
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Leonardo Silva de Oliveira

Teoria de Perron Frobenius para mapas positivos

Uberlândia - MG

2019

Leonardo Silva de Oliveira

Teoria de Perron Frobenius para mapas positivos

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharelado em Matemática, sob a orientação da Prof. Dr. Daniel Cariello.

Uberlândia - MG

2019

Leonardo Silva de Oliveira

Teoria de Perron Frobenius para mapas positivos

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharelado em Matemática, sob a orientação da Prof. Dr. Daniel Cariello.

Aprovada em 13/12/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cícero Fernandes de Carvalho

Prof. Dr. Daniel Cariello (Orientador)

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer aos meus pais, Denilde e Gilmar, que sempre me incentivaram, apoiaram e estavam ao meu lado nos momentos que mais precisei. Tudo que sou hoje é graças ao carinho e ensinamentos que me passaram.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador Daniel, que sempre teve paciência e muita didática para me ensinar e me mostrar a beleza da matemática. Além disso, não poderia deixar de agradecer minha ex-orientadora, Catiana, pelos dois anos de iniciação científica, que me forneceram valiosa aprendizagem nos momentos iniciais do meu ingresso na universidade.

Agradecimentos também a todos os meus familiares, que em todas as visitas sempre me incentivaram e se colocavam à disposição para qualquer situação.

Aos meus amigos de Lagoa Formosa, que, apesar da distância, estiveram ao meu lado nos momentos difíceis e comemoraram os momentos bons. Aos meus amigos que conheci no tempo de graduação, que me acolheram e me ensinaram bastante nos períodos em que me sentia sozinho na cidade de Uberlândia.

Também gostaria de agradecer a todos os professores da Universidade Federal de Uberlândia, que sempre estiveram motivados a mostrar a matemática da melhor forma possível.

Agradecimentos à CNPq pelo apoio financeiro e pela oportunidade de iniciação científica durante a graduação. Além disso, gostaria de agradecer ao Instituto TIM, IMPA e à OBMEP, que, em parceria, concederam o apoio financeiro essencial para me manter em Uberlândia.

As for everything else, so for a mathematical theory: beauty can be perceived but not explained.

Resumo

Nesse trabalho estudamos a teoria de Perron-Frobenius para mapas positivos atuando na álgebra de matrizes M_k e nas suas sub-álgebras $VM_kV = \{VXV | X \in M_k\}$. Apresentamos demonstrações dos teoremas principais dessa teoria. Mostramos que para todo mapa positivo atuando em VM_kV o seu raio espectral é um autovalor e associado a ele existe um autovetor hermitiano positivo semidefinido. Além disso, se o mapa é irredutível então a multiplicidade geométrica é 1 e a imagem do autovetor associado coincide com a imagem de V . Também estudamos mapas que são soma direta de irredutíveis e mostramos uma maneira indireta de construí-los.

Palavras-Chave: Mapas Positivos, Raio Espectral, Teorema de Perron-Frobenius, Mapas Irredutíveis, Mapas Completamente Redutíveis.

Abstract

In this work we study Perron-Frobenius theory for positive maps acting on the matrix algebra M_k and its subalgebras $VM_kV = \{VXV|X \in M_k\}$. We show that the spectral radius of any positive map belongs to its spectrum and associated to this eigenvalue there is a positive semidefinite hermitian eigenvector. Moreover, if the map is irreducible then we show that the geometric multiplicity of the spectral radius is 1 and the image of the associated eigenvector coincides with the image of V . We also study positive maps which are direct sum of irreducible maps and we provide an indirect way to construct them.

Key-words: Positive Maps, Spectral Radius, Perron-Frobenius Theorem, Irreducible Maps, Completely Reducible Maps.

Sumário

1	Introdução	9
2	Mapas Positivos e raio espectral	11
2.1	Resultados Preliminares	11
2.2	Mapas positivos e Raio espectral	12
3	Variação dos autovalores	16
3.1	Raízes de um Polinômio	16
4	Raio espectral é um autovalor	19
4.1	Teoremas Principais da teoria de Perron-Frobenius	19
5	Propriedade de Decomposição e Mapas Completamente Redutíveis	23
5.1	Equivalência entre a propriedade de decomposição e a reducibilidade completa	24
5.2	Propriedade PPT implica na reducibilidade completa	26

Capítulo 1

Introdução

O teorema de Perron-Frobenius é um teorema clássico de Álgebra Linear [4], [6]. Ele fornece diversas informações sobre os autovalores de uma matriz quadrada com coeficientes reais não negativos. Uma matriz quadrada com coeficientes não negativos é um mapa positivo agindo em \mathbb{C}^k . Portanto o teorema de Perron-Frobenius trata de mapas positivos. Existem generalizações desse teorema para mapas positivos agindo em outros espaços, por exemplo para a álgebra das matrizes complexas de ordem k , e para situações ainda mais gerais (apêndice de [7]). Essa coleção de generalizações formam a chamada teoria de Perron-Frobenius.

Nesse trabalho focaremos na álgebra M_k e nas suas sub-álgebras $VM_kV = \{VXV | X \in M_k\}$, onde $V \in M_k$ uma projeção ortogonal. O conjunto das matrizes hermitianas positivas semidefinidas será representado por P_k .

As informações principais dessa teoria dizem respeito a mapas positivos irredutíveis (Ver Definições 2.1.3 e 2.1.4). Por exemplo, o raio espectral de um mapa positivo $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ (Ver Definição 2.2.6) é um autovalor e existe um autovetor associado que é hermitiano positivo semidefinido. Além disso se ele for irredutível a multiplicidade geométrica do raio espectral é 1 e a imagem do autovetor coincide com Imagem de V (Proposições 2.3 e 2.5 em [4]). Essas condições são necessárias para a irreducibilidade do mapa. As demonstrações desses resultados apresentadas neste trabalho seguem as ideias das referências [4, 1].

Determinar quando um mapa positivo arbitrário é irredutível não é fácil, entretanto se ele for autoadjunto com respeito ao produto interno do traço então essas duas condições necessárias também são suficientes (Ver Lema 4.1.3). Portanto para mapas autoadjuntos positivos existe uma propriedade simples equivalente a ser irredutível.

Depois de estudar mapas irredutíveis o próximo passo é estudar mapas que são soma diretas de irredutíveis. Chamaremos esses mapas de mapas completamente redutíveis (Ver Definição 5.0.1). A

maneira direta de construí-los é definindo um mapa a partir de mapas irredutíveis. Aqui mostraremos uma maneira indireta de construí-los.

Novamente para mapas autoadjuntos existe uma propriedade equivalente a ser completamente redutível que também vem da teoria de Perron-Frobenius. Essa propriedade é chamada de propriedade de decomposição (Ver Definição 5.0.2).

Construiremos mapas autoadjuntos positivos da seguinte maneira. Seja $C = (c_{ij}) \in M_k$ e $B \in M_m$. O produto de Kronecker é definido como $C \otimes B = (c_{ij}B) \in M_{km}$ (Ver Definição 2.2.5). Assim identificaremos o produto tensorial $M_k \otimes M_m$ com M_{km} via produto de Kronecker.

Seja $A \in M_k \otimes M_m \simeq M_{km}$ uma matriz hermitiana. Podemos escrever $A = \sum_{i=1}^n B_i \otimes C_i$, onde B_i, C_i são matrizes hermitianas para todo i . Assim definimos os seguintes mapas:

$$\begin{aligned} F_A : M_m &\rightarrow M_k & G_A : M_k &\rightarrow M_m \\ X &\mapsto F_A(X) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(C_i X) B_i & X &\mapsto G_A(X) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(B_i X) C_i . \end{aligned}$$

Esses mapas são adjuntos com respeito ao produto interno do traço. Quando A é uma matriz positiva semidefinida os mapas F_A e G_A são positivos. Portanto $F_A \circ G_A : M_k \rightarrow M_k$ é um mapa positivo autoadjunto.

