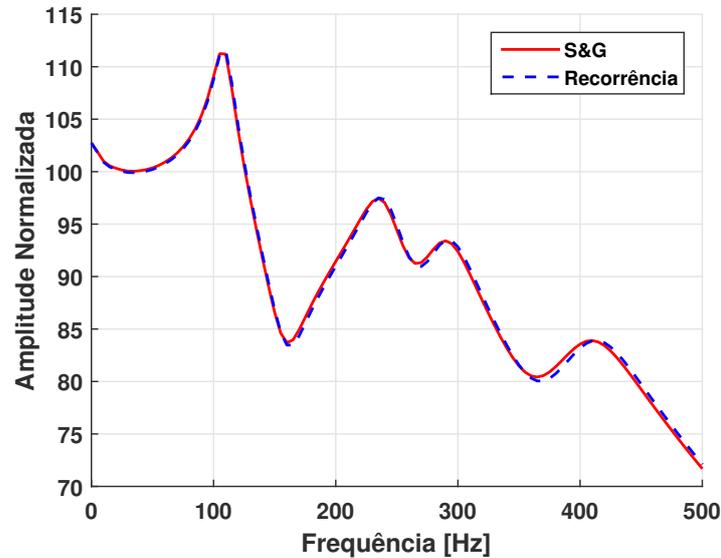


Figura 4.8: Diferenças entre as FRFs dos modelos de Schmidt e Gaül e a fórmula de recorrência.

problema. A solução veio então com a criação da fórmula de recorrência que permitiu a viabilidade de qualquer tipo de análise.

Tabela 4.2: Formulação clássica de Schmidt e Gaül vs Fórmula de Recorrência.

		S&G	Recorrência		
Malha	GDL	Tempo de processamento		Melhoria [%]	
6x6	291	0h53min	53s	98.33	
7x7	388	4h40min	68s	99.60	
8x8	499	6h08min	84s	99.62	
9x9	624	7h44min	99s	99.64	

É importante remarcar que nenhum método de redução de modelos foi aplicado no problema da fórmula de recorrência. Tamanha expressividade nos resultados se deve ao fato de que a tensão da camada viscoelástica não é mais auto-dependente, fazendo com que as integrais dos campos de tensão elemento a elemento e para cada passo de tempo se esvançam do integrador numérico.

Como resultado, o uso do modelo fracionário pôde ser expandido para aplicações como a avaliação das características aeroelásticas de estruturas tratadas com material viscoelástico. Em seguida, modelo FDM com a fórmula de recorrência será confrontado com o Módulo Complexo.

4.5.2 Fórmula de Recorrência vs Módulo Complexo

O intuito desta avaliação é mostrar como os dois modelos apresentam divergências em relação ao comportamento dinâmico, devido provavelmente à causalidade. Assim,

uma análise harmônica é feita comparando as duas FRFs sob as mesmas condições de temperatura do material viscoelástico, $15^{\circ}C$, e condição de contorno.

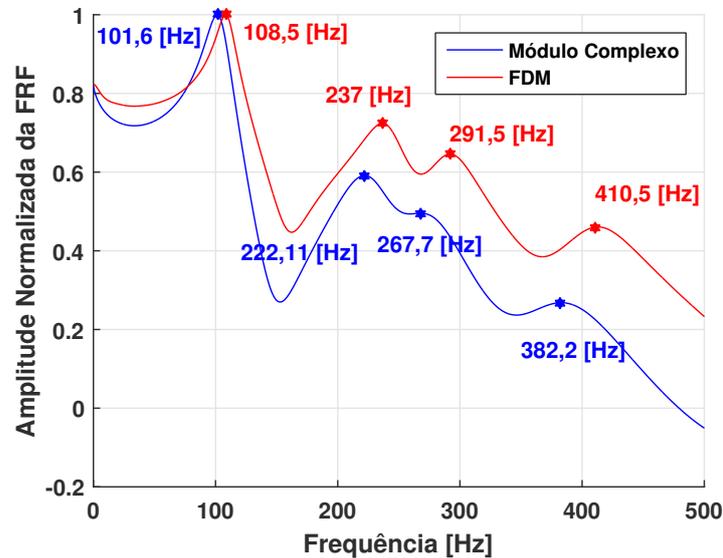


Figura 4.9: FRFs comparativas entre o modelo fracionário e o Módulo Complexo.

A normalização das amplitudes é feita pelo valor máximo das respectivas curvas. Nota-se importantes diferenças nos valores das frequências naturais dos dois modelos, bem como na quantidade de amortecimento. Isto pode estar ligado à causalidade do modelo FDM, muito comentada por Bagley e Torvick e também pela forma como os dois modelos abordam suas leis constitutivas.

Aplicação - flutter de painéis

Em seguida, o problema de aeroelasticidade de painéis aeronáuticos é avaliado. Para o Módulo Complexo o diagrama V-g é traçado com base num método muito similar ao método P-k (WRIGHT; COOPER, 2015), onde para uma dada velocidade de escoamento as frequências naturais do sistema são determinadas de forma iterativa. Tem-se assim um problema onde o sistema é dependente da velocidade do escoamento devido às matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmico e também da temperatura e das frequências de excitação. Apesar de tantas variáveis, a forma de se resolver não muda, e somente um laço iterativo com base nas frequências naturais que se deseja determinar é utilizado.

A Fig.(4.10) mostra o ponto em que o amortecimento aerodinâmico, $g = \frac{\Re(\omega_n)}{\Im(\omega_n)}$, é igual a zero, ponto que indica que o sistema assume um movimento conservativo, como será visto no modelo FDM.

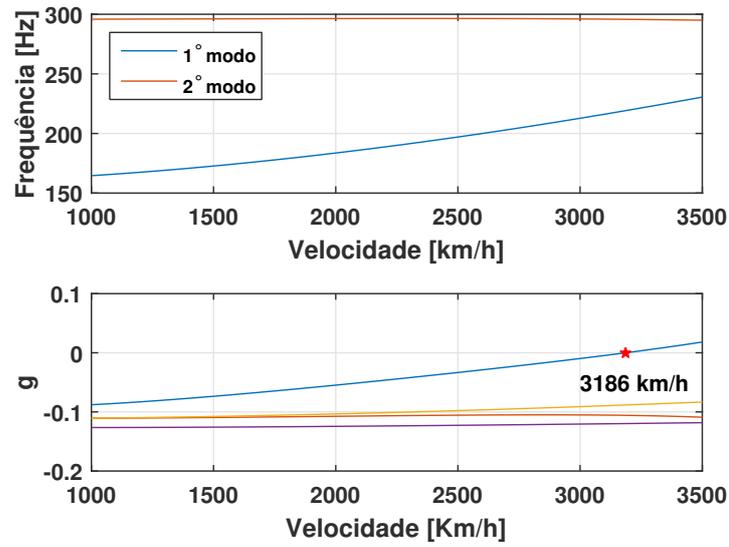


Figura 4.10: FRFs comparativas entre o modelo fracionário e o Módulo Complexo.

O processo para determinar a velocidade crítica no domínio do tempo pode ser feito de forma iterativa demandando também muito tempo para se obter um resultado. As Figs.(4.11), (4.12) e (4.13) como o sistema passa de estável para aproximadamente não amortecido e finalmente instável.

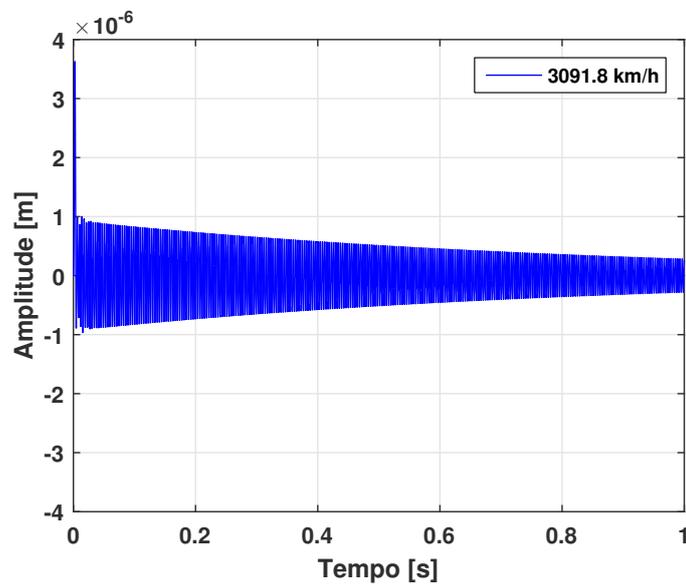


Figura 4.11: Resposta temporal do sistema em um ponto anterior ao *flutter*.

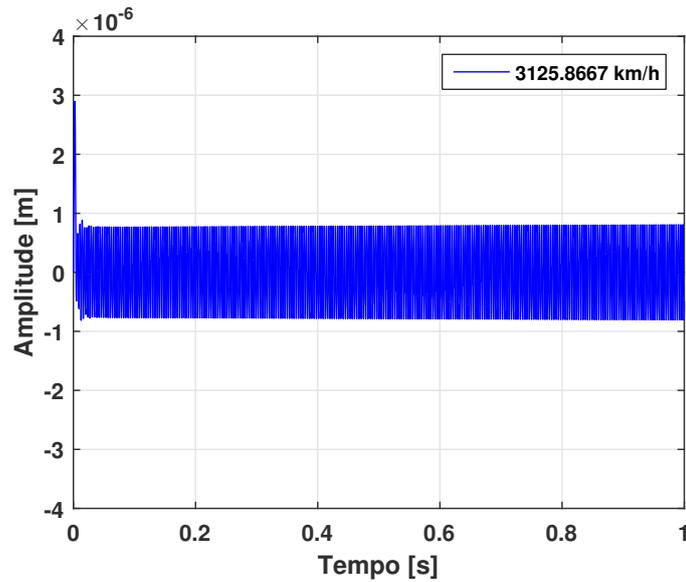


Figura 4.12: Resposta temporal do sistema em um ponto próximo ao *flutter*.

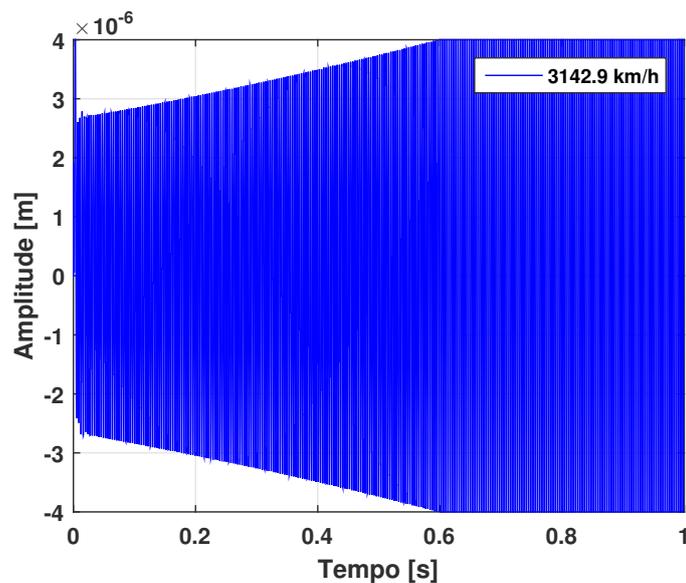


Figura 4.13: Resposta temporal do sistema em um ponto posterior ao *flutter*.

Dadas as diferenças apresentadas pelos modelos, poder-se-ia argumentar sobre as diferenças em hertz das duas primeiras frequências naturais apresentadas por cada um, ver Fig.(4.9). Porém dado que a diferença apresentada pelo modelo FDM é maior, este deveria apresentar uma velocidade de *flutter* também maior, mas não é o caso. Entretanto, há um outro argumento que poderia explicar a diferença nas velocidades críticas apresentadas, que é a maior quantidade de amortecimento gerada pelo Módulo Complexo. Isso contribuiria para aumentar a velocidade de *flutter*, porém não é possível quantificar esta informação. Neste conflito, novamente não há como obter muita informação para discorrer

sobre estas diferenças, nem alguma pista sobre a real influência do amortecimento viscoelástico no comportamento aeroviscoelástico do sistema. Experimentos seriam necessários para se obter mais informações do comportamento dinâmico de sistemas aeroviscoelásticos.

Além disso, não se pode afirmar com certeza que a velocidade de 3125 km/h predita pela Fórmula de Recorrência é aquela cujo amortecimento vale exatamente zero. Para se ter certeza deste valor, seria necessário avaliar o sistema para $t \rightarrow \infty$ e assim confirmar que o mesmo nem converge, nem diverge e sim que se mantém puramente conservativo. Entretanto, é plausível dizer que esta é aproximadamente a velocidade de *flutter*, ou ainda que o sistema está num ponto muito próximo da ocorrência do fenômeno.

Outra remarca importante é que as amplitudes mostradas nas figuras não são verdadeiras, uma vez que para velocidades tão próximas ao *flutter*, as amplitudes do sistemas podem exceder o limiar da linearidade e do não linearidade. No capítulo sobre seção típica não linear, será possível entender um pouco melhor como sistemas aeroelásticos se comportam antes e depois do *flutter* em função do grau de não linearidade inserido no sistema.

CAPÍTULO V

Modelagem de Vigas Sanduíche

Neste capítulo, será apresentada toda a modelagem de viga sanduíche e todas as considerações feitas para que uma viga sanduíche seja criada com todos os graus de liberdade necessários para que tanto o amortecimento viscoelástico devido ao cisalhamento ao longo da espessura da camada seja calculado, quanto o grau de liberdade de torção. Estas duas dinâmicas são primordiais para que seja possível criar a *sandwich plate like wing* através da Teoria das Faixas (WRIGHT; COOPER, 2015).

Neste contexto, este capítulo mostrará em detalhes toda a formulação variacional para o cálculo dos potenciais de energia cinética e de deformação para a viga sanduíche segundo o modelo fracionário da Fórmula de Recorrência, com sua lei constitutiva adaptado para o caso.

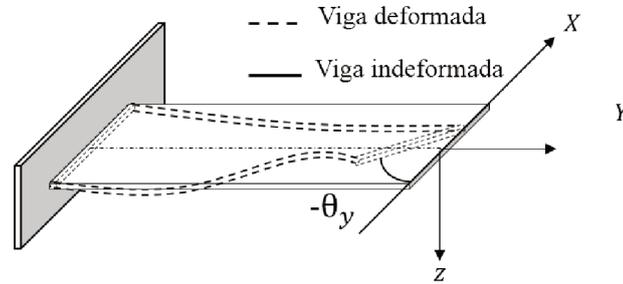
Em seguida, a aplicação do método dos Elementos Finitos é mostrada até a obtenção das matrizes globais de massa e rigidez. Finalmente, uma comparação entre os modelos fracionários da Fórmula de Recorrência e o modelo proposto por Galúcio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004) é mostrada.

5.1 Viga de Euler-Bernoulli

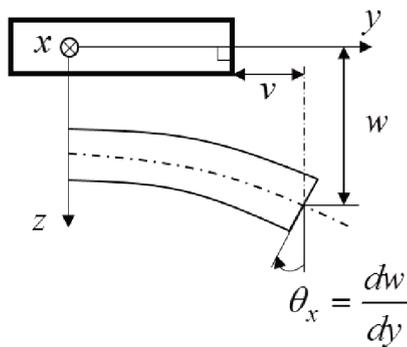
Para se modelar uma viga sanduíche, é necessário inicialmente desenvolver o modelo de uma viga simples puramente elástica. Neste trabalho será utilizada a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli (REDDY; MAHAFFEY, 2013), tanto para a viga simples quanto para a viga sanduíche. Desta maneira, serão apresentadas primeiramente as suposições feitas para a viga simples, que permitirão definir o que será a viga sanduíche.

Portanto, considera-se uma viga engastada-livre cujo referencial inercial se encontra na sob a linha neutra, na metade da largura, sob a linha neutra e em sua extremidade engas-

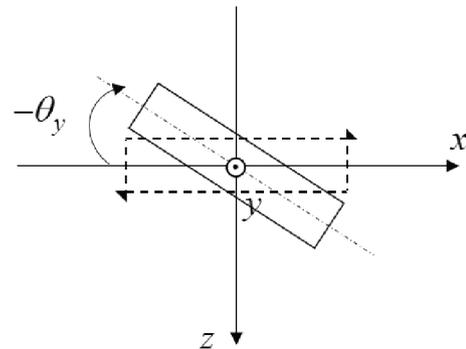
tada. Seus eixos são orientados como mostrado na Fig.5.1 para facilitar a implementação da Teoria das Faixas.



(a) Viga fletindo e torcendo no espaço.



(b) Flexão da viga.



(c) Torção da viga.

Figura 5.1: Cinemática da viga no espaço.

As figuras mostram a cinemática nos dois planos principais de movimento e a partir delas, toda a cinemática é descrita através do campo de deslocamento mostrado a seguir:

$$w(x, y, z, t) = w(y, t) - x\theta_y(y, t) \quad (5.1a)$$

$$v(x, y, z, t) = v(y, t) - z\frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \quad (5.1b)$$

$$u(x, y, z, t) = z\theta_y(y, t) \quad (5.1c)$$

O deslocamento transversal da viga (direção z), $w(x, y, z, t)$, é composto por uma componente puramente transversal, $w(y, t)$ e outra devido à rotação em torno do eixo, y , referente ao movimento de torção. Já o deslocamento na direção y , é descrito pela variável, $v(x, y, z, t)$, composta pelo movimento de alongamento da viga, $v(y, t)$ e o giro da seção transversal devido ao movimento de flexão $\theta_x = \frac{\partial w(y, t)}{\partial y}$. Já o movimento de translação ao longo do eixo, x , descrito pela variável, $u(x, y, z, t)$, é uma composição do movimento de torção da viga. Portanto, este modelo de viga possui 4 graus de liberdade,

representado pelo seguinte vetor: $\{q_t\} = [u \ w \ \theta_x \ \theta_y]$. A Fig.(5.2) mostra um elemento finito isoparamétrico de viga com estas características.

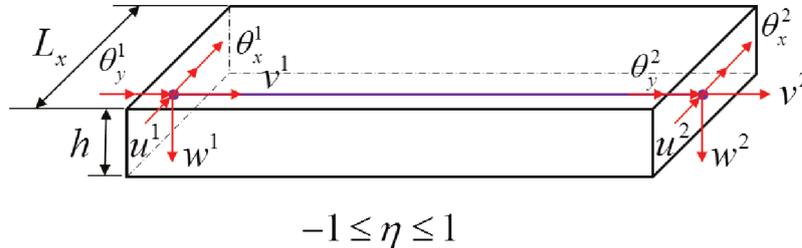


Figura 5.2: Elemento finito da viga representado em coordenadas locais.

Este elemento de viga puramente elástico possui 8 gdl, sendo 4 gdl por nó. Devido às suposições de Euler-Bernoulli, observa-se que ao torcer, as seções transversais da viga ao longo do comprimento permanecem indeformadas apesar da rotação, tal qual mostrado na Fig.(5.0c). Esta característica será discutida em detalhes no capítulo sobre a Teoria das Faixas, pois é o que permite a implementação da mesma. Além disso, considera-se que o material utilizado na viga é isotrópico e com propriedades mecânicas lineares. As seções transversais permanecem sempre perpendicular à linha neutra, mesmo após sofrer movimentos de flexão. Isso implica que nenhum cisalhamento transversal ao longo da espessura é considerado.

Antes de iniciar os desenvolvimentos, uma consideração acerca do movimento de torção da viga será discutido, pois sem esta consideração o modelo da *plate/sandwich plate like wing* não seria possível.

5.1.1 Constante de torção para perfis finos

Ao estudar a torção de uma viga de Euler-Bernoulli moderadamente fina, uma correção deve ser feita no momento polar de inércia da estrutura. Segundo Megson (MEGSON, 1999), o momento polar de inércia da seção transversal da estrutura deve ser corrigido por uma constante de torção quando a razão entre a largura (L_x) da seção transversal com a sua espessura (h), L_x/h , tende ao infinito. Entretanto, em casos onde esta razão for da ordem de 10, o erro gerado é da ordem de 6%. Assim, Megson (MEGSON, 1999) propõe uma solução aproximada para o cálculo da constante de torção:

$$J_T = \frac{\mu L_x h^3}{3} \quad (5.2)$$

onde, μ , é um fator que faz a correção da constante de torção, J_T , em função da razão, L_x/h . Como neste trabalho esta razão é da ordem de $L_x/h \approx 50$, é plausível assumir que $\mu = 1$. Desta maneira, tem-se que a partir do cálculo do potencial de energia da viga

puramente elástica, as rijezas de flexão e torção são determinadas como descrito abaixo:

$$U_{yy} = U_a + U_f = \frac{1}{2}E \int_V \left(\frac{\partial v(y,t)}{\partial y} \right)^2 dV + \frac{1}{2}E \int_V z^2 \left(\frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial y^2} \right)^2 dV \quad (5.3a)$$

$$U_{\theta_y} = U_p + U_t = \frac{1}{2}4G \int_V \left[\frac{z^2}{4} \left(\frac{\partial \theta_y(y,t)}{\partial y} \right) + \frac{x^2}{4} \left(\frac{\partial \theta_y(y,t)}{\partial y} \right) \right] dV \quad (5.3b)$$

Ao integrar a Eq.(5.3b) nas direções x e z , tem-se como resultado o momento polar de inércia, $J = I_x + I_z$. Neste ponto, faz-se a substituição do momento polar pela constante de inércia. Esta aproximação é aplicada tanto para as camadas elásticas, quanto viscoelástica da viga sanduíche.

5.1.2 Validação Numérica

Feitas estas considerações sobre a viga puramente elástica, o desenvolvimento matemático deste modelo não será exibido por ser amplamente conhecido. Entretanto, alguns resultados comparativos são mostrados no intuito de validá-lo. Assim, foi utilizada uma viga de alumínio T2023, cujas propriedades mecânicas se encontram na Tabela 5.1. Observa-se que as características geométricas das outras camadas da viga podem também ser consultadas nesta tabela. As dimensões da viga são definidas com base no experimento que será realizado utilizando o túnel de vento do ITA. Assim tem-se que o comprimento e largura da estrutura são, respectivamente, $L_y = 0,35m$, $L_x = 0,04m$ e a espessura é mostrada na tabela, uma vez que cada camada apresenta um valor diferente. Para estas análises, 70 elementos finitos foram utilizados.

Tabela 5.1: Propriedades mecânicas da viga sanduíche

Camada	Módulos [GPa]	Densidade $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Poisson	Esp. [mm]
Base (1)	73.1	2780	0.34	0.8128
Viscoelástica (2)	$E(T)$	950	0.49	0.5
Restringente (3)	73.1	2780	0.34	0.3

Foram criados dois modelos no software ANSYS® nos ambientes APDL e Workbench. Para o ambiente APDL, o elemento de viga *Beam188* foi utilizado e configurado sem restrições quanto ao empenamento, “*warping unrestrained*”. A seção transversal é imposta rígida, “*cross section scale*” e a análise foi puramente linear. Foram considerados os cisalhamentos transversal e devido à torção. Além disso, foi considerado também um modelo analítico, cuja função para determinação das frequências circulares naturais é

descrita abaixo (OUISSÉ; SADOULET-REBOUL, 2011):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} K_n^2 \quad (5.4)$$

onde K_n é um parâmetro adimensional e seus valores são mostrados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Tabela recapitulativa para os valores modais de uma viga em balanço sob flexão pura.

Modo	$K_n L_y$
1° modo	1.875
2° modo	4.694
...	...
n^{esimo} modo	$\approx (2n - 1) \pi / 2$

Assim, as frequências naturais dos quatro modelos são comparadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Análise harmônica - Valores das frequências naturais em [Hz]

	ANSYS APDL 70 ele.	ANSYS Workbench	Matlab 70 ele.	Sol. Analítica
1° modo	5.4963	5.5167	5.4962	5.4956
2° modo	34.459	34.556	34.444	34.443
3° modo	90.851	92.916	90.91	n/a
4° modo	96.564	96.855	96.445	96.426
5° modo	189.47	190.22	188.99	188.99
6° modo	267.68	264.95	n/a	n/a
7° modo	272.6	280.78	272.78	n/a

Nota-se uma excelente correlação entre os resultados obtidos com os modelos em ANSYS®, Matlab e analítico. O modelo criado em ambiente Workbench apresenta discrepâncias em alguns valores devido à restrição do empenamento. Outro ponto importante de se destacar é o sexto modo de vibrar, que não é visto pelo modelo em Matlab por se tratar de um modo de flexão no plano xy , também conhecido como “*in-plane mode*”. Já o modelo analítico não possui a capacidade de visualizar o “*in-plane mode*” e os modos de torção, por se tratar de uma solução para uma viga sob flexão pura. Para confirmar que os modos não visualizados pelos modelos em Matlab e analítico são realmente os mencionados, as formas modais relativas a cada frequência são mostradas na Fig.(5.3).

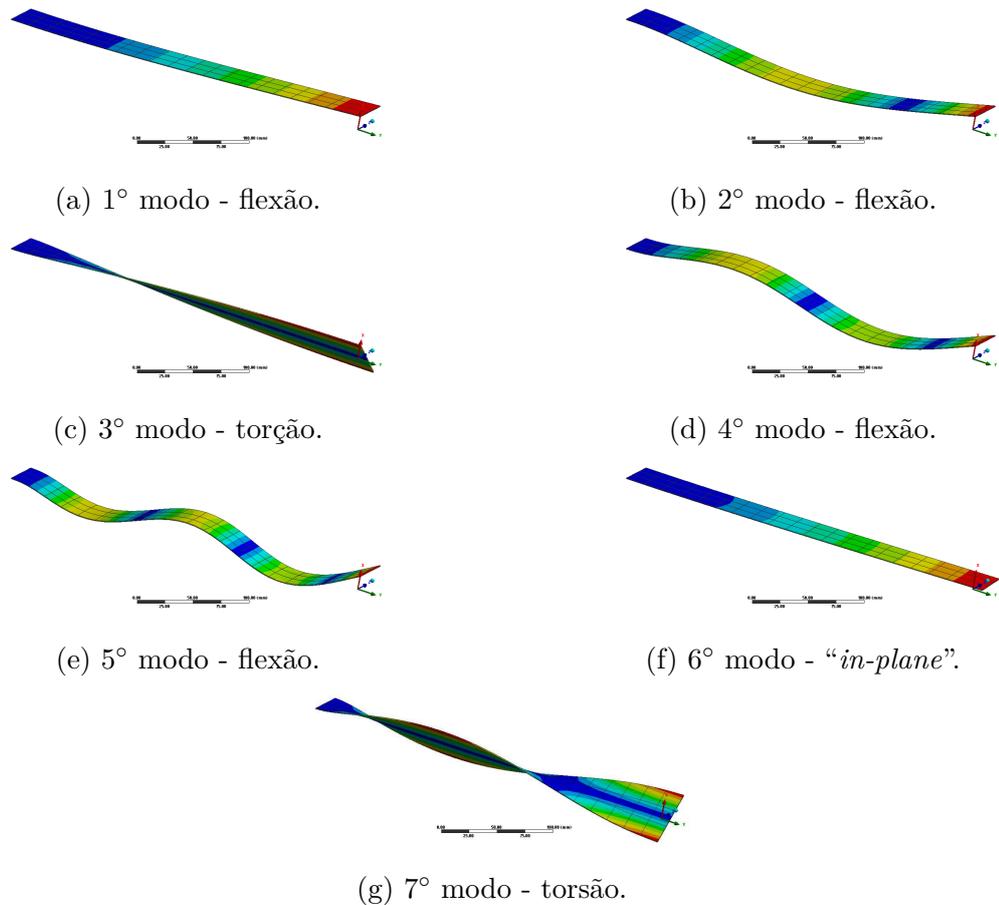


Figura 5.3: Formas modais associadas obtidas no ANSYS WorkBench.

Em seguida, uma avaliação no domínio do tempo é realizada. Este processo é muito importante, pois o estudo aeroelástico será realizado neste domínio. Logo, esta análise será realizada utilizando o método numérico de Newmark para integração da equação do movimento e uma função seno como fonte externa de excitação do tipo, $F(t) = 10\text{sen}(\omega t)$, onde ω é equivalente a uma frequência de 30Hz . Os parâmetros utilizados no método de Newmark foram obtidos da referência (BATHE, 2006) e utilizado um passo de tempo constante de 0.1ms . Um modelo contendo 35 elementos foi utilizado e o esforço externo aplicado no nó 5 da viga e visualizado no nó 36 (extremidade). A Fig.(5.4) mostra o aspecto harmônico do esforço externo.

O ANSYS APDL foi configurado exatamente como realizado no matlab e o resultado é mostrado na Fig.(5.5).

As curvas mostram uma excelente correlação, constatando que o modelo em elementos finitos desenvolvido é capaz de representar corretamente a dinâmica da estrutura. Diante disso, a próxima etapa será desenvolver a viga sanduíche para aplicação da Teoria das Faixas.

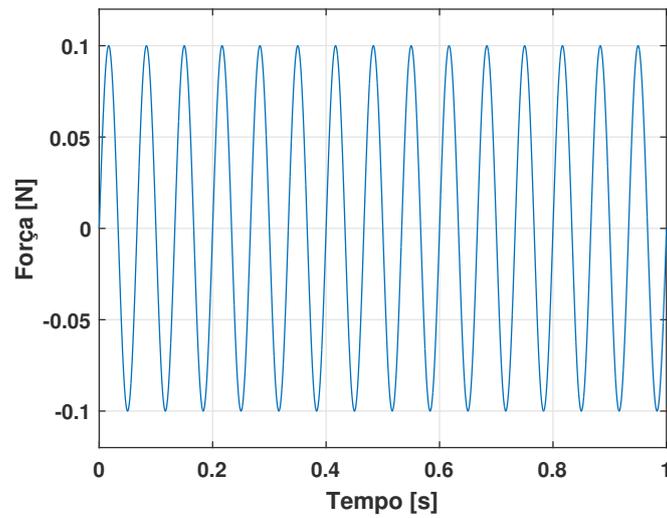


Figura 5.4: Esforço harmônico senoidal.

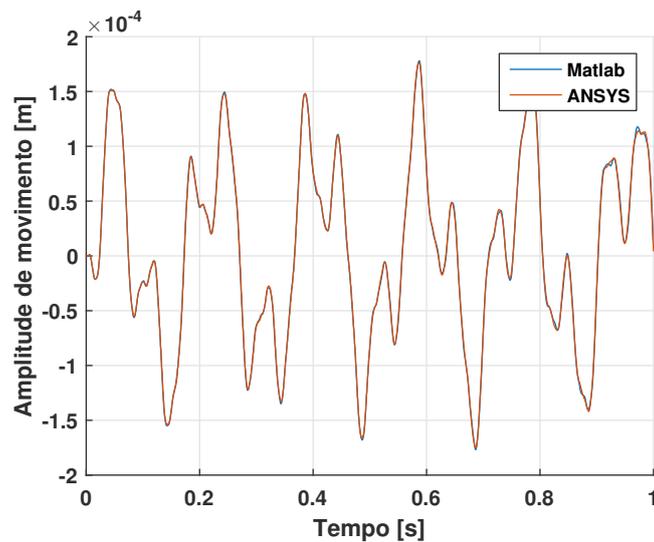


Figura 5.5: Comparação das respostas transientes obtidas em Matlab e ANSYS APDL.

5.1.3 Viga com lastro

Uma breve avaliação sobre os efeitos de um lastro posicionado na extremidade da *plate like wing* é feita nesta parte do trabalho. Uma remarca é feita, pois a partir deste ponto a viga de Euler-Bernoulli será tratada como *plate like wing*.

O lastro é uma massa posicionada de tal maneira que seu centro de gravidade esteja localizado a uma certa distância do eixo elástico da asa. O efeito desta prática é fazer com que a 2ª e 3ª frequências naturais da viga se aproximem. Como resultado, a velocidade crítica do sistema reduz consideravelmente, possibilitando realizar a análise aeroelástica no túnel de vento disponível. A Fig.(5.6) mostra como é essa massa e como ela é fixada à asa.



Figura 5.6: *Plate like wing* posicionada no túnel de vento com o lastro fixo na extremidade.

Não é esperada nenhuma modificação na rigidez da *plate like wing* pela adição do lastro, somente suas propriedades de inércia alterarão o sistema. Estas propriedades são listadas abaixo:

- massa - $m = 0,03458kg$;
- momento de inércia de massa em torno do eixo y - $I = 1,858 \times 10^{-5}kgm^2$;
- produto de inércia para um deslocamento, r , em relação ao eixo elástico - $S_w = mr kgm$, onde r é a distância entre o $C.G$ do lastro e o eixo elástico.

Para inserir estas propriedades de massa na matriz de massa da viga, o lastro é idealizado como uma massa concentrada que é adicionada do último nó da viga nos respectivos graus de liberdade, pela soma mostrada a seguir:

$$M_g(gdl_w^{(n)}, gdl_w^{(n)}) = M_g(gdl_w^{(n)}, gdl_w^{(n)}) + m \quad (5.5)$$

O momento de inércia é somado no respectivo grau de liberdade de rotação em torno do eixo y do último nó.

$$M_g(gdl_{\theta_y}^{(n)}, gdl_{\theta_y}^{(n)}) = M_g(gdl_{\theta_y}^{(n)}, gdl_{\theta_y}^{(n)}) + I \quad (5.6)$$

Finalmente, os produtos de inércia devem ser adicionados fora da diagonal principal da matriz fazendo uso dos graus de liberdade: $gdl_w^{(n)}$ e $gdl_{\theta_y}^{(n)}$, como mostrado abaixo:

$$M_g(gdl_w^{(n)}, gdl_{\theta_y}^{(n)}) = M_g(gdl_w^{(n)}, gdl_{\theta_y}^{(n)}) + S_w \quad (5.7a)$$

$$M_g(gdl_{\theta_y}^{(n)}, gdl_w^{(n)}) = M_g(gdl_{\theta_y}^{(n)}, gdl_w^{(n)}) + S_w \quad (5.7b)$$

onde $gdl_i^{(n)}$ faz referência ao grau de liberdade do respectivo nó (n) em que se deseja adicionar as propriedades de inércia do lastro. Neste caso, o lastro é adicionado no nó da extremidade.

Nestas condições, tem-se que as quatro primeiras frequências naturais da *plate like wing* são: $2,34Hz$, $25.03Hz$ e $27.41Hz$. Comparando estes valores de frequência natural com aqueles da estrutura sem lastro, $5.49Hz$, $34.44Hz$, e $90.91Hz$, é possível ver o efeito do lastro e como ele não só reduz os valores das frequências mas também aproxima de forma importante a segunda e terceira frequências naturais. Isto é primordial para o sistema aeroelástico, pois permite que o sistema entre em *flutter* dentro dos limites do túnel. As FRFs destes dois sistemas são mostradas na Fig.(5.7).

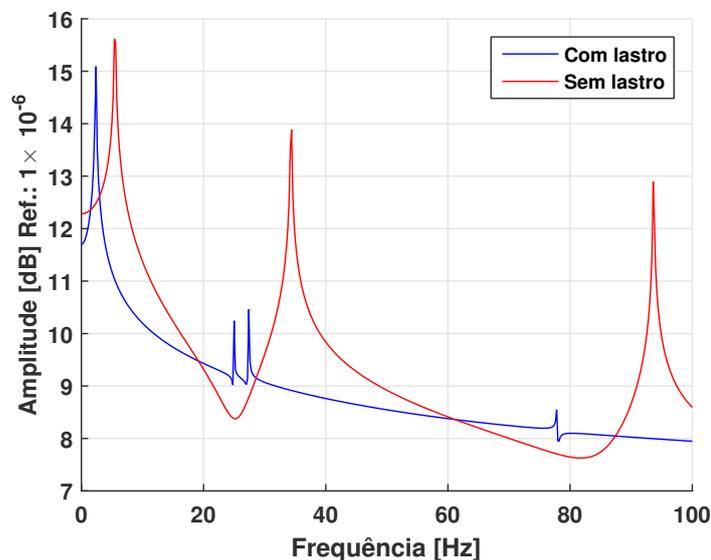


Figura 5.7: FRFs da *plate like wing* com e sem lastro.

Serão avaliadas no túnel de vento três posicionamentos diferentes do lastro em relação ao eixo elástico da *plate like wing*. A Tabela 5.4 mostra os valores das três primeiras frequências naturais para estas modificações no lastro.

Tabela 5.4: Variação das frequências naturais da *plate like wing* em função da posição do lastro.

Posição do lastro [mm]	F_1 [Hz]	F_2 [Hz]	F_3 [Hz]
$-5mm$	2,34	24,95	26,90
$-10mm$	2,34	24,27	27,48
$-15mm$	2,34	23,52	28,10

As coordenadas do centro de gravidade do lastro são negativas, pois de acordo com o

sistema de coordenadas adotado (isto será explicado com mais detalhes no capítulo 7), o mesmo é deslocado para trás do eixo elástico da *plate like wing*.

Portanto, de acordo com os valores de frequência natural apresentados na Tabela 5.4, nota-se como a segunda e terceira frequência se separam. Isso terá um efeito direto na velocidade crítica, onde o sistema com o posicionamento de $-15mm$ deverá apresentar instabilidade em velocidades superiores.

5.2 Viga Sanduíche de Euler-Bernoulli

Para modelar uma viga sanduíche, o conceito de camada equivalente única (FARIA, 2010) juntamente com a Teoria Zigue-zague, ou Teoria Layerwise de primeira ordem é utilizado, justamente por serem abordagens amplamente utilizadas. A grande maioria das referências citadas neste trabalho (FARIA, 2010; GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004; de Lima, 2007; TRINDADE; BENJEDOU; OHAYON, 2001), fazem uso da Teoria Zigue-zague.

O modelo de viga sanduíche possui algumas particularidades importantes. Talvez a mais importante é assumir um estado uniaxial de tensão, pois é esta suposição que permitirá definir a lei constitutiva do material viscoelástico a partir da lei constitutivas mais gerais apresentadas no Capítulo 3. Além disso, será assumido que o deslocamento na direção, z , e as duas rotações, θ_x e θ_y , são as mesmas para as três camadas, muito similar ao realizado no modelo placa sanduíche. Entretanto, o deslocamento ao longo do comprimento principal é diferente para as três camadas, significando que um polinômio interpolador linear deve ser atribuído para este grau de liberdade. Essa é uma parte crucial para o modelo de viga sanduíche, pois é este movimento que gerará o cisalhamento transversal ao longo da camada viscoelástica. Neste contexto, tem-se que o deslocamento, $v^{(2)}(x, y, z, t)$, da camada viscoelástica é determinado por uma relação cinemática definida pelas camadas externas (1) e (3), tal qual mostrado na Fig.(5.8).

