

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

**DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DE PROPRIEDADES  
TÉRMICAS USANDO APENAS UMA SUPERFÍCIE DE ACESSO:  
ESTIMAÇÃO NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de  
Uberlândia por **Sandro Metrevelle Marcondes de  
Lima e Silva**, para a obtenção do título de Mestre  
em Engenharia Mecânica, aprovada em 28/09/95  
pela banca examinadora:

Prof. Gilmar Guimarães, Dr.  
(Orientador - UFU)

Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.  
(UFSC)

Prof. Ricardo Fortes de Miranda, Dr.  
(UFU)

Prof. Elias Bitencourt Teodoro, Ph.D.  
(UFU)

DIRBI/UFU

536.2 5586d /TES/FU  
08344/95



1000022701

Uberlândia, 28 de setembro de 1995

Aos meus pais **Dinar de Lima**  
**e Silva, Laíz Menezes**  
**Marcondes e Silva** e à minha  
namorada **Anna Maria**  
**Mariotini Gameiro** pelo amor  
e carinho sempre presentes,  
dedico.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Gilmar Guimarães, pela orientação, amizade e confiança depositada durante a execução deste trabalho.

Aos amigos Francisco Aurilo Azevedo Pinho e José Luís Pena pela colaboração e apoio técnico.

Aos meus irmãos que sempre me incentivaram.

Aos companheiros Rouverson Pereira da Silva, Luísa Maria Acerbi, Mechelangelo Mancuzo, Benedito, demais colegas do curso de Mestrado, colegas do departamento de Eng. mecânica e colegas das outras áreas pelo apoio e amizade.

Ao Prof. Elias Bitencourt Teodoro pela ajuda e prontidão no auxílio e resolução para o encerramento deste trabalho.

Ao Prof. Ricardo Fortes de Miranda pelo apoio técnico no laboratório.

Ao CNPQ pelo apoio através do auxílio ao projeto integrado N° 521212/93-6.

A CAPES e a FAPEMIG pelo suporte financeiro.

# SUMÁRIO

## Página

LISTA DE FIGURAS .....	iv
LISTA DE TABELAS .....	vi
LISTA DE SÍMBOLOS .....	vii
CAP.1 - INTRODUÇÃO .....	1
CAP.2 - TÉCNICAS TRANSIENTES - FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	5
2.1 - Estimação de $k$ e $\alpha$ no Domínio do Tempo .....	6
2.2 - Estimação de $k$ e $\alpha$ no Domínio da Freqüência..	9
2.3 - Determinação da Efusividade Térmica .....	12
CAP.3 - DESENVOLVIMENTO E INVESTIGAÇÃO DE METODOLOGIAS PARA A DETERMINAÇÃO DE $k$ e $\alpha$ <i>in situ</i> .....	18
3.1 - Introdução .....	18
3.2 - Desenvolvimento de Modelo Teóricos .....	19
3.2.1 - Modelo Impedância de Entrada $Z_{\theta e}$ .....	21
3.2.1.1 - Identificação Teórica de $\bar{Z}_{\theta e}(f)$ ..	23
3.2.1.2 - Identificação Experimental de $Z_{\theta e}(f)$ .....	25
3.2.1.3 - Estimação de $k$ e $\alpha$ .....	27
3.2.2 - Modelo Impedância de Entrada $Z_{\phi e}$ .....	29

3.2.2.1 - Identificação Teórica de $Z_{\phi e}(f)$ ..	30
3.2.2.2 - Identificação Experimental de $Z_{\phi e}(f)$ .....	31
3.2.2.3 - Estimação de $k$ e $\alpha$ .....	31
3.3 - Implementação e Análise de Resultados .....	33
<b>CAP.4 - ESTIMAÇÃO DA EFUSIVIDADE TÉRMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA E DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA NO DOMÍNIO DO TEMPO <i>in situ</i> .....</b>	<b>41</b>
4.1 - Introdução .....	41
4.2 - Desenvolvimento do Modelo Teórico em um Meio Semi-Infinito.....	42
4.3 - Identificação Teórica de $\bar{Z}_{be}(f)$ .....	44
4.4 - Identificação Experimental $Z_{be}(f)$ .....	46
4.5 - Determinação da Efusividade Térmica: Modelo Semi-Infinito.....	46
4.6 - Novo Procedimento para o Cálculo de $\bar{Z}_{be}(f)$ ...	50
4.7 - Implementação do Método e Análise dos Resultados .....	51
4.8 - Resultados da Estimação de $b$ para a Amostra de Polythene com Espessura de 50 mm.....	56
4.9 - Desenvolvimento de um Modelo Teórico para Obtenção de $\alpha$ em uma Amostra de Espessura Finita e Isolada em $x = L$ .....	57
4.10 - Determinação de $\alpha$ .....	61
4.11 - Resultados da Estimação de $\alpha$ e $k$ para a Amostra de Polythene .....	65
<b>CAP.5 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE E INCERTEZAS.....</b>	<b>67</b>
5.1 - Introdução .....	67

5.2 - Análise da Incerteza na Determinação de <i>b</i> e $\alpha$ .....	68
<b>CAP.6 - CONCLUSÃO</b> .....	72
6.1 - Propostas de Trabalhos Futuros.....	74
<b>CAP.7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	75
<b>APÊNDICES</b>	
I - Critério para Estimação de Parâmetros .....	78
II - Processos aleatórios Estacionários - Conceitos Básicos	81
III - Desenvolvimento da Integral na Superfície da Amostra e Determinação do Coeficiente de Sensibilidade em um Modelo Isolado em $x = L$ .....	84
IV - Desenvolvimento da Integral da Convolução Relativa ao Fluxo de Calor em um Meio Semi-Infinito.....	89

## RESUMO

Apresenta-se neste trabalho um novo método para a determinação simultânea da condutividade térmica,  $k$ , e da difusividade térmica,  $\alpha$ , de materiais não metálicos, usando-se somente dados experimentais provenientes de uma face de acesso. A estimação de  $\alpha$  baseia-se na adoção de um modelo térmico unidimensional de um meio submetido a um fluxo de calor transiente na superfície frontal e isolado na superfície oposta. Os mesmos dados experimentais das evoluções de fluxo de calor e temperatura na superfície frontal são usados para a obtenção de  $k$ . Nesse caso, o modelo térmico usado é o de um meio semi-infinito submetido a uma história de fluxo de calor em sua superfície de acesso. Para isso, estima-se também, um parâmetro definido como efusividade térmica ( $b = \sqrt{\alpha/k}$ ). Observa-se que a técnica proposta usa, como método de cálculo das propriedades térmicas, a técnica de estimação de parâmetros nos domínios do tempo  $\alpha$  e da frequência  $b$ . No domínio do tempo, minimiza-se as diferenças das temperaturas experimentais e teóricas na superfície do meio para a estimação de  $\alpha$ . No domínio da frequência, estima-se  $b$  a partir da minimização dos valores experimentais e teóricos de uma função, definida como a razão entre as evoluções do fluxo de calor e das temperaturas superficiais, denominada impedância de entrada,  $Z_{be}$ . Salienta-se que os dados experimentais foram simulados numericamente. As evoluções de temperatura na superfície frontal foram calculadas a partir de soluções analíticas dos modelos térmicos e da adição de erros aleatórios. Esses erros estão situados na faixa de incerteza de medição de temperatura usando-se termopares. Apresenta-se também uma análise das fontes de erro e das incertezas da técnica experimental.

---

**PALAVRAS-CHAVE:** Estimação de Parâmetros, Medição de Propriedades Térmicas, Condução de Calor, Técnicas Experimentais.

## ABSTRACT

A new method for simultaneous determination of thermal conductivity,  $k$ , and diffusivity,  $\alpha$  of the non-metallic materials is presented. The use of experimental data from only one surface access is the main novelty of the technique. For the thermal diffusivity estimation an one-dimensional thermal model is used. A heat flux history is imposed at the frontal surface of a sample while the other surface is isolated. The same experimental data are used to thermal conductivity determination. However, at this case, the heat flux and temperature evolution at the frontal surface are used in a semi-infinite thermal model. In this sense, the thermal effusivity ( $b = \sqrt{\alpha/k}$ ) is also estimated. It can be observed that the technique proposed uses the parameter estimation technique in the time and the frequency domain. In the time domain, the minimum square is used at the experimental and theoretical temperatures to the thermal diffusivity estimation. In the frequency, the input impedance,  $Z_{be}$ , a ratio of heat flux and temperature evolution is, then, defined. The difference between experimental and theoretical values of  $Z_{be}$  is minimized for the thermal effusivity estimation. It should be observed that the experimental data have been numerically simulated. The temperature evolution are calculated from the analytical thermal model solution and from the random error summation. These random errors are located at a range of uncertainty of temperature measurements error using thermocouples. At the end, is also presented an error and uncertainty analyses of the technique.

---

**KEYWORDS:** Parameter Estimation, Heat Conduction, Experimental Techniques, Thermal Properties Measurements.



## LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1 - a) Modelo térmico .....	9
b) Sistema dinâmico .....	9
2.2 - Aparato experimental .....	13
3.1 - Problema térmico proposto por Guimarães, 1993.. .....	19
3.2 - Sistema dinâmico, tipo entrada e saída .....	21
3.3 - Perfil típico de um sinal de entrada .....	35
3.4 - Perfil típico de um sinal de saída .....	36
3.5 - Coeficiente de sensibilidade em relação a $\alpha$ de $Z_{\theta e}$ .....	36
3.6 - Coeficiente de sensibilidade em relação a $\alpha$ de $Z_{\phi e}$ .....	37
3.7 - Comparação das curvas de temperatura do modelo isolado com o modelo semi-infinito.....	37
3.8 - Módulo da impedância de entrada $Z_{\theta e}$ .....	38
3.9 - Fase da impedância de entrada $Z_{\theta e}$ .....	38
3.10 - Módulo da impedância de entrada $Z_{\phi e}$ .....	39
3.11 - Fase da impedância de entrada $Z_{\phi e}$ .....	39
4.1 - Modelo térmico .....	42
4.2 - Perfil típico de um sinal de entrada .....	48
4.3 - Módulo da impedância de entrada e fusividade .....	49

4.4 - Densidade autoespectral de entrada, $S_{xx}(f)$ .....	52
4.5 - Densidade autoespectral de saída, $S_{yy}(f)$ .....	53
4.6 - Componente real da densidade espectral cruzada, $Re(S_{xy}(f))$	53
4.7 - Componente imaginária da densidade espectral cruzada, $Im(S_{xy}(f))$ .....	54
4.8 - Coeficiente de sensibilidade, $X_b$ .....	55
4.9 - Módulo da impedância de entrada , $Z_{be}(f)$ .....	56
4.10 - Amostra sujeita a um fluxo de calor imposto na superfície posterior.....	58
4.11 - Comparação entre os coeficientes de sensibilidade, $X_\alpha$ , variando o comprimento da amostra .....	62
4.12 - Evolução transiente das temperaturas .....	63
4.13 - Coeficiente de sensibilidade, $X_\alpha$ .....	63
5.1 - Comparação da diferença de temperatura entre os modelos isolados $L = 50$ mm e semi-infinito.....	70
5.2 - Comparação entre os módulos simulados das impedâncias de entrada $Z_{be}(f)$ para $L = 50$ mm e semi-infinito com o módulo estimado de $Z_{be}(f)$ .....	70
5.3 - Comparação entre o módulo da impedância de entrada estimada $Z_{be}(f) \pm 17,43$ % de incerteza .....	71
AIII.1 - Curva típica de um fluxo de calor submetido na superfície frontal da amostra .....	85

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>	<b>Página</b>
4.1 - Simulação da estimação de $b$ . Simulações de 1 a 5. Valor inicial de $b = 1,00 \times 10^{-2} \text{ m}^2\text{K.W}^{-1}\text{s}^{-1/2}$ .....	55
4.2 - Resultados para a estimação de $b$ para a amostra de polythene $L = 50 \text{ mm}$ .....	55
4.3 - Simulação da estimação de $\alpha$ . Simulações de 1 a 5. Valor inicial de $\alpha = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ .....	65
4.4 - Resultados da estimação de $\alpha$ e cálculo de $k$ amostra de polythene $L = 50 \text{ mm}$ .....	65

## LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO		UNIDADE
$a_0, a_1 \dots a_5$	Coeficientes de ajuste da curva de fluxo de calor experimental	
$b$	Efusividade térmica	$m^2 K \cdot W^{-1} s^{-1/2}$
$B_1$	Parâmetro térmico em função de $k$ e $\alpha$ definido a partir de fluxo nulo em $x = L$	
$B_2$	Parâmetro térmico em função de $k$ e $\alpha$ definido a partir temperatura $T_2 = T_0$ em $x = L$	
$c$	Calor específico	$J / Kg \cdot K$
$C_n, D_n$	Agrupamento de variáveis	
$erf$	Função erro	
$f$	Frequência	Hz
FFT	Transformada rápida de Fourier	
$G$	Função de Green	
$Im(S_{xy}(f))$	Parte imaginária da densidade espectral cruzada	$K \cdot W / m^2$
$j$	$\sqrt{-1}$	
$k$	Condutividade térmica	$W / m \cdot K$
$L$	Comprimento da amostra	mm
$m, m\alpha, m\alpha$	Variáveis inteiras	
$n, n\alpha, nb$	Variáveis inteiras	

$p$	Variável de Laplace	
$Re(S_{xy}(f))$	Parte real da densidade espectral cruzada	K.W / m <sup>2</sup>
$S$	Minimização da soma dos quadrados em relação aos parâmetros estimados	
$S_{xx}(f)$	Densidade autoespectral de entrada	W <sup>2</sup> / m <sup>4</sup>
$S_{yy}(f)$	Densidade autoespectral de saída	K <sup>2</sup>
$S_{xy}(f)$	Densidade espectral cruzada	K.W / m <sup>2</sup>
$t$	Tempo	s
$T_0$	Temperatura inicial	°C
$T_1$	Temperatura na superfície frontal	°C
$T_2$	Temperatura na superfície oposta	°C
$X(t)$	Sinal de entrada no tempo	W / m <sup>2</sup>
$X(f)$	$X(t)$ no plano transformado de Fourier	
$X_1$	Coeficiente de sensibilidade em relação a $\alpha$ de $Z_{\theta e}$	rad.s / m <sup>2</sup>
$X_2$	Coeficiente de sensibilidade em relação a $k$ de $Z_{\theta e}$	s <sup>-1/2</sup>
$X_3$	Coeficiente de sensibilidade em relação a $\alpha$ de $Z_{\phi e}$	rad.s / m <sup>2</sup>
$X_4$	Coeficiente de sensibilidade em relação a $k$ de $Z_{\phi e}$	s <sup>-1/2</sup>
$X_b$	Coeficiente de sensibilidade em relação a $b$	Hz <sup>-1/2</sup>
$X_\alpha$	Coeficiente de sensibilidade em relação a $\alpha$	K.s / m <sup>2</sup>

$Y(t)$	Sinal de saída no tempo	K
$Y(f)$	$y(t)$ no plano transformado de Fourier	
$Z$	Impedância Generalizada	$K.m^2 / W.s$
$Z_{be}$	Impedância de entrada, em um meio semi-infinito	$K.m^2 / W.s$
$Z_{\phi e}$	Impedância de entrada, temperatura constante e igual a inicial em $x = L$	$K.m^2 / W.s$
$Z_{\theta e}$	Impedância de entrada, fluxo de calor nulo em $x = L$	$K.m^2 / W.s$
$ Z_{be} $	Módulo de $Z_{be}$	$K.m^2 / W$
$ Z_{\phi e} $	Módulo de $Z_{\phi e}$	$K.m^2 / W$
$ Z_{\theta e} $	Módulo de $Z_{\theta e}$	$K.m^2 / W$
$\alpha$	Difusividade térmica	$m^2 / s$
$\beta_m$	Autovalor	
$\varepsilon_i$	Erros aleatórios	$^{\circ}C$
$\phi$	Fluxo de calor	$W / m^2$
$\Phi$	$\phi$ no plano transformado de Laplace	
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace	
$\mathcal{L}^{-1}$	Transformada inversa de Laplace	
$\theta$	Diferença de temperatura	K
$\Theta$	$\theta$ no plano transformado de Laplace	
$\Psi_{\phi e}(f)$	Fase de $Z_{\phi e}$	rad
$\Psi_{\theta e}(f)$	Fase de $Z_{\theta e}$	rad

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A medição de propriedades térmicas em meios já construídos apresenta vários aspectos interessantes do ponto de vista do desenvolvimento de técnicas experimentais. Pode-se observar, nesse caso, que o requisito básico deve ser a característica não destrutiva do método. Em outras palavras qualquer inserção de sensores de medição devem ser evitadas. Outra característica importante reside no próprio acesso às superfícies do meio. Nesse sentido, a maioria dos meios existentes (e.g., edificações), tem normalmente apenas uma superfície de trabalho. Ou seja apenas uma superfície onde se deve submeter a excitação térmica para o estabelecimento do problema térmico e, ainda, serem feitas as aquisições dos dados experimentais. É no contexto destas particularidades ou restrições que esse trabalho se insere. Assim justifica-se o estudo e o desenvolvimento de métodos capazes de determinar parâmetros em materiais não metálicos no domínio da frequência *in situ*. Ou seja o domínio de uma técnica transiente que obtenha propriedades térmicas aplicadas em campo com características não destrutivas é o nosso grande objetivo.

Como na maioria das técnicas experimentais um modelo teórico que possa ser simulado experimentalmente deve ser proposto. Nesse

caso, devido às grandes espessuras dos meios investigados (meios já construídos), algumas hipóteses surgem naturalmente: i) meio semi-infinito, ii) meio finito, com espessura  $L$  e temperatura constante na face oposta ao acesso (imposição de excitação térmica), iii) meio finito, com espessura  $L$  e isolado na face oposta ao acesso. A investigação dessas hipóteses juntamente com o desenvolvimento de metodologias de estimação das propriedades térmicas como condutividade térmica  $k$  e difusividade térmica  $\alpha$ , são a base desse trabalho. O modelo finito (hipóteses ii e iii) inicialmente proposto por Guimarães (1993), para estimação de  $k$  e  $\alpha$  foi o primeiro a ser simulado.

O método proposto por Guimarães (1993), tem como característica principal a estimação das propriedades no chamado domínio da frequência. Para isso uma função complexa impedância generalizada é definida usando-se valores de fluxo e temperatura das duas superfícies da amostra. A fase e o módulo dessa função são responsáveis pela separação e estimação independente de  $k$  e  $\alpha$ . Entretanto, o uso de *somente* valores medidos de temperatura e fluxo de uma face da amostra não alcança o mesmo sucesso. Todavia, uma propriedade “nova” chamada efusividade térmica,  $b$ , definida como  $(\sqrt{\alpha/k})$ , pode ser estimada, com alguma facilidade. A possibilidade de se determinar esta propriedade, e a busca de um outro método para a obtenção de condutividade térmica ou difusividade térmica no domínio



do tempo com apenas uma face de acesso foi o segundo caminho a ser seguido.

Cabe salientar que não existe nenhum método transiente normalizado para a obtenção da condutividade térmica e da difusividade térmica, sendo esse trabalho mais uma contribuição para o aperfeiçoamento dessas técnicas. Além disso, a implementação, o desenvolvimento e a solidificação desse método de medição é importante não só do ponto de vista da medição de propriedades em si como procura suprir, em parte, a carência de técnicas experimentais em laboratórios capazes da identificação de materiais em campo.

Inicia-se este trabalho com a apresentação, de uma revisão das técnicas de determinação de três propriedades térmicas: condutividade térmica  $k$ , difusividade térmica  $\alpha$  e efusividade térmica  $b$  (Capítulo 2). A revisão baseia-se especialmente nas técnicas transientes mais recentes de obtenção de propriedades como estimação de parâmetros. A seguir no Capítulo 3, são apresentadas duas investigações partindo-se das hipóteses de fluxo de calor nulo e temperatura constante e igual a inicial, ambas na superfície oposta, em uma amostra de polythene, a partir do modelo teórico apresentado por Guimarães (1993). Busca-se estimar as propriedades a partir da identificação da função resposta em frequência do sistema em suas formas experimentais e teóricas. Faz-se uma simulação para obtenção do sinal de saída no sistema, adquirido através das condições de contorno na superfície frontal de uma amostra de polythene com isolamento em  $x = L$  (Apêndices I, III e IV).

O Capítulo 4, apresenta o método de obtenção de  $k$ , estimações de  $b$  no domínio da frequência e  $\alpha$  no domínio do tempo com apenas uma face de acesso. Nesse método desenvolve-se em primeiro lugar o modelo térmico para a determinação de  $b$ , modelo este com a temperatura constante e igual a inicial na superfície oposta (amostra semi-infinita). A obtenção de  $b$ , se dá a partir da identificação e minimização do módulo da função resposta em frequência do sistema em suas formas experimental e calculada. Em segundo lugar é desenvolvido outro modelo térmico para a estimação de  $\alpha$ , onde há um isolamento na superfície em  $x = L$ . Faz-se a determinação desta propriedade através da minimização em relação à diferença das temperaturas teórica e experimental simulada (Apêndices I, III e IV), na superfície frontal da amostra de polythene com espessura  $L = 50$  mm. A determinação destas duas propriedades e conseqüentemente a obtenção de  $k$ , foram feitas utilizando as mesmas curvas de temperatura e fluxo de calor.

O Capítulo 5, apresenta uma análise qualitativa da sensibilidade e incertezas, para a estimação de  $b$ , uma vez que dois modelos térmicos diferentes são usados para a estimação das propriedades. Além da análise dos erros inerentes a cada modelo, apresenta-se também a influência da incerteza de  $b$ , na estimação de  $\alpha$ .

Conclui-se o trabalho com algumas sugestões para o seu prosseguimento no Capítulo 6.

