Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Matemática - FAMAT
Coordenação dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

ALGUMAS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO COMPLEXA GAMA

ARIEL DE OLIVEIRA MONÇÃO

UBERLÂNDIA - MG
2019

ARIEL DE OLIVEIRA MONÇÃO

Algumas propriedades da função complexa gama

Monografia apresentada à Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Mario Henrique de Castro.

UBERLÂNDIA - MG
2019

ARIEL DE OLIVEIRA MONÇÃO

Algumas propriedades da função complexa gama

Monografia apresentada à Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Mario Henrique de Castro.

Trabalho aprovado. Uberlândia - MG, 16 de dezembro de 2019.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mario Henrique de Castro
orientador

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro

UBERLÂNDIA - MG
2019

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo.

Agradeço ao meu pai, Claurindo F. Monção, à minha mãe, Antônia Izabel P. de Oliveira, e aos meus irmãos, Jonas e Silas, por sempre estarem me apoiando quando necessário.

Agradeço a todos os colegas da graduação, certamente contribuíram para minha formação. Em especial, aos que são da minha turma de bacharelado, Alexandre Suzuki, Leonardo Silva, Lucas Damaso e Mateus Marra.

Agradeço ao professor Mario H. de Castro por ter me orientado durante dois anos e meio.

Agradeço aos docentes da FAMAT que foram meus professores.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram no decorrer da minha formação acadêmica. Foram muitos!

Resumo

Neste trabalho definimos a função complexa *gama* e demonstramos algumas de suas propriedades. Para isso, resultados de espaços métricos e tópicos em análise complexa, com foco nas funções analíticas e meromorfas, serão abordados.

palavras-chave: análise complexa, função analítica, função gama, função meromorfa.

Abstract

In this work we define the *gamma* complex function and we prove some of its properties. In order to do that, we study some results of metric spaces and topics in complex analysis with emphasis analytic and meromorfic functions.

keywords: complex analysis, analytic function, gamma function, meromorphic function.

Sumário

1 Introdução

Os números complexos começaram a ser estudados por volta do século XVI com grande contribuição do matemático Girolamo Cardano (1501–1576). Os matemáticos, até então, não aceitavam a possibilidade de um número ao quadrado ser um número negativo. Com a admissão, vários resultados foram descobertos e demonstrados. Leonard Euler (1707-1783), no século XVIII, começou a estabelecer uma estrutura algébrica para os números complexos. Ainda no século XVIII, Carl F. Gauss (1777-1855) demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra, mostrando que qualquer equação polinomial de grau maior do que zero com coeficientes complexos tem soluções complexas.

A função gama de Euler surgiu em 1730 com a intenção de fazer uma extensão do fatorial para valores não inteiros positivos. Algumas de suas aplicações são feitas na teoria das probabilidades, estatística e mecânica quântica. A definição a seguir, adotada em [1], é graças ao matemático Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897): A função gama, denotada por Γ, é a função meromorfa em $\mathbb{C}$, com polos simples em $0, -1, -2, \ldots$, definida por

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n},$$

onde γ, chamada constante de Euler, é escolhida de modo que $\Gamma(1) = 1$.

Mostra-se que a constante de Euler é dada por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Uma pergunta imediata é se esse limite existe. Outra é: como definir um produto de infinitos fatores?

Uma outra forma de expressar a função gama é dada pela Fórmula de Gauss: Para $z \neq 0, -1, \ldots$, vale

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Com essa fórmula conclui-se que $\Gamma(n+1) = n!$, para qualquer natural n. Sendo assim, é imediato considerarmos a extensão do fatorial para os números complexos da seguinte maneira: Para $z \neq -1, -2, \ldots$, designamos

$$z! := \Gamma(z+1).$$

A representação por integral, válida no semiplano positivo, pode facilitar o cálculo de algumas integrais: Se $\operatorname{Re} z > 0$, então

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Evidentemente, é necessário um estudo de resultados preliminares para conseguir compreender as propriedades de tal função. Esta é nossa intenção, estudar alguns tópicos de análise complexa. Mais especificamente, introduziremos as funções analíticas e meromorfas, e veremos alguns teoremas importantes dessa área da matemática. Dos resultados que apresentaremos sobre funções analíticas destaca-se o Teorema da Fatoração de Weierstrass, que diz que qualquer função analítica pode ser escrita como produto infinito. Para funções meromorfas teremos um resultado que garante que qualquer função meromorfa pode ser escrita como um quociente de funções analíticas. Veremos também que para duas funções analíticas numa região serem iguais é necessário e suficiente verificar que elas são iguais em um conjunto que tenha ponto de acumulação. Isso será útil para mostrar a expressão integral da função gama. Para isso, conceitos e teoremas de espaços métricos e análise real serão essenciais.

2 Preliminares

Algumas definições e teoremas serão apresentados a seguir. Admitimos que são conhecidas algumas noções de análise real e análise complexa.

2.1 Espaços euclidianos

Abordagens mais detalhadas sobre o $\mathbb{R}^n$ pode ser encontrada em [3, 4].

Definição 2.1.1: *Para cada inteiro positivo n, seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n-uplas ordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são as coordenadas de x. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são ditos pontos ou vetores. Para $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos*

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Definimos também o produto interno (produto escalar) de x e y por

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

e a norma de x por

$$|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 2.1.2: *Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:*

(a) $|\alpha x| = |\alpha||x| \geq 0$;

(b) $|x| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(c) $|x \cdot y| \leq |x||y|$;

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(e) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Consequentemente, $\mathbb{R}^n$ torna-se um espaço vetorial normado com produto interno sobre $\mathbb{R}$.

2.2 Números complexos

Utilizamos a referência [1] para tratar dos números complexos.

Definição 2.2.1: *O conjunto dos números complexos é o conjunto $\mathbb{C} = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$, onde a adição e a multiplicação são definidas, respectivamente, por:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

As operações aritméticas nos segundos membros dessas igualdades é feita em $\mathbb{R}$. Com essas operações definidas, vê-se que $\mathbb{C}$ é um corpo, ou seja, satisfaz as leis associativa, comutativa e distributiva para a adição e a multiplicação; $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são os elementos neutros da adição e multiplicação, respectivamente; cada elemento diferente de $(0, 0)$ tem inverso multiplicativo em $\mathbb{C}$.

Escreveremos a para denotar o número complexo $(a, 0)$. Assim, a aplicação $a \mapsto (a, 0)$ define um isomorfismo de $\mathbb{R}$ em um subespaço de $\mathbb{C}$, possibilitando-nos considerar $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$. Fazendo $i = (0, 1)$ e bi para o número complexo $(0, b)$ (bi é dito imaginário puro), então $(a, b) = a + bi$. Dessa forma, podemos escrever $\mathbb{C} = \{a + bi \colon a, b \in \mathbb{R}\}$.

Observação 2.2.2: *A equação de segundo grau $x^2 + 1 = 0$, onde x é um número real, não tem solução real, pois, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que x^2 seja negativo. Entretanto, em $\mathbb{C}$ temos $i^2 = (-1, 0) = -1$. Com isso, a equação $z^2+1 = 0$, onde z é um número complexo, tem soluções complexas $z = \pm i$. No caso mais geral, o Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado pelo matemático alemão Carl F. Gauss em sua tese de doutorado, estabelece que qualquer equação polinomial de grau maior do que zero com coeficientes em $\mathbb{C}$ tem soluções complexas. Por isso, diz-se que $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.*

Plano complexo

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Chamamos $\operatorname{Re} z = a$ de parte real de z, e $\operatorname{Im} z = b$ de parte imaginária de z. Assim, o número complexo z é identificado de maneira biunívoca com o par ordenado $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, chamado de representação geométrica de z. Da Definição 2.2.1, a adição em $\mathbb{C}$ tem a mesma lei da adição vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Associamos a z um número complexo $\overline{z} = a - bi$, dito conjugado de z. Se $z \neq 0$, então $z\overline{z}$ é um número real positivo. De fato, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ implica

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Como a divisão é multiplicar pelo inverso multiplicativo da estrutura de corpo de $\mathbb{C}$, se $w = c + di \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos uma maneira prática de fazer a divisão:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Definição 2.2.3: *Definimos o módulo de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como sendo o número real*

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Desse modo, o módulo de z é igual ao comprimento do vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.2.4: *Sejam $w, z \in \mathbb{C}$. Então*

(a) $|z| \geq 0$ *e* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(b) $\overline{\overline{z}} = z$, $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ *e* $z - \overline{z} = 2 \operatorname{Im} z$;

(c) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *e* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;

(d) $|zw| = |z||w|$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *e* $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$;

(e) (Desigualdade Triangular) $|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$.

Representação polar

Seja $z = a + bi \neq 0$ no plano complexo. Chamemos de θ o ângulo formado, no sentido anti-horário, pelo segmento formado de 0 a z e o eixo real positivo. Este ângulo θ é chamado de argumento de z ($0 \in \mathbb{C}$ não tem argumento) e o denotaremos por $\theta = \arg z$. Também é argumento de z o ângulo $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Fazendo $|z| = r$, temos

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Se $z = 0$, então $|z| = r = 0$ e, por abuso de notação, podemos escrever $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Assim, (r, θ) é a coordenada polar de qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Dados os números complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$, temos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)).$$

Por indução, para $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\,\mathrm{sen}\,\theta_k)$, $1 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$,

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n(\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \cdots + \theta_n)).$$

Em particular, se $z_1 = \cdots = z_n = z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, então

$$z_1 \cdots z_n \coloneqq z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta). \tag{1}$$

Além disso, se $z \neq 0$, então $z(r^{-1}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(-\theta))) = 1$, ou seja, a Equação (1) estende-se para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Quando $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, chamamos $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$ de Fórmula de De Moivre.

Seja $z \in \mathbb{C}$. Todo número complexo w tal que $w^n = z$, com $n \geq 2$, é chamado de raiz n-ésima de z. Denotaremos $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$. Para determinar w, façamos $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $w = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$. Devemos ter

$$r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = (\rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi).$$

Logo, $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ e $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. De modo que

$$w = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0,\ldots,n-1.$$

Ou seja, existem n raízes n-ésimas para cada número complexo diferente de 0.

Plano estendido

Muitas vezes é bom introduzir o plano estendido $\mathbb{C}_\infty \coloneqq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, pois possibilita estudar funções com valores no infinito. Se $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ e $N = (0, 0, 1) \in S^2$, então podemos identificar de maneira biunívoca os pontos de S^2 com os pontos de $\mathbb{C}_\infty$ através da função $\pi \colon S^2 \to \mathbb{C}_\infty$ definida por

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right) \quad \text{se } (x_1, x_2, x_3) \neq N, \quad \text{e} \quad \pi(N) = \infty,$$

cuja inversa $\pi^{-1} \colon \mathbb{C}_\infty \to S^2$ é dada por

$$\pi^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}\right) \quad \text{se } (a, b) \in \mathbb{C}, \quad \text{e} \quad \pi^{-1}(\infty) = N.$$

2.3 Espaços métricos

Agora, veremos uma parte essencial para a compreensão deste trabalho. Apresentaremos vários resultados, que podem ser encontrados em [1, 2, 4], em que $\mathbb{C}$ é um caso particular.

Definição 2.3.1: *Um conjunto X é um espaço métrico se a cada dois pontos (elementos) p e q de X pudermos associar um número real $d(p,q)$, distância de p e q, tal que*

(a) $d(p,q) > 0$ *se* $p \neq q$, *e* $d(p,p) = 0$;

(b) $d(p,q) = d(q,p)$;

(c) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$, *para qualquer* $r \in X$.

Denotamos (X,d) para designar que X é um espaço métrico com métrica d.

Observação 2.3.2: *Quando não houver possibilidade de confusão, dizemos apenas que X é um espaço métrico, deixando subtendido qual é a métrica. É claro que todo subconjunto de um espaço métrico é um espaço métrico com a mesma função métrica restrita a esse subconjunto.*

Exemplo 2.3.3: *Podemos ver que os espaços euclidianos são espaços métricos, especialmente a reta real $\mathbb{R}^1$ e o plano real $\mathbb{R}^2$ (que está relacionado com o plano complexo $\mathbb{C}$). Uma distância em $\mathbb{R}^n$ pode ser definida por $d(x,y) = |x-y|$, com $x, y \in \mathbb{R}^n$, já que satisfaz as condições da Definição 2.3.1. De fato, segue do Teorema 2.2.4 que $d(z,w) = |z-w|$, com $z, w \in \mathbb{C}$, define uma métrica em $\mathbb{C}$. É fácil ver que as funções $d_1(x+iy, a+ib) = |x-a| + |y-b|$ e $d_2(x+iy, a+ib) = \max\{|x-a|, |y-b|\}$ também são métricas em $\mathbb{C}$.*

Exemplo 2.3.4: *Para definir uma distância em $\mathbb{C}_\infty$, fazemos, para $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ e $z' = (a',b') \in \mathbb{C}$,*

$$d(z,z') = |\pi^{-1}(z) - \pi^{-1}(z')| = \frac{2|z-z'|}{((1+|z|^2)(1+|z'|^2))^{\frac{1}{2}}},$$

e

$$d(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dessa forma, $\mathbb{C}_\infty$ é um espaço métrico com a métrica d.

Definição 2.3.5: *Seja (X,d) um espaço métrico. Todos os pontos e conjuntos que serão mencionados são elementos e subconjuntos de X.*

(a) A bola aberta de raio $r > 0$ de centro num ponto p é definida como $B_r(p) = \{q \in X\colon d(p,q) < r\}$.

(b) Um ponto p é ponto de acumulação de um conjunto E se toda vizinhança de p contém um ponto $q \neq p$ tal que $q \in E$.

(c) Se $p \in E$ e p não é ponto de acumulação de E, p é dito ponto isolado de E.

(d) E é fechado se todo ponto de acumulação de E está em E.

(e) Um ponto p é ponto interior de E se existe uma vizinhança B de p tal que $B \subset E$.

(f) Se todo ponto de E é ponto interior de E, dizemos que E é aberto.

(g) O complemento de E é o conjunto $E^c = \{p \in X\colon p \notin E\}$.

(h) E é limitado se existe $M \in \mathbb{R}$ e um ponto $q \in X$ tal que $d(p,q) < M$, para todo $p \in E$.

(i) E é denso em X se todo ponto de X é ponto de acumulação de E ou é ponto de E.

(j) Denotamos por E' o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto E, chamado de derivado de E.

(k) A aderência de E é o conjunto $\overline{E} = E \cup E'$.

Definição 2.3.6: *O conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_i \leq x_i \leq b_i,\, i = 1, \dots, n\}$, onde $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, é chamado n-paralelepípedo.*

Dizemos que $E \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in E$, sempre que $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \lambda < 1$.

Exemplo 2.3.7: *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, a bola aberta com centro em x e raio r é $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < r\}$. A bola fechada com centro em x e raio r é $\overline{B_r}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| \leq r\}$. As bolas abertas são convexas. De fato, se $|y-x| < r$, $|z-x| < r$ e $0 < \lambda < 1$, temos $|\lambda y + (1-\lambda)z - x| = |\lambda(y-x) + (1-\lambda)(z-x)| \leq \lambda|y-x| + (1-\lambda)|z-x| < r$. Com o mesmo raciocínio conclui-se que as bolas fechadas e os n-paralelepípedos são convexos.*

Teorema 2.3.8: *Toda bola aberta é um conjunto aberto.*

Teorema 2.3.9: *Toda vizinhança de p, ponto de acumulação de um conjunto E, contém uma infinidade de pontos de E.*

Teorema 2.3.10: *Um conjunto E é aberto se, e somente se, E^c é fechado.*

Teorema 2.3.11: *O derivado de E é fechado.*

Teorema 2.3.12: *A aderência de E é um conjunto fechado e se $E \subset F$ e F é fechado, então $\overline{E} \subset F$.*

Teorema 2.3.13: *(a) Se $\{G_\alpha\}$ é uma coleção de conjuntos abertos, então $\cup_\alpha G_\alpha$ é aberto.*

(b) Se $\{F_\alpha\}$ é uma coleção de conjuntos fechados, então $\cap_\alpha F_\alpha$ é fechado.

(c) Se $G_1, \dots, G_n$ é uma coleção de conjuntos abertos, então $\cap_{i=1}^n G_i$ é aberto.

(d) Se $F_1, \dots, F_n$ é uma coleção de conjuntos fechados, então $\cup_{i=1}^n F_i$ é fechado.

Conjuntos compactos

Definição 2.3.14: *Uma cobertura aberta de um conjunto E em um espaço métrico X é uma coleção $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abertos de X tais que $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$.*

Definição 2.3.15: *Um subconjunto K de um espaço métrico X é compacto se toda cobertura aberta de K contém uma subcobertura finita. Isto é, se $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \Lambda$, é uma cobertura aberta de K, então existem índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ tais que $K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$.*

Teorema 2.3.16: *Sejam $K \subset Y \subset X$. Então K é compacto em X se, e somente se, K é compacto em Y.*

O Teorema 2.3.16 nos proporciona, em muitos casos, considerar os conjuntos compactos como espaços métricos, sem se preocupar com o espaço métrico em que estão contidos.

