

14011  
600.242.  
52430  
TES/mem

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO CONTATO ELÁSTICO ENTRE UM  
CILINDRO E UM PLANO, COM ATRITO SECO

800100

Dissertação apresentada à Universidade Federal  
de Uberlândia, por SEZIMÁRIA DE FÁTIMA PEREIRA  
SARAMAGO\*, para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Mecânica.

DIRBI - UFU MON 04003/90



1000175444

ORIENTADOR: Prof. Francisco Paulo Lépore Neto, Dr. Eng.

Uberlândia, junho de 1990

## AGRADECIMENTOS

- ao Prof. Francisco Paulo Lépore Neto, orientador da dissertação, pela colaboração e confiança;
- ao Prof. Valder Steffen Júnior, pelo apoio ;
- a João Bosco Saramago, pelo carinho e incentivo em todos os momentos.

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO CONTATO ELÁSTICO ENTRE UM  
CILINDRO E UM PLANO, COM ATRITO SECO

SUMÁRIO

. LISTA DE FIGURAS	vi
. LISTA DE SÍMBOLOS	x
1. INTRODUÇÃO	1
2. MODELO MATEMÁTICO DO CONTATO ELÁSTICO COM ATRITO	6
2.1. Aspectos Mecânicos do Contato com Atrito	6
2.2. Apresentação do Problema	15
2.3. Determinação das Componentes de Deslocamento	17
3. PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO APLICADO AO CONTATO ELÁSTICO	31
3.1. Contato sem Atrito	34
3.2. Contato com Atrito (sem escorregamento)	37
4. MODELO NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA	40
4.1. Metodologia Adotada para a Solução do Problema	40
4.2. Solução Numérica das Equações de Deslocamento	41
4.3. Solução Numérica para o Funcional	48

4.4. Gradientes do Funcional	55
4.5. Programa de Otimização	72
4.6. Apresentação do Fluxograma	74
4.6.1 Considerações sobre o Fluxograma	75
5. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS	78
6. CONCLUSÃO	93
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS	96
8. ANEXO 1. Revisão de Alguns Conceitos da Teoria da Elasticidade	100

SARAMAGO, S.F.P., Contribuição ao estudo do contato elástico entre um cilindro e um plano, com atrito seco. Uberlândia, 1990, 105 pp.

#### RESUMO

Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo do contato, sem escorregamento, entre corpos elásticos na presença de atrito seco de Coulomb, com aplicação para o caso de um cilindro em contato com um plano.

O modelo matemático é obtido pela superposição dos deslocamentos, gerados pelas tensões normais e tangenciais que atuam no contato, permitindo definir o funcional da energia elástica de deformação. Os deslocamentos são determinados pela aplicação do método de diferenças finitas.

A distribuição de pressão e a área de contato entre os corpos são determinados numericamente pela minimização do funcional, utilizando o método de otimização do multiplicador de Lagrange aumentado, adotando como variáveis de decisão os coeficientes de um polinômio de terceiro grau e os limites da área de contato.

---

Mecânica do contato, contato com atrito seco, contato cilindro / plano

SARAMAGO, S.F.P., Contribution to the study of the elastic contacts between a cylinder and a plane, with dry friction.

Uberlandia, 1990, 105 pp.

#### ABSTRACT

A contribution to the study of the slip less contact between two elastic bodies, using the Coulomb's dry friction model, is presented.

The mathematical model for the problem of a cylinder in contact with a plane is obtained by the superposition of the displacement by the normal and tangential stress acting in the contact area.

The pressure distribution and boundary of the contact area are determined by the minimization of the elastic energy function, by using the Augmented Lagrange Multiplier Optimization method, adopting the coefficients of a third degree polynomial and the limits of the contact area as decision variables.

---

Contact mechanics, dry friction contact, cylinder / plane contact.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	DESCRIÇÃO	PAG.
2.1	Modelo para o contato bi-dimensional, entre dois corpos elásticos.	7
2.2	Contato plano, sujeito a deformações assimétricas.	9
2.3	Contato plano, sem atrito.	11
2.4	Contato sem atrito, tensões assimétricas.	11
2.5	Contato com atrito, carga normal desprezível.	12
2.6	Contato com atrito, sujeito à carga externa.	13
2.7	Contato sem atrito, cilindro não circular, puramente elástico.	14
2.8	Modelo adotado para o contato entre o cilindro e o plano semi-infinito.	16

FIGURA	DESCRIÇÃO	PAG.
2.9	Representação de alguns pontos e seus deslocamentos, para o contato de um cilindro e um plano.	18
3.1	Representação do contato entre um cilindro e um sólido plano semi-infinito.	32
4.1	Divisão da área de contato em áreas infinitesimais, retangulares e iguais	42
4.2	Área infinitesimal retangular, sujeita a uma pressão constante $\bar{z}\nu$ e $\bar{x}\nu$ .	43
4.3	Esquema para a tensão tangencial, separada em parcelas, para efeito de análise.	50
4.4	Estudo do deslocamento tangencial considerando separadamente o efeito das tensões atuantes.	53
4.5	Modelo para a distribuição de pressão, segundo um polinômio de terceiro grau, contato com atrito.	55
4.6	Fluxograma de blocos que representa o programa utilizado para a solução numérica do problema.	74

FIGURA	DESCRIÇÃO	PAG.
5.1	Comparação entre a função de distribuição da pressão normal calculada analiticamente (curva elíptica) e numericamente (curva polinomial), ao longo da área de contato.	79
5.2	Distribuição da tensão normal e tangencial sobre a área de contato, para uma carga externa $Z_1=6000$ N e momento nulo.	81
5.3	Deslocamento normal ( $w$ ) dos pontos da área de contato, ao longo do eixo x. ( $Z_1=6000$ N, $C_a=0$ )	82
5.4	Deslocamento tangencial ( $u$ ) dos pontos da área de contato, ao longo do eixo x, considerando: (a) com atrito, (b) sem atrito.	83
5.5	Distribuição da tensão normal ao longo da área de contato, mostrando a influência do momento externo. ( $R_m = + 0.9$ , $Z_1 = 6000$ N)	85
5.6	Distribuição da tensão tangencial ao longo da área de contato, mostrando a influência do momento externo. ( $R_m = + 0.9$ , $Z_1 = 6000$ N)	86

FIGURA	DESCRIÇÃO	PAG.
5.7	Deslocamento normal ( $w$ ) dos pontos situados no centro da área de contato, ao longo do eixo $x$ , sob a influência do momento externo positivo.	88
5.8	Deslocamento tangencial ( $u$ ) dos pontos situados no centro da área de contato, ao longo do eixo $x$ , (a) momento positivo, com atrito (b) momento nulo, sem atrito.	89
5.9	Deslocamento normal ( $w$ ) dos pontos situados no centro da área de contato, ao longo do eixo $x$ , sob a influência do momento externo negativo.	90
5.10	Deslocamento tangencial ( $u$ ) dos pontos situados no centro da área de contato, ao longo do eixo $x$ : (a) momento negativo, com atrito (b) momento nulo, sem atrito.	91
5.11	Influência da aplicação do momento externo sobre os limites da área de contato. ( $Z_1=6000$ N, $f=0.35$ )	92

## LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNID.
A,B	contornos da superfície de contato	[m]
a,ℓ	contornos de uma área infinitesimal	[m]
c	parâmetro escalar de penalidade	*
C <sub>a</sub>	momento aplicado	[Nm]
C <sub>max</sub>	momento máximo	[Nm]
C <sub>0</sub>	coeficiente do termo de terceiro grau do polinômio $Z^{\nu}$	[N/m <sup>5</sup> ]
C <sub>1</sub>	coeficiente do termo de segundo grau do polinômio $Z^{\nu}$	[N/m <sup>4</sup> ]
C <sub>2</sub>	coeficiente do termo de primeiro grau do polinômio $Z^{\nu}$	[N/m <sup>3</sup> ]
C <sub>3</sub>	coef. do termo independente do polinômio $Z^{\nu}$	[N/m <sup>2</sup> ]

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNID.
$C_{se}$	controle da relação dos módulos de elasticidade dos materiais em contato	*
$C_{sx}$	controle do sinal da variável $x$	*
$d_i$	deslocamento total de um ponto do corpo $i$	[m]
$e_{ij}$	componentes de deformação	*
$E$	módulo de Young (módulo de elasticidade)	[N/m <sup>2</sup> ]
$f$	coeficiente de atrito seco de Coulomb	*
(F,G,J)	funções harmônicas do vetor potencial	[N]
$F_h$	funcional para o caso com atrito	[J]
$g(x)$	equação da fronteira entre os corpos	[m]
$g'(x)$	derivada da equação da fronteira entre os corpos	*
$h_z$	distância entre os corpos na direção do eixo $z$	[m]

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNID.
$h_x$	distância entre os corpos na direção do eixo x	[m]
$H$	distância entre os corpos na direção do eixo z, no estado não deformado	[m]
$H_c$	entalpia de contato	[J]
$I_1, I_2, I_3$	integrais auxiliares no cálculo dos deslocamentos	[m]
$K$	módulo de compressão	[N/m <sup>2</sup> ]
$K_{ai}, K_{bi}, K_{ci}$	coeficiente que relaciona propriedades elásticas do material do corpo i	[m <sup>2</sup> /N]
$L$	comprimento do cilindro	[m]
$\Omega$	função Lagrangeana.	[J]
$n_x, n_y$	número de divisões da área de contato ao longo do eixo x e do eixo y	*
$PC_1, PC_2$	corpos em contato	-

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNID.
$\mathfrak{P}$	potência	[W]
$q(\bar{V}_d)$	função de restrição de igualdade	[N]
$Q$	quantidade de calor	[J]
$r$	distância do ponto onde se calcula o deslocamento ao ponto de aplicação da carga	[m]
$R$	distância da imagem óptica do ponto onde se calcula o deslocamento ao ponto de aplicação da carga	[m]
$R_m$	relação entre o momento atuante e o momento máximo	*
$s(\bar{V}_d)$	função de restrição de desigualdade	[m]
$S$	Superfície de contato entre dois corpos	[m <sup>2</sup> ]
$(\vec{t}, \vec{n})$	vetor unitário local, tangencial e normal	-
$T$	trabalho realizado pelo sistema	[J]
$(u, v, w)$	deslocamentos no ponto $(x, y, z)$	[m]

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNID.
$(u_0, v_0, w_0)$	deslocamentos de um ponto da área de contato	[m]
$U$	deslocamento total na direção x	[m]
$U_i$	energia interna do sistema	[J]
$v(x)$	vetor velocidade local	[m/s]
$\bar{V}_d$	vetor das variáveis de decisão	[m, N/m <sup>2</sup> ]
$\bar{x}$	abscissa do baricentro da função $\sigma_n(x)$	[m]
$(x, y, z)$	eixos coordenados	*
$(x', y', z')$	eixos auxiliares, sistema referência local	*
$(X_1, Y_1, Z_1)$	forças atuantes no corpo	[N]
$X_D$	pressão tangencial na área de contato	[N/m <sup>2</sup> ]
$Y_D$	pressão longitudinal na área de contato	[N/m <sup>2</sup> ]
$Z_D$	pressão normal sobre a área de contato	[N/m <sup>2</sup> ]

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNID.
$\bar{z}_\nu, \bar{x}_\nu$	pressão constante, normal e tangencial	[N/m <sup>2</sup> ]
$y_i(\bar{V}_d)$	função quadrática de penalidade	[J]
$W$	deslocamento total na direção z	[m]
$\Delta$	dilatação volumétrica	[m]
$\Psi_1$	função logarítmica	*
$\Psi_4$	função harmônica	[m]
$\Psi_2, \Psi_3$	funções harmônicas	[N]
$(\alpha, \beta, \theta)$	cossenos diretores normais à superfície	*
$\gamma_{ij}$	componentes de deformação rotacional	[m]
$\lambda, \mu$	constantes de Lamé, $\mu$ denominado rigidez	[N/m <sup>2</sup> ]
$\lambda_1$	vetor dos multiplicadores de Lagrange	*
$\nu$	direção normal à um plano considerado	*
$\sigma$	razão de Poisson	*
$\sigma_n$	tensão normal	[N/m <sup>2</sup> ]

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNID.
$\sigma_t$	tensão tangencial	[N/m <sup>2</sup> ]
$\phi$	função de deslocamento potencial	[m]
$\varphi$	raio do cilindro	[m]
$\Omega_1$	velocidade angular	[rd/s]

\* termos adimensionais

## 1. INTRODUÇÃO

Quando dois corpos são pressionados um contra o outro, uma área de contato será formada entre eles em consequência de suas propriedades elásticas. Se não existe atrito entre as superfícies e se os corpos estão sujeitos apenas à carga normal, tem-se o conhecido problema de contato normal.

Mesmo para os casos mais simples, quando os corpos são considerados como espaços elásticos semi-infinitos, a solução analítica do problema é obtida somente quando se considera superfícies geométricas especiais para ambos os corpos.

O contato normal foi inicialmente estudado por Hertz [1]. Ele calculou, com verificação experimental, a distribuição de carga agindo sobre a área de contato e também as tensões nos corpos, utilizando uma função potencial Newtoniana. A solução analítica foi obtida para superfícies quadráticas, conforme verificado por Love [2].

Através de uma trabalhosa integração aritmética Fuchs [3] obteve as tensões nos corpos. Alguns anos depois, Morton e Close [4], usando funções harmônicas, calcularam as tensões para o caso de uma esfera pressionada sobre um plano semi-infinito por carga normal.

Em 1930, Thomas e Hoersch [5], transformaram a solução Hertziana para as tensões, para os casos de corpos com eixos de simetria, em integrais elípticas padrão e determinaram a tensão cisalhante no eixo de simetria. Estes cálculos de tensões foram verificados experimentalmente.

Independentemente, Belajef [6] calculou as tensões para qualquer ponto dos espaços semi-infinitos, utilizando coordenadas elípticas, obtendo uma solução similar aos resultados, obtidos nos eixos de simetria, por Thomas e Hoersch.

Solução similar também foi obtida por Foepp1 [7] para os problemas de um cilindro e de uma esfera pressionados contra uma placa plana, e os resultados foram verificados experimentalmente por fotoelasticidade.

Em 1953, Galin [8] descreveu as soluções obtidas por vários autores, para as mais diversificadas superfícies, mas sempre considerando conhecidos os limites do contorno da área de contato.

O efeito nas tensões, provocado por uma carga tangencial, não foi considerado pelos pesquisadores até 1939, quando Lundberg [9] desenvolveu uma teoria geral para o contato elástico entre dois corpos semi-infinitos. Neste estudo, ele considera o contato tri-dimensional, assumindo uma distribuição de pressão semi-elíptica na direção transversal da área de contato e constante no sentido longitudinal.

Em 1949, Mindlin [10] estudou a distribuição da força tangencial através da área de contato, quando um corpo escorrega sobre o outro. Ainda neste ano, Poritsky [11] apresentou uma

solução para o mesmo problema, utilizando uma função de Airy.

Todos estes autores também consideram a distribuição de pressão como sendo conhecida a priori.

A solução do problema inverso, ou seja, o de encontrar a área de contato e a distribuição de pressão atuante, quando são conhecidas as superfícies de ambos os corpos, suas propriedades elásticas e a força compressiva total, somente foi objeto de estudo alguns anos mais tarde. Kalker [12] provou a unicidade da solução para este tipo de problema, utilizando a elasticidade linear. Mais recentemente, [13-16] importantes trabalhos foram desenvolvidos nesta linha de pesquisa, com a obtenção de resultados feita através da aplicação de métodos numéricos.

No Brasil, Galeão e outros [17], apresentam um algoritmo para a resolução do problema de contato sem atrito entre sólidos deformáveis. O método dos elementos finitos foi utilizado na discretização do problema contínuo, com a apresentação de alguns exemplos de aplicação.

Uma solução numérica de problemas de contato unilateral com atrito é dada por Mamiya e outros [18], na qual o modelo, descrito em termos variacionais, é discretizado via elementos finitos e a minimização do funcional é feita pelo algoritmo de Gauss-Seidel, com relaxação e projeção sobre um convexo.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma contribuição ao estudo do contato entre corpos elásticos, na presença de atrito, com aplicação para o caso de um cilindro em contato com um plano. A proposta é determinar a área de contato e a distribuição de pressão atuante, através de técnicas de

otimização e de métodos numéricos, com base no princípio de que a solução é aquela que corresponde a uma energia interna total mínima.

Os campos de aplicação da mecânica do contato são bastante diversificados, tendo em vista que uma das formas usuais de transmissão de forças em sistemas mecânicos é através do contato entre os corpos elásticos. As aplicações de interesse das áreas de Dinâmica de Sistemas e de Materiais do Departamento de Engenharia Mecânica da UFU, são o estudo do contato entre pneu-solo, roda-trilho e dos mecanismos do fenômeno abrasivo.

A originalidade da abordagem deste trabalho pode ser constatada sob dois aspectos principais. O primeiro, é o fato que assumem-se como variáveis de projeto os coeficientes de um polinômio de distribuição de pressão, o que torna o programa de otimização bastante versátil. Outro aspecto interessante é que, conforme verificado na literatura pesquisada, o processo de integração das equações normalmente emprega a simplificação de vários termos, enquanto que neste estudo propõe-se a utilização de equações completas para o modelo adotado.

O capítulo 2 apresenta o modelo matemático para o problema do contato entre um cilindro e um plano elásticos e, as equações para as componentes de deslocamento dos corpos são determinadas.

Através do estudo da energia interna total, no capítulo 3, obtém-se um funcional cuja minimização permite o cálculo da solução do problema em termos da pressão e da área de contato. Desta forma, torna-se possível a obtenção das tensões, deformações e deslocamentos dos corpos. O estudo é desenvolvido

em duas etapas: inicialmente considera-se o contato sem a presença de atrito, e a seguir as equações são desenvolvidas para o caso do contato com atrito seco, que obedece à formulação para o atrito seco de Coulomb.

O modelo numérico utilizado é apresentado no quarto capítulo. O cálculo das componentes de deslocamento é feito por diferenças finitas, e a otimização do funcional através do Método do multiplicador de Lagrange Aumentado.

Nos capítulos subsequentes são apresentados alguns casos estudados e a discussão dos resultados.

Conceitos importantes da teoria da elasticidade, estão incluídos no Anexo I, com a finalidade de auxiliar futuros trabalhos nesta mesma linha de pesquisa, bem como a compreensão das técnicas empregadas na dedução das equações das componentes de deslocamentos.

## 2. MODELO MATEMÁTICO DO CONTATO ELÁSTICO COM ATRITO.

### 2.1 ASPECTOS MECÂNICOS DO CONTATO COM ATRITO

Como uma primeira aproximação para estabelecer a relação entre a força de atrito e a natureza dos materiais em contato, o atrito é considerado como sendo estritamente um fenômeno de superfície, que independe da forma dos corpos em contato. Supõe-se também que a força de atrito é uma resultante das tensões tangenciais à superfície do corpo,  $\sigma_t(x)$ , e que estas tensões não dependem da natureza dos materiais em contato.

Seja o modelo físico, apresentado na figura (2.1), que caracteriza o contato bi-dimensional entre dois corpos elásticos, PC1 e PC2, em uma condição de equilíbrio, sendo o contorno definido por  $B \leq x \leq A$ . Neste caso, supõe-se que a distribuição de pressão na direção longitudinal,  $y$ , é constante.

No ponto  $O_1$  do corpo PC1 estão aplicadas as resultantes das cargas externas, sendo  $\vec{C}_a$  o momento de atrito e  $\vec{A}_1$  a resultante da força normal  $\vec{Z}_1$  e da força de atrito  $\vec{X}_1$ .

Sobre a fronteira  $g(x)$ , cuja derivada é dada por  $g'(x)$ , agem as tensões  $\vec{q}(x)$  devidas à ação de PC2 sobre PC1, que apresentam componentes  $\sigma_t(x)$  e  $\sigma_n(x)$ , segundo um sistema de



A equação (2.1.a) mostra a força de atrito  $X_1$  dada por uma expressão que considera a componente normal e tangencial da tensão. Como por definição, uma força de atrito pura integra somente a componente tangencial da tensão, para que  $X_1$  seja uma força de atrito pura, na equação (2.1.a) o termo de forma deve verificar a igualdade:

$$\int_B^A \sigma_n g'(x) dx = 0 \quad (2.2)$$

Esta condição é cumprida nos seguintes casos:

a)  $g'(x) = 0 \Rightarrow$  a fronteira  $g(x)$  é plana. Esta é uma condição muito severa, sendo aplicada somente quando o contato se dá entre um corpo com baixo módulo de elasticidade e um plano rígido.

b)  $\sigma_n$  e  $g'(x)$  são funções ortogonais. Esta condição é cumprida nos contatos Hertzianos puros, uma vez que  $\sigma_n$  e  $g(x)$  são funções simétricas em relação ao eixo Oz.

Assim, os efeitos de forma alteram a força de atrito quando  $g'(x) \neq 0$ , ou quando  $g(x)$  e  $\sigma_n$  não são simétricos em relação a Oz. As causas desta assimetria podem ser: a rugosidade das superfícies, uma assimetria inicial dos corpos antes de serem deformados ou, provocadas pelas cargas externas.

A seguir será examinado alguns casos que servem de modelos a serem adotados para o estudo do contato de dois corpos:

I) Fronteira plana, deformações assimétricas: Seja o cilindro deformável infinitamente longo, em rotação em torno de seu centro  $O_1$ , sendo comprimido contra um plano fixo e rígido, mostrado na Fig.(2.2):

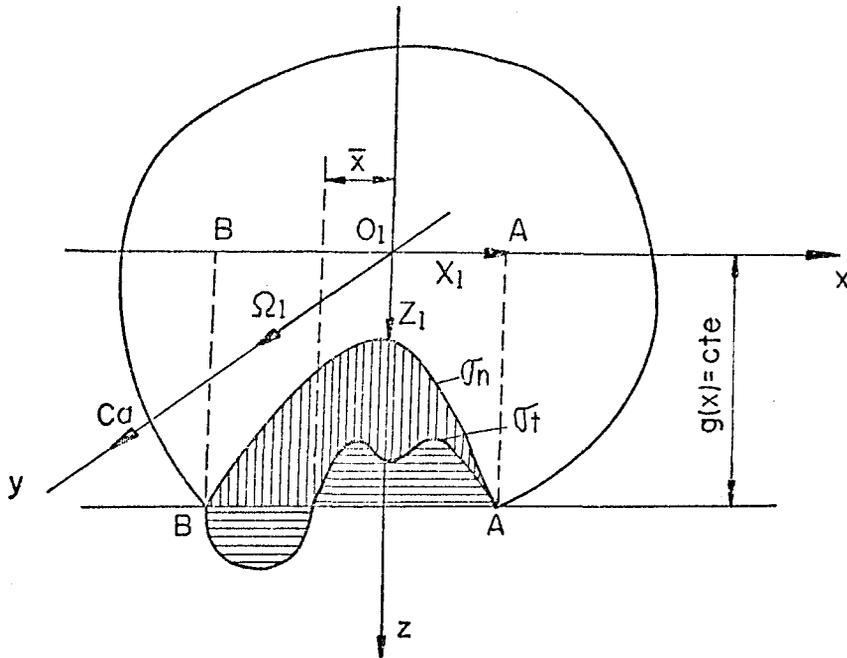


Figura 2.2. - Contato plano, sujeito a deformações assimétricas.

