



**Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática**

**Licenciatura em Matemática**

# **ESPAÇOS MÉTRICOS E OS FRACTAIS SFI**

**Luísa Andrade Martins**

**Uberlândia-MG**

**2019**



**Luísa Andrade Martins**

# **ESPAÇOS MÉTRICOS E OS FRACTAIS SFI**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à  
Coordenação do Curso de Matemática como  
requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado  
em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Tremura  
Galves

**Uberlândia-MG**

**2019**





**Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática**

**Coordenação do Curso de Matemática**

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 16 de dezembro de 2019

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dra. Ana Paula Tremura Galves

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende

Prof. Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho

**Uberlândia-MG**

**2019**



# *Agradecimentos*

---

Gostaria de agradecer primeiramente à Deus, pela minha vida e força nos momentos necessários.

À minha orientadora, pela paciência e ajuda durante todo o processo. Sua orientação foi fundamental para realização deste trabalho.

Aos meus pais, Simara e Emílio, que são minha fonte de inspiração e que através de seus sacrifícios me deram essa oportunidade maravilhosa.

Aos meus irmãos, Laura e Pedro Emílio que sempre estiveram ao meu lado acreditando em mim em momentos que nem eu mesmo acreditava.

Aos meus amigos Arthur, Rafael, Letícia, Ana Laura, Aline e Nicolas, que estiveram comigo em todos os momentos, me dando suporte e fazendo meus dias mais alegres.

E por fim, ao meu companheiro Diogo, pelo apoio, pela compreensão, por me oferecer oportunidades novas de me conhecer e fazer este trabalho possível.

# *Resumo*

---

Este trabalho tem como propósito o estudo dos fractais que podem ser vistos como pontos fixos de um sistema de funções iteradas, que são chamados Fractais SFI. Tais fractais serão definidos no Espaço de Hausdorff, cujos pontos são subconjuntos compactos não vazios de um espaço métrico completo  $X$ , com a métrica de Hausdorff, que determina o grau de correspondência entre dois conjuntos segundo sua distância. Para tal, serão estudados conceitos básicos de espaços métricos como: compacidade, sequência de Cauchy, espaços métricos completos, entre outros. Além disso, serão apresentados o conceito de ponto fixo e o Teorema do Ponto Fixo de Banach, os quais serão de grande importância na definição e na demonstração de resultados sobre Fractais SFI.

**Palavras-chave:** Fractais SFI. Espaço de Hausdorff. Métrica de Hausdorff. Teorema do Ponto Fixo de Banach.



# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Tópicos de Espaços Métricos</b>	<b>9</b>
2.1	Definições e exemplos . . . . .	9
2.2	Conjuntos abertos e sequências em espaços métricos . . . . .	11
2.2.1	Conjuntos abertos . . . . .	11
2.2.2	Sequências em espaços métricos . . . . .	15
2.3	Topologia dos espaços métricos . . . . .	17
2.4	Funções contínuas . . . . .	20
2.5	Espaços métricos compactos e distância entre conjuntos compactos . . . . .	23
2.5.1	Espaços métricos compactos . . . . .	23
2.5.2	Distância entre conjuntos compactos . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Teorema do Ponto Fixo de Banach</b>	<b>28</b>
3.1	Contrações em espaços métricos . . . . .	28
3.2	Espaços métricos completos . . . . .	30
3.3	Ponto Fixo . . . . .	34
3.4	Teorema do ponto fixo de Banach . . . . .	35
3.4.1	Aplicação do Teorema na teoria de compressão de imagens . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Espaço de Hausdorff</b>	<b>40</b>
4.1	Métrica de Hausdorff . . . . .	40
4.1.1	Aplicação: reconhecimento de padrões em imagens . . . . .	50

4.2	Contrações no espaço de Hausdorff . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Fractais SFI</b>	<b>56</b>
5.1	O que é um fractal? . . . . .	56
5.1.1	Classificação dos Fractais . . . . .	59
5.2	Sistemas de Funções Iteradas (SFI) . . . . .	61
5.2.1	SFI com condensação . . . . .	65
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>70</b>

---

## ***Introdução***

---

As concepções iniciais de conceitos relativos ao espaço se dão quando ainda somos crianças e se desenvolvem utilizando referenciais como: dentro, fora, perto, longe. Assim, com o aperfeiçoamento de tais conceitos, começa-se a estabelecer intuitivamente uma noção de distância, ou vizinhança. Em matemática o espaço é definido pelo modo segundo o qual a distância entre pontos são medidas: uma métrica. No campo matemático existem várias definições, como ponto de acumulação, limite, função contínua e comprimento de arco que, direta ou indiretamente, dependem dessa noção de distância. Desse modo, de acordo com [5], quando se busca uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, pretendendo resolver problemas mais amplos, é natural buscar antes uma generalização do conceito de distância que independa das particularidades dos diversos tipos de espaço em que intervêm tal noção.

A distância entre dois pontos em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  desempenham um papel fundamental tanto no Cálculo como na Geometria. Nos cursos de Cálculo de funções de uma ou várias variáveis, as noções de derivação e integração recaem sobre a noção de convergência e limite, e ambas, por sua vez, recaem sobre a noção intuitiva de distância entre pontos. Ao longo do seu desenvolvimento a Matemática, especialmente no século XIX, reconheceu a importância de abstrair e generalizar a noção intuitiva de distância, aplicando-a a outros tipos de conjuntos, melhor dizendo, a outros tipos de "espaços", onde um ponto poderia ser uma curva ou uma função. Espaços com dimensão maior e até de dimensão infinita ganharam atenção no estudo da distância entre pontos do espaço. Assim, tais estudos conduziram às noções de métrica e de espaços métricos, introduzidas ini-

---

cialmente por Maurice René Fréchet (1878-1973), matemático francês que além desse conceito também foi responsável por estabelecer os fundamentos da topologia, convergência uniforme além de ter sido o primeiro a usar a expressão "espaço de Banach".

A matemática é uma ciência de extrema importância para o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, mas em muitos momentos ela parece caminhar sozinha, sem um propósito final definido e um questionamento que pode surgir é: qual a finalidade de estudar determinado conteúdo? Para a teoria que engloba o conceito de distâncias, não é diferente. Com tantas tecnologias já desenvolvidas e estudadas a respeito da ideia de conhecemos como distância, qual seria uma possível aplicação inovadora para tal conceitos?

A medida de similaridade entre dois objetos no ambiente computacional é uma ação fundamental para o desempenho de determinados sistemas automáticos. Seja na comparação de caracteres, expressões linguísticas, figuras e imagens, o problema de medir o quanto dois conjuntos binários são similares é um desafio constante.

E uma forma de fazer essa comparação é por meio da medida da distância entre dois conjuntos, que pode ser abordada de muitas formas, entre as mais convencionais, por exemplo, pela distância euclidiana entre as médias dos elementos dos conjuntos. Porém, em muitos casos, essas distâncias conferem uma noção de proximidade muito diversa daquela resultante da observação intuitiva humana e daquela que leva a interpretação adequada do processo em análise. A distância de Hausdorff, um dos tópicos que serão estudados nesse projeto, tem sido bastante utilizada para tais propósitos.

O presente trabalho tem como objetivo inicial estudar conceitos básicos de espaços métricos como: apresentação de alguns exemplos clássicos, continuidade, compacidade e conexidade em tais espaços, e de qual forma se dá sua convergência, com os importantes conceitos de sequência de Cauchy, espaços métricos completos e completamento de um espaço métrico.

Após o estudo dos conceitos iniciais, citados anteriormente, o próximo passo será o estudo da teoria de contrações e pontos fixos.

A teoria sobre pontos fixos é de vasta aplicação em matemática. Uma pergunta natural a se fazer é: será que toda função tem ponto fixo? Na prática, dada uma função  $f$ , de certa forma é difícil assegurar-se da existência de um ponto fixo para  $f$ , ou seja, um ponto  $x$  do domínio da função tal que  $f(x) = x$ . Na maioria das situações, o interesse é garantir a existência de um e somente um ponto fixo para a função dada.

Devido a valiosas informações que um ponto fixo pode oferecer, grandes matemáticos enriqueceram a teoria com grandes teoremas sobre o assunto. Um desses teoremas, de interesse de estudo no trabalho, é o Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como teorema das contrações. Esse é um resultado fundamental em espaços métricos, tendo como particularidade, além de garantir a existência e unicidade do ponto fixo, ainda fornecer um processo iterativo que permite encontrá-lo. Além de apresentar o teorema, ele será utilizado no estudo do conceito do espaço de Hausdorff e dos Fractais SFI, o qual é o foco final desse trabalho.

Do ponto de vista informal, fractais são estruturas que apresentam irregularidades e fragmentação em uma faixa de escala muito ampla, aparentemente infinita, como, por exemplo, as encontradas nas nuvens, nas fumaças, nas montanhas, nas árvores e em diversos outros objetos da natureza. Em síntese, um fractal é uma forma cujas partes são réplicas do todo sob algum aspecto.

Desse modo, os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado.

Primeiro, temos os fractais determinísticos, conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo. Temos os fractais gerados por computadores, que também são chamados de fractais de fuga. E por fim, os fractais aleatórios, são também chamados de fractais naturais, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte, dizemos que o fractal é aleatório.

Como objetivo final do trabalho, estaremos interessados em mostrar, que determinados fractais podem ser entendidos como pontos fixos de um sistema de funções iteradas SFI para algum espaço métrico munido com uma métrica de Hausdorff, os chamados Fractais SFI. Para isso, faz-se necessário os conceitos de métrica, espaços métricos, ponto fixo e o Teorema do Ponto Fixo de Banach citados anteriormente.

Os sistemas de funções iteradas são sistemas de funções que têm a característica de convergirem para um dado conjunto quando aplicados várias vezes sobre si mesmo. Suas aplicações principais residem na computação gráfica, compressão de imagens e reconhecimento de padrões, por ser uma técnica que explora as auto-similaridades existentes nas imagens, por exemplo, e proporciona taxas de compressão bem mais altas do que as obtidas com as técnicas convencionais.

---

## Tópicos de Espaços Métricos

---

O objetivo deste capítulo é apresentar conceitos preliminares de espaços métricos, os quais serão necessários para um bom entendimento dos capítulos seguintes. Para maiores detalhes sobre tais conceitos, consultar [5] e [8].

### 2.1 Definições e exemplos

**Definição 2.1.1.** Dado um conjunto  $M \neq \emptyset$ , seja  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , e indiquemos por  $d(x, y)$ , a imagem de um par genérico  $(x, y) \in M \times M$ , através da função  $d$ . Dizemos que  $d$  é **métrica** sobre  $M$ , se as seguintes condições se verificam para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

i)  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  (distância não negativa).

ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetria).

iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (desigualdade triangular).

Cada imagem  $d(x, y)$  recebe o nome de **distância de  $x$  a  $y$** . Um par  $(M, d)$  é chamado de **espaço métrico**, e cada elemento de um espaço métrico será definido como **ponto** desse espaço.

**Proposição 2.1.1.** Se  $x, y$  e  $z$  são pontos quaisquer de um espaço métrico  $(M, d)$ , então

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

*Demonstração.* Da desigualdade triangular iii), temos

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Leftrightarrow d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y). \quad (2.1.1)$$

Por outro lado, podemos expressar a mesma desigualdade iii) por

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Segue que,

$$d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z) \quad (2.1.2)$$

De 2.1.1 e 2.1.2 obtém-se

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

□

Para compreendermos um pouco melhor a definição de um espaço métrico, apresentaremos alguns exemplos a seguir.

**Exemplo 1** (Métrica zero-um). *É o mais simples exemplo de métrica. Dado  $M \neq \emptyset$  define-se  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  do seguinte modo:  $d(x, x) = 0$  ( $\forall x \in M$ ) e  $d(x, y) = 1$  sempre que  $x \neq y$ .*

**Exemplo 2** (Reta usual). *Considerando-se o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, a função  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dada por  $d(x, y) = |x - y|$  é uma métrica sobre  $\mathbb{R}$ .*

**Exemplo 3** (O espaço  $\mathbb{R}^n$ ). *O conjunto  $\mathbb{R}^n$  é formado por todas as  $n$ -uplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde  $x_i \in \mathbb{R}$ . Existem **três métricas** importantes sobre  $\mathbb{R}^n$  e que, de certa forma, são equivalentes. Sendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  pontos arbitrários de  $\mathbb{R}^n$ , definimos:*

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ D_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \\ D_2(x, y) &= \text{máx} \{ |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \} \end{aligned}$$

**Exemplo 4** (Espaço das funções contínuas em um intervalo fechado). *Para um intervalo fechado*

$[a, b] \in \mathbb{R}$  indiquemos por  $\varphi[a, b]$  o conjunto das funções contínuas definidas em  $[a, b]$ , onde

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X$$

$$\|f(x)\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

Para quaisquer  $f, g \in \varphi[a, b]$  e qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dessa maneira, temos que  $\varphi[a, b]$  é um espaço métrico, cuja métrica é dada por:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \forall f, g \in \varphi[a, b].$$

## 2.2 Conjuntos abertos e sequências em espaços métricos

### 2.2.1 Conjuntos abertos

O conceito de bola aberta a ser introduzido a seguir desempenha um papel fundamental na teoria de espaços métricos.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $p$  um ponto de um espaço métrico  $(M, d)$ . Sendo  $\varepsilon > 0$  um número real, a bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ , a qual indicaremos por  $B(p, \varepsilon)$ , é o seguinte subconjunto de  $M$ :*

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\}.$$

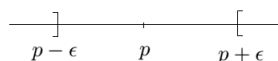
**Exemplo 5** (Bolas num espaço cuja métrica é a zero-um). *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e consideremos  $p \in M$ . Então, temos dois casos:*

- (a)  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Neste caso,  $B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\} = \{p\}$ , pois o único ponto cuja distância a  $p$  é menor que 1 é o próprio  $p$ .
- (b)  $1 < \varepsilon$ . Observe que quando isso ocorre  $B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\} = M$ , uma vez que todos os pontos de  $M$  estão a uma distância  $p$  igual a zero ou igual a um, e conseqüentemente, menor que  $\varepsilon$ .



**Exemplo 6** (Bolas no espaço  $\mathbb{R}$ ). Na reta real a bola de centro  $p \in \mathbb{R}$  e raio  $\varepsilon$  é o conjunto

$$\begin{aligned} B(p, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid p - \varepsilon < x < p + \varepsilon\} \\ &= ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[. \end{aligned}$$



**Exemplo 7** (Bolas no espaço  $\mathbb{R}^2$ ). Lembremos que no espaço  $\mathbb{R}^2$  já foram definidas três métricas, para quaisquer  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ D_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ D_2(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

Seja  $p = (a, b)$  um ponto fixo de  $\mathbb{R}^2$ , uma bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon > 0$ , segundo a métrica  $D$ , é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid (X - a)^2 + (Y - b)^2 < \varepsilon^2\},$$

cujo gráfico é um disco aberto.

Tomando  $p = (0, 0)$  e  $\varepsilon = 1$ , temos o seguinte conjunto

$$B(p, 1) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 + Y^2 < 1\}.$$

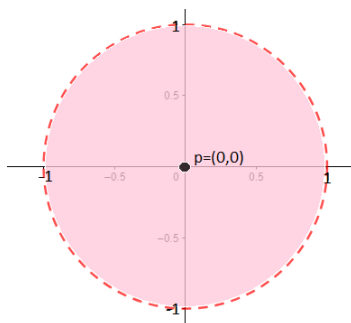


Figura 2.1: Círculo de raio 1 centrado na origem.

