

Gabriel Machado dos Santos

**Modelagem Matemática e Computacional
para a Análise de Escoamentos Sobre
Geometrias Cartesianas**

Uberlândia – MG

2019

Gabriel Machado dos Santos

**Modelagem Matemática e Computacional para a
Análise de Escoamentos Sobre Geometrias
Cartesianas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de **Bacharel em Engenharia Mecânica**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: Me. Hélio Ribeiro Neto

Uberlândia – MG

2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde, coragem e força para superar as dificuldades. Por me capacitar e me conduzir ao longo desta jornada e por todas as extraordinárias pessoas presentes em minha vida.

Aos meus pais, Carlos e Cristiane, meus primeiros e eternos professores, que sempre fizeram do impossível o possível para que meus sonhos se concretizassem. Por todo seu apoio, carinho, amor e cuidados serei eternamente grato e levarei seus ensinamentos comigo onde estiver.

À minha irmã Gabrielly, por todo conhecimento compartilhado e adquirido durante nossas conversas e pela amizade sincera e constante companheirismo. Às minhas irmãs caçulas, Emilly e Emanuely, por toda felicidade e alegria que proporcionam a todos.

À Alinny Cristiny, pelo constante apoio e motivação, por todo seu carinho e cuidados em todos os momentos e por todos os sonhos que escolheu compartilhar comigo.

Ao companheiro de laboratório, Ítalo Augusto, por toda ajuda e companheirismo no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, por abrir as portas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), pela paciência e dedicação na orientação deste trabalho, pelos ricos conselhos e constante exemplo.

Ao Mestre Hélio Ribeiro Neto, por toda a paciência e dedicação em me ensinar e instruir, pela amizade construída e por todos os valiosos conselhos que levarei comigo.

A todos os colegas do laboratório e colegas de curso, pela troca de conhecimento, colaboração e amizade.

Aos técnicos do laboratório, Luismar, Ana Luisa, Taciane e Bruno pelo apoio e pelos serviços prestados durante todo o período.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pelo suporte e infraestrutura necessários para realização deste trabalho.

*“O que sabemos é uma gota;
o que ignoramos é um oceano.
Mas o que seria o oceano
se não infinitas gotas?”*

(Isaac Newton)

RESUMO

No presente trabalho é apresentada a modelagem física e matemática de escoamentos para fluidos arbitrários, onde é contemplada a dinâmica e o transporte de energia térmica no escoamento. Tal modelagem é particularizada para o caso de fluidos newtonianos com propriedades constantes em escoamentos incompressíveis, simplificações estas, que possibilitam a modelagem numérica-computacional abordada no presente estudo. Nela é empregada a metodologia do passo fracionado (método de projeção), para o acoplamento pressão-velocidade. Rotinas computacionais foram desenvolvidas e implementadas em linguagem de programação FORTRAN 90, onde as equações foram discretizadas pelo método de diferenças finitas e resolvidas em um domínio bidimensional. Simulações foram conduzidas a fim de verificar a ordem de convergência do método numérico utilizado, validar o código computacional desenvolvido e analisar a influência de parâmetros adimensionais nas características do escoamento. A partir dos resultados numéricos obtidos, observa-se que o código desenvolvido apresenta segunda ordem de convergência e os resultados numéricos obtidos estão em concordância com os resultados apresentados pela literatura.

Palavras-chave: Mecânica dos Fluidos Computacional. Simulação Numérica-Computacional. Escoamentos Bidimensionais Não-Isotérmicos. Diferenças Finitas.

ABSTRACT

This work presents the physical and mathematical modeling of flows for arbitrary fluids, where the dynamics and the thermal energy transport in the flow are contemplated. Such modeling is particularized for the case of Newtonian fluids with constant properties in incompressible flows, simplifications that allow the numerical-computational modeling addressed in the present study. Where the fractional step method (projection method) is employed for pressure-velocity coupling. Computational routines are developed and implemented in FORTRAN 90 programming language, where the equations are discretized by the finite difference method and solved in a two-dimensional domain. Simulations are conducted in order to verify the order of convergence of the numerical method used, validate the computational code developed and analyze the influence of dimensionless parameters on the flow characteristics. From the numerical results obtained, it is observed that the developed code presents second order of convergence and the numerical results obtained are in agreement with the results presented in the literature.

Keywords:Computational Fluid Mechanics. Numerical-Computational Simulation. Non-Isothermal Two-Dimensional Flows. Finite Differences Scheme.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Volume de controle euleriano. | 18 |
| Figura 2 – Representação de um elemento de fluido em um volume de controle euleriano. | 19 |
| Figura 3 – Volume de controle lagrangiano. | 26 |
| Figura 4 – Comportamento característico de vários fluidos. | 29 |
| Figura 5 – Deformação de um elemento de fluido. | 32 |
| Figura 6 – Representação esquemática da malha computacional adotada. | 44 |
| Figura 7 – Campos de velocidade e pressão em $t = 0$ | 54 |
| Figura 8 – Representação esquemática do escoamento sobre duas placas paralelas. | 57 |
| Figura 9 – Comparação entre os perfis de velocidade horizontal em um escoamento de Hagen-Poiseuille para diferentes malhas e $Re = 100$ | 58 |
| Figura 10 – Pressão na linha de simetria horizontal do canal para $Re = 100$ | 59 |
| Figura 11 – Campos de velocidade e pressão para um escoamento de Hagen-Poiseuille com $Re = 100$ | 59 |
| Figura 12 – Representação esquemática do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante. | 60 |
| Figura 13 – Linhas de corrente para diferentes números de Reynolds. | 61 |
| Figura 14 – Linhas de corrente para diferentes números de Reynolds apresentadas por Ghia et al. (1982). | 61 |
| Figura 15 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria para diferentes números de Reynolds. | 62 |
| Figura 16 – Representação esquemática do escoamento em uma cavidade submetida a um gradiente de temperatura. | 63 |
| Figura 17 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh. | 64 |
| Figura 18 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh apresentadas por Duarte (2018). | 65 |
| Figura 19 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria da cavidade para diferentes números de Rayleigh. | 66 |
| Figura 20 – Representação esquemática do escoamento sobre um degrau. | 66 |
| Figura 21 – Perfis da componente horizontal de velocidade para diferentes números de Reynolds e em diferentes posições a jusante do degrau. | 67 |
| Figura 22 – Recirculação formada a jusante da expansão abrupta (degrau). | 68 |
| Figura 23 – Representação esquemática do escoamento pulsado sobre um degrau. | 69 |
| Figura 24 – Representação gráfica das condições de contorno aplicadas na entrada do canal. | 70 |

| | |
|--|----|
| Figura 25 – Linhas de corrente (a esquerda) e isotermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 1,0$ e $A = 1,0$ | 70 |
| Figura 25 – Linhas de corrente (a esquerda) e isotermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 1,0$ e $A = 1,0$ (continuação). | 71 |
| Figura 26 – Linhas de corrente (a esquerda) e isotermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 200$, $Pr = 0,71$, $St = 1,0$ e $A = 1,0$ | 71 |
| Figura 27 – Linhas de corrente (a esquerda) e isotermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 2,0$ e $A = 1,0$ | 71 |
| Figura 27 – Linhas de corrente (a esquerda) e isotermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 2,0$ e $A = 1,0$ (continuação). | 72 |
| Figura 28 – Número de Nusselt local na parede superior do canal para diferentes números de Reynolds in diferentes frações de período de um pulso. | 73 |
| Figura 29 – Representação esquemática do escoamento sobre um cilindro quadrado. | 74 |
| Figura 30 – Linhas de corrente sobre um cilindro quadrado para $Re = 30$ e $Pr = 0,71$ | 75 |
| Figura 31 – Representação esquemática da posição da sonda no interior do domínio. | 76 |
| Figura 32 – Número de Nusselt local ao longo das faces do cilindro para diferentes números de Reynolds e $Pr = 0,71$ | 77 |
| Figura 33 – Coeficiente de arrasto e número de Strouhal em função do número de Reynolds. | 78 |
| Figura 34 – Coeficiente de arrasto (a esquerda) e sustentação (a direita) para diversos valores do número de Reynolds. | 78 |
| Figura 34 – Coeficiente de arrasto (a esquerda) e sustentação (a direita) para diversos valores do número de Reynolds (continuação). | 79 |
| Figura 35 – Número de Nusselt local nas faces do quadrado para diferentes números de Reynolds e $Pr = 0,71$ | 80 |
| Figura 36 – Campo de vorticidade para diferentes valores de Reynolds com $Pr = 0,71$ e em $\tau = 418$ | 81 |
| Figura 37 – Campo de temperatura para diferentes valores de Reynolds com $Pr = 0,71$ e em $\tau = 418$ | 82 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Teste de convergência com condições de contorno de Dirichlet para as velocidades e Neumann para a pressão. | 56 |
| Tabela 2 – Teste de convergência com condições de contorno de Neumann para as velocidades e Dirichlet para a pressão. | 56 |
| Tabela 3 – Teste de convergência para um escoamento de Hagen-Poiseuille. | 58 |
| Tabela 4 – Análise de independência de malha para o escoamento em uma cavidade com tampa deslizante e razão de aspecto unitária para $Re = 100$ | 60 |
| Tabela 5 – Análise de independência de malha em uma cavidade de razão de aspecto unitária sob efeito de convecção natural para diferentes números de Rayleigh. | 64 |
| Tabela 6 – Comparação do número de Nusselt médio na parede fria (parede da direita). | 65 |
| Tabela 7 – Comprimento de recolamento da camada limite. | 68 |
| Tabela 8 – Número de Nusselt médio na parede superior do canal para diferentes valores de Strouhal em diferentes frações de período de um pulso. | 73 |
| Tabela 9 – Comparação do comprimento de recirculação adimensional para $Re = 40$ | 76 |
| Tabela 10 – Comparação dos adimensionais dinâmicos para $Re = 100$ | 76 |
| Tabela 11 – Comparação dos adimensionais dinâmicos e térmicos para diferentes valores do número de Reynolds e $Pr = 0,71$ | 77 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 13 |
| 3 | MODELO MATEMÁTICO | 16 |
| 3.1 | Hipótese do Contínuo | 16 |
| 3.2 | Cinemática dos Fluidos | 17 |
| 3.3 | Formulação Euleriana | 18 |
| 3.3.1 | Equação da Continuidade | 19 |
| 3.3.2 | Equação de Cauchy | 20 |
| 3.3.3 | Equação da Energia | 23 |
| 3.4 | Formulação Lagrangiana | 26 |
| 3.4.1 | Teorema de Transporte | 26 |
| 3.4.2 | Equações Para a Modelagem | 27 |
| 3.5 | Fluidos Newtonianos | 28 |
| 3.5.1 | Lei de Deformação para Fluidos Newtonianos | 29 |
| 3.5.2 | Equações de Navier-Stokes | 33 |
| 3.5.3 | Equação Diferencial da Energia Térmica | 34 |
| 3.6 | Escoamento Incompressível com Propriedades Constantes | 35 |
| 3.7 | Aproximação de Oberbeck-Boussinesq | 36 |
| 3.8 | Caracterização do Escoamento | 37 |
| 3.8.1 | Caracterização Dinâmica | 38 |
| 3.8.2 | Caracterização Térmica | 39 |
| 4 | MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL | 40 |
| 4.1 | Discretização Temporal | 40 |
| 4.2 | Acoplamento Pressão - Velocidade | 41 |
| 4.3 | Discretização Espacial | 43 |
| 4.4 | Discretização das Equações de Balanço | 46 |
| 4.4.1 | Discretização do Campo de Velocidade Estimado | 46 |
| 4.4.2 | Discretização da Correção de Pressão | 46 |
| 4.4.3 | Discretização da Correção do Campo de Velocidade | 47 |
| 4.4.4 | Discretização do Campo de Temperatura | 48 |
| 4.5 | Condições de Convergência | 48 |
| 4.6 | Estabilidade | 49 |
| 5 | RESULTADOS | 51 |
| 5.1 | Estudo de Ordem de Convergência | 52 |
| 5.1.1 | Método das Soluções Manufaturadas | 53 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.1.2 | Ordem de Convergência do Método Numérico | 55 |
| 5.2 | Escoamento de Hagen-Poiseuille | 57 |
| 5.3 | Cavidade com Tampa Deslizante | 60 |
| 5.4 | Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada | 63 |
| 5.5 | Escoamento Sobre um Degrau | 66 |
| 5.6 | Escoamento Pulsado Sobre um Degrau | 69 |
| 5.7 | Escoamento Sobre um Cilindro Quadrado | 74 |
| 6 | CONCLUSÃO | 83 |
| | REFERÊNCIAS | 84 |

1 INTRODUÇÃO

A mecânica é um dos âmbitos mais antigos das ciências físicas. Seu campo de atuação compreende o estudo e a análise de corpos em movimento ou repouso e suas repercussões sobre as regiões do espaço que os envolvem. A mecânica dos fluidos é uma das esferas de atuação da mecânica, esta, por sua vez, restringe-se ao estudo e a investigação do complexo e intrincado comportamento do movimento dos fluidos e de suas interações com o meio.

Os fluidos desempenham um papel relevante em várias áreas do conhecimento humano, visto que os objetos de estudo de tais áreas interagem de forma direta ou indireta com os fluidos, quando estes não se apresentam como o agente principal de análise. A interdisciplinaridade da mecânica dos fluidos pode ser observada por meio de suas aplicações na medicina, como por exemplo, a hemodinâmica e a ventilação mecânica, que se encarregam da fisiologia da circulação sanguínea e do fluxo respiratório, respectivamente. Na meteorologia sua presença se evidencia com o estudo dos processos físicos envolvidos na formação e no desenvolvimento dos fenômenos meteorológicos. Na oceanografia suas contribuições se manifestam na análise dos eventos físicos oceânicos e suas interações com a atmosfera e a litosfera. Nos esportes de velocidade, constata-se sua participação na pesquisa e desenvolvimento de formas eficientes de redução dos efeitos das forças de arrasto fluidodinâmicas.

A engenharia contém grande parte das aplicações da mecânica dos fluidos, englobando desde projetos aeronáuticos à sistemas de distribuição de água. Muitas das vezes, tais aplicações surgem em razão da necessidade de se resolver problemas industriais, problemas estes, que se caracterizam por apresentarem um alto grau de complexidade tanto do ponto de vista geométrico quanto físico. Dessa forma, duas vertentes dispõem de serem utilizadas: a teoria e a experimentação material.

A vertente teórica baseia-se em leis e postulados físicos que regem a dinâmica e o transporte de energia do fenômeno material, tais leis quando criteriosamente aplicadas possibilitam a formulação de modelos físicos e matemáticos. Os modelos físicos consistem em uma representação do fenômeno material em análise, onde são adotadas hipóteses simplificadoras, a fim de viabilizar a análise do mesmo. Os modelos matemáticos são construídos a partir dos modelos físicos, onde transforma-se estes em equações matemáticas, com o intuito de se possibilitar uma análise quantitativa do fenômeno físico. Já a vertente experimental, baseia-se na reprodução do fenômeno observado, em um meio controlado e

instrumentado, onde os resultados devem ainda passar por um procedimento estatístico, com o propósito de se garantir a veracidade e replicabilidade das informações adquiridas.

Devido ao alto grau de complexidade da maioria dos escoamentos práticos, a solução analítica dos modelos matemáticos quase sempre se mostram inviáveis, fazendo-se necessário recorrer a experimentação material para obtenção de respostas referentes ao escoamento. A experimentação material, embora seja uma ferramenta muito útil, acaba sendo limitada em função de seu elevado custo financeiro, seja em relação a materiais ou tempo de experimentação. Dessa forma, surge a modelagem numérica-computacional, capaz de fornecer resultados aproximados do escoamento, através do desenvolvimento de rotinas computacionais baseadas no modelo matemático.

Com o avanço computacional, o aumento da capacidade de processamento e o desenvolvimento de novas metodologias computacionais, a simulação numérica de escoamentos passa a ser uma excelente ferramenta, tanto do ponto de vista financeiro quanto quantitativo, cuja utilização encontra-se em franco crescimento nos dias atuais. Sua aplicação viabiliza a análise e compreensão de fenômenos complexos, à um baixo custo e para uma grande gama de características físicas e geométricas do escoamento.

Neste contexto, o presente trabalho visa apresentar as modelagens física e matemática de escoamentos para fluidos arbitrários, onde é contemplada a dinâmica e o transporte de energia térmica no escoamento. Tal modelagem é particularizada para o caso de fluidos newtonianos com propriedades constantes em escoamentos incompressíveis, simplificações estas, que possibilitam a modelagem numérica-computacional abordada no presente estudo, onde emprega-se a metodologia do passo fracionado (método de projeção), para o acoplamento pressão-velocidade. Rotinas computacionais são desenvolvidas e implementadas em linguagem de programação FORTRAN 90, onde as equações são discretizadas pelo método de diferenças finitas e resolvidas em um domínio bidimensional. Simulações também serão conduzidas, a fim de verificar a ordem de convergência do método numérico utilizado, validar o código computacional desenvolvido e analisar a influência de parâmetros adimensionais nas características do escoamento.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A mecânica dos fluidos, assim como grande parte de toda a ciência, foi construída através de pequenas contribuições de diversos pesquisadores e cientistas ao longo da história da humanidade. Nesse sentido, o presente capítulo é designado a abordar, em ordem cronológica, os acontecimentos históricos e as principais obras e descobertas da fluidodinâmica, que culminaram no entendimento atual a respeito da mecânica dos fluidos.

Uma das primeiras teorias da mecânica dos fluidos se deve ao matemático grego Arquimedes de Siracusa, que em sua obra *Sobre os Corpos Flutuantes*, formulou as leis para flutuação de corpos. Arquimedes ao aplicar os princípios do empuxo, conseguiu o incrível feito de determinar o teor de ouro da coroa do rei Hierão de Siracusa sem a necessidade de realizar um teste destrutivo. Ainda na idade antiga, outra contribuição importante se deve à Frontinus, que descreve os métodos romanos de distribuição de água, onde os aquedutos romanos eram uma das grandes obras de engenharia da época.

Do nascimento de Cristo à Renascença, ocorreu um progresso constante no projeto de navios e aquedutos, porém nenhum avanço teórico significativo na fluidodinâmica foi registrado. Até que em 1500 Leonardo da Vinci deduziu a equação da conservação da massa para um escoamento incompressível e unidimensional. Da Vinci fez descrições detalhadas e precisas de uma gama de escoamentos e projetou uma diversidade de dispositivos aerodinâmicos.

O próximo grande avanço científico na mecânica dos fluidos deve-se à Torricelli (1644), onde ele relaciona a velocidade de um fluido através de um orifício em um recipiente, com a velocidade em queda livre em que uma partícula fluida atingiria, se caísse a partir da superfície livre do recipiente, enunciado conhecido como teorema de Torricelli. Torricelli também foi o responsável pela construção do barômetro de mercúrio, instrumento bastante utilizado para medidas de pressão.

Mariotte (1686) provavelmente foi o primeiro cientista a realizar um estudo a respeito do efeito de fricção existente nos fluidos. Em seus estudos ele construiu um sistema de balança capaz de medir a força de arrasto sobre um modelo estacionário em um escoamento, o primeiro túnel de vento. Logo após a publicação do trabalho de Mariotte, problemas que relacionam a quantidade de movimento dos fluidos puderam ser analisados, pois em 1687 Newton postula as leis do movimento e a lei dos fluidos lineares, e ao aplicá-las se torna o primeiro cientista a determinar corretamente a distribuição de velocidade sobre

um cilindro em rotação.

A teoria de Newton levou primeiramente à hipótese de um fluido invíscido, ou seja, um fluido isento de viscosidade, e grande parte dos matemáticos do século XVIII usaram tal hipótese para analisar problemas de escoamentos sem atrito. Bernoulli (1738) foi o primeiro, em seu trabalho ele apresenta uma relação entre o gradiente de pressão e a aceleração do fluido. Em seguida, Euler (1757), deriva um conjunto de equações que modelam a dinâmica e o transporte de energia em um escoamento invíscido, equações as quais até os dias atuais se mantêm inalteradas.

Paralelamente aos estudos de Euler, D'Alembert (1752) publica o seu famoso paradoxo, onde ele contesta que um corpo imerso em um escoamento invíscido possui arrasto nulo, o que, de fato, não condiz com a realidade material. A hipótese de um fluido sem viscosidade resultou em um grande avanço teórico para a mecânica dos fluidos, porém suas aplicações práticas são bastantes limitadas, pois a grande maioria dos escoamentos em engenharia são regidos por efeitos viscosos. Com a publicação do paradoxo de D'Alembert, os engenheiros passaram a rejeitar as teorias até então desenvolvidas, pois as consideravam não realísticas e dividiram a mecânica dos fluidos em duas partes: hidrodinâmica, onde a maioria dos matemáticos trabalhavam com fluidos não viscosos, e a hidráulica, onde os cientistas se baseavam praticamente na experimentação material.

Os próximos grandes avanços significativos na teoria da mecânica dos fluidos ocorreram com a adição de termos de resistência viscosa às famosas equações de Euler para escoamentos invíscidos. Praticamente simultaneamente, Navier (1827), Cauchy (1828), Poisson (1829), Saint-Venant (1843) e Stokes em 1845, derivaram as equações do movimento considerando os efeitos da resistência ao escoamento em função de propriedades moleculares conhecidas. Onde Stokes, foi o primeiro pesquisador a escrever as equações do movimento em função de um coeficiente de viscosidade, equações essas que hoje são denominadas equações de Navier-Stokes. As equações de Navier-Stokes formam um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares, cuja solução para escoamentos arbitrários se mostrou bastante difícil, sendo até os dias atuais um dos problemas abertos da matemática.

Embora as dificuldades matemáticas existentes, a teoria da mecânica dos fluidos continuou se desenvolvendo por meio da experimentação material. Rayleigh (1877) propõem a análise dimensional, técnica essa que visa quantificar determinadas características de um escoamento através de grandezas adimensionais, construindo assim uma base sólida para a experimentação material. Reynolds (1883) realiza seu clássico experimento em tubos, onde mostra a importância do adimensional número de Reynolds, assim denominado em sua homenagem.

A próxima importante descoberta se deve a Prandtl (1904), que mostrou em uma série de experimentos, que escoamentos com baixas viscosidades, como escoamentos de água e de ar, principais fluidos considerados pela engenharia, podem ser divididos em duas partes: uma camada delgada próxima às superfícies e interfaces, onde os efeitos viscosos predominam, denominada de camada-limite, e subsequente a esta existe uma camada externa que pode ser considerada não viscosa, de modo que se tornam válidas as equações de Euler. A teoria da camada-limite tornou possível a análise de uma série de escoamentos reais de engenharia, escoamentos os quais até então eram possíveis somente através da experimentação material.

Os próximos grandes saltos da mecânica dos fluidos foram dados por von Kármán (1938) e Kolmogorov (1941) em seus estudos a respeito do fenômeno da turbulência. A turbulência, ainda nos dias atuais, é um dos grandes problemas da física e o conhecimento humano acumulado ao longo da história permanece incapaz de defini-la com precisão. Porém, na tentativa de caracteriza-la, dentro dos conceitos físicos vigentes, pode-se entender a turbulência como um regime de operação caótico, altamente difusivo, intensamente dissipativo e com características tridimensionais, de um sistema dinâmico com um elevado número de graus de liberdade. Características estas presentes na grande maioria dos escoamentos em engenharia.

Com o avanço da tecnologia e da capacidade de processamento, muitos modelos computacionais e métodos numéricos para a solução das equações de Navier-Stokes foram publicados. Ganhou espaço então a dinâmica dos fluidos computacional (*computational fluid dynamics – CFD*, em inglês), ao possibilitar que qualquer pesquisador que possuísse acesso a um computador digital, e conhecimentos a respeito de algoritmos e programação de computadores, conseguisse resolver a dinâmica e o transporte de energia de um escoamento.

Atualmente, o poder de processamento dos computadores pessoais se tornou tão elevado, que é possível a solução das equações de Navier-Stokes para geometrias cartesianas simples, através da construção de um algoritmo computacional que possa ser executado através de um computador pessoal, sendo este um dos objetivos do presente trabalho.

3 MODELO MATEMÁTICO

Os fenômenos físicos, em sua grande maioria, podem ser representados simbolicamente através de equações matemáticas, por meio de hipóteses simplificadoras, a fim de se avaliar quantitativamente determinadas propriedades de interesse de um sistema físico. A modelagem matemática, se conduzida de forma criteriosa e fundamentada nas leis físicas, deve fornecer resultados condizentes com as observações realizadas no mundo material.

O presente capítulo é direcionado ao desenvolvimento das equações matemáticas que modelam a dinâmica dos fluidos, assim como o transporte e as transformações de energia por eles experimentadas. Tais equações podem ser obtidas segundo duas abordagens distintas: a formulação Euleriana e a Lagrangiana. Ambas as formulações são fundamentadas pela hipótese do contínuo e as equações são desenvolvidas por meio da lei da conservação da massa, do balanço da quantidade de movimento linear e da primeira lei da termodinâmica.

3.1 Hipótese do Contínuo

Os fluidos são constituídos de aglomerações de moléculas, as quais são separadas umas das outras por regiões de vácuo. Nos gases a distância entre as moléculas é muito maior que o tamanho da mesma, constituindo dessa forma uma não uniformidade na distribuição de matéria por unidade de volume. Já nos líquidos, onde as moléculas estão tão próximas quanto as forças repulsivas intermoleculares permitem, ainda assim não existe uniformidade em tal distribuição, uma vez que a massa está concentrada nos núcleos dos átomos que formam as moléculas (BATCHELOR, 1970).

Outra importante observação a respeito da natureza microscópica dos fluidos, é que as moléculas estão livres para se locomoverem umas em relação as outras e apresentam uma distribuição de velocidade totalmente não uniforme. Desse modo, a quantidade de moléculas que ocupam um dado volume de fluido varia continuamente, de forma que a distribuição de matéria por unidade de volume não apresente um significado preciso.

Entretanto, observa-se que tais efeitos de não uniformidade na distribuição de matéria tornam-se negligenciáveis a medida que a unidade de volume aumenta (WHITE, 2011). Se a unidade de volume for suficientemente grande, existirá um número consideravelmente grande de moléculas nele contidas, ao ponto que flutuações na distribuição de matéria, em virtude do espaçamento entre as moléculas ou do fluxo de moléculas na unidade de volume, não afetarão a distribuição média de massa no volume. Porém, se a unidade de volume

for muito grande, podem ocorrer variações macroscópicas na distribuição de matéria em função de variações na aglomeração global de moléculas.

Desse modo, existe um volume-limite, no qual abaixo desse valor efeitos moleculares se tornam relevantes e acima dele efeitos macroscópicos se tornam importantes. Para tal volume-limite, as propriedades do fluido podem ser consideradas como funções contínuas no espaço, ou seja, as variações nas propriedades do fluido ocorrem de forma suave, de maneira que o cálculo diferencial possa ser usado. Diz-se então que o fluido é um meio contínuo.

3.2 Cinemática dos Fluidos

A cinemática dos fluidos é uma área da mecânica dos fluidos responsável pelo estudo e análise do movimento dos mesmos, porém sem necessariamente considerar as forças e os momentos que resultaram em tal movimento. As três principais variáveis de interesse para a cinemática são: posição, velocidade e aceleração.

A posição de uma partícula de fluido corresponde a região do espaço onde esta se encontra, e pode ser representada por meio de uma função vetorial no tempo, ou seja, é descrita por funções escalares em cada uma das direções coordenadas:

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (3.1)$$

onde x , y e z são funções escalares dependentes do tempo.

Entre as principais propriedades de um escoamento, destaca-se o campo de velocidade, uma vez que a partir deste se derivam diretamente outras propriedades importantes do escoamento. A velocidade da partícula de fluido ao longo de sua trajetória pode ser obtida através da derivada temporal de sua posição. Desse modo:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = u(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{i} + v(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{j} + w(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{k}, \quad (3.2)$$

onde u , v e w são os campos escalares de velocidade, funções da posição e do tempo e orientados segundo as direções coordenadas.

A aceleração da partícula de fluido pode ser determinada através da derivada segunda no tempo de sua posição, dessa forma:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t)}{dt}, \quad (3.3)$$

como a velocidade da partícula de fluido é função de sua posição e do tempo, a regra da cadeia deve ser aplicada, a fim de se obter a derivada temporal:

$$\frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (3.4)$$

Por definição, a derivada temporal das funções escalares do vetor de posição da partícula de fluido representam as componentes locais do campo de velocidade. Usando este fato e reagrupando então os termos da equação (3.4), obtém-se a aceleração total da partícula de fluido:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{D\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}, \quad (3.5)$$

onde para indicar a derivada temporal total utiliza-se o operador D/Dt , também conhecido como derivada material.