Dizemos que uma matriz $A = \sum_{i=1}^n B_i \otimes C_i$ é positiva sobre transposição parcial ou PPT, se A e $A^{t_2} = Id \otimes (\cdot)^t(A) = \sum_{i=1}^n B_i \otimes C_i^t$ são matrizes hermitianas positivas semidefinidas .

O resultado principal que mostraremos nesse trabalho é que a propriedade PPT para a matriz A garante automaticamente a propriedade de decomposição para $F_A \circ G_A : M_k \rightarrow M_k$ e portanto ele é completamente redutível. Essa propriedade aparece naturalmente em teoria de informação quântica. Além da obter uma maneira indireta de se construir mapas completamente redutíveis, existem outras consequências desse resultado. Por exemplo, podemos reduzir o problema da separabilidade dos estados quânticos a um subconjunto das matrizes PPT (Ver referências [2, 5]).

Capítulo 2

Mapas Positivos e raio espectral

2.1 Resultados Preliminares

Antes de iniciar o trabalho vejamos algumas definições necessárias para a compreensão do texto.

Definição 2.1.1. Denotaremos o conjunto das matrizes de ordem k com entradas complexas por M_k e o conjunto de vetores com k entradas complexas por \mathbb{C}^k . Assim definimos VM_kW como sendo o conjunto $\{VXW \mid X \in M_k\}$, onde V e W são projeções ortogonais pertencentes a M_k .

Definição 2.1.2. Uma matriz A pertencente ao M_k é dita hermitiana, se $A^* = A$, onde

$$\begin{aligned} * : M_k &\rightarrow M_k \\ A &\mapsto A^* = \overline{(A^t)} \end{aligned}$$

Dada uma matriz hermitiana A , se para todo \mathbf{z} pertencente ao \mathbb{C}^k tivermos que $\mathbf{z}^*A\mathbf{z} \geq 0$. Então dizemos que A é uma matriz hermitiana positiva semidefinida, quando a desigualdade é estrita, então dizemos que A é uma matriz hermitiana positiva definida. Denotaremos por P_k o conjunto de todas as matrizes hermitianas positivas semidefinidas em M_k .

Definição 2.1.3. Seja $L : VM_kV \rightarrow WM_mW$ uma transformação linear, dizemos que L é um mapa positivo se $L(P_k \cap VM_kV) \subset (P_m \cap WM_mW)$.

Definição 2.1.4. Dizemos que um mapa positivo não nulo $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ é irredutível, se $V'M_kV' \subseteq VM_kV$ é tal que $L(V'M_kV') \subseteq V'M_kV'$, então temos que $V' = V$ ou $V' = 0$.

Pela definição 2.1.3, percebemos que um mapa é dito positivo se ele leva matrizes hermitianas positivas semidefinidas do domínio em matrizes hermitianas positivas semidefinidas do contra-domínio. Já a definição 2.1.4 nos diz que se as únicas sub-álgebras invariantes por L são as triviais então L é irredutível.

Definição 2.1.5. *Seja $A \in M_k$. Definimos como a norma espectral de A a raiz quadrada do maior autovalor da matriz A^*A , i.e. $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$*

Nesse texto usaremos a definição usual de autoadjunto, ou seja, $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ é dito autoadjunto se $\langle L(A), B \rangle = \langle A, L(B) \rangle$, i.e. L é igual ao seu adjunto, onde $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$. Além disso usaremos a definição usual de produto interno em \mathbb{C}^k : $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v^t \bar{w}$

Os seguintes resultados serão úteis na próxima seção.

Lema 2.1.6. *Se $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo então $L(X^*) = L(X)^*$ para todo $X \in VM_kV$. Em particular, a imagem de toda matriz hermitiana pela L também é hermitiana, isto é, ela preserva hermitianicidade.*

Demonstração. Seja Y uma matriz hermitiana de VM_kV . Podemos escrevê-la como $Y = C - D$, onde $C, D \in P_k \cap VM_kV$.

Então $L(Y) = L(C) - L(D)$ é uma diferença de matrizes hermitianas positivas semidefinidas e portanto hermitiana.

Seja X uma matriz qualquer de VM_kV . Existem matrizes hermitianas $Y_1, Y_2 \in VM_kV$ tais que $X = Y_1 + iY_2$. Portanto $L(X^*) = L(Y_1 - iY_2) = L(Y_1) - iL(Y_2) = L(Y_1 + iY_2)^* = L(X)^*$, pois $L(Y_1)$ e $L(Y_2)$ são hermitianas. \square

Lema 2.1.7. *Sejam $C, D \in P_k$, onde $A = C + D$. Então $\mathfrak{Im}(C) \subset \mathfrak{Im}(A)$.*

Demonstração. Se $\mathbf{v} \in \text{Nuc}(A)$ então $0 = \bar{\mathbf{v}}^t A \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}^t C \mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}^t D \mathbf{v}$.

Como C e D são positivas semidefinidas então $\bar{\mathbf{v}}^t C \mathbf{v} = 0$. Isso implica que $C \mathbf{v} = 0$.

Em outras palavras se \mathbf{v} está no núcleo de A , ele também está no núcleo de C .

$$\text{Nuc}(A) \subset \text{Nuc}(C) \Rightarrow \mathfrak{Im}(C) = \text{Nuc}(C)^\perp \subset \text{Nuc}(A)^\perp = \mathfrak{Im}(A). \quad \square$$

2.2 Mapas positivos e Raio espectral

Nesta seção provamos os lemas que são utilizados nas demonstrações dos teoremas principais do capítulo 4. Aqui já demonstramos um resultado importante sobre o raio espectral (Ver Definição 2.2.6 e Lema 2.2.7).

Lema 2.2.1. *Seja $A \in P_k$ e B uma matriz hermitiana de M_k . Então $\mathfrak{Im}(B) \subset \mathfrak{Im}(A)$ se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \pm \varepsilon B \in P_k$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Como $A \in P_k$ então existe $R \in M_k$ tal que $RAR^* = \begin{pmatrix} D_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $D_{n \times n}$ é diagonal positiva. Assim podemos escrever

$$\begin{pmatrix} Id_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{n \times n}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} RAR^* \begin{pmatrix} D_{n \times n}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Definindo $S = \begin{pmatrix} D_{n \times n}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} R$ temos que $\mathfrak{Im}(SAS^*) = \mathbf{C}^n \times \vec{0}_{n-k}$.

E assim temos:

$$\mathfrak{Im}(SAS^*) = \{SAS^* \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbf{C}^k\} = \{SA\mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathbf{C}^k\} = \{S\mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathfrak{Im}(A)\} = S(\mathfrak{Im}(A)).$$

Como $\mathfrak{Im}(A) \supseteq \mathfrak{Im}(B)$ então $S(\mathfrak{Im}(A)) \supseteq S(\mathfrak{Im}(B)) = \mathfrak{Im}(SB) = \mathfrak{Im}(SBS^*)$.

Observe que $(SBS^*)^* = (S^*)^* B^* S^* = SBS^*$.

Assim $SBS^* = \begin{pmatrix} C_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde $C = C^*$.

Portanto para ε pequeno temos $SAS^* \pm \varepsilon SBS^* = \begin{pmatrix} Id \pm \varepsilon C_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_k$.

Temos então que $S^{-1}(SAS^* \pm \varepsilon SBS^*)(S^{-1})^* = A \pm \varepsilon B \in P_k$

(\Leftarrow) Defina $C = A - \varepsilon B$ e $D = A + \varepsilon B$, tais que $C, D \in P_k$. Observe que $C + D = 2A$ e $D - C = 2\varepsilon B$.

Assim pelo Lema 2.1.7, temos então que $\mathfrak{Im}(C) \subset \mathfrak{Im}(A)$ e $\mathfrak{Im}(D) \subset \mathfrak{Im}(A)$.