Quando a métrica for  $D_1$ , uma bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon > 0$  é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid |X - a| + |Y - b| < \varepsilon\}.$$

Usaremos  $p = (0, 0)$  e  $\varepsilon = 1$  para representar a bola do conjunto acima.

Note que o gráfico da relação dada por  $|X - a| + |Y - b| < \varepsilon$  é um quadrado aberto de diagonais paralelas aos eixos coordenados e de medida igual a  $2\varepsilon$ , com centro em  $p = (a, b)$ .

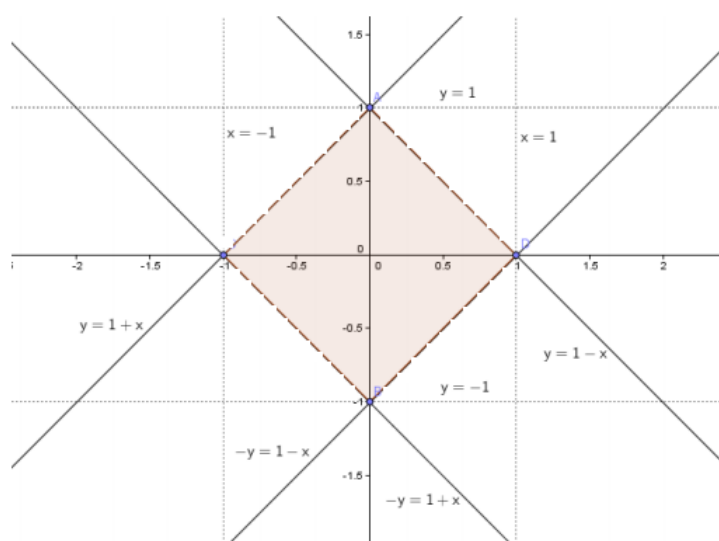


Figura 2.2: Quadrado centrado na origem, com diagonais paralelos aos eixos. Adaptado de [6].

E por último, quando se trata da métrica  $D_2$ , temos

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|X - a|, |Y - b|\} < \varepsilon\}.$$

e o gráfico da relação dada por

$$\max\{|X - a|, |Y - b|\} < \varepsilon$$

que representa no plano a bola  $B(p, \varepsilon)$  é o interior de um quadrado de centro  $p = (a, b)$ , cujos lados são paralelos aos eixos coordenados e têm medida igual a  $2\varepsilon$ .

Para a representação geométrica, foi usado  $p = (0, 0)$  e  $\varepsilon = 1$ .

**Exemplo 8** (Bolas no espaço das funções contínuas em um intervalo fechado com a métrica do

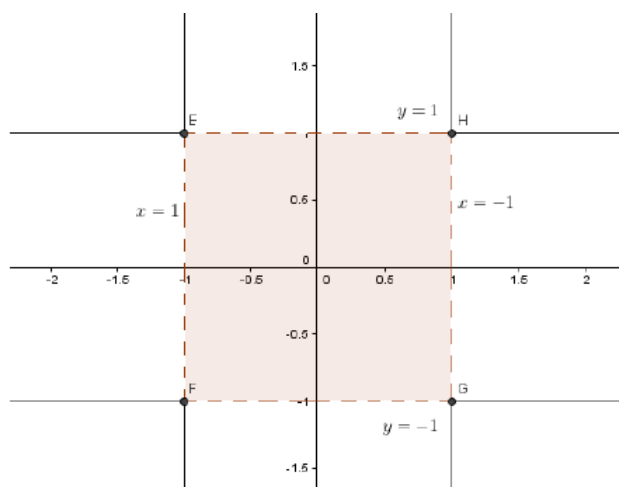


Figura 2.3: Quadrado centrado na origem, com lados paralelos os eixos. Adaptado de [6].

supremo). Já vimos, na seção anterior, que a métrica sobre esse conjunto é dada por

$$d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)|x \in X\},$$

para quaisquer  $f$  e  $g$  funções contínuas definidas em um intervalo  $[a, b]$ . Uma bola  $B(h, r)$  é formada pelas funções cujos gráficos se situam na região do plano em que  $a \leq x \leq b$ , estritamente entre os gráficos de  $h - r$  e  $h + r$ .

Para ilustrar, considere o intervalo  $[-0.5, 0.5]$ , e as funções  $f(x) = 5x^3 + 0.5x^2 - 0.5x + 0.3$  e  $g(x) = 1.1x + 0.4$ . Temos que  $g \in B(f; r)$ , com  $r = 0.5$ , pois para todo  $x \in [-0.5, 0.5]$ ,  $g$  está entre as faixas  $f(x) - r = 5x^3 + 0.5x^2 - 0.5x - 0.2$  e  $f(x) + r = 5x^3 + 0.5x^2 - 0.5x + 0.8$ .

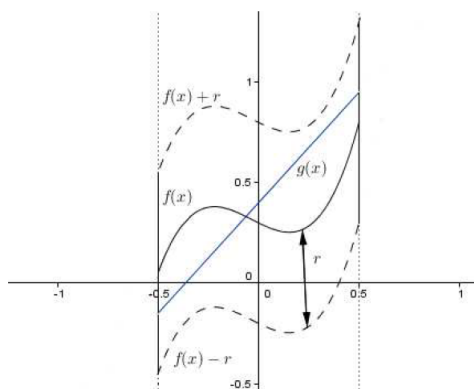


Figura 2.4: Gráfico da função  $g$  que pertence a faixa de amplitude  $2r$ . Adaptado de [6].

### 2.2.2 Sequências em espaços métricos

Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Toda aplicação  $n \mapsto x_n$ , de  $\mathbb{N}^* \rightarrow M$ , é chamada **seqüência** de elementos de  $M$ . Durante o nosso trabalho usaremos a notação  $(x_1, \dots, x_n, \dots)$  ou  $(x_n)$ . Além disso, cada imagem  $x_n$  correspondente à uma seqüência  $(x_n)$  é chamada *termo* da seqüência.

Dada uma seqüência  $(x_n)$  em  $M$ , se  $n_1, n_2, \dots \subset \mathbb{N}^*$  e  $n_1 < n_2 < \dots$ , então a aplicação dada por  $n_i \rightarrow x_{n_i}$  é indicada por  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$  e chamaremos de subseqüência de  $(x_n)$ .

**Definição 2.2.2.** *Uma seqüência  $(x_n)$  é dita limitada superiormente se existir um número real  $M$  tal que*

$$x_n \leq M, \forall n \geq 1.$$

*A seqüência é dita limitada inferiormente se existir um número real  $m$  tal que*

$$m \leq x_n, \forall n \geq 1.$$

*Dizemos que  $(x_n)$  é uma seqüência limitada se ela for limitada superiormente e inferiormente.*

**Exemplo 9.** *A seqüência  $(x_n) = n$  é limitada inferiormente pelo 0, mas não superiormente.*

*Diferente da seqüência  $(x_n) = \frac{n}{n+1}$  que é limitada, pois  $0 < x_n < 1$ , para todo  $n$ .*

**Definição 2.2.3.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dizemos que um ponto  $p \in M$  é limite de uma seqüência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  se, para toda bola  $B(p, \varepsilon)$ , existe um índice  $r \in \mathbb{N}^*$  tal que*

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, \varepsilon).$$

Para indicar que  $p$  é o limite da seqüência  $(x_n)$  usa-se  $\lim x_n = p$  ou  $x_n \rightarrow p$ . Dizemos, assim, que  $(x_n)$  é uma seqüência convergente ou que converge para o ponto  $p$ .

O resultado a seguir segue diretamente da definição anterior e da definição de bola aberta.

**Proposição 2.2.1.** *Uma seqüência  $(x_n)$  de elementos de  $M$  converge para  $p \in M$  se, e somente se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $r \in \mathbb{N}^*$  de maneira que*

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

**Exemplo 10.** *Seja um espaço métrico  $M$  e uma sequência estacionária, isto é, uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  tal que  $x_n = p$ , a partir de um certo índice  $r$ , com  $r \in \mathbb{N}^*$ . Tais sequências são convergentes para o termo que se repete:  $(x_1, \dots, x_r, p, p, \dots) \rightarrow p$ , uma vez que  $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = p$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$ ,*

$$n \geq r + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon.$$

**Proposição 2.2.2.** *Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente de um espaço métrico  $M$ . Então o limite dessa sequência é único.*

*Demonstração.* Suponhamos  $\lim x_n = p$  e  $\lim x_n = q$ . Se  $p \neq q$ , então  $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{2}$  é maior que zero e portanto existem índices  $r, s$  tais que

$$n \geq r \implies d(x_n, p) < \varepsilon$$

$$n \geq s \implies d(x_n, q) < \varepsilon$$

Tomando  $t = \max\{r, s\}$ , então

$$n \geq t \implies d(x_n, p) < \varepsilon \text{ e } d(x_n, q) < \varepsilon.$$

Daí, para todo  $n \geq t$

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q),$$

o que é absurdo. □

**Proposição 2.2.3.** *Se uma sequência  $(x_n)$  de pontos de um espaço  $M$  converge para  $p \in M$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  também converge para  $p$ .*

*Demonstração.* Seja  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$  uma subsequência da sequência dada e consideremos  $\varepsilon > 0$ .

Pela hipótese,  $\lim x_n = p$ . Assim, existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$n \geq k \implies d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Sejam  $n_i \in \mathbb{N}^*$  e  $n_1 < n_2 < \dots$ . Então, existe  $n_t > k$  e, para todo  $n_i \geq n_t$ , vale a relação

$$d(x_{n_i}, p) < \varepsilon$$

provando que  $\lim x_{n_i} = p$ . □

Note que a recíproca não é válida. A sequência  $(p, q, p, q, \dots)$  com  $p \neq q$  não converge, porém as subsequências  $(p, p, \dots)$  e  $(q, q, \dots)$  são convergentes.

**Proposição 2.2.4.** *Toda sequência decrescente ou estritamente decrescente, cujo conjunto de termos é limitado inferiormente, converge para o ínfimo desse conjunto.*

*Demonstração.* Suponhamos  $(x_n)$  uma sequência em  $\mathbb{R}$  tal que  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$  e seja  $p = \inf\{x_n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Provaremos que  $\lim x_n = p$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , não se pode ter  $x_n \geq p + \varepsilon$  para todo índice  $n$ , pois isto significaria a existência de um limite inferior do conjunto  $\{x_n\}$  maior do que  $p$ . Assim, como  $(x_n)$  é decrescente, existe um índice  $r$  tal que  $p \leq x_r \leq p + \varepsilon$ , logo

$$p \leq x_n \leq p + \varepsilon,$$

para todo  $n \geq r$ , ou seja

$$n \geq r \Rightarrow |x_n - p| < \varepsilon.$$

Isto vem garantir a nossa afirmação de que  $\lim x_n = p$ . □

## 2.3 Topologia dos espaços métricos

A seguir, iremos apresentar alguns conceitos básicos da estrutura matemática subjacente aos espaços métricos.

**Definição 2.3.1.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Um subconjunto  $A \subset M$  se diz aberto se, para todo  $p \in A$ , existe um número real  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subset A$ .*

**Definição 2.3.2.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Se  $A \subset M$ , um ponto  $p \in A$  é chamado ponto interior ao conjunto  $A$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subset A$ .*

O conjunto dos pontos interiores de  $A$  é chamado interior de  $A$  e é indicado por  $\overset{\circ}{A}$ . É claro que  $\overset{\circ}{A} \subset A$ . Observe que  $A$  é aberto se, e somente se,  $A = \overset{\circ}{A}$ .

**Exemplo 11.** Consideremos sobre  $\mathbb{R}$  a métrica usual. Então  $A = ]a, +\infty[$  é aberto, para todo  $a \in \mathbb{R}$ , uma vez que dado  $p \in A$ , tomando  $\varepsilon = \frac{p-a}{2}$ , então  $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[ \subset A$ . Analogamente, prova-se que os intervalos do tipo  $]a, b[$  neste espaço são todos abertos. De fato, se  $p \in ]a, b[$  tomando  $0 < \varepsilon < \min\{p - a, b - p\}$  então  $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[ \subset ]a, b[$ .

**Proposição 2.3.1.** Seja  $\mathcal{A}$  a coleção dos abertos de um espaço métrico  $(M, d)$ . Então,

i)  $\emptyset, M \in \mathcal{A}$

ii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$

iii) Se  $(A_i)$  é uma família de conjuntos abertos de  $M$ , ou seja, se cada  $A_i \in \mathcal{A}$ , então  $\cup A_i \in \mathcal{A}$ .

*Demonstração.*

i) É imediato que  $\emptyset$  é aberto, pelo fato de não conter pontos e, portanto, de não poder contrariar a definição dada. Quanto a  $M$ , toda bola de centro em um ponto  $p \in M$  é subconjunto de  $M$ , por definição.

ii) Seja  $p \in A \cap B$ . Então, existem  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda > 0$  tais que  $B(p, \varepsilon) \subset A$  e  $B(p, \lambda) \subset B$ . Supondo  $\varepsilon \leq \lambda$  a propriedade de bolas abertas nos garante que

$$B(p, \varepsilon) \subset B(p, \lambda).$$

Donde  $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$ .

iii) Seja  $p \in \cup A_i$ . Então, existe um índice  $t$  tal que  $p \in A_t$  e, como  $A_t$  é aberto, para um certo  $\varepsilon > 0$  vale a relação  $B(p, \varepsilon) \subset A_t$ . Então,  $B(p, \varepsilon) \subset \cup A_i$ . □

**Exemplo 12.** Se  $d$  é a métrica "zero-um" sobre um conjunto  $M$ , então todo  $A \subset M$  é aberto.

De fato, se  $A = \emptyset$  é imediato. Se  $A \neq \emptyset$ , então  $A = \bigcup_{p \in A} \{p\}$  e como cada  $\{p\}$  é uma bola aberta, então  $A$  é aberto.

**Definição 2.3.3.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Um subconjunto  $F \subset M$  se diz fechado se, e somente se,  $F^c = M - F$  é aberto.

**Exemplo 13.** Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty[$ , ou  $] - \infty, a]$ .

De fato,

$$\begin{aligned} [a, b]^c &= ] - \infty, a[ \cup ]b, +\infty[ \text{ e cada um desses intervalos são abertos} \\ [a, +\infty[^c &= ] - \infty, a[ \text{ é aberto} \\ ] - \infty, a]^c &= ]a, +\infty[ \text{ é aberto} \end{aligned}$$

**Exemplo 14.** Considerando sobre um conjunto  $M \neq \emptyset$  a métrica "zero-um", então todo  $F \subset M$  é fechado, pois  $F^c$  é aberto pelo fato de todos os subconjuntos de  $M$  serem abertos.

**Proposição 2.3.2.** Seja  $\mathcal{F}$  a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico  $M$ . Então,

- i)  $\emptyset, M \in \mathcal{F}$
- ii)  $H, F \in \mathcal{F} \implies H \cap F \in \mathcal{F}$
- iii) Se  $(F_i)$  é uma família de conjuntos fechados de  $M$ , ou seja, se cada  $F_i \in \mathcal{F}$ , então  $\bigcap F_i \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* As demonstrações de cada item podem ser feitas de módulo semelhante a dos conjuntos abertos. Para mais detalhes ver [5], Capítulo III, Proposição 3.  $\square$

**Definição 2.3.4.** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Um ponto  $p \in M$  se diz ponto aderente ao conjunto  $A$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , vale a relação

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Observe que  $A \subset \bar{A}$ .

**Exemplo 15.** Na reta real, se  $A = ]a, b]$  ou  $A = [a, b[$  ou  $A = ]a, b[$ , então  $\bar{A} = [a, b]$ .

De fato, os pontos  $a$  e  $b$  são aderentes a esses intervalos porque qualquer bola de centro em um deles, certamente intercepta o conjunto  $A$ . Por outro lado, se  $p < a$  ou  $p > b$ , então  $p \notin \bar{A}$  porque, no primeiro caso, por exemplo, tomando  $\varepsilon = \frac{a-p}{2}$ , a bola  $B(p, \varepsilon) = ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$  não intercepta  $A$ .