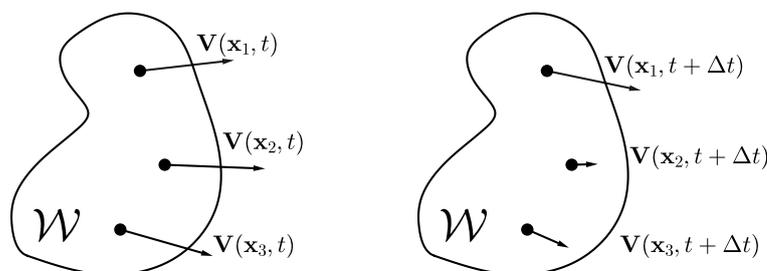
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla). \quad (3.6)$$

3.3 Formulação Euleriana

Um dos métodos mais utilizados para descrever um escoamento é a formulação euleriana. Na descrição euleriana do movimento dos fluidos, define-se um volume de controle fixo no espaço, por meio do qual o fluido escoar, de modo que este pode ou não cruzar sua fronteira. Todas as análises realizadas se passarão sobre tal volume, de forma que não se faz necessário acompanhar um conjunto de partículas de fluido, pois as propriedades de interesse do escoamento, são definidas por funções dependentes de uma posição no espaço e no tempo dentro do volume de controle.

A figura 1 representa esquematicamente um volume de controle euleriano, onde se observa o vetor de velocidade em três pontos do domínio. Nota-se que em um instante de tempo qualquer t os vetores de velocidade nos pontos estão apontando para determinadas direções, porém, após um instante Δt , outras partículas de fluido ocuparão tal região dentro do volume de controle e seus vetores de velocidade poderão ter orientação diferentes das partículas que ocupavam anteriormente aquele espaço. Este é princípio da descrição euleriana para o movimento dos fluidos.

Figura 1 – Volume de controle euleriano.



Fonte: Autoria própria.

A partir de um volume de controle euleriano, juntamente com as leis físicas, pode-se deduzir as equações que modelam a dinâmica dos fluidos e o transporte de energia, como será abordado a seguir.

3.3.1 Equação da Continuidade

Um dos princípios físicos que devem ser respeitados é a lei da conservação da massa. Para um sistema fechado a conservação de massa diz que a massa do sistema deve permanecer constante, porém, em um volume de controle euleriano, a massa pode cruzar suas fronteiras, logo, o fluxo mássico líquido sobre sua superfície também deve ser avaliado.

Considera-se um volume de controle \mathcal{W} , cuja fronteira seja representada por $\partial\mathcal{W}$, a quantidade de massa presente no interior de tal volume é dada por:

$$m(\mathcal{W}, t) = \iiint_{\mathcal{W}} \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (3.7)$$

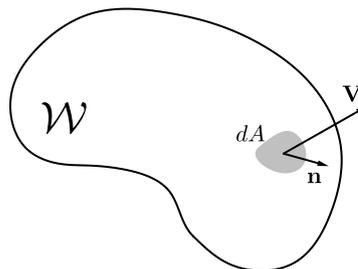
onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a massa específica do elemento diferencial de fluido e dV representa seu volume.

Para um volume de controle euleriano a taxa de variação total da massa em seu interior é igual ao fluxo mássico líquido que atravessa sua fronteira, ou seja, a variação da quantidade de massa dentro do volume é igual a diferença entre a massa que entra e a massa que sai do volume de controle. Matematicamente essa relação pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{W}} \rho dV + \iint_{\partial\mathcal{W}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad (3.8)$$

onde \mathbf{V} é a velocidade do elemento diferencial de fluido, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à fronteira $\partial\mathcal{W}$ e dA é a área do elemento de fluido, como representado na figura 2.

Figura 2 – Representação de um elemento de fluido em um volume de controle euleriano.



Fonte: Autoria própria.

Como o volume de controle euleriano permanece fixo, pode-se permutar a derivada temporal presente no primeiro termo da equação (3.8) com a integral de volume. Ao se aplicar o teorema da divergência para transformar a integral de superfície, representada pelo segundo termo da equação (3.8), em uma integral de volume, pode-se combinar as duas integrais de volume resultantes em apenas uma:

$$\iiint_{\mathcal{W}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] dV = 0. \quad (3.9)$$

Dado que a equação (3.9) é válida para qualquer volume de controle \mathcal{W} , independentemente de seu formato, pode-se inferir que a integral sobre o volume só será nula, se o integrando for identicamente igual a zero. Desse modo, obtém-se a equação diferencial da conservação da massa, popularmente conhecida como equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (3.10)$$

Uma outra forma de se escrever a equação da continuidade, consiste em se expandir o termo contendo o divergente usando a regra do produto e usar a notação de derivada material para a massa específica:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3.11)$$

3.3.2 Equação de Cauchy

O segundo princípio físico a ser considerado é a segunda lei de Newton ou balanço da quantidade de movimento linear. Para um sistema fechado a segunda lei diz que a taxa de variação da quantidade de movimento linear do sistema é igual à força líquida que atua sobre o mesmo.

A quantidade de movimento linear presente no interior do volume de controle pode ser expressar por:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathcal{W}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (3.12)$$

De forma análoga à conservação de massa, para um volume de controle euleriano existe fluxo de quantidade de movimento através das fronteiras do volume de controle, e este fluxo deve ser contabilizado no balanço da quantidade de movimento. Desse modo, a segunda lei de Newton pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{V} dV + \iint_{\partial \mathcal{W}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum \mathbf{F}, \quad (3.13)$$

onde $\sum \mathbf{F}$ representa a soma de todas as forças que atuam sobre o volume de controle.

As forças que agem sobre o volume de controle podem ser classificadas em dois tipos: forças de campo e forças de superfície. As forças de campo ocorrem em virtude da existência de campos externos que agem em cada partícula de fluido dentro do volume de controle. Já as forças superficiais se originam de tensões que atuam sobre cada parcela da fronteira do volume de controle.

Uma das forças de campo mais comum é a força gravitacional e será a única força de campo abordada no presente trabalho. O campo gravitacional exerce uma força sobre

cada elemento do volume de controle e tal força é proporcional a massa de cada elemento. Logo, a força gravitacional resultante sobre todo volume de controle é:

$$\mathbf{F}_g = \iiint_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{g} dV, \quad (3.14)$$

onde \mathbf{g} é o campo gravitacional que atua sobre o volume de fluido.

A análise das forças superficiais que atuam em um elemento de fluido é uma tarefa trabalhosa, uma vez que estas são compostas de componentes nas direções normais e tangenciais. Dessa maneira, define-se um tensor de segunda ordem denominado tensor de tensão, o qual descreve as tensões superficiais em cada elemento de fluido. As componentes de tal tensor são representadas por σ_{ij} , onde j representa a direção na qual a tensão está agindo e i representa a direção normal a face em que a tensão atua.

O produto interno do tensor de tensão σ_{ij} com o vetor unitário \mathbf{n} normal a um elemento diferencial de área contido na fronteira do volume de controle, resulta no vetor de tensão que age sobre o elemento superficial. Portanto, a força superficial total que age sobre a superfície de controle é dada por:

$$\mathbf{F}_s = \iint_{\partial\mathcal{W}} \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.15)$$

A força total que age sobre o volume de controle pode ser representada pela soma das forças de campo e das forças superficiais:

$$\sum \mathbf{F} = \iiint_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{g} dV + \iint_{\partial\mathcal{W}} \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.16) na equação do balanço da quantidade de movimento linear (3.13), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{V} dV + \iint_{\partial\mathcal{W}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \iiint_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{g} dV + \iint_{\partial\mathcal{W}} \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.17)$$

Como o volume de controle é fixo, pode-se permutar a derivada temporal e a integral volumétrica do primeiro termo da equação (3.17). Aplica-se também o teorema da divergência para transformar as integrais de superfície em integrais de volume, obtendo:

$$\iiint_{\mathcal{W}} \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \sigma_{ij} \right] dV = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

onde o produto $\mathbf{V} \mathbf{V}$ é chamado produto exterior do vetor velocidade por si mesmo e representa um tensor de segunda ordem. Em coordenadas cartesianas ele pode ser

representado por:

$$\mathbf{V}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

A equação (3.18) é válida para qualquer volume de controle \mathcal{W} , logo, a integral volumétrica só será nula se o integrando também for nulo. Dessa forma, obtém-se a equação diferencial do balanço da quantidade de movimento linear, também conhecida como equação de Cauchy.

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\mathbf{V}) = \rho\mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij}. \quad (3.20)$$

Segundo Çengel e Cimbala (2012), o tensor de tensões pode ser dividido em tensões devido a pressão e tensões devido a efeitos viscosos. A pressão age na direção normal à fronteira do volume de controle e para dentro, enquanto as tensões viscosas atuam nas direções normais e tangenciais. Logo, pode-se expressar o tensor de tensões em coordenadas cartesianas da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde p é a pressão e τ_{ij} é chamado de tensor de tensão viscosa.

Substituindo a equação (3.21) na equação de Cauchy (3.20), obtém-se a forma conservativa da equação do movimento:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\mathbf{V}) = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij}. \quad (3.22)$$

A equação do balanço de quantidade de movimento linear pode ser reescrita de outra forma. Aplicando-se a regra do produto no primeiro e no segundo termo da equação (3.22) e reagrupando os termos, obtém-se a seguinte expressão:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \tau_{ij}. \quad (3.23)$$

O termo entre colchetes é identicamente nulo devido a equação da continuidade (3.10), assim, obtém-se a forma não conservativa da equação do movimento:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau_{ij}. \quad (3.24)$$

3.3.3 Equação da Energia

A última lei física a ser analisada é a primeira lei da termodinâmica ou lei da conservação da energia total. Quando aplicada a um sistema, a primeira lei diz que a energia total transferida para o sistema nas formas de calor ou trabalho é igual à variação de sua energia interna.

A quantidade de energia contida no interior de um volume de controle, pode ser expressa por:

$$E(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathcal{W}} e(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}, t)dV, \quad (3.25)$$

onde e é a energia por unidade de massa ou energia específica, e pode representar diversos tipos de energia, como: interna, cinética, potencial, química, nuclear, elétrica e magnética. No presente trabalho será considerado apenas os efeitos dos três primeiros termos.

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}. \quad (3.26)$$

Em um volume de controle euleriano deve-se contabilizar o fluxo de energia que atravessa suas fronteiras ao se aplicar a primeira lei da termodinâmica. Desse modo, o balanço de energia pode ser representado matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{W}} e\rho dV + \iint_{\partial\mathcal{W}} e\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dA. \quad (3.27)$$

onde Q é o calor e W representa o trabalho. É importante salientar que define-se Q positivo ao se adicionar calor ao volume de controle e W positivo quando trabalho é realizado pelo volume de controle.

O trabalho pode ser dividido em três tipos principais: trabalho de eixo, trabalho realizado por forças de pressão e trabalho devido as tensões viscosas:

$$W = W_{\text{eixo}} + W_{\text{pressão}} + W_{\text{viscoso}} = W_e + W_p + W_v, \quad (3.28)$$

o trabalho de eixo refere-se ao trabalho realizado por alguma fonte externa que esteja dentro do volume de controle, já o trabalho de pressão, assim como o trabalho devido as tensões viscosas, ocorrem somente na fronteira do volume de controle devido aos efeitos da pressão e das tensões viscosas.

A taxa de trabalho devido aos efeitos de pressão, pode ser mensurada através da integração sobre toda a fronteira do volume de controle do produto da pressão pela componente normal de velocidade entrando no volume de controle:

$$\frac{dW_p}{dt} = \iint_{\partial\mathcal{W}} -p(-\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dA = \iint_{\partial\mathcal{W}} p\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dA, \quad (3.29)$$

substituindo as expressões (3.28) e (3.29) na equação (3.27) e rearranjando os termos, obtém-se a formulação integral da equação da energia:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_e}{dt} - \frac{dW_v}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{W}} e \rho dV + \iint_{\partial \mathcal{W}} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.30)$$

No presente trabalho os efeitos de radiação serão desprezados ao se alisar a troca de energia térmica no volume de controle. Desse modo, o calor será modelado considerando apenas efeitos de condução, os quais seguem a lei de Fourier:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (3.31)$$

onde \mathbf{q} é o fluxo térmico por condução, k é o coeficiente de condutividade térmica e T é o campo de temperatura.

A taxa de fluxo de energia térmica na forma de calor por condução sobre toda a fronteira do volume de controle pode ser expressa por:

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_{\partial \mathcal{W}} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_{\partial \mathcal{W}} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA, \quad (3.32)$$

onde o sinal negativo refere-se a hipótese de que o calor esteja saindo pela fronteira do volume de controle.

O trabalho realizado pelas tensões viscosas, pode ser calculado pela integração sobre toda superfície de controle do produto da componente da tensão viscosa atuante em determinada direção pela componente de velocidade na mesma direção, matematicamente a taxa de trabalho das tensões viscosas pode ser expressa por:

$$\frac{dW_v}{dt} = \iint_{\partial \mathcal{W}} \mathbf{V} \cdot \tau_{ij} dA. \quad (3.33)$$

Substituindo as equações (3.32) e (3.33) na equação (3.30), e considerando que não exista nenhuma fonte de potência externa ($dW_e/dt = 0$):

$$\iint_{\partial \mathcal{W}} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA + \iint_{\partial \mathcal{W}} \mathbf{V} \cdot \tau_{ij} dA = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{W}} e \rho dV + \iint_{\partial \mathcal{W}} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.34)$$

Novamente usando o fato que o volume de controle euleriano é fixo, permuta-se a integral de volume com a derivada temporal. Aplica-se o teorema da divergência para transformar as integrais de superfície em integrais volumétricas, obtendo-se:

$$\iiint_{\mathcal{W}} \left[\frac{\partial(e\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot [(e\rho + p) \mathbf{V}] - \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \tau_{ij}) \right] dV = 0. \quad (3.35)$$

De forma análoga aos casos anteriores, a equação (3.35) é verdadeira para um volume de controle qualquer e arbitrário, logo, para a integral integral volumétrica ser nula, o integrando deve ser identicamente nulo. Dessa forma, reagrupando os termos e expandido o segundo termo do integrando obtém-se:

$$\frac{\partial(e\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (e\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (p\mathbf{V}) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \tau_{ij}). \quad (3.36)$$

Nota-se que a equação (3.36) pode ser ainda reescrita da seguinte forma:

$$\rho \frac{De}{Dt} + e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)p = \nabla \cdot (k\nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \tau_{ij}), \quad (3.37)$$

onde o termo entre parênteses é nulo devido a equação da continuidade (3.10).

Diferenciando em relação ao tempo a energia específica (3.26) têm-se:

$$\frac{De}{dt} = \frac{D\hat{u}}{Dt} + \mathbf{V} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{g}, \quad (3.38)$$

observa-se ainda a seguinte relação entre o campo de velocidades e o tensor de tensões viscosas:

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \tau_{ij}) \equiv \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) + \Phi, \quad (3.39)$$

onde Φ é denominada de função de transformação viscosa.

Substituindo as equações (3.38) e (3.39) na equação (3.37), obtém-se:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho \mathbf{V} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)p = \nabla \cdot (k\nabla T) + \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) + \Phi, \quad (3.40)$$

fazendo o produto escalar do vetor velocidade pela equação da quantidade de movimento linear (3.24) e rearranjando os termos:

$$\rho \mathbf{V} \cdot \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)p = \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}), \quad (3.41)$$

substituindo a equação (3.41) na equação (3.40) é possível eliminar o termo $\mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij})$, obtendo assim a equação diferencial da energia:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi. \quad (3.42)$$

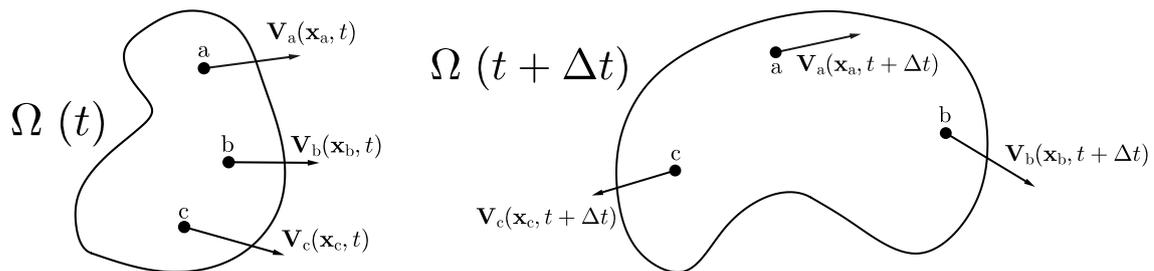
Esta equação é válida sob condições bastantes gerais, como escoamento transiente, compressível, viscoso e com condução de calor, desde que a função de dissipação viscosa (Φ) seja conhecida e despreze-se efeitos de radiação e as fontes internas de calor.

3.4 Formulação Lagrangiana

Na descrição lagrangiana do movimento dos fluidos, define-se um volume de controle que engloba determinada quantidade de partículas de fluido. Este volume de controle não é fixo, pois ele deve acompanhar as partículas durante seu movimento, de modo que não exista fluxo de partículas por suas fronteiras, ou seja, segue-se um conjunto de partículas de fluido com identidade fixa. Dessa forma, o volume de controle escolhido é coincidente com o sistema de partículas que engloba, porém este se deforma para poder abrangê-las.

A figura 3 representa esquematicamente um volume de controle lagrangiano, onde se observa o vetor de velocidade de três partículas de fluido. Nota-se que em um instante de tempo qualquer t , as partículas de fluido possuem uma posição e uma velocidade característica, porém, após um instante de tempo Δt , as partículas já se encontram em outra posição e o domínio sofre deformações a fim de englobar todas as partículas de fluido em suas novas posições.

Figura 3 – Volume de controle lagrangiano.



Fonte: Autoria própria.

3.4.1 Teorema de Transporte

O teorema de transporte é uma importante ferramenta matemática, que permite relacionar a análise da taxa de variação temporal de uma propriedade extensiva de um sistema e de um volume de controle. Na formulação lagrangiana sua aplicação se torna essencial, visto que, o sistema e o volume de controle se encontram coincidentes.

O teorema de transporte pode ser deduzido ao se considerar f como uma propriedade extensiva do escoamento. Se \mathbf{x} é a posição da partícula de fluido e $\varphi(\mathbf{x}, t)$ a trajetória seguida pela partícula que se encontra no ponto \mathbf{x} no tempo t_0 . A derivada temporal da propriedade f sobre todo o sistema pode ser avaliada ao se realizar a seguinte mudança de variáveis:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t_0)} f(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) d\Omega(t_0). \tag{3.43}$$

onde $\Omega(t)$ representa o sistema, $\Omega(t_0)$ é o volume de controle em um instante inicial, $d\Omega(t_0)$ é o elemento diferencial de volume considerando o volume de controle inicial e J é o determinante da matriz jacobina de mudança de variáveis.

Como o volume de controle é fixo no tempo inicial t_0 , pode-se permutar a integral volumétrica com a derivada temporal:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{\Omega(t_0)} \frac{D}{Dt} (f(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t)) d\Omega(t_0), \quad (3.44)$$

aplicando a regra da cadeia obtém-se:

$$\frac{D}{Dt} (f(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t)) = \frac{Df}{Dt} J + f \frac{DJ}{Dt}. \quad (3.45)$$

A derivada temporal do determinante da matriz jacobiana pode ser avaliada ao se utilizar a propriedade da multilinearidade do determinante e o teorema de Clairaut-Schwarz para inverter a ordem de diferenciação de algumas derivadas cruzadas que surgem durante o desenvolvimento (CHORIN; MARSDEN, 1993). Obtendo-se a seguinte relação:

$$\frac{DJ}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{V}) J, \quad (3.46)$$

substituindo as equações (3.45) e (3.46) na equação (3.44):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} f dV = \iiint_{\Omega(t_0)} \left(\frac{Df}{Dt} + f(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right) J d\Omega(t_0), \quad (3.47)$$

o termo entre parênteses da integral volumétrica a direita da igualdade na equação (3.47) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{Df}{Dt} + f(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) f + f(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{V}). \quad (3.48)$$

Ao substituir a equação (3.48) na equação (3.47) e desfazendo a mudança de variáveis, obtém-se o teorema de transporte, para um domínio de formato genérico:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} f dV = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{V}) \right) dV. \quad (3.49)$$

3.4.2 Equações Para a Modelagem

As equações com as quais modelam-se a dinâmica e o transporte de energia nos fluidos, podem ser deduzidas através da formulação lagrangiana de forma semelhante a formulação euleriana, porém com o auxílio do teorema de transporte. De forma similar, a dedução das equações modeladoras são fundamentadas por meio da lei da conservação da massa, do balanço de quantidade de movimento linear ou segunda lei de Newton, e da terceira lei da termodinâmica.

Primeiramente, ao se analisar a lei da conservação da massa em um domínio lagrangiano, têm-se a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho dV = 0, \quad (3.50)$$

note que ao fazer a propriedade extensiva f do teorema de transporte, igual a massa específica do fluido ρ na equação (3.49), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho dV = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right) dV. \quad (3.51)$$

Substituindo a equação (3.51) na lei de conservação da massa aplicada a um domínio lagrangiano (3.50):

$$\iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right) dV = 0, \quad (3.52)$$

usando o fato de que a equação (3.52) é verdadeira para qualquer que seja o domínio lagrangiano, infere-se então, que a integral de volume só será nula se o integrando for identicamente nulo. Desse modo, obtém-se a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (3.53)$$

Esta metodologia de análise pode ser aplicada para as demais leis fundamentais da física, de modo a se obter as equações de Cauchy e a equação diferencial da energia. Para o balanço de quantidade de movimento, a propriedade extensiva f do teorema de transporte se torna $\rho \mathbf{V}$, ou seja, a própria quantidade de movimento. Para a análise das forças externas que atuam sobre o volume de controle se procede de forma análoga a formulação euleriana. Já para a terceira lei da termodinâmica, f é representada pelo produto da energia específica pela massa específica do fluido ($e\rho$), isto é, a energia da partícula de fluido. As análises a respeito das trocas de energia através de calor e trabalho se dão de forma semelhante a metodologia euleriana.

3.5 Fluidos Newtonianos

A viscosidade é uma característica de um fluido que quantifica a sua resistência ao escoamento. De forma mais formal, pode-se defini-la como uma propriedade que relaciona a taxa de deformação que é aplicada sobre o fluido, a partir da aplicação de tensões de cisalhamento.

Para a grande maioria dos fluidos comuns utilizados em engenharia, a tensão de cisalhamento aplicada ao fluido, pode ser descrita como uma função dependente unicamente

da taxa de deformação:

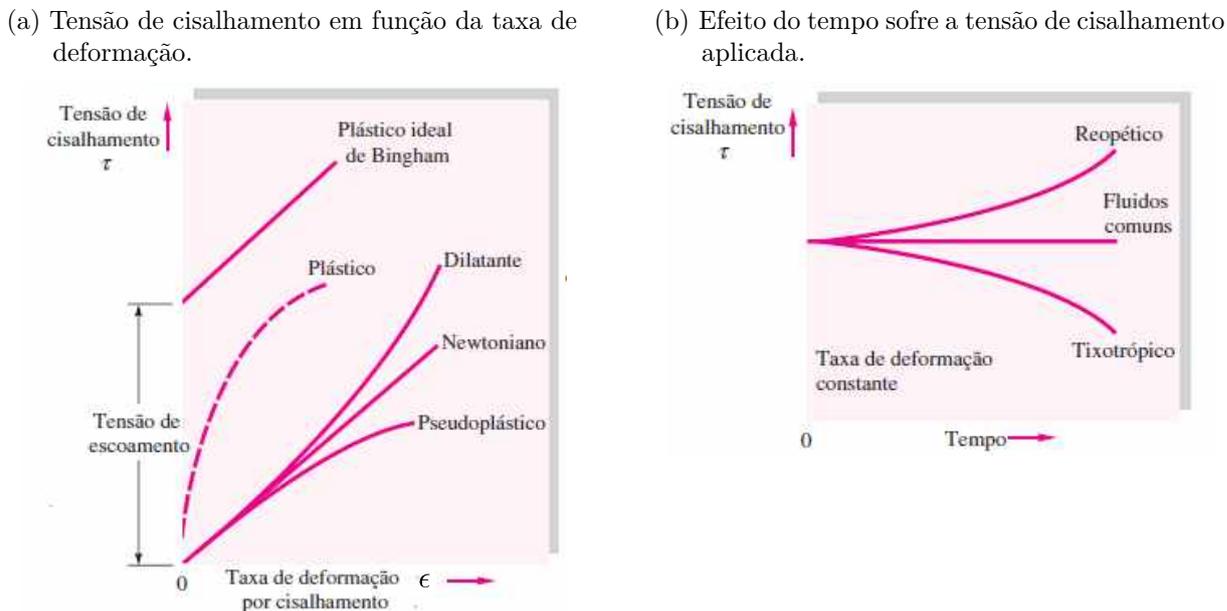
$$\tau_{ij} = f(\epsilon_{ij}), \tag{3.54}$$

onde ϵ_{ij} é um tensor de segunda ordem, que representa a taxa de deformação atuante na direção j da face do elemento de fluido cuja normal aponta para direção i .

Para fluidos simples como a água, o ar, alguns óleos e gases, a relação (3.54) é linear, e o coeficiente de proporcionalidade é chamado de coeficiente de viscosidade μ . Os fluidos que apresentam tal característica são denominados de fluidos newtonianos, em homenagem a Newton que postulou a lei dos fluidos lineares em 1687. O coeficiente de viscosidade em fluidos newtonianos é uma propriedade predominantemente termodinâmica, logo, este sofre alterações com a variação da pressão e da temperatura.

Quando a relação (3.54) é não-linear, o fluido em questão é nomeado de não newtoniano. O estudo de fluidos não newtonianos é contemplado pela reologia, um ramo da mecânica que se designa ao estudo da deformação e do escoamento da matéria. A figura 4 apresenta alguns tipos de fluidos não newtonianos.

Figura 4 – Comportamento característico de vários fluidos.



Fonte: White (2011).

3.5.1 Lei de Deformação para Fluidos Newtonianos

Para o presente trabalho será considerado apenas fluidos newtonianos. Desse modo, se faz necessário compreender como se relaciona o tensor deformação com o tensor tensão

para essa gama de fluidos. Por analogia com a lei de Hooke para tensão e deformação, pode-se assumir que a variação da tensão com a taxa de deformação em um elemento de fluido segue uma lei linear. Essa consideração foi proposta primeiramente por Stokes, onde ele definiu três postulados:

1. O fluido é contínuo e o tensor de tensão σ_{ij} é uma função linear das taxas de deformações ϵ_{ij} .
2. O fluido é isotrópico, ou seja, suas propriedades independem da direção, de modo que a lei de deformação seja independente do sistema de coordenadas em que é expressa.
3. Quando a taxa de deformação é nula, a lei de deformação deve-se reduzir a condição fluidostática, ou seja, considerar apenas os efeitos da pressão.

Primeiramente, para se correlacionar as taxas de deformações com alguma grandeza de interesse do escoamento, é necessário a aplicação da lei da conservação da massa em um elemento de fluido:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D(\rho V)}{Dt} = 0, \quad (3.55)$$

ao se aplicar a regra da cadeia para expandir a expressão (3.55) e reagrupando os termos, obtém-se:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (3.56)$$

ao se fazer uso da equação da continuidade na sua forma alternativa (3.11), chega-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (3.57)$$

Note que o lado esquerdo da igualdade na equação (3.57) representa a taxa de variação do volume do elemento de fluido por unidade de volume, isto é, a taxa de dilatação total ou deformação normal total do elemento de fluido.

Ao se considerar que o elemento de fluido possua como os eixos principais de deformação ξ , η e ζ , pode-se escrever a taxa de deformação total deste elemento da seguinte forma:

$$\epsilon_{\xi\xi} + \epsilon_{\eta\eta} + \epsilon_{\zeta\zeta} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (3.58)$$

obtendo assim uma relação entre a taxa de deformação e o campo de velocidade.

Devido a suposição de um fluido isotrópico, condição 2 do postulado de Stokes, os eixos principais de deformação devem ser coincidentes com os eixos principais de tensão.

Dessa forma, tomando ξ , η e ζ como os eixos principais de tensão, conclui-se do fato de que como só existe deformação normal nesses eixos, então, devido a isotropia, também só haverá tensões normais, de modo que as tensões cisalhantes sejam anuladas. Nesse novo sistema de coordenadas, a lei de deformação pode ser expressa em função de três coeficientes lineares:

$$\sigma_{\xi\xi} = -p + C_1\epsilon_{\xi\xi} + C_2\epsilon_{\eta\eta} + C_3\epsilon_{\zeta\zeta}, \quad (3.59)$$

onde C_1 , C_2 e C_3 são os coeficientes lineares, e o termo $-p$ é adicionado a fim de satisfazer a condição 3 do postulado de Stokes.

