

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Teorema de Stieltjes e Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos

Alexandre Suzuki
Orientando

Fernando Rodrigo Rafaeli
Orientador



Uberlândia-MG
2019

Alexandre Suzuki

Teorema de Stieltjes e Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Uberlândia
2019

Alexandre Suzuki

Teorema de Stieltjes e Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Trabalho Aprovado. Uberlândia, 06 de dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli
Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende
Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Profa. Dra. Marisa de Souza Costa
Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, Jeová, por ter me dado forças durante toda a minha vida, especialmente nesses anos de graduação.

Aos meus pais, Alcina e Julio, por terem me apoiado durante toda a minha vida.

Aos professores da Universidade Federal de Uberlândia que contribuíram com a minha formação acadêmica. Em especial, ao professor Fernando Rodrigo Rafaeli, que me orientou durante os quatro anos de graduação, e também aos professores Germano Abud de Rezende e Marisa de Souza Costa, membros da banca examinadora, pelas sugestões dadas a respeito deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estender um resultado clássico sobre monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua para a monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta. Primeiramente, apresentaremos os polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua e também os polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta. Em seguida, será apresentado o Teorema de Stieltjes, utilizado para obter informações sobre a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua. Por fim, veremos que é possível estender esse resultado de modo a obter informações sobre a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta.

Palavras-chave: Zeros de polinômios ortogonais clássicos. Polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta. Teorema de Stieltjes. Monotonicidade.

Abstract

The main goal of this work is to extend a classical result about monotonicity of zeros of classical orthogonal polynomials of a continuous variable to monotonicity of zeros of classical orthogonal polynomials of a discrete variable. First, we introduce the classical orthogonal polynomials of a continuous variable and the classical orthogonal polynomials of a discrete variable, and present the Stieltjes' Theorem, using it to obtain the monotonicity of zeros of classical orthogonal polynomials of a continuous variable. Then we prove an extension of this theorem and obtain the monotonicity of zeros of the classical orthogonal polynomials of a discrete variable.

Keywords: Zeros of orthogonal polynomials. Orthogonal polynomials of a discrete variable. Stieltjes' Theorem. Monotonicity.

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
Introdução	1
1 Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Contínua	6
1.1 Uma equação do tipo hipergeométrica	6
1.2 Fórmula de Rodrigues	8
1.3 A Propriedade de Ortogonalidade	11
1.4 Os Polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite	13
1.4.1 Polinômios de Jacobi	14
1.4.2 Polinômios de Laguerre	17
1.4.3 Polinômios de Hermite	18
1.5 Informações sobre os Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Contínua	19
2 Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Discreta	20
2.1 Uma equação de diferenças do tipo hipergeométrica	20
2.2 Fórmula de Rodrigues	28
2.3 A Propriedade de Ortogonalidade	31
2.4 Os Polinômios de Hahn, Meixner, Kravchuk e Charlier	33
2.4.1 Polinômios de Hahn	35
2.4.2 Polinômios de Meixner, Kravchuk e Charlier	40
2.5 Informações sobre os Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Discreta	43
3 Teorema de Stieltjes: Caso Contínuo	44
3.1 Resultados Preliminares	44
3.2 Teorema de Stieltjes	47
3.3 Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Contínua	50
3.3.1 Polinômios de Jacobi	50
3.3.2 Polinômios de Gegenbauer	51
3.3.3 Polinômios de Laguerre	53

4 Teorema de Stieltjes: Caso Discreto	54
4.1 Resultados Preliminares	54
4.2 Uma Extensão do Teorema de Stieltjes	56
4.3 Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Discreta	60
4.3.1 Polinômios de Hahn	60
4.3.2 Polinômios de Meixner	61
4.3.3 Polinômios de Kravchuk	62
4.3.4 Polinômios de Charlier	64
Conclusão	65
Referências Bibliográficas	66

Listas de Figuras

1.1	Gráfico de $\sigma(x)$ no caso em que é polinômio de grau dois.	14
1.2	Gráfico de $\sigma(x)$ no caso em que é polinômio de grau um.	17
1.3	Gráfico de $\sigma(x)$ no caso em que é polinômio de grau zero.	18
2.1	Gráfico de $\sigma(x)$ no caso em que é polinômio de grau dois com raízes 0 e γ_1	35
2.2	Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ no caso em que é polinômio de grau dois com raízes γ_2 e γ_3 . .	36
2.3	Gráfico de $\sigma(x)$ no caso em que é polinômio de grau dois com raízes 0 e $-\gamma_1$	38
2.4	Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ no caso em que é polinômio de grau dois com raízes γ_2 e γ_3 . .	38
2.5	Gráfico de $\sigma(x)$ no caso em que é polinômio de grau um, tendo 0 como raíz.	40
2.6	Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ no caso em que é polinômio de grau um, tendo $-\gamma$ como raíz. .	40
2.7	Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ no caso em que é polinômio de grau um, tendo γ como raíz. .	41
2.8	Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ no caso em que é constante.	42
3.1	Gráfico dos zeros dos polinômios de Jacobi ($n = 4$) com relação ao parâmetro α	51
3.2	Gráfico dos zeros dos polinômios de Jacobi ($n = 4$) com relação ao parâmetro β	51
3.3	Gráfico dos zeros dos polinômios de Gegenbauer ($n = 4$) com relação ao parâmetro λ . .	53
3.4	Gráfico dos zeros dos polinômios de Laguerre ($n = 4$) com relação ao parâmetro α . . .	53
4.1	Gráfico dos zeros dos polinômios de Hahn ($n = 4$) com relação ao parâmetro α	61
4.2	Gráfico dos zeros dos polinômios de Hahn ($n = 4$) com relação ao parâmetro β	61
4.3	Gráfico dos zeros dos polinômios de Meixner ($n = 5$) com relação ao parâmetro γ . . .	62
4.4	Gráfico dos zeros dos polinômios de Meixner ($n = 5$) com relação ao parâmetro μ . . .	62
4.5	Gráfico dos zeros dos polinômios de Kravchuk ($n = 6$) com relação ao parâmetro p . .	63
4.6	Gráfico dos zeros dos polinômios de Charlier ($n = 4$) com relação ao parâmetro μ . . .	64

Lista de Tabelas

1.1	Dados dos Polinômios de Jacobi, Gegenbauer, Laguerre e Hermite	19
2.1	Dados dos Polinômios de Hahn, Meixner, Kravchuk e Charlier.	43

Introdução

As chamadas funções especiais da Física-Matemática possuem muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Neste trabalho estudaremos, em particular, os polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua assim como os polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta. Os polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua surgiram do estudo das chamadas equações diferenciais do tipo hipergeométricas

$$\tilde{\sigma}(x)y''(x) + \tilde{\tau}(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1)$$

onde $\tilde{\sigma}(x)$ é um polinômio de grau no máximo dois, $\tilde{\tau}(x)$ é um polinômio de grau no máximo um, e λ é uma constante. Os chamados polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta surgem quando aproximamos a equação diferencial (1) pela equação de diferenças

$$\tilde{\sigma}(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h} \right] + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0, \quad (2)$$

onde tomamos as seguintes aproximações para as derivadas de $y(x)$:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h} \right]$$

e

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{h}.$$

Definindo Δ e ∇ os operadores de diferença progressiva e regressiva, respectivamente, isto é, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ e $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$, podemos reescrever a equação de diferenças (2) como

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (3)$$

onde

$$\sigma(x) = \frac{\tilde{\sigma}(hx)}{h^2} - \frac{\tilde{\tau}(hx)}{2h} \quad \text{e} \quad \tau(x) = \frac{\tilde{\tau}(hx)}{h}$$

são também polinômios de graus no máximo dois e um, respectivamente. Esta equação de diferenças é chamada de equação de diferenças do tipo hipergeométrica. Note que a equação (3) aproxima (1) em uma malha uniforme $\Delta x = h$ com segunda ordem em h , isto é, com ordem $\mathcal{O}(h^2)$.

Para justificar o estudo dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua assim como os polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta, apresentaremos algumas de suas inúmeras aplicações. Alguns dos problemas frequentemente utilizados na Matemática Aplicada, Física e En-

genharias são o de integração numérica e o problema dos mínimos quadrados. Esses problemas nos levam ao cálculo dos zeros de certos polinômios ortogonais. Outra aplicação dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua é que eles são os pontos de equilíbrio de energia de certos campos eletrostáticos. Abaixo faremos uma breve descrição destas aplicações:

Fórmulas de quadratura. Em 1814, Gauss, em seu trabalho intitulado *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Comment. Soc. Reg. Scient. Gotting. Recent.* (ver [3]), demonstrou a chamada fórmula de quadratura para o cálculo aproximado de integrais. Ele mostrou que para aproximar com maior precisão possível o valor da integral de uma função entre 0 e 1 através do polinômio interpolador de Lagrange, a localização dos nós de interpolação deveriam coincidir exatamente com os zeros dos polinômios de Legendre. Vale mencionar que, em sua demonstração, ele não utilizou a relação de ortogonalidade, mas sim a representação desses polinômios através de uma função hipergeométrica.

Para formalizar a ideia de fórmulas de quadratura faremos uma breve descrição desse problema a seguir: Os métodos lineares para cálculo aproximado de uma integral são chamados fórmulas de quadratura. Suponha que gostaríamos de aproximar a integral de uma função f definida em um intervalo (a, b) ,

$$I(f) = \int_a^b f(x) \varrho(x) dx,$$

por uma combinação linear de n valores da função f , ou seja,

$$I(f) = \int_a^b f(x) \varrho(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(t_k) =: Q(f).$$

A soma $Q(f)$ é conhecida na literatura como fórmula de quadratura, t_k e A_k , $k = 1, \dots, n$, são chamados de nós e pesos de $Q(f)$, respectivamente. Uma das formas de averiguar se uma fórmula de quadratura $Q(f)$ é boa é verificar se $Q(f)$ aproxima bem $I(f)$ quando f é um polinômio, ou seja, que ela seja exata para polinômios de maior grau possível. Em seu trabalho, Gauss mostrou (para o caso $\varrho(x) = 1$) que existe uma única fórmula de quadratura $Q(f)$ que é exata para todos os polinômios de grau até $2n - 1$, ou seja, que $I(f) = Q(f)$ para todo polinômio de grau até $2n - 1$. Vale mencionar que a maior parte dos pacotes de “softwares” para integração numérica utilizam as fórmulas de quadratura de Gauss para aproximar o valor da integral de uma função f . Dois problemas surgem quando utilizamos a fórmula de quadratura de Gauss: determinar os pesos A_k e os nós t_k de forma que a fórmula seja exata para todo polinômio de grau até $2n - 1$. Esse problema, por si só, é não linear. Mas, como os nós t_k são, de fato, os zeros do n -ésimo polinômio $p_n(x)$, que é ortogonal em (a, b) com relação à função peso $\varrho(x)$, isto é,

$$\int_a^b p_n(x) x^k \varrho(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

então, se conhecemos os zeros de $p_n(x)$, o problema agora passa somente ao cálculo dos pesos A_k . Neste caso, o problema passa a ser linear e, portanto, mais simples de resolvê-lo. Este é um dos motivos que nos levam ao estudo dos zeros de polinômios ortogonais.

O caso $\varrho(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $x \in (-1, 1)$, com $\alpha > -1$ e $\beta > -1$, nos leva aos polinômios

de Jacobi. Alguns de seus casos particulares importantes são os polinômios de Legendre (quando $\alpha = \beta = 0$), os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie (quando $\alpha = \beta = -1/2$ e $\alpha = \beta = 1/2$, respectivamente), e os polinômios de Geguenbauer, quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$. Já os casos $\varrho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$, com $\alpha > -1$, e $\varrho(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, nos levam aos polinômios de Laguerre e Hermite, respectivamente.

Mínimos Quadrados. Em 1858, Chebyshev, em seu trabalho intitulado *Sur une nouvelle série (Oeuvres, Tom I, 381-384, Chelsea Pub. Co.)* e, mais tarde, em 1875, complementando seu estudo em *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes (Oeuvres, Tom II, 219-242, Chelsea Pub. Co.)*, introduziu os polinômios de Chebyshev discretos para solução do problema de interpolação em pontos equidistantes. A ideia pode ser descrita da seguinte forma: interpolar uma função quando aos valores dados de uma função se designam pesos de acordo com alguma lei de probabilidade determinada. Em outras palavras, consideremos os dados da tabela (x_k, y_k) , $k = 0, 1, 2, \dots, N$ (onde y_k pode ser o valor de uma função $f = f(x)$ em x_k). O problema é determinar os coeficientes A_m da aproximação $y \approx A_0 P_0(x) + \dots + A_k P_k(x)$, ($k < N$) determinados pela condição

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varrho(x_i) [y_i - A_0 P_0(x_i) - \dots - A_k P_k(x_i)]^2 = \text{mínimo}, \quad x_{i+1} = x_i + i, i = 0,$$

no qual P_m é um polinômio de grau exatamente m determinado pela condição de ortogonalidade

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varrho(x_i) P_k(x_i) P_m(x_i) = \delta_{k,m}, \quad \varrho(x_i) > 0,$$

com a condição de normalização

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varrho(x_i) = 1.$$

O caso $\varrho(x) = 1/N$, $x = 0, 1, \dots, N-1$ (chamado distribuição uniforme), nos leva aos polinômios discretos de Chebyshev, já o caso $\varrho(x) = N! p^x q^{N-x} / (\Gamma(x+1) \Gamma(N+1-x))$, $x = 0, 1, \dots, N$ (chamado distribuição binomial), nos conduz aos polinômios de Kravchuk. A chamada distribuição de Poisson $\varrho(x) = e^{-\mu} \mu^x / \Gamma(x+1)$, $x = 0, 1, 2, \dots$, nos leva aos polinômios de Charlier, a distribuição de Pascal $\varrho(x) = \mu^x \Gamma(\gamma+x) / (\Gamma(\gamma) \Gamma(x+1))$, $x = 0, 1, 2, \dots$, nos conduz aos polinômios de Meixner, e, por fim, a distribuição de Pólya ou hipergeométrica $\varrho(x) = \Gamma(\beta+1+x) \Gamma(N+\alpha-x) / (\Gamma(N-x) \Gamma(x+1))$, $x = 0, 1, \dots, N-1$, nos leva aos polinômios de Hahn (os polinômios de Chebyshev discretos são um caso particular desses polinômios).

Interpretação eletrostática dos zeros. Umas das aplicações mais bonitas dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua foi dada por Stieltjes ainda no final do século XIX nos seus trabalhos [13], [14], [15] e [16]. Stieltjes mostrou que os zeros dos polinômios ortogonais clássicos possuem uma aplicação física advinda da eletrostática. Descreveremos brevemente esta interpretação para os zeros do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Lembramos que os polinômios de Jacobi são ortogonais em $(-1, 1)$ com respeito à função peso $\varrho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Consideremos o seguinte campo elétrico no intervalo $[-1, 1]$. Sejam $\alpha, \beta > -1$ e duas cargas fixas com forças $(\alpha+1)/2$ e $(\beta+1)/2$ localizadas em 1 e -1 , respectivamente. Suponha que existam n cargas livres, cada uma com força um, localizadas em $(-1, 1)$. Consideremos o campo elétrico que obedece à lei

logarítmica. Do ponto de vista da eletrostática, isto significa que as cargas estão distribuídas ao longo de fios infinitos, perpendiculares à reta real. Portanto, se as cargas livres têm posições x_1, \dots, x_n , a energia do campo é

$$L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \left(\log \frac{(\alpha+1)/2}{|1-x_k|} + \log \frac{(\beta+1)/2}{|1+x_k|} \right) + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \log \frac{1}{|x_i - x_k|}.$$

A única posição das cargas para a qual a energia tem mínimo global é quando x_1, \dots, x_n coincidem com os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Esta bela interpretação deve-se a Stieltjes [13–16] que provou que a energia do campo tem mínimo local nos zeros do polinômio de Jacobi de grau n . Szegő [17, Seção 6.7] provou que, de fato, a energia tem um único mínimo, estabelecendo desta forma a estabilidade do equilíbrio. T. J. Stieltjes considerou também modelos eletrostáticos para os polinômios clássicos de Laguerre e Hermite.

Todas essas aplicações discutidas anteriormente justificam o estudo da monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais. Um dos primeiros trabalhos nessa direção foi desenvolvido por Markov no final do século XIX quando estabeleceu, através da função peso da relação de ortogonalidade, uma condição de suficiência para isso [7, p. 168] (ver também [17, Teorema 6.12.1]). Como consequência dessa condição, ele obteve a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Jacobi e dos polinômios de Gegenbauer. Como descrito em [17, p. 121], a prova fornecida por A. Markov para a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Gegenbauer estava incorreta. De fato, tal prova segue imediatamente de um resultado de T. J. Stieltjes usando uma diferente abordagem, baseada na equação diferencial que tais polinômios satisfazem [16, Seções 3 e 4]. A principal ideia de Stieltjes [16] foi provar que se H é uma matriz simétrica definida positiva com elementos fora da diagonal principal não positivos, então sua inversa H^{-1} é também definida positiva.

Neste trabalho, nosso principal objetivo é estender o resultado de Stieltjes para uma equação de diferenças para obter a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta. Estruturamos o texto da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos a equação diferencial do tipo hipergeométrica, algumas de suas propriedades e veremos que tais equações possuem soluções polinomiais sob certas condições. Além disso, vamos obter uma expressão explícita (fórmula de Rodrigues) para tais soluções polinomiais e também a propriedade de ortogonalidade, a partir da qual definimos os polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua. Em seguida, faremos uma classificação desses polinômios, obtendo os polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite.

No Capítulo 2, veremos que a equação diferencial do tipo hipergeométrica pode ser generalizada, obtendo uma equação de diferenças do tipo hipergeométrica. Tais equações também possuem soluções polinomiais sob certas condições, podem ser expressas de maneira explícita e satisfazem a propriedade de ortogonalidade, a partir da qual definimos os polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta. Em seguida, faremos uma classificação desses polinômios, obtendo os polinômios de Hahn, Meixner, Kravchuk e Charlier.

No Capítulo 3, apresentaremos o Teorema de Stieltjes, uma extensão desse teorema para o caso de intervalos simétricos e, utilizando esses dois resultados, vamos obter a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua que dependem de parâmetros (polinômios

de Jacobi, Gegenbauer e Laguerre).

Por fim, no Capítulo 4, apresentaremos uma extensão do Teorema de Stieltjes para o caso discreto. Até onde vai o nosso conhecimento, essa extensão é um resultado novo, que não encontramos em nenhuma literatura até o momento. Utilizando esse resultado, vamos obter a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta (polinômios de Hahn, Meixner, Kravchuk e Charlier).

Capítulo 1

Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Contínua

Neste capítulo será apresentada a teoria básica de polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua (ver [9]). Primeiramente, apresentaremos a equação do tipo hipergeométrica e algumas de suas propriedades. Veremos também que essa equação admite soluções polinomiais que podem ser expressas de maneira explícita e que satisfazem uma propriedade de ortogonalidade sob certas condições. Por fim, estudaremos quais são as possibilidades para essas soluções polinomiais, obtendo os chamados polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua.

1.1 Uma equação do tipo hipergeométrica

Definição 1.1. *Uma equação da forma*

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1.1)$$

onde $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ são polinômios de graus no máximo dois e um, respectivamente, e λ é uma constante, é chamada de equação do tipo hipergeométrica, e suas soluções são funções do tipo hipergeométricas.

