



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL



TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EM
AQUÍFEROS UTILIZANDO MODELO HÍBRIDO EM DUAS
MALHAS**

JOÃO PEDRO BORSATO MENDONÇA

UBERLÂNDIA/MG, 11 DE DEZEMBRO 2019

JOÃO PEDRO BORSATO MENDONÇA

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EM
AQUÍFEROS UTILIZANDO MODELO HÍBRIDO EM DUAS
MALHAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Civil (FECIV), da Universidade Federal de Uberlândia como requisito exigido para a conclusão do curso de Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Alamy Filho

UBERLÂNDIA/MG, 11 DE DEZEMBRO DE 2019

FOLHA DE ASSINATURAS

JOÃO PEDRO BORSATO MENDONÇA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

SEGUNDO SEMESTRE DE 2019

Através do termo de compromisso firmado entre mim, João Pedro Borsato Mendonça – aluno do Curso de Engenharia Civil, da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, fica firmada a realização da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Alamy Filho

Uberlândia, 11 de dezembro de 2019.

Assinaturas:

João Pedro Borsato Mendonça – Aluno

Dr. José Eduardo Alamy Filho – Professor Orientador

JOÃO PEDRO BORSATO MENDONÇA

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EM
AQUÍFEROS UTILIZANDO MODELO HÍBRIDO EM DUAS
MALHAS**

Trabalho de Conclusão de Curso, requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil, da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia.

Aprovado em: ____ / ____ / ____

Banca Examinadora – Assinaturas

Prof. Dr. José Eduardo Alamy Filho
(Orientador)

Profa. Dra. Alice Rosa da Silva
(Examinadora – UFU)

Profa. Dra. Maria Lyda Bolanos Rojas
(Examinadora – UFU)

Aluno: João Pedro Borsato Mendonça
(Autor)

Em memória de João Henrique Borges Bonfim

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo amor e suporte incondicional nesta jornada.

Aos meus amigos da graduação, pelos desafios vencidos de mãos dadas.

Ao meu professor orientador e aos professores da banca, pela disposição em contribuir com este trabalho.

A todos aqueles que se sacrificam pela verdade e pelo conhecimento humano, tão vasto e, sempre, tão incompleto.

RESUMO

O estudo do escoamento de água em aquíferos parte da modelagem matemática do sistema. As abordagens para tal se utilizam de soluções analíticas ou numéricas para aproximar as equações que governam o escoamento subterrâneo. Métodos numéricos discretizam o tempo e o espaço em elementos sobre os quais são aplicadas as soluções, lidando bem com sistemas heterogêneos e anisotrópicos, mas dependem da subjetividade com que os elementos são descritos. Métodos analíticos independem da discretização do domínio, apresentando soluções estáveis para qualquer ponto no espaço, porém não são adequados para descrever sistemas heterogêneos. O objetivo deste trabalho foi acoplar soluções numéricas e analíticas a fim de criar um método híbrido para descrever as condições de escoamento em aquíferos. Os resultados, quando aplicados em sistemas aquíferos hipotéticos, revelam cones de depressão mais detalhados na vizinhança dos poços, com maior tendência de mergulho das cargas hidráulicas nesse setor. O modelo proposto tem habilidade de lidar com aquíferos heterogêneos, como ocorre em sistemas regionais, permitindo malhas de discretização mais grosseiras, sem perder detalhamento dos rebaixamentos próximos aos poços.

Palavras-chave: aquíferos, modelagem computacional, hidráulica de poços

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
1.1	Objetivo	9
2	Revisão bibliográfica.....	10
2.1	AQUÍFERO, AQUITARDE E AQUICLUDE.....	10
2.2	CLASSIFICAÇÃO DOS AQUÍFEROS	10
2.3	PROPRIEDADES HIDROGEOLÓGICAS DOS AQUÍFEROS.....	11
2.3.1	Condutividade hidráulica (k)	11
2.3.2	Transmissividade (T)	12
2.3.3	Anisotropia e heterogeneidade	12
2.3.4	Armazenamento Específico (Ss)	13
2.3.5	Coeficiente de armazenamento (S)	13
2.3.6	Vazão específica (Sy).....	14
2.4	CONCEITOS BÁSICOS DE HIDRÁULICA DE POÇOS.....	14
2.4.1	Cone de depressão	14
2.4.2	Rebaixamento (s)	15
2.4.3	Poços parcial e totalmente penetrantes.....	15
2.5	Lei de Darcy	16
2.6	Modelagem matemática de fluxo de água subterrânea.....	17
2.6.1	Equação de fluxo de água subterrânea	18
2.6.2	Modelagem numérica	19
2.6.3	Modelagem analítica.....	20
3	Materiais e métodos.....	22
3.1	Considerações preliminares	22
3.2	Acoplamento das malhas	23
3.3	Solução numérica.....	24
3.3.1	Equacionamento.....	24
3.4	Modelos de funções de poços.....	25
3.4.1	Modelo 1: aquífero confinado, isotrópico e poço totalmente penetrante.....	26
3.4.2	Modelo 2: aquífero semi-confinado, isotrópico, aquitarde superposto e poço totalmente penetrante	30
3.4.3	Modelo 3: aquífero não confinado, anisotrópico e poço totalmente penetrante.....	35
3.5	Superposição de efeitos.....	39
3.6	Algoritmo computacional	40

3.6.1	Algoritmo principal	41
4	Simulações	50
4.1	AQUÍFERO CONFINADO	51
4.1.1	Resultados da simulação.....	51
4.2	AQUÍFERO SEMI-CONFINADO	55
4.2.1	Resultados da simulação.....	56
4.3	AQUÍFERO NÃO CONFINADO	59
4.3.1	Resultados da simulação.....	59
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	63
6	CONCLUSÃO	64
	Referências	65
	APÊNDICE A – Algoritmo da função de Theis	66
	APÊNDICE B – Algoritmo da função de Hantush-Jacob	67
	APÊNDICE C – Algoritmo da função de Neuman	68
	APÊNDICE D – Algoritmo Principal.....	69
	APÊNDICE E – Algoritmos Auxiliares	23

1 INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é utilizar-se de soluções analíticas e numéricas, devidamente acopladas por um sistema de duas malhas, a fim de propor um modelo híbrido para o escoamento subterrâneo em aquíferos. Através do modelo, prevê-se o estudo de condições de escoamento – campos de pressão e de velocidade – em diferentes pontos de um sistema aquífero submetido ao bombeamento de poços.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 AQUÍFERO, AQUITARDE E AQUICLUDE

Um aquífero é uma formação geológica cuja permeabilidade e porosidade interconectada são suficientes para armazenar e distribuir quantidades economicamente viáveis de água, o que justifica sua exploração através de poços de extração (CLEARY, 1989).

Aquitardes são formações geológicas que, apesar de armazenar água, apresentam baixa permeabilidade e são incapazes de suprir poços de extração, apesar de transmitirem água através de grandes áreas e longos períodos de tempo. Podem ser descritos como camadas confinantes drenantes no estudo de aquíferos (CLEARY, 1989).

Um aquíclode é um material geológico que transmite fluxo de água em uma ordem de grandeza muito inferior à de aquíferos, podendo ser considerado como uma formação praticamente impermeável (CLEARY, 1989).

2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS AQUÍFEROS

Existem três tipos principais de aquíferos: confinado, não confinado e semi-confinado. Um aquífero é considerado confinado quando é limitado acima e abaixo por aquíclodes, não havendo contato direto entre seu material e a atmosfera. A pressão da água em um aquífero confinado é geralmente maior que a pressão atmosférica e sua superfície piezométrica situa-se acima do topo do aquífero (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

Um aquífero não confinado, também chamado freático ou livre, é limitado inferiormente por um aquíclode e não possui camada confinante superior. O topo de um aquífero não confinado equivale à superfície freática do solo e é livre para se mover verticalmente. A superfície freática é o limite superior da zona de saturação do solo, e está em contato direto com a pressão do ar atmosférico. Assim, a pressão da água no topo de um aquífero não confinado é igual à pressão atmosférica e sua superfície piezométrica equivale à superfície freática (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

Um aquífero é considerado semi-confinado quando apresenta aquitardes, ou um aquitarde e um aquioclude, como limites superior e inferior. Neste caso, a superfície piezométrica do aquífero é livre para se mover através dos aquitardes (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

2.3 PROPRIEDADES HIDROGEOLÓGICAS DOS AQUÍFEROS

As propriedades descritas neste item são parâmetros que indicam as capacidades de fluxo e armazenamento de aquíferos e camadas confinantes. Através dessas propriedades e de equações que descrevem o escoamento subterrâneo, é possível obter aproximações das superfícies piezométricas, velocidades e direções de fluxo em aquíferos, que por sua vez são parâmetros importantes em estudos e avaliações de recursos de água subterrânea (CLEARY, 1989).

2.3.1 Condutividade hidráulica (k)

A constante que mede a habilidade de um meio poroso de conduzir água quando submetido ao gradiente de uma superfície piezométrica é definida como condutividade hidráulica (CLEARY, 1989). Quanto maior a condutividade hidráulica de um aquífero, maior a facilidade de escoamento da água através do mesmo.

A condutividade hidráulica é calculada como o volume de água que escoou através da seção unitária de um meio poroso, transversal à direção do escoamento, por unidade de tempo e sob um gradiente hidráulico unitário. É representada em unidades de comprimento sobre tempo (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000). Alguns valores típicos de determinados materiais são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1- Valores de k para diferentes meios geológicos

Classificação geológica	k (m/d)
Materiais não consolidados	
Argila	$10^{-8} - 10^{-2}$
Areia fina	1 - 5
Areia média	$5 - 2 \times 10^1$
Areia grossa	$2 \times 10^1 - 10^2$
Cascalho	$10^2 - 10^3$
Misturas de areia e cascalho	$5 - 10^2$
Misturas de argila, areia e cascalho	$10^{-3} - 10^{-1}$
Rochas	
Arenito	$10^{-3} - 1$
Argila xistosa	10^{-7}
Rocha fraturada ou desgastada	$0 - 3 \times 10^2$
Rocha vulcânica	$0 - 10^3$

Fonte: Bouwer (1978, apud Alamy Filho, 2002)

2.3.2 Transmissividade (T)

A transmissividade de um aquífero é definida como a vazão através de uma seção de largura unitária e altura igual à espessura saturada do aquífero (b), sob um gradiente hidráulico unitário (CLEARY, 1989). É calculada como o produto da condutividade hidráulica pela espessura saturada do meio.

2.3.3 Anisotropia e heterogeneidade

As equações na hidráulica de poços, em sua maioria, assumem a homogeneidade e isotropia dos meios geológicos. Ou seja, considera-se que a condutividade hidráulica é constante através de toda a formação geológica e em todas as direções (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

O que geralmente ocorre é que as partículas de um aquífero ou aquitarde, por raramente serem esféricas, se depositam sobre suas faces planas quando submersas. Nesta configuração, uma formação geológica apresentará uma condutividade hidráulica consideravelmente maior na direção horizontal do que na direção vertical, condição que caracteriza o fenômeno da anisotropia (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

Formações geológicas apresentam características físicas significativamente variáveis, tanto horizontal quanto verticalmente, e por isso raramente são homogêneas. A heterogeneidade ocorre devido à estratificação de camadas com litologias diferentes, ao estreitamento da espessura de camadas, e à variação nas dimensões e formas de sedimentação das partículas (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

2.3.4 Armazenamento Específico (S_s)

O armazenamento específico de um aquífero confinado é definido como o volume de água que um volume unitário de seu meio libera ou adiciona ao armazenamento devido a um gradiente unitário na carga hidráulica.

Esta variação de volume se origina de dois mecanismos: o grau de compactação do aquífero sob a variação da tensão efetiva e a expansividade da água devido à diferença de pressão. Portanto, o armazenamento específico varia conforme a compressibilidade do meio geológico e da água (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

O valor do armazenamento específico pode variar de $10^{-3}/m$, para argilas plásticas, a $10^{-7}/m$ em rochas cristalinas (CLEARY, 1989).

2.3.5 Coeficiente de armazenamento (S)

O coeficiente de armazenamento é calculado como o volume de água liberado ou armazenado por unidade de área superficial de um aquífero confinado quando submetido à um gradiente unitário de carga hidráulica.

O coeficiente de armazenamento, sendo uma medida de volume de água por volume de aquífero, é adimensional e é obtido através da seguinte relação com o armazenamento específico e a espessura saturada do aquífero:

$$S = S_s \cdot b \quad (1)$$

O valor do coeficiente de armazenamento em aquíferos confinados varia entre 5×10^{-5} a 5×10^{-3} (KRUSEMAN e DE RIDDER, 2000).

2.3.6 Vazão específica (S_y)

O volume de água que um aquífero não confinado libera de seu armazenamento por uma unidade de área superficial, quando submetido a uma queda unitária da superfície freática, é denominado de vazão específica

A vazão específica, também chamada de porosidade efetiva, quantifica a drenagem dos poros do meio geológico. É uma medida adimensional e pode variar de 0,01 a 0,30, o que representa um armazenamento muito maior que o de aquíferos confinados. Ao contrário do que ocorre em aquíferos confinados, o armazenamento depende principalmente da porosidade interconectada do aquífero, sendo as propriedades elásticas da matriz geológica e da água geralmente desprezíveis (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000).

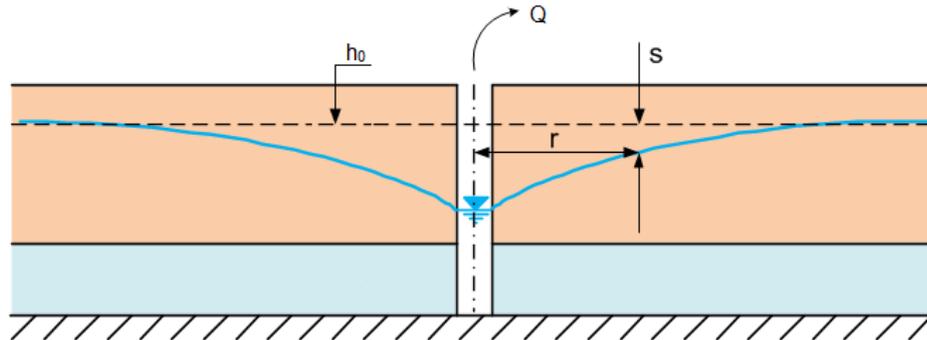
2.4 CONCEITOS BÁSICOS DE HIDRÁULICA DE POÇOS

2.4.1 Cone de depressão

A superfície piezométrica antes do início do bombeamento em um poço que perfura um aquífero se encontra em um nível estático (h_0), que equivale ao nível da água dentro do poço. Após se iniciar a descarga, o nível da água no poço diminui progressivamente até que seja atingido o estado estacionário, em que a recarga do aquífero se iguala a descarga causada pelo bombeamento.

A superfície formada por esse decaimento da altura da superfície piezométrica é denominada de cone de depressão. Em um caso ideal, desconsiderando-se as perdas de carga localizadas na entrada do filtro e no próprio poço, o vértice do cone terminaria no nível de água no poço. A Figura 1 ilustra cone de depressão em um aquífero, onde s é o rebaixamento em um ponto a uma distância radial r do poço.

Figura 1 – Cone de depressão em um aquífero



Fonte: Autor (2019)

Em aquíferos confinados, o cone de depressão é uma superfície imaginária, ao contrário do que ocorre em aquíferos livres, em que o cone de depressão é o contorno superior físico do aquífero (CLEARY, 1989).

2.4.2 Rebaixamento (s)

A medida denominada de rebaixamento indica quanto a carga ou o potencial da água está fora de equilíbrio em um ponto do cone de depressão (CLEARY, 1989). O rebaixamento é a diferença de carga entre um ponto da superfície do cone de depressão (h) em relação ao nível piezométrico estático no local de mesmo raio.

$$s = h_0 - h \quad (2)$$

Sob condições de estado não estacionário, o rebaixamento é diretamente proporcional à taxa de bombeamento e inversamente proporcional à transmissividade e coeficiente de armazenamento.

2.4.3 Poços parcial e totalmente penetrantes

Segundo Cleary (1989), o conceito de penetração de poços é relativo ao comprimento do filtro em relação à espessura saturada do aquífero. Um poço cujo comprimento do filtro é igual à espessura saturada do aquífero é chamado de poço totalmente penetrante. Caso o comprimento do filtro seja inferior à espessura do

aquífero, independentemente da posição vertical que ocupa, o poço é considerado parcialmente penetrante.

Em poços totalmente penetrantes, o bombeamento gera um fluxo de água horizontal em direção ao poço. No caso de poços parcialmente penetrantes, existe fluxo vertical de água em direção ao filtro nas regiões mais próximas do poço. Poços totalmente penetrantes apresentam menores rebaixamentos, dada uma mesma taxa de bombeamento, do que poços parcialmente penetrantes, sendo assim mais eficientes (CLEARY, 1989).

2.5 LEI DE DARCY

A taxa de fluxo em águas subterrâneas pode ser obtida através da relação fundamental de fluxo em meios porosos, conhecida como lei de Darcy.

Segundo a lei de Darcy, a taxa volumétrica de um fluido através de um meio poroso é diretamente proporcional ao potencial perdido através desse meio e inversamente proporcional ao comprimento da trajetória (CLEARY, 1989). Esta relação é expressa pela seguinte equação:

$$v_d = q = \frac{Q}{A} = -k \cdot \frac{dh}{dl} \quad (3)$$

Na equação 3, dado um fluxo entre dois pontos em um meio poroso:

- v_d é a velocidade de Darcy [L/T];
- q é a descarga específica [$L^3/T/L^2$];
- Q é a taxa volumétrica de fluxo [L^3/T];
- A é a área da seção transversal perpendicular à direção do fluxo [L^2];
- k é a condutividade hidráulica do meio [L/T] e
- dh é a perda de carga hidráulica [L] através da distância dl [L] entre os pontos, sendo a razão dh/dl chamada de gradiente hidráulico ou perda de carga unitária.

A velocidade de Darcy não corresponde à velocidade real do fluxo, uma vez que é um conceito macroscópico que considera o escoamento através do meio como um todo, independentemente da configuração de suas partículas sólidas e de sua porosidade. Uma abordagem microscópica leva em conta a movimentação das

partículas do fluido pelos poros do meio (KRUSEMAN; DE RIDDER, 2000). Assim, a velocidade real de escoamento (v_r) relaciona-se com a velocidade de Darcy e à porosidade efetiva do meio (n_{ef}) da seguinte forma:

$$v_r = \frac{v_d}{n_{ef}} \quad (4)$$

De acordo com Kruseman e De Ridder (2000), a relação entre a velocidade e a perda de carga deixa de ser linear, gradualmente, conforme a turbulência do escoamento aumenta. Assim, a lei de Darcy é válida para fluxos laminares em que o número de Reynolds (Nr) é menor que 1, podendo ser usada sem erros grosseiros até $Nr = 10$. Escoamentos subterrâneos são predominantemente laminares, o que garante a aplicabilidade da lei de Darcy.