## CAPÍTULO 2

### TÉCNICAS TRANSIENTES - REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Nesse capítulo mostrar-se-á algumas técnicas transientes para estimação de propriedades térmicas como a condutividade térmica  $k$ , difusividade térmica  $\alpha$  e efusividade térmica,  $\sqrt{\alpha/k}$ . Observa-se que para se determinar propriedades térmicas é necessário um modelo teórico, cuja a função é estabelecer e identificar um campo térmico na amostra ou meio investigado. Determina-se assim as propriedades térmicas, através da comparação de dados experimentais com os dados teóricos do modelo. Para a definição do método utilizado devem ser conhecidos a localização da fonte de calor e a localização dos sensores, e.g, temperatura ou fluxo de calor medidas e calculadas, bem como o procedimento de cálculo dessas propriedades. Faz-se nesse capítulo uma breve revisão bibliográfica onde se apresenta técnicas transientes de estimação de propriedades térmicas no domínio do tempo e no domínio da frequência. Apresenta-se, a seguir, métodos para a obtenção simultânea de  $k$  e  $\alpha$  nos domínios do tempo e da frequência. Conclui-se o capítulo apresentando técnicas da estimação da efusividade térmica, sendo duas no tempo e uma na frequência.

## 2.1 - Estimação de $k$ e $\alpha$ no Domínio do Tempo

A técnica de estimação de parâmetros é um procedimento iterativo que busca determinar os parâmetros envolvidos na modelagem de algum fenômeno físico. Obtém-se os parâmetros através da minimização da diferença entre uma grandeza medida e o seu valor teórico calculado. A minimização é feita em relação aos parâmetros estimados. Beck & Arnold (1977) obtêm  $k$  e  $\alpha$  minimizando a diferença entre as temperaturas medidas e calculadas nas superfícies e/ou no interior da amostra, descrita pela solução do problema térmico. Uma aplicação desse método foi apresentada por Guimarães (1990). Nesse caso, o modelo, físico inicialmente a uma temperatura de equilíbrio, foi submetido a evolução de fluxo de calor em ambas as superfícies. Fez-se a minimização em relação à diferença das temperaturas teórica e experimental nas superfícies.

Também utilizando dados de temperatura e fluxo de calor variáveis, medidos simultaneamente, Moreno & Trevisan (1994) apresentam duas técnicas para a determinação das propriedades térmicas  $\alpha$  e  $k$  no domínio do tempo: uma técnica de convolução e uma técnica chamada de deconvolução.

O modelo teórico estudado considera a condução de calor unidimensional em um material homogêneo e isotrópico de propriedades constantes e submetido às seguintes condições de contorno: temperatura na superfície  $x = L$  mantida constante e igual à inicial, histórico de

temperatura e de fluxo de calor conhecidos em  $x = 0$ , tendo como condição temperatura inicial homogênea e estabilizada em todo corpo da amostra.

Na técnica da convolução o método baseia-se na aplicação do princípio de Duhamel (Odeh & Jones, 1965) e na linearização da integral da convolução (Kuchuk & Ayestaran, 1985), ou seja

$$\theta_R(t_{n+1}^*) = \sum_{i=0}^n \int_{t_i^*}^{t_{i+1}^*} q_i^*(\tau) \cdot \frac{d\psi^*}{dt^*}(t_{n+1}^* - \tau) d\tau \quad (2.1)$$

onde  $\theta_R(t^*)$  é a resposta adimensional em temperatura ao fluxo de calor variável,  $q_i^*$  é o fluxo de calor constante em cada subintervalo de tempo,  $t^*$  é o intervalo de tempo adimensional e  $\psi^*$  é a solução para a problema térmico com fluxo de calor constante e unitário em  $x = 0$  para pequeno intervalo de tempo, definida por

$$\psi^*(t^*) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t^*} \quad (2.2)$$

Assim, substituindo-se a Equação (2.2) na Equação (2.1) e resolvendo-se em sua forma dimensional, obtém-se

$$g(t_{n+1}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{k\sqrt{\pi}} f(t_{n+1}) \quad (2.3)$$

sendo

$$g(t_{n+1}) = \frac{(T_R - T_i)}{q_{n+1}}(t_{n+1}) \quad (2.4)$$

$$f(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{q_{n+1}} \right) \sqrt{(t_{n+1} - t_i)} \quad (2.5)$$

onde  $g(t_{n+1})$  corresponde a temperatura modificada, enquanto  $f(t_{n+1})$  é uma modificação da temperatura para a variável tempo, em condições

transitórias de teste. Um gráfico de  $g(t_{n+1})$  por  $f(t_{n+1})$  apresenta uma reta de inclinação

$$\beta = \frac{2\sqrt{\alpha}}{k\sqrt{\pi}} \quad (2.6)$$

podendo  $\beta$  ser achado ajustando-se este gráfico pelos mínimos quadrados. A difusividade térmica pode então ser obtida da Equação (2.4) como

$$\alpha = \frac{\pi}{4}(\beta \cdot k)^2 \quad (2.7)$$

Observa-se que para determinar  $\alpha$  na Equação (2.7) é necessário conhecer-se previamente  $k$ . Porém, se condições permanentes de fluxo de calor forem atingidas, a condutividade térmica pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$k = L \frac{q_R(t_n)}{(T_R - T_i)(t_n)} \quad (2.8)$$

onde  $L$  é o comprimento da amostra,  $T_R$  é a temperatura em  $x = R$ ,  $T_i$  é a temperatura inicial em  $t_n = 0$ ,  $q_R$  é o fluxo de calor variável e  $t_n$  o tempo de teste.

Quando se deseja determinar a função unitária  $\psi^*$  a partir dos dados de temperatura e fluxo de calor variáveis medidos simultaneamente o procedimento é chamado de deconvolução. Nesse caso Trevisan & Moreno obtiveram  $k$  a partir de

$$k = \frac{L}{\psi\left(\frac{\alpha}{L^2} t_{n+1/2}\right)} \quad (2.9)$$

para tempos suficientemente longos  $t_n^* > 2,5$ , já para condições transitórias,  $t_n^* > 0,25$  tem-se que:

$$\psi^*(t^*) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t^*} \quad (2.10)$$

e através da forma dimensional pode-se determinar  $\alpha$  por

$$\alpha = \frac{\left[ \psi \left( \frac{\alpha}{L^2} t_{n+1/2} \right) \cdot k \right]^2}{t_{n+1/2}} \frac{\pi}{4} \quad (2.11)$$

## 2.2 - Estimação de $k$ e $\alpha$ no Domínio da Freqüência

Guimarães *et al* (1995), através do método de estimação de parâmetros no domínio da freqüência, determinaram simultaneamente a condutividade térmica e a difusividade térmica de um sólido não condutor. O método baseia-se no princípio de um sistema dinâmico tipo entrada/saída. O problema da difusão de calor estabelecido, a partir da imposição de um fluxo de calor na superfície frontal da amostra, foi abordado pelo modelo teórico equivalente apresentado a seguir.

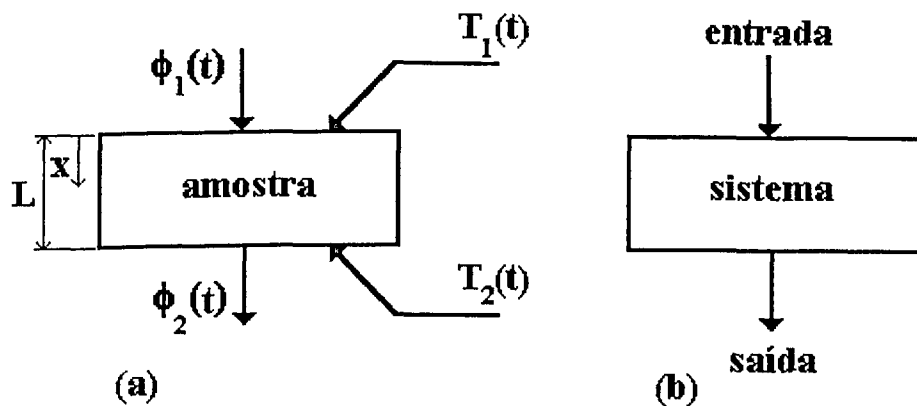


Figura 2.1 - (a) Modelo térmico

(b) Sistema dinâmico

Na Figura 2.1(a)  $\phi_1$  e  $T_1$  são respectivamente o fluxo de calor e a temperatura na superfície em  $x = 0$ ,  $\phi_2$  e  $T_2$  são respectivamente o fluxo de calor e a temperatura em  $x = L$  e  $L$  é a espessura da amostra. O problema térmico da Figura 2.1(a) pode ser dado pela equação da difusão

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.12)$$

com as suas respectivas condições de contorno

$$\theta(0,t) = \theta_1(t) \quad (2.13)$$

$$\theta(L,t) = \theta_2(t) \quad (2.14)$$

$$\phi(0,t) = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (2.15)$$

$$\phi(L,t) = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = \phi_2(t) \quad (2.16)$$

e condição inicial

$$\theta(x,0) = 0 \quad (2.17)$$

onde  $\theta$  é definida como

$$\theta = T - T_0 \quad (2.18)$$

Fazendo a transformada de Laplace nas Eqs.(2.12 a 2.18) obtém-se a solução na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & -Q \\ -R & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $\Theta_1(0,p)$ ,  $\Theta_2(L,p)$  são respectivamente a transformada de Laplace



de  $\theta_1(0,t)$ ,  $\theta_2(L,t)$  e  $\Phi_1(0,p)$ ,  $\Phi_2(L,p)$  são respectivamente a transformada de Laplace de  $\phi_1(0,t)$  e  $\phi_2(L,t)$ , sendo

$$P = \cosh\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right] \quad (2.20)$$

$$Q = \left[\left(k\sqrt{p/\alpha}\right)^{-1}\right] \times \sinh\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right] \quad (2.21)$$

$$R = \left(k\sqrt{p/\alpha}\right) \times \sinh\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right] \quad (2.22)$$

A partir da definição de um sistema dinâmico com um sinal de entrada do tipo  $\Sigma\phi = \phi_1 + \phi_2 = X(t)$  e de saída do tipo  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = Y(t)$ , obtém-se da Equação (2.19) a função

$$Z(p) = \frac{\Delta\Theta}{\Sigma\Phi} = \frac{Q}{1+P} = \frac{X(p)}{Y(p)} \quad (2.23)$$

ou ainda

$$Z(p) = \left[1/k\left(\sqrt{p/\alpha}\right)\right] \times \tanh\left[1/2 \times \sqrt{p/\alpha}\right] \times L \quad (2.24)$$

onde  $Z$  é conhecida como impedância generalizada, (Kougbeardjo, 1981). Assim aplicando-se a transformada inversa de Laplace (Spiegel, 1992), obtém-se no domínio do tempo a impedância generalizada.

$$Z(t) = \left(\frac{4 \cdot \alpha}{L \cdot k}\right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left[-(2n-1)^2 \pi^2 \alpha t / L^2\right]} \quad (2.25)$$

A estimação de  $\alpha$  e  $k$  é feita no domínio da frequência, a partir da minimização de  $Z(f)$  em suas formas teórica e experimental. Como  $Z(f)$  é complexa a minimização é feita no módulo e na fase, a partir da aplicação da transformada de Fourier na Equação (2.25), ou seja

$$Z(f) = \int_0^{\infty} Z(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.26)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$

Para a obtenção de  $Z(f)$  experimental utiliza-se os sinais medidos de fluxo de calor  $X(t)$  e temperatura  $Y(t)$  no domínio da frequência. Nesse caso obtém-se  $X(f)$  e  $Y(f)$  através da aplicação da transformada numérica de Fourier (Discrete Fast Fourier Transform) (Bendat & Piersol, 1986).

A estimação de  $\alpha$  e  $k$  é feita através da minimização da função mínimos quadrados no módulo e na fase definida por

$$S_{mod} = \sum (|Z(f)| - |\bar{Z}(f)|)^2 \quad (2.27)$$

$$S_{fase} = \sum (\Psi(f) - \bar{\Psi}(f))^2 \quad (2.28)$$

onde  $|Z(f)|$  e  $|\bar{Z}(f)|$  são respectivamente o módulo teórico e experimental de  $Z$  e  $\Psi(f)$  e  $\bar{\Psi}(f)$  representam as suas fases teórica e experimental.

### 2.3 - Determinação da Efusividade Térmica

O parâmetro  $b = \frac{\sqrt{\alpha}}{k}$ , também chamado efusividade térmica (Log, 1993), ocupa destaque importante na obtenção das propriedades  $k$  e  $\alpha$ . Sua influência é maior em problemas térmicos que ocorrem em meios semi-infinitos, ou em contatos térmicos entre dois meios de

materiais diferentes (Ozisik, 1980). Pode-se observar que quando dois materiais estão em contato, quanto mais efusivo for o meio, maior a sua temperatura superficial. Observa-se ainda que alguns autores definem a efusividade térmica como  $\frac{k}{\sqrt{\alpha}}$  (Frank, 1992).

Log (1993) apresentou uma técnica transiente de fluxo de calor unidimensional para a determinação da efusividade térmica. O aparato experimental é um termistor colocado em contato com a superfície frontal de uma amostra em formato de barra com 5 a 20 mm de largura Figura (2.2).

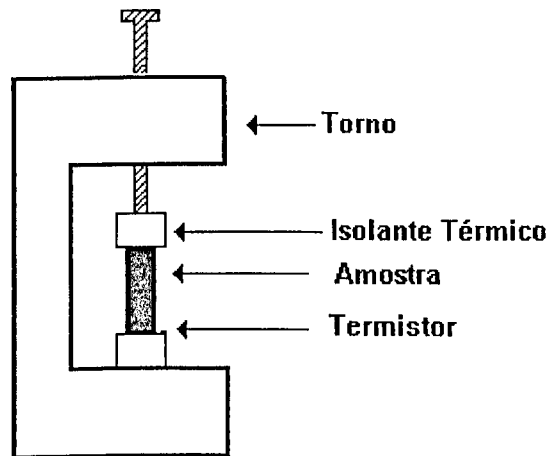


Figura 2.2- Aparato experimental

Faz-se passar um pulso de corrente através do termistor entre 5 e 10 s, suficientemente grande para aumentar a temperatura de 1 ou 2 K. Registra-se assim a variação de voltagem sobre um certo período de tempo a partir da passagem da corrente enquanto o termistor está sendo aquecido. Dessa forma é possível obter uma precisa informação do fluxo de calor entre o termistor e a amostra. Assume-se que o aquecimento do

termistor é desprezível se comparado com o aquecimento da amostra. Considerando-se a amostra como uma placa de comprimento  $L$ , a uma temperatura uniforme inicial  $T_0$  e aquecida por um fluxo de calor constante  $F_0$ , obtém-se a temperatura em  $T(x,t)$ .

$$T(x,t) - T_0 = \frac{F_0 t}{\rho C_p L} + \frac{F_0 L}{K} \left[ \frac{3x^2 - L^2}{6L^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \times \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.29)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $C_p$  o calor específico. Fazendo  $\rho C_p = k/\alpha$ , e colocando o termistor em  $x = L$  a temperatura pode ser expressa por

$$T(L,t) - T_0 = \frac{Q_0 L}{C D k} f(\omega) \quad (2.30)$$

sendo

$$f(\omega) = \omega + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \exp(-n^2 \pi^2 \omega) \quad (2.31)$$

e

$$\omega = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (2.32)$$

onde  $C$  é a espessura da amostra,  $D$  é a largura da amostra e  $Q_0$  é o calor de liberação ( $Q_0 = F_0 CD$ ). Assume-se que para pequenos valores de  $\omega$  ( $\omega < 0.3$ ), o comprimento da amostra não exerce influência no sensor de temperatura. Assim a superfície frontal de uma placa semi-infinita pode ser encontrada simplificando-se  $f(\omega)$  por

$$f(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\omega} \quad (2.33)$$

Substituindo-se a Equação (2.32) na Equação (2.33) e retornando à Equação (2.30) a efusividade térmica pode ser obtida por

$$b = \frac{\sqrt{\alpha}}{k} = \frac{(T(x,t) - T_0)\sqrt{\pi}}{2F_0\sqrt{t}} \quad (2.34)$$

Beck *et al* (1985) desenvolveram também uma técnica para obtenção da efusividade térmica aplicada a um corpo semi-infinito com fluxo de calor variável imposto na superfície. Assim, utilizando-se do teorema da convolução, definiram

$$q(t) = \sqrt{\frac{k\rho c}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{Y'(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}} d\lambda \quad (2.35)$$

onde  $Y'(\lambda)$  representa a variação linear da temperatura com o tempo e  $q(t)$  a evolução do fluxo de calor na superfície. A Equação (2.35) pode então ser integrada, obtendo-se

$$\hat{q}(t_M) = 2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi}} \sum_{i=1}^M \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\sqrt{t_M - t_i} + \sqrt{t_M - t_{i-1}}} \quad (2.36)$$

onde  $Y_i$  é a temperatura medida em tempos discretos  $t_i$  e  $\hat{q}(t_M)$  é o fluxo de calor variável. A partir do conhecimento do fluxo de calor na superfície da amostra a propriedade térmica  $\sqrt{k\rho c}$  ou  $\frac{k}{\sqrt{\alpha}}$  pode então

ser determinada através da minimização da função mínimos quadrados

$$S = \sum (\hat{q} - \hat{q}_t)^2 \quad (2.37)$$

onde  $\hat{q}$  e  $\hat{q}_t$  são respectivamente os fluxos de calor experimental e teórico.

Uma outra técnica para medição da efusividade térmica é proposta por Didier (1994). O método visa a determinação da efusividade térmica *in situ*, a partir de dados provenientes de somente uma face de acesso. No modelo considera-se a condução de calor unidimensional em uma amostra homogênea e isotrópica de propriedades térmicas constantes e submetida a uma temperatura inicial  $T_0$ . A temperatura na superfície  $x = L$  é constante e igual a inicial e históricos de fluxo de calor e temperatura são conhecidos em  $x = 0$ . A solução desse problema no domínio da frequência pode ser dada por

$$\tilde{\phi}_0 = b\sqrt{\omega} \cdot \tilde{\theta}_0 \quad (2.38)$$

onde  $b = k/\sqrt{\alpha}$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $\tilde{\theta}_0$  e  $\tilde{\phi}_0$  são respectivamente a temperatura e o fluxo de calor na superfície frontal no plano transformado de frequência. Define-se, então, uma impedância característica  $Z_c$

$$Z_c = \frac{\tilde{\theta}_0}{\tilde{\phi}_0} = 1/b\sqrt{j\omega} \quad (2.39)$$

Como  $Z_c$  é uma variável complexa obtém-se o seu módulo e a sua fase respectivamente como

$$|Z_c(f)| = 0.7071/b\sqrt{\pi f} \quad (2.40)$$

e

$$\psi(Z_c(f)) = -\frac{\pi}{4} \quad (2.41)$$

Obtém-se, assim, a efusividade térmica através da minimização da

função  $S_{mod} = \sum (|Z_{ce}(f)| - |Z_c(f)|)^2$ . Como apresentada na Seção (2.1) a identificação experimental de  $Z_{ce}$  é feita através da transformada numérica discreta de Fourier de  $X(t)$  e  $Y(t)$ .

Salienta-se que a partir dos métodos apresentados, bem como de revisão de literatura (Guimarães, 1993) a maioria das técnicas existentes não são capazes da obtenção simultânea de  $\alpha$  e  $k$ , usando-se dados experimentais, oriundos somente de uma superfície do meio investigado. Nesse sentido, observa-se que Guimarães (1993) e Didier (1994) determinaram simultaneamente  $\alpha$  e  $k$  porém a partir de dados obtidos das duas superfícies do meio. Por sua vez quando se usou somente os dados de uma superfície, identificou-se apenas uma propriedade térmica. Esse foi o caso da estimação da efusividade térmica num meio semi-infinito nos trabalhos de Didier (1994) e Beck et al (1985) e o da estimação da difusividade térmica descrita por Trevisan & Moreno (1994). Observa-se nesse trabalho, que a estimação da condutividade térmica só foi possível a partir de experimentos em regime permanente.

A imposição de um método com características não destrutivas (medições superficiais) e com aplicação direta em meios já existentes *in situ* é pois a grande motivação desse trabalho. O capítulo que se segue apresenta as primeiras investidas na busca de técnicas para a obtenção de  $\alpha$  e  $k$ , usando-se apenas uma face de acesso.

## CAPÍTULO 3

# DESENVOLVIMENTO E INVESTIGAÇÃO DE METODOLOGIAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA A DETERMINAÇÃO DE $k$ E $\alpha$ *in situ*

### 3.1- Introdução

Neste capítulo, serão investigadas técnicas para obtenção simultânea de  $k$  e  $\alpha$  no domínio da frequência, usando-se somente uma face de acesso para as medidas experimentais de temperatura e fluxo de calor do meio analisado. O meio analisado, nesse trabalho, é uma amostra de polythene, cujo o material foi usado por Guimarães (1993). A escolha desse material deveu-se inicialmente às possibilidade do uso dos dados experimentais disponíveis naquele trabalho de doutoramento. Além, do uso do conhecimento preciso das propriedades do material, como valores de referência.

A limitação à apenas uma face de acesso e as características não destrutivas da medição superficial possibilitam assim a aplicação do método em campo.



### 3.2 - Desenvolvimento de Modelos Teóricos

O problema da difusão de calor é criado pelo modelo experimental a partir da imposição de um fluxo de calor na superfície frontal da amostra, e a sua conseqüente evolução de temperatura.

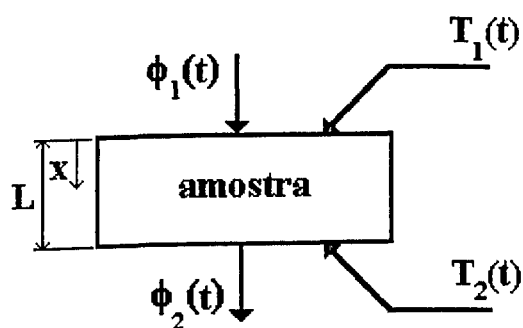


Figura 3.1 - Problema térmico proposto por Guimarães (1993)

Assim, inicialmente, o problema térmico (Figura 2.1) rerepresentado na Figura (3.1) pode ser descrito pela equação da difusão de calor, a partir das hipóteses da amostra homogênea, propriedades térmicas constantes e fluxo de calor unidimensional, como

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.1)$$

sendo a amostra sujeita as condições de contorno de temperatura

$$\theta(0,t) = T_1(t) - T_0 = \theta_1(t) \quad (3.2)$$

$$\theta(L,t) = T_2(t) - T_0 = \theta_2(t) \quad (3.3)$$

e de fluxo de calor

$$\phi(0,t) = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (3.4)$$

$$\phi(L,t) = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = \phi_2(t) \quad (3.5)$$

e à condição inicial

$$\theta(x,0) = 0 \quad (3.6)$$

Como anteriormente apresentado na Seção (2.2) faz-se a transformada de Laplace das Equações (3.1 a 3.6). Do mesmo modo, a solução em forma matricial apresentada pelas Equações (2.19 a 2.22) são reescritas como

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & -Q \\ -R & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e

$$P = \cosh\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right] \quad (3.8)$$

$$Q = \left[ \left(k\sqrt{p/\alpha}\right)^{-1} \right] \times \sinh\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right] \quad (3.9)$$

$$R = \left(k\sqrt{p/\alpha}\right) \times \sinh\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right] \quad (3.10)$$

Observa-se que diferente de Guimarães (1993), o nosso objetivo é obter  $k$  e  $\alpha$  simultaneamente, porém utilizando somente os valores experimentais de fluxo de calor e temperatura da superfície frontal. Propõe-se assim, uma investigação nas hipóteses de temperatura constante e fluxo de calor nulo na saída. Nesse sentido, a definição e o desenvolvimento de duas impedâncias de entrada devem ser analisadas. Apresenta-se, a seguir, o desenvolvimento de técnicas que usam as definições dessas impedâncias para determinação de  $k$  e  $\alpha$ .