**Proposição 2.3.3.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Então, para todo  $A \subset M$ , vale a relação

$$(\bar{A})^c = \overset{\circ}{A^c}.$$



*Demonstração.* Ver [5], Capítulo III, Proposição 4. □

**Corolário 2.3.4.**  $F \subset M$  é fechado se, e somente se,  $\overline{F} = F$ .

*Demonstração.* Note que  $A \subset M$  é aberto se, e somente se,  $\overset{\circ}{A} = A$ . Logo,

$$F \text{ é fechado} \iff F^c \text{ é aberto} \iff \overset{\circ}{F^c} = F^c \iff (\overline{F})^c = F^c \iff \overline{F} = F.$$

□

**Proposição 2.3.5.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Se  $p \in M$  e  $A \subset M$ , então  $d(p, A) = 0$  se, e somente se,  $p \in \overline{A}$ .

*Demonstração.* Ver [5], Capítulo III, Proposição 5. □

## 2.4 Funções contínuas

**Definição 2.4.1.** Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos, cujas métricas indicaremos pelo mesmo símbolo  $d$  por comodidade. Uma função  $f : M \rightarrow N$  se diz contínua no ponto  $p \in M$  se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  de maneira que

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Dizer que  $f$  é contínua significa que  $f$  é contínua em todos os pontos de  $M$ .

**Proposição 2.4.1.** Uma função  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $p \in M$  se, e somente se, dada uma bola  $B(f(p), \varepsilon)$  existe uma bola  $B(p, \delta)$  tal que

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon).$$

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Dada a bola  $B(f(p), \varepsilon)$  e considerando o seu raio  $\varepsilon$ , existe, por hipótese,  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Considerando a bola  $B(p, \delta)$  mostremos que sua imagem direta por  $f$  está contida em  $B(f(p), \varepsilon)$ . De fato, se  $y \in f(B(p, \delta))$ , então  $y = f(x)$ , com  $x \in B(p, \delta)$ . Daí  $d(x, p) < \delta$  o que implica  $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ . Assim,  $y = f(x) \in B(f(p), \varepsilon)$ .

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $p \in M$ . Considere  $B(f(p), \varepsilon)$ . Por hipótese, existe uma bola  $B(p, \delta)$  tal que  $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$ . Assim, existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow x \in B(p, \delta) \Rightarrow f(x) \in f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon) \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Portanto,  $f$  é contínua no ponto  $p \in M$ .

□

**Proposição 2.4.2.** *Uma função  $f : M \rightarrow N$  é contínua em um ponto  $p \in M$  se, e somente se, o fato de uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  convergir para  $p$  acarretar que  $(f(x_n))$  converge para  $f(p)$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $B = B(f(p), \varepsilon)$ , onde  $\varepsilon > 0$  é arbitrário. Da continuidade de  $f$  temos que existe  $\delta > 0$  de tal maneira que

$$f(B(p, \delta)) \subset B.$$

Mas como  $x_n \rightarrow p$ , existe um índice  $r$  tal que, para todo  $n \geq r$ , tem-se que  $x_n \in B(p, \delta)$ . Daí,  $f(x_n) \in f(B(p, \delta))$  e portanto,  $f(x_n) \in B$  para todo  $n \geq r$ , o que prova que  $f(x_n) \rightarrow f(p)$ .

( $\Leftarrow$ ) Se não fosse contínua em  $p$ , existiria  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(B(p, \delta)) \not\subset B(f(p), \varepsilon), \forall \delta > 0.$$

Assim, em particular,

$$\begin{aligned} f(B(p, 1)) &\not\subset B(f(p), \varepsilon) \\ f\left(B\left(p, \frac{1}{2}\right)\right) &\not\subset B(f(p), \varepsilon) \\ f\left(B\left(p, \frac{1}{3}\right)\right) &\not\subset B(f(p), \varepsilon) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, para cada  $n \geq 1$  existe um  $x_n \in M$  tal que  $x_n \in B(p, \frac{1}{n})$  e  $f(x_n) \notin B(f(p), \varepsilon)$ . Donde,

$$(x_n) \rightarrow p \text{ e } f(x_n) \not\rightarrow f(p),$$

o que é uma contradição.

□

**Proposição 2.4.3.** *Dada a função  $f : M \rightarrow N$  as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $f$  é contínua.
- b) Para todo  $q \in N$  e todo  $\lambda > 0$ ,  $f^{-1}(B(q, \lambda))$  é um subconjunto aberto de  $M$ .
- c) Para todo aberto  $G$  de espaço  $N$ ,  $f^{-1}(G)$  é um aberto de  $M$ .
- d) Para todo fechado  $F$  do espaço  $N$ ,  $f^{-1}(F)$  é um subconjunto fechado de  $M$ .

*Demonstração.* Ver [5], Capítulo III, Proposição IV.

□

**Exemplo 16.** *Uma imersão isométrica é qualquer aplicação  $f : M \rightarrow N$  tal que  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ , para quaisquer  $x, y \in M$ .*

*Toda imersão isométrica é contínua, pois para qualquer  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\delta = \varepsilon$ , temos*

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) = d(x, p) < \delta = \varepsilon$$

*para qualquer que seja  $p \in M$ .*

*Note que uma imersão isométrica é injetora, pois*

$$f(x) = f(y) \implies d(f(x), f(y)) = 0 \implies d(x, y) = 0 \implies x = y.$$

*As inclusões  $j : X \rightarrow M$ , que são um caso de imersões isométricas, definidas por  $j(x) = x$ ,  $\forall x \in X$ , sendo  $X \subset M$  são contínuas, pois para quaisquer  $x, y \in X$  tem-se*

$$d(j(x), j(y)) = d(x, y).$$

*Em particular, a aplicação identidade*

$$id_M : M \rightarrow M$$

*dada por  $id_M(x) = x$ , para todo  $x \in M$ , é contínua.*

**Proposição 2.4.4.** *Sejam  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow P$  funções contínuas nos pontos  $p \in M$  e  $f(p) \in N$ , respectivamente. Então,  $g \circ f : M \rightarrow P$  é contínua no ponto  $p$ .*

*Demonstração.* Dada uma bola  $B_2 = B((g \circ f)(p), \varepsilon) = B(g(f(p)), \varepsilon)$ , a continuidade de  $g$  garante que existe uma bola  $B_1 = B(f(p), \lambda)$  tal que  $g(B_1) \subset B_2$ . Considerando a bola  $B_1$ , como  $f$  é contínua em  $p$ , existe  $B = B(p, \delta)$  tal que  $f(B) \subset B_1$ . Daí,

$$(g \circ f)(B) = g(f(B)) \subset g(B_1) \subset B_2.$$

□

**Corolário 2.4.5.** *Se  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow P$  são funções contínuas, então  $g \circ f : M \rightarrow P$  também é contínua.*

**Proposição 2.4.6.** *Para que  $f : M \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n$  definida por  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ , para todo  $x$  pertencente a  $M$  seja contínua num ponto  $p \in M$  é necessário e suficiente que cada uma das funções  $f_1, \dots, f_n$  sejam contínuas no ponto  $p$ .*

*Demonstração.* Ver [5], Capítulo IV, Proposição 7. □

**Corolário 2.4.7.** *Se  $f_1 : M_1 \rightarrow N_1, \dots, f_n : M_n \rightarrow N_n$  são funções contínuas, então  $f_1 : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N_1 \times \dots \times N_n$  definida por  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$  também é contínua.*

## 2.5 Espaços métricos compactos e distância entre conjuntos compactos

A compacidade de um espaço métrico nos oferece ferramentas muito úteis para o desenvolvimento de teorias mais complexas, como o estudo do Espaço de Hausdorff e possíveis aplicações. Apresentaremos algumas definições e resultados a respeito de tal propriedade.

### 2.5.1 Espaços métricos compactos

**Definição 2.5.1.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto  $K \subset M$  é compacto se, para toda sequência  $(x_n)$  de pontos de  $K$ , existe uma subsequência  $(x_{n_i})$  que converge para um ponto  $p \in K$ . Um espaço métrico  $(M, d)$  se diz compacto se o conjunto  $M$  é compacto.*

**Exemplo 17.** Na reta real todo intervalo  $[a, b]$  é compacto.

De fato, seja  $(x_1, x_2, \dots)$  uma sequência de pontos de  $[a, b]$  e consideremos a sequência  $(s_1, s_2, \dots)$ , onde

$$s_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

Obviamente tem-se

$$a \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq b$$

e portanto, se  $s = \sup\{s_n\}$ , então  $s = \lim s_n$ .

Assim, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , existe um índice  $n_1$  tal que  $|s_n - s| < \frac{1}{2}$ , para todo  $n \geq n_1$ . Considerando algum índice  $m > n_1$ , como  $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$ , existe um índice  $i_1 \geq m$  de modo que  $|x_{i_1} - s_m| < \frac{1}{2}$ . Daí,

$$|x_{i_1} - s| \leq |x_{i_1} - s_m| + |s_m - s| < 1.$$

Analogamente, para  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , existe um índice  $n_2$  tal que  $|s_n - s| < \frac{1}{4}$ , para todo  $n \geq n_2$ . Tomando um índice  $m$  tal que  $m > n_2$  e  $m > i_1$ , sendo  $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$ , existe  $i_2 \geq m$  de modo que  $|x_{i_2} - s_m| < \frac{1}{4}$ . Donde,

$$|x_{i_2} - s| \leq |x_{i_2} - s_m| + |s_m - s| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Dessa forma, obtemos uma sequência  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$ , que é subsequência de  $(x_1, x_2, \dots)$  e tal que

$$|x_{i_r} - s| < \frac{1}{2^{r-1}} \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Como  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{r-1}} = 0$ , então  $\lim(x_{i_r} - s) = 0$  e portanto,

$$\lim x_{i_r} = s.$$

**Proposição 2.5.1.** Todo subconjunto compacto  $K$  de um espaço métrico  $M$  é fechado.

*Demonstração.* Basta provar que  $\overline{K} \subset K$ . Se  $p \in \overline{K}$ , então, para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , vale a desigualdade

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset.$$

Assim, tomando em cada uma dessas intersecções, um e apenas um elemento, obtemos uma sequência de pontos de  $K$  que converge para  $p$ . Donde todas as subsequências dessa sequência convergem para  $p$ , pela Proposição 2.3.2. Porém, como  $K$  é compacto, pelo menos uma dessas subsequências converge para um ponto de  $K$ . Logo,  $p \in K$ .  $\square$

**Proposição 2.5.2.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos e seja  $f : M \rightarrow N$  uma função contínua. Se  $K \subset M$  é compacto, então  $f(K)$  também é compacto.*

*Demonstração.* Seja  $(y_n)$  uma sequência de pontos de  $f(K)$ . Assim, existe, para cada índice  $n$ , um elemento  $x_n \in K$  tal que  $f(x_n) = y_n$ . Como  $(x_n)$  é uma sequência de pontos de  $K$ , que é compacto, existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  dessa sequência tal que  $\lim x_{n_k} = p \in K$ . Sendo  $f$  contínua, então  $\lim f(x_{n_k}) = f(p)$  e portanto, a subsequência  $(f(x_{n_k}))$  de  $(y_n)$  converge para  $f(p) \in f(K)$ .  $\square$

**Definição 2.5.2.** *Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $(M, d)$  se diz totalmente limitado se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existem  $x_1, \dots, x_n \in A$  de maneira que:*

$$A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

**Proposição 2.5.3.** *Todo subconjunto compacto  $K$  de um espaço métrico  $(M, d)$  é totalmente limitado.*

*Demonstração.* Suponhamos  $K$  compacto e não totalmente limitado. Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que:

$$K \not\subset B(x_1, \varepsilon), \forall x_1 \in K$$

$$K \not\subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon), \forall x_2 \in K - B(x_1, \varepsilon)$$

$$K \not\subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup B(x_3, \varepsilon), \forall x_3 \in K - (\cup B(x_j, \varepsilon)) \quad (j = 1, 2)$$

$$\vdots$$

Temos agora que a sequência  $(x_1, x_2, \dots)$  é tal que  $x_1 \in K, x_2 \in K - B(x_1, \varepsilon), \dots$ . Como seus termos estão em  $K$ , que é compacto,  $(x_n)$  admite uma subsequência  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots) \rightarrow p \in K$ . Como os termos de  $(x_{n_i})$  são distintos entre si, a bola aberta  $B(p, \frac{\varepsilon}{2})$  contém infinitos pontos desses termos. Assim, tomando

$$x_r, x_s \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

de modo que  $x_r \neq x_s$  e  $r < s$ , temos:

$$d(x_r, x_s) \leq d(x_r, p) + d(p, x_s) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo,  $x_s \in B(x_r, \varepsilon)$ , o que é um absurdo.  $\square$

## 2.5.2 Distância entre conjuntos compactos

Neste tópico vamos apresentar a prova de que a distância entre dois subconjuntos compactos de um dado espaço métrico pode ser expressa pela distância entre dois pontos, um de cada desses subconjuntos.

**Proposição 2.5.4.** *Seja  $K$  um subconjunto compacto de um espaço métrico  $(M, d)$ . Se  $A \subset M$ , então existe  $p \in K$  tal que  $d(p, A) = d(K, A)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon = d(K, A)$ . Como

$$d(K, A) = \inf\{d(x, y) \mid x \in K, y \in A\}$$

então existem, para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in K$  e  $y_n \in A$  de maneira que  $\varepsilon \leq d(x_n, y_n) < \varepsilon + \frac{1}{n}$ .

Consideremos a sequência  $(x_1, x_2, \dots)$  e seja  $B = \{x_n \mid n \geq 1\}$ . Há dois casos possíveis:

(i)  $B$  é finito.

Neste caso existe  $p \in K$  tal que  $x_n = p$  para infinitos índices e podemos provar que  $d(K, A) = d(p, A)$ .

De fato, suponhamos  $d(p, A) = \varepsilon + \delta$ , com  $\delta > 0$ , e tomemos um número natural  $r > 0$  tal que  $x_r = p$  e  $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$ . Daí,

$$\varepsilon + \delta = d(p, A) = d(x_r, A) \leq d(x_r, y_r) < \varepsilon + \frac{1}{r} < \varepsilon + \frac{\delta}{2},$$

o que é um absurdo.

(ii)  $B$  é infinito.

Da compacidade de  $K$ , existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  tal que  $\lim x_{n_k} = p \in K$ . Agora, mostraremos que  $d(K, A) = d(p, A)$ . Suponhamos  $d(p, A) = \varepsilon + \delta$ , com  $\delta > 0$ . De  $x_{n_k} \rightarrow p$

decorre que  $B(p, \frac{\delta}{2})$  contém infinitos termos da sequência  $(x_n)$  e, portanto, existe  $x_r \in B(p, \frac{\delta}{2})$  de modo que  $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$ . Daí,

$$d(p, x_r) + d(x_r, y_r) < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{r} < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} = \varepsilon + \delta = d(p, A) \leq d(p, y_r),$$

o que contradiz a desigualdade triangular. □

**Corolário 2.5.5.** *Seja  $K$  um subconjunto compacto de um espaço métrico  $(M, d)$  e seja  $A \subset M$  um subconjunto fechado tal que  $K \cap A = \emptyset$ . Então,  $d(K, A) > 0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos  $d(K, A) = 0$ . Então, existe um ponto  $p \in K$  tal que  $d(p, A) = 0$ , o que significa que  $p \in \overline{A}$ . Como  $p \in K$  e  $A = \overline{A}$ , então  $p \in K \cap A$ , o que é absurdo. □

**Corolário 2.5.6.** *Se  $K$  e  $L$  são subconjuntos compactos de um espaço métrico  $M$ , então existem  $p \in K$  e  $q \in L$  tais que  $d(L, K) = d(p, q)$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.4.5, temos que  $d(K, L) = d(p, L)$  para um certo  $p \in K$ . E da mesma forma ela garante que existe  $q \in L$  tal que

$$d(p, L) = d(\{p\}, L) = d(\{p\}, q) = d(p, q).$$

Logo,  $d(K, L) = d(p, q)$ . □



## Teorema do Ponto Fixo de Banach

### 3.1 Contrações em espaços métricos

Dentre as funções contínuas, temos as contrações, que serão de extrema importância para nosso estudo, sendo utilizada como hipótese no Teorema do ponto fixo de Banach que será apresentado na seção seguinte, e em outros resultados fundamentais para a definição dos Fractais SFI.