Portanto $\mathfrak{Im}(B) = \mathfrak{Im}(D - C) \subset \mathfrak{Im}(D) + \mathfrak{Im}(C) \subset \mathfrak{Im}(A)$. □

Lema 2.2.2. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in M_k$ e hermitianas tais que $\gamma_1 \in P_k$, $\gamma_2 \neq 0$. Além disso, suponha $\mathfrak{Im}(\gamma_2) \subset \mathfrak{Im}(\gamma_1)$ e que γ_2 não é múltiplo de γ_1 . Então existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $\gamma_1 - \lambda\gamma_2 \in P_k$ e, um vetor não nulo, $\mathbf{v} \in \text{Nuc}(\gamma_1 - \lambda\gamma_2) \cap \mathfrak{Im}(\gamma_1)$.*

Demonstração. Na demonstração do lema 2.2.1, vimos que existe $S \in M_k$ invertível tal que

$$S\gamma_1 S^* = \begin{pmatrix} Id_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } S\gamma_2 S^* = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Assim } S\gamma_1 S^* - \lambda S\gamma_2 S^* = \begin{pmatrix} Id - \lambda C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora escolha λ tal que $Id - \lambda C \in P_n$ e $\dim \text{Nuc}(Id - \lambda C) > 1$.

$$\text{Portanto, } \dim \text{Nuc} \left(S^{-1} \begin{pmatrix} Id - \lambda C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (S^{-1})^* \right) > \dim \text{Nuc} \left(S^{-1} \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (S^{-1})^* \right).$$

Isso significa que $\dim \text{Nuc}(\gamma_1 - \lambda\gamma_2) > \dim \text{Nuc}(\gamma_1)$.

Assim $\dim \text{Nuc}(\gamma_1 - \lambda\gamma_2) + \dim(\gamma_1) > \dim \text{Nuc}(\gamma_1) + \dim \mathfrak{Im}(\gamma_1) = \dim \mathbf{C}^k$

Então deve existir um vetor não nulo que está na imagem de γ_1 e no núcleo de $\gamma_1 - \lambda\gamma_2$. □

Lema 2.2.3. *Seja $L : VM_kV \rightarrow WM_mW$ um mapa positivo. Se $\gamma \in P_k \cap VM_kV$ e $L(\gamma) = \delta$, então $L(V_1M_kV_1) \subset W_1M_mW_1$, onde V_1 e W_1 são as projeções ortogonais sobre $\mathfrak{Im}(\gamma)$ e $\mathfrak{Im}(\delta)$, respectivamente.*

Demonstração. Seja $\gamma_1 \in V_1M_kV_1$ uma matriz hermitiana, então $\mathfrak{Im}(\gamma_1) \subset \mathfrak{Im}(V_1) = \mathfrak{Im}(\gamma)$.

Pelo lema 2.2.1, existe ε positivo, tal que $\gamma \pm \varepsilon\gamma_1$ é uma matriz hermitiana positiva semidefinida.

Como $L(\gamma_1)$ é uma matriz hermitiana e $L(\gamma) \pm \varepsilon L(\gamma_1) = L(\gamma \pm \varepsilon\gamma_1) \in P_k$, então $\mathfrak{Im}(L(\gamma_1)) \subset \mathfrak{Im}(L(\gamma)) = \mathfrak{Im}(\delta) = \mathfrak{Im}(W_1)$. Pelo Lema 2.2.1 temos que $L(\gamma_1) \in W_1M_mW_1$.

Como cada matriz pertencente a $V_1M_kV_1$ é uma combinação linear de matrizes hermitianas pertencentes a $V_1M_kV_1$ então $L(V_1M_kV_1) \subset W_1M_mW_1$. \square

Corolário 2.2.4. *Sejam $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo e $\gamma \in P_k \cap VM_kV$, tal que $L(\gamma) = \lambda\gamma$, com $\lambda > 0$. Então $L(V_1M_kV_1) \subset V_1M_kV_1$, onde V_1 é a projeção ortogonal sobre $\mathfrak{Im}(\gamma)$.*

Antes do próximo lema, vejamos a definição do produto de Kronecker.

Definição 2.2.5. *Sejam $A_{m \times n}, B_{p \times q}$ duas matrizes. Definimos o produto de Kronecker delas como:*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Definição 2.2.6. *O maior valor absoluto dos autovalores de uma transformação linear $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ é chamado de raio espectral da transformação.*

Lema 2.2.7. *Seja $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo. Se $L(V) = V$, então o raio espectral de L é 1.*

Demonstração. Seja $U \in VM_kV$ uma matriz normal tal que $UU^* = U^*U = V$. Assim, $U = \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{v}_i \overline{\mathbf{v}_i}^t$, onde s é a dimensão da imagem de V , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ são números complexos de norma 1 e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$ é uma base ortonormal da imagem de V .

Lembre que $L(U^*) = L(U)^*$, pelo lema 2.1.6, e $L(U^*)V = L(U^*)$, $VL(U) = L(U)$.

$$\begin{aligned} \text{Considere a seguinte matriz: } B &= \sum_{i=1}^s \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i \\ \overline{\lambda_i} & 1 \end{pmatrix} \otimes L(\mathbf{v}_i \overline{\mathbf{v}_i}^t) = \begin{pmatrix} L(V) & L(U) \\ L(U^*) & L(V) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V & L(U) \\ L(U)^* & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ L(U)^* & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V - L(U)^*L(U) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & L(U) \\ 0 & Id \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como o produto de Kronecker de matrizes hermitianas positivas semidefinidas também é hermitiana positiva semidefinida então $B \in P_{2k}$, de modo que $V - L(U)^*L(U) \in P_k$.

Assim $\|L(U)\|_2 \leq 1$, onde $\|L(U)\|_2$ é a norma espectral de $L(U)$. Portanto para toda matriz normal U , tal que $UU^* = U^*U = V$, temos que $\|L(U)_2\| \leq 1$.

Seja $A \in VM_kV$ um autovetor de L associado a algum autovalor α e $\|A\|_2 \leq 1$. Considere a seguinte decomposição SVD de $A = \sum_{j=1}^s a_j m_j n_j^t$, tal que $0 \leq a_j \leq 1$.

Como $a_j = \cos(\theta_j) = \frac{e^{i\theta_j} + e^{-i\theta_j}}{2}$ então,

$$A = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^s e^{i\theta_j} m_j n_j^t) + \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^s e^{-i\theta_j} m_j n_j^t) = \frac{1}{2}(U_1 + U_2).$$

Note que $U_1 U_1^* = U_1^* U_1 = U_2 U_2^* = U_2^* U_2 = V$.

Assim,

$$|\alpha| = |\alpha| \|A\|_2 = \|\alpha A\|_2 = \|L(A)\|_2 = \|L(\frac{1}{2}(U_1 + U_2))\|_2 \leq \frac{1}{2}(\|L(U_1)\|_2 + \|L(U_2)\|_2) \leq 1.$$

Portanto o módulo de todos os autovalores de L são menores ou iguais a 1. Além disso sabemos que 1 é um autovalor, pois $L(V) = V$. Assim 1 é o raio espectral de L . \square

Lema 2.2.8. *Seja $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo irredutível. Se $X \in P_k \cap VM_kV \setminus \{0\}$, então $\mathfrak{Im}((Id + L)^{s-1}(X)) = \mathfrak{Im}(V)$, onde $s = \text{posto}(V)$.*

Demonstração. Seja $X \in P_k \cap VM_kV \setminus \{0\}$ então $L(X) \in P_k \cap VM_kV$. Pelo Lema 2.1.7 temos que $\mathfrak{Im}(X) \subset \mathfrak{Im}(X + L(X)) \subset \mathfrak{Im}(V)$.