### 3.2.1 - Modelo Impedância de Entrada $Z_{\theta e}$ (Temperatura Constante em $x = L$ )

A Impedância  $Z_{\theta e}$  de entrada é definida a partir da hipótese de temperatura da face oposta ( $x = L$ ), Figura (3.1) se manter constante e igual a inicial, ou seja a diferença de temperatura  $\theta_2 = 0$ . Assim, da Equação (3.14) obtém-se

$$P\Theta_1 - Q\Phi_1 = 0 \quad (3.11)$$

ou ainda

$$\frac{Q}{P} = \frac{\Theta_1}{\Phi_1} \quad (3.12)$$

Dessa forma o problema térmico pode ser abordado na forma de um sistema dinâmico equivalente sujeito a um sinal de entrada

$$\Phi_1 = X(p) \quad (3.13)$$

e saída

$$\Theta_1 = Y(p) \quad (3.14)$$

como mostra a Figura (3.2)

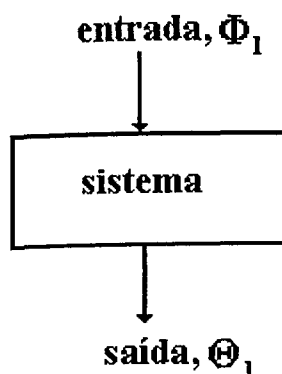


Figura 3.2 - Sistema dinâmico, tipo entrada/saída

8344/95

Define-se assim, a função  $Z_{\theta e}(p)$  como sendo

$$Z_{\theta e}(p) = \frac{Q}{P} = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (3.15)$$

substituindo as Eqs.(3.8-3.9) na Equação (3.15) obtém-se

$$Z_{\theta e}(p) = \left[ 1/k(\sqrt{p/\alpha}) \right] \times \tanh\left[ (\sqrt{p/\alpha}) \times L \right] \quad (3.16)$$

Da tabela de propriedade de transformada inversa de Laplace (Spiegel, 1992), obtém-se

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sinh x \sqrt{p}}{\sqrt{p} \cosh a \sqrt{p}} \right] = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \times \operatorname{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \right] \quad (3.17)$$

fazendo-se  $x = a$  pode-se escrever

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\operatorname{senh} a \sqrt{p}}{\sqrt{p} \cosh a \sqrt{p}} \right] = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \times \operatorname{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \quad (3.18)$$

ou ainda

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tanh a \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right] = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4a^2} \quad (3.19)$$

adotando  $a = \frac{L}{\sqrt{\alpha}}$  na Equação (3.16) e comparando com a

Equação (3.19), obtém-se a inversa  $Z_{\theta e}(t)$  dada por

$$Z_{\theta e}(t) = \left( \frac{2\alpha}{L \cdot k} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t \alpha / 4L^2} \quad (3.20)$$

fazendo-se  $B_1 = 2\alpha/L \cdot k$  e  $C_n = (2n-1)^2 \pi^2 \alpha / 4L^2$  pode-se escrever

$$Z_{\theta e}(t) = B_1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-C_n t} \quad (3.21)$$

Observa-se que a estimação das propriedades  $k$  e  $\alpha$  não pode ser feita no domínio do tempo para amostras de polythene com espessuras maiores ou iguais a 50 mm, uma vez que uma análise da sensibilidade aponta para uma combinação linear entre os coeficientes de sensibilidade (Guimarães, 1993). Uma alternativa para contornar o problema seria a aplicação de um fluxo de calor de maior intensidade, ou a diminuição da espessura da amostra. Mas estas duas hipóteses prejudicariam as hipóteses de fluxo de calor nulo ou temperatura constante na extremidade oposta. Faz-se desse modo, a estimação das propriedades  $k$  e  $\alpha$  no domínio da frequência, ou seja, obtém-se  $Z_{\theta e}$  em suas formas experimentais e teóricas na frequência. Encontra-se assim,  $Z_{\theta e}(f)$  e  $\bar{Z}_{\theta e}(f)$  a partir da transformada de Fourier em  $Z_{\theta e}(t)$ . Logo,

$$Z_{\theta e}(f) = \int_0^{\infty} Z_{\theta e}(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.22)$$

### 3.2.1.1- Identificação teórica de $\bar{Z}_{\theta e}(f)$

Substituindo-se a Equação (3.21) na Equação (3.22), tem-se

$$\bar{Z}_{\theta e}(f) = \int_0^{\infty} B_1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-C_n t} e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.23)$$

ou

$$\bar{Z}_{\theta e}(f) = \int_0^{\infty} B_1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(C_n + j2\pi f)t} dt \quad (3.24)$$

efetuando a integração na Equação (3.24) obtém-se

$$\bar{Z}_{\alpha e}(f) = B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(C_n + j2\pi f)t}}{-(C_n + j2\pi f)} \Bigg|_0^{\infty} \quad (3.25)$$

logo

$$\bar{Z}_{\alpha e}(f) = B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(C_n + j2\pi f)} \quad (3.26)$$

multiplicando-se o argumento do somatório pelo seu conjugado, obtém-se

$$\bar{Z}_{\alpha e}(f) = B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(C_n + j2\pi f)} \frac{(C_n - j2\pi f)}{(C_n - j2\pi f)} \quad (3.27)$$

ou ainda,

$$\bar{Z}_{\alpha e}(f) = B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(C_n - j2\pi f)}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.28)$$

assim

$$\bar{Z}_{\alpha e}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1 C_n}{C_n^2 + (2\pi f)^2} - j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1 2\pi f}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.29)$$

obtém-se assim, o módulo e a fase  $\bar{Z}_{\alpha e}(f)$  a partir das definições

$$|\bar{Z}_{\alpha e}(f)| = \sqrt{\text{Re}(f)^2 + \text{Im}(f)^2} \quad (3.30)$$

e

$$\bar{\Psi}_{\alpha e}(f) = \arctan(\text{Im}(f) / \text{Re}(f)) \quad (3.31)$$

sendo

$$\text{Re}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1 C_n}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.32)$$

e

$$\text{Im}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1 2\pi f}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.33)$$

onde  $\text{Re}(f)$  é a parte real e  $\text{Im}(f)$  a parte imaginária de  $\bar{Z}_{\theta_e}(f)$ . Assim, substituindo as Equações (3.32 e 3.33) nas Equações (3.30 e 3.31) obtém-se o módulo e a fase respectivamente

$$|\bar{Z}_{\theta_e}(f)| = B_1 \sqrt{\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi f}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \right)^2} \quad (3.34)$$

$$\bar{\Psi}_{\theta_e}(f) = \arctan \left[ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-2\pi f}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{C_n}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \right)} \right] \quad (3.35)$$

### 3.2.1.2 - Identificação experimental $Z_{\theta_e}(f)$

Para obtenção da Impedância de entrada experimental,  $Z_{\theta_e}(f)$ , aplica-se o teorema da convolução no sistema, ou seja, a saída de um sistema sujeito a uma entrada,  $X(t)$ , pode ser dada por

$$Y(t) = \int_0^{\infty} X(\tau) Z(t - \tau) d\tau = X(t) * Z(t) \quad (3.36)$$

obtém-se  $X(f)$  e  $Y(f)$ , através da transformada discreta rápida de Fourier nos sinais de fluxo de calor  $X(t)$  e temperatura  $Y(t)$ . Portanto do teorema da convolução (Bendat & Pierson, 1986) obtém-se  $Z_{\theta_e}(f)$  como

$$Z_{\theta_e}(f) = Y(f)/X(f) \quad (3.37)$$

multiplicando-se ainda a Equação (3.37) pelo seu conjugado  $X^*(f)$ , tem-se

$$Z_{\theta e}(f) = \frac{Y(f)X^*(f)}{X(f)X^*(f)} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (3.38)$$

onde  $S_{xy}$  e  $S_{xx}$  representam respectivamente as funções densidade espectral cruzada de  $X(t)$  e  $Y(t)$  e densidade autoespectral de  $X(t)$ . O cálculo numérico de  $Z_{\theta e}(f)$  pela Equação (3.38) permite uma maior confiabilidade na estimação da impedância nos resultados devido às características estáveis das funções de densidade espectral. Assim pode-se escrever  $Z_{\theta e}(f)$  em sua forma polar como

$$Z_{\theta e}(f) = |Z_{\theta e}(f)| e^{-j\Psi(f)} \quad (3.39)$$

onde

$$|Z_{\theta e}(f)| = \frac{|S_{xy}(f)|}{S_{xx}(f)} \quad (3.40)$$

e

$$\Psi_{\theta e}(f) = \psi_{xy}(f) \quad (3.41)$$

sendo que  $|Z_{\theta e}(f)|$  e  $\Psi_{\theta e}(f)$  são respectivamente o módulo e a fase de  $Z_{\theta e}(f)$ , e  $|S_{xy}(f)|$  e  $\psi_{xy}(f)$  são respectivamente o módulo e a fase da função densidade espectral cruzada. Observa-se que  $S_{xx}$  é uma função real (ver Apêndice II).



### 3.2.1.3 - Estimação de $k$ e $\alpha$

A estimaco de  $k$  e  $\alpha$  se d através da minimizao de  $S_{mod}$  e  $S_{fase}$  definidos como

$$S_{mod} = \sum (|Z_{\theta e}| - |\bar{Z}_{\theta e}|)^2 \quad (3.42)$$

$$S_{fase} = \sum (\Psi_{\theta e} - \bar{\Psi}_{\theta e})^2 \quad (3.43)$$

Observa-se na Equaco (3.35) que a fase  $\bar{\Psi}_{\theta e}(f)$   funo exclusiva de  $C_n$  que por sua vez  funo somente de  $\alpha$ . Nesse caso faz-se a minimizao de  $S_{fase}$  considerando-se como parâmetro apenas a difusividade térmica. Isso resulta na determinao de forma independente dessa propriedade. Assim derivando a Equaco (3.35), em relao a  $\alpha$  e aplicando-se o método de linearizao de Gauss, obtém-se a equaco de recorrência para  $\alpha$  (ver apêndice I), ou seja

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m + \sum_{i=1}^n X_1(i) (\Psi_{\theta e}(i) - \bar{\Psi}_{\theta e}(i)) / \sum_{i=1}^n [X_1(i)]^2 \quad (3.44)$$

onde  $m$   o número de iteraes e  $X_1$  é o coeficiente de sensibilidade, que é obtido derivando-se a fase  $\bar{\Psi}_{\theta e}$ , em relao a difusividade térmica, ou seja

$$X_1 = \frac{\partial \bar{\Psi}_{\theta e}}{\partial \alpha} = \frac{1}{1+r^2} \cdot r' \quad (3.45)$$

sendo  $r' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}$

$$u = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\pi f}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \right) \quad (3.46)$$

$$u' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4C_n\pi f \cdot \hat{C}_n}{(C_n^2 + (2\pi f)^2)^2} \right) \quad (3.47)$$

$$v = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{C_n^2 + (2\pi f)^2} \right) \quad (3.48)$$

$$v' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2\pi f)^2 - C_n^2)\hat{C}_n}{(C_n^2 + (2\pi f)^2)^2} \right) \quad (3.49)$$

onde  $\hat{C}_n = C_n/\alpha$ .

Determinada a difusividade térmica, o módulo da impedância de entrada na Equação (3.34), passa a ser somente função de  $B_1$  e conseqüentemente de  $k$ . De maneira análoga a minimização feita em  $S_{fase}$ , aplica-se o método de linearização de Gauss em  $S_{mod}$ , obtendo-se a equação da recorrência para  $B_1$ , que é uma função exclusiva de  $k$ , como

$$B_{1(n+1)} = B_{1(n)} + \sum_{i=1}^n X_2(i) (|Z_{\alpha e}(i)| - |\bar{Z}_{\alpha e}(i)|) / \sum_{i=1}^n [X_2(i)]^2 \quad (3.50)$$

onde  $X_2$  é o coeficiente de sensibilidade do módulo em relação ao parâmetro  $B_1$ , e  $n$  representa o número de iterações.  $X_2$  é obtido derivando-se  $|\bar{Z}_{\alpha e}|$  em relação a  $B_1$ , ou seja

$$X_2 = \frac{\partial |\bar{Z}_{\alpha e}|}{\partial B_1} \quad (3.51)$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $B_1$  são estimados por um processo iterativo até que a diferença do parâmetro estimado entre as iterações atual e anterior seja inferior a 0,0001 ou  $10^{-4}$ . Determinado o parâmetro  $B_1$ , a condutividade térmica é obtida pela equação que define  $B_1$ , ou seja

$$B_1 = 2\alpha/L \cdot k \quad (3.52)$$

e portanto

$$k = 2\alpha/L \cdot B_1 \quad (3.53)$$

Na próxima seção, desenvolve-se um outro modelo para a impedância de entrada, a partir da hipótese de fluxo de calor nulo em  $x = L$ . Apresenta-se a implementação e análise de resultados de ambos os modelos na Seção (3.3).

### 3.2.2 - Modelo Impedância de entrada $Z_{\phi_e}$ (Fluxo Nulo em $x = L$ )

Aplicando-se a condição de fluxo de calor  $\phi_2 = 0$  na Equação (3.7), obtém-se no plano transformado de Laplace

$$P\Phi_1 - R\Theta_1 = 0 \quad (3.54)$$

ou

$$\frac{P}{R} = \frac{\Theta_1}{\Phi_1} \quad (3.55)$$

Define-se assim a impedância de entrada  $Z_{\phi_e}$ ,

$$Z_{\phi_e}(p) = \frac{P}{R} = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (3.56)$$

e substituindo as Equações (3.8) e (3.10) na Equação (3.56), obtém-se

$$Z_{\phi e}(p) = \left[ 1 / (k \sqrt{p/\alpha}) \right] \times \coth \left[ (\sqrt{p/\alpha}) \times L \right] \quad (3.57)$$

e portanto obtém-se  $Z_{\phi e}(t)$  através da transformada inversa de Laplace

$$Z_{\phi e}(t) = \frac{\alpha}{k \cdot L} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t \alpha / L^2} \right) \quad (3.58)$$

Fazendo-se  $B_2 = \alpha / L \cdot k$  e  $D_n = n^2 \pi^2 \alpha / L^2$  pode-se escrever

$$Z_{\phi e}(t) = B_2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_n t} \quad (3.59)$$

Analogamente à impedância  $Z_{\phi e}$ , obtém-se  $Z_{\phi e}$  no domínio da frequência aplicando-se a transformada de Fourier na Equação (3.59), ou seja

$$Z_{\phi e}(f) = \int_0^{\infty} Z_{\phi e}(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.60)$$

### 3.2.2.1- Identificação teórica de $\bar{Z}_{\phi e}(f)$

Integrando-se a Equação (3.60) obtém-se a impedância de entrada teórica chamada de  $\bar{Z}_{\phi e}(f)$

$$\bar{Z}_{\phi e}(f) = 2B_2 \left\{ \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{(D_n^2 + (2\pi f)^2)} \right] - j \left[ \frac{1}{4\pi f} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi f}{(D_n^2 + (2\pi f)^2)} \right] \right\} \quad (3.61)$$

onde o módulo é definido por

$$|\bar{Z}_{\phi e}(f)| = 2B_2 \sqrt{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{D_n^2 + (2\pi f)^2} \right]^2 + \left[ \frac{1}{4\pi f} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi f}{D_n^2 + (2\pi f)^2} \right]^2} \quad (3.62)$$

e a fase definida por

$$\bar{\Psi}_{\phi e}(f) = \arctan \left\{ \left[ \frac{1}{4\pi f} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi f}{D_n^2 + (2\pi f)^2} \right] \middle/ \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{D_n^2 + (2\pi f)^2} \right] \right\} \quad (3.63)$$

### 3.2.2.2 - Identificação experimental $Z_{\phi e}(f)$

Obtém-se a impedância de entrada experimental,  $Z_{\phi e}(f)$ , analogamente a Equação (3.38), ou seja

$$Z_{\phi e}(f) = |Z_{\phi e}(f)| e^{-j\Psi(f)} \quad (3.64)$$

onde o módulo é dado por

$$|Z_{\phi e}(f)| = \frac{|S_{xy}(f)|}{S_{xx}(f)} \quad (3.65)$$

e a fase experimental é definida por

$$\Psi_{\phi e}(f) = \psi_{\phi e}(f) \quad (3.66)$$

As densidades espectrais cruzada e autoespectral são obtidas dos sinais experimentais de  $X(f)$  e  $Y(f)$ , de forma análoga a Seção (3.2.1.2).

### 3.2.1.3 - Estimação de $k$ e $\alpha$

Obtém-se a difusividade térmica pela equação da recorrência

$$\alpha_{ma+1} = \alpha_{ma} + \sum_{i=1}^n X_3(i) (\Psi_{\phi_e}(i) - \bar{\Psi}_{\phi_e}(i)) / \sum_{i=1}^n [X_3(i)]^2 \quad (3.67)$$

onde  $ma$  é o número de iterações e  $X_3$  é o coeficiente de sensibilidade em relação a fase

$$X_3 = \frac{\partial \bar{\Psi}_{\phi_e}}{\partial \alpha} = \frac{1}{1+s^2} \cdot s' \quad (3.68)$$

sendo  $s' = \frac{(y'z - yz')}{z^2}$

$$y = - \left( \frac{1}{4\pi f} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi f}{D_n^2 + (2\pi f)^2} \right) \quad (3.69)$$

$$y' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi f D_n \cdot \hat{D}_n}{(D_n^2 + (2\pi f)^2)^2} \right) \quad (3.70)$$

$$z = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{D_n^2 + (2\pi f)^2} \right) \quad (3.71)$$

$$z' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2\pi f)^2 - D_n^2) \hat{D}_n}{(D_n^2 + (2\pi f)^2)^2} \right) \quad (3.72)$$

Obtém-se o parâmetro  $B_2$  pela equação de recorrência

$$B_{2(na+1)} = B_{2(na)} + \sum_{i=1}^n X_4(i) (|Z_{\phi_e}(i)| - |\bar{Z}_{\phi_e}(i)|) / \sum_{i=1}^n [X_4(i)]^2 \quad (3.73)$$

onde  $na$  é o número de iterações e  $X_4$  é o coeficiente de sensibilidade para o módulo da impedância de entrada com  $\phi_2 = 0$ . Assim

$$X_4 = \frac{\partial |Z_{\phi_e}|}{\partial B_2} \quad (3.74)$$

e  $B_2$  é definido por

$$B_2 = \alpha/L \cdot k \quad (3.75)$$

e portanto

$$k = \alpha/L \cdot B_2 \quad (3.76)$$

### 3.3 - Implementação e Análise dos resultados

Apresenta-se neste parágrafo uma análise dos resultados obtidos, a partir da aplicação dos métodos de impedância de entrada  $Z_{\phi e}$  e  $Z_{\theta e}$ , para uma amostra de polythene com dimensões de 30 x 30 x 8 cm.

Simulou-se a temperatura experimental a partir da solução analítica do problema térmico estabelecido pelas condições de contorno nas superfícies da amostra. Para isso usou-se os valores de  $k$  e  $\alpha$  do polythene (0.40 W / m.K e  $2.30 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup> / s) (ver Capítulo 4). Observa-se ainda que para o fluxo de calor imposto em  $x = 0$  foram usados dados experimentais de Guimarães (1993).

Uma vez que o modelo físico não prevê a variação da condutividade e difusividade térmicas do meio com a temperatura (hipótese de propriedades térmicas constantes) obtém-se, nesse caso, essas propriedades a uma temperatura média determinada. Assim, o calor imposto na amostra deve ser suficiente para o estabelecimento de um campo térmico da amostra que permita a identificação das propriedades e ao mesmo tempo garanta a sua representatividade em relação à temperatura média. Nesse sentido, limitou-se a diferença

máxima de temperatura entre as superfícies da amostra em 4°C.

As Figuras (3.3 e 3.4), apresentam respectivamente evoluções típicas do fluxo de calor experimental usado e a temperatura experimental, simulada analiticamente adicionando-se erros aleatórios da seguinte forma

$$Y_i(t) = T_i - T_0 + \varepsilon_i \quad (3.77)$$

onde  $T_i$  é a temperatura calculada a partir do modelo térmico finito e isolado em  $x = L$  (ver Capítulo 4), e do fluxo de calor  $\phi_1$ . Este fluxo é definido com as curvas de ajuste obtidas sobre os valores medidos com os transdutores de fluxo de calor aplicados na superfície da amostra. Apresenta-se a forma dos fluxo de calor medidos experimentalmente, os ajustes e o desenvolvimento dessas integrais no Apêndice III e  $\varepsilon_i$  são erros aleatórios entre -0.2 e 0.2 °C no tempo  $t_i$ .

Os sinais discretos de fluxo de calor e temperatura possuem um sinal com um tempo de amostragem de 6.2 segundos e um número total de 1024 pontos. A duração do aquecimento foi em torno de 90 segundos.

Faz-se uma análise nos coeficientes de sensibilidade das impedâncias  $Z_{\theta e}$  e  $Z_{\phi e}$ , com os valores de  $\alpha = 2.3 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $k = 0.40 \text{ W / m.K}$  conhecidos para a amostra de polythene (Guimarães, 1993). Observa-se nas Figuras (3.5 e 3.6) que para comprimentos da amostra inferiores a 80 mm os coeficientes tendem a valores constantes não contribuindo para uma boa estimativa de  $\alpha$ . Este efeito é mais significativo para o modelo a temperatura constante.