Como a equação da fronteira  $g(x)$  é constante, resulta que sua derivada  $g'(x)$  é nula, portanto as equações (2.1) são dadas por:

$$X_1 = \int_B^A \sigma_t \, dx$$

$$Z_1 = - \int_B^A \sigma_n \, dx$$

$$C_a = -g \int_B^A \sigma_t dx - \int_B^A \sigma_n x dx \quad \text{ou,}$$

$$C_a = - \left[ g X_1 + \bar{x} Z_1 \right] \quad (2.4)$$

onde,  $\bar{x}$  é a abicissa do baricentro da função  $\sigma_n(x)$ .

Assim, a potência necessária para o cilindro atingir a velocidade angular  $\Omega_1$ , vale:

$$\mathfrak{P} = - \vec{C}_a \vec{\Omega}_1 \quad \text{ou,} \quad \mathfrak{P} = \left[ g X_1 + \bar{x} Z_1 \right] \Omega_1 \quad (2.5)$$

Esta expressão mostra a contribuição do efeito de superfície:  $(g X_1 \Omega_1)$ , e do efeito de volume:  $(\bar{x} Z_1 \Omega_1)$ .

II) Contato plano, sem atrito: Considerando  $\sigma_n(x)$ , A e B, simétricos em relação à Oz, conforme Fig.(2.3), resulta:

$$X_1 = 0, \quad C_a = 0 \quad (2.6)$$

Em regime estacionário, a potência necessária para deformar o cilindro será nula.

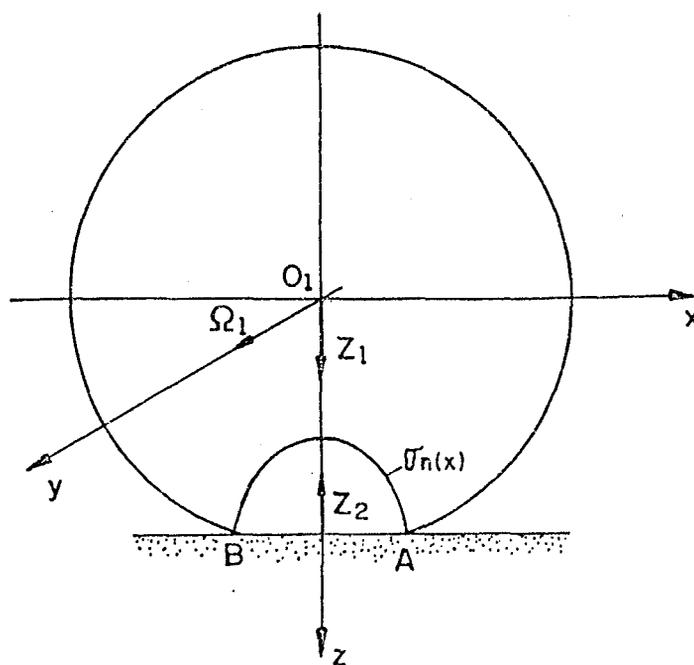


Figura 2.3. - Contato plano, sem atrito.

III) Contato sem atrito,  $\sigma_n(x)$  assimétrico: neste caso, a tensão normal e os limites do contorno A e B, não são simétricos em relação a Oz, o que pode ser verificado na Fig.(2.4), portanto:

$$X_1 = 0, \quad C_a = \bar{x} Z_1, \quad \beta = -\bar{x} Z_1 \Omega_1 \quad (2.7)$$

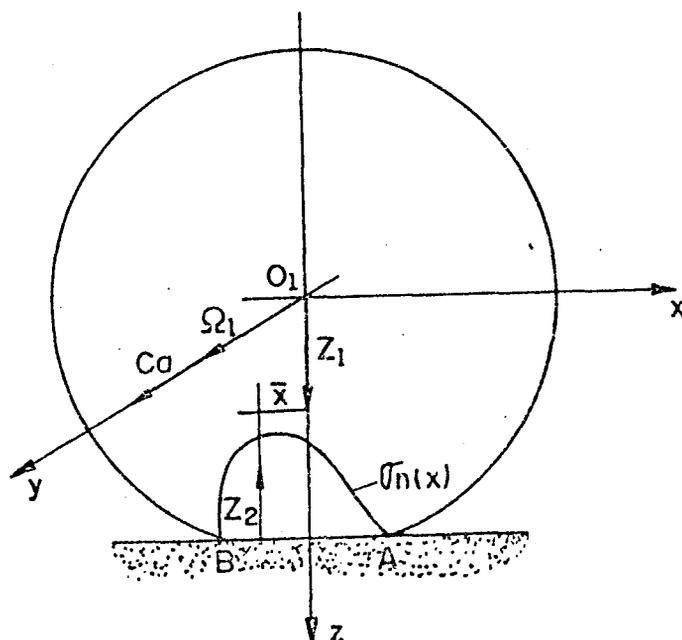


Figura 2.4. - Contato sem atrito, tensões assimétricas

Sendo os efeitos de superfície nulos, a potência é gasta para vencer o atrito interno.

IV) O atrito existe e a carga normal é desprezível: A Fig.(2.5) representa uma primeira aproximação para o caso de um cilindro de massa desprezível, com um material muito colante, em contato com um plano. Como  $\sigma_n \cong 0$ , isto leva a:

$$C_a = -g(x) X_1, \quad \mathfrak{P} = g(x) X_1 \Omega_1 \quad (2.8)$$

A força de atrito é responsável pela deformação do cilindro, e a potência é consumida para vencer, simultaneamente, os efeitos de superfície e de volume.

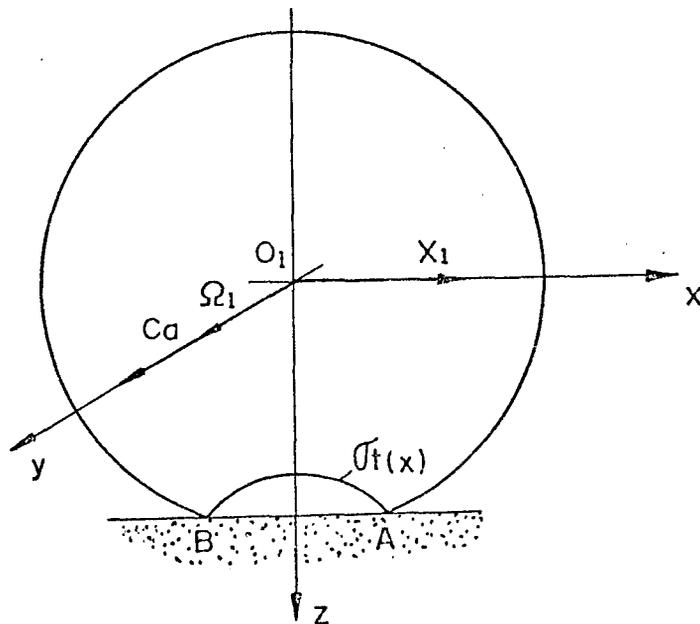


Figura 2.5. - Contato com atrito, carga normal desprezível.

V) O atrito existe, a carga aplicada não é desprezível:  
 Neste caso, apresentado na Fig.(2.6), as equações para o momento e a potência necessária são dadas por:

$$C_a = -g(x) X_1 - \bar{x} Z_1$$

$$\mathcal{P} = \left[ g(x) X_1 + \bar{x} Z_1 \right] \Omega_1 \quad (2.9)$$

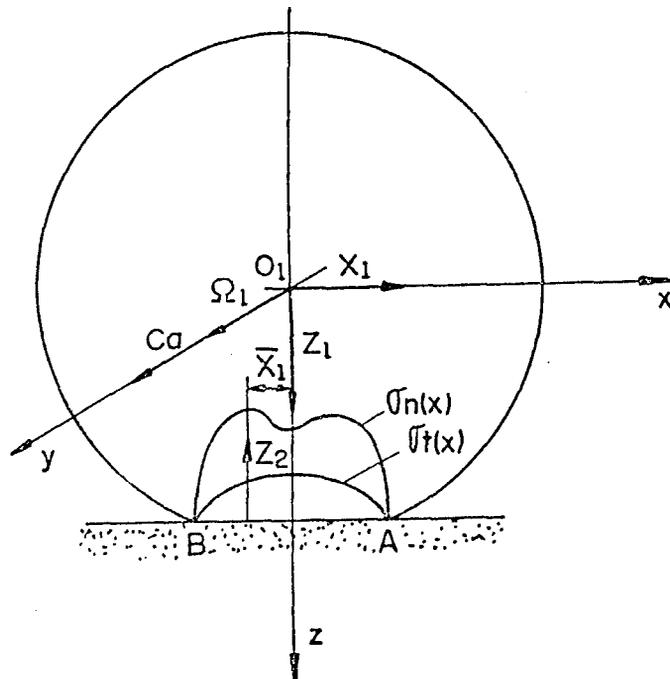


Figura 2.6. - Contato com atrito, sujeito à carga externa.

Como os limites do contorno, A e B, são totalmente determinados por  $X_1$  e  $Z_1$ , os dois termos da equação acima não podem ser estudados separadamente. Sobre o efeito de  $X_1$ , a área de contato se desloca, contribuindo para a existência do baricentro  $\bar{x}$ .

VI) Cilindro não circular, puramente elástico, em contato sem atrito com um plano rígido: Na Fig.(2.7) tem-se  $g(x)$  assimétrico em relação à  $Oz$  e, como o contato é sem atrito e o material puramente elástico, a potência necessária para arrastar o cilindro é nula. Logo:

$$\mathfrak{P} = - \bar{x} Z_1 \Omega_1 = 0 \quad (2.10)$$

Como  $Z_1 \neq 0$ ,  $\Omega_1 \neq 0$ , resulta que  $\bar{x} = 0$ , portanto a distribuição da tensão normal é tal que leva o baricentro a situar-se sobre o eixo  $Oz$ .

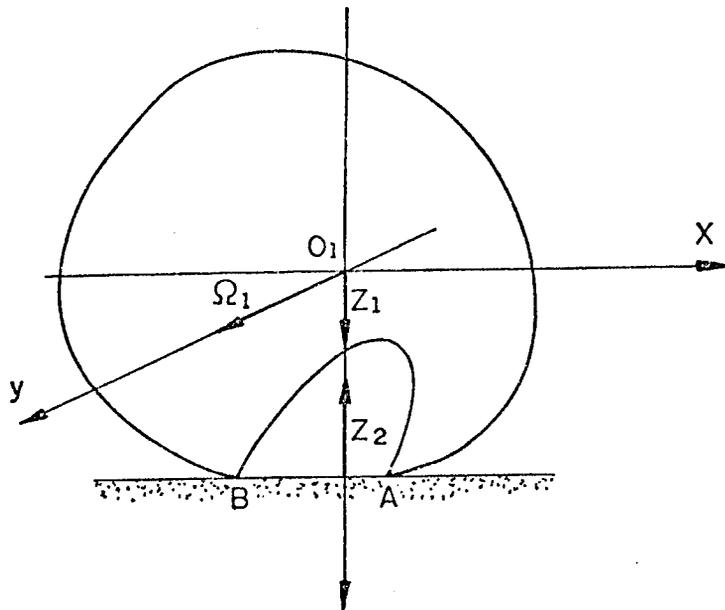


Figura 2.7. - Contato sem atrito; cilindro não circular, puramente elástico

## 2.2 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

A fig.(2.8) apresenta a configuração de dois corpos elásticos em contato, em uma região cuja superfície é denominada S. O corpo PC1 é definido como um cilindro de raio  $\varphi$  e comprimento L e, o corpo PC2 como uma região plana semi-infinita. Sobre o cilindro atua uma força normal  $Z_1$  e um momento  $C_a$ .

Um sistema inercial de coordenadas cartesianas é adotado, de modo que o eixo z coincide com a normal interna ao corpo PC2 e o eixo x com a linha de contato. Os limites do contorno são definidos por  $B \leq x \leq A$  e  $-L/2 \leq y \leq L/2$ .

A pressão exercida pelo corpo PC1 sobre o corpo PC2 é uma função da posição e será decomposta em uma componente normal  $Z\nu$ , perpendicular à superfície, e uma componente tangencial  $X\nu$  paralela ao plano de contato.

Aplicando o modelo de atrito seco de Coulomb, a área de contato é dividida em regiões de escorregamento e de aderência. Na região de escorregamento, o vetor velocidade local,  $v(x)$ , da superfície do corpo PC1 em relação à superfície do corpo PC2, é diferente de zero, sendo a tensão tangencial à força  $(X\nu)$  igual, em magnitude, ao produto do coeficiente de atrito cinemático pela pressão normal  $Z\nu$ .

Na área de aderência o escorregamento é nulo e, para um coeficiente de atrito estático,  $f$ , tem-se que:

$$| X\nu | \leq f Z\nu \quad (2.11)$$



Como hipóteses simplificadoras, neste trabalho, será considerado que:

- a) o cilindro se encontra estacionário, portanto  $\Omega_1$  é nulo,
- b) não existe escorregamento na região do contato,
- c) o coeficiente de atrito mantém-se constante na região de contato e  $|X\nu| \leq f Z\nu$ ,
- d) os corpos são constituídos por materiais elásticos, homogêneos e isotrópicos,
- e) a região de contato é plana,
- f) a distribuição de pressão se mantém constante no sentido longitudinal do contato, independente de  $y$ .

### 2.3 DETERMINAÇÃO DAS COMPONENTES DE DESLOCAMENTO

O problema do contato entre um corpo e um plano, será formulado à partir do conhecimento das forças que atuam na superfície de contato. Sua solução consiste na determinação dos campos de deslocamentos, de tensões e de deformações dos corpos em contato.

Sejam  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_1, y_1, -z_1)$  pontos simétricos em relação ao plano de contato, conforme mostrado na fig.(2.9). Estes pontos distam  $r$  e  $R$ , respectivamente, de um ponto genérico  $(x, y, z)$ , portanto:

$$R = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z+z_1)^2]^{1/2}$$

$$r = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]^{1/2} \quad (2.12)$$

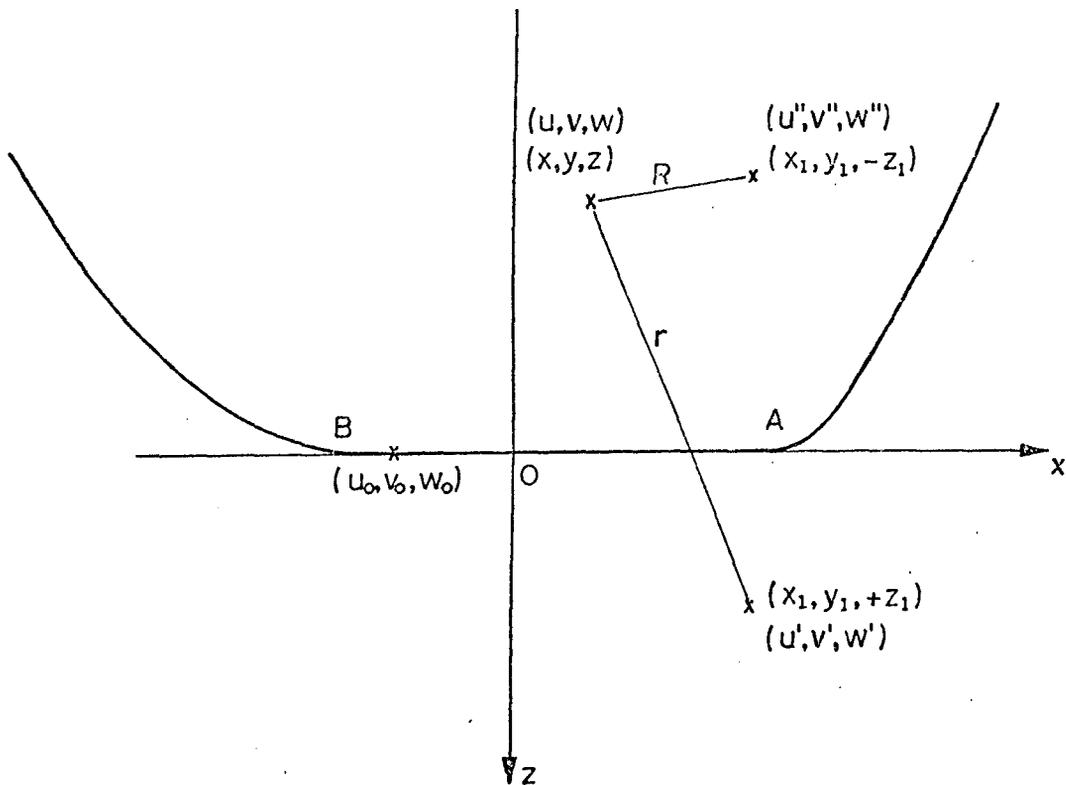


Fig.2.9. - Representação de alguns pontos e seus deslocamentos, para o contato de um cilindro e um plano.

O deslocamento  $(u', v', w')$ , no ponto  $(x_1, y_1, z_1)$ , que satisfaz as condições de continuidade e de equilíbrio [2], é dado por:

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} + 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x \partial z}, \\
 v' &= \frac{\partial R^{-1}}{\partial y} + 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial y \partial z}, \\
 w' &= - \frac{\partial R^{-1}}{\partial z} + 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x \partial z}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

As tensões  $X\nu, Y\nu, Z\nu$ , no plano  $z = 0$ , podem ser calculadas a partir dos deslocamentos  $(u_0, v_0, w_0)$ , neste plano, considerando-se  $\cos(z, \nu) = -1$  :

$$\begin{aligned}
 X\nu &= -2\mu \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z} = 2\mu \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x \partial z} \\
 Y\nu &= -2\mu \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y \partial z} = 2\mu \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial y \partial z} \\
 Z\nu &= -2\mu \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2} = -2\mu \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z^2}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Alternativamente, estas tensões podem ser calculadas à partir dos deslocamentos  $(u', v', w')$ , sendo expressas por:

$$X'_{\nu} = -\mu \left( \frac{\partial u_{o'}}{\partial z} + \frac{\partial w_{o'}}{\partial x} \right) = -2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x \partial z}$$

$$Y'_{\nu} = -\mu \left( \frac{\partial w_{o'}}{\partial y} + \frac{\partial v_{o'}}{\partial z} \right) = -2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial y \partial z}$$

$$\begin{aligned} Z'_{\nu} &= - \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u_{o'}}{\partial x} + \frac{\partial v_{o'}}{\partial y} + \frac{\partial w_{o'}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w_{o'}}{\partial z} \right\} = \\ &= 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

As equações (2.14) e (2.15), que representam as tensões de contato, são idênticas, à menos de um fator constante igual a  $-(\lambda + \mu)/(\lambda + 3\mu)$ .

O deslocamento  $(u_{o}''', v_{o}''', w_{o}''')$  do ponto  $(x_1, y_1, -z_1)$ , simétrico à  $(x_1, y_1, z_1)$ , é calculado à partir de  $(u_{o}', v_{o}', w_{o}')$ :

$$(u_{o}''', v_{o}''', w_{o}''') = -(\lambda + \mu)/(\lambda + 3\mu)(u_{o}', v_{o}', w_{o}') \quad (2.16)$$

Quando são especificados os deslocamentos da superfície, o valor da dilatação,  $\Delta$ , do ponto  $(x_1, y_1, z_1)$ , conforme Anexo 1, é dado pela equação:

$$\Delta = - \frac{\mu}{\pi(\lambda + 3\mu)} \iint \left( \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z} u_o + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y \partial z} v_o + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2} w_o \right) dx dy \quad (2.17)$$

Quando as tensões na superfície são conhecidas, a dilatação,  $\Delta$ , é calculada por:

$$\Delta = - \frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)} \iint \left( X\nu \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + Y\nu \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + Z\nu \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \right) dx dy \quad (2.18)$$

A dilatação pode ser expressa em termos de funções logarítmicas e harmônicas no espaço considerado, como se segue.

Seja uma função  $\Psi_1$  definida por:

$$\Psi_1 = \ln(z + z_1 + R) \quad (2.19)$$

tal que:

$$\partial \Psi_1 / \partial z_1 = 1/r \quad \text{para } z = 0$$

e,

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1} = \frac{1}{R} \quad (2.20)$$

Na superfície  $z = 0$ , à partir das equações (2.12) resulta:

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} = - \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_1} = - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z_1 \partial x_1}$$

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z_1 \partial y_1} \quad \text{e,} \quad \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} = - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z_1^2} \quad (2.21)$$

Desta forma, define-se uma função  $\Psi_2$ , harmônica no espaço, tal que:

$$\Psi_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial y_1} + \frac{\partial J}{\partial z_1} \quad (2.22.a)$$

onde,

$$F = \iint X\nu \Psi_1 \, dx dy, \quad G = \iint Y\nu \Psi_1 \, dx dy \quad e,$$

$$J = \iint Z\nu \Psi_1 \, dx dy \quad (2.22.b)$$

A partir da definição da função  $\Psi_2$ , a dilatação,  $\Delta$ , no ponto  $(x_1, y_1, z_1)$ , dada pela equação (2.18), resulta:

$$\Delta = - \frac{1}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_1} \quad (2.23)$$

Conhecidas as tensões, deseja-se obter os deslocamentos. Observa-se que as funções harmônicas  $F$ ,  $G$ ,  $J$  e  $\Psi_2$ , são definidas de forma que os valores de  $X\nu$ ,  $Y\nu$  e  $Z\nu$ , em  $z_1 = 0$ , são iguais a:

$$X\nu = \lim_{z_1 \rightarrow +0} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}, \quad Y\nu = \lim_{z_1 \rightarrow +0} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 G}{\partial z_1^2}, \quad Z\nu = \lim_{z_1 \rightarrow +0} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 J}{\partial z_1^2} \quad (2.24)$$

portanto, a terceira equação de equilíbrio pode ser escrita como:

$$\nabla'^2 \left( w + \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_1} \right) = 0 \quad (2.25)$$

e, a terceira condição de contorno como:

$$\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_1} = -Z\nu$$

ou,

$$\frac{\partial w}{\partial z_1} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 J}{\partial z_1^2} - \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_1} \quad (2.26)$$

logo, para  $z_1 = 0$ , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left( w + \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial J}{\partial z_1} + \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \Psi_2 \right)$$

Isto leva a obter  $w$ , dado pela expressão:

$$w = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial J}{\partial z_1} + \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \Psi_2 - \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_1} \quad (2.27)$$

Utilizando o mesmo raciocínio, a primeira equação de equilíbrio é dada por:

$$\nabla'^2 \left( u + \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (2.28)$$

e a primeira condições de contorno por:

$$-\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = \chi \nu \quad (2.29)$$

então, para  $z_1 = 0$ , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left( u + \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}$$

Resultando  $u$  dado pela expressão:

$$u = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_1} - \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \quad (2.30)$$

onde,  $\Psi_3$  é uma função harmônica com a seguinte propriedade:

$$\partial\Psi_3/\partial z_1 = \Psi_2.$$

A função  $\Psi_3$  é obtida introduzindo uma função harmônica no espaço considerado,  $\Psi_4$ , dada por:

$$\Psi_4 = (z + z_1) \ln(z + z_1 + R) - R \quad (2.31)$$

tal que:

$$\frac{\partial\Psi_4}{\partial z} = \frac{\partial\Psi_4}{\partial z_1} = \Psi_1 \quad (2.32)$$

ou seja,

$$\Psi_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial G_3}{\partial y_1} + \frac{\partial J_3}{\partial z_1} \quad (2.33)$$

onde,

$$F_3 = \iint X\nu \Psi_4 \, dx dy, \quad G_3 = \iint Y\nu \Psi_4 \, dx dy,$$

$$J_3 = \iint Z\nu \Psi_4 \, dx dy \quad (2.34)$$

as funções  $F_3, G_3, J_3$  e  $\Psi_3$  são harmônicas no espaço considerado e,

$$\frac{\partial F_3}{\partial z_1} = F, \quad \frac{\partial G_3}{\partial z_1} = G, \quad \frac{\partial J_3}{\partial z_1} = J, \quad \frac{\partial\Psi_3}{\partial z_1} = \Psi_2 \quad (2.35)$$

De forma análoga ao raciocínio desenvolvido para a obtenção do deslocamento  $u$ , obtém-se  $v$  dado por:

$$v = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial G}{\partial z_1} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial J}{\partial y_1} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial \Psi_3}{\partial y_1} - \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_1} \quad (2.36)$$

A partir das equações acima apresentadas, são feitos os desenvolvimentos necessários, procurando aplicá-las ao problema proposto.