A ideia de uma contração pode ser expressa como uma função de um espaço métrico em si mesmo, reduzindo as distâncias. A definição formal veremos a seguir:

**Definição 3.1.1.** Uma transformação  $f : X \rightarrow X$  é uma **contração** se existir uma constante  $s \in \mathbb{R}$ , com  $0 \leq s < 1$  tal que,

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Chamaremos a constante  $s$  de fator de contração de  $f$ .

**Exemplo 18.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Note que

$$d(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \left( \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \right) \right| = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3}d(x, y).$$

Assim, temos que  $f$  é uma contração com fator de contração igual a  $\frac{1}{3}$ . Observe que qualquer

$r \in [\frac{1}{3}, 1)$  é também fator de contração de  $f$ .

**Proposição 3.1.1.** *Toda contração é contínua.*

*Demonstração.* Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma contração.  $a \in X$  e  $\varepsilon > 0$ . Devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Como  $f$  é uma contração, existe  $r$ , com  $0 \leq r < 1$ , tal que  $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ . Se  $s = 0$  então  $d(f(x), f(y)) = 0$ ,  $\forall x, y \in X$ , significa que  $f$  é uma função constante e, portanto, contínua.

Agora, se  $s > 0$ , basta fazer  $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$ . Assim,

$$d(x, a) < \delta = \frac{\varepsilon}{s} \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq rd(x, a) < s \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon,$$

para todo  $a \in X$ .

Em particular, se  $s = 1$ , temos que  $d(f(x), f(a)) \leq d(x, a)$ . Assim, tomando  $\delta = \varepsilon$ , temos

$$d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) \leq d(x, a) < \delta = \varepsilon, \forall a \in X.$$

Esse caso, chamamos de *contração fraca*. □

**Exemplo 19.** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $f(z) = sze^{i\theta} + a + bi$ , onde  $s, a, b \in \mathbb{R}$ , com  $0 \leq s < 1$ ,  $i$  é unidade imaginária e  $a$  a constante de Euler.*

*Lembremos que  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ , onde  $\|e^{i\theta}\| = 1$ . Entretanto,*

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(w)\| &= \|sze^{i\theta} + a + bi - swe^{i\theta} - a - bi\| \\ &= s\|e^{i\theta}\| \|z - w\| = s\|z - w\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$d(f(z), f(w)) = sd(z, w).$$

Portanto,  $f$  é uma contração com fator de contração  $s$  e, conseqüentemente, contínua.

## 3.2 Espaços métricos completos

**Definição 3.2.1.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  é chamada sequência de Cauchy se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $r \in \mathbb{N}^*$  tal que*

$$m, n \geq r \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Vejamos a seguir, um resultado importante para sequências convergentes.

**Proposição 3.2.1.** *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* Como a sequência é convergente, temos que  $(x_n)$  converge para  $a$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n \geq n_0$  tal que  $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim, para todo  $m, n \geq n_0$ , temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

A recíproca dessa proposição não é válida, observemos o exemplo a seguir.

**Exemplo 20.** *Seja  $(x_n)$  a sequência de pontos de  $\mathbb{Q}$  definida por recorrência abaixo*

$$x_1 = 2 \text{ e } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

*Como  $x_n - \frac{2}{x_n} \neq 0$ , uma vez que cada  $x_n$  é racional, e como*

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( x_n - \frac{2}{x_n} \right)^2 + 2,$$

*então  $x_n^2 > 2$ , para todo  $n \geq 1$ . Daí,*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) < \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{x_n^2}{x_n} \right) = x_n,$$

*para qualquer  $n \geq 1$ . Então,*

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots > 1$$

Como a sequência é decrescente e limitada inferiormente por 1, então pela Proposição 2.2.4, a sequência  $(x_n)$  converge para um ponto  $p > 0$  e, portanto,  $(x_n)$  é de Cauchy em  $\mathbb{Q}$ . Como  $(x_2, x_3, \dots) \rightarrow p$  e aplicando limite em ambos os lados da igualdade

$$\begin{aligned}\lim x_{n+1} &= \lim \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) \\ p &= \frac{1}{2} \left( p + \frac{2}{p} \right) \\ 2p &= p + \frac{2}{p} \\ p &= \frac{2}{p} \\ p^2 &= 2\end{aligned}$$

Portanto,  $p \notin \mathbb{Q}$ , ou seja,  $(x_n)$  não converge em  $\mathbb{Q}$ .

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em um espaço métrico  $(M, d)$ . Se existe uma subsequência de  $(x_n)$  que converge para  $p \in M$ , então  $\lim x_n = p$ .*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em um espaço métrico  $M$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $n_k$  tal que

$$n_i \geq n_k \Rightarrow d(x_{n_i}, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, sendo  $(x_n)$  sequência de Cauchy, existe um índice  $s$  tal que

$$m, n \geq s \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando  $t = \max\{n_k, s\}$ , temos que

$$n \geq t \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon,$$

o que garante a convergência de  $(x_n)$  para o ponto  $p$ . □

**Corolário 3.2.3.** *Se uma sequência de pontos de um espaço métrico contém duas subsequências que convergem para pontos diferentes desse espaço, então a sequência não é de Cauchy.*

**Definição 3.2.2.** Um espaço métrico  $M$  é chamado completo se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de  $M$ .

**Proposição 3.2.4.** Toda sequência de Cauchy  $(x_n)$  em  $\mathbb{R}$  converge para um ponto  $p \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Sabemos que existe um  $k > 0$  tal que  $|x_n| < k, \forall n \geq 1$ , o que nos permite concluir a existência, para cada índice  $m \geq 1$ , de

$$y_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}.$$

Podemos notar que

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq k$$

e portanto,  $(y_n)$  converge para  $p = \sup\{y_n | n = 1, 2, \dots\}$  que é um ponto de  $\mathbb{R}$ . Mostremos que  $\lim x_n = p$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $r$  e um índice  $s$ , uma vez que  $(x_n)$  é de Cauchy, tais que

$$\begin{aligned} n \geq r &\Rightarrow |y_n - p| < \frac{\varepsilon}{3} \\ m, n \geq s &\Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Tomando  $t > \max\{r, s\}$ , temos que para todo  $n > t$

$$|x_n - p| < \varepsilon.$$

Logo,  $\lim x_n = p$ .

□

Assim, podemos dizer que  $\mathbb{Q}$  não é completo e  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico completo.

**Proposição 3.2.5.** Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Então, o espaço  $M \times N$  é completo se, e somente se,  $M$  e  $N$  são completos.

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $M$ , então, para cada  $y \in N$ ,  $((x_n, y))$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , é uma sequência de Cauchy no espaço  $M \times N$ .

De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $r$  tal que

$$m, n \geq r \Rightarrow D_1((x_m, y); (x_n, y)) = d(x_m, x_n) + d(y, y) = d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Portanto,  $((x_n, y))$  converge para um ponto  $(x, y)$  de  $M \times N$  e daí  $(x_n)$  converge para  $x \in M$ . De modo análogo se prova que  $N$  é completo.

Agora, se  $((x_n, y_n))$  é uma sequência de Cauchy em  $M$  e  $N$ , respectivamente, e sendo completos estes espaços, existem  $p \in M$  e  $q \in N$  de modo que  $\lim x_n = p$  e  $\lim y_n = q$ . Portanto, ainda pela proposição anterior

$$\lim(x_n, y_n) = (p, q).$$

□

**Corolário 3.2.6.** *O espaço  $\mathbb{R}^n$  é completo.*

**Proposição 3.2.7.** *Todo espaço métrico compacto é completo.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy num espaço métrico compacto  $M$ . Da compacidade de  $M$  temos que existe uma subsequência  $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$  que converge para um ponto  $p \in M$ . Mas se uma subsequência de uma sequência de Cauchy converge, então a sequência converge para o mesmo ponto. Logo,  $x_n \rightarrow p$  e portanto,  $M$  é completo. □

**Observação:** A recíproca não vale sempre, por exemplo, o espaço  $\mathbb{R}$ , com métrica usual, é completo. Porém, não é compacto pois a sequência de números reais  $(2, 4, 6, \dots)$  não admite subsequência que convergente em  $\mathbb{R}$ .

Já vimos que  $\mathbb{Q}$  não é completo. A construção de  $\mathbb{R}$  a partir de  $\mathbb{Q}$  representa o que chamamos de **completamento** de  $\mathbb{Q}$ . Intuitivamente,  $\mathbb{R}$  é a ampliação de  $\mathbb{Q}$  obtida acrescentando-se a este conjunto os limites de sequências de Cauchy racionais que a ele não pertencem. Vale dizer também que  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**Definição 3.2.3.** *Um completamento de um espaço métrico  $(M, d)$  é um par  $((\hat{M}, d); f)$ , onde  $(\hat{M}, d)$  é um espaço métrico completo,  $f : M \rightarrow \hat{M}$  é a imersão isométrica e  $f(\hat{M})$  é denso em  $\hat{M}$ .*

**Proposição 3.2.8.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Se existe um subconjunto não vazio  $A \subset M$  tal que  $\overline{A} = M$  e toda sequência de Cauchy de pontos de  $A$  converge em  $M$ , então  $M$  é completo.*

*Demonstração.* Se  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $M$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe um índice  $r$  tal que  $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$  para quaisquer  $m, n \geq r$ .

O fato de  $A$  ser denso em  $M$  garante por outro lado que, para cada índice  $k \geq 1$ , existe  $y_k \in A$  de maneira que  $d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}$ . Assim, se  $s$  é um índice maior que  $r$  e que  $\frac{\varepsilon}{3}$ , para  $m, n \geq s$  então vale

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

o que mostra que  $(y_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $A$ . Como as sequências de Cauchy que convergem em  $A$  convergem em  $M$ , existe  $p \in M$  tal que  $\lim y_n = p$ . Mostremos que  $(x_n)$  também converge para  $p$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\lim y_n = p$ , existe  $r$  tal que

$$n \geq t \Rightarrow d(y_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, para todo  $n > \max\{t, \frac{\varepsilon}{2}\}$  teremos

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, p) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

### 3.3 Ponto Fixo

Nesta seção, apresentaremos a definição de ponto fixo de uma função e abordaremos alguns exemplos que nos permitirão identificar tais pontos. Lembrando que seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Um ponto fixo de uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  é um ponto  $x \in M$  tal que  $f(x) = x$ .

**Exemplo 21.** A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^2$ , tem dois pontos fixos, que são os pontos 0 e 1. Pois,  $f(0) = 0^2 = 0$  e  $f(1) = 1^2 = 1$ .

**Exemplo 22.** A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^3$ , tem três pontos fixos, que são os pontos 0, 1 e  $-1$ . Pois,  $f(0) = 0^3 = 0$ ,  $f(1) = 1^3 = 1$  e  $f(-1) = (-1)^3 = -1$ .

**Exemplo 23.** A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \cos(x)$ , possui um ponto fixo, o qual está representado graficamente abaixo.

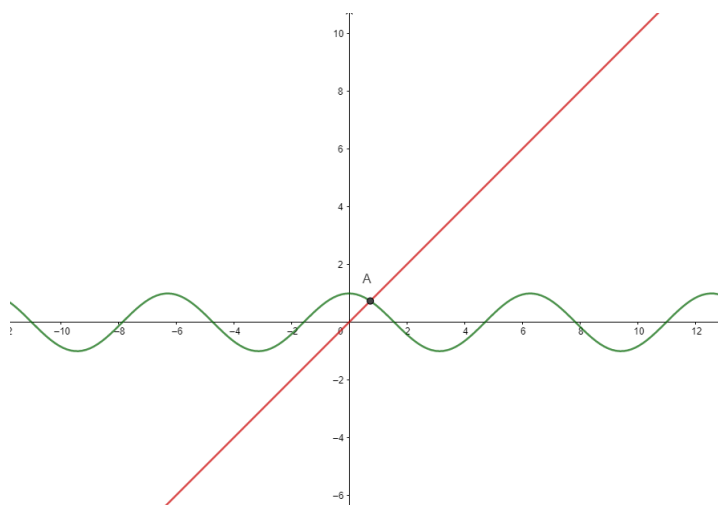


Figura 3.1: Ponto fixo da função  $f(x) = \cos(x)$  indicado pela interseção das duas curvas  $y = \cos x$  e  $y = x$  no ponto  $A$ . Adaptado de [1].

### 3.4 Teorema do ponto fixo de Banach

Nesta seção será apresentado o teorema do ponto fixo de Banach e sua demonstração, o qual será utilizado para mostrar o funcionamento do processo de compressão de imagens no *tapete de Sierpinski* na seção seguinte e também será utilizado em resultados fundamentais do Espaço de Hausdorff e dos Fractais SFI.

Para maiores detalhes sobre o teorema e suas aplicações, consultar [2] e [3].

**Teorema 3.4.1** (Teorema do ponto fixo de Banach). *Se  $(M, d)$  é um espaço métrico completo, toda contração  $f : M \rightarrow M$  possui um único ponto fixo em  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $M$  tal que, fixado um ponto  $x_0$  e fazendo  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = f(x_{n-1})$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\dots$ . Mostremos que  $a = \lim x_n$  é o único ponto fixo de  $f$ . Vamos admitir que a sequência  $(x_n)$  convirja para um ponto  $a \in M$ .

Provemos a existência do ponto fixo.

Como, por hipótese,  $\lim x_n = a$ , temos  $f(a) = f(\lim x_n)$ . Mas, como  $f$  é uma contração, segue que  $f$  é contínua, assim

$$f(\lim x_n) = \lim f(x_n),$$

o que implica,  $f(a) = \lim f(x_n)$ . Mas, por hipótese,  $f(x_n) = x_{n+1}$ , então  $f(a) = \lim x_{n+1}$ , e como supomos que  $(x_n)$  converge para  $a$ , segue da unicidade do limite, que  $f(a) = a$ .



Portanto,  $a$  é o ponto fixo de  $f$ .

Provemos a unicidade do ponto fixo.

Suponhamos que existam dois pontos fixos,  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ . Como  $f$  é uma contração

$$d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y),$$

com  $0 \leq c \leq 1$ , para  $x, y$  quaisquer em  $M$ . Então,

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c.d(a, b),$$

ou seja,  $d(a, b) \leq c.d(a, b) \Rightarrow d(a, b)(1 - c) \leq 0$ . Como  $1 - c > 0$ , temos que  $d(a, b) \leq 0$ . Mas por se tratar de uma métrica,  $d(a, b)$  deve ser sempre maior ou igual a zero, nos restando apenas a possibilidade  $d(a, b) = 0$ . E isso acontece se, e somente se,  $a = b$ .

Portanto, o ponto fixo é único.

