UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA – FAMAT

**PEDRO HENRIQUE BERNARDES DA SILVA**

# ANÁLISE DE ERROS: O QUE PODEMOS APRENDER COM AS RESPOSTAS DE INGRESSANTES EM UM CURSO DE MATEMÁTICA?

Uberlândia – MG
2019

PEDRO HENRIQUE BERNARDES DA SILVA

# ANÁLISE DE ERROS: O QUE PODEMOS APRENDER COM AS RESPOSTAS DE INGRESSANTES EM UM CURSO DE MATEMÁTICA?

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito final para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Drª. Érika Maria Chioca Lopes

Uberlândia – MG

2019

PEDRO HENRIQUE BERNARDES DA SILVA

# ANÁLISE DE ERROS: O QUE PODEMOS APRENDER COM AS RESPOSTAS DE INGRESSANTES EM UM CURSO DE MATEMÁTICA?

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de licenciado em Matemática submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profª. Érika Maria Chioca Lopes – Doutora em Educação (orientadora) (UFU)

Prof. Germano Abud de Rezende – Doutor em Matemática Aplicada (UFU)

Prof. Arlindo José de Souza Junior – Doutor em Educação (UFU)

Uberlândia - MG
2019

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter arquitetado toda a trajetória tanto de minha vida, quanto para a construção desta minha pesquisa. Sou muito grato pelas bênçãos, aprendizados e pessoas que passaram por mim. Tudo que sou e tenho é por Tua vontade, por isso este trabalho se sustenta como o resultado de todo este caminho percorrido.

Aos meus pais, Zilá e Rivelino, e a minha família que me deram todas as condições e ambientações para tornar possível tudo aquilo em que acredito. O respeito à família e a Deus, a liberdade de expressão e o incentivo para realizações de sonhos, formam o que eles sempre aplicaram em mim e é o que levarei para toda minha vida.

À minha mentora e querida orientadora Érika Maria Chioca Lopes, que me norteou no planejamento e execução de toda esta pesquisa. Me deu liberdade para construir meu próprio raciocínio e se mostrou respeitosa em todas minhas decisões. Oportunizou situações que contribuíram significativamente para minha formação como professor e pesquisador. Tenho minha total gratidão pelas situações dentro e fora desta pesquisa, sou composto pelos resultados de nossas interações e saiba que continuarei evoluindo com os conselhos dados por tua pessoa.

Aos professores, Leonardo Donizette de Deus Menezes e Mariana Martins Pereira, meus supervisores nas disciplinas de Estágio Supervisionado. Se Deus planeja as pessoas certas para participarem do caminhar de uma vida, estes dois estiveram presentes (e sempre continuarão) concretamente na minha. Os conselhos desta professora me oportunizaram a orientação deste outro, que moldou minha postura profissional e contribuiu simbolicamente para esta pesquisa. Suas orientações, conselhos e, principalmente, suas amizades, sempre estarão comigo.

Aos professores de Estágio, Arlindo José de Souza Junior e Fabiana Fiorezi de Marco Matos, e amigos de caminhada. Muito obrigado por ensinarem não apenas o necessário, mas por irem além quando o assunto se tratava de Educação Matemática. Suas experiências e compartilhamentos serão levados comigo junto a minha formação como professor.

Ao icônico e carismático Pierluigi Piazzi. Sua maneira simples de oratória, sua paixão em querer dar aula e sua metodologia efetiva de aprendizado que me inspiram a querer ser professor. Obrigado por me orientar a construir em mim as habilidades e noções para se tornar cada vez mais inteligente e estruturar uma metodologia que pôde ser aplicada em mim e que culminou em bons resultados. Espero prolongar o legado que você deixou no Brasil, aplicando, agora eu, cientificamente, os estudos e pesquisas sobre Neuropedagogia e Neurociência. Aula dada, é aula estudada, hoje! Levarei esta frase comigo também e compartilharei a metodologia

de minhas futuras pesquisas com meus futuros alunos, para que todos possam passar por uma aprendizagem significativa e autônoma.

Todos estes contribuíram para a minha formação como professor, pesquisador e pessoa. Dedico todo o corpo deste texto a vocês, amigos e profissionais da área, e saibam que a arquitetura textual possue uma contribuição por parte de vocês, pois, se está escrito, é porquê me oportunizaram. Fica aqui a minha gratidão a todos!

*“O Brasil tem milhões de alunos, mas pouquíssimos estudantes.”*
*(Pierluigi Piazzi)*

**RESUMO**

Este trabalho objetiva analisar as produções escritas de ingressantes em um curso de Graduação em Matemática no contexto da disciplina de Seminários de Matemática Elementar (SME) nos dois semestres de 2019, investigando possíveis dificuldades conceituais destes alunos na perspectiva da Análise de Erros. Após leituras e discussões de textos relacionados com erros matemáticos, foi proposto um questionário abordando conceitos da área, onde os alunos deveriam registrar suas resoluções. Com relação à metodologia de análise de erros (Cury, 2008), as respostas foram classificadas em categorias conceituais, e essas servem de instrumento de identificação de erros, possibilitando investigar futuras abordagens de ensino para calouros de cursos de Matemática. A partir de uma análise quali-quantitativa destas respostas, partimos para investigações de intervenções metodológicas que possibilitavam o preenchimento das lacunas conceituais deficitárias destes ingressantes, advindas do Ensino Básico, investigando cooperativamente com o mesmo as soluções para seus equívocos buscando a construção de seu próprio conhecimento. Este movimento permitiu uma liberdade metodológica, dando-nos possibilidades de pensamentos de estratégias de ensino-aprendizado que mais poderiam contribuir para a formação destes alunos. As ações realizadas nesta pesquisa, sustentadas pelo auxílio da disciplina de SME em outras disciplinas do primeiro semestre do curso, oportunizam articular um planejamento pedagógico simbólico com os professores de outras matérias do primeiro período, desencadeando uma possível colaboração entre as disciplinas inicias do curso, alicerceando a estrutura conceitual destes futuros professores.

**Palavras-chave:** Análise de erros, Graduação em Matemática, Ingressantes, Aula investigativa, Jogos manipulativos.

## ABSTRACT

This paper aims to analyze the written productions of newcomers in a Mathematics Undergraduate course in the context of the Elementary Mathematics Seminars (EMS) discipline in the two semesters of 2019, investigating possible conceptual difficulties of these students from the perspective of Error Analysis. After reading and discussing texts related to mathematical errors, a questionnaire was proposed addressing concepts in the area, where students should record their resolutions. Regarding the error analysis methodology (Cury, 2008), the answers were classified into conceptual categories, and these serve as an error identification tool, enabling the investigation of future teaching approaches for freshmen in mathematics courses. From a qualitative and quantitative analysis of these answers, we started to investigate methodological interventions that made it possible to fill the deficient conceptual gaps of these newcomers, coming from Basic Education, cooperatively investigating the solutions to their mistakes seeking the construction of their own knowledge. This movement allowed a methodological freedom, giving us possibilities of thoughts of teaching-learning strategies that could contribute more to the formation of these students. The actions carried out in this research, supported by the help of the SME discipline in other subjects of the first semester of the course, make it possible to articulate a symbolic pedagogical planning with the teachers of other subjects of the first period, triggering a possible collaboration between the beginning subjects of the course, laying the foundations the conceptual framework of these future teachers.



**Keyword:** Error analysis, Graduation in Mathematics, Ingressors, Investigative class, Manipulative games.

# Sumário

# INTRODUÇÃO

O presente trabalho se sustenta pelos simbólicos interesses de aprender e ensinar matemática, acompanhados de satisfações particulares em poder ajudar o próximo. Os primeiros contatos que tive com sala de aula, em cursos preparatórios, me permitiram identificar casos, em sua grande maioria, onde os alunos demonstravam uma significativa dificuldade em aprendizagem dessa disciplina. Entrementes, julguei estar sob minha responsabilidade melhorar de forma significativa a concepção de se estudar a matemática desses alunos.

A procura por este movimento se fez muito importante, pois prazerosamente me encontrei estruturando metodologias de aprendizado que favoreceriam o crescimento cognitivo do aluno. Já na faculdade, continuei observando a tendência dos alunos do cursinho pré-vestibular – onde comecei a dar minhas primeiras aulas –, tendência esta onde a grande e esmagadora maioria dos alunos se apresentavam com um verdadeiro abismo conceitual sobre a disciplina. A priori, pensei que fossem apenas impressões particulares sobre a educação no país, advindas de relatos de dificuldades, experiências vividas e afinidade com o conteúdo. Contudo, ao pesquisar e obter acesso a um levantamento de dados estatísticos sobre aspectos educacionais brasileiros, a impressão se tornou, infelizmente, uma realidade.

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA[1]) é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada para alunos com faixa etária de 15 anos, idade esta que se deduz o término da escolaridade básica dentre a maioria dos países do mundo. O programa é coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), com o apoio de uma coordenação nacional em cada país participante. No Brasil, a coordenação do PISA é de responsabilidade do Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas, do Ministério da Educação brasileiro).

Realizado de três em três anos, o PISA foca em três áreas principais de ensino: matemática, leitura e ciências. Em 2015, a nota do país em ciências caiu de 405, na edição anterior de 2012, para 401; em leitura, o desempenho do Brasil caiu de 410 para 407; já em matemática, a pontuação dos alunos brasileiros caiu de 391 para 377. Cingapura foi o país que ocupou a primeira colocação nas três áreas (556 pontos em ciências, 535 em leitura e 564 em matemática). E foi neste momento que percebi a realidade conceitual matemática dos alunos brasileiros.

---

[1] Do inglês: Programme for International Student Assessment.

Esses resultados fizeram nascer em mim algumas questões sobre as concepções da matemática e suas implicações para o processo de ensino-aprendizagem. Quais eram as metodologias mais eficazes de ensino? Qual deveria ser a estrutura de aula com o intuito de maximizar o entendimento do aluno? O que de fato um aluno sabe no final dos ciclos educacionais? Como o aluno aprende mais? É seu rendimento escolar que demonstra seu verdadeiro aprendizado? É possível se tornar mais inteligente?

Com esta inquietação de querer suprir a necessidade de ensinar matemática de forma eficaz que comecei a investigar meios de explicação para estas divergências de aprendizado. Em meio a inúmeras pesquisas, me encontrei frente a uma das frases mais emblemáticas que me motivam a ser professor hoje: "O sistema educacional brasileiro está ruim por que o Brasil tem milhões de alunos, mas pouquíssimos estudantes"[2]. Em meio à complexidade desta fala, procurei encontrar metodologias na educação que me permitissem, inicialmente, demonstrar os possíveis caminhos metodológicos para se aprender qualquer conteúdo com maior eficácia; depois, permitir diagnosticar as dificuldades atreladas aos conhecimentos do aluno e, por fim, procurar meios de ensino para orientar, o mesmo, nos conhecimentos necessários para contornar suas dificuldades.

Foi então, na faculdade, que encontrei os estudos sobre análise de erros com minha orientadora, que permitiram tanto identificar os possíveis erros matemáticos que um aluno possa apresentar, quanto possibilitar investigações futuras de abordagens de ensino para o mesmo. Percebo que esse, no cursinho, apresenta suas características próprias de erros de forma equivocada – muito delas advindas de macetes e regras já indexadas –, proporcionando uma cadeia de conceitos matemáticos que acabam comprometendo no seu aprendizado. Podemos pensar nas dificuldades que estes alunos têm antes mesmo de entrarem na faculdade, mas no início dos estudos do Ensino Superior, será diferente? Será que existe uma ruptura?

Embora seja um tema complexo, não seria viável abordá-lo como um todo neste trabalho. Então, baseio-me em pesquisas feitas pelo português João Pedro da Ponte, que afirma que os matemáticos formam uma comunidade com sua cultura própria, e por isto, tentei trazer argumentos que comprovam esta ruptura. O autor diz também que os matemáticos possuem

---

[2] Frase original de Pierluigi Piazzi (1943 – 2015), professor de física formado pela USP-SP na década de 60. Este me mostrou, com estudos da neurociência, e seus mais de meio século de experiência em sala de aula, a eficácia de se estudar pouco, com qualidade, todos os dias e com uma metodologia simples para que qualquer aluno, e em qualquer idade, possa se tornar mais inteligente – descobrir o prazer pela leitura, estudar a aula dada do dia no mesmo dia e praticar exercícios para o cérebro, são ações fundamentais para tal feito. Hoje, ele é o modelo de professor que me inspira a procurar saber mais sobre a educação do país e me motiva a procurar soluções metodológicas eficazes de ensino-aprendizado, baseadas, em grande parte, na neuro-pedagogia.

“seus conceitos, normas, valores, problemas, métodos e critérios de verdade e de validade, partilhados pelo menos até certo ponto pela generalidade dos seus membros”. Reconhecendo que não existe um acordo sobre quem faz parte dessa comunidade matemática (pode não ser só os professores), o autor apresenta a seguinte perspectiva:

> Numa primeira aproximação podemos distinguir entre três grandes domínios onde se pratica Matemática: (i) o mundo dos matemáticos e daqueles que usam profissionalmente aplicações sofisticadas da Matemática; (ii) o mundo da vida social onde se faz uso corrente de ideias, técnicas e conceitos matemáticos (das contas do supermercado aos algoritmos dos bancos…); (iii) o mundo da sociedade onde se aprende Matemática, ou seja, a escola. Os propósitos dos atores que se movem em cada um destes mundos são diferentes e, por isso, diferente é a sua relação com a Matemática. (PONTE, 2001, p. 11).

Dentro desta visão, podemos situar vários casos de alunos que se encontram em cada domínio definido por Ponte. Os alunos de pré-vestibular poderiam estar cada um em um domínio diferente. Contudo, é no que o autor se refere ao campo da matemática profissional e o da escola, onde “(...) muitos dos problemas que existem no ensino-aprendizagem da Matemática resultam de um excessivo afastamento entre os dois mundos” (PONTE, 2001, p. 12), que os alunos, sejam de cursinho ou ingressantes universitários, podem apresentar suas peculiares dificuldades.

Com base nas considerações supracitadas, o presente trabalho teve como pergunta de pesquisa o seguinte questionamento: *O que podemos aprender com as respostas dos ingressantes em um curso de licenciatura em Matemática?*

Com isso, este trabalho se justifica pela necessidade de analisar e investigar os ingressantes, acompanhado da vontade de ajudar o aluno a aprender com metodologias eficazes de ensino e aprendizagem a partir da Análise de Erros que possibilita relacionar esses campos de análise e investigação, com a finalidade primordial de proporcionar uma contribuição expressiva para o aluno. Sobretudo então, o objetivo aqui é analisar os erros a partir das respostas dos ingressantes no curso de Graduação em Matemática, investigando as possíveis dificuldades conceituais destes alunos e estruturando abordagens pedagógicas de acordo com a Análise de Erros de Cury (2008). E como objetivos específicos destacamos:

- Fazer um levantamento de dados quantitativos, relacionando o percentual de alunos acima da média para cada conteúdo trabalhado.
- Analisar qualitativamente as respostas do diagnóstico dos ingressantes, procurando ressaltar os erros, investigar suas possíveis origens e tentar compreendê-los para que possamos pensar em intervenções pedagógicas.

- Investigar e aplicar abordagens de ensino, conectando as maiores dificuldades advindas dos alunos do Ensino Básico com os conteúdos matemáticos de maior necessidade.

Agora, em termos de disposição, esse trabalho está subdivido da seguinte forma:

Na seção 2, apresentamos toda base teórica que sustentou nosso trabalho. Discutiremos sobre as definições da análise de erros de Cury (2008); o jogo como metodologia de ensino de matemática através da perspectiva de Grando (2000), Huizinga (1990), PCN's (1997) e demais autores; e a importância da aula investigativa na visão de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

Na seção 3, iremos explicitar a metodologia desenvolvida para esta pesquisa. Explicaremos os campos de atuação dentro da disciplina de Seminários de Matemática Elementar. Esta seção também abarca uma caracterização das turmas, falaremos da avaliação diagnóstica aplicada nas turmas e uma explicação sobre a intervenção pedagógica.

Na seção 4, apresentamos os resultados do diagnóstico e a classificação de erros dos alunos do primeiro e segundo semestre de 2019. Nesta, enfatizamos tabelas com os percentuais de acertos e erros, procuramos destacar o baixo percentual disciplinar que possibilitou investigar intervenções pedagógicas investigativas utilizando-se de jogos e tecnologia digital, e por fim, destacaremos os resultados específicos colhidos de todos estes movimentos.

Na seção 5, contém a apreciação dos resultados gerais obtidos e a exposição dos desafios para responder à pergunta de pesquisa; um contorno sobre os caminhos percorridos até o fim do trabalho e suas contribuições; e, por fim, uma reflexão sobre o processo de ensinar Matemática e da importância dos cursos de Graduação em Matemática buscarem alternativas para oportunizar os ingressantes – futuros professores de Matemática – a preencherem lacunas fundamentais advindas do Ensino Básico.

Aguardamos uma simbólica contribuição para a prática de ensino-aprendizagem dos professores, acompanhado de reflexões que permitam plantar perspectivas de avanço na educação matemática. Com uma liberdade disciplinar de intervenções, espera-se que os docentes possam ter ideias particulares que auxiliem na minimização das dificuldades advindas de alunos em qualquer grau de ensino.

# 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, discutiremos os pressupostos teóricos das abordagens metodológicas escolhidas para o desenvolvimento desta pesquisa: análise de erros, jogos para o ensino de matemática e aula investigativa.

## 2.1 A Análise de Erros

A Análise de Erros é um recurso metodológico de pesquisa que visa estudar dificuldades, estratégias, procedimentos e erros de naturezas diversas vindas dos alunos (CURY, 2009; BURIASCO, 2004; SANTOS, 2014), a partir de produções escritas feitas por eles. Mas não só isso, este estudo abre-se em um panorama metodológico de ensino, dando possibilidade ao professor de levantar questionamentos sobre as estratégias utilizadas pelos ingressantes universitários nessas produções.

Em pesquisas que investigam as situações de erros dos ingressantes de graduação, uma reflexão se faz relevante entre as análises de dificuldades enfrentadas por esses alunos e algumas falas dos participantes destas pesquisas. Segundo Lopes (2019), há um consenso entre os pesquisadores de que a entrada na vida universitária representa uma ruptura com a cultura escolar anterior e que comportamentos, normas e valores precisam ser transformados e apropriados.

Nos cursos de Licenciatura em Matemática, os estudos têm apontado que os maiores problemas estão relacionados aos erros em conteúdos do Ensino Fundamental ou Médio, especialmente os que envolvem Números e Álgebra (CURY, 2009; FELTES, 2007). Com relação aos números, Cury (2008) afirma que as quatro operações ensinadas nas séries iniciais do Ensino Fundamental têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores, enfocando também o conceito de número e o sistema de numeração decimal.

Na Álgebra, por exemplo, Cury e Konzen (2006, p. 3) dizem que "[...] há um nível de abstração que provoca, tanto na Educação Básica quanto na Superior, um momento de ruptura com conceitos e procedimentos já internalizados pelos alunos". Os conteúdos de Álgebra – trabalhados nesta pesquisa: potenciação, radiciação, simplificação, fatoração, equações polinomiais e funções – são analisados em alguns trabalhos evidenciando a importância de sua aprendizagem para estudos posteriores, como o Cálculo Diferencial e Integral (CURY, 2008). Segundo Cury e Konzen (2006, p. 3)

> [...] no ensino superior, encontramos alunos que já formaram concepções sobre a Álgebra, já introjetaram esquemas ou "macetes" que lhes impedem de

> pensar sobre o que estão fazendo; uma das "regras" mais recitadas diz que "ao trocar de lado, muda-se o sinal".

Sobre estas regras, deve-se considerar a importância de que, se o aluno não souber a essência das mesmas, torna-se possível recair em erros absurdos que comprometem o seu aprendizado.

Por isso, Borasi (1996, *apud* CURY, 2008, p. 36) procura ambientar os alunos nos quais os erros possam vir a ser aproveitados e investigados com um maior rigor matemático. A proposta visa identificar o erro e a fomentar questionamentos que busquem verificar a veracidade da resposta, ao invés de apenas eliminá-la como tal equívoco. Um erro bastante comum trazido pela autora (e, segundo ela, pesquisado por vários pesquisadores matemáticos) é ilustrado por $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=\frac{9}{11}$. Ao contrário de eliminá-lo, re-explicando seu processo, recitando a regra da adição de frações e pedindo para que o aluno refaça os cálculos adequados – extratégia de fato demonstrada ineficiente na maior parte das intervenções (CURY, 2008) –, este erro permite ao professor investigar, junto aos alunos, por exemplo, se existe frações em que esta "regra" da adição pode ou não funcionar.

Deparando-se com esta problemática, alguns autores (BORASI E MICHAELSEN, 1985; BATHELT, 1999, *apud* CURY, 2008, p. 82) comentam e articulam sobre as possibilidades deste erro estarem relacionadas à identificação de uma fração com "dois números naturais separados por um traço" e o mesmo se encontra com maior frequência em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental. Borasi e Michaelsen discutem mais ao lembrarem que muitos professores encontram este erro após os estudos de produtos com frações (e este é, segundo Cury, evidentemente, um caso dos estudantes universitários), e pode-se, então, pensar que os alunos estão "sobregeneralizando[3]" a regra do produto de frações e transportando-a para estruturas matemáticas que nem sempre são satisfeitas.

Para o caso da soma de frações, podemos supor e investigar para quais pares de fração a soma entre elas pressupõe ser efetuada de tal forma. Em outras palavras, é interessante propor para alunos de Álgebra a seguinte proposição: dados dois racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $b, d \neq 0$, para quais valores de $a, b, c$ e $d$, temos que:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

---

[3] Termo traduzido da expressão "*overgeneralization*", que também pode ser encontrada em outros textos como "falsa generalização" (CURY, 2008).

Os alunos podem partir de diferentes casos particulares e comparar os resultados para cada valor racional encontrado, ou então, podem iniciar suas conjecturas a partir da igualdade $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d}$ e verificar se existem inteiros que a satisfazem.

Exemplificando, suponha-se então que: $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d}$ para todo $a, b, c$ e $d \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $b + d \neq 0$. Multiplicando extremos e meios, tem-se: $(ad + bc).(b + d) = (a + c).bd$. Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, com relação à adição, ficaremos com $abd + ad^2 + b^2c + bcd = abd + bcd$. Pela lei de cancelamento da adição em $\mathbb{Z}$, chegaremos em $ad^2 + b^2c = 0$, o que se resume em $ad^2 = -b^2c$. Perceba que $a = c = 0$ não nos é vantajoso; eliminando então esta hipótese ficaremos com a expressão $\frac{d^2}{b^2} = -\frac{c}{a}$. Visto que o primeiro membro dessa igualdade é sempre positivo, temos que $a$ e $c$ possuem sinais opostos. Cury (2008, p. 83) então conclui ser "[...] necessário fazer conjecturas que podem levar o estudante e professor a discutirem o conceito de número racional, as definições e propriedades das operações, etc."