Observe que se $\mathfrak{Im}(X + L(X)) = \mathfrak{Im}(X)$, como $L(X)$ é positiva, então $\mathfrak{Im}(L(X)) \subset \mathfrak{Im}(X)$, pelo Lema 2.1.7. Agora, se V' é a projeção ortogonal sobre a imagem de X , pelo Lema 2.2.3, temos que $L(V' M_k V') \subset V' M_k V'$. Como L é irredutível então $V = V'$ e $\mathfrak{Im}(X) = \mathfrak{Im}(V)$.

Portanto, se $\mathfrak{Im}(X) \neq \mathfrak{Im}(V)$ então $\text{posto}((Id + L)(X)) > \text{posto}(X)$. Repetindo o argumento pelo menos $s - 1$ vezes, obteremos $\mathfrak{Im}((Id + L)^{s-1}(X)) = \mathfrak{Im}(V)$. \square

Capítulo 3

Variação dos autovalores

Seja $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de matrizes de M_k . Se A_k converge para uma matriz A , será que os autovalores de A_k convergem para os autovalores de A ?

A resposta é sim. A seguir demonstramos que as raízes de um polinômio dependem continuamente do polinômio, utilizando análise complexa.

3.1 Raízes de um Polinômio

Notação: Denotaremos o conjunto de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$ por S_n .

Definição 3.1.1. *Sejam (x_1, \dots, x_n) e $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Podemos definir a seguinte relação de equivalência em \mathbb{C}^n :*

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists \pi \in S_n \quad : \quad (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = (y_1, \dots, y_n)$$

Definição 3.1.2. *Com a relação de equivalência acima podemos definir o seguinte espaço quociente:*

$$\mathbb{C}_{sym}^n \cong \mathbb{C}^n / \sim$$

Em outras palavras, caso duas n -uplas difiram apenas por ordenação, as consideraremos iguais. Um polinômio com coeficientes complexos de grau n , possui n raízes complexas e estas podem ser vistas como uma n -upla, que é única de cada polinômio, exceto por ordenação.

Seja $f(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n$ um polinômio mônico com raízes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Sabemos que para todo j vale,

$$a_j = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j}.$$

Definição 3.1.3. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}_{sym}^n$. Definimos a distância entre λ e μ da seguinte forma:*

$$d(\lambda, \mu) = \min_{\sigma \in S_n} \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \mu_{\sigma(j)}|$$

Essa métrica é chamada de “optimal matching distance”.

Teorema 3.1.4. *(Teorema de Rouché - Ver referência [?]) Sejam f e g duas funções meromórficas em uma vizinhança de $B(a; R)$ e que não possuem zeros e polos no círculo $\gamma = \{z : |z - a| = R\}$. Se Z_f e P_f são os números de zeros e polos, respectivamente, de f dentro do círculo γ , contados com multiplicidade. Se*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \forall z \in \gamma, \text{ então } Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

Note que pelo Teorema Fundamental da Álgebra a seguinte função é uma bijeção:

$$S : \mathbb{C}_{sym}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \text{ definida por}$$

$$S(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (a_1, \dots, a_n), \text{ onde } a_j = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j}.$$

Teorema 3.1.5. *O mapa S é um homeomorfismo entre \mathbb{C}_{sym}^n e \mathbb{C}^n .*

Demonstração. Primeiramente note que S é contínua, pela definição de Topologia Quociente. Assim resta mostrar que S^{-1} é contínua.

Para isso mostremos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|a_j - b_j| < \delta$ para todo j , então a “optimal matching distance” entre as raízes dos polinômios mônicos que possuem a_j e b_j como seus coeficientes é menor que ε .

Seja $f(x) = (x - \xi_1)^{n_1} \dots (x - \xi_k)^{n_k} = x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$, onde $\xi_i \neq \xi_j$ se $i \neq j$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos círculos Γ_j , $1 \leq j \leq k$, que são centrados em ξ_j , raio menor que ε e que não se interceptam. Definimos como Γ a união desses círculos.

Portanto Γ é compacto e $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$. Seja $\eta = \inf_{z \in \Gamma} |f(z)|$.

Como Γ é compacto então $\eta > 0$. Além disso existe um número positivo δ tal que se $|a_j - b_j| < \delta$ para todo j e $g(x) = x^n - b_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n b_n$ então $|f(z) - g(z)| < \eta$, $\forall z \in \Gamma$.

Pelo Teorema de Rouché f e g possuem o mesmo número de zeros dentro de cada Γ_j , onde os zeros são contados com multiplicidade.

Assim conseguimos relacionar cada raiz de f com uma raiz de g de modo que a distância entre as duas seja menor que ε , pois estão dentro do mesmo círculo de raio menor que ε . Portanto a “optimal matching distance” entre as raízes de f e g é menor que ε . \square

A continuidade de S^{-1} nos diz que as raízes de um polinômio variam continuamente com os coeficientes. Como os coeficientes do polinômio característico variam continuamente com a matriz, segue que os autovalores variam continuamente com a matriz também.

Esse resultado será muito útil na próxima seção.

Capítulo 4

Raio espectral é um autovalor

Os próximos teoremas (Teoremas 4.1.1 e 4.1.2) são os resultados principais desse trabalho. Eles mostram que todo mapa positivo atuando em VM_kV tem um autovetor positivo semidefinido associado ao raio espectral. Além disso, se o mapa for irredutível a multiplicidade geométrica do raio espectral é 1 e a imagem do autovetor é máxima.

Terminamos esse capítulo com um lema que mostra uma maneira de descobrir se um mapa positivo autoadjunto com respeito ao produto interno do traço é irredutível ou não.

4.1 Teoremas Principais da teoria de Perron-Frobenius

Teorema 4.1.1. *Seja $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo irredutível. Então o raio espectral ρ de L é um autovalor associado a algum autovetor $W \in P_k \cap VM_kV$, tal que $\mathfrak{Im}(W) = \mathfrak{Im}(V)$. Além disso, a multiplicidade geométrica de ρ é 1.*

Demonstração. Seja $Z = \{X \in P_k \cap VM_kV \mid \mathfrak{Im}(X) = \mathfrak{Im}(V)\}$ e defina a função:

$$f : Z \rightarrow [0, \infty[, \quad \text{onde } f(X) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid L(X) - \lambda X \in P_k\}.$$

Denote a pseudo-inversa de B por B^+ . Com isso note que se $B \in Z$, temos que $B^+B = BB^+ = V$ e $B^+V = VB^+ = B^+$.

A seguir provaremos que $f(X)$ é um função contínua, mostrando que

- (i) $f(X)$ é o menor autovalor positivo de $L(X)X^+$ e que
- (ii) X^+ varia continuamente com $X \in Z$.

Como o menor autovalor positivo depende continuamente de sua matriz pelo Teorema 3.1.5 e nesse caso a matriz é $L(X)X^+$ que depende continuamente de X então $f(X)$ depende continuamente de X .

Demonstração de (i) :

Para todo X pertencente a Z existe um Y que também pertence a Z tal que $Y^2 = X$.

Agora, seja V_1 a projeção ortogonal sobre $\mathfrak{Im}(L(X))$ e lembre-se que $\mathfrak{Im}(X) = \mathfrak{Im}(V)$, pois $X \in Z$.

Assim $L(VM_kV) \subset V_1M_kV_1$, pelo Lemma 2.2.3. Em particular $L(V_1M_kV_1) \subset V_1M_kV_1$.

Como o mapa L é irreduzível, temos então que $V_1 = V$. Portanto $L(X) \in Z$.

Assim temos Y^+ e $L(X)$ em $VM_kV \cap Z$.