Resta provar que a sequência  $(x_n)$ , considerada inicialmente, é de fato convergente. Para isso, basta mostrar que  $(x_n)$  é de Cauchy em  $M$ , pois sendo  $M$  completo  $(x_n)$  é convergente.

Observe que, sendo  $f$  uma contração e como

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

temos

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c.d(x_0, x_1),$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq c.d(x_1, x_2) \leq c.(c.d(x_0, x_1)) = c^2.d(x_0, x_1).$$

Fazendo isso indefinidamente temos, de modo geral,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n.d(x_0, x_1)$ . Daí, segue que, para  $n, p \in \mathbb{N}$  quaisquer

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \dots + c^{n+p-1}].d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq c^n[1 + c + \dots + c^{p-1}].d(x_0, x_1).$$

Note que  $[1 + c + \dots + c^{p-1}]$  é a soma de termos de uma progressão geométrica de razão  $c$ , com  $0 \leq c < 1$ , logo  $[1 + c + \dots + c^{p-1}] = \frac{1}{1-c}$ . E assim, obtemos

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1).$$

Como,  $0 \leq c < 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ , segue que  $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \forall n > n_0$  com  $\varepsilon > 0$  tão pequeno quanto se queira. Portanto,  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo  $M$  e concluímos assim que a sequência é convergente.

□

### 3.4.1 Aplicação do Teorema na teoria de compressão de imagens

Existem várias formas de armazenar uma imagem em uma memória, dentre tais formas, a mais eficiente é conseguir armazenar a cor de cada pixel. Entretanto, se formos utilizar a imagem em uma escala muito grande, por exemplo, os pixels tornam-se quadrados muito grandes, o que causa uma insuficiência de informações para o preenchimento dos detalhes nesses quadrados. E para solução de tal problema entra a ideia de compressão de imagens. Entretanto, surge uma dúvida: "Qual o princípio da compressão de imagens?". É codificar a menor quantidade de informação contida na imagem original, de modo que os olhos não percebam que a imagem observada está deteriorada.

Existem vários procedimentos para compressão de imagens e o mais utilizado é o JPEG. Um outro método, que tem permanecido mais no campo experimental, foi chamado de sistema de funções iteradas, que é uma técnica em construir figuras fractais através da repetição, em escala, de uma mesma figura. A ideia consiste em aproximar uma imagem por objetos geométricos.

Nesta seção iremos apresentar a ideia do processo de compressão de imagens no *Tapete de Sierpinski*.

Observe na figura a seguir que o tapete de Sierpinski é uma reunião de três cópias de si mesmo que tem metade de seu tamanho (largura e altura). De fato, começando com um tapete de Sierpinski, podemos construir um segundo tapete com o seguinte procedimento:

- 1) A partir do vértice inferior esquerdo, encolhemos o tapete de Sierpinski, até sua metade.
- 2) Fazemos uma segunda cópia desse meio tapete de Sierpinski e a colamos à direita da primeira.

3) Fazemos uma terceira cópia desse meio tapete de Sierpinski e a colamos acima das outras duas.



Figura 3.2: Tapete de Sierpinski. Fonte [6].

A segunda figura que construímos é idêntica ao nosso o tapete de Sierpinski inicial. Portanto, veremos que, o tapete de Sierpinski é o ponto  $x_0$  do processo. Assim, observando que o comprimento da base do tapete de Sierpinski é igual ao comprimento da sua altura, e esse comprimento igual a 1, podemos escolher eixos com origem no canto inferior esquerdo do tapete de Sierpinski e unidades nos eixos tais que a base e a altura tenham ambos comprimento 1. Também construímos a seguinte transformação afim, definida em  $\mathbb{R}^2$ :

$$T_1(x, y) = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right)$$

$$T_2(x, y) = \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right)$$

$$T_3(x, y) = \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

Desse modo, se  $S$  é o tapete de Sierpinski, temos:

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S).$$

Entretanto, será que existem outros subconjuntos  $B$  do plano que têm a mesma propriedade?

Para provarmos que não, caracterizaremos o tapete de Sierpinski como sendo o único subconjunto  $S$  do plano que satisfaz a equação acima. Assim, construímos uma função que associa um subconjunto  $B$  do plano ao subconjunto  $T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)$ . Chamando essa função de  $W$ , temos:

$$B \mapsto W(B) = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B).$$

E veremos, a seguir, que  $S$  é o ponto  $x_0$  dessa função, isto é, que  $S = W(S)$ . Vejamos a construção a seguir.

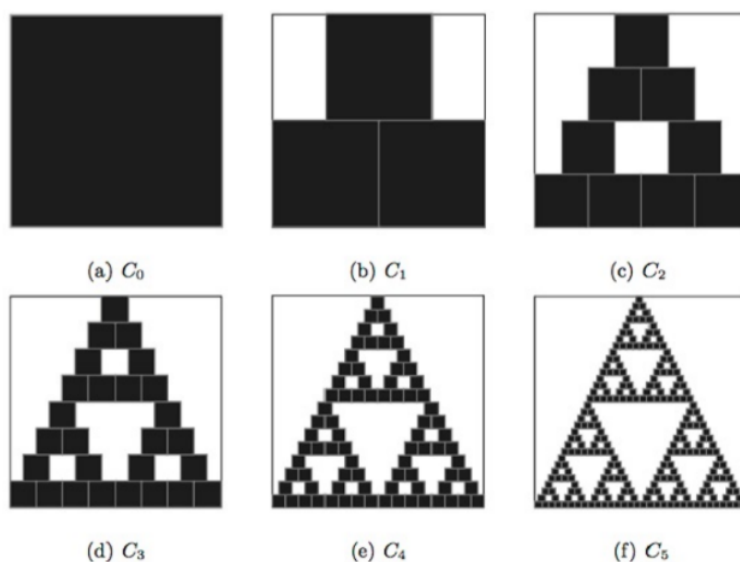


Figura 3.3: Construção do tapete de Sierpinski. Adaptado de [6].

Observemos que:

- 1) Nenhum dos conjuntos  $C_0, \dots, C_5$ , apresentados na figura a seguir, é um ponto  $x_0$  de  $W$ ;
- 2) Poderíamos ter continuado o processo indefinidamente, produzindo uma sequência infinita de conjuntos  $\{C_n\}$ , com  $C_{n+1} = W(C_n)$ .
- 3) A sequência  $\{C_n\}$  parece convergir rapidamente para o triângulo de Sierpinski.

O que garante essa convergência é o Teorema do Ponto Fixo de Banach. De fato, os nossos olhos não conseguiriam distinguir  $C_{10}$  de  $S$ . Então, no lugar de  $S$ , o programa de reconstrução da nossa imagem pode simplesmente produzir  $C_{10}$ . E, se caso uma resolução melhor fosse necessária, usaríamos o mesmo programa mandando-o para  $C_{20}$  ou  $C_{30}$ . Assim, o mesmo programa pode reconstruir  $S$  com precisão arbitrária.

Intuitivamente, podemos pensar em uma sequência  $(C_0, C_1, \dots, C_n, \dots)$  de números reais como sendo uma sequência de pontos da reta e o seu limite como sendo um ponto do qual os pontos  $C_n$  se tornam e permanecem arbitrariamente próximos, desde que se tome o índice  $n$  suficientemente grande.

---

## *Espaço de Hausdorff*

---

Nos referimos ao espaço de Hausdorff como o "espaço dos fractais", os quais iremos discutir mais a fundo no próximo capítulo. Esta seção tem como principal objetivo verificar que o espaço de Hausdorff é um espaço métrico completo. Para maiores informações sobre o assunto, consultar [1] e [10].

**Definição 4.0.1.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Denotaremos de  $\mathcal{H}(X)$  o espaço cujos pontos são subconjuntos compactos não vazios de  $X$ , ou seja,*

$$\mathcal{H}(X) = \{K \subset X \mid K \text{ é compacto e } K \neq \emptyset\}.$$

Para trabalharmos com um espaço métrico é importante que tenhamos uma métrica bem definida e para isso, definiremos a distância de um elemento do espaço métrico  $X$  a um elemento de  $\mathcal{H}(X)$ . Tal métrica será apresentada na seção a seguir e é conhecida como *distância de Hausdorff*.

### **4.1 Métrica de Hausdorff**

A métrica de Hausdorff ou distância de Hausdorff, mede a extensão em que cada ponto de um conjunto de modelos fica próximo a algum ponto de um conjunto de imagens e vice-versa. Assim, essa distância pode ser usada para determinar o grau de correspondência entre dois objetos sobrepostos um ao outro. Apresentaremos a seguir, o conceito da distância de Hausdorff, alguns

resultados a ele relacionados e por fim, apresentaremos uma ideia de como esse conceito pode ser aplicado na busca de semelhanças entre imagens.

Agora, apresentaremos o passo a passo para a definição de tal distância.

**Definição 4.1.1.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $x \in X$  e  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Definimos a distância do ponto  $x$  ao conjunto  $B$  como*

$$d(x, B) = \min \{ d(x, y) | y \in B \}.$$

Como sabemos que o conjunto de números reais  $\{ d(x, y) | y \in B \}$  contém um mínimo valor como afirma a definição acima? Tal resultado segue do fato de  $B \in \mathcal{H}(X)$  ser compacto e não vazio.

De fato, seja  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, com  $B$  compacto, definida por  $f(y) = d(x, y), \forall y \in B$ .

Consideremos o seguinte conjunto

$$S := \{ d(x, y) | y \in B \}.$$

Observe que  $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$  e  $S$  é limitado inferiormente; pois se  $\mathbb{R}$  é completo, existe  $P = \inf S$ . Como  $P$  é a maior das cotas inferiores de  $S$ , para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  existe  $(y_n) \in B$ , pela Proposição 3.2.4, tal que  $f(y_n) < P + \frac{1}{n}$ , e se  $-\frac{1}{n} < 0 \leq f(y_n) - P < \frac{1}{n}$ ; portanto  $|f(y_n) - P| < \frac{1}{n}$ , resultando

$$\lim f(y_n) = P.$$

Como  $B$  é compacto, existe  $(y_{n_k})$  subsequência de  $(y_n)$  tal que  $\lim(y_{n_k}) = \hat{y}$ , com  $\hat{y} \in B$ . Se  $f(\lim(y_{n_k})) = f(\hat{y})$  e  $f$  é contínua,  $\lim(f(y_{n_k})) = f(\hat{y})$ . Portanto,  $f(y_{n_k})$  é uma subsequência de  $f(y_n)$ , então  $P = f(\hat{y})$ , de modo que  $P$  é realmente mínimo de  $S$ .

**Definição 4.1.2.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . A distância do conjunto  $A$  ao conjunto  $B$  é definida como*

$$d(A, B) = \max \{ d(x, B) | x \in A \}.$$

Assim como garantimos a existência de um mínimo, podemos afirmar a existência de um

máximo para a definição anterior.

De fato, seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = d(x, B), \forall x \in A$ , a qual sempre existe, como vimos anteriormente. Vejamos que  $f$  é contínua. Seja  $\varepsilon > 0$ , teremos

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, B) - d(y, B)| = |d(x, b_1) - d(y, b_2)|$$

para algum  $b_1, b_2 \in B$ , então temos

$$d(x, B) = d(x, b_1) = \min \{d(x, b) | b \in B\}$$

$$d(y, B) = d(y, b_2) = \min \{d(y, b) | b \in B\}.$$

Portanto,

$$d(x, b_1) \leq d(x, b_2) \leq d(x, y) + d(y, b_2) \quad \text{e} \quad d(y, b_2) \leq d(y, b_1) \leq d(y, x) + d(x, b_1).$$

Das desigualdades anteriores obtemos

$$-d(x, y) \leq d(x, b_1) - d(y, b_2) \leq d(x, y).$$

Desse modo,

$$|d(x, b_1) - d(y, b_2)| \leq d(x, y).$$

E para obter a continuidade de  $f$  basta então tomar  $0 < \delta \leq \varepsilon$ .

Agora, consideremos o seguinte conjunto

$$S := \{d(x, B) | x \in A\}.$$

$S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ . Como  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $A$  é compacto, pela Proposição 2.5.2,  $f(A)$  também é compacto. Note que  $f(A) = S$  é compacto e portanto limitado. Como  $\mathbb{R}$  é completo, existe  $P = \sup S$ . Para verificar que  $P$  é máximo de  $S$ , vamos supor que para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ , existe  $y_n \in A$  tal que  $P - \frac{1}{n} < f(y_n)$ , logo

$$-\frac{1}{n} < 0 \leq P - f(y_n) < \frac{1}{n},$$

onde  $|P - f(y_n)| < \frac{1}{n}$  e portanto

$$\lim f(y_n) = P.$$

Como  $A$  é compacto e  $(y_n)$  é uma sequência em  $A$ , existe  $(y_{n_k})$  subsequência de  $(y_n)$  tal que  $\lim y_{n_k} = \hat{a}$  para algum  $\hat{a} \in A$ . Portanto  $f(\lim(y_{n_k})) = f(\hat{a})$ , e como  $f$  é contínua,  $\lim(f(y_{n_k})) = f(\hat{a})$ . Como  $f(y_{n_k})$  é uma subsequência de  $f(y_n)$ , segue que  $P = f(\hat{a})$ , de maneira que  $P$  é o máximo de  $S$ .

Em outras palavras,  $d(A, B)$  é a maior das menores distâncias que separam os pontos de  $A$  de qualquer ponto de  $B$ .

Para entender melhor a definição anterior, considere o exemplo a seguir.

**Exemplo 24.** Dados os conjuntos  $A = [200, 250] \times [200, 250]$  e  $B = [300, 400] \times [200, 250]$ . Vamos calcular a distância do conjunto  $A$  ao conjunto  $B$ .

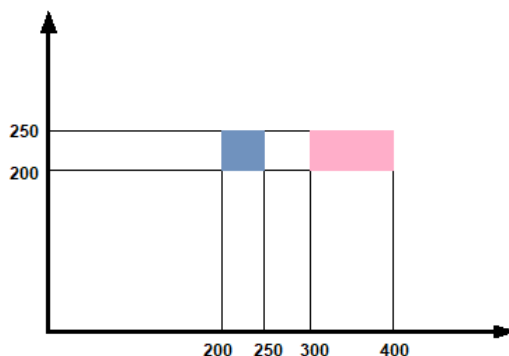


Figura 4.1: Representação dos conjuntos  $A = [200, 250] \times [200, 250]$  e  $B = [300, 400] \times [200, 250]$ .

*Primeiramente, calcularemos as distâncias de cada ponto  $x \in A$  ao conjunto  $B$ . Assim, se*

$$x = (200, 250) \implies d(x, B) = 100.$$

$$x = (250, 200) \implies d(x, B) = 50.$$

$$x = (250, 250) \implies d(x, B) = 50.$$

$$x = (200, 200) \implies d(x, B) = 100.$$

*Como qualquer ponto deve estar entre os limites do ponto  $x$  que já calculamos, basta ver o máximo entre eles.*



Logo,  $d(A, B) = \max \{ d(x, B) : x \in A \} = 100$ .

E para calcular  $d(B, A)$ ? O processo será análogo, somente considerando sentido inverso para o cálculo das distâncias. Calculando as distâncias de cada ponto  $y \in B$  ao conjunto  $A$ , tem-se

$$y = (300, 200) \implies d(y, A) = 50.$$

$$y = (300, 250) \implies d(y, A) = 50.$$

$$y = (400, 200) \implies d(y, A) = 150.$$

$$y = (400, 250) \implies d(y, A) = 150.$$

Logo,  $d(B, A) = \max \{ d(y, A) : y \in B \} = 150$ .