Para a hipótese de tensões tangenciais nulas na direção  $y$ , ou seja  $Y\nu = 0$ , as funções potenciais dadas por (2.22) e (2.33) resultam:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \iint \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} X\nu \, dx \, dy + \iint \frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1} Z\nu \, dx \, dy \\ \Psi_3 &= \iint \frac{\partial \Psi_4}{\partial x_1} X\nu \, dx \, dy + \iint \frac{\partial \Psi_4}{\partial z_1} Z\nu \, dx \, dy \end{aligned} \quad (2.37)$$

Neste caso, o campo de deslocamento  $(u, v, w)$ , em qualquer ponto dos corpos em contato, fica determinado através da substituição de (2.37) nas equações (2.27), (2.30) e (2.36):

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{4\pi\mu} \iint \frac{Z\nu dx dy}{R} + \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \left( \iint \frac{-(x-x_1)X\nu dx dy}{R(z+z_1+R)} + \iint \frac{Z\nu dx dy}{R} \right) - \\ &- \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \left( \iint \frac{(x-x_1)X\nu dx dy}{R^3} + \iint \frac{-(z+z_1)Z\nu dx dy}{R^3} \right) \end{aligned} \quad (2.38.a)$$

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{2\pi\mu} \iint \frac{\chi\nu dx dy}{R} - \frac{1}{4\pi\mu} \iint \frac{-(x-x_1)Z\nu dx dy}{R(z+z_1+R)} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \\
 & \cdot \left( \iint \frac{-R(z+z_1+R)+(x-x_1)^2}{R(z+z_1+R)} \chi\nu dx dy + \iint \frac{-(x-x_1)Z\nu dx dy}{R(z+z_1+R)} \right) - \\
 & - \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \left( \iint \frac{R^2(z+z_1+R)-(x-x_1)^2(z+z_1+2R)}{R^3(z+z_1+R)^2} \chi\nu dx dy + \right. \\
 & \left. + \iint \frac{(x-x_1)Z\nu dx dy}{R^3} \right) \quad (2.38.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & - \frac{1}{4\pi\mu} \iint \frac{-(y-y_1)Z\nu dx dy}{R(z+z_1+R)} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \left( \iint \frac{-(y-y_1)Z\nu dx dy}{R(z+z_1+R)} + \right. \\
 & \left. + \iint \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{R(z+z_1+R)^2} \chi\nu dx dy \right) - \frac{1}{4\pi\mu} z_1 \left( \iint \frac{(y-y_1)Z\nu dx dy}{R^3} + \right. \\
 & \left. + \iint \frac{(x-x_1)(y-y_1)(z+z_1+2R)}{R^3(z+z_1+R)^2} \chi\nu dx dy \right) \quad (2.38.c)
 \end{aligned}$$

No plano  $z = 0$ , tem-se  $r = R$ , onde  $r$  é a distância entre o ponto de aplicação da carga elementar e o ponto onde o deslocamento é  $(u, v, w)$ , ou seja:

$$r = \left[ (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right]^{1/2} \quad (2.39)$$

Estudando os deslocamentos no plano  $z = 0$ , obtém:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \iint \frac{(x-x_1)(y-y_1)\chi\nu dx dy}{r^3} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \iint \frac{(y-y_1)Z\nu dx dy}{r^2} \\
 w &= \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \iint \frac{Z\nu dx dy}{r} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \iint \frac{(x-x_1)\chi\nu dx dy}{r^2} \\
 u &= \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \iint \frac{\chi\nu dx dy}{r} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \iint \frac{(x-x_1)^2\chi\nu dx dy}{r^3} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \iint \frac{(x-x_1)Z\nu dx dy}{r^2} \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

O problema proposto considera um estado plano de deformação, portanto a componente de deslocamento na direção  $y$ ,  $v$ , é considerada nula. Relacionando as constantes de Lamé  $(\mu, \lambda)$ , com o módulo de Young  $(E)$  e com a razão de Poisson  $(\sigma)$ , resulta:

$$w = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint \frac{Z\nu dx dy}{r} - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2\pi E} \iint \frac{(x-x_1)\chi\nu dx dy}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2\pi E} \iint \frac{(x-x_1)Z\nu dx dy}{r^2} + \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint \frac{\chi\nu dx dy}{r} + \\
 & + \frac{\sigma(1+\sigma)}{\pi E} \iint \frac{(x-x_1)^2 \chi\nu dx dy}{r^3} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

Chamando de,

$$K_a = \frac{1-\sigma^2}{\pi E}$$

$$K_b = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2\pi E}$$

$$K_c = \frac{\sigma(1+\sigma)}{\pi E}$$

(2.42)

As expressões dos deslocamentos são dadas por:

$$u = K_b \iint \frac{(x-x_1)Z\nu dx dy}{r^2} + K_a \iint \frac{\chi\nu dx dy}{r} + K_c \iint \frac{(x-x_1)^2 \chi\nu dx dy}{r^3}$$

$$w = K_a \iint \frac{Z\nu dx dy}{r} - K_b \iint \frac{(x-x_1)\chi\nu dx dy}{r^2} \quad (2.43)$$

A solução completa do problema de contato proposto só é obtida [1], quando são especificadas a área de contato e as tensões nela atuantes. Nas equações (2.43) não são conhecidos os limites das integrais nem as tensões  $X_\nu$  e  $Z_\nu$ .

As tensões na área de contato devem cumprir a condição de equilíbrio do corpo, quando submetido aos esforços externos  $X_1$ ,  $Z_1$  e  $C_a$ , de acordo com as equações (2.4), ou seja:

$$X_1 = \int_B^A X_\nu dx$$

$$Z_1 = - \int_B^A Z_\nu dx$$

$$C_a = - \left[ g X_1 + \bar{x} Z_1 \right] \quad (2.44)$$

A área de contato pode ser determinada considerando que o equilíbrio estático dos corpos elásticos em contato corresponde a uma mínima energia de deformação armazenada no sistema.

No caso de ocorrer escorregamento este princípio do mínimo se aplica à potência dissipada.

Será apresentada a seguir a formulação da energia de deformação elástica para a obtenção da área de contato.

### 3. PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO APLICADA AO CONTATO ELÁSTICO

A solução do problema do contato entre os corpos elásticos  $PC_1$  e  $PC_2$  depende da determinação da área de contato e do campo de tensões nela aplicado e, pode ser obtida pela minimização do funcional associado à energia interna do sistema.

A variação da energia interna  $U_i$  do sistema é dada por:

$$\delta U_i = \delta Q + \delta T \quad (3.1)$$

onde,  $T$  é o trabalho realizado e  $Q$  é o calor desprendido pelo sistema. Para o caso adiabático, tem-se  $\delta Q = 0$ , resultando em  $\delta U_i = \delta T$ .

Quando todas as trocas são feitas isoentropicamente e na condição de equilíbrio, a energia interna do sistema é mínima. Em termos variacionais, tem-se:

$$\delta T = \delta U_i \geq 0, \quad (3.2)$$

Para uma região  $k$  da superfície dos corpos, submetida a uma tensão total  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ), resultando os deslocamentos  $d_i$ , a

variação da energia interna é:

$$\delta U_i = \delta T = \int_k (\sigma_1 \delta d_1 + \sigma_2 \delta d_2) dS \geq 0 \quad (3.3)$$

Aplicando sobre  $U_i$  uma transformação de Legendre resulta na definição de entalpia de contato  $H_c$ . A condição de equilíbrio é obtida pela minimização da entalpia de contato, sob condições auxiliares aplicadas às tensões e deslocamentos, conectadas pelas leis da elasticidade linear.

As superfícies dos corpos são divididas nas regiões I, II e III, conforme mostrado na figura (3.1). A distância  $h_z$  entre os corpos, na direção  $z$ , é considerada positiva ou nula.

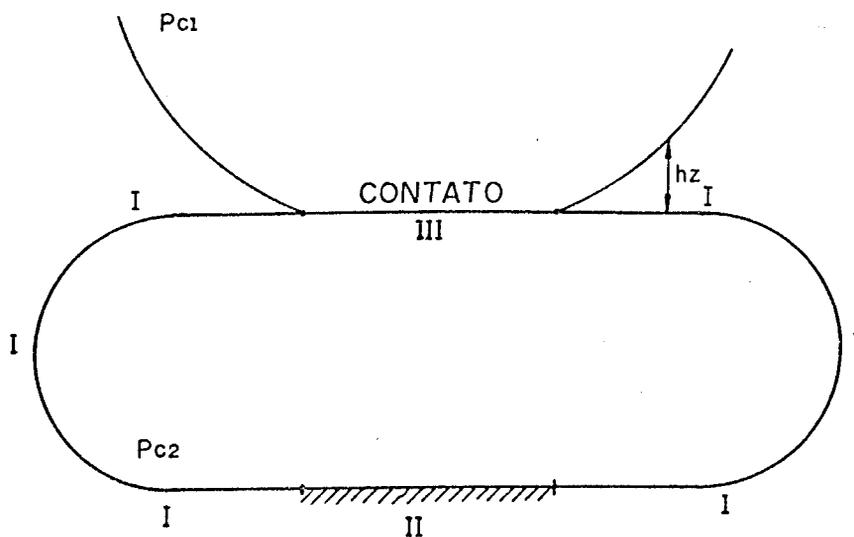


Figura 3.1 - Representação do contato entre um cilindro e um sólido plano semi-infinito.

Na região I não existe o contato entre os corpos, portanto:

$$-Z\nu = \sigma_1 = \sigma_2 = 0 ; \quad \int_{k=I} = 0 \quad (3.4)$$

Na região II os corpos estão engastados e, não podem ocorrer deslocamentos, assim tem-se que:

$$\delta d_i = 0 ; \quad \int_{k=II} = 0 \quad (3.5)$$

Na região III os corpos estão em contato, portanto  $hz = 0$ . A tensão total  $\sigma_i$  pode ser decomposta em  $Z\nu_i$  na direção normal e  $X\nu_i$  na direção tangencial. Nestas direções tem-se os deslocamentos  $w_i$  e  $u_i$ . Assim o trabalho virtual é dado por:

$$\sigma_i \delta d_i = Z\nu_i \delta w_i + X\nu_i \delta u_i \quad (3.6)$$

A formulação para os casos com e sem atrito será apresentada a seguir.

## 3.1. CONTATO SEM ATRITO

Na região III, para o caso sem atrito tem-se:

$$X\nu_i = 0 ; \quad -Z\nu_1 = Z\nu_2 = Z\nu ;$$

e,

$$-\delta w_1 = \delta w_2 ;$$

Logo:

$$\int_{k=III} Z\nu (\delta w_1 + \delta w_2) = \int_{K=III} Z\nu \delta h_z dS \geq 0 \quad (3.7)$$

A variação total da energia interna do sistema, de acordo com a equação (3.3), resulta:

$$\delta U_i = \delta T = \int_{I \cup III \cup III} Z\nu \delta h_z dS = \int_{III} Z\nu \delta h_z dS \geq 0 \quad (3.8)$$

onde,  $Z$  e  $h_z$  estão relacionados pelas leis da elasticidade e obedecem às seguintes condições:

(1) se  $h_z > 0$  e como  $\delta h_z$  arbitrário, resulta  $Z\nu = 0$

(2) se  $h_z = 0$  e  $\delta h_z \geq 0$  (sem penetração), resulta  $Z\nu \geq 0$

Definindo,

$$\frac{\delta U_i}{\delta h_z} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\int_{\delta S} Z \delta h_z dS}{\int_{\delta S} \delta h_z dS}, \quad \text{tem-se:}$$

$$\frac{\delta U_i}{\delta h_z} = Z\nu \quad (3.9)$$

Aplicando a transformada de Legendre a  $U_i$ , resulta a entalpia de contato  $H_c$ :

$$H_c \stackrel{\text{def}}{=} \int_{III} Z\nu h_z dS - U_i \quad (3.10)$$

A distância  $h_z$  pode ser escrita em função da distância  $H$  entre as superfícies no estado não deformado e da diferença dos deslocamentos normais  $w_1$  e  $w_2$ , determinados pela equação (2.43):

$$h_z = H + W$$

$$W = w_1 - w_2 \quad (3.11)$$

Na região III, usando a elasticidade linear, a energia de deformação é dada por:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{k=III} Z_{\nu} W \, dS \quad (3.12)$$

Substituindo-se (3.11) e (3.12) em (3.10), resulta:

$$H_c = \int_{k=III} (Z_{\nu} H + Z_{\nu} W) \, dS - \frac{1}{2} \int_{k=III} Z_{\nu} W \, dS \quad (3.13)$$

Assim, o princípio da entalpia mínima:

$$\min! H_c = \int_S \left( Z_{\nu} H + \frac{1}{2} Z_{\nu} W \right) dS \quad (3.14)$$

sob as condições auxiliares:

$$Z_{\nu} \geq 0, \quad H \text{ dado,}$$

$Z_{\nu}$  e  $W$  relacionados pelas leis da elasticidade.

A minimização da equação dada em (3.14), conduz à solução completa do problema, para o caso do contato sem a presença de atrito.

## 3.2 CONTATO COM ATRITO (SEM ESCORREGAMENTO)

Na região III, para o contato com atrito seco de Coulomb,

tem-se:

$$\chi_{\nu 1} = \chi_{\nu 2} = \chi_{\nu} \quad \text{e,} \quad -Z_{\nu 1} = Z_{\nu 2} = Z_{\nu}, \quad \text{logo:}$$

$$\int_{k=III} = \int_{k=III} -Z_{\nu}(\delta w_1 + \delta w_2) dS + \int_{k=III} \chi_{\nu}(\delta u_1 + \delta u_2) dS \quad (3.15)$$

como,

$$\delta h_x = \delta u_1 + \delta u_2 \quad \text{e,} \quad -\delta h_z = \delta w_1 + \delta w_2, \quad \text{resulta:}$$

$$\int_{k=III} = \int_{k=III} Z_{\nu} \delta h_z dS + \int_{k=III} \chi_{\nu} \delta h_x dS \geq 0 \quad (3.16)$$

De acordo com a equação (3.3), obtém-se:

$$\delta U_i = \delta T = \int_{I \cup III \cup III} (Z_{\nu} \delta h_z + \chi_{\nu} \delta h_x) dS \geq 0 \quad (3.17)$$

onde,  $Z_{\nu}$ ,  $\chi_{\nu}$ ,  $\delta h_z$  e  $\delta h_x$ , estão relacionados pelas leis da elasticidade.

De forma análoga ao caso sem atrito, aplicando uma transformada de Legendre a  $U_i$ , obtém-se a entalpia de contato  $H_c$  dada por:

$$H_c \stackrel{\text{def}}{=} \int_{k=III} Z_\nu h_z dS + \int_{k=III} X_\nu h_x dS - U_i \quad (3.18)$$

Definindo  $U$ , como o deslocamento total na direção tangencial, tem-se:

$$U = u_1 + u_2 \quad e,$$

$$h_x = U$$

(3.19)

sendo  $u_1$  e  $u_2$  obtidos à partir das equações (2.43).

Na região III, usando a elasticidade linear, a energia de deformação é dada por:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{k=III} Z_\nu W dS + \frac{1}{2} \int_{k=III} X_\nu U dS + \frac{1}{2} \int_{k=III} Y_\nu V dS \quad (3.20)$$

Utilizando a hipótese de estado plano de deformação, tem-se que no interior da área de contato os deslocamentos longitudinais

$v$  são nulos e em  $y = \pm L/2$  as tensões  $Y_\nu$  são nulas. Portanto, a última parcela da equação (3.20) não contribui para a energia de deformação.

Substituindo-se (3.19) e (3.20) em (3.18), tem-se que:

$$H_c = \int_{k=III} (Z_\nu H + Z_\nu W) dS + \int_{k=III} X_\nu U dS + \\ - \frac{1}{2} \int_{k=III} Z_\nu W dS - \frac{1}{2} \int_{k=III} X_\nu U dS \quad (3.21)$$

De forma que, o princípio da entalpia mínima conduz a:

$$\min! H_c = \int_S \left( Z_\nu H + \frac{1}{2} Z_\nu W \right) dS + \frac{1}{2} \int_S X_\nu U dS \quad (3.22)$$

sob as condições auxiliares:  $Z_\nu \geq 0$ ,  $H$  dado,  $Z_\nu$ ,  $X_\nu$ ,  $W$  e  $U$  relacionados pelas leis da elasticidade.

A solução analítica deste problema só é possível para o caso do contato Hertziano, sem atrito, implicando na necessidade da aplicação de métodos numéricos para o cálculo dos deslocamentos e para a minimização da entalpia de contato.

#### 4. MODELO NUMÉRICO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

##### 4.1. METODOLOGIA ADOTADA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A solução do problema do contato elástico entre um cilindro, submetido a uma carga externa  $Z_1$  e momento  $C_a$ , sobre uma região semi-infinita, leva à determinação dos estados de tensão e deformação nos corpos, que podem ser obtidos a partir do campo de deslocamentos.

Para o cálculo do campo de deslocamentos através da equação (2.41), torna-se necessário o conhecimento da área de contato e do campos de pressões normal e tangencial atuantes no contato, que devem obedecer à condição de equilíbrio estático dos corpos, conforme as equações (2.44).

A obtenção da área de contato e do campo de pressão é feita considerando-se que no equilíbrio a energia de deformação armazenada é mínima. Desta forma, deve-se resolver o problema de minimização do funcional, dado pela equação (3.22), no domínio definido pela área de contato, localizada em  $z = 0$ , uma vez que apenas a região III contribui para a expressão da energia de deformação elástica.

A metodologia para a solução do problema compreende as

seguintes etapas:

- estimar o campo de pressão normal  $Z\nu$  através de uma função polinomial de terceiro grau. (a pressão  $X\nu$  é relacionada com  $Z\nu$  pelo coeficiente de atrito, considerando a posição do ponto e o momento aplicado)
- estimar os limites da área de contato A e B, através da solução analítica de Hertz
- minimizar o funcional da entalpia de deformação, adotando como variáveis de decisão os coeficientes do polinômio e os limites A e B da área de contato, que estão sujeitos às restrições impostas pelo problema.
- com a obtenção da distribuição de pressão e a área de contato entre os corpos, determinar os deslocamentos, que permitem a obtenção dos estados de deformação e de tensão.

#### 4.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE DESLOCAMENTO

Seja a superfície de contato entre o cilindro e o plano, após a aplicação da força normal  $Z_1$  e do momento  $C_a$ , dada por um retângulo de dimensões  $L \times AB$ .

Consideremos que a área de contato está dividida em  $(n_x \times n_y)$  áreas infinitesimais, retangulares e iguais, conforme mostrado na Figura (4.1).

No centro da área infinitesimal será considerado um sistema

de referência local,  $(x',y')$ , cuja distância a um ponto qualquer da área de contato,  $(x,y)$ , é dada por  $r$ .

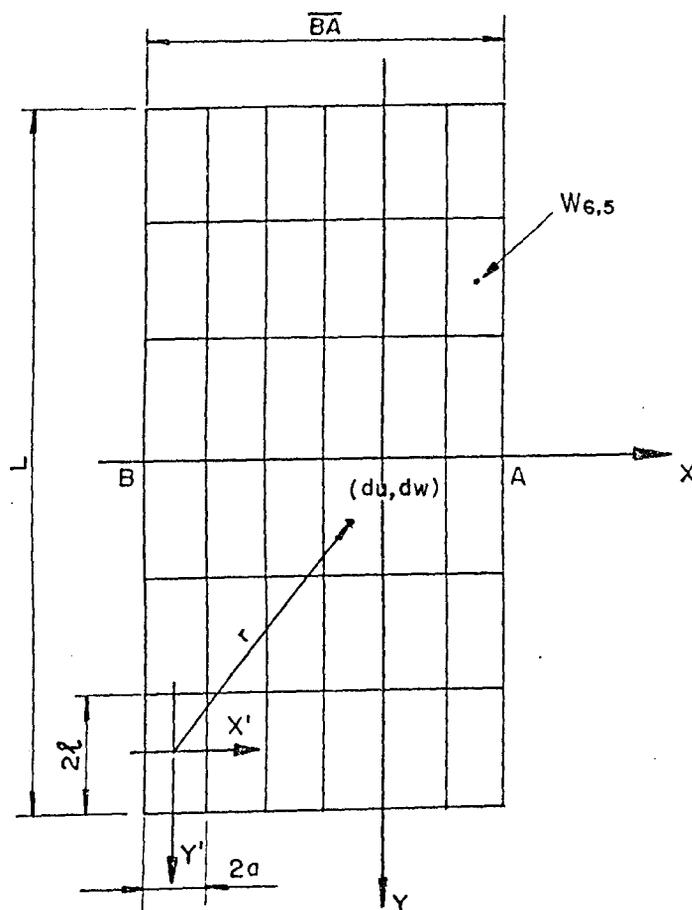


Figura 4.1 - Divisão da área de contato em áreas infinitesimais, retangulares e iguais

Seja a área infinitesimal, representada na Fig.(4.2), tal que  $-a \leq x' \leq a$  e  $-l \leq y' \leq l$ . A pressão nela atuante será considerada constante, de forma que  $Z\nu = \bar{Z}\nu$  e  $X\nu = \bar{X}\nu$ .