A discussão sobre este erro levou até mesmo Borasi e Michaelsen (1985) a questionarem sobre os conceitos de fração e razão, e a repensarem no potencial desse tipo de exploração analista. As autoras sugerem que:

> Pode ser válido, para os alunos, se envolverem em exercícios semelhantes, de acordo com suas habilidades. Por exemplo, estudantes mais jovens ou com mais dificuldades poderiam aproveitar com o envolvimento na comparação dos resultados obtidos pela adição de frações com as duas regras diferentes. Isso pode gerar dados para serem observados e organizados, de forma a reconhecer padrões. (BORASI; MICHAELSEN, 1985, p. 62).

Esta abordagem permite ao professor investigar as proposições verídicas que validam a aplicação desta "regra" da adição inventada pelos alunos. Isso faz com que os questionamentos levem a um aprofundamento do assunto, pois se o aluno havia "decorado" uma regra e a esquecido posteriormente, a busca por respostas, sob a orientação do professor, irá abranger "resolução de problemas em um sentido criativo".

Borasi (1996, *apud* CURY, 2008, p. 36) sugere também linhas de investigação que podem ser aceitas dependendo do nível de ensino:

> – Há outras operações com frações onde numeradores e denominadores são combinados separadamente?
> – Há algumas frações para as quais os resultados da adição com a regra-padrão e com a regra alternativa são iguais ou, pelo menos, "suficientemente próximas"? (p. 8).

Analisando estes questionamentos fomentamos que, no primeiro caso, terão a oportunidade de revisarem os saberes e conceitos de frações e, possivelmente, concluírem o uso da “sobregeneralização” como recurso equivocado advindo das propriedades de multiplicação de frações. No segundo caso, a proposta se torna mais interessante, pois, permite que o aluno, mesmo revendo a regra-padrão por novas explicações vindas do professor, utilize-a para uma busca de diferentes estratégias de resolução, evitando a ideia de “decorar” o procedimento. Em outras palavras, Cury (2008, p. 37) afirma que:

> Partindo da regra incorreta e elaborando situações didáticas motivadoras, é possível fazer uso do erro como “trampolim para a aprendizagem”, expressão usada por Borasi (1985), ao introduzir uma coletânea de artigos sobre erros.

Por isso, e em meio a essas possíveis dificuldades, que se torna legítimo a utilização da Análise de Erros em produções escritas como um possível investimento de investigação e pesquisa dentro das abordagens da Educação Matemática. As ideias trazidas de sua teoria vêm sendo aprofundadas, modificadas, retomadas e iluminadas por novos textos na proporção dos objetivos de pesquisa de investigadores da educação. Com isso, este trabalho tem como objetivo analisar os erros a partir das respostas dos ingressantes no curso de Graduação em Matemática de uma universidade pública no contexto da disciplina de Seminários de Matemática Elementar, investigando as possíveis dificuldades conceituais destes alunos de acordo com Cury (2008). Segundo essa autora, é necessário realizar uma avaliação diagnóstica das dificuldades de cada turma para adaptar o ensino às necessidades dos alunos e, com isso, tentar evitar a evasão e a reprovação.

A partir da leitura de textos e discussões, pensamos nas possíveis abordagens metodológicas de ensino que poderíamos elaborar para os ingressantes do curso de matemática. Dois terrenos conceituais e práticos se destacaram em meio a um universo de possibilidades intervencionistas: o uso de jogo como uma metodologia de ensino e abordagens investigativas no contexto da educação matemática. Estas duas frentes serão melhor explicadas nas seções subsequentes.

### 2.2 O jogo como metodologia para o ensino de matemática

O brincar e o jogar são atividades características do ser humano. Cada grupo étnico expõe sua forma particular de ludicidade. Assim sendo, “o jogo se apresenta como um objeto cultural. Por isso, encontramos uma variedade infinita de jogos, nas diferentes culturas e em qualquer momento histórico” (GRANDO, 2000, p.1).

No que se refere ao jogo, os estudos realizados por Grando (2000) mostraram tanto a variedade, quanto a complexidade de sua definição. Por exemplo, para Huizinga (1990, *apud* GRANDO, 2000, p.1), o jogo seria o precursor até mesmo da cultura. O autor explicita a noção de jogo “como um fator distinto e fundamental, presente em tudo o que acontece no mundo [...] é no jogo e pelo jogo que a civilização surge e se desenvolve” (HUIZINGA 1990: prefácio). Percebemos que, para este filósofo, o jogo não só faz parte da cultura, quanto a origina.

Na educação matemática, o jogo também pode se apresentar como um importante recurso metodológico. Dessa forma, recorremos a intervenção metodológica com o jogo Torre de Hanói, por ser um material manipulativo e por propiciar possibilidades de problematização, o que favorece a revisão, o aprofundamento e a consolidação do conceito de função afim, além de ser possível introduzir função exponencial e composta, conforme trabalhado com os ingressantes.

Neste mesmo contexto, encontramos pesquisas que se referem ao jogo como um gerador de situação problema e desencadeador da aprendizagem do aluno (GRANDO, 1995). Nesta perspectiva, podemos citar a perspectiva de Moura (1992, p. 53) que aborda o jogo como um problema em movimento, pois solicita do jogador a elaboração de procedimentos pessoais eficazes na resolução de uma situação-problema de jogo e que define jogo pedagógico “como aquele adotado intencionalmente de modo a permitir tanto o desenvolvimento de um conceito matemático novo, como a aplicação de outro já dominado pela criança”.

Em uma visão similar, Rêgo e Rêgo (2006, p.43) afirmam que a manipulação do objeto se torna essencial para o aluno, se trabalhado de maneira correta, proporcionando ampliação da “sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e os preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos”.

No entanto, sabíamos que apenas o jogo manipulativo não garantiria o aprendizado. Sendo assim, foi necessária a intervenção, para que os alunos superassem o jogo pelo jogo tomando-o como recurso pedagógico. Afinal, como bem observam Fiorentini e Miorim (1990, p. 6):

> (...) nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que o uso de jogos favorece a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas (BRASIL, 1997). No entanto, é preciso relacionar, de forma significativa, o jogo e os conceitos matemáticos dando-lhes uma intencionalidade que caracteriza o processo educacional. O jogo pelo jogo não garante aprendizagem dos conceitos matemáticos. É então essencial a intervenção do professor para transformar o jogo como brincadeira em uma atividade pedagógica, buscando até mesmo superar as concepções tradicionais sobre a utilização do jogo na sala de aula.

O jogo deve, portanto, permitir uma eventual intervenção no processo de ensino, de forma a permitir que cada indivíduo possa desenvolver a capacidade de resolver problemas, isto é, que cada homem desenvolva a capacidade de compreender a situação-problema, estando apto a arquitetar um plano, executá-lo e desenvolver a avaliação conjecturada.

### 2.3 A investigação matemática na sala de aula

Na intenção de explorar abordagens investigativas para uma perspectiva de formação de professores, nos alicerçamos em textos que comprovam seus benefícios para aplicações em salas de aula. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a investigação matemática e a resolução de problemas caminham sobre uma perspectiva teórica muito semelhante. Este fato permite concluir que investigar em matemática assume características muito peculiares dentro desse universo conceitual, permitindo que o aluno aborde suas próprias conjecturas produzindo testes e demonstrações. Segundo estes autores, as investigações matemáticas incentivam a descoberta de fatos que contribuem para estabelecer relações que constituirão uma base para generalizações importantes.

Em poucas palavras, o trabalho investigativo move uma atenção simbólica nos currículos de Matemática de diversos países, como na Inglaterra, na França, em Portugal e também nos documentos curriculares norte-americanos, onde em alguns casos se apresenta de modo mais explícito e em outros de modo mais disseminado (PONTE, 1999). Assim em cada território, existe um programa que dita e caracteriza a investigação dentro de sala de aula. Por exemplo, o programa francês caminha sobre a importância de habituar os alunos à atividade científica, com referência clara ao processo de descoberta. Ponte (1999, p. 2), continua enunciando sobre as características do currículo inglês, que "inclui aspectos diretamente relacionados com o trabalho investigativo numa das suas grandes áreas de objetivos (*Using and applying mathematics*)". O programa português do ensino básico, abrange esta noção de investigação quando se refere à "realização de atividades de exploração e pesquisa ou à elaboração de conjecturas pelos alunos".

Ponte (1999) destaca que existem três etapas fundamentais para a realização de uma aula investigativa, e elas se distinguem e se dividem em na formação da tarefa, a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e o momento de síntese e conclusão final. No desenvolver da atividade, o autor organiza situações onde o professor deve procurar

> [...] envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização de uma tarefa. Durante a atividade, verifica se eles estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representando a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes (PONTE, 1999, p. 2).

É nesta perspectiva que o mesmo deve manter a atividade em total diálogo, de modo a levantar hipóteses e formular conjecturas sólidas com os alunos, para que no final possa conduzir as estratégias de resolução dos mesmo para uma experiência coletiva. No contorno de toda a atividade, é preciso criar um ambiente "propício à aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem" (PONTE, 1999, p. 2).

Para ter conhecimento de um desenvolvimento efetivo e decisivo, o professor deve ser:

> [...] capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objetivos curriculares. Tem de se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos propriamente ditos como com o desenvolvimento da capacidade geral de aprender. [...] Tem de ser capaz de equilibrar os momentos de ação com os momentos de reflexão, ajudando os alunos a construir os conceitos matemáticos (PONTE, 1999, p. 2).

Os momentos que possibilitam a realização de uma aula investigativa, são separados por outros autores em uma sequência didática com vários elementos muito bem definida. Esta sequência sugere, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), que o aluno:

- Explore e formule questões – possibilitando que o mesmo reconheça, explore e formule questões;
- Conjecture ideias – que seria o processo do aluno organizar os dados;
- Teste e reformule – realizando testes e refinando conjecturas;
- Justifique e avalie – justificando as conjecturas e avaliando o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Para esses autores, a investigação matemática, considerada como uma atividade de ensino, pode ser desenvolvida dentro da sala de aula em 3 fases primordiais: i) Introdução da tarefa: a proposta da atividade pode ser feita de forma oral ou escrita; ii) Realização da investigação: pode ser individual, aos pares ou com toda turma; iii) Discussão dos resultados: momento em que os alunos relatam o trabalho realizado.

Nesta perspectiva, a aula de investigação, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), é exposta de modo que o professor seja o mediador da atividade e que possibilite elaborar questionamentos aos alunos levando-os a conjecturar resoluções próprias para o problema inicial dado, afim de atingir o objetivo final. Com a intervenção do docente, a investigação na sala de aula pode ser arquitetada de modo objetivo, permitindo assim resultados concretos.

## 3. METODOLOGIA DESENVOLVIDA

Em meio a estes pontos de vista teóricos, torna-se autêntico a utilização da Análise de Erros em produções escritas como um possível investimento de investigação e pesquisa dentro das abordagens da Educação Matemática. Com isso, existiu uma estrutura metodológica que comportou todo o alicerce da pesquisa: sabíamos onde, com quem e como trabalhar a análise. Sabendo disso, acomodamos o planejamento de toda metodologia desenvolvida nas seções que se seguem.

### 3.1. A transição acadêmica e a disciplina de Seminários de Matemática Elementar

Os ingressantes acadêmicos passam por uma transição enfática do Ensino Básico para o Superior. Dos costumes, crenças, comportamentos, normas e valores trabalhados em ciclos anteriores, esses alunos moldam a forma de pensar e agir frente às situações de vida e, em sua grande maioria, situações novas são postas à prova para que eles possam montar estratégias resolutivas que ataquem o problema. Muito dessas estratégias podem ter sido estruturadas por atividades individuais de estudo, metodologias de ensino de professores, ou por vivências em grupos anteriores, para a resolução de um problema proposto. Em suma, o Ensino Médio e Fundamental são os grandes responsáveis por construir, junto ao aluno, essas práticas educativas. A pergunta que fica é: será que existe uma ruptura de costumes, quando o ingressante adentra na faculdade?

Em pesquisas que investigam esta problemática no primeiro semestre de graduação, encontramos análises que extraem as dificuldades enfrentadas por esses ingressantes. Pinho e colaboradores (2015), por exemplo, falam sobre esta ruptura e uma necessidade de transformação:

> O meio acadêmico tem um grau de exigência maior do que aquele com o qual o estudante estava acostumado e os conteúdos das disciplinas são diferenciados e mais densos, assim o mesmo precisa aprender como conduzir as novas situações que lhe são impostas, caso contrário estas dificuldades podem virar frustrações e, por conseguintes pensamentos que envolvam desejos de abandono do curso. (PINHO *et al.*, 2015, p. 35).

Esta fala aponta uma mudança nos hábitos de estudo que os ingressantes são postos a enfrentar e que, possivelmente, busca contribuir para construção de novas habilidades de aprendizagem, que passam a ser necessárias para seu desenvolvimento acadêmico. Até mesmo o fato de desestímulos, decorrentes das dificuldades encontradas pelos alunos ao realizarem suas atividades acadêmicas iniciais, conduzem a pensamentos sobre abandono ou desistência do curso, outra dificuldade encontrada pelos ingressantes, que busca ser minimizada pelas coordenações dos cursos de Matemática.

Com relação às habilidades, Ezcurra (2005) conclui sobre a existência de dois tipos de eixos classificatórios para tais destrezas, onde o ingressante – que demonstra desconhecer o tempo necessário de dedicação e a organização desse tempo para as atividades de estudo – apresenta suas dificuldades de ruptura: “a) competências para pensar e compreender, ao invés de repetir e memorizar nas diversas disciplinas, e b) o conhecimento de técnicas de estudo [...]” (EZCURRA, 2005, p. 125). Com isso, pode-se questionar sobre alguns fatores presentes nesta ponte (conceitual, de hábitos e de práticas) entre os ensinos: quais as dificuldades que estes alunos enfrentam ao ingressarem no Ensino Superior? O conteúdo dado em sala é realmente difícil? Faltam-lhes organização de estudo?

É sobre toda esta discussão que se tornou interessante trabalhar a Análise de Erros em uma nova disciplina, e de uma nova grade curricular, do curso de Matemática da UFU, que a universidade visou investir. Seminários de Matemática Elementar (SME) é um novo componente curricular para o primeiro período do curso e possui o objetivo central de:

> Implementar métodos de estudo da Matemática na Universidade, através de diferentes estratégias de intervenção que visam contribuir com o aprendizado e a permanência do estudante no curso de graduação, iniciando a capacitação deste no preparo de uma unidade didática e na pesquisa de recursos didáticos (livros, artigos, documentários, softwares, entre outros). (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, 2019, p.1)

Então, com uma necessidade de suprir as possíveis dificuldades que os ingressantes possam vir a apresentar, esta disciplina procura fazer:

> Discussões de diferentes métodos de organização e de estudo, refletindo criticamente sobre a adaptação à universidade, a motivação e o desempenho acadêmico no curso de graduação em Matemática. Reflexões acerca dos desafios do ensino da Matemática, através da realização de oficinas, aulas simuladas, desenvolvimento de projetos e utilização dos recursos da biblioteca e da informática sobre tópicos de interesse das disciplinas Fundamentos de Matemática Elementar I e II (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, 2019, p.1).

A importância do SME se estende ao território disciplinar de duas outras, fomentadas na sua ementa: Fundamentos da Matemática Elementar I e II (com abreviações: F1 e F2, respectivamente). Ambas buscam, formalmente, estudar os conteúdos de ensino elementar, preparando o futuro professor à prática docente. Especificamente dizendo, F1 possui como objetivos:

> Demonstrar propriedades de conjuntos; demonstrar propriedades de números naturais através do princípio de indução finita; identificar e classificar um número real através de sua representação decimal; resolver equações e

> inequações em $\mathbb{R}$; classificar os diversos tipos de relações, especialmente as relações de equivalência e as relações de ordem; classificar os diversos tipos de funções; explorar gráficos de funções. (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, 2019, p.1).

Em outras palavras, a normalização desses conteúdos elementares – que são vistos, em sua maioria, no Ensino Fundamental e Médio – de conjuntos, relações e funções, possui um rigor matemático legítimo, que pode vir a contribuir para a formação destes futuros professores. Em contrapartida, Fundamentos da matemática Elementar II busca:

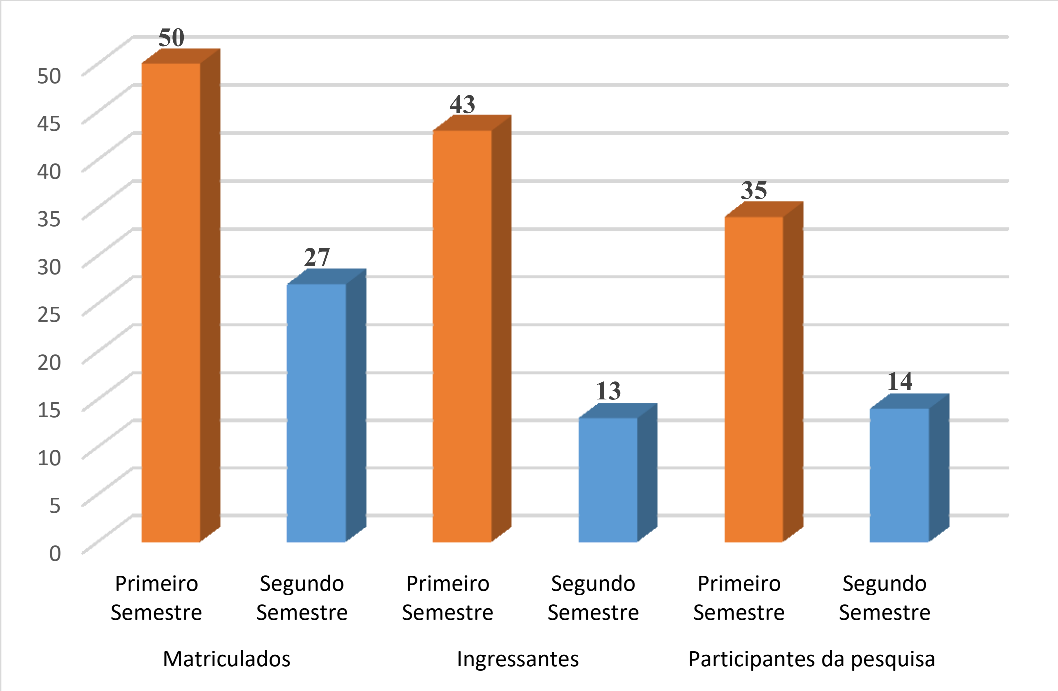
> Trabalhar com noções elementares de lógica de forma rigorosa; compreender o que é um teorema e o que é a demonstração do mesmo. Utilizar as relações trigonométricas num triângulo qualquer para resolver problemas geométricos e algébricos; estudar as principais propriedades das funções trigonométricas. Estabelecer a interpretação geométrica dos números complexos, resolver equações polinomiais em $\mathbb{C}$ (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, 2019, p.1).

Sobretudo, essa organização curricular indica um reconhecimento, pelo curso, das dificuldades trazidas pelos ingressantes e a intenção de apoiá-los nessa transição, apoiados a fazer com que eles aprendam a ter este pensamento conceitual matemático formalizado, no sentido de superação das mesmas.

## 3.2. Caracterização dos ingressantes da pesquisa nos dois semestres

Participaram desta pesquisa dois grupos distintos de alunos do Curso de Graduação em Matemática que cursaram a disciplina de Seminários de Matemática Elementar na UFU, cada grupo em um semestre letivo do ano de 2019. Abaixo, mostramos o gráfico referente aos matriculados, aos que ingressaram na disciplina e que mantiveram frequência em cada semestre, o que demonstra uma visão da quantidade dos alunos relacionados ao curso, advindos do ENEM (primeiro semestre) e Vestibular da UFU (segundo semestre).

**Gráfico 1:** Distribuição da quantidade de matriculados, ingressantes e participantes da pesquisa nas duas turmas de SME em 2019




**Fonte:** Diários da disciplina e formulários da pesquisa

Claramente, a distribuição de alunos na primeira turma[4] é mais expressiva que os da segunda turma[5]. Esta assimetria quantitativa se repete ao longo de alguns anos, onde o ingresso no ENEM é mais elevado, e demonstra a frequência de alunos em cada semestre por processo seletivo. Em relação a quantidade de ingressantes e participantes da pesquisa no segundo semestre, percebe-se que houve um aumento e isso se justifica pelo fato de um ingressante do primeiro semestre tê-lo repetido, o que implicou na sua permanência no curso e participação na pesquisa junto com os alunos que ingressaram pelo processo seletivo do Vestibular.

A partir desses, foi feita uma caracterização agrupada desses participantes, com base nas respostas fornecidas por eles a um questionário dado no início da disciplina de SME, que buscou identificar dados etários, demográficos, socioculturais, hábitos e comportamentos da era digital, dados escolares e acadêmicos.

Com isso, buscamos apresentar um panorama dos costumes de cada turma e a particularidade de cada uma será preservada.

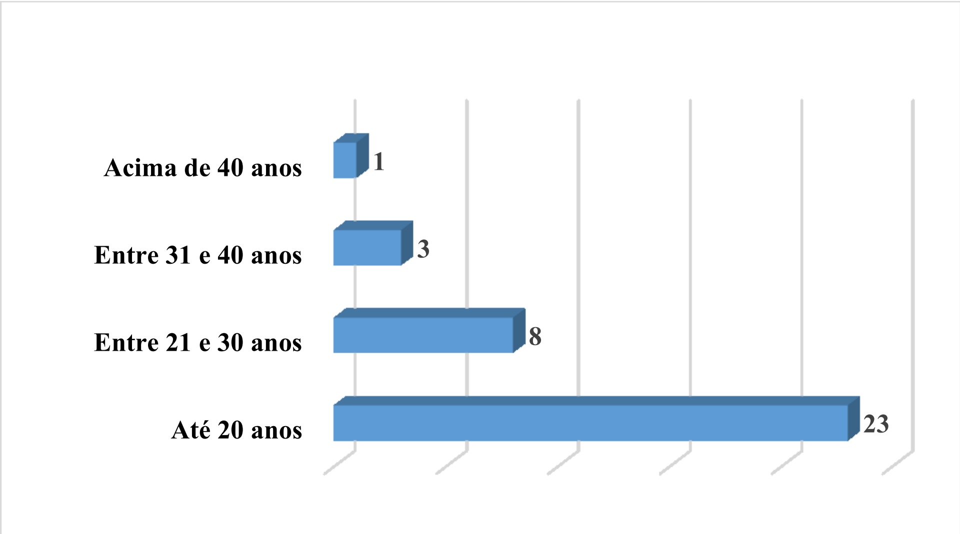
---

[4] Que ingressaram na universidade pelo processo do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.
[5] Ingressantes pelo vestibular da UFU.