Assim, os deslocamentos, $v^{(k)}(x, y, z, t)$, podem ser descritos de acordo com Teoria Zigue-Zague de primeira ordem (TRINDADE; BENJEDOU; OHAYON, 2001) pela seguinte expressão:

$$v^{(k)}(x, y, z, t) = v_0^{(k)}(y, t) - \left(z - z^{(k)}\right) \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \quad (5.8)$$

onde, $k = 1, 2$ e 3 , são os índices relativos às camadas base, viscoelástica e restrigente, respectivamente. Os parâmetros, $z^1 = \frac{-(h_1+h_2)}{2}$ e $z^3 = \frac{(h_2+h_3)}{2}$ marcam a linha neutra das camadas (1) e (3) em relação a referência. Avaliando a Eq.(5.8) para $k = 1, 3$, os parâmetros z_1 e z_3 são substituídos e os desenvolvimentos dos cálculos das velocidades e deformação levarão aos potenciais de energia cinética e de deformação elástica utilizados no cálculo das matrizes de massa e rigidez das camadas (1) e (3). Este desenvolvimento

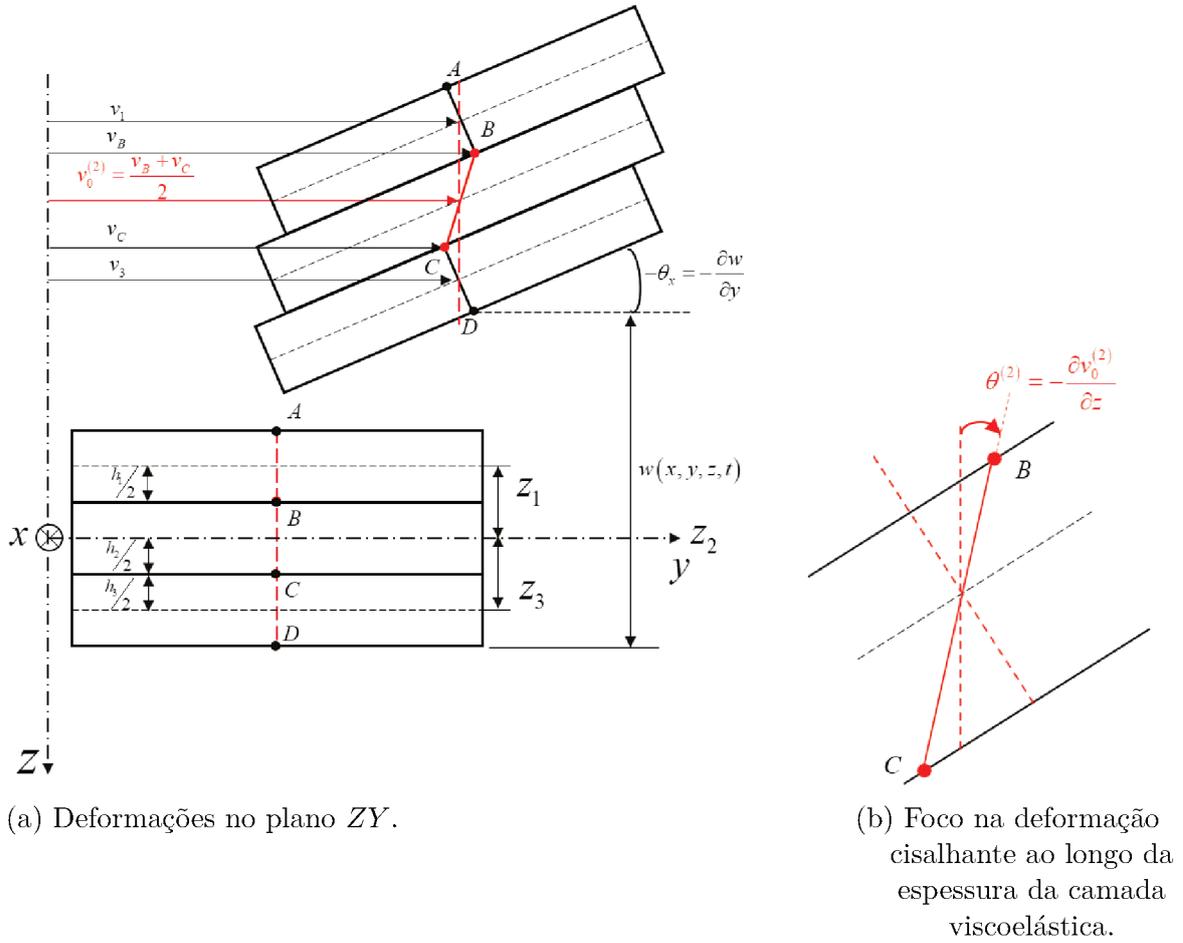


Figura 5.8: Cinemática da viga sanduíche.

não será mostrado por se tratar exatamente do mesmo procedimento feito para o cálculo das matrizes de massa e rigidez da viga de Euler-Bernoulli. Desta forma, será mostrado o desenvolvimento dos potenciais de energia da camada viscoelástica, onde tem-se que $v^{(2)}(x, y, z, t)$, é definido pela seguinte expressão:

$$v^{(2)}(x, y, z, t) = v_0^{(2)}(y, t) + z^{(2)}\theta^{(2)} = v_0^{(2)}(y, t) + z^{(2)}\frac{\partial v_0^{(2)}(y, t)}{\partial z} \quad (5.9)$$

onde $v_0^{(2)}(y, t)$, descreve o efeito de alongamento sobre a linha neutra da camada viscoelástica. Portanto, com base na Fig.(5.8), pode-se dizer que $v_0^{(2)}(y, t)$ vale:

$$v_0^{(2)}(y, t) = \frac{v_B + v_C}{2} \quad (5.10)$$

Para determinar os termos v_B e v_C , avalia-se a Eq.(5.8) para $z = -\frac{h_2}{2}$ e $z = \frac{h_2}{2}$, respectivamente, obtendo:

$$v^{(1)}\left(y, -\frac{h_2}{2}, t\right) = v_B = v_1(y, t) - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \quad (5.11a)$$

$$v^{(3)}\left(y, \frac{h_2}{2}, t\right) = v_C = v_3(y, t) + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \quad (5.11b)$$

Agora é possível determinar o alongamento, $v_0^{(2)}(y, t)$, da camada viscoelástica, em termos dos deslocamentos das camadas base (1) e restrigente (3):

$$v_0^{(2)}(y, t) = \frac{v_1(y, t) + v_3(y, t)}{2} + \frac{h_3 - h_1}{4} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} = \dots \dots \frac{1}{2} \left[v_1(y, t) + v_3(y, t) + \frac{h_3 - h_1}{2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \right] \quad (5.12)$$

O outro termo do campo de deslocamento da camada viscoelástica, $\frac{\partial v_0^{(2)}(y, t)}{\partial z}$, e responsável pelo cisalhamento ao longo da espessura, pode ser definido pelas observações feitas na Fig.(5.7a) e admitindo pequenos deslocamentos:

$$\frac{\partial v_0^{(2)}(y, t)}{\partial z} \approx \frac{(v_C - v_B)}{h_2} \quad (5.13)$$

Como as grandezas v_B e v_C já foram definidas, basta substituí-las na Eq.(5.13).

$$\frac{\partial v_0^{(2)}(y, t)}{\partial z} = \frac{1}{h_2} \left(v_3(y, t) - v_1(y, t) + \frac{h_3 + h_1}{2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \right) \quad (5.14)$$

Introduzindo as Eqs.(5.12) e (5.14) na Eq.(5.9), define-se o campo de deslocamento da camada viscoelástica na direção, y , em função dos graus de liberdade das camadas base e restrigente.

$$v^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left[v_1(y, t) + v_3(y, t) + \frac{d_1}{2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \right] + \dots \dots + \frac{z_2}{h_2} \left[v_3(y, t) v_1(y, t) + \frac{d_2}{2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \right] \quad (5.15)$$

onde $d_1 = h_3 - h_1$ e $d_2 = h_1 + h_3$. O campo de deslocamento na direção x , da camada viscoelástica é o mesmo das camadas elásticas, uma vez que há o princípio da inextensibilidade nesta direção. Além disso, é imposto que o ângulo de torção e o deslocamento transversal são os mesmo. Desta forma, tem-se que:

$$w^{(2)}(x, y, z, t) = w(y, t) - x\theta_y(y, t) \quad (5.16a)$$

$$u^{(2)}(y, z, t) = z\theta_y(y, z, t) \quad (5.16b)$$

Pode-se então calcular o campo de deformação, $\{\varepsilon(x, y, z, t)\}$, da camada viscoelástica:

$$\varepsilon_{xx}^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{\partial u^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (5.17a)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{\partial v^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial y} = \dots \dots \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (v_1(y, t) + v_3(y, t))}{\partial y} + \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial y^2} \right] + \dots \dots + \frac{z_2}{h_2} \left[\frac{\partial (v_3(y, t) - v_1(y, t))}{\partial y} + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial y^2} \right] \quad (5.17b)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (5.17c)$$

$$2\varepsilon_{xy}^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{\partial u^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (5.17d)$$

$$2\varepsilon_{xz}^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{\partial u^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} = \theta_y(y, t) - \theta_y(y, t) = 0 \quad (5.17e)$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{yz}^{(2)}(x, y, z, t) &= \frac{\partial v^{(2)}(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} = \dots \\ &\dots \frac{1}{h_2} [v_3(y, t) - v_1(y, t)] + \frac{d_3}{2h_2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} - x \frac{\partial \theta_y(y, t)}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.17f)$$

Para simplificar a escrita, a dependência das variáveis em relação a x, y, z serão omitidas do texto. Outra modificação da escrita é a nova forma para denotar a dependência temporal dos termos: $\{.\}_t$, ao lugar de $\{.(t)\}$. Esta é feita para facilitar a descrição das equações quando o cálculo fracionário for introduzido. Logo, o vetor de deformação viscoelástica pode ser reescrito, como segue:

$$\{\varepsilon^{(2)}\}_t = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_a\}_t + \{\varepsilon_f\}_t + \{\varepsilon_c\}_t + \{\varepsilon_t\}_t \quad (5.18)$$

Similar ao realizado para as camadas elásticas, é possível separar os efeitos de alongamento, $\{\varepsilon_a\}_t^{(2)}$, flexão, $\{\varepsilon_f\}_t^{(2)}$ e cisalhamento transversal no plano yz , $\{\varepsilon_c\}_t^{(2)}$, como mostrado abaixo:

$$\{\varepsilon_a^{(2)}\}_t = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial(v_1+v_3)}{\partial y} + \frac{d_1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.19a)$$

$$\{\varepsilon_f^{(2)}\}_t = \frac{z_2}{h_2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(v_3-v_1)}{\partial y} + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.19b)$$

$$\{\varepsilon_c^{(2)}\}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{h_2} [(v_3 - v_1) + \frac{d_3}{2} \frac{\partial w(y, t)}{\partial y}] \end{Bmatrix} \quad (5.19c)$$

$$\{\varepsilon_t^{(2)}\}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ z \frac{\partial \theta_y(y, t)}{\partial y} \\ -x \frac{\partial \theta_y(y, t)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.19d)$$

Observa-se que os termos multiplicados por x e z mostrados nas Eqs.(6.39) resultarão na componente torcional da rigidez, onde as variáveis explícitas x e z presentes nas mesmas, resultarão no momento polar de inércia. Portanto, após definir o campo de deformação, é possível determinar o potencial de energia viscoelástica, $U^{(2)}$, segundo a seguinte equação:

$$U_t^{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \varepsilon^{(2)} \right\}_t^T \left\{ \sigma^{(2)} \right\}_t dV \quad (5.20)$$

Nesta equação, é evidente a dependência temporal do campo de tensão, $\{\sigma\}_t^{(2)}$, e de deformação, $\{\varepsilon\}_t^{(2)}$, onde essa dependência é descrita por meio do Método das Derivadas Fracionárias, (RICHARD, 2014). Este desenvolvimento será mostrado na próxima seção, pois é preciso descrever a tensão, $\{\sigma\}_t$, por meio do cálculo fracionário. Este processo será mostrado em detalhes, pois uma formulação matricial será demonstrada, apesar do estado uniaxial de tensão. Entretanto, vale salientar que até este ponto o desenvolvimento no domínio da frequência e do tempo são exatamente os mesmos, como pode ser visto no trabalho de Cunha-Filho (FILHO, 2015). O mesmo vale para o potencial de energia cinética, $T^{(2)}$, o qual pode ser determinado por meio das derivadas temporais do campo de deslocamento da camada viscoelástica, o qual é descrito abaixo:

$$\dot{v}_t^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\dot{v}_1 + \dot{v}_3 + \frac{d_1}{2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) + \frac{z_2}{h_2} \left(\dot{v}_3 - \dot{v}_1 + \frac{d_2}{2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) \quad (5.21a)$$

$$\dot{u}_t^{(2)} = z \dot{\theta}_y \quad (5.21b)$$

$$\dot{w}_t^{(2)} = \dot{w} - x \dot{\theta}_y \quad (5.21c)$$

Logo, a partir da definição de potencial de energia cinética, tem-se que para a camada viscoelástica, a energia cinética pode ser definida pela seguinte equação:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \rho^{(2)} \int_V \dot{v}^{(2)2} dV + \frac{1}{2} \rho^{(2)} \int_V \dot{u}^{(2)2} dV + \frac{1}{2} \rho^{(2)} \int_V \dot{w}^2 dV \quad (5.22)$$

Ao elevar o campo de velocidade ao quadrado, surgirão termos cruzados pré-multiplicados por, z e x que serão anulados como segue:

$$\int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} = 0 \quad (5.23a)$$

$$\int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} = 0 \quad (5.23b)$$

Desta forma, tem-se que desenvolvendo a parcela referente ao alongamento e à flexão, $\dot{v}^{(2)^2}$, são obtidas as seguintes componentes de energia cinética:

$$T_{v_{13}}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{4} \int_V (\dot{v}_1 + \dot{v}_3)^2 dV \quad (5.24a)$$

$$T_{v_{13}\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_1}{4} \rho \int_V (\dot{v}_1 + \dot{v}_3) \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dV \quad (5.24b)$$

$$T_{v_{\theta_x}}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_1^2}{16} \rho \int_V \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 dV \quad (5.24c)$$

$$T_{f_{31}}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{h_2^2} \int_V z^2 (\dot{v}_3 - \dot{v}_1)^2 dV \quad (5.24d)$$

$$T_{f_{31}\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_2}{h_2^2} \rho \int_V (\dot{v}_3 - \dot{v}_1) \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dV \quad (5.24e)$$

$$T_{f_{\theta_y}}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_2^2}{4h_2^2} \rho \int_V z^2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 dV \quad (5.24f)$$

Finalmente, os termos referentes às velocidades, $\dot{u}^{(2)}$ e $\dot{w}^{(2)}$, são desenvolvidos:

$$T_{u\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \rho \int_V z^2 \dot{\theta}_y^2 dV \quad (5.25a)$$

$$T_w^{(2)} = \frac{1}{2} \rho \int_V \dot{w}^2 dV \quad (5.25b)$$

$$T_{w\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \rho \int_V x^2 \dot{\theta}_y^2 dV \quad (5.25c)$$

Após descrever o potencial de energia cinética, o método dos elementos finitos pode ser aplicado para obtenção das matrizes de massa. Quanto ao desenvolvimento da Eq.(5.20), o mesmo será feito mais a frente, pois o desenvolvimento da lei constitutiva segundo o cálculo fracionário deve ainda ser apresentada.

5.2.1 Aplicação do Método dos Elementos Finitos

Nesta seção, o Método dos Elementos Finitos é aplicado ao modelo de viga sanduíche. Este processo, bem como a determinação das funções de forma se encontram no Anexo A.3. Portanto, ao substituir as Eqs.(A.16) nas Eqs.(5.24) e (5.25), são obtidas as seguintes

equações matriciais:

$$T_{v_{13}}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \frac{\rho^{(2)} A}{4} \int_{-1}^1 ([N_1]_v + [N_3]_v)^2 |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26a)$$

$$T_{v_{13}\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \frac{\rho^{(2)} A}{4} \frac{2}{b} d_1 \int_{-1}^1 ([N_1]_v + [N_3]_v)^T [N, \eta]_w |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26b)$$

$$T_{v_{\theta_x}}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \frac{\rho^{(2)} A}{16} \frac{4}{b^2} d_1^2 \int_{-1}^1 [N, \eta]_w^T [N, \eta]_w |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26c)$$

$$T_{f_{31}}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \frac{\rho^{(2)} A}{12} \int_{-1}^1 ([N_3]_v - [N_1]_v)^2 |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26d)$$

$$T_{f_{31}\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_{,t}^{(e)T} \frac{\rho^{(2)} A}{12} \frac{2}{b} d_2 \int_{-1}^1 ([N_3]_v - [N_1]_v)^T [N, \eta]_w |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26e)$$

$$T_{f_{\theta_x}}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \rho^{(2)} \frac{4}{b^2} \frac{d_2^2}{4h_2^2} I_x \int_{-1}^1 [N, \eta]_w^T [N, \eta]_w |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26f)$$

$$T_{u_{\theta_y}}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \rho^{(2)} I_x \int_{-1}^1 [N]_{\theta_y}^T [N]_{\theta_y} |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26g)$$

$$T_w^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \rho^{(2)} A \int_{-1}^1 [N]_w^T [N]_w |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26h)$$

$$T_{w\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \rho^{(2)} I_z \int_{-1}^1 [N]_{\theta_y}^T [N]_{\theta_y} |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.26i)$$

onde, b , é o comprimento elementar. A notação matricial $[\cdot]_{\xi \text{ ou } \eta}$ representa a derivada da função de forma em relação às variáveis de coordenadas locais ξ ou η e na notação $[N_{1,3}]_{v,w,\theta_y}$ os números representam a camada e as lestras subscritas denotam a função de forma do grau de liberdade em questão. Nota-se que as parcelas, $T_{u_{\theta_y}}^{(2)}$ e $T_{w\theta_y}^{(2)}$, quando somadas, resultam na energia cinética de Torção da estrutura, logo pode ser dito que:

$$T_t^{(2)} = T_{u_{\theta_y}}^{(2)} + T_{w\theta_y}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_t^{(e)T} \rho^{(2)} (I_x + I_z) \int_{-1}^1 [N]_{\theta_y}^T [N]_{\theta_y} |J| d\eta \{\dot{q}\}_t^{(e)} \quad (5.27)$$

Destas equações será determinada a matriz de massa elementar da camada viscoelástica, a qual pode ser representada pelo seguinte somatório:

$$[M]_2^{(e)} = [M]_{v_{13}} + [M]_{v_{13}\theta_y} + [M]_{v_{\theta_x}} + [M]_{f_{31}} + [M]_{f_{31}\theta_y} + [M]_{f_{\theta_x}} + [M]_t + [M]_w \quad (5.28)$$

Em seguida será mostrado como determinar as matrizes de rigidez elementares.

5.2.2 Modelo das derivadas fracionárias aplicado à viga sanduíche

O desenvolvimento do potencial de energia de deformação foi separado do potencial de energia cinética por envolver o calculo fracionário. Assim, ainda atendendo às suposições feitas na Seção 3.3.3, onde é considerado um estado uniaxial de tensão, tem-se

que a lei constitutiva relacionada à camada viscoelástica pode ser descrita matricialmente por ter os efeitos de torção e cisalhamento ao longo da espessura. Assim, uma relação matricial completamente baseada na Lei de Hooke e no módulo de cisalhamento pode ser estabelecida para a camada viscoelástica:

$$\{\sigma\}_t = \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_t = G \begin{bmatrix} 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{yy}}{\partial t^\alpha} \\ 2 \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{xy}}{\partial t^\alpha} \\ 2 \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{yz}}{\partial t^\alpha} \end{Bmatrix}_t = G [\bar{G}] \frac{d^\alpha \{\varepsilon\}}{dt^\alpha} \quad (5.29)$$

Esta notação contradiz o que foi dito no Capítulo 3 sobre a incapacidade de descrever a lei constitutiva dos materiais viscoelástico utilizando a Lei de Hooke Generalizada. Entretanto, assim como assumido por Redy (REDDY; MAHAFFEY, 2013), adota-se que para um caso uniaxial de tensão, os efeitos de Poisson para as deformações axiais são desconsiderados, ou seja, para estas tensões $\mu = 0$. A Lei de Hooke Generalizada é descrita no Apêndice A.2 onde a demonstração destas suposições é feita.

Entretanto, o efeito de Poisson é considerado para os efeitos de forma das deformações. O resultado desta suposição é o desacople das deformações cisalhantes, ou cruzadas, com as deformações axiais, basta ver a matriz constitutiva, $[\bar{G}]$, na Eq.(5.29). Portanto, na ausência do acoplamento entre os movimentos de alongamento, cisalhamento ao longo da espessura e torção se torna possível descrever uma equação matricial para a lei constitutiva fracionária para o caso da viga sanduíche. Além disso, ao evocar o PEEV e estabelecer que o coeficiente de Poisson, ν , seja constante, é possível descrever o módulo de cisalhamento em termos do módulo de Young:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.30)$$

Assim, aplicando o conceito de derivada fracionária de Riemann (RICHARD, 2014) na Eq.(5.29), um modelo RTG (MAKRIS, 1997; BAGLEY; TORVIK, 1983) que relaciona o alongamento e os cisalhamentos da viga sanduíche é desenvolvido e as seguintes equações podem ser descritas:

$$\{\sigma_{yy}\}_t + a_E \frac{d^\alpha}{d^\alpha} \{\sigma_{yy}\}_t = E_0 \{\varepsilon_{yy}\}_t + E_\infty \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\varepsilon_{yy}\}_t \quad (5.31a)$$

$$\{\tau_{xy}\}_t + a_G \frac{d^\alpha}{d^\alpha} \{\tau_{xy}\}_t = 2G_0 \{\varepsilon_{xy}\}_t + 2G_\infty \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\varepsilon_{xy}\}_t \quad (5.31b)$$

$$\{\tau_{yz}\}_t + a_G \frac{d^\alpha}{d^\alpha} \{\tau_{yz}\}_t = 2G_0 \{\varepsilon_{yz}\}_t + 2G_\infty \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\varepsilon_{yz}\}_t \quad (5.31c)$$

onde,

$$a_E = 2a_G(1+\nu); \quad E_0 = 2G_0(1+\nu); \quad E_\infty = 2G_\infty(1+\nu). \quad (5.32)$$

Neste ponto, um comentário importante é feito referente às deformações cruzadas. Ao observar as Eqs.(5.29) e (5.31b), (5.31c), nota-se uma mudança importante. O coeficiente

2 do termo $2\{\varepsilon_{ij}\}$, passa a multiplicar o módulo de cisalhamento e vira somente, $\{\varepsilon_{ij}\}$. Esta é uma manipulação matemática que permite a criação da matriz de transformação linear, $[T]$,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

que permite descrever toda a lei constitutiva do sistema de forma matricial, como mostrado na Eq(5.34).

$$\{\sigma\}_t + a_G [\bar{E}] \frac{\partial^\alpha \{\sigma\}_t}{\partial t^\alpha} = G_0 [\bar{E}] [T] \{\varepsilon\}_t + G_\infty [\bar{E}] [T] \frac{\partial^\alpha \{\varepsilon\}_t}{\partial t^\alpha} \quad (5.34)$$

Após todas estas considerações, a aproximação de Grünwald-Letnikov (SCHMIDT; GAUL, 2001) é aplicada à Eq.(5.34) e avaliada para $j = 0$, obtendo:

$$\begin{aligned} ([I] + a_G [\bar{E}] \Delta t^{-\alpha}) \{\sigma_t\} = & \dots \\ & \dots (G_0 [\bar{E}] [T] + G_\infty [\bar{E}] [T] \Delta t^{-\alpha}) \{\varepsilon_t\} + \dots \\ & \dots + G_\infty [\bar{E}] [T] \Delta t^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \{\varepsilon\}_{t-j\Delta t} - \dots \\ & \dots - a_G [\bar{E}] \Delta t^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \{\sigma\}_{t-j\Delta t} \end{aligned} \quad (5.35)$$

A Eq.(5.35) pode ser reescrita em termos dos parâmetros D_i :

$$\{\sigma\}_t = [D_1] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \{\sigma\}_{t-j\Delta t} + [D_2] \{\varepsilon_d\}_t + [D_3] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \{\varepsilon_d\}_{t-j\Delta t} \quad (5.36)$$

onde

$$[D_1] = ([I] + a_G [\bar{E}] \Delta t^{-\alpha})^{-1} (-a_G [\bar{E}] \Delta t^{-\alpha}) \quad (5.37a)$$

$$[D_2] = ([I] + a_G [\bar{E}] \Delta t^{-\alpha})^{-1} (G_0 [\bar{E}] [T] + G_\infty [\bar{E}] [T] \Delta t^{-\alpha}) \quad (5.37b)$$

$$[D_3] = ([I] + a_G [\bar{E}] \Delta t^{-\alpha})^{-1} (G_\infty [\bar{E}] [T] \Delta t^{-\alpha}) \quad (5.37c)$$

Finalmente a Eq.(5.36) pode ser reescrita de acordo com a fórmula de recorrência da seguinte maneira:

$$\sigma_t = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] \{\varepsilon\}_{t-j\Delta t}, \quad \text{onde} \quad [\beta_1] = [D_2] \quad (5.38a)$$

$$[\beta_{j+1}] = [D_3] A_{j+1} + \sum_{i=1}^j [D_1] A_{i+1} [\beta_{j+1-i}] \quad (5.38b)$$

Aplica-se, assim, o método dos elementos finitos para descrever os campos de deformação definidos nas Eqs.(5.18) e Eqs.(5.19) por meio das funções de forma,

$$\{\varepsilon_a\} = [B_a] \{q\}_t \quad (5.39a)$$

$$\{\varepsilon_f\} = \frac{z_2}{h_2} [B_f] \{q\}_t \quad (5.39b)$$

$$\{\varepsilon_c\} = [B_c] \{q\}_t \quad (5.39c)$$

$$\{\varepsilon_t\} = [B_t] \{q\}_t \quad (5.39d)$$

Ao substituir as Eqs.(5.39) na Eq.(5.38b), as seguintes equações são obtidas:

$$\{\sigma_a\}_t = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_a] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.40a)$$

$$\{\sigma_f\}_t = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_f] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.40b)$$

$$\{\sigma_c\}_t = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_c] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.40c)$$

$$\{\sigma_t\}_t = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_t] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.40d)$$

Observa-se que a fração $\frac{1}{2}$ foi contraída pelas matrizes $[B_c]$ e $[B_t]$. Da forma como estão escritas as componentes de tensão da camada viscoelástica, não é possível calcular o potencial de energia de deformação devido à presença dos termos recorrentes. Para separá-los, é preciso avaliar as Eqs.(5.40) para $j = 0$, como mostrado a seguir:

$$\{\sigma_a\}_t = [D_2] [B_a] \{q\}_t^{(e)} + \sum_{j=1}^{N_l} \beta_{j+1} [B_a] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.41a)$$

$$\{\sigma_f\}_t = \frac{z}{h_2} [D_2] [B_f] \{q\}_t^{(e)} + \frac{z}{h_2} \sum_{j=1}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_f] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.41b)$$

$$\{\sigma_c\}_t = [D_2] [B_c] \{q\}_t^{(e)} + \sum_{j=1}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_c] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.41c)$$

$$\{\sigma_t\}_t = [D_2] [B_t] \{q\}_t^{(e)} + \sum_{j=1}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_t] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.41d)$$

É possível distinguir agora as componentes locais, $\{q\}_t^{(e)}$, e não-locais, $\{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)}$, do campo de tensão, os quais resultarão nas matrizes de rijezas viscoelásticas e nos esforços internos dissipativos do material. A partir destes termos são calculados os potenciais de

energias viscoelástica, a começar pela parcela local do potencial:

$$U_{a^*}^{(2)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} A \int_{-1}^1 [B_a]^T D_2 [B_a] |J| d\eta \{q\}_t^{(e)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} [K_{a^*}^*] \{q\}_t^{(e)} \quad (5.42a)$$

$$U_{f^*}^{(2)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \frac{A}{12} \int_{-1}^1 [B_f]^T D_2 [B_f] |J| d\eta \{q\}_t^{(e)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} [K_{f^*}^*] \{q\}_t^{(e)} \quad (5.42b)$$

$$U_{c^*}^{(2)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \frac{L_x}{h_2} \int_{-1}^1 [B_c]^T D_2 [B_c] |J| d\eta \{q\}_t^{(e)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} [K_{c^*}^*] \{q\}_t^{(e)} \quad (5.42c)$$

$$U_{t^*}^{(2)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} J_0 \int_{-1}^1 [B_t]^T D_2 [B_t] |J| d\eta \{q\}_t^{(e)} = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} [K_{t^*}^*] \{q\}_t^{(e)} \quad (5.42d)$$

onde os parâmetros, A , L_x e J_0 representam a área da seção transversal, a largura da viga e o momento polar de inércia em torno do eixo y , respectivamente. Relembrando que aqui será feita a substituição pela constante de torção J_T . O índice (e) faz referência ao nível elementar das matrizes. O asterisco nos índices sobrescritos diferenciam as parcelas de energia de deformação que originarão as matrizes de rigidez daquelas que irão determinar os esforços dissipativos. Estes últimos, serão identificados por dois asteriscos, como será visto logo a seguir. Assim, a parcela total de rigidez viscoelástica pode ser descrita pela soma de cada uma das componentes calculadas:

$$[K^*]_{(2)}^{(e)} = [K_{a^*}^*] + [K_{f^*}^*] + [K_{c^*}^*] + [K_{t^*}^*] \quad (5.43)$$

Neste ponto, a equação do movimento a nível elementar da viga pode ser descrita da seguinte forma:

$$[M]^{(e)} \{\ddot{q}\}_t^{(e)} + [C]^{(e)} \{\dot{q}\}_t^{(e)} + [K]^{(e)} \{q\}_t^{(e)} = \{F\}_t^{(e)} - \{F_v\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \quad (5.44)$$

onde $[M]^{(e)} = [M]_{(1)}^{(e)} + [M]_{(2)}^{(e)} + [M]_{(3)}^{(e)}$ e $[K]^{(e)} = [K]_{(1)}^{(e)} + [K^*]_{(2)}^{(e)} + [K]_{(3)}^{(e)}$.

O primeiro vetor do lado direito da Eq.(5.44) representa os esforços externos aplicados à viga, que mais adiante serão definidos como sendo esforços aerodinâmicos. O segundo vetor advém do desenvolvimento do segundo termo do lado direito das Eqs.(5.41a), (5.41b), (5.41c), (5.41d) e (5.41). Este desenvolvimento resultará em matrizes de rigidez, denominadas de rigidezes modificadas, e serão descritas pela seguinte notação de energia de deformação elástica, $U_{(a^{**}, f^{**}, c^{**}, \theta_y^{**})}^{(2)}$,

$$\begin{aligned} U_{a^{**}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} A \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^{N_t} [B_a]^T [\beta_{j+1}] [B_a] |J| d\eta \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \sum_{j=1}^{N_t} [K_{a,j}^{**}] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} \end{aligned} \quad (5.45a)$$

$$\begin{aligned}
U_{f^{**}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \frac{A}{12} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^{N_l} [B_f]^T [\beta_{j+1}] [B_f] |J| d\eta \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} = \dots \\
&\dots = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \sum_{j=1}^{N_l} [K_{f,j}^{**}] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)}
\end{aligned} \tag{5.45b}$$

$$\begin{aligned}
U_{c^{**}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \frac{L_x}{h_2} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^{N_l} [B_T]^T [\beta_{j+1}] [B_T] |J| d\eta \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} = \dots \\
&\dots = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \sum_{j=1}^{N_l} [K_{c,j}^{**}] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)}
\end{aligned} \tag{5.45c}$$

$$\begin{aligned}
U_{t^{**}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} J_0 \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^{N_l} [B_t]^T [\beta_{j+1}] [B_t] |J| d\eta \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)} = \dots \\
&\dots = \frac{1}{2} \{q\}_t^{(e)T} \sum_{j=1}^{N_l} [K_{t,j}^{**}] \{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)}
\end{aligned} \tag{5.45d}$$

Nas Eqs.(5.45), é visto claramente como os esforços internos do material viscoelástico podem ser determinados externamente ao processo de integração numérico, diferentemente do realizado por Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001). Devido ao somatório, a integral fará com que as matrizes $[K_{a,f,c,t,j}^{**}]$ possuam ordem $[gdl \times gdl]$. O somatório do produto destas matrizes com o vetor de deslocamento, $\{q\}_{t-j\Delta t}^{(e)}$, produzirá os esforços dissipativos do material viscoelástico, que ao serem posicionados no lado direito da equação do movimento, fazem com que a Eq.(5.44) possa ser reescrita da forma:

$$[M]^{(e)} \{\ddot{q}\}_t + [C]^{(e)} \{\dot{q}\}_t + [K]^{(e)} \{q\}_t = \{F\}_t - \sum_{j=1}^{N_l} [K_{(2),j}^{**}]^{(e)} \{q\}_{t-j\Delta t} \tag{5.46}$$

onde, $[K_{(2),j}^{**}]^{(e)} = [K_{a,j}^{**}] + [K_{f,j}^{**}] + [K_{m,j}^{**}] + [K_{c,j}^{**}] + [K_{t,j}^{**}]$. Portanto, tem-se que o problema de viga sanduíche modelada pelo cálculo fracionário está desenvolvido pela nova fórmula de recorrência adaptada a um caso uniaxial.

Através da conectividade entre os nós da viga e seus graus de liberdade, a montagem das matrizes globais é feita para obtenção da equação do movimento, descrita abaixo:

$$[M]^{(g)} \{\ddot{Q}\}_t + [C]^{(g)} \{\dot{Q}\}_t + [K]^{(g)} \{Q\}_t = \{F\}_t - \sum_{j=1}^{N_l} [K_{(2),j}^{**}]^{(g)} \{Q\}_{t-j\Delta t} \tag{5.47}$$

Esta é uma nova formulação que permite descrever matricialmente o caso de viga sanduíche, facilitando a implementação. Além disso, o fato da recorrência ter sido usada, o custo computacional é bastante reduzido em relação ao método clássico de Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001), como será visto mais adiante no caso de placa.

5.2.3 Verificação do Modelo de Viga Sanduíche

Nesta seção, será feita uma comparação com o modelo de viga sanduíche proposto por Galúcio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004), onde uma abordagem fracionária é feita para o modelo dinâmico de material viscoelástico utilizando o que os autores chamam de deslocamento anelástico. Neste método, assim como na Fórmula de Recorrência, tem-se que a auto-dependência da tensão deixa de existir, permitindo que todas integrais necessárias sejam feitas fora do integrador numérico, melhorando consideravelmente os custos computacionais de problemas mais complexos incorporando materiais viscoelásticos. Assim, os dois modelos são concebidos utilizando 35 elementos e comparados utilizando as características mostradas nas Tabelas 5.5 e 5.6.

Tabela 5.5: Características geométricas das vigas avaliadas

Camada	Esp. [mm]	Ly [mm]	Lx [mm]
Base (1)	0,8128	350	40
Viscoelástica (2)	0,3	350	40
Restringente (3)	0,5	350	40

Tabela 5.6: Propriedades mecânicas das vigas avaliadas

Camada	Módulo[Gpa]	Poisson	Densidade [kg/m^3]
Base (1)	73,1	0,345	2780
Viscoelástica (2)	Tabela 5.7	0,500	1600
Restringente (3)	73,1	0,345	2780

A Tabela 5.7 mostra os parâmetros do material viscoelástico utilizados para os modelos de Galúcio e a fórmula de recorrência.

Tabela 5.7: Parâmetros do modelo fracionário a $27^\circ C$.

Parâmetro	FDM Anelástico	FDM Recorrência
$E_0[Pa]$	1500000	422307
$E_\infty[Pa]$	69949500	30311
α	0,7915	0,67594
Gal.- $\tau[ms]$, Rec. - $a_G[s^\alpha]$	$1,4052 \times 10^{-2}$	0,0002178

Como condição de contorno para as análises à seguir, é considerada a mesma utilizada por Galúcio, engastada-livre. É importante notar que a autora engasta todos os graus

de liberdade, incluindo a camada restringente. Além disso, um impulso unitário, cujas características podem vistas na Fig.(5.9), é aplicado na extremidade da viga (último nó).

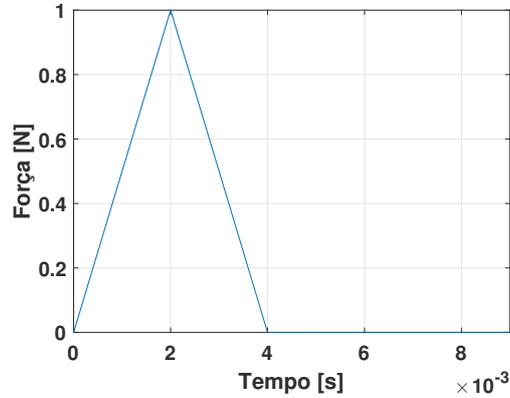


Figura 5.9: Sobreposição da curva exibida no artigo com o resultado do programa implementado.

Tendo definido todos os parâmetros necessários, as análises são mostradas nas subseções que seguem.

Comparação: Fórmula de Recorrência vs Galúcio

Antes de mostrar as curvas comparativas da estrutura utilizada neste trabalho, o modelo desenvolvido baseado no artigo de Galúcio et al. (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004) será validado sobrepondo a curva obtida com aquela mostrada no artigo.

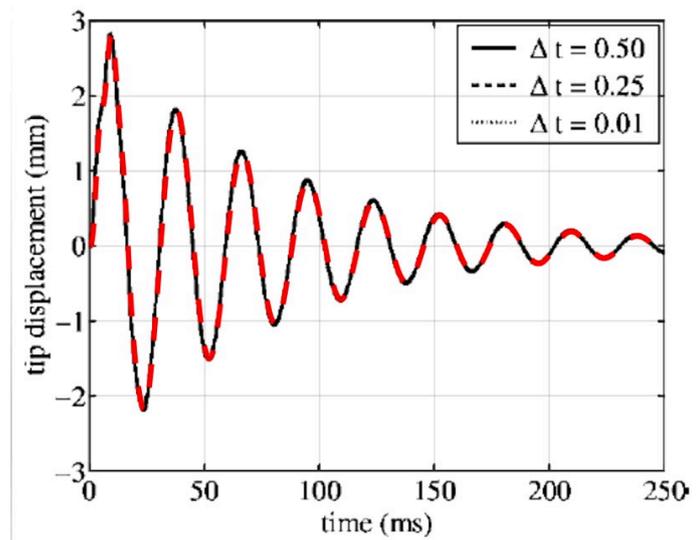
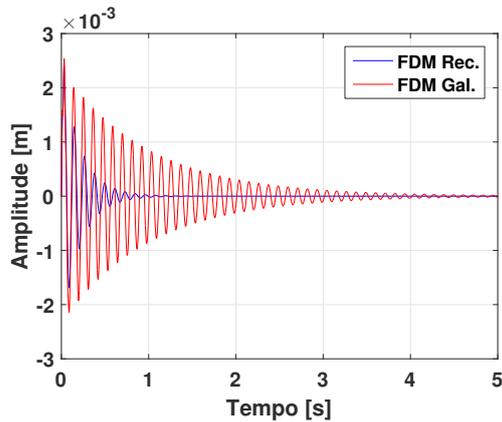


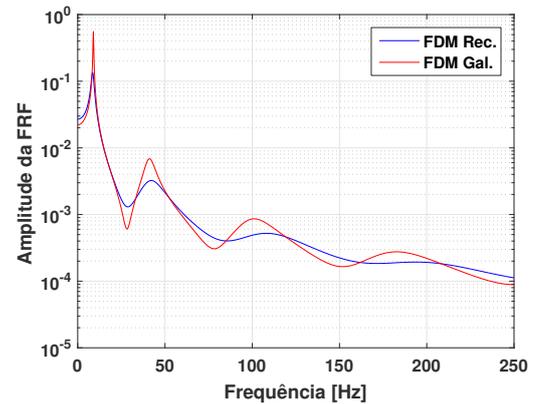
Figura 5.10: Sobreposição da curva exibida no artigo com o resultado do programa implementado.

Na Fig.(5.10), a curva vermelha apresentada possui o grau de liberdade de torção, diferentemente do modelo de Galúcio et al. Ainda assim, o resultado se mostrou exatamente o mesmo devido ao desacoplamento da torção com a flexão, validando o modelo.

Em seguida, a resposta temporal e a FRF dos dois modelos são comparadas na Fig.(5.11), porém agora de acordo com as Tabelas 5.5 e 5.6.



(a) Influência da extensão da memória na resposta temporal.

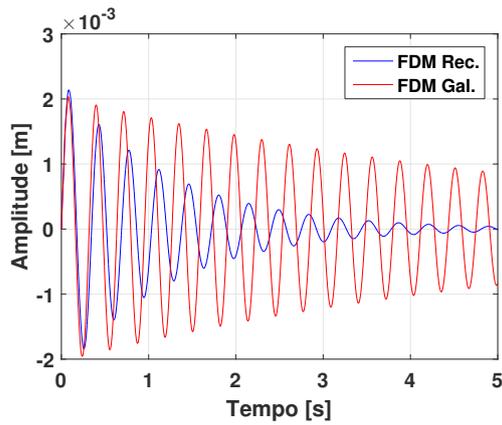


(b) Influência da extensão da memória na FRF.

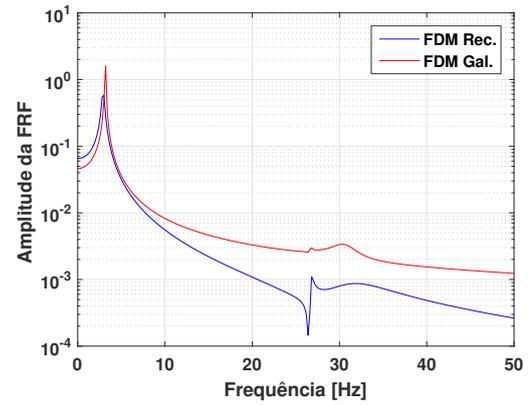
Figura 5.11: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.

As duas figuras mostram uma diferença importante entre os dois modelos, principalmente na quantidade de amortecimento gerada por cada um. Essas diferenças podem ser explicadas principalmente pela teoria abordada por Galúcio, uma vez que a autora faz uso de um modelo semelhante ao RT (*Rubbery-Transition*) (BAGLEY; TORVIK, 1983), pois há somente o termo fracionário referente à deformação. Além disso, não se sabe ao certo as imposições feitas acerca do uso da variável, denominada pela autora de anelástica. Finalmente, processo de identificação dos parâmetros é muito diferente como pode ser visto nos valores mostrados na Tabela 5.7.

A próxima análise considera o efeito do lastro na ponta da asa. O lastro é utilizado para fazer com que a segunda e terceira frequências naturais (modos de flexão e torção, respectivamente) se aproximem, possibilitando a visualização do *flutter* dentro do regime de trabalho do túnel de vento disponível.

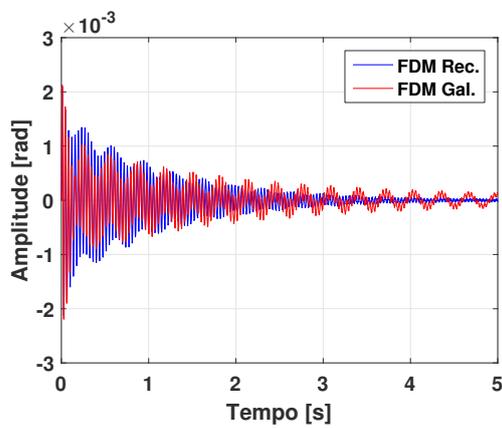


(a) Movimento de flexão no tempo.

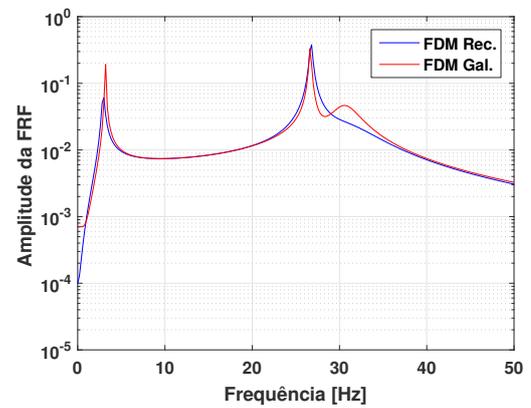


(b) Movimento de flexão na frequência.

Figura 5.12: Comparação FDM Galúcio vs FDM Recorrência - flexão.



(a) Movimento de torção no tempo.



(b) Movimento de torção na frequência.

Figura 5.13: Comparação FDM Galúcio vs FDM Recorrência - torção.

Nota-se uma pequena diferença nos valores das frequências naturais e, novamente, na quantidade de amortecimento gerada. A Tabela 5.8 mostra os valores das três primeiras frequências naturais de cada modelo.

Tabela 5.8: Comparação das frequências naturais entre modelos de Galúcio e a Fórmula de Recorrência.

Frequência Natural	Galúcio [Hz]	Fórmula de Recorrência [Hz]
1°	3,2	3,0
2°	26,2	26,2
3°	30,2	31,8

Desta maneira, é concluído o estudo sobre o cálculo fracionário onde o objetivo foi mostrar que, o modelo mais utilizado na literatura capaz de representar de forma eficiente o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos apresenta grandes variações

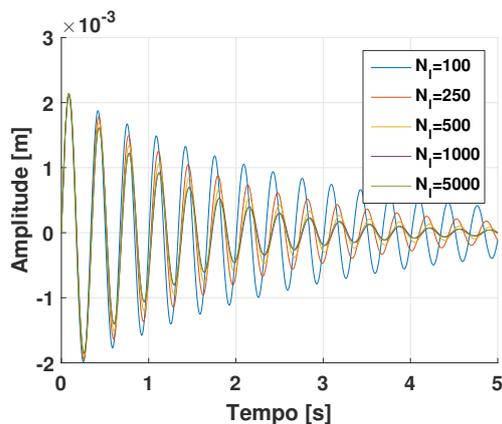
quando comparado com a abordagem clássica proposta por Bagley e Torvick e Schmidt e Gaul.

5.2.4 Convergência do passo de tempo e da extensão da memória

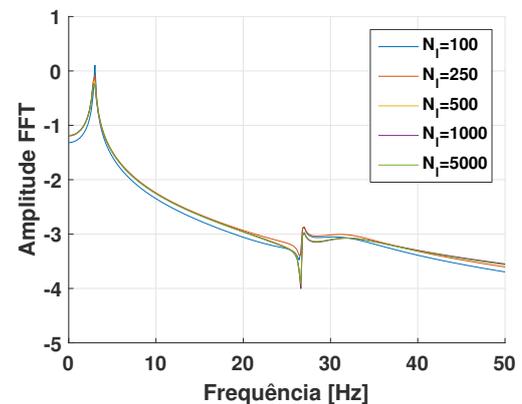
Antes de iniciar qualquer análise, a convergência do passo de tempo, Δt , do integrador numérico e da extensão da memória é imprescindível para se determinar os valores corretos destes parâmetros e como consequência, uma quantidade desnecessária de cálculos. Por exemplo, utilizar um Δt excessivamente refinado e/ou uma memória muito longa.

A determinação destes parâmetros será feita utilizando a massa na extremidade livre da viga, pois desta maneira será possível perceber algum impacto nas frequências naturais o que poderia impactar as análises aeroelásticas, caso haja.

Neste caso, o que se faz é primeiramente fixar, $\Delta t = 0,1ms$ e variar a extensão da memória com os seguintes valores de N_l : 100, 250, 500, 1000 e 1000. Isto resultará em memórias com extensões de: $10ms$, $25ms$, $50ms$, $100ms$ e $500ms$. As Figs.(5.13a) e (5.13b) mostram este comportamento.

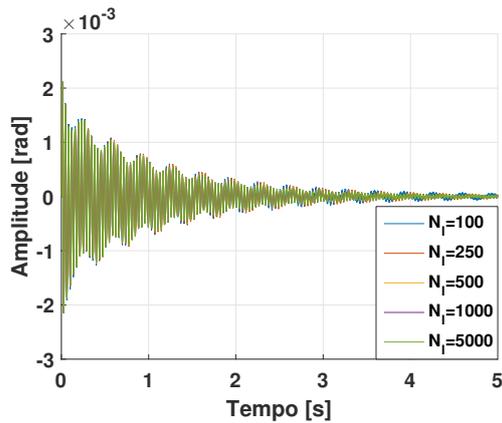


(a) Influência da extensão da memória na resposta temporal.