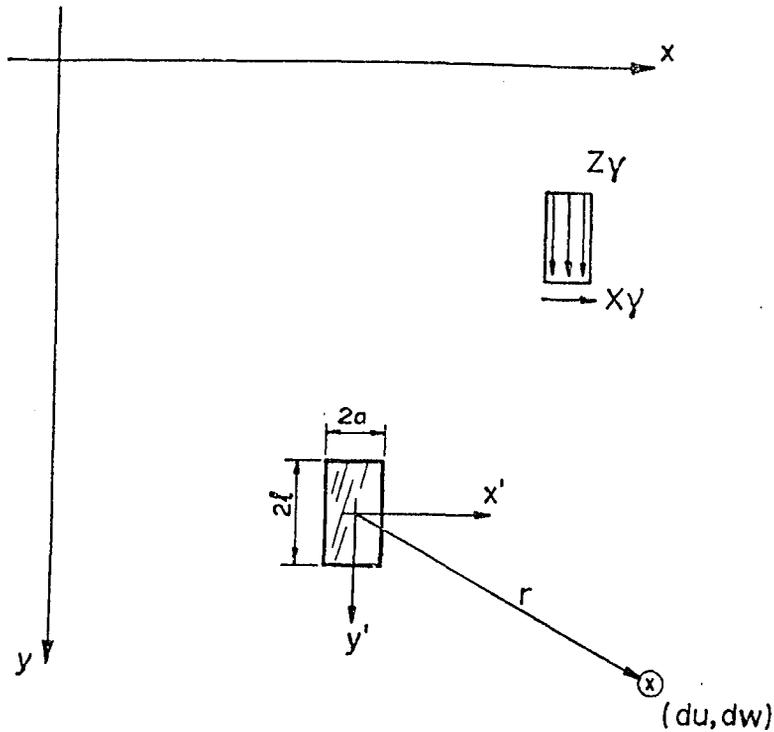


Figura 4.2. - Área infinitesimal retangular, sujeita a uma pressão constante  $\bar{Z}\nu$  e  $\bar{X}\nu$ .

Assim os deslocamentos infinitesimais em um ponto  $(x, y)$ , devidos a uma pressão constante atuando na área infinitesimal, obtidos a partir das equações (2.43), valem:

$$\begin{aligned}
 du = & K_b \bar{Z}\nu \int_{-a}^a \int_{-l}^l \frac{(x-x') dx' dy'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} + \\
 & + K_a \bar{X}\nu \int_{-a}^a \int_{-l}^l \frac{dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}} + \\
 & + K_c \bar{X}\nu \int_{-a}^a \int_{-l}^l \frac{(x-x')^2 dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{4.1.a}$$

$$\begin{aligned}
 dw = & K_a \bar{z}_v \int_{-a}^a \int_{-1}^1 \frac{dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}} + \\
 & - K_b \bar{x}_v \int_{-a}^a \int_{-1}^1 \frac{(x-x') dx' dy'}{(x-x')^2 + (y-y')^2}
 \end{aligned} \tag{4.1.b}$$

Integrando em  $y'$ , resulta que:

$$\begin{aligned}
 dw = & K_a \bar{z}_v \int_{-a}^a \ln \left( \frac{(y+l) + [(x-x')^2 + (y+l)^2]^{1/2}}{(y-l) + [(x-x')^2 + (y-l)^2]^{1/2}} \right) dx' + \\
 & - K_b \bar{x}_v \int_{-a}^a \left( \operatorname{arctg} \frac{y+l}{x-x'} - \operatorname{arctg} \frac{y-l}{x-x'} \right) dx',
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

e,

$$\begin{aligned}
 du = & K_b \bar{z}_v \int_{-a}^a \left( \operatorname{arctg} \frac{y+l}{x-x'} - \operatorname{arctg} \frac{y-l}{x-x'} \right) dx' + \\
 & + K_c \bar{x}_v \int_{-a}^a \left( \frac{y+l}{[(x-x')^2 + (y+l)^2]^{1/2}} - \frac{y-l}{[(x-x')^2 + (y-l)^2]^{1/2}} \right) dx' + \\
 & + K_a \bar{x}_v \int_{-a}^a \ln \left( \frac{(y+l) + [(x-x')^2 + (y+l)^2]^{1/2}}{(y-l) + [(x-x')^2 + (y-l)^2]^{1/2}} \right) dx',
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Definindo :

$$I_1 = \int_{-a}^a \ln \left[ \frac{(y+\ell) + [(x-x')^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}}{(y-\ell) + [(x-x')^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] dx'$$

$$I_2 = \int_{-a}^a \left( \operatorname{arctg} \frac{y+\ell}{x-x'} - \operatorname{arctg} \frac{y-\ell}{x-x'} \right) dx'$$

$$I_3 = \int_{-a}^a \left[ \frac{y+\ell}{[(x-x')^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} - \frac{y-\ell}{[(x-x')^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] dx' \quad (4.4)$$

Verifica-se que as integrais apresentadas em (4.4) possuem solução analítica. Através da utilização dos artifícios e propriedades do cálculo integral, obtém-se:

$$\begin{aligned} I_1 &= (x-a) \ln \left[ \frac{(y-\ell) + [(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}}{(y+\ell) + [(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right] + \\ &+ (x+a) \ln \left[ \frac{(y+\ell) + [(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}}{(y-\ell) + [(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] + \\ &+ (y-\ell) \ln \left[ \frac{(x-a) + [(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}}{(x+a) + [(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] + \\ &+ (y+\ell) \ln \left[ \frac{(x+a) + [(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}}{(x-a) + [(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (4.5.a)$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & (x-a) \left( \operatorname{arctg} \frac{y-l}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y+l}{x-a} \right) + \\
& + (x+a) \left( \operatorname{arctg} \frac{y+l}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y-l}{x+a} \right) + \\
& + (y-l) \ln \left( \frac{[(x-a)^2 + (y-l)^2]^{1/2}}{[(x+a)^2 + (y-l)^2]^{1/2}} \right) + \\
& + (y+l) \ln \left( \frac{[(x+a)^2 + (y+l)^2]^{1/2}}{[(x-a)^2 + (y+l)^2]^{1/2}} \right)
\end{aligned} \tag{4.5.b}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & (y-l) \ln \left( \frac{(x-a) + [(x-a)^2 + (y-l)^2]^{1/2}}{(x+a) + [(x+a)^2 + (y-l)^2]^{1/2}} \right) + \\
& + (y+l) \ln \left( \frac{(x+a) + [(x+a)^2 + (y+l)^2]^{1/2}}{(x-a) + [(x-a)^2 + (y+l)^2]^{1/2}} \right)
\end{aligned} \tag{4.5.c}$$

Conhecendo-se o valor das integrais  $I_1, I_2, I_3$ , dadas em (4.5), os deslocamentos infinitesimais dados por (4.2) e (4.3) são escritos na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
dw &= K_a \bar{z}_\nu I_1 - K_b \bar{x}_\nu I_2 \\
du &= K_b \bar{z}_\nu I_2 + K_a \bar{x}_\nu I_1 + K_c \bar{x}_\nu I_3
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Nas equações acima,  $dw$  e  $du$  representam os deslocamentos infinitesimais do ponto  $(x,y)$  devido à pressão constante  $\bar{Z}^v$  e  $\bar{X}^v$ , atuando em uma área infinitesimal retangular ( $2a \times 2\ell$ ).

Para o cálculo dos deslocamentos totais do ponto  $(x,y)$ , devido a contribuição de todas as áreas infinitesimais de pressão constante, utiliza-se o princípio da superposição dos efeitos, tal que:

$$w_{(k,m)} = K_a \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z^v_{(i,j)} I^1_{(x,y)} +$$

$$- K_b \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} X^v_{(i,j)} I^2_{(x,y)} \quad (4.7.a)$$

$$u_{(k,m)} = K_b \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z^v_{(i,j)} I^2_{(x,y)} +$$

$$+ K_a \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} X^v_{(i,j)} I^1_{(x,y)} +$$

$$+ K_c \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} X^v_{(i,j)} I^3_{(x,y)} \quad (4.7.b)$$

onde,

$$x = |k-i| 2a \quad (4.8.a)$$

$$y = |m-j| 2\ell \quad (4.8.b)$$

$$a = (A+|B|)/2 \quad n_x \quad (4.8.c)$$

$$\ell = L/2 \quad n_y \quad (4.8.d)$$

## 4.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O FUNCIONAL

A solução do problema do contato com atrito entre um cilindro e um plano, pode ser obtida através da minimização da entalpia de contato conforme equação (3.22). Como os deslocamentos são calculados numericamente através das equações (4.7), deduzidas no item anterior, o funcional para a procura numérica do mínimo é dado por:

$$F_h \cong \sum_{k=1}^{n_x} z\nu_k H_k S_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} z\nu_k S_k W_{(k,m)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} x\nu_k S_k U_{(k,m)} \quad (4.9)$$

onde,

$$S_k = \frac{L}{n_x n_y} (A + |B|) \quad (4.10.a)$$

$$H_k = -\varphi + [\varphi^2 - x_k^2]^{1/2} \quad (4.10.b)$$

Seja  $C_{sx}$ , um controle de sinal da variável  $x$ , tal que:

$$C_{sx} = + 1.0, \text{ para } x \geq 0$$

$$C_{sx} = - 1.0, \text{ para } x < 0$$

(4.11)

Consideremos, também, um controle para a relação entre os módulos de elasticidade dos materiais dos corpos em contato definido por:

$$C_{se} = + 1.0 , \text{ para } E_1 < E_2$$

$$C_{se} = - 1.0 , \text{ para } E_1 > E_2$$

$$C_{se} = 0.0 , \text{ para } E_1 = E_2 \quad (4.12)$$

Chamando de  $C_{max}$  o máximo momento que pode ser aplicado sobre o cilindro sem que ocorra o escorregamento. Através da equação (2.42), tem-se que:

$$C_{max} = g X_1$$

ou,

$$C_{max} \cong \varphi f Z_1 \quad (4.13)$$

Definindo a relação  $R_m$ , entre o momento atuante e o máximo momento que pode ser aplicado, obtém-se que:

$$R_m = C_a / C_{max} \quad (4.14)$$

De acordo com o sistema referencial adotado, a relação  $R_m$  é positiva para um momento aplicado no sentido positivo, ou seja, no sentido anti-horário. Conseqüentemente, a relação  $R_m$  é negativa para um momento aplicado no sentido horário.

A tensão tangencial atuante na área de contato pode ser

separada, para efeito de análise, em duas parcelas, conforme mostrado na figura (4.3). Uma delas é gerada pelo diferencial de deformação tangencial provocado pela carga normal e a outra devida ao momento aplicado.

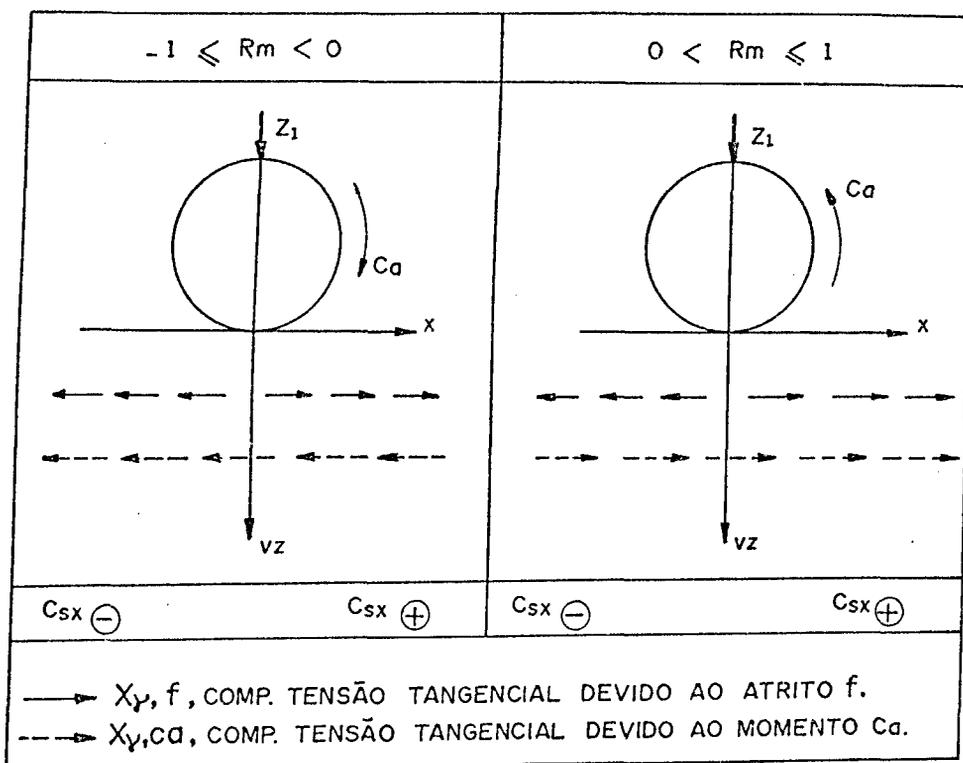


Figura (4.3.) - Esquema para a tensão tangencial, separada em parcelas, para efeito de análise.

Assim, resulta:

$$X_D = (C_{sx} + R_m) f Z_D$$

(4.15)

Considerando a pressão normal  $Z\nu$  sempre positiva, o deslocamento total do sistema elástico cilindro / plano, na direção do eixo  $z$ , é dado por:

$$W_{(k,m)} = W^1_{(k,m)} + W^2_{(k,m)} \quad (4.16)$$

Como a pressão tangencial é gerada pela ação do atrito e do momento externo e, a pressão normal é sempre positiva, os deslocamentos dos corpos  $i=1$  e  $2$ , na direção  $z$ , são dados pela equação (4.7.a) tal que:

$$W^1_{(k,m)} = K_{a1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z\nu_{(i,j)} I^1_{(x,y)} + \\ - (C_{sx} + R_m) K_{b1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f Z\nu_{(i,j)} I^2_{(x,y)} \quad (4.17.a)$$

e,

$$W^2_{(k,m)} = K_{a2} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z\nu_{(i,j)} I^1_{(x,y)} + \\ - (C_{sx} + R_m) K_{b2} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f Z\nu_{(i,j)} I^2_{(x,y)} \quad (4.17.b)$$

Substituindo (4.17) em (4.16) resulta:

$$\begin{aligned}
 W_{(k,m)} = & (K_{a1} + K_{a2}) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} I^1_{(x,y)} - (K_{b1} + K_{b2}) \cdot \\
 & \cdot (C_{sx} + R_m) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f Z_{\nu(i,j)} I^2_{(x,y)} \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

O deslocamento total do sistema elástico cilindro / plano, na direção do eixo x, é dado por:

$$U_{(k,m)} = u^1_{(k,m)} + u^2_{(k,m)} \quad (4.19)$$

Para a análise do deslocamento tangencial são considerados os efeitos da força normal, da força de atrito e do momento aplicado, conforme pode ser verificado na Fig. (4.4).

Assim, após um estudo do sinal do deslocamento para o corpo PC1, utilizando a equação (4.7.b), obtêm-se que:

$$\begin{aligned}
 u^1_{(k,m)} = & C_{sx} K_{b1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} I^2_{(x,y)} + \\
 & - (C_{se} C_{sx} + R_m) \left[ K_{a1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f Z_{\nu(i,j)} I^1_{(x,y)} + \right. \\
 & \left. + K_{c1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f Z_{\nu(i,j)} I^3_{(x,y)} \right] \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

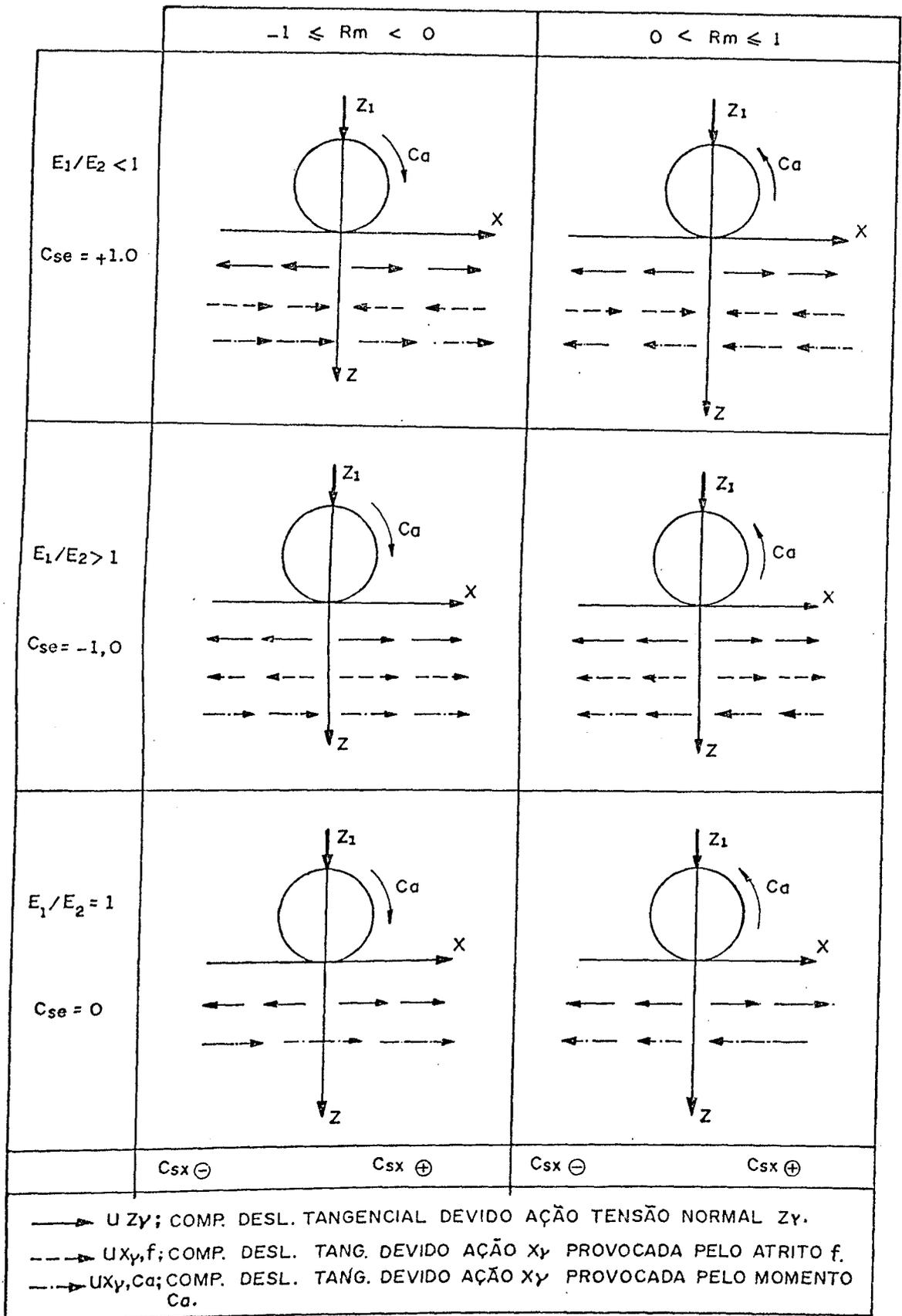


Figura (4.4) - Estudo do deslocamento tangencial, sendo o efeito das tensões atuantes considerando separadamente.

Como os deslocamentos tangenciais dos pontos situados sobre a área de contato são iguais para os dois corpos,  $u_1 = u_2$ , substituindo (4.20) em (4.19) vem que:

$$\begin{aligned}
 U_{(k,m)} = & 2 C_{sx} K_{b1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} I_2(x,y) + \\
 & - 2 (C_{se} C_{sx} + R_m) \left[ K_{a1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f Z_{\nu(i,j)} I_1(x,y) + \right. \\
 & \left. + K_{c1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f Z_{\nu(i,j)} I_3(x,y) \right] \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

sendo que as integrais  $I_1, I_2, I_3$ , são dadas em (4.5).

Desta forma, substituindo-se (4.10.a), (4.10.b), (4.18) e (4.21) em (4.9), torna-se possível a minimização do funcional.

O cálculo das equações dos deslocamentos, necessita que seja adotada uma curva para a distribuição de pressão normal  $Z_{\nu}$ , e estimados os limites da área de contato A e B.

Os valores iniciais são obtidos a partir da solução analítica de Hertz, para o caso sem atrito.

#### 4.4 GRADIENTE DO FUNCIONAL $F_h$

A aplicação do programa numérico de otimização à equação (4.9), necessita de um estudo do gradiente do funcional. O gradiente possibilita ao programa a análise dos resultados obtidos e a escolha da nova direção de busca da solução.

Embora este gradiente possa ser calculado numericamente, a determinação analítica, desde que possível, reduz os erros de arredondamento, aumenta a estabilidade e a convergência do processo de otimização do funcional.

Seja a distribuição de pressão dada por um polinômio de terceiro grau, com duas raízes coincidentes com os contornos A e B, conforme Fig.(4.4).

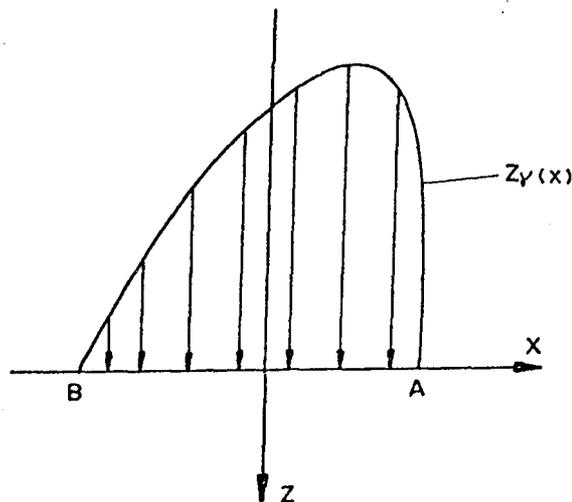


Figura 4.4 - Modelo para a distribuição de pressão, segundo um polinômio de terceiro grau, contato com atrito.

Considerando o polinômio dado por:

$$Z_D = C_0 x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (4.22)$$

e escolhendo como variáveis de decisão: A, B, C<sub>2</sub> e C<sub>3</sub>, a solução proposta para a distribuição de pressão normal é escrita por:

$$Z_D = \left[ \frac{ABC_2 + (A+B)C_3}{(AB)^2} \right] x^3 + \left[ \frac{-AB(A+B)C_2 + [AB - (A+B)^2]C_3}{(AB)^2} \right] x^2 + C_2 x + C_3 \quad (4.23)$$

Desta forma, é possível o cálculo numérico do gradiente do funcional em relação às variáveis de decisão, permitindo que o programa de otimização verifique os resultados obtidos.