### 3.2.1. Primeiro semestre de 2019

Com relação aos 35 participantes da pesquisa do primeiro semestre, identificamos que 22 são homens e 13 são mulheres, onde 82% são solteiros, 97% são uberlandenses e apenas um aluno reside na cidade Araguari, onde o mesmo ia e vinha todos os dias para a universidade. Em questão de trabalho em outros turnos, 9 responderam que exerciam atividade remunerada nesta época. O gráfico abaixo, mostra que aproximadamente 63% dos ingressantes possuem a faixa etária de até 20 anos, o que corresponde a grande maioria presente na sala de aula.

**Gráfico 2:** Distribuição da faixa etária dos ingressantes do primeiro semestre de 2019

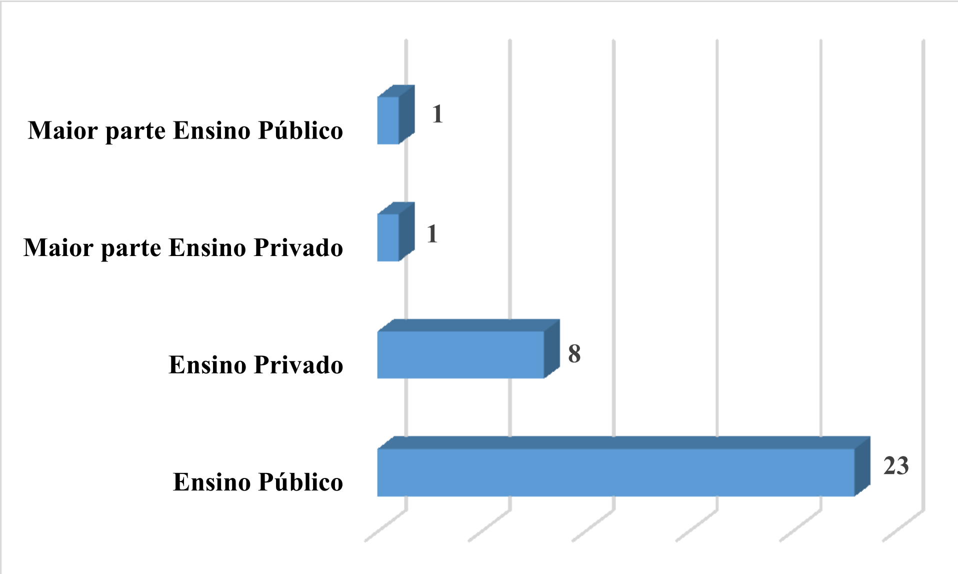



**Fonte:** Formulários da pesquisa

Questionados sobre quais recursos tecnológicos e digitais eles utilizavam para estudo, aproximadamente 48% dos ingressantes utilizavam computador em casa, enquanto os outros 17 alunos, utilizam-se do *smartphone*. Todos manifestaram ter computador, smartphone ou *tablet* como recurso utilitário para interesses virtuais e digitais. Por isso, incluímos no planejamento a possível utilização de recursos tecnológicos para minimizar as possíveis dificuldades que poderiam vir a apresentar pelos mesmos.

Quanto aos dados escolares e acadêmicos, observamos que aproximadamente 69% dos ingressantes, que corresponde aos 23 estudantes na tabela a seguir, fizeram o Ensino Médio em escolas públicas. E por fim, pedimos para que respondessem sobre a preferência de escolha do Curso de Matemática como primeira opção de ingresso, o que nos retornou 8 alunos dizerem ter escolhido inicialmente outro curso – dentre eles: Ciências da Computação, Medicina Veterinária, Economia, Relações Internacionais, Direito, Engenharia da Computação, Mecânica e aeronáutica –, que em outras palavras, extrai 75% dos sujeitos da pesquisa que escolheram esse curso como sua primeira opção.

**Gráfico 3:** Distribuição da conclusão de Ensino Médio dos ingressantes do primeiro semestre de 2019




**Fonte:** Formulários da pesquisa

### 3.2.2. Segundo semestre de 2019

Neste semestre, havia 14 alunos frequentes nas aulas, onde todos ingressaram pelo processo seletivo do Vestibular da UFU. Dentre esses, coletivizamos que metade da turma era composta por mulheres, onde apenas dois são casados ou união estável, todos residem na cidade de Uberlândia. Em questão de trabalho em outros turnos, 4 responderam que exerciam atividade remunerada. Em termos de faixa etária, temos que a sala é composta por um percentual de 66% de ingressantes com a idade de até 20 anos, o que corresponde a 3% mais que na turma anterior.

Questionados sobre a utilização de recursos tecnológicos, todos responderam sim para fins domésticos, de lazer ou de estudos, e apenas dois descreveram que utilizam do computador de casa para acesso à internet, enquanto os demais aproveitavam dos recursos de smartphones para tais finalidades. O *YouTube* foi uma das plataformas virtuais que os ingressantes explicitaram mais utilizar.

Quanto aos dados escolares e acadêmicos, estatizamos que 91% dos ingressantes entraram na universidade vindo ter cursado todo o Ensino Médio em escolas públicas, o que demonstra um percentual maior em relação à turma anterior. Desses, apenas 3 já haviam cursado um curso diferente antes; a saber: Química Indústria, Física e Pedagogia; contudo, um quarto aluno disse ter iniciado Sistemas de Informação, mas acabou por abandonar o curso. E por fim, pedimos para que respondessem sobre a preferência de escolha do Curso de Matemática como primeira opção de ingresso, o que nos retornou apenas 1 aluno manifestar ter escolhido inicialmente o curso de Sistemas de Informação, o que nos mostra a preferência convicta de 91% dos sujeitos da pesquisa quererem escolher o curso de Matemática como sua primeira opção.

### 3.3. Avaliação diagnóstica do primeiro e segundo semestre

Ao se falar de avaliação diagnóstica no âmbito das escolas de ensino básico, é fácil confundir esse material pedagógico analítico, com uma ferramenta seletiva, que simplesmente objetiva classificar e rotular a trajetória escolar dos alunos; ou seja, geralmente os mesmos são "estimulados a se dedicarem a uma memorização desarticulada e que, por sua falta de sentido, tende a desaparecer logo após as sessões de avaliação do rendimento escolar" (BURIASCO, 1999, p. 70).

Isso nos diz até mesmo sobre o sentido dos conceitos estudados pelo aluno. Ele até mesmo compreende em executar uma linha de raciocínio única para realização de um determinado problema, porém não é capaz de ampliar esses conceitos para outras áreas dos saberes matemáticos. A avaliação então, se distancia da função de diagnosticar os saberes adquiridos, e passa a ter uma visão classificatória, que se apresenta ao aluno como uma forma de instrumento competitivo. É válido ressaltar, seguindo as afirmações de Buriasco (1999), que por mais objetiva que a avaliação em si possa ser, uma avaliação malconduzida e sem planejamento prévio pode ser considerada como um dos fatores do fracasso escolar.

Para então cumprir a principal função da avaliação (ajudar o aluno por intermédio da inter-relação aluno/professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem), é preciso que o professor avalie, não o aluno, mas o desenvolvimento do seu trabalho pedagógico. Com isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais na área de matemática completam dizendo que:

> [...] é fundamental que os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, registros das atitudes dos alunos, forneçam ao professor informações sobre as competências de cada aluno em resolver problemas, em utilizar a linguagem matemática adequadamente para comunicar suas ideias, em desenvolver raciocínios e análises e em integrar todos esses aspectos no seu conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p. 54).

Sobretudo, esta pesquisa se iniciou com uma avaliação diagnóstica[6], que tinha como objetivo compreender o nível de conhecimento que os alunos tinham com respeito aos

---

[6] As avaliações diagnósticas, dos dois semestres, se encontram nos anexos A e B deste trabalho, respectivamente.

conteúdos sobre: Potenciação, Frações Algébricas, Radiciação, Produtos Notáveis, Fatoração e Equações Polinomiais (Anexo A), componentes básicos da matemática elementar.

Daí, baseado nos resultados fornecidos por eles, cada questão diagnóstica foi analisada com rigor e categorizada de acordo com as classificações de erros de Cury (2008). Isso nos possibilitou, no primeiro semestre, estabelecer classes conceituais de respostas, que nos permitiram quantificá-las e qualificá-las, com a intenção de estruturar abordagens de ensino eficazes para o aprendizado dos mesmos.

Contudo, percebemos que na avaliação, havia algumas questões que se interceptaram em linhas conceituais idênticas – como por exemplo a questão 1, letras "c", "e" e "f", que abordavam os mesmos conceitos de potenciação. Esta repetição de conceitos nas questões, tornou mais complexo o processo de categorização para análise dos erros. Então, para um segundo movimento, trabalhamos para melhorar o instrumento avaliativo, implicando na elaboração da segunda avaliação para o segundo semestre (turma 2), demonstrando melhoras, que vão ser analisadas nas seções subsequentes.

Pensamos ser válido e legítimo a utilização de um novo questionário, abordando os mesmos universos já trabalhados, porém com mais um foco: funções. A justificativa que supre a utilização desse conteúdo se forma no motivo de se tratar de um assunto fundamental para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, que virão na sequência do curso. Até mesmo porque, pesquisas mostram as dificuldades nesse conteúdo, haja vista a excessiva repetência e evasão de turmas de calouros, como Cury (2008) defende.

É dentro desta perspectiva disciplinar que utilizaremos dos recursos da Análise de Erros para analisar os ingressantes a partir de suas respostas, advindas dos resultados da avaliação diagnóstica, investigando as possíveis dificuldades conceituais destes e estruturando abordagens pedagógicas, visando o melhor recurso para a aprendizagem dos alunos.

Ao se identificar os conteúdos com maior defasagem, foi feito um planejamento para a realização de uma intervenção pedagógica com a turma do segundo semestre. A metodologia criada para tal fim está descrita na próxima seção.

### 3.4. Intervenção pedagógica presencial

A matemática é uma área do conhecimento essencial para a organização e o desenvolvimento social. Nesse sentido, a matemática escolar traz importantes contribuições para o desenvolvimento dos alunos que se apropriam de seus conceitos. Nesta perspectiva, os jogos possuem suas vantagens no ensino de matemática, e podem contribuir como um recurso pedagógico representativo, desde que o professor tenha objetivos claros daquilo que pretende atingir com o proposto.

Sobre isso, objetivamos investigar, junto aos ingressantes, as potencialidades do jogo, intitulado Torre de Hanói, no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos iniciais de funções, chegando a discursar até mesmo dos casos: afim, exponencial e composta. A essência intervencionista se baseou nos estudos de Grando (2000) quanto ao tema, e que pode ser realizada em sete momentos processuais: familiarização com o material do jogo, reconhecimento das regras, jogar para garantir regras, intervenção pedagógica verbal, registro do jogo, intervenção escrita e jogar com competência.

Como contribuição para discussões sobre o tema de intervenções, é eficaz dizer sobre o uso dessa ferramenta pedagógica como uma ação contingente, ou seja, que atua em momentos apropriados e de acordo com a necessidade daquele que aprende.

A intervenção utilizada nesta pesquisa, foi realizada com os ingressantes da turma supracitadas nas seções anteriores, na Universidade Federal de Uberlândia no ano de 2019, e teve duração de 3 horas-aula. O planejamento de aula se orquestrou em três momentos distintos: estruturação, execução e registros para fins de avaliação posterior.

A atividade elaborada e executada com os alunos teve como situação-problema o que viemos a definir como O Problema do Fim do Mundo. Foi no desafio de resolvê-lo que investigamos as potencialidades do jogo Torre de Hanói, ao explorarmos os conceitos primordiais de função afim, exponencial e composta. A avaliação foi processual, levando em consideração a participação oral e escrita dos alunos.

Naturalmente esta intervenção pedagógica se dividiu em três momentos fundamentais para a inicialização dos conceitos de função. É válido ressaltar que houve registros escritos e de gravação de áudio por parte dos pesquisadores durante a intervenção, então no momento de análise alguns comentários de alunos estarão presentes no corpo do texto.

### 3.4.1 Primeiro Momento de Intervenção – Primeiros Passos e a Motivação da Atividade

Para todo desenvolvimento da atividade, acreditamos que exista um critério de avaliação investigativo (PONTE, J; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H, 2006). Neste primeiro momento, iremos levantar questionamentos sobre as definições culturais relacionadas à mitologia, moldando um caminho cultural que permitirá chegar na origem do material manipulativo. O reconhecimento do mesmo possibilita mostrar quais são as possíveis abordagens que poderemos fornecer ao aluno no decorrer da atividade. A princípio não iremos dizer a função do jogo e nem sua origem, mas sim apresentar a motivação e os primeiros passos para a realização da aula: o contexto histórico por trás do material.

Na seção 2, de referencial teórico, se demonstrou a importância de uma atividade com o uso de um jogo manipulativo. Vimos que a cultura e o jogo estão relacionados de forma significativa. Os Parâmetros Curriculares Nacionais justificam que o uso de jogos favorece a criatividade na elaboração de estratégias de resolução (BRASIL, 1997). Daí, entre os jogos matemáticos, destacamos a Torre de Hanói como esta ferramenta manipulativa, que será trabalhada nesta intervenção. Sobretudo, e opostamente idealizado por Huizinga (1990), existe um contexto cultural onde o jogo se derivou de uma lenda hindu.

Conforme descreve Malba Tahan em seu livro "A Matemática na Lenda e na História" de 1974, M. Kraitchik, matemático belga, dá provas que o jogo da Torre de Hanói "foi imaginado e inventado por Édouard Lucas[7] e apresentado, aos curiosos da época, sob a forma de uma lenda budista" (TAHAN, 1974 p. 141). Segundo a lenda, existia um templo na Índia – o templo de Benares, que para os hindus tinha sua localização no centro do mundo – onde em sua sala principal, sob uma cúpula de cristal, havia uma prancha de prata com três hastes na vertical de diamante e, sobre uma delas, dizia-se que o deus Brahma empilhou 64 anilhas[8] – estando a maior delas na base e as restantes na ordem decrescente de tamanho até o topo, feitas de ouro puro. Esta seria a Torre de Hanói real, onde dia após dia os sacerdotes do templo tinham que mover as anilhas da haste inicial para outra, seguindo duas regras simples: apenas uma anilha poderia ser movida de cada vez e uma anilha maior nunca poderia sobrepor uma anilha menor. De acordo com a lenda, quando todas as 64 anilhas fossem transferidas de sua haste inicial para outra, e seguindo as regras citadas, o templo desmoronaria e o mundo desapareceria, gerando assim uma nova origem mundial.

Segundo Malba Tahan (1974, p. 137) foi a partir desta lenda que Édouard Lucas, desenvolveu o jogo Torre de Hanói. Nele, conforme a figura 1, observa-se que a base do material pode ser retangular[9], mas que sobre ela existem três hastes, onde em uma delas fica um número determinado de anilhas[10] que devem ser transferidas de sua haste inicial para uma

---

[7] Matemático francês que introduziu a Torre de Hanói em 1883. Por isso, o jogo também é conhecido como Torre de Lucas.

[8] Achamos mais adequado adotarmos o termo 'anilha' para a representação dos sólidos com furos centrais que comumente vemos em outros artigos nomeados de discos. Esta justificativa se dá ao fato de que discos podem remeter ao aluno lembrar-se de estruturas geométrica planas.

[9] Em outras versões do jogo pode-se trabalhar com a base em formatos geométricos diferentes.

[10] O número de anilhas pode variar de acordo com o interesse de quem usa o jogo, seja para estudo ou para aumentar o nível do desafio do mesmo, segundo a regra estabelecida.

das outras duas, seguindo as mesmas regras da lenda que o gerou, conforme descrita anteriormente e que faz deste jogo um verdadeiro quebra-cabeça.

**Figura 1:** Jogo Torre de Hanói

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Um fato interessante deste jogo é sobre a possibilidade de variações relacionadas à sua composição e regras, que dão margem a outras estratégias de resolução. Embora, para o problema original, a solução seja amplamente conhecida, com essas variações, outros conteúdos e resultados são abordados e até mesmo pesquisadores há décadas estão à procura de resolução[11].

### 3.4.2 Segundo Momento de Intervenção: Jogando o Jogo

Feita as devidas apresentações, apresentaremos aos alunos o que definimos de O Problema do fim do mundo. Esse é composto de duas questões que achamos interessante trazer à sala como uma situação-problema, para servir de motivação para realização da aula investigativa. Seu enunciado será definido e apresentado aos ingressantes na forma de *slides*, e pode ser melhor apreciado na figura abaixo:

[11] Para mais detalhes, recomendamos as referências (SCORER, GRUNDY e SMITH, 1994; DUDENEY, 1908; BEREND e SAPIR, 2006; e STOCKMEYER, 1994) relacionadas às composições com quantidade de hastes maiores que três, composição estrela e composição circular.

**Figura 2:** Apresentação e definição do Problema do Fim do Mundo

# VAMOS INVESTIGAR

- ***Problema do fim do mundo:*** Supondo que os sacerdotes demoram 1 segundo para mover uma anilha de uma haste inicial para outra, responda: a) se for possível mover as 64 anilhas, quantos anos seriam necessários para o mundo acabar, de acordo com a lenda hindu? b) Se for possível mover as 64 anilhas, e sabendo que a Terra tem aproximadamente $4{,}543x10^9$ anos, nosso mundo já teria acabado segundo a mitologia Hindu?
- ***Divisão da atividade em três momentos***

  *1) Encontrar a quantidade de movimentos para mover uma torre com $a$ anilhas.*

  *2) Estudar as estruturas matemáticas encontradas.*

  *3) É possível resolver o Problema do Fim do Mundo?*

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

A ideia deste momento é que os ingressantes deduzam que precisam saber a quantidade mínima de movimentos para moverem as 64 anilhas. Esse número de movimentos é exatamente a quantidade, em segundos, necessária para se acabar o mundo. Fazendo as devidas conversões, chegaremos à conclusão de uma possível resposta para o problema inicial. Esperamos que durante o desenvolvimento da intervenção pedagógica na turma, a partir dos questionamentos feitos pelo pesquisador, seja possível que os alunos encontrem possíveis respostas, fundamentadas na utilização do jogo.

Portanto, sabendo que o jogo nos permitirá conclusões efetivas para responder o problema, é importante seguir as orientações de Grando (2000), oportunizando aos alunos se familiarizarem com a Torre de Hanói, jogando sem intervenção. O jogo pelo jogo se caracteriza como uma etapa importante para que o aluno possa futuramente, por meio de abordagens do professor, estabelecer relações matemáticas, responsáveis por conjecturas estruturais.

Iniciamos daqui então a atividade dirigida, entregando para cada grupo a primeira tarefa. Em uma folha (Anexo C), os alunos devem registrar – considerando uma torre com uma, duas, três, quatro ou cinco anilhas – a quantidade necessária de movimentos para cumprir o objetivo do jogo para cada quantidade de anilhas consideradas. Nossa intenção era de que os alunos percebessem que o número mínimo de movimentos necessários para mover a torre de uma haste para outra, segundo as regras, se dava em função do número de anilhas. Ou seja, havia uma correspondência entre duas grandezas (número de anilhas e número de movimentos) e que, para cada medida da primeira grandeza (número de anilhas), ocorre uma única medida correspondente da segunda (número de movimentos). Assim, os alunos também poderiam relacionar as grandezas como sendo variáveis, sendo o número de movimentos a variável dependente e o número de anilhas a variável independente. Com isso, é possível que os alunos cheguem à ideia do conceito de função, ao perceber que a segunda grandeza é função da primeira.

Nessa oportunidade, é possível observarmos que o jogo possibilita até mesmo explorar conceitos de paridade e também de moda. Quando os alunos relacionam o jogo com o conceito de função, é possível e interessante a eles, buscarem uma lei de formação, mesmo sem o uso do jogo, que explique a situação problemática proposta pelo mesmo.

### 3.4.3 Terceiro Momento: Conclusões da Intervenção Investigativa

Ao final da intervenção investigativa, esperamos que os alunos formem o raciocínio lógico matemático e o generalizem na forma de expressões elaboradas que representem a quantidade mínima de movimentos para mover uma torre de $a$ anilhas. A saber: $Q_1(x) = 2x + 1$ e $Q_2(a) = 2^a - 1$, onde $a$ é o número de anilhas da torre considerada e $x$ é a quantidade mínima de movimentos para mover $(a - 1)$ anilhas de sua haste inicial.

Tendo em mãos as possíveis relações necessárias envolvendo a quantidade mínima de movimentos e o número de anilhas, estaremos preparados para a resolução do problema inicial. A tabela a seguir demonstra a relação existente entre as variáveis mencionadas.

Com a finalidade de explorarmos com os alunos os conceitos relacionados a funções, em um alto nível de generalização, vamos questionar sobre a atribuição simbólica de cada variável nas funções encontradas. Assim, é possível definirmos o domínio, o contradomínio e a imagem das mesmas; fazer a verificação dos valores a partir de cada domínio e, também, estudar a representação gráfica de cada uma. Nota-se que estes são até mesmo conteúdos que a disciplina de F1 apresenta ter em sua ementa; um ponto interessante a se fazer, levando em consideração que SME auxilia nos tópicos de interesse dessa outra disciplina elementar.

**Tabela 1:** Relação de existência entre cada variável

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{a}$ | **Nº Mínimo de Movimentos** |
|---|---|---|
| - | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 7 |
| 7 | 4 | 15 |
| 15 | 5 | 31 |
| 31 | 6 | 63 |
| 63 | 7 | 127 |
| ... | ... | ... |
| $x$ | $a$ | $2x + 1$ e $2^a - 1$ |

**Fonte:** Autores deste trabalho

Pelas funções $Q_1(x)\ e\ Q_2(a)$ já estabelecidas, percebe-se que a primeira compreende-se como limitada, aparentemente, dependendo exclusivamente de jogadas anteriores para encontrar seus valores. Este é um problema que pode ser contornado utilizando os conceitos de função composta. Na seção seguinte, de análise da intervenção, discutiremos os resultados obtidos. Apenas para se ter noção, perceba que para cada valor de $a$ utilizado na função $Q_2$, existe um único valor $x$ correspondente a ele na função $Q_1$, fazendo com que os valores dessas funções sejam iguais. É a partir desta proposição que conseguimos quebrar o limitante da segunda função.

Por fim, após trabalharmos os conceitos de função, considerando seus elevados níveis de generalização, podemos resgatar, junto aos alunos, o problema central que deu origem à atividade investigativa. Novamente, diante do Problema do Fim do Mundo, os alunos poderão confirmar que, para que o mundo acabe, seriam necessários $2^{64} - 1$ segundos, de acordo com a lenda. Após este feito, traremos o item (b) como outro problema possível de ser resolvido.