Para qualquer solução de (1.1), a seguinte propriedade fundamental é satisfeita:

Proposição 1.1 (Propriedade de Hipergeometricidade). *A derivada de uma função do tipo hipergeométrica também é uma função do tipo hipergeométrica.*

Demonstração. Para provar isso, derivamos (1.1):

$$\begin{aligned} & (\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y)' = 0 \\ \Rightarrow & \sigma'(x)y'' + \sigma(x)y''' + \tau'(x)y' + \tau(x)y'' + \lambda y' = 0 \\ \Rightarrow & \sigma(x)y''' + (\tau(x) + \sigma'(x))y'' + (\lambda + \tau'(x))y' = 0. \end{aligned}$$

Como resultado, obtemos que a função $v_1(x) = y'(x)$ satisfaz a equação

$$\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \mu_1 v_1 = 0, \quad (1.2)$$

onde $\tau_1(x) = \tau(x) + \sigma'(x)$ e $\mu_1 = \lambda + \tau'$. Como $\tau_1(x)$ é um polinômio de grau no máximo um, e μ_1 não depende de x , a equação (1.2) é uma equação do tipo hipergeométrica. \square

A recíproca também é verdade:

Proposição 1.2. *Toda solução de (1.2), com $\lambda = \mu_1 - \tau'_1 + \sigma'' \neq 0$ é a derivada de uma solução de (1.1).*

Demonstração. Seja $v_1(x)$ uma solução da equação (1.2). Se a função $v_1(x)$ fosse a derivada de uma solução $y(x)$ de (1.1), então, de acordo com essa equação, as funções $y(x)$ e $v_1(x)$ estariam relacionadas do seguinte modo:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(x)v'_1 + \tau(x)v_1].$$

A função $y(x)$ definida por essa fórmula realmente satisfaz (1.1), e sua derivada é $v_1(x)$. De fato,

$$\begin{aligned} \lambda y' &= -[\sigma'(x)v'_1 + \sigma(x)v''_1 + \tau'(x)v_1 + \tau(x)v'_1] \\ &= -[\sigma(x)v''_1 + (\tau(x) + \sigma'(x))v'_1 + \tau'(x)v_1] \\ &= -\{[\sigma(x)v''_1 + \tau_1(x)v'_1 + \mu_1 v_1] - \lambda v_1\} \\ &= \lambda v_1, \end{aligned}$$

isto é, $y'(x) = v_1(x)$. Substituindo $v_1(x) = y'(x)$ na expressão original para $y(x)$, obtemos (1.1) para $y(x)$. \square

De maneira análoga, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 1.3. *A derivada n -ésima $y^{(n)}(x) = v_n(x)$ de uma solução $y(x)$ da equação (1.1) também é solução de uma equação do tipo hipergeométrica, a saber,*

$$\sigma(x)v''_n + \tau_n(x)v'_n + \mu_n v_n = 0, \quad (1.3)$$

onde

$$\tau_n(x) = \tau(x) + n\sigma'(x), \quad (1.4)$$

$$\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''. \quad (1.5)$$

Demonstração. Utilizaremos indução sobre n . Note que o caso $n = 1$ já foi feito (ver Proposição 1.1). Suponha que o resultado acima valha para $n - 1$, isto é,

$$\sigma(x)v''_{n-1} + \tau_{n-1}(x)v'_n + \mu_{n-1}v_{n-1} = 0, \quad (1.6)$$

com

$$\begin{aligned} \tau_{n-1}(x) &= \tau(x) + (n-1)\sigma'(x), \\ \mu_{n-1} &= \lambda + (n-1)\tau' + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\sigma''. \end{aligned}$$

Derivando (1.6), obtemos

$$\begin{aligned}\sigma'(x)v''_{n-1} + \sigma(x)v'''_{n-1} + \tau'_{n-1}(x)v'_{n-1} + \tau_{n-1}(x)v''_{n-1} + \mu_{n-1}v'_{n-1} &= 0 \\ \Rightarrow \sigma(x)v'''_{n-1} + [\tau_{n-1}(x) + \sigma'(x)]v''_{n-1} + [\mu_{n-1} + \tau'_{n-1}(x)]v'_{n-1} &= 0 \\ \Rightarrow \sigma(x)v''_n + [\tau_{n-1}(x) + \sigma'(x)]v'_n + [\mu_{n-1} + \tau'_{n-1}]v_n &= 0.\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\tau_{n-1}(x) + \sigma'(x) &= \tau(x) + (n-1)\sigma'(x) + \sigma'(x) = \tau(x) + n\sigma'(x), \\ \mu_{n-1} + \tau'_{n-1} &= [\lambda + (n-1)\tau' + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\sigma''] + [\tau' + (n-1)\sigma''] \\ &= \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''.\end{aligned}$$

□

Além disso, a recíproca também vale neste caso:

Proposição 1.4. *Toda solução de (1.3) para $\mu_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) pode ser representada na forma $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, onde $y(x)$ é uma solução de (1.1).*

Demonstração. Análoga à prova do caso $n = 1$ (ver Proposição 1.2). □

1.2 Fórmula de Rodrigues

As propriedades da equação (1.1) consideradas acima nos permitem construir uma família de soluções particulares de (1.1) correspondendo a um dado λ .

Proposição 1.5. *Se*

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'',$$

então a equação do tipo hipergeométrica tem uma solução particular da forma $y(x) = y_n(x)$, que é um polinômio de grau n .

Demonstração. De fato, quando $\mu_n = 0$, a equação (1.3) pode ser reescrita como

$$\sigma(x)v''_n + \tau_n(x)v'_n = 0.$$

Se $v''_n = v'_n = 0$, a equação (1.3) tem solução particular $v_n(x) = \text{constante}$. Como $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, isso significa que, quando

$$\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' = 0,$$

ou seja,

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'',$$

a equação do tipo hipergeométrica tem uma solução particular da forma $y(x) = y_n(x)$, que é um polinômio de grau n . □

Definição 1.2. Chamamos as soluções polinomiais de (1.1) de polinômios do tipo hipergeométricos.

Proposição 1.6 (Fórmula de Rodrigues). As soluções polinomiais da equação (1.1) podem ser expressas por

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)} [\sigma^n(x) \varrho(x)]^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.7)$$

onde $B_n = A_n^{-1} y_n^{(n)}(x)$ é uma constante de normalização, e A_n é definido pela equação

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1.$$

Essas soluções correspondem aos valores $\mu_n = 0$, ou seja,

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'', \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.8)$$

Chamamos a relação (1.7) de Fórmula de Rodrigues.

Demonstração. Multiplicamos (1.1) e (1.3) por funções $\varrho(x)$ e $\varrho_n(x)$, reduzindo à forma auto-adjunta:

$$\begin{aligned} & \sigma(x)y''(x)\varrho(x) + \tau(x)y'(x)\varrho(x) + \lambda y(x)\varrho(x) = 0 \\ \Rightarrow & y''(x)[\sigma(x)\varrho(x)] + y'(x)[\tau(x)\varrho(x)] + \lambda\varrho(x)y(x) = 0 \\ \Rightarrow & [\sigma(x)\varrho(x)y'(x)]' + \lambda\varrho(x)y(x) = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sigma(x)v_n''(x)\varrho_n(x) + \tau_n(x)v_n'(x)\varrho_n(x) + \mu_n v_n(x)\varrho_n(x) = 0 \\ \Rightarrow & v_n''(x)[\sigma(x)\varrho_n(x)] + v_n'(x)[\tau_n(x)\varrho_n(x)] + \mu_n\varrho_n(x)v_n(x) = 0 \\ \Rightarrow & [\sigma(x)\varrho_n(x)v_n'(x)]' + \mu_n\varrho_n(x)v_n(x) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\sigma\varrho y')' + \lambda\varrho y = 0, \quad (1.9)$$

$$(\sigma\varrho_n v_n')' + \mu_n\varrho_n v_n = 0, \quad (1.10)$$

onde $\varrho(x)$ e $\varrho_n(x)$ satisfazem as equações diferenciais

$$(\sigma\varrho)' = \tau\varrho, \quad (1.11)$$

$$(\sigma\varrho_n)' = \tau_n\varrho_n. \quad (1.12)$$

Agora, usando (1.4) para $\tau_n(x)$, podemos estabelecer uma conexão entre $\varrho_n(x)$ e $\varrho_0(x) \equiv \varrho(x)$. De (1.11) e (1.12), temos

$$(\sigma\varrho)' = \tau\varrho \Rightarrow \tau = \frac{\sigma'\varrho + \sigma\varrho'}{\varrho},$$

$$(\sigma \varrho_n)' = \tau_n \varrho_n \Rightarrow \tau_n = \frac{\sigma' \varrho_n + \sigma \varrho'_n}{\varrho_n}.$$

Assim, de (1.4),

$$\begin{aligned} \tau_n &= \tau + n\sigma' \\ \Rightarrow \frac{\sigma' \varrho_n + \sigma \varrho'_n}{\varrho_n} &= \frac{\sigma' \varrho + \sigma \varrho'}{\varrho} + n\sigma' \\ \Rightarrow \sigma' + \frac{\sigma \varrho'_n}{\varrho_n} &= \sigma' + \frac{\sigma \varrho'}{\varrho} + n\sigma' \\ \Rightarrow \frac{\sigma \varrho'_n}{\varrho_n} &= \frac{\sigma \varrho'}{\varrho} + n\sigma', \end{aligned} \tag{1.13}$$

e, então,

$$\frac{\varrho'_n}{\varrho_n} = \frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{n\sigma'}{\sigma}. \tag{1.14}$$

Integrando ambos os lados de (1.14), obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\varrho'_n(x)}{\varrho_n(x)} dx &= \int \frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)} dx + n \int \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} dx \\ \Rightarrow \ln(\varrho_n(x)) &= \ln(\varrho(x)) + n \ln(\sigma(x)) \\ \Rightarrow \ln(\varrho_n(x)) &= \ln(\varrho(x)) + \ln(\sigma^n(x)) \\ \Rightarrow \varrho_n(x) &= \sigma^n(x) \varrho(x), \quad n = 0, 1, \dots. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Assim, por (1.15), temos $\sigma(x) \varrho_n(x) = \varrho_{n+1}(x)$ e, como $v'_n(x) = v_{n+1}(x)$, podemos reescrever (1.10) na forma de uma relação de recorrência:

$$\begin{aligned} (\sigma \varrho_n v'_n)' + \mu_n \varrho_n v_n &= 0 \\ \Rightarrow (\varrho_{n+1} v_{n+1})' + \mu_n \varrho_n v_n &= 0 \\ \Rightarrow \varrho_n v_n &= -\frac{1}{\mu_n} (\varrho_{n+1} v_{n+1})' \end{aligned} \tag{1.16}$$

Disso, obtemos, recursivamente,

$$\begin{aligned} \varrho y \equiv \varrho_0 v_0 &= -\frac{1}{\mu_0} (\varrho_1 v_1)' \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_0}\right) \left(-\frac{1}{\mu_1}\right) (\varrho_2 v_2)'' = \dots = \frac{1}{A_n} (\varrho_n v_n)^{(n)}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \tag{1.18}$$

Agora, vamos obter uma forma explícita para polinômios do tipo hipergeométricos. Se a função $y(x)$ é um polinômio de grau n , ou seja, $y(x) = y_n(x)$, então $v_n(x) = y_n^{(n)}(x) = \text{constante}$. Então, de (1.17), obtemos

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= \frac{1}{A_n \varrho(x)} [\varrho_n(x) v_n(x)]^{(n)} \\
&= \frac{1}{A_n \varrho(x)} [\sigma^n(x) \varrho(x) v_n(x)]^{(n)} \\
&= \frac{A_n^{-1}}{\varrho(x)} \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\sigma^n(x) \varrho(x)]^{(k)} v_n^{(n-k)}(x) \right\} \\
&= \frac{A_n^{-1}}{\varrho(x)} \left[\binom{n}{0} \sigma^n(x) \varrho(x) v_n^{(n)}(x) + \cdots + \binom{n}{n} [\sigma^n(x) \varrho(x)]^{(n)} v_n(x) \right] \\
&= \frac{A_n^{-1}}{\varrho(x)} [\sigma^n(x) \varrho(x)]^{(n)} v_n(x) \\
&= \frac{A_n^{-1} y_n^{(n)}}{\varrho(x)} [\sigma^n(x) \varrho(x)]^{(n)},
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos a seguinte expressão para $y_n(x)$:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)} [\sigma^n(x) \varrho(x)]^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

onde $B_n = A_n^{-1} y_n^{(n)}(x)$ e A_n é definido pela equação (1.18) com

$$\mu_k = \lambda + k\tau' + \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'', \quad \lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''.$$

□

Portanto, as soluções polinomiais de (1.1) são definidas unicamente pela fórmula de Rodrigues (1.7), a menos de uma constante arbitrária.

1.3 A Propriedade de Ortogonalidade

As soluções polinomiais de (1.1) têm a propriedade de ortogonalidade.

Proposição 1.7 (Propriedade de Ortogonalidade). *Sejam $y_m(x)$ e $y_n(x)$ soluções polinomiais da equação (1.1), e $\varrho(x)$ uma função tal que $[\sigma(x)\varrho(x)]' = \tau(x)\varrho(x)$, com*

$$\sigma(x)\varrho(x)x^k|_{x=a,b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Então

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \varrho(x) dx = 0, \quad m \neq n, \tag{1.19}$$

e dizemos que os polinômios $y_n(x)$ são ortogonais no intervalo (a, b) , chamado de intervalo de ortogonalidade.

Demonstração. Para obter essa propriedade, escrevemos as equações para $y_n(x)$ e $y_m(x)$ na forma auto-adjunta

$$[\sigma(x)\varrho(x)y_n'(x)]' + \lambda_n \varrho(x) y_n(x) = 0, \quad [\sigma(x)\varrho(x)y_m'(x)]' + \lambda_m \varrho(x) y_m(x) = 0.$$

Em seguida, multiplicamos a primeira equação por $y_m(x)$ e a segunda por $y_n(x)$ e, então, subtraímos a segunda igualdade da primeira e integramos o resultado em relação a x de a a b , obtendo

$$\begin{aligned} & [\sigma(x)\varrho(x)y'_n(x)]'y_m(x) + \lambda_n\varrho(x)y_n(x)y_m(x) - [\sigma(x)\varrho(x)y'_m(x)]'y_n(x) - \lambda_m\varrho(x)y_m(x)y_n(x) = 0 \\ \Rightarrow & (\lambda_m - \lambda_n)\varrho(x)y_m(x)y_n(x) = [\sigma(x)\varrho(x)y'_n(x)]'y_m(x) - [\sigma(x)\varrho(x)y'_m(x)]'y_n(x) \\ \Rightarrow & (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \varrho(x)y_m(x)y_n(x)dx = \int_a^b \{[\sigma(x)\varrho(x)y'_n(x)]'y_m(x) - [\sigma(x)\varrho(x)y'_m(x)]'y_n(x)\}dx. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & y_m(x)[\sigma(x)\varrho(x)y'_n(x)]' - y_n(x)[\sigma(x)\varrho(x)y'_m(x)]' \\ = & y_m(x)\{[\sigma(x)\varrho(x)]'y'_n(x) + \sigma(x)\varrho(x)y''_n(x)\} - y_n(x)\{[\sigma(x)\varrho(x)]'y'_m(x) + \sigma(x)\varrho(x)y''_m(x)\} \\ = & y_m(x)y'_n(x)[\sigma(x)\varrho(x)]' + y_m(x)y''_n(x)\sigma(x)\varrho(x) - y_n(x)y'_m(x)[\sigma(x)\varrho(x)]' - y_n(x)y''_m(x)\sigma(x)\varrho(x) \\ = & [\sigma(x)\varrho(x)]'[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)] + \sigma(x)\varrho(x)[y_m(x)y''_n(x) - y_n(x)y''_m(x)] \\ = & [\sigma(x)\varrho(x)]'[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)] + \sigma(x)\varrho(x)[y_m(x)y''_n(x) + y'_m(x)y'_n(x) - y'_n(x)y'_m(x) - y_n(x)y''_m(x)] \\ = & [\sigma(x)\varrho(x)]'[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)] + \sigma(x)\varrho(x)\{[y_m(x)y'_n(x)]' - [y_n(x)y'_m(x)]'\} \\ = & [\sigma(x)\varrho(x)]'[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)] + \sigma(x)\varrho(x)[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)]' \\ = & \{\sigma(x)\varrho(x)[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)]\}' \\ = & \frac{d}{dx}\{\sigma(x)\varrho(x)W[y_m(x), y_n(x)]\}, \end{aligned}$$

onde

$$W(y_m, y_n) = \begin{vmatrix} y_m & y_n \\ y'_m & y'_n \end{vmatrix}$$

é o Wronskiano das funções y_m e y_n , obtemos a seguinte relação

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b y_m(x)y_n(x)\varrho(x)dx = \sigma(x)\varrho(x)W[y_m(x), y_n(x)] \Big|_a^b. \quad (1.20)$$

Considere a função $\varrho(x)$ satisfazendo as condições

$$\sigma(x)\varrho(x)x^k \Big|_{x=a,b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.21)$$

para certos a e b . Note que $W[y_m(x), y_n(x)]$ é um polinômio em x , digamos, $W[y_m(x), y_n(x)] = c_i x^i + c_{i-1} x^{i-1} + \dots$. Então o lado direito de (1.20) é igual a zero, pois

$$\begin{aligned} \sigma(x)\varrho(x)W[y_m(x), y_n(x)] \Big|_a^b &= \{\sigma(b)\varrho(b)[c_i b^i + c_{i-1} b^{i-1} + \dots]\} - \{\sigma(a)\varrho(a)[c_i a^i + c_{i-1} a^{i-1} + \dots]\} \\ &= \{c_i[\sigma(b)\varrho(b)b^i] + c_{i-1}[\sigma(b)\varrho(b)b^{i-1}] + \dots\} \\ &\quad - \{c_i[\sigma(a)\varrho(a)a^i] + c_{i-1}[\sigma(a)\varrho(a)a^{i-1}] + \dots\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, quando $\lambda_m \neq \lambda_n$, temos

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\varrho(x)dx = 0.$$

Note que a condição $\lambda_m \neq \lambda_n$ em (1.19) pode ser substituída pela condição $m \neq n$ se

$$\tau' + \frac{1}{2}(n+m-1)\sigma'' \neq 0. \quad (1.22)$$

De fato, se vale (1.22), temos, de (1.8),

$$\begin{aligned} \lambda_m \neq \lambda_n &\Leftrightarrow \lambda_m - \lambda_n \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -m\tau' - \frac{1}{2}m(m-1)\sigma'' + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (n-m)\tau' + \frac{1}{2}(n^2 - n - m^2 + m)\sigma'' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (n-m)\tau' + \frac{1}{2}[(n+m)(n-m) - (n-m)]\sigma'' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (n-m)\tau' + \frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)\sigma'' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (n-m)[\tau' + \frac{1}{2}(n+m-1)\sigma''] \neq 0 \\ &\Leftrightarrow n - m \neq 0 \\ &\Leftrightarrow m \neq n. \end{aligned}$$

□

De modo a satisfazer as condições (1.21) para valores finitos de a e b , é suficiente exigir que a função $\varrho(x)$ satisfaça as seguintes condições de contorno:

$$\sigma(x)\varrho(x)|_{x=a} = 0, \quad \sigma(x)\varrho(x)|_{x=b} = 0.$$

Mas se, por exemplo, a é um valor finito e $b = +\infty$, então as condições (1.21) são equivalentes às condições:

$$\sigma(x)\varrho(x)|_{x=a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x)\varrho(x)x^k = 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

Os outros casos possíveis podem ser considerados de maneira análoga.

Definição 1.3 (Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Contínua). *Os polinômios do tipo hipergeométricos $y_n(x)$ para os quais a função $\varrho(x)$ satisfaça a condição (1.21) são conhecidos como polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua, usualmente considerados sob as condições auxiliares $\varrho(x) > 0$ e $\sigma(x) > 0$ no intervalo (a, b) .*

1.4 Os Polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite

Para investigar propriedades de polinômios ortogonais clássicos e determinar as funções peso $\varrho(x)$, é conveniente usar o fato de que uma mudança linear de variável independente x transforma

as equações (1.1) e (1.11) em outras do mesmo tipo. Enquanto isso, os polinômios $y_n(x)$ continuam sendo polinômios de mesmo grau e ainda podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues. Isso nos permite fazer uma classificação de polinômios ortogonais clássicos. Para isso, analisaremos os possíveis graus do polinômio $\sigma(x)$.

1.4.1 Polinômios de Jacobi

Primeiramente, vamos analisar o caso em que $\sigma(x)$ é um polinômio de grau dois.

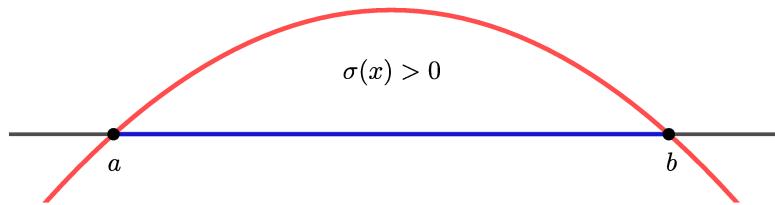


Figura 1.1: Gráfico de $\sigma(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau dois. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) > 0$.