Agora, seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_m\}$ uma base ortonormal de \mathbb{C}^k , onde $\{v_1, \dots, v_s\}$ é uma base da $\mathfrak{Im}(V)$. Observe que a matriz $Y^+L(X)Y^+ - \lambda V$ na base α satisfaz

$$[Y^+L(X)Y^+ - \lambda V]_{\alpha}^{\alpha} = [Y^+]_{\alpha}^{\alpha} [L(X)]_{\alpha}^{\alpha} [Y^+]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda[V]_{\alpha}^{\alpha}.$$

Como $Y^+, L(X), V \in VM_kV \cap Z$ então $Y^+, L(X)$ e V na base α tem o formato

$$Y^+ = \begin{pmatrix} B_{s \times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L(X) = \begin{pmatrix} C_{s \times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} Id_{s \times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim temos que:

$$[Y^+L(X)Y^+]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda[V]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} R_{s \times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} Id_{s \times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } R = BSB.$$

Note que $L(X) - \lambda X \geq 0$ é equivalente à $Y^+L(X)Y^+ - \lambda Y^+XY^+ \geq 0$ e também que $Y^+XY^+ = V$.

Como R é positiva definida e observando $Y^+L(X)Y^+ - \lambda V$ na base α , percebemos que o maior λ tal que $R - \lambda Id \geq 0$ é o menor autovalor de R .

Como os autovalores de $R = BCB$ são os mesmos que de $B^{-1}BCBB = CBB$ então o maior λ tal que $Y^+L(X)Y^+ - \lambda V \geq 0$ é o menor autovalor positivo de $L(X)Y^+Y^+ = L(X)X^+$. Então $f(X)$ é o menor autovalor positivo de $L(X)X^+$.

Isso completa a demonstração de (i).

Demonstração de (ii):

Agora, se $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in Z$ e $(A_n)_{n=1}^{\infty} \rightarrow A$, onde $A \in Z$, então o menor autovalor positivo de A_n , $\|A_n^+\|_2^{-1}$, converge para o menor autovalor positivo de A , $\|A^+\|_2^{-1}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n > n_0$, então $\|A_n^+\|_2^{-1} \geq (2\|A^+\|_2)^{-1}$. Consequentemente, para $n > n_0$, $\|A_n^+\|_2 \leq 2\|A^+\|_2$ e $\|A_n^+ - A^+\|_2 = \|A_n^+(A - A_n)A^+\|_2 \leq \|A_n^+\|_2 \|A^+\|_2 \|A_n - A\|_2 \leq 2\|A^+\|_2^2 \|A_n - A\|_2$.

Portanto $A_n^+ \rightarrow A^+$.

Isso completa a demonstração de (ii).

Considere agora o seguinte conjunto compacto $Z' = \{X \in P_k \cap VM_kV : \|X\|_2 = 1\}$. Pelo lema 2.2.8, $(Id + L)^{s-1}(Z')$ é um subconjunto compacto de Z . Portanto $f|_{(Id+L)^{s-1}(Z')}$ atinge um máximo ρ em algum ponto $W \in (Id + L)^{s-1}(Z') \subset Z$. Como $f(W) = \rho$, temos que $L(W) - \rho W \in P_k$.

Suponhamos que $L(W) - \rho W \neq 0$, então pelo lema 2.2.8 temos que $(Id + L)^{s-1}(L(W) - \rho W)$ possui a mesma imagem de V . Portanto $f((Id + L)^{s-1}(\frac{W}{\|W\|_2})) > \rho = f(W)$, o que é uma contradição. Então $L(W) = \rho W$, $W \in P_k \cap VM_kV$ e $\mathfrak{Im}(W) = \mathfrak{Im}(V)$. Para completar a prova, precisamos mostrar que ρ é um autovalor com multiplicidade geométrica 1.

Para isso considere o mapa

$$L : VM_kV \rightarrow VM_kV, \text{ definido por } L_1(X) = \frac{1}{\rho} M^+ L(MXM) M^+, \text{ onde } M \in Z \text{ e } M^2 = W.$$

Note que L_1 é um mapa positivo e também que $L_1(V) = V$. Observemos que se A é um autovetor de L associado a um autovalor α , então $M^+ A M^+$ é um autovetor de L_1 associado a $\frac{\alpha}{\rho}$.

Pelo lema 2.2.7 temos que $|\frac{\alpha}{\rho}| \leq 1$. Consequentemente $|\alpha| \leq \rho$ e o raio espectral de L é ρ .

Assuma que $W_2 \in VM_kV$ é um autovetor hermitiano de L associado ao autovalor ρ . Pelo lema 2.2.2, se W_2 e W são linearmente independentes, então existe $\mu \in \mathbb{R}$ não nulo, tal que $W - \mu W_2 \in P_k$ e $\dim \mathfrak{Im}(W - \mu W_2) < \dim \mathfrak{Im}(W) = \mathfrak{Im}(V)$.

Portanto $L(V' M_k V') \subset V' M_k V'$, onde V' é a projeção ortogonal sobre $\mathfrak{Im}(W - \mu W_2)$, o que é uma contradição pela irreduzibilidade de L .

Concluimos assim que todo autovetor hermitiano de L associado a ρ deve ser múltiplo de W . Como L preserva a Hermiticidade (Lema 2.1.6) e $\rho > 0$, então todo autovetor de L associado a ρ é combinação linear de autovetores hermitianos de L associados a ρ , então a multiplicidade geométrica de ρ é 1. \square

Teorema 4.1.2. *Seja $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo. O raio espectral ρ de L é um autovalor associado a algum $Z \in P_k \cap VM_kV$.*

Demonstração. Considere inicialmente a sequência de mapas positivos irreduzíveis $L_n : VM_kV \rightarrow VM_kV$ definida por $L_n(X) = L(X) + \frac{1}{n} tr(XV)V$, que converge para $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$.

Se $X \in P_k \cap VM_kV \setminus \{0\}$, então $tr(XV) = tr(X) \neq 0$. Com isso temos que $\mathfrak{Im}(L_n)(X) = \mathfrak{Im}(V)$.

Então L_n é irreduzível.

Seja $Z_n \in P_k \cap VM_kV$ o único autovetor de L_n associado ao raio espectral ρ_n satisfazendo que $\|Z_n\|_2 = 1$.

Perceba que $\{X \in P_k \cap VM_kV : \|X\|_2 = 1\}$ é um conjunto compacto, assim existe uma subsequência $(Z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $Z \in \{X \in P_k \cap VM_kV : \|X\|_2 = 1\}$.

Como o raio espectral varia continuamente junto à matriz, temos então que $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{n_k} = \rho$, onde ρ é o raio espectral de L . Portanto, $L(Z) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_{n_k}(Z_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{n_k} Z_{n_k} = \rho Z$. \square

Determinar a irredutibilidade de um mapa positivo não costumar ser uma tarefa fácil. Entretanto se o mapa for autoadjunto com respeito ao produto interno do traço então ela pode ser realizada com o seguinte resultado.

Lema 4.1.3. *Seja $L : VM_k V \rightarrow VM_k V$ um mapa positivo autoadjunto. Então L é irredutível se, e somente se, o maior autovalor tem multiplicidade 1 com respeito a um autovetor $\gamma \in P_k \cap VM_k V$, tal que $\mathfrak{Im}(\gamma) = \mathfrak{Im}(V)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Como L é autoadjunto, temos que seus autovalores são números reais. Além disso, como L é um mapa positivo, pelo Teorema 4.1.2, então o seu raio espectral λ é um autovalor e seu autovetor associado é uma matriz hermitiana positiva semidefinida. Portanto, o raio espectral é o maior autovalor de L .

Como ele é irredutível sua multiplicidade é 1 e o autovetor associado tem imagem igual a imagem de V pelo Teorema 4.1.1.

(\Leftarrow) Para a volta, se $L(V_1 M_k V_1) \subset V_1 M_k V_1$, $\mathfrak{Im}(V_1) \subset \mathfrak{Im}(V)$, então, pelo Teorema 4.1.2, existe $\gamma' \in P_k \cap V_1 M_k V_1$, onde γ' é um autovetor de L .

Se $\mathfrak{Im}(V_1) \neq \mathfrak{Im}(V)$, então $\mathfrak{Im}(\gamma') \neq \mathfrak{Im}(\gamma)$ e o conjunto $\{\gamma', \gamma\}$ é L.I.

