GEIVISON DOS SANTOS RIBEIRO

Linearidade em conjuntos de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2019

GEIVISON DOS SANTOS RIBEIRO

Linearidade em conjuntos de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

UBERLÂNDIA - MG
2019

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R484 2019

Ribeiro, Geivison dos Santos, 1988-
Linearidade em conjuntos de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto [recurso eletrônico] / Geivison dos Santos Ribeiro. - 2019.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2019.2471
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Fávaro, Vinícius Vieira, 81 -, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAçÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Geivison dos Santos Ribeiro.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11812MAT003.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Linearidade em conjuntos de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multi-uso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 29 de novembro de 2019, às 9:30h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr.Vinícius Vieira Fávaro UFU - Universidade Federal de Uberlândia (orientador)	
Prof. Dr. Fábio Jóse Bertoloto UFU - Universidade Federal de Uberlândia	
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino UFU - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa	

Uberlândia-MG, 29 de novembro de 2019.

Dedicatória

A minha mãe Mirabel Gonzaga e a minha esposa Andréa Teles com muito amor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sua notável benevolência para comigo. Por todo amor e cuidado atribuído a mim diante não somente dos momentos fáceis, mas também dos momentos difíceis. Agradeço aos meus pais, Mirabel Gonzaga dos Santos e Genésio Ribeiro (em especial, a minha mãe, por sempre torcer por mim), as minhas irmãs Cláudia e Cristina, aos meus amigos Joed Muritiba, Fidel Eduardo e Rafael Reis, pelo grande carinho que creditaram a mim, ao meu amigo e irmão Ismael, por sua imensa paciência, amizade e simplicidade, ao meu companheiro de Cristianismo Pr. Luiz, por seu cotidiano exemplo de amor para com o rebanho de Cristo, a minha amada esposa que esteve comigo durante todos esses anos e ao meu filho Davi, por todas as vezes que cheguei cansado ou triste e me acolheram com todo o amor e carinho apoiando-me nos meus planos e nunca me deixando desistir pelas dificuldades. Obrigada pela luta e dedicação durante toda a minha vida, em especial nesse período tão exaustivo... Vocês são tudo para mim e tudo o que eu sou é por vocês! Agradeço a todos os meus tios, primos, em especial à minha tia Ducineia, por sempre me estender a mão amiga. Agradeço ao meu nobre amigo Diego Alves por me apoiar nos momentos mais difíceis com relação aos cursos de matemática (graduação e mestrado) com seu grande coração. Por ser verdadeiro, leal e paciente. Por acreditar que eu poderia chegar a concluir o mestrado. Agradeço-o por toda ajuda de custo, pois sem isso, não sei se teria condições de chegar a estudar em Uberlândia... Agradeço a Capes pelo apoio financeiro, à Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Matemática por minha formação acadêmica, e por me apresentar os melhores professores que eu poderia ter tido durante o curso de mestrado. Agradeço aos amigos que fiz durante todos esses anos de estudo no mestrado, em especial ao meu amigo Geovany, pela sua imensa amizade, companheirismo e simplicidade. Agradeço a cada professor que tive contato por toda dedicação e ensinamento. Em especial, ao professor Alonso pelos momentos em que estivemos a trocar ideias referentes ao amor de Deus. Não poderia deixar de ser grato pela vida do professor Geraldo Botelho, um dos melhores professores que já tive a honra de conhecer.

Agradeço demais ao professor Vinícius Vieira Fávaro (meu orientador) pela confiança não somente em mim, mas em meu trabalho. Por todo o apoio que me passou, pela amizade, pelas conversas, pelos conselhos e incentivos. Ao programa de Mestrado em Matemática da UFU, pelo privilégio e a oportunidade de fazer o curso. Aos coordenadores Dr. Thiago Aparecido Catalan, e a Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice (em especial a Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice pela sua garra no que diz respeito ao ouvir cada aluno com o coração) por serem tão prestativos e atenciosos sempre e por fim ao Dr. Wilberclay Gonçalves de Melo, por ser quem foi durante a minha graduação e por tudo aquilo que me ensinou relativo a vida e principalmente no que diz respeito a matemática.

RIBEIRO. *Linearidade em conjuntos de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto* 2019. - 99p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo detalhado sobre funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto. Começamos construindo um exemplo de tal função devido a van der Waerden e, em seguida, provamos que o conjunto $\mathcal{ND}[0,1]$ de tais funções é largo no sentido da categoria Baire em $\mathcal{C}[0,1]$. Provamos também que $\mathcal{ND}[0,1]$ é espaçável, mais ainda que os espaços de Banach separáveis podem ser vistos como subespaços de $\mathcal{ND}[0,1] \cup \{0\}$. Finalmente, provamos que o conjunto das funções Hölder em nenhum lugar é denso-algebrável e, em particular, obtemos que $\mathcal{ND}[0,1]$ é algebrável.

Palavras-chave: Espaço de funções contínuas, funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto, espaçabilidade, algebralidade.

RIBEIRO, *Linearity in sets of nowhere differentiable continuous functions.* 2019. - 99p.
M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we study in detail the set of nowhere differentiable continuous functions. We start constructing an example of such function due to van der Waeden and we prove that the set $\mathcal{ND}[0,1]$ of such functions is large in $\mathcal{C}[0,1]$, in the sense of Baire category. We also prove that $\mathcal{ND}[0,1]$ is spaceable and, moreover, the separable Banach spaces can be seen as subspaces of $\mathcal{C}[0,1]$. Finally, we prove that the set of nowhere Hölder functions is dense-algebrable and in particular we obtain that $\mathcal{ND}[0,1]$ is algebrable.

Keywords: Space of continuous functions, nowhere differentiable continuous functions, spaceability, algebrability.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\emptyset$	Conjunto vazio
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
ℓ_1	Conjunto das sequências reais $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ cuja série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert x_n \rvert$ converge
E	Espaço vetorial real
$span(A)$	Subespaço linear gerado pelo conjunto A
$\overline{A}$	Fecho do conjunto A
$B_r\,(f)$	Bola aberta de centro f e raio $r > 0$
$\mathcal{C}[0,1]$	Espaço vetorial de todas as funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$
$\mathcal{ND}[0,1]$	Conjunto de todas as funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que são não diferenciáveis em nenhum ponto
$\mathcal{ND}_{\pm}\,(A)$	Conjunto de todas as funções contínuas de A em $\mathbb{R}$ que não possuem derivada finita a esquerda nem tampouco a direita de cada ponto
$\mathcal{A}$	Álgebra vetorial
$\mathcal{A}(u)$	Álgebra vetorial gerada pelo vetor u
$\mathcal{NH}[0,1]$	Conjunto de todas as funções de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que são Hölder em lugar algum
$\mathcal{NH}^1[0,1]$	Conjunto de todas as funções de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que são Lipschitz em ponto algum
$m^*(A)$	medida exterior do conjunto A
$m(A)$	medida de Lebesgue do conjunto A

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Questões sobre diferenciabilidade e propriedades oriundas do estudo da lineabilidade e espaçabilidade tem atraído a atenção de muitos matemáticos. Procurar por estruturas lineares em ambientes, *a priori*, não lineares tem sido promissor, haja vista que nos últimos anos, observou-se que grande parte dos conjuntos de funções com uma propriedade em comum (mesmo que aparentemente rara) são grandes no sentido algébrico. Em outros termos, eles contém um subespaço (de dimensão infinita) que as vezes é denso ou fechado. Os termos *lineabilidade/espaçabilidade* foram introduzidos por Gurariy no início dos anos 2000 e as definições precisas são as seguintes:

Um subconjunto A de um espaço vetorial E é chamado *lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita. Já em termos de estrutura não somente linear, mas também topológica, tem-se a espaçabilidade, mais precisamente, dados E um espaço vetorial topológico (para nosso estudo basta normado) e $A \subseteq E$, dizemos que A é espaçável se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita e fechado.

O livro [2], intitulado *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, publicado em 2015, traz um apanhando geral do que foi desenvolvido nessa direção e a quantidade de trabalhos que foram feitos pelos mais diversos autores, nos últimos 15 anos. Diante dos conjuntos constituídos por funções em que se foram exploradas as noções de lineabilidade e espaçabilidade estão o conjunto de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto [7, 8, 9], o conjunto de funções Hölder em nenhum lugar [4], dentre outros.

O presente trabalho tem por objetivo fazer um estudo detalhado acerca da existência de estruturas lineares no conjunto das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ que não são diferenciáveis em nenhum ponto. No primeiro capítulo veremos algumas noções preliminares, as quais serão essenciais para a compreensão do que seguirá nos capítulos posteriores. Logo na primeira seção, nos preocupamos em apresentar algumas definições e resultados preliminares. Lá, apresentamos os conceitos fundamentais relativos a medida de Lebesgue, espaços normados e resultados de análise. O segundo capítulo terá enfase na estrutura topológica por parte do conjunto das funções contínuas não diferenciáveis em ponto algum de $[0,1]$. Lá, já na primeira seção construiremos a chamada função de Van Der Waerden. Por conseguinte, na segunda seção, nosso foco estará em verificar que existem muito mais funções contínuas não diferenciáveis em nenhum ponto do que funções contínuas diferenciáveis em pelo menos um ponto, no sentido de categoria de Baire. No capítulo 3, estaremos interessados em explorar não somente a estrutura algébrica do conjunto das funções contínuas não diferenciáveis em nenhum ponto, mas também sua estrutura topológica. Veremos dois resultados. O primeiro é de 1999, devido a Fonf, Gurariy e Kadets (veja [7]), e afirma que:

- O conjunto das funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto é espaçável (em particular, lineável).

- Existe um subespaço vetorial E constituído por funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto (a menos da função nula) e um subconjunto A Lebesgue mensurável de medida 1 no qual cada função em E quando restrita a A não possui derivada finita nem a esquerda, nem tampouco a direita de cada ponto.

Já o segundo resultado é de 1995, devido a Rodríguez-Piazza (veja [13]) e garante que qualquer espaço de Banach separável é (a menos de isomorfismo isométrico) um espaço constituído por funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto, exceto pela função identicamente nula.

Por fim, no último capítulo investigaremos a existência de álgebras vetoriais no conjunto das funções nowhere Hölder, com base no artigo de Bayart e Quarta (veja [4]), de 2007. Lá mostraremos que o conjunto das funções contínuas que não são diferenciáveis em ponto algum tem uma estrutura algébrica realmente rica, pois o mesmo além de ser espaçável, é também *algébrável*, isto é, contém (a menos da função nula) uma álgebra infinitamente gerada. Para mais detalhes, veja a Seção 1.5.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e definições concernentes a teoria da medida na reta, espaços vetoriais normados, análise real, séries de funções, funções analíticas e algebrabilidade, os quais serão utilizados em algumas demonstrações no decorrer desta dissertação.

1.1 Medida de Lebesgue na reta

Aqui, estaremos interessados em discorrer sobre a medida de Lebesgue na reta. Esta é, de forma sucinta, uma aplicação que associa um conjunto mensurável a um valor do intervalo estendido $[0, \infty]$. Além disso, gostaríamos de ressaltar que a definição desta medida é dada através de uma outra denominada medida exterior a qual apresenta como domínio o conjunto das partes de $\mathbb{R}$.

A demostração de cada resultado expresso nesse texto concernente a teoria da medida se encontra em [5].

Comecemos estabelecendo o significado de medida exterior de um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 1.1. Definimos a *medida exterior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ como sendo o seguinte ínfimo:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : A \subseteq \cup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\},$$

onde $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de intervalos abertos e $|I_k|$ representa o comprimento do intervalo I_k. Aqui o ínfimo é considerado sobre as coleções $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $A \subseteq \cup_{k \in \mathbb{N}} I_k$.

Listaremos abaixo algumas propriedades elementares satisfeitas pela medida exterior de um conjunto constituído de números reais.

Proposição 1.1. *As afirmações a seguir são verdadeiras:*

i) [Não negatividade] $0 \leq m^*(A) \leq \infty$, *para todo* $A \subseteq \mathbb{R}$*;*

ii) [Monotonicidade] $m^*(A) \leq m^*(B)$*, sempre que* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$*;*

iii) [Subadtividade] *Se* $A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{R}$*, então* $m^*(A) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$*;*

iv) *Se* $A \subseteq \mathbb{R}$ *é um intervalo, então* $m^*(A) = |A|$*;*

Definição 1.2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que A é *mensurável a Lebesgue*, ou simplesmente *mensurável*, se a igualdade a seguir é verdadeira:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^{\complement}), \quad \forall\, E \subseteq \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

onde $A^{\complement}$ é o complementar de A com relação a $\mathbb{R}$.

Proposição 1.2. *O complementar de qualquer conjunto mensurável é também mensurável.*

Proposição 1.3. *Cada intervalo de números reais é um conjunto mensurável.*

A seguir veremos que a união enumerável de conjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos, pertence a esta mesma categoria; além disso, mostraremos que a medida desta união é igual à soma das medidas de cada conjunto que a compõe.

Teorema 1.1. *Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos mensuráveis e dois a dois disjuntos. Então, a união* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *é mensurável e; além disso, vale a igualdade*

$$m^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n). \tag{1.2}$$

O resultado a seguir nos mostra que a união e a interseção enumerável de conjuntos mensuráveis, não necessariamente dois a dois disjuntos, gera um conjunto da mesma classe.

Teorema 1.2. *Seja* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis. Então, os conjuntos* $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ *e* $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ *são também mensuráveis.*

Estamos prontos para estabelecer a definição precisa do significado de medida de Lebesgue na reta.

Definição 1.3. Seja A um conjunto mensurável. Definimos a *medida de Lebesgue* do conjunto Apor meio da seguinte igualdade:

$$m(A) := m^*(A).$$

Proposição 1.4. *Todo aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.*

Demonstração. A prova é dada em [11]. □

Definição 1.4. Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *mensurável* se $f^{-1}(A)$ é um conjunto mensurável, para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ mensurável.

Proposição 1.5. *Toda função real e contínua é mensurável.*

1.2 Espaços normados e resultados de análise

Teorema 1.3 (Subespaço de um espaço de Banach)**.** *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Então, $(Y, \|.\|_Y)$ é Banach se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [6, Proposição 1.1.1, p.2] □

Definição 1.5. Denotaremos por ℓ_1 o espaço vetorial de todas as sequências de escalares que são *absolutamente somáveis*, isto é,

$$\ell_1 = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty \right\},$$

o qual se torna um espaço normado completo com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

A demonstração de que este espaço é normado e completo pode ser encontrada em qualquer livro introdutório de análise funcional.

Definição 1.6. *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado X é dita uma base de Schauder para X, se para cada $x \in X$, existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Definição 1.7. *Uma sequência de elementos* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de um espaço de Banach é dita uma sequência básica se* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma base de Schauder para* $\overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 1.4. *Seja* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência básica em um espaço de Banach* X *e seja* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência em um espaço de Banach* E. *São equivalentes:*

1. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência básica equivalente a* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$;

2. *Existe um isomorfismo* T *entre os espaços* $\overline{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $\overline{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *que satisfaz* $T(e_n) = f_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$;

3. *Existem constantes positivas* C_1 *e* C_2 *tais que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *verifica-se*
$$C_1 \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\| \leq C_2 \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|.$$

Teorema 1.5 (Teorema dos compactos encaixados em $\mathbb{R}$). *Dada uma sequência decrescente* $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ *de conjuntos compactos não-vazios em* $\mathbb{R}$, *existe (pelo menos) um número real que pertence a todos os* X_n.

Demonstração. Ver [12, Teorema 9, p.54] □

O conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor Δ é construído a partir do intervalo $[0,1]$. Seu processo de construção consiste em fazer divisões e remoções sucessivas no intervalo $[0,1]$ como dispomos a seguir:

Passo 1. Divida o intervalo $[0,1]$ em três intervalos de comprimento $\dfrac{1}{3}$ e remova seu intervalo central (o intervalo do meio) como ilustra a Figura 1.1.

Figura 1.1: Primeira etapa na construção de Δ

Passo 2. Divida cada um dos intervalos da etapa anterior,(isto é, os intervalos $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ e $\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$) em três intervalos de comprimento $\dfrac{1}{3^2}$ e em seguida remova seus respectivos intervalos centrais como ilustra a Figura 1.2 .

Passo 3. Repita esse mesmo processo de forma indutiva, procurando sempre remover o intervalo central (intervalo do meio) dos intervalos que sobraram na etapa anterior.

Figura 1.2: Segunda etapa na construção de Δ

Aqui $\Delta := \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$, sendo

- $K_0 = [0,1]$
- $K_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$
- $K_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$

  $\vdots$
- K_n (aqui, K_n consiste de 2^n intervalos cada um com comprimento $\frac{1}{3^n}$).

Definição 1.8 (Conjunto totalmente desconexo)**.** Seja $X \subseteq [0,1]$. Dizemos que X é *totalmente desconexo* se X não contém intervalos.

Definição 1.9 (Conjunto Perfeito)**.** Seja $X \subseteq [0,1]$. Dizemos que A é *perfeito* em $[0,1]$ se todos os seus pontos são de acumulação.

Teorema 1.6. *Quaisquer dois espaços métricos totalmente desconexos, compactos e perfeitos são homeomorfos.*

Demonstração. Veja [15, Teorema 30.3, p.216] □

Corolário 1.1. *O conjunto de Cantor é o único espaço métrico totalmente desconexo, compacto e perfeito a menos de homeomorfismo.*

Demonstração. Veja [15, Corolário 30.4, p.217] □

Definição 1.10. Denotamos por $\mathcal{C}[0,1]$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. O espaço $\mathcal{C}[0,1]$ se torna um espaço de Banach (normado e completo), com a norma

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Teorema 1.7 (Teorema de Aproximação de Weierstrass)**.** *Seja*

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{C}[0,1] : p \text{ é uma função polinomial}\}.$$

Então $\mathcal{P}$ é denso em $\mathcal{C}[0,1]$.

Demonstração. Veja [15, Teorema 44.7, p.292] □

1.3 Série de funções

Definição 1.11. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma *sequência de funções* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural n uma função definida de X em $\mathbb{R}$. Dizemos que a sequência de funções converge *simplesmente* (ou *pontualmente*) para a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ se, para cada $x \in \mathbb{R}$, a sequência de números $(f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ converge para o número $f(x)$. Em outras palavras, (f_n) converge para f simplesmente, se dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Notação: $f_n \to f$ simplesmente.

Definição 1.12. Dizemos que a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge *uniformemente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Definição 1.13. Uma *série de funções* é uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots.$$

Dizemos que tal série converge *pontualmente* (resp. *uniformemente*) se a sequência das somas parciais converge pontualmente (resp. uniformemente) .

Teorema 1.8 (Critério de Cauchy para séries numéricas)**.** *Uma condição necessária e suficiente para que uma série* $\sum a_n$ *seja convergente é que dado qualquer* $\varepsilon > 0$*, exista* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo inteiro* p*,*

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.1, p.6]. □

Teorema 1.9. *Se uma série de funções contínuas* $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente em um intervalo para* $f(x)$*, então* f *também é contínua.*

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.2, p.6]. □

Teorema 1.10 (Teste de Weierstrass)**.** *Seja* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções. Suponha que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *exista uma constante positiva* M_n *de modo que* $|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in X$ *e* $\forall n \in \mathcal{N}$. *Se* $\sum M_n$ *é convergente, então a série* $\sum f_n(x)$ *converge absolutamente e uniformemente em* X.

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.3, p.6]. □

1.4 Funções analíticas

Definição 1.14 (Função analítica real)**.** Sejam $\mathcal{D}$ um subconjunto aberto na reta real e $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável (ou seja, uma função suave, i.e.,de classe C^∞). Dizemos que f é *analítica*, se para cada ponto $x_0 \in \mathcal{D}$, existe uma vizinhança $V_{x_0} \subset \mathcal{D}$ de x_0 tal que

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (y - x_0)^n$$

para cada $y \in V_{x_0}$.

Dado um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ denotamos o conjunto das funções reais contínuas definidas em Ω por

$$\mathcal{C}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} : f \quad \text{é contínua em } \Omega\}.$$

Se $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ é um inteiro não negativo, um multi-índice α de ordem k é uma d-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$, para a qual

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d = k.$$

Denotamos a derivada parcial de ordem superior relativa ao multi-índice α por ∂^α. Aqui, ∂^α será definida de maneira que

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_d^{\alpha_d}, \quad \text{sendo} \quad \partial_i^{\alpha_i} := \partial^{\alpha_i}/\partial x_i^{\alpha_i}, \quad \text{para cada} \quad i = 1, \ldots, d.$$

No que se segue,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_d^{\alpha_d}$$

ao passo que

$$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_d!.$$

Definição 1.15 (Função analítica real em várias variáveis)**.** Sejam $\mathcal{D}$ um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^d$ e $F\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{d+1}. Dizemos que F é *analítica*, se para cada ponto $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{D}$, existe uma vizinhança $V_x \subset \mathcal{D}$ de x de tal forma que para cada $y = (y_1, \ldots, y_d) \in V_x$, a seguinte igualdade seja satisfeita:

$$F(y) = F(x) + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \frac{\partial^\alpha F(x)}{\alpha!} (y - x)^\alpha .$$

1.5 Algebrabilidade

Definição 1.16. Uma *álgebra* $\mathcal{A}$ sobre um corpo é um espaço vetorial com uma operação binária de multiplicação de vetores, que tem a propriedade distributiva sobre a soma de vetores e associativa quando faz sentido.

Definição 1.17. *Seja $S = \{u_i : i \in I\}$ um subconjunto de uma álgebra $\mathcal{A}$. Definimos a álgebra gerada por S como sendo o seguinte conjunto:*

$$\mathcal{A}(S) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_i^j : \alpha_j \in \mathbb{R}, u_i \in S, i \in I, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

O conjunto S é chamado sistema de geradores de $\mathcal{A}(S)$ e um sistema de geradores é dito minimal se para cada $i_0 \in I$, $u_{i_0} \notin \mathcal{A}(S \setminus \{u_{i_0}\})$.
Aqui, cada álgebra com um sistema minimal de geradores finito será chamada de finitamente gerada. Caso contrário, diremos que a álgebra é infinitamente gerada.

Definição 1.18. *Dizemos que dois elementos a e b de uma álgebra $\mathcal{A}$ são algebricamente independentes se para cada $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ com $P(a, b) = 0$, tivermos $P = 0$.*

Definição 1.19. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e B um subconjunto de $\mathcal{A}$. Dizemos que B é *algebrável*, se $B \cup \{0\}$ contém uma álgebra infinitamente gerada. Mais ainda, dizemos que B é *denso-algebrável*, se $B \cup \{0\}$ contém uma álgebra densa e infinitamente gerada.

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES CONTÍNUAS NOWHERE DIFFERENTIABLE

Neste capítulo, construiremos um exemplo de função contínua que não possui derivada em ponto algum do seu domínio e verificaremos que funções desse tipo são mais frequentes do que pensamos, no sentido de categoria de Baire. Atualmente, existem vários exemplos conhecidos com funções deste tipo. Faremos a construção devido a van der Waerden que também será utilizada adiante.

Começaremos com as seguintes notações e definições.

Definição 2.1. Seja $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Dizemos que f *não é diferenciável em nenhum ponto (nowhere differentiable)*, e escrevemos $f \in \mathcal{ND}[0,1]$, se f não tem derivada em nenhum ponto de $[0,1]$.

Definição 2.2. Sejam $A \subseteq [0,1]$ e $f \in \mathcal{C}(A)$. Dizemos que f *não possui derivadas laterais em lugar algum (ou em nenhum ponto)*, e escrevemos $f \in \mathcal{ND}_{\pm}(A)$, se f não possui derivada lateral à esquerda nem tampouco à direita de cada ponto de A.

Quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos $\mathcal{ND}$ ($\mathcal{ND}_{\pm}$) no lugar de $\mathcal{ND}[0,1]$ ($\mathcal{ND}_{\pm}(A)$).

2.1 A função de van der Waerden

Nesta seção, estamos interessados em construir a chamada função de van der Waerden. Embora van der Waerden não tenha sido o responsável por construir o primeiro exemplo de uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto (veja [14]), o seu exemplo é um dos mais simples e, foi justamente por meio de versões da função de van der Waerden, que se tornou possível explorar resultados os quais veremos no decorrer desta dissertação.

A fim de que a construção da função de van der Waerden se torne real e efetiva, exibiremos uma sequência de funções contínuas em toda reta cujos gráficos apresentam cada vez mais "bicos". Funções desse tipo possuem uma característica interessante do ponto de vista da não diferenciabilidade, haja vista que, de modo grosseiro, em cada 'bico' não é possível traçar reta tangente ao gráfico.

Com o intuito de descrever tal sequência de funções contínuas, comecemos considerando a função

$$f_0(x) := |x - n_x|, x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

onde n_x denota o número inteiro mais próximo de x.

Por exemplo,

$$f_0(0,6) = |0,6 - 1| = 0,4,$$

ao passo que

$$f_0(0,47612) = |0,47612 - 0| = 0,47612.$$

A partir daí, considere a função

$$f_1(x) := f_0(10 \cdot x), x \in \mathbb{R}.$$

Note que $f_1(x)$ calcula a distância de $10 \cdot x$ ao inteiro mais próximo a $10 \cdot x$. Por exemplo, $f_1(5,4608) =$ é igual a distância entre $54,608$ e 55 que é $0,392$.

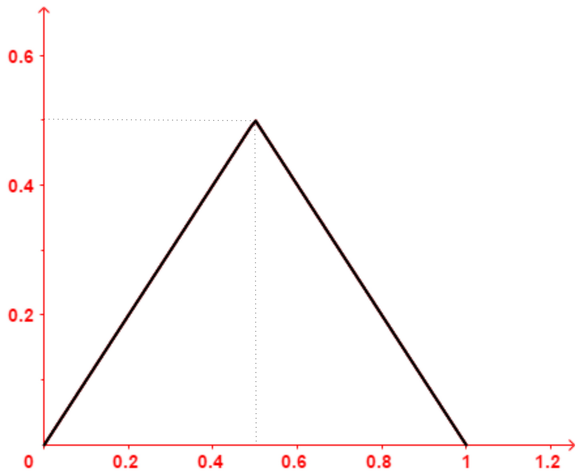
Indutivamente definimos $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \geq 2$, por

$$f_k(x) := f_0(10^k \cdot x), x \in \mathbb{R}.$$

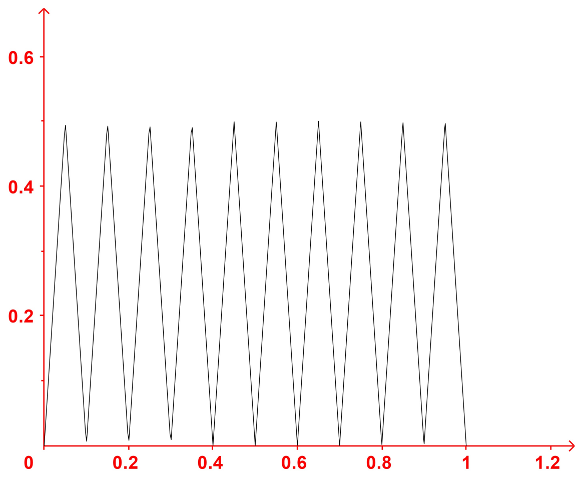
Em outra notação,

$$f_k(x) := |10^k \cdot x - n_{10^k \cdot x}|, x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

As figuras a seguir representam os gráficos das funções f_0 e f_1:



(a) gráfico de f_0



(b) gráfico de f_1

O resultado a seguir é quase imediato, mas lista algumas das propriedades mais importantes da função f_0.