Note que, pelas condições de contorno da propriedade de ortogonalidade, a e b são raízes de $\sigma(x)$. Além disso, o coeficiente do termo de maior grau deve ser negativo, pois, caso contrário, teríamos $\sigma(x) < 0$ em (a, b) . Então

$$\sigma(x) = -(x - a)(x - b).$$

Considere a mudança de variável

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t.$$

Daí,

$$\begin{aligned} a &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \Rightarrow 2a = (a+b) + (b-a)t \\ &\Rightarrow t = \frac{a-b}{b-a} = -1, \\ b &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \Rightarrow 2b = (a+b) + (b-a)t \\ &\Rightarrow t = \frac{b-a}{b-a} = 1, \end{aligned}$$

ou seja, essa mudança leva o intervalo (a, b) em $(-1, 1)$. Assim, podemos reescrever $\sigma(x)$ como

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= -(x - a)(x - b) \\ &= -(x + 1)(x - 1) \\ &= -(x^2 - 1) \\ &= 1 - x^2. \end{aligned}$$

Além disso, temos $\tau(x) = Ax + B$, pois é um polinômio de grau no máximo um. Então, de (1.11), temos

$$\begin{aligned}
[\sigma(x)\varrho(x)]' &= \tau(x)\varrho(x) \Rightarrow \frac{[\sigma(x)\varrho(x)]'}{\sigma(x)\varrho(x)} = \frac{\tau(x)\varrho(x)}{\sigma(x)\varrho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \\
&\Rightarrow \int \frac{[\sigma(x)\varrho(x)]'}{\sigma(x)\varrho(x)} dx = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \\
&\Rightarrow \ln(\sigma(x)\varrho(x)) = \int \frac{Ax + B}{1 - x^2} dx.
\end{aligned}$$

Precisamos encontrar C e D tais que

$$\frac{Ax + B}{1 - x^2} = \frac{C}{1 - x} + \frac{D}{1 + x} = \frac{(C - D)x + (C + D)}{(1 - x)(1 + x)},$$

ou seja, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} C - D = A, \\ C + D = B. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $C = \frac{A+B}{2}$ e $D = \frac{B-A}{2}$. Assim

$$\frac{Ax + B}{1 - x^2} = \frac{\frac{A+B}{2}}{1 - x} + \frac{\frac{B-A}{2}}{1 + x}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\ln(\sigma(x)\varrho(x)) &= \int \frac{Ax + B}{1 - x^2} dx \\
&= \frac{A + B}{2} \int \frac{1}{1 - x} dx + \frac{B - A}{2} \int \frac{1}{1 + x} dx \\
&= -\frac{A + B}{2} \ln(1 - x) + \frac{B - A}{2} \ln(1 + x) \\
&= \ln\left((1 - x)^{-\frac{A+B}{2}}\right) + \ln\left((1 + x)^{\frac{B-A}{2}}\right) \\
&= \ln\left((1 - x)^{-\frac{A+B}{2}}(1 + x)^{\frac{B-A}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\sigma(x)\varrho(x) &= (1 - x)^{-\frac{A+B}{2}}(1 + x)^{\frac{B-A}{2}} \\
\Rightarrow \varrho(x) &= \frac{(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}}(1 + x)^{\frac{B-A}{2}}}{(1 - x)(1 + x)} \\
\Rightarrow \varrho(x) &= (1 - x)^{-\frac{A+B}{2}-1}(1 + x)^{\frac{B-A}{2}-1}.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = -\frac{A+B}{2} - 1$ e $\beta = \frac{B-A}{2} - 1$, obtemos

$$\varrho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta.$$

Além disso,

$$\alpha = -\frac{A+B}{2} - 1 \Rightarrow -2\alpha - 2 = A + B,$$

$$\beta = \frac{B-A}{2} - 1 \Rightarrow 2\beta + 2 = B - A,$$

ou seja,

$$\begin{cases} A + B = -2\alpha - 2, \\ A - B = 2\beta + 2. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $A = -(\alpha + \beta + 2)$ e $B = \beta - \alpha$ e, portanto,

$$\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha.$$

De modo a satisfazer as condições da propriedade de ortogonalidade, devemos ter $\alpha > -1$ e $\beta > -1$, pois

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sigma(x)\varrho(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} = 0 \Leftrightarrow \beta + 1 > 0 \Leftrightarrow \beta > -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sigma(x)\varrho(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 - x^2, \\ \tau(x) &= -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha, \\ \varrho(x) &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \end{aligned}$$

com $(a, b) = (-1, 1)$, $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. Os polinômios $y_n(x)$ correspondentes, com $B_n = (-1)^n/(2^n n!)$, são chamados de *polinômios de Jacobi* e denotados por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. As constantes B_n estão de acordo com a normalização, mas, de modo geral, podem ser escolhidas arbitrariamente.

Pela fórmula de Rodrigues, utilizando os resultados obtidos acima, temos

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}].$$

Alguns casos particulares importantes dos polinômios de Jacobi são:

1º) **Polinômios de Legendre.** Quando $\alpha = \beta = 0$, os polinômios de Jacobi são chamados de *polinômios de Legendre* e denotados por $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$.

2º) **Polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie.** Os *polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie* são os casos particulares dos polinômios de Jacobi quando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ e $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, respectivamente.

3º) **Polinômios de Gegenbauer** Quando $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, obtemos os *polinômios de Gegenbauer*, também conhecidos como *polinômios ultraesféricos*. Note que $\lambda > -\frac{1}{2}$, pois $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. Pela fórmula de Rodrigues, os polinômios de Gegenbauer são dados por

$$C_n^\lambda(x) = P_n^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\lambda + \frac{1}{2}} (1+x)^{-\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\lambda - \frac{1}{2}} (1+x)^{n+\lambda - \frac{1}{2}}]$$

$$\iff C_n^\lambda(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}].$$

1.4.2 Polinômios de Laguerre

Agora, analisaremos o caso em que $\sigma(x)$ é um polinômio de grau um, ou seja, $\sigma(x) = x - a$.

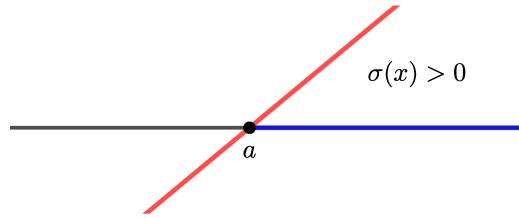


Figura 1.2: Gráfico de $\sigma(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau um. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) > 0$.

De modo a satisfazer a condição $\sigma(x) > 0$, devemos ter $x > a$, ou seja, $x \in (a, +\infty)$. Considere a mudança de variável

$$x = a + t.$$

Então podemos escrever $\sigma(x)$ como

$$\sigma(x) = x,$$

com $x \in (0, +\infty)$. Como $\tau(x) = Ax + B$, pois é um polinômio de grau no máximo um, temos, de (1.11),

$$\begin{aligned} [\sigma(x)\varrho(x)]' &= \tau(x)\varrho(x) \Rightarrow \frac{[\sigma(x)\varrho(x)]'}{\sigma(x)\varrho(x)} = \frac{\tau(x)\varrho(x)}{\sigma(x)\varrho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \\ &\Rightarrow \int \frac{[\sigma(x)\varrho(x)]'}{\sigma(x)\varrho(x)} dx = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \\ &\Rightarrow \ln(x\varrho(x)) = \int \frac{Ax + B}{x} dx = A \int 1 dx + B \int \frac{1}{x} dx = Ax + B \ln(x) \\ &\Rightarrow x\varrho(x) = e^{Ax} x^B \\ &\Rightarrow \varrho(x) = e^{Ax} x^{B-1}. \end{aligned}$$

Pelas condições da propriedade de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \sigma(0)\varrho(0) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x)\varrho(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{Ax} x^B = 0 \iff A < 0 \text{ e } B > 0. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = B - 1$ e considerando $A = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x, \\ \tau(x) &= \alpha + 1 - x, \\ \varrho(x) &= x^\alpha e^{-x}. \end{aligned}$$

De modo a satisfazer as condições da propriedade de ortogonalidade, devemos ter $\alpha > -1$, pois $B = \alpha + 1 > 0 \iff \alpha > -1$. Os polinômios $y_n(x)$ correspondentes, com $B_n = 1/n!$, são chamados de *polinômios de Laguerre* e denotados por $L_n^\alpha(x)$. Pela fórmula de Rodrigues, temos

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

1.4.3 Polinômios de Hermite

Por fim, analisaremos o caso em que $\sigma(x)$ é um polinômio de grau zero, ou seja, é constante.

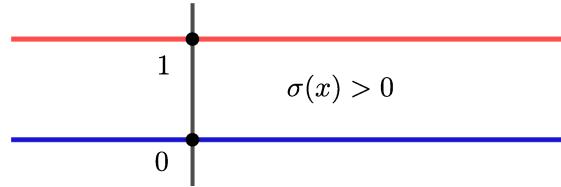


Figura 1.3: Gráfico de $\sigma(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau zero. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) > 0$.

Podemos considerar $\sigma(x) = 1$, para todo $x \in (-\infty, +\infty)$. Assim como nos outros casos, $\tau(x) = Ax + B$. De (1.11),

$$\begin{aligned} [\sigma(x)\varrho(x)]' &= \tau(x)\varrho(x) \Rightarrow \frac{[\sigma(x)\varrho(x)]'}{\sigma(x)\varrho(x)} = \frac{\tau(x)\varrho(x)}{\sigma(x)\varrho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \\ &\Rightarrow \int \frac{[\sigma(x)\varrho(x)]'}{\sigma(x)\varrho(x)} dx = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \\ &\Rightarrow \ln(\varrho(x)) = \int Ax + B dx = A \int x dx + B \int 1 dx = \frac{1}{2}Ax^2 + Bx \\ &\Rightarrow \varrho(x) = e^{\frac{1}{2}Ax^2 + Bx}. \end{aligned}$$

Pelas condições da propriedade de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x)\varrho(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{2}Ax^2 + Bx} = 0 \iff A < 0 \text{ e } B \geq 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x)\varrho(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}Ax^2 + Bx} = 0 \iff A < 0 \text{ e } B \leq 0, \end{aligned}$$

ou seja, $A < 0$ e $B = 0$. Se tomarmos $A = -2$ e $B = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1, \\ \tau(x) &= -2x, \\ \varrho(x) &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Os polinômios $y_n(x)$ correspondentes, com $B_n = (-1)^n$, são chamados de *polinômios de Hermite* e

denotados por $H_n(x)$. Da fórmula de Rodrigues,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right).$$

1.5 Informações sobre os Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Contínua

Nos casos analisados, conseguimos obter expressões para $\sigma(x)$, $\tau(x)$ e $\varrho(x)$. Além disso, podemos obter λ em cada um desses casos utilizando a seguinte expressão (ver seção 1.3):

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''.$$

Assim, temos as informações encontradas na Tabela 1.1 para os polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua. Aqui colocamos informações sobre os polinômios de Gegenbauer, que são um caso particular dos polinômios de Jacobi, pois utilizaremos essas informações no Capítulo 3.

	Jacobi	Gegenbauer	Laguerre	Hermite
Parâmetros	$\alpha > -1, \beta > -1$	$\lambda > -\frac{1}{2}$	$\alpha > -1$	Não depende de parâmetros
(a, b)	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
B_n	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$\frac{1}{n!}$	$(-1)^n$
$\varrho(x)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$-(2\lambda + 1)x$	$1 + \alpha - x$	$-2x$
λ_n	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	$n(n + 2\lambda)$	n	$2n$

Tabela 1.1: Dados dos Polinômios de Jacobi, Gegenbauer, Laguerre e Hermite

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Discreta

Neste capítulo será apresentada a teoria básica dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta (ver [9]), que é semelhante à teoria apresentada no Capítulo 1. Primeiramente, apresentaremos a equação de diferenças do tipo hipergeométrica e algumas de suas propriedades. Veremos também que essa equação admite soluções polinomiais que podem ser expressas de maneira explícita e satisfazem uma propriedade de ortogonalidade sob certas condições. Por fim, estudaremos quais são as possibilidades para essas soluções polinomiais, obtendo os chamados polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta.

2.1 Uma equação de diferenças do tipo hipergeométrica

A teoria considerada no Capítulo 1 para soluções polinomiais da equação diferencial do tipo hipergeométrica

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0, \quad (2.1)$$

onde $\tilde{\sigma}(x)$ e $\tilde{\tau}(x)$ são polinômios de graus dois e um, respectivamente, e λ é uma constante, admite uma generalização natural para o caso quando a equação diferencial é substituída por uma equação de diferenças. Considere as expansões de $y(x \pm h)$ pela fórmula de Taylor:

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots + y^{(m)}(\xi)\frac{h^m}{m!}, \quad (2.2)$$

$$y(x - h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots + (-1)^m y^{(m)}(\theta)\frac{h^m}{m!}. \quad (2.3)$$

Para obter uma aproximação para $y'(x)$, subtraímos (2.3) de (2.2), com $m = 3$:

$$\begin{aligned} y(x + h) - y(x - h) &= y(x) - y(x) + y'(x)h + y''(x)h + y'''(\xi)\frac{h^3}{3!} + y'''(\theta)\frac{h^3}{3!} \\ \Rightarrow y'(x) &= \frac{1}{2h} \left\{ y(x + h) - y(x) + y(x) - y(x - h) - [y'''(\xi) + y'''(\theta)] \frac{h^3}{3!} \right\} \\ \Rightarrow y'(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{y(x + h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x - h)}{h} \right] + \mathcal{O}_1(h^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para obter uma aproximação para $y''(x)$, somamos (2.3) e (2.4), com $m = 4$:

$$\begin{aligned} y(x+h) + y(x-h) &= y(x) + y(x) + y''(x)h^2 + y^{(4)}(\xi)\frac{h^4}{4!} + y^{(4)}(\theta)\frac{h^4}{4!} \\ \Rightarrow y''(x) &= \frac{1}{h^2} \left\{ y(x+h) - y(x) - y(x) + y(x-h) - [y^{(4)}(\xi) + y^{(4)}(\theta)] \frac{h^4}{4!} \right\} \\ \Rightarrow y''(x) &= \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \mathcal{O}_2(h^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) e (2.5) em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

que aproxima (2.1) em uma malha uniforme $\Delta x = h$ com segunda ordem em h , isto é, com ordem $\mathcal{O}(h^2)$.

Definição 2.1. Definimos por Δ e ∇ os operadores de diferença progressiva e regressiva, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+1) - f(x), \\ \nabla f(x) &= f(x) - f(x-1). \end{aligned}$$

Proposição 2.1. Sejam Δ e ∇ os operadores de diferença progressiva e regressiva. Então valem as seguintes propriedades:

$$(a) \Delta \nabla f(x) = \nabla \Delta f(x) = \Delta f(x) - \nabla f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

$$(b) \Delta f(x) = \nabla f(x+1)$$

$$(c) \Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + \Delta[f(x)]g(x+1)$$

$$(d) \text{ Para um polinômio } p_n(x) \text{ de grau } n, \text{ as expressões } \Delta p_n(x) \text{ e } \nabla p_n(x) \text{ são polinômios de grau } n-1; \text{ e } \Delta^n p_n(x) = \nabla^n p_n(x) = p_n^{(n)}(x) = n! a_n.$$

Demonstração. (a) Utilizando a definição dos operadores de diferença, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \nabla f(x) &= \Delta[f(x) - f(x-1)] \\ &= [f(x+1) - f(x)] - [f(x) - f(x-1)] \\ &= \nabla[f(x+1) - f(x)] \\ &= \nabla \Delta f(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\Delta \nabla f(x) = [f(x+1) - f(x)] - [f(x) - f(x-1)] = \Delta f(x) - \nabla f(x)$$

e

$$\Delta \nabla f(x) = [f(x+1) - f(x)] - [f(x) - f(x-1)] = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1).$$

Logo,

$$\Delta \nabla f(x) = \nabla \Delta f(x) = \Delta f(x) - \nabla f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1).$$

(b) Pela definição,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \nabla f(x+1).$$

(c) Temos

$$\begin{aligned} \Delta[f(x)g(x)] &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= [f(x+1) - f(x)]g(x+1) + f(x)[g(x+1) - g(x)] \\ &= \Delta[f(x)]g(x+1) + f(x)\Delta g(x). \end{aligned}$$

(d) Seja

$$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_n \neq 0$, um polinômio de grau n . Então

$$\begin{aligned} \Delta p_n(x) &= p_n(x+1) - p_n(x) \\ &= a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \cdots + a_1(x+1) + a_0 - a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0 \\ &= a_n x^n + n a_n (x+1)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x \\ &= n a_n x^{n-1} + \{\text{termos de grau menor do que } n-1\}. \end{aligned}$$

Ou seja, $\Delta p_n(x)$ é um polinômio de grau $n-1$. O raciocínio é análogo para $\nabla p_n(x)$. Repetindo o processo, obtemos $\Delta^n p_n(x) = \nabla^n p_n(x) = p_n^{(n)}(x) = n! a_n$. \square

Fazendo a mudança de variável $x = ht$ em (2.6), obtemos $Y(t) = y(ht)$. Daí,

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma}(ht) \frac{1}{h} \left[\frac{y(ht+h) - y(ht)}{h} - \frac{y(ht) - y(ht-h)}{h} \right] \\ &+ \frac{\tilde{\tau}(ht)}{2} \left[\frac{y(ht+h) - y(ht)}{h} + \frac{y(ht) - y(ht-h)}{h} \right] + \lambda y(ht) = 0 \\ \Leftrightarrow &\tilde{\sigma}(ht) \frac{1}{h} \left[\frac{y(h(t+1)) - y(ht)}{h} - \frac{y(ht) - y(h(t-1))}{h} \right] \\ &+ \frac{\tilde{\tau}(ht)}{2} \left[\frac{y(h(t+1)) - y(ht)}{h} + \frac{y(ht) - y(h(t-1))}{h} \right] + \lambda y(ht) = 0 \\ \Leftrightarrow &\tilde{\sigma}(ht) \frac{1}{h} \left[\frac{Y(t+1) - Y(t)}{h} - \frac{Y(t) - Y(t-1)}{h} \right] \\ &+ \frac{\tilde{\tau}(ht)}{2} \left[\frac{Y(t+1) - Y(t)}{h} + \frac{Y(t) - Y(t-1)}{h} \right] + \lambda Y(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\tilde{\sigma}(ht)}{h^2} \{[Y(t+1) - Y(t)] - [Y(t) - Y(t-1)]\} \\
&\quad + \frac{\tilde{\tau}(ht)}{2h} \{[Y(t+1) - Y(t)] + [Y(t) - Y(t-1)]\} + \lambda Y(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\tilde{\sigma}(ht)}{h^2} [\Delta Y(t) - \nabla Y(t)] + \frac{\tilde{\tau}(ht)}{2h} [\Delta Y(t) + \nabla Y(t)] + \lambda Y(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\tilde{\sigma}(ht)}{h^2} \Delta \nabla Y(t) + \frac{\tilde{\tau}(ht)}{2h} [-\Delta \nabla Y(t) + 2\Delta Y(t)] + \lambda Y(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\frac{\tilde{\sigma}(ht)}{h^2} - \frac{\tilde{\tau}(ht)}{2h} \right] \Delta \nabla Y(t) + \frac{\tilde{\tau}(ht)}{h} \Delta Y(t) + \lambda Y(t) = 0.
\end{aligned}$$

Por conveniência, utilizaremos x ao invés de t . Então a equação (2.6) pode ser reescrita como

$$\sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) \Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{onde } \sigma(x) = \frac{\tilde{\sigma}(hx)}{h^2} - \frac{\tilde{\tau}(hx)}{2h} \text{ e } \tau(x) = \frac{\tilde{\tau}(hx)}{h}.$$

Definição 2.2. A equação (2.7) é chamada de equação de diferenças do tipo hipergeométrica, e suas soluções polinomiais são chamadas de polinômios discretos do tipo hipergeométricos.

Note que, se tomarmos $h = 1$ na equação (2.6), obtemos diretamente a equação (2.7), com $\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) - \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}$ e $\tau(x) = \tilde{\tau}(x)$.

Podemos estabelecer várias propriedades das soluções de (2.7) que são análogas àquelas das soluções de (2.1).