2.6 MODELAGEM MATEMÁTICA DE FLUXO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA

Segundo Cleary (1989), o estudo de recursos de água subterrânea depende diretamente da capacidade de se quantificar fenômenos de fluxo e de transporte em sistemas aquíferos. A maneira mais precisa de se obter esses dados é através de medidas de campo, o que na maioria dos casos é inviável, seja pelo custo elevado ou por não ser aplicável em casos de projetos ainda não executados. Assim, frequentemente representa-se o fluxo subterrâneo de água por meio de modelos matemáticos.

Os primeiros modelos, surgidos nos anos cinquenta e sessenta, consistiam de modelos físicos de caixas de areia ou placas de vidro, e a trajetória da água era descrita por traçadores de fluxo. Em seguida, foram desenvolvidos modelos elétricos analógicos baseados na analogia entre o fluxo de eletricidade, a lei de Ohm, e o fluxo de água em meios porosos, a lei de Darcy. Em meados da década de setenta, com o avanço da informática, a modelagem computacional se popularizou e é atualmente predominante.

De acordo com Cleary (1989), modelos matemáticos de água subterrânea podem ser aplicados para diversas necessidades, como por exemplo:

- investigação de alternativas para a localização de poços de abastecimento de água;

- estudos do transporte de contaminantes e de descontaminação em águas subterrâneas;
- compreensão e previsão de fenômenos de fluxo e de transporte em sistemas de aquíferos heterogêneos, anisotrópicos e estratificados;
- delimitação de áreas de proteção da zona de contribuição de poços sob condições de aquíferos heterogêneos e anisotrópicos;
- otimização do gerenciamento de recursos hídricos subterrâneos.

Por consistir de uma representação artificial de uma realidade física complexa, resultados obtidos por modelos são questionáveis e devem ser analisados comparativamente entre diversas técnicas e em conjunto com experiência e dados de campo.

2.6.1 Equação de fluxo de água subterrânea

A equação diferencial parcial que governa a distribuição bidimensional da carga hidráulica em aquíferos, chamada de equação de Boussinesq, é escrita como:

$$S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + g_1 + g_2 + g_3 \quad (5)$$

Na equação 5, S é o coeficiente de armazenamento do aquífero, h é a carga hidráulica, tomada como a cota altimétrica da superfície piezométrica, b é a espessura do aquífero e $k = (k_x, k_y)$ é o tensor de condutividade hidráulica do meio. As direções x e y representam o plano estabelecido pelas direções Oeste-Leste e Sul-Norte, respectivamente. A recarga direta é representada por g_1 [LT^{-1}], g_2 representa a recarga indireta [LT^{-1}] e g_3 a retirada através de poços [LT^{-1}].

As abordagens para a solução da equação 5 necessitam dos parâmetros hidrogeológicos como dados de entrada e, dadas as condições iniciais de carga e de contorno, produz o valor da variável dependente, carga hidráulica, como função das variáveis independentes de posição, x e y , e do tempo.

A equação 5 não apresenta solução analítica para casos práticos onde parâmetros como a condutividade hidráulica (k) são variáveis no espaço. Portanto, em casos onde as condições geológicas são heterogêneas, é necessária a utilização de

modelos numéricos para descrever o escoamento e se obter estimativas de carga hidráulica e do rebaixamento (s) da superfície piezométrica.

A distribuição de cargas em um sistema aquífero produzida pela solução da equação 5, em conjunto com as distribuições de condutividade hidráulica e porosidade efetiva e através da lei de Darcy, pode ser usada para se conhecer o campo de velocidade do escoamento subterrâneo (CLEARY, 1989).

2.6.2 Modelagem numérica

De acordo com Cleary (1989), técnicas numéricas têm sido usadas desde a década de 60 na modelagem matemática de águas subterrâneas, representando hoje em dia a maioria dos modelos utilizados para este fim.

Na solução de métodos numéricos, a equação diferencial parcial governante é discretizada nas variáveis de espaço e o tempo é dividido em pequenos incrementos. As soluções numéricas mais difundidas são o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

No MDF a área de estudo é discretizada em uma malha de elementos de geometria simples, como quadrados e retângulos em sistemas bidimensionais e paralelepípedos retangulares em sistemas tridimensionais. Sobre esses elementos são aplicadas equações de diferenças finitas, obtendo-se a carga hidráulica nos nós da malha ou no centro dos blocos.

O MEF, considerado mais abstrato, é mais flexível quanto à geometria das malhas. A região é dividida em elementos geométricos, como triângulos ou quadriláteros em modelos bidimensionais e tetraedros ou paralelepípedos em problemas tridimensionais. Assim, valores de carga hidráulica podem ser obtidos para todo o domínio. Em contrapartida, exige maior esforço computacional.

As posições dos poços no MDF raramente coincidem com as dos nós da malha, sendo necessário assumir que os mesmos estão no nó mais próximo ou distribuir a vazão proporcionalmente nos nós da célula que o contém. No MEF, a posição de um poço pode ser sua localização física.

Ambos os modelos podem tratar geologias tanto heterogêneas quanto anisotrópicas. Porém, O MEF permite uma representação mais precisa dos contornos geológicos, heterogeneidade e anisotropia do meio. Em condições anisotrópicas, o MDF só pode ser usado quando as direções principais da condutividade hidráulica

são paralelas aos eixos principais da malha. Caso existam variadas áreas anisotrópicas com direções principais diferentes, deve-se usar o MEF.

No caso do MDF, em que as soluções são definidas em função dos nós dos elementos, a superfície piezométrica e linhas de fluxo só são obtidas em outros pontos através de interpolação. Além disso, a fim de minimizar descontinuidades e imprecisões, deve-se trabalhar com malhas numéricas com espaçamentos menores, o que pode ser oneroso em termos de processamento computacional. Uma malha mais refinada é necessária quando existem grandes gradientes na superfície piezométrica, como no caso de cones de depressão muito íngremes nas regiões próximas ao poço.

Apesar de não haver a necessidade de tantas considerações simplificadoras em modelos numéricos, os resultados podem ser comprometidos devido à subjetividade com que são determinadas os elementos discretos e incrementos temporais.

2.6.3 Modelagem analítica

Modelos analíticos usam técnicas de cálculo avançado, como métodos de transformações de integrais, e resultam em soluções exatas em termos, por exemplo, de senos, cossenos, exponenciais e funções de erro. Geralmente, a solução depende da aproximação numérica de integrais que não podem ser resolvidas analiticamente. (CLEARY, 1989)

Soluções analíticas podem ser aplicadas em condições de anisotropia. Seus resultados são quase sempre estáveis, não apresentando dispersão numérica como pode acontecer em modelos numéricos. Por não exigirem a discretização do domínio, como em técnicas numéricas, são viáveis para avaliar diretamente a carga em qualquer local e tempo, sejam eles próximos ou distantes dos poços.

Como desvantagem, a abordagem analítica não suporta meios de geologia heterogênea. Em muitas das soluções existentes, por exemplo, os aquíferos devem ser considerados homogêneos, utilizando-se a média das propriedades hidráulicas na simulação de aquíferos heterogêneos. São exigidas dimensões uniformes para as camadas aquíferas e a utilização de formas geométricas elementares para descrever contornos e descontinuidades (ALAMY FILHO, 2002).

A primeira solução analítica para poços bombeados em estado não estacionário foi publicada por Theis (1935), introduzindo os fatores tempo e armazenabilidade do aquífero. A equação foi derivada como uma analogia ao transporte de calor. Através dessa solução, pode-se calcular o rebaixamento em função do tempo e da posição espacial relativa ao poço. É utilizada na modelagem de aquíferos confinados e depende da aproximação numérica de uma integral exponencial conhecida como função de poço de Theis. Hantush e Jacob (1955) desenvolveram uma solução analítica para aquíferos semi-confinados que considera as condutividades hidráulicas das camadas confinantes e depende da resolução de uma integral chamada de função drenante de poço. Um modelo mais geral para aquíferos semi-confinados foi apresentado por Hantush (1960), que introduz a propriedade de armazenamento dos aquíferos na e considera o escoamento como praticamente horizontal em camadas aquíferas e vertical em aquíferos. Soluções analíticas para aquíferos livres são mais complexas, uma vez que o movimento vertical da superfície freática é descrito matematicamente como um problema de contorno móvel não linear em termos de carga hidráulica, e não possui soluções exatas. Uma solução mais completa foi formulada por Neuman (1975), que linearizou as equações diferenciais governantes do escoamento para obter uma solução de primeira ordem para o rebaixamento em função do tempo. Neuman considerou o aquífero como um sistema compressível de onde a água é liberada por compactação do meio, expansão da água e drenagem gravitacional na superfície freática. Esta solução permite a superposição do efeito de diversos poços e é válida para quando o rebaixamento é pequeno em relação à espessura do aquífero (CLEARY, 1989).

Neste trabalho são utilizados os modelos analíticos de Theis, Hantush-Jacob e Neuman. Suas implementações são descritas no capítulo 4.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Os códigos responsáveis pela execução dos métodos numéricos e analíticos utilizados, e também pelo acoplamento desses modelos no modelo híbrido proposto, foram desenvolvidos no Visual Basic for Applications 7.1. O VBA 7.1 é uma incorporação da linguagem Visual Basic aplicada a objetos das aplicações do Microsoft Office 2016, que nesse caso foi o Microsoft Excel, junto de um ambiente de desenvolvimento integrado.

Os algoritmos desenvolvidos foram divididos em módulos. O módulo principal é responsável por:

- Ler os dados de entrada do aquífero e dos poços;
- Construir a malha de discretização numérica e as malhas de soluções analíticas;
- Acoplar a malha numérica e as malhas analíticas, identificando a abordagem correta para cada nó;
- Identificar a função de poço a ser usada de acordo com o tipo de aquífero;
- Calcular os campos de carga e de velocidade ao longo do horizonte de simulação;
- Imprimir os dados de saída.

Os módulos secundários respondem pela solução das funções de poços e de outras funções matemáticas utilizadas com recorrência no módulo principal, como fatoriais, cálculo de distâncias e funções auxiliares de identificação das condições do sistema.

O software Microsoft Excel 2016 foi utilizado para armazenar tanto os dados de entrada usados pelos modelos quanto os dados de saída das simulações realizadas. As interpolações dos dados de saída, a fim de gerar gráficos de superfície e curva de nível, foram realizadas no software Surfer 16 através do método de krigagem.

Todos os modelos de aquífero usados consideram o escoamento em regime não permanente, em que os níveis piezométricos variam com o tempo. Foram utilizadas as soluções analíticas de Theis, Hantush-Jacob e Neuman nos modelos de poços confinados, semi-confinados e livres, respectivamente. Quanto ao modelo numérico, optou-se pelo Método das Diferenças Finitas aplicado aos nós da malha.

Considerou-se a superposição de efeitos dos poços sobre o rebaixamento e a possibilidade de bombeamentos intermitentes.

3.2 ACOPLAMENTO DAS MALHAS

A área do sistema aquífero foi representada em um sistema de coordenadas cartesiano bidimensional, em que as direções x e y representam o plano estabelecido pelas direções Oeste-Leste e Sul-Norte, respectivamente.

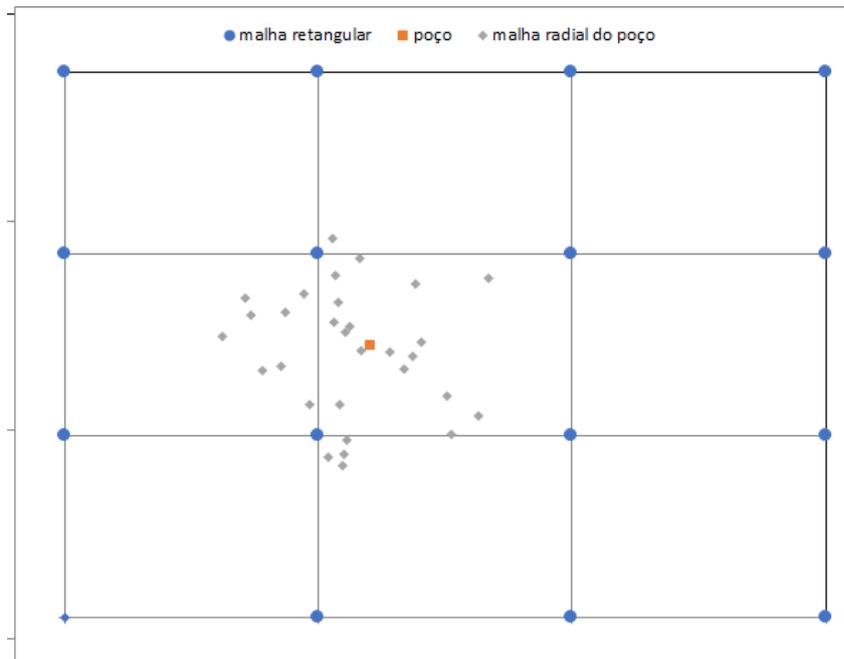
A discretização inicial da área consiste em uma malha de elementos retangulares de dimensões Δx e Δy , sendo as posições dos nós fornecidas como dados de entrada.

Em seguida, são gerados, para cada poço, nós de posições aleatórias dentro de uma área circular de raio definido, cujo centro coincide com a posição do poço. Os nós aleatórios gerados, em conjunto com os nós da malha retangular que formam a célula onde um poço está inserido, formam uma malha radial de um poço. Nos nós dessas malhas, serão aplicadas soluções analíticas para cálculo do rebaixamento e carga hidráulica.

Calculados os valores de carga nos nós das células que contém poços, os valores de carga são interpolados para os demais nós da malha retangular através do Método das Diferenças Finitas.

A Figura 2 ilustra o acoplamento entre a malha retangular numérica e as malhas radiais analíticas.

Figura 2 – Acoplamento entre malha numérica e analítica



Fonte: Autor (2019)

3.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução numérica para o cálculo de carga hidráulica utilizada neste trabalho foi o Método das Diferenças Finitas. A carga hidráulica foi calculada para cada nível de incremento temporal nos nós da malha de elementos retangulares de dimensões Δx e Δy .

3.3.1 Equacionamento

A derivada temporal da equação de Boussinesq, para um nó de posição (i, j) , pode ser aproximada pelo método de Euler explícito:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cong \frac{1}{s_{i,j}} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]_{i,j} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]_{i,j} + g_{i,j} \right) \cong \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (6)$$

Na equação 6, Δt é o incremento de tempo, n é o nível da marcha temporal e $g_{i,j}$ é a resultante entre as vazões de recarga e de extração.

As derivadas parciais de segunda ordem da equação 6 podem ser aproximadas pelo método das diferenças finitas como:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]_{i,j} \cong k_{x_{i,j}} \cdot b_{i,j} \cdot \frac{(h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n)}{\Delta x^2} = dif_{x_{i,j}} \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]_{i,j} \cong k_{y_{i,j}} \cdot b_{i,j} \cdot \frac{(h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n)}{\Delta y^2} = dif_{y_{i,j}} \quad (8)$$

Portanto, tem-se que, dado uma condição inicial de carga $h_{i,j}^n$, a carga após o incremento de tempo, $h_{i,j}^{n+1}$, pode ser calculada como:

$$h_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \cdot (dif_{x_{i,j}} + dif_{y_{i,j}} + g_{i,j}) + h_{i,j}^n \quad (9)$$

3.4 MODELOS DE FUNÇÕES DE POÇOS

Neste capítulo são descritos os modelos de funções de poços em que se baseiam as soluções analíticas para o cálculo de rebaixamentos utilizados neste trabalho.

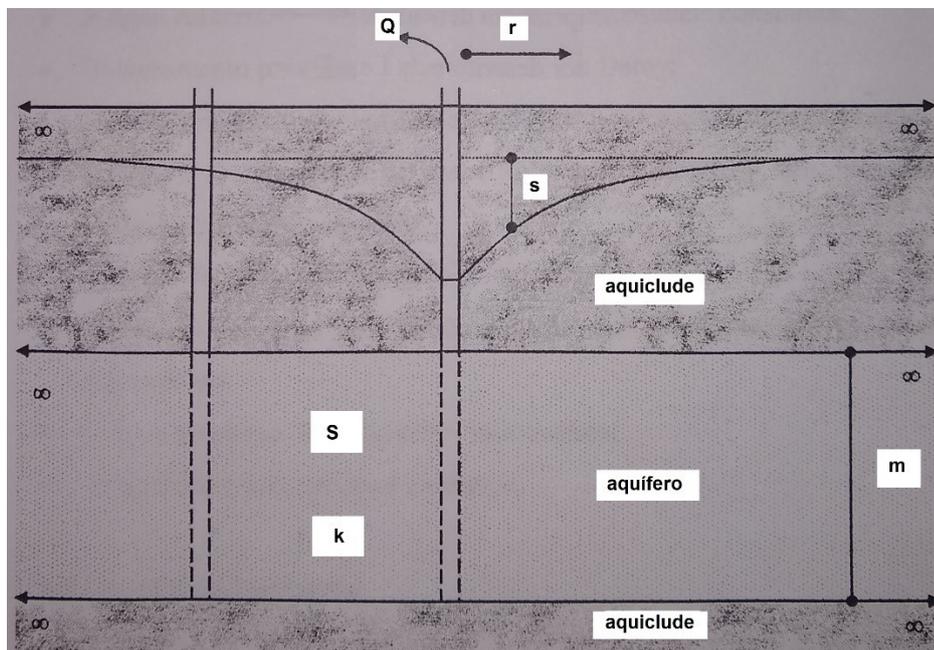
As demonstrações do equacionamento e a implementação computacional das funções de poços foram desenvolvidos por Alamy Filho (2002).

3.4.1 Modelo 1: aquífero confinado, isotrópico e poço totalmente penetrante

3.4.1.1 Modelo conceitual

O modelo utilizado para o caso de aquíferos confinados é retratado na Figura 3.