Como a multiplicidade do maior autovalor é 1, temos que γ' é associado a um autovalor diferente do raio espectral. Como L é autoadjunta temos que γ' e γ são ortogonais com respeito ao produto interno do traço.

No entanto temos uma contradição, já que $\gamma', \gamma \in P_k \cap VM_k V$ e $\mathfrak{Im}(\gamma') \subset \mathfrak{Im}(V_1) \subset \mathfrak{Im}(V) = \mathfrak{Im}(\gamma)$, assim não podem ser ortogonais.

Logo nossa suposição de que $\mathfrak{Im}(V_1) \neq \mathfrak{Im}(V)$ é falsa. Assim temos que $\mathfrak{Im}(V_1) = \mathfrak{Im}(V)$, $V_1 = V$ e também que L é irredutível. \square

Capítulo 5

Propriedade de Decomposição e Mapas Completamente Redutíveis

Depois de estudar mapas irredutíveis, o próximo passo é estudar mapas que são soma direta de irredutíveis. Chamamos esses mapas de completamente redutíveis.

O Lema 4.1.3 do capítulo anterior, mostra uma maneira de determinar quando um mapa positivo autoadjunto é irredutível ou não. A propriedade que ele deve possuir vem da teoria de Perron-Frobenius.

Nesse último capítulo mostramos uma propriedade que também vem da teoria de Perron-Frobenius que é equivalente a ser completamente redutível para mapas autoadjuntos (Teorema 5.1.1). Chamamos essa propriedade de propriedade de decomposição.

Por fim mostramos uma maneira indireta de construir mapas completamente redutíveis utilizando essa propriedade de decomposição. Essa maneira foi descoberta em [2] e serve para reduzir o problema da separabilidade dos estados quânticos a um caso particular. Não veremos essa aplicação aqui.

Definição 5.0.1. *Um mapa positivo $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ é chamado de completamente redutível, se existirem projeções ortogonais $V_1, \dots, V_s \in M_k$ tais que $V_iV_j = 0$ se $i \neq j$, $V_iV = V_i$, $VM_kV = V_1M_kV_1 \oplus \dots \oplus V_sM_kV_s \oplus R$, $R \perp V_1M_kV_1 \oplus \dots \oplus V_sM_kV_s$ e*

1. $L(V_iM_kV_i) \subset V_iM_kV_i$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$
2. $L|_{V_iM_kV_i}$ é irredutível.
3. $L|_R \equiv 0$.

Definição 5.0.2. *Seja $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo autoadjunto. Nós dizemos que L tem a propriedade de decomposição se para todo $\gamma \in P_k \cap VM_kV$ tal que $L(\gamma) = \lambda\gamma$, $\lambda > 0$ e $V_1 \in M_k$ é a*

projeção ortogonal sobre $\mathfrak{Im}(\gamma)$, então $L|_R \equiv 0$, onde $R = (V - V_1)M_kV_1 \oplus V_1M_k(V - V_1)$. Note que R é o complemento ortogonal de $V_1M_kV_1 \oplus (V - V_1)M_k(V - V_1)$ em VM_kV .

Lema 5.0.3. *Seja $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ um mapa positivo autoadjunto com a propriedade de decomposição. Seja $V'M_kV' \subset VM_kV$, tal que $L(V'M_kV') \subset V'M_kV'$, então $L|_{V'M_kV'}$ também tem a propriedade de decomposição.*

Demonstração. Seja $\gamma \in P_k \cap V'M_kV'$ tal que $L(\gamma) = \lambda\gamma$, $\lambda > 0$, ele existe pelo Teorema 4.1.2.

Como $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ tem a propriedade de decomposição, então $L|_R \equiv 0$, onde $R = (V - V_1)M_kV_1 \oplus V_1M_k(V - V_1)$ e $V_1 \in M_k$ é a projeção ortogonal tal que $\mathfrak{Im}(V_1) = \mathfrak{Im}(\gamma)$. Note que $\mathfrak{Im}(V_1) = \mathfrak{Im}(\gamma) \subset \mathfrak{Im}(V') \subset \mathfrak{Im}(V)$.

Considere $R' = (V' - V_1)M_kV_1 \oplus V_1M_k(V' - V_1)$. Além disso, como $(V' - V_1)M_kV_1 = (V - V_1)(V' - V_1)M_kV_1 \subset (V - V_1)M_kV_1$ e $V_1M_k(V' - V_1) = V_1M_k(V' - V_1)(V - V_1) \subset V_1M_k(V - V_1)$, então $R' \subset R$ e $L|_{R'} \equiv 0$. Portanto, $L : V'M_kV' \rightarrow V'M_kV'$ tem a propriedade de decomposição. \square

5.1 Equivalência entre a propriedade de decomposição e a reduzibilidade completa

Teorema 5.1.1. *Se $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ é um mapa positivo autoadjunto. Então L tem a propriedade de decomposição se, e somente se, L é completamente redutível.*

Demonstração. (\Rightarrow) Primeiro suponhamos que L tem a propriedade de decomposição. Vamos provar que L é completamente redutível por indução no posto de V . Se o posto(V) = 1, então $\dim(VM_kV) = 1$ e L é irredutível em VM_kV . Portanto L é completamente redutível por definição. Assumimos então que posto(V) > 1 .

Como L é um mapa positivo, então pelo Teorema 4.1.2, o conjunto $S = \{\gamma | \gamma \in P_k \cap VM_kV, \gamma \neq 0, L(\gamma) = \lambda\gamma, \lambda > 0\}$ é não vazio. Seja $\gamma \in S$ tal que $\text{posto}(\gamma) = \min\{\text{posto}(\gamma') | \gamma' \in S\}$.

Pelo Corolário 2.2.4, $L(V_1M_kV_1) \subset V_1M_kV_1$, onde V_1 é a projeção ortogonal sobre a $\mathfrak{Im}(\gamma)$. Se $L|_{V_1M_kV_1}$ não é irredutível, então existe $V'_1M_kV'_1 \subset V_1M_kV_1$ com $\text{posto}(V'_1) < \text{posto}(V_1)$ e $L(V'_1M_kV'_1) \subset V'_1M_kV'_1$. Pelo Teorema 4.1.2, existe $\delta \in P_k \cap V'_1M_kV'_1 \setminus \{0\}$ tal que $L(\delta) = \mu\delta$, $\mu > 0$. No entanto, $\text{posto}(\delta) \leq \text{posto}(V'_1) < \text{posto}(V_1) = \text{posto}(\gamma)$. Isso contradiz a escolha de γ . Portanto $L|_{V_1M_kV_1}$ é irredutível.

Se $\text{posto}(V_1) = \text{posto}(V)$, então $V_1 = V$ e $L|_{VM_kV}$ é irredutível. Portanto, $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ é completamente redutível por definição.

Suponhamos então que $\text{posto}(V_1) < \text{posto}(V)$. Como $L(V_1M_kV_1) \subset V_1M_kV_1$ e L é autoadjunto, então $L((V_1M_kV_1)^\perp) \subset (V_1M_kV_1)^\perp$. Portanto, $\text{tr}(L(V - V_1)V_1) = 0$. Como $L(V - V_1)$ e V_1 são positivas semidefinidas, temos então que $\mathfrak{Im}(L(V - V_1)) \subset \mathfrak{Im}(V - V_1)$. Assim, pelo lema 2.2.3, temos

$$L((V - V_1)M_k(V - V_1)) \subset (V - V_1)M_k(V - V_1).$$

Notemos que $L|_{(V-V_1)M_k(V-V_1)}$ é um mapa positivo autoadjunto com a propriedade de decomposição, pelo lema 5.0.3. Como $\text{posto}(V - V_1) < \text{posto}(V)$, pela indução no posto, então $L|_{(V-V_1)M_k(V-V_1)}$ é completamente redutível.