Proposição 2.2 (Propriedade de Hipergeometricidade). *As diferenças finitas de uma solução da equação (2.7) também satisfazem uma equação de diferenças do mesmo tipo.*

Demonstração. Seja $v_1(x) = \Delta y(x)$. Mostraremos que essa função satisfaz uma equação de diferenças finitas da forma (2.7). Aplicando o operador Δ em ambos os lados de (2.7) e utilizando a definição e as propriedades dos operadores, obtemos

$$\begin{aligned}
&\Delta[\sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) \Delta y(x) + \lambda y(x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta[\sigma(x) \nabla v_1(x) + \tau(x) v_1(x) + \lambda y(x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta[\sigma(x) \nabla v_1(x)] + \Delta[\tau(x) v_1(x)] + \lambda v_1(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sigma(x) \Delta \nabla v_1(x) + \Delta \sigma(x) \nabla v_1(x+1) + \tau(x) \Delta v_1(x) + \Delta \tau(x) v_1(x+1) + \lambda v_1(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sigma(x) \Delta \nabla v_1(x) + \Delta \sigma(x) \Delta v_1(x) + \tau(x) \Delta v_1(x) + \Delta \tau(x) [\Delta v_1(x) + v_1(x)] + \lambda v_1(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sigma(x) \Delta \nabla v_1(x) + [\Delta \sigma(x) + \tau(x) + \Delta \tau(x)] \Delta v_1(x) + [\lambda + \Delta \tau(x)] v_1(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sigma(x) \Delta \nabla v_1(x) + [\Delta \sigma(x) + \tau(x+1)] \Delta v_1(x) + [\lambda + \Delta \tau(x)] v_1(x) = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sigma(x) \Delta \nabla v_1(x) + \tau_1(x) \Delta v_1(x) + \mu_1 v_1(x) = 0, \quad (2.8)$$

onde $\tau_1(x) = \tau(x+1) + \Delta \sigma(x)$ e $\mu_1 = \lambda + \Delta \tau(x)$. Como $\tau_1(x)$ é um polinômio de grau no máximo um e μ_1 não depende de x , a equação (2.8) para $v_1(x)$ é da mesma forma da equação (2.7). \square

A recíproca também é verdade:

Proposição 2.3. *Toda solução de (2.8) com $\lambda \neq 0$ pode ser representada na forma $v_1(x) = \Delta y(x)$, onde $y(x)$ é solução de (2.7).*

Demonstração. De fato, podemos escrever $y(x)$ em termos de $v_1(x)$ por

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(x)\nabla v_1(x) + \tau(x)v_1(x)]. \quad (2.9)$$

Aplicando o operador Δ em ambos os lados de (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda\Delta y(x) &= \Delta[\sigma(x)\nabla v_1(x)] + \Delta[\tau(x)v_1(x)] \\ &= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta\sigma(x)\nabla v_1(x+1) + \tau(x)\Delta v_1(x) + \Delta\tau(x)v_1(x+1) \\ &= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta\sigma(x)\Delta v_1(x) + \tau(x)\Delta v_1(x) + \Delta\tau(x)[\Delta v_1(x) + v_1(x)] \\ &= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + [\Delta\sigma(x) + \tau(x) + \Delta\tau(x)]\Delta v_1(x) + \Delta\tau(x)v_1(x) \\ &= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + [\Delta\sigma(x) + \tau(x+1)]\Delta v_1(x) + (\mu_1 - \lambda)v_1(x) \\ &= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \tau_1(x)\Delta v_1(x) + \mu_1 v_1(x) - \lambda v_1(x) \\ &= -\lambda v_1(x), \end{aligned}$$

ou seja, $\Delta y(x) = v_1(x)$. Logo $\nabla\Delta y(x) = \nabla v_1(x)$ e, portanto, de (2.9), segue que

$$\begin{aligned} -\lambda y(x) &= \sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde temos que $y(x)$ é solução de (2.7). \square

De maneira semelhante,

Proposição 2.4. *A função $v_m(x) = \Delta^m y(x)$ (m -ésima diferença finita), satisfaaz uma equação de diferenças do tipo hipergeométrica*

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_m(x) + \tau_m(x)\Delta v_m(x) + \mu_m v_m(x) = 0, \quad (2.11)$$

onde

$$\tau_m(x) = \tau_{m-1}(x+1) + \Delta\sigma(x), \quad \tau_0(x) = \tau(x), \quad (2.12)$$

$$\mu_m = \mu_{m-1} + \Delta\tau_{m-1}(x), \quad \mu_0 = \lambda. \quad (2.13)$$

Demonstração. Note que o grau de $\tau_m(x)$ é no máximo um e μ_m é uma constante. Utilizaremos indução sobre m . Para $m = 1$, a equação (2.11) se reduz à equação (2.8), e já mostramos que vale o resultado neste caso. Suponha que $v_k(x) = \Delta^k y(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, satisfaça a equação

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_k(x) + \tau_k(x)\Delta v_k(x) + \mu_k v_k(x) = 0, \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned}\tau_k(x) &= \tau_{k-1}(x+1) + \Delta\sigma(x), & \tau_0(x) &= \tau(x), \\ \mu_k &= \mu_{k-1} + \Delta\tau_{k-1}(x), & \mu_0 &= \lambda.\end{aligned}$$

Aplicando o operador Δ em ambos os lados de (2.14), segue que

$$\begin{aligned}\Delta[\sigma(x)\Delta\nabla v_k(x) + \tau_k(x)\Delta v_k(x) + \mu_k v_k(x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta[\sigma(x)\nabla v_{k+1}(x) + \tau_k(x)v_{k+1}(x) + \mu_k v_k(x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta[\sigma(x)\nabla v_{k+1}(x)] + \Delta[\tau_k(x)v_{k+1}(x)] + \mu_k v_{k+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla v_{k+1}(x) + \Delta\sigma(x)\nabla v_{k+1}(x+1) + \tau_k(x)\Delta v_{k+1}(x) + \Delta\tau_k(x)v_{k+1}(x+1) + \mu_k v_{k+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla v_{k+1}(x) + \Delta\sigma(x)\Delta v_{k+1}(x) + \tau_k(x)\Delta v_{k+1}(x) + \Delta\tau_k(x)[\Delta v_{k+1}(x) + v_{k+1}(x)] + \mu_k v_{k+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla v_{k+1}(x) + [\Delta\sigma(x) + \tau_k(x) + \Delta\tau_k(x)]\Delta v_{k+1}(x) + [\mu_k + \Delta\tau_k(x)]v_{k+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla v_{k+1}(x) + [\Delta\sigma(x) + \tau_k(x+1)]\Delta v_{k+1}(x) + [\mu_k + \Delta\tau_k(x)]v_{k+1}(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla v_{k+1}(x) + \tau_{k+1}(x)\Delta v_{k+1}(x) + \mu_{k+1}v_{k+1}(x) &= 0,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\tau_{k+1}(x) &= \tau_k(x+1) + \Delta\sigma(x), \\ \mu_{k+1} &= \mu_k + \Delta\tau_k(x), \\ v_{k+1}(x) &= \Delta v_k(x) = \Delta^{k+1}y(x).\end{aligned}$$

□

A recíproca também é válida:

Proposição 2.5. *Toda solução de (2.11), com $\mu_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), pode ser representada como $v_m(x) = \Delta^m y(x)$, onde $y(x)$ é uma solução de (2.7).*

Demonstração. Aqui, também utilizaremos indução sobre m para a prova. Note que o caso $m = 1$ já foi provado (ver Proposição 2.3). Suponhamos que $v_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, seja solução de

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_k(x) + \tau_k(x)\Delta v_k(x) + \mu_k v_k(x) = 0, \quad (2.15)$$

com

$$\begin{aligned}\tau_k(x) &= \tau_{k-1}(x+1) + \Delta\sigma(x), & \tau_0(x) &= \tau(x), \\ \mu_k &= \mu_{k-1} + \Delta\tau_{k-1}(x), & \mu_0 &= \lambda.\end{aligned}$$

Suponha, por absurdo, que $v_k(x)$ não possa ser expressa como $\Delta v_{k-1}(x)$, sendo $v_{k-1}(x)$ solução de

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_{k-1}(x) + \tau_{k-1}(x)\Delta v_{k-1}(x) + \mu_{k-1}v_{k-1}(x) = 0. \quad (2.16)$$

Como $\mu_{k-1} \neq 0$, de (2.16), obtemos

$$v_{k-1}(x) = -\frac{1}{\mu_{k-1}}[\sigma(x)\Delta\nabla v_{k-1}(x) + \tau_{k-1}(x)\Delta v_{k-1}(x)]. \quad (2.17)$$

Aplicando o operador Δ em ambos os lados de (2.17), segue que

$$\begin{aligned} -\mu_{k-1}\Delta v_{k-1}(x) &= \Delta[\sigma(x)\Delta\nabla v_{k-1}(x)] + \Delta[\tau_{k-1}(x)\Delta v_{k-1}(x)] \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla[\Delta v_{k-1}(x)] &+ \Delta\sigma(x)\Delta\nabla v_{k-1}(x+1) + \tau_{k-1}(x)\Delta[\Delta v_{k-1}(x)] + \Delta\tau_{k-1}(x)\Delta v_{k-1}(x+1) \\ &+ \mu_{k-1}\Delta v_{k-1}(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla[\Delta v_{k-1}(x)] &+ \Delta\sigma(x)\Delta[\Delta v_{k-1}(x)] + \tau_{k-1}(x)\Delta[\Delta v_{k-1}(x)] + \Delta\tau_{k-1}(x)\Delta[\Delta v_{k-1}(x) + v_{k-1}(x)] \\ &+ \mu_{k-1}\Delta v_{k-1}(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla[\Delta v_{k-1}(x)] &+ [\Delta\sigma(x) + \tau_{k-1}(x) + \Delta\tau_{k-1}(x)]\Delta[\Delta v_{k-1}(x)] + [\Delta\tau_{k-1}(x) + \mu_{k-1}]\Delta v_{k-1}(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla[\Delta v_{k-1}(x)] &+ [\Delta\sigma(x) + \tau_{k-1}(x+1)]\Delta[\Delta v_{k-1}(x)] + [\Delta\tau_{k-1}(x) + \mu_{k-1}]\Delta v_{k-1}(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla[\Delta v_{k-1}(x)] &+ \tau_k(x)\Delta[\Delta v_{k-1}(x)] + \mu_k\Delta v_{k-1}(x) = 0, \end{aligned}$$

onde concluímos que $\Delta v_{k-1}(x)$ é solução da equação (2.15), o que é uma contradição. \square

Proposição 2.6. *Podemos escrever (2.12) e (2.13) em termos das funções que aparecem na equação de diferenças do tipo hipergeométrica (2.7), ou seja, podemos obter expressões explícitas para $\tau_m(x)$ e λ_m em função de $\sigma(x)$, $\tau(x)$ e λ , a saber,*

$$\tau_m(x) = \tau(x+m) + \sigma(x+m) - \sigma(x) \quad (2.18)$$

e

$$\mu_m = \lambda + m\tau' + \frac{1}{2}m(m-1)\sigma''. \quad (2.19)$$

Demonstração. De (2.12),

$$\begin{aligned} \tau_m(x) &= \tau_{m-1}(x+1) + \Delta\sigma(x) \\ &= \tau_{m-1}(x+1) + \sigma(x+1) - \sigma(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \tau_m(x) + \sigma(x) &= \tau_{m-1}(x+1) + \sigma(x+1) \\ &= \tau_{m-2}(x+2) + \sigma(x+2) \\ &\quad \vdots \\ &= \tau_{m-m}(x+m) + \sigma(x+m) \\ &= \tau(x+m) + \sigma(x+m). \end{aligned}$$

Logo, obtemos uma expressão explícita para $\tau_m(x)$:

$$\tau_m(x) = \tau(x+m) + \sigma(x+m) - \sigma(x).$$

Para obter uma fórmula explícita para μ_m observemos que $\Delta\tau_m(x)$ e $\Delta^2\sigma(x)$ são independentes de x . Aplicando o operador Δ em ambos os lados de (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\tau_m &= \Delta\tau_{m-1} + \Delta^2\sigma = (\Delta\tau_{m-2} + \Delta^2\sigma) + \Delta^2\sigma \\ &= \Delta\tau_{m-2} + 2\Delta^2\sigma \\ &\vdots \\ &= \Delta\tau + m\Delta^2\sigma \\ &= \tau' + m\sigma'',\end{aligned}$$

e, consequentemente, de (2.13),

$$\begin{aligned}\mu_m &= \mu_{m-1} + \Delta\tau_{m-1} \\ &= \mu_{m-1} + \tau' + (m-1)\sigma''.\end{aligned}$$

Assim,

$$\mu_m - \mu_{m-1} = \tau' + (m-1)\sigma'' = \Delta\tau_{m-1},$$

e, então,

$$\begin{aligned}\mu_m &= \mu_{m-1} + \Delta\tau_{m-1} \\ &= \mu_{m-2} + \Delta\tau_{m-2} + \Delta\tau_{m-1} \\ &\vdots \\ &= \mu_0 + \Delta\tau_0 + \cdots + \Delta\tau_{m-2} + \Delta\tau_{m-1} \\ &= \lambda + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{k-1} \\ &= \lambda + \sum_{k=1}^m [\tau' + (k-1)\sigma''] \\ &= \lambda + m\tau' + \sum_{k=1}^m (k-1)\sigma'' \\ &= \lambda + m\tau' + \frac{1}{2}m(m-1)\sigma''.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_m = \lambda + m\tau' + \frac{1}{2}m(m-1)\sigma''.$$

□

2.2 Fórmula de Rodrigues

Assim como no Capítulo 1, podemos encontrar uma expressão explícita para as soluções polinomiais de (2.7). Primeiramente, colocaremos as equações (2.7) e (2.11) na forma auto-adjunta. Para isso, multiplicamos ambos os lados de (2.7) pela função $\varrho(x)$. Se essa função satisfaz

$$\Delta[\sigma(x)\varrho(x)] = \tau(x)\varrho(x), \quad (2.20)$$

então

$$\begin{aligned} & \sigma(x)\varrho(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\varrho(x)\Delta y(x) + \lambda\varrho(x)y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sigma(x)\varrho(x)\Delta\nabla y(x) + \Delta[\sigma(x)\varrho(x)]\nabla y(x+1) + \lambda\varrho(x)y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y(x)] + \lambda\varrho(x)y(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Analogamente, multiplicando ambos os lados da equação (2.11) por $\varrho_m(x)$, podemos reduzi-la à forma

$$\Delta[\sigma(x)\varrho_m(x)\nabla v_m(x)] + \mu_m\varrho_m(x)v_m(x) = 0, \quad (2.22)$$

onde a função $\varrho_m(x)$ satisfaz a equação

$$\Delta[\sigma(x)\varrho_m(x)] = \tau_m(x)\varrho_m(x).$$

Fazendo $m = n$ em (2.11), obtemos

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_n(x) + \tau_n(x)\Delta v_n(x) + \mu_n v_n(x) = 0. \quad (2.23)$$

Proposição 2.7. *Se*

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'', \quad (2.24)$$

então existe uma solução particular $y = y_n(x)$ de (2.23) que é um polinômio de grau n , supondo que $\mu_k \neq 0$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Demonstração. Note que $v_n = \text{constante}$ é uma solução particular dessa equação, se $\mu_n = 0$. Como $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, temos que se

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'', \quad (2.25)$$

então existe uma solução particular $y = y_n(x)$ de (2.23) que é um polinômio de grau n , supondo que $\mu_k \neq 0$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

A equação

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_k + \tau_k(x)\Delta v_k + \mu_k v_k = 0$$

para v_k pode ser reescrita na forma

$$v_k(x) = -\frac{1}{\mu_k}[\sigma(x)\nabla v_{k+1}(x) + \tau_k(x)v_{k+1}(x)].$$

É claro que se $v_{k+1}(x)$ é um polinômio, então $v_k(x)$ também é um polinômio, se $\mu_k \neq 0$. \square

Para obter uma expressão explícita para $y_n(x)$, escrevemos (2.7) e (2.23) na forma auto-adjunta

$$\begin{aligned}\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y(x)] + \lambda\varrho(x)y(x) &= 0, \\ \Delta[\sigma(x)\varrho_n(x)\nabla v_n(x)] + \mu_n\varrho_n(x)v_n(x) &= 0.\end{aligned}$$

Aqui, $\varrho(x)$ e $\varrho_n(x)$ satisfazem as equações de diferenças

$$\begin{aligned}\Delta[\sigma(x)\varrho(x)] &= \tau(x)\varrho(x), \\ \Delta[\sigma(x)\varrho_n(x)] &= \tau_n(x)\varrho_n(x).\end{aligned}\tag{2.26}$$

Podemos determinar a conexão entre $\varrho_n(x)$ e $\varrho(x)$ escrevendo a última equação na forma

$$\begin{aligned}\Delta[\sigma(x)\varrho_n(x)] &= \tau_n(x)\varrho_n(x) \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\varrho_n(x) + \Delta\sigma(x)\varrho_n(x+1) &= \tau_n(x) + \varrho_n(x) \\ \Leftrightarrow \sigma(x)[\varrho_n(x+1) - \varrho_n(x)] + \Delta\sigma(x)\varrho_n(x+1) &= \tau_n(x)\varrho_n(x) \\ \Leftrightarrow \sigma(x)\varrho_n(x+1) - \sigma(x)\varrho_n(x) + \Delta\sigma(x)\varrho_n(x+1) &= \tau_n(x)\varrho_n(x) \\ \Leftrightarrow [\sigma(x) + \Delta\sigma(x)]\varrho_n(x+1) &= [\tau_n(x) + \sigma(x)]\varrho_n(x) \\ \Leftrightarrow \sigma(x+1)\varrho_n(x+1) &= [\tau_n(x) + \sigma(x)]\varrho_n(x) \\ \Leftrightarrow \frac{\sigma(x+1)\varrho_n(x+1)}{\varrho_n(x)} &= \tau_n(x) + \sigma(x) = \tau_{n-1}(x+1) + \Delta\sigma(x) + \sigma(x) \\ \Leftrightarrow \frac{\sigma(x+1)\varrho_n(x+1)}{\varrho_n(x)} &= \tau_{n-1}(x) + \sigma(x+1) = \frac{\sigma(x+2)\varrho_{n-1}(x+2)}{\varrho_{n-1}(x+1)}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Daí, segue que (2.26) é equivalente à relação

$$\frac{\sigma(x+1)\varrho_n(x+1)}{\varrho_n(x)} = \frac{\sigma(x+2)\varrho_{n-1}(x+2)}{\varrho_{n-1}(x+1)},$$

ou seja,

$$\frac{\varrho_n(x+1)}{\sigma(x+2)\varrho_{n-1}(x+2)} = \frac{\varrho_n(x)}{\sigma(x+1)\varrho_{n-1}(x+1)} = c_n(x),\tag{2.28}$$

onde $c_n(x)$ é qualquer função periódica de período 1. Precisamos apenas de uma solução particular de (2.27), então podemos tomar $c_n(x) = 1$. Assim, de (2.28), obtemos

$$\begin{aligned}\varrho_n(x) &= \sigma(x+1)\varrho_{n-1}(x+1) \\ &= \sigma(x+1)\sigma(x+2)\varrho_{n-2}(x+2) \\ &\quad \vdots \\ &= \sigma(x+1)\sigma(x+2)\cdots\sigma(x+n)\varrho_0(x+n).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Como $\varrho_0(x) \equiv \varrho(x)$, temos

$$\varrho_n(x) = \varrho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k). \quad (2.30)$$

Agora, de (2.22) e (2.29) obtemos uma simples relação entre $v_m(x)$ e $v_{m+1}(x)$

$$\begin{aligned} \varrho_m(x)v_m(x) &= -\frac{1}{\mu_m} \Delta[\sigma(x)\varrho_m(x)\nabla v_m(x)] \\ &= -\frac{1}{\mu_m} \nabla[\sigma(x+1)\varrho_m(x+1)\nabla v_m(x+1)] \\ &= -\frac{1}{\mu_m} \nabla[\varrho_{m+1}(x)\Delta v_m(x)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varrho_m(x)v_m(x) = -\frac{1}{\mu_m} \nabla[\varrho_{m+1}(x)v_{m+1}(x)].$$

Para $m < n$, obtemos

$$\begin{aligned} \varrho_m(x)v_m(x) &= -\frac{1}{\mu_m} \nabla[\varrho_{m+1}(x)v_{m+1}(x)] \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) \nabla^2[\varrho_{m+2}(x)v_{m+2}(x)] \\ &\quad \vdots \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) \cdots \left(-\frac{1}{\mu_{m+(n-m+1)}}\right) \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)v_n(x)] \\ &= \frac{(-1)^{n-m}}{\mu_m \mu_{m+1} \mu_{n-1}} \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)v_n(x)] \\ &= \frac{(-1)^m \mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{m-1}}{(-1)^n \mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{m-1} \mu_m \mu_{m+1} \mu_{n-1}} \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)v_n(x)] \\ &= \frac{(-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k}{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k} \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)v_n(x)] \\ &= \frac{A_n}{A_m} \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)v_n(x)], \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde

$$A_j = (-1)^j \prod_{k=0}^{j-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \quad (2.32)$$

Se $y = y_n(x)$, temos $v_n(x) = \Delta^n y_n(x) = \text{constante}$ e, de (2.31),

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \frac{A_m}{A_n \varrho_m(x)} \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)v_n(x)] \\ &= \frac{A_m}{A_n \varrho_m(x)} v_n(x) \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)] \\ &= \frac{A_m}{\varrho_m(x)} \frac{v_n(x)}{A_n} \nabla^{n-m}[\varrho_n(x)] \end{aligned}$$

$$= \frac{A_m B_n}{\varrho_m(x)} \nabla^{n-m} [\varrho_n(x)],$$

isto é,

$$\Delta^m y_n(x) = v_m(x) = \frac{A_m B_n}{\varrho_m(x)} \nabla^{n-m} [\varrho_n(x)], \quad (2.33)$$

onde

$$A_m = A_m(\lambda) \mid_{\lambda=\lambda_n} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma'' \right), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad m \leq n; \\ B_n &= \frac{v_n(x)}{A_n} = \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_n} = \frac{1}{A_n} y_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

De (2.33), com $m = 0$, obtemos uma expressão explícita para $y_n(x)$:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)} \nabla^n [\varrho_n(x)]. \quad (2.35)$$

Portanto, acabamos de provar o seguinte resultado:

Proposição 2.8. *As soluções polinomiais de (2.7) são determinadas por (2.35), a menos de um fator de normalização B_n . Essas soluções correspondem aos valores $\lambda = \lambda_n$ de (2.25).*

A equação (2.35) é a fórmula análoga de diferenças finitas à fórmula de Rodrigues (1.7).