Salienta-se que a estimação dos parâmetros  $B_1$ ,  $B_2$  e  $\alpha$  não obtiveram sucesso. Pode-se observar nesse caso que os valores das impedâncias de entrada para espessura  $L$  inferiores a 80 mm sofrem forte influência da variação da temperatura oposta, uma vez que o modelo físico baseia-se em temperatura constante. Da mesma forma a hipótese de fluxo nulo só se verifica a partir de espessuras iguais ou superiores a 80 mm (Figura 3.7). Neste caso verifica-se que a curva de temperatura para o modelo térmico isolado na superfície oposta é idêntica a curva de temperatura do modelo semi-infinito.

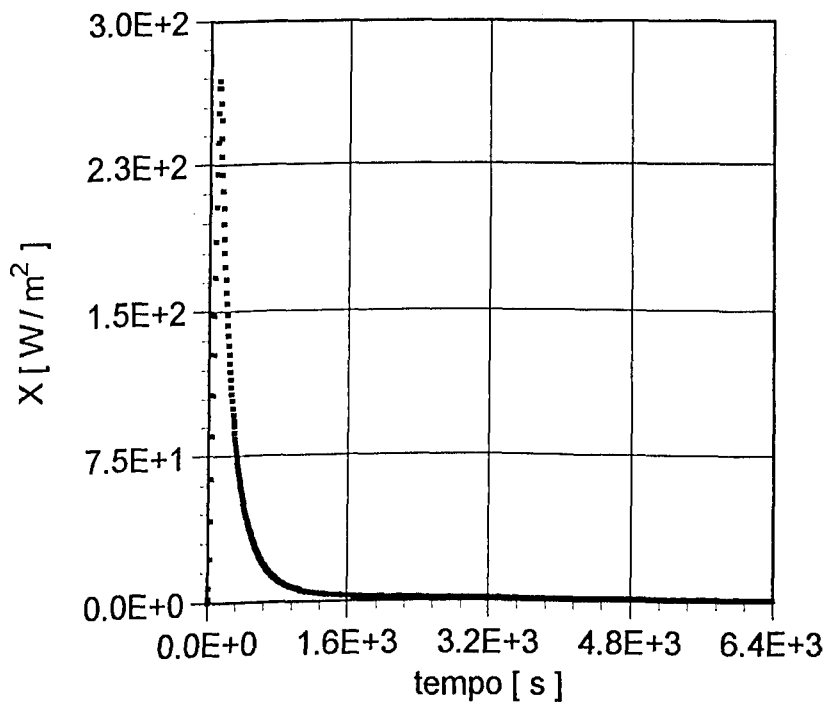


Figura 3.3 - Perfil típico de um sinal de entrada

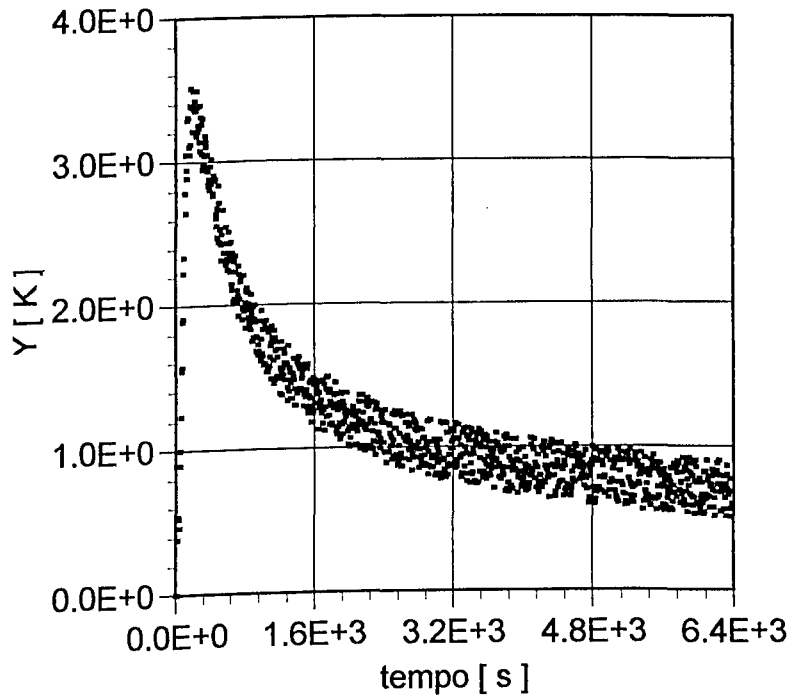


Figura 3.4 - Perfil típico de um sinal de saída

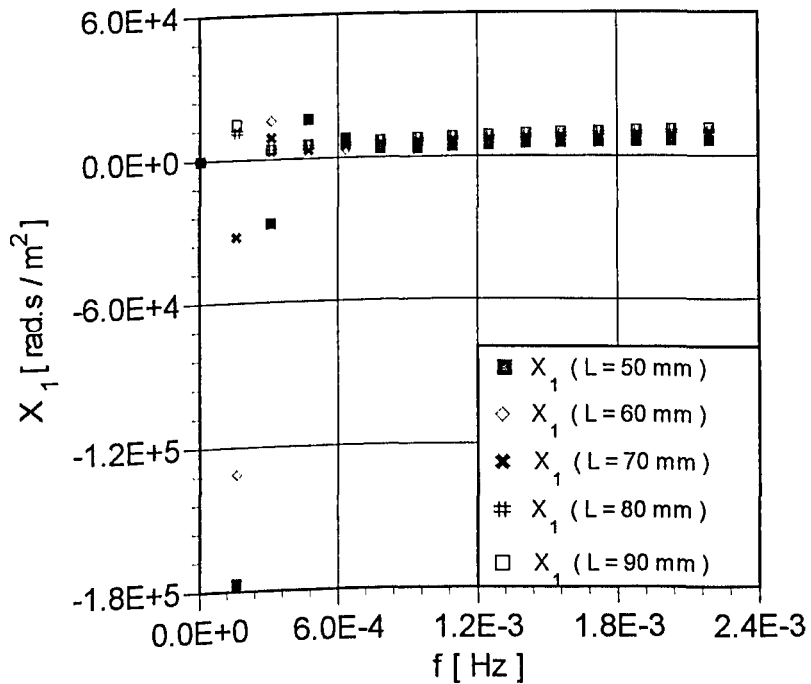


Figura 3.5 - Coeficiente de sensibilidade em relação a  $\alpha$  de  $Z_{\theta_e}$

Dessa forma tentou-se a estimação a partir de espessuras superiores a 80 mm, para ambos os modelos. As Figuras (3.8-3.11)

apresentam as comparações entre os módulos e as fases das impedâncias de entrada teóricas e simuladas para  $L = 80$  mm.

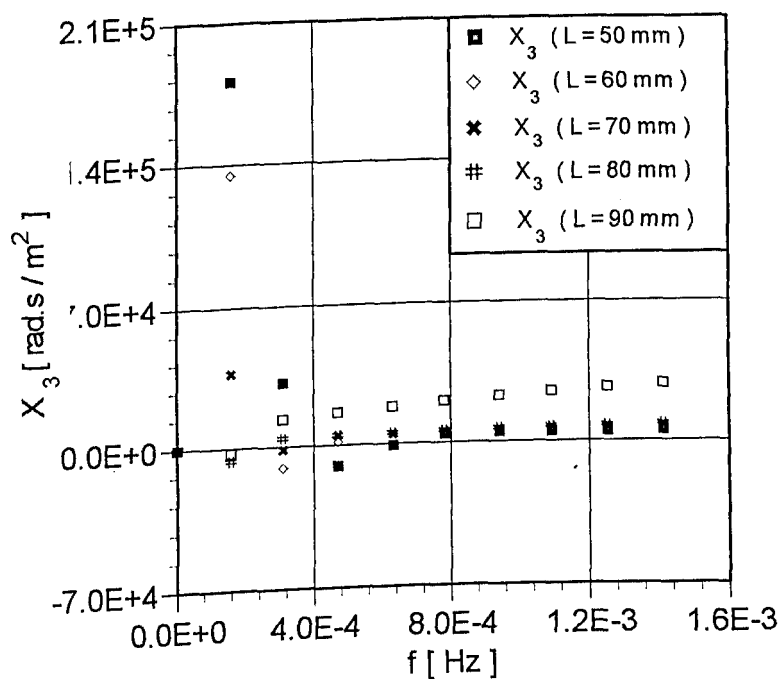


Figura 3.6 - Coeficiente de sensibilidade em relação a  $\alpha$  de  $Z_{\phi e}$

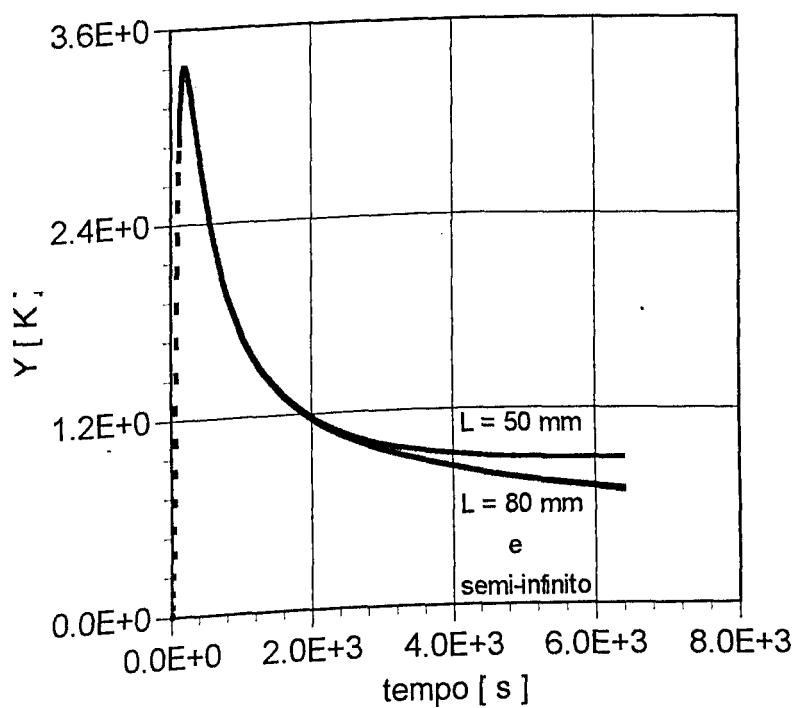


Figura 3.7 - Comparação das curvas de temperatura do modelo isolado com o modelo semi-infinito

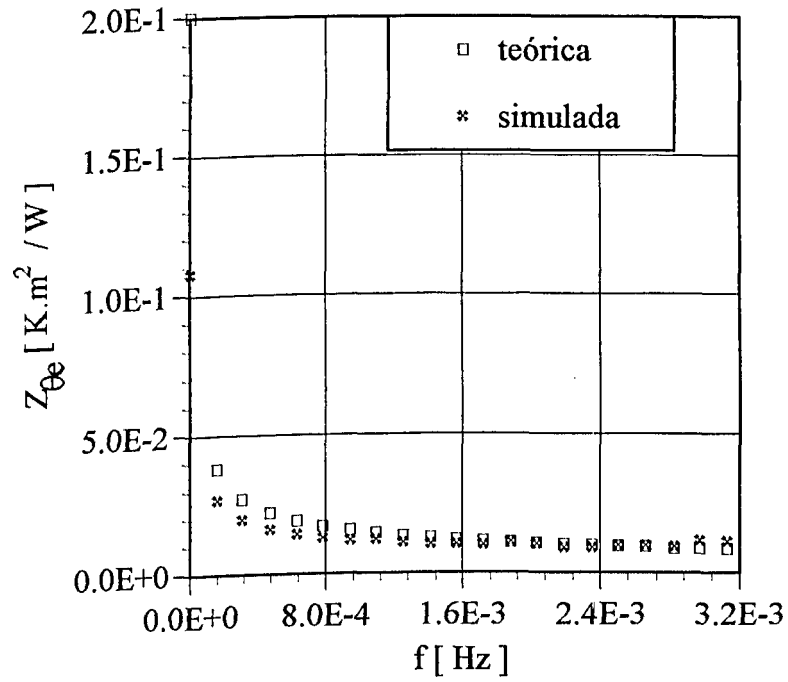


Figura 3.8 - Módulo da impedância de entrada  $Z_{\theta e}$

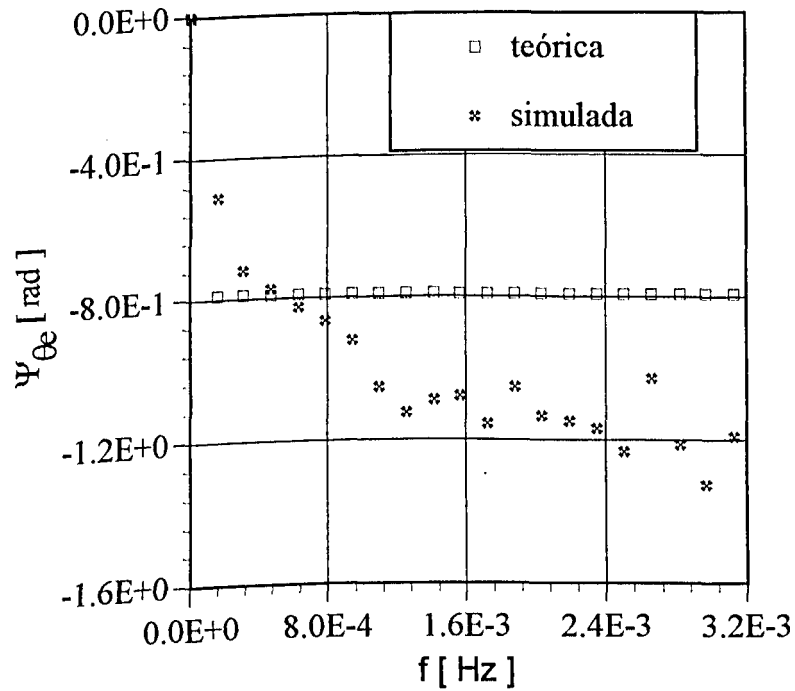


Figura 3.9 - Fase da impedância de entrada  $Z_{\theta e}$

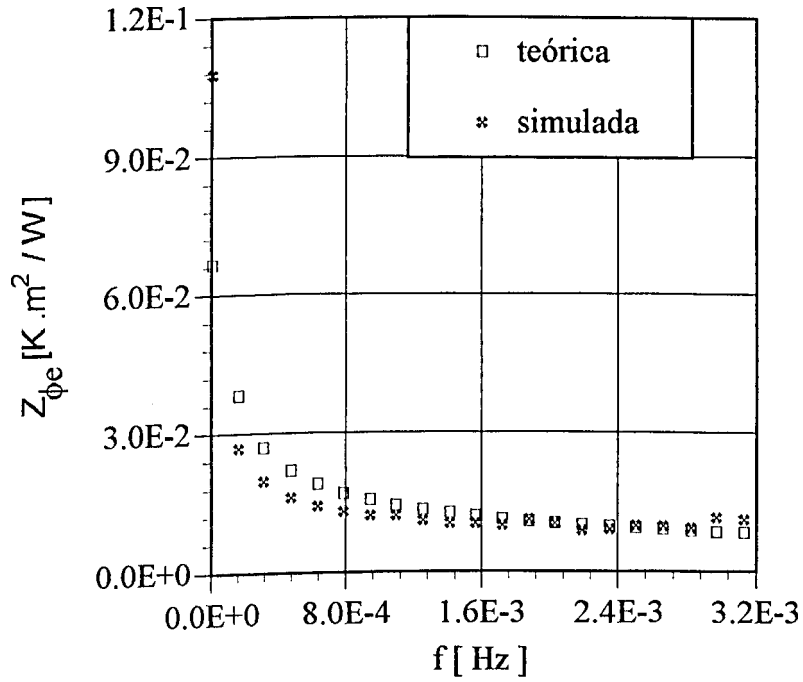


Figura 3.10 - Módulo da impedância de entrada  $Z_{\phi e}$

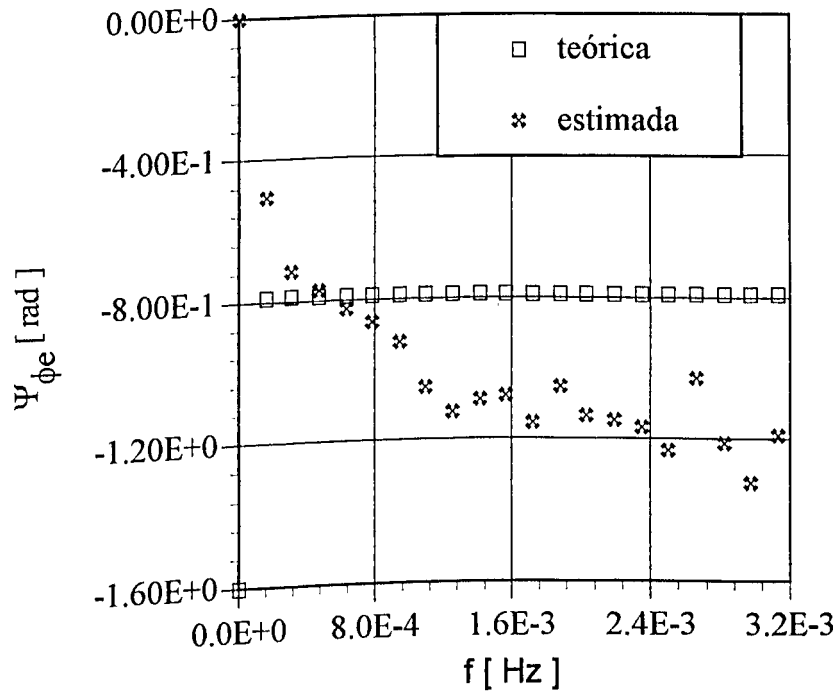


Figura 3.11 - Fase da impedância de entrada  $Z_{\phi e}$

Observa-se nas Figuras (3.9) e (3.11) uma grande distorção entre os valores teóricos e estimados da fase. Tal fato pode ser analisado a

partir de um estudo mais detalhado das Equações (3.16) e (3.57). Observa-se, nesse caso, que as funções  $\tanh\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right]$  e  $\coth\left[\left(\sqrt{p/\alpha}\right) \times L\right]$  têm suas partes imaginárias nulas. Esse fato reflete a natureza praticamente constante da fase em direção a frequência o que não permite a estimação nesse sentido, nota-se a partir das Figuras (3.8) e (3.10) que somente os parâmetros  $B_1$  e  $B_2$  (função de  $\sqrt{\alpha}/k$ ) podem ser estimados com algum sucesso usando os procedimentos mencionados até aqui. Esse fato torna-se mais claro quando se observa que a partir de  $L = 80$  mm (corpo semi-infinito), a fase das impedâncias tendem a  $(-\pi/4)$  não dependendo, pois, da difusividade térmica. A partir desses resultados surge então a necessidade da união entre os domínios do tempo e da frequência para a obtenção de  $\sqrt{\alpha}/k$  na frequência e  $\alpha$  no tempo a partir de um mesmo experimento. Esse é o método proposto e que será apresentado a seguir.

## CAPÍTULO 4

# DETERMINAÇÃO DE $k$ E $\alpha$ A PARTIR DA EVOLUÇÃO DE FLUXO DE CALOR E TEMPERATURA NA SUPERFÍCIE FRONTAL DA AMOSTRA

### 4.1- Introdução

De acordo com o que foi visto no capítulo anterior, a impossibilidade de se estimar as propriedades térmicas com os modelos propostos, requer uma nova concepção da técnica experimental. Nesse sentido, buscou-se aproveitar o bom “comportamento” do módulo da impedância no domínio da frequência para obtenção da efusividade térmica e uma forma de se estimar a difusividade térmica no domínio do tempo. A idéia é a partir de um mesmo experimento aplicar dois modelos teóricos diferentes. Como o objetivo é a aplicação do método em grandes superfícies, o modelo adequado é o de corpo semi-infinito. Este modelo é então usado no domínio da frequência para a obtenção da efusividade térmica. Entretanto, para a estimação da difusividade térmica, determinar-se-ia o limite da espessura e tempo de um corpo finito para o qual a evolução da temperatura na superfície frontal fosse considerada igual à do meio semi-infinito. Dentro de uma incerteza aceitável esse modelo seria então usado para a estimação da difusividade térmica.