Portanto, existem projeções ortogonais $V_2, \dots, V_s \in M_k$, satisfazendo $V_i V_j = 0$ ($\forall i, j \in \{2, \dots, s\}$ e $i \neq j$), $(V - V_1)M_k(V - V_1) = V_2 M_k V_2 \oplus \dots \oplus V_s M_k V_s \oplus \hat{R}$. Com $\hat{R} \perp V_2 M_k V_2 \oplus \dots \oplus V_s M_k V_s$, $L(V_i M_k V_i) \subset V_i M_k V_i$, $L|_{V_i M_k V_i}$ é irredutível para $i \in \{2, \dots, s\}$ e $L|_{\hat{R}} \equiv 0$.

Como $L(\gamma) = \lambda\gamma$, onde $\Im(\gamma) = \Im(V_1)$ e $L : VM_k V \rightarrow VM_k V$ tem a propriedade de decomposição então

- $VM_k V = V_1 M_k V_1 \oplus (V - V_1)M_k(V - V_1) \oplus R$,
- $R \perp V_1 M_k V_1 \oplus (V - V_1)M_k(V - V_1)$ e
- $L|_R \equiv 0$.

$$\begin{aligned} \text{Isso implica que } VM_k V &= V_1 M_k V_1 \oplus (V - V_1)M_k(V - V_1) \oplus R = \\ &= V_1 M_k V_1 \oplus V_2 M_k V_2 \oplus \dots \oplus V_s M_k V_s \oplus \hat{R} \oplus R \end{aligned}$$

Note que

- $V_i V_j = 0$ para $i \neq j$,
- $V_i V = V_i$, pois $V_i M_k V_i \subset VM_k V$,
- $L|_{V_i M_k V_i}$ é irredutível para todo i ,
- $\hat{R} \oplus R \perp V_1 M_k V_1 \oplus V_2 M_k V_2 \oplus \dots \oplus V_s M_k V_s$,
- $L|_{\hat{R} \oplus R} \equiv 0$.

Assim, L é completamente redutível. Isso completa a demonstração de que a propriedade de decomposição implica na completa reducibilidade do mapa autoadjunto L .

(\Leftarrow) Agora assumiremos que L é completamente redutível. Portanto existem projeções ortogonais $V_1, \dots, V_s \in M_k$ tais que $V_i V_j = 0$ se $i \neq j$, $V_i V = V_i$, $VM_k V = V_1 M_k V_1 \oplus \dots \oplus V_s M_k V_s \oplus R$, $R \perp V_1 M_k V_1 \oplus \dots \oplus V_s M_k V_s$ e

- $L(V_i M_k V_i) \subset V_i M_k V_i$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$
- $L|_{V_i M_k V_i}$ é irredutível.

- $L|_R \equiv 0$.

Seja $L(\gamma') = \lambda\gamma'$, $\lambda > 0$ e $\gamma' \in P_k \cap VM_kV$. Seja $V' \in M_k$ a projeção ortogonal sobre a $\mathfrak{Im}(\gamma')$.

Pelo Lema 2.2.3, temos que $L(V'M_kV') \subset V'M_kV'$.

Observemos que $\gamma' = \gamma'_1 + \dots + \gamma'_s$, onde $\gamma'_i \in V_iM_kV_i$.

Agora, como $\mathfrak{Im}(\gamma'_i) \subset \mathfrak{Im}(V_i)$ e $\mathfrak{Im}(V_i) \perp \mathfrak{Im}(V_j)$, para $i \neq j$, então cada $\gamma'_i \in P_k$.

Como cada $V_iM_kV_i$ é um subespaço deixado invariante por L , então concluímos que $L(\gamma'_i) = \lambda\gamma'_i$.

Note que existe i tal que $\gamma'_i \neq 0$. Assumimos sem perda de generalidade, $\gamma' = \gamma'_1 + \dots + \gamma'_m$ e $\gamma'_i \neq 0$, para $1 \leq i \leq m \leq s$.

Perceba que se para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, $\mathfrak{Im}(\gamma'_i) \neq \text{Im}(V_i)$, então $L|_{V_iM_kV_i}$ não é irredutível, pelo Corolário 2.2.4, o que é uma contradição. Portanto, $\mathfrak{Im}(\gamma'_i) = \mathfrak{Im}(V_i)$ para $1 \leq i \leq m$ e $V_1 + \dots + V_m = V'$.

Além disso, $VM_kV = V'M_kV' \oplus (V - V')M_k(V - V') \oplus R'$, onde $R' = (V - V')M_kV' \oplus V'M_k(V - V')$.

Perceba que $R' \perp V'M_kV' \oplus (V - V')M_k(V - V')$.

Visto que $V_1M_kV_1 \oplus \dots \oplus V_mM_kV_m \subset V'M_kV'$ e $V_{m+1}M_kV_{m+1} \oplus \dots \oplus V_sM_kV_s \subset (V - V')M_k(V - V')$, portanto $R' \perp V_1M_kV_1 \oplus \dots \oplus V_sM_kV_s$ e $R' \subset R$. Portanto $L|_{R'} \equiv 0$ e L tem a propriedade de decomposição pela definição 5.0.2.

Isso termina a demonstração do Teorema. □

5.2 Propriedade PPT implica na reducibilidade completa

Nessa seção mostramos que a propriedade PPT (Ver Definição 5.2.1) para uma matriz em M_{km} dá origem a um mapa positivo completamente redutível (Ver Teorema 5.2.4). Essa é uma maneira indireta de construir mapas positivos completamente redutíveis.

Aqui estamos identificando o produto tensorial $M_k \otimes M_m$ com M_{km} através do produto de Kronecker.

Definição 5.2.1. *Seja $A = \sum_{i=1}^n B_i \otimes C_i \in M_k \otimes M_m \simeq M_{km}$ uma matriz hermitiana positiva semidefinida. Nós dizemos que A é positiva sobre transposição parcial ou simplesmente PPT, se $A^{t_2} = Id \otimes (\cdot)^t(A) = \sum_{i=1}^n B_i \otimes C_i^t$ é hermitiana positiva semidefinida.*

Definição 5.2.2. *Seja $A = \sum_{i=1}^n B_i \otimes C_i \in M_k \otimes M_m \simeq M_{km}$ uma matriz hermitiana positiva semidefinida. Defina as transformações lineares $G_A : M_k \rightarrow M_m$ por $G_A(X) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(B_i X) C_i$ e $F_A : M_m \rightarrow M_k$ por $F_A(X) = \sum_{i=1}^n B_i \text{tr}(C_i X)$.*

Lema 5.2.3. *Seja $A \in M_k \otimes M_m \simeq M_{km}$ uma matriz hermitiana positiva semidefinida. As transformações lineares $G_A : M_k \rightarrow M_m$ e $F_A : M_m \rightarrow M_k$ definidas acima são adjuntas com respeito o produto interno do traço e também são mapas positivos.*

Demonstração. Sejam $X \in M_k$ e $Y \in M_m$ matrizes hermitianas positivas semidefinidas.

Note que $\text{tr}(A(X \otimes Y)) \geq 0$, pois A e $X \otimes Y$ são positivas semidefinidas (o produto de Kronecker de matrizes hermitianas positivas semidefinidas também é hermitiana positiva semidefinida).

Se $A = \sum_{i=1}^n B_i \otimes C_i$ então $\text{tr}(A(X \otimes Y)) = \text{tr}(\sum_{i=1}^n B_i X \otimes C_i Y) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(B_i X) \text{tr}(C_i Y)$.

Agora, por um lado temos que $\text{tr}(A(X \otimes Y)) = \text{tr}(\sum_{i=1}^n \text{tr}(B_i X) C_i Y) = \text{tr}(G_A(X)Y)$ e por outro lado temos $\text{tr}(A(X \otimes Y)) = \text{tr}(\sum_{i=1}^n \text{tr}(C_i Y) B_i X) = \text{tr}(X F_A(Y))$.