2.3 A Propriedade de Ortogonalidade

As soluções polinomiais $y_n(x)$ possuem a propriedade de ortogonalidade sob certas restrições nos coeficientes de (2.7). Para obter essa propriedade, usamos as equações para $y_n(x)$ e $y_m(x)$ na forma auto-adjunta

$$\begin{aligned} \Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)] + \lambda_n \varrho(x) y_n(x) &= 0, \\ \Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)] + \lambda_m \varrho(x) y_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por $y_m(x)$ e a segunda por $y_n(x)$, subtraindo a segunda da primeira e utilizando as propriedades dos operadores de diferença, obtemos

$$\begin{aligned} &y_m(x)\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)] + \lambda_n \varrho(x) y_n(x) y_m(x) \\ &- y_n(x)\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)] - \lambda_m \varrho(x) y_m(x) y_n(x) = 0 \\ \iff &y_m(x)\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)] - y_n(x)\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)] + (\lambda_n - \lambda_m) \varrho(x) y_m(x) y_n(x) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \varrho(x) y_m(x) y_n(x) = y_m(x)\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)] - y_n(x)\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)]$$

$$\begin{aligned}
&= y_m(x) \{ \sigma(x) \varrho(x) \Delta \nabla y_n(x) + \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] \nabla y_n(x+1) \} \\
&\quad - y_n(x) \{ \sigma(x) \varrho(x) \Delta \nabla y_m(x) + \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] \nabla y_m(x+1) \} \\
&= \sigma(x) \varrho(x) y_m(x) \Delta \nabla y_n(x) - \sigma(x) \varrho(x) y_n(x) \Delta \nabla y_m(x) \\
&\quad + \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] y_m(x) \nabla y_n(x+1) + \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] \Delta y_m(x) \Delta y_n(x) \\
&\quad - \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] \Delta y_n(x) \Delta y_m(x) - \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] y_n(x) \nabla y_m(x+1) \\
&= \sigma(x) \varrho(x) [y_m(x) \Delta \nabla y_n(x) + \Delta y_m(x) \Delta y_n(x) \\
&\quad - \Delta y_n(x) \Delta y_m(x) - y_n(x) \Delta \nabla y_m(x)] \\
&\quad + \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] [\Delta y_m(x) + y_m(x)] \nabla y_n(x+1) \\
&\quad - \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] [\Delta y_n(x) + y_n(x)] \nabla y_m(x+1) \\
&= \sigma(x) \varrho(x) [y_m(x) \Delta \nabla y_n(x) + \Delta y_m(x) \nabla y_n(x+1) \\
&\quad - \Delta y_n(x) \nabla y_m(x+1) - y_n(x) \Delta \nabla y_m(x)] \\
&\quad + \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] y_m(x+1) \nabla y_n(x+1) \\
&\quad - \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] y_n(x+1) \nabla y_m(x+1) \\
&= \varrho(x) \sigma(x) \Delta [y_m(x) \nabla y_n(x) - y_n(x) \nabla y_m(x)] \\
&\quad + \Delta[\sigma(x) \varrho(x)] [y_m(x+1) \nabla y_n(x+1) - y_n(x+1) \nabla y_m(x+1)] \\
&= \Delta \{ \sigma(x) \varrho(x) [y_m(x) \nabla y_n(x) - y_n(x) \nabla y_m(x)] \}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \varrho(x) y_m(x) y_n(x) = \Delta \{ \sigma(x) \varrho(x) [y_m(x) \nabla y_n(x) - y_n(x) \nabla y_m(x)] \}.$$

Se colocarmos $x = x_i$, $x_{i+1} = x_i + 1$ e somarmos os valores $x = x_i$ para os quais $a \leq x_i \leq b - 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\lambda_m - \lambda_n) \sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i) y_n(x_i) \varrho(x_i) &= -\sigma(a) \varrho(a) [y_m(a) \nabla y_n(a) - y_n(a) \nabla y_m(a)] \\
&\quad + \sigma(a+1) \varrho(a+1) [y_m(a+1) \nabla y_n(a+1) - y_n(a+1) \nabla y_m(a+1)] \\
&\quad - \sigma(a+1) \varrho(a+1) [y_m(a+1) \nabla y_n(a+1) - y_n(a+1) \nabla y_m(a+1)] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sigma(b-1) \varrho(b-1) [y_m(b-1) \nabla y_n(b-1) - y_n(b-1) \nabla y_m(b-1)] \\
&\quad - \sigma(b-1) \varrho(b-1) [y_m(b-1) \nabla y_n(b-1) - y_n(b-1) \nabla y_m(b-1)] \\
&\quad + \sigma(b) \varrho(b) [y_m(b) \nabla y_n(b) - y_n(b) \nabla y_m(b)] \\
&= \sigma(x) \varrho(x) [y_m(x) \nabla y_n(x) - y_n(x) \nabla y_m(x)] \Big|_a^b.
\end{aligned}$$

Como a expressão $[y_m(x) \nabla y_n(x) - y_n(x) \nabla y_m(x)]$ é um polinômio em x , obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.9 (Propriedade de Ortogonalidade). *As soluções polinomiais de (2.7) são ortogonais em $[a, b-1]$ com respeito à função peso $\varrho(x)$:*

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i) y_n(x_i) \varrho(x_i) = \delta_{mn} d_n^2, \quad (2.36)$$

sob as condições de contorno

$$\sigma(x)\varrho(x)x^k \Big|_{x=a,b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.37)$$

onde d_n^2 é a norma ao quadrado de $y_n(x)$ e δ_{mn} é a função delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{se } m = n, \\ 1, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Definição 2.3 (Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Discreta). *Chamamos os polinômios $y_n(x)$ de polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta se a equação (2.36) é válida, o intervalo (a, b) está na reta real e a função peso $\varrho(x)$ satisfaz (2.20) e (2.37). Estes polinômios são usualmente considerados sob as condições adicionais $\varrho(x_i) > 0$, para $a \leq x_i \leq b - 1$, e*

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &> 0, & \text{para } a + 1 \leq x_i \leq b - 1, \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) &> 0, & \text{para } a \leq x_i \leq b - 2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora, faremos algumas considerações a respeito das escolhas de a e b para que satisfaçam as condições de contorno (2.37) e a positividade da função peso $\varrho(x_i)$ no intervalo de ortogonalidade $[a, b - 1]$. Se a é finito, então, por hipótese, $\varrho(a) > 0$, ou seja, a é raiz de $\sigma(x)$, pela condição de contorno (2.37) em a . Como uma mudança linear de variável preserva o tipo da equação, é sempre possível, se $\sigma(x) \neq \text{const}$, tomar $\sigma(0) = 0$. Isto é, podemos supor $a = 0$. Se b é finito, por (2.20),

$$\begin{aligned} \Delta[\sigma(b - 1)\varrho(b - 1)] &= \tau(b - 1)\varrho(b - 1) \\ \iff \sigma(b)\varrho(b) - \sigma(b - 1)\varrho(b - 1) &= \tau(b - 1)\varrho(b - 1) \\ \iff \sigma(b)\varrho(b) &= [\sigma(b - 1) + \tau(b - 1)]\varrho(b - 1). \end{aligned}$$

Como $\varrho(b - 1) > 0$, temos

$$\sigma(b - 1) + \tau(b - 1) = 0. \quad (2.39)$$

Quando $b = +\infty$, a condição de contorno (2.37) será satisfeita se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \sigma(x)\varrho(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

O mesmo raciocínio se aplica quando $a = -\infty$.

2.4 Os Polinômios de Hahn, Meixner, Kravchuk e Charlier

Até o momento, consideramos um método geral de estudar os polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta como soluções da equação de diferenças do tipo hipergeométrica em uma malha uniforme. Em particular, uma representação dessas soluções na forma da fórmula de Rodrigues foi obtida e sua propriedade ortogonalidade, sob certas condições, foi provada. A investigação de sistemas específicos de polinômios é reduzido à resolução da equação de diferenças de primeira ordem (2.20)

para a função $\varrho(x)$, que aparece na fórmula de Rodrigues (2.35) e na propriedade de ortogonalidade (2.36). De modo a encontrar expressões explícitas para $\varrho(x)$, reescrevemos a equação de diferenças (2.20):

$$\begin{aligned}
 & \Delta[\sigma(x)\varrho(x)] = \tau(x)\varrho(x) \\
 \iff & \sigma(x+1)\varrho(x+1) - \sigma(x)\varrho(x) = \tau(x)\varrho(x) \\
 \iff & \sigma(x+1)\varrho(x+1) = [\sigma(x) + \tau(x)]\varrho(x) \\
 \iff & \frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}. \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

Pode-se verificar que a solução da equação de diferença

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = f(x),$$

cujo lado direito pode ser expresso como um produto ou quociente de duas funções, possui a seguinte propriedade:

Proposição 2.10. *Se as funções $\varrho_1(x)$ e $\varrho_2(x)$ são soluções das equações*

$$\frac{\varrho_1(x+1)}{\varrho_1(x)} = f_1(x) \quad \frac{\varrho_2(x+1)}{\varrho_2(x)} = f_2(x),$$

então a solução da equação

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = f(x)$$

com $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ e $\varrho(x) = \varrho_1(x)\varrho_2(x)$ e com $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ e $\varrho(x) = \varrho_1(x)/\varrho_2(x)$.

Como o lado direito de (2.40) é um quociente de polinômios, segue que sua solução pode ser expressa em termos das soluções das equações de diferença

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \gamma + x, \tag{2.41}$$

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \gamma - x, \tag{2.42}$$

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \gamma, \tag{2.43}$$

onde γ é uma constante. Como

$$\gamma + x = \frac{\Gamma(\gamma + x + 1)}{\Gamma(\gamma + x)},$$

onde Γ é a função gama de Euler¹, uma solução particular de (2.41) é da forma

$$\varrho(x) = \Gamma(\gamma + x).$$

¹A função gama de Euler é definida por $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, onde $x > 0$. Uma de suas propriedades fundamentais é $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Ver [1] e [10].

Analogamente, usando a equação

$$\gamma - x = \frac{\Gamma(\gamma - x + 1)}{\Gamma(\gamma - x)} = \frac{1}{\frac{\Gamma[(\gamma + 1) - (x + 1)]}{\Gamma(\gamma + 1 - x)}},$$

obtemos uma solução particular de (2.42)

$$\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1 - x)}.$$

Por fim, note que $\varrho(x) = \gamma^x$ é uma solução particular de (2.43). Além disso, se multiplicarmos $\varrho(x)$ por uma constante $C \neq 0$ ainda teremos uma solução de (2.40).

Agora, encontraremos soluções de (2.40) correspondendo aos possíveis graus de $\sigma(x)$.

2.4.1 Polinômios de Hahn

Consideraremos primeiramente os casos em que $\sigma(x)$ é um polinômio de grau dois.

1º caso: Lembre-se que buscamos uma função $\sigma(x)$ positiva em um dado intervalo (a, b) . A fim de satisfazer essa restrição, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\sigma(x) = x(\gamma_1 - x),$$

e, portanto,

$$\sigma(x) + \tau(x) = (x + \gamma_2)(\gamma_3 - x),$$

onde γ_1, γ_2 e γ_3 são constantes. Tomando $(a, b) = (0, N)$, as condições (2.38) e (2.39) ficam

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &> 0, \quad 1 \leq x_i \leq N - 1, \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) &> 0, \quad 0 \leq x_i \leq N - 2, \\ \sigma(N - 1) + \tau(N - 1) &= 0, \end{aligned} \tag{2.44}$$

e elas serão satisfeitas se

- $\sigma(x) > 0, \forall x \in (0, N - 1) \iff \gamma_1 > N - 1$.

Então podemos indexar γ_1 com um parâmetro, tomando $\gamma_1 = N + \alpha$. Daí, $N + \alpha = \gamma_1 > N - 1 \iff \alpha > -1$.

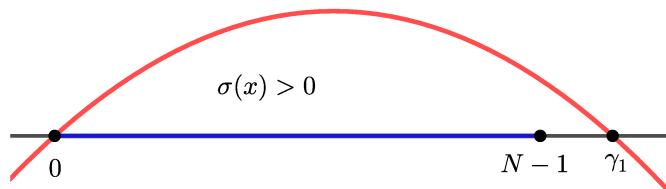


Figura 2.1: Gráfico de $\sigma(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau dois com raízes 0 e γ_1 . De modo a satisfazer a primeira condição, devemos ter $\gamma_1 > N - 1$, como mostrado na figura. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) > 0$.

- $\sigma(N-1) + \tau(N-1) = 0 \iff (N-1 + \gamma_2)(\gamma_3 - (N-1)) = 0 \iff \gamma_2 = -(N-1)$ ou $\gamma_3 = N-1$.
- $\sigma(0) + \tau(0) > 0 \iff \gamma_2 \gamma_3 > 0 \iff \gamma_2 > 0$ e $\gamma_3 > 0$ ou $\gamma_2 < 0$ e $\gamma_3 < 0$.

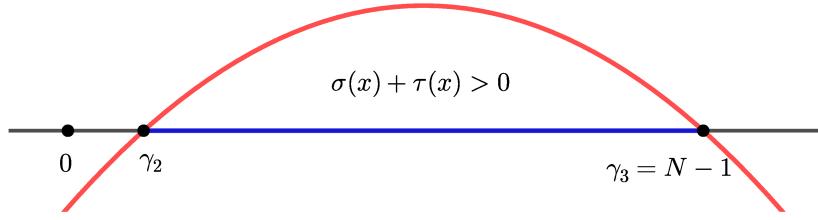


Figura 2.2: Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau dois com raízes γ_2 e γ_3 . De modo a satisfazer a segunda e terceira condição, devemos ter $\gamma_2 > 0$ e $\gamma_3 = N - 1$, como mostrado na figura. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) + \tau(x) > 0$.

Pondo $\gamma_3 = N - 1$, temos $\gamma_2 > 0$. Indexando γ_2 , segue que $\gamma_2 = \beta + 1 > 0 \iff \beta > -1$. Tomando

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, \\ f_2(x) &= \gamma_1 - x = N + \alpha - x, \\ f_3(x) &= x + \gamma_2 = \beta + 1 + x, \\ f_4(x) &= \gamma_3 - x = N - 1 - x, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \varrho_1(x) &= \Gamma(x), \\ \varrho_2(x) &= \frac{1}{\Gamma(N + \alpha + 1 - x)}, \\ \varrho_3(x) &= \Gamma(\beta + 1 + x), \\ \varrho_4(x) &= \frac{1}{\Gamma(N - x)}. \end{aligned}$$

Assim, (2.40) se reduz a

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)} = \frac{f_3(x)f_4(x)}{f_1(x+1)f_2(x+1)} = \frac{(x + \beta + 1)(N - 1 - x)}{(x + 1)(N + \alpha - x - 1)},$$

cuja solução particular é dada por

$$\varrho(x) = \frac{\varrho_3(x)\varrho_4(x)}{\varrho_1(x+1)\varrho_2(x+1)} = \frac{\Gamma(\beta + 1 + x)\Gamma(N + \alpha - x)}{\Gamma(N - x)\Gamma(x + 1)}. \quad (2.45)$$

Agora, discutiremos os motivos para escolher γ_1 e γ_2 nas formas $\gamma_1 = N + \alpha$ e $\gamma_2 = \beta + 1$. De modo natural, esperamos que a solução polinomial $y_n(x)$, depois de uma mudança linear de variável $x = N(1 + s)/2$, que leva o intervalo $(0, N)$ ao intervalo $(-1, 1)$, converja ao polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(s)$ quando $N \rightarrow \infty$, isto é, quando $\Delta s = h = 2/N \rightarrow 0$, e a função peso $\varrho(x)$ converja, a menos

de um fator constante, à função peso $(1-s)^\alpha(1+s)^\beta$ dos polinômios de Jacobi. Vimos que a solução de (2.40) para

$$\sigma(x) = x(\gamma_1 - x) \quad \text{e} \quad \sigma(x) + \tau(x) = (x + \gamma_2)(N - 1 - x),$$

é dada por

$$\varrho(x) = \frac{\Gamma(\gamma_2 + x)\Gamma(\gamma_1 - x)}{\Gamma(N - x)\Gamma(x + 1)}.$$

Fazendo a mudança de variável $x = N(1+s)/2$ obtemos

$$\begin{aligned} \varrho(s) := \varrho\left(\frac{N}{2}(1+s)\right) &= \frac{\Gamma\left(\gamma_2 + \frac{N}{2}(1+s)\right)\Gamma\left(\gamma_1 - \frac{N}{2}(1+s)\right)}{\Gamma\left(N - \frac{N}{2}(1+s)\right)\Gamma\left(\frac{N}{2}(1+s) + 1\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}(1+s) + \gamma_2\right)\Gamma\left(\frac{N}{2}(1-s) + \gamma_1 - N\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}(1+s) + 1\right)\Gamma\left(\frac{N}{2}(1-s)\right)} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \Gamma(z+a) &= (z+a-1)\Gamma(z+a-1) \\ &= (z+a-1)(z+a-2)\cdots z\Gamma(z), \end{aligned}$$

temos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)z^a} = 1.$$

Logo,

$$\varrho(s) \approx \left[\frac{N}{2}(1-s)\right]^{\gamma_1-N} \left[\frac{N}{2}(1+s)\right]^{\gamma_2-1},$$

quando $N \rightarrow \infty$. Consequentemente, é natural tomar $\gamma_1 - N = \alpha$ e $\gamma_2 - 1 = \beta$, ou seja, $\gamma_1 = N + \alpha$ e $\gamma_2 = \beta + 1$.

Os polinômios $y_n(x)$ obtidos pela fórmula de Rodrigues (2.35) com $B_n = (-1)^n/n!$ e a função peso $\varrho(x)$ definida por (2.45) são chamados de *polinômios de Hahn* e denotados por $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$. Estes polinômios são ortogonais em $[0, N-1]$ quando $\alpha > -1$ e $\beta > -1$.

2º caso: Sejam

$$\sigma(x) = x(x + \gamma_1), \quad \sigma(x) + \tau(x) = (\gamma_2 - x)(\gamma_3 - x).$$

Novamente, tomando $(a, b) = (0, N)$, as funções acima devem satisfazer

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &> 0, \quad 1 \leq x_i \leq N-1 \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) &> 0, \quad 0 \leq x_i \leq N-2 \\ \sigma(N-1) + \tau(N-1) &= 0. \end{aligned}$$

Então

- $\sigma(x_i) > 0, \forall x \in (1, N-1) \iff -\gamma_1 < 1 \iff \gamma_1 > -1$.

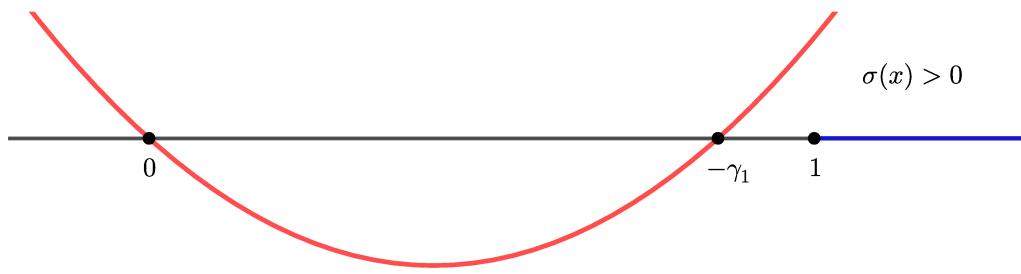


Figura 2.3: Gráfico de $\sigma(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau dois com raízes 0 e $-\gamma_1$. De modo a satisfazer a primeira condição, devemos ter $-\gamma_1 < 1$, como mostrado na figura. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) > 0$.

- $\sigma(x_i) + \tau(x_i) > 0, \forall x \in (0, N-2)$ e $\sigma(N-1) + \tau(N-1) = 0 \iff \begin{cases} \gamma_3 = N-1 \\ \gamma_2 > N-2 \end{cases}$

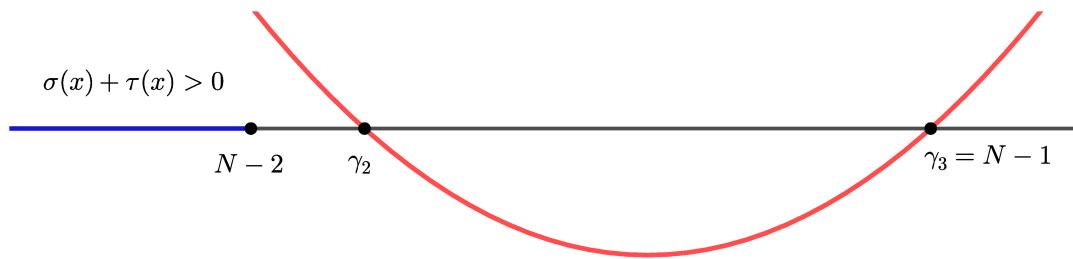


Figura 2.4: Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau dois com raízes γ_2 e γ_3 . De modo a satisfazer a segunda e terceira condição, devemos ter $\gamma_2 > N-2$ e $\gamma_3 = N-1$, como mostrado na figura. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) + \tau(x) > 0$.