Teorema 2.3.17: *Subconjuntos compactos de espaços métricos são fechados.*

Demonstração: Sejam X um espaço métrico e $K \subset X$ compacto. Mostremos que $K^c \subset X$ é aberto. Seja $p \in K^c$. Se $q \in K$, sejam V_q e W_q bolas abertas de contros p e q, respectivamente, de raios menores que $\frac{1}{2}d(p,q)$. Como K é compacto, existem pontos $q_1, \ldots, q_n \in K$ tais que $K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W$. Se $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$, então V é uma bola aberta com centro p sem pontos comuns com W. Portanto, $V \subset K^c$ e p é ponto interior de K^c. ■

Teorema 2.3.18: *Subconjuntos fechados de conjuntos compactos são compactos.*

Corolário 2.3.19: *Se F é fechado e K é compacto, então $F \cap K$ é compacto.*

Teorema 2.3.20: *Se $\{K_\alpha\}$ é uma coleção de subconjuntos compactos de um espaço métrico X tal que toda subcoleção finita de $\{K_\alpha\}$ tem interseção não vazia, então $\cap_\alpha K_\alpha$ não é vazio.*

Teorema 2.3.21: *Sejam K compacto e $E \subset K$ infinito. Então E' não é o conjunto vazio.*

Teorema 2.3.22: *Todo n-paralelepípedo é compacto.*

A equivalência entre (a) e (b) no teorema a seguir é conhecida como Teorema de Heine-Borel.

Teorema 2.3.23: *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) E é fechado e limitado.

(b) E é compacto.

(c) Todo subconjunto infinito de E tem ponto de acumulação em E.

Demonstração: Se (a) é válido, então E é limitado, logo $E \subset I$, para algum n-paralelepípedo I, e (b) resulta dos Teoremas 2.3.22 e 2.3.18.

Do Teorema 2.3.21 temos que (c) resulta de (b).

Basta mostrar que (a) resulta de (c). Se E não é limitado, E contém pontos x_k tais que $|x_k| > k$, $k = 1, 2, \ldots$. O conjunto S dos pontos x_k é infinito e não tem ponto de acumulação em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, não o tem em E. Assim, de (c) resulta ser E limitado.

Se E não é fechado, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in E'$ e $x_0 \notin E$. Para $k = 1, 2, \ldots$, existem $x_k \in E$ tais que $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$. Seja S o conjunto destes x_k. É claro que S é infinito, senão, $|x_k - x_0|$ seria constante para uma infinidade de valores de k. Também, $x_0 \in S'$ e $S' = \{x_0\}$ em $\mathbb{R}^n$. De fato, se $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq x_0$, temos, exceto para um conjunto finito de valores de k,

$$|x_k - y| \geq |x_0 - y| - |x_k - x_0| \geq |x_0 - y| - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}|x_0 - y|,$$

o que mostra que $x_k \notin B_r(y)$, $r = \frac{1}{2}|x_0 - y|$. Logo $y \notin S'$ pelo Teorema 2.3.9.

Assim, S não tem ponto de acumulação em E. Portanto, E deve ser fechado, se (c) é válido.

■

Definição 2.3.24: *Sejam X um espaço métrico e $E \subset X$. Dizemos que E é conexo se não existirem conjuntos $A \subset X$ e $B \subset X$, A e B abertos e disjuntos, tais que: $A \cap E$ e $B \cap E$ são não vazios e $E \subset A \cup B$.*

Um conjunto E é conexo em X se, e somente se, E é conexo em E com a métrica induzida de X. Assim, faz sentido falarmos de espaços conexos: um espaço é conexo se não é a união de dois conjuntos abertos, disjuntos e não vazios.

Sequências

Definição 2.3.25: *Seja A um conjunto. Uma função f definida em $\mathbb{N}$ e contradomínio A é chamada de sequência. Se $f(n) = x_n$ para $n \in \mathbb{N}$, representamos f por $\{x_n\}$, ou por $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Os elementos x_i são os termos da sequência. Seja $x_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $\{x_n\}$ é uma sequência em A, ou uma sequência de elementos de A.*

Definição 2.3.26: *Uma sequência $\{a_n\}$ em um espaço métrico (X, d) converge se existe um ponto $a \in X$ com a propriedade: Para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$, então $d(a_n, a) < \varepsilon$. Com isso, dizemos que $\{a_n\}$ converge para a, ou que a é o limite de $\{a_n\}$ e denotamos por $a_n \to a$, quando $n \to \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Se $\{a_n\}$ não converge, dizemos que $\{a_n\}$ diverge. Se o conjunto de valores de $\{a_n\}$ é limitado dizemos que $\{a_n\}$ é limitada.*

É fácil ver que o limite de uma sequência convergente é único.

A seguir, um teorema que garante algumas propriedades importantes de sequências convergentes em espaços métricos.

Teorema 2.3.27: *Seja $\{a_n\}$ uma sequência em um espaço métrico (X, d).*

(a) $\{a_n\}$ converge para $a \in X$ se, e somente se, cada vizinhança de a contém todos os $\{a_n\}$, exceto um número finito de termos.

(b) Se $\{a_n\}$ converge, então $\{a_n\}$ é limitada.

(c) Se $E \subset X$ e se a é um ponto de acumulação de E, então existe uma sequência $\{a_n\}$ em E tal que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

O teorema a seguir relaciona convergência com as operações algébricas usuais.

Teorema 2.3.28: *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências em $\mathbb{R}$ tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Então:*

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(ta_n) = ta$, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ e $a \neq 0$.

Teorema 2.3.29: *(a) Seja $x_k = (\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{nk}) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$. Então $\{x_k\}$ converge para $x = (\alpha_1 \ldots, \alpha_k)$ se, e somente se, $\lim_{k\to\infty} \alpha_{jk} = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$.*

(b) Sejam $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ sequências em $\mathbb{R}^n$ e $\{\beta_k\}$ uma sequência de números reais tais que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, $\lim_{k\to\infty} y_k = y$, $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta$. Então

$$\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = x + y, \quad \lim_{k\to\infty}(x_k \cdot y_k) = x \cdot y, \quad \lim_{k\to\infty} \beta_k x_k = \beta x.$$

Teorema 2.3.30(do Confronto): *Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências em $\mathbb{R}$ tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Então, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Teorema 2.3.31: *(a) Se $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} n^{-p} = 0$.*

(b) Se $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(d) Se $p > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(1+p)^{-n} = 0$.

(e) Se $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Definição 2.3.32: *Dada uma sequência $\{a_n\}$, consideremos uma sequência $\{n_k\}$ de inteiros positivos tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Dizemos que a sequência $\{a_{n_k}\}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$.*

Teorema 2.3.33: *Uma sequência $\{a_n\}$ converge para a se, e somente se, toda subsequência de $\{a_n\}$ converge para a.*

Teorema 2.3.34: *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema 2.3.35: *Os limites das subsequências convergentes de uma sequência $\{a_n\}$ em um espaço métrico X constituem um conjunto fechado em X.*

Definição 2.3.36: *Um espaço métrico X é sequencialmente compacto se toda sequência em X contém uma subsequência convergente em X.*

Teorema 2.3.37: *Sejam X sequencialmente compacto e $\{G_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$, existe α tal que $B_\varepsilon(x) \subset G_\alpha$ (ε é chamado de número de Lebesgue da cobertura $\{G_\alpha\}$).*

Demonstração: Suponhamos que o resultado não seja verdadeiro. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $B_\varepsilon(x_\varepsilon) \not\subset G_\alpha$, para todo α. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = 1/n$, construímos uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset G_\alpha$, para todo α. Como X é sequencialmente compacto, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ convergindo em X, digamos $x_{n_j} \to x \in X$. Logo, existe α tal que $x \in G_\alpha$. Como G_α é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset G_\alpha$. Como $x_{n_j} \to x \in X$, existe $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_j} \in B_{\delta/2}(x)$, para todo $n_j \geq n_{j_0}$. Assim, para $N \geq n_{j_0}$, tal que $N > 2/\delta$, temos $1/N < \delta/2$ e $x_N \in B_{\delta/2}(x)$. Basta mostrar que $B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subset B_\delta(x)$. Para isso, seja $a \in B_{\frac{1}{N}}(x_N)$. Então

$$d(a,x) \leq d(a,x_N) + d(x_N,x) < \tfrac{1}{N} + \tfrac{\delta}{2} < \delta.$$

Logo $B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subset B_\delta(x) \subset G_\alpha$, o que é um absurdo. ■

Corolário 2.3.38: *Seja X um espaço métrico. Então X é sequencialmente compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de X tem subcobertura finita.*

Sequências de Cauchy e espaços completos

Definição 2.3.39: *Uma sequência $\{a_n\}$ em um espaço métrico X é uma sequência de Cauchy se a cada $\epsilon > 0$ corresponder um inteiro positivo N tal que $d(a_n,a_m) < \varepsilon$, se $n,m \geq N$.*

Definição 2.3.40: *Sejam X um espaço métrico, $E \subset X$ e $S = \{d(a,b) \in \mathbb{R} \colon a, b \in E\}$. O* $\sup S$ *é chamado diâmetro de E e é denotado por* $\operatorname{diâm} E$.

Teorema 2.3.41: *Sejam $\{a_n\}$ uma sequência em X e $E_N = \{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots\}$. Então $\{a_n\}$ é uma sequência de Cauchy se, e somente se,* $\lim_{N\to\infty} \operatorname{diâm} E_N = 0$.

Teorema 2.3.42: *(a) Seja E um subconjunto do espaço métrico X. Então* $\operatorname{diâm} \overline{E} = \operatorname{diâm} E$.

(b) Seja K_n uma sequência de compactos em X tais que $K_{n+1} \subset K_n$, $n = 1, 2, \dots$. Se $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diâm} K_n = 0$, *então $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ contém um único ponto.*

Teorema 2.3.43: *(a) Toda sequência convergente em um espaço métrico X é uma sequência de Cauchy.*

(b) Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ é convergente.

Demonstração: (b) Seja $\{x_k\}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$. Seja $E_N = \{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$. Da Definição 2.3.40 e do Teorema 2.3.42(a), temos

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diâm} \overline{E}_N = 0. \tag{2}$$

Para cada N, temos $\overline{E}_N$ fechado (Teorema 2.3.12) e limitado. Logo, cada $\overline{E}_N$ é compacto (Teorema 2.3.23). Como $E_{N+1} \subset E_N$, então $\overline{E}_{N+1} \subset \overline{E}_N$. Pelo Teorema 2.3.42(b), existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ que pertence a cada $\overline{E}_N$.

Dado $\varepsilon > 0$, de (2) existe N_0 tal que $\operatorname{diâm} \overline{E}_N < \varepsilon$, se $N > N_0$. Como $x \in \overline{E}_N$, temos $|y - x| < \varepsilon$, para todo $y \in \overline{E}_N$ e, portanto, para todo $y \in E_N$. Ou seja, se $k \geq N_0$, então $|x_k - x| < \varepsilon$. Assim, $x_k \to x$, quando $k \to \infty$. ■

Corolário 2.3.44(Critério de convergência de Cauchy): *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Desse corolário, podemos verificar se uma dada sequência é convergente ou não, sem conhecer o seu limite.

Definição 2.3.45: *Um espaço métrico X no qual toda sequência de Cauchy converge é dito completo.*

Exemplo 2.3.46: *Podemos ver que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo. Em particular $\mathbb{C}$ é um espaço métrico completo. Também, o Teorema 2.3.21 garante que todo espaço métrico compacto é completo.*

Teorema 2.3.47: *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $Y \subset X$. Então (Y, d) é um espaço métrico completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

2.4 Continuidade

Para o prosseguimento do trabalho, a noção de continuidade é fundamental. Pode-se encontrar em [4] as demonstração não apresentadas dos resultados a seguir.

Limite de uma função

Definição 2.4.1: *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, $E \subset X$, f uma função de E em Y, e $p \in E'$. Denotamos $f(x) \to q$, quando $x \to p$, ou*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q,$$

se existe um ponto $q \in Y$, dito limite da função f, quando x tende a p, com a propriedade: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in E$ e $0 < d_X(x, p) < \delta$, implica $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$. Isso significa que $f(E \cap B_\delta(p) \setminus \{p\}) \subset B_\varepsilon(q)$.

É claro que $p \in X$ e não necessariamente $p \in E$. Também, se $p \in E$, podemos ter $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$.

Podemos reformular isso em termos de sequências.

Teorema 2.4.2: *Sejam X, Y, E, f e p como na Definição 2.4.1. Então $\lim_{x \to p} f(x) = q$ se, e somente se, $\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$, para qualquer sequência $\{p_n\}$ em E tal que*

$$p_n \neq p \quad e \quad \lim_{n \to \infty} p_n = p. \tag{3}$$

Corolário 2.4.3: *O limite p de uma função f é único.*

Definição 2.4.4: *Sejam f e g funções de E em $\mathbb{R}^n$. Se $f(x) = c$, para todo $x \in E$, diz-se que f é constante e escrevemos $f \equiv c$. Definimos $f + g$ e $f \cdot g$ por*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad e \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

respectivamente, onde na última igualdade trata-se do produto interno. Para $n = 1$ e, para todo $x \in E$, $f(x) \geq g(x)$, escrevemos $f \geq g$. Se f e g são funções complexas em E, de modo análogo, e intuitivo, define-se soma, produto e quociente.

Teorema 2.4.5: *Sejam $E \subset X$ um espaço métrico, $p \in E'$, f e g funções de E em $\mathbb{C}$, e $\lim_{x \to p} f(x) = A$, $\lim_{x \to p} g(x) = B$. Então*

(a) $\lim\limits_{x \to p} (f(x) + g(x)) = A + B$;

(b) $\lim\limits_{x \to p} (fg)(x) = AB$;

(c) $\lim\limits_{x \to p} (f/g)(x) = A/B$, *com* $B \neq 0$.

Note que, se f e g são funções de E em $\mathbb{R}^n$, (a) é válido e (b) se torna: $\lim_{x \to p} (f \cdot g)(x) = A \cdot B$ (A escalar B).

Funções contínuas

Definição 2.4.6: *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, $E \subset X$, e f uma função de E em Y. Dizemos que f é contínua em p se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ quando $x \in E$ e $d_X(x, p) < \delta$.*

Se f é contínua em cada ponto, dizemos que f é contínua em E.

Teorema 2.4.7: *Nos termos da Definição 2.4.6, suponhamos também $p \in E'$. Então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Teorema 2.4.8: *Sejam X, Y e Z espaços métricos, $E \subset X$, $f\colon E \to Y$, $g\colon f(E) \to Z$ e $h : E \to Z$ com $h(x) = g(f(x))$. Se f é contínua em $p \in E$ e se g é contínua em $f(p)$, então h é contínua em p.*

Definição 2.4.9: *Seja f uma função de X em Y. A imagem inversa de um subconjunto $V \subset Y$ é o conjunto $f^{-1}(V) := \{x \in X\colon f(x) = y, \text{ para algum } y \in V\}$.*

Teorema 2.4.10: *Uma função $f\colon X \to Y$, X e Y espaços métricos, é contínua em X se, e somente se, o conjunto $f^{-1}(V)$ é aberto em X, qualquer que seja o conjunto aberto V em Y.*
Demonstração: Suponhamos f contínua em X e V aberto em Y. Mostremos que todo ponto de $f^{-1}(V)$ está em seu interior. Seja $p \in f^{-1}(V)$. Como V é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in V$ se $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$, e como f é contínua em p, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ se $d_X(x, p) < \delta$. Assim, $x \in f^{-1}(V)$ se $d_X(x, p) < \delta$.

Reciprocamente, suponhamos, para todo aberto $V \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(V)$ aberto. Fixemos $p \in X$ e $\varepsilon > 0$, e seja $V = \{y \in Y\colon d_Y(y, f(p)) < \varepsilon\}$. Claramente, V é aberto, logo $f^{-1}(V)$ é aberto e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que $x \in f^{-1}(V)$ quando $d_X(p, x) < \delta$. Mas se $x \in f^{-1}(V)$, então $f(x) \in V$, e assim $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$, ou seja, f é contínua em X. ■

Corolário 2.4.11: *Uma função $f\colon X \to Y$, X e Y espaços métricos, é contínua em X se, e somente se, o conjunto $f^{-1}(C)$ é fechado em X, qualquer que seja o conjunto fechado C em Y.*

Teorema 2.4.12: *Sejam f e g funções complexas contínuas em um espaço métrico X. Então $f + g$, $f \cdot g$ e f/g, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, são contínuas em X.*

Teorema 2.4.13: *(a)Sejam $f_1 \dots f_n$ funções reais em um espaço métrico X e seja f a função de X em $\mathbb{R}^n$ definida por*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in X.$$

Então f é contínua se, e somente se, cada função $f_1, \dots, f_n$ é contínua;

(b)Se f e g funções contínuas de X em $\mathbb{R}^n$, $f + g$, $f \cdot g$ são contínuas em X.