**Observação:** Essa definição de distância entre conjuntos não pode ser uma métrica, pois nem sempre  $d(A, B) = d(B, A)$ , como no exemplo anterior, onde  $d(A, B) \neq d(B, A)$ .

Dessa forma, a distância de Hausdorff será definida como a maior entre as distâncias  $d(A, B)$  e  $d(B, A)$ .

Considerando a notação  $x \vee y$  para representar o máximo entre dois números reais  $x$  e  $y$ , temos a seguinte definição formal:

**Definição 4.1.3.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Definimos a distância de Hausdorff entre dois pontos  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  como*

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

**Proposição 4.1.1.** *A aplicação  $h$  é uma métrica no espaço  $\mathcal{H}(X)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ . De fato,

i) Para todo  $A \in \mathcal{H}(X)$ ,

$$h(A, A) = d(A, A) \vee d(A, A) = d(A, A) = \max \{ d(x, A) | x \in A \} = 0.$$

Para todo  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ,  $A \neq B$  então,  $h(A, B) > 0$ .

De fato,  $A$  e  $B$  são compactos e não vazios, então existem  $a \in A$  e  $b \in B$  tais que  $d(A, B) = d(a, b)$ . Como  $d$  é uma métrica em  $X$ , então  $d(a, b) \geq 0$  e portanto  $h(A, B) \geq 0$ . Se  $A \neq B$ , então existe  $a \in A$  tal que  $a \notin B$ , donde  $d(A, B) > 0$ , já que  $A$  e  $B$  são fechados. Consequentemente,  $h(A, B) > 0$ .

ii) É imediato concluir que a função  $h$  é simétrica.

iii) Para mostrarmos que  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$  primeiro mostremos que  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ .

Para algum  $a \in A$

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min \{ d(a, b) | b \in B \} \\ &\leq \min \{ d(a, c) + d(c, b) | b \in B \}, \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min \{ d(c, b) | b \in B \}, \forall c \in C. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \min \{ d(a, c) | c \in C \} + \max \{ \min \{ d(c, b) | b \in B \} | c \in C \} \\ &= d(a, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Logo,  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ .

Analogamente,  $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= d(A, B) \vee d(B, A) \\ &\leq d(B, C) \vee d(C, B) + d(A, C) \vee d(C, A) \\ &= h(B, C) + h(C, A). \end{aligned}$$

Logo,  $h$  é uma métrica no espaço  $\mathcal{H}(X)$ .

□

**Definição 4.1.4.** *Seja  $S \subset X$  e  $\Gamma \geq 0$ . Então,*

$$S + \Gamma = \{y \in X : d(x, y) \leq \Gamma \text{ para algum } x \in S\}.$$

*O conjunto  $S + \Gamma$  é chamado de dilatação de  $S$  pela bola de raio  $\Gamma$ .*

**Lema 4.1.2.** *Sejam  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , onde  $(X, d)$  é um espaço métrico. Considere  $\varepsilon > 0$ , então*

$$h(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B + \varepsilon \text{ e } B \subset A + \varepsilon.$$

*Demonstração.* Inicialmente, mostremos que  $h(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B + \varepsilon$ . Por hipótese,  $h(A, B) \leq \varepsilon \Rightarrow h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) \leq \varepsilon$ .

Se  $d(A, B) \leq \varepsilon \Rightarrow d(x, B) \leq \varepsilon$  para todo  $x \in A$ . Em particular,  $d(x, y) \leq \varepsilon$  para algum  $y \in B$ . Logo,  $x \in B + \varepsilon$  e conseqüentemente,  $A \subset B + \varepsilon$ . Analogamente para  $d(B, A) \leq \varepsilon$ , teremos  $B \subset A + \varepsilon$ .

Seja  $x \in A$ . Sabemos que  $d(A, B) = \max \{d(x, B) | x \in A\}$ , e como  $A \subset B + \varepsilon$  temos que para algum  $y \in B$ ,  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon_i > 0$  como sendo  $\min \{d(x_i, y) : y \in B\}$ , temos:

$$d(x_i, B) \leq \varepsilon_i.$$

Como isso vale para todo  $x_i \in A$ , segue que

$$d(A, B) \leq \varepsilon_A, \quad \text{com } \varepsilon_A = \max \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}.$$

Analogamente, temos

$$d(B, A) \leq \varepsilon_B, \quad \text{com } \varepsilon_B = \max \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}.$$

Tomando  $\varepsilon = \max \{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ ,

$$d(A, B) \leq \varepsilon \text{ e } d(B, A) \leq \varepsilon.$$

Logo,  $h(A, B) \leq \varepsilon$ .

Analogamente, teremos  $h(A, B) \leq \varepsilon \iff B \subset A + \varepsilon$ , completando a demonstração.  $\square$

Seja  $(A_n)$  uma sequência de Cauchy de conjuntos em  $(\mathcal{H}(X), h)$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$ , tal que  $n, m \geq N$  implica  $A_m \subset A_n + \varepsilon$  e  $A_n \subset A_m + \varepsilon$ , isto é,  $h(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ .

Estamos interessados nas sequências de Cauchy  $(x_n)$  em  $X$ , com a propriedade de  $x_n \in A_n$  para cada  $n$ . Precisaremos do lema a seguir que nos permitirá estender tal subsequência para sua subsequência de Cauchy  $(x_{n_j})$ , com  $x_{n_j} \in A_{n_j}$  para cada  $j$ .

**Lema 4.1.3** (Lema da Extensão). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Considere  $(A_n)$  uma sequência de Cauchy de pontos em  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Seja  $(n_j)$  uma sequência infinita crescente de inteiros positivos. Suponha que tenhamos uma sequência de Cauchy  $(x_{n_j})$ , com  $x_{n_j} \in A_{n_j}$  em  $X$ . Então, existe uma sequência de Cauchy  $(\tilde{x}_n)$  com  $\tilde{x}_n \in A_n$  tal que  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$  para todo  $j = 1, 2, 3, \dots$*

*Demonstração.* Primeiro, iremos construir a sequência  $(\tilde{x}_n)$  com  $\tilde{x}_n \in A_n$ .

Para cada  $n \in \{1, 2, 3, \dots, n_1\}$  escolhamos  $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n \mid d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}$ . Isto é,  $\tilde{x}_n$  é o ponto mais próximo de  $x_{n_1}$  em  $A_n$  e tal existência pode ser garantida pela compacidade de  $A_n$ . De modo similar, para cada  $j \in \{2, 3, \dots\}$  e  $n \in \{n_j, n_j + 1, \dots, n_{j+1}\}$  escolhamos  $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n \mid d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}$ .

Agora, basta mostrar que  $(\tilde{x}_n)$  possui as propriedades desejadas, ou seja, uma extensão de  $(x_{n_j})$  para  $(A_n)$ .

Pela construção anterior, podemos afirmar que  $\tilde{x}_n = x_{n_j}$  e  $N_2 \in A_n$ . Para mostrarmos que essa é uma sequência de Cauchy, tome um  $\varepsilon > 0$ , como  $(x_{n_j})$  é uma sequência de Cauchy, por hipótese, existem  $N_1$  e  $N_2$  tais que

$$\begin{aligned} n_k, n_j \geq N_1 &\Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ m, n \geq N_2 &\Rightarrow d(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Seja  $N = \max \{N_1, N_2\}$  e note que para  $m, n \geq N$ ,

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n),$$

onde  $m \in \{n_{j-1}, n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$  e  $n \in \{n_{k-1}, n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$ .

Como  $h(A_m, A_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , existe  $y \in A_m \cap ((x_{n_j}) + \frac{\varepsilon}{3})$  tal que  $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

De modo semelhante,  $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Logo,  $d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \varepsilon$  para todo  $m, n > N$ . Portanto,  $(\tilde{x}_n)$  é uma sequência de Cauchy.  $\square$

**Teorema 4.1.4** (Completude do espaço dos fractais). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Então,  $(\mathcal{H}(X), h)$  é um espaço métrico completo. Além disso, se  $(A_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{H}(X)$ , então*

$$A = \lim A_n \in \mathcal{H}(X)$$

que podemos descrever como:

$$A = \{x \in X \mid \text{existe uma sequência de Cauchy } (x_n), \text{ que converge para } x\}.$$

*Demonstração.* Seja  $(A_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{H}(X)$  e considere  $A$  definido como descreve o teorema. Iremos separar a prova nas seguintes partes:

- (a)  $A \neq \emptyset$ ;
- (b)  $A$  é fechado e, portanto, completo já que  $X$  é completo;
- (c) para  $\varepsilon > 0$  existe  $N$  tal que, para  $n \geq N$  então  $A \subset A_n + \varepsilon$ ;
- (d)  $A$  é totalmente limitado e, portanto, por (b) é compacto;
- (e)  $\lim A_n = A$ .

**Prova (a).** Para mostrar que  $A \neq \emptyset$  iremos provar que existe uma sequência de Cauchy  $(a_i)$ , com  $a_i \in A_i$ , em  $X$ . Para isso, consideremos a sequência de inteiros positivos  $N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_n < \dots$  tal que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}, \quad \text{para } m, n > N_i.$$

Escolha  $x_{N_1} \in A_{N_1}$ . Logo, como  $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ , podemos encontrar um  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ . Como,  $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ ,  $x_{N_k} \in A_{N_k}$ , podemos encontrar um  $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$  tal que  $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ .

Seguindo o mesmo raciocínio, conseguimos encontrar uma sequência  $(x_{N_i})$ , com  $x_{N_i} \in A_{N_i}$  tal que  $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$ .

Para mostrarmos que  $(x_{N_i})$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ , basta tomarmos  $\varepsilon > 0$  e  $N_\varepsilon$

tal que  $\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$ . Então, para  $m > n > N_\varepsilon$  temos:

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \cdots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &< \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 4.1.3, existe uma subsequência convergente  $a_i$ , com  $a_i \in A_i$  para a qual  $a_{N_i} = x_{N_i}$ .

Então,  $\lim a_i$  existe e pela definição está em  $A$ . Logo,  $A \neq \emptyset$ .

**Prova (b).** Para mostrar que  $A$  é fechado, suponha que a sequência  $(a_i)$  de  $A$  convirja para um ponto  $a$ . Nós iremos mostrar que  $a \in A$ , e consequentemente,  $A$  é fechado.

Para cada inteiro positivo  $i$ , existe uma sequência  $(x_{i,n})$  de  $A$  tal que  $\lim x_{i,n} = a_i$ . Existe uma sequência crescente de inteiros positivos  $(N_i)$  tal que  $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$ . Além disso, existe uma subsequência de inteiros  $(m_i)$  tal que  $d(x_{N_i, m_i}, a_i) \leq \frac{1}{i}$ . Logo,  $d(x_{N_i, m_i}, a) \leq \frac{2}{i}$ .

Se considerarmos  $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$  temos que  $y_{m_i} \in A_{m_i}$  e  $\lim y_{m_i} = a$ . Pelo Lema 4.1.3,  $(y_{m_i})$  pode ser estendido à uma sequência convergente  $(z_i)$  de  $A_i$ , e assim,  $a \in A$ . Logo, temos que  $A$  é fechado.

**Prova (c).** Seja  $\varepsilon > 0$ . Existe  $N$  tal que para  $m, n \geq N$ , então  $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon$ . Agora, seja  $n \geq N$ . Assim, para  $m \geq n$  temos que  $A_m \subset A_n + \varepsilon$ .

Precisamos mostrar que  $A \subset A_n + \varepsilon$ . Para isso, considere  $a \in A$ . Existe uma sequência  $(a_i)$  de  $A_i$  que converge para  $a$ . Tomemos  $N$  grande o bastante para que  $m \geq N$ ,  $d(a_m, a) < \varepsilon$ .

Então,  $a_m \in A_n + \varepsilon$ , já que  $A_m \subset A_n + \varepsilon$ . Como  $A_n$  é compacto, podemos afirmar que  $A_n + \varepsilon$  é fechado. Portanto, como  $a_m \in A_n + \varepsilon$  para todo  $m \geq N$ ,  $a$  deve estar em  $A_n + \varepsilon$  também. Logo,  $A \subset A_n + \varepsilon$ .

**Prova (d).** Suponhamos que  $A$  não seja totalmente limitado. Assim, podemos encontrar uma sequência  $(x_i)$  em  $A$  tal que  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ , para  $i \neq j$ . Mostraremos que isso nos trará uma contradição.

Pelo item (c), existe um  $n$  suficientemente grande garantindo que  $A \subset A_n + \frac{\varepsilon}{3}$ . Para cada  $x_i$ , existe um  $y_i \in A$  correspondente, para o qual  $d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Como  $A_n$  é compacto, sabemos que alguma subsequência de  $(y_{n_i})$  de  $(y_n)$  converge. Então, podemos encontrar pontos suficientemente próximos nessa sequência  $(y_{n_i})$ . Em particular,  $y_{n_i}$  e

$y_{n_j}$ , tais que  $d(y_{n_i}, y_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Porém,

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

e assim, temos uma contradição para o modo que  $(x_{n_i})$  foi escolhida. Logo,  $A$  é totalmente limitado e pelo item (b), é compacto.

**Prova (e).** Do item (d), temos que  $A \in \mathcal{H}(X)$ . Além disso, usando o item (c) e o Lema 4.1.2 para completar a prova que  $\lim A_i = A$ , basta mostrarmos que para  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N$  tal que  $n \geq N \Rightarrow A_n \subset A + \varepsilon$ .

Para isso, consideremos  $\varepsilon > 0$  e encontremos um  $N$  tal que  $m, n \geq N, h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Então, para  $m, n \geq N, A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Seja  $n \geq N$ , mostraremos que  $A_n \subset A + \varepsilon$ , uma vez que no item (c) vimos que  $A \subset A_n + \varepsilon$ . Seja  $y \in A_n$ . Então, existe uma sequência crescente  $(N_i)$  de inteiros, tal que  $n < N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_k < \dots$  e para  $m, k \geq N_j, A_m \subset A_k + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ .

Note que  $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Como,  $y \in A_n$ , existe um  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  tal que  $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $x_{N_1} \in A_{N_1}$ , existe um ponto  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$ . Repetindo o procedimento, encontraremos uma sequência de pontos tal que  $x_{N_j} \in A_{N_j}$  e  $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Usando a desigualdade triangular sucessivas vezes, conseguimos mostrar que

$$d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } j.$$

E também,  $(x_{N_j})$  é uma sequência de Cauchy que converge para um ponto  $x$  que está em  $A$ . Além disso,  $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$  implica em  $d(y, x) \leq \varepsilon$ . Portanto, mostramos que  $A_n \subset A + \varepsilon$  para  $n \geq N$ .

Além disso, temos pelo item (b) que  $A$  é compacto, o que completa nossa prova que  $\lim A_n = A$ . E conseqüentemente, que  $(\mathcal{H}(X), h)$  é um espaço métrico completo.  $\square$

Pelo teorema anterior, podemos concluir que vale o Teorema do ponto fixo de Banach no espaço dos fractais  $\mathcal{H}(X)$  com a métrica de Hausdorff  $h$ .

### 4.1.1 Aplicação: reconhecimento de padrões em imagens

Uma das principais aplicações da distância de Hausdorff é na correspondência de imagens, usado, por exemplo, em análise de imagens, navegação visual de robos, computadores de as-

sistência cirúrgica, etc. Basicamente, a distância de Hausdorff auxilia a verificar se um modelo de imagem está presente numa imagem de teste; quanto menor o valor da distância, melhor a correspondência.

A medida de similaridade entre dois objetos no ambiente computacional é uma ação fundamental para o desempenho de determinados sistemas automáticos. O problema de medir o quanto dois conjuntos binários são similares é um desafio constante e a distância de Hausdorff tem sido bastante utilizada para tais propósitos como veremos adiante.