Figura 3 – Modelo conceitual de aquífero confinado



Fonte: Alamy Filho (2002)

Na Figura 3, tem-se:

- k = condutividade hidráulica do aquífero [$L T^{-1}$];
- m = espessura saturada do aquífero;
- Q = vazão de bombeamento [$L^3 T^{-1}$];
- r = distância radial entre um ponto no cone de depressão e o poço [L];
- s = rebaixamento da superfície piezométrica pelo bombeamento [L];
- S = armazenamento do aquífero [adimensional].

Neste modelo, as seguintes considerações foram feitas:

- Aquífero contornado acima e abaixo por aquícludes;

- Camada aquífera e camadas confinantes horizontais de comprimento infinito na direção radial ao poço;
- Superfície piezométrica inicial horizontal e de comprimento infinito na direção radial ao poço;
- Aquífero homogêneo e isotrópico, utilizando-se a média da condutividade hidráulica em caso de anisotropia;
- Densidade e viscosidade da água são constantes;
- Escoamento em meios porosos descrito pela lei de Darcy;
- Fluxo é horizontal e converge para o poço na direção radial;
- O poço é totalmente penetrante;
- A vazão do poço é constante;
- As perdas de carga localizadas no filtro e na entrada da bomba são desprezadas;
- O diâmetro do poço bombeado é infinitesimal;
- O aquífero se comporta como um meio compressível e elástico.

3.4.1.2 Equacionamento

A partir da combinação equação 4 da lei de Darcy e o princípio da conservação de massa em um sistema de coordenadas radial, obtém-se a equação governante do escoamento nessa situação, que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial s}{\partial r} = \left(\frac{S}{T}\right) \frac{\partial s}{\partial t} \quad (10)$$

onde:

- t = tempo de bombeamento [T];
- T = transmissividade do aquífero [L^2T^{-1}], definida como:

$$T = k \cdot m. \quad (11)$$

A equação 6 considera como condições de contorno:

- Rebaixamentos nulos antes do início do bombeamento em qualquer ponto na vizinhança do poço;

- Rebaixamentos nulos em distâncias infinitas do poço, após o início do bombeamento;
- Escoamento constante e uniforme em direção ao poço na espessura saturada do aquífero.

A solução de Theis para a equação 6 define o rebaixamento após um intervalo de tempo em um ponto a uma distância radial do poço bombeado como:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \cdot W(u) \quad (12)$$

onde:

$$\bullet W(u) = \int_u^\infty \left(\frac{e^{-u}}{u} \right) du; \quad (13)$$

$$\bullet u = \frac{r^2 S}{4Tt}. \quad (14)$$

Na equação 13, $W(u)$ é a integral exponencial conhecida como função de poço de Theis e representa o rebaixamento adimensional em função do tempo adimensional, u .

Segundo Stegun e Zucker (1974), conforme citado por Alamy Filho (2002), a série mais difundida para a aproximação dos valores da equação 13, quando $u \leq 1$, é definida como:

$$W(u) = -0,577216 - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \dots \quad (15)$$

Quando $u \geq 1$, a seguinte série pode ser usada:

$$W(u) = [(u^4 + a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4)] / (u^4 + b_1 u^3 + b_2 u^2 + b_3 u + b_4) / [u \cdot e^u] \quad (16)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= 8,5733287601; & b_1 &= 9,5733223454; \\ a_2 &= 18,0590169730; & b_2 &= 25,6329562486; \\ a_3 &= 8,6347608925; & b_3 &= 21,0996530827; \\ a_4 &= 0,2677737343; & b_4 &= 3,9584969228. \end{aligned}$$

A função de Theis também faz parte da solução dos modelos de Hantush-Jacob e Neuman, descritos nos próximos itens.

3.4.1.3 Algoritmo para cálculo da função de poço

O código deste algoritmo se encontra no Apêndice A.

- Início:
 - Dados de entrada:
 - Aquífero: k , m , S
 - Poço: r
 - Tempo: t
 - Cálculo de T : equação 11;
 - Cálculo de u : equação 14;
 - Cálculo de $W(u)$:
 - Se $u \leq 1$:
 - Equação 15
 - Senão:
 - Equação 16
- Fim.

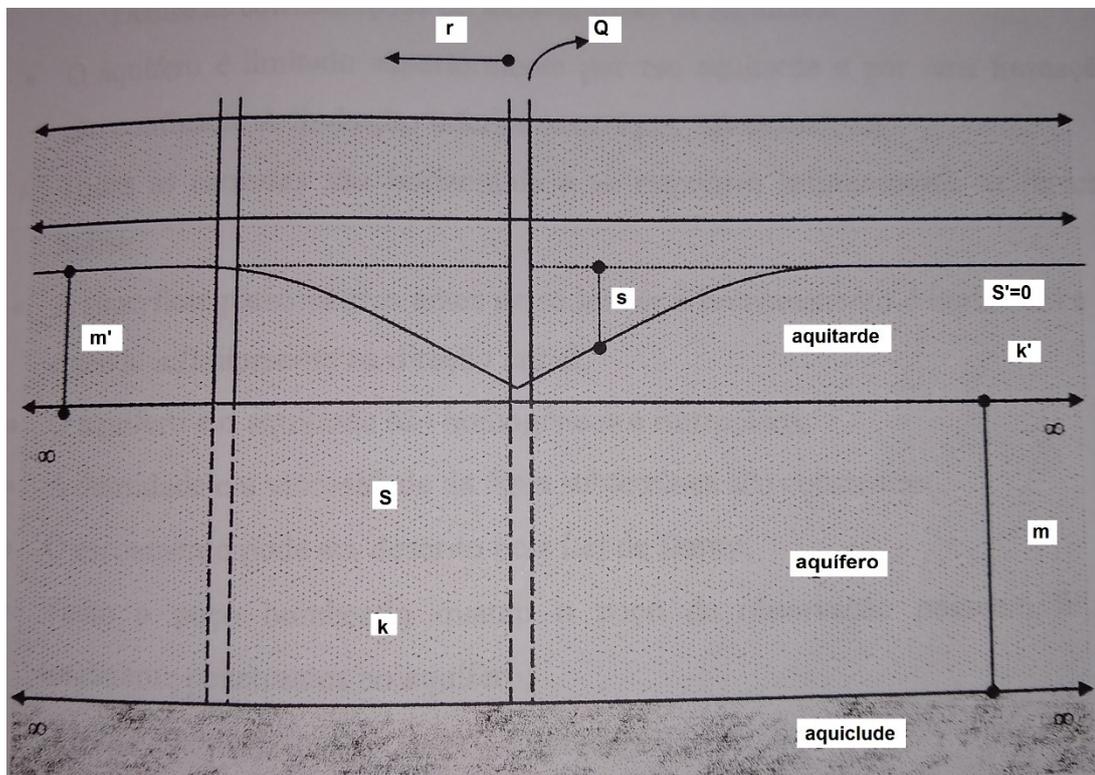
3.4.2 Modelo 2: aquífero semi-confinado, isotrópico, aquítarde superposto e poço totalmente penetrante

3.4.2.1 Modelo conceitual

Neste modelo, além da contribuição principal do aquífero na vazão retirada pelo poço, existe uma contribuição vertical do aquítarde superposto.

O modelo utilizado para o caso de aquíferos semi-confinados é retratado na Figura 4.

Figura 4 – Modelo conceitual de aquífero semi-confinado



Fonte: Alamy Filho (2002)

Na Figura 4, tem-se:

- k = condutividade hidráulica do aquífero [LT^{-1}];
- k' = condutividade hidráulica vertical do aquítarde [LT^{-1}];
- m = espessura saturada do aquífero [L];
- m' = espessura saturada do aquítarde;
- Q = vazão de bombeamento [L^3T^{-1}];

- r = distância radial entre um ponto no cone de depressão e o poço [L];
- s = rebaixamento da superfície piezométrica pelo bombeamento [L];
- S = armazenamento do aquífero [adimensional];
- S' = armazenamento do aquítarde [adimensional].

As seguintes considerações são feitas neste modelo:

- Aquífero é superposto por um aquítarde e uma formação não confinada, e é limitado inferiormente por um aquíclude;
- Camada aquífera e confinantes horizontais de comprimento infinito na direção radial ao poço;
- Superfície piezométrica inicial horizontal e de comprimento infinito na direção radial ao poço;
- Aquífero e aquítarde homogêneos e isotrópicos, utilizando-se a média da condutividade hidráulica em caso de anisotropia;
- Densidade e viscosidade da água são constantes;
- Escoamento em meios porosos descrito pela lei de Darcy;
- Fluxo é horizontal e converge para o poço na direção radial na camada aquífera. No aquítarde o fluxo é vertical;
- O poço é totalmente penetrante;
- A vazão do poço é constante;
- As perdas de carga localizadas no filtro e na entrada da bomba são desprezadas;
- O diâmetro do poço bombeado é infinitesimal;
- O aquífero se comporta como um meio compressível e elástico. O aquítarde é incompressível, não liberando água de seu armazenamento durante o bombeamento.

Quando o escoamento em um aquítarde de condutividade k' passa para uma camada aquífera de condutividade k , ocorre uma refração nas linhas de fluxo, representada pela relação:

$$\frac{\tan(\theta')}{\tan(\theta)} = \frac{k'}{k} \quad (17)$$

Na equação 17, θ e θ' são, respectivamente, os ângulos que as linhas de fluxo fazem com a normal à interface no aquífero e no aquítarde.

Segundo Hantush (1964), citado por Alamy Filho (2002), quando a condutividade k' é muito inferior à k , de modo que $k / k' > 500$, e desde que a componente vertical da velocidade no aquífero na interface não seja desprezível, o escoamento no aquítarde pode ser considerado vertical, desprezando-se as componentes horizontais.

3.4.2.2 Equacionamento

A equação governante do escoamento neste modelo, é derivada da combinação entre a lei de Darcy e o princípio da conservação de massa em um sistema de coordenadas radial:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{s}{B^2} = \left(\frac{S}{T}\right) \frac{\partial s}{\partial t} \quad (18)$$

onde:

- t = tempo de bombeamento [T];
- T = transmissividade do aquífero [L^2T^{-1}] (equação 7);
- $B = \sqrt{\frac{T \cdot m'}{k'}}$. (19)

A taxa de escoamento vertical da água subterrânea através do aquítarde pode ser estimada pela lei de Darcy, sendo o gradiente hidráulico correspondente à mudança de pressão dividida pela trajetória do escoamento:

$$v' = k' \cdot i = k' \cdot \frac{s}{m'} \quad (20)$$

Considerando o aquítarde como impermeável, tem-se que k' tende a zero. Com isso, a equação 19, B , tende ao infinito e equação 18 é reduzida à equação 10.

As condições de contorno são as mesmas consideradas no modelo anterior:

- Rebaixamentos nulos antes do início do bombeamento em qualquer ponto na vizinhança do poço;
- Rebaixamentos nulos em distâncias infinitas do poço, após o início do bombeamento;
- Escoamento constante e uniforme em direção ao poço na espessura saturada do aquífero.

A solução de Hantush e Jacob (1955) para a equação 18, conforme Alamy Filho (2002), define o rebaixamento após um intervalo de tempo em um ponto a uma distância radial do poço bombeado quando as seguintes condições são válidas:

$$t > 30 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{s}{T}\right) \left[1 - \left(\frac{10r}{B}\right)^2\right] \quad \text{e} \quad \frac{m}{B} < 0,1$$

A solução é definida como:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \cdot W(u, r/B) \quad (21)$$

onde:

- $W(u, r/B) = \int_u^\infty \left(\frac{1}{y}\right) \exp\left[-y - \frac{r^2}{4B^2y}\right] dy;$ (22)
- $u = \frac{r^2 S}{4Tt}.$

A equação 22 é conhecida como função de poço de Hantush-Jacob. Segundo Hunt (1983), citado por Alamy Filho (2002), os valores da função de poço são calculados pela seguinte série:

$$W(u, r/B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{n+1}(u)}{n!} \left[-\frac{r^2}{4uB^2}\right]^n \quad (23)$$

onde:

- $E_n(u) = \int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{x^n} dx$ (24)

A equação 24 pode ser aproximada através da equação de Theis (equação 13) para o termo $E_1(u)$, sendo os outros valores calculados por:

$$E_{n+1}(u) = \left(\frac{1}{n}\right) [e^{-u} - u \cdot E_n(u)] \quad (25)$$

3.4.2.3 Algoritmo para cálculo da função de poço

O código deste algoritmo se encontra no Apêndice B.

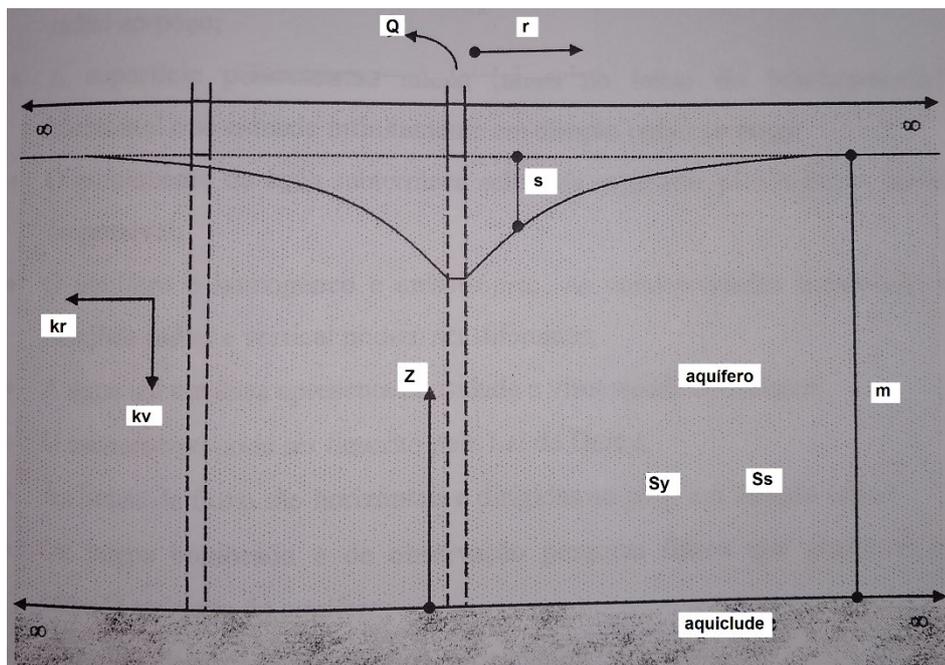
- Início:
 - Dados de entrada:
 - Aquífero: k, m, S
 - Aquitarde: m', k'
 - Poço: r
 - Tempo: t
 - Cálculo de T: equação 11;
 - Cálculo de u: equação 14;
 - Cálculo da função de poço:
 - Cálculo de $E_1(u)$ pela função de Theis: equação 13
 - Para n = 1 até n = (∞ -1):
 - Cálculo de $E_{n+1}(u)$: equação 25
- Fim

3.4.3 Modelo 3: aquífero não confinado, anisotrópico e poço totalmente penetrante

3.4.3.1 Modelo conceitual

O modelo de aquíferos livres utilizado é representado na Figura 5.

Figura 5 – Modelo conceitual de aquífero não confinado



Fonte: Alamy Filho (2002)

Na Figura 5, tem-se:

- kr = condutividade hidráulica radial do aquífero [LT^{-1}];
- kv = condutividade hidráulica vertical do aquífero [LT^{-1}];
- m = espessura saturada do aquífero;
- Q = vazão de bombeamento [L^3T^{-1}];
- r = distância radial entre um ponto no cone de depressão e o poço [L];
- s = rebaixamento da superfície piezométrica pelo bombeamento [L];
- S = armazenamento do aquífero [adimensional];
- Ss = armazenamento específico do aquífero [LT^{-1}];
- Sy = produção específica do aquífero [adimensional];
- z = coordenada vertical com origem na base do aquífero [L];

As seguintes considerações são feitas neste modelo:

- Aquífero é contornado inferiormente por um aquíclode;
- Camadas horizontais de comprimento infinito na direção radial ao poço;
- Superfície piezométrica inicial horizontal e de comprimento infinito na direção radial ao poço;
- Escoamento acima da superfície piezométrica inicial é desprezível;
- Aquífero homogêneo, podendo haver anisotropia da condutividade hidráulica nas direções radial e vertical;
- Densidade e viscosidade da água são constantes;
- Escoamento em meios porosos descrito pela lei de Darcy;
- Fluxo é horizontal e converge para o poço na direção radial na camada aquífera;
- O poço é totalmente penetrante;
- A vazão do poço é constante;
- As perdas de carga localizadas no filtro e na entrada da bomba são desprezadas;
- O diâmetro do poço bombeado é infinitesimal;
- O aquífero se comporta como um meio compressível e elástico.
- Os rebaixamentos são pequenos em relação à espessura saturada do aquífero.

3.4.3.2 Equacionamento

A equação diferencial que governa o escoamento neste modelo também é derivada da combinação entre a lei de Darcy e o princípio da conservação de massa em um sistema de coordenadas radial:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{k_v}{k_r} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{S_s}{k_r} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \quad (25)$$

onde:

- t = tempo de bombeamento [T];

As condições de contorno são as mesmas consideradas no modelo anterior:

- Rebaixamentos nulos antes do início do bombeamento em qualquer ponto na vizinhança do poço;
- Rebaixamentos nulos em distâncias infinitas do poço, após o início do bombeamento;
- Escoamento constante e uniforme em direção ao poço na espessura saturada do aquífero.
- A variação do rebaixamento com a profundidade é nula na base do aquífero;
- A água dos poros flui para o aquífero quando a superfície piezométrica, que é um contorno móvel, sofre um declínio.