## 4.2 - Desenvolvimento do Modelo Teórico em um Meio Semi-Infinito

Também nesse método utiliza-se o princípio de um sistema dinâmico tipo entrada/saída. O problema da difusão de calor é criado pelo modelo experimental, com fluxo de calor imposto na superfície frontal e é abordado pelo modelo teórico equivalente apresentado a seguir

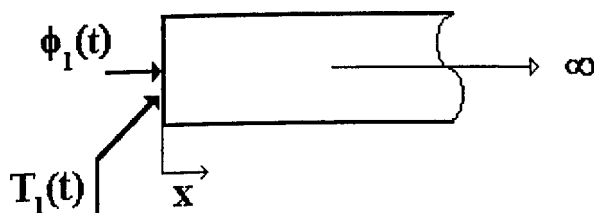


Figura 4.1 - Corpo semi-infinito submetido a evolução de fluxo de calor

Nesse caso, tem-se o problema térmico descrito por

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.1)$$

com as suas respectivas condições de contorno

$$\theta(0, t) = T_1(t) - T_0 = \theta_1(t) \quad (4.2)$$

$$\theta(x, t) \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (4.3)$$

$$\phi(0, t) = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (4.4)$$

e condição inicial



$$\theta(x,0) = 0 \quad (4.5)$$

sendo

$$\theta = T - T_0 \quad (4.6)$$

Tomando-se as transformadas de Laplace das Eqs.(4.1-4.5),  
obtem-se

$$\frac{\partial^2 \Theta(x,p)}{\partial x^2} = \frac{p}{\alpha} \cdot \Theta(x,p) \quad (4.7)$$

$$\Phi(x,p) = -k \frac{\partial \Theta(x,p)}{\partial x} \quad (4.8)$$

A solução da Equação (4.7) é dada por

$$\Theta(x,p) = C_1 e^{-\sqrt{p/\alpha} \cdot L} + C_2 e^{\sqrt{p/\alpha} \cdot L} \quad (4.9)$$

Obtem-se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  aplicando-se as condições de contorno dadas pelas Eqs. (4.2 a 4.4) no plano transformado de Laplace. Assim a solução para o problema térmico é dada por

$$\frac{\Theta_1}{\Phi_1} = \frac{1}{k\sqrt{p/\alpha}} \quad (4.10)$$

onde  $\Theta_1 = \Theta(0,p)$  e  $\Phi_1 = \Phi(0,p)$

Obtem-se a impedância de entrada efusividade,  $Z_{be}$ , fazendo-se

$$Z_{be}(p) = \frac{\Theta_1}{\Phi_1} = \frac{1}{k\sqrt{p/\alpha}} \quad (4.11)$$

Aplica-se a transformada inversa de Laplace na Equação (4.11) (Abramowitz & Segun, 1968), para obter-se a inversa  $Z_{be}(t)$

$$Z_{be}(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{k\sqrt{\pi t}} \quad (4.12)$$

fazendo-se  $b = \frac{\sqrt{\alpha}}{k}$ , pode-se escrever

$$Z_{be}(t) = \frac{b}{\sqrt{\pi t}} \quad (4.13)$$

Analogamente à Seção (2.2) obtém-se  $Z_{be}$ , no domínio da frequência aplicando-se a transformada de Fourier,

$$Z_{be}(f) = \int_0^{\infty} Z_{be}(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.14)$$

### 4.3 - Identificação Teórica de $\bar{Z}_{be}(f)$

Substituindo-se a Equação (4.13) na Equação (4.14), tem-se

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-j2\pi ft}}{\sqrt{t}} dt \quad (4.15)$$

resolvendo a integração na Equação (4.15) (Spiegel, 1992), obtém-se

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{j2\pi f}} \quad (4.16)$$

sendo que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , logo

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{b}{\sqrt{j2\pi f}} \quad (4.17)$$

multiplicando-se a Equação (4.17) por  $j\sqrt{j}$ , obtém-se

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{b}{\sqrt{j2\pi f}} \frac{j\sqrt{j}}{j\sqrt{j}} \quad (4.18)$$

logo

$$\bar{Z}_{be}(f) = -\frac{b \cdot j \sqrt{j}}{\sqrt{2\pi f}} \quad (4.19)$$

ou ainda

$$\bar{Z}_{be}(f) = -\frac{j^{3/2} \cdot b}{\sqrt{2\pi f}} \quad (4.20)$$

sabe-se do teorema de Moivre (Spiegel, 1992), que

$$j^{3/2} = -0,7071 + 0,7071j \quad (4.21)$$

substituindo a Equação (4.21) na Equação (4.20), obtém-se

$$\bar{Z}_{be}(f) = -\frac{b}{\sqrt{2\pi f}} (-0,7071 + 0,7071j) \quad (4.22)$$

ou

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{0,7071 \cdot b}{\sqrt{2\pi f}} - j \frac{0,7071 \cdot b}{\sqrt{2\pi f}} \quad (4.23)$$

determina-se assim o módulo e a fase a partir das Equações (3.30 e 3.31). Substituindo-se as respectivas partes real e imaginária da Equação (4.23) nas Equações (3.30 e 3.31) obtém-se o módulo e a fase, respectivamente, ou seja,

$$|\bar{Z}_{be}(f)| = \sqrt{\left(\frac{0,7071 \cdot b}{\sqrt{2\pi f}}\right)^2 + \left(\frac{0,7071 \cdot b}{\sqrt{2\pi f}}\right)^2} \quad (4.24)$$

ou

$$|\bar{Z}_{be}(f)| = \frac{b}{\sqrt{2\pi f}} \quad (4.25)$$

e

$$\bar{\Psi}_{be}(f) = \arctan\left(\frac{-0,7071 \cdot b}{\sqrt{2\pi f}} / \frac{0,7071 \cdot b}{\sqrt{2\pi f}}\right) \quad (4.26)$$

ou

$$\bar{\Psi}_{be}(f) = -\pi/4 \quad (4.27)$$

#### 4.4 - Identificação Experimental de $Z_{be}(f)$

De maneira análoga ao parágrafo (3.3.2), obtém-se

$$Z_{be}(f) = |Z_{be}(f)| e^{-j\Psi(f)} \quad (4.28)$$

ou

$$|Z_{be}(f)| = \frac{|S_{xy}(f)|}{S_{xx}(f)} \quad (4.29)$$

e

$$\Psi_{be}(f) = \psi_{xy}(f) \quad (4.30)$$

através da aplicação da transformada rápida de Fourier nos sinais medidos de  $X(t)$  e experimentalmente simulados de  $Y(t)$ .

#### 4.5 - Determinação da Efusividade Térmica

Verifica-se na Equação (4.25) que a efusividade térmica é função exclusiva do módulo, assim pode-se determinar  $b$  pela equação da recorrência

$$b^{(nb+1)} = b^{(nb)} + \sum_{i=1}^n X_b(i) (|Z_{be}(i)| - |\bar{Z}_{be}(i)|) / \sum_{i=1}^n [X_b(i)]^2 \quad (4.31)$$

onde  $nb$  é o número de iterações e  $X_b$  é o coeficiente de sensibilidade

em relação ao módulo

$$X_b = \frac{\partial |\bar{Z}_{be}|}{\partial b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi f}} \quad (4.32)$$

Para obtenção da impedância de entrada experimental,  $Z_{be}(f)$ , é necessário o conhecimento do sinal de saída  $Y(t)$ , do sistema. Entretanto, neste trabalho optou-se pela simulação de,  $Y(t)$ . Nesse sentido, existem duas maneiras de se calcular a saída,  $Y(t)$ , que são apresentadas a seguir:

Em primeiro lugar determina-se  $Y(t)$  a partir do conhecimento da entrada  $X(t)$  e da impedância de entrada efusividade teórica pelo teorema da convolução (ver Apêndice IV), ou seja,

$$Y(t) = \int_0^{\infty} X(\tau)Z(t-\tau)d\tau = X(t)*Z(t) \quad (4.33)$$

De outra forma pode-se determinar  $Y(t)$  para o modelo térmico finito e isolado em  $x = L$  através de sua solução analítica (Apêndice III). Calcula-se assim, a diferença de temperatura de entrada com adição de erros aleatórios da seguinte forma, como anteriormente descrito por

$$Y_i = \Delta T_i + \varepsilon_i \quad (4.34)$$

onde  $\varepsilon_i$  são erros aleatórios no tempo  $t_i$  e  $(\Delta T_i = T_{1(i)} - T_0)$  é a diferença de temperatura calculada no tempo  $t_i$ , sendo  $T_{1(i)}$  dado por

$$\Delta T_i = T_{1(i)} - T_0 = \frac{b\sqrt{\alpha}}{L} \cdot \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \frac{2b\sqrt{\alpha}}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t} \cdot \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau} \phi_1(\tau) d\tau \quad (4.35)$$

O cálculo de  $Y(t)$  através da solução analítica para a evolução da temperatura do modelo térmico finito e isolado foi escolhido devido a

possibilidade de se variar a espessura da amostra e poder aumentar o  $L$  até que se obtenha solução de  $T_1$  semi-infinita. Além disso, esse é o modelo adequado para estimação da difusividade térmica. Estima-se  $b$  para um comprimento  $L = 50$  mm.

Neste parágrafo apresenta-se uma análise dos resultados obtidos para estimação de  $b$  em uma amostra de polythene de dimensões  $30 \times 30 \times 5$  cm, para a impedância de entrada teórica proposta.

De maneira análoga ao terceiro parágrafo Seção (3.3) admite-se a hipótese de propriedades constantes uma vez que o modelo matemático não prevê a variação da efusividade térmica com a temperatura.

Para o sinal de entrada foi utilizado o mesmo perfil da Figura (3.3). O perfil de saída do sistema é mostrado na Figura (4.2).

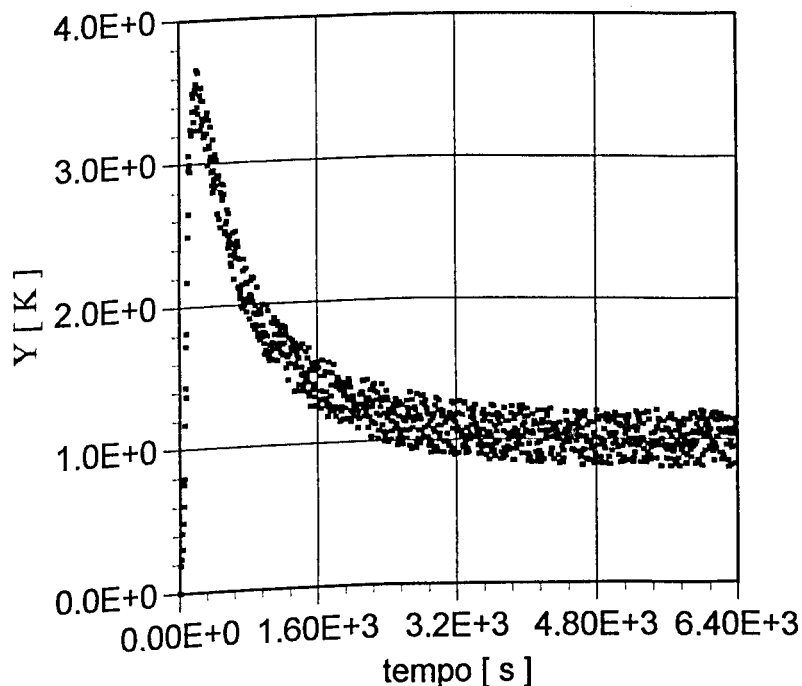


Figura 4.2 - Perfil típico de um sinal de saída

Para a obtenção do valor de  $b$  foi feito um alisamento (valores médios) de cinco simulações do módulo da função resposta em frequência, (Equação (4.29)). Verifica-se, nesse caso, uma dispersão entre o valor teórico e estimado nas faixas de frequência abaixo de  $2,0 \times 10^{-3}$  Hz e acima de  $3,0 \times 10^{-3}$  Hz. Esta dispersão está diretamente ligada ao fato de que o módulo da função resposta teórico definida pela Equação (4.25), no ponto onde a frequência é igual a zero, é infinito. Fisicamente esse valor representa o nível DC do sinal. Esta descontinuidade faz com que o restante do sinal na frequência perca alguma informação. Para solucionar este problema uma nova identificação teórica é apresentada.

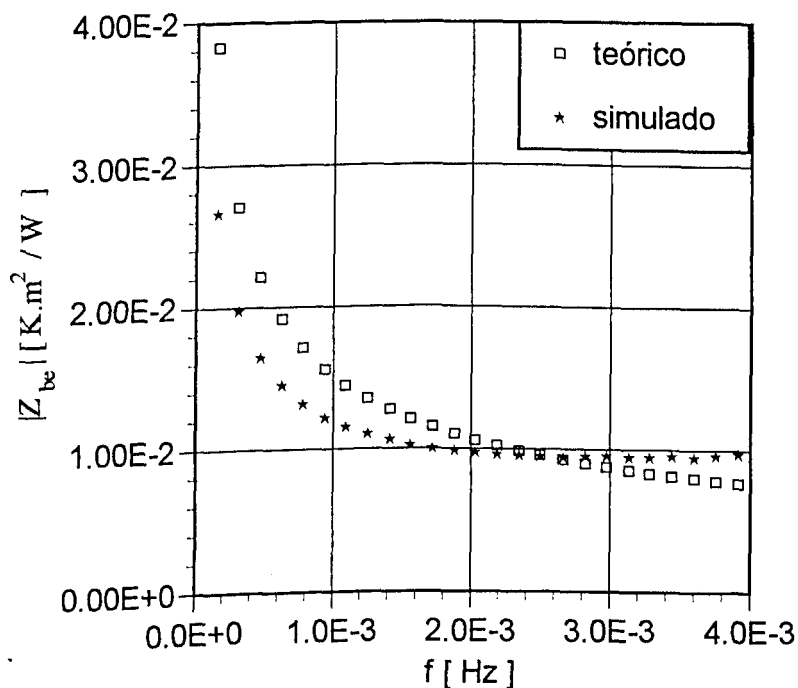


Figura 4.3 - Módulo da impedância de entrada efusividade

#### 4.6 - Novo Procedimento para o Cálculo de $Z_{be}(f)$

Apresenta-se uma nova integração da Equação (4.15) onde os intervalos variam de  $(0+\eta) \leq t \leq \infty$ , onde  $\eta$  é um infinitésimo. Nesse caso o valor de tempo tendendo a infinito é  $T = 6386,59$  s que é o tempo total de medição, ou seja

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_{0+\eta}^T \frac{e^{-j2\pi ft}}{\sqrt{t}} dt \quad (4.36)$$

efetuando a integração da Equação (4.36), obtém-se

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \text{erf}(\sqrt{j2\pi ft}) b}{\pi\sqrt{jf}} \Big|_{0+\eta}^T \quad (4.37)$$

onde  $\text{erf}$  é a função erro definida como (Spiegel, 1992)

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad (4.38)$$

substituindo-se os intervalos na Equação (4.37) obtém-se

$$\bar{Z}_{be}(f) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot b \left( \text{erf}(\sqrt{j2\pi f T}) - \text{erf}(\sqrt{j2\pi f (0+\eta)}) \right)}{\pi\sqrt{jf}} \quad (4.39)$$

e portanto o módulo da Equação (4.39) é dado por

$$|\bar{Z}_{be}(f)| = \left| \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot b \left( \text{erf}(\sqrt{j2\pi f \cdot T}) - \text{erf}(\sqrt{j2\pi f \cdot (0+\eta)}) \right)}{\pi\sqrt{jf}} \right| \quad (4.40)$$

onde a Equação (4.40), só pode ser resolvido numericamente. Observa-se, nesse sentido, que a função erro não possui solução analítica. A identificação experimental de  $Z_{be}(f)$  e a determinação de  $b$



é feita de maneira análoga a Seção (4.4) e (4.5), ou seja, através da Transformada de rápida de Fourier nos sinais de entrada e saída  $X(t)$  e  $Y(t)$ , e minimização da função mínimos quadrados no módulo da função resposta em frequência.

#### 4.7 - Implementação do Método e Análise do Resultados

Apresenta-se neste item resultados para a estimação de  $b$  a partir do novo modelamento teórico de  $\bar{Z}_{be}(f)$ . O perfil de temperatura é o mesmo apresentado anteriormente para impedância de entrada teórica  $\bar{Z}_{be}(f)$ .

Torna-se necessário nesse momento uma análise mais detalhada nas regiões de frequência a fim de se determinar o melhor intervalo de estimação de  $b$ . As Figuras (4.4 a 4.7) apresentam, respectivamente, as densidades auto espectrais de entrada,  $X$ , da saída,  $Y$ , e as componentes real e imaginária da densidade espectral cruzada. Nesse caso apresenta-se as densidades alisadas, ou seja valores médios para todas as simulações. Através do comportamento da densidade espectral cruzada, da densidade autoespectral e a obtenção experimental da função resposta em frequência (Equação (4.29)), pode-se determinar a frequência de interesse ou também chamada banda de análise. Nesse sentido, a partir de frequência superiores a  $6,0 \times 10^{-3}$  Hz, a função resposta em frequência deixa de existir no domínio dos números complexos, uma vez que se anulam os valores da densidade

autoespectral de entrada,  $S_{xx}(f)$ , (ver Figura (4.4) e Equação (4.29)). No entanto a banda de análise pode ser ainda diminuída se considerarmos que a partir de frequências superiores a  $3,0 \times 10^{-3}$  Hz o valor da densidade espectral cruzada se anula (Figuras (4.6) e (4.7)), o que implica também num valor nulo para a função resposta em frequência. Assim, os valores de interesse de frequências para as quais a função resposta em frequência, ou impedância de entrada  $Z_{be}(f)$ , existem e são diferentes de zero situam-se na faixa inferior à  $3,0 \times 10^{-3}$  Hz. Este é um resultado significativo, no sentido de se definir parâmetros importantes para o processamento de sinais, como o intervalo de amostragem e o número total de pontos. Portanto auxiliando na análise de sensibilidade, imprescindível na determinação das propriedades.

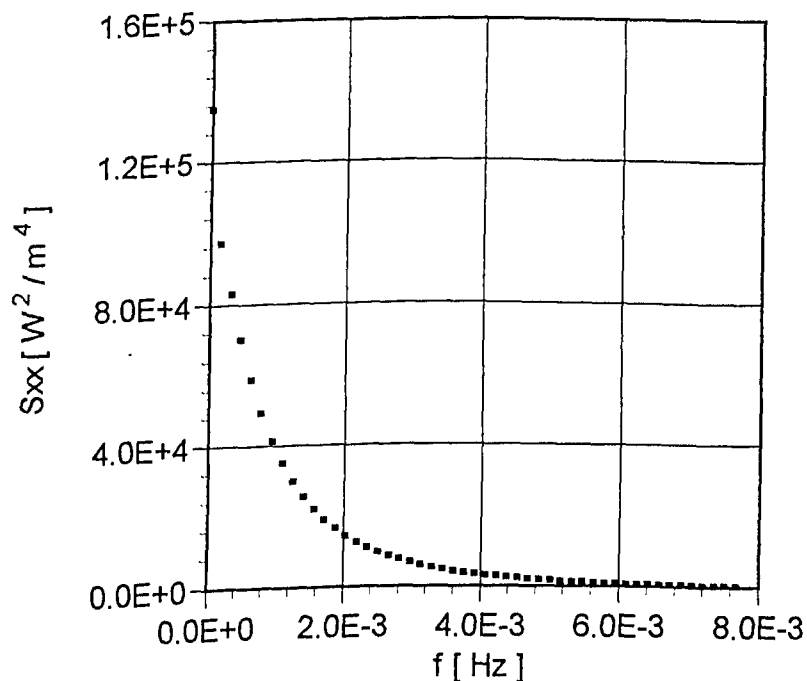


Figura 4.4 - Densidade autoespectral de entrada,  $S_{xx}(f)$

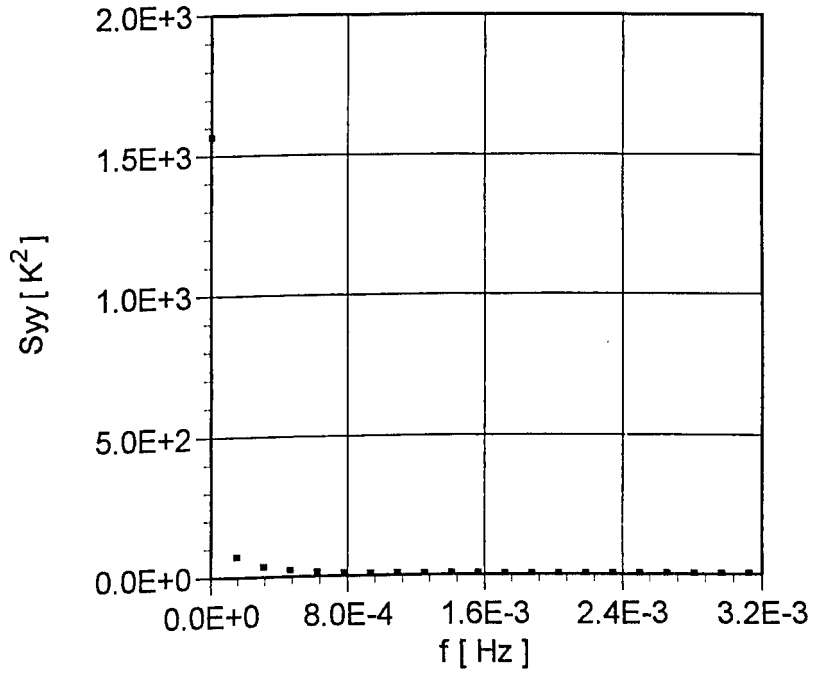


Figura 4.5 - Densidade autoespectral de saída,  $S_{yy}(f)$

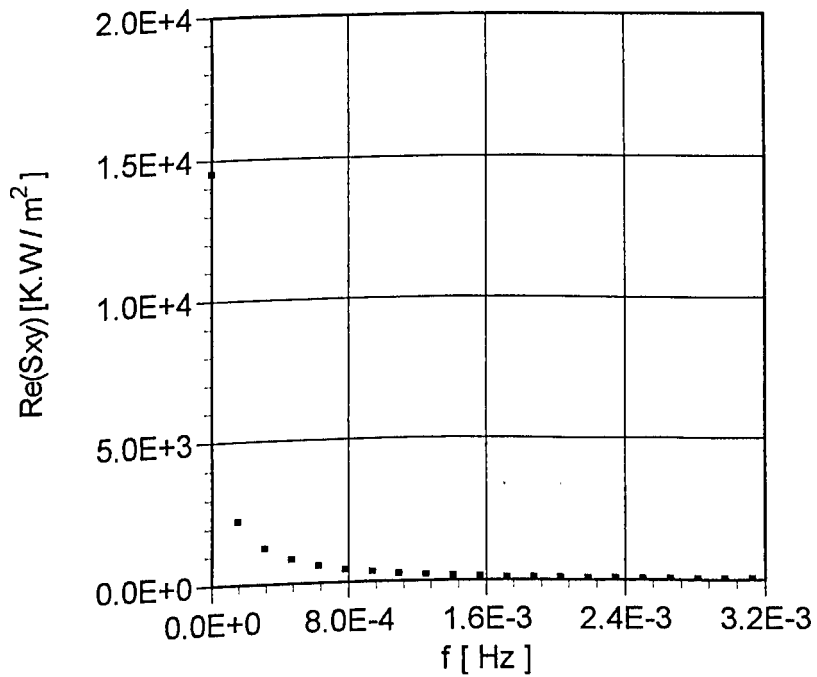


Figura 4.6 - Componente real da densidade espectral cruzada,  $Re(S_{xy}(f))$

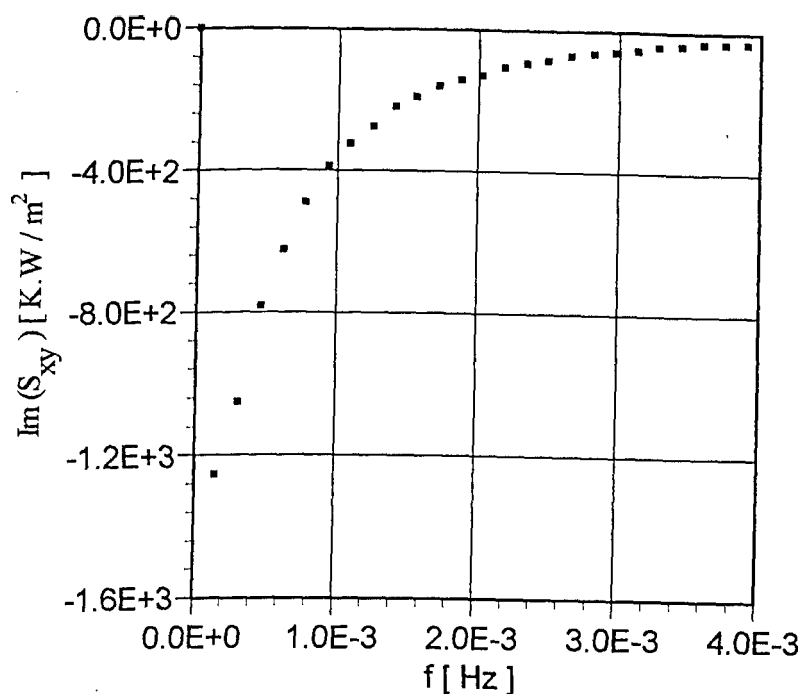


Figura 4.7 - Componente Imaginária da densidade espectral cruzada,  
 $\text{Im}(S_{xy}(f))$

Como a estimação de  $b$  se dá através da técnica de estimação de parâmetros, torna-se interessante também uma análise do comportamento do coeficiente de sensibilidade em função da frequência. Observa-se na Figura (4.8), que para a estimação de  $b$  somente os 7 primeiros valores são significativos para o processo. A partir de frequências maiores que  $1,0 \times 10^{-3}$  Hz a variação e o valor do coeficiente de sensibilidade  $X_b$ , são baixos e tendem a um valor constante não contribuindo significativamente para se estimar a efusividade térmica.