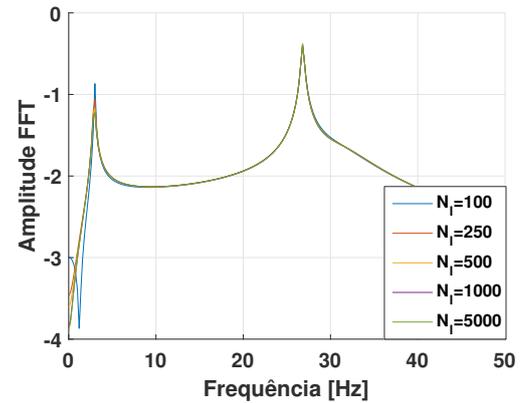


(b) Influência da extensão da memória na FRF.

Figura 5.14: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.



(a) Influência da extensão da memória na resposta temporal.



(b) Influência da extensão da memória na FRF.

Figura 5.15: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.

Uma vez avaliada a extensão da memória, o efeito do Δt na resposta é estudado através da redução do Δt para $1ms$. Em seguida, determina-se a correta quantidade de N_l s para que a não-localidade seja avaliada até o mesmo instante no passado utilizado para um $\Delta t = 0,1ms$. Desta maneira, tem-se que, $N_l = 10, 25, 50, 100$ e 500 .

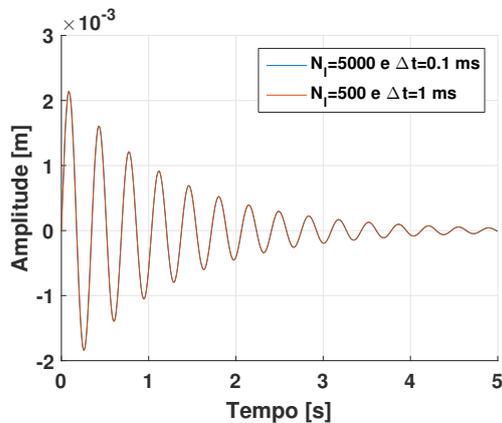
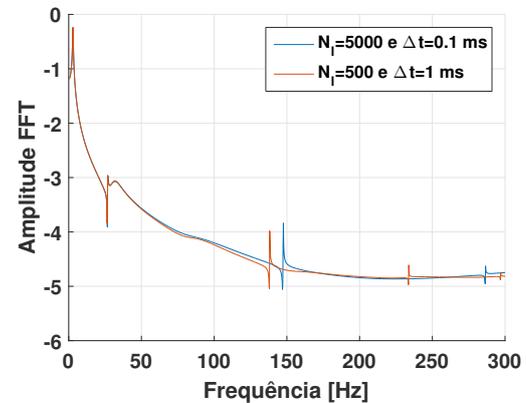
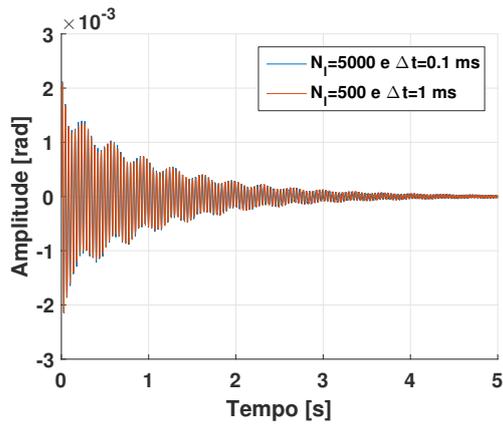
(a) Influência da extensão da memória na resposta temporal - gdl $h(t)$.(b) Influência da extensão da memória na FRF - gdl $h(t)$.

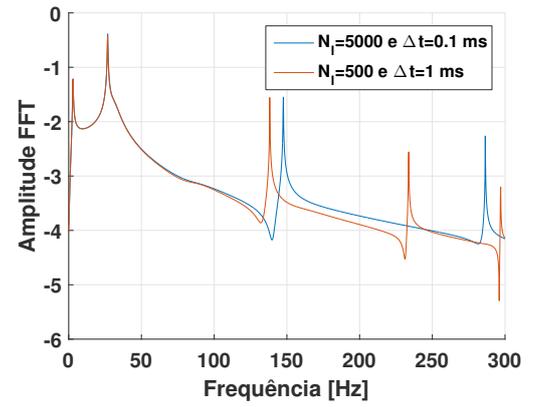
Figura 5.16: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.

Observa-se nas Figs.(5.16) e (5.17) uma forte influência do Δt para frequências mais altas. Porém, a quantidade de amortecimento gerada com a não-localidade de até $500ms$ é a mesma para os dois casos, como pode ser visto nas respostas no domínio do tempo e da frequência para os três primeiros picos. Esta divergência em alta frequência não será um problema, uma vez que a aeroelasticidade será regida basicamente pelos três primeiros modos da estrutura, como será visto em capítulos posteriores.

Portanto, após quantificar todos estes efeitos, é possível dizer que devido ao compromisso entre qualidade da resposta e tempo de cálculo, os valores considerados bons para



(a) Influência da extensão da memória na resposta temporal - gdl $\theta_y(t)$.



(b) Influência da extensão da memória na FRF.

Figura 5.17: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema - $\theta_y(t)$.

os parâmetros são $\Delta t = 1ms$ e $N_t = 500$.

CAPÍTULO VI

Seção Típica Não Linear

As pesquisas sobre *flutter* de painéis feitas em mestrado e neste doutorado foram abordadas inicialmente no domínio da frequência, e em seguida no domínio do tempo, sempre tratados de maneira linear. Apesar destes modelos indicarem valores de velocidade crítica coerentes, nada pode ser dito em relação às amplitudes de deslocamentos em regiões próximas à velocidade crítica e além, devido às não linearidades existentes. Estas não linearidades podem fazer com que fenômenos como bifurcações, oscilações em ciclo limite e mesmo caos (SALES et al., 2018) venham a ocorrer. Neste contexto, surgiu a ideia de iniciar um trabalho com sistemas aeroelásticos não lineares no domínio do tempo, para que seja possível estudar além das amplitudes de vibração, analisar a influência do amortecimento viscoelástico na instabilidade aeroelástica. Portanto, foi escolhido o modelo de uma seção típica contemplando não linearidades estruturais e associadas a estas elementos viscoelásticos discretos para o estudo. Neste contexto, o que se busca responder é a real influência do amortecimento viscoelástico no valor da velocidade crítica, ou se seu efeito é particularmente para diminuir as amplitudes do sistema em ciclo limite.

Desta forma, os efeitos não lineares são introduzidos no modelo da seção típica por meio de elementos discretos de rigidez não lineares, seja em *plunge* ou em *pitch*. As formas mais comuns de não linearidades deste tipo são molas do tipo *hardening*, *softening* (SALES et al., 2018) ou folga (*free-play*) (O'NEIL; STRGANAC, 1998). Estes efeitos não lineares serão aplicados somente aos elementos de rigidez elástica, ou seja, nas rizezas da seção típica. Os elementos viscoelásticos serão tratados de forma linear, implicando que amortecimento gerado dependerá completamente do deslocamento obtido de um modelo não linear.

Quanto ao modelo de carregamento aerodinâmico, uma abordagem não estacionária é aplicada utilizando a Função de Wagner (SILVESTRE, 2012). Deste modelo, uma equação

do movimento enriquecida dos atrasos aerodinâmicos é estabelecida, porém neste caso, sem adentrar no espaço de estados. Esta abordagem nada convencional foi escolhida por dois motivos: permitir a introdução do comportamento dinâmico do material viscoelástico de forma mais simples do ponto de vista da programação e aliviar o custo computacional do problema da Teoria das Faixas. Será visto no capítulo 7 que a quantidade de graus de liberdade será aumentada somente dos atrasos aerodinâmicos desta maneira, e não dobrada como seria no espaço de estados.

Finalmente, os resultados serão apresentados confrontando os modelo não linear com medições experimentais realizadas no túnel de vento do Laboratório de Estruturas do ITA.

6.1 Seção Típica Não Linear - Equação do Movimento

O modelo idealizado neste trabalho consiste de uma seção típica com dois graus de liberdade, tal qual mostrado na Fig.(6.1):

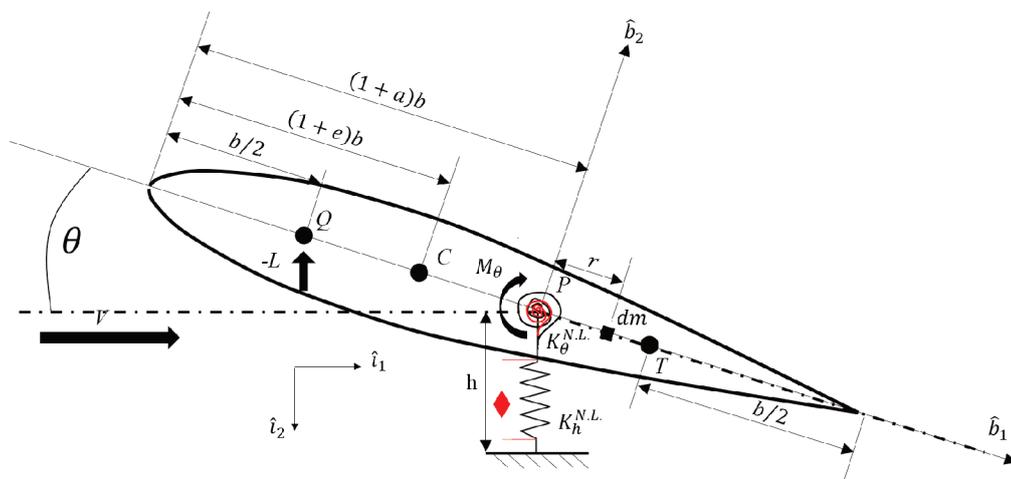


Figura 6.1: Modelo para seção típica com 2 graus de liberdade

Onde os pontos mostrados na Fig.(6.1) têm os seguintes significados:

- P - Ponto referente ao eixo elástico ($e.e$) do perfil;
- C - Centro de massa do perfil;
- Q - Eixo aerodinâmico ($e.a$), localizado a um quarto da corda a contar a partir do bordo de ataque;
- T - Três quartos de corda a contar a partir do bordo de ataque.

Os parâmetros adimensionais a e e determinam as posições dos pontos C e P e ambos variam de -1 a 1. As variáveis h e θ são os g.d.l de translação e rotação da seção,

respectivamente. A distância, r , refere-se à distância de um infinitesimal de massa do perfil em relação ao eixo elástico ($e.e$), sendo portanto a grandeza que determinará a massa e os momentos de inércia do perfil, quando integrada ao longo das duas semicordas, parâmetro representado pela letra b .

Na Fig.(6.1) pode-se ver também os elementos discretos de rigidez elástica, representados esquematicamente pelas molas pretas, e os elementos viscoelásticos, representados em vermelho. É importante dizer que os elementos viscoelásticos possuem o comportamento linear do ponto de vista geométrico, não apresentando portanto auto-enrijecimento.

A partir do elemento infinitesimal de massa mostrado na Fig.(6.1), é possível avaliar a energia cinética do sistema com base em todos os parâmetros mostrados. Desta maneira, calculando as parcelas relativas aos movimentos de *plunge*, h_t , e *pitch*, θ_t , a seguintes expressão podem ser descritas:

$$dT_h = \frac{1}{2}dm [\dot{h} + (x - ba)] \quad (6.1a)$$

$$dT_\theta = \frac{1}{2}dm [\ddot{h} + (x - ba)^2 \theta^2 + 2(x - ba) \dot{h}\dot{\theta}] \quad (6.1b)$$

Integrando os dois infinitesimais do potencial de energia cinética ao longo da corda, ou seja, de $-b$ até b , a energia cinética total da seção típica é determinada pela soma das duas parcelas.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_\theta\dot{\theta}^2 + S_\theta\dot{h}\dot{\theta} \quad (6.2)$$

onde,

$$I_\theta = \int_{-b}^b (x - ba)^2 dm \quad (6.3a)$$

$$S_\theta = \int_{-b}^b (x - be) dm \quad (6.3b)$$

são os momentos de inércia e o produto de inércia, respectivamente, em torno do eixo elástico.

Em seguida, o cálculo do potencial de energia de deformação elástica é realizado com base na rijeza discretas apresentadas na Fig.(6.1), a priori sem considerar os elementos viscoelásticos. Disso, tem-se a seguinte relação:

$$dU = K_h^{N.L} h dh + K_\theta^{N.L} \theta d\theta \quad (6.4)$$

Integrando em h e θ , tem que o potencial de energia de deformação elástica vale:

$$U = \int_0^h K_h^{N.L} h dh + \int_0^\theta K_\theta^{N.L} \theta d\theta = \frac{1}{2}K_h^{N.L} h^2 + \frac{1}{2}K_\theta^{N.L} \theta^2 \quad (6.5)$$

onde, $K_h^{N.L}$ e $K_\theta^{N.L}$, são as molas elásticas dependentes do deslocamento da estrutura. Será mostrado mais a seguir como serão idealizadas estas rijeza de forma não linear. Além do amortecimento estruturado introduzido pela presença dos elementos viscoelásticos, são

considerados também forças dissipativas relativas a cada grau de liberdade. A forma de calcular esta componente de energia do energia é mostrada abaixo:

$$D = \frac{1}{2}c_h\dot{h}^2 + \frac{1}{2}c_\theta\dot{\theta}^2 \quad (6.6)$$

onde, c_h e c_θ são os amortecimentos estruturais relacionados aos modos de translação e torção, respectivamente. Estes termos podem reescrito de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m\zeta_h\omega_h & 0 \\ 0 & 2I_\theta\zeta_\theta\omega_\theta \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

onde, ζ_h e ζ_θ são os coeficientes de amortecimento adimensionais, e ω_h e ω_θ são as frequências naturais associadas aos modos de *plunge* e *pitch*. Agora é possível aplicar as equações de Lagrange a todos os potenciais definidos para obtenção das equações do movimento, como mostrado a seguir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{h}_t} \right) - \frac{\partial T}{\partial h_t} + \frac{\partial U}{\partial h} + \frac{\partial D}{\partial \dot{h}_t} = Q_h \quad (6.8a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_t} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_t} + \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_t} = Q_\theta \quad (6.8b)$$

onde Q_h e Q_θ são os esforços generalizados, que neste caso representam os esforços aerodinâmicos atuantes no perfil devido ao campo de pressão por este gerado.

Logo, substituindo as expressões da energia cinética, potencial e dissipativa nas Equações de Lagrange, as equações do movimento relativas a cada grau de liberdade são definidas. Já transcrevendo-as em forma matricial, a seguinte expressão é obtida:

$$\begin{bmatrix} m & S_\theta \\ S_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h^{(N.L)} & 0 \\ 0 & k_\theta^{(N.L)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_h \\ Q_\theta \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

onde os termos não lineares $K_h^{(N.L)}$ e $K_\theta^{(N.L)}$ valem:

$$K_h^{(N.L)} = m\omega_h^2 \frac{F_h(h(t))}{h(t)} = m\omega_h^2 \frac{(a_0^h h(t) + a_1^h h^3(t))}{h(t)} \quad (6.10a)$$

$$K_\theta^{(N.L)} = I_\theta\omega_\theta^2 \frac{F_\theta(\theta(t))}{\theta(t)} = I_\theta\omega_\theta^2 \frac{(a_0^\theta \theta(t) + a_1^\theta \theta^3(t))}{\theta(t)} \quad (6.10b)$$

e as constantes $a_0^{h,\theta}$ e $a_1^{h,\theta}$ devem ser determinadas por ajuste de curva com os resultados experimentais.

Os esforços generalizados podem ser calculados a partir do trabalho virtual da seguinte maneira:

$$Q_i = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta q_i} \quad (6.11)$$

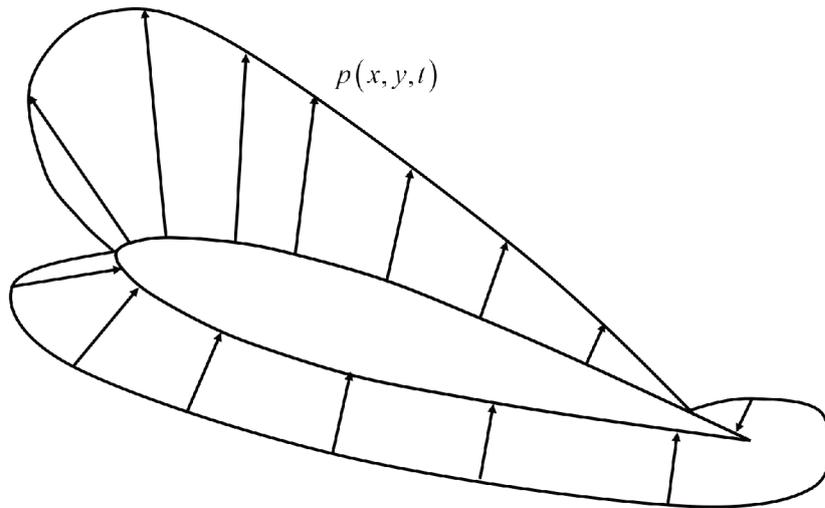


Figura 6.2: Distribuição do campo de pressão em torno do perfil. Adaptado da referência (WRIGHT; COOPER, 2015).

onde q_i são as coordenadas generalizadas do sistema. Como mencionado anteriormente, este trabalho é calculado a partir dos esforços atuantes no perfil devido ao campo de pressão por este gerado. A Fig.(6.2) mostra um esquema de um campo de pressão, $p(x, y, t)$, em torno do perfil da seção típica.

As forças atuantes no eixo aerodinâmico e o momento por esta gerado resultam do processo de integração ao longo da corda, c , da semi-corda, b , como mostrado pelo cálculo do trabalho virtual, δW .

$$\delta W = \int_0^{+b} \int_{-c/2}^{+c/2} p(x, y, t) \delta z(x, y, t) dx dy \quad (6.12)$$

onde, $\delta z(x, y, t)$ é o deslocamento na direção normal, ou seja, a mesma direção do movimento de *plunge*. Este deslocamento virtual pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\delta z(x, y, t) = -\delta h - (x - ba) \delta \theta \quad (6.13)$$

substituindo a Eq.(6.13) na Eq.(6.12) e aplicando o resultado disso na Eq.(6.11), são calculadas a força de sustentação do perfil, L_t , bem como o momento por esta gerado, $M_{e.a,t}$.

$$\begin{aligned} Q_h &= \frac{\partial \delta W}{\partial \delta h} = \frac{\partial}{\partial \delta h} \left[- \int_0^b \int_{-c/2}^{+c/2} p(x, y, t) (\delta h + (x - ba) \delta \theta) dx dy \right] = \dots \\ &\dots = - \int_0^b \int_{-c/2}^{+c/2} p(x, y, t) dx dy = -L(t) \end{aligned} \quad (6.14a)$$

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \theta} = \frac{\partial}{\partial \delta \theta} \left[- \int_0^b \int_{-c/2}^{+c/2} p(x, y, t) (\delta h + (x - ba) \delta \theta) dx dy \right] = \dots \\ &\dots = - \int_0^b \int_{-c/2}^{+c/2} p(x, y, t) (x - ba) dx dy = M_{e.a}(t) \end{aligned} \quad (6.14b)$$

Substituindo as Eqs.(6.14a) e (6.14b) na Eq.(6.9), a equação do movimento é estabelecida em termos da sustentação do perfil e do momento em torno do eixo elástico.

$$\begin{bmatrix} m & S_\theta \\ S_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h^{(N.L)} & 0 \\ 0 & k_\theta^{(N.L)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L(t) \\ M_{e.a}(t) \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Todos os parâmetros necessários são definidos com base no sistema desenvolvido por Douglas (BUENO, 2014), onde uma seção de asa rígida retangular com 80 cm de envergadura e 29 cm de corda é acoplada pela base a um dispositivo denominado de PAPA, do inglês, *Pitch and Plunge Apparatus*, projetado para prover dois graus de liberdade ao sistema. A asa possui um perfil NACA 0012 fabricado em fibra de carbono e preenchida com resina. Apesar de possuir uma superfície de controle, a mesma é travada na base da asa. A Fig.(6.3) mostra fotos do aparato montado em frente do túnel de vento do Laboratório de Estruturas do ITA, local onde os ensaios experimentais foram realizados.

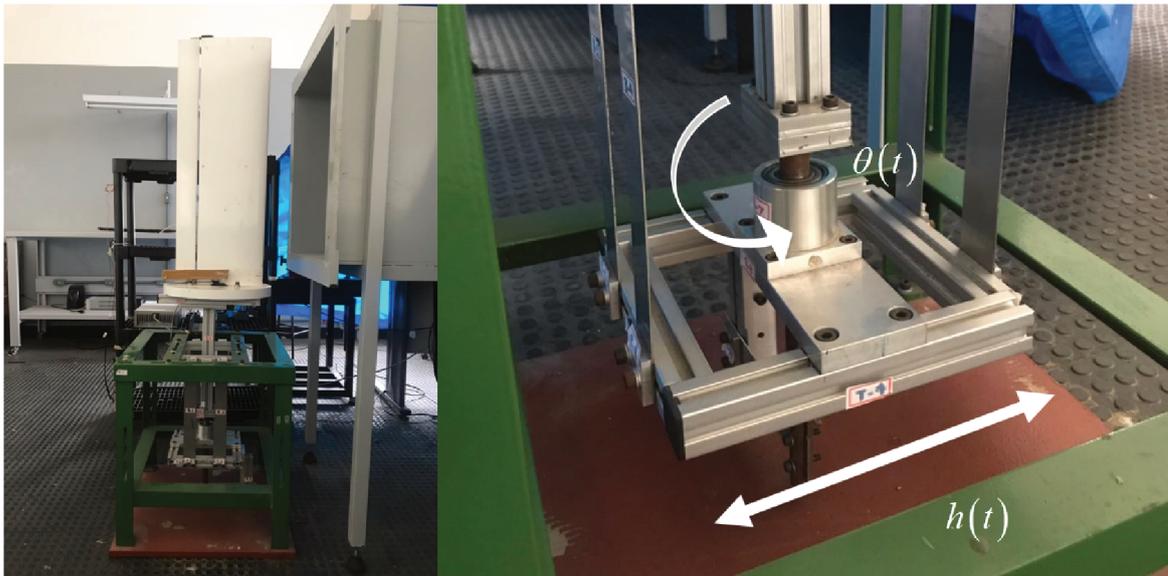


Figura 6.3: Fotos do PAPA posicionado em frente ao túnel de vento.

Nota-se que quatro vigas bi-engastadas são responsáveis por conferir rigidez de flexão ao sistema, que no caso correspondem ao grau de liberdade, $(h(t))$, e uma viga menor, também engastada no eixo elástico da asa para conferir rigidez de torção devido ao momento concentrado na extremidade da mesma, como mostrado com detalhes na Fig.(6.4).

O PAPA se mostra um excelente aparato experimental por possuir uma grande flexibilidade, permitindo que velocidades críticas mais baixas sejam atingidas. Como resultado, o risco de um colapso estrutural é reduzido, possibilitando análises em ciclo limite, como será visto mais adiante.

Neste contexto, as rizezas equivalentes do sistema são definidas com base nas frequências naturais dos dois graus de liberdade do PAPA, as quais são determinadas medidas

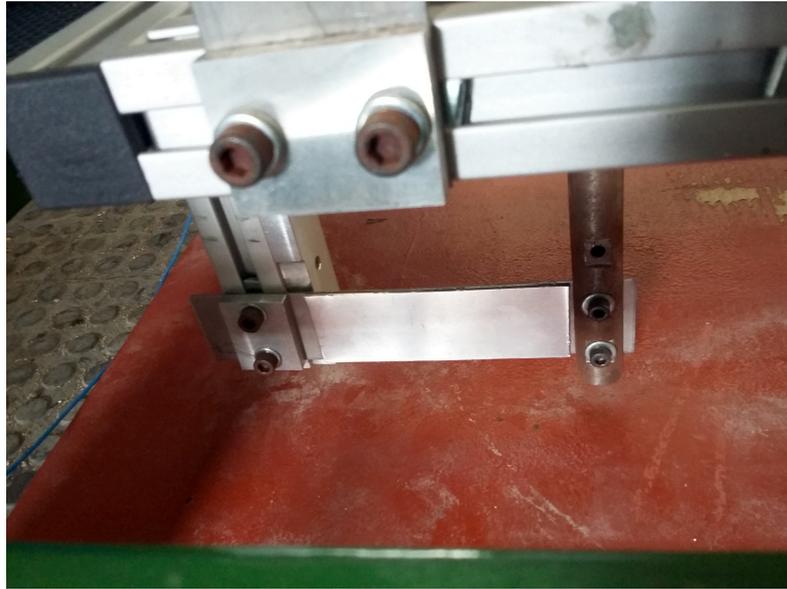


Figura 6.4: Viga responsável por conferir rigidez ao movimento de torção.

experimentalmente. Estes valores, bem como as propriedades geométricas e de massa serão descrito a seguir. A estes elementos discretos de rigidez são conferidas não linearidades do tipo *hardening* e a equação do movimento pode ser descrita como mostrado a seguir:

Os esforços aerodinâmicos, $L(t)$ e $M_{e.a}(t)$ são, respectivamente, a força de sustentação e o momento desta em relação ao eixo elástico. Ambos são definidos no domínio do tempo com base na teoria aerodinâmica não-estacionária descrita por Wagner (WAGNER, 1925).

6.2 Aerodinâmica não-estacionária

Antes de descrever a teoria de Wagner, é importante elencar as hipóteses feitas acerca do escoamento que flui através de um perfil fino e rígido, o qual é considerado bidimensional, invíscido e incompressível.

Neste contexto, pode-se dizer que a principal diferença entre a aerodinâmica estacionária e não-estacionária é que na primeira para qualquer instante de tempo, t , o aerofólio se comporta com características deste mesmo aerofólio com valores instantâneos de deslocamento e velocidade. Não há nenhuma dependência dos efeitos da frequência, o que torna esta abordagem não adaptada para análises de *flutter*. Já os modelos não estacionários consideram as alterações do escoamento através do perfil desde o bordo de ataque até o bordo de fuga, bem como os efeitos da esteira. A dependência da frequência nos movimentos de sustentação e o momento por esta gerado devem ser considerados. Isso torna a análise adaptada para análises de *flutter*.

Wagner (WAGNER, 1925) investigou em 1925 as variações da força de sustentação após uma mudança abrupta no ângulo de ataque através da teoria do potencial linear.

Utilizando a condição de Kutta, ele aproximou o padrão de vórtice do escoamento da esteira por meio do ajuste dos coeficientes das expressões utilizadas. Desta maneira, Wagner descreve que essa variação abrupta não altera de imediato a sustentação do perfil, apresentando um certo atraso para que esta atinga o valor máximo. O autor tabelou valores para sua função, $\Phi(s)$, com, $s = \frac{Vt}{b}$, sendo o tempo adimensional e variando de 0 a 20. Mais tarde, Jones, sugeriu uma aproximação exponencial para a função de Wagner, como mostrado pela seguinte expressão:

$$\Phi(s) = 1 - 0.165e^{-0.041s} - 0.335e^{-0.32s} \quad (6.16)$$

e cujo gráfico é mostrado na Fig.(6.5) e comparado com o comportamento da teoria estacionária.

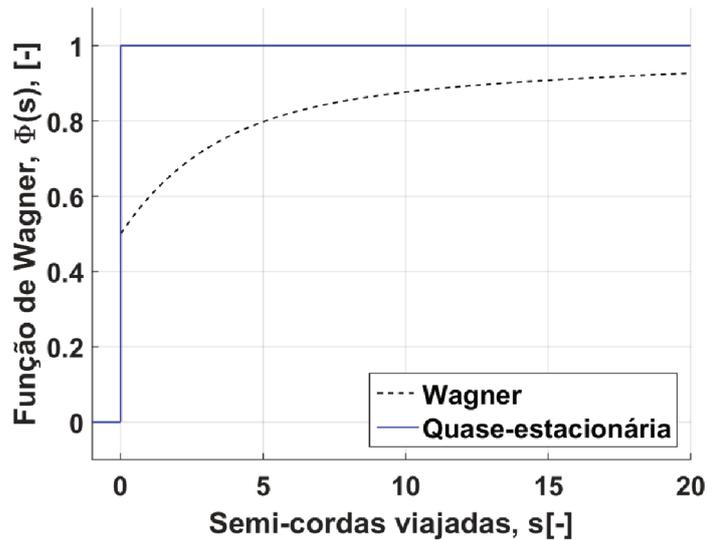


Figura 6.5: Atraso da resposta aerodinâmica frente a uma variação tipo degrau do ângulo de ataque

O tempo adimensional pode ser compreendido com sendo a medida de semi-cordas viajada pelo vórtice após deixar o bordo de fuga.

Silvestre (SILVESTRE, 2012) e Silva (SILVA, 2016; SILVA et al., 2018) descrevem os termos do carregamento aerodinâmico não-estacionário da seguinte maneira:

$$L(t) = L^{(nc)}(t) + 2\pi\rho VbQ \frac{\int_b^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2-b^2}} \gamma_\omega(x,t) dx}{\int_b^\infty \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} \gamma_\omega(x,t) dx} \quad (6.17a)$$

$$M_{e.a}(t) = M_{e.a}^{(nc)}(t) - 2\pi\rho Vb^2Q \left\{ \frac{1}{2} - \left(a + \frac{1}{2} \right) \frac{\int_b^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2-b^2}} \gamma_\omega(x,t) dx}{\int_b^\infty \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} \gamma_\omega(x,t) dx} \right\} \quad (6.17b)$$

onde $L^{(nc)}(t)$ e $M_{e.a}^{(nc)}(t)$ representam a sustentação e momento em torno do eixo elástico devido à parcela não-circulatória do escoamento e são descritos por:

$$L_t^{(nc)} = \pi b^2 \rho (\ddot{h} + V\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}) \quad (6.18a)$$

$$M_{e.a,t}^{(nc)} = \pi b^2 \rho \left[V\dot{h} + ba\ddot{h} + V^2\theta - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} \right] \quad (6.18b)$$

O segundo termo das Eqs.(6.17a) e (6.17b) representam as parcelas dos esforços devido ao escoamento circulatório em que $\gamma_w(x, t)$ denota a circulação da esteira de vórtices por unidade de comprimento do perfil. O termo, Q , representa o "downwash", característico do perfil na posição $\frac{3}{4}$ da corda a contar a partir do bordo de ataque e é definido pela expressão:

$$Q_t = V\theta + \dot{h} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \quad (6.19)$$

e orientado positivo se o perfil se mover para baixo, tal qual o sistema de referências adotado na Fig.(6.1). Para mudanças repentinas no "downwash" a $\frac{3}{4}$ da corda, o carregamento circulatório é descrito pelas equações:

$$L_t^{(c)} = 2\pi\rho V b Q \Phi(s) \quad (6.20a)$$

$$M_{e.a,t}^{(c)} = -\pi\rho V b^2 Q + 2\pi\rho V b^2 Q \left[- \left(a + \frac{1}{2} \right) \right] \Phi(s) \quad (6.20b)$$

Para determinar o carregamento aerodinâmico quando pequenas e gradativas mudanças no ângulo de ataque acontecerem, assume-se a superposição de degraus infinitesimais no "downwash". Neste caso, a sustentação devido ao escoamento circulatório é determinada através de um somatório ao longo do tempo de cada contribuição em função da posição do perfil. A este somatório é dado o nome de integral de Duhamel, a qual é descrita por Bisplinghoff et al. (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 2013). Assim, para um "downwash", Q , variando com o tempo em função do movimento de um perfil qualquer, aplica-se a integral de Duhamel para as Eqs.(6.20a) e (6.20b), obtendo:

$$L_t^{(c)} = 2\pi\rho V b \left[Q(t_0)\Phi(s) + \int_{\tau=t_0}^t \frac{dQ(\tau)}{d\tau} \Phi(t - \tau) d\tau \right] \quad (6.21a)$$

$$M_{e.a,t}^{(c)} = -\pi\rho V b^2 Q + b \left(a + \frac{1}{2} \right) l^{(c)}(t) \quad (6.21b)$$

Para solução da integral, pode-se assumir uma condição inicial para Q , por exemplo, $Q(t_0) = 0$. Assim, a Eq.(6.21a) é simplificada, tornando:

$$L_t^{(c)} = 2\pi\rho V b \int_{\tau=t_0}^t \frac{dQ(\tau)}{d\tau} \Phi(t - \tau) d\tau \quad (6.22)$$

Portanto, ao aplicar a aproximação proposta por Jones para a função de Wagner, Eq.(6.16), a solução da integral gerará os seguintes termos:

$$\int_{\tau=t_0}^t \frac{dQ(\tau)}{d\tau} \Phi(t-\tau) d\tau = Q(t) + \lambda_1(t) + \lambda_2(t) \quad (6.23)$$

onde $\lambda_{1,t}$ e $\lambda_{2,t}$ representam os atrasos aerodinâmicos que surgem entre a variação no "Downwash" e a alteração na sustentação do perfil. Estes parâmetros podem ser determinados pelas seguintes equações diferenciais:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -0.041 \left(\frac{V}{b} \right) \lambda_1(t) - 0.165\dot{Q}(t) \quad (6.24a)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -0.032 \left(\frac{V}{b} \right) \lambda_2(t) - 0.335\dot{Q}(t) \quad (6.24b)$$

onde \dot{Q} é a taxa de variação do "downwash" na posição $\frac{3}{4}$ de corda.

Desta maneira, por meio da função de Wagner e da integral de Duhamel, a sustentação é determinada somando as parcelas não-circulatória e circulatória. Substituindo a Eq.(6.23) na Eq.(6.22) e considerando o termo não-circulatório, a sustentação é determinada.

$$L(t) = \pi b^2 \rho (\ddot{h} + V\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}) + 2\pi\rho Vb [Q(t) + \lambda_1(t) + \lambda_2(t)] \quad (6.25)$$

e o momento

$$\begin{aligned} M_{ea}(t) = \pi b^2 \rho \left[V\dot{h} + ba\ddot{h} + V^2\theta - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} \right] - \dots \\ \dots - \pi\rho Vb^2 Q + b \left(a + \frac{1}{2} \right) 2\pi\rho Vb [Q(t) + \lambda_1(t) + \lambda_2(t)] \end{aligned} \quad (6.26)$$

As Eqs.(6.25) e (6.26) podem ser reescritas matricialmente como mostrado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} -L(t) \\ M_{e.a}(t) \end{Bmatrix} = [a_1] \begin{Bmatrix} \ddot{h}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + [a_2] \begin{Bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + [a_3] \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} + [a_4] \begin{Bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

bem como as Eqs.(6.24a) e (6.24b):

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{Bmatrix} = [b_1] \begin{Bmatrix} \ddot{h}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + [b_2] \begin{Bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + [b_3] \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} + [b_4] \begin{Bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

As matrizes que compõem o carregamento aerodinâmico e os estados de atraso são descritas no Apêndice A.1. Em seguida, substitui-se a Eq.(6.27) na Eq.(6.9) e isola-se os atrasos aerodinâmicos no lado direito da equação.

$$([M] - [a_1]) \begin{Bmatrix} \ddot{h}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + ([C] - [a_2]) \begin{Bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + ([K^{(N.L)}] - [a_3]) \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = [a_4] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

Neste ponto, o desenvolvimento matemático é realizado diferente do que fazem Silvestre (SILVESTRE, 2012), Silva (SILVA, 2016) e (SALES et al., 2018). Ao invés de partir para uma formulação no espaço de estados, é criado um sistema de equações com a Eq.(6.28) e a Eq.(6.29) de modo a obter o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{M}] & [0] \\ -[b_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\lambda}_1(t) \\ \ddot{\lambda}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{C}] & [0] \\ -[b_2] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{K}] & -[a_4] \\ -[b_3] & -[b_4] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

onde:

- $[\tilde{M}] = [M] - [a_1]$
- $[\tilde{C}] = [C] - [a_2]$
- $[\tilde{K}] = [K^{(N.L)}] - [a_3]$

Este arranjo se mostrou bastante prático, pois do ponto de vista da Teoria das Faixas aplicada ao método dos Elementos Finitos permite que o problema seja resolvido sem dobrar a quantidade de graus de liberdade. Além disso, ele permite a integração direta das equações que regem o movimento.

Na sequência, será mostrado como os elementos viscoelásticos são idealizados para inserir rigidez e amortecimento em *plunge* e *pitch* dadas as possibilidade de aplicação do material viscoelástico no aparato experimental PAPA.

6.2.1 Idealização do elemento de rigidez discreta viscoelástica em *plunge*

Devido às condições para aplicação do material viscoelástico no PAPA, dois tipos de elementos de rigidez viscoelástica foram idealizados: um que conferirá rigidez de alongamento puro e outro torção pura. Os desenvolvimentos matemáticos da idealização destes elementos são mostrados em duas subseções diferentes. Esta aplicação permitirá validar o modelo numérico e ajudará a compreender a influência do amortecimento gerado pelo material viscoelástico no comportamento aeroelástico do sistema.

Assim, é necessário determinar a rigidez em alongamento puro de um corpo viscoelástico que possui dimensões l_x (largura), l_y (comprimento) e l_z (espessura) tal qual mostrado na Fig.6.6.

Como este elemento deformará somente ao longo de seu comprimento principal, l_y , sua deformação pode ser determinada como mostrado a seguir:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{l_f - l_i}{l_i} = \frac{l_y + h_t - l_y}{l_y} = \frac{h_t}{l_y} \quad (6.31)$$

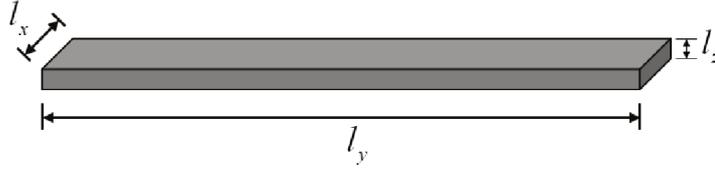


Figura 6.6: Idealização de um elemento de rigidez discreta viscoelástica para alongamento

onde h_t é o próprio deslocamento em *plunge* da seção típica. Assim, é possível definir a tensão não local utilizando a lei constitutiva determinada na Eq.(3.39), a qual toma a seguinte forma:

$$\sigma_{yy} = \sum_{j=0}^{N_t} \beta_{j+1} \frac{h_{t-j\Delta t}}{l_y} \quad (6.32)$$

Uma vez determinada a tensão, o potencial de energia pode ser calculado como mostrado abaixo:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} dV = \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \int_{-\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}} \frac{h_t}{l_y} \sum_{j=0}^{N_t} \beta_{j+1} h_{t-j\Delta t} dz dx dy \quad (6.33)$$

Avaliando a Eq.(6.33) para $j = 0$, são obtidas as parcelas de rigidez do elemento viscoelástico e rigidez modificada responsável pelo amortecimento. Calcula-se também as integrais ao longo da largura, espessura para se determinar a área da seção transversal, $A = l_x l_z$ e do comprimento do elemento, resultando na seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{AD_2^E}{l_y} \right] h_t^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{A}{l_y} \sum_{j=1}^{N_t} \beta_{j+1}^E h_{t-j\Delta t} \right] h_t = \frac{1}{2} k_v^E h_t^2 + \frac{1}{2} \Phi_{t-\Delta t}^E h_t \quad (6.34)$$

onde, β_{j+1}^E , é a propriedade constitutiva do material viscoelástico para alongamento puro, k_v^E , é a rigidez de alongamento associada à geometria do elemento viscoelástico e $\Phi_{t-j\Delta t}^E$, é o esforço dissipativo viscoelástico que comporá o lado direito da equação do movimento.

Portanto, após determinada a rigidez do elemento viscoelástico em *plunge*, esta pode ser incorporada à matriz de rigidez do sistema, como mostrado abaixo:

$$[\tilde{K}_v] = \begin{bmatrix} k_h^{(N.L)} & 0 \\ 0 & k_\theta^{(N.L)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_v^E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

De forma similar, o vetor de esforços dissipativos, $\{F_v^E\}$, pode ser contruído com base na posição do grau de liberdade, $h(t)$.

$$\{F_v^E\} = \begin{Bmatrix} -\Phi_{t-\Delta t}^E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

Incorporando todos estes termos viscoelásticos ao sistema aeroelástico definido na Eq.(6.30), a seguinte equação do movimento é descrita:

$$[\bar{M}] \{\ddot{q}\} + [\bar{C}] \{\dot{q}\} + [\bar{K}_v] \{q\} = \{F_v^E\} \quad (6.37)$$

O vetor $\{q\}$ representa as coordenadas generalizadas contendo os graus de liberdade de translação e rotação, h , θ e os atrasos aerodinâmicos, λ_1 e λ_2 . Neste novo sistema, a matriz de massa é inalterada, bem como a matriz de amortecimento estrutural. Já a matriz de rigidez, será acrescida dos componentes viscoelásticas:

$$[\bar{K}_v] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}_v] & -[a_4] \\ -[b_3] & -[b_4] \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Resta agora determinar o cálculo da rigidez viscoelástica de torção. Este procedimento é mostrado na próxima subseção.

6.2.2 Idealização do elemento de rigidez discreta viscoelástica em pitch

Novamente, a idealização do elemento de rigidez viscoelástica torcional foi feita com base nas especificidades do aparato PAPA. Observando a Fig.(6.3), nota-se que o movimento de *pitch* da asa é permitido devido à existência de um mancal de rolamento. Assim, o elemento torcional foi pensado de forma que o eixo fosse, de alguma forma, fixo ao mesmo pelo material viscoelástico, que por sua vez seria fixo à estrutura. Desta maneira, foi idealizada uma bucha viscoelástica, como esquematizado na Fig.(6.7).

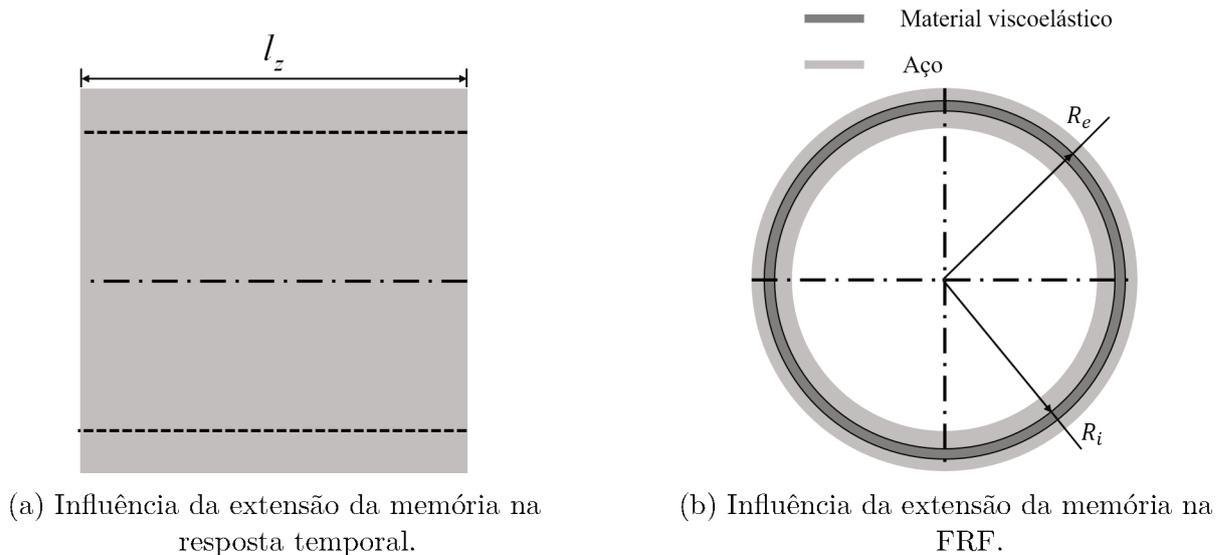


Figura 6.7: Influência da extensão da memória sobre dinâmica do sistema.