Segundo a solução de Neuman (1972, 1973 apud Alamy Filho, 2002), o valor do rebaixamento é calculado da equação 26:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \cdot W(ts, \sigma, \beta) \quad (26)$$

onde:

$$\bullet \quad ts = \frac{T \cdot t}{Ss \cdot m \cdot r^2}; \quad (27)$$

$$\bullet \quad \sigma = \frac{Ss \cdot m}{Sy} = \frac{S}{Sy}; \quad (28)$$

$$\bullet \quad \beta = \frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{kv}{kr}. \quad (29)$$

$$\bullet \quad W(ts, \sigma, \beta) = \int_0^\infty 4y \cdot J_0(y\beta^{1/2}) \cdot [u_0(y) + \sum_{n=1}^\infty u_n(y)] dy \quad (30)$$

Na equação 30, tem-se:

- J_0 = função de Bessel de primeira espécie e ordem zero;

$$\bullet \quad u_0(y) = \frac{\{1 - \exp[-ts\beta(y^2 - \gamma_0^2)]\} \cdot \tanh(\gamma_0)}{\{y^2 - (1 + \sigma)\gamma_0^2 - [(y^2 - \gamma_0^2)^2 / \sigma]\} \cdot \gamma_0}, \quad (31)$$

$$\bullet \quad u_n(y) = \frac{\{1 - \exp[-ts\beta(y^2 - \gamma_n^2)]\} \cdot \tanh(\gamma_n)}{\{y^2 - (1 + \sigma)\gamma_n^2 - [(y^2 - \gamma_n^2)^2 / \sigma]\} \cdot \gamma_n}. \quad (32)$$

Nas equações 31 e 32, γ_0 e γ_n são as raízes das seguintes equações:

$$\sigma \cdot \gamma_0 \cdot \sinh(\gamma_0) - (y^2 - \gamma_0^2) \cdot \cosh(\gamma_0) = 0 \quad \text{com: } \gamma_0^2 < y^2 \quad (33)$$

$$\sigma \cdot \gamma_n \cdot \sin(\gamma_n) + (y^2 + \gamma_n^2) \cdot \cos(\gamma_n) = 0$$

$$\text{com: } (2n - 1) \left(\frac{\pi}{2}\right) < \gamma_n < n\pi \quad (34)$$

As raízes γ_0 e γ_n podem ser estimadas pelo método numérico de Newton-Rhapson, dado pela seguinte expressão matemática:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (35)$$

Na equação 35, x_n é a aproximação inicial, n é a n-ésima iteração do algoritmo e $f'(x)$ é a derivada da função $f(x)$ no ponto x_n .

3.4.3.3 Algoritmo para cálculo da função de poço

O código deste algoritmo se encontra no Apêndice C.

- Início:
 - Dados de entrada:
 - Aquífero: kr, kv, m, S, Sy
 - Poço: r
 - Tempo: t
 - Cálculo de ts: equação 27;
 - Cálculo de σ : equação 28;
 - Cálculo de β : equação 29;

- Para $y = 0$ até $y = \infty$:

- Cálculo de γ_0 : método de Newton-Raphson:

$$\gamma_{0_{n+1}} = \gamma_{0_n} - \frac{\sigma\gamma_{0_n} \cdot \sinh(\gamma_{0_n}) - (y^2 - \gamma_{0_n}^2) \cdot \cosh(\gamma_{0_n})}{\sinh(\gamma_{0_n}) \cdot [\sigma - (y^2 - \gamma_{0_n}^2)] + \cosh(\gamma_{0_n}) \cdot (\sigma\gamma_{0_n} + 2\gamma_n)}$$

- Cálculo de $u_0(y)$: equação 31;
- Para $n = 1$ até $n = \infty$:

- Cálculo de γ_0 : método de Newton-Raphson;

$$\gamma_{n_{n+1}} = \gamma_{n_n} - \frac{\sigma\gamma_{n_n} \cdot \text{sen}(\gamma_{n_n}) - (y^2 - \gamma_{n_n}^2) \cdot \cos(\gamma_{n_n})}{\text{sen}(\gamma_{n_n}) \cdot [\sigma - (y^2 - \gamma_{n_n}^2)] + \cos(\gamma_{n_n}) \cdot (\sigma\gamma_{n_n} + 2\gamma_n)}$$

- somatório = 0;
- Cálculo de $u_n(y)$: equação 32;
- Somatório = somatório + $u_n(y)$;
- $F = 4y \cdot J_0\left(y \cdot \beta^{\frac{1}{2}}\right) \cdot (u_0 + \text{somatório})$;

- Função de poço:

- $W =$ Integração de F pelo método de Simpson (1/3)

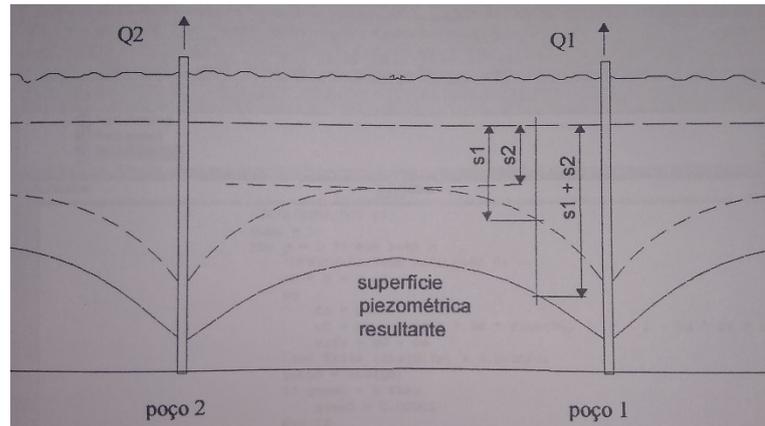
- Fim

3.5 SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

Os modelos conceituais utilizados se baseiam nas hipóteses de extensão infinita dos aquíferos e taxas de bombeamento constantes. Além disso, as equações que representam o escoamento são lineares na variável independente rebaixamento. Neste cenário, a superposição de efeitos de um sistema de poços sobre a superfície piezométrica pode ser utilizada para simular poços interferentes, descontinuidades do aquífero, recarga, recuperação da superfície piezométrica e bombeamentos intermitentes (ALAMY FILHO, 2002).

Neste trabalho, o rebaixamento total em um ponto equivale ao somatório dos rebaixamentos causados por cada poço que afeta este ponto, como mostra a Figura 6, onde o rebaixamento em um ponto entre os poços 1 e 2 é a soma dos rebaixamentos s_1 e s_2 . Também é possível definir intervalos de bombeamento para cada poço do sistema.

Figura 6 – Superposição de efeitos no cálculo de rebaixamentos



Fonte: Alamy Filho (2002)

Os casos possíveis de nós cujo rebaixamento é afetado por mais de um poço são aqueles da malha retangular cujas células adjacentes possuem mais de um poço, ou os das malhas analíticas que estejam localizados em áreas de interseção de mais de uma malha.

3.6 ALGORITMO COMPUTACIONAL

Neste item é detalhada a lógica computacional do algoritmo principal desenvolvido. A implementação em código deste e dos algoritmos auxiliares encontra-se nos Apêndices D e E, respectivamente.

Os dados de entrada necessários consistem nas posições dos nós da malha de discretização retangular, as propriedades hidrogeológicas dos aquíferos e aquitardes e as posições e propriedades dos poços. Dessa forma, é possível simular sistemas reais, fornecendo-se dados de campo, e também sistemas teóricos simplificados para fins de comparação com outras abordagens computacionais.

Optou-se que os modelos conceituais a serem utilizados fossem definidos pelos tipos de dados de entrada fornecidos. Assim, os modelos adequados ao aquífero estudado são detectados em tempo de execução.

Os dados de entrada devem ser inseridos em formato tabular em planilhas do Excel.

3.6.1 Algoritmo principal

3.6.1.1 Leitura dos dados

As posições dos nós na malha de elementos retangulares são representadas por um sistema matricial de dimensões $N_y \times N_x$, onde N_x e N_y são o número de nós na direção x e y , respectivamente. Assim, os valores das propriedades dos nós são atribuídos aos elementos de matrizes de dimensões $N_y \times N_x$ específicas para cada uma delas. Como exemplo, dado o nó da primeira linha e segunda coluna de uma malha quadrada de 10 nós em ambas as direções, tem-se que suas coordenadas são dadas pelos elementos (1, 2) das matrizes $X_{10 \times 10}$ e $Y_{10 \times 10}$.

Os valores das propriedades dos poços do sistema são atribuídos aos elementos de vetores de p elementos, onde p é o número de identificação do poço. Assim, a vazão de bombeamento do segundo poço, por exemplo, é dada por Q_2 ,

A lógica do algoritmo segue os seguintes passos:

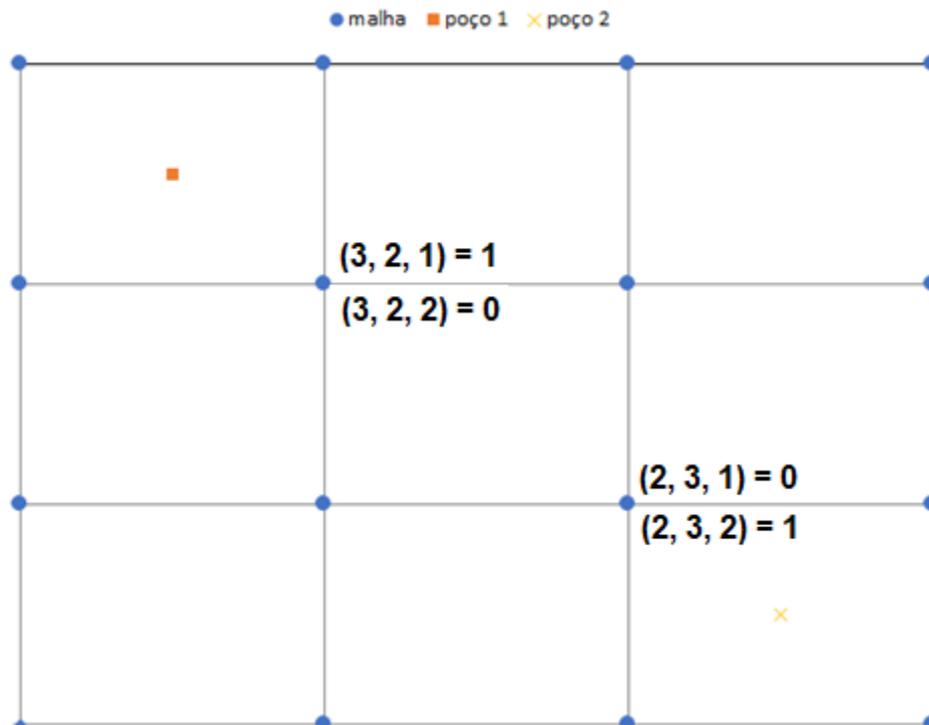
- Definição do horizonte de simulação, em horas;
- Definição do número de nós aleatórios por malhas analíticas (N_a);
- Para o nó (i, j) da malha de elementos retangulares:
 - Leitura das coordenadas (x, y);
 - Leitura dos dados do aquífero:
 - Carga hidráulica inicial (h_0);
 - Condutividade hidráulica (k_x, k_y);
 - Base, topo e cálculo da espessura saturada (b);
 - Coeficiente de armazenamento (S);
 - Vazão específica (S_y);
 - Porosidade específica (n_e).
 - Leitura dos dados do aquitarde:
 - Condutividade hidráulica (k');
 - Base, topo e cálculo da espessura saturada (b').
- Próximo nó (i, j).

- Para cada poço p no sistema:
 - Leitura das coordenadas (x, y) ;
 - Leitura da Vazão (Q_p) ;
 - Leitura do horário inicial e final do intervalo de bombeamento.
- Próximo poço p .

3.6.1.2 Matriz indicadora de proximidade de poços

A matriz indicadora de proximidade de poços possui dimensões $N_y \times N_x \times p$. A um elemento (i, j, p) é atribuído o valor 1, caso o poço p esteja em células adjacentes ao nó (i, j) , ou 0, no caso de não estar. Como exemplo, se o nó da terceira linha e segunda coluna estiver próximo ao poço 1, mas não ao poço 2, tem-se que os valores dos elementos $(3, 2, 1)$ e $(3, 2, 2)$ serão 1 e 0, respectivamente. Este exemplo é ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Exemplo de valores da matriz indicadora



A lógica da atribuição dos valores da matriz indicadora segue os seguintes passos:

- Para cada nó (i, j):
 - Para cada poço p:
 - Atribuir o valor 0 ao elemento (i, j, p)
- Próximo nó (i, j).

- Para cada poço p:
 - Identificar célula do poço p;
 - Para cada nó (i, j) da célula:
 - Atribuir o valor 1 ao elemento (i, j, p).
- Próximo poço p.

3.6.1.3 Construção das malhas analíticas

As propriedades dos nós das malhas analíticas de cada poço foram atribuídos aos elementos de matrizes de dimensões $N_a \times N_p$, onde N_p é o número de poços do sistema e N_a o número de nós aleatórios por malha. Assim, a condutividade hidráulica do segundo nó aleatório da malha do terceiro poço, por exemplo, é dada pelo elemento (2, 3) da matriz de condutividade hidráulica.

Dado um poço de posição (x_p, y_p) e sua malha de raio R , a posição (x_a, y_a) de um nó a uma distância R_a do poço foi definida aleatoriamente como:

$$x_a = x_p + R_a \cdot \cos \theta, \quad (36)$$

$$y_a = y_p + R_a \cdot \sin \theta, \quad (37)$$

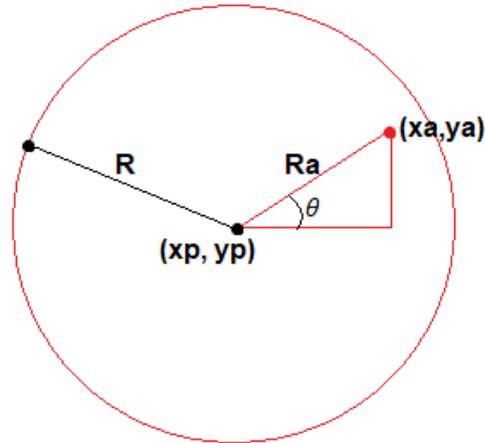
onde:

$$\theta = 2\pi A_1; \quad (38)$$

$$R_a = R \cdot A_2. \quad (39)$$

Nas equações 38 e 39, A_1 e A_2 são números aleatórios entre 0 e 1. Com isso, o processo de geração dos nós, ilustrado na Figura 8, garante que eles estejam a uma distância máxima igual ao raio R da malha.

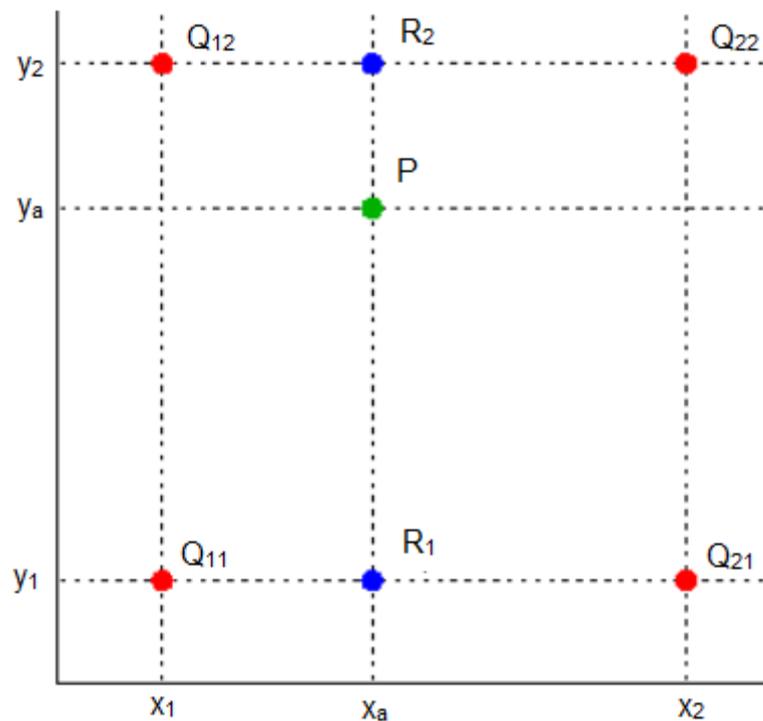
Figura 8 – Processo de geração dos nós aleatórios



Fonte: Autor (2019)

Foi utilizado um processo de interpolação bi linear, ilustrado na Figura 9, para interpolar as propriedades hidrogeológicas nos nós gerados aleatoriamente.

Figura 9 – Processo de interpolação bilinear



Fonte: Autor (2019)

Na Figura 9, são conhecidos os valores de uma propriedade do aquífero, f , nos pontos $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$ e $Q_{22} = (x_2, y_2)$, que são os nós da malha de elementos retangulares. Dado um nó aleatório gerado no ponto $P = (x_a, y_a)$, são interpolados os valores de f na direção x , em $R_1 = (x_a, y_1)$ e em $R_2 = (x_a, y_2)$:

$$f(R_1) \approx \frac{x_2 - x_a}{x_a - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x_a - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}), \quad (40)$$

$$f(R_2) \approx \frac{x_2 - x_a}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x_a - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}). \quad (41)$$

Em seguida, interpola-se o valor de f na direção y no ponto P :

$$f(P) \approx \frac{y_2 - y_a}{y_2 - y_1} f(R_1) + \frac{y_a - y_1}{y_2 - y_1} f(R_2). \quad (42)$$

Os processos de construção das malhas radiais analíticas e de interpolação das propriedades dos nós aleatórios seguem os seguintes passos:

- Para cada poço p :
 - Para cada nó aleatório (i, p) :
 - Gerar número aleatório A_1 ;
 - Cálculo do ângulo θ : equação 38;
 - Enquanto a posição do nó (i, p) gerada não estiver dentro dos limites da malha:
 - Gerar número aleatório A_2 ;
 - Cálculo da distância entre o nó (i, p) e poço p : equação 39;
 - Cálculo das coordenadas: equações 36 e 37.
 - Interpolação das propriedades do nó (i, p) : equação 42:
 - Aquífero:
 - Carga hidráulica inicial (h_0);
 - Condutividade hidráulica (k_x, k_y);

- Base, topo e cálculo da espessura saturada (b);
- Coeficiente de armazenamento (S);
- Vazão específica (Sy);
- Porosidade específica (n_e).
- Aquitarde:
 - Condutividade hidráulica (k');
 - Base, topo e cálculo da espessura saturada (b').
- Próximo nó (i, p).
- Próximo poço p.

3.6.1.4 Função de controle do bombeamento

A função de controle do bombeamento é uma função booleana, ou seja, retorna o valor *Verdadeiro*, quando o bombeamento está ativo, ou *Falso*, quando está inativo. Recebe como parâmetros a hora do dia do nível de tempo e os horários de início e fim do bombeamento de um poço.

Esta função segue os seguintes passos:

- Se (hora \geq horário de início do bombeamento) E (hora < horário do fim do bombeamento):
 - Bombeamento ativo = *Verdadeiro*.
 - Senão: bombeamento ativo = *Falso*.

3.6.1.5 Cálculo da superfície piezométrica

Levando-se em conta a superposição de efeitos no cálculo de rebaixamentos, a equação 12 para o rebaixamento pode ser escrita como:

$$s = \frac{1}{4\pi T} \cdot \sum_{p=1}^{Np} Q_p \cdot W(u) \quad (43)$$

onde:

- N_p = número de poços;
- $W(u)$ = função de poço mais adequada ao modelo.