Agora, fazendo as devidas conversões de segundos para anos desse valor encontrado, chegaremos à conclusão de que, na realidade, seriam necessários ${}^{584}/_{4,543}$ vezes a idade que a Terra possui hoje para que ela seja destruída, segundo a lenda hindu. E este valor, a saber, corresponde a: 128,5, concluindo assim, a intervenção investigativa.

# 4. RESULTADOS

Neste momento, procuramos ramificar e especificar os movimentos utilizados da metodologia do trabalho. Como houve duas turmas de ingressantes neste ano de 2019, existiram abordagens pedagógicas para cada uma, estas que se seguem.

## 4.1. Primeiro movimento: turma 2019/1

No primeiro movimento feito neste ano de 2019, trabalhamos com o objetivo central de analisar as produções escritas de 35 alunos ingressantes no curso de Graduação em Matemática no contexto da disciplina de Seminários de Matemática Elementar, investigando as possíveis dificuldades conceituais destes alunos na perspectiva da Análise de Erros. Nesta visão, foi proposto uma avaliação diagnóstica no início das aulas abordando diferentes conceitos da área, onde os alunos deveriam registrar suas resoluções e por mais que estejamos interessados nos erros, é válido ressaltar que as questões assertivas também foram consideradas, já que ao utilizar uma avaliação como oportunidade de aprendizagem é necessário analisar não só o que está errado, mas também aquilo que o aluno mostra saber (BURIASCO, 2004). E completando este argumento, Cury (2008, p. 63) ressalta que:

> Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si – que são pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem –, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem.

Como critério de análise, categorizamos as respostas dos ingressantes do primeiro semestre em classes de erros conceituais, que nos permitiram evidenciar os erros atrelados ao não entendimento, ou mesmo, desconhecimento de propriedades, manipulações e operações algébricas; assim como, pretendemos destacar os itens que demonstraram não ser resolvidos ou que foram resolvidos erroneamente e/ou sem consistência lógica. Cada uma dessas classes, está bem definida e suas abordagens são as que se seguem.

Para os primeiros passos, escolhemos as três primeiras questões do questionário para fazer uma análise mais detalhada dos erros, pois nelas são encontrados os conteúdos mais básicos que permitiram nos dar o panorama das noções primárias dos ingressantes, e por também ele ter nos servido como um pré-teste para utilização dessa metodologia. A divisão foi feita conforme mostra o Tabela 2.

**Tabela 2:** Relação entre o conteúdo, acertos e erros de cada questão da Atividade Diagnóstica.

| QUESTÃO | CONTEÚDO | Nº DE ACERTOS (POR CLASSE) | Nº DE ERROS (POR CLASSE) | Nº DE ITENS EM BRANCO |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Potenciação | A) 52 | A) 10 | A) 2 |
| | | B) 45 | B) 8 | B) 26 |
| | | C) 29 | C) 0 | C) 6 |
| | | D) 14 | D) 3 | D) 18 |
| 2 | Operações com frações | A) 28 | A) 5 | A) 2 |
| | | B) 29 | B) 3 | B) 3 |
| | | C) 30 | C) 3 | C) 2 |
| | | D) 26 | D) 4 | D) 5 |
| 3 | Operações com radicais | A) 18 | A) 10 | A) 7 |

**Fonte:** Registro dos pesquisadores

A questão 01, foi composta por seis questões objetivas, que buscavam avaliar se o aluno sabia manipular as expressões numéricas de forma a obter um valor numérico.

**Figura 3:** Questão 1 da avaliação diagnóstica

Avalie cada expressão sem usar uma calculadora:

a) $(-3)^4$ b) $-3^4$ c) $3^{-4}$

d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $16^{-3/4}$

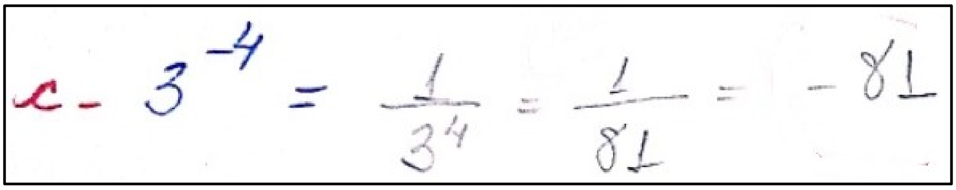
**Fonte:** Registro dos pesquisadores

Nela, foi possível subdividir quatro classes de erros, essas que detalhamos a seguir:

**Classe A)** está relacionada com as respostas erradas em relação às operações envolvendo potências com base negativa, e estão atreladas aos itens "a" e "b". Observa-se que houve 26 alunos que acertaram a questão, em relação a essa classe; porém dentre os 9 alunos restantes, apenas um deixou de fazê-la; outros 2 alunos erraram os dois primeiros itens, e o restante (6), erraram devido ao desconhecimento ou uso incorreto das propriedades de potenciação intrínsecas dos respectivos itens dessa classe. Dentre estes seis restantes, 5 acertaram o primeiro item, porém erraram o segundo; já o outro, errou a primeira, mas acertou a segunda. Nota-se que todos os erros cometidos, estão relacionados ao não entendimento de potências de base negativa, onde, no caso deles, o sinal era considerado em momentos inoportunos.

**Classe B)** está direcionada às respostas erradas em relação as operações envolvendo potências com expoente negativo, e que podem ser encontradas nas alternativas: “c”, “e” e “f”. Dentre os 35 alunos que fizeram a avaliação, destacamos que 8, 7 e 11 deles, não responderam respectivamente os itens “c”, “e” e “f”. Contudo, nas questões dos que erraram, percebe-se que há necessidade de uma revisão conceitual em termos de potenciação com expoente negativo, como nos casos em que o aluno resolve da seguinte maneira.

**Figura 4:** Registro de um ingressante

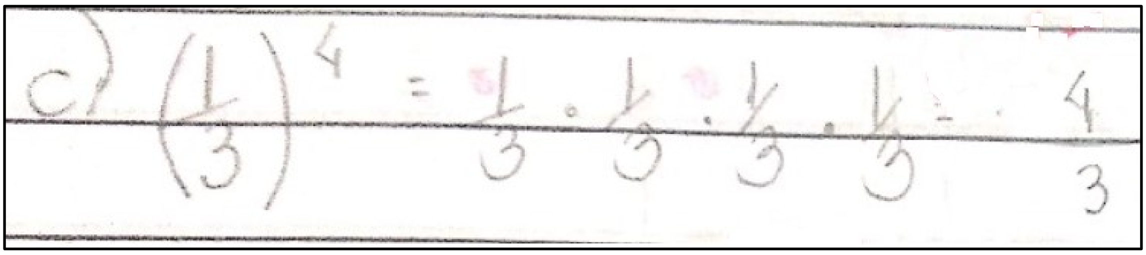



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

A percepção conceitual de potência para este aluno se apresentou corretamente até um certo ponto, porém, ao fazer a analogia reversa de simbologia, o mesmo representou o resultado de forma equivocada. Situação esta também é recorrente e descrita nas pesquisas de Lopes (1988) quando o mesmo solicita a seus alunos para executarem o cálculo de $2^{-3}$. Mesmo que os cálculos possam representar diversas hipóteses $(-8, 8, -6, -1, \frac{1}{2})$ com relação a potências com expoente negativo, o pesquisador questiona sobre o resultado de $3^{-2}$ para aqueles que responderam $2^{-3} = -8$, e alguém responde que daria $-9$. Então, Lopes (1988) sugere para que os alunos generalizem o pensamento para a expressão de hipótese: $H_1: a^{-n} = -a^n$.

A medida que o pesquisador vai dialogando/intervindo com o grupo correspondente às respostas errôneas, as hipóteses que conflitam com as hipóteses já conhecidas vão sendo descartadas, proporcionando uma verificação das propriedades da potenciação para cada generalização feita. Desse modo, Lopes (1988) afirma que “os erros são aceitos provisoriamente, e o aluno participa da análise de suas próprias respostas”. Isso nos remete pensar em abordagens para quaisquer outros conteúdos que venham a vir a apresentar concepções errôneas sobre uma determinada definição ou propriedade.

**Figura 5:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

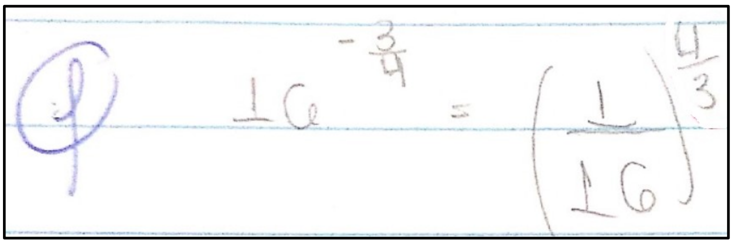
Percebe-se que alguns erros estão presentes até mesmo em outras classes. Este aluno (figura 5), apresentou corretamente o uso da propriedade de potenciação, porém, apresentou uma propriedade errada no produto entre frações. Este erro, pode estar relacionado com o que Borasi (1996) apresenta sobre "sobregeneralização", onde o aluno assume a propriedade de soma de frações com denominadores iguais e a aplica generalizando a aplicação. Um recurso válido para corrigir este erro pode ser aplicado como o mesmo autor sugere nas seções anteriores questionando e validando onde e em quais momentos as regras-padrão e alternativas podem ser utilizadas, para servirem de "trampolim para a aprendizagem" do respectivo aluno.

Nesta classe, também se apresentaram alguns erros sem resolução, porém ressaltamos que os mesmos se encontram na objetividade da avaliação. Estes erros, por exemplo, apresentaram-se como no caso: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$, onde 2 ingressantes desprezaram o expoente negativo e representaram o resultado como no caso $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$. Outro, provavelmente, calculou errado $3^4 = 81$, implicando no seu registro: $3^{-4} = \frac{1}{27}$; erros assim são comuns quando há falta de atenção, precipitações ou simplesmente em querer agilizar a conta, caindo neste erro.

**Classe C)** está relacionada com as respostas erradas em relação às operações envolvendo divisão de potências de mesma base, e que podem ser encontradas na alternativa "d". Tivemos que 6 dentre os 35 alunos, não conseguiram resolver a questão. Em suma, não houve erros por parte dos alunos, apenas estas ausências de resolução.

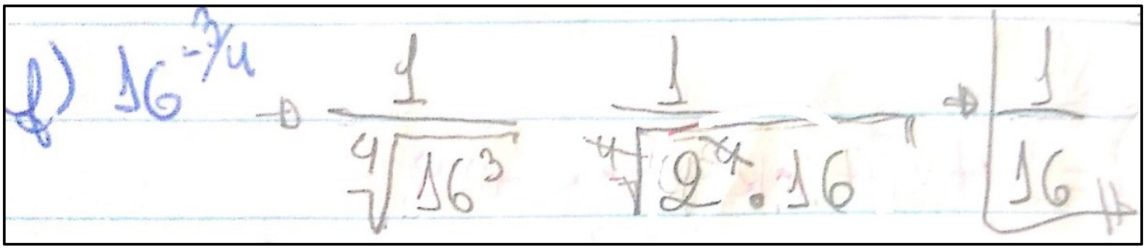
**Classe D)** está relacionada com as respostas erradas em relação às operações envolvendo potências com expoente fracionário, e que está associada à alternativa "f". Dos 35 alunos que fizeram o teste, 14 conseguiram realizá-la com êxito. Os demais, 18 dentre os 21, nem sequer fizeram a questão. O erro atrelado aos últimos alunos, está relacionado a:

**Figura 6:** Registro de um ingressante



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 7:** Registro de um ingressante



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Na figura 6, o aluno levou a “regra” de inverter a base de uma potência negativa também para o expoente, demonstrando seu erro. Já na figura 7, erros atrelados até mesmo com propriedades de potência com base natural se fizeram presentes neste item. Alguns não registraram suas hipóteses, mas houve respostas do tipo $\frac{1}{4}$, que, possivelmente, demonstram certo equívoco do aluno na execução do cálculo. Elaborações de situações didáticas podem ser realizadas aqui, visando partir destes erros e chegando em conjecturas conceituais sólidas para o auxílio da aprendizagem do envolvido.

Na segunda questão, foram abordadas as operações fracionárias. Composta por quatro itens, foi possível categorizar os erros em 4 classes, as que se seguem:

**Figura 8:** Questão 2 da avaliação diagnóstica

Calcule:

$\left(\frac{1}{2}\right)^0$    b) $5 \cdot \frac{1}{3}$    c) $1 + \frac{5}{6}$    d) $\frac{8}{3} \div \frac{1}{6}$

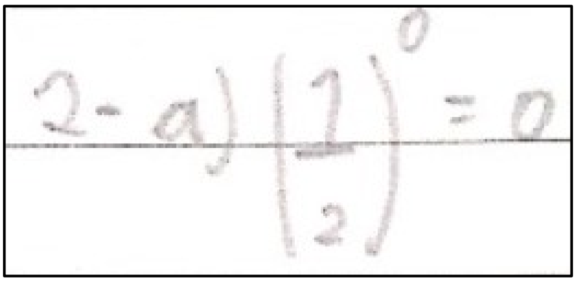
**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Classe A)** está vinculada com as respostas erradas em relação ao uso dos conceitos de potência com expoente zero, análise que pode ser feita no item “a”. Apenas dois alunos não resolveram a questão. Tivemos 5, dentre os 35 alunos, que a erraram. Três desses, cometeram o erro de pensar: “todo número elevado a zero, é zero”; outro disse que o valor da potência resulta em exatamente o valor da própria base; e outro mostrou uma incoerência, quando mostrou o resultado como um número negativo. Padronizações são frequentes, principalmente em cursinhos, é importante fazer uma intervenção significativa para não atribuir mais frases ou macetes, ao conceito de potências. Os erros citados, são os que se seguem:

**Figura 9:** Registro de um ingressante

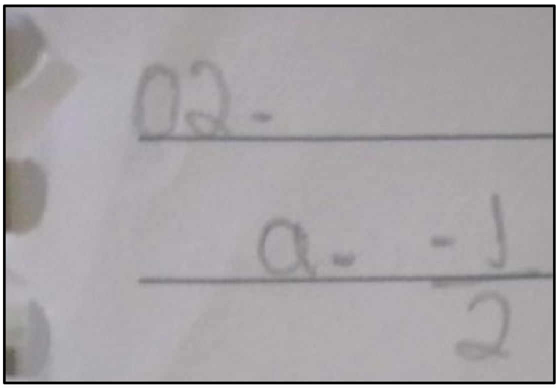

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 10:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

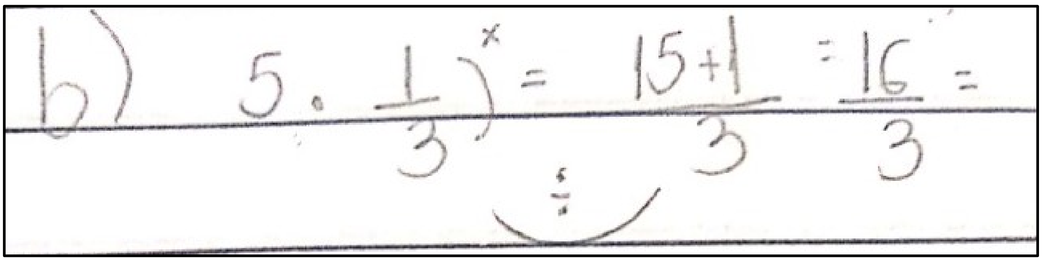
**Figura 11:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

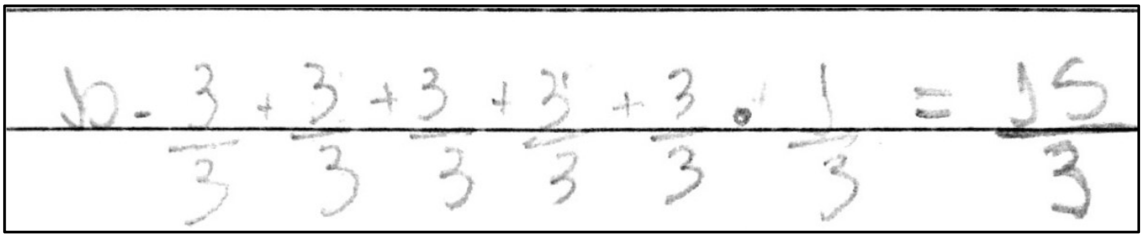
**Classe B)** está vinculada às respostas erradas com relação à multiplicação de frações que se encontra no item "b". Destacamos que 3 não resolveram essa questão. Destacamos que apenas 3 alunos a erraram, devido ao desconhecimento ou uso incorreto das propriedades das operações com números fracionários e outra não justificou seu erro, registrando apenas o numeral 16. Esses erros, são os que se seguem abaixo:

**Figura 12:** Registro de um ingressante



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

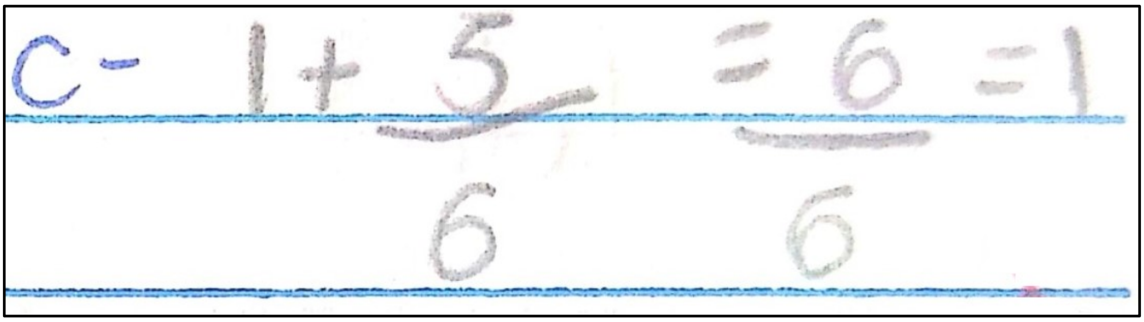
**Figura 13:** Registro de um ingressante



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Classe C)** está diretamente relacionada com as respostas erradas sobre soma de frações com denominadores diferentes, encontradas no item "c". Houve 2 alunos que não realizaram a questão. Dos 33 alunos restante, apenas 3 que erraram, e 2 deles manifestaram inconsistência nos argumentos, por isso tal feito; o outro não justificou sua resposta que foi 11, a saber. Alguns exemplos, do tipo de erros que eles cometeram, estão relacionados com alguns conceitos que a própria Cury (2008) diz em seu livro sobre a "sobregeneralização", onde o aluno, considera a regra do produto entre duas frações e a adapta, criando uma nova regra para soma. A figura abaixo, mostra o mesmo erro cometido pelos mesmos alunos.

**Figura 14:** Registro de um ingressante

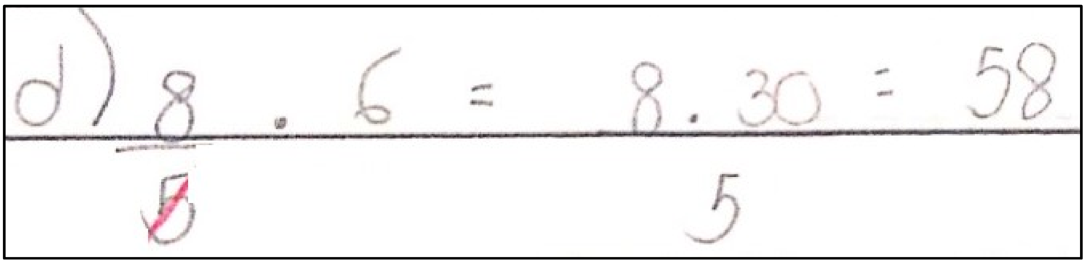


**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Classe D)** está diretamente relacionada com as respostas erradas sobre divisão de frações, relacionado ao item "d". Aqui temos que 4 alunos, não iniciaram sequer a questão.

Porém, dos 4 erros que tiveram, chamamos a atenção para dois deles, onde os alunos apresentaram conjecturas falhas para realização da atividade; são essas e outras que se seguem:

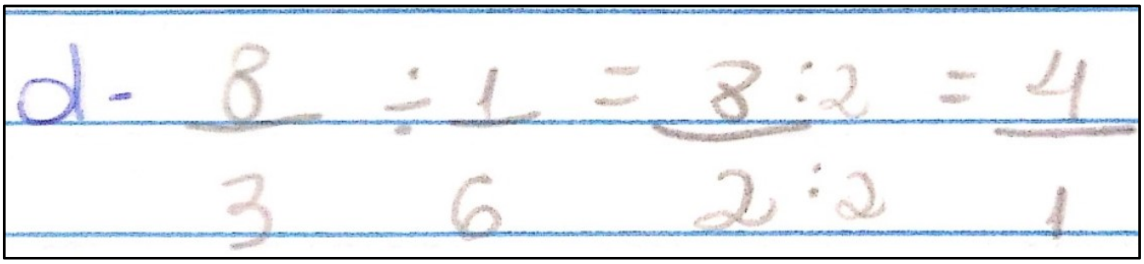
**Figura 15:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Perceba que nesse caso, até mesmo que os conceitos de divisão são perdidos.

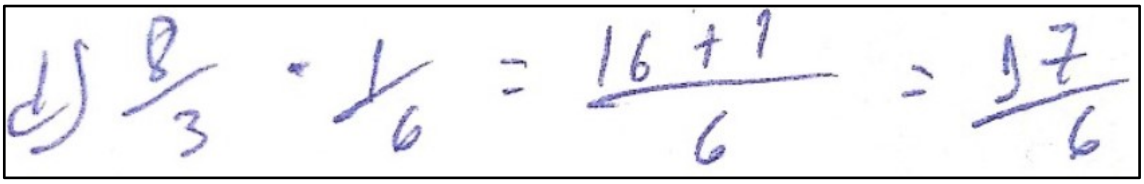
**Figura 16:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Aqui, o aluno, aparentemente, dividiu a unidade 6 por 3 e obteve tal igualdade, demonstrando o desconhecimento na utilização da propriedade de divisão entre frações.