O que se vê é uma camada viscoelástica entre duas camadas de aço, ou qualquer outro tipo de material rígido, onde a camada mais interna é o próprio eixo da asa e a camada

mais externa é fixa à estrutura, conferindo assim o cisalhamento do material viscoelástico durante o movimento de *pitch*. Para facilitar a compreensão sobre como o elemento de rigidez viscoelástico seria construído e aplicado ao PAPA, uma proposta é apresentada na Fig.(6.8).

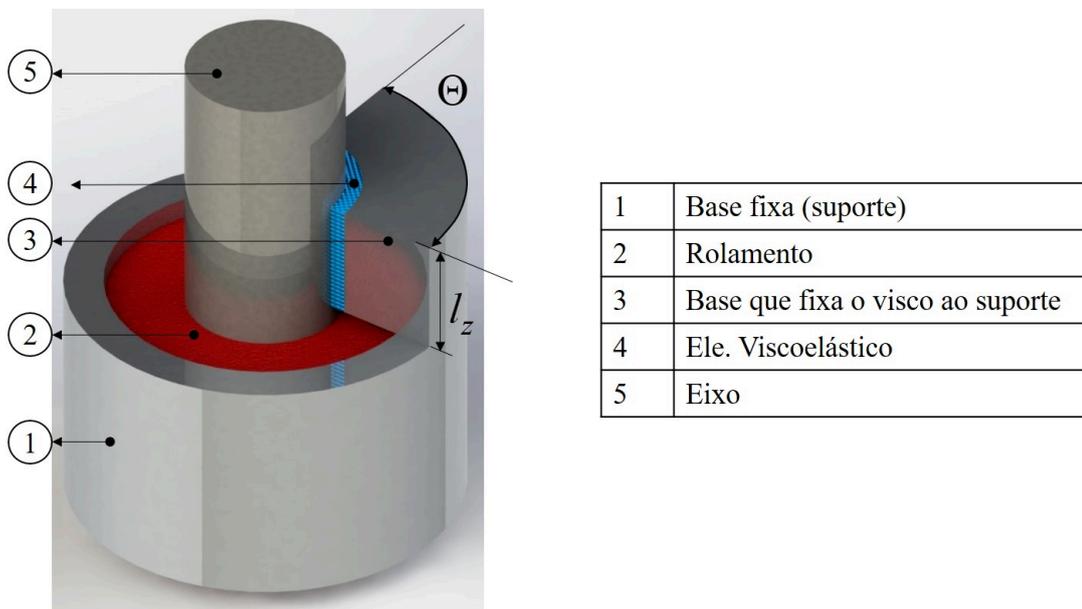


Figura 6.8: Aplicação do elemento de rigidez viscoelástico no PAPA.

Pelo desenho, entende-se que o elemento 1 é fixo ao elemento 3, que por sua vez recebe a camada de material viscoelástico, representada pelo elemento 4, a qual é colada na superfície do elemento 5. Assim, ao girar o eixo, o material viscoelástico é cisalhado, oferecendo rigidez e dissipação de energia ao sistema. Caso $\Theta = 2\pi$, o elemento viscoelástico envolveria todo o eixo do PAPA. Desta maneira, é possível determinar o perímetro do elemento de rigidez à torção e com base nisso, calcular o coeficiente de rigidez do elemento.

Para que a rigidez do elemento torcional seja definida, considera-se inicialmente um corpo viscoelástico sólido, ver Fig(6.8a), como uma barra. A este corpo, um torque conjugado é aplicado em suas extremidades de tal maneira que o mesmo se encontre sob torção pura. Por questão de simetria, pode-se demonstrar que as seções transversais do corpo viscoelástico giram como corpos rígidos em torno do eixo longitudinal, cujos raios permanecem retos e as seções circulares. Além disso, caso o ângulo total da torção, θ , seja pequeno, é dito que não há variação nem no raio, nem no comprimento da barra.

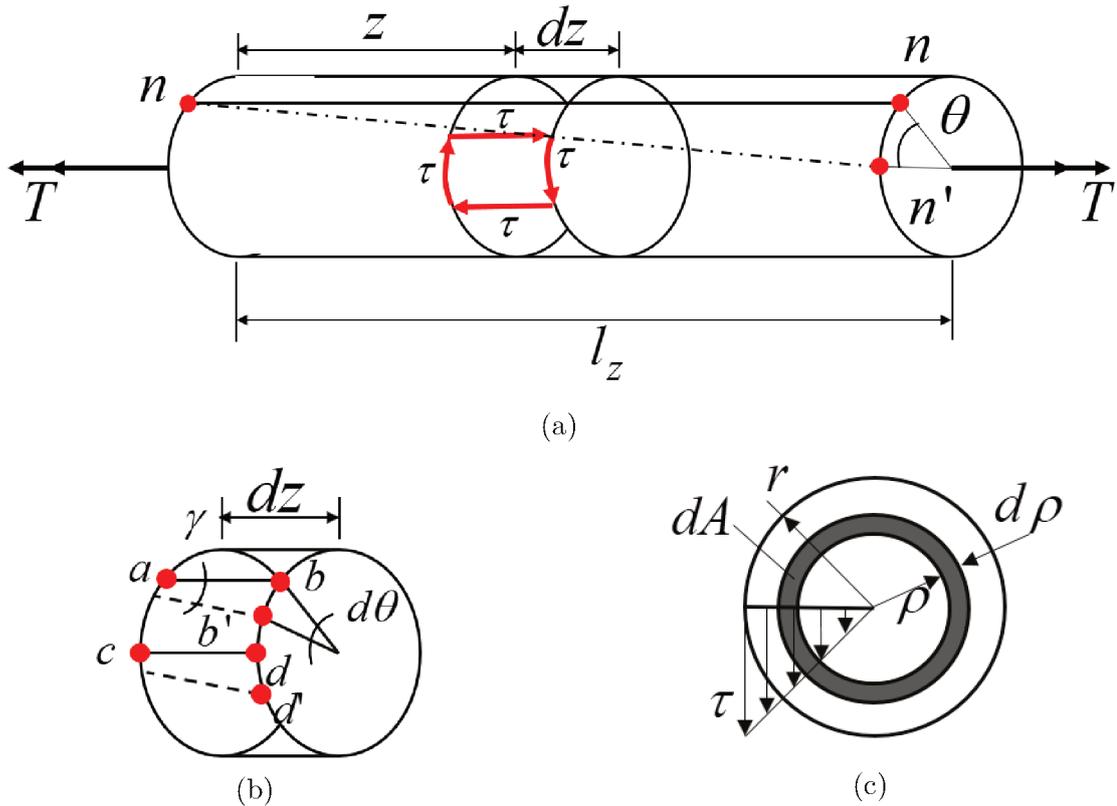


Figura 6.9: Esquema de uma barra sob torção pura. Adaptado da referência (TIMOSHENKO; GERE, 1994, pg. 60).

Observando a Fig.(6.8a), percebe-se que a extremidade da esquerda do corpo se encontra engastada, enquanto que a outra está livre e gira de um ângulo, θ , formando o arco nn' . Como consequência, um elemento, dz , na superfície do corpo se distorce em uma formato romboidal. Este elemento é, então, isolado do corpo, como pode ser visto na Fig.(6.8b), e nele pode ser visto que após a torção, o corpo muda sua geometria $abcd$, para $ab'cd'$. Desta deformação, pode-se dizer que os comprimentos dos lados do elemento não variam, porém os ângulos de seus vértices não são mais retos. Pode-se afirmar que este elemento está sob cisalhamento puro, e que o valor dessa deformação cisalhante, ε_θ , é igual ao decréscimo do ângulo bab' , sendo calculado da seguinte maneira:

$$\varepsilon_\theta = \frac{bb'}{ab} \quad (6.39)$$

A comprimento bb' é comprimento de um pequeno arco de raio r , que pode ser definido por meio do ângulo de rotação, θ , que é a diferença do giro entre a extremidade livre e a engastada. Logo, este comprimento pode ser descrito por: $bb' = rd\theta$. Evidentemente, a distância ab vale dz . Introduzindo estas relações na Eq.(6.39), obtêm-se:

$$\varepsilon_\theta = \frac{rd\theta}{dz} \quad (6.40)$$

Quando é imposto que o corpo está sujeito a torção pura, pode-se dizer que a taxa de variação do ângulo θ ao longo do comprimento dz é constante. Disso, tem-se que a deformação cisalhante pode ser descrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\rho}{l_z} \theta_t \quad (6.41)$$

Toda esta teoria foi baseada na teoria de torção pura demonstrada por Timoshenko e Gere (TIMOSHENKO; GERE, 1994). Como o corpo viscoelástico é uma coroa circular, o intervalo de integração de ρ , será do raio interno, R_i , ao raio externo, R_e , mensurados a partir do centro do eixo do PAPA, uma vez que este e a bucha são concêntricos. Uma vez determinada a deformação, a tensão não local do elemento é descrita em termos da lei constitutiva para cisalhamento puro definida na Eq.(3.40):

$$\sigma_\theta = \sum_{j=0}^{N_l} \beta_{j+1}^G \frac{\rho}{l_z} \theta_{t-j\Delta t} \quad (6.42)$$

Desta forma, é possível calcular o potencial de energia de deformação viscoelástica pela expressão:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_\theta \sigma_\theta dV \quad (6.43)$$

Neste caso, o infinitesimal de volume do corpo viscoelástico é definido por:

$$dV = dAdz = 2\pi\rho d\rho dz \quad (6.44)$$

tem-se que o potencial de energia de deformação pode ser descrito em termos do raio e da altura do corpo viscoelástico, como a seguir:

$$U = \int_0^{l_z} \int_{R_i}^{R_e} \sum_{j=0}^{N_l} \beta_{j+1}^G 2\pi \frac{\rho^3}{l_z^2} \theta_{t-j\Delta t} \theta_t d\rho dz \quad (6.45)$$

As integrais ao longo do raio e do comprimento do corpo viscoelástico na Eq.(6.45) resultam em:

$$U = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{N_l} \beta_{j+1}^G \frac{2\pi}{4} \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{l_z} \theta_{t-j\Delta t} \right] \theta_t \quad (6.46)$$

Nota-se que neste caso tem-se que uma bucha que envolve todo o eixo do PAPA, pois o ângulo utilizado foi 2π . Este valor pode ser escolhido de acordo com a aplicação, como será visto mais adiante.

Para que a rigidez viscoelásticas, K_v^G e os esforços dissipativos, F_v^G , sejam visualizados, é necessário avaliar a Eq.(6.46) para $j = 0$.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left[\beta_1^G \frac{2\pi}{4} \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{l_z} \right] \theta_t^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{N_l} \beta_{j+1}^G \frac{2\pi}{4} \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{l_z} \theta_{t-j\Delta t} \right] \theta_t = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} k_v^G \theta_t^2 + \frac{1}{2} \Phi_{t-\Delta t}^G \theta_t \end{aligned} \quad (6.47)$$

Assim, a nova equação do movimento pode ser determinada para o sistema viscoelástico contendo um elemento viscoelástico torsional discreto:

$$[\bar{M}] \{\ddot{q}\} + [\bar{C}] \{\dot{q}\} + [\bar{K}_v^{(G)}] \{q\} = \{F_v^{(G)}\} \quad (6.48)$$

onde o termo, $\Phi_{t-\Delta t}^G$, está contido dentro do vetor de esforços externos:

$$\{F_v^{(G)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Phi_{t-\Delta t}^{(G)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

Neste novo sistema, a matriz de rigidez será acrescida da componente viscoelástica de torção, como mostrado:

$$[\bar{K}_v^{(G)}] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}_v^{(G)}] & -[a_4] \\ -[b_3] & -[b_4] \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

em que,

$$[\tilde{K}_v^{(G)}] = \begin{bmatrix} k_h^{(N.L)} & 0 \\ 0 & k_\theta^{(N.L)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_v^{(G)} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Uma vez determinados os dois tipos de sistemas aeroviscoelásticos, é possível também determinar um sistema com os dois tipos de elementos viscoelásticos. Neste caso a matriz, $[\tilde{K}_v^{(E,G)}]$, é definida como:

$$[\tilde{K}_v^{(E,G)}] = \begin{bmatrix} k_h^{(N.L)} & 0 \\ 0 & k_\theta^{(N.L)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_v^{(E)} & 0 \\ 0 & k_v^{(G)} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

e o vetor de esforços dissipativos,

$$\{F_v^{(E,G)}\} = \begin{Bmatrix} -\Phi_{t-\Delta t}^{(E)} \\ -\Phi_{t-\Delta t}^{(G)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.53)$$

Finalmente, equação do movimento contemplando os dois tipo de elementos viscoelásticos pode ser descrita como mostrado a seguir:

$$[\bar{M}] \{\ddot{q}\} + [\bar{C}] \{\dot{q}\} + [\bar{K}_v^{(E,G)}] \{q\} = \{F_v^{(E,G)}\} \quad (6.54)$$

Após determinação dos diferentes tipos de sistemas aeroviscoelásticos, a continuidade do trabalho se dá com o desenvolvimento do método de integração numérica da equação do movimento não linear utilizando Newton-Raphson.

6.2.3 Determinação da solução não linear

Para solução da equação não linear da seção típica será utilizado o método numérico de Newton-Raphson combinado com o método de Newmark (REDDY, 2005). Assim, a partir da abordagem incondicionalmente estável proposta por Newmark, o método da aceleração média-constante (também chamado de regra do trapézio) é utilizado. Neste procedimento, os dois parâmetros principais são $\delta = 0.5$ e $\alpha = 0.25$. Desta maneira, tem-se que as constantes de integração do método são definidas como sendo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; & a_2 &= \frac{1}{\alpha\Delta t}; & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1; \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1; & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); & a_6 &= \Delta t (1 - \delta); & a_7 &= \delta\Delta t \end{aligned}$$

Adotando as soluções propostas por Newmark para a velocidade e aceleração, e substituindo a segunda na primeira, a seguinte relação é determinada:

$$\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = a_0 (\{q\}_{t+\Delta t} - \{q\}_t) - a_2 \{\dot{q}\}_t - a_3 \{\ddot{q}\}_t \quad (6.56a)$$

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = a_1 (\{q\}_{t+\Delta t} - \{q\}_t) - a_4 \{\dot{q}\}_t - a_5 \{\ddot{q}\}_t \quad (6.56b)$$

Em seguida, as soluções $\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t}$, $\{\dot{q}\}_{t+\Delta t}$ e $\{q\}_{t+\Delta t}$, são introduzidas na Eq.(6.54), resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} [\bar{M}] \left(a_0 (\{q\}_{t+\Delta t} - \{q\}_t) - a_2 \{\dot{q}\}_t - a_3 \{\ddot{q}\}_t \right) + \dots \\ \dots + [\bar{C}] \left(a_1 (\{q\}_{t+\Delta t} - \{q\}_t) - a_4 \{\dot{q}\}_t - a_5 \{\ddot{q}\}_t \right) + \dots \\ \dots + [\bar{K}_v^{E,G} (\{q\}_{t+\Delta t})] \{q\}_{t+\Delta t} = \{0\} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Assim, rearranjando os termos em relação a $\{q\}_{t+\Delta t}$, é possível obter uma equação em termos da rigidez efetiva e dos parâmetros $[\Theta_{1,t+\Delta t}]$, $[\Theta_{2,t+\Delta t}]$ e $[\Theta_{3,t+\Delta t}]$, como mostrado abaixo:

$$[\bar{K}_{ef} (\{q\}_{t+\Delta t})] \{q\}_{t+\Delta t} = [\Theta_{1,t+\Delta t}] \{q\}_t + [\Theta_{2,t+\Delta t}] \{\dot{q}\}_t + [\Theta_{3,t+\Delta t}] \{\ddot{q}\}_t \quad (6.58)$$

onde,

$$[\bar{K}_{ef} (\{q\}_{t+\Delta t})] = [\bar{K}_v^{E,G} (\{q\}_{t+\Delta t})] + [\Theta_{1,t+\Delta t}] \quad (6.59a)$$

$$[\Theta_{1,t+\Delta t}] = - \left(a_0 [\bar{M}] + a_1 [\bar{C}] \right) \quad (6.59b)$$

$$[\Theta_{2,t+\Delta t}] = - \left(a_2 [\bar{M}] + a_4 [\bar{C}] \right) \quad (6.59c)$$

$$[\Theta_{3,t+\Delta t}] = - \left(a_3 [\bar{M}] + a_5 [\bar{C}] \right) \quad (6.59d)$$

Observa-se que a matriz de rigidez efetiva é descrita como sendo dependente dos graus de liberdade. A partir da Eq.(6.58), é possível descrever o resíduo como sendo uma função

cujo objetivo minimizá-la. Isto é feito impondo a condição de que os esforços externos sejam iguais aos internos (BATHE, 2006), o que resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \{R_{t+\Delta t}^{(n-1)}\} = & [\bar{K}_{ef} (\{q\}_{t+\Delta t}^{(n-1)})] \{q\}_{t+\Delta t}^{(n-1)} - [\Theta_{1,t+\Delta t}] \{q\}_t - \dots \\ & \dots - [\Theta_{2,t+\Delta t}] \{\dot{q}\}_t - [\Theta_{3,t+\Delta t}] \{\ddot{q}\}_t \end{aligned} \quad (6.60)$$

É muito importante atentar-se aos índices do resíduo e dos vetores de graus de liberdade que o formam, uma vez que o índice sobrescrito ($n-1$) faz referência ao laço interno ao método de Newmark, que é justamente o método de Newton-Raphson. O índice subscrito ($t+\Delta t$) é referente ao laço do Newmark. Após definir o resíduo, o cálculo da matriz tangente pode ser efetuado fazendo:

$$[T_{t+\Delta t}^{(n-1)}] = \frac{d \{R_{t+\Delta t}^{(n-1)}\}}{d \{q\}_{t+\Delta t}} = \frac{d ([\bar{K}_{ef} (\{q\}_{t+\Delta t}^{(n-1)})] \{q\}_{t+\Delta t}^{(n-1)})}{d \{q\}_{t+\Delta t}} \quad (6.61)$$

que por sua vez permite determinar o incremento do deslocamento, $\Delta \{q\}_{t+\Delta t}^{(n)}$:

$$\Delta \{q\}_{t+\Delta t}^{(n)} = - [T_{t+\Delta t}^{(n-1)}]^{-1} \{R_{t+\Delta t}^{(n-1)}\} \quad (6.62)$$

o qual é utilizado para determinar a solução não linear.

$$\{q\}_{t+\Delta t}^{(n)} = \{q\}_{t+\Delta t}^{(n-1)} + \Delta \{q\}_{t+\Delta t}^{(n)} \quad (6.63a)$$

$$\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t}^{(n)} = a_0 (\{q\}_{t+\Delta t}^{(n)} - \{q\}_t) - a_2 \{\dot{q}\}_t - a_3 \{\ddot{q}\}_t \quad (6.63b)$$

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t}^{(n)} = \{\dot{q}\}_t + a_6 \{\ddot{q}\}_t + a_7 \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t}^{(n)} \quad (6.63c)$$

A convergência da solução é dada pela relação entre as normas de $\Delta \{q\}_{t+\Delta t}$ e $\{q\}_{t+\Delta t}^{(n)}$, como mostrado a seguir:

$$\frac{\|\Delta \{q\}_{t+\Delta t}\|}{\|\{q\}_{t+\Delta t}^{(n)}\|} \leq tol \quad (6.64)$$

Para iniciar o método, valor de $\{q\}_{t+\Delta t}^{(n-1)}$ pode ser um chute inicial, pois a convergência deverá acontecer no laço do Newton-Raphson. Uma escolha plausível para este chute seria dizer que $\{q\}_{t+\Delta t}^{(1)} = \{q\}_t$. O fluxograma mostrado na Fig.(6.10), é um algoritmo que explica o processo de obtenção da solução não linear.

Finalmente, após definir o sistema não linear da seção típica em sua forma mais geral e explicar como é feito o processo numérico de integração da equação do movimento, os resultados e uma discussão acerca dos mesmos são apresentados na próxima seção.

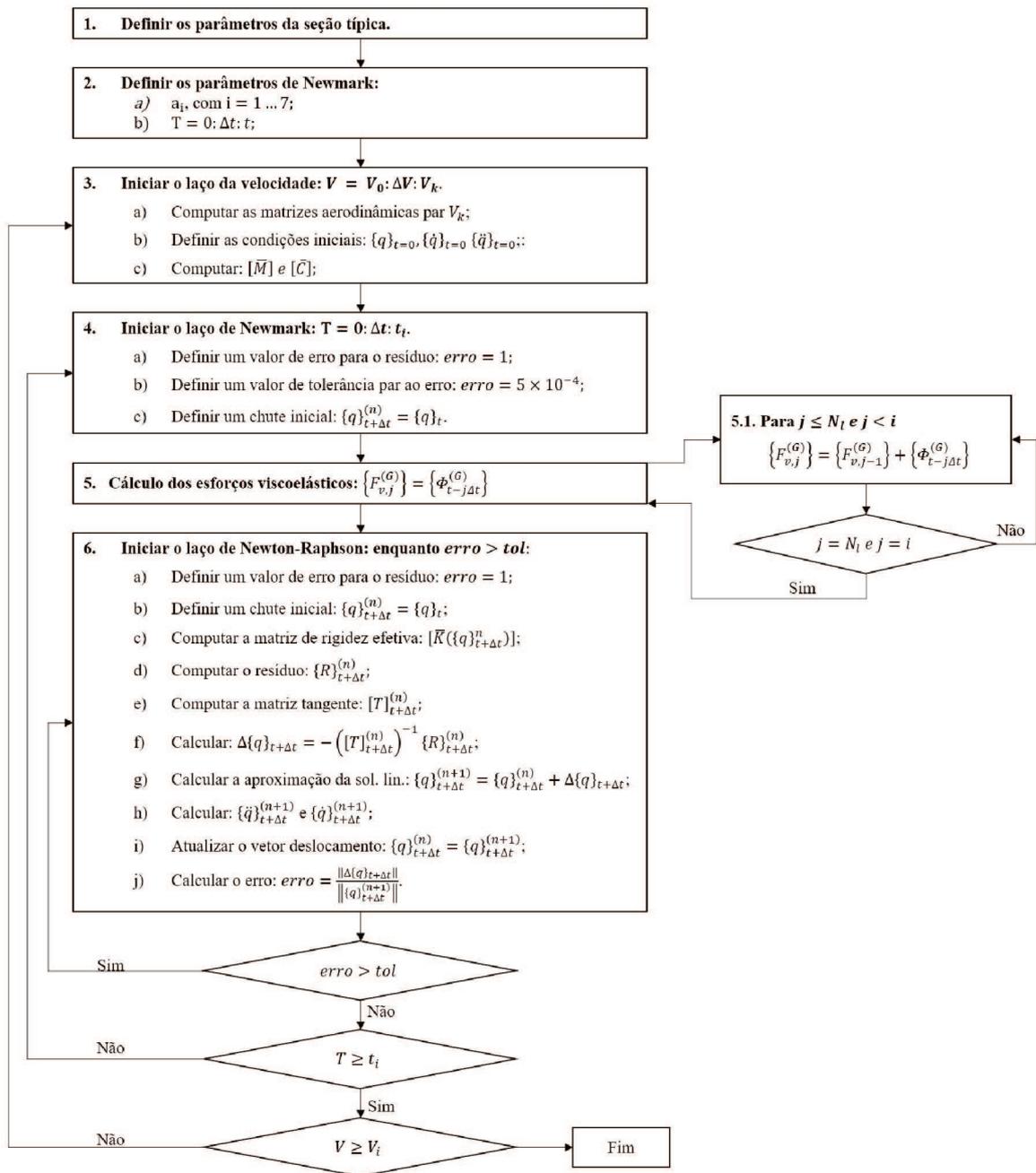


Figura 6.10: Fluxograma para resolução numérica do problema não linear da seção típica.

CAPÍTULO VII

Teoria das Faixas Aplicada ao MEF

Existem diferentes formas de se modelar a distribuição do carregamento aerodinâmico ao longo da envergadura de uma asa. A mais simples, segundo Wright e Cooper (WRIGHT; COOPER, 2015), é a chamada Teoria das Faixas. Por este motivo, esta abordagem é utilizada em estágios iniciais de projetos, como uma base para o desenvolvimento e também para se ter uma visão rápida do comportamento da estrutura. Ainda de acordo com Wright e Cooper (WRIGHT; COOPER, 2015), a maior limitação desta prática é a incapacidade de prever a ocorrência de ondas de choque no regime transônico. Outro ponto fraco da abordagem é relativo às asas com grande enflechamento, onde o escoamento nestes casos possui um maior grau de tri-dimensionalidade, por assim dizer, fazendo com que a teoria das faixas se torne menos apropriada.

Será utilizado o mesmo carregamento não-estacionário descrito no capítulo 6, o que encurtará muito este capítulo, uma vez que restará mostrar somente como adicionar corretamente os graus de liberdade do modelo em elementos finitos da viga para criação dos chamados elementos aerodinâmicos.

Para que esta teoria seja válida, supõe-se que a asa tenha um perfil fino e um grande alongamento (*Aspect Ratio - AR*) com magnitude, $AR > 6$. Em relação ao escoamento, considera-se um fluxo bi-dimensional que passa por cada faixa onde cada fluxo não possui nenhuma influência sobre suas vizinhas. Além disso, os efeitos de raiz e ponta de asa são ignorados, bem como a compressibilidade do ar. Finalmente, é imposto que as avaliações devem estar compreendidas no regime de Mach: $M < 0.3$.

Desta maneira, uma asa que atenda as imposições mencionadas será idealizada por um modelo em elementos finitos de uma viga de Euler-Bernoulli, aquele desenvolvido no capítulo 5. A Fig.(7.1) mostra uma esquema representativo de uma viga em posições deformada e indeformada, destacando as “Faixas” ao longo da envergadura e como estas

são influenciadas pelo ângulo de incidência, $\theta(t)$, que varia ao longo da envergadura.

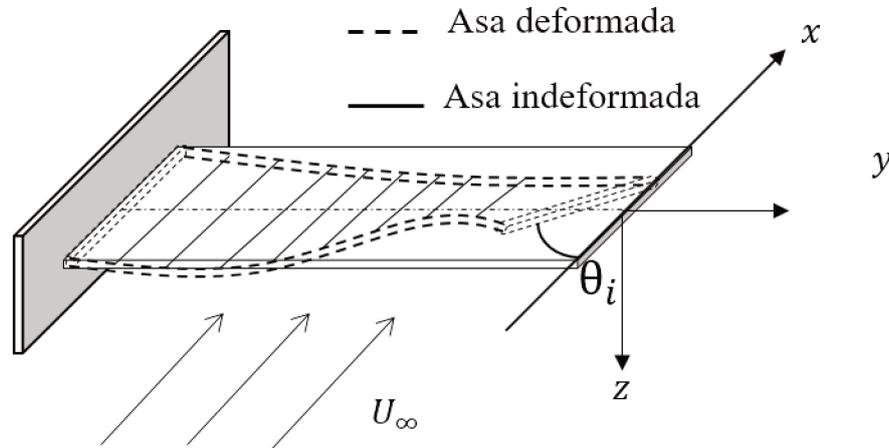


Figura 7.1: Asa idealizada por um modelo de viga de Euler-Bernoulli.

O ângulo, $\theta(t)$, mostrado na Fig.(7.1) é o grau de liberdade, θ_y , do vetor de graus de liberdade nodal do MEF, $\{q\}_t$, representado no caso aeroelástico por:

$$\{q\}_t^T = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y\}_t \quad (7.1)$$

e no caso aeroviscoelástico,

$$\{q\}_t^T = \{u \quad v_1 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad v_3\}_t \quad (7.2)$$

onde para o caso viscoelástico, u , w , θ_x e θ_y são iguais para as três camadas.

A Teoria das Faixas em sua essência assume que a sustentação de cada faixa da asa é a mesma de uma asa bi-dimensional com envergadura infinita, ou seja, exatamente como uma seção típica (WRIGHT; COOPER, 2015, pg. 80). Entretanto, quando aplicado em uma asa finita, a presença de sustentação na ponta da asa resulta numa descontinuidade de pressão que não ocorre na prática. Este comportamento pode ser visto na Fig.(7.2), onde um esquema mostrando uma distribuição real e segundo a Teoria das Faixas são mostrados.

Essas discrepâncias refletem o que acontece na ponta da asa na realidade, em que a diferença de pressão existente entre o intradorso e o extradorso da superfície de sustentação de uma asa finita resulta na formação dos vórtices de ponta de asa.

Assim, utilizando a função de Wagner, uma formulação não estacionária tal qual utilizada no capítulo sobre seção típica não linear será utilizada. Disso, tem-se que as mesmas matrizes descritas no apêndice A.1 serão utilizadas na Teoria das Faixas, obviamente que corrigidas de suas dimensões para contemplar os graus de liberdade adicionais do MEF.

Após todas estas considerações, a próxima seção mostrará como será feito o cálculo do carregamento aerodinâmico de cada faixa e como este será incluído na equação geral do movimento da viga puramente elástica e sanduíche.

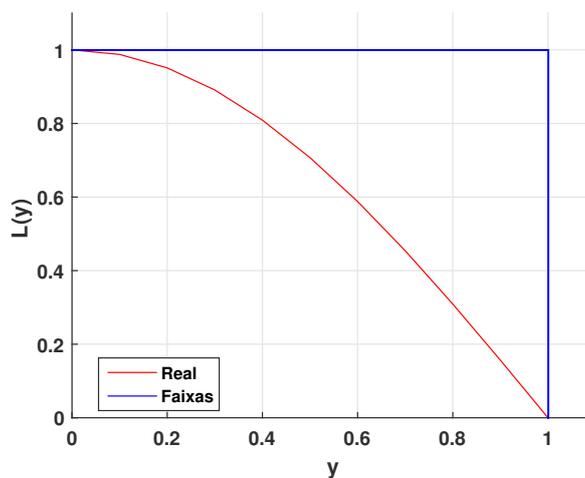


Figura 7.2: Distribuição de sustentação ao longo da envergadura de uma asa real e segunda a Teoria das Faixas.

7.1 Adaptando a Teoria das Faixas ao MEF.

Nesta seção são mostrados os desenvolvimentos matemáticos para implementar a Teoria das Faixas ao MEF da viga de Euler-Bernoulli. Este processo será feito a partir das estruturas desenvolvidas no Capítulo 5.

Inicialmente, o problema será desenvolvido para o caso aeroelástico, e em seguida para o caso aeroviscoelástico, onde a principal diferença entre os dois sistemas do ponto de vista algébrico, será o aumento da dimensão das matrizes. Logo, cada sistema demandará uma transformação linear particular das matrizes aerodinâmicas que as leve de uma dimensão $[2 \times 2]$, para as dimensões nodais das vigas, que são: $[4 \times 4]$ e $[5 \times 5]$, para o caso aeroelástico e aeroviscoelástico, respectivamente.

Portanto, na Teoria das Faixas a asa é considerada como sendo composta por um número de elementos aerodinâmicos de comprimento, Δy , que é exatamente o mesmo comprimento do elemento finito utilizado. A largura do elemento aerodinâmico é igual à corda da asa. A Fig.(7.3) mostra como as faixas são distribuídas ao longo da envergadura da *plate like wing*.

É visto que os elementos aerodinâmicos são dispostos de forma intercalada em relação aos elementos finitos estruturais. Desta maneira, as faixas são posicionadas de modo que seus centros de gravidade coincidam com os nós do MEF. Isto é feito devido às características de simetria da viga, uma vez que o eixo elástico coincide centro de massa da estrutura. Contudo o eixo aerodinâmico está alocado à $0.5b$, onde a corda é $c = 2b$. Essa informação já está incorporada na parcela do carregamento aerodinâmico (seja Theodorsen ou Wagner). Portanto, as cargas aerodinâmicas atuantes no eixo aerodinâmico podem ser transladadas para o eixo-elástico que é coincidente com o C.G, como um sistema de carregamento auto-equilibrado. Assim esta disposição dos elementos aerodinâmicos é muito

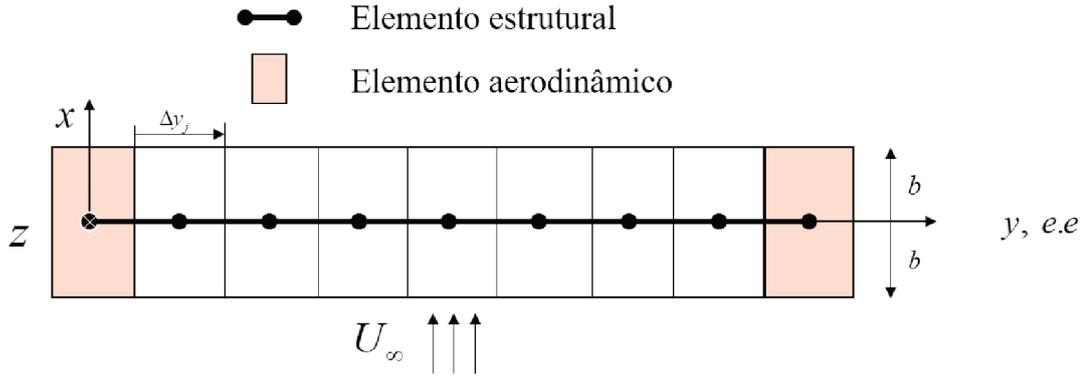


Figura 7.3: Teoria das Faixas aplicada à uma viga em balanço.

útil, pois faz com que a solução nodal do MEF possa ser usada sem nenhuma interpolação no carregamento aerodinâmico.

Logo, a malha de elementos aerodinâmicos terá um nó por elemento e seu equacionamento a nível elementar é definido pela seguinte integral:

$$l_i = \int_0^{\Delta y_i} l dy \quad (7.3a)$$

$$m_{(e.a),i} = \int_0^{\Delta y_i} m_{e.a,i} dy \quad (7.3b)$$

onde, l e $m_{e.a}$, são a força de sustentação e o momento por esta gerado e definidos no capítulo 6, de acordo com a função de Wagner. Estes termos são reescritos em letra minúscula para fazer referência às forças e momentos elementares e diferenciá-los dos termos globais que serão descritos a seguir em letra maiúscula. Após o processo de ajuste da ordem das matrizes aerodinâmicas para o MEF, a equação do carregamento aerodinâmico a nível elementar pode ser descrita a partir trabalho virtual como mostrado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \delta W^{(e)}}{\partial \delta h} \\ \frac{\partial \delta W^{(e)}}{\partial \delta \theta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -l_i \\ m_{(e.a),i} \end{array} \right\} = [a_1] \Delta y_i \{\ddot{q}\}_t + [a_2] \Delta y_i \{\dot{q}\}_t + [a_3] \Delta y_i \{q\} + \dots \quad (7.4)$$

$$\dots + [a_4] \Delta y_i \{\lambda\}_t$$

A dimensão das matrizes elementares, $[a_{i=1,2,3}]$ são $[d^{(nó)} \times d^{(nó)}]$ e da matriz elementar $[a_4]$, $[d^{(nó)} \times d^{(faixa)}]$, onde $d^{(nó)} = 4$ ou 5 dependendo do tipo de sistema, se aeroelástico ou se aeroviscoelástico. A dimensão, $d^{(faixa)}$ será sempre igual a 2, pois representa a quantidade de atrasos aerodinâmicos da faixa. Desta maneira, tem-se que o vetor de coordenadas generalizadas nodal, $\{q\}$, tem dimensão, $[d^{(nó)} \times 1]$, e o vetor de atrasos aerodinâmicos, $\{\lambda\}$, $[d^{(faixa)} \times 1]$. Em seguida, a equação a nível elementar dos atrasos aerodinâmicos é descrita.

$$\{\dot{\lambda}\} = [b_1] \{\ddot{q}\}_t + [b_2] \{\dot{q}\}_t + [b_3] \{q\}_t + [b_4] \{\lambda\}_t \quad (7.5)$$

onde a dimensão das matrizes, $[b_{i=1,2,3}]$, é $[d^{(faixa)} \times d^{(nó)}]$ e da matriz $[b_4]$, $[d^{(faixa)} \times d^{(faixa)}]$. Em seguida, o processo de montagem das matrizes aerodinâmicas globais, $[A_{i=1...4}]$ e $[B_{i=1...4}]$, deve ser feito lembrando que os elementos aerodinâmicos são equivalentes aos nós da malha estrutural. Assim, a montagem pode ser feita utilizando os índices dos graus de liberdade de cada nó e os índices dos atrasos aerodinâmicos de cada faixa, tal qual descrito abaixo:

$$[A_{i=1,2,3}] = \bigcup_{j=1}^{N^\circ N^\circ s} [A_{i=1,2,3}(gdl_{nó}(j), gdl_{nó}(j))] + [a_{i=1,2,3}] \Delta y_j \quad (7.6a)$$

$$[A_4] = \bigcup_{j=1}^{N^\circ N^\circ s} [A_4(gdl_{nó}(j), atraso_{nó}(j))] + [a_4] \Delta y_j \quad (7.6b)$$

$$[B_{i=1,2,3}] = \bigcup_{j=1}^{N^\circ N^\circ s} [B_{i=1,2,3}(atraso_{nó}(j), gdl_{nó}(j))] + [b_{i=1,2,3}] \quad (7.6c)$$

$$[B_4] = \bigcup_{j=1}^{N^\circ N^\circ s} [B_4(atraso_{nó}(j), atraso_{nó}(j))] + [b_4] \quad (7.6d)$$

onde $gdl_{nó}(j)$ faz referência aos índices dos graus de liberdade do $j^{ésimo}$ nó e $atraso_{nó}(j)$ faz referência aos índices dos atrasos aerodinâmicos da $j^{ésima}$ faixa avaliada. Uma vez definidas as matrizes globais, os esforços aerodinâmicos bem como os atrasos aerodinâmicos, podem ser reescritos em suas formas globais.

$$\begin{Bmatrix} -L \\ M_{e.a} \end{Bmatrix} = [A_1] \{\ddot{Q}\}_t + [A_2] \{\dot{Q}\}_t + [A_3] \{Q\}_t + [A_4] \{\Lambda\}_t \quad (7.7a)$$

$$\{\dot{\Lambda}\} - [B_1] \{\ddot{Q}\}_t - [B_2] \{\dot{Q}\}_t - [B_3] \{Q\}_t + [B_4] \{\Lambda\}_t = \{0\} \quad (7.7b)$$

A Eq.(7.7b) foi totalmente isolada do lado esquerdo da igualdade para que os atrasos sejam acoplados à equação do movimento do asa já com os esforços aerodinâmicos, similar ao realizado na seção típica. Assim, introduzindo a Eq.(7.7a) na Eq.(5.47) e isolando os esforços viscoelásticos do lado direito da equação, a seguinte expressão é determinada:

$$[\bar{M}]^{(g)} \{\ddot{Q}\}_t + [\bar{C}]^{(g)} \{\dot{Q}\}_t + [\bar{K}]^{(g)} \{Q\}_t - [A_4] \{\Lambda\}_t = \{F\}_t - \{F_v\}_{t-j\Delta t} \quad (7.8)$$

onde,

$$\begin{aligned} [\bar{M}]^{(g)} &= [M]^{(g)} - [A_1]; \\ [\bar{C}]^{(g)} &= [C]^{(g)} - [A_2]; \\ [\bar{K}]^{(g)} &= [K]^{(g)} - [A_3]; \end{aligned}$$

Finalmente, com a equação da asa contemplando os esforços aerodinâmicos, é possível descrever a equação geral do movimento enriquecida dos atrasos aerodinâmicos.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} [\bar{M}]^{(g)} & [0]_{gdl \times N_d} \\ -[B_1] & [0]_{N_d \times N_d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{Q}_t\} \\ \{\ddot{\Lambda}_t\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{C}]^{(g)} & [0]_{gdl \times N_d} \\ -[B_2] & [I]_{N_d \times N_d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{Q}_t\} \\ \{\dot{\Lambda}_t\} \end{Bmatrix} + \dots \\
 & \dots + \begin{bmatrix} [\bar{K}]^{(g)} & -[A_4] \\ -[B_3] & -[B_4] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q\}_t \\ \{\Lambda\}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_t - \{F_v\}_{t-j\Delta t} \\ \{0\} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

onde os parâmetros gdl e N_d fazem referência à quantidade de graus de liberdade da asa e aos atrasos aerodinâmicos de todas as faixas, respectivamente. O vetor $\{F_v\}$ representa os esforços dissipativos gerados pelo material viscoelástico e o vetor $\{F\}$ esforços externos quaisquer.

Desta maneira, cumpre-se o objetivo desta etapa que é inserir o comportamento dinâmico do material viscoelástico no domínio do tempo no modelo da Teoria das Faixas aplicado ao MEF. Este modelo será agora confrontado com os resultados experimentais.

CAPÍTULO VIII

Experimentos Aeroelásticos

Neste capítulo são explicados com detalhes os procedimentos experimentais utilizados para realização dos experimentos com o PAPA e com a *plate like wing*. Portanto, para atender os objetivos propostos neste trabalho que são criar modelos computacionais capazes de representar com fidelidade o comportamento dos sistemas estudados, é necessário que os aparatos experimentais funcionem de maneira adequada.

Assim, os modelos experimentais foram utilizados, em um primeiro momento, como uma base para criação de um planejamento experimental, onde foi possível saber, por exemplo, se os túneis de vento utilizados seriam capazes de gerar velocidades de escoamento suficientes para visualização do fenômeno de *flutter*. Este foi um ponto crítico no estudo da *sandwich plate like wing*, pois a adição do tratamento superficial elevou a velocidade crítica para os limites de operação do túnel de vento.

Como dois túneis de vento e duas formas completamente diferentes de medição foram utilizadas, o capítulo é composto de duas seções, uma descrevendo o procedimento experimental utilizado para o PAPA e outra para a Teoria das Faixas.

Os trabalhos de Silva (SILVA, 2016) e Versiani (VERSIANI et al., 2019) foram a base para o desenvolvimento dos procedimentos experimentais com o PAPA e com a *sandwich plate like wing*.

8.1 Procedimento experimental utilizado para o estudo da seção típica

Basicamente, dois equipamentos principais são utilizados no estudo experimental da seção típica: um túnel de vento e um aparato que seja capaz de avaliar o comportamento aeroelástico de uma superfície de sustentação e que seja possível de ser modelado segundo a teoria da seção típica. Neste caso o aparato experimental utilizado é o PAPA. Ambos serão descritos com detalhes, bem como toda a instrumentação utilizada para as medições.

8.1.1 Túnel de vento utilizado nos ensaios aeroelásticos da seção típica

Neste caso, foi utilizado o túnel de vento Laboratório de Engenharia Aeronáutica do ITA juntamente com o Laboratório de Estruturas Aeroespaciais (LAB-AESP), mostrado na Fig.(8.1).