As funções $f_1 \dots f_n$ são as componentes de f. Notemos que $f + g$ é uma função em $\mathbb{R}^n$, mas $f \cdot g$ é uma função real em X.

Continuidade e compacidade

Definição 2.4.14: *Uma função $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ é limitada se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in E.$$

O próximo teorema assegura que imagem de compacto é compacto.

Teorema 2.4.15: *Seja f contínua de um espaço métrico compacto X em um espaço métrico Y. Então $f(X)$ é compacto.*
Demonstração: Seja $\{V_\alpha\}$ uma cobertura aberta de $f(X)$. De f contínua e do Teorema 2.4.10 tem-se $f^{-1}(V_\alpha)$ aberto. Como X é compacto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}). \tag{4}$$

Como a imagem da união é a união das imagens e se $E \subset Y$ vale $f(f^{-1}(E)) \subset E$, de (4) temos

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}.$$

■

Corolário 2.4.16: *Seja $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ contínua, X espaço métrico compacto. Então f é limitada.*

Corolário 2.4.17: *Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ contínua, X espaço métrico compacto e*

$$M = \sup_{p\in X} f(p), \quad m = \inf_{p\in X} f(p).$$

Então existem $t, s \in X$ tais que $f(t) = M$ e $f(s) = m$.

Teorema 2.4.18: *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto qualquer e $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Seja $y \in X$ fixo. Se $f\colon X \times K \to \mathbb{R}^p$ é contínua, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in K$, $|f(x,t) - f(y,t)| < \varepsilon$ quando $x \in X$ com $|x - y| < \delta$.*

Demonstração: Suponhamos que não valha o teorema. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos associar $x_k \in X$ e $t_k \in K$ tais que $|x_k - y| < 1/k$ e $|f(x_k,t_k) - f(y,t_k)| \geq \varepsilon$. Claramente $x_k \to y$ quando $k \to \infty$. Como K é compacto, existe uma subsequência $\{t_{k_s}\}$ da sequência $\{t_k\}$ que converge para algum $t \in K$. Pela continuidade de f temos

$$\varepsilon \leq \lim_{s\to\infty} |f(x_{k_s}, t_{k_s}) - f(y, t_{k_s})| \leq \lim_{s\to\infty} |f(x_{k_s}, t_{k_s}) - f(y,t)| + |f(y,t_{k_s}) - f(y,t)| = 0.$$

O que é uma contradição. ■

Definição 2.4.19: *Sejam X e Y espaços métricos e $f\colon X \to Y$. Dizemos que f é uniformemente contínua em X se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$ para quaisquer $p, q \in X$ em que $d_X(p,q) < \delta$.*

É claro que toda função uniformemente contínua é contínua. A equivalência dos dois conceitos, em conjuntos compactos, segue do

Teorema 2.4.20: *Seja f uma função contínua de um espaço métrico compacto X em um espaço métrico Y. Então f é uniformemente contínua em X.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua, para cada $p \in X$ associamos $\phi(p) > 0$ tal que

$$d_Y(f(p), f(q)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{se} \quad q \in X \quad \text{e} \quad d_X(p,q) < \phi(p). \tag{5}$$

Seja $J(p) = \{q \in X\colon d_X(p,q) < \frac{1}{2}\phi(p)\}$. Como $p \in J(p)$, a coleção de todos os conjuntos $J(p)$ é uma cobertura aberta de X. Logo, existem $p_1, \ldots, p_n \in X$ tais que

$$X \subset J(p_1) \cup \cdots \cup J(p_n). \tag{6}$$

Tomemos $\delta = \frac{1}{2}\min\{\phi(p_1), \ldots, \phi(p_n)\}$. Sejam $p, q \in X$ tais que $d_X(p,q) < \delta$. Por (6), existe um inteiro m, $1 \leq m \leq n$, tal que $p \in J(p_m)$, logo $d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\phi(p_m)$, e

$$d_X(q, p_m) \leq d_X(p,q) + d_X(p,p_m) < \delta + \tfrac{1}{2}\phi(p_m) \leq \phi(p_m).$$

Finalmente, de (5)

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon.$$

■

Continuidade e conexidade

Teorema 2.4.21: *Seja f contínua de um espaço métrico conexo X em um espaço métrico Y. Então $f(X)$ é conexo.*

Demonstração: Suponhamos $f(X) = A \cup B$, A e B não vazios, abertos em Y e $A \cap B = \emptyset$. Como f é contínua, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos em X. Claro que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são não vazios, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ e $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Isso significa que X não seria conexo, uma contradição. ■

Teorema 2.4.22(do Valor Intermediário): *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < f(b)$ e se c é tal que $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = c$.*

Vale um caso análogo para $f(a) > f(b)$.

Sequências e séries de funções

As funções tratadas aqui são funções complexas.

Definição 2.4.23: *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em E tal que a sequência de números $\{f_n(x)\}$ converge para todo $x \in E$. Definimos uma função f dada por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E. \tag{7}$$

Dizemos que $\{f_n\}$ converge (pontualmente) em E, e f é o limite ou função limite de $\{f_n\}$. Da mesma forma, se $\sum f_n(x)$ converge para todo $x \in E$, definimos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E, \tag{8}$$

a função f é chamada soma da série $\sum f_n$.

Definição 2.4.24: *Dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente em E para f ($f_n \xrightarrow{u} f$) se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

É claro que toda sequência uniformemente convergente é convergente.

Dizemos que a série $\sum f_n$ converge uniformemente em E se a sequência $\{s_n\}$ das somas parciais definida por

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

converge uniformemente em E.

Teorema 2.4.25(Critério de Cauchy para convergência uniforme): *A sequência de funções $\{f_n\}$ converge uniformemente em E se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n \geq N$ e $x \in E$, tem-se*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{9}$$

Teorema 2.4.26(Teste M de Weierstrass): *Seja $\{f_n\}$ definida em E tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad x \in E.$$

Então $\sum f_n$ *converge uniformemente em* E *se* $\sum M_n$ *converge.*

Teorema 2.4.27: *Se* $\{f_n\}$ *é uma sequência de funções contínuas em* E *e se* $f_n \xrightarrow{u} f$ *em* E, *então* f *é contínua em* E.

A recíproca desse teorema não é válida. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$. Então a sequência de funções $\{f_n\}$ converge para a função identicamente nula, mas a convergência não é uniforme.

Definição 2.4.28: *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções definidas em um conjunto* E. *Dizemos que* $\{f_n\}$ *é limitada em* E *se, para cada* $x \in E$, *a sequência* $\{f_n(x)\}$ *é limitada, isto é, se existe uma função* ϕ *definida em* E *com valores finitos tal que* $|f_n(x)| < \phi(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *e* $x \in E$.

Dizemos que $\{f_n\}$ *é uniformemente limitada em* E *se existe* M *tal que* $|f_n(x)| < M$, $n = 1, 2, \ldots$ *e* $x \in E$.

2.5 Espaço das funções contínuas

A teoria básica sobre espaços de funções contínuas pode ser encontrada em [1, 2].

Sejam X um conjunto qualquer e M um espaço métrico. Denotamos por $\mathcal{B}(X; M)$ o conjunto das funções limitadas $f\colon X \to M$. Para $f, g \in \mathcal{B}(X; M)$, as distâncias $d(f(x), g(x))$, $x \in X$, formam um conjunto limitado de números reais, pois $f(X) \cup g(X) \subset M$ é limitado. Assim, a função distância

$$\begin{aligned} d\colon \mathcal{B}(X; M) \times \mathcal{B}(X; M) &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

está bem definida, e é uma métrica em $\mathcal{B}(X; M)$, chamada de métrica da convergência uniforme, devido a equivalência: $f_n \to f$ em $\mathcal{B}(X; M)$ se, e somente se, $f_n \xrightarrow{u} f$ em X.

Para $\alpha\colon X \to M$ definimos o conjunto

$$\mathcal{B}_\alpha(X; M) = \{f\colon X \to M\colon d(f, \alpha) < \infty\},$$

onde $d(f, \alpha) = \sup\{d(f(x), \alpha(x))\colon x \in X\}$. A função métrica da convergência uniforme estabelece uma métrica em $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$. Se X for um espaço métrico, o conjunto das aplicações contínuas em $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ é denotado por $\mathcal{C}_\alpha(X; M)$. Se α e β são constantes, então $\mathcal{B}_\alpha(X; M) = \mathcal{B}_\beta(X; M)$. Por isso, denotamos $\mathcal{B}_\alpha(X; M) = \mathcal{B}(X; M)$ e $\mathcal{C}_\alpha(X; M) = \mathcal{C}(X; M)$.

Teorema 2.5.1: *O conjunto* $\mathcal{D}$ *das aplicações limitadas e descontínuas é aberto em* $\mathcal{B}(X; M)$.
Demonstração: Provemos inicialmente que o conjunto

$$\mathcal{D}_a = \{f \in \mathcal{B}(X; M)\colon f \text{ é descontínua em } a \in X\}$$

é aberto em $\mathcal{B}(X; M)$. De fato, para $f \in \mathcal{D}_a$ existe $\varepsilon > 0$ tal que: para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in X$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq 3\varepsilon$.

Afirmamos que se $g \in \mathcal{B}(X; M)$ e $d(f, g) < \varepsilon$, então $g \in \mathcal{D}_a$. De fato, nessas condições, para todo $\delta > 0$, temos

$$3\varepsilon \leq d(f(x_\delta), f(a)) \leq d(f(x_\delta), g(x_\delta)) + d(g(x_\delta), g(a)) + d(g(a), f(a)).$$

Então $d(g(x_\delta), g(a)) \geq \varepsilon$ e, logo, $g \in \mathcal{D}_a$.

Agora, $\mathcal{D} = \cup_{a \in X} \mathcal{D}_a$, de modo que $\mathcal{D}$ é aberto em $\mathcal{B}(X; M)$. ■

Analogamente, mostra-se que, dada $\alpha\colon X \to M$, o conjunto $\mathcal{D}$ das aplicações limitadas e descontínuas, é aberto em $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$. Dessa forma, temos o

Corolário 2.5.2: *O conjunto $\mathcal{C}_\alpha(X; M)$ é fechado em $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$.*

Teorema 2.5.3: *Se o espaço métrico M é completo, então $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ é um espaço métrico completo, quaisquer que sejam X e $\alpha\colon X \to M$.*

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$. Assim, essa sequência é limitada e, logo, existe $c > 0$ tal que $d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Para $x \in X$ fixo, $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy em M. Como M é completo, existe, para cada $x \in X$, o limite desta sequência. Seja $\lim f_n(x) = f(x) \in M$. Logo, podemos definir $f\colon X \to M$ como sendo o limite da sequência $\{f_n\}$. Então, devemos ter, também, $d(f(x), \alpha(x)) \leq c$, $x \in X$, ou seja, $f \in \mathcal{B}_\alpha(X; M)$.

Resta provar que $f_n \xrightarrow{u} f$ em X. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$, $x \in X$. Fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, temos $d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$, $x \in X$ e $n > n_0$. De modo que $f_n \xrightarrow{u} f$. ■

O seguinte teorema é um corolário dos resultados anteriores. Mas devido sua importância, é enunciado como teorema.

Teorema 2.5.4: *Sejam X e M espaços métricos. Se M é completo, então, para toda aplicação $\alpha\colon X \to M$, o espaço métrico $\mathcal{C}_\alpha(X; M)$ é completo.*

Definição 2.5.5: *Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Definimos a distância de $x \in X$ até o conjunto A como sendo*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Para $B \subset X$, $B \neq \emptyset$, definimos a distância de A até B por

$$d(A, B) = \inf_{y \in B} d(y, A).$$

O próximo teorema possibilita escrever qualquer conjunto aberto como união enumerável de compactos “encaixados”.

Teorema 2.5.6: *Sejam X um espaço métrico completo e $A \subset X$ aberto. Então existe uma sequência $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de A tal que $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Além disso, os conjuntos K_n podem ser escolhidos satisfazendo:*

(a)$K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$;

(b)$K \subset A$ e K compacto implica $K \subset K_n$ para algum n.

Demonstração: Fixemos $x_0 \in X$ qualquer. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$K_n = \overline{B_n(x_0)} \cap \{x \in X \colon d(x, X \setminus A) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Cada K_n é claramente limitado e é a interseção de dois conjuntos fechados de X, logo K_n é compacto. Também, o conjunto

$$B_{n+1}(x_0) \cap \{x \in X \colon d(x, X \setminus A) > \tfrac{1}{n+1}\}$$

é aberto, contém K_n, e está contido em K_{n+1}. Isso mostra que o item (a) é satisfeito.

É fácil ver que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ e que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}\text{int } K_n$; logo, se K é subconjunto compacto de A os conjuntos $\{\text{int } K_n\}$ formam uma cobertura aberta de K. Isso nos dá o item (b). ■

Sejam X e M espaços métricos completos e $A \subset X$. Se $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, onde K_n é compacto e $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$, definimos

$$\rho_n = d|_{K_n}, \tag{10}$$

onde d é função métrica uniforme em $\mathcal{C}(X; M)$ e $d|_{K_n}$ sua restrição em K_n. Também, definimos, para $f, g \in \mathcal{C}(A; M)$

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}. \tag{11}$$

Como $h(t) = t(1 + t)^{-1} \leq 1$, para todo $t \geq 0$, então essa série deve convergir, e de h ser contínua, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.5.7: *Seja (X, d) um espaço métrico. Então:*

(a) $\phi(f, g) = \dfrac{d(f, g)}{1 + d(f, g)}$ *estabelece uma métrica em X.*

(b) Um conjunto é aberto em (X, d) se, e somente se, é aberto em (X, ϕ).

(c) Uma sequência é de Cauchy em (X, d) se, e somente se, é uma sequência de Cauchy em (X, ϕ).

Dessa forma, é fácil ver que a função ρ também faz de $\mathcal{C}(A; M)$ um espaço métrico completo e o denotaremos $(\mathcal{C}(A; M), \rho)$.

O próximo lema trata de subconjuntos de $(\mathcal{C}(A; M), \rho) \times (\mathcal{C}(A; M), \rho)$ e é muito útil por nos dar discernimento do comportamento da métrica ρ.

Lema 2.5.8: *Se $\varepsilon > 0$, então existem $\delta > 0$ e um compacto $K \subset G$ tais que, para $f, g \in \mathcal{C}(A; M)$*

$$\sup\{d(f(z), g(z)) \colon z \in K\} < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f, g) < \varepsilon. \tag{12}$$

De modo inverso, se $\delta > 0$ e um compacto $K \subset G$ são dados, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $f, g \in \mathcal{C}(A; M)$,

$$\rho(f, g) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sup\{d(f(z), g(z)) \colon z \in K\} < \delta. \tag{13}$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ fixo, e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{1}{2}\varepsilon$ e façamos $K = K_p$. Seja $\delta > 0$ tal que $t \in [0, \delta)$ implica $t/(1 + t) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Suponhamos $f, g \in \mathcal{C}(A; M)$ satisfazendo $\sup\{d(f(z), g(z)) \colon z \in K\} < \delta$. Como $K_n \subset K_p = K$ para $1 \leq n \leq p$, $\rho_n(f, g) < \delta$ para $1 \leq n \leq p$. Logo

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 1 \leq n \leq p.$$

Assim sendo,

$$\rho(f,g) < \sum_{n=1}^{p} \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon.$$

Isto é, a Equação (12) é satisfeita.

Agora, suponhamos que são dados $\delta > 0$ e K. Como $G = \cup K_n = \cup \text{int } K_n$ e K é compacto, exite $p \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_p$; nos dando

$$\rho_p(f,g) \geq \sup\{d(f(z),g(z))\colon z \in K\}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ escolhido de modo que $s \in [0, 2^p\varepsilon)$ implique $s/(1-s) < \delta$. Então $t/(1+t) < 2^p\varepsilon$ implica $t < s$. Logo, se $\rho(f,g) < \varepsilon$, então

$$\frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p\varepsilon,$$

e isso nos dá $\rho_p(f,g) < \delta$. Portanto, temos (13). ■

O item (b) do próximo teorema será utilizado sem uma referência direta durante o texto.

Teorema 2.5.9: *(a) Um conjunto $B \subset (\mathcal{C}(A;M),\rho)$ é aberto se, e somente se, para cada $f \in B$ exitem um compacto K e $\delta > 0$ tais que*

$$\{g\colon d(f(z),g(z)) < \delta, z \in K\} \subset B.$$

(b) Uma sequência $\{f_n\}$ em $(\mathcal{C}(A;M),\rho)$ converge para f se, e somente se, $\{f_n\}$ converge para f uniformemente em todos os subconjuntos compactos de A.