Calculados os rebaixamentos, as cargas são calculadas isolando-se h através da equação 2, nas malhas analíticas, ou pela equação 9, na malha numérica.

Nesta etapa, o algoritmo percorre todas as malhas, calculando o rebaixamento e a carga hidráulica em cada nó da maneira mais adequada. O processo de cálculo da superfície piezométrica segue os seguintes passos:

- Para cada poço p :
 - Para cada nó (i, p) da malha radial:
 - Cálculo da distância entre o nó (i, p) e o poço p ;
 - Se (bombeamento ativo) = Verdadeiro:
 - Se h_0 é igual ao topo do aquífero no nó (i, p) :
 - Neuman.
 - Se h_0 for superior ao topo do aquífero:
 - Se $k' > 0$:
 - Hantush-Jacob
 - Senão:
 - Theis
 - Cálculo da parcela do poço p no rebaixamento do nó (i, p) : equação 12;
 - Para cada poço $k \neq p$:
 - Cálculo da distância entre nó (i, p) e poço k ;
 - Se o nó (i, p) está dentro da malha do poço k :
 - Se (bombeamento ativo) = Verdadeiro:
 - Cálculo da função de poço em relação ao poço k ;
 - Cálculo da parcela do poço k no rebaixamento do nó (i, p) : equação 12.
 - Próximo poço k .

- Somatório de todas as parcelas do rebaixamento no nó (i, p);
- Cálculo da carga hidráulica (h) no nó (i, p): equação 2.
- Se o aquífero for livre:
 - Topo do aquífero = h;
 - Cálculo da nova espessura saturada.
- Próximo nó (i, p).
- Próximo poço p.
- Para cada nó (i, j):
 - Para cada poço p:
 - Se o elemento (i, j, p) da matriz indicadora for igual a 1:
 - Se (bombeamento ativo) = Verdadeiro:
 - Cálculo da função de poço em relação ao poço p;
 - Cálculo da parcela do poço p no rebaixamento do nó (i, j): equação 12;
 - Próximo poço p.
- Somatório de todas as parcelas do rebaixamento no nó (i, j);
- Cálculo da carga hidráulica (h) no nó (i, j): equação 2.
- Se o nó (i, j) está longe de poços:
 - Cálculo do termo difusivo em x: equação 7;
 - Cálculo do termo difusivo em y: equação 8;
 - Cálculo da carga hidráulica (h) pelo MDF: equação 9.

- Se o aquífero for livre:
 - Topo do aquífero = h ;
 - Cálculo da nova espessura saturada.

4 SIMULAÇÕES

Foram realizadas simulações a fim de se comparar os resultados obtidos pelo modelo híbrido desenvolvido com os de soluções puramente analíticas ou numéricas. Portanto, foram simulados as superfícies piezométricas e os campos de velocidade através das três soluções para todos os modelos conceituais de aquíferos considerados.

Considerou-se um aquífero hipotético de propriedades geológicas e hidráulicas simplificadas. Foram consideradas planas as superfícies de base e de topo do aquífero e camadas confinantes, bem como a superfície piezométrica inicial.

Em todas as simulações, a área de interesse foi de 60 m x 60 m, subdividida em uma malha de elementos retangulares em que $\Delta x = \Delta y = 10$ m, havendo, portanto, sete nós em ambas as direções x e y.

Considerou-se um sistema de três poços em bombeamento constante, com vazões de bombeamento de 8 m³/h, situados conforme a Tabela 2.

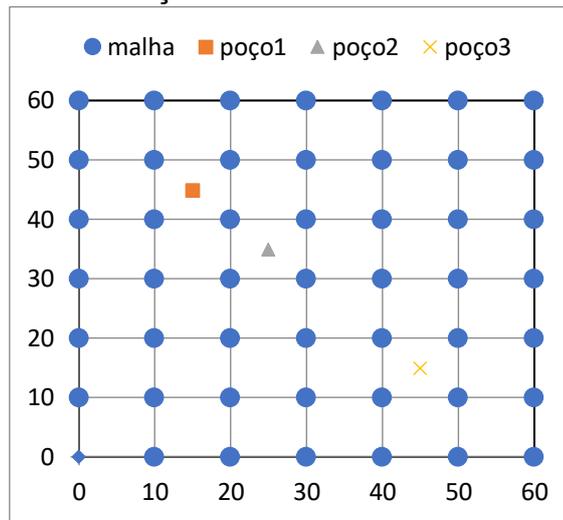
Tabela 2 – Coordenadas e vazão de bombeamento dos poços

Poço	x (m)	y (m)	Q (m ³ /h)
1	15	45	8
2	25	35	8
3	45	15	8

Fonte: Autor (2019)

As posições dos nós da malha de elementos retangulares e dos poços se deram conforme a Figura 10.

Figura 10 – Posições dos nós da malha e dos poços



As malhas radiais analíticas dos poços foram definidas por um raio de comprimento igual à diagonal das células retangulares. Foram gerados dez nós aleatórios por malha analítica.

4.1 AQUÍFERO CONFINADO

Foram considerados os seguintes valores para as propriedades do aquífero:

- cota da base do aquífero = 0 m;
- cota do topo do aquífero = 40 m;
- $h_0 = 70$ m;
- $k_r = 0,1$ m/h;
- $S = 10^{-4}$.

4.1.1 Resultados da simulação

Para um intervalo de bombeamento de 2 horas, foram obtidos os seguintes valores para a superfície piezométrica e para o campo de velocidade:

Tabela 3 – Valores de carga hidráulica e velocidade nos nós da malha numérica

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	0,00	70,00	0,0000
10,00	0,00	70,00	0,0000
20,00	0,00	70,00	0,0104
30,00	0,00	70,00	0,0726
40,00	0,00	70,00	0,4977
50,00	0,00	70,00	0,4977
60,00	0,00	70,00	0,0000

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	10,00	70,00	0,0000
10,00	10,00	70,00	0,0093
20,00	10,00	69,85	0,0513
30,00	10,00	68,97	0,2528
40,00	10,00	62,96	0,3273
50,00	10,00	62,96	0,3519
60,00	10,00	70,00	0,4977

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	20,00	70,00	0,0156
10,00	20,00	69,78	0,0720
20,00	20,00	68,97	0,2508
30,00	20,00	68,09	0,3006
40,00	20,00	62,96	0,2566
50,00	20,00	62,96	0,3273
60,00	20,00	70,00	0,4977

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	30,00	70,00	0,1244
10,00	30,00	68,24	0,3465
20,00	30,00	62,96	0,4977
30,00	30,00	62,96	0,2566
40,00	30,00	68,09	0,3006
50,00	30,00	68,97	0,2528
60,00	30,00	70,00	0,0726

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	40,00	70,00	0,4977
10,00	40,00	62,96	0,5315
20,00	40,00	55,92	0,0000
30,00	40,00	62,96	0,4977
40,00	40,00	68,97	0,2508
50,00	40,00	69,85	0,0513
60,00	40,00	70,00	0,0104

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	50,00	70,00	0,4977
10,00	50,00	62,96	0,3519
20,00	50,00	62,96	0,5315
30,00	50,00	68,24	0,3465
40,00	50,00	69,78	0,0720
50,00	50,00	70,00	0,0093
60,00	50,00	70,00	0,0000

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	60,00	70,00	0,0000
10,00	60,00	70,00	0,4977
20,00	60,00	70,00	0,4977
30,00	60,00	70,00	0,1244
40,00	60,00	70,00	0,0156
50,00	60,00	70,00	0,0000
60,00	60,00	70,00	0,0000

Fonte: Autor (2019)

Tabela 4 – Valores de carga hidráulica nos nós das malhas analíticas

x (m)	y (m)	h (m)	x (m)	y (m)	h (m)
12,44	36,61	57,45	15,02	29,54	63,87
5,91	51,62	63,85	26,41	33,41	60,66
13,35	46,99	61,04	21,92	39,34	55,83
6,29	47,86	63,46	15,12	31,24	57,96
13,20	49,01	62,05	23,18	32,59	61,34
18,14	37,84	56,21	44,12	23,81	63,39
21,35	48,30	57,22	45,17	13,11	60,45
15,00	44,68	51,32	46,29	7,01	63,22
14,99	44,98	46,01	47,10	19,56	62,31
15,90	49,06	61,95	41,87	18,53	62,19
27,95	27,34	63,25	43,20	15,86	60,55
24,54	37,28	54,85	36,10	15,48	63,40
18,54	34,32	56,65	46,48	21,39	62,82
24,42	34,23	59,16	34,82	18,39	63,76
16,05	32,64	57,51	50,96	4,03	64,05

Fonte: Autor (2019)

As Figuras 10, 11 e 12 apresentam as curvas de nível das superfícies piezométricas obtidas por interpolação dos dados das simulações. Nota-se na solução híbrida um detalhamento mais refinado nas áreas vizinhas aos poços, onde as superfícies piezométricas são mais íngremes devido aos cones de depressão. Nas outras soluções, o nível de detalhamento é uniforme por toda a superfície.

Figura 10 – Solução híbrida: curvas de nível da superfície piezométrica

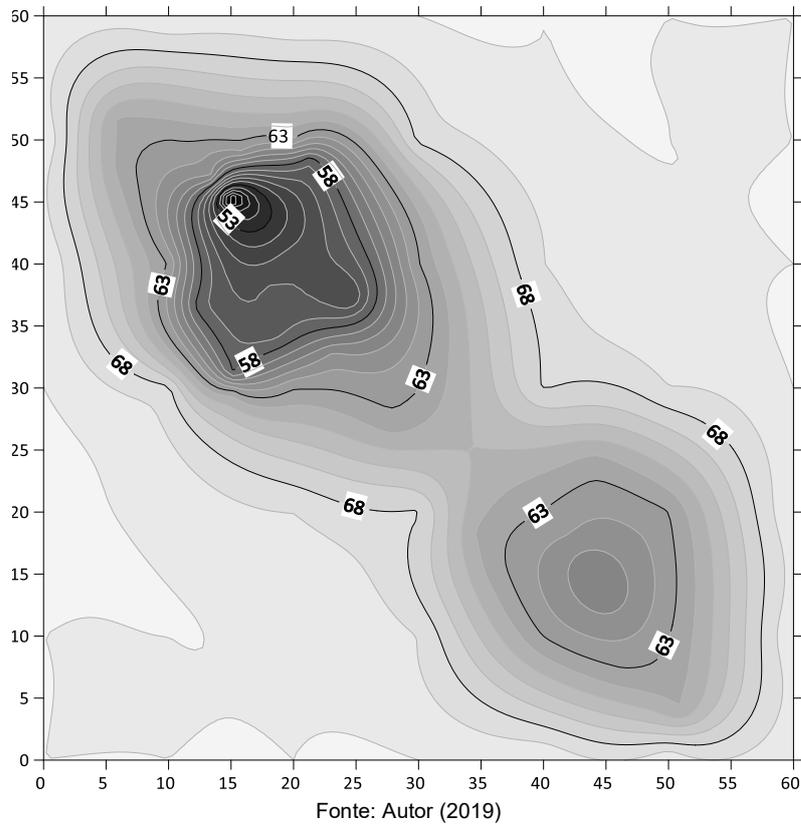


Figura 11 – Solução numérica: curvas de nível da superfície piezométrica

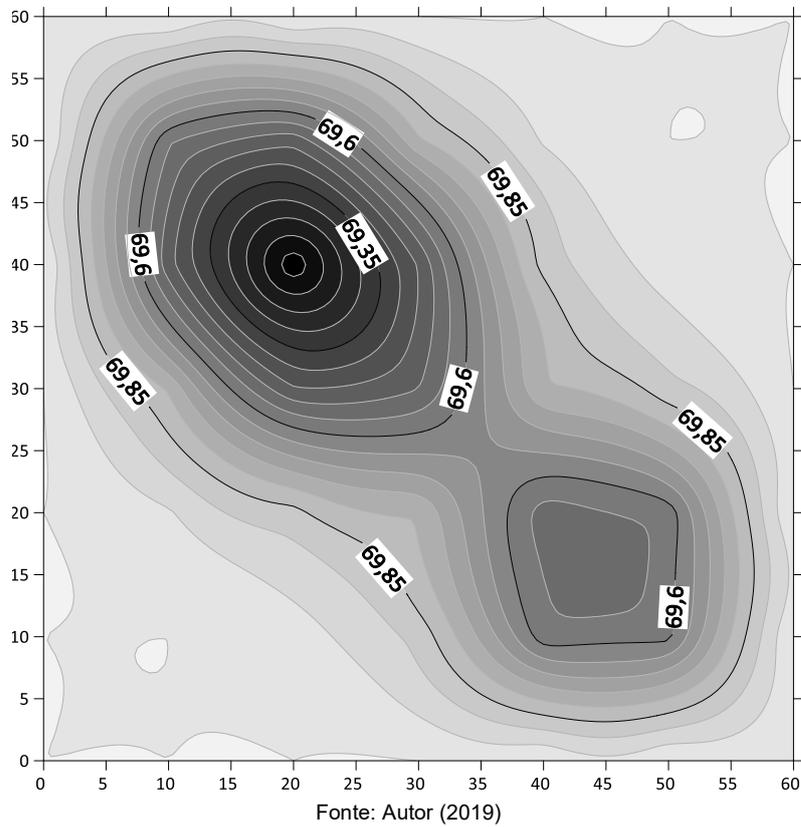
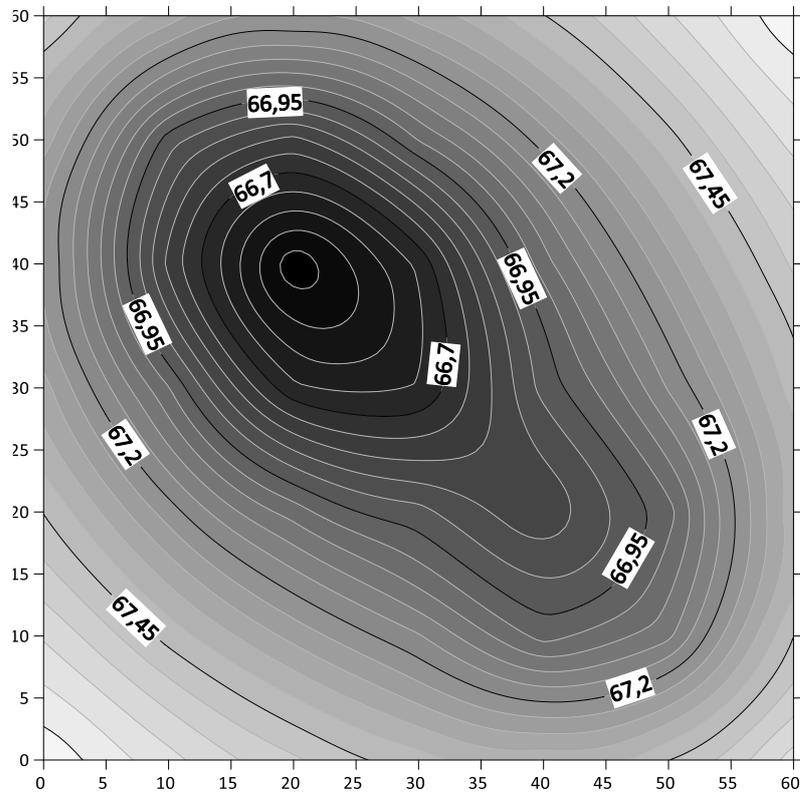


Figura 12 – Solução analítica: curvas de nível da superfície piezométrica



Fonte: Autor (2019)

4.2 AQUÍFERO SEMI-CONFINADO

Foram considerados os seguintes valores para as propriedades do aquífero:

- cota da base do aquífero = 0 m;
- cota do topo do aquífero = 40 m;
- $h_0 = 70$ m;
- $k_r = 0,1$ m/h;
- $S = 10^{-4}$.

Os valores das propriedades do aquífero foram:

- cota da base do aquífero = 40 m;
- cota do topo do aquífero = 90 m;
- $h' = 90$ m
- $k' = 0,001$ m/h.