Figura 8.1: Túnel de vento do Laboratório de Engenharia Aeronáutica. Fonte: (SILVA, 2016).

Este túnel possui uma câmara de teste com $0,7m$ de comprimento, $0,6m$ de altura e largura, e é equipado com uma turbina modelo EAS/1250 com $1,2m$ de diâmetro, potência de $25HP$, vazão de $43000m^3/h$ e uma rotação máxima de $1150rpm$, conjunto que é capaz de produzir uma velocidade máxima de $33m/s$.

O ar entra no túnel por uma seção axial circular de $1,3m$ de diâmetro, succionado pela turbina e em seguida é acelerado na câmara difusora até chegar à câmara de estabilização. Na câmara de estabilização, o escoamento até então turbulento é retificado e estabilizado. Antes de chegar à câmara de teste, o escoamento é forçado através de cone de contração afunilado para ganhar velocidade (SILVA, 2016). Um tubo de Pitot é posicionado na câmara de testes, juntamente com um manômetro digital, modelo Testo 512, para medição da velocidade do escoamento. A Fig.(8.2) mostra um esquema do túnel de vento.

Dadas as dimensões do túnel, o PAPA foi montado na frente da saída do túnel em posição vertical e no centro da seção de saída, como mostrado na Fig.(8.3).

8.1.2 Descrição do sistema de aquisição de dados

Para aquisição/processamento de dados foi utilizado um módulo de aquisição dSPACE conectado ao computador por meio de um cartão PC/AT. Este sistema é equipado com 16 canais multiplexados em 4 conversores A/D (4 canais pertencem a 1 conversor A/D) com um tempo de conversão de $1\mu s$ por canal. O módulo ainda possui 4 canais paralelos,

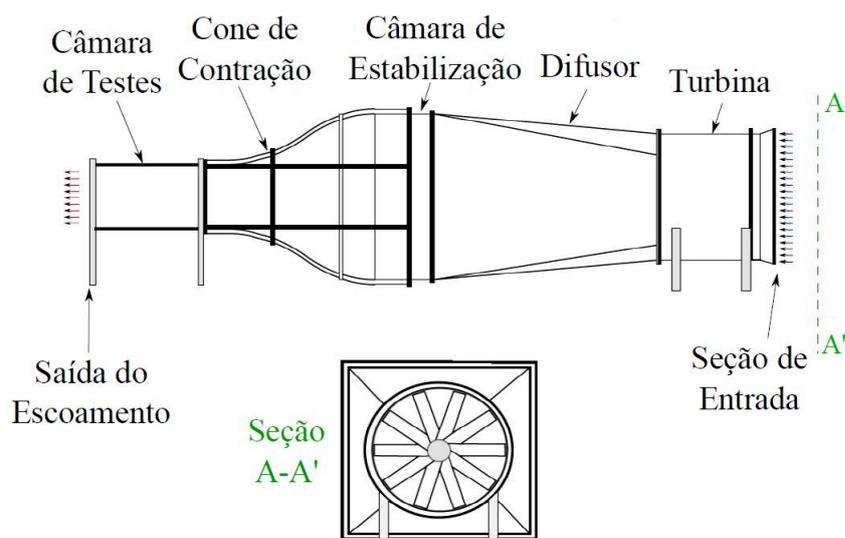


Figura 8.2: Esquema do túnel de vento do Laboratório de Engenharia Aeronáutica. Fonte: (SILVA, 2016).



Figura 8.3: Disposição do PAPA no túnel de vento.

onde cada um está conectado a um conversor A/D de resolução de 16-bit por conversor e tensão de entrada com amplitude máxima de $\pm 10V$. O módulo possui também 8 canais de conversores D/A de 16-bit de resolução e $\pm 10V$ de saída máxima.

O ambiente gráfico dos ensaios utilizando o módulo DS1103 é criado no programa ControlDesk[®], capaz de realizar várias tarefas em uma única interface de trabalho, além de possibilitar o controle de diversos subsistemas simultaneamente. Uma van-

tagem do ControlDesk é que ele utiliza os modelos desenvolvidos/implementados no Matlab/Simulink[®] como cartão de entrada. Portanto, é necessária a instalação do Matlab com o pacote RTW (Real Time Workshop) para criação da interface entre Matlab/Simulink[®] e os endereços da placa DS1103. Desta maneira, é possível ter o acesso a todas as variáveis criadas no diagrama de blocos do Simulink dentro do ControlDesk.

A instrumentação do sistema constitui de 3 acelerômetros modelo M352C68 da PCB Piezotronics. Os acelerômetros são dispostos no PAPA nos locais mostrados na Fig.(8.4).

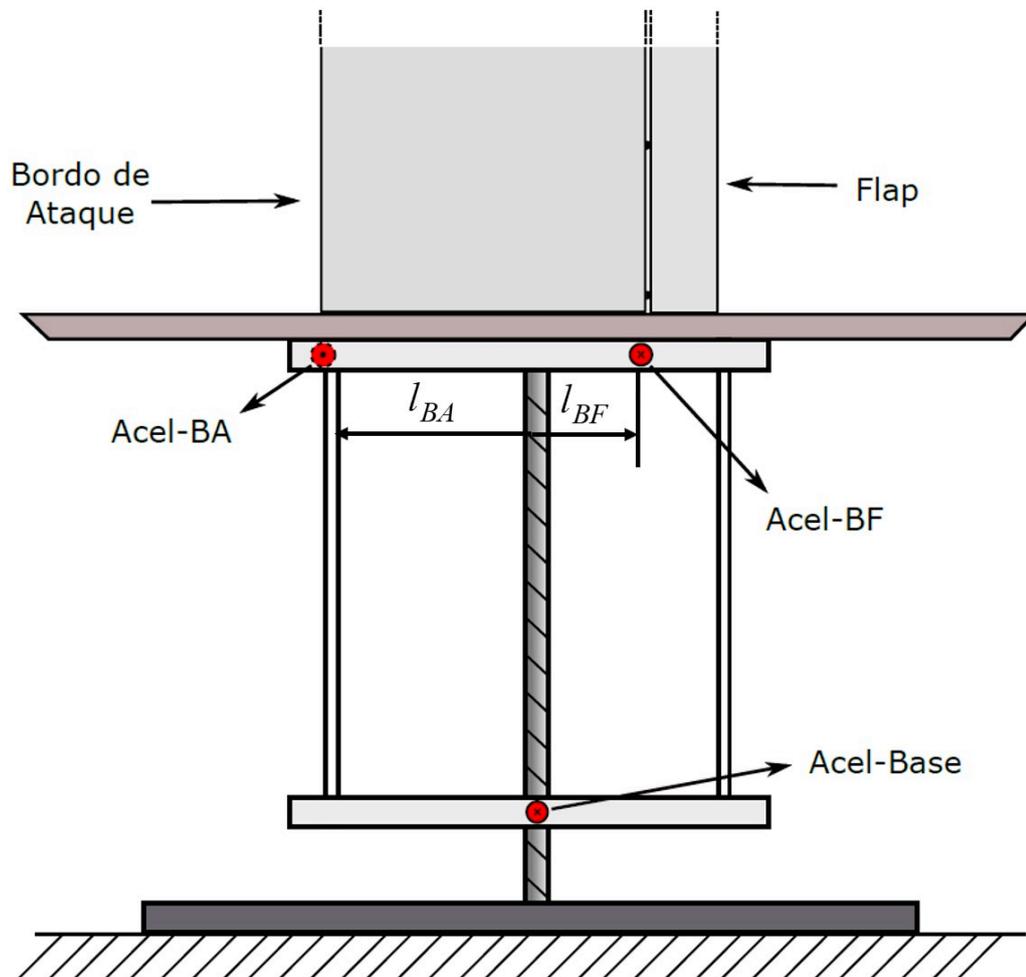


Figura 8.4: Esquema do posicionamento dos acelerômetros no PAPA. Fonte (SILVA, 2016).

A sensibilidade dos acelerômetros é de $100m/s^2/V$ e uma tensão DC de $-1,3mV$. Estes acelerômetros são posicionados na base (acel-Base), utilizado para medir o movimento de *plunge*, no bordo de ataque (acel-BA) e no bordo de fuga (acel-BF) do aparato, utilizados para medir o movimento de *pitch*.

Estes acelerômetros medem a aceleração colinear ao seu eixo axial. Assim os acelerômetros instalados na base e no bordo de fuga medem acelerações na mesma convenção de

sinais do movimento de *plunge*, já o acelerômetro no borde de ataque mede acelerações em oposição à converção de sinal do movimento de translação. Desta maneira, a aceleração angular relacionada ao modo de *pitch* deve ser estimada a partir da seguinte relação entre as acelerações medidas pelos acelerômetros do borde ataque e do bordo de fuga. A Eq.(8.1) descreve como se dá esta relação para estimar a velocidade angular da asa:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{l_{BA} + l_{BF}} \quad (8.1)$$

onde $l_{BA} = -0,07m$ e $l_{BF} = 0,22m$ são as distâncias ao longo da corda entre os respectivos acelerômetros e o eixo elástico. Estes dados foram utilizados por Bueno (BUENO, 2014) e Silva (SILVA, 2016) e a partir destes alguns parâmetros do sistema foram ajustados.

O módulo DS1103 não fornece ganhos para alimentação de sensores e acionamentos, sendo necessário um condicionador de sinal externo. Para isso, foram utilizados para cada acelerômetro um condicionador de sinal PCB Piezotronics modelo 480E09 com saída em tensão máxima de $\pm 10V$, ganho máximo de 100 vezes e alimentação de até $25V$.

Os sinais de aceleração medidos são recebidos pelos canais de conversores A/D da placa DS1103 se mostrando bastante ruidosos. Logo, filtros passa banda foram utilizados com o intuito de eliminar os ruídos alta frequência. Desta maneira, foram escolhidas as frequências de corte de $10Hz$ para o filtro passa baixas e $0,5Hz$ para o filtro passa altas.

Além disso, como os sinais são medidos em aceleração, os mesmos devem ser integrados duas vezes para se obter os deslocamentos e velocidades necessários para criação dos retratos de fase.

8.1.3 Aplicação dos elementos de rigidez viscoelástica

Os elementos de rigidez viscoelástica foram aplicados de maneira a conferir rigidez em *plunge* ao sistema. A teoria demonstrada no subseção 6.2.1 para idealização matemática da geometria destes elementos surgiu das condições de aplicação do mesmo no PAPA. Na Fig.(8.5), é possível ver “tiras” de material viscoelástico fixas no suporte do PAPA e na estrutura que o sustenta. Desta maneira, cada elemento confere rigidez somente ao ser tracionado. Logo, tiras com $1mm$, $2mm$, $3mm$ e $4mm$ de espessura, $60mm$ de comprimento e $40mm$ de largura do material ISDM 112 da 3M[®] foram confeccionadas e utilizadas.

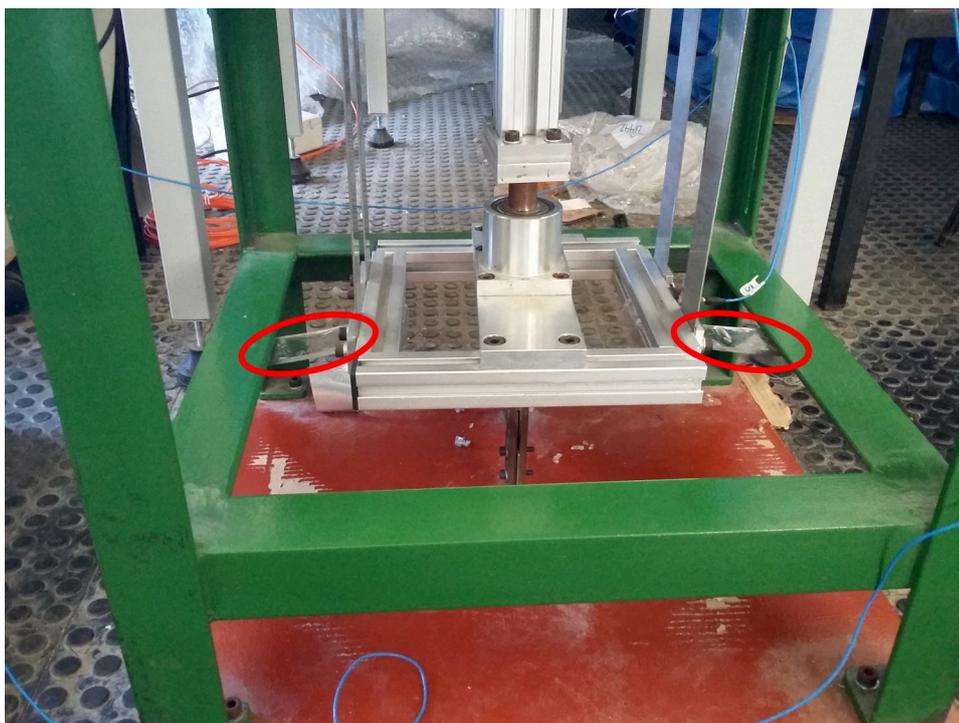


Figura 8.5: Elementos viscoelásticos circulos em vermelho para conferir rigidez a flexão do PAPA.

Como a determinação da velocidade crítica experimental é visual, determinou-se uma métrica para desativação da turbina do túnel de vento para prezar pela segurança. Estipulou-se que para vibrações em *plunge* acima de $\pm 10\text{mm}$ de amplitude, o sistema é considerado em *flutter*.

Quanto à adição de rigidez viscoelástica para o grau de liberdade de torção, não foram realizados experimentos.

8.2 Procedimento experimental utilizado no estudo da Teoria das Faixas

Neste trabalho, uma viga tratada conceitualmente como uma *plate like wing* é utilizada para o estudo da instabilidade aeroelástica de uma asa tridimensional. Nesta estrutura foi adicionado um lastro em sua extremidade cujo o intuito é aproximar a segunda e terceira frequência natural, relativas ao segundo modo de flexão e primeiro modo de torção, respectivamente, para que as instabilidades ocorram dentro da faixa de operação do túnel.

O modelo de carregamento aerodinâmico aplicado ao MEF será validado com o experimento e em seguida, a asa será recoberta das camadas viscoelásticas e restrigente para determinação das velocidades críticas. A Fig.(8.6) mostra como este lastro é fixado na extremidade livre da asa, e ao lado a fita viscoelástica que será usada para o controle passivo de vibrações.

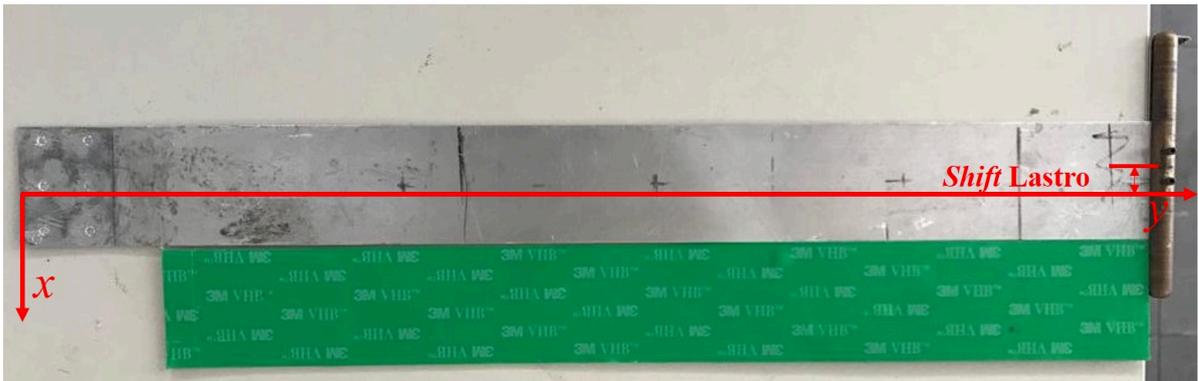


Figura 8.6: *Plate like wing* com lastro aplicado na extremidade e área de recobrimento do material viscoelástico.

Vê-se na Fig.(8.6) que o lastro é fixado à asa por dois parafusos prisioneiros. As características da estrutura, bem como do lastro são descritas nas Tabelas 8.1 e 8.2, e as

Tabela 8.1: Características geométricas da *plate like wing*.

Camada	Esp. [mm]	Ly [mm]	Lx [mm]
Base (1)	0,8128	350	40
Viscoelástica (2)	0,5	350	40
Restringente (3)	0,3	350	40

Tabela 8.2: Propriedades mecânicas da *sandwich plate like wing*

Camada	Módulo[GPa]	Poisson	Densidade [kg/m^3]
Base (1)	73,1	0,345	2780
Viscoelástica (2)	Tabela 5.7	0,500	1600
Restringente (3)	73,1	0,345	2780

propriedades de inércia do lastro são descritas na subseção 5.1.3.

Pela forma como o lastro é fixado à asa, é possível deslocá-lo de tal maneira que seu centro de gravidade saia da linha do eixo elástico, modificando assim o valores das frequências naturais e forçando o sistema a entrar em *flutter* em velocidades que permitam a análise ser realizada dentro do envelope de velocidades do túnel.

8.2.1 Túnel de vento utilizado nos ensaios aeroelásticos da *plate like wing*

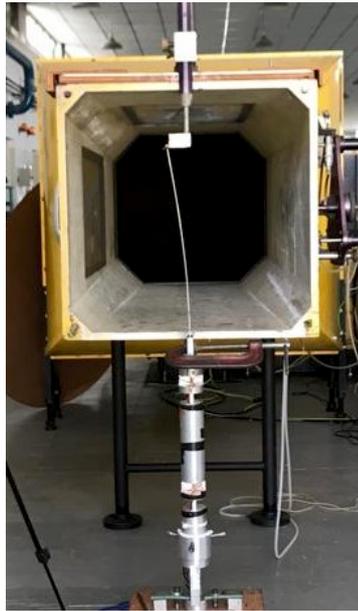
Para este experimento, um segundo túnel de vento foi utilizado. De construção mais simples, porém apresentando um escoamento mais controlado e laminar em relação ao

equipamento utilizado na seção típica, este túnel possui uma seção de testes quadrada com 465mm de lado e é capaz de gerar uma velocidade máxima de 33m/s . Ele é impulsionado por um ventilador rotativo equipado com um motor de 22kW . A Fig.(8.7) mostra uma foto do túnel de vento utilizado para os ensaios da *plate like wing*.



Figura 8.7: Túnel de vento do Laboratório de Engenharia Aeronáutica do ITA. Foto disponível no site: <http://www.aer.ita.br/node/378>.

Novamente, dadas as dimensões da seção de saída do escoamento do túnel, a Fig.(8.7a) mostra que a asa é posicionada com um ângulo de incidência de 0° na saída do túnel, similar ao feito no PAPA. A incidência da asa em relação ao escoamento é feita com ajuda de um goniômetro e um esquadro, onde este é posicionado na superfície do túnel de vento e o goniômetro utilizado para aplicar o ângulo desejado. A Fig.(8.7b) esclarece como o procedimento é realizado.



(a) Disposição da asa no túnel de vento.



(b) Aplicação do ângulo de incidência com o gonímetro.

Figura 8.8: Posicionamento da asa no túnel de vento.

Além disso, este túnel de vento está equipado com um tubo de pitot dentro de sua seção de saída, e a pressão de saída é lida um Manômetro de Betz. A Fig.(8.9) mostra a disposição destes equipamentos.

Desta maneira, a pressão dinâmica medida pelo pitot é convertida em pressão de coluna d'água pelo manômetro de Betz e a seguinte relação é aplicada para determinar velocidade do escoamento:

$$P_{din} = \frac{1}{2} \rho_{ar} V_{ar}^2 \quad (8.2a)$$

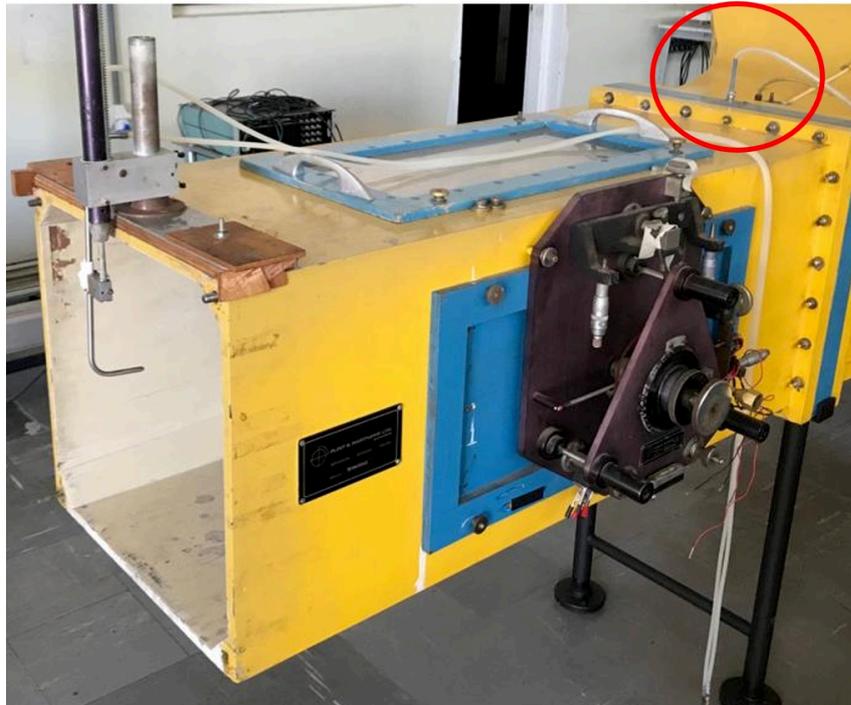
$$P_{din} = \rho_{H_2O} g h_{betz} \quad (8.2b)$$

onde, h_{betz} , é a altura de coluna medida pelo manômetro de Betz e g é a gravidade. Assim, a velocidade do ar é determinada isolando-a na Eq.(8.2a). Com esta abordagem, tem-se que a velocidade deve ser previamente estabelecida regulando o rpm do ventilador do túnel antes do início da aquisição dos dados.

Um último parâmetro experimental a ser calculado in loco é a densidade do ar, que é dependente da temperatura ambiente e da pressão atmosférica. Primeiramente, a pressão atmosférica é medida no local do experimento utilizando de um barômetro de Torricelli. Uma vez medida a pressão, P_{atm}^* , uma correção desta deve ser realizada como mostrado a seguir:

$$P_{atm} = P_{atm}^* - I_{ctp} - I_{cgp} \text{ [mbar]} \quad (8.3)$$

onde os termos I_{ctp} e I_{cgp} são definidos em função das condições climáticas do momento em uma tabela anexa ao barômetro.



(a) Tubo de pitot posicionado na entrada da seção de saída do túnel.



(b) Manômetro de Betz utilizado para medição da pressão em coluna de H_2O .

Figura 8.9: Equipamentos para medição da velocidade do escoamento.

Em seguida, a densidade do ar é calculada utilizando a constante universal dos gases, R , e a temperatura ambiente em Kelvin, T , de acordo com a seguinte fórmula:

$$\rho_{ar} = \frac{P_{atm}}{RT} \quad (8.4)$$

Este parâmetro deve ser verificado periodicamente ao longo da duração do ensaio para contemplar as variações climáticas. No momento das avaliações realizadas, a temperatura era de $25^{\circ}C$. Nesta condição, os parâmetros para o cálculo da pressão atmosférica foram medidos e valiam: $P_{atm}^* = 956,90mbar$, $I_{ctp} = 3,9mbar$ e $I_{cgp} = 1,7mbar$. Substituindo estes valores na Eq.(8.3), tem que a pressão atmosférica real vale $P_{atm} = 95.900Pa$. Finalmente, substituindo este valor de pressão na Eq.(8.4), o seguinte resultado é obtido:

$$\rho_{ar} = \frac{95.130}{287,058 \times (25 + 273,15)} = 1,1115kg/m^3$$

Este valor de densidade obtido, será utilizado nos modelos computacionais, bem como a temperatura de $25^{\circ}C$ para determinação dos parâmetros do material viscoelástico.

8.2.2 Descrição do sistema de aquisição de dados

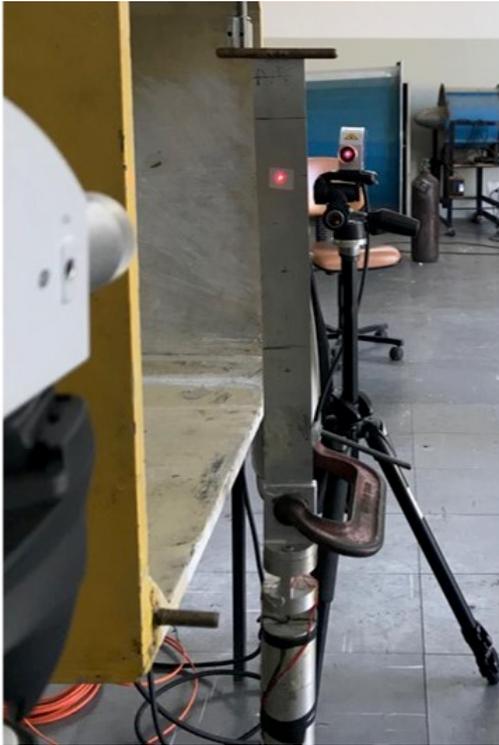
O sistema de aquisição utilizado neste trabalho é a mesma dSPACE 1103 empregada no trabalho da seção típica, bem como o sistema de interface gráfica integrado ao Matlab/Simulink[®], o programa controlDesk[®]. Entretanto, ao invés de acelerômetros, vibrômetros a laser são os equipamentos utilizados para medição do movimento. Esta escolha é feita para que não haja influência da massa dos acelerômetros e seus cabos na resposta do sistema.

No caso, dois vibrômetros Ploytec CLV-2534 são empregados para realizar a aquisição das velocidades em mm . A Fig.(8.10) mostra o conjunto de equipamentos que compõem o vibrômetro.



Figura 8.10: Vibrômetro Polytec CLV-2534.

Utilizando tri-pés apropriados, os pontos de atuação escolhidos foram sobre o eixo elástico (LEA) da asa e um ponto deslocado de $x_{laser} = 15mm$ no sentido do bordo de fuga (LBF) a uma altura de $260mm$ a contar do ponto de engaste da asa (nó 27 da malha de elementos finitos). A Fig.(8.11) mostra os pontos de atuação dos lasers na estrutura.



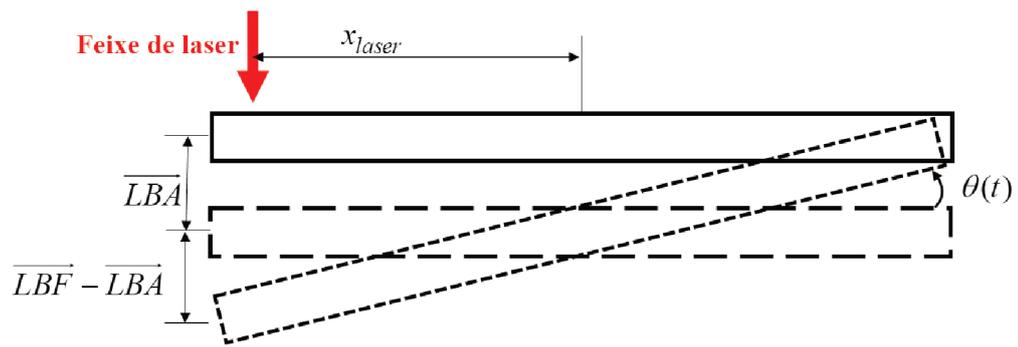
(a) Atuação do laser sobre o eixo elástico (LEA). (b) Atuação do laser sobre o borde de fuga (LBF).

Figura 8.11: Pontos de aplicação do lasers sobre a *plate like wing*.

Obviamente, os dois lasers, LEA e LBF, fazem leituras de movimentos translacionais. No caso do laser LEA, nenhuma transformação deve ser feita, pois trata-se do movimento em *plunge* que é também uma translação. Entretanto, o laser LBF deve ter sua leitura convertida em movimento de rotação. Isso pode ser feito pela seguinte equação:

$$\theta(t) = \text{atg} \left(\frac{L\vec{B}F - L\vec{E}A}{x_{laser}} \right) \approx \frac{L\vec{B}F - L\vec{E}A}{x_{laser}} \quad (8.5)$$

O sinal do laser, LEA, deve ser subtraído do sinal do laser, LBF, para que reste somente a componente de translação devido à torção. A Fig.(8.12) mostra um esquema explicando essa compensação.



Seção transversal da asa no engaste. 

Seção transversal da asa em um ponto qualquer da envergadura: *plunge*. 

Seção transversal da asa em um ponto qualquer da envergadura: *pitch*. 

Figura 8.12: Esquema da cinemática da asa sob flexão e torção.

CAPÍTULO IX

Resultados Experimentais

9.1 Resultados - Seção Típica

Nesta seção, será mostrada a comparação entre os resultados numéricos do modelo de seção típica e os ensaios experimentais realizados com o PAPA. Inicialmente, todo o sistema será apresentado de maneira a expor todos os parâmetros físicos envolvidos no problema e alguns ajustes realizados para tornar o modelo conforme com o experimento.

Em seguida, será mostrada a velocidade crítica experimental do sistema e a mesma confrontada com o modelo numérico, tanto linear quanto não linear. O próximo passo será a comparação dos sistemas aeroviscoelásticos experimental e numérico. Neste caso, somente a configuração com elemento de rigidez viscoelástica em *plunge* foi analisada experimentalmente.

Para finalizar, alguns estudos de caso fazendo variar as propriedades geométricas do elemento de rigidez viscoelástica em *pitch* são mostrados no intuito de quantificar a influência deste material no sistema. Neste contexto, serão avaliadas as velocidades críticas e o comportamento do sistema em ciclo limite.

9.1.1 Análise do sistema aeroelástico

O aparato experimental PAPA, mostrado na Fig.(6.3), teve suas propriedades físicas e geométricas quantificadas por Silva (SILVA, 2016; SILVA et al., 2018), e seus valores são os mesmos utilizados neste trabalho. A Tabela 9.1, mostra todos os parâmetros utilizados.

Tabela 9.1: Parâmetros físicos e geométricos do PAPA.

Parâmetro	Valor	Unidade
Semi-cora (b)	0,145	m
Massa da seção (M_s)	6,5	kg
Massa da base (M_b)	7,0	kg
Frequência natural de translação (f_h)	2,38	Hz
Frequência natural de rotação (f_θ)	4,29	Hz
Coefficiente de amortecimento de translação ζ_h	0,003	—
Coefficiente de amortecimento de rotação ζ_θ	0,003	—
Densidade do ar (ρ)	1,1341	kg/m^3
Temperatura ambiente	19	$^\circ C$
Posição do e.e em semi-cordas (a)	-0,1379	—
Posição do CG em relação ao e.e em b's (x_θ)	0,0275	m
Raio de giração em torno do e.e (r_θ)	0.064	m
Velocidade crítica experimental	≈ 14	m/s

*** A velocidade crítica foi determinada analisando as FRFs do sistema para diferentes velocidades. As velocidades avaliadas foram: 11,9m/s, 12,9m/s, 14,1m/s, 15,0m/s e 15,9m/s. Traçando todas as FRFs em um gráfico 3D, ver Fig.(9.1), observa-se que o modo de *plunge* perde quase toda sua contribuição no movimento a 14,1m/s, como mostrado na Tabela 9.1.

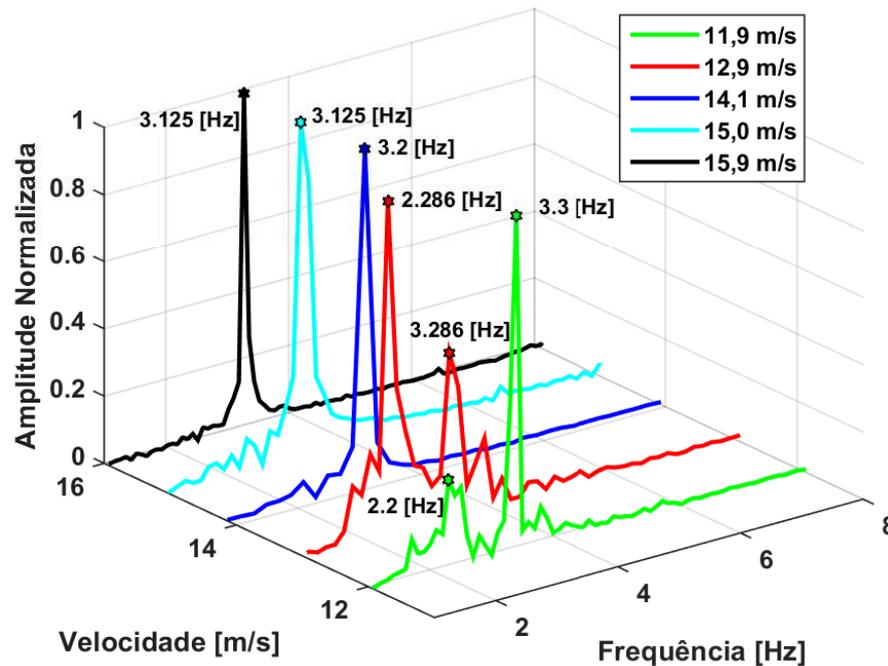


Figura 9.1: FRFs obtidas a partir das respostas transientes em *plunge*, medidas no túnel de vento.

As FRFs de 11.9 m/s e 12.9 m/s mostram claramente as primeira e segunda frequências

naturais muito bem espaçadas, mas já modificadas em relação ao sistema sem perturbações aerodinâmicas. Em seguida, são mostradas nas Figs.(9.2), (9.3), (9.4), (9.5) e (9.6), as respostas temporais a partir das quais essas FRFs foram traçadas.

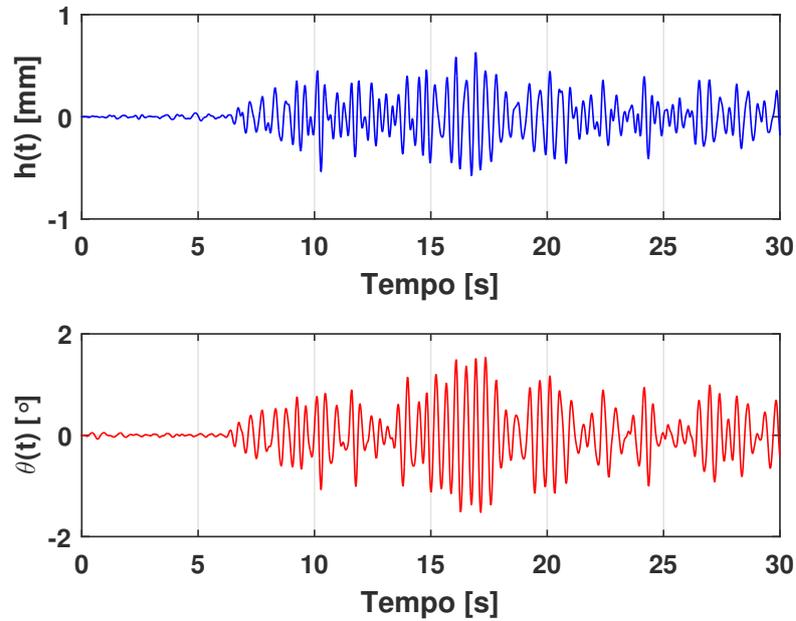


Figura 9.2: Respostas transientes em *plunge* e *pitch* para uma velocidade 11,9 m/s.

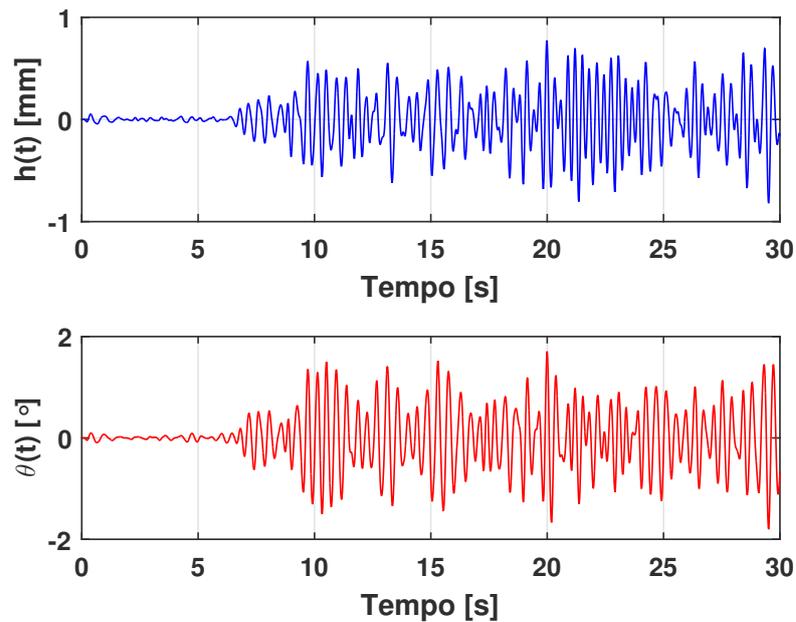


Figura 9.3: Respostas transientes em *plunge* e *pitch* para uma velocidade 12,9 m/s.

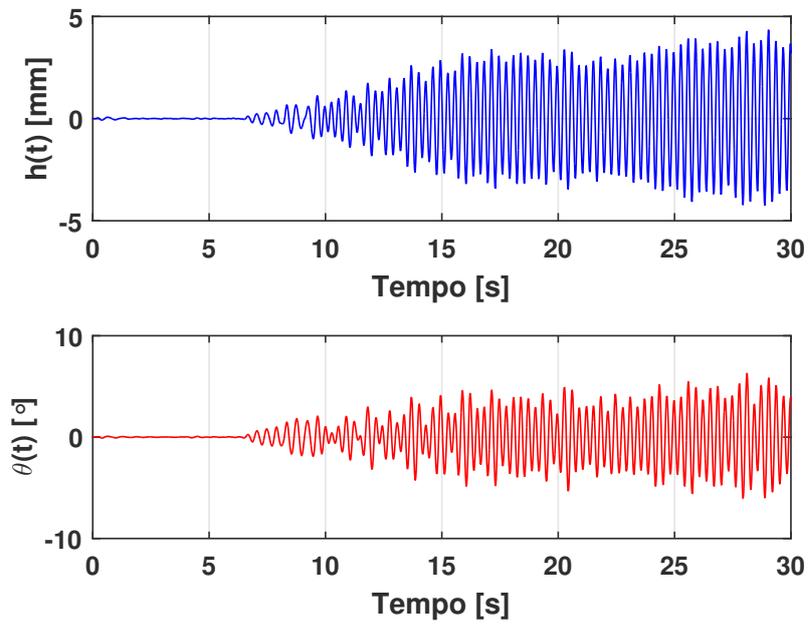


Figura 9.4: Respostas transientes em *plunge* e *pitch* para uma velocidade 14,1 m/s.

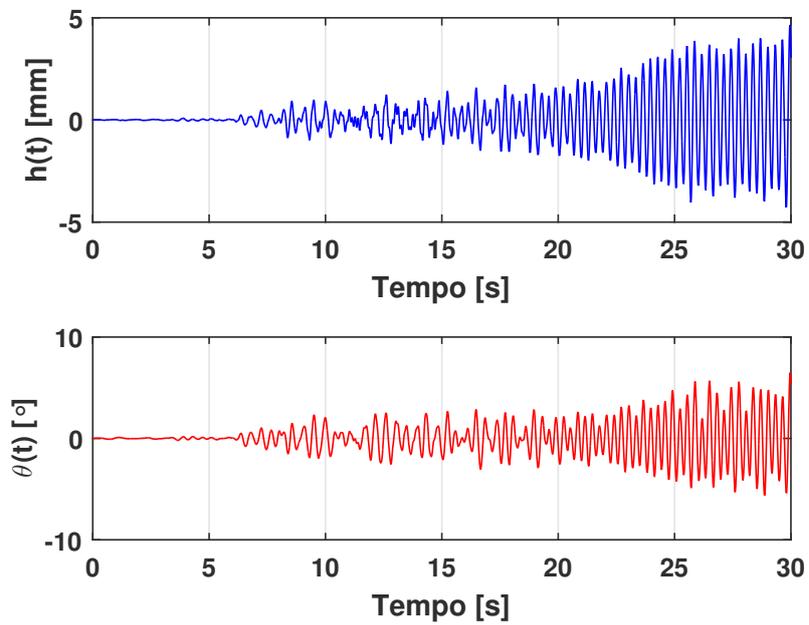


Figura 9.5: Respostas transientes em *plunge* e *pitch* para uma velocidade 15,0 m/s.

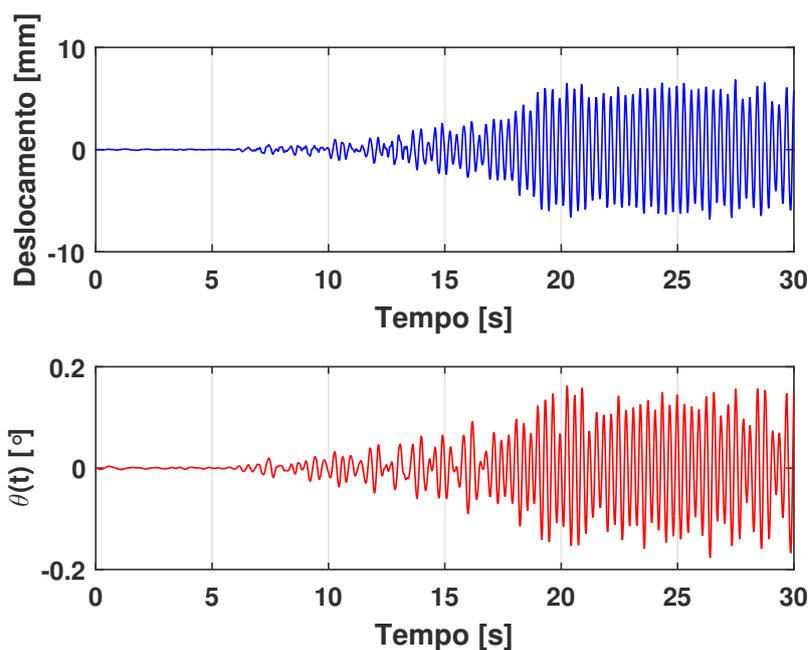


Figura 9.6: Respostas transientes em *plunge* e *pitch* para uma velocidade $15,9 \text{ m/s}$.

Numa tentativa de mostrar as amplitudes de oscilação em ciclo limite do modelo, as curvas de $h(t)$ e $\theta(t)$ são mostradas na Fig.(9.7). Nota-se que o período da avaliação é extremamente longo, 500s . Isso é feito, pois em regiões muito próximas ao *flutter*, o regime não permanente estende-se demasiadamente por questões numéricas. Logo, ao avaliar um longo intervalo de tempo, tem-se a certeza de que o sistema atingiu o ciclo limite, que no caso foi um valor próximo a $14,6 \text{ m/s}$.