Utilizando o mesmo raciocínio do caso anterior, obtemos

$$\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_2 + 1 - x)\Gamma(\gamma_3 + 1 - x)\Gamma(x + 1)\Gamma(\gamma_1 + x + 1)}.$$

Como $\gamma_3 = N-1$, pondo $\gamma_1 = \mu > -1$ e $\gamma_2 = \nu + N-1 > N-2$, obtemos

$$\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(N + \nu - x)\Gamma(N - x)\Gamma(x + 1)\Gamma(\mu + 1 + x)}, \quad (2.46)$$

com $\mu > -1$ e $\nu > -1$. Os polinômios obtidos pela fórmula de Rodrigues com $B_n = 1/n!$ e $\varrho(x)$ definida por (2.46) também são chamados de polinômios de Hahn e denotados por $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$.

A razão pela qual estes polinômios também são chamados de polinômios de Hahn é justificada pelo seguinte resultado:

Proposição 2.11. *As expressões de $\sigma(x)$, $\tau(x)$ e λ para h_n e \tilde{h}_n diferem apenas em sinal. Consequentemente, os polinômios $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ e $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N) = \tilde{h}_n^{(-N-\alpha, -N-\beta)}(x, N)$ satisfazem a mesma equação diferencial.*

Demonstração. Para $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$, temos

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= x(N + \alpha - x) \\ &= -x^2 + x(N + \alpha)\end{aligned}$$

e

$$\sigma(x) + \tau(x) = (x + \beta + 1)(N - 1 - x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\tau(x) &= (x + \beta + 1)(N - 1 - x) - \sigma(x) \\ &= -x^2 + (N - 1)x - (\beta + 1)x + (\beta + 1)(N - 1) + x^2 - (N + \alpha)x \\ &= -(\beta + \alpha + 2)x + (\beta + 1)(N - 1).\end{aligned}$$

Então $\tau'(x) = -(\beta + \alpha + 2)$ e $\sigma''(x) = -1$. Logo,

$$\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = n(\beta + \alpha + 2) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Para $h_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$, se tomarmos $\mu = -N - \alpha$ e $\nu = -N - \beta$, temos

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= x(x + \mu) \\ &= x(x - N - \alpha) \\ &= -x(N + \alpha - x) \\ &= x^2 - (N + \alpha)x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(x) + \tau(x) &= (\nu + N - 1 - x)(N - 1 - x) \\ &= (-\beta - 1 - x)(N - 1 - x) \\ &= -(x + \beta + 1)(N - 1 - x).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\tau(x) &= -(x + \beta + 1)(N - 1 - x) - \sigma(x) \\ &= -[-x^2 + (N - 1)x - (\beta + 1)x + (\beta + 1)(N - 1)] - x^2 + (N + \alpha)x \\ &= (\beta + \alpha + 2)x - (\beta + 1)(N - 1).\end{aligned}$$

Então $\tau'(x) = \beta + \alpha + 2$ e $\sigma''(x) = 1$. Logo,

$$\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = -n(\beta + \alpha + 2) - \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

2.4.2 Polinômios de Meixner, Kravchuk e Charlier

Agora, consideremos $\sigma(x)$ sendo um polinômio de grau um, $\sigma(x) = x$.

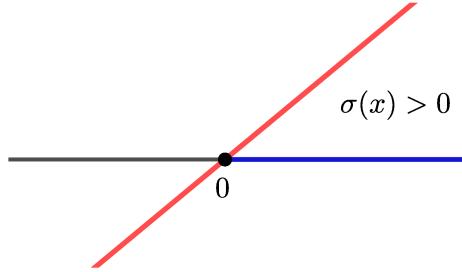


Figura 2.5: Gráfico de $\sigma(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau um, tendo 0 como raiz. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) > 0$.

Analisaremos três casos:

$$\sigma(x) + \tau(x) = \begin{cases} \mu(\gamma + x) \\ \mu(\gamma - x) \\ \mu \end{cases},$$

onde μ e γ são constantes.

1º caso: Considere $\sigma(x) = x$, $\sigma(x) + \tau(x) = \mu(\gamma + x)$, $\mu > 0$.

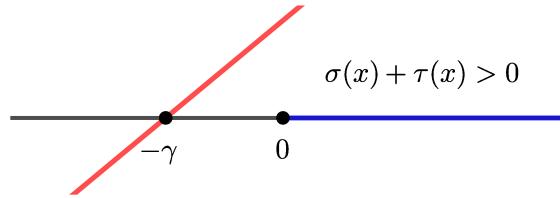


Figura 2.6: Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau um, tendo $-\gamma$ como raiz. De modo a satisfazer as condições para $\sigma(x) + \tau(x)$, devemos ter $-\gamma < 0$. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) + \tau(x) > 0$.

Temos

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)} = \frac{\mu(\gamma + x)}{x+1},$$

então

$$\varrho(x) = \frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x+1)}.$$

As condições de contorno ficam

$$\sigma(x) \varrho(x) x^k \Big|_{x=a} = \frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x+1)} x^{k+1} \Big|_{x=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) \varrho(x) x^k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x+1)} x^{k+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x+1)} x^k \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \frac{x^\gamma}{x^\gamma} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{k+\gamma} \mu^x \frac{\Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x) x^\gamma} = 0.$$

Por conveniência, tomamos

$$\varrho(x) = C \frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x + 1)},$$

onde $C = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}$ é uma constante. Obtemos então a *distribuição de Pascal* da teoria de probabilidade

$$\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x + 1)} = \frac{\mu^x (\gamma)_x}{\Gamma(x + 1)}.$$

Aqui, denotamos

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Escolhendo $B_n = \mu^{-n}$, os polinômios correspondentes são chamados de *polinômios de Meixner* e denotados por $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$.

2º caso: Considere $\sigma(x) = x$, $\sigma(x) + \tau(x) = \mu(\gamma - x)$, $\mu > 0$.

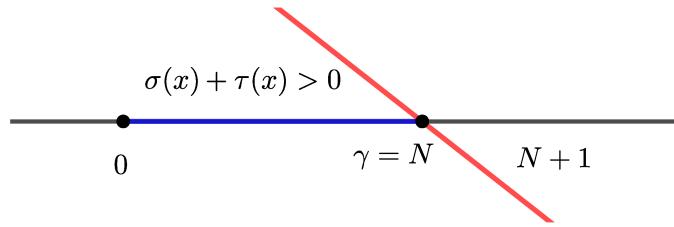


Figura 2.7: Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é polinômio de grau um, tendo γ como raíz. De modo a satisfazer as condições para $\sigma(x) + \tau(x)$, devemos ter $\gamma = N$. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) + \tau(x) > 0$.

Neste caso, temos

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)} = \frac{\mu(\gamma - x)}{x+1},$$

então

$$\varrho(x) = \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma+1-x)}. \quad (2.47)$$

Tomando $a = 0$ e $b = N + 1$, as condições (2.38) e (2.39) ficam

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &> 0, \quad 1 \leq x_i \leq N, \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) &> 0, \quad 0 \leq x_i \leq N-1, \\ \sigma(N) + \tau(N) &= 0. \end{aligned}$$

De $\sigma(N) + \tau(N) = 0$, segue que $\gamma = N$. Reescrevemos $\mu = \frac{p}{q}$, $p > 0$, $q > 0$ e $p + q = 1$, ou seja, $\mu = \frac{p}{1-p}$. Por conveniência, consideramos

$$\varrho(x) = C \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma+1-x)},$$

onde $C = q^N \Gamma(N + 1)$ é uma constante. Daí,

$$\varrho(x) = \left(\frac{p}{q}\right)^x \frac{q^N \Gamma(N + 1)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(\gamma + 1 - x)},$$

com $p > 0$, $q > 0$ e $p + q = 1$. Tomando $x_i = i$, $i = 0, 1, \dots, N$, e sabendo que $\Gamma(n) = (n - 1)!$, para $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} \varrho(x_i) &= \left(\frac{p}{q}\right)^i q^N \frac{\Gamma(N + 1)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(N + 1 - i)} \\ &= p^i q^{N-i} \frac{N!}{i!(N - i)!} \\ &= p^i (1 - p)^{N-i} \binom{N}{i}, \quad 0 < p < 1. \end{aligned}$$

Assim, $p(x_i)$ torna-se a *distribuição binomial* da teoria de probabilidade.

Escolhendo $B_n = (-1)^n q^n / n!$, os polinômios correspondentes são chamados de *polinômios de Kravchuk* e denotados por $k_n^{(p)}(x, N)$.

3º caso: Considere $\sigma(x) = x$, $\sigma(x) + \tau(x) = \mu$, μ constante.

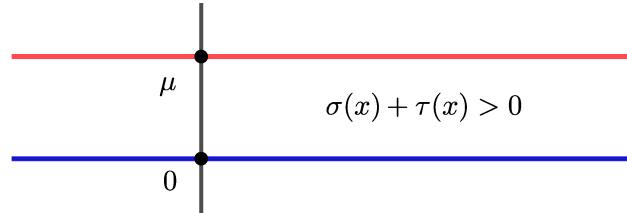


Figura 2.8: Gráfico de $\sigma(x) + \tau(x)$ (destacado em vermelho) no caso em que é constante. De modo a satisfazer as condições para $\sigma(x) + \tau(x)$, devemos ter $\mu > 0$. O intervalo destacado em azul indica onde $\sigma(x) + \tau(x) > 0$, mas, neste caso, consideraremos apenas $x \in (0, +\infty)$.

Temos

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)} = \frac{\mu}{x+1},$$

então

$$\varrho(x) = \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)}.$$

As condições de contorno ficam

- $\sigma(x)\varrho(x)x^k \Big|_{x=a} = x^{k+1} \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)} \Big|_{x=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x)\varrho(x)x^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{k+1} \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)} = 0, \quad \mu > 0.$

Por conveniência, tomamos

$$\varrho(x) = C \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)},$$

onde $C = e^{-\mu}$ é uma constante. Neste caso, obtemos

$$\varrho(x_i) = \frac{e^{-\mu} \mu^i}{i!},$$

que é a *distribuição de Poisson* da teoria de probabilidade.

Escolhendo $B_n = \mu^{-n}$, os polinômios correspondentes são chamados de *polinômios de Charlier* e denotados por $c_n^{(\mu)}(x)$.

O caso $\sigma(x) = 1$ não é de interesse, pois não leva a nenhum novo polinômio.

2.5 Informações sobre os Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Discreta

Nos casos analisados, encontramos expressões para $\sigma(x)$, $\sigma(x) + \tau(x)$ e $\varrho(x)$. Utilizando a expressão para $\sigma(x) + \tau(x)$, podemos encontrar $\tau(x)$. Além disso, podemos utilizar a equação (2.25) para encontrar $\lambda = \lambda_n$. Assim, podemos obter as informações sobre os polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta que se encontram na Tabela 2.1. Aqui, omitimos as informações dos polinômios de Hahn $h_n^{(\mu,\nu)}(x, N)$, pois estes podem ser escritos como $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ fazendo uma mudança de variável.

	Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$	Meixner $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$	Kravchuk $k_n^{(p)}(x, N)$	Charlier $c_n^{(\mu)}(x)$
Parâmetros	$\alpha > -1, \beta > -1$	$\gamma > 0$ $0 < \mu < 1$	$p > 0, q > 0$ $p + q = 1$	$\mu > 0$
$(a, b - 1)$	$(0, N - 1)$	$(0, +\infty)$	$(0, N)$	$(0, +\infty)$
B_n	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{1}{\mu^n}$	$(-1)^n \frac{q^n}{n!}$	$\frac{1}{\mu^n}$
$\varrho(x)$	$\frac{\Gamma(\beta + 1 + x)\Gamma(N + \alpha - x)}{\Gamma(N - x)\Gamma(x + 1)}$	$\frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x + 1)}$	$\frac{N! p^x q^{N-x}}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N + 1 - x)}$	$\frac{e^{-\mu} \mu^x}{\Gamma(x + 1)}$
$\sigma(x)$	$x(N + \alpha - x)$	x	x	x
$\tau(x)$	$(\beta + 1)(N - 1) - (\alpha + \beta + 2)x$	$\gamma\mu - x(1 - \mu)$	$(Np - x)/q$	$\mu - x$
λ_n	$n(\alpha + \beta + n + 1)$	$n(1 - \mu)$	n/q	n

Tabela 2.1: Dados dos Polinômios de Hahn, Meixner, Kravchuk e Charlier.

Capítulo 3

Teorema de Stieltjes: Caso Contínuo

Neste capítulo provaremos o Teorema de Stieltjes (ver [8] e [16]) e uma extensão para o caso de intervalos simétricos (ver [2] e [11]), que serão utilizados para obter informações sobre a monotonicidade dos zeros de polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua (ver [11]). Antes de demonstrar o Teorema de Stieltjes e a extensão para o caso de intervalos simétricos, precisaremos de alguns resultados preliminares (ver [9], [12] e [18]), que serão apresentados a seguir.

3.1 Resultados Preliminares

Definição 3.1. *Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios que satisfazem a relação de ortogonalidade com relação a uma função peso $\varrho(x)$, isto é,*

$$\int_a^b p_m(x)p_n(x)\varrho(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Chamamos os polinômios p_n de polinômios ortogonais.

Proposição 3.1. *Todo polinômio $q_n(x)$ de grau n pode ser representado como uma combinação linear dos polinômios ortogonais $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, ou seja,*

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{kn} p_k(x). \quad (3.1)$$

Demonstração. Como $p_k(x)$ é um polinômio de grau exatamente k , o conjunto $\{p_0, \dots, p_n\}$ é uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n . \square

Proposição 3.2. *A relação de ortogonalidade*

$$\int_a^b p_m(x)p_n(x)\varrho(x)dx = 0, \quad m \neq n, \quad (3.2)$$

é equivalente a

$$\int_a^b p_n(x)x^m\varrho(x)dx = 0 \quad m < n. \quad (3.3)$$

Demonstração. Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Suponha $m < n$. Primeiramente, suponha que os polinômios p_n satisfaçam a equação (3.3). Então, expandindo $p_m(x)$ em potências de x , ou seja, escrevendo

$$p_m(x) = a_n x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^m a_k x^k,$$

e substituindo na integral de (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b p_m(x) p_n(x) \varrho(x) dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^m a_k x^k p_n(x) \varrho(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^k p_n(x) \varrho(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Agora, suponha que os polinômios p_n satisfaçam a equação (3.2). De (3.1), temos

$$x^m = \sum_{k=0}^m c_{km} p_k(x).$$

Então, de (3.2),

$$\begin{aligned} \int_a^b x^m p_n(x) \varrho(x) dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^m c_{km} p_k(x) p_n(x) \varrho(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^m c_{km} \int_a^b p_k(x) p_n(x) \varrho(x) dx = 0. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.1. *Seja $p_n(x)$ um polinômio ortogonal de grau n . Então $p_n(x)$ é ortogonal a todo polinômio de grau menor do que n .*

Demonstração. Seja $q_m(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau $m < n$. Utilizando a relação (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b q_m(x) p_n(x) \varrho(x) dx &= \int_a^b (a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0) p_n(x) \varrho(x) dx \\ &= a_m \int_a^b p_n(x) x^m \varrho(x) dx + \cdots + a_1 \int_a^b p_n(x) x \varrho(x) dx + a_0 \int_a^b p_n(x) x^0 \varrho(x) dx \\ &= 0 + \cdots + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.3. *Os zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua são reais, simples e estão localizados no intervalo de ortogonalidade (a, b) .*

Demonstração. Sejam $p_n(x)$ um polinômio ortogonal clássico de uma variável contínua de grau $n > 0$ e x_1, \dots, x_n seus zeros. Primeiramente, mostraremos que $p_n(x)$ tem pelo menos um zero em (a, b) . Suponha que $p_n(x)$ não tenha zeros em (a, b) . Então $p_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) , ou seja, $p_n(x) > 0$ ou $p_n(x) < 0$ em (a, b) . Assim,

$$\int_a^b p_n(x) \varrho(x) dx \neq 0,$$

pois $\varrho(x) > 0$. Mas, pelo Corolário 3.1,

$$\int_a^b p_n(x) \varrho(x) dx = \int_a^b 1 \cdot p_n(x) \varrho(x) dx = \int_a^b x^0 p_n(x) \varrho(x) dx = 0,$$

que é uma contradição. Logo, $p_n(x)$ tem pelo menos um zero em (a, b) . Sejam x_1, \dots, x_k os zeros distintos de $p_n(x)$ em (a, b) , com $k \leq n$. Defina

$$q_k(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Então o produto

$$q_k(x) p_n(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_k)^2 (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

não muda de sinal no intervalo (a, b) , pois os zeros x_{k+1}, \dots, x_n não estão em (a, b) . Logo,

$$\int_a^b p_n(x) q_k(x) \varrho(x) dx \neq 0.$$

Daí, segue que $k = n$, pois, se $k < n$,

$$\int_a^b p_n(x) q_k(x) \varrho(x) dx = 0,$$

pelo Corolário 3.1. □

Definição 3.2. Dizemos que uma matriz $A = [a_{jk}]$ é estritamente diagonal dominante se

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|.$$

Proposição 3.4. Se $A = [a_{jk}]$ é uma matriz estritamente diagonal dominante, com $a_{jk} \leq 0$, para todo $j \neq k$, e $a_{jj} > 0$, para todo $1 \leq j \leq n$, então A é invertível e sua inversa possui apenas elementos positivos.

Demonstração. Ver [18] (página 91, Corolário 3.20). □

Proposição 3.5 (Regra do Produto para n funções). Sejam $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciá-

veis. Então

$$\frac{d}{dx} \left[\prod_{k=1}^n f_k(x) \right] = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d}{dx} f_k(x) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_i(x) \right].$$

Demonstração. Utilizaremos indução sobre n . O caso $n = 2$ se reduz à *regra do produto*, ou seja,

$$(f_1(x)f_2(x))' = f'_1(x)f_2(x) + f'_2(x)f_1(x).$$

Suponha que o resultado valha para $n - 1$ e mostraremos que vale para n . Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\prod_{k=1}^n f_k(x) \right] &= \frac{d}{dx} \left[f_n(x) \prod_{k=1}^{n-1} f_k(x) \right] \\ &= \left[\frac{d}{dx} f_n(x) \right] \left[\prod_{k=1}^{n-1} f_k(x) \right] + f_n(x) \frac{d}{dx} \left[\prod_{k=1}^{n-1} f_k(x) \right] \\ &= \left[\frac{d}{dx} f_n(x) \right] \left[\prod_{k=1}^{n-1} f_k(x) \right] + f_n(x) \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{d}{dx} f_k(x) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} f_i(x) \right] \\ &= \left[\frac{d}{dx} f_n(x) \right] \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n f_k(x) \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{d}{dx} f_k(x) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_i(x) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d}{dx} f_k(x) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_i(x) \right]. \end{aligned}$$

□

3.2 Teorema de Stieltjes

Suponha que $y(x, \alpha)$ seja uma solução polinomial da equação diferencial

$$y''(x) + P(x, \alpha)y'(x) + Q(x, \alpha)y(x) = 0 \quad (3.4)$$

e que $y(x, \alpha)$ possua zeros simples $x_1(\alpha), \dots, x_n(\alpha)$, nenhum deles coincidindo com uma singularidade de P ou Q . Então vale o seguinte:

Teorema 3.1 (Teorema de Stieltjes). *Suponha que $P(x, \alpha)$ seja uma função diferenciável decrescente de x para cada α e uma função diferenciável decrescente (crescente) de α para cada x . Então cada zero de $y(x, \alpha)$ decresce (cresce) quando α cresce.*

Demonstração. Podemos escrever

$$y(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k) = (x - x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x - x_k) = (x - x_j)y_j(x), \quad (3.5)$$

onde

$$y_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x - x_k), \quad j = 1, \dots, n.$$

Fazendo $x = x_j = x_j(\alpha)$ em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} & y''(x_j) + P(x_j, \alpha)y'(x_j) + Q(x_j, \alpha)y(x_j) = 0 \\ \iff & y''(x_j) + P(x_j, \alpha)y'(x_j) = 0 \\ \iff & -P(x_j, \alpha) = \frac{y''(x_j)}{y'(x_j)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Derivando (3.5)

$$y'(x) = y_j(x) + (x - x_j)y'_j(x), \quad (3.7)$$

e

$$y''(x) = y'_j(x) + y''_j(x) + (x - x_j)y''_j(x) = (x - x_j)y''_j(x) + 2y'_j(x). \quad (3.8)$$

Assim,

$$\frac{y''(x_j)}{y'(x_j)} = \frac{(x_j - x_j)y''_j(x_j) + 2y'_j(x_j)}{y_j(x_j) + (x_j - x_j)y'_j(x_j)} = 2 \frac{y'_j(x_j)}{y_j(x_j)}. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.6), segue que

$$-\frac{1}{2}P(x_j, \alpha) = \frac{y'_j(x_j)}{y_j(x_j)}. \quad (3.10)$$

Utilizando a Proposição 3.5, obtemos

$$\frac{y'_j(x_j)}{y_j(x_j)} = \frac{\sum_{k=1}^n \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i) \right]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_j - x_k},$$

ou seja,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j(\alpha) - x_k(\alpha)} = -\frac{1}{2}P(x_j, \alpha), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Derivando ambos os lados de (3.11) em relação a α , obtemos

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \left(-\frac{dx_j}{d\alpha} + \frac{dx_k}{d\alpha} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) \right)$$

$$\begin{aligned}
&\iff \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) - \frac{1}{2} P_1(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{1}{2} P_2(x_j, \alpha) = 0 \\
&\iff \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} - \frac{1}{2} P_1(x_j, \alpha) \right) \frac{dx_j}{d\alpha} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \frac{dx_k}{d\alpha} - \frac{1}{2} P_2(x_j, \alpha) = 0 \\
&\iff \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{dx_k}{d\alpha} = \frac{1}{2} P_2(x_j, \alpha), \quad j = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $P_1(x_j, \alpha) = \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha)$, $P_2(x_j, \alpha) = \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha)$ e

$$a_{jj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} - \frac{1}{2} P_1(x_j, \alpha),$$

$$a_{jk} = a_{kj} = -\frac{1}{(x_j - x_k)^2}, \quad k \neq j.$$

Note que $a_{jj} > 0$, para todo $j = 1, \dots, n$, pois P é função descrescente de x para cada α , ou seja, $P_1(x_j, \alpha) = \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) < 0$. Além disso, $a_{jk} < 0$, para todo $k \neq j$. Considere a matriz $A = [a_{jk}]$ e defina o sistema $AX = B$, onde

$$X = \left[\frac{dx_1}{d\alpha} \ \dots \ \frac{dx_n}{d\alpha} \right]^T \text{ e } B = \frac{1}{2} [P_2(x_1, \alpha) \ \dots \ P_2(x_n, \alpha)]^T. \tag{3.13}$$

A matriz A é estritamente diagonal dominante, pois

$$|a_{jj}| = a_{jj} = -\frac{1}{2} P_1(x_j, \alpha) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} = -\frac{1}{2} P_1(x_j, \alpha) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Assim, a matriz A é estritamente diagonal dominante, todos os elementos da diagonal principal são positivos e todos os elementos fora da diagonal principal são negativos. Logo, pela Proposição 3.4, $A^{-1} = [u_{jk}]$ existe e possui apenas elementos positivos, ou seja, podemos reescrever o sistema $AX = B$ como $X = A^{-1}B$, daí,

$$\frac{dx_j}{d\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_{jk} P_2(x_k, \alpha), \quad j = 1, \dots, n.$$

Assim, se $\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) = P_2(x_j, \alpha) < 0$, então $\frac{dx_j}{d\alpha} < 0$, e se $\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) = P_2(x_j, \alpha) > 0$, então $\frac{dx_j}{d\alpha} > 0$, que é o que queríamos demonstrar. \square

Além disso, um resultado análogo pode ser provado para o caso de intervalos simétricos. Sob as mesmas condições do Teorema 3.1, também vale:

Teorema 3.2. *Suponha que os zeros de $y(x, \alpha)$ sejam simétricos com respeito à origem e que $P(x, \alpha)$ seja uma função diferenciável decrescente de $x > 0$ para cada α , tal que $\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ é uma função ímpar.*

Se $P(x, \alpha)$ é uma função diferenciável decrescente (crescente) de α para cada $x > 0$, então os zeros positivos de $y(x, \alpha)$ decrescem (crescem) quando α cresce.