Ainda da condição de isotropia, pode-se inferir que o efeito cruzado das taxas de deformação $\epsilon_{\eta\eta}$ e $\epsilon_{\zeta\zeta}$ na tensão atuante em ξ devem ser iguais, isso só será possível se $C_2 = C_3 = C$. Reescrevendo a equação (3.59), após reagrupar os termos:

$$\sigma_{\xi\xi} = -p + K\epsilon_{\xi\xi} + C(\epsilon_{\xi\xi} + \epsilon_{\eta\eta} + \epsilon_{\zeta\zeta}), \quad (3.60)$$

sendo $K = C_1 - C$, por conveniência, a fim de que seja possível a utilização da equação (3.58):

$$\sigma_{\xi\xi} = -p + K\epsilon_{\xi\xi} + C \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (3.61)$$

A equação (3.61) foi deduzida para uma das direções do sistema de coordenadas principal, logo, se faz necessário transforma-la para um sistema de coordenadas arbitrário x , y e z , onde o tensor de tensões cisalhantes não seja nulo. Para tanto, considere que o eixo x tenha em relação ao sistema de coordenadas principal ξ , η e ζ os seguintes cossenos diretores l_x , m_x e n_x , o eixo y possua l_y , m_y e n_y e o eixo z apresenta l_z , m_z e n_z como seus cossenos diretores.

A lei de transformação entre as tensões e/ou as taxas de deformações que relaciona o sistema de coordenadas principal e o sistema de coordenadas arbitrário é dada por (WHITE, 2006):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{\xi\xi}l_i l_j + \sigma_{\eta\eta}m_i m_j + \sigma_{\zeta\zeta}n_i n_j, \quad (3.62)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{\xi\xi}l_i l_j + \epsilon_{\eta\eta}m_i m_j + \epsilon_{\zeta\zeta}n_i n_j, \quad (3.63)$$

onde i e j representam os eixos x , y e z .

É possível eliminar os termos $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ e $\sigma_{\zeta\zeta}$ na equação (3.62), assim como os termos referentes as deformações nos eixos principais na equação (3.63), ao se aplicar a lei de deformação (3.61), juntamente com a identidade trigonométrica $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Resultando na seguinte expressão:

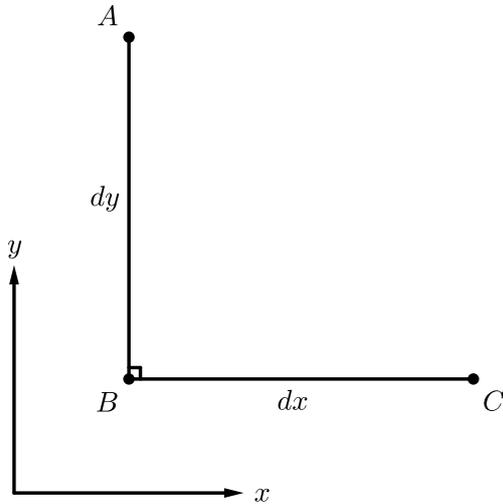
$$\sigma_{ii} = -p + K\epsilon_{ii} + C \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (3.64)$$

$$\sigma_{ij} = K\epsilon_{ij}, \quad \text{para } i \neq j. \quad (3.65)$$

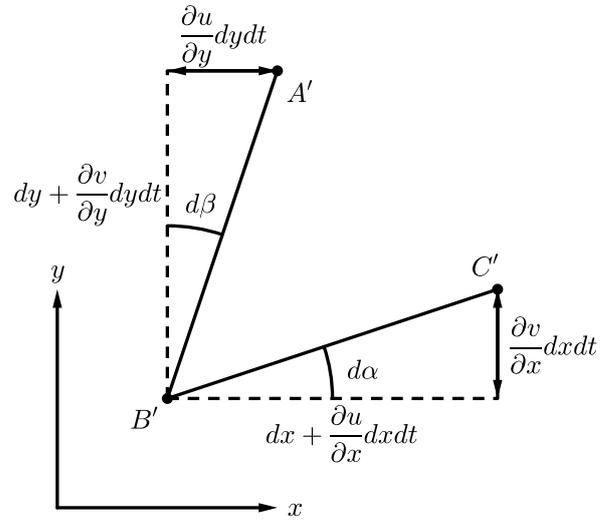
Uma vez já determinada a lei que relaciona a tensão e a deformação em um elemento de fluido, deve-se agora buscar alternativas de se avaliar a deformação que o elemento de fluido sofre através de propriedades de interesse do escoamento. Para isso considera-se a figura 5, onde será analisada os efeitos de deformação em duas linhas de fluido, BA e BC , que se encontravam inicialmente perpendiculares em um instante qualquer t , porém após um incremento de tempo Δt , estas linhas se movem e se deformam obtendo comprimentos ligeiramente diferentes $B'A'$ e $B'C'$ e orientações distintas.

Figura 5 – Deformação de um elemento de fluido.

(a) Linhas de fluido em um tempo qualquer t .



(b) Linhas de fluido em um tempo $t + \Delta t$.



Fonte: Autoria própria.

Os ângulos $d\alpha$ e $d\beta$ podem ser relacionados às derivadas das velocidades, fazendo-se o incremento temporal suficientemente pequeno. Desse modo:

$$d\alpha = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\tan^{-1} \frac{(\partial v / \partial x) dx dt}{dx + (\partial u / \partial x) dx dt} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} dt, \quad (3.66)$$

$$d\beta = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\tan^{-1} \frac{(\partial u / \partial y) dy dt}{dy + (\partial v / \partial y) dy dt} \right] = \frac{\partial u}{\partial y} dt. \quad (3.67)$$

Define-se a taxa de deformação cisalhante do elemento, como a média da taxa de aproximação angular das linhas de fluido inicialmente perpendiculares, logo:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.68)$$

De forma análoga, obtém-se a taxa de deformação cisalhante nas outras duas direções:

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (3.69)$$

devido a propriedade de isotropia, o tensor de taxas de deformação por cisalhamento deve ser simétrico, isto é, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.

Avaliada as taxas de deformações por cisalhamento, parte-se para a análise das taxas de deformações normais. Dessa forma, pode-se avaliar a taxa de deformação normal na direção x , por exemplo, ao se realizar a derivada temporal da razão entre diferença do comprimento da linha de fluido horizontal pelo seu comprimento inicial:

$$\epsilon_{xx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{B'C' - BC}{BC} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx + (\partial u / \partial x x) dx dt - dx}{dx} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.70)$$

de forma similar procede-se para as demais direções, obtendo:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.71)$$

Definido completamente o tensor de tensões, pode-se aplica-lo na lei de deformação representada pelas equações (3.64) e (3.65). Porém, deve-se ressaltar que o coeficiente K presente nestas equações, é igual a duas vezes o coeficiente de viscosidade molecular, $K = 2\mu$. Tal fato pode ser comprovado, ao se relacionar a tensão de cisalhamento e o gradiente de velocidade horizontal de uma placa movendo-se com velocidade constante e suspensa sobre um filme delgado de fluido. Já o coeficiente C , é denominado de segundo coeficiente de viscosidade, constante de Lamé ou coeficiente de viscosidade de bulk e é representado pela letra λ . Usando destes fatos, a equação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = -p\mathbf{I} + \mu (\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I}, \quad (3.72)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\nabla\mathbf{V}$ é o gradiente do campo de velocidades, que resulta em um tensor de segunda ordem, e $(\nabla\mathbf{V})^T$ é o seu transposto.

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

3.5.2 Equações de Navier-Stokes

Ao analisar o tensor de tensões (3.72), Stokes notou uma interessante propriedade, a soma do traço do tensor de tensão deve ser um tensor invariante. Stokes chegou nesta conclusão por analogia com as relações de tensões (3.62), onde ele constatou que mesmo ao se realizar uma mudança de sistema de coordenadas, as equações que descrevem a relação tensão-deformação nas direções normais se mantêm invariantes.

Desa forma, define-se a pressão mecânica \bar{p} como menos um terço do traço do tensor de tensões, ou seja, a tensão de compressão média atuante no elemento de fluido:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \quad (3.74)$$

porém, ao se aplicar a equação (3.72) na equação (3.74) juntamente com o fato de que a soma das deformações normais é igual ao divergente do campo de velocidade (equações 3.70 e 3.71), obtém-se:

$$\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (3.75)$$

Nota-se que a pressão mecânica, assim como foi definida, não é igual a pressão termodinâmica. Porém, para que se satisfaça a condição de invariância, Stokes assume que o segundo coeficiente de viscosidade equivale a menos dois terços do coeficiente de viscosidade molecular, isto é:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0. \quad (3.76)$$

Por fim, ao se utilizar a relação (3.76) na lei de deformação (3.72) e aplica-la à equação do balanço de quantidade de movimento, deduzidas por Cauchy (3.20), obtêm-se as equações de Navier-Stokes em sua forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\mathbf{V}) = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T \right) \right] - \frac{2}{3}\nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (3.77)$$

Na sua forma não conservativa as equações do movimento são representadas por:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T \right) \right] - \frac{2}{3}\frac{1}{\rho}\nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (3.78)$$

As equações de Navier-Stokes estabelecem uma relação em que as variações da quantidade de movimento linear em uma partícula fluida, são resultado de alterações no campo de pressão e das forças viscosas que atuam na mesma.

3.5.3 Equação Diferencial da Energia Térmica

Uma vez definido o tensor de tensão e o tensor de tensões cisalhantes, pode-se obter a função de transformação viscosa Φ , que surge na equação da energia (3.42). A função de transformação viscosa representa a parcela do trabalho das forças viscosas que é transformada em energia interna no escoamento. De acordo com a equação (3.39) a função de transformação viscosa, para um fluido newtoniano é dada por:

$$\Phi = \mu \left(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T \right) \cdot (\nabla\mathbf{V}) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V})^2, \quad (3.79)$$

ou expressa na forma cartesiana:

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2. \quad (3.80)$$

É interessante notar que a função de transformação viscosa é sempre positiva devido aos termos quadráticos, de forma que o escoamento sempre tenda a transformar trabalho viscoso em energia interna, o que está em conformidade com a segunda lei da termodinâmica.

A energia interna é uma grandeza de grande importância para determinar as propriedades termodinâmicas do escoamento, porém sua determinação prática não é simples. Portanto, a fim de se contornar esta dificuldade, busca-se formas de relacionar a energia interna com alguma outra propriedade de interesse do escoamento cuja sua medição prática seja factível.

A energia interna pode ser relacionada com a temperatura através da capacidade térmica do fluido ao sofrer transformações isocóricas c_v , ou seja, à volume constante, resultando na seguinte equação de estado (BORGNAKKE; SONNTAG, 2013):

$$d\hat{u} \approx c_v dT, \quad (3.81)$$

aplicando a equação de estado na equação da energia, obtém-se a equação diferencial da energia térmica:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi. \quad (3.82)$$

3.6 Escoamento Incompressível com Propriedades Constantes

Grande parte dos escoamento em engenharia são considerados incompressíveis, isto é, as variações de massa específica podem ser negligenciadas independentemente de o escoamento ser permanente ou transiente. Desse modo, pode-se assumir que a taxa de variação da densidade em um escoamento incompressível é nula:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (3.83)$$

desse fato, segue-se que a equação da continuidade (3.11) pode ser reduzida a uma relação somente do campo de velocidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3.84)$$

A equação (3.84) pode ser interpretada fisicamente da seguinte maneira: alterações do campo de velocidade em uma região do escoamento, geram mudanças imediatas nas demais regiões do escoamento. Tal fato pode ser entendido, uma vez que a equação (3.58) mostra que quando o divergente do campo de velocidades é nulo, a taxa de expansão do elemento de fluido também será zero, ou seja, o volume da partícula de fluido deve permanecer constante. Como o volume se mantém inalterado, o fluxo mássico pela superfície do

volume de controle deve ser controlado através do campo velocidade, uma vez que a massa específica é constante, gerando então perturbações instantâneas ao longo de todo escoamento.

Ao se assumir que as propriedades do fluido, como o coeficiente de viscosidade molecular μ e o coeficiente de condutividade térmica k , são constantes, e o escoamento é incompressível, de modo que possa ser válida a equação (3.84). As equações de balanço da quantidade de movimento linear e da energia térmica podem ser simplificadas:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c_p} \Phi, \quad (3.86)$$

onde a substituição de c_v por c_p (capacidade térmica à pressão constante) é válida, em função de que, quando os termos de pressão da equação da energia (3.42) são desprezados, a variação da energia interna pode ser aproximada por uma variação de entalpia h (WHITE, 2011).

$$d\hat{u} \approx dh = c_p dT. \quad (3.87)$$

As equações (3.84), (3.85) e (3.86), formam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, que modelam a dinâmica e o transporte de energia em um escoamento incompressível de um fluido newtoniano com propriedades constantes.

3.7 Aproximação de Oberbeck-Boussinesq

Ao se considerar um fluido newtoniano com propriedades físicas constantes, as equações de balanço (3.84), (3.85) e (3.86), apresentam então apenas três incógnitas: \mathbf{V} , p e T , ou ainda, formam um sistema com 5 equações escalares e 5 incógnitas. As equações da continuidade e da quantidade de movimento linear se mostram totalmente independentes do campo de temperatura, porém o campo de temperatura é escrito em função do campo de velocidade. Desse modo, as equações (3.84) e (3.85) podem ser resolvidas separadamente da equação (3.86) para o campo de pressão e velocidade, e os resultados do campo de velocidade são utilizados para solução do campo escalar de temperatura.

Oberbeck (1888) e Boussinesq (1903) ao estudarem os efeitos da convecção natural em um escoamento, concluíram que o campo de temperatura pode influenciar no balanço quantidade de movimento linear, através da ação da força de empuxo, gerada a partir das variações na massa específica do fluido. Portanto, a aproximação de Oberbeck-Boussinesq se fundamenta na hipótese de que as variações na massa específica do fluido são pequenas e podem ser negligenciadas, a menos do termo gravitacional.

Considera-se um valor de referência para massa específica do fluido ρ_0 . Os efeitos dos gradientes de temperatura ocasionam uma variação na massa específica da partícula de fluido:

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0, \quad (3.88)$$

o produto da variação da massa específica (3.88) pelo campo gravitacional resulta na força de empuxo por unidade de volume que atua no elemento de fluido:

$$\mathbf{f}_{\text{empuxo}} = \Delta\rho\mathbf{g}, \quad (3.89)$$

pode-se relacionar a variação da massa específica do fluido com a variação de temperatura através do coeficiente de expansão térmica (INCROPERA et al., 2014):

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\rho}{\partial T} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}, \quad (3.90)$$

reescreve-se então a força de empuxo por unidade de volume em função do coeficiente de expansão térmica (3.90):

$$\mathbf{f}_{\text{empuxo}} = -\rho_0\beta\Delta T\mathbf{g} = -\rho_0\beta(T - T_0)\mathbf{g}, \quad (3.91)$$

onde T_0 é uma temperatura de referência do escoamento.

Ao se acrescentar o efeito do empuxo às forças de campo na dedução das equações de Navier-Stokes, para um fluido newtoniano com propriedades constantes, obtêm-se a equação diferencial da quantidade de movimento linear segundo a aproximação de Oberbeck-Boussinesq:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \beta(T - T_0)\mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho_0}\nabla^2\mathbf{V}. \quad (3.92)$$

Para gases ideais, ao se utilizar a lei dos gases perfeitos, chega-se a uma relação termodinâmica onde o coeficiente de expansão térmica é igual ao inverso da temperatura de referência T_0 . Tal hipótese é assumida para o presente trabalho.

3.8 Caracterização do Escoamento

Grande parte dos escoamentos de fluidos em engenharia são bastante complexos e não apresentam uma solução analítica, a qual pode ser obtida através da matemática clássica. Portanto, para a estimativa das propriedades de interesse em tais escoamentos, deve-se adotar a experimentação material ou métodos numéricos. Os resultados obtidos nestas duas metodologias, são geralmente apresentados de forma adimensional, a fim de obter maior generalidade, uma vez que, escoamentos com características físicas e geométricas distintas, podem ter resultados similares dependendo da relação entre os mecanismos de transportes atuantes no escoamento.

3.8.1 Caracterização Dinâmica

A dinâmica do escoamento é caracterizada através de um conjunto de números adimensionais, dentre eles, serão abordados no presente trabalho apenas o número de Reynolds (Re), o número de Strouhal (St) e os coeficientes de arrasto (C_D) e sustentação (C_L).

O número de Reynolds é um número adimensional frequentemente utilizado para o cálculo do regime do escoamento. Fisicamente ele é interpretado como a razão entre os efeitos inerciais e os efeitos viscosos no escoamento de um fluido newtoniano:

$$Re = \frac{\text{Efeitos inerciais}}{\text{Efeitos viscosos}} = \frac{\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}}{\mu \nabla^2 \mathbf{V}} = \frac{\rho U \frac{1}{L} U}{\mu \frac{1}{L^2} U} = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad (3.93)$$

onde U e L são as escalas de velocidade e de comprimento características do escoamento, respectivamente.

Números de Reynolds muito pequenos, referem-se ao movimento viscoso muito lento, onde pode-se negligenciar os efeitos relativos a inércia. Número de Reynolds moderados indicam que o escoamento é laminar, ou seja, apresenta variações suaves. Números de Reynolds elevados implicam provavelmente em um escoamento turbulento, onde fortes flutuações randômicas de alta frequência são impostas ao escoamento.

O número de Strouhal é outro importante número adimensional na mecânica dos fluidos, sendo relacionado com a frequência adimensional de eventos periódicos no escoamento e definido como a razão entre a oscilação do sinal e sua velocidade de propagação:

$$St = \frac{fL}{U}. \quad (3.94)$$

onde f é a frequência do sinal.

Para escoamentos sobre geometrias imersas, os coeficientes de arrasto e sustentação são números adimensionais bastante usuais, uma vez que, a partir deles é possível determinar a força que o escoamento aplica sobre a superfície imersa. Fisicamente eles podem ser entendidos como a razão entre a força de arrasto e/ou sustentação pela força dinâmica. Matematicamente podem ser expressos da seguinte maneira:

$$C_D = \frac{F_A}{\frac{1}{2} \rho U^2 A_p}, \quad (3.95)$$

$$C_L = \frac{F_S}{\frac{1}{2} \rho U^2 A_p}, \quad (3.96)$$

onde F_A e F_S são as forças de arrasto e sustentação, respectivamente, e A_p é a área da geometria imersa projetada na direção da força.

3.8.2 Caracterização Térmica

Assim como na dinâmica do escoamento, o transporte de energia também pode ser caracterizado por um conjunto de números adimensionais. Para o presente trabalho se dará foco apenas aos seguintes adimensionais: número de Prandtl (Pr), número de Nusselt (Nu) e número de Rayleigh (Ra).

O número de Prandtl é um importante número adimensional de escoamentos não isotérmicos, ele é definido como a razão entre a difusividade de momento e a difusividade térmica. Fisicamente pode ser interpretado como uma relação entre a efetividade do transporte por difusão, de quantidade de movimento linear e de energia térmica.

$$Pr = \frac{\text{Difusão viscosa}}{\text{Difusão térmica}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{c_p \mu}{k}, \quad (3.97)$$

onde ν é conhecido como viscosidade cinemática, razão entre o coeficiente de viscosidade molecular e a massa específica, e α é denominada de difusividade térmica ($\alpha = k/\rho c_p$).

O número de Nusselt relaciona a transferência de energia térmica por advecção e por condução. Fisicamente ele é uma medida quantitativa da transferência de energia térmica por convecção em uma superfície, matematicamente ele é representado pelo gradiente de temperatura adimensional em uma superfície:

$$Nu = \frac{L}{\Delta T} \left. \frac{\partial T}{\partial x_i} \right|_{x_i=\text{superfície}}, \quad (3.98)$$

onde ΔT é a diferença entre temperaturas de referência e x_i representa uma direção normal à superfície em que se deseja avaliar o número de Nusselt.

Por fim, o número de Rayleigh é um similar do número de Reynolds para a convecção natural, se mostrando como um critério para definir o regime do escoamento nesta condição. Sua interpretação física se dá como a razão entre as forças de empuxo e forças viscosas, multiplicada pela razão entre as difusividades de momento e térmica. Tal adimensional é expresso pela seguinte equação:

$$Ra = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}, \quad (3.99)$$

onde T_s é a temperatura de uma superfície de referência, T_∞ é uma temperatura de referência e g é uma componente do campo gravitacional.

4 MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

Os métodos de soluções analíticas, baseados na matemática clássica, se mostram bastante limitados para a solução do conjunto de equações diferenciais que compõem o modelo matemático: equação da continuidade (3.84), equação do balanço da quantidade de movimento linear segundo a aproximação de Oberberck-Boussinesq (3.92) e equação da energia térmica (3.86). Tais limitações ocorrem em função da geometria do domínio de cálculo, das condições de contorno impostas nas fronteiras e da presença de termos não lineares nestas equações.

Em virtude de tais dificuldades, parte-se para a modelagem numérica-computacional, a fim de se obter soluções aproximadas para as equações obtidas via modelo matemático, por meio de métodos numéricos. O capítulo atual é conduzido, de forma a abordar a metodologia numérica-computacional aplicada no desenvolvimento do presente trabalho, para a solução do conjunto de equações que modelam a dinâmica e o transporte de energia em escoamentos bidimensionais e incompressíveis de fluidos newtonianos.

4.1 Discretização Temporal

São muitos os métodos numéricos desenvolvidos para solução de equações diferenciais parciais dependentes do tempo e do espaço. Onde para esses tipos de equações, geralmente são empregadas as formulações explícita, implícita ou implícita-implícita (semi-implícita) para a discretização das equações (LEVEQUE, 1955). Para o presente trabalho será utilizado o método de diferenças finitas para uma formulação explícita, ou seja, o conjunto de equações diferenciais será discretizado, de forma que a equação de diferenças resultante seja dependente apenas de termos previamente conhecidos de iterações anteriores.

Considera-se ϕ uma função escalar qualquer, de modo que, sua discretização no domínio temporal, a fim de se obter uma formulação explícita, possa ser realizada ao se efetuar a expansão em série de Taylor da função ϕ em torno do ponto (\mathbf{x}, t) acrescida de um incremento temporal Δt :

$$\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^3} \Delta t^3 + \dots, \quad (4.1)$$

isolando a derivada temporal da função ϕ , obtêm-se:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^{k+1}} \Delta t^k, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (4.3)$$

onde o somatório representa o erro número do processo de discretização, que é de primeira ordem ($\mathcal{O}(\Delta t)$).

O esquema de discretização apresentado na equação (4.3) é também denominado de esquema de Euler explícito. A função ϕ , por ser uma função escalar, pode representar ou uma das componentes de velocidade (u e v), ou o campo de temperatura (T), uma vez que as equações que modelam estes campos apresentam uma derivada temporal que deve ser discretizada de forma análoga.

4.2 Acoplamento Pressão - Velocidade

A equação da continuidade (3.84) e a equação da quantidade de movimento linear (3.92) são resolvidas separadamente, de modo que se faz necessário abordar o acoplamento entre o campo de pressão e o campo de velocidade, a fim de que se possa resolver o escoamento. Chorin (1968) ao estudar escoamentos incompressíveis mostra que a pressão não exerce função termodinâmica, porém induz a condição de incompressibilidade, de modo que possa ser utilizada uma metodologia de discretização baseada na decomposição de operadores. Surge assim os métodos de projeção ou métodos de passo fracionado.

Tais métodos são caracterizados por resolver os campos de pressão e velocidade em duas etapas. Primeiramente, um campo de velocidade auxiliar é calculado através da equação do balanço da quantidade de movimento linear ao se ignorar os efeitos de incompressibilidade. Em seguida, este campo estimado é projetado em um espaço vetorial com divergente nulo, a fim de se forçar a incompressibilidade, calculando-se assim a pressão ou um fator de correção de pressão, dependendo da metodologia adotada. E a partir deste fator de correção o campo de velocidade é corrigido.

Existem inúmeras formas de discretização para os métodos de projeção ou métodos do passo fracionado, as quais divergem basicamente no modo como é calculado o campo de velocidade estimado e o fator de correção de pressão. Para o presente trabalho adotou-se a metodologia proposta por Kim e Moin (1985).

No método proposto por Kim e Moin, a discretização da equação do balanço da quantidade de movimento linear, considerando um esquema de Euler explícito para o

termo temporal é dada por:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} - (\mathbf{V}^n \cdot \nabla) \mathbf{V}^n - \beta(T^n - T_0) \mathbf{g}^n + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V}^n, \quad (4.4)$$

onde o super índice n representa a discretização temporal.

Na equação (4.4), os termos de velocidade e temperatura avaliados no passo de tempo atual (\mathbf{V}^n e T^n) são conhecidos, de modo que as únicas incógnitas da equação são o campo de pressão e o campo de velocidade no passo de tempo posterior (p^{n+1} e \mathbf{V}^{n+1}). A fim de se obter uma relação entre o campo de pressão e o campo de velocidade, define-se um campo de velocidade estimado $\tilde{\mathbf{V}}$ calculado através da equação da quantidade de movimento linear (3.92), considerando-se o campo de pressão atual:

$$\frac{\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^n - (\mathbf{V}^n \cdot \nabla) \mathbf{V}^n - \beta(T^n - T_0) \mathbf{g}^n + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V}^n, \quad (4.5)$$

ao se subtrair a equação (4.5) da equação (4.4), obtém-se:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p^{n+1} - p^n). \quad (4.6)$$

A equação (4.6) é uma relação entre o campo de velocidade no tempo posterior, o campo de velocidade estimado e o campo de pressão no tempo posterior e no tempo atual. Embora a equação (4.6) tenha simplificado bastante termos, aparentemente ela não agrega nada novo, uma vez que ainda temos as mesmas duas incógnitas presentes na equação. Porém, das observações de Chorin, pode-se modelar o campo de pressão no passo de tempo posterior como o campo de pressão no passo de tempo atual acrescido de um fator de correção de pressão p' :

$$p^{n+1} = p^n + p'. \quad (4.7)$$

Aplicando a equação (4.7) na equação (4.6) e rearranjando os termos obtém-se uma relação entre o campo de velocidade posterior, o campo de velocidade estimado e o fator de correção de pressão:

$$\mathbf{V}^{n+1} = \tilde{\mathbf{V}} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p'. \quad (4.8)$$

O fato de p' também ser uma incógnita ainda é um agravante na equação (4.8), porém sabe-se que a equação da continuidade deve ser satisfeita para qualquer intervalo de tempo. Desse modo, o divergente de \mathbf{V}^{n+1} deve ser sempre nulo:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = \nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{V}} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p' \right) = 0, \quad (4.9)$$

aplicando o operador divergente a cada um dos termos da equação (4.9), pode-se reescrever a da seguinte maneira:

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é conhecida como equação de Poisson, e a partir dela é possível se determinar o fator de correção de pressão em função do campo de velocidade estimado.