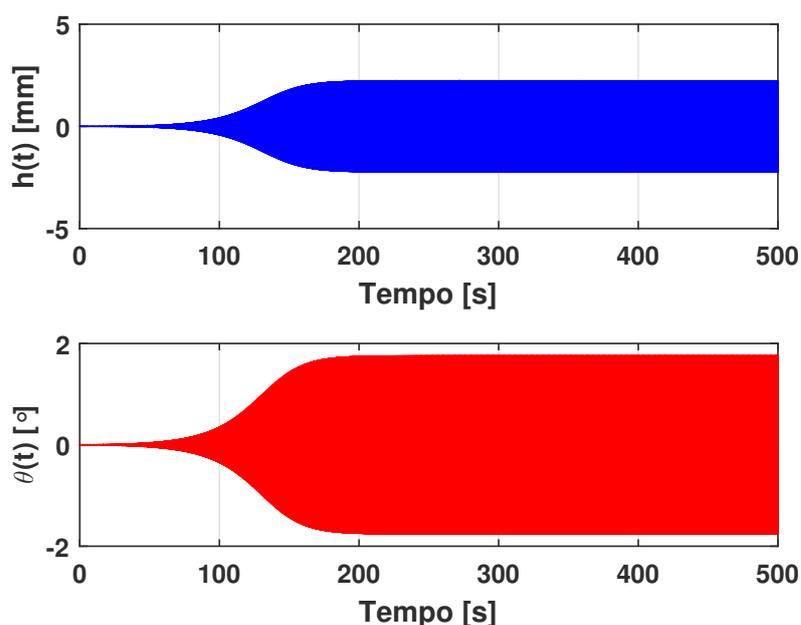


Figura 9.7: Resultado da simulação numérica para *plunge* e *pitch* a $14,6 \text{ m/s}$.

Devido a aleatoriedade da resposta transiente experimental, não convém sobrepor os resultados experimentais e numéricos em um só gráfico. Seria muito complicado comparar as duas curvas sobrepondo-as por dois motivos principais:

1. Nos modelos computacionais, para que haja oscilação, é necessário um esforço externo, além do carregamento aerodinâmico, que tire o sistema do repouso. Neste caso, um impulso unitário é utilizado. No experimento, o sistema sai do repouso simplesmente devido à interação fluido-estrutura;
2. O principal problema do aparato experimental é a forma como o mesmo é disposto no laboratório. O escoamento pouco laminar do túnel de vento, somado a uma intensa recirculação do escoamento ao sair do túnel, impedem que o sistema entre num ciclo limite estável. O resultado é um regime não permanente durante todo a período de avaliação.

Desta maneira, é feito para o modelo computacional a mesma análise espectral mostrando a perda de influência no movimento do modo de *pitch*. A Fig.(9.8), mostra este comportamento.

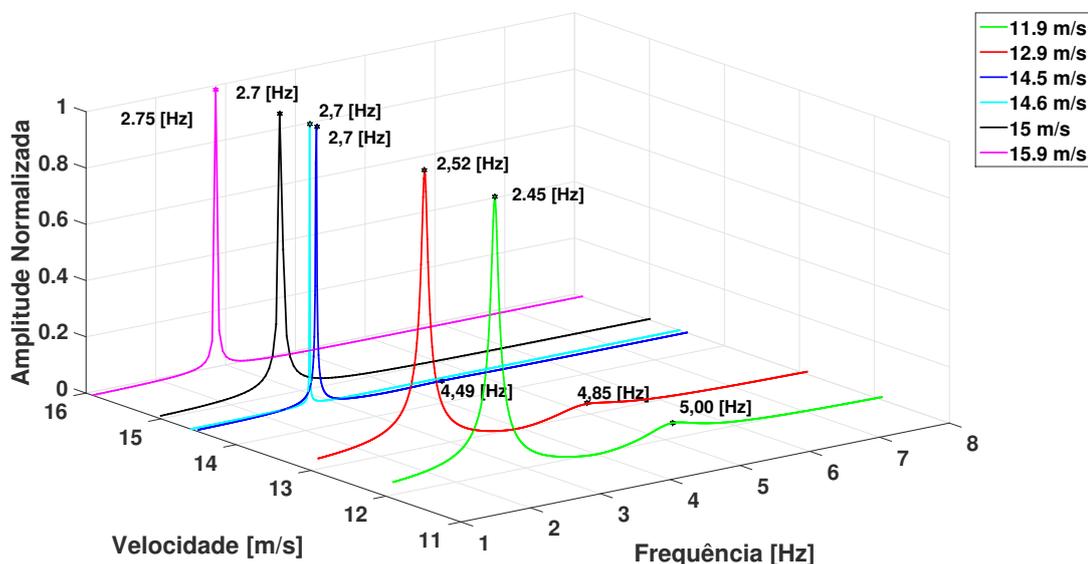


Figura 9.8: FRFS obtidas a partir das respostas transientes em *plunge*, analisadas pelo modelo computacional.

Visualmente, poder-se-ia presumir que o sistema a $14,5 \text{ m/s}$ está em *flutter*, porém, ao analisá-lo individualmente, é possível ver na Fig.(9.9) que ainda há a presença do modo de *pitch* na resposta.

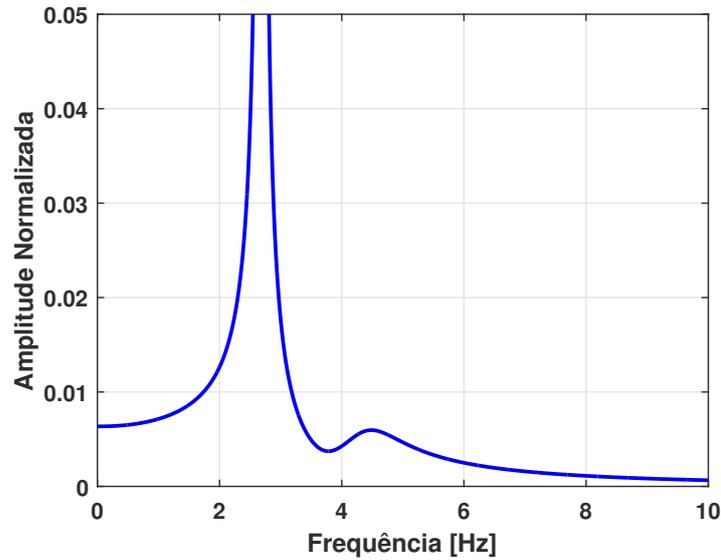
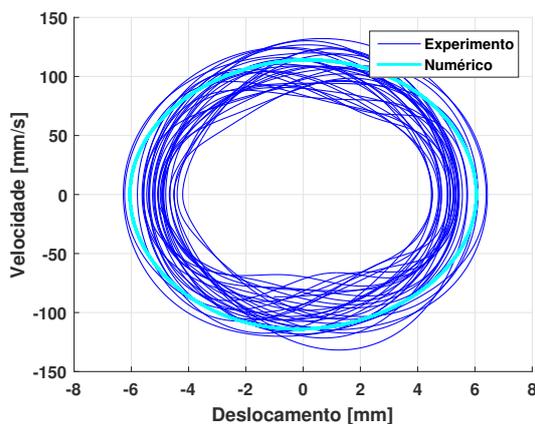


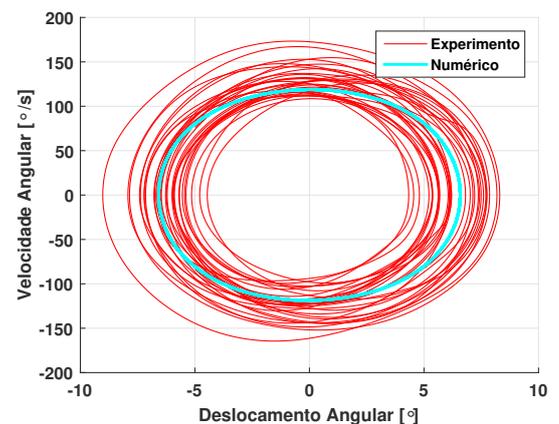
Figura 9.9: Foco na FRF a $14,5 \text{ m/s}$ para visualização da segunda frequência natural.

Disso, conclui-se que a velocidade se encontra em uma região entre $V = 14,5 \text{ m/s}$ e $V = 14,6 \text{ m/s}$, sendo portanto uma questão numérica encontrar o ponto exato em que o amortecimento do sistema se torna zero, configurando assim a velocidade crítica.

Para finalizar as análises com o modelo aeroelástico não linear e os resultados experimentais, é mostrado o retrato de fase das medições feitas no PAPA e das as simulações numéricas. Esta análise mostra como o modelo se enquadra no envelope obtido, por assim dizer em virtude das incertezas. Os gráficos são mostrados nas Figs. (9.9a), (9.9b), (9.10a) e (9.10b).



(a) *Plunge*.



(b) *Pitch*.

Figura 9.10: Retratos de fase para o sistema a $15,0 \text{ m/s}$.

Percebe-se para diferentes valores velocidades, os coeficientes dos polinômios que conferem as não linearidades em *plunge* e *pitch* devem ser reajustados. Neste caso os valores

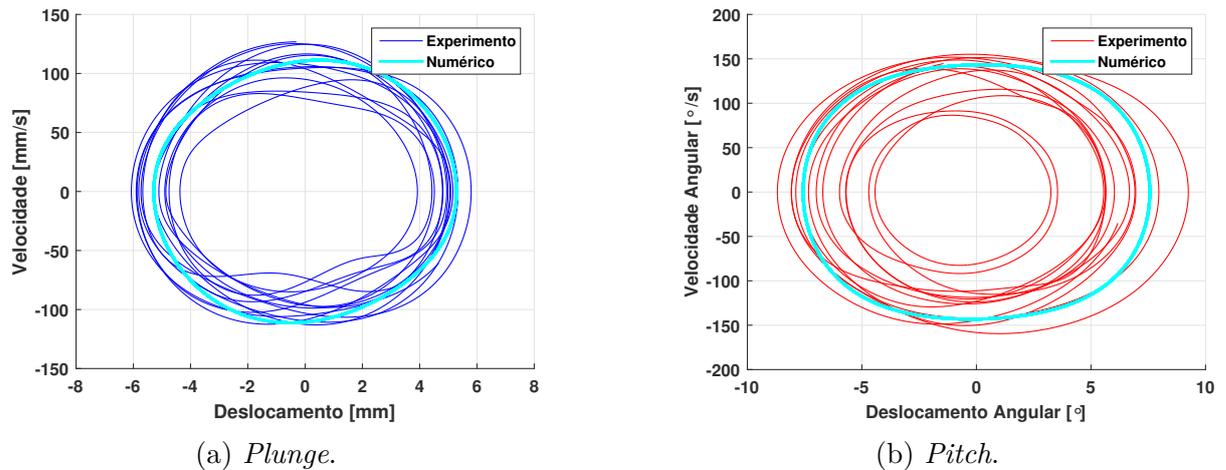


Figura 9.11: Retratos de fase para o sistema a 15,9 m/s .

para $V = 15,0 m/s$ são: $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$; e para $V = 15,9 m/s$: $a_0^h = 1,6$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 12$. Este ajuste mostra como a não linearidade em *pitch* é mais importante. Além disso, vê-se como esta forma de abordar o problema não linear da Seção Típica é flexível, permitindo o ajuste das respostas para qualquer condição necessária.

Uma vez validado o modelo numérico, a próxima avaliação é uma comparação entre os modelos linear e não linear.

9.1.2 Modelo linear vs modelo não linear

Nesta etapa é mostrado como o modelo linear se difere do não linear. O objetivo é comparar as amplitudes do sistema à medida que a velocidade do escoamento é aumentada e como cada sistema se comporta em função disso.

Ao longo do trabalho, percebeu-se que o grau de não linearidade do sistema tem forte impacto sobre a dinâmica do mesmo. Para mostrar esta influência, a seção típica não linear será avaliada com as constantes dos polinômios valendo: $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$ e comparado com o sistema linear. Em seguida, uma nova comparação é feita com as constantes valendo $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$.

As duas análises são realizadas para uma condição inicial dada em *plunge* cujo valor é $h(0) = 0,1mm$. Esse valor foi escolhido por ser menor que a amplitude do ciclo limite e, portanto, não induzir não linearidades logo no início do movimento. As velocidades avaliadas são 5,00, 13,00, 14,00 e 14,6 m/s , para os dois sistemas. Uma condição a mais será analisada somente para o caso não linear, a velocidade de 25 m/s .

Primeiramente, são mostradas as curvas em *plunge* e *pitch* para a primeira condição de não linearidade.

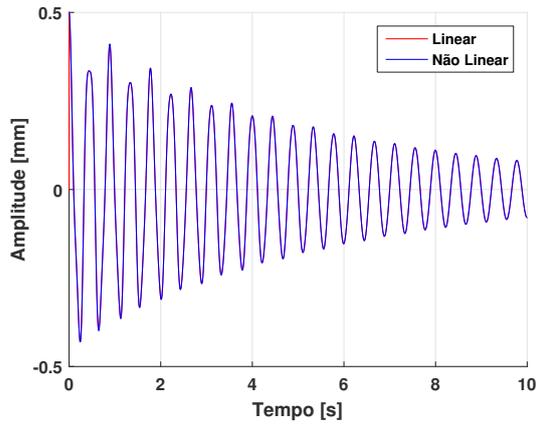
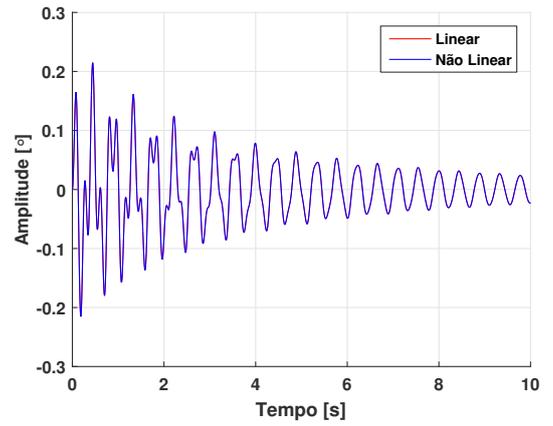
(a) *Plunge.*(b) *Pitch.*

Figura 9.12: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $5m/s$ para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$.

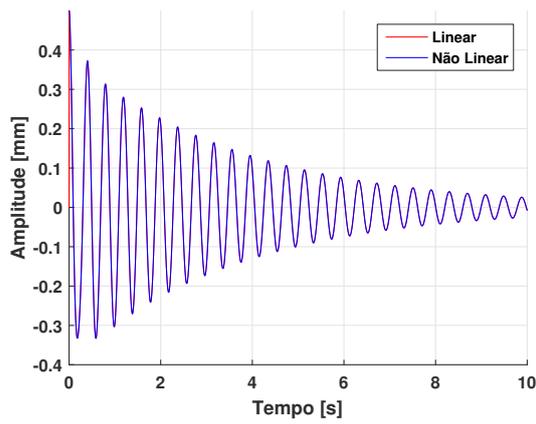
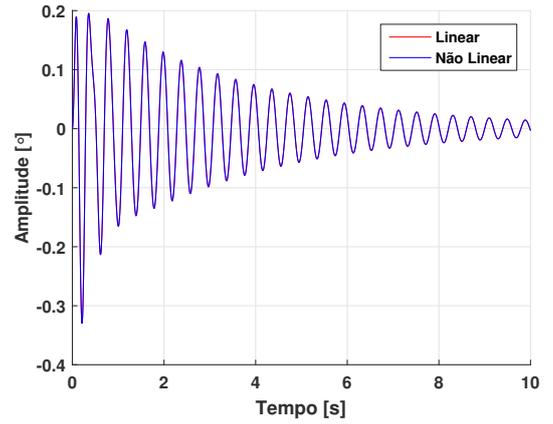
(a) *Plunge.*(b) *Pitch.*

Figura 9.13: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $13m/s$ para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$.

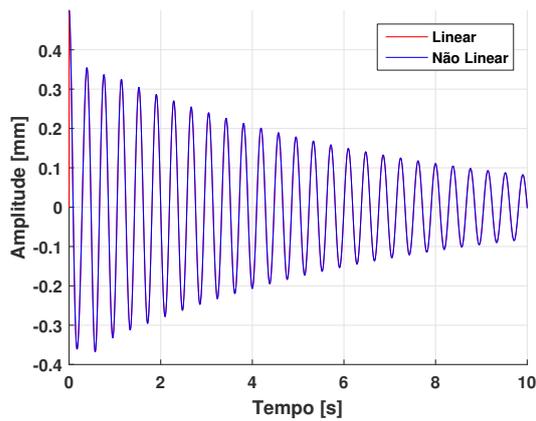
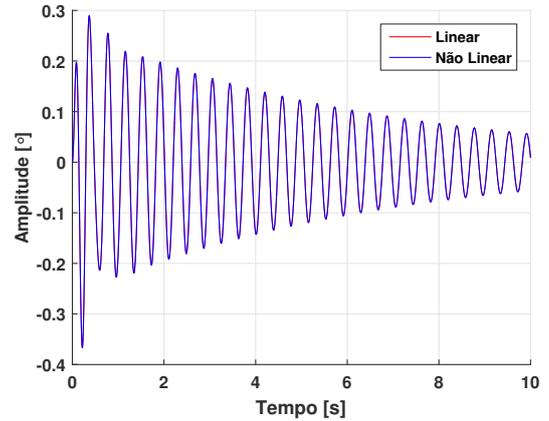
(a) *Plunge*.(b) *Pitch*.

Figura 9.14: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $14m/s$ para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$

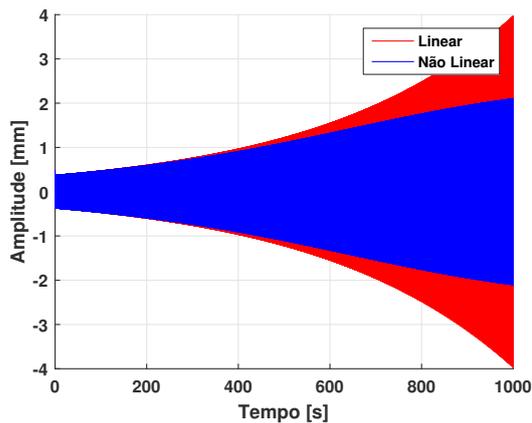
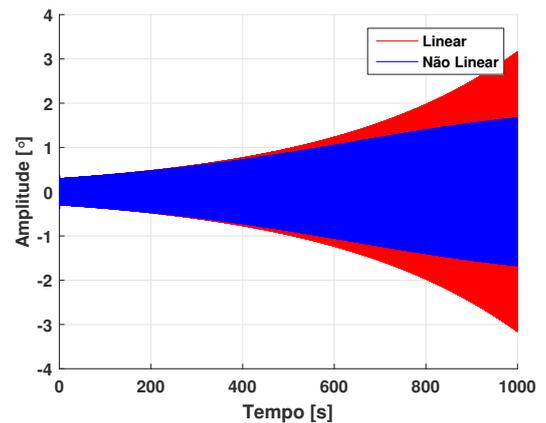
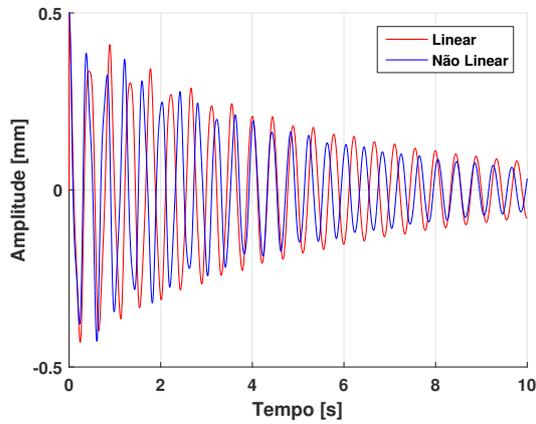
(a) *Plunge*.(b) *Pitch*.

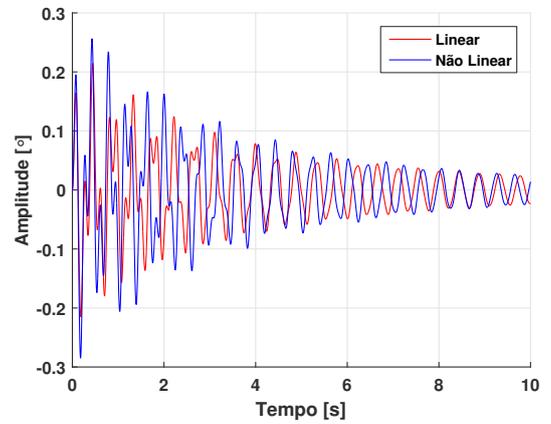
Figura 9.15: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $14,6m/s$ para $a_0^h = 1$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 1$

Um primeira constatação é referente a como os dois sistemas apresentam praticamente a mesma resposta. Isso acontece pois o grau de não linearidade introduzido no sistema é pequeno. Outro ponto interessante, é que à medida que se aumenta a velocidade e esta se aproxima da crítica, a resposta se torna mais harmônica. A Fig.(9.11b), mostra como a $5m/s$ há uma forte aleatoriedade em *pitch*, justamente o grau de liberdade cuja não linearidade é mais importante. Finalmente, a principal diferença é vista na Fig.(9.15), onde o sistema é avaliado para uma condição já crítica, porém muito próxima do ponto de amortecimento igual a zero. Nessa condição o sistema linear diverge ao passo que o não linear entra em ciclo limite. Entretanto, a velocidade $14,6m/s$ é tão próxima da velocidade crítica, que mesmo com uma avaliação de $1000s$, o sistema não linear não

atingiu o regime permanente do ciclo limite. Em seguida, a comparação com a segunda condição de não linearidade é mostrada.

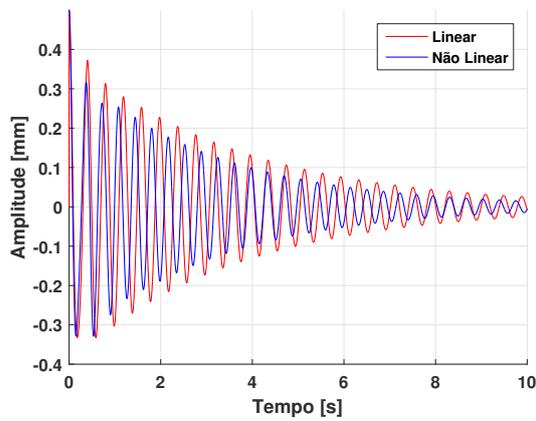


(a) *Plunge.*

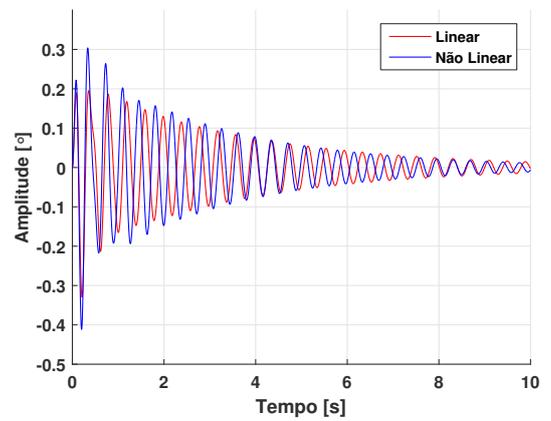


(b) *Pitch.*

Figura 9.16: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $5m/s$ para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$.



(a) *Plunge.*



(b) *Pitch.*

Figura 9.17: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $13m/s$ para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$.

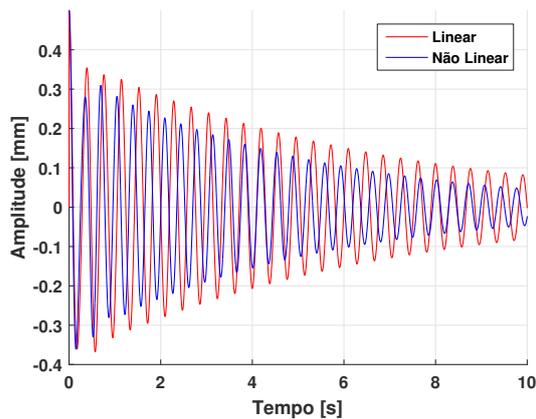
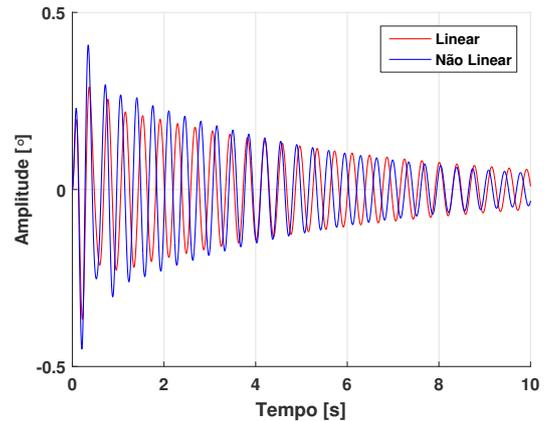
(a) *Plunge.*(b) *Pitch.*

Figura 9.18: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $14m/s$ para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$.

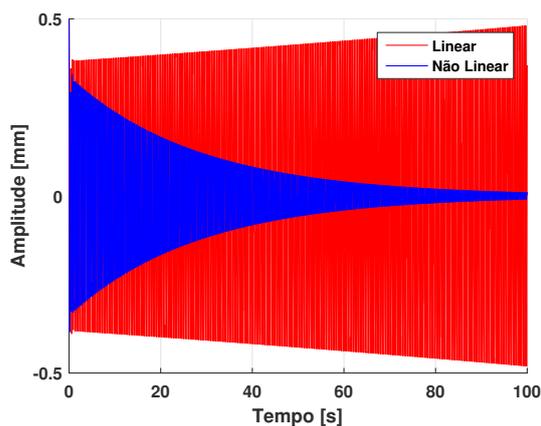
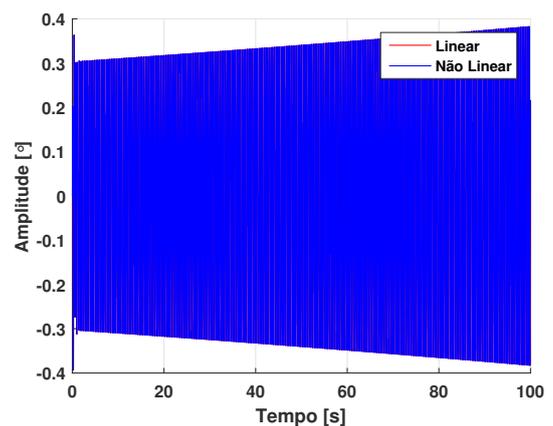
(a) *Plunge.*(b) *Pitch.*

Figura 9.19: Sistema lin. vs Sistema não lin. a $14,6m/s$ para $a_0^h = 1,27$, $a_1^h = 1$, $a_0^\theta = 1$ e $a_1^\theta = 5$.

A principal diferença entre os dois sistemas, foi uma leve alteração da velocidade crítica de $14,6m/s$ para $14,7m/s$. Além disso, tem-se que a resposta dos sistemas mesmo para a velocidade $5m/s$ alterou completamente, como pode ser visto na Fig.(9.12a). Esta diferença também é vista para as velocidades de $13m/s$ e $14m/s$.

Assim, pode-se concluir que o sistema é muito sensível às variações dos parâmetros, sendo necessário um ajuste para cada condição. Além disso, dada a quantidade de incertezas envolvidas no PAPA, seria muito complicado ajustá-los para velocidades inferiores numa tentativa de fazer uma comparação das amplitudes e fase.

Esta análise é importante para mostrar que análises transientes com a *plate like wing* deverão ser realizadas com o intuito de comparar as velocidades críticas somente. Qualquer tentativa de ajuste de modelo para comparação do sinal transiente, mesmo em baixas

velocidades, teria que ser feito levando em consideração as limitações do modelo linear, talq

9.1.3 Elemento de rigidez viscoelástica aplicado em *plunge*

Na subseção 6.2.1 foi mostrado como o elemento de rigidez viscoelástico atuando em *plunge* foi idealizado com base em sua geometria, ver Fig.(6.6). Da forma como estão dispostos, estes elementos conferem rigidez ao sistema somente quando alongados. Como consequência, para que o efeito viscoelástico seja introduzido no sistema nos dois sentidos do movimento, duas tiras viscoelásticas são aplicadas. Obviamente, este efeito foi contemplado no cálculo da rigidez equivalente.

Como foi observado na subseção anterior, os valores dos coeficientes podem alterar não somente a dinâmica do sistema em qualquer velocidade anterior à crítica, como também modificar levemente o valor desta. Por esta razão, como a primeira avaliação feita nesta etapa é a determinação da velocidade crítica em função da aplicação das rizezas viscoelásticas em *plunge*, será convencionado que os coeficientes, $a^{h,\theta}$, que conferem as não linearidades serão unitários. Para as avaliações que houver comparação com o experimentos, estes parâmetros serão ajustados.

Além disso, é importante ressaltar que a introdução de mais rigidez em *plunge* no sistema elevou o ponto de instabilidade consideravelmente. A Tabela (9.2) mostra as velocidades críticas experimentais e do modelo computacional variando de acordo com o aumento da espessura da tira viscoelástica utilizada como elemento de rigidez.

Tabela 9.2: Velocidades críticas experimentais* e simuladas** em função das espessuras do elementos viscoelásticos.

Espessura [mm]	Largura [mm]	Comprimento [mm]	V. Crítica* [m/s]	V. Crítica** [m/s]
2	40	60	≈ 18,00	≈ 16,760
3	40	60	≈ 19,50	≈ 17,765
4	40	60	≈ 20,50	≈ 19,160

Dos resultados experimentais mostrados na Tabela 9.2, foi possível registrar o sistema em uma condição instável somente para as velocidades de 18,00 *m/s* e 19,50 *m/s*. Para 20,50 *m/s* as amplitudes do movimento se mostraram muito elevadas e com uma região transiente muito curta antes de atingir o ciclo limite, colocando assim a integridade do aparato experimental em risco.

A instabilidade foi determinada de forma visual, exatamente como descrito no experimento do sistema aeroelástico. A Fig.(9.20) mostra uma resposta transiente em que, até aproximadamente 50 *s*, a velocidade do escoamento é de aproximadamente,

$V = 17,5 \text{ m/s}$. Após este instante, a velocidade foi aumentada para $18,0 \text{ m/s}$ e o sistema se tornou instável.

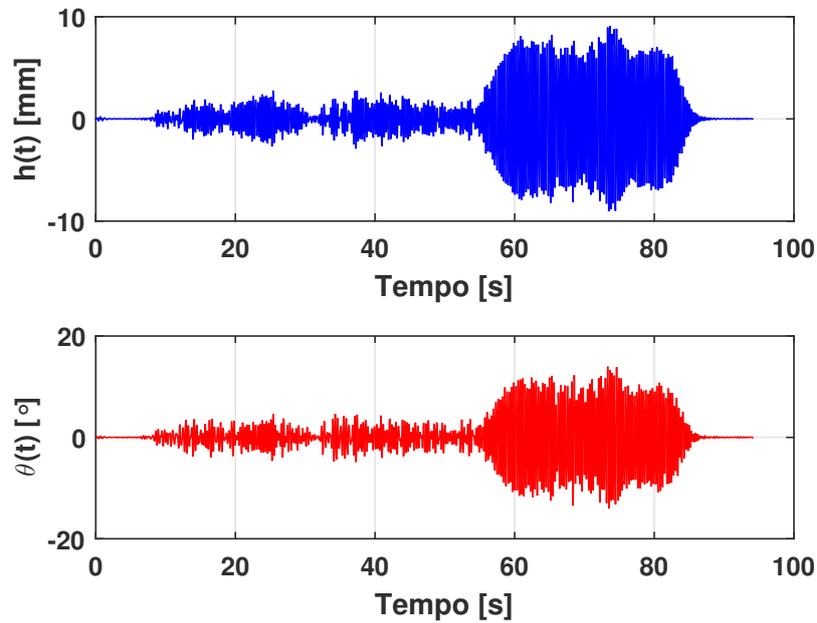


Figura 9.20: Respostas transientes para um elemento de rigidez viscoelástico de 2 mm de espessura.

Em seguida, as FFTs do sistema em condição estável e instável são mostradas para verificar a coalescência dos modos. Os intervalos de tempo mostrados nos títulos da na Fig.(9.21) nas condições de estabilidade e instabilidade indicam os trechos dos sinais (Fig.9.20) utilizados para o cálculo das FRFs.

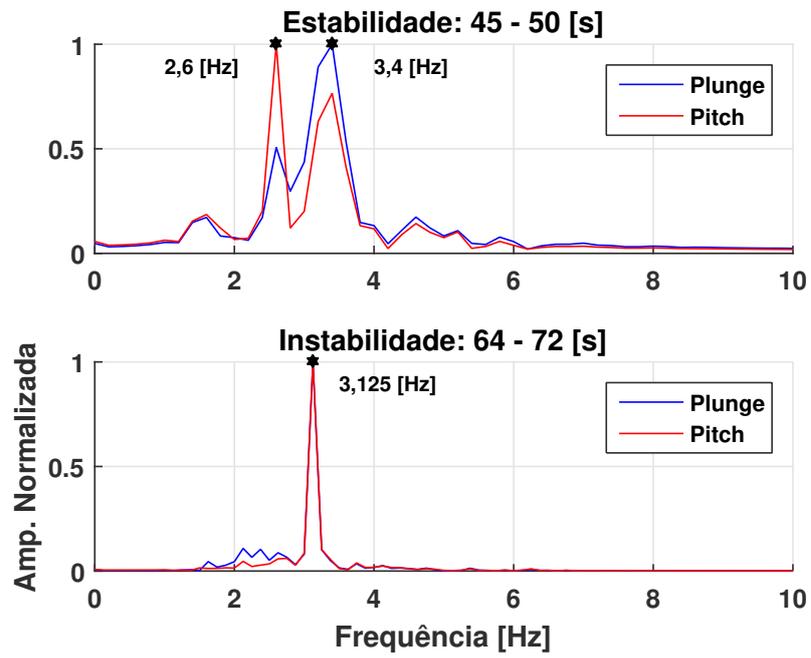


Figura 9.21: FFTs do sinal transiente antes e depois da instabilidade para 18,00 m/s .

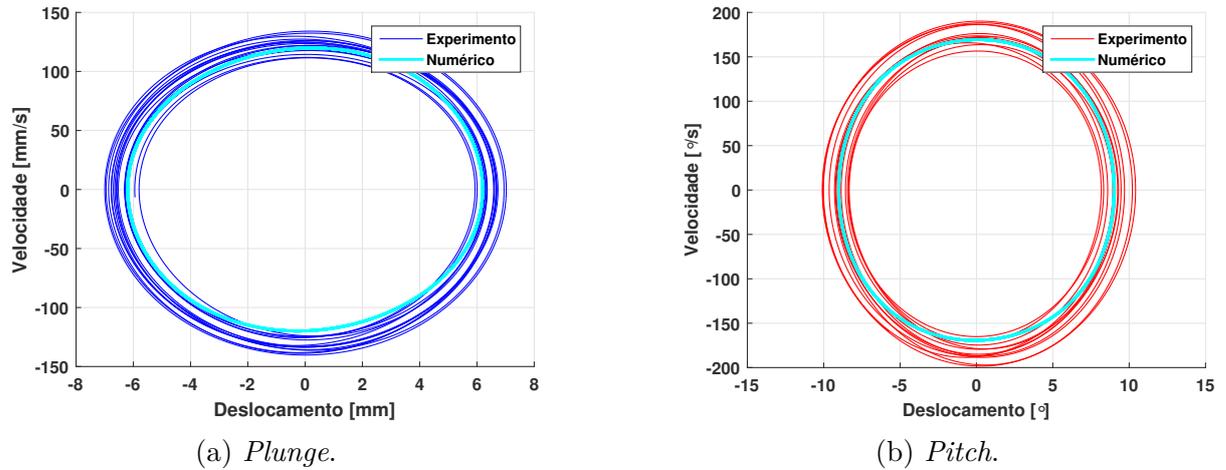


Figura 9.22: Retratos de fase para o sistema aeroviscoelástico com elemento de rigidez de 2 mm de espessura e velocidade de escoamento de $18,0 \text{ m/s}$.

O ajuste dos parâmetros dos polinômios da forças não lineares resultou nas seguintes constantes: $a_0^h = 0$, $a_1^h = 0$, $a_0^\theta = 1,05$ e $a_1^\theta = 3$, mostrando que as não linearidades da seção típica são regidas basicamente pela rigidez à torção.

Também, apesar do aumento da velocidade crítica de $14,7 \text{ m/s}$ para $16,76,0 \text{ m/s}$ com um elemento viscoelástico de 2 mm de espessura, as amplitudes dos deslocamentos se mantiveram relativamente parecidas, $h(t) = \pm 6 \text{ mm}$ e $\theta = \pm 8 \text{ mm}$ ver Fig.(9.10). Quanto às velocidades, elas aumentaram consideravelmente com a rigidez viscoelástica, $\dot{h}_v = \pm 120 \text{ mm/s}$ contra $\dot{h} = 110 \text{ mm/s}$ e $\dot{\theta}_v = 170^\circ/\text{s}$ contra $\dot{\theta} = 120^\circ/\text{s}$. Isso mostra que o material viscoelástico tem um grande potencial para reduzir as amplitudes do movimento, pois apesar das velocidades envolvidas serem maiores com o visco, as amplitudes se mantiveram.

Em seguida, são mostrados os mesmos resultados para os sistemas com 3 mm e 4 mm de espessura do elemento de rigidez viscoelástico.

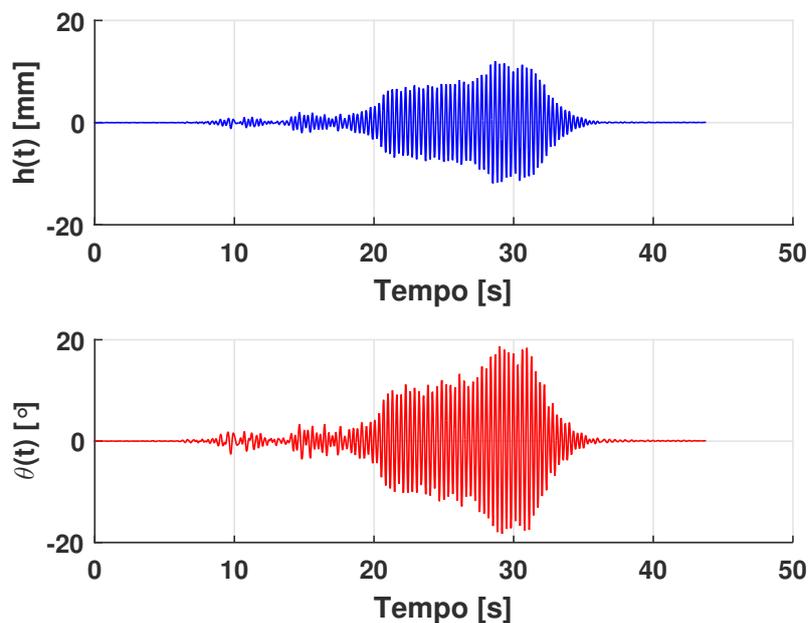


Figura 9.23: Respostas transientes para um elemento de rigidez viscoelástico de 3 mm de espessura.

Similar ao realizado para o caso anterior, os trechos dos sinais utilizados para o cálculo das FRFs nas regiões de estabilidade e instabilidade são mostrados nos títulos da Fig.(9.24).

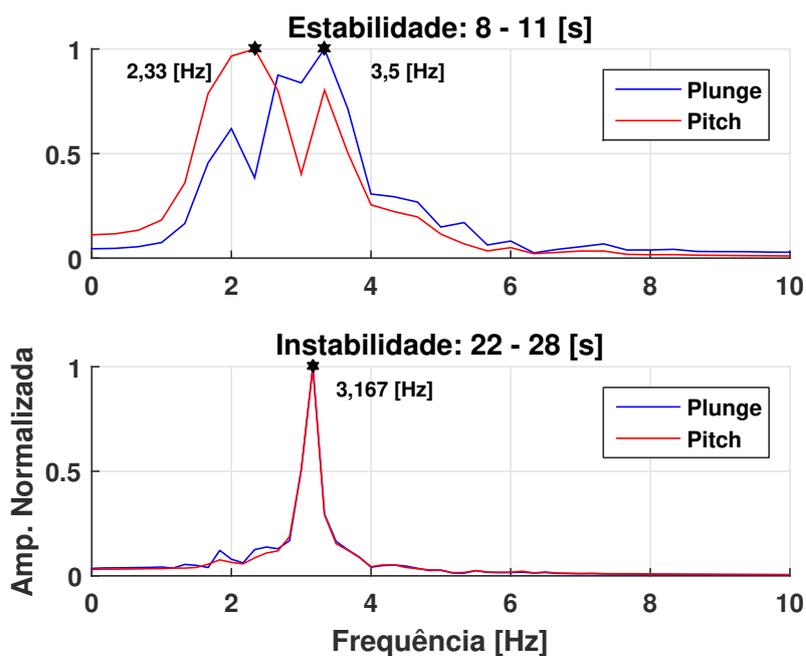


Figura 9.24: FFTs do sinal transiente antes e depois da instabilidade para 19,50 m/s.

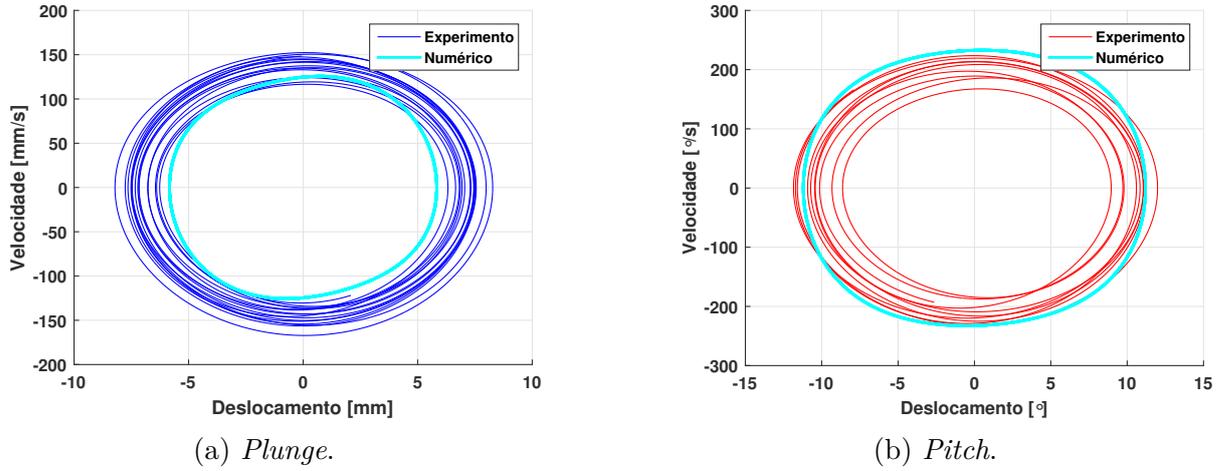


Figura 9.25: Retratos de fase para o sistema aeroviscoelástico com elemento de rigidez de 3 mm de espessura e velocidade de escoamento de $19,5 \text{ m/s}$.

Nestas condições, os valores dos parâmetros do polinômio da força não linear foram ajustados para, $a_0^h = 0$, $a_1^h = 0$, $a_0^\theta = 1,13$ e $a_1^\theta = 6$. Pelo retrato de fase é interessante ver como as amplitudes do movimento de *plunge* praticamente se inalteraram se comparado com a Fig.(9.21a) frente ao importante aumento de velocidade. Entretanto, o movimento de *pitch* modificou muito, aumentando sua amplitude para $\pm 12 \text{ mm}$ e sua velocidade de movimento para mais de $\pm 200^\circ/\text{s}$.

Mostrando o que o modelo já sugeria, que praticamente não há não linearidades em *plunge*. Além disso, apesar do grande aumento na velocidade de *pitch*, quando comparado com a condição de $18,0 \text{ m/s}$, $\approx 50^\circ/\text{s}$, o aumento na amplitude do deslocamento foi de $\approx 3 \text{ mm}$. Sugerindo mais uma vez, que o amortecimento viscoelástico atua na amplitude do movimento do ciclo limite.