#### 4.4.1 COMPONENTE DO GRADIENTE DO FUNCIONAL F<sub>h</sub> EM RELAÇÃO À VARIÁVEL C<sub>2</sub>

Esta componente do gradiente é dado pela derivada parcial da expressão (4.9) em relação à C<sub>2</sub>. A partir das equações (4.10.a) e (4.10.b) tem-se:

$$\frac{\partial S_k}{\partial C_2} = \frac{\partial H_k}{\partial C_2} = 0 \quad (4.24)$$

assim, esta componente é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_h}{\partial C_2} = & \sum_{k=1}^{n_x} S_k H_k \frac{\partial Z\nu_k}{\partial C_2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial Z\nu_k}{\partial C_2} W_{(k,m)} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k Z\nu_k \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial C_2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial X\nu_k}{\partial C_2} U_{(k,m)} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k X\nu_k \frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial C_2} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Da equação (4.23), tem-se:

$$\frac{\partial Z\nu}{\partial C_2} = \frac{1}{AB} x^3 - \frac{A+B}{AB} x^2 + x \quad (4.26)$$

e, através da equação (4.15):

$$\frac{\partial X\nu}{\partial C_2} = (C_s x + R_m) f \left( \frac{1}{AB} x^3 - \frac{A+B}{AB} x^2 + x \right) \quad (4.27)$$

Observando as equações (4.5) escreve-se que:

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_2} = \frac{\partial I_2}{\partial C_2} = \frac{\partial I_3}{\partial C_2} = 0 \quad (4.28)$$

logo, a derivada da equação (4.18) em relação à  $C_2$  resulta:

$$\frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial C_2} = (K_{a1} + K_{a2}) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \frac{Z^V_{(i,j)}}{\partial C_2} I_{1(x,y)} - (K_{b1} + K_{b2}) \cdot$$

$$\cdot (C_{sx} + R_m) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f \frac{\partial Z^V_{(i,j)}}{\partial C_2} I_{2(x,y)} \quad (4.29)$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial C_2} = & (K_{a1} + K_{a2}) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{1(x,y)} \left[ \frac{x^3_{(i,j)}}{AB} - \frac{A+B}{AB} x^2_{(i,j)} + x_{(i,j)} \right] + \\ & - (K_{b1} + K_{b2}) (C_{sx} + R_m) f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{2(x,y)} \left[ \frac{x^3_{(i,j)}}{AB} + \right. \\ & \left. - \frac{A+B}{AB} x^2_{(i,j)} + x_{(i,j)} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Da expressão (4.21), considerando as derivadas parciais (4.28), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial C_2} = & 2 C_{sx} K_{b1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{2(x,y)} \left[ \frac{x^3_{(i,j)}}{AB} - \frac{A+B}{AB} x^2_{(i,j)} + x_{(i,j)} \right] + \\ & - 2 (C_{se} C_{sx} + R_m) \left\{ K_{a1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{1(x,y)} \left[ \frac{x^3_{(i,j)}}{AB} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{A+B}{AB} x^2_{(i,j)} + x_{(i,j)} \right] + K_{c1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{3(x,y)} \left[ \frac{x^3_{(i,j)}}{AB} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{A+B}{AB} x^2_{(i,j)} + x_{(i,j)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo-se (4.26), (4.27), (4.30) e (4.31) em (4.25) encontra-se a componente do gradiente do funcional  $F_h$  em relação à variável de decisão  $C_2$ .

#### 4.4.2 COMPONENTE DO GRADIENTE DO FUNCIONAL $F_h$ EM RELAÇÃO À VARIÁVEL $C_3$

Esta componente é obtida através da mesma sequência desenvolvida no item anterior. Assim, de (4.9) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_h}{\partial C_3} = & \sum_{k=1}^{n_x} S_k H_k \frac{\partial Z\nu_k}{\partial C_3} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial Z\nu_k}{\partial C_3} W_{(k,m)} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k Z\nu_k \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial C_3} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial X\nu_k}{\partial C_3} U_{(k,m)} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k X\nu_k \frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial C_3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Das equações (4.15) e (4.23), tem-se:

$$\frac{\partial Z\nu}{\partial C_3} = \frac{(A+B)}{(AB)^2} x^3 + \left[ \frac{AB - (A+B)^2}{(AB)^2} \right] x^2 + 1 \quad (4.33)$$

e,

$$\frac{\partial X\nu}{\partial C_3} = (C_{sx} + R_m) f \left[ \frac{A+B}{(AB)^2} x^3 + \left[ \frac{AB - (A+B)^2}{(AB)^2} \right] x^2 + 1 \right] \quad (4.34)$$

Derivando (4.18) em relação à  $C_3$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial C_3} = & (K_{a1} + K_{a2}) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I^1_{(x,y)} \left[ \left[ \frac{AB - (A+B)^2}{(AB)^2} x^2_{(i,j)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(A+B)}{(AB)^2} x^3_{(i,j)} + 1 \right] - (k_{b1} + k_{b2}) (C_{sx} + R_m) f \cdot \right. \\ & \left. \cdot \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I^2_{(x,y)} \left[ \frac{(A+B)}{(AB)^2} x^3_{(i,j)} + \left( \frac{AB - (A+B)^2}{(AB)^2} x^2_{(i,j)} + 1 \right) \right] \right] \quad (4.35) \end{aligned}$$

assim como, da expressão (4.21) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial C_3} = & 2 C_{sx} K_{b1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I^2_{(x,y)} \left[ \frac{(A+B)}{(AB)^2} x^3_{(i,j)} + \left( \frac{AB - (A+B)^2}{(AB)^2} \right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot x^2_{(i,j)} + 1 \right] - 2 (C_{se} C_{sx} + R_m) \left\{ K_{a1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I^1_{(x,y)} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left[ \frac{(A+B)}{(AB)^2} x^3_{(i,j)} + \left( \frac{AB - (A+B)^2}{(AB)^2} \right) x^2_{(i,j)} + 1 \right] + \right. \\ & \left. + K_{c1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I^3_{(x,y)} \left[ \frac{(A+B)}{(AB)^2} x^3_{(i,j)} + \left( \frac{AB - (A+B)^2}{(AB)^2} \right) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot x^2_{(i,j)} + 1 \right] \right\} \quad (4.36) \end{aligned}$$

Portanto, com a substituição de (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36) em (4.32), fica determinado  $\partial F_h / \partial C_3$ .

#### 4.4.3 COMPONENTE DO GRADIENTE DO FUNCIONAL $F_h$ EM RELAÇÃO À VARIÁVEL A

A expressão (4.9) deve agora ser derivada em relação à variável de decisão A. De (4.10.a) e (4.10.b) vem que:

$$\frac{\partial S_k}{\partial A} = \frac{L}{n_x n_y} ; \quad \frac{\partial H_k}{\partial A} = 0 \quad (4.37)$$

assim, esta componente do gradiente é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_h}{\partial A} = & \frac{L}{n_x n_y} \sum_{k=1}^{n_x} H_k Z^{\nu_k} + \sum_{k=1}^{n_x} S_k \frac{\partial Z^{\nu_k}}{\partial A} H_k + \frac{L}{2 n_x n_y} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} Z^{\nu_k} W_{(k,m)} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial Z^{\nu_k}}{\partial A} W_{(k,m)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k Z^{\nu_k} \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial A} + \\ & + \frac{L}{2 n_x n_y} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} X^{\nu_k} U_{(k,m)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial X^{\nu_k}}{\partial A} U_{(k,m)} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k X^{\nu_k} \frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial A} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Utilizando as equações (4.15) e (4.23), calcula-se:

$$\frac{\partial Z\nu}{\partial A} = \left[ \frac{-ABC_2 - (A+2B)C_3}{A^3 B^2} \right] x^3 + \left[ \frac{AB^2 C_2 + (2B^2 + AB)C_3}{A^3 B^2} \right] x^2 \quad (4.39)$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X\nu}{\partial A} = (C_{sx} + R_m) f \left\{ \left[ \frac{-ABC_2 - (A+2B)C_3}{A^3 B^2} \right] x^3 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{AB^2 C_2 + (2B^2 + AB)C_3}{A^3 B^2} \right] x^2 \right\} \quad (4.40) \end{aligned}$$

Da equação (4.18), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial A} = (K_{a1} + K_{a2}) \left[ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial Z\nu_{(i,j)}}{\partial A} I_{1(x,y)} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z\nu_{(i,j)} \cdot \right. \\ \left. \frac{\partial I_{1(x,y)}}{\partial A} \right] - (K_{b1} + K_{b2})(C_{sx} + R_m) f \left[ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial Z\nu_{(i,j)}}{\partial A} \cdot \right. \\ \left. \cdot I_{2(x,y)} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z\nu_{(i,j)} \frac{\partial I_{2(x,y)}}{\partial A} \right] \quad (4.41) \end{aligned}$$

Com o auxílio da expressão (4.8.c), escreve-se:

$$\frac{\partial I_{1(x,y)}}{\partial A} = \frac{1}{2n_x} \frac{\partial I_{1(x,y)}}{\partial a}$$

$$\frac{\partial I_2(x, y)}{\partial A} = \frac{1}{2n\pi} \frac{\partial I_2(x, y)}{\partial a}$$

$$\frac{\partial I_3(x, y)}{\partial A} = \frac{1}{2n\pi} \frac{\partial I_3(x, y)}{\partial a} \quad (4.42)$$

Derivando as equações (4.5) e substituindo nas relações (4.42), obtém-se:

$$\frac{\partial I_1(x, y)}{\partial A} = \frac{1}{2n\pi} \left[ \ln \left[ \frac{(y+\ell) + [(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}}{(y-\ell) + [(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] + \right. \\ \left. - \ln \left[ \frac{(y-\ell) + [(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}}{(y+\ell) + [(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right] \right] \quad (4.43.a)$$

$$\frac{\partial I_2(x, y)}{\partial A} = \frac{1}{2n\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{y+\ell}{x-a} + \operatorname{arctg} \frac{y+\ell}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y-\ell}{x-a} + \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \frac{y-\ell}{x+a} \right) \quad (4.43.b)$$

$$\frac{\partial I_3(x, y)}{\partial A} = \frac{(y+\ell)}{2n\pi} \left[ \frac{1}{[(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right] + \\ + \frac{(y-\ell)}{2n\pi} \left[ \frac{1}{[(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] \quad (4.43.c)$$

Aplicando as equações (4.43.a) e (4.43.b) em (4.41), resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial A} = & \frac{(K_{a1}+K_{a2})}{2n_x} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \left[ \ln \left( \frac{(y+\ell)+[(x+a)^2+(y+\ell)^2]^{1/2}}{(y-\ell)+[(x+a)^2+(y-\ell)^2]^{1/2}} \right) + \right. \\
 & \left. - \ln \left( \frac{(y-\ell)+[(x-a)^2+(y-\ell)^2]^{1/2}}{(y+\ell)+[(x-a)^2+(y+\ell)^2]^{1/2}} \right) \right] + (K_{a1}+K_{a2}) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{1(x,y)} \cdot \\
 & \cdot \left[ \left( \frac{-ABC_2-(A+2B)C_3}{A^3B^2} \right) x_{(i,j)}^3 + \left( \frac{AB^2C_2+(2B^2+AB)C_3}{A^3B^2} \right) x_{(i,j)}^2 \right] + \\
 & - (K_{b1}+K_{b2}) (C_{sx} + R_m) f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{2(x,y)} \left[ \left( \frac{AB^2C_2+(2B^2+AB)C_3}{A^3B^2} \right) \cdot \right. \\
 & \cdot x_{(i,j)}^2 + \left. \left( \frac{-ABC_2-(A+2B)C_3}{A^3B^2} \right) x_{(i,j)}^3 \right] - \frac{(K_{b1}+K_{b2}) (C_{sx} + R_m) f}{2n_x} \cdot \\
 & \cdot \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y+\ell}{x-a} + \operatorname{arctg} \frac{y+\ell}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y-\ell}{x-a} + \right. \\
 & \left. - \operatorname{arctg} \frac{y-\ell}{x+a} \right] \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Resta ainda a determinação do diferencial do deslocamento tangencial total em relação à variável de decisão A.

Utilizando a equação (4.21), tem-se que:

$$\frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial A} = 2 C_{sx} K_{b1} \left[ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial Z_{\nu(i,j)}}{\partial A} I_{2(x,y)} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \cdot \left. \begin{aligned} & \left[ \frac{\partial I_{2(x,y)}}{\partial A} \right] - 2(C_{se} C_{sx} + R_m) \left\{ K_{a1} f \left[ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial Z_{\nu(i,j)}}{\partial A} \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot I_{1(x,y)} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \frac{\partial I_{1(x,y)}}{\partial A} \right] + K_{c1} f \cdot \right. \\ & \left. \left. \left. \left[ \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial Z_{\nu(i,j)}}{\partial A} I_{3(x,y)} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \frac{\partial I_{3(x,y)}}{\partial A} \right] \right\} \right\} \quad (4.45) \end{aligned} \right.$$

As derivadas parciais das integrais I1, I2 e I3 em relação à variável A, são dadas pelas equações (4.43).

A substituição das equações (4.43) em (4.45) determina a expressão procurada para  $\partial U_{(k,m)}/\partial A$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial A} = & 2 C_{sx} K_{b1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{2(x,y)} \left[ \left[ \frac{-ABC_2 - (A+2B)C_3}{A^3 B^2} \right] x_{(i,j)}^3 + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{AB^2 C_2 + (2B^2 + AB)C_3}{A^3 B^2} \right] x_{(i,j)}^2 \right] + \frac{C_{sx} K_{b1}}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \cdot \\
& \cdot \left[ \arctg \frac{y+\ell}{x-a} + \arctg \frac{y+\ell}{x+a} - \arctg \frac{y-\ell}{x-a} + \right. \\
& - \left. \arctg \frac{y-\ell}{x+a} \right] - 2(C_{se} C_{sx} + R_m) \left\{ K_{a1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{1(x,y)} \cdot \right. \\
& \cdot \left[ \left[ \frac{AB^2 C_2 + (2B^2 + AB)C_3}{A^3 B^2} \right] x_{(i,j)}^2 + \left[ \frac{-ABC_2 - (A+2B)C_3}{A^3 B^2} \right] x_{(i,j)}^3 \right] + \\
& + \frac{K_{a1}}{2n_x} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \left[ \ln \left[ \frac{(y+\ell) + [(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}}{(y-\ell) + [(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] + \right. \\
& - \left. \ln \left[ \frac{(y-\ell) + [(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}}{(y+\ell) + [(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right] \right] + K_{c1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_{3(x,y)} \cdot \\
& \cdot \left[ \left[ \frac{-ABC_2 - (A+2B)C_3}{A^3 B^2} \right] x_{(i,j)}^3 + \left[ \frac{AB^2 C_2 + (2B^2 + AB)C_3}{A^3 B^2} \right] x_{(i,j)}^2 \right] + \\
& + \frac{K_{c1}}{2n_x} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z_{\nu(i,j)} \left[ \left[ \frac{(y+\ell)}{[(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{(y+\ell)}{[(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right] - \left[ \frac{(y-\ell)}{[(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} + \right. \\
& + \left. \left. \frac{(y-\ell)}{[(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right] \right] \left. \right\} \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Finalmente com a substituição de (4.39), (4.40), (4.44) e (4.46) em (4.44) torna-se possível calcular a componente do gradiente do funcional  $F_h$  em relação à variável de decisão  $A$ , ou seja  $\partial F_h / \partial A$ , para a aplicação do programa de otimização.

#### 4.4.4 COMPONENTE GRADIENTE DO FUNCIONAL $F_h$ EM RELAÇÃO À VARIÁVEL $B$

A seqüência de desenvolvimento desta componente é a mesma realizada na secção anterior, ou seja, através da derivada parcial da equação (4.9) em relação à  $B$ . Considerando as expressões (4.10.a) e (4.10.b), obtém-se:

$$\frac{\partial S_k}{\partial B} = - \frac{L}{n_x n_y} ; \quad \frac{\partial H_k}{\partial B} = 0 \quad (4.47)$$

Portanto, esta componente do gradiente é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_h}{\partial B} = & - \frac{L}{n_x n_y} \sum_{k=1}^{n_x} H_k Z \nu_k + \sum_{k=1}^{n_x} S_k \frac{\partial Z \nu_k}{\partial B} H_k - \frac{L}{2 n_x n_y} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} Z \nu_k W_{(k,m)} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial Z \nu_k}{\partial B} W_{(k,m)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k Z \nu_k \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial B} + \\ & - \frac{L}{2 n_x n_y} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} X \nu_k U_{(k,m)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k \frac{\partial X \nu_k}{\partial B} U_{(k,m)} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} S_k X \nu_k \frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial B} \quad (4.48) \end{aligned}$$

onde,

$$\frac{\partial Z\nu}{\partial B} = \left( \frac{-ABC_2 - (2A+B)C_3}{A^2B^3} \right) x^3 + \left( \frac{A^2BC_2 + (2A^2+AB)C_3}{A^2B^3} \right) x^2 \quad (4.49)$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X\nu}{\partial B} = (C_s x + R_m) f \left\{ \left( \frac{-ABC_2 - (2A+B)C_3}{A^2B^3} \right) x^3 + \right. \\ \left. + \left( \frac{A^2BC_2 + (2A^2+AB)C_3}{A^2B^3} \right) x^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Através da expressão (4.8.c), observa-se que:

$$\frac{\partial I_i(x,y)}{\partial B} = - \frac{\partial I_i(x,y)}{\partial A}, \text{ para } i = 1,3 \quad (4.51)$$

portanto, as equações (4.43) podem ser utilizadas deste que o sinal seja invertido.

Através de um raciocínio análogo ao item anterior, torna-se possível a obtenção dos diferenciais parciais dos deslocamentos em relação à variável de decisão B, conforme dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{(k,m)}}{\partial B} = & 2 C_{sx} K_{b1} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_2(x,y) \left[ \left( \frac{-ABC_2 - (2A+B)C_3}{A^2 B^3} \right) x_{(i,j)}^3 + \right. \\
& + \left. \left( \frac{A^2 BC_2 + (2A^2 + AB)C_3}{A^2 B^3} \right) x_{(i,j)}^2 \right] - \frac{C_{sx} K_{b1}}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z^{\nu}_{(i,j)} \cdot \\
& \cdot \left[ \operatorname{arctg} \frac{y+\ell}{x-a} + \operatorname{arctg} \frac{y+\ell}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y-\ell}{x-a} + \right. \\
& - \left. \operatorname{arctg} \frac{y-\ell}{x+a} \right] - 2 (C_{se} C_{sx} + R_m) \left\{ K_{a1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_1(x,y) \cdot \right. \\
& \cdot \left[ \left( \frac{A^2 BC_2 + (2A^2 + AB)C_3}{A^2 B^3} \right) x_{(i,j)}^2 + \left( \frac{-ABC_2 - (2A+B)C_3}{A^2 B^3} \right) x_{(i,j)}^3 \right] + \\
& - \frac{K_{a1}}{2n_x} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z^{\nu}_{(i,j)} \left[ \ln \left( \frac{(y+\ell) + [(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}}{(y-\ell) + [(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right) + \right. \\
& - \left. \ln \left( \frac{(y-\ell) + [(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}}{(y+\ell) + [(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right) \right] + K_{c1} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I_3(x,y) \cdot \\
& \cdot \left[ \left( \frac{-ABC_2 - (2A+B)C_3}{A^2 B^3} \right) x_{(i,j)}^3 + \left( \frac{A^2 BC_2 + (2A^2 + AB)C_3}{A^2 B^3} \right) x_{(i,j)}^2 \right] + \\
& - \frac{K_{c1}}{2n_x} f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} Z^{\nu}_{(i,j)} \left[ \left( \frac{(y+\ell)}{[(x+a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{(y+\ell)}{[(x-a)^2 + (y+\ell)^2]^{1/2}} \right) - \left( \frac{(y-\ell)}{[(x-a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{(y-\ell)}{[(x+a)^2 + (y-\ell)^2]^{1/2}} \right) \right] \left. \right\} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

também, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W_{(k,m)}}{\partial B} = & - \frac{(Ka_1 + Ka_2)}{2n_x} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} z_{(i,j)} \left[ \ln \left[ \frac{(y+l) + [(x+a)^2 + (y+l)^2]^{1/2}}{(y-l) + [(x+a)^2 + (y-l)^2]^{1/2}} \right] + \right. \\
 & - \ln \left[ \frac{(y-l) + [(x-a)^2 + (y-l)^2]^{1/2}}{(y+l) + [(x-a)^2 + (y+l)^2]^{1/2}} \right] \left. + (Ka_1 + Ka_2) \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I^1_{(x,y)} \cdot \right. \\
 & \cdot \left[ \left[ \frac{-ABC_2 - (2A+B)C_3}{A^2 B^3} \right] x^3_{(i,j)} + \left[ \frac{A^2 BC_2 + (2A^2 + AB)C_3}{A^2 B^3} \right] x^2_{(i,j)} \right] + \\
 & - (Kb_1 + Kb_2) (C_{sx} + R_m) f \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} I^2_{(x,y)} \left[ \left[ \frac{A^2 BC_2 + (2A^2 + AB)C_3}{A^2 B^3} \right] x^2_{(i,j)} + \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{-ABC_2 - (2A+B)C_3}{A^2 B^3} \right] x^3_{(i,j)} \right] + \frac{(Kb_1 + Kb_2)}{2n_x} (C_{sx} + R_m) f \cdot \\
 & \cdot \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} z_{(i,j)} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y+l}{x-a} + \operatorname{arctg} \frac{y+l}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y-l}{x-a} + \right. \\
 & \left. - \operatorname{arctg} \frac{y-l}{x+a} \right] \left. \right] \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Assim, a componente do gradiente do funcional em relação à variável de decisão B,  $\partial F_h/\partial B$ , fica determinado pela substituição das equações (4.49), (4.50), (4.52) e (4.53) em (4.48).

Com a utilização das expressões determinadas neste item, as componentes do vetor gradiente do funcional em relação à todas as variáveis de decisão podem ser calculados pelo programa de otimização.

Resumindo, tem-se:

$$\partial F_h/\partial C_2 \text{ dado por (4.25)}$$

$$\partial F_h/\partial C_3 \text{ dado por (4.32)}$$

$$\partial F_h/\partial A \text{ dado por (4.38)}$$

$$\partial F_h/\partial B \text{ dado por (4.48)}.$$

Deve-se ainda observar, que o funcional dado por (4.9), bem como seu gradiente, pode ser utilizado para estudar o caso do contato normal sem atrito.

Considerando nulos, o coeficiente de atrito e a relação dos momentos ( $f = R_m = 0$ ), torna-se possível a comparação do modelo numérico desenvolvido com a solução analítica de Hertz, permitindo a análise de sua validade.

## 4.5 PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste trabalho o Método do Multiplicador de Lagrange aumentado é utilizado para encontrar o mínimo da função objetivo. Nenhum método de otimização é universalmente mais eficiente e preciso do que os outros, porém o método citado tem se mostrado eficaz e preciso nos casos de otimização de projetos de engenharia [19].

Em geral um problema de otimização não linear é definido por:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } F(\bar{V}_d), \\
 &\text{sujeita a } s_i(\bar{V}_d) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, \ell) \\
 &\text{e } q_j(\bar{V}_d) = 0 \quad (j = 1, \dots, m < k) \\
 &\text{e } {}^m V_{d_i} \leq V_{d_i} \leq {}^M V_{d_i} \quad (i = 1, \dots, k)
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

onde,  $F(\bar{V}_d)$  é a função objetivo  $\bar{V}_d$  é um vetor com  $k$  variáveis de projeto,  $s(\bar{V}_d)$  é considerado como as  $\ell$  funções de restrições de desigualdade,  $q(\bar{V}_d)$  como as  $m$  funções de restrições de igualdade,  ${}^m V_{d_i}$  e  ${}^M V_{d_i}$  são os limites das variáveis de projeto, chamadas de restrições laterais. As funções de restrição são impostas pelo projetista.

Para resolver este problema, o Lagrangeano é escrito, para os casos de restrições de igualdade:

$$\Omega(\bar{V}_d, \bar{\lambda}_1) = F(\bar{V}_d) + \sum_{i=1}^m \lambda_{1_i} q_i(\bar{V}_d) \tag{4.55}$$

onde,  $\lambda_1$  é um vetor com  $m$  multiplicadores de Lagrange.