Demonstração: A demonstração do item (b) segue diretamente do item (a). Mostremos então o item (a). Se B é aberto e $f \in B$, então, para algum $\varepsilon > 0$, temos $\{g\colon \rho(f,g) < \varepsilon\} \subset B$. Da primeira parte do lema anterior, exitem $\delta > 0$ e um compacto K com as propriedades desejadas. Reciprocamente, se B tem essa propriedade e $f \in B$, então a segunda parte do lema anterior nos dá um $\varepsilon > 0$ tal que $\{g\colon \rho(f,g) < \varepsilon\} \subset B$. Isso significa que B é aberto. ■

Corolário 2.5.10: *A coleção de conjuntos abertos independe da escolha dos conjuntos $\{K_n\}$. Isto é, se tomarmos outra coleção de compactos $\{K_n^*\}$ com $G = \cup K_n^*$ e $K_n^* \subset$ int K_{n+1}^*, e se ρ^* é a métrica definida pelos conjuntos $\{K_n^*\}$, então um conjunto é aberto em $(\mathcal{C}(A;M),\rho^*)$ se, e somente se, é aberto em $(\mathcal{C}(A;M),\rho)$.*

Demonstração: Isso é consequência direta do item (a) do teorema anterior, pois a caracterização dos conjuntos abertos não depende da escolha dos conjuntos $\{K_n\}$. ■

2.6 Derivadas

Uma abordagem mais detalhada sobre derivadas pode ser encontrada em [3, 4].

Derivada de uma função real

Definição 2.6.1: *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Para $x \in [a,b]$, definimos*

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \quad t \in (a,b), \tag{14}$$

quando esse limite existe.

Assim, f' (derivada de f) é uma função cujo domínio é o conjunto dos x em que o limite (14) *existe. Se f' está definida em x, f é diferenciável em x. Se $f'\colon E \subset [a,b] \to \mathbb{R}$, f é diferenciável em E. De forma intuitiva, define-se derivadas à direita e à esquerda.*

Teorema 2.6.2: *Seja f definida em $[a,b]$. Se f é diferenciável em $x \in [a,b]$, então f é contínua em x.*

Teorema 2.6.3: *Seja $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $x \in [a,b]$. Então $f+g$, fg e f/g são diferenciáveis em x, e*

(a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$.

Teorema 2.6.4(Regra da Cadeia): *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f'(x)$ existe em algum $x \in [a,b]$. Seja $g\colon f([a,b]) \subset I \to \mathbb{R}$, I um intervalo fechado, tal que $g'(f(x))$ existe. Se $h(t) = g(f(t))$, $t \in [a,b]$, então existe $h'(x)$ e $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.*

Demonstração: Seja $y = f(x)$. Pela definição de derivada, temos

$$f(t) - f(x) = (t-x)(f'(x) + u(t)), \quad g(s) - g(y) = (s-y)(g'(y) - v(s)),$$

onde $t \in [a,b]$, $s \in I$, $u(t) \to 0$ quando $t \to x$, $v(s) \to 0$ quando $s \to y$.

Seja $s = f(t)$. Agora,

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= (f(t) - f(x))(g'(y) + v(s)) \\ &= (t-x)(f'(x) + u(t))(g'(y) + v(s)). \end{aligned}$$

Dividindo por $t - x \neq 0$,

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = (g'(y) + v(s))(f'(x) + u(t)).$$

Se $t \to x$, então $s \to y$, pois f é contínua, de modo que

$$\lim_{t \to x} \frac{h(t) - h(x)}{t - x} = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

■

Definição 2.6.5: *Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$, X um espaço métrico. Dizemos que f tem um máximo local em um ponto $p \in X$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(q) \leq f(p)$ para todo $q \in X$ com $d(p,q) < \delta$. Da mesma forma define-se mínimo local.*

Teorema 2.6.6: *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f tem um máximo local em $x \in (a,b)$ e se $f'(x)$ existe, então $f'(x) = 0$.*

Vale um resultado análogo para mínimo local.

O próximo resultado também é conhecido como Teorema do Valor Médio Generalizado.

Teorema 2.6.7(do Valor Médio de Cauchy): *Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas, e diferenciáveis em (a,b). Então existe $x \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

Demonstração: Seja

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t), \quad t \in [a,b].$$

Temos h contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b). \tag{15}$$

Provemos que $h'(x) = 0$ para algum $x \in (a,b)$.

Se h é constante, então $h'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$. Se $h(t) > h(a)$ para algum $t \in (a,b)$, seja $x \in [a,b]$ tal que h atinge seu máximo (existe pelo Corolário 2.4.17). Por (15), $x \in (a,b)$, e o Teorema 2.6.6 mostra que $h'(x) = 0$. Se $h(t) < h(a)$ para algum $t \in (a,b)$, da mesma forma, $h'(x) = 0$ com $x \in [a,b]$ tal que h atinge seu mínimo. ■

O próximo resultado é um corolário do teorema anterior, mas será enunciado como teorema devido à sua importância.

Teorema 2.6.8(do Valor Médio): *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, e diferenciável em (a,b). Então existe $x \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

Teorema 2.6.9: *Suponhamos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $[a,b]$ e $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Então existe $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = \lambda$.*

Esse teorema nos garante que f' assume todos os valores intermediários. Um resultado análogo vale se $f'(a) > f'(b)$.

Definição 2.6.10: *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é convexa se*

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1),$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in [a,b]$ e todo $t \in [0,1]$.

Teorema 2.6.11: *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, f' é crescente.*

Demonstração: Suponhamos f convexa. Sejam $a \leq x < y \leq b$ e $t \in (0,1)$. Então

$$f(ty + (1-t)x) \leq t(f(y) - f(x)) + f(x),$$

e logo

$$\frac{f(ty + (1-t)x) - f(x)}{t(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Temos $ty + (1-t)x = t(y-x) + x$; fazendo $t \to 0$, segue que

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Ao trocar t por $1 - s$, $s \in (0,1)$, na equação $f(ty + (1-t)x) \leq t(f(y) - f(x)) + f(x)$, fica

$$\frac{f((1-s)y + sx) - f(y)}{s(x-y)} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Fazendo $s \to 0$, temos
$$f'(x) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
Dessa forma, a derivada de f é crescente.

Reciprocamente, suponhamos que a derivada de f seja crescente. Para cada $u \in (x, y)$, o Teorema do Valor Médio garante a existência de $r \in (x, u)$ e $s \in (u, y)$ tais que
$$f'(r) = \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad \text{e} \quad f'(s) = \frac{f(y) - f(u)}{y - u}.$$
Por hipótese, $f'(r) \leq f'(s)$, de modo que, para cada $u \in (x, y)$,
$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}.$$
Como $u \in (x, y)$, existe $t \in (0, 1)$ com $u = (1 - t)x + ty$. Logo
$$\frac{f(u) - f(x)}{t(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(u)}{(1 - t)(y - x)}.$$
Assim, $(1 - t)(f(u) - f(x)) \leq t(f(y) - f(u))$, e isso implica que $f(u) \leq tf(y) + (1 - t)f(x)$, ou seja, f é convexa. ∎

Derivadas parciais

Definição 2.6.12: *Sejam $G \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f\colon G \to \mathbb{R}$. Definimos (quando existe o limite) a função $\frac{\partial f}{\partial x}$, derivada parcial de f com relação à variável x, dada por*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h};$$
e a função $\frac{\partial f}{\partial y}$, derivada parcial de f em relação à variável y, por
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Observação 2.6.13: *Outra notação para $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é f_x e f_y, respectivamente. Notemos que, para $(x_0, y_0) \in G$, a existência de $f_x(x_0, y_0)$ significa que é diferenciável em x_0 a função f restrita ao conjunto $\{x \in \mathbb{R}\colon (x, y_0) \in G\}$, no sentido da Definição 2.6.1. Da mesma forma, se a função f restrita ao conjunto $\{y \in \mathbb{R}\colon (x_0, y) \in G\}$ é diferenciável em y_0, então existe $f_y(x_0, y_0)$.*

Iremos admitir o conhecimento de integração de funções da reta na reta.

Teorema 2.6.14: *Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto e seja $f\colon [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ contínua, e tal que f_y existe e é contínua. Então a função $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, tem derivada em relação a y e, para cada $y \in A$, $\varphi'(y) = \int_a^b f_y(x, y)dx$.*

Demonstração: Seja $r > 0$ tal que $(y - r, y + r) \subset A$. Dado $s \in (0, r)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, 1)$ tal que
$$\frac{f(x, y + s) - f(x, y)}{s} = f_y(x, y + cs).$$

Segue que

$$\frac{\varphi(y+s)-\varphi(y)}{s} - \int_a^b f_y(x,y)dx = \int_a^b \frac{f(x,y+s)-f(x,y)}{s}dx - \int_a^b f_y(x,y)dx \tag{16}$$

$$= \int_a^b f_y(x,y+cs) - f_y(x,y)dx \tag{17}$$

O Teorema 2.4.18 aplicado na função $g\colon [a,b]\times(-r,r) \to \mathbb{R}$, com $g(x,s) = f_y(x,y+cs)$, diz que: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $s \in (-r,r)$, com $|s| < \delta$, implica $|g(x,s) - g(x,0)| < \varepsilon/(b-a)$, para todo $x \in [a,b]$. Usando a Equação (16), para $|s| < \delta$ temos

$$\frac{\varphi(y+s)-\varphi(y)}{s} - \int_a^b f_y(x,y)dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon.$$

■

3 Funções analíticas

Faremos agora um pequeno resumo sobre funções analíticas. Uma boa referência é [1].

Definição 3.0.1: *Sejam $G \subset \mathbb{C}$ aberto e $f\colon G \to \mathbb{C}$. Dizemos que f é diferenciável em $z \in G$ quando existe o limite*

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}. \tag{18}$$

Denotamos esse limite por $f'(z)$.

Assim, definimos a derivada de f como sendo a função $f'\colon E \subset G \to \mathbb{C}$ cujo domínio é o conjunto dos z em que o limite (18) *existe. Dizemos que f é diferenciável em E.*

Observação 3.0.2: *Se f tem derivada f' em um intervalo e f' é diferenciável, representamos a derivada desta por f'' e a chamamos de derivada de segunda ordem de f. Continuando desse modo, obtemos as funções $f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$. Chamamos $f^{(n)}$ de derivada n-ésima ou de ordem n de f. Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, existir $f^{(n)}$, então f é dita infinitamente diferenciável.*

Observação 3.0.3: *Para $f^{(n)}(z)$ existir em um ponto z, deve existir $f^{(n-1)}(w)$ em uma vizinhança de z e $f^{(n-1)}$ deve ser diferenciável em z. Como $f^{(n-1)}$ deve existir numa vizinhança de z, $f^{(n-2)}$ deve ser diferenciável nesta vizinhança.*

Assim como para funções reais, o seguinte resultado é imediatamente esperado.

Teorema 3.0.4: *Seja f uma função complexa definida em $G \subset \mathbb{C}$ aberto. Se f é diferenciável em $z \in G$, então f é contínua em z.*

Definição 3.0.5: *Uma região é um subconjunto G de $\mathbb{C}$ que é aberto e conexo.*

Teorema 3.0.6: *Se G é uma região de $\mathbb{C}$ e $f\colon G \to \mathbb{C}$ é diferenciável em G com $f' \equiv 0$, então f é constante.*

Definição 3.0.7: *Uma função $f\colon G \to \mathbb{C}$ diferenciável em G cuja derivada é contínua em G é dita analítica. Denotaremos o conjunto de todas as funções analíticas em G por $H(G)$. Uma função em $H(\mathbb{C})$ é dita função inteira.*

É fácil ver que as leis usuais de soma e produto valem para funções analíticas. Se $f, g \in H(G)$ e $G_1 = \{z \in G\colon g(z) \neq 0\}$, então $f/g \in H(G_1)$. Além disso, $H(G) \subset \mathcal{C}(G; \mathbb{C})$.

Temos também a Regra da Cadeia para funções complexas de uma variável complexa, cuja demonstração é semelhante à do caso real.

Teorema 3.0.8(Regra da Cadeia): *Seja $f\colon G \to \mathbb{C}$ contínua tal que $f'(z)$ existe em algum $z \in G$. Seja $g\colon F \to \mathbb{C}$, tal que $f(G) \subset F$ e $g'(f(z))$ existe. Se $h = g \circ f$, então h é diferenciável em z e $h'(z) = g'(f(z))f'(z)$.*

Observação 3.0.9: *Dizer que uma função complexa f definida num subconjunto fechado $F \subset \mathbb{C}$ é analítica, significa que $f \in H(G)$ para algum aberto $G \subset \mathbb{C}$ que contém F.*

Teorema 3.0.10: *Sejam $G, F \subset \mathbb{C}$ conjuntos abertos. Sejam $f\colon G \to \mathbb{C}$ e $g\colon F \to \mathbb{C}$ funções tais que $f(G) \subset F$ e $g(f(z)) = z$, para todo $z \in G$. Se g é diferenciável e $g'(z) \neq 0$, então f é diferenciável e $f'(z) = [g'(f(z))]^{-1}$. Em particular, se g é analítica, então f é analítica.*

Sabemos que se $G \subset \mathbb{C}$, então podemos identificar G como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Dito isso, dada uma função $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definimos as funções:

$$u\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{e} \quad v\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy).$$

Dessa forma, se $z = x + iy \in G$, então $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ e escrevemos $f = u + iv$.

As funções u e v possuem derivadas parciais em todos os pontos em que f é diferenciável. De fato, sejam $z = x + iy \in G$ e $w = h + ik \in \mathbb{C}$. Fazendo $h \to 0$ e $k = 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{(u(x+h,y) + iv(x+h,y)) - (u(x,y) + iv(x,y))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Agora, fazendo $h = 0$ e $k \to 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k\to 0} \frac{(u(x,y+k) + iv(x,y+k)) - (u(x,y) + iv(x,y))}{ik} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{ik} + \frac{v(x,y+k) - v(x,y)}{k} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

Além disso, valem as Equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se as funções $u, v\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ têm derivadas parciais contínuas e as Equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, então $f\colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, é diferenciável. Para ver isso, sejam $z = x + iy \in G$ e $B_r(z) \subset G$. Se $w = h + ik \in B_r(0)$, então

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = [u(x+h,y+k) - u(x,y+k)] + [u(x,y+k) - u(x,y)].$$

Usando o Teorema do Valor Médio, para cada $w = h + ik \in B_r(0)$, existem números reais h_1 e k_1 tais que $|h_1| < |h|$, $|k_1| < |k|$ e

$$\begin{cases} u(x+h,y+k) - u(x,y+k) &= u_x(x+h_1, y+k)h \\ u(x,y+k) - u(x,y) &= u_y(x, y+k_1)k. \end{cases} \tag{19}$$

Tomando

$$\varphi(h,k) = [u(x+h,y+k) - u(x,y)] - [u_x(x+h_1,y+k)h + u_y(x,y+k_1)k],$$

as Equações (19) implicam

$$\frac{\varphi(h,k)}{w} = \frac{h}{w}[u_x(x+h_1,y+k) + u_x(x,y)] + \frac{k}{w}[u_y(x,y+k_1) - u_y(x,y)].$$

De $|h_1| < |h| \leq |w|$ e $|k_1| < |k| \leq |w|$, e do fato de u_x e u_y serem contínuas, temos

$$\lim_{w\to 0} \frac{\varphi(h,k)}{w} = 0. \tag{20}$$

Segue que

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = u_x(x, y)h + u_y(x, y)k + \varphi(h, k),$$

onde φ satisfaz (20). De modo análogo,

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = v_x(x, y)h + v_y(x, y)k + \psi(h, k),$$

onde ψ satisfaz

$$\lim_{w \to 0} \frac{\psi(h, k)}{w} = 0. \tag{21}$$

Usando o fato de que u e v satisfazem as Equações de Cauchy-Riemann vemos que

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) + \frac{\varphi(h, k) + \psi(h, k)}{w}.$$

De (20) e (21), f é diferenciável e $f'(x+iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$. Isso prova o seguinte teorema.

Teorema 3.0.11: *Para que a função $f \colon G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, seja diferenciável é necessário e suficiente que as funções $u, v \colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tenham derivadas parciais contínuas e satisfaçam as Equações de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exemplo 3.0.12: *Em $\mathbb{R}$, os exemplos de funções contínuas não diferenciáveis em ponto algum são complicados. Para as funções complexas temos um exemplo simples. Se $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = |z|$, então f não é diferenciável em ponto algum de $\mathbb{C}$. Com efeito, façamos $f = u + iv$, onde $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = 0$. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, então*

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Logo as Equações de Cauchy-Remann não são satisfeitas. Quando $(x, y) = (0, 0)$, temos $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$, logo não existe o limite quando $h \to 0$.