O método proposto por Kim e Moin, para uma discretização explícita, pode então ser resumido no seguinte algoritmo:

- As componentes de velocidades são estimadas através da solução das equações da quantidade de movimento linear utilizando os campos de velocidade e pressão do passo de tempo atual:

$$\tilde{\mathbf{V}} = -\Delta t \frac{1}{\rho} \nabla p^n - \Delta t (\mathbf{V}^n \cdot \nabla) \mathbf{V}^n - \Delta t \beta (T^n - T_0) \mathbf{g}^n + \Delta t \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V}^n + \mathbf{V}^n,$$

- O fator de correção de pressão é calculado através da solução da equação de Poisson, obtida por meio da combinação da equação da quantidade de movimento linear e da continuidade:

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}},$$

- O campo de pressão no passo de tempo posterior é então calculado como a soma do campo de pressão atual acrescido do fator de correção de pressão:

$$p^{n+1} = p^n + p',$$

- O campo de velocidade no passo de tempo seguinte é então corrigido por meio do fator de correção de pressão e do campo de velocidade estimado:

$$\mathbf{V}^{n+1} = \tilde{\mathbf{V}} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p'.$$

4.3 Discretização Espacial

Para a solução do conjunto de equações obtidas via modelo numérico, primeiramente é necessário a discretização do domínio, ou seja, deve-se transformar um conjunto contínuo e infinito de informações em um conjunto discreto e finito, no qual a metodologia numérica possa ser empregada. Para o presente trabalho será considerado um domínio espacial bidimensional $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$, o qual será particionado em K partes iguais na direção

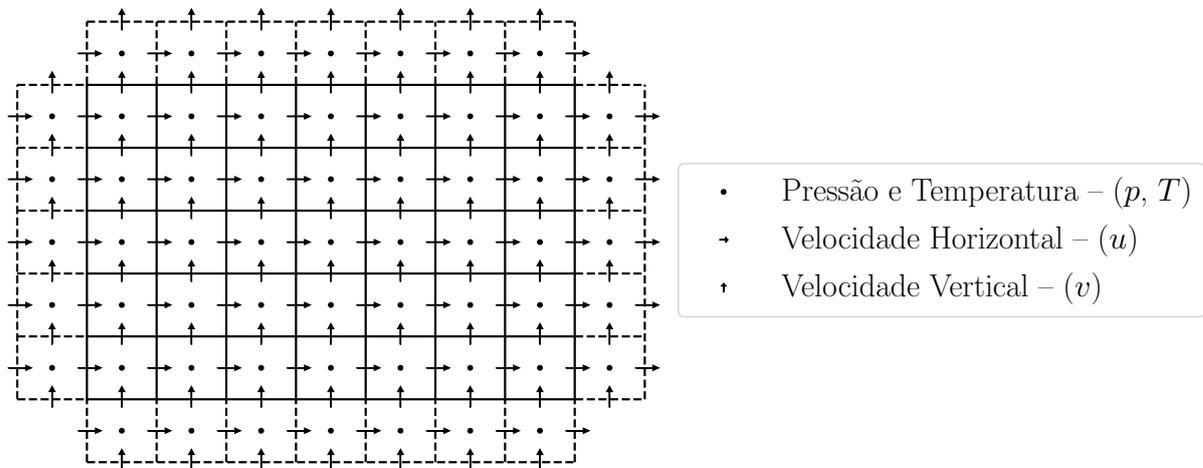
horizontal e em M partes iguais na direção vertical. Gera-se então a malha retangular \mathcal{M} , ou seja, um conjunto de pontos discretos no domínio Ω :

$$\mathcal{M} = \{(x_i, y_j); x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y; i = 0, \dots, K; j = 0, \dots, M\}, \quad (4.11)$$

onde Δx e Δy são os incrementos espaciais nas direções horizontal e vertical, definidos por $\Delta x = L_x/K$ e $\Delta y = L_y/M$, respectivamente.

Uma vez o domínio de cálculo já discretizado com seu respectivo conjunto de células, deve-se agora definir a localização das variáveis de interesse do escoamento dentro da célula computacional. Para o presente trabalho foi adotado o esquema de células deslocadas *MAC*, introduzidas por Harlow e Welch (1965). Neste esquema de discretização as variáveis escalares, pressão e temperatura, são definidas no centro da célula computacional, enquanto o campo vetorial de velocidade é definido nas faces da célula. De modo que a componente horizontal de velocidade é definida no centro da face vertical e a componente vertical de velocidade no centro da face horizontal, conforme representado na figura 6.

Figura 6 – Representação esquemática da malha computacional adotada.



Fonte: Autoria própria.

A escolha desse tipo de malha se deve à facilidade em se definir aproximações por diferenças finitas de segunda ordem para as derivadas espaciais dos campos de velocidade e temperatura. Da figura 6 nota-se ainda a existência de uma camada adicional de células que envolve o domínio (linhas pontilhadas), este conjunto de células é denominado de células fantasmas e são utilizados para se viabilizar a aplicação das condições de contorno.

Para ilustrar o esquema de discretização das derivadas espaciais, utiliza-se novamente a função escalar ϕ , que pode representar qualquer variável escalar do escoamento. Assim como a discretização do termo temporal, a discretização das derivadas espaciais

também se baseia no processo de expansão em série de Taylor da função ϕ em torno do ponto $(\mathbf{x}, t) = (x, y, t)$, porém, fazendo um incremento e um decremento em cada direção. Para exemplificar, será realizado o processo de discretização para a derivada de ϕ na direção x :

$$\phi(x + \Delta x, y, t) = \phi(x, y, t) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots, \quad (4.12)$$

$$\phi(x - \Delta x, y, t) = \phi(x, y, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots, \quad (4.13)$$

subtraindo a equação (4.13) da equação (4.12), obtém-se:

$$\phi(x + \Delta x, y, t) - \phi(x - \Delta x, y, t) = 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + 2 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + 2 \frac{1}{120} \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} \Delta x^5 + \dots. \quad (4.14)$$

Isolando a derivada de primeira ordem em x , obtêm-se a equação de diferenças centradas (*central difference scheme - CDS*):

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} = \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - \phi(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1} \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^{2k+1}} \Delta x^{2k}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} = \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - \phi(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (4.16)$$

onde o somatório representa o erro numérico do processo de discretização.

As equações de balanço, além das derivadas de primeira ordem no espaço, também possuem derivadas de segunda ordem no espaço, às quais são relacionadas aos termos difusivos. Tais derivadas também devem ser discretizadas, processo o qual se dá de forma semelhante até a obtenção das equações (4.12) e (4.13), que agora em vez de serem subtraídas serão somadas, resultando na seguinte equação:

$$\phi(x - \Delta x, y, t) + \phi(x + \Delta x, y, t) = 2\phi(x, y, t) + 2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \Delta x^4 + \dots. \quad (4.17)$$

Isolando a derivada de segunda ordem em x , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} = \frac{\phi(x - \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x + \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2(k+1))!} \frac{\partial^{2(k+1)} \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^{2(k+1)}} \Delta x^{2k}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} = \frac{\phi(x - \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x + \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (4.19)$$

onde novamente o somatório representa o erro resultante do processo de discretização.

4.4 Discretização das Equações de Balanço

A seguir é apresentada a discretização do conjunto de equações obtido pelo modelo numérico, em um domínio bidimensional euleriano. Para a discretização espacial das equações é utilizado o método de diferenças finitas centradas com malhas deslocadas, a fim de se obter segunda ordem. E para a discretização temporal utiliza-se o esquema de Euler explícito.

4.4.1 Discretização do Campo de Velocidade Estimado

O campo de velocidade estimado pode ser determinado numericamente, para tanto deve-se traduzir a equação diferencial do balanço de quantidade de movimento linear para o domínio discreto. Dessa forma, é apresentada a discretização para a componente x de cada um dos termos da equação.

- Termo temporal:

$$\frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (4.20)$$

- Termo advectivo:

$$u_{i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{v_{i-1,j}^n + v_{i,j}^n + v_{i-1,j+1}^n + v_{i,j+1}^n}{4} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right). \quad (4.21)$$

- Gradiente de pressão:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x}. \quad (4.22)$$

- Termo gravitacional:

$$-\beta(T_{i,j}^n - T_0)g_x = -\left(\frac{T_{i,j}^n}{T_0} - 1 \right) g_x. \quad (4.23)$$

- Termo difusivo:

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (4.24)$$

4.4.2 Discretização da Correção de Pressão

O fator de correção de pressão é determinado através da solução de uma equação de Poisson, onde todos os termos da equação são avaliados no mesmo passo de tempo, ou

seja, tanto p' quanto $\tilde{\mathbf{V}}$ são avaliados em $t = (n + 1)\Delta t$. A discretização da correção de pressão é apresenta a seguir:

$$\frac{p'_{i-1,j} - 2p'_{i,j} + p'_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p'_{i,j-1} - 2p'_{i,j} + p'_{i,j+1}}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+1} - \tilde{v}_{i,j}}{\Delta y} \right). \quad (4.25)$$

Como todos os termos são avaliados no mesmo intervalo de tempo, considera-se então que os termos são acoplados, constituindo assim um sistema linear. Desse modo, ao se denominar os termos presentes no lado direito da equação por $B_{i,j}$, o sistema linear para a determinação do fator de correção de pressão pode ser representado da seguinte maneira:

$$A_p p'_{i,j} + A_h (p'_{i-1,j} + p'_{i+1,j}) + A_v (p'_{i,j-1} + p'_{i,j+1}) = B_{i,j}, \quad (4.26)$$

onde,

$$A_p = -2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right), \quad A_h = \frac{1}{\Delta x^2} \quad \text{e} \quad A_v = \frac{1}{\Delta y^2}. \quad (4.27)$$

Para a solução da equação de Poisson discreta (4.26), duas metodologias de solução de sistema lineares foram utilizadas no presente trabalho: o método de Gauss-Seidel e o método dos gradientes bi-conjugados estabilizados (VAN DER VORST, 1992).

O método de Gauss-Seidel, embora possua uma implementação mais simples, fornece resultados rápidos, com uma quantidade de iterações que tende à decrescer por incremento temporal. Porém, notou-se ao longo do desenvolvimento do presente trabalho, que para escoamentos com grandes variações de seus campos, o método apresenta grandes oscilações no número de iterações por passo de tempo, tornando o custo computacional bastante elevado para solução de problemas com geometrias ou condições de contorno mais complexas.

O método dos gradientes bi-conjugados estabilizados apresenta uma implementação mais árdua que o método de Gauss-Seidel, além de realizar um número maior de operações por iteração. Contudo, o método não apresenta grandes oscilações no número de iterações por incremento temporal, valor o qual tende a permanecer constante ao longo da simulação. Dessa forma, conclui-se que o método dos gradientes bi-conjugados estabilizados é mais apropriado para solução do modelo numérico.

4.4.3 Discretização da Correção do Campo de Velocidade

Após a obtenção do fator de correção de pressão através da solução do sistema linear (4.26), deve-se corrigir o campo de velocidade, a fim de que a equação da continuidade

seja satisfeita. A correção do campo de velocidade é dada pela discretização aqui retratada na direção x :

$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{u}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{p'_{i,j} - p'_{i-1,j}}{\Delta x} \right). \quad (4.28)$$

4.4.4 Discretização do Campo de Temperatura

De forma similar ao campo de velocidade, o campo de temperatura também pode ser numericamente estimado, portanto deve-se transformar a equação diferencial da energia térmica do domínio contínuo para o discreto. Resultando assim na seguinte discretização para cada um dos termos da equação.

- Termo temporal:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (4.29)$$

- Termo advectivo:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{2} \left(\frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}}{2} \left(\frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right). \quad (4.30)$$

- Termo difusivo:

$$\frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (4.31)$$

- Termo de transformação viscosa:

$$\frac{1}{\rho c_p} \Phi_{i,j}. \quad (4.32)$$

A função de transformação viscosa (Φ), em sua forma discreta, é representada através da seguinte equação:

$$\Phi_{i,j} = \mu \left[2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} + v_{i+1,j+1}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1} - v_{i-1,j+1}^{n+1}}{4\Delta x} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{4\Delta y} \right)^2 \right]. \quad (4.33)$$

4.5 Condições de Convergência

É importante atentar-se as condições que garantem a convergência do método numérico, ou seja, relações entre propriedades físicas do escoamento e características

geométricas do domínio discreto que devem ser respeitadas, para que a metodologia numérica possa fornecer resultados condizentes com o modelo matemático. Quando tais critérios não são considerados, pode ocorrer de o método numérico divergir, ou seja, os resultados obtidos não representam o modelo implementado, surgindo oscilações numéricas no escoamento ou soluções numéricas que tendem ao infinito.

Para a modelagem proposta no presente trabalho, duas condições de convergência são necessárias, uma para a dinâmica do escoamento e a outra para o transporte de energia térmica. Logo, para a obtenção de resultados em concordância com a metodologia proposta, é preciso limitar a malha computacional em função de números adimensionais calculados localmente. Desse modo, define-se o número de Reynolds local ($Re_{\Delta x}$) e o número de Péclet local ($Pe_{\Delta x}$):

$$Re_{\Delta x} = \frac{\rho U \Delta x}{\mu}, \quad (4.34)$$

$$Pe_{\Delta x} = \frac{U \Delta x}{\alpha}. \quad (4.35)$$

A correta solução do modelo numérico é alcançada quando ambos os adimensionais são menores que dois, ou seja:

$$Re_{\Delta x} < 2 \quad \text{e} \quad Pe_{\Delta x} < 2, \quad (4.36)$$

são os critérios de convergência para a modelagem dinâmica e térmica, respectivamente.

4.6 Estabilidade

A estabilidade de um método de diferenças finitas pode ser interpretada como a capacidade de uma equação de diferenças não amplificar os erros advindos de passos de tempo anterior. A grande maioria dos métodos de diferenças finitas possuem sua estabilidade restrita a uma região denominada região de estabilidade, a qual contém todos os pares $(\Delta x, \Delta y, \Delta t)$ que garantem a estabilidade do método.

Uma importante ferramenta para a análise da estabilidade de um método de diferenças finitas é a análise de estabilidade de Von Neumann. Este método de análise de estabilidade é uma das formas de aplicação da análise de Fourier, e a partir dele é possível determinar as condições necessária e suficientes para a estabilidade de um método de diferenças.

Ao se aplicar a análise de Von Neumann para as equações de diferenças obtidas através de uma discretização explícita das equações da difusão e da advecção em um

domínio bidimensional, obtêm-se os respectivos critérios de estabilidade (STRIKWERDA, 1989):

$$\Delta t_d \leq \frac{1}{2\alpha} \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad (4.37)$$

$$\Delta t_a \leq \min \left(\frac{\Delta x}{\max |u|}, \frac{\Delta y}{\max |v|} \right), \quad (4.38)$$

onde os subíndices d e a indicam o incremento temporal da discretização da equação da difusão e da advecção, respectivamente.

Na equação de Navier-Stokes ocorre a presença simultaneamente de termos difusivos e advectivos. Dessa forma o critério de estabilidade para a discretização explícita das equações de Navier-Stokes pode ser dado por (VILLAR, 2007):

$$\Delta t = CFL \min(\Delta t_d, \Delta t_a), \quad (4.39)$$

de modo que o coeficiente difusividade térmica (α) é substituído pela viscosidade cinemática ($\nu = \mu/\rho$), e a constante CFL é definida por Courant et al. (1967) e admite valor entre 0 e 1, onde para o presente trabalho é adotado o valor de 0,25.

5 RESULTADOS

Concluída a modelagem computacional e definida a metodologia numérica, rotinas computacionais podem então ser implementadas, a fim de se resolver numericamente as equações de balanço. Para o presente trabalho é desenvolvido um algoritmo computacional em linguagem de programação FORTRAN 90, com o propósito de se obter soluções aproximadas de escoamentos bidimensionais de fluidos newtonianos em geometrias cartesianas simples.

Algoritmos computacionais destinados a realização de simulações numéricas de fenômenos físicos, devem sempre apresentar resultados que representem de maneira adequada o evento físico a ser investigado. Para tanto, faz-se necessário a realização de testes de verificação e de validação dos códigos computacionais implementados. No âmbito da mecânica dos fluidos computacional, verificação e validação são dois conceitos independentes com significados distintos, de modo que, um não pode ser substituído pelo outro (SILVA; VILLAR, 2010).

De acordo com Oberkampf et al. (2004), a verificação pode ser compreendida como uma análise do algoritmo computacional implementado, de modo a verificar se, de fato, a precisão dos resultados numéricos estão em concordância com o modelo computacional adotado. Dessa forma, a verificação se torna um exercício puramente matemático, não possuindo nenhum realismo físico. Já a validação, consiste na avaliação da acurácia da solução numérica obtida por meio do código computacional, quando comparada com dados experimentais, a fim de avaliar se o modelo adotado é adequado para a modelagem do fenômeno físico em análise. Portanto, na validação o realismo físico desempenha um papel essencial, fazendo-se necessário satisfazer as leis físicas que regem o fenômeno físico.

Neste capítulo, são expostos os resultados de verificação e validação dos algoritmos implementados. Testes de verificação são conduzidos através do método das soluções manufaturadas, para análise de ordem de convergência. Já para a validação do código computacional, simulações são conduzidas para diferentes regimes de escoamentos, sobre diferentes geometrias cartesianas e os resultados são comparados com os apresentados pela literatura.

5.1 Estudo de Ordem de Convergência

Para o presente trabalho, são apresentadas simulações bidimensionais em um domínio retangular $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$. Malhas regulares e uniformes são adotadas, por exemplo, com $h = \Delta x = \Delta y$, onde as equações que modelam a fluidodinâmica são discretizadas em células computacionais do tipo *MAC*. De modo que, o campo de pressão e o campo de temperatura se localizem no centro da célula computacional e os campos de velocidades nos centros de suas faces.

É importante salientar, que para esse tipo de malha deslocada três conjuntos de pontos podem ser diferenciados:

- $\Omega_{p,T}^h$: Refere-se ao conjunto de pontos onde as propriedades escalares do escoamento, como pressão e temperatura, são calculadas;
- Ω_u^h : Denota o conjunto de pontos onde a componente horizontal do campo de velocidade é calculada;
- Ω_v^h : Representa o conjunto de pontos onde a componente vertical do campo de velocidade é calculada.

Para realização do estudo de ordem de convergência, deve-se então definir as normas nesses três conjuntos de pontos. Dessa forma, a norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ e a norma infinito $\|\cdot\|_\infty$, para uma função escalar qualquer ϕ definida em Ω_ϕ^h , podem ser calculadas respectivamente, através das seguintes equações:

$$\|\phi\|_2 = \sqrt{\frac{1}{|\Omega_\phi^h|} \sum_{k \in \Omega_\phi^h} |\phi_k|^2}, \quad (5.1)$$

$$\|\phi\|_\infty = \max_{k \in \Omega_\phi^h} |\phi_k|, \quad (5.2)$$

onde $|\Omega_\phi^h|$ é a cardinalidade do conjunto Ω_ϕ^h .

A análise de ordem de convergência do método numérico implementado é fundamentada através da hipótese de que a solução numérica possua expansão assintótica nas potências dos incrementos espaciais da malha computacional. Desse modo, a função escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ possui a solução numérica $\varphi(\mathbf{x}, t, h)$, que pode ser expandida assintoticamente da seguinte maneira (COPSON, 1965):

$$\varphi(\mathbf{x}, t, h) = \phi(\mathbf{x}, t) + \lambda_\kappa(\mathbf{x}, t)h^\kappa + \lambda_{\kappa+1}(\mathbf{x}, t)h^{\kappa+1} + \dots, \quad (5.3)$$

onde os coeficientes $\lambda_\kappa(\mathbf{x}, t)$ são independentes do passo incremental da malha.

Se a solução exata é conhecida ($\phi(\mathbf{x}, t)$), então, após resolver $\varphi(\mathbf{x}, t, h)$ através da metodologia numérica proposta, também deve ser estimada a solução numérica em um meio do incremento da malha, ou seja, deve-se resolver $\varphi(\mathbf{x}, t, h/2)$. De forma que a solução numérica nas malhas com espaçamento de h e $h/2$ possam ser aproximadas por expansões assintóticas:

$$\varphi(\mathbf{x}, t, h) \approx \phi(\mathbf{x}, t) + \lambda_\kappa(\mathbf{x}, t)h^\kappa, \quad (5.4)$$

$$\varphi\left(\mathbf{x}, t, \frac{h}{2}\right) \approx \phi(\mathbf{x}, t) + \lambda_\kappa(\mathbf{x}, t)\frac{h^\kappa}{2^\kappa}, \quad (5.5)$$

onde truncou-se as equações (5.4) e (5.5) nos termos de maior ordem.

Das equações (5.4) e (5.5), infere-se que a razão do erro entre a solução exata e a solução numérica nas malhas com incremento de h e $h/2$, devem satisfazer a seguinte relação:

$$r = \frac{\|\varphi(\mathbf{x}, t, h) - \phi(\mathbf{x}, t)\|}{\|\varphi(\mathbf{x}, t, h/2) - \phi(\mathbf{x}, t)\|} \approx 2^\kappa, \quad (5.6)$$

em que $\|\cdot\|$ pode representar ou a norma euclidiana (5.1) ou a norma infinito (5.2). E para se estimar a ordem de convergência κ do método numérico, basta aplicar o logaritmo na base dois na equação (5.6):

$$\kappa \approx \log_2 r. \quad (5.7)$$

5.1.1 Método das Soluções Manufaturadas

Segundo Salari e Knupp (2000), uma solução manufatura é uma solução exata de alguma equação diferencial parcial ou de um conjunto de equações diferenciais parciais, que foram construídas ao se adicionar termos forçantes às equações. Os termos forçantes são definidos de forma que a solução manufaturada construída satisfaça o sistema de equações. Dessa forma, o método das soluções manufaturas baseia-se em definir os termos forçantes de um sistema de equações diferenciais parciais, dado um conjunto de soluções manufaturadas previamente conhecido.

O conjunto de equações que modelam a dinâmica de um escoamento incompressível de fluidos newtonianos, desconsiderando efeitos térmicos e gravitacionais, é aqui expressa:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{f}, \quad (5.9)$$

onde \mathbf{f} é o campo de força externo que atua sobre o escoamento, ou ao se tratar de soluções manufaturadas, é o termo forçante definido pelas soluções manufaturadas escolhidas.

No caso da dinâmica dos fluidos, ao se construir um conjunto de soluções manufaturadas, estas devem primeiramente satisfazer à equação da continuidade (5.8). Deste modo, para o presente trabalho foram escolhidas as seguintes soluções manufaturadas propostas por Nós (2007):

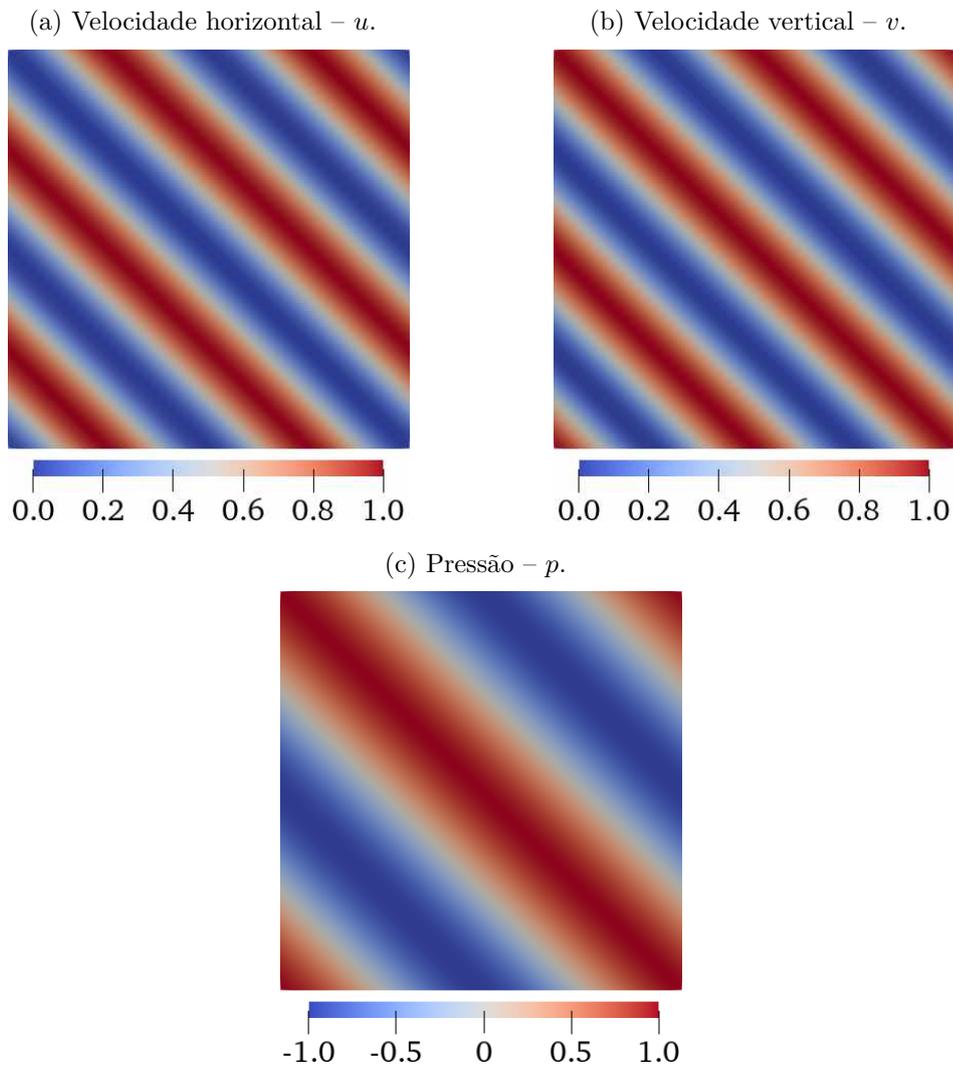
$$u_e(x, y, t) = \text{sen}^2(2\pi x + 2\pi y + t), \quad (5.10)$$

$$v_e(x, y, t) = \text{cos}^2(2\pi x + 2\pi y + t), \quad (5.11)$$

$$p_e(x, y, t) = \text{cos}(2\pi x + 2\pi y + t). \quad (5.12)$$

A figura 7, apresentada a seguir, ilustra o campo de velocidade horizontal e vertical e o campo de pressão, dados pelas soluções exatas para um domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ no tempo inicial $t = 0$.

Figura 7 – Campos de velocidade e pressão em $t = 0$.



Fonte: Autoria própria.

Definidas as soluções manufaturadas, parte-se para a determinação dos termos forçantes presentes na equação da quantidade de movimento linear (**f**). Tais termos podem

ser definidos através da aplicação das soluções exatas (5.10), (5.11) e (5.12) na equação do movimento (5.9):

$$f_x = \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v_e \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \right), \quad (5.13)$$

$$f_y = \frac{\partial v_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial v_e}{\partial x} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_e}{\partial y^2} \right), \quad (5.14)$$

Após obtenção dos termos forçantes, procede-se com a metodologia numérica proposta, com as seguintes condições iniciais para as variáveis de interesse do escoamento: $u(x, y, 0) = u_e(x, y, 0)$, $v(x, y, 0) = v_e(x, y, 0)$ e $p(x, y, 0) = p_e(x, y, 0)$.

5.1.2 Ordem de Convergência do Método Numérico

Para analisar numericamente a convergência do método, quatro malhas regulares e uniformes são utilizadas (16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128), definidas em um domínio computacional quadrado $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Duas configurações para as condições de contorno são impostas: Dirichlet e Neumann. A condição de contorno de Dirichlet especifica o valor que a solução da equação diferencial deve ter nos bordos do domínio. A condição de Neumann, por outro lado, determina o valor da derivada na direção normal ao contorno do domínio.

No presente trabalho, oito simulações são conduzidas, onde as propriedades do fluido admitem valor unitário ($\rho = \mu = 1, 0$) e o tempo de simulação escolhido foi de aproximadamente $\pi/4 \approx 0,7851$ s. As condições de contorno para as variáveis do escoamento nas simulações são alternadas, de modo que, primeiramente é estipulado Dirichlet para as velocidades e Neumann para a pressão, e em seguida é definido Neumann para as velocidades e Dirichlet para a pressão. Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 1 e 2 a seguir.

Observa-se nas tabelas 1 e 2, que o erro numérico do método sofre uma redução de cerca de quatro vezes ($r \approx 4$ na equação 5.6), para uma redução de duas vezes do passo espacial h na malha computacional, para todas as componentes do campo de velocidade e para o campo de pressão. Comportamento característico de um sistema numérico de segunda ordem, de acordo com a equação (5.7).