Como o mínimo do Lagrangeano fornece a solução para o problema de restrições de igualdade, uma função pseudo-objetivo chamada de Lagrangeano aumentado, é criada utilizando o método da função de penalidade exterior considerando que restrições de desigualdade podem ser convertidas em restrições de igualdade equivalentes. Ou seja,

$$\begin{aligned} A(\bar{V}_d, \bar{\lambda}_1, c) &= \Omega(\bar{V}_d, \bar{\lambda}_1) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^m y_i^2(\bar{V}_d) \\ &= F(\bar{V}_d) + \sum_{i=1}^m \lambda_{1_i} q_i(\bar{V}_d) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^m y_i^2(\bar{V}_d) \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde,

$c$  é um parâmetro escalar de penalidade

$y(\bar{V}_d)$  é uma função quadrática de penalidade, definida por:

$$y_i(\bar{V}_d) = q_i(\bar{V}_d) \quad (4.57)$$

A solução ótima  $(\bar{V}_{d_{opt}}, \bar{\lambda}_{opt})$  é encontrada alternando a resolução de uma série de minimizações sem restrições seguidas de uma simples atualização dos multiplicadores  $\bar{\lambda}$ . O problema da minimização sem restrições associa o método da variável métrica de Davidon-Fletcher-Powell [20] com uma combinação do método da Secção Áurea [21] e da aproximação polinomial, para a busca uni-dimensional.

Para o problema proposto neste trabalho, o gradiente da função objetivo é analiticamente determinado, conforme visto nas secções anteriores.

## 4.6 APRESENTAÇÃO DO FLUXOGRAMA

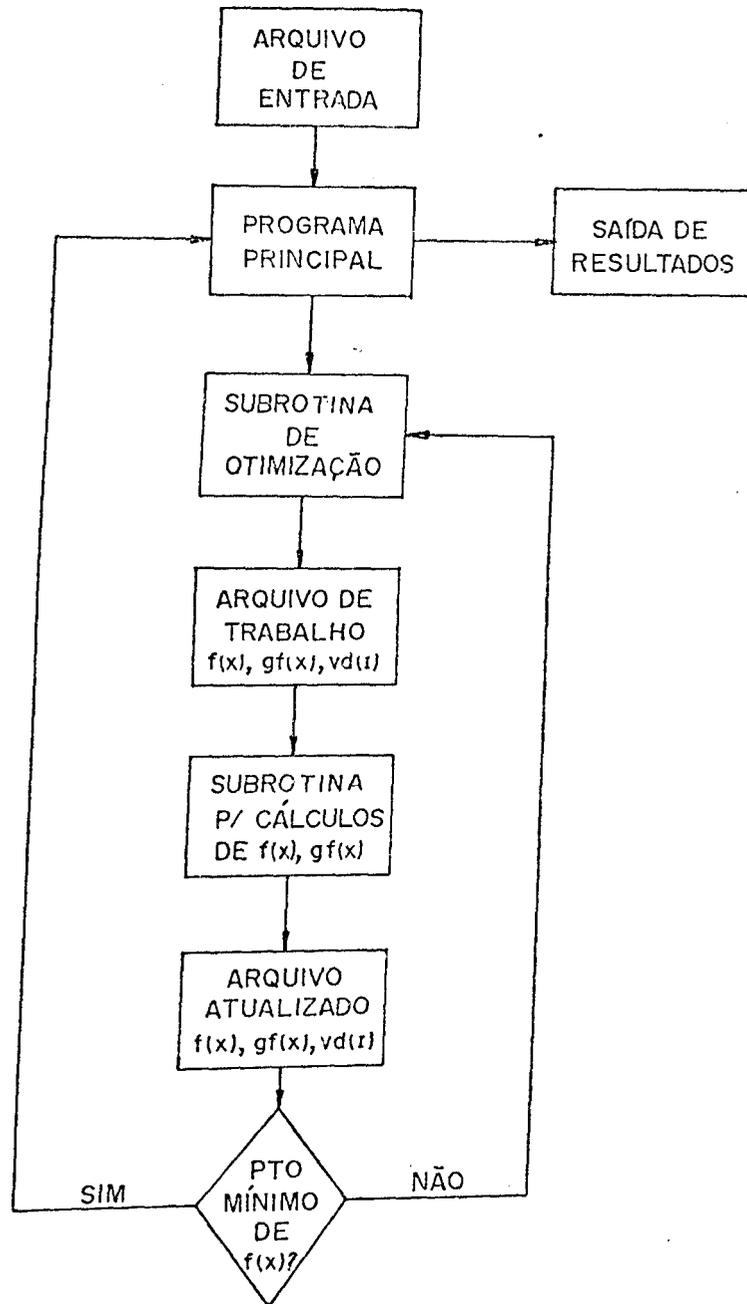


Figura 4.6 - Fluxograma de blocos que representa o programa utilizado para a solução do problema.

## 4.6.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O FLUXOGRAMA:

ARQUIVO DE ENTRADA: Os seguintes dados devem ser fornecidos ao programa:

- $Z_1$  - força normal externa (N),
- $\varphi$  - raio do cilindro (mm),
- $L$  - largura do cilindro (mm),
- $f$  - coeficiente de atrito,
- $n_x$  - número de divisões ao longo do eixo x,
- $n_y$  - número de divisões ao longo do eixo y,
- $\nu_i$  - razão de poisson dos corpos,  $i=1,2$
- $E_i$  - módulo de elasticidade dos corpos ( $N/mm^2$ ),  $i=1,2$

A partir dos dados fornecidos, a subrotina de entrada calcula o momento máximo,  $C_{max}$ , que pode ser aplicado sem que ocorra escorregamento, enviando a mensagem para a tela do terminal. O valor da relação,  $R_m$ , entre o momento aplicado e  $C_{max}$  é solicitado, assim como o seu sentido.

Os valores dos coeficientes  $K_{ai}$ ,  $K_{bi}$  e  $K_{ci}$ , dados através da equação (2.42), são calculados utilizando as propriedades elásticas dos materiais.

As variáveis de decisão, A, B, C<sub>2</sub> e C<sub>3</sub>, são inicializadas a partir da solução de Hertz para o contato normal. A função objetivo e seu gradiente são considerados com valor inicial nulo.

Todos os dados de entrada são acessíveis em qualquer parte do programa através de um arquivo denominado FDADOS.

PROGRAMA PRINCIPAL: Sua função inicial é chamar a subrotina que cria o arquivo de dados. A seguir todo o processo de minimização do funcional é controlado pela subrotina de otimização. Após os cálculos dos valores otimizados, o programa principal controla a saída dos resultados.

SUBROTINA DE OTIMIZAÇÃO: Desenvolvida pelo grupo de Dinâmica de Sistemas do Departamento de Eng. Mecânica da UFU, utiliza o Método do Multiplicador de Lagrange aumentado, conforme explicado no item 4.5. Esta subrotina é composta por vários sub-programas utilizados na otimização, interligados com a subrotina de cálculo do modelo elástico do contato com atrito.

ARQUIVO DE TRABALHO: A função objetivo, seu gradiente e as variáveis de decisão, são transmitidos através de um arquivo denominado FICDAT. Este é o elemento de ligação entre as várias subrotinas utilizadas para realizar a otimização.

SUBROTINA DE CÁLCULO: Sua finalidade principal é fornecer o valor da função objetivo e seu gradiente, cada vez que as variáveis de decisão são atualizadas. O funcional é obtido programando-se a equação (4.9) e o gradiente pelas equações (4.25), (4.32), (4.38) e (4.48).

ARQUIVO ATUALIZADO: Várias vezes durante a execução do programa de otimização, as variáveis de decisão, assim como a função objetivo e seu gradiente são modificados. Sempre que

este fato ocorre, o arquivo de trabalho FICDAT é automaticamente atualizado.

INTERRUPÇÃO DO PROGRAMA: O programa é interrompido quando encontra um mínimo global ou local, ou então quando um número máximo, pré-fixado, de iterações é atingido.

SAÍDA DE RESULTADOS: O programa principal fornece como saída: o polinômio de distribuição de pressão normal otimizado e, os valores calculados para os limites da faixa de contato entre o cilindro e o plano. De acordo com a opção do usuário, também podem ser fornecidos, para qualquer ponto da área de contato, o valor da distribuição de tensão tangencial,  $X_v$ , e os deslocamentos  $u$  e  $w$ .

## 5.0. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os resultados obtidos para o caso do contato entre um cilindro e um plano, determinados a partir da otimização do funcional dado pela equação (4.9), são mostrados a seguir.

Em todos os exemplos adotou-se o emprego de 100 pontos (10 x 10) para a discretização da área de contato. Durante os testes com o programa, verificou-se que um número maior de pontos implicava em um grande aumento do esforço computacional, sem melhora significativa dos valores calculados.

O programa foi executado com vários tipos de materiais, diferentes dimensões para o cilindro, diversas combinações entre a força e o momento aplicado, sempre mostrando resultados coerentes.

Para exemplificar os valores obtidos, será apresentado o caso onde utilizou-se um cilindro de baixo módulo de elasticidade, com raio 350mm, comprimento 210mm, cujas propriedades elásticas são dadas por  $E_1 = 0,3 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$  e  $\sigma_1 = 0,4$ . O cilindro está sujeito a uma carga externa  $Z_1 = 6000 \text{ N}$  e encontra-se apoiado sobre um plano de aço, sendo  $E_2 = 0,21 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$  e  $\sigma_2 = 0,3$ . Adotou-se um coeficiente de atrito  $f = 0,35$ .

Para verificar a incerteza do método numérico utilizado, a solução analítica de Hertz para o caso sem atrito (distribuição

elíptica da pressão normal), foi comparada com os resultados obtidos pelo programa (distribuição polinomial). Para os dados acima, o comprimento da área de contato apresentou um erro relativo de 1,33 %. A área sob a curva da pressão normal, que representa a força externa aplicada, apresentou um erro de 1,66%.

A comparação da função de distribuição da pressão normal pode ser observada na figura (5.1), onde é representado o erro absoluto entre  $Z\nu(x)$  obtido analiticamente e numericamente, ao longo da área de contato.

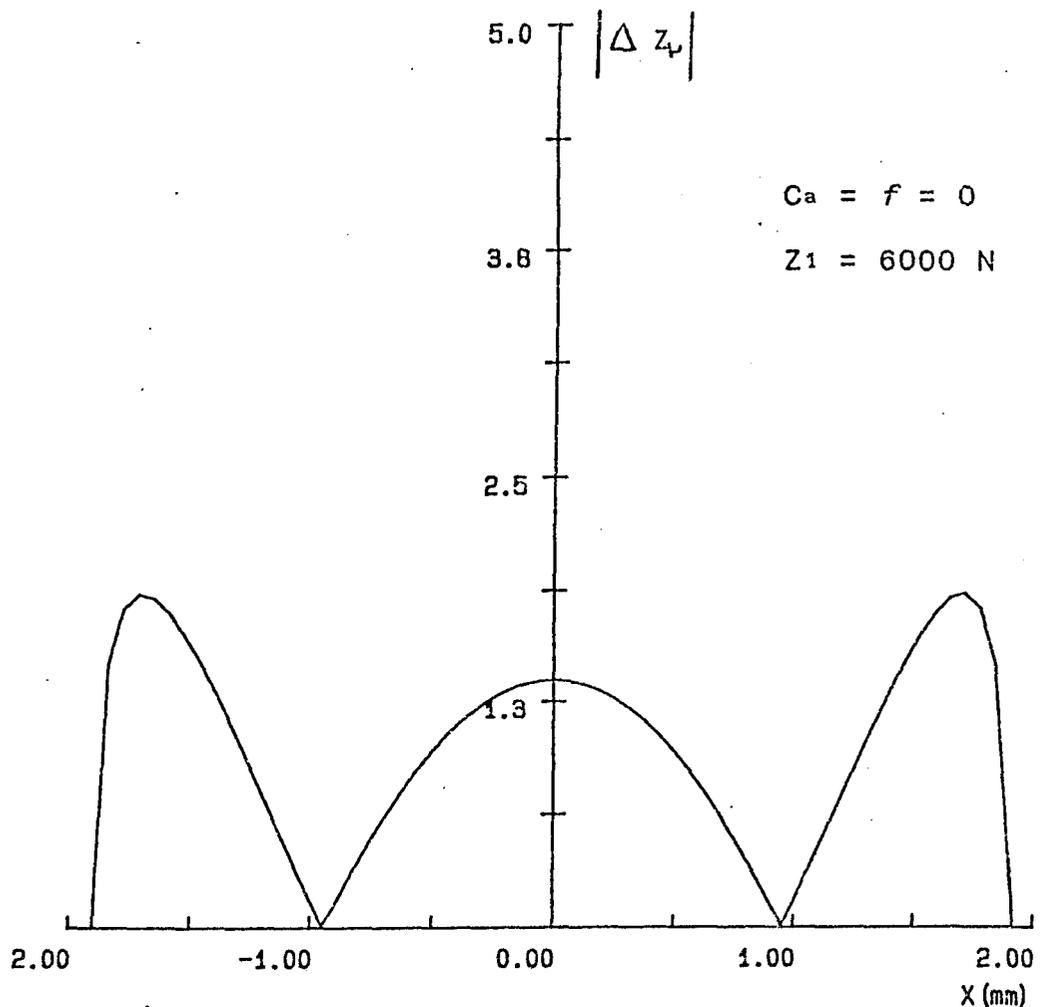


Figura 5.1. Comparação entre a função de distribuição da pressão normal calculada analiticamente (curva elíptica) e numericamente (curva polinomial), sobre a área de contato.

Verifica-se, na figura anterior, que o erro é maior próximo aos extremos da área de contato. Como a ordem de grandeza das pressões são muito pequenas nesta região, pouco influem no cálculo das deformações e tensões dos corpos.

Desta forma, os resultados que serão apresentados a seguir, foram obtidos adotando-se curvas polinomiais para a distribuição de pressão normal.

A figura (5.2) mostra as curvas da distribuição de tensão normal e tangencial sobre a área de contato, quando o cilindro não está submetido à momento externo, podendo-se analisar apenas o efeito da presença do atrito entre os corpos.

Considerando este mesmo problema, são comparados os valores, com e sem atrito, dos deslocamentos dos pontos situados na área de contato.

Para os pontos situados no centro da área de contato e ao longo do eixo x, os deslocamentos normais e tangenciais podem ser observados através das figuras (5.3) e (5.4), respectivamente.

Observa-se que a presença do atrito produz uma pequena variação na distribuição de pressão normal e provoca o aparecimento da tensão tangencial, antes nula. O atrito entre os corpos leva a uma modificação do deslocamento tangencial maior do que o ocorrido no deslocamento normal, além de gerar uma assimetria na área de contato.

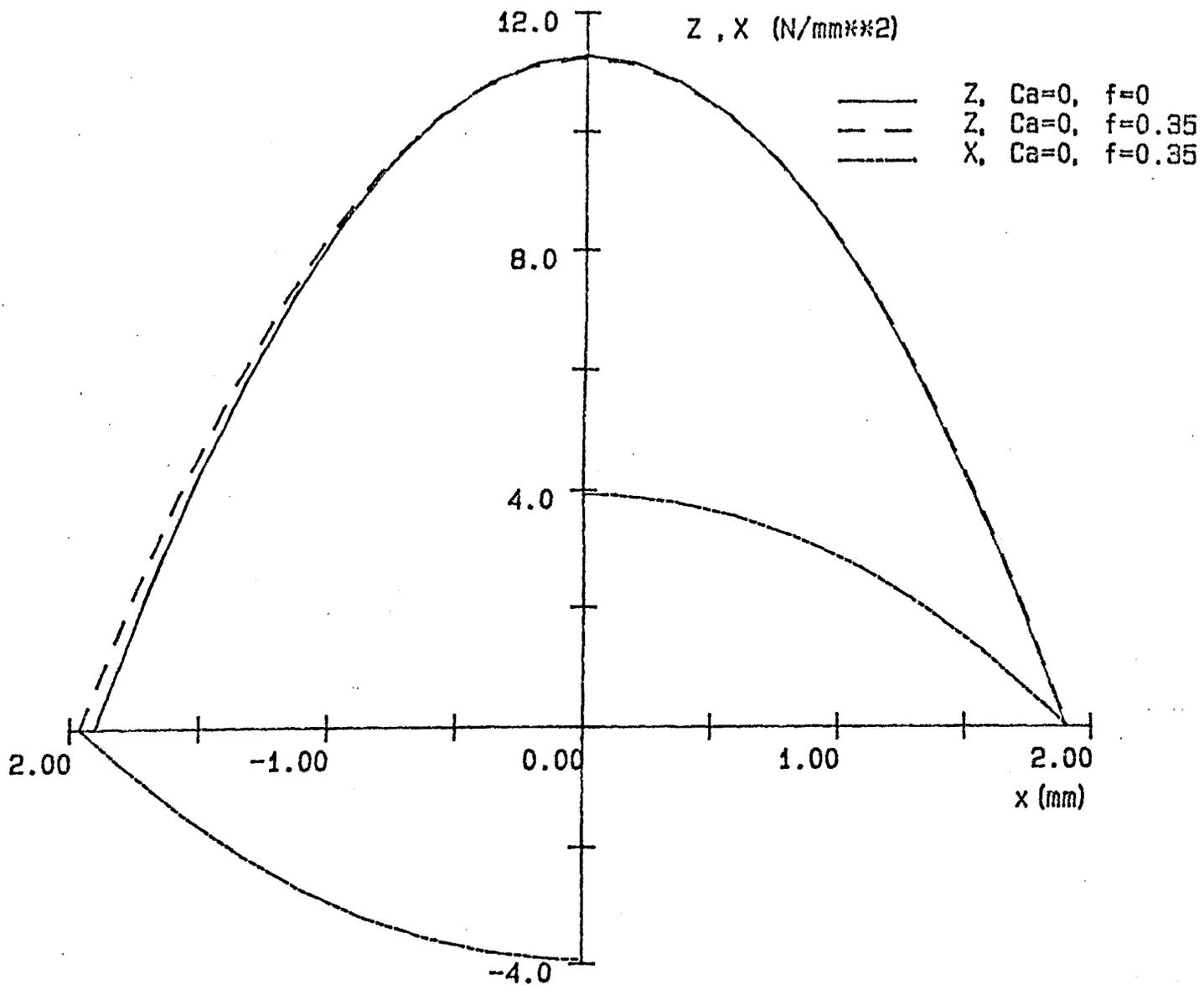


Figura 5.2. - Distribuição da tensão normal ( $Z\nu$ ) e tangencial ( $X\nu$ ) sobre a área de contato, para uma carga externa  $Z_1 = 6000 \text{ N}$  e momento nulo.

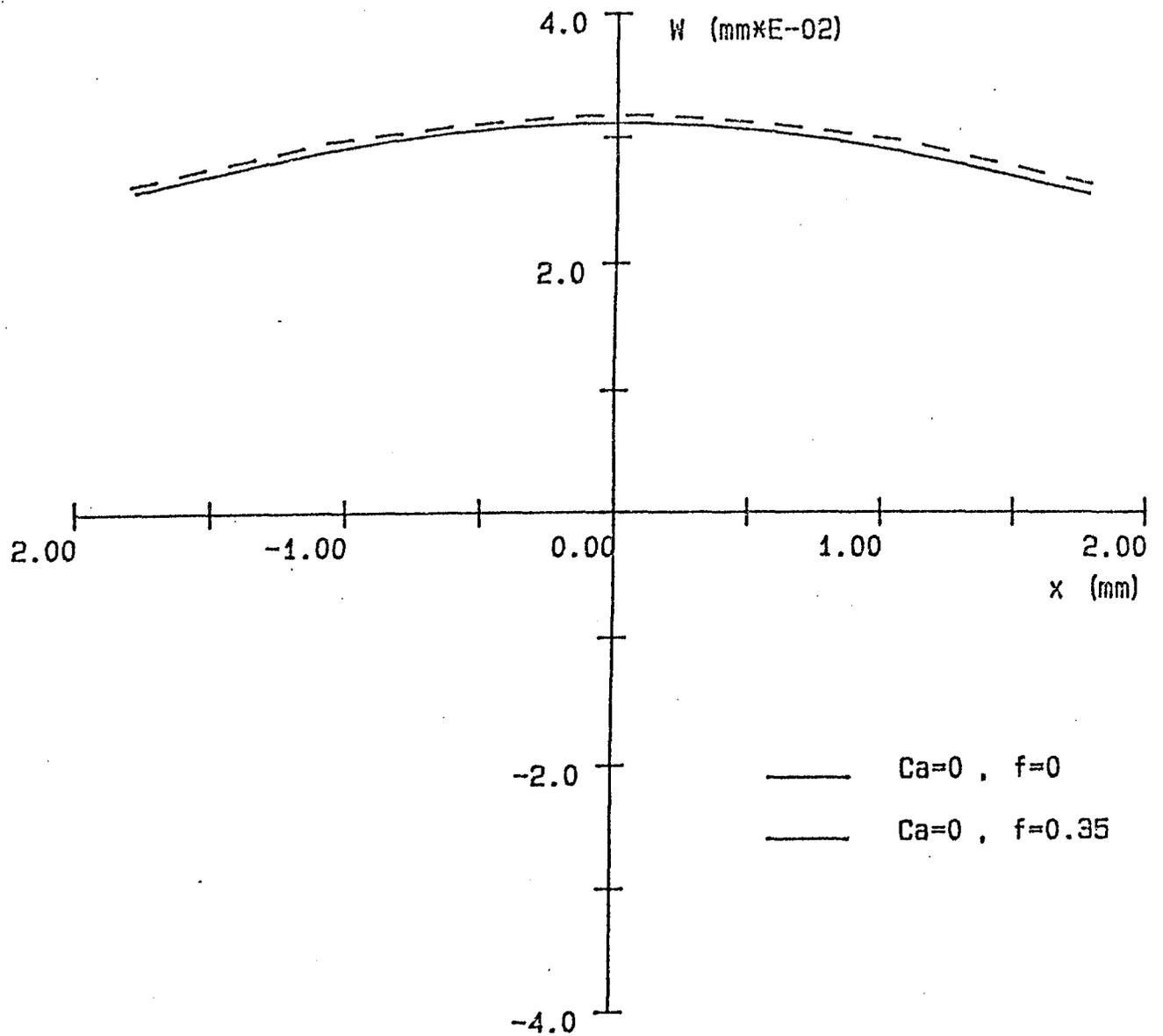


Figura 5.3. - Deslocamento normal ( $w$ ) dos pontos da área de contato, ao longo do eixo  $x$ . ( $y=0$ ,  $Z_1=6000$  N,  $Ca=0$ )