4.2.1 Resultados da simulação

Para um intervalo de bombeamento de 2 horas, foram obtidos os seguintes valores para a superfície piezométrica e para o campo de velocidade:

Tabela 5 - Valores de carga hidráulica e velocidade nos nós da malha numérica

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/s)
0,00	0,00	70,00	0,0000
10,00	0,00	70,00	0,0000
20,00	0,00	70,00	0,0101
30,00	0,00	70,00	0,0709
40,00	0,00	70,00	0,4863
50,00	0,00	70,00	0,4863
60,00	0,00	70,00	0,0000

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/s)
0,00	10,00	70,00	0,0000
10,00	10,00	70,00	0,0091
20,00	10,00	69,86	0,0501
30,00	10,00	69,00	0,2470
40,00	10,00	63,12	0,3198
50,00	10,00	63,12	0,3439
60,00	10,00	70,00	0,4863

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/s)
0,00	20,00	70,00	0,0152
10,00	20,00	69,79	0,0704
20,00	20,00	69,00	0,2451
30,00	20,00	68,14	0,2937
40,00	20,00	63,12	0,2507
50,00	20,00	63,12	0,3198
60,00	20,00	70,00	0,4863

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/s)
0,00	30,00	70,00	0,1216
10,00	30,00	68,28	0,3385
20,00	30,00	63,12	0,4863
30,00	30,00	63,12	0,2507
40,00	30,00	68,14	0,2937
50,00	30,00	69,00	0,2470
60,00	30,00	70,00	0,0709

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/s)
0,00	40,00	70,00	0,4863
10,00	40,00	63,12	0,5194
20,00	40,00	56,25	0,0000
30,00	40,00	63,12	0,4863
40,00	40,00	69,00	0,2451
50,00	40,00	69,86	0,0501
60,00	40,00	70,00	0,0101

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/s)
0,00	50,00	70,00	0,4863
10,00	50,00	63,12	0,3439
20,00	50,00	63,12	0,5194
30,00	50,00	68,28	0,3385
40,00	50,00	69,79	0,0704
50,00	50,00	70,00	0,0091
60,00	50,00	70,00	0,0000

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/s)
0,00	60,00	70,00	0,0000
10,00	60,00	70,00	0,4863
20,00	60,00	70,00	0,4863
30,00	60,00	70,00	0,1216
40,00	60,00	70,00	0,0152
50,00	60,00	70,00	0,0000
60,00	60,00	70,00	0,0000

Fonte: Autor (2019)

Tabela 6 – Valores de carga hidráulica nos nós das malhas analíticas

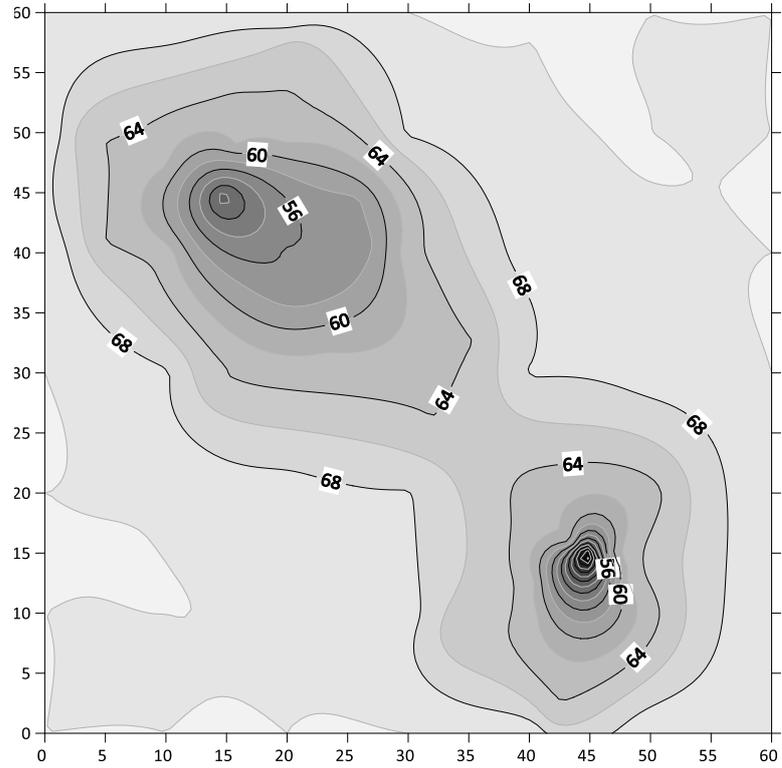
x (m)	y (m)	h (m)
26,33	40,63	56,89
14,69	44,64	48,87
20,47	37,26	56,17
5,03	41,01	63,92
9,63	47,60	62,80
20,79	56,54	64,27
3,71	49,77	64,17
15,79	52,14	63,15
19,00	50,59	63,07
15,90	49,06	62,11
35,10	32,58	63,86
19,87	30,03	63,14
32,08	26,17	64,02
25,70	44,29	57,57
24,81	40,22	56,49

x (m)	y (m)	h (m)
22,97	42,05	56,67
14,30	29,08	64,17
24,26	39,25	56,13
15,21	30,73	63,91
23,24	32,41	61,56
47,90	12,80	61,85
44,88	14,84	28,47
40,32	12,55	62,57
47,20	14,76	60,90
42,24	18,62	62,28
43,41	15,90	60,53
46,89	14,94	60,59
42,19	1,62	64,38
34,16	8,42	64,24
45,29	14,94	45,41

Fonte: Autor (2019)

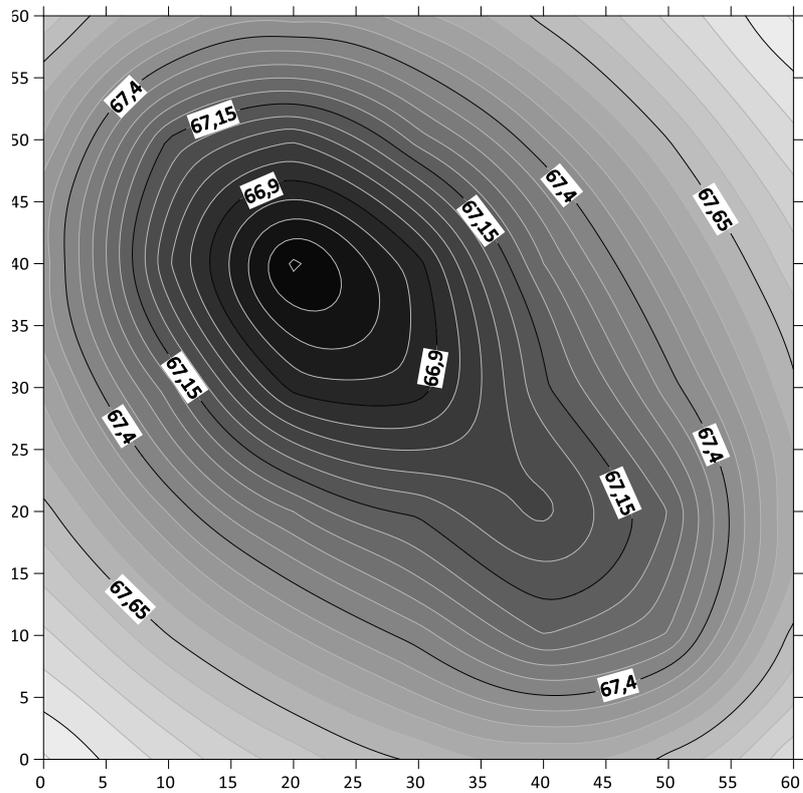
As Figuras 13 e 14 apresentam as curvas de nível das superfícies piezométricas obtidas por interpolação dos dados das simulações. Assim como para o aquífero confinado, a solução híbrida demonstrou maior detalhamento dos cones de depressão.

Figura 13 – Solução híbrida: curvas de nível da superfície piezométrica



Fonte: Autor (2019)

Figura 14 – Solução analítica: curvas de nível da superfície piezométrica



Fonte: Autor (2019)

4.3 AQUÍFERO NÃO CONFINADO

Foram consideradas os seguintes valores para as propriedades do aquífero:

- cota da base do aquífero = 0 m;
- $h_0 = 40$ m;
- $k_r = 0,1$ m/h;
- $k_v = 0,01$ m/h;
- $S = 10^{-4}$;
- $S_y = 0,1$.

4.3.1 Resultados da simulação

Para um intervalo de bombeamento de 2 horas, foram obtidos os seguintes valores para a superfície piezométrica e para o campo de velocidade:

Tabela 7 - Valores de carga hidráulica e velocidade nos nós da malha numérica

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	0,00	40,00	0,0000
10,00	0,00	40,00	0,0000
20,00	0,00	40,00	0,0075
30,00	0,00	40,00	0,0526
40,00	0,00	40,00	0,3647
50,00	0,00	40,00	0,3647
60,00	0,00	40,00	0,0000

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	10,00	40,00	0,0000
10,00	10,00	40,00	0,0068
20,00	10,00	39,89	0,0372
30,00	10,00	39,26	0,1851
40,00	10,00	34,84	0,2400
50,00	10,00	34,84	0,2579
60,00	10,00	40,00	0,3647

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	20,00	40,00	0,0113
10,00	20,00	39,84	0,0521
20,00	20,00	39,26	0,1837
30,00	20,00	38,62	0,2207
40,00	20,00	34,84	0,1890
50,00	20,00	34,84	0,2400
60,00	20,00	40,00	0,3647

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	30,00	40,00	0,0899
10,00	30,00	38,73	0,2539
20,00	30,00	34,84	0,3696
30,00	30,00	34,84	0,1890
40,00	30,00	38,62	0,2207
50,00	30,00	39,26	0,1851
60,00	30,00	40,00	0,0526

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	40,00	40,00	0,3647
10,00	40,00	34,84	0,3942
20,00	40,00	29,55	0,0000

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	50,00	40,00	0,3647
10,00	50,00	34,84	0,2579
20,00	50,00	34,84	0,3942

30,00	40,00	34,84	0,3696
40,00	40,00	39,26	0,1837
50,00	40,00	39,89	0,0372
60,00	40,00	40,00	0,0075

30,00	50,00	38,73	0,2539
40,00	50,00	39,84	0,0521
50,00	50,00	40,00	0,0068
60,00	50,00	40,00	0,0000

x (m)	y (m)	h (m)	v (m/h)
0,00	60,00	40,00	0,0000
10,00	60,00	40,00	0,3647
20,00	60,00	40,00	0,3647
30,00	60,00	40,00	0,0899
40,00	60,00	40,00	0,0113
50,00	60,00	40,00	0,0000
60,00	60,00	40,00	0,0000

Fonte: Autor (2019)

Tabela 8 – Valores de carga hidráulica nos nós das malhas analíticas

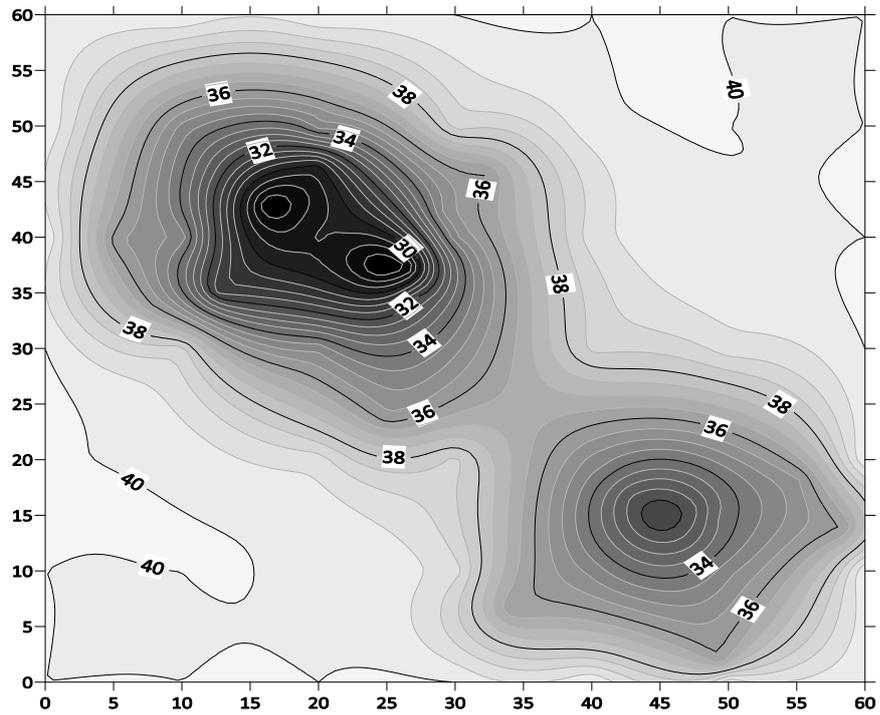
x (m)	y (m)	h (m)
25,10	38,98	28,97
19,75	50,94	34,98
10,59	45,27	33,63
5,34	39,72	35,59
12,70	35,28	31,17
12,29	45,68	32,53
20,87	44,51	29,79
7,80	33,94	36,00
16,37	42,90	27,91
26,59	37,27	28,50
32,35	45,85	35,99
24,50	37,30	27,91
27,22	24,96	35,46
29,21	42,13	35,12
22,23	40,53	29,57

x (m)	y (m)	h (m)
19,61	41,31	29,42
27,40	33,56	32,54
25,12	23,97	35,59
27,07	34,49	32,11
19,94	46,41	29,84
46,90	12,59	32,72
34,07	6,63	36,10
42,84	16,66	32,49
49,38	1,93	36,10
58,43	13,78	36,05
55,25	18,31	35,54
47,38	15,50	32,30
45,00	14,93	31,41
49,24	14,74	33,52
40,87	19,35	34,47

Fonte: Autor (2019)

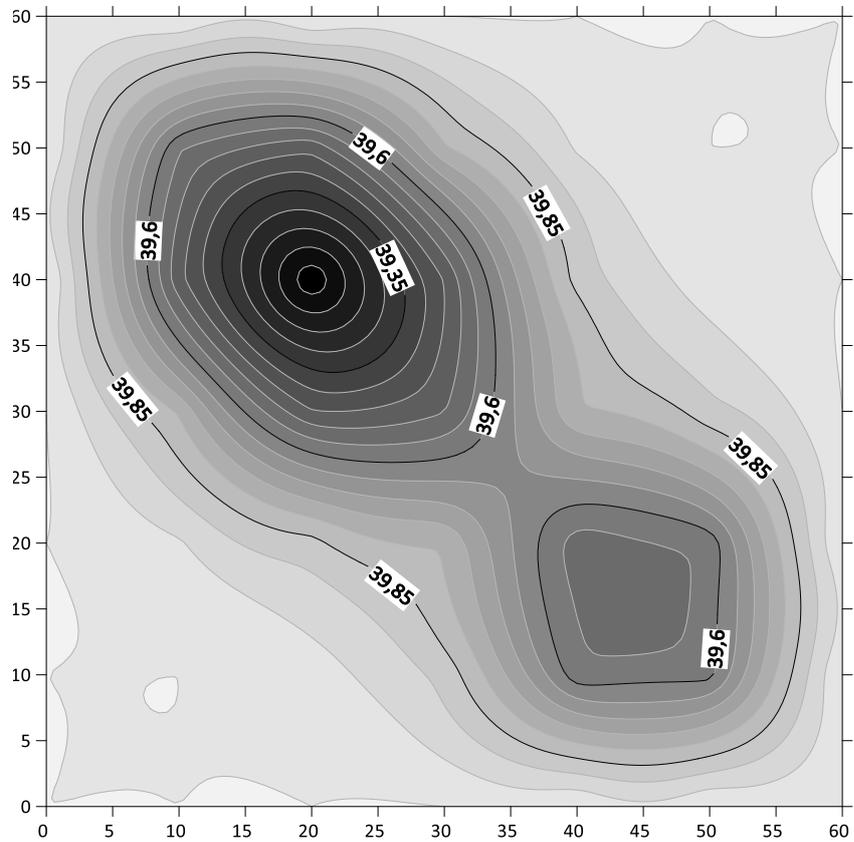
As Figuras 15, 16 e 17 apresentam as curvas de nível das superfícies piezométricas obtidas por interpolação dos dados das simulações. Assim como nos modelos de aquífero confinado e semi-confinado, percebe-se um maior detalhamento dos cones de depressão, inclusive na região onde há a interferência de dois poços.

Figura 15 – Solução híbrida: curvas de nível da superfície piezométrica



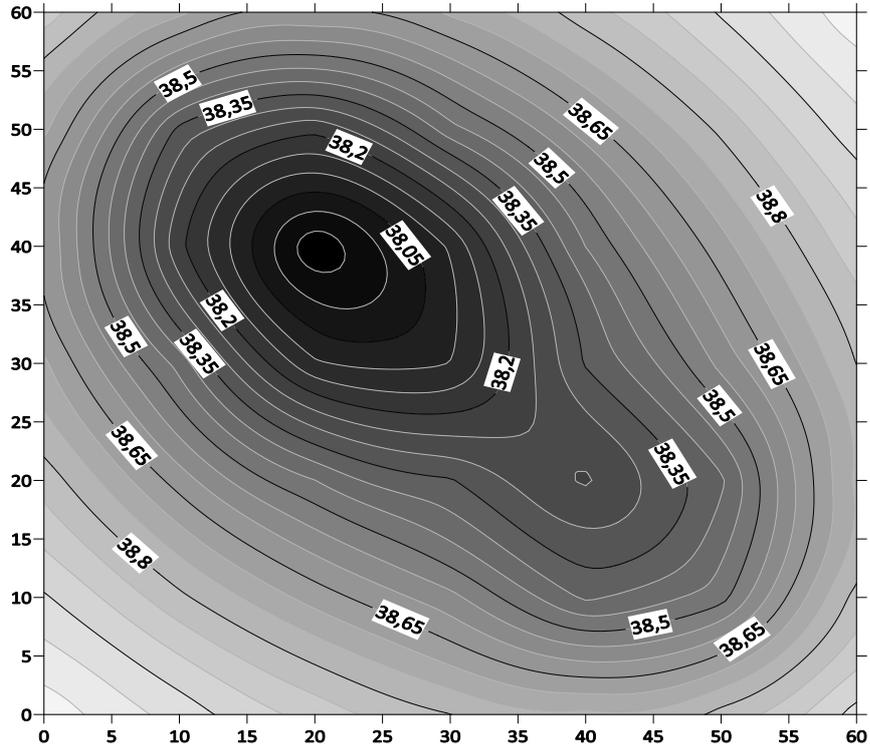
Fonte: Autor (2019)

Figura 16 – Solução numérica: curvas de nível da superfície piezométrica



Fonte: Autor (2019)

Figura 17 – Solução analítica: curvas de nível da superfície piezométrica



Fonte: Autor (2019)

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em todas as simulações, nota-se que nos resultados das soluções híbridas o espaçamento entre as curvas de nível aumenta na direção radial e sentido oposto aos poços. Além disso, o rebaixamento nas áreas mais próximas aos poços é maior. Nas soluções numéricas ou analíticas, os rebaixamentos são menores, além dos espaçamentos serem maiores e não variarem muito no espaço, o que significa que a interpolação da curva do cone de depressão resultou em uma superfície mais linear. Esta diferença pode ser atribuída à maior densidade de nós nas regiões dos poços na solução híbrida, possibilitando uma interpolação mais acurada nestas áreas de gradientes hidráulicos mais íngremes.

Outra diferença marcante entre as simulações é a forma geral dos cones de depressão. Nas soluções puramente numéricas ou analíticas, é mais difícil de se identificar o centro dos cones individuais de cada poço. Esta característica é mais proeminente nas soluções analíticas, onde o rebaixamento causado por cada poço é calculado até nos nós mais distantes na malha, resultando em uma conformação que se aproxima à de um único cone de depressão. Nas soluções numéricas é possível identificar vales distintos, causados por poços distantes uns dos outros. Porém, nos casos de poços interferentes, as soluções numéricas parecem não descrever muito bem o cone de depressão, provavelmente devido ao fato de as soluções serem calculadas sobre a área dos elementos discretos da malha. Na solução híbrida, onde o efeito dos poços foi limitado aos nós mais próximos e o diâmetro do poço é infinitesimal, pode-se observar com mais clareza o efeito de interferência de poços distintos no rebaixamento.

Quanto ao esforço computacional, a solução mais rápida foi a numérica. Porém, deve-se levar em conta que o nível de refinamento da malha não foi alto. A solução híbrida levou praticamente o mesmo tempo de processamento das soluções analíticas, o que é explicado pela quantidade de nós que receberam soluções analíticas, que foi semelhante nos dois casos.

6 CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos, podem ser feitas considerações sobre o estudo de escoamentos em sistemas aquíferos submetidos ao bombeamento de poços através de modelos computacionais.

Modelos numéricos podem ser utilizados em variadas condições hidrogeológicas, incluindo heterogeneidade e anisotropia. Porém, os resultados obtidos são diretamente dependentes do grau de discretização do espaço e tempo determinado. Abordagens numéricas de modelagem e implementação menos sofisticadas, como o Método das Diferenças Finitas utilizado neste trabalho, necessitam de um alto nível de refinamento espacial para descrever gradientes mais íngremes na superfície piezométrica, como nas regiões próximas a poços de bombeamento.