9.1.4 Elemento de rigidez viscoelástica aplicado em *pitch*

As análises que seguem tratam do elemento de rigidez a torção aplicado ao modelo da seção típica não linear. Como nenhum experimento foi realizado referente a este procedimento, os resultados serão mostrados com base na geometria do elemento viscoelástico, na velocidade crítica e na amplitude do ciclo limite.

Assim, as análises são feitas com base no perímetro da coroa circular de material viscoelástico ou seja, com base no valor do ângulo presente na equação (6.47), a qual será reescrita abaixo substituindo o termo, 2π , pela variável Θ :

$$K_v^\theta = \beta_1^G \frac{\Theta (R_e^4 - R_i^4)}{4 l_z} \quad (9.1)$$

Esta geometria é excelente para o PAPA, pois flexibiliza muito a aplicação, sendo possível configurar o experimento para diferentes valores de velocidade crítica. Desta

maneira, é possível estudar não somente o ciclo limite, mas também o grau de caoticidade para velocidades mais elevadas, mas que ainda sim sejam factíveis com a capacidade do equipamento.

Influência dos parâmetros Θ e espessura da camada na velocidade crítica

No intuito de entender a influência dos parâmetros no sistema, várias avaliações são realizadas, a começar pela influência do perímetro e da espessura de material viscoelástico utilizado como elemento de rigidez. Para este caso, a Tabela 9.3 mostra várias avaliações realizadas para diferentes espessuras e perímetros, bem como as respectivas velocidades críticas. Novamente, com o objetivo de se criar uma referência para o sistema não linear, as determinações das velocidades críticas são feitas para valores unitários de $a_0^{h,\theta}$ e $a_1^{h,\theta}$.

Tabela 9.3: Velocidades críticas em função dos perímetros e das espessuras dos elementos viscoelásticos.

Θ [°]	R_e [mm]	R_i [mm]	l_z [mm]	V. Crítica [m/s]
15	21	20	20	$\approx 15,10$
	22	20	20	$\approx 15,60$
	23	20	20	$\approx 16,30$
	24	20	20	$\approx 17,10$
30	21	20	20	$\approx 15,60$
	22	20	20	$\approx 16,70$
	23	20	20	$\approx 18,10$
	24	20	20	$\approx 19,50$
45	21	20	20	$\approx 16,10$
	22	20	20	$\approx 17,80$
	23	20	20	$\approx 19,70$
	24	20	20	$\approx 21,80$
90	21	20	20	$\approx 17,60$
	22	20	20	$\approx 20,90$
	23	20	20	$\approx 24,40$
	24	20	20	$\approx 28,00$
180	21	20	20	$\approx 20,40$
	22	20	20	$\approx 26,40$
	23	20	20	$\approx 32,30$
	24	20	20	$\approx 38,20$

Os valores de R_e e R_i são determinados a partir do diâmetro do eixo do PAPA, $\phi = 20 \text{ mm}$. Estes resultados são reinterpretados em forma de gráficos para facilitar a visualização do comportamento do sistema.

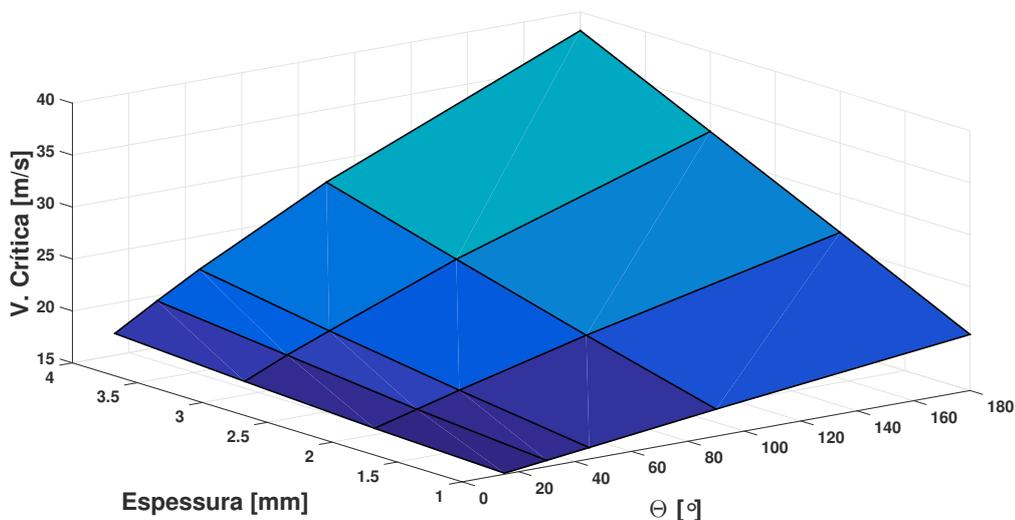


Figura 9.26: Superfície de resposta do sistema variando com Θ e com a espessura da camada.

A partir da Fig.(9.26), são mostrados seus planos.

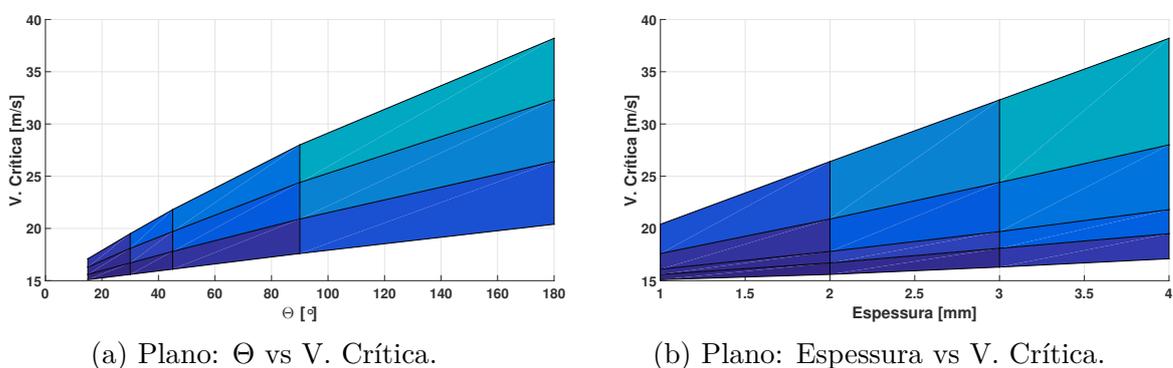


Figura 9.27: Planos da superfície de resposta.

Observa-se que o sistema se comporta de maneira quase linear frente à variação destes parâmetros. Em seguida, as amplitudes dos ciclos limites serão avaliadas para diferentes valores valores de velocidade.

Comportamento do sistema em ciclo limite

O sistema será agora avaliado somente na condição de instabilidade. Esta avaliação não é simples, pois devido à grande quantidade de parâmetros influentes, várias são os cenários possíveis de se obter. Como não há uma referência física como o experimento, algumas condições serão escolhidas e destas uma superfície de resposta será determinada, similar àquela mostrada na Fig.(9.26).

Como as velocidades críticas já foram determinadas para diferentes condições de rigidez viscoelástica a torção, nesta avaliação os coeficientes $a_0^{h,\theta}$ e $a_1^{h,\theta}$ não serão mais unitários, e os valores, $a_0^h = 1$, $a_1^h = 4$, $a_0^\theta = 1, 13$ e $a_1^\theta = 10$, são utilizados para limitar as amplitudes dos ciclos limites para as velocidades mais elevadas.

Portanto, para que este conjunto de resposta seja determinado, é necessário estabelecer um critério sobre as velocidades de escoamento avaliadas para os diferentes sistemas mostrados na Tabela 9.4. Desta maneira, estabelece-se que a velocidade máxima avaliada para cada configuração será de 25% acima do valor da velocidade crítica definida na Tabela 9.3. Além disso, dentro do intervalo $V_c < V < 1,25V_c$, quatro valores igualmente espaçados são escolhidos para avaliação.

Tabela 9.4: Amplitude máxima do ciclo limite em função do perímetro, espessura e velocidade.

$\Theta [^\circ]$	$R_e [mm]$	$R_i [mm]$	V [m/s]	$h(t) [mm]$	$\theta(t) [^\circ]$
15	22	20	15,600 + 0,1	2,086	1,397
			17,008	15,430	9,097
			18,317	24,620	13,180
			19,625	34,310	16,870
30	22	20	16,700 + 0,1	3,248	1,871
			18,200	18,270	9,602
			19,600	28,770	13,970
			21,000	40,190	17,960
45	22	20	17,800 + 0,1	4,648	2,404
			19,392	21,290	10,170
			20,883	33,170	14,790
			22,375	46,850	19,200
90	22	20	20,900 + 0,1	6,665	2,722
			22,750	29,740	11,600
			24,500	43,310	17,110
			26,2505	130,500	29,240

É visto que nas primeiras velocidades de cada condição avaliada, um $\Delta V = 0,1m/s$ é adicionado. Isso é feito para encurtar o tempo do regime transiente de entrada no ciclo limite. A partir da Tabela 9.4, as superfícies de resposta dos ciclos limites para os movimentos de *pitch* e *plunge* variando com o perímetro do elemento viscoelástico são criadas.

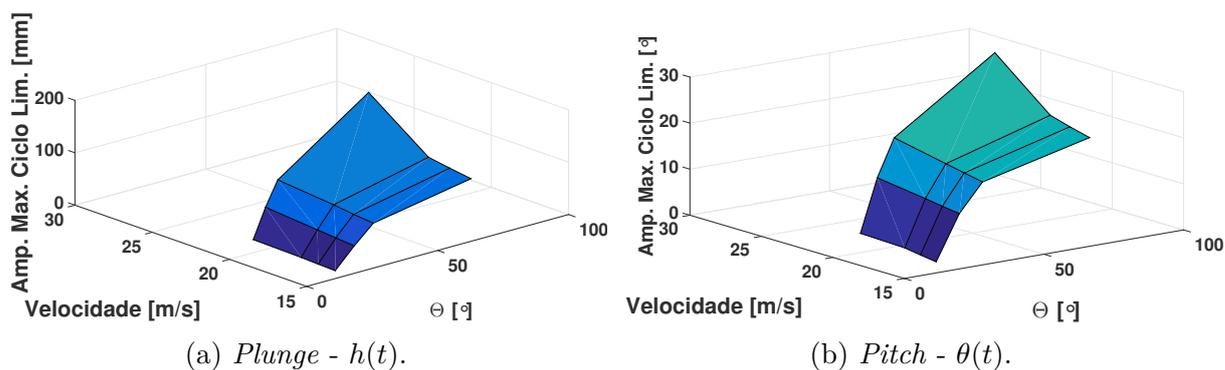


Figura 9.28: Superfície de resposta das amplitudes do ciclo limite variando com o perímetro do elemento viscoelástico.

Estas superfícies podem ser entendidas como sendo bifurcações de Hopf plotadas em um gráfico 3D onde o parâmetro Θ do elemento de rigidez viscoelástica é avaliado. Na sequência, são mostradas as vistas nos planos Θ vs Amplitude e Velocidade vs Amplitude para os dois graus de liberdade.

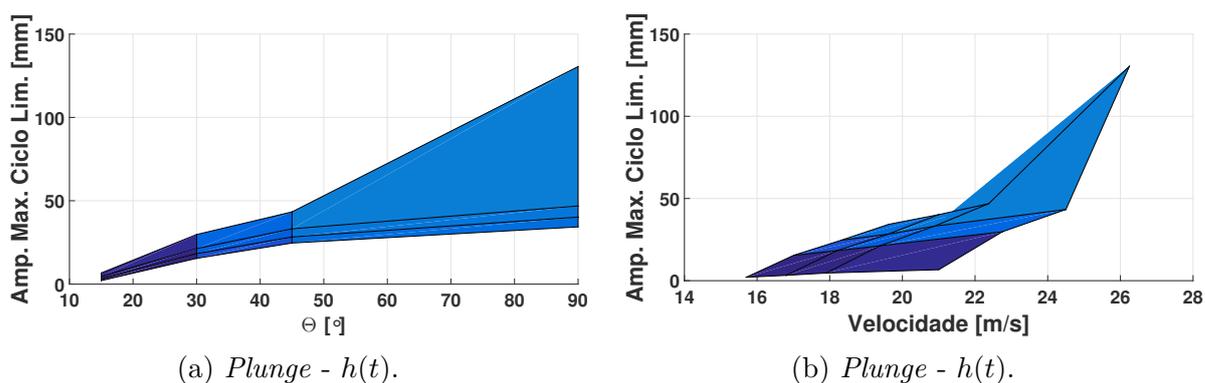


Figura 9.29: Planos das superfícies de respostas dos ciclos limites para o movimento de *plunge*.

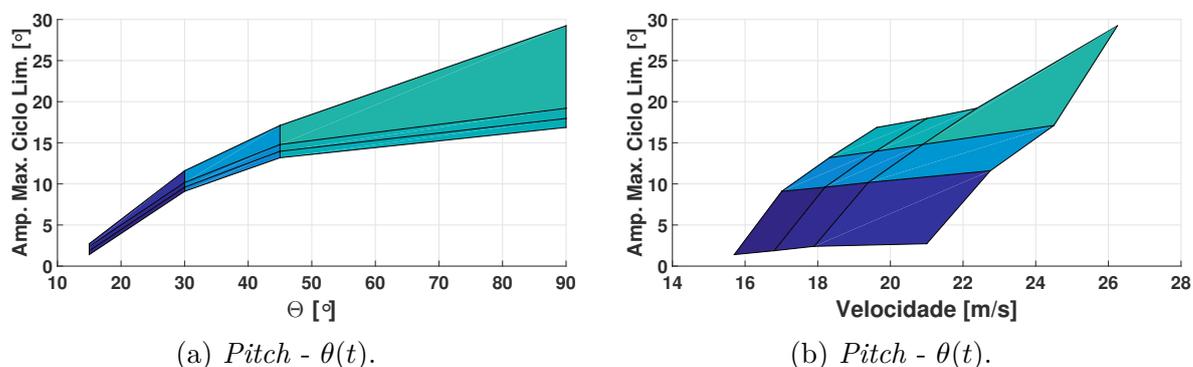


Figura 9.30: Planos das superfícies de respostas dos ciclos limites para o movimento de *pitch*.

Observa-se pelas Figs.(9.28), (9.29) e (9.30), que a alteração do comportamento do sistema em ciclo limite pelo aumento da rigidez e do amortecimento viscoelástico possui um importante grau de não linearidade, tanto em *plunge* quanto em *pitch*. Além disso, é possível ver pelos retratos de fase, que para velocidades menores o sistema apresenta um ciclo limite bem comportado e, à medida que esta aumenta, intensifica-se a complexidade do movimento. São mostrados a seguir somente os ciclos limites para a condição mais crítica de velocidade, onde $\Theta = 90^\circ$.

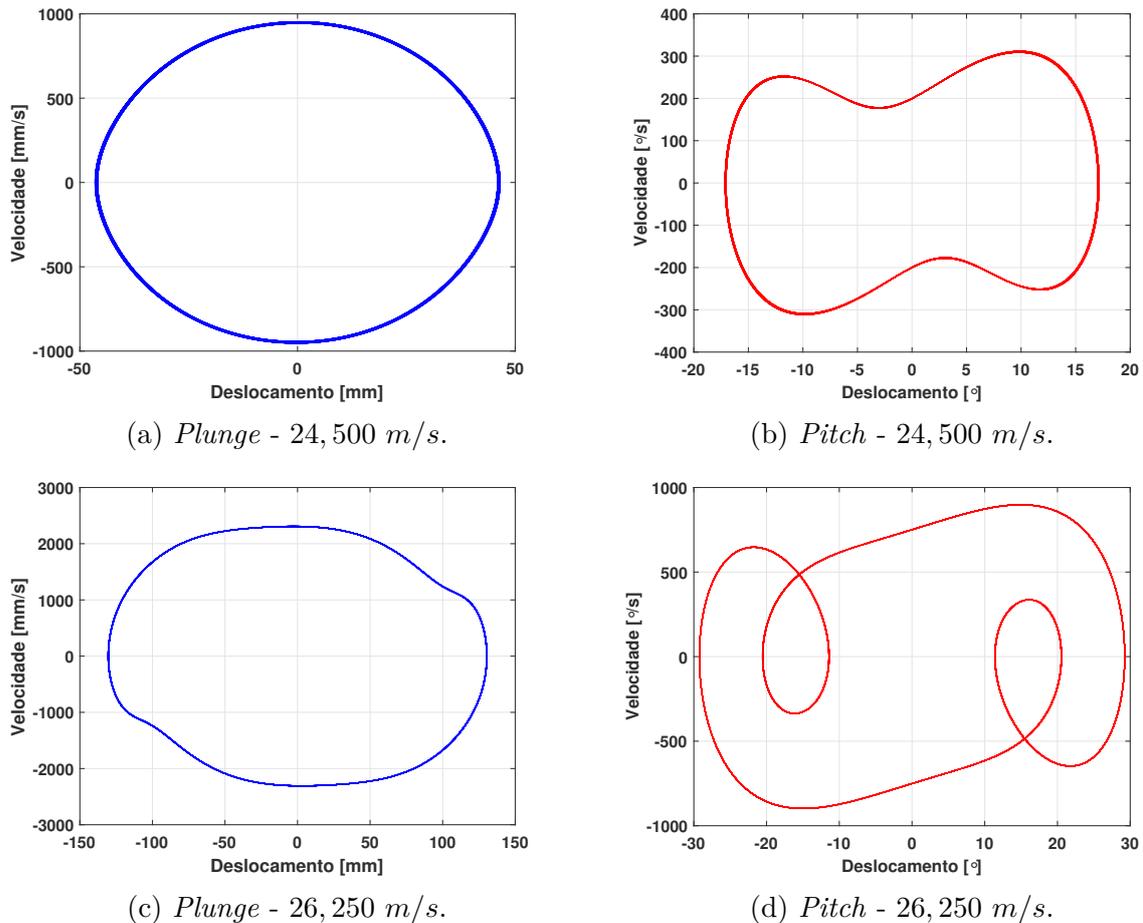


Figura 9.31: Ciclos limites para $\Theta = 90^\circ$ em todas as velocidades avaliadas.

Nestas condições, percebe-se valores de amplitudes e velocidades extremamente altos para a velocidade de 26,25 m/s. Certamente uma avaliação deste tipo não seria possível de ser feita no PAPA devido ao risco à integridade do equipamento. Entretanto, esta condição foi escolhida para mostrar como o movimento se torna complexo com o aumento da velocidade.

9.2 Resultados - Teoria das Faixas

Nesta seção, será mostrada a comparação entre os resultados numéricos do modelo da *plate like wing* e da *sandwich plate like wing* e os ensaios experimentais realizados em túnel de vento. Inicialmente, será mostrada a validação da Teoria das Faixas, pela comparação das velocidades críticas do modelo e a experimental da *plate like wing*.

Em seguida, serão mostrados os ensaios realizado com o sistema aeroviscoelástico e o objetivo é validar o modelo da Fórmula de Recorrência quanto à velocidade crítica e novamente o fator de amortecimento por meio da análise de decremento logarítmico.

Para estas avaliações, os cálculos realizado com o modelo computacional são feito tendo como condição inicial a viga deflexionada como mostrado na Fig.(9.32).

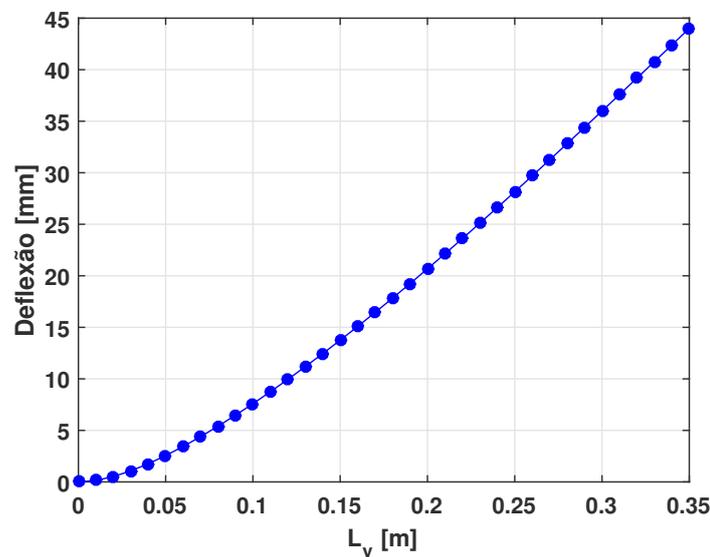


Figura 9.32: Condição inicial usada nas simulações computacionais.

Todos os ensaios foram realizados no período da manhã quando a temperatura ambiente era de $25^{\circ}C$ e a densidade do ar, $\rho_{ar} = 1,1115kg/m^3$. Para essa temperatura, as propriedades do material viscoelástico podem ser consultadas na Tabela 3.1. Outras informações como as propriedades mecânicas e geométricas da *plate like wing* são encontradas no capítulo 8.

9.2.1 Análise do sistema aeroelástico

O objetivo desta análise é comparar as velocidades críticas do modelo computacional e do experimento para a *plate like wing*. Experimentalmente, o ponto crítico foi encontrado fazendo variar lentamente a velocidade do túnel de vento até o ponto de instabilidade, cujo valor é de $10,5m/s$ e a resposta do sistema nesta condição é vista na Fig.(9.33).

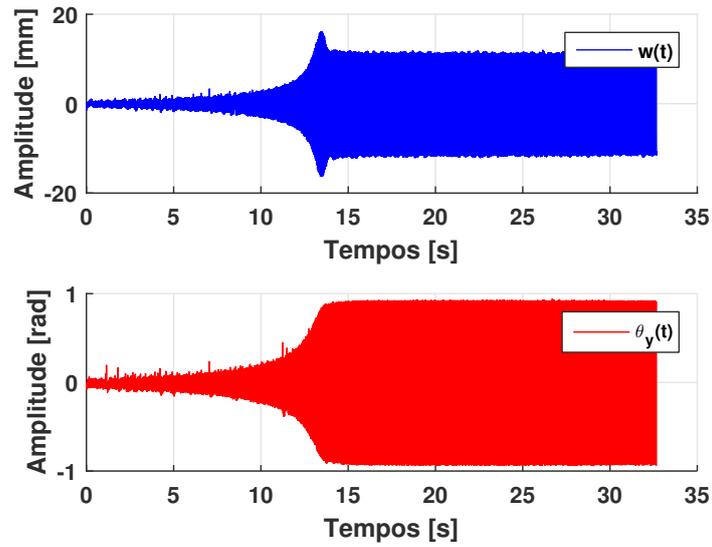


Figura 9.33: Resposta transiente da *plate like wing* a $10,50m/s$ com lastro a $5mm$ do eixo elástico.

Em seguida, é mostrada a resposta do modelo computacional da *plate like wing*. A deflexão mostrada na Fig.(9.32) é usada como condição inicial. A Fig.(9.34) mostra a velocidade em que o modelo adota um movimento conservativo, definindo assim a velocidade crítica.

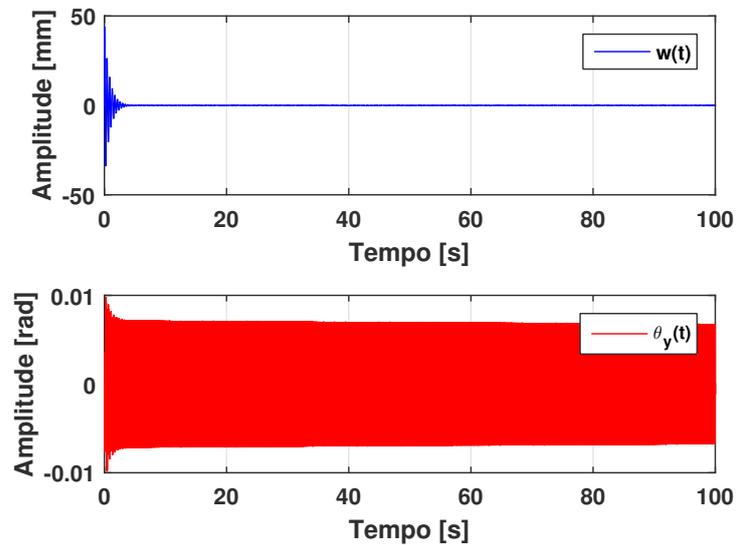


Figura 9.34: Resposta transiente computacional da *plate like wing* a $9,50m/s$ com lastro a $-5mm$ do eixo elástico.

Um zoom é dado na curva do grau de liberdade, $w(t)$, para mostrar que há uma amplitude de movimento muito pequena após $5s$.

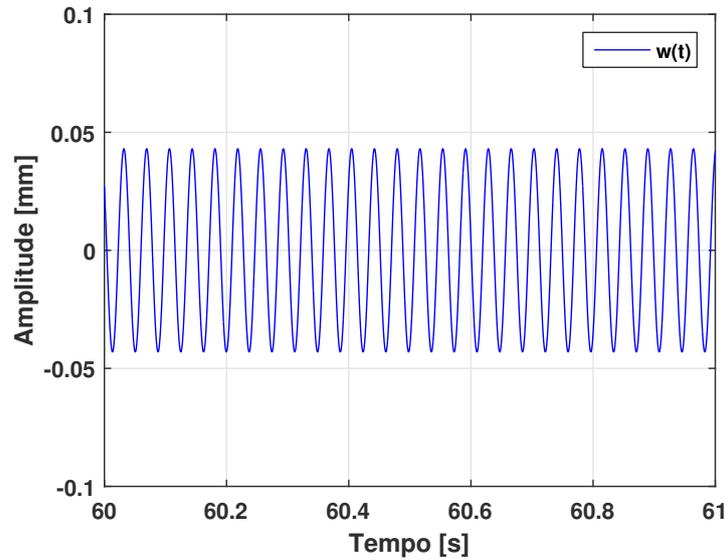


Figura 9.35: Zoom na resposta do grau de liberdade $w(t)$.

Para que amplitudes verdadeira fossem visualizadas, um modelo com não linearidades exatas deveria ter sido utilizado. Desta maneira, somente a predição da velocidade crítica é uma informação confiável do modelo. Neste contexto, a velocidade crítica observada é um valor aproximado do exato ponto crítico, pois este último se torna um problema numérico onde a avaliação teria que tender ao infinito sem a ocorrência de variações nas amplitudes máximas do movimento. Portanto, assume-se que com 100s de avaliação e com a pouca variação das amplitudes apresentadas, a estimativa seja adequada.

Em seguida são apresentadas as velocidades críticas para o posicionamento do lastro a $-10mm$ e $-15mm$ do eixo elástico

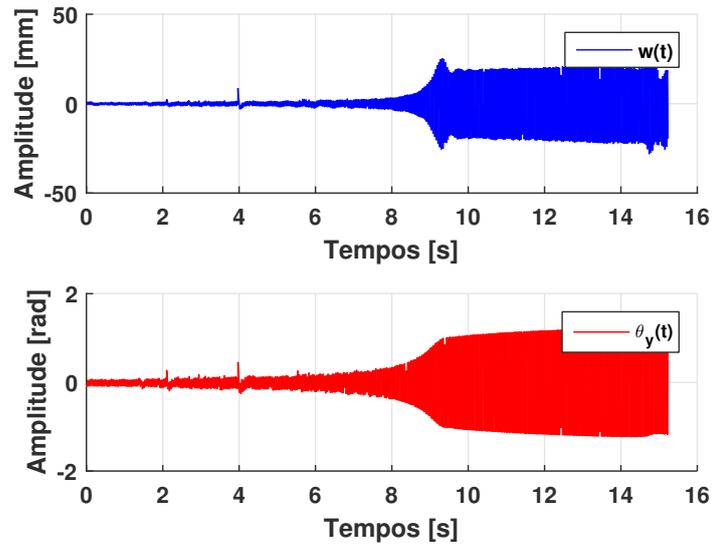


Figura 9.36: Resposta transiente da *plate like wing* a $13,45\text{m/s}$ com lastro a 10mm do eixo elástico.

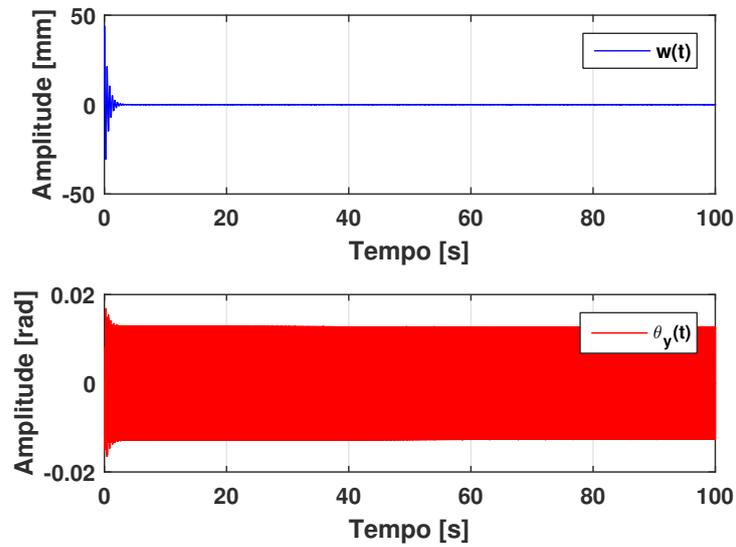


Figura 9.37: Resposta transiente computacional da *plate like wing* a $12,81\text{m/s}$ com lastro a 10mm do eixo elástico.

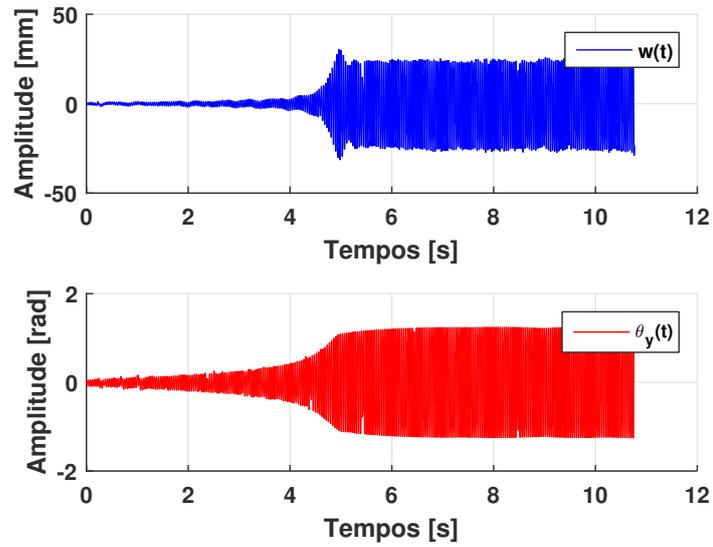


Figura 9.38: Resposta transiente da *plate like wing* a $15,89m/s$ com lastro a $15mm$ do eixo elástico.

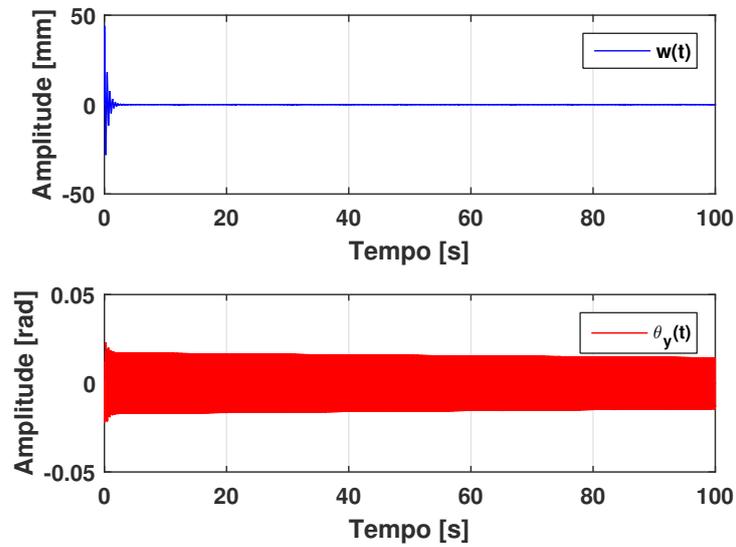


Figura 9.39: Resposta transiente computacional da *plate like wing* a $15,303m/s$ com lastro a $15mm$ do eixo elástico.

Estes resultados mostram que o modelo de carregamento aerodinâmico desenvolvido com a Teoria das Faixas permite retratar o ponto de instabilidade aeroelástica do sistema. Em seguida, o modelo computacional da *sandwich plate like wing* é avaliado com o experimento.

9.2.2 Análise do sistema aeroviscoelástico

Agora, a *plate like wing* será tratada com as camadas de material viscoelástico e restrigente para formar a *sandwich plate like wing* e ser comparada com os resultados experimentais. As condições climáticas da avaliação foram, $T = 25^{\circ}C$, o que resultou numa densidade do ar, $\rho_{ar} = 1,1115kg/m^3$. Para esta temperatura, as propriedades do material viscoelástico podem ser consultadas da Tabela 3.1.

A Fig.(9.40) mostra o sinal medido da *sandwich plate like wing* com lastro posicionado a $-5mm$ do eixo elástico e submetida a um escoamento de $\approx 30m/s$.

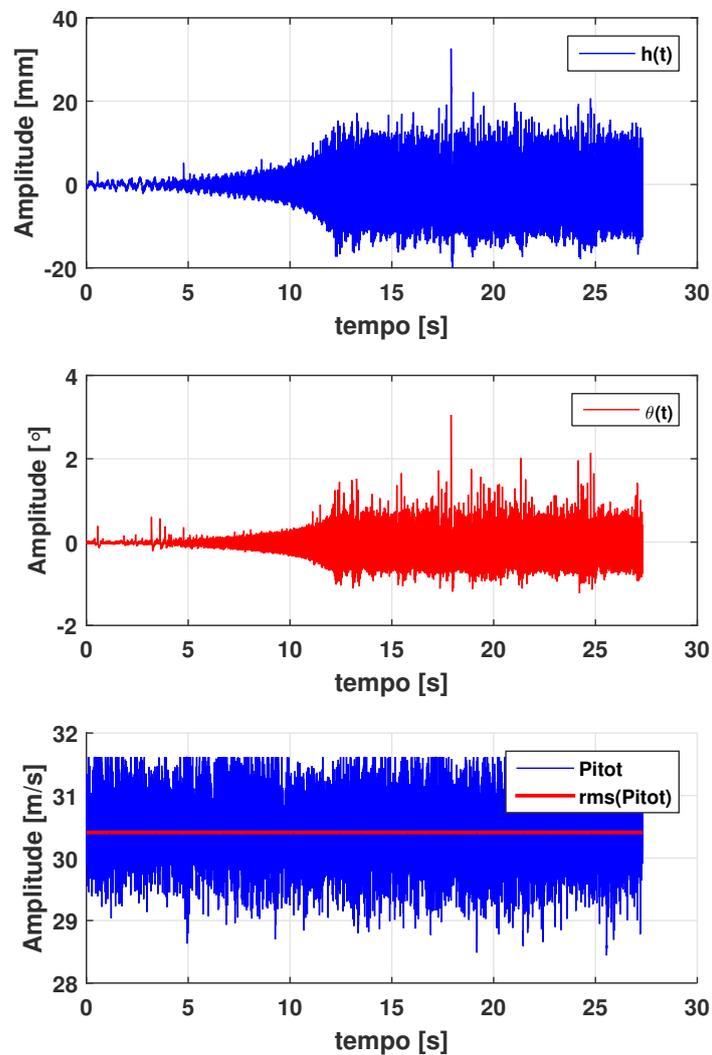
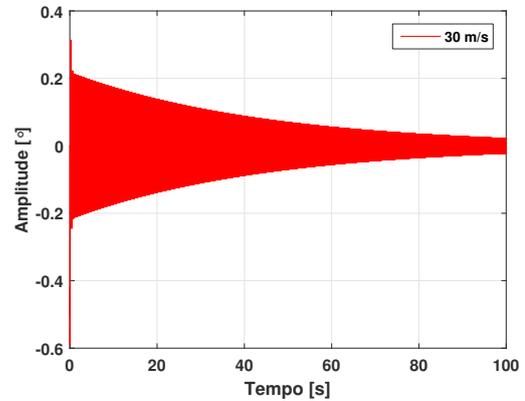
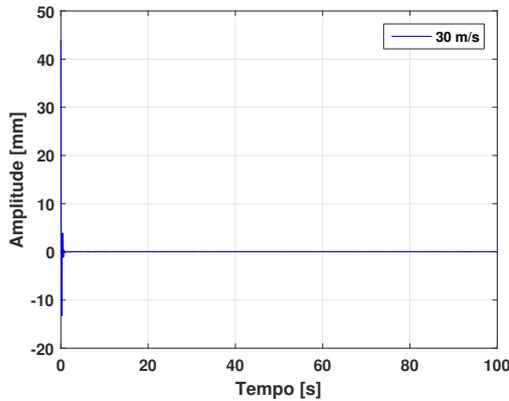


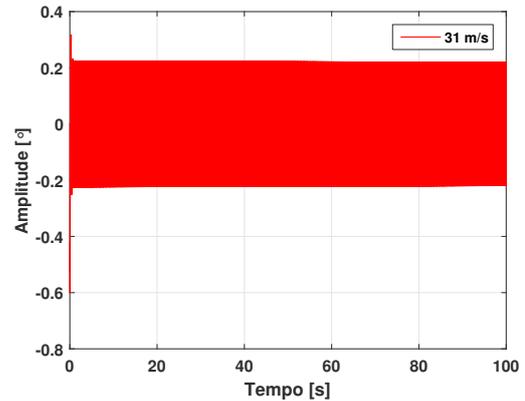
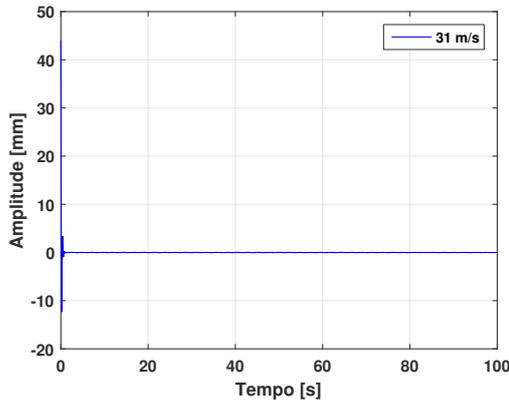
Figura 9.40: Resposta transiente da *sandwich plate like wing* a $30,4m/s$ com lastro a $-5mm$ do eixo elástico.

Medições com o lastro posicionado $-10mm$ e $-15mm$ não foram realizadas pois ultra-

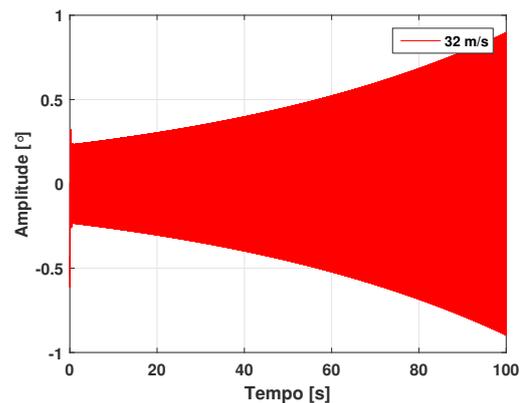
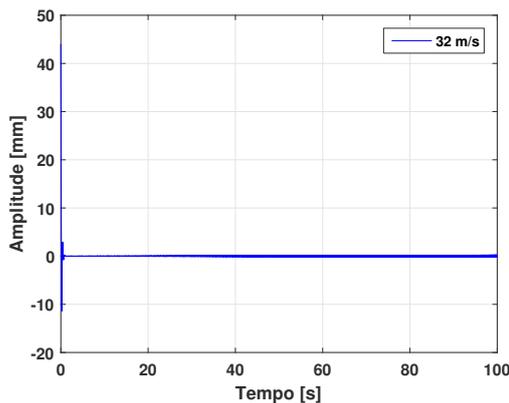
passam o limite do túnel. Em seguida, a resposta do modelo computacional é mostrada para velocidades de pré-, *flutter* e pós-*flutter*.



(a) $h(t)$, pré-*flutter* - Fórmula de Recorrência. (b) $\theta(t)$, pré-*flutter* - Fórmula de Recorrência.



(c) $h(t)$, *flutter* - Fórmula de Recorrência. (d) $\theta(t)$, *flutter* - Fórmula de Recorrência.



(e) $h(t)$, pós-*flutter* - Fórmula de Recorrência. (f) $h(t)$, pós-*flutter* - Fórmula de Recorrência.

Figura 9.41: Resposta do modelo computacional da *sandwich plate like wing* para velocidades pré-, *flutter* e pós-*flutter*.

Percebe-se uma boa correlação entre o modelo e o experimento, com apenas $\approx 0,6\text{m/s}$ de diferença. Como esperado a velocidade crítica aumentou consideravelmente, em relação à *plate like wing*, devido principalmente ao grande aumento de rigidez e também

devido à presença do amortecimento viscoelástico. Entretanto, quantificar a participação do amortecimento viscoelástico neste aumento da velocidade crítica se mostrou ser uma tarefa matematicamente ainda inviável e nenhuma solução foi criada. Isto porquê é muito complicado separar o amortecimento aerodinâmico do viscoelástico.

Pensando nesta dinâmica, poder-se-ia dizer que antes da velocidade crítica, o amortecimento viscoelástico e o aerodinâmico trabalham de maneira conjunta dissipando energia do movimento da asa. Entretanto, sabe-se que a partir de uma dada velocidade, o amortecimento aerodinâmico atinge um limite máximo e começa a diminuir. Contudo, o amortecimento viscoelástico independe da velocidade e, portanto, seu comportamento dinâmico mantêm-se baseado na frequência de vibração da estrutura, bem como do deslocamento. Continuando, o amortecimento aerodinâmico irá diminuir até se tornar igual a zero, ponto onde normalmente, se não houvesse amortecimento viscoelástico, definiria-se a velocidade crítica. Assim, espera-se que haja amortecimento aerodinâmico negativo que somado ao viscoelástico, torne o amortecimento total da estrutura igual a zero. Esta diferença implicaria em um aumento da velocidade crítica, podendo ser relativizado com a *plate like wing*.

Entretanto, a separação destes dois amortecimentos se mostrou uma tarefa muito complicada, uma que fez que as forças dissipativas aerodinâmicas e viscoelásticas são ambas dependentes do deslocamento e, portanto, sua visualização em respostas harmônicas defasadas do deslocamento. Outra tentativa foi de calcular o fator de amortecimento pelo decremento logarítmico, mas essa abordagem é capaz de fornecer o amortecimento geral do sistema. Uma abordagem no domínio modal, resultaria também no mesmo problema de separação dos dois amortecimentos.

CAPÍTULO X

Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros

Este trabalho marca o fim do ciclo da pós-graduação do aluno André Garcia Cunha Filho, engenheiro mecânico e mestre em engenharia mecânica pela Universidade Federal de Uberlândia - UFU com a parceria com o Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA. Esta parceria nasceu há seis anos atrás a partir de uma ideia de unir os conhecimentos sobre material viscoelástico, uma especialidade do Laboratório de Mecânica de Estruturas da UFU, com os conceitos de aeroelasticidade intensamente pesquisados no Laboratório de Estruturas do ITA sob a coordenação do Professor Maurício Vicente Donadon.