**Figura 17:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Na questão 03, tivemos a oportunidade de trabalhar com operação envolvendo radicais. Selecionamos 1 item para análise. Vejamos seu enunciado e suas classificações:

**Figura 18:** Questão 3 da avaliação diagnóstica

Simplifique cada expressão:

a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$  b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

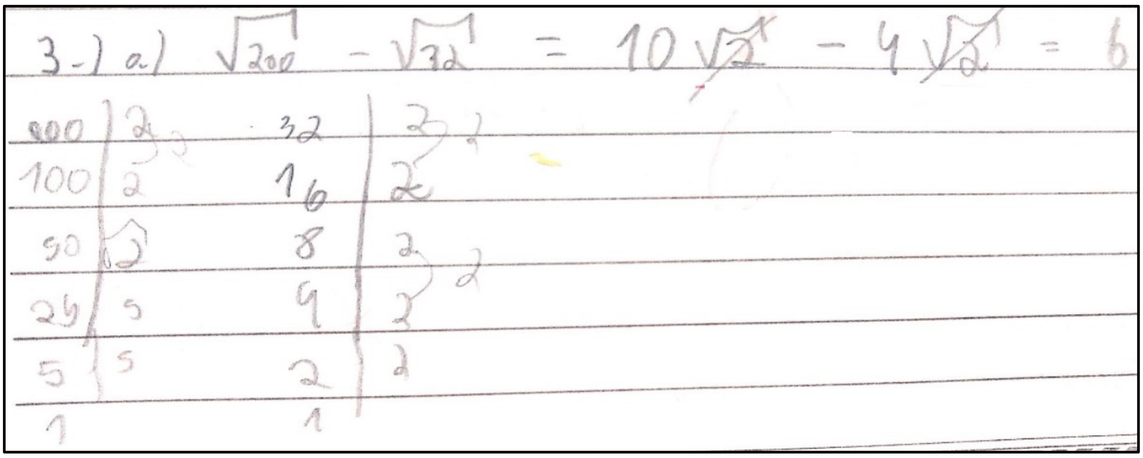
**Classe A)** está diretamente relacionada com as respostas erradas sobre operações com radicais, e que podem ser encontrados no item "a". Esta foi a questão da avaliação diagnóstica com o maior contingente de questões em branco. Para se ter noção, só neste item, 7 alunos não a fizeram. Tendo em mente esses, houve outros 10 alunos que erraram ao resolver o item. Destacamos aqui, alguns movimentos que alguns alunos fizeram semelhante a um termo que também é utilizado nos textos de Cury (2008), chamado de "cancelamento aritmético excêntrico[12]". Porém, neste caso, ao invés de um caminho errado levar a uma solução correta, tanto o caminho quanto a sua consequência se apresentaram de maneira imprecisa. Em outras palavras, alguns ingressantes fixaram a ideia de "corte" como simplificador de contas, sem nem mesmo verificar as hipóteses de quando se pode utilizar o algoritmo.

**Figura 19:** Registro de um ingressante


**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

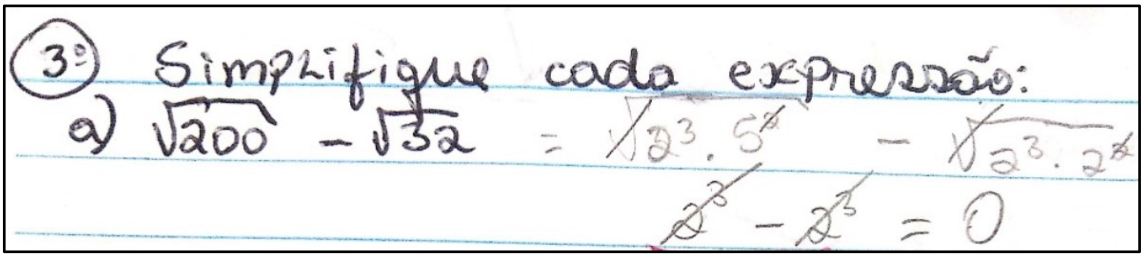
[12] Ideia proposta por Carman (1971), apresentado no livro de Cury (2008, p. 84), que usa o termo "*misteake*", definida como "uma operação incorreta que leva a um resultado correto".

**Figura 20:** Registro de um ingressante



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 21:** Registro de um ingressante

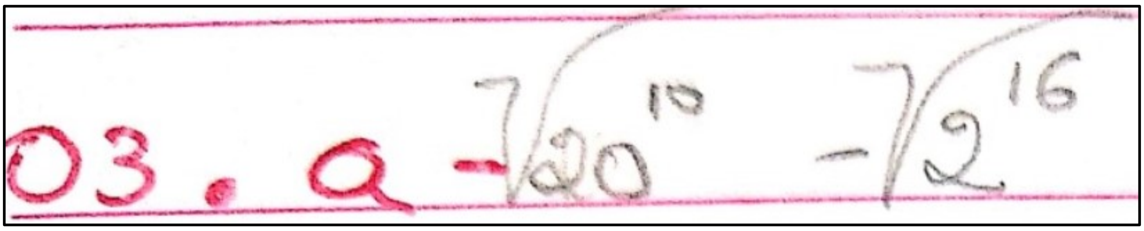



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Note que na figura 19 a ideia de cancelamento aritmético excêntrico se fez presente, onde o aluno desconsiderou os índices das raízes do item, restando apenas fazer a subtração dos radicandos nos dois termos. Agora, o erro da figura 20 pode ter sido acionado ao considerar, nos dois termos da subtração, as raízes iguais, resultando no descuido do aluno. Perceba também que ao "cortar" o índice do radical, na figura 21, o número que está na base também desaparece.

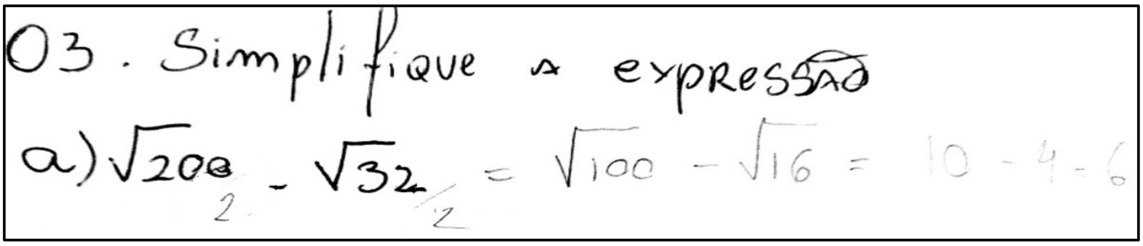
O restante dos alunos que erraram este item não conseguiu atribuir significado aos conceitos do mesmo, pelo motivo de expressarem em seus registros equívocos que variavam entre inconsistências lógicas e de cancelamentos, erro sem justificativa e imprecisão no uso de propriedades de até mesmo outros conteúdos. Para ilustrar, vamos apresentar apenas dois destes outros erros:

**Figura 22:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 23:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Estas atividades realizadas fizeram-se fundamentais como recursos verdadeiramente repletos de valores, diretamente relacionados com o território da Educação Matemática. Mesmo conhecendo as frentes de estudos e investigações que crescem à medida que avançamos, é crucial investigar o nível de conhecimento matemático que os estudantes chegam nos cursos superiores, principalmente nos cursos de Graduação em Matemática. Por isso, este primeiro movimento se constituiu como uma espécie de diagnóstico, procurando saber os costumes e perfis dados por cada aluno da disciplina de Graduação em Matemática, tentando identificar as possíveis dificuldades que os mesmos possam vir a apresentar.

Dois terrenos conceituais foram explorados nestas ações: propriedades numéricas – frações, potenciação e radiciação – e algébricas – que exigiu um nível fundamental de conceitos técnicos de manipulações algébricas para a simplificação, expansão ou mesmo fatoração de expressões.

### 4.2. Segundo movimento: turma 2019/2

No segundo movimento feito neste ano, focamos em analisar os trabalhos escritos, a partir de uma avaliação diagnóstica elaborada, de 14 novos ingressantes no curso de Graduação em Matemática no contexto da disciplina de Seminários de Matemática Elementar, com a consciência de uma futura intervenção pedagógica de acordo com níveis de maior necessidade dos ingressantes, investigando as possíveis dificuldades conceituais destes na perspectiva da Análise de Erros.

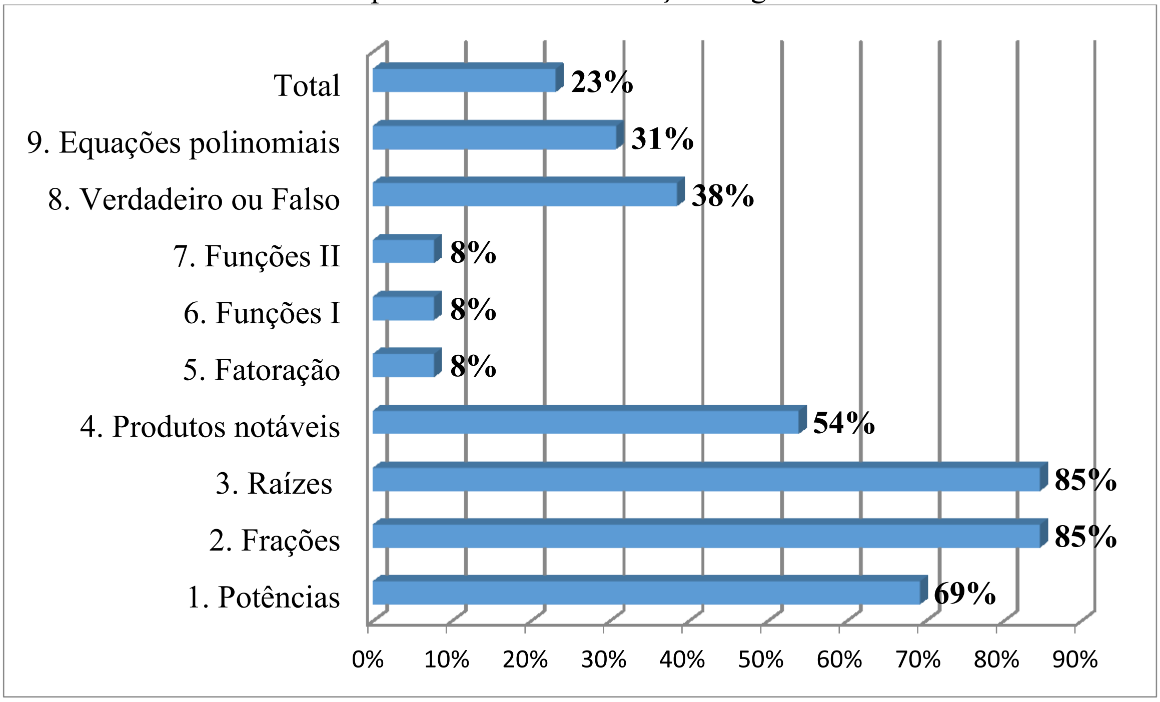
Nesta visão, a avaliação diagnóstica abordava diferentes conceitos da área, onde os alunos deveriam registrar suas resoluções. A saber, este questionário abordou, neste segundo momento, conceitos sobre: Potências, Frações Algébricas, Radiciação, Produtos Notáveis, Fatoração, Equações Polinomiais e Funções (Anexo B). Cada questão diagnóstica dada em sala, foi analisada com rigor e categorizada de acordo com as classificações de erros de Cury (2008).

Como critério de análise, categorizamos as respostas dos ingressantes do segundo semestre em classes qualitativas, que possibilitaram evidenciar, com mais facilidade, os erros atrelados ao não entendimento, ou mesmo, desconhecimento de propriedades, manipulações e operações algébricas; assim como, destacamos aqueles que demonstraram não saber resolver ou que resolveram erroneamente os itens da avaliação.

A priori, destacamos a distribuição em porcentagem dos alunos com desempenho igual ou superior a 60% na avaliação diagnóstica. Com isso, e a partir de discussões, esta análise permitiu evidenciar os conceitos que os ingressantes mais possuem dificuldade ao entrarem no ensino superior. A partir disso, investigamos estratégias pedagógicas que nos possibilitariam minimizar estas dificuldades.

Este gráfico ilustra bem o problema enfrentado pelos ingressantes no curso de matemática do ensino superior, e muito se justifica pela falta de domínio de conceitos da área atrelados a cada conteúdo trabalhado. Por isso, estes resultados serviram como um desdobramento do espaço proporcionado pela pesquisa, iniciada pela avaliação diagnóstica, e se arquitetou por ajudar os ingressantes da universidade – tanto no primeiro, quanto no segundo semestre deste ano –, a compreenderem o universo processual de ensino-aprendizagem deles.

**Gráfico 4:** Distribuição da porcentagem de alunos da segunda turma com desempenho igual ou superior a 60% na avaliação diagnóstica




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Os erros em si, demonstraram diferentes caminhos de resolução que o aluno pôde vir a apresentar. Eles, podem ocorrer por diferentes motivos: falta de atenção, não domínio do conteúdo considerado, utilização de um plano de execução equivocado, execução de regra/macetes sem embasamento conceitual ou mesmo estratégias inadequadas. Em outras palavras, vivências ou experiências matemáticas podem levar a tais erros, e o professor deve estar atento a isso, pois para cada erro deve haver uma estratégia diferente para superá-lo. Mais do que isso, Buriasco (2000, p. 88) completa as falas supracitadas dizendo que:

> É, pois, tarefa do professor fazer com que o erro, aos poucos se torne observável pelo aluno para que este tome consciência daquele. Essa é uma das contribuições pessoais que o professor pode fazer na busca de diminuir o fracasso escolar.

Tanto que ao se apresentar essa tabela na sala, os mesmos comentavam sobre seus pontos de eficiência e dificuldades, demonstrando onde e em quais conceitos tinham maiores deficiências. Por fim, destacamos as duas maiores dificuldades conceituas dos mesmos: função e fatoração. Por motivos de ementa curricular, os alunos acabaram trabalhando, posteriormente a este diagnóstico, estudos envolvendo produtos notáveis e casos de fatoração. Por outro lado, a importância de se trazer o conteúdo de função se subsidiou por este baixo aproveitamento dos ingressantes na avaliação diagnóstica. Tendo uma linha de aprendizagem eficaz deste conteúdo, abrem-se oportunidades de aprendizado muito mais simples em períodos letivos subsequentes, pois tendo as informações básicas conceituais de função, os estudos envolvendo Cálculo Diferencial e Integral se tornam mais fluidos de se aprender.

Com isso, é válido evidenciar que a avaliação por si só não oferece elementos suficientes para sentenciar uma trajetória decisiva para o aprendizado do aluno. Por isso, ela nos apresentou não só as dificuldades encontradas por cada ingressante, mas desencadeou discussões e leituras que permitiram analisar a situação, planejar ações pedagógicas que procuravam alavancar conceitos específicos – advindos das dificuldades encontradas – e a executá-las, buscando concretizar o ensino e a aprendizagem. E completando este ponto de vista, Vianna (1997, p.2) afirma que:

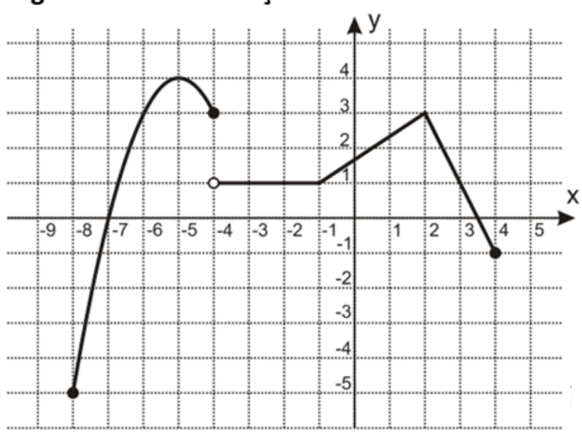
> [...] a avaliação nunca é um todo acabado, autossuficiente, mas uma das múltiplas possibilidades para explicar um fenômeno, analisar suas causas, estabelecer prováveis consequências e sugerir elementos para uma discussão posterior, acompanhada de tomada de decisões, que considerem as condições que geraram os fenômenos analisados criticamente.

Sobretudo, destacamos que a questão 6, envolvendo funções, possui cinco itens que buscavam trabalhar os conceitos gerais envolvendo o conteúdo, sejam eles, respectivamente: atribuição de valores em pontos de continuidade (a); atribuição de valores em pontos de descontinuidade (b); valor numérico de uma função (c); raízes de uma função (d) e; domínio e imagem de uma função (e).

Estes itens são apresentados aos ingressantes como na figura 24 abaixo:

**Figura 24:** Sexta questão da avaliação diagnóstica

06.**O gráfico de uma função é dado abaixo:**




a) Diga o valor de $f(2)$.
b) Estime o valor de $f(-4)$.
c) Para quais valores de $x$ vale que $f(x) = 3$?
d) Encontre as raízes desta função.
e) Diga qual é o domínio e a imagem de $f$.

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Pela importância de se trazer o conteúdo trabalhado na avaliação diagnóstica, destacamos a tabela 3 abaixo que enfatiza o panorama conceitual sobre o comportamento dos ingressantes frente a cada item da questão 6, envolvendo função.

**Tabela 3:** Relação entre tipos de classe e quantidade de alunos correspondente em cada item da Atividade Diagnóstica

| TIPOS DE CLASSE QUESTÃO 6 | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| **Classe A:** Acertou corretamente | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **Classe B:** Erro por desconhecimento ou uso incorreto de propriedades | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| **Classe C:** Não lembraram | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **Classe D:** Deixaram em branco | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 |
| Total de alunos que fizeram a questão 6 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |

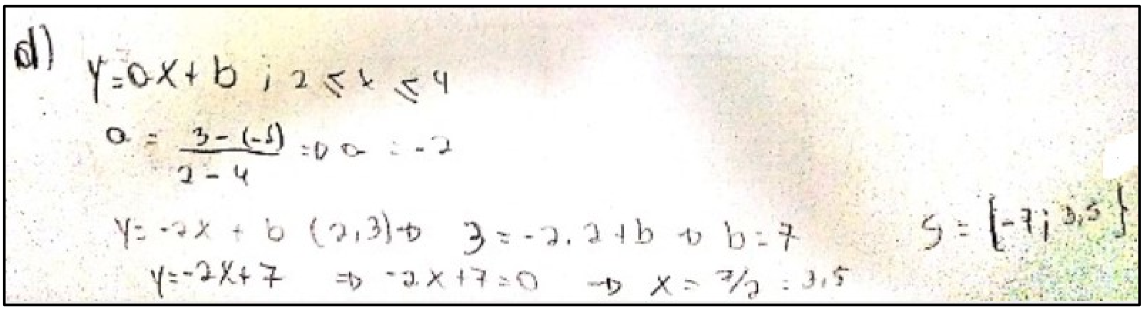
**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Tendo esta visão geral do desempenho dos ingressantes quanto ao conteúdo de função logo após entrarem na faculdade, faremos uma análise qualitativa sobre as questões abordadas no novo questionário, acompanhadas de argumentos que possam extrair justificativas relevantes do porque o aluno possa vir a ter estas dificuldades em tal conteúdo.

Como já dito anteriormente, categorizamos os erros atrelados ao conteúdo de função em quatro classes específicas por questão, essas que detalhamos a seguir:

**Classe A)** está relacionada com as respostas dos alunos em relação aos itens respondidos de forma coerente e correta. Destaca-se que houve apenas 1 aluno, dentre os 14, que acertou a questão por completo, porém, observa-se que outros 2 alunos associaram os conceitos de função com a resolução certa apenas no item “a”, o que implicou na introdução de suas resoluções erradas de outros itens, em outras classes qualitativas. Interessante ressaltar a estratégia de resolução do primeiro aluno citado, que usou de seus conhecimentos já adquiridos para justificar as duas raízes da função relacionadas ao item “d”. Perceba que na figura 24, é fácil ver essas duas raízes – que correspondem aos valores em que o gráfico da função corta o eixo $x$ –, porém percebe-se que uma delas (a da direita) não possui um valor inteiro, o que dificulta uma estimativa mais precisa. Contudo, o aluno abordou a seguinte resolução para tal descoberta:

**Figura 25:** Registro de resolução de um ingressante

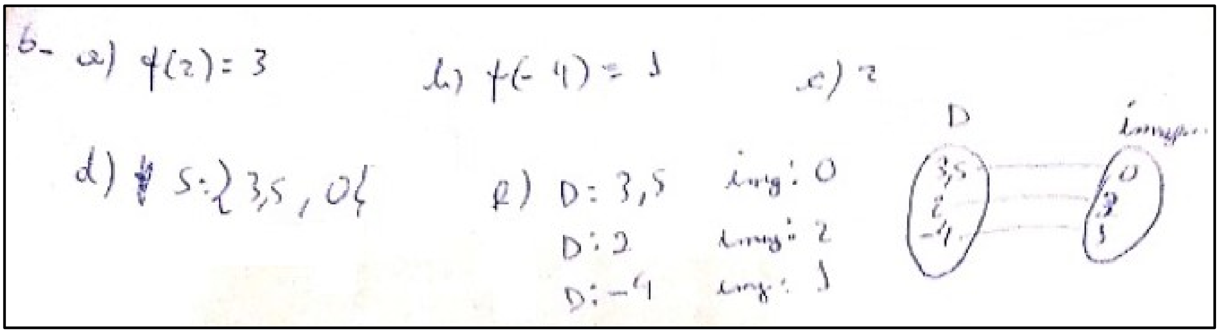



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Percebe-se que o ingressante usou de seus próprios conhecimentos de função afim para encontrar a equação da reta a partir de dois pontos dados e, a partir disso, encontrou a raiz “oculta” da função que se apresenta na questão.

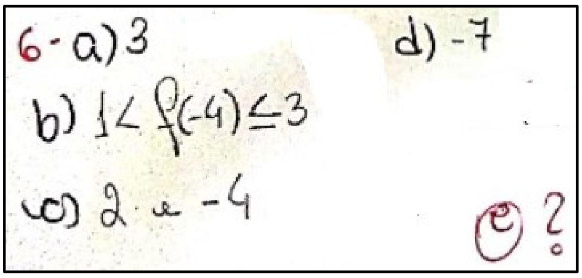
**Classe B)** está vinculada aos erros por desconhecimento ou uso incorreto de propriedades em cada item. Destacamos que nenhum aluno apresentou uma resolução errada para o item “a”, como podemos observar na terceira linha da Tabela 3, contudo dois alunos apresentaram uma falta de conhecimento nos itens “b”, “c” e “d”. Um desses, também demonstrou dificuldades conceituais em relação ao último item desta questão, e em contrapartida, o outro aluno não manifestou resolução, implicando na quantificação em outra classe. Esses erros, são os que se seguem abaixo:

**Figura 26:** Registro de resolução de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 27:** Registro de resolução de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Ao se falar em atribuição de valores, em pontos de descontinuidade de uma função, a partir de um gráfico, o questionamento do item “b” tenta investigar os contrapontos relacionados entre ele e a pergunta do item “a”, que trabalha os pontos de continuidade da função por sua identificação visual. Nota-se que nos dois casos, os alunos apresentaram seus raciocínios de resolução de formas distintas, porém relacionadas com a simbologia matemática em um gráfico: o primeiro com o erro de identificação gráfica, que indica a falta de entendimento sobre o significado de “bola aberta[13]” no gráfico da função; e o outro atribuindo um intervalo, onde a possível solução poderia estar.