Soluções analíticas podem ser aplicadas em condições de anisotropia, porém são restritas à modelagens que consideram como homogêneas as condições hidrogeológicas do meio. Os resultados obtidos analiticamente são quase sempre estáveis, independem do nível de discretização do domínio e podem avaliar pontos tanto próximos quanto distantes dos poços.

O acoplamento de soluções analíticas e numéricas proposto através do modelo híbrido desenvolvido demonstrou ser capaz de aproveitar as vantagens das duas abordagens.

A utilização de soluções analíticas nas regiões vizinhas aos poços resultou em superfícies piezométricas mais refinadas e, conseqüentemente, mais íngremes nas áreas dos cones de depressão quando em comparação àquelas descritas pelo modelo puramente numérico. A restrição espacial da malha analítica às regiões pequenas próximas aos poços torna mais acurada a condição inerente à estas soluções quanto a homogeneidade local do aquífero, condição essa que se torna mais improvável quanto maior a área considerada. Para os pontos distantes dos poços, o emprego da malha numérica também se observa como adequado, pois viabiliza o descrição de condições hidrogeológicas heterogêneas. Com isso, o modelo proposto pode ser aplicado em análises localizadas ou regionais, permitindo o emprego de malhas de discretização espacial menos refinadas sem que se sacrifique o nível de detalhamento dos rebaixamentos próximos aos poços.

REFERÊNCIAS

ALAMY FILHO, J. E. **Determinação de rebaixamentos em sistemas de poços tubulares através da construção e aplicação de programa específico**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, São Paulo, 2002.

CLEARY, R. **Águas Subterrâneas**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 1989. Disponível em: http://www.clean.com.br/Menu_Artigos/cleary.pdf. Acesso em: 10 set. 2019.

KRUSEMAN, G.P.; N. A. de RIDDER. ***Analysis and Evaluation of Pumping Test Data***, International Institute for Land Reclamation and Improvement, Wageningen, The Netherlands, 2000.

APÊNDICE A – ALGORITMO DA FUNÇÃO DE THEIS

```
Public Function Wth(t, r, Kr, S, B)
'Função de Poço de Theis
'Aquífero Confinado
'-----
  u = r ^ 2 * S / (4 * Kr * B * t)
  soma = -0.577216 - Log(u) + u

  For i = 2 To 50
    soma = soma + -(-1) ^ i * u ^ i / (i * FatorialR(i))
  Next

  Wth = soma

  If (Wth < 0) Then
    Wth = 0
  End If

End Function
```

APÊNDICE B – ALGORITMO DA FUNÇÃO DE HANTUSH-JACOB

```

Public Function Wht(t, r, Kr, S, B, Kl, Bl)
'Função de poço de Hantush-Jacob
'Aquífero Semi-confinado
'-----
    u = r ^ 2 * S / (4 * Kr * B * t)
    l = Sqr(Kr * B * Bl / Kl)
    'infinito = 100000 * u
    infinito = 100
    integral = 0
    y = u
    dy = (infinito - u) / 3000000
    cont = 0

    While (y <= infinito)
        y = cont * dy + u

        'integração numérica:
        F = 1 / y * Exp(-y - r ^ 2 / (4 * l ^ 2 * y))
        If (cont = 0) Then
            integral = integral + dy / 3 * F
        ElseIf (cont Mod 2 <> 0) Then
            integral = integral + dy / 3 * 4 * F
        ElseIf (cont Mod 2 = 0) Then
            integral = integral + dy / 3 * 2 * F
        ElseIf (y = infinito - y) Then
            integral = integral + dy / 3 * F
        End If
        cont = cont + 1
    Wend

    Wht = integral

    If Wht < 0 Then
        Wht = 0
    End If

End Function

```

APÊNDICE C – ALGORITMO DA FUNÇÃO DE NEUMAN

```

Public Function Wne(t, r, Kr, kv, Sy, S, B)
'Função de poço de Neuman
'Aquífero Livre
'ene = infinito na integração de y
'-----
  PI = 3.141593
  infinito_n = 100
  ene = 100
  Dim raizes(10000), rval(10000), arr(10000), F(10000) As Variant

  Tr = Kr * B
  Ss = S / B
  ts = Tr * t / (S * r ^ 2)
  sigma = S / Sy
  beta = (r / B) ^ 2 * (kv / Kr)

  'USO DE MATRIZES E QUADRATURA CLÁSSICA _ SIMPSON (1/3)
  'não há verificação de raizes válidas (GamaN)
  h = (ene - 0) / 5000

  'VARREDURA DOS y:
  cont = 0
  While (y <= ene)
    y = cont * h

    'NEWTON-RAPHSON PARA GAMA 0:
    g0 = y - 0.01
    Do
      Ga = g0
      g0 = Ga - (sigma * Ga * sinh(Ga) - (y ^ 2 - Ga ^ 2) * cosh(Ga)) / _
        (sinh(Ga) * (sigma - y ^ 2 + Ga ^ 2) + Ga * (2 + sigma) * cosh(Ga))
      dife = g0 - Ga
    Loop While (Abs(dife) > 0.000001)

    gama0 = Abs(g0)

    If gama0 = 0 Then
      gama0 = 0.00001
    End If

    'VALOR DE uo (y):
    uo = (1 - Exp(-ts * beta * (y ^ 2 - gama0 ^ 2))) * (sinh(gama0) / _
      cosh(gama0)) / ((y ^ 2 + (1 + sigma) * gama0 ^ 2 - (y ^ 2 - gama0 ^ 2) ^ 2 / sigma) * gama0)
  
```

```

'NEWTON-RAPHSON PARA GAMA N:
For n = 1 To infinito_n
  g = n
  Do
    ge = g
    g = ge - (sigma * ge * Sin(ge) + (y ^ 2 + ge ^ 2) * Cos(ge)) / _
      ((2 + sigma) * ge * Cos(ge) + (sigma - y ^ 2 - ge ^ 2) * Sin(ge))
    difer = g - ge
  Loop While (Abs(difer) > 0.000001)

  raizes(n) = g
Next 'fecha o n

'arrumação das raizes
arr(1) = raizes(1)
valor = arr(1)

If valor = 0 Then
  un = 0
Else
  un = (1 - Exp(-ts * beta * (y ^ 2 + arr(1) ^ 2))) * Tan(arr(1)) / _
    ((y ^ 2 - (1 + sigma) * arr(1) ^ 2 - (y ^ 2 + arr(1) ^ 2) ^ 2 / sigma) * arr(1))
End If

somatório = un

For j = 2 To infinito_n
  If raizes(j) > valor Then
    arr(j) = raizes(j)
    valor = arr(j)
  Else
    arr(j) = 0
  End If

  If arr(j) = 0 Then
    un = 0
  Else
    un = (1 - Exp(-ts * beta * (y ^ 2 + arr(j) ^ 2))) * Tan(arr(j)) / _
      ((y ^ 2 - (1 + sigma) * arr(j) ^ 2 - (y ^ 2 + arr(j) ^ 2) ^ 2 / sigma) * arr(j))
  End If

  somatório = somatório + un
Next 'fechar o j

'INTEGRAÇÃO NUMÉRICA:
Ff = 4 * y * Jo(y * beta ^ 0.5) * (uo + somatório)

If (cont = 0) Then
  integral = integral + h / 3 * Ff
ElseIf (cont Mod 2 <> 0) Then
  integral = integral + h / 3 * 4 * Ff
ElseIf (cont Mod 2 = 0) Then
  integral = integral + h / 3 * 2 * Ff
ElseIf (y = ene) Then
  integral = integral + h / 3 * Ff
End If

cont = cont + 1
Wend

Wne = integral

If (Wne < 0) Then
  Wne = 0
End If

End Function

```

APÊNDICE D – ALGORITMO PRINCIPAL

```

Sub simulacao()
'-----
' SIMULAÇÃO
'-----

'DECLARAÇÕES
'-----
'Parâmetros fixos:
ultimaLinha = Sheets("1").Cells(10000, 1).End(xlUp).row
Nx = UniqueItems(Sheets("1").Range("A2:A" & ultimaLinha)) 'nós em x
Ny = UniqueItems(Sheets("1").Range("B2:B" & ultimaLinha)) 'nós em y
Npoços = WorksheetFunction.Count(Worksheets(2).Columns(2)) 'número de poços
Nrnd = InputBox("Número de nós aleatórios por malha analítica:", "NÓS ALEATÓRIOS") 'número de nós aleatórios por malha analítica
hs = InputBox("Digite o horizonte de simulação em horas (se ""0"", horizonte = 1 mês", "HORIZONTE DE SIMULAÇÃO") 'horiz. de simulação

'Matrizes:
ReDim x(1 To Ny, 1 To Nx), y(1 To Ny, 1 To Nx), ho(1 To Ny, 1 To Nx), NLFi(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
ReDim h(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
ReDim B(1 To Ny, 1 To Nx), KX(1 To Ny, 1 To Nx), KY(1 To Ny, 1 To Nx), Kr(1 To Ny, 1 To Nx), kv(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
ReDim Base(1 To Ny, 1 To Nx), Topo(1 To Ny, 1 To Nx), Terreno(1 To Ny, 1 To Nx), S(1 To Ny, 1 To Nx), Sy(1 To Ny, 1 To Nx), n(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
ReDim Basel(1 To Ny, 1 To Nx), Topol(1 To Ny, 1 To Nx), Terrenol(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
ReDim Bl(1 To Ny, 1 To Nx), Kl(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
ReDim vx(1 To Ny, 1 To Nx), vy(1 To Ny, 1 To Nx), vel(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
ReDim g1(1 To Ny, 1 To Nx), g2(1 To Ny, 1 To Nx) As Double
'ReDim Qret(1 To Ny, 1 To Nx) As Double 'vazões extraídas dos nós
ReDim indica(1 To Ny, 1 To Nx, 1 To Npoços) As Integer 'função indicadora de singularidades
ReDim rebaixamento(1 To Nx, 1 To Ny) As Double

'Vetores:
ReDim xp(1 To Npoços), yp(1 To Npoços), Qp(1 To Npoços) As Double 'dados dos poços de exploração
ReDim horariosPoço(1 To Npoços, 2) ' (p, 1) = início bombeamento (p, 2) = fim do bombeamento
ReDim tInicioBB(1 To Npoços), tFimBB(1 To Npoços) As Double 'horários de início e fim do bombeamento do poço

```

'LEITURA DA SUPERFÍCIE FREÁTICA E PIEZOMÉTRICA INICIAL:

```

=====
linha = 2
For i = 1 To Ny
  For j = 1 To Nx
    With Sheets("1")
      x(i, j) = .Cells(linha, 1)
      y(i, j) = .Cells(linha, 2)
      ho(i, j) = .Cells(linha, 5)
      NLFi(i, j) = .Cells(linha, 4)
      linha = linha + 1
    End With
  Next j
Next i

dx = x(1, 2) - x(1, 1)
dy = y(2, 1) - y(1, 1)
xo = x(1, 1)
yo = y(1, 1)

```

'LEITURA DOS DADOS HIDROGEOLÓGICOS:

```

=====
linha = 2
For i = 1 To Ny
  For j = 1 To Nx
    With Sheets("1")
      'Aquifero:
      KX(i, j) = .Cells(linha, 6)
      KY(i, j) = .Cells(linha, 7)
      Kr(i, j) = Sqr((KX(i, j) ^ 2) + (KY(i, j) ^ 2))
      kv(i, j) = .Cells(linha, 8)
      S(i, j) = .Cells(linha, 9)
      Sy(i, j) = .Cells(linha, 10)
      n(i, j) = .Cells(linha, 11)
      Base(i, j) = .Cells(linha, 12)
      Topo(i, j) = .Cells(linha, 13)
      B(i, j) = Topo(i, j) - Base(i, j)
      'Camada confinante:
      'h1(i, j) = Sheets("1").Cells(linha, 14)
      Basel(i, j) = .Cells(linha, 15)
      Topol(i, j) = .Cells(linha, 16)
      Bl(i, j) = Topol(i, j) - Basel(i, j)
      Kl(i, j) = .Cells(linha, 17)
      linha = linha + 1
    End With
  Next j
Next i

```

'LEITURA DOS DADOS DE EXPLOTAÇÃO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA:

```
linha = LINHA1_TABELAS
For poço = 1 To Npoços
  With Sheets("2")
    xp(poço) = .Cells(linha, 2)
    yp(poço) = .Cells(linha, 3)
    Qp(poço) = .Cells(linha, 4)
    tInicioBB(poço) = .Cells(linha, 7)
    tFimBB(poço) = .Cells(linha, 8)

    Set ns = Sheets("1").ChartObjects(1).Chart.SeriesCollection.NewSeries
    ns.Name = "poço" & poço
    Sheets("1").ChartObjects("Malhas").Chart.SeriesCollection(ns.Name).XValues = .Cells(linha, 2)
    Sheets("1").ChartObjects("Malhas").Chart.SeriesCollection(ns.Name).Values = .Cells(linha, 3)

    linha = linha + 1
  End With
Next poço
```

'ATRIBUIÇÃO DAS FUNÇÕES INDICADORAS:

'=====

'Inicialização:

```

For i = 1 To Ny
  For j = 1 To Nx
    For poço = 1 To Npoços
      indica(i, j, poço) = 0 'nós distantes de poços
                            '(apenas p/ iniciar)
    Next poço
  Next j
Next i

```

'Verificando proximidade de poços:

```

For poço = 1 To Npoços
  indx = Int((xp(poço) - xo) / dx) + 1
  indy = Int((yp(poço) - yo) / dy) + 1
  indica(indy, indx, poço) = 1
  indica(indy, indx + 1, poço) = 1
  indica(indy + 1, indx + 1, poço) = 1
  indica(indy + 1, indx, poço) = 1
Next poço

```

'anexação, em planilha, das funções indicadoras:

```

linha = LINHA1_TABELAS
With Sheets("3")
  For i = 1 To Ny
    For j = 1 To Nx
      .Cells(linha, 1) = x(i, j)
      .Cells(linha, 2) = y(i, j)
      For poço = 1 To Npoços
        If (.Cells(linha, 8) <> 1) Then
          .Cells(linha, 8) = indica(i, j, poço)
        End If
      Next poço
      linha = linha + 1
    Next j
  Next i
End With

```

'CONSTRUÇÃO DAS MALHAS RADIAIS ANALÍTICAS:

'OBS: As variáveis relativas às malhas analíticas tem o sufixo 'MA'

```
ReDim xMa(1 To Nrnd, 1 To Npoços), yMa(1 To Nrnd, Npoços) As Double
ReDim hoMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), NLFiMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), _
    hMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços) As Double
ReDim bMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), KxMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), _
    KyMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), KrMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), KvMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços) As Double
ReDim BaseMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), TopoMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), _
    TerrenoMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), SMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), SyMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços) As Double
ReDim rebaixamentoMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços) As Double
ReDim raioMa(1 To Nrnd, 1 To Npoços) As Double
ReDim hlMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), BaselMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), TopolMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), _
    blMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços), klMA(1 To Nrnd, 1 To Npoços) As Double
```

'Atribuição das posições e propriedades dos nós:
raio = Sqr(dx ^ 2 + dy ^ 2) 'raio das malhas

Set ws = Sheets("5")

```
For p = 1 To Npoços
    'Criação da tabela da malha 'p' na planilha 5
    col = ws.Cells(1, 10000).End(xlToLeft).Column
    'ws.Cells(1, col).Value = "Malha Analítica " & p & ":"
    Sheets("CLIPBOARD").Range("A1:S2").Copy Destination:=ws.Cells(1, col)
    tbl = ws.ListObjects(p)
    ws.ListObjects(p).Name = "Tbl_Malha_" & p
    'ws.Cells(2, col + 5).Value = 0
    'ws.Cells(2, col + 5).Name = "porcentagem_" & p
    Set tbl = ws.ListObjects(p)
```

```

'cálculo dos limites da malha radial do poço 'p'
xLimInf = xp(p) - raio
xLimSup = xp(p) + raio
yLimInf = yp(p) - raio
yLimSup = yp(p) + raio

'garantindo que os limites da malha radial estejam dentro das fronteiras
'em X:
If xLimInf < xo Then
    xLimInf = xo
End If
If xLimSup > x(Ny, Nx) Then
    xLimSup = x(Ny, Nx)
End If
'em Y: |
If yLimInf < yo Then
    yLimInf = yo
End If
If yLimSup > y(Ny, Nx) Then
    yLimSup = y(Ny, Nx)
End If

'definindo as posições dos nós aleatórios da malha radial do poço 'p'
'Randomize
For i = 1 To Nrnd
    Randomize
    angulo = 2 * Pi * Rnd
    xMa(i, p) = x(1, Nx) + 1
    yMa(i, p) = y(Ny, 1) + 1

    While (xMa(i, p) > x(1, Nx)) Or (yMa(i, p) > y(Ny, 1)) Or (xMa(i, p) < x(1, 1)) Or (yMa(i, p) < y(1, 1))
        Randomize
        raioMa(i, p) = raio * Rnd
        xMa(i, p) = xp(p) + raioMa(i, p) * Cos(angulo)
        yMa(i, p) = yp(p) + raioMa(i, p) * Sin(angulo)
    Wend

'identificação da célula onde o nó 'i' está inserido
indx = Int((xMa(i, p) - xo) / dx) + 1
indy = Int((yMa(i, p) - yo) / dy) + 1