Assim, os trabalhos iniciaram com o projeto de mestrado em que painéis aeronáuticos híbridos tratados superficialmente com uma camada de material viscoelástico e restringida por uma terceira camada elástica foram estudados num regime supersônico de escoamento. Nestes trabalhos, somente modelos no domínio da frequência foram desenvolvidos. Disso, surgiu a curiosidade de investigar os fenômenos aeroviscoelásticos no domínio do tempo. Desta maneira, um projeto de doutorado foi elaborado com uma série de objetivos principais:

- 1 criar uma nova estratégia de redução de modelos em elementos finitos bem adaptada para sistemas aeroviscoelásticos;
- 2 desenvolver um modelo para representar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos no domínio do tempo;
- 3 criar um modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário para regimes subsônicos de escoamento para representação do comportamento aeroelástico de uma asa tipo viga modelada segundo a Teoria de Euler-Bernoulli;
- 4 Validação experimental em túnel de vento dos modelos aeroviscoelásticos desenvolvidos.

Além destes, um último trabalho não previsto no plano de tese foi realizado. O desenvolvimento de um modelo não linear de uma seção típica contendo elementos discretos de rigidez viscoelástica. Os trabalhos foram realizados no campus da UFU, onde basicamente toda a parte de modelagem computacional foi realizada e no campus do ITA, onde os experimentos em túnel vento foram conduzidos.

Para sintetizar de forma mais organizada todo o conteúdo gerado neste trabalho, as conclusões serão organizada por capítulo.

10.1 Modelagem do Comportamento Dinâmico de Materiais Viscoelásticos nos Domínios do Tempo e da Frequência

O desenvolvimento de modelos em elementos finitos de estruturas sanduíches com núcleo viscoelástico sempre é uma tarefa complicada. Entretanto, modelos no domínio da frequência são mais simples e fáceis de serem implementados computacionalmente, quando comparados com modelos no domínio do tempo. Várias são as razões que explicam esta maior dificuldade, a começa pela fundamentação teórica envolvida. No caso dos materiais viscoelásticos, o modelo de derivadas fracionárias foi implementado por ser conceitualmente mais correto do ponto de vista matemático e físico por considerar a causalidade presente no comportamento dinâmico do material viscoelástico. Inicialmente, isto se mostrou uma barreira a ser quebrada por se tratar de um tema extremamente novo, de uma matemática muito complexa e por envolver conceito físicos também novos e nada intuitivos, como por exemplo a causalidade e sua representação matemática.

Apesar de que o laboratório LMEst à época já tinha um breve conhecimento sobre modelos viscoelásticos com derivadas fracionárias, nada ainda havia sido pesquisado sobre leis constitutivas tridimensionais. O que se conhecia até então era somente o modelo para estados uniaxiais de tensão proposto por Galúcio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004). Diante desse cenário e devido às inúmeras suposições feitas pela autora, foi tomada a decisão de desenvolver o modelo proposto por Schmidt e Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001; SCHMIDT; GAUL, 2002) cuja lei constitutiva utiliza é tridimensional e portanto, é um modelo completo. Não se tinha nenhuma noção da complexidade e dos custos computacionais envolvidos nesta abordagem, até que quando implementada foi constatada a inviabilidade de utilizá-la em problemas aeroviscoelásticos.

Assim, o que era visto como uma solução se tornou um enorme desafio, uma vez que o modelo proposto por Galúcio (GALUCIO; DEU; OHAYON, 2004) não era uma opção, já que o mesmo não era aplicável para o caso de placas. Isso serviu de motivação para intensificar as pesquisas sobre o modelo de Schmidt e Gaul, pois ao longo do desenvolvimento deste, foi vislumbrada uma repetição dos termos que definem o campo de tensão não local. A partir da curiosidade de mostrar essa repetição percebeu-se que a mesma

elimina a auto-dependência da tensão permitindo que a mesma seja descrita somente em termos do histórico de deslocamentos. Surgiu assim a Fórmula de Recorrência, uma importante contribuição com um enorme potencial para expandir ainda mais as aplicações com materiais viscoelástico tornando-as cada vez mais complexas.

Além disso, a Fórmula de Recorrência abre portas para o estudo em outras aplicações que não somente meios viscoelásticos. Através dela, acredita-se que várias outras formas de aproximação de derivadas fracionárias possam ser descritas por meio de uma recorrência, o que seria um enorme campo de pesquisa dadas as inúmeras técnicas numéricas de aproximação.

10.2 Modelo Matemático de Placas Sanduíche

Após desenvolvido, o modelo de derivadas fracionária com a Fórmula de Recorrência foi aplicado ao modelo de placa sanduíche, viabilizando o estudo de *flutter* de painéis aeronáuticos. Desta maneira, uma primeira avaliação foi realizada logo de início, comparar o modelo do Módulo Complexo com o modelo no domínio do tempo, justamente pelas afirmações feitas por Bagley e Torvick sobre a ausência de causalidade no Módulo Complexo. De fato, uma importante diferença foi observada tanto nos valores de frequência natural obtidos, quanto na quantidade de amortecimento gerado por cada modelo. Viu-se que o modelo do Módulo Complexo apresentou uma maior quantidade de amortecimento, e valores de frequência natural inferiores.

Em seguida, utilizando os dois modelos para criar dois sistemas aeroviscoelásticos fisicamente iguais, mas conceitualmente distintos, a comparação das velocidades críticas foi feita. Os resultados mostraram que o modelo do módulo complexo, apesar de apresentar uma menor diferença entre a primeira e segunda frequência natural (frequências responsáveis pelo *flutter*), resultou em uma velocidade crítica maior, o que é um resultado contraditório. Entretanto, a quantidade de amortecimento gerado pelo módulo complexo se mostrou mais importante, o que pode ter contribuído para o resultado final. Além disso, este fato é um indicador de que o amortecimento viscoelástico pode ter um papel importante nas características do *flutter* de estruturas aeronáuticas. Porém, para que isso seja confirmado, mais estudos seriam necessários, principalmente um estudo experimental comparando os dois modelos.

Ainda neste capítulo é mostrado o estudo da criação de uma nova estratégia de redução de modelos de elementos finitos para sistemas aeroviscoelásticos. Um artigo foi publicado na revista *Mechanical Systems and Signal Processing* (MSSP) (FILHO et al., 2017). Neste trabalho, uma base de redução modal criada iterativamente a partir de resíduos de forças estáticas e dinâmicas é proposta. Ela foi comparada com outras abordagens adaptadas para sistemas com a presença de amortecimento dependente frequência. Um

extenso trabalho mostrando desde a condensação de sistemas simples como painéis sanduíches aeronáuticos, até sistemas complexos como parte da fuselagem de uma aeronave foi realizado obtendo resultados excelentes.

Foi percebido que sistemas aeroviscoelásticos, devido à presença de acoplamento fluido-estrutura, sistemas de dinâmica de rotores e sistemas multi-físicos com a presença de elementos piezelétricos, apresentam todos uma mesma estrutura algébrica, ou seja, todos são apresentados problemas de autovalor complexos, polinomiais não auto-adjuntos. Ter o conhecimento desta característica tornou possível a criação da base intitulada no artigo de “*Iterative Enriched Ritz Mode Basis*” - [T_{IERM}]. Desta maneira, a abordagem não se limita somente a sistemas aeroviscoelásticos, mas também para os outros casos citados.

10.3 Seção Típica Não Linear

Apesar de não estar previsto no plano de tese, este foi um dos principais estudos desta tese, pois gerou informações importantes sobre o comportamento não linear de sistemas aero/aeroviscoelásticos que até então eram desconhecidos. Isso com certeza servirá como um importante “*know-how*” para pesquisas futuras a serem realizadas no LMEst.

A ideia de se criar um modelo não linear no domínio do tempo, surgiu da curiosidade de entender melhor como o amortecimento viscoelástico influencia o comportamento aeroviscoelástico de estruturas aeronáuticas. Dada sua simplicidade de criação e a facilidade de realizar experimentos devido à existência de uma bancada experimental operacional no ITA, decidiu-se estudar uma seção típica.

Além disso, foi necessário criar modelos matemáticos de elementos viscoelásticos de rigidez discretos segundo as possibilidades de aplicação destes no PAPA (“*Pitch and Plunge Apparatus*”). Este modelo exigiram a reinterpretação da teoria fracionária desenvolvida para leis constitutivas tridimensionais, para casos unidimensionais, como alongamento puro e torção pura.

Um modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário foi criado a partir da teoria de Wagner, onde uma nova formulação da equação do movimento foi proposta. Esta nova ideia permitiu não somente um processo direto de integração da equação do movimento para obtenção da resposta transiente, mas também possibilitou reduzir pela metade a quantidade de graus de liberdade do problema. Do ponto de vista de uma seção típica, onde no máximo 5 graus de liberdade formam o problema, não é um fator relevante. Porém, como a Teoria das Faixas é uma extrapolação do caso da seção típica para asas tridimensionais aplicada em elementos finitos, esta se mostrou é uma alternativa inteligente.

Os modelos criados se mostraram bastante coerentes com os resultados experimentais, tanto na predição da velocidade crítica, quanto nas amplitudes de ciclo limite apresenta-

das, para os casos aeroelásticos e aeroviscoelástico.

No que se refere ao caso aeroviscoelástico, somente o caso com elemento viscoelástico de rigidez em *plunge* foi avaliado. Os resultados permitiram ver como o aumento de rigidez aportado pelo elemento viscoelástico modificou a velocidade crítica. Entretanto, nenhuma conclusão foi tomada relação ao real impacto do amortecimento viscoelástico na velocidade de *flutter*. Contudo, foi possível perceber como o amortecimento estrutural introduzido reduziu as amplitudes de vibração do sistema de maneira importante, sendo este um efeito da viscoelasticidade no sistema aeroelástico. Foi visto através dos retratos de fase, que apesar do aumento das velocidades da estrutura, $\{\dot{q}\}$, devido ao aumento da velocidade do escoamento, as amplitudes do movimento praticamente não alteraram.

Outro ponto interessante foi a constatação de que o movimento em *plunge* apresentou um comportamento dinâmico com um grau de não linearidade muito baixo para o caso aeroelástico, e praticamente zero não linearidade para o caso aeroviscoelástico. Assim, concluiu-se que o grau de liberdade de *pitch* é o grande responsável por o reger comportamento não linear da seção típica. Além disso, ficou clara a sensibilidade do sistema ao variar as propriedades da rigidez em *pitch*, em que pequenas alterações aumentavam de maneira mais importante a velocidade crítica, quando comparada com alterações feitas na rigidez em *plunge*.

Após as constatações feitas sobre o protagonismo do modo de *pitch* sobre a dinâmica do sistemas aero/aeroviscoelástico, um estudo paramétrico sobre os efeitos do aumento da rigidez e amortecimento viscoelástico sobre o sistema em ciclo limite foi realizado. Nesta análise, foi variada a área perimetral do elemento de rigidez viscoelástico pelo aumento do ângulo Θ , ver Eq.(9.1). Notou-se que as amplitudes do ciclo limite variam de forma não linear com o aumento do perímetro. Viu-se que com o grande aumento da velocidade crítica nestes casos, o sistema praticamente não apresentou graus de caoticidade, uma vez que somente em velocidades extremamente altas que induziram amplitudes e velocidade de movimento da estrutura excessivas, o retrato de fase apresentou movimentos mais complexos.

10.4 Teoria das Faixas Aplicada ao MEF

Como último objetivo, este se mostrou o mais desafiador por exigir a junção de duas teorias no domínio do tempo complicadas, o modelo de estruturas sanduíche e o modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário e tudo em um curto espaço de tempo. Além disso, foi necessária a validação experimental do modelo aeroviscoelástica, um trabalho que exigiu a participação de várias pessoas.

A criação do carregamento aerodinâmico não estacionário no domínio do tempo foi feito com base na Teoria de Wagner a partir desta, criou-se o modelo o modelo da Teoria da

Faixas, permitindo seu emprego no modelo de elemento finitos da viga de Euler-Bernoulli e sua correspondente viscoelástica.

Acerca da qualidade dos modelos, foram obtidas velocidades críticas bastante coerentes em relação ao medido experimentalmente. No caso aeroelástico, foram validadas as velocidades críticas para todas as posições de lastro, $-5mm$, $-10mm$ e $-15mm$. Já o modelo aeroviscoelástico, somente uma posição de lastro foi avaliada devido às capacidades de operação do túnel de vento, limitadas a $33 m/s$. Assim, foram obtidas velocidades experimentais de $\approx 30,5 m/s$, enquanto que o modelo computacional da *sandwich plate like wing* predisse uma velocidade crítica de $31 m/s$.

Apesar da coerência apresentada pelos modelos, não foi possível criar uma metodologia capaz de separar os amortecimentos aerodinâmicos e viscoelásticos que permitisse afirmar a real influência deste no aumento da velocidade de *flutter*. Desta maneira, conclui-se que o aumento da velocidade crítica de $\approx 9,5m/s$ para $\approx 31m/s$ para um posicionamento do lastro de $-5mm$ em relação ao eixo elástico, é principalmente devido ao grande aumento da rigidez do sistema viscoelástico em relação à sua contra-parte puramente elástica.

10.5 Trabalhos publicados

Vários trabalhos foram publicados ao longo destes seis anos de pesquisa. São listados abaixo em ordem cronológica somente aqueles publicados em revistas.

- 1 Mechanical Systems and Signal Processing: Flutter suppression of plates using passive constrained viscoelastic layers, (CUNHA-FILHO et al., 2016);
- 2 Aerospace Science and Technology: Flutter suppression of plates subjected to supersonic flow using passive constrained viscoelastic layers and Golla–Hughes–McTavish method, (FILHO; LIMA; DONADON, 2016);
- 3 Composite Structures: Dynamic and aeroelastic behavior of composite plates with multimode resonant shunted piezoceramics in series, (LEÃO et al., 2016);
- 4 Mechanical Systems and Signal Processing: An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime, (FILHO et al., 2017).

Acredita-se que mais três trabalhos possam ainda ser gerados, sendo que um deles sobre o desenvolvimento da Fórmula de Recorrência está em fase de conclusão para submissão.

10.6 Perspectivas de Trabalhos Futuros

Ao longo deste trabalho, vários objetivos foram propostos para o estudo de sistemas aeroelásticos tratados passivamente com materiais viscoelásticos. O trabalho se iniciou a

partir das pesquisas feitas com *flutter* de painel aeronáutico, porém a necessidade era o desenvolvimento do modelo de derivadas fracionárias para representar o comportamento do material viscoelástico no domínio do tempo. Desta maneira, foi necessário desenvolver um modelo de material viscoelástico que nunca havia sido feito no laboratório de Mecânica de Estruturas, que foi a proposta de Schmidt a Gaul (SCHMIDT; GAUL, 2001), a qual possui uma lei constitutiva adaptada para casos no mínimo de estado plano de tensão. Deste trabalho, surgiu a pela Fórmula de Recorrência que deixou várias perguntas a serem respondidas, como por exemplo, quantificar a real diferença apresentada entre ela e o modelo do Módulo Complexo. Para responder este questionamento, somente com a realização de experimentos e ajustes de parâmetros.

Além disso, seria interessante expandir o banco de dados do laboratório no que se refere às propriedades mecânicas de outros tipos de materiais viscoelásticos, pois o material ISD112 não é mais comercializado com este nome.

Mudando de tema, mas ainda sobre o cálculo fracionário, várias portas foram abertas. Como já mencionado no texto, um trabalho sobre a aplicação desta abordagem matemática para determinar do carregamento aerodinâmico não estacionário já está em andamento no laboratório sob a forma de uma iniciação científica. Neste caso, foi realizado um estado da arte sobre o assunto, e os trabalhos de desenvolvimento matemático ainda iniciarão. A partir disso, resolver integrais de convolução por meio do cálculo fracionário será um conhecimento valioso para aplicar em qualquer sistema que ela apareça. A ideia será, uma vez definido o carregamento por meio do cálculo fracionário, adaptar a formulação da seção típica de forma que o mesmo seja integrado a esta e finalmente introduzir elementos viscoelásticos e estudar o comportamento do sistema com dois tipos de funções não locais diferentes. Finalmente, validar experimentalmente os modelos fracionários. Extrapolar o conceito do cálculo fracionário para a Teoria das Faixas.

Uma outra possibilidade de trabalho, ainda sobre o cálculo fracionário, seria aplicar o conceito da recorrência para outras formas de aproximação da derivada fracionária e verificar se a repetição é válida também para estes casos.

Sobre estruturas, trabalhos com modelos não lineares em elementos finitos contendo material viscoelástico agora são possíveis, mesmo para estruturas complexas devido ao desenvolvimento da lei constitutiva tridimensional. Desta maneira seria possível desenvolver modelos de estruturas sanduíches não lineares para o estudo do amortecimento viscoelástico nestas condições. No caso da aeroelastocidade, criar modelos de *sandwich plate like wing* com não linearidades geométricas exatas para avaliação da resposta no tempo em condição de pré-, *flutter* e pós-*flutter*.

Uma lista que resume os principais tópicos a serem trabalhados no futuro advindos desta tese é apresentada:

- 1 Trabalho experimental para caracterização e comparação dos modelos de derivada

fracionária segundo a Fórmula da Recorrência;

- 2 Trabalho experimental para caracterização de outros materiais viscoelásticos;
- 3 Desenvolver e aplicar um modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário utilizando o cálculo fracionário para uma seção típica;
- 4 Desenvolver e aplicar um modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário utilizando o cálculo fracionário para a Teoria das Faixas;
- 5 Validar experimentalmente os modelos de seção típica descritos em termos do cálculo fracionário;
- 6 Extrapolar o conceito da Fórmula de Recorrência para outras formas de aproximação de derivadas fracionárias;
- 7 Modelos não lineares em elementos finitos para o estudo da aeroelasticidade de asas finas com grande alongamento sujeitas a grandes deslocamentos e rotações;

REFERÊNCIAS

- ASHLEY, H.; ZARTARIAN, G. Piston theory - a new aerodynamic tool for the aeroelastician. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 12, p. 1109–1118, 1956.
- BAGLEY, R. L.; CALICO, R. Fractional order state equations for the control of viscoelasticallydamped structures. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 14, n. 2, p. 304–311, 1991.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. A generalized derivative model for an elastomer damper. **Shock and vibration Bull**, v. 49, 10 1979.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, SOR, v. 27, n. 3, p. 201–210, 1983.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, SOR, v. 30, n. 1, p. 133–155, 1986.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. Fractional calculus- a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. **AIAA Journal**(ISSN 0001-1452), v. 21, p. 741–748, 1983.
- BALMES, E. Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 381–394, 1996.
- BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. [S.l.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. **Principles of aeroelasticity**. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- BOBILLOT, A.; BALMÈS, E. Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 43, p. 1–9, 2002.
- BOLOGNA, E.; LUCA, D.; ZINGALES, M. A state-space approach to dynamic stability of fractional-order systems: the extended routh-hurwitz theorem. In: **AIMETA2017**. [S.l.: s.n.], 2017.
- BUENO, D. D. **A Contribution to Aeroelasticity Using Lyapunov's Theory**. type, 2014.

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity - An Introduction**. [S.l.: s.n.], 1982.

CORTES, F.; ELEJABARRIETA, M. J. Finite element formulations for transient dynamic analysis in structural systems with viscoelastic treatments containing fractional derivative models. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 69, n. 10, p. 2173–2195, 2007.

CUNHA-FILHO, A.; LIMA, A. D.; DONADON, M.; LEÃO, L. Flutter suppression of plates using passive constrained viscoelastic layers. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 79, p. 99–111, 2016.

DARDEL, M.; BAKHTIARI-NEJAD, F. A reduced order of complete aeroelastic model for limit cycle oscillations. **Aerospace science and technology**, Elsevier, v. 14, n. 2, p. 95–105, 2010.

de Lima, A. M. G. **Modélisation et Optimisation Robuste de Systèmes Mécaniques en Présence d’Amortissement Viscoélastique**. Dissertation, 2007.

DOWELL, E. H. **Aeroelasticity of Plates and Shells**. [S.l.: s.n.], 1975.

DOWELL, E. H.; THOMAS, J. P.; HALL, K. C. Transonic limit cycle oscillation analysis using reduced order aerodynamic models. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 17–27, 2004.

FARIA, A. W. Modélisation par éléments finis de plaques composites: contribution a l’étude de l’amortissement, endommagement et prise en compte d’incertitudes (phd thesis). uberlândia: Universidade federal de uberlândia. **Portuguese**.[\[Links\]](#), 2010.

FILHO, A. C.; LIMA, A. de; DONADON, M. Flutter suppression of plates subjected to supersonic flow using passive constrained viscoelastic layers and golla–hughes–mctavish method. **Aerospace Science and Technology**, v. 52, p. 70–80, 2016.

FILHO, A. G. C. **A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

FILHO, A. G. C.; BRIEND, Y. P. J.; LIMA, A. M. G. de; DONADON, M. V. An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime. **Mechanical System and Signal Processing**, v. 104, p. 575–588, 2017.

FLÜGGE, W. **Viscoelasticity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1975.

GALUCIO, A. C.; DEU, J. F.; OHAYON, R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. **Computational Mechanics**, Springer, v. 33, n. 4, p. 282–291, 2004.

GOLLA, D. F.; HUGHES, P. C. Dynamics of viscoelastic structures—a time-domain, finite element formulation. **Journal of applied mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 52, n. 4, p. 897–906, 1985.

- GRÜNWARD, A. K. Über “begrenzte” derivationen und deren anwendung. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v. 12, p. 441–480, 1867.
- HANSEN, D. S. **Frequency-Dependent Material Damping Using Augmenting Thermodynamic Fields (ATF) with Fractional Time Derivatives**. [S.l.], 1990.
- III, J. B. M. **Fractional Calculus Formulation of the Quasi-Static Viscoelastic Problem**. [S.l.], 1989.
- L, R. B.; TORVIK, P. J. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. **AIAA J**, v. 23, n. 6, p. 918–925, 1985.
- LEÃO, L.; LIMA, A. D.; DONADON, M.; CUNHA-FILHO, A. Dynamic and aeroelastic behavior of composite plates with multimode resonant shunted piezoceramics in series. **Composite Structures**, Elsevier, v. 153, p. 815–824, 2016.
- MAINARDI, F. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models**. [S.l.]: World Scientific, 2010.
- MAKRIS, N. Three-dimensional constitutive viscoelastic laws with fractional order time derivatives. **Journal of Rheology**, SOR, v. 41, n. 5, p. 1007–1020, 1997.
- MARTINS, P. C.; GUIMARÃES, T. A.; PEREIRA, D. d. A.; MARQUES, F. D.; RADE, D. A. Numerical and experimental investigation of aeroviscoelastic systems. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 85, p. 680–697, 2017.
- MCTAVISH, D. J.; HUGHES, P. C. Modeling of linear viscoelastic space structures. 1993.
- MEGSON, T. H. G. **Introduction to Aircraft Structural Analysis**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1999.
- MOON, S. H.; KIM, S. J. Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method. **AIAA journal**, v. 39, n. 11, p. 2042–2050, 2001.
- NASHIF, A. D.; JONES, D. I.; HENDERSON, J. P. **Vibration damping**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1985.
- NETO, O. S.; DUARTE, R.; SILVA, R. Experimental study of aeroelastic response of a flexible high aspect ratio wing with passive sma atuators. In: **31rd Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences**. [S.l.: s.n.], 2018.
- NJUGUNA, J. Flutter prediction, suppression and control in aircraft composite wings as a design prerequisite: A survey. **Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for the Control of Structures**, Wiley Online Library, v. 14, n. 5, p. 715–758, 2007.
- O’NEIL, T.; STRGANAC, T. W. Aeroelastic response of a rigid wing supported by nonlinear springs. **Journal of Aircraft**, [New York, etc.] American Institute of Aeronautics and Astronautics., v. 35, n. 4, p. 616–622, 1998.
- OUISSE, M. **Mécanique Vibratoire**. [S.l.: s.n.], 2014.

- OUISSSE, M.; SADOULET-REBOUL, E. Efficiency comparison of cms vibroacoustic formulations for uncertain damped problems. **Proceedings of the 29th IMAC**, Springer, v. 9, p. 161–175, 2011.
- REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. [S.l.]: CRC press, 2004.
- REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. [S.l.]: OUP Oxford, 2005.
- REDDY, J. N.; MAHAFFEY, P. Generalized beam theories accounting for von kármán nonlinear strains with application to buckling. 2013.
- RICHARD, H. **Fractional calculus: an introduction for physicists**. [S.l.]: World Scientific, 2014.
- ROULEAU, L.; DEU, J.-F.; LEGAY, A. A comparison of model reduction techniques based on modal projection for structures with frequency-dependent damping. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 90, p. 110–125, 2017.
- RYDER, J. K. **Modelling and Analysis of Kernel Function and Development of Equivalent Theodorsen Function for Three-Dimensional Aeroelastic Analysis**. [S.l.], 1990.
- SALES, T.; MARQUES, F. D.; PEREIRA, D. A.; RADE, D. A. Dynamic assessment of nonlinear typical section aeroviscoelastic systems using fractional derivative-based viscoelastic model. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 423, p. 230–245, 2018.
- SALES, T. d. P.; PEREIRA, D. A.; MARQUES, F. D.; RADE, D. A. Modeling and dynamic characterization of nonlinear non-smooth aeroviscoelastic systems. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 116, p. 900–915, 2019.
- SANDER, G.; BON, C.; GERADIN, M. Finite element analysis of supersonic panel flutter. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 7, n. 3, p. 379–394, 1973.
- SCHMIDT, A.; GAUL, L. FE implementation of viscoelastic constitutive stress-strain relations involving fractional time derivatives. **Constitutive models for rubber**, v. 2, p. 79–92, 2001.
- SCHMIDT, A.; GAUL, L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. **Nonlinear Dynamics**, v. 29, p. 37–55, 2002.
- SHIN, W.-H.; OH, I.-K.; HAN, J.-H.; LEE, I. Aeroelastic characteristics of cylindrical hybrid composite panels with viscoelastic damping treatments. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 296, n. 1-2, p. 99–116, 2006.
- SILVA, G. **SISTEMAS DE CONTROLE ATIVO E PASSIVO PARA SUPRESSÃO DE FLUTTER DE UMA SEÇÃO TÍPICA**. Dissertação (mathesis), 2016.

SILVA, G. C.; SILVESTRE, F. J.; DONADON, M. V.; SANTOS, O. S.; NETO, A. B. G.; SILVA, R. G. A. da; VERSIANI, T. d. S. S.; GONZALEZ, P. J.; BERTOLIN, R. M. Active and passive control for acceleration reduction of an aeroelastic typical wing section. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 24, n. 13, p. 2673–2687, 2018.

SILVESTRE, F. J. **Methodology for Modelling the Dynamics of Flexible, High-Aspect-Ratio Aircraft in the Time Domain for Aeroservoelastic Investigations**. Tese (Doutorado) — Mensch-und-Buch-Verlag, 2012.

SWINNEY, D. V. **A Fractional Calculus Model of Aeroelasticity**. [S.l.], 1989.

THEODORSEN, T.; MUTCHLER, W. **General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter**. [S.l.]: National Advisory Committee for Aeronautics Washington, DC, USA, 1935.

TIMOSHENKO, S.; GERE, J. *Mecânica dos sólidos*, v. 1. **Rio de Janeiro: LTC**, v. 1, 1994.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. [S.l.]: McGraw-hill, 1959.

TRINDADE, M. A.; BENJEDOU, A.; OHAYON, R. Finite element modelling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams - part i: Formulation. 2001.

VEDENEEV, V. V.; GUVERNYUK, S. V.; KOLOTNIKOV, M. E. Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow. 2009.

VERSIANI, T. d. S. S.; SILVESTRE, F. J.; NETO, A. B. G.; RADE, D. A.; SILVA, R. G. A. da; DONADON, M. V.; BERTOLIN, R. M.; SILVA, G. C. Gust load alleviation in a flexible smart idealized wing. **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, v. 86, p. 762–774, 2019.

VIANA, F. A. C.; STEFFEN, J. V. **SIMPLE Optimization ToolBox - Users Guide**. 3th. ed. [S.l.: s.n.], 2007. [Http://www.geocities.com/fchegury/](http://www.geocities.com/fchegury/).

WAGNER, H. Über die entstehung des dynamischen auftriebes von tragflügeln. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Wiley Online Library, v. 5, n. 1, p. 17–35, 1925.

WALKER, R. N. **Quadratic Optimal Control Theory for Viscoelastically Damped Structures Using a Fractional Derivative Viscoelasticity Model**. [S.l.], 1988.

WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. **Introduction to aircraft aeroelasticity and loads**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. v. 20.

ZHOU, R.; LAI, Z.; XUE, D. Y.; HUANG, J.-K.; MEI, C. Suppression of nonlinear panel flutter with piezoelectric actuators using finite element method. **AIAA journal**, v. 33, n. 6, p. 1098–1105, 1995.

Apêndices

APÊNDICE A

A.1 Matrizes Aerodinâmicas - domínio do tempo

Este apêndice complementa a formulação do carregamento aerodinâmico não-estacionário no domínio do tempo utilizando a aproximação de Jones para a Função de Wagner. São apresentadas as matrizes relacionadas aos modos de translação e torção velocidades e aceleração, a_1, a_2, a_3 bem como a matriz a_4 que relaciona o atraso da variação de "downwash" com a sustentação. São mostradas as matrizes para o caso com dois gdl (seção típica) para simplificar a escrita.

Outro ponto importante é que as matrizes a_i e b_i não variam em relação à envergadura, uma vez que a asa não possui perfil variável nem enflechamento.

Estas matrizes podem ainda serem separadas nos efeitos não-circulatório e circulatório da seguinte maneira:

$$a_i = a_i^{(nc)} + a_i^{(c)} \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.1})$$

As matrizes relativas à parcela não-circulatória são:

$$a_1^{(nc)} = \begin{bmatrix} -\pi b^2 \rho & \pi b^3 \rho a \\ \pi b^3 \rho a & -\pi b^4 \rho \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2a})$$

$$a_2^{(nc)} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi b^2 \rho V \\ \pi b^2 \rho V & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2b})$$

$$a_3^{(nc)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi b^2 \rho V^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2c})$$

$$a_4^{(nc)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2d})$$

e matrizes relativas à parcela circulatória são:

$$a_1^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3a})$$

$$a_2^{(c)} = \begin{bmatrix} -2\pi\rho Vb & -2\pi\rho Vb^2\left(\frac{1}{2}-a\right) \\ -\pi b^2\rho V + 2b^2\left(a+\frac{1}{2}\right)\pi\rho V & \left[-\pi b^3\rho + 2b^3\left(a+\frac{1}{2}\right)\pi\rho\right]V\left(\frac{1}{2}-a\right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3b})$$

$$a_3^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi\rho V^2b \\ 0 & -\pi b^2\rho V^2 + 2b^2\left(a+\frac{1}{2}\right)\pi\rho V^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3c})$$

$$a_4^{(c)} = \begin{bmatrix} -2\pi\rho Vb & -2\pi\rho Vb \\ 2b^2\left(a+\frac{1}{2}\right)\pi\rho V & 2b^2\left(a+\frac{1}{2}\right)\pi\rho V \end{bmatrix} \quad (\text{A.3d})$$

Em seguida, as matrizes relativas à taxa de variação dos estados de atraso aerodinâ-

mico com os graus de liberdade do perfil são apresentadas

$$b_1 = \begin{bmatrix} -0.165 & -0.165 b (1/2 - a) \\ -0.335 & -0.335 b (1/2 - a) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4a})$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.165 V \\ 0 & -0.335 V \end{bmatrix} \quad (\text{A.4b})$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4c})$$

$$b_4 = \begin{bmatrix} -0.041 \frac{V}{b} & 0 \\ 0 & -0.320 \frac{V}{b} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4d})$$

A.2 Lei de Hooke Generalizada

A partir da Lei de Hooke generalizada, é possível escrever os campos de tensão e deformação para uma material puramente linear, veja:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A.5a})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A.5b})$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, que é módulo de cisalhamento do material, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ são as conhecidas constantes de Lamé e ν é o coeficiente de Poisson. O termo, $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$, é chamado de Delta de Kronecker e, segundo a convenção de notação indicial, índices repetidos fazer referência à soma. Tensões e deformações no espaço são acoplados pelo efeito Poisson do material, que garante sua continuidade. Tome como exemplo um estado plano de tensões que induz um estado triplo de deformação. Portanto, ao expandir as Eqs. é possível ver como as tensões e deformações são acopladas devido

ao efeito Poisson. Expandindo a Eq.(A.5a) são obtidas as seguinte relações de tensão:

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (\text{A.6a})$$

$$\sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (\text{A.6b})$$

$$\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (\text{A.6c})$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = G2\varepsilon_{12} \quad (\text{A.6d})$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = G2\varepsilon_{13} \quad (\text{A.6e})$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = G\varepsilon_{23} \quad (\text{A.6f})$$

Ao expandir a Eq.(A.5b), uma segunda forma de expressar a Lei de Hooke Generalizada é vista:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad (\text{A.7a})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \quad (\text{A.7b})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \quad (\text{A.7c})$$

$$2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{G} \quad (\text{A.7d})$$

$$2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad (\text{A.7e})$$

$$2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \frac{\sigma_{23}}{G} \quad (\text{A.7f})$$

Diante de um estado geral de tensões como este, é necessário que algumas suposições sejam feitas afim de adaptar a teoria para casos como as Teorias de Viga de Euler-Beunoulli e Timoshenko, onde estados uniaxiais de tensão são considerados. O problema é que ao se fazer este tipo de imposição ao estado de tensão, as duas formas de se expressar a Lei de Hooke se tornam incompatíveis justamente devido ao efeito Poisson. Veja por exemplo no caso da Fig.5.1, onde assume-se que há somente alongamento na direção principal da viga. Neste caso tem-se que o campo de deformação toma a seguinte forma:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{22} \quad (\text{A.8a})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} \quad (\text{A.8b})$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{22} \quad (\text{A.8c})$$

Nota-se que mesmo para um estado uniaxial de tensão, um estado triplo de deformação é criado. Portanto, a escolha de um campo de deslocamento unidimensional, como mostrado na Eqs.(5.1b), faz com que uma importante suposição seja feita: a de que o coeficiente de Poisson, ν , valha zero somente para o caso de alongamento e assim zere as deformações ε_{22} e ε_{33} . Após feitas estas imposições e avaliando a Eq.(A.5a), a seguinte tensão na direção, y , é obtida:

$$\sigma_{22} = (\lambda + 2G) \varepsilon_{22} \quad (\text{A.9})$$

desta maneira, $E = \lambda + 2G$. No contexto deste trabalho, a segunda forma de se expressar a Lei de Hooke Generalizada, Eq.(A.5b), é menos propensa a erros, uma vez que o traço do tensor deformação não é exatamente a tensão de alongamento, $Tr(\{\varepsilon\}) \neq \sigma_{22}$.

Finalmente, a matriz constitutiva para o caso de uma viga submetida a um estado uniaxial de tensão e torção pura, terá a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A partir desta matriz, todos os cálculos de energia de deformação elástica serão realizados, tanto para a estrutura quanto para a camada restrigente.

A.3 Definição das funções de forma

O modelo de elementos finitos utilizado neste trabalho faz uso de polinômios Hermíticos em suas funções de forma, obtidas a partir de polinômios interpoladores lineares para as translação e rotação na direção, y . Para a translação na direção, z , é utilizado um polinômio interpolador cúbico. Será feita uma formulação isoparamétrica, permitindo que as integrais sejam realizadas por meio do método da Quadratura de Gaus (BATHE, 2006), veja o esquema:

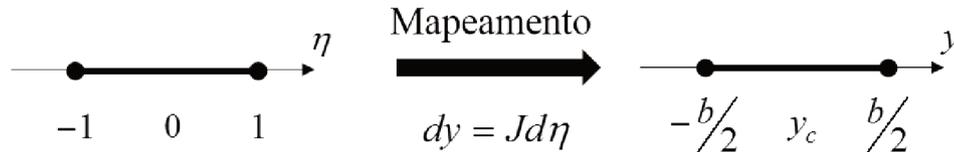


Figura A.1: Esquema de um elemento isoparamétrico e o operador Jacobiano levando das coordenadas locais para globais.

Destá maneira, pode-se descrever um vetor contendo os polinômios interpoladores para

cada grau de liberdade da forma, $\{U(\eta, t)\}$, descrito como segue:

$$\{U(\eta, t)\} = \begin{Bmatrix} v(\eta, t) \\ w(\eta, t) \\ \theta_x(\eta, t) \\ \theta_y(\eta, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0 + a_1\eta \\ a_2 + a_3\eta + a_4\eta^2 + a_5\eta^3 \\ 0 + a_3 + 2a_4\eta + 3a_5\eta^2 \\ a_6 + a_7\eta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

A Eq.(A.11) pode ser reescrita matricialmente da seguinte forma:

$$\{U\}_{\eta,t} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \eta & \eta^2 & \eta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\eta & 3\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{0t} \\ a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \\ a_{4t} \\ a_{5t} \\ a_{6t} \\ a_{7t} \end{Bmatrix} = [P]_{\eta} \{C\}_t = \begin{bmatrix} [P]_v \\ [P]_w \\ [P]_{\theta_x} \\ [P]_{\theta_y} \end{bmatrix} \{C\}_t \quad (\text{A.12})$$

onde, no intuito de facilitar a escrita, as dependências espaciais e temporais serão descritas como índices subscritos a partir daqui, logo vê-se que a dependência temporal está nas constantes, incógnitas do problema. Para determiná-las, é imposta a condição de que sejam feitas aproximações de modo a fornecer os valores dos deslocamentos e rotações nodais do elemento. Para isto, avalia-se a matriz $[P]_{\eta}$ para $\eta = -1$ e $\eta = +1$, veja:

$$\{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} = \begin{bmatrix} [P]_{(\eta=-1)} \\ [P]_{(\eta=+1)} \end{bmatrix} \{C\}_t = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{0t} \\ a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \\ a_{4t} \\ a_{5t} \\ a_{6t} \\ a_{7t} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Isolando o vetor de constantes, $\{C\}_t$, na Eq.(A.13) e o introduzindo na Eq.(A.12) são determinadas as funções de forma para cada um dos graus de liberdade.

$$\{C\}_t = \begin{bmatrix} [P]_{(\eta=-1)} \\ [P]_{(\eta=+1)} \end{bmatrix}^{-1} \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} = [A_{-1}^{+1}] \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} \quad (\text{A.14})$$

$$\{U\}_{\eta,t} = \begin{Bmatrix} v(\eta, t) \\ w(\eta, t) \\ \theta_x(\eta, t) \\ \theta_y(\eta, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P]_v \\ [P]_w \\ [P]_{\theta_x} \\ [P]_{\theta_y} \end{bmatrix} [A_{-1}^{+1}] \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} \quad (\text{A.15})$$

A partir da Eq.(A.15), são definidas as funções de forma para cada GDL, da seguinte forma:

$$\{v\}_{\eta,t} = [P]_v [A_{-1}^{+1}] \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} = [N]_v \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} \quad (\text{A.16a})$$

$$\{w\}_{\eta,t} = [P]_w [A_{-1}^{+1}] \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} = [N]_w \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} \quad (\text{A.16b})$$

$$\{\theta_x\}_{\eta,t} = [P]_{\theta_x} [A_{-1}^{+1}] \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} = [N]_{\theta_x} \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} \quad (\text{A.16c})$$

$$\{\theta_y\}_{\eta,t} = [P]_{\theta_y} [A_{-1}^{+1}] \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} = [N]_{\theta_y} \{\delta\}_{\eta,t}^{(e)} \quad (\text{A.16d})$$

A.4 Operador linear Jacobiano

O processo de formulação isoparamétrica é realizado com base num sistema de referência local, η . Desta maneira, um mapeamento deve ser feito de tal maneira que exista uma transformação linear que leve um sistema de referência local para o sistema global e desta maneira os cálculos possam ser realizados. Esta operação é feita por meio de uma base de transformação linear denominada de Jacobiano, J . No caso da viga, o Jacobiano será um escalar, devido a unidimensionalidade do problema, porém, no caso de uma placa, onde há a existência de duas dimensões, este operado uma uma ordem, $[2 \times 2]$. Será mostrado, como determinar o Jacobiano, bem como realizar o mapeamento que fará a transformação de coordenadas. Para tal, tome a Fig.A.1, onde vê-se que um infinitesimal de comprimento, $dy = Jd\eta$. A determinação do Jacobiano dependerá da geometria do elemento finito e da função de interpolação utilizada para descrever uma coordenada em função da outra. Nesta será utilizada a seguinte função de interpolação:

$$y_\eta = \sum_{i=1}^n N_i y_i = \frac{1 + \eta\eta_i}{n} y_i \quad (\text{A.17})$$

Nesta equação, n faz referência à quantidade de nós do elemento. Desenvolvendo a Eq.(A.17), é obtida a seguinte relação:

$$y_\eta = \frac{1 + \eta\eta_1}{2} y_1 + \frac{1 + \eta\eta_2}{2} y_2 = y_c + \frac{b}{2}\eta \quad (\text{A.18})$$

onde o termo, $y_c = (y_1 + y_2)/2$, é a posição central do elemento referenciado nas coordenadas globais. Desta maneira, é possível derivar a coordenada generalizada, v , em relação a η .

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} J \quad (\text{A.19})$$

Desta relação, pode-se dizer que as derivadas da variável, v , em relação à coordenada global do sistema é dada por:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{2}{b} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (\text{A.20})$$

Desta maneira, o mapeamento mostrado na Fig.A.1 é descrito. Outro ponto importante da utilização da formulação isoparamétrica, bem como do Jacobiano é o surgimento de uma outra matriz de transformação, denominada aqui de matriz de passagem, $[T]$, necessária para corrigir as rotações nodais. Tome como exemplo o elemento um da viga discretizada, onde seus graus de liberdade são expressos em termos da coordenada local, η . Nota-se na Eq.(A.21) que as rotações podem ser substituídas pela Eq.(A.19), e de maneira apropriada tem-se os graus de liberdade descritos em termos das coordenada globais, veja:

$${}^{(1)}\{\delta\}_t^{(e)} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ w^{(1)} \\ \theta_x^{(1)} \\ \theta_y^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ w^{(2)} \\ \theta_x^{(2)} \\ \theta_y^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ w^{(1)} \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \eta} \\ \theta_y^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \eta} \\ \theta_y^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ w^{(1)} \\ \frac{b}{2} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} \\ \theta_y^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ v_1^{(2)} \\ w^{(2)} \\ \frac{b}{2} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} \\ \theta_y^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Assim, a matriz de passagem elementar, $[T]^{(e)}$ é criada:

$$[T]^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

E com ela, tem-se um vetor de graus de liberdade corrigidos das rotações:

$$\{\delta\}_t^{(e)} = [T]^{(e)} \{\delta\}_t^{(e)*} \quad (\text{A.23})$$

A partir do qual, tem-se funções de forma descritas com base nos graus de liberdade

referenciados nas coordenadas de referência globais, veja:

$$\{v\}_{\eta,t} = [N]_v [T]^{(e)} \{\delta\}_t^{(e)*} \quad (\text{A.24a})$$

$$\{w\}_{\eta,t} = [N]_w [T]^{(e)} \{\delta\}_t^{(e)*} \quad (\text{A.24b})$$

$$\{\theta_x\}_{\eta,t} = [N]_{\theta_x} [T]^{(e)} \{\delta\}_t^{(e)*} \quad (\text{A.24c})$$

$$\{\theta_y\}_{\eta,t} = [N]_{\theta_y} [T]^{(e)} \{\delta\}_t^{(e)*} \quad (\text{A.24d})$$