Ao se falar de notação, temos alguns argumentos similares com os erros apresentados destes dois alunos. Model (2005), ao analisar o uso de simbologias em alunos do primeiro ano do Ensino Médio, percebe que os mesmos confundiam o conceito das terminologias para “maior que” e “menor que”, usando expressões que, na maior parte do tempo, são apresentadas como “regras” ou “macetes” para se distinguir “<” e “>”. Exemplificando, na sua pesquisa, a autora pede para que os alunos representem graficamente o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$, e posteriormente um deles chega a perguntar sobre “A boca maior é o lado maior, não?” (Model, 2005, p. 91). Este relato contribui com a analogia dos erros de notação que os alunos vieram a apresentar. Neste caso, se não existir uma intervenção prévia por parte do professor, sobre a importância e o significado de simbologias matemáticas antes mesmo de associa-las às notações correspondentes, o aluno pode vir a gerar um problema adicional. Quando a notação gráfica é apresentada em outros contextos – como o caso destes dois primeiros itens – talvez os alunos que ainda não associaram cada símbolo ao seu significado primordial, precisem recorrer às “regras” para se fazer distinções.

13 Termo referente a simbologia das extremidades de conjuntos formados por intervalo, donde se sabe, pela notação, quando se deve ou não considerar o elemento da extremidade desse conjunto.

Voltando aos outros itens, percebe-se que em (c), a essência de sua pergunta gira em torno do processo inverso dos questionamentos feitos em (a) e em (b). Logo, foi previsto que, possivelmente, não encontrariam as soluções corretas para tal finalidade, o que se confirmou com os registros. Além disso, a resolução na figura 26 confirma o pensamento do aluno dos itens anteriores, acreditando que o único valor de $x$ que faz com que a imagem da função seja 3, é o 2.

Quanto aos itens relacionados a raízes, domínio e imagem da função, os alunos apresentaram conjeturas diferentes também. No primeiro caso, a terminologia “zero da função” pode levar o aluno a pensar no valor cuja a abscissa corresponde ao numeral zero, e não na base de sua definição, provocando erros similares a este apresentado no item (d) na figura 26. Continuando a análise da questão, o ingressante relacionou apenas os elementos que haviam sido utilizados até o momento e infelizmente a definição não se mostrou explícita para o mesmo. Já no segundo caso, figura 27, o aluno demonstrou reconhecer apenas uma raiz para a solução do problema e, supostamente, ou não percebeu a interseção do gráfico da função no ponto $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, ou apresentou algum equívoco na hora de representar as raízes desta função. Quanto ao último item, o ingressante não apresentou resoluções.

**Classe C)** corresponde as respostas deixadas pelos alunos com os dizeres de não se lembrarem da resolução do item. Nesta classe, houve 2 alunos que deixaram claro sobre a não recordação da resolução do item. Isto pode apontar possibilidades até mesmo sobre a não eficácia de metodologias abordadas pelos professores destes alunos, pois, segundo as afirmativas, o conteúdo até foi trabalhado com os mesmos, porém não efetivou aprendizagem ao aluno. O fato de não lembrarem, nos faz refletir sobre a aprendizagem concreta e o que de fato o aluno carrega como saber. Ausubel (1983, p. 2) discursa sobre este tipo de aprendizagem, e explicita que a aprendizagem significativa ocorre quando uma informação nova se conecta com um conceito relevante, pré-existente na estrutura cognitiva do aluno, e isso implica que:

> Novas ideias, conceitos e proposições que podem ser aprendidas significativamente, na medida em que outras ideias, conceitos ou proposições relevantes são adequadamente claras e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionam como um ponto de "ancoragem" para o primeiro[14].

Com isso então, o aluno passa a dar significado ao que lhe é apresentado, e neurologicamente dizendo, parafraseio Pierluiggi (2014) quando ele fala que “aprender, é aprender para sempre, e não para o dia seguinte”. Em outras palavras, o fato de não lembrarem

---

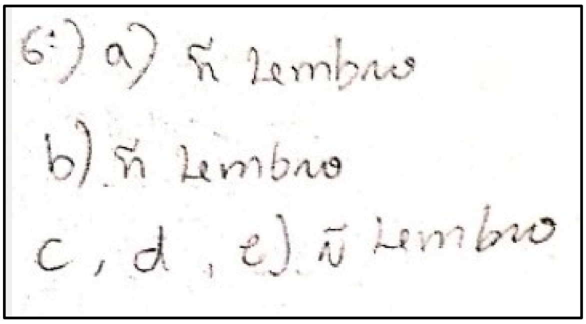
[14] Tradução dos pesquisadores.

de como fazer o item, pode implicar que eles até mesmo viram o conteúdo em sala, mas não atribuíram significado aos conceitos e acabaram comprometendo no seu aprendizado e conhecimentos presentes.

**Figura 28:** Registro de resolução de um ingressante


**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 29:** Registro de resolução de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Classe D)** está diretamente relacionada com os itens deixados em branco pelos ingressantes. Esta é a classe com a maior parte dos alunos. Dentre os 14 que fizeram a avaliação, 9 deixaram as resoluções em branco dos itens “a” ao “e”, e além disso, um dos alunos, que pertenceu a Classe B de registro de respostas errôneas, não apresentou também resolução no item “e”, por isso, ele se encontra nesta classe também.

Este estudo foi feito sobre a questão 6. A outra questão que os alunos também manifestaram dificuldades em relação aos conceitos de função foi a 7, onde cada item buscou abordar assuntos como os respectivos: atribuição de valores em uma função determinada por uma sentença (a), raízes de uma função determinada por uma sentença (b), esboço gráfico de uma função linear, quadrática e exponencial em um intervalo determinado (c). Estes conceitos, são apresentados aos alunos na avaliação diagnóstica da seguinte maneira:

**Figura 30:** Sétima questão da avaliação diagnóstico

07.**Seja** $f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3^x, & x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcule $f(1)$ e $f(0)$.

b) Quais são as raízes desta função?

c) Esboce o gráfico desta função.

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Deste ponto, concluímos que a estrutura de classes para a análise desta outra questão se manteve igual à anterior. Com isso, existem quatro classes que permitem qualificar as produções escritas dos ingressantes, a partir da avaliação diagnóstica. Portanto, e de maneira similar, a tabela abaixo demonstra o universo conceitual que os ingressantes apresentaram quando se falado de funções determinadas por sentenças.

**Tabela 4:** Relação entre tipos de classe e quantidade de alunos correspondente em cada item da Atividade Diagnóstica

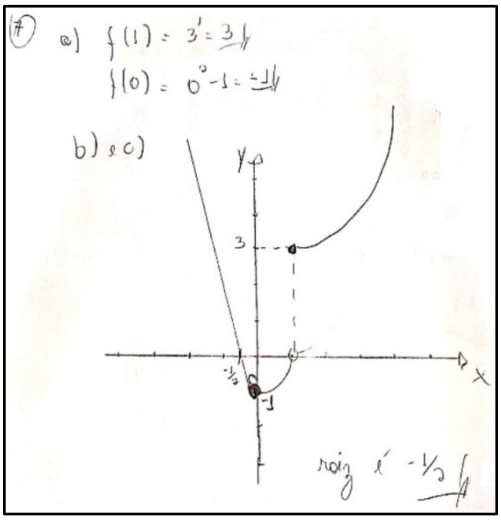
| TIPOS DE CLASSES - QUESTÃO 7 | a | b | c1 | c2 | c3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Classe A:** Acertou corretamente | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **Classe B:** Erro por desconhecimento ou uso incorreto de propriedades | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Classe C:** Não lembraram | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **Classe D:** Deixaram em branco | 8 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| **TOTAL DE ALUNOS QUE FIZERAM A QUESTÃO 7** | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

As classes discutidas e determinadas são as que se seguem:

**Classe A)** está relacionada com as respostas em relação aos itens respondidos pelos alunos de forma coerente e correta. Nesta classe, apenas um aluno a acertou por completo, sabendo aplicar as definições de aplicação de valores na função definida por várias sentenças e construindo seu gráfico correspondente. Sua resolução é a que se segue:

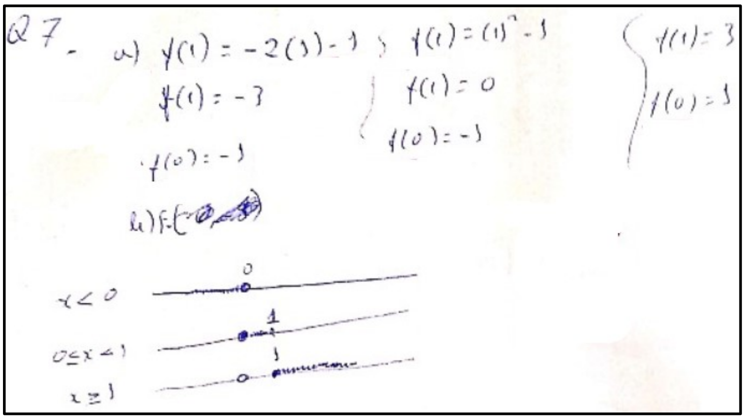
**Figura 31:** Registro de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

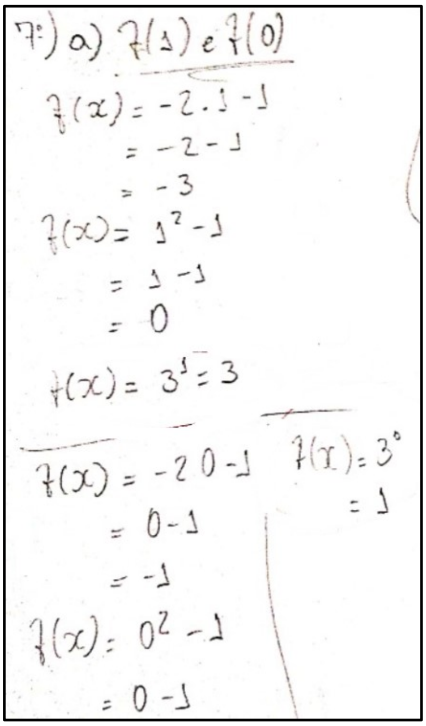
**Classe B)** está vinculada aos erros por desconhecimento ou uso incorreto de propriedades em cada item. Nesta ocasião, tivemos 4 erros dentre os 14 alunos que manifestaram erroneamente a forma de resolução da questão relacionada. Entre esses, destacamos que dois alunos resolveram aplicando o mesmo valor da variável $x$ nas três sentenças definidas, deixando implícito qual a resposta correta em alguns casos, demonstrando o desconhecimento de funções determinadas em intervalos. Algumas que mais se destacaram, apresentamos a seguir:

**Figura 32:** Registro de Resolução de um ingressante




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 33:** Registro de Resolução de um ingressante



7:) a) f(1) e f(0)

$f(x) = -2 \cdot 1 - 1$
$= -2 - 1$
$= -3$

$f(x) = 1^2 - 1$
$= 1 - 1$
$= 0$

$f(x) = 3^1 = 3$

$f(x) = -2\,0 - 1$
$= 0 - 1$
$= -1$

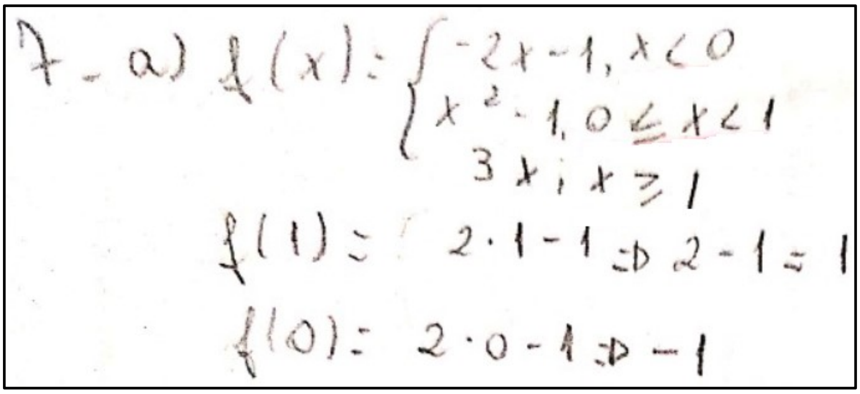
$f(x) = 0^2 - 1$
$= 0 - 1$

$f(x) = 3^0$
$= 1$

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Esses alunos apontam a oculta certeza sobre a resposta correta, aplicando o mesmo valor da variável $x$ nas três sentenças, demonstrando o desconhecimento do conteúdo. Outros dois, manifestaram tipos de erros particulares, onde em um dos registros, percebeu-se uma inconsistência lógica na hora da aplicação. Esses são os que se seguem:

**Figura 34:** Registro de Resolução de um ingressante



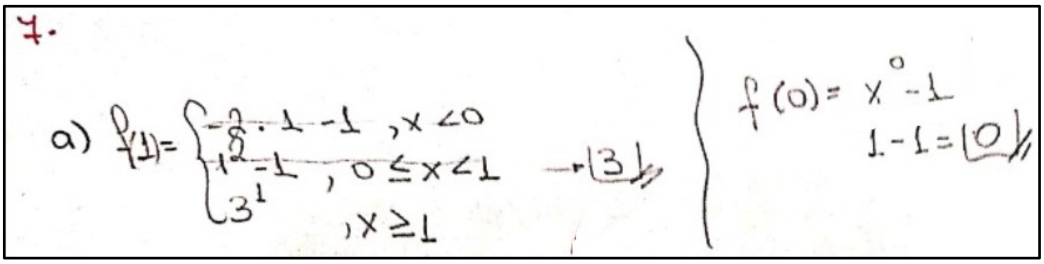
7 - a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}$

$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$

$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow -1$

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

**Figura 35:** Registro de Resolução de um ingressante




**Fonte:** Dos pesquisadores desta pesquisa

Percebe-se que na figura 34, o aluno não demonstrou o aprendizado conexo aos conceitos de função formada por sentença, aplicando valores diferentes para a mesma sentença. Já na figura 35, o aluno elimina, mesmo que aplicando o mesmo valor, as sentenças que não o satisfaz, resultando no valor da função $f(1) = 3$; agora, quando perguntado sobre o valor de $f(0)$, a escolha da sentença até se satisfez, porém a mudança de função quadrática para exponencial, se mostrou como uma inconsistência lógica na hora da aplicação, entrando assim também na análise da classe B.

**Classe C)** corresponde as respostas deixadas pelos alunos com os dizeres de não se lembrarem da resolução do item. Aqui, apenas um disse que não lembrava dos conceitos relacionados à questão por completo, porém dos itens não relacionados ao item “a”, outro aluno também não discursou sobre a não recordação.

**Classe D)** está diretamente relacionada com os itens deixados em branco pelos ingressantes. Como era previsto pelo levantamento de dados, 8 alunos não fizeram sequer a questão por completo, sendo que 3 outros erraram o item “a” e os demais conceitos abordados em “b” e “c” mostrou que esses 11, dos 14 alunos, não conseguiram iniciar uma linha de raciocínio para a resolução da questão.

Até o momento, tentamos quantificar e diagnosticar os possíveis erros que os ingressantes apresentaram ter. É evidente ressaltar a importância do conteúdo de função como fundamental ferramenta de estudo, permitindo esclarecimento e embasamento para futuras disciplinas, como é o caso do Cálculo Diferencial e Integral.

A partir desta perspectiva e feita a análise qualitativa dos erros envolvendo o conteúdo de função, elaboramos um plano de ação que visou introduzir e contextualizar os conceitos do conteúdo a partir de uma aula investigativa de modelagem matemática, utilizando-se do jogo manipulativo: Torre de Hanói. Esta atividade se dividiu em três momentos e seus resultados serão melhor discutidos na seção que se segue.

### 4.3. Terceiro movimento: intervenção pedagógica

Nesta seção, serão apresentados discussões e resultados da intervenção pedagógica investigativa, elaborada e executada com os ingressantes do segundo semestre de 2019 e teve como situação-problema o Problema do Fim do Mundo. Partimos então do contexto da interconexão entre os vários temas que o universo matemático permite estudar: etno-matemática, modelagem, investigação, jogos manipulativos e digitais, entre outros sistemas de estudo. Contextualizados, foi possível exemplificar que o uso de jogos manipulativos, por exemplo, possui sua importância como contribuinte no contexto de ensino e aprendizagem da matemática, e que os mesmos servem de ferramentas de estudo, desencadeando um amplo campo de exploração de conteúdo, trazendo a inter-relação com culturas mitológicas.

Deste ponto, iniciamos uma discussão do que seria mitologia, suas diversidades – grega, nórdica e indígena brasileira – e a sua importância. Verificamos que a maioria não conhecia o jogo, mas que estavam motivados a conhecer e, portanto, prontos para se colocar em atividade e buscar a solução do problema que iríamos apresentar. Nesse momento, introduzimos a discussão sobre a mitologia hindu, narrando a lenda que originou o jogo.

Ao introduzir a mitologia hindu, apresentar o contexto histórico da criação do jogo e a situação-problema, foi questionado se essa poderia ser ou não resolvida[15]. No início, os alunos foram incentivados a responder o questionamento e explicar os motivos de suas respostas.

Esclarecemos que não relataremos todos os aspectos da aula investigativa, que caracteriza a sequência metodológica, por motivos a apresentar simplesmente os principais resultados estabelecidos entre o jogo Torre de Hanói e o ensino de funções.

Quando se colocou a possibilidade de resolver ou não o problema do fim do mundo, os alunos tenderam a dar respostas espontâneas advindas do conhecimento prévio de cada um:

> ***Ingressante A:*** *Tem que levar em consideração que ele vai mover duas vezes, né? Cada movimento vai ser necessário fazer duas vezes.*
> ***Licenciando:*** *Como assim duas vezes?*
> ***Ingressante A:*** *Porque vai ter que por de um lado e depois do outro.*
> ***Licenciando:*** *Será esta a melhor estratégia?*
> ***Ingressante B:*** *Eu acho que tem que descobrir primeiro quantos movimentos levam para mudar a torre, aí depois dá para calcular com 64.*

Esse aluno demonstrou aptidão para a generalização. Assim como orienta Polya (2006), ao descrever os passos para resolver um problema, é possível imaginar e resolver um problema

[15] Lembrando que no problema são 64 anilhas e apenas 3 hastes devendo todas as anilhas de uma torre serem transferidas para uma das outras, movimentando uma anilha por vez e jamais uma anilha maior pode sobrepor uma anilha menor.

correlato mais acessível e, desse modo, elaborar um plano para a resolução do problema mais complexo. Caso algum aluno não manifeste esta possibilidade, o professor pode problematizar e sugerir tarefas que lhes proporcionem encontrar respostas e fazer relações, associando-as com o conceito de função.

Sobretudo um ingressante afirmou a possibilidade de enfrentar este problema e encontrar uma possível solução, porém "haverá muito tempo" para que todas as anilhas da lenda possam ser transferidas. Outro, em contrapartida, argumentou com os seguintes dizeres:

> ***Ingressante C:*** *A última peça só mexe uma vez. Daí será que é decrescente?*
> ***Licenciando:*** *O que te fez pensar isso?*
> ***Ingressante C:*** *A última você mexe uma vez, aí a penúltima mexe duas vezes. Daí a peça menor seria sessenta e quatro vezes.*
> ***Licenciando:*** *É um outro jeito de pensar. Será que é válido?*

Perceba que este aluno tentou usar um raciocínio indutivo para comprovar sua tese, mas, a princípio, não levou em consideração a necessidade de se somar a quantidade de movimentos de todas as anilhas. Portanto, e novamente, é válido ressaltar as contribuições de Grando (2000) sobre a familiarização com o jogo manipulativo, onde a abordagem se constitui sem uma intervenção prévia, deixando o aluno atribuir, consigo mesmo, suas próprias formas de conduzir e manipular o material. Afinal, o jogo pelo jogo se caracteriza como uma etapa importante para que o aluno possa, futuramente, por meio de abordagens do professor, estabelecer relações matemáticas, responsáveis por conjecturas estruturais.

Neste ponto, pedimos para que os alunos fizessem uma separação em grupos, pois do mesmo modo, Moura (2010) também afirma que é durante a atividade, no coletivo, que as pessoas se apropriam de significados culturais e criam um sentido particular para aquilo que fazem. Esta abordagem se fez importante para interação dos ingressantes, e esta pode ser melhor apresentada como na figura a seguir:

**Figura 36:** Ingressantes jogando a Torre de Hanói

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Após essa etapa, iniciamos a atividade dirigida entregando para cada grupo a primeira tarefa. Em uma folha, os ingressantes deveriam registrar – considerando uma torre com uma, duas, três, quatro ou cinco anilhas – a quantidade necessária de movimentos para cumprir o objetivo do jogo para cada nível. Nossa intenção era que os alunos percebessem que o número mínimo de movimentos necessários para mover a torre de uma haste para outra, segundo as regras, se dava em função do número de anilhas. Ou seja, havia uma relação entre duas grandezas. Com o diálogo e reflexão com o grupo todo, mediado pelo licenciando, os resultados anotados por cada grupo foram reestruturados e construímos com eles a tabela a seguir.

**Figura 37:** Quadro com os registros dos grupos evidenciando a relação entre as quantidades de movimentos e o número de anilhas

| Número de Anilhas | Quantidade de Movimentos (G1) | Quantidade de Movimentos (G2) | Quantidade de Movimentos (G3) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 7 | 7 | 9\7 |
| 4 | 15 | 16\15 | 16\15 |
| 5 | 31 | 40\31 | 34\38\39\31 |
| 6 | 63 | 63 | |
| 7 | 127 | 95+63\127 | |

**Fonte:** Arquivos dos pesquisadores

No quadro da figura 37, observamos os valores[16] correspondentes da quantidade de movimentos encontrados pelos 3 grupos de ingressantes formados na atividade. Antes mesmo de termos solicitados a investigarem a quantidade mínima de movimentos necessários para se mover as anilhas de uma torre de sua haste inicial para outra, percebemos que não tiveram muitas dificuldades para chegar ao resultado esperado, construindo assim o quadro acima com total autonomia mesmo tendo divergências iniciais quanto à quantidade mínima de movimentos para três, quatro e cinco anilhas causando-lhes estranheza, o que nos fez incentivá-los a conferir e corrigir a quantidade de movimentos possíveis para aquele momento.

Percebemos, pela figura 37, que os valores não corresponderam com o esperado no planejamento da intervenção, porém estes, antes atribuídos pelos alunos, foram alterados. Isto

---

[16] As tentativas dos alunos estão configuradas na figura 37 da seguinte maneira: $x\backslash y$, onde $x$ corresponde ao valor das primeiras tentativas dos respectivos grupos, e $y$ a quantidade final conjecturada.

se deu mediante a percepção dos mesmos, após o registro na tabela, que o desafio não era simplesmente mudar a Torre de uma haste para a outra, mas fazer isso com o mínimo de movimentos possível. Assim sendo, instigamos uma investigação sobre a quantidade mínima de movimentos para mover a torre com até cinco anilhas.