Proposição 2.1. *A função f_0 definida em (2.1) é limitada (por $1/2$), é periódica (de período 1) e contínua.*

Demonstração. Como $f_0(x)$ calcula a distância de x ao inteiro mais próximo a x, é claro que $f_0(x) \leq \dfrac{1}{2}$. Além disso, f_0 é contínua, pois seu gráfico é a "colagem" de segmentos e ela é claramente periódica de período igual a 1. $\square$

Como, para $k \geq 1$, $f_k(x)$ é a composição $f_0(10^k \cdot x), x \in \mathbb{R}$, temos como consequência imediata o corolário a seguir.

Corolário 2.1. *Para cada $k \geq 1$, a função $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vista em (2.1) ou (2.2) é limitada (por $1/2$), periódica (de período $1/10^k$) e contínua.*

Agora, com a sequência $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ em mãos, definamos a seguinte função:

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{10^k}, x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Vejamos que a função ω está bem definida. Perceba que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{10^k} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0(10^k \cdot x)}{10^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/2}{10^k} \tag{2.4}$$

e como $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/2}{10^k}$ é uma série convergente (série geométrica de razão menor que 1), segue do Teste de Weierstrass (veja Teorema 1.10) que a série (2.3) é convergente (na verdade, uniformemente convergente).

Nosso objetivo agora é mostrar que ω é contínua, mas não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. Como cada f_k é contínua e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{10^k}$ converge uniformemente para $\omega(x)$ em $\mathbb{R}$, segue do Teorema 1.9 que ω é contínua em $\mathbb{R}$.

Agora resta provar que ω não possui derivada em ponto algum de $\mathbb{R}$. Para isto, para cada número real a dado, construiremos uma sequência real $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de forma que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, mas que não exista o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega(x_n) - \omega(a)}{x_n - a}.$$

Sendo assim, seja a um número real arbitrário. Como todo número real possui uma expansão decimal, optaremos por descrever a como sendo um número da forma $a = a_0, a_1 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots$, onde $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para cada $a_i \in \mathbb{N}$.

Considere a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de forma que $x_n = a_0, a_1 \dots a_{n-1} b_n a_{n+1} \dots$, onde

$$b_n = \begin{cases} a_n + 1, & \text{se } a_n \neq 4 \text{ ou } 9; \\ a_n - 1, & \text{caso contrário .} \end{cases} \tag{2.5}$$

A razão para as restrições no caso $a_n = 4$ e $a_n = 9$ serão explicadas mais a frente.

Vejamos por exemplo que se $a = 0,34253\dots$, então

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,44253\dots \\ x_2 &= 0,33253\dots \\ x_3 &= 0,34353\dots \\ x_4 &= 0,34263\dots. \end{aligned}$$

Verificaremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como

$$\begin{aligned} x_n - a &= a_0, a_1 \dots a_{n-1} b_n a_{n+1} \dots \quad - \quad a_0, a_1 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots \\ &= 10^{-n}(a_0 a_1 \dots a_{n-1} b_n, a_{n+1} \dots \quad - \quad a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n, a_{n+1} \dots) \\ &= 10^{-n}(\pm 1) \\ &= \pm 10^{-n}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $10^{-n_0} < \varepsilon$. Assim,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| = 10^{-n} \leq 10^{-n_0} < \varepsilon.$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} \frac{\omega(x_n) - \omega(a)}{x_n - a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{10^k(x_n - a)} && (2.7) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{10^k(\pm 10^{-n})} && (2.8) \end{aligned}$$

Verificaremos que os termos da sequência $\left(\dfrac{\omega(x_n) - \omega(a)}{x_n - a}\right)$ são números ímpares quando os índices são ímpares e pares quando os índices são pares. Para isso, faremos uso dos seguintes lemas:

Lema 2.1. *Se* $10^k \cdot a < a_0 a_1 ... a_k, 5$*, então* $10^k \cdot x_n \leq a_0 a_1 ... a_k, 5$*. Da mesma forma, se* $10^k \cdot a \geq a_0 a_1 ... a_k, 5$*, então* $10^k \cdot x_n \geq a_0 a_1 ... a_k, 5$*.*

Demonstração. Assuma a priori que $10^k \cdot a < a_0 a_1 \ldots a_k, 5$. Dessa forma, $a_{k+1} \leq 4$. Se $a_{k+1} = 4$, então $b_{k+1} = a_{k+1} - 1 = 3 < 5$. Agora, se $a_{k+1} < 4$, então $b_{k+1} = a_{k+1} + 1 < 5$. De qualquer maneira $b_{k+1} < 5$, fazendo com que $10^k \cdot x_n \leq a_0 a_1 \ldots a_k, 5$.

Supondo que $10^k \cdot a \geq a_0 a_1 \ldots a_k, 5$, temos que $a_{k+1} \geq 5$. Se $a_{k+1} = 9$, teremos que $b_{k+1} = a_{k+1} - 1 = 8 > 5$. Caso $a_{k+1} < 9$ chegamos a $b_{k+1} = a_{k+1} + 1 \geq 5 + 1 > 5$. Portanto, em ambos os casos $10^k \cdot x_n \geq a_0 a_1 \ldots a_k, 5$. □

Lema 2.2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$f_k(x_n) - f_k(a) = \begin{cases} \pm 10^{-(n-k)}, & \textit{se} \quad k < n; \\ 0, & \textit{se} \quad k \geq n. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos considerar inicialmente que $k \geq n$. Sendo assim, perceba que

$$f_k(a) := f_0(10^k \cdot a) = f_0(a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n \ldots a_k, a_{k+1} \ldots) \tag{2.9}$$

ao passo que

$$\begin{aligned} f_k(x_n) &:= f_0(10^k \cdot x_n) \\ &= f_0(a_0 a_1 \ldots a_{n-1} b_n \ldots a_k, a_{k+1} \ldots) \\ &= f_0(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}(a_n \pm 1) \ldots a_k, a_{k+1} \ldots) && (2.10) \end{aligned}$$

Os algarismos que estão a direita da vírgula informam qual é a relação entre o número $10^k \cdot a$ e o número $a_0a_1\ldots a_{n-1}a_n\ldots a_k, 5$. Por exemplo, se $a = 2,34152...$, então $10^3 \cdot a = 2341,52... > 2341,5$, já que $0,52\ldots > 0,5$. Por outro lado, $10 \cdot a = 23,4152... < 23,5$, pois $0,4152\ldots < 0,5$.

Além disso, como a única diferença entre a_n e x_n está no n-ésimo termo, os algarismos á direita da vírgula tanto do número $10^k \cdot x_n$ quanto do número $10^k \cdot a$ são os mesmos. Dessa forma,

- Se $n_{10^k a} = a_0a_1\ldots a_{n-1}a_n\ldots a_k$, então $n_{10^k \cdot x_n} = a_0a_1...a_{n-1}b_n\ldots a_k$.
- Se $n_{10^k \cdot a} = (a_0a_1\ldots a_{n-1}a_n\ldots a_k) + 1$, então $n_{10^k \cdot x_n} = (a_0a_1\ldots a_{n-1}b_n\ldots a_k) + 1$.

Através disso, inferimos que

$$\left|10^k \cdot x_n - n_{10^k \cdot x_n}\right| = \left|10^k \cdot a - n_{10^k \cdot a}\right| \tag{2.11}$$

e assim

$$\begin{aligned} f_k(x_n) - f_k(a) &= f_0(10^k \cdot x_n) - f_0(10^k \cdot a) \\ &= \left|10^k \cdot x_n - n_{10^k \cdot x_n}\right| - \left|10^k \cdot a - n_{10^k \cdot a}\right| \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Agora considere o caso em que $k < n$. Neste caso,

$$\begin{aligned} f_k(a) &= f_0(10^k \cdot a) \\ &= f_0(a_0a_1\ldots a_k, a_{k+1}\ldots a_n\ldots) \end{aligned}$$

ao passo que

$$\begin{aligned} f_k(x_n) &= f_0(10^k \cdot x_n) \\ &= f_0(a_0a_1\ldots a_k, a_{k+1}\ldots b_n\ldots) \\ &= f_0(a_0a_1\ldots a_k, a_{k+1}\ldots (a_n \pm 1)\ldots). \end{aligned}$$

A hipótese de que $k < n$ faz com que a parte inteira de ambos os números $10^k \cdot x_n$ e $10^k \cdot a$ seja a mesma, haja vista que única diferença entre eles está no n-ésimo termo, o qual se encontra à direita da vírgula. Mais ainda, de acordo com Lema 2.1, temos $n_{10^k \cdot a} = n_{10^k \cdot x_n}$. Dessa forma, podemos supor, sem perda de generalidade, que $n_{10^k \cdot a} = a_0a_1\ldots a_k$. Assim,

$$\begin{aligned} f_k(x_n) - f_k(a) &= |10^k \cdot x_n - n_{10^k \cdot x_n}| - |10^k \cdot a - n_{10^k \cdot a}| \\ &= |a_0a_1\ldots a_k, a_{k+1}\ldots b_n\ldots - a_0a_1\ldots a_k| - |a_0a_1\ldots a_k, a_{k+1}\ldots a_n\ldots - a_0a_1\ldots a_k| \\ &= 0, \underbrace{0\ldots 0}_{[n-(k+1)]\text{-vezes}} (\pm 1) = \pm 10^{-(n-k)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Em suma, de (2.12) e (2.13), temos

$$f_k(x_n) - f_k(a) = \begin{cases} \pm 10^{-(n-k)}, & se \quad k < n; \\ 0, & se \quad k \geq n. \end{cases} \tag{2.14}$$

□

A título de exemplo, considere $a = 0,27451$. Como $x_3 = 0,27351$ obtemos

$$\begin{aligned} f_3(x_3) - f_3(a) &= f_0(10^3 \cdot x_3) - f_0(10^3 \cdot a) \\ &= |10^3 \cdot x_3 - n_{10^3 \cdot x_3}| - |10^3 \cdot a - n_{10^3 \cdot a}| \\ &= |273,51 - 274| - |274,51 - 275| \\ &= 0,49 - 0,49 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(x_3) - f_4(a) &= f_0(10^4 \cdot x_3) - f_0(10^4 \cdot a) \\ &= |10^4 \cdot x_3 - n_{10^4 \cdot x_3}| - |10^4 \cdot a - n_{10^4 \cdot a}| \\ &= |2735,1 - 2735| - |2745,1 - 2745| \\ &= 0,1 - 0,1 = 0, \end{aligned}$$

ao passo que

$$\begin{aligned} f_0(x_3) - f_0(a) &= |x_3 - n_{x_3}| - |a - n_a| \\ &= |0,27351 - 0| - |0,27451 - 0| \\ &= -0,001 = -10^{-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x_3) - f_1(a) &= f_0(10 \cdot x_3) - f_0(10 \cdot a) \\ &= |10 \cdot x_3 - n_{10 \cdot x_3}| - |10 \cdot a - n_{10 \cdot a}| \\ &= |2,7351 - 3| - |2,7451 - 3| \\ &= 0,2649 - 0,2549 \\ &= 0,01 = 10^{-2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(x_3) - f_2(a) &= f_0(10^2 \cdot x_3) - f_0(10^2 \cdot a) \\ &= |10^2 \cdot x_3 - n_{10^2 \cdot x_3}| - |10^2 \cdot a - n_{10^2 \cdot a}| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |27,351 - 27| - |27,451 - 27| \\
&= 0,351 - 0,451 \\
&= -0,1 = -10^{-1}.
\end{aligned}
$$

Agora, voltando a demonstração e fazendo uso do Lema 2.2, chegamos a

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega(x_n) - \omega(a)}{x_n - a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{10^k(x_n - a)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{10^k(\pm 10^{-n})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pm 10^{-(n-k)}}{10^k(\pm 10^{-n})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \pm 1. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Isto significa que o n-ésimo termo da sequência $\left(\frac{\omega(x_n) - \omega(a)}{x_n - a}\right)$ é uma soma com exatamente n parcelas, cada uma igual a 1 ou -1. Logo, o n-ésimo termo da sequência é um número ímpar, caso n seja ímpar, ou um número par, caso n seja par. Assim, o limite

$$
\lim_{n \to \infty} \frac{\omega(x_n) - \omega(a)}{x_n - a} \qquad (2.16)
$$

não existe, provando que ω não é diferenciável em ponto algum de $\mathbb{R}$, como queríamos.

A partir de agora, veremos o porquê das restrições em relação a 4 e 9 em (2.5). Para comentarmos a respeito da restrição quanto ao número 4, tome como exemplo $a = 0,1742521555$, $n = 3$ e $k = 2$. Supondo que $b_4 = a_4 + 1 = 5$ teremos que

$$
\begin{aligned}
f_2(x_3) &= f_2(0,1752521555) \\
&= f_0(17,52521555) \\
&= |17,52521555 - 18| \\
&= 0,4747845.
\end{aligned}
$$

e que

$$
\begin{aligned}
f_2(a) &= f_2(0,1742521555) \\
&= f_0(17,42521555) \\
&= |17,42521555 - 17| \\
&= 0,42521555.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_2(x_3) - f_2(a) &= 0,4747845 - 0,42521555 \\ &= 0,04956895 \\ &\neq \pm 10^{-(3-2)} \end{aligned}$$

Exemplos como dão a perceber que sempre que tomarmos $b_n = a_n + 1$ para o caso em que $k < n$, $a_n = 4$ e $a_{n+1} \neq 0$ obteremos que $n_{10^k \cdot a}$ é diferente de $n_{10^k \cdot x_n}$. Isto por sua vez fará com que $f_k(x_n) - f_k(a)$ seja diferente de $10^{(n-k)}$.

Assim, não seria possível obter a conclusão como em (2.15). Por isso, tomamos $b_n = a_n - 1$ para $a_n = 4$. Isto não traz problemas pois, no "pior"dos casos ($n = k + 1$), temos

$$0,(a_{k+1} - 1)a_{k+2} \ldots = 0,3a_{k+2} \ldots < 0,5.$$

Já com relação ao número 9, considere que $a = 0,99991634$ e que $b_4 = a_4 + 1$. Nesta configuração $x_4 = 1,00001634$, $10^2 \cdot a = 99,991634 > 99,5$ e $10^2 \cdot x_4 = 100,001634 < 100,5$. Aqui, $n_{10^2 \cdot a} = 100 = n_{10^2 \cdot x_4}$. No entanto,

$$\begin{aligned} f_2(x_4) - f_2(a) &= |100,001634 - 100| - |99,991634 - 100| \\ &= 0,001634 - 0,008366 \\ &= -0,006732 \\ &\neq \pm 10^{-(4-2)} \end{aligned} .$$

Aqui, embora o inteiro mais próximo de $10^2 \cdot x_4$ e de $10^2 \cdot a$ seja o mesmo, houve alterações em relação aos algarismos anteriores a a_4. O fato de tomarmos $b_n = a_n - 1$, quando $a_n = 9$, faz com que a única diferença entre $10^k \cdot a$ e $10^k \cdot x_n$ se dê no n-ésimo algarismo depois da vírgula e não nos outros algarismos, como vimos no exemplo acima.

2.2 Funções que não possuem derivada em nenhum ponto são mais frequentes do que pensamos

Nesta seção, nosso objetivo é desenvolver de maneira detalhada um resultado devido a S. Banach (veja [3]). Veremos que a grande maioria das funções em $\mathcal{C}[0,1]$ (no sentido de categoria de Baire) não possuem derivada em nenhun ponto de $[0,1]$. Comecemos com algumas definições.

Definição 2.3 (Conjunto magro ou de primeira categoria)**.** Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subconjunto. Dizemos que S é magro ou de *primeira categoria* (no sentido de Baire), se S estiver contido numa união enumerável de conjuntos fechados, todos com interior vazio.

Neste contexto, os conjuntos que não são de primeira categoria, geralmente são chamados de conjuntos gordos ou de *segunda categoria*.

Teorema 2.1 (Teorema de Baire)**.** *Seja M um espaço métrico completo. Toda interseção enumerável de abertos densos é densa em M.*

Demonstração. Veja [10, Proposição 19, p. 190]. $\square$

O próximo resultado, além de mostrar que $\mathcal{ND}[0,1]$ é denso em $\mathcal{C}[0,1]$, verifica que seu complementar é magro no sentido de Baire.

Teorema 2.2. *O conjunto*

$$A_n = \left\{ f \in \mathcal{C}[0,1] : \textit{para cada } t \in [0,1], \textit{existe } h \textit{ tal que } \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n \right\}$$

satisfaz as seguintes condições:

i) *A_n é não vazio;*

ii) *A_n é aberto em $\mathcal{C}[0,1]$;*

iii) *A_n é denso em $\mathcal{C}[0,1]$;*

iv) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \mathcal{ND}[0,1]$.

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e tome $\alpha > n$ com o objetivo de provar **i)**. Sendo assim, defina $g(t) := t \cdot \alpha$, $t \in [0,1]$ e note que $g \in A_n$. Com efeito, é claro que $g \in \mathcal{C}[0,1]$ e, além disso,

$$\left| \frac{g(t+h)-g(t)}{h} \right| = \left| \frac{(t+h)\cdot\alpha - t\cdot\alpha}{h} \right| = \frac{|h|\cdot\alpha}{|h|} = \alpha > n,$$

para todo $t \in [0,1]$ e h satisfazendo $t+h \in [0,1]$. Isto completa a prova de **i)**.

Agora vamos checar a veracidade de **ii)**. Para isso, seja $f \in A_n$. Mostraremos que existe $r > 0$ tal que para cada $t \in [0,1]$ seja possível encontrar $h_t \in \mathbb{R}$, com $t + h_t \in [0,1]$ de maneira que $|f(t+h_t) - f(t)| - n \cdot |h_t| > r$. Para isso, vamos supor que ocorra o contrário. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, existe $t_k \in [0,1]$ de maneira que $|f(t_k+h) - f(t_k)| - n \cdot |h| \leq \frac{1}{k}$, para todo h, com $t_k + h \in [0,1]$. Como $(t_k)_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$ é limitada, segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente, digamos $\lim_{j\to\infty} t_{k_j} = t_0 \in [0,1]$. Assim,

$$|f(t_0+h) - f(t_0)| - n|h| = \lim_{j\to\infty} |f(t_{k_j}+h) - f(t_{k_j})| - n|h| \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{k_j} = 0,$$

para todo h. Porém, isso gera um absurdo, em virtude de $f \in A_n$. Portanto, realmente existe $r > 0$ tal que para cada $t \in [0,1]$ seja possível encontrar h_t de modo que

$$|f(t+h_t) - f(t)| - n \cdot |h_t| > r. \tag{2.17}$$

Vamos verificar que $B_{\frac{r}{2}}(f) \subseteq A_n$. Para isso, seja $g \in B_{\frac{r}{2}}(f)$. Como

$$\begin{aligned} |f(t+h_t) - f(t)| &\leq |f(t+h_t) - g(t+h_t)| + |g(t+h_t) - g(t)| + |g(t) - f(t)| \\ &< \frac{r}{2} + |g(t+h_t) - g(t)| + \frac{r}{2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

concluímos devido as desigualdades (2.17) e (2.18) que $n \cdot |h_t| < |g(t+h_t) - g(t)|$. Dessa maneira $g \in A_n$, logo A_n é aberto. Isto prova o item **ii)**.

Para provar **iii)** considere f em $\mathcal{C}[0,1]$. Como toda função contínua real definida num compacto é uniformemente contínua, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in [0,1]$ e $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Isto nos diz que se subdividirmos o intervalo $[0,1]$ num número finito de subintervalos $I_1 := [a_0, a_1], \ldots, I_m := [a_{m-1}, a_m]$ com comprimentos menores do que δ, o gráfico de f quando restrito a cada I_i passa a caber num retângulo de altura $\eta_i > 0$ menor que ε, como ilustra a Figura 2.1.

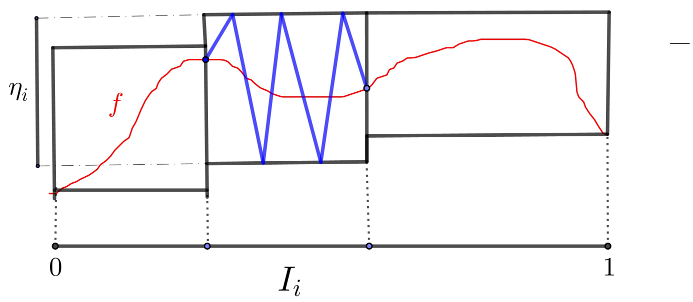


Figura 2.1:

Considere feita está subdivisão. Nosso objetivo a partir daqui será mostrar que $B_\varepsilon(f) \cap A_n \neq \emptyset$. Para isso, construiremos primeiramente, para cada $i = 1, \ldots, m$, uma função g_i definida no intervalo I_i que

- seja contínua;
- seu gráfico tenha a forma de uma reta ou de uma serra cujos dentes possuam arestas com inclinação maior que n;
- coincida com f nos extremos de I_i;

- tenha seu gráfico dentro do retângulo de base medindo $|I_i|$ e altura η_i formado a partir de I_i.

Para estes fins, trace a reta r_1 que passa pelos pontos $(a_{i-1}, f(a_{i-1}))$, $(a_i, f(a_i))$. Temos que r_1 tem inclinação

$$\alpha = \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}.$$

Se $\alpha > n$, defina $g_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$, por $g_i(x) = \alpha \cdot (x - a_{i-1}) + f(a_{i-1})$. Note que g_i é contínua e a inclinação do seu gráfico é maior que n, pois seu gráfico é justamente a reta r_1 quando restrita a I_i (ver Figura 2.2).

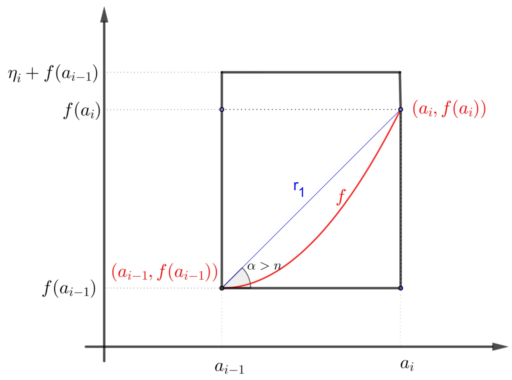


Figura 2.2: a reta r_1

Além disso, g_i coincide com $f_{|_{I_i}}$ nos extremos, pois $g_i(a_{i-1}) = \alpha \cdot (a_{i-1} - a_{i-1}) + f(a_{i-1}) = f(a_{i-1})$ e $g(a_i) = \alpha(a_i - a_{i-1}) + f(a_{i-1}) = f(a_i)$ e, claramente o gráfico de g_i está dentro do subretângulo de base $|I_i|$ e comprimento η_i formado a partir de I_i.

Agora, se $\alpha \leq n$, fixe $\lambda > n$ e trace a reta s_1 cuja inclinação é λ e que passa pelo ponto $(a_{i-1}, f(a_{i-1}))$. Essa reta toca a reta $y = \eta_i + f(a_{i-1})$ em um ponto $(x_{i_0}, \eta_i + f(a_{i-1}))$, onde x_{i_0} pertence ao intervalo (a_{i-1}, a_i), conforme Figura 2.3.

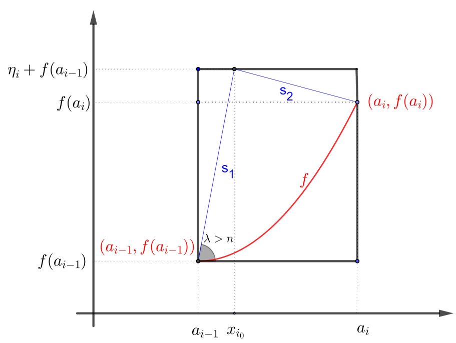


Figura 2.3: as retas s_1 e s_2

Feito isso, trace a reta s_2 que passa pelos pontos (x_{i_0}, η_i), $(a_i, f(a_i))$ e verifique se a sua inclinação é maior do que n. Se o for, pare o processo e defina $g_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ como sendo a função cujo gráfico é a junção dos segmentos gerados por s_1 e s_2 dentro do retângulo que estamos considerando (vide novamente Figura 2.3). Neste caso temos que g_i é contínua e seu gráfico tem a forma de uma serra cujos dentes possuem arestas com inclinação maior do que n; g_i coincide com $f_{|[a_{i-1},a_i]}$ nos extremos; e o gráfico de g_i está dentro do subretângulo de base $|I_i|$ e comprimento η_i formado a partir de I_i.

Caso a inclinação de s_2 seja menor ou igual a n, trace a reta t_1 de maneira que t_1 tenha inclinação maior do que n e passe pelos pontos (x_0, η_i), $(x_{i_1}, f(a_{i-1}))$, para algum x_{i_1} pertencente ao intervalo $[a_{i-1}, a_i)$. Feito isso, considere a reta t_2 que passa pelos pontos $(x_{i_1}, f(a_{i-1}))$,$(a_i, f(a_i))$, conforme Figura 2.4 .

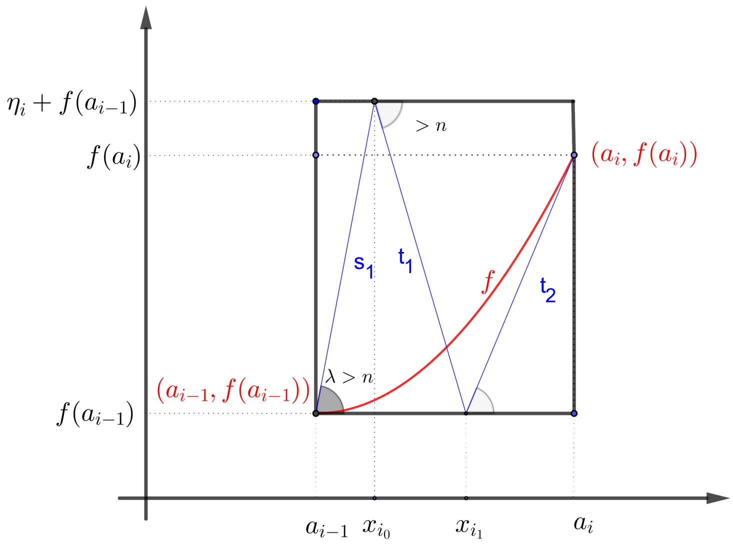


Figura 2.4: as retas t_1, t_2 e t_3

Se a inclinação de t_2 for maior do que n finalize o processo e construa $g_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ como sendo a função cujo gráfico é a junção dos segmentos gerados por s_1, t_1 e t_2, dentro do retângulo que estamos considerando.