Tabela 1 – Teste de convergência com condições de contorno de Dirichlet para as velocidades e Neumann para a pressão.

| | Malha | $\ \cdot\ _\infty$ | Razão | Ordem | $\ \cdot\ _2$ | Razão | Ordem |
|----------|------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| <i>u</i> | 16×16 | $3,5699 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — | $1,8694 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — |
| | 32×32 | $9,2289 \cdot 10^{-3}$ | 3,8681 | 1,9516 | $4,6846 \cdot 10^{-3}$ | 3,9905 | 1,9966 |
| | 64×64 | $2,3576 \cdot 10^{-3}$ | 3,9145 | 1,9688 | $1,1777 \cdot 10^{-3}$ | 3,9778 | 1,9920 |
| | 128×128 | $5,9599 \cdot 10^{-4}$ | 3,9558 | 1,9840 | $2,9544 \cdot 10^{-4}$ | 3,9863 | 1,9950 |
| <i>v</i> | 16×16 | $3,5819 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — | $1,8716 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — |
| | 32×32 | $9,2749 \cdot 10^{-3}$ | 3,8619 | 1,9493 | $4,6905 \cdot 10^{-3}$ | 3,9901 | 1,9964 |
| | 64×64 | $2,3551 \cdot 10^{-3}$ | 3,9382 | 1,9775 | $1,1792 \cdot 10^{-3}$ | 3,9777 | 1,9919 |
| | 128×128 | $5,9568 \cdot 10^{-4}$ | 3,9536 | 1,9832 | $2,9582 \cdot 10^{-4}$ | 3,9862 | 1,9950 |
| <i>p</i> | 16×16 | $4,6746 \cdot 10^{-1}$ | — — — | — — — | $1,5029 \cdot 10^{-1}$ | — — — | — — — |
| | 32×32 | $1,5223 \cdot 10^{-1}$ | 3,0709 | 1,6186 | $4,1664 \cdot 10^{-2}$ | 3,6070 | 1,8508 |
| | 64×64 | $4,3421 \cdot 10^{-2}$ | 3,5058 | 1,8097 | $1,0767 \cdot 10^{-2}$ | 3,8696 | 1,9522 |
| | 128×128 | $1,1472 \cdot 10^{-2}$ | 3,7850 | 1,9203 | $2,7158 \cdot 10^{-3}$ | 3,9646 | 1,9872 |

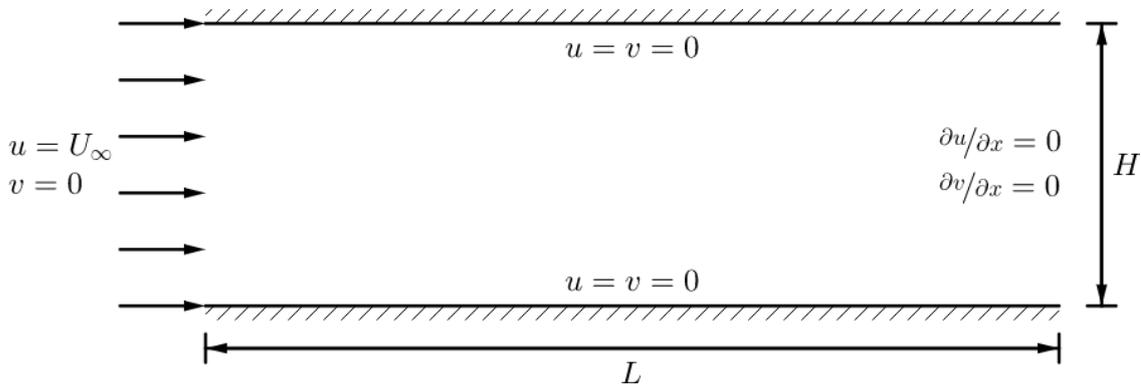
Tabela 2 – Teste de convergência com condições de contorno de Neumann para as velocidades e Dirichlet para a pressão.

| | Malha | $\ \cdot\ _\infty$ | Razão | Ordem | $\ \cdot\ _2$ | Razão | Ordem |
|----------|------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| <i>u</i> | 16×16 | $4,1339 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — | $1,9941 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — |
| | 32×32 | $1,0687 \cdot 10^{-2}$ | 3,8683 | 1,9517 | $4,7967 \cdot 10^{-3}$ | 4,1574 | 2,0557 |
| | 64×64 | $2,6630 \cdot 10^{-3}$ | 4,0131 | 2,0047 | $1,1844 \cdot 10^{-3}$ | 4,0499 | 2,0180 |
| | 128×128 | $6,6713 \cdot 10^{-4}$ | 3,9917 | 1,9970 | $2,9478 \cdot 10^{-4}$ | 4,0178 | 2,0064 |
| <i>v</i> | 16×16 | $4,0952 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — | $1,9813 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — |
| | 32×32 | $1,0424 \cdot 10^{-2}$ | 3,9285 | 1,9740 | $4,7499 \cdot 10^{-3}$ | 4,1713 | 2,0605 |
| | 64×64 | $2,6197 \cdot 10^{-3}$ | 3,9792 | 1,9925 | $1,1708 \cdot 10^{-3}$ | 4,0571 | 2,0205 |
| | 128×128 | $6,5605 \cdot 10^{-4}$ | 3,9931 | 1,9975 | $2,9114 \cdot 10^{-4}$ | 4,0213 | 2,0077 |
| <i>p</i> | 16×16 | $2,1039 \cdot 10^{-1}$ | — — — | — — — | $6,4757 \cdot 10^{-2}$ | — — — | — — — |
| | 32×32 | $6,2588 \cdot 10^{-2}$ | 3,3615 | 1,7491 | $1,6480 \cdot 10^{-2}$ | 3,9295 | 1,9743 |
| | 64×64 | $1,7059 \cdot 10^{-2}$ | 3,6690 | 1,8754 | $4,1414 \cdot 10^{-3}$ | 3,9792 | 1,9925 |
| | 128×128 | $4,4589 \cdot 10^{-3}$ | 3,8257 | 1,9357 | $1,0367 \cdot 10^{-3}$ | 3,9947 | 1,9981 |

5.2 Escoamento de Hagen-Poiseuille

Para avaliar se os resultados numéricos obtidos pelas rotinas computacionais estão em conformidade com a realidade material, considera-se primeiramente um escoamento entre duas placas paralelas, como ilustrado na figura 8. Este escoamento é conhecido como escoamento de Hagen-Poiseuille, em homenagem a Hagen (1839) e Poiseuille (1844), que foram os pioneiros no estudo deste tipo de escoamento.

Figura 8 – Representação esquemática do escoamento sobre duas placas paralelas.



Fonte: Autoria própria.

A figura 8 também especifica as condições de contorno impostas sobre as placas. Onde é definida uma velocidade uniforme na entrada do canal (U_∞), a saída admite condição de contorno de Neumann para as componentes horizontal e vertical do campo de velocidade, e as paredes admitem condição de não escorregamento ($u = v = 0$). O comprimento do canal é parametrizado em função de sua altura H , de modo que, para que se atinja o regime de escoamento completamente desenvolvido, este é definido como: $L = 15H$.

O escoamento de Hagen-Poiseuille é um escoamento relativamente simples, e para condições de escoamento completamente desenvolvido, onde só exista influência do campo de velocidade horizontal, o qual sofre variações somente na direção vertical do canal, e em regime permanente, onde os efeitos temporais não interferem na dinâmica do escoamento, este admite solução analítica:

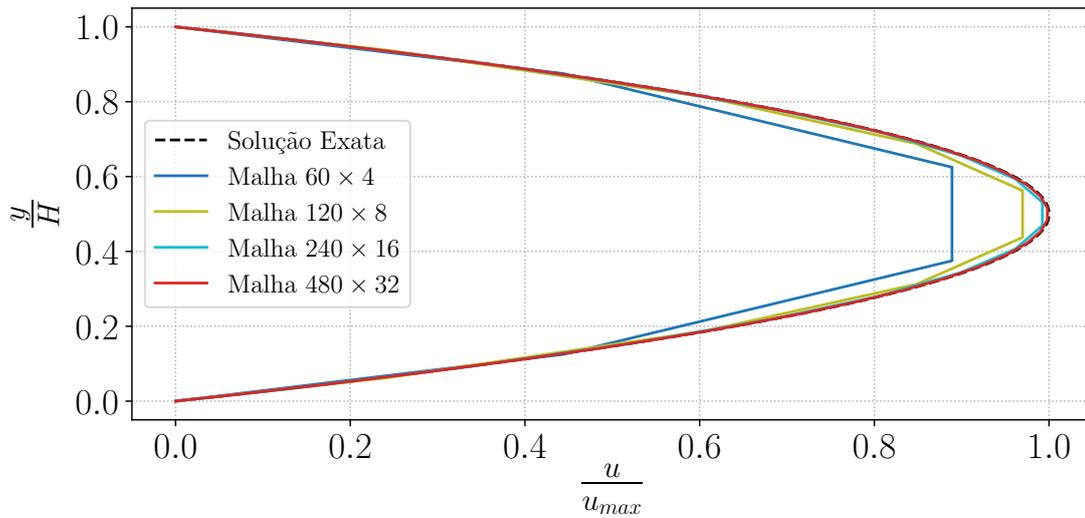
$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - Hy), \quad (5.15)$$

onde por hipótese, dp/dx é uma constante que pode ser obtida ao se igualar a vazão volumétrica de fluido na entrada e na saída do canal, uma vez que não existe uma fonte ou sumidouro de massa dentro do domínio analisado. Obtendo-se assim a seguinte expressão:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu U_\infty}{H^2}. \quad (5.16)$$

Após definida a solução analítica, equações (5.15) e (5.16), procede-se com a metodologia numérica proposta no presente trabalho, a fim de se comparar os resultados numéricos para quatro malhas uniformes (60×4 , 120×8 , 240×16 e 480×32) com a solução exata. A figura 9 apresenta o perfil de velocidade horizontal na seção de saída do canal em uma simulação realizada com $Re = 100$ para as diferentes malhas adotadas, e os confronta com a solução exata.

Figura 9 – Comparação entre os perfis de velocidade horizontal em um escoamento de Hagen-Poiseuille para diferentes malhas e $Re = 100$.



Fonte: Autoria própria.

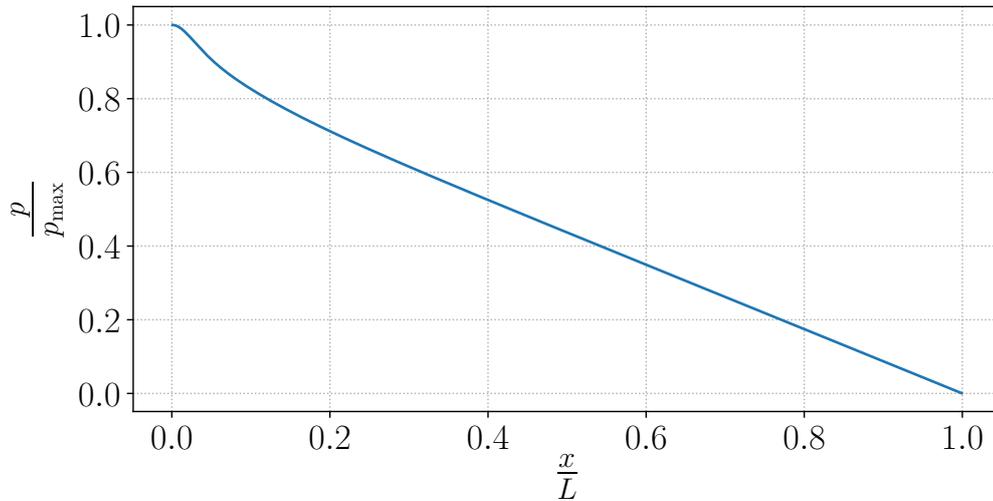
De forma análoga à seção anterior, pode-se fazer uso da solução exata para se estimar novamente a ordem de convergência do método numérico. Tal procedimento é realizado, e os resultados são apresentados na tabela 3, onde se verifica novamente segunda ordem no método numérico para a componente horizontal de velocidade.

Tabela 3 – Teste de convergência para um escoamento de Hagen-Poiseuille.

| Malha | $\ \cdot \ _{\infty}$ | Razão | Ordem | $\ \cdot \ _2$ | Razão | Ordem |
|-----------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| 60×4 | $7,2968 \cdot 10^{-2}$ | --- | --- | $5,2124 \cdot 10^{-2}$ | --- | --- |
| 120×8 | $2,2031 \cdot 10^{-2}$ | 3,3121 | 1,7277 | $1,5189 \cdot 10^{-2}$ | 3,4318 | 1,7789 |
| 240×16 | $5,7761 \cdot 10^{-3}$ | 3,8142 | 1,9314 | $3,9523 \cdot 10^{-3}$ | 3,8431 | 1,9423 |
| 480×32 | $3,4657 \cdot 10^{-3}$ | 3,9408 | 1,9785 | $9,9957 \cdot 10^{-4}$ | 3,9539 | 1,9833 |

Para a malha mais fina (480×32), ainda é capturado o valor da pressão na linha de simetria horizontal do canal ($y/L = 0,5$), o qual é representado graficamente através da figura 10. Onde nota-se que de fato, o gradiente de pressão é constante na região do canal onde o escoamento se encontra completamente desenvolvido, de acordo com a hipótese considerada para obtenção da solução analítica.

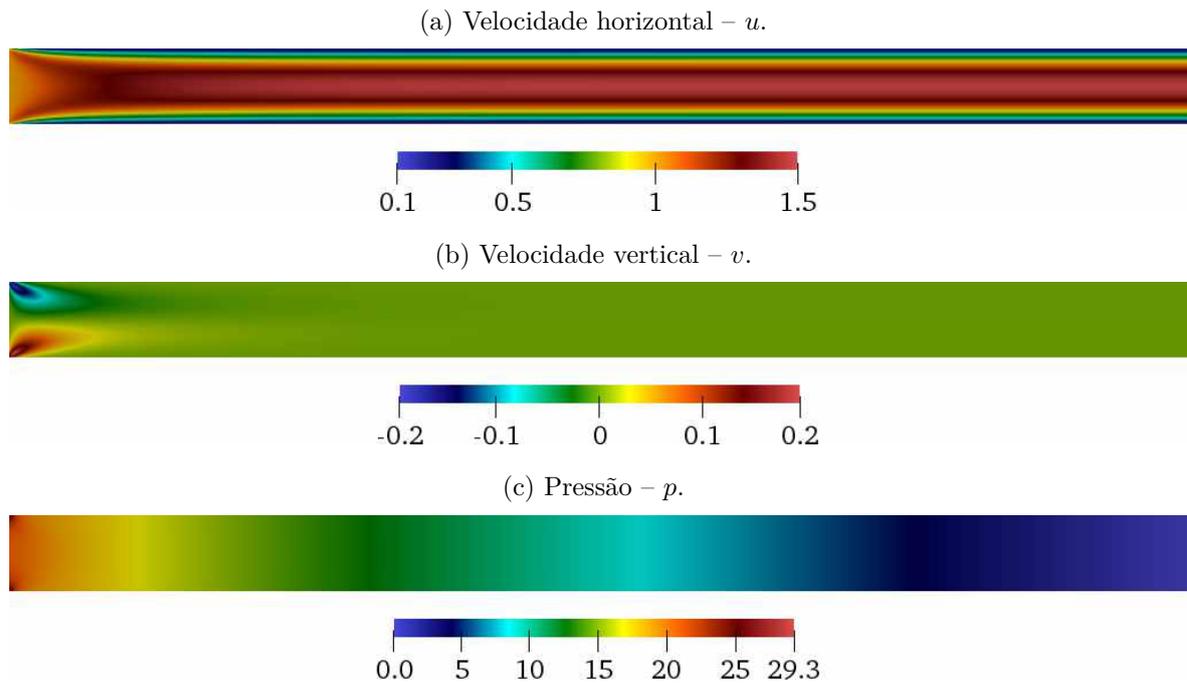
Figura 10 – Pressão na linha de simetria horizontal do canal para $Re = 100$.



Fonte: Autoria própria.

A figura 11 a seguir, apresenta as componentes horizontal e vertical do campo de velocidade, e o campo de pressão. A malha utilizada foi a malha mais fina de 480×32 , o regime de escoamento adotado foi de $Re = 100$ e o tempo de simulação foi o necessário para que fosse atingido o regime permanente, que para o presente trabalho onde $H = 0,1$ m, foi de cerca de 2 s.

Figura 11 – Campos de velocidade e pressão para um escoamento de Hagen-Poiseuille com $Re = 100$.

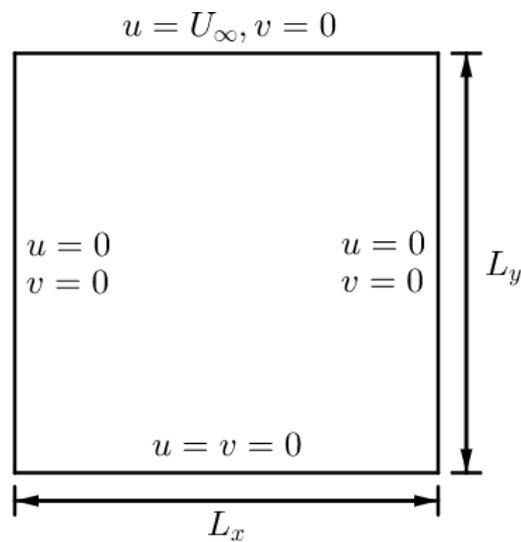


Fonte: Autoria própria.

5.3 Cavidade com Tampa Deslizante

Um dos escoamentos clássicos em mecânica dos fluidos, mas que diferentemente do escoamento de Hagen-Poiseuille, não possui uma solução analítica, é o escoamento em uma cavidade com tampa deslizante. A figura 12 apresenta uma representação esquemática da cavidade com suas condições de contorno, onde as paredes laterais e inferior admitem condição de não escorregamento, e na parede superior impõem-se uma velocidade horizontal constante U_∞ e velocidade vertical nula, a fim de se representar a tampa deslizante.

Figura 12 – Representação esquemática do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante.



Fonte: Autoria própria.

Para o presente trabalho, objetiva-se simular o escoamento em uma cavidade com razão de aspecto unitária, isto é, $L = L_x = L_y$. Primeiramente, simulações são conduzidas para o regime de escoamento de $Re = 100$, onde quatro malhas são utilizadas, a fim de se verificar se os resultados numéricos obtidos se mostram, de maneira geral, independentes da malha utilizada. A tabela 4 a seguir, apresenta os valor máximos e mínimos da componente horizontal de velocidade na linha de simetria vertical da cavidade, e da componente vertical na linha de simetria horizontal.

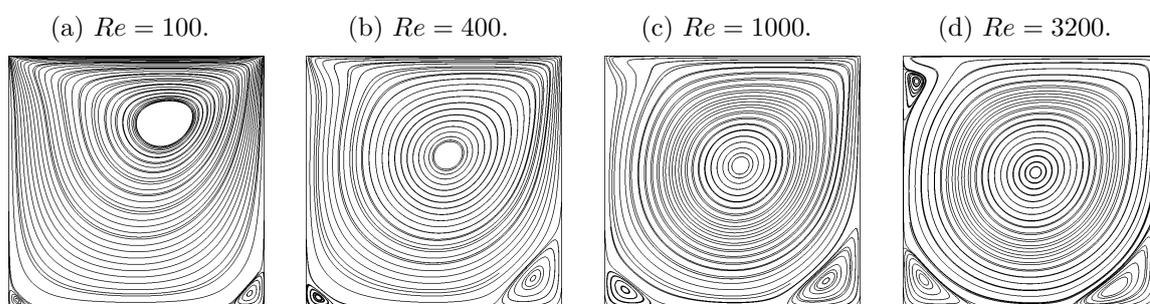
Tabela 4 – Análise de independência de malha para o escoamento em uma cavidade com tampa deslizante e razão de aspecto unitária para $Re = 100$.

| Malha | $\min \{u(L/2, y)\}$ | $\max \{u(L/2, y)\}$ | $\min \{v(x, L/2)\}$ | $\max \{u(x, L/2)\}$ |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 50×50 | -0,21092 | 0,93317 | -0,25039 | 0,17646 |
| 100×100 | -0,21330 | 0,96704 | -0,25283 | 0,17883 |
| 200×200 | -0,21387 | 0,98357 | -0,25357 | 0,17939 |
| 400×400 | -0,21399 | 0,99179 | -0,25375 | 0,17953 |

Com base nos dados obtidos da tabela 4, infere-se que, de fato, os resultados fornecidos pelo algoritmo computacional implementado, não sofrem grandes variações com a malha computacional adotada. Comportamento característico de sistemas numericamente independentes da malha de cálculo.

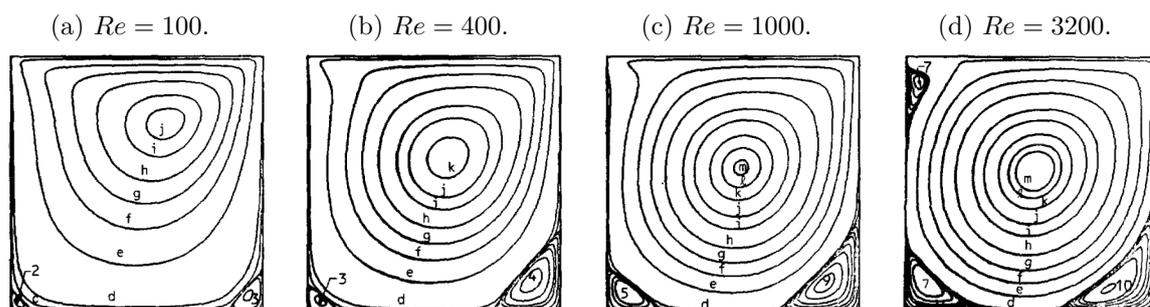
Confirmada a independência de malha, simulações são conduzidas para quatro valores do adimensional número de Reynolds: 100, 400, 1000 e 3200. A fim de se validar a solução do escoamento obtida pelas simulações numéricas, onde estas são comparadas com os resultados em regime permanente apresentados por Ghia et al. (1982). As figura 13 e 14 a seguir, apresentam as linhas de corrente obtidas no presente trabalho e as apresentadas por Ghia et al. (1982), respectivamente.

Figura 13 – Linhas de corrente para diferentes números de Reynolds.



Fonte: Autoria própria.

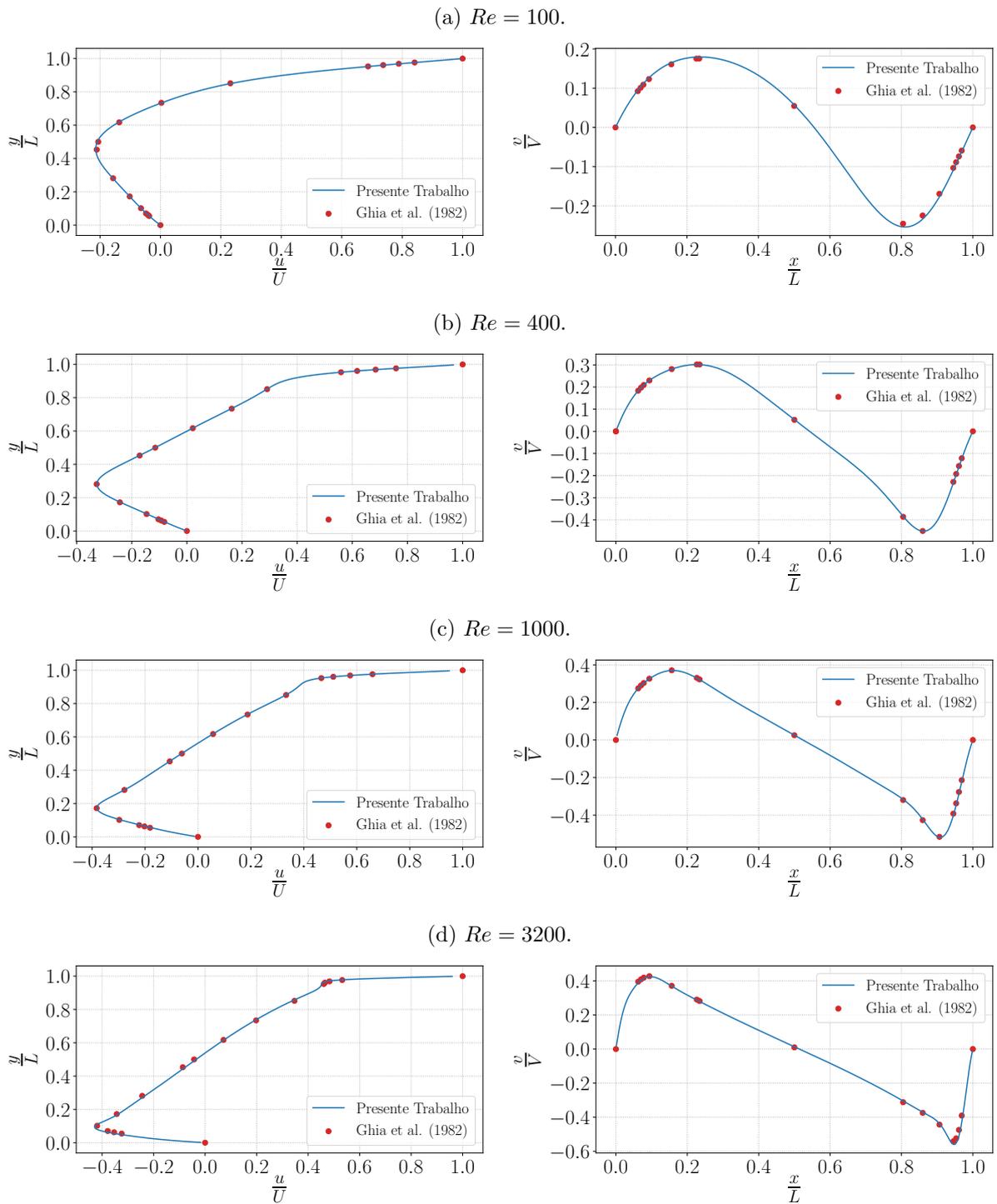
Figura 14 – Linhas de corrente para diferentes números de Reynolds apresentadas por Ghia et al. (1982).



Fonte: Ghia et al. (1982).

Qualitativamente os resultados numéricos, através da análise das linhas de correntes, estão corretos. Porém, também é conveniente se realizar uma análise quantitativa dos resultados. Desse modo, para as quatro simulações realizadas com diferentes números de Reynolds, o perfil de velocidade horizontal na linha de simetria vertical e o perfil de velocidade vertical na linha de simetria horizontal são comparados com os valores fornecidos por Ghia et al. (1982).

Figura 15 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria para diferentes números de Reynolds.



Fonte: Autoria própria.

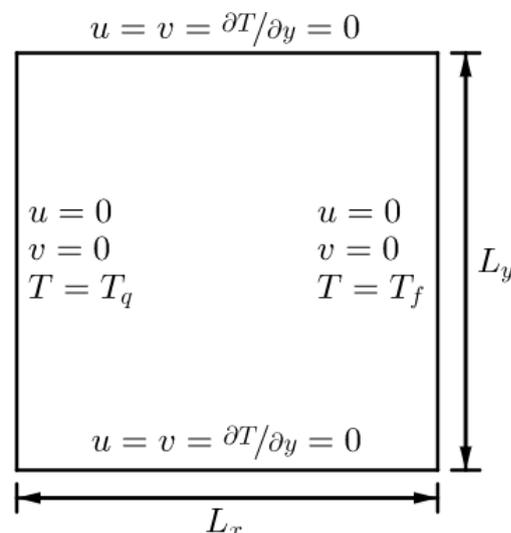
Observa-se na figura 15 que os resultados computacionais obtidos através das simulações conduzidas com a metodologia proposta no presente trabalho estão em conformidade com aqueles apresentados por Ghia et al. (1982). Nota-se também, pela proximidade entre os pontos de máximo e mínimo com a referência, que a malha computacional adota foi suficiente para capturar os mecanismos de transporte de quantidade de movimento linear no escoamento, à qual para o presente trabalho foi: 400×400 para $Re = 100$, 150×150 para $Re = 400$ e $Re = 1000$, e finalmente, 320×320 para $Re = 3200$. Em todas as simulações o regime permanente, em uma cavidade de $L = 1$ m, foi atingido após 120 s de simulação.

5.4 Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada

Nas seções anteriores foi analisada a dinâmica do escoamento de forma independente do campo de temperatura, logo, o acoplamento entre os efeitos térmicos e os efeitos dinâmicos ainda deve ser avaliado. Desse modo, objetiva-se simular os efeitos de convecção natural em uma cavidade quadrada ($L = L_x = L_y$), modelados através da aproximação de Oberbeck-Boussinesq.

A figura 16 a seguir, representa esquematicamente as condições de contornos impostas. Onde, todas as paredes da cavidade admitem condição de não escorregamento, as paredes superior e inferior apresentam-se termicamente isoladas e a parede esquerda apresenta uma temperatura (T_q) maior que a parede direita (T_f), a fim de se induzir um gradiente térmico no interior da cavidade. É adotado que inicialmente o fluido encontra-se em repouso, isto é, condição fluidoestática.

Figura 16 – Representação esquemática do escoamento em uma cavidade submetida a um gradiente de temperatura.



Fonte: Autoria própria.

Para analisar a independência de malha, são utilizadas três malhas regulares e uniformes (50×50 , 100×100 e 200×200) e simulações são conduzidas, com $Pr = 0,71$, para quatro regimes de escoamentos distintos, caracterizados pelos seguintes números de Rayleigh: 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 . O valor do número de Nusselt médio na parede fria, isto é, a parede da direita, é avaliado e comparado para cada uma das malhas computacionais utilizadas. Os resultados são apresentados na tabela 5 a seguir.