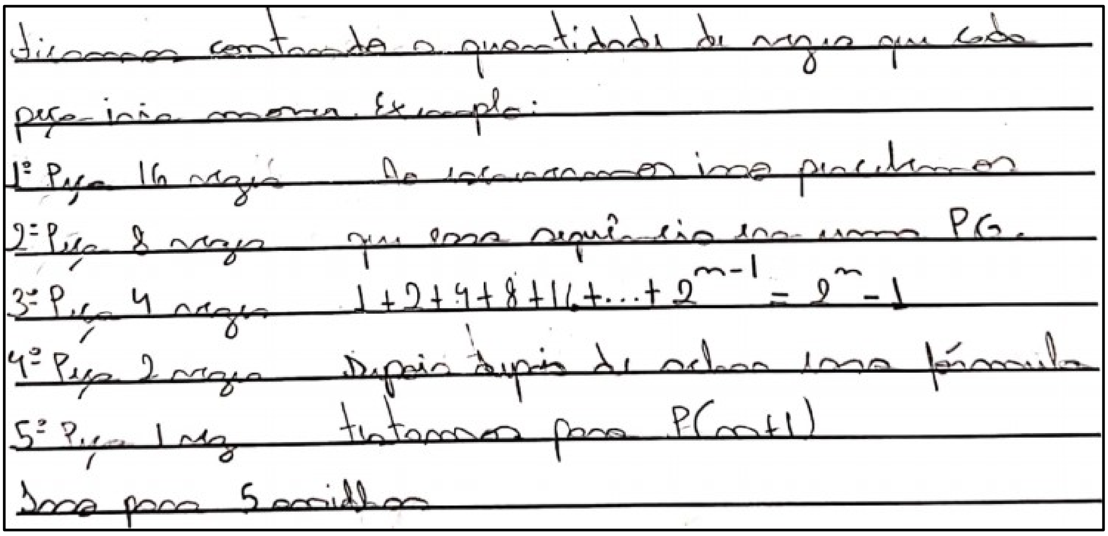
Quando os alunos relacionam o jogo com o conceito de função, é possível e interessante a eles buscarem uma lei de formação que explique a situação problemática proposta pelo jogo. Por isso, continuamos a atividade com nossa segunda ficha (Anexo D) com o seguinte questionamento: "Sabendo a quantidade mínima de movimentos para se mover uma torre com uma, duas, três, quatro e cinco anilhas, encontre o número mínimo de movimentos para seis, sete, oito, nove e dez anilhas. Descreva qual foi o procedimento ou a estratégia que seu grupo utilizou".

Essa etapa teve como objetivo motivar o aluno, mesmo sem a utilização do jogo, a buscar regularidades envolvendo os valores obtidos e registrados no quadro e formular uma solução geral para os outros casos apresentados. O interessante e empolgante resultado desta etapa, foi que a partir da sequência de valores $(1, 3, 7, 15, 31)$ observados na tabela, cada grupo teve um meio de pensamento algébrico distinto que conseguia moldar uma expressão matemática que relacionava as grandezas quantitativas debatidas até o momento: movimentação e anilhas. Em outras palavras, não existia uma única[17] lei de formação, que determinava o número de movimentos mínimos em função do número de anilhas. No entanto, não demoraram a perceber que, das três, uma era mais interessante que as outras.

Algumas ideias foram dadas pelos alunos e, em cada grupo, registradas em uma folha conforme mostram as figuras abaixo.

[17] E nem mesmo duas, como está previsto na seção 3.

**Figura 38:** Registro do grupo 1


Ficamos contando a quantidade de vezes que cada
peça iria mover. Exemplo:
1º Peça 16 vezes Ao observarmos isso percebemos
2º Peça 8 vezes que essa sequência era uma PG.
3º Peça 4 vezes $1+2+4+8+16+\ldots+2^{n-1} = 2^n-1$
4º Peça 2 vezes Depois depois de achar essa fórmula
5º Peça 1 vez tentamos para P(n+1)
Isso para 5 anilhas

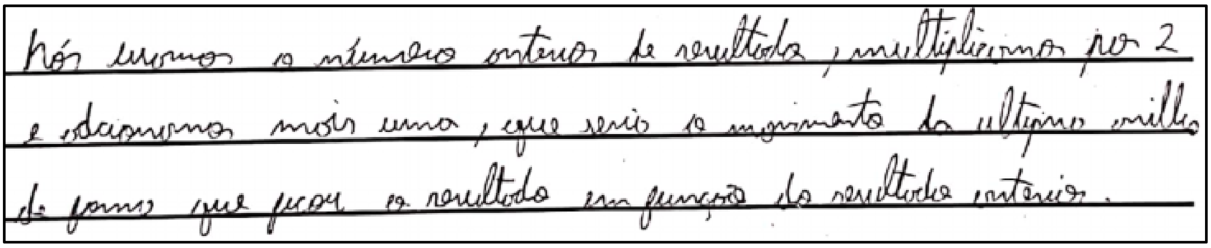
**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

O Grupo 1, conseguiu elaborar a expressão com a quantidade de vezes que cada peça iria se mover. O mesmo utilizou torres com quantidade de anilhas menores onde cada integrante deveria acompanhar a movimentação de cada peça, para assim estabelecerem uma afirmativa. Alguns comentários como: “com três anilhas a primeira se move quatro vezes, a segunda duas e a última uma só, mas não podemos afirmar que vai acontecer sempre; vamos fazer mais” foi dito, mas não demoraram muito para concretizarem suas ideias, e após terem o resultado para com até 5 anilhas (figura 38), induziram ser possível que, para mover $n$ anilhas, seriam necessários $2^n - 1$ movimentos.

> ***Ingressante C:*** *é uma PG de razão 2. Para mover uma torre com quatro anilhas por exemplo são necessários um, dois, quatro e oito movimentos [referindo-se à soma], dando 15 [movimentos].*

Por estarem estudando demonstrações de propriedades de números naturais através do princípio de indução finita, concluíram o feito com um alto rigor matemático.

**Figura 39:** Registro do grupo 3


Nós usamos o número anterior do resultado, multiplicamos por 2
e somamos mais uma, que seria o movimento da última anilha
de forma que prova o resultado em função do resultado anterior.

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

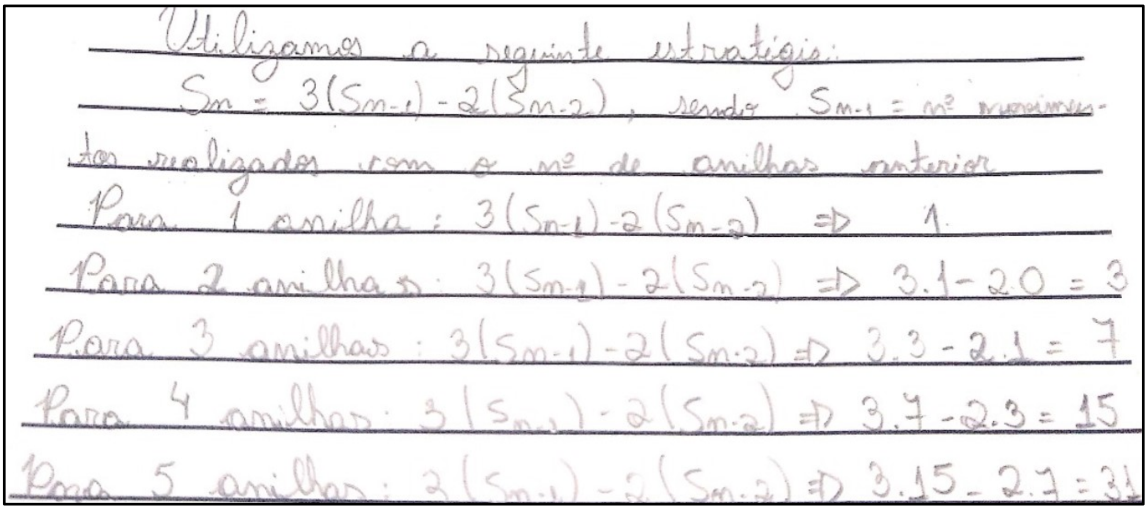
O grupo 3, utilizou de alguns argumentos iniciais para concluir o objetivo:

***Ingressante F:*** *De três para quatro [anilhas] foram duas vezes esse [aponta para a quantidade de movimentos na rodada anterior] mais um, mas eu tenho que considerar a base.*
***Licenciando:*** *Considerando a base o que você pode afirmar?*
***Ingressante F:*** *Que eu movimento estes primeiros [anilhas do topo, sem a base], depois movo a base e depois volto [as anilhas retiradas].*
***Licenciando:*** *Qual é a conclusão do grupo?*
***Ingressante F:*** *então é o número de movimento [na rodada] anterior duas vezes mais um.*

Suas ideias foram registradas usando o "número anterior do resultado, multiplicamos por dois e adicionamos mais uma, que seria o movimento da última anilha de forma que ficou o resultado em função do resultado anterior". Percebemos que estes alunos conseguiram, naquele momento, enfatizar que existe uma relação de grandezas entre as já mencionadas e que não é preciso utilizar de grandes quantidades de anilhas para chegarem a conclusões maiores.

Generalizando, os integrantes deste grupo chegaram a uma expressão diferente do primeiro grupo, que em outras palavras, é o mesmo que dizer: a soma do dobro do valor obtido para a quantidade mínima de movimentos para mover $(n-1)$ anilhas e uma unidade, que também podemos representar matematicamente por $2x+1$, onde $x$ representa a quantidade mínima de movimentos para mover $(n-1)$ anilhas.

**Figura 40:** Registro do grupo 2


Utilizamos a seguinte estratégia:
$S_n = 3(S_{n-1}) - 2(S_{n-2})$, sendo $S_{n-1}$ = nº movimentos realizados com o nº de anilhas anterior
Para 1 anilha: $3(S_{n-1}) - 2(S_{n-2}) \Rightarrow 1$
Para 2 anilhas: $3(S_{n-1}) - 2(S_{n-2}) \Rightarrow 3.1 - 2.0 = 3$
Para 3 anilhas: $3(S_{n-1}) - 2(S_{n-2}) \Rightarrow 3.3 - 2.1 = 7$
Para 4 anilhas: $3(S_{n-1}) - 2(S_{n-2}) \Rightarrow 3.7 - 2.3 = 15$
Para 5 anilhas: $3(S_{n-1}) - 2(S_{n-2}) \Rightarrow 3.15 - 2.7 = 31$

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

É interessante destacarmos esta afirmativa do grupo 2 a respeito do fato imprevisto no roteiro da atividade, acreditando que no momento de jogar com competência foi proporcionado o desencadeamento deste pensamento na nova função $Q_3$, construída a partir de conhecimentos recursivos, advindos da sequência de valores para cada nível do jogo. Em meio a formação desta expressão, o grupo teve alguns princípios investigativos que possibilitaram a afirmativa acima (figura 40):

> ***Licenciando:*** *Quantos movimentos são necessários para mover 5 anilhas?*
> ***Ingressante D:*** *Tinha que dar 31.*
> ***Licenciando:*** *Como que você sabe que teria que dar 31?*
> ***Ingressante D:*** *Porque segue uma lógica! Daqui para cá [mostrando o crescimento na movimentação de anilhas] aumenta dois, então dá três; daqui para cá aumenta quatro, dá 7, daqui para cá aumenta 8, dá 15. Então aqui tem que ser 31, porque pula 16.*
> ***Ingressante E:*** *Então, era para ser 31. Só que quando fizemos deu 40.*
> ***Licenciando:*** *Tentem jogar mais uma vez com uma atenção diferente e ver se conseguem outros resultados.*

Ao jogarem novamente, conseguiram estabelecer um pensamento original que se iniciou e foi formulado, após alguns questionamentos do licenciando, por eles com um pertinente grau de generalização, e está debatido, preservado e registrado como um diálogo nos textos abaixo:

> ***Licenciando:*** *Vocês estão encontrando a quantidade mínima de movimentos para 5, 6 e sabem até de 7 anilhas. E se fosse para encontrar a quantidade mínima de movimentos para 8 anilhas, já que vocês não têm a quantidade exata de anilhas para tal conclusão, qual seria a estratégia de vocês?*
> ***Ingressante E:*** *A gente dobra o valor... [inaudível]*
> ***Licenciando:*** *O dobro de 127?*
> ***Ingressante E:*** *Não! A gente dobra a quantidade de vezes, que no caso, deu noventa e quanto aqui [verificando os cálculos com outro ingressante do grupo]?*
> ***Ingressante D:*** *[...] pega o 127 menos 63, dá uma razão, aí pega essa razão e dobra.*
> ***Licenciando:*** *Espera um pouco então. Vamos voltar um pouco: para 7 anilhas, como vocês acharam a quantidade mínima, já que vocês não têm o jogo com 7 anilhas?*
> ***Ingressante E:*** *Conta do jeito que a gente tá indo amiga. A gente vai dobrando...*
> ***Ingressante D:*** *A gente pegou o resultado do anterior e somou com o dobro da diferença entre os outros dois.*
> ***Licenciando:*** *Vamos testar isso então. Por exemplo, 127, o que você fez para achar este valor?*
> ***Ingressante D:*** *O anterior [referindo-se à quantidade de movimentos na rodada anterior] tinha dado 63, certo? A diferença dele com o anterior [31] dele, era 32. A gente pegou 63 mais o dobro da diferença dele [63]com o anterior [31], que dá 32 [...] daí deu 63 mais 64, que deu 127!*
> ***Licenciando:*** *Deixa eu ver se eu entendi: você pegou o 63 [...] Mais duas vezes a diferença dos anteriores?*
> ***Ingressante E:*** *Não, mais duas vezes a diferença desse [aponta para o numeral 63], com o 31.*
> ***Licenciando:*** *Que vai dar o da frente [referindo-se à quantidade de movimentos requerida: 127]?*
> ***Ingressante E:*** *É!*
> ***Licenciando:*** *E se fosse para descobrir a quantidade mínima para 8 anilhas?*
> ***Ingressante D:*** *O de 8, seria: pegar o 127 [...] mais duas vezes 127 menos 63.*
> ***Ingressante E:*** *Que aí vai dar a razão [referindo-se à diferença]; a razão a gente dobra e só.*
> ***Licenciando:*** *E dá isso mesmo?*

Fizemos os cálculos como os alunos haviam estruturado e a tese tinha sido comprovada. Em comparação aos demais grupos, este havia formulado um padrão particular interessante, que consideramos e investigamos junto a eles também qual a estrutura matemática que comprovava esta conclusão. Ao explorarem a quantidade de movimentos para mais valores, manipulando a torre com até cinco anilhas, o objetivo deste momento foi atingido com a inesperada formulação desta expressão matemática: $S_n = 3.S_{n-1} - 2.S_{n-2}$, onde $n$ representa a quantidade de anilhas.

Entusiasmados com cada resolução, destacamos que este tinha sido o momento motivador para iniciarmos as discussões com os grupos a respeito de conceitos relacionados a funções. Ressaltamos o fato de termos uma grandeza dependendo de outra para ser encontrada e, matematicamente dizendo, os alunos chegaram à conclusão de que uma estava em função de outra. Feito isto, pudemos representar as expressões anteriores como funções de uma variável: $Q_1(x) = 2x + 1$, $Q_2(a) = 2^a - 1$ e $Q_3(a) = 3.S_{a-1} - 2.S_{a-2}$, onde $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ e $S_a$ representam a quantidade mínima de movimentos para mover uma torre de $a$ anilhas e; $x$ é a quantidade mínima de movimentos para mover uma torre de $(a - 1)$ anilhas.

Neste ponto, chegamos a refletir sobre o papel do professor em uma proposta de intervenção investigativa. O posicionamento do mesmo se faz presente mediante a atividade, verificando se os alunos estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representando a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificativas e se tiram implicações interessantes. O professor tem de ser capaz de equilibrar os momentos de ação com os momentos de reflexão, ajudando os alunos a construir os conceitos matemáticos (PONTE, 1999, p. 2).

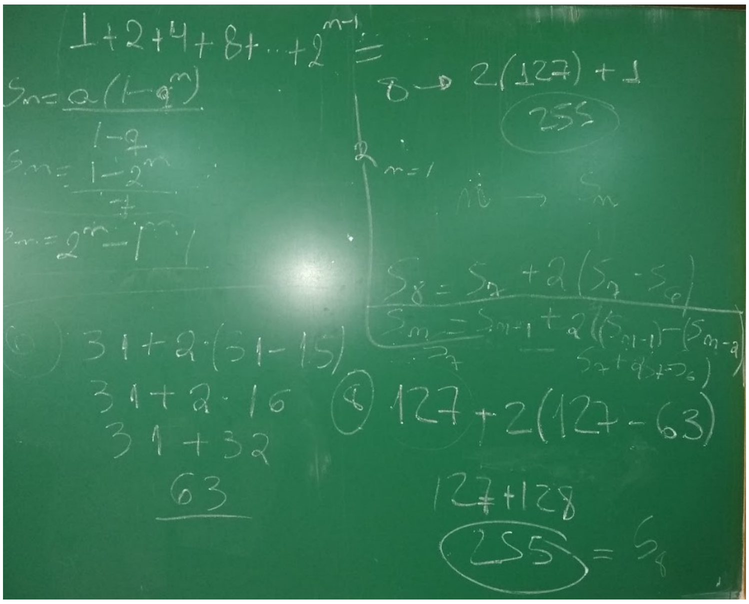
Finalizada a abordagem com as expressões de movimentação, voltamos ao quadro representando todas as hipóteses referentes aos argumentos dos ingressantes. A tabela e a figura a seguir, representam, respectivamente, a relação entre cada grandeza e as hipóteses estabelecidas pelos mesmos.

**Tabela 5:** Relação de existência entre cada variável

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{a}$ | **Nº Mínimo de Movimentos** |
|---|---|---|
| - | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 7 |
| 7 | 4 | 15 |
| 15 | 5 | 31 |
| 31 | 6 | 63 |
| 63 | 7 | 127 |
| ... | ... | ... |
| $\boldsymbol{x}$ | $a$ | $2x+1$, $2^a-1$ e $3.S_{a-1}-2.S_{a-2}$ |

**Fonte:** Autores deste artigo

**Figura 41:** Hipóteses dos ingressantes concretizadas




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

Voltando com as expressões encontradas e com a finalidade de explorar os conceitos de função com os alunos em um alto nível de generalização, questionamos sobre a representação de cada variável nas funções; qual grandeza era dependente e qual era independente; o domínio, contradomínio e imagem; a verificação dos valores a partir de cada domínio e; a representação gráfica de cada função.

Ao investigar se era possível encontrar a quantidade mínima de movimentos para 20 anilhas com as funções, muitos se sentiram desconfortáveis. Eles perceberam que, naquele momento, as funções $Q_1$ e $Q_3$ eram limitadas, a princípio. Outros alunos afirmaram que na realidade não poderiam usar estas funções pelo simples fato de não terem a quantidade mínima para dezenove ou dezoito anilhas, por exemplo. Esse depende exclusivamente da quantidade de movimentos de níveis anteriores, e isto nem sempre é viável de se encontrar. A princípio concluímos isto, mas posteriormente voltamos a essas funções e construímos novas hipóteses a partir de alguns resultados. Foi da existência de limitação, principalmente da terceira função, que o grupo 2 decidiu não a utilizar, concentrando-se nas duas primeiras. Tais estas que demos maior foco.

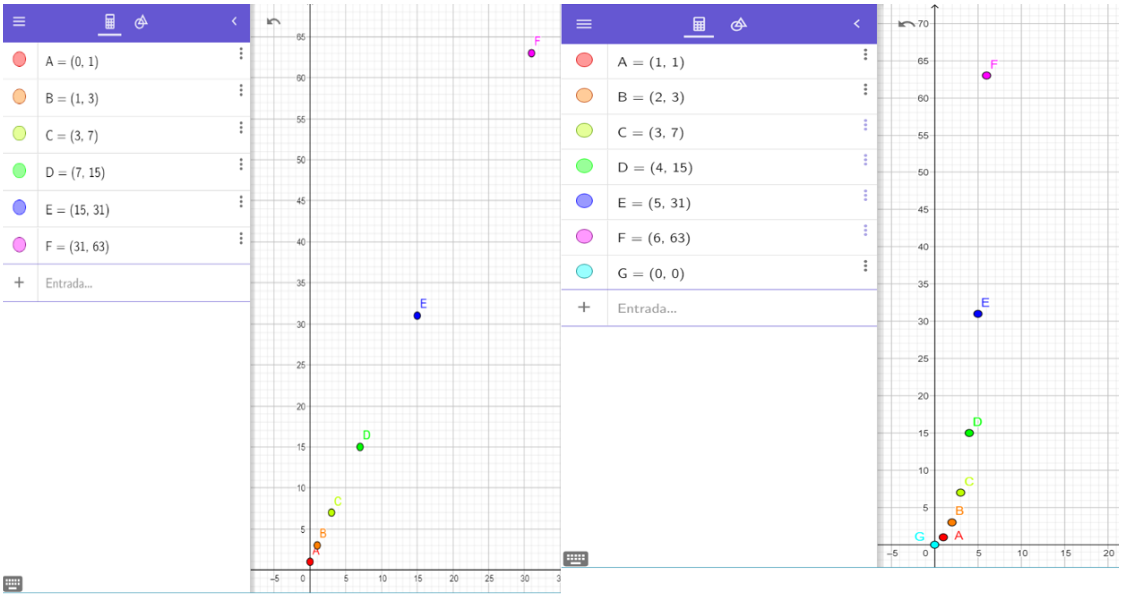
Continuando os questionamentos em busca da exploração dos conceitos de funções, os alunos levantaram uma significativa discussão para encontrar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de cada uma. Para o domínio da $Q_2$ fora bem intuitivo atribuir os valores. Contudo, o domínio da $Q_1$, alguns achavam que poderiam atribuir qualquer valor natural. Mas ao discutir e atribuir os reais valores do domínio, os esclarecimentos se fizeram concretos na abordagem realizada.

Sintetizando enfim suas ideias, chegamos às conclusões de que o domínio da função $Q_1$ é definido por: $D_1 = \{0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots\}$; enquanto que seu conjunto imagem corresponde ao conjunto dos números $r$ inteiros, tais que, $r = 2^a - 1$, para todo $a$ natural. O mesmo exercício foi realizado com os alunos a respeito da função $Q_2$ . Nesta função, temos que o domínio é dado por $D_2 = \{0, 1, 2\ 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$. Já seu conjunto imagem é o mesmo da primeira função para todo $a \geq 1$, união com o elemento neutro da adição quando $a = 0$. De fato, se $a = 0$, a imagem da função representa, justamente, a quantidade mínima de movimentos para se mover uma torre com zero anilhas, e, obviamente, não existe um valor correspondente na função $Q_1$.

Levando em consideração a hipótese encontrada em todas as respostas, avaliamos ser necessário e suficiente discutirmos sobre a representação gráfica de cada função. Neste momento, observamos que o professor pode disponibilizar aos grupos o uso do computador, recorrendo, por exemplo, ao *software GeoGebra* para representar os gráficos, conforme ilustrado na figura 42.