Vamos a um exemplo para entender melhor. Digamos que a figura apenas do avião abaixo seja nosso modelo, e a outra seja a imagem de teste:

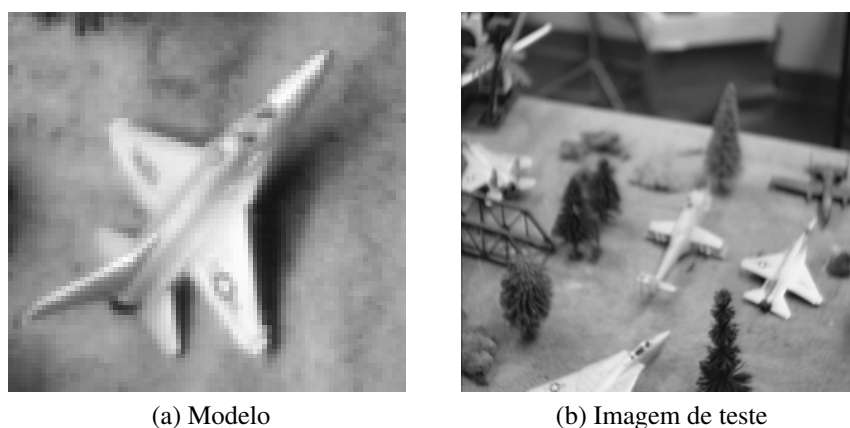


Figura 4.2: Imagens em 3D.

Queremos verificar se a imagem modelo está presente na imagem de teste. O primeiro passo é extrair as bordas de ambas as imagens, para trabalharmos com conjuntos de pontos binários, tornando-as imagens binárias para que o computador consiga interpretá-las. Em seguida, cada ponto na imagem binária do modelo é tratado como um ponto em um conjunto  $A = \{\text{"forma" do modelo}\}$ . Do mesmo modo, uma área da imagem de teste é tratada como um conjunto de pontos  $B$ . Aplica-se então o algoritmo Rucklidge's, o qual busca o ponto de mínima distância de Hausdorff entre o modelo  $A$  e a imagem de teste  $B$ . Assim, a área  $B$  com distância de Hausdorff mínima do modelo  $A$  é considerada pelo computador como a melhor correspondência para a localização do modelo  $A$ .

Esse processo de extração das bordas é feito com detectores de bordas, como *Canny edge detector*, *Laplacian*, *Sobel*, etc.

Para esse exemplo, pelo menos 50% dos pontos do modelo têm que ficar dentro de 1 pixel



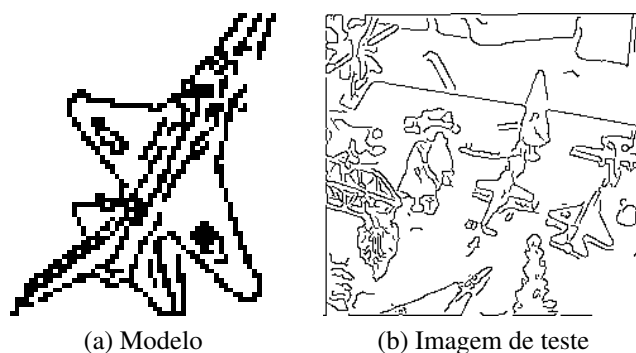


Figura 4.3: Imagens Binárias: extração das bordas.

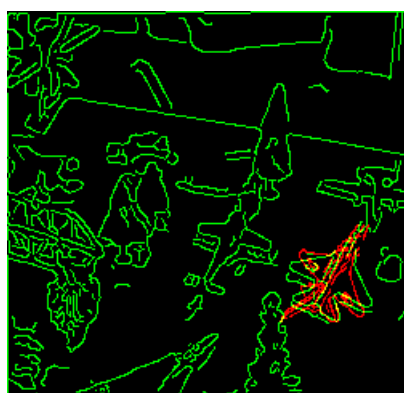


Figura 4.4: Correspondência das imagens.

de um ponto da imagem de teste, e vice-versa. Alguns redirecionamentos e inclinações também foram permitidos para prevenir a rejeição devido a diferença de ângulo dos objetos em ambas imagens. Outros algoritmos permitem transformações geométricas mais complexas no registro do modelo na imagem de teste.

As imagens e resultados apresentados nesta seção foram adaptados de [4] e [7].

## 4.2 Contrações no espaço de Hausdorff

Antes de falarmos mais sobre factais precisamos, primeiramente, falar das funções de contração no espaço de Hausdorff.

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $w : X \rightarrow X$  uma contração em um espaço métrico  $(X, d)$ , com fator de contração  $s$ . Então,  $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definida por*

$$w(B) = \{w(x) | x \in B\}, \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

é uma contração sobre  $(\mathcal{H}(X), h)$ , com fator de contração  $s$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 3.1.1 temos que  $w$  é contínua e aplica  $\mathcal{H}(X)$  nele próprio.

Sejam  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Então

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \max \{ \min \{ d(w(x), w(y)) \mid y \in C \} \mid x \in B \} \\ &\leq \max \{ \min \{ sd(x, y) \mid y \in C \} \mid x \in B \} = sd(B, C). \end{aligned}$$

Analogamente,  $d(w(C), w(B)) \leq s.d(C, B)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= \max \{ d(w(B), w(C)), d(w(C), w(B)) \} \\ &\leq \max \{ s.d(B, C), s.d(C, B) \} \\ &\leq s.\max \{ d(B, C), d(C, B) \} \\ &\leq s.h(B, C). \end{aligned}$$

□

**Proposição 4.2.2.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Então, para  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ , temos*

$$d(A, B \cup C) = \min \{ d(A, B), d(A, C) \}.$$

**Proposição 4.2.3.** *Para todo  $B, C, D, E \in \mathcal{H}(X)$ , temos*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max \{ h(B, D), h(C, E) \}$$

onde  $h$  é a métrica de Hausdorff.

*Demonstração.* Para essa demonstração usaremos o Lema 4.1.2.

Primeiramente, mostraremos que  $d(B \cup C, D \cup E) \leq \max \{d(B, D), d(C, E)\}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 d(B \cup C, D \cup E) &= \max \{d(x, D \cup E) | x \in B \cup C\} \\
 &= \max \{\max \{d(x, D \cup E) | x \in B\}, \max \{d(x, D \cup E) | x \in C\}\} \\
 &= \max \{d(B, D \cup E), d(C, D \cup E)\} \\
 &= \max \{\min \{d(B, D), d(B, E)\}, \min \{d(C, D), d(C, E)\}\} \\
 &\leq \max \{d(B, D), d(C, E)\}.
 \end{aligned}$$

De modo análogo teremos

$$d(D \cup E, B \cup C) \leq \max \{d(D, B), d(E, C)\}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
 h(B \cup C, D \cup E) &= \max \{d(B \cup C, D \cup E), d(D \cup E, B \cup C)\} \\
 &\leq \max \{\max \{d(B, D), d(C, E)\}, \max \{d(D, B), d(E, C)\}\} \\
 &\leq \max \{\max \{d(B, D), d(D, B)\}, \max \{d(C, E), d(E, C)\}\} \\
 &\leq \max \{h(B, D), h(C, E)\}.
 \end{aligned}$$

□

**Proposição 4.2.4.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Seja  $\{w_n | n = 1, 2, \dots, N\}$ , contrações sobre  $(\mathcal{H}(X), h)$ , sendo o fator de contração de  $w_n$ , denotado por  $s_n$  para cada  $n$ . Defina  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por*

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B).$$

*Então,  $W$  é uma contração com fator de contração  $s = \max \{s_n | n = 1, 2, \dots, N\}$ .*

*Demonstração.* Vamos demonstrar para  $N = 2$  e por argumento indutivo completamos a demonstração.

Sejam  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Temos

$$\begin{aligned}h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \max \{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \\ &\leq \max \{s_1 \cdot h(B, C), s_2 \cdot h(B, C)\} \\ &\leq s \cdot h(B, C).\end{aligned}$$

□

---

## *Fractais SFI*

---

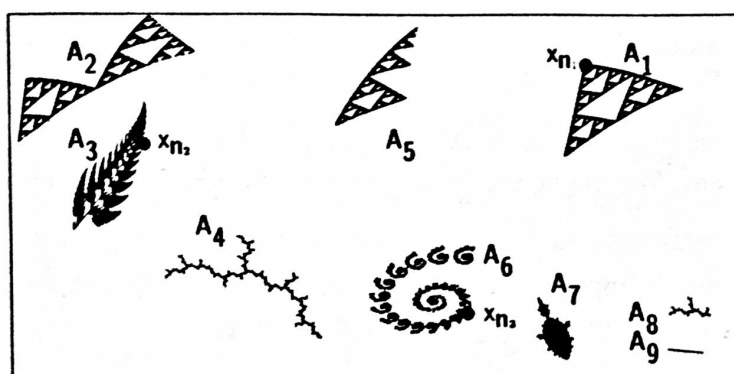
### **5.1 O que é um fractal?**

O termo fractal foi criado por Benoit B. Mandelbrot por volta de 1975. Do ponto de vista informal, fractais são estruturas que apresentam irregularidades e fragmentação em uma faixa de escala muito ampla, aparentemente infinita como, por exemplo, as encontradas nas nuvens, nas fumaças, nas montanhas, nas árvores e em diversos outros objetos da natureza.

De acordo com [9], a geometria euclidiana se preocupa em criar nossa percepção espacial intuitiva de modo mais objetivo. Dessa forma, a geometria clássica apresenta uma primeira aproximação à estrutura física de objetos. Já a geometria fractal é uma extensão dessa geometria clássica e pode ser usada para criar modelos precisos de estruturas físicas de samambaias à galáxias.

Já imaginou conseguir descrever uma nuvem com a precisão que um arquiteto consegue descrever uma casa? Pois bem, a geometria fractal te oferece essa habilidade, uma vez que a compreenda. É uma nova forma de linguagem.

Então o que é um fractal? Inicialmente, é apenas um subconjunto de um espaço. Esse espaço possui uma estrutura do conjunto definido, onde cada ponto está próximo um do outro. Vamos dar alguns exemplos a seguir para que a ideia fique mais clara. Em síntese, um fractal é uma forma cujas partes são réplicas do todo sob algum aspecto.



(a)



(b)

Figura 5.1: Na figura (a) cada  $A_i, i = 1, \dots, 9$  é um exemplo de fractal. Na figura (b) temos um exemplo de fractal. Fonte [1].

**Definição 5.1.1.** Considere o espaço  $X$  como um conjunto. Os pontos desse espaço são os elementos desse conjunto.

**Exemplo 25.** Considerando  $X = \mathbb{R}$ , onde cada "ponto"  $x \in X$  é um número real, temos um exemplo mais simples de fractal.

**Exemplo 26.** Seja  $X = \varphi[0, 1]$ , o conjunto de funções contínuas que leva o intervalo fechado  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$  à reta real  $\mathbb{R}$ . Um "ponto"  $f \in X$  é dado pela função  $f : [0, 1] \xrightarrow{cte} \mathbb{R}$ , onde  $f$  pode ser representado como o gráfico a seguir indica.

Note que  $f \in X$  não é um ponto no eixo  $x$ , e sim toda a função. Uma função contínua em um intervalo é caracterizada pelo seu gráfico ininterrupto.



Figura 5.2: Ponto  $f$  no espaço de funções contínuas no intervalo  $[0,1]$ . Fonte [1].

**Exemplo 27.** O plano complexo,  $X = \mathbb{C}$ , no qual qualquer ponto  $x \in X$  é dado por

$$x = x_1 + ix_2 \quad \text{onde } i = \sqrt{-1},$$

para quaisquer  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . É claro que  $\mathbb{C}$  é essencialmente como o  $\mathbb{R}^2$ , porém existe uma distinção implícita. No espaço  $\mathbb{C}$  podemos multiplicar dois pontos  $x, y$  e obter um novo ponto em  $\mathbb{C}$ . Assim, definimos:

$$x \cdot y = (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = (x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

**Exemplo 28.** Triângulo de Sierpinski - Visto na Seção 3.4.1 .

**Exemplo 29.** Seja  $\mathcal{C}$  a notação para representar o Conjunto de Cantor. Esse subconjunto do espaço métrico  $[0, 1]$  é obtido por exclusão sucessiva de subintervalos abertos do terço médio, como mostra a figura a seguir, isto é,

$$\begin{aligned} I &= [0, 1] \\ C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

De modo que,

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

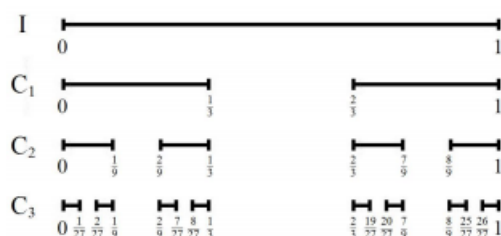


Figura 5.3: Construção do Conjunto de Cantor

Note que a geometria fractal se preocupa com a descrição, classificação, análise e observação de subconjuntos dos espaços métricos  $(X, d)$ .

### 5.1.1 Classificação dos Fractais

Os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado, como mostraremos a seguir.

**Sistema de funções iteradas.** Os fractais determinísticos, conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicada a cada iteração como por exemplo, a curva de Peano, o floco de neve de Koch e a esponja de Menger, que mostraremos mais adiante.

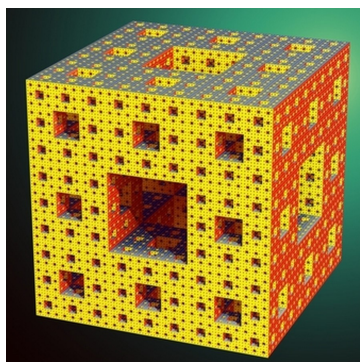


Figura 5.4: Esponja de Menger.

**Fractais gerados por computadores.** Também são chamados de fractais de fuga, um exemplo típico é o conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos. São gráficos de funções



matemáticas que definem conjuntos que costumam operar com números imaginários e números complexos.

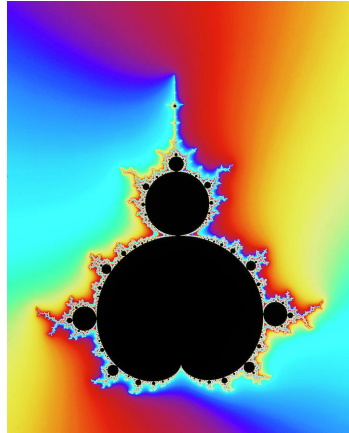


Figura 5.5: Conjunto de Mandelbrot.

**Fractais aleatórios.** São também chamados de fractais naturais, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte dizemos que o fractal é aleatório.

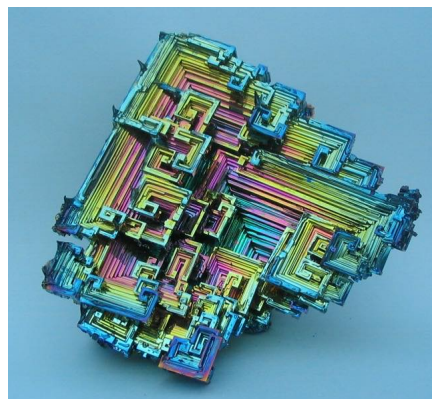


Figura 5.6: Cristal de Bismuto.

O interesse do nosso trabalho é o estudo dos Fractais SFI, que apresentaremos a seguir.

## 5.2 Sistemas de Funções Iteradas (SFI)

**Definição 5.2.1.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação em  $X$ . Chamamos de **iteração** sobre  $f$ , transformações da forma  $f^n : X \rightarrow X$  definidas por:

$$f^0(x) = 1, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f \circ f(x), \dots, f^n(x) = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{n \text{ vezes}}(x)$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Exemplo 30.** Considere a função  $f(x) = \sqrt{x}$ , para  $x \geq 0$ .