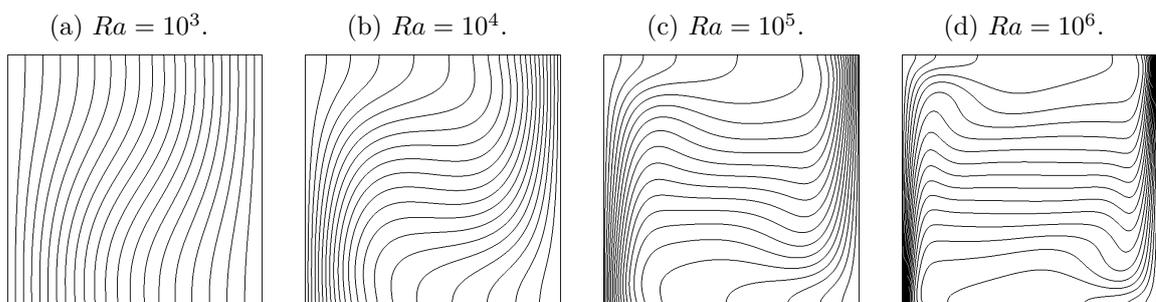
Tabela 5 – Análise de independência de malha em uma cavidade de razão de aspecto unitária sob efeito de convecção natural para diferentes números de Rayleigh.

| Malha | Ra | | | |
|------------------|---------|---------|---------|---------|
| | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^6 |
| 50×50 | 1,11866 | 2,25601 | 4,60615 | 9,41281 |
| 100×100 | 1,11801 | 2,24761 | 4,54265 | 8,96747 |
| 200×200 | 1,11784 | 2,24552 | 4,52693 | 8,86142 |

Os resultados obtidos na tabela 5, mostram-se convergir para um valor fixo com o refinamento da malha computacional, nota-se também que o valor do Nusselt médio na parede fria não sofre grandes variações para as malhas apresentadas. Dessa forma, pode-se inferir que os resultados numéricos obtidos através do código computacional implementado se mostram independentes da malha de cálculo adotada.

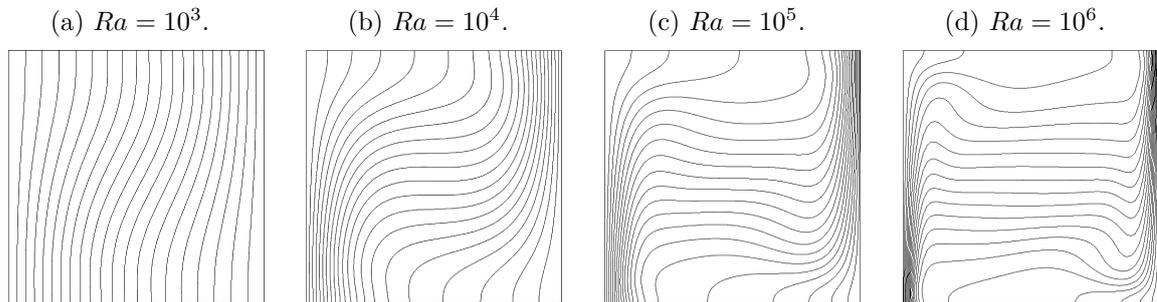
A fim de se avaliar os resultados numéricos obtidos, as isotermas para os quatro regimes de escoamento, simuladas com a malha mais fina, são comparadas com as apresentadas no trabalho de Duarte (2018). As figura 17 e 18 a seguir, apresentam as isotermas obtidas no presente trabalho e as obtidas por Duarte (2018), respectivamente. Onde percebe-se bastante semelhança entre as mesmas, podendo-se então inferir que ao menos qualitativamente os resultados se encontram coerentes com a literatura.

Figura 17 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh.



Fonte: Autoria própria.

Figura 18 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh apresentadas por Duarte (2018).



Fonte: Duarte (2018).

Quantitativamente os resultados também são avaliados, através da comparação do número de Nusselt médio na parede direita (parede fria) da cavidade com os valores calculados nos trabalhos de Duarte (2018), Gangawane et al. (2015), Padilla et al. (2013) e Davis (1983). Os resultados são expostos na tabela 6 a seguir, onde se observa bastante concordância entre os resultados obtidos e os apresentados pela literatura.

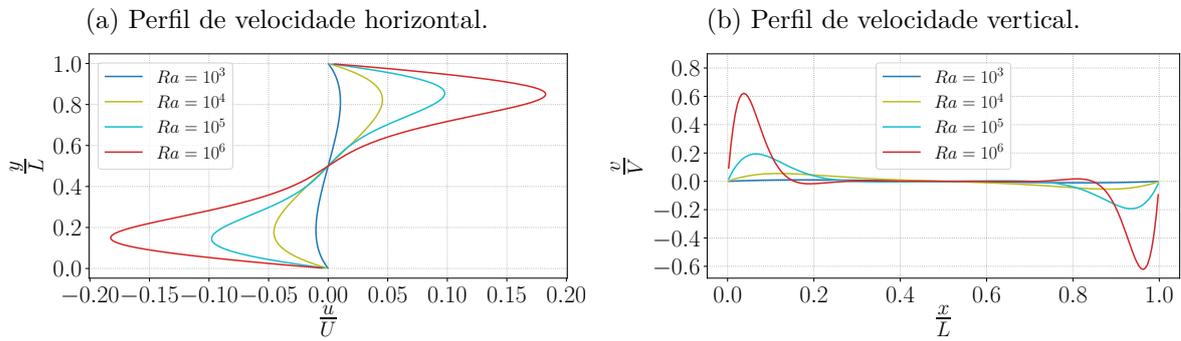
Tabela 6 – Comparação do número de Nusselt médio na parede fria (parede da direita).

| Rayleigh | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^6 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|
| Duarte (2018) | 1,072 | 2,090 | 4,390 | 8,901 |
| Gangawane et al. (2015) | — — — | 2,257 | 4,570 | 8,816 |
| Padilla et al. (2013) | 1,072 | 2,068 | 4,427 | 8,865 |
| Davis (1983) | 1,118 | 2,243 | 4,519 | 8,800 |
| Presente trabalho | 1,118 | 2,246 | 4,527 | 8,861 |

Ainda, de forma semelhante ao caso da cavidade com tampa deslizante, as componentes horizontal e vertical do campo de velocidade na linha de simetria vertical e horizontal da cavidade, respectivamente, são avaliadas e representadas na figura 19.

Observa-se na figura 19 que com o aumento do número de Rayleigh, os efeitos térmicos passam a influenciar mais ativamente no balanço de quantidade de movimento linear, resultando em maiores velocidades no escoamento do fluido no interior da cavidade. Maiores velocidades do escoamento também favorecem o transporte de energia térmica por advecção, como pode-se perceber pelas isotermas na figura 17 e pelo aumento do número de Nusselt médio na parede, já que este representa uma medida quantitativa da eficiência da transferência de calor por convecção em uma superfície.

Figura 19 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria da cavidade para diferentes números de Rayleigh.

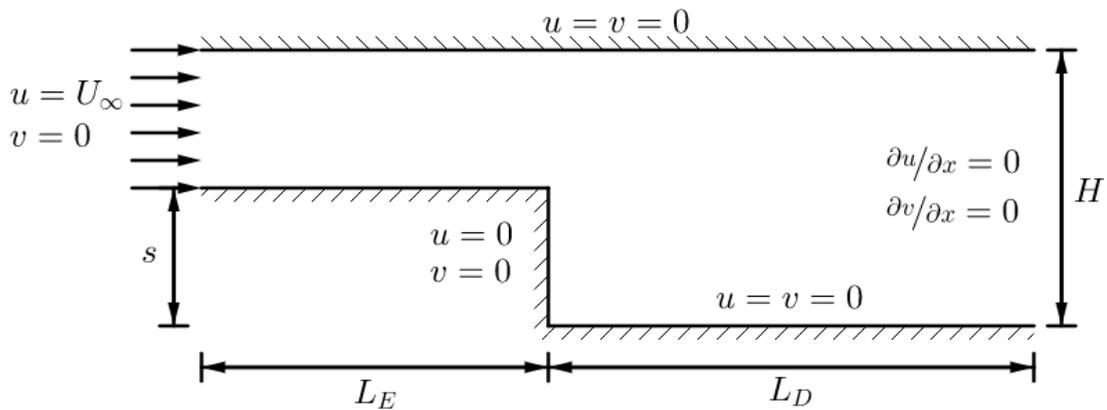


Fonte: Autoria própria.

5.5 Escoamento Sobre um Degrau

Validada a dinâmica e o transporte de energia no escoamento, parte-se para a implementação de geometrias mais complexas, a fim de se analisar o comportamento do algoritmo computacional implementado para tais geometrias. Deste modo, para o presente estudo, objetiva-se simular o escoamento no interior de um canal que possua uma descontinuidade (expansão) em forma de degrau, como esquematizado na figura 20.

Figura 20 – Representação esquemática do escoamento sobre um degrau.

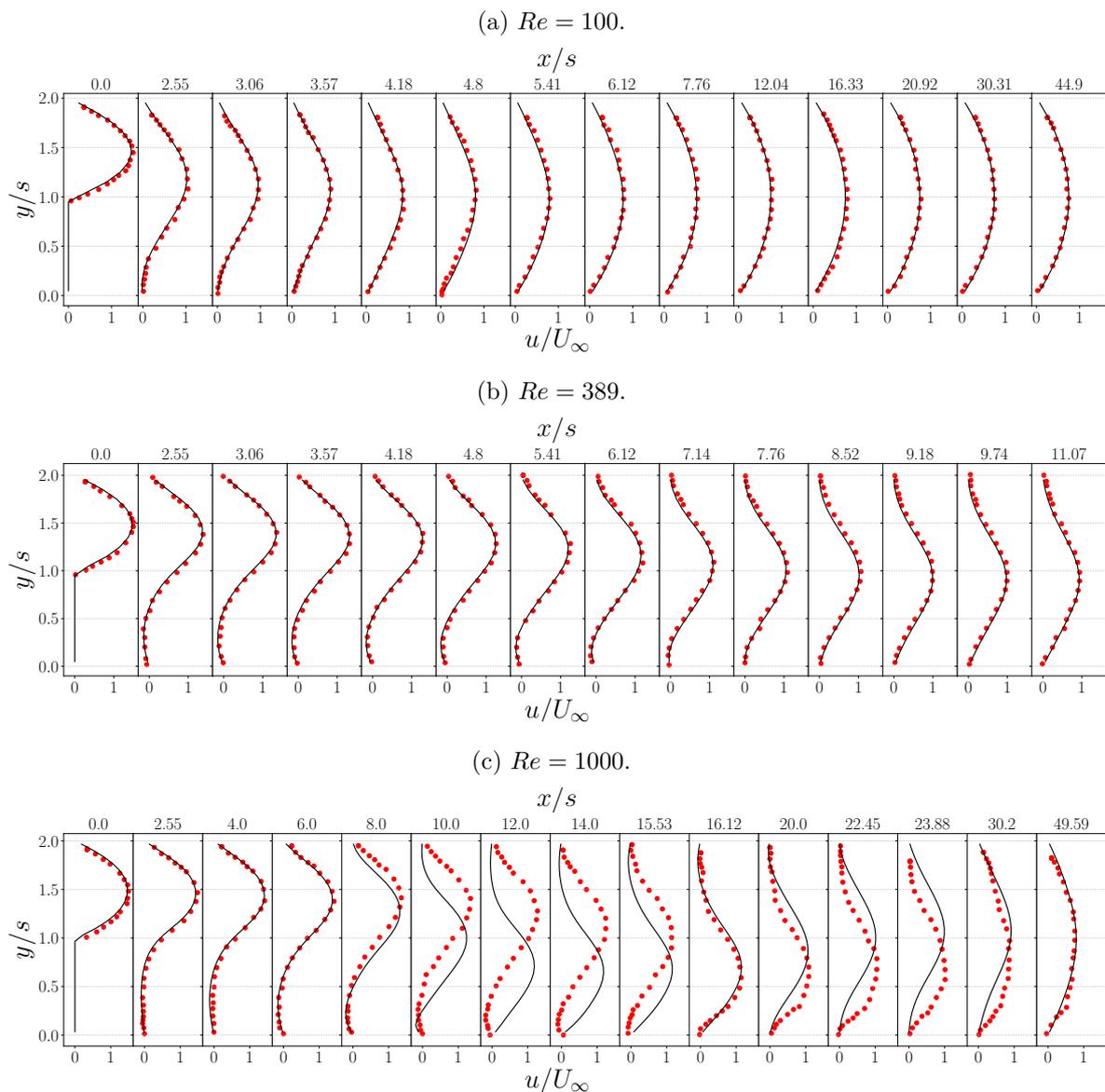


Fonte: Autoria própria.

As dimensões do canal são parametrizadas em relação a altura do ressalto do degrau (s): $L_E = 20s$, $L_D = 50s$ e $H = 2s$. De modo que, L_E e L_D são tomados grandes o suficientes para garantir que o escoamento esteja completamente desenvolvido ao final de cada seção. Já em relação as condições de contorno, é imposta uma velocidade uniforme na entrada do canal U_∞ , as paredes do canal, assim como o degrau, admitem condição de não escorregamento e na saída do canal é imposta condição de contorno de Neumann para as duas componentes do campo de velocidade.

Para o presente trabalho, os efeitos gravitacionais são negligenciados e uma malha regular e uniforme de 300×20 é adota. Três regimes de escoamento são simulados para os subsequentes números de Reynolds: 100, 389 e 1000. Os resultados computacionais obtidos são comparados com os dados experimentais em regime permanente, mensurados por Armaly et al. (1983), através da figura 21 apresentada a seguir.

Figura 21 – Perfis da componente horizontal de velocidade para diferentes números de Reynolds e em diferentes posições a jusante do degrau.



A linha contínua representa o resultado teórico obtido no presente trabalho e os pontos os resultados experimentais de Armaly et al. (1983).

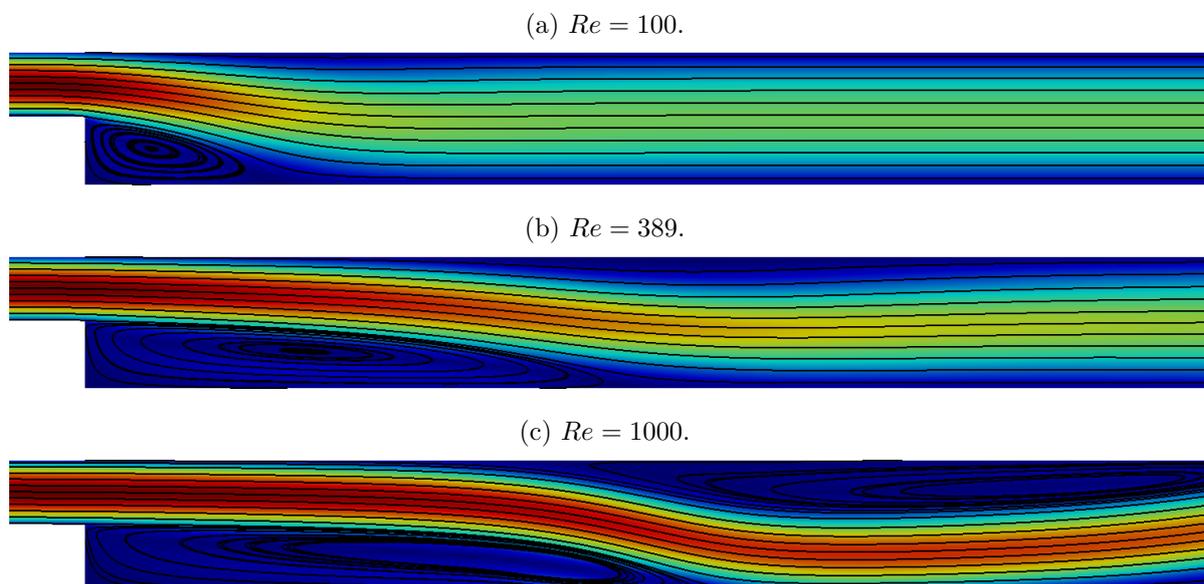
Fonte: Autoria própria.

Dá análise da figura 21, observa-se uma excelente concordância nos resultados para Reynolds 100 e 389, onde nota-se que a curva dos resultados numéricos ao menos tangencia todos os pontos experimentais. Já para Reynolds 1000, o escoamento é caracterizado

como turbulento, de modo que efeitos tridimensionais passam a dominar a dinâmica do transporte de quantidade de movimento linear, causando a disparidade entre os resultados teóricos e os experimentais evidenciada na figura 21c.

A presença de uma expansão brusca no canal, isto é, o degrau, induz a formação de uma região de baixa pressão a jusante do mesmo. Esta região de baixa pressão gera uma força nas partículas de fluido a qual compete com a inercia das partículas, formando assim uma zona de recirculação ao lado do degrau, cujo comprimento varia em função do número de Reynolds. A figura 22 a seguir, apresenta a região de recirculação para as três simulações conduzidas no presente trabalho.

Figura 22 – Recirculação formada a jusante da expansão abrupta (degrau).



Fonte: Autoria própria.

O comprimento de recolamento adimensional (X_r/s) é avaliado e comparado com os resultados experimentais apresentados por Armaly et al. (1983) e os resultados numéricos de Rouizi et al. (2009). Os resultados são expostos na tabela 7, onde novamente se observa bastante coerência entre os dados.

Tabela 7 – Comprimento de recolamento da camada limite.

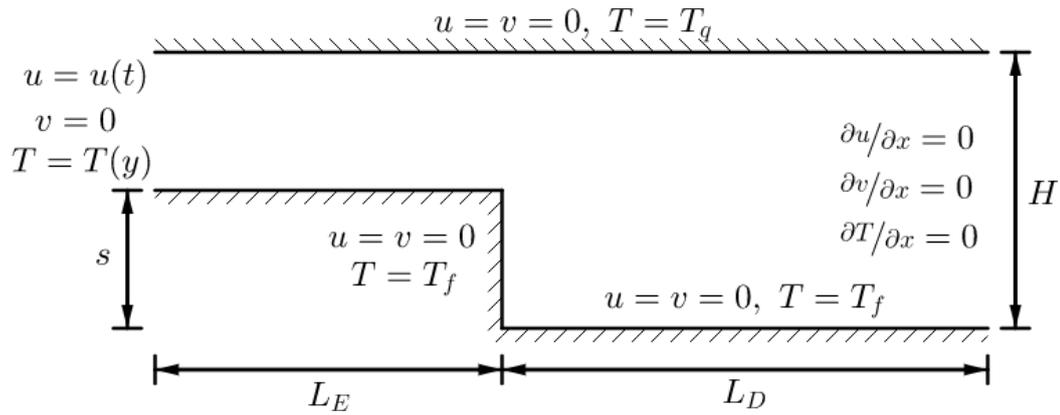
| Reynolds | 100 | 389 | 1000 |
|----------------------|-------|-------|-------|
| Rouizi et al. (2009) | 2,893 | 8,208 | — — — |
| Armaly et al. (1983) | 2,994 | 7,869 | 7,370 |
| Presente trabalho | 2,770 | 7,977 | 9,096 |

Para o presente trabalho, todas as simulações foram conduzidas com a altura do ressalto do degrau igual a 0,1 m, e o tempo de simulação necessário para que fosse atingido o regime permanente foi de cerca de 20 s.

5.6 Escoamento Pulsado Sobre um Degrau

Na seção anterior foi avaliada a dinâmica do escoamento em um canal com uma descontinuidade, onde o código computacional se mostrou apto à solução do escoamento. Nesta seção, será introduzida a aplicação de condições de contorno de Dirichlet mais gerais, isto é, funções do espaço e do tempo, além de também ser avaliados os efeitos térmicos no escoamento. Dessa forma, objetiva-se simular o escoamento pulsado sobre um degrau, como representado na figura 23.

Figura 23 – Representação esquemática do escoamento pulsado sobre um degrau.



Fonte: Autoria própria.

De forma análoga ao caso anterior, as dimensões do canal são parametrizadas em função da altura do ressalto do degrau (s): $L_E = 5s$, $L_D = 20s$ e $H = 2s$. As paredes inferior e superior do canal, assim como as paredes do degrau, admitem condição de não escorregamento, as paredes superior e inferior são mantidas à temperaturas constantes T_q e T_f , respectivamente, onde $T_q > T_f$. Na saída do canal é imposta condição de contorno de Neumann igual a zero, para velocidade e temperatura.

Na entrada do canal é admitida uma condição de fluxo pulsado para a componente horizontal de velocidade e a componente vertical é definida nula. Para a modelagem do pulso, a amplitude da componente horizontal na entrada do canal é modelada como uma função sinusoidal no tempo, como representada pela equação (5.17). Já para a temperatura admite-se uma função linear (5.18), de forma a suavizar a transição de temperatura entre a parede superior do canal e a parede horizontal do degrau:

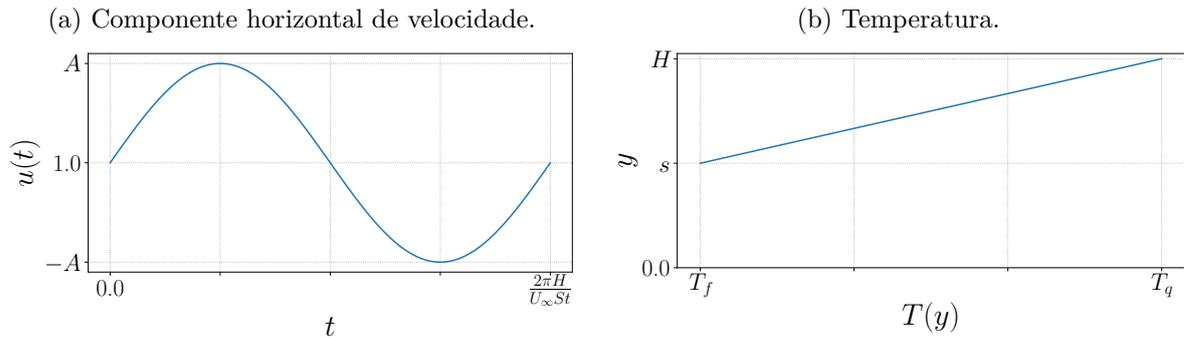
$$u_{\text{entrada}} = U_{\infty} [1 + A \sin(\tau St)], \quad (5.17)$$

$$T_{\text{entrada}} = T_f + \frac{T_q - T_f}{H - s} (y - s), \quad \text{para } y \in [s, H]. \quad (5.18)$$

Onde A é a amplitude do pulso, St é o número de Strouhal, que representa frequência adimensional dos pulsos, τ é o tempo adimensional ($\tau = tU_{\infty}/H$), U_{∞} é uma velocidade de referência, que para o presente trabalho foi usada como sendo a unidade, e por fim y é a altura mensurada a partir da base do canal.

A figura 24 a seguir, apresenta uma representação gráfica das condições de contorno impostas na entrada do canal (equações 5.17 e 5.18), a fim de facilitar o entendimento. Ainda da equação (5.17), nota-se que o período dos pulsos, de forma dimensional (s), pode ser expresso pela relação $2\pi H/U_\infty St$.

Figura 24 – Representação gráfica das condições de contorno aplicadas na entrada do canal.



Fonte: Autoria própria.

Para analisar a influência do número de Reynolds e da frequência dos pulsos na dinâmica do escoamento e no transporte de energia, simulações são conduzidas para diferentes valores do número de Reynolds e Strouhal, onde os efeitos peso-empuxo são negligenciados e os resultados computacionais adquiridos são analisados. Nesta seção, todas as simulações conduzidas foram realizadas com uma malha uniforme e regular de 250×20 e o tempo de simulação foi de cerca de 30 s, que para uma canal com $s = 0,1$ m é o tempo necessário para se garantir que escoamento se encontre em regime estatisticamente permanente.

As figuras 25, 26 e 27 a seguir, apresentam as linhas de corrente e as isotermas para três regimes do escoamento: $Re = 100$ e $St = 1$, $Re = 200$ e $St = 1$, e $Re = 100$ com $St = 2$. Os resultados são apresentados em diferentes frações de período de um pulso, após garantido que o escoamento esteja estatisticamente permanente.

Figura 25 – Linhas de corrente (a esquerda) e isotermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 1,0$ e $A = 1,0$.

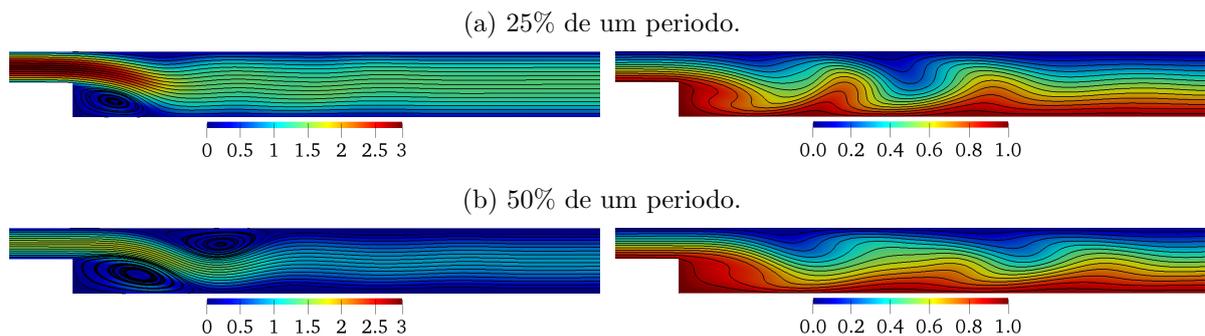
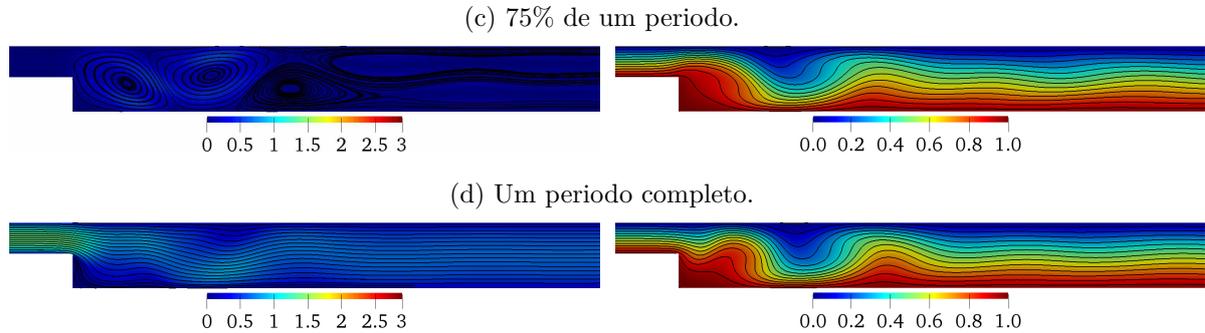
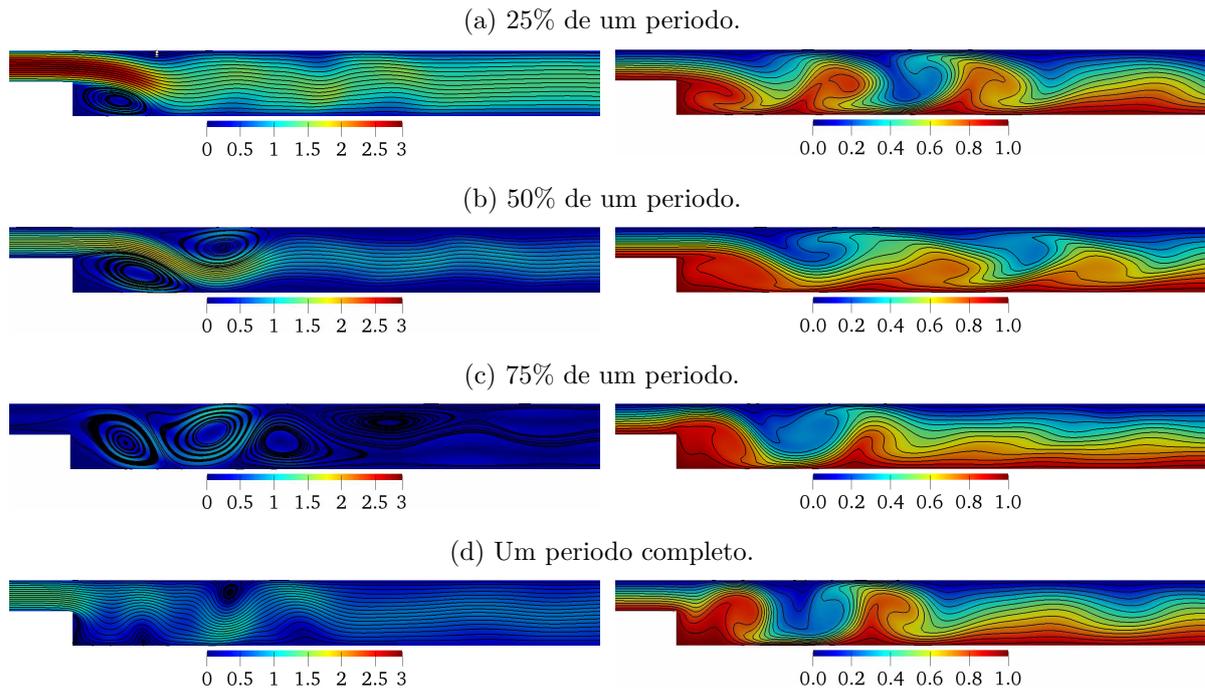


Figura 25 – Linhas de corrente (a esquerda) e isothermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 1,0$ e $A = 1,0$ (continuação).