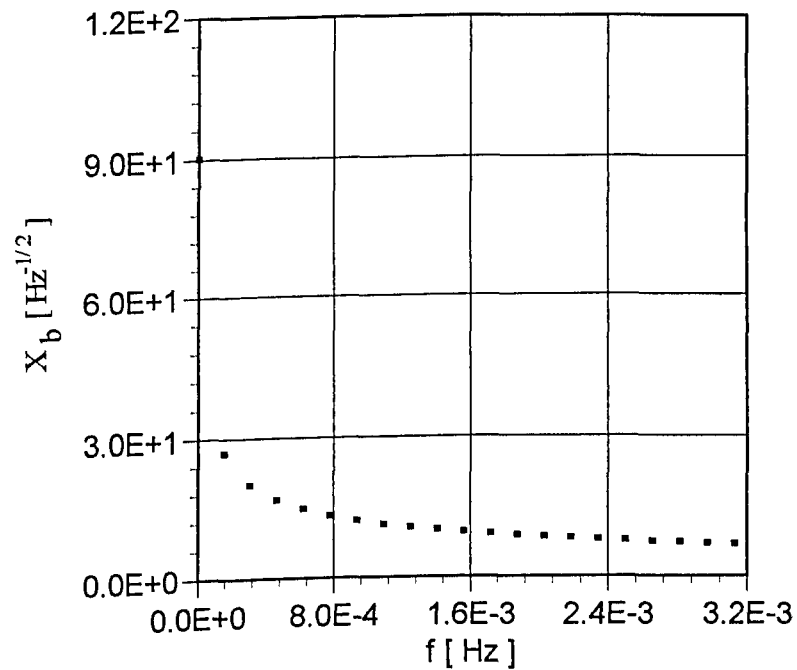


Figura 4.8 - Coeficiente de sensibilidade,  $X_b$

A Tabela (4.1), apresenta os resultados de uma estimação de  $b$  para um total de cinco simulações do módulo da função resposta em frequência. Os resultados da estimação de  $b$  para as simulações de 1 a 5 com alisamento são apresentados na Tabela (4.2).

Tabela 4.1 - Simulação da estimação de  $b$ . Simulações de 1 a 5. Valores iniciais de  $b = 1,00 \times 10^{-2}$

iterações	$b \times 10^3$ [m <sup>2</sup> .K.W <sup>-1</sup> .s <sup>-1/2</sup> ]	$S_{mod} \times 10^5$
0	10,0000	76187,88
1	1,16862	5,813557
2	1,16862	5,813557

Tabela 4.2 - Resultados para a estimação de  $b$  para Amostra de Polythene  $L = 50$  mm.

Nº simulações	$b \times 10^3$ [m <sup>2</sup> .K.W <sup>-1</sup> .s <sup>-1/2</sup> ]
01 a 05	1,161361

Na Figura (4.9) é feita uma comparação no módulo da função resposta em frequência entre os valores simulados e os valores estimados, para o número total de simulações.

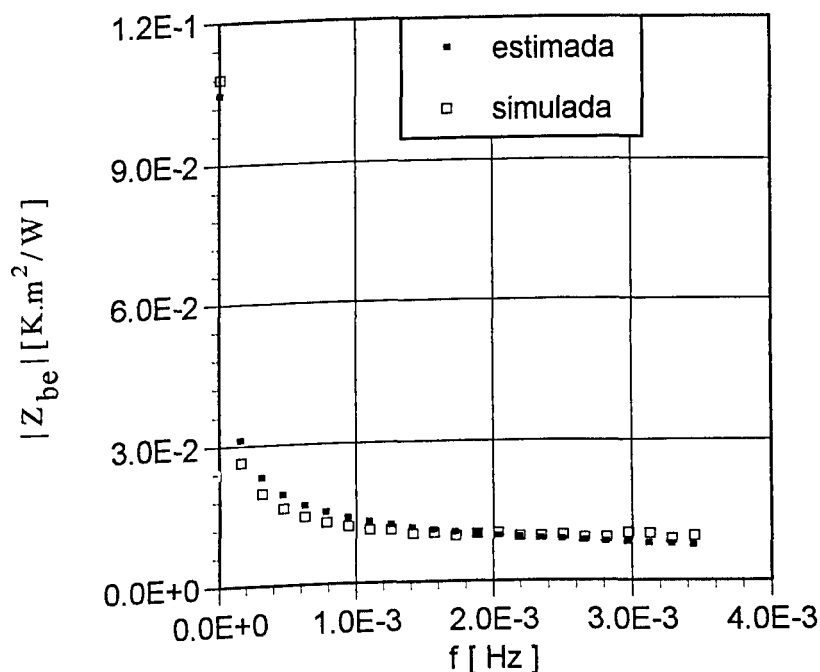


Figura 4.9 - Módulo da impedância de entrada  $Z_{be}(f)$

#### 4.8 - Resultados da Estimação de $b$ para a Amostra de Polythene

A amostra de polythene com 50 mm de espessura e área  $30 \times 30 \text{ cm}^2$  apresentou o valor de efusividade térmica estimado em  $b = 1,161 \times 10^{-3} \text{ m}^2\cdot\text{K}\cdot\text{W}^{-1}\cdot\text{s}^{-1/2}$ , avaliado a uma temperatura média de  $29,0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Conhecidos os valores de  $\alpha = 2,30 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $k = 0,40 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$ , para essa temperatura para amostra de polythene, respectivamente com 1,7 % e 2 % de incerteza, (Guimarães, 1993). Pode-se então com estas duas propriedades calcular o valor de

$b = 1,20 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{K} / \text{W} \cdot \text{s}^{-1/2}$ . A dispersão entre o valor de  $b$  estimado e o valor calculado a partir do conhecimento de  $k$  e  $\alpha$ , situa-se em 3,25 %. Ressalta-se que para  $L = 50 \text{ mm}$  e para o fluxo utilizado o perfil de temperatura na superfície frontal, não é idêntico ao perfil da temperatura semi-infinita na superfície frontal (Figura (3.11)). Sendo assim, conforme mostrado na Figura (4.9) os pontos simulados até  $1,0 \times 10^{-3} \text{ Hz}$  apresentam uma certa dispersão quando comparados com os estimados. Entretanto pode-se considerar aceitável o valor estimado da efusividade térmica, conforme será apresentado no Capítulo 5.

A partir do conhecimento da efusividade térmica e de um novo tratamento nos sinais da evolução do fluxo de calor e da temperatura, agora no domínio do tempo é possível a estimação da difusividade térmica e conseqüentemente a determinação da condutividade térmica. Este procedimento é apresentado na próxima seção.

#### **4.9 - Desenvolvimento de um Modelo Teórico para Obtenção de $\alpha$ em uma Amostra de espessura finita e isolada em $x = L$**

A Figura (4.4) apresenta uma amostra homogênea de espessura  $L$  e temperatura inicial  $T_0$ , sujeita a um fluxo de calor transiente,  $\phi_1(t)$  num instante  $t = 0$  na superfície frontal, e isolada na superfície oposta.

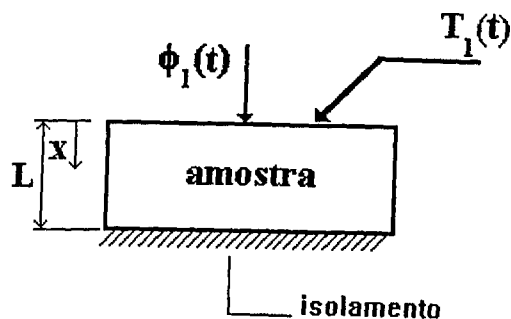


Figura 4.10 - Amostra sujeita a evolução de um fluxo de calor

Sob essas condições, o problema térmico pode ser escrito por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.41)$$

sujeito as condições de contorno

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (4.42)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.43)$$

e à condição inicial

$$T(x,0) = T_0 \quad (4.44)$$

A solução para o problema dado pelas Eqs. (4.41 a 4.44) pode ser escrita por

$$T(x,t) = \int_0^L G(x,t|x',\tau) \Big|_{\tau=0} F(x') dx' + \alpha \int_0^L G(x,t|x',\tau) \Big|_{x'=0} \frac{\phi_1(\tau)}{k} d\tau \quad (4.45)$$

onde  $F(x')$  é a distribuição de temperatura inicial, nesse caso  $T_0$ , e  $G(x,t|x',\tau)$  a função de Green que satisfaz ao seguinte problema auxiliar dado pela versão homogênea das Eqs.(4.41 a 4.44), ou seja,



$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (4.46)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (4.48)$$

e

$$G(x,0) = 0, \quad t < \tau. \quad (4.49)$$

Obtém-se assim a função de Green  $G(x,t|x',\tau)|_{\tau=0}$  resolvendo o problema auxiliar homogêneo, pelo método de separação das variáveis e comparando sua solução com a Equação (4.45), considerando que  $\phi_1(\tau) = 0$  (Guimarães, 1993). Assim

$$G(x,t|x',\tau)|_{\tau=0} = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t} \cdot \cos \beta_m x \cdot \cos \beta_m x' \quad (4.50)$$

onde  $\beta_m$  são os autovalores definidos por  $\beta_m = \frac{m\pi}{L}$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$

Obtém-se a função de Green desejada substituindo-se  $t$  por  $(t-\tau)$ , na Equação (4.50). Logo,

$$G(x,t|x',\tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha (t-\tau)} \cdot \cos \beta_m x \cdot \cos \beta_m x' \quad (4.51)$$

Avaliando a função  $G$  no contorno tem-se

$$G(x,t|x',\tau)|_{x'=0} = \frac{1}{2L} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha (t-\tau)} \cdot \cos \beta_m x \cdot \cos \beta_m x' \right) \quad (4.52)$$

Substituindo as Eqs. (4.50) e (4.52) na Equação (4.45) obtém-se a

solução geral

$$T(x,t) = T_0 + \frac{\alpha}{L \cdot k} \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \frac{2\alpha}{L \cdot k} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t} \cos \beta_m x \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau} \phi_1(\tau) d\tau \quad (4.53)$$

Da definição de  $b = \frac{\sqrt{\alpha}}{k}$ , pode-se escrever  $k = \frac{\sqrt{\alpha}}{b}$  e substituindo na

Equação (4.53), obtém-se

$$T(x,t) = T_0 + \frac{b\sqrt{\alpha}}{L} \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \frac{2b\sqrt{\alpha}}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t} \cos \beta_m x \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau} \phi_1(\tau) d\tau \quad (4.54)$$

sabe-se que em  $x = 0$ ,  $T(x,t) = T_1$  substituindo na Equação (4.54),

obtém-se

$$T_1 = T_0 + \frac{b\sqrt{\alpha}}{L} \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \frac{2b\sqrt{\alpha}}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t} \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau} \phi_1(\tau) d\tau \quad (4.55)$$

Observa-se da Equação (4.55), que a temperatura na superfície frontal  $T_1$  é função exclusiva de  $\alpha$ , uma vez conhecida a efusividade térmica. Assim tendo estabelecido a solução formal do problema direto dado pelas Eqs.(4.41 a 4.45), estima-se o parâmetro  $\alpha$  usando-se os valores de temperatura experimental simulados, calculados a partir da adição de erros aleatórios (ver Seção 4.5) na Equação (4.55). Estima-se a difusividade térmica minimizando-se a função soma quadrática com relação ao parâmetro envolvido, ou seja

$$S = \sum_{i=1}^n (Y(i) - T(i))^2 \quad (4.56)$$

onde  $Y(i)$  representa a temperatura experimental simulada, calculada com erros aleatórios na faixa de  $\pm 0,2^\circ\text{C}$ , e  $T(i)$  a temperatura calculada

a partir do modelo teórico. O  $\alpha$  é estimado para a obtenção da melhor aproximação entre os valores experimentais simulados e teóricos.

De maneira análoga a definição da Equação (3.44), obtém-se a equação da recorrência para  $\alpha$ , ou seja

$$\alpha^{m+1} = \alpha^m + \frac{\sum_{i=1}^n X_{\alpha}(i)(Y(i) - T(i))^2}{\sum_{i=1}^n [X_{\alpha}(i)]^2} \quad (4.57)$$

onde  $X_{\alpha}$  é o coeficiente de sensibilidade que é obtido derivando-se a temperatura em relação a  $\alpha$ .

$$X_{\alpha} = \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} \quad (4.58)$$

A obtenção do coeficiente de sensibilidade é apresentada no (Apêndice III)

#### 4.10 - Determinação de $\alpha$

Conhecida a efusividade térmica Seção (4.5) é feita uma aplicação do método de estimação da difusividade térmica para uma amostra de polythene com dimensões de 30 x 30 x 5 cm. A utilização do  $L = 50$  mm, é devido ao fato de que para espessura maiores que 50 mm os valores do coeficiente de sensibilidade não são significativos, não contribuindo para a estimar o  $\alpha$  conforme mostra a Figura (4.11).

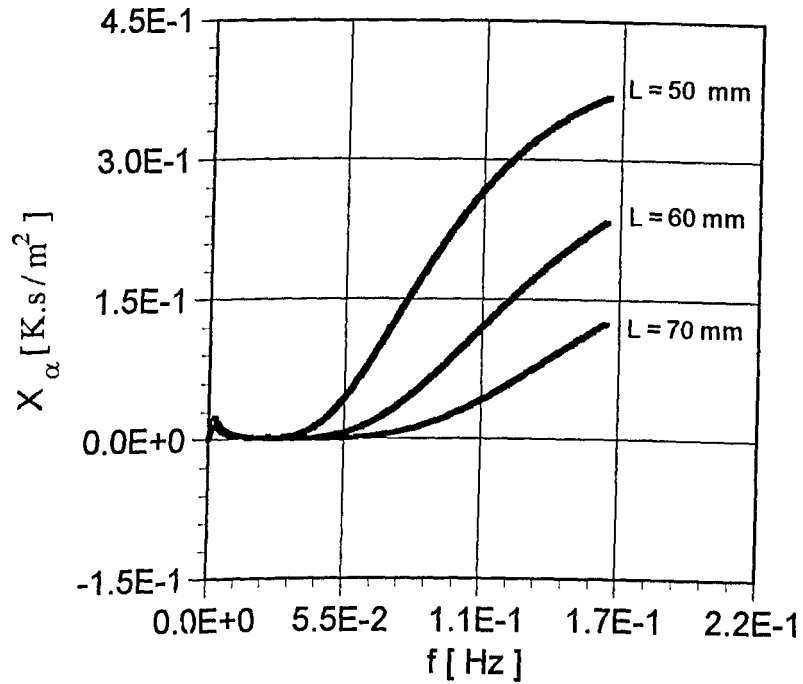


Figura 4.11 - Comparação entre os coeficientes de sensibilidade,  $X_\alpha$ , variando o comprimento amostra

De maneira análoga a Seção (3.4) um limite para a diferença de temperatura deve ser estabelecido. Nesse sentido busca-se a estimação de  $\alpha$ , utilizando o mesmo perfil de evolução de fluxo de calor apresentado na Figura (3.3), também utilizado para a efusividade térmica. Evolução típica de temperatura é apresentada na Figura (4.12). Vale a pena salientar que a temperatura simulada mostrada nesta figura possui o mesmo perfil da temperatura utilizada na estimação de  $b$ .

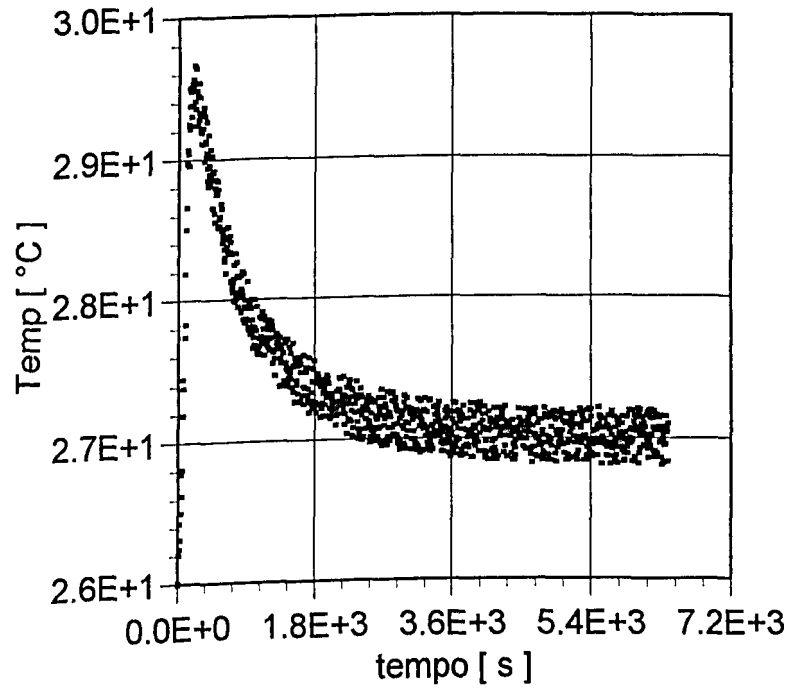


Figura 4.12 - Evolução transiente das temperaturas

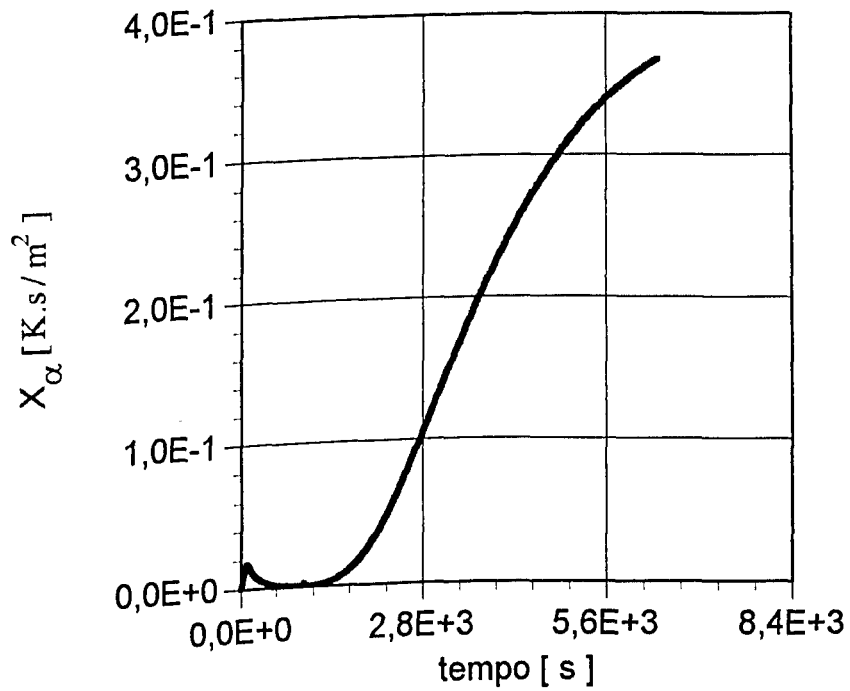


Figura 4.13 - Coeficiente de sensibilidade,  $X_\alpha$

Estima-se  $\alpha$  para cada evolução de temperatura (Figura (4.12)), onde o valor médio de  $\alpha$  é obtido a partir de cinco curvas de temperatura experimentais simuladas, calculadas com erros aleatórios definidos na Seção (4.5), sendo a expressão para a temperatura dada por

$$Y_i = T_i + \varepsilon_i \quad (4.59)$$

Como a determinação de  $\alpha$  se dá através da técnica de estimação de parâmetros, é interessante analisar-se o comportamento do coeficiente de sensibilidade com o tempo. A Figura (4.13) mostra o coeficiente de sensibilidade associado a  $\alpha$  definido na Equação (4.58). Observa-se que para a estimação de  $\alpha$  os valores do coeficiente de sensibilidade passam a ser significativos quando o tempo atinge 2800 s ( $X_\alpha > 0,1$ ). Isso induz à necessidade de se utilizar todo o intervalo de tempo de (0 a 6386.59) s, para estimação do  $\alpha$ . Porém não é necessário que o intervalo de tempo seja constante. Essa restrição era devido ao cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT) de um sinal. Nesse caso o intervalo de amostragem deve ser constante. Sendo o programa iterativo a utilização de um intervalo de tempo pequeno representa um grande tempo computacional. Para se evitar este problema busca-se então o número ideal de pontos para estimação de  $\alpha$ . Define-se assim um número de pontos total utilizado  $NT = 584$ , onde até 2796.86 s o intervalo de tempo utilizado é constante e igual a 399,55 s. A partir de 2796,86 s todos os pontos no intervalo de tempo de 6,243 s devem ser utilizados para a melhor estimação de  $\alpha$ . Destaca-se que os dois pontos de mudança de curva para o ajuste polinomiais de quinta ordem devem ser utilizados (Apêndice III).