```

```

'interpolando os dados hidrogeológicos do nó 'i'
'Aquífero:
KxMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    KX(indy, indx), KX(indy + 1, indx), KX(indy + 1, indx + 1), KX(indy, indx + 1))
KyMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    KX(indy, indx), KX(indy + 1, indx), KX(indy + 1, indx + 1), KX(indy, indx + 1))
KrMA(i, p) = Sqr((KxMA(i, p) ^ 2) + (KyMA(i, p) ^ 2))
KvMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    kv(indy, indx), kv(indy + 1, indx), kv(indy + 1, indx + 1), kv(indy, indx + 1))
SMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    S(indy, indx), S(indy + 1, indx), S(indy + 1, indx + 1), S(indy, indx + 1))
SyMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    Sy(indy, indx), Sy(indy + 1, indx), Sy(indy + 1, indx + 1), Sy(indy, indx + 1))
BaseMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    Base(indy, indx), Base(indy + 1, indx), Base(indy + 1, indx + 1), Base(indy, indx + 1))
TopoMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    Topo(indy, indx), Topo(indy + 1, indx), Topo(indy + 1, indx + 1), Topo(indy, indx + 1))
bMA(i, p) = TopoMA(i, p) - BaseMA(i, p)
hoMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    ho(indy, indx), ho(indy + 1, indx), ho(indy + 1, indx + 1), ho(indy, indx + 1))
NLFiMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    NLFi(indy, indx), NLFi(indy + 1, indx), NLFi(indy + 1, indx + 1), NLFi(indy, indx + 1))
'Camada confinante:
BaselMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    Basel(indy, indx), Basel(indy + 1, indx), Basel(indy + 1, indx + 1), Basel(indy, indx + 1))
TopolMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    Topol(indy, indx), Topol(indy + 1, indx), Topol(indy + 1, indx + 1), Topol(indy, indx + 1))
blMA(i, p) = TopolMA(i, p) - BaselMA(i, p)
klMA(i, p) = interpolBilinear(xMa(i, p), yMa(i, p), x(indy, indx), y(indy, indx), x(indy, indx + 1), y(indy + 1, indx), _
    Kl(indy, indx), Kl(indy + 1, indx), Kl(indy + 1, indx + 1), Kl(indy, indx + 1))

'anexação, em planilha, da posição e propriedades do nó 'i' da malha do poço 'p'
With ws.ListObjects(p)
    .DataBodyRange(i, 1) = xMa(i, p)
    .DataBodyRange(i, 2) = yMa(i, p)
    .DataBodyRange(i, 3) = NLFiMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 4) = hoMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 5) = KxMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 6) = KyMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 7) = KvMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 8) = SMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 9) = SyMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 10) = BaseMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 11) = TopoMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 12) = BaselMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 13) = TopolMA(i, p)
    .DataBodyRange(i, 14) = klMA(i, p)

    If i < Nrnd Then
        .ListRows.Add AlwaysInsert:=True
    End If
End With
Next i 'próximo nó aleatório 'i'

Set ns = Sheets("1").ChartObjects(1).Chart.SeriesCollection.NewSeries
ns.Name = "Malha" & p
Sheets("1").ChartObjects("Malhas").Chart.SeriesCollection(ns.Name).XValues = ws.ListObjects(p).ListColumns(1).DataBodyRange
Sheets("1").ChartObjects("Malhas").Chart.SeriesCollection(ns.Name).Values = ws.ListObjects(p).ListColumns(2).DataBodyRange
Next p 'próximo poço 'p'

```


'CÁLCULO DA SUPERFÍCIE FREÁTICA:

'=====

'Malhas radiais analíticas:

For p = 1 To Npoços 'malha radial 'p'

For i = 1 To Nrnd 'nó 'i' da malha 'p'

For k = 1 To Npoços 'malha radial 'k'

'distância entre o nó 'i' da malha 'p' e o poço da malha 'k'

r = distancia(xMa(i, p), yMa(i, p), xp(k), yp(k))

'(se a malha 'k' não é a malha 'p' original do nó 'i') E (se o nó 'i' da malha 'p' está sob influência da malha 'k')

If (k <> p) And (r <= raio) Then

'se 'Verdadeiro' => poço em funcionamento, permite cálculo analítico do rebaixamento em relação ao poço da malha 'k'

If bombeamento(hora, tInicioBB(k), tFimBB(k)) = True Then

'Verificando tipo de aquífero e definindo a função de poço 'Wf' adequada:

If hoMA(i, p) = TopoMA(i, p) Then 'Aquífero livre => função de Neuman

Wf = Wne(dt, r, KrMA(i, p), KvMA(i, p), SyMA(i, p), SMA(i, p), bMA(i, p))

ElseIf hoMA(i, p) > TopoMA(i, p) And k1MA(i, p) > 0 Then 'Aquífero semiconfinado => função de Hantush

Wf = Wht(dt, r, KrMA(i, p), SMA(i, p), bMA(i, p), k1MA(i, p), b1MA(i, p))

ElseIf hoMA(i, p) > TopoMA(i, p) And k1MA(i, p) = 0 Then 'Aquífero confinado => função de Theis

Wf = Wth(dt, r, KrMA(i, p), SMA(i, p), bMA(i, p))

End If

'soma ao rebaixamento do nó 'i' da malha 'p' a parcela relativa ao poço da malha 'k'

rebaixamentoMA(i, p) = rebaixamentoMA(i, p) + Qp(k) / (4 * Pi * KrMA(i, p) * bMA(i, p)) * Wf

End If

End If

Next k 'próxima malha 'k'

```

'se 'Verdadeiro' => poço em funcionamento, permite cálculo analítico do rebaixamento em relação ao poço da sua malha original 'p'
If bombeamento(hora, tInicioBB(p), tFimBB(p)) = True Then

    r = distancia(xMa(i, p), yMa(i, p), xp(p), yp(p)) 'distância entre o nó 'i' e o poço da sua própria malha 'p'

    'Verificando tipo de aquífero e definindo a função de poço 'Wf' adequada:
    If hoMA(i, p) = TopoMA(i, p) Then 'Aquífero livre => função de Neuman
        Wf = Wne(dt, r, KrMA(i, p), KvMA(i, p), SyMA(i, p), SMA(i, p), bMA(i, p))
    ElseIf hoMA(i, p) > TopoMA(i, p) And klMA(i, p) > 0 Then 'Aquífero semiconfinado => função de Hantush
        Wf = Wht(dt, r, KrMA(i, p), SMA(i, p), bMA(i, p), klMA(i, p), blMA(i, p))
    ElseIf hoMA(i, p) > TopoMA(i, p) And klMA(i, p) = 0 Then 'Aquífero confinado => função de Theis
        Wf = Wth(dt, r, KrMA(i, p), SMA(i, p), bMA(i, p))
    End If

    'soma ao rebaixamento do nó 'i' a parcela relativa ao poço da sua malha original 'p'
    rebaixamentoMA(i, p) = rebaixamentoMA(i, p) + Qp(p) / (4 * Pi * KrMA(i, p) * bMA(i, p)) * Wf
    hMA(i, p) = hoMA(i, p) - rebaixamentoMA(i, p) 'cálculo de h no nó 'i'

End If

'nova espessura e atualização da cota do topo do aquífero:
If (hoMA(i, p) = TopoMA(i, p)) And (hMA(i, p) > TopoMA(i, p)) Then 'Se h subir e aquífero for livre
    TopoMA(i, p) = hMA(i, p)
    bMA(i, p) = TopoMA(i, p) - BaseMA(i, p)
ElseIf hMA(i, p) <= TopoMA(i, p) Then 'Se h descer
    TopoMA(i, p) = hMA(i, p)
    bMA(i, p) = TopoMA(i, p) - BaseMA(i, p)
End If

If (bMA(i, p) <= 0) Then
    bMA(i, p) = 0.1
End If

Next i 'próximo nó 'i' da malha 'p'

Next p 'próxima malha 'p'

```

```

'Malha Numérica:
  For i = 1 To Ny

    For j = 1 To Nx
      longeDeSing = True 'assume o nó longe de singularidade

      For p = 1 To Npoços

        If (indica(i, j, p) = 1) Then 'indica que o nó (i,j) está próximo a poço 'p'
          longeDeSing = False 'se 'Falso' => nó perto de pelo menos um poço, evita cálculo numérico de h nesse nó

          'se 'Verdadeiro' => poço em funcionamento, permite cálculo analítico de h
          If bombeamento(hora, tInicioBB(p), tFimBB(p)) = True Then
            r = Sqr((xp(p) - x(i, j)) ^ 2 + (yp(p) - y(i, j)) ^ 2) 'distância do nó ao poço
            r = distancia(x(i, j), y(i, j), xp(p), yp(p))
            'Verificando tipo de aquífero e definindo a função de poço 'Wf' adequada:
            If ho(i, j) = Topo(i, j) Then 'Aquífero livre => função de Neuman
              Wf = Wne(dt, r, Kr(i, j), kv(i, j), Sy(i, j), S(i, j), B(i, j))
            ElseIf ho(i, j) > Topo(i, j) And Kl(i, j) > 0 Then 'Aquífero semiconfinado => função de Hantush
              Wf = Wht(dt, r, Kr(i, j), S(i, j), B(i, j), Kl(i, j), Bl(i, j))
            ElseIf ho(i, j) > Topo(i, j) And Kl(i, j) = 0 Then 'Aquífero confinado => função de Theis
              Wf = Wth(dt, r, Kr(i, j), S(i, j), B(i, j))
            End If

            'Cálculo do rebaixamento e h:
            rebaixamento(i, j) = rebaixamento(i, j) + Qp(p) / (4 * Pi * Kr(i, j) * B(i, j)) * Wf
            h(i, j) = ho(i, j) - rebaixamento(i, j)

          End If

        End If

      End If

    Next p
  
```

```

'se 'Verdadeiro', significa que o nó está longe de todos os poços, permitindo o cálculo numérico de h nesse nó
If longeDeSing = True Then

    'termo difusivo em X:
    If (j > 1 And j < Nx) Then 'nós internos
        difx = KX(i, j) * B(i, j) * (ho(i, j + 1) - 2 * ho(i, j) + ho(i, j - 1)) / dx ^ 2
    ElseIf (j = 1) Then 'fronteira oeste
        hfronteira = 2 * ho(i, j) - ho(i, j + 1)
        difx = KX(i, j) * B(i, j) * (ho(i, j + 1) - 2 * ho(i, j) + hfronteira) / dx ^ 2
    ElseIf (j = Nx) Then 'fronteira leste
        hfronteira = 2 * ho(i, j) - ho(i, j - 1)
        difx = KX(i, j) * B(i, j) * (hfronteira - 2 * ho(i, j) + ho(i, j - 1)) / dx ^ 2
    End If

    'termo difusivo em Y:
    If (i > 1 And i < Ny) Then 'nós internos
        dify = KY(i, j) * B(i, j) * (ho(i + 1, j) - 2 * ho(i, j) + ho(i - 1, j)) / dy ^ 2
    ElseIf (i = 1) Then 'fronteira sul
        hfronteira = 2 * ho(i, j) - ho(i + 1, j)
        dify = KY(i, j) * B(i, j) * (ho(i + 1, j) - 2 * ho(i, j) + hfronteira) / dy ^ 2
    ElseIf (i = Ny) Then 'fronteira norte
        hfronteira = 2 * ho(i, j) - ho(i - 1, j)
        dify = KY(i, j) * B(i, j) * (hfronteira - 2 * ho(i, j) + ho(i - 1, j)) / dy ^ 2
    End If

    'recarga direta:
    gl(i, j) = recarga_direta
    'exploração de água pelos poços:
    'Ainf = dx * dy
    'g2(i, j) = Qret(i, j) / Ainf

    'esquema temporal: Euler
    h(i, j) = ho(i, j) + dt / Sy(i, j) * (difx + dify + gl(i, j)
    ' - g2(i, j))
End If

'nova espessura e atualização da cota do topo do aquífero:
If (ho(i, j) = Topo(i, j)) And (h(i, j) > Topo(i, j)) Then 'Se h subir e aquífero for livre
    Topo(i, j) = h(i, j)
    B(i, j) = Topo(i, j) - Base(i, j)
ElseIf h(i, j) <= Topo(i, j) Then 'Se h descer
    Topo(i, j) = h(i, j)
    B(i, j) = Topo(i, j) - Base(i, j)
End If

If (B(i, j) <= 0) Then
    B(i, j) = 0.1
End If

Next j

Next i

```

'VELOCIDADE DE PERCOLAÇÃO DA ÁGUA SUBTERRÂNEA:

```

'=====
For i = 1 To Ny
  For j = 1 To Nx
    'na direção x:
    If (j > 1 And j < Nx) Then 'diferenças centradas
      vx(i, j) = -KX(i, j) * (h(i, j + 1) - h(i, j - 1)) / (2 * dx * Sy(i, j))
    ElseIf (j = 1) Then 'diferenças progressivas
      vx(i, j) = -KX(i, j) * (h(i, j + 1) - h(i, j)) / (1 * dx * Sy(i, j))
    ElseIf (j = Nx) Then 'diferenças regressivas
      vx(i, j) = -KX(i, j) * (h(i, j) - h(i, j - 1)) / (1 * dx * Sy(i, j))
    End If
    'na direção y:
    If (i > 1 And i < Ny) Then 'diferenças centradas
      vy(i, j) = -KY(i, j) * (h(i + 1, j) - h(i - 1, j)) / (2 * dy * Sy(i, j))
    ElseIf (i = 1) Then 'diferenças progressivas
      vy(i, j) = -KY(i, j) * (h(i + 1, j) - h(i, j)) / (1 * dy * Sy(i, j))
    ElseIf (i = Ny) Then 'diferenças regressivas
      vy(i, j) = -KY(i, j) * (h(i, j) - h(i - 1, j)) / (1 * dy * Sy(i, j))
    End If
    'velocidade resultante:
    vel(i, j) = Sqr(vx(i, j) ^ 2 + vy(i, j) ^ 2)
  Next j
Next i

```

```
'SAÍDA DOS RESULTADOS NA PLANILHA E ATUALIZAÇÃO DE DADOS:
'=====
```

```
Bmáx = -1000
Bmín = 100000
```

```
'Malha numérica
Set ws = Sheets("6")
```

```
For i = 1 To Ny
  For j = 1 To Nx
    If (nível Mod 1 = 0) Then
      With ws.ListObjects("saida6")
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 1) = t + dt
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 2) = nível
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 3) = x(i, j)
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 4) = y(i, j)
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 5) = h(i, j)
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 6) = B(i, j)
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 7) = vx(i, j)
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 8) = vy(i, j)
        .DataBodyRange(linha_tab_6, 9) = vel(i, j)
      For poço = 1 To Npoços
        If (.DataBodyRange(linha_tab_6, 10) <> 1) Then
          .DataBodyRange(linha_tab_6, 10) = indica(i, j, poço)
        End If
      Next poço
    End With
    linha_tab_6 = linha_tab_6 + 1
  End If

  'atualização da cota freática
  ho(i, j) = h(i, j)

  'cálculo da espessura máxima:
  If (B(i, j) > Bmáx) Then
    Bmáx = B(i, j)
  End If

  'cálculo da espessura mínima:
  If (B(i, j) < Bmín) Then
    Bmín = B(i, j)
  End If

  'superfície freática no Excel:
  Sheets("4").Cells(i, j) = h(i, j)

Next j
Next i
```

```
'Malhas analíticas
Set ws = Sheets("7")
```

```
For p = 1 To Npoços
```

```
  'ws.Range("porcentagem_" & p).Value = t / horizonte_simulação * 100
  For i = 1 To Nrnd
```

```
    'fim_tabela = ws.Cells(1000000, 1).End(xlUp).Row + 1
    If (nível Mod 1 = 0) Then
      With ws.ListObjects("saida7")
        .DataBodyRange(linha_tab_7, 1) = p
        .DataBodyRange(linha_tab_7, 2) = t + dt
        .DataBodyRange(linha_tab_7, 3) = nível
        .DataBodyRange(linha_tab_7, 4) = xMa(i, p)
        .DataBodyRange(linha_tab_7, 5) = yMa(i, p)
        .DataBodyRange(linha_tab_7, 6) = hMA(i, p)
        .DataBodyRange(linha_tab_7, 7) = bMA(i, p)
      End With
      linha_tab_7 = linha_tab_7 + 1
    End If
  'atualização da cota freática
  hoMA(i, p) = hMA(i, p)
  'cálculo da espessura máxima:
  If bMA(i, p) > Bmáx Then
    Bmín = bMA(i, p)
  End If
  'cálculo da espessura mínima:
  If bMA(i, p) < Bmín Then
    Bmín = bMA(i, p)
  End If
Next i
```

```
Next p
```

```
With Sheets("3")
  .Cells(nível + 2, 10) = nível
  .Cells(nível + 2, 11) = Bmáx
  .Cells(nível + 2, 12) = Bmín
  .Cells(1, 15) = t / horizonte_simulação * 100
End With
```

```
t = t + dt
nível = nível + 1
DoEvents
Loop Until (t >= hs)
```

```
With Sheets("1").Cells(3, 18)
  .Value = Now
  .NumberFormat = "d/m/yyyy h:mm:ss AM/PM"
End With
```

```
End Sub
```

APÊNDICE E – ALGORITMOS AUXILIARES

```

Public Function FatorialR(ByVal iValor As Integer)

'Função fatorial de um número inteiro:
  If ((iValor = 0) Or (iValor = 1)) Then
    FatorialR = 1
  Else
    FatorialR = FatorialR(iValor - 1) * iValor
  End If

End Function

```

```

Public Function distancia(xa, ya, xb, yb) As Double

'Função distância entre os pontos A(xa, ya) e B(xb, yb):
  distancia = Sqr((xa - xb) ^ 2 + (ya - yb) ^ 2)

End Function

```

```

Public Function bombeamento(hora, h1, h2) As Boolean

'Função que indica bombeamento ligado (True) ou desligado (False):
  If (hora >= h1 And hora < h2) Or h1 = h2 Then
    bombeamento = True
  Else: bombeamento = False
  End If

End Function

```

```

Public Function interpolBilinear(x, y, X1, Y1, X2, Y2, Z1, Z2, Z3, Z4) As Double

'Função de interpolação bilinear:

'Interpolação linear na direção x:
  f1 = (X2 - x) / (X2 - X1) * Z1 + (x - X1) / (X2 - X1) * Z4
  f2 = (X2 - x) / (X2 - X1) * Z2 + (x - X1) / (X2 - X1) * Z3
'Interpolação linear na direção y:
  f3 = (Y2 - y) / (Y2 - Y1) * f1 + (y - Y1) / (Y2 - Y1) * f2
  interpolBilinear = f3

End Function

```

```
Function sinh(x)

'Função seno-hiperbólico:
sinh = (Exp(x) - Exp(-x)) / 2

End Function


---


Function cosh(x)

'Função cosseno-hiperbólico:
cosh = (Exp(x) + Exp(-x)) / 2

End Function


---


Function Jo(x)

'Função de Bessel de primeira espécie e ordem zero:
Pi = 3.141592654
infinito = 80
If (x <= 35) Then
  soma = 1
  For n = 1 To infinito
    soma = soma + (-1) ^ n * x ^ (2 * n) / (2 ^ (2 * n) * (FatorialR(n)) ^ 2)
  Next
  Jo = soma
Else
  Jo = Sqr(2 / (Pi * x)) * Sin(x + Pi / 4)
End If

End Function
```