Fonte: Autoria própria.

Figura 26 – Linhas de corrente (a esquerda) e isothermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 200$, $Pr = 0,71$, $St = 1,0$ e $A = 1,0$.



Fonte: Autoria própria.

Figura 27 – Linhas de corrente (a esquerda) e isothermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 2,0$ e $A = 1,0$.

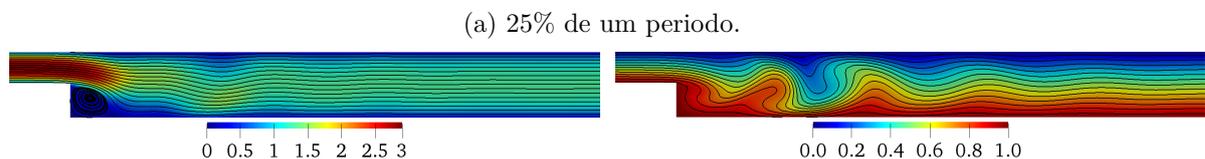
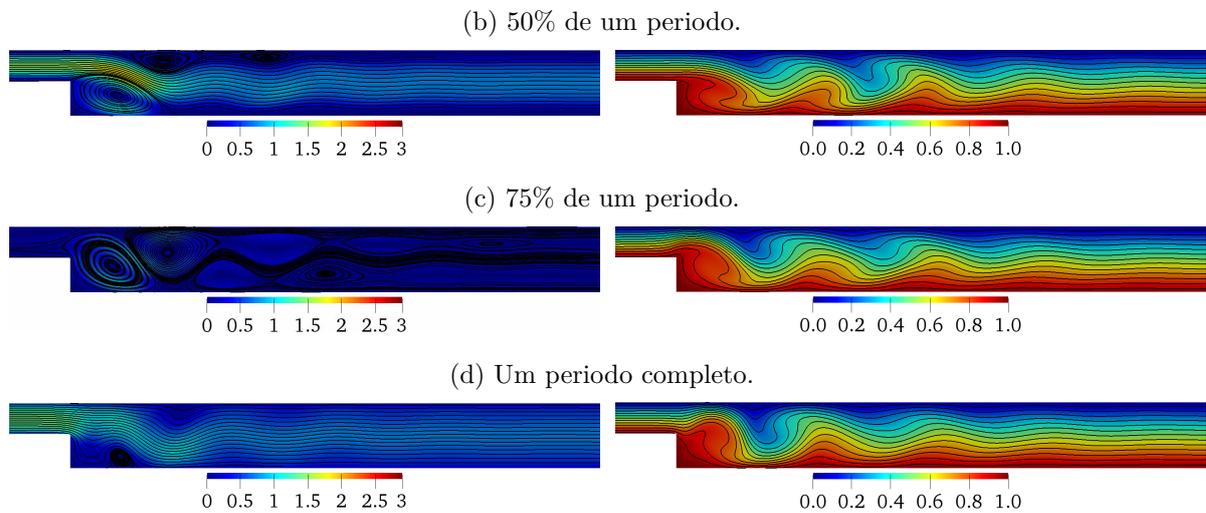


Figura 27 – Linhas de corrente (a esquerda) e isothermas (a direita) para diferentes frações de período de um pulso para $Re = 100$, $Pr = 0,71$, $St = 2,0$ e $A = 1,0$ (continuação).



Fonte: Autoria própria.

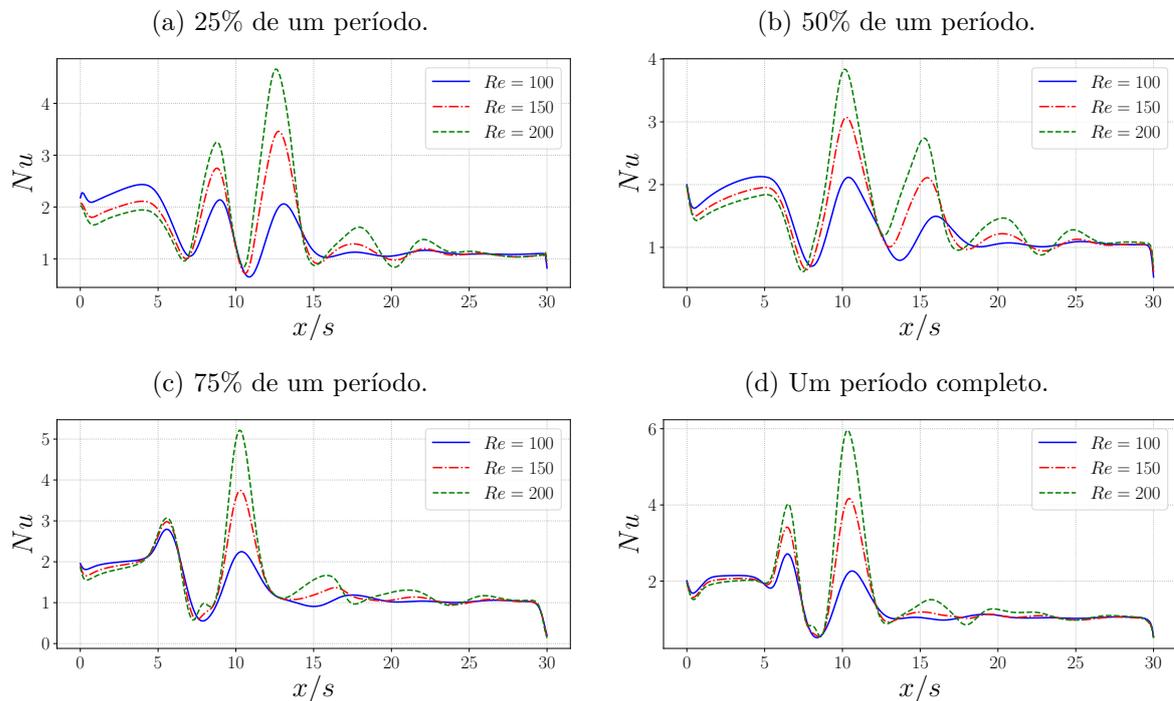
A influência do número de Reynolds sobre o escoamento é analisada ao se setar um número de Strouhal unitário. No presente trabalho, os seguintes números de Reynolds foram avaliados: 100, 150 e 200. As condições de contorno térmicas são mantidas constantes para cada uma das simulações, e a caracterização térmica do escoamento é dada por $Pr = 0,71$ e $Ra = 0$, com uma amplitude de pulso unitária, $A = 1$. O impacto do número de Reynolds sobre as características do escoamento é analisado através do valor do número de Nusselt local, avaliado na parede superior do canal em diferentes frações de período de um pulso, como representado na figura 28.

A partir da análise da figura 28, observa-se que com o aumento do número de Reynolds, eleva-se também o valor das amplitudes do Nusselt local na parede superior do canal, isto ocorre devido ao fato de maiores números de Reynolds estarem associados a maiores gradientes de velocidade, uma vez que um aumento do Reynolds significa que os efeitos inerciais do escoamento passam a influenciar mais ativamente o escoamento que os efeitos viscosos.

Dessa forma, com o aumento dos gradientes de velocidade, o transporte de energia térmica por advecção é favorecido. Como o número de Nusselt fisicamente pode ser interpretado como a razão entre a transferência de energia térmica por advecção e por difusão, valores maiores para o Nusselt local são esperados nas paredes do canal, como evidenciado através da figura 28.

Para analisar a influência do número de Strouhal nas características do escoamento,

Figura 28 – Número de Nusselt local na parede superior do canal para diferentes números de Reynolds in diferentes frações de período de um pulso.



Fonte: Autoria própria.

cinco valores para o número de Strouhal são testados: 1, 2, 3, 4 e 5. O número de Reynolds é mantido fixo e igual a 100. As condições de contorno térmicas são mantidas as mesmas, assim como a amplitude do pulso na entrada do canal. O valor do número de Nusselt médio é avaliado na parede superior do canal e os resultados são apresentados na tabela 8.

Tabela 8 – Número de Nusselt médio na parede superior do canal para diferentes valores de Strouhal em diferentes frações de período de um pulso.

| Strouhal | Período | | | |
|----------|---------------|---------------|---------------|--------|
| | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |
| 1 | 1,4349 | 1,3376 | 1,3442 | 1,3626 |
| 2 | 1,4786 | 1,3621 | 1,3551 | 1,3972 |
| 3 | 1,4659 | 1,3416 | 1,3192 | 1,3593 |
| 4 | 1,4490 | 1,3466 | 1,2997 | 1,3114 |
| 5 | 1,3986 | 1,3849 | 1,2927 | 1,2783 |

Observa-se da tabela 8 que, de modo geral, o Nusselt médio na parede superior do canal decresce com o aumento do número de Strouhal. Esse fenômeno pode ser explicado pelo fato de que, um aumento na frequência dos pulsos está associado a quantidades mais significativas de recirculações formadas ao longo do canal. Estas recirculações favorecem a

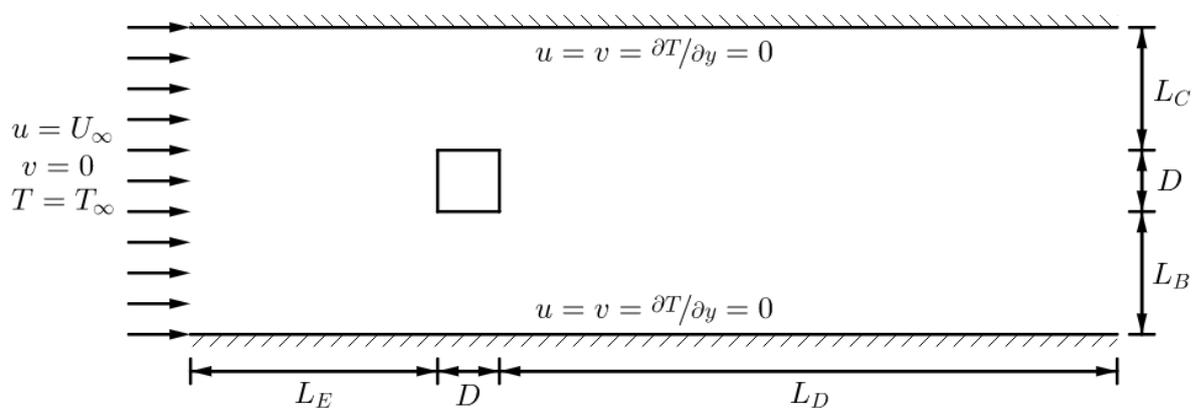
troca de energia térmica pelo fluido, homogeneizando a temperatura ao longo do canal e consequentemente diminuindo os gradientes de temperatura e assim o Nusselt.

5.7 Escoamento Sobre um Cilindro Quadrado

Foi mostrado, que o código computacional desenvolvido está apto a solução de escoamentos com condições de contornos arbitrárias e em domínios cartesianos com descontinuidades na forma de expansões abruptas. Porém, simulações de escoamentos sobre corpos imersos ainda não foram desenvolvidas, sendo este o foco desta seção.

Para o presente estudo, é considerado um cilindro de base quadrada, cuja superfície é mantida a uma temperatura constante. Este cilindro está imerso em um canal, onde é imposta uma velocidade e uma temperatura uniforme em sua entrada (U_∞ e T_∞), e na saída é definida condição de contorno de Neumann para as componentes de velocidade e temperatura. As paredes do canal estão termicamente isoladas e é prescrita condição de não escorregamento para as velocidades, como representado esquematicamente na figura 29. As faces do cilindro também admitem condição de não escorregamento e possuem uma temperatura constante T_q maior que a temperatura de entrada no canal.

Figura 29 – Representação esquemática do escoamento sobre um cilindro quadrado.



Fonte: Autoria própria.

As dimensões do canal são parametrizadas em função do comprimento da aresta do quadrado (D): $L_B = 10D$, $L_E = 15D$, $L_D = 45D$ e $L_C = 10D$. Onde o canal deve se apresentar grande o suficiente, para que caso ocorra a formação de esteiras de Von Kármán, o domínio computacional seja capaz de capturar as estruturas de interesse que caracterizam a dinâmica do escoamento.

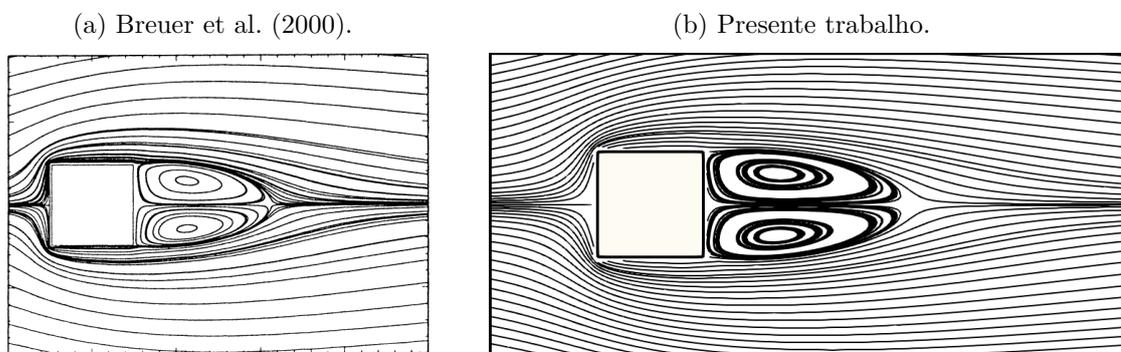
Simulações são conduzidas com uma malha computacional regular e uniforme de 1220×420 , onde diferentes regimes de escoamentos são avaliados, a fim de se validar os

resultados computacionais obtidos com os apresentados pela literatura.

A literatura aponta que a formação de esteiras de Von Kármán no escoamento sobre um cilindro de base quadrada ocorre somente quando o número de Reynolds é maior que um valor crítico (Re_{crit}). Na literatura existem diferentes valores para o Reynolds crítico, onde por exemplo, Okajima (1982) determinou experimentalmente que o valor crítico para o início da emissão de vórtices ocorre por volta de 70, Klekar e Patankar (1992) obtiveram que $Re_{crit} = 54$ através da análise de estabilidade do escoamento, sendo o menor valor encontrado na literatura, já Breuer et al. (2000) encontrou que $Re_{crit} \approx 60$ por meio de simulações numéricas.

Inicialmente foi analisada a dinâmica do escoamento sem a formação das esteiras de Von Kármán. Logo, uma simulação foi conduzida para a condição de $Re = 30$ e $Pr = 0,71$, o tempo de simulação foi de cerca de 20 s, tempo necessário para que o regime permanente fosse atingido para um cilindro com aresta de $D = 0,05$ m. As linhas de corrente são calculadas e comparadas com as apresentadas no trabalho de Breuer et al. (2000), a fim de se comparar qualitativamente o resultado computacional obtido. Os resultados são apresentados na figura 30.

Figura 30 – Linhas de corrente sobre um cilindro quadrado para $Re = 30$ e $Pr = 0,71$.



Fonte: Autoria própria.

Quantitativamente os resultados também podem ser comparados ao se avaliar o comprimento adimensional da bolha de recirculação (X_r/D) formada a jusante do cilindro. Dessa forma, uma simulação é realizada para a condição de $Re = 40$, desprezando-se os efeitos térmicos, e o comprimento de recirculação adimensional é avaliado e comparado com os apresentados por Sen et al. (2011), Dhiman et al. (2006) e Paliwal et al. (2003). Os resultados são apresentados na tabela 9.

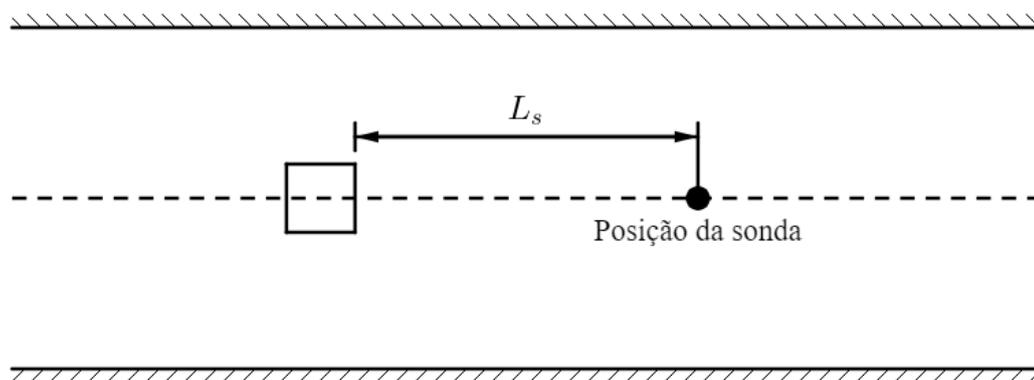
Nota-se da figura 30 e da tabela 9 que os resultados numéricos fornecidos pelo algoritmo computacional implementado, encontram-se em concordância com os valores apontados pela literatura. De modo que, pode-se inferir que para a faixa de Reynolds abaixo de Re_{crit} o código encontra-se validado.

Tabela 9 – Comparação do comprimento de recirculação adimensional para $Re = 40$.

| | Sen et al. (2011) | Dhiman et al. (2006) | Paliwal et al. (2003) | Presente estudo |
|-----------------|-------------------|----------------------|-----------------------|-----------------|
| $\frac{X_r}{D}$ | 2,735 | 2,822 | 2,700 | 2,590 |

Deseja-se agora avaliar a dinâmica do escoamento após a formação de esteiras de Von Kármán, logo uma simulação é conduzida para a condição de $Re = 100$, onde o fenômeno de emissão de vórtices pode ser observado. Para avaliar quantitativamente a solução numérica do escoamento, o número de Strouhal é calculado a partir das oscilações presentes na componente vertical de velocidade, capturadas em um ponto do domínio localizado na linha de simetria axial do canal e a uma distância $L_s = 22,5D$ a direita do cilindro, conforme representado na figura 31.

Figura 31 – Representação esquemática da posição da sonda no interior do domínio.



Fonte: Autoria própria.

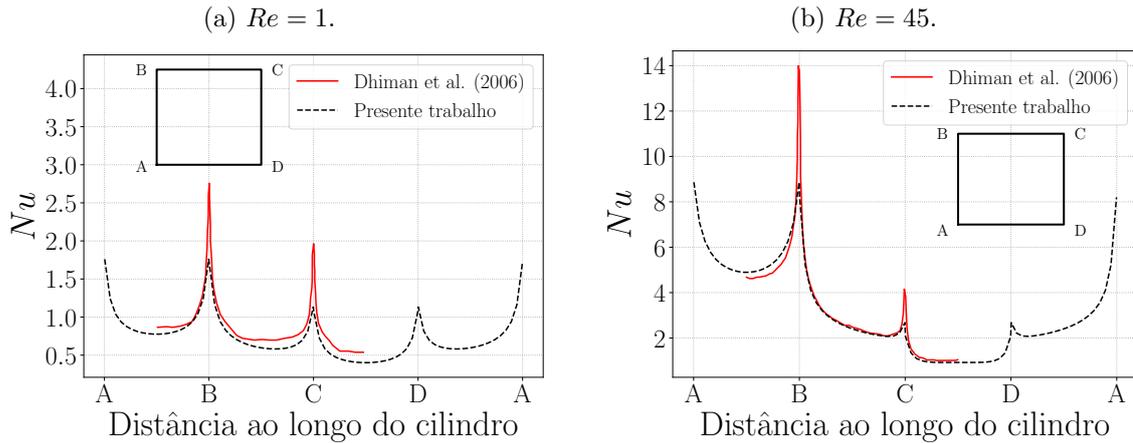
A dinâmica do escoamento é avaliada a partir do cálculo do coeficiente de arrasto médio ($\overline{C_D}$) e do seu valor médio quadrático (RMS), do valor RMS do coeficiente de sustentação e do número de Strouhal. Os valores obtidos são comparados com os resultados apresentados por Ma et al. (2018), Sen et al. (2011), Sharma e Eswaran (2004) e Franke et al. (1990). Os resultados são apresentados através da tabela comparativa 10, onde se observa bastante coerência entre os resultados.

Tabela 10 – Comparação dos adimensionais dinâmicos para $Re = 100$.

| Estudo | $\overline{C_D}$ | $(C_D)_{\text{RMS}}$ | $(C_L)_{\text{RMS}}$ | St |
|-------------------------|------------------|----------------------|----------------------|--------|
| Ma et al. (2018) | 1,5701 | 0,0059 | 0,1969 | 0,1450 |
| Sen et al. (2011) | 1,5287 | 0,0055 | 0,1928 | 0,1452 |
| Sharma e Eswaran (2004) | 1,4936 | 0,0054 | 0,1922 | 0,1488 |
| Franke et al. (1990) | 1,6100 | — — — | 0,2700 | 0,1540 |
| Presente trabalho | 1,5696 | 0,0057 | 0,2011 | 0,1549 |

Para a validação da metodologia aplicada ao transporte de energia térmica, duas simulações são conduzidas para os seguintes regimes de escoamento: $Re = 1$ e $Re = 45$, ambos com $Pr = 1$. O número de Nusselt local é avaliado ao longo de todas as faces do cilindro, e os resultados são comparados com os propostos por Dhiman et al. (2006) através da figura 32 a seguir.

Figura 32 – Número de Nusselt local ao longo das faces do cilindro para diferentes números de Reynolds e $Pr = 0,71$.



Fonte: Autoria própria.

Observa-se da figura 32, que os resultados numéricos advindos do algoritmo computacional implementado, estão satisfatoriamente condizentes com os apresentados pela literatura. De modo que, pode-se inferir que o código computacional está validado também em relação ao transporte de energia térmica.

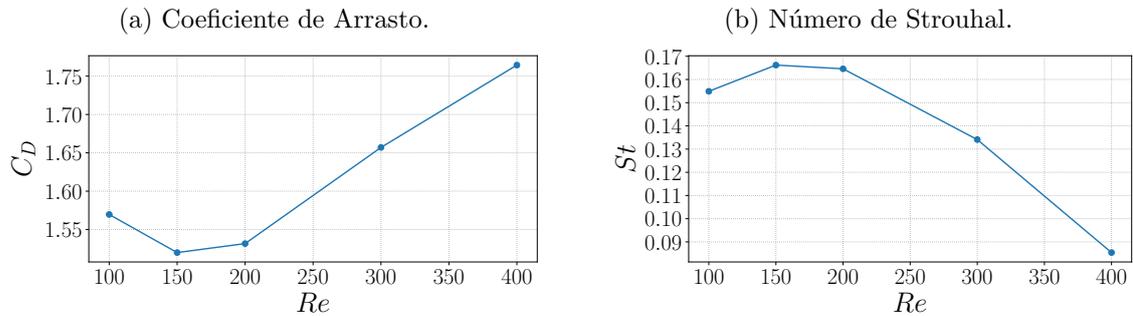
Validado o algoritmo computacional desenvolvido, deseja-se analisar a influência do número de Reynolds na dinâmica e no transporte de energia térmica do escoamento sobre um cilindro quadrado. Para tanto, cinco simulações foram conduzidas para os seguintes números de Reynolds: 100, 150, 200, 300 e 400, todos com $Pr = 0,71$. A tabela 11 a seguir apresenta os adimensionais dinâmicos e térmicos que caracterizam o escoamento.

Tabela 11 – Comparação dos adimensionais dinâmicos e térmicos para diferentes valores do número de Reynolds e $Pr = 0,71$.

| Reynolds | $\overline{C_D}$ | $(C_D)_{RMS}$ | $(C_L)_{RMS}$ | St | \overline{Nu} |
|----------|------------------|---------------|---------------|--------|-----------------|
| 100 | 1,5696 | 0,0057 | 0,2011 | 0,1549 | 4,2264 |
| 150 | 1,5199 | 0,0165 | 0,3008 | 0,1662 | 5,1420 |
| 200 | 1,5316 | 0,0324 | 0,4445 | 0,1646 | 5,9775 |
| 300 | 1,6570 | 0,1113 | 0,9793 | 0,1341 | 7,4657 |
| 400 | 1,7644 | 0,2765 | 1,1196 | 0,0854 | 8,8919 |

Da tabela 11, observa-se uma pequena crise no coeficiente de arrasto para o intervalo do número de Reynolds de 100 à 200, conforme representado pela figura 33a a seguir. Nota-se também, que para o mesmo intervalo de Reynolds, existe a tendência de um ponto de máximo para o número de Strouhal (figura 33b).

Figura 33 – Coeficiente de arrasto e número de Strouhal em função do número de Reynolds.



Fonte: Autoria própria.

A figura 34 a seguir, apresenta a variação temporal dos coeficientes de arrasto e de sustentação, para os cinco números de Reynolds simulados. Observa-se que, a medida que o número de Reynolds aumenta, frequências harmônicas são adicionadas ao sinal, até que este sofra transição para um regime de escoamento instável, como pode ser observado para a condição de $Re = 400$.

Figura 34 – Coeficiente de arrasto (a esquerda) e sustentação (a direita) para diversos valores do número de Reynolds.

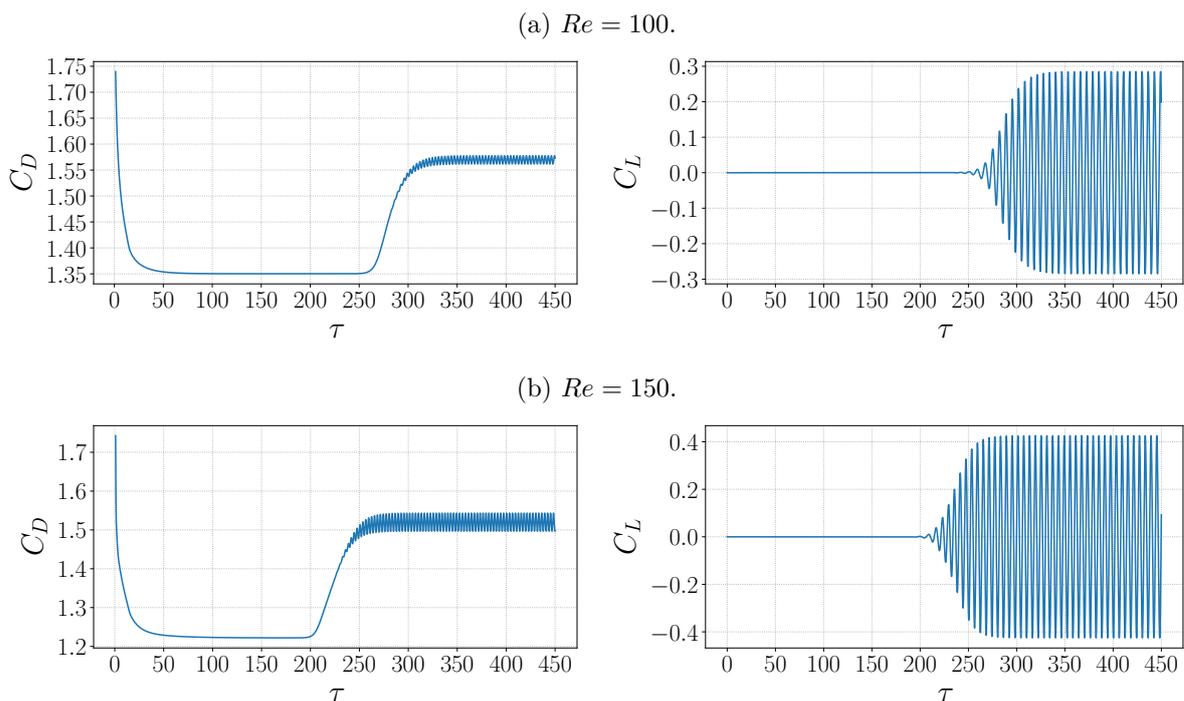
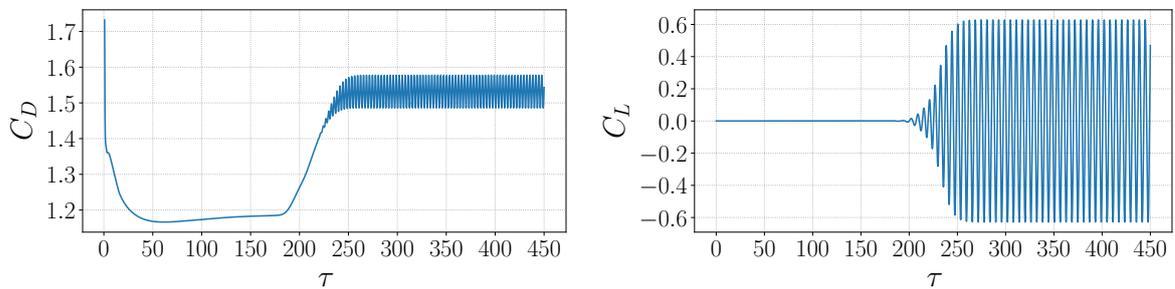
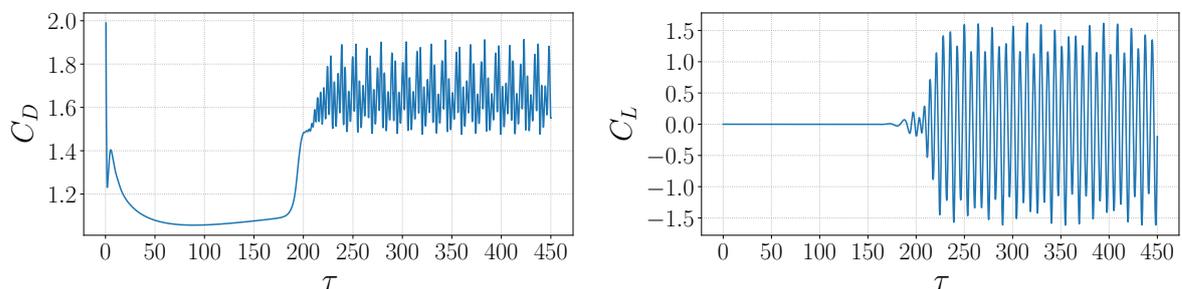


Figura 34 – Coeficiente de arrasto (a esquerda) e sustentação (a direita) para diversos valores do número de Reynolds (continuação).