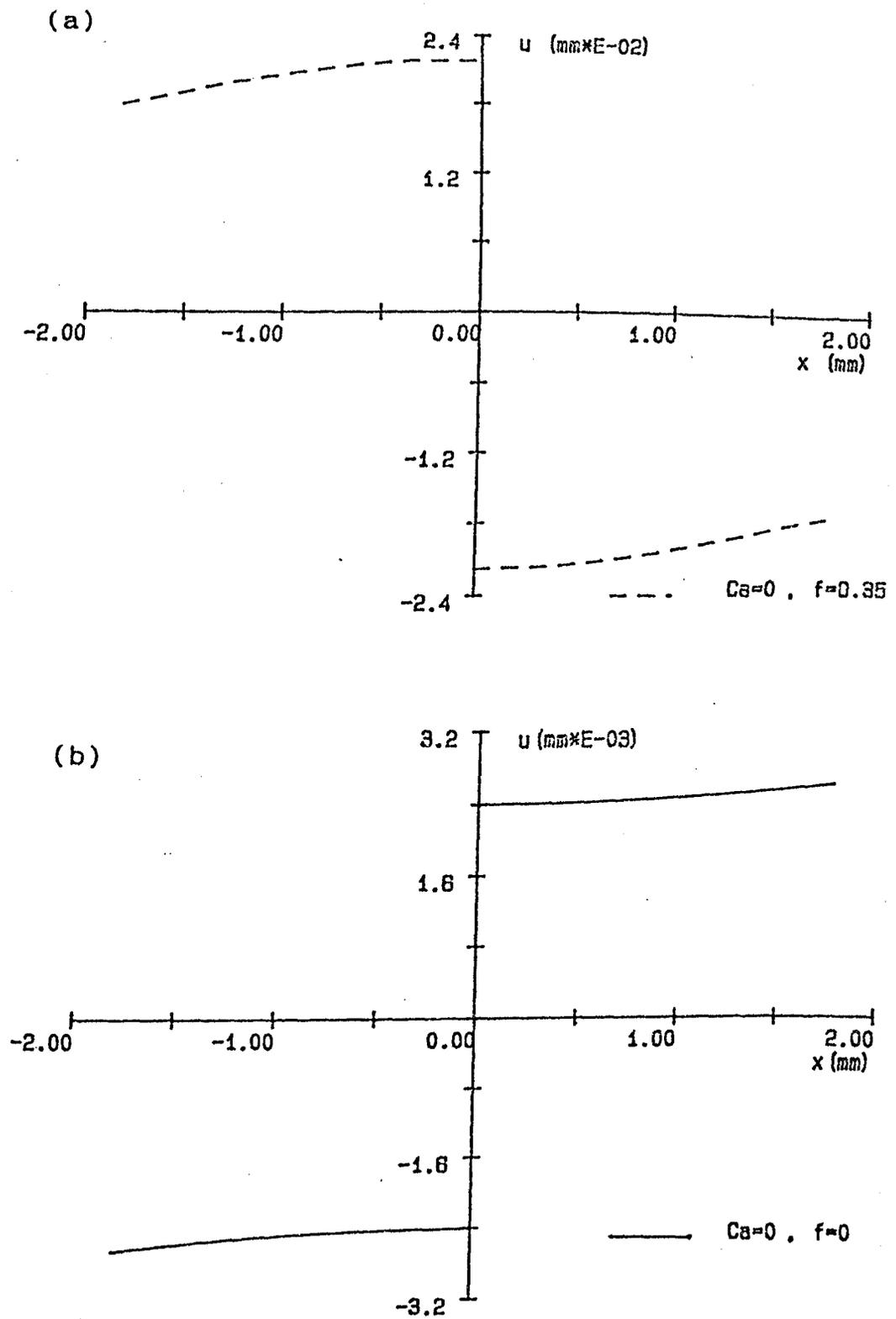


Figura 5.4. - Deslocamento tangencial ( $u$ ) dos pontos da área de contato, ao longo do eixo  $x$ , sendo: (a) com atrito, (b) sem atrito.

As próximas figuras mostram os resultados obtidos, quando os corpos definidos anteriormente, são submetidos a um momento externo equivalente a 90% do momento máximo,  $C_{max}$ , que pode ser aplicado sem que ocorra escorregamento.

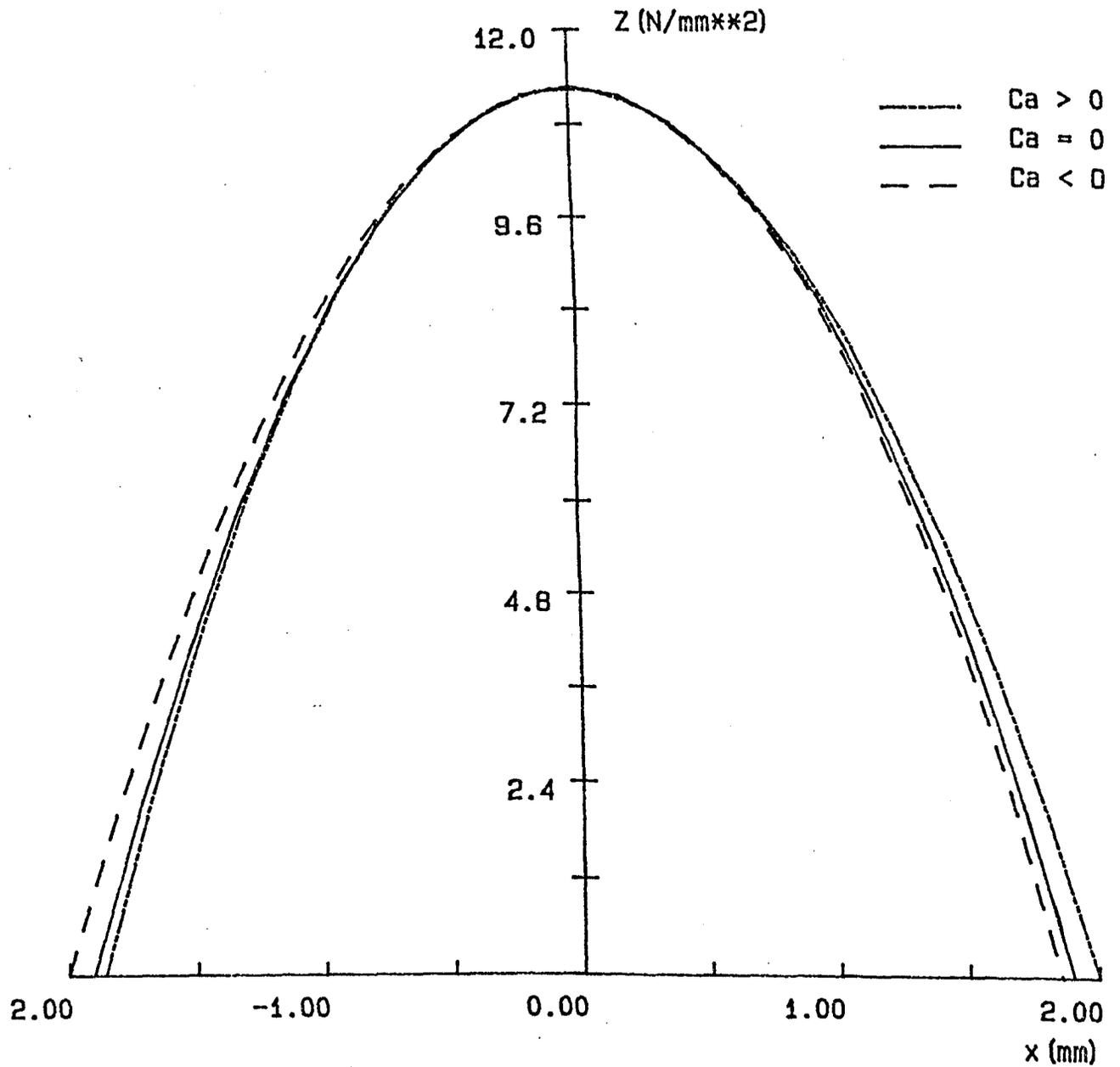
Conforme especificado, a carga normal que atua sobre o cilindro vale  $Z_1 = 6000 \text{ N}$  e o coeficiente de atrito entre os corpos  $f = 0,35$ .

São apresentados valores para o momento positivo, aplicado no sentido anti-horário e, para o momento negativo. Estes dados são comparados com o caso onde o momento externo e o atrito são nulos, que também foi calculado através do programa desenvolvido, ambos utilizando curvas polinomiais para a distribuição da pressão normal.

A Figura (5.5) mostra as curvas de distribuição de tensão normal sobre a área de contato, para os casos descritos acima. Verifica-se que o momento externo desloca as curvas em relação ao modelo sem atrito, de acordo com o seu sentido de aplicação. A área de contato é alterada, apresentando uma assimetria, que é função do sentido do momento aplicado.

As tensões tangenciais que atuam sobre a área de contato, são apresentadas na Figura (5.6). Considerando a presença do atrito no contato, mas sem momento externo, tem-se uma distribuição anti-simétrica para a tensão tangencial.

Com a aplicação de um momento positivo, a tensão tangencial aumenta nos pontos situados em  $x > 0$ , sendo reduzida em  $x < 0$ . Para um momento negativo, observa-se o efeito inverso.



Figuraa 5.5 - Distribuição da pressão normal ( $Z\nu$ ) ao longo da área de contato, mostrando a influência do momento externo. ( $R_m=0.9$ ,  $Z_1=6000$  N)

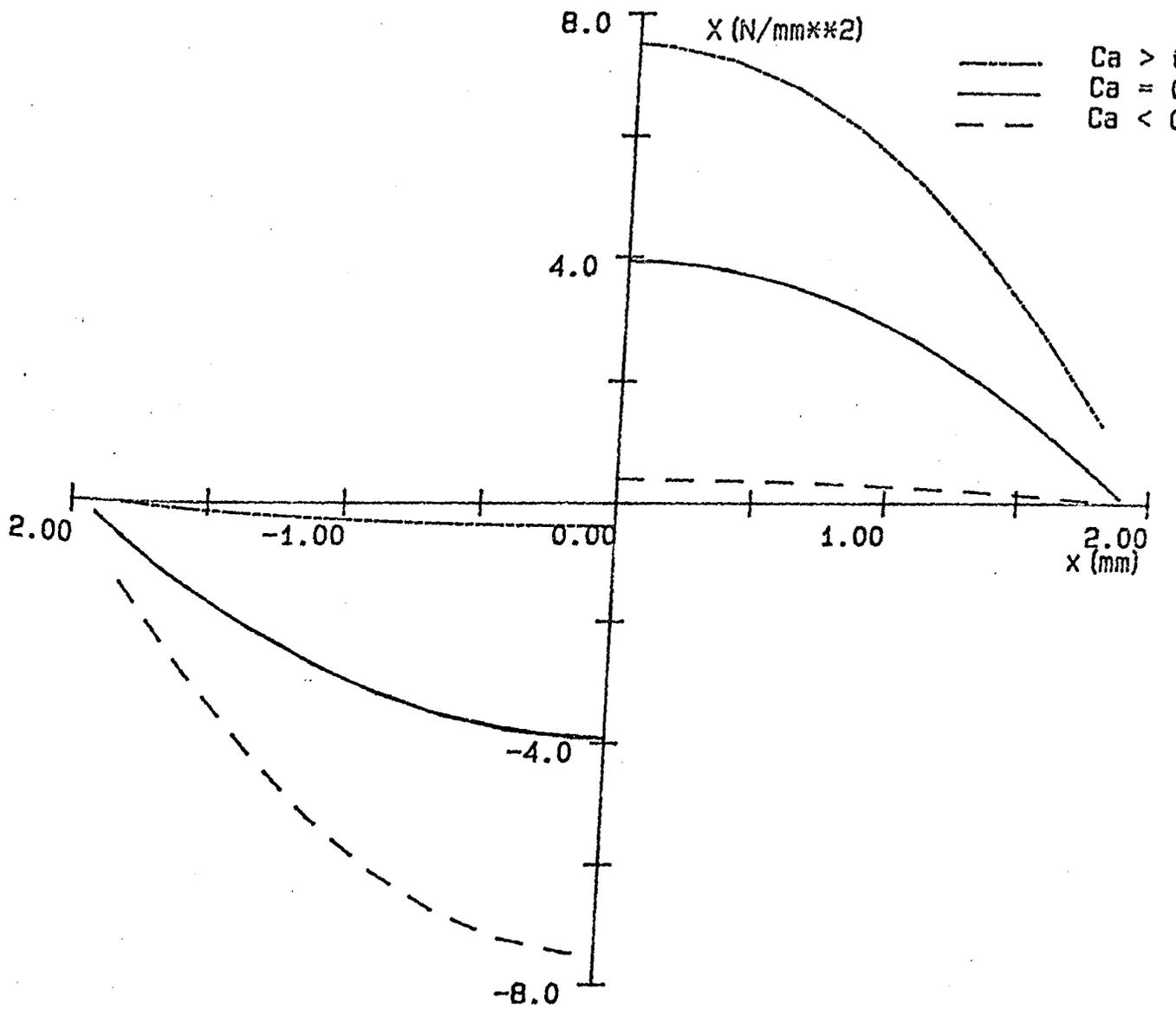


Figura 5.6 - Distribuição da tensão tangencial ( $X\nu$ ) ao longo da área de contato, mostrando a influência do momento externo. ( $R_m=0.9$ ,  $Z_1=6000$  N)

Para o problema proposto, de um cilindro em contato com um plano, na presença de atrito e sujeito a momento externo, também foram traçadas as curvas dos deslocamentos dos pontos situados sobre a área de contato.

Os resultados que serão mostrados a seguir, foram obtidos com os dados já definidos anteriormente.

O caso onde o momento aplicado é positivo e equivalente a 90% do momento máximo, é comparado com o contato sem atrito e momento nulo.

As curvas dos deslocamentos normais e tangenciais são apresentadas nas Figuras (5.7) e (5.8), sendo que os pontos considerados estão situados sobre a linha central da área de contato, ao longo do eixo x.

Análogamente, as Figuras (5.9) e (5.10), mostram os deslocamentos destes pontos quando o sentido do momento é invertido, para a mesma relação com o momento máximo.

A presença do momento externo provoca uma pequena variação nos deslocamentos normais e, uma acentuada alteração nos deslocamentos tangenciais.

Verifica-se, através das curvas traçadas, que assim como ocorre na distribuição de tensão tangencial, os deslocamentos tangenciais se concentram em um dos lados do eixo x, de acordo com o sentido do momento.

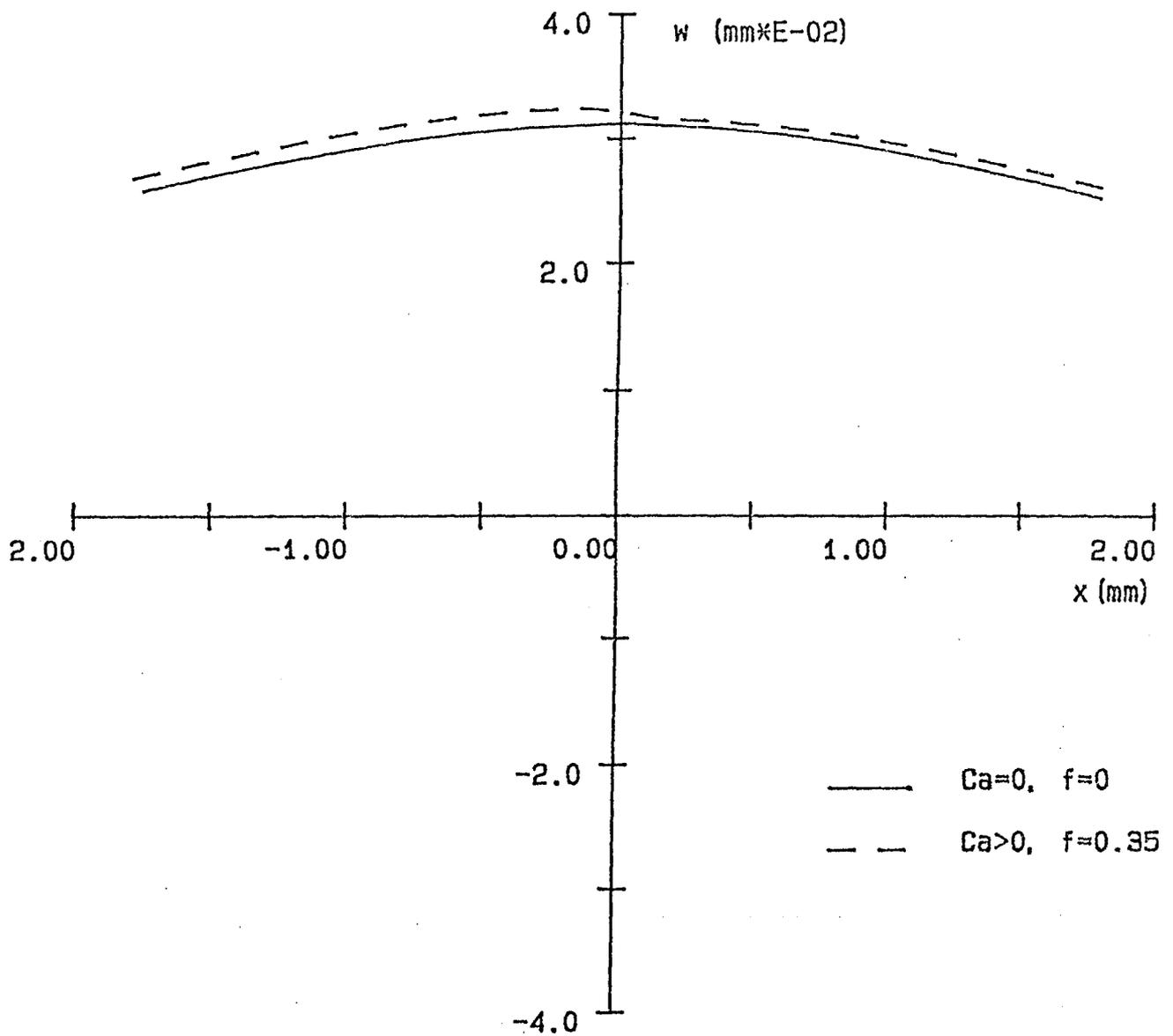


Figura 5.7 - Deslocamento normal ( $w$ ) dos pontos situados no centro da área de contato, ao longo do eixo  $x$ , sob a influência do momento externo positivo.

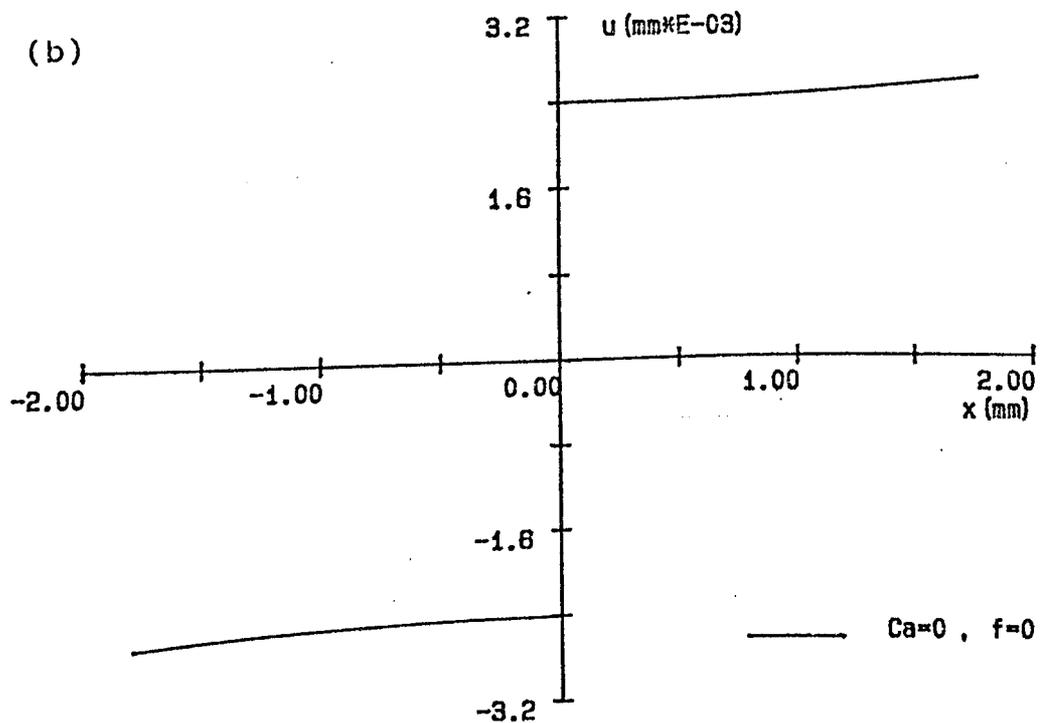
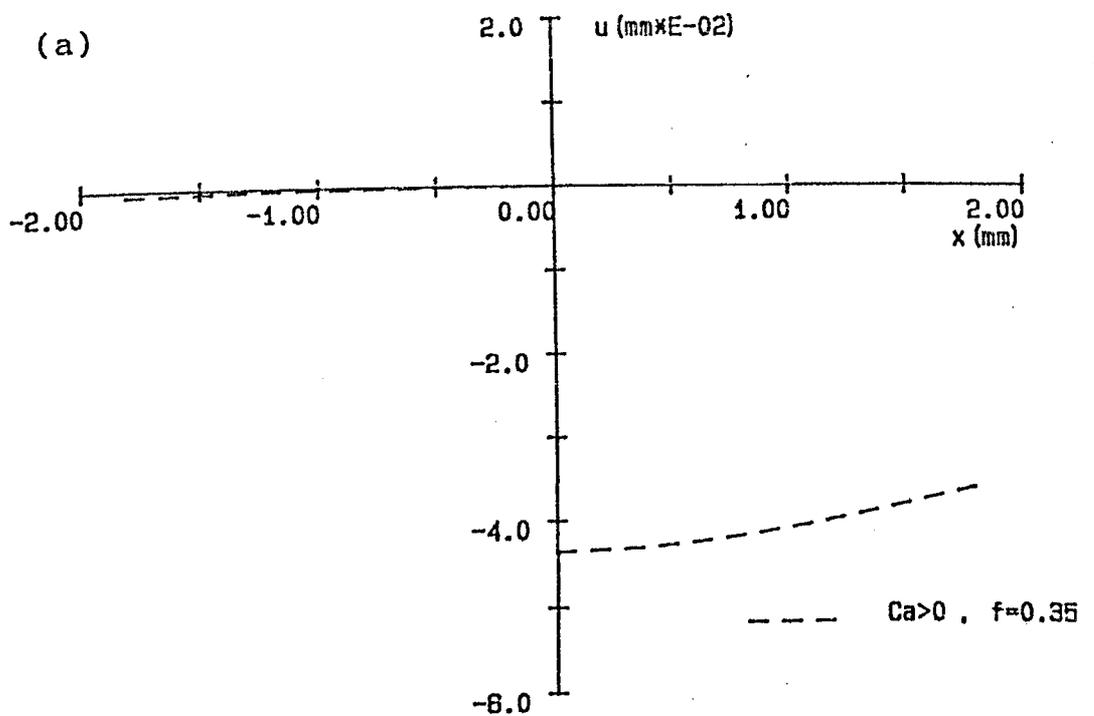


Figura 5.8 - Deslocamento tangencial ( $u$ ) dos pontos da área de contato, ao longo do eixo  $x$ , sendo:  
 (a) momento positivo, com atrito. (b) momento nulo, sem atrito.