Demonstração. Análoga à do Teorema 3.1 (ver [11], Teorema 2.4.1). \square

3.3 Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Contínua

Como vimos no Capítulo 1, os polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua que dependem de parâmetros são os de polinômios de Jacobi, Gegenbauer e Laguerre. Além disso, pela Proposição 3.3, os zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua são simples e pertencem aos seus respectivos intervalos de ortogonalidade. Veremos a seguir que esses três polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua que dependem de parâmetros também satisfazem as outras hipóteses do Teorema de Stieltjes (polinômios de Jacobi e Laguerre) ou do Teorema 3.2 (polinômios de Gegenbauer). Assim, podemos obter informações sobre o comportamento dos zeros desses polinômios com relação aos seus parâmetros.

3.3.1 Polinômios de Jacobi

Teorema 3.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. Então os zeros dos polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ são funções decrescentes de α e funções crescentes de β .*

Demonstração. Os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$, com respeito à função peso $\varrho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, com $\alpha, \beta > -1$, e são soluções polinomiais da equação

$$y''(x) + \frac{-(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha}{1 - x^2}y'(x) + \frac{n(\beta + \alpha + n + 1)}{1 - x^2}y(x) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(x, \alpha, \beta) &= \frac{-(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha}{1 - x^2} \\ &= \frac{-\alpha x - \beta x - 2x + \beta - \alpha}{1 - x^2} \\ &= \frac{-\alpha(1 + x) + \beta(1 - x) - 2x}{1 - x^2} \\ &= \frac{-\alpha(1 + x) + \beta(1 - x) - (1 + x) + (1 - x)}{1 - x^2} \\ &= \frac{-(\alpha + 1)(1 + x) + (\beta + 1)(1 - x)}{(1 + x)(1 - x)} \\ &= \frac{\alpha + 1}{x - 1} + \frac{\beta + 1}{1 + x}. \end{aligned}$$

Note que as únicas singularidades de P e Q são -1 e 1 , e que os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ pertencem ao intervalo $(-1, 1)$, ou seja, nenhum zero de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ coincide com uma singularidade de P ou Q .

Além disso, $P(x, \alpha, \beta)$ é uma função diferenciável decrescente de x e de α , e diferenciável crescente de β . De fato, como $\alpha + 1 > 0$, $\beta + 1 > 0$ e $x - 1 < 0$, temos

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, \alpha, \beta) = -\frac{\alpha + 1}{(x - 1)^2} - \frac{\beta + 1}{(1 + x)^2} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{x - 1} < 0,$$

e, como $x + 1 > 0$, segue que

$$\frac{\partial P}{\partial \beta}(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{x + 1} > 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Stieltjes, os zeros dos polinômios de Jacobi são funções decrescentes de $\alpha \in (-1, \infty)$ e crescentes de $\beta \in (-1, \infty)$. \square

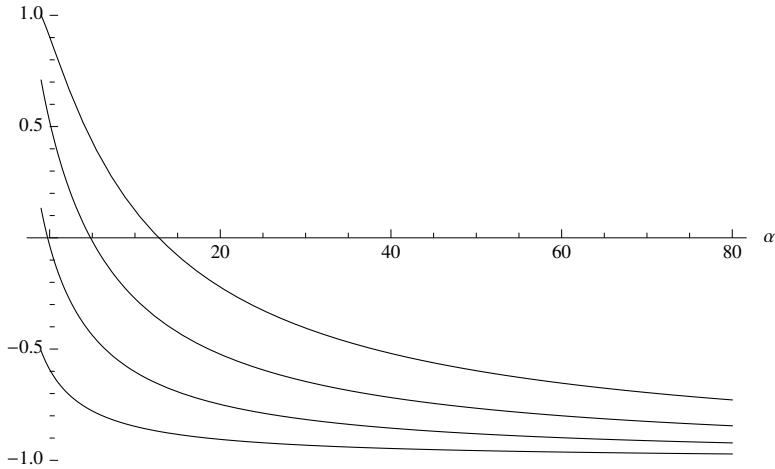


Figura 3.1: Gráfico dos zeros dos polinômios de Jacobi ($n = 4$) com relação ao parâmetro α . Note que os zeros são funções decrescentes com relação a esse parâmetro.

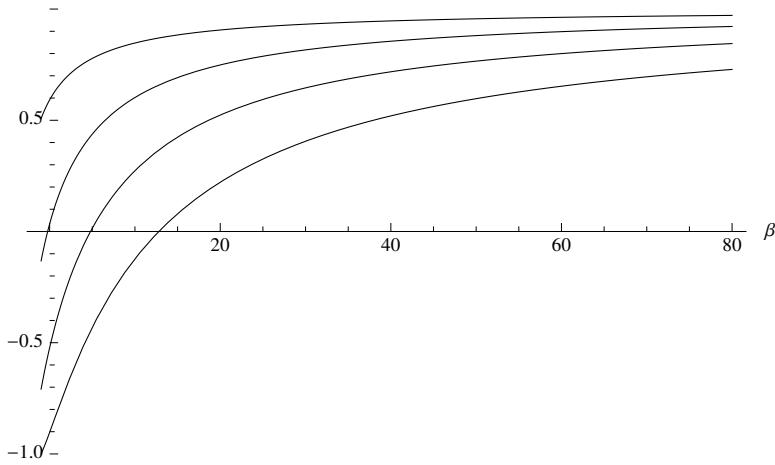


Figura 3.2: Gráfico dos zeros dos polinômios de Jacobi ($n = 4$) com relação ao parâmetro β . Note que os zeros são funções crescentes com relação a esse parâmetro.

3.3.2 Polinômios de Gegenbauer

Teorema 3.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $\lambda > -\frac{1}{2}$. Então os zeros positivos dos polinômios de Gegenbauer (ou Ultraesféricos) são funções decrescentes de λ e os zeros negativos são funções crescentes de λ .*

Demonstração. Os polinômios de Gegenbauer $P_n^\lambda(x)$ são um caso particular dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$. Assim, esses polinômios são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com respeito à função peso $\varrho(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$, com $\lambda > -\frac{1}{2}$, e são soluções polinomiais da equação

$$y''(x) + \frac{(2\lambda + 1)x}{x^2 - 1}y'(x) + \frac{n(2\lambda + n)}{1 - x^2}y(x) = 0.$$

Assim,

$$P(x, \lambda) = \frac{(2\lambda + 1)x}{x^2 - 1}$$

Note que as únicas singularidades de P e Q são -1 e 1 , e que os zeros de $P_n^\lambda(x)$ pertencem ao intervalo $(-1, 1)$, ou seja, nenhum zero de $P_n^\lambda(x)$ coincide com uma singularidade de P ou Q . Além disso, P é uma função diferenciável decrescente de x , diferenciável decrescente de λ para $x \in (0, 1)$ e diferenciável crescente de λ para $x \in (-1, 0)$. De fato, como $2\lambda + 1 > 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, \lambda) &= \frac{(2\lambda + 1)(x^2 - 1) - (2\lambda + 1)2x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= -\frac{(2\lambda + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \frac{2x}{x^2 - 1} \begin{cases} > 0, & x \in (-1, 0) \\ < 0, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

e $\frac{\partial P}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 0$, quando $x = 0$. Neste caso, não podemos aplicar o Teorema de Stieltjes diretamente no intervalo $(-1, 1)$. Entretanto, note que os polinômios de Gegenbauer são funções pares, pois

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(-x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} [1 - (-x)^2]^{-\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \{ [1 - (-x)^2]^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - x^2)^{-\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}] \\ &= C_n^\lambda(x). \end{aligned}$$

Então seus zeros são simétricos com relação à origem. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \lambda}(-x, -\lambda) &= \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x}{x^2 - 1} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial \lambda}(x, \lambda), \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{\partial P}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ é uma função ímpar. Logo, são satisfeitas todas as hipóteses do Teorema 3.2 e, portanto, os zeros positivos dos polinômios de Gegenbauer são funções decrescentes de λ e os zeros negativos são funções crescentes de λ , para $\lambda \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. \square

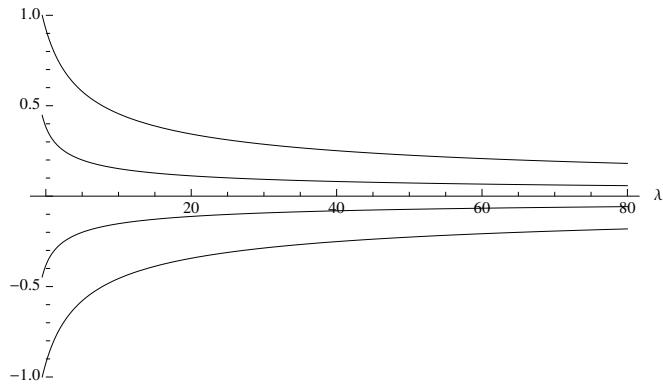


Figura 3.3: Gráfico dos zeros dos polinômios de Gegenbauer ($n = 4$) com relação ao parâmetro λ . Note que os zeros são simétricos com relação à origem, sendo que os zeros positivos são funções decrescentes e os zeros negativos são funções crescentes, com relação ao parâmetro λ .

3.3.3 Polinômios de Laguerre

Teorema 3.5. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $\alpha > -1$. Então os zeros dos polinômios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ são funções crescentes de α .*

Demonstração. Os polinômios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ são ortogonais no intervalo $(0, +\infty)$ com relação à função peso $\varrho(x) = x^\alpha e^{-x}$, com $\alpha > -1$, e são soluções polinomiais da equação

$$y''(x) + \frac{\alpha + 1 - x}{x} y'(x) + \frac{n}{x} y(x) = 0.$$

Assim,

$$P(x, \alpha) = \frac{\alpha + 1}{x} - 1.$$

Note que a única singularidade de P e Q é 0, e que os zeros de $L_n^\alpha(x)$ pertencem ao intervalo $(0, +\infty)$, ou seja, nenhum zero de $L_n^\alpha(x)$ coincide com uma singularidade de P ou Q . Além disso, P é uma função diferenciável decrescente de x e diferenciável crescente de α . De fato, como $\alpha + 1 > 0$, temos

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, \alpha) = -\frac{\alpha + 1}{x^2} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{1}{x} > 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Stieltjes, os zeros dos polinômios de Laguerre são funções crescentes de $\alpha \in (-1, \infty)$. \square

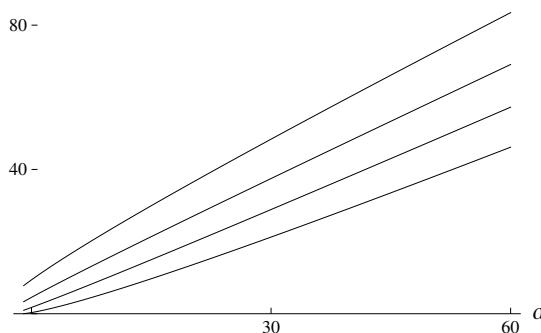


Figura 3.4: Gráfico dos zeros dos polinômios de Laguerre ($n = 4$) com relação ao parâmetro α . Note que os zeros são funções crescentes com relação a esse parâmetro.

Capítulo 4

Teorema de Stieltjes: Caso Discreto

Neste capítulo provaremos uma extensão do Teorema de Stieltjes, que será utilizada para obter informações sobre a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta. Esta versão “discreta” do Teorema de Stieltjes é um resultado novo e nossa principal contribuição neste trabalho. Para demonstrarmos esse teorema principal, precisaremos de alguns resultados preliminares, que serão apresentados a seguir.

4.1 Resultados Preliminares

Seja $\{y_n(x)\}$ uma família de polinômios ortogonais clássica de variável discreta, ou seja, esses polinômios satisfazem uma equação de diferenças do tipo

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda(x)y(x) = 0$$

e também satisfazem uma condição de ortogonalidade da forma

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i)y_n(x_i)\varrho(x_i) = \delta_{mn}d_n^2,$$

em que a função peso $\varrho(x)$ satisfaz as condições $\varrho(x_i) > 0$ para $a \leq x_i \leq b-1$, e os coeficientes $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ satisfazem $\sigma(x_i) > 0$ para $a+1 \leq x_i \leq b-1$ e $\sigma(x_i) + \tau(x_i) > 0$ para $a \leq x_i \leq b-2$.

O primeiro resultado acerca dos zeros dos polinômios ortogonais $y_n(x)$ é o seguinte:

Proposição 4.1. *Seja $y_n(x)$ o n -ésimo polinômio de uma família clássica de polinômios ortogonais de variável discreta com relação a uma função peso $\varrho(x)$. Então os seus zeros são todos reais, distintos e estão localizados no intervalo $(a, b-1)$.*

Demonstração. A demonstração é análoga a do caso contínuo (ver Proposição 3.3). \square

O segundo resultado nos diz que entre quaisquer dois zeros de $y_n(x)$ existe pelo menos um número da forma $a+i$ em que i é um inteiro tal que $a+i \in (a, b-1)$.

Proposição 4.2. *Seja $y_n(x)$ o n -ésimo polinômio de uma família clássica de polinômios ortogonais de variável discreta com relação a uma função peso $\varrho(x)$. Denotemos por $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b-1$*

os seus zeros. Então entre x_k e x_{k+1} existe pelo menos um ponto da forma $a+i$ em que i é um número inteiro, para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Demonstração. De fato, suponha que no intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ não houvesse nenhum ponto do conjunto $\mathcal{S} = \{a+1, a+2, \dots, b-2\}$. Então, da relação de ortogonalidade,

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} \frac{[y_n(x_i)]^2}{(x_i - x_k)(x_i - x_{k+1})} \varrho(x_i) > 0,$$

pois $(x - x_k)(x - x_{k+1})$ é uma função quadrática positiva para $x < x_k$ e $x > x_{k+1}$. Mas isso é um absurdo, pois $y_n(x)/[(x - x_k)(x - x_{k+1})]$ é um polinômio de grau $n-2$ e, pela ortogonalidade, essa soma é zero, isto é,

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} \frac{[y_n(x_i)]^2}{(x_i - x_k)(x_i - x_{k+1})} \varrho(x_i) = 0.$$

Portanto, entre dois zeros consecutivos de $y_n(x)$ existe pelo menos um ponto do conjunto \mathcal{S} ou, em outras palavras, cada intervalo da forma $[a+i-1, a+i]$, $1 \leq i \leq b-a+1$, contém no máximo um zero x_k de $y_n(x)$. \square

O próximo resultado diz respeito a distância mínima entre os zeros de $y_n(x)$, isto é, que a distância entre seus zeros é sempre maior do que 1. Este resultado é devido a Krasikov e Zarkh [6]. Vamos fornecer uma demonstração um pouco diferente daquela apresentada por eles. Para esse fim, note que podemos reescrever a equação de diferenças

$$\sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) \Delta y(x) + \lambda(x) y(x) = 0$$

como

$$A(x)y(x+1) + B(x)y(x) + C(x)y(x-1) = 0, \quad (4.1)$$

em que

$$A(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad B(x) = -[A(x) + C(x)] + \lambda \quad \text{e} \quad C(x) = \sigma(x). \quad (4.2)$$

Proposição 4.3. *Seja $y_n(x)$ o n -ésimo polinômio de uma família clássica de polinômios ortogonais de variável discreta. Denotemos por $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b-1$ os seus zeros. Então $|x_k - x_j| > 1$, para todo $k \neq j$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $x_{k+1} - x_k > 1$ para todo k . Observe que $x_{k+1} - x_k = 1$ não pode acontecer pois, neste caso, de (4.1), teríamos $y_n(x_k + i) = 0$ para todo inteiro i , o que é um absurdo. Agora, uma vez que $y_n(x)$ satisfaz (4.1) então fazendo $x = x_k$ em (4.1) obtemos

$$A(x_k)y_n(x_k+1) = -C(x_k)y_n(x_k-1).$$

Como $A(x) > 0$ e $C(x) > 0$ em $(a, b-1)$ no caso dos polinômios clássicos, isso implica que

$$\text{Sinal}[y_n(x_k+1)] = -\text{Sinal}[y_n(x_k-1)].$$

Portanto, existe uma quantidade ímpar de zeros de $y_n(x)$ em cada intervalo da forma $[x_k - 1, x_k + 1]$. Agora, suponha, por absurdo, que x_j seja o maior zero de $y_n(x)$ tal que $x_{j+1} - x_j < 1$. Logo, pela proposição anterior, existe um único inteiro m tal que $x_j \leq a + m \leq x_{j+1}$. Além disso, se existir um zero à esquerda de x_j , então $x_{j-1} \leq a + m - 1$ e, se existir um zero à direita de x_{j+1} , então $x_{j+2} > x_{j+1} + 1$. Portanto, no intervalo $[x_{j+1} - 1, x_{j+1} + 1]$ existem apenas dois zeros de $y_n(x)$, o que é absurdo. \square

4.2 Uma Extensão do Teorema de Stieltjes

As famílias clássicas de polinômios ortogonais dependem de um ou mais parâmetros que surgem quando buscamos que os polinômios que satisfazem uma equação de diferenças também satisfaçam uma relação de ortogonalidade. Assim, uma questão que surge naturalmente é como os zeros desses polinômios dependem de cada parâmetro, ou seja, como eles se comportam quando variamos cada parâmetro. O próximo resultado, que é o resultado principal deste trabalho, é uma extensão natural do Teorema de Stieltjes que, como já mencionamos anteriormente, trata da monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de variável contínua. Portanto, nosso principal resultado aborda também a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de variável discreta.