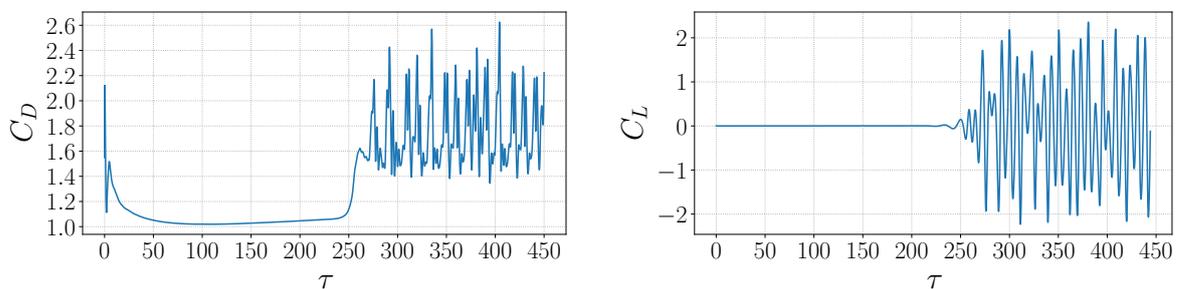
(c) $Re = 200$.



(d) $Re = 300$.



(e) $Re = 400$.



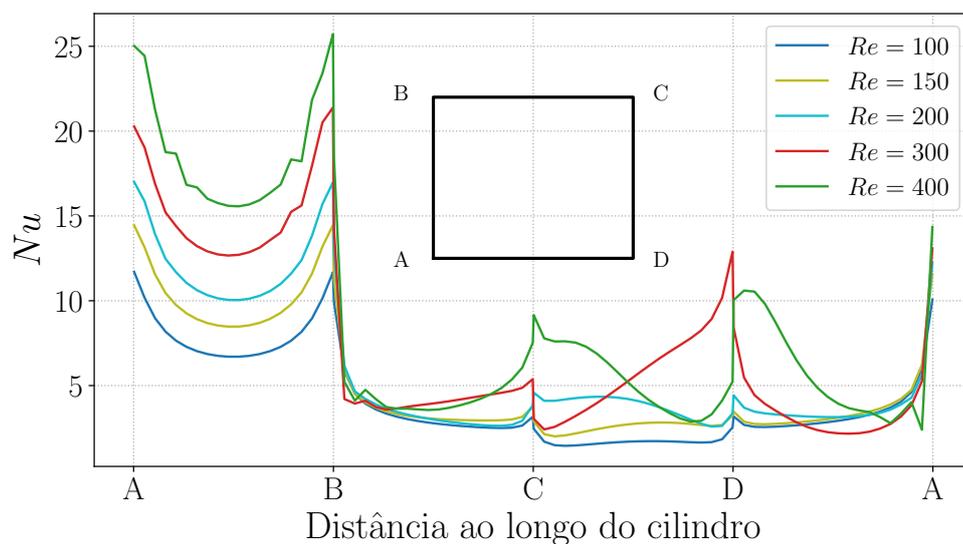
Fonte: Autoria própria.

Da figura 34 observa-se que o incremento no número de Reynolds ocasiona maiores amplitudes de oscilações no coeficiente de sustentação, fato este evidenciado através do valor de $(C_L)_{\text{RMS}}$ da tabela 11. Tal fenômeno, deve-se à formação de maiores gradientes de velocidades para maiores valores de Reynolds, estes gradientes de velocidade induzem a formação de gradientes de pressão que geram maiores variações das forças de sustentação e conseqüentemente as oscilações no coeficiente de sustentação.

Na figura 35 observa-se o perfil do número de Nusselt local ao longo das faces do cilindro em função do número de Reynolds. Maiores números de Reynolds implicam em um aumento do número de Nusselt local, como era esperado, uma vez que o número de Nusselt pode ser compreendido como uma medida quantitativa da capacidade de transferência de energia térmica por convecção. Dessa forma, quanto maior a proporção dos efeitos

inerciais no escoamento, maior será a eficiência do transporte advectivo de energia. Os valores médios do número de Nusselt sobre o cilindro são apresentados na tabela 11, onde é possível evidenciar o fato de que o Nusselt aumenta com o Reynolds.

Figura 35 – Número de Nusselt local nas faces do quadrado para diferentes números de Reynolds e $Pr = 0,71$.



Fonte: Autoria própria.

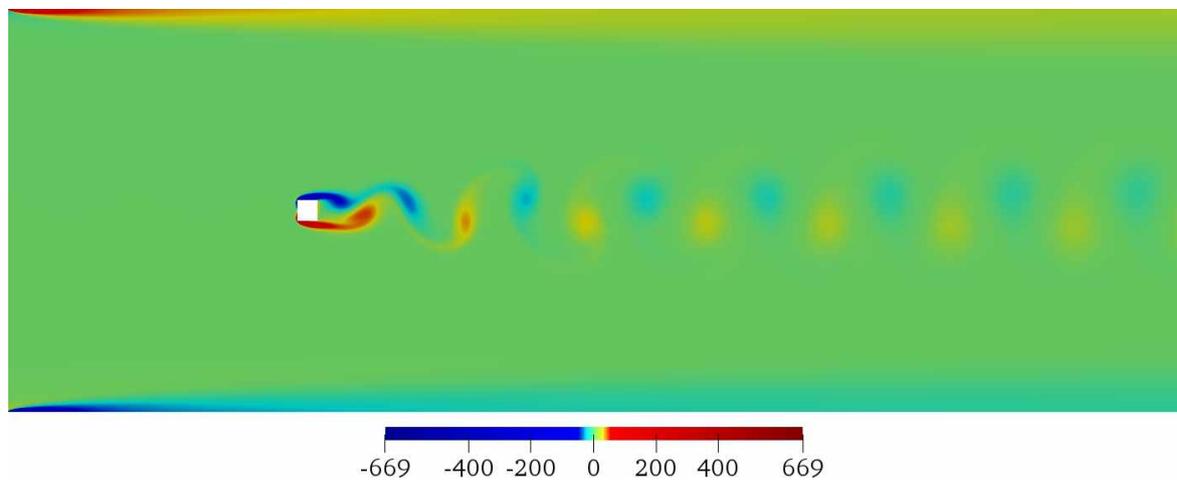
As figuras 36 e 37 a seguir, apresentam, respectivamente, os campos de vorticidade e de temperatura para as simulações conduzidas com Reynolds 100, 200 e 400 e um número de Prandtl igual à 0,71 para um tempo adimensional de 418.

Observa-se da figura 36, o campo de vorticidade, variável que quantifica a intensidade de rotação das partículas de fluido contidas em um volume de controle. É ainda possível observar, à jusante do cilindro, a formação de esteiras de Von Kármán, caracterizadas por uma emissão regular de vórtices, onde maiores valores de vorticidade estão relacionados a maiores valores de Reynolds.

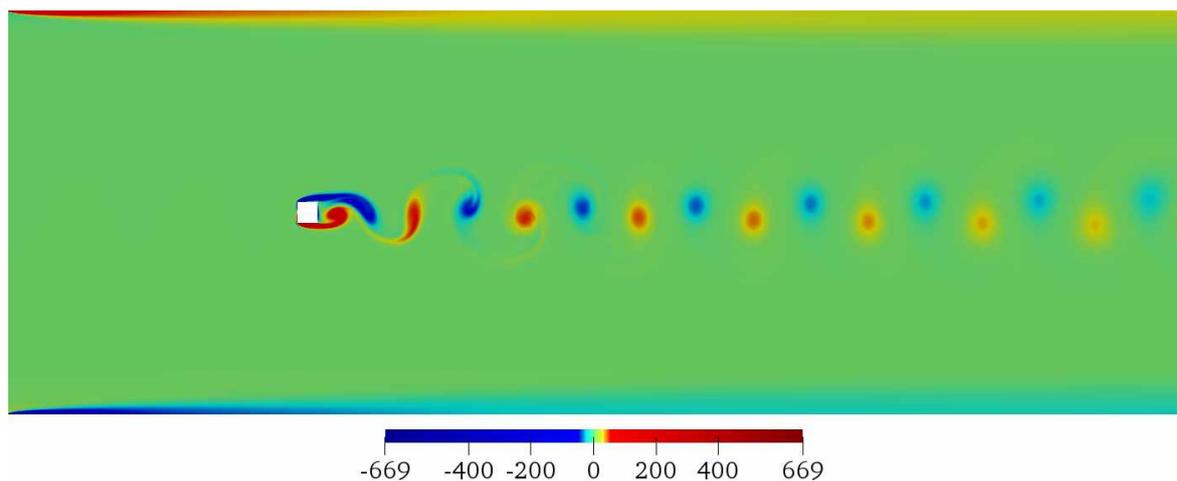
Da figura 37, nota-se que o aumento do número de Reynolds impacta substancialmente sobre os efeitos advectivos do transporte de energia térmica, de forma similar a que é observada no transporte de quantidade de movimento linear. O aumento na proporção dos efeitos inerciais é evidenciado pela maior concentração de energia térmica nas estruturas formadas a jusante do obstáculo. Para números de Reynolds mais elevados, a energia é transportada por partículas que passam pela periferia do cilindro e ficam confinadas nos vórtices formados a jusante do mesmo. Nessas condições os fenômenos de transporte difusivos de energia não são eficientes para transportar a energia dos vórtices para as regiões adjacentes do escoamento, mantendo estes a uma temperatura mais elevada.

Figura 36 – Campo de vorticidade para diferentes valores de Reynolds com $Pr = 0,71$ e em $\tau = 418$.

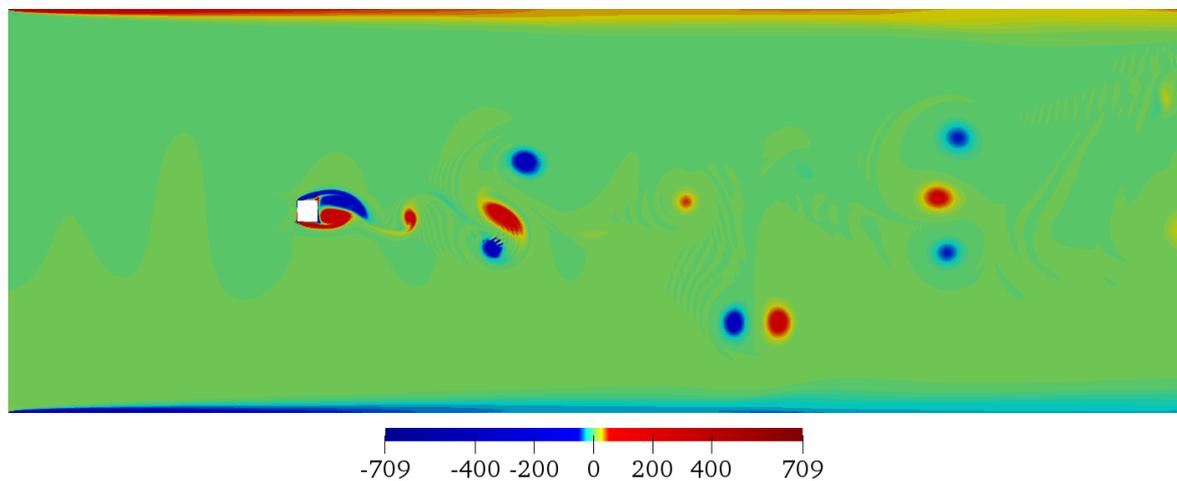
(a) $Re = 100$.



(b) $Re = 200$.



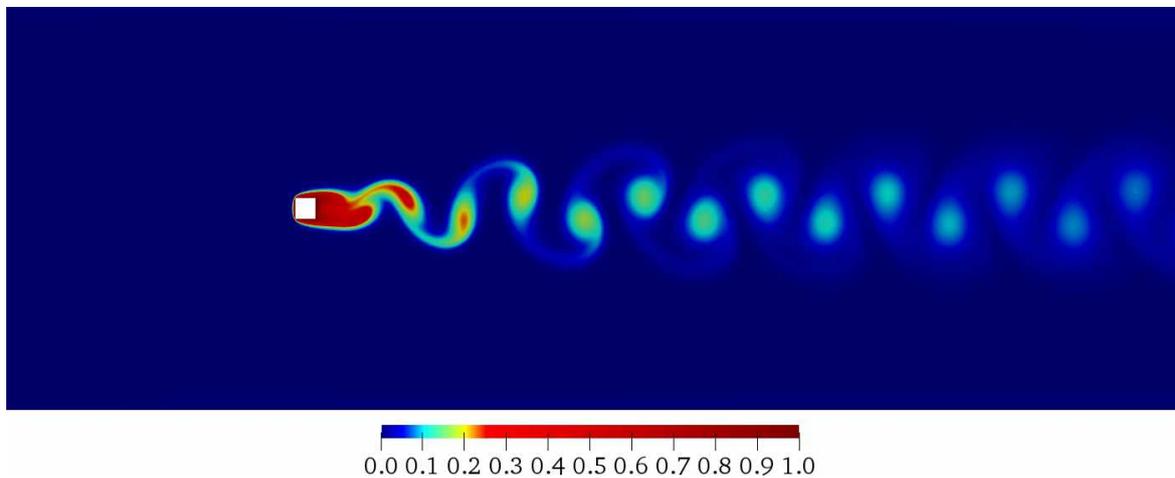
(c) $Re = 400$.



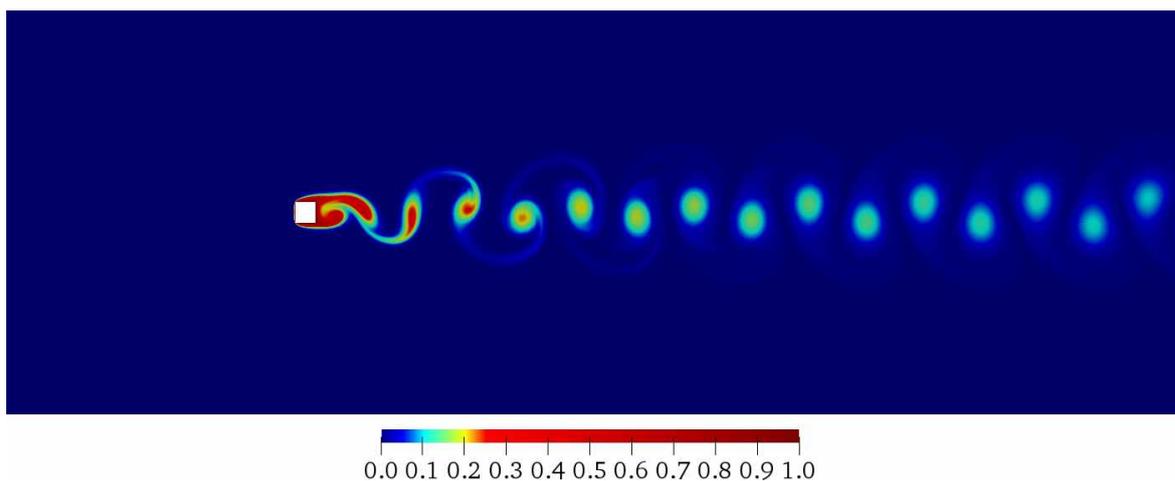
Fonte: Autoria própria.

Figura 37 – Campo de temperatura para diferentes valores de Reynolds com $Pr = 0,71$ e em $\tau = 418$.

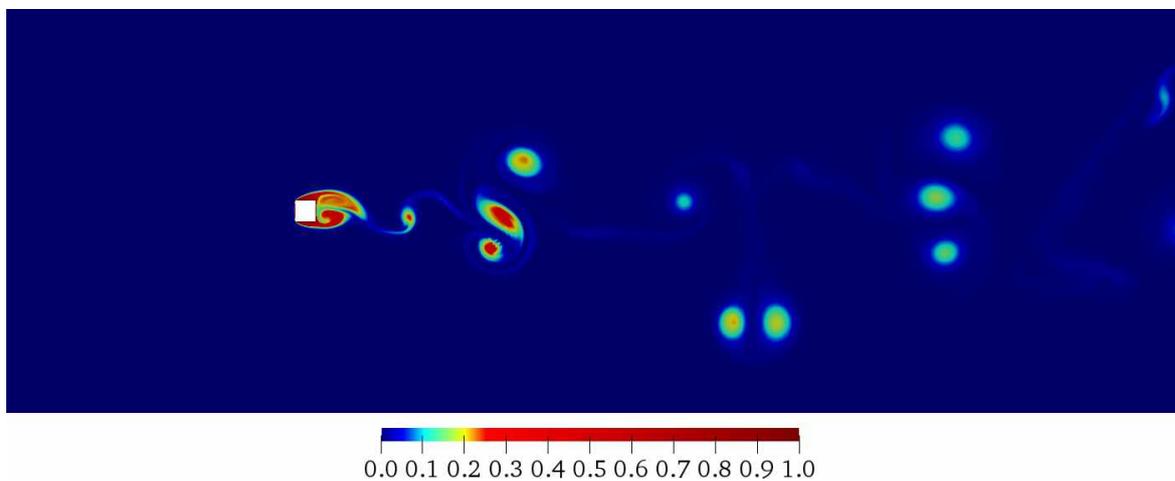
(a) $Re = 100$.



(b) $Re = 200$.



(c) $Re = 400$.



Fonte: Autoria própria.

6 CONCLUSÃO

No presente trabalho é apresentada a modelagem física e matemática de escoamentos para fluidos arbitrários, onde é contemplada a dinâmica e o transporte de energia térmica no escoamento. Tal modelagem é particularizada para o caso de fluidos newtonianos com propriedades constantes em escoamentos incompressíveis, simplificações estas, que possibilitam a modelagem numérica-computacional abordada no presente estudo. Onde é empregada a metodologia do passo fracionado (método de projeção), para o acoplamento pressão-velocidade na solução da equação do balanço de quantidade de movimento linear.

Rotinas computacionais são desenvolvidas e implementadas em linguagem de programação FORTRAN 90, onde as equações são discretizadas pelo método de diferenças finitas e resolvidas em um domínio bidimensional euleriano fixo. Simulações são conduzidas junto ao método das soluções manufaturadas, a fim de verificar a ordem de convergência do método numérico utilizado, além de validar o código computacional desenvolvido e analisar a influência de parâmetros adimensionais nas características do escoamento.

A partir dos resultados numéricos obtidos, observa-se que o código desenvolvido apresenta segunda ordem de convergência para as componentes de velocidade e para o campo de pressão, isto é, uma redução de duas vezes no comprimento dos elementos da malha resulta em uma redução de quatro vezes no erro numérico. Nota-se também, nos casos de validação, bastante coerência entre os resultados obtidos e os apresentados pela literatura. Onde a validação do modelo permite a implementação ferramentas numérica-computacionais mais complexas, com o intuito de caracterizar problemas mais realísticos e com uma maior gama de aplicações.

Em trabalhos futuros, a modelagem pode ser estendida para escoamentos sobre geometrias não-cartesianas, fazendo-se necessária a implementação de rotinas de interpolação das propriedades do escoamento sobre as células do domínio computacional. É interessante ainda, a extensão do código desenvolvido para trabalhar com escoamentos tridimensionais, uma vez que as modelagens matemática e numérica-computacional apresentadas são robustas o suficientes para abranger a terceira dimensão espacial. E por fim, seria interessante que o código fosse paralelizado, afim de se obter resultados com um menor custo computacional.

REFERÊNCIAS

- ARMALY, B. F. et al. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 127, p. 473–496, 1983.
- ARQUIMEDES. On Floating Bodies, Book I. In: HEATH, T. L. (Ed.). *The Works of Archimedes: Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, (Cambridge Library Collection – Mathematics). p. 253–262.
- BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. London: Cambridge University Press, 1970. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 0-521-09817-3.
- BERNOULLI, D. *Hydrodynamica: sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. [S.l.]: Johannis Reinholdi Dulseckeri, 1738.
- BORGNAKKE, C.; SONNTAG, R. E. *Fundamentos da Termodinâmica*. 8. ed. São Paulo: Blucher, 2013. (Série Van Wylen). Coordenação e tradução: Roberto de Aguiar Peixoto. ISBN 978-65-212-0792-4.
- BOUSSINESQ, J. V. *Theorie analytique de la Chaleur*. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1903.
- BREUER, M. et al. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-Boltzmann and finite-volume. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 21, p. 186–196, 2000.
- CAUCHY, A. L. B. *Exercices de mathématiques*. Paris: De Bure Freres, Libraires Du Roi Et de la Bibliotheque Du Roi, 1828. v. 2. (Exercices de mathématiques, v. 2).
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968.
- CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 1993. v. 4. (Texts in Applied Mathematics, v. 4). ISBN 978-1-4612-0883-9.
- COPSON, E. T. *Asymptotic Expansions*. London: Cambridge University Press, 1965. v. 55. (Cambridge Tracts in Mathematics, v. 55). ISBN 978-0-511526-12-1.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967.
- D’ALEMBERT, J. le R. *Essai d’une nouvelle théorie de la résistance des fluides*. Paris: Académie Royale des Sciences de Paris, 1752.
- DAVIS, G. D. V. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 3, n. 3, p. 249–264, 1983.

- DHIMAN, A. K. et al. Effects of Reynolds and Prandtl numbers on heat transfer across a square cylinder in the steady flow regime. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology*, v. 49, n. 7, p. 717–731, 2006.
- DUARTE, B. A. de F. *Phase change modelling for non-isothermal flows: a mathematical, numerical and computational model for pure substances*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018.
- EULER, L. Principes généraux de l'état d'équilibre d'un fluide. *Acedémie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, Mémoires*, v. 11, p. 217–273, 1757.
- FRANKE, R.; RODI, W.; SCHÖNUNG, B. Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 35, p. 237–257, 1990.
- FRONTINUS, J. S. *De Aquaeductu Urbis Romae*. Stuttgart: Walter de Gruyter, 1973. ISBN 3-8154-1372-9.
- GANGAWANE, K. M.; BHARTI, R. P.; KUMAR, S. Two-dimensional Lattice Boltzmann simulation of natural convection in differentially heated square cavity: Effect of Prandtl and Rayleigh numbers. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 93, n. 4, p. 766–780, 2015.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–411, 1982.
- HAGEN, G. H. L. Ueber die bewegung des wassers in engen cylindrischen röhren. *Annalen der Physik*, v. 122, n. 3, p. 423–442, 1839.
- HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, v. 8, n. 12, p. 2182–2189, 1965.
- INCROPERA, F. P. et al. *Fundamentos da Transferência de Calor e Massa*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. Tradução e Revisão Técnica: Fernando Luiz Pellegrini Pessoa e Eduardo Mach Queiroz. ISBN 978-85-216-2504-9.
- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 59, n. 2, p. 308–323, 1985.
- KLEKAR, K. M.; PATANKAR, S. V. Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 14, n. 3, p. 327–341, 1992.
- KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, v. 30, p. 299–303, 1941.
- LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Philadelphia: SIAM, 1955. ISBN 978-0-898716-29-0.

- MA, Y. et al. Numerical simulation of flow over a square cylinder with upstream and downstream circular bar using lattice Boltzmann method. *International Journal of Modern Physics C*, v. 29, n. 4, p. 1–28, 2018.
- MARIOTTE, E. *Traité du mouvement des eaux*. Baviera: Estienne Michallet, 1686.
- NAVIER, C. L. M. H. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de L'Académie Royale des Sciences de L'Institut de France*, v. 6, p. 389, 1827.
- NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. London: J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687.
- NÓS, R. L. *Simulações de escoamentos tridimensionais bifásicos empregando métodos adaptativos e modelos de campo fase*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- OBERBECK, A. Über die bewegungserscheinungen der atmosphäre. *Sitz. Ber. K. Preuss. Akad. Wiss.*, v. 383, p. 1129–1138, 1888.
- OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G.; HIRSCH, C. Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics. *Applied Mechanics Reviews*, v. 57, n. 5, p. 345–384, 2004.
- OKAJIMA, A. Strouhal numbers of rectangular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 123, p. 379–398, 1982.
- PADILLA, E. L.; LOURENÇO, M. A. S.; NETO, A. da S. Natural convection inside cubical cavities: numerical solutions with two boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 35, n. 3, p. 275–283, 2013.
- PALIWAL, B. et al. Power law fluid flow past a square cylinder: momentum and heat transfer characteristics. *Chemical Engineering Science*, v. 58, p. 5315–5329, 2003.
- POISEUILLE, J. L. M. *Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres-petits diametres*. France: Imprimerie Royale, 1844.
- POISSON, S. D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France*, v. 8, p. 357–570, 1829.
- PRANDTL, L. Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung. In: KRAZER, A. (Ed.). *International Congress of Mathematicians, Heidelberg 1904*. Germany: Teubner, 1904. p. 484–491.
- RAYLEIGH, J. W. S. L. *The Theory of Sound*. Cambridge: Macmillan, 1877. (The Theory of Sound, v. 1).
- REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 35, p. 84–99, 1883.
- ROUIZI, Y. et al. Numerical model reduction of 2D steady incompressible laminar flows: Application on the flow over a backward-facing step. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 6, p. 2239–2255, 2009.

- SAINT-VENANT, A. J. C. B. de. Note à joindre au mémoire sur la dynamique des fluides. In: *Mémoire sur la dynamique des fluides*. France: Archives de L'Académie des Sciences, 1843. p. 1240–1243.
- SALARI, K.; KNUPP, P. *Code verification by the method of manufactured solution*. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2000.
- SEN, S.; MITTAL, S.; BISWAS, G. Flow past a square cylinder at low Reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 67, p. 1160–1174, 2011.
- SHARMA, A.; ESWARAN, V. Heat and fluid flow across a square cylinder in the two-dimensional laminar flow regime. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology*, v. 45, n. 3, p. 247–269, 2004.
- SILVA, H. G. da; VILLAR, M. M. Verificação e validação de códigos computacionais. In: MANSUR, S. S.; VIEIRA, E. D. R.; NETO, A. da S. (Ed.). *Turbulência*. 1. ed. Rio de Janeiro: ABCM, 2010. v. 7, cap. 2, p. 51–94.
- STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. In: *Mathematical and Physical Papers*. London: Cambridge University Press, 2009, (Cambridge Library Collection - Mathematics, v. 1). p. 75–129.
- STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. 2. ed. Pacific Grove: SIAM, 1989. ISBN 978-0-898716-39-9.
- TORRICELLI, E. *Opera Geometrica*. Florença: typis A. Masse & L. de Landis, 1644.
- VAN DER VORST, H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 13, n. 2, p. 631–644, 1992.
- VILLAR, M. M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.
- VON KÁRMÁN, T. On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 164, p. 192–215, 1938.
- WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2006. (McGraw-Hill series in mechanical engineering). ISBN 0-07-240231-8.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos Fluidos*. 6. ed. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2011. Tradução: Mario Maro Fecchio, Nelson Manzanares Filho; Revisão Técnica: José Carlos Cesar Amorim. ISBN 978-85-8055-009-2.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações*. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. Tradução: Katia Aparecida Roque, Mario Moro Fecchio; Revisão Técnica: Fábio Saltara, Jorge Luis Baliño, Karl Peter Burr; Consultoria Técnica: Helena Maria de Ávila Castro. ISBN 978-85-8055-066-5.