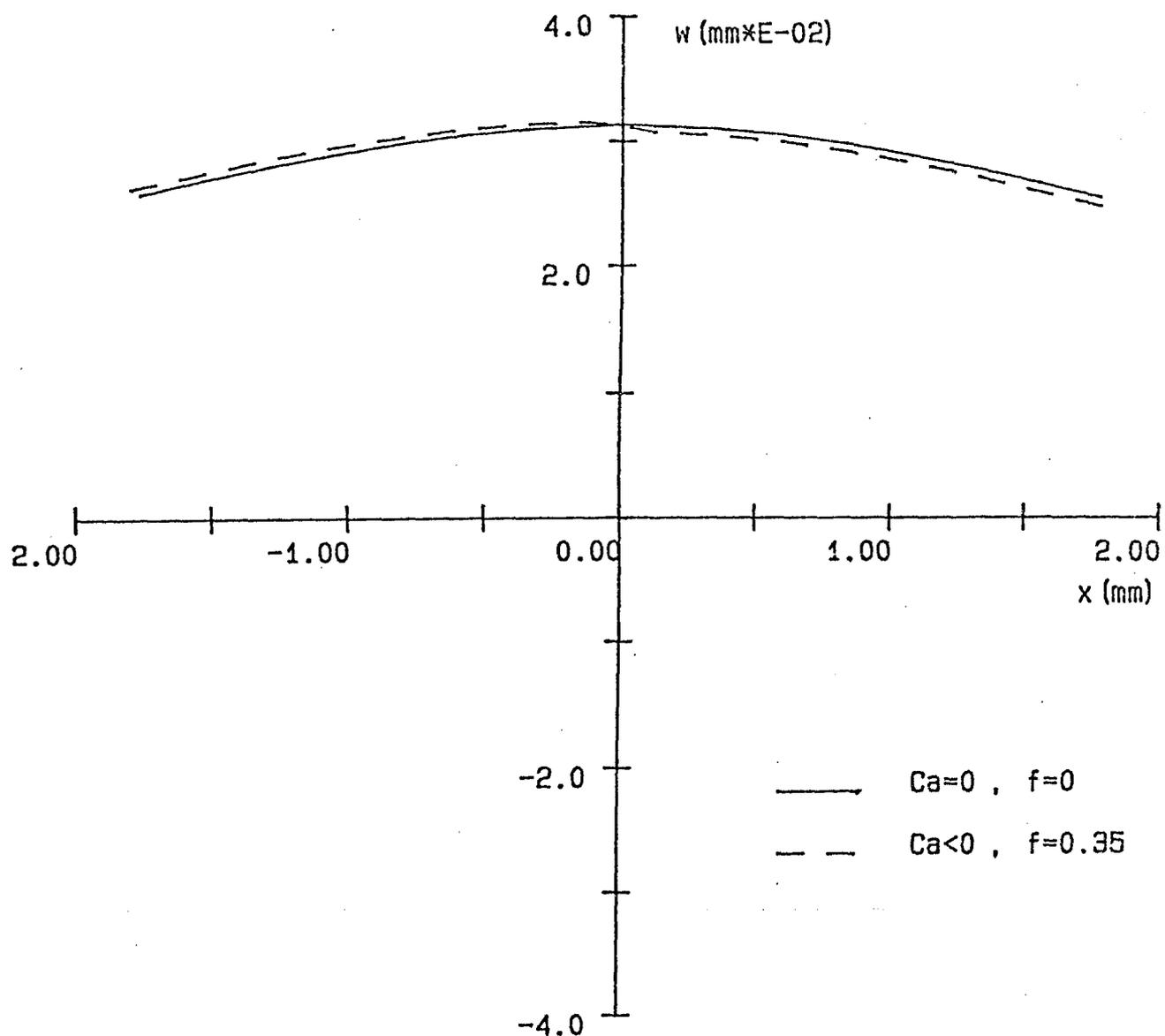


Figura 5.9 - Deslocamento normal ( $w$ ) dos pontos situados no centro da área de contato, ao longo do eixo  $x$ , sob a influência do momento externo negativo.

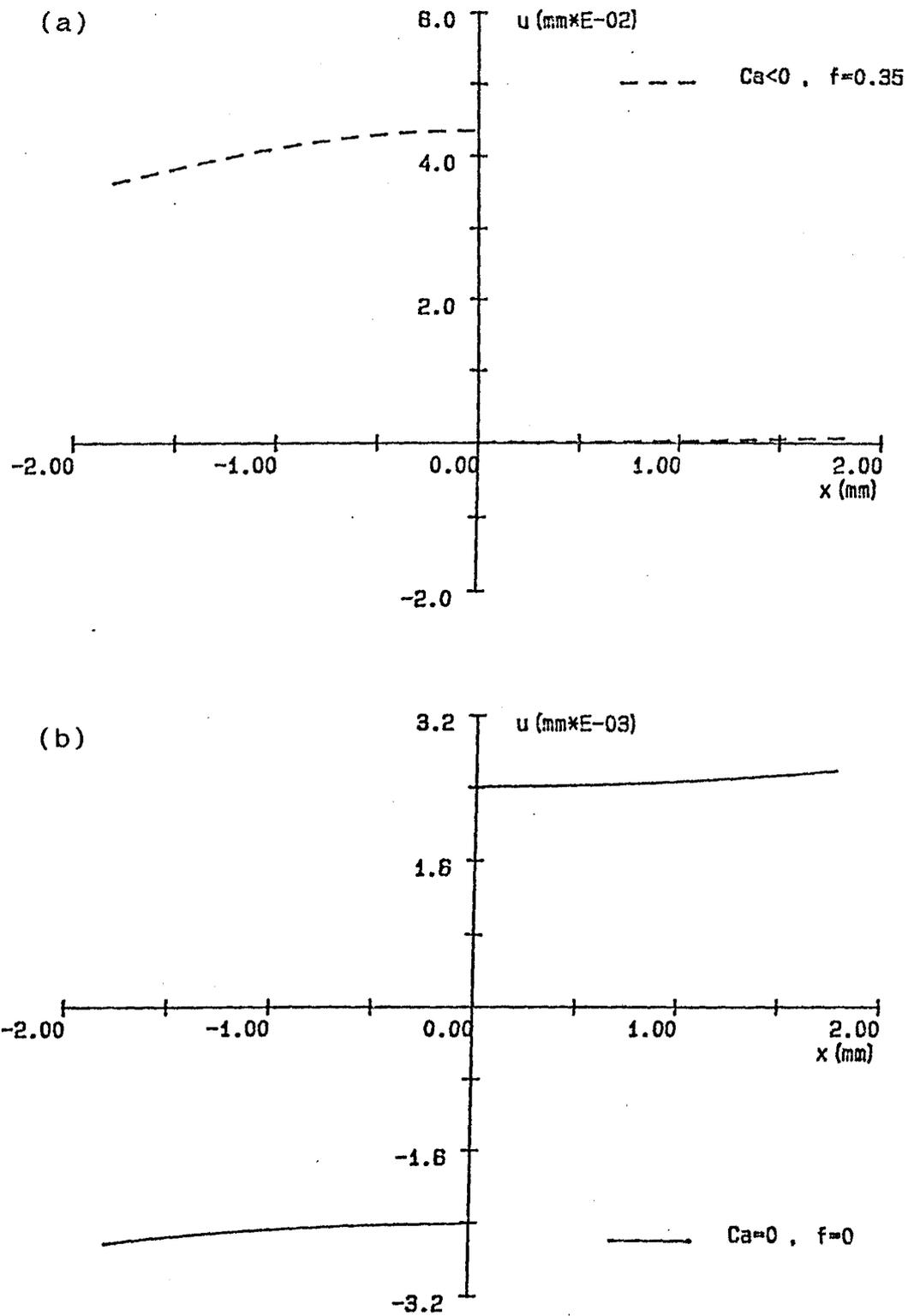


Figura 5.10 - Deslocamento tangencial ( $u$ ) dos pontos da área de contato, ao longo do eixo  $x$ , sendo:  
 (a) momento positivo, com atrito. (b) momento nulo, sem atrito.

Uma análise da variação da área de contato, com a aplicação do momento externo e a presença do atrito, pode ser feita a partir da Figura (5.11).

Verifica-se que para um momento no sentido anti-horário, a área de contato se desloca no sentido positivo do eixo x, ocorrendo um deslocamento oposto com a inversão do sentido do momento. Desta forma, os extremos da área de contato, A e B, não são mais simétricos como ocorria no contato hertziano.

Seja  $\Delta A$  a diferença entre o comprimento de contato, A, calculado numericamente e analiticamente. Seja  $\Delta B$  a variação do comprimento B. Observa-se que para  $R_m$  positivo, a relação  $\Delta A$  cresce enquanto  $\Delta B$  decresce. Para  $R_m$  negativo a relação, dos limites da área de contato tem uma variação oposta.

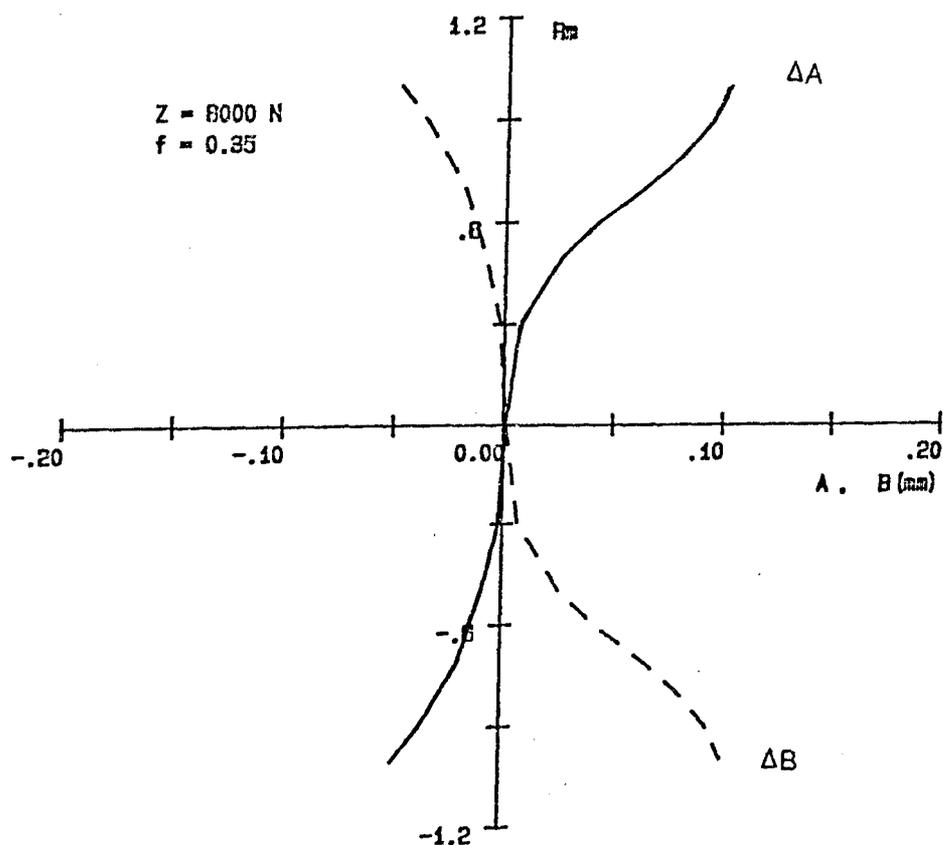


Figura 5.11 - Influência da aplicação do momento externo sobre os limites da área de contato. ( $Z_1=6000 \text{ N}$ ,  $f=0.35$ )

## 6. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo do contato entre corpos elásticos, na presença de atrito, com uma aplicação para o caso de um cilindro submetido a carga normal e momento externo, apoiado sobre um plano.

O estudo desenvolvido pode ser aplicado à análise do contato entre pneu-solo, considerado como um modelo simplificado, onde o pneu é tratado como um cilindro elástico e o solo como um plano semi-infinito, sob a presença do atrito seco de Coulomb.

Para o modelo adotado, foram determinadas as equações dos deslocamentos para quaisquer pontos dos corpos. A obtenção da distribuição de tensão normal e dos limites da área de contato, que definem a solução do problema, é feita a partir do princípio da mínima energia de deformação.

A solução para este problema, mesmo com as hipóteses simplificadoras adotadas, exige a utilização de técnicas de otimização aplicadas a um modelo numérico.

O programa de otimização utiliza uma função polinomial para a distribuição de pressão normal e, as variáveis de decisão são os limites da área de contato e os coeficientes do polinômio.

O cálculo dos deslocamentos totais de um determinado ponto, utiliza o princípio da superposição dos efeitos das pressões elementares, que atuam sobre as áreas infinitesimais, que compõem a área de contato. Os resultados obtidos demonstram que o tratamento é adequado, pois levam à solução do problema.

O programa em linguagem Fortran-VS, está implementado no IBM-4341. Para sua utilização o usuário deve atualizar o arquivo de dados com as características dimensionais, propriedades elásticas dos materiais e, esforços aplicados. O programa fornece como resultados a curva da distribuição de tensão normal e os limites da área de contato. Também são calculados os valores da tensão tangencial, deslocamento normal e deslocamento tangencial em qualquer ponto da área de contato.

Quando os resultados são comparados com a solução analítica de Hertz, caso sem atrito, verifica-se que o modelo numérico adotado é consistente, obtendo erros relativos bastante baixos. Para o outro problema estudado, onde o cilindro está submetido a um momento externo, sem escorregamento e com atrito, não foi encontrado material disponível que permitisse a comparação dos resultados.

A área de contato e o campo de tensões nela atuantes, determinados pelo programa, podem ser utilizados nas equações (2.38), permitindo a obtenção dos deslocamentos em quaisquer pontos dos corpos, ficando determinadas as deformações e tensões nestes pontos. Para isso, deve-se acrescentar um novo módulo ao programa que calcule estas deformações e tensões. Assim, os resultados podem ser verificados através de métodos

experimentais, como por exemplo, técnicas da fotoelasticidade.

Futuras pesquisas dedicadas ao estudo do contato com atrito, entre dois corpos de forma generalizada, podem ser efetuadas utilizando a metodologia desenvolvida neste trabalho. Neste caso, deve-se considerar uma distribuição de tensão bi-dimensional e os limites da área de contato dados por uma função de contorno.

Para o tratamento de problemas de contato, submetidos ao escorregamento, sugere-se a utilização do critério da mínima potência dissipada, que permite a obtenção de um funcional cuja minimização leva à solução do problema.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - HERTZ, L.H.; Gesammelte Werke, Leipzig, Germany, vol. 1, 1895, English translation in Miscellaneous Papers, vol. 1, 1896.
- 2 - LOVE, A.E.H.; A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th. ed., Cambridge, 1926, 193-198.
- 3 - FUCHS, S.; Hauptspannungstrajektorie bei der Beruehrung einer Kugel mit einer Platte, Phisikalische Zeitschrift, vol.14, 1913, p.1282.
- 4 - MORTON, W.B. e CLOSE, L.J.; Notes on Hertz's Theory of the Contact of Elastic Bodies, Philosophical Magazine, series 6, vol.43, 1922, p.320.
- 5 - THOMAS, H.R. e HOERSCH, V.A.; Stresses Due to the Pressure of One Elastic Solid on Another, Bulletin of Engineering Experiment Station, no.212, University of Illinois, 1930.

- 6 - BELAJEF, N.M.; Bulletin of Engineers' Ways and Communications, Leningrad, URSS, 1917.
- 7 - FOEPPL, L.; Der Spannungszustand und die Austrennung des Werkstoffes bei der Beruehrung Zweier Korper, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Ausgabe A, vol.7, 1936, pp.209-221.
- 8 - GALIN, L.A.; Contact problems in the theory of elasticity, Moscow, 1953, English translation in Carolina State College, 1961.
- 9 - LUNDBERG, G.; Elastische Beruehrung Zweier Halbraeume, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Ausgabe A, vol.10, 1939, pp.201-211.
- 10 - MINDLIN, R.D.; Compliance of Elastic Bodies in Contact, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, vol.71, 1949, pp.259-268.
- 11 - PORITSKY, H.; Stresses and Deflections of Cylindrical Bodies in Contact With Applications to Contact of Gears and Locomotive Wheels, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, vol.72, 1950, pp.191-201.
- 12 - KALKER, J.J.; On the uniqueness of contact problems in the theory of elasticity, Publ. in Russ. in:

Kontaktnoe vzaimodeistvie tverdikh tel, Isd "Nauka  
Moscou, 1971.

- 13 - KALKER, J.J.; The Computation of Three-Dimensional Rolling Contact With Dry Friction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.14, 1979, pp.1293-1307
- 14 - KALKER, J.J.; Variational Principles of Contact Elastostatics, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, vol.20, 1977, pp.199-219.
- 15 - KALKER, J.J. e VAN RANDEN, Y.; A Minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to Non-Hertzian Half-Space Contact Problems, Journal of Engineering Mathematics, vol.6, no.2, 1972, pp.193-206
- 16 - KALKER, J.J.; A minimum principle for the law of dry friction, with application to elastic cylinders in rolling contact, Journal of Applied Mechanics, 38, 1971, pp.875-887.
- 17 - GALEÃO, A.C., GUERREIRO, J.N.C., LOULA, A.F.D. e BARBOSA, H.J.C.; Um Algoritmo para a Resolução de Problemas de Contato entre Corpos Elásticos, Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM, vol II, 1987, pp.543-546.

- 18 - MAMIYA, E.N., MATTOS, H.S.C., RAOUS, M., e SAMPAIO, R.  
Solução Numérica de Problemas de Contato Unilateral  
com Atrito - Aplicação a uma Placa Apoiada sobre um  
Solo Rígido, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas  
vol.X, no.1, 1988, pp.45-69.
- 19 - VANDERPLAATS, G.N.; Numerical Optimization Techniques  
for Engineering Design, Mc Graw-Hill, 1985.
- 20 - FLETCHER, R., e POWELL, M.J.D.; A Rapidly Convergent  
Descent Method for Minimization, Computer Journal, 6,  
1963.
- 21 - PIERRE, D.A.; Optimization Theory and Applications,  
John Wiley, 1969.

## 8. ANEXO 1. REVISÃO DE ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

(a) TENSÃO: O estado de tensão de um ponto de um corpo é determinado quando as tensões em todos os planos que passam por este ponto são conhecidas. A tensão é estimada como a força por unidade de área. Se  $\nu$  representa a direção da normal de um plano, as tensões são especificadas por meio das componentes retangulares  $X\nu$ ,  $Y\nu$ ,  $Z\nu$ , paralelas aos eixos de coordenadas. Considerando que os cossenos diretores da direção  $\nu$  são:  $\cos(x,\nu)$ ,  $\cos(y,\nu)$ ,  $\cos(z,\nu)$ , pode-se escrever as componentes normais de tensão como,

$$X\nu = X_x \cos(x,\nu) + X_y \cos(y,\nu) + X_z \cos(z,\nu)$$

$$Y\nu = Y_x \cos(x,\nu) + Y_y \cos(y,\nu) + Y_z \cos(z,\nu)$$

$$Z\nu = Z_x \cos(x,\nu) + Z_y \cos(y,\nu) + Z_z \cos(z,\nu)$$

onde,  $Y_z = Z_y$ ,  $Z_x = X_z$ ,  $X_y = Y_x$  (1)

sendo que,  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$ ,  $Y_z$ ,  $Z_x$ ,  $X_y$ , são as "componentes de tensão".

(b) EQUAÇÕES DE EQUÍLIBRIO: Um corpo, submetido à forças, está em equilíbrio, quando as componentes de tensão satisfazem as seguintes equações para todos os pontos do corpo:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} + X_1 = 0 \quad (2.a)$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y_1 = 0 \quad (2.b)$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z_1 = 0 \quad (2.c)$$

onde,  $(X_1, Y_1, Z_1)$  são as forças atuantes no corpo.

(c) DESLOCAMENTOS: Se  $(x, y, z)$  representa a posição de um ponto do corpo no estado não tensionado, e  $(x+u, y+v, z+w)$  representa a posição do mesmo ponto do corpo quando sujeito a ação de forças, então  $(u, v, w)$  representa o deslocamento do ponto e suas componentes são funções de  $(x, y, z)$ .

(d) DEFORMAÇÕES: A deformação em um ponto  $(x, y, z)$ , em uma direção definida pelos seus cossenos diretores  $(\alpha, \beta, \theta)$ , é dada por:

$$e_{xx} \alpha^2 + e_{yy} \beta^2 + e_{zz} \theta^2 + e_{yz} \beta\theta + e_{zx} \theta\alpha + e_{xy} \alpha\beta \quad (3)$$

onde as "componentes de deformação" são determinadas à partir dos deslocamentos:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
 e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{4}$$

A deformação rotacional é dada por um vetor de componentes:

$$\begin{aligned}
 2 \gamma_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 2 \gamma_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\
 2 \gamma_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{5}$$

A dilatação volumétrica,  $\Delta$ , é definida por:

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ou seja,

$$\Delta = \text{div} (u, v, w) \tag{6}$$

Quando  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ , não são considerados, as componentes do deslocamento são dadas pela diferencial parcial da função de deslocamento potencial,  $\phi$ , tal que:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (7)$$

Uma solução válida para o deslocamento de todos os pontos da superfície do corpo é dada pela função potencial  $\phi$  e pelo vetor potencial  $(F,G,J)$ , de acordo com a seguinte expressão:

$$(u, v, w) = \text{grad}(\phi) + \text{curl}(F, G, J) \quad (8)$$

O vetor potencial  $(F,G,J)$  satisfazam a seguinte equação:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

(e) RELAÇÕES TENSÃO - DEFORMAÇÃO: Em um sólido elástico ligeiramente tensionado a partir de um estado não tensionado, as componentes de tensão são funções lineares das componentes de deformação. Quando o material é isotrópico tem-se que,

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda \Delta + 2 \mu e_{xx} & X_y &= \mu e_{xy} \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2 \mu e_{yy} & Y_z &= \mu e_{yz} \\ Z_z &= \lambda \Delta + 2 \mu e_{zz} & Z_x &= \mu e_{zx} \end{aligned} \quad (10)$$

Resolvendo-se estas equações, obtém-se as componentes de deformação:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)] & e_{yz} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} Y_z \\
 e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)] & e_{zx} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} Z_x \\
 e_{zz} &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)] & e_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y
 \end{aligned} \tag{11}$$

onde,

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \text{ é o módulo de Young,}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \text{ é a razão de Poisson,}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \text{ é o módulo de compressão e, } \lambda \text{ e } \mu \text{ são as constantes de Lamé, sendo } \mu \text{ a rigidez.}$$

(f) EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO EM TERMOS DO DESLOCAMENTO:

Substituindo-se as equações (4), (6) e (10) em (2), obtém-se:

$$(\lambda+\mu) \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta + \mu \nabla^2 (u, v, w) + (X_1, Y_1, Z_1) = 0 \tag{12}$$

onde,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Se a rotação é introduzida, resulta:

$$\begin{aligned}
 (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) &= \frac{1}{2} \text{rot}(u, v, w), \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Logo, equação (12) resulta em:

$$(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta - 2\mu \text{rot}(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) + (X_1, Y_1, Z_1) = 0 \quad (14)$$