Portanto $\text{tr}(G_A(X)Y) \geq 0$ e $\text{tr}(X F_A(Y)) \geq 0$, para todas X, Y hermitianas positivas semidefinidas.

Isso significa que G_A e F_A são mapas positivos.

Agora sejam $Z \in M_k$ e $W \in M_m$ matrizes quaisquer e considere novamente a igualdade

$$\text{tr}(G_A(Z)W^*) = \text{tr}(Z F_A(W^*)).$$

Como $F_A(W^*) = F_A(W)^*$, pelo Lema 2.1.6, então $\text{tr}(G_A(Z)W^*) = \text{tr}(Z F_A(W)^*)$, ou seja, $G_A^* = F_A$. □

Teorema 5.2.4. *Seja $A \in M_k \otimes M_m \simeq M_{km}$, $A \in P_{km}$. Se A é PPT então $F_A \circ G_A : M_k \rightarrow M_k$ é completamente redutível.*

Demonstração. Seja $\gamma \in P_k$ tal que $F_A(G_A(\gamma)) = \lambda\gamma$, $\lambda > 0$. Seja $V_1 \in M_k$ a projeção ortogonal sobre $\mathfrak{Im}(\gamma)$. Seja $W_1 \in M_m$ a projeção ortogonal sobre $\mathfrak{Im}(G_A(\gamma))$.

Temos que $G_A(V_1 M_k V_1) \subset W_1 M_m W_1$ e $F_A(W_1 M_m W_1) \subset V_1 M_k V_1$, pelo Lema 2.2.3. Se $V_2 = Id - V_1$ e $W_2 = Id - W_1$ então $A = \sum_{i,j,r,s=1}^2 (V_i \otimes W_j) A (V_r \otimes W_s)$.

Note que $\text{tr}(A(V_1 \otimes W_2)) = \text{tr}(G_A(V_1)W_2) = 0$ e $\text{tr}(A(V_2 \otimes W_1)) = \text{tr}(V_2 F_A(W_1)) = 0$.

Portanto $A(V_1 \otimes W_2) = (V_1 \otimes W_2)A = A(V_2 \otimes W_1) = (V_2 \otimes W_1)A = 0$, já que A , $V_1 \otimes W_2$ e $V_2 \otimes W_1$ são hermitianas positivas semidefinidas. Assim $A = \sum_{i,j}^2 (V_i \otimes W_j) A (V_j \otimes W_i)$.

Agora observe que, $0 = (A(V_1 \otimes W_2))^{t_2} = (Id \otimes W_2^t) A^{t_2} (V_1 \otimes Id)$ e $\text{tr}((Id \otimes W_2^t) A^{t_2} (V_1 \otimes Id)) = \text{tr}(A^{t_2} (V_1 \otimes W_2^t)) = 0$. Como A é PPT, então A^{t_2} é positiva semidefinida e $A^{t_2} (V_1 \otimes W_2^t) = (V_1 \otimes W_2^t) A^{t_2} = 0$. Analogamente, obtemos $A^{t_2} (V_2 \otimes W_1^t) = (V_2 \otimes W_1^t) A^{t_2} = 0$.

Portanto, $A^{t_2} = \sum_{i,j=1}^2 (V_i \otimes W_j^t) A^{t_2} (V_j \otimes W_i^t)$ e $A^{t_2} = \sum_{i=1}^2 (V_i \otimes W_i^t) A^{t_2} (V_i \otimes W_i^t)$. Assim $A = \sum_{i=1}^2 (V_i \otimes W_i) A (V_i \otimes W_i)$.

Note também que se $X \in R = V_1 M_k V_2 \oplus V_2 M_k V_1$, que é complemento ortogonal de $V_1 M_k V_1 \oplus V_2 M_k V_2$

em M_k , então $G_A(X) = 0$ e $F_A \circ G_A|_R \equiv 0$. Portanto, $F_A \circ G_A$ é um mapa positivo autoadjunto, pelo Lema 5.2.3, e possui a propriedade de decomposição. Portanto pelo Teorema 5.1.1 temos que $F_A \circ G_A$ é completamente redutível. \square

Lista de Símbolos

- \mathbb{C}^k - O conjunto de vetores colunas com k entradas complexas.
- M_k - O conjunto das matrizes com entradas complexas de ordem k .
- P_k - O conjunto de matrizes hermitianas positivas semidefinidas de ordem k .
- $X \otimes Y$ - O Produto de Kronecker das matrizes X, Y .
- $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ - O produto tensorial entre os espaços \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m .
- $M_n \otimes M_m$ - O produto tensorial entre os espaços M_n e M_m .
- Id - A matriz identidade.
- VM_kW - O conjunto $\{VXW | X \in M_k\}$, onde $V, W \in M_k$ são projeções ortogonais.
- $tr(X)$ - O traço de uma matriz X .
- X^t - A transposta de uma matriz X .
- \bar{X} - A matriz cujas entradas são o conjugado complexo das entradas da matriz X .
- X^* - A conjugada transposta da matriz X , i.e., $X^* = \bar{X}^t$.
- $\langle X, Y \rangle$ - O produto interno de matrizes quadradas X, Y , i.e., $tr(XY^*)$.
- $\mathfrak{Im}(X)$ - A imagem da matriz X .
- $\text{Nuc}(X)$ - O núcleo da matriz X .
- $T^* : WM_mW \rightarrow VM_kV$ - O mapa adjunto de $T : VM_kV \rightarrow WM_mW$ com respeito a $\langle X, Y \rangle$.
- $\|X\|_2$ - A norma espectral da matriz $X \in M_k$.
- X^+ - A pseudo-inversa da matriz X .
- $R' \oplus R$ - A soma direta dos espaços R', R .
- $R' \perp R$ - A ortogonalidade de dois subespaços de M_k com respeito a $\langle X, Y \rangle$.
- R^\perp - O complemento ortogonal do subespaço R .
- $L|_R$ - A restrição do mapa $L : VM_kV \rightarrow VM_kV$ para $R \subset VM_kV$.
- $F_A : M_m \rightarrow M_k$ - O mapa $F_A(X) = \sum_{i=1}^n tr(B_i X) A_i$, onde $A = \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \in M_k \otimes M_m$.
- $G_A : M_k \rightarrow M_m$ - O mapa $G_A(X) = \sum_{i=1}^n tr(A_i X) B_i$, onde $A = \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \in M_k \otimes M_m$.
- x^t - A transposição do vetor coluna $x^t \in \mathbb{C}^k$.
- \bar{x} - O vetor coluna cujas entradas são as complexas conjugadas das entradas de x .

$\langle x, y \rangle$ - O produto interno usual de vetores colunas $x, y \in \mathbb{C}^k$, i.e., $\langle x, y \rangle = x^t \bar{y}$.

A^{t_2} - A transposição parcial de $A = \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \in M_k \otimes M_m$, i.e., $A^{t_2} = \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i^t$.

$\det(X)$ - O determinante da matriz X .

Referências Bibliográficas

- [1] Bhatia, R.; *Positive definite matrices*, Princeton university press, 2009.
- [2] Cariello, D., *Completely Reducible Maps in Quantum Information Theory*, IEEE Transactions on Information Theory 62 (2016), no. 4, 1721-1732.
- [3] Conway, J. B.; *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Math, 1978.
- [4] Evans, D. E.; Høegh-Krohn, R. , *Spectral Properties of Positive Maps on C^* -Algebras*, Journal of the London Mathematical Society, v. 2, n. 2, p. 345-355, 1978.
- [5] Gühne, O.; Tóth, G. , *Entanglement detection*, Physics Reports, v. 474, n. 1-6, p. 1-75, 2009.
- [6] Meyer, C.D., *Matrix Analysis and applied linear algebra*(vol. 2) Siam 2000.
- [7] Schaefer, H.H., *Topological Vector Spaces*, Vol. 3, Springer-Verlag, 1999, New York.