Para esse fim, suponhamos que $\{y_n(x) = y_n(x, \alpha)\}$ seja uma família clássica de polinômios ortogonais de variável discreta que depende de um parâmetro α , com α definido em um sub-intervalo I da reta real. Então as funções definidas em (4.2) dependem também do parâmetro α , ou seja, $A(x) = A(x, \alpha)$, $B(x) = B(x, \alpha)$ e $C(x) = C(x, \alpha)$. Defina agora a função

$$P(x, \alpha) = \frac{A(x, \alpha)}{C(x, \alpha)}. \quad (4.3)$$

Então enunciamos nosso principal resultado como:

Teorema 4.1. *Seja $y_n(x) = y_n(x, \alpha)$ o n -ésimo polinômio de uma família clássica de polinômios ortogonais de variável discreta em que α é um parâmetro definido em um sub-intervalo I da reta real. Denotemos por $a < x_1 = x_1(\alpha) < x_2 = x_2(\alpha) < \dots < x_n = x_n(\alpha) < b - 1$ os seus zeros. Suponhamos que $P(x, \alpha)$ seja uma função diferenciável e decrescente de $x \in (a, b - 1)$ para todo $\alpha \in I$, e uma função diferenciável e crescente (decrescente) do parâmetro $\alpha \in I$ para todo $x \in (a, b - 1)$. Então todos os zeros $x_k = x_k(\alpha)$, $1 \leq k \leq n$, são funções crescentes (decrescentes) do parâmetro α , para $\alpha \in I$.*

Demonstração. Fazendo $x = x_j = x_j(\alpha)$, $1 \leq j \leq n$, em (4.1), obtemos

$$-P(x_j, \alpha) = \frac{y(x_j - 1)}{y(x_j + 1)} \quad (4.4)$$

Mas, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, podemos escrever

$$y(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Assim, reescrevemos (4.4) como

$$-P(x_j, \alpha) = \frac{\prod_{k=1}^n (x_j - x_k - 1)}{\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1)}. \quad (4.5)$$

Derivando ambos os lados de (4.5) com relação a α , obtemos, do lado esquerdo da igualdade,

$$-\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) = -\left[\frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) \frac{d\alpha}{d\alpha} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha), \quad (4.6)$$

e, do lado direito da igualdade,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\prod_{k=1}^n (x_j - x_k - 1) \right] \prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1) \right] \prod_{k=1}^n (x_j - x_k - 1) \over \left[\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1) \right]^2 \quad (4.7)$$

Agora, pela regra do produto de derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\prod_{k=1}^n (x_j - x_k - 1) \right] &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d}{d\alpha} (x_j - x_k - 1) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i - 1) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i - 1) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i - 1) \frac{(x_j - x_k - 1)}{(x_j - x_k - 1)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_j - x_k - 1} \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n (x_j - x_i - 1) \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1) \right] &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d}{d\alpha} (x_j - x_k + 1) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i + 1) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i + 1) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_j - x_i + 1) \frac{(x_j - x_k + 1)}{(x_j - x_k + 1)} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_j - x_k + 1} \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n (x_j - x_i + 1) \right].$$

Dessa forma, a expressão (4.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_j - x_k - 1} \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n (x_j - x_i - 1) \right] \prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1)}{\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1)^2} \\
& - \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_j - x_k + 1} \left[\left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n (x_j - x_i + 1) \right] \prod_{k=1}^n (x_j - x_k - 1)}{\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1)^2} \\
& = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_j - x_k - 1} \left\{ \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n [(x_j - x_i)^2 - 1] \right\}}{\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1)^2} \\
& - \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_j - x_k + 1} \left\{ \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n [(x_j - x_i)^2 - 1] \right\}}{\prod_{k=1}^n (x_j - x_k + 1)^2} \\
& = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_j - x_k - 1} - \frac{1}{x_j - x_k + 1} \right) \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \\
& = \sum_{k=1}^n \frac{x_j - x_k + 1 - x_j + x_k + 1}{(x_j - x_k - 1)(x_j - x_k + 1)} \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \\
& = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2}. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Igualando (4.6) e (4.8)

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \\
\iff & \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \left(\frac{dx_j}{d\alpha} - \frac{dx_k}{d\alpha} \right) \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) & = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} - \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_j}{d\alpha} \\
& + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_k}{d\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} - \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_j}{d\alpha} \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left[\frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_k}{d\alpha} + \frac{1}{(x_j - x_j)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \frac{dx_j}{d\alpha} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) \frac{dx_j}{d\alpha} - \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_j}{d\alpha} \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left[\frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_k}{d\alpha} \\
&= \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_j}{d\alpha} \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left[\frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \right] \frac{dx_k}{d\alpha},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j, \alpha) = \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{dx_k}{d\alpha},$$

onde

$$a_{jj} = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} > 0,$$

$$a_{jk} = \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} < 0, \quad j \neq k,$$

pois $|x_j - x_i| > 1$, $\forall i \neq j$, e $P(x, \alpha)$ é uma função decrescente de x para todo α .

Considere a matriz $A = [a_{jk}]$ e defina o sistema $AX = B$, onde

$$X = \left[\frac{dx_1}{d\alpha} \dots \frac{dx_n}{d\alpha} \right]^T \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_1, \alpha) \dots \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_n, \alpha) \right]^T.$$

Note que, na matriz A , todos os elementos da diagonal principal são positivos e todos os elementos fora da diagonal principal são negativos. Além disso, a matriz A é estritamente diagonal dominante, pois

$$\begin{aligned}
|a_{jj}| = a_{jj} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j, \alpha) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \\
&> - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n -\frac{1}{(x_j - x_k)^2 - 1} \prod_{i=1}^n \frac{(x_j - x_i)^2 - 1}{(x_j - x_i + 1)^2} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 3.4, existe a matriz inversa $A^{-1} = [u_{jk}]$ de A e ela possui apenas elementos positivos. Assim, podemos reescrever o sistema $AX = B$ como $X = A^{-1}B$, ou seja,

$$\frac{dx_j}{d\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_{jk} \frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_k, \alpha), \quad j = 1, \dots, n.$$

Portanto, se $\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_k, \alpha) < 0$, então $\frac{dx_j}{d\alpha} < 0$, e se $\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_k, \alpha) > 0$, então $\frac{dx_j}{d\alpha} > 0$. \square

4.3 Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos de uma Variável Discreta

No Capítulo 2 deste trabalho estudamos os polinômios ortogonais clássicos de variável discreta. Esses polinômios, como vimos, dependem de um ou mais parâmetros. Agora, uma questão interessante é sobre como os zeros desses polinômios dependem dos parâmetros. Vimos no início deste capítulo que os zeros desses polinômios são todos reais, distintos e pertencem ao intervalo $(a, b - 1)$ e, além disso, a distância mínima entre os zeros de um polinômio é maior do que um (Proposições 4.1 e 4.3). Vamos agora aplicar o Teorema 4.1 nesses polinômios a fim de obter informações acerca da monotonicidade dos seus zeros.

4.3.1 Polinômios de Hahn

Teorema 4.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. Então os zeros dos polinômios de Hahn $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ são funções decrescentes de α e funções crescentes de β .*

Demonstração. Os polinômios de Hahn $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ são ortogonais em $(0, N)$ com respeito à função peso $\varrho(x) = \Gamma(\beta + 1 + x)\Gamma(N + \alpha - x)/(\Gamma(N - x)\Gamma(x + 1))$, com $N \geq 2$, $\alpha > -1$ e $\beta > -1$, e são soluções da equação de diferenças

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

em que

$$\sigma(x) = x(N + \alpha - x), \quad \tau(x) = (\beta + 1)(N - 1) - (\alpha + \beta + 2)x \quad \text{e} \quad \lambda = n(n + \alpha + \beta + 1).$$

Então de (4.1), (4.2) e (4.3) temos que

$$P(x, \alpha, \beta) = 1 + \frac{(\beta + 1)(N - 1) - (\alpha + \beta + 2)x}{x(N + \alpha - x)}.$$

Note que as singularidades de P são 0 e $N + \alpha$, e que todos os zeros de $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ pertencem ao intervalo $(0, N - 1)$. Além disso, $N + \alpha > N - 1$, pois $\alpha > -1$. Logo, nenhum zero de $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ coincide com uma singularidade de P . Mais ainda, P é uma função diferenciável descendente de x e de α e diferenciável crescente de β . De fato,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, \alpha, \beta) = -\frac{(\beta + 1)(N - 1)(\alpha + N) - 2(\beta + 1)(N - 1)x + (\alpha + \beta + 2)x^2}{(\alpha + N - x)^2 x^2} < 0,$$

pois o polinômio

$$(\beta + 1)(N - 1)(\alpha + N) - 2(\beta + 1)(N - 1)x + (\alpha + \beta + 2)x^2 \quad (4.9)$$

é positivo. Isso se deve ao fato de que $\alpha + \beta + 2 > 0$ e

$$\Delta = -4(\alpha + 1)(\beta + 1)(N - 1)(\alpha + \beta + N + 1) < 0,$$

ou seja, (4.9) possui apenas raízes complexas. Temos também

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x, \alpha, \beta) = -\frac{(N - 1 - x)(x + \beta + 1)}{(\alpha + N - x)^2 x} < 0$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \beta}(x, \alpha, \beta) = \frac{N - 1 - x}{(\alpha + N - x)x} > 0.$$

Portanto, pelo Teorema 4.1, os zeros dos polinômios de Hahn são funções crescentes de $\beta \in (-1, +\infty)$ e funções decrescentes de $\alpha \in (-1, +\infty)$. \square

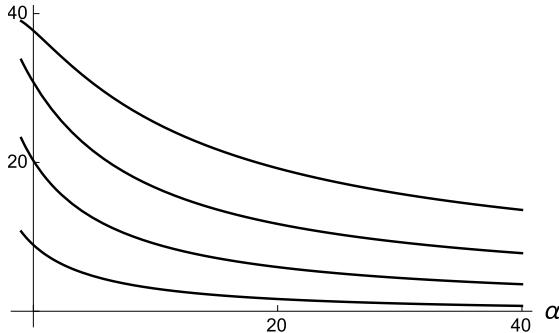


Figura 4.1: Gráfico dos zeros dos polinômios de Hahn ($n = 4$) com relação ao parâmetro α . Note que os zeros são funções decrescentes com relação a esse parâmetro.

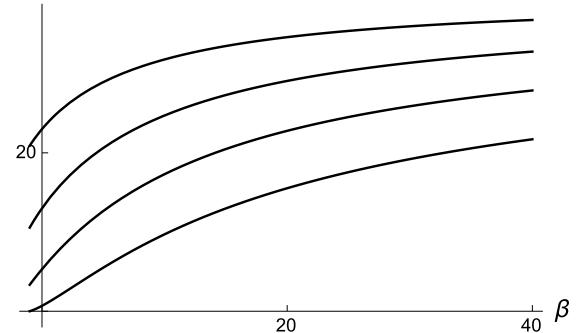


Figura 4.2: Gráfico dos zeros dos polinômios de Hahn ($n = 4$) com relação ao parâmetro β . Note que os zeros são funções crescentes com relação a esse parâmetro.

4.3.2 Polinômios de Meixner

Teorema 4.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 < \mu < 1$ e $\gamma > 0$. Então os zeros dos polinômios de Meixner $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$ são funções crescentes de μ e de γ .*

Demonstração. Os polinômios de Meixner $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$ são ortogonais em $(0, +\infty)$ com respeito à função peso $\varrho(x) = \mu^x \Gamma(\gamma+x)/(\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1))$, com $0 < \mu < 1$ e $\gamma > 0$, e são soluções da equação de diferenças

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

em que

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = \gamma\mu - x(1 - \mu) \quad \text{e} \quad \lambda = n(1 - \mu).$$

Então de (4.1), (4.2) e (4.3) temos que

$$P(x, \gamma, \mu) = \frac{\gamma\mu}{x} + \mu.$$

Note que a única singularidade de P é 0 e que todos os zeros de $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$ pertencem ao intervalo $(0, +\infty)$, ou seja, nenhum zero de $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$ coincide com uma singularidade de P . Além disso, P é uma função diferenciável decrescente de x e diferenciável crescente de γ e μ . De fato,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, \gamma, \mu) = -\frac{\gamma\mu}{x^2} < 0,$$

pois $\gamma > 0$ e $\mu > 0$. Além disso,

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma}(x, \gamma, \mu) = \frac{\mu}{x} > 0$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \mu}(x, \gamma, \mu) = \frac{\gamma}{x} + 1 > 0,$$

pois $x > 0$.

Portanto, pelo Teorema 4.1, os zeros dos polinômios de Meixner são funções crescentes de $\gamma \in (0, +\infty)$ e de $\mu \in (0, 1)$. \square

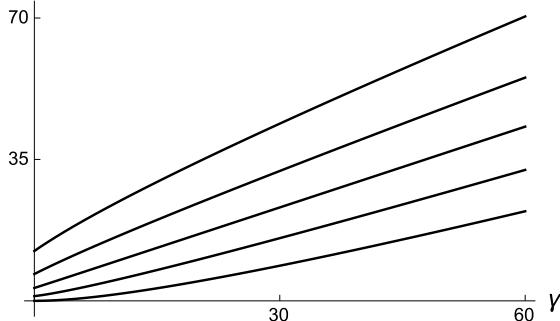


Figura 4.3: Gráfico dos zeros dos polinômios de Meixner ($n = 5$) com relação ao parâmetro γ . Note que os zeros são funções crescentes com relação a esse parâmetro.

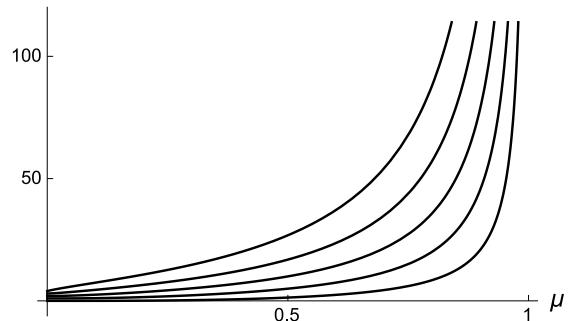


Figura 4.4: Gráfico dos zeros dos polinômios de Meixner ($n = 5$) com relação ao parâmetro μ . Note que os zeros são funções crescentes com relação a esse parâmetro.

4.3.3 Polinômios de Kravchuk

Teorema 4.4. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $0 < p < 1$. Então os zeros dos polinômios de Kravchuk $k_n^{(p)}(x, N)$ são funções crescentes de p .

Demonstração. Os polinômios de Kravchuk $k_n^{(p)}(x, N)$ são ortogonais em $(0, N + 1)$ com respeito à função peso $\varrho(x) = N!p^x(1-p)^{N-x}/(\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-x))$, com $0 < p < 1$, e são soluções da equação de diferenças

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

em que

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = \frac{Np - x}{1 - p} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{n}{1 - p}.$$

Então de (4.1), (4.2) e (4.3) temos que

$$P(x, p) = 1 + \frac{Np}{x(1-p)} - \frac{1}{1-p} = \frac{Np}{x(1-p)} - \frac{p}{1-p}.$$

Note que a única singularidade de P é 0 e que todos os zeros de $k_n^{(p)}(x, N)$ pertencem ao intervalo $(0, N)$, ou seja, nenhum zero de $k_n^{(p)}(x, N)$ coincide com uma singularidade de P . Além disso, P é uma função diferenciável descrescente de x e diferenciável crescente de p . De fato,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, p) = -\frac{Np}{(1-p)x^2} < 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p}(x, p) &= \frac{Nx(1-p) + Npx}{(1-p)^2x^2} - \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= \frac{Nx(1-p+p)}{(1-p)^2x^2} - \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= \frac{N}{(1-p)^2x} - \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= \frac{N - x}{(1-p)^2x} > 0, \end{aligned}$$

pois $N > 0$, $p > 0$, $x > 0$ e, como $x \in (0, N)$, temos $N - x > 0$.

Portanto, pelo Teorema 4.1, os zeros dos polinômios de Kravchuk são funções crescentes de p , para $p \in (0, 1)$. \square

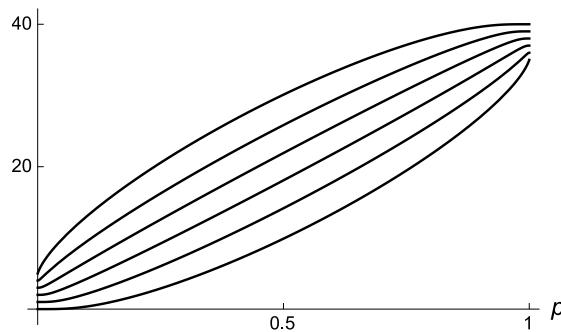


Figura 4.5: Gráfico dos zeros dos polinômios de Kravchuk ($n = 6$) com relação ao parâmetro p . Note que os zeros são funções crescentes com relação a esse parâmetro.

4.3.4 Polinômios de Charlier

Teorema 4.5. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $\mu > 0$. Então os zeros dos polinômios de Charlier $c_n^{(\mu)}(x)$ são funções crescentes de μ .

Demonstração. Os polinômios de Charlier $c_n^{(\mu)}(x)$ são ortogonais em $(0, +\infty)$ com respeito à função peso $\varrho(x) = e^{-\mu} \mu^x / \Gamma(x+1)$, com $\mu > 0$, e são soluções da equação de diferenças

$$\sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) \Delta y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

em que

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = \mu - x \quad \text{e} \quad \lambda = n.$$

Então de (4.1), (4.2) e (4.3) temos que

$$P(x, \mu) = \frac{\mu}{x}.$$

Note que a única singularidade de P é 0 e que todos os zeros de $c_n^{(\mu)}(x)$ pertencem ao intervalo $(0, +\infty)$, ou seja, nenhum zero de $c_n^{(\mu)}(x)$ coincide com uma singularidade de P . Além disso, P é uma função diferenciável decrescente de x e diferenciável crescente de μ . De fato,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, \mu) = -\frac{\mu}{x^2} < 0$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \mu}(x, \mu) = \frac{1}{x} > 0,$$

pois $x > 0$ e $\mu > 0$.

Portanto, pelo Teorema 4.1, os zeros dos polinômios de Charlier são funções crescentes de μ , para $\mu \in (0, +\infty)$. \square

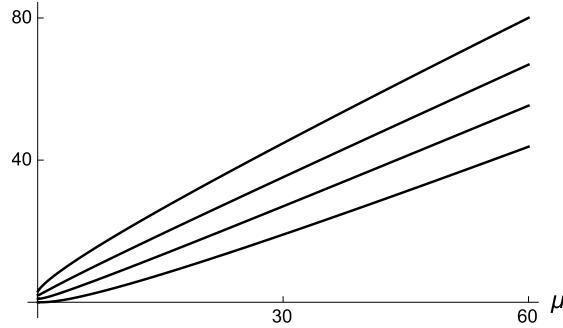


Figura 4.6: Gráfico dos zeros dos polinômios de Charlier ($n = 4$) com relação ao parâmetro μ . Note que os zeros são funções crescentes com relação a esse parâmetro.

Conclusão

Depois de apresentado o Teorema de Stieltjes, verificamos que os polinômios ortogonais clássicos de uma variável contínua dependentes de parâmetros (polinômios de Jacobi, Gegenbauer e Laguerre) satisfazem suas hipóteses e, portanto, conseguimos obter informações sobre a monotonicidade dos zeros de tais polinômios.

Vimos também que é possível estender esse resultado para os polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta, obtendo informações sobre a monotonicidade dos zeros de cada um desses polinômios (de Hahn, Meixner, Kravchuk e Charlier), sendo que todos estes dependem de parâmetros.

Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M. e Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, Nova York, 1964.
- [2] Castillo, K. e Rafaeli, F. R.: *A short note on interlacing and monotonicity of zeros of orthogonal polynomials*. AIP Conference Proceedings, 1776(1):090004, 2016. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4965368>.
- [3] Gauss, C. F.: *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*. Comment. Soc. Reg. Scient. Gotting. Recent. 1814.
- [4] Gautschi, W.: *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*. Numerical Mathematics and Scientific Computation Series. Oxford University Press. New York, 2004.
- [5] Ismail, M. E. H.: *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 98. Cambridge University Press, 2005.
- [6] Krasikov, I. e Zarkh, A.: *On zeros of discrete orthogonal polynomials*. Journal of Approximation Theory, 156:121–141, 2009.
- [7] Markov, A.: *Sur les racines de certaines équations (second note)*. Math. Ann., 27:177–182, 1886.
- [8] Muldoon, M. E.: *Properties of zeros of orthogonal polynomials and related functions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 48:167–186, 1993.
- [9] Nikiforov, A. F., Suslov, S. K. e Uvarov, V. B.: *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [10] Nodarse, R. Álvarez: *Polinomios hipergeométricos clásicos y q -polinomios*. Monografías del seminario matemático "García de Galdeano", 26. 2003.
- [11] Oliveira, A. L.: *Monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos: teoremas de Markov e Stieltjes*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2017.
- [12] Spivak, M.: *Calculus*. Cambridge University Press, 3rd ed., 1994.
- [13] Stieltjes, T. J.: *Sur certain polynômes que vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé*. Acta Math., 6:321–326, 1885.
- [14] Stieltjes, T. J.: *Sur les polynômes de Jacobi*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 100:620–622, 1885.

- [15] Stieltjes, T. J.: *Sur quelques théorèmes d'algèbre*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 100:439–440, 1885.
- [16] Stieltjes, T. J.: *Sur les racines de l'équation $X_n = 0$* . Acta Math., 9:385–400, 1887.
- [17] Szegő, G.: *Orthogonal Polynomials*, vol. 23 de *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 4th ed., 1975.
- [18] Varga, R. S.: *Matrix Iterative Analysis*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin, 2000.