Percebemos pela figura abaixo que, para todos os valores de $a$ e $x$, existe uma quantidade mínima de movimentos correspondentes. Com isso, questionamos sobre o comportamento de ambas as funções e se elas poderiam ser relacionadas de alguma maneira.

**Figura 42:** Gráficos das funções $Q_1$ e $Q_2$, respectivamente




**Fonte:** Captura de tela no aplicativo *GeoGebra*

Com esta atividade, os alunos puderam concluir que, para cada valor de $a$ utilizado na função $Q_2$, existe um único valor $x$ correspondente a ele na função $Q_1$, o que faz com que essas funções possuam as imagens iguais. Em outras palavras, estas funções possuem seus valores numéricos iguais para cada variável de seu domínio, exceto quando $a = 0$. Nesse caso, não existirá um valor para $x$ que satisfaça a igualdade. Tivemos, então, a igualdade que relacionava as duas funções trabalhadas até o momento. A saber:

$$2^a - 1 = 2x + 1, \qquad \forall\, a \geq 1$$

Tendo esta igualdade em mãos, fica mais simples conseguirmos expressar a variável $x$ em termos da variável $a$, e concluir que a função $Q_1$ não é mais limitada pela necessidade de encontrar a quantidade mínima de movimentos em níveis anteriores. A mesma justificativa se sustenta para a função $Q_3$, porém, durante a intervenção, o licenciando optou por não explorar a mesma, pois o próprio grupo, correspondente a ela, já a havia abandonado. Com isso, e por meio de manipulações algébricas, pudemos afirmar que a variável $x$, anteriormente questionada, agora está muito bem definida para todo $a$ natural pela expressão:

$$x = 2^{(a-1)} - 1, \ \forall\, a \geq 1 \quad (*).$$

O interessante aqui é utilizarmos a expressão anterior na função $Q_1(x)$. Perceba que, também, esta última expressão é exatamente igual à função $Q_2$ aplicada na variável $(a-1)$. Fazendo a composição de funções, temos que:

$$Q_1(x) = 2x + 1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$Q_1(Q_2(a-1)) = 2.\left(2^{(a-1)} - 1\right) + 1 \Rightarrow$$

$$Q_1(Q_2(a-1)) = 2^{(a-1+1)} - 2 + 1 \Rightarrow$$

$$Q_1(Q_2(a-1)) = 2^a - 1 = Q_2(a),\ \forall\, a \geq 1.$$

Fizemos os cálculos e substituições junto com os alunos e a conclusão do feito foi muito bem aceita. Perceba que utilizamos dos recursos dos conceitos de função composta para tal conclusão, outra abordagem interessante a ser considerada.

Com isso, finalizamos a seção de exploração com um elevado nível de generalização dos conceitos relacionados a funções. Mas nosso objetivo central não tinha sido concluído ainda. Resgatamos o problema central que deu origem à atividade investigativa. Todos recordaram sobre o Problema do Fim do Mundo, e a esta altura da atividade, sabiam afirmar com convicção que ele poderia sim ser resolvido. Os ingressantes confirmaram que, para o mundo acabar, seriam necessários $2^{64} - 1$ segundos. Após este feito, fizemos as devidas conversões de segundos para anos desse valor, para nos permitir resolver o item (b)[18] do problema inicial[19].

Após o questionamento, revelei a quantidade aproximada que a Terra possui, e este valor corresponde a aproximadamente $4{,}543x10^9$ anos de idade. E, nitidamente, foi fácil ver que a Terra ainda não havia acabado segundo a lenda. Na realidade, seriam necessários ${}^{584}/_{4{,}543}$ vezes a idade que a Terra possui hoje para ser destruída, segundo a lenda hindu, e este valor, a saber, corresponde a: 128,5. Observa-se que utilizamos novamente da calculadora para concluir rapidamente este fato.

Neste momento, tivemos a conclusão perfeita por parte dos alunos. Chegamos a esta concretização e conseguimos cumprir com o objetivo dito no começo da atividade: é possível mover as sessenta e quatro anilhas e o tempo para realização do feito é de aproximadamente $584x10^9$ anos!

---

[18] Lembrando que: Se for possível mover as 64 anilhas, e sabendo que a Terra tem aproximadamente $4{,}543x10^9$ anos, nosso mundo já teria acabado segundo a mitologia Hindu?

[19] $\boldsymbol{OBS}$: $2^{64} - 1$ segundos $= 18.446.744.073.709.551.615$ segundos $\cong 584x10^9\ anos.$

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, procuramos questionar quais eram as consequências estudantis que poderíamos aprender advindas das respostas escritas de ingressantes universitários, por meio de uma intervenção diagnóstica avaliativa. Após todos os movimentos presentes desta pesquisa, tivemos resultados importantes que devemos considerar com relação a alguns temas, como: **avaliação diagnóstica; análise quantitativa, análise qualitativa, intervenção pedagógica investigativa, jogo manipulativo e o processo de ensino.**

Os respectivos dados da avaliação diagnóstica, mostraram as evidentes dificuldades que um aluno ingressante pode vir a carregar provenientes de estruturas cognitivas formadas no Ensino Médio e Fundamental. Tais problemas, algumas vezes conceituais, fazem com que as dificuldades permaneçam ou aumentem durante a Educação Básica e/ou Nível Superior e, geralmente, são causados pela falta de conhecimentos prévios e compreensão errônea de conteúdos que foram abordados nos níveis anteriores de ensino (CURY, 2008). Por isso, se fez fundamental a utilização da avaliação diagnóstica, para partir de uma ferramenta de pesquisa, e chegar num instrumento de análise educacional.

Agora, com relação aos resultados quantitativos das análises das duas avaliações diagnósticas, tivemos que as maiores dificuldades ou desconhecimentos estiveram nos respectivos conteúdos, do primeiro e segundo semestre, relacionados a: fatoração (15% da turma com média acima de 60%) e simplificação de expressões racionais (15% acima da média); funções[20] (8% acima da média) e casos de fatoração (8% com aproveitamento positivo). Percebe-se que em ambos os semestres o conteúdo de fatoração foi o mais alarmante na perspectiva de aprendizagem dos ingressantes. Isso nos provocou questionar algumas situações: quais são as estratégias pedagógicas que podem ser usadas para melhor preencher as lacunas conceituais do ingressante desse conteúdo? O conteúdo de função não foi aplicado no primeiro semestre, então, será que o percentual na tendência do desempenho avaliativo do ingressante se manteria? Além disso, pensamos ser válido trazer, em futuras pesquisas, avaliações diagnósticas que abordem outros conteúdos como a trigonometria, números complexos, conceitos básicos de geometria analítica, etc.[21], mas claro, sem deixar de lado as matérias elementares tanto trabalhadas nesta pesquisa, e investigar quais conteúdos disciplinares matemáticos mais comportam dificuldades na transição para o Ensino Superior? A partir dos

[20] Lembrando que funções não esteve presente na primeira avaliação diagnóstica.
[21] Conteúdos também presentes na ementa disciplinar de Fundamentos de Matemática Elementar 2.

resultados obtidos, poderemos pensar em eficazes metodologias de ensino, objetivando a aprendizagem significativa do ingressante.

Quando se testemunha as demonstrações de aprendizagem de um aluno a partir de um registro escrito, refletimos sobre o porquê e as causas de alguns equívocos. Ao se avaliar qualitativamente, recorremos a pesquisas que apontam dados de possibilidade de respostas a esses questionamentos, e também, permite não só o levantamento de dados sobre o erro, mas que a partir dele, podemos, como professores, investigar junto ao aluno as eventualidades do erro, permitindo assim um estudo cooperativo que pode romper com as essências conceituais equivocadas, "regras" ou "macetes" que permitiram a quebra do seu aprendizado efetivo.

No segundo semestre, optamos em trabalhar a intervenção pedagógica que permitiu introduzir os conceitos de função a partir de uma aula investigativa. Nela, foi utilizado o jogo manipulativo: Torre de Hanói, onde o mesmo permitiu um ambiente de ludicidade (GRANDO, 2000) da atividade. Mais que isso, o jogo não serviu apenas de instrumento lúdico, mas se estendeu como um recurso disparador de um conceito (MOURA, 2010), tal este com baixo aproveitamento. Os ingressantes não lembravam dos conceitos introdutórios, mas se empolgaram com o desafio do jogo e se fizeram dispostos a participar de toda a atividade efetivamente.

O material manipulativo permite até mesmo estudos profundos sobre outros conteúdos possíveis de serem trabalhados, como é o caso das progressões aritmético-geométricas e geométrico-aritméticas. Esta possibilidade surgiu quando as funções trabalhadas na intervenção se relacionavam de forma padronizada e expressiva. Essa nomenclatura pode também ser reconhecida em outros textos como progressões aritmo-geométricas, e estudos mais detalhados sobre este tema podem ser melhor apresentados em ROCHA (2018). Isto foi um aprendizado adquirido, consequente das respostas dos ingressantes a partir da utilização que o jogo permitiu refletir como uma possibilidade até mesmo em cursos de Licenciatura em Matemática.

Continuando a reflexão sobre a importância da utilização e integração com os recursos digitais, a calculadora científica e os softwares de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, tornam possível que o jogo supere as limitações dos livros didáticos, permitindo ao professor, de diferentes etapas ou níveis de ensino, desenvolver os conceitos de função afim, de forma lúdica, avançando para as funções exponencial e composta.

Ao executar este trabalho com a Análise de Erros, identificamos que na grande parte dos ingressantes houve distintas dificuldades com relação aos tópicos de função, um dos conteúdos programáticos da disciplina de F1. Considerando que o desenvolvimento dessa pesquisa esteve vinculado à disciplina de Seminários de Matemática Elementar, que por sua vez apoiava as disciplinas de F1 e F2, foi necessário ajustar o cronograma da pesquisa ao desenvolvimento dos conteúdos nessas disciplinas. Por isso, não foi possível encaminhar um fechamento para o trabalho pedagógico desenvolvido pela pesquisa. Especificamente falando, foi proposto aos estudantes que fizessem uma atividade virtual, por meio da plataforma *Moodle*, sobre funções com o objetivo de acompanhar o desenvolvimento da aprendizagem, após a intervenção pedagógica realizada. No entanto, essa atividade não foi finalizada a tempo de ser incluída como parte dos dados desta pesquisa. No entanto, é importante registrarmos que houve uma continuação, ou seja, um trabalho processual, de forma que seria possível colher os resultados efetivados de todo o contorno desta pesquisa realizada.

Em futuros trabalhos da disciplina de SME, pode-se tentar articular melhor o cronograma desse trabalho desenvolvido na pesquisa com o cronograma desenvolvido pelos professores de F1 e F2. Isso porque percebemos, a partir da mesma, que os alunos se envolvem mais nas atividades propostas quando os assuntos estão vinculados aos conteúdos que eles têm necessidade de aprender para serem aprovados nas disciplinas de F1 e F2.

Em meio a estes resultados, torna-se legítimo a utilização da Análise de Erros em produções escritas como um possível investimento de investigação e pesquisa dentro das abordagens da Educação Matemática, pois da mesma forma que Cury (2008) defende, é válido ressaltar que a mesma não só é um recurso de pesquisa – com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de alunos de todos os níveis de ensino –, mas também é uma metodologia de ensino, permitindo sua utilização quando se percebe dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula.

Conhecendo então, quali-quantitativamente, os erros dos alunos, reforçamos a importância de cursos de Graduação em Matemática buscarem alternativas, a partir do diagnóstico dos alunos ingressantes, para oportunizar estes futuros professores de Matemática a atingirem altos níveis de conhecimento, buscando preencher as lacunas fundamentais advindas do Ensino Básico.

**REFERÊNCIAS**

AUSUBEL, D. **Teoria del aprendizaje significativo**. academia.edu 1983. Disponível em: http://www.academia.edu/download/38902537/Aprendizaje_significativo.pdf. Acesso em: 21 nov. de 2019.

BEREND, D; SAPIR. A. **The cyclic multi-peg Tower of Hanoi**. ACM Trans. Algorithms 2 (2006), 297-317.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). **Matemática. Ensino Fundamental**. MEC / SEF, 1997

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

BURIASCO, R. L. C. **Análise da produção escrita: a busca do conhecimento escondido**. In: ROMANOWSKI, J. P.; MARTINS, P. L. O.; JUNQUEIRA, S. R. A. (orgs.) Conhecimento local e conhecimento universal: a aula, aulas nas ciências naturais e exatas, aulas nas letras e nas artes. Curitiba: Champagnat, 2004.

BURIASCO, R. L. C. **Avaliação em matemática: um estudo das respostas de alunos e professores** / Regina Luzia Corio de Buriasco. − Marília, 1999.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sara Knopp. **Investigação qualitativa em educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos, Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 1. Ed. 1. Reimp. 116p

CURY, H, N. Pesquisas em análises de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: FROTA, M. C. R., NASSER, L. (Org.). **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM. 2009. 265p.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Classificação e análise de erros em álgebra. In: IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Caxias do Sul. **Anais...** Ed: UCS, 2006. Disponível em: <https://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/cientificos/CC26.pdf> . Acesso em 05 jun. 2019.

DUDENEY, H. E. **The Canterbury Puzzles (and Other Curious Problems)**, E.P. Dutton, 1908.

FELTES, R, Z. **Análise de erros em potenciação e radiciação**: um estudo com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Rio Grande do Sul, 2007. Disponível em: http://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3438. Acesso em: 05 jun. 2019.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática**. Texto extraído do Boletim da SBEM-SP, n.7, jul./ago. 1990.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula** / Regina Célia Grando. -- Campinas, SP : [s.n.], 2000.

HUIZINGA, J. Homo Ludens: **o jogo como elemento da cultura**. 2. ed. Tradução João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 1990. 236p.

LOPES, E. M. C. **Integração de mídias na disciplina de geometria analítica em um curso de graduação em matemática**. - 2019. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2019. Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.920. Acesso em: 30 mai. 2019.

MODEL, S. **Dificuldades de alunos com simbologia matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

MOURA, M. O. **O Jogo e a Construção do Conhecimento Matemático**. Editora: Ieenica, Série Ideias, nº 10, São Paulo, 1991.

______ **A Construção do Signo Numérico em Situação de Ensino**. São Paulo, SP, 1992a, Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, USP.

PINHO, Ana Paula Moreno; DOURADO, Laís Carvalho; AURÉLIO, Rebeca Martins; BASTOS, Antonio Virgílio Bittencourt. **A transição do ensino médio para a universidade: um estudo qualitativo sobre os fatores que influenciam este processo e suas possíveis consequências comportamentais**. Revista de Psicologia, Fortaleza, v. 6, n. 1, p. 33-47, 2015.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

PONTE, J. P. **A comunidade matemática e as suas práticas de investigação**. 2001. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/ponte01.pdf. Acesso em: 21 nov.2019.

PONTE, J; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 1ª ed., 2006.

PONTE, J.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** Projecto Matemática para Todos: Investigações na sala de aula (1995- 1999), Centro de Investigação em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. *Quadrante*, 7(2), 41-70. 1999

REGÔ, R. M.; REGÔ, R. G. **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática**. In: LORENZATO, S. (Org.): O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006, p.39-56.

ROCHA, R. A. **Progressões Geométrico-Aritméticas e Aritmético-Geométricas Generalizadas**. 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/332197785_Progressoes_Geometrico-Aritmeticas_e_Aritmetico-Geometricas_Generalizas. Acesso em 26 dez. 2019.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em Matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. Tese (Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2016v9n2p233> Acesso em: 06 jun. 2019.

SCORER, R. S; GRUNDY, P. M; SMITH C. A. **Some Binary Games**, MG28 (1944), 96-103.

STOCKMEYER, P. K. **Variations on the four-post Tower of Hanoi puzzle**, CN 102 (1994), 3-12.
TAHAN, Malba. **A matemática na lenda e na história**. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1974.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. Faculdade de Matemática. **Ficha de componente curricular de Seminários de Matemática Elementar (PROINTER I) do Curso de Graduação em Matemática**. Uberlândia, 2019.

______. Faculdade de Matemática. **Ficha de componente curricular de Fundamentos da Matemática I do Curso de Graduação em Matemática**. Uberlândia, 2019.

______. Faculdade de Matemática. **Ficha de componente curricular de Fundamentos da Matemática II do Curso de Graduação em Matemática**. Uberlândia, 2019.

VIANNA, Heraldo Marelim. **Avaliação Educacional e o Avaliador**. São Paulo, 1997. Tese (Doutorado)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

# ANEXOS

**Anexo A:** Primeira avaliação diagnóstica - Turma 1

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL - MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - FACULDADE DE MATEMÁTICA

## Atividade S1

01. Avalie cada expressão sem usar uma calculadora:

a) $(-3)^4$  b) $-3^4$  c) $3^{-4}$

d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$  e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$  f) $16^{-3/4}$

02. Calcule:

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$  b) $5 \cdot \dfrac{1}{3}$  c) $1+\dfrac{5}{6}$  d) $\dfrac{8}{3} \div \dfrac{1}{6}$

03. Simplifique cada expressão:

a) $\sqrt{200}-\sqrt{32}$  b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

04. Expanda e simplifique:

a) $3(x+6)+4(2x-5)$  b) $(x+3)(4x-5)$

c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$  d) $(2x+3)^2$

e) $(x+2)^3$

05. Fatore cada expressão:

a) $4x^2-25$  b) $2x^2+5x-12$

c) $x^3-3x^2-4x+12$  d) $x^3y-4xy$

06. Simplifique as expressões racionais:

a) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$  b) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-9} \cdot \dfrac{x+3}{2x+1}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x+2}$  d) $\dfrac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}$

07. A distância entre duas cidades num mapa de escala 1:2000 km é de 8,5 cm. Qual a distância real entre essas duas cidades?

08. Dois números somados totalizam 510. Sabe-se que um deles está para 8, assim como o outro está para 9. Quais são os dois números?

09. Pedrinho resolveu 20 problemas de Matemática e acertou 18. Cláudia resolveu 30 problemas e acertou 24. Quem apresentou o melhor desempenho?

10. Resolva cada equação (encontre apenas as soluções reais):

a) $x+5=14-\dfrac{1}{2}x$  b) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x}$

c) $2x^2+4x+1=0$  d) $x^4-3x^2+2=0$

11. Diga se cada afirmação é verdadeira ou falsa:

a) $(p+q)^2=p^2+q^2$  b) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$  d) $\dfrac{1+TC}{C}=1+T$

**Anexo B:** Segunda avaliação diagnóstica - Turma 2

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL - MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - FACULDADE DE MATEMÁTICA

## Atividade S1

01.**Avalie cada expressão sem usar uma calculadora:**

a) $(-3)^4$ b) $-3^4$ c) $3^4$ d) $\frac{5^{23}}{5^{21}}$

e) $3^{12}.\,3^{18}$ f) $(7^3)^5$ g) $8^{2/3}$ h) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$

i) $(3a^3).(4a^2)^3$ j) $\left(\frac{y^3}{y^{1/2}}\right)^{-4}$

02.**Calcule:**

a) $\frac{3}{5}+\frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{2}-\frac{7}{2}$ c) $\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}$ d) $\frac{8}{3}\div\frac{1}{6}$

e) $6\cdot\frac{7}{2}$

03.**Simplifique cada expressão:**

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{200}$ c) $\sqrt[3]{-8}$

d) $\sqrt{(-5)^2}$ e) $\sqrt{300}-\sqrt{432}$

04.**Expanda e simplifique:**

a) $3(x+6)+4(2x-5)$ b) $(x+3)(4x-5)$

c) $(a+b)(a-b)$ d) $(2x-3)^2$

e) $(x+2)^3$

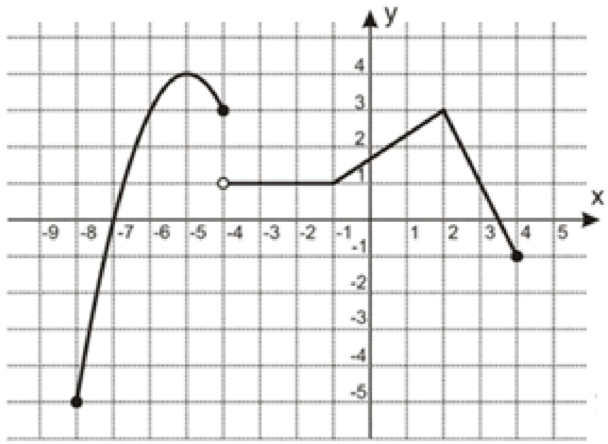
05.**Fatore cada expressão:**

a) $4x^2-25$ b) $x^2-2x+1$

c) $x^3y-4xy$ d) $x^3-3x^2-4x+12$

e) $x^2+3x-10$

06.**O gráfico de uma função é dado abaixo:**




a) Diga o valor de $f(2)$.

b) Estime o valor de $f(-4)$.

c) Para quais valores de $x$ vale que $f(x)=3$?

d) Encontre as raízes desta função.

e) Diga qual é o domínio e a imagem de $f$.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL - MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - FACULDADE DE MATEMÁTICA

# Atividade S1

07.**Seja** $f(x) = \begin{cases} -2x-1, & x<0 \\ x^2-1, & 0 \le x < 1 \\ 3^x, & x \ge 1 \end{cases}$

a) Calcule $f(1)$ e $f(0)$.

b) Quais são as raízes desta função?

c) Esboce o gráfico desta função.

08.**Diga se cada afirmação é verdadeira ou falsa:**

a) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$ b) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

c) $\sqrt{a^2} = a$ d) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}$

09.**Resolva cada equação (encontre apenas as soluções reais):**

a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ b) $\frac{3x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$

c) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

**Anexo C:** Primeira ficha da intervenção pedagógica

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL - MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - FACULDADE DE MATEMÁTICA

**PRIMEIRO MOMENTO**: Volte a jogar o jogo Torre de Hanói e tente encontrar a quantidade mínima de movimentos para se mover a torre.

| Número de Anilhas | Quantidade Mínima de Movimentos |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

**REGISTRO:** Qual foi a estratégia que seu grupo utilizou para obter a quantidade mínima de movimentos para uma, duas, três, quatro e cinco anilhas?

**Anexo D:** Segunda ficha da intervenção pedagógica

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL - MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - FACULDADE DE MATEMÁTICA

**SEGUNDO MOMENTO**: Sabendo a quantidade mínima de movimentos para se mover uma torre de uma a cinco anilhas, encontre o número mínimo de movimentos para mover uma torre de seis a dez anilhas.

| Número de Anilhas | Quantidade Mínima de Movimentos |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 7 |
| 4 | 15 |
| 5 | 31 |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

**REGISTRO:** Qual foi a estratégia que seu grupo utilizou para obter a quantidade mínima de movimentos para seis, sete, oito, nove e dez anilhas?