Novamente, temos g_i contínua com gráfico tendo a forma de uma serra cujos dentes possuem arestas com inclinação maior que n, g_i coincide com $f_{|[a_{i-1},a_i]}$ nos extremos e o gráfico de g_i está dentro do subretângulo de base $|I_i|$ e comprimento η_i formado a partir de I_i.

Caso a inclinação de t_2 seja menor ou igual a n, repita o processo sucessivamente. Isto nos levar definir a função g_i satisfazendo as propriedades requeridas.

Como $g_1(a_1) = g_2(a_1)$, $g_2(a_2) = g_3(a_2)$,..., $g_{m-1}(a_{m-1}) = g_m(a_{m-1})$, definindo $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, por $g(x) = g_i(x)$ se $x \in I_i$, segue que g está bem definida, é contínua e seu gráfico tem a forma de uma serra cujos dentes possuem arestas com inclinação maior que n. Além disso, g coincide com f nos extremos e g tem seu gráfico dentro da união dos m retângulos gerados a partir dos subintervalos $I_1, \ldots, I_m$.

Isto nos diz que $g \in A_n$ e $\|g - f\|_\infty < \max\{\eta_i : i = 1, ..., m\} < \varepsilon$, ou seja $g \in B_\varepsilon(f) \cap A_n \neq \emptyset$.

Resta-nos provar o item **iv)**. Para isso, seja $f \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Afim de verificar que $f \in \mathcal{ND}[0,1]$, provaremos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

não existe, seja qual for o $t \in [0,1]$. Com efeito, $f \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ significa que, para $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$, existe $h_{n,t}$ de modo que

$$\left| \frac{f(t+h_{n,t}) - f(t)}{h_{n,t}} \right| > n.$$

Dessa forma,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f(t+h_{n,t}) - f(t)}{h_{n,t}} \right| = +\infty.$$

Como f é limitada (pois é contínua e está definida num compacto), existe $M_t \geq 0$, tal que $|f(t)| \leq M_t$, para todo $t \in [0,1]$. Com isso,

$$|f(t+h_{n,t}) - f(t)| \leq |f(t+h_{n,t})| + |f(t)| \leq 2M_t,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Perceba que sequência $(h_{n,t})_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge para 0, pois caso contrário existiria pelo menos um $\delta_0 > 0$ tal que $|h_{n,t}| \geq \delta_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Nestes termos, teríamos que

$$\left| \frac{f(t+h_{n,t}) - f(t)}{h_{n,t}} \right| \leq \frac{2M_t}{\delta_0},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que não é possível haja vista que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f(t+h_{n,t}) - f(t)}{h_{n,t}} \right| = +\infty.$$

Digamos, então que $(h_{n_j,t})_{j=1}^{\infty}$ seja tal subsequência convergindo para 0. Assim, obtemos

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| = \lim_{j \to +\infty} \left| \frac{f(t+h_{n_j,t}) - f(t)}{h_{n_j,t}} \right| = +\infty,$$

provando assim o item **iv)**. □

Os itens provados no Teorema 2.2 juntamente com o Teorema 2.1 garantem que $\mathcal{ND}[0,1]$ é denso em $\mathcal{C}[0,1]$. Mais ainda, o fato de $(\mathcal{ND}[0,1])^{\complement}$ ser magro (no sentido de categoria de Baire), nos dá condições de inferir que existem, nesse sentido, "muito mais" funções contínuas que não possuem derivada em nenhum ponto do que funções contínuas que são diferenciáveis em pelo menos um ponto.

CAPÍTULO 3

A ESPAÇABILIDADE DE $\mathcal{ND}[0,1]$ E UM INGREDIENTE ESTRUTURAL DA TEORIA DOS ESPAÇOS DE BANACH

Construir uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto do seu domínio não é uma tarefa fácil. Talvez seja por isso que num primeiro instante a nossa intuição nos diga que não existam muitas funções com essa particularidade. No entanto, verificamos que o conjunto dessas funções é "grande", no sentido de categoria de Baire (veja Teorema 2.2). Sendo assim, torna-se natural a busca por estruturas lineares no conjunto $\mathcal{ND}[0,1]$. Mais precisamente:

Será possível identificar espaços vetoriais fechados de dimensão infinita dentro de $\mathcal{ND}[0,1] \cup \{0\}$? Em outras palavras, $\mathcal{ND}[0,1]$ é espaçável em $C[0,1]$?

A resposta para essa pergunta é sim, e é devida a Fonf, Gurariy e Kadets em [7] , além de Rodríguez-Piazza em [13] como verificaremos no decorrer deste capítulo.

Após S. Banach verificar que "quase" todas as funções em $\mathcal{C}[0,1]$ não possuem derivada finita a esquerda nem tampouco a direita de cada ponto de $[0,1]$, (veja [3]), a seguinte pergunta também é natural:

Existe um subespaço fechado de dimensão infinita $Y \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ tal que cada função não nula em Y não possua derivada a esquerda, nem tampouco a direita de cada ponto de $[0,1]$?

O resultado a seguir é devido a Fonf, Gurariy e Kadets em [7] e responde positivamente à primeira pergunta, além disso, dá uma resposta positiva parcial para a pergunta logo acima.

Teorema 3.1. *$\mathcal{ND}[0,1]$ é espaçável em $\mathcal{C}[0,1]$. Em outras palavras, existe um subespaço fechado e de dimensão infinita $E \subseteq \mathcal{C}[0,1]$, de maneira que seus elementos não nulos são funções nowhere differentiable. Além disso, existe um subconjunto Lebesgue-mensurável $A \subseteq [0,1]$ com medida igual a 1, para o qual $\psi_{|A} \in \mathcal{ND}_{\pm}(A)$, para cada $\psi \in E \setminus \{0\}$.*

Demonstração. Optamos por separar a demonstração deste resultado em alguns passos.
Passo 1. Defina

$$u_1(x) := \begin{cases} x, & se \quad x \in [0,1/4]\,; \\ 1/2 - x, & se \quad x \in [1/4,3/4]\,; \\ x-1, & se \quad x \in [3/4,1]\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

e estenda-a via periodicidade para toda reta (note que u_1 terá período 1).
Passo 2. Defina $u_m\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ($m \geq 2$) de maneira que

$$u_m(x) := 8^{1-m} \cdot u_1(8^{m-1} \cdot x) \tag{3.2}$$

e estenda-a via periodicidade para toda reta.

As Figuras 3.1 e 3.2 representam os gráficos das funções u_1 e u_2, respectivamente. Note que u_1 é contínua e limitada.

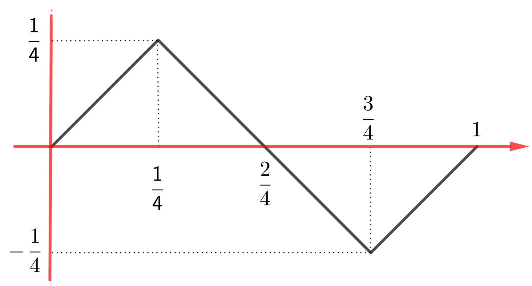


Figura 3.1: a função u_1

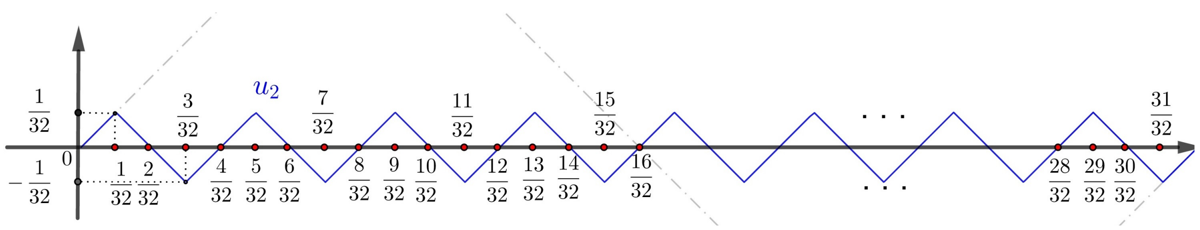


Figura 3.2: a função u_2

Passo 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, considere os seguintes intervalos

$$J_{n,s,l} := \left[\frac{l + (s-1)/4}{8^{n-1}}, \frac{l + s/4}{8^{n-1}} \right],$$

com $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $l \in \{0, 1, \ldots, 8^{n-1} - 1\}$.

Por meio das Figuras 3.3 e 3.4 podemos perceber como se comportam os intervalos $J_{n,s,l}$ para os casos $n = 1$ e $n = 2$.

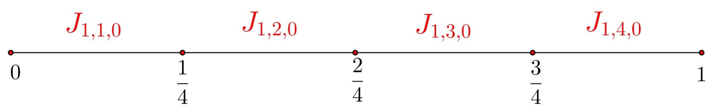


Figura 3.3: os intervalos $J_{1,s,l}$

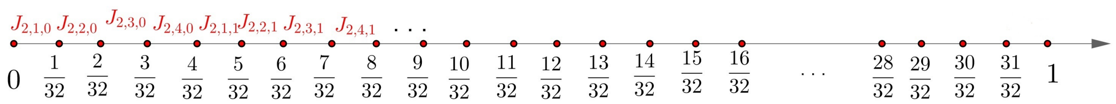


Figura 3.4: os intervalos $J_{2,s,l}$

Lema 3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ fixo e $p \in \{1, \ldots, n\}$. Dados $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $l \in \{0, 1, \ldots, 8^{n-1} - 1\}$, existem $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $\lambda \in \{0, 1, \ldots, 8^{p-1} - 1\}$ tais que*

$$J_{n,s,l} \subseteq J_{p,\alpha,\lambda}$$

Demonstração. Com efeito, o fato de p estar no conjunto $\{1, ..., n\}$ para $n \in \mathbb{N}$ fixo, nos diz que $p = n - r$, para algum $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Como

$$4 \cdot 8^{n-1} \;=\; 4 \cdot 8^r \cdot 8^{n-r-1} = (4 \cdot 8^{n-r-1}) \cdot 8^r$$

segue que

$$\begin{aligned} 4 \cdot l + s &\leq 4 \cdot \left(8^{n-1} - 1\right) + 4 = 4 \cdot 8^{n-1} \\ &= (4 \cdot 8^{n-r-1}) \cdot 8^r = t \cdot 8^r, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $t = 4 \cdot 8^{n-r-1} \in \mathbb{N}$.

Seja m o menor número natural menor ou igual a t que satisfaz

$$4 \cdot l + s \leq m \cdot 8^r. \tag{3.4}$$

A minimalidade de m nos diz que $(m-1)\cdot 8^r < 4\cdot l+s$. Logo $(m-1)\cdot 8^r \leq 4\cdot l+(s-1)$. Consequentemente,

$$\frac{(m-1)\cdot 8^r}{4\cdot 8^{n-1}} \leq \frac{4\cdot l+(s-1)}{4\cdot 8^{n-1}}. \tag{3.5}$$

Como

$$\frac{(m-1)\cdot 8^r}{4\cdot 8^{n-1}} = \frac{m-1}{4\cdot 8^{n-r-1}} = \frac{m-1}{4\cdot 8^{p-1}},$$

e

$$\frac{m\cdot 8^r}{4\cdot 8^{n-1}} = \frac{m}{4\cdot 8^{n-r-1}} = \frac{m}{4\cdot 8^{p-1}},$$

segue de (3.4) e (3.5) que

$$\frac{m-1}{4\cdot 8^{p-1}} \leq \frac{4\cdot l+(s-1)}{4\cdot 8^{n-1}} < \frac{4\cdot l+s}{4\cdot 8^{n-1}} \leq \frac{m}{4\cdot 8^{p-1}}. \tag{3.6}$$

Portanto,

$$J_{n,s,l} := \left[\frac{4\cdot l+(s-1)}{4\cdot 8^{n-1}}, \frac{4\cdot l+s}{4\cdot 8^{n-1}}\right] \subseteq \left[\frac{m-1}{4\cdot 8^{p-1}}, \frac{m}{4\cdot 8^{p-1}}\right]. \tag{3.7}$$

Por conseguinte, escolha $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ de modo que $\dfrac{m-\alpha}{4}$ seja divisível por 4 (a cada quatro números naturais consecutivos um deles é divisível por 4) e tome $\lambda = \dfrac{m-\alpha}{4}$. O fato de $m \leq t := 4\cdot 8^{n-r-1}$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ e $n-r=p$ implicará que

$$\frac{m-\alpha}{4} \leq 8^{p-1}-1 \tag{3.8}$$

fazendo com que $\lambda \in \{0,1,\ldots,8^{p-1}-1\}$.

De (3.7), (3.8) e do fato que $4\cdot\lambda+(\alpha-1) = m-1$ e $4\cdot\lambda+\alpha = m$, segue que

$$\begin{aligned} J_{n,s,l} &:= \left[\frac{4\cdot l+(s-1)}{4\cdot 8^{n-1}}, \frac{4\cdot l+s}{4\cdot 8^{n-1}}\right] \subseteq \left[\frac{m-1}{4\cdot 8^{p-1}}, \frac{m}{4\cdot 8^{p-1}}\right] \\ &= \left[\frac{4\cdot\lambda+(\alpha-1)}{4\cdot 8^{p-1}}, \frac{4\cdot\lambda+\alpha}{4\cdot 8^{p-1}}\right] := J_{p,\alpha,\lambda} \end{aligned} \tag{3.9}$$

como queríamos. $\square$

Como, para $p = 1, \ldots, n$, u_p é afim em cada $J_{p,\alpha,\lambda}$ e além disso os valores de máximo e de mínimo da função u_p são assumidos somente nos extremos de cada $J_{p,\alpha,\lambda}$ (ver Figura 3.2 para ilustrar o caso $p = 2$) podemos fazer uso da inclusão inferida em (3.9) e com isso concluir que u_p também é afim quando restrita ao intervalo $J_{n,s,l}$.

A Figura 3.2 também mostra-nos que o coeficiente angular de u_p ($p = 2, \ldots, n$) é o mesmo coeficiente angular de u_1 a menos do sinal.

Como o coeficiente angular de u_1 é ± 1, (veja a Figura 3.1) tem-se que o coeficiente angular de u_p é também ± 1. Isto é,

$$\frac{u_p(x_2) - u_p(x_1)}{x_2 - x_1} = \pm 1 \tag{3.10}$$

para cada $x_1, x_2 \in J_{n,s,l}$.

Considerando

$$\sigma_p := \left\{ m \cdot 2^{p-1} : m \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.11}$$

defina a seguinte função

$$\varphi_p(x) := \sum_{r \in \sigma_p} u_r(x), x \in [0, 1]. \tag{3.12}$$

Como cada u_r é limitada pela constante $\dfrac{1}{4 \cdot 8^{r-1}} =: M_r$, que depende somente de r, e

$$\sum_{r \in \sigma_p} M_r \leq \sum_{r \in \mathbb{N}} M_r = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{4 \cdot 8^{r-1}} < \infty,$$

podemos fazer uso do teste de Weierstrass (ver Teorema 1.10) para garantir que φ_p está bem definida.

Passo 4. Defina E por

$$E := \overline{span} \left\{ \frac{\varphi_p}{\|\varphi_p\|_\infty} \right\}_{p=1}^{+\infty} \tag{3.13}$$

Lema 3.2. *O espaço E é um subespaço de $\mathcal{C}[0,1]$ isomorfo ao espaço ℓ_1. Além disso, sua base é uma sequência básica equivalente a base unitária do espaço ℓ_1.*

Demonstração. A priori deixe-nos mostrar que

$$\|\varphi_i\|_\infty \leq \frac{2}{7} \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |\varphi_i(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|\sum_{r\in\sigma_i} u_r(t)\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{r\in\sigma_i} |u_r(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{r\in\sigma_i} \frac{1}{4\cdot 8^{r-1}} \\
&= \sum_{r\in\sigma_i} \frac{1}{4\cdot 8^{r-1}} \leq \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{4\cdot 8^{r-1}} = \frac{2}{7}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

A partir daqui, mostraremos que existem constantes positivas C_1 e C_2 de maneira que para cada $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ obtem-se

$$C_1 \cdot \left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\|_1 \leq \left\|\sum_{i=1}^n a_i \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_\infty}\right\|_\infty \leq C_2 \cdot \left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\|_1.$$

Com esse intuito, fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Feito isso, escolha

$$t_0 := \min\left\{t \in [0,1] : u_{2^{n-1}}(t) = \frac{1}{4\cdot 8^{2^{n-1}-1}}\right\},$$

considere o fato de $u_m(t) \leq \dfrac{1}{4\cdot 8^{m-1}}$ e note que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r\in\sigma_i \\ r>2^{n-1}}} u_r &\leq \sum_{\substack{r\in\sigma_i \\ r>2^{n-1}}} \frac{1}{4\cdot 8^{r-1}} \leq \sum_{\substack{r\in\mathbb{N} \\ r>2^{n-1}}} \frac{1}{4\cdot 8^{r-1}} \\
&= \frac{2}{7\cdot 8^{2^{n-1}}} < \frac{1}{4\cdot 8^{2^{n-1}-1}} := u_{2^{n-1}}(t_0).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Assim, segue de (3.16) e do fato de que $u_r(t_0) = u_{2^{n-1}}(t_0)$, para cada $r \leq 2^{n-1}$ (ver gráfico de u_m para o caso $m = 2$ em (3.2)), que $\varphi_i(t_0) \geq u_{2^{n-1}}(t_0) > 0$, fazendo com que

$$\|\varphi_i\|_\infty > 0$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Escolha $m_1, m_2 > 2^{n-1}$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{N}$) de modo que

$$u_{m_1}(t_0) = \frac{1}{4 \cdot 8^{m_1-1}}$$

e

$$u_{m_2}(t_0) = -\frac{1}{4 \cdot 8^{m_2-1}}$$

Como $u_{2^{n-1}}(t_0)$ aparece como um dos termos de $\varphi_i(t_0) := \sum_{r \in \sigma_i} u_r(t_0)$, para cada $\{1, \dots n\}$ (basta tomar $m = 2^{n-i}$ em (3.11)) e $u_{2^{n-1}}(t_0) = \frac{1}{4 \cdot 8^{2^{n-1}-1}} > \frac{1}{4 \cdot 8^{m_1-1}}$, tem-se que

$$\varphi_i(t_0) > u_{m_j}(t_0) \tag{3.17}$$

para todo $i \in \{1, \dots n\}$ e cada $j \in \{1, 2\}$.

Assim, para $C_2 \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$0 < C_2 \leq \min\left\{\frac{7}{8^{m_1}}, \frac{7}{8^{m_2}}\right\}.$$

concluimos através de (3.17), do uso de $u_{m_1}(t_0)$ para o caso em que $a_i > 0$ e $u_{m_2}(t_0)$ para o caso em que $a_i < 0$ ($i = 1, \dots n$) que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_\infty}\right\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\varphi_i(t)}{\|\varphi_i\|_\infty}\right| \geq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\varphi_i(t_0)}{\|\varphi_i\|_\infty}\right| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{u_{m_j}(t_0)}{\|\varphi_i\|_\infty}\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \frac{u_{m_j}(t_0)}{\|\varphi_i\|_\infty} \\
&\geq C_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i| = C_2 \cdot \|(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)\|_1 \\
&= C_2 \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_1 .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dessa forma, segue de (3.18), do fato de que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_\infty}\right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \left\|\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_\infty}\right\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_1 \tag{3.19}$$

e do Teorema 1.4 que E é isomorfo a ℓ_1 e que $\left\{\dfrac{\varphi_p}{\|\varphi_p\|_\infty}\right\}_{p=1}^{+\infty}$ é uma sequência básica de E equivalente a base unitária de ℓ_1. O que completa a prova do Lema. $\square$

De forma particular, isto nos diz que E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Já o fato de E ser fechado em $\mathcal{C}[0,1]$, decorre da maneira como o mesmo foi construído.

Mostraremos agora que E é constituído, a menos da função nula, apenas por funções contínuas não diferenciáveis em nenhum ponto. Em outras palavras, verificaremos que $E \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{ND}[0,1]$. Para isso, tome arbitrariamente $\psi \in E = \overline{span}\left\{\dfrac{\varphi_p}{\|\varphi_p\|_\infty}\right\}_{p=1}^{+\infty}$ não-nula. Como $\left\{\dfrac{\varphi_p}{\|\varphi_p\|_\infty}\right\}_{p=1}^{+\infty}$ é sequência básica para E (ver Lema 3.2), existem $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$\psi = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot \varphi_i$$

Mais precisamente,

$$\psi = \sum_{i=q_0}^{+\infty} a_i \cdot \varphi_i, \tag{3.20}$$

onde $q_0 := \min\{i : a_i \neq 0\}$. Suponha por absurdo que $\psi'(x_0)$ exista para algum $x_0 \in [0,1]$. Assim, para $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{|a_{q_0}|}{4}\right)$, existe $j > q_0$, $j \in \mathbb{N}$, tal que se x e x' satisfazem $|x - x_0| < \dfrac{1}{8^{2^j}}$ e $|x' - x_0| < \dfrac{1}{8^{2^j}}$, então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} - \frac{\psi(x')-\psi(x_0)}{x'-x_0}\right| &= \left|\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} - \psi'(x_0) + \psi'(x_0) - \frac{\psi(x')-\psi(x_0)}{x'-x_0}\right| \\
&\leq \left|\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} - \psi'(x_0)\right| + \left|\frac{\psi(x')-\psi(x_0)}{x'-x_0} - \psi'(x_0)\right| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\cdot\varepsilon < \frac{|a_{q_0}|}{2}.
\end{aligned}$$

Passo 5. Fixe $n = 2^{j+1}$.

Como $[0,1]$ pode ser escrito como a união entre os $J_{n,s,l}$ (veja as Figuras 3.3 e 3.4) existem $l_0 \in \{0, 1, \ldots, 8^{n-1} - 1\}$ e $s_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tais que $x_0 \in J_{n,s_0,l_0}$. Além disso, como

$$|J_{n,s_0,l_0}| = \left| \left[\frac{l_0 + (s_0 - 1)/4}{8^{n-1}}, \frac{l_0 + s_0/4}{8^{n-1}} \right] \right| = \frac{1}{4 \cdot 8^{n-1}},$$

e

$$\frac{1}{8^n} < \frac{1}{4 \cdot 8^{n-1}} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 8^{n-1} < 8^n \Leftrightarrow 4 < 8$$

existe pelo menos um $x \in [0, 1]$ tal que

(1) $|x - x_0| = \dfrac{1}{8^n}$

(2) O intervalo de extremos x e x_0 esteja contido no intervalo J_{n,s_0,l_0}.

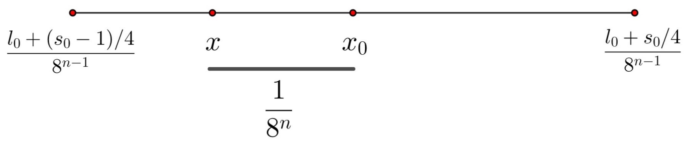


Figura 3.5: o intervalo J_{n,s_0,l_0}

Lema 3.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. O período comum entre as funções u_n, u_{n+1}, $\ldots$ é igual a 8^{-n}.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$ dado arbitrariamente. A própria maneira como u_m foi definida (ver (3.2)) leva-nos a

$$\begin{aligned} u_{n+r}\left(x + 8^{-n}\right) &:= 8^{1-(n+r)} \cdot u_1\left(8^{n+r-1} \cdot \left(x + 8^{-n}\right)\right) \\ &= 8^{1-(n+r)} \cdot u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1}\right), \end{aligned} \tag{3.21}$$

para cada $r \geq 0$ ($r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Como u_1 é periódica com período 1, podemos somar e subtrair o número 1 a expressão $8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1}$ e obter

$$\begin{aligned} u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1}\right) &= u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1} - 1 + 1\right) \\ &= u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1} - 1\right) \\ &= u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1} - 1 - 1 + 1\right) \vdots \\ &= u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1} - 2\right) \\ &\vdots \\ &= u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

para cada $r \in \mathbb{N}$.

De (3.21) e (3.22) segue que

$$\begin{aligned} u_{n+r}\left(x+8^{-n}\right) &= 8^{1-(n+r)} \cdot u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x + 8^{r-1}\right) \\ &= 8^{1-(n+r)} \cdot u_1\left(8^{n+r-1} \cdot x\right) \\ &=: u_{n+r}\left(x\right), \end{aligned}$$

para todo $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo as funções $u_n, u_{n+1}, \ldots$ possuem período 8^{-n}, como queríamos. $\square$

Agora, segue de (3.12) e (3.20) que

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\sum_{i=q_0}^{+\infty} a_i \cdot \varphi_i(x) - \sum_{i=q_0}^{+\infty} a_i \cdot \varphi_i(x_0)}{x-x_0} = \sum_{i=q_0}^{+\infty} a_i \cdot \frac{\left[\sum_{r\in\sigma_i} u_r(x) - \sum_{r\in\sigma_i} u_r(x_0)\right]}{x-x_0} \\ &= \sum_{i=q_0}^{+\infty} a_i \cdot \sum_{r\in\sigma_i} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pelo Lema 3.3 e do fato que $x = x_0 \pm \frac{1}{8^n}$, segue que

$$u_r(x) = u_r(x_0), \tag{3.24}$$

para todo $r \geq n$.

Perceba que

$$2^{i-1} = \min\{m \cdot 2^{i-1} : m \in \mathbb{N}\} =: \min \sigma_i, \text{ para cada } \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Assim, se $i \in \{i \in \mathbb{N} : 2^{i-1} \geq n\}$, então

$$r \in \sigma_i \quad \Rightarrow \quad r \geq \min \sigma_i = 2^{i-1} \geq n.$$

Assim, $u_r(x) = u_r(x_0)$ de acordo com (3.24). Com isso,

$$\sum_{\substack{i \geq q_0 \\ 2^{i-1} \geq n}} a_i \sum_{r\in\sigma_i} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0} = 0. \tag{3.26}$$

Como

$$\sum_{i=q_0}^{+\infty} a_i \sum_{r\in\sigma_i} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0} = \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\sigma_i} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0} + \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}> n}} a_i \sum_{r\in\sigma_i} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0},$$

obtém-se que (veja (3.23))

$$\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} = \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\sigma_i} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0}.$$

Seja m_i o maior número natural tal que $m_i \cdot 2^{i-1} \leq n$. Note que $t \in \{\eta \in \mathbb{N} : \eta > m_i\}$ implica $t \cdot 2^{i-1} > n$.