A Tabela (4.3) apresenta os resultados de uma estimação de  $\alpha$  para um total de cinco simulações e conseqüentemente o cálculo de  $k$  através do conhecimento das duas propriedades estimadas ( $b$  e  $\alpha$ ). Os resultados da estimação de  $\alpha$  para todas as simulações e também o cálculo de  $k$  final são apresentados na Tabela (4.4). Sendo que para todas as simulações os valores de  $\alpha$  individualmente foram os mesmos.

**Tabela 4.3** - Simulação da estimação de  $\alpha$ . Simulações de 1 a 5. Valores iniciais:  $\alpha = 1.0 \times 10^{-7}$

iterações	$\alpha \times 10^7$ [m <sup>2</sup> / s]	$k \times 10^1$ [W / m.K]
0	1,00000	2,72370
1	4,28542	5,63850
2	2,46681	4,27795
3	2,46681	4,27795

**Tabela 4.4** - Resultados da estimação de  $\alpha$  e cálculo de  $k$  amostra de Polythene  $L = 50$  mm.

Simulações	$\alpha \times 10^7$ [m <sup>2</sup> / s]	$k \times 10^1$ [W / m.K]
01 a 05	2,47530	4,2853

#### 4.11 - Resultados da Estimação de $\alpha$ e $k$ para a Amostra de Polythene

A amostra de polythene com espessura de 50 mm e área de 30 x 30 cm<sup>2</sup> apresenta o valor de difusividade térmica estimado e condutividade térmica calculada em

$$\alpha = 2,47530 \times 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$$

e

$$k = 0.42853 \text{ W / m.K}$$

avaliados a uma temperatura média de 29 °C. Observa-se que o valor da condutividade térmica para o polythene obtido pelo método da placa quente, fornecido pela National Physical Laboratory (NPL) para essa temperatura é de 0,40 W / m.K. O valor de  $k$  fornecido tem uma incerteza de 2,0 %. A dispersão entre os valores estimados pelo método transiente proposto, situa-se em 7,13 %. Como o NPL não fornece o valor da difusividade térmica. Comparou-se o valor de  $\alpha$  obtido nesse trabalho com o encontrado por Guimarães (1993). Nesse sentido a dispersão encontrada foi de 7,62 %.

Observa-se que para a amostra de polythene com espessuras superiores a 50 mm não foi possível estimar-se  $\alpha$  devido a baixa sensibilidade dos seus coeficientes (Figura (4.11)). Observa-se ainda que a técnica apresenta uma limitação. Para a estimação de  $\alpha$  o modelo isolado deve considerar espessuras menores ou iguais a 50 mm para amostra de polythene. Entretanto um valor de  $L$  pequeno implica em problemas com a hipótese de isolamento ou em distorções do perfil de temperatura se comparado com o modelo semi-infinito. Portanto qualquer que seja o material deve-se buscar a espessura ideal para que os dois modelos possam ser utilizados simultaneamente.



## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE DE SENSIBILIDADE E INCERTEZAS

#### 5.1 - Introdução

Como a grande maioria das técnicas experimentais, o método proposto nesse trabalho também apresenta alguns erros inerentes ao processo de medição. Em consequência, esses erros acarretam alguma incerteza nos valores finais estimados das propriedades. Neste aspecto ocorrem, tanto os chamados erros sistemáticos quanto os erros aleatórios presentes em qualquer cadeia de medição.

Pretende-se neste capítulo uma abordagem qualitativa desses erros. Ou seja, uma vez que os dados experimentais de temperatura foram simulados numericamente o cálculo das incertezas de medição das propriedades são obtidos qualitativamente. Nesse sentido, são abordados aspectos teóricos da fonte de erro e uma breve análise da sensibilidade das propriedades a esses erros. Os erros comuns ao método podem assim ser descritos: erros na restrição do modelo, como fluxo de calor unidimensional, erro na medição de fluxo de calor devido a calibração, tempo de resposta e contato térmico entre os sensores, e incerteza de medição na aquisição de sinais. Acrescenta-se ainda os erros numéricos a partir dos cálculos das transformadas de Fourier,

usadas para a obtenção dos dados no domínio da frequência (erros de aliasing), e ao método de processamento de sinais.

## 5.2 - Análise da Incerteza na Determinação de $b$ e $\alpha$

Para a análise das incertezas faz-se uma comparação, entre a curva de diferença de temperatura no modelo isolado  $L = 50$  mm e a curva de diferença de temperatura no modelo semi-infinito ambas sem erros aleatórios (Figura (5.1)). Observa-se que a diferença máxima entre as duas curvas atinge 29 %. Todavia a maior dispersão, que ocorre a partir de 4000 s, não acarreta maior influência no cálculo do módulo da impedância de entrada. A Figura (5.2) apresenta o desvio entre as diferentes impedâncias. Observa-se que nesse caso o desvio máximo ocorrido entre as impedâncias alcança 8,43 %, quando comparado com os valores de  $b$  para o modelo semi-infinito, e 17,43 % se comparado com o modelo finito. Cumpre-se observar que, a dispersão máxima de 17,43 % ocorrida na comparação entre as impedâncias é conservativa, no sentido de se estabelecê-la como incerteza para o cálculo do  $|Z_{be}(f)|$ . Isso se deve ao fato de tal dispersão máxima ocorrer em apenas um ponto (uma determinada frequência) não representando uma tendência. Com o objetivo de se determinar ainda qualitativamente, a influência da incerteza do cálculo do  $|Z_{be}(f)|$  na estimação de  $b$ , assume-se para o cálculo desse, os valores limites do  $|Z_{be}(f)|$  estimado como

$|Z_{be}^+(f)| = |Z_{be}(f)| + 17,43\%$  e  $|Z_{be}^-(f)| = |Z_{be}(f)| - 17,43\%$ . Estimou-se assim os valores de  $b$  para cada caso. Desse modo pode-se observar que em qualquer situação os valores estimados de  $b$  situam-se dentro do limite de incerteza de 17,43 % quando comparados com o valor esperado  $b = 1.1617 \text{ m}^2.\text{K}.\text{W}^{-1}.\text{s}^{-1/2}$ . A Figura (5.3) apresenta essa comparação. Calcula-se assim que a incerteza no cálculo do  $|Z_{be}(f)|$  se transmite linearmente ao valor estimado de  $b$ , o que de certa forma, já era esperado.

Tal linearidade todavia, não é encontrada na influência da incerteza de  $b$  na estimação de  $\alpha$ . Observa-se no entanto, que para a determinação de  $\alpha$  não há restrição do modelo como na determinação de  $b$ . Porém, a determinação de  $\alpha$  é extremamente sensível às incertezas na obtenção de  $b$ . Quando se considera o valor  $b$  menos a incerteza ou seja,  $b^- = b - 17,43\%$  o valor de  $\alpha$  é obtido na faixa de 45,50 % comparando-se ao valor esperado. Da mesma forma, o valor de  $\alpha$  é aproximadamente o dobro quando o valor de  $b^+$  é considerado. Estes valores de  $\alpha$  foram valores médios considerado a partir das cinco simulações realizadas anteriormente. Contudo, deve-se levar em consideração que o valor da incerteza para  $b$  de  $\pm 17,43\%$  é o valor máximo da diferença entre os pontos experimentais simulados e estimados.

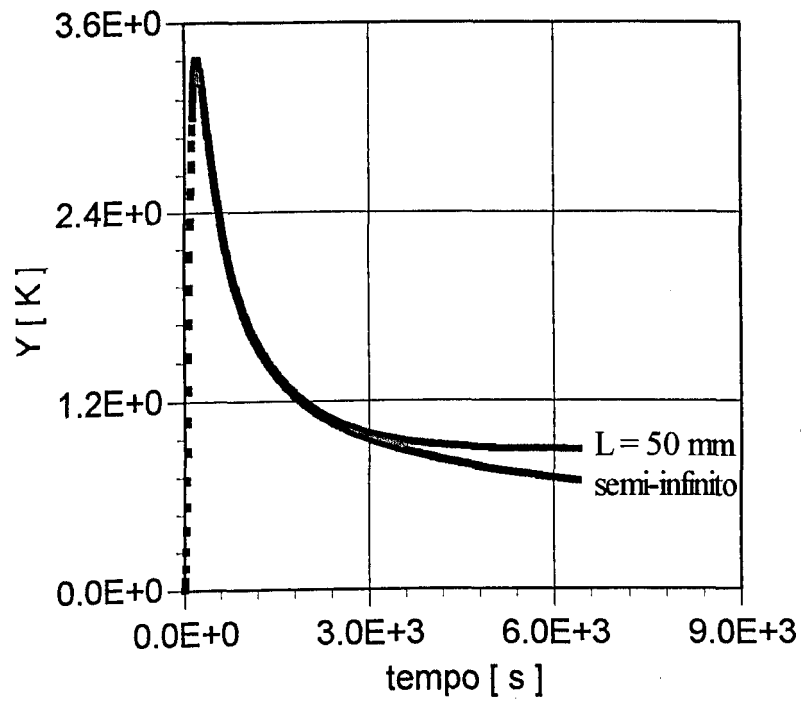


Figura 5.1 - Comparação da diferença de temperatura entre os modelos isolado  $L = 50$  mm e semi-infinito.

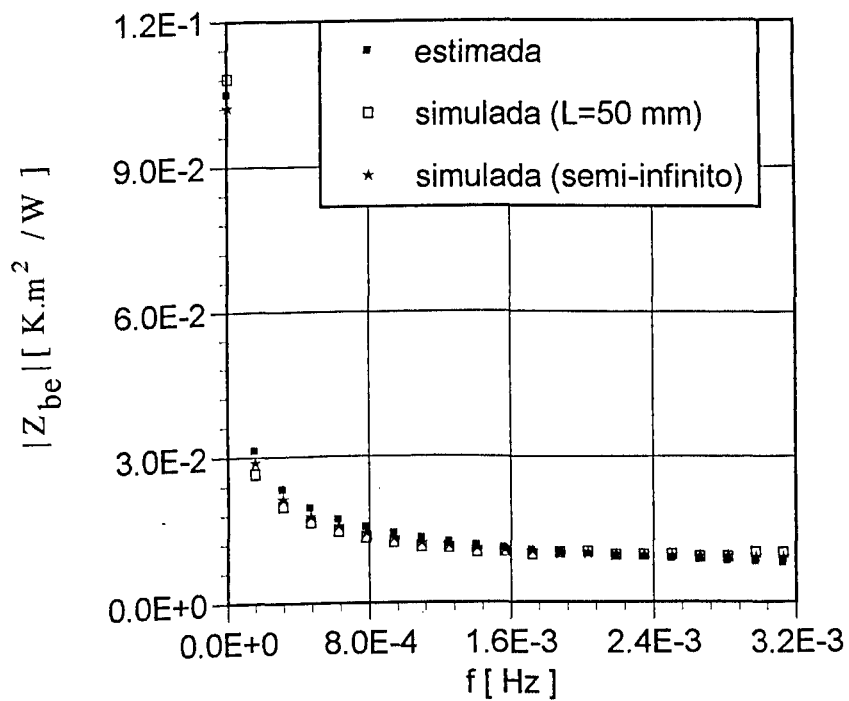


Figura 5.2 - Comparação entre os módulos simulados das impedâncias de entrada,  $|Z_{be}(f)|$ , para  $L = 50$  mm e semi-infinito com o módulo estimado.

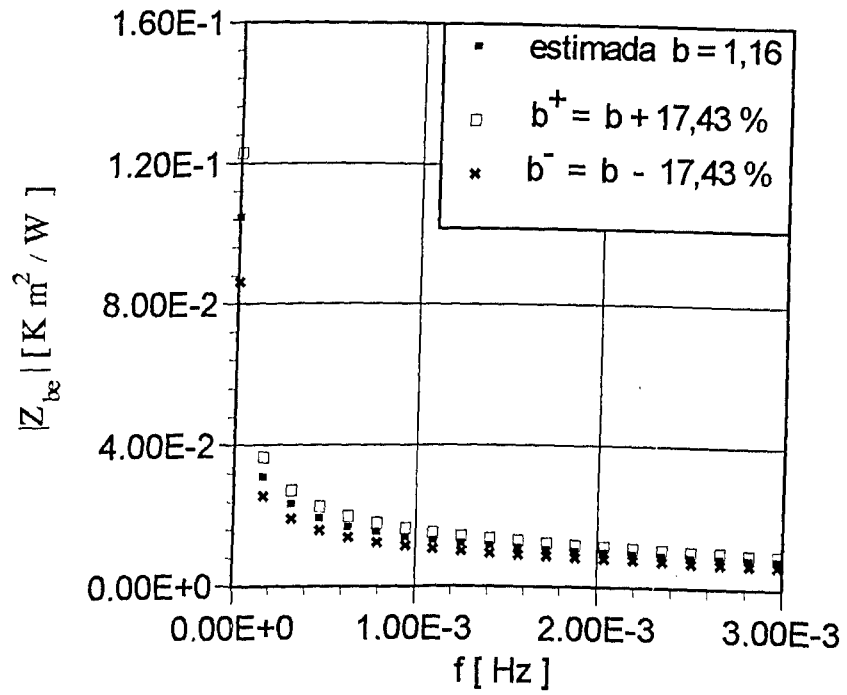


Figura 5.3 - Comparação entre o módulo da impedância de entrada estimada com  $\pm 17,43\%$  de incerteza.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÃO

Fez-se, nesse trabalho a investigação e o desenvolvimento de técnicas para a determinação simultânea de  $k$  e  $\alpha$ . Observa-se que o uso de dados de temperatura e de fluxo de calor provenientes de apenas uma face de acesso, somente no domínio da frequência, não apresentou resultados satisfatórios. Nesse caso, não se obtém a propriedade térmica  $\alpha$ , devido a natureza praticamente constante da fase da função resposta em frequência ou também chamada de impedância de entrada. Este fato se deve a  $\alpha$  não variar com a fase,  $\Psi$ . Ou seja, nesse caso a minimização de,  $\Psi$ , não implica na estimação de  $\alpha$ . Todavia, notou-se que somente os parâmetros  $B_1$  e  $B_2$  função de  $\sqrt{\alpha}/k$ , presentes no módulo da função resposta em frequência puderam ser estimados com algum sucesso. Fez-se necessário, então, o uso do domínio do tempo para a estimação de  $\alpha$ . A união entre os domínios do tempo e da frequência permitiram, assim, a obtenção de  $k$  e  $\alpha$ . A partir dos dados de fluxo de calor e temperatura fez-se um tratamento diferente para os dois domínios. Partiu-se assim da definição de um corpo semi-infinito com fluxo de calor imposto na superfície frontal, para a construção do modelo térmico a ser usado na determinação de  $b = \sqrt{\alpha}/k$ , no domínio da frequência. Observa-se que a determinação de  $b$  apresentou uma

incerteza de medição estimada em 3,25 %. Um outro modelo térmico, *um meio finito e isolado em  $x = L$* , foi adotado para a determinação de  $\alpha$  no domínio do tempo. Seu uso deveu-se a possibilidade de se variar a espessura da amostra até a obtenção de uma solução, cujo perfil de temperatura na superfície frontal fosse idêntica ao perfil do modelo semi-infinito. A definição desta espessura permite então o uso simultâneo dos dados experimentais nos dois domínios. Uma análise do coeficiente de sensibilidade com o tempo, mudando a espessura da amostra também pôde ser realizada. Assim, observa-se que para espessuras maiores do que 50 mm não foi possível estimar-se  $\alpha$  devido aos valores baixos e pouco significativos de seus coeficientes. Nesse sentido a técnica apresenta a limitação de que o modelo isolado deve estimar  $\alpha$  para espessuras menores ou iguais a 50 mm. Nesse caso, escolheu-se  $L = 50$  mm como a espessura adequada para a determinação de  $k$  e  $\alpha$  da amostra de polythene. A obtenção das propriedades apresentaram uma incerteza estimada em 7,13 % e 7,62 %, para os valores de  $k$  e  $\alpha$  respectivamente. Observa-se ainda, que para a espessura de 50 mm o perfil de temperatura para o modelo isolado não é totalmente idêntico ao perfil do modelo semi-infinito. Porém, a maior dispersão que ocorre entre as curvas de temperaturas dos dois modelos, a partir de 4000 s, não acarreta maior influência no cálculo do módulo da função resposta em frequência para a determinação de  $b$ . Saliênta-se, entretanto, que o valor de  $\alpha$  é extremamente sensível à obtenção precisa do valor de  $b$ . Esse fato implica que a incerteza no valor de  $b$ , deve ser

minimizada para que haja sucesso na estimação de  $\alpha$ .

## 6.1 - Propostas de Trabalhos Futuros

Uma vez que nesse trabalho utilizou-se somente dados simulados numericamente, um próximo passo seria a utilização de dados experimentais em campo ou em amostras padronizadas. Este procedimento além de consolidar a técnica experimental, pode apresentar um melhor resultado nas estimativas de  $k$  e  $\alpha$ . Esta hipótese baseia-se no fato de que dados simulados em laboratório não reproduzem as mesmas condições de um sinal periódico (Bendat, 1986) quando se estima a função resposta em frequência.

Outra possibilidade seria o teste do método em diferentes materiais. Os resultados obtidos *sugerem* o uso de materiais de baixa condutividade térmica e alta efusividade térmica, como sendo os mais adequados. Neste sentido, a investigação de diferentes materiais representaria um grande avanço para a consolidação da técnica, indicando sua faixa de uso.



## CAPÍTULO 7

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABRAMOWITZ, M. and SEGUN, I. A., Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 5th ed., Dover, 1968.
2. ARPACI, V. S., Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
3. BECK, J. V., The Optimum Analytical Design of Transient experiments for Simultaneous Determination of Thermal Conductivity and Specific Heat, Ph.D. Thesis, Michigan State University, 1964.
4. BECK, J. V., and ARNOLD, K. J., Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley, N. Y., 1977.
5. BECK, J. V., BLACKWEL, B., and ST. Clair, C. R. JR. Inverse Heat Conduction, Wiley - Interscience, N.Y., 1985.
6. BECK, J. V. , BLACKWEL, B., Inverse Problems, Handbook of Numerical Heat Transfer, pp. 787-834, 1990.
7. BENDAT, J. S. and PIERSON, A . G., Analysis and Measurement Procedures, Wiley - Interscience , 2nd Ed, USA ,pp. 566 ,1986.
8. BRIGHAM, E. O., The Fast Fourier Transform and its Applications, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 252 pgs., 1988 .
9. CARSLAW, H. S. and JAEGER, J. C., Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press , 2nd Ed., New York, 1959.

10. DEFER D. Theorie du Signal Appliquee a la Caracterisation Thermique et au Controle Non Destruction des Ouvrages in Situ Sous Sollicitations Aleatoires, These Docteur- Ingeniur, Université des Sciences et Techniques de Lille, nov 1994.
11. FRANK, R., DRACH, V., and FRICKE, J.; Determination of Thermal Conductivity and Specific Heat by a Combined  $3\omega$ /decay Technique, Review Scientific Instrument, vol. 64, pp. 760-765, Nov. 1992.
12. GUIMARÃES, G., On the Estimation of Thermal Properties of Non-Metalic materials, III ENCIT, vol. 2, 1990.
13. GUIMARÃES, G., Estimação de Parâmetros no Domínio da Freqüência para a Determinação Simultânea da Condutividade e Difusividade Térmica. Doutor Tese Universidade Federal de Santa Catarina, 123p., 1993.
14. GUIMARÃES, G., PHILIPPI, P. C. AND THERY, P.; Use of Parameters Estimation Method in the Frequency Domain for the Simultaneous Estimation of Thermal Diffusivity and Conductivity, Review Scientific Instrument, vol. 66, pp. 2582-2587, March 1995.
15. GUIMARÃES, G., Problemas Inversos, Anotações da Aula, UFU 1º semestre/1994.
16. KOUGBEARDJO, R. A., Identification de la Diffusivité Thermique par Traitement du Transfert de Chaleur à Travers une Paroi Homogene em Régime Impulsionnel et Pseudo-aléatoire. Application des Méthodes de Correlation en Thermocinétique, These Docteur- Ingeniur, Université des Sciences et Techniques de Lille, 171p 1981.
17. KUCHUC F. and AYESTARAN, L.; Analysis of Simultaneously Measured Pressure and Sandface Flow Rate in Transient Well Testing, Journal of Petroleum Technology, pp. 323-334, 1985.

18. LOG, T.; Transient One-Dimensional Heat Flow Technique for Measuring Thermal Conductivity of Solids, Review Scientific Instrument, vol. 64, pp. 1956-1960, July 1993.
19. MORENO, R. Z., Medida Dinâmica de Propriedades Térmicas, M.Sc. Tese, Unicamp, Campinas, 1993.
20. MORENO R. Z., e TREVISAM O. V.; Convolução e Deconvolução no Domínio do Tempo para a Determinação de Propriedades Térmicas, V ENCIT pp. 403-406, 1994.
21. NATIONAL PHYSICAL LABORATORY, Certificate of Calibration. Thermal Conductivity of a pair Polythene Specimens, Reference 12321/90/021, England, 1991.
22. ODEH, A. S. and JONES, L. G.; Pressure Drawdown Analysis, Variable-rate Case, Journal os Petroleum Technology, pp. 960-964, 1965.
23. OZISIK, N., Heat Conduction, Wiley, New York, 1980.
24. PARKER, W. J., JENKINS, R. J., BUTLER, C. P. and ABBOTT, G. L., Flash method of determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity, Journal of Applied Physics, vol. 32, pp. 1679-1684, set 1961
25. SPIEGEL, M. R., Manual de Fórmulas e Tabelas de Matemática, Mc Graw Hill do Brasil, 2° Ed., 1992.

## APÊNDICE I

### CRITÉRIO PARA A ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

O critério usado é a minimização da soma dos quadrados em relação aos parâmetros estimados, apresentada por Beck & Blackwell (1990).

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2 \quad (\text{AI.1})$$

onde  $n$  é o número de instantes,  $Y$  é a temperatura medida experimentalmente e  $T$  a temperatura calculada através do modelo teórico.