Tomando o valor inicial  $x_0 = 81$  teremos

$$f^2(81) = f(f(81)) = 3.$$

Continuando essa iteração teremos sucessivamente

$$f^3(81) = 1,732050\dots, f^4(81) = 1,316074\dots, f^5(81) = 1,147202\dots, f^6(81) = 1,071075\dots,\dots$$

valores que se aproximam cada vez mais de 1, o qual será um ponto fixo dessa função.

Veremos que isso não é uma coincidência, pois é um caso particular do teorema seguinte que garante a existência e unicidade de cada fractal obtido através de iteração de funções. Como poderemos perceber, é o Teorema 3.4.1 voltado para iterações.

**Teorema 5.2.1.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma contração sobre um espaço métrico completo  $(X, d)$ . Então  $f$  possui um único ponto fixo  $x_f \in X$  e mais ainda, para algum ponto  $x \in X$ , a sequência  $\{f^n(x); n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  converge para  $x_f$ . Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \text{ para cada } x \in X.$$

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e  $0 \leq s < 1$  um fator de contração para  $f$ . Então,

$$d(f^n(x), f^m(x)) = s^{\min\{n,m\}} d(x, f^{|n-m|}(x)) \quad (5.2.1)$$

para todo  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , com  $x \in X$  fixo. Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , temos

$$\begin{aligned} d(x, f^k(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{k-1}(x), f^k(x)) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})d(x, f(x)) \\ &\leq (1 - s)^{-1}d(x, f(x)), \end{aligned}$$

substituindo na equação (5.2.1), temos

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{\min\{n,m\}}(1-s)^{-1}d(x, f(x)),$$

portanto  $(f^n(x))$  é uma sequência de Cauchy. Como  $X$  é completo esta sequência de Cauchy possui um limite  $x_f \in X$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f.$$

Agora, mostraremos que  $x_f$  é ponto fixo de  $f$ . Sabemos que  $f$  é uma contração e consequentemente contínua, então

$$f(x_f) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_f.$$

Supondo que exista mais de um ponto fixo de  $f$ , sendo eles  $x_f$  e  $y_f$ , temos

$$x_f = f(x_f), y_f = f(y_f) \text{ e } d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq sd(x_f, y_f),$$

onde  $(1-s)d(x_f, y_f) \leq 0$ , logo  $d(x_f, y_f) = 0$ .

Portanto,  $x_f = y_f$ , isto é,  $x_f$  é único ponto fixo de  $f$ .

□

Um **sistema de funções iteradas (SFI)** é uma estrutura da forma  $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$ , onde  $X$  é um espaço métrico completo e cada  $f_i : X \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , são contrações em  $X$ .

O teorema a seguir garante a existência e unicidade do que chamaremos de atrator de um SFI.

**Teorema 5.2.2.** *Seja  $\{X : f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$  um SFI, define-se*

$$F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$K \longmapsto F(K) := \bigcup_{i=1}^N f_i(K);$$

então existe um único  $A \in \mathcal{H}(X)$ , tal que  $F(A) = A = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$ .

Além disso, para qualquer  $K \in (\mathcal{H}(X), h)$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(K) = A.$$

Chamamos  $A$  de atrator de um SFI.

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $F$  está bem definida e além disso é uma contração em  $\mathcal{H}(X)$ , pois é uma união de contrações que são funções contínuas aplicadas em um espaço compacto  $K$ .

Por outro lado, sendo  $X$  um espaço métrico completo, temos que  $\mathcal{H}(X)$  também é completo, como vimos no Teorema 4.1.4. Assim, podemos aplicar o Teorema 5.2.1 à função

$$F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X),$$

para concluir que existe um único  $A \in \mathcal{H}(X)$ , tal que

$$\bigcup_{i=1}^N f_i(A) = F(A) = A. \quad (5.2.2)$$

Usando a segunda parte do Teorema 5.2.1, garantimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(K) = A,$$

para qualquer  $K \in (\mathcal{H}(X), h)$ . □

Analisando a expressão (5.2.2) e recordando que cada  $f_i$  é uma contração, de modo que cada  $f_i(A)$  pode ser interpretada como uma cópia de  $A$ , então pela igualdade (5.2.2), podemos dizer que o conjunto  $A$  também é a união de um número finito de cópias reduzidas de si mesmo.

**Exemplo 31.** Considere o SFI  $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$ , onde

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Nesse caso,  $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$  está bem definida por

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}).$$

Como conjunto inicial, tomemos o conjunto  $C_0 = [0, 1]$ . Então, fica claro que o atrator deste SFI é o conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$  e para provarmos isso, basta observar que  $(C_n)_n$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$  onde

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

Como  $X$  é completo,  $(C_n)$  é uma sequência de Cauchy e usando o teorema anterior, para obtermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \mathcal{C}.$$

**Exemplo 32.** Consideremos um SFI  $\{\mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z; \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\}$ . Neste caso,  $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  é definida por

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2),$$

sendo  $f_1(z) = \frac{1}{2}z$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$  e  $f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}$ .

**Exemplo 33.** Tomemos agora SFI  $\{[0, 1]; \frac{2}{5}x\}$ .

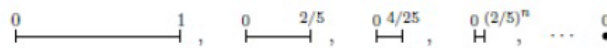


Figura 5.7: Construção do Atrator SFI  $\{[0, 1]; \frac{2}{5}x\}$ . Fonte [10].

Podemos observar, pela figura anterior, que seu atrator é  $A = 0$ . E de fato, pelo teorema anterior, basta provar que  $A$  é um ponto fixo da contração  $F : \mathcal{H}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{H}([0, 1])$ , definida por

$$F(K) = f_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}([0, 1]), \quad f_1(x) = \frac{2}{5}x.$$

Tomemos

$$F(\{0\}) = f_1(\{0\}) = \{f_1(0)\} = \{0\}.$$

Com este exemplo podemos perceber que em qualquer SFI, temos somente uma contração.

### 5.2.1 SFI com condensação

Para bom entendimento de um SFI com condensação, mostraremos uma ideia geométrica do que seria tal fractal. Observemos as figuras abaixo.

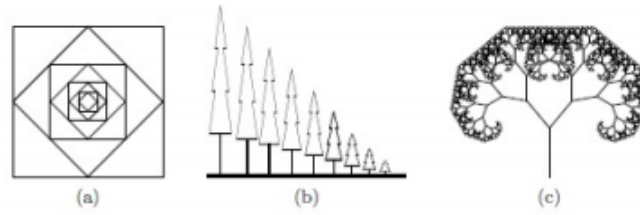


Figura 5.8: SFI com condensação. Fonte [10].

Intuitivamente sem usar uma lupa, dentro destas figuras observamos cópias reduzidas de si mesmo em qualquer parte do conjunto. Mas mesmo fazendo uso de uma, não seria possível afirmar que existem realmente cópias reduzidas. No entanto, é possível obter este tipo de figuras como atratores de algum sistemas de funções iteradas, que chamamos de SFI com condensação.

**Definição 5.2.2.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $C \in \mathcal{H}(X)$ . Definimos  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  por  $w_0(K) := C, \forall K \in \mathcal{H}(X)$ . Dizemos então, que  $w_0$  é uma transformação de condensação, e  $C$  é o conjunto de condensação associado.*

Observe que,  $w_0$  é uma função constante  $\mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , portanto  $w_0$  é uma contração, com fator de contração igual a zero, cujo ponto fixo é o conjunto de condensação  $C$ .

Agora, seja  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  um SFI e  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , uma transformação de condensação. Então  $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$  se chama SFI com condensação.

**Exemplo 34.** *Seja  $\{\mathbb{R}^2; w_0, w_1, w_2\}$  onde*

$$w_0(K) := \{0\} \times [0, 1], \quad w_1(z) := \frac{1}{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}} + i \quad e \quad w_2(z) := \frac{1}{2}ze^{i\frac{\pi}{4}} + i.$$

*Note que a diferença entre um SFI e um SFI com condensação é a presença de uma contração diferente no segundo caso, enquanto em  $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  o domínio e o contradomínio de  $w_0$  é  $\mathcal{H}(X)$ , nas outras contrações o domínio e contradomínio é  $X$ . No entanto, o SFI com condensação pode trabalhar da mesma forma que os outros e gerar uma sequência convergente de compactos.*

Agora, vejamos como ficariam tais conceitos para o SFI com condensação do exemplo acima:

**Exemplo 35.** Para o SFI do Exemplo 34, temos  $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  dado por

$$\begin{aligned} W(K) &:= w_0(K) \cup w_1(K) \cup w_2(K) \\ &= \{0\} \times [0, 1] \cup w_1(K) \cup w_2(K). \end{aligned}$$

Tomemos como conjunto inicial o mesmo conjunto de condensação:  $K = \{0\} \times [0, 1]$ . A sequência  $K, W(K), W^2(K), W^3(K), \dots, W^n(K), \dots$  seria, aproximadamente, a seguinte

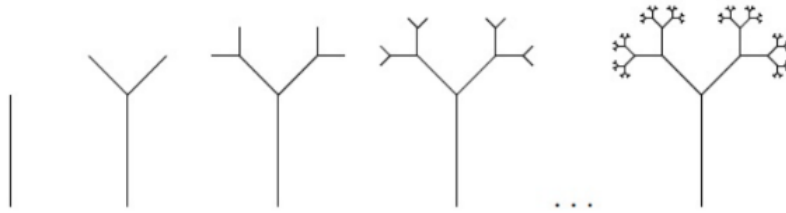


Figura 5.9: Construção de uma árvore fractal. Fonte [10].

**Teorema 5.2.3.** Seja  $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_n\}$  um SFI com condensação. Então, uma transformação  $W : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ , definida por

$$W(K) := \bigcup_{i=0}^N w_i(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(X)$$

tem um único ponto fixo, isto é, existe um único  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que

$$W(A) = A = \bigcup_{i=0}^N w_i(A).$$

Além disso, para qualquer  $K \in \mathcal{H}(X)$  tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(K) = A.$$

O conjunto  $A$  é chamado atrator do SFI com condensação.

A demonstração do teorema anterior segue o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 5.2.2.

Uma forma, dentre várias outras, de se definir fractais é através de um SFI, como podemos ver a seguir.

**Definição 5.2.3.** *Dados um SFI  $\{X; w_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$ , com fator de contração  $s$ , e  $W$  uma contração em  $\mathcal{H}(X)$ . Define-se **fractal**, o ponto fixo  $A \in \mathcal{H}(X)$  da função de contração  $W$ , ou seja, após infinitas iterações de uma função resulta-se um fractal.*

**Exemplo 36** (Curva de Peano). *A Curva de Peano, apresentada em 1890, é um exemplo de um fractal que preenche o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma determinada área, acabando por, gradualmente, a ocupá-la totalmente.*

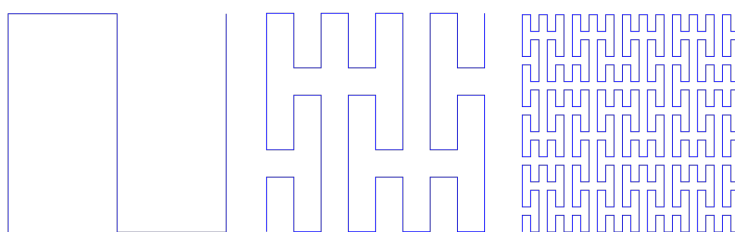


Figura 5.10: Construção da Curva de Peano

*O ponto de partida para a construção de tal curva é começar com um segmento. Na primeira iteração o segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial. Esses 9 segmentos constituem a primeira iteração da construção recursiva da curva de Peano. Depois, o processo recursivo aplica-se a cada um dos 9 segmentos, até o infinito.*

**Exemplo 37** (Curva de Koch). *A Curva de Koch é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais a serem descritos. Aparece pela primeira vez num artigo de 1906, intitulado "Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de La théorie des courbes planes", de autoria do matemático sueco Helge Von Koch. O conhecido Floco de Neve de Koch corresponde à mesma curva, sendo que sua construção se inicia a partir de um triângulo equilátero.*

*Para construirmos este fractal podemos construí-lo a partir de um segmento de reta submetido a alterações recorrentes, isto é, a iterações, como descritas a seguir:*

1. *Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento.*
2. *desenha-se um triângulo equilátero, em que o segmento central, referido no primeiro passo, servirá de base.*



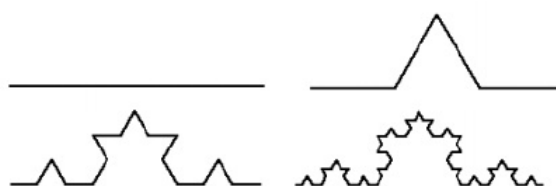


Figura 5.11: Construção da Curva de Koch

3. *Apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo do segundo passo. Procedendo da mesma forma para cada um dos quatro segmentos que ficam, formam-se dezesseis novos segmentos menores.*

**Exemplo 38** (Esponja de Menger). *A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo através do seguinte processo recursivo:*

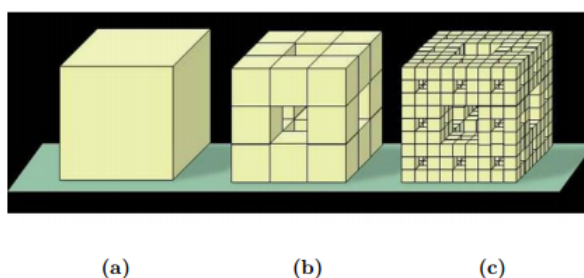


Figura 5.12: Construção da Esponja de Menger até o nível 2.

1. *Tome um cubo qualquer (Figura 5.12(a)).*
2. *Divida cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo o cubo inicial fica subdividido em 27 cubos menores.*
3. *Remova o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, deixando apenas 20 cubos restantes (Figura 5.12(b)). Este é o primeiro nível da Esponja de Menger.*
4. *Repita os passos 2 e 3 para cada um dos 20 pequenos cubos restantes do nível anterior. Assim, obtemos o segundo nível da Esponja (Figura 5.12(c)). Note que, neste nível, estamos dividindo cada um dos 20 cubos do nível anterior em outros 20 cubos menores, obtendo no final 202 cubos.*
5. *A Esponja de Menger é o limite deste processo depois de um número infinito de iterações.*

## *Referências Bibliográficas*

---

- [1] BARNSLEY, M., **Fractals Everywhere.**, 2 ed., Academic Press, 2000.
- [2] BARROS, C. D. V. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações.** 2013. 46 p. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [3] CASTELLI, M., **Teoremas de ponto fixo.** 2016. 71 p. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.
- [4] **Corpo paralelo e os espaços de Hausdorff**, Disponível em: < <http://www.ic.uff.br/~aconci/DistanciaHausdorff.pdf> > Acesso em: 23 de Maio de 2019.
- [5] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1982.
- [6] ENDO, D. H. C. **Espaços Métricos: uma introdução**2015. 32f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.
- [7] GRÉGOIRE N., and BOUILLOT M. **Hausdorff distance between convex polygons**, Projeto do curso CS 507 Computational Geometry McGill University, 1998. Disponível em: < <http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/cg-projects/98/normand/main.html> > Acesso em: 23 de Maio de 2019.
- [8] LIMA, E. L., **Espaços métricos**, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2009.
- [9] MANDELBROT, B. B., **The Fractal Geometry of Nature**, New York: W.H. Freeman and Company, 1977.

- 
- [10] OLIVEIRA, G.C., **Geometria Fractal na Educação Básica**. 2014 . 71 p. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.