3.1 Série de potências

Seja $\{z_n\}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. Dizemos que a série $\sum z_n$ converge em $\mathbb{C}$ se a sequência $\{s_n\}$ das somas parciais, definida por

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} z_i,$$

converge em $\mathbb{C}$. A série $\sum z_n$ converge absolutamente se $\sum |z_n|$ converge. É claro que se $\sum |z_n|$ converge, então $\sum z_n$ converge.

Seja $\{a_n\}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. Para $a \in \mathbb{C}$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

é a série de potências em torno de a.

Exemplo 3.1.1: *Um exemplo útil é a série geométrica $\sum z^n$: Se $0 \leq |z| < 1$, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Se $|z| \geq 1$, a série diverge. De fato, para $|z| \neq 1$, temos

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Quando $n \to \infty$ o resultado segue. Agora, para $|z| = 1$ é evidente.

Teorema 3.1.2: *Dada uma série de potências $\sum a_n(z-a)^n$, uma e somente uma das possibilidades a seguir ocorre:*

(a) A série converge apenas em a.

(b) A série converge em todo $z \in \mathbb{C}$.

(c) Existe $r > 0$ tal que a série converge em $B_r(a)$ e diverge se $|z - a| > r$. Mais ainda, a convergência é uniforme em $\overline{B_s}(a)$, para todo $s \in (0, r)$. Nada pode ser dito, em geral, quando $|z - a| = r$.

Observação 3.1.3: *O número r é chamado de raio de convergência da série. Escrevemos $r = 0$ para o caso do item (a), e $r = \infty$ para o item (b).*

Teorema 3.1.4: *Seja $r > 0$ o raio de convergência da série de potências $\sum a_n(z-a)^n$. Então a função $f \colon B_r(a) \to \mathbb{C}$, definida por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

é infinitamente diferenciável em $B_r(a)$. Para cada $k \geq 1$, a k-ésima derivada de f, $f^{(k)}$, está definida em $B_r(a)$ e é dada por

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z-a)^{n-k}.$$

Além disso, $n! a_n = f^{(n)}(a)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, tomemos $a = 0$. É fácil ver que r é o raio de convergência da série $\sum n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$. Basta provar que f é diferenciável e sua derivada é $f^{(1)}$. Sejam z, w tais que $|z|, |w| \leq \rho$ com $\rho < r$. Para cada z fixo, façamos

$$\varphi_z(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^j w^{n-1-j}.$$

Temos, da desigualdade triangular,

$$\left| a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^j w^{n-1-j} \right| \leq n |a_n| \rho^{n-1}.$$

Logo, do Teste M de Weierstrass e do Teorema 2.4.27, φ_z é contínua em $B_\rho(0)$ quando $|z| \leq \rho$. Se $z \neq w$, então

$$\varphi_z(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + z w^{n-2} + \cdots + z^{n-1}) \left(\frac{z-w}{z-w} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} \right) = \frac{f(z) - f(w)}{z-w}.$$

Agora, se $z = w$, segue que

$$\varphi_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Como φ_z é contínua, temos

$$\lim_{w \to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Portanto, $f'(z) = \varphi_z(z)$. ■

Exemplo 3.1.5: *Consideremos a série $\sum z^n/n!$. Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos*

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = |z| \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

Logo a série $\sum z^n/n!$ converge, para todo $z \in \mathbb{C}$, pois converge absolutamente. Definimos a função exponencial $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *por*

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots .$$

Tal função é analítica em $\mathbb{C}$. Ademais, $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e, para $z, w \in \mathbb{C}$, $(e^z)' = e^z$, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, temos $\exp(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\,sen\,(y))$, onde cos *e sen são as funções trigonométricas reais já conhecidas. Fica claro que $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$ (dizemos que a função* exp *é periódica de período $2\pi i$). O conjunto $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$ é transformado no anel $\{z \in \mathbb{C}\colon e^a \leq |z| \leq e^b\}$.*

Exemplo 3.1.6: *Seja $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aberto. Um ramo do logaritmo em G é uma função contínua $\lambda\colon G \to \mathbb{C}$ em que $e^{\lambda(z)} = z$, para todo $z \in G$. Do Teorema 3.0.10, o ramo do logaritmo é analítico e sua derivada é dada por z^{-1}. Seja $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, onde $\mathbb{R}_{\leq 0}$ é o conjunto dos reais não positivos. Para $z \in G$ escrevemos $z = re^{i\theta}$, com $-\pi < \theta < \pi$. Se $\lambda(z) = \log(r) + i\theta$, então λ é um ramo do logaritmo, chamado ramo principal e designado por* log.

3.2 Integração complexa

Sejam $x, y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. O arco $C = \{x(t) + iy(t)\colon t \in [\alpha, \beta]\}$ é um arco suave se for retificável, ou seja, tem comprimento finito, e se x' e y' são contínuas e $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$. O comprimento do arco C é dado por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt.$$

Um caminho C é uma cadeia contínua de um número finito de arcos suaves. Um caminho C é fechado se suas extremidades são iguais. A região aberta limitada por um caminho fechado é chamada de interior do caminho.

Definição 3.2.1: *Uma região G é simplesmente conexa se, para qualquer caminho fechado C contido em G, existe uma função $f\colon \overline{B_1}(0) \to A$, injetora e contínua, tal que $f(S) = C$, onde A é a união de C com o seu interior e S a circunferência de raio 1 e centro em 0.*

Definição 3.2.2: *Seja $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são integráveis, definimos*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} f(t) dt.$$

Teorema 3.2.3: *Seja $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ contínua. Então*

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right| \leq (\beta-\alpha)\sup_{t}|f(t)|$$

Definição 3.2.4: *Seja $G \subset \mathbb{C}$ aberto. Se $C \subset G$ é um arco suave definido no intervalo $[\alpha,\beta]$ e $f\colon G \to \mathbb{C}$ é contínua, então definimos a integral de f ao longo de C como*

$$\int_{C} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(C(t))C'(t)dt.$$

Com essa definição, temos a seguinte propriedade

$$\left|\int_{C} f(z)dz\right| \leq L\sup_{t}|f(C(t))|,$$

onde L é o comprimento de C.

No sentido teórico, o próximo teorema nos diz que os valores de $f(a)$, para a no interior de C, é determinado pelo valor de f nos pontos de C.

Teorema 3.2.5(Fórmula Integral de Cauchy): *Seja $G \subset \mathbb{C}$ aberto. Se $f\colon G \to \mathbb{C}$ é analítica ao longo do caminho fechado C e em seu interior, então*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z-a}dz,$$

para todo a no interior de C.

Exemplo 3.2.6: *Se $f \equiv 1$, então, para um caminho fechado C e a em seu interior,*

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{1}{z-a}dz.$$

Definição 3.2.7: *Sejam $G \subset \mathbb{C}$ aberto e $f\colon G \to \mathbb{C}$ contínua. Uma primitiva de f é uma função analítica $F\colon G \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$, para todo $z \in G$.*

Vale uma versão complexa do Teorema Fundamental do Cálculo:

Teorema 3.2.8: *Seja $f\colon G \to \mathbb{C}$ contínua com primitiva F. Se $C\colon [\alpha,\beta] \to G$ é um caminho, então*

$$\int_{C} f(z)dz = F(C(\beta)) - F(C(\alpha)).$$

Observação 3.2.9: *A integral depende apenas dos extremos, e não do caminho em si.*

Os dois seguintes teoremas serão utilizados várias vezes ao longo do texto sem referência direta.

Teorema 3.2.10(de Cauchy-Goursat): *Se C é um caminho fechado e f é analítica, então a integral ao longo de C se anula.*

Teorema 3.2.11(de Morera): *Sejam G uma região em $\mathbb{C}$ e $f\colon G \to \mathbb{C}$ contínua. Se para todo caminho fechado $C\colon [\alpha,\beta] \to G$ tivermos $\int_C f(z)dz = 0$, então f é analítica em G.*

Teorema 3.2.12: *Seja $f\colon G \to \mathbb{C}$ analítica em G, onde G é simplesmente conexo. Então f tem uma primitiva em G.*

Exemplo 3.2.13: *Se G é simplesmente conexo e $f\colon G \to \mathbb{C}$ analítica em G e não se anula em G, então existe uma função analítica $g\colon G \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \exp g(z)$, para todo $z \in G$. Mais ainda, se $a \in G$ e $e^b = f(a)$, pode-se tomar g satisfazendo $g(a) = b$. Com efeito, a função f'/f é analítica em G porque f não se anula, de modo que admite uma primitiva g_1. A derivada da função $f/(\exp \circ g_1)$ é identicamente nula, ou seja, $f = \exp \circ (g_1 + c)$, para uma contante c. Por fim, basta fazer $g = g_1 + c + 2k\pi i$, para um inteiro k apropriado, com $g(a) = b$.*

O próximo teorema garante que para funções complexas também existe um desenvolvimento em série de Taylor. Que qualquer função analítica é infinitamente diferenciável é uma consequência direta dele.

Teorema 3.2.14(Série de Taylor): *Sejam G uma região em $\mathbb{C}$, $f \in H(G)$, $a \in G$ e $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset G$. Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in B_r(a),$$

onde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Corolário 3.2.15: *Sejam $f \in H(G)$, $a \in G$ e $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(a) \subset G$. Então*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

onde $C(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Corolário 3.2.16(Estimativa de Cauchy): *Se f é analítica em $B_R(a)$ e existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \le M$, para todo $z \in B_R(a)$, então*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n! M}{R^n}.$$

Definição 3.2.17: *Um ponto a é uma singularidade isolada de uma função f se existe $r > 0$ tal que f é analítica em $B_r(a) \setminus \{a\}$ e f não é analítica em a. O ponto a é chamado singularidade removível se existir uma função analítica $g\colon B_r(a) \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ em $B_r(a) \setminus \{a\}$.*

Teorema 3.2.18(Série de Laurent): *Seja $a \in \mathbb{C}$. Se f é uma função analítica no conjunto $A := \{z \in \mathbb{C} \colon 0 \le r < |z-a| < R\}$, então, para $z \in A$,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \cdots + a_{-2}(z-a)^{-2} + a_{-1}(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots, \tag{22}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

em que C é uma circunferência de centro a e raio $r_1 \in (r, R)$.

O caso especial em que $n = -1$ em (22) resulta que

$$\int_C f(w) dw = 2\pi i a_{-1}.$$

Definição 3.2.19: *O coeficiente a_{-1} é chamado de resíduo de f na singularidade isolada a. Denotamos a_{-1} por $\operatorname{Res}(f; a)$.*

Teorema 3.2.20(dos Resíduos): *Sejam $z_1, \ldots, z_n$ os únicos pontos no interior de um caminho C nos quais uma função f não é analítica, isto é, f é analítica em C e no seu interior exceto em $z_1, \ldots, z_n$. Então*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(f; z_n)).$$

Definição 3.2.21: *Quando a parte dos coeficientes de "índices negativos" de $(z-a)$ em (22) tem uma infinidade de termos não nulos, dizemos que a é uma singularidade essencial de f. Caso contrário, fazendo $m := \max\{n \in \mathbb{N} \colon a_{-n} \neq 0\}$, dizemos que a é um polo de ordem m de f. Se $m = 1$ dizemos que a é um polo simples de f.*

Observação 3.2.22: *Seja a um polo de ordem m de f. Então*

$$f(z) = a_{-m}(z-a)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Assim, temos $f(z) \to \infty$ quando $z \to a$.

Definição 3.2.23: *Sejam $f \colon G \to \mathbb{C}$ analítica e $a \in G$ tal que $f(a) = 0$. Dizemos que a é um zero de f de multiplicidade $m \geq 1$ se existir uma função analítica $g \colon G \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ e $g(a) \neq 0$.*

Teorema 3.2.24: *Seja a uma singularidade isolada de $f \colon G \to \mathbb{C}$. Então a é um polo de ordem m de f se, e somente se, no desenvolvimento da série de Laurent de f temos $a_{-m} \neq 0$, e existem $r > 0$ e uma função $\varphi \colon G \to \mathbb{C}$, dada por*

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z), & z \neq a \\ a_{-m}, & z = a, \end{cases}$$

analítica em $B_r(a)$. Mais ainda, vale que $\mathrm{Res}(f; a) = \frac{\varphi^{m-1}(a)}{(m-1)!}$ se $m > 1$ e, se $m = 1$, então $\mathrm{Res}(f; a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z)$.

O próximo resultado assegura que para duas funções analíticas f e g numa região G serem iguais é necessário e suficiente que o conjunto $\{z \in G \colon f(z) = g(z)\}$ tenha ponto de acumulação.

Teorema 3.2.25: *Sejam G uma região e f analítica em G. São equivalentes:*

(a) $f \equiv 0$;

(b) Existe $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$, para todo $n \geq 0$;

(c) $Z = \{z \in G \colon f(z) = 0\}$ tem ponto de acumulação, ou seja, $Z' \neq \emptyset$.

Demonstração: É claro que (a) implica em (b) e em (c). Vejamos que (c) implica (b). Sejam $a \in Z'$ e $R > 0$ tal que $B_R(a) \subset G$. Como $a \in Z'$ e f é contínua, $f(a) = 0$. Por absurdo, suponhamos que exista $n \geq 1$ tal que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$. A série de potências de f em torno de a fica

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k, \quad z \in B_R(a).$$

A série

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n}$$

define uma função g, analítica em $B_R(a)$, tal que $f(z) = (z-a)^n g(z)$ e $g(a) = a_n \neq 0$. Podemos tomar $r \in (0, R)$ tal que $g(z) \neq 0$ quando $z \in B_R(a)$, pois g é contínua. Como a é ponto de acumulação de Z, existe $b \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tal que $f(b) = 0$. Disso, $0 = f(b) = (b-a)^n g(b)$, e logo $g(b) = 0$, o que é uma contradição. Portanto, (b) decorre de (c).

Agora, provemos que (b) implica em (a). Seja $A = \{z \in G \colon f^{(n)}(a) = 0, \forall n \geq 0\}$. Como (b) vale, A não é vazio. Como G é conexo, basta mostrar que A é aberto e fechado em G para termos $A = G$ e, consequentemente, $f \equiv 0$. Sejam $z \in \overline{A}$ e $\{z_k\}$ uma sequência em A tal que $z_k \to z$. Como cada $f^{(n)}$ é contínua, temos $f^{(n)}(z) = \lim f^{(n)}(z_k) = 0$. Logo $z \in A$ e A é fechado. Sejam $a \in A$ e $R > 0$ tais que $B_R(a) \subset G$. Então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in B_R(a),$$

onde $a_n n! = f^{(n)}(a) = 0$. Assim, $f(z) = 0$, para todo $z \in B_R(a)$. Portanto, $B_R(a) \subset A$ e A é aberto. ■

3.3 Espaço das funções analíticas

Teorema 3.3.1: *Seja G um aberto em $\mathbb{C}$. O conjunto das funções analíticas em G, $H(G)$, é fechado em $\mathcal{C}(G; \mathbb{C})$.*

Demonstração: Sejam $\{f_n\}$ uma sequência em $H(G)$ que converge para $f \in \mathcal{C}(G; \mathbb{C})$ e T um triângulo (que é um caminho fechado) no interior de uma bola aberta $B \subset G$. Como T é compacto, $\{f_n\}$ converge uniformemente em T, logo $\int_T f = \lim \int_T f_n = 0$. Pelo Teorema de Morera, f é analítica em G. ■

Dessa forma, como $H(G)$ é um subconjunto fechado do espaço métrico completo $(\mathcal{C}(G; \mathbb{C}), \rho)$, segue o seguinte corolário.

Corolário 3.3.2: *$(H(G), \rho)$ é um espaço métrico completo.*

Teorema 3.3.3: *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $H(G)$ que converge para $f \in H(G)$, onde $G \subset \mathbb{C}$ é aberto. Então $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, para cada $k \geq 1$.*

Demonstração: Seja $K \subset G$ um compacto qualquer tal que $d(K; \mathbb{C} \setminus G) > r > 0$. Então existem $a_1, \ldots, a_j \in K$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^{j} B_r(a_i)$. É suficiente mostrar que a convergência é uniforme em cada $B_r(a_i)$.

Para $a \in G$ fixado, seja $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(a) \subset G$. Como G é aberto, existe $R > 0$ tal que $\overline{B_R}(a) \subset G$. Usando a Fórmula Integral de Cauchy e o Teorema 3.2.8, temos

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \quad z \in \overline{B_r}(a)$$

onde $C(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Fazendo $M_n = \sup\{|f_n(w) - f(w)| \colon |w-a| \leq R\}$ e usando a Estimativa de Cauchy, segue que

$$\left| f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k! M_n R}{(R-r)^{k+1}}, \quad z \in D.$$

Claramente, $M_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ e a convergência é uniforme em $\overline{B_r}(a)$. O que conclui a demonstração. ■

Corolário 3.3.4: *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $H(G)$ tal que $\sum f_n(z)$ converge uniformemente em subconjuntos compactos para $f(z)$. Então*

$$f^{(k)}(z) = \sum f_n^{(k)}(z).$$

4 Funções meromorfas

Nesta seção trataremos das funções meromorfas. Como foi dito na introdução, a função gama faz parte dessa classe de funções.

Lembremos que um polo de ordem $m \geq 1$ é uma singularidade isolada de uma função cuja expansão em série de Laurent tem apenas m coeficientes com "índices negativos".

Definição 4.0.1: *Uma função complexa f definida num aberto G que, exceto para polos, é analítica em G, é dita função meromorfa em G.*

A seguinte observação é necessária para o próximo teorema.

Observação 4.0.2: *Suponhamos f analítica e a um zero de ordem m de f. Sabemos que para alguma função g analítica, $f(z) = (z-a)^m g(z)$, com $g(a) \neq 0$. Então $f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z)$. Logo*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Também, g'/g é analítica em uma vizinhança de a desde que $g(a) \neq 0$.

Agora, se f tem um polo de ordem m em a, então $f(z) = (z-a)^{-m}g(z)$, onde g é analítica e $g(a) \neq 0$. Segue que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e g'/g é analítica em uma vizinhança de a.

Teorema 4.0.3(Princípio do Argumento): *Seja f meromorfa em G com polos $p_1, \ldots, p_m$ e zeros $z_1, \ldots, z_n$, ambos contados de acordo com a multiplicidade, ou seja, cada p_l com multiplicidade k_l, $l = 1, \ldots, m$, e cada z_i com multiplicidade j_i, $i = 1, \ldots, n$. Seja C um caminho fechado que não passa por $p_1, \ldots, p_m, z_1, \ldots, z_n$. Suponhamos os polos e os zeros de f dentro de C. Então*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P,$$

onde $Z = j_1 + \cdots + j_n$ e $P = k_1 + \cdots + k_m$.

Demonstração: Temos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{j_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{j_n}{z-z_n} - \left[\frac{k_1}{z-p_1} + \cdots + \frac{k_m}{z-p_m}\right] + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

onde g é analítica em G e não se anula. Logo g'/g é analítica, e sua integral no caminho fechado C é igual a zero. Segue da Fórmula Integral de Cauchy que

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \sum_i j_i \int_C \frac{1}{z-z_i}dz - \sum_l k_l \int_C \frac{1}{z-p_l}dz + \int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz \\ &= 2\pi i(j_1 + \cdots + j_n - (k_1 + \cdots + k_m)),\end{aligned}$$

e o teorema está demonstrado. ■

Teorema 4.0.4(de Rouché): *Sejam f e g funções meromorfas num aberto contendo $\overline{B_R}(a)$, mas não contendo zeros ou polos na circunferência $C = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-a| = R\}$. Se Z_f, Z_g (resp.*

P_f, P_g) são os números de zeros (resp. polos) de f e g dentro de C contados de acordo com a multiplicidade e se

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad z \in C, \tag{23}$$

então $Z_f - P_f = Z_g - P_g$.

Demonstração: De (23),

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} + 1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| + 1, \quad z \in C.$$

Notemos que se $f(z)/g(z) = h > 0$, então essa inequação fica $h + 1 < h + 1$, uma contradição. Consequentemente, a função meromorfa f/g aplica C dentro de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$. Se λ é um ramo do logaritmo em Ω, então $\lambda(f(z)/g(z))$ está bem definida e é uma primitiva para $(f/g)'(f/g)^{-1}$ (portanto é analítica) num aberto contendo C. Finalmente, segue do Princípio do Argumento que

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f}{g}\right)'\left(\frac{f}{g}\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g).$$

■

O teorema a seguir mostra o quão especiais são as funções analíticas.

Teorema 4.0.5(de Hurwitz): *Sejam G uma região e $\{f_n\}$ uma sequência em $H(G)$ convergindo para f. Se $\overline{B_R}(a) \subset G$ e $f(z) \neq 0$ para $z \in C := \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| = R\}$, então existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que f e f_n têm o mesmo número de zeros em $\overline{B_R}(a)$, para $n \geq N$.*

Demonstração: Desde que $f(z) \neq 0$ quando $|z - a| = R$, $\delta := \inf\{|f(z)| \colon z \in C\} > 0$. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em C, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: se $n \geq N$ e $z \in C$, então $f_n(z) \neq 0$ e

$$|f(z) - f_n(z)| < \tfrac{1}{2}\delta < |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|.$$

Portanto, o Teorema de Rouché garante que f e f_n têm o mesmo número de zeros em $\overline{B_R}(a)$.■

Corolário 4.0.6: *Seja G uma região. Se a sequência $\{f_n\}$ em $H(G)$ converge para f e cada f_n não se anula, então $f \equiv 0$ ou f não se anula.*

4.1 Espaço das funções meromorfas

Sabemos que $(\mathbb{C}_\infty, d)$ é um espaço métrico no qual a métrica d é dada por

$$d(z, z') = 2|z - z'|\{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)\}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad d(z, \infty) = 2(1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

para $z, z' \in \mathbb{C}$. Com isso, se z e z' são diferentes de zero, não é difícil ver que $d(z, z') = d(z^{-1}, z'^{-1})$, e que $d(z, \infty) = d(z^{-1}, \infty)$.

Se uma sequência $\{z_n\}$ em $\mathbb{C}$ converge para z, então $d(z_n, z) \to 0$, ou seja, a sequência $\{z_n\}$ em $\mathbb{C}_\infty$ converge para z. É fácil ver que vale a recíproca, isto é, se $d(z_n, z) \to 0$, então $|z_n - z| \to 0$. Mais ainda, se $|z_n| \to \infty$, então $\{z_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}_\infty$. Isso decorre imediatamente das propriedades algébricas de sequências vistas no Teorema 2.3.28.

A fim de ficar mais didático, denotaremos uma bola de centro a e raio s em $\mathbb{C}_\infty$ por $B_s^\infty(a)$.

Teorema 4.1.1: *(a) Se $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, então existe $s > 0$ tal que $B_s^\infty(a) \subset B_r(a)$.*

(b) Se $a \in \mathbb{C}$ e $s > 0$, então existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset B_s^\infty(a)$.

(c) Dado $s > 0$, então existe um compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus K \subset B_s^\infty(\infty)$.

(d) Dado um compacto $K \subset \mathbb{C}$, então existe $s > 0$ tal que $B_s^\infty(\infty) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$

Demonstração: Os itens (a) e (b) seguem do fato de que, para uma sequência $\{z_n\}$ em $\mathbb{C}$, $|z_n - z| \to 0$ se, e somente se, $d(z_n, z) \to 0$. Para o item (c), basta tomar $K := \mathbb{C}_\infty \setminus B_{s/2}^\infty(\infty)$. Finalmente, se K é compacto, existe $s > 0$ tal que $d(\infty, K) = 2s$, de modo que $B_s^\infty(\infty) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$, provando o item (d). ■

Agora, sejam G uma região e f uma função meromorfa em G. Consideremos a função $\overline{f}\colon G \to \mathbb{C}_\infty$ tal que $\overline{f}(z) = \infty$, para todo polo z de f, e $\overline{f}(z) = f(z)$, caso contrário. Então $\overline{f}$ é uma função contínua. Seja $M(G)$ o conjunto de todas as funções meromorfas em G. Logo podemos considerar $M(G)$ como subespaço de $(\mathcal{C}(G; \mathbb{C}_\infty), \rho)$.

Notemos que $M(G)$ não é um espaço métrico completo com a métrica ρ. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, façamos $f_n \equiv n$. Então $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $M(G)$, que obviamente não converge em $M(G)$.

Observação 4.1.2: *Para uma função $g \in (\mathcal{C}(G; \mathbb{C}_\infty), \rho)$ definimos $1/g$ por*

$$\left(\frac{1}{g}\right)(z) = \begin{cases} \frac{1}{g(z)}, & g(z) \neq 0 \text{ ou } g(z) \neq \infty, \\ \frac{1}{g(z)} = 0, & g(z) = \infty, \\ \frac{1}{g(z)} = \infty, & g(z) = 0. \end{cases}$$

Assim, $1/g \in (\mathcal{C}(G; \mathbb{C}_\infty), \rho)$. Também, se $f_n \to f$ em $(\mathcal{C}(G; \mathbb{C}_\infty), \rho)$, então $1/f_n \to 1/f$ em $(\mathcal{C}(G; \mathbb{C}_\infty), \rho)$.

Definição 4.1.3: *Dizemos que uma família $\Im$ de funções definidas em $G \subset \mathbb{C}$ e contradomínio $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}_\infty$ é equicontínua em G se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

quando $|x - y| < \delta$, com $x, y \in G$ e $f \in \Im$.

É claro que toda função de uma família equicontínua é uniformemente contínua.

Um resultado muito importante em análise é o Teorema de Arzelà-Ascoli. Sua demonstração pode ser encontrada em [1, 2].

Teorema 4.1.4(de Arzelà-Ascoli): *Uma família de funções $\Im \subset (\mathcal{C}(G; M), \rho)$, em que M é $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}_\infty$, tem fecho compacto se, e somente se:*

(a) $\Im$ é equicontínuo em G.

(b) Para cada $x \in G$, o conjunto $E(x) = \{f(x) \mid f \in \Im\}$ tem fecho compacto em M.

Teorema 4.1.5: *Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções meromorfas em G tal que $f_n \to f$ em $(\mathcal{C}(G; \mathbb{C}_\infty), \rho)$, então $f \in M(G)$ ou $f \equiv \infty$. Se cada f_n é analítica, então $f \in H(G)$ ou $f \equiv \infty$.*

Demonstração: Suponhamos que $f(a) \neq \infty$ para algum $a \in G$ e façamos $M = |f(a)| + 1$. O item (a) do Teorema 4.1.1 garante a existência de $s > 0$ tal que $B_s^\infty(f(a)) \subset B_M(f(a))$. Como $f_n \to f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n(a), f(a)) < \frac{1}{2}s$, $n \geq n_0$. O conjunto $\{f, f_1, f_2, \ldots\}$ é compacto em $(\mathcal{C}(G;\mathbb{C}_\infty),\rho)$, logo é equicontínuo pelo Teorema de Arzelà-Ascoli. Disso, existe $r>0$ tal que $|z-a|<r$ implica $\rho(f_n(z),f_n(a))\leq \frac{1}{2}s$. Aplicando a desigualdade triangular, $\rho(f_n(z),f(a))\leq s$ para $|z-a|\leq r$ e $n\geq n_0$.

Da escolha de s, temos, para $|z-a|\leq r$ e $n\geq n_0$,

$$|f_n(z)|\leq |f_n(z)-f(a)|+|f(a)|\leq 2M.$$

Daí, quando $|z-a|\leq r$ e $n\geq n_0$, temos

$$\rho(f_n(z),f(z))=\frac{2|f_n(z)-f(z)|}{[(1+|f_n(z)|^2)(1+|f(z)|^2)]^{\frac{1}{2}}}\geq \frac{2}{1+4M^2}|f_n(z)-f(z)|.$$

Como, para cada $z\in\overline{B_r}(a)$, $\rho(f_n(z),f(z))\to 0$ uniformemente, segue que $|f_n(z)-f(z)|\to 0$ uniformemente, para todo $z\in\overline{B_r}(a)$. Ora, a sequência $\{f_n\}$ é limitada em $B_r(a)$, de modo que f_n não tem polos e é analítica em uma vizinhança de $z=a$, para $n\geq n_0$. Logo f é analítica numa bola fechada de centro a, pois o espaço das funções analíticas é completo.

Agora, suponhamos que existe $a\in G$ com $f(a)=\infty$. Devemos ter cada função $1/f_n$ meromorfa em G. Do que fizemos, existe $r>0$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tais que $1/f$ e $1/f_n$ são analíticas em $B_r(a)$, para $n\geq n_0$ (tais funções se anulam em a por definição); e $1/f_n\xrightarrow{u}1/f$ em $B_r(a)$. Do Teorema de Hurwitz, $1/f\equiv 0$ ou $1/f$ tem zeros isolados em $B_r(a)$. Logo, se $f\not\equiv\infty$, então $1/f\not\equiv 0$ e f deve ser meromorfa em $B_r(a)$. Dessa forma, f é meromorfa em G se $f\not\equiv\infty$.

Por fim, se cada f_n é analítica, então $1/f_n$ não tem zeros em $B_r(a)$. Do Corolário 4.0.6, tem-se $1/f\equiv 0$ ou $1/f$ não se anula. Se $f(a)=\infty$, então $1/f$ tem pelo menos um zero, e assim $f\equiv\infty$ em $B_r(a)$. Da primeira parte da demonstração $f\equiv\infty$ ou f é analítica. ■

Corolário 4.1.6: *$(M(G)\cup\{\infty\},\rho)$ é um espaço métrico completo.*

Corolário 4.1.7: *$H(G)\cup\{\infty\}$ é fechado em $(\mathcal{C}(G;\mathbb{C}_\infty),\rho)$.*

5 Produtos infinitos e fatores elementares

Sejam $\{a_n\}$ uma sequência em G tal que o conjunto $\{a_1, a_2, \dots\}$ não tem ponto de acumulação em G e $\{m_n\}$ uma sequência em $\mathbb{N}$. Será que existe uma função f analítica em G tal que os únicos zeros de f são os pontos a_n com multiplicidade dos zero em a_n igual a m_n? Notemos que para $a_1, \dots, a_k$, uma opção é $f(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_k)^{m_k}$. Nosso objetivo nesta seção é o caso em que há infinitos elementos na sequência $\{a_n\}$, o que nos leva a estudar a convergência de produtos infinitos de números e funções. As funções que estamos procurando foram introduzidas por Weierstrass .

Definição 5.0.1: *Seja $\{z_n\}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que o limite $z := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k$ existe. Dizemos que z é o produto infinito dos números z_n e denotamos isso por*

$$z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Não há o que fazer se um termo no produto infinito for o número 0. Suponhamos $z_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $0 \neq z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ exista. Fazendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$, temos $p_n/p_{n-1} = z_n$. Como $z \neq 0$ e $p_n \to z$, temos $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$. Agora, se $z_n = a$ para todo n e $0 < |a| < 1$, então $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$, apesar de $\lim_{n\to\infty} z_n = a \neq 0$.

Exemplo 5.0.2: *Sejam G um aberto e $\{f_n\}$ uma sequência em $H(G)$ tal que a função f, definida por $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, é analítica em G. Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z) \prod_{n\neq k} f_n(z) \tag{24}$$

converge para $f'(z)$. Além disso, se $f \not\equiv 0$ e $K \subset G$ é um compacto tal que $f(z) \neq 0$, para cada $z \in K$, então

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \tag{25}$$

e a convergência é uniforme em K. De fato, a sequência $g_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$ converge para f, e o Teorema 3.3.3 garante que g_n' converge para f'. Usando a regra do produto para derivadas, temos

$$\begin{aligned} g_n'(z) &= f_1'(z) \prod_{k=2}^{n} f_k(z) + f_1(z) \left(\prod_{k=2}^{n} f_k(z) \right)' \\ &= f_1'(z) \prod_{k\neq 1}^{n} f_k(z) + f_2'(z) \prod_{k\neq 2}^{n} f_k(z) + \cdots + f_n'(z) \prod_{k\neq n}^{n} f_k(z) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \prod_{k\neq j}^{n} f_k(z). \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos (24). Para a segunda parte, notemos que

$$g_n'(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \prod_{k\neq j}^{n} f_k(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} g_n(z) = g_n(z) \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)};$$

e o resultado segue.

Teorema 5.0.3: *Seja $\{z_n\}$ tal que $\operatorname{Re} z_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge para um número diferente de zero se, e somente se, a série $\sum \log z_n$ converge ($\log$ é o ramo principal do logaritmo).*

Demonstração: Sejam $p_n = z_1 \cdots z_n$, $z = re^{i\theta}$, com $-\pi < \theta \leq \pi$, e $\ell(p_n) = \log |p_n| + i\theta_n$ com $\theta - \pi < \theta_n < \theta + \pi$. Fazendo $s_n = \log z_1 + \cdots + \log z_n$, temos

$$\exp s_n = \exp(\log z_1) \cdots \exp(\log z_n) = p_n,$$

de modo que $s_n = \ell(p_n) + 2\pi i k_n$ para algum inteiro k_n.

Suponhamos que $p_n \to z$. Então $s_n - s_{n-1} = \log z_n \to 0$, pois $z_n \to 1$, e $\ell(p_n) - \ell(p_{n-1}) \to 0$. Logo $k_n - k_{n-1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Como cada $k_n \in \mathbb{Z}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_m = k_n = k$, para $m, n \geq n_0$. Então $s_n \to \ell(z) + 2\pi i k$, ou seja, $\sum \log z_n$ deve convergir.

Reciprocamente, suponhamos que $\sum \log z_n$ converge para s, isto é, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log z_k \to s$. Então $\exp s_n \to \exp s$, pois exp é contínua. Mas $\exp s_n = p_n$ e, portanto, $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge para $z = \exp s \neq 0$. ■

Exemplo 5.0.4: *Calculando as derivadas de $\log$ temos*

$$\log'(z) = \frac{1}{z}, \quad \log''(z) = -\frac{1}{z^2}, \quad \log'''(z) = \frac{2}{z^3}, \ldots, \quad \log^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}.$$

Assim, podemos escrever $\log(1+z)$ por sua série de potências em torno de $z = 0$ como

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Com isso, se $|z| < 1$, então

$$\left| 1 - \frac{\log(1+z)}{z} \right| = \left| \frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z^2 + \cdots \right| \leq \frac{1}{2}(|z| + |z^2| + \cdots) = \frac{|z|}{2(1-|z|)}.$$

Se $|z| < \frac{1}{2}$, segue que

$$\tfrac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \tfrac{3}{2}|z|. \tag{26}$$

Teorema 5.0.5: *Seja $\{z_n\}$ tal que $\operatorname{Re} z_n > -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\sum \log(1+z_n)$ converge absolutamente se, e somente se, a série $\sum z_n$ converge absolutamente.*

Demonstração: Se $\sum |\log(1+z_n)|$ converge, então $|\log(1+z_n)| \to 0$, implicando em $|z_n| \to 0$. Logo $|z_n| < \frac{1}{2}$, para n suficientemente grande. De (26) conclui-se que $\sum |z_n|$ converge.

Agora, se $\sum |z_n|$ converge, então $|z_n| \to 0$, e segue que $|z_n| < \frac{1}{2}$, para n suficientemente grande. Novamente, da Inequação (26) vê-se que $\sum |\log(1+z_n)|$ é dominada por uma série convergente e deve convergir. ■

Observação 5.0.6: *Se $z_n = -1$ para todo n, então o produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ não converge, mas $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n| = 1$. Isso indica que a definição de convergência absoluta do produto infinito não deve ser análoga à de séries.*

Definição 5.0.7: *Seja $\{z_n\}$ tal que $\operatorname{Re} z_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ é dito absolutamente convergente quando a série $\sum \log(z_n)$ converge absolutamente.*

Observação 5.0.8: *A convergência absoluta do produto infinito implica na convergência do produto infinito. De fato, se $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, então $\sum |\log(z_n)|$ converge, o que implica que $\sum \log(z_n)$ converge. Portanto, $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.*

Teorema 5.0.9: *Seja* $\{z_n\}$ *tal que* $\operatorname{Re} z_n > 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *O produto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente se,e somente se, a série* $\sum (z_n - 1)$ *converge absolutamente.*
Demonstração: Segue diretamente dos Teoremas 5.0.3 e 5.0.5. ∎

Lema 5.0.10: *Seja* X *um conjunto não vazio. Seja* $f\colon X \to \mathbb{C}$ *uma função e* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções complexas definidas em* X *tal que, para cada* $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente para* $f(x)$. *Se existir uma constante* α *tal que* $\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha$, *para todo* $x \in X$, *então* $\exp f_n(x) \to \exp f(x)$ *uniformemente para cada* $x \in X$.
Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade da função exponencial em $z = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|e^z - 1| < \varepsilon e^{-\alpha}$, quando $|z| < \delta$. Da convergência uniforme, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, para todo $x \in X$ e $n \geq n_0$. Logo

$$|\exp f_n(x) - \exp f(x)| = \left|\frac{\exp f_n(x)}{\exp f(x)} - 1\right| |\exp f(x)| \leq |\exp(f_n(x) - f(x)) - 1| e^{\alpha} < \varepsilon e^{-\alpha} e^{\alpha} = \varepsilon,$$

para todo $x \in X$ e $n \geq n_0$. ∎

Lema 5.0.11: *Sejam* (X, d) *um espaço métrico compacto e* $\{g_n\}$ *uma sequência de funções em* $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$ *tal que, para cada* $x \in X$, $\sum g_n(x)$ *converge absolutamente e uniformemente. Então o produto*

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(x))$$

converge absolutamente e uniformemente, para cada $x \in X$. *Mais ainda, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $f(x) = 0$ *se, e somente se,* $g_n(x) = -1$ *para algum* $n \in \{1, \ldots, n_0\}$.
Demonstração: Como $\sum g_n(x)$ converge absolutamente e uniformemente para cada $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n(x)| < \frac{1}{2}$, para todo $x \in X$ e $n > n_0$. Assim, $\operatorname{Re}(1 + g_n(x)) > 0$ e pela Inequação (26), $|\log(1 + g_n(x))| \leq \frac{3}{2}|g_n(x)|$, com $x \in X$ e $n > n_0$. Então

$$h(x) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \log(1 + g_n(x))$$

converge uniformemente, para cada $x \in X$. Logo h é contínua e, como X é compacto, h é limitada. Em particular, existe α real tal que $\operatorname{Re} h(x) < \alpha$ para todo $x \in X$. Fazendo

$$h_k(x) = \sum_{n=n_0+1}^{k} \log(1 + g_n(x))$$

e aplicando o Lema 5.0.10, obtemos $\exp h_k \xrightarrow{u} \exp h(x)$. Mas

$$\exp h_k(x) = \prod_{n=n_0+1}^{k} (1 + g_n(x)),$$

e isso implica que

$$\exp h(x) = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} (1 + g_n(x))$$

converge uniformemente, para cada $x \in X$. Por fim,

$$f(x) = (1 + g_1(x)) \cdots (1 + g_{n_0}(x)) \exp h(x)$$

e $\exp h(x) \neq 0$, para todo $x \in X$. Então, $f(x) = 0$ se, e somente se, $g_n(x) = -1$ para algum $n \in \{1, \ldots, n_0\}$. ∎

Teorema 5.0.12: *Sejam G uma região e $\{f_n\}$ uma sequência em $H(G)$ tal que $f_n \not\equiv 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum(f_n(z) - 1)$ converge absolutamente e uniformemente em subconjuntos compactos de G, então a função f, dada por $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, é analítica em G. Se a é um zero de f, então a é um zero de um número finito de funções f_n e a multiplicidade de a é a soma das multiplicidades dos zeros das funções f_n em a.*

Demonstração: Da convergência absoluta e uniforme de $\sum(f_n(z) - 1)$ em subconjuntos compactos de G e do Lema 5.0.11, temos a convergência uniforme e absoluta de $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ em subconjuntos compactos de G. Segue que a função f está em $H(G)$. Agora, se $f(a) = 0$, seja $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(a) \subset G$ (a bola fechada é compacta em G). O resultado segue do Lema 5.0.11, que afirma a existência de n tal que $f(z) = f_1(z) \cdots f_n(z) g(z)$, e a função g não se anula em $\overline{B_r}(a)$. ■

5.1 Teorema da Fatoração de Weierstrass

Seja $\{a_n\}$ uma sequência em uma região G tal que o conjunto $\{a_1, a_2, \dots\}$ não tem ponto de acumulação em G (mas um ponto da sequência pode aparecer um número finito de vezes nela). Suponhamos que existam funções analíticas g_n que não se anulam em G, tais que f_n, dada por $f_n(z) = (z - a_n)g_n(z)$, satisfaça as hipóteses do Teorema 5.0.12. Então a função f, dada por

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (z - a_n) g_n(z),$$

é analítica e tem seus zeros apenas nos pontos $z = a_n$. Se G for simplesmente conexo, a maneira de escolher g_n é escrevendo $g_n = \exp h_n$, para alguma função analítica h_n. Dessa forma podemos garantir que $g_n(z) \neq 0$ para todo $z \in G$.

Definição 5.1.1: *Um fator elementar é uma função $E_p(z)$, $p = 0, 1, \dots$, que satisfaz:*

$$(i) \quad E_0(z) = 1 - z;$$
$$(ii) \quad E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right), \quad p \geq 1.$$

Sejam G aberto e $a \in G$. Notemos que $a \neq 0$ é o único zero de $E_p(z/a)$ e, nesse caso, a é zero simples. Também, se $b \in \mathbb{C} \setminus G$, então $E_p\left(\frac{a-b}{z-b}\right)$ tem um zero simples em $z = a$ e é analítico em G. Tais funções serão usadas para criar funções analíticas com zeros determinados de multiplicidades determinadas.

Lema 5.1.2: *Se $|z| \leq 1$ e $p \geq 0$, então $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.*

Demonstração: Para $p = 0$ é óbvio! Suponhamos $p \geq 1$. Para p fixo, seja

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

sua expansão em série de potências em torno de $z = 0$. Derivando, obtemos

$$E_p'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

Comparando as duas expressões (em z^p) temos que

$$a_1 = \cdots = a_p = 0,$$

e para todo $k \geq p+1$, $a_k \leq 0$, pois os coeficientes na expansão da função exponencial são todos maiores do que zero. Assim, $|a_k| = -a_k$, para todo $k \geq p+1$. Logo

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1.$$

Portanto, para $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{p+1}. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.1.3: *Seja $\{a_n\}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ e $a_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\{p_n\}$ é qualquer sequência de inteiros tais que, para todo $r > 0$, a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} \tag{27}$$

converge, então a função f, dada por

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n} \right),$$

é uma função inteira com zeros apenas nos pontos a_n. Se z_0 aparece exatamente m vezes na sequência $\{a_n\}$, então f tem um zero em $z = z_0$ de multiplicidade m. Mais ainda, se $p_n+1 = n$, a série em (27) converge.

Demonstração: Se existir uma sequência $\{p_n\}$ tal que (27) convirja, então, do Lema 5.1.2,

$$\left| 1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1}$$

quando $|z| \leq r$ e $r \leq |a_n|$. Como $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, para cada $r > 0$ existe $N_r = N$ tal que $|a_n| \geq r$, sempre que $n \geq N$. Então, dado $r > 0$, a série $\sum |1 - E_{p_n}(z/a_n)|$ é dominada pela série convergente de (27) em $\overline{B_r}(0)$. Assim, a série $\sum |1 - E_{p_n}(z/a_n)|$ converge absolutamente e define uma função em $H(\mathbb{C})$. Pelo Teorema 5.0.12, $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$ converge e define uma função em $H(\mathbb{C})$.

A sequência de inteiros $\{p_n\}$ sempre pode ser encontrada para que (27) convirja, para todo $r > 0$. De fato, para cada $r > 0$ deve existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $2r < |a_n|$, para todo $n \geq N$, pois $|a_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como a série $\sum 2^{-n}$ converge, a série (27) deve convergir. ■

Teorema 5.1.4(da Fatoração de Weierstrass): *Sejam $f \in H(\mathbb{C})$ e $\{a_n\}$ a sequência dos zeros não nulos de f repetidos de acordo com a multiplicidade. Suponha que f tenha um zero em $z = 0$ de ordem $m \geq 0$ (se $m = 0$, $f(0) \neq 0$). Então existem $g \in H(\mathbb{C})$ e uma sequência de inteiros $\{p_n\}$ tais que*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n} \right).$$

Demonstração: O Teorema 3.2.25 garante que os zeros $\{a_n\}$ de f são isolados e $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Do Teorema 5.1.3, podemos escolher uma sequência de inteiros $\{p_n\}$ tais que

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

define uma função h com os mesmos zeros de f com as mesmas multiplicidades. Assim, $f(z)/h(z)$ tem singularidades removíveis em $z = 0, a_1, a_2, \ldots$. Dessa forma, f/h é uma função inteira que não se anula. Como $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, existe uma função inteira g tal que $f(z) = e^{g(z)}h(z)$ (ver Exemplo 3.2.13). ■

5.2 Função analítica determinada por sequências

O seguinte teorema dá uma resposta positiva para o problema proposto no início desta seção.

Teorema 5.2.1: *Sejam G uma região e $\{a_j\}$ uma sequência de pontos distintos em G tal que o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ não tem ponto de acumulação em G. Seja $\{m_j\}$ uma sequência de inteiros. Então existe $f \in H(G)$ cujos zeros são apenas os pontos a_j. Mais ainda, a_j é um zero de f de multiplicidade m_j.*

Demonstração: Mostremos inicialmente que é suficiente provar para o caso em que existe $R > 0$ tal que

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > R\} \subset G \quad \text{e} \quad |a_j| \leq R, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Em outros termos, mostremos que existe $f \in H(G)$ com a_j, $j = 1, 2, \ldots$, como zeros e m_j, $j = 1, 2, \ldots$, a respectiva multiplicidade do zero $z = a_j$ e tal que tem a seguinte propriedade

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1. \tag{29}$$

De fato, suponhamos que seja possível encontrar f satisfazendo (28). Seja $G_1 \subset \mathbb{C}$ um aberto qualquer com $\{\alpha_j\}$ e $\{m_j\}$ como na hipótese do teorema. Se $\overline{B_r}(a)$ está contido em G_1 com $\alpha_j \notin B_r(a)$ para todo j (pode-se ter $|\alpha_j - a| = r$), consideremos a função meromorfa T definida por $T(z) = (z - a)^{-1}$. Seja $G = T(G_1)$ e notemos que G satisfaz (28), onde $a_j = T(\alpha_j) = (\alpha_j - a)^{-1}$. Se existir $f \in H(G)$ com apenas zeros em cada a_j de multiplicidade m_j, e tal que f satisfaz (29), então a função g, dada por $g(z) = f(T(z))$, é analítica em $G_1 \setminus \{a\}$ com singularidade removível em $z = a$. Ainda, g tem zeros em cada α_j com multiplicidade m_j.

Com isso, assumimos que G satisfaz (28). Ora, por (28), não podemos ter $G = \mathbb{C}$, a menos que a sequência $\{a_j\}$ tenha um número finito de pontos (nesse caso, o teorema é claramente satisfeito). Então suponhamos que a sequência $\{a_j\}$ tenha um número infinito de pontos. Como $|a_j| \leq R$, para todo j, e $\{a_j\}$ não tem subsequência que converge em G, então $(\mathbb{C} \setminus G) \neq \emptyset$ e é compacto. Além disso, as subsequências de $\{a_j\}$ devem convergir para pontos de $\mathbb{C} \setminus G$, pois $\overline{B_R}(a)$ é compacta.

Sendo assim, seja $\{z_n\}$ uma sequência cujos termos são os a_j's, mas cada a_j aparece m_j vezes na sequência $\{z_n\}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in \mathbb{C} \setminus G$ tal que $|w_n - z_n| = d(z_n, \mathbb{C} \setminus G)$.

Então $\lim_{n\to\infty}|z_n - w_n| = 0$. Consideremos as funções

$$E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right);$$

as quais têm um zero simples em $z = z_n$. Provemos que o produto infinito dessas funções converge em $H(G)$. Para isso, seja $K \subset G$ compacto. Assim, $d(\mathbb{C}\backslash G, K) > 0$. Pela propriedade do ínfimo, temos, para todo $z \in K$,

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{|z_n - w_n|}{d(K, w_n)} \leq \frac{|z_n - w_n|}{d(K, \mathbb{C}\setminus G)}.$$

Segue que, para todo $\delta \in (0,1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - w_n|/|z - w_n| < \delta$, para qualquer $z \in K$ e todo $n \geq N$. Do Lema 5.1.2, temos

$$\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \leq \delta^{n+1}, \quad z \in K, \quad n \geq N. \tag{30}$$

Assim, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right]$$

converge uniformemente e absolutamente em K e, do Teorema 5.0.12, a função f, dada por

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right),$$

é analítica em G. Também pelo Teorema 5.0.12, $\{a_j\}$ e $\{m_j\}$ são como queremos (porque a_j aparece m_j vezes na sequência $\{z_n\}$).

Para mostrar que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$, sejam $\varepsilon > 0$ qualquer e $R_1 > R$. Se $|z| \geq R_1$, então

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{2R}{R_1 - R},$$

porque $|z_n| \leq R$ e $w_n \in \mathbb{C}\setminus G \subset B_R(0)$. Daí, escolhendo $R_1 > R$ tal que $2R < \delta(R_1 - R)$, para algum $\delta \in (0,1)$, a Inequação (30) vale quando $|z| \geq R$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$\operatorname{Re} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) > 0, \quad |z| \geq R_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$|f(z) - 1| = \left|\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right) - 1\right|. \tag{31}$$

Das Inequações (26) e (30) temos, quando $|z| \geq R_1$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\delta^{n+1} = \frac{3\delta^2}{2(1-\delta)}.\end{aligned}$$

Restringindo δ de modo que $|e^w - 1| < \varepsilon$, onde

$$|w| < \frac{3\delta^2}{2(1-\delta)},$$

a Equação (31) implica $|f(z) - 1| < \varepsilon$, quando $|z| \geq R_1$. Ou seja, $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. ■

Corolário 5.2.2: *Sejam G um aberto e $f \in M(G)$. Então existem funções $g, h \in H(G)$ tais que $f = g/h$.*

Demonstração: Sejam $\{a_j\}$ os polos de f e m_j a ordem do polo a_j. Do Teorema 5.2.1, existe $h \in H(G)$ com apenas zeros de multiplicidade m_j em cada $z = a_j$. Então hf tem singularidades removíveis em cada a_j. Segue que $g = hf$ é analítica em G. ■

6 A função gama

Enfim, alcançamos a parte principal do trabalho. Nosso objetivo é definir a função gama e expor algumas de suas propriedades aplicando a teoria vista nas seções anteriores.

Antes de definirmos a função gama, notemos que o Teorema 5.1.3 garante que o produto infinito $\prod(1+z/n)e^{-z/n}$ converge em $H(\mathbb{C})$ para uma função inteira somente com zeros (simples) apenas em $z = -1, -2, \dots$ (basta considerar $a_n = -n$ e $p_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Assim,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \tag{32}$$

converge em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ para uma função com polos simples em $z = -1, -2, \dots$.

Definição 6.0.1: *A função gama, denotada por* Γ*, é a função meromorfa em* $\mathbb{C}$*, com polos simples em* 0*,* -1*,* -2*,* $\dots$*, definida por*

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

onde γ*, chamada constante de Euler, é escolhida de modo que* $\Gamma(1) = 1$.

Vejamos que tal constante γ existe. Com efeito, da escolha de γ, devemos ter

$$1 = \Gamma(1) = e^{-\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{n}}. \tag{33}$$

Fazendo $c := \prod(1 + 1/n)^{-1}e^{1/n}$, então $\gamma = \log c$. Logo

$$\begin{aligned}
\gamma &= \log \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{n}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n) \right) + \log\left(\frac{n}{n+1} \right) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n) \right),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\lim \log(n/(n+1)) = 0$.

A fórmula a seguir, obtida por Gauss, permite que expressemos a função gama de outra forma.

Teorema 6.0.2(Fórmula de Gauss): *Para* $z \neq 0, -1, \dots$*, vale*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Demonstração: Temos

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{ke^{\frac{z}{k}}}{z+k}$$
$$= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^z}{(z+1)} \frac{2e^{\frac{z}{2}}}{(z+2)} \cdots \frac{ne^{\frac{z}{n}}}{(z+n)} \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z} n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \exp\left(z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Como $1 = n^z e^{-z\log n}$, temos

$$e^{-\gamma z} \exp\left(z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right) = n^z e^{-\gamma z} e^{-z\log n} \exp\left(z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= n^z \exp\left(z\left(-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)\right).$$

O resultado segue tomando o limite quando $n \to \infty$ nessa última igualdade. ■

Teorema 6.0.3(Equação Funcional): *Para* $z \neq 0, -1, \ldots,$ *vale* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Demonstração: Usando a Fórmula de Gauss, temos

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}$$
$$= z \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \frac{n}{(z+n+1)}$$

Como $n/(z+n+1) \to 1$ quando $n \to \infty$, temos a asserção do teorema. ■

6.1 Extensão do fatorial

Aplicando a Equação Funcional em $z+n$, para $n \in \mathbb{N}$ e $z \neq 0, -1, \ldots,$ temos

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z). \tag{34}$$

Para $z = 1$, vale

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\Gamma(1) = n!.$$

Vemos, então, que a função gama é analítica no semiplano positivo $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$, e concorda com o fatorial em $\mathbb{N}$. Isso justifica considerarmos a função gama como extensão do fatorial para o plano complexo da seguinte forma:

Definição 6.1.1: *Para* $z \neq -1, -2, \ldots,$ *designamos*

$$z! = \Gamma(z+1).$$

Do Teorema 3.2.24, os resíduos da função gama são dados por

$$\operatorname{Res}(\Gamma; -n) = \lim_{z\to -n} (z+n)\Gamma(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Aplicando a Equação (34) em $(z+n+1)$, obtemos

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n+1)}.$$

Logo, fazendo $z \to -n$, segue que

$$\operatorname{Res}(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{35}$$

6.2 Teorema de Bohr-Mollerup

Podemos calcular Γ'/Γ utilizando o Exemplo 5.0.2. Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{(ze^{\gamma z}\Gamma(z))'}{ze^{\gamma z}\Gamma(z)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}\right)'}{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-2}e^{\frac{z}{n}}+\frac{1}{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-n}{n(n+z)}+\frac{1}{n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}.\end{aligned}$$

Também podemos calcular usando a regra do produto. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{(ze^{\gamma z}\Gamma(z))'}{ze^{\gamma z}\Gamma(z)} &= \frac{z\gamma e^{\gamma z}+e^{\gamma z}}{ze^{\gamma z}}+\frac{z\gamma e^{\gamma z}\Gamma'(z)}{ze^{\gamma z}\Gamma(z)}\\ &= \gamma+\frac{1}{z}+\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.\end{aligned}$$

Segue que, para $z \neq 0, -1, \ldots$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}, \tag{36}$$

e a convergência é uniforme em todo compacto de $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,\ldots\}$. Do Corolário 3.3.4, para calcular a derivada de Γ'/Γ basta derivar termo por termo a Equação (36). Logo,

$$\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}. \tag{37}$$

O Teorema 2.6.11 nos diz que uma função f diferenciável é convexa se, e somente se, f' é crescente. Agora, notemos que $\Gamma(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}_{>0}$, logo $\log\Gamma(x)$ está bem definido, de modo que

$$(\log\Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

De (37), temos $(\log\Gamma(x))' > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Decorre do Teorema 2.6.11 que a função gama é logaritmicamente convexa em $\mathbb{R}_{>0}$, isto é, $\log\circ\Gamma$ é convexa em $\mathbb{R}_{>0}$. O teorema a seguir mostra que a função gama é a única em $\mathbb{R}_{>0}$ que é logaritmicamente convexa, satisfaz a Equação Funcional em $\mathbb{R}_{>0}$ e que aplica 1 no 1. Antes de enunciá-lo, lembremos que uma função f definida em $[a,b]$ é convexa se, para quaisquer $x_1, x_2 \in [a,b]$ e todo $t \in [0,1]$, satisfaz $f(tx_2+(1-t)x_1) \leq tf(x_2)+(1-t)f(x_1)$.

Teorema 6.2.1(de Bohr-Mollerup): *Seja* $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *com as seguintes propriedades:*

(a) $\log\circ f$ *é uma função convexa;*

(b) $f(x+1) = xf(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}_{>0}$*;*

(c) $f(1) = 1$.

Então $f(x) = \Gamma(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Demonstração: É fácil ver que $f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Para cada $y \in \mathbb{R}_{>0}$, existem $x \in (0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $y = x+n$. Dessa forma, basta mostrar que $f(x) = \Gamma(x)$, quando $x \in (0,1]$. Sejam $x \in (0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$ maior do que dois. Temos

$n-1 < n < n+x \leq n+1$. Como $\log\circ f$ é convexa,

$$\log f(n) \leq \frac{1}{(x+1)}(\log f(n+x) - \log f(n-1)) + \log f(n-1).$$

Isso nos dá

$$\log f(n) - \log f(n-1) \leq \frac{\log f(n+x) - \log f(n)}{x}$$

e também

$$\frac{\log f(n+x) - \log f(n)}{x} \leq \log f(n+1) - \log f(n).$$

Notemos que $f(m) = (m-1)!$, com $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\log(n-1)! - \log(n-2)! \leq \frac{\log f(n+x) - \log f(n)}{x} \leq \log n! - \log(n-1)!,$$

e logo

$$x\log(n-1) \leq \log f(n+x) - \log(n-1)! \leq x\log n.$$

Segue que

$$\log((n-1)^x(n-1)!) \leq \log f(n+x) \leq \log(n^x(n-1)!),$$

e aplicando a função exponencial (que é crescente), encontramos

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x(n-1)!.$$

Usando o fato de que $f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x)$, concluímos que

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left(\frac{x+n}{n}\right).$$

A Fórmula de Gauss garante que existe o limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

e que é igual a $\Gamma(x)$. Como $(x+n)/n \to 1$ quando $n\to\infty$, temos $f(x) = \Gamma(x)$, para todo $x \in (0,1]$. ■

6.3 Expressão integral

Toda discussão feita a seguir tem o objetivo de demonstrar que se $\operatorname{Re} z > 0$, então

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Para fazer isso, basta mostrar que essa integral define uma função analítica em $G = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ que coincide com a função gama em $[1,\infty)$. Pois sabemos que: para duas funções analíticas f e g numa região G serem iguais é necessário e suficiente que o conjunto $\{z \in G\colon f(z) = g(z)\}$ tenha ponto de acumulação (ver Teorema 3.2.25).

Lema 6.3.1: *Seja $S = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq A\}$, onde $a, A \in \mathbb{R}$.*

(a) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in S$,

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{-t}t^{z-1}dt\right| < \varepsilon, \quad 0 < \alpha < \beta < \delta.$$

(b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\kappa > 0$ tal que, para todo $z \in S$,

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{-t}t^{z-1}dt\right| < \varepsilon, \quad \kappa < \alpha < \beta.$$

Demonstração: (a) Temos $\operatorname{Re} z - 1 \geq a - 1$, $z \in S$. Para $0 < t \leq 1$, vale $t^{\operatorname{Re} z-1} \leq t^{a-1}$. Como $e^{-t} \leq 1$, então

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq |t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z-1} \leq t^{a-1}.$$

Logo, se $0 < \alpha < \beta < 1$, segue que

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leq \int_\alpha^\beta t^{a-1}dt = \frac{\beta^a - \alpha^a}{a}, \quad z \in S.$$

O resultado é verificado observando que para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que, se $|\beta - \alpha|$, então $(\beta^a - \alpha^a)/a < \varepsilon$.

(b) Se $z \in S$ e $t \geq 1$, então $|t^{z-1}| \leq t^{A-1}$. Desde que $t^{A-1}e^{-t/2}$ converge para 0 quando $t \to \infty$ e define uma função contínua em $[1, \infty)$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $t^{A-1}e^{-t/2} \leq c$, para todo $t \geq 1$. Assim, para $z \in S$ e $t \geq 1$, temos

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq ce^{-t/2}.$$

Se $1 < \alpha < \beta$, então

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leq c\int_\alpha^\beta e^{-t/2}dt = 2c(e^{-\alpha/2} - e^{-\beta/2}).$$

Ora, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\kappa > 1$ tal que $2c|e^{-\alpha/2} - e^{-\beta/2}| < \varepsilon$, quando $\alpha, \beta > \kappa$, e o resultado segue. ■

Observação 6.3.2: *Em posse do Teorema 2.6.14, observamos que se $G \subset \mathbb{C}$ é aberto e $h\colon [a, b] \times G \to \mathbb{C}$ é contínua, então a função $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$, dada por $\varphi(z) = \int_a^b h(t, z)dt$, é contínua. Se, para cada $(t, z) \in [a, b] \times G$, existir o limite*

$$\frac{dh}{dz}(t, z) = \lim_{w \to z} \frac{h(t, w) - h(t, z)}{w - z}$$

e for contínua a função $\dfrac{dh}{dz}$, então devemos ter

$$\varphi'(z) = \int_a^b \frac{dh}{dz}(t, z)dt.$$

Teorema 6.3.3: *Seja $G = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n\colon G \to \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = \int_{1/n}^n e^{-t}t^{z-1}dt$. Então f_n é analítica em G, para cada $n \in \mathbb{N}$, e a sequência $\{f_n\}$ é convergente em $H(G)$.*

Demonstração: Considerando $h(t, z) = e^{-t}t^{z-1}$, onde $(t, z) \in [\frac{1}{n}, n] \times G$, $n \in \mathbb{N}$, a observação acima garante que cada f_n é analítica. Se $K \subset G$ é compacto, existem $a, A \in \mathbb{R}_{>0}$ tais que $K \subset \{z \in \mathbb{C}\colon a \leq \operatorname{Re} z \leq A\}$. Para $m > n$, vale

$$f_m(z) - f_n(z) = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{z-1}dt + \int_n^m e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Dos Lemas 6.3.1 e 2.5.8, a sequência $\{f_n\}$ é de Cauchy, de modo que $\{f_n\}$ converge no espaço métrico completo $H(G)$. ■

Lema 6.3.4: *(a)* $\{(1+z/n)^n\}$ *converge para* e^z *em* $H(\mathbb{C})$.

(b) $(1-t/n)^n \leq e^{-t}$*, quando* $t \geq 0$ *e para todo* $n \geq t$.

Demonstração: (a) Seja $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Então existe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B_{\overline{n}}(0)$. Do Lema 5.0.10, é suficiente mostrar que quando $n \to \infty$ tem-se $n\log(1+z/n) \to z$ uniformemente em K. Lembremos que $\log(1+w) = \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}(w)^k$, para $w \in B_1(0)$. Para qualquer $z \in K$, devemos ter

$$n\log\left(1+\frac{z}{n}\right) = z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{n} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^2} - \cdots, \quad n \geq \overline{n}.$$

Logo

$$n\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - z = z\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{n}\right)^2 - \cdots\right), \quad n \geq \overline{n}. \tag{38}$$

Com isso,

$$\left|n\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - z\right| \leq |z|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\frac{z}{n}\right|^{k-1} \leq |z|\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z}{n}\right|^{k} = \frac{|z|^2}{n}\frac{1}{1-|z/n|} \leq \frac{\overline{n}^2}{n-\overline{n}}.$$

Fazendo $n \to \infty$ nessa equação temos a convergência uniforme.

(b) Em (38) façamos $z = -t$, $t \in [0,n]$. Assim,

$$n\log\left(1-\frac{t}{n}\right) + t = -t\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^{k-1} \leq 0.$$

De modo que $n\log(1-t/n) \leq -t$. Aplicando a função exponencial temos o item (b). ∎

Concluímos nosso trabalho demonstrando de fato a expressão integral da função gama.

Teorema 6.3.5: *Se* $\operatorname{Re} z > 0$*, então*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.25, é suficiente mostrar que a função $f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$, com

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt,$$

coincide com Γ no intervalo $[1,\infty)$ (que possui pontos de acumulação) para termos a validade do teorema.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $x > 1$ fixos. Do Lema 6.3.1 (b), podemos escolher $\kappa > 0$ tal que

$$\int_{\kappa}^{r} e^{-t}t^{x-1}dt < \frac{\varepsilon}{4}, \quad r > \kappa. \tag{39}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$, $n > \kappa$, e seja f_n definida por

$$f_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Então

$$f_n(x) - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = -\int_0^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt + \int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)t^{x-1}dt.$$

Para n suficientemente grande, os Lemas 6.3.4 (b) e 6.3.1 (a) garantem que

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{x-1}dt < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{40}$$

Também, para n suficientemente grande, do Lema 6.3.4 (a), temos

$$\left|e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \le \frac{\varepsilon}{4M}, \quad t \in [0, \kappa],$$

onde $M = \int_0^\kappa t^{x-1} dt$. Segue que

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\kappa} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1} dt\right| \le \frac{\varepsilon}{4M} \int_{\frac{1}{n}}^{\kappa} t^{x-1} dt \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{41}$$

Usando o Lema 6.3.4 (b), segue de (39) que

$$\left|\int_{\kappa}^{n} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1} dt\right| \le 2 \int_{\kappa}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > \kappa. \tag{42}$$

Combinando (40), (41) e (42), obtemos, para n suficientemente grande,

$$\left|f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt\right| < \varepsilon.$$

Notemos que, integrando por partes n vezes, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt &= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x}\bigg|_0^n + \frac{1}{x} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x dt \\
&= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t^{x+1}}{x+1}\bigg|_0^n + \frac{n-1}{nx(x+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1} dt \\
&\vdots \\
&= \left(1 - \frac{t}{n}\right) \frac{t^{x+n}}{x+n}\bigg|_0^n + \frac{(n-1)!}{n^{n-1} x(x+1)\cdots(x+n-1)} \int_0^n t^{x+n-1} dt \\
&= \frac{(n-1)!}{n^{n-1} x(x+1)\cdots(x+n-1)} \left(\frac{n^{x+n}}{x+n}\right) = \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\int_0^n (1 - t/n)^n t^{x-1} dt \to \Gamma(x)$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$0 = \lim \left(f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt\right) = f(x) - \Gamma(x).$$

■

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag New York, 1973.

[2] Lima, E. L. *Espaços métricos*, 4 ed., vol. 1. IMPA, 2005.

[3] Lima, E. L. *Curso de Análise*, 11 ed., vol. 2. IMPA, 2018.

[4] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática.* Ao Livro Técnico S.A., 1971.