O fato de $r \in \{\eta \cdot 2^{i-1} : \eta > m_i\}$ faz com que $r > n$ (basta lembrar da propriedade acima satisfeita por m_i). Como $\sigma_i = \{\eta \cdot 2^{i-1} : \eta \leq m_i\} \cup \{\eta \cdot 2^{i-1} : \eta > m_i\}$, tem-se (através de (3.24)) que

$$\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\eta>m_i\}} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0} = 0. \tag{3.27}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} &= \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\sigma_i} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0} \\
&= \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\eta\leq m_i\}} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0} + \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\eta>m_i\}} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0} \\
&= \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\eta\leq m_i\}} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0}.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{u_p(x)-u_p(x_0)}{x-x_0} = \pm 1,$$

para cada $p \in \{1, \ldots, n\}$ (veja (3.10)) e

$$r \in \{\eta \cdot 2^{i-1} : \eta \leq m_i\} \Rightarrow r \leq n$$

podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} &= \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\eta\leq m_i\}} \frac{u_r(x)-u_r(x_0)}{x-x_0}\\
&= \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n}} a_i \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\eta\leq m_i\}} \pm 1. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Afirmação 3.1. *Para $n' = n + 2^{q_0-1}$, existe $S \subseteq \{0,1,\ldots,8^{n'-1}-1\}$ tal que*

$$
J_{n,s,l} = \bigcup_{\substack{s'\in\{i\}_{i=1}^4\\ l'\in S}} J_{n',s',l'}.
$$

Demonstração. A priori, tome $\lambda_0 = 8^{2^{q_0-1}}\cdot l + 8^{2^{q_0-1}}\cdot\frac{s}{4} - 1$ e note que $\lambda_0 \in \mathbb{N}$ $(8^{2^{q_0-1}}\cdot\frac{s}{4}\in\mathbb{N})$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\frac{l+s/4}{8^{n-1}} = \frac{\lambda_0+1}{8^{n'-1}} &\Leftrightarrow (l+s/4)\cdot 8^{n'-n} = \lambda_0+1\\
&\Leftrightarrow \lambda_0 = 8^{2^{q_0-1}}\cdot l + 8^{2^{q_0-1}}\cdot\frac{s}{4} - 1. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Perceba que

$$
0\leq l\leq 8^{n-1}-1 \Rightarrow 0\leq 8^{2^{q_0-1}}\cdot l \leq 8^{n+2^{q_0-1}-1} - 8^{2^{q_0-1}} = 8^{n'-1} - 8^{2^{q_0-1}}. \qquad (3.30)
$$

Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
1\leq s\leq 4 &\Rightarrow \frac{1}{4}\leq\frac{s}{4}\leq 1 \Rightarrow \frac{8^{2^{q_0-1}}}{4} \leq \frac{8^{2^{q_0-1}}\cdot s}{4} \leq 8^{2^{q_0-1}}\\
&\Rightarrow \frac{8^{2^{q_0-1}}}{4} - 1 \leq \frac{8^{2^{q_0-1}}\cdot s}{4} - 1 \leq 8^{2^{q_0-1}} - 1 \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que $\lambda_0 \in \{0,\ldots,8^{n'-1}-1\}$

Com efeito, note a partir de (3.30) e (3.31) que

$$
0 < \frac{8^{2^{q_0-1}}}{4} - 1 \leq \lambda_0 = 8^{2^{q_0-1}}\cdot l + 8^{2^{q_0-1}}\cdot\frac{s}{4} - 1 \leq 8^{n'-1} - 8^{2^{q_0-1}} + 8^{2^{q_0-1}} - 1 = 8^{n'-1} - 1.
$$

como queriamos.

Agora tome $\lambda_0' = 8^{2^{q-1}} \cdot l + 8^{2^{q_0-1}} \cdot \dfrac{s}{4} - \dfrac{8^{2^{q_0-1}}}{4}$ e note que $\lambda_0' \in \mathbb{N}(8^{2^{q_0-1}} \cdot \dfrac{s}{4} \in \mathbb{N})$. Perceba que

$$\begin{aligned}
\frac{l + (s-1)/4}{8^{n-1}} = \frac{\lambda_0'}{8^{n'-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad (l + (s-1)/4) \cdot 8^{n'-n} = \lambda_0' \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_0' = 8^{2^{q_0-1}} \cdot l + 8^{2^{q_0-1}} \cdot \frac{(s-1)}{4} \\
&= \quad 8^{2^{q_0-1}} \cdot l + 8^{2^{q_0-1}} \cdot \frac{s}{4} - \frac{8^{2^{q_0-1}}}{4}. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Diante de (3.30) e (3.31)

$$0 \leq \lambda_0' = 8^{2^{q_0-1}} \cdot l + 8^{2^{q_0-1}} \cdot \frac{s}{4} - \frac{8^{2^{q_0-1}}}{4} \leq 8^{n'-1} - 8^{2^{q_0-1}} + 8^{2^{q_0-1}} - \frac{8^{2^{q_0-1}}}{4} < 8^{n'-1} - 1.$$

O que mostra que $\lambda_0' \in \{0, \ldots, 8^{n'-1} - 1\}$.

Como $\dfrac{\lambda_0'}{8^{n'-1}} = \dfrac{\lambda_0' + (1-1)/4}{8^{n'-1}}$ é o extremo esquerdo do intervalo $J_{n',1,\lambda_0'}$ e $\dfrac{\lambda_0 + 1}{8^{n'-1}} = \dfrac{\lambda_0 + 4/4}{8^{n'-1}}$ é o extremo direito do intervalo $J_{n',4,\lambda_0}$ segue de (3.29) e (3.32)

$$J_{n',1,\lambda_0'} \subset J_{n,s,l}$$

e

$$J_{n',4,\lambda_0} \subset J_{n,s,l}.$$

Com isso, todos os intervalos da forma $J_{n',s',l'}$ que se encontram entre os intervalos $J_{n',1,\lambda_0'}$ e $J_{n',4,\lambda_0}$ se encontram contidos em $J_{n,s,l}$. Isto prova a afirmação em questão. $\square$

Passo 6. Tome $n' = n + 2^{q_0-1}$.

De acordo com a Afirmação 3.1, existem $s' \in \{i\}_{i=1}^4$ e $l' \in \{0, 1, \ldots, 8^{n'-1} - 1\}$ tais que

$$x_0 \in J_{n',s',l'} \quad \text{e} \quad J_{n',s',l'} \subseteq J_{n,s,l}. \qquad (3.33)$$

Saber que $\dfrac{1}{8^{n'}} < \dfrac{1}{4 \cdot 8^{n'-1}} = |J_{n',s',l'}|$, nos dá condições de exibir $x' \in [0,1]$ de modo que

- $|x' - x_0| = \dfrac{1}{8^{n'}}$;
- O intervalo cujos extremos são x' e x_0 esteja contido em $J_{n',s',l'}$.

Agindo de forma análoga ao que foi feito a partir do Lema 3.3, chegamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(x')-\psi(x_0)}{x'-x_0} &= \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n'}} a_i \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\, \eta\leq m_i'\}} \frac{u_r(x')-u_r(x_0)}{x'-x_0}\\
&= \sum_{\substack{i\geq q_0\\ 2^{i-1}\leq n'}} a_i \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\, \eta\leq m_i'\}} \pm 1. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

sendo m_i' o maior número natural que satisfaz $m_i'\cdot 2^{i-1}\leq n'$. Das equações (3.28) e (3.34) segue que,

$$\begin{aligned}
&\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} - \frac{\psi(x')-\psi(x_0)}{x'-x_0} =\\
&= \sum_{i\in\{i\geq q_0:\, 2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\, \eta\leq m_i\}} \pm 1\right) - \sum_{i\in\{i\geq q_0:\, 2^{i-1}\leq n'\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\, \eta\leq m_i'\}} \pm 1\right)\\
&= a_{q_0}\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{q_0-1}:\, \eta\leq m_{q_0}\}} \pm 1 - \sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{q_0-1}:\, \eta\leq m_{q_0}'\}} \pm 1\right) + \sum_{i\in\{i>q_0:\, 2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\, \eta\leq m_i\}} \pm 1\right) -\\
&\quad \sum_{i\in\{i>q_0:\, 2^{i-1}\leq n'\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}:\, \eta\leq m_i'\}} \pm 1\right). \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $m_i = m_i'$, para o caso $i > q_0$ e também que $m_{q_0}' = m_{q_0}+1$. Com efeito, de $m_i\cdot 2^{i-1}\leq n$ e $m_i'\cdot 2^{i-1}\leq n'$ obtém-se que

$$(m_i'-m_i)\cdot 2^{i-1} \leq n'-n, \quad \forall \quad i\geq q_0. \qquad (3.36)$$

Como $n'-n = 2^{q_0-1}$, concluimos que

$$(m_i'-m_i)\cdot 2^{i-1}\leq 2^{q_0-1},$$

No entanto, a condição $i>q_0$ faz com que $2^{i-1} > 2^{q_0-1}$. Sendo assim,

$$m_i' = m_i. \qquad (3.37)$$

Ainda de (3.36) temos que

$$\left(m_{q_0}'-m_{q_0}\right)\cdot 2^{q_0-1}\leq n'-n = 2^{q_0-1},$$

e assim,

$$m'_{q_0} - m_{q_0} \leq 1.$$

Logo,

$$\text{ou} \quad m'_{q_0} = m_{q_0} \quad \text{ou} \quad m'_{q_0} = m_{q_0} + 1.$$

Considere que $m'_{q_0} = m_{q_0}$. Assim,

$$\left(m'_{q_0} + 1\right) \cdot 2^{q_0-1} = m'_{q_0} \cdot 2^{q_0-1} + 2^{q_0-1} \leq n + 2^{q_0-1} = n'$$

o que gera um absurdo devido a m'_{q_0} ser o maior inteiro não negativo que satisfaz $m'_{q_0} \cdot 2^{q_0-1} \leq n'$. Portanto,

$$m'_{q_0} = m_{q_0} + 1. \tag{3.38}$$

Devido aos fatos listados abaixo,

- $J_{n',s'_0,l'_0} \subseteq J_{n,s,l}$
- u_r ser afim em $J_{n,s,l}$ $(r = 1, \ldots, n)$
- Equação (3.10)

tem-se o seguinte:

$$\text{ou} \quad \frac{u_r(x) - u_r(x_0)}{x - x_0} = \frac{u_r(x') - u_r(x_0)}{x' - x_0} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{u_r(x) - u_r(x_0)}{x - x_0} = \frac{u_r(x') - u_r(x_0)}{x' - x_0} = -1.$$

Utilizando (3.37)) segue que

$$\left(\sum_{r \in \{\eta \cdot 2^{i-1} :\, \eta \leq m_i\}} \pm 1\right) = \left(\sum_{r \in \{\eta \cdot 2^{i-1} :\, \eta \leq m'_i\}} \pm 1\right), \quad \forall \quad i > q_0. \tag{3.39}$$

Para dar continuidade a (3.35), precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.4. $\{i > q_0 \colon 2^{i-1} \leq n\} = \{i > q_0 \colon 2^{i-1} \leq n'\}$.

Demonstração. Note que $\{i > q_0 \colon 2^{i-1} \leq n\} \subseteq \{i > q_0 \colon 2^{i-1} \leq n'\}$, uma vez que $n < n'$. Suponha que exista $i \in \{i > q_0 \colon 2^{i-1} \leq n'\}$, com $2^{i-1} > n$. De $n < 2^{i-1}$, temos que $2^{j+1} < 2^{i-1}$. Com isso, $j + 1 < i - 1$. Isto é, $i > j + 2$.

Por outro lado, de $2^{i-1} \leq n'$ temos que $2^{i-1} \leq 2^{j+1} + 2^{q_0-1} < 2^{j+1} + 2^{j+1} = 2^{j+2}$ (lembre que $n = 2^{j+1}$) ímplicando que $i - 1 < j + 2$. Assim, $i < j + 3$. Porém, isto gera um absurdo, devido a $i \in \mathbb{N}$. Portanto, $\{i > q_0 \colon 2^{i-1} \leq n\} = \{i > q_0 \colon 2^{i-1} \leq n'\}$ como queríamos. $\square$

Usando o Lema 3.4 assim como as igualdades (3.37), (3.38) e (3.39), podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}-\frac{\psi(x')-\psi(x_0)}{x'-x_0}= \\
= \;& \sum_{i\in\{i\geq q_0\,:\,2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right)-\sum_{i\in\{i\geq q_0\,:\,2^{i-1}\leq n'\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i'\}}\pm 1\right) \\
= \;& a_{q_0}\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{q_0-1}\,:\,\eta\leq m_{q_0}\}}\pm 1-\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{q_0-1}\,:\,\eta\leq m_{q_0}'\}}\pm 1\right)+\sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right)- \\
& \sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n'\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i'\}}\pm 1\right) \\
= \;& a_{q_0}\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{q_0-1}\,:\,\eta\leq m_{q_0}\}}\pm 1-\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{q_0-1}\,:\,\eta\leq m_{q_0}'=m_{q_0}+1\}}\pm 1\right)+\sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right)- \\
& \sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n'\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right) \\
= \;& a_{q_0}\cdot(\pm 1)+\sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right)-\sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n'\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right) \\
= \;& a_{q_0}\cdot(\pm 1)+\sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right)-\sum_{i\in\{i> q_0\,:\,2^{i-1}\leq n\}} a_i\cdot\left(\sum_{r\in\{\eta\cdot 2^{i-1}\,:\,\eta\leq m_i\}}\pm 1\right) \\
= \;& a_{q_0}\cdot(\pm 1).
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$\left|\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}-\frac{\psi(x')-\psi(x_0)}{x'-x_0}\right|=|a_{q_0}\cdot(\pm 1)|=|a_{q_0}|>|a_{q0}|/2,$$

o que é um absurdo (ver (3.21)). Portanto, $E\setminus\{0\}\subseteq\mathcal{ND}[0,1]$ como queríamos.

Afim de verificar que existe um subconjunto Lebesgue-mensurável $A\subseteq[0,1]$ com medida igual a 1, para o qual $\psi_{|A}\in\mathcal{ND}_{\pm}(A)$, para cada $\psi\in E\setminus\{0\}$ façamos o seguinte: Para cada $q\in\mathbb{N}$, considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{D}_q=\left\{m=2^{j+1}+k\cdot 2^{q-1}\colon j\in\mathbb{N},k=0,1\right\}.$$

Podemos reordenar os elementos de $\mathcal{D}_q$, colocando-os em ordem crescente:

$$\mathcal{D}_q = \left\{ n_1^{(q)} < n_2^{(q)} < \dots \right\}$$

Considere cada $x \in [0,1]$ na base 8, ou seja, $x = 0.x_1x_2\dots x_p\dots$ com $x_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ e que x_p é o p-ésimo dígito da expansão de x na base 8. Seja

$$A_q := \{x = 0.x_1x_2\dots x_p\dots \in [0,1] \colon x \quad \text{satisfaz} \quad \mathcal{P}\} \tag{3.40}$$

sendo $\mathcal{P}$ a seguinte propriedade: Para cada $l \in \mathbb{N}$, existe $s > l$ tal que

$$\left(x_{n_s^{(q)}}, x_{n_{(s+1)}^{(q)}}, x_{n_{(s+2)}^{(q)}}, x_{n_{(s+3)}^{(q)}}, x_{n_{(s+4)}^{(q)}}, x_{n_{(s+5)}^{(q)}} \right) = (1,1,1,2,2,2)\,.$$

Lema 3.5. *O conjunto A_q definido em (3.40) satisfaz as seguintes condições:*

(a) *A_q é denso em [0,1];*

(b) *A_q é Lebesgue-mensurável;*

(c) *A_q possui medida de Lebesgue 1, isto é, $m(A_q) = 1$.*

Demonstração. Para provar o item **(a)**, tome arbitrariamente $x = 0.x_1x_2\dots x_p\dots \in [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, escolha $j_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\dfrac{1}{8^{n_{j_0}^{(q)}}} < \varepsilon$. Feito isso, tome $y = 0.y_1y_2\dots y_p\dots$ de maneira que

- $y_i = x_i$, para cada $i = 1, \dots, n_{j_0}^{(q)}, n_{j_0}^{(q)} + 1$;
- para cada $l \in \mathbb{N}$, seja possível encontrar $s > \max\{l, j_0\}$ tal que

$$\left(y_{n_s^{(q)}}, y_{n_{(s+1)}^{(q)}}, y_{n_{(s+2)}^{(q)}}, y_{n_{(s+3)}^{(q)}}, y_{n_{(s+4)}^{(q)}}, y_{n_{(s+5)}^{(q)}} \right) = (1,1,1,2,2,2)\,.$$

A maneira como y foi tomado faz com que o mesmo satisfaça a propriedade $\mathcal{P}$, ou seja, $y \in A_q$. Além disso, como

$$|y-x| = |0.\underbrace{00\dots00}_{(n_{j_0}^{(q)}+1)-\text{vezes}}(y_{n_{j_0}^{(q)}+2} - x_{n_{j_0}^{(q)}+2})\dots| = |0,(y_{n_{j_0}^{(q)}+2} - x_{n_{j_0}^{(q)}+2})\dots \quad \times \quad 8^{-n_{j_0}^{(q)}}| < \frac{1}{8^{n_{j_0}^{(q)}}} < \varepsilon$$

podemos deduzir que $x \in \overline{A_q}$, e isto prova o **(a)**.

Para provar o item **(b)**, defina $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{N})$ de tal forma que $f_i(x) = x_{n_i^{(q)}}$, para todo $x = 0.x_1x_2\dots x_p\dots \in [0,1]$. Perceba que cada f_i é contínua. De fato, para cada $x = 0.x_1x_2\dots x_p\dots$ fixo em $[0,1]$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomando $0 < \delta < \dfrac{1}{8^{n_i^{(q)}}}$ segue que se $y = 0.y_1y_2\dots y_p\dots \in [0,1]$ é tal que $|y - x| < \delta$, então $x_j = y_j$, para todo $j \in \{1, 2, \dots n_i^{(q)}\}$. O que nos leva a $|f_i(x) - f_i(y)| = \left|x_{n_i^{(q)}} - y_{n_i^{(q)}}\right| = |0| < \varepsilon$.

A própria maneira como A_q foi definido remete que

$$A_q = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{s>l} \left(g^l\right)^{-1} \left(\{(1,1,1,2,2,2)\}\right),$$

sendo $g^m(x) := (f_m(x), \dots, f_{m+5}(x))$, para cada $x \in [0,1]$ (aqui, $m \in \mathbb{N}$). Como cada g^m é contínua, (suas funções coordenadas são contínuas) e toda função contínua definida num espaço de medida é mensurável, tem-se que g^m é mensurável. O fato da união enumerável de conjuntos mensuráveis ser mensurável faz com que A_q possa ser visto como interseção enumerável de conjuntos mensuráveis, o que por sua vez é também um conjunto mensurável, provando assim **(b)**.

Resta provar o **item (c)**. Com efeito, o conjunto A_q foi definido como sendo um subconjunto de $[0,1]$. Como A_q é mensurável tem-se que $m(A_q) = m^*(A_q) \leq 1$ (aqui, m^* denota a medida exterior). Suponha por absurdo que $m(A_q) < 1$. Como $m^*(A_q) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| : A_q \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\}$, onde $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de intervalos abertos, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos $\left(I_k^{(q)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ cobrindo A_q de modo que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|I_k^{(q)}\right| =: r < 1. \tag{3.41}$$

Digamos que $I_k^{(q)} := \left(a_k^{(q)}, b_k^{(q)}\right)$, com $a_k^{(q)}, b_k^{(q)} \in \mathbb{R}$. Sem perder generalidade, considere que

- $I_k^{(q)} := \left(a_k^{(q)}, b_k^{(q)}\right) \subseteq [0,1]$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (isto é possível haja vista que qualquer aberto cobrindo A_q intersecta $(0,1)$);

- $a_{k+1}^{(q)} = b_k^{(q)}$, para cada k fixo. (isto é possível, pois cada intervalo aberto pode ser escrito como união disjunta entre intervalos abertos, de acordo com o Lema 1.4).

Diante disso,

$$A_q \subseteq \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} \left(a_k^{(q)}, b_k^{(q)}\right)$$

sendo que

$$r =: \sum_{k=1}^{+\infty} \left| I_k^{(q)} \right| = m\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} I_k^{(q)} \right) = m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{I_k^{(q)}} \right) = m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[a_k^{(q)}, b_k^{(q)} \right] \right) = m\,(I)$$

sendo $I = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[a_k^{(q)}, b_k^{(q)} \right]$. Note que I trata-se de um intervalo (união de intervalos fechados subsequentes com extremos em comum) contendo A_q cujo comprimento r por sua vez é menor que 1 (ver (3.41)). Isto significa que seu complementar em $[0,1]$, ou é um intervalo não-degenerado, ou se trata da união de dois intervalos não-degenerados, o que é um absurdo em virtude de **(a)**. Dessa forma, $m\,(A_q) = 1$ e isto prova **(c)**. $\square$

Passo 7. Tome $A = \bigcap_{q\geq 1} A_q$.

Perceba que A é uma interseção enumerável de conjuntos mensuráveis, pois de acordo com o item **(a)** do Lema 3.5 cada A_q é mensurável. Sendo assim, A é mensurável. Note também que $m\,(A) \leq 1$, devido a $A \subseteq A_q \subseteq [0,1]$, para todo $q \geq 1$. Como $A^{\complement} = \left(\bigcap_{q\geq 1} A_q \right)^{\complement} = \bigcup_{q\geq 1} A_q^c$, inferimos que $0 \leq m\left(A^{\complement}\right) = m\left(\bigcup_{q\geq 1} A_q^c \right) \leq \sum_{q\geq 1} m\left(A_q^{\complement}\right)$. Como $m\left(A_q^{\complement}\right) = 0$, para cada $q \geq 1$, concluimos que $m\left(A^{\complement}\right) = 0$. Dessa forma, $m\,(A) = 1$.

Com o intuito de verificar que $\psi_{|A} \in \mathcal{ND}_{\pm}\,(A)$, para todo $\psi \in E \setminus \{0\}$, suponha que $\psi'_+(z_0)$ existe para algum $z_0 = 0.z_1 z_2 \ldots z_p \ldots \in A$. Assim, para $\varepsilon \in \left(0, \frac{|a_{q_0}|}{4}\right)$, escolha $j > q_0$, $j \in \mathbb{N}$, de tal forma que se x e x' são tais que $x - z_0 < \frac{1}{8^{2^j}}$ e $x' - z_0 < \frac{1}{8^{2^j}}$, então

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi(x)-\psi(z_0)}{x-z_0} - \frac{\psi(x')-\psi(z_0)}{x'-z_0} \right| &= \left| \frac{\psi(x)-\psi(z_0)}{x-z_0} - \psi'_+(z_0) + \psi'_+(z_0) - \frac{\psi(x')-\psi(z_0)}{x'-z_0} \right| \\ &\leq \left| \frac{\psi(x)-\psi(z_0)}{x-x_0} - \psi'_+(z_0) \right| + \left| \frac{\psi(x')-\psi(z_0)}{x'-z_0} - \psi'_+(z_0) \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\cdot\varepsilon < \frac{|a_{q_0}|}{2}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ainda considerando $n = 2^{j+1}$ e $n' = n + 2^{q_0-1}$, procederemos como feito a partir do **passo 5**. Dessa forma, existem $s \in \{1,2,3,4\}$ e $l \in \{0,1,\ldots,8^{n-1}-1\}$ tais que $z_0 \in J_{n,s,l}$, assim como existem $s' \in \{1,2,3,4\}$ e $l' \in \{0,1,\ldots,8^{n'-1}-1\}$ tais que $z_0 \in J_{n',s',l'}$.

Passo 8. Escolha $j' \geq j$ de modo que

- $\frac{l'' + s''/4}{8^{2^{j'+1}-1}} - z_0 \geq \frac{1}{8^{2^{j'+1}}}$, para algum $s'' \in \{1,2,3,4\}$ e algum $l'' \in \{0,1,\ldots,8^{2^{j'+1}-1} -$

1} (perceba que isto é possível, pois como $z_0 \in A$, então $z_0 < 1$ e o intervalo $[0,1]$ pode ser escrito como união dos conjuntos $J_{m,s,l}$, para cada $m \in \mathbb{N}$);

- $z_0 \in J_{2^{j'+1},s'',l''}$;
- $z_{2^{j'+1}} = z_{2^{j'+1}+2^{q_0-1}} = 1$, (e isto é possível, uma vez que $z_0 \in A = \bigcap_{q\geq 1} A_q \subseteq A_{q_0}$).

Estes três itens nos permitem exibir $x \in A$, com $x > z_0$ de tal forma que $x - z_0 = \dfrac{1}{8^{2^{j'+1}}}$ e $[z_0, x] \subseteq J_{2^{j'+1},s,l}$, (para isso, basta tomar $x = 0.y_1y_2\ldots y_p\ldots$ com $y_{2^{j'+1}} = 2$ e $y_r = z_r$, para todo $r \neq 2^{j'+1}$) assim como $x' \in A$, com $x' > z_0$, tal que $x' - z_0 = \dfrac{1}{8^{2^{j'+1}+2^{q-1}}}$ e $[z_0, x'] \subseteq J_{2^{j'+1}+2^{q-1},s',l'}$,(para isso, basta tomar $x' = 0.w_1w_2\ldots w_p\ldots$ com $w_{2^{j'+1}+2^{q_0-1}} = 2$ e $w_r = z_r$, para todo $r \neq 2^{j'+1}+2^{q_0-1}$). Como as contas a partir daqui se tornam análogas as contas feitas a partir do Lema 3.3, podemos concluir que $\psi'_+(z_0)$ não existe.

Com isso, resta-nos provar que $\psi'_-(t)$ não existe seja qual for o $t \in A$. Para isso, suponha por absurdo que $\psi'_-(t)$ exista, para algum $t = 0.t_1t_2\ldots t_p\ldots \in A$. Assim, para $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{|a_{q_0}|}{4}\right)$, escolha $j > q_0$, $j \in \mathbb{N}$, de maneira que se x e x' são tais que $t - x < 1/8^{2^j}$ e $t - x' < 1/8^{2^j}$, então

$$\left|\frac{\psi(x)-\psi(t)}{x-t} - \frac{\psi(x')-\psi(t)}{x'-t}\right| < \frac{|a_{q_0}|}{2}.$$

Como já visto anteriormente, é possível encontrar $s \in \{1,2,3,4\}$ e $l \in \{0,1,\ldots,8^{n-1}-1\}$ tais que $t \in J_{n,s,l}$, assim como $s' \in \{1,2,3,4\}$ e $l' \in \{0,1,\ldots,8^{n'-1}-1\}$ tais que $t \in J_{n',s',l'}$, logo podemos escolher $j'' \geq j$ de forma que

- $t - \dfrac{l''+(s''-1)/4}{8^{2^{j''+1}-1}} \geq \dfrac{1}{8^{2^{j''+1}}}$, para algum $s'' \in \{1,2,3,4\}$ e algum $l'' \in \{0,1,\ldots,8^{2^{j''+1}-1}-1\}$,
- $t \in J_{2^{j''+1},s'',l''}$,
- $t_{2^{j''+1}} = t_{2^{j''+1}+2^{q_0-1}} = 2$.

e por consequência exibir $x \in A$, com $x < t$ de forma que $t - x = \dfrac{1}{8^{2^{j''+1}}}$ e $[x,t] \subseteq J_{2^{j''+1},s'',l''}$ (para isto, basta tomar $x = 0.x_1x_2\ldots x_p\ldots$ com $x_{2^{j''+1}} = 1$, assim como $x_r = t_r$, para todo $r \neq 2^{j''+1}$) e $x' \in A$, $x' < t$, $t - x' = \dfrac{1}{8^{2^{j''+1}+2^{q-1}}}$ e $[x', t] \subseteq J_{2^{j''+1}+2^{q-1},s'',l''}$ (para isto, basta tomar $x' = 0.w_1w_2\ldots w_p\ldots$ com $w_{2^{j''+1}+2^{q_0-1}} = 1$ e $w_r = t_r$, para todo $r \neq 2^{j''+1}+2^{q_0-1}$).

Como as contas a partir daqui se tornam análogas as contas feitas a partir do Lema 3.3, a nossa conclusão é que $\psi'_-(t)$ não existe. $\square$

3.1 O conjunto $\mathcal{ND}[0,1] \times$ Separabilidade de espaços de Banach

De acordo com o Teorema de Banach-Mazur (veja [6, Teorema 6.5.5, p.165]), cada espaço de Banach separável possui uma cópia isométrica em $\mathcal{C}[0,1]$. Ou seja, cada espaço Banach separável pode ser visto como um espaço de funções contínuas. Uma outra versão do Teorema de Banach-Mazur (veja [16]) diz que cada espaço de Banach separável é isométrico a um subespaço do conjunto $\mathcal{C}(\Delta)$, onde Δ é o conjunto de Cantor.

Nesta seção, provaremos um resultado do tipo Banach-Mazur, devido a Rodriguez-Piazza (veja [13]), o qual afirma que cada espaço Banach separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de $\mathcal{C}[0,1]$ formado, exceto pela função nula, apenas por funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto.

Nossa estratégia será construir um conjunto K conveniente e que seja homeomorfo a Δ. Por conseguinte, buscaremos construir um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}(K)$ e um subespaço em $\mathcal{ND}[0,1] \cup \{0\}$.

3.1.1 A construção de K

Optaremos por dividir a construção a seguir em alguns passos.

Passo 1. Tome uma sequência crescente de números naturais $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ de forma que

- $m_0 = 1$;
- $\dfrac{m_n}{m_{n-1}} \geq \dfrac{10 \cdot 2^{n+2}}{1/6}$, para cada $n = 1, 2, ...$;
- $\dfrac{m_n}{m_{n-1}}$ seja divisível por 4.

Temos que

$$\frac{m_n}{m_{n-1}} \geq \frac{10 \cdot 2^{n+2}}{1/6} \Leftrightarrow \frac{m_{n-1}}{m_n} \leq \frac{1/6}{10 \cdot 2^{n+2}} \tag{3.43}$$

e

$$\frac{m_k}{m_n} = \frac{m_{n-1} \cdot m_k}{m_{n-1} \cdot m_n} = \frac{m_{n-1}}{m_n} \cdot \frac{m_k}{m_{n-1}}, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.44}$$

Como

$$\frac{m_k}{m_{n-1}} \leq 1, \quad \text{para cada} \quad k \in \{1, 2, ..., n-1\} \tag{3.45}$$

segue de (3.43) e (3.44) que

$$\frac{m_k}{m_n} \leq \frac{m_{n-1}}{m_n} \leq \frac{1/6}{10 \cdot 2^{n+2}}, \quad \text{sempre que} \quad k \in \{1, 2, ..., n-1\}. \tag{3.46}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{n+1} \cdot m_k}{2^k \cdot m_n} &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{n+1}}{2^k} \cdot \frac{1/6}{10 \cdot 2^{n+2}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{1/6}{10} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{1/6}{10} \leq \frac{1/6}{10} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1/6}{2 \cdot 10} < \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Passo 2. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, escolha 2^n intervalos fechados e disjuntos $I_{n,j} := [a_{n,j}, b_{n,j}]$, com $j = 1, 2, ..., 2^n$, de modo que:

- Se r for menor que s, então qualquer elemento do interior de $I_{n,r}$ seja menor do que qualquer elemento do interior de $I_{n,s}$;
- $m_n \cdot a_{n,j}$ seja divisível por 4;
- $b_{n,j} - a_{n,j} = \dfrac{1}{m_n}$;
- Cada $I_{n,j}$ definido seja dividido em cinco subintervalos da forma $\{I_{n,j}^i\}_{i=1}^5$, cada um com comprimento $\dfrac{1}{5 \cdot m_n}$ (isto é possível, haja vista que a soma dos comprimentos dos cinco intervalos é igual a $5 \cdot \dfrac{1}{5 \cdot m_n} = \dfrac{1}{m_n} \leq 1$);

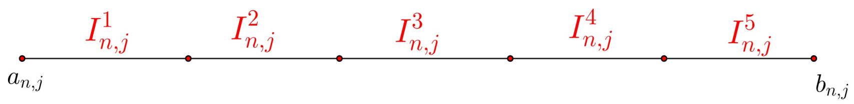


Figura 3.6: Os intervalos $I_{n,j}^i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- O intervalo $I_{n+1,j}$ seja escolhido partindo do princípio que

$$I_{n+1,2j-1} \subseteq I_{n,j}^2 \tag{3.48}$$

e

$$I_{n+1,2j} \subseteq I_{n,j}^4 \tag{3.49}$$

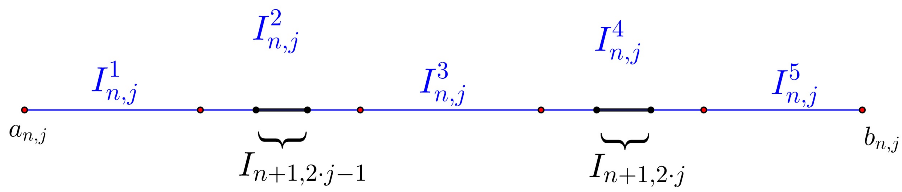


Figura 3.7: localização dos intervalos $I_{n+1,2j-1}$ e $I_{n+1,2j}$

para cada j.

De forma particular, o último item garante que

$$\dot{\bigcup}_{k=1}^{2^{n+1}} I_{n+1,k} \subsetneq \dot{\bigcup}_{k=1}^{2^n} I_{n,k}. \tag{3.50}$$

Mais ainda,

$$I_{n,j} \supsetneq I_{n+1,2j-1} \supsetneq I_{n+2,4j-3} \supsetneq \dots \tag{3.51}$$

e

$$I_{n,j} \supsetneq I_{n+1,2j} \supsetneq I_{n+2,4j} \supsetneq \dots. \tag{3.52}$$

De acordo com o Teorema 1.5, temos

$$\bigcap_{r=0}^{\infty} I_{n+r,2^r\cdot j-2^r+1} \neq \emptyset \tag{3.53}$$

e

$$\bigcap_{r=0}^{\infty} I_{n+r,2^r\cdot j} \neq \emptyset. \tag{3.54}$$

Em particular, tomando $r = 0$ em (3.53) ou (3.54), segue que existe $x \in [0,1]$ tal que

$$x_0 \in \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.55}$$

Passo 3. Tome $K_n := \dot{\bigcup}_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $K := \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$. Segue de (3.50) que

$$K_0 \supsetneq K_1 \supsetneq K_2 \supsetneq \dots K_{n-1} \supsetneq K_n \supsetneq \dots . \tag{3.56}$$

Mais ainda, segue de (3.55) que $x \in K_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em consequência,

$$K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Isto conclui a construção do conjunto K.

3.1.2 O homeomorfismo entre Δ e K

Para provar que $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ é homeomorfo Δ, verificaremos que K é compacto, perfeito e totalmente desconexo em $[0,1]$. Depois usaremos o fato de que todo espaço métrico não vazio, compacto, perfeito e totalmente desconexo é homeomorfo ao conjunto de Cantor (ver Teorema 1.6 e Corolário 1.1).

A priori, perceba que K é compacto, pois além de não vazio, trata-se da interseção enumerável de uma família de compactos não vazios.

Vamos verificar K é perfeito. Para isso, tome $x \in K$ de forma arbitrária. De $x \in K$, tem-se que $x \in K_n := \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como os $I_{n,j}$s são disjuntos (ver construção de K) e $x \in \cap K_n$, tem-se que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único $j(n) \in \{1, \dots, 2^n\}$ de modo que $x \in I_{n,j(n)}$. Da mesma forma, como $x \in K_{n+1}$, existe um único $j(n+1) \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$ para o qual $x \in I_{n+1,j(n+1)}$. A maneira como tais intervalos foram construidos (ver (3.48) e (3.49)) assegura que $I_{n+1,j(n+1)} \subset I_{n,j(n)}$. Assim, ou $j(n+1) = 2 \cdot j(n) - 1$, ou $j(n+1) = 2 \cdot j(n)$. Diante disso, para cada $\varepsilon > 0$ dado, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\dfrac{1}{m_{n_0}} < \varepsilon$. Segue de (3.53), de (3.54) e da forma como os intervalos $I_{n,j}$ foram construídos, que existe pelo menos um $x_0 \neq x$ tal que $x_0 \in I_{n_0,j(n_0)} \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ (note que, ou $x_0 \in I_{n_0+1,2j(n_0)} \subsetneq I_{n_0,j(n_0)}$, ou $x_0 \in I_{n_0+1,2j(n_0)-1} \subsetneq I_{n_0,j(n_0)}$). Mais ainda, $x_0 \in K$ (basta tomar $n = 1$ em (3.53) e (3.54)). Isto significa que x não é um ponto isolado. Portanto, K é perfeito.

Resta provar que K é totalmente desconexo, isto é, que K não contém intervalos. Para isso, tome $a, b, \in \mathbb{R}$ arbitrários com $a < b$. Como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\dfrac{1}{m_{n_0}} < b - a$ e $|I_{n_0,j}| = \dfrac{1}{m_{n_0}}$, para todo $j \in \{1, ..., 2^{n_0}\}$, tem-se que $(a,b) \nsubseteq I_{n_0,j}$, para todo $j \in \{1, ..., 2^{n_0}\}$. Logo, $(a,b) \nsubseteq K_{n_0}$ e portanto, $(a,b) \nsubseteq K$, haja vista que $K \subsetneq K_{n_0}$. Dessa forma K é totalmente desconexo.

3.1.3 $\mathcal{C}(K)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço em $\mathcal{ND} \cup \{0\}$

Começamos relembrando a definição de oscilação.

Definição 3.1. Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função e I um subconjunto de $[0,1]$. Definimos a *oscilação de f no conjunto I* como sendo o número

$$\sup_{s,t \in I} |f(s) - f(t)|.$$

A oscilação de f em I será denotada por $\omega_f(I)$.

Lema 3.6. *Existe um operador linear $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}[0,1]$ que torna os seguintes itens válidos, para cada $f \in \mathcal{C}(K)$:*

(a) $Tf(t) = f(t)$, *para cada* $t \in K$;

(b) $|Tf(t)| \leq (1 - 2^{-n}) \cdot \|f\|_\infty$, *para cada* $t \in K_{n-1} \setminus K_n$;

(c) $\left| Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+1}{m_n}\right) \right| \leq \frac{1/6}{2^{n+2}} \cdot \|f\|_\infty$, *para cada* $k \in \{0, 1, ..., m_n - 1\}$.

Demonstração. Dada $f \in \mathcal{C}(K)$, defina $Tf : K \to \mathbb{R}$ por

$$Tf(t) = f(t), \quad \text{para todo} \quad t \in K. \tag{3.57}$$

Faremos com que Tf seja estendida continuamente de forma conveniente para todo o $[0,1]$. Para isso, vamos fazer o seguinte:

Para cada $n \geq 0$ e $j \in \{1, ..., 2^n\}$, fixe $x_{n,j} \in I_{n,j} \cap K$ (aqui, $I_{n,j} \cap K \neq \emptyset$ devido a (3.53) e (3.54)). Feito isso, defina Tf tanto em $a_{n,j}$ como em $b_{n,j}$ de modo que

$$Tf(a_{n,j}) = Tf(b_{n,j}) = (1 - 2^{-n}) \cdot f(x_{n,j}). \tag{3.58}$$

Por conseguinte, estenda Tf para o interior de cada um dos subintervalos contidos em $[0,1] \setminus K$ de modo que Tf restrita a cada um deles seja afim. Isto estende Tf para todo $[0,1]$.

A maneira como estendemos Tf nos garante que, para cada $x \in [0,1] \setminus K$, é possível encontrar uma vizinhança $V_x \subseteq [0,1]$ de x de forma que Tf restrita a V_x seja afim e, portanto, contínua em x.

Queremos mostrar que $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de K. Para isso, usaremos o seguinte fato:

Afirmação 3.2. *$\omega_{Tf}(I_{n,j}) \leq \omega_f(I_{n,j} \cap K) + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixo e $j \in \{1, ..., 2^n\}$.*

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e tome $j \in \{1, ..., 2^n\}$. Verificaremos que

$$|Tf(z) - Tf(w)| \leq \omega_f(I_{n,j} \cap K) + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty, \qquad \text{para todo} \quad z, w \in I_{n,j}. \tag{3.59}$$

Sejam $w, z \in I_{n,j}$, com $z < w$. Se $w, z \in I_{n,j} \cap K$, usando (3.57) e (3.58) obtemos

$$\begin{aligned}
|Tf(a_{n,j}) - Tf(w)| &= |Tf(b_{n,j}) - Tf(w)| \\
&= \left|\left(1 - 2^{-n}\right) \cdot f(x_{n,j}) - f(w)\right| = |f(x_{n,j}) - f(w) - 2^{-n} \cdot f(x_{n,j})| \\
&\leq |f(x_{n,j}) - f(w)| + 2^{-n} \cdot |f(x_{n,j})| \\
&\leq \sup_{x,y \in I_{n,j} \cap K} |f(x) - f(y)| + 2^{-n} \cdot \sup_{x \in K} |f(x)| \\
&= \omega_f(I_{n,j} \cap K) + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.60}$$

e

$$|Tf(z) - Tf(w)| = |f(z) - f(w)| \leq \omega_f(I_{n,j} \cap K) \leq \omega_f(I_{n,j} \cap K) + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty. \tag{3.61}$$

Se $z, w \in I_{n,j} \cap ([0,1] \setminus K)$, a demonstração será feita em dois casos. Primeiro, considere o caso em que não existem pontos de K entre z e w. Como Tf é afim no interior de cada subintervalo de $I_{n,j} \cap ([0,1] \setminus K)$, existe pelo menos um $y \in K$ satisfazendo $Tf(y) < Tf(z)$ (veja Figura 3.8, para ilustrar). Com isso,

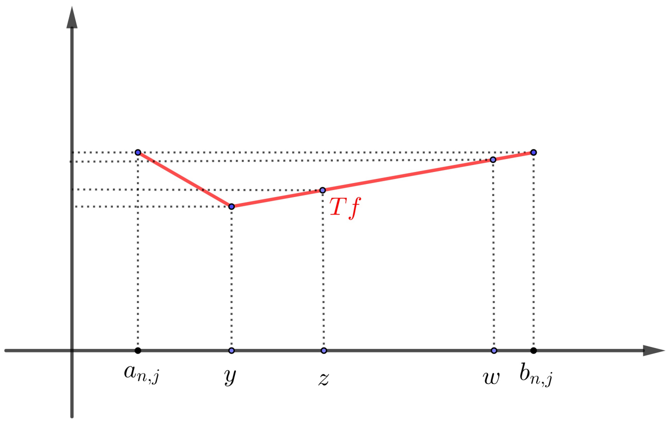


Figura 3.8: Caso em que não existem pontos de K entre z e w.

$$|Tf(z) - Tf(w)| < |Tf(y) - Tf(w)| < |Tf(y) - Tf(b_{n,j})|.$$

Já para o caso em que existe pelo menos um ponto de K entre z e w escolha y de forma

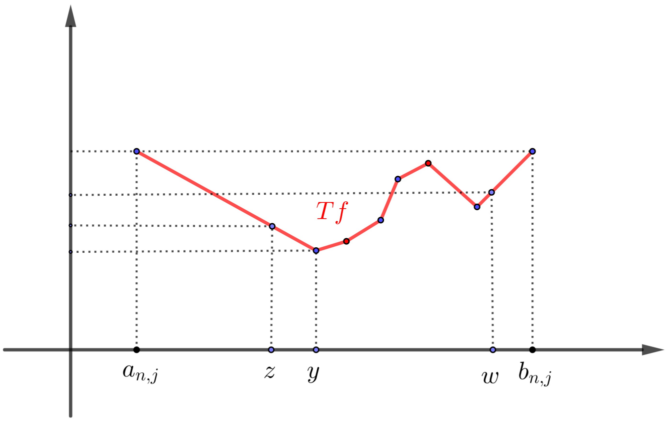


Figura 3.9: Caso em que existe pelo menos um ponto de K entre z e w.

que $Tf(y) < Tf(z)$ (veja Figura 3.9, para ilustrar). Daí,

$$|Tf(z) - Tf(w)| < |Tf(w) - Tf(y)| < |Tf(y) - Tf(b_{n,j})|.$$

Assim, em ambos os casos, segue de (3.60) que

$$|Tf(z) - Tf(w)| \leq \omega_f\left(I_{n,j} \cap K\right) + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty.$$

Por fim, se $z \in I_{n,j} \cap K$ e $w \in I_{n,j} \cap ([0,1] \setminus K)$, perceba que, como $z \in K$ e z está entre $a_{n,j}$ e w, recaimos no caso em que existe pelo menos um ponto de $I_{n,j} \cap K$ entre dois pontos de $I_{n,j} \cap ([0,1] \setminus K)$. Dessa forma,

$$|Tf(z) - Tf(w)| \leq \omega_f\left(I_{n,j} \cap K\right) + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty,$$

para todo $z, w \in I_{n,j}$ e obtemos

$$\omega_{Tf}\left(I_{n,j}\right) \leq \omega_f\left(I_{n,j} \cap K\right) + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty.$$

$\square$

De volta à continuidade de Tf em K, façamos o seguinte: Seja x_0 um ponto arbitrário de K e $\varepsilon > 0$. Então $x_0 \in K_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e segue que $x_0 \in I_{n,j_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, onde $j_n \in \{1, \ldots, 2^n\}$. Segue da continuidade de f em x_0 que existe $\delta > 0$ tal que, se $y \in K$ e $|x_0 - y| < \delta$, então

$$|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.62}$$

Assim sendo, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $2^{-n_0} \cdot \|f\|_\infty < \varepsilon$ e $\dfrac{1}{m_{n_0}} < \delta$. A partir daí, escolha $\delta_1 > 0$ de modo que $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \subseteq I_{n_0, j_{n_0}}$. Assim,

$$u \in [0,1] \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \Rightarrow u \in I_{n_0,j_{n_0}} \Rightarrow |Tf(x_0) - Tf(u)| \leq \omega_{Tf}(I_{n_0,j_{n_0}}) \quad (3.63)$$

De acordo com a Afirmação 3.2,

$$\omega_{Tf}(I_{n_0,j_{n_0}}) \leq \omega_f(I_{n_0,j_{n_0}} \cap K) + 2^{-n_0} \cdot \|f\|_\infty.$$

Como

$$\omega_f(I_{n_0,j_{n_0}} \cap K) := \sup_{r,t \in I_{n_0,j_{n_0}} \cap K} |f(r) - f(t)|,$$

existem $r_0, s_0 \in I_{n_0,j_{n_0}} \cap K$ tais que

$$\omega_{Tf}(I_{n_0,j_{n_0}}) - 2^{-n_0} \cdot \|f\|_\infty \leq |f(r_0) - f(s_0)|. \quad (3.64)$$

Como $r_0, s_0, x_0 \in I_{n_0,j_{n_0}} \cap K$, $\left|I_{n_0,j_{n_0}}\right| = \dfrac{1}{m_{n_0}}$ e $\dfrac{1}{m_{n_0}} < \delta$, tem-se $|x_0 - r_0| < \delta$ e $|x_0 - s_0| < \delta$. Assim, se $u \in [0,1] \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, segue de (3.62), (3.63) e (3.64) que

$$\begin{aligned} |Tf(x_0) - Tf(u)| &\leq \omega_{Tf}(I_{n_0,j_{n_0}}) \leq |f(r_0) - f(s_0)| + 2^{-n_0} \cdot \|f\|_\infty \\ &\leq |f(r_0) - f(x_0)| + |f(s_0) - f(x_0)| + 2^{-n_0} \cdot \|f\|_\infty \\ &< 3 \cdot \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Portanto, Tf é contínua em K, como queríamos.

Quanto a linearidade de T, tome $f, h \in \mathcal{C}(K)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários. Sabemos de (3.57) que

$$\begin{aligned} T(f + \lambda \cdot h)(t) &= (f + \lambda \cdot h)(t) = f(t) + \lambda \cdot h(t) \\ &= Tf(t) + \lambda \cdot Th(t), \quad \text{para todo} \quad t \in K. \end{aligned} \quad (3.66)$$

De (3.58) temos

$$\begin{aligned} T(f + \lambda \cdot h)(a_{n,j}) &= \left(1 - 2^{-n}\right) \cdot (f + \lambda \cdot h)(x_{n,j}) \\ &= \left(1 - 2^{-n}\right) \cdot f(x_{n,j}) + \lambda \cdot \left(1 - 2^{-n}\right) \cdot h(x_{n,j}) \\ &= Tf(a_{n,j}) + \lambda \cdot Th(a_{n,j}) = (Tf + \lambda \cdot Th)(a_{n,j}), \end{aligned} \quad (3.67)$$

para cada $j \in \{1, ..., 2^n\}$. Como

$$T\,(f + \lambda h)\,(b_{n,j}) = T\,(f + \lambda h)\,(a_{n,j}), \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, ..., 2^n\}, \tag{3.68}$$

obtemos a linearidade quando aplicamos em pontos de K e nos extremos de $I_{n,j}$. Já para pontos no interior de cada subintervalo de $[0,1] \setminus K$, a linearidade segue do fato de $T\,(f + \lambda h)$ ser afim em cada subintervalo de $[0,1] \setminus K$, juntamente com (3.68).

Em suma, T é linear, contínua e satisfaz $Tf(t) = f(t)$, para cada $t \in K$. Em particular, isto comprova o item **(a)**.

Para provar o item **(b)** considere $n \geq 1$ e $t \in K_{n-1} \setminus K_n$. Perceba que

$$t \in K_{n-1} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n-1,j} \Rightarrow t \in I_{n-1,j_0},$$

para algum $j_0 \in \{1, ..., 2^{n-1}\}$. No entanto, $t \notin I_{n,2j_0-1} \dot{\cup} I_{n,2j_0}$, uma vez que $t \notin K_n = \dot{\bigcup}_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$ (ver (3.51) e (3.52)). Como $I_{n,2j_0-1} \dot{\cup} I_{n,2j_0} \subseteq I^2_{n-1,j_0} \dot{\cup} I^4_{n-1,j_0} \subsetneq I_{n-1,j_0}$, concluímos que

$$t \in [a_{n-1,j_0}, a_{n,2j_0-1}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0-1}, a_{n,2j_0}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0}, b_{n-1,j_0}], \tag{3.69}$$

já que

$$I_{n-1,j_0} = [a_{n-1,j_0}, a_{n,2j_0-1}) \dot{\cup} I_{n,2j_0-1} \dot{\cup} (b_{n,2j_0-1}, a_{n,2j_0}) \dot{\cup} I_{n,2j_0} \dot{\cup} (b_{n,2j_0}, b_{n-1,j_0}].$$

Como

$$[a_{n-1,j_0}, a_{n,2j_0-1}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0-1}, a_{n,2j_0}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0}, b_{n-1,j_0}] = I_{n,j} \setminus (I_{n,2j_0-1} \dot{\cup} I_{n,2j_0}) \subseteq [0,1] \setminus K$$

concluímos que Tf é afim em $[a_{n-1,j_0}, a_{n,2j_0-1}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0-1}, a_{n,2j_0}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0}, b_{n-1,j_0}]$.

Assim, $|Tf(t)|$ é menor ou igual ao máximo da função $|Tf|$ restrita ao fecho de $[a_{n-1,j_0}, a_{n,2j_0-1}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0-1}, a_{n,2j_0}) \dot{\cup} (b_{n,2j_0}, b_{n-1,j_0}]$, máximo esse que é garantido em um dos extremos do intervalo em que t se encontra (ver (3.69)).

De (3.58), temos

$$\begin{aligned} |Tf(a_{n-1,j_0})| &= |Tf(b_{n-1,j_0})| = (1 - 2^{-(n-1)}) \cdot |f(x_{n-1,j_0})| \\ &\leq (1 - 2^{-n}) \cdot |f(x_{n-1,j_0})| \\ &\leq (1 - 2^{-n}) \cdot \|f\|_\infty, \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$|Tf(a_{n,2j_0-1})| \;=\; |Tf(b_{n,2j_0-1})| = (1 - 2^{-n}) \cdot |f(x_{n,2j_0-1})|$$

$$\leq \quad (1-2^{-n}) \cdot \|f\|_\infty \tag{3.71}$$

e

$$\begin{aligned} |Tf(a_{n,2j_0})| &= |Tf(b_{n,2j_0})| = (1-2^{-n}) \cdot |f(x_{n,2j_0})| \\ &\leq (1-2^{-n}) \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Logo $|Tf(t)| \leq (1-2^{-n}) \cdot \|f\|_\infty$, o que prova **(b)**.

Agora vamos verificar o item **(c)**. Para isso, considere I como sendo o fecho de um dos intervalos que aparecem em (3.69). Digamos que I é o fecho de $[a_{n-1,j_0}, a_{n,2j_0-1})$. O fato de Tf ser afim no interior de I faz com que

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(y)| &= \frac{\omega_{Tf}(I)}{|I|} \cdot |x-y| = \frac{|Tf(a_{n,2j_0-1}) - Tf(a_{n-1,j_0})|}{|I|} \cdot |x-y| \\ &\leq (|Tf(a_{n,2j_0-1})| + |Tf(a_{n-1,j_0})|) \cdot \frac{|x-y|}{|I|} \\ &\leq \big((1-2^{-n}) \cdot \|f\|_\infty + (1-2^{-(n-1)}) \cdot \|f\|_\infty\big) \cdot \frac{|x-y|}{|I|} \\ &< 2 \cdot (1-2^{-n}) \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{|x-y|}{|I|} \\ &< 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{|x-y|}{|I|}, \quad \text{sempre que} \quad x, y \in I. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Como $|I| \geq \dfrac{1}{(5 \cdot m_{n-1})}$ (ver **Passo 2**, na construção de K), tem-se que

$$2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{|x-y|}{|I|} \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{|x-y|}{|1/(5 \cdot m_{n-1})|}.$$

Dessa forma,

$$|Tf(x) - Tf(y)| < 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{|x-y|}{|1/5 \cdot m_{n-1}|}. \tag{3.74}$$

sempre que $x, y \in I$. Verificar o item **(c)** significa mostrar que

$$\left| Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+1}{m_n}\right) \right| \leq \frac{1/6}{2^{n+2}} \cdot \|f\|_\infty, \qquad \text{para cada} \quad k \in \{0, 1, ..., m_n - 1\}.$$

Sendo assim, seja $k \in \{0, 1, ..., m_n - 1\}$. Como o intervalo $\left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+1}{m_n}\right] \subseteq [0,1]$, existem duas possibilidades para o número $\dfrac{k}{m_n}$:

ou $\dfrac{k}{m_n} = a_{n,j}$, para algum $j \in \{1, ..., 2^n\}$, ou $\dfrac{k}{m_n} \neq a_{n,j}$, para todo $j \in \{1, ..., 2^n\}$.

Para o caso em que $\dfrac{k}{m_n} = a_{n,j}$, para algum j, temos que

$$\frac{k+1}{m_n} = \frac{k}{m_n} + \frac{1}{m_n} = a_{n,j} + \frac{1}{m_n} = b_{n,j},$$

o que nos leva a

$$\left| Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+1}{m_n}\right) \right| = |Tf\left(a_{n,j}\right) - Tf\left(b_{n,j}\right)| = 0 \leq \frac{1/6}{2^{n+2}} \cdot \|f\|_\infty. \tag{3.75}$$

Já para o caso em que $\dfrac{k}{m_n} \neq a_{n,j}$, para todo $j \in \{1, ..., 2^n\}$ obtemos que $\left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+1}{m_n}\right]$ não está contido em $I_{n,j}$, para todo $j \in \{1, ..., 2^n\}$. Consequentemente, $\left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+1}{m_n}\right] \nsubseteq K_n = \dot\bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$ (lembre que $\left|\left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+1}{m_n}\right]\right| = |I_{n,j}|$).

Vale destacar que $\left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+1}{m_n}\right] \subseteq K_0$, uma vez que $K_0 = I_{0,1} = [0, 1]$. Como $K_n \subsetneq K_{n-1} \subsetneq ... \subsetneq K_1 \subsetneq K_0 = [0, 1]$, concluímos que $\left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+1}{m_n}\right] \subseteq K_{\nu-1} \setminus K_\nu$, para algum $\nu \in \{1, ..., n\}$. Assim,

$$\left[\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}\right] \subseteq I_{\nu-1,j}, \quad \text{para algum} \quad j.$$

Mais ainda,

$$\left[\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}\right] \subseteq [a_{\nu-1,j}, a_{\nu,2j-1}) \,\dot\cup\, (b_{\nu,2j-1}, a_{\nu,2j}) \,\dot\cup\, (b_{\nu,2j}, b_{\nu-1,2j}]\,. \tag{3.76}$$

Seja I o intervalo em (3.76) que contém $\left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+1}{m_n}\right]$. Como $\dfrac{k}{m_n}$ e $\dfrac{k+1}{m_n}$ estão em I, segue de (3.74) que

$$\begin{aligned}
\left| Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+1}{m_n}\right) \right| &\leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{\left|\frac{k+1}{m_n} - \frac{k}{m_n}\right|}{1/(5 \cdot m_{\nu-1})} \\
&= 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{1/m_n}{1/(5 \cdot m_{\nu-1})} \\
&= 10 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{m_{\nu-1}}{m_n} \\
&\leq 10 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{m_{n-1}}{m_n}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Como $\dfrac{m_{n-1}}{m_n} \leq \dfrac{1/6}{10 \cdot 2^{n+2}}$, (ver (3.43)), inferimos que que

$$10 \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{m_{n-1}}{m_n} \leq \frac{1/6}{2^{n+2}} \cdot \|f\|_\infty.$$

Com isso,

$$\left| Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+1}{m_n}\right)\right| \leq \frac{1/6}{2^{n+2}} \cdot \|f\|_\infty, \tag{3.78}$$

provando assim o item **(c)**. $\square$

Finalmente podemos provar o resultado central dessa seção.

Teorema 3.2. *Existe um operador linear* $S\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}[0,1]$ *tal que, para cada* $f \in \mathcal{C}(K) \setminus \{0\}$, *os seguintes itens são satisfeitos:*

(i) $Sf(t) = f(t)$, *para cada* $t \in K$ *(* Sf *é uma extensão contínua de* f*);*

(ii) $\|Sf\|_\infty = \|f\|_\infty$ *(*S *é uma isometria);*

(iii) $Sf \in \mathcal{ND}[0,1]$.

Demonstração. Optamos também por separar a demonstração deste resultado em alguns passos.

Passo 1. Defina $g\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ de maneira que

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in [0,1]\,; \\ t-1, & \text{se} \quad t \in [1,2]\,; \\ 1, & \text{se} \quad t \in [2,3]\,; \\ 4-t, & \text{se} \quad t \in [3,4]\,. \end{cases} \tag{3.79}$$

e estenda-a via periodicidade para toda a reta. Note que

$$|g(0) - g(2)| = |g(1) - g(3)| = |g(2) - g(4)| = |0-1| = 1.$$

De forma geral, segue da periodicidade de g (g possui período 4), que

$$|g(x) - g(x+2)| \quad = \quad 1, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{Z}. \tag{3.80}$$

Como $g(0) = g(4) = 0$ e da periodicidade de g, temos que

$$g(x) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in 4 \cdot \mathbb{Z}. \tag{3.81}$$

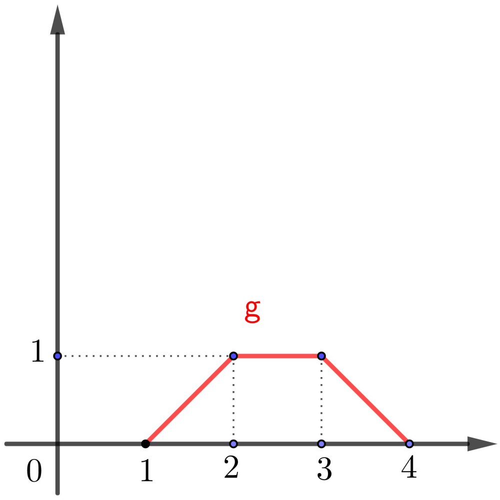


Figura 3.10: gráfico da função g

Note que (veja Figura 3.10)

$$|g(x)| \leq 1, \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.82}$$

Além disso,

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|, \qquad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.83}$$

Passo 2. Tome $(s_n)_{n=1}^{\infty} \in K$ que seja densa e defina S de maneira que, para cada $f \in \mathcal{C}(K)$,

$$Sf(t) := Tf(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.84}$$

Vamos mostrar que S está bem definida e que $Sf \in \mathcal{C}[0,1]$, para cada $f \in \mathcal{C}(K)$. Com efeito, como $Tf \in \mathcal{C}[0,1]$, resta-nos verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t) \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada} \quad t \in [0,1] \tag{3.85}$$

e a partir daí, verificar que

$$H(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t) \quad \text{é contínua em} \quad [0,1]. \tag{3.86}$$

Como cada $f \in \mathcal{C}(K)$, é contínua e definida num compacto, existe constante C_f que satisfaz $|f(t)| \leq C_f$, para todo $t \in K$. Como g é limitada por 1, tem-se que

$$\left|\frac{f(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t)\right| \;=\; |f(s_n)| \cdot |g(m_n \cdot t)| \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \leq C_f \cdot \frac{1}{2^{n+1}} =: M_n. \tag{3.87}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ (série geométrica de razão menor que 1), podemos fazer uso do teste de Weierstrass (ver Teorema 1.10), assim como do Teorema 1.9 para concluir não somente que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t)$ converge absolutamente e uniformemente em $[0,1]$, mas que a função H definida em (3.86) é contínua . Isto prova (3.85) e (3.86), como queríamos. Consequentemente, Sf é contínua em $[0,1]$.

Agora, vejamos que S é linear. Com efeito,

$$\begin{aligned}
S\left(f_1 + \alpha \cdot f_2\right)(t) &= T\left(f_1 + \alpha \cdot f_2\right)(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(f_1 + \alpha \cdot f_2\right)(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t) \\
&= Tf_1(t) + \alpha \cdot Tf(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t) + \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_2(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t) \\
&= Sf_1(t) + \alpha \cdot Sf_2(t) = \left(Sf_1 + \alpha \cdot Sf_2\right)(t),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$, $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(K)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vamos verificar o item **(i)**. Para isto, seja $t \in K$ (aqui, $t \in I_{n,j_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$). Como $g(t) = 0$, para todo $t \in [0,1] \cup [4,5]$ (veja (3.79)), segue de sua periodicidade que

$$g(t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t \in [r, r+1], \quad \text{sendo} \quad r \quad \text{divisível por} \quad 4. \tag{3.88}$$

Como

- $m_n \cdot a_{n,j}$ é divisível por 4 (ver **Passo 2**, na construção de K);

- $m_n \cdot a_{n,j} \leq m_n \cdot t \leq m_n \cdot b_{n,j} \Leftrightarrow a_{n,j} \leq t \leq b_{n,j}$;

- $m_n \cdot a_{n,j} + 1 = m_n \cdot b_{n,j} \Leftrightarrow m_n \cdot (b_{n,j} - a_{n,j}) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (ver **Passo 2**, na construção de K).

obtém-se de (3.88) que

$$g(m_n \cdot t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t \in I_{n,j}. \tag{3.89}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} Sf(t) &= Tf(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(s_n)}{2^{n+1}} \cdot g(m_n \cdot t) \\ &= f(t) + 0 = f(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in K$, o que prova **(i)**.

Para provar **(ii)**, fixe $n \in \mathbb{N}$ e tome t arbitrariamente em $K_{n-1} \setminus K_n$. O fato de $K_{n-1} \subsetneq ...K_2 \subsetneq K_1$ assegura que $t \in K_l$, para todo $l \in \{1, ..., n-1\}$. Assim como em (3.89), só que agora com t fixo, $g(m_l \cdot t) = 0$, para para cada $l = 1, ...n-1$. Desse modo

$$\left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g(m_l \cdot t) \right| = \left| \sum_{l=n}^{\infty} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g(m_l \cdot t) \right|. \tag{3.90}$$

De (3.82), (3.90) e do fato da série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g(m_l \cdot t)$ convergir absolutamente, segue que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=n}^{\infty} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g(m_l \cdot t) \right| &\leq \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|f(s_l)|}{2^{l+1}} \cdot |g(m_l \cdot t)| \leq \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|f(s_l)|}{2^{l+1}} \\ &\leq \sum_{l=n}^{\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2^{l+1}} = \|f\|_\infty \cdot \sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}} = \frac{\|f\|_\infty}{2^n} \\ &= 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |Sf(t)| &\leq |Tf(t)| + \left| \sum_{l=n}^{\infty} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g(m_l \cdot t) \right| \\ &\leq \left(1 - 2^{-n}\right) \cdot \|f\|_\infty + 2^{-n} \cdot \|f\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty, \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|Sf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Mais ainda, como $f \in \mathcal{C}(K)$ e

$$|f(t)| = |Sf(t)| \leq \|Sf\|_\infty, \quad \text{para todo} \quad t \in K,$$

concluímos que

$$\|f\|_\infty \leq \|Sf\|_\infty.$$

Sendo assim, S é uma isometria. Isto prova **(ii)**.

Para checar a veracidade de **(iii)**, considere que f é não-nula e a partir daí defina o seguinte conjunto:

$$D_f := \{n \in \mathbb{N} : |f(s_n)| > (1 - 1/6) \cdot \|f\|_\infty.\} \tag{3.92}$$

Vamos verificar que D_f é infinito. Para isso, seja

$$r \in \left((1 - \frac{1}{6}) \cdot \|f\|_\infty, \|f\|_\infty\right) \cap \mathbb{Q}.$$

Como $\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|$ e $r < \|f\|_\infty$, existe $x_r \in K$ satisfazendo $|f(x_r)| > r$. Como $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ é denso em K e $f \in \mathcal{C}(K)$, existe uma sequência $(s_{n_j})_{j=1}^\infty \subseteq K$ convergindo para x_r tal que $|f(s_{n_j})| \to |f(x_r)|$. Como, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ para o qual $|f(s_{n_{j_0}})| > r > (1 - \frac{1}{6}) \cdot \|f\|_\infty$, segue que D_f é infinito.

Afirmação 3.3. *Se* $n \in D_f$ *e* $k \in \{0, 1, ..., m_n - 2\}$, *então*

$$\left|Sf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Sf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| \geq \frac{1/2}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty.$$

Demonstração. Seja $s \in \mathbb{N}$, $s > n$. Como

$$\frac{m_s}{m_n} = \frac{m_s}{m_{s-1}} \cdot \frac{m_{s-1}}{m_{s-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{m_{n+2}}{m_{n+1}} \cdot \frac{m_{n+1}}{m_n}$$

pode ser descrito como um produto de números divisíveis por 4 (ver **Passo 2**, na construção de K), segue que o próprio $\frac{m_s}{m_n}$ é divisível por 4. Em consequência, os números $\frac{m_s}{m_n} \cdot k$ e $\frac{m_s}{m_n} \cdot (k+2)$ são divisíveis por 4 (soma de números divisíveis por 4 é ainda um número divisível por 4). De (3.81), segue que

$$g\left(\frac{m_s}{m_n} \cdot k\right) = g\left(\frac{m_s}{m_n} \cdot (k+2)\right) = 0. \tag{3.93}$$

Mais ainda, de (3.83) e (3.47), segue que

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{|f(s_l)|}{2^{l+1}} \cdot \left|g\left(\frac{m_l}{m_n} \cdot k\right) - g\left(\frac{m_l}{m_n} \cdot (k+2)\right)\right| \leq \sum_{l=1}^{n-1} \frac{|f(s_l)|}{2^{l+1}} \cdot \left|\frac{m_l}{m_n} \cdot (k+2) - \frac{m_l}{m_n} \cdot k\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{|f(s_l)|}{2^{l+1}} \cdot \left|\frac{2 \cdot m_l}{m_n}\right| \leq \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{2^{l+1}} \cdot \frac{m_l}{m_n} \\
&= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot m_l}{2^l \cdot m_n} \leq \frac{2 \cdot \|f\|_\infty}{2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty. \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

De (3.80), (3.93), (3.94), do item **(c)** do Lema (3.6) e do fato de n estar em D_f chegamos a

$$
\begin{aligned}
&\left|Sf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Sf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| = \\
= &\left|Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g\left(m_l \cdot \frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+2}{m_n}\right) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g\left(m_l \cdot \frac{k+2}{m_n}\right)\right| \\
= &\left|Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+2}{m_n}\right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g\left(m_l \cdot \frac{k}{m_n}\right) - \sum_{l=1}^{n} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot g\left(m_l \cdot \frac{k+2}{m_n}\right)\right| \\
\geq &\left|\sum_{l=1}^{n} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot \left[g\left(m_l \cdot \frac{k}{m_n}\right) - g\left(m_l \cdot \frac{k+2}{m_n}\right)\right]\right| - \left|Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| \\
= &\left|\frac{f(s_n)}{2^{n+1}} \cdot \left[g\left(m_n \cdot \frac{k}{m_n}\right) - g\left(m_n \cdot \frac{k+2}{m_n}\right)\right] + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot \left[g\left(m_l \cdot \frac{k}{m_n}\right) - g\left(m_l \cdot \frac{k+2}{m_n}\right)\right]\right| \\
- &\left|Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| \\
\geq &\left|\frac{f(s_n)}{2^{n+1}}\right| \cdot |g(k) - g(k+2)| - \left|\sum_{l=1}^{n-1} \frac{f(s_l)}{2^{l+1}} \cdot \left[g\left(m_l \cdot \frac{k}{m_n}\right) - g\left(m_l \cdot \frac{k+2}{m_n}\right)\right]\right| \\
- &\left|Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| \\
\geq &\frac{|f(s_n)| \cdot |g(k) - g(k+2)|}{2^{n+1}} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{|f(s_l)|}{2^{l+1}} \cdot \left|g\left(m_l \cdot \frac{k}{m_n}\right) - g\left(m_l \cdot \frac{k+2}{m_n}\right)\right| \\
- &\left|Tf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Tf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| \\
\geq &\frac{|f(s_n)| \cdot |g(k) - g(k+2)|}{2^{n+1}} - \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty - \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty \\
= &\frac{|f(s_n)|}{2^{n+1}} - \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty - \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty \\
\geq &(1 - 1/6) \cdot \frac{\|f\|_\infty}{2^{n+1}} - \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty - \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty \\
= &\frac{\|f\|_\infty}{2^{n+1}} - 3 \cdot \frac{1/6}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\|f\|_\infty}{2^{n+1}} - \frac{1/2}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty \\
&= \frac{1/2}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty,
\end{aligned}
$$

como queríamos. $\square$

De volta a prova do item **(iii)** façamos o seguinte: Suponha que Sf é diferenciável num ponto x_0 de $[0,1]$. Então, existe o limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{Sf(x) - Sf(x_0)}{x - x_0} = (Sf)'(x_0).$$

Dessa forma, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ de tal forma que se $x \in [0,1]$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$\frac{|Sf(x) - Sf(x_0)|}{|x - x_0|} < 1 + |(Sf)'(x_0)|.$$

Por outro lado, se $x \in [0,1]$ for tal que $|x - x_0| \geq \delta$, então $\dfrac{1}{|x - x_0|} \leq \dfrac{1}{\delta}$. Como Sf é contínua definida num compacto, existe uma constante de limitação $C > 0$ que satisfaz

$$\frac{|Sf(x) - Sf(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \frac{2C}{|x - x_0|} \leq \frac{2C}{\delta}.$$

Tomando $M \geq \max\left\{\dfrac{2C}{\delta}, 1 + |(Sf)'(x_0)|\right\}$, obtemos que

$$|Sf(x) - Sf(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|, \qquad \text{para cada} \quad x \in [0,1]. \tag{3.95}$$

Com isso, se $a, b \in [0,1]$ são tais que $x_0 \in [a,b]$, segue de (3.95) que

$$
\begin{aligned}
|Sf(a) - Sf(b)| &\leq |Sf(a) - Sf(x_0)| + |Sf(x_0) - Sf(b)| \leq M \cdot |a - x_0| + M \cdot |x_0 - b| \\
&= M \cdot (x_0 - a) + M \cdot (b - x_0) = M \cdot (b - a). \qquad (3.96)
\end{aligned}
$$

Como $x_0 \in \left[\dfrac{k}{m_n}, \dfrac{k+2}{m_n}\right]$, para algum $k \in \{0, 1, ..., m_n - 2\}$ e $n \in D_f$, podemos fazer uso de (3.96) e obter que

$$\left|Sf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Sf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| \leq M \cdot \left|\frac{k}{m_n} - \frac{k+2}{m_n}\right| = M \cdot \frac{2}{m_n}. \tag{3.97}$$

De acordo com a Afirmação 3.3,

$$\left|Sf\left(\frac{k}{m_n}\right) - Sf\left(\frac{k+2}{m_n}\right)\right| \geq \frac{1/2}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty \tag{3.98}$$

pois $n \in D_f$ e $k \in \{0, 1, ..., m_n - 1\}$. Assim,

$$\frac{1/2}{2^{n+1}} \cdot \|f\|_\infty \leq M \cdot \frac{2}{m_n}. \tag{3.99}$$

Porém,

$$m_n \geq \frac{10 \cdot 2^{n+2}}{1/6} > 2^{n+2},$$

para todo $n \geq 1$ (ver construção de K). Em particular,

$$m_n \geq \frac{10 \cdot 2^{n+2}}{1/6} > 2^{n+2},$$

para todo $n \in D_f$. Assim sendo (veja (3.99)),

$$\frac{2 \cdot M}{\|f\|_\infty} \geq \lim_{n \in D_f} \frac{m_n}{2^{n+2}} = +\infty,$$

o que é um absurdo. Portanto, $Sf \in \mathcal{ND}[0, 1]$, e isto prova o item **(iii)**. $\square$

CAPÍTULO 4

ÁLGEBRAS EM $\mathcal{C}[0,1]$ CONSISTINDO DE FUNÇÕES HÖLDER EM NENHUM LUGAR.

A estrutura algébrica do conjunto das funções nowhere differentiable tem se mostrado rica até aqui, pois a além de espaçável (ver Teorema 3.1), $\mathcal{ND}$ se mostra capaz de conter espaços completos e bem comportados (ver Seção 3.1). Assim a seguinte pergunta é natural:

É possível que além de um espaço vetorial, $\mathcal{ND}$ possua uma álgebra infinitamente gerada?

A resposta para esta indagação é "sim"e é devida a Fredéric Bayart e Lucas Quarta (veja [4]).

Neste capítulo, verificaremos por meio de [4] que, exceto pela função nula, o conjunto das funções Hölder em nenhum ponto contém uma álgebra densa e infinitamente gerada. Em particular, mostraremos que $\mathcal{ND}$ também possui uma álgebra infinitamente gerada.

Para isso, faremos uso de algumas definições:

Definição 4.1 (Função contínua Hölder em nenhum ponto)**.** Seja $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Dizemos que f é uma função *Hölder em nenhum ponto* (neste caso, $f \in \mathcal{NH}[0,1]$), se

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^{\alpha}} = +\infty,$$

para cada $x \in [0,1]$ e $\alpha \in (0,1]$

Quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos $\mathcal{NH}$ no lugar de $\mathcal{NH}[0,1]$.

Definição 4.2. Seja $f \in C[0,1]$. Diremos que f é *Lipschitz em ponto algum*, ($f \in \mathcal{NH}^1$), se para cada $x \in [0,1]$ e $C > 0$, for possível encontrar $y \in [0,1]$ de modo que $|f(y) - f(x)| > C \cdot |y - x|$.

Lema 4.1. *Se $F \in \mathcal{NH}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função analítica não constante, então $f \circ F \in \mathcal{NH}$.*

Demonstração. Sejam $x \in [0,1]$ um número fixo arbitrário, $\alpha \in (0,1]$, $F \in \mathcal{NH}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função analítica não constante. A fim de verificarmos que $f \circ F \in \mathcal{NH}$, usaremos a expansão de Taylor da função f (ver Definição 1.14) e escreveremos que

$$f(F(y)) = f(F(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(F(x))}{n!} \cdot (F(y) - F(x))^n$$

para cada $y \neq x \in [0,1]$ (isto é possível, pois f é analítica). Usando o fato de que f é não constante, garantimos que existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$ para o qual $f^{(n)}(F(x)) \neq 0$. Denotando $\dfrac{f^{(n)}(F(x))}{n!}$ por a_n e tomando $k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(F(x)) \neq 0\}$, obtemos

$$\begin{aligned} f(F(y)) &= f(F(x)) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot (F(y) - F(x))^n \\ &= f(F(x)) + (F(y) - F(x))^k \cdot \left(a_k + a_{k+1} \cdot (F(y) - F(x)) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{k+i} (F(y) - F(x))^i \right) \\ &= f(F(x)) + (F(y) - F(x))^k \cdot (\lambda + P(x,y)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\lambda = a_k$ e $P(x,y) = a_{k+1} \cdot (F(y) - F(x)) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{k+i} \, (F(y) - F(x))^i$ são tais que $\lambda \neq 0$ e $P(x,x) = 0$.

Perceba que $\lim_{y \to x} (F(y) - F(x)) = 0$, $(F \in C[0,1])$. Assim,

$$\lim_{y \to x} P(x,y) = a_{k+1} \cdot \lim_{y \to x} (F(y) - F(x)) + \lim_{y \to x} \sum_{i=2}^{\infty} [a_{k+i} (F(y) - F(x))^i] = 0.$$

Como $F \in \mathcal{NH}$ e $0 < \alpha/k \leq 1$, segue da Definição 4.1 que

$$\lim_{y \to x} \frac{|F(y) - F(x)|}{|y - x|^{\alpha/k}} = +\infty.$$

Assim, de (4.1), temos

$$\lim_{y\to x}\frac{|(f\circ F)(y)-(f\circ F)(x)|}{|y-x|^{\alpha}}=\left(\lim_{y\to x}\frac{|F(y)-F(x)|}{|y-x|^{\frac{\alpha}{k}}}\right)^{k}\cdot\lim_{y\to x}|\lambda+P(x,y)|=+\infty.$$

Portanto, $f\circ F\in\mathcal{NH}$. $\square$

Teorema 4.1. *$\mathcal{NH}\cup\{0\}$ contém uma álgebra não-trivial.*

Demonstração. Seja $u\in\mathcal{NH}\setminus\{0\}$ uma função não-nula. Dado $r\in\mathbb{N}$, verificaremos que toda função da forma $\lambda_1\cdot u+\lambda_2\cdot u^2+...+\lambda_r\cdot u^r$ com $\lambda_i\in\mathbb{R}$, para todo $i\in\{1,2,\ldots,r\}$ se encontra em $\mathcal{NH}$. Isto fará com que a álgebra gerada por u a qual denotaremos por $A(u)$ esteja em $\mathcal{NH}$.

Para este fim, sejam $m\in\mathbb{N}$ e $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\in\mathbb{R}$ na condição de que λ_m seja não nulo. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(t)=\lambda_1\cdot t+\lambda_2\cdot t^2+...+\lambda_m\cdot t^m$, para cada $t\in\mathbb{R}$. Esta função é analítica e não constante, pois se trata de uma função polinomial, em que $\lambda_m\neq 0$. Sendo assim, podemos agir de acordo com o Lema 4.1 e concluir que

$$f\circ u\in\mathcal{NH}. \tag{4.2}$$

Perceba que

$$f\circ u(z)=f(u(z))=\lambda_1\cdot u(z)+\lambda_2\cdot u(z)^2+...+\lambda_m\cdot u(z)^m=(\lambda_1\cdot u+\lambda_2\cdot u^2+...+\lambda_m\cdot u^m)(z),$$

para todo $z\in[0,1]$. Dessa forma, $f\circ u=\lambda_1\cdot u+\lambda_2\cdot u^2+...+\lambda_m\cdot u^m$. Sendo assim, segue de (4.2) que $\lambda_1\cdot u+\lambda_2\cdot u^2+...+\lambda_m\cdot u^m\in\mathcal{NH}$. $\square$

Proposição 4.1. $\mathcal{NH}^1\subseteq\mathcal{ND}$.

Demonstração. Sejam $h\in\mathcal{NH}^1$ e $x\in[0,1]$. O fato de $h\in\mathcal{NH}^1$ (ver Definição 4.2) faz com que para cada $n\in\mathbb{N}$, seja possível encontrar $y_n\in[0,1]$ de maneira que

$$|h(y_n)-h(x)|>n\cdot|y_n-x|. \tag{4.3}$$

A partir daqui verificaremos que $h\in\mathcal{ND}$. Para isso, suponha por absurdo que $h'(x)$ existe para algum $x\in[0,1]$. Assim, para $\varepsilon=1>0$, existe $\delta>0$, o qual podemos tomar menor do que $\dfrac{1}{2}$, de tal forma que, para cada $y\in[0,1]$, com $0<|y-x|<\delta$, tenha-se

$$|h(y)-h(x)|<(1+|h'(x)|)\cdot|y-x|. \tag{4.4}$$

Como $\delta<\dfrac{1}{2}$, existe pelo menos um $y\in[0,1]$ de maneira que $|y-x|\geq\delta$. Como h é limitada ([0,1] é compacto e f é contínua) existe uma constante de limitação $C>0$ de modo que $|h(y)-h(x)| \leq |h(y)|+|h(x)| \leq 2\cdot C$, para todo $y \in [0,1]$ com $|y-x| \geq \delta$. Dessa forma,

$$\frac{|h(y)-h(x)|}{|x-y|} \leq \frac{2\cdot C}{|y-x|} \leq \frac{2\cdot C}{\delta}, \quad \text{sempre que} \quad y \in [0,1] \quad \text{e} \quad |y-x| \geq \delta. \tag{4.5}$$

Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n_0 > \max\left\{1+|h'(x)|, \dfrac{2\cdot C}{\delta}\right\}$, obtemos de (4.4) e (4.5) que

$$|h(y)-h(x)| \leq n_0 \cdot |y-x|, \quad \text{para todo} \quad y \in [0,1]. \tag{4.6}$$

Porém, isto é um absurdo em virtude de (4.3). Neste sentido, $h \in \mathcal{ND}$ como queríamos. □

Corolário 4.1. $\mathcal{ND} \cup \{0\}$ *contém uma álgebra não trivial.*

Demonstração. Basta notar que $\mathcal{NH} \subset \mathcal{NH}^1$ e utilizar proposição anterior. □

Antes de partirmos para o Lema a seguir, introduziremos algumas notações:

- Dadas as sequências reais $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, denotamos $a_n >> b_n$, para dizer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

  Sejam $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r)$ duas r-uplas em $\mathbb{N}^r$.

- Diremos que $\beta > \gamma$, se existe $m \in \{1,...,r\}$ de forma que $\beta_i < \gamma_i$, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $\beta_i = \gamma_i$, para cada $i \in \{m+1,...,r\}$.

Lema 4.2. *Existe uma sequência $(u_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ tal que para cada $a \in [0,1]$, $r \in \mathbb{N}$ e $i_1, i_2, ..., i_r \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r$, existe uma sequência $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ para a qual*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot ... \cdot |u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a)|^{\beta_r}\right)/h_n^{\alpha} = +\infty$, *sempre que* $\beta \in \mathbb{N}^r$ *e* $\alpha > 0$*;*

(b) $|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a)|^{\beta_r} >> |u_j(a+h_n)-u_j(a)|$, *sempre que* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{N}^r$ *e* $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$*;*

(c) $|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot ... \cdot |u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a)|^{\beta_r} >> |u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a)|^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a)|^{\gamma_r}$, *sempre que* $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r) \in \mathbb{N}^r$ *e* $\beta > \gamma$.

Demonstração. Faremos esta demonstração através de alguns passos:

Passo 1. Considere a função

$$f_0(x) := |x - n_x|, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

a qual foi definida pela primeira vez nesse trabalho em (2.1).

Passo 2. Defina $u_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, de maneira que

$$u_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^{m^k}} \cdot f_0\left(10^{(p_k \cdot m)!} \cdot x\right), \quad \text{para todo} \quad x \in [0,1], \tag{4.8}$$

onde p_k denota o k-ésimo número primo em $\mathbb{N}$.

Cada u_k é uma função de van der Waerden (ver (2.3)). Diante disso, segue do que foi feito a partir de (2.3) que além de bem definida, u_k se encontra em $\mathcal{ND}([0,1])$.

Passo 3. Tome $a \in [0,1]$, $r \in \mathbb{N}$ e $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$ satisfazendo $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.

A partir daqui, sempre que necessário, vamos escrever p'_j no lugar de $\dfrac{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r}}{p_j}$.

Como todo número real pode ser representado através de sua forma decimal, optaremos por descrever a como um número da forma $a = 0, a_1a_2...a_na_{n+1}...$ onde $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para cada $i = 1, 2, ...$

Denotando o número $(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n)!$ por t_n e definindo $(h_n)_{n \geq 1}$ de maneira que

$$h_n = \begin{cases} 10^{-(t_n+1)}, & se \quad a_{(t_n+1)} \in \{0,1,2,3,5,6,7,8\} \\ -10^{-(t_n+1)}, & se \quad a_{(t_n+1)} \in \{4,9\} \end{cases} \tag{4.9}$$

claramente, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Como $t_n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} a + h_n &= 0, a_1a_2...a_{t_n}a_{t_n+1}a_{t_n+2}\ldots \pm 10^{-(t_n+1)} \\ &= 0, a_1a_2\ldots a_{t_n}a_{t_n+1}a_{t_n+2}\ldots \pm 0, \underbrace{0\ldots0}_{t_n-\text{vezes}}1 \\ &= 0, a_1a_2\ldots a_{t_n}(a_{t_n+1} \pm 1)a_{t_n+2}\ldots \\ &= 0, a_1a_2\ldots a_{t_n}b_{t_n+1}a_{t_n+2}\ldots \end{aligned}$$

sendo

$$b_{t_n+1} = \begin{cases} a_{t_n+1} + 1, & se \quad a_n \in \{0,1,2,3,5,6,7,8\}; \\ a_{t_n+1} - 1, & se \quad a_n \in \{4,9\}. \end{cases}$$

Por outro lado, de acordo com (2.5), temos

$$x_{t_n+1} = 0, a_1a_2\ldots a_{t_n}b_{t_n+1}a_{t_n+2}\ldots.$$

Portanto,

$$a + h_n = x_{t_n+1}. \tag{4.10}$$

A partir daqui procuraremos verificar que

$$\begin{aligned}
|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| &\geq \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a) \right| \\
&- \sum_{m=0}^{(p'_{i_k}\cdot p_n)-1} \left| f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a) \right| \qquad (4.11) \\
&\geq \frac{1}{10^{\left(p'_{i_k}\cdot p_n\right)^{i_k}+1}} - p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}} \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

e

$$|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| \leq \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} + p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}} \tag{4.13}$$

para cada $k = 1, ..., r$.

Sendo assim, passemos para o próximo passo.

Passo 4. Vamos mostrar que

$$\begin{aligned}
|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| &\geq \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a) \right| \\
&- \sum_{m=0}^{(p'_{i_k}\cdot p_n)-1} \left| f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a) \right|.
\end{aligned}$$

Com efeito, de (4.8) temos que

$$\begin{aligned}
u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot(a+h_n)\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot a\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left[f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot(a+h_n)\right) - f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot a\right) \right]. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

De acordo com o lema (2.2) e com (4.10),

$$\begin{aligned}
f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot(a+h_n)\right) - f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot a\right) &= f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a) \\
&= f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(x_{t_n+1}\right) - f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a) \\
&= 0, \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

sempre que $(p_{i_k} \cdot m)! \geq t_n + 1$.

Como

$$\begin{aligned}
(p_{i_k} \cdot m)! \geq t_n + 1 &\Leftrightarrow (p_{i_k} \cdot m)! > t_n \Leftrightarrow (p_{i_k} \cdot m)! > (p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! \\
&\Leftrightarrow p_{i_k} \cdot m > p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow p_{i_k} \cdot m > p_{i_k} \cdot \frac{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r}}{p_{i_k}} \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow m > p'_{i_k} \cdot p_n, \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

segue de (4.15) e (4.16) que

$$\begin{aligned}
u_{i_k}(a + h_n) - u_{i_k}(a) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot (a + h_n)\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot a\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left[f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot (a + h_n)\right) - f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot a\right)\right] \\
&= \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left[f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot (a + h_n)\right) - f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot a\right)\right]. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Denotando $f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot (a + h_n)\right) - f_0\left(10^{(p_{i_k} \cdot m)!} \cdot a\right)$ por r_m (queremos simplificar a escrita), chegamos a partir de (4.17) que

$$|u_{i_k}(a + h_n) - u_{i_k}(a)| = \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m\right|. \qquad (4.18)$$

Como

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m\right| &= \left|\frac{1}{10^{(p'_{i_k} \cdot p_n)^{i_k}}} \cdot r_{p'_{i_k} \cdot p_n} + \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n - 1} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m\right| \\
&\geq \left|\frac{1}{10^{(p'_{i_k} \cdot p_n)^{i_k}}} \cdot r_{p'_{i_k} \cdot p_n}\right| - \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n - 1} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m\right| \\
&= \frac{1}{10^{(p'_{i_k} \cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left|r_{p'_{i_k} \cdot p_n}\right| - \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n - 1} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m\right| \\
&\geq \frac{1}{10^{(p'_{i_k} \cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left|r_{p'_{i_k} \cdot p_n}\right| - \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n - 1} \left|\frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m\right|,
\end{aligned}$$

segue de (4.18), da definição de $f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}$ dada em (2.2) e do fato que $\dfrac{1}{10^{m^{i_k}}} \leq 1$ que

$$
\begin{aligned}
|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| &\geq \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| r_{p'_{i_k}\cdot p_n} \right| - \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n - 1} \left| \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m \right| \\
&= \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}\cdot (a+h_n)\right) - f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}\cdot a\right) \right| \\
&- \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n - 1} \left| \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot (a+h_n)\right) - f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot a\right) \right| \\
&= \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a) \right| \\
&- \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n - 1} \left| \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a) \right| \\
&\geq \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a) \right| \\
&- \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n - 1} \left| f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a) \right|, \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

como queríamos.

Passo 5. Vamos verificar que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a) \right| - \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n - 1} \left| f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a) \right| \geq \\
\geq\ &\frac{1}{10^{\left(p'_{i_k}\cdot p_n\right)^{i_k}+1}} - p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}.
\end{aligned}
$$

Para isso, note que

$$
(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)! = \left(p_{i_k}\cdot \frac{p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}}{p_{i_k}}\cdot p_n\right)! = (p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)! = t_n.
$$

De acordo com (4.10), $a + h_n = x_{t_n+1}$. Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
\left| f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}(a) \right| &= \left| f_{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}(a+h_n) - f_{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}(a) \right| \\
&= \left| f_{t_n}(x_{t_n+1}) - f_{t_n}(a) \right|. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Como (ver Lema 2.2)

$$f_k(x_n) - f_k(a) = \begin{cases} \pm 10^{-(n-k)}, & se \quad k < n; \\ 0, & se \quad k \geq n. \end{cases}$$

chegamos a

$$\left| f_{(p_{i_k} \cdot p'_{i_k} \cdot p_n)!}\,(a + h_n) - f_{(p_{i_k} \cdot p'_{i_k} \cdot p_n)!}(a) \right| = 10^{-1}.$$

Assim,

$$\frac{1}{10^{(p'_{i_k} \cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left| f_{(p_{i_k} \cdot p'_{i_k} \cdot p_n)!}(a + h_n) - f_{(p_{i_k} \cdot p'_{i_k} \cdot p_n)!}(a) \right| = \frac{10^{-1}}{10^{(p'_{i_k} \cdot p_n)^{i_k}}} = \frac{1}{10^{(p'_{i_k} \cdot p_n)^{i_k}+1}}. \tag{4.21}$$

Como

$$\begin{aligned} (p_{i_k} \cdot m)! < (p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! \quad &\Leftrightarrow \quad p_{i_k} \cdot m < p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n \\ &\Leftrightarrow \quad p_{i_k} \cdot m < p_{i_k} \cdot \frac{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r}}{p_{i_k}} \cdot p_n) \\ &\Leftrightarrow \quad m < p'_{i_k} \cdot p_n \\ &\Leftrightarrow \quad m \leq p'_{i_k} \cdot p_n - 1. \end{aligned}$$

chegamos a (veja Lema 2.2)

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n - 1} \left| f_{(p_{i_k} \cdot m)!}\,(a + h_n) - f_{(p_{i_k} \cdot m)!}(a) \right| &= \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n - 1} \left| f_{(p_{i_k} \cdot m)!}\,(x_{t_n+1}) - f_{(p_{i_k} \cdot m)!}(a) \right| \\ &= \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n - 1} \left| 10^{-\left[(t_n+1) - \left(p_{i_k} \cdot m\right)!\right]} \right|. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Como

$$\begin{aligned} (p'_{i_k} \cdot p_n - 1) \cdot p_{i_k} &= p'_{i_k} \cdot p_n \cdot p_{i_k} - p_{i_k} = p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n - p_{i_k} \\ &< p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1 \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} m \cdot p_{i_k} &\leq (p'_{i_k} \cdot p_n - 1) \cdot p_{i_k} \\ &< p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1, \quad \text{para cada} \quad m \leq p'_{i_k} \cdot p_n - 1. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Assim,

$$\begin{aligned}(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!+1-(m\cdot p_{i_k})! &> (p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!-(m\cdot p_{i_k})!\\ &> (p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!-(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1)!.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1}\left|10^{-\left[(t_n+1)-\left(p_{i_k}\cdot m\right)!\right]}\right| &= \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1}10^{-\left[\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1-\left(p_{i_k}\cdot m\right)!\right]}\\ &\leq \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1}10^{-\left[\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!-\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!\right]}\\ &= \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1}\frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}\\ &= p'_{i_k}\cdot p_n\cdot\frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}. \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Assim sendo, diante de (4.22) e (4.24) temos

$$\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1}\left|f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(a+h_n\right)-f_{(p_{i_k}\cdot m)!}(a)\right|\leq p'_{i_k}\cdot p_n\cdot\frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}. \qquad (4.25)$$

O que nos leva a concluir a partir de (4.21) e (4.25) que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}}\cdot\left|f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}\left(a+h_n\right)-f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}\left(a\right)\right|-\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1}\left|f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(a+h_n\right)-f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(a\right)\right|\geq\\ \geq\ &\frac{1}{10^{\left(p'_{i_k}\cdot p_n\right)^{i_k}+1}}-p'_{i_k}\cdot p_n\cdot\frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}, \qquad (4.26)\end{aligned}$$

como queríamos.

A relação entre as desigualdades (4.19) e (4.26) nos diz que

$$\begin{aligned}\left|u_{i_k}\left(a+h_n\right)-u_{i_k}\left(a\right)\right| \geq\ &\frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}}\cdot\left|f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}\left(a+h_n\right)-f_{(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n)!}\left(a\right)\right|\\ &-\sum_{m=0}^{(p'_{i_k}\cdot p_n)-1}\left|f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(a+h_n\right)-f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(a\right)\right|\end{aligned}$$

$$\geq \quad \frac{1}{10^{\left(p'_{i_k}\cdot p_n\right)^{i_k}+1}} - p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}.$$

para cada $k = 1, ..., r$. Diante disso, passemos para o próximo passo.

Passo 6. Vamos verificar que

$$\left|u_{i_k}\left(a+h_n\right) - u_{i_k}\left(a\right)\right| \leq \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} + p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}$$

para cada $k = 1, ..., r$. A priori, note que

$$\begin{aligned}
|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| &= \left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{10^{m^{i_k}}}\cdot f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot(a+h_n)\right) - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{10^{m^{i_k}}}\cdot f_0\left(10^{(p_{i_k}\cdot m)!}\cdot a\right)\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{10^{m^{i_k}}}\cdot r_m\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n}\frac{1}{10^{m^{i_k}}}\cdot r_m + \sum_{m=p'_{i_k}\cdot p_n+1}^{\infty}\frac{1}{10^{m^{i_k}}}\cdot r_m\right|
\end{aligned}$$

lembrando que

$$\begin{aligned}
r_m &= f_0\left(10^{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}\cdot(a+h_n)\right) - f_0\left(10^{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}\cdot(a)\right) \\
&= f_{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}\left(a+h_n\right) - f_{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}\left(a\right) \\
&= f_{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}(x_{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1}) - f_{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}\left(a\right) \\
&= f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}\left(a\right).
\end{aligned}$$

Mostraremos aqui que

$$\sum_{m=p'_{i_k}\cdot p_n+1}^{\infty}\frac{1}{10^{m^{i_k}}}\cdot r_m = 0.$$

Para isso, basta notar que

$$f_{(p_{i_k}\cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{\left(p_{i_k}\cdot m\right)!}\left(a\right) = 0, \quad \text{para todo} \quad m > p'_{i_k}\cdot p_n$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
m > p'_{i_k}\cdot p_n \quad &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad p_{i_k}\cdot m > p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad p_{i_k} \cdot m > p_{i_k} \cdot \frac{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r}}{p_{i_k}} \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow \quad p_{i_k} \cdot m > p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow \quad (p_{i_k} \cdot m)! > (p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! \\
&\Leftrightarrow \quad (p_{i_k} \cdot m)! > t_n \\
&\Leftrightarrow \quad (p_{i_k} \cdot m)! \geq t_n + 1
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| &= \left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m + \sum_{m=p'_{i_k} \cdot p_n + 1}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m \right| \\
&= \left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m + \sum_{m=p'_{i_k} \cdot p_n + 1}^{\infty} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot 0 \right| = \left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m + 0 \right| \\
&= \left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m \right|
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Como $r_m = \pm 10^{-\left[(p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! + 1 - (p_{i_k} \cdot m)!\right]}$, sempre que $0 \leq m \leq p'_{i_k} \cdot p_n$ (ver (2.2) e (4.38)), tem-se que

$$
\left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot r_m \right| = \left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[\left((p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! + 1 - (p_{i_k} \cdot m)!\right]\right.} \right) \right|.
$$

Note que a expressão

$$
\left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[\left((p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! + 1 - (p_{i_k} \cdot m)!\right]\right.} \right) \right|
$$

pode ser escrita como

$$
\left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[(t_n + 1) - (p_{i_k} \cdot m)!\right]} \right) \right|
$$

Considerando

$$
A_{k,n} := \left| \sum_{m=0}^{p'_{i_k} \cdot p_n} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[(t_n + 1) - (p_{i_k} \cdot m)!\right]} \right) \right| \tag{4.29}
$$

podemos continuar com o raciocínio afim de obtermos que

$$\begin{aligned} A_{k,n} &= \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[(t_n+1)-\left(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n\right)!\right]}\right) + \sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[(t_n+1)-\left(p_{i_k}\cdot m\right)!\right]}\right) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[(t_n+1)-\left(p_{i_k}\cdot p'_{i_k}\cdot p_n\right)!\right]}\right)\right| + \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1} \frac{1}{10^{m^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-\left[(t_n+1)-\left(p_{i_k}\cdot m\right)!\right]}\right) \right|. \end{aligned}$$

Usando os fatos que $\dfrac{1}{10^{m^{i_k}}} \leq 1$ e $(p_{i_k} \cdot m)! < (p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1)!$, para cada $0 \leq m \leq p'_{i_k} \cdot p_n - 1$ (ver (4.23)), garantimos que

$$\begin{aligned} A_{k,n} &\leq \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-1}\right)\right| + \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1} \left(\pm 10^{-\left[\left((p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1-\left(p_{i_k}\cdot m\right)!\right]}\right) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-1}\right)\right| + \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1} \left(\pm 10^{-\left[\left((p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1-\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!\right]}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}}\right| + \left| p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1}}\right| \\ &< \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}}\right| + \left| p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}\right| \\ &= \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} + p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sendo $|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| = A_{k,n}$ (ver (4.28) e (4.29)), segue de (4.30) que

$$\begin{aligned} |u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| &\leq \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-1}\right)\right| + \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1} \left(\pm 10^{-\left[\left((p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1-\left(p_{i_k}\cdot m\right)!\right]}\right) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}} \cdot \left(\pm 10^{-1}\right)\right| + \left|\sum_{m=0}^{p'_{i_k}\cdot p_n-1} \left(\pm 10^{-\left[\left((p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1-\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!\right]}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}}\right| + \left| p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1}}\right| \\ &< \left| \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}}\right| + \left| p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}\right| \\ &= \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} + p'_{i_k}\cdot p_n \cdot \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}. \end{aligned}$$

como gostaríamos. Diante de (4.11) e (4.13) podemos concluir que

$$|u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| \in \left(\frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} - \varepsilon_k, \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} + \varepsilon_k \right)$$

sendo $\varepsilon_k = p'_{i_k} \cdot p_n \cdot \dfrac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}$. Sendo assim,

$$u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a) \approx \frac{C_k}{10^{\left(p'_{i_k}\cdot p_n\right)^{i_k}}}, \quad \text{para cada} \quad k = 1, 2, ..., r, \tag{4.31}$$

sendo C_k uma constante real para a qual

$$\frac{|C_k|}{10^{\left(p'_{i_k}\cdot p_n\right)^{i_k}}} \in \left(\frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} - \varepsilon_k, \frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}+1}} + \varepsilon_k \right).$$

Neste sentido,

$$\left(u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)\right)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \left(u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)\right)^{\beta_r} \approx \frac{C_\beta}{10^{\left[\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}}, \tag{4.32}$$

para cada $\beta = (\beta_1, ..., \beta_r) \in \mathbb{N}^r$ (sendo $C_\beta = C_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot C_r^{\beta_r}$).

Passo 7. Vamos verificar o item **(a)**. Para isso, tomaremos $\beta = (\beta_1, ..., \beta_r) \in \mathbb{N}^r$ e $\alpha > 0$ de forma arbitrária. Fazendo uso de (4.9) chegamos a

$$\frac{C_\beta}{h_n^\alpha \cdot 10^{\left[\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}} = \frac{C_\beta}{\pm 10^{-[\alpha\cdot(t_n+1)]} \cdot 10^{\left[\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}}$$

e daí

$$\begin{aligned} \left| \frac{C_\beta}{h_n^\alpha \cdot 10^{\beta_1\left(p'_{i_1}\cdot p_n\right)^{i_1}} \cdot \ldots \cdot 10^{\beta_r\left(p'_{i_r}\cdot p_n\right)^{i_r}}} \right| &= \left| \frac{C_\beta}{\pm 10^{-[\alpha\cdot(t_n+1)]} \cdot 10^{\left[\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}} \right| \\ &= \frac{|C_\beta|}{10^{-[\alpha\cdot(t_n+1)]} \cdot 10^{\left[\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}} \\ &= \frac{|C_\beta|}{10^{-\left[\alpha\cdot(t_n+1) - \sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Como

$$\alpha \cdot (t_n + 1) = \alpha \cdot ((p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! + 1) > \sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j} \cdot p_n\right)^{i_j},$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (o fatorial cresce muito mais rápido que qualquer soma finita que não o possui), segue de (4.33) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_\beta}{h_n^\alpha \cdot 10^{\beta_1 \left(p'_{i_1} \cdot p_n\right)^{i_1}} \cdot \ldots \cdot 10^{\beta_r \left(p'_{i_r} \cdot p_n\right)^{i_r}}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{|C_\beta|}{10^{-\left[\alpha\cdot(t_n+1) - \sum_{j=1}^r \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}} \\
&= \lim_{n\to\infty} |C_\beta| \cdot 10^{\alpha\cdot(t_n+1) - \sum_{j=1}^r \beta_j \left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Diante disso, segue de (4.32) que

$$\lim_{n\to\infty} \left(|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)|^{\beta_r}\right)/h_n^\alpha = +\infty.$$

Isto prova o item **(a)**.

Passo 8. Verifiquemos o item **(c)**. Para isso, tome $\beta = (\beta_1, ..., \beta_r)$ e $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r)$ arbitrários em $\mathbb{N}^r$ de modo que $\beta > \gamma$. De $\beta > \gamma$, existe $m \in \{1, ..., r\}$ para o qual $\beta_i < \gamma_i$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\beta_i = \gamma_i$, para cada $i \in \{m+1, ..., r\}$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\frac{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)|^{\beta_r}}{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)|^{\gamma_r}} = \\
&= \frac{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \left|u_{i_{m-1}}(a+h_n) - u_{i_{m-1}}(a)\right|^{\beta_{m-1}} \cdot |u_{i_m}(a+h_n) - u_{i_m}(a)|^{\beta_m}}{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_{m-1}}(a+h_n) - u_{i_{m-1}}(a)|^{\gamma_{m-1}} \cdot |u_{i_m}(a+h_n) - u_{i_m}(a)|^{\gamma_m}} \\
&= \frac{1}{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\gamma_1 - \beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_m}(a+h_n) - u_{i_m}(a)|^{\gamma_m - \beta_m}}
\end{aligned}$$

Como $u_{i_k} \in \mathcal{C}[0,1]$, para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} |u_{i_k}(a+h_n) - u_{i_k}(a)| = 0$. Sendo assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)|^{\beta_r}}{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)|^{\gamma_r}} = +\infty. \tag{4.34}$$

Isto prova o item **(c)**.

Passo 8. Vamos verificar **(b)**. Para este feito, tome $j \in \mathbb{N}$ de forma que $j \neq i_k$, para cada $k \in \{1, ..., r\}$, e em seguida escolha $n \in \mathbb{N}$ de modo que $j < n$. De $j < n$, e do fato de $j \neq i_k$, para cada $k \in \{1, ..., r\}$ segue que o número $p'_j \cdot p_n \notin \mathbb{N}$ (lembre que cada p_{i_s} com $s = 1, \ldots, r$ é primo). Faremos uso do maior natural menor que $p'_j \cdot p_n$ o qual será denotado por $\left[p'_j \cdot p_n\right]$. Aqui, $p_j \cdot \left[p'_j \cdot p_n\right] \in \mathbb{N}$, pois se trata de um produto entre dois números naturais. Como $p_j \cdot \left[p'_j \cdot p_n\right] < p_j \cdot (p'_j \cdot p_n) = p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n$, tem-se que

$$p_j \cdot \left[p'_j \cdot p_n\right] \leq p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1. \tag{4.35}$$

Perceba que $1 + \left[p'_j \cdot p_n\right] < 1 + p'_j \cdot p_n = 1 + \dfrac{p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r}}{p_j} \cdot p_n < 1 + p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n$ (p_j é primo). Dessa forma,

$$1 + \left[p'_j \cdot p_n\right] \leq p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n. \tag{4.36}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{10^{\left(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n\right)!}} \leq \frac{1}{10^{\frac{1}{2}\left(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n\right)!}} \quad &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 10^{\left(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1\right)!} \leq 10^{\frac{1}{2}\left(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n\right)!} \\
&\Leftrightarrow \quad (p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1)! \leq \frac{1}{2}\left(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n\right)! \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1)!}{(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n)!} \leq \frac{1}{2}. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

o que é verdade, pois

$$\begin{aligned}
\frac{(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1)!}{(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n)!} &= \frac{(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1)!}{(p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n) \cdot (p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n - 1)!} \\
&= \frac{1}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Verificaremos aqui que

$$\sum_{m=\left[p'_j \cdot p_n\right]+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{m^j}} \cdot \left[f_{(p_j \cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j \cdot m)!}\left(a\right)\right] = 0.$$

Para isso, basta notar que

$$f_{(p_j \cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j \cdot m)!}\left(a\right) = 0, \quad \text{para todo} \quad m > \left[p'_j \cdot p_n\right]$$

uma vez que (ver Lema 2.2)

$$\begin{aligned}
m > \left[p'_j \cdot p_n\right] \quad &\Leftrightarrow \quad m > p'_j \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow \quad p_j \cdot m > p_j \cdot p'_j \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow \quad p_j \cdot m > p_j \cdot \frac{p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r}}{p_j} \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow \quad p_j \cdot m > p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n \\
&\Leftrightarrow \quad (p_j \cdot m)! = [p_j \cdot m]! > [p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n]! = (p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_r} \cdot p_n)! \\
&\Leftrightarrow \quad (p_j \cdot m)! > t_n
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (p_j \cdot m)! \geq t_n + 1 \tag{4.38}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left|u_j(a+h_n) - u_j(a)\right| &= \left|\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{m^j}} \cdot \left[f_{(p_j\cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j\cdot m)!}(a)\right]\right| \\ &= \left|\sum_{m=0}^{\left[p'_j\cdot p_n\right]} \frac{1}{10^{m^j}} \cdot \left[f_{(p_j\cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j\cdot m)!}(a)\right]\right| \\ &\leq \sum_{m=0}^{\left[p'_j\cdot p_n\right]} \left|\frac{1}{10^{m^j}} \cdot \left[f_{(p_j\cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j\cdot m)!}(a)\right]\right| \end{aligned} \tag{4.39}$$

De acordo com o Lema 2.2, $f_{(p_j\cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j\cdot m)!}(a) = \pm 10^{-(t_n+1-(p_j\cdot m)!)}$, para cada $m > \left[p'_j \cdot p_n\right]$ (ver (4.38)). Assim,

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\left[p'_j\cdot p_n\right]} \left|\frac{1}{10^{m^j}} \cdot \left[f_{(p_j\cdot m)!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j\cdot m)!}(a)\right]\right| = \\ &= \sum_{m=0}^{\left[p'_j\cdot p_n\right]} \left|\frac{1}{10^{m^j}} \cdot 10^{-[t_n+1-(p_j\cdot m)!]}\right| \end{aligned} \tag{4.40}$$

Note que

$$\begin{aligned} \left|f_{(p_j\cdot[p_j\cdot p_n])!}\left(x_{(t_n+1)}\right) - f_{(p_j\cdot[p_j\cdot p_n])!}(a)\right| &= 10^{-\left[\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1-\left(p_j\cdot\left[p'_j\cdot p_n\right]\right)!\right]} \\ &= \frac{10^{\left(p_j\cdot\left[p'_j\cdot p_n\right]\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1}} \\ &< \frac{10^{\left(p_j\cdot\left[p'_j\cdot p_n\right]\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}} \\ &\leq \frac{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!}}{10^{\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Mais ainda, segundo (4.24)

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\left[p'_j\cdot p_n\right]-1} \left|10^{-[(t_n+1)-(p_j\cdot m)!]}\right| &= \sum_{m=0}^{\left[p'_j\cdot p_n\right]-1} 10^{-\left[\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!+1-(p_j\cdot m)!\right]} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\left[p'_j\cdot p_n\right]-1} 10^{-\left[\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!-\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n-1\right)!\right]} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{[p'_j \cdot p_n]-1} \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}} \\
&= [p'_j \cdot p_n] \cdot \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}. \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Assim, de (4.39), (4.40), (4.41) e (4.42) obtemos que

$$
\begin{aligned}
|u_j(a+h_n) - u_j(a)| &= \sum_{m=0}^{[p'_j \cdot p_n]} \left|10^{-[(t_n+1)-(p_j \cdot m)!]}\right| \\
&\leq \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}} + [p'_j \cdot p_n] \cdot \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}} \\
&= \left(1 + [p'_j \cdot p_n]\right) \cdot \frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
1 + [p'_j \cdot p_n] \leq p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n \quad (\text{ver} \quad (4.36))
$$

e

$$
\frac{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n - 1)!}}{10^{(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}} \leq \frac{1}{10^{\frac{1}{2}(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}} \quad (\text{ver} \quad (4.37))
$$

segue que

$$
|u_j(a+h_n) - u_j(a)| \leq \frac{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n}{10^{\frac{1}{2}(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}.
$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
&\frac{|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_r}}{|u_j(a+h_n) - u_j(a)|} \geq \\
\geq\ & |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\beta_r} \cdot \frac{10^{\frac{1}{2}(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n} \\
\approx\ & \frac{|C_\beta|}{10^{\left[\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j} \cdot p_n\right)^{i_j}\right]}} \cdot \frac{10^{\frac{1}{2}(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n} \\
=\ & |C_\beta| \cdot \frac{10^{\frac{1}{2}(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n)!}}{10^{\left[\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(p'_{i_j} \cdot p_n\right)^{i_j}\right]} \cdot p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r} \cdot p_n}
\end{aligned}
$$

Como

$$\frac{10^{\frac{1}{2}\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}{10^{\left[\sum_{j=1}^{r}\beta_j\left(p'_{i_j}\cdot p_n\right)^{i_j}\right]}\cdot p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n}\xrightarrow{n}+\infty$$

e $|C_\beta|$ é uma constante positiva, segue que

$$|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a)|^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot|u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a)|^{\beta_r}\cdot\frac{10^{\frac{1}{2}\left(p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n\right)!}}{p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_r}\cdot p_n}\xrightarrow{n}+\infty,$$

provando assim o item **(b)**. $\square$

Teorema 4.2. $\mathcal{NH}[0,1]$ *contém uma álgebra densa e infinitamente gerada.*

Demonstração. Dividiremos nossa demostração em alguns passos:
Passo 1. A priori, verificaremos que se $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência satisfazendo as conclusões do Lema 4.2, então qualquer sequência do tipo $v_m =: g_m + \delta_m\cdot u_m$, sendo $(\delta_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais positivos e $(g_m)_{m=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{C}[0,1]$ uma sequência de polinômios, também o satisfaz. Para isso, tome $a\in[0,1]$, $r\in\mathbb{N}$ e $i_1,...,i_r$ em $\mathbb{N}$ satisfazendo $1\le i_1<...<i_r$. De acordo com (4.31), para cada $k\in\{1,\ldots,r\}$,

$$u_{i_k}(a+h_n)-u_{i_k}(a)\approx\frac{C_{k,n}}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}},\tag{4.43}$$

sendo $C_{k,n}$ uma constante real para a qual

$$\frac{|C_{k,n}|}{10^{\left(p'_{i_k}\cdot p_n\right)^{i_k}}}\in\left(\frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k+1}}}-\varepsilon_k,\frac{1}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k+1}}}+\varepsilon_k\right)$$

e $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência que aparece em (4.9).

Como $\lim\limits_{n\to\infty}g_{i_k}(a+h_n)-g_{i_k}(a)=0$ (pois $g_{i_k}\in\mathcal{C}[0,1]$), segue que, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$g_{i_k}(a+h_n)-g_{i_k}(a)\approx\frac{D_{k,n}}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}},$$

para alguma constante real $D_{k,n}$ (nesse contexto, a sequência $(D_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ é limitada). Dessa forma,

$$v_{i_k}(a+h_n)-v_{i_k}(a)\;=\;g_{i_k}(a+h_n)-g_{i_k}(a)+\delta_k\cdot[u_{i_k}(a+h_n)-u_{i_k}(a)]\approx\frac{R_k}{10^{(p'_{i_k}\cdot p_n)^{i_k}}},$$

sendo $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande e $R_k=D_k+\delta_k\cdot C_k$.

Assim sendo, segue do que foi feito a partir de (4.31) que a sequência $(v_m)_{m=1}^{\infty}$ satisfaz as conclusões do Lema 4.2.

De acordo com o Teorema 1.7, o conjunto dos polinômios (funções polinomiais) definidos em $C[0,1]$ é denso em $C[0,1]$.

Assim sendo, para cada $\varepsilon > 0$ e $f \in C[0,1]$, existe $p \in \mathcal{P}[0,1]$ que satisfaz $\|p - f\|_{\infty} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Como $(u_k)_k \subseteq C[0,1]$, existe $q_k \in \mathcal{P}[0,1]$ para o qual $\|u_k - q_k\|_{\infty} < \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot \delta_k}$.

Tomando $g_k = p - \delta_k \cdot q_k \in \mathcal{P}[0,1]$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|f - v_k\|_{\infty} &= \|f - (g_k + \delta_k \cdot u_k)\|_{\infty} \\ &= \|f - (p - \delta_k \cdot q_k + \delta_k \cdot u_k)\|_{\infty} \\ &\leq \|f - p\|_{\infty} + \|\delta_k \cdot q_k - \delta_k \cdot u_k\|_{\infty} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto significa que o conjunto $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ também é denso em $C[0,1]$. Sendo assim, sem que haja perda de generalidade, considere que o conjunto $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ seja denso em $C[0,1]$, e a partir daí leve em consideração a álgebra $\mathcal{A}$ gerada pelos u_k's.

Passo 2. Vamos verificar que $\mathcal{A} \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{NH}$. Para isso, considere $f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ e $a \in [0,1]$ um número fixo. De $f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, segue que existem $d \in \mathbb{N}$, $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ dada por $h(x) = (u_1(x), ..., u_d(x))$, para cada $x \in [0,1]$ e uma função polinomial F em d variáveis tal que $f = F \circ h$. Como toda função polinomial é analítica, podemos fazer uso de sua série de Taylor (ver Definição 1.15) , e neste sentido teremos que

$$\begin{aligned} f(y) = (F \circ h)(y) = F(h(y)) &= \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^d} \frac{\partial^{\lambda} F(h(a))}{\lambda!} \cdot (h(y) - h(a))^{\lambda} \\ &= F(h(a)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_0^d} \frac{\partial^{\lambda} F(h(a))}{\lambda!} \cdot (h(y) - h(a))^{\lambda} \end{aligned} \tag{4.44}$$

para cada $y \in [0,1]$. Como F é polinomial, a derivada $\dfrac{\partial^{\lambda} F(h(a))}{\lambda!}$ a partir de um certo momento vai começar a zerar. Isto fará com que a soma em (4.44) se torne finita. Em outras palavras, vai existir um conjunto finito $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^d$ para o qual

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{N}_0^d} \frac{\partial^{\lambda} F(h(a))}{\lambda!} \cdot (h(y) - h(a))^{\lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^{\lambda} F(h(a))}{\lambda!} \cdot (h(y) - h(a))^{\lambda}. \tag{4.45}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(a) + \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_0^d} \frac{\partial^\lambda F(h(a))}{\lambda!} \cdot (h(y) - h(a))^\lambda \\
&= f(a) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^\lambda F(h(a))}{\lambda!} \cdot (h(y) - h(a))^\lambda \\
&= f(a) + \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \cdot \left(u_1(y) - u_1(a))^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (u_d(y) - u_d(a))^{\lambda_d}\right) \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

sendo $a_\lambda = \dfrac{\partial^\lambda F(h(a))}{\lambda!} \neq 0$.

Sejam

$$r := \min\{card\{i \colon \lambda_i \neq 0\} : \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \Lambda\}$$

e

$$\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda \colon card\{i \colon \lambda_i \neq 0\} = r\}.$$

Note que r é a menor quantidade de $\lambda_i's$ não nulos para cada $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d) \in \Lambda'$.

Escolha $\lambda^0 \in \Lambda'$ de forma que $\lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_d^0)$ seja máximo com relação a ordem reversa definida logo após o Corolário 4.1.

Feito isso, denote $f(y) - f(a)$ por $\Delta(y)$. Assim, diante de (4.46) temos

$$\begin{aligned}
\Delta(y) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \cdot \left(u_1(y) - u_1(a))^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (u_d(y) - u_d(a))^{\lambda_d}\right) \\
&= a_{\lambda^0} \cdot \left((u_1(y) - u_1(a))^{\lambda_1^0} \cdot \ldots \cdot (u_d(y) - u_d(x))^{\lambda_d^0}\right) \\
&+ \sum_{\lambda \in \Lambda' \setminus \{\lambda^0\}} a_\lambda \cdot \left(u_1(y) - u_1(a))^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (u_d(y) - u_d(a))^{\lambda_d}\right) \\
&+ \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} a_\lambda \cdot \left(u_1(y) - u_1(a))^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (u_d(y) - u_d(a))^{\lambda_d}\right) \\
&=: \Delta_1(y) + \Delta_2(y) + \Delta_3(y).
\end{aligned}$$

Como $\lambda^0 \in \Lambda'$, é possível reescrever Δ_1 de modo que

$$\Delta_1(y) = a_{\lambda^0} \cdot \left(u_{i_1}(y) - u_{i_1}(a))^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (u_{i_r}(y) - u_{i_r}(a))^{\beta_r}\right) \qquad (4.47)$$

sendo que os $\beta_i's$ são não nulos, (lembre que λ^0 tem r coordenadas não nulas) e os índices i_k são crescentes ($1 \leq i_1 < ... < i_r$).

O Lema 4.2 garante que existe uma sequência real $(h_n)_{n \geq 1}$, (lembre que $(h_n)_{n \geq 1}$ depende da escolha dos índices i_k) convergindo para zero, a qual faz com que os $u_{i_k}'s$ satisfaçam os itens **(a)**, **(b)** e **(c)**.

A partir daqui, perceba que

$$\frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|\Delta_2(a+h_n)|} = \frac{|a_{\lambda^0}| \cdot \left(|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}\right)}{\left|\sum_{\lambda \in \Lambda' \setminus \{\lambda^0\}} a_\lambda \cdot (u_1(a+h_n) - u_1(a))^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (u_d(a+h_n) - u_d(a))^{\lambda_d})\right|}$$
$$\geq \frac{|a_{\lambda^0}| \cdot \left(|u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}\right)}{\sum_{\lambda \in \Lambda' \setminus \{\lambda^0\}} |a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a))^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (u_d(a+h_n) - u_d(a))^{\lambda_d}|} \tag{4.48}$$

para cada n. Gostaríamos de mostrar que

$$\frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{\sum_{\lambda \in \Lambda' \setminus \{\lambda^0\}} |a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a)|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} \xrightarrow{n} +\infty.$$

Para isso, basta verificarmos que

$$\frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a)|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} \xrightarrow{n} +\infty, \tag{4.49}$$

para cada $\lambda \in \Lambda' \setminus \{\lambda^0\}$ (lembre que Λ é finito).

Como $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d) \in \Lambda'$ significa que exatamente r coordenadas de λ são não nulas, então o denominador de (4.49) terá exatamente r fatores a menos do a_λ.

Se os índices que se encontram no denominador de (4.49) coincidirem com os i'_ks, estaremos aptos a fazer uso do item **(c)**, (lembre que $\lambda^0 = max\{\lambda : \lambda \in \Lambda'\} > \lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda' \setminus \{\lambda^0\}$). Desta forma,

$$\frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a))|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} \xrightarrow{n} +\infty$$

sempre que $\lambda \in \Lambda' \setminus \{\lambda^0\}$.

Caso contrário, existe pelo menos um j_0 que não pertence ao conjunto $\{i_1, ..., i_r\}$. Sendo assim, escolheremos $\lambda \in \Lambda'$ de modo que $\lambda_{j_0} \neq 0$. Assim,

$$\frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a))|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} =$$
$$= \frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a))|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot |u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}} \ldots \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}}$$
$$= \frac{\Delta_1(a+h_n)}{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|} \cdot \frac{|a_\lambda|^{-1} \cdot |a_{\lambda^0}|}{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}-1} \cdot \Pi_{i=1, i \neq j_0}^d |u_i(a+h_n) - u_i(a))|^{\lambda_i}}$$

Como $j_0 \notin \{i_1, ..., i_r\}$, podemos fazer uso do item $b)$ do Lema 4.2 para obter que

$$\frac{\Delta_1(a+h_n)}{|u_{j_0}(a+h_n)-u_{j_0}(a)|} \xrightarrow{n} +\infty \tag{4.50}$$

Como as u_m's são limitadas, ($(u_m)_{m\geq 1} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$), existe uma constante $M_i \geq 0$ ($i = 1, ..., d$) tal que $|u_i(a+h_n)-u_i(a)| \leq |u_i(a+h_n)|+|u_i(a)| \leq 2\cdot M_i$, para cada $i \neq j_0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \frac{|a_\lambda|^{-1}\cdot|a_{\lambda^0}|}{|u_{j_0}(a+h_n)-u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}-1}\cdot\Pi_{i=1,i\neq j_0}^d|u_i(a+h_n)-u_i(a))|^{\lambda_i}} \geq \\ \geq\ & \frac{|a_\lambda|^{-1}\cdot|a_{\lambda^0}|}{(2M_1)^{\lambda_{j_0}-1}\cdot ...\cdot(2\cdot M_d)^{\lambda^d}} > 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

para cada $i = 1, ..., d$ com $i \neq j_0$, e todo $n \in \mathbb{N}$ (claramente a expressão (4.51) é limitada por cima). Assim, segue de (4.50) e (4.51) que

$$\begin{aligned} & \frac{|a_{\lambda^0}|\cdot|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a))|^{\beta_1}\cdot ...\cdot|u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda|\cdot|u_1(a+h_n)-u_1(a))|^{\lambda_1}\cdot ...\cdot|u_d(a+h_n)-u_d(a)|^{\lambda_d}} = \\ =\ & \frac{|a_{\lambda^0}|\cdot|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a))|^{\beta_1}\cdot ...\cdot|u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda|\cdot|u_1(a+h_n)-u_1(a))|^{\lambda_1}\cdot ...\cdot|u_{j_0}(a+h_n)-u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}}\ ...\cdot|u_d(a+h_n)-u_d(a)|^{\lambda_d}} \\ =\ & \frac{\Delta_1(a+h_n)}{|u_{j_0}(a+h_n)-u_{j_0}(a)|}\cdot\frac{|a_\lambda|^{-1}\cdot|a_{\lambda^0}|}{|u_{j_0}(a+h_n)-u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}-1}\cdot\Pi_{i=1,i\neq j_0}^d|u_i(a+h_n)-u_i(a))|^{\lambda_i}} \xrightarrow{n} +\infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|\Delta_2(a+h_n)|} \xrightarrow{n} +\infty \quad \text{(veja} \quad (4.48)). \tag{4.52}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|\Delta_3(a+h_n)|} &= \frac{|a_{\lambda^0}|\cdot|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a))|^{\beta_1}\cdot ...\cdot|u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{\left|\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}a_\lambda\cdot(u_1(a+h_n)-u_1(a))^{\lambda_1}\cdot ...\cdot(u_d(a+h_n)-u_d(a))^{\lambda_d}\right|} \geq \\ \geq\ & \frac{|a_{\lambda^0}|\cdot|u_{i_1}(a+h_n)-u_{i_1}(a))|^{\beta_1}\cdot ...\cdot|u_{i_r}(a+h_n)-u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda'}|a_\lambda|\cdot|u_1(a+h_n)-u_1(a)|^{\lambda_1}\cdot ...\cdot|u_d(a+h_n)-u_d(a)|^{\lambda_d}} \end{aligned} \tag{4.53}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Nesse contexto, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d) \in \Lambda \setminus \Lambda'$ significa que pelo menos $r+1$ das suas coordenadas são não nulas. Em outras palavras, existe pelo menos um j_0

diferente dos i_k's para o qual $\lambda_{j_0} \neq 0$. Por conseguinte, observe que a verificação de que

$$\frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot ... \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a)|^{\lambda_1} \cdot ... \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} \xrightarrow{n} +\infty. \tag{4.54}$$

para cada $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$, acabará implicando que

$$\frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot ... \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} |a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a)|^{\lambda_1} \cdot ... \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} \xrightarrow{n} +\infty.$$

(novamente, isto vai decorrer do fato de que Λ é finito). Sendo assim, vamos verificar (4.54). Para isso, escolha $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d) \in \Lambda \setminus \Lambda'$ de modo que $j_0 \notin \{i_1, ..., i_r\}$ e $\lambda_{j_0} \neq 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\frac{|a_{\lambda^0}| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a))|^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))|^{\beta_r}}{|a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a))|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} = \\
&= \frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|a_\lambda| \cdot |u_1(a+h_n) - u_1(a))|^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot |u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}} \ldots \cdot |u_d(a+h_n) - u_d(a)|^{\lambda_d}} \\
&= \frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|} \cdot \frac{|a_\lambda|^{-1}}{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}-1} \cdot \Pi_{i=1, i\neq j_0}^{d} |u_i(a+h_n) - u_i(a))|^{\lambda_i}}.
\end{aligned}$$

Usando o item **(b)** e o fato de que a expressão

$$\frac{|a_\lambda|^{-1}}{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}-1} \cdot \Pi_{i=1, i\neq j_0}^{d} |u_i(a+h_n) - u_i(a))|^{\lambda_i}}$$

é limitada por uma constante positiva, para todo $n \in \mathbb{N}$, obteremos que

$$\frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|} \cdot \frac{|a_\lambda|^{-1}}{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|^{\lambda_{j_0}-1} \cdot \Pi_{i=1, i\neq j_0}^{d} |u_i(a+h_n) - u_i(a))|^{\lambda_i}} \xrightarrow{n} +\infty.$$

o que mostra que $\dfrac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|\Delta_3(a+h_n)|} \xrightarrow{n} +\infty$, como gostaríamos (ver (4.53)).

Em resumo, $|\Delta_1(a+h_n)| >> |\Delta_2(a+h_n)|$ e $|\Delta_1(a+h_n)| >> |\Delta_3(a+h_n)|$.

E isto nos diz que

$$\frac{|\Delta_2(a+h_n)|}{|\Delta_1(a+h_n)|} \xrightarrow{n} 0 \tag{4.55}$$

e que

$$\frac{|\Delta_3(a+h_n)|}{|\Delta_1(a+h_n)|} \xrightarrow{n} 0. \tag{4.56}$$

Sabemos que

$$\Delta(a+h_n) = \Delta_1(a+h_n) + \Delta_2(a+h_n) + \Delta_3(a+h_n)$$

para cada n. Assim,

$$\begin{aligned} |\Delta_1(a+h_n)| &= |\Delta(a+h_n) - \Delta_2(a+h_n) - \Delta_3(a+h_n)| \\ &\leq |\Delta(a+h_n)| + |\Delta_2(a+h_n)| + |\Delta_3(a+h_n)| \end{aligned}$$

para cada n. Dessa forma,

$$|\Delta(a+h_n)| \geq |\Delta_1(a+h_n)| - |\Delta_2(a+h_n)| - |\Delta_3(a+h_n)|$$

para cada n.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta(a+h_n)|}{|h_n|^{\alpha}} &\geq \frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|h_n|^{\alpha}} - \frac{|\Delta_2(a+h_n)|}{|h_n|^{\alpha}} - \frac{|\Delta_3(a+h_n)|}{|h_n|^{\alpha}} \\ &= \frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|h_n|^{\alpha}} \cdot \left(1 - \frac{|\Delta_2(a+h_n)|}{|\Delta_1(a+h_n)|} - \frac{|\Delta_3(a+h_n)|}{|\Delta_1(a+h_n)|}\right) \end{aligned} \tag{4.57}$$

para cada n e $\alpha \in (0,1]$.

O item **(a)** do Lema 4.2 nos assegura que

$$\frac{|\Delta_1(a+h_n)|}{|h_n|^{\alpha}} \xrightarrow{n} +\infty.$$

Isto, juntamente com (4.55), (4.56) e (4.57) nos dá condições de concluir que

$$\frac{|\Delta(a+h_n)|}{|h_n|^{\alpha}} \xrightarrow{n} +\infty.$$

Como

$$\frac{|f(a+h_n) - f(a)|}{|h_n|^{\alpha}} = \frac{|\Delta(a+h_n)|}{|\Delta_1(a+h_n)|}$$

para todo n e $a \in [0,1]$ é arbitrário, podemos concluir que $f \in \mathcal{NH}$, como queríamos.

Passo 3. Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é infinitamente gerada. Para isso, suponha por absurdo que $\mathcal{A}$ seja finitamente gerada. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $u_{i_1}, ..., u_{i_m}$ os geradores de $\mathcal{A}$ e $a \in [0,1]$. Escolha j_0 de modo que $j_0 \notin \{i_1, ..., i_m\}$. O Lema 4.2 garante que existe uma sequência

$(h_n)_{n=1}^{\infty}$ gerada a partir do j_0 que satisfaz o item **(b)**. De forma particular,

$$|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)| >> |u_l(a+h_n) - u_l(a)|$$

para cada $l \notin \{j_0\}$.

Porém, $u_{j_0} \in \mathcal{A}$. Isto significa que (usando a fórmula de Taylor para funções analíticas), existe um conjunto finito $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^m$ tal que

$$u_{j_0}(a+h_n) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \cdot (u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)))^{\lambda_1} \cdot ... \cdot (u_{i_m}(a+h_n) - u_{i_m}(a))^{\lambda_m},$$

sendo $a_\lambda \neq 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Assim sendo, podemos tomar l como sendo qualquer um dos i_k'. Assim, seja $l = i_{k_0}$, sendo i_{k_0} de forma que $\lambda_{k_0} \neq 0$ (isto é possível, pois $a_\lambda \neq 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$). Perceba que

$$\begin{aligned}
\frac{|u_{j_0}(a+h_n) - u_{j_0}(a)|}{|u_{i_{k_0}}(a+h_n) - u_{i_{k_0}}(a)|} &= \frac{\left|\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \cdot (u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)))^{\lambda_1} \cdot ... \cdot (u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a))^{\lambda_m}\right|}{|u_{i_{k_0}}(a+h_n) - u_{i_{k_0}}(a)|} \\
\leq & \frac{\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\lambda_1} \cdot ... \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)|^{\lambda_m}}{|u_{i_{k_0}}(a+h_n) - u_{i_{k_0}}(a)|} \\
= & \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| \cdot |u_{i_1}(a+h_n) - u_{i_1}(a)|^{\lambda_1} \cdot \ldots |u_{i_{k_0}}(a+h_n) - u_{i_{k_0}}(a)|^{\lambda_{k_0}-1} \ldots \cdot |u_{i_r}(a+h_n) - u_{i_r}(a)|^{\lambda_m} < +\infty.
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois Λ é finito e as u_{i_k}'s são limitadas. Porém, isto gera um absurdo!

Portanto, $\mathcal{A}$ é infinitamente gerada. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Araújo, M. A., Fávaro V. V., *Um estudo sobre funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto.* FAMAT em Revista, Uberlândia, **13**, 2009 p. 3-10.

[2] Aron, R. M., Bernal-Gonzalez, L., Pellegrino, D. M., and Seoane-Sepúlveda, J. B., *Lineability: the Search for Linearity in Mathematics*, Chapman and Hall/CRC, 2015. https://doi.org/10.1201/b19277

[3] Banach, S., *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionemmengen*, Studia Math. **3** (1931), 174–179. https://doi.org/10.4064/sm-3-1-174-179

[4] Bayart, F. and Quarta L., *Algebras in sets of queer functions*, Israel J. Math. **158** (2007), 285–296. https://doi.org/10.1007/s11856-007-0014-x

[5] Beals, R., *Analysis: An Introduction*, First Edition. Neww York: Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755163

[6] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, 2012.

[7] Fonf, V., Gurariy, V., and Kadets, M.,*An infinite dimensional subspace of $C[0,1]$ consisting of nowhere differentiable functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **52** (1999), 13–16.

[8] Gurariy, V. I., *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 971–973.

[9] Gurariy, V. I., and Quarta, L., *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 62-72.

[10] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*, Terceira Edição, SBM, 1977.

[11] LIMA, E. L., *Curso de Análise*, 14ª Edição. Rio de Janeiro: Coleção Projeto Euclides, 2013.

[12] LIMA, E. L., *Análise Real volume 1, Funções de uma variável*, 10ª Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[13] RODRIGUEZ-PIAZZA, L., *Every separable Banach space isometric to a space of continous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc **123**(12) (1995), 3649-3654. https://doi.org/10.2307/2161889

[14] WEIERSTRASS, K., *Mathematische Werke II*, Mayer and Müller, Berlin 1895, pp. 71-74.

[15] WILLARD, S.,*General Topology*, University of Alberta, 1968.

[16] WOJTASZCZYK, P., *Banach spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608735