Aplica-se o método de linearização de Gauss para a obtenção das relações de recorrência para a estimação do parâmetro  $p$ . A estimação é feita a partir da derivada de  $S$  em relação ao parâmetro  $\beta$ , dada por

$$\nabla_{\beta} S = \frac{\partial S}{\partial \beta} \quad (\text{AI.2})$$

observa-se que a notação  $p$  representa o valor final do parâmetro estimado.

Uma expansão em série de Taylor em torno de  $\beta = p$  é dada por

$$T(\beta) = T(p) + \frac{\partial T(\beta - p)}{\partial \beta} + \dots \quad (\text{AI.3})$$

onde  $p$  é o parâmetro e  $T$  tem derivadas contínuas em torno de  $p$ .

Uma condição necessária para determinar o mínimo de  $S$  é fazer a

derivada de  $S$  em relação a  $\beta$  ser igual a zero, ou seja

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial T(Y - T(\beta))}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{AI.4})$$

onde  $T(\beta)$  mostra que  $T$  é uma função de  $\beta$ . Define-se o coeficiente de sensibilidade  $X(\beta)$  como

$$X(\beta) = \frac{\partial T}{\partial \beta} \quad (\text{AI.5})$$

Substituindo as Eqs.(AI.5) e (AI.3) na Equação (AI.4), obtém-se

$$X(\hat{\beta}) \cdot \left\{ Y - \left[ T(p) + X(p) \cdot (\hat{\beta} - p) \right] \right\} = 0 \quad (\text{AI.6})$$

onde  $\hat{\beta} = \beta$  é o mínimo verdadeiro de  $S$ . observa-se que a Equação (AI.6) é não linear no parâmetro  $\hat{\beta}$  se  $X(\hat{\beta})$  é uma função de  $\hat{\beta}$ . Assim, usando a linearização de Gauss,  $X(\hat{\beta})$  (Ozisk, 1980) é trocado por  $X(p)$ , na Equação (AI.6) obtendo-se

$$X^2(p) \hat{\beta} = X^2(p)p + X(p) \cdot [Y - T(p)] \quad (\text{AI.7})$$

dividindo a Equação (AI.7) por  $X^2(p)$ , obtém-se

$$\hat{\beta} = p + X(p)[Y - T(p)] / X^2(p) \quad (\text{AI.8})$$

Devido a não linearidade, um processo iterativo é necessário.

Assim usando o índice de iteração  $K$  e a notação

$$p^{(K)} = p, \quad p^{(K+1)} = \hat{\beta}, \quad T^{(K)} = T(p), \quad X^{(K)} = X(p)$$

com  $X(\hat{\beta}) \cong X(p) = X^{(K)}$  obtém-se a equação

$$p_x^{-1(K)} [p^{(K+1)} - p^{(k)}] = X^{(K)} \cdot (Y - T^{(K)}) \quad (\text{AI.9})$$

onde  $P_x^{-l(K)}$  é definida por

$$P^{-l(K)} = X^{2K} \quad (\text{AI.10})$$

A Equação (AI.9) é um conjunto de  $m$  equações lineares para o parâmetro desconhecido  $p^{(K+1)}$ . Assim, substituindo a Equação (AI.10) na Equação (AI.9), obtém-se

$$p^{(K+1)} = p^K + P_x^K \left[ X^{(K)} \cdot (Y - T^K) \right] \quad (\text{AI.11})$$

sendo que o processo iterativo continua até que

$$\left| \frac{p_i^{(K+1)} - p_i^{(K)}}{p_i^{(K)}} \right| < 0,0001 \quad (\text{AI.12})$$

## APÊNDICE II

### PROCESSOS ALEATÓRIOS ESTACIONÁRIOS

#### CONCEITOS BÁSICOS

Um processo aleatório  $\{X_k(t)\}$ ,  $-\infty < t < \infty$  (também chamado série de tempo ou processo estocástico), e denotado pelo símbolo  $\{ \}$ , é um conjunto de funções de valores reais (ou valores complexos), e pode ser caracterizado através de sua estrutura de probabilidade. Cada função particular  $X_k(t)$ , onde  $t$  é variável e  $k$  é fixo, é chamada função amostrada e pode ser considerada resultado da observação de um simples experimento. O número possível de experimentos representam um espaço amostrado de índice  $k$ , contável ou não. Para qualquer número  $N$  e tempos fixados  $t_1, t_2, \dots, t_N$  as quantidades  $X_k(t_1), X_k(t_2), \dots, X_k(t_N)$ , representam  $N$  variáveis aleatórias sobre o índice  $k$ .

Considera-se dois processos aleatórios arbitrários  $\{X_k(t)\}$  e  $\{Y_k(t)\}$ . A primeira quantidade estatística de interesse são os valores médios para valores fixos arbitrários de  $t$ , onde  $X_k(t)$  e  $Y_k(t)$  são variáveis aleatórias sobre o índice  $k$ . Estes são definidos por

$$\mu_x(t) = E[x_k(t)] \tag{AII.1}$$

$$\mu_y(t) = E[y_k(t)] \tag{AII.2}$$

onde  $E [ \ ]$  representa o valor esperado da variável aleatória em questão.

Em geral, esses valores médios são diferentes, e devem ser calculados separadamente para todo  $t$  de interesse. Que é

$$\mu_x(t_1) \neq \mu_x(t_2) \text{ se } t_1 \neq t_2$$

$$\mu_y(t_1) \neq \mu_y(t_2) \text{ se } t_1 \neq t_2$$

Para processos aleatórios estacionários,  $\{X_k(t)\}$  e  $\{Y_k(t)\}$ , os valores esperados (médios) tornam-se constantes e independentes de  $t$  (Bendat & Piersol, 1986). Para um valor arbitrário  $t$  e  $\tau$  defini-se

$$R_{xx}(\tau) = E[X_k(t)X_k(t+\tau)] \quad (\text{AII.3})$$

$$R_{yy}(\tau) = E[Y_k(t)Y_k(t+\tau)] \quad (\text{AII.4})$$

$$R_{xy}(\tau) = E[X_k(t)Y_k(t+\tau)] \quad (\text{AII.5})$$

onde  $R_{xx}(\tau)$  e  $R_{yy}(\tau)$  são chamados funções autocorrelações de  $\{X_k(t)\}$  e  $\{Y_k(t)\}$  respectivamente, enquanto  $R_{xy}(\tau)$  é chamada função de correlação cruzada entre  $\{X_k(t)\}$  e  $\{Y_k(t)\}$ .

O primeiro caminho para definir a função densidade espectral é um método matemático onde uma só transformada de Fourier é feita a partir de uma previamente calculada função correlação. Quando valores médios são retirados, essa transformada de Fourier infinita geralmente existe, apesar da transformada de Fourier infinita de dados estacionários aleatórios originais não existirem. Essa aproximação submetida aos dois lados das funções densidade espectral, indicada por  $S(f)$ , na qual são definidas para  $-\infty \leq f \leq \infty$ . Assim assumindo que  $R_{xx}(\tau)$ ,  $R_{yy}(\tau)$  e  $R_{xy}(\tau)$  existam, como definido nas Eqs. (AII.3 a AII.5). Além disso as integrais de



seus valores absolutos sejam finitos, ou seja  $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$  (AII.6)

o que é sempre verdade para conjuntos finitos, então a transformada de Fourier de  $R(\tau)$  existirá como definida por

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{AII.7})$$

$$S_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{AII.8})$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{AII.9})$$

onde  $S_{xx}(f)$ ,  $S_{yy}(f)$  são as chamadas densidade autoespectral de  $\{X_k(t)\}$  e  $\{Y_k(t)\}$  respectivamente, enquanto  $S_{xy}(f)$  é chamada função densidade espectral cruzada entre  $\{X_k(t)\}$  e  $\{Y_k(t)\}$ . Uma outra forma de se definir as funções densidade espectral é baseada nas transformadas de Fourier dos dados originais  $\{X_k(t)\}$  e  $\{Y_k(t)\}$ , ou seja,

$$S_{xy}(f, T, k) = \frac{1}{T} X_k^*(f, T) Y_k(f, T) \quad (\text{AII.10})$$

onde

$$X_k(f, T) = \int_0^T X_k(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (\text{AII.11})$$

$$Y_k(f, T) = \int_0^T Y_k(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (\text{AII.12})$$

onde  $X_k(f, T)$  e  $Y_k(f, T)$  representam as transformadas de Fourier finitas de  $X_k(t)$  e  $Y_k(t)$  respectivamente e  $X_k^*(f, T)$  é o conjugado complexo de  $X_k(f, T)$ , sendo  $T$  o período para o qual  $X_k(t) = 0$  para  $t > T$ .

### APÊNDICE III

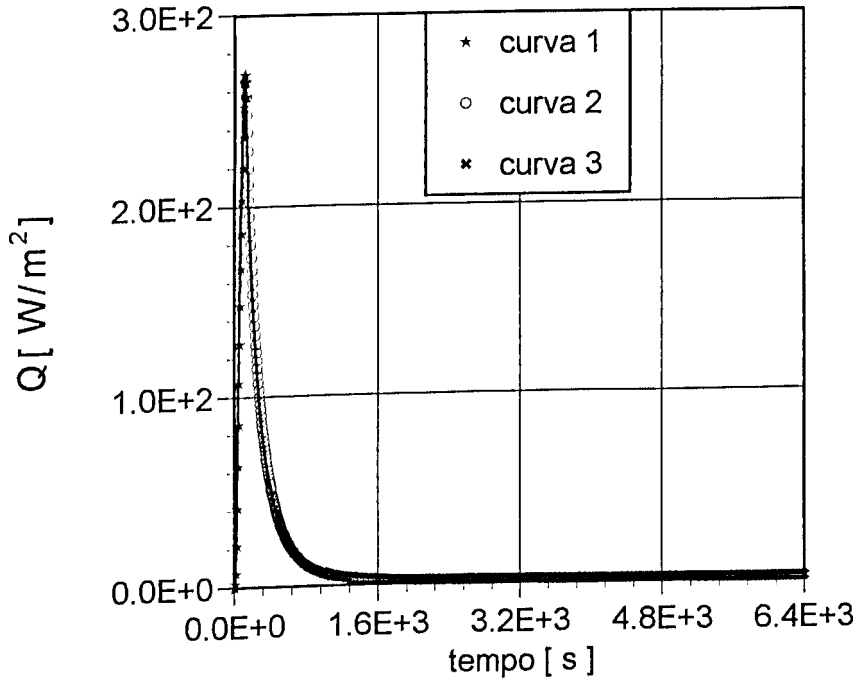
## DESENVOLVIMENTO DAS INTEGRAIS RELATIVAS AO FLUXO DE CALOR NA SUPERFÍCIE DA AMOSTRA E DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE SENSIBILIDADE

Este apêndice apresenta a solução para as temperatura da superfície frontal, considerando-se o fluxo de calor medido por um transdutor de fluxo de calor. Apresenta-se também o desenvolvimento do coeficiente de sensibilidade a partir da expressão da temperatura superficial.

Ajusta-se os pontos experimentais do fluxo de calor (Guimarães, 1993), com uma curva polinomial de quinta ordem, conforme mostra uma curva típica apresentada na Figura (AIII.1). Dessa forma, todos os fluxos envolvidos são ajustados e podem ser dados pela forma geral

$$Q_n = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5 \quad (\text{AIII.1})$$

onde  $t$  representa o tempo,  $Q$  o fluxo de calor e  $n$  é o índice para o número de curvas de ajuste. Os coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  e  $a_5$  são as constantes obtidas a partir da curva de ajuste polinomial, sendo que seus valores são diferentes para cada mudança de curva.



**Figura AIII.1** - Curva típica de um fluxo de calor submetido na superfície frontal da amostra

Rescrevendo a Equação (4.53), tem-se

$$T_1 = T_0 + \frac{b\sqrt{\alpha}}{L} \cdot \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \frac{2b\sqrt{\alpha}}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t} \cdot \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau} \phi_1(\tau) d\tau \quad (\text{AIII.2})$$

Aplicando-se a Equação (AIII.1) na Equação (AIII.2), substituindo por expressões análogas  $\phi_1$  e substituindo  $t$  por  $\tau$  obtém-se, utilizando-se as tabelas de integrais de Spiegel (1992),

$$T_1 = T_0 + \frac{b\sqrt{\alpha}}{L} \cdot I_1 + \frac{2b\sqrt{\alpha}}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_m t} \cdot SI \quad (\text{AIII.3})$$

onde:

$$A_m = \beta_m^2 \cdot \alpha$$

$$I_1 = \int_{t_i}^t \phi_1(\tau) d\tau = a_0 \cdot (t - t_i) + \frac{a_1 \cdot (t^2 - t_i^2)}{2} + \frac{a_2 \cdot (t^3 - t_i^3)}{3} \\ + \frac{a_3 \cdot (t^4 - t_i^4)}{4} + \frac{a_4 \cdot (t^5 - t_i^5)}{5} + \frac{a_5 \cdot (t^6 - t_i^6)}{6}$$

$$SI = In_1 + In_2 + In_3 + In_4 + In_5 + In_6$$

$$In_1 = \frac{a_0}{A_m} (e^{A_m t} - e^{A_m t_i})$$

$$In_2 = \frac{a_1}{A_m} \left[ e^{A_m t} \left( t - \frac{1}{A_m} \right) - e^{A_m t_i} \left( t_i - \frac{1}{A_m} \right) \right]$$

$$In_3 = \frac{a_2}{A_m} \left[ e^{A_m t} \left( t^2 - \frac{2t}{A_m} + \frac{2}{A_m^2} \right) - e^{A_m t_i} \left( t_i^2 - \frac{2t_i}{A_m} + \frac{2}{A_m^2} \right) \right]$$

$$In_4 = \frac{a_3}{A_m} \left[ e^{A_m t} \left( t^3 - \frac{3t^2}{A_m} + \frac{6t}{A_m^2} - \frac{6}{A_m^3} \right) - e^{A_m t_i} \left( t_i^3 - \frac{3t_i^2}{A_m} + \frac{6t_i}{A_m^2} - \frac{6}{A_m^3} \right) \right]$$

$$In_5 = \frac{a_4}{A_m} \left[ e^{A_m t} \left( t^4 - \frac{4t^3}{A_m} + \frac{12t^2}{A_m^2} - \frac{24t}{A_m^3} + \frac{24}{A_m^4} \right) \right. \\ \left. - e^{A_m t_i} \left( t_i^4 - \frac{4t_i^3}{A_m} + \frac{12t_i^2}{A_m^2} - \frac{24t_i}{A_m^3} + \frac{24}{A_m^4} \right) \right]$$

$$In_6 = \frac{a_5}{A_m} \left[ e^{A_m t} \left( t^5 - \frac{5t^4}{A_m} + \frac{20t^3}{A_m^2} - \frac{60t^2}{A_m^3} + \frac{120t}{A_m^4} - \frac{120}{A_m^5} \right) \right. \\ \left. - e^{A_m t_i} \left( t_i^5 - \frac{5t_i^4}{A_m} + \frac{20t_i^3}{A_m^2} - \frac{60t_i^2}{A_m^3} + \frac{120t_i}{A_m^4} - \frac{120}{A_m^5} \right) \right]$$

O coeficiente de sensibilidade,  $X_\alpha$  definido pela Equação (4.58),

ou seja

$$X_\alpha = \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} \tag{AIII.4}$$

pode ser determinado. Aplicando-se a definição de coeficiente de

sensibilidade na Equação (AIII.3), obtém-se

$$X_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{b \cdot I_1}{\sqrt{\alpha} \cdot L} + \frac{b \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_m t} \cdot SI}{\sqrt{\alpha} \cdot L} - \frac{b \sqrt{\alpha} \cdot \beta_m^2 t \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_m t} \cdot SI}{L} + X_{\alpha 1} \quad (\text{AIII.5})$$

onde:

$$X_{\alpha 1} = 2b\sqrt{\alpha} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_m t} \cdot (In'_1 + In'_2 + In'_3 + In'_4 + In'_5 + In'_6)$$

$$In'_1 = -\frac{In_1}{\alpha} + \frac{a_0(t \cdot e^{A_m t} - t_i \cdot e^{A_m t_i})}{\alpha}$$

$$In'_2 = -\frac{In_2}{\alpha} + \frac{a_1}{A_m} \left[ \beta_m^2 t \cdot e^{A_m t} \left( t - \frac{1}{A_m} + \frac{1}{t \cdot A_m^2} \right) - \beta_m^2 t_i \cdot e^{A_m t_i} \left( t_i - \frac{1}{A_m} + \frac{1}{t_i \cdot A_m^2} \right) \right]$$

$$In'_3 = -\frac{In_3}{\alpha} + \frac{a_2}{A_m} \left[ \beta_m^2 t \cdot e^{A_m t} \left( t^2 - \frac{2t}{A_m} + \frac{4}{A_m^2} - \frac{4}{t \cdot A_m^3} \right) - \beta_m^2 t_i \cdot e^{A_m t_i} \left( t_i^2 - \frac{2t_i}{A_m} + \frac{4}{A_m^2} - \frac{4}{t_i \cdot A_m^3} \right) \right]$$

$$In'_4 = -\frac{In_4}{\alpha} + \frac{a_3}{A_m} \left[ \beta_m^2 t \cdot e^{A_m t} \left( t^3 - \frac{3t^2}{A_m} + \frac{9 \cdot t}{A_m^2} - \frac{18}{A_m^3} + \frac{18}{t \cdot A_m^4} \right) - \beta_m^2 t_i \cdot e^{A_m t_i} \left( t_i^3 - \frac{3t_i^2}{A_m} + \frac{9 \cdot t_i}{A_m^2} - \frac{18}{A_m^3} + \frac{18}{t_i \cdot A_m^4} \right) \right]$$

$$In'_5 = -\frac{In_5}{\alpha} + \frac{a_4}{A_m} \left[ \beta_m^2 t \cdot e^{A_m t} \left( t^4 - \frac{4t^3}{A_m} + \frac{16 \cdot t^2}{A_m^2} - \frac{48 \cdot t}{A_m^3} + \frac{96}{A_m^4} + \frac{96}{t \cdot A_m^5} \right) - \beta_m^2 t_i \cdot e^{A_m t_i} \left( t_i^4 - \frac{4t_i^3}{A_m} + \frac{16 \cdot t_i^2}{A_m^2} - \frac{48 \cdot t_i}{A_m^3} + \frac{96}{A_m^4} + \frac{96}{t_i \cdot A_m^5} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 In'_6 = & -\frac{In_6}{\alpha} + \frac{a_5}{A_m} \left[ \beta_m^2 t \cdot e^{A_m t} \left( t^5 - \frac{5 \cdot t^4}{A_m} + \frac{25 \cdot t^3}{A_m^2} - \frac{100 \cdot t^2}{A_m^3} - \frac{300 \cdot t}{A_m^4} + \frac{600}{A_m^5} + \frac{600}{t \cdot A_m^6} \right) \right. \\
 & \left. - \beta_m^2 t_i \cdot e^{A_m t_i} \left( t_i^5 - \frac{5 \cdot t_i^4}{A_m} + \frac{25 \cdot t_i^3}{A_m^2} - \frac{100 \cdot t_i^2}{A_m^3} - \frac{300 \cdot t_i}{A_m^4} + \frac{600}{A_m^5} + \frac{600}{t_i \cdot A_m^6} \right) \right]
 \end{aligned}$$

**APÊNDICE IV**

**DESENVOLVIMENTO DA INTEGRAL DA CONVOLUÇÃO**

**RELATIVA AO FLUXO DE CALOR EM UM MEIO**

**SEMI-INFINITO**

Este apêndice apresenta a solução para a diferença de temperatura da superfície frontal, considerando-se o fluxo de calor medido por um transdutor de fluxo de calor.

Ajusta-se os pontos experimentais do fluxo de calor com três curvas polinomiais de quinta ordem, conforme mostra uma curva típica apresentada na Figura (AIII.1).

Analogamente ao Apêndice III, obtém-se

$$Q_n = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5 \quad (\text{AIV.1})$$

A função transferência é dada pela Equação (4.13) por

$$Z_{be}(t) = \frac{b}{\sqrt{\pi t}} \quad (\text{AIV.2})$$

Escrevendo a Equação (3.36) tem-se

$$Y(t) = \int_{t_i}^t X(\tau) \cdot Z(t-\tau) \cdot d\tau \quad (\text{AIV.3})$$

Aplicando-se a Equação (AIV.1) e (AIV.2) na Equação (AIV.3) e substituindo na Equação (AIV.1)  $Q_n(t)$  por  $\phi_1$ , onde  $\phi_1 = X(t)$  no teorema da convolução e substituindo  $t$  por  $\tau$ , obtém-se

$$Y_n(t) = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_{t_i}^t \frac{a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (\text{AIV.4})$$

Utilizando-se as tabelas de integrais de Spiegel (1992) e resolvendo-se separadamente cada integral da Equação (AIV.4) para cada mudança de curva, obtém-se

$$Y_n(t) = \frac{2b\sqrt{t-t_i}}{3465\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6) \quad (\text{AIV.5})$$

onde:  $I_1 = 3465 a_0$

$$I_2 = 1155 a_1 t_i + 2310 a_1 t$$

$$I_3 = 693 a_2 t_i^2 + 924 a_2 t_i t + 1848 a_2 t^2$$

$$I_4 = 495 a_3 t_i^3 + 594 a_3 t_i^2 t + 792 a_3 t_i t^2 + 1584 a_3 t^3$$

$$I_5 = 385 a_4 t_i^4 + 440 a_4 t_i^3 t + 528 a_4 t_i^2 t^2 + 704 a_4 a_1 t_i t^3 + 1408 a_4 t^4$$

$$I_6 = 315 a_5 t_i^5 + 350 a_5 t_i^4 t + 400 a_5 t_i^3 t^2 + 480 a_5 t_i^2 t^3 + 640 a_5 t_i t^4 + 1280 a_5 t^5$$

Para cada curva a seguinte integração foi feita

$$Y_n(t) = Y_1(t) \quad \text{para} \quad 0 < t \leq t_1$$

$$Y_n(t) = Y_2(t) \quad \text{para} \quad t_1 < t \leq t_2$$

$$Y_n(t) = Y_3(t) \quad \text{para} \quad